Mathematik alpha 2024

„Merkwürdig ist es immer, dass alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen."
Carl Friedrich Gauß 1808 an Farkas Bolyai

Das Programm **Mathematik alpha** behandelt eine Vielzahl von Aufgabenstellungen und Problemen der Mathematik.
Aufgabe dieses Programms soll es sein, Lehrern, Schülern, Studenten und allen anderen mathematisch Interessierten Unterstützung bei der Behandlung von mathematischen Standardaufgaben der Bereiche Analysis, Algebra, Geometrie und Stochastik zu geben. Darüber hinaus werden fachübergreifende mathematische Anwendungen aus der Physik, der Informatik und der Astronomie behandelt.

Dieses Programm bietet eine umfangreiche Sammlung mathematischer und grafischer Routinen. Mehrere Hundert Unterprogramme aus allen mathematischen Bereichen gewährleisten ständige Unterstützung. Insbesondere für eine gymnasiale Ausbildung oder ein mathematisches Anfangsstudium kann das Programm sehr gut genutzt werden.

1.1 Einführung

„Hinter der Mathematik stecken die Zahlen. Wenn mich jemand fragen würde, was mich richtig glücklich macht, dann würde ich antworten: die Zahlen. Schnee und Eis und Zahlen. Und weißt Du warum? Weil das Zahlensystem wie das Menschenleben ist.
Zu Anfang hat man die natürlichen Zahlen. Das sind die ganzen und positiven. Die Zahlen des Kindes. Doch das menschliche Bewusstsein expandiert. Das Kind entdeckt die Sehnsucht, und weißt Du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen. Die Formalisierung des Gefühls, dass einem etwas abgeht. Und das Bewusstsein erweitert sich immer noch und wächst, das Kind entdeckt die Zwischenräume. Zwischen den Steinen, den Moosen auf den Steinen, zwischen den Menschen. Und zwischen den Zahlen. Und weißt Du, wohin das führt?
Zu den Brüchen. Die ganzen Zahlen plus die Brüche ergeben die rationalen Zahlen. Aber das Bewusstsein macht dort nicht halt. Es will die Vernunft überschreiten. Es fügt eine so absurde Operation wie das Wurzelziehen hinzu. Und erhält die irrationalen Zahlen. Es ist eine Art Wahnsinn. Denn die irrationalen Zahlen sind endlos. Man kann sie nicht schreiben. Sie zwingen das Bewusstsein ins Grenzenlose hinaus. Und wenn man die irrationalen Zahlen mit den rationalen Zahlen zusammenlegt, hat man die reellen Zahlen. Es hört nicht auf. Es hört nie

auf.
Denn jetzt gleich, auf der Stelle erweitern wir die reellen Zahlen um die imaginären, um die Quadratwurzeln der negativen Zahlen. Das sind Zahlen, die wir uns nicht vorstellen können. Zahlen, die das Normalbewusstsein nicht fassen kann.
Und wenn wir die imaginären Zahlen zu den reellen Zahlen dazurechnen, haben wir das komplexe Zahlensystem. Das erste Zahlensystem, das eine erschöpfende Darstellung der Eiskristallbildung ermöglicht.
Es ist wie eine große, offene Landschaft. Die Horizonte. Man zieht ihnen entgegen, und sie ziehen sich immer wieder zurück."

"Fräulein Smillas Gespür für Schnee", Peter Høeg

Mathematische Aufgaben, sei es in der Schule, im Studium oder zu Hause, bereiten oft Kopfzerbrechen. Der Verlauf einer Funktion oder Kurve, die Lösung eines Gleichungssystems, die Konstruktion eines Dreiecks oder ein statistischer Test ... all dies ist mit Rechenaufwand verbunden, welcher bequem vom Personalcomputer erledigt werden kann.

Das Programm untersucht mathematische Funktionen und Kurven, Flächen, geometrische Figuren, Körper usw. und stellt diese grafisch dar. In erster Linie soll es allen mathematisch Interessierten Hilfestellung im Umgang mit Funktionen und mathematischen Problemstellungen aus den Bereichen der Analysis, der Algebra, der Geometrie und der Stochastik geben.
Die Schwerpunkte liegen dabei auf der optischen Veranschaulichung der mathematischen Zusammenhänge, einer unkomplizierten Handhabung, aber auch auf fachlicher Exaktheit. Zudem enthält das Programm Teilprogramme, die sich auf mathematische Fragen der Physik, der Informatik, der Chaostheorie, der Astronomie usw. beziehen.

Das Programm liefert Ihnen eine umfangreiche Sammlung von grafischen sowie mathematisch relevanten Routinen und bietet Antworten auf eine Vielzahl von mathematischen Problemen.
Mehrere Hundert Unterprogramme bieten dem Anwender kontinuierliche Unterstützung für alle Bereiche der Mathematik und zeichnen das gesamte Programm insbesondere für den Einsatz im Rahmen einer gymnasialen Ausbildung oder eines mathematischen Anfangsstudiums aus.

Während ein Schüler der Klasse 5 bis 10 mit dem Programm z.B. seine Hausaufgaben zur Körper- und Flächengeometrie, zu Abbildungen in der Ebene bzw. zu linearen oder quadratischen Funktionen überprüfen kann, findet der Gymnasiast der Sekundarstufe II Hilfe zur Kurvendiskussionen, zur Analytischen Geometrie, zu den Gleichungssystemen usw. und ein Student Unterprogramme zu statistischen Testverfahren, komplexen Zahlen, Kurven 2. und 3.Ordnung usw. Außerdem können Sie sich von der Schönheit fraktaler Gebilde oder Phasenplots komplexwertiger Funktionen faszinieren lassen. Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften finden in diesem Programm weiterhin zahlreiche Möglichkeiten, mathematische Zusammenhänge grafisch zu veranschaulichen und

Schülern so auch anspruchsvolleren und manchmal auch "trockenen" Lehrstoff interessanter zu vermitteln.

An dieser Stelle sei die Programmgestaltung kurz erläutert. Zur Veranschaulichung des Konzepts eignet sich folgende Rezension der Schweizerischen Radio- und Fernsehgesellschaft (DRS) zu einer Vorgängerversion dieser Programmreihe vom Februar 2000 am besten:

> "... *Es handelt sich hier um beinharten Stoff, um so verdienstvoller, dass er durch viele Grafiken, Simulationen und Animationen verständlich und anschaulich gezeigt wird.* ***Auf multimedialen Schnickschnack wird aber konsequent verzichtet.*** *Ein - Lernwille und Grundmotivation vorausgesetzt - hervorragendes Programm, das auch als Nachschlagewerk dienen kann.*"

Wer in diesem Programm „lustige", aber sinnleere, Animationen, bunte Bildchen, poppige Sounds und Ähnliches erwartet, der wird enttäuscht: Mathematik ist interessant, macht Spaß, ist faszinierend und spannend, aber eben auch die Wissenschaft schlechthin und kein Klamauk!

„Das größte Tabu im Fernsehen ist nicht Sex, sondern Mathe."
Roger Willemsen

Mathematikern wird oft vorgeworfen, dass sie lebensfremde Fachidioten sind. Die Mathematik wird im Allgemeinen als überflüssiges Übel angesehen. Führende Politiker und Größen der Showbranche brüsten sich gern damit, dass sie in ihrer Schulzeit „Fünfer" oder sogar „Sechser" im Fach Mathematik hatten. In Fernsehtalkrunden wird oftmals unter dem Beifall der Anwesenden sogar die starke Reduzierung des Mathematikunterrichts in den Schulen gefordert.

Die Ursache für das katastrophale deutsche Ergebnis in der internationalen PISA-Studie sind nicht die angeblich dümmer werdenden Schüler oder unfähige Lehrer, es ist die allgemein wissenschaftsfeindliche und insbesondere mathematikfeindliche Grundstimmung in Deutschland. Symptomatisch ist zum Beispiel folgende Aussage der CDU-Sozialministerin Niedersachsens Ursula von der Leyen vom 10.April 2005 in der ARD: „Welches Kind würde Mathe machen, wenn es Wahlfach wäre?".

Dabei wird völlig verkannt, dass die Beschäftigung mit der Mathematik, der Physik oder der Chemie die Grundlage unserer Kultur und Technik und damit unserer Zivilisation bildet.
Wissenschaftliche Untersuchungen sind spannend und faszinierend! Die Schönheit symmetrischer Figuren und Körper, die hochgradig künstlichere Gestalt fraktaler Gebilde, die überraschenden Ergebnisse stochastischer Prozesse, die verborgenen und noch nicht gefundenen Gesetzmäßigkeiten besonderer Zahlen oder die unendliche Vielfalt funktionaler Zusammenhänge sind nur wenige Beispiele. Mit soliden Kenntnissen auf dem Gebiet der Mathematik erschließen sich darüber

hinaus auch die Naturwissenschaften.

Mathematik macht Spaß! Mathematik ist spannend und unterhaltsam!

Aber: Auch mathematisch Interessierte brauchen hin und wieder etwas Ablenkung von schwierigen Problemen oder langwierigen Rechnungen. Aus diesem Grund stellt das Programm zusätzlich einige Teilprogramme mit bekannten Logik- und Brettspielen zur Verfügung, bei denen der spielerische Aspekt im Vordergrund steht, die allerdings stets einen mathematischen Hintergrund haben.
So können Sie in diesem Mathematikprogramm unter anderem "Schach" oder "Dame" spielen, japanische Zahlenrätsel lösen, Figuren des "Tangram" zusammensetzen oder ein mathematisches Quiz absolvieren u.v.m.

Was ist dieses Programm?

Dieses Programm ist **kein Lernprogramm**, d.h. der Anwender muss den jeweiligen Lehrstoff durchaus kennen, denn größere Lücken im mathematischen Wissen können mit diesem Programm nur schwer oder gar nicht geschlossen werden. Das Programm versteht sich als ein Bindeglied zwischen didaktisch aufbereiteten Lernprogrammen und reinen Nachschlagewerken und Lexika zur Mathematik und kann daher weder in die eine noch in die andere Kategorie eingeordnet werden.
Daraus resultiert auch, dass keine eindeutige Empfehlung gegeben werden kann, für welche Klassenstufen oder Schulformen dieses Programm besonders geeignet ist.

Das Programm ist kein Ersatz für einen guten Mathematikunterricht oder eine gegebenenfalls notwendige Nachhilfe. Nach 30 Jahren aktiven und erfolgreichen Lehrens in verschiedenen Schulformen (DDR-Oberschule, Erweiterte Oberschule, Gymnasium, Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich Begabter, Erwachsenenqualifizierung, usw.) muss der Programmautor feststellen, dass ein guter Unterricht durch nichts zu ersetzen ist.
Neueste Langzeitstudien zeigen sogar, dass so genannte „Lernprogramme", die „deutlich bessere Noten" in der Schule versprechen, nichts bringen. Im Gegenteil: Durch die unkontrollierte Beschäftigung mit diesen Programmen erfolgt sogar eine Ablenkung vom Wesentlichen und eine negative Beeinflussung der Lerntechnik; mit dramatischen Folgen für den Schüler!
Moderne Medien sind eine hervorragende Ergänzung, aber niemals Ersatz!

Für den erfolgreichen Einsatz dieses Programms reicht der Lehrstoff einer Realschule oder eines Gymnasiums an mathematischen Vorkenntnissen. Allerdings sind in diesem Programm auch Teile enthalten, deren Nutzung Abiturwissen voraussetzt. In diesen Unterprogrammen, welche weitergehende mathematische Kenntnisse erfordern, unterstützt Sie u.a. auch diese Hilfe. Soweit es nötig ist, werden Hinweise zu mathematischen Sachverhalten gegeben und anhand von Beispielen erläutert, sodass Sie das Programm nicht nur zur

Erleichterung Ihrer praktischen Aufgaben der Mathematik nutzen, sondern an der einen oder anderen Stelle vielleicht auch etwas lernen oder entdecken können.

1.2 Programmstart

„Mathematik ist kein starres Konstrukt aus Grundannahmen und Regeln. Sie hat ihren eigenen, lebendigen Geist. Die Ästhetik des Abstrakten, die Poesie der Fiktionen machen sie zur Lyrik der Wissenschaften"
Abenteuer Mathematik, Pierre Basieux

Mit einem Klick auf das Verknüpfungssymbol auf dem Desktop oder im *Start*-Menü starten Sie das Programm.

Das Programm ist in Themenbereiche aufgeteilt, die einzelne Unterprogramme enthalten. Ein Mausklick auf einen Punkt des Menüs ruft sofort das zugehörige Teilprogramm auf.
Die Themenbereiche sind...

Lexikon ... das integrierte Lexikon, Zusatztexte, Stichwortsuche, Abbildungen, Zeitstrahl, Fachwörterbuch, Programmeinstellungen usw.

Analysis (Funktionen, Kurven) ... Funktionen, Funktionsdiskussion, Integralrechnung, Funktionsarten, Zahlenfolgen, Näherungsverfahren, Mathematische Kurven, Kegelschnitte, Flächenfunktionen, Komplexwertige Funktionen

Algebra ... Gleichungssysteme, Gleichungen, Matrizen, Ungleichungen, Komplexe Zahlen, Vektoralgebra, Gruppentheorie, Mengenlehre

Arithmetik ... Rechenhilfsmittel, Lösungsverfahren, Gebrochene Zahlen, Langarithmetik, Faktorisierung, Zahlenberechnungen, u.a. Primzahlen, Zinsrechnung usw.

Planimetrie ... Flächen, u.a. Viereck, Kreis usw., Abbildungen in der Ebene, Konstruktionsprogramm, Analytische Geometrie der Ebene

Dreieckslehre ... Geometrische Untersuchungen von Dreiecken, u.a. die Satzgruppe des Pythagoras

Stereometrie ... Polyeder, Körper, Körperdarstellungen, Körperberechnungen, Analytische Geometrie des Raumes

Stochastik ... Wahrscheinlichkeitsrechnung, Stochastik, Statistik

Chaostheorie ... Chaostheorie, Mandelbrotmengen, Simulationen zur Chaostheorie

Anwendung (u.a. Informatik) ... Maßeinheiten, Algorithmen, Kryptografie, Chemische Teilprogramme, Geografie, Kalenderrechnung

Physik und Astronomie ... physikalische Teilprogramme, astronomische Teilprogramme (z.B. Sternkarte, Aktueller Sternhimmel, Ephemeriden, ...)

Logikspiele ... Logikspiele, u.a. Schach, Quiz, Mühle, Sudoku, Str8ts, Pentomino, Patience, Mahjongg ...

Die Zuordnung der Teilprogramme erfolgte nach inhaltlichen und programmtechnischen Überlegungen. Sehr schnell können Programmteile über das Lexikon aufgerufen werden und ebenso über die Suchfunktion.

Für ein besonders schnelles Auffinden des gewünschten Programmteils finden Sie in der Aktionsschalterleiste die Schalter *Themen* und *Lexikon*.
Klicken Sie auf den zweiten, wird das Lexikon geöffnet. In der Stichwortliste wählen Sie das Gesuchte und auf der dann angezeigten Lexikonseite das entsprechende Teilprogramm.
Wählen Sie den Schalter *Themen*, so öffnet sich die *Teilprogrammliste*. In dieser können Sie über eine Suche alle Teilprogramme finden, die mit dem von Ihnen gewünschten Begriff in Verbindung gebracht werden.
Beide Schalter finden Sie auch in kleinerer und veränderter Form in der Aktionsschalterleiste.

In der Aktionsschalterleiste rechts oben finden Sie eine Vielzahl von Schaltern. Diese bewirken im Einzelnen:

	Aufruf der Liste bearbeitbarer Themen
Lexikon	Aufruf des Lexikons (ein-und ausschalten)
Suche	Begriffsuche im Lexikon
Stichwortliste	Stichwortliste ein- und ausblenden (im rechten Fensterteil)

Haben sie das Lexikon geöffnet, sind folgende Schalter zusätzlich verfügbar

	Vorhergehende Seite im Lexikon anzeigen
	Nachfolgende Seite im Lexikon anzeigen
	Vorhergehendes Thema im Lexikon anzeigen
	Kopieren der aktuellen Lexikonseite
	Drucken der aktuellen Lexikonseite

Typischer Fensteraufbau

Jedes Unterprogramm des Programms läuft in einem eigenen Fenster ab. Hier gelten die unter Windows üblichen Eingabestandards. Neben Markierungs- und Schaltfeldern finden Sie Eingabezeilen, Rollbalken, Abbildungen, Listen mit und ohne Rollbalken, Aktionsschalter und weitere Objekte. Jeweils ein Schalter ist

voreingestellt. Dieser kann mit *RETURN* (*ENTER*) aktiviert werden. Mit der *TAB* - Taste kann zwischen den Feldern umgeschaltet werden. Selbstverständlich erreicht man jedes durch den Anwender veränderbare Feld auch mit einem Mausklick.

Beachten Sie bitte, dass Ihr Windows-System für die korrekte Darstellung der Fenster auf mindestens 24 Bit Farbtiefe (True Color) und eine Auflösung von 1024 x 768 Pixel eingestellt sein muss. Andernfalls werden Abbildungen verfälscht angezeigt. Zum Umstellen der Farbtiefe können Sie unter Windows den Menüpunkt *Einstellungen* | *Systemsteuerung* | *Anzeige* | *Einstellungen* nutzen.

Die Mehrzahl der Programmfenster ist wie folgt aufgebaut:
Die Fenster bestehen aus mehreren Gebieten. Ganz oben finden Sie den Fenstertitel und eine Aktionsschalterleiste, die Schalter mit allgemeinen Funktionen wie Speichern, Laden, Drucken, Kopieren in die Zwischenablage sowie programmspezifische Funktionen enthält. Darunter befindet sich die eigentliche Arbeitsfläche.
Im linken Teil des Arbeitsbereichs können Optionen eingestellt werden. Dazu finden Sie neben Schaltern auch Rollbalken, Eingabezeilen, Markierungsfelder usw. Sehr oft wird hier auch eine kurze Beschreibung des Teilprogramms angegeben.

In der Mitte des Fensters werden die eigentlichen Berechnungsergebnisse oder die Darstellung gezeichnet.
Der Menüpunkt *Datei* | *Druckeinstellung* erlaubt Ihnen die Einstellung der Druckränder, der Druckerschriftart und die Auswahl des Druckers.
Aus allen Teilprogrammen gelangen Sie über den Schalter ⇦ oder die ESC-Taste in das vorhergehende Programmfenster zurück.

1.3 Mathematik interaktiv

Über 250 Teilprogramme sind in einem einheitlichen Stil zusammengefasst. Hier existieren weitere Bedienmöglichkeiten:

Durch einfaches Klicken mit der Maus, Bewegungen mit der Maus oder Einstellung einer Größe an einem Rollbalken können Sie eine Vielzahl von Themen untersuchen. Nach dem Start des Teilprogramms sehen Sie einen Hilfetext, aus dem eindeutig hervorgeht, welche Einstellungs- und Änderungsmöglichkeiten existieren.
In allen Teilprogrammen können Sie folgende Schalter nutzen:

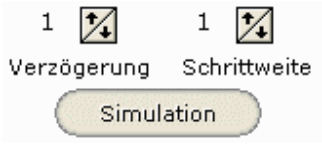
Steuerelemente ein- und ausschalten
Darstellung als Abbildung oder Vektorgrafik speichern
Darstellung als Abbildung oder Vektorgrafik in die Zwischenablage kopieren
Darstellung auf den Drucker ausgeben
Millimeternetz ein- und ausschalten

Gitternetz ein- und ausschalten

Koordinatenachsen ein- und ausschalten (nur bei einigen Teilprogrammen)

„Bewegung fesselt mehr den Blick als Ruhendes."
William Shakespeare

In sehr vielen dieser Teilprogramme können Sie die gezeichneten Zusammenhänge mit dem Schalter *Simulation* (Schnelltaste F2) auf besondere Weise untersuchen. Klicken Sie auf diesen Schalter, wird ein Parameter, zum Beispiel eine Länge oder ein Winkel, oder die Koordinaten eines Punktes kontinuierlich verändert und die Darstellung neu gezeichnet.
Die Schnelligkeit der Änderungen ist voreingestellt, aber auch von der Geschwindigkeit Ihres Computers abhängig. Möchten Sie dies steuern, so verwenden Sie die zwei mit kleinen Pfeiltasten änderbaren Schalter



Ein Mausklick auf einen nach oben zeigenden Pfeil erhöht den Wert. Klicken Sie auf den angezeigten Zahlenwert, so können Sie auch die Pfeiltasten auf Ihrer Tastatur zum schnellen Umschalten nutzen. Die *Verzögerung* gibt an, alle wie viel Millisekunden die Zeichnung neu erstellt wird. Ein großer Wert verlangsamt somit die Simulation. Die *Schrittweite* bestimmt, um wie viele Einheiten der Parameter jeweils geändert wird, ein hoher Wert beschleunigt somit die Simulation.

Punkt	x	y	Punkt	x	y
A	-2.22	0.9	F	4.78	2.12
B	-1.86	2.28	G	4.6	0.94
C	-0.04	1.46			
D	1.52	1.62			
E	2.9	2.18			

In einigen interaktiven Teilprogrammen finden Sie links ein Markierungsfeld *Tabelle anzeigen.* Wählen Sie dieses Feld aus, zeigt das Programm eine Tabelle an:

Diese Tabelle enthält die Koordinaten und Parameter der in dem betreffenden Teilprogramm einstellbaren Größen. Sehr oft sind dies zum Beispiel die Koordinaten von Punkten.
Einige der Tabellenfelder sind farbig unterlegt, die Schrift ist hervorgehoben. In diese Felder können Sie Werte eingeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld und tragen Sie den neuen Wert ein. Nach Bestätigung der Eingabe mit der TAB-Taste oder den Cursortasten übernimmt das Programm den neuen Wert und erstellt die Darstellung neu.

1.4 Grundfunktionen

Durch Betätigung des Schalters ⇦ oder der *ESC*-Taste kehren Sie aus allen Programmteilen in das jeweils vorgehende Fenster bzw. das Programm-

Hauptfenster zurück. Jedes Fenster enthält einen „?"-Menüeintrag evtl. einen Schalter , mit dem Sie die Hilfedatei zum aktuellen Fenster aufrufen können.

Diese Hilfestellung kann in jedem Unterprogramm durch Betätigung der Taste *F1* aufgerufen werden.

In einer Vielzahl von Teilprogrammen finden Sie grafische Veranschaulichungen von Funktionen, Kurven, Flächen, Körpern usw., denen ein Koordinatensystem zugrunde liegt, das auf einen Anfangsdarstellungsbereich eingestellt ist. Diesen Bereich können Sie mit einem linken Mausklick auf einen der Schalter und verändern. Der erste Schalter bewirkt eine Verkleinerung des Intervalls, der zweite eine Vergrößerung. Mit dem dritten Schalter stellen Sie die Ausgangssituation wieder her.

Fenster drucken und kopieren

In allen Unterfenstern des Programms haben Sie die Möglichkeit, den aktuellen Fensterinhalt entweder auf Ihrem Drucker auszugeben oder in die Zwischenablage zu kopieren. Nutzen Sie dazu die Schalter in der Aktionsschalterleiste.

Darstellung als Abbildung oder Vektorgrafik speichern
Darstellung als Abbildung oder Vektorgrafik in die Zwischenablage kopieren
Darstellung auf den Drucker ausgeben

Fehlermeldungen

Geben Sie in den einzelnen Routinen nicht auswertbare Zahlen, Wörter usw. ein oder versuchen Sie eine nicht zugelassene Operation, erscheint eine Fehlermeldung.
Zur Weiterarbeit bestätigen Sie mit *RETURN*. Sollten Sie den Fehler nicht sofort finden, so können Sie sich in der Hilfe (F1) unter dem Punkt *Fehlermeldungen* eine weitergehende Erklärung des Fehlers anzeigen lassen. Lesen Sie bei auftretenden Problemen zuerst im Hilfetext nach - Probieren führt selten zum Ziel.

Hinweis

Da dieses Programm für den deutschsprachigen Raum konzipiert ist, wurde in allen Teilprogrammen weitgehend versucht, auf „neudeutsche" Anglizismen zu verzichten. Dementsprechend werden die Begriffe, soweit möglich, mit ihrer deutschen Bezeichnung genannt. Natürlich wird hierbei aber dennoch die mathematische Fachsprache eingehalten.
Auf weiteren Seiten werden nun alle im Programm enthaltenen Unterprogramme vorgestellt. Je nach Thema erhalten Sie neben Erläuterungen zum Programmlauf

auch Hinweise zum mathematischen Inhalt sowie typische Beispiele.

Nehmen Sie sich etwas Zeit, um die vielen Unterprogramme mit ihren diversen Teilfunktionen kennenzulernen, denn dies fordert auch den erfahrenen Computernutzer. Konzentrieren Sie sich zuerst auf Ihnen wichtige mathematische Gebiete. Zum Kennenlernen der Unterprogramme sollten Sie weiterhin die genannten Beispiele ausprobieren, denn ...

"Nun", antwortete der Pelikan bereitwillig, "man begreift es am besten, indem man es macht."
Lewis Carroll, "Alice im Wunderland" (1865)

1.5 Themenliste

Dieses Mathematik-Programm ist ein umfangreiches Programmpaket, welches gerade den Neueinsteiger bei der Auswahl des gewünschten Unterprogramms überfordern kann. Trotz Studium dieser Hilfe ist es oft nicht einfach, zu entscheiden, in welchem Teilprogramm das zu lösende Problem eingegeben werden soll. Aber ebenso wird der langjährige Nutzer der Vorgängerversionen in diesem neuen Programm Hilfe zur Orientierung benötigen. Hier hilft diese Teilprogrammliste.

Wählen Sie im Hauptfenster den Menüpunkt *Datei / Themenliste* (Schnelltaste F6) zeigt das Programm eine Seite an, welche tausende Themen und Aufgabenstellungen enthält, die Sie mit Hilfe des Programms bearbeiten können. Diese Programmliste können Sie auch über den Schalter *Themen* im Hauptfenster aktivieren.

Die Themen sind in einer Liste derart angeordnet, dass Sie eine Art Baumstruktur besitzen. Die Themen sind dabei den entsprechenden Fachgebieten zugeordnet. Klicken Sie auf die kleinen + und – Zeichen, so wird die Liste an der Stelle aufgeklappt bzw. wieder verborgen.

Wählen Sie ein Thema in der Liste aus, so können Sie den entsprechenden Programmteil starten. Klicken Sie dazu auf *Teilprogramm starten* oder mit der Maus doppelt auf den Listeneintrag.
Die gegenwärtig verfügbaren Themen rufen teilweise das gleiche Teilprogramm auf, da Sie in diesen sehr oft unterschiedlichste Aufgabenstellungen lösen können.

Zusätzlich können Sie über *Suchen* alle die Aufgabenstellungen anzeigen lassen, welche ein bestimmtes Suchwort im Titel enthalten. Suchen Sie zum Beispiel Themen zum „Dreieck", so findet das Programm alle Teilprogramme, in denen ein Dreieck in der einen oder anderen Form eine Rolle spielt.

Berechnungen im Lexikon

Im Lexikon des Programms sind 600 Berechnungsmöglichkeiten integriert. Zum schnellen Auffinden dieser Teilprogramme klicken Sie auf den Schalter *Berechnungen im Lexikon*. Daraufhin werden diese Möglichkeiten angezeigt. Wählen Sie, wie oben beschrieben, einen Eintrag aus, so wird die entsprechende Lexikonseite angezeigt.

1.6 Favoriten

Das vorliegende Programm ist sehr umfangreich, d.h. es enthält sehr viele Teilprogramme, die über das Menü aufgerufen werden können.
Während der Nutzung wird es Programmteile geben, die Sie mehr verwenden als andere.
Um diese Teilprogramme schneller aufrufen zu können, finden Sie unter dem Menüpunkt *Datei / Favoriten* die 20 von Ihnen am häufigsten verwendeten Themen.

Beim ersten Start des Programms sind die *Favoriten* noch leer. Klicken Sie nun auf einen der Menüpunkte, protokolliert das Programm mit und zählt die absolute Häufigkeit. Und genau die 20 am meisten genutzten Teilprogramme werden hier angezeigt.
Möchten Sie die Favoriten wieder löschen, so nutzen Sie bitte den entsprechenden Menüpunkt.

1.7 Diese Version

„Αιέν αριστεύειν", Ομηρος

Wesentliche Änderungen und Eigenschaften

I. Das Programm bearbeitet in 700 Teilprogrammen 4100 verschiedene Themen.
II. Die Teilprogramme wurden noch stärker aufeinander abgestimmt, d.h. die Bedienung wurde noch einheitlicher und intuitiver.
III. In allen Programmteilen können Ergebnisse, Grafiken, ... gespeichert, gedruckt, kopiert werden; wenn möglich und sinnvoll auch als Vektorgrafik.
IV. Wenn auch im Allgemeinen unüblich, wurden alle Programmteile auf minimale Speicher- und Festplattennutzung geprüft und überarbeitet. Die Anzahl der Dateien wurde durch Komprimierung und Konstruktion von Bibliotheken erheblich reduziert und die Fragmentierung deutlich gesenkt.
V. Alle Programmroutinen wurden kritisch auf Funktionalität und Prozessornutzung geprüft und weiter optimiert.
VI. Jede(!) der über 450000 Zeilen Programmkode wurde einer erneuten Kontrolle unterzogen.
VII. Das Lexikon wurde umfangreich erweitert, d.h. noch mehr Informationen in

Text und Bild. Alle Abbildungen wurden kontrolliert und gegebenenfalls überarbeitet. Der Text wurde nochmals auf Rechtschreibung und inhaltliche Klarheit geprüft. Besonders wichtig ist eine neue Datenstruktur der Texte, durch die eine wesentliche Beschleunigung der Anzeige erreicht wurde.

Die wesentlichsten Vorteile des Programms

1) **Sehr großer Funktionsumfang**, d.h. hunderte Teilprogramme, die fast jedes elementarmathematische Problem behandeln, und zusätzlich ein umfangreiches Mathematiklexikon
2) **Einheitliche, einfache und selbsterklärende Bedienung** der Programmfunktionen sowie eine umfangreiche Programmbeschreibung mit Beispielen und Zusatzinformationen
3) **Langjährige Entwicklung**, wobei konsequent alle Hinweise von Nutzern berücksichtigt wurden
4) **Ständige Erprobung** zum einen direkt im gymnasialen Unterricht und in anderen Ausbildungsarten, als auch durch Hobbymathematiker, Lehrer, Schüler und Studenten im privaten Bereich
5) Keine nervenden und sinnleeren Bildchen, Animationen und Töne, d.h. **Konzentration auf das Wesentliche** und dennoch bei ansprechender Gestaltung der Programmoberfläche
6) **Gewissenhafte Programmierung**, d.h. die Festplatte wird nicht mit überflüssigem "Müll" zugeschüttet, der Festplattenbedarf wird möglichst gering gehalten; nach einer Deinstallation bleiben keine Dateileichen zurück
7) **Lauffähigkeit auf allgemein verbreiteten Computern** und Windows-Systemen, d.h. keine Forderung nach den neuesten PCs oder diversen Zusatzprogrammen
8) **Keine Beschränkung auf reine Mathematik**, d.h. Bezug auch auf Anwendungen aus den Naturwissenschaften

1.8 Allgemeine Hinweise

Das Programm ist sehr umfangreich. In diesem Handbuch werden die wesentlichsten Programmteile beschrieben. Die Erklärung einiger, kleinerer Teilprogramme finden Sie in der Online-Hilfe des Programms durch Drücken der Taste F1.

„Murphys Gesetz: Der Fehler, über den du dich seit jeher ärgerst, wird auch in der neuen Programmversion noch vorhanden sein."

Dieses Mathematikprogramm wurde mit sehr viel Engagement und Gewissenhaftigkeit erstellt. Alle Teilfunktionen wurden sorgfältig programmiert und getestet.
Dennoch können bedauerlicherweise Fehler auftreten. Eine hundertprozentige Garantie kann es leider nicht geben.

„Murphys 2.Gesetz: Keine Software ist fehlerfrei, und die Anzahl der Fehler steigt

mit der Komplexität des Programms."

Nutzungsbedingungen:

1) Das Programm und alle seine Teile unterliegen dem Urheberrecht!
Werden Daten jeglicher Art unter Berücksichtigung des Urheberrechtsgesetzes in andere Werke übernommen, so ist die Quelle nach § 63 UrhG anzugeben.

2) Haftung und Gewährleistung des Autors sind auf Vorsatz, arglistiges Verschweigen von Mängeln und grobe Fahrlässigkeit beschränkt. Es wird nicht garantiert, dass das Programm fehlerfrei ist. Alle Risiken beim Gebrauch dieses Programms liegen beim Endbenutzer.

3) Dieses Programm kann unter Berücksichtigung von 4) in zivilen verwendet werden. Ausgeschlossen ist jegliche Nutzung im militärischen Bereich inklusive der militärischen Ausbildung und der Fertigung und dem Vertrieb von Waffen aller Art.

4) Es ist ausdrücklich untersagt, das Programm und seine Teile zu decompilieren, zu verändern, zu verkaufen, zu vermieten, zum Download anzubieten, für Werbung zu verwenden, in Programmsammlungen jeglicher Art aufzunehmen oder in irgendeiner anderen Form aus der Weitergabe des Programms materiellen Gewinn, in welcher Höhe auch immer, zu erzielen.

5) Die kostenlose Weitergabe des vollständigen Programms ist bei Beachtung der Punkte 3) und 4) erwünscht. Unbefugte Vervielfältigung oder unbefugter Vertrieb dieses Programms oder eines Teils davon sind strafbar.

Haftungsausschluss: Dieses Produkt enthält Verweise auf Websites, die von Dritten eingerichtet wurden. Der Autor hat keinerlei Kontrolle über die Websites und die dort angegebenen Informationen, Waren oder Dienstleistungen. Der Programmautor übernimmt daher keinerlei Verantwortung, aus welchem Rechtsgrund auch immer, für den Inhalt der Websites Dritter.

„Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist." *Carl Friedrich Gauß*

Danksagung

Besonderer Dank für die Unterstützung bei der Erstellung dieses Programms gilt:

meiner Frau Kerstin
Wolfgang Bartsch
Siegfried Beyer
Gary Darby
Wolfgang Ehrhardt
Robert Ferréol
Julius Heins
Andreas Hörstemeier
Sebastian Hütter
Sebastian Jänicke
Dr.Heiner Lichtenberg
Dr.Ansgar Matthes
Wolfgang Mix
Sebastian Ochs
Dr.Walied Othman
Hans-Martin Renz
Frank Rothweiler
Joachim Schwind
Prof.Dr.Joachim Siegert
Roland Skuplik
Djoko Susilo

Daniel Terhell Jens Tönsing Dr. Wieland Willker

Wertvolle Anregungen und Hinweise zum Programm gaben auch weitere Mitglieder der Programmierforen Entwickler-Ecke und Delphi-Praxis. Dies betraf vor allem technische Fragen der Delphi-Programmierung. Unterstützung bei mathematischen Problemen wurde von Mitgliedern des Mathematikforums Matroids Matheplanet gegeben.
Dafür auch diesen Helfern: Danke!

Der Programmname **alpha** ist eine Reminiszenz an die mathematische Schülerzeitschrift **alpha** der DDR. Über 25 Jahre wurde in der **alpha** Elementarmathematik interessant und altersgerecht dargestellt und so das Interesse für Mathematik und die Naturwissenschaften geweckt bzw. vertieft. Nach dem Beitritt der DDR zur BRD wurde versucht, die Zeitschrift zu retten. Dies gelang nicht.
Ob dieses Programm würdig ist, den Namen **alpha** zu tragen, kann nur der Anwender entscheiden.

Für die meisten Außenstehenden ist die Mathematik ein weißer Fleck auf der Landkarte, dessen Grenzen von dicken Mauern aus Formeln, Gleichungen und merkwürdigen Begriffen geschützt werden. Vielleicht kann dieses Programm diese Mauern ein klein wenig durchlässiger machen.
Das Programm wurde mit viel Enthusiasmus erarbeitet. In seiner jetzigen Form stellt dieses Programm eines der umfangreichsten und erfolgreichsten Programme seiner Art dar. Sollten Sie zufrieden sein, so empfehlen Sie das Programm bitte weiter.

Viel Erfolg mit Ihrem neuen Programm.
Steffen Polster, © 1985-2024

2. Lexikon

„Es ist heutzutage ein sehr hartes Los, mathematische Bücher zu schreiben."
Johannes Kepler, 1609 in Astronomia nova

Bei der Arbeit mit diesem Mathematikprogramm werden Situationen eintreten, in denen Sie Informationen zu mathematischen Inhalten, eine Gleichung, Tabellenwerte oder Ähnliches benötigen. Da das notwendige Buch erfahrungsgemäß meist nicht greifbar ist, enthält das Programm ein entsprechendes Nachschlagewerk: eine Formelsammlung mit integriertem Lexikon.
Nach dem Start können Sie das Lexikon sofort nutzen. Um es zu aktivieren, wählen Sie den Schalter . Ein Tastendruck auf *ESC* schaltet das Lexikon ebenfalls ein bzw. auch wieder aus.

Das Lexikon besteht aus mehreren Teilen:

Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik, Anwendungen, Biografien bedeutender Mathematiker, Algorithmen und Rechentechnik sowie einigen fachübergreifenden Informationen zur Physik und Astronomie

mit gegenwärtig 9500 Seiten. In gedruckter Form würde dies mehr als 3600 DIN-A4-Seiten entsprechen.
Sie haben mehrere Möglichkeiten, durch dieses Buch zu blättern. Zum Ersten können Sie die zwei Aktionsschalter und in der oberen Schalterleiste des Fensters nutzen. Weiterhin können Sie mit *STRG* + → und *STRG* + ← zur jeweils vorhergehenden oder nachfolgenden Seite umschalten. Mit der Tastenkombination *UMSCH* + → bzw. *UMSCH* + ← springen Sie jeweils 10 Seiten weiter.
Durch Betätigung der beiden anderen Pfeilschalter zeigen Sie die in der Stichwortliste (alphabetisch geordnet) vorher bzw. nachfolgend auftretende Lexikonseite an.

Das vorhergehend angezeigte Thema erreichen Sie mit dem Schalter bzw. mit der Tastenkombination *STRG+RÜCK*. Zu umfangreichen Themen sind im Lexikon mehrere Seiten enthalten. Diese können Sie natürlich mit den Schaltern und erreichen, allerdings ist vielleicht nicht immer auf den ersten Blick klar, dass mehrere Seiten unmittelbar zusammengehören. In diesem Fall finden Sie am Seitenende zwei Pfeilschalter , die Sie darauf hinweisen, dass eine vorhergehende bzw. eine nachfolgende Seite zum gewählten Thema vorhanden ist. Klicken Sie auf einen dieser Pfeile, wird das Entsprechende angezeigt.
Zusätzlich steht Ihnen eine Stichwortliste, eine Suchfunktion sowie eine Möglichkeit zum Speichern und Abrufen von Lesezeichen zur Verfügung.

Stichwortliste (Taste F3)

Besonders schnell können Sie das gesuchte Thema durch Auswahl eines Stichwortes im Inhaltsverzeichnis des Lexikons aufrufen. Diese Liste lässt sich über den Schalter *Stichwortliste* im einblenden.
Markieren Sie einen der 17000 Einträge in der *Stichwortliste,* zeigt Ihnen das Programm die entsprechende Seite des Lexikons sofort an.

Die aufgenommenen Gleichungen, Sätze und Beziehungen wurden sorgfältig ausgewählt und übertreffen bei Weitem den durchschnittlichen Inhalt einer in der gymnasialen Ausbildung üblichen Formelsammlung. Als besonders ausführlich behandelte Gebiete finden Sie viele Seiten und Themen zu Primzahlen und deren Zerlegung, zu Polyedern aber auch zu Funktionen und Kurven. Sehr umfangreich ist ebenfalls die Zusammenstellung von Kurzbiographien bedeutender Mathematiker und Naturwissenschaftler.
Auf in Formelsammlungen übliche Funktionswertetabellen wurde so weit verzichtet, wie diese im Programm berechnet werden können. Dagegen enthalten viele Seiten vorherberechnete Listen, die Ihnen zusätzliche Informationen geben.

Querverweise im Lexikon

Auf der Mehrzahl der Seiten des Lexikons haben Sie die Möglichkeit, schnell auf andere Seiten zu wechseln, die weitere Erklärungen zu Begriffen, Personen usw. geben. Solche Querverweise werden voreingestellt in dunkelroter Farbe angezeigt.
Bewegen Sie die Maus auf ein solches Wort, verwandelt sich der Mauszeiger in eine Hand. Klicken Sie nun einmal links, zeigt das Programm sofort die neue Seite an.
Möchten Sie die Querverbindungen nicht hervorheben, so können Sie unter *Einstellungen* das farbige Hervorheben der Wörter deaktivieren. Daraufhin werden die Querverweise in der Grundfarbe angezeigt.
Ein dunkelblau angegebener Verweis, z.B. • Dodekaeder, ist eine Möglichkeit, das Teilprogramm *Dodekaeder* aus dem Lexikon heraus zu starten (siehe weiter unten).

Animierte Abbildungen

Im Lexikon finden Sie mehrere Tausend Abbildungen und Fotos, die den Text ergänzen und so die Anschaulichkeit wesentlich erhöhen.
Eine Besonderheit stellen die animierten Abbildungen dar. Dabei werden Zusammenhänge in einer kurzen Animation immer wiederkehrend angezeigt. Vor allem handelt es sich um Konstruktionen geometrischer Gebilde.
Das Programm nutzt dazu sogenannte animierte GIF-Dateien, wodurch speicherplatzintensive Videos umgangen werden.
Das Abspielen können Sie durch einen Klick auf den Schalter im Lexikontext starten. Daraufhin öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem die Animation gezeigt wird. In diesem Fenster können Sie das Abspielen mit weiteren Schaltern steuern

und u.a. zum Anfang oder zum Ende springen bzw. die Darstellung schrittweise abspielen.

Beachten Sie bitte, dass Sie dieses Animationsfenster erst schließen müssen, bevor Sie im Lexikon weiterarbeiten können.

Zusätzliche Abbildungen

Neben den vielen Abbildungen und Fotos im Lexikontext finden Sie auch zusätzliche Abbildungen, die durch ein Symbol 🗁 markiert sind. Nach einem Klick auf dieses Symbol öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem das Bild angezeigt wird.
Bei diesen Darstellungen handelt es sich meist um Abbildungen, deren Abmessungen etwas zu groß sind, um im normalen Lexikontext angezeigt zu werden.

Beachten Sie bitte, dass Sie dieses Fenster erst schließen müssen, bevor Sie im Lexikon weiterarbeiten können.

Aufruf von Teilprogrammen aus dem Lexikon

Eine interessante und nützliche Funktion ist der Aufruf der Unterprogramme aus der Formelsammlung heraus. Auf einer Vielzahl von Seiten finden Sie 22000 Einträge der Form • Dodekaeder.
Klicken Sie mit der linken Maustaste auf den Begriff, im Beispiel *Dodekaeder*, startet das Programm sofort das zugehörige Teilprogramm. Damit haben Sie die Möglichkeit, schnell und gezielt den gewünschten Programmteil aus der Vielzahl der gebotenen Optionen auszuwählen.

Direkte Berechnungsmöglichkeiten von Gleichungen

Auf zahlreichen Lexikonseiten finden Sie Gleichungen und Formeln, die mit einem Taschenrechnersymbol gekennzeichnet sind, wie zum Beispiel
🖩 $V = 1/4\ a^3\ (15 + 7\sqrt{5})$. Hierbei handelt es sich um eine direkt berechenbare Gleichung. Klicken Sie mit der Maus auf das Taschenrechnersymbol, erscheint ein Fenster, in dem Sie Werte für Variablen eingeben und so die gesuchte Größe berechnen können.

Begriffsuche

Zum schnellen Aufruf eines Themas wählen Sie den Schalter *Suche* oder die F2-Taste und starten so die Begriffsuche.
In den angezeigten Eingabezeilen tragen Sie unter *Suchwort1* den gesuchten Begriff ein und betätigen dann den Schalter *Suche* bzw. die *RETURN*-Taste.
Das Programm durchsucht daraufhin alle Seiten des Lexikons nach dem Auftreten Ihres Suchbegriffs und trägt die gefundenen Seiten in die Liste ein. Dabei ist es

gleichgültig, ob der erste Buchstabe des Suchwortes groß- oder kleingeschrieben ist.
In einer zweiten Zeile können Sie ein zusätzliches Suchwort angeben. In diesem Fall werden nur die Seiten ausgewählt, die beide Wörter enthalten. Lassen Sie die zweite Zeile leer, wird sie ignoriert.
Markieren Sie in der Liste eine der gefundenen Seiten, zeigt das Programm diese sofort an. Zum schnellen Auffinden des Suchbegriffs ist dieser im gefundenen Text farbig unterlegt.

Beachten Sie bitte: Der Lexikontext enthält außer dem angezeigten Text auch Steuerzeichen zur Gestaltung der Seite. So kann es mitunter vorkommen, dass eine Lexikonseite den Suchbegriff enthält, dieser aber nicht angezeigt wird.

Lesezeichen

Zum schnellen Auffinden wichtiger Seiten des Lexikons können Sie außerdem Lesezeichen setzen.
Klicken Sie auf den Plus-Schalter, nimmt das Programm den Titel der aktuellen Lexikonseite und trägt diesen in die Liste der Lesezeichen ein. Ein Klick auf den Minus-Schalter entfernt ein markiertes Lesezeichen wieder.

Hinweis: Speichern neuer Lesezeichen ist mit eingeschränkten Nutzerrechten nicht verfügbar.

Möchten Sie das Lexikon an der Stelle eines Lesezeichens aufschlagen, markieren Sie das Gewünschte in der unteren Liste. Das Programm zeigt daraufhin sofort die gewünschte Lexikonseite an.

Internet-Anbindung

Innerhalb des Lexikons finden Sie auf einigen Seiten Internetadressen. Haben Sie eine Onlineverbindung und klicken Sie auf eine dieser Adressen, ruft das Programm diese Internetseite sofort auf.
Beachten Sie aber, dass dies nur möglich ist, wenn bereits eine Internetverbindung besteht. Dieses Programm ist kein Internetbrowser und ersetzt auch keinen Internetanbieter.

Kopieren einer Lexikonseite

Klicken Sie auf den Schalter , so wird der Text der angezeigten Lexikonseite in ein sich öffnendes Fenster kopiert. Hier können Sie, wie in Windows allgemein üblich, Textstellen mittels Maus markieren und über den Menüpunkt *Kopieren* in die Windows-Zwischenablage kopieren.
Diesen kopierten Text können Sie anschließend in anderen Windows-Anwendungen, z.B. Wordpad, Word usw. einfügen. Dabei bleibt die Formatierung, insbesondere auch die Schriftart für griechische Buchstaben und mathematische Sonderzeichen erhalten.

Voraussetzung ist aber, dass die Zielanwendung sogenannten „Rich-Text“ (RTF) unterstützt.
Über zwei Schalter in der Schalterleiste kann die angezeigte Schriftgröße vergrößert bzw. verkleinert werden.

Enthält die Lexikonseite eine Abbildung oder ein Foto, so wird dieses ebenfalls angezeigt. Über den zugehörigen Schalter in der Schalterleiste können Sie auch ein solches Bild in die Zwischenablage kopieren.
Beachten Sie in diesem Zusammenhang aber, dass animierte Abbildungen (siehe oben) nicht kopiert werden können.

Drucken einer Lexikonseite

Über den Schalter wird die angezeigte Lexikonseite gedruckt. Hier wird der Text der aktuellen Lexikonseite und die Abbildung zum Drucker übermittelt. Der Vorteil ist, dass der Text dabei ohne Berücksichtigung der Querverbindungen gedruckt und die volle Seitenbreite ausgenutzt wird.
Zu den Möglichkeiten der Druckeinstellung lesen Sie bitte unter *Einstellung der Druckränder* nach.

Listen im Lexikon

Die Lexikonseiten enthalten neben Text und Abbildungen u.a. auch hunderte Listen und Tabellen mit zusätzlichen Informationen, so zum Beispiel die 100 größten bekannten Primzahlen, Zerlegungstabellen von Zahlen und Polynomen, Ziffernfolgen der Kreiszahl oder der Eulerschen Zahl usw. Diese können Sie durch einen Klick auf das im laufenden Text angezeigte Symbol 🕮 aufrufen.

PDF-Dateien im Lexikon

Weitere durch das Symbol 🕮 markierte, aufrufbare Dateien stellen PDF-Dateien (Portable Document Format, © Adobe Systems) dar. Klicken Sie auf das Symbol, so wird Ihr Acrobat-Reader-Programm gestartet und der PDF-Text angezeigt.

Beachten Sie bitte, dass auf Ihrem Computer ein Acrobat-Reader-Programm installiert sein muss. Andernfalls können Sie diese Texte nicht lesen. Außerdem traten bei einzelnen Nutzern Schwierigkeiten beim Aufruf der PDF-Dateien auf. Die Fehlerursache konnte leider noch nicht festgestellt werden.

Berechnungsmöglichkeiten im Lexikon

Innerhalb des Lexikons finden Sie über 600 Seiten, auf denen Sie sofort, ohne Aufruf eines Teilprogramms, anspruchsvollere Berechnungen durchführen können.

Je nach Aufgabenstellung finden Sie eine oder zwei Eingabezeilen vor. Tragen Sie dort die entsprechenden Werte ein und bestätigen Sie mit dem Schalter

Berechnung.
Auf einigen dieser Seiten können Sie Werte ineinander umwandeln, zum Beispiel bei den Winkelmaßen. In diesen Fällen transformiert das Programm den in der ersten Zeile eingetragenen Wert in den zweiten. Möchten Sie „Zweitens" in „Erstens" transformieren, so tragen Sie den Wert in die zweite Zeile ein, beachten Sei dann aber, dass nun die erste Zeile frei sein muss!

PDF-Zusatztexte

In Ergänzung des Lexikons sind in diesem Programm weitere zusätzliche Texte im PDF-Format vorhanden.
Wählen Sie im Hauptfenster den Menüpunkt *Datei / Zusatztexte* zeigt das Programm eine Seite an, welche die Beschreibung der zusätzlichen Texte enthält, die Sie sich ansehen können. U.a. finden Sie

- über 3400 Übungsaufgaben mit Lösungen zur Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie, ...
- Ausgewählte ergänzende mathematische Texte

Die Texte sind in einer Liste derart angeordnet, dass Sie eine Art Baumstruktur besitzen. Die Dateien sind dabei entsprechenden Kategorien zugeordnet.

Klicken Sie auf die kleinen + und – Zeichen, so wird die Liste an der Stelle aufgeklappt bzw. wieder verborgen.
Wählen Sie einen PDF-Text in der Liste aus, so können Sie diesen mit einem externen Acrobat-Reader-Programm lesen. Klicken Sie dazu auf *Text anzeigen* oder mit der Maus doppelt auf den Listeneintrag.

Beachten Sie bitte, dass auf Ihrem Computer ein Acrobat-Reader-Programm installiert sein muss. Andernfalls können Sie diese Texte nicht nutzen.

3. Analysis - Funktionen

„Die Mathematik ist eine Mausefalle. Wer einmal in dieser Falle gefangen ist, findet selten den Ausgang, der zurück in seinen vormathematischen Seelenzustand leitet.“
Egmont Colerus von Geldern (1888-1939)

Unter diesem Punkt finden Sie Unterprogramme zum Stoffgebiet "Analysis", d.h. zur Untersuchung von Funktionen, Beziehungen zwischen diesen, Flächenberechnungen, Tangenten und Normalen usw.
Darüber hinaus beschäftigen sich weitere Unterprogramme mit Näherungsverfahren zur Gleichungslösung oder Quadratur (Flächenberechnung) sowie mit der Untersuchung von mathematischen Kurven und Flächenfunktionen. Aufgrund der Fülle der Teilprogramme in diesem Bereich wurden sie auf die zwei Untermenüs *Funktionen* und *Kurven* verteilt.

3.1 Funktionseingabe, Funktionsbibliothek

In diesem Teilprogramm haben Sie die Möglichkeit, bis zu sechs Funktionen sowie drei Parameter für eine anschließende grafische Darstellung zu definieren. Dabei nimmt die *Funktion 1* eine besondere Rolle ein: Hierfür kann eine Funktionsschar, die 1. und 2. Ableitung, eine Stammfunktion sowie die Umkehrkurve gezeichnet werden. Die hier eingegebene Funktion wird jeweils auch in vielen weiteren Unterprogrammen weiterverwendet.

In der Funktionsgleichung können die im Hilfetext unter dem Suchwort "Implementierte Funktionen" genannten Möglichkeiten genutzt werden, wobei als Grundlage der allgemein übliche Formelsyntax der Mathematik verwendet wird. Innerhalb der beim Start im unteren Fensterteil angezeigten Liste *zuletzt bearbeitete Funktionen* sind die jeweils 50 letzten, untersuchten Funktionen verfügbar. Nach Auswahl einer Funktion aus dieser Liste trägt das Programm diese in das Feld *Funktion 1* ein. Steht Ihr Eingabecursor in den Zeilen der Funktionen 2 bis 6, wird sie dort eingetragen.

Funktion 1 - Hauptfunktion bei Darstellung und Untersuchung

Die unter *Funktion 1* definierte Funktion ist Grundlage für alle weiteren Untersuchungen.

Beispiele: Y=SIN(X); Y=X^2, Y=LN(COS(X))+1, Y=(3*X^2+2*X-1)/(X^2-1)

wobei nur die rechte Seite der Funktionsgleichung eingegeben werden darf. Verstößt Ihre eingegebene Gleichung gegen die in diesem Programm vorgesehenen Regeln, erhalten Sie die Fehlermeldung *Funktion fehlerhaft.*

Häufige Fehlerursachen sind dabei:

- Multiplikationszeichen wurden weggelassen; Nicht korrekt: 2SIN(4X+1) ... Richtig: 2*SIN(4*X+1)
- Die Argumente von Standardfunktionen wurden nicht geklammert; Falsch: SIN X ... Richtig: SIN(X)
- Nicht alle geöffneten Klammern wurden wieder geschlossen (Fehlende Klammern am Ende des Terms schließt das Programm automatisch!)
- Potenzen wurden nicht mit dem vorgesehenen Zeichen ^ eingegeben.
- Ein mehr als ein Zeichen langer Exponent wurde nicht geklammert; X^3/2 bedeutet 0,5*X³, dagegen X^(3/2) ... √X³ (für positive Argumente, Definitionsbereich beachten)
- Standardfunktionen wurden falsch bezeichnet (insbesondere Arkus- und Areafunktionen)
- Es wurden nicht die vorgesehenen Parameter P, Q und R, sondern z.B. A, B ... eingesetzt.
- Die allgemeingültige Regel, dass "Punktrechnung" vor "Strichrechnung" geht, wurde nicht berücksichtigt.
- die Grenzen eines normalen Funktionsinterpreters sind überschritten. Es mag reizvoll sein, Funktionen der Form y = (((((x^x)^x)^x)^x)^x)^x) zu testen, mathematisch ist es aber wenig sinnvoll. Für solche exotischen Funktionen wird keine Garantie übernommen.

Sollten Sie den Fehler nicht sofort finden, lesen Sie, wie oben erwähnt, unter dem Stichwort *Implementierte Funktionen* nach.

Dezimalzahlen, z.B. als Koeffizienten in einer Funktionsdefinition bzw. als Parameter, können in dem Programm sowohl mit Dezimalkomma als auch mit Dezimalpunkt eingegeben werden, d.h. zum Beispiel, sowohl der Term 2.5*X als auch 2,5*X würde korrekt ausgewertet. Dennoch sollten Sie die "Computerform", also den für den deutschsprachigen Raum gewöhnungsbedürftigen, allerdings international üblichen Dezimalpunkt bevorzugen. Leerzeichen können in den Funktionsstrings enthalten sein, verlängern die Berechnungs- und Darstellungszeit der Funktionswerte aber etwas.
Die als Funktion 1 festgelegte Funktion stellt auch in anderen Teilprogrammen die jeweils 1.Funktion dar.

Parameter und Konstanten

Innerhalb der Funktionsgleichung ist die Verwendung der drei Parameter P, Q und R möglich. Deren Werte tragen Sie in die entsprechenden Eingabezeilen ein. Beispiele: Y=SIN(Q*X); Y=P*X+Q

Parameterhaltige Funktionen können Sie innerhalb der grafischen Darstellung animieren bzw. schrittweise für veränderliche P und Q darstellen.

Funktionsschar

Auf der rechten Seite des Fensters finden Sie eine Liste mit rund 20 Markierungsfeldern. Hiermit können Sie verschiedene Einstellungen für die grafische Darstellung vornehmen.
Zur Untersuchung des Verhaltens von Funktionen bei unterschiedlichen Parametern eignet sich der Punkt *Funktionsschar*.
Die Funktionsgleichung der *Funktion 1* muss dazu einen Parameter P enthalten. Nach der Aufruf der grafischen *Darstellung* zeichnet das Programm die genannte Funktion für jeden Parameterwert P + k* Δ, k natürliche Zahl, k = 0, 1, 2, ..., bis zum Erreichen des Wertes Q. Die Schrittweite Δ tragen Sie in das entsprechende Feld ein.

Markieren Sie den Listeneintrag *Funktionsschar (P bis Q)*, so wird Funktion 1 für einen veränderlichen Parameter P gezeichnet. Eine weitere Möglichkeit, um Funktionsscharen zu veranschaulichen, erhalten Sie unter *Animation parameterhaltiger Funktionen.*

Funktionen 2 bis 6 - Funktionen zur grafischen Darstellung.

Für die Funktionen 2 bis 6 gelten analog die für die Festlegung der *Funktion 1* gemachten Bemerkungen.
Als Besonderheit können diese Funktionen aus vorher definierten Funktionen zusammengesetzt werden, womit z.B. eine Nacheinanderausführung zweier Funktionen möglich ist. Als Bezeichnung der Funktionen verwenden Sie bitte F1(X) bis F5(X).

Beispiele: Y=F1(X)+F2(X) oder Y=F3(X)*(F2(F1(X))

Zu beachten ist hierbei, dass eine rekursive Definition nicht möglich ist. Z.B. führt Y = F1(X)*F2(X) als Eingabe für *Funktion 2* zu der Fehlermeldung
Rekursiver Funktionsaufruf unzulässig.

Benutzen Sie einen Bezug auf eine der Funktionen F1(X) bis F5(X) und ist diese selbst nicht definiert oder eingegeben, erhalten Sie ebenfalls eine Fehlermeldung.

In der grafischen Darstellung werden die Funktionen 2 bis 6 nur gezeichnet, wenn Sie in der rechten Liste die entsprechenden Einträge *Funktion 2* und *Funktion 3-6* per Mausklick markiert haben. Die Graphen der Funktionen werden nach Anklicken des Aktionsschalters *Darstellung* gezeichnet. Die Farbe für die gezeichnete Funktion stellt das Programm automatisch ein.

Parameter P, Q, R, Δ

Die Parameter P, Q und R werden bei der Auswertung der Funktionen verwendet und können in der Definition der entsprechenden Funktionsgleichungen eingesetzt werden. Als Werte sind beliebige reelle Zahlen und berechenbare Terme der Form

SIN(1), PI, SQRT(3), ... nutzbar.

Die Parameter Q und Δ (*Schrittweite)* sind für die Darstellung einer Funktionsschar von Bedeutung. Der Wert von Δ gibt an, in welchen Schritten der in *Funktion 1* verwendete Parameter P erhöht wird. Dementsprechend können für Δ nur positive Werte eingegeben werden. Q stellt die obere Grenze dar, bis zu der P erhöht wird, d.h., Q muss stets größer als der Parameter P sein. Voreingestellt sind aber P = 1, Q = 0 und Δ = 0,5.
Darüber hinaus bilden die Parameter P und Q während der Animation von parameterhaltigen Funktionen die Grundlage der Berechnungen.

Erweiterte Darstellungsoptionen: Ableitung, Stammfunktion, Umkehrkurve, Evolute, ...

Zur weiteren Untersuchung der Funktionen sowie zur Gestaltung der grafischen Darstellung können Sie eine Vielzahl von Zusatzoptionen einstellen. Diese sind in der rechten Liste per Mausklick jeweils zu- und abschaltbar.

Wird der Eintrag *Numerische Ableitung* markiert, so wird in der grafischen Darstellung nach dem Zeichnen der *Funktion 1* numerisch der Verlauf der 1. Ableitung dieser Funktion ermittelt. Da es sich um eine Näherungslösung handelt, wird auch für in Wirklichkeit nicht über den ganzen Definitionsbereich differenzierbare Funktionen ein Kurvenverlauf der Differenzialquotienten dargestellt. Markieren Sie das Feld *Numerische 2. Ableitung* oder *Numerische 3. Ableitung*, gilt hierfür Analoges. Mit dem Feld *numer.Ableitung F2* können Sie die zweite eingegebene Funktion numerisch ableiten lassen.

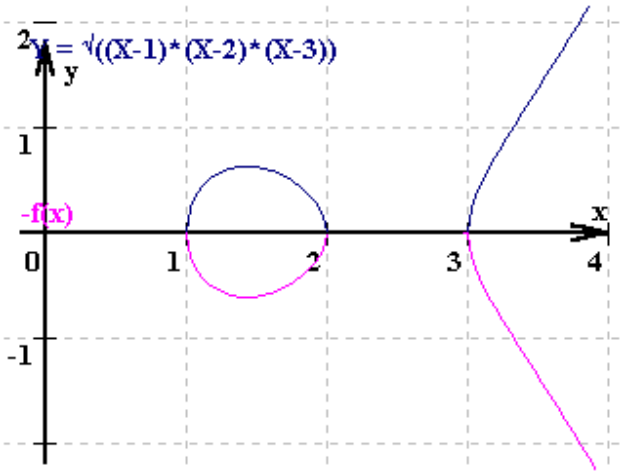
Bei Markierung der Einträge *Stammfunktion zu F1* bzw. *Umkehrkurve zu F1* zeichnet das Programm die zu *Funktion 1* gehörigen Kurven. Der Integrationsparameter C der Stammfunktion F(x) + C wird prinzipiell so errechnet, dass diese Funktion durch den Koordinatenursprung verläuft.
Ebenso kann die *Evolute* der Funktion gezeichnet werden. Hier muss die Ableitung ermittelbar sein. Andernfalls wird keine Kurve der Krümmungskreismittelpunkte dargestellt.

Gespiegelte Funktionen

Die Einträge *f(-x), -f(x)* und *-f(-x)* ermöglichen Ihnen die Darstellung der gespiegelten *Funktion 1*. Entsprechend der Definition ergibt

- f(-x) ... Spiegelung an der y-Achse
- -f(x) ... Spiegelung an der x-Achse
- -f(-x) ... Spiegelung am Koordinatenursprung

Das Schaltfeld *f(f(x))* zeichnet die Funktionswerte bei zweifacher Anwendung der Funktionsgleichung auf die Argumente.



Abgesehen davon, dass Sie gespiegelte Funktionen darstellen können, haben Sie mit diesen Einträgen auch die Möglichkeit, schnell und unkompliziert anspruchsvollere Kurven zu zeichnen.

Haben Sie zum Beispiel die Absicht, die elliptische Kurve $y^2 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ zu zeichnen, so können Sie selbstverständlich das Teilprogramm *Mathematische Kurven* nutzen, es geht aber auch einfacher:
Tragen Sie unter *Funktion1* den Wurzelterm SQRT((X-1)*(X-2)*(X-3)) ein und markieren Sie das Feld *-f(x)*. Das Programm zeichnet nun die Funktion und deren Spiegelung. Die Menge der dargestellten Punkte ist die gesuchte Punktmenge der elliptischen Kurve.
Über die Schalter der graphischen Darstellung zur Festlegung der Darstellungsfarben können Sie dort auch für beide Kurventeile die gleiche Farbe auswählen.

Geraden und Intervalle

Zusätzlich können Sie senkrechte Geraden der Form X = P, X = Q bzw. X = R in die grafische Darstellung eintragen. Geben Sie dazu Werte in *P, Q* und *R* ein und markieren Sie die zugehörigen Einträge.
Wählen Sie den Listeneintrag *Bereich PQ markieren*, schraffiert das Programm in der grafischen Darstellung den Abszissenabschnitt von X = p bis X = q. Mit *Funktionswerte füllen* heben Sie die Fläche unter der *Funktion 1* im Intervall [p;q] farbig hervor. Das Markierungsfeld *Fläche f1...f2 für PQ* ermöglicht das Hervorheben der von den Funktionen 1 und 2 eingeschlossenen Fläche im Intervall [P;Q], vorausgesetzt eine Funktion 2wurde eingegeben.

Möchten Sie einen einzelnen Punkt auf der Funktion markieren, so wählen Sie *Punkt für X=P*. In der grafischen Darstellung wird dann an der Abszisse x=P der Punkt auf der Funktion eingezeichnet, vorausgesetzt dieser existiert.

Aktionsschalter *Ableitung* und *Stammfunktion*

Rechts neben den Eingabezeilen für die Funktionen 2 bis 5 finden Sie Schalter mit den Beschriftungen *f'(x)*, *F(x)*, *f''(x)* und *f'''(x)*. Der obere bewirkt die symbolische Ermittlung der 1. Ableitung der Funktion 1, der zweite die symbolische Berechnung einer Stammfunktion, der dritte die zweifache Differenzierung der ersten Funktion und der vierte die 3. Ableitung.
Innerhalb dieses Unterprogramms können Sie auf Wunsch von der 1. Funktion zum einen die 1. Ableitung bzw. zum anderen eine Stammfunktion nicht nur numerisch, sondern auch analytisch ermitteln lassen.

Betätigen Sie dazu den beschriebenen Schalter *Ableitung f'(x)*, differenziert das Programm symbolisch *Funktion 1* und trägt deren Funktionsgleichung im Erfolgsfall unter *Funktion 2* ein. Bei Auswahl von *Stammfunktion F(x)* wird die Stammfunktion (ohne Integrationskonstante) als 3. Funktion ausgeschrieben.

Beachten Sie bitte, dass im Moment nur einige ausgewählte Funktionsklassen analytisch integriert werden können. Wird keine Stammfunktion gefunden, erhalten Sie die Fehlermeldung *Stammfunktion noch nicht bestimmbar*.

Zu den integrierbaren Funktionen sehen Sie bitte im Kapitel Integration nach. Weiterhin können Sie durch Auswahl eines Punktes unter *Teilprogramme* zu den jeweiligen Unterprogrammen schalten, wobei die eingetragene Funktion 1 übernommen wird.

Funktionsbibliothek

Zur Unterstützung Ihrer Arbeit enthält das Programm eine durch den Anwender erweiterbare Funktionsbibliothek. Hier können Sie die von Ihnen bearbeiteten mathematischen Funktionen dauerhaft auf der Festplatte abspeichern und zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufrufen. Nach dem Start dieses Teilprogramms finden Sie im unteren Fensterteil Auswahlseiten für voreingestellte Funktionsklassen:

> Ganzrationale Funktionen, Gebrochenrationale Funktionen, Stückweise lineare Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Trigonometrische Funktionen, Hyperbolische Funktionen, Zyklometrische und Areafunktionen, sonstige Funktionen

Die gespeicherten Funktionen werden in einer Liste angezeigt – im Lieferumfang sind über 200 Funktionen enthalten. Markieren Sie eine Funktion mit der Maus, trägt das Programm die Funktionsgleichung in das aktive Eingabefeld ein.

Bei einem Doppelklick auf den Eintrag wird die Funktion eingetragen und sofort die grafische Darstellung gestartet.
Die Funktionsbibliothek ist veränderbar. Mit dem Schalter ✚ *Funktion in Bibliothek aufnehmen* wird die Funktionsgleichung eingetragen und dauerhaft gespeichert. Ein mit der Maus ausgewählter Eintrag kann mit dem Schalter ━ *Löschen* aus der Funktionsdatei entfernt werden – es erfolgt keine Nachfrage durch das Programm, ob Sie tatsächlich die Funktion löschen wollen.

Hinweis: Die beiden Schalter sind nicht in der Auswahl *zuletzt bearbeitete Funktionen* sichtbar, da diese Liste automatisch gefüllt wird. Mit eingeschränkten Nutzerrechten unter Windows ist die Funktionsbibliothek nicht änderbar.

Eine Wertetabelle der eingegebenen Funktion 1 können Sie unter Wertetabelle berechnen lassen.

Auswertung Funktion 1, 2 und 3

Im linken unteren Fensterteil können Sie erste Untersuchungen der eingegebenen Funktionen 1, 2 und 3 durchführen. Für das festgelegte Intervall *von bis* berechnet das Programm die minimalen und maximalen Funktionswerte (globale Werte im Intervall), die Nullstellen, die Ableitungen mit deren minimalen und maximalen Werten, eine Stammfunktion sowie die paarweisen Schnittpunkte dieser Funktionen.
Weiterführende Untersuchungen sind im Teilprogramm *Funktionsdiskussion* möglich.

Grafische Darstellung

Über den Schalter *Darstellung* gelangen Sie zur grafischen Darstellung der Funktionen. Eingehendere Informationen zu den hier gebotenen Möglichkeiten erhalten Sie unter *Grafische Darstellung*.

3.2 Funktionsdarstellung

Das Teilprogramm *Funktionsdarstellung* vereinigt wichtige Untersuchungsmöglichkeiten der Programmteile *Funktionseingabe und Bibliothek*, *Funktionsdiskussion*, *Integralrechnung*, *Tangente und Normale* und *Ableitungen von Funktionen*.

Nach dem Start tragen Sie bis zu vier Funktionen in die unteren Eingabezeilen ein. Mit dem Schalter *Zeichnen* werden dies in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Schalter ↔ zwischen f1 und f2 tauscht die Terme aus.
Das Darstellungsintervall verändern Sie mit den Schaltern und oder durch linken Mausklick und Mausbewegung (Maustaste festhalten) oder durch Aufziehen eines Rahmens mit der Maus (STRG-Taste festhalten + linker Mausklick und Mausbewegung). Die Lage des Koordinatenursprungs können Sie mit den vier Pfeilschaltern verschieben.

Für das Koordinatensystem und die 1.Funktion f1(x) können eine Vielzahl von Einstellungen an den Auswahlfeldern bzw. Menüpunkten im Teilmenü *Koordinatensystem* vorgenommen werden, die sofort in der Zeichnung berücksichtigt werden.

	Wirkung
Achsen	Koordinatenachsen werden gezeichnet
Achsen hervorheben	Koordinatenachsen werden hervorgehoben
Koordinatenrahmen	am linken und oberen Rand werden die Koordinaten angezeigt
Winkel	die x-Achse wird im Gradmaß geteilt
Bogenmaß	die x-Achse wird im Bogenmaß geteilt
Raster	ein Raster bei ganzen Einheiten wird gezeichnet

mm-Raster	das Raster wird feiner gezeichnet
Funktionsterme	die Funktionsgleichungen werden angezeigt
farbige Graphen	die Graphen werden farbig gezeichnet
Graph-Breite	Einstellung der Breite der Funktionsbilder

und für die Funktion 1

1.Ableitung	numerische Ableitung von f1(x)
2.Ableitung	zweite numerische Ableitung von f1(x)
f1(-x), -f1(-x), -f1(x)	gespiegelte Funktionen
f1(f1(x))	Nacheinanderausführung von f1(x)
f1+f2, f1*f2	Verknüpfung der Funktionen f1 und f2
Nullstellen	Nullstellen berechnen und darstellen
Extrema	Extrempunkte berechnen und darstellen
Wendepkt.	Wendepunkte berechnen und darstellen
Wendetang.	Darstellung der Wendetangenten
Stammfkt.	numerische Stammfunktion von f1(x) durch den Koordinatenursprung
Pkt.anzeige	berechnete Punktkoordinaten werden angezeigt
Schnittpkt.	Schnittpunkte von f1 und f2 berechnen und darstellen
Umkehrkurve	Umkehrkurve zu f1

In die Eingabezeilen *DB* können Anfangs- und Endwert des Definitionsbereiches eingestellt werden. Außerdem kann die Funktionsgleichung einen Parameter P enthalten, der ebenfalls verändert werden kann. Über den Schalter f'1(x) wird die erste Ableitung von f1(x) analytisch berechnet und als 4.Funktion eingetragen.

Werden *Punkt A* bzw. *Punkt B* markiert, so zeichnen das Programm zwei Punkte auf der Funktion f1(x) ein, deren Abszissen festgelegt werden können, zum einen durch direkte Eingabe der x-Werte, zum anderen durch Verschieben der beiden Punkte mit der Maus.
Für diese Punkte können wahlweise die *Tangente* bei A, die *Normale* bei A und die *Sekante* AB gezeichnet werden.

Wird das Feld *Integral AB* markiert, so berechnet das Programm die Fläche unter der Funktion 1 im Intervall $[x_A, x_B]$ sowie das bestimmte Integral. Wird eine Funktion f2(x) gezeichnet, so betrifft es die Fläche zwischen den Funktionen f1 und f2, bzw. das Integral für f1(x) - f2(x).

Alle Ergebnisse können in einer Tabelle (*Ereignisliste*) angezeigt werden. Für die angegebenen Punkte ist die *Genauigkeit* (Dezimalstellen) einstellbar. Über den Menüpunkt *Bearbeiten* | *Ergebnisliste* kopieren ist eine Weiterverwendung in anderen Programmen möglich.

Insgesamt gibt dieses Teilprogramm schnell und einfach die Möglichkeit für eine Funktion f1(x) eine numerische Kurvendiskussion durchzuführen.

Animation der Funktionen

Klicken Sie auf Animation, so wird entweder der Punkte A verschoben oder der Parameter P kontinuierlich verändert. Das Programm zeichnet sofort die Funktionen und die neu berechneten Punkte, Tangenten oder färbt die Fläche ein.

3.3 Wertetabelle

Für die im Teilprogramm *Funktionsbibliothek* als 1.Funktion festgelegte Funktion wird entsprechend der Intervallgrenzen eine Wertetabelle ermittelt. Diese Tabelle enthält die Abszisse und den Funktionswert der Funktion im eingetragenen Intervall.

Konnte das Programm die 1. und 2.Ableitung der Funktion sowie eine Stammfunktion bestimmen, kommen auch deren Werte zu Anzeige. Die Integrationskonstante wird dabei wieder so gewählt, dass die Stammfunktion durch den Koordinatenursprung verlaufen würde. Zusätzlich zeigt das Programm den Anstiegswinkel der Funktion an. Polarvektor und -winkel sind die Koordinaten des Funktionspunktes in einem Polarkoordinatensystem.

Als Tabellenschrittweite wird der unter *dx* eingegebene Wert genutzt. Wurde keine *Schrittweite* festgesetzt, so beträgt diese standardmäßig 0,5.

Zur Berechnung einer weiteren Tabelle, können ein neuer Anfangs- (*x0*) und Endwert (*x1*) sowie die Schrittweite (*dx*) in die gekennzeichneten Felder eingegeben werden. Ist der Endwert kleiner als der Anfangswert, wird nur ein Wert errechnet. Eine Schrittweite kleiner gleich Null wird auf 0,5 gesetzt. Mit dem Schalter *Berechnung* werden die neuen Werte berechnet. Mittels *Darstellung* können Sie den grafischen Verlauf der Funktion kontrollieren.

Außer den genannten Werten berechnet das Programm auch den *Anstiegswinkel* einer Tangente in dem jeweiligen Punkt sowie die Koordinaten *Polarvektor* und *Polarwinkel* innerhalb eines Polarkoordinatensystems mit Zentrum im Ursprung und positiver x-Achse als Polarachse.

Drucken können Sie die Wertetabelle über den entsprechenden Schalter *Drucken*. Der zweite Schalter ermöglicht es, die Wertetabelle auch als Textdatei speichern. Die einzelnen Funktionswerte sind dabei durch ein Tabulatorzeichen getrennt, so dass Sie diese Datei zum Weiterbearbeiten auch in Microsoft Word oder Excel laden können.
Der Schalter kopiert die Tabelle zur Weiterverarbeitung in die Zwischenablage.

3.4 Funktionsdiskussion

Dieses Teilprogramm ermöglicht Ihnen die Untersuchung einer Funktion auf besondere Eigenschaften wie Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Maximal-

und Minimalpunkte, Wendepunkte usw.

Bei Übernahme der in der Funktionsdefinition als *1. Funktion* eingegebenen Funktion oder einer Neueingabe und Quittierung mittels des *Berechnung*-Schalters wird eine analytische Funktionsdiskussion durchgeführt. Die Funktionsgleichung wird zweimal differenziert.
Dabei ist zu beachten:

- Zu komplexe Terme (Anzahl der Zeichen > 200) bzw. nicht differenzierbare Funktionen werden als solche ausgewiesen.
- Die Funktionsgleichungen der Ableitungen werden weitgehend zusammengefasst. Dennoch kann es zu Konstruktionen wie Y=SIN(X)+(0*X) bzw. sehr vielen Klammern kommen. Dies hat keinen Einfluss auf die weitere Arbeit.

Das analytische Differenzieren von Funktionen gehört zu den anspruchsvollsten Teilen des Programms. Dieser Programmteil wurde zwar ebenso mit Sorgfalt programmiert und erwies sich stets als fehlerfrei, dennoch sollte der Nutzer die Ergebnisse, insbesondere bei exotischen Funktionen, einer kritischen Kontrolle unterziehen.

Das Ableiten der Funktionen können Sie direkt beeinflussen. Wünschen Sie keine automatische Differenziation durch das Programm, so entfernen Sie hinter den Eingabezeilen die Markierungen für die 1. und 2. Ableitung *f'(x)* und *f''(x).* Jetzt können Sie die Einträge *1. Ableitung* bzw. *2. Ableitung* selbst eingeben. Daraufhin werden diese Ableitungen nicht neu berechnet, sondern den Eingabefeldern entnommen, d.h., die von Ihnen eingegebenen Gleichungen beider Ableitungen werden zur weiteren Auswertung herangezogen.

Selbstverständlich können Sie aber auch durch das Programm ermittelte Ableitungsgleichungen manuell zusammenfassen. Beachten Sie dabei jedoch, dass bei nicht markierten Einträgen ein Aufruf der Diskussion mittels *Berechnung* bzw. der grafischen Darstellung über *Darstellung* die Ableitungen automatisch neu bestimmt, Ihr mühevolles Zusammenfassen also wieder unwirksam wird. Überschreitet die Zeichenanzahl der Ableitungen 200 Zeichen, bricht das Programm die Differenziation ab und meldet *Ableitung zu komplex.*

Insbesondere bei der 2. Ableitung ist dies mitunter zu verzeichnen. In einigen Fällen sollten Sie dann wie folgt vorgehen:

- Bestimmen Sie automatisch die erste und zweite Ableitung.
- Markieren Sie den Eintrag *1. Ableitung bestimmen abschalten* und fassen Sie die Gleichung manuell zusammen.
- Rufen Sie erneut die Ableitung auf, woraufhin die 1. Ableitung nicht neu berechnet wird, jedoch die 2. Ableitung. Daraufhin werden Sie häufig ein Ergebnis erhalten.

Selbstverständlich können Sie auch die Gleichung der 2. Ableitung vor dem Abspeichern in der Funktionsbibliothek selbst zusammenfassen.

Beispiele:

Funktion Y =	1.Ableitung Y, =	2.Ableitung Y" =
SIN(X)	COS(X)	-SIN(X)
X^3+2*X^2-X-1	3*X^2+4*X-1	6*X+4
(X^2+1)/(X-1)	(X^2-2*X-1)/(X-1)^2	(-8*X^2+4*X-4)/(X-1)^4
X*EXP(-X)	EXP(-X)-X*EXP(-X)	-EXP(-X)-EXP(-X)+X*EXP(-X)
X*ARTANH(X)	ARTANH(X)+X/(1-X^2)	1/(1-X^2)+(1+X^2)/(1-X^2)^2
X^X	X^X*(LN(X)+1)	X^X*(LN(X)+1)*(LN(X)+1)+X^X*(1/X)
SQRT(X)	1/(2*WURZEL(X))	-2/(2*WURZEL(X))^3

Diskutieren Sie gebrochenrationale Funktionen, bei denen die 2.Ableitung sehr umfangreich werden kann, so nutzen Sie das Unterprogramm *Gebrochenrationale Funktionen.*
Die zu untersuchende Funktion kann die Parameter P und Q enthalten. Die Werte für P und Q geben Sie in den entsprechenden Zeilen ein.

Suche nach signifikanten Punkten

Nach der Ermittlung der Ableitungen erfolgt eine Suche nach Null- und Polstellen sowie Extrem- und Wendepunkten der Funktion. Als Suchintervall werden die eingegebenen Werte *Diskussion von ... bis ...* genutzt. Voreinstellung ist ein Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

Unter Nullstellen werden die Abszissenwerte der Schnittpunkte mit der x-Achse verstanden. Existiert ein Schnittpunkt mit der y-Achse, wird dieser Punkt ebenfalls berechnet und angezeigt. Polstellen befinden sich bei Argumenten, für welche die Funktion nicht definiert ist und deren links- und rechtsseitige Grenzwerte an diesen Stellen gegen plus oder minus Unendlich streben.
Als lokale Extrempunkte werden Punkte des Graphen ermittelt, an denen ein lokales Maximum (Maximalpunkt, Hochpunkt, "Berg") oder lokales Minimum (Minimalpunkt, Tiefpunkt, "Tal") vorliegt. Wendepunkte sind in diesem Programm Punkte, für die der Graph der Funktion den Krümmungstyp von konvex nach konkav bzw. umgekehrt ändert, d.h. von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht oder umgekehrt. Für jeden gefundenen Wendepunkt wird außerdem die Wendetangente angegeben.

Die zur Suche nach diesen Punkten genutzten Routinen wurden so allgemein wie möglich gehalten. Damit ist gewährleistet, dass Funktionen unterschiedlichsten Typs untersucht werden können. Allerdings resultiert daraus auch die Tatsache, dass Nullstellen, die gleichzeitig Extremstellen sind, nicht in jedem Fall erkannt werden können. Dies sollten Sie bitte beachten.

Ein besonderes Problem stellen Argumente dar, für welche die Funktion nicht definiert ist. Ist die Funktion in der Umgebung des Arguments definiert, kann dies

dazu führen, dass das Programm einen derartigen einzelnen x-Wert als Nullstelle anzeigt.

Zum Beispiel tritt dies bei der Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 4)(x^6 + x^3) / (2x^2 + 4x)$ an der Stelle x = 0 auf. Da die Funktion hier nicht definiert ist, also ein "Loch" besitzt, sich im Grenzwert $x \rightarrow 0$ aber dem Funktionswert 0 nähert und zusätzlich in der Umgebung von 0 für die Funktionswerte $f(x) > 0$ gilt, ermittelt das Programm sowohl eine Nullstelle als auch ein lokales Minimum – das heißt genau die Ergebnisse, welche die um den im Zähler und Nenner gemeinsamen Faktor x gekürzte Funktionsgleichung ergeben würde. Aus diesem Grund sollten Sie gerade bei Funktionen mit Unstetigkeitsstellen prüfen, ob deren Funktionsgleichungen nicht vereinfacht werden können und die nicht definierte Stelle gesondert behandelt wird.

Enthält die Funktion den Parameter P, ermittelt das Programm die numerischen Werte der signifikanten Punkte für den in der Eingabezeile P festgelegten Wert.

Darüber hinaus werden besondere *Eigenschaften* der Funktion, z.B. periodisch, gerade bzw. ungerade, ermittelt. Weiterhin untersucht das Programm, ob die eingegebene Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$ gegen einen reellen Wert konvergiert. Dabei bedeutet die Anzeige + » mit einem Zahlenwert, dass die Funktion im positiven Unendlichen gegen diese Zahl strebt, entsprechend finden Sie nach - » den Grenzwert für das negative Unendliche. Beachten Sie bitte, dass nicht in jedem Fall die exakte Erkennung der Grenzwerte möglich ist, da hier mit Näherungsverfahren gearbeitet wird. Findet das Programm keinen Wert, erhalten Sie die Anzeige *unbestimmt*.

Während der Suche nach besonderen Punkten können Sie zur grafischen Darstellung umschalten. Ein Verlassen des Unterprogramms selbst ist erst nach Abschluss der Berechnungen möglich.
Haben Sie mit *Berechnung* eine Funktionsdiskussion durchgeführt und wurden die 1. und 2.Ableitung erfolgreich ermittelt, so finden in den Listen *Nullstellen*, *Extrem-* und *Wendepunkte* die ermittelten Punkte. Zusätzlich erhalten Sie bei den Nullstellen und Wendepunkten den Anstieg der Funktion.
Die Genauigkeit der Punktangaben, d.h. die Anzahl der *Dezimalstellen* nach dem Komma, können Sie einstellen.

Darstellung der Funktion

Möchten Sie eine grafische Darstellung der Funktion, dann betätigen Sie den Schalter *Darstellung.* Zu beachten ist hierbei, dass die Graphen der 1. und 2. Ableitung nur gezeichnet werden, wenn die entsprechenden Einträge für die Bilder der Funktionen in der rechten Liste gewählt wurden.

Wählen Sie den Eintrag *Numerisch 3. Ableitung,* ermittelt das Programm die 3. Ableitung und zeichnet diese ebenfalls. Voraussetzung dafür ist, dass Ihre eingegebene Funktion mindestens einmal symbolisch differenziert wurde.

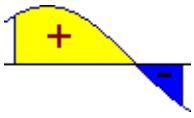
Innerhalb der grafischen Darstellung können Sie die berechneten signifikanten Punkte besonders markieren. Wählen Sie dazu in den drei Listen die gewünschten Punkte per Mausklick aus und markieren Sie den Eintrag *markierte Punkte darstellen*. Möchten Sie alle ermittelten Punkte und Stellen hervorheben, so wählen Sie *alle Punkte darstellen*.
Wählen Sie das Feld *Nullstellen anzeigen* aus, so werden die berechneten Nullstellen in der grafischen Darstellung markiert und deren Wert im Grafikfenster angezeigt.
Eine Vielzahl weiterer Darstellungsoptionen finden Sie zusätzlich in der rechten Liste. Entsprechende Beschreibungen dazu erhalten Sie unter *Funktionsbibliothek*.

3.5 Integralrechnung

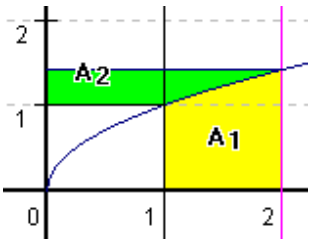
„... wir sind dahin gekommen, dass die meisten Leute differenzieren und integrieren,
nicht weil sie verstehn, was sie tun, sondern aus reinem Glauben, weil es bisher immer richtig herausgekommen ist."
Friedrich Engels

Dieses Teilprogramm ermöglicht die Berechnung der Inhalte von Flächen, die von dem Graphen einer Funktion und den Koordinatenachsen oder aber von zwei Funktionen eingeschlossen werden. Derartige Aufgaben gehören zur Grundausbildung des gymnasialen Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II.

Für die eingegebene Funktion *f(x)* wird die Fläche unter der Funktion im eingestellten Intervall berechnet. Standardintervall ist der Bereich $-5 \leq x \leq 5$. Als Intervallgrenzen können Sie neben reellen Zahlen auch Ausdrücke der Form PI, -2*PI, SIN(1) oder 1/3 nutzen. Diese müssen aber den für Funktionsdefinitionen gültigen Regeln entsprechen.



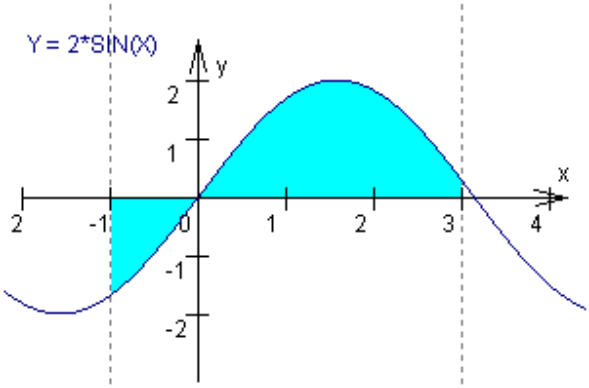
Ermittelt werden zwei Flächen: Zum einen die orientierte Fläche unter der Funktion, zum anderen der Betrag aller Flächenstücke, gleichgültig, ob diese ein negatives Vorzeichen (sie befinden sich unterhalb der x-Achse) oder eine positive Orientierung (oberhalb der Abszissenachse) haben. Dabei entspricht der Zahlenwert der ersten Fläche dem bestimmten Integral der Funktion in den angegebenen Grenzen. Zusätzlich wird das Volumen zweier Rotationskörper (als Vielfaches von π sowie als reeller Wert) angezeigt, bei dem die absolute Fläche unter der Funktion um die Koordinatenachsen rotiert.



Zu beachten ist hierbei, dass das Rotationsvolumen um die y-Achse auf zweifache Weise berechnet wird: Zum einen rotiert die in der grafischen Darstellung farbig hervorgehobene Fläche A_1 um die y-Achse, zum anderen die tatsächliche Fläche A_2 unter der Funktion in Richtung Ordinatenachse (Eintrag: *... um y-Achse (Fläche in Richtung*

y-Achse)).

In der Darstellung soll das Volumen von Rotationskörpern unter der Funktion Y = SQRT(X) für das Intervall [1;2] berechnet werden. Dabei ermittelt das Programm für das *Rotationsvolumen um x-Achse* den Wert 1,5 π. Dies entspricht der Rotation der Fläche A_1 um die Abszissenachse. Für *Rotationsvolumen um y-Achse* ergibt sich 3,73 π, wobei erneut die Fläche A_1, diesmal aber um die y-Achse rotiert. Interessieren Sie sich für das Volumen des Körpers bei Rotation der Fläche A_2 um die y-Achse, erhalten Sie unter dem Eintrag *... um y-Achse (Fläche in Richtung y-Achse)* das Ergebnis 0,93 π. Wie Sie der Darstellung entnehmen können, ändern sich dabei die Integrationsgrenzen auf die Funktionswerte der ursprünglichen Grenzen. Außerdem wird die Umkehrfunktion genutzt.



Zum Beispiel ermittelt das Programm für die Fläche unter der Funktion Y=2*SIN(X) in den Grenzen von x = -1 bis x = 3 als absolute Fläche 4,9 FE (Flächeneinheiten), für die orientierte Fläche 3,06 FE, da der größere Teil der markierten Fläche oberhalb der Abszissenachse liegt.

Ein Rotationskörper um die x-Achse hätte ein Volumen von 7,37 π RE = 23,16 RE (Raumeinheiten), ... und um die y-Achse 13,66 π = 42,9 RE sowie in Richtung der y-Achse 12,24 π = 38,45 RE. (Stützstellenzahl 2500).

Fläche zwischen zwei Funktionen

Sehr oft ist es notwendig, Flächeninhalte zwischen zwei Funktionen zu berechnen. Dazu ist es möglich, in der Eingabezeile *g(x)* eine zweite Funktion zu definieren. Die gesuchte Fläche wird dann für die Differenz f(x) - g(x) in dem jeweiligen Intervall ermittelt - erneut absolut bzw. orientiert. Von Bedeutung sind dabei u.a. auch die Flächen zwischen den Schnittpunkten beider Funktionen.
Betätigen Sie den Schalter *Stammfunktionen* werden in den zwei Listen die Schnittstellen (Abszissen) von f(x) und g(x) im eingestellten Intervall angezeigt. Wurde für g(x) keine Funktion festgelegt, berechnet das Programm die Schnittstellen mit der x-Achse, also die Nullstellen der Funktion f(x).
Ist der Eintrag *Schnittpunkte* in der Optionsliste ausgewählt, kennzeichnet das Programm die ermittelten Punkte auch in der grafischen Darstellung.

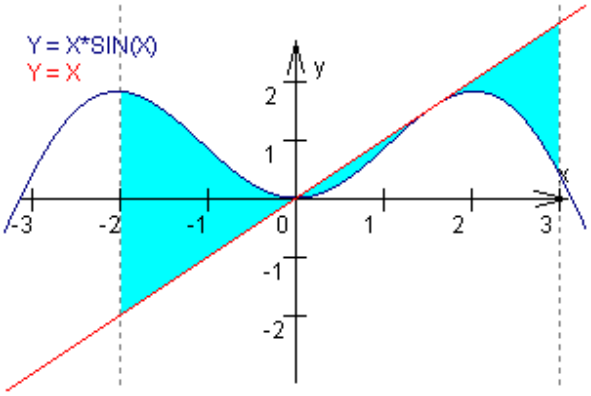
Zur Berechnung der Fläche können Sie nun die Intervallgrenzen in der linken Liste für den Anfang und rechts für die obere Grenze einstellen. Klicken Sie dazu auf den gewünschten Zahlenwert. Voreingestellt ist ein Integrationsintervall *von a=* und *bis b=*, d.h. das zuvor eingegebene Gesamtuntersuchungsintervall wird genutzt.

Beachten Sie bitte, dass der Intervallanfang kleiner gleich dem Intervallende sein muss. Ist dies nicht der Fall, vertauscht das Programm beide Werte ohne zusätzliche Meldung.

Für das obige Beispiel erhalten Sie im Suchintervall von -5 bis 5 für keine angegebene Funktion g(x) die Schnittstellen -3,141593, 0 und 3,141593. Wählen Sie als untere Grenze 0 und als obere 3,141593 ermittelt das Programm:

Absolute Fläche	Orientierte Fläche	Bogenlänge	Schwerpunktskoordinaten
4 FE	4 FE	5,27 LE	1,57; 0,79

Das zweite Beispiel (siehe nachfolgende Abbildung) demonstriert die Flächenstücke zwischen den Funktionen Y=F(X)=X*SIN(X) und Y=G(X)=X. Die gefundenen Werte sind 5,13 FE absolute Fläche, 2,35 FE orientierte Fläche, 4,96 π RE Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse und 16,71 π bzw. 22,34 π um die y-Achse.



Zu beachten ist hierbei, dass die Funktionen f(x) und g(x) nur dann in der grafischen Darstellung gezeichnet werden, wenn deren Einträge in den Markierungsfeldern *Darstellung von* gewählt wurden. Nur bei eingeschaltetem Eintrag *Fläche füllen* wird die zu berechnende Fläche eingefärbt.

Weiterhin werden die Bogenlängen der Funktionen f(x) und g(x) für das eingestellte Intervall sowie die statischen Momente der Fläche bzgl. beider Koordinatenachsen und die statischen Momente der Kurve von f(x) bezogen auf beide Koordinatenachsen berechnet.

Wird für g(x) keine Funktion gewählt, ermittelt das Programm die Mantelfläche des Rotationskörpers um die x-Achse. Tritt im Berechnungsintervall kein Vorzeichenwechsel zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf, erhalten Sie zusätzlich die Koordinaten des Schwerpunktes der eingeschlossenen Fläche. Zur Erklärung der mathematischen Hintergründe lesen Sie bitte in der Formelsammlung des Programms nach.

Beachten Sie bitte: Zur Berechnung der Bogenlänge bestimmt das Programm die jeweils 1. Ableitungen der Funktionen f(x) und g(x). Sind diese im Integrationsintervall (auch die Grenzen!) nicht voll differenzierbar, kann der ermittelte Wert der Bogenlänge erheblich vom tatsächlichen abweichen. Ist die Funktion f(x) insbesondere an den Intervallgrenzen nicht definiert, können die

angezeigten Ergebnisse ungenau sein. In diesem Fall sollten Sie im Unterprogramm *Numerische Integration* das gesuchte Integral über Gauß-Legendre-Formeln ermitteln, welche die Randstellen nicht nutzen.

Stammfunktionen

Für einige ausgewählte Funktionstypen ermittelt das Programm symbolisch, sprich analytisch, eine Stammfunktion. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* bzw. *Stammfunktionen* werden f(x) und g(x) analysiert und im Erfolgsfall unter F(x) und G(x) jeweils eine Stammfunktion (ohne Integrationskonstante) angezeigt. Wünschen Sie nur die Integration ohne numerische Berechnung der Flächen usw., nutzen Sie bitte den Schalter *Stammfunktionen*. Wählen Sie die Einträge *Stammfunktion F(x)* und *Stammfunktion G(x)* in der Optionsliste, werden auch beide Stammfunktionen in der grafischen Darstellung gezeichnet.

Beispiele: Das Teilprogramm ermittelt

Funktion f(x)	Stammfunktion
(2*X-4)^3	(2*X-4)^4/8
X^2+SQRT(X^2+4)	X^3/3+(X*SQRT(X^2+4)+4*ARSINH(X/2))/2
SQRT(4-X^2)	(X*SQRT(4-X^2)+ 4*ARCSIN(X/2))/2
+SQRT(X^2+4)	+(X*SQRT(X^2+4) +4*ARSINH(X/2))/2
SIN(3*X)*COS(2*X)	-COS(5*X)/(10)+COS(X)/(-2)
X^2*EXP(4*X)	EXP(4*X)*(X^2/4-2*X/16+0,03125)
(X^2+1)/(X^2-1)	LN((X-1)/(X+1))+X
(X^2+X)/(X^2-1)	LN(X-1)+X
X^2*SIN(X)	(2-X^2)*COS(X)+2*X*SIN(X)
X^3-3*X^2-X+1	X^4/4-(X^3)-(X^2/2)+1*X

Findet das Programm keine Lösung oder lässt sich das Integral überhaupt nicht vollständig analytisch auflösen, erhalten Sie die Meldung

Noch nicht bestimmbar.

Beispiele für Stammfunktionen

Unter *Funktionen* | *Beispiele für Stammfunktionen* finden Sie als Ergänzung zum Lexikon eine Zusammenstellung von typischen Beispielen zur Bestimmung von Stammfunktionen.

Rotationskörper

Nach durchgeführter Integration Ihrer Funktionen können Sie sich auch den entstehenden Rotationskörper bei der Rotation der berechneten Fläche um die x-Achse anzeigen lassen.

Stammfunktionsbibliothek

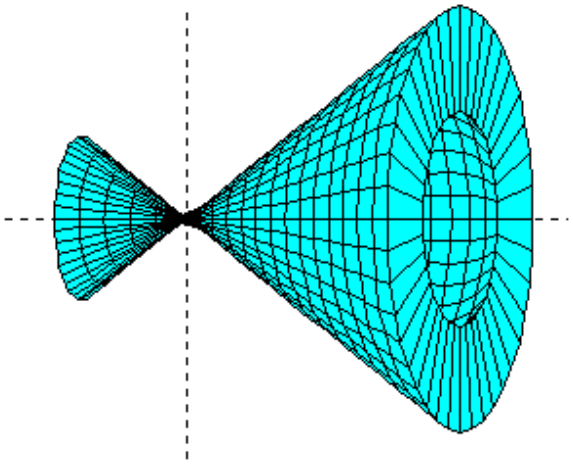
Das Programm ist in der Lage, für eine umfangreiche Menge von Funktionen symbolisch eine Stammfunktion zu bestimmen. Allerdings ist dies im Moment aus programmtechnischen Gründen noch nicht für alle integrierbaren Funktionen realisiert. Deshalb haben Sie die Möglichkeit, das Programm selbst "etwas intelligenter" zu machen.

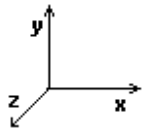
Wird keine Stammfunktion gefunden, Sie selbst können sie aber ermitteln (unter Umständen hilft die Formelsammlung), dann tragen Sie diese unter *F(x)* oder *G(x)* ein und betätigen den zugehörigen Schalter **+**. Daraufhin übernimmt das Programm Ihre Eingabe in die Stammfunktionsbibliothek und ist ab sofort in der Lage die gewünschte Funktion f(x) symbolisch zu integrieren.

Hinweis: Mit eingeschränkten Nutzerrechten kann die Stammfunktionsbibliothek nicht verändert werden.

3.6 Rotationskörper

Wählen Sie in dem Teilprogramm *Integralrechnung* den Schalter *Rotationskörper,* wird der zugehörige Rotationskörper entsprechend der Eingaben der Funktionen und Intervallgrenzen bei einer Rotation um die x-Achse räumlich dargestellt, wobei auch als Grenzen eingestellte Schnittstellen der Funktionen genutzt werden können. Damit können Sie sich einen Eindruck von diesem Körper machen. Je nach Wahl der Funktionen f(x) und g(x) wird der innere sowie äußere Körper gezeichnet.
Auch in diesem Teilprogramm haben Sie wieder eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Veränderung der grafischen Darstellung.
Wenn Sie das Markierungsfeld auswählen, wird der Rotationskörper farbig gezeichnet. In diesem Fall werden auch verdeckte Flächen berücksichtigt. Schalten Sie diese Option aus, erhalten Sie den Körper als "Gittermodell". Die Grundfarbe der Funktionsdarstellung wählen Sie in den 16 angezeigten Grundfarben durch einen linken Mausklick aus.



Die Streckung in y/z-Richtung können Sie über den Rollbalken verändern. In diesem Teilprogramm werden die Koordinatenachsen derart gelegt, dass die x-y-Ebene in der Zeichenebene liegt und das Koordinatensystem ein Rechtssystem bildet, d.h. 

.

Da es sich um eine Rotation um die x-Achse handelt, hat der Körper sowohl in y- als

auch in z-Richtung die gleiche Ausdehnung. Bei gewählter Markierung *Seitenfläche* wird eine seitliche Begrenzung des Körpers gezeichnet.

Abbildung: Rotationskörper mit Seitenfläche

Haben Sie sowohl eine Funktion f(x) als auch g(x) eingegeben, zeichnet das Programm voreingestellt die innere und äußere Begrenzungsfläche des Rotationskörpers. Dies können Sie über die Auswahlfelder *Darstellung von* verändern. Damit wird Folgendes bewirkt:

Punkt	Wirkung
vollständiger Körper	Innere und äußere Begrenzung wird gezeichnet
Körper f(x)	nur der durch f(x) erzeugte Körper wird gezeichnet, g(x) wird ignoriert
Körper g(x)	nur der durch g(x) erzeugte Körper wird gezeichnet, f(x)) wird ignoriert
äußere Hülle	nur die äußere Begrenzung des Körpers wird gezeichnet
innere Hülle	nur die innere Begrenzung des Körpers wird gezeichnet
Differenzkörper	der durch die Differenz der Funktionen f(x) und g(x) erzeugte Körper wird gezeichnet

Lassen Sie den Körper unter Berücksichtigung der unsichtbaren Hilfslinien zeichnen, ergibt der Darstellungsmodus *vollständiger Körper* damit die Abbildung der äußeren Hülle des Körpers.

Zum Fenster der Integration und Flächenberechnung schalten Sie mit dem Schalter *zurück zur Integration* zurück.

Rendering des Rotationskörpers

Auf Wunsch können Sie den Rotationskörper auch mit einer Oberfläche mit Lichteffekten versehen. Klicken Sie dazu auf den Schalter *Körper rendern*. Weitere Erläuterungen zu diesem Teilprogramm finden sie unter *Darstellung von Rotationskörpern*.

3.7 Übung Funktionen erkennen

Dieses Teilprogramm ermöglicht das Üben der Ermittlung der zugehörigen Funktionsgleichung aus einem gegebenen Kurvenverlauf (Graph, Schaubild) einer Funktion.

Dabei können durch Auswahl des zugehörigen Punktes folgende Funktionstypen genutzt werden:

- Y = A*X+B ... lineare Funktionen y = ax + b mit einfachen Koeffizienten a und

b
- Y = A*X+B (Übung 2) ... Funktionen y = ax + b mit anspruchsvolleren Koeffizienten a und b
- Y = A*X^2+B ... quadratische Funktionen mit einfachen Koeffizienten a und b
- Y = (X*A)^2+B ... quadratische Funktionen mit einfachen Koeffizienten a und b
- Y = A*SIN(X+B) ... gestreckte und längs der x-Achse verschobene trigonometrische Funktionen
- Y = A*SIN(X)+B ... gestreckte und längs der y-Achse verschobene trigonometrische Funktionen
- Y = A*SIN(B*X) ... gestreckte trigonometrische Funktion mit veränderter Periodenlänge
- Y = SIN(A*X)+B ... verschobene trigonometrische Funktion mit veränderter Periodenlänge
- Y = X^A+B ... verschobene Potenzfunktion

Hinweis: Bei den trigonometrischen Funktionen kann der Sinus SIN(X) auch durch den Kosinus COS(X) ersetzt werden.

Klicken Sie auf den Schalter *Test starten*, werden Ihnen zufällige, voreingestellt 10, Funktionen nacheinander im Koordinatensystem blau dargestellt. Nach *Funktion Y* = tragen Sie die entsprechende Funktionsgleichung ein und bestätigen mit *Eingabe überprüfen* oder *ENTER*.

Ist die Funktionsgleichung korrekt, wird die nächste angezeigt. Andernfalls erhalten Sie Ihre Funktion rot angezeigt und die korrekte Gleichung wird genannt. Wenn Sie das Feld *mehrere Versuche* markieren, können Sie erneut Ihr "Glück versuchen".
Am Ende gibt Ihnen das Programm eine kurze Auswertung des erreichten Ergebnisses an.

3.8 Übung Funktionsgraphen zuordnen

Dieses Teilprogramm ermöglicht das Üben des Erkennens von Funktionsverläufen und der Zuordnung von Funktionsgleichungen zu den angezeigten Graphen der Funktionen.

Nach der Wahl der Funktionsklasse, *linear*e, *quadratisch*e, *trigonometrisch*e bzw. verschiedener Funktionen der Schulmathematik (*gemischt*), werden in sechs Koordinatensystemen die Graphen von verschiedenen Funktionen angezeigt.
Die Aufgabe besteht nun darin, in den sechs aufklappbaren Listen die entsprechende Funktionsgleichung auszuwählen. Die Listen enthalten auch Gleichungen von Funktionen, deren Bild nicht gezeigt wird.

Die Kontrolle der Zuordnung wird mit dem Schalter *Lösung überprüfen* durchgeführt.
Die Darstellungen der Funktionen können auch ausgedruckt werden, evtl. für die

eine oder andere Übung ohne der Vorgabe einer Gleichungsliste.

3.9 Lineare Funktion, Quadratische Funktion, Kubische Funktion, usw.

Unter den Menüpunkten *Lineare Funktion, Betragsfunktion, Abrundungsfunktion, Sägezahnfunktion, Quadratische Funktion* und *Kubische Funktion* können Sie im Interaktivteil die Eigenschaften von Funktionen untersuchen, indem Sie mittels der Rollbalken verschiedene Parameter verändern.

Lineare Funktion

Eine lineare Funktion lässt sich in der einfachsten Form mit der Gleichung y = mx + n, der Normalform, darstellen. Dabei stellt m den Anstieg der Funktion dar und n den Ordinatenwert des Schnittpunktes der Funktion mit der y-Achse.

In diesem Teilprogramm können Sie an zwei Rollbalken den Anstieg m und den Wert von n einstellen. Das Programm zeichnet die Funktion sofort und gibt Ihnen die Geradengleichung an. Vergrößern Sie beispielsweise den Anstieg m, so wird die Funktion immer steiler, verringern Sie n, verschiebt es das Kurvenbild nach unten.
Zusätzlich können Sie die x-Koordinate eines Punktes P auf der Funktion mit der Maus verschieben.

In der Schule werden lineare Funktionen über das sogenannte Anstiegsdreieck gezeichnet. Darunter versteht man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine, zur x-Achse parallele und bei x = 0 beginnende Kathete die Länge 1 und dessen zweite Kathete (parallel zur y-Achse) die Länge des Anstiegs m hat. Ist m positiv, wird die Kathete nach oben gezeichnet, andernfalls nach unten.
Der Endpunkt der zweiten Kathete ist nun ein Punkt der gesuchten Geraden. Verbindet man diesen mit dem Punkt (0;n) und zeichnet die zugehörige Gerade, hat man die grafische Darstellung der linearen Funktion gefunden.
Ein derartiges Anstiegsdreieck wird eingezeichnet. Die Lage des Dreiecks kann durch Verschieben des Punktes P verändert werden.
Starten Sie die Simulation, so wird die lineare Funktion kontinuierlich längs der Ordinatenachse verschoben. Wählen Sie den Punkt *Anstieg m bewegen*, so wird der Schnittpunkt mit der y-Achse festgehalten und der Anstieg m der Funktion verändert.

Betragsfunktion

Unter dem Punkt *Betragsfunktion* können Sie im Interaktivteil die Eigenschaften dieser Funktion untersuchen, indem Sie über die Rollbalken verschiedene Parameter verändern.

Sie können drei Parameter der Funktionsgleichung

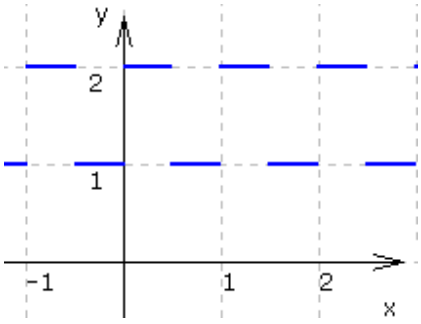
$$Y = C\,|X - A| + B$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Der Wert a

beeinflusst unmittelbar die Lage der Funktion längs der x-Achse, der Parameter c eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse, evtl. eine Spiegelung an der x-Achse, und der Parameter b eine Verschiebung längs der Ordinatenachse.
Zusätzlich können Sie in diesem Teilprogramm zu der oben genannten Betragsfunktion eine zweite addieren, sodass eine Funktion der Form

$$Y = C\,|X - A| + B + E\,|X - D|$$

entsteht. Solche Funktionen können durchaus "merkwürdige" Funktionsverläufe aufweisen. Wählen Sie zum Beispiel A = 1, B = 0, C = 1, D = 2 und E = -1.
Vor und während der Simulation können Sie wählen, welcher der vier Parameter A, B, C oder D kontinuierlich verändert wird.



Abrundungsfunktion

Im Teilprogramm *Abrundungsfunktion* können Sie die drei Parameter der Funktionsgleichung

$$Y = C\,[X - A] + B$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Dabei bildet die Funktion Y = [X] den größten ganzzahligen Wert Y kleiner als X ab. Der Wert a beeinflusst unmittelbar die Lage der Funktion längs der x-Achse, der Parameter c eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse und der Parameter b eine Verschiebung längs der Ordinatenachse.

Wie bei der *Betragsfunktion* können Sie auch hier eine zweite Abrundungsfunktion addieren, d.h., wählen Sie von Null verschiedene Parameter D und E, zeigt das Programm eine Funktion der Form

$$Y = C\,[X - A] + B + E\,[X - D]$$

an. Interessant sind an dieser Stelle wieder besondere Parameterkonstellationen. Für A = 1, B = 2, C = 1, D = 0,5 und E = -1 ergibt sich zum Beispiel eine verblüffende Funktion aus "Strichen".
Funktion: Y = [X – 1] – [X – 0,5] +2

Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter A, B, C, D oder E kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf den Funktionsgraphen demonstriert.

Sägezahnfunktion

Im Teilprogramm *Sägezahnfunktion* können Sie die vier Parameter der analytischen Funktionsgleichung

$$f(x) = (d-b)/\pi \arcsin(\cos(\pi\,(x-c)/(c-a))) + (d+b)/2$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Dabei stellen die vier Parameter a bis d die Koordinaten von zwei Punkten P(a|b) und Q(c|d) dar, die zwei benachbarte Spitzen der Sägezahnkurve bilden.
Die Lage der zwei Punkte kann auch durch Verschieben der Punkte mit der Maus verändert werden.
Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter a, b, c oder d

kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf den Funktionsgraphen demonstriert.

Quadratische Funktion

Wählen Sie das Teilprogramm *Quadratische Funktionen*, stellt das Programm eine quadratische Funktion der Form

$$Y = A\,x^2 + B\,x + C$$

dar. Über das Verfahren der quadratischen Ergänzung kann die Definitionsgleichung in die Form $y = a\,(x - b)^2 + c$ transformiert werden. Dabei stellt a einen Faktor der Streckung bzw. Stauchung der Parabel dar. Der Wert b verschiebt die Kurve horizontal, der Wert für c vertikal.
Diese drei Parameter können Sie an den Rollbalken einstellen. Das Programm stellt sofort den geänderten Kurvenverlauf dar. Zusätzlich wird der Scheitelpunkt der Parabel ausgewiesen.

Verschiebung und Streckung der Normalparabel

In diesem Teilprogrammen wird Ihnen automatisch die Veränderung des Funktionsgraphen bei der genannten quadratischen Funktion demonstriert.

Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, werden zum einen die Parameter c und d bei der Funktion

$$y = (x - d)^2 + c,$$

zum anderen der Faktor a bei $y = ax^2$ periodisch geändert. An den Auswahlfeldern können Sie wählen, welcher Parameter verändert wird. Die Geschwindigkeit der Simulation lässt sich über den Rollbalken einstellen. Wünschen Sie einen Vergleich des veränderten Kurvenverlaufs mit der Normalparabel $y = x^2$, so markieren Sie das Auswahlfeld.

Nullstellenform der quadratischen Funktion

Entsprechend dem Satz von Vieta kann eine quadratische Funktion

$$Y = A\,x^2 + B\,x + C,$$

die mindestens eine Nullstelle besitzt, auch in der Form

$$Y = A\,(X - X_1)\,(X - X_2)$$

dargestellt werden. Dabei sind X_1 und X_2 die beiden Nullstellen. Sollte $X_1 = X_2$ sein, besitzt die quadratische Funktion eine sogenannte doppelte Nullstelle.

In diesem Teilprogramm können Sie die Lage der beiden Nullstellen durch Anklicken und Ziehen mit der Maus längs der x-Achse verändern. Das Programm ermittelt daraufhin sofort die entsprechende quadratische Funktion und stellt sie dar. Der Streckungsfaktor A ist erneut über einen Rollbalken einstellbar.

Quadratische Funktion durch 3 Punkte

Unter diesem Menüpunkt finden Sie einen Spezialfall des Teilprogramms

Interaktives Polynom.
Hier sind sofort drei Punkte A, B und C vorgegeben, die Sie mit der Maus verschieben können.
Das Programm übernimmt die Koordinaten und ermittelt sofort die zugehörige quadratische Funktion, d.h. die quadratische Parabel.

Die drei Punkte der Parabel können Sie in die Koordinatentabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) eintragen. Während der Simulation können Sie untersuchen, welchen Einfluss kontinuierliches Verändern der Punkte A, B waagerecht oder senkrecht hat. Zusätzlich können Sie eine lineare Funktion zuschalten, die durch Verschieden der Punkte D und E verändert werden kann. Das Programm zeichnet die Funktion und berechnet evtl. vorhandene Schnittpunkte mit der quadratischen Funktion.

Kubische Funktion

Unter diesem Punkt können Sie für die kubische Funktion analoge Untersuchungen wie bei der quadratischen Funktion durchführen. Betrachtet wird die Funktionsgruppe

$$y = a\,(x - b)^3 + c$$

und der Einfluss der Parameter a, b und c auf das Kurvenbild.
Funktionen mit dieser speziellen Definitionsgleichung haben im Allgemeinen genau eine reelle Nullstelle. Diese wird berechnet.

Allgemeine Kubische Funktion (Funktion 3./4. Grades)

In diesem Programmteil können Sie die Parameter der allgemeinen kubischen Funktion

$$y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

variieren und so deren Einfluss auf das Kurvenbild untersuchen. Zusätzlich ermittelt das Programm die reellen Nullstellen der Funktion sowie die evtl. existierenden Extremstellen und die Wendestelle. Die Extrempunkte und der Wendepunkt werden in der grafischen Darstellung blau bzw. gelb markiert, sofern Sie das Feld *Punkte markieren* auswählen.
Markieren Sie das Feld *1. Ableitung*, so zeichnet das Programm den Kurvenverlauf der 1. Ableitung, also im Allgemeinen eine quadratische Funktion, ein.

Allgemeine Funktion 4.Grades (Funktion 3./4. Grades)

In diesem Programmteil können Sie die Parameter der allgemeinen ganzrationalen Funktion 4. Grades

$$y = ax^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$$

variieren und so deren Einfluss auf das Kurvenbild untersuchen. Zusätzlich ermittelt das Programm die reellen Nullstellen der Funktion.
Markieren Sie das Feld *1. Ableitung*, so zeichnet das Programm den Kurvenverlauf der 1. Ableitung, also im Allgemeinen eine kubische Funktion, ein. Während der *Simulation* werden die fünf Parameter a, b, c, d und e wahlweise verändert.

3.10 Übung: Lineare, quadratische und trigonometrische Funktionen zeichnen

Diese zwei Teilprogramme ermöglichen das Üben des Zeichnens eines Kurvenverlaufs (Graph, Schaubild) einer vorgegebenen Definitionsgleichung einer Funktion.
Dabei können Sie in beiden Programmteilen durch Auswahl des zugehörigen Punktes folgende Funktionstypen genutzt werden:

Y = M X+ N	lineare Funktion in Normalform
Y = (X+D)²+E	quadratische Funktion in Scheitelpunktsform
Y = ±(X+D)²+E	quadratische Funktion in Scheitelpunktsform mit zufälliger Öffnungsrichtung der Parabel
Y = X²+PX+Q	quadratische Funktion in Normalform
Y = ±X²+PX+Q	quadratische Funktion in Normalform mit zufälliger Öffnungsrichtung der Parabel
Y = (X-A) (X-B)	quadratische Funktion in Nullstellenform
Y = SIN(X+D)+E	Sinusfunktion mit Verschiebung in Abszissen- und Ordinatenrichtung
Y = ±SIN(X+D)+E	Sinusfunktion mit Verschiebung in Abszissen- und Ordinatenrichtung und zufälligem Vorzeichen
Y = SIN(2X+D)+E	Sinusfunktion mit Verschiebung in Abszissen- und Ordinatenrichtung
Y = ±SIN(2X+D)+E	Sinusfunktion mit Verschiebung in Abszissen- und Ordinatenrichtung und zufälligem Vorzeichen

Klicken Sie auf den Schalter *Test starten*, werden Ihnen für zufällige, voreingestellt 10, Funktionen die Funktionsgleichungen angezeigt.

In dem Teilprogramm *Funktionen zeichnen* zu den quadratischen und trigonometrischen Funktionen sehen Sie innerhalb des angezeigten Koordinatensystems eine „Schablone"; bei den quadratischen Funktion eine Normalparabelschablone, bei den trigonometrischen Funktionen verschiedene Sinusschablonen.
Diese können durch Mausklick auf den gelben Punkt und Mausbewegung so verschoben werden, dass zum Beispiel bei einer quadratischen Funktion der Scheitelpunkt korrekt liegt.

Im Teilprogramm zum Zeichnen linearer Funktionen legen Sie die Funktion durch das Verschieben von zwei gelb markierten Punkten fest.

Markieren Sie das Feld *Punktkoordinaten*, so zeigt das Programm die Koordinaten des eingestellten Scheitelpunktes der Parabel bzw. Nullpunktes der Sinusfunktion oder die Koordinaten der Geradenpunkte an.
Mit dem Schalter *Schablone drehen*, können Sie die Öffnungsrichtung der Parabel-Schablone umschalten bzw. die Sinusschablone spiegeln.

Haben Sie den Graphen der Funktion richtig positioniert, so bestätigen Sie mit *Überprüfen* oder *ENTER*.
Ist der eingezeichnete Graph der Funktion korrekt, wird die nächste angezeigt. Andernfalls erhalten Sie den korrekten Verlauf der Funktion rot angezeigt.
Am Ende gibt Ihnen das Programm eine kurze Auswertung des erreichten Ergebnisses an.

3.11 Stückweise definierte Funktion

Mitunter treten mathematische Funktionen auf, die nicht über ihren gesamten Definitionsbereich mit ein und derselben analytischen Definitionsgleichung zu beschreiben sind. Derartige stückweise (in Intervallen) definierte Funktionen können Sie in diesem Unterprogramm darstellen. Dabei ist die Anzahl der Teilfunktionen auf vier beschränkt.

Geben Sie dazu in die vier Zeilen *f(x)* die Funktionsgleichung Ihrer Teilfunktionen ein. Rechts neben den Gleichungen können Sie den jeweils zugehörigen Definitionsbereich festlegen. Für Intervallgrenzen gleich dem negativen oder positiven Unendlich wählen Sie eine entsprechend kleine bzw. große Zahl. Vorgegeben sind dafür zum Beispiel -1000 und 1000.

Unterhalb der Eingabezeilen stellt das Programm bei jeder Änderung eine erste Vorschaugrafik dar, die Ihnen das spätere Ergebnis zeigt. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) klicken Sie auf den Schalter *Darstellung.*
Auch diese Funktionsgleichungen können die Parameter P, Q und R enthalten.

Beachten Sie bitte, dass auch hier sowohl die Animation parameterhaltiger Funktionen als auch die schrittweise Änderung der Parameter möglich ist.

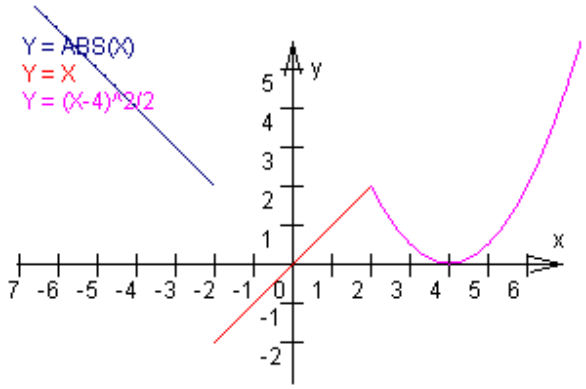


Abbildung: Stückweise definierte Funktion mit x < -2 : Y = ABS(X) , -2 < x < 2 : Y = X und x > 2 : Y = (X-4)²/2

Beispiel 2: Für die Funktion

$f(x) = (x^2-x-2)/(x+1)$; $x < -1$

$f(x) = p\,(x^2-2)/(x+2)$; $x \geq -1$

soll der Parameter p so gewählt werden, dass die Funktion auch an der Stelle $x_0 = -1$ stetig wird.

Geben Sie dazu Folgendes ein:

Funktion	Anfangswert	Endwert
(X^2-X-2)/(X+1)	-1000	-1
P*(X^2-2)/(X+2)	-1	1000

Rufen Sie nun in der grafischen Darstellung den Markierungspunkt *Parametersteuerung* auf und verändern Sie P schrittweise, so können Sie am Bild nachvollziehen, dass für P = 3 beide Funktionen auch für x = -1 ineinander übergehen. Damit ist der Parameter t = 3 gefunden, wobei natürlich noch ein korrekter Nachweis der Stetigkeit auf dem Papier als exakter mathematischer Beweis zu führen ist.

3.12 Quadratische Funktionen

Dieser Programmteil unterstützt die Untersuchung quadratischer Funktionen und Gleichungen, evtl. auch eines Gleichungssystems aus bis zu drei quadratischen Gleichungen. Nach der wahlweisen Eingabe der Parameter A, B und C der allgemeinen Form

$$y = A\,x^2 + B\,x + c$$

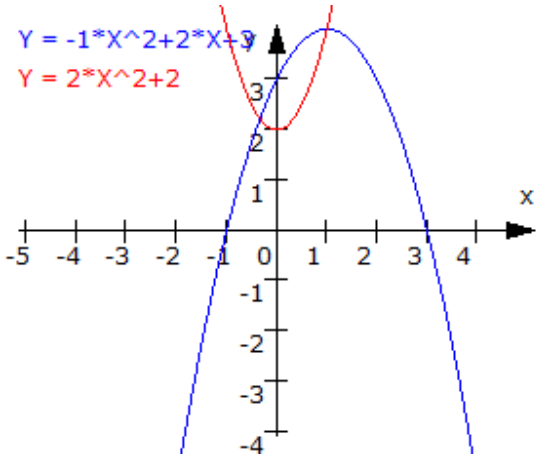
dreier quadratischer Funktionen (*Funktion 1, 2* und *3*) oder der Nullstellen X_1 und X_2 der Funktionen

$$Y = (X - X_1) * (X - X_2)$$

ermittelt das Programm die Lage der zugehörigen Parabeln im kartesischen Koordinatensystem, die Parameter p und q der Normalform, den Wert der Diskriminante, die Scheitelpunktskoordinaten sowie im Fall deren Existenz die Lage der Nullstellen, gegebenenfalls auch die komplexen Nullstellen.
Für die Eingabe kann auch der *Parameter P* verwendet werden. Dessen Wert ist ebenfalls eintragbar.
Besitzt eine der quadratischen Funktionen genau zwei verschiedene Nullstellen, berechnet das Programm zusätzlich den Flächeninhalt der von der Parabel und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

Beachten Sie bitte: Die Eingabe von Nullstellen wird nur dann ausgewertet, wenn die jeweiligen Parametereingabefelder dieser Funktion leer sind.

Außerdem werden die paarweisen Schnittpunkte der drei Graphen berechnet, also die Lösung des zugehörigen quadratischen Gleichungssystems, sowie die jeweils zwei Tangentenanstiege in den Schnittpunkten.
Gleichzeitig werden die drei Funktionen programmintern als erste bis dritte Funktion gesetzt, sodass Sie diese wieder über den Schalter *Darstellung* im Koordinatensystem veranschaulichen können.



Wählen Sie für den Koeffizienten A den Wert 0, reduzieren Sie die quadratische Funktion auf eine lineare. Auch in diesem Fall werden die Untersuchungen durchgeführt. Somit können Sie auch ein lineares Gleichungssystem 2. oder sogar 3. Grades

rechnerisch und grafisch lösen.

Beispiel: Für die Funktionen $y = -x^2 + 2x + 3$ und $y = 2x^2 - 2$ ermittelt das Programm für Funktion1

- nach unten geöffnete Parabel
- Parameter p = -2 und q = -3; Scheitelpunkt bei (1;4), Diskriminante 4
- Nullstellen bei 3 und -1 sowie einen Wertebereich von $(-\infty; 4)$
- Fläche zwischen Parabel und x-Achse mit 10,67 Flächeneinheiten

und für Funktion 2

- nach oben geöffnete Parabel
- Parameter p = 0 und q = -1; Scheitelpunkt bei (0;-2), Diskriminante 1
- Nullstellen bei 1 und -1 sowie einen Wertebereich von $(-2; \infty)$
- Fläche zwischen Parabel und x-Achse mit 2,67 Flächeneinheiten

Zusätzlich schneiden sich die Graphen beider Funktionen in den Punkten (1,67;3,56) und (-1;0) mit den Tangentenanstiegen -1,33 , 6,67 sowie 4 und -4. Für die zwei linearen Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = x - 2$ (für beide Funktionen ist A = 0) erhalten Sie neben den Steigungen, den Schnittpunkten mit der y-Achse und den Nullstellen als gemeinsamen Schnittpunkt (-5;-7). Eine Kontrolle über die grafische Darstellung verdeutlicht das Ergebnis.

Sobald Sie Parameter einer der Funktionen eingeben, zeigt Ihnen das Programm im rechten Teil eine grafische Vorschau an. Eine bessere grafische Darstellung erhalten Sie über den Schalter *Darstellung.*

3.13 Potenzfunktion

In diesem Teilprogramm können gleichzeitig vier Potenzfunktionen $y = x^n$ mit Exponenten von -5 bis 5 dargestellt werden.

Über die Rollbalken stellen Sie die jeweiligen Exponenten ein. Zur Darstellung des Funktionsverlaufs markieren Sie bitte das entsprechende Auswahlfeld.
Zu beachten ist hier, dass diese Funktionen für nicht ganzzahlige negative Exponenten nur für nicht negative Argumente x definiert sind.

Anhand der Auswahlfelder f(x), f(x) + x, 1/f(x) und Wurzel(f(x)) können Sie einstellen, ob die Potenzfunktionen mit einem weiteren Term verknüpft werden.

3.14 Ganzrationale Funktionen

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

wird im Allgemeinen durch n + 1 bekannte Stücke eindeutig bestimmt. Diese können sein:

- Koeffizienten a_i der Definitionsgleichung

- Punkte P(x;y) der Funktion, der 1. oder 2.Ableitung

Spezialfälle dieser Funktionen sind z.B. lineare, quadratische und kubische Funktionen.

Eine beliebte Aufgabe ist es, aus den gegebenen Stücken die Funktionsgleichung zu entwickeln – mitunter auch als "Umgekehrte Kurvendiskussion" bezeichnet. In diesem Unterprogramm können Sie bekannte Koeffizienten, Koordinaten von Punkten der ganzrationalen Funktion sowie bekannte Anstiege und 2. Ableitungen an gewissen Abszissen eingeben.
Da das Programm stets eine Funktion 5. Grades ermittelt, müssen Sie genau sechs Größen verwenden. Ist eine Funktion geringeren als 5. Grades gesucht, so setzen Sie die Koeffizienten a_5, a_4, ... auf Null.

Kann eine eindeutige Gleichung der Funktion ermittelt werden, wird diese nach Betätigung des Schalters *Berechnung* als Funktionsgleichung angezeigt. Haben Sie zu viel oder zu wenig oder sich widersprechende Größen eingegeben, meldet Ihnen das Programm entweder *Keine eindeutige Lösung !* oder *Zu viele bekannte Größen !*
Zum Beispiel widersprechen sich die Eingaben für $a_0 = 0$ und eines Funktionspunkts mit f(0) = 1 usw.

Neben der grafischen Darstellung ist eine Weiterbearbeitung in den Unterprogrammen *Funktionsdefinition*, *Funktionsdiskussion* und *Integralrechnung* möglich, wo diese ermittelte Gleichung als jeweils 1. Funktion verfügbar ist.
Ein weiteres Teilprogramm, dass sich mit einer umgekehrten Kurvendiskussion beschäftigt, finden Sie unter *Polynomkonstruktion*.

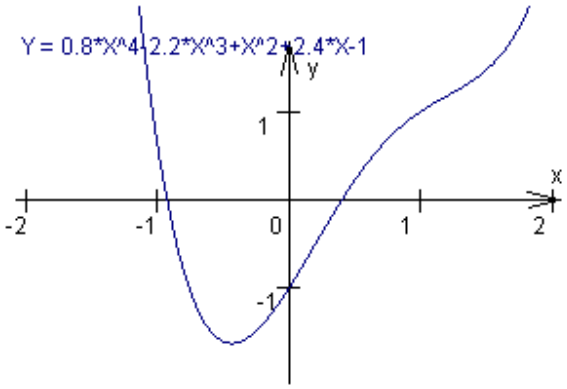
Beispiel: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, welche durch die Punkte (1;1), (2;3) und (0;-1) verläuft. Bekannt ist weiterhin der Koeffizient a(2) = 1 und dass der Anstieg der Funktion an der Stelle x = 1 , d.h. 45°, beträgt, d.h. die 1.Ableitung y' = 1 ist. Damit sind folgende Eingaben vorzunehmen:

1. In Spalte "a": "a5" 0
2. "a2" 1
3. "a0" -1
4. In den Spalten "x y": 2 TAB 3 1 TAB 1
5. In den Spalten "x y' ": 1 TAB 1

Nach Auswahl des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm eine ganzrationale Funktion 4.Grades:

$f(x) = 0{,}8*X^4-2{,}2*X^3+X^2+2{,}4*X-1.$

Eine Kontrolle anhand der grafischen Darstellung oder der Wertetabelle bestätigt, dass die ermittelte Funktion die eingegebenen Bedingungen erfüllt. In den Zeilen *Nullstellen*, *Extrema* und *Wendestellen* werden die Abszissen dieser Stellen für die berechnete Funktion angezeigt.



In diesem Teilprogramm ermittelt das Programm ausschließlich Lösungen im Zahlbereich der reellen Zahlen. Suchen Sie die komplexen Lösungen der zu einer Funktion gehörenden ganzrationalen Gleichung, so nutzen Sie bitte das Teilprogramm *Ganzrationale Gleichung.* Verwenden Sie eine ganzrationale Funktion 5. Grades, so wird eine der eventuell vorhandenen Nullstellen iterativ ermittelt.
In dem genannten Beispiel erhalten Sie:

Nullstellen	-0,92987	0,4001
Extrempunkte	(-0,43685 | -1,645)	
Wendepunkte	(0,17338 | -0,565)	(1,20162 | 1,179)

In der grafischen Darstellung wird die berechnete Funktion dargestellt. Zusätzlich können Sie besondere Punkte hervorheben. Markieren Sie das Feld *Darstellung von gegebenen Punkten*, kennzeichnet das Programm die als bekannte Größen eingegebenen Punkte. Wählen Sie das Feld *berechnete Punkte zeichnen*, werden die ermittelten reellwertigen Null-, Extrem- und Wendestellen im Graphen durch kleine Kreise hervorgehoben.

Beachten Sie bitte: Aufgrund umfangreicher Berechnungen und interner Rundung von Zwischenergebnissen können die ermittelten Werte von den exakten um einen geringen Prozentsatz abweichen. Außerdem wird die iterativ bestimmte Nullstelle einer Funktion 5. Grades nur im Intervall [-20 ; 20] gesucht; d.h., existiert wenigstens eine Nullstelle in diesem Intervall, so werden alle Nullstellen ermittelt.

Zusätzlich zu den genannten Punkten ermittelt das Programm auch die Funktionsgleichungen der 1. bis 3. Ableitung sowie eine Stammfunktion, deren Funktionsverlauf durch den Koordinatenursprung geht. Diese Funktionen können Sie wahlweise darstellen.

Werden mindestens zwei Nullstellen berechnet, können Inhalte von Flächen bestimmt werden, die von der Abszissenachse und dem Funktionsgraphen vollständig eingeschlossen werden. Für das genannte Beispiel erhalten Sie für die Fläche von -0,93 bis 0,4 einen Inhalt von -1,3764 Einheiten, d.h., die Fläche befindet sich unterhalb der x-Achse.
Markieren Sie das Feld *Flächen unter der Kurve*, so wird die Fläche unter der Kurve farbig hervorgehoben, vorausgesetzt, die Funktion besitzt mindestens zwei

Nullstellen.

Die eingegebenen Tabellenwerte können Sie auf der Festplatte speichern und zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden.

3.15 Polynomkonstruktion

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

wird im Allgemeinen durch n + 1 bekannte Stücke eindeutig bestimmt. Diese können sein, außer Koeffizienten a_i, auch Punkte sein:

- Punkte P(x;y) auf der Funktion
- Nullstellenpunkte der Funktion
- Extrempunkte, d.h. die 1. Ableitung wird Null
- Wendepunkte, d.h. die 2.Ableitung wird Null
- Punkte mit mehreren dieser Eigenschaften

Während Sie im Teilprogramm *Ganzrationale Funktion* derartige Funktionen ermitteln und auswerten können, steht in diesem Teilprogramm die grafische Ermittlung im Vordergrund.

Klicken Sie dazu im dargestellten Koordinatensystem maximal 5 mal mit der linken Maustaste, so werden fünf Punkte eingetragen, die die gesuchte Funktion beschreiben. Diese ganzrationale Funktion wird auch sofort ermittelt und gezeichnet.
Um „normale" Punkte in Punkte mit speziellen Eigenschaften umzuwandeln, klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen gezeichneten Punkt. Im erscheinenden Pop-Up-Menü können Sie nun wählen, welcher Art der Punkt sein soll; evtl. können Sie ihn auch löschen. Zur Auswahl stehen:

- Punkte auf der Funktion, Nullstellenpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Extrempunkte und Wendepunkte, die gleichzeitig Nullstelle darstellen, Horizontalwendepunkte und solche, die auch Nullstelle sind.

Wählen Sie einen der Menüeinträge wird die Punkteigenschaft geändert und die Funktion neu ermittelt.
Die Koordinaten der Punkte können Sie entweder durch linken Mausklick und -bewegung verändern oder indem Sie in die Punkttabelle die Koordinaten eintragen und mit *Koordinaten übernehmen* abschließen.
Für Wendepunkte, die nicht gleichzeitig Nullstelle und Horizontalwendepunkte sind, können Sie die Wendetangenten einzeichnen lassen. Markieren Sie dazu das entsprechende Auswahlfeld.
Wählen Sie *Koeffizienten als Bruch*, ermittelt das Programm die Koeffizienten des Polynoms in der Form gemeiner Brüche.

Beachten Sie bitte, dass dieses Teilprogramm Polynome bis maximal 8.Grades bestimmt. D.h., es können außer 5 Punkten maximal 4 zusätzliche Eigenschaften,

wie Extrempunkt oder Wendepunkt, gewählt werden.

3.16 Horner-Schema

Ein besonderes, aber leider oft vergessenes Hilfsmittel zur Berechnung der Funktions- und Ableitungswerte ganzrationaler Funktionen n-ten Grades der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

ist das von William George Horner 1819 wiederentdeckte Horner-Schema. Der chinesische Mathematiker Liu Hui verwendete das Schema schon im Jahr 260.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
	+	+		+	+
	$a_n x_0$	$b_{n-1} x_0$	...	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
a_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	$b_0 = f(x_0)$

Das Horner-Schema kann zur Berechnung des Funktionswertes $f(x_0)$, der Division von f(x) durch den Linearfaktor $(x-x_0)$, zur Bestimmung der Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ ... und zur Taylor-Entwicklung von f an der Stelle x_0 genutzt werden.
Im Beispiel bilden b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1 die Koeffizienten des Polynoms $f(x) / (x - x_0)$.

In diesem Teilprogramm können Sie ein derartiges Horner-Schema für ganzrationale Funktionen bis 5. Grad berechnen lassen. Tragen Sie dazu die Koeffizienten und die zu untersuchende Stelle x_0 ein und bestätigen Sie mit *Berechnung*. Mit dem Schalter *Darstellung* wird die entsprechende Funktion grafisch dargestellt. Zusätzlich können Sie auch die 1. bis 4.Ableitung zeichnen lassen.

3.17 Polynom

Nach dem Gaußschen Hauptsatz für ganzrationale Gleichungen bzw. Funktionen reeller Zahlen lässt sich jedes Polynom der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

sofern es eine reelle Lösung x_0 besitzt (Nullstelle der Funktion), durch Abspalten des Binoms $(x - x_0)$ auf ein Polynom n-1-ten Grad reduzieren. Die dazu notwendige Polynomdivision kann man auf die Division beliebiger Polynome erweitern.
In diesem Unterprogramm geben Sie zwei ganzrationale Terme A(x) und B(x) maximal 8. Grades ein.

Beachten Sie bitte, dass ausschließlich mit ganzen Zahlen als Koeffizienten gerechnet wird.

Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm die Summe beider Polynome, deren Produkt sowie die Quotienten A(x) / B(x) und B(x) / A(x).

Für die Division erhalten Sie das abspaltbare ganzrationale Polynom sowie das verbleibende Restpolynom der Division.
Darüber hinaus berechnet das Programm auch den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) beider Polynome.
Beachten Sie bitte, dass bei großen Koeffizienten oder hohen Polynomgraden nicht immer ein ggT ≠ 1 gefunden wird, da während der Rechnung sehr große Zwischenergebnisse entstehen können.
Zusätzlich berechnet das Programm eine Darstellung der Form a A(x) = b B(x) + C(x) bzw. a B(x) = b A(x) + C(x).

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten können mitunter in Linearfaktoren der Form ax + b, quadratische Faktoren $ax^2 + bx + c$ sowie kubische Terme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ zerlegt werden.
Eine derartige Faktorisierung eines Polynoms wird hier sowohl für A(x) als auch B(x) durchgeführt, wobei zu beachten ist, dass auch hier für große Koeffizienten oder Polynome höheren Grades die Ermittlung der Faktoren nicht immer sicher ist.

Beispiel: Für die Ausgangspolynome $A(x) = 4x^3+5x^2+2x$ und $B(x) = -16x^5+4x^4+26x^3+33x^2+22x+8$ ergibt sich

Summe	$-16x^5+4x^4+30x^3+38x^2+24x+8$
Produkt	$-64x^8-64x^7+92x^6+270x^5+305x^4+208x^3+84x^2+16x$
Quotient A/B	0
Quotient B/A	$-4x^2+6x+1$
Restpolynom	$16x^2+20x+8$
ggT	$-4x^2-5x-2$
kgV	$16x^6-4x^5-26x^4-33x^3-22x^2-8x$
Faktordarstellung	$1\ A(x) = 0\ B(x) + 4x^3+5x^2+2x$
	$64\ B(x) = (-256x^2+384x+64)\ A(x) + 1024x^2+1280x+512$
Faktorisierung	$A(x) = x(4x^2+5x+2)$
	$B(x) = (4x^2+5x+2)(-4x^3+6x^2+x+4)$

Klicken Sie auf den Schalter ***B***, so bestimmt das Programm zufällig zwei Polynome A(x) und B(x) mit einem von 1 verschiedenen ggT und trägt deren Koeffizienten ein.

Jedes der Polynome – Ausgangs- und Ergebnispolynome – Summe, Produkt, Quotient und ggT-Funktion kann grafisch als Funktion interpretiert und dargestellt werden. Markieren Sie dazu die Einträge in der Liste *Darstellung*. Betätigen Sie den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm die gewählten Funktionen. (siehe *Grafische Darstellung*)

Außerdem zeigt Ihnen das Programm bei jeder Änderung eine erste Vorschaugrafik, an der Sie das spätere Ergebnis ablesen können. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) klicken Sie auf den Schalter *Darstellung.*

3.18 Interaktives Polynom

Im Teilprogramm *Polynom* können Sie für maximal acht gegebene Punkte eine Interpolationsfunktion ermitteln und darstellen. Dazu wird eine ganzrationale Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

bestimmt.
In diesem Teilprogramm können Sie eine solche Funktion auf der grafischen Ebene erzeugen.

Innerhalb der grafischen Darstellung klicken Sie maximal acht Stützstellen an. Das Programm übernimmt die Koordinaten des gewählten Punktes und fügt diese als Stützstelle des Polynoms hinzu. Kann das Programm eine neue Funktion bestimmen – sprich ist diese nicht zu komplex bzw. wurde keine schon festgelegte Abszisse erneut gewählt – wird dieses Polynom sofort dargestellt.

Eine weitere interessante Untersuchungsmöglichkeit des Polynoms besteht nun in der Möglichkeit, schon festgelegte Punkte innerhalb der grafischen Darstellung zu verschieben. Klicken Sie dazu eine der durch einen Kreis dargestellten Stützstellen an und verschieben Sie diese mit gedrückt gehaltener Maustaste, wird sofort der veränderte Funktionsverlauf ermittelt und dargestellt. Nach dem Loslassen der Maustaste wird die Stützstelle an der jeweils aktuellen Position belassen. Während des Ziehens der Maus können Sie die stetige Veränderung des Graphen beobachten.
Starten Sie die Simulation, so wird, je nach Wahl, die Lage des Punktes A oder B waagerecht bzw. senkrecht verändert.

3.19 Gebrochenrationale Funktion

Bei einer Funktionsdiskussion gebrochenrationaler Funktionen treten mitunter äußerst umfangreiche Ableitungen auf, sodass diese als zu komplex ausgewiesen werden und nicht verfügbar sind.

In derartigen Fällen sollten Sie dieses Unterprogramm nutzen, zumal Sie hier neben einer allgemeinen Diskussion der Funktion zusätzlich die Asymptote, Unstetigkeitsstellen und Polgeraden ermittelt bekommen. Geben Sie zuerst die reellen Koeffizienten a, b, ..., h der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^3 + fx^2 + gx + h}$$

ein, wobei Sie beachten müssen, dass der Zähler nicht vollständig 0 und der Nenner mindestens eine lineare Funktion sein muss. Andernfalls erhalten Sie die Fehlermeldung: *Keine echt-gebrochenrationale Funktion*

Nach Bestätigung mit *RETURN* oder dem Schalter *Berechnung* ermittelt das Programm

- die Funktionsgleichung der 1., 2. und 3.Ableitung

- Nullstellen und Unstetigkeitsstellen (Pol, Loch)
- Extrempunkte und Wendepunkte mit Wendetangenten
- Gleichung der Asymptoten bzw. Hüllkurve

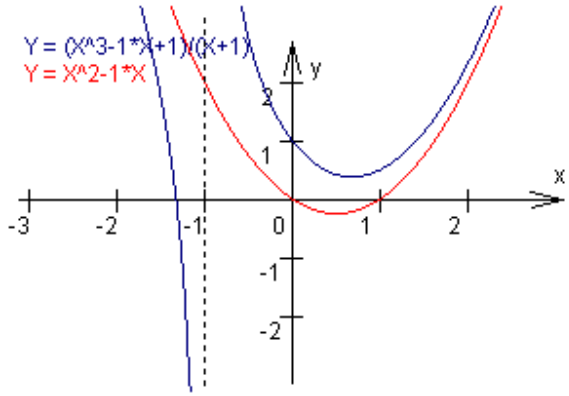
Mit dem Schalter *Darstellung* können Sie die Funktion, deren Ableitungen sowie die Asymptote darstellen. Dabei werden die Ableitungen, die Asymptote bzw. Polgeraden nur gezeichnet, wenn deren Einträge in der Liste *Darstellung ...* markiert sind. Zusätzlich können Sie sich analog auch die Zähler- und Nennerfunktion einzeln darstellen lassen.

Die numerischen Ergebnisse werden mittels Lösungsformel für ganzrationale Funktionen 4.Grades exakt berechnet. Sollte die Zählerfunktion der 2. Ableitung Grad 6 überschreiten; im Fall das kein Kürzen mit "X" möglich ist; erfolgt die Bestimmung der Wendepunkte über Näherungsverfahren.

Nicht in jedem Fall ist garantiert, dass Sie eine vollständige Lösung erhalten. In diesem Fall greifen Sie auf die Unterprogramme *Funktionsdiskussion* oder *Näherungsverfahren* zurück. Ist die Zählerfunktion der 2. Ableitung mit dem Polynom "X" kürzbar, d.h., bei X = 0 liegt ein Wendepunkt vor, wird diese in wenigen Fällen nicht angezeigt.
Zu beachten ist bitte auch, dass bei sehr komplexen Ableitungsfunktionen die evtl. berechneten Wendetangenten mit einem gewissen Fehler behaftet sein können.

Wollen Sie Ihre Ergebnisse auf einen Drucker ausgeben, wählen Sie den Schalter *Daten drucken*. Das Programm druckt für Ihre Funktion:

- Funktionsgleichung
- 1.Ableitung, 2.Ableitung, 3.Ableitung und Asymptotengleichung (Hüllkurve)
- Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte
- Unstetigkeiten



Als Asymptoten werden auftretende Polgeraden nur angezeigt, wenn Sie das entsprechende Auswahlfeld markiert haben. Unter einer Hüllkurve versteht man eine Kurve, gegen die sich die Funktion im Unendlichen annähert. Ist diese Kurve eine Gerade (lineare Funktion), liegt eine Asymptote im eigentlichen Sinne vor.

Abbildung: Y=(X^3-X+1)/(X+1) mit Hüllkurve und Polgerade bei x = -1

Für das Beispiel ermittelt das Programm eine Nullstelle bei -1,32472, einen Extrempunkt bei (0,67765 ; 0,3776) – in diesem Fall ein lokales Minimum – einen Wendepunkt an der Stelle x = -2, eine Polstelle für x = -1 und eine Parabel Y = X²-X als Hüllkurve (in der Darstellung die rote Kurve).

Unterhalb der Eingabezeilen bildet das Programm bei jeder Änderung eine erste Vorschaugrafik ab, die Ihnen das spätere Ergebnis zeigt. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) klicken Sie auf den Schalter *Darstellung.*

3.20 Sinusfunktion, Kosinusfunktion, Tangensfunktion und Hyperbelfunktionen

Sinusfunktion

In dem Teilprogramm *Sinusfunktion* können Sie die vier Parameter der Funktionsgleichung

$$Y = A \, SIN \, (BX + C) + D$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Parameter A bewirkt wieder eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse, Parameter D eine vertikale Verschiebung. Der Parameter B verändert die Länge der kleinsten Periode der Sinusfunktion und Parameter C eine Verschiebung längs der Abszisse. Als *Ergebnisse* ermittelt das Programm den Wertebereich, die kleinste Periode der Funktion und zwei Nullstellen im Bereich [0; kleinste Periode].

Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter A, B, C oder D kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf den Funktionsgraphen demonstriert.
Auf Wunsch können Sie sich auch die *1. Ableitung* anzeigen lassen und auf diese Weise deren Änderung bei unterschiedlichen Ausgangsfunktionen nachvollziehen.

Tangensfunktion

Im zweiten Teilprogramm *Tangensfunktion* können Sie die vier Parameter der Funktionsgleichung

$$Y = A \, TAN \, (BX + C) + D$$

verändern und damit auch deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Parameter A bewirkt wieder eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse, Parameter D eine vertikale Verschiebung. Der Parameter B verändert die Länge der kleinsten Periode der Tangensfunktion und Parameter C eine Verschiebung längs der Abszisse.

Beachten Sie bitte, dass der Funktionsverlauf bei Werten von A nahe 0 bzw. bei großen Werten für B extreme Anstiege besitzt und nicht immer vollständig korrekt dargestellt werden kann.

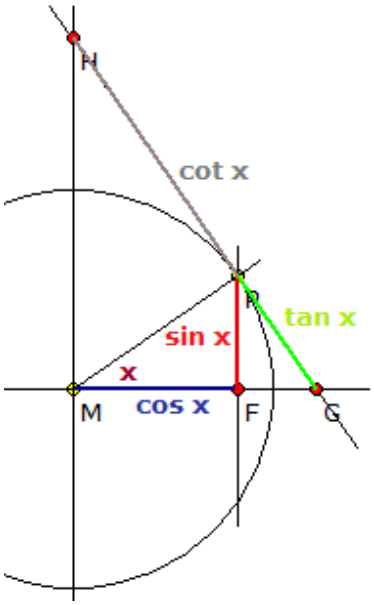
Hyperbelsinusfunktion

Im dritten Teilprogramm zeichnet das Programm die entsprechenden Hyperbelsinus- und Hyperbelkosinusfunktionen

$$Y = A \, SINH \, (BX + C) + D$$

Auch hier können Sie die 4 Parameter verändern und deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Existieren Nullstellen, so werden diese berechnet.

3.21 Winkelfunktionen am Einheitskreis



Zur Erklärung der Definition und Namensgebung der trigonometrischen Funktionen kann ein Dreieck am Einheitskreis verwendet werden.

Der freie Schenkel des Winkels x schneidet den Kreisbogen im Punkt P und verläuft durch den Koordinatenursprung.
Im Punkt P werde die Tangente an den Kreis konstruiert, die die x-Achse im Punkt G und die Ordinatenachse im Punkt H schneidet. Das Lot von P auf die x-Achse habe den Fußpunkt F.
Ist der Kreis ein Einheitskreis, so findet man die trigonometrischen Funktionswerte dann bei folgenden Strecken:

Sinus sin x … y-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich AF
Kosinus cos x … x-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich OF
Tangens tan x … Tangentenstück von P zur x-Achse, d.h. gleich PG
Kotangens cot x … Tangentenstück von P zur y-Achse, d.h. gleich PH
Sekans sec x … x-Schnittstelle der Tangente, d.h. MG
Kosekans csc x … y-Schnittstelle der Tangente, d.h. MH

In diesem Teilprogramm wird genau diese Definition simuliert.
Verändern Sie die Größe des Winkels und wählen Sie die anzuzeigende trigonometrische Funktion aus.

3.22 Sinus, Kosinus und Tangens

Trigonometrische Funktionen wie Sinus, Kosinus und Tangens werden zur Beschreibung periodischer Prozesse, Schwingungen, Wellen etc. benötigt. Insbesondere in der Physik können Kreisbewegungen praktisch nur durch trigonometrische Terme gekennzeichnet werden. Darüber hinaus werden trigonometrische Beziehungen in der Schulmathematik auch besonders für die Berechnung von Dreiecken usw. benötigt.

Sinus und Kosinus

Zur Konstruktion dieser Funktionen kann man sich folgendes Modell vorstellen: Eine kreisförmige Scheibe mit einem Radius von einer Einheit rotiert gleichförmig, d.h. mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit, um ihren Mittelpunkt. Ein Punkt

P der Peripherie wird gekennzeichnet. Zu jedem Zeitpunkt wird der Drehwinkel φ dieses Punktes P gemessen und von ihm das Lot auf eine waagerechte und eine senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt der Scheibe gefällt.
Die Länge des Lotes auf die waagerechte Achse ist per Definition der Sinus des Winkels φ, die Länge des Lotes auf die Senkrechte ist der Kosinus von φ. Trägt man nun den Winkel φ längs einer Abszisse und den Sinus bzw. Kosinus längs der Ordinate ab, erhält man die bekannten Funktionsbilder.

In diesem Teilprogramm konstruiert das Programm aus einer derartigen Kreisbewegung die zwei wichtigsten trigonometrischen Funktionen. Mathematisch gesehen, wird der Sinus und Kosinus am Einheitskreis konstruiert.

Den Drehwinkel φ können Sie am Rollbalken *Winkel* einstellen. Das Programm ermittelt daraufhin sofort die Lage des Punktes P auf dem Kreis sowie die Position in den Funktionsgraphen des Sinus und Kosinus. Die Funktionswerte der drei wichtigsten trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens werden angezeigt.

Wählen Sie den Schalter *Simulation,* beginnt das Programm mit einer gleichförmigen Kreisbewegung des Punktes auf dem Einheitskreis. Parallel dazu werden die zugehörigen Punkte in den Funktionsbildern markiert. Die Geschwindigkeit der Bewegung können Sie am Rollbalken neben dem *Simulation*-Schalter verändern.
Erneutes Anklicken des Schalters beendet die Simulation.

Tangens

Markieren Sie an den Auswahlfeldern Tangens, so wird die Tangensfunktion konstruiert:
Während der Rotation des Punktes wird der Drehwinkel φ dieses Punktes P gemessen und vom Mittelpunkt der Scheibe durch den Punkt P eine Geraden gezogen. Diese Gerade schneidet eine Senkrechte durch den Punkt (1;0) zur waagerechten Achse. Der Ordinatenwert des Schnittpunktes gibt den Zahlenwert des Tangens des Winkels φ an. Da die Senkrechte eine Tangente des Kreises bildet, wurde der Name "Tangens" geprägt.

3.23 Addition von Sinusfunktionen

Zur Konstruktion einer Sinusfunktion wird im Allgemeinen das Modell des Einheitskreises genutzt:
Eine kreisförmige Scheibe mit einem Radius von einer Einheit rotiert dabei gleichförmig, d.h. mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit, um ihren Mittelpunkt. Ein Punkt P der Peripherie wird gekennzeichnet. Zu jedem Zeitpunkt wird der Drehwinkel φ dieses Punktes P gemessen und von ihm das Lot auf eine waagerechte und eine senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt der Scheibe gefällt.
Die Länge des Lotes auf die waagerechte Achse ist per Definition der Sinus des

Winkels φ, die Länge des Lotes auf die Senkrechte ist der Kosinus von φ. Trägt man nun den Winkel φ längs einer Abszisse und den Sinus längs der Ordinate ab, erhält man das bekannte Bild der Sinusfunktion.

Dieses Modell kann auf die Addition mehrerer Sinusfunktionen erweitert werden. Dazu wird um den rotierenden Punkt P ein weiterer Punkt gedreht, um diesen noch einer usw. Der äußerste Punkt beschreibt dann mit seiner Ordinate die Funktion, die durch Addition aller Drehbewegungen entsteht.

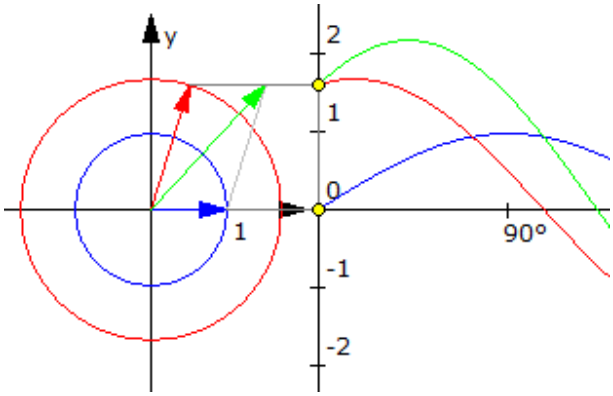
In diesem Teilprogramm wird so die Addition mehrerer Sinusfunktionen durchgeführt. Dabei werden die Radien der aufeinanderfolgenden Kreise i.A. verringert sowie die Drehgeschwindigkeiten; ein Maß für die Periode der Einzelfunktion; verändert.

Acht vordefinierte Fälle können an den Auswahlfeldern eingestellt werden. Am Rollbalken *Termzahl* wird die Anzahl der Einzelbewegungen gewählt. Läuft die *Simulation* ab, so werden die Drehbewegungen durchgeführt und die Gesamtfunktion gezeichnet.

Für den Fall y = sin x + 1/2 sin 2x + 1/3 sin 3x + ... kann man so auch die Entstehung einer Fourier-Summe nachvollziehen. Wird die Termzahl kontinuierlich erhöht, passt sich die Gesamtfunktion immer besser einer Dreieckskurve an.

3.24 Zeigerdiagramm

Ein Zeigerdiagramm ein geometrisches Hilfsmittel der Schwingungslehre.
Es stellt sinusförmige Schwingungen mit Amplitude und Phase als Kreisbewegungen dar und ermöglicht die Addition zweier phasenverschobener Sinuskurven und die Ermittlung von Amplitude und Phase der Summenfunktion. Oft werden die Zeiger (Vektoren) in der komplexen Gaußschen Zahlenebene gezeichnet.



Zwei Schwingungen, die sich im Phasenwinkel um $\Delta\phi$ unterscheiden, stellt man im Zeigerdiagramm durch zwei Zeiger dar, die um eben diesen Winkel gegeneinander verdreht sind.
Die rote Schwingung läuft der blauen in der Abbildung um $\Delta\phi$ voraus. Zur Ermittlung der Summenfunktion werden beide Zeiger vektoriell addiert.

Für zwei Schwingungen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Amplitude, eine Sinuskurve jedoch phasenverschoben, ergibt sich

$$f(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2) = a \sin(\omega t + \phi)$$

mit $a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos \phi_2)}$

$\tan \phi = (a_2 \sin \phi_2)/(a_1 + a_2 \cos \phi_2)$

In diesem Teilprogramm wird ein Zeigerdiagramm für zwei Sinuskurven gezeichnet. Deren *Amplituden* sowie die *Phasenverschiebung* der zweiten Kurve stellen Sie an den Rollbalken ein.

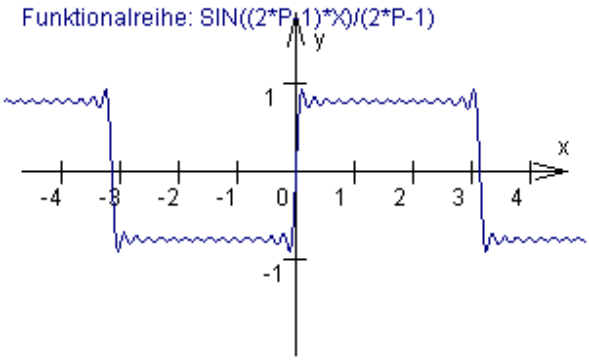
Klicken Sie auf den Schalter *Simulation* wird ein Punkt auf dem Kreis der ersten Schwingung bewegt und die entsprechenden Kurven gezeichnet. Markieren Sie das Feld *Summenfunktion*, ermittelt das Programm die oben beschriebene Überlagerung beider Schwingungen und stellt diese dar.

Wählen Sie das Feld *Differenzfunktion* aus, so werden außerdem auch für die Differenz der beiden Sinusfunktionen die Amplitude und Phasenverschiebung bestimmt und die Funktion eingezeichnet.

3.25 Funktionalreihen

Nach der Eingabe einer *Funktionsgleichung* Y =, die den Parameter P enthalten muss, können Sie den Graphen der Summe der Einzelfunktionen für einen veränderlichen Parameter P zeichnen lassen.
Das Ergebnis ist dabei als eine Überlagerung einzelner Funktionen zu verstehen. Liegt also eine Funktion y = f(x,p) vor, so versteht man unter einer Funktionalreihe den Ausdruck

r(x) = f(x,1) + f(x,2) + ... + f(x,n)



wobei n die Anzahl der zur Gesamtfunktion zusammenzufügenden Teilfunktionen charakterisiert. Diese Überlagerung von Funktionen nennt man auch Harmonische Synthese.

Zum Beispiel ergibt die Summe der Funktionen Y = SIN((2 * P-1) * X) / (2 * P - 1) bei wachsendem oberen Wert n von P eine immer bessere Annäherung an eine Rechteckkurve.

Abbildung: "Rechteckkurve", Summe von 15 Teilfunktionen, P=1,2,...,15, d.h. Q=15

Des Weiteren ergibt z.B. SIN(P * X) / P eine Sägezahnkurve oder COS((2 * P - 1) * X) / (2 * P - 1)² eine Dreieckskurve.
Die Summationsgrenzen tragen Sie unter *Anfangsparameter P* und *Endparameter P* ein, wobei nur ganze Zahlen zugelassen sind und die untere Grenze kleiner als die obere sein sollte.

Zu beachten ist, dass eine untere Grenze von 0 nur dann ausgewertet wird, wenn die Ausgangsfunktion tatsächlich auch für P = 0 definiert ist.

Zur grafischen Darstellung schalten Sie mit dem Schalter *Darstellung*. Die Größe des dargestellten Intervalls können Sie über drei Schalter verändern. Vordefinierte Funktionalreihen finden Sie in der *Bibliothek*-Liste. Klicken Sie dort auf eine vorhandene Funktionsgleichung einer Funktionalreihe, wird diese automatisch übernommen.

Wünschen Sie die Darstellung der *Ausgangsfunktion*, so markieren Sie das entsprechende Feld. Außerdem können Sie auch alle Zwischennäherungen zeichnen lassen.

Beachten Sie aber, dass diese Darstellung bei einem etwas langsameren Prozessor einige Sekunden benötigen kann. Aus diesem Grund ist der Höchstwert für *Endparameter P* auch auf 200 begrenzt.

3.26 Fourier-Summen

In diesem Teilprogramm können Sie verschiedene trigonometrische Funktionen zu einer Funktion addieren und so eine Summe im Sinne von Fourier erzeugen und grafisch darstellen.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{5} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Die elf Parameter a_k und b_k stellen Sie an den Rollbalken ein. Das Programm ermittelt daraufhin sofort die Summe der Funktionen und stellt diese dar.

Die Darstellung können Sie über die Schalter im linken Fensterteil steuern, indem Sie das Darstellungsintervall verändern. Während der *Simulation*, wird der Parameter, den Sie in der aufklappbaren Liste ausgewählt haben, kontinuierlich erhöht bzw. verringert.

3.27 Fourier-Analyse einer Schwingung

In der Mathematik werden komplexe Funktionen mitunter durch Summen trigonometrischer Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt. Derartige Fourier-Reihen spielen in der technischen Mechanik, der Elektrotechnik oder der Signaltheorie eine sehr wichtige Rolle.

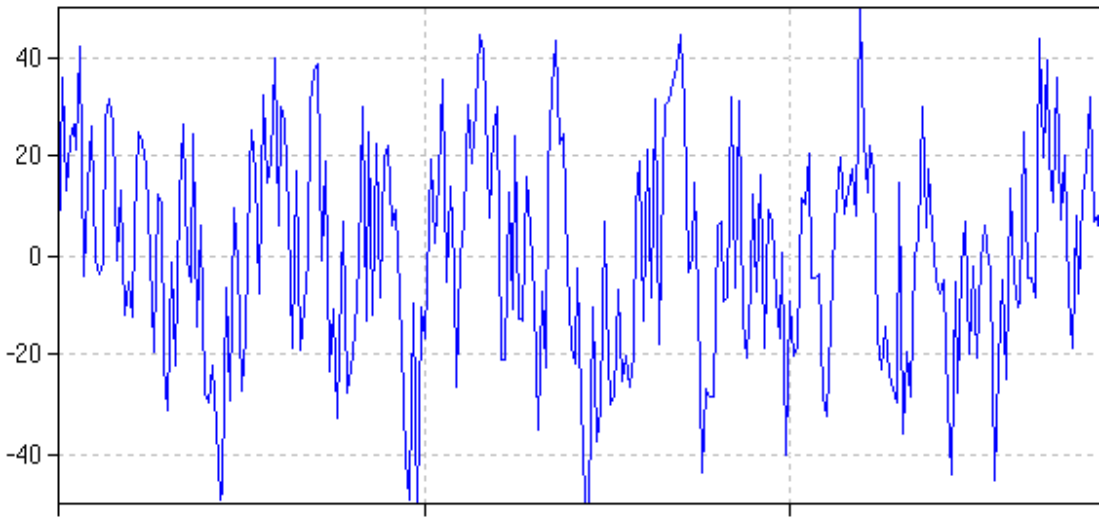
Auch der umgekehrte Fall ist von großer Bedeutung. Liegt eine Schwingung vor, von der nicht bekannt ist, aus welchen harmonischen Einzelschwingungen sie aufgebaut ist, so hilft die Fourier-Analyse. Besonders anspruchsvoll wird die Aufgabe, wenn die Schwingung noch mit einem Rauschen überlagert ist und der Verlauf der Schwingung nur mit einzelnen diskreten Messwerten angegeben ist. Konkret soll für eine Funktion f(x) eine Darstellung der Form

$$f(x) = a_1 \sin(x\, t_1) + a_2 \sin(x\, t_2) + \ldots + a_n \sin(x\, t_n)$$

gefunden werden. Dabei sind zum einen die Koeffizienten a_i zu bestimmen, noch

wichtiger sind aber die die Frequenz charakterisierenden Parameter f_i.

Bestimmung der Koeffizienten wird die diskrete Fourier-Transformation genutzt. Die Anzahl der dafür notwendigen Rechenoperationen ist aber von der Ordnung N^2 abhängig, d.h., die doppelte Anzahl diskreter Punkte vervierfacht den Aufwand. Aus diesem Grund wird zu einem speziellen Verfahren der Ordnung N log N gegriffen, der sogenannten schnellen Fourier-Transformation (FFT, Fast Fourier Transformation).



Zur In diesem Teilprogramm wird eine Schwingungsüberlagerung analysiert. An den Rollbalken können Sie das Eingangssignal aus vier Schwingungen zusammensetzen. Je Schwingung können Sie die *Frequenz* und die *Intensität* einstellen. Zusätzlich besteht auch die Möglichkeit, am Rollbalken *Rauschen* eine zufällige Überlagerung mit Störungen zu erzeugen.

Das Programm übernimmt die einzelnen Punkte der grafischen Veranschaulichung und führt eine schnelle Fourier-Transformation durch.
Im *Frequenzdiagramm* wird das Ergebnis demonstriert. Je nach Anzahl der Ausgangsschwingungen werden Sie eine bis vier Spitzen sehen. Diese liegen kann bei der Frequenz der gesuchten Schwingungen. An der Höhe der Spitzen kann darüber hinaus die Intensität abgelesen werden.
Im linken Fensterteil finden Sie eine Tabelle mit den y-Werten der analysierten Schwingung. Diese Tabelle können Sie speichern, einzelne Werte darin verändern und sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden.

Prinzipiell können Sie auch andere Dateien mit Messwerten laden und untersuchen. An diese Dateien werden folgende Forderungen gestellt:

- Die Datei ist eine Textdatei
- Jeder y-Wert befindet sich in einer eigenen Zeile
- Rationale Werte enthalten einen Dezimalpunkt, kein Dezimalkomma

Insgesamt werden maximal 512 Werte gelesen. Überschreiten diese einen absoluten Betrag von 50, so werden alle Werte angepasst, d.h. auf das Intervall [-50;50] reduziert.

3.28 Schnelle Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist ein grundlegendes Verfahren der Signalverarbeitung. Durch die Fourier-Transformation können Signale in eine mathematische Darstellung überführt werden.
Ein besonders schnelles Verfahren ist die schnelle Fourier-Transformation (engl. Fast Fourier Transform - FFT), die eine Zeitkomplexität von nur O(n log(n)) hat.

Sind gewisse Funktionswerte f(x), z.B. Messwerte, gegeben, so ermittelt die schnelle Fourier-Transformation Fourierkoeffizienten a_i und b_i, so dass die Funktion

$$g(x) = a_0/2 + \Sigma_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

die Ausgangswerte bestmöglich annähert.

In diesem Teilprogramm werden derartige Koeffizienten für vorgegebene Daten berechnet.
Die Ausgangsdaten wählen Sie in der Liste *Beispiele* aus. Die Anzahl der Stützstellen ist gleich 2^n, wobei die *Ordnung* n ebenfalls gewählt werden kann. Mit dem Schalter Berechnung zeichnet das Programm die Stützstellen in das Koordinatensystem, listet die Stützstellen auf und berechnet die Fourierkoeffizienten der Daten.

3.29 Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, usw.

Exponentialfunktion

Im Teilprogramm *Exponentialfunktion* können Sie die drei Parameter der Funktionsgleichung

$$y = a^{b(x+d)} + c$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Die Basis a beeinflusst unmittelbar die Steigung der Funktion, der Parameter b eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse und der Parameter c eine Verschiebung längs der Ordinatenachse.
Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter A, B, C oder D kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf den Funktionsgraphen demonstriert.

Markieren Sie das Feld *Umkehrfunktion*, so wird für die Funktion ihre

Umkehrfunktion

$$y = 1/b \log_a (x-c) - d$$

zusätzlich eingezeichnet. Exponentialfunktion und die Umkehrfunktion liegen stets spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten, d.h. symmetrisch zur linearen Funktion y = x. Auch diese kann dargestellt werden.

Logarithmusfunktion

Im Teilprogramm *Logarithmusfunktion* können Sie die drei Parameter der Funktionsgleichung

$$y = \log_a (b (x+d)) + c$$

verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen. Die Basis a beeinflusst unmittelbar die Steigung der Funktion, der Parameter b eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung y-Achse und der Parameter c eine Verschiebung längs der Ordinatenachse.
Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter A, B, C oder D kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf den Funktionsgraphen demonstriert.

Markieren Sie das Feld *Umkehrfunktion*, so wird für die Funktion ihre Umkehrfunktion

$$y = 1/b\ a^{(x-c)} - d$$

zusätzlich eingezeichnet. Logarithmusfunktion und die Umkehrfunktion liegen stets spiegelsymmetrisch zur linearen Funktion y = x. Auch diese wird gezeichnet.

Wurzelfunktion

Im Teilprogramm *Wurzelfunktion* können Sie die drei Parameter a, b und c der Funktionsgleichung

$$y = \sqrt{(ax^2 + bx + c)}$$

an den Rollbalken verändern und so deren Wirkung auf den Kurvenverlauf untersuchen.
Unter anderem erhalten Sie so Kurvenverläufe, die aus Parabel- oder Hyperbelstücken oder auch aus Halbkreisen bestehen. Beachten Sie bitte, dass Wurzelfunktionen nur definiert sind, wenn der Radikand – hier $ax^2 + bx + c$ – größer oder gleich Null ist.

Zusätzlich können Sie über die Auswahlfelder wählen, ob nur die Funktion f(x) gezeichnet wird oder die Funktion y = f(x) + x. Außerdem kann die *1. Ableitung* dargestellt werden.
Markieren Sie das Feld Funktion $f(x)^2$, so zeichnet das Programm die quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

d.h. die Funktion des Radikanden. Nur für Argumente x, für die diese Funktion nichtnegative Funktionswerte besitzt, ist die Wurzelfunktion definiert.

3.30 Beispiele für Stammfunktionen

Im Teilprogramm Integralrechnung kann das Programm für spezielle Funktionsklassen analytisch die Stammfunktion ermitteln.
Für die Mehrheit der Funktionen gilt aber, dass entweder gar keine explizite Stammfunktion existiert oder aber deren Bestimmung schwierig ist und die Kenntnis einer Vielzahl von Integrationsmethoden voraussetzt.

In dem Programmteil *Funktionen* | *Beispiele für Stammfunktionen* finden Sie als Ergänzung zum Lexikon eine Zusammenstellung von typischen Beispielen zu dieser Bestimmung von Stammfunktionen.
Wählen Sie in der Liste ein Beispiel aus, zeigt Ihnen das Programm eine Möglichkeit, das gesuchte unbestimmte Integral zu berechnen. Als Beispiele wurden solche Funktionen gewählt, die in der Sekundarstufe II eventuell doch einmal integriert werden müssen, wenngleich im Normalfall im Gymnasium nur relativ einfache Beispiele auftreten.

Für die Ermittlung der Stammfunktionen werden in den Beispielen vorwiegend partielle Integration (Produktintegration) sowie lineare aber auch nichtlineare Substitution genutzt.

Unterhalb der Beispielliste finden Sie eine Vorschaugrafik, die neben der Ausgangsfunktion auch deren Stammfunktion anzeigt. Wählen Sie den Schalter *Darstellung*, erhalten Sie in den der grafischen Darstellung mit all ihren Möglichkeiten erneut die Ausgangsfunktion und die zugehörige Stammfunktion. Für die Stammfunktion wird die Integrationskonstante C auf Null gesetzt.

3.31 Krümmungsfunktion

Dieses Teilprogramm ergänzt die Programmteile *Tangente an Funktion, Steigungsfunktion* und *Sekante an Funktion*.

Sind eine beliebige mathematische Funktion f(x) sowie zwei verschiedene Punkte A und B auf dieser Funktion gegeben, so kann man durch A und B eine Gerade legen, die eine Sekante der Funktion darstellt. Der Anstieg m_1 dieser Sekante kann leicht über die Koordinaten der beiden Punkte berechnet werden. Wiederholt man dieses Verfahren von B aus für einen gleich weit liegenden Punkt C, so ergibt sich ein zweiter Anstieg m_2. Die Differenz $d = (m_2 - m_1) / h$
mit $h = x_B - x_A$ beschreibt dann ist erste Näherung die Form der Krümmung der Funktion. Die Zuordnung $x_A \rightarrow d$ ist selbst Funktion, die Funktion von f(x), die das Krümmungsverhalten charakterisiert. Geht nun h gegen 0, so strebt diese Funktion gegen die 2.Ableitung von f(x).

In diesem Teilprogramm werden nach der Eingabe einer Funktion und der Festlegung des x-Wertes des Punktes A die Krümmungsfunktion und evtl. die Tangente gezeichnet. Die Lage des Punktes können Sie auch mittels Maus

verändern.
Prinzipiell können alle Funktionen benutzt werden, dennoch sollten Sie in diesem Teilprogramm auf unstetige Funktionen möglichst verzichten.

Unter der Krümmungsfunktion wird nun die Funktion $k(x) = f''(x) / \sqrt{(1+f'(x)^2)^3}$ verstanden. Deren Funktionswert gibt gerade das Reziproke des Radius vom Krümmungskreis an.

3.32 Logistisches und beschränktes Wachstum

Ein Wachstum heißt beschränkt mit einer Schranke S, wenn die Änderungsrate B(t + 1) - B(t) nicht konstant, sondern proportional zum Sättigungsmanko S-B(t) ist, d.h.

$$B(t+1) = B(t) + k\,(S - B(t))$$

Ein Wachstum wird logistisch mit der Schranke S, die Kapazitätsgrenze, genannt, wenn die Änderungsrate B(t + 1) - B(t) ebenfalls nicht konstant, sondern proportional zum Produkt aus dem vorhandenen Bestand und dem Sättigungsmanko B(t) (S - B(t)) ist.

$$B(t+1) = B(t) + k\,B(t)\,(S - B(t))$$

Sehr viele Wachstumsprozesse in der Natur sind logistisch. Zum Beispiel kann ein Baum auf Grund der Gravitation nur eine maximale Höhe erreichen (Wasser- und Nährstofftransport) andererseits wächst er am Anfang nur sehr langsam, bei einer gewissen Größe deutlich schneller um nach einiger Zeit sich langsam seiner Maximalhöhe anzunähern.
Mathematisch gesehen, beschreibt die Differentialgleichung

$$B'(t) = k\,B(t)\,(S - B(t))$$

das logistische Wachstum. Diese logistischen Gleichung wurde 1837 von dem belgischen Mathematiker Pierre François Verhulst eingeführt. Für praktische Zwecke wird gern auf die oben genannte rekursive Form zurückgegriffen.

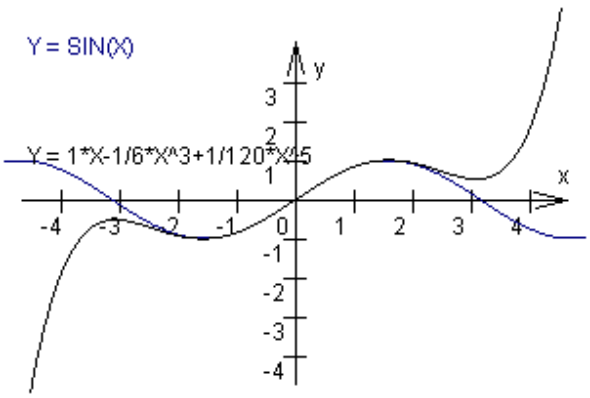
In diesem Teilprogramm wird ein logistisches Wachstum berechnet und die entsprechende Funktion gezeichnet. Dazu geben Sie die Anfangsgröße B(0), die Schranke S und einen Wert B(t) nach einer gewissen, verstrichenen Zeit t ein. Das Programm ermittelt den Wachstumsfaktor k, berechnet einige Werte für veränderliche Zeiten t bis zum Erreichen von mindestens 99 % der Schranke und zeichnet die Wachstumsfunktion. Diese Funktion hat eine S-Form und wird Sigmoide genannt.
Markieren Sie das Feld *diskrete Werte* wird k unter der Vorraussetzung eines spontanen Wachstums am Ende der Zeitperiode aus den ersten zwei B(0) und B(1) ermittelt und die weiteren Werte als farbige Punkte in das Koordinatensystem eingezeichnet.

Voreingestellt ist die Untersuchung des logistischen Wachstums. An den Auswahlfeldern können Sie auch auf rein *beschränktes Wachstum* umstellen. In

diesem Fall wird die Schranke S fast immer später erreicht. Hier findet man am Anfang ein starkes, später ein schwaches Wachstum.

3.33 Taylorentwicklung, Potenzreihen

Taylor-Entwicklung



Mitunter ist es notwendig, beliebige Funktionen durch ganzrationale Funktionen zu nähern. Insbesondere gilt dies, wenn analytisch nicht integrierbare Funktionen integriert oder verschiedene transzendente Funktionen, wie z.B. Sinus und Kosinus, schnell und einfach berechnet werden sollen. Die Taylorsche Funktionsentwicklung ermöglicht die schrittweise Ermittlung einer Näherungsfunktion.

Liegt eine anzunähernde Funktion f(x) vor, welche hinreichend oft differenzierbar sein muss, so wählt man eine reelle Entwicklungsstelle x_0 und ermittelt den Term:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)/1! \, (x - x_0) + f''(x_0)/2! \, (x - x_0)^2 + f'''(x_0)/4! \, (x - x_0)^3 + \ldots$$

Je mehr Summanden verwendet werden, desto besser nähert die Taylor-Funktion t(x) die Ausgangsfunktion f(x) an.

Für die eingegebene *Funktion f(x)* und die reelle *Entwicklungsstelle x* (Voreinstellung ist x = 0) werden in diesem Teilprogramm die ersten Taylor-Näherungen gebildet. Betätigen Sie dazu den Schalter *Berechnung*.
Alle gefundenen Näherungen werden in die Liste eingetragen. Das Programm stellt die Auswahl automatisch auf die höchste berechnete Näherung. Gelingt es dem Programm nicht, ein Näherungspolynom zu finden, wird t(x) = 0 angezeigt.

Abbildung: Y=SIN(X) und deren 5.Taylor-Entwicklung

Über die Güte der erzielten Näherung können Sie sich in der grafischen Darstellung (Schalter *Darstellung,* siehe Grafische Darstellung*)* informieren.
Je besser die Taylor-Funktion die Funktion f(x) annähert, desto größer ist das Intervall, in dem beide Funktionsgraphen praktisch "übereinander" liegen.
Zusätzlich bietet Ihnen das Programm die Möglichkeit, die Abweichung der Näherungsfunktion von der Zielfunktion zu berechnen.

Haben Sie eine Funktion eingegeben und eine Taylor-Funktion gewählt, so berechnet das Programm nach Betätigung des Schalters *Vergleich* eine Wertetabelle, die das Argument, den korrekten Funktionswert und die Differenz

f(x) - t(x) enthält. Den Anfangswert der Tabelle tragen Sie unter *A* = ein, das Tabellenende unter *B* = und die Tabellenschrittweite unter *dX* =.

Beachten Sie bitte, dass das Teilprogramm nur die Argumente in der Wertetabelle anzeigt, für die sowohl die Funktion f(x) als auch die Taylor-Funktion t(x) definiert und im Programm berechenbar sind.

Beispiel: Für Y = SIN(X) gelingt es dem Programm, für die Entwicklungsstelle x_0 = 0 die 20. Taylor-Näherung zu berechnen; für Y = X*SIN(X) an der Stelle x_0 = 1 immerhin noch die sechste:

Entwicklung	Funktion Y=
1.	0,8415+1,3818*(X-1)
2.	0,8415+1,3818*(X-1)+0,2391/2*(X-1)^2
3.	0,8415+1,3818*(X-1)+0,2391/2*(X-1)^2-3,0647/6*(X-1)^3
4.	0,8415+1,3818*(X-1)+0,2391/2*(X-1)^2-3,0647/6*(X-1)^3-1,3197/24*(X-1)^4
5.	0,8415+1,3818*(X-1)+0,2391/2*(X-1)^2-3,0647/6*(X-1)^3-1,3197/24*(X-1)^4 +4,7477/120*(X-1)^5
6.	0,8415+1,3818*(X-1)+0,2391/2*(X-1)^2-3,0647/6*(X-1)^3-1,3197/24*(X-1)^4 +4,7477/120*(X-1)^5+2,4003/720*(X-1)^6

Starten Sie einen Vergleich der beiden Funktionen, so können Sie der Tabelle entnehmen, dass die Abweichung der Näherung von der Funktion Y = X * SIN(X) im Intervall [0,7 ; 1,3] kleiner als 1/1000 ist. Möchten Sie eine noch bessere Näherung, so wählen Sie eine der vordefinierten Entwicklungen von X * SIN(X) (siehe weiter unten: "Potenzreihen"). Für die beste Näherung erreichen Sie dann im Intervall [-3,8 ; 4,2] kleiner als 0,001.
Hinweis: Parameterhaltige Funktionen können Sie hier nicht "Taylor"-entwickeln.

Potenzreihen

In diesem Teilprogramm können Sie für wichtige Funktionen schon berechnete Näherungsfunktionen nutzen.
Diese Näherungen sind ebenso Taylor-Entwicklungen, die in der Literatur auch Potenzreihen genannt werden. Die Entwicklungsstelle ist, sofern die Funktion für x = 0 definiert ist, immer x0 = 0 – in wenigen Ausnahmen x0 = 1. Die vorbereiteten Funktionen sind:

- Trigonometrische Funktionen SIN(X), SIN^2(X), SIN^3(X), SIN^4(X), SIN(X)+COS(2*X), COS(X), COS^2(X), COS^3(X), COS^4(X), TAN(X), COT(X), X*COT(X), X*SIN(X), X/SIN(X), 1/COS(X)
- Arkusfunktionen ARCCOS(X), ARCSIN(X), ARCTAN(X)
- Hyperbelfunktionen SINH(X), COSH(X), TANH(X), X*SINH(X)

- Gebrochenrationale Funktionen 1/(1+X), 1/(1-X), 1/(1+X^2)
- Exponentialfunktionen EXP(X), EXP(-X), X/(EXP(X)-1), X*EXP(X)
- Logarithmusfunktionen LN[(1+X)/(1-X)], LN(1+X)
- Wurzelfunktionen √(1+X)

Wählen Sie in der Listbox *Potenzreihen* eine Funktion aus, so trägt das Programm die gespeicherten Näherungsfunktionen in die obere Auswahlbox ein. Auch hier können Sie diese Näherungen über den Schalter *Darstellung* grafisch darstellen oder eine Wertetabelle zum Vergleich mit der ursprünglichen Funktion berechnen.

3.34 Taylorentwicklung

Im 2.Teilprogramm zur Taylorentwicklung können Sie vordefinierte Funktionen gemeinsam mit ihren ersten Taylorentwicklungen in ein Koordinatensystem einzeichnen lassen.
Im Allgemeinen wird unter einer Taylorfunktion einer anzunähernden Funktion f(x), welche hinreichend oft differenzierbar sein muss, an einer reellen Entwicklungsstelle x_0 der Term

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)/1! (x - x_0) + f''(x_0)/2! (x - x_0)^2 + f'''(x_0)/3! (x - x_0)^3 + ...$$

verstanden. In diesem Teilprogramm wird $x_0 = 0$ festgelegt, so dass die Taylorfunktion t(x) die Form

$$t(x) = f(0) + f'(0)/1! x + f''(0)/2! x^2 + f'''(0)/3! x^3 + ...$$

besitzt.
Je mehr Summanden verwendet werden, desto besser nähert die Taylor-Funktion t(x) die Ausgangsfunktion f(x) an. D.h. erhöhen Sie den Wert bei Taylorfunktion, so können Sie nachvollziehen, wie sich die Näherungsfunktion in der Umgebung von x = 0 immer besser der Funktion f(x) anschmiegt.

Die vordefinierten Funktionen sind:

- Trigonometrische Funktionen SIN(X), SIN^2(X), SIN^3(X), SIN^4(X), SIN(X)+COS(2*X), COS(X), COS^2(X), COS^3(X), COS^4(X), TAN(X), COT(X), X*COT(X), X*SIN(X), X/SIN(X), 1/COS(X)
- Arkusfunktionen ARCCOS(X), ARCSIN(X), ARCTAN(X)
- Hyperbelfunktionen SINH(X), COSH(X), TANH(X), X*SINH(X)
- Gebrochenrationale Funktionen 1/(1+X), 1/(1-X), 1/(1+X^2)
- Exponentialfunktionen EXP(X), EXP(-X), X/(EXP(X)-1), X*EXP(X)
- Logarithmusfunktionen LN[(1+X)/(1-X)], LN(1+X)
- Wurzelfunktionen √(1+X)

Wählen Sie in der Funktionsliste eine der Funktionen aus, werden diese und ihre Taylorfunktionen gezeichnet.

3.35 Zylinderfunktionen

Grundlage für die Lösung der Besselschen Differenzialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

sind die sogenannten Zylinderfunktionen oder Besselschen Funktionen.

Für ganzzahlige n ist neben der Bessel-Funktion erster Gattung J_n

$$J_n(x) = \Sigma\ (-1)^n\ (x/2)^{2m+n} / [m!(m+n)!]$$

die Bessel-Funktion zweiter Gattung Y_n, auch Weber-Funktion oder Neumann-Funktion genannt, die zweite, linear unabhängige Lösung.

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} (J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)) / \sin (p\pi)$$

Tritt eine Bessel-Funktion nur mit rein imaginären Zahlen auf, so spricht man von modifizierten Bessel-Funktionen.

$$I_n(x) = i^{-n}\ J_n(ix)$$

ist die modifizierte Bessel-Funktion n-ter Ordnung. Sie löst die Differenzialgleichung

$$x^2\ y'' + x\ y' - (x^2 + n^2)\ y = 0$$

Eine zweite Lösung für diese Differenzialgleichung ist

$$K_n(x) = \lim_{p\to n} \pi/2\ (I_p(x) - I_{-p}(x)) / \sin (px)$$

die auch MacDonald-Funktion genannt wird.

In diesem Teilprogramm werden die Graphen dieser Zylinderfunktionen gezeichnet. An dem Rollbalken stellen Sie den *Grad n* der Funktion ein, an den Auswahlfeldern, welche die vier Funktionen gezeichnet werden soll.
Markieren Sie Anzeige 0...n, so zeichnet das Programm alle Zylinderfunktionen des gewählten Typs vom Grad 0 bis zu eingestellten Grad n.

3.36 Inversion einer Funktion

Zu den interessantesten Operationen an mathematischen Objekten gehört die Inversion am Kreis. Während Sie in den mehreren Teilprogrammen Punkte, Geraden, Kreise usw. invertieren können, ist dies auch für komplexere Punktmengen, wie zum Beispiel Funktionen, möglich. Die dabei entstehenden invertieren Kurven haben zum Teil ein verblüffendes Aussehen.

Zunächst muss die zu untersuchende Funktionsgleichung eingegeben werden. Die Größen des Kreises, d.h. die Lage des Mittelpunktes und die Größe des Radius, tragen Sie ebenfalls in die Eingabezeilen ein. Zusätzlich können Sie den Kreismittelpunkt (kleiner gelber Kreis) auch mit der Maus verschieben.

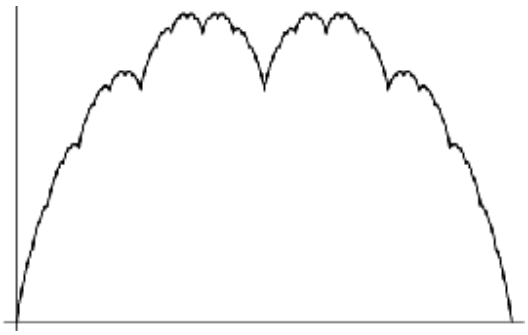
Die Größe des Darstellungsintervalls steuern Sie über den entsprechenden Schalter wie gewohnt. Klicken Sie auf den Schalter *Animation,* so wird für parameterhaltige Funktionen erneut die Größe des Parameters P kontinuierlich verändert. Ob P steigt oder sinkt, können Sie an den zwei kleinen Pfeilschaltern auswählen, ebenso die Stärke der Änderung Δ.
Alternativ kann auch der Inversionskreis waagerecht bzw. senkrecht im

Koordinatenkreis verschoben werden. Wählen Sie dies an den Auswahlfeldern.

Wie schon erwähnt, haben die invertierten Kurven eine sehr merkwürdige Gestalt. Testen Sie zum Beispiel die einfache quadratische Normalparabel $y = x^2$, so erhalten Sie für einen Inversionskreis in Mittelpunktslage eine der Neillschen Parabel ähnliche Kurve. Verschieben Sie den Kreismittelpunkt auf der y-Achse, so entstehen geschlossene Kurven in "Tropfen"- oder "Herz"-Form. Verschieben Sie längs der x-Achse, ergeben sich weitere schöne Gebilde.

3.37 Nichtdifferenzierbare Funktion

Besitzt der Graph einer Funktion an einer Stelle einen Knick, so ist sie dort nicht differenzierbar. Zum Beispiel ist die Betragsfunktion zwar stetig, aber am Knickpunkt nicht differenzierbar.
Erstaunlich ist, dass es auch Funktionen gibt, die stetig, aber in keinem einzigen Punkt differenzierbar sind.



Die erste derartige Funktion entsteht als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen Dreiecksfunktionen (Sägezahnfunktionen). Bezeichnet man mit g die Funktion, die im Intervall [-1/2 , 1/2] mit der Betragsfunktion |x| übereinstimmt und mit Periode 1 für alle reellen Zahlen fortgesetzt wird, so besitzt ihr Graph an allen ganzzahligen Vielfachen von 1/2 einen Knick, besteht aber sonst nur aus Geradenstücken.
Die Abbildung von g(2x)/2 ist ebenfalls eine Dreiecksfunktion, nur mit halb so großer Periode. Ganz allgemein sind die $g(2^n x)/2^n$ alle vom gleichen Typ, jedoch mit kleiner werdender Periode.
Die aus diesen Funktionen gebildete eine Reihe

$$f(x) = g(x) + g(2x)/2 + g(4x)/4 + g(8x)/8 + ...$$

stellt selbst eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion dar.

In diesem Teilprogramm können Sie diese Funktion näherungsweise zeichnen lassen.
Am Rollbalken stellen Sie die *Anzahl* der zusätzlichen Summanden zur Anfangsfunktion ein. Das Programm zeichnet rot die zu summierende Funktion und blau das Gesamtresultat.
Im Grenzwert ergibt sich eine Funktion, die Blanc-mange Kurve genannt wurde, und erstmals 1903 von Takagi und 1930 von van der Waerden untersucht wurde. Diese seltsame Funktion besitzt fraktale Eigenschaften.

Eine ähnliche Konstruktion ergibt sich, wenn von der Sinusfunktion oder Kosinusfunktion ausgegangen wird. An den Markierungsfeldern wählen Sie diese Startfunktionen aus.
Ermittelt wird dann u.a. die Reihe

$f(x) = \sin(x) + 2^{-1/2} \sin(2x) + 2^{-1} \sin(2^2 x) + 2^{-3/2} \sin(2^3 x) + 2^{-2} \sin(2^4 x) + \ldots$

mit dem Ergebnis einer zwar stetigen aber an keiner Stelle differenzierbaren Funktion.

3.38 Zahlenfolgen

Zahlenfolgen der Form $A_k = F(K)$ und $B_k = F(K) - k$ ist Element der ganzen Zahlen – können Sie in diesem Unterprogramm definieren und untersuchen. Da Zahlenfolgen spezielle Funktionen mit einer Teilmenge der ganzen Zahlen als Definitionsbereich sind, gelten für die Definition der Gleichungen die unter *Implementierte Funktionen* genannten Regeln.

Beispiel: A_k=K/(K+1), A_k=(-1)^K*(K-1)/(2*K) oder B_k=SIN(K)

Beachten Sie bitte, dass das Argument der Zahlenfolge im Programm stets mit dem Buchstaben K gekennzeichnet wird.

Sehr oft besitzt das erste Glied einer Zahlenfolge den Index 1. Die Nummer des ersten Arguments kann im Feld *Nummer des 1. Gliedes* geändert werden.
In der grafischen Darstellung (Schalter *Darstellung*) werden die einzelnen Glieder der Zahlenfolge als Kreise dargestellt.
Darüber hinaus werden der Grenzwert der Folge A_k bzw. B_k ermittelt. Divergiert die Zahlenfolge oder ist der Grenzwert nicht eindeutig zu bestimmen, wird der Wert mit *unbestimmt* ausgewiesen. Geben Sie eine erste und letzte Gliednummer der Zahlenfolge in *Summation von ... bis* für die Partialsummenberechnung an und quittieren Sie mit dem Schalter *Berechnung*, wird die Summierung der Glieder für beide Folgen durchgeführt.

Beispiel: Für $A_k = 1 / K$ ergibt sich als Summierung des 1. bis 100. Gliedes der Wert 5,1874. Aus der gleichzeitig ermittelten Tabelle erhält man für die Summe der ersten 500 Glieder das Ergebnis 6,7928. Im Übrigen divergiert die Partialsummenfolge der Zahlenfolge 1 / K, die sogenannte harmonische Reihe.

Rekursive Definition

Zahlenfolgen können auch rekursiv definiert werden, d.h., ein Glied der Folge wird durch Verknüpfungen mit vorher berechneten Gliedern ermittelt.
Geben Sie in die Zahlenfolgendefinition für A(K) Ausdrücke der Form A(K-1) oder/und A(K-2) ein, so geht das Programm von einer rekursiven Definition aus. Dabei bedeutet A(K-1) das Glied a_{K-1} der Folge, A(K-2) entsprechend a_{K-2}.

Beispiel: Folge der Fibonacci-Zahlen A_k=A(K-1)+A(K-2); Anfangsglieder A(K-1)=1 und A(K-2)=1

Ein reelles Anfangsglied bzw. zwei reelle Anfangsglieder müssen Sie in den Eingabefeldern *A(K-1)* und *A(K-2)* festlegen. Voreinstellung ist jeweils 0. Auch für

eine rekursiv definierte Folge A(K) ermittelt das Programm den Grenzwert und die Partialsumme.

Außerdem können Sie Wertetabellen für die Zahlenfolge A_K und deren unendliche Reihe berechnen. Betätigen Sie dazu den Schalter *Berechnung*.
Daraufhin werden entsprechend Ihrer Wahl (Voreinstellung 500) Glieder der Folge und Reihe ermittelt. Das Programm bricht die Auswertung ab, wenn das Glied der Zahlenfolge nicht definiert ist.

ε-Umgebung

Besitzt die eingegebene Zahlenfolge A_K einen eigentlichen, d.h. reellen Grenzwert g, so wird entsprechend der Festlegung der Größe einer ε-Umgebung das Intervall der Umgebung dargestellt. Der Kurvenverlauf verdeutlicht nun die Tatsache, dass fast alle Glieder der Zahlenfolge in diesem Intervall liegen. Wählen Sie für ε den Wert 0 (Voreinstellung 0,1), wird die Umgebung nicht dargestellt.

Weiterhin bildet das Programm bei jeder Änderung eine erste Vorschaugrafik ab, die Ihnen das spätere Ergebnis zeigt. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) klicken Sie auf den Schalter *Darstellung.*

3.39 Interaktive Zahlenfolge, Eulersche Zahlenfolge

Unter diesem Menüpunkt finden Sie eine spezielle Art von Funktion, eine Zahlenfolge, d.h. der Definitionsbereich ist auf natürliche Zahlen größer als 0 beschränkt.
Erneut können Sie die Parameter A bis D an den Rollbalken verändern. Das Programm zeichnet die ersten Glieder der Zahlenfolge:

$$z(n) = (an + b) / (cn + d)$$

Daneben wird ein eventuell vorhandener Grenzwert der Zahlenfolge bestimmt.

An einem weiteren Rollbalken können Sie eine positive reelle Zahl einstellen. Mit diesem Wert wird eine ε-Umgebung des Grenzwertes gezeichnet und berechnet, ab dem wievielten Glied alle weiteren Zahlenfolgenglieder innerhalb dieser ε-Umgebung liegen.
Während der *Simulation* werden wahlweise die Parameter A, B, C oder D kontinuierlich verändert und so deren Einfluss auf die Folge demonstriert.

Eulersche Zahlenfolge

In diesem Teilprogramm wird der Verlauf der Zahlenfolge

$$z(n) = (1 + a/n)^n$$

dargestellt. Diese Zahlenfolge ist berühmt, da sie für a = 1 als Grenzwert die Eulersche Zahl e besitzt. Allgemein ist der Grenzwert gleich e^a.

Den Parameter a und die Größe der ε-Umgebung können Sie wieder über die

Rollbalken einstellen. Markieren Sie das Feld *ZF (1 + a/n) ^ (n + 1)*, so wird als zweite Zahlenfolge

$$z(n) = (1 + a/n)^{n+1}$$

rot angezeigt. Diese Folge ist für positive a monoton fallend und eine Majorante der Eulerschen Folge. Beide streben gegen den gleichen Grenzwert.

3.40 Spezielle Zahlenfolgen

Arithmetische Zahlenfolgen

Ist in einer Zahlenfolge die Differenz d zweier benachbarter Glieder stets konstant, verschieden 0, so spricht man von einer arithmetischen Zahlenfolge. Arithmetische Zahlenfolgen treten in der Praxis bei einer Vielzahl von Problemen auf.

Ist die Differenz d positiv, ist die Zahlenfolge streng monoton steigend, bei einer negativen Differenz streng monoton fallend. Neben der Differenz d sind das Anfangsglied a_1 und für das n-te Glied der Wert a_n sowie die Partialsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

von besonderer Bedeutung. Für die Folge der Partialsummen, die arithmetische Reihe, existiert kein Grenzwert, wenn die Zahlenfolge selbst unendlich ist.

Drei dieser fünf Größen a_1, a_n, n, d, s_n genügen im Allgemeinen, um die Folge zu beschreiben.
Geben Sie genau drei Werte im unteren Teil des Fensters ein und quittieren Sie mit *Berechnung*, ermittelt das Programm die anderen zwei Größen und trägt die zugehörige Definitionsgleichung unter A(K) ein.

Dabei ist zu beachten, dass nicht in jedem Fall eine Lösung existiert bzw. unter Umständen auch zwei Lösungen bestehen. Insbesondere bei der Bestimmung der Nummer n des Gliedes a_n muss n ganzzahlig sein. Für zwei Fälle

Eingabe der Größen a_1, d und $s_n$bzw. d, a_n und s_n

können zwei Lösungen existieren. Das Programm berechnet beide reellen Lösungen der Nummer n. Sind beide Werte nicht ganzzahlig, erhalten Sie die Meldung, dass keine Lösung existiert. Ist wenigstens ein Wert ganzzahlig, so wird dieser angezeigt.
Außerdem gibt das Programm auch die zweite Lösung für n an, wobei Sie beachten müssen, dass dieses Ergebnis nicht unbedingt ganzzahlig und positiv ist, also in Wirklichkeit keine Lösung der Aufgabe darstellt.

Beispiel: Für $a_1 = 1$ einer Differenz d = -0,4 und das Glied $a_n = -21$ ermittelt dieses Unterprogramm als Nummer des Gliedes n = 56, für die Partialsumme $s_n = -560$ und die Definitionsgleichung $a_k = 1,4 - 0,4\ k$.

Beispiel 2: Für d = 12, $a_n = 13$ und $s_n = -56$ erhalten Sie die Fehlermeldung

Keine eindeutige Lösung!
da für diese Werte keine arithmetische Zahlenfolge existiert – konkret gesagt, existiert kein natürliches n zur Lösung dieser Aufgabe.

Geometrische Zahlenfolgen

In einer geometrischen Zahlenfolge ist der Quotient q (q<>1) zweier benachbarter Glieder konstant, d.h.

$a_n = q\ a_{n-1}$.

Ist der Quotient q positiv haben alle Glieder das Vorzeichen des 1. Gliedes a_1, ist q negativ, ergeben sich alternierende Folgen, d.h. Glieder mit wechselndem Vorzeichen.
Wie bei den arithmetischen Zahlenfolgen sind fünf Größen von Bedeutung: das erste Glied a_1, der Quotient q, das Glied a_n und dessen Nummer n sowie die Partialsumme

$s_n = a_1\ (q^n - 1) / (q-1)$.

Erneut müssen drei der fünf Werte eingegeben werden. Die Bestimmung der restlichen Werte kann zu Exponentialgleichungen oder ganzrationalen Gleichungen n-ten Grades führen und damit sehr anspruchsvoll werden. Das Programm löst alle zehn möglichen Fälle, davon drei iterativ.

In Abhängigkeit von der Eingabe von genau drei der fünf möglichen Größen a(1), a(n), q, n und s(n) ergeben sich die Möglichkeiten:

- Analytisch lösbare Fälle: a_1, q, n | a_1, q, a_n | a_1, q, s_n | a_1, n, a_n | q, n, a_n | q, n, s_n | a_1, a_n, s_n
- Iterativ lösbare Fälle: a_1, n, s_n | q, a_n, s_n | n, a_n, s_n

Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass auch für die analytisch lösbaren Fälle nicht immer eine Lösung existiert. Insbesondere bei negativem Quotienten bzw. bei gerundeten Werten findet das Programm nicht immer eine Lösung.
Im Fall der Eingabe von q, a_n, s_n ermittelt das Programm die beste Näherungslösung für n und daraus a_1.
Für die zwei anderen Näherungslösungen sucht das Programm ein günstiges q und mit diesem den restlichen Wert. Ermittelt das Programm keine zufriedenstellende Lösung, erhalten Sie folgende Meldung: *Keine eindeutige Lösung !*

Beachten Sie bitte, dass das Markierungsfeld *Geometrische Zahlenfolge* ausgewählt ist. Andernfalls interpretiert das Programm Ihre Zahlenangaben als Werte für eine arithmetische Zahlenfolge und berechnet diese.

Erneut ermittelt das Programm die zugehörige Definitionsgleichung der Zahlenfolge und trägt diese unter A(K) ein.

Beispiel: Faltet man theoretisch (!) ein genügend großes Stück Papier von nur a(1) = 0,1 mm Dicke 40 mal, so ergibt die Eingabe n = 41 und der Quotient q =

2 für das 41. Glied 1,0995 · 10^8 km Stärke des gefalteten Papiers, also rund 109 Millionen km Dicke.
Beispiel 2: Für das erste Glied 0,5 und ein 10. Glied a_{10} = 12 bestimmt das Programm einen Quotienten q = 1,4235 sowie die 10. Partialsumme zu 39,1548.

Geometrische Reihe

Die Folge der Partialsummen einer geometrischen Folge – die geometrische Reihe – konvergiert für einen Quotienten, dessen Betrag kleiner 1 ist. Für |q| >= 1 divergiert die Folge, der Grenzwert der Partialsummenfolge, d.h. die Summe der Reihe, ist unbestimmt. Im konvergenten Fall gilt:

$$s_n = a_1 / (1 - q)$$

Existiert die Summe der Reihe, d.h., die Summe hat einen endlichen Wert, und liegt ein lösbarer Fall vor, erhalten Sie auch diesen Wert angezeigt.

Beispiel: Auf ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 wird ein Quadrat mit der halben Seitenlänge gesetzt, darauf ein Quadrat mit nochmals halbierter Seitenlänge usw. usf. Mit a_1 = 1 und dem Quotienten q = 0,5 ergibt sich die maximale Gesamthöhe als Summe der unendlichen Reihe = 2. Dies entspricht gerade der unendlichen Reihe

$$1 + ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 + ... = 2.$$

Beispiel 2: Nach der Legende erbat sich der Erfinder des Schachspiels vom Schah von Persien als Belohnung ein Weizenkorn auf das 1. Feld, 2 Körner auf das 2. Feld, 4 Körner auf das 3. Feld ... 2^{63} Weizenkörner auf das letzte Feld des Schachbretts. Mit a_1 = 1, q = 2 und n = 64 sind dies 1,84467 · 10^{19} Körner oder 1 Billion Tonnen Weizen. So viel wurde in der Geschichte der Menschheit noch nicht an Weizen produziert.

Beachten Sie bitte: Zur Lösung dieses Beispiels müssen genau drei Größen eingegeben werden, also z.B. n = 2, auch wenn dieser Wert von n für die eigentliche Berechnung nicht benötigt wird.

Hinweis: In der Vorschaugrafik wird der Verlauf der Zahlenfolge nur angezeigt, wenn Sie eine derartige vorher berechnet haben.

3.41 Geordnete Paare

Dieses kleine Unterprogramm unterstützt die Darstellung einzelner Punkte in einem Koordinatensystem, d.h. die Darstellung einfacher funktionaler Zusammenhänge, wie diese in kleineren Klassenstufen durchgeführt werden. Nach dem Eintrag der Koordinaten von maximal 80 Punktepaaren und der Auswahl der gewünschten Darstellung

- nur Punkte zeichnen
- Säulen zeichnen
- Punkte miteinander verbinden

- Abbildungspfeile zeichnen
- die Punkte mit Pfeilen verbinden
- Balken zeichnen
- Säulen bezüglich des Mittelwertes der y-Werte zeichnen
- Abbildungspfeile bezüglich des Mittelwertes der y-Werte zeichnen
- Ortsvektoren, d.h. Pfeile beginnend im Ursprung des Koordinatensystems zum eingegebenen Punkt

sowie Betätigung des Schalters *Darstellung*, zeichnet das Programm das entsprechende Bild.
Zusätzlich können Sie die Punkte automatisch beschriften und die *konvexe Hülle* der Punkte zeichnen lassen.
Über die Schalter *Datei speichern* und *Datei laden* können Sie die eingegebenen Koordinaten auf der Festplatte speichern und auf Wunsch zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden. Klicken Sie auf den Schalter ***B***, so trägt das Programm zufällige Werte zum Testen des Teilprogramms in die Tabelle ein. Ein Klick auf den Schalter mit dem roten Kreuz löscht die Tabelle.

Für die Darstellungsmodi *Punkte miteinander verbinden* und *Punkte mit Pfeilen verbinden* ist es mitunter günstig, wenn die Paare in geordneter Reihenfolge vorliegen. Klicken Sie dazu auf den Schalter *nach X sortieren*.

Berechnung der Y-Werte

Tragen Sie in der unteren Eingabezeile einen Funktionsterm f(X) ein und quittieren Sie mit *Y-Werte berechnen*, so ermittelt das Programm für jedes eingetragene Argument X aus dem Definitionsbereich und Funktionswert ein schreibt diesen in die Tabelle.

3.42 Pfeildiagramm

Eine einfache Methode, die Zuordnungen von Elementen zweier Mengen darzustellen, sind Pfeildiagramme.

Die Elemente der Ausgangsmenge oder Urbildmenge werden in einer Menge veranschaulicht, die zugeordneten Elemente der Bildmenge in einer zweiten. Die zueinander gehörenden Paare werden durch Pfeil miteinander verbunden. Hat jedes Element des Urbildbereichs nur ein Bild, so liegt eine eindeutige Abbildung, d.h. eine Funktion vor. Hat zusätzliche jedes Bild nur ein Urbild, so ist die Abbildung eineindeutig und die Funktion umkehrbar.

In diesem Teilprogramm können Sie einfache Pfeildiagramme zeichnen.
Die Wertepaare tragen Sie in die Tabelle ein und quittieren mit *Darstellung*. Dann analysiert das Programm beide Mengen und zeichnet das Diagramm.
Möchten Sie die Lage der Urbilder und Bilder in ihren Mengen verändern, so können Sie diese mit der Maus verschieben.

3.43 Verlauf einer Funktion

In den Teilprogrammen *Funktionsdefinition, Funktionsdiskussion* usw. können Sie innerhalb der grafischen Darstellung der Funktion auch deren Verlauf innerhalb des angezeigten Definitionsbereichs schrittweise untersuchen. Diese Möglichkeit wird im Programmteil *Verlauf einer Funktion* noch erweitert.

Nach dem Start tragen Sie entweder unter *Funktion 1* die Definitionsgleichung ein oder wählen eine in der *Funktionsbibliothek* enthaltene Funktion. Das Programm stellt die Funktion sofort dar. Über die Schalter und können Sie den Definitionsbereich wieder verändern, der mittlere Schalter stellt auf die Ausgangssituation zurück.

Markieren Sie einen der Einträge *Punkt A auf Funktion* oder *Punkt B auf Funktion*, so stellt das Programm auf dem angezeigten Funktionsverlauf zwei Punkte A und B dar, deren Lage Sie nun über die kleinen Pfeilschalter verändern können. Damit besteht die Möglichkeit, den Kurvenverlauf schrittweise zu untersuchen. Beide Punkte können Sie wieder durch Anklicken und Ziehen mit der Maus verschieben. Die Argumente x der zwei Punkte können Sie auch direkt eintragen.

Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die Tangenten bzw. Normalen an den beiden Punkten sowie die Sekante zwischen A und B anzuzeigen und zu berechnen.

Evolute einer Funktion

Die Evolute einer Funktion ist die Kurve aller Mittelpunkte der Krümmungskreise an diese Funktion. Die Tangenten der Evolute sind damit die Normalen der gegebenen Kurve.
Markieren Sie das Feld *Evolute der Funktion*, so zeichnet das Programm genau diese Kurve für Ihre eingegebene Funktion.

Auch in diesem Programmteil können Sie "bewegte" Kurvenverläufe untersuchen. Gestartet wird über den Schalter *Animation.* Die Richtung der Änderung und die Schnelligkeit der Animation stellen Sie über die kleinen Pfeilschalter ein.

3.44 Parametereinfluss auf Funktionen

Liegt eine beliebige Funktion f(x) vor, so können sich deren Eigenschaften, z.B. Nullstellen, Wertebereich usw., durch das Einführen von Parametern verändern. Insbesondere betrachtet man hier vier mögliche Parameter:

1) Verschiebung um a in negativer Abszissenrichtung, d.h. f(x+a)
2) Streckung bzw. Stauchung längs der Abszissenachse, d.h. f(b*x), sowie Spiegelung an der y-Achse für negative Parameter b
3) Verschiebung längs der Ordinatenachse, d.h. f(x)+c
4) Streckung bzw. Stauchung bezüglich der Ordinatenachse, evtl. Spiegelung

an der x-Achse (negatives d), d.h. d*f(x)

Diese vier Fälle können Sie in diesem Programm untersuchen.
Tragen Sie dazu unter *Funktion Y*= die Funktionsgleichung ein. An den Auswahlfeldern stellen Sie ein, welche Größe der entsprechende Parameter haben soll. Voreingestellt sind a = c = 0 und b = d = 0, sodass zuerst keine Veränderung erfolgt.
Insgesamt wird die Funktion y = d (f(bx+a) + c) untersucht.

Wünschen Sie einen direkten Vergleich zur Ausgangsfunktion, so markieren Sie *Ausgangsfunktion.* Mit dem Auswahlfeld *Differenzfunktion* wird zusätzlich die Differenz zwischen aktueller Funktion und Ausgangsfunktion gezeigt.
Klicken Sie auf *Zurücksetzen*, werden alle Parameter auf die Anfangswerte gesetzt.

Beispiel: Nach Eintragen der Funktionsgleichung Y = SIN(X) und die Festlegung der Parameter a = 1 , b = 2 , c = 0,5 und d = 2 ergibt sich eine sinusförmige Kurve, deren Periode halb so groß wie bei y = sin x ist, die auf der x-Achse um 1 Einheit nach links verschoben ist, die doppelt so hoch wie y = sin x ist und außerdem um eine Einheit auf der y-Achse nach oben verschoben wurde.
Der Unterschied zur *Ausgangsfunktion* ist in der graphischen Darstellung deutlich zu sehen.

Zu bemerken ist, dass mit der Verschiebung a = 1 die Lage der Extrema der Ausgangsfunktion y = sin x sich nicht um 1 Einheit verschieben. Durch den Faktor b = 2 tritt zwar eine Halbierung der horizontalen Abstände der Extrempunkt ein, jedoch werden diese auch nur um a/b, d.h. hier um 0,5 verschoben.

Darüber hinaus können Sie den Einfluss der Parameter auch in einer Simulation anzeigen lassen.
Welcher Parameter dabei kontinuierlich verändert wird, wählen Sie an den Auswahlfeldern aus. Die Richtung der Parameteränderung steuern Sie über die kleinen Schalter neben dem Schalter *Animation*, die *Geschwindigkeit* über den Rollbalken.

3.45 Ableitungen von Funktionen

Unter einer Kurven- oder Funktionsdiskussion versteht man in der Mathematik die Untersuchung des Graphen einer Funktion auf dessen Eigenschaften, wie z.B. Nullstellen, lokale Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte), Wendepunkte, Polstellen, Verhalten im Unendlichen usw. Die Ergebnisse einer solchen Kurvendiskussion erleichtern die Anfertigung einer Skizze des Graphen.
Um die Extrempunkte (Hoch- oder Tiefpunkte) einer stetig differenzierbaren Funktion f(x) zu bestimmen, setzt man die erste Ableitung von f(x) gleich Null, das heißt, man berechnet die Lösungsmenge der Gleichung f'(x) = 0. Damit sucht man die Stellen, an denen die Tangenten an f(x) waagerecht zur Abszissenachse verlaufen.

Alle Lösungen x_E dieser Gleichung sind *mögliche* Extremstellen: Damit x_E eine Extremstelle ist, muss dort die Steigung von f(x) notwendig Null sein, es handelt sich also um eine notwendige Bedingung. Diese Tatsache ist jedoch *nicht hinreichend* für das Vorliegen einer Extremstelle. Für die hinreichende Bedingung für Extremstellen muss die zweite Ableitung zusätzlich verschieden Null sein: $f''(x) \neq 0$.

Die Wendepunkte einer differenzierbaren Funktion f(x) sind die Extrempunkte der Ableitungsfunktion f'(x). Man erhält sie, indem man die zweite Ableitung mit Null gleichsetzt, sprich die Lösungsmenge der Gleichung $f''(x) = 0$ berechnet – das heißt, hier verlaufen die Tangenten an die Ableitungsfunktion waagerecht zur x-Achse.
Auch dies ist eine notwendige Bedingung; hinreichend ist, dass zusätzlich die dritte Ableitung ungleich Null ist.

Diese Beziehungen können in diesem Teilprogramm veranschaulicht werden. Tragen Sie zuerst die Funktionsgleichung ein und bestätigen Sie mit dem Schalter *Darstellung*. Das Programm stellt nun nebeneinander die Funktion und deren 1. und 2. Ableitung grafisch dar.
Mit dem Rollfeld bei *x0* können Sie die Lage des Punktes x_0 verändern. Ebenso können Sie im Darstellungsfenster der Ausgangsfunktion die Lage des Punktes auch mit der Maus verschieben. Die entsprechenden Tangenten werden eingezeichnet, wenn Sie das Markierungsfeld aktivieren.

Verschieben Sie x_0 bis in einen lokalen Extrempunkt, so wird die Tangente waagerecht werden und die 1.Ableitung besitzt eine Nullstelle. Außerdem wird die 2.Ableitung verschieden Null sein.
Analog können Sie so auch Wendestellen untersuchen.

Mit dem Schalter *Simulation* wird die Stelle x_0 kontinuierlich verändert. Darüber hinaus können Sie die Darstellungen der drei Funktionen wieder mithilfe einiger Schalter Ihren Wünschen entsprechend anpassen.
Markieren Sie *nur 1.Ableitung anzeigen*, so wird das Koordinatensystem mit der 2.Ableitung ausgeblendet. Entfernen Sie bei der 1. bzw. 2.Ableitung die Markierung des Feldes *Darstellung*, so werden die entsprechenden Funktionen nicht gezeichnet.

3.46 Funktionsermittlung

Obwohl in der mathematischen Schulausbildung durchaus der Eindruck entstehen kann, dass in der Praxis Funktionen gegeben sind, die auf ihre Eigenschaften untersucht werden müssen, so verhält es sich in der Praxis doch oft anders.

Vielmehr liegen einzelne Punkte, z.B. Messwerte, vor und es besteht eben die Aufgabe, die zugehörige Funktion zu finden. Kennt man den prinzipiellen funktionalen Zusammenhang nicht, so nutzt man die Methoden der Interpolation, Kurvenanpassung usw.

Mitunter ist die Funktionsart an sich bekannt, deren Parameter jedoch nicht. Insbesondere bei naturwissenschaftlichen Fragen tritt dies häufiger auf. In diesem Programmteil können Sie eben diese Parameter für 32 verschiedene Funktionstypen bestimmen.

Dazu geben Sie, entsprechend der Parameterzahl, Stützpunkte der Funktion ein. Zum Beispiel benötigen Sie für die Funktion $Y = P\,x^2 + Q\,x + R$ genau drei Punkte, um die Werte von P, Q und R eindeutig zu bestimmen.

Die Eingabe der Punktkoordinaten können Sie entweder über die Tabelle durchführen oder aber die schon gezeichneten Punkte mit der Maus innerhalb des Koordinatensystems verschieben. Das Programm ermittelt daraufhin die gesuchten Parameter und stellt die Funktion dar. Auf diese Weise können Sie auch unmittelbar die Auswirkung verschiedener Stützstellen auf den Kurvenverlauf testen.

Dabei werden Sie außerdem feststellen, dass die Parameter bei bestimmten Funktionsarten nur gewisse Bereiche annehmen können – andernfalls existiert keine Funktion.

Auch in diesem Teilprogramm können Sie eine *Simulation* starten. Je nach Auswahl der Felder *Simulationsrichtung* werden Punkt A, B oder C entweder waagerecht oder senkrecht verschoben. Gelangen die Punkte an einen Fensterrand, so wird die Bewegung umgekehrt.
Während der Simulation können Sie den Einfluss der Punkte auf den Funktionsverlauf deutlich verfolgen. Die Geschwindigkeit der Simulation stellen Sie an dem Rollbalken neben dem Schalter ein.

3.47 Unstetigkeitsstellen

Eine Funktion f(x) heißt an einer Stelle x_0 stetig, wenn zum einen die Funktion an dieser Stelle definiert ist und zum anderen der Grenzwert gegen x_0 existiert und gleich dem Funktionswert ist. Anschaulich könnte man sagen, dass die Funktion immer dann stetig ist, wenn man beim Zeichnen des Funktionsgraphen auf Papier den Stift nicht absetzen muss.

Viele in der Schulmathematik untersuchte Funktionen sind stetig, aber es werden auch Funktionen behandelt, die Unstetigkeitsstellen besitzen. Dies können zum Beispiel Polstellen, Sprünge aber auch Lücken sein. Für diese gilt:

- Lücke, Hebbare Lücke ... die Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert, besitzt aber den Grenzwert $x \to x_0$, d.h. links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich
- Sprung ... die Funktion ist an der Stelle x_0 definiert, jedoch sind die links- und rechtsseitigen Grenzwerte verschieden
- Polstelle ... die Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert und die links- und rechtsseitigen Grenzwerte sind uneigentliche Grenzwerte

Besonders gebrochenrationale Funktionen der Struktur

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) / (x - e)$$

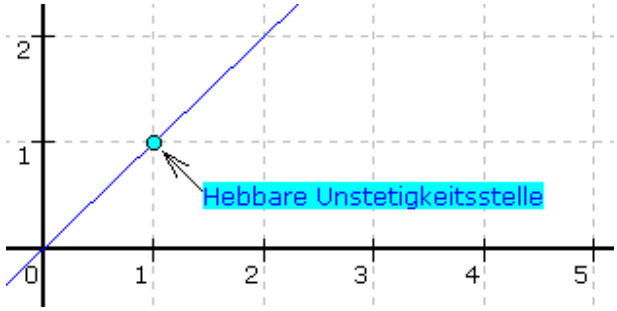
weisen, je nach den Parametern a bis e, solche Unstetigkeitsstellen auf. In diesem Teilprogramm können Sie diese Funktionsgruppe untersuchen.
Setzen Sie a = 0, so reduziert sich die Gleichung auf $f(x) = (bx^2 + cx + d) / (x - e)$.
An den fünf Rollbalken stellen Sie den Wert des jeweiligen Parameters ein. Das Programm zeichnet daraufhin sofort den Funktionsverlauf, ermittelt die Art und Lage der Unstetigkeitsstelle sowie das Verhalten der Funktion im Unendlichen.
Markieren Sie das Feld *quadratischer Nenner*, werden Funktionen der Form $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) / (x - e)^2$ untersucht.

Zusätzlich können Sie sich die Asymptoten bzw. die Hüllkurve der Funktion einzeichnen lassen. Mithilfe der Schalter ⤢ und ⤡ können Sie die Größe des Darstellungsintervalls einstellen.
Eine spezielle Form der Unstetigkeitsstellen sind Lücken im Funktionsgraphen. Diese treten dann ein, wenn die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist, der Grenzwert aber existiert.

Im Beispiel besitzt die Funktion

$$Y = (X^2 - X) / (X - 1)$$

bei $x_0 = 1$ eine solche Lücke. Da die Funktionsdefinition durch Y = 1 für X = 1 erweitert werden kann, ohne den restlichen Funktionsverlauf zu stören, nennt man derartige Unstetigkeitsstellen hebbar. Diese werden besonders ausgewiesen.



3.48 Tangente und Normale

Dieses Unterprogramm ergänzt die analytische Diskussion einer Funktion durch die Ermittlung der Tangenten und Normalen an eine beliebige Funktion in zwei Punkten $(x_1 ; f(x_1))$ und $(x_2 ; f(x_2))$.
Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve bzw. Funktion in einem Punkt berührt, d.h. die Tangente und die Kurve haben den gleichen Anstieg. Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente an einen Graphen durch deren Berührungspunkt verläuft.

Nach Eingabe der Funktion *Y* = und der Abszissenwerte x_1 und x_2 der gewünschten Punkte differenziert das Programm diese Funktion nach Wahl des Schalters *Berechnung* zweimal und ermittelt Anstieg, Anstiegswinkel, Abstand zum Koordinatenursprung und Gleichung der evtl. bei dieser Abszisse existierenden Tangenten und Normalen. Zusätzlich erhalten Sie die Gleichung und den Anstiegswinkel der Sekante, welche von den Funktionspunkten mit den

Abszissen x_1 bis x_2 gebildet wird. Für alle diese Geraden werden auch die Nullstellen berechnet.
Hat eine der beiden Geraden einen "unendlichen" Anstieg, d.h., der Graph der Funktion ist parallel zur y-Achse, ist die Funktion an dieser Stelle nicht mehr differenzierbar. Dieser Sonderfall wird nicht ermittelt.

In die Eingabefelder x_1 und x_2 können Sie neben numerischen Werten auch Terme der Form PI, SIN(1), SQRT(3) oder PI/2 eingeben. Für das symbolische Differenzieren gelten die zum Unterprogramm Funktionsdiskussion gemachten Bemerkungen.

Bei Auswahl des Schalters *Funktion darstellen* können Sie diese Funktion sowie optional die jeweils zwei Geraden darstellen. Die darzustellenden Objekte wählen Sie dadurch aus, dass Sie eine berechnete Tangenten- oder Normalengleichung markieren. Per Mausklick markierte Einträge werden in der grafischen Darstellung gezeichnet. Möchten Sie die Bildung der Ableitungen nicht dem Programm überlassen, sondern sie selbst eintragen, so entfernen Sie hinter den Eingabezeilen die Markierungen für die 1. und 2. Ableitung *f'(x)* und *f''(x).* Danach verfahren Sie wie im Teilprogramm *Funktionsdiskussion* beschrieben.
Markieren Sie *Punkte zeichnen*, so werden die Punkte $P(x_1 , f(x_1))$ und $Q(x_2 , f(x_2))$ in der grafischen Darstellung angezeigt.

Tangente von Punkt außerhalb der Funktion an diese

Zu den anspruchsvolleren Aufgaben der Funktionsuntersuchung gehört die Ermittlung von Geraden, die zum einen Tangenten an eine Funktion f(x) sind und zusätzlich durch einen Punkt P außerhalb der Funktion verlaufen. Insbesondere in der Sekundarstufe II der gymnasialen Ausbildung ist diese Aufgabenstellung ein "beliebtes" Thema für Klausuren und Abiturprüfungen.

Markieren Sie das Schaltfeld *Tangenten vom Punkt (x,y) an die Funktion* und geben Sie in die Felder für x und y Koordinaten ein, sucht das Programm nach derartigen Geraden, die zum einen durch den Punkt P(x,y) verlaufen, zum anderen Tangenten der eingegebenen Funktion darstellen, also die Funktion berühren.
Wegen der Umsetzung als allgemeine Lösung für die Problemstellungen erhalten Sie stets Näherungslösungen. Dabei sucht das Programm im voreingestellten Intervall [-5;5] nach Berührungspunkten an die Funktion. Möchten Sie ein anderes Suchintervall nutzen, so tragen Sie unter *Diskussion von ... bis* einen geänderten Wert ein.
Nach Betätigung des Schalters für die grafische *Darstellung* werden die markierten, durch den Punkt P verlaufenden gefundenen Tangenten in die grafische Darstellung eingezeichnet.

Beispiel: Für die Funktion Y=SIN(X)+X und den Punkt P(0;2) außerhalb der Funktion findet das Programm bei einer Intervallbreite von 10 drei Berührungspunkte für Tangenten und die Tangentengleichungen:

Berührungspunkt	Tangentengleichung
(-4,9215 ; -3,943)	Y = 1,2076 · X +2
(2,1424 ; 2,983)	Y = 0,459 · X +2
(3,9517 ; 3,227)	Y = 0,3106 · X + 2
Intervallbreite 20 zusätzlich	
(-7,4513 ; -8,371)	Y = 1,3919 · X + 2
(7,9806 ; 8,973)	Y = 0,8737 · X +2

Dabei werden die letzten beiden Tangenten der Tabelle berechnet, wenn Sie die Intervallbreite auf 20 setzen.

Normale von Punkt außerhalb der Funktion an diese

Zur Ergänzung der Möglichkeit, Tangenten von außen an eine Funktion zu legen, können Sie bei Markierung des Feldes *Normalen vom Punkt (x,y) an die Funktion* in Analogie die Normalen von diesem Punkt ausgehend berechnen und darstellen lassen.
Die oben gemachten Hinweise gelten entsprechend. Für das Beispiel Y = SIN(X) + X und den Punkt P(0;2) ermittelt das Programm nur eine Normale, die Gerade Y = -0,5905·X+2.

3.49 Sekante einer Funktion

Sind eine beliebige mathematische Funktion f(x) sowie zwei verschiedene Punkte A und B auf dieser Funktion gegeben, so kann man durch A(x_A, y_A) und B(x_B, y_B) eine Gerade legen, welche eine Sekante der Funktion darstellt. Der Anstieg dieser Sekante kann leicht über die Koordinaten der beiden Punkte berechnet werden:

$$m = \tan \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A) = \Delta y/\Delta x$$

In diesem Teilprogramm können Sie nach der Eingabe einer Funktion und der Festlegung der x-Werte der zwei Punkte A und B an den Rollbalken die Funktion und die Sekante darstellen. Die Lage der zwei Punkte können Sie auch per Maus verändern.
Prinzipiell können alle Funktionen benutzt werden, dennoch sollten Sie in diesem Teilprogramm auf unstetige Funktionen möglichst verzichten.

Verändern Sie nun die Lage eines der beiden Punkte, so wird die Veränderung der Sekante sofort dargestellt. Bewegt sich zum Beispiel der Punkt B in Richtung von A, so erhalten Sie ständig neue Geraden als Sekanten. Interessant ist nun, dass bei großer Annäherung die Differenz der Abszissenwerte $x_B - x_A$ immer kleiner wird. Liegt B sogar auf A, ist die Differenz gleich 0 und der Anstieg der Sekante wäre nicht mehr berechenbar. In diesem Fall betrachtet man den Grenzwert

$$m = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$$

Dieser beschreibt nun den Anstieg der Tangente am Punkt A und entspricht damit dem sogenannten Differenzialquotienten der Funktion f(x) bei x_A. An der

grafischen Darstellung ist auch deutlich zu erkennen, dass die Sekante nun in die Tangente übergeht.

Starten Sie die Simulation, so wird Punkt B kontinuierlich von links nach rechts verschoben und die zugehörige Sekante sofort gezeichnet. Wahlweise können Sie auch A oder beide Punkte gleichzeitig verschieben lassen. Markieren Sie das Feld *1. Ableitung*, wird zusätzlich der Funktionsverlauf der 1. Ableitung eingezeichnet.

3.50 Tangente und Normale an Funktion

In diesem Teilprogramm kann die Lage der Tangente bzw. Normale an einer Funktion f(x) untersucht werden.
Nach der Eingabe einer Funktionsgleichung können Sie die Lage des Berührungspunktes A am Rollbalken verschieben. Dieser Punkt kann ebenso mittels Mausklick verschoben werden.

Während bei der Sekante einer Funktion zwei Punkte A und B betrachtet werden, ist hier B Richtung A gewandert. Vom Anstieg der Sekante

$$m = \tan \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A) = \Delta y/\Delta x$$

wird nun der Grenzwert

$$m = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$$

betrachtet. Dieser beschreibt den Anstieg der Tangente am Punkt A und entspricht damit dem sogenannten Differenzialquotienten der Funktion f(x) bei x_A.

Markieren Sie das zweite Auswahlfeld, zeichnet das Programm die Normale im Punkt A, also die Gerade, die senkrecht zur Tangente steht, d.h. deren Anstieg gleich -1/m ist. Markieren Sie das Feld *1. Ableitung*, wird zusätzlich der Funktionsverlauf der 1. Ableitung eingezeichnet.

Starten Sie die Simulationen, so wird der Punkt A kontinuierlich von links nach rechts verschoben und die zugehörige Tangente bzw. Normale sofort gezeichnet. Außerdem können Sie die Berechnung und Darstellung des *Krümmungskreises* am Tangentenberührungspunkt ein- und ausschalten.

Markieren Sie *Tangente*, *Normale* und *T-N-Dreieck*, so zeichnet das Programm das von der Tangente, der Normale und der y-Achse gebildete Dreieck ein und berechnet dessen Flächeninhalt.

3.51 Steigungsfunktion

Dieses Teilprogramm ergänzt die zwei Programmteile *Tangente an Funktion* und *Sekante an Funktion*.

Sind eine beliebige mathematische Funktion f(x) sowie zwei verschiedene Punkte A und B auf dieser Funktion gegeben, so kann man durch A und B eine Gerade legen, die eine Sekante der Funktion darstellt. Der Anstieg dieser Sekante kann

leicht über die Koordinaten der beiden Punkte berechnet werden:

$$m = \tan \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A) = \Delta y/\Delta x = \Delta y/h \qquad \text{mit } h = x_B - x_A$$

Werden nun für eine feste Differenz $h = x_B - x_A$ für alle x_A die Anstiege m_h ermittelt, so ist die Zuordnung $x_A \rightarrow m_h$ eine Funktion, die Steigungsfunktion von f(x) für eine reelles h.

In diesem Teilprogramm werden nach der Eingabe einer Funktion und der Festlegung des x-Wertes des Punktes A und der Differenz h die Steigungsfunktion bis zur Abszisse von A und die Sekante gezeichnet. Die Lage des Punktes können Sie auch mittels Maus verändern. Prinzipiell können alle Funktionen benutzt werden, dennoch sollten Sie in diesem Teilprogramm auf unstetige Funktionen möglichst verzichten.
Verändern Sie nun die Lage von A, so wird die Steigungsfunktion entsprechend weiter gezeichnet. Markieren Sie das Feld *Steigungsfunktion*, sehen Sie diese vollständig. Markieren Sie *Ableitung*, stellt das Programm auch die 1. Ableitungsfunktion dar.

Interessant ist nun, dass sich die Sekante bei immer kleineren Differenzen $h = x_B - x_A$ der Tangente in A immer mehr annähert. Ist h sogar 0, wird

$$m = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y/\Delta x$$

Der Anstieg ist nun derjenige der Tangente am Punkt A und die Steigungsfunktion geht in die Ableitungsfunktion über. Auch hier können Sie wieder eine Simulation starten.

3.52 Flächenfunktion

Dreidimensionale Funktionen der Form Z = F(X,Y), d.h. Funktionen, welche Flächen im dreidimensionalen Raum als Funktionsdarstellung haben, können in diesem Unterprogramm definiert und untersucht werden. Der Funktionswert Z ist hier von zwei Variablen X und Y abhängig. Für die grafische Darstellung bietet sich ein dreidimensionales Koordinatensystem an. Derartige Funktionen bilden dabei im Allgemeinen gekrümmte Flächen.

Beispiel: Z=SIN(X*Y), Z=X+Y*X^2 oder "Sombrero"
Z=12*COS((X^2+Y^2)/4)/(3+X^2+Y^2)

Zur grafischen Veranschaulichung der Funktion ist die Nutzung des Telprogramms *Flächenfunktionsdarstellung* voreingestellt. Lesen Sie bitte in der entsprechenden Beschreibung nach.

Die *Funktionsbeispiele* können durch den Programmanwender verändert werden. Soll eine Funktion neu aufgenommen werden, ist zuerst die Funktionsgleichung und ein typischer Name einzugeben und danach der Schalter *Funktion einfügen* zu betätigen. Befindet sich schon eine Funktion gleichen Namens in der Bibliothek, erfolgt die Fehlermeldung *Eintrag schon vorhanden.*

Ein markierter Eintrag wird mittels Schalter *Funktion löschen* ohne Nachfrage aus der Liste der 3-D-Flächenfunktionen entfernt.

Hinweis: Mit eingeschränkten Nutzerrechten kann die Liste der Flächenfunktionen nicht verändert werden.

Soll Ihre Flächenfunktion mit einem Schnitt parallel zur x-y-Ebene versehen werden, so nutzen Sie den speziellen Maximum-Operator des Programms (siehe "Implementierte Funktionen").

Zum Beispiel erhalten Sie mit der Definitionsgleichung f(x,y) = (12*COS((X^2+Y^2)/4)/(3+X^2+Y^2)) < 0,2 eine Darstellung des "Sombreros", bei der aber alle Punkte mit einer z-Koordinate größer als 0,2 auf genau 0,2 gesetzt werden. Dies bedeutet, dass die Flächenfunktion in einer Höhe von 0,2 mit einer Ebene parallel zur x-y-Ebene geschnitten wird.

Wertetabelle einer Flächenfunktion

Im unteren Teil des Programmfensters haben Sie zusätzlich die Möglichkeit, eine Wertetabelle der Funktion zu berechnen.
Da die Funktion zwei Argumente x und y besitzt, muss zur besseren Darstellung in einer Tabelle ein Argument fest eingegeben werden. Tragen Sie dazu in die Felder *X* = vier verschiedene reelle Werte ein. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* erhalten Sie dann für alle reellen y, deren Grenzen und Schrittweite unter *Berechnung von bis* festgelegt wurden, die Funktionswerte.

Partielle Ableitungen

Klicken Sie auf einen der Schalter *df/dx* , *df/dy* , *d²f/dxy* , *d²f/dxx* oder *d²f/dxy* so ermittelt das Programm die partiellen Ableitungen nach x bzw. y. Mit dem zusätzlichen Schalter *Darstellung* wird die Ableitung grafisch dargestellt.

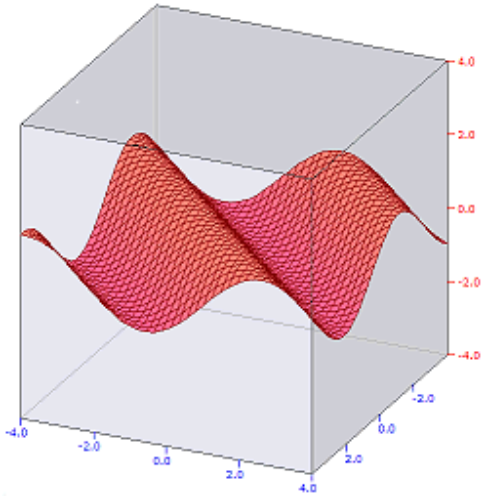
3.53 Flächenfunktionsuntersuchung

Dieses kleine Teilprogramm ist als Ergänzung zum Programmteil Flächenfunktionen zu sehen.
Gegenwärtig stellt dieses Teilprogramm eine dreidimensionale Funktion f(x,y) im linken Teil des Fensters dar.
Im rechten Teil können Sie eine weitere Funktion zum Vergleich anzeigen lassen oder wählen einen der Schalter. Diese bewirken

- df/dx … Ableitung nach x
- df/dy … Ableitung nach y
- d²f/dxy … zweifache Ableitung nach x und anschließend nach y
- d²f/dxx … zweifache Ableitung nach jeweils x
- d²f/dyy … zweifache Ableitung nach jeweils y

Klicken Sie auf einen der Schalter wird die Ableitung bestimmt und die Ableitungsfunktion gezeichnet.

3.54 Flächenfunktionsdarstellung



Dieses Teilprogramm gibt eine Möglichkeit dreidimensionale Funktionen f(x,y) grafisch zu veranschaulichen.

Die Graphen der Funktionen werden dazu in einem Koordinatenwürfel dargestellt. Die Abbildung zeigt die Funktion F(X,Y) = SIN(X+Y). Die gewünschte Funktion tragen Sie unter *F(X,Y)* = ein und quittieren mit dem Schalter *Zeichnen*.

Die Lage der Koordinatenachsen und damit die Ansicht der Funktion können Sie durch Änderung der Werte *x-Winkel* und *z-Winkel* erreichen. Außerdem können Sie mit einem linken Mausklick auf die Darstellung und das Bewegen der Maus, die Lage des Würfels beeinflussen. Die *Größe* der Darstellung ist ebenfalls veränderbar.

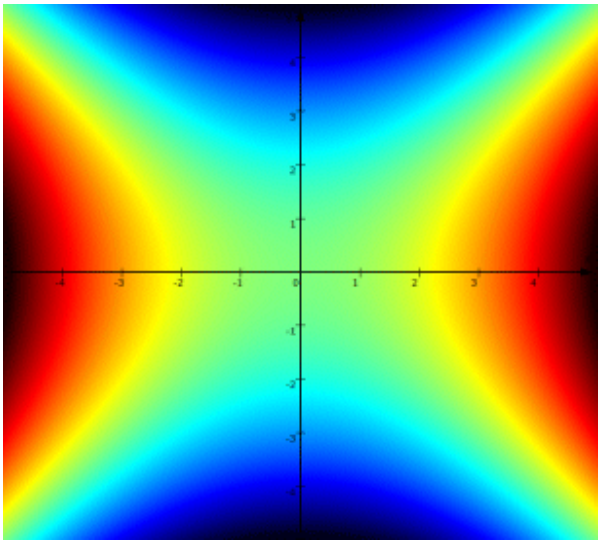
Die Intervallgrößen der drei Koordinatenachsen tragen Sie in die entsprechenden Eingabezeilen ein. Die Farbe des Funktionsgraphen kann durch Klick auf einen der Menüpunkte *Darstellung* | *Farbe 1* bzw. *Darstellung* | *Farbe 2* verändert werden. Ausgewählt wird die Farbe nach der Größe des Funktionswertes f(x,y).
Zusätzlich kann die Farbe durch den der Wert *Abstufung* verändert werden.

Der Graph der Funktion kann mit drei kleinen Schaltern in der Aktionsschalterleiste gedruckt, auf der Festplatte gespeichert oder in die Zwischenablage kopiert werden.
Mittels Schalter *Simulation* starten und stoppen Sie eine Simulation, bei der der Koordinatenwürfel kontinuierlich wahlweise um die x- oder z-Achse gedreht wird. Damit können Sie die Anschaulichkeit erhöhen.

Flächenfunktionen, aber auch komplexwertige Funktionen, können in ihrer Funktionsgleichung einen Parameter Q enthalten. Dessen Wert können Sie an einem weiteren Rollbalken ändern.
Zusätzlich besteht auch die Möglichkeit, Q während der Simulation kontinuierlich im Intervall [-10 ; 10] ändern zu lassen. Das Programm zeichnet jeweils die Funktion und demonstriert so den Einfluss des Parameters Q.
Die Geschwindigkeit der Änderung von Q kann an dem Rollbalken links vom Eintrag *Q* = verändert werden. Ein kleiner Wert verlangsamt die Änderung, ein hoher beschleunigt die Darstellung.

3.55 Niveauflächen von Funktionen zweier Veränderlicher

In der Mathematik versteht man unter der Niveaumenge die Menge aller Punkte eines Skalarfeldes, denen der gleiche Wert zugeordnet ist. Für zweidimensionale Skalarfelder ist diese Menge zumeist eine Linie und man spricht von einer Niveaulinie. Bei dreidimensionalen Skalarfeldern stellt diese Menge zumeist eine Fläche dar, die Niveaufläche genannt wird. Ein Beispiel für Niveauflächen sind die Äquipotentialflächen eines elektrischen Feldes.



Niveauflächen können auch zur Veranschaulichung von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher bzw. komplexer Veränderlicher genutzt werden. Bei reellen Funktionen zweier Veränderlicher werden die Punkte der Ebene entsprechend dem Funktionswert z gefärbt.
Aus den entstehenden Darstellungen kann der Verlauf der Funktion (Täler, Berge, Unstetigkeitsstellen ...) ermittelt werden.

In diesem Teilprogramm können Sie diese Niveauflächen für Funktionen zweier Veränderlicher zeichnen.
Tragen Sie dazu in die Eingabezeile eine Funktionsgleichung ein oder wählen Sie unter den *Funktionsbeispielen* eine vordefinierte Funktion aus. Diese vordefinierten Funktionen sind die diejenigen Funktionen, die Sie im Teilprogramm *Flächenfunktion* in die Bibliothek aufgenommen haben.
Die Funktionsgleichung kann einen Parameter Q enthalten, dessen Wert sie eingeben können.

Für die Zeichnung können Sie die Darstellungsintervalle sowohl in Abszissenrichtung (x-Achse) als auch in Ordinatenrichtung (y-Achse) eingeben. Je nach Funktionswert werden verschiedene Farben verwendet. An der Farbabfolge im linken Fensterteil können Sie erkennen, ab welchem Wert welche Farbe genutzt wird. Dieser *Darstellungsbereich* lässt sich ebenfalls verändern. Zusätzlich können Sie unter *Darstellung* auswählen, ob die Originalfunktion oder einer ihrer partiellen Ableitung $\partial f(x,y) / \partial x$ bzw. $\partial f(x,y) / \partial y$ gezeichnet werden soll.

Beachten Sie bitte, dass die aufwendige Berechnung und Darstellung auch auf schnellen Computern einige Zeit benötigt.

3.56 Flächen 2.Ordnung

Als Flächen 2. Ordnung des Raums R^3 werden solche Punktmengen bezeichnet,

deren Koordinaten folgender Gleichung genügen:

$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + a = 0$

Dabei sind alle Koeffizienten a_i beliebige reelle Zahlen.
Nach einer mathematisch sehr anspruchsvollen Hauptachsentransformation, welche die Achsen der Fläche parallel zu den Koordinatenachsen ausrichtet, gelangt man zur Normalform einer Fläche 2. Ordnung. Entweder gelingt es, alle gemischt-quadratischen und linearen Glieder zu entfernen:

Normalform 1: $b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2 + n = 0$

oder im zweiten Fall bleibt ein lineares Glied erhalten:

Normalform 2: $b_1 x^2 + b_2 y^2 + m z + n = 0$

Durch entsprechendes Umbenennen der Koordinaten kann stets erreicht werden, dass ausschließlich z linear vorliegt.

Das Programm ermöglicht in diesem Unterprogramm die Koeffizienteneingabe der Normalformen und ermittelt daraus die zugehörige Fläche 2. Ordnung – neben sogenannten singulären Gebilden, Doppelkegeln, Zylindern, Ebenen mit reellen oder nicht reellen Erzeugenden usw. sind vor allem drei Flächen, das Ellipsoid, das Paraboloid und das Hyperboloid, von Bedeutung. Insgesamt werden 17 verschiedene Ergebnisse ermittelt.

Ellipsoid:

Sind in der ersten möglichen Normalform die Koeffizienten b_i positiv und das Absolutglied n negativ, so kann die Gleichung in die Form $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 + z^2 / c^2 = 1$ gebracht werden und beschreibt ein Ellipsoid. Sind alle b_i negativ und n positiv, liegt der gleiche Fall vor, da die Gleichung mit dem Faktor -1 multipliziert werden kann. Für a = b = c liegt der Sonderfall einer Kugel vor. Die Werte von a, b, c geben die Längen der Halbachsen des Rotationsellipsoids an.

Paraboloid:

Konnte die allgemeine Gleichung nur auf eine Gleichung der zweiten Normalform reduziert werden, stellt die untersuchte Fläche ein elliptisches Paraboloid, ein hyperbolisches Paraboloid oder einen parabolischen Zylinder dar.

Hyperboloid:

Sind in der ersten Normalform zwei der Koeffizienten b_i positiv und einer negativ sowie das Absolutglied n negativ, so kann die Gleichung in die Form $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 - z^2 / c^2 = 1$ gebracht werden und beschreibt ein einschaliges Hyperboloid, wobei a und b reelle Halbachsen sind. Ist das Absolutglied n in der Normalform positiv, liegt ein zweischaliges Hyperboloid vor. Den Übergang vom einschaligen zum zweischaligen Hyperboloid bildet ein Doppelkegel.

Insgesamt sind folgende siebzehn Ergebnisse der Analyse möglich:

- Ellipsoid, nullteilige Fläche 2. Ordnung, entartetes Ellipsoid (Nullpunkt)
- einschaliges Hyperboloid, zweischaliges Hyperboloid, elliptischer Doppelkegel

- elliptischer Zylinder, Zylinder mit nicht reellen Erzeugenden, hyperbolischer Zylinder
- Paar einander schneidender nicht reeller Ebenen, Paar sich schneidender Ebenen
- zwei parallele Ebenen, zwei nicht reelle, nicht parallele Ebenen, Koordinatenebene (y-z-Ebene)
- elliptisches Paraboloid, hyperbolisches Paraboloid, parabolischer Zylinder

Beispiel:

Gleichung	ermittelte Fläche
$2 \cdot X^2 - Y^2 - Z^2 - 3 = 0$	Zweischaliges Hyperboloid
$X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0$	Einschaliges Hyperboloid
$X^2 + Y^2 + Z + 1 = 0$	Elliptisches Paraboloid
$2 \cdot X^2 + Z^2 + 3 = 0$	Zylinder mit nicht reellen Erzeugenden

Wertetabelle einer Fläche 2.Ordnung

Im unteren Teil des Programmfensters haben Sie die Möglichkeit, eine Wertetabelle der Fläche 2. Ordnung zu berechnen.
Da die Gleichung drei Argumente, x, y und z, besitzt, muss zur besseren Darstellung in einer Tabelle ein Argument fest eingegeben werden. Tragen Sie dazu in die Felder *X* = vier verschiedene reelle Werte ein. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* erhalten Sie dann für alle reellen y, deren Grenzen und Schrittweite Δx unter *Berechnungsintervall* festgelegt wurden, die Werte z dieser Fläche 2. Ordnung.

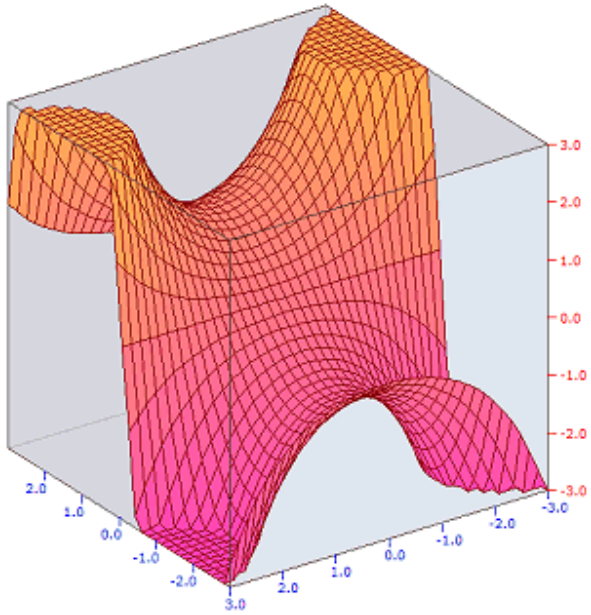
3.57 Komplexe Funktionen

Komplexe Zahlen z = x + yi können nicht mehr auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden, sondern werden nach Carl Friedrich Gauß in einer Zahlenebene dargestellt.
Ein funktionaler Zusammenhang zwischen komplexen Zahlen würde damit zur optischen Veranschaulichung einen vierdimensionalen Raum benötigen – für Argument und Funktionswert je zwei Koordinaten. Da eine Projektion des R^4 auf eine Zeichenebene praktisch nicht möglich ist, geht man bei der Darstellung komplexwertiger Funktionen andere Wege.

Ist F(Z) = F(Re(z), Im(z)) eine Funktion in den komplexen Zahlen, so kann das Argument in der x-y-Ebene gezeichnet werden. Zusätzlich trägt man an der dritten Achse im R^3 einen reellen Wert an, der den komplexen Funktionswert von Z charakterisiert. Dazu bieten sich unter anderem an

- der Realteil Re(F(Z)) der komplexen Zahl F(Z)
- der Imaginärteil Im(F(Z)) der komplexen Zahl F(Z) oder
- der Betrag $|F(Z)| = \sqrt{(Re^2(F(Z)) + Im^2(F(Z)))}$ von F(Z)

- der Phasenplot des Funktionswertes



Die vierte Möglichkeit, die Zeichnung eines Phasenplots, wird auch im Teilprogramm *Niveauflächen und Phasenplot* untersucht; dort mit einer ebenen Darstellung, die wunderschöne Bilder ergibt.

Im oberen Teil dieses Teilprogramms können Sie aus einer Liste eine vordefinierte komplexe Funktion F(Z) auswählen. Diese wird in die Eingabezeile der *Funktion F(Z)* eingetragen. Selbstverständlich können Sie auch eine andere Funktionsgleichung eingeben. Beachten Sie bitte, dass das Argument der Funktion Z ist und folgende Funktionen und Operanden verwendet werden können:

- Standardfunktionen SQRT, SIN, COS, TAN, COT, SEC, CSC, SINH, COSH, TANH, COTH, EXP, LN
- Spezielle Funktionen GAMMA, DIGAMMA und die Besselschen Funktionen BI0, BJ0
- Riemannsche Zetafunktion RIEMANN (Realteil > 1, Näherung bis ... + $1/48^z$)
- die Jacobischen elliptischen Funktion DN, SN, CN
- Exponentialintegral EI
- die Funktionen TRE(Z) und TIM(Z) für den Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Arguments z
- die Funktion CONJ(Z) zur Ermittlung der konjugiert komplexen Zahl
- Operanden +, -, *, / und die Potenzbildung ^
- Konstanten I, PI

An den Schaltfeldern wählen Sie, welcher der vier Darstellungsmodi genutzt werden soll. Die Funktionsgleichung kann einen Parameter Q enthalten. Für diesen Parameter können Sie Real- und Imaginärteil des Anfangswertes eingeben. Betätigen Sie den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm den Verlauf der komplexen Funktion entsprechend dem ausgewählten Wert für die F(Z)-Achse.

Die komplexwertige Funktion wird dazu innerhalb eines Koordinatenwürfels veranschaulicht. Genutzt wird die Darstellungsmöglichkeit der dreidimensionalen Funktionen F(X,Y), wobei nun Z dem ausgewählten Wert entspricht und für die Argumente X und Y der Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl eingesetzt werden.
Für weitere Erklärungen nutzen Sie bitte die Beschreibung zum Teilprogramm *Flächenfunktionsdarstellung*.

Beispiel: Darstellung der komplexen Funktion F(Z) = SIN(Z), wobei längs der F(Z)-Achse der Realteil abgetragen wird.

Wertetabelle einer komplexwertigen Funktion

Im unteren Teil des Programmfensters haben Sie zusätzlich die Möglichkeit, eine Wertetabelle der Funktion im Bereich der komplexen Zahlen zu berechnen.

Da innerhalb der komplexen Zahlen keine Ordnungsrelation existiert, müssen die Argumente Z getrennt nach reellem und imaginären Anteil festgelegt werden. Tragen Sie dazu in die Felder *X* = vier verschiedene reelle Anteile x des Arguments z = x + y i ein. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* erhalten Sie dann für alle imaginären Anteile y, deren Grenzen und Schrittweite unter *Berechnung* festgelegt wurden, die Funktionswerte.

3.58 Niveauflächen und Phasenplot komplexer Funktionen

"Bilder können nichts beweisen. Aber sie lassen Wissenschaftler die Funktion besser verstehen und vermitteln ihnen Ideen, wo sie mit neuen Überlegungen ansetzen können."
Elias Wegert

In der Mathematik versteht man unter der Niveaumenge die Menge aller Punkte eines Skalarfeldes, denen der gleiche Wert zugeordnet ist. Für zweidimensionale Skalarfelder ist diese Menge zumeist eine Linie und man spricht von einer Niveaulinie. Bei dreidimensionalen Skalarfeldern stellt diese Menge zumeist eine Fläche dar, die Niveaufläche genannt wird. Ein Beispiel für Niveauflächen sind die Äquipotentialflächen eines elektrischen Feldes.
Niveauflächen können auch zur Veranschaulichung von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher bzw. komplexer Veränderlicher genutzt werden.

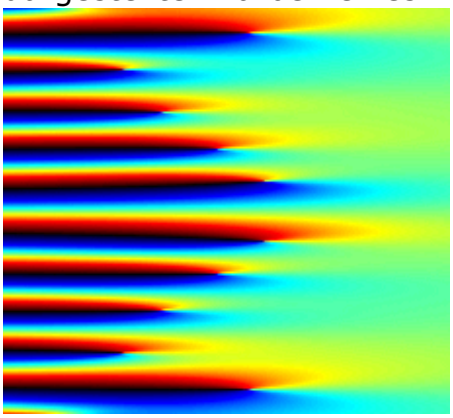
Bei komplexwertigen Funktionen wird die Gaußsche Ebene zur Darstellung des Funktionsarguments genutzt und jeder Punkt durch eine Farbe gekennzeichnet, die entweder den Realwert, den Imaginärwert, den Betrag des Funktionswertes oder das Argument des Funktionswertes (Phasenplot) darstellt.
Aus den entstehenden Darstellungen kann der Verlauf der Funktion (Täler, Berge, Unstetigkeitsstellen ...) ermittelt werden.

In diesem Teilprogramm können Sie diese Niveauflächen für komplexe Funktionen zeichnen.
Die Funktionsgleichung der komplexen Funktion tragen Sie in der Eingabezeile ein. Beachten Sie bitte, dass das Argument der Funktion Z ist und folgende Funktionen und Operanden verwendet werden können:

- Standardfunktionen SQRT, SIN, COS, TAN, COT, SEC, CSC, SINH, COSH, TANH, COTH, EXP, LN

- Spezielle Funktionen GAMMA, DIGAMMA und die Besselschen Funktionen BI0, BJ0
- Riemannsche Zetafunktion RIEMANN (Realteil > 1, Näherung bis ... + $1/48^z$)
- die Jacobischen elliptischen Funktionen DN, SN, CN
- Exponentialintegral EI
- die Funktionen TRE(Z) und TIM(Z) für den Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Arguments z
- die Funktion CONJ(Z) zur Ermittlung der konjugiert komplexen Zahl
- Operanden +, -, *, / und die Potenzbildung ^
- Konstanten I, PI

Die Jacobischen elliptischen Funktionen DN, SN und CN haben einen voreingestellten Parameter k = 0,2. Diese können sie im Intervall [0;1] frei wählen und eingeben.
Für die Zeichnung können Sie die Darstellungsintervalle sowohl in Abszissenrichtung (x-Achse) als auch in Ordinatenrichtung (y-Achse) eingeben. Je nach Funktionswert werden verschiedene Farben verwendet. An der Farbabfolge im linken Fensterteil können Sie erkennen, ab welchem Wert welche Farbe genutzt wird. Dieser *Darstellungsbereich* lässt sich ebenfalls verändern. Zeichnen Sei einen Phasenplot der Funktion, so können Sie am unteren Rollbalken *Helligkeit nach Betrag* zusätzlich einstellen, mit welcher Helligkeitsänderung die Veränderung des Betrags des Funktionswertes berücksichtigt werden soll.
Voreingestellt ist außerdem die Verwendung der im linken Fensterteil dargestellten Farben eines Regenbogens. Alternativ können Sie auch Farben verwenden, die im Maxwellschen Farbkreis auftreten.



Beispiel: Interessante Darstellungen eines Phasenplots (Abbildung) bzw. einer Niveaufläche von Real- oder Imaginärteil erhalten Sie bei der Wahl von *Zeta-Funktion* in der linken Liste. Geben Sie zum Beispiel als Darstellungsintervall -1,5 < x < 2,5 und -16 < y < 16 ein.

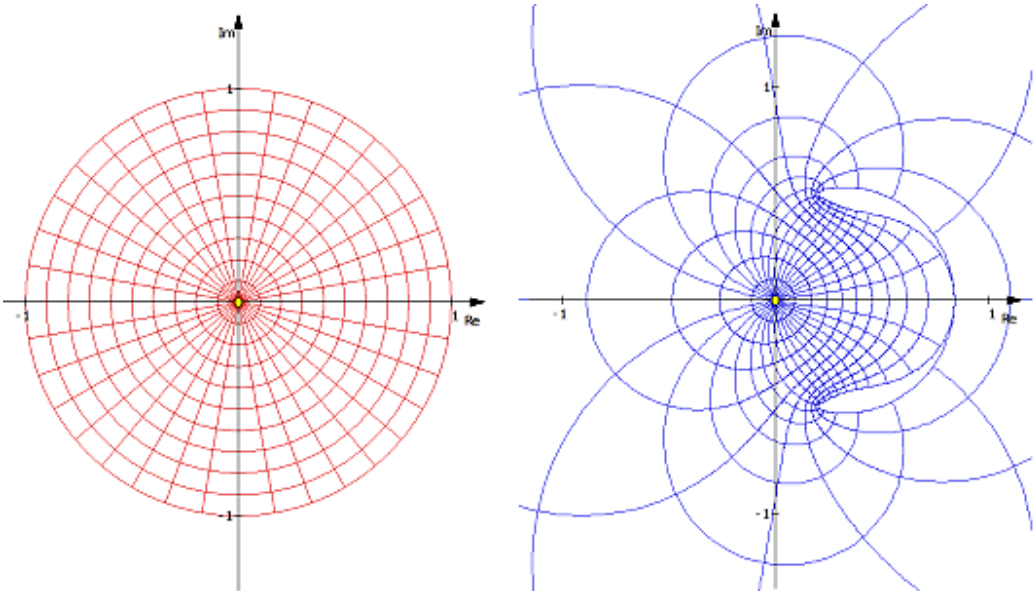
Beachten Sie bitte, dass die aufwendige Berechnung und Darstellung auch auf schnellen Computern einige Zeit benötigt.

3.59 Konforme Abbildungen

Eine Abbildung eines Gebietes der komplexen Ebene 1 in ein Gebiet der komplexen Ebene 2 mittels einer komplexwertigen Funktion f(z) heißt konform, wenn die Schnittwinkel zweier beliebiger Kurven der Größe nach erhalten bleiben. Die durch eine analytische Funktion f(z) erzeugte Abbildung ist für alle Punkte z konform, für die die erste Ableitung nicht verschwindet.
Die stereographische Projektion der Gaußschen Zahlenebene auf die Riemannsche

Zahlenkugel ist ein Beispiel für eine konforme Abbildung.

In diesem Teilprogramm werden die Bilder einer konformen Abbildung erzeugt. Dazu wird in zwei Teilfenstern die komplexe Gaußsche Zahlenebene dargestellt. Das Ausgangsintervall liegt bei etwa [-1, 1] und [-i, i].



Im linken Teilfenster zeichnet das Programm, je nach Ihrer Wahl, ein Gitter in Form eines *Halbkreises*, *Kreises* oder *Quadrates* bzw. eine von drei vordefinierten *Figuren*. Alle Punkte dieses Gitters sind das Ausgangsgebiet der konformen Abbildung.

Unter *F(Z)* = tragen Sie eine komplexwertige Funktion ein. Beachten Sie bitte, dass das Argument der Funktion Z ist und folgende Funktionen und Operanden verwendet werden können:

- Standardfunktionen SQRT, SIN, COS, TAN, COT, SEC, CSC, SINH, COSH, TANH, COTH, EXP, LN
- Spezielle Funktionen GAMMA, DIGAMMA und die Besselschen Funktionen BI0, BJ0
- die Jacobischen elliptischen Funktion DN, SN, CN
- Exponentialintegral EI
- die Funktionen TRE(Z) und TIM(Z) für den Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Arguments z
- die Funktion CONJ(Z) zur Ermittlung der konjugiert komplexen Zahl
- Operanden +, -, *, / und die Potenzbildung ^
- Konstanten I, PI

Klicken Sie auf den Schalter *Darstellung*, wird das links dargestellte Gitter konform in das rechte Teilfenster abgebildet. In der Darstellung wird ein Kreisgitter durch die Funktion f(z) = sin z / (z²+z-1) auf die rechte komplexe

Ebene abgebildet.
Die Größe der rechten Darstellung können Sie über die Schalter in der oberen Schalterleiste des Fensters einstellen. Mitunter wirkt die Darstellung etwas „grob". In diesem Fall können Sie am Rollbalken *dx* = die Feinheit der Zeichnung verändern. Ein kleinerer Wert verbessert die Darstellung, erhöht aber auch den Rechenaufwand.

Möchten Sie die Darstellungen drucken, speichern oder kopieren, so wählen Sie zuerst unter *Bearbeiten*, ob die linke oder rechte Zeichnung verarbeitet werden soll.

Ist das Auswahlfeld *Punkt* markiert, wird im linken Koordinatensystem ein gelber Punkt angezeigt, den Sie mit der Maus verschieben können. Die konforme Abbildung dieses Punktes wird rechts ebenfalls angezeigt. Damit können Sie nachvollziehen, welcher Punkt wohin abgebildet wurde.
Während der *Simulation* wird dieser Punkt kontinuierlich bewegt, je nach Wahl waagerecht, senkrecht, auf einem Kreis um den Koordinatenursprung oder radial bezüglich des Koordinatenursprungs.

Zusätzlich können Sie durch Markieren von Punktstrahlen, an diesen Punkt 24 Strahlen zeichnen lassen, deren Abbildung ebenso ermittelt wird.

3.60 Polynome komplexer Zahlen

Zur grafischen Veranschaulichung einer über den Körper der komplexen Zahlen definierten Funktion f(z) benötigt man eigentlich einen vierdimensionalen Raum, da das Argument in der zweidimensionalen Gaußschen Zahlenebene gewählt wird und der Funktionswert ebenfalls eine Gaußsche Ebene benötigt.

Diese Problematik kann man umgehen, indem spezielle Eigenschaften des Funktionswertes dargestellt werden, wie dies im Teilprogramm *Komplexwertige Funktionen* geschieht.

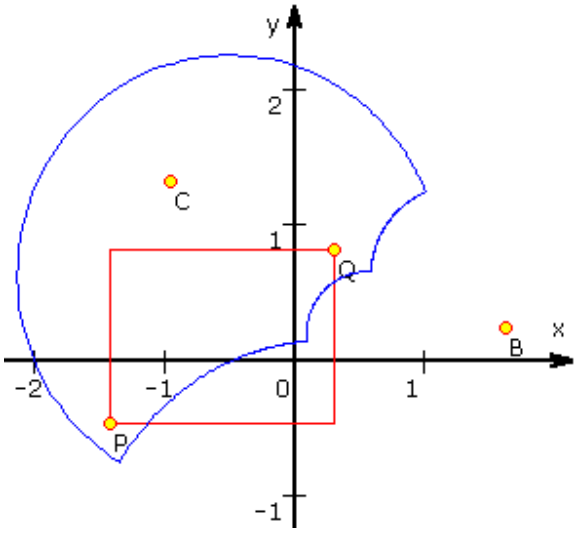
Ein anderer Weg besteht in der Einschränkung des Definitionsbereichs der komplexen Funktion f(z). Zum Beispiel könnten nur solche komplexen Zahlen als Argument betrachtet werden, deren Betrag = 1 ist, d.h., in der grafischen Veranschaulichung liegen diese Zahlen auf einem Ursprungskreis mit dem Radius 1.

Werden nur ganzrationale bzw. gebrochenrationale Funktionen untersucht, ist der Wertebereich bei eingeschränktem Definitionsbereich in der gleichen Gaußschen Ebene darstellbar.
Diese Idee wird im Teilprogramm *Polynome komplexer Zahlen* umgesetzt.

Nach dem Start wählen Sie zuerst eine der vordefinierten Funktionen aus:

- $f(z) = z^2 + bz + c$

- $f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$
- $f(z) = bz + c$
- $f(z) = b/z + c$
- $f(z) = (z+b)/(z-c)$
- $f(z) = (z^2+b)/(z^2-c)$
- $f(z) = (z^2+b)^2 + c$
- $f(z) = (dz + b) / (ez + c)$
- $f(z) = bz + c/z$



Die auftretenden komplexzahligen Parameter b, c, d und e können Sie in die vorgesehenen Zeilen eintragen. Da diese Zahlen auch in der Zahlenebene darstellbar sind, ist die Veränderung der Werte auch durch Anklicken und Verschieben mit der Maus möglich.
Die letzte Funktion f(z) = b z + c / z (kein Polynom) ergibt für b = c = 1 gerade die Joukowski-Abbildung komplexer Zahlen.

Für den eingeschränkten Definitionsbereich sind drei Grundtypen vorgesehen, deren grafische Veranschaulichung einem Kreis, einer Geraden bzw. einem Rechteck entsprechen.
Im Fall des Kreises legen Sie die Zahl m – den Mittelpunkt des Kreises – und den Radius fest. Konkret bedeutet dies dann, dass als Definitionsbereich alle komplexen Zahlen z ausgewählt werden, für die der Betrag der Differenz m - z gleich dem unter Radius eingegebenen Wert ist.

Für die Ausgangsmenge komplexer Zahlen als „Gerade" legen Sie zwei Stützzahlen fest, für das „Rechteck" die linke obere Zahl und die rechte untere Zahl.

Im Beispiel sehen Sie ein Rechteck als Definitionsbereich rot gezeichnet. Die Funktionswerte f(z) sind blau dargestellt und bilden im Beispiel eine in sich geschlossene Kurve mit vier kleinen Spitzen.
Testen Sie die Funktionen und verschieben Sie zum Beispiel einen der Parameter B, C oder D mit der Maus, so können Sie teilweise sehr überraschende Ergebnisse erhalten.

Zum Beispiel ergibt die Funktion f(z) = bz + c stets eine Drehung der Ausgangsmenge mit einer eventuellen Streckung oder Stauchung. Die Funktion f(z) = b / z + c ergibt für eine Definitionsmenge eines Kreises mit dem Mittelpunkt bei (1;0) und einem Radius 1 als Ergebnis stets das Bild einer Geraden.

Klicken Sie auf den Schalter *f(z) darstellen*, so wird der Realteil der komplexwertigen Funktion innerhalb eines Koordinatenwürfels veranschaulicht. Genutzt wird die Darstellungsmöglichkeit der dreidimensionalen Funktionen

F(X,Y), wobei nun Z dem Realteil des Funktionswertes entspricht und für die Argumente X und Y der Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl eingesetzt werden.
Für weitere Erklärungen nutzen Sie bitte die Beschreibung zum Teilprogramm Flächenfunktionsdarstellung.

3.61 Riemannsche Zeta-Funktion

Nach der berühmten Riemannschen Vermutung liegen alle nicht trivialen Nullstellen in der Gaußschen Zahlenebene auf einer Geraden mit dem Realteil 0,5. Zur Veranschaulichung zeichnet das Teilprogramm die Riemannsche Zetafunktion für Argumente 0,5 + i t, wobei t eine reelle Zahl ist.
In der *ebenen Darstellung* werden Real- und Imaginärteil als rote und blaue Kurve einzeln angetragen. Die Stellen, an denen beide Kurven sich auf der Abszissenachse schneiden, sind die berühmten, nicht trivialen Nullstellen der Zetafunktion.

In der *räumlichen Darstellung* wird der Wert für t nach oben angetragen, die Funktionswerte in Real- und Imaginärteil getrennt in der Gaußschen Zahlenebene.
Dabei entsteht eine sich um die t-Achse (Realteil 0,5) windende Kurve, die immer dann die Achse schneidet, wenn eine Nullstelle vorliegt.
Markieren Sie das Feld Nullstellen, so werden die im Darstellungsbereich vorhandenen Nullstellen angezeigt.

3.62 Komplexe Zahlenfolgen

In diesem Teilprogramm werden die ersten Glieder komplexwertiger Zahlenfolgen berechnet und in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.
Ermittelt werden Zahlenfolgen der Form $z_{i+1} = z_i^n$

Die Startzahl z_1 legen Sie durch Verschieben der Zahl mit der Maus fest. Am Rollbalken Folgenglieder wird eingestellt, wie viele Glieder gezeichnet werden sollen.
Schalten Sie einen Einheitskreis ein, so können Sie erkennen, dass die Zahlenfolge konvergiert, wenn der Startwert sich innerhalb des Kreises befindet. Liegt z_1 außerhalb, so divergiert die Folge.

3.63 Komplexe Fibonacci-Folgen

Die Definition der Fibonacci-Folgen kann auch auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert werden. 1996 untersuchte Christopher Weihmann Folgen der Form

$$z_{n+2} = i\, z_{n+1} + z_n$$

und wies nach, dass für beliebige Startwerte $z_0 = p + qi$ und $z_1 = r + si$ eine zyklische Folge entsteht.

2007 gelang Walser der Nachweis, dass jede Folge

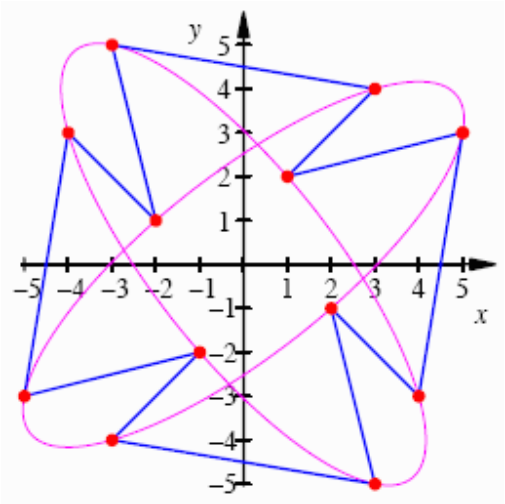
$$z_{n+2} = 2i \sin(\pi/n)\, z_{n+1} + z_n$$

für beliebige komplexe Anfangswerte eine Periodenlänge 2n besitzt.

Trägt man die Folgeglieder in die Gaußsche Zahlenebene ein, so liegen die Punkte der Glieder abwechslungsweise auf zwei Ellipsen. Beide Ellipsen sind zueinander kongruent und um $\pi/2$ verdreht.
Mit $\phi = 2\pi/n$ und dem 1.Glied p+qi und dem 3.Glied r+si ist die Gleichung einer der Ellipsen

$$x(t) = p \cos t + (r - p \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$
$$y(t) = q \cos t + (s - q \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$

In der Abbildung ist die zyklische, komplexe Fibonacci-Folge für n = 6 und die Anfangszahlen 5 + 3i und 1 + 2i zu sehen.



Das Teilprogramm *komplexe Fibonacci-Folgen* zeichnet genau diese zyklischen Folgen in einer Gaußsche Zahlenebene.

Mit der Maus verschieben Sie die beiden komplexen Anfangszahlen Z0 und Z1, an dem Rollbalken wählen Sie den *Parameter* n. Das Programm stellt sofort die Glieder der Zahlenfolge dar.
Markieren Sie *Hilfsstrecken*, so werden aufeinanderfolgende Glieder durch eine Strecken verbunden. Die Auswahl des Punktes *Punktellipsen* zeichnet die zwei oben beschriebenen Ellipsen.

3.64 Näherungsverfahren

Nullstellen von Funktionen bzw. Lösungen von Gleichungen werden mittels Computer sehr oft unter Nutzung verschiedener Näherungsverfahren (Iterationsverfahren) ermittelt - insbesondere, wenn für die Gleichung kein exakter analytischer Lösungsalgorithmus existiert. Dies ist in der Praxis der typische Fall und nicht die stets exakt lösbare Aufgabe wie in der klassischen Schulmathematik.

Die Grundprinzipien dieser Verfahren sind dabei Iteration und Intervallschachtelung, d.h., durch wiederholtes Anwenden einer Berechnungsvorschrift wird der Bereich, in dem die gesuchte Lösung liegt, immer weiter eingeschränkt. Ergibt ein Verfahren bei bestimmten Anfangswerten eine Lösung, so nennt man das Verfahren konvergent, andernfalls divergent. Die Güte eines Verfahrens wird durch seine Konvergenzgeschwindigkeit charakterisiert.

Nach Eingabe einer Funktion unter *Funktion y=* und eines Anfangsintervalls in *Startwert x0=* bzw. *Endwert x1=* ermittelt dieses Unterprogramm auf 18 verschiedene Arten eine in diesem Intervall existierende Nullstelle. Für die Intervallgrenzen können Sie auch Terme der Form PI oder SIN(1) ... verwenden.

Über das grafische Vorschaubild können Sie sich schnell über den Verlauf der Funktion informieren. Insbesondere, wenn unterschiedliche Vorzeichen der Funktionswerte an den Stellen x_0 und x_1 notwendig sind, hilft dies weiter. Das Vorschaubild wird bei der Eingabe der Funktionsgleichung automatisch aktualisiert. Eine hochwertigere Darstellung der Funktion erhalten Sie über den Schalter *Darstellung.*

Bisektion

Beim Bisektions- bzw. Intervallhalbierungsverfahren wird der Funktionswert des arithmetischen Mittels x_m der aktuellen Intervallgrenzen – zu Beginn x_0 und x_1 – berechnet:

Die Intervallgrenze, deren Funktionswert dasselbe Vorzeichen wie der Funktionswert $f(x_m)$ besitzt, wird durch x_m ersetzt, sodass die Länge des Intervalls mit jedem Iterationsschritt halbiert wird. Wiederholt man dies immer wieder, schließt das Intervall immer genauer den gesuchten Wert ein.
Wünscht man z.B., dass die Nullstelle auf vier Dezimalstellen nach dem Komma genau ermittelt wird, bricht man die Iteration ab, wenn beide Intervallgrenzen bis auf die vierte Kommastelle identisch sind.
Dieses Verfahren führt bei im Intervall $[x_0;x_1]$ stetigen Funktionen immer zum Ziel, wenn die Funktionswerte von x_0 und x_1 unterschiedliche Vorzeichen haben, obgleich mitunter mehrere Schritte erforderlich sind.

Wählen Sie das Verfahren der Trisektion, wird das jeweilige Intervall gedrittelt und entsprechend ausgewertet. Etwas höherer Rechenaufwand garantiert schnellere Konvergenz. Prinzipiell wäre es möglich, die Konvergenz durch Unterteilung in n Intervalle noch stärker zu beschleunigen – wegen des nun höheren Rechenaufwandes empfiehlt es sich jedoch, andere Verfahren zu nutzen.

Beachten Sie: Die Grenzen des Anfangsintervalls müssen Funktionswerte entgegengesetzten Vorzeichens besitzen. Außerdem muss das Argument x1 größer sein als x0.

Monte-Carlo-Methode

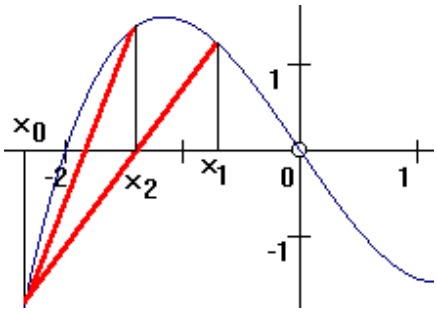
Unter einer Monte-Carlo-Methode versteht man ein Verfahren, in dem durch einen Zufallsgenerator gewonnene Zahlen genutzt werden. Trotz des zufälligen Charakters der Werte ist es dennoch möglich, die gewünschten Ergebnisse zu erzielen. Die hier umgesetzte Variante unterscheidet sich vom Verfahren der Bisektion dadurch, dass im Intervall von x_0 bis x_1 *zufällig* ein neuer Iterationswert ausgewählt wird.
Je nach Art der untersuchten Funktion und mit etwas Glück (ein Monte-Carlo-Verfahren eben!) erhält man selten eine bessere, meist eine ungünstigere Konvergenz als im Bisektionsverfahren.

Nutzt man nicht gleich verteilte Zufallszahlen, sondern setzt für die Bestimmung des neuen Wertes Gauß-normalverteilte Zufallszahlen ein, verbessert sich die Konvergenz dieses Verfahrens. Unter *Monte-Carlo-Methode 2* können Sie dieses Verfahren mit normalverteilten Zufallswerten testen.

Regula falsi

Das Näherungsverfahren Regula falsi (lat. "Regel des Falschen") oder auch Sekantenverfahren ermittelt einen Iterationswert durch Ermittlung des Schnittpunktes der Sekante der Intervallpunkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ mit der Abszissenachse. Der neue Wert ergibt sich nach der Gleichung

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) / (f(x_1) - f(x_0))$$



Die berechnete neue Abszisse ersetzt eine der Intervallgrenzen x_0 oder x_1, je nach Modifikation der Iterationsgleichung.
Bei der Fixpunktmethode wird x_0 festgehalten, im anderen Fall kann auch die untere Grenze verschoben werden. Regula falsi konvergiert im Allgemeinen schneller als das Halbierungsverfahren, versagt jedoch bei einem großen Anstieg der Funktion an der Nullstelle bzw. bei schlecht gewählten Anfangs-Intervallgrenzen.

Im Programm wird die Fixpunktmethode als *Regula falsi*, die Methode der gleitenden unteren Grenze als *Regula falsi 2. Form* (Sekantenmethode) bezeichnet. Die zweite Methode ergibt eine wesentlich schnellere Konvergenz.

Beachten Sie bitte Folgendes: Gestattet man, dass auch die untere Grenze verschoben wird, so gibt es dafür prinzipiell zwei Möglichkeiten: Zum einen wandelt man die Iterationsgleichung in die Form

$$x_{n+2} = x_n - f(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) / (f(x_{n+1}) - f(x_n))$$

um und benutzt stets die zwei zuletzt berechneten Werte zur Ermittlung des neuen Näherungspunktes. In diesem Fall kann es durchaus vorkommen, dass sowohl x_n als auch x_{n+1} auf der gleichen Seite bezüglich der Nullstelle liegen. Dennoch erhält man quadratische Konvergenzgeschwindigkeit. Dieses Verfahren repräsentiert *Regula falsi 2. Form.*

Wenn man nun glaubt, die Tatsache, dass zwei Ausgangswerte auf der gleichen Seite der Nullstelle liegen, sei ein Nachteil und eine "Verbesserung" derart durchführt, dass von den aufeinander folgenden Näherungswerten immer derjenige durch den neuen Wert ersetzt wird, der einen Funktionswert mit dem gleichen Vorzeichen liefert, so verliert man erstaunlicherweise wieder die quadratische Konvergenzgeschwindigkeit und erhält nur noch eine lineare Konvergenz. Diese "verbesserte" Variante können Sie unter *Regula falsi 3. Form* testen.
Trotz der Tatsache, dass dieses Verfahren wesentlich schlechter konvergiert als Regula falsi 2. Form, ja mitunter keinerlei Geschwindigkeitsgewinn gegenüber der

1. Form bringt, hält sich die "verbesserte" Variante in der Praxis und selbst in ansonsten hervorragenden Mathematikbüchern hartnäckig. Besonders bedauerlich ist es, dass dieser Fehler auch in den Mathematiklehrbüchern führender Verlage für die Sekundarstufe II auftritt.

Beispiel: Die Funktion $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ besitzt zwischen $x = 1$ und $x = 3$ eine Nullstelle. Geben Sie die Intervallgrenzen $x(0) = 1{,}9$ und $x(1) = 3$ ein, so erhalten Sie die Lösung $x = 2{,}4656$.

Verfahren	Iterationsschritte (bei 6 Ziffern Genauigkeit)
Regula falsi	81
Regula falsi 2.Form	8
Regula falsi 3.Form	17

Wählen Sie das Anfangsintervall [2,2 ; 3], konvergiert die Fixpunktmethode (14 Iterationen) sogar schneller als die "verbesserte" Methode der 3. Form (16 Iterationen).

Illinois-Verfahren

Das Illinois-Verfahren ist eine modifizierte Variante von Regula falsi. Wird im Regula falsi-Verfahren eine Näherungsstelle x mit dem Funktionswert f(x) gefunden, so liegt bei ein beliebiges positives α auch α f(x) auf der gleichen Seite der Nullstelle. Setzt man nun

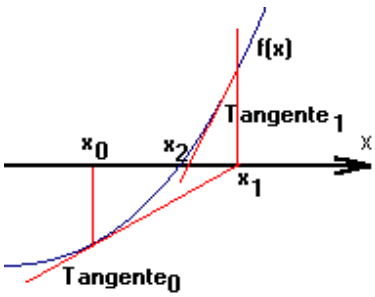
$$x_{n+1} = (\alpha\, f(x_n)\, x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n) / (\alpha\, f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

so kann sich eine bessere Konvergenz gegen die Lösung ergeben. Im Illinois-Verfahren setzt man $\alpha = 1/2$.

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren oder Tangentenverfahren (Tangentennäherungsverfahren) ersetzt die Sekante von Regula falsi durch die Tangente am Iterationspunkt x_0. Voraussetzung ist dabei, dass die Funktion f(x) in der Umgebung von x_0 wenigstens einmal differenzierbar ist. Eine näher an der gesuchten Nullstelle liegende Abszisse ergibt sich mit der Gleichung

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$$



Neben dem Newton-Verfahren mit fester Steigung – der Anstieg der Tangente $f'(x_0)$ wird nicht neu berechnet – wird auch eine variable Steigung betrachtet (im Programm unter der Bezeichnung *Newton-Verfahren* in der Liste umgesetzt).
Abbildung: Schnelle Konvergenz mit dem Newton-Verfahren

Dieses Verfahren konvergiert sehr schnell – versagt jedoch, wenn die Kurve von f(x) an der Näherungsstelle der x-Achse nahezu parallel ist oder wenn zwischen

dem Näherungswert und dem genauen Wurzelwert eine Extremstelle oder ein Wendepunkt mit zur x-Achse paralleler Wendetangente (Horizontalwendepunkt) liegt.
Außerdem finden Sie in der Liste die Bezeichnung *Newton-Verfahren (2)*.
Hierbei handelt es sich um die Umsetzung der Berechnungsvorschrift, bei der $f'(x_0)$ nur für den Startwert berechnet und dann konstant gehalten wird.
Vergleichen Sie dies mit dem Original-Newton-Verfahren, so werden Sie eine um vieles schlechtere Konvergenz feststellen. Liegt zwischen dem Startwert und der Nullstelle ein lokaler Extrempunkt, versagt das Verfahren vollständig, da die Iterationswerte divergieren.

Halley-Verfahren

Das Halley-Verfahren oder Verfahren der berührenden Hyperbeln ist wie das Newton-Verfahren eine Methode der numerischen Mathematik zur Bestimmung von Nullstellen reeller Funktionen f(x). Im Gegensatz zum Newton-Verfahren hat es eine kubische Konvergenz, benötigt dazu aber zusätzlich zur 1. auch die 2. Ableitung. Es ist nach dem Astronomen Edmond Halley benannt. Ein vergleichbares Verfahren ist das Euler-Tschebyschow-Verfahren.

Ist f(x) eine reelle Funktion mit zwei stetigen Ableitungen f'(x) und f''(x) und a eine Nullstelle von f(x), dann wird der Funktionsverlauf von f(x) in der Nähe von a durch die Funktion

$$g(x) = f(x) / \sqrt{(f'(x))}$$

ersetzt. Dies hat auf die Nullstelle keinen Einfluss. Wird nun das Newton-Verfahren auf g(x) angewendet, ergibt sich

$$g'(x) = (2 f'(x)^2 - f(x) f''(x)) / (2 f'(x) \sqrt{(|f'(x)|)}$$

und als Iterationsformel

$$x_{k+1} = x_k - (2 f(x_k) f'(x_k)) / (2 f'(x_k)^2 - f(x_k) f''(x_k))$$

Brent-Verfahren

Ein sehr starkes Näherungsverfahren wurde 1973 durch Richard Brent entwickelt. Für eine Vielzahl von Anwendungen ist es wesentlich leistungsfähiger als das Newton-Verfahren.
Sind drei Punkte x_1, x_2, x_3 und deren Funktionswerte gegeben, so ergibt sich der nächste Interpolationswert mit

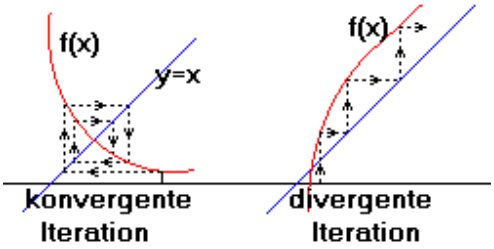
$$x = (y-f(x_1)) (y-f(x_2))x_3 / (f(x_3)-f(x_1)) (f(x_3)-f(x_2)) + (y-f(x_2)) (y-f(x_3))x_1 / (f(x_1)-f(x_2)) (f(x_1)-f(x_3)) + (y-f(x_3)) (y-f(x_1))x_2 / (f(x_2)-f(x_3)) (f(x_2)-f(x_1))$$

Für eine weitere Beschreibung lesen Sie bitte im Programmlexikon.

Anmerkung: Das Brent-Verfahren wird in vielen Unterprogrammen zur Ermittlung der Null-, Extrem- und Wendestellen eingesetzt.

Allgemeines Iterationsverfahren

Allgemein wird zur Bestimmung der Nullstelle die Gleichung f(x) = 0 auf die iterationsfähige Gleichung $x_{i+1} = F(x_i)$ gebracht. In der einfachsten Form geschieht dies mit $x_{i+1} = x_i - c\ f(x_i)$. Je nach Wahl des Parameters c konvergiert oder divergiert die wiederholte Anwendung dieser Gleichung gegen die gesuchte Nullstelle. Im Programm wird voreingestellt c = 0,8 gesetzt, wodurch prinzipiell nur dann eine Konvergenz zu verzeichnen ist, wenn der Anstieg der Funktion an der Nullstelle kleiner 1 ist.



In der grafischen Veranschaulichung erkennt man gut das konvergente bzw. divergente Verhalten des Iterationsprozesses.

Möchten Sie den Faktor c variieren, dann geben Sie Ihren Wert in das Feld *Iterationsfaktor* ein. Dieser Faktor wird ebenso bei den Näherungsverfahren δ^2-Aitken-Iteration und der Steffensen-Iteration genutzt. Erfahrungsgemäß sollte der Wert von c für eine gute Konvergenz kleiner als 1 sein.
Haben Sie die Absicht Ihren eingegebenen Wert für c mit zwei festen anderen zu vergleichen, so finden Sie in der Liste der Näherungsverfahren zwei Iterationsmöglichkeiten mit festem Iterationsfaktor.
Wählen Sie dazu den Eintrag *X = X - f(x)* mit c = 1 oder den Eintrag *X = X - 0,3 * f(x)* mit einem festen Iterationsfaktor von 0,3.

δ^2-Aitken-Iteration

Zur Verbesserung der Konvergenz des allgemeinen Iterationsverfahrens existiert eine Vielzahl von Methoden. Zuerst passt man die Konstante c der Funktion an, d.h., durch unterschiedliche Werte für c versucht man die Konvergenz zu verbessern.

Beispiel: Zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion Y = X^4-X-2 im Intervall [1;2] wird das allgemeine Iterationsverfahren mit c = 1 getestet; mit dem Ergebnis, dass das Verfahren nach fünf Schritten divergiert und damit abbricht. Wird c schrittweise gesenkt, so divergiert das Verfahren bis c = 0,55328. Für kleinere Werte konvergiert das Iterationsverfahren plötzlich und ermittelt die Nullstelle bei 1,3532.
Darüber hinaus führt der δ^2-Aitken-Prozess (Alexander C. Aitken, 1926) zu einer deutlichen Erhöhung der Konvergenz. Nach je zwei normalen Iterationsschritten wird unter Nutzung der drei zuletzt erzielten Iterationswerte ein Aitken-Schritt eingeführt.

$$x_{3i+3} = x_{3i} - (x_{3i+1} - x_{3i})^2 / (x_{3i+2} - 2\ x_{3i+1} + x_{3i})$$

Es zeigt sich sogar, dass mit dem allgemeinen Iterationsverfahren divergente Iterationen nun konvergent sind.
Beachten Sie bitte, dass der Iterationsfaktor c auch in diesem Verfahren Bedeutung besitzt, da weiterhin je Aitken-Schritt zwei "normale" Iterationen

durchgeführt werden.

Steffensen-Iteration

Die Konvergenz ist bei Nutzung des Aitken-Schrittes trotz Verbesserung immer noch linear. Einer Idee von Johan F. Steffensen (1933) folgend, erhält man eine quadratische Konvergenz, wenn nach einem normalen Iterationsschritt unter Beachtung von

$$x(i+1) = f(x(i)) \text{ und } x(i+2) = f(x(i+1)) = f(f(x(i)))$$

alle weiteren Werte mit der Iterationsformel

$$x_{i+1} = [f(x_i)^2 - x_i\, f(f(x_i))] / [2\, f(x_i) - x_i - f(f(x_i))]$$

gewonnen werden.

Müller-Steffensen-Iteration

Eine deutliche Verbesserung der Konvergenz erhält man mit der Müller-Steffensen-Iteration. Ausgehend von drei Stützpunkten werden Parabeln ermittelt. Deren kleinste Wurzeln werden als neuer Iterationspunkt genutzt. Die Besonderheit dieses Verfahrens besteht darin, dass es auch bei kleinen Funktionswerten oder schlechter Konvergenz des δ^2-Aitken-Prozesses genutzt werden kann.

Vergleich der allgemeinen Iterationsverfahren

Beispiel: Für die Funktion Y = X^3-X-3 soll mit dem Startintervall [1,5 ; 2] eine Nullstelle gesucht werden (Genauigkeit 6 Ziffern). Das allgemeine Iterationsverfahren bricht für den voreingestellten Iterationsfaktor c = 0,8 über die Argumente x(i) = 1,5 ; 2,4 ; -4,3392 ; 59,9505 auf Grund der Divergenz ab. Damit versagt auch die Iteration mit c = 1.
Bei Einführung des Aitken-Schrittes konvergiert das Verfahren nach Anfangsschwankungen und ermittelt im 18. Schritt x = 1,6717 als gesuchte Nullstelle. Das Steffensen-Verfahren erreicht schon nach 11 Schritten die erforderliche Genauigkeit.

Wählen Sie jedoch den Iterationsfaktor c = 0,2, so erhalten Sie bei der allgemeinen Iteration nach 18 Schritten, beim Aitken-Verfahren nach 12 Schritten, bei der Steffensen-Iteration allerdings erst nach 23 Schritten das Ergebnis. Weitere Tests zeigen, dass mit dem Steffensen-Verfahren mit c = 1 beste Ergebnisse erzielt werden.
Anmerkung zu den anderen Verfahren: Das Newton-Verfahren benötigt 4 Schritte, ebenso das Brent-Verfahren (das sich aber schneller der Nullstelle annähert), die Bisektion 21, Regula falsi mit Fixpunkt 9 und Regula falsi mit gleitenden Grenzen 6 Näherungsschritte, das Illinois-Verfahren 7 Schritte.

Allgemeine Hinweise zu den Näherungsverfahren

In diesem Unterprogramm werden die beschriebenen Verfahren nebeneinander

betrachtet.
In den drei aufklappbaren Boxen wählen Sie je Box eines der genannten Näherungsverfahren aus. Nach der Eingabe der Funktion und des Startintervalls wird mit dem Schalter *Berechnung* die Iteration begonnen. Die ermittelten Näherungen werden mit Abszisse und Ordinate in den Listboxen angezeigt. Zum schnelleren Ermitteln eines günstigen Anfangsintervalls können Sie zuvor die Funktion mittels Schalter *Darstellung* grafisch darstellen.

Bei schlechter Konvergenz oder Divergenz bricht das Programm nach den unter *maximalen Einträge* (Voreinstellung 100) eingegebenen Schritten ab. Zusätzlich kann die angestrebte *Genauigkeit* für den Funktionswert von einer bis zu sechs Kommastellen (Voreinstellung 6) festgelegt werden.
Ist die Funktion nicht differenzierbar oder versagt das Newton-Verfahren aus den oben genannten Gründen, erscheint eine entsprechende Meldung.

Beispiel: Für die Funktion $Y=X^3+2*X-1$ und einem Anfangsintervall x(0)=0 und x(1)=1 benötigt die Bisektion 16 Schritte, Regula falsi 9 Schritte und das Newton-Verfahren nur 4 Iterationen zur Ermittlung der Nullstelle bei 0,4534.
Tabelle der Iterationszahlen für das Beispiel:

Verfahren	Iterationen bei 5 Ziffern Genauigkeit	bei 6 Ziffern Genauigkeit
Bisektion	16	20
Trisektion	15	19
Regula falsi	9	10
Regula falsi 2.Form	6	6
Regula falsi 3.Form	11	13
Newton-Verfahren	4	5
Newton-Verfahren 2.Form	11	13
Halley-Verfahren	3	4
Monte-Carlo	27	23
Allgemeine Iteration C = 0,8	Abbruch	Abbruch
Allgemeine Iteration C = 0,6	21	25
Allgemeine Iteration C = 0,4	5	6
Iteration X = X - 0,3 * f(x)	9	10
δ^2-Aitken-Iteration	9	10
Steffensen-Iteration	6	7
Brent-Verfahren	4	4
Illinois-Verfahren	7	7
Müller-Steffensen-Iteration	4	4 "stärkstes" Verfahren

Anmerkung: Mit diesem Teilprogramm können beliebige Gleichungen der Form g(x) = h(x) näherungsweise gelöst werden, indem die Funktion f(x) = g(x) - h(x) untersucht wird.

Möchten Sie die berechneten Tabellen speichern, in die Zwischenablage kopieren oder drucken, so wählen Sie die entsprechenden Schalter. Das Programm gibt

dabei die Funktion, das Startintervall und die vollständigen Listen der drei parallel betrachteten Verfahren aus.

3.65 Interaktive Iterationsverfahren

Nullstellen von Funktionen bzw. Lösungen von Gleichungen werden mittels Computer sehr oft unter Nutzung verschiedener Näherungsverfahren ermittelt – insbesondere, wenn für die Gleichung kein exakter analytischer Lösungsalgorithmus existiert.
Die Grundprinzipien dieser Verfahren sind dabei Iteration und Intervallschachtelung, d.h., durch wiederholtes Anwenden einer Berechnungsvorschrift wird der Bereich, in dem die gesuchte Lösung liegt, immer weiter eingeschränkt.

Die rein numerische Berechnung können Sie im Teilprogramm *Näherungsverfahren* durchführen. Hier steht die grafische Veranschaulichung der mathematischen Verfahren im Vordergrund.
Für die Verfahren Bisektion (Intervallhalbierungsverfahren), Regula falsi, Newton-Verfahren und allgemeines Iterationsverfahren geben Sie zuerst unter *Y* = eine Funktionsgleichung ein. Diese Funktion sollte im Intervall von -3 bis 3 eine Nullstelle enthalten, andernfalls können Sie die grafische Veranschaulichung nicht nutzen. Die Intervallgrenzen x_0 und x_1 können Sie durch Anklicken und Ziehen mit der Maus verändern.

An dem Rollbalken stellen Sie die Anzahl der Iterationen ein. Das Programm bestimmt sofort die ermittelten Iterationswerte und stellt diese dar. Unabhängig von der Struktur der Funktion (sie muss eine Nullstelle besitzen!) können Sie so nachvollziehen, dass sich die Näherungswerte der gesuchten Nullstelle, wenn auch langsam, kontinuierlich annähern.

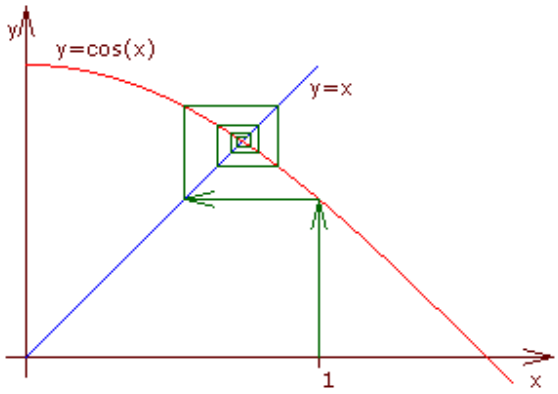
Direkte Eingabe der Startwerte

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen*, so zeigt Ihnen das Programm die Tabelle der Startpunkte und berechneten Näherungspunkte an. Ein oder zwei der Tabellenfelder sind farbig unterlegt, die Schrift ist hervorgehoben – je nachdem, ob das Näherungsverfahren zwei x-Werte oder nur einen zum Anfang benötigt. In diese Felder können Sie neue Werte eingeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld und tragen Sie den neuen Wert ein.
Nach Bestätigung der Eingabe mit der *TAB*-Taste oder den Cursortasten übernimmt das Programm den neuen Wert und erstellt die Darstellung neu.

3.66 Iterationsverfahren x = f(x)

Im 2.Teilprogramm zum allgemeinen Iterationsverfahren wird die Iteration an der Gleichung x = f(x) grafisch veranschaulicht.

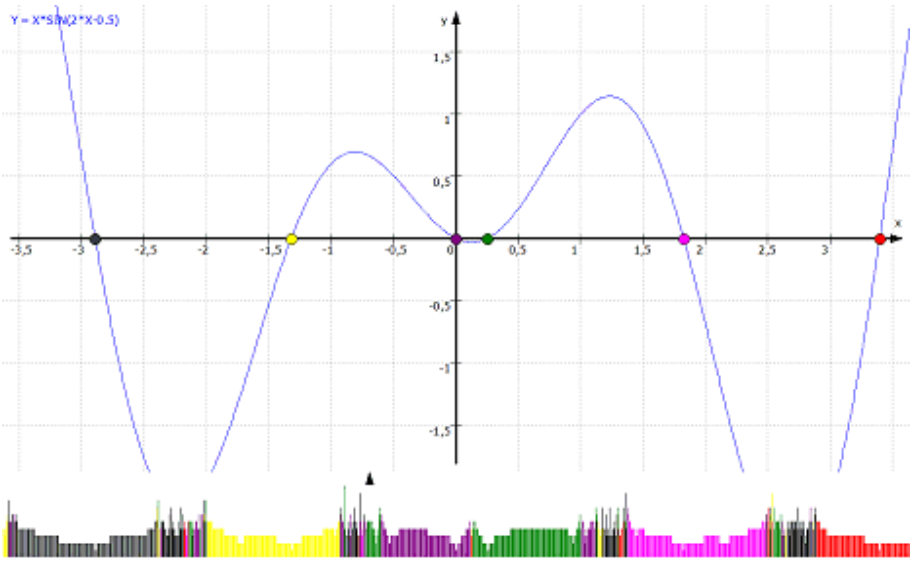
Nach der Eingabe einer Funktionsgleichung wird der Graph der Funktion im Intervall [0 , *Größe*] gezeichnet, wobei der Wert *Größe* am Rollbalken verändert werden kann. Zusätzlich wird im 1.Quadranten die Gerade y = x eingetragen.



Beginnend bei einem Startwert von 1 wird nun x = f(x) immer wieder berechnet. Dieser Startwert kann mit der Maus verschoben werden.
In der grafischen Darstellung entspricht dies einem ständigen Kurvenverlauf von einem Punkt des Funktion f(x) waagerecht nach y = x, von diesem Punkt senkrecht zur Funktion f(x) usw. Konvergiert das Verfahren, so werden sich eingezeichneten Strecken immer mehr dem Schnittpunkt von f(x) und y = x, d.h. der Lösung der Gleichung x- f(x) = 0 annähern.

Die Anzahl der Iterationen stellen Sie am Rollbalken ein. Die Lage des Ursprungs O kann mit der Maus in senkrechte Richtung verschoben werden.

3.67 Newton-Iterationsdiagramm



Das Newton-Verfahren oder Tangentenverfahren (Tangentennäherungsverfahren) ersetzt die Sekante von Regula falsi durch die Tangente am Iterationspunkt x_0. Voraussetzung ist dabei, dass die Funktion f(x) in der Umgebung von x_0 wenigstens einmal differenzierbar ist. Eine näher an der gesuchten Nullstelle liegende Abszisse ergibt sich mit der Gleichung
$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$

Dieses Verfahren konvergiert sehr schnell – versagt jedoch, wenn die Kurve von f(x) an der Näherungsstelle der x-Achse nahezu parallel ist oder wenn zwischen dem Näherungswert und dem genauen Wurzelwert eine Extremstelle oder ein Wendepunkt mit zur x-Achse paralleler Wendetangente (Horizontalwendepunkt)

liegt.

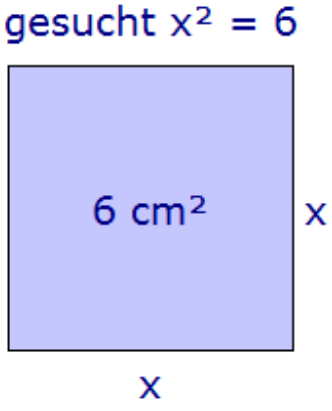
Die Konvergenz des Newton-Verfahrens hängt entscheidend von der Wahl des Startwertes ab. Bei mehreren Nullstellen können unterschiedliche Startwerte zu unterschiedlichen Nullstellen führen. Mitunter wird von einem Startwert aus auch nicht die nächstliegende Nullstelle gefunden.

Der Definitionsbereich der Funktion wird damit in Bereiche geteilt, von denen aus bestimmte Nullstellen erreichbar sind, sowie in Bereiche ohne Konvergenz. Diese Konvergenzbereiche werden in diesem Teilprogramm ermittelt.
Tragen Sie zuerst eine *Funktion* ein und klicken Sie auf *Auswertung*.
Hat die Funktion im Darstellungsbereich Nullstellen, so werden diese farbig markiert.

Im unteren Fensterbereich zeigt das Programm längs der x-Achse durch die gleichen Farben an, welche Nullstelle mit diesem Startwert erreicht würde. Dabei stellt die Höhe der farbigen Linien die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte bis zum Erreichen einer Genauigkeit von 0,0001 dar. Hohe Linien bedeuten damit schlechtere Konvergenz.

Fehlen Linien für einzelne x-Werte, so divergiert hier das Newton-Verfahren, sind die Linien schwarz, strebt das Verfahren gegen eine Nullstelle außerhalb des Darstellungsbereiches.
Möchten Sie für einen einzelnen Abszissenwert die Iteration sehen, so markieren Sie *Iteration darstellen*. Die Lage des entsprechenden Startwertes verändern Sie durch Klicken und Verschieben des kleinen schwarzen Pfeils im unteren Fensterbereich.

3.68 Heron-Verfahren



Dieses Teilprogramm demonstriert die Grundidee des Heronschen Näherungsverfahrens zur Bestimmung von Quadratwurzeln.
Soll die Wurzel aus n, z.B. n = 6, ermittelt werden, so bedeutet dies die Seitenlänge x eines Quadrates des Flächeninhaltes A = 6 zu bestimmen.

Geht man von einem flächengleichen Rechteck aus, z.B. mit den Seitenlänge x = 2 und y = 3, so kann ein "quadratähnlicheres" Rechteck konstruiert werden, in dem das nächste Rechteck als Seitenlängen den Mittelwert x = (2+3)/2 und y = 6/x besitzt. Wiederholt man dies mehrfach, so nähern sich x und y immer mehr der gesuchten Wurzel an.

Die Zahl n, aus der die Wurzel gezogen werden soll, stellen Sie am Rollbalken ein. Erhöhen Sie den Wert bei Iterationen, so wird das Heronsche Verfahren schrittweise vorgeführt.

3.69 Iterationsberechnung

Dieses kleine Teilprogramm ermöglicht Ihnen die schnelle Berechnung einer Iteration.
Tragen Sie dazu die Iterationsgleichung y = f(x,p) und den *Startwert* x0 sowie den *Parameter* p ein. Vorgesehen ist, dass die Iterationsgleichung die Variable x und eventuell einen Parameter p enthält. Andere Variablenbezeichner werden hier nicht korrekt erkannt.

Nach einem Klick auf den Schalter *Berechnung* bestimmt das Programm die einzelnen Iterationsschritte, maximal die von Ihnen unter *Iterationen* angegebene Anzahl.
Ergibt die Berechnung keine signifikante Änderung des Funktionswertes, stoppt sie automatisch.

Beispiel:
Für die Iterationsgleichung x*(2-p*x) erhalten Sie mit einem positiven Startwert x und einem beliebigen positiven Wert p als Iterationsergebnis das Reziproke 1/p. Mit der Heron-Gleichung (x+p/x)/2 erhalten Sie die Quadratwurzel √p. Wie erwartet, divergiert dieses Verfahren für negative p.

3.70 Numerische Quadratur, Integrationsverfahren

Streng analytische Integrationsverfahren ermöglichen nicht immer die Lösung eines bestimmten Integrals. In der Praxis erweist sich sogar, dass die Mehrzahl aller Integrationsaufgaben nicht analytisch gelöst werden kann. In solchen Fällen nutzt man numerische Näherungsverfahren, von denen in diesem Unterprogramm von 27 Verfahren und Gleichungen jeweils drei parallel verwendet werden können.

Dazu geben Sie zuerst unter *Funktion y* = die gewünschte Funktion und in den Eingabezeilen *Intervall x0* und *x1* die Intervallgrenzen an. Für die Intervallgrenzen können Sie auch Terme der Form PI oder SIN(1) ... verwenden.

Über das grafische Vorschaubild können Sie sich schnell über den Verlauf der Funktion informieren. Dieses Vorschaubild wird bei der Eingabe der Funktionsgleichung automatisch aktualisiert. Eine hochwertigere Darstellung der Funktion erhalten Sie über den Schalter *Darstellung.*

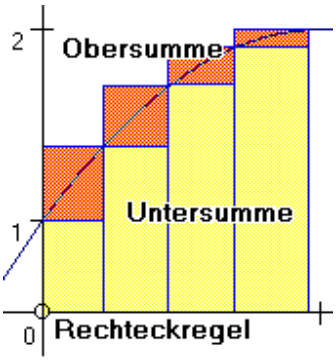
Als Verfahren sind nutzbar:

- Rechteck-Regel
- Mittelpunktsregel
- Trapezregel / Tangententrapezregel
- Poncelet-Formel
- Simpson-Regel
- Newtonsche 3/8-Regel
- Newton-Cotes-Formeln
- Offene Newton-Cotes-Formeln
- Romberg-Verfahren
- Steklov-Verfahren

- Monte Carlo - Verfahren
- Gauß-Legendre-Formeln
- Tschebyschow-Verfahren
- Bessell-Quadratur

Rechteck-Regel

Die Fläche unter einer Funktion lässt sich näherungsweise berechnen, indem man das Gesamtintervall [a,b] in n gleich große Teilintervalle [a(i), b(i)] teilt und in diese Rechtecke einbeschreibt, deren Seiten zum einen von der Teilintervallbreite $\Delta x = b(i) - a(i)$ und zum anderen vom Funktionswertminimum bzw. Funktionswertmaximum des Teilintervalls gebildet werden. Zweckmäßig ist dabei eine konstante Teilintervallbreite Δx, die allerdings nicht unbedingt notwendig ist. Die Summe aller "kleinen" Rechtecke, also die Untersumme, ist kleiner als der gesuchte Flächeninhalt, die Obersumme ist größer.



Ist die Funktion im Riemannschen Sinne integrierbar, streben Untersumme U(n) und Obersumme O(n) für eine wachsende Zahl von Teilintervallen gegen die gesuchte Fläche unter der Funktion.

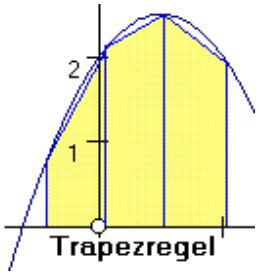
Im Programm können Sie sowohl die Unter- als auch die Obersumme berechnen lassen. Für die Untersumme gilt (bei gleicher Intervallbreite und monoton steigender Funktion):

$$U(n) = \Delta x\,(f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b - \Delta x))$$

Über die Auswirkungen einer steigenden Zahl von Teilintervallen können Sie sich auch im Unterprogramm *Interaktive Quadraturverfahren* informieren. In diesem Programmteil wird Ihnen die Rechteckregel grafisch veranschaulicht.

Mittelpunktsregel

Während bei der Rechteckregel zur Ermittlung der Höhe des eingeschriebenen Rechtecks, je nach Wahl, der Funktionswert der linken bzw. rechten Intervallgrenze genutzt wird, liefert bei der Mittelpunktsregel das arithmetische Mittel der Intervallgrenzen (der Mittelwert) die Stützstelle. Bei einer Vielzahl von Funktionen wird dadurch ein besserer Näherungswert erreicht. Die Güte der Konvergenz wird allerdings nicht verbessert.



Trapezregel / Tangententrapezregel

Offensichtlich konvergieren die Ober- und Untersumme der Rechteckregel nur langsam gegen den wahren Wert der Fläche. Deshalb ersetzt man das Rechteck in jedem Teilintervall durch ein Trapez, d.h., es werden jeweils zwei Punkte des Graphen durch eine Sekante verbunden.

Leitet man die entsprechende Formel (gleiche Intervallbreite Δx) her, ergibt sich

$$T(n) = \Delta x\,(f(a)/2 + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b)/2)$$

Der Unterschied zur Rechteckregel besteht folglich nur darin, dass in ihr Δx f(b) / 2 mehr und Δx f(a) / 2 weniger addiert werden. Die numerische Auswirkung auf die Genauigkeit ist jedoch beträchtlich.

Während bei der genannten Trapezregel Sekanten das Trapez bilden, benutzt man bei der Tangententrapezregel Tangenten an den jeweiligen Kurvenstücken. Je nach Integrand erreichen Sie so eine bessere oder schlechtere Konvergenz. Unter der *Poncelet-Formel* versteht man das arithmetische Mittel aus Trapezregel und Tangententrapez-Regel.

Simpson-Regel

Setzt man den Gedanken fort, die Teilflächen immer besser der Funktion anzupassen, so erhält man die von Newton und Cotes verfolgte Idee:
Die Geradenstücke durch zwei Punkte werden durch Parabelstücke durch drei Punkte oder durch Polynome 3. Grades durch vier Punkte usw. ersetzt. Insbesondere die Verwendung von Parabelstücken erhöht die Konvergenz erheblich und ergibt die sogenannte Simpson-Regel. Die Entwicklung der Teilintervalle führt zur Gleichung:

$$S(n) = \Delta x/3\,(f(a) + f(b) + 4f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\,\Delta x) + 4f(a + 3\,\Delta x) + \ldots)$$

Betrachtet man nur zwei Teilintervalle, so erhalten Sie die Keplersche Fassregel:

$$A = (b-a)/6\,(f(a) + 4\,f((a+b)/2) + f(b))$$

wobei a und b die begrenzenden Argumente sind. Wie damals üblich, sorgte Johannes Kepler (1571-1630) durch das jährliche Einlagern einiger Fässer Wein für sich und seine Familie. Bald schon wunderte er sich aber über die Volumenvermessungstechnik der Fassmacher bzw. Weinlieferanten: Es wurde mit einer Rute durch das an der dicksten Fassstelle gelegene Spundloch zum Rand hin gemessen. Da Kepler klar wurde, dass so extrem unterschiedliche Fässer scheinbar das gleiche Volumen hatten, näherte er die Fassbegrenzung durch eine Parabel an und entwickelte so die nach ihm benannte Fassregel.

Zwar konvergiert die Simpson-Regel wesentlich besser als die Rechteck- oder die Trapezregel, jedoch stellt die unterschiedliche Gewichtung der Stützstellen ein rechentechnisches Ärgernis dar, welches durch interne Rundungen den Konvergenzvorteil durchaus wieder aufheben kann. Im Programm wird mit 14 Stellen Genauigkeit gerechnet, sodass dieser Effekt praktisch nicht auftritt.

Newtonsche 3/8-Regel / Newton-Cotes-Formeln

Interpoliert man die gewählten Teilintervalle nicht durch quadratische Parabeln, sondern durch kubische Funktionen ergibt sich die 3. Newton-Cotes-Formel, die sogenannte 3/8-Regel. Für einen Teilbogen gilt hier:

$$F(x) = 3/8\ \Delta x\ (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

Summiert man über n Teilintervalle, werden die Intervallgrenzen zyklisch mit den Faktoren 3,3 und 2 gewichtet.

Für noch größere Konvergenzgeschwindigkeit können Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Funktion immer deutlicher werden. Die Entwicklung weiterer Newton-Cotes-Formeln kompliziert die Berechnung. Das Programm enthält die Newton-Cotes-Formeln 4. bis 7. Grades.
Zu beachten ist hierbei aber, dass nach einem Satz von Kusmin eine Erhöhung der zur Interpolation genutzten Polynome bei einigen Integranden sogar zur Divergenz führen kann. Die 7. Newton-Cotes-Formel garantiert jedoch in nahezu allen Anwendungsfällen eine hervorragende Konvergenz.

Offene Newton-Cotes-Formeln

Die oben genannten Newton-Cotes-Formeln bilden sogenannte geschlossene Formeln, d.h., die Randwerte des Integrationsintervalls gehen in die Berechnung ein. Für uneigentliche Integrale, bei denen die Funktion an den Intervallgrenzen nicht definiert ist, ist dies ein deutlicher Nachteil, da nun Grenzübergänge zu betrachten wären.
Abhilfe bringen die offenen Newton-Cotes-Formeln, auch Steffensen-Formeln genannt. Die Tatsache, dass nun der Anfangs- und Endwert des Integrals nicht mehr berücksichtigt und somit Fehler an nicht definierten Grenzen verhindert werden, führt aber mitunter zu deutlich schlechterer Konvergenz. Eine weitere mathematischen Beschreibung hierzu finden Sie im Lexikon.
Im Programm sind zwei derartige Gleichungen unter der Bezeichnung *3., 4. und 5. offene Newton-Cotes-Formeln* implementiert.

Beispiel: Für die Bestimmung des Integrals $_0\int^1 dx / \sqrt{x}$ wird die 4. offene Newton-Cotes-Formel und die 7. geschlossene Newton-Cotes-Formel genutzt. Da die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist, konvergiert die offene Formel mit 1,99 besser gegen den korrekten Wert von 2 als die geschlossene Formel mit 1,97.

Romberg-Verfahren , Steklov-Verfahren

Die Simpson- und die Newtonsche 3/8-Regel sind rechentechnisch relativ aufwendig. Der norwegische Mathematiker Romberg schlug deshalb 1955 ein Verfahren vor, das die Trapezformel nutzt und dennoch Genauigkeiten wie bei der Simpson-Regel erzielt.
Ist T(n) der Wert der Trapezregel für n Teilintervalle und T(2n) der Wert für 2n Teilintervalle, so bildet Romberg den Quotienten:

$$S_{2n} = 4(T_{2n} - T_n) / 3$$

und erhält so sehr günstige Näherungen. Während die Trapezformel mit einem Konvergenzfaktor q = 1/4 konvergiert, erreicht das Romberg-Verfahren q = 1/16. Eine Konvergenz von sogar q = 1/64 ergibt sich für $R_{2n} = 16(S_{2n} - S_n) / 15$.

Nach Steklov (1916) kann diese Entwicklung weiter fortgesetzt werden. Im Programm wird als *Romberg-Verfahren* S(2n) ermittelt. Unter dem Listeneintrag *Steklov-Verfahren* berechnet das Teilprogramm die angegebenen Terme R(2n).

Monte Carlo-Verfahren

Ist die Fläche unter einer Funktion f(x) in einem Intervall [a;b] gesucht, so kann die Berechnung auch mittels Zufallszahlen geschehen. Wählt man für das Argument gleichmäßig verteilte Zufallszahlen x(i) im Intervall [0;1] und berechnet zu jeder Zahl den Funktionswert f(x(i)), so ist der statistische Mittelwert M[f(x)] mit der Intervallbreite multipliziert, ein guter Schätzwert für den Flächeninhalt des gesuchten Intervalls. Da das arithmetische Mittel wiederum ein effektiver Wert für das statistische Mittel ist, gilt für die gesuchte Fläche:

$$A = 1/n \sum f(x_i) \approx {}_0\int^1 f(x)\,dx$$

Entwickelt man diese Gleichung zu einer rekursiven Formel der Flächeninhalte A(i), ergibt sich

$$A_k = 1 / k \,(A_{k-1}(k - 1) + f(x_k)).$$

Diese Gleichung wird im Programm genutzt. Vergleiche mit anderen Integrationsverfahren demonstriert die zufällige Konvergenzstärke – sie verdeutlicht aber auch, dass diese Anwendung der Monte-Carlo-Methode durchaus ihren praktischen Nutzen besitzt.

Gauß-Legendre-Formeln / Tschebyschow-Verfahren

Rechentechnisch noch anspruchsvoller als die Newton-Cotes-Formeln sind Formeln nach Gauß-Legendre. Der Grundgedanke dieser Gleichungen besteht darin, nicht nur unterschiedliche Gewichte, d.h. Faktoren der Stützstellen, sondern auch nicht äquidistante (unterschiedlicher Abstand) Stützstellen zu nutzen. Diese Stützstellen ergeben sich als die Nullstellen der zugehörigen Legendre-Polynome $P_n(x)$.

Darüber hinaus muss das Integral auf die Grenzen von -1 bis 1 transformiert werden. So ergibt sich als 3. Gleichung (n = 2) nach Gauß-Legendre zum Beispiel:

$$I = h/9 \,(5f(-h/5\,\sqrt{15}) + 8\,f(0) + 5\,f(h/5\,\sqrt{15})) + h^7/15750\,f^{(6)}(\xi)$$

wobei ξ eine Zwischenstelle des Intervalls [-h;h] ist.

Die Tragweite besteht darin, dass mit der n-ten Gauß-Legendre-Formel Polynome 2n-1. Grades bei nur n Stützstellen vollkommen exakt berechnet werden können. Damit sind diese Gleichungen weitaus leistungsfähiger als Newton-Cotes-Formeln gleichen Grades.
Sie können die 1. bis 5. Gauß-Legendre-Formel testen. Insbesondere die 5. Gleichung stellt ein sehr mächtiges Werkzeug für die numerische Integration dar. In vielen Beispielen genügen zwei oder fünf Stützstellen, um eine bessere Genauigkeit als $5 \cdot 10^{-10}$ zu erreichen.

Pawnuti L. Tschebyschow (1821-1894) nutzte für seine Quadraturformeln ebenfalls den Grundgedanken von Gauß. Allerdings fordert er gleich große Gewichte, womit die Fehler aller Funktionswerte gleich stark eingehen. Die 1. und 2. Tschebyschow-Gleichung unterscheiden sich nicht von denen von Gauß-Legendre. Die 3. Tschebyschow-Formel lautet:

$$I = 2h/3 \, (f(-h/2\sqrt{2}) + f(0) + f(h/2\sqrt{12}))$$

Weiterhin enthält das Programm mit den Einträgen *Tschebyschow n = 4* bzw. *n = 5* die 4. und 5. derartige Formel. Interessant ist, dass die Tschebyschow-Formeln nur bis n = 7 brauchbar sind, da für n = 8 bzw. n = 10 nicht reelle, komplexe Stützstellen entstehen.

Bessell-Quadratur

Einer Idee von Charles Hermite folgend ist es möglich, für die Quadratur einer Funktion auch deren Ableitungen zu nutzen. Die Problematik der Bestimmung der Ableitung kann man umgehen, indem man Differenzenquotienten einsetzt. Zusätzlich muss jedoch für die Integration der Funktion f(x) im Intervall [a,b] diese auch für a - Δx und b + Δx definiert sein. Dies führt zur Bessellschen Quadraturformel:

$$I = (b-a)/n \, (-1/24 \, f(a - \Delta x) + ½ \, f(a) + 25/24 \, f(a + \Delta x) + \ldots + 25/24 \, f(b - \Delta x) + ½ \, f(b) - 1/24 \, f(b + \Delta x))$$

Vergleich der Näherungsverfahren

In diesem Unterprogramm werden diese 22 Verfahren nebeneinander betrachtet. In den aufklappbaren Boxen wählen Sie jeweils eines der genannten Verfahren aus.
Das Programm berechnet die Fläche unter der Funktion für je 2, 5, 10, 20, 50, 75, 100, 200, 500, 750, 1000, 2000, 3000 und 5000 Stützstellen. Da die n-Newton-Cotes-Formel eine jeweils restlos durch n teilbare Stützstellenzahl benötigt, nutzt das Programm in diesen Fällen veränderte Stützstellenzahlen. Verwenden Sie Gauß-Legendre-Formeln, bricht das Programm die Berechnung bei einer erzielten Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-10}$ automatisch ab.

Zusätzlich kann die angezeigte Genauigkeit des Funktionswertes von 1 bis 9 Kommastellen (Voreinstellung 6) festgelegt werden. Die Berechnung wird ebenso abgebrochen, wenn die eingestellte Genauigkeit erreicht wurde.
Mit dem Schalter *Berechnung* wird die numerische Integration begonnen. Bemerkenswert ist, dass ab etwa 1000 Stützstellen die Genauigkeit bei sehr komplexen Integranden nicht mehr unbedingt zunimmt – unter Umständen sogar wieder zurückgeht. Die Ursache hierfür liegt in den internen Rundungen der Zwischenergebnisse.

Beispiel: Die Berechnung der Fläche unter der Funktion Y = SIN(X) im Intervall [0;PI] – exakter Wert = 2 – ergibt mit den einzelnen Verfahren:

Stützstellen	10	100	5000
Rechteck (unten)	1,572284	1,967433	1,999372
Rechteck (oben)	2,297683	2,031251	2,000628
Mittelpunktsregel	1,959103	1,999589	2
Trapez	1,983524	1,999836	2
Tangententrapez	2,030278	2,000329	2
Simpson	2,00011	2	2
3/8-Regel	2,000382[9]	2	2
4.Newton-Cotes	1,999983[8]	2	2
5.Newton-Cotes	1,999991	2	2
6.Newton-Cotes	2 [18]	2	2
7.Newton-Cotes	2 [14]	2	2
3.offene Newton-Cotes	1,981133	1,999835	2
4.offene Newton-Cotes	2,066005	2,000658	2
Romberg	2,00011	2	
Steklov	1,998751	1,999999	2
Bessell	1,999704	1,999999	2
Monte-Carlo	2,087464	1,987746	2,011721
Gauß-Legendre 1	2,008248	2,000082	2
Gauß-Legendre 2	1,999995	2	2
Gauß-Legendre 3	2	2	2
Gauß-Legendre 4	2	2	2
Gauß-Legendre 5	2	2	2
Tschebyschow	1,999998	2	2
Tschebyschow n=4	2	2	2
Tschebyschow n=5	2	2	2

[ ] Werte in Klammern geben die genutzten Stützstellen an.

Zur Veranschaulichung der Funktion kann diese grafisch dargestellt werden. Dabei wird die zu ermittelnde Fläche eingefärbt.

3.71 Ober- und Untersumme

Die klassische Definition des bestimmten Integrals erfolgt über die Grenzwertbildung einer Unter- und einer Obersumme von Rechtecken, die der Funktion angepasst werden, d.h., der gemeinsame Grenzwert der Folgen (U_K) und (O_K) wird als Integral zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze e festgelegt. Existiert dieser gemeinsame Grenzwert, nennt man die Funktion im Riemannschen Sinne integrierbar.

Derartige Summen können Sie in diesem Unterprogramm für 1 bis 200 Rechtecke berechnen und darstellen.
Geben Sie zuerst die zu untersuchende *Funktion* f(x) unter *Funktion Y*= und zusätzlich die Intervallgrenzen (*von*) und (*bis*) an. Für die Intervallgrenzen können Sie wieder Terme der Form PI, SIN(1) usw. nutzen.

Betätigen Sie den Schalter *Darstellung*, ermittelt das Programm den korrekten

Wert des Integrals

$$\int_a^e f(x)\,dx,$$

stellt den Funktionsverlauf und die ein- und umbeschriebenen Rechtecke dar und berechnet die Summe der kleineren wie auch großen Rechteckflächen. Erhöhen Sie die Anzahl der Rechtecke am Rollbalken *Intervalle*, können Sie Schritt für Schritt nachvollziehen, wie sich die Werte der Unter- und Obersumme allmählich annähern und im Grenzwert dem bestimmten Integral zustreben.

Beispiel: Y=X*SIN(X) im Intervall von 0 bis 3

Teilintervalle	1	2	10	50	100	250
Untersumme	0	0,635	2,6095	3,0135	3,0628	3,0917
Obersumme	5,4591	4,9739	3,5723	3,2064	3,1593	3,1303
Mittelwert	2,7295	2,8045	3,0909	3,11	3,111	3,111

An den Werten erkennt man deutlich, dass sich beide Summen gegen den exakten Flächeninhalt von 3,1111 annähern. Zusätzlich berechnet das Programm das arithmetische Mittel der Unter- und Obersumme. Aufgrund der Konstruktion der Werte entspricht dieser Mittelwert gerade dem Ergebnis bei Nutzung der Trapezregel. Deshalb nähert sich dieser Wert noch besser dem korrekten Wert des Integrals an.

Beachten Sie bitte, dass in diesem Unterprogramm nur stetige Funktionen sowie Intervalle verwendet werden können, in denen die Funktion für jeden Definitionswert einen nicht negativen Funktionswert besitzt.

Andernfalls erhalten Sie die Fehlermeldung: *Nicht alle Funktionswerte ≥0 oder Unstetigkeitsstellen vorhanden*

Nach dem Start der Simulationen wird die Anzahl der Rechtecke kontinuierlich erhöht bzw. verringert und die Darstellung neu gezeichnet.

3.72 Trapez- und Simpsonregel

Zur grafischen Veranschaulichung der Wirkung der fünf bekanntesten Quadraturverfahren – der Rechteck-, Mittenrechteck, Trapez-, Simpson- und Newton-Cotes-Regel – können Sie diese Verfahren in diesem Unterprogramm zur Berechnung beliebiger Flächen unter Funktionen einsetzen.
Geben Sie zuerst die zu untersuchende *Funktion* f(x) unter *Funktion Y*= und zusätzlich die Intervallgrenzen a (*Intervallanfang*) und e (*Intervallende*) an. Für die Intervallgrenzen können Sie wieder Terme der Form PI, SIN(1) usw. nutzen.

Über die Schalter

- *Rechteckregel*
- *Mittenrechteckregel*
- *Trapezregel*
- *Simpson-Regel*
- *Newton-Regel*

wählen Sie das gesuchte Verfahren aus.

Betätigen Sie den Schalter *Darstellung,* zeichnet das Programm den Verlauf der Funktion und ermittelt das Ergebnis des gewählten Quadraturverfahrens. Die Angabe der Fehlers bezieht sich auf den mittels sehr genauem Verfahren ermittelten exakten Wert der Fläche unter der Funktion.
Erhöhen Sie die Anzahl der Rechtecke am Rollbalken *Intervalle*, können Sie Schritt für Schritt nachvollziehen, wie die Rechtecke, Trapeze oder durch Parabelstücke begrenzten Teilflächen immer besser dem wahren Funktionsverlauf angepasst werden und im Grenzwert dem bestimmten Integral zustreben.

Beispiel: Für die Funktion Y=SIN(6*X)-X^2/2+3 erhalten Sie

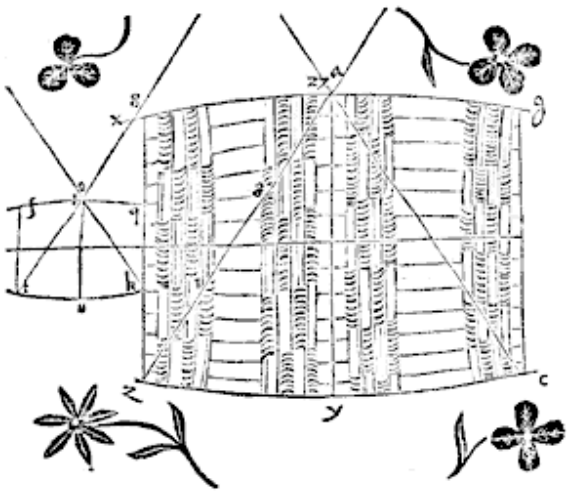
Teilintervalle	2	4	6	10	50	Fehler %
Rechteckregel	5,2206	5,2619	5,0876	4,9365	4,743	1,0727
Mittenrechteckregel	5,3032	4,7266	4,7069	4,6977	4,6929	0,0042
Trapezregel	3,9523	4,6278	4,6649	4,6828	4,6923	-0,0083
Simpsonregel	4,1153	4,8529	4,6969	4,6931	4,6927	0

Beachten Sie bitte, dass in diesem Unterprogramm nur stetige Funktionen sowie Intervalle verwendet werden können, in denen die Funktion für jeden Definitionswert einen nicht negativen Funktionswert besitzt.

Bei der Newton-Regel wird stets eine durch 3 teilbare Intervallzahl genutzt. Andernfalls erhalten Sie die Fehlermeldung: *Nicht alle Funktionswerte ≥0 oder Unstetigkeitsstelle vorhanden*

Nach dem Start der Simulationen wird die Anzahl der Stützstellen kontinuierlich erhöht bzw. verringert und die Darstellung neu gezeichnet.

3.73 Keplersche Fassregel



Johannes Kepler berichtete 1614, wie er auf seine Betrachtungen zu der nach ihm benannten Fassregel verfiel:

"Als ich im November des letzten Jahres meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorgenden Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trank zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam

am vierten Tag der Verkäufer mit einer Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung, ihrem Inhalt nach bestimmte.
Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fass.
Ich wunderte mich, dass die Querlinie durch die Fasshälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen."

Im Ergebnis gelang es Kepler, ohne Kenntnisse der noch nicht entwickelten Integralrechnung ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Fläche unter einer Parabel zu finden. Der Name "Fassregel" ist streng genommen nicht korrekt, da hier kein Volumen, sondern ein Flächeninhalt ermittelt wird.

Ausgehend von drei Punkten $A(x_0, y_0)$, $B(x_2, y_2)$ und $C(x_1, y_1)$ einer Parabel wird die Fläche im Intervall $[x_0, x_2]$ in zwei Teilflächen zerlegt: zum einen in ein Trapez mit der x-Achse und der Strecke DE als Seiten und zum anderen in das Parallelogramm ABDE. Gilt

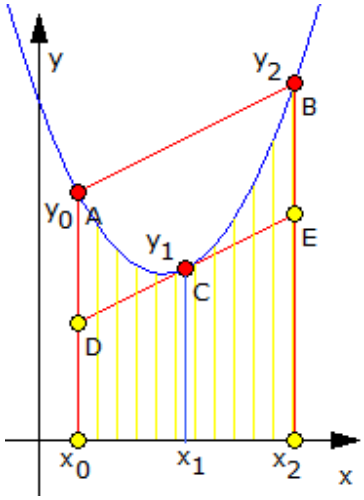
$$x_1 = (x_0 + x_2) / 2,$$

so drittelt die Parabel das Parallelogramm. Diese Aussage wurde schon von Archimedes bewiesen. Somit ergibt sich für die gesuchte Fläche:

$$A = A(\text{Trapez}) + 1/3\ A(\text{Parallelogramm})$$

Nach dem Einsetzen der Koordinaten entsteht die berühmte Fassregel:

$$A = (x_2-x_0)/6\ (y_0 + 4\ y_1 + y_2)$$



In diesem Teilprogramm können Sie die Genauigkeit der Keplerschen Fassregel mit dem exakten Integral vergleichen.

Die Punkte A, B und C sind wieder per Maus verschiebbar bzw. können auch über direkte Eingabe der Koordinaten festgelegt werden. Das Programm stellt die zugehörige Konstruktion dar und ermittelt den Flächeninhalt sowohl mit der Keplerschen Näherung als auch exakt über die Integralrechnung.

3.74 Interpolation nach Lagrange

Unter Umständen, zum Beispiel bei der Untersuchung physikalischer

Zusammenhänge, sind nur einzelne Punkte einer Funktion bekannt, deren Funktionsgleichung jedoch nicht. In diesen Fällen versucht man, eine geeignete Funktion, die Interpolationsfunktion, zu ermitteln, deren Graph annähernd die gegebenen Punkte enthält. Sehr oft wird dazu eine ganzrationale Funktion der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$
bestimmt.

Sind k Koordinatenpaare mit unterschiedlichen Argumenten bekannt, so existiert stets eine eindeutig bestimmte ganzrationale Funktion (k-1). Grades, welche diese Punkt enthält.
Nach Eingabe von maximal 10 Punkten und Quittierung mit dem *Berechnung*- bzw. *Darstellung*-Schalter wird ein entsprechendes Polynom näherungsweise ermittelt. Dabei ist zu beachten, dass keine Abszisse (x-Wert) zweimal genutzt werden kann, da in diesem Fall keine Funktion vorliegen würde.

Zusätzlich kann die Anzahl der Dezimalstellen der berechneten Koeffizienten von 3 bis 6 ausgewählt werden. Je höher die Stellenzahl ist, umso genauer nähert die ermittelte ganzrationale Funktion die Stützstellen – allerdings vergrößert sich auch die Zeichenlänge des berechneten Polynoms.

Wird die Funktion als *zu komplex* ausgewiesen, muss die Stellenzahl oder die Anzahl der Stützstellen reduziert werden. In der grafischen Darstellung werden die Stützstellen, die Sie eingegeben haben, durch kleine Kreise symbolisiert. Ein grafisches Vorschaubild erhalten Sie sofort bei der Berechnung.

Beispiel: Für das Beispiel der vier Stützstellen (-2;0), (-1;1), (0;0) und (2;1) erhalten Sie für eine Genauigkeit von sechs Dezimalstellen als Interpolationspolynom nach Lagrange

Y = 0.375*X^3+0.125*X^2-1.25*X

Hinweis: Ein weiteres interessantes Teilprogramm zur Interpolation finden Sie unter *Interaktives Polynom.*

Polynomregression

Zusätzlich haben Sie die Möglichkeit, für Ihre Stützstellen ein weiteres Näherungspolynom zu suchen, dessen Grad Sie selbst festlegen. Entsprechend dem gewählten Grad ermittelt das Programm stets ein derartiges Polynom der besten Annäherung. Innerhalb der Listbox erhalten Sie eine Tabelle der Stützstellen, der Funktionswerte der Näherungsfunktion und der auftretenden prozentualen Abweichung zu den Ausgangspunkten.
Schalten Sie das Feld *2. Polynom darstellen* ein, wird auch diese Funktion in der grafischen Darstellung gezeichnet.

Beachten Sie bitte: Diese Polynomregression ist erst ab drei Stützstellen verfügbar. Wählen Sie z.B. einen Grad = 7, so kann die ermittelte Funktion dennoch kleineren Grades sein, da die Koeffizienten in Abhängigkeit von der

eingestellten Genauigkeit gerundet werden, d.h. für sehr kleine Faktoren auch auf Null.

Beispiel: Für vier Stützstellen (-2;0), (-1;1), (0;0) und (2;1) erhalten Sie für eine Genauigkeit von sechs Dezimalstellen:

Grad	maximaler %Fehler	Polynom
2	65,4546	$0{,}022727\ x^2+0{,}168182\ x + 0{,}490909$
3	0	$0{,}375\ x^3 +0{,}125\ x^2 - 1{,}25\ x$ → identisch mit der oben ermittelten Funktion
4	0,0012	$0{,}008929\ x^4 + 0{,}383929\ x^3 + 0{,}089286\ x^2 -1{,}285714\ x$
5	0,0018	$-0{,}012546\ x^5 -0{,}001825\ x^4 + 0{,}435903\ x^3 + 0{,}132299\ x^2 - 1{,}292883\ x$
6	0,0006	$0{,}001621\ x^6 -0{,}011732\ x^5 -0{,}008191\ x^4 + 0{,}433575\ x^3 + 0{,}131826\ x^2 -1{,}296587\ x$
7	0,0012	$0{,}004616\ x^7 -0{,}002303\ x^6 +0{,}016016\ x^5 +0{,}014226\ x^4 + 0{,}200698\ x^3 + 0{,}104939\ x^2 - 1{,}104468\ x$

Suchen Sie ein Polynom höheren Grades, wird die Funktion bei sechs Dezimalstellen zu komplex. Senken Sie die Genauigkeit auf drei Dezimalen, erhalten Sie ein Ergebnis, allerdings mit einem deutlich höheren maximalen Fehler.

Grad	maximaler % Fehler	Polynom
8	-9,6	$0{,}062\ x^8 +0{,}017\ x^7 -0{,}341\ x^6 -0{,}024\ x^5 +1{,}244\ x^4 + 0{,}975\ x^3 - 3{,}375\ x^2 - 4{,}378\ x$
9	-11	$0{,}003\ x^9 -0{,}02\ x^8 -0{,}007\ x^7 +0{,}125\ x^6 +0{,}001\ x^5 -0{,}398\ x^4 +0{,}028\ x^3 +1{,}02\ x^2 -0{,}299\ x$

3.75 Trigonometrische Interpolation

Sind von einem funktionalen Zusammenhang nur einzelne Punkte einer Funktion bekannt, deren Funktionsgleichung jedoch nicht, so versucht man, eine geeignete Funktion, die Interpolationsfunktion, zu ermitteln, deren Graph annähernd die gegebenen Punkte enthält. Sehr oft wird dazu eine ganzrationale Funktion der Form

$$f(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + a_1\ x + a_0$$

bestimmt. Dies geschieht im Teilprogramm *Interpolation*.

Die ganzrationalen Interpolationsfunktionen sind mitunter von sehr hohem Grad, was als störend bei der Darstellung und weiteren Auswertung empfunden wird. Daher versucht man eine trigonometrische Interpolationsfunktion der Form

$$f(x) = a_0 + \Sigma\ (a_i \cos (b_i\ x) + a_j \sin (b_j\ x))$$

zu ermitteln. Sind k Koordinatenpaare mit unterschiedlichen Argumenten bekannt, so existiert stets eine eindeutig bestimmte Funktion dieser Art mit k

trigonometrischen Termen.

Nach Eingabe von maximal 35 Punkten und Quittierung mit dem *Darstellung*-Schalter wird eine entsprechende Funktion ermittelt. Dabei ist zu beachten, dass keine Abszisse (x-Wert) zweimal genutzt werden kann, da in diesem Fall keine Funktion vorliegen würde.
Außerdem muss zu Beginn das Intervall, in dem die Funktion bestimmt werden soll, unter *von A* = und *bis B* = festgelegt werden. Über den Rollbalken *Ordnung der Funktion* stellen Sie die Anzahl von Sinus- und Kosinustermen ein. Im Allgemeinen gilt, haben Sie k Paare, so sollte die Ordnung mindestens k/2 betragen.

3.76 Kubische Splines

Im Teilprogramm Interpolation wurde für eine gewisse Anzahl vorgegebener Punkte eine Funktion gesucht, die möglichst exakt durch diese Punkte verläuft und evtl. die Möglichkeit bietet, Zwischenwerte zu ermitteln.

So schön die Interpolationsverfahren auch sind, haben sie bei einer größeren Anzahl von gegebenen Punkten bzw. Messwerten doch einen entscheidenden Nachteil: Für n Punkte entsteht bei der Interpolation ein Polynom (n-1)-ten Grades. Das bedeutet aber auch bis zu n - 2 Extremalstellen. Man bekommt bei einer großen Anzahl von Messpunkten also möglicherweise ein sehr stark oszillierendes Interpolationspolynom, das, abgesehen von den Messpunkten selbst, mit der Wirklichkeit nicht mehr viel gemein hat.

Einen Ausweg liefert die folgende Methode, bei der sogenannte kubische Splines konstruiert werden. Diese sind abschnittsweise kubische Polynome, also Polynome 3. Grades. Dabei werden für die zum Beispiel gegebenen Abszissen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ drei Polynome $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ gebildet, die Splines berechnet und $f_1(x)$ im Intervall $[x_1;x_2]$, f(x) im Intervall $[x_2;x_3]$ usw. betrachtet.
Um einen möglichst kontinuierlichen Übergang der Funktionen an den gegebenen x-Werten zu erreichen, fordert man, dass am Übergang von einem Spline zum nächsten an der Nahtstelle die Steigungen und die Krümmungen von rechts und von links übereinstimmen. Dies bedeutet, dass es stetige ruckfreie Übergänge gibt, die Gesamtfunktion also glatt ist. Bei natürlichen Splines fordert man zusätzlich noch, dass an den äußeren Randpunkten die zweiten Ableitungen verschwinden sollen, sich der Funktionsverlauf also einer Geraden annähert.

Im Teilprogramm *Kubische Splines* können Sie für maximal 20 Stützstellen solche Splines berechnen und darstellen.
Nach Eingabe von maximal 20 Punkten und Quittierung mit dem *Berechnung*- bzw. *Darstellung*-Schalter berechnet das Programm dreimal kubische Splines. Dazu gehören:

- die oben beschriebenen natürlichen Splines
- Splines mit einer besonderen Extrapolation der zweiten Ableitungen an den Randpunkten

- Splines mit einer parabolischen Form an den Randpunkten

Wenn zum Beispiel die Stützstellen (-2;2), (0;-1), (1;3) und (2;2) gegeben sind, so erhalten Sie drei Polynome der Form:

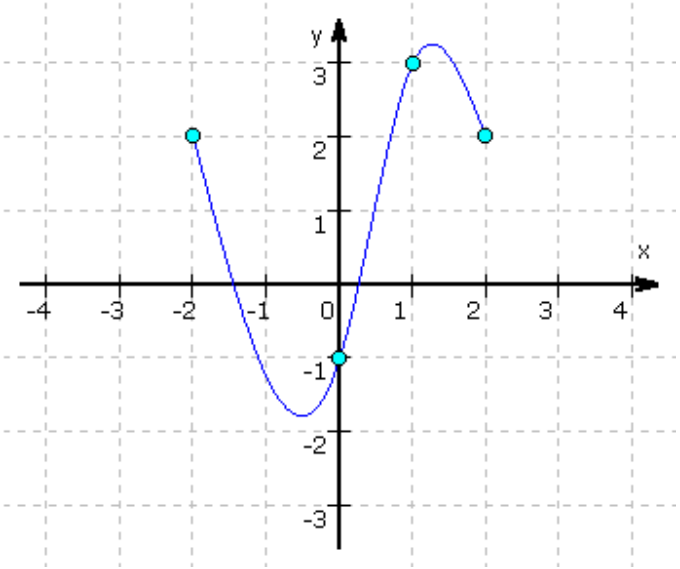
$$y = a_3 (x - x_i)^3 + a_2 (x - x_i)^2 + a_1 (x - x_i) + a_0$$

Ausgegeben werden die berechneten Parameter a_3, a_2, a_1 und a_0 für jeweils den x-Wert, ab dem dieses Spline gilt. Im Beispiel wären das die Funktionen:

Intervall	Funktion Y=
-2 bis 0	$0{,}5869565 \cdot (X+2)^3 - 3{,}8478261 \cdot (X+2) + 2$
0 bis 1	$-2{,}7173913 \cdot X^3 + 3{,}5217391 \cdot X^2 + 3{,}1956522 \cdot X - 1$
1 bis 2	$1{,}5434783 \cdot (X-1)^3 - 4{,}6304348 \cdot (X-1)^2 + 2{,}0869565 \cdot (X-1) + 3$

In der Darstellung sehen Sie die natürlichen kubischen Splines für das genannte Beispiel. Für die speziellen Arten von Splines weichen die Parameter etwas ab.

Nach der Berechnung können Sie die gefundenen Näherungsfunktionen grafisch darstellen. Wählen Sie dazu, welche Art von Splines gezeichnet werden soll und ob die Näherung nur im Intervall von der kleinsten bis zur größten Abszisse erfolgen soll.



Die Datenpaare, mit denen die Splines berechnet werden, können Sie speichern und laden. Die berechneten Ergebnisse können Sie über die drei Schalter in der Aktionsschalterleiste zum einen als Textdatei speichern, zum anderen drucken und zum dritten in die Zwischenablage kopieren.

Flächenbestimmung unter einer unbekannten Kurve von Wertepaaren

Sind n Wertepaare (x,y), zum Beispiel Messwerte, gegeben, so ist es mitunter erforderlich, die Fläche unter der von diesen Punkten gebildeten Funktion zu berechnen. Ist es nicht möglich, eine Regression oder Kurvenanpassung durchzuführen, da man zum Beispiel die Struktur der gesuchten Funktion nicht kennt, so kann man näherungsweise kubische Splines bestimmen und die Summe der Flächeninhalte unter diesen Splines als Näherungswert nutzen.

Aus diesem Grund ermittelt das Programm zusätzlich zu den Parametern der Splines diesen Näherungsflächeninhalt. Zum Vergleich erhalten Sie den mit der

Trapezregel berechneten Näherungswert unter der Fläche.

3.77 Interaktive kubische Splines

Dieses Teilprogramm ergänzt den Programmteil *Interaktives Polynom*. Erneut soll eine Kurve ermittelt werden, die vorgegebene Punkte möglichst gut annähert.

Sind n Punkte gegeben, so erhält man bei der Interpolation eine ganzrationale Funktion (n-1)-ten Grades. Schon ab 10 Punkten ist dies nicht mehr optimal, da diese Näherungsfunktion teilweise extreme Anstiege aufweisen kann. In diesem Fall nutzt man besser kubische Splines, d.h. Polynome 3. Grades, die so konstruiert werden, dass zwei Splines an jeder Stützstelle möglichst stetig und mit dem gleichen Anstieg ineinander übergehen.

Hier können Sie bis zu 15 Punkte durch einen linken Mausklick festlegen und anschließend im Koordinatensystem verschieben. Mithilfe des Markierungsfeldes *Gleichungen* können Sie sich die Funktionsgleichungen der Splines anzeigen lassen.

Das Programm berechnet die entsprechenden Spline-Kurven und stellt diese dar. Sobald Sie auf den Animationsschalter klicken, wird ein Punkt horizontal oder vertikal bewegt und die Splines sofort angepasst. Den zu bewegenden Punkt stellen Sie am Rollbalken *Animat.Punkt* ein.

Beachten Sie bitte, dass alle Abszissen der Stützstellen unterschiedlich sein müssen.

Direkte Koordinateneingabe

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen*, zeigt Ihnen das Programm die Tabelle der eingetragenen Punkte an. Einige der Tabellenfelder sind farbig unterlegt, die Schrift ist hervorgehoben. In diesen Feldern können Sie Werte angeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld und tragen Sie den neuen Wert ein. Nach Bestätigung der Eingabe mit der *TAB*-Taste oder den Cursortasten übernimmt das Programm den neuen Wert und erstellt die Darstellung neu.

3.78 Funktionaler Zusammenhang einer Messwertreihe

In der mathematisch-physikalischen Ausbildung, zum Beispiel im gymnasialen Physikunterricht, fallen oft Messwertreihen an, die auf verschiedene Zusammenhänge getestet werden sollen. Dazu werden verschiedene funktionale Quotienten der beiden Größen gebildet. Ergibt sich ein näherungsweise konstanter Wert, kann auf einen proportionalen Zusammenhang geschlossen werden.

Liegen zum Beispiel die Messwertpaare $[x_1, y_1]$ bis $[x_n, y_n]$ vor und ergibt sich für alle i = 1, ..., n unter Berücksichtigung eventueller Messfehler ein etwa gleich großer Wert des Quotienten $k = y_i / x_i$, so besteht mit hoher Wahrscheinlichkeit eine lineare Proportionalität zwischen den x- und y-Werten, wobei k der Proportionalitätsfaktor ist: $y = k \cdot x$.

Misst man zum Beispiel den Weg s und die Zeit t, die eine Kugel reibungsfrei im freien Fall zurücklegt, so erhält man Messwerte für s und t, deren Quotienten $k = s/t^2$, von Messfehlern abgesehen, etwa konstant sind. Der ermittelte Quotient k beträgt dabei etwa 4,9 m/s^2. Dies lässt nun die Vermutung aufkommen, dass k die halbe Erdfallbeschleunigung g ist, woraus sich die Gleichung $s = k\ t^2 = g/2\ t^2$ ergibt, welche das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls darstellt.

In diesem Unterprogramm können Sie auf diese Weise verschiedene Messwertpaare untersuchen.
Nach Eingabe von maximal 26 Messwertpaaren (X;Y) ermittelt das Programm die Quotienten y / x, y / x^2 sowie voreingestellt y / ln(x). Der dritte Quotient kann auf jeden beliebigen funktionalen Zusammenhang geändert werden. Zusätzlich wird der mittlere quadratische Fehler (quadratische Summe der Abweichungen vom berechneten Mittelwert) dieser Quotienten berechnet. Ist dieser betragsmäßig sehr klein, d.h. rund Null, kann eine Proportionalität vermutet werden.

Intern berechnet das Programm außer den oben genannten Quotienten y / x; y / x^2; y / ln(x) zusätzlich noch $y / \sqrt{x}$; y / (1/x) = yx; y / sin(x). Der Zusammenhang mit dem kleinsten berechneten mittleren quadratischen Fehler wird unter *wahrscheinlicher Zusammenhang* angegeben.

Eine weitere Möglichkeit, nach einer Abhängigkeit der Messwertpaare zu suchen, finden Sie im Teilprogramm *Regression, Korrelation.*

Die von Ihnen eingegebenen Messwerte können Sie dauerhaft aufbewahren. Über den Schalter *Datei speichern* werden die Zahlenwerte als ASCII-Datei auf die Festplatte geschrieben. Über *Datei laden* können Sie diese Werte jederzeit wieder untersuchen. Auf Wunsch können Sie die Messwerte auch grafisch veranschaulichen. Wählen Sie dazu den Schalter *Darstellung.*

4. Analysis - Kurven

Unter dem Menüpunkt Kurven finden Sie Teilprogramme, die sich mit Kurven jeglicher Art, eben oder räumlich, beschäftigen.

4.1 Mathematische Kurven

Neben Funktionen, die eindeutige Abbildungen aus einer Menge A (Argumente) in eine Menge B (Funktionswerte) sind, interessieren in der Mathematik auch allgemeine und technische Kurven, welche im Allgemeinen keine eindeutigen Abbildungen reeller Zahlen sein müssen, d.h., einem Argument können durchaus mehrere Werte zugeordnet sein.
Mathematische Kurven in Parameterform bzw. Polarkoordinatenform können Sie in diesem Unterprogramm definieren und untersuchen.

Parameterform

Dabei werden die Definitionsgleichungen für die x- und y-Darstellung in Abhängigkeit von einem reellen Parameter k: x = a(k) und y = b(k) festgelegt. Zur Konstruktion der Kurve durchläuft der Parameter k einen vorgegebenen Definitionsbereich (Voreinstellung [-π;π]), wobei die Koordinaten der zugehörigen Punkte über die zwei Definitionsgleichungen ermittelt werden.

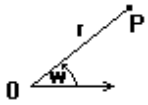
Beispiel: Gleichung der Astroide X = a(K) = 3*COS(K)+COS(3*K) und Y = b(K) = 3*SIN(K)-SIN(3*K)

Beachten Sie bitte: Der die Kurve beschreibende Parameter muss auf jeden Fall die Bezeichnung K erhalten. Darüber hinaus können Sie aber auch wieder einen weiteren Parameter, und zwar P, nutzen. Dessen Wert ist auf 1 voreingestellt und kann in der Eingabezeile *Kurvenschar von P* = geändert werden. Innerhalb der grafischen Darstellung wird der Wert von P erneut für eine Animation der Kurve herangezogen.

Möchten Sie sowohl die Originalkurve als auch die an der y-Achse gespiegelte Kurve darstellen, so markieren Sie das Feld ±*Kurve*. Soll die Ausgangskurve an der Abszissenachse gespiegelt werden, so markieren Sie das Feld *x = ±f(k) darstellen.*

Polarkoordinaten

Soll die Kurve in Polarkoordinaten definiert werden, müssen Sie den Ortsvektor r in Abhängigkeit von einem Parameter P und einem Winkel W festlegen: r = f(p,w).



Dabei wird die Lage eines Punktes P durch seinen Abstand r zum Pol (Koordinatenursprung) und durch einen Winkel w bezüglich der Achse

des Polarkoordinatensystems beschrieben. Der Winkel w wird mathematisch positiv, also entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn, gezählt.
Zusätzlich muss das Markierungsfeld *Polarkoordinaten* gewählt werden, andernfalls wird die Gleichung nicht ausgewertet.

Zu beachten ist hierbei, dass das Programm mit einem erweiterten Polarkoordinatensystem arbeitet, d.h. wird r negativ, so wird der Ortsvektor in entgegengesetzter Richtung genutzt.

Möchten Sie sowohl die Kurve in Polarkoordinaten $\rho(w)$ als auch die Kurve $-\rho(w)$ darstellen, so markieren Sie das Feld ±*Kurve*. Dies ist zum Beispiel wichtig, wenn Sie Kurven der Form $\rho^2 = \rho(w)$ zeichnen möchten. In diesem Fall tragen Sie SQRT(ρ(w)) ein und markieren das genannte Feld.

Beachten Sie bitte: Der Winkel w wird im Bogenmaß, nicht im Gradmaß, verarbeitet.

Beispiele:

- Archimedische Spirale R=W
- Hyperbolische Spirale R=2/W
- Cassini-Kurve R = SQRT(COS(2*W)+SQRT(COS(2*W)^2+15))

Für den Parameter K bzw. den Winkel W ist es möglich, in den Eingabefeldern *von ... bis* Anfangs- und Endwert sowie unter *Schrittweite* die Schrittweite für die grafische Darstellung zu wählen. Während die Schrittweite eine positive reelle Zahl sein muss, können Sie für den Anfangs- bzw. Endwert auch mathematische Ausdrücke der Form *PI*, *2 * PI*, *SIN(2)* usw. nutzen.
Die Verwendung des Ausdrucks PI ist dem Wert 3,14 vorzuziehen, da die Kreiszahl π intern mit acht Dezimalstellen Genauigkeit benutzt wird. Geben Sie eine Schrittweite kleiner oder gleich Null ein, verwendet das Programm automatisch den Wert 0,01.

Innerhalb des Programms muss für die Eingabe von π stets die Schreibweise PI genutzt werden.

Im rechten Fensterteil erhalten Sie eine Vorschaugrafik der Kurve.
Enthält eine der Definitionsgleichungen den Parameter P, können Sie auch diese Kurve für einen sich verändernden Parameter P untersuchen und animieren. Lesen Sie dazu unter *Grafische Darstellung* nach.
Das vordefinierte Intervall von -PI bis PI ist für die Mehrzahl der in der höheren Mathematik behandelten Kurven ausreichend. Besitzt eine Kurve jedoch gerade für sehr kleine bzw. große Parameter k oder Winkel w interessante Eigenschaften, wie z.B. das Kartesische Blatt, sollten Sie mit der Eingabe des Parameterintervalls etwas experimentieren.

In der Liste der vordefinierten Kurven finden Sie zum Beispiel hinter dem Eintrag *Kartesisches Blatt* in Klammern das zu empfehlende Intervall von -5π bis 5π . Eine

kleinere Schrittweite als 0,01 ist nur in wenigen Fällen erforderlich, verlängert aber die für die grafische Darstellung benötigte Zeit.

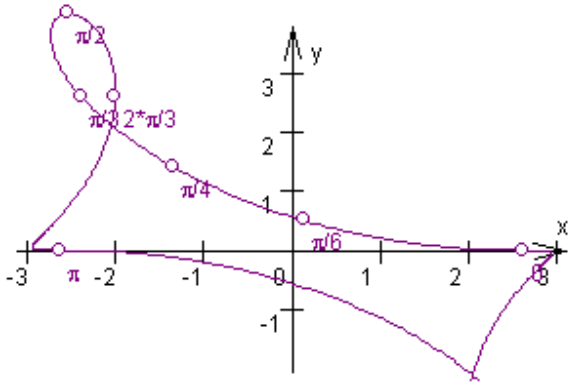
Ableitung

Auch mathematische Kurven können an verschiedenen Stellen oder über ein Intervall differenzierbar sein. Der Verlauf der 1. Ableitung einer Kurve ist dabei mitunter sehr aussagekräftig. Bei Auswahl des Eintrags *Ableitung zeichnen* bestimmt das Programm die Differenzialquotienten und stellt diese zusätzlich dar.

Kurvenschar

Möchten Sie Ihre ausgewählte Kurve für mehrere Werte des Parameters P zeichnen, so wählen Sie den Punkt *Kurvenschar* in der Optionsliste und tragen Sie die entsprechenden Start- und Endwerte sowie die Schrittweite in die Eingabezeilen *von P =*, *bis* und *in Schritten von* ein.

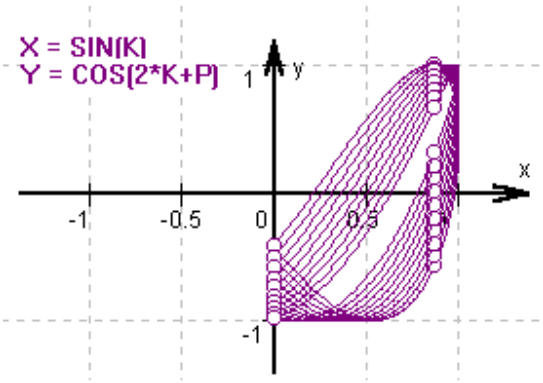
Spezielle Beschriftung von Kurvenpunkten / Markierung von Punkten



Unter Umständen ist es von Interesse, welcher Parameter K bzw. Winkel W gewisse Kurvenpunkte bestimmt. Dafür sind zwei Markierungsfelder in diesem Teilprogramm vorgesehen.
Markieren Sie den Punkt *spezielle Punktbeschriftung*, trägt das Programm in der grafischen Darstellung die Punkte der Kurve ein, welche durch den Parameter K bzw. den Winkel W bestimmt werden, für die K bzw. W = 0, π/6; π/4; π/3; π/2; 2π/3; 5π/6; π; 3π/2 betragen.
Voraussetzung ist, dass der Definitionsbereich der Kurve die angegebenen Werte auch enthält.

Beispiel: Parameterhaltige Astroide (P=1) mit spezieller Punktbeschriftung

Außerdem können Sie durch Markierung des Feldes *Punkte...* und Eingabe einer Punktzahl (Voreinstellung 10) verschiedene Punkte der Kurve hervorheben. Das Programm teilt dazu den Definitionsbereich durch die Punktzahl und markiert mit dieser Schrittweite, beginnend an der unteren Intervallgrenze des Definitionsbereichs, einzelne Stellen des Graphen der mathematischen Kurve.



Zum Beispiel werden bei einer Punktzahl gleich 10 und einem Definitionsbereich

[-π;π] alle Stellen mit einem Parameter K oder Winkel W von iπ / 10; i = 0, 1, 2, ..., 10 durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet, d.h., es wird stets ein Punkt mehr markiert als angegeben (untere Intervallgrenze!).

Enthält Ihre mathematische Kurve einen Parameter P, so können Sie, wie oben erwähnt, den Einfluss eines veränderlichen Wertes von P durch eine Animation veranschaulichen. Dabei werden die markierten Punkte ebenfalls gezeichnet. Eine weiterführende Beschreibung dieser Darstellungsmöglichkeit finden Sie im Abschnitt *Grafische Darstellung*.

Beispiel: Darstellung der vordefinierten, parameterhaltigen Lissajouschen Kurve im Intervall [0; π]. Darüber hinaus wurden vier zusätzliche Punkte für k = 0; π / 3; 2π / 3; π eingezeichnet. Sehr interessant ist auch die Änderung des Parameters durch einfaches Bewegen der Maus. Mehr dazu erfahren Sie unter *Freie Änderung von P*.

Kurvenbibliothek

Erneut besteht die Möglichkeit, interessante Definitionsgleichungen dauerhaft zu speichern und gegebenenfalls schnell zu laden. Zu den mitgelieferten über 100 Kurven gehören z.B.:

- Zykloiden, Hyperzykloiden, Epizykloiden
- Strophoide, Zissoide, Kardioide, Astroide
- Cassini-Kurven
- verschiedene Lissajousche Figuren
- andere merkwürdige Gebilde ...

Wählen Sie in der Liste einen Eintrag mit der Maus aus, so erhalten Sie sofort ein Vorschaubild des Kurvenverlaufs. Die grafische Darstellung mittels des Schalters *Darstellung* bietet Ihnen weitere umfangreiche Möglichkeiten.

Die Kurvenbibliothek kann durch den Programmanwender wieder verändert werden. Wollen Sie eine Gleichung neu aufnehmen, betätigen Sie den Schalter *Kurve aufnehmen*. Die zugehörigen Parametergleichungen sowie der Kurvenname werden aus den entsprechenden Feldern der Eingabezeilen entnommen. Ist das Feld *Polarkoordinaten* markiert, geht das Programm davon aus, dass Sie eine Polarkoordinatengleichung speichern wollen und entnimmt diese aus dem Eingabefeld *R = F(P,W)*.
Sollten Sie eine Kurve aus der Bibliothek entfernen wollen, markieren Sie diese in der Liste und betätigen Sie den Schalter *Kurve löschen*. Es erfolgt keine Rückfrage, ob Sie sie tatsächlich löschen wollen.

Wertetabelle einer Kurve

Wünschen Sie eine Wertetabelle der untersuchten Kurve, wählen Sie den entsprechenden Markierungspunkt *Wertetabelle*. Je nach Art der Definition der Kurve erhalten Sie in Abhängigkeit von Anfangs- und Endwert sowie der

Schrittweite folgende Werte angezeigt:

Kurve in Parameterdarstellung	Parameter K	Koordinaten X und Y, Länge des Ortsvektors R und Richtungswinkel
Räumliche Kurve	Parameter K	Koordinaten X, Y und Z, Länge des Ortsvektors R
Kurve in Polardefinition	Winkel W in Bogen- und Gradmaß	Länge R

Startwert und Endwert der Tabelle (der Parameter K oder der Winkel W) tragen Sie in die entsprechenden Zeilen ein. Wichtig ist die *Schrittweite*, die den Abstand der Tabelleneinträge festlegt.

In der rechten Liste finden Sie alle in der Bibliothek enthaltenen Kurven. Wählen Sie eine aus, werden deren Gleichungen eingetragen.

4.2 Verlauf einer Kurve

In dem Teilprogramm *Mathematische Kurven* können Sie innerhalb der grafischen Darstellung der Kurve auch deren Verlauf innerhalb des angezeigten Definitionsbereichs schrittweise untersuchen.
Diese Möglichkeit wird im Programmteil *Verlauf einer Kurve* noch erweitert.

Nach dem Start tragen Sie entweder die Kurve (Parameterform oder Polarkoordinaten wählen) ein oder wählen eine in der *Kurvenbibliothek* enthaltene Kurve. Das Programm stellt sie anschließend sofort dar.
Über die Schalter und können Sie die Größe des angezeigten Intervalls verändern; das Parameterintervall tragen Sie wie gewohnt ein.

Markieren Sie nun einen Eintrag *Punkt A auf Kurve* oder *Punkt B auf Kurve*, dann stellt das Programm auf dem angezeigten Graphen zwei Punkte A und B dar, deren Lage Sie über die kleinen Pfeilschalter verändern können. Damit besteht die Möglichkeit, den Kurvenverlauf schrittweise zu untersuchen.

Markieren Sie *spezielle* Punkte, hebt das Programm die Kurvenpunkte für einen Parameter von 0; $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $\pi/2$; $2\pi/3$; $5\pi/6$; π; $3\pi/2$ wieder hervor.

Auch in diesem Programmteil können Sie "bewegte" Kurvenverläufe untersuchen. Der Start erfolgt über den Schalter *Animation.* Zuvor müssen Sie wählen, ob der Punkt A kontinuierlich verändert werden soll oder ob sich der Wert für den Parameter P ändert. Verändern Sie den Parameter P, so können Sie dessen Einfluss auf den Kurvenverlauf nachvollziehen. Verändern Sie A, so wird dieser Punkt auf der Kurve verschoben.

Die Richtung der Änderung der Animation und die Schnelligkeit stellen Sie an den

kleinen Pfeilschaltern ein.

4.3 Kurvenliste

Dieser Menüpunkt ergänzt das Teilprogramm *Mathematische Kurven*.
Hier sind bis zu vier Kurven gleichzeitig definier- und darstellbar, zusätzlich noch zwei Funktionen f(x) und g(x). Diese Kurven können wieder in Parameterform bzw. Polarkoordinatenform eingegeben werden.

Parameterform

Dabei werden die Definitionsgleichungen für die x- und y-Darstellung in Abhängigkeit von einem reellen Parameter k: x = a(k) und y = b(k) festgelegt. Zur Konstruktion der Kurve durchläuft der Parameter k einen vorgegebenen Definitionsbereich (Voreinstellung $[-\pi;\pi]$), wobei die Koordinaten der zugehörigen Punkte über die zwei Definitionsgleichungen ermittelt werden.

Beachten Sie bitte: Der die Kurve beschreibende Parameter muss auf jeden Fall die Bezeichnung K erhalten. Darüber hinaus können Sie aber auch wieder einen weiteren Parameter, und zwar P, nutzen. Dessen Wert ist auf 1 voreingestellt und kann in der Eingabezeile *P* = verändert werden. Innerhalb der grafischen Darstellung wird der Wert von P erneut für eine Animation der Kurve herangezogen.

Polarkoordinaten

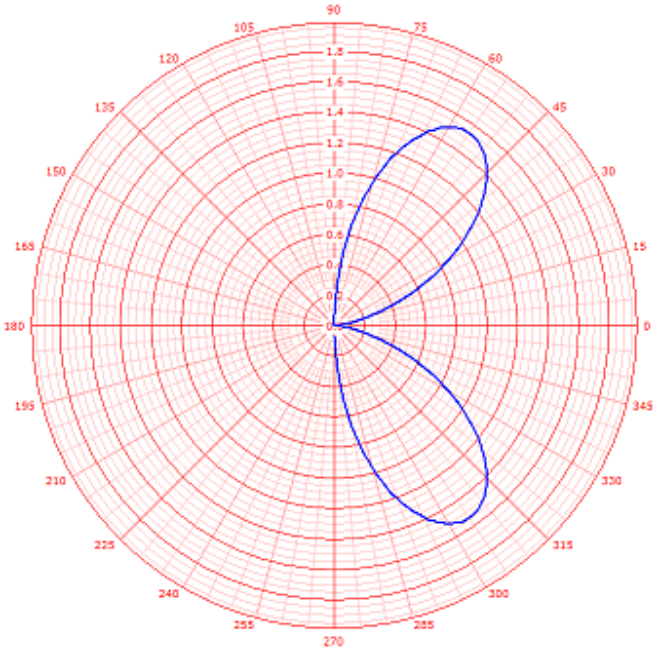
Soll die Kurve in Polarkoordinaten definiert werden, müssen Sie den Ortsvektor r in Abhängigkeit von einem Parameter P und einem Winkel W festlegen: r = f(p,w).
Zusätzlich muss das Markierungsfeld *Polarkoordinaten* gewählt werden. Andernfalls wird die Gleichung nicht ausgewertet. Zu beachten ist hierbei, dass das Programm mit einem erweiterten Polarkoordinatensystem arbeitet, d.h., wird r negativ, so wird der Ortsvektor in entgegengesetzter Richtung genutzt.

Möchten Sie für die vier Kurven Beispiele aus der *Kurvenbibliothek* eintragen, so markieren Sie zuerst unter *gewählte Kurve eintragen als ...* die Zielkurve aus und anschließend in der Liste das Beispiel.

Mit dem Schalter *Kurven darstellen* werden die Eingaben übernommen und grafisch dargestellt. Auch hier ist zum Beispiel die Animation der Parameter in der grafischen Darstellung möglich.

4.4 Polarkoordinatenkurven

Mathematische Kurven können auch mit Hilfe von Polarkoordinaten beschrieben werden. In diesem Teilprogramm können Sie in Polarkoordinaten definierte



Kurven in einem Polarkoordinatengitter zeichnen lassen.

Tragen Sie dazu unter *Polarkoordinaten* die Kurvengleichung ein. Für den Winkel ist dabei die Variable W zu benutzen. Mit dem Bezeichner P können Sie einen Parameter festlegen, der u.a. in der Simulation verändert werden kann. Den Definitionsbereichs des Winkels sowie die Größe des Parameters P können Sie ebenfalls eingeben.

Betätigen Sie nun den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm die Kurve in ein Polarkoordinatensystem ein.
Mit Simulation können Sie den Parameter P kontinuierlich verändern; Änderung unter Δ einstellen; die Kurve wird dabei sofort gezeichnet.

In der linken unteren Liste findet Sie vordefinierte mathematische Kurven. Diese *Kurvenbibliothek* können Sie im Teilprogramm Mathematische Kurven verändern.

4.5 Implizite Funktionen und Kurven

Mathematische Kurven werden mitunter nicht in Parameterform oder Polarkoordinatenform definiert. Unter Umständen ist eine einfache Gleichung auch nur in impliziter Form möglich, zum Beispiel bei der Doppelhorn-Kurve $0 = y^2 (p^2 - x^2) - (x^2 + 2py - p)^2$.

Derartige implizite Darstellungen können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen.
Tragen Sie dazu unter *0* = den impliziten Term ein oder wählen Sie eine der vordefinierten Kurven aus. Nach einem Klick auf den Schalter *Darstellung* wertet das Programm die Gleichung aus.

Dabei werden Punkte in der Darstellungsebene gesucht, die der Gleichung möglichst gut entsprechen. Die Darstellung erfolgt in zwei Schritten: Zum einen werden die Punkte mit abnehmender Ordinate gesucht, zum Zweiten die mit zunehmender Abszisse. Dadurch erfordert das Zeichnen der Kurve auch eine gewisse Zeit.

Weitere Eingabemöglichkeiten, *Parameter P* (Anfangswert), *bis* = (Endwert) und Δ = (Schrittweite), können zur Darstellung von Kurvenscharen verwendet werden.

Die Bibliothek der vordefinierten Kurven können Sie erweitern. Tragen Sie dazu eine Kurvengleichung und in der Eingabezeile darüber einen Kurvennamen ein. Mit dem Schalter *Kurve aufnehmen* wird Ihre Eingabe eingefügt. Eine markierte Kurve der Tabelle können Sie mit dem Schalter *Löschen* aus der List entfernen.

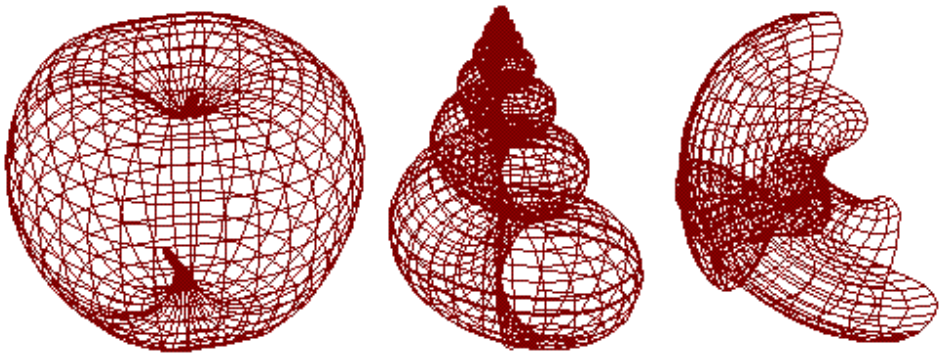
4.6 Raumflächen

Innerhalb des Lexikons können Sie einen weiteren Programmteil aufrufen: die Darstellung von 75 Flächen im dreidimensionalen Raum als Gittermodelle.
Nach dem Aufruf der *Raumflächen* finden Sie rechts eine Liste der definierten Flächen. Wählen Sie eine aus, wird sie sofort dargestellt und im Raum bewegt.

Über *weißer Hintergrund* können Sie zwischen einer Darstellung auf weißem bzw. schwarzen Hintergrund wählen.
Die Darstellungsgeschwindigkeit und die Drehwinkel stellen Sie an den Pfeilschaltern ein. Über die Schalter und können Sie die Größe der Darstellung verändern.

Die Bewegung der Körper starten und stoppen Sie mit dem entsprechenden Schalter. Klicken Sie auf die gezeichnete Fläche und bewegen die Maus, können Sie die Fläche nach Ihren Wünschen drehen.
Dabei finden Sie auch erstaunliche Gebilde, zum Beispiel eine grafische Veranschaulichung eines Apfels oder einer Schnecke. Die dritte dargestellte Fläche ist die berühmte Kleinsche Flasche.

Ein weiteres interessantes Teilprogramm zur Darstellung dieser Flächen finden Sie unter Flächen im R^3.

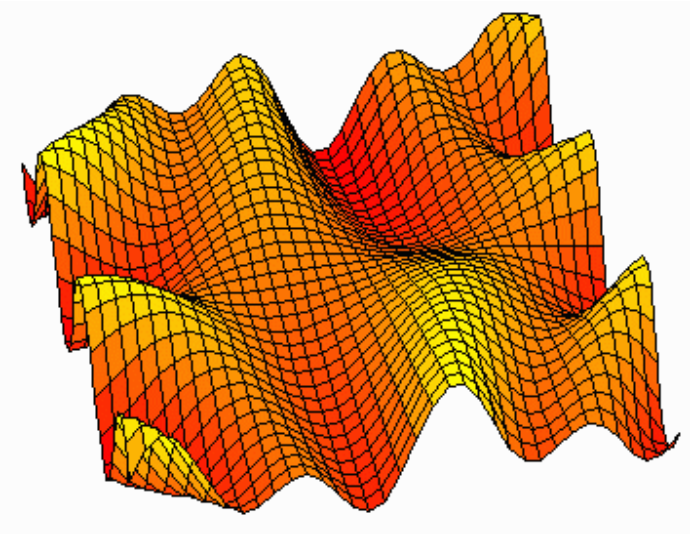


Beachten Sie bitte: Die Nutzung dieses Programms stellt höchste Anforderungen an Ihren Computer!

4.7 Flächen im Raum R^3

Während Sie im Teilprogramm Raumflächen über 70 vordefinierte Flächen im dreidimensionalen Raum als Gittermodelle untersuchen können, bietet Ihnen dieses Teilprogramm die Möglichkeit, derartige Flächen über die Eingabe ihrer

Definitionsgleichungen zu konstruieren und mit einer Vielzahl verschiedener Parameter darzustellen.



Dieser Programmteil ist ebenfalls eine Besonderheit, denn nur wenige Mathematik-Computerprogramme sind in der Lage, derartige Flächen zu zeichnen!
Nach dem Aufruf des Programmteils sind folgende Eingaben möglich und nötig, um eine Darstellung zu erhalten:

Unter *x = f(u,v,t)*, *y = f(u,v,t,x)* und *z = f(u,v,t,x,y)* tragen Sie die drei Parametergleichungen der Fläche ein. Diese Gleichungen können neben den Parametern u und v auch die Konstanten p, q und r enthalten. Tritt in der Gleichung eine Variable t auf, so wird diese als Zeitvariable interpretiert, die zur Simulation benötigt wird.
Die Definitionsgleichung für y darf auch den vorher definierten Term x verwenden, die Gleichung für z sowohl x als auch y.

Für die Gleichungen gelten die in diesem Programm allgemein gültigen Regeln. Beachten Sie bitte, dass der Befehlssatz auf folgende Operatoren und Funktionen beschränkt ist:

Operatoren +, -, *, /, ^, (,)
Funktionen SQRT, SIN, COS, TAN, EXP, LN, SINH, COSH, ARCTAN, ABS

Wurden die Gleichungen fehlerfrei eingetragen, müsste schon eine Darstellung sichtbar sein. Diese können Sie weiter verändern.
Für die Parameter u und v können Sie die Intervalle, die für die Darstellung genutzt werden, unter *von bis* festlegen. Entweder wählen Sie aus der aufklappbaren Liste einen Wert aus oder Sie tragen ihn direkt ein. Die jeweils dritte Angabe *Anzahl* bestimmt, wie viele Zwischenwerte für das Intervall genutzt werden. Ein hoher Wert verfeinert die Grafik, belastet aber den Prozessor stärker.

In der Liste *Perspektive* wählen Sie das Darstellungsverfahren aus. Möglich sind Orthogonalprojektion (senkrechte Parallelprojektion Grundriss), Zentralperspektive und Kavalierperspektive.
Welcher Parameter zur Farbgebung genutzt wird, entscheidet die Liste *Gitterfärbung*, die verwendeten Farben werden über die Liste *Gitterfarbe* definiert. Die drei Markierungsfelder *Gitternetz ausschalten*, *dunkle Unterseite* und *schwarzer Hintergrund* verändern die grafische Darstellung entsprechend.
Die Größe der dargestellten Fläche regeln Sie über die Schalter ⤡ und ⤢, die Lage im dreidimensionalen Raum über die Schaltfelder *X-Winkel*, *Y-Winkel* und *Z-*

Winkel.

Die definierten Flächen können Sie wieder speichern und zu einem späteren Zeitpunkt erneut laden. In der Aktionsschalterleiste finden Sie weiterhin eine Liste, die über 100 Beispiele enthält. Ein einfacher Mausklick auf einen der Einträge zeigt Ihnen die Möglichkeiten dieses Teilprogramms.

Animation der Flächen

Besonders interessant ist, dass die Flächengleichungen auch einen Zeitparameter t enthalten können. Dieser wird während einer Simulation in dem für ihn festgelegten Intervall kontinuierlich verändert. Unter *Anzahl* legen Sie die Zwischenschritte fest.
Die Simulation starten Sie über den Schalter . Dabei ist zu beachten, dass sie voreingestellt sofort abläuft, wenn in einer der Gleichungen der Parameter t auftritt. Abbrechen können Sie die Simulation über den gleichen Schalter.

Auf einem modernen Computer läuft die Simulation mit hoher Geschwindigkeit ab. Ist Ihnen der Ablauf zu schnell oder zu langsam, können Sie dies über die Schaltfelder *Geschwindigkeit* verändern. Ein kleiner Wert bedeutet eine hohe Geschwindigkeit.
Möchten Sie die einzelnen Zeitabschnitte nachvollziehen, können Sie auch durch Betätigung des Toolbar-Schalters zum jeweils nächsten Bild schalten.

Außer der Simulation der Fläche durch einen Zeitparameter t können Sie auch nur das Gebilde kontinuierlich um die drei Achsen drehen lassen. Klicken Sie dazu zum Ein- und Ausschalten auf einen den Schalter neben den Rollbalken *X-Winkel, Y-Winkel* oder *Z-Winkel*. Beachten Sie, dass diese Drehungen nur dann möglich ist, wenn Sie nicht die oben beschriebene Animation nutzen. Außerdem kann immer nur um eine der Achsen gedreht werden.

Tipp: Wählen Sie das Beispiel 9 und schalten Sie das *Gitternetz* aus, einen schwarzen Hintergrund an und den Punkt *dunkle Unterseite* aus. Mit etwas Fantasie können Sie jetzt "blubbernde Lava" in der Animation erkennen. Auch die anderen Beispiele sind sehr interessant.

Beachten Sie bitte, dass die Nutzung dieses Programms besonders hohe Anforderungen an Ihren Computer stellt, vor allem an die Grafikkarte.

4.8 Raumkurven

Eine Raumkurve ist eine Kurve im dreidimensionalen Raum. Mathematisch kann eine Raumkurve durch drei Gleichungen

$$x = x(k),\ y = y(k),\ z = z(k)$$

in Abhängigkeit von einem reellen Parameter k beschrieben werden. Zum Beispiel beschreiben die Gleichungen $x = \cos k$; $y = \sin k$; $z = k$ eine Schraubenlinie.

In diesem Teilprogramm können räumliche Kurven gezeichnet werden.
Tragen Sie zuerst unter *x*= , *y*=, *z*= die Gleichungen der Kurve ein. Beachten Sie bitte, dass hier der Buchstabe K zur Beschreibung des Parameters benutzt werden muss. Den Bereich für K tragen Sie links und rechts von < *K* < ein. Nach einem Klick auf *Kurve darstellen* wird das Gebilde gezeichnet.
Die Gleichungen können auch zwei Parameter P und Q enthalten, deren Größe Sie an den unteren Rollfeldern einstellen können.

Alternativ können Sie für die Festlegung der Kurve auch eine der 15 vordefinierten Raumkurven in der Liste auswählen.
Die Darstellungsgeschwindigkeit und die Drehwinkel stellen Sie an den Pfeilschaltern ein. Über die Schalter ⤡ und ⤢ können Sie die Größe der Darstellung verändern.

4.9 Kurven auf einer Riemann-Kugel

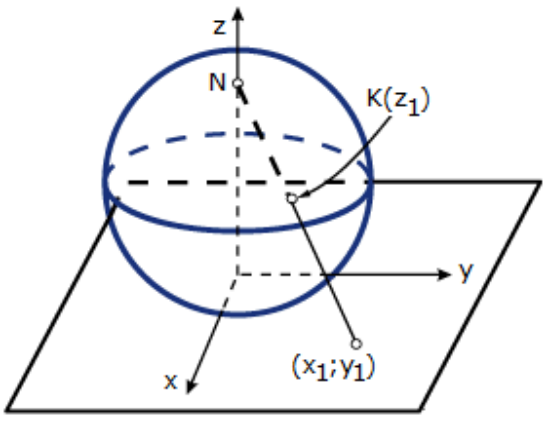
Durch Bernhard Riemann wurde zur Untersuchung komplexer Zahlen die Idee der Zahlenkugel eingeführt.
Auf der komplexen Ebene wird eine Kugel im Ursprung gesetzt. Die komplexen Zahlen werden dann auf die Oberfläche der Riemannschen Zahlenkugel abgebildet, in dem man vom Nordpol der Kugel eine Gerade zur komplexen Zahl in der Ebene zieht, und den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugeloberfläche als Projektionspunkt nutzt.

Diese Idee ist auch auf die Projektion von Punktmengen der kartesischen Koordinatenebene auf eine Kugel anwendbar. Insbesondere kann man dies für mathematische Kurven nutzen. Im Ergebnis entstehen interessante Kurven auf der Riemann-Kugel.

Ist $P(x_1, y_1)$ ein Punkt der Koordinatenebene, so ergibt sich für den Schnittpunkt auf der Kugel

$$K(x_1/(1+ x_1^2 + y_1^2) , y_1/(1+ x_1^2 + y_1^2) , (x_1^2 + y_1^2)/(1+ x_1^2 + y_1^2)).$$

Im Teilprogramm *Kurven auf einer Kugel* werden ebene, mathematische Kurven wie beschrieben auf eine Kugel projiziert.



An den Rollbalken *Drehwinkel*, *Höhenwinkel* und *Abstand* stellen Sie die Parameter der Zentralprojektionsdarstellung ein. In der Liste *Kurven* wählen Sie eine der im Teilprogramm *Mathematische Kurven* definierten Gebilde aus. Das Programm stellt daraufhin die „Kugelkurve" dar.

Voreingestellt ist für die Kurven ein Darstellungsintervall [-π ; π]. Auch dieses

können Sie ändern.
Die relative Größe der Kugel stellen Sie unter *Intervallgröße* ein. Im Allgemeinen genügt für eine ansprechende Darstellung die eingestellte *Genauigkeit* von 0,04. Verringern Sie diesen Wert, wird die Kurve in kleineren Schritten, d.h. exakter, gezeichnet. Allerdings erhöht dies den Rechenaufwand.

Beachten Sie bitte: Während der *Simulation* wird zur Erhöhung der Anschaulichkeit die Kugel mit der Kurve gedreht. Auf etwas langsameren Computern und Grafikkarten kann dies zu einer ruckelnden Bewegung führen.

Enthält die Kurvengleichung einen Parameter P, so können Sie während der Drehung der Kugel auch gleichzeitig diesen Parameter im Intervall [-10, 10] ändern lassen. Markieren Sie dazu das Feld *auch P verändern*.
Klicken Sie mit der linken Maustaste auf die Darstellung und bewegen die Maus, so wird die Darstellung gedreht. Eine waagerechte Mausbewegung dreht die Kugel um die z-Achse, eine senkrechte verändert den Höhenwinkel.

4.10 Kurven 2.Ordnung, Kegelschnitte

Eine besondere Form der mathematischen Kurven stellen die sogenannten Kegelschnitte oder Kurven der 2. Ordnung dar. Diese entstehen, wie der Name schon sagt, beispielsweise dadurch, dass ein gerader Kreiskegel von einer Ebene geschnitten wird. Die Randlinien der Schnittflächen stellen dann die sogenannten Kegelschnitte dar. Die bekanntesten Schnittgebilde sind die Ellipse, der Kreis, die Parabel und die Hyperbel.

In diesem Programmpunkt ist es möglich, beliebige Parameter für die allgemeine Gleichung der Kurven 2. Ordnung

$$A X^2 + B X Y + C Y^2 + D X + E Y + F = 0$$

einzugeben. Die Parameter A bis F sind dabei beliebige reelle Zahlen. Je nach Wahl dieser Koeffizienten beschreibt die Gleichung dann eine Ellipse, Parabel, Hyperbel (klassische Kegelschnitte) oder einen entarteten Kegelschnitt, z.B. zwei sich schneidende Geraden. Ist der zweite Koeffizient B = 0, sind die Kurven 2. Ordnung parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet, andernfalls um einen Winkel gedreht. Entartete Kurven 2. Ordnung, deren Parameter A, B und C gleichzeitig 0 sind, werden hier nicht analysiert.

Nach einer Hauptachsentransformation, d.h. die Kegelschnitte werden parallel zu den Achsen gedreht, wird die Normalform

$$a X^2 + b Y^2 + c X + d Y + e = 0$$

sowie der für die Achsentransformation notwendige Drehwinkel α angezeigt. Anschließend analysiert das Programm nach Entfernung der linearen Glieder aus der Gleichung den Kegelschnitt.

Liegt ein nicht entarteter Kegelschnitt vor (Ellipse, Hyperbel bzw. Parabel), werden die entsprechenden Parameter wie Mittelpunkt M, große und kleine

Halbachse a und b, Halbparameter p sowie lineare e und numerische Exzentrizität ε ermittelt. Für eine Ellipse oder eine Hyperbel berechnet das Programm außerdem genau einen der Brennpunkte. Die Ergebnisse können gedruckt und in die Zwischenablage kopiert werden.

Wünschen Sie nur die Auswertung der Gleichung, dann nutzen Sie den Schalter *Berechnung*. Soll der Kegelschnitt dargestellt werden, wählen Sie den Schalter *Darstellung*. Liegt eine Hyperbel achsenparallel (Parameter B = 0), ruft die Wahl des Markierungsfeldes *Hyperbelasymptoten* die Darstellung der Hyperbelasymptoten auf.

Die Kegelschnitte werden als Kurven gezeichnet, d.h., das im Teilprogramm *Kurven* eingestellte Intervall des Parameters K wird genutzt. Dies können Sie ändern, indem Sie in die Eingabezeilen *von*, *bis* und *mit Schrittweite von* die neuen Werte eintragen.

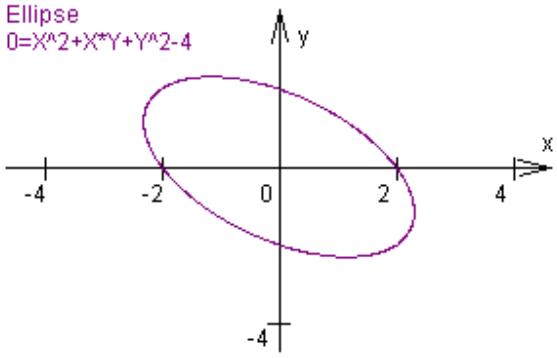


Abbildung: Ellipse 0 = X^2+X*Y+Y^2-4 mit einem Mittelpunkt bei (0;0) und den Halbachsen a=1,63 und b=2,83; Drehwinkel 45°; numerische Exzentrizität ε = 0,816, lineare Exzentrizität e = 2,31, Brennpunkt F_1 bei (-1,63 ; 1,63), Parameter 2p = 9,8; Normalform nach Koordinatentransformation 0 = 1,5*X^2+0,5*Y^2-4. Ändern Sie den Koeffizienten C auf -1, erhalten Sie eine Hyperbel.

Beachten Sie: Unter gewissen Umständen können im Grenzfall interne Rundungen der Werte die Analyse verfälschen. Zum Beispiel erhalten Sie für die Gleichung -X^2 + 3*X*Y - Y^2 - X - Y + 1 = 0 die Analyse "Hyperbel". Tatsächlich zieht sich der Kegelschnitt jedoch zu dem Punkt (1;1) zusammen. In der nachfolgenden Darstellung sehen Sie den Verlauf dieser Hyperbel für F = 0,999. Für F = 0,9999 nähern sich die Hyperbeläste noch stärker den Geraden Y = 1 und X = 1. Für den oben genannten Wert F = 1 verschwindet die Darstellung, der Kegelschnitt entartet.

In Analogie zu den Hinweisen im Teilprogramm *Mathematische Kurven*, können Sie auch hier eine spezielle Beschriftung von neun Punkten zu- und abschalten. Markieren Sie den Punkt *spezielle Punktbeschriftung*, trägt das Programm in der grafischen Darstellung die Punkte des Kegelschnitts ein, die in der Polarkoordinatendarstellung der Kurve durch den Winkel W bestimmt werden, für welchen W = 0, π/6, π/4, π/3, π/2, 2π/3, 5π/6, π, 3π/2 beträgt.
Ermittelt das Programm eine Ellipse oder Hyperbel, so werden dafür in der grafischen Darstellung der berechnete Mittelpunkt und der eine Brennpunkt besonders markiert.

Anmerkung: Ellipsen und Hyperbeln in Mittelpunktslage können Sie auch im Unterprogramm *Planimetrie* des Geometrieteils untersuchen.
Das Teilprogramm *Größen an Kegelschnitten* veranschaulicht den Einfluss der Größen der Hauptachsen und der linearen Exzentrizität auf die Gestalt und Form des Kegelschnitts. Darüber hinaus können Sie unter *Schnitt eines Kegels* die konstruktive Ermittlung einer Schnittfigur Ebene-Kegel durchführen.

Weiterhin stellt das Programm bei jeder Änderung eine erste Vorschaugrafik dar, die Ihnen das spätere Ergebnis zeigt. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) klicken Sie auf den Schalter *Darstellung.*

4.11 Größen an Kegelschnitten

In diesem Teilprogramm *Größen an Kegelschnitten* verändern Sie per Mausklick und Verschieben drei Punkte eines Kegelschnitts, die Endpunkte A und B der großen und kleinen Halbachse und einen Brennpunkt F_1.
Der zweite Brennpunkt F_2 und die Leitlinie des Kegelschnitts werden ebenfalls dargestellt. Außerdem können Sie die Lage der Leitlinie verschieben. Nutzen Sie dazu den gelb markierten Punkt auf dieser Geraden.

Beachten Sie bitte, dass sich die Leitlinie auch außerhalb des Darstellungsfensters befinden kann.

Je nach Lage der Punkte ermittelt das Programm die Länge der Halbachsen a, b und die Exzentrizitäten e. Ist die große Halbachse a kleiner als die lineare Exzentrizität liegt eine Hyperbel vor, andernfalls eine Ellipse.
Bei Veränderung der Punkte wird der neue Kegelschnitt sofort gezeichnet. Starten Sie die Simulation, so wird der Punkt A kontinuierlich längs der Abszissenachse verschoben.

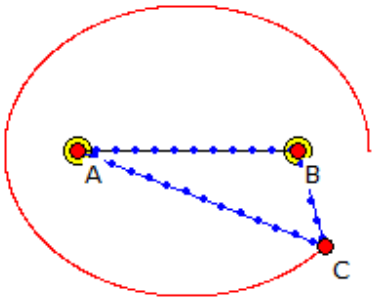
Auf dem Kegelschnitt finden Sie weiterhin einen Punkt P. Dessen Lage können Sie über den Rollbalken *Winkel* verändern.
Der Winkel entspricht dem Winkel zwischen Abszissenachse und dem Strahl vom Kegelschnittmittelpunkt zum Punkt P. Markieren Sie das Feld *Punkt bewegen*, wird dieser Winkel während der Animation kontinuierlich verändert.

4.12 Gärtnerkonstruktion einer Ellipse

Aus der Ellipsendefinition als Kurve, bei der für jeden Punkt P die Summe der Entfernungen von zwei Festpunkten, den Brennpunkten, den konstanten Wert 2a hat

$$r_1 + r_2 = 2a$$

kann ein einfache Näherungskonstruktion abgeleitet werden.

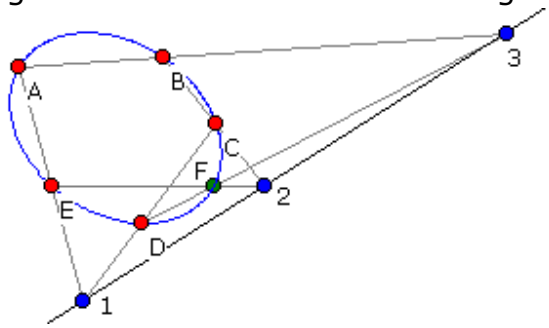


Um zwei feste Punkte, mit dem Abstand a, wird ein geschlossenes Seil mit einer Mindestlänge von 2a gelegt. Wird das Seil gespannt und in dem gehaltenen Punkt z.B. mit einem Bleistift versehen, so beschreibt dieser bei kontinuierlichem Verschieben eine Ellipse. Da dieses Verfahren gern zum Anlegen elliptisch geformter Blumenbeete genutzt wird, spricht man von einer Gärtnerkonstruktion.

In diesem Teilprogramm wird die Gärtnerkonstruktion demonstriert.
Die Lage der zwei Punkte A und B verändern Sie mit Hilfe der Maus. Die Länge des Seils wird am Rollbalken eingestellt.
Verändern Sie nun am ersten Rollbalken den Winkel, so beschreibt der Punkt C entsprechend der Gärtnerkonstruktion die gesuchte Ellipse. Mit dem Schalter *Simulation* wird der Winkel automatisch verändert.

4.13 Ellipse aus 5 Punkten

Während eine Gerade durch zwei Punkte und ein Kreis durch drei Punkte eindeutig bestimmt sind, benötigt man für einen Kegelschnitt, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, im Allgemeinen fünf Punkte, von denen möglichst nie drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Sind diese Punkte bekannt, so kann die Kurve konstruiert werden. Dabei hilft der Allgemeine Satz von Pascal an Kegelschnitten:



Wählt man sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, insbesondere einer Ellipse, und bezeichnet sie beliebig mit A bis F, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden AB und DE, BC und EF, CD und FA selber wieder auf einer Geraden, der Pascal-Geraden.

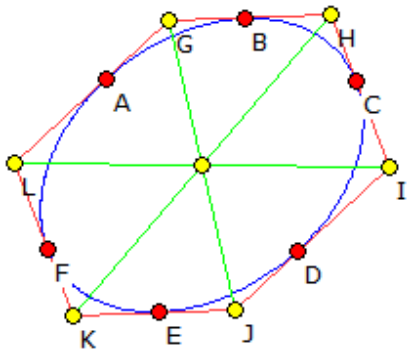
Folgendes Verfahren ergibt dann die gesuchten Punkte:

1. Gegeben seien die Punkte A bis E.
2. Punkt 1 wird als Schnittpunkt von AE und DC gewonnen.
3. Von D aus wird eine beliebige Gerade gezogen und mit AB zum Schnitt gebracht, Ergebnis ist der Punkt 3.
4. BC wird mit der Geraden durch 1 und 3, der Pascal-Geraden, geschnitten, Ergebnis ist Punkt 2.
5. Die Gerade durch E und 2 schneidet dann die Gerade durch D und 3 in einem Kegelschnittpunkt, dem gesuchten Punkt F.
6. Die in Anweisung 3 gewählte beliebige Gerade wird verändert und der Vorgang für eine weiteren Punkt wiederholt. Dabei entsteht eine neue Pascal-Gerade, d.h., für jeden zu konstruierenden Punkt existiert eine andere Pascal-Gerade.

In diesem Teilprogramm können Sie von fünf Punkten aus solche Kegelschnitte zeichnen lassen. Verändern Sie die Lage der Punkte A bis E mit der Maus, so wird auch sofort die neue Kurve gezeichnet. Wie Sie schnell feststellen werden, muss nicht stets eine Ellipse entstehen. Mitunter erhält man auch eine Hyperbel, sehr selten eine Parabel.
An den Schaltfeldern können Sie die Anzeige der Pascal-Geraden und einiger berechneter Hilfspunkte zu- und abschalten.

Während der Simulation wird der Punkt A kontinuierlich waagerecht bewegt, wobei Sie die Veränderung des entstehenden Kegelschnitts nachvollziehen können.
Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* so können Sie die Koordinaten der Punkte A bis E direkt in die angezeigte Tabelle eingeben. Klicken Sie auf *Gleichung*, ermittelt das Programm eine Näherungsgleichung für den Kegelschnitt in allgemeiner Form.

4.14 Satz von Brianchon



Dieser Satz ist die duale Aussage zum Satz von Pascal bzgl. Kegelschnitte. Es gilt:
Wird ein nicht nichtwendig konvexes Sechseck einem Kreis umgeschrieben, so schneiden sich die drei Geraden der gegenüberliegenden Eckpunkte des Sechsecks in einem Punkt. Dieser Punkt wird Brianchon-Punkt genannt.

Überraschend ist, dass der Satz von Brianchon (nach Charles Julien Brianchon 1783-1864) erst 166 Jahre, d.h. 1806, nach dem Satz von Pascal gefunden wurde, da er sich aus dem; damals noch unbekannten; Ponceletschen Dualitätsprinzip automatisch ergibt.

In diesem Teilprogramm wird der Satz demonstriert.
Ausgehen von 6 Punkten A bis F, die Sie mit der Maus verschieben können, wird ein Kegelschnitt durch diese Punkte konstruiert.
Ist die konvexe Hülle von A bis F ein Sechseck, so entsteht eine Ellipse, andernfalls eine Hyperbel, für die der Satz von Brianchon nicht angewendet werden kann.
Die Tangenten in A bis F an die Ellipse bilden dann ein Sechseck GHIJKL. Wie zu erwarten schneiden sich dann die Diagonalen durch gegenüberliegende Ecken in einem Punkt, hier im Ursprung.

Da nicht jedes Sechseck eine Innenellipse besitzt, wird in diesem Teilprogramm der Sonderfall eines punktsymmetrischen Sechsecks betrachtet.

4.15 Ellipse, Hyperbel und Gerade

Während im Unterprogramm *Mathematische Kurven* die Analyse einer Kurve 2. Ordnung inklusive einer Hauptachsentransformation im Vordergrund stand, können Sie in diesem Unterprogramm für eine Ellipse bzw. Hyperbel in Mittelpunktslage, d.h., der Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt im Koordinatenursprung und die Hauptachsen sind parallel zu den Koordinatensystemachsen ausgerichtet, weitere Untersuchungen durchführen.

Nach Auswahl des zu untersuchenden Kegelschnitts (*Ellipse* oder *Hyperbel)* geben Sie die Werte für die große und kleine Halbachse entsprechend der Gleichung für die

$$\text{Ellipse } x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \text{ bzw.}$$
$$\text{Hyperbel } x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$

ein.
Klicken Sie auf den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Programm die Größen der Halbachsen, die Exzentrizitäten sowie den Halbparameter.
Haben Sie das Feld *Ellipse und Hyperbel* markiert, berechnet das Programm die eventuell existierenden Schnittpunkte beider Kegelschnitte.

Zusätzlich können Sie eine beliebige lineare Funktion (Gerade) in der Form $y = mx + n$ festlegen. Existieren Schnittpunkte zwischen dem Kegelschnitt und dieser Geraden, werden deren Koordinaten berechnet.
Weiterhin können Sie die Ellipse, Hyperbel und wahlweise die Gerade und die Hyperbelasymptoten über den Schalter *Darstellung* grafisch veranschaulichen.

Die Größe das Abbildungsintervalls können Sie über die Schalter links von *Darstellung* einstellen. Der gelb markierte Koordinatenursprung kann wieder durch Anklicken und Bewegen mit der Maus verschoben werden, das Gitter und die Koordinatenachsen sind zu- und abschaltbar.

4.16 Ellipsen-, Parabel- und Hyperbelkonstruktion

In diesem Teilprogrammen können Sie die Standardkegelschnitte

- Parabel
- Hyperbel
- Ellipse

durch Bewegung von Punkten längs von Geraden erzeugen.

Ausgangspunkt ist ein kartesisches Koordinatensystem. In diesem finden Sie drei Punkte A, B und C.
A charakterisiert den Mittelpunkt eines Kreises, auf dem sich ein Punkt P bewegt. Die Punkte B und C beschreiben die Leitlinie des Kegelschnitts. A und die Leitlinie können mit der Maus verschoben werden.
An einem Rollbalken stellen Sie für die Ellipse ($0 < \varepsilon > 1$), Parabel ($\varepsilon = 1$) und Hyperbel ($\varepsilon > 1$) die numerische Exzentrizität ein.

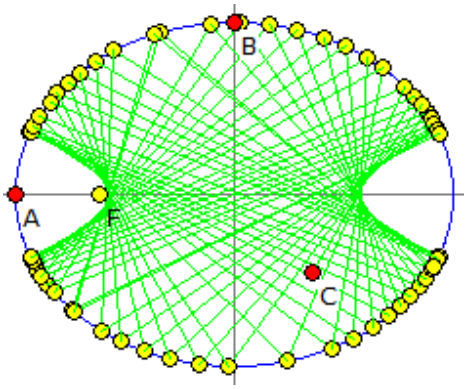
Klicken Sie nun auf den Schalter *Simulation*, verändert das Programm automatisch die Parameter und demonstriert so die Konstruktion der entsprechenden Kurve.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.

4.17 Konfokale Kegelschnitte

In diesem Teilprogramm werden konfokale Kegelschnitte gezeichnet, d.h. Ellipsen und Hyperbeln, die identische Brennpunkte F1 und F2 besitzen.
Die Anzahl der Ellipsen bzw. Hyperbeln und die Größe der großen Halbachsen stellen Sie ein, indem Sie den relativen Abstand zwischen den Kegelschnitten an den Rollbalken verändern.
Außerdem können Sie die Lage der zwei Brennpunkte F1 und F2 mit der Maus verschieben.

4.18 Elliptisches Billard



Die Kegelschnitte haben die gemeinsame Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, an der Kurve in besonderer Weise reflektiert werden. Bei der Ellipse verlaufen die reflektierten Strahlen durch den anderen Brennpunkt.
Schon im Mittelalter wurden elliptische Bögen als Flüstergewölbe gebaut. Moderne Anwendung findet dieses Prinzip beim Nierensteinzertrümmerer, bei dem ohne Operation ein in einem Brennpunkt platzierter Nierenstein von den im anderen Brennpunkt ausgehenden Stoßwellen zerstört wird.

In diesem Teilprogramm wird die Reflexion im Inneren einer Ellipse untersucht.

Die Form Ellipse stellen Sie durch Verschieben der zwei Scheitelpunkte A und B ein.
Von einem dritten Punkt C, der sich möglichst im Inneren der Ellipse befinden sollte und ebenfalls verschiebbar ist, wird ein Strahl zum Rand der Ellipse gezeichnet. Die *Richtung* des Strahls stellen Sie am Rollbalken ein, wobei der angegebene Winkel der Winkel zur Abszissenachse in mathematisch positiver Richtung ist.
Dieser Strahl wird am Rand der Ellipse reflektiert. Je nach Anzahl der *Reflexionen* werden die reflektierten Strahlen erneut zurückgeworfen.

Insgesamt entstehen dabei „merkwürdige" Reflexionsbilder. Einen gleichen Effekt würde man erzielen, wenn ein elliptischer Billardtisch vorliegt und man den Weg einer Kugel von C aus verfolgen würde.

Während der Simulation wird entweder der Punkt A verschoben, d.h. die Form der Ellipse geändert, der Punkt C waagerecht bzw. senkrecht oder die *Richtung* des 1.Strahls verändert.

4.19 Kegelschnitte unterschiedlicher Exzentrizität

In diesem Teilprogramm werden vier Kegelschnitte gleichzeitig dargestellt. Diese Kegelschnitte haben dabei einen gemeinsamen Brennpunkt A und die gleiche Leitlinie.
Unterschiedliche Kegelschnitte ergeben sich durch die an den Rollbalken einstellbaren numerischen Exzentrizitäten der Kegelschnitte.
Der zweite Ast einer Hyperbel wird nur gezeichnet, wenn das Markierungsfeld gewählt wurde.

Die Lage des Brennpunktes A und der Leitlinie mit dem Fußpunkt B kann durch Verschieben mit der Maus verändert werden. Während der *Simulation* werden wahlweise der Punkt A bzw. B verschoben.

4.20 Kegelschnitt zweier Geraden

Sind zwei Geraden in der Ebene $0 = ax + by + c$ und $0 = dx + ey + f$ gegeben, so beschreiben diese eindeutig mit

$L_1 = ax + by + c$
$L_2 = dx + ey + f$

einen Kegelschnitt der Gleichung

$L_1 \cdot L_2 + n \cdot x \cdot y = 0$

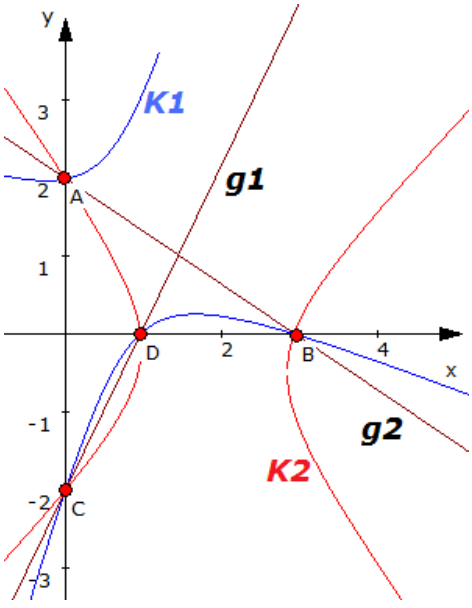
Insgesamt erhält man

$ad \cdot x^2 + x \cdot y \cdot (ae+bd+n) + be \cdot y^2 + x \cdot (af+cd) + y \cdot (bf+ce) + cf = 0$

d.h. einen mit dem Winkel α

$\tan 2\alpha = (ae+bd+n) / (ad-be)$

gedrehten Kegelschnitt.

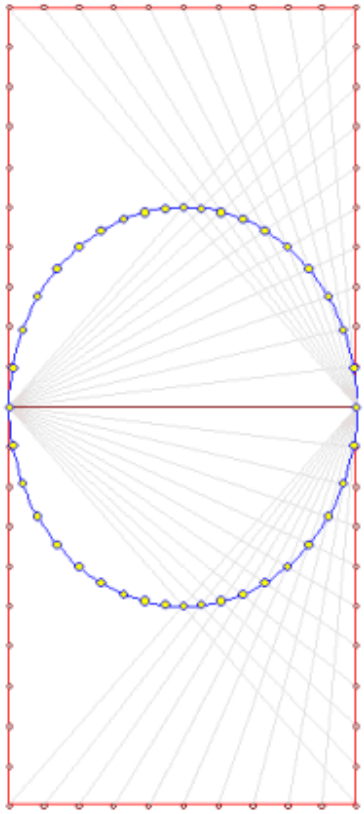


Je nach Lage der Geraden und Wahl des Faktors n entstehen dabei Ellipsen, Parabeln bzw. Hyperbeln. Für n = 0 entarten die Kegelschnitte zu den zwei Geraden selbst. Wird n sowohl positiv als auch negativ gezählt, erhält man stets zwei Kegelschnitte. Sind die zwei Ausgangsgeraden parallel, so wird einer der Kegelschnitte eine Ellipse. Fallen die zwei Geraden zusammen, so tangieren sich die Kegelschnitte.

In diesem Teilprogramm können Sie solche Kegelschnitte zeichnen.

Die Lage der zwei Geraden stellen Sie ein, indem Sie mit der Maus die Punkte A, B, C oder D verschieben. Den *Faktor n* aus der obigen Gleichung stellen Sie am Rollbalken ein.

In Analogie zum beschriebenen Kegelschnitt kann auch die Gleichung $L_1 \cdot L_2 - n \cdot x \cdot y = 0$ betrachtet werden, d.h. mit entgegengesetztem Vorzeichen von n.
Soll dieser Kegelschnitt auch gezeichnet werden, so markieren Sie das Feld *2. Kegelschnitt*.



4.21 Parallelogrammmethode für Ellipse und Parabel

Mit der Parallelogrammmethode können die Punkte einer Ellipse schrittweise konstruiert werden.
Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so werden die Seiten eines Rechtecks mit den Seitenlängen 2a und 4b in jeweils n bzw. 2n Abschnitte unterteilt.

Die Punkte der Ellipse ergeben sich als Schnittpunkte zweier Geraden wie in der Abbildung.
Die Geraden laufen durch den linken bzw. rechten Mittelpunkt auf der Seite der Länge 4b. Für den Zielpunkt der Geraden wird (vom rechten Anfangspunkt aus) umso viele Abschnitte "nach links" entlang der 2a-Seite gegangen, wie bei der anderen Gerade von links Abschnitte "nach oben" ab der Hälfte der 4b-Seite.
Für wachsendes n ergeben sich so Punkt-für-Punkt immer mehr Punkte der Ellipse.

Mit einem ähnlichen Verfahren kann auch eine Parabel erzeugt werden. Dabei gleitet eine Strecke innerhalb des 1.Quadranten herab und hüllt die Parabel ein. Diese Methode wird auch Steiner-Erzeugung genannt.
Für die Erzeugung einzelner Punkte der Parabel $y = ax^2$ geht man von dem Geradenbüschel im Scheitel S und dem Parallelbüschel der Parallelen zur y-Achse aus. Es seien P (x0;y0) ein Punkt der Parabel und A(0;y0), B(x0,0). Man unterteilt BP in n gleichlange Stücke und überträgt die Unterteilung mit einer Parallelprojektion in Richtung AB auf die Strecke AP. Die Schnittpunkte der zugeordneten Geraden SB_i und der i.Parallele zur y-Achse liegen dann auf der eindeutig bestimmten Parabel.

In diesem Teilprogramm werden so eine Ellipse bzw. eine Parabel erzeugt.
Wählen Sie die entsprechende Kurve an den Auswahlfeldern.
Bei der Ellipse können Sie Anzahl der *Hilfspunkte n* und die Größen der zwei *Halbachsen* einstellen.
Für die Parabel wählen Sie ebenfalls die Anzahl der Hilfspunkte. Die Parameter der Parabel werden durch das Verschieben des Punktes A mit der Maus gewählt.

4.22 Abrollen von Ellipsen

Rollt ein Kreis auf der Peripherie eines zweiten Kreises ab, so entstehen, je nach Wahl der Radien, verschiedene Epizykloiden als Kurven. Dies kann man auf Ellipsen erweitern.

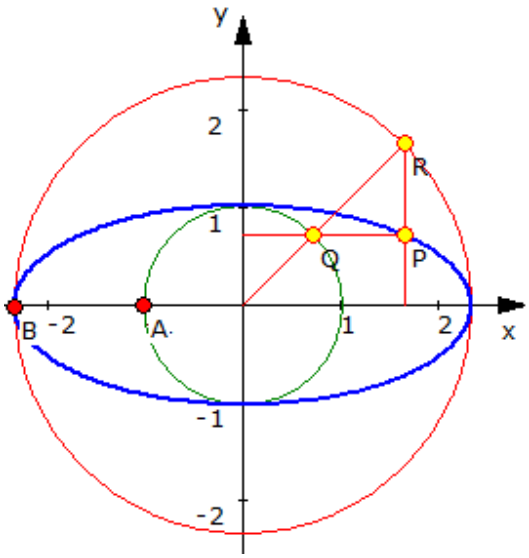
In diesem Teilprogramm rollt eine Ellipse auf dem Umfang einer gleichgroßen Ellipse ab.
Die Form der Ellipsen kann durch die Maus eingestellt werden. Verschieben des Punkte A verändert die Brennweite der Ellipse, Verschieben von B eine der Halbachsen.

Die Brennpunkte A und D der zwei Ellipsen sind nun durch einen Stab miteinander verbunden.
Während der Simulation rollt nun die äußere Ellipse auf der anderen so ab, dass der Stab AD gleichförmig um A rotiert. Als Effekt tritt dabei ein, dass die Drehung der rollenden Ellipse nun nicht mehr gleichförmig geschieht, sondern zum einen langsamer zum anderen schneller erfolgt.

Auf der abrollenden Ellipse kann ein *Spurpunkt* S festgelegt werden. Für diesen wird während der Drehung die Ortskurve gezeichnet. Dieses ist i.A. eine epizykloidenartige geschlossene Kurve.

An den zwei Rollbalken Spurpunktwinkel und Spurfaktor kann die Lage von S relativ zur zweiten Ellipsen noch verändert werden, wodurch die Spur sich deutlich verändert.

4.23 Ellipsen-Zweikreiskonstruktion



Durch Philippe de La Hire wurde im 17.Jahrhundert ein einfaches Verfahren zur punktweisen Konstruktion einer Ellipse angegeben.

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise, deren Radien die beiden Halbachsen der Ellipse beschreiben.
Auf dem äußeren Kreis befindet sich ein Punkt R. Der Schnittpunkt des Strahls vom Kreismittelpunkt nach R mit dem inneren Kreis sei Q. Ein Punkt P hat dann die y-Koordinate von Q und die x-Koordinate von R und beschreibt die Ortskurve der gesuchten Ellipse.
Bildet der Strahl mit der x-Achse den Winkel ϕ und sind die Radien a und b, so wird damit

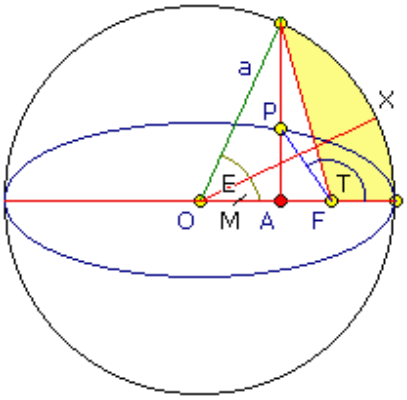
$$x_P = a \cos \phi \quad \text{und} \quad y_P = b \sin \phi$$

d.h. die bekannte Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

In diesem Teilprogramm wird diese Konstruktion dargestellt.
Die Größe der Kreise stellen Sie durch Verschieben der zwei Punkte A und B ein.
Die Lage des Punktes R verändern Sie an dem Rollbalken *Winkel*.
Während der Simulation wird voreingestellt R kontinuierlich bewegt und so die Ellipse erzeugt.

Exzentrische, mittlere und wahre Anomalie

Die Figur der Zweikreiskonstruktion einer Ellipse eignet sich gut zur Erklärung der von Kepler eingeführten exzentrischen, mittleren und wahren Anomalie eines Punktes P auf einer Ellipse.



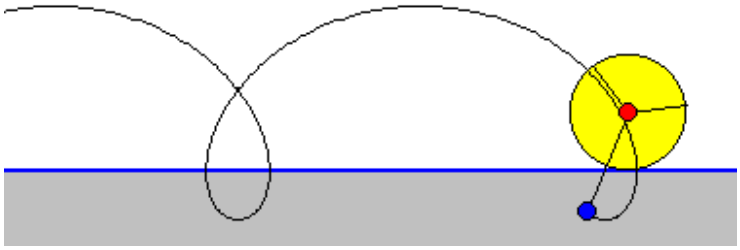
Die exzentrische Anomalie ist der Winkel E zwischen der großen Halbachse und einem durch den Ellipsenmittelpunkt O gehenden Kreisradius (Kreisradius = große Halbachse).
Dieser Radius schneidet den Kreis in dem Punkt, welcher durch eine Senkrechte durch den gegebenen Ellipsenpunkt P geschnitten wird.
Die wahre Anomalie ist der Winkel T, den der Punkt P bezüglich des Brennpunkts F gemessen von der Periapsis (kürzester Abstand zu F) hat. Die mittlere Anomalie M ist der Winkel, denn ein theoretischer Punkt X bezüglich des Ellipsenmittelpunktes hat, wenn er sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt und die gleiche Umlaufzeit wie P auf der Ellipsenbahn besitzt.

Die Bedeutung der drei Anomalien liegt vor allem in der Himmelsmechanik. Die Auflösung der Kepler-Gleichung M = E - e sin E ermöglicht erst die Berechnung der Bahnen von Himmelskörpern.

Markieren Sie das Feld *Anomalien zeigen*, so trägt das Programm die drei Winkel E, M und T sowie den Punkt X ein. Haben Sie zusätzlich *Ergebnisse anzeigen* ausgewählt, werden die Größen der Anomalien gezeigt. Bewegt sich P, so werden Sie schnell feststellen, dass X auf der ersten Hälfte hinter P herläuft, die mittlere Anomalie ist kleiner als die exzentrische, auf der zweiten Hälfte jedoch vor P ist.

Möchten Sie, dass während der *Simulation* nicht die exzentrische Anomalie gleichmäßig erhöht wird, sondern die mittlere Anomalie, so können Sie die ebenfalls auswählen.
In diesem Fall kann man nachvollziehen, dass P in der Nähe des Brennpunktes schneller läuft als in größerer Entfernung zu F.
Gerade dies entspricht aber dem zweiten Keplerschen Gesetz: Bewegt sich ein Körper unter dem Einfluss einer Zentralkraft, so überstreicht der von ihm ausgehende Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen, d.h. in Brennpunktnähe ist der Körper schneller als in Brennpunktferne.

4.24 Zykloide



Ein im 16.-17. Jahrhundert sehr beliebtes Problem der Mathematik war die Frage nach der Form von Kurven, die entstehen, wenn ein Kreis auf einer anderen Kurve abrollt.
Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so entsteht eine sogenannte Zykloide. Auch hier können Sie Parameter verändern.

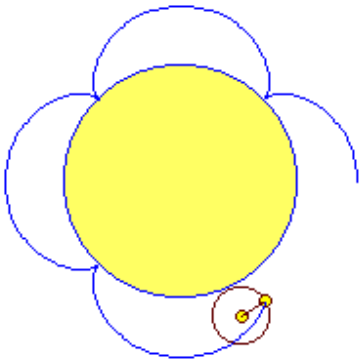
Über den Rollbalken *Kreisradius* stellen Sie die Größe des rollenden Kreises ein, mit *Verschiebung* den Abstand des Kurven erzeugenden Punktes vom Mittelpunkt des Kreises. In der Abbildung rollt ein Kreis mit dem Radius 30 bei einer Verschiebung von 25 auf der Geraden ab. Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird die entstehende Gesamtkurve dargestellt.

Wählen Sie nun *Simulation*, beginnt das Programm den Kreis abrollen zu lassen und konstruiert so die gewählte Zykloide.

Zykloiden wurden erstmals intensiv von Galilei untersucht. Dabei versuchte er mittels Metallstücken in Form von Zykloiden die Flächeninhalte unter Kurven zu bestimmen.
Für eine positive Verschiebung entsteht eine verlängerte Zykloide, für negative Verschiebungen eine verkürzte Zykloide. Beide werden auch Trochoide genannt.

4.25 Epizykloide, Hypozykloide, Spirograph

Ein im 16.-17. Jahrhundert sehr beliebtes Problem der Mathematik war die Frage nach der Form von Kurven, die entstehen, wenn ein Kreis auf einer anderen Kurve abrollt. Insbesondere das Rollen innerhalb oder außerhalb eines anderen Kreises faszinierte Mathematiker wie Dürer, Galilei, Desargues, Huygens, Fermat, Descartes, die Bernoullis, Leibniz, Newton, l'Hospital, Euler usw. – also nahezu alle führenden Personen der Mathematik dieses Zeitalters.

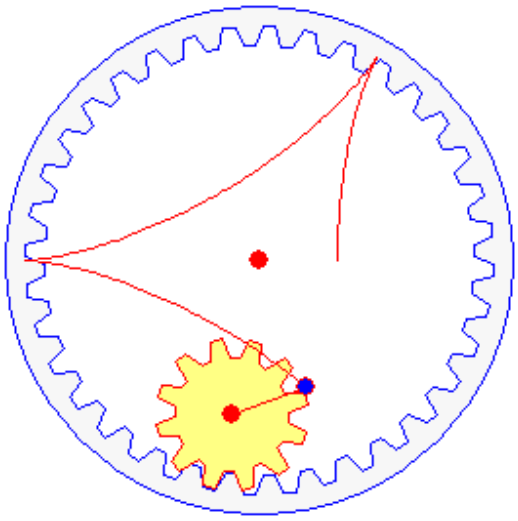


Rollt der Kreis außerhalb eines anderen und markiert man auf der Kreisperipherie einen Punkt, spricht man von einer entstehenden Epizykloide als Rollkurve. Bewegt sich der Kreis innerhalb eines zweiten Kreises liegt eine Hypozykloide vor. Je nach Größenverhältnis beider Kreise zueinander entstehen unterschiedlichste Kurvenbilder. Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, derartige Kurven zu konstruieren.

In diesem Teilprogramm stellen Sie an den Rollbalken

Folgendes ein:

- *Innenkreis* ... den Radius des inneren Kreises, d.h. des Kreises, auf dem der zweite rollt
- *Außenkreis* ... den Radius des rollenden Kreises
- *Verschiebung* ... die Größe, um die der zeichnende Punkt auf dem rollenden Kreis nach außen (positiver Wert) oder nach innen (negativer Wert) verschoben wird
- *Kurvenlänge* ... die Anzahl der vollen Umläufe, die maximal gezeichnet werden. Insbesondere für Innenkreis- und Außenkreisradien, die nicht in einem kleinen Verhältnis, z.B. 1:2 oder 3:4, stehen, kann so eine aussagekräftigere Kurve erzeugt werden.



Ob Sie eine Epizykloide, eine Hypozykloide oder gleichzeitig beide zeichnen wollen, stellen Sie an den Auswahlfeldern ein.

Hinweis: Hohe Kurvenlängen können auf "langsamen" Computern zu einer ruckartigen Animation führen.

Wählen Sie nun *Simulation*, beginnt das Programm den Kreis abrollen zu lassen und konstruiert so die gewählte Zykloide. Die Geschwindigkeit stellen Sie an dem Rollbalken neben dem *Simulation*-Schalter ein. Um die Simulation zu stoppen, drücken Sie den Schalter noch mal.

Eine besondere Darstellung erhalten Sie, wenn Sie das Markierungsfeld *Zahnrad* auswählen. In diesem Fall stellt das Programm auf- und ineinander rollende Zahnräder dar, die die gleichen Rollkurven erzeugen.

Interessante Kurven ergeben sich z.B. für

- Hypozykloide mit Innenkreis 100, Außenkreis 50 ... senkrechte Gerade
- Hypozykloide mit Innenkreis 200, Außenkreis 50 ... Astroide
- Hypozykloide mit Innenkreis 100, Außenkreis 50, Verschiebung -50 ... Kreis mit Radius 50
- Hypozykloide mit Innenkreis 100, Außenkreis 25, Verschiebung -15 ... "Quadrat" mit abgerundeten Ecken
- Hypozykloide mit Innenkreis 100, Außenkreis 25, Verschiebung +50 ... "Vierblättriges Kleeblatt"
- Epizykloide mit Innenkreis 60, Außenkreis 60, Verschiebung 0 ... Kardioide

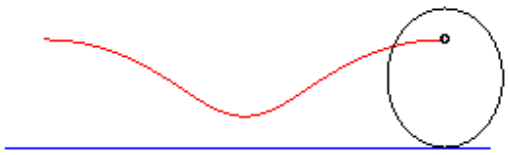
usw.
Markieren Sie das Feld *reine Kurve,* werden die erzeugenden Kreise nicht dargestellt. Das Programm zeigt in diesem Fall nur die entstehende mathematische Kurve.

Spirograph

Ein fester Punkt eines Kreises, der innerhalb eines zweiten festen Kreises rollt, beschreibt, wie oben erwähnt, eine Hypozykloide. Sind die Radien der Kreise r und R sowie der Abstand ρ des Punktes vom Kreismittelpunkt rational, so ist die entstehende Kurve geschlossen und wird Spirograph genannt.

Dieses Teilprogramm zeichnet derartige Kurven. An den Rollbalken stellen Sie den inneren Radius als Verhältnis zweier Parameter p und q ein. Für den äußeren Radius wird eine Einheit angenommen. Der dritte Rollbalken stellt die Verschiebung des Punktes auf dem rollenden Kreis ein. Erhöhen Sie die *Kurvenanzahl*, so werden mehrere Spirograph-Kurven mit unterschiedlichen Radien gezeichnet.
Während der Simulation wird bei dem Spirograph die Größe der Verschiebung kontinuierlich verändert.

4.26 Ellipsenzykloide



Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so beschreibt ein Punkt auf der Kreisperipherie eine Zykloide. Auch andere Kurven, außer dem Kreis, können auf einer Geraden abrollen. Erstmals wurde dies 1869 durch Besant untersucht.

Zum Beispiel beschreibt der Brennpunkt einer Ellipse während des Abrollens eine Rollkurve nach Delaunay.
Beschreibt $\rho_0 = f(\theta_0)$ die abrollende Kurve, so ergibt sich die allgemeine Rollkurve zu

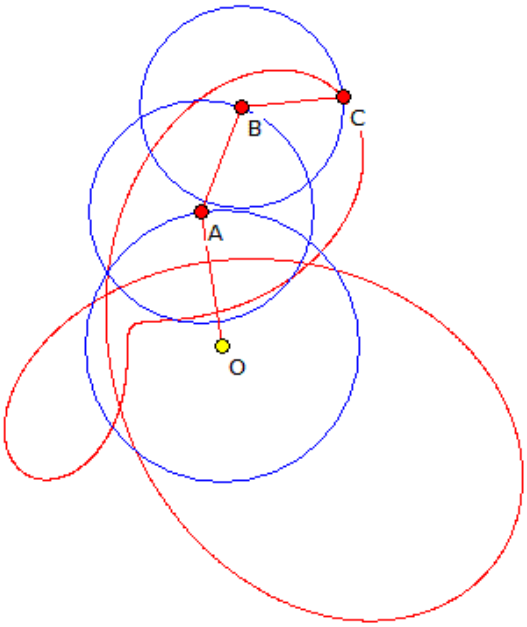
$$x = \int f(t)/f'(t)\, dy/dt\, dt \qquad y = f(t) / \sqrt{(f^2(t) + f'^2(t))}$$

In diesem Teilprogramm kann eine Ellipse längs einer Geraden abrollen. An den Rollbalken stellen Sie die Größe der *Halbachsen* der Ellipse ein. Klicken Sie nun auf *Simulation*, so rollt die Ellipse derart ab, dass der Winkel im Mittelpunkt der Ellipse kontinuierlich erhöht wird. Interessant ist dabei, dass die Ellipse am „spitzen" Ende eine größere Winkelgeschwindigkeit aufweist als am „flachen".

Innerhalb der Ellipse können Sie die Lage eines Punktes mit *Verschiebung* verändern. Für diesen Punkt wird die Rollkurve gezeichnet.

4.27 Doppel-Epizykloide

Während im Teilprogramm *Epizykloide* ein Kreis auf der Peripherie eines zweiten abrollt, wird in diesem Teilprogramm die Rollbewegung um einen dritten Kreis erweitert.



Um den Koordinatenursprung bewegt sich ein Punkt A gleichförmig auf einer Kreisbahn. A ist Zentrum der Kreisbewegung eines Punktes B, und dieser Punkt ist erneut Bewegungszentrum eines Punktes C. Man könnte dies auch durch einen Mechanismus von drei beweglichen Stangen OA, AB und AC beschreiben. Die Länge der Stäbe können Sie wieder über die Rollbalken einstellen.

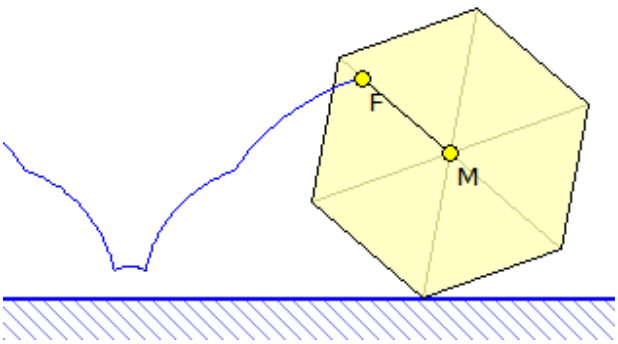
Klicken Sie nun auf *Simulation*, werden die drei Bewegungen gleichzeitig ausgeführt und die Kurve gezeichnet, auf der sich in der Summe der Punkt C bewegt.
Voreingestellt ist die Rotationsgeschwindigkeit der drei Punkte gleich groß. An zwei weiteren Rollbalken können Sie die Geschwindigkeitsverhältnisse für die Punkte B und C im Vergleich zu A verändern.

Epi- und Hypozykloiden können schon für verschiedene Werte sehr interessante Formen annehmen. Ändern Sie die Parameter der Doppel-Epizykloide, so werden Sie teilweise merkwürdige Kurvenverläufe feststellen.
Für einige Geschwindigkeitsverhältnisse ist die dargestellte Kurve von C nach einem Umlauf von A noch nicht wieder geschlossen. Am Rollbalken *Kurvenlänge* können Sie einstellen, für welches Intervall die Kurve gezeichnet wird.

Beispiel: Stellen Sie OA = 90, AB = 60, BC = 0 (liegt nun auf B) ein, so erhalten Sie eine Epizykloide mit einer "kleinen Schleife". Mit einem solchen Modell wurde im geozentrischen Weltbild die retrograde Bewegung der Planeten erklärt (Epizykeltheorie). Im Laufe der Jahrhunderte wurden statt der zwei Kreise drei, vier oder noch mehr genutzt.
Stellt man dieses Modell mechanisch mit Zahnrädern her, so ergibt sich ein Getriebe, das unter dem Namen "Planetengetriebe" bekannt ist.

4.28 Polygonzykloide

Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so beschreibt ein Punkt auf der Kreisperipherie eine Zykloide. Auch andere geometrische Figuren, außer dem Kreis, können auf einer Geraden abrollen.
Zum Beispiel beschreibt der Brennpunkt einer Ellipse während des Abrollens eine Rollkurve nach Delaunay.
Rollt ein regelmäßiges Polygon ab, so



entsteht eine Kurve, die sich aus mehreren Teilstücken in Form von Zykloiden zusammensetzt.

In diesem Teilprogramm können regelmäßige Polygone längs einer Geraden abrollen.
An den Rollbalken stellen Sie die *Größe* des Polygons und dessen *Eckenzahl* ein. Klicken Sie nun auf *Simulation*, so rollt das Vieleck derart ab, dass der Winkel im Mittelpunkt des Polygons kontinuierlich erhöht wird, d.h. das Vieleck kippt jeweils über die rechte untere Ecke.

Innerhalb des Polygons können Sie die Lage eines Punktes mit *Verschiebung* verändern. Für diesen Punkt wird die Rollkurve gezeichnet. Der Schalter *Darstellung* setzt das Vieleck auf den Anfang zurück.

4.29 Archimedische Spirale

Seit der Zeit der antiken griechischen Mathematik bis in das 18. Jahrhundert hinein waren mathematische Kurven sehr beliebte Untersuchungsobjekte.

Zum einen faszinierte die Symmetrie, die innere "mathematische Schönheit", den Mathematiker, zum anderen konnten solche Kurven zur Lösung mathematischer Probleme, wie zum Beispiel der Winkeldreiteilung, genutzt werden.

Ein Punkt, der sich auf einem Lichtstrahl vom Ursprung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, während sich der Leitstrahl mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w um den Pol dreht, beschreibt eine Archimedische Spirale.

Die Rille einer Schallplatte ist ein gutes Beispiel für eine Archimedische Spirale, wenn die Schwankungen, die durch die Tonaufzeichnungen entstehen, vernachlässigt werden. Auch ein Klebeband auf einer Rolle und ein aufgerollter Teppich beschreiben Archimedische Spiralen.
Diese Kurve wurde von Archimedes um 225 v.u.Z. in der Arbeit "Über Spiralen" erstmals untersucht. Erwähnt wurde diese Spirale zuvor schon von Conon.

Eine solche Kurve kann zur Winkeldreiteilung und zur Würfelverdopplung benutzt werden und ist damit selbst nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

In diesem Teilprogramm können Sie eine Archimedische Spirale erzeugen. Ausgangspunkt ist ein kartesisches Koordinatensystem. In diesem befindet sich ein Punkt A, den Sie mit der Maus längs der y-Achse verschieben können. Entsprechend der Definition wird aus der Lage von A die Archimedische Spirale berechnet. Mit dem Rollbalken können Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Punktes A zur Rotation von P einstellen. Kleine Werte ergeben weniger Spiralen, große Werte engere Spiralen.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, wird unabhängig von der Lage des

konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor. Die Gleichung der Spirale sowie die aktuelle Bogenlänge werden wahlweise berechnet.

Auch hier können Sie wieder eine *Simulation* starten. Entweder verschiebt das Programm den Punkt A kontinuierlich senkrecht oder aber das Geschwindigkeitsverhältnis wird im vordefinierten Bereich verändert. Im zweiten Fall entsteht der Eindruck einer nach innen bzw. außen laufenden Spirale.

4.30 Logarithmische Spirale

Diese Schweizer Briefmarke wurde zum 150-jährigen Bestehen des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins SIA herausgegeben und enthält eine interessante mathematische Konstruktion. Die Briefmarke zeigt den Zusammenhang des Goldenen Schnitts mit der Logarithmischen Spirale.

Im Einzelnen ist auf der Marke zu sehen: die Koordinatenachsen als gestrichelte Linien, eine nach dem Goldenen Schnitt konstruierte Folge von sieben Rechtecken und sechs Quadraten, eine Spirale und ein spiraliger Polygonzug.
Die Konstruktion soll nun erläutert werden:

Ausgegangen wird von einem Rechteck, dessen Proportionen dem Goldenen Schnitt entsprechen. Die Seitenlängen stehen damit im Verhältnis

$\tau = a/b = (a+b)/a = 1/2\,(\sqrt{5} + 1) = 1{,}618...$ ("Goldene Zahl") bzw.

$\sigma = b/a = 1/2\,(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618....$

Teilt man in einem Goldenen Rechteck ein Quadrat ab oder setzt ein Quadrat an die längere Rechteckseite an, so erhält man wieder Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt.

Diese Konstruktion von immer größeren Rechtecken durch Ansetzen von Quadraten beginnt auf der Briefmarke mit dem kleinen Rechteck, das den Koordinatenursprung enthält. Durch sechsmaliges Ansetzen von Quadraten im Gegenuhrzeigersinn erhält man die sieben Rechtecke mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnitts.

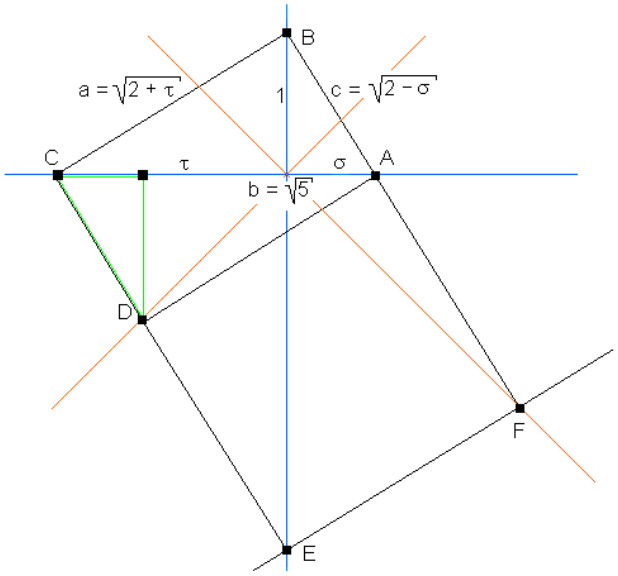
Wie liegen die Rechtecke und Quadrate zu den Koordinatenachsen und Diagonalen?

Diese Frage kann vollständig mit der Konstruktion eines einzigen Rechtecks und des angrenzenden Quadrats beantwortet werden, z.B. indem man mit dem kleinsten Rechteck beginnt. Man legt ein Rechteck mit den Proportionen des Goldenen Schnitts mit drei Ecken A, B, C auf die Koordinatenachsen.
Es sollen nun die Abstände von A, B, C vom Koordinatenursprung O und die Lage

von D berechnet werden. Da die Grafik auf der Briefmarke keinen Maßstab aufweist, kann eine Strecke beliebig vorgegeben werden; dies ist in der nachfolgenden Abbildung die Höhe (= 1) des Dreiecks ABC.

a berechnet man aus $a \cdot c = b$; $c = \sigma \cdot a$, $b^2 = a^2 + c^2$ --> $a = \sqrt{(2+\tau)}$. Mit a berechnet man b und c: $c = \sqrt{(2-\sigma)}$ und $b = \sqrt{5}$ und somit OA = σ, OC = τ.

Das grün eingezeichnete Dreieck hat die gleichen Maße wie OAB, also hat D jeweils den Abstand 1 von den Achsen. Wir erhalten also für A, B, C, D die folgenden Abstände von O im Gegenuhrzeigersinn: σ, 1, τ auf den Achsen, √2 auf der Diagonalen.



Wird nun das Quadrat ADEF angesetzt, folgt aus der Lage von A und D, dass E auf der Koordinatenachse zwischen A und D liegt und dass gilt $OE = \tau^2$, $OF = 2 \cdot \tau$.
Das Rechteck BCEF genügt auch dem Goldenen Schnitt – es wiederholen sich alle Überlegungen zu ABCD, denn es liegen wieder drei Ecken auf den Achsen. Die Höhe des Dreiecks BCE ist die Goldene Zahl, also sind alle oben berechneten Längen damit zu multiplizieren.

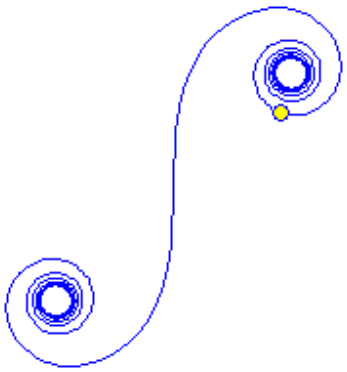
Dieses Verfahren lässt sich iterieren. Ausgehend vom innersten Rechteck erhält man durch sukzessives Ansetzen von Quadraten weitere Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt.
Es wurde gezeigt, dass dann jeweils drei Ecken auf den Achsen liegen, die vierte auf einer Diagonalen. Die Abstände dieser Ecken von O sind beim (n + 1)-ten Rechteck im Gegenuhrzeigersinn:

$$\sigma \cdot \tau^n,\ \tau^n,\ \tau \cdot \tau^n,\ \sqrt{2} \cdot t^n.$$

Bei jedem Schritt wandert die Lage dieser Ecken um 90° im Gegenuhrzeigersinn weiter.
Logarithmische Spiralen haben die Parametergleichung $r = d\ e^{p\,\varphi}$ ($d > 0$, $p > 0$).

In der Grafik der Briefmarke erhält man alle Berührpunkte der Spirale mit den Rechtecken bzw. Quadraten, wenn man diejenigen Ecken der Rechtecke auswählt, die auf den Winkelhalbierenden liegen. Die Folge der zugehörigen Abstände von O ist $\sqrt{2}$, $\tau \cdot \sqrt{2}$, $\tau^2 \cdot \sqrt{2}$ ... und die Berührpunkte wandern im Gegenuhrzeigersinn jeweils um 90°.
Sie liegen somit auf einer Logarithmischen Spirale, und wir können den Parameter p zu $2 \ln \tau / \pi$ berechnen.
Setzt man für den Anfang der Spirale auf der Marke $\varphi = -135°$, so ergibt sich für d etwa 2,91.
Damit ist geklärt, wie der Goldene Schnitt mit einer Logarithmischen Spirale

zusammenhängt und wie die Konstruktion auf der Briefmarke durchgeführt wurde.
Das hier beschriebene Verfahren können Sie im Teilprogramm *Logarithmische Spirale* nachvollziehen. An den Rollbalken stellen Sie die Anzahl der aufzusetzenden Quadrate und den Darstellungsmaßstab ein. Über die Markierungsfelder können Sie weitere Darstellungselemente zu- und abschalten.



4.31 Klothoide, Cornusche Spirale

Die Klothoide wurde erstmals 1696 von Johann Bernoulli untersucht, später von Euler, Fresnel und Cornu. Der Name leitet sich aus dem griechischen κλωθω = spinnen her.
Die Besonderheit dieser Kurve ist, dass ihre Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Die Parametergleichung kann nur mittels Fresnelscher Integrale angegeben werden:

$$x = a/\sqrt{2}\ {}_0\int^t \cos t\, dt/\sqrt{t}$$
$$y = a/\sqrt{2}\ {}_0\int^t \sin t\, dt/\sqrt{t}$$

Diese Integrale sind nicht analytisch lösbar. Daher muss ein Näherungsverfahren genutzt werden, das hohe Anforderungen an den Prozessor stellt.

In diesem Teilprogramm wird eine Klothoide gezeichnet. Der *Parameter a* gibt die Größe der Klothoide an, der *Parameter t* die Lage des beschreibenden Punktes. Während der Simulation wird t kontinuierlich verändert.
Durch Dillon und Gray wurde in den 1990er Jahren eine Verallgemeinerung der Klothoide zu Polynomialspiralen eingeführt. Wählen Sie *Variante 1* oder *Variante 2* wird eine solche Spirale angezeigt.

4.32 Astroiden-, Hypozykloidenkonstruktion

Folgende Konstruktion erzeugt mit einhüllenden Geraden eine Astroide.
Gegeben ist ein Kreis und auf diesem n gleichmäßig angeordnete Punkte. Wird ein Punkt mit dem Index i mit dem Punkt des Index (-3i) mod n verbunden, so hüllen die entstehenden Geraden eine Astroide ein. Wird die Anzahl n der Punkte erhöht, tritt die Kurve deutlicher hervor.

Untersucht man die gleiche Konstruktion und verbindet den Punkt i mit dem des Index (-a i) mod n, so erhält man für a = 2 ein Tricuspoid, für a > 3 weitere Hypozykloiden mit a Ecken.

Diese Konstruktion können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen. An dem Rollbalken *Punkte* stellen Sie die Anzahl der für die Konstruktion genutzten Punkte ein. Der Wert *Modul* legt fest, wie viele "Ecken" die Hypozykloide besitzt.

Dabei erzeugt ein Modul = 3 eine Astroide mit vier Ecken.
Während der Simulation wird die Anzahl der Punkte kontinuierlich erhöht bzw. verringert.

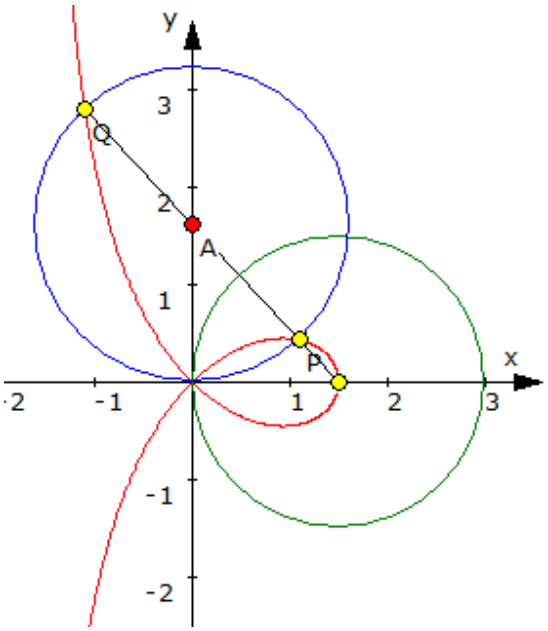
4.33 Kurven 3. und 4.Ordnung: Strophoide, Zissoide, ...

In einer Vielzahl von Teilprogrammen werden spezielle mathematische Kurven konstruiert. Zu diesen gehören

die Strophoide, die Zissoide, die Pascalsche Schnecke, die Konchoide des Nikomedes, die Versiera der Agnesi, die Bernoullische Lemniskate, die Cassinischen Kurven, die Trisektrix, die Bifolium-Kurve, die Klothoide oder Cornusche Spirale, die Birnenformkurve, die Achtkurve, die Torpedokurve, die Bernoullische Quartik, die Kreuzkurve, die Hypozykloide, die Kardioide, die Apollonische Kubik, Granvillesche Eikurven sowie allgemeine Zissoiden zweier Geraden bzw. von Gerade und Kreis

Dabei sind je nach Aufgabenstellung Punkte mit der Maus zu verschieben bzw. Parameter an den Rollbalken einzustellen.
Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.
Erneut sind Simulationen möglich, bei denen Punkte kontinuierlich verschoben oder Parameter verändert werden.

Zur Beschreibung der Kurvenarten lesen Sie bitte im Lexikon des Programms nach bzw. wählen im jeweiligen Programmteil mit der Taste F1 die Online-Hilfe.



4.34 Zissoide

Diese Kurve wurde erstmals durch Diokles (um 180 v.u.Z.) beschrieben. Ihren Namen erhielt Sie von Geminus (um 80 v.u.Z.). Der Name beschreibt die Ähnlichkeit der Kurve mit der Spitze eines Efeublattes (cissos = Efeu).

Mithilfe der Zissoide ist es möglich, das Delische Problem der Würfelverdoppelung zu lösen. Dabei ist aber zu beachten, dass die Zissoide des Diokles nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Gegeben ist ein Kreis um O mit dem Radius OD, die zugehörige Zissoide und die Strecke OA.

Der Punkt Oa sei das Spiegelbild von O am Punkt A. Die Gerade COa schneide die Zissoide im Punkt Y; dieser Schnittpunkt ist allein mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.
Die Gerade DY schneide weiterhin die Gerade OA im Punkt M. Dann gilt: $OM^3 = 2\ OA^3$

Damit wäre OM die Kantenlänge eines Würfels, der das doppelte Volumen eines Ausgangswürfels mit der Kantenlänge OA aufweist.
Diese Konstruktion können Sie im Teilprogramm *Zissoide* mit dem Markierungsfeld *Delisches Problem* anzeigen lassen.
Natürlich wird auch die Zissoide konstruiert. Deren Parameter *Winkel* und *Kreisradius* verändern Sie über die Rollbalken.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor. Die *Simulation* verändert kontinuierlich den Winkel.

4.35 Evolvente

Evolvente des Kreises heißt eine Kurve, die vom Endpunkt eines fest gespannten Fadens beschrieben wird, wenn dieser von einem Kreis abgewickelt wird, so dass der Kreisbogen AB gleich der Strecke BM ist.
Diese Definition ergibt auch sofort eine Konstruktionsmöglichkeit der Kurve. An verschiedene Punkte des Kreises werden die Tangenten angelegt und vom Berührungspunkt aus genau die Länge abgetragen, die dem Kreisbogen vom Ausgangspunkt zum Berührungspunkt entspricht.

Diese Kurve hat die Parametergleichung

$$x = a\ (\cos t + t \sin t)$$
$$y = a\ (\sin t - t \cos t)$$

wobei a der Radius des gegebenen Kreises und t der Wälzwinkel sind.

Die Kreisevolvente wird in diesem Teilprogramm gezeichnet. Am Rollbalken *Radius* wird die Kreisgröße eingestellt, unter *Winkel* der Abstand des Punktes zum Ausgangspunkt.

4.36 Strophoide, Allgemeine Strophoide

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M der durch den Ursprung verläuft (r = a).
Ein Strahl, von M ausgehend, schneide die y-Achse im Punkt A; der Abstand von M zum Ursprung sei dann die Strecke der Länge c. Ein Kreis um den Punkt A mit dem Radius c schneide den Ausgangsstrahl in den zwei Punkten P und Q.

Wandert A entlang der y-Achse, so beschreiben die Punkte P und Q dann eine

Strophoide. Allerdings wird bei dieser Konstruktion der Mittelpunkt M nie erreicht. Mithilfe dieser Konstruktion wird im Teilprogramm *Strophoide* eine solche Kurve erzeugt.

Den Punkt A können Sie mit der Maus längs der Ordinatenachse verschieben. Der Kreisradius ist durch Verschieben des Punktes B einstellbar. Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.
Erneut ist eine Simulation möglich, bei der Punkt A kontinuierlich verschoben wird.

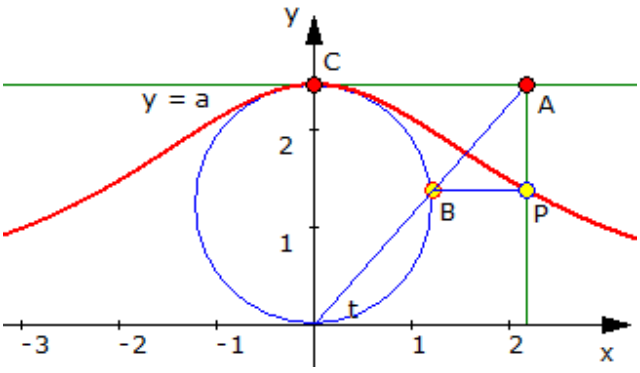
Allgemeine Strophoide

Eine Strophoide kann auf verschiedene Weise erzeugt werden. Nach E.H.Lookwood gilt:
Eine Strophoide besteht aus den Schnittpunkten eines Geradenbüschels und einer Kreisschar.
Das Geradenbüschel ist festgelegt durch den Pol A, die Kreisschar durch eine Gerade g für die Mittelpunkte B der Kreise, durch einen gemeinsamen Punkt, den Knoten, auf dieser Geraden. Die Schnittpunkte der Geraden AB mit dem Kreis um B durch den Knoten ergeben die Strophoide der erzeugenden Geraden g.

Diese allgemeine Definition wird in diesem Teilprogramm demonstriert.
Die beiden Punkte A, der Pol, und B, der Kreismittelpunkt, können Sie mit der Maus verschieben. Während der Simulation wird die entstehende Kurve durch die beiden möglichen Schnittpunkte P und Q gezeichnet. Als Gerade g wird hier die Abszissenachse verwendet.

Beachten Sie bitte: Je näher A an der Geraden g liegt, desto ungenauer wird die Berechnung und Darstellung der Strophoide. Liegt A sogar auf der Abszissenachse, existiert die allgemeine Strophoide nicht.

4.37 Versiera der Agnesi



Eine weitere interessante Kurve ist die Versiera der Agnesi. Erstmals wurde diese von Maria Agnesi 1748 in "Istituzioni Analitiche" untersucht.

Der Name "versiera" (Engl. witch) bedeutet eigentlich "Hexe". Die richtige Entsprechung ergibt sich aber aus einem alten italienischen Begriff und bedeutet "frei beweglich".

1. Konstruktion eines Kreises mit dem Durchmesser a und dem Mittelpunkt bei (0;a/2)

2. Wahl eines Punktes A auf der Geraden mit der Gleichung y = a
3. Konstruktion der Geraden g durch den Punkt A und den Koordinatenursprung O
4. Der Schnittpunkt von g und dem Kreis ist der Punkt B
5. Konstruktion des Lotes h von A auf die x-Achse
6. Konstruktion des Lotes von B auf das Lot h
7. Der Lotfußpunkt P(x;y) ist ein Punkt der Kurve der Agnesi

Die für die Konstruktion notwendigen Punkte A und B können Sie mit der Maus verschieben. Während der *Simulation* wird B waagerecht bewegt.
Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.

4.38 Apollonische Kubik, isoptische Kurve zweier Strecken

Unter einer isoptischen Linie einer beliebigen Kurve versteht man den Ort von Punkten, von denen aus die Kurve unter einem festen Winkel γ erscheint, dem Gesichtswinkel.
Liegen zwei verschiedene Kurven vor, so sucht man nach der isoptischen Kurve, von der aus beide Ausgangskurven unter dem gleichen Gesichtswinkel erscheinen.

In diesem Teilprogramm wird eine solche isoptische Kurve für zwei gegebene Strecken AB und CD ermittelt. Diese Kurve ist die Apollonische Kubik.

Die Strecken legen Sie durch Verschieben ihrer Punkte A, B, C und D fest. Das Programm berechnet sofort die isoptische Kurve.
Da die Ermittlung sehr rechenaufwendig ist, wird die Kurve durch Einzelpunkte gekennzeichnet. Diese entsprechen den Sichtwinkeln von etwa 1° bis 89° in Schritten, die Sie unter *Genauigkeit* festlegen.

Beachten Sie bitte, dass mit einer kleinen eingestellten Schrittweite die Darstellung, insbesondere während der Simulation, auch auf schnellen Computern einige Zeit benötigt.

Entfernen Sie die Markierung bei *1.isoptische Kurve*, dann zeichnet das Teilprogramm auch die Punkte, von denen die Strecken unter dem gleichen Winkel γ oder π-γ erscheinen.

4.39 Elliptische Kurve

In der Zahlentheorie ist eine elliptische Kurve eine singularitätenfreie algebraische Kurve der Ordnung 3 in der projektiven Ebene.
Die allgemeine Gleichung einer elliptischen Kurve hat die Form

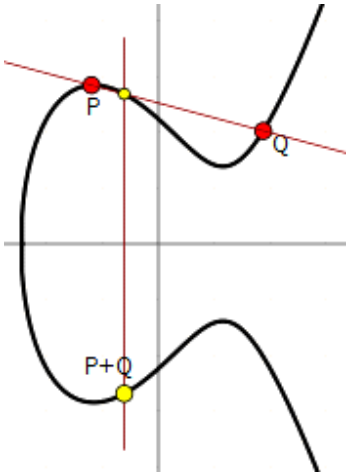
$$E = \{(x,y) \mid y^2 = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d\}$$

Auf derartigen Kurven befinden sich mitunter Punkte mit ganzzahligen

Koeffizienten. Einige moderne Verschlüsselungsverfahren basieren auf solchen Kurven. Der Name leitet sich davon ab, dass diese Kurven elliptische Integrale parametrisieren.

Eine elliptische Kurve der Form

$$y^2 = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$



wird auf Grund ihrer vier Parameter durch vier Punkte in der Koordinatenebene eindeutig beschrieben.
Diese vier Punkte A, B, C, D können Sie in diesem Teilprogramm mit der Maus verschieben bzw. in die *Punkttabelle* eintragen. Das Programm stellt daraufhin sofort die zugehörige elliptische Kurve dar.

Interessant sind auch elliptische Kurven ohne quadratisches Glied bzw. mit einem normierten Faktor a=1. Verringern Sie am Rollbalken *Punktzahl* die Anzahl der signifikanten Punkte, so wird eine elliptische Kurve der Form

3 Punkte: $y^2 = a\,x^3 + b\,x + c$
2 Punkte: $y^2 = x^3 + b\,x + c$

ermittelt, die nun nur noch von drei bzw. zwei Punkten eindeutig bestimmt wird.

Die Besonderheit elliptischer Kurven der Form $y^2 = x^3 + b\,x + c$ besteht darin, dass zwei Punkte P und Q relativ einfach auf der Kurve addiert werden können.

Der Punkt P+Q ist die Summe der Punkte P und Q gemäß dem Gruppengesetz der elliptischen Kurve.
Man konstruiert den Punkt P+Q geometrisch, indem man die Sekante durch die Punkte P und Q betrachtet. Die Sekante schneidet die elliptische Kurve dann in genau einem weiteren Punkt, der als kleiner gelber Punkt eingezeichnet ist.
Man konstruiert die Summe P+Q dann, indem man den kleinen gelben Punkt an der x-Achse spiegelt.

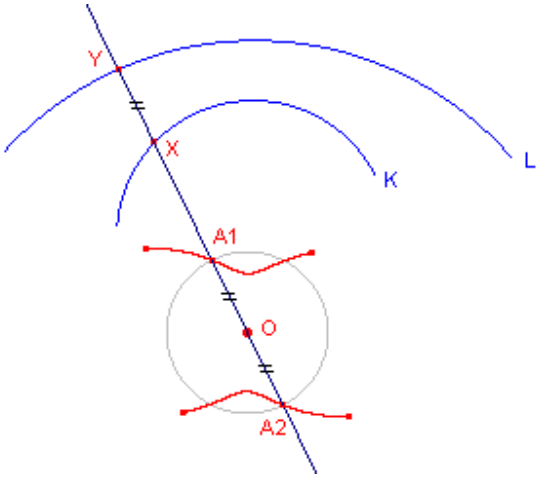
Markieren Sie das Feld *S = A+B anzeigen*, so ermittelt das Programm für den Fall von genau 2 Punkten A und B deren Summe.

Beachten Sie bitte, dass die zwei, drei bzw. vier Punkte voneinander verschiedene Abszissen besitzen müssen.

4.40 Allgemeine Zissoide

Der Begriff der Zissoide kann auf beliebige Kurven erweitert werden:
Gegeben seien zwei (gekrümmte) Linien K und L sowie ein fester Punkt O. X sei weiterhin ein beliebiger Punkt auf K. m ist die Gerade durch O und X und Y sei der Schnittpunkt dieser Geraden m mit der Kurve L.
Der geometrische Ort der Punkte A1 und A2 auf m mit

$$OA1 = OA2 = XY$$



heißt dann die allgemeine Zissoide von K und L mit dem Pol O.

Eine derartige Zissoide zweier Kreise K und L kann unterschiedlichste Form annehmen. U.a. können Pascalsche Schnecke, Kardioide, Epizykloiden usw. entstehen. Zissoiden eines Kreises K und einer Geraden L können die Zissoide von Diokles, die Strophoide, die Trisektrix von MacLaurin, die Konchoide des Nikomedes und weitere interessante Kurven bilden.

In den zwei Teilprogrammen *Zissoide zweier Kreise* und *Zissoide von Gerade und Kreis* können Sie solche allgemeinen Zissoiden untersuchen. Dabei können Sie folgende Einstellungen vornehmen.

Zissoide zweier Kreise
Die Mittelpunkte A und B beider Kreise und der feste Bezugspunkt C können mit der Maus verschoben werden. An den Rollbalken stellen Sie die Radien der beiden Kreise ein.

Zissoide von Gerade und Kreis
Der Mittelpunkt A des Kreises und der feste Punkt D werden wieder mit der Maus verschoben. Die Lage der Geraden verändern Sie, indem Sie die zwei auf der Geraden liegenden Punkte B und C verschieben.
Auch hier kann der Radius des Kreises am Rollbalken gewählt werden.

In beiden Teilprogrammen können Sie über die Markierungsfelder *Strahl zeichnen, Geradenpunkte* zusätzlich einen von dem festen Punkt ausgehenden Strahl einzeichnen und dessen Lage am dritten Rollbalken *Winkel* verändern. Schneidet dieser Strahl die zwei Ausgangskreise oder die Gerade und den Kreis, so werden die Schnittpunkte und entstehenden Kurvenpunkte eingezeichnet.

Die *Simulation* bewirkt, dass der Radius des ersten Kreises kontinuierlich verändert wird. Markieren Sie die Felder *Punkt C, Punkt A* bzw. *Punkt D* wird während der Simulation nicht der Kreisradius variiert, sondern die Punkte A, C bzw. D werden waagerecht bewegt.
Neben sehr "merkwürdig" aussehenden Kurvenverläufen erhalten Sie auch die bekannten, wie die klassische Zissoide. Zum Beispiel:

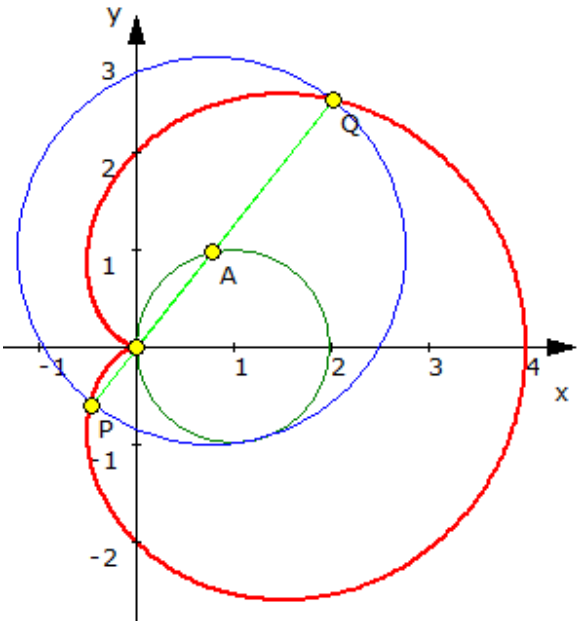
Teilprogramm *Zissoide zweier Kreise*

1. Berührt der eine Kreis den anderen von innen und liegt der feste Punkt C im Mittelpunkt des kleineren, innen liegenden Kreises, so entsteht eine Pascalsche Schnecke.
2. Verläuft zusätzlich der innere Kreis durch den Mittelpunkt des äußeren, so entsteht eine Kardioide.

Teilprogramm *Zissoide von Gerade und Kreis*

1. Berührt der Kreis die Gerade und befindet sich der feste Punkt D auf der Kreisperipherie als Spiegelpunkt des Berührungspunktes, so entsteht die klassische Zissoide des Diokles.
2. Berührt der Kreis die Gerade und liegt der feste Punkt irgendwo auf dem Kreis, ergibt sich eine schiefe Zissoide.
3. Verläuft die Gerade durch den Kreismittelpunkt und liegt der Punkt D erneut auf dem Kreis, erhalten Sie eine Strophoide.
4. Liegt D auf der Peripherie und bildet die Gerade die Mittelsenkrechte von D und dem Kreismittelpunkt, so bildet sich die Trisektrix von MacLaurin.
5. Verläuft die Gerade durch den Kreis und liegt D ebenfalls im Kreis, ergeben sich Konchoiden.

4.41 Pascalsche Schnecke



Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, der durch den Ursprung verläuft (r = a), sowie eine Ursprungsgerade.
Die Ursprungsgerade schneide den Kreis im Punkt A. Von A ausgehend trägt man auf der Ursprungsgeraden nach beiden Seiten eine Strecke der Länge l ab und erhält die Punkte P und Q.

Die Kurve, die von den Punkten P und Q beschrieben wird, wenn A den Kreis durchläuft, heißt Pascalsche Schnecke.

Die Kurve wurde von Étienne Pascal, dem Vater von Blaise Pascal, gefunden und erhielt von dem französischen Mathematiker Gilles-Personne Roberval ihren Namen, als dieser 1650 die Kurve zur Konstruktion von Tangenten benutzte.

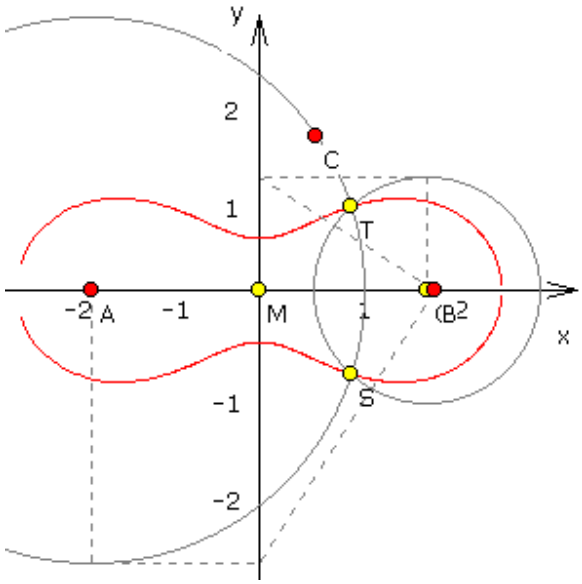
Die Parameter der Kurve, *Winkel*, *Kreisradius* und *Länge*, stellen Sie an den drei Rollbalken ein. Klicken Sie nun auf den Schalter *Simulation*, verändert das Programm automatisch den Winkel und demonstriert so die Konstruktion der Kurve.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.

4.42 Cassinische Kurven

Der italienische Mathematiker und Astronom Cassini glaubte, dass die Sonne sich um die Erde dreht. Und das, obwohl durch Kopernikus, Galilei und Kepler schon das Umgekehrte bekannt war. Als Gesetz für die Bahn der Sonne nahm er die Konstanz des Abstandsprodukts an – entstehende Kurven, die man seitdem Cassinische Kurven nennt. In einem Brennpunkt sollte die Erde stehen. Erstmals besprochen wurden diese Kurven vom antikem griechischen Mathematiker Perseus (etwa 250 v.u.Z.), als dieser Schnitte durch Drehkörper untersuchte. Nach der heutigen Definition gilt:

Eine Cassinische Kurve ist der Ort aller Punkte, bei denen das Produkt der Abstände zu zwei festen Punkten konstant ist.
Eine spezielle Cassinische Kurve ist die Bernoullische Lemniskate, nach Jakob Bernoulli. Sie hat viele besondere Eigenschaften und ist sowohl Inversionsbild als auch Fußpunktkurve der rechtwinkligen Hyperbel. Ihre größte Dicke ist gleich der Brennweite.



In diesem Teilprogramm können Sie die unterschiedlichen Formen der Cassinischen Kurven untersuchen. Ausgehend von drei Punkten A, B und C, deren Lage Sie mithilfe der Maus verschieben können, werden die Kurven nach folgendem Plan konstruiert:

1. Zeichne eine Gerade mit zwei Punkten A und G und deren Mittelpunkt M.
2. Setze einen Punkt B auf die Gerade und miss die Strecke MB.
3. Wähle einen beliebigen freien Punkt C und miss die Strecke AC.
4. Zeichne um A einen Kreis durch C.
5. Zeichne um G einen Kreis mit dem Radius MB · MB / AC.
6. Die Schnittpunkte der Kreise sind T und S.
7. Die Cassinische Kurve ist dann die Ortskurve von T bzw. von S, wenn der Kreis um A durch Ziehen an C verändert wird.
8. Durch Veränderung des Abstands MB erhält man weitere mögliche Cassinische Kurven.

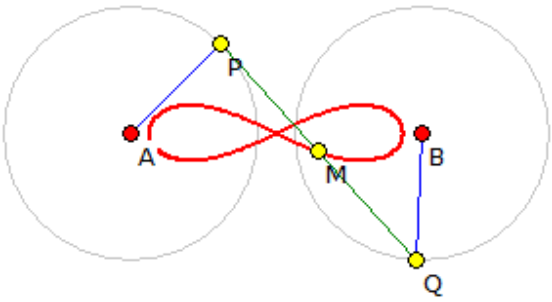
Zieht man nun B auf G, entsteht die Lemniskate von Bernoulli, eine der berühmtesten Kurven der Mathematik.

A und G heißen Brennpunkte. Ihr Abstand von M heißt Brennweite e. Vergrößert man MB gegenüber e, so geht die Lemniskate in "ellipsenähnliche" Ovale über. Verkleinert man MB gegenüber e, so zerfällt die Lemniskate in zwei Teile. Der Radius MB · MB / AC muss nicht gemessen werden, sondern kann konstruktiv als

3. Proportionale mittels Höhensatz am rechtwinkligen Dreieck ermittelt werden.

4.43 Bernoullische Lemniskate

Eine Bernoullische Lemniskate entsteht, wenn die Endpunkte einer Strecke sich auf zwei Kreisen bewegen. Die Lemniskate wird dann von dem Mittelpunkt der Strecke beschrieben.
Diese Eigenschaft wird auch zur mechanischen Konstruktion der Lemniskate genutzt.



Der mittlere Teil einer so erzeugten Kurve ist fast gerade. Daher benutzte James Watt (1736 - 1819) bei seiner Dampfmaschine ein solches Gestänge, um eine Drehung in eine geradlinige Bewegung zu verwandeln. Noch heute wird es in manchen Pkws bei der Aufhängung der Hinterachse eingesetzt, damit die Achse beim Federn nur auf und ab, aber nicht seitwärts schwingt.

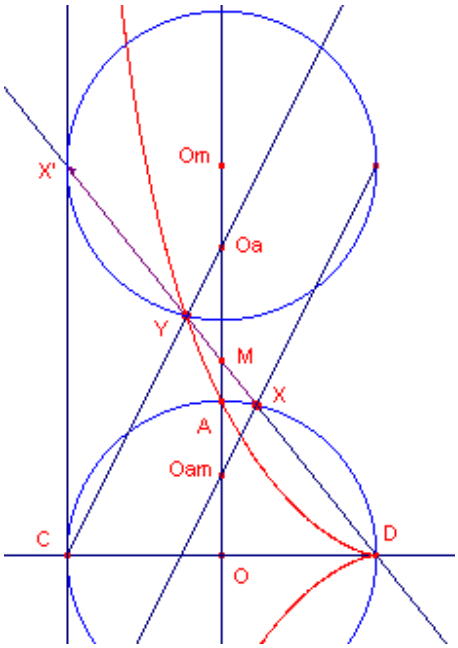
In diesem Teilprogramm wird eine Lemniskate konstruiert.
Legen Sie zuerst durch Verschieben mit der Maus die Lage der zwei Kreismittelpunkte A und B fest. Am Rollbalken *Kreisradien* stellen Sie die Größe der Kreise ein.
Die Lage des Punktes P können Sie durch Einstellung des *Winkels* verändern. Während der *Simulation* bewegt sich P auf dem Kreis um A. Durch eine Stange ist P mit einem Punkt Q verbunden, der sich nun auf dem Kreis um B bewegt. Der Mittelpunkt M der Strecke PQ erzeugt nun die gewünschte Lemniskate.

Die Bernoullische Lemniskate entsteht, wenn M genau zwischen P und Q liegt. Verändern Sie den Wert *Teilverhältnis*, so wird M auf PQ verschoben, so dass auch weitere, interessante Kurven erzeugt werden können.

4.44 Konchoide des Nikomedes

Die Konchoide des Nikomedes wird auch Cochloide genannt. Schon Nikomedes erkannte 200 v.u.Z. die drei möglichen Formen der nach ihm benannten Kurve. Insbesondere im 17. Jahrhundert war die Kurve unter Mathematikern sehr beliebt, da mit ihrer Hilfe geometrische Konstruktionsprobleme gelöst werden können, die unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal unlösbar sind.

Konstruktion:
Auf einer zur x-Achse senkrechten Geraden g durch einen Punkt B liege ein weiterer Punkt C. Auf der Abszissenachse wird ein Punkt A gewählt und mit C verbunden.
Um den freien Punkt C wird ein Kreis mit einem festgelegten Radius (Länge l)



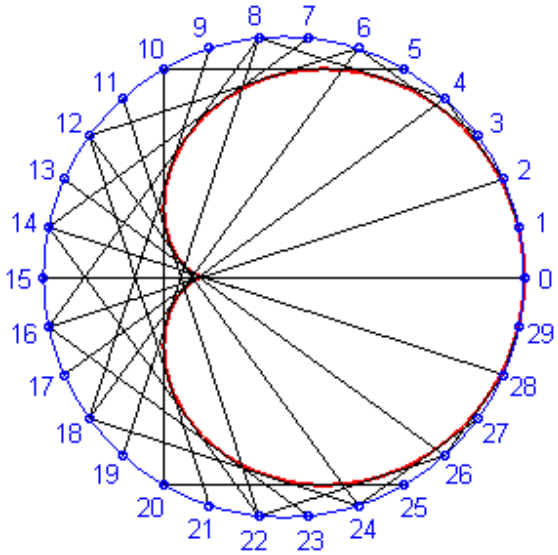
gezeichnet. Dieser Kreis schneidet die Strecke AC und ihre Verlängerung in den zwei Punkten P und Q.
Bewegt sich nun C frei auf der Geraden durch P, so beschreiben die Punkte P und Q die Konchoide des Nikomedes.
Durch Veränderung der Radiusgröße und unterschiedliche Lagen von A und B erhält man verschiedene Formen der Konchoide.

Die drei rot markierten Punkte A, B und C können Sie mit der Maus verschieben. Die Länge stellen Sie am Rollbalken ein. Das Programm zeichnet sofort die zugehörige Konchoide.
In der Tabelle (*Tabelle anzeigen*) können Sie die Koordinaten der drei Punkte direkt eingeben.
Klicken Sie nun auf den Schalter *Simulation*, verändert das Programm automatisch die Parameter und demonstriert so die Konstruktion der entsprechenden Kurve.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.

4.45 Kardioidenkonstruktion

Folgende Konstruktion erzeugt mit einhüllenden Geraden eine Kardioide.



Gegeben ist ein Kreis und auf diesem n gleichmäßig angeordnete Punkte. Wird ein Punkt mit dem Index i mit dem Punkt des Index (Modul · i) mod n verbunden, so hüllen die entstehenden Geraden eine Kardioide ein. Wird die Anzahl n der Punkte erhöht, tritt die Kurve deutlicher hervor. Der Modul ist auf 2 voreingestellt.

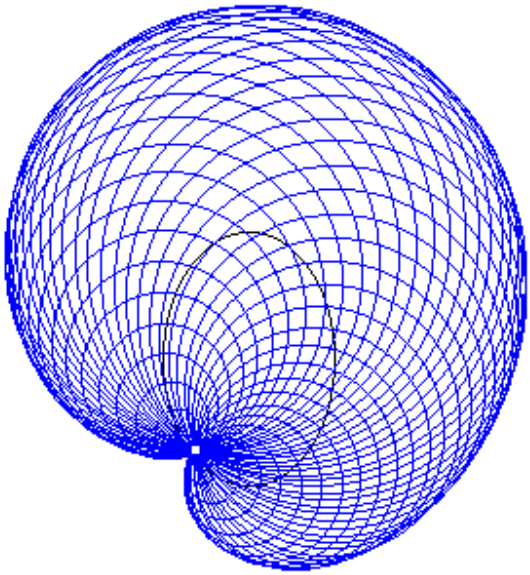
Experimentell ergibt sich dieses Bild auch, indem man von den Punkten Lichtstrahlen betrachtet, die an der Kreisperipherie reflektiert werden.

Diese Konstruktion können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen. An dem Rollbalken *Punkte* stellen Sie die Anzahl der für die Konstruktion genutzten Punkte ein.
Während der Simulation wird die Anzahl der Punkte kontinuierlich erhöht bzw.

verringert.
Am Rollbalken können Sie auch einen anderen Wert des *Modul*s einstellen. Die entstehenden Kurven sind veränderte Kardioiden mit Modul-1 Spitzen.

4.46 Kurvenkonstruktion

Während eine Vielzahl geradlinig begrenzter Flächen (Dreieck, Viereck, Fünfeck) und auch krummlinig begrenzte Gebilde (Kreis, Ellipse) mathematisch exakt mithilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden können, gilt dies für die meisten mathematischen Kurven nicht. Unter anderem ist es nicht möglich, die Konchoide oder die Cassinischen Kurven nur mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten exakt zu zeichnen. Interessant ist aber, dass es ein einfaches Verfahren gibt, welches die prinzipielle Form dieser Kurven konstruieren lässt.



In diesem Teilprogramm können Sie jenes Verfahren nutzen.
Ausgangspunkt der Konstruktion ist eine Ellipse, im Spezialfall ein Kreis. Auf der Peripherie der Ellipse werden in gleichen Abständen eine gewisse Anzahl von Punkten markiert. Weiterhin wird ein Zielpunkt entweder auf der Ellipse oder aber auch innerhalb oder außerhalb der Ellipse festgelegt.

Die eigentliche Konstruktion geschieht nun, indem um jeden Punkt auf der Ellipse ein Kreis derart gezeichnet wird, dass dieser durch den Zielpunkt verläuft. D.h., je weiter der Ellipsenpunkt vom Zielpunkt entfernt ist, desto größer ist der Radius des konstruierten Kreises. Je größer die Anzahl der Konstruktionspunkte und der damit zu zeichnende Kreis ist, desto besser beschreibt die äußere Begrenzung der gezeichneten Kreise die gesuchte mathematische Kurve. Theoretisch müssten unendlich viele Hilfspunkte genutzt werden, um die Kurve exakt zu beschreiben, allerdings genügen oft schon 50-100 Punkte für eine eindeutige Darstellung.

Um diese Konstruktion nachzuvollziehen, legen Sie zuerst folgende Größen fest:

- Die Anzahl der Konstruktions-*Kreise* (Voreinstellung 75, Bereich von 1 bis 150)
- Die große und kleine *Ellipsenhalbachse* a und b (Voreinstellung a = 50, b = 50, also ein Kreis)
- Die Koordinaten des *Zielpunktes* relativ zum Mittelpunkt der Ellipse (Voreinstellung x = 50, y = 50, d.h. auf der Peripherie des Kreises)

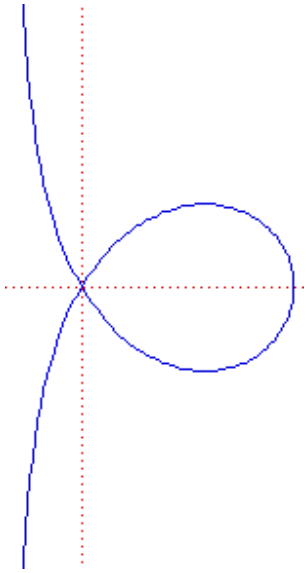
Das Programm zeichnet Ihre Konstruktion sofort bei jeder Änderung. Interessant

ist es nun, die Zahl der Konstruktionspunkte allmählich zu erhöhen. Dabei können Sie schrittweise nachvollziehen, wie die mathematische Kurve immer besser durch die Kreise angenähert wird.
Zum Beispiel können Sie einige spezielle Ausgangssituationen einstellen. Dazu gehören zum Beispiel die Konstruktionen der Kurven:

- Kardioide (Kreis mit Zielpunkt auf der Peripherie)
- Epizykloiden (verlängert oder verkürzt, Ausgangsfigur ist ein Kreis mit einem Zielpunkt außerhalb bzw. innerhalb des Kreises)
- Cassini-Kurven (Ellipse als Ausgangsfigur mit dem Zielpunkt in der Mitte der Ellipse)

Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, verändert das Programm automatisch die Lage des Zielpunktes. Dieser wird einmal entlang der Peripherie geführt, die Konstruktion wird neu gezeichnet und so eine kleine filmartige Darstellung erzeugt. Während der Animation können Sie die Anzahl der Punkte oder auch die Form der Kurve weiterhin verändern. Die Geschwindigkeit der Simulation stellen Sie an dem kleinen Rollbalken ein, abbrechen können Sie mit dem Schalter *Stopp*.

4.47 Trisektrix



Diese Kurve wurde 1742 zuerst von Colin Maclaurin untersucht.
Wie viele andere Kurven kann auch diese zur Lösung eines der klassischen griechischen Probleme, der Dreiteilung des Winkels, benutzt werden. Aufgrund dieser Tatsache erhielt die Kurve auch ihren Namen.

Die Trisektrix kann mechanisch erzeugt werden:
Dazu lässt man zwei Geraden in den Punkten O und A in der gleichen Richtung rotieren. Dreht sich die Gerade in A dreimal so schnell wie die in O, so beschreiben die Schnittpunkte beider Geraden die Trisektrix-Kurve. Die Kurve entsteht auch bei der Inversion einer speziellen Hyperbel an einem Kreis.

In diesem Teilprogramm wird eine solche Kurve konstruiert.
Dazu können Sie einen Punkt A mit der Maus verschieben und einen *Winkel* einstellen, der auch während der *Simulation* verändert wird.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor.

4.48 Achtkurve, Torpedokurve, Bernoullische Quartik, Doppelhornkurve

In vier Teilprogrammen wird die Konstruktion von spezielle Kurven demonstriert.

Achtkurve

Bewegt sich ein Punkt P kontinuierlich auf einem Kreis, so beschreibt ein Punkt M eine Achtkurve wie folgt. M besitzt die Abszisse von P. Die Ordinate von M ergibt sich als Schnittpunkt des Lotes von P auf die Abszissenachse mit einer Geraden vom Ursprung zu einem Punkt Q auf einer senkrechten Kreistangente, wobei Q die Projektion von P bildet.

In diesem Teilprogramm können Sie eine Achtkurve zeichnen. Verallgemeinernd wird dabei nicht von einem Kreis ausgegangen, auf dem sich P bewegt, sondern von einer Ellipse. Die Größe der Halbachsen der Ellipse stellen Sie an den Rollbalken ein. Die Lage des Ellipsenmittelpunktes A und die Lage der Geraden (Punkt B) können Sie mit der Maus verändern.
Während der *Simulation* wird die Achtkurve gezeichnet. Die eigentliche Achtkurve entsteht, wenn die Ellipse ein Kreis ist.

Torpedokurve

Die Torpedo-Kurve ist eine Strophoide eines Kreises, der durch den Ursprung verläuft. Dabei bewegt sich ein Punkt P gleichmäßig auf dem Kreis. In dem Teilprogramm befindet sich der Mittelpunkt B im Ursprung.
A und B können wieder mit der Maus verschoben werden. Zur vollständigen Konstruktion der Kurve durchläuft P zweimal den Vollkreis. Der Punkt Q, für den AP = PQ gilt, beschreibt dann die Torpedokurve.
Befindet sich A nicht auf der Abszisse, so entstehen hier auch besondere Kurven, die eine Verallgemeinerung der Torpedokurve bilden.

Bernoullische Quartik

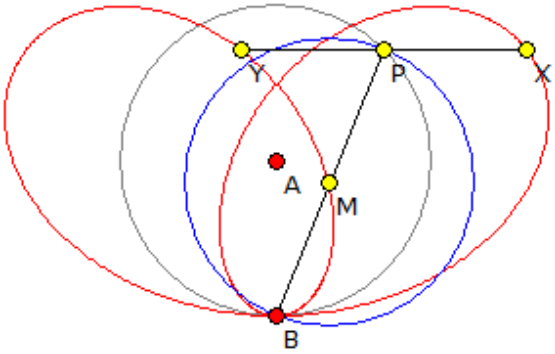
Liegen zwei konzentrische Kreise vor, so ist die Bernoullische Quartik die "mittlere Kurve" der konzentrischen Kreise.
Die Radien der Kreise werden an den Rollbalken eingestellt. Die Lage des einen Kreise kann durch Verschieben seines Mittelpunkte A verändert werden. Sind die zwei Kreise nicht konzentrisch, so erhalten Sie auch andere Kurven als die Quartik.

Doppelhornkurve

Die Kurve gehört zu einer Gruppe von algebraischen Kurven 4.Grades, welche 1864 von Sylvester untersucht wurde.
Die Doppelhorn-Kurve kann als Ortsmenge aller Höhenschnittpunkte eines Dreiecks konstruiert werden. Das Dreieck hat eine feste Seite AB = c, während der dritte Punkt auf einem Kreis mit dem Radius c/2 abläuft.

Nur bei der Ausgangssituation wird die eigentliche Doppelhornkurve gezeichnet. Verschieben Sie einen der Punkte A, B, C, D, so ergeben sich weitere interessante Gebilde.

4.49 Bifolium-Kurve



Die Bifolium-Kurve (Zweiblatt-Kurve) wird durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = 4axy^2$$

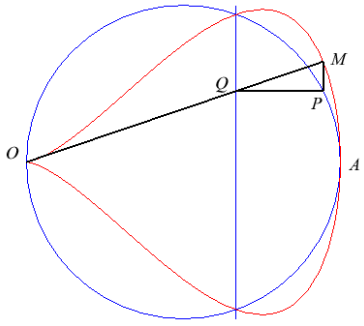
beschrieben. Diese Kurve kann punktweise erzeugt werden.

Dazu betrachtet man einen festen Punkt B auf einem Kreis. Bewegt sich ein zweiter Punkt P gleichförmig auf diesem Kreis, verändert sich der Abstand BP periodisch. Betrachtet man zwei Punkte, die von P den Abstand BP / 2 besitzen, so beschreiben sie die Zweiblatt-Kurve. In diesem Teilprogramm können Sie eine solche Kurve erzeugen.

Lage und Größe des Kreises können wieder mit der Maus verändert werden. Dabei entstehen auch weitere in sich geschlossene mathematische Kurven. Markieren Sie den Punkt *Eikurve*, wird ein zusätzlicher mittlerer Kurvenverlauf dargestellt.

Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, so wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Die Auswahl von *Kurve hervorheben* hebt den Kurvenverlauf deutlicher hervor. Auch hier können Sie wieder eine *Simulation* starten.

4.50 Birnenformkurve



Eine weitere interessante Kurve, die Birnenformkurve, lässt sich wie folgt konstruieren:
Betrachtet wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt A auf der x-Achse, der durch den Koordinatenursprung verläuft. Eine Gerade l senkrecht zur x-Achse beschreibt ebenso die Kurve.
Auf dem Kreis rotiert ein Punkt P. Durch P wird parallel zur x-Achse eine Gerade m gezogen, welche die Gerade l in Q schneidet. Die Gerade von Q zum Koordinatenursprung hat mit der Senkrechten in P den Schnittpunkt R gemeinsam.
Dieser Punkt R beschreibt dann eine Kurve in "Birnenform".

In diesem Teilprogramm wird eine solche Kurve erzeugt. Die Lage des Kreises stellen Sie durch Verschieben des Punktes A mit der Maus ein, die Lage der

Geraden l durch Verschieben ihres Fußpunkte B auf der x-Achse.
Den Ort von P verändern Sie erneut am Rollbalken. Während der Simulation wird P kontinuierlich bewegt.

4.51 Keuzkurve

Eine weitere interessante Kurve, die Kreuzkurve, lässt sich wie folgt konstruieren: Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Auf dem Kreis rotiert ein Punkt P. In P wird die Tangente an den Kreis gezogen, welche die beiden Koordinatenachsen in den Punkten M und N schneidet. Der Schnittpunkt Q der Senkrechten in M und N beschreibt dann eine Kurve, die Kreuzkurve.

In diesem Teilprogramm wird eine solche Kurve erzeugt. Die Größe des Kreises stellen Sie durch Verschieben des Punktes A mit der Maus ein.
Den Ort von P verändern Sie erneut am Rollbalken. Während der Simulation wird P kontinuierlich bewegt.

4.52 Strahlenbüschelschnitt

Gegeben seien zwei Punkte A(a, 0) und B(b, 0) auf der Abszissenachse.
Um den Punkt A rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit eine Gerade und erzeugt damit ein Strahlenbüschel. Um den Punkt B rotiert ebenfalls eine Gerade. Diese Rotationsgeschwindigkeit und -richtung ist veränderlich (Rollbalken *Verhältnis B:A*) Gesucht ist die Ortskurve aller Schnittpunkte.

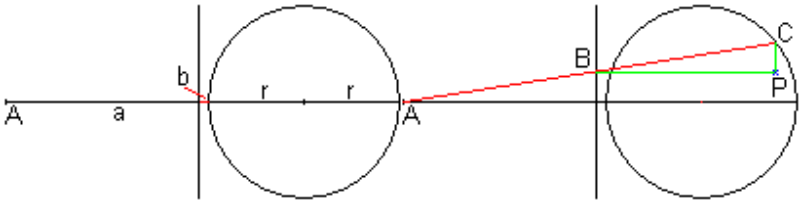
In diesem Teilprogramm können Sie diese Fragestellung untersuchen. Nach Festlegung der Geschwindigkeit des Strahls bei B und einem eventuellen *Phasenwinkel* zeichnet das Programm die zugehörige Schnittkurve. Verändern Sie über den Rollbalken *Winkel bei A* oder starten Sie die *Simulation*, werden die verschiedenen Schnittpunkte dargestellt. Die Punkte A und B können mit der linken Maustaste auf der Abszisse verschoben werden.

Ist das Verhältnis B:A nicht ganzzahlig, ergibt sich bei einer Rotation von 360° um A noch nicht die vollständige Kurve. Für diesen Fall kann die *Kurvenlänge* verändert werden.
Interessante Schnittkurven ergeben sich für folgende Verhältnisse B:A mit einem Phasenwinkel von 0°:

Verhältnis B:A	Kurve	Verhältnis B:A	Kurve
3	Strophoide	2	Kreis
1,5	Kubik	1	keine Kurve
0,5	Kreis	-0,5	Hyperbel
-1	Gerade	-2	Hyperbel durch A

4.53 Granvillesche Eikurven

Gegeben ist eine Halbgerade, die von A ausgeht und waagerecht verläuft. In der Entfernung a liegt eine Vertikale und im Abstand a + b symmetrisch zur Horizontalen ein Kreis mit dem Radius r.
Zieht man vom Punkt A aus eine Gerade (rot), so schneidet sie die Vertikale in B und die Kreislinie in C. Zeichnet man durch C eine Vertikale und durch B eine Horizontale (grün), schneiden sich diese in Punkt P.



Bewegt sich Punkt C auf dem Kreis, dann liegen die Punkte P auf einer Eilinie, einer Granvilleschen Eilinie.

In diesem Teilprogramm können Sie eine solche Eilinie zeichnen und untersuchen.
Dabei wurden die Möglichkeiten dahingehend erweitert, dass zum einen die Lage von Punkt, Gerade und Kreis zueinander verschoben werden kann, zum anderen kann sich auch der Punkt, von dem der Strahl ausgeht, auf einer Kreisbahn bewegen.

Die Größe der Kreise stellen Sie ein, indem Sie die Punkte A und B bzw. C und D mit der Maus verschieben. Die Lage der Geraden wird durch den Punkt E festgelegt.
Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, bewegt das Programm den Punkt P und konstruiert die Granvillesche Eikurve.

Vorerst wird der Punkt Q (von dem der Strahl ausgeht) noch festgehalten. Stellen Sie am 2. Rollbalken ein anderes *Geschwindigkeitsverhältnis* als 0 ein, wird auch Q bewegt – bei einem Verhältnis von 1 genauso schnell wie P, bei einem Verhältnis von beispielsweise 3 dreimal so schnell wie P. Negative Verhältnisse bewegen Q in die entgegengesetzte Richtung. Der dritte Rollbalken gestattet es Ihnen, eine Phasenverschiebung zwischen P und Q einzustellen.

Sie werden schnell feststellen, dass nun die Granvilleschen Kurven merkwürdige Form erhalten, zumindest nicht mehr eine Eiform.
Wenn Sie das Feld *innere Kurven* markieren, zeichnet das Programm zusätzlich noch fünf Kurven, die entstehen würden, wenn der Kreis um C Radien von 1/6, 2/6, ..., 5/6 seines eingestellten Wertes hätte.

4.54 Kettenlinie

Jeder vollkommen biegsame, an zwei Punkten aufgehängte Faden nimmt in der Gleichgewichtslage eine bestimmte Form an.
1669 widerlegte Jungius Galileis Vermutung, Ketten würden unter Einfluss der Gravitation eine Parabel bilden. Die Funktion, die eine Kette annimmt, ist die

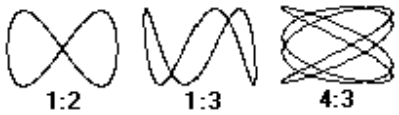
Kettenlinie

$$y = a/2\ (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh (x/a)$$

In der Nähe des Scheitels schmiegt sich die Kettenlinie einer Parabel an, kann aber im restlichen Kurvenverlauf deutlich abweichen. Die Gleichung wurde 1691 unabhängig voneinander von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli angegeben.

In diesem Teilprogramm können Sie die zwei Aufhängepunkte A und B der Kette mit der Maus verschieben. Je nach eingestellter *Länge* wird die entsprechende Kettenlinie gezeichnet.
Markieren Sie *Parabel zeichnen*, so berechnet das Programm auch eine quadratische Parabel die durch A, B und den Minimalpunkt verläuft.

4.55 Lissajousche Figuren



Eine sehr effektive Methode der Bestimmung der Frequenz einer elektromagnetischen Schwingung ist deren vergleichende Darstellung auf einem Oszillographen mit einer bekannten Schwingung. Dazu werden an jedes Paar der Ablenkplatten des Oszillographens die zu messende Schwingung bzw. die bekannte Frequenz angelegt. Je nach Frequenzverhältnis der beiden Schwingungen stellen sich typische Bilder ein, sogenannte Lissajousche Figuren.

Entsprechend dem Frequenzverhältnis erhalten Sie die bekannten typischen Bildformen, wobei anhand der Anzahl der waagerecht bzw. senkrecht auftretenden Umkehrpunkte das Spannungsverhältnis abgelesen werden kann. In der Darstellung sehen Sie drei typische Beispiele. In diesem Unterprogramm können Sie derartige Figuren simulieren.

Stellen Sie dazu an den Rollbalken ein:

- *Frequenz 1* - Frequenz der horizontal dargestellten Schwingung
- *Frequenz 2* - Frequenz der vertikal dargestellten Schwingung
- *Phase* - Phasenwinkel zwischen beiden Schwingungen, welcher eine Verschiebung des Bildes bewirkt. Der Phasenwinkel charakterisiert die zeitliche Verschiebung, mit der beide Schwingungen zum Beispiel ihre Amplitude erreichen.
- *Intervall* - Darstellungsintervall der Grafik; ein kleineres Intervall zeigt evtl. nur einen Teil des auf einem Oszillographen sichtbaren Bildes an, ein großes Intervall bewirkt evtl. eine mehrfache Darstellung, wodurch der Kurvenverlauf "unscharf" wird.
- *Auflösung* - "Feinheit" der grafischen Darstellung

Das Programm stellt bei jeder Änderung an einem der Rollbalken das veränderte Bild sofort dar.
Markieren Sie das Feld *Dämpfung*, so wird eine gedämpfte Schwingung dargestellt. Die Stärke der Dämpfung stellen Sie ebenfalls am Rollbalken ein.

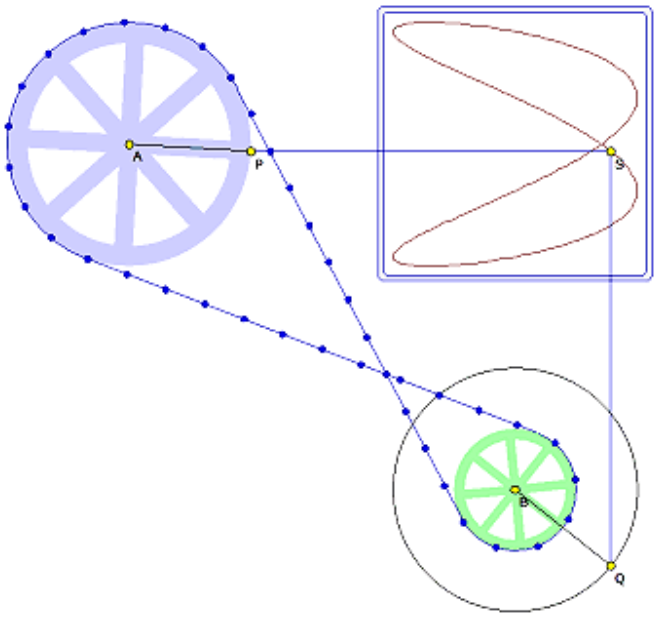
Animation

Möchten Sie die Lissajousche Figur für sich veränderte Phasenwinkel kontinuierlich zeichnen lassen, starten Sie die Animation durch Markierung des Feldes *Simulation*. Das Programm verändert nun den zwischen den Schwingungen auftretenden Phasenwinkel, d.h., beide erreichen mit einer Verschiebung um diesen Winkel jeweils ihre Maxima und Minima. Dadurch kommt es zu einer scheinbaren Drehung der Lissajouschen Figur. Während der animierten Darstellung der Figur steuern Sie Veränderungen weiterhin über die Rollbalken.

4.56 Entstehung Lissajouscher Figuren

Lissajousche Figuren werden oft zur Bestimmung der Frequenz einer elektromagnetischen Schwingung auf einem Oszillographen genutzt. Dazu werden an jedes Paar der Ablenkplatten des Oszillographens die zu messende Schwingung bzw. die bekannte Frequenz angelegt. Je nach Frequenzverhältnis der beiden Schwingungen stellen sich typische Bilder ein, sogenannte Lissajousche Figuren.

Lissajousche Figuren können aber auch mechanisch erzeugt werden.
Zwei Räder sind dazu über einen Riemen miteinander verbunden. Dreht sich das eine, so auch das andere, allerdings mit einer Frequenz, die von seinem Radius abhängt.
Werden Strecken durch zwei Punkte P und Q auf den Rädern wie in der Abbildung zum Schnitt gebracht, so beschreibt der Schnittpunkt eine Lissajousche Kurve.
Entsprechend dem Frequenzverhältnis der zwei Räder erhalten Sie die bekannten typischen Bildformen, wobei anhand der Anzahl der waagerecht bzw. senkrecht auftretenden Umkehrpunkte das Spannungsverhältnis abgelesen werden kann.



In diesem Unterprogramm können Sie derartige Figuren simulieren. Stellen Sie dazu an den Rollbalken ein:

- *Radius 2* - Radius des 2.Rades
- *Phasenwinkel* - Phasenwinkel zwischen beiden Schwingungen, welcher eine Verschiebung des Bildes bewirkt. Der Phasenwinkel charakterisiert die zeitliche Verschiebung, mit der beide Schwingungen zum Beispiel ihre Amplitude erreichen.

- *Knoten* - Anzahl der auf dem Riemen zur Erhöhung der Anschauung dargestellten Knoten

Das Programm stellt bei jeder Änderung an einem der Rollbalken das veränderte Bild sofort dar. Zur Konstruktion der Kurve starten Sie die Animation über den Schalter.

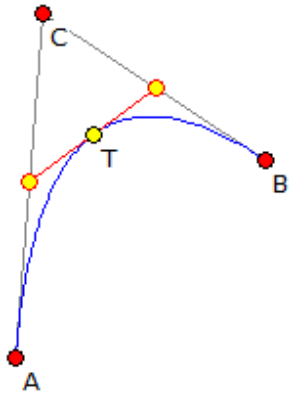
4.57 Inversion einer Kurve

Was mit einer Funktion möglich ist, sollte auch auf beliebige mathematische Kurven anwendbar sein.
Unter *Inversion einer Kurve* können Sie die in der Kurvenbibliothek gespeicherten Kurven bzw. frei einzugebende Kurven an einem Kreis invertieren.

Die Lage des Inversionskreises und dessen Radius können Sie beliebig ändern. Die *Animation* ist wieder auf parameterhaltige Kurven – die Gleichungen enthalten den Parameter P – anwendbar.

Auch hier ergeben sich die merkwürdigsten Gebilde. Invertieren Sie zum Beispiel eine Astroide, ergibt sich eine Epizykloide. Das inverse Bild einer Hyperbel kann eine Lemniskate, eine Strophoide, aber auch eine Zissoide sein, usw. usf. Dem Experimentieren und Staunen sind hier keine Grenzen gesetzt.

4.58 Bézier-Kurve



Die kubische Bézier-Kurve ist grundsätzlich das wichtigste grafische Element innerhalb der Computergrafik, da fast alle Formen und Zeichenumrisse aus Bézier-Segmenten zusammengesetzt werden können.

Die Gestalt einer kubischen Bezier-Kurve wird durch den Start- und Endpunkt (Punkt 0 bzw. 3) und durch die Bezier-Kontrollpunkte (BCP) außerhalb der Kurve (Punkte 1 und 2) bestimmt. Für Mathematiker bedeutet dies: Eine Bezier-Kurve ist eine kubische Kurve, die jedoch eine Überschneidung zulässt. Die im obigen Beispiel gestrichelten Geraden von Punkt 0 nach Punkt 1 sowie von Punkt 2 nach Punkt 3 bilden Tangenten durch den Anfangs- bzw. Endpunkt der Bézier-Kurve. Das Polygon, welches durch die vier Punkte gebildet wird, schließt die Bézier-Kurve immer vollständig ein.
Pierre Bézier beschreibt die nach ihm benannte Kurve mit folgender kubischen Formel:

$$x(u) = x_0\,(1-u)^3 + x_1\,3u\,(1-u)^2 + x_2\,3u^2\,(1-u) + x_3\,u^3$$
$$y(u) = y_0\,(1-u)^3 + y_1\,3u\,(1-u)^2 + y_2\,3u^2\,(1-u) + y_3\,u^3$$

Dabei sind: (x0,y0) = Startpunkt, (x1,y1), (x2,y2) = zwei Bezier-Kontrollpunkte

(BCP's) außerhalb der Kurve und (x3,y3) = Endpunkt der Kurve.
Der Wert 0 <= u <= 1 ist der Parameter der Darstellung und wird entlang der Kurve ständig etwas erhöht. Die meisten grafischen Formen und Schriftzeichen werden mit Bézier-Kurven beschrieben – es sei denn, man hat es ausschließlich mit geraden Strichen und Rechtecken zu tun.

Die Idee zu diesen Kurven geht auf Pierre Bézier zurück. Der französische Mathematiker beschrieb in den 1960er Jahren die nach ihm benannten Kurven, die bei seinem damaligen Arbeitgeber Renault für die Gestaltung von Karosserieformen genutzt wurden.
In diesem Teilprogramm können Sie für veränderbare Punkte derartige Bézier-Kurven zeichnen lassen. Über den Rollbalken stellen Sie ein, ob Sie eine Kurve (4 Punkte), zwei Kurven (7 Punkte) usw. zeichnen lassen wollen.

Bei der Wahl einer Kurve sind die Punkte A und D die Endpunkte der Bézier-Kurve, während B und C die Kontrollpunkte darstellen. Verschieben Sie einen der Punkte mit der Maus, können Sie die Veränderung nachvollziehen.
Markieren Sie das Feld *Tangenten*, so werden die oben beschriebenen Tangenten von den Kontrollpunkten zu den Endpunkten eingezeichnet. Während der Simulation können Sie wählen, ob die Punkte A oder D senkrecht oder waagerecht verschoben werden.

4.59 Entstehung einer Bézier-Kurve

Eine quadratische Bézier-Kurve besitzt nur einen Kontrollpunkt, in der Abbildung C. CA und CB sind dann Tangenten. Die Kurve ist dann der Weg, der für P_0 = A, P_1 = B, P_2 = C durch die Funktion

$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t (1-t) P_1 + t^2 P_2$$

mit t von 0 bis 1 verfolgt wird.

Nach dem Casteljau-Algorithmus ergibt sich die Kurve wie folgt:
Ein Hilfspunkt D ergibt sich mit dem Teilverhältnis t als Teilpunkt der Strecke AC, ein Hilfspunkt E als Teilpunkt der Strecke CB. Der Punkt T auf der quadratische Bézier-Kurve ist dann der entsprechende Teilungspunkt zum Verhältnis t auf DE.

In diesem Teilprogramm können Sie diese Konstruktion einer Bézier-Kurve nachvollziehen.
Die Punkte A und B der Kurve sowie die Kontrollpunkte können Sie mittels Maus verschieben. Das *Teilverhältnis*, zur Erzeugung des Kurvenpunktes T, stellen Sie am Rollbalken ein. Während der *Simulation* wird dieses Teilverhältnis kontinuierlich verändert.

Zur Verdeutlichung der Konstruktion der Kurvenpunkte können Sie *Hilfsgeraden* anzeigen lassen.
Dieses Programm ist nicht nur auf quadratische Bézier-Kurven beschränkt. Durch Markierung der Auswahlfelder können Sie auch eine kubische Bézier-Kurve oder eine 4.Grades konstruieren.

4.60 Räumliche Bézier-Kurven und Lissajous-Figuren

Räumliche Bézier-Kurven

Die kubische Bézier-Kurve ist eines der wichtigsten grafischen Element innerhalb der Computergrafik, da fast alle Formen und Zeichenumrisse aus Bézier-Segmenten zusammengesetzt werden können.
Im Allgemeinen werden Bézier-Kurven in der Ebene betrachtet. Zur Beschreibung solcher Kurven werden ein Anfangspunkt, ein Endpunkt und zwei Steuerpunkte benötigt, wie in den Teilprogrammen Bézier-Kurve und Entstehung einer Bézier-Kurve untersucht werden kann.

Es ist aber ebenso möglich, Bézier-Kurven im dreidimensionalen Raum zu betrachten. Dies wird in diesem Teilprogramm demonstriert. Zur Festlegung von Punkten im Raum werden hier Eckpunkte verschiedener *Polyeder* genutzt. Das Polyeder wählen Sie in der Liste aus.

In den Listen *Endpunkte* und *Steuerpunkte* werden nun alle möglichen Paare von Eckpunkten angezeigt. Durch einen Mausklick können Sie einen oder auch mehrere Einträge auswählen. Das Programm zeigt daraufhin sofort die entsprechende Bézier-Kurve an.
Verläuft diese Kurve von einem Polyedereckpunkt zum anderen, so nimmt der Kurvenparameter t die Werte von 0 bis 1 an. Möchten Sie die Kurve auch über die Eckpunkte hinaus zeichnen, so ändern Sie das angegebene Intervall von t.

In der Darstellung können Sie das Polyeder und die einzelnen Eckpunkte extra anzeigen lassen. Über den Schalter *Rotation* und die Rollbalken *x-Drehwinkel*, *y-Drehwinkel* und *z-Drehwinkel* kann das Polyeder kontinuierlich gedreht werden. Klicken Sie mit der linken Maustaste auf die Darstellung und bewegen, bei festgehaltener Maustaste, die Maus, so wird der Körper ebenfalls gedreht.

Hinweis: Sehr interessant ist es nun alle möglichen Bézier-Kurven zwischen zwei gewählten Punkten zeichnen zu lassen. In diesem Fall wählen Sie unter *Endpunkte* ein Punktepaar aus und klicken unter der Steuerpunktliste auf den Schalter *alle*.

Beachten Sie aber bitte: Sind sehr viele Punktepaare markiert, so kann die Berechnung und Darstellung der Kurven sehr zeitaufwendig werden. Auch auf schnellen Computern kann es dann durchaus zu Wartezeiten kommen. Besonders die *Rotation* des Körpers kann nun nicht mehr hinreichend gut erfolgen.

Räumliche Lissajous-Figuren

Markieren Sie unter *Kurvenart* den Eintrag *Lissajous-Figuren*, so werden in den gezeichneten Koordinatenwürfel der Kantenlänge 1 Lissajousche Figuren der Form

$$x = a \sin t \qquad y = b \sin(nt + \varphi) \qquad z = c \sin(mt + \psi)$$

gezeichnet. Diese Raumkurven wurden 1993 durch Bogle, Hearst und Jones von den ebenen Lissajouschen Figuren auf den dreidimensionalen Raum übertragen.

Entsprechend den eingestellten Frequenzverhältnissen ergeben sich die bekannten typischen Bildformen, allerdings räumlich verzerrt. An den Rollbalken stellen Sie ein:

- *X-Frequenz* - Frequenz der Schwingung in x-Richtung
- *Y-Frequenz* - Frequenz der Schwingung in y-Richtung
- *Z-Frequenz* - Frequenz der Schwingung in z-Richtung
- *Phase* - Phasenwinkel zwischen den Schwingungen in x- und y-Richtung, welcher eine Verschiebung des Bildes bewirkt.
- *Intervall* - Darstellungsintervall der Kurve in Einheiten von π; ein kleineres Intervall zeigt evtl. nur einen Teil einer geschlossenen Kurve, ein großes Intervall bewirkt evtl. eine mehrfache Darstellung, wodurch der Kurvenverlauf unscharf wird.
- *Auflösung* - Feinheit der grafischen Darstellung

Das Programm stellt bei jeder Änderung an einem der Rollbalken das veränderte Bild sofort dar. Auch hier können Sie die Kurve zur Erhöhung der Anschaulichkeit drehen, entweder manuell mit der Maus oder über den Schalter *Rotation*.

4.61 Bérard-Kurven

Diese Kurven wurden erstmals 1820 von dem französischen Mathematiker Bérard untersucht.
Gegeben ist ein Stab, dessen eines Ende sich auf einer Geraden bewegen kann. Ein weiterer Punkt des Stabes rotiert gleichförmig auf der Peripherie des Kreises. Dann beschreibt das zweite Ende des Stabes eine Bérard-Kurve.
Je nach Lage von Gerade und Kreis, der Position des Punktes auf dem Kreis und der Länge des Stabes entstehen verschiedenste Kurven, zum Beispiel Ellipsen, Herzkurven, die Bernoullische Lemniskate usw.

Noch merkwürdigere Gebilde ergeben sich, wenn man nun auf diesen Stab zusätzlich senkrecht weitere Stäbe anbringt und deren Bewegungskurven beobachtet.
In diesem Teilprogramm können Sie dies untersuchen. Der Kreis und die Gerade können mithilfe der Punkte A bis D verschoben werden. A und B beschreiben die Lage und den Radius des Kreises, C und D die Lage der Geraden.

Mit dem Rollbalken *Stablänge* stellen Sie die Strecke BC ein, mit *Gesamtlänge* die vollständige Länge des mittleren Stabes. Der *Winkel* gibt die Verschiebung des zeichnenden Punktes auf dem Kreis um A an. Seitenstäbe werden nur gezeichnet, wenn Sie dies ausgewählt haben. In diesem Fall können Sie auch die Anzahl der Seitenstäbe von 2 bis 12 und die Länge der Stäbe an zwei Rollbalken variieren.

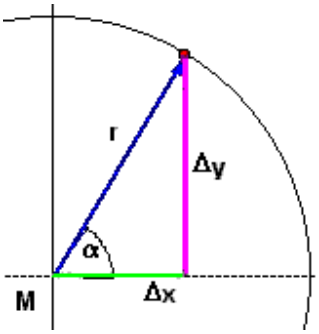
Beachten Sie bitte, dass geschlossene Kurven nur dann entstehen, wenn der Abstand zwischen Kreis und Gerade nicht mit der Stablänge in Widerspruch

stehen. Außerdem kann die Simulation bei einer hohen Anzahl von Seitenstäben deutlich langsamer ablaufen.

Die Simulation starten und steuern Sie wie gewohnt.

4.62 Sternkurven

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes eines Kreises können in Abhängigkeit von Radius und Winkel berechnet werden:



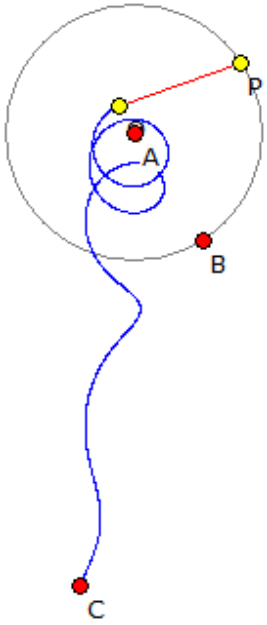
- $x = x_m + r \cos \alpha$
- $y = y_m - r \sin \alpha$

Durchläuft der Winkel α das Intervall $[0;2\pi]$, so ergibt sich der ganze Kreis. Unterwirft man nun zusätzlich den Radius einer vom Winkel abhängigen periodischen Schwankung, entstehen die sogenannten Sternkurven. Diese sind ein Spezialfall der Epizykloiden.

In diesem Teilprogramm können Sie derartige Kurven konstruieren, indem Sie zum einen die Anzahl der sichtbaren *Blätter* der Sternkurve, zum anderen die Größe der *Verzerrung* des Radius an den Rollbalken einstellen.
Am Rollbalken *Phase* können Sie die Kurve um den Koordinatenursprung drehen.
Erhöhen Sie die *Kurvenanzahl*, so werden mehrere Sternkurven mit unterschiedlichem Radius gezeichnet, wodurch ein Rosettenmuster entsteht.
Während der Simulation wird die Verzerrung verändert, wodurch mitunter merkwürdige Kurven entstehen.

4.63 Verfolgungskurve

Bewegt sich ein Punkt P längs einer gegebenen Kurve, so beschreibt ein Punkt Q eine Verfolgungskurve, wenn Q sich stets in Richtung von P bewegt und beide Punkte sich mit entsprechenden Geschwindigkeiten bewegen.
Erstmals wurde eine solche Kurve 1732 von dem französischen Wissenschaftler Pierre Bouguer beschrieben.
Der Spezialfall, dass sich P auf einer Geraden bewegt, wurde zuerst von Arthur Bernhart untersucht.



In diesem Teilprogramm wird eine Verfolgungskurve konstruiert, bei der sich P auf einem Kreis bewegt.
Die Lage des Kreises legen Sie mittels Maus durch Verschieben der Punkte A und B fest. Der Punkt Q startet von einem Punkt C aus, den Sie ebenfalls verschieben können.
Über den Rollbalken *P-Q-Verhältnis* legen Sie das Geschwindigkeitsverhältnis der zwei Punkte fest. Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, bewegt das Programm den Punkt

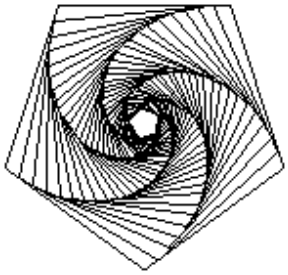
P. Q bewegt sich stets in dessen Richtung. Im Allgemeinen wird Q den Punkt P nicht erreichen – mitunter treffen beide Punkte jedoch dennoch zusammen und die Simulation stoppt.

Interessant wird es, wenn Sie am Rollbalken *Winkel* einen höheren Wert einstellen und nun C per Maus verschieben. In diesem Fall erhalten Sie sofort die Verfolgungskurve dargestellt, die mitunter ziemlich merkwürdig erscheint. Markieren Sie das Feld *Kurve anzeigen*, wird unabhängig von der Lage des konstruierenden Punktes die ganze Kurve angezeigt. Durch Auswahl von *Kurve hervorheben* wird der Kurvenverlauf deutlicher hervorgehoben.

4.64 Wirbel-Kurven

Wirbel-Kurven (engl. Whirls) sind Figuren, die durch eine Folge von zueinander ähnlichen, regelmäßigen Polygonen erzeugt werden. Die eingeschriebenen Polygone sind dabei um einen Winkel gedreht und um einen entsprechenden Faktor verkleinert. Die Ecken der Polygone beschreiben dabei den Weg von n Mäusen im "Mäuse-Problem" und bilden n logarithmische Spiralen aus.

Im Mäuseproblem sind n Mäuse gegeben, die sich in den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks mit der Seitenlänge 1 befinden. Jede Maus versucht nun, mit konstanter Geschwindigkeit, zur in Uhrzeigerrichtung benachbarten Maus zu laufen.



In diesem Teilprogramm können Sie an den Rollbalken die *Eckenzahl* der Polygone, die Anzahl der eingezeichneten kleineren Vielecke (*Polygonzahl*) und den *Verkürzung*sfaktor einstellen.
Markieren Sie *farbige Polygone*, so zeichnet das Programm die Polygone in verschiedenen Farben, wählen Sie *rote Polygone* dann in dieser Farbe.
Bei der Auswahl *Punkte zeichnen* werden die Eckpunkte des Ausgangspolygons angezeigt. Diese können Sie mit der Maus verschieben und so noch „merkwürdigere" Wirbel-Kurven erzeugen. Während der Simulation wird die Polygonzahl verändert.

4.65 Spirolateralkurven

Dieses Teilprogramm zeichnet verschiedene geschlossene Streckenzüge, sogenannte Spirolateralkurven. Ein solcher Streckenzug wird durch Wiederholung eines Motivs erzeugt. Folgendes Verfahren liegt dabei zugrunde:
Der "Zeichenstift" bewegt sich von einem Startpunkt A um eine gewisse Anfangsstrecke vorwärts und dreht sich dann um den festzulegenden *Winkel* im Uhrzeigersinn. Dieser Vorgang wiederholt sich mit doppelter, dreifacher, vierfacher Länge usw., und zwar so oft, wie durch die am Rollbalken festgelegte *Anzahl.* Damit ist das Motiv festgelegt.

Wird das Verfahren nun erneut wiederholt, gelangt man nach einer gewissen Anzahl von *Zyklen* wieder an den Ausgangspunkt zurück, wodurch die Spirolateralkurve entsteht.
Sehr interessante Kurven entstehen z.B. mit Winkel 135°, Anzahl 4 bzw. Winkel 120°, Anzahl 5.

5 Algebra

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen." Carl Friedrich Gauß

In *Algebra* können Sie Teilprogramme zu algebraischen Berechnungen nutzen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Auswertung von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie der Berechnung von Vektoren und Matrizen. Weitere Aufgabenstellungen mit geometrischen Zusammenhängen dieses mathematischen Teilgebiets finden Sie unter *Geometrie*.

5.1 Lineares Gleichungssystem

Dieses Unterprogramm ermöglicht die Lösung eines linearen Gleichungssystems bis zum 10. Grad sowie unter- bzw. überbestimmter linearer Gleichungssysteme.

Lineares Gleichungssystem

Nach der Auswahl des Grades des Gleichungssystems (bis 10. Grad; 1. Grad bedeutet eine einzelne Gleichung) an den Pfeilschaltern können die Koeffizienten sowie die Absolutglieder der Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_9 x_9 + a_{10} x_{10} = b$$

eingegeben werden. Als Werte sind reelle Zahlen zulässig. Die Anzahl der Gleichungen und der Variablen können unabhängig voneinander festgelegt werden.

Beachten Sie bitte: Ein häufige Quelle für fehlerhafte Berechnungen ist die Nichtbeachtung der Tatsache, dass die absoluten Glieder b in der Berechnung durch das Programm rechts vom Gleichheitszeichen stehen müssen.

Bei Betätigung des Schalters *Berechnung* werden die Lösungen des Systems in einer Liste unter x1 bis x10 angezeigt. Ist das Programm nicht in der Lage, eine eindeutige Lösung zu ermitteln, wird automatisch auf die Lösung eines unter- bzw. überbestimmten Systems geschaltet. Gelingt es auch dort nicht, eine Lösung zu finden, erhalten Sie die Meldung: *Keine eindeutige Lösung*

Unter- und überbestimmte lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind im Allgemeinen nur dann eindeutig lösbar, wenn n Variablen in genau n Gleichungen verknüpft sind und diese weder linear abhängig sind, noch sich gegenseitig widersprechen. Besitzt das System nicht genau eine Lösung, so ist es unter- bzw. überbestimmt.

Unterbestimmtes System

Sind n linear unabhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen gegeben, welche m (m > n) Variablen enthalten, können für m-n Variablen reelle Parameter p_1, p_2 ... gewählt werden. Damit existieren unendlich viele Lösungen des Systems. Rechentechnisch nutzt man zur Lösung derartiger Systeme spezielle Varianten des Gauß-Jordan-Verfahrens.
In dem Programm werden in diesem Fall für die ersten n Variablen x_i reelle Werte ermittelt, für die weiteren m-n Variablen deren Werte auf Null gesetzt. Innerhalb einer Klammer erhalten Sie die reellen Faktoren der Parameter p_1, p_2 ...

Beispiel 1 (unterbestimmtes System): Das mitgelieferte Beispiel (in der aufklappbaren Liste auswählen) enthält ein System bestehend aus drei Gleichungen mit vier Variablen, wobei jedoch die dritte Gleichung von den anderen zwei linear abhängig ist, d.h., es müssen zwei Parameter gewählt werden:

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 22$ $\qquad$ $5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 40$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 18$

Das Programm ermittelt als Lösung:

$x_1 = 5 - 0{,}5e - 0{,}3f$ $\qquad$ $x_2 = 3 - 0{,}5e - 0{,}1f$
$x_3 = e$ $\qquad$ $x_4 = f$

wobei e und f frei wählbare reelle Zahlen sind. Zum Beispiel wären die Tupel (5;3;0;0) und (4,2;2,4;1;1) Erfüllungen dieses Systems.
Ändern Sie die 3. Gleichung in $3x_1 + 2x_3 + x_4 = 18$, besteht die lineare Abhängigkeit nicht mehr, wodurch nur noch ein Parameter frei ist. Sie erhalten:

$x_1 = 2 - 0{,}2e$ $\qquad$ $x_2 = 0$ $\qquad$ $x_3 = 6 - 0{,}2e$
$x_4 = e$

Ändern Sie die 3. Gleichung in $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 19$, erhalten Sie die Fehlermeldung: *Keine eindeutige Lösung,*
da sich nun die drei Gleichungen widersprechen.

Überbestimmtes System

Widersprechen sich einzelne Gleichungen Ihres Systems, existiert kein Tupel von Zahlen, die das System erfüllen. Insbesondere tritt dies auf, wenn die Zahl der Unbekannten geringer als die Zahl der Gleichungen ist, z.B. bei Problemen der Ausgleichsrechnung physikalischer, technischer oder biologischer Prozesse.
In diesem Fall erfolgt die Suche nach einer Pseudolösung des Systems $A_{m;n}\ x_m = b_n$, d.h. nach einem Lösungsvektor x0, für den die Eulersche Vektornorm ein Minimum annimmt. Das Programm analysiert ein überbestimmtes System nur, wenn die Anzahl der Gleichungen die Anzahl der Variablen übersteigt.

Nach der Koeffizienteneingabe und *Berechnung* erhalten Sie die Pseudolösung angezeigt. Zusätzlich meldet das Programm den Wert der Eulerschen Norm, die Güte des gefundenen Tupels. Je kleiner dieser Wert ist, desto besser erfüllt der Vektor das Gleichungssystem.

Beispiel 2 (überbestimmtes System): Als weiteres Beispiel (in der aufklappbaren Liste auswählen) finden Sie ein System 4. Grades mit sieben Gleichungen:

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 18$ $\quad$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 28$
$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 28$ $\quad$ $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 27$
$3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 23$ $\quad$ $2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20$
$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5$

Da dieses System streng analytisch nicht lösbar ist, ermittelt das Programm die bestmögliche Pseudolösung (2;3;1;4) mit der Eulerschen Norm von 14,2127.

Grafische Darstellung

Haben Sie für das lineare Gleichungssystem genau zwei Variablen festgelegt, so kann dieses in einem Koordinatensystem grafisch veranschaulicht werden.
Das Programm interpretiert in diesem Fall x_1 als Abszisse x und x_2 als Ordinate y.
Klicken Sie auf *Darstellung*, so werden die lineare Funktionen dargestellt.

Gauß-Verfahren

Ist Ihr lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar, d.h. weder unter- noch überbestimmt, so wird in der Liste zusätzlich zur Lösung die schrittweise Entwicklung der Diagonalmatrix angezeigt.
Das Programm entwickelt die Matrix in einzelnen Schritten. Bei jedem Schritt wird eine Zeile in der Form bearbeitet, dass in der n-ten Zeile die n-te Variable mit dem Koeffizienten 1 enthalten ist, d.h., die restlichen Zeilen werden sowohl abwärts als auch aufwärts bearbeitet.

5.2 Diophantisches Gleichungssystem

In Ergänzung zum Lösen von beliebigen linearen Gleichungssystemen bietet diese Funktion die Möglichkeit, diophantische Gleichungssysteme zu lösen.

Unter einer diophantischen Gleichung versteht man ein Polynom f(x) mit ganzzahligen Koeffizienten, bei dem man verlangt, f(x) = a ausschließlich in ganzen Zahlen zu lösen. Erstmals behandelte Diophantos von Alexandria (um 250) Lösungsverfahren derartiger linearer und quadratischer Gleichungen. In Europa knüpfte man erst im 17. Jahrhundert wieder verstärkt an die antiken mathematischen Erkenntnisse an. Ein Meilenstein war dabei 1621 die lateinische Übersetzung der Werke des Diophant durch Gaspard Bachet de Méziriac.

Das Programm beschränkt sich nicht auf eine einzelne lineare diophantische Gleichung, sondern ermöglicht es, Systeme derartiger Gleichungen aufzulösen, wobei stets eine Gleichung mehr als Variablen gesetzt wird, d.h., die diophantischen Systeme stellen einen Spezialfall eines mit n Variablen und n - 1 Gleichungen unterbestimmten linearen Systems dar, da Lösungen nur in der Menge der ganzen Zahlen gesucht werden.

Nach Auswahl des *Grades des Gleichungssystems* von 2 (eine Gleichung, zwei Variablen) bis 10 (neun Gleichungen, zehn Variablen) geben Sie die Koeffizienten ein.
Bei Betätigung des Schalters *Berechnung* werden die Variablen in der Form x = a + b * k ermittelt, wobei a und b ganze Zahlen und k ein die ganzen Zahlen durchlaufender Parameter sind. Ist das System lösbar, werden zusätzlich für die Werte von k = -4, ..., 4 die speziellen Lösungen angezeigt.

Liegt nur eine diophantische Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ vor, so besitzt diese entweder unendlich viele Lösungspaare (x,y) oder keine Lösung. Lösungen können nur dann gefunden werden, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b auch Teiler von c ist.

Beispiel 1: Die lineare diophantische Gleichung $1 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 = 3$ ergibt die Parameterdarstellung für $x_0 = -1 - 2 \cdot k$ und $x_1 = 2 + k$

Beispiel 2: Für die lineare diophantische Gleichung $2 \cdot x_0 + 6 \cdot x_1 = 7$ findet das Programm keine Lösung, da der ggT(2,6) = 2 kein Teiler von c = 7 ist. Lösen Sie diese Gleichung als lineares System mit zwei Variablen und einer Gleichung, ergibt sich $x_0 = 3{,}5 - 3 \cdot k$ und $x_1 = k$. An dieser Lösung erkennt man, dass es keine reelle Zahl gibt, für die x_0 und x_1 ganzzahlig und damit zur Lösung der diophantischen Gleichung werden kann.

Ist der Grad des diophantischen Gleichungssystems größer als 4, werden die Lösungsparameter sehr groß. Überschreiten sie den Bereich der ganzen Zahlen (bis etwa 2 Milliarden), wird keine Lösung ermittelt. Gelingt es dem Programm nicht, eine eindeutige Darstellung zu ermitteln, wird der Fehler *Keine eindeutige Lösung* gemeldet.
Über die Schalter *Datei laden* und *Datei speichern* können Sie Ihre Daten dauerhaft in einer Datei aufbewahren und nach Bedarf wieder laden. Dabei werden Koeffizienten eines linearen oder diophantischen Gleichungssystems in einer Datei mit der Erweiterung .GLE abgelegt. In der aufklappbaren Beispielliste können Sie vier Beispiel auswählen.

5.3 Matrizen und Determinanten

Dieses Unterprogramm ermöglicht Berechnungen mit maximal 11-reihigen quadratischen Matrizen.

Den *Grad der Matrix* legen Sie an den Pfeilschaltern fest. Mithilfe der in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Schalter wählen Sie die jeweils anzuzeigende Matrix bzw. Operation aus.

Schalter	Wirkung
Matrix A anzeigen	Anzeige und Eingabe der Koeffizienten der Matrix A
Matrix B anzeigen	Anzeige und Eingabe der Koeffizienten der Matrix B

A + B	Anzeige der Summe beider Matrizen
-A	Anzeige der mit dem Skalar -1 multiplizierten Matrix A
A * B	Anzeige der Produktes A*B beider Matrizen
B * A	Anzeige der Produktes B*A beider Matrizen
A²	Anzeige des Quadrates der Matrix A
A^n	Anzeige der Potenz A^n ; n kann eingegeben werden , n = 1, ..., 9
Inverse Matrix zu A	Anzeige der zu A inversen Matrix A^{-1}
Transponierte Matrix zu A	Anzeige der transponierten Matrix A^T zur Matrix A
Anzeige in A kopieren	in diesem Moment angezeigte Koeffizienten werden in die Matrix A eingetragen
Anzeige in B kopieren	in diesem Moment angezeigte Koeffizienten werden in die Matrix B eingetragen
Matrizen löschen	Koeffizienten beider Matrizen werden auf 0 gesetzt

Die entsprechende Operation starten Sie jeweils durch Betätigung eines dieser Schalter.

Insbesondere die beiden letzten Schalter ermöglichen es, längere Berechnungen mit Matrizen durchzuführen. Zusätzlich erhalten Sie die Koeffizientendeterminanten der Matrizen A und B angezeigt. Die inverse Matrix A^{-1} existiert nur, wenn die Determinante von A verschieden 0 ist. Andernfalls erhalten Sie die Fehlermeldung: *Keine eindeutige Lösung.*

Beispiel: Bei Eingabe folgender Koeffizienten für die Matrix A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

und Auswahl des Schalters *Inverse Matrix zu A* erhalten Sie:

$\begin{pmatrix} -0{,}0625 & 1 & -0{,}1875 & -0{,}4375 & -0{,}125 \\ 0{,}0625 & 1 & -0{,}3125 & -0{,}5625 & -0{,}375 \\ 0{,}3125 & 1 & -1{,}0625 & -0{,}8125 & -0{,}375 \\ 0{,}1875 & 1 & 0{,}0625 & -0{,}6875 & -0{,}125 \\ -0{,}375 & -5 & 1{,}875 & 3{,}375 & 1{,}25 \end{pmatrix}$

QR-Zerlegung von A

Über diesen Schalter wird die Matrix A in ein Produkt QR einer orthogonalen Matrix Q und einer geeigneten Dreiecksmatrix R zerlegt. Das Ergebnis Q wird nach A kopiert, die Matrix R nach B. Beachten Sie, dass diese Zerlegung nur möglich ist, wenn die Spalten der Matrix A linear unabhängig sind.

Determinanten

Determinanten finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung – nicht nur bei der Lösung von Gleichungssystemen. Neben reellen Koeffizienten können auch komplexe Zahlen für die Berechnung herangezogen werden. In diesem Unterprogramm können Sie bis zu 11-reihige Determinanten mit reellen, aber auch komplexen Koeffizienten berechnen. Dabei werden die Determinanten als Koeffizienten von Matrizen A und B eingegeben.

Wählen Sie zuerst die Ordnung, den Rang der Determinante, über den Rollbalken aus. Reelle und imaginäre Anteile werden getrennt in den beiden Matrizen A und B eingegeben. Die anzuzeigende und damit editierbare Seite wählen Sie mittels der Schalter *Matrix A anzeigen* und *Matrix B anzeigen*. Nach Quittierung der Eingabe durch Betätigung eines der Schalter wird der Wert der Determinante von Matrix A und von Matrix B ausgewiesen. Als Besonderheit interpretiert das Programm beide Matrizen als Eingabefelder einer Determinante A + B * i, d.h., die Koeffizienten von B werden als imaginäre Anteile ausgewertet. Der Wert dieser Determinante | A + B * i | wird ebenfalls berechnet.

Enthält Matrix B nur Koeffizienten 0, sprich die imaginären Anteile von A + B * i sind 0, ermittelt das Programm selbstverständlich den Wert der nunmehr reellwertigen Determinante.
Über die Schalter *Datei laden* und *Datei speichern* können Sie die eingegebenen Koeffizienten Ihrer Matrizen und damit der Determinanten dauerhaft aufbewahren und auf Wunsch wieder laden.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Innerhalb des Teilprogramms *Matrizenrechnung* können Sie zusätzlich für eine Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen lassen (siehe Lexikon). Dabei werden für eine quadratische Matrix alle Eigenwerte und -vektoren ermittelt.
Eigenwerte und -vektoren können für eine Nullmatrix nicht berechnet werden.

Matrizenmultiplikation

Matrizen können auch multipliziert werden, wenn sie nicht gleiche Spalten- bzw. Zeilenzahl aufweisen, also nicht quadratisch sind. Lesen Sie dazu im Teilprogramm *Matrizenmultiplikation* nach.

5.4 Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn sie die gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, d.h. quadratisch von gleichem Rang sind.

Darüber hinaus können aber auch Matrizen miteinander multipliziert werden, die nicht identisch viele Spalten und Zeilen besitzen. Es gilt:

Bei einer Matrizenmultiplikation muss die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix sein. Das Matrizenprodukt hat dann die Zeilenzahl der ersten und die Spaltenzahl der zweiten Matrix.
In diesem Teilprogramm können Sie zwei Matrizen unterschiedlicher Spalten- bzw. Zeilenzahl multiplizieren.
An den Rollbalken stellen Sie die *Spalten*- und *Zeilen*zahl der Matrix A ein. Für die 2.Matrix B ist nur noch die *Spalten*zahl wählbar. Danach tragen Sie in die Matrizen die gewünschten Werte ein. Der Schalter *Multiplizieren* zeigt das Ergebnis.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1.5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Über *Matrizen tauschen* werden die Ausgangsmatrizen A und B getauscht; vorausgesetzt beide Matrizen haben gleiche Spalten- und Zeilenzahl.
Da die Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist, werden die Produkte A B und B A oft unterschiedlich sein.

Zum Beispiel ergibt sich für die angezeigten Matrizen sogar, dass bei der ersten Multiplikation zwei Nicht-Nullmatrizen eine Nullmatrix als Produkt auftritt. D.h., die Matrizenmultiplikation ist nicht nullteilerfrei.

5.5 Cramersche Regel

In diesem Unterprogramm können Sie ein einfaches lineares Gleichungssystem 2. Grades, also zwei Gleichungen und zwei Unbekannte, rechnerisch und grafisch lösen. Dazu wird die Cramersche Regel genutzt, die für ein System von zwei Gleichungen

$a_{11}\ x + a_{12}\ y = b_1$ $\qquad$ $a_{21}\ x + a_{22}\ y = b_2$

über die Berechnung der Koeffizientendeterminante $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ sowie der zwei weiteren Determinanten $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ und $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ die Lösung des Gleichungssystems zu $x = D_x / D$ und $y = D_y / D$ ermittelt. Dieses Teilprogramm berechnet besagte Determinanten und daraus das eventuell existierende Lösungspaar.

Ein derartiges Gleichungssystem kann auch näherungsweise grafisch gelöst werden. Beide Gleichungen werden als implizite Definitionsgleichungen zweier linearer Funktionen betrachtet. Schneiden sich die Graphen der Funktionen in einem Punkt, repräsentiert dieser Punkt die Lösung des Gleichungssystems. Sind beide Graphen echt parallel, besitzt das System keine Lösung. Sind beide identisch, dann hat das System unendlich viele Lösungen. Für die Darstellung der

grafischen Lösung wählen Sie den entsprechenden Schalter *Darstellung*.

Eine erste Vorschaugrafik der zugehörigen linearen Funktionen erhalten Sie unterhalb der Berechnung. Bei jeder Änderung der Eingabe zeigt Ihnen das Programm sofort den veränderten Funktionsverlauf. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) wählen Sie bitte *Darstellung.*

Beispiel: Das aus den zwei Gleichungen 3*X + 4*Y = 2 und 2*X + Y = 3 bestehende System ergibt die Koeffizientendeterminante D = -5, sowie D_x = -10 und D_y = 5 und folglich die Lösung [2;-1].
In der grafischen Darstellung zeichnet das Programm die zugehörigen linearen Funktionen Y = -0,75*X + 0,5 und Y = -2*X + 3, die sich im Punkt [2;-1] schneiden.

5.6 Ganzrationale Gleichungen

Innerhalb des Teilprogramms können Sie beliebige ganzrationale Funktionen maximal 6. Grades mittels numerischer Näherungsverfahren auf reelle Nullstellen untersuchen zu lassen. Für Polynome bis zum 4. Grad

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

existieren aber exakte Lösungsformeln, die es ermöglichen, auch die Lösungen der Gleichung innerhalb des Bereichs der komplexen Zahlen zu suchen.

Quadratische Gleichungen wurden schon in der babylonischen Mathematik um 2000 v.u.Z. gelöst. Nach viel versprechenden grafischen Lösungsmethoden durch den arabischen Mathematiker al-Chwarizmi (um 850) fand Niccolo Tartaglia (um 1500-1557) die allgemeine Lösungsformel kubischer Gleichungen, wenngleich sie fälschlicherweise nach Cardano benannt ist. Die Gleichung 4. Grades löste zuerst Ludovico Ferrari (1522-1565) vollständig auf. Niels Henrik Abel (1802-1829) bewies, dass die allgemeine Gleichung des 5. oder höheren Grades nicht mehr vollständig in Radikalen auflösbar ist, sprich keine allgemeine Lösungsformel existieren kann.

Nach Eingabe aller Koeffizienten der Gleichung 4. Grades (evtl. 5. oder 6. Grades) in die entsprechenden Felder werden die Lösungen der Gleichung sowie der zugehörigen Gleichungen der 1. und 2. Ableitung innerhalb des Bereichs der komplexen Zahlen ermittelt. Möchten Sie nur kubische Gleichungen vollständig auflösen, so setzen Sie a_6 = 0, a_5 = 0 und a_4 = 0.

Wählen Sie den 5. oder 6. Grad, werden eine bzw. zwei der Lösungen iterativ bestimmt – nach einer Polynomdivision die restlichen vier Werte mittels Lösungsformel. Die iterativen Lösungen werden ausschließlich im Bereich der reellen Zahlen gesucht.

Beispiel: Für die Gleichung $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ (Koeffizienteneingabe in der ersten Spalte: 0;0;1;2; 1;2; 1) werden zwei reelle Wurzeln x_0 = -1,88321

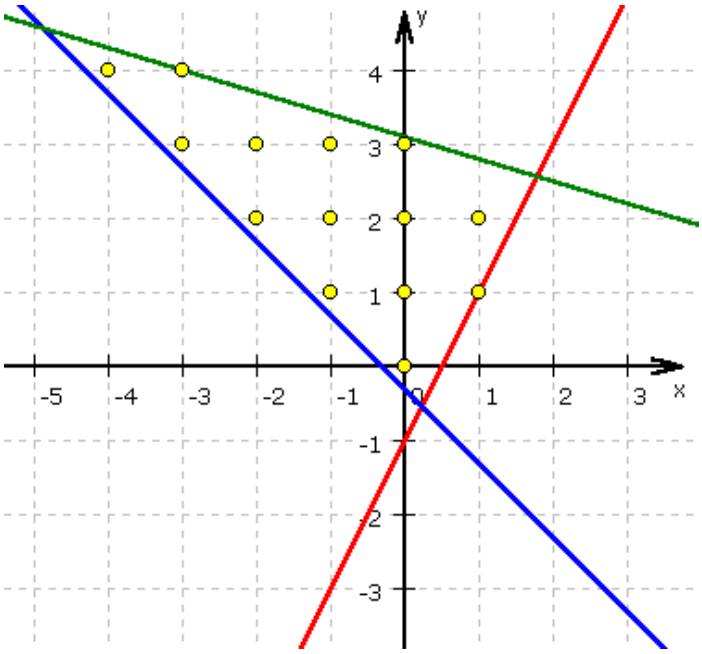
und x_1 = -0,53101 sowie die zueinander konjugiert komplexen Lösungen x_2 = 0,20711 + 0,97832 i und x_3 = 0,20711 - 0,97832 i ermittelt.

Über den Schalter *Darstellung* wird die zur Gleichung gehörende Funktion gezeichnet. Bei jeder Änderung der Eingabe zeigt Ihnen das Programm sofort den veränderten Funktionsverlauf. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) wählen Sie bitte *Darstellung.* Auf Wunsch können Sie auch die 1.Ableitungsfunktion bzw. 2.Ableitungsfunktion zeichnen lassen.

5.7 Ungleichungen

Lineare Ungleichungen der Form a x + b y > c haben im Normalfall unendlich viele Paare reeller Zahlen als Lösung. Diese Lösungen können sehr schön grafisch veranschaulicht werden.

Dazu stellt man die Ungleichung nach y um, d.h. y > c/ b -a / b x, und stellt die lineare Funktion y = c / b -a / b x dar. Die Koordinaten aller Punkte der Koordinatenebene, die über der Geraden liegen, da y > c / b -a / b x, stellen dann Lösungen der Ungleichung dar.
Für die verschiedenen Relationszeichen gilt dann:



- Zeichen „>" ... alle Punkte über der linearen Funktion
- Zeichen „>=" ... alle Punkte über der linearen Funktion und die Punkte der Funktion
- Zeichen „<" ... alle Punkte unterhalb der linearen Funktion
- Zeichen „<=" ... alle Punkte unterhalb der linearen Funktion und die Punkte der Funktion

erfüllen die Ungleichung. Betrachtet man nun mehrere Ungleichungen gleichzeitig, d.h. ein System von Ungleichungen, so überlappen sich die Lösungsmengen.

Im Beispiel sind die zu den Ungleichungen

$y \geq 2x - 1$ $y \geq -x - 0,3$ $y \leq -0,3x + 3,1$

gehörenden linearen Funktionen eingezeichnet. Dabei entspricht die rote Gerade der 1. Ungleichung, die blaue der zweiten und die grüne der dritten. Aufgrund der Relationszeichen müssen dann Lösungen des Ungleichungssystems oberhalb der

roten und blauen Gerade und unterhalb der grünen liegen, in diesem Beispiel also innerhalb des von den Geraden aufgespannten Dreiecks.

Interessiert man sich ausschließlich für ganzzahlige Lösungen (markiertes Feld *natürliche Lösungspaare anzeigen*), so zeichnet das Programm die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten als gelbe Punkte ein. Im Beispiel wären u.a. die Paare (0;0), (1;2), (1;1) ganzzahlige Lösungen.

In diesem Programmteil können Sie bis zu drei Ungleichungen festlegen. Dazu schalten Sie die Markierung bei *Gerade 1* bis *3* zu bzw. ab. Die Parameter der Ungleichung, der Anstieg m der zugehörigen Geraden und die Verschiebung auf der y-Achse stellen Sie an je zwei Rollbalken ein. Klicken Sie auf ein Relationszeichen einer Ungleichung, so wird dieses von kleiner-gleich auf größer-gleich umgeschaltet bzw. umgekehrt.

Das Programm stellt sofort die linearen Funktionen dar und markiert den Lösungsbereich (Markierung: *farbige Lösungsmenge*). Haben Sie mehrere Ungleichungen ausgewählt, erhalten Sie Darstellungen wie oben gezeigt.
Die Größe des Koordinatensystems können Sie an den Schaltern in der oberen Schalterleiste verändern.

5.8 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen der Form $y > a\,x^2 + b\,x + c$ haben im Normalfall unendlich viele Paare reeller Zahlen als Lösung. Diese Lösungen können sehr schön grafisch veranschaulicht werden.

Dazu stellt man die Ungleichung als quadratische Funktion $y = a\,x^2 + b\,x + c$ dar. Die Koordinaten aller Punkte der Koordinatenebene, die über der Parabel liegen, stellen dann Lösungen der Ungleichung dar.
Für die verschiedenen Relationszeichen gilt dann:

- Zeichen „>" ... alle Punkte über der quadratischen Funktion
- Zeichen „>=" ... alle Punkte über der quadratischen Funktion und die Punkte der Funktion
- Zeichen „<" ... alle Punkte unterhalb der quadratischen Funktion
- Zeichen „<=" ... alle Punkte unterhalb der quadratischen Funktion und die Punkte der Funktion

erfüllen die Ungleichung. Betrachtet man nun mehrere Ungleichungen gleichzeitig, d.h. ein System von Ungleichungen, so überlappen sich die Lösungsmengen.
In der grafischen Darstellung entspricht die rote Parabel der 1. Ungleichung und die blaue der zweiten. Aufgrund der Relationszeichen müssen dann Lösungen des Ungleichungssystems oberhalb bzw. unterhalb der roten und blauen Parabel liegen.
Interessiert man sich ausschließlich für ganzzahlige Lösungen (markiertes Feld

natürliche Lösungspaare anzeigen), so zeichnet das Programm die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten als gelbe Punkte ein.

In diesem Programmteil können Sie maximal zwei quadratische Ungleichungen festlegen. Dazu schalten Sie die Markierung bei *Parabel 1* bis 2 zu bzw. ab. Die Parameter der Ungleichung, die Koeffizienten a, b und c stellen Sie an je drei Rollbalken ein. Klicken Sie auf ein Relationszeichen einer Ungleichung, so wird dieses von kleiner-gleich auf größer-gleich umgeschaltet bzw. umgekehrt.

Das Programm stellt sofort die quadratischen Funktionen dar und markiert den Lösungsbereich (Markierung: *farbige Lösungsmenge*). Haben Sie mehrere Ungleichungen ausgewählt, erhalten Sie Darstellungen wie oben gezeigt. Die Größe des Koordinatensystems können Sie ebenfalls an einem Rollbalken verändern.

5.9 Ausschöpfungsverfahren, Brute Force Verfahren

Die Brute-Force-Methode (von Engl. "brute" = "animalisch, brutal" und "force" = "Kraft, Macht", d.h. "Methode der rohen Gewalt"), zu Deutsch Ausschöpfungsverfahren oder Exhaustionsmethode, ist eine Lösungsmethode für Probleme aus den Bereichen Algebra, Arithmetik, Informatik, Kryptografie ..., die auf dem erschöpfenden Ausprobieren aller oder möglichst vieler Fälle beruht.
Die Reduktion des Begriffs Brute-Force auf das Knacken von Passwörter ist nicht korrekt.

Für viele Berechnungsprobleme existieren keine effizienten Algorithmen. Der einfachste Ansatz für eine algorithmische Lösung eines Problems besteht darin, einfach alle möglichen Lösungen durchzuprobieren, bis die richtige gefunden ist. Die Brute-Force-Suche ist einfach zu implementieren und dazu bestimmt, die korrekte Lösung zu finden. Allerdings steigt der Aufwand an Rechenoperationen proportional zur Anzahl der zu probierenden, möglichen Lösungen, wobei die Anzahl dieser möglichen Lösungen mit steigendem Umfang der Probleme häufig exponentiell ansteigt.

In der Spieltheorie, beispielsweise beim Computer-Schach, ist die Brute-Force-Methode eine Strategie, in der der Variantenbaum bis zu einer gewissen Tiefe vollständig durchsucht und analysiert wird. Eine Bewertungsfunktion für jede der dabei auftretenden Stellungen dient dabei zur Entscheidungsfindung für den besten Zug.
Der Aufwand für die Brute-Force-Methode wächst auch hier exponentiell mit der verwendeten Maximaltiefe der Stellungssuche. Damit setzt die Hardware dieser Methode eine natürliche Grenze.

Das Teilprogramm *Ausschöpfungsverfahren* ermöglicht es, verschiedene Problemstellungen, die mit erhöhtem Rechenaufwand verbunden sind, zu bearbeiten.

Für eine Problemstellung sind zuerst *Gleichungen* zeilenweise einzutragen. Diese Gleichungen dürfen als Variablen Buchstaben von A bis Z enthalten. Maximal sind 18 verschiedene Variablen möglich. Markieren Sie *Variable sind Einzelbuchstaben*, so werden Buchstabenfolgen als aus einzelnen Variablen zusammengesetzt interpretiert. In diesem Fall bedeutet z.B. abcd die Zahl a 10^3 + b 10^2 + c 10 + d. Wird die Markierung entfernt, stellt abcd nur eine einzelne Zahl dar.

Als Operationszeichen können in den Gleichungen +, * und Klammern verwendet werden. Relationszeichen sind das Gleichheitszeichen = und "größer als" >. Die in den Gleichungen enthaltenen Variablen können nur mit bestimmten Werten belegt werden. Diese sind unter *mögliche Lösungswerte* (maximal 50 Werte) einzugeben.

Nach der vollständigen Eingabe können Sie nach Lösungen suchen lassen, zum einen mit dem *Brute Force Verfahren*, zum anderen durch ein spezielles *Schrittweises Verfahren*.
Welches der Verfahren effektiver ist, kann im Voraus nicht entschieden werden. Von Beispiel zu Beispiel wird das eine oder andere Verfahren schneller zum Ergebnis führen. Ein langwierige Berechnung kann mit dem Schalter *Stopp* abgebrochen werden.

Bitte beachten Sie, dass das Ausschöpfungsverfahren mitunter sehr viel Zeit erfordern kann.

Die berechneten Ergebnisse werden in einer Liste angezeigt. Zum Lieferumfang des Programms gehört eine Vielzahl von Beispieldateien. Diese können Sie über die aufklappbare Liste *Beispiele* laden und anschließend testen.

5.10 Gleichungen und Ungleichungen

Mithilfe dieses Teilprogramms können Sie iterativ die Lösungen einer beliebigen Gleichung ermitteln. Geben Sie dazu die linke und rechte Seite Ihrer Gleichung ein, wobei Sie beachten müssen, dass die gesuchte Variable mit X zu bezeichnen ist.

Die Iteration erfolgt über das sehr schnelle Brent-Verfahren. Dazu wird ein Suchintervall benötigt, das voreingestellt von -100 bis 100 läuft. Gegebenenfalls verändern Sie dieses Intervall. Vermuten Sie zum Beispiel sehr dicht beieinander liegende Lösungen, so verringern Sie die Intervallbreite.
Nach *RETURN* bzw. *Berechnung* sucht das Programm in diesem Intervall Lösungen und bestimmt diese auf sechs Dezimalstellen genau.

Beispiel: Für die Gleichung 4*SIN(X-1) = X / 2 erhalten Sie als Lösungen:
-7,281148 ; -6,16252 ; -1,901596 ; 1,143418 ; 3,665621

Zur Kontrolle können Sie über den Schalter *Darstellung* die zur Gleichung Term1 = Term2 zugehörige Funktion f(x) = Term1 - Term2 zeichnen, auf Wunsch auch

beide Seiten der Gleichung (f(x) = Term1 bzw. f(x) = Term2) einzeln. Eine erste Vorschaugrafik der zugehörigen Funktion erhalten Sie neben den Eingabefeldern.

Bei jeder Änderung der Eingabe zeigt Ihnen das Programm sofort den veränderten Funktionsverlauf. Für eine exakte grafische Darstellung mit allen Zusatzmöglichkeiten (u.a. Speichern, Drucken, Animation ...) wählen Sie bitte *Darstellung.* (siehe Grafische Darstellung)

Iterative Lösung einer Ungleichung

Im analogen Teilprogramm "Iterative Lösung einer Ungleichung" können Sie beliebige Ungleichungen der Form "Term1 > Term2" berechnen. Die erforderlichen Größen werden wie oben beschrieben eingegeben.
Das Programm berechnet nur die Intervalle, in denen der erste Term größer als der zweite ist.
In der grafischen Darstellung werden diese Intervalle durch Strecken auf der Abszissenachse gekennzeichnet.

5.11 Spezielle Gleichungen

Das Teilprogramm *Spezielle Gleichungen* gibt Ihnen die Möglichkeit, vordefinierte goniometrische Gleichungen zu lösen. In der aufklappbaren Liste wählen Sie einen speziellen Gleichungstyp aus. Vorgesehen sind die Gleichungsarten:

- SIN(P·X) + COS(Q·X) = 0
- SIN(P·X) - COS(Q·X) = 0
- P·SIN(X) + Q·COS(X) = 0
- P·SIN(X) + Q·COS(X) + R = 0
- SIN(P·X) + SIN(Q·X) = 0
- SIN(P·X) · SIN(Q·X) = 0
- SIN(P·X) + Q = 0
- COS(P·X) + Q = 0
- TAN(P·X) + Q = 0
- SIN(X + P) + Q = 0
- COS(X + P) + Q = 0
- TAN(X + P) + Q = 0
- Q·SIN(P·X) = 0
- Q·SIN(P·X) + R = 0
- SIN(P·X + Q) + R = 0
- COS(P·X + Q) + R = 0
- TAN(P·X + Q) + R = 0
- SIN(COS(P·X) + Q) = 0
- SIN(SIN(P·X) + Q) = 0
- 1/SIN(P·X + Q) + R = 0
- SIN(P·X + Q)² + R = 0
- P·SIN(X + Q)² + R = 0
- SIN(P·X + Q) + COS(R·X) = 0
- SIN(P·X + Q) + SIN(R·X) = 0
- COS(P·X + Q) + COS(R·X) = 0
- COS(P·X + Q) + SIN(R·X) = 0

Das Programm gibt Ihnen sofort die theoretischen Lösungen aus und zeichnet die zugehörige Funktion, deren Nullstellen gerade die Lösungen dieser Gleichung wären. Die Parameter P, Q und R können Sie direkt in die Eingabezeilen eingeben bzw. an den kleinen Pfeilschaltern verändern.

Klicken Sie nun auf den Schalter *Berechnung,* dann ermittelt das Programm für die konkreten Parameter die Lösungen der Gleichung. Die grafische Darstellung verdeutlicht das Gefundene.
Während der *Simulation* wird einer der Parameter P, Q oder R kontinuierlich um den Wert von Δx = verändert und die Funktion sofort dargestellt.

Zum Beispiel wird die Funktion SIN(P·X)+COS(Q·X) = 0 für die Parameter P = 3 und Q = 1,4 berechnet. Zum einen gibt das Programm die analytischen Lösungen zu

X=-PI/(2·(P+Q)) X=3·PI/(2·(P+Q)) X=-5·PI/(2·(P+Q))
X=PI/(2·(Q-P)) X=3·PI/(2·(Q-P)) X=5·PI/(2·(Q-P))

aus, zum anderen die Näherungslösungen

X1 = -0,356999 X2 = 1,070997 X3 = -1,784996
X4 = -0,981748 X5 = -2,945243 X6 = -4,908739

5.12 Nullstellen ganzrationaler Funktionen, Lösungen ganzrationaler Gleichungen

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt eine ganzrationale Gleichung der Form

$$a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

stets n Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen. Ist eine nicht reelle Zahl Lösung, so ist es auch die zugehörige konjugiert komplexe Zahl.
In diesem Teilprogramm werden die Lösungen bis zu einem Grad n = 10 ermittelt. Dies erfolgt mit einem schnellen, speziellen Näherungsverfahren, da nur bis n = 4 exakte Lösungsformeln existieren.

Die ermittelten Lösungen stellt das Programm in der komplexen Gaußschen Zahlenebene dar. Deutlich erkennt man, dass die reelle Achse Symmetrieachse ist.
Tragen Sie andere Koeffizienten der Gleichung ein und quittieren mit *Berechnung*, werden die Lösungen ermittelt.
Der Schalter *Funktion darstellen* ruft die grafische Darstellung auf und zeigt die zugehörige ganzrationale Funktion an.

Mit dem Schalter *Simulation* wird ein Koeffizient kontinuierlich verändert und das Ergebnis sofort angezeigt. Den Index des zu veränderten Koeffizienten stellen Sie an den kleinen Pfeilschaltern *Δa* neben dem *Simulation*-Schalter ein.

Gauß-Lucas-Theorem

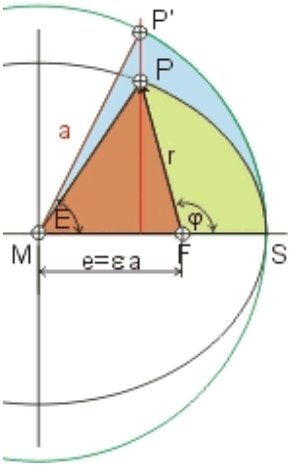
Markieren Sie das Feld *Ableitungsnullstellen anzeigen*, so werden zusätzlich die komplexen Nullstellen der 1.Ableitung in rot eingezeichnet.
Nach dem Gauß-Lucas-Theorem gilt, dass alle Nullstellen der 1.Ableitung innerhalb eines konvexen Polygons in der Gaußschen Ebene liegen. Dieses Polygon ist die konvexe Hülle der Nullstellen der Ausgangsfunktion. Die *konvexe Hülle* kann ebenfalls dargestellt werden.

5.13 Kepler-Gleichung und weitere transzendente Gleichungen

Für die Herleitung des 2.Bewegungsgesetzes ("Die Fahrstrahlen der Planeten überstreichen in gleichen Zeiträumen die gleichen Flächen.") stieß Kepler auf das Problem, die Fläche eines Ellipsensektors in der Brennpunktsform zu berechnen.

Kepler zeichnete einen Umkreis der Ellipse mit dem Radius der großen Halbachse a.
Für einen Punkt P auf der Ellipse und einen Punkt P' auf dem Umkreis, die beide auf einer Sehne parallel zur kleinen Halbachse b liegen, gilt

$x_P = x_{P'}$ und $y_P = b/a \cdot y_{P'}$.



Das Kreissegment MSP' hat die Fläche

$F_{MSP'} = \pi \cdot a^2 \cdot E/(2\pi)$

Kepler nannte den Winkel E exzentrische Anomalie. Aufgrund der Affinität von Ellipse und Kreis wird dann

$F_{MSP} = \pi \cdot a \cdot b \cdot E/(2\pi) = a \cdot b \cdot E/2$

Die Fläche des Ellipsensegments FSP ergibt sich durch Abzug der Dreiecksfläche Δ MFP: $F_\Delta = ½ \cdot e \cdot y_P$.
Auf Grund der Affinität wird mit $y_P = b/a \cdot y_{P'} = (b/a) \cdot a \cdot \sin E = b \cdot \sin E$:

$F_\Delta = ½ \cdot e \cdot b \cdot \sin E$.

$F_{FSP} = (b/2) \cdot (a \cdot E - e \cdot \sin E)$

Für die blaue Kreissegmentfläche $F_{FSP'}$ wird

(*) $F_{FSP'} = (a/b) \cdot F_{FSP} = (a/2) \cdot (a \cdot E - e \cdot \sin E)$

Bewegt sich Punkt P' auf dem Kreis wie Punkt P auf der Ellipse, so verändert sich die Kreissegmentfläche mit dem Winkel am Brennpunkt P'FS, den Kepler mittlere Anomalie M nannte.

(**) $F_{SFP'} = \pi \cdot a^2 \cdot (M/2\pi) = (M/2) \cdot a^2$.

Gleichsetzen der Gleichungen (*) und (**) führt zu

$(a/2) \cdot (a \cdot E - e \cdot \sin E) = (M/2) \cdot a^2$

und $M = E - (e/a) \cdot \sin E$,

die Keplersche Gleichung. e/a ist die numerische Exzentrizität ε der Bahn.

Diese transzendente Gleichung ist nicht nach E auflösbar und kann nur iterativ gelöst werden.
In diesem Teilprogramm kann diese Gleichung in der umgestellten Form

$x = a + b \sin x$

näherungsweise gelöst werden. Dazu sind Werte für a und b einzugeben.
Klicken Sie auf den Schalter *Berechnung*, so sucht das Programm alle Lösungen im eingegebenen *Intervall*. Gleichzeitig stellt das Programm die zugehörige Funktion

$y = a + b \sin x - x$

dar.
Neben der Keplerschen Gleichung gibt es weitere transzendente Gleichungen, die nur näherungsweise gelöst werden können. Diese wählen Sie unter *Gleichungstyp* aus.

5.14 Chinesischer Restsatz

In diesem kleinen Teilprogramm wird mit Hilfe des chinesischen Restsatzes ein System linearer Kongruenzen gelöst.
Eine simultane Kongruenz ganzer Zahle in ein System von linearen Kongruenzen

$x \equiv a_1 \pmod{p_1}$
$x \equiv a_1 \pmod{p_1}$
…
$x \equiv a_1 \pmod{p_1}$

für die alle x bestimmt werden sollen, die alle Kongruenzen gleichzeitig lösen.
Existiert eine Lösung x, dann sind auch alle x + kM Lösungen, wobei M das kleinste gemeinsame Vielfache der Module p_i ist.
Im Allgemeinen existiert eine Lösung, wenn der ggT der Module 1 ist, d.h. die Module paarweise teilerfremd sind.

Die Originalform des chinesischen Restsatzes stammt aus dem Buch Sun Zi Suanjing ("Sun Zis Handbuch der Arithmetik") des Mathematikers Sun Zi (3.Jahrhundert) und wurde 1247 von Qin Jiushaos in "Mathematische Abhandlung in neun Kapiteln" wiederveröffentlicht.

In diesem Teilprogramm geben sie links in der Tabelle die ganzzahligen a_i und die paarweise teilerfremden Module p_i ein. Nach einem Klick auf den Schalter wird das System gelöst.

5.15 Lösungsverfahren

In diesen Teilprogrammen wird schrittweise die Lösung von sieben in der Schulausbildung auftretenden Standardaufgaben beschrieben.
Je nach Wahl des Menüpunktes wird folgende Gleichungsart gelöst:

- Lineare Gleichung Y = MX + N
- Quadratische Gleichung $Y = X^2 + PX + Q$
- Quadratische Gleichung mittels quadratischer Ergänzung
- Exponentialgleichung Y = B^X
- Schriftliche Multiplikation gebrochener Zahlen
- Schriftliche Division natürlicher Zahlen
- Lösung eines linearen Gleichungssystems

Danach zeigt Ihnen das Programm die einzelnen Schritte zur korrekten Lösung der Gleichung an.
In verschiedene Eingabezeilen können Sie Werte eintragen. Das Programm übernimmt diese sofort und löst die Gleichung entsprechend.
Im Teilprogramm zur *Quadratischen Ergänzung* können nur ganze Zahlen eingetragen werden.

Schriftliche Multiplikation und Division

In diesem Teilprogramm wird die schriftliche Multiplikation zweier gebrochener Zahlen angezeigt. Beide Zahlen dürfen maximal 9 Stellen besitzen.
Schalten Sie auf Division um, wird die schriftliche Division zweier natürlicher Zahlen angezeigt. Beide Zahlen dürfen maximal 9 Stellen besitzen. Eine Periode wird erkannt, wenn deren Länge maximal 24 Ziffern beträgt.

Lösung eines Gleichungssystems

Im Teilprogramm *Lösung eines Gleichungssystems* kann an Hand eines linearen Gleichungssystems 4.Grades die Umformung in eine Diagonalform schrittweise durchgeführt werden.
Dazu geben Sie zuerst die Koeffizienten des Systems ein. Vier Möglichkeiten der äquivalenten Umformung können genutzt werden.

1. das Vertauschen zweier Zeilen des Gleichungssystems
2. die Multiplikation der Koeffizienten einer Gleichung mit einem Faktor
3. die Division der Koeffizienten einer Gleichung mit einem Faktor
4. die Addition des k-fachen einer Zeile zum n-fachen einer anderen Zeile

Tragen Sie dazu die Parameter ein und quittieren mit dem entsprechenden Schalter.
Beispiel: Es soll das Gleichungssystem

A1	A2	A3	A4	B
1	2	-1	-1	9
-1	4	2	1	-1
2	1	1	-1	2
1	3	2	1	3

gelöst werden. Dazu erzeugt man zuerst unter der Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten „Nullen", z.B. durch *Addieren des 1-fachen der 1.Zeile nur 2.Zeile,* des –2fachen zur 3.Zeile und des –1fachen zur 4.Zeile. Anschließend tauscht man zweckmäßigerweise die 2. und 4.Zeile und addiert das 3fache von Zeile 2 zur Zeile 4 sowie das –6fache zu Zeile 4. Nach Multiplikation der Zeile 4 mit 12 und Addition des 17fachen von Zeile 3 zur Zeile 4 ergibt sich die gesuchte Form.

A1	A2	A3	A4	B
1	2	-1	-1	9
0	1	3	2	-6
0	0	12	7	-34
0	0	0	-25	-50

Nach Division der 4.Zeile mit –25 erhält man die erste Lösung x4 = 2.
Verfährt man nun von unten nach oben in ähnlicher Form, d.h. auch über der

Hauptdiagonalen werden „Nullen“ erzeugt, ergibt sich

A1	A2	A3	A4	B
1	0	0	0	3
0	1	0	0	2
0	0	1	0	-4
0	0	0	1	2

und somit die Lösung x1 = 3, x2 = 2, x3= -4 und x4 = 2.

5.16 Dreisatz, Schlussrechnung

Der Dreisatz (in Österreich: Schlussrechnung) ist ein Verfahren, durch das mit drei gegebenen Größen eine vierte errechnet wird; auch Berechnung der vierten Proportionale genannt.

Grundaufgaben	Lösung
x : b = c : d	x = b · c / d
a : x = c : d	x = a · d / c
a : b = x : d	x = a · d / b
a : b = c : x	x = b · c / a

Der Name "Dreisatz" ergibt sich aus der klassischen Methode zur Lösung des Problems. Der erste Satz formuliert dabei die bekannte Proportion der Aufgabenstellung, der zweite und dritte Satz lösen die Proportionengleichung nach der gesuchten Größe auf.
Historisch gesehen war die Dreisatzaufgabe in den Volksschulen des 19.Jahrhunderts damals eine der anspruchsvollsten Aufgaben des Rechenunterrichts; heute Grundfertigkeit eines Schülers der 6.Klasse.

Außerdem ist der Begriff Dreisatz überhaupt nicht notwendig. Wird im Schulmathematikunterricht in korrekter Form die direkte und indirekte Proportionalität eingeführt, ist die altertümliche Behandlung der 4 Dreisatzgrundaufgaben überflüssig. Gute Mathematiklehrer verzichten vollkommen auf den "Dreisatzbegriff", da dieser bei den Schülern nur zu schematischen Denken führt, ohne dass die mathematische Idee verstanden wird.

Trotz der kritischen Hinweise ermöglicht dieses Teilprogramm die Nutzung des Dreisatzes. Dabei können drei Aufgabentypen verwendet werden. Links werden die direkte Proportionalität, in der Mitte die indirekte Proportionalität und rechts ein verketteter Dreisatz vorgestellt.

Tragen Sie nun in die Tabellen, bis auf genau eine leeres Feld, Zahlenwerte ein, so wird der nicht eingegebene Wert berechnet.

5.17 Differenzialgleichungssystem

In diesem Unterprogramm können Sie ein Differenzialgleichungssystem bestehend aus maximal drei Gleichungen iterativ lösen. Die Struktur der Einzelgleichungen ist:

$$dy_i = f(x, y_1, y_2, y_3)$$

Zur Lösung wird das Einschrittverfahren nach Runge-Kutta eingesetzt, eine Weiterentwicklung des Euler-Verfahrens. Da dieses Verfahren nur die Eigenschaften der Funktionen ausnutzt, ist es numerisch sehr stabil und liefert gute Ergebnisse. Für eine genauere Beschreibung der Theorie lesen Sie bitte im Lexikon des Programms nach oder in entsprechender Fachliteratur.

Geben Sie zuerst die Gleichungen, die Anfangswerte y_1, y_2 und y_3, das zu untersuchende x-Intervall und die Anzahl der Zwischenwerte ein. Nach Auswahl von *Berechnung* bzw. *RETURN* ermittelt das Programm die Näherungswerte.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnung unter Umständen zeitaufwendig sein kann.

Abbrechen können Sie mit *ESC* bzw. dem Abbruch-Schalter, allerdings beendet das Programm unter allen Umständen die Berechnung des nächsten Wertes, sodass es auch nach Betätigung der *ESC*-Taste noch einige Sekunden dauern kann, bis die Routine tatsächlich abbricht.
Mit dem Schalter ***B*** tragen Sie die drei Differenzialgleichungen

$$dy_1 = -0{,}04\ y_1 \qquad dy_2 = 0{,}04\ y_1 - 0{,}03\ y_2 \qquad dy_3 = 0{,}03\ y_2$$

und die Anfangswerte 1, 2 und 1 ein. An diesem Beispiel erkennen Sie, dass die y-Werte in der Form Y1, Y2 und Y3 eingetragen werden müssen.

Bei dem Verfahren vom Runge-Kutta-Typ wird mit einer automatischen Schrittweitensteuerung der Schrittweite h versucht, den auftretenden Rundungsfehler möglichst klein zu halten. In der Tabelle finden Sie auch die Werte von h. Je höher die Anzahl der Tabelleneinträge (bei gleicher x-Intervallbreite) gewählt wird, desto genauer werden die Ergebnisse. Allerdings wächst auch die notwendige Berechnungszeit stark an. Geben Sie weniger als drei Gleichungen ein, erkennt das Programm dies automatisch.

Beispiel: Die Differenzialgleichung $y' = dy/dy = y$ ergibt als analytische Lösung die Funktionsschar $y = C\ e^x$. Geben Sie in die erste Zeile Y1 und als Startwert 1 ein, ermittelt das Programm für das Intervall $x \in [0, 5]$ u.a.

X	0	1	2	3	4	5
Y1	1	2,7183	7,389	20,0855	54,5981	148,4131

d.h. ein gute Wertetabelle der Funktion $y = e^x$.

Nach der Berechnung des Differenzialgleichungssystems können Sie die

ermittelten Funktionswerte auch grafisch veranschaulichen. Betätigen Sie dazu den Schalter *Darstellung*. Das Programm trägt, beginnend an den Punkten (Intervallanfang; zugehöriger Startwert), die berechneten Punkte der bis zu drei Funktionen ein und verbindet diese. Je mehr *Tabelleneinträge* Sie gewählt haben, desto "glatter" werden die Funktionsverläufe dargestellt. Allerdings kann es am Ende großer Berechnungsintervalle doch zu erheblichen Abweichungen kommen.

5.18 Iterative Lösung einer Differenzialgleichung

In Ergänzung des Teilprogramms Differenzialgleichungssystem können Sie in diesem Teilprogramm einfache Differenzialgleichungen der Form

$$Y' = F(X,Y)$$

mit verschiedenen Näherungsverfahren berechnen lassen.

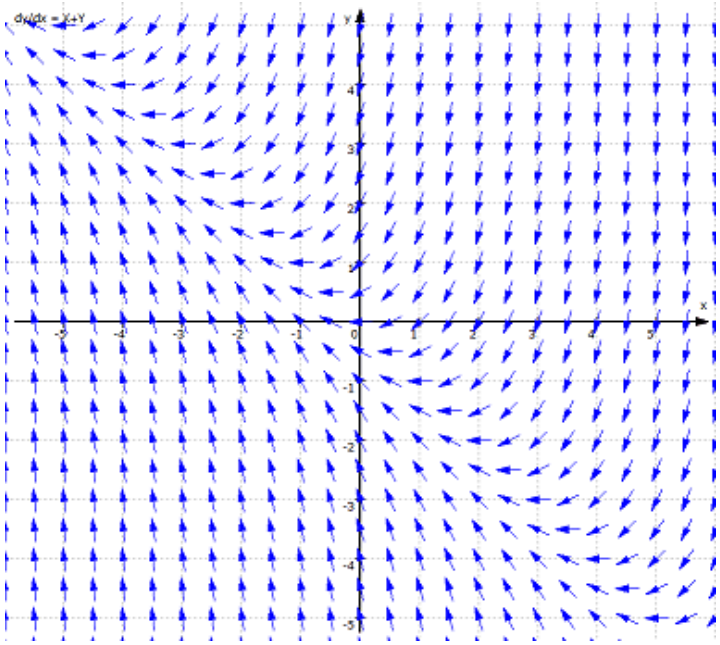
Nach der Eingabe der Funktionsgleichung legen Sie weiterhin das Berechnungsintervall, die Anzahl der Näherungswerte und den Funktionswert für den Intervallanfang fest. In den aufklappbaren Listen können Sie als Näherungsverfahren auswählen:

- einfache Euler-Verfahren
- das Euler-Cauchy-Verfahren
- das Heun-Verfahren
- das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung
- die Adams-Bashforth-Verfahren 2. und 3.Ordnung
- das Adams-Moulton-Verfahren
- das Milne-Simpson-Verfahren
- das Hamming-Verfahren

Die Berechnungsergebnisse des ersten Verfahrens (linke Tabelle) können Sie auch grafisch darstellen.

5.19 Richtungsfeld einer Differenzialgleichung

Um lineare Differenzialgleichungen auszuwerten, werden mitunter Richtungsfelder gezeichnet. Diese bilden eine grafische Näherungslösung der Differentialgleichung.



Wenn durch einen Punkt die Lösungskurve y = f(x) einer Differenzialgleichung y' = f(x,y) geht, so kann die Richtung der Tangente in diesem Punkt unmittelbar ermittelt werden. Damit definiert die Differenzialgleichung in jedem Punkt eine Richtung der Tangente

an eine Lösungskurve. Die Gesamtheit dieser Richtungen bildet das Richtungsfeld. Verbindungslinien von Punkten gleicher Richtung der Tangente werden auch Isoklinen genannt.

In diesem Teilprogramm können Sie solche Richtungsfelder zeichnen.
Tragen Sie dazu entweder eine Differenzialgleichung der Form y' = dy / dx oder der Form dy / dt (Parameterdarstellung) ein. Quittieren Sie die Eingabe mit dem Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm das entsprechende Richtungsfeld – entweder Pfeile oder Strecken. Den Abstand der Pfeile in x- und y-Richtung stellen Sie am Rollbalken Δx = ein.

Enthält die Definition der Differenzialgleichung einen Parameter P, so können Sie diesen verändern. Während der *Simulation* wird P kontinuierlich angepasst. Die Geschwindigkeit der Änderung stellen Sie unter ΔP = ein.

5.20 Nichtlineares Gleichungssystem

Die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems ist im allgemeinen Fall nur noch iterativ möglich. Nach Festlegung eines Startvektors ermittelt das Teilprogramm mit maximal 50 Iterationsschritten eine günstige Näherungslösung des Systems. Die Forderungen an das Näherungsverfahren

- schnelle Konvergenz
- bei möglichst wenigen Startvektoren Divergenz statt Konvergenz
- mit wenig Startvektoren möglichst alle Lösungen ermitteln
- relativ einfache Berechenbarkeit

erfüllen sogenannte Quasi-Newton-Verfahren. Im Programm wurde das Broyden-Verfahren umgesetzt.

Geben Sie dazu maximal vier Gleichungen in die Zeilen ein. Beachten Sie bitte, dass die allgemein geltenden Regeln für implementierte Funktionen zu berücksichtigen sind. Als Variablen können Sie ausschließlich X, Y, U und V nutzen.

Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* werden programmintern 10 verschiedene Startvektoren gebildet und für diese die Iteration durchgeführt. Wird ein Lösungstupel gefunden, dessen Norm vom vorhergehenden nur um 0.0001 abweicht, zeigt das Programm die Werte und die *Norm* an. Wird keine Erfüllung des Systems gefunden, erhalten Sie eine entsprechende Meldung. Der unter *Norm* genannte Wert charakterisiert die Güte der gefundenen Lösung: Je kleiner die *Norm* ist, desto genauer ist die gefundene Lösung.

Die Suche nach Lösungen kann auch auf schnellen Computern einige Zeit dauern. Der Vorgang lässt sich jederzeit durch Betätigung des Schalters *Stopp* oder der *ESC*-Taste abbrechen.

Beachten Sie bitte: Nicht in jedem Fall ist gesichert, dass das Programm alle bzw.

überhaupt eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems findet.

Beispiel: Das Beispiel (1.Schalter ***B*** klicken) enthält das nichtlineare Gleichungssystem:

$0 = X + Y + U + V - 3$ $\qquad$ $0 = X^2 + Y^2 + U - 2*V - 9$

$0 = X + Y*U + V - 1$ $\qquad$ $0 = X - V + 8$

Nach Betätigung von *Berechnung* ermittelt das Programm iterativ vier Lösungen:

X	Y	U	V	Norm
-0.7572	-4.6621	1.1766	7.2428	0
7.827	1.0441	-21.6981	15.827	0
-3.6212	2.1285	0.1139	4.3788	0.000002
-3.8486	0.2896	2.4076	4.1514	0

Ändern Sie die vierte Gleichung auf 0 = X-V-3 findet das Programm nur zwei Lösungen (eine der Lösungen doppelt):

X	Y	U	V	Norm
0.888	0.6165	3.6074	-2.112	0
2.4374	-0.5289	1.6541	-0.5626	0.000007

Auf der Festplatte befindliche Gleichungssysteme können Sie mittels laden. Andererseits besteht die Möglichkeit, die Systeme über zu speichern.

Grafische Darstellung

Haben Sie genau zwei nichtlineare Gleichungen mit den Variablen X und Y als Gleichungssystem eingegeben, so können Sie die Lösungsmenge auch grafisch veranschaulichen. Wählen Sie dazu den in diesem Fall verfügbaren Schalter *Darstellung.*

Beispiel: Für das Gleichungssystem

- 0 = X / SQRT(Y) + Y / SQRT(X) - X*Y
- 0 = X^5 + Y^5 - 8*X*Y

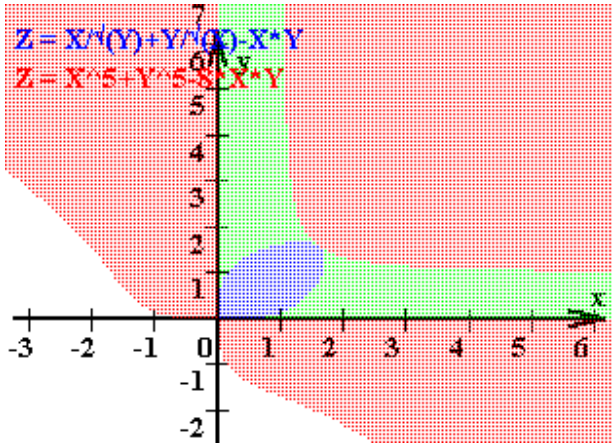
findet das Programm keine Lösung, obwohl diese existiert. Die Ursache liegt in den Unstetigkeiten der ersten Gleichung begründet, die das Näherungsverfahren leider noch nicht verarbeiten kann. Dennoch können Sie das Gleichungssystem untersuchen. Entweder ändern Sie es auf

- 0 = X * SQRT(X) + Y * SQRT(Y) - X*Y*SQRT(X)*SQRT(Y)
- 0 = X^5 + Y^5 - 8*X*Y

wobei Sie aber beachten müssen, dass die eine ermittelte Lösung (0;0) keine tatsächliche Lösung des Ausgangssystems ist. Nun findet das Programm aber auch die korrekte Lösung (1.5874;1.5874). Zum anderen können Sie das System auch näherungsweise grafisch lösen. Rufen Sie dazu die grafische Darstellung auf.

Das Programm analysiert für jeden zweiten Punkt der Darstellungsebene beide

Gleichungen. Die Punktkoordinaten werden dazu in die Gleichungen eingesetzt und die rechten Seiten der Gleichungen berechnet (E_1 sei das Ergebnis der ersten Gleichung; E_2 das der zweiten). Für jede der nachfolgenden Möglichkeiten wird der Punkt wie folgt eingefärbt



- $E_1 \geq 0$ und $E_2 \geq 0$ ... Punkt wird grün (nur wenn Markierungsfeld *Kurve zeichnen* nicht ausgewählt wurde)
- $E_1 \geq 0$ und $E_2 \leq 0$ ... Punkt wird blau
- $E_1 \leq 0$ und $E_2 \leq 0$ ... Punkt bleibt weiß
- $E_1 \leq 0$ und $E_2 \geq 0$ ... Punkt wird rot

Vergegenwärtigt man sich, dass für alle Lösungen des Systems sowohl $E_1 = 0$ als auch $E_2 = 0$ gelten muss, finden Sie nun Lösungen, indem Sie genau die Punkte des Koordinatensystems auswählen, wo ein blauer Bereich einen roten berührt! Die Koordinaten dieses Punktes bilden dann das Lösungspaar. Im Beispiel finden Sie zwei solche Punkte: Der Punkt (1,59;1,59) ist Näherungslösung des Gleichungssystems, während (0;0) als Lösung entfällt, da in diesem Fall die erste Gleichung keinen definierten Wert ergibt.

Genügt Ihnen die Genauigkeit nicht, können Sie natürlich auch hier bestimmte Bereiche des Darstellungsintervalls vergrößern und so die Lokalisierung der Lösung verbessern. Da die Darstellung eine gewisse Zeit benötigt, können Sie diese mit dem *Stopp*-Schalter abbrechen.

Markieren Sie vor der Darstellung das Feld *Kurve zeichnen*, setzt das Programm nur die Berandungspunkte der oben angezeigten Flächen. An der Stelle, wo sich die rote und blaue Kurve berühren, finden Sie die gesuchten Lösungen.

5.21 Lineare Optimierung

Mathematische Methoden werden in nahezu allen Wissenschaften angewandt. Ein sehr häufig genutzter Algorithmus ist der Simplex-Algorithmus zur Lösung einer Optimierungsaufgabe. Die Aufgabenstellung der linearen Optimierung besteht darin, für eine von mehreren Größen abhängige lineare Funktion unter Beachtung einer Vielzahl von Nebenbedingungen ein Optimum, d.h. ein Maximum oder Minimum, zu suchen.
Begründet wurde dieses Teilgebiet 1939 durch den sowjetischen Mathematiker und Nobelpreisträger Kantorowitsch. Auf ihn geht das Verfahren der Lösungsfaktoren zurück. Das heute hauptsächlich eingesetzte Lösungsverfahren, das Simplex-Verfahren, wurde 1947 von Dantzig gefunden. Die Bedeutung dieses Gebiets liegt vor allem in wirtschaftsmathematischen Anwendungen.

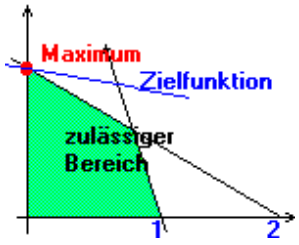
Im Programm wird der Simplex-Algorithmus mit maximal drei Variablen und acht Nebenbedingungen realisiert. Besteht z.B. folgende Aufgabenstellung:

Beispiel: Die Größe a sei von x und y mit a = x + 4y (Zielfunktion) abhängig, wobei für die Variablen x und y vier Nebenbedingungen gelten sollen:

x >=0 y >=0 2x + 3y <=4 3x + y <=3

Gesucht ist die Belegung von x und y für welche die Größe a ein Maximum erreicht!

so geben Sie die Koeffizienten der Zielfunktion in die Felder sowie die vier Nebenbedingungen ein. Dabei ist zu beachten, dass keine Divisionszeichen auftreten dürfen. Als Vergleichsoperatoren können „<", „>" und das Gleichheitszeichen verwendet werden. Außerdem ist für „>=" nur „>" bzw. für „<=" nur „>" einzugeben. Wählen Sie an den Auswahlfeldern zusätzlich *Maximum* und quittieren mit *Berechnung*, ermittelt das Programm das Maximum für a, im Beispiel a = 5.33 mit x = 0 und y = 1.33.



Beachten Sie bitte: Durch interne Rundung und rechnerspezifische Darstellung der Zahlen kann es zu folgendem Problem kommen: Eine Nebenbedingung lautet z.B. 2x + y = 24. Bei Angabe dieser Gleichung findet das Programm keine oder nur die triviale (offensichtlich falsche) Lösung x = 0 und y = 0. Wandeln Sie in diesem Fall die Gleichung in die zwei Bedingungen 2x + y < 24 und 2x + y > 24 um. Nach erneutem *RETURN* erhalten Sie nun die korrekte Lösung.

Enthält die Zielfunktion nur die zwei Variablen x und y (zweidimensionaler Fall) so stellt man sich zur Veranschaulichung der Lösung die vier Nebenbedingungen als lineare Ungleichungen der x-y-Ebene vor. Diese begrenzen ein Gebiet dessen Punkte alle für die Nebenbedingungen gültige Werte darstellen.
Gesucht ist damit der Punkt des zulässigen Bereichs, für den a das Maximum erreicht. Ohne Beweis sei darauf hingewiesen, dass im eindeutigen Lösungsfall das Optimum an einem der Eckpunkte des gebildeten Polygons auftritt.

Haben Sie ein zweidimensionales Problem eingegeben und berechnet, so zeichnet das Programm im Erfolgsfall im rechten Fensterteil die entsprechenden Geraden, färbt den zulässigen Bereich und stellt die Zielfunktion sowie das Optimum dar. Beachten Sie bitte, dass im dreidimensionalen Fall keine grafische Auswertung erfolgt.

Widersprechen sich die Nebenbedingungen, erhalten Sie die Meldung: *Keine Lösung !*
Ist das Problem aufgrund von mangelnden Bedingungen nicht auflösbar, erhalten Sie: *nicht lösbar.*
Zur Theorie des Simplex-Verfahrens lesen Sie bitte in entsprechender Fachliteratur nach.

In diesem Unterprogramm können Sie maximal drei Variablen einsetzen sowie acht Nebenbedingungen. Eine eingegebene Optimierungsaufgabe können Sie in einer Datei ablegen sowie später wieder in das Programm aufnehmen.

Sieben Beispiele können Sie über den Rollbalken *Beispiele* laden, zum Beispiel die dreidimensionale Optimierungsaufgabe x + 4y + 2z --> Maximum mit den Bedingungen

- 2x+3y+z<14
- x+2y<3
- y>1 und x>0.5

Als Lösung wird das Tripel (0.5;1.25;9.25) mit der Zielgröße y = 24 gefunden.

5.22 Komplexe Zahlen Taschenrechner

Schon im 17. Jahrhundert wurden Wurzeln aus negativen Zahlen verwendet, wobei sich die Mathematiker auf die 1572 erschienene "Algebra" des italienischen Mathematikers Raffaele Bombelli stützen konnten. Die Lehre von den komplexen Zahlen wurde vervollständigt durch Johann Bernoulli, Leonhard Euler und vor allem Carl Friedrich Gauß, auf den z.B. die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene zurückgeht.

Komplexe Zahlen bilden die Grundlage der Funktionentheorie, werden aber z.B. auch in der Physik (Wechselstromtechnik, Atomphysik ...) dringend benötigt. Nach Auswahl dieses Punktes startet ein externes Programm, ein Taschenrechner für komplexe Zahlen.

Dieser Taschenrechner ermöglicht Ihnen Standardberechnungen an komplexen Zahlen im Zahlenbereich von rund 10^{-4000} bis 10^{4000} sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil der Zahl. Die Eingabe der Zahlen und Operationen erfolgt über einen Mausklick bzw. das Tastenkürzel der nachfolgenden Tabelle. Die im Rechner enthaltenen Schalter haben folgende Wirkung:

Schalter	Tastenkürzel	Beschreibung, Wirkung
0 bis 9	0 bis 9	Zifferntasten
Re		Umschaltung zur Eingabe des Realteils
Im		Umschaltung zur Eingabe des Imaginärteils
.	.	Dezimalpunkt (-komma)
±		Vorzeichenwechsel
EXP		Eingabe der abgetrennten Zehnerpotenz
+ - * :	+ - * : (bzw. /)	Operationstasten
=	RETURN	Berechnung
CE		Korrektur der Eingabe
C		Löschen der letzten Rechnung, Reset
M+		Anzeige zum Speicherinhalt addieren
M in		Anzeige in Speicher kopieren

X<>M		Anzeige und Speicherinhalt austauschen
MR		Speicherinhalt ausgeben
([...		Klammer öffnen
...])		Klammer schließen
π	P	Kreiszahl π
1/x	R	Berechnung des Reziproken
x^2	Q	Berechnung des Quadrates
√x	W	Berechnung des Quadratwurzel
Sin		Sinuswert
Cos		Kosinuswert
e^x		Exponentialwert
ln		Natürlicher Logarithmus
OFF	ESC	Beenden des Taschenrechners

Folgende Besonderheiten sind zu beachten: Tritt während einer Berechnung ein mathematischer Fehler auf (Zahlbereichsüberlauf, Division durch Null, undefinierter Funktionswert ...), schaltet der Rechner auf ein Zwischenergebnis 0 und zeigt unterhalb der Ergebnisanzeige die Ausschrift *Fehler*.

Weiterarbeiten können Sie, indem Sie einen der Schalter *C* oder *CE* oder auch eine Zifferntaste betätigen. Befindet sich im internen Speicher eine von Null verschiedene reelle Zahl, so erscheint in der Anzeige ein *M*. Die Berechnung der Quadratwurzel erfolgt näherungsweise über eine Umwandlung in die trigonometrische Form. Daraus resultiert eine gewisse Ungenauigkeit (etwa ab der 10. Dezimalstelle). Außerdem wird nur eine Lösung der Wurzel ermittelt.

Die Eingabe der Zahlen erfolgt stets über die arithmetische Form:

z = a + b * i (*Realteil* und *Imaginärteil*)

Besitzt das Ergebnis einen Betrag kleiner 10^8, wandelt das Programm das Ergebnis in die trigonometrische Darstellung

z = r * [cos(w) + i * sin(w)]

(*Gradmaß*) *Betrag* und *Winkel w im* um.
Andernfalls erhalten Sie keine Werte für den Betrag und den Winkel. Wie aus der Tabelle ersichtlich, schalten Sie über die Schalter *Re* und *Im* oder die Tasten *r* und *i* zwischen der Eingabe der Komponenten der komplexen Zahl um. Die aktive Komponente wird jeweils links oben mit dem Kürzel *EINGABE* gekennzeichnet. Zwischen den Eingaben von Real- und Imaginärteil können Sie auch schnell mit der *TAB*-Taste umschalten.

Wollen Sie nach dem Start die Aufgabe (2+3*i) * (-2+4*i) lösen, wären folgende Tasten zu betätigen:

*2 Im 3 * 4 Re 2 ± RETURN*

Als Ergebnis erhalten Sie -16+2*i und für die trigonometrische Darstellung r = 16,1245 und Winkel = 172,875°.

Zur weiteren Erleichterung Ihrer Arbeit und vor allem für die weitere Verwendung mit anderen Windows-Programmen haben Sie die Möglichkeit, Zwischenergebnisse in die Zwischenablage zu kopieren bzw. aus dieser heraus einzufügen. Nutzen Sie dazu die Menüpunkt *Bearbeiten* | *Kopieren* und *Bearbeiten* | *Einfügen*, um den Zahlenwert in andere Windows-Anwendungen zu kopieren bzw. einzufügen.

Beachten Sie bitte, dass das Programm das Zwischenergebnis als Zeichenkette in der Form Realteil/Imaginärteil kopiert und einfügt, d.h. zum Beispiel für -3+2*i den String -3;2. Damit können Sie Werte z.B. direkt in Textverarbeitungen einfügen.

5.23 Berechnung einer komplexen Zahl

In diesem Teilprogramm werden mit zwei einzugebenden komplexen Zahlen a und b verschiedene Berechnungen durchgeführt. Die Real- bzw. Imaginärteile beider Zahlen tragen Sie in die vier Eingabezeilen ein.
Berechnet werden jeweils:

- die Polarform der komplexen Zahl
- absoluter Betrag der Zahl
- konjugiert komplexe Zahl
- die Potenzen z^2, z^3, z^i, i^z, z^z, $z^{3/2}$
- alle Lösungen von $\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$ und $\sqrt[4]{z}$
- die Hauptwerte der komplexen Funktionen LN(z), EXP(z), SIN(z), COS(z), TAN(z), COT(z), SEC(z), CSC(z), COSH(z), SINH(z), TANH(z), GAMMA(z) und die Besselschen Funktionen I0(z), J0(z)

Darüber hinaus erhalten Sie die Ergebnisse von Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Potenz der zwei Zahlen.
Alle Ergebnisse werden sowohl in der Form Realteil/Imaginärteil, als auch in Polarform angegeben. Dabei ist zu beachten, dass unter der Bezeichnung CIS(x) der Term COS(x) + i · SIN(X) zu verstehen ist. Die Ergebnisse können Sie über die Schalter in der oberen Leiste als Textdatei speichern, ausdrucken oder kopieren.

5.24 Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen

z = a+bi (Realteil a und Imaginärteil b)

können nicht mehr auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden, sondern werden nach Carl Friedrich Gauß in einer Zahlenebene dargestellt.
Dabei wird ein Koordinatensystem eingeführt, bei dem längs der Abszisse die Realteile a, längs der Ordinate b die Imaginärteile die komplexen Zahlen angetragen werden.

In diesem Teilprogramm können Sie durch Mausklick bis zu drei komplexe Zahlen auf der Gaußschen Zahlenebene festlegen und evtl. verschieben.
Das Programm stellte die Zahlen dar, ermittelt deren Real- und Imaginärteile, die Beträge sowie die Winkel für die trigonometrische Form

$$z = r \cdot [\cos(w) + i \cdot \sin(w)]$$

(Betrag r und Winkel w) der komplexen Zahlen. Zusätzlich werden die Summen der Zahlen berechnet und dargestellt.
Die Ergebnisse der Berechnung finden Sie in der Punkttabelle. Klicken Sie zur Anzeige auf das Feld *Tabelle anzeigen.*

5.25 Komplexe Einheitswurzel

Ist die Wurzel von 1 = √1 gesucht, so scheint es offensichtlich, dass nur 1 selbst die Lösung sein kann, da 1 * 1 = 1 ist. Ignoriert man die Definition der Quadratwurzel im Bereich der reellen Zahlen und lässt auch negative Zahlen als Lösung zu, so könnte man auch -1 als Lösung ansehen. Sucht man die dritte Wurzel ³√1, so ist 1 die einzige Lösung im Reellen.
Dies ändert sich aber sofort, wenn man den Zahlenbereich der reellen Zahlen verlässt und komplexe Zahlen betrachtet.

In dem Fall gilt, dass es für die n-te Wurzel von 1 genau n verschiedene (!) Lösungen gibt. Diese komplexen Lösungen kann man in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
Es zeigt sich, dass dann alle Lösungen der n-ten Wurzel von 1 ein regelmäßiges N-Eck bilden, von dem ein Punkt bei 1 + 0 * i liegt und dessen Umkreis ein Kreis mit dem Radius 1 ist.

In diesem Teilprogramm werden diese n-ten Wurzeln von 1, die sogenannten komplexen Einheitswurzeln, berechnet und grafisch in der Zahlenebene dargestellt. Den Wurzelexponenten stellen Sie am Rollbalken im Bereich von 1 bis 20 ein. Die Darstellung des Einheitskreises kann zu- und abgeschaltet werden. Zum Beispiel erhalten Sie für ³√1 die Lösungen: 1, -0,5 + 0,866i und -0,5 - 0,866 i.

Allgemein gilt: Ist eine komplexe, nicht reelle Zahl z die n-te Wurzel von 1, so ist auch die zu z konjugiert komplexe Zahl, die an der reellen Achse x gespiegelte Zahl, Wurzel von 1.

Neben den Wurzeln der Einheit können Sie hier auch für andere komplexe Zahlen die Wurzeln bestimmen lassen. Wählen Sie dazu an den Auswahlfeldern eine andere Ausgangszahl (Wahl zwischen 1, -1, i, -i) aus.
Entscheiden Sie sich für *frei wählbares z*, so wird die komplexe Zahl ½(√2 + i√2) voreingestellt. Diese Zahl können Sie verändern, indem Sie sie mit der Maus auf der Darstellungsfläche verschieben.

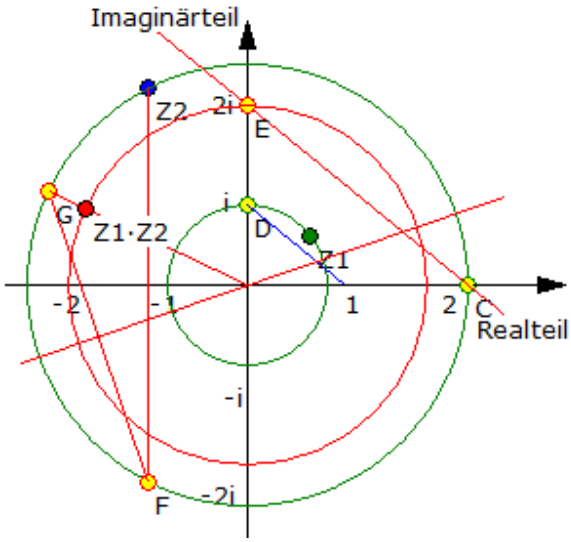
Die komplexen Einheitswurzeln von 1 liegen gleichmäßig auf dem Einheitskreis verteilt. Sie bilden ein regelmäßiges N-Eck. Am Markierungsfeld *Polygon* kann die

Darstellung dieses N-Ecks zugeschaltet werden.

5.26 Produkt und Quotient komplexer Zahlen

Neben der rein rechnerischen Ermittlung des Produkts und des Quotienten zweier komplexer Zahlen existieren auch sehr interessante grafische Verfahren, die Sie in diesen beiden Teilprogrammen testen können.

Nach dem Programmstart klicken Sie für die beiden Ausgangszahlen einfach mit der Maus auf die Gaußsche Zahlenebene. Nach Festlegung beider Zahlen zeichnet das Programm sofort alle Konstruktionsschritte und ermittelt so das Produkt bzw. den Quotienten.
Die zwei Operanden können Sie beliebig mit der Maus verschieben. Wählen Sie das Feld *Tabelle anzeigen*, so können Sie die zwei Zahlen auch direkt eingeben.



Im Beispiel sehen Sie die Konstruktion des Produkts.
Folgendes Verfahren wird genutzt:

1. Strecke OE zeichnen
2. Senkrechte zu OE in O zeichnen
3. Kreise um O mit Radius a (Kreis 1) und Radius b (Kreis 2) konstruieren
4. |b| ist der Schnittpunkt des Strahls OE mit dem Kreis 2
5. z ist der Schnittpunkt der Senkrechten in OE mit dem Kreis 1
6. Konstruktion der Parallelen zur Strecke Ez durch |b|
7. y ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Senkrechten
8. Kreis um O durch y zeichnen
9. Konstruktion der Winkelhalbierenden h des Winkels aOE
10. x ist der Spiegelpunkt von b an OE
11. w ist der Spiegelpunkt von x an der gezeichneten Winkelhalbierenden

Das gesuchte Produkt a * b ist dann der Schnittpunkt des Strahls Ow mit dem Radius durch y. Ob das Produkt der zwei Zahlen oder deren Quotient ermittelt wird, stellen Sie an Auswahlfeldern ein.
Eine Beschreibung des Verfahrens für den Quotienten finden Sie im Lexikon.

5.27 Komplexe Potenzen

Die Potenz einer komplexen Zahl z = r (cos ϕ + i · sin ϕ) wird nach der Moivreschen Formel zu

$$z^n = r^n \cdot [\ \cos(n\phi) + i \cdot \sin(n\phi)\ ] = r^n\, e^{in\phi}$$

berechnet.
Potenzen komplexer Zahlen auf dem Einheitskreis, d.h. r = 1, liegen somit wieder

auf dem Einheitskreis.

In diesem Programm werden Potenzen komplexer Zahlen veranschaulicht. Den *Exponenten* n stellen Sie am Rollbalken ein, wobei Werte von -3 bis 12 möglich sind.
Auf dem Einheitskreis werden entsprechend der eingestellten Anzahl von Punkten komplexe Zahlen z mit ihren Potenzen z^n durch eine Strecke in der Gaußschen Zahlenebene verbunden. Ja nach Exponenten entstehen wieder interessante Grafiken.

Normalerweise werden nur komplexe Zahlen des Betrages 1 betrachtet. An den Auswahlfeldern können Sie auch Zahlen auswählen, die eine Betrag 0,7, 0,8 oder 0,9 besitzen.
Originalzahlen und Potenzen können Sie mittels *Punkte anzeigen* auch darstellen lassen.

5.28 Quaternionen

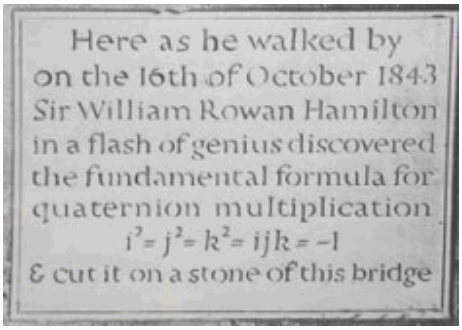
Die Quaternionen werden auch Hamilton-Zahlen genannt.
Die Quaternionen bilden eine Erweiterung der komplexen Zahlen. Statt einer imaginären Einheit i gibt es drei (i, j, k), so dass ein Quaternion eine Zahl der Form $a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k$ ist.
Die Addition von Quaternionen ist wie bei den komplexen Zahlen komponentenweise definiert. Hamilton hatte lange Zeit nach einer geeigneten Multiplikation gesucht:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$i\cdot j = k \qquad j\cdot k = i \qquad k\cdot i = j$

$j\cdot i = -k \qquad k\cdot j = -i \qquad i\cdot k = -j$

Diese Multiplikation ist nicht kommutativ.
In Mathematik und Physik gibt es Anwendungen der Quaternionen, aber sie haben nicht die Bedeutung erlangt, die Hamilton ihnen vorhergesagt hat. Ein aktuelles Anwendungsbeispiel sind 3D-Rotationen. Diese lassen sich mit Quaternionen beschreiben, wovon in der Computergrafik Gebrauch gemacht wird.



Die Entdeckung der Quaternionen durch Hamilton ist legendär.
Täglich führte der Weg William R.Hamilton an der Brougham Bridge vorbei, die heute Broombridge heißt. An dieser Stelle hatte Hamilton die entscheidende Idee. Er fand geeignete Multiplikationsregeln für die Quaternionen und ritzte diese mit einem Taschenmesser in einen Stein der Brücke. Leider sind die Zeichen längst verwittert. An der Brücke ist eine Gedenktafel angebracht.

In diesem Teilprogramm werden einfache Berechnungen mit Quaternionen durchgeführt.

Nach der Eingabe der Komponenten a, b, c und d zweier Quaternionen werden diese mit elementaren Operationen verknüpft sowie Funktionswerte berechnet, u.a. die Quadratwurzel, der Logarithmus, trigonometrische Werte usw.

5.29 Vektorrechnung

Dieses Unterprogramm ermöglicht einfache Berechnungen mit Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum.
Nach Eingabe der Koordinaten in die zugehörigen Felder für bis zu vier Vektoren und Betätigung von *RETURN* bzw. *Berechnung* wird Folgendes bestimmt:

- Beträge der Vektoren
- Koeffizienten von Einheitsvektoren (normierten Vektoren) in Richtung der vier eingegebenen Vektoren
- Projektionen der Vektoren aufeinander
- Koeffizienten der Linearkombination der ersten drei Vektoren bzgl. des vierten Vektors
- Koeffizienten der Linearkombination der ersten zwei Vektoren bzgl. des dritten, d.h. ein Test, ob die ersten drei Vektoren in einer Ebene liegen
- Winkel zwischen je zwei Vektoren
- Summe, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt, Tripelprodukt und vektorielles Vierfachprodukt verschiedener Vektorkombinationen
- Richtungskosinus und Winkel zu den Koordinatenachsen

Für zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ im Raum versteht man unter dessen Vektorprodukt den Vektor $\vec{c}$, welcher den Betrag $|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin(\angle\vec{a},\vec{b})$ besitzt und mit den beiden Ausgangsvektoren ein orientiertes Rechtssystem bildet. Zu beachten ist hierbei, dass weder Kommutativ- noch Assoziativgesetz für das Vektorprodukt gelten.

Sind drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ im Raum gegeben, so spannen diese einen Körper auf, ein Parallelepiped bzw. Spat. Das Volumen dieses Körpers ergibt sich zu $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \bullet \vec{c}$, dem Spatprodukt. Ist es nicht möglich, einige Werte zu berechnen, ist beispielsweise eine der Linearkombinationen nicht eindeutig bestimmt, wird *unbestimmt* angezeigt.
Im rechten Teil des Programmfensters werden die eingegebenen Vektoren in einem räumlichen Koordinatensystem dargestellt.

Unter *Darstellung von ...* wählen Sie aus, welche der vier Vektoren eingezeichnet werden. Über die kleinen Pfeilschalter bei *Drehung der x-y-Ebene, Drehung um z-Achse* und *Streckungsfaktor* können Sie die Lage und die Größe des Koordinatensystems nach Ihren Wünschen verändern.

5.30 Linearkombination von Vektoren

Dieses Teilprogramm *Linearkombination* ermöglicht es Ihnen, einen Vektor $\vec{c}$ als

Linearkombinationen zweier anderer Vektoren in der Ebene zu berechnen und grafisch zu veranschaulichen.
Nach Eingabe der x- und y-Komponenten der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und Betätigung des Schalters *Darstellung* berechnet das Programm die Linearkombination

$$\vec{c} = r\,\vec{a} + s\,\vec{b},$$

gibt die Koeffizienten r und s an und trägt die Vektoren in das Koordinatensystem ein.
Zusätzlich zeichnet das Programm die mit den Koeffizienten skalar multiplizierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und ergänzt diese zum Vektorparallelogramm. Der Schnittpunkt der parallel verschobenen Vektoren kennzeichnet den Vektor $\vec{c}$.

Zusätzlich können Sie den Einfluss der Koeffizienten r und s auf die Lage des Vektors $\vec{c}$ untersuchen. Verändern Sie dazu an den zwei mit kleinen Pfeilen versehenen Feldern *Faktor* die Werte der Koeffizienten r und s. Das Programm ermittelt sofort $\vec{c}$ und stellt den veränderten Vektor dar. Sollte einer der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich dem Nullvektor sein oder sind beide linear abhängig (gleiche Richtung), während $\vec{c}$ nichtlinear abhängig ist, so existiert keine Linearkombination, d.h., für r und s können keine Werte ermittelt werden. In diesem Fall meldet das Programm: *Keine Lösung.*

Während der Simulation können die Faktoren r oder s wahlweise kontinuierlich verändert werden. Die Geschwindigkeit der Änderung stellen Sie am Rollbalken neben dem *Simulation*-Schalter ein.

5.31 Vektorkomponenten

Ein Vektor kann im dreidimensionalen Raum als Addition (Linearkombination) von drei Vektoren aufgefasst werden, die längs der Koordinatenachsen orientiert sind.

In diesem Teilprogramm können Sie solche Vektorkomponenten grafisch veranschaulichen. Legen Sie dazu über die Rollbalken die x-, y- und z-Koordinate des Vektors fest. Das Programm stellt die Einzelvektoren und den Gesamtvektor dar.

Zur besseren Veranschaulichung können Sie die Darstellung verändern. Am Rollbalken *Winkel Alpha* verändern Sie die Ausrichtung der x- und y-Achse, d.h., Sie drehen die Darstellung um die senkrechte z-Achse.
Der Rollbalken *Winkel Beta* ermöglicht die Veränderung der x-y-Ebene, sodass die vertikale Blickrichtung auf die Darstellung verändert wird.

Auch hier ist eine Simulation möglich. Klicken Sie auf den Schalter, wird der Winkel Alpha kontinuierlich verändert, die dargestellten Vektoren werden um die z-Achse gedreht.
Darüber hinaus sind ebenso wieder alle Möglichkeiten der Weiterverarbeitung der Darstellung gegeben.

5.32 Grafische Vektoraddition

Zwei gegebene Vektoren können über die algebraische Verknüpfung hinaus sehr einfach grafisch addiert werden. Eine erste Möglichkeit dazu haben Sie im Teilprogramm *Linearkombination.*
In diesem weiteren Unterprogramm können Sie nun die grafische Vektoraddition für maximal acht Vektoren simulieren.

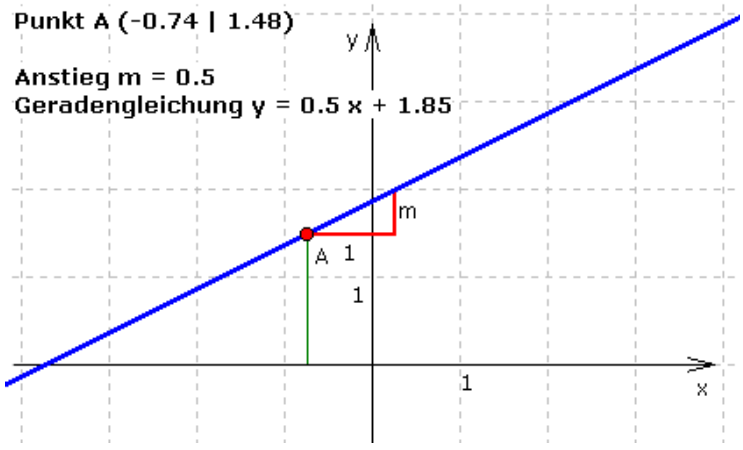
Nach dem Programmstart finden Sie in der Zeichenfläche den Angriffspunkt S (Ursprung) der Vektoren. Diesen können Sie mittels rechter Maustaste an einen beliebigen Ort ziehen. Einen Vektor tragen Sie ein, indem Sie auf das Darstellungsfeld links klicken. Das Programm zeichnet den Vektorendpunkt und beschriftet die Vektoren entsprechend.

Legen Sie mehrere Vektoren fest, ermittelt das Programm sofort durch grafische Addition den Gesamtvektor und kennzeichnet die für die Konstruktion notwendigen Vektorparallelogramme mit Strichlinien. Außerdem erhalten Sie in der Listbox die Beträge der Vektoren angezeigt.

Die Richtung bzw. den Betrag eingetragener Vektoren können Sie nachträglich ändern. Klicken Sie dazu auf den Vektorendpunkt und ziehen Sie diesen an die neue Stelle. Das Programm ermittelt erneut den neuen Gesamtvektor. Möchten Sie einen der Vektoren löschen, so klicken Sie mit der rechten Maustaste auf den Vektorendpunkt.

Anmerkung: Neben der Veranschaulichung von Vektoradditionen können Sie dieses Unterprogramm auch zur Demonstration von Krafteinwirkungen auf einen Körper nutzen. Nach der Festlegung einiger Vektoren ist es mit etwas Übung möglich, den Betrag einzelnen Vektoren so weit zu ändern, dass die resultierende Kraft auf den Körper Null wird, d.h. die Kräfte sich gegenseitig aufheben.

Vektorliste



Die Beträge und Richtungen der maximal zehn Vektoren können Sie nicht nur durch Aufziehen mit der Maus eingeben und ändern, sondern auch durch konkrete Eingabe der Vektoreigenschaften.
Nutzen Sie dazu die Tabelle im unteren Teil des Darstellungsfensters, in der für die schon festgelegten Vektoren die Beträge und Richtungswinkel (in Grad) ausgewiesen werden.

Dabei müssen Sie beachten, dass die Richtungswinkel im mathematisch positiven Sinne verarbeitet werden, d.h. 0° nach rechts, 90° nach oben, 180° nach links und entsprechend 270° nach unten. In dieser Liste können Sie alle Werte verändern, neue Vektoren hinzufügen bzw. Vektoren löschen. Ein Vektor gilt in diesem Teilprogramm als gelöscht, wenn dessen Betrag 0 ist.
Klicken Sie auf den Schalter *Übernehmen*, übernimmt das Programm die neuen Eingaben und zeichnet die Darstellung neu.

5.33 Geradengleichungen

Punktrichtungsform der Geradengleichung

Neben der allgemein bekannten Form der Geradengleichung in der Ebene Y = M X +N
kann man eine Gerade auch durch andere Stücke eindeutig beschreiben. Möglich sind u.a.

- zwei Punkte (Zweipunkteform der Geradengleichung)
- ein Punkte und eine Richtung, Anstieg (Punktrichtungsform der Geradengleichung)
- die Nullstellen der zugehörigen linearen Funktion, auch Achsenabschnitte genannt (Achsenabschnittsform der Geradengleichung)
- die Länge und die Richtung des Lotes auf die Gerade (Hessesche Geradenform)

Im Programm sind diese vier Möglichkeiten untersuchbar, in diesem Teilprogramm die Punktrichtungsform.
Zur Festlegung der Geraden klicken Sie zuerst auf die Darstellungsfläche. Durch diesen Punkt A verläuft die Gerade. Den Anstieg m stellen Sie am Rollbalken ein. Markieren Sie *Senkrechte in A* wird zusätzlich die zur Funktion senkrechte Gerade durch den Punkt A eingezeichnet, die im Allgemeinen ebenfalls eine lineare Funktion ist.

In der Tabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) können Sie die Koordinaten des Punktes A direkt eingeben. Während der Simulation wird der Anstieg m kontinuierlich verändert.

Zweipunkteform der Geradengleichung

Für die Zweipunkteform der Geraden müssen zwei Punkte A und B gegeben sein. Beide Punkte A und B können Sie per Mausklick und -bewegung verschieben. Das Programm ermittelt sofort die Gleichung der Geraden und stellt diese dar.
Der Anstieg dieser Geraden kann leicht über die Koordinaten der beiden Punkte berechnet werden:

$$m = \tan \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A) = \Delta y/\Delta x$$

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen*, so zeigt Ihnen das Programm die Tabelle

der zwei Punkte A und B. In die farbig unterlegten Felder können Sie neue Werte eingeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden.

Während der Simulation werden die Punkte A und B wahlweise senkrecht oder waagerecht verschoben. Damit können Sie den Einfluss der unterschiedlichen Lage der zwei Punkte zueinander untersuchen.

Erzeugen Sie durch linken Mausklick zwei weitere Punkte C und D, so wird eine zweite Gerade gezeichnet. Neben der Darstellung der Geraden ermittelt das Programm den Schnittpunkt beider Geraden. Die Tabelle enthält auch die Koordinaten des eventuell vorhandenen Schnittpunktes.
Die Ausgangswerte und Ergebnisse, d.h. die Punktkoordinaten, Geradengleichungen usw., werden nur angezeigt, wenn Sie das Feld *Ergebnisse* markieren.

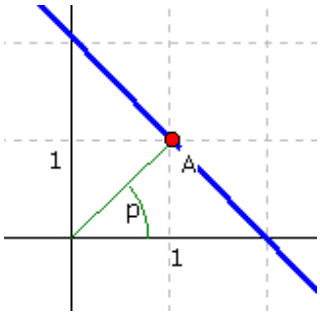
Achsenabschnittsform der Geradengleichung

Schneidet die Gerade die x-Achse im Punkt A(a;0) und die Ordinatenachse im Punkt B(0;b), so ergibt sich als Geradengleichung

$$x/a + y/b = 1,$$

die Achsenabschnittsform. Diese kann durch Multiplizieren mit a und b in die allgemeine Form und durch weiteres Umstellen in die Normalform transformiert werden.

In diesem Unterprogramm können Sie durch Anklicken und Ziehen der Punkte A und B mit der Maus die Achsenabschnitte a und b einstellen. Das Programm ermittelt sofort die Gleichung der Geraden, auch in Normalform, und stellt diese dar.
In die Tabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) können Sie weiterhin die Abszisse des Punktes A und die Ordinate von B direkt eingeben. Mit dem Markierungsfeld *Gerade CD* können Sie eine weitere Gerade darstellen. Für diese Gerade werden die gleichen Berechnungen durchgeführt sowie der Schnittpunkt mit der Geraden AB ermittelt.
Während der Simulation können Sie wahlweise A oder B verschieben lassen.



Hinweis: So elegant die Achsenabschnittsform ist, besitzt sie doch auch einen Nachteil: Geraden, die parallel zu den Achsen verlaufen, können so nicht beschrieben werden.

Hessesche Geradengleichung

Eine besondere Form, eine Gerade in der Ebene zu beschreiben, geht auf Hesse zurück.
Dabei wird vom Koordinatenursprung das Lot auf die Gerade gefällt. Dieses Lot bildet mit der x-Achse in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn!) einen Winkel φ und hat selbst die Länge p. Geht die Gerade nicht durch den Ursprung, so bestimmen Länge p und Winkel φ diese

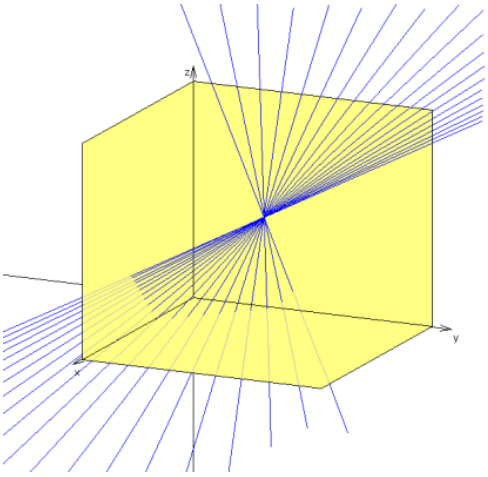
Gerade eindeutig.

Sehen Sie keinen Punkt A in der Darstellung, so klicken Sie in diesem Teilprogramm auf die Zeichenfläche, wodurch das Programm den Punkt A als Lotfußpunkt übernimmt, die Geradengleichung ermittelt und die Gerade zeichnet.

Verändern Sie nun durch einen Klick auf A und Bewegen der Maus die Lage des Punktes, wird sofort auch die Lage der Geraden erneuert.
Markieren Sie das Feld *zweite Gerade,* so wird eine weitere Gerade durch einen Punkt B gezeichnet, den Sie auch mit der Maus verschieben können. So können Sie zwei dieser Geraden direkt miteinander vergleichen.
Während der Simulation können Sie A wahlweise waagerecht oder senkrecht verschieben lassen.

5.34 Geradenschar

Dieses kleine Teilprogramm bietet die Möglichkeit, Geradenscharen im dreidimensionalen Raum zu veranschaulichen.
Tragen Sie dazu sowohl *Stützvektor* als auch *Richtungsvektor* der Schar ein. Als die Geradenschar beschreibender Parameter ist P vorgesehen. Für diesen Parameter geben Sie weiterhin Anfangs-, Endwert und Schrittweite ein. Nach Betätigung des Schalters *Schar darstellen* zeichnet das Programm die Geraden in ein räumliches Koordinatensystem.



Beispiel: Stützvektor (3 | 4 | 4), Richtungsvektor (P-1 | 2-P | 1), Alpha = 20°, Parameter P läuft von 0 bis 2 in Schritten von 0,1

Zur Erhöhung der Anschaulichkeit können Sie wahlweise Teile der x-z-Ebene, x-y-Ebene oder y-z-Ebene auswählen. Die von der Fläche verdeckten Geradenteile werden dann andersfarbig dargestellt.

Die Lage der Koordinatenachsen können Sie über den Rollbalken *Alpha* nach Ihren Wünschen verändern. Damit können Sie die Anschaulichkeit erhöhen. Für einen Winkel von mehr als 45° wird nur noch eine Koordinatenebene gezeichnet.

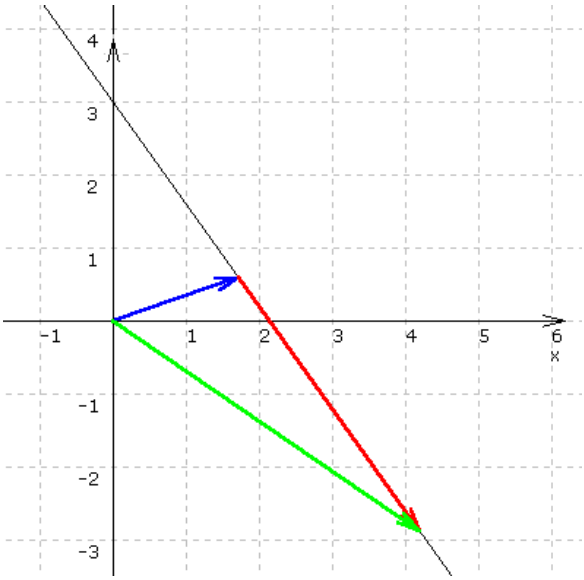
Beachten Sie: Die Berechnung und Darstellung erfordert eine hohe Rechenleistung. Auf etwas langsameren Rechnern kann u.a. die neue Darstellung nach Änderung des Winkels Alpha etwas Zeit benötigen.

5.35 Gerade und Vektor

Dieses Unterprogramm ermöglicht die Untersuchung des Zusammenhangs

zwischen Vektoren und einer Geradengleichung in der Ebene. Dazu können Sie wahlweise festlegen:
Für die Geradengleichung $Y = m \cdot X + n$

- den y-Abschnitt, d.h. den Abstand des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse
- den Anstieg m der Geraden
- als Vektoren
- den Stützvektor $\vec{a} = (a_x \mid a_y)$ der Geradengleichung $\vec{x} = \vec{c} = \vec{a} + t\,\vec{b}$; $t \in R$
- den Richtungsvektor $\vec{b}$
- oder wahlweise den Ortsvektor $\vec{c}$



eines Punktes auf der Geraden. Betätigung der Rollbalken verändert dabei bei den Vektoren deren x-Komponente. Die zugehörigen y-Werte werden automatisch derart angepasst, dass die Punkte auf der Geraden liegen. Gleichzeitig ermittelt das Programm den Faktor t der vektoriellen Geradengleichung.

Im Beispiel wurde für die Gerade ein Anstieg von -1,4 und eine Verschiebung auf der y-Achse von 6 Einheiten eingestellt. Wählt man nun am Rollbalken *Stützvektor* den Wert der x-Koordinate von 1,8, stellt das Programm den zur Gerade gehörenden Stützvektor $\vec{a} = (1{,}72 \mid 0{,}59)$ ein. Analog erhalten Sie für eine x-Komponente von 4,2 des Richtungsvektors für diesen $\vec{b} = (2{,}48 \mid -3{,}47)$.

Insgesamt ergibt sich damit für den ebenso eingestellten Ortsvektor eines Punktes auf dieser Geraden

$$\vec{c} = (4{,}2 \mid -2{,}88) = \vec{a} + 1\,\vec{b} = (1{,}72 \mid 0{,}59) + 1\,(2{,}48 \mid -3{,}47)$$

Schalten Sie das Markierungsfeld *Vektoren anpassen* ein, wird bei Veränderung des Richtungs- bzw. Ortsvektors der jeweils andere Vektor automatisch angepasst und entsprechend dargestellt.

5.36 Achsenabschnittsform einer Ebene

Eine Ebene im dreidimensionalen Raum kann im Allgemeinen auch durch drei Punkte eindeutig beschrieben werden. Eine besondere Form, die Achsenabschnittsform, liegt vor, wenn diese drei Punkte die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch die Ebene sind. Haben diese die Koordinaten A(x, 0, 0), B(0, y, 0) und C(0, 0, z), so ergibt sich die Ebenengleichung:

$$1 = X / a + Y / b + Z / c$$

Dabei ist zu beachten, dass nicht alle Ebenen im Raum derart beschrieben werden können. Z.B. kann so eine zur x-y-Ebene parallele Ebene nicht angegeben

werden, da in diesem Fall die Durchstoßpunkte der x- bzw. y-Achse nicht existieren.
In diesem Teilprogramm können Sie durch Anklicken und Ziehen der Punkte A, B bzw. C mit der Maus die Achsenabschnitte a, b und c einstellen. Das Programm ermittelt sofort die Gleichung der Ebene und stellt diese dar.
Während der Simulation können Sie entscheiden, welcher der drei Punkte A, B oder C auf der zugehörigen Achse verschoben wird.

5.37 Vektorielle Kreisgleichung

Ist ein Kreis in der Ebene mit dem Mittelpunkt (c,d) und dem Radius r gegeben, so kann dieser durch die Gleichung

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

eindeutig beschrieben werden. Neben dieser Gleichung der Koordinatengeometrie existiert aber auch eine vektorielle Form. Ausgehend vom Ortsvektor des Mittelpunktes kann jeder Punkt X des Kreises über $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ ermittelt werden.

In diesem Teilprogramm können Sie diese Darstellungsform untersuchen.
Klicken Sie zur Festlegung des Kreismittelpunktes zuerst in die Darstellungsfläche, indem Sie diesen evtl. verschieben. Den Radius stellen Sie am Rollbalken ein. Das Programm stellt den Kreis sofort dar und gibt die vektorielle Kreisgleichung an.

Verändern Sie nun am anderen Rollbalken *Position P* die Lage des Punktes P auf der Peripherie des Kreises, so können Sie die Gültigkeit der Gleichung nachvollziehen. Während der Simulation wird dies automatisch durchgeführt.
In der Tabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) erhalten Sie die Koordinaten der beiden Punkte. Für den Kreismittelpunkt M können Sie auch neue Werte eingeben.

5.38 Tangenten an einen Kreis

Sind ein Kreis mit dem Radius r in Mittelpunktslage und auf der Peripherie ein Punkt $P(x_0; y_0)$ gegeben, so beschreibt die Gleichung

$$x\,x_0 + y\,y_0 = r^2$$

die Tangente, die in P an den Kreis gelegt wird.

Erstaunlicherweise besitzt die Gleichung $x\,x_0 + y\,y_0 = r^2$ auch für Punkte innerhalb und außerhalb des Kreises Bedeutung.
Die beschriebene Gerade wird Polare des Punktes P bezüglich des Kreises genannt. Liegt P außerhalb des Kreises, schneidet die Polare den Kreis in zwei Punkten A und B. Diese Punkte sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die man von P aus an den Kreis legen kann.

In diesem Teilprogramm werden für einen Kreis und einen außerhalb liegenden

Punkt P die Polare und die zwei Tangenten ermittelt und gezeichnet. Den Mittelpunkt M des Kreises können Sie erneut mit der Maus verschieben, d.h., hier muss der Kreis nicht unbedingt in Mittelpunktslage vorliegen. Ebenso ist der Ort des Punktes P veränderbar. Die Größe des Radius stellen Sie am Rollbalken ein.

Während der Simulation können Sie die Punkte M oder P waagerecht bzw. senkrecht verschieben lassen.
Die konstruktive Ermittlung der Berührungspunkte A und B ist eine relativ einfache Aufgabe. A und B ergeben sich als Schnittpunkte des Thaleskreises über dem Durchmesser MP mit dem Ausgangskreis.

Dagegen ist die rechnerische Ermittlung der Tangentengleichung eine beliebte und nicht ganz einfache Aufgabe der Analytischen Geometrie der Ebene. Führt man für den Kreis und den Punkt P zuerst eine Koordinatenverschiebung durch, sodass der Kreismittelpunkt in den Ursprung gelangt, so können die Tangentenberührungspunkte nun über den Schnitt des Kreises mit der Polaren ermittelt werden.
In der Punkttabelle finden Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes M, des Punktes P außerhalb des Kreises und die Berührungspunkte. Für M und P können Sie neue Werte eingeben.

5.39 Lagebeziehung zweier Kreise

Dieses Teilprogramm untersucht die Lagebeziehungen zwischen zwei Kreisen in der Ebene.
Dabei legen Sie die Kreise fest, indem Sie deren Mittelpunkte M und M' mit der Maus im Koordinatensystem verschieben und die Kreisradien an den zwei Rollbalken einstellen.
Je nach Lage der Kreise können diese keinen Punkt gemeinsam haben, sich in einem Punkt berühren oder in zwei Punkten schneiden. Das Programm analysiert die Lage und ermittelt gegebenenfalls die Schnittpunkte.

Dabei kommt einer Geraden, der sogenannten Potenzlinie der beiden Kreise, eine besondere Rolle zu: Schneiden sich die beiden Kreise, dann verläuft die Potenzlinie durch die Schnittpunkte, tangieren sich beide Kreise, so ist die Potenzlinie die gemeinsame Tangente. Rechnerisch entsteht die Gleichung der Potenzlinie durch die Subtraktion der beiden Kreisgleichungen.

Markieren Sie das Auswahlfeld, dann zeichnet das Programm diese Potenzlinie in das Koordinatensystem ein. In jedem Fall erhalten Sie die Gleichung dieser Linie.

Existieren Schnittpunkte der zwei Kreise, so werden die Koordinaten dieser Punkte in der Punktetabelle angezeigt.
In dieser Tabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) erhalten Sie ebenso die Koordinaten der beiden Kreismittelpunkte. Für die Mittelpunkte können Sie hier auch neue Werte eingeben.

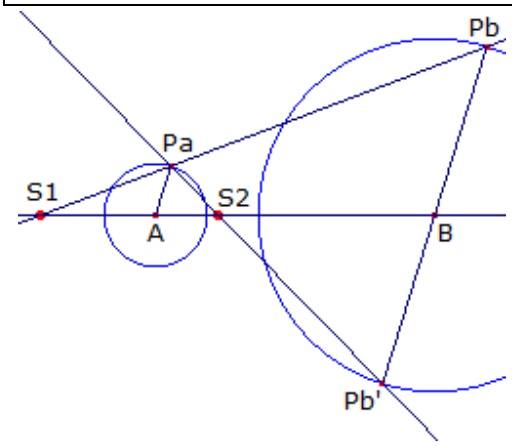
Lagebeziehung dreier Kreise

Markieren Sie das Feld *3. Kreis*, so zeichnet das Programm einen dritten Kreis in das Koordinatensystem ein. Auch dessen Radius stellen Sie am Rollbalken ein.

Das Programm berechnet die Potenzlinien zwischen dem 1. und 3. Kreis sowie zwischen den 2. und 3. Kreis und zeichnet diese ein. Die drei Potenzlinien schneiden sich stets in einem Punkt, dem Potenzpunkt P der drei Kreise. Dessen Koordinaten finden Sie ebenfalls in der Punkttabelle.

Während der Simulation können Sie wahlweise die Mittelpunkte M oder M' waagerecht oder senkrecht verschieben.

5.40 Ähnlichkeitszentren zweier Kreise



Gegeben sind zwei Kreise. In diese werden zueinander parallel liegende Radien gezeichnet und deren Peripheriepunkte miteinander verbunden.
Da zwei Kreise stets zueinander ähnlich sind, schneiden sich diese Geraden in einem Punkt, dem Ähnlichkeitszentrum oder homothetischen Zentrum der Kreise. Dabei existieren zwei derartige Punkte, ein Zentrum außerhalb der Kreise und ein Zentrum (siehe Abbildung) zwischen den Kreisen.

S1 heißt dann äußerer Ähnlichkeitspunkt, S2 innerer Ähnlichkeitspunkt. Beide Punkte können konstruktiv ermittelt werden. Dazu zeichnet man zwei zueinander parallele Durchmesser in die Kreise ein. Werden die Schnittpunkte mit den Kreisen verbunden, so schneiden diese die Gerade zwischen den Kreismittelpunkten in den Ähnlichkeitszentren.

In diesem Teilprogramm werden die Ähnlichkeitszentren zweier Kreise ermittelt. Die Lage und Größe der Kreise stellen Sie ein, in dem Sie die Kreismittelpunkte A und C bzw. die Punkte auf den Peripherien B und D mit der Maus verschieben. Die Art des dargestellten Zentrums wählen Sie an den Markierungsfeldern.
Während der Simulation werden ein Punkt P auf dem 1.Kreis bewegt und die Ähnlichkeitsstrahlen sowie die Radien gezeichnet.
In dem Teilprogramm Satz von Monge wird eine spezielle Beziehung zwischen den Ähnlichkeitszentren von drei Kreisen demonstriert.

5.41 Operationstafeln

Das "Kleine 1x1" wird schon in der Grundschule gelehrt und sollte eigentlich jedem erwachsenen Menschen keine Probleme bereiten. Da wir ein

Dezimalsystem, 10 Ziffern, benutzen, gibt es auch 100 Multiplikationsaufgaben in diesem "1x1". Oft wird spekuliert, ob wir vielleicht ein Zahlensystem auf der Basis der 8 benutzen würden, wenn die Natur uns 8 statt 10 Finger mitgegeben hätte. Wahrscheinlich wäre dies so, aber genau weiß man es nicht. Immerhin sind sich Wissenschaftler einig, dass das Zählen mithilfe der Finger, unmittelbare Auswirkung auf unser Zahlensystem hatte.

Auch für ein anderes Positionssystem ist die Berechnung der Multiplikationstafel möglich. Dies können Sie in diesem Teilprogramm durchführen.
Stellen Sie zuerst an den Pfeilschaltern *Zahlensystembasis* die Grundzahl von 2 bis 22 ein. Ist das Feld *Multiplikation* markiert, gibt Ihnen das Programm sofort das Kleine 1x1 in diesem Zahlsystem aus. Analog erhalten Sie auch eine Additionstafel.

Zum Beispiel würden Sie für das 16er-System für das Produkt D·E das Ergebnis B6 erhalten. Da der Umgang mit diesen Zahlkonstruktionen ungewöhnlich ist, können Sie auch Dezimalzahlen anzeigen lassen. Markieren Sie dazu das Feld *Dezimalsystem.*

Operationstafeln der Restklassenringe Z_p

p sei eine natürliche Zahl. Man kann beim Addieren und Multiplizieren von ganzen Zahlen jede auftretende Zahl durch den Rest, der sich bei der Division durch p ergibt, ersetzen. Ist z.B. p = 3, so würde man nicht mehr zwischen 2 und 5 unterscheiden!
Ordnet man nun alle Zahlen in die Mengen ein, die den gleichen Rest lassen, so ergeben sich die sogenannten Restklassen modulo p. Die Menge der Restklassen modulo p hat damit p Elemente und wird als Z_p bezeichnet.

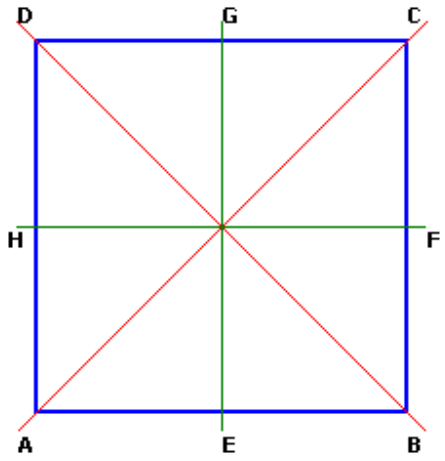
Innerhalb der Menge dieser Restklasse kann nun addiert und multipliziert werden. Dabei ergibt sich stets wieder eine Restklasse. Da nun noch das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz sowie weitere Regeln gelten, ergibt sich der Restklassenring Z_p (Näheres dazu siehe Lexikon).

Markieren Sie das Feld *Restklassen*, berechnet das Programm für p = 2, ..., 22 die Additions- und Multiplikationstafel des Restklassenrings Z_p.

Interessant ist nun, dass man anhand der Multiplikationstafel sofort erkennen kann, ob der Restklassenring nicht sogar Restklassenkörper ist. In diesem Fall wäre die Division eindeutig möglich. Es zeigt sich, dass nur für Primzahlen p ein Restklassenkörper entsteht. In den anderen Fällen finden Sie in der Multiplikationstafel sogenannte Nullteiler.
Zum Beispiel gilt in Z_{10} für die Produkte 2·5 = 4·5 = 0 (!). Auch wenn dies ungewöhnlich ist, so ist es doch korrekt!

5.42 Bewegungsgruppe des Quadrates

Ist ein Quadrat ABCD gegeben, so kann dieses durch Drehung oder Spiegelung so in der Ebene bewegt werden, dass es wieder zur Deckung kommt, wenngleich auch mit anderen Eckpunkten.



Insgesamt gibt es acht derartige Bewegungen: die identische Abbildung, die Drehung um den Schwerpunkt mit 90°, 180° oder 270°, die Spiegelungen an den zwei Diagonalen AC und BD sowie die zwei Spiegelungen um die Mittellinien HF und EG.

Führt man zwei dieser Bewegungen nacheinander aus, so ist dieses Ergebnis auch durch eine einzige der Bewegungen erreichbar. Außerdem gibt es stets die Möglichkeit, mit einer einzigen Abbildung wieder die Ausgangssituation zu erreichen. Da nun die identische Abbildung auch noch "neutral" ist, bildet die Menge dieser Bewegungen mit der Nacheinanderausführung eine algebraische Gruppe, die Bewegungsgruppe D4 des Quadrats.

In diesem Teilprogramm können Sie die genannte Gruppe untersuchen. Dazu können Sie jeweils zwei Bewegungen an den aufklappbaren Listen auswählen. Klicken Sie nun auf *Ausführen,* simuliert das Programm die Bewegungen und ermittelt das Resultat.

Dabei werden Sie feststellen, dass die Reihenfolge der Bewegungen von Bedeutung ist. Zum Beispiel ergibt die Spiegelung an FH und dann an BD eine Gesamtdrehung von 90°. Spiegelt man erst an BD und dann an FH, erhält man eine Drehung von 270° - damit ist die Nacheinanderausführung nicht kommutativ, die Gruppe ist nicht abelsch.

Die dihedrale Gruppe D4 besitzt zehn verschiedene Untergruppen. Markieren Sie eine von ihnen, dann finden Sie in den aufklappbaren Listen nur noch die Bewegungen, die zu der Untergruppe gehören.

5.43 Permutationsgruppen

Unter einer Permutation einer Menge M versteht man die eineindeutige Abbildung der Menge M auf sich, d.h. eine Zuordnung s, bei der jedem Element a von M ein Bild s(a) entspricht und jedes Element von M das Bild genau eines a ist. Ist M endlich und sind ihre Elemente mit den Nummern 1, 2, ..., n versehen, so kann man jede Permutation vollständig durch ein Schema beschreiben, indem man unter jeder Nummer k die Nummer s(k) des Bildelements schreibt.

Unter dem Produkt st zweier Permutationen s und t wird diejenige Permutation verstanden, die entsteht, wenn man zuerst die Permutation t und dann auf die

Bildmenge die Permutation s ausübt.
Dabei bildet die Menge der Permutationen einer Menge M mit der Produktbildung eine Gruppe, die Permutationsgruppe.
Ist die Menge M endlich mit n Elementen, so spricht man von der symmetrischen Gruppe σ_n oder S_n. Der Name wurde gewählt, weil die Funktionen, die bei allen Permutationen der Gruppe invariant bleiben, die symmetrischen Funktionen sind.
Die Menge aller geraden Permutationen einer Menge von n Elementen bildet eine nicht-triviale Untergruppe der symmetrischen Gruppe, die alternierende Gruppe.

In diesem Teilprogramm werden die Gruppentafeln der symmetrischen und alternierenden Gruppen vom Grad 3 bis 6 berechnet.

Beachten Sie bitte, dass zum Beispiel die symmetrische Gruppe S_6 720 Elemente enthält, d.h. die Gruppentafel rund 50000 Einträge. Auch auf schnellen Computern wird für die Berechnung einige Zeit benötigt.

Markieren Sie *Permutation anzeigen*, wird in der Tabelle die exakte Permutation angezeigt, andernfalls deren Nummer. Wählen Sie unter *Permutation P1* und *Permutation P2* zwei Einträge aus, berechnet das Programm deren Verknüpfung. Interessant ist, dass diese Nacheinanderausführung im Allgemeinen nicht (!) kommutativ ist.

5.44 Dieder-Gruppen

Die n-te Dieder-Gruppe (di-eder gesprochen) wird mit D_n oder D_{2n} bezeichnet. Sie ist für n > 2 geometrisch erklärt als Symmetriegruppe der Drehungen und Spiegelungen eines regelmäßigen n-Ecks ("Dieder" = "Zweiflach").

Die Gruppe D_1 besteht neben der Identität nur aus einer einzigen Spiegelung und hat somit zwei Elemente. Die Gruppe D_2 beschreibt die Symmetriegruppe eines nichtquadratischen Rechtecks oder einer Strecke. D_3 ist die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks, D_4 die Symmetriegruppe des Quadrats usw.

Die Dieder-Gruppe wird von zwei Abbildungen, der Drehung D um den Winkel $\alpha = 2\pi / n$ und der Spiegelung S an der Symmetrieachse durch den Punkt 1 erzeugt. Das Besondere daran ist, dass die Dieder-Gruppen ab Ordnung 3 nicht mehr kommutativ sind.

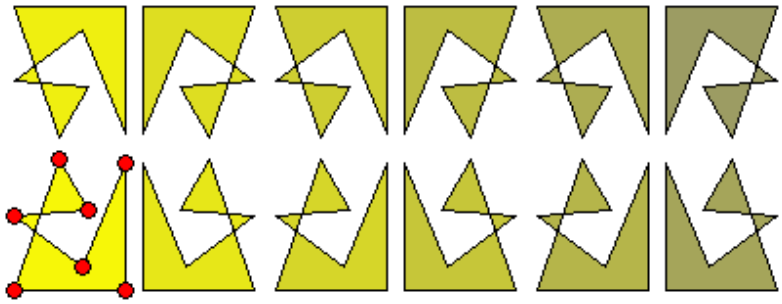
In diesem kleinen Teilprogramm können Sie die Gruppentafeln der Dieder-Gruppen für n = 2 bis 11 berechnen lassen.

5.45 Fries-Gruppen

Endliche Transformation in der Ebene spielen in der Geometrie eine bedeutende Rolle, zum Beispiel bei der Betrachtung von Parkettierungen. Diese Transformationen können als eine endliche Gruppe aufgefasst werden, wobei die

sogenannten Friesgruppen diejenigen Bewegungen sind, deren Verschiebung nur eine Richtung aufweist.

Ein Fries ist dabei ein theoretisch unendlich langes, periodisches Ornament, das zwischen zwei parallelen Geraden angeordnet ist. Damit es periodisch ist, muss zu seinen Symmetrie-Abbildungen, die es mit sich selbst zur Deckung bringen, eine kürzeste Parallelverschiebung in Richtung dieser Geraden gehören.
Insgesamt existieren sieben verschiedene Friesgruppen.
Dies bestehen aus:



1) nur Translationen
2) Translationen und Drehungen um 180°
3) Translationen und Spiegelungen an waagerechter Mittelachse, d.h. auch Gleitspiegelungen
4) Translationen und Spiegelungen an senkrechten Achsen
5) Translationen, Spiegelungen an waagerechten und senkrechten Achsen, d.h. auch Gleitspiegelungen
6) Gleitspiegelungen und Spiegelungen an senkrechten Achsen
7) nur Gleitspiegelungen und die sich daraus ergebenden Translationen

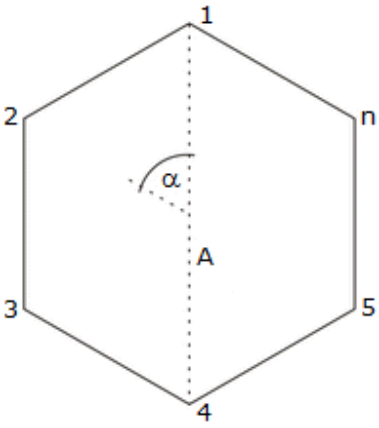
In diesem Teilprogramm werden die sieben Friesgruppen veranschaulicht. Die Abbildung zeigt ein Fries des Typs 4:
Auf der linken Seite wählen Sie an den Auswahlfeldern die Art der Friesgruppe. Das Programm zeichnet sofort das entsprechende Fries, voreingestellt mit Vierecken.

Die Anzahl und Lage der Punkte des zu zeichnenden Vielecks können Sie verändern.
Ein linker Mausklick auf eine freie Stelle erzeugt einen neuen Punkt, ein rechter Mausklick auf einen Punkt löscht diesen. Klicken Sie links auf einen Punkt, so können Sie diesen, wie üblich, verschieben.
Zur Darstellung nutzt das Programm automatisch ermittelte Abstände. Wünsche Sie dies nicht, so entfernen Sie die Markierung bei *automatischer Abstand* und verändern die Abstände an den Rollbalken.

5.46 Dihedrale Symmetrie

Die n.te Diedergruppe (di-eder gesprochen) wird bezeichnet mit D_n oder D_{2n}.

Sie ist für n > 2 geometrisch erklärt als Symmetriegruppe der Drehungen und Spiegelungen eines regelmäßigen n-Ecks ("Dieder" = "Zweiflach").
Die Gruppe D_1 besteht neben der Identität nur aus einer einzigen Spiegelung und hat somit zwei Elemente. Die Gruppe D_2 beschreibt die Symmetriegruppe eines nichtquadratischen Rechtecks oder einer Strecke.



D_3 ist die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks, D_4 die Symmetriegruppe des Quadrates.

Die Diedergruppe wird von zwei Abbildungen erzeugt, der Drehung um den Winkel $\alpha = 2\pi / n$ und der Spiegelung A an der Symmetrieachse durch den Punkt 1. Die einzelnen Erzeuger erzeugen je eine Untergruppe der Diedergruppe, die isomorph zu den zyklischen Gruppen Z_n beziehungsweise Z_2 sind. Die Ordnung der n.ten Diedergruppe ist 2n.

In diesem Teilprogramm werden die Drehungen und Spiegelungen, d.h. die dihedrale Symmetrie, dieser Dieder-Gruppen für n = 1, ..., 16 veranschaulicht.
An dem Rollbalken *Ordnung* stellen Sie die Größe von n ein. Zur Veranschaulichung werden kleine Achtecke verwendet. Deren Form verändern Sie, in dem Sie einen der Punkte A, B, C oder D mit der Maus verschieben.

Ist das Feld *Symmetrieachsen* markiert, zeichnet das Programm diese ein. Mit dem *Drehwinkel* können Sie das Ausgangsachteck so bewegen, dass es mit anderen Achtecken zur Deckung kommt. Während der *Simulation* wird der Drehwinkel kontinuierlich verändert.

5.47 Mengen

Haben Sie Teilmengen einer Grundgesamtheit, z.B. Zahlmengen aus den natürlichen Zahlen (Menge der geraden Zahlen, Menge der Primzahlen, Menge der durch 3 und 7 teilbaren Zahlen usw.), vorliegen, so können auch hiermit Operationen durchgeführt werden.
Eine solche Mengenalgebra sieht vor allem vor:

- die Vereinigung zweier Mengen A und B (Operator $\cup$)
- den Durchschnitt zweier Mengen A und B (Operator $\cap$)
- die Differenz einer Menge A von einer Menge B (Operator \)
- die symmetrische Differenz (Operator Δ) und
- die Komplementmenge bezüglich der Grundgesamtheit

In diesem Unterprogramm sind drei Mengen A, B und C einer Gesamtmenge gegeben. Für diese können Sie Operationen definieren. Das Programm ermittelt nach Betätigung von *RETURN* bzw. des Schalters *Darstellung*, welche Teile der Mengen, d.h. welche Elemente, in der Ergebnismenge enthalten sind. Gleichzeitig erhalten Sie eine grafische Veranschaulichung in einem Mengendiagramm, dem sogenannten Venn-Diagramm.

Für die Operationszeichen müssen Sie wegen der programmbedingten Beschränkung des Zeichensatzes die in der Legende angegebenen Zeichen verwenden, für den Term A $\cap$ (B $\cup$ C) $\cup$ (B $\cap$ C) Δ (A \ C) muss also zum Beispiel A * (B + C) + (B * C) # (A \ C) eingegeben werden. Ein eingegebener Term (A *

B) + (A * C) + A entspricht in der allgemein üblichen Schreibweise damit (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) ∪ A.

Das Programm ermöglicht die Eingabe von zwei Termen. Damit haben Sie die Möglichkeit, auf einfachem Weg die Äquivalenz zweier Terme grafisch zu untersuchen und nachzuweisen. Mit dem Markierungsfeld *mehrfarbig* gestalten Sie Ihre Darstellung mit verschiedenen Farben.
Wählen Sie einen Eintrag aus der Liste *Mengengesetze* aus, so werden links und rechts Mengenterme eingetragen, die äquivalente Ergebnisse liefern.
Entfernen Sie die Markierung am Feld *drei Mengen*, so werden nur die Mengen A und B dargestellt. Beachte Sie bitte, dass der Mengenterm dann auch keinen Eintrag mit der Menge C enthalten sollte.

5.48 Elemente von Mengen

Dieses kleine Teilprogramm stellt zwei Mengen 1 und 2 dar. Mit einem linken Mausklick können Sie bis zu 16 "Elemente" A bis P festlegen, durch Bewegung der Maus verschieben bzw. mit rechtem Mausklick wieder löschen.

Je nachdem, wo Sie die Elemente positionieren, ermittelt das Programm, ob das Element in der Menge 1 bzw. 2, deren Komplementmengen sowie der Durchschnittsmenge und Vereinigungsmenge liegt.

5.49 Aussagenlogik

"I know what you're thinking about," said Tweedledum; "but it isn't so, nohow."
"Contrariwise," continued Tweedledee, "if it was so, it might be, and if it were so, it would be, but as it isn't, it ain't. That's logic" Lewis Carroll

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfasst. Mathematische Aussagen sind sprachliche Ausdrücke (mitunter in symbolischer Schreibweise), die nur einen der beiden Wahrheitswerte "Wahr" (1, TRUE, L) oder "Falsch" (0, FALSE, 0) annehmen können. Dabei ist es vollkommen unerheblich, ob die Mathematiker heutzutage den Wahrheitswert einer Aussage schon bestimmen können oder nicht. Zwar weiß zum Beispiel noch niemand, ob die Aussage

Es existieren unendliche viele Primzahlzwillinge

wahr oder falsch ist, dennoch ist nur eins von beiden möglich.

Mittels klassischer Aussagefunktionen (Operatoren und Operationen mit Aussagen) können zusammengesetzte Aussagen auf ihren Wahrheitswert geprüft werden.
Im Programm sind unter diesem Teilprogramm als Aussagefunktionen vordefiniert:

	Operator	
Negation (NOT,	-	Ist eine einstellige Aussagefunktion

Nicht)		(Operator), welche genau dann wahr ist, wenn die Ausgangsaussage falsch ist.
Konjunktion (AND, Und):	* oder &	Ist wahr, wenn beide Aussagen gleichzeitig wahr sind.
Disjunktion (OR, Oder)	+ oder |	Ist wahr, wenn einer der beiden Aussagen wahr ist.
Alternative (XOR, Entweder Oder)	#	Ist wahr, wenn entweder die eine oder die andere Aussage wahr ist.
Implikation (Wenn ... so)	>	Ist nur falsch, wenn aus einer wahren Aussage eine falsche geschlussfolgert werden soll.
Äquivalenz (Genau dann, wenn)	=	Ist wahr, wenn beide Aussagen gleichen Wahrheitswert besitzen.
NAND-Operation:	\	Ist wahr, wenn beide Aussagen falsch sind. Diese Operation entspricht -A & -B.
NOR-Operation:	/	Ist falsch, wenn beide Aussagen wahr sind. Diese Operation entspricht -A | -B.

Für die vier möglichen verschiedenen Belegungen der Aussagen A und B ergibt sich die Wahrheitswertetabelle:

A	B	A*B	A+B	A#B	A>B	A=B	A\B	A/B
1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1

Zu bemerken ist hier noch, dass mittels NAND- und NOR-Operation sowie Negation jede andere Aussagenoperation dargestellt werden kann.
In diesem Unterprogramm können Sie bis zu sieben Aussagen (A, B, C, D, E, F und G) durch diese acht Funktionen verknüpfen. Es gilt, dass die zusammengesetzte Aussage eine Funktion der Ausgangsaussagen ist: H = f(A, B, C, D, E, F, G). Nach Quittierung Ihrer Eingabe mit dem Schalter *Berechnung* wird eine Wahrheitswertetabelle für alle möglichen Belegungen der Aussagen mit "Wahr (1)" oder "Falsch (0)" bestimmt.
Beispiel: Für die aussagenlogische Verbindung A*(-B>-A)>B=C erhalten Sie die Wahrheitswertetabelle

A	B	C	H	A	B	C	H
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

Da die linke Seite der Äquivalenz die allgemeingültige Regel des Indirekten Schlusses darstellt, ist diese Aussage genau dann wahr, wenn C wahr ist. Die besondere Bedeutung derartiger Aussagenverbindungen liegt in der Begründung

mathematischer Beweistechniken, bildet die Grundlage der Mengentheorie und findet sich in der Schaltalgebra, der Grundlage moderner Computertechnik, wieder.

Außer der Wahrheitswertetabelle bestimmt das Programm auch die ausgezeichnete disjunktive Normalform des logischen Ausdrucks. Unter einer disjunktiven Normalform versteht man die disjunktive Verknüpfung von Konjunktionstermen. Enthält die disjunktive Normalform ausschließlich Minterme, d.h., jede Variable tritt genau einmal je Konjunktion auf, so heißt diese Normalform ausgezeichnete disjunktive Normalform. Für das genannte Beispiel erhalten Sie (A+B+C)*(-A+B+C)*(A+-B+-C)*(-A+-B+-C)

6. Arithmetik

"Mankind always sets itself only such problems as it can solve; ... it will always be found that the task itself arises only when the material conditions for its solution already exist or are at least in the process of formation." Karl Marx

Innerhalb der *Arithmetik* finden Sie eine Vielzahl von Teilprogrammen für numerische Berechnungen verschiedenster Probleme, vor allem zur Ermittlung von Zahlen unterschiedlichster Eigenschaften, d.h. aus dem Gebiet der Zahlentheorie.

6.1 Rechner

„Deinde multiplicationis et divisionis praecepta aliquanto plus requirunt diligentiae,
sed tamen causae cito perspici possunt ab attentis.
Exercitationem et usum requirit haec ars, ut aliae omnes." Philipp Melanchthon

Während der Arbeit mit einem Mathematikprogramm fallen ständig einfache Berechnungen an, für die Sie einen Taschenrechner benötigen. Das Programm bietet einen eigenen Rechner für reelle Zahlen an.
Diesen rufen Sie über den Schalter oder die Taste F9 auf. Der Taschenrechner ermöglicht Ihnen Standardberechnungen an reellen Zahlen im Zahlenbereich von rund 10^{-4000} bis 10^{4000} und entsprechend den negativen Zahlen.
In allen Unterprogrammteilen können Sie diesen Rechner über das *Datei*-Menü aufrufen.

Die Eingabe der Zahlen und Operationen erfolgt per Mausklick bzw. die in der nachfolgenden Tabelle genannten Tastenkürzel. Die im Rechner enthaltenen Schalter haben folgende Wirkung:

Schalter	Taste	Beschreibung, Wirkung
0 bis 9	0 bis 9	Zifferntasten
.	. oder ,	Dezimalpunkt (-komma)
±		Vorzeichenwechsel
EXP	E	Eingabe der abgetrennten Zehnerpotenz
+ - * :	+ - * :	Operationstasten
=	RETURN	Berechnung
CE		Korrektur der Eingabe
C		Löschen der letzten Rechnung, Reset
M+		Anzeige zum Speicherinhalt addieren
M in		Anzeige in Speicher kopieren
X<>M		Anzeige und Speicherinhalt austauschen
MR		Speicherinhalt ausgeben
([...		Klammer öffnen

...])		Klammer schließen
π	P	Kreiszahl π
1/x	R	Berechnung des Reziproken
x^2	Q	Berechnung des Quadrates
√ x	W	Berechnung der Quadratwurzel
X^^{y}		Berechnung der y.ten Potenz von x
^{y}√ x		Berechnung der y.ten Wurzel von x
sin, cos, tan		Trigonometrische Funktionen
arcsin, arccos, arctan		Umkehrfunktionen
lg, ln		dezimaler und natürlicher Logarithmus
10^x, e^x		Exponentialfunktionen
°,rad		Umschaltung zwischen Grad- und Bogenmaß
OFF	ESC	Beenden des Taschenrechners

Folgende Besonderheiten sind hierbei zu beachten:
Tritt während einer Berechnung ein mathematischer Fehler auf (Zahlbereichsüberlauf, Division durch Null, undefinierter Funktionswert ...), schaltet der Rechner auf ein Zwischenergebnis 0 und zeigt unterhalb der Ergebnisanzeige die Ausschrift *Fehler*.
Weiterarbeiten können Sie, indem Sie einen der Schalter *C* oder *CE* oder auch eine Zifferntaste betätigen. Befindet sich im internen Speicher eine von Null verschiedene reelle Zahl, so erscheint in der Anzeige ein *M*.

Die Umschaltung zwischen Grad- und Bogenmaß für die trigonometrischen Funktionen erfolgt mit dem Schalter *°,rad*. Je nach Einstellung erscheint in der Anzeige *DEG* (Gradmaß) oder *RAD* (Bogenmaß). Zu beachten ist hierbei, dass die Umschaltung sofort die aktuelle Anzeige umwandelt. Klammerebenen können Sie theoretisch mehrere Hundert benutzen. Beschränken Sie sich jedoch lieber auf weniger als 10, um die Übersicht zu behalten.

Zur weiteren Erleichterung der Arbeit und vor allem für die weitere Verwendung mit anderen Windows-Programmen haben Sie die Möglichkeit, Zwischenergebnisse in die Zwischenablage zu kopieren bzw. aus dieser heraus einzufügen. Nutzen Sie daher die Menüpunkte *Bearbeiten* | *Kopieren* und *Bearbeiten* | *Einfügen*, um den Zahlenwert in andere Windows-Anwendungen zu kopieren bzw. einzufügen.

Beachten Sie bitte, dass das Programm das Zwischenergebnis als Zeichenkette kopiert und einfügt. Damit können Sie Werte zum Beispiel direkt in Textverarbeitungen einfügen.

6.2 Fließkommarechnung

Dieses zusätzliche Programm ermöglicht einfache Berechnungen mit

Dezimalzahlen. Das Besondere ist dabei, dass mit hoher Genauigkeit gerechnet wird.
Die Anzahl der Dezimalstellen legen Sie unter *Ziffernzahl* fest. Als höchste Genauigkeit sind 4000 Dezimalstellen möglich. Die zwei Operanden tragen Sie unter *X* = und *Y* = ein. Folgende Operationen sind möglich:

Addition x + y , Subtraktion x – y , Multiplikation x · y , Division x / y , Quadratbildung x² , Quadratwurzel von x , Reziprokes 1 / x , Potenzbildung x ^ y , y.te Wurzel aus x [x ^(1/y)], natürlicher Logarithmus ln x , dekadischer Logarithmus lg x , Logarithmus von x zur Basis y [log(y) x], Exponentialfunktion exp x , Kreiszahl pi

Zum Weiterrechnen mit ermittelten Ergebnissen können Sie das Ergebnis mit den Schaltern *Ergebnis nach x* und *Ergebnis nach y* in die Eingabezeilen der beiden Operanden übertragen.
Über den Menüpunkt *Kopieren* wird dieses in die Zwischenablage kopiert.

Beachten Sie bitte unbedingt:
Die Berechnung, insbesondere der transzendenten Funktionen, erfordert für eine hohe Ziffernzahl auch auf schnellen Rechnern viel Zeit!

6.3 Langarithmetik

Wählen Sie dieses Teilprogramm, rufen Sie einen externen Programmteil auf, das einen einfachen Rechner für überlange ganze Zahlen enthält.
Dieser Rechner gibt Ihnen die Möglichkeit, natürliche Zahlen bis 5000 Ziffern Länge zu verknüpfen. Die Eingabe der Zahlen erfolgt in die Felder *a* = und *b* = direkt über die Tastatur. Als Operationen können Sie wählen:

Schalter	Wirkung
+	Addition a + b
-	Subtraktion a - b
*	Multiplikation a * b
: /	Ganzzahlige Division a div b
mod	Restbestimmung bei ganzzahliger Division a mod b
a ^ b	Potenzbildung a^b
ggT	Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von a und b
kgV	Berechnung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von a und b
a!	Fakultät (bis a = 1775)
a#	Primzahlprodukt aller Primzahlen < a , maximal a = 10000
a²	Quadratbildung
√	ganzzahliger Teil der Quadratwurzel von a

Das Ergebnis können Sie mit den Schalter *Ergebnis nach a* und *Ergebnis nach b* zum Weiterrechnen in die Operanden a und b kopieren.

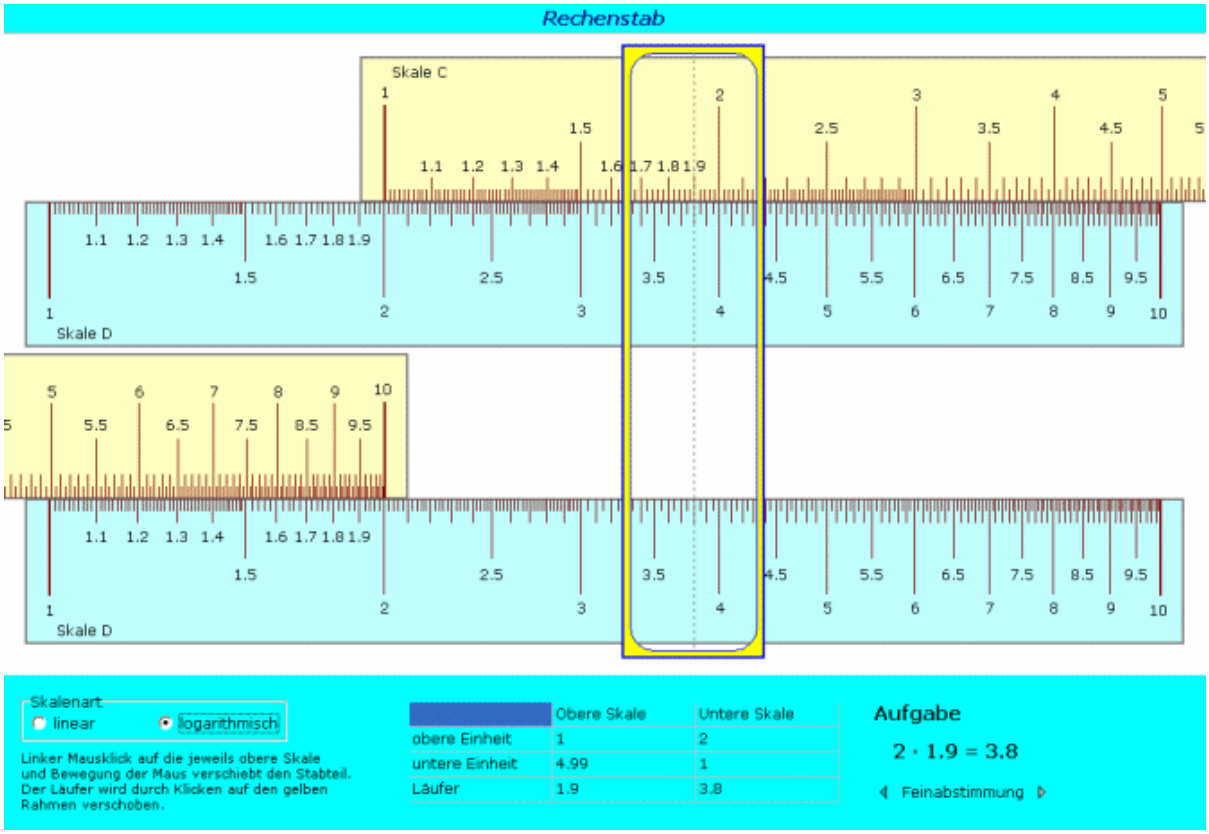
Folgende Einschränkungen sind hierbei zu beachten:

- Der Rechner arbeitet ausschließlich mit positiven Zahlen.
- Alle Eingaben oder Ergebnisse, die kleiner Null oder nicht ausführbar sind (Division durch Null) oder mehr als 5000 Ziffern haben, werden mit der Meldung *Überlauf* quittiert.

Über die Menüpunkte *Kopieren* und *Einfügen* haben Sie die Möglichkeit, Ihr Ergebnis über die Zwischenablage in andere Programme einzufügen bzw. eine als String in der Zwischenablage vorliegende Zahl als Operand a zu benutzen. Zusätzlich können Sie neben dem Dezimalsystem auch in einem anderen Stellenwertsystem von der Basis 2 (Dualsystem) bis zur Basis 36 rechnen. Stellen Sie dazu eine andere *Basis* ein.
Ab einer Basis 11 gilt die allgemeine Vereinbarung Wert 10 = Ziffer 'A', Wert 11 = Ziffer 'B' ...

6.4 Rechenstab

Das Prinzip des logarithmischen Rechenstabes wurde um 1620 von dem englischen Mathematiker Edmund Gunter entwickelt. Grundlage waren die Arbeiten von Bürgi und Napier zu den Logarithmen.



Der Rechenstab Gunters, die so genannte "Gunter-Skala", basierte auf Logarithmen zur Basis 10. Durch Anwenden der Logarithmengesetze führte

Gunter die Multiplikation auf die Addition von Strecken und die Division auf die Subtraktion von Strecken zurück. Die Längen wurden mithilfe eines Stechzirkels abgetragen.

Wingate und Partridge konstruierten Rechenstäbe mit einer Zunge, die in einem Stabkörper gleitet. Ende des 19. Jahrhunderts erhielt der Rechenstab durch den französischen Mathematiker Mannheim zwei Hauptskalenpaare und einen Läufer.

Der Rechenstab besteht aus dem Körper, dem Schieber, auch Zunge genannt, und dem Läufer. Die Zunge lässt sich im Körper verschieben. Der Läufer mit seiner Strichmarke kann über Zunge und Stab bewegt werden.
Auf Stabkörper und Zunge befinden sich Skalen: Auf dem Körper die Skalen K für die Kubikzahlen, A für Quadratzahlen, die Grundskala D sowie die linear geteilte Skala L, auf der Zunge ist eine zweite Grundskala C, eine zweite Skala B der Quadratzahlen und eine Skala R der zur Skala C reziproken Werte (Kehrwerte).

In diesem Teilprogramm können Sie einen solchen Rechenstab untersuchen. Dargestellt werden die Skalen C und D, die für die Multiplikation verwendet werden, und der Läufer zum genauen Einstellen und Ablesen der Werte.
Die beiden Skalen sind zweimal vorhanden, um die Multiplikation mit Rückschlag der Zunge zu vermeiden.

Ein linker Mausklick auf die Skala C und anschließendes Bewegen der Maus verschiebt die Zunge. Der Läufer wird analog verschoben. Dazu ist sein gelber Rand anzuklicken.
Eine *Feinabstimmung* ist mit den zwei kleinen Schaltern im unteren rechten Fensterteil möglich.
Ein Doppelklick auf das Fenster blendet den unteren Fensterteil ein und aus, so dass auch nur der Rechenstab angezeigt werden kann.

Multiplikation mit dem Rechenstab

Die Multiplikation wird auf der Grundlage des Logarithmengesetzes $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$
ausgeführt. Die Addition der beiden Logarithmen erfolgt am Rechenstab als Addition zweier Strecken der Länge lg a und lg b.
Dazu stellt man die Zahl 1 der Zungenskala C über die Zahl a von Skala D. Dann wird der mittlere Teilstrich des Läufers auf Zahl b der Skala C eingestellt und darunter auf Skala D das Produkt a·b abgelesen.

Stellt man den Rechenstab ein, kann das Produkt unter Umständen außerhalb der Skala D liegen und nicht mehr abgelesen werden. In diesem Fall wird nicht der Skalenanfang 1, sondern durch Verschieben der Zunge nach links der Endwert 10 von Skala C über die Zahl a von Skala D eingestellt. Wie immer wird dann der Läufer über den zweiten Faktor b eingestellt und das Produkt darunter auf Skala D abgelesen. Diese Rechenart wird Multiplikation mit Rückschlag genannt.
Da die Zahlenwerte immer nur als Ziffernfolge, also ohne Berücksichtigung der

Dezimalstellen, eingegeben und auch abgelesen werden, ist eine Überschlagsrechnung zur Ermittlung der Stellenzahl notwendig.

Division mit dem Rechenstab

Zugrunde liegt hier das Logarithmengesetz $\lg a/b = \lg a - \lg b$.
Am Rechenstab muss also von einer Strecke der Länge lg a eine Strecke der Länge lg b subtrahiert werden. Dazu wird die Zahl b der Zungenskala C über die Zahl a der Skala D geschoben. Der Läufer kann hier als Einstellhilfe dienen. Unter dem Anfangswert 1 von Skala C wird der Quotient a / b abgelesen.

Der logarithmische Rechenstab war bis Mitte der Achtzigerjahre des 20. Jahrhunderts ein wichtiges Rechenhilfsmittel, das erst mit der Entwicklung des elektronischen Taschenrechners verdrängt wurde.

Additionsrechenstab

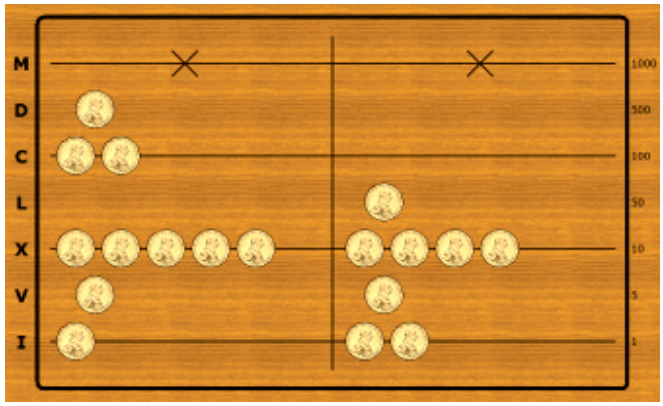
Die Idee des Rechnens durch das Aneinanderfügen von Strecken kann auch zur Addition genutzt werden.
Wählen Sie unter *Skalenart* den Eintrag *linear* aus, so werden nicht logarithmisch, sondern linear geteilte Skalen angezeigt. Durch Verschieben der Zunge ist damit die Addition und die Subtraktion von Zahlen möglich.

Der Additionsrechenstab konnte sich nie richtig durchsetzen, da die schriftliche Addition und Subtraktion einfach und schneller zu absolvieren waren.

Rechenstab mit CF/DF-Skalen

In einem zweiten Teilprogramm wird ein Rechenstab demonstriert, der über den Skalen C und F die CF- und DF-Skale aufweist. Diese Skalen sind um den Faktor π verschoben.

Damit kann man Multiplikationen und Divisionen, die durch einen Überlauf einen Rückschlag benötigen, ohne diesen Rückschlag durchführen.
Dazu wird die Berechnung statt auf den klassischen C/D-Skalen auf CF und DF durchgeführt.
Auch hier kann mit einem linken Mausklick auf die Skala C und anschließendes Bewegen der Maus die Zunge verschoben werden. Der Läufer wird analog verschoben. Dazu ist sein gelber Rand anzuklicken.



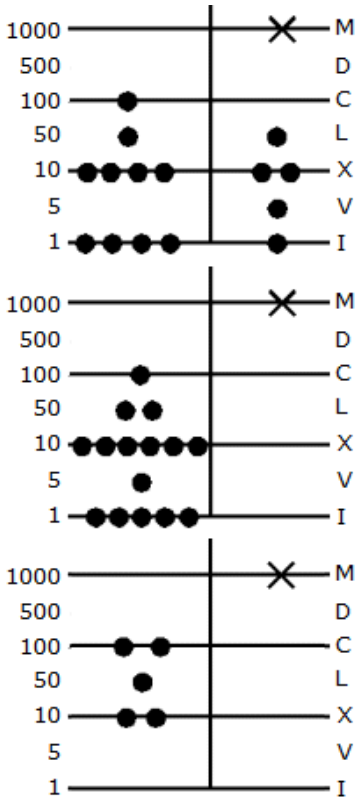
6.5 Rechnung auf den Linien

1518 veröffentlichte Adam Ries sein Werk „Rechnung auff der linihen“,

indem er das Rechnen auf den Linien eines Rechenbretts beschreibt.
Seine meisterhaft geschriebenen Rechenbücher in deutscher Sprache, wurden bis ins 17.Jahrhundert nachgedruckt. Sein zweites Rechenbuch erschien in mindestens 108 Auflagen! Sie trugen maßgeblich zur Vermittlung der Rechenkunst im Volk bei.

In diesem Teilprogramm können Sie die „Rechnung auf den Linien" testen. Dazu wird ein Rechenbrett dargestellt.

Aufbau des Rechenbrettes



Auf dem Rechenbrett befinden sich vier waagerechte Linien, wobei diese von unten nach oben die Wertigkeit 1, 10, 100 und 1000 haben. Um Verwechslungen vorzubeugen befindet sich auf der Tausenderlinie ein Kreuz. Die Bereiche zwischen den Linien tragen die Bezeichnung "Spacio" und besitzen die Wertigkeit 5, 50 und 500.
In der Regel findet man auf dem Brett senkrechte Linien, die das Rechenbrett in sogenannte Bankiere teilen und zur Abgrenzung von Zahlen dienen. In diesem Teilprogramm werden zwei Bankiere verwendet.

Das Auslegen einer Zahl (Numeration)

Eine Zahl wird auf dem Rechenbrett durch Rechenpfennige ausgelegt. Liegen etwa zwei Rechenpfennig auf der Einerlinie, so bedeutet dies die Zahl 2, liegen die beiden Pfennige hingegen auf der Zehnerlinie, so stellen sie die Zahl 20 dar. Wird nun zusätzlich ein Rechenstein in den 500er Spacio gelegt, so erhält man die Zahl 520.

Elevation und Resolution

Eine wichtige Operation zum Rechnen ist die Elevation, das Erhöhen von Rechensteinen (Bündeln).
Liegen fünf Rechenpfennige auf einer Linien, so entfernt man diese in legt in den Spacio darüber einen Rechenpfennig. Befinden sich zwei Pfennige in einem spacio, so werden diese entfernt und auf der darüberliegenden Linie ein Rechenpfennig ergänzt.
Die Resolution, die Aufbündelung von Rechensteinen, ist der umgekehrte Vorgang. Von einer Linie wird ein Rechenpfennig in zwei Pfennige im darunterbefindlichen spacio zerlegt und davon wieder ein Stein in 5 Pfennige auf der weiter unten liegenden Linie. Aus einem Spacio heraus, werden 5 Pfennige auf die nächste Linie gelegt.

Addition

Die Addition zweier Zahlen läuft in vier Schritten ab und wird am Beispiel der Addition von 194 und 76 gezeigt:

1.Numeration
Die beiden Zahlen werden in die beiden Bankiere gelegt.

2.Addieren
Die Rechenpfennige werden von rechts nach links in das erste Bankier verschoben.

3.Elevation
Dabei kann man nach dem vollständigen Verschieben der Pfennige das Höherlegen eines Rechenpfennigs durchführen, sobald 5 auf einer Linie oder 2 in einem Spacio liegen oder aber; wie in diesem Programmteil; wenn sich während des Verschiebens die 5 bzw. 2 Steine ergeben.

4.Ergebnis ablesen
Am Ende der Operation wird das Ergebnis abgelesen, hier: 194 + 76 = 270

Subtraktion
Die Subtraktion zweier Zahlen läuft analog zur Addition ab.
Ein Rechenpfennig wird von rechts nach links verschoben und gemeinsam mit einem aus dem linken Bankier vom Rechenbrett entfernt. Allerdings kann es passieren, dass nicht genügend Rechenpfennige auf einer Linie oder in einem Spacio vorhanden sind. Ist dies der Fall, so müssen mittels Resolution Rechenpfennige auf höheren Linien oder Spacio umgewandelt werden.
Beide Rechenoperationen sind in diesem Teilprogramm möglich.

Zum Auflegen der Rechenpfennige (Numeration) klicken Sie mit der linken Maustaste auf die gewünschte Linie oder in den Spacio, gleichgültig ob im linken oder rechten Bankier.
Je Linie können Sie maximal 5 Pfennige positionieren, je Spacio maximal 2 Steine.
Klicken Sie mit der linken(!) Maustaste auf einen ausgelegten Rechenstein, so wird dieser entfernt, gleichgültig wo er auf der Linie oder im Spacio liegt.

Damit können Sie mittels Mausklick Zahlen auflegen und entsprechend den Rechenregeln diese zum Beispiel im rechten Bankier entfernen und links hinzufügen bzw. auch Elevation und Resolution durchführen.
Mit etwas Übung gelingt es so, einfache „Rechnungen auf den Linien" durchzuführen. Adam Ries wäre sicher stolz auf Sie. ☺

Zur Erleichterung der Addition auf dem Rechenbrett können Sie auch die rechte Maustaste nutzen.
Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen Rechenstein im rechten Bankier, so wird dieser entfernt und im linken Bankier angeordnet; allerdings nur wenn dort die entsprechende Linie weniger als 5, der Spacio weniger als 2 Steine beinhalten.
Bei einem rechten Klicken auf einen Pfennig im linken Bankier wird eine mögliche

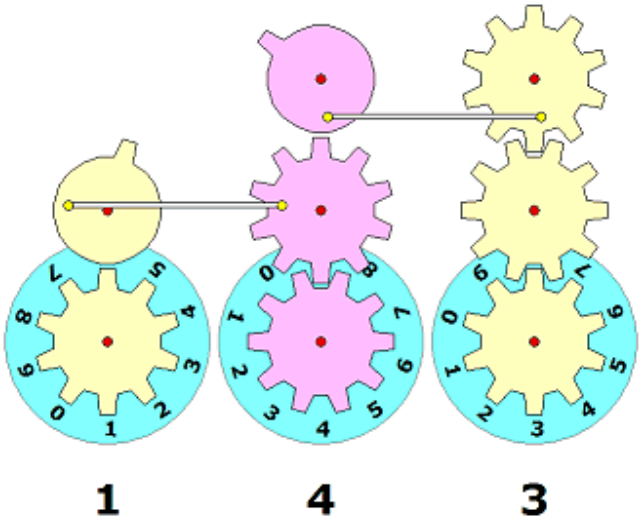
Elevation durchgeführt. Dies ist allerdings nur möglich, wenn auf der Linie 5 bzw. im Spacio 2 Steine liegen und die darüber liegende Linie bzw. Spacio „noch Platz" hat.

Demonstration der Rechenvorgänge

In der rechten, oberen Programmfensterecke finden Sie fünf Schalter, mit denen Sie den Computer die „Rechnung auf den Linien" demonstrieren lassen können. Klicken Sie auf *Beispiel*, so bestimmt das Programm zwei Zufallszahlen und legt diese in den zwei Bankieren aus. Mit der Maus können Sie diese Zahlen auf Wunsch auch verändern.

Mit den Schaltern *Addition*, *Subtraktion* und *Elevation* können Sie die beschriebenen Rechenvorgänge demonstrieren lassen. Während der Simulation werden die Rechenpfennige von einem in das andere Bankier verschoben und je nach Bedarf die Elevation oder Resolution durchgeführt.
Der Schalter *Neu* entfernt alle Rechenpfennige vom Rechenbrett.

6.6 Pascaline



1642 erfand Pascal eine mechanische Rechenmaschine, heute als Pascaline bekannt, um seinem Vater beim Einsammeln der Steuern zu helfen. Damit gelang ihm die Konstruktion der ersten funktionstüchtigen Rechenmaschine der Geschichte.
Die Rechenmaschine basierte auf Zahnrädern, d.h. die einzelnen Ziffern wurde durch die Stellung der einzelnen Zahnräder symbolisiert. Dabei verfügte sie bereits über einen automatischen Zehnerübertrag mittels Mitnehmerstift und Klinke.
Allerdings war die Pascaline nur teilweise erfolgreich. Die technischen Möglichkeiten, hinreichend genaue Zahnräder herzustellen, war noch nicht vorhanden. Daher verklemmten sich die Maschinen.

In diesem Teilprogramm wird die prinzipielle Wirkungsweise der Pascaline demonstriert.

Für drei Ziffern einer Zahl werden die entsprechenden Zahnräder gezeichnet. Klicken Sie nun auf *Einer addieren*, wird das rechte untere Rad um den zehnten Teil eines Vollkreises gedreht und die nächste Einerstelle angezeigt. Gleichzeitig wird das obere rechte Rad ebenfalls gedreht und das links davon befindliche Rad mit einem(!) Zahn über die Verbindungsstange ebenso.
Wiederholt man den Vorgang mehrfach, so wird beim Übergang von der

Einerziffer 9 zur Einerziffer 0 ein Zehnerübertrag durch das Rad mit dem einen Zahn ausgelöst. Analog geschieht auch ein Hunderterübertrag bei den zwei linken Rädern.

Über die Schalter

- *1 addieren*
- *1 subtrahieren*
- *10 addieren*
- *10 subtrahieren*

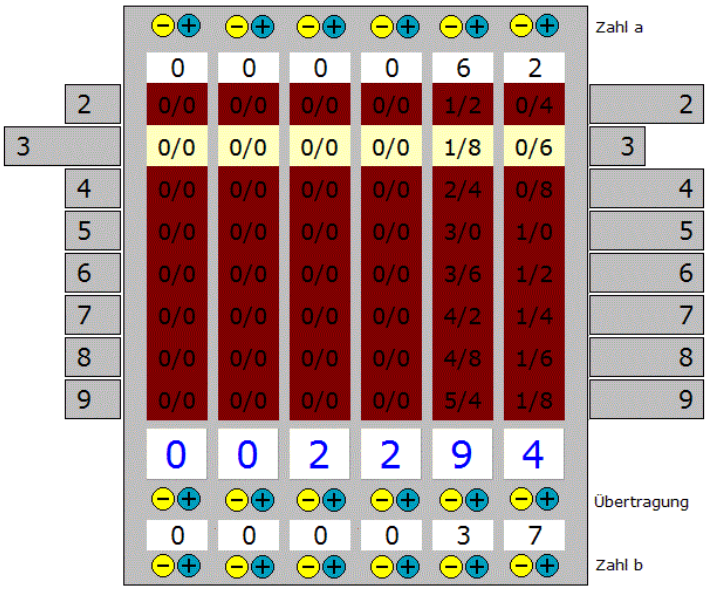
können sie einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben demonstrieren. Tragen Sie neben dem Schalter *Wert einstellen* eine Zahl ein und wählen den Schalter, so wird die Pascaline oft diese Zahl eingestellt. Mit dem Schalter *Wert addieren* wird die linksstehende Zahl addiert.

Der Schalter *kontinuierlich 1 addieren* startet eine Simulation, bei der immer wieder eine 1 zum aktuellen Wert hinzugefügt wird. Sollte Ihnen die Simulation zu schnell ablaufen, können Sie eine Verzögerung einstellen.
Der Schalter *Pascaline auf 0* setzen stellt den Anfangszustand wieder her.

6.7 Schickardsche Rechenmaschine

Angeregt durch einen Briefwechsel mit Napier und Kepler erfand Wilhelm Schickard 1623 seine Rechenmaschine.
Das Originalmodell ging in den Wirren des Dreißigjährigen Krieges verloren. Ein zweites, für Kepler bestimmtes Exemplar, fiel leider halbfertig einer Feuersbrunst zum Opfer.
Die Schickardsche Rechenuhr ist die erste Rechenmaschine der Welt die urkundlich nachweisbar ist. Das Multiplizier- und Dividierwerk besteht aus den beweglichen Napierstäbchen.

An verschiedenen Zylindern wurde der Multiplikand eingestellt. Durch Herausziehen der den Ziffern des Multiplikators entsprechenden waagerechten Schiebers wurden die Produkte angezeigt. Diese mussten nur noch im Addierwerk eingestellt werden. Diese Maschine aus dem Jahre1623 gestattet somit die Durchführung aller vier Grundrechenarten. Sie stellt eine Kombination von Napierstäbchen mit einem Addierer dar.



Die Bedienung der Maschine ist aus heutiger Sicht umständlich. Anfang des 17.Jahrhunderts stellte die Schickardsche Maschine jedoch eine herausragende Erfindung dar. Insbesondere die mechanische Realisierung des Zehnerübertrags

war bemerkenswert.
Schickard war stolz auf seine großartige Erfindung. So schrieb er in einem Brief vom 20. September 1623 an Kepler:

"Dasselbe, was Du auf rechnerischem Weg gemacht hast, habe ich kürzlich mechanisch versucht und eine aus 11 vollständigen und 6 verstümmelten Rädchen bestehende Maschine gebaut, welche gegebene Zahlen im Augenblick automatisch zusammenrechnet: addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Du würdest hell auflachen, wenn Du da wärest und sehen könntest, wie sie, so oft es über einen Zehner oder Hunderter weggeht, die Stellen zur Linken ganz von selbst erhöht oder ihnen beim Subtrahieren etwas wegnimmt."
Dieses Teilprogramm veranschaulicht eine solche Maschine. Die im Original drehbaren Eingabemöglichkeiten werden hier durch kleine Schalter **+** und **-** ersetzt. Klicken Sie auf diese, werden entsprechende Werte erhöht bzw. verringert. Die waagerechten Schieber werden durch einen Mausklick nach links oder rechts bewegt.

Addition und Subtraktion zweier Zahlen sind relativ einfach durchführbar. Beide Operanden werden an den **+**/**-** Schaltern oben (Zahl a) und unten (Zahl b) eingestellt. Zahl a wird mit den **+**/**-** Schaltern bei „Übertragung" in das Addierwerk übertragen.
Für eine Addition werden nun nach Einer-, Zehner-, Hunderter-Stellen usw. der Zahl b die **+**-Schalter von „Übertragung" gedrückt. Bei einer Subtraktion a-b verwendet man die **-** Schalter.

Eine Multiplikation ist anspruchsvoller. Hier wird die Konstruktion aus beweglichen Neperschen Multiplizierstäbchen ausgenutzt.
Den ersten Faktor trägt man mit den **+**/**-** Schaltern bei "Zahl a" ein, den zweiten Faktor an den Schaltern bei "Zahl b". Das Addierwerk muss zunächst auf 00000 eingestellt sein.

Nun zieht man den waagerechten Schiebers (durch Mausklick) heraus, der der Einerziffer von b entspricht. Dadurch werden die Zahlen der Neperschen Stäbchen sichtbar.
Die Ziffer die hinter dem /-Zeichen steht, wird mit den darunterbefindlichen **+**-Schaltern bei „Übertragung" in das Addierwerk eingetragen, die Ziffer vor dem /-Zeichen mittels Schalter der nächsten links stehenden Stelle. Die Übertragung erfolgt von links nach rechts.
Anschließend bewegt man der Schieber zurück.

Nun wird der Vorgang mit der Zehnerziffer von b wiederholt. Dabei ist aber unbedingt zu beachten, dass die Ziffern der Neper-Stäbchen am Addierwerk um eine Stelle weiter nach links eingetragen werden müssen, für die Hunderterstelle zwei Plätze weiter links, usw.
Am Ende findet man im Addierwerk das Produkt der zwei Zahlen.

Klicken Sie auf den Schalter *Multiplikation*, so demonstriert das Programm die

Multiplikationsaufgabe mit den eingegebenen Zahlen und führt Ihnen schrittweise deren Lösung vor. Wählen Sie den Schalter *Beispiel erzeugen*, so wählt das Programm eine zufällige Aufgabe und führt Ihnen die Lösung vor.
Aus technischen und logischen Gründen hatte die Originalmaschine Schickards keinen Schieber für die Ziffer „1". Dieser wird auch nicht benötigt, da die Anzeige der Zahl a selbst die Belegung auf den Neperschen Stäbchen angibt.

6.8 Rechenscheibe

Neben Stabrechenstäben wurden auch Rechenscheiben konstruiert, bei denen zwei Skalen gedreht werden können. Der Vorteil dieser Rechenscheiben besteht darin, dass hier kein Rückschlag (Ergebnis außerhalb des Stabkörpers) notwendig ist.
Die Rechenscheibe besteht aus zwei Kreisringen, der inneren und der äußeren Skala, und dem Läufer.
In diesem Teilprogramm können Sie eine solchen Rechenscheibe untersuchen. Dargestellt werden die äußere Skala C und die innere Skala D, die für die Multiplikation verwendet werden, sowie der Läufer zum genauen Einstellen und Ablesen der Werte.
Ein linker Mausklick auf eine der Skalen und anschließendes Bewegen der Maus dreht diese. Der Läufer wird analog gedreht. Dazu ist sein gelber Rand anzuklicken.

Multiplikation mit der Rechenscheibe

Die Multiplikation wird auf der Grundlage des Logarithmengesetzes $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$
ausgeführt. Die Addition der beiden Logarithmen erfolgt an der Rechenscheibe als Addition zweier Kreisbögen der Länge lg a und lg b.
Dazu stellt man die Zahl 1 der äußeren Skala C auf die Zahl a der inneren Skala. Dann wird der mittlere Teilstrich des Läufers auf Zahl b der äußeren Skala eingestellt und darunter auf Skala D das Produkt a·b abgelesen.

Additionsscheibe

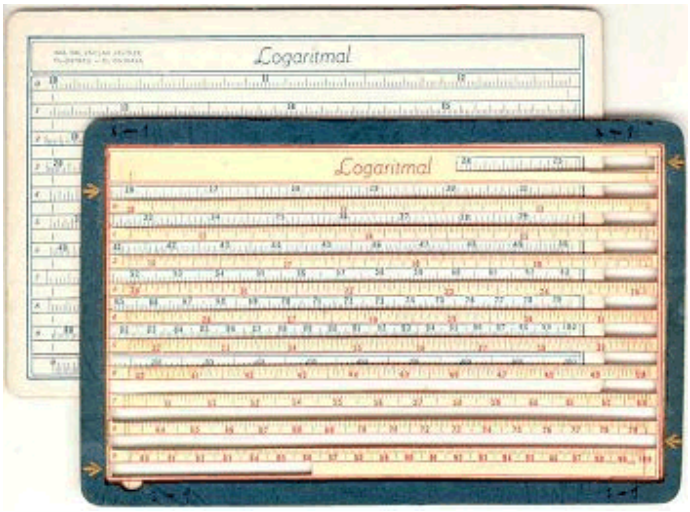
Wählen Sie das Markierungsfeld Additionsscheibe aus, so wird eine Rechenscheibe dargestellt, die zur Addition zweier Zahlen genutzt werden kann.
In diesem Fall stellt man die Zahl 0 der äußeren Skala C auf den ersten Summanden a der inneren Skala. Das Ablesen der Ergebnisse erfolgt wie oben beschrieben.

6.9 Logaritmal

Bei der Logaritmal-Rechentafel (Originalgröße 11 x 17 cm) wurde die Rechenstabskala in mehrere parallele Abschnitte zerlegt. Trotz der Gesamt-Skalenlänge von 1,5 m ist das Gerät nur postkartengroß. Um 1940 wurde dieses

Rechenhilfsmittel von dem tschechischen Ingenieur Dr. Vaclav Jelinek entwickelt.

Mit dem Logaritmal kann man alle Rechnungsarten höherer Stufen durchführen, vor allem Multiplizieren und Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen, sowie auch andere weitere Rechenaufgaben, die auf logarithmischer Grundlage basieren. Das Logaritmal besteht aus drei Teilen: der Grundplatte, der Zulegeplatte und dem Läufer.

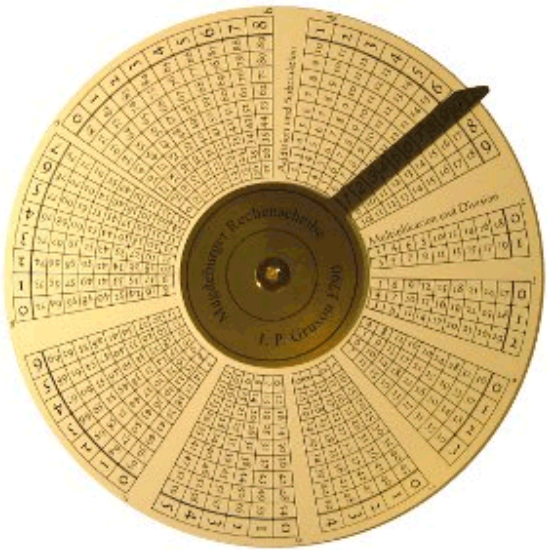


In diesem Teilprogramm können Sie das Logaritmal testen. Dabei wurde das Aussehen der Rechentafel etwas verändert.

Auf der Grundplatte ist in brauner Farbe eine Zahlenskala (10-100) bezeichnet, welche in zehn gleiche Abschnitte geteilt ist. Die Zahlenskala auf der hier weißen Zulegeplatte hat ebenso eine logarithmische Teilung.
Anstelle des Läufers finden Sie einen gelben Kreis, mit dem Sie navigieren können. Die Grundplatte können Sie verschieben, indem Sie auf die farbigen Zahlen des Logaritmals klicken und die Maus bewegen, senkrecht und waagerecht.

Um zum Beispiel eine Multiplikation durchzuführen, verfahren Sie wie folgt: Auf der Deckplatte wird der Multiplikand aufgesucht und unter diesen der gelbe Kreis der Grundplatte platziert. Auf der farbigen Skala wird der Multiplikator aufgesucht. Das Resultat wird genau über dem Multiplikator auf der weißen Skala der Zulegeplatte abgelesen.

6.10 Magdeburger Rechenscheibe, Gruson-Rechenscheibe



1790 erfand der Mathematiker Johann Phillip Gruson eine Rechenscheibe zur Multiplikation und Addition. Die Scheibe wurde ab November 1790 in Magdeburg zum Preis von einem Thaler und zwei Groschen verkauft.

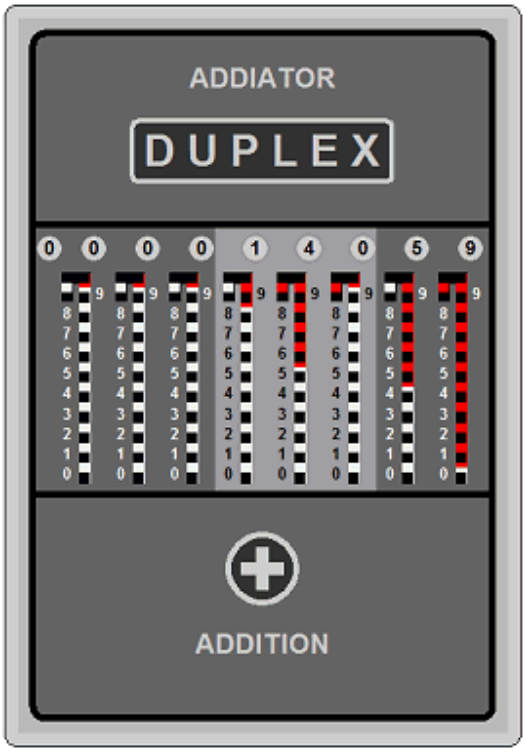
Die kreisförmige Tafel besitzt verschiedene Sektoren von 2 bis 9. Zwei Probleme hatte Gruson zu lösen:
1) die einfache Ermittlung der Teilprodukte 1 x 1 bis 9 x 9 und
2) der Zehnerübertrag bei der Addition zweier Teilprodukte.

Zum Beispiel schreibt er im Sektor 5 in die erste radiale Zeile, mit 0 markiert, die Teilprodukte 1 x 5 = 5 bis 9 x 5 = 45.
In der nächsten Zeile, mit 1 markiert, stehen diese Produkte, vermehrt um 1. In der nächsten Zeile, markiert mit 2, stehen die gleichen Teilprodukte, vermehrt um 2, usw.

Der Sinn der zusätzlichen Additionen liegt darin, dass der Benutzer der Scheibe vom vorhergehenden Teilprodukt nur die Einerziffer niederschreibt, mit dem Zeiger die Zeile mit der Zehnerziffer aufsucht und sofort das neue Teilprodukt plus Zehnerübertrag ablesen kann. Betrachtet man eine beliebige Zahl im Sektor und stellt den Zeiger neben sie, dann ist diese das Produkt aus der Zahl des Sektors multipliziert mit der benachbarten Zahl auf dem Zeiger, hinzuaddiert die Zahl am äußeren Rand der Zeile.

Beispiel: Es soll 38 * 7 gerechnet werden.
Der Zeiger wird auf den Sektor 7 und dessen Spalte 0 gedreht. Neben der Einerstelle 8 auf dem Zeiger findet man das Ergebnis 56, von dem die 6 notiert wird.
Der Zeiger wird weiter auf die Spalte der Zehnerziffer, hier also die 5, gedreht und dort neben der 3 des Zeigers die vorderen Ziffern 26 abgelesen. Damit ist das Ergebnis 266.
Diese Idee kann auch für die Division genutzt werden. Eine Zahl im Sektor, dividiert durch die Zahl des Sektors ergibt als Ergebnis die zugehörige Zahl auf dem Zeiger plus die Zahl am äußeren Rand der Zeile als Rest.

Diese Rechenscheibe wird hier simuliert. Die Scheibe bzw. den Läufer bewegen Sie, indem Sie mit der linken Maustaste Scheibe oder Läufer anklicken und die Maus bewegen.



6.11 Addiator und Hexadat

Zu den populärsten Rechengeräten des 20. Jahrhunderts gehörten die Blechschieber. Sie waren preiswert herzustellen und ihre Bedienung einfach:

Mit einem Stift werden Zahnstangen unter den Löchern des Ablesefensters verschoben. An der Farbe der Zahnstange am Einstichpunkt erkennt der Nutzer, ob er den Stift nach oben oder nach unten führen muss. Auf dem Weg nach oben wird der Stift um eine U-Kurve geführt und zieht die benachbarte Zahnstange um eine Stelle nach unten. Erfunden wurde das Prinzip um 1850 von Kummer.

Die Geräte sind zum Addieren und Subtrahieren geeignet. Mit der starken Verbreitung der Geräte der Firma C. Kübler Berlin wurde auch der Name Addiator ein Synonym für diese Rechengeräte.
Da diese Blechschieber als „Rechenmaschinen" bezeichnet wurden, war es auch üblich das Gerät mit „die Addiator" zu bezeichnen. Heute spricht man meist von „dem Addiator".

In diesem Teilprogramm wird ein Addiator demonstriert.
Von rechts nach links finden Sie acht Zahnstangen, die Sie mit einem linken Mausklick auf einen schwarzen Bereich neben einer Zahl nach oben und unten verschieben können.

Ist der schwarze Bereich weiß umrahmt, so muss die Zahnstange bis zum unteren Rand gezogen werden. In dem Fall addieren Sie zum bisherigen Ergebnis die entsprechende Ziffer.
Ist der schwarze Bereich rot umrahmt, so wird ein Übertrag notwendig. Ziehen Sie dazu das Feld nach oben und bewegen Sie die Maus nach links um die U-Kurve und dort wieder bis zum Anschlag nach unten.
Erscheint, durch einen Übertrag, in der Anzeige der Pfeil ↑, so müssen Sie die entsprechende Zahnstange vom unteren zum oberen Rand bewegen und den Übertrag zur nächsten Stelle ausführen. Wird der Pfeil ↓ angezeigt, so ist die Zahnstange von oben nach unten durchzuschieben.

Automatik

Markieren Sie das Feld *Automatik verwenden*, so können Sie sich das „mühsame" Ziehen mit der Maus sparen. Klicken Sie nun auf einen schwarzen Bereich neben einer Zahl, so bewegt das Programm automatisch die Zahnstange und erzeugt evtl. notwendige Überträge.
Hätte der historische Addiator eine solche Funktion besessen, so wäre das Gerät schon fast ein elektronischer Taschenrechner gewesen. ☺

Das Gerät kann neben der Addition auch die Subtraktion. Um zwischen beiden Operationen umzuschalten, so klicken Sie mit der linken Maustaste auf die im unteren Teil angezeigten „+"- und „-"-Zeichen. Da das Umschalten keine Veränderung am Ergebnis vornimmt, können Sie so auch gemischte Rechnungen, wie 143 + 78 - 54 ... durchführen.

Das ursprüngliche Gerät der Firma Kübler hatte am oberen Rand einen Nullstellbügel, den man zum Löschen des Ergebnisses herausziehen musste. In diesem Programmteil klicken Sie zum Löschen auf den dargestellten Bügel.

Hexadat

Ein analoger Blechschieber ist der Hexadat, der die Addition und Subtraktion von hexadezimalen Zahlen ermöglicht.

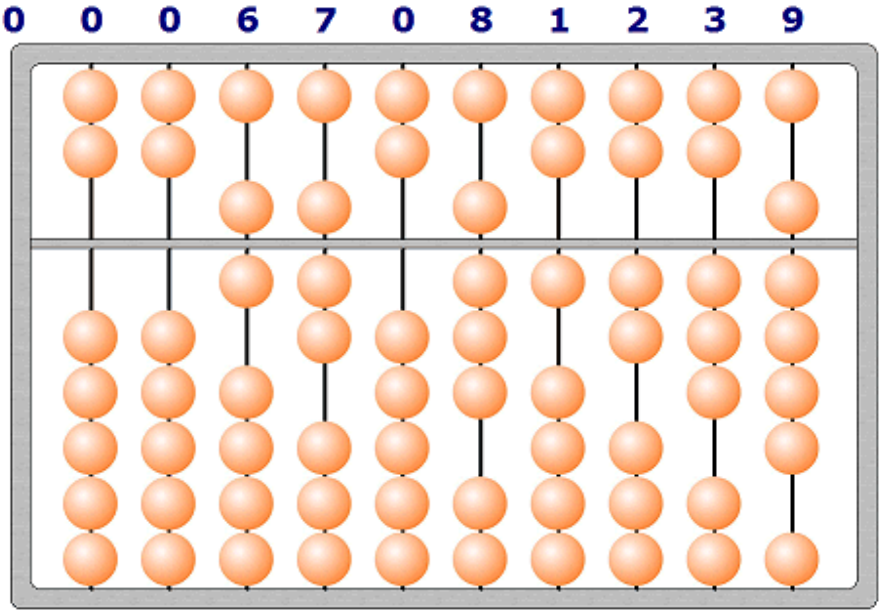
Prinzipiell ist er wie der Addiator aufgebaut, jedoch umfasst die Eingabe die hexadezimalen Ziffern von 0 bis F. Die Bedienung erfolgt auf gleiche Weise.

So kurios dieser Addiator anmutet ist er nicht. Noch 1977 schrieb die "Computerwoche":

"Echte Zeitersparnis" nannten die von der Rechenmaschinenfabrik Addiator, Wolfach, befragten Programmierer als wichtigsten Grund für den Einsatz eines Handrechners für das hexadezimale Zahlensystem. Zwar können mit einiger Übung die Additionen und Subtraktionen im ungewohnten 16er-Zahlensystem auch im Kopf oder schriftlich ausgeführt werden, aber mit der Rechenhilfe "Hexadat" sind sie - so der Hersteller - schneller zu bewältigen."

6.12 Abakus, Japanischer Soroban, Russischer Stschoty

Seit der Antike wurden zur Unterstützung der Rechnens mit den vier Grundrechnungsarten Rechenbretter mit frei beweglichen Steinen verwendet. In Japan heißt der Abakus Soroban, in China Suan-pan, in Russland Stschoty, in der Türkei Coulba, in Armenien Choreb usw.



Ein Abakus besteht aus einer Stein- oder Holztafel mit aufgezeichneten oder eingeschnittenen Linien, auf denen die Rechensteine geschoben werden. In moderneren Geräten wurden Kugeln frei beweglich auf Stäbe gesteckt. Die Kugeln einer Linie entsprechen Zahlen der gleichen Größenordnung, im Zehnersystem, z.B. stellt jede eine Einheit der gleichen Zehnerpotenz dar. Der Aufbau der Abaki unterscheidet sich von Land zu Land:

Bei der chinesischen und europäischen Variante befinden sich an jedem Stab sieben Kugeln, wobei die horizontale Leiste die fünfte von der sechsten trennt. Die unteren fünf Kugeln stehen jeweils für einen, die oberen beiden für fünf Zähler. In China heißt der untere Bereich mit den fünf Kugeln „Erde", der mit den zwei Kugeln „Himmel".

Der japanische Soroban geht aus dem chinesischen Suan-pan hervor, hat jedoch seit Mitte des 19. Jahrhunderts die zweite obere Kugel eingebüßt. Nach dem

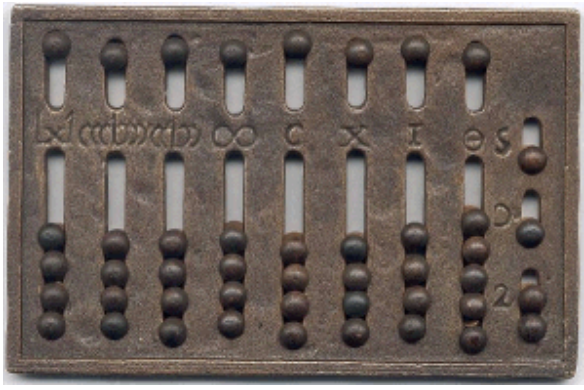
zweiten Weltkrieg wurde in Japan auch die fünfte überflüssige Kugel im unteren Teil entfernt.
Obwohl diese Kugeln zur eigentlichen Darstellung der Zahlenwerte nicht notwendig sind, konnten sie von den Chinesen doch bei Zwischenergebnissen sinnvoll genutzt werden.
Der japanische Soroban benötigt nur noch fünf Kugeln pro Stab, wobei die Leiste die vierte von der fünften trennt. Auch hier steht jede der vier Kugeln für einen, die einzelne oberhalb der Leiste für fünf Zähler.

Der russische Stschoty geht vermutlich auch auf das chinesische Vorbild zurück. Er umfasst zehn Kugeln, von denen die fünfte und sechste farbig abgesetzt ist. Er hat waagerecht angeordnete Stäbe mit je zehn Kugeln, wobei sich die jeweils fünften und sechsten zur besseren Übersichtlichkeit von den anderen farblich unterscheiden. Der vierte Stab hat nur vier bzw. fünf Kugeln. Er wird nicht zum Rechnen benutzt und dient nur als Abgrenzung der ersten Stäbe von den folgenden.

Zahlen werden dargestellt, indem man die entsprechende Anzahl von Kugeln zur Trennlinie verschiebt, bei dem russischen Stschoty einfach zur anderen Seite.

In drei Teilprogrammen können Sie den europäischen Abakus, den japanischen Soroban und den russischen Stschoty testen.
Die Kugeln verschieben Sie, indem Sie die entsprechende Kugel mit der Maus anklicken. Möchten Sie eine bestimmte natürliche Zahl anzeigen, so tragen Sie diese hinter *Animation ab* ein.
Klicken Sie auf den Schalter , beginnt das Programm ab dem bei *Animation ab* eingetragenen Zahlenwert die natürlichen Zahlen auf dem Abakus darzustellen. Ein erneuter Klick auf den Schalter stoppt die Simulation.

6.13 Römischer Abakus



Als Rechenhilfsmittel war bei den Römern sowohl der Abakus in Gebrauch als auch Rechenbretter, auf denen Münzen umhergeschoben wurden. Der Abakus - abgebildet ist eine Reproduktion – weist erstaunliche Parallelen zu den Geräten auf, die bis vor nicht allzu langer Zeit in Gebrauch waren.

Beim römischen Abakus findet man ab der dritten Stelle von rechts die Zahlsymbole I für 1, X für 10 und C für 100. Die darüber angeordneten Perlen stehen für V für 5, L für 50 und D für 500.
Die 1000 ist bei diesem Abakus nicht wie üblich mit dem Buchstaben M (mille) dargestellt, sondern mit der liegenden 8, die wir heute noch als Symbol für die Unendlichkeit verwenden.

Für die 1000 war als drittes Symbol außerdem das griechische Phi (|) in Gebrauch. Von diesem leitet sich auch das D für 500 ab; optisch ein halbiertes Phi, ähnlich dem V als halbiertes X.

Für größere Zahlen gab es verschiedene Darstellungen. Der Hersteller dieses Abakus verwendete das Tausendersymbol Phi und baute mithilfe von Klammern für 10000 eine zusätzliche Schale, für 100000 zwei zusätzliche Schalen außen herum.
Entsprechend wurde ein D mit einer zusätzlichen Halbschale zur 5000 und mit zwei zusätzlichen Halbschalen zur 50000. Um die Million darzustellen, setzten sie das X in einen Kasten.

Das römische Zahlensystem kannte keine 0, jedoch schon Brüche. Mit diesen rechneten sie allerdings nicht im Dezimalsystem, sondern in Zwölfteln (Unica, Unze).
In der Spalte für die Unzen finden sich daher unten 5 Knöpfe, und der Knopf oben entspricht 6 Unzen. Alternativ konnte die Einheit in den rechten Spalten zweimal nacheinander halbiert und dann noch einmal gedrittelt werden, was ebenfalls eine Zwölftelteilung ermöglicht.

In diesem Teilprogramm wird dieser römische Abakus simuliert.
Zahlen geben Sie ein, indem Sie entweder mit Hilfe der Schalter eine römische Zahl zusammenstellen oder aber in der Zeile *decimalis* die gewünschte Zahl, wie gewohnt, eintippen. Gerechnet wird, in dem ein Operator in den Speicher (Schalter MEM) transportiert wird und der zweite anschließend eingegeben wird. Folgende Operationen sind möglich: Addition = ADD, Subtraktion = SUB, Multiplikation = MUL und die ganzzahlige Division = DIV. Unter *Solutio* erscheint sofort das Ergebnis.

Bei einer Division ermittelt das Programm auch die gebrochenen Anteile und stellt sie an den Spalten für die Unzen dar. Der Schalter *ANUL* löscht alle Eingaben, der Schalter *REM* kopiert den Speicherinhalt wieder nach Solutio.

Die Abbildung des Abakus wurde von http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/abakus/rom-abakus.htm entnommen. Die Idee zu diesem Programm geht auf Reinhard Atzbach zurück.

6.14 Fuller Rechenwalze, Fuller Kalkulator London 1877

Der Fuller-Kalkulator von George Fuller, Professor der Ingenieurwissenschaften am Queen's College Belfast, war eine besondere Art von Rechenhilfsmittel.

Auszug aus der Bedienungsanleitung:
"Der Fuller-Kalkulator ist ein logarithmischer Rechner. Sein grundlegendes Prinzip ist dasselbe wie das des gewöhnlichen Rechenschiebers, aber er weicht in seiner mechanischen Konstruktion radikal von diesem ab. ...
Der FULLER-KALKULATOR kann alle Rechnungen ausführen, die mit

MULTIPLIKATION, DIVISION, PROPORTIONEN, PROZENTRECHNUNG und kombinierter Multiplikation und Division zu tun haben und bietet dafür eine Genauigkeit von 1 in 10000. ...

Der Rechner besteht prinzipiell aus einem Zylinder D, etwa 6 Zoll hoch mit 3 Zoll Durchmesser, auf den die 500 Zoll lange logarithmische Rechenskala spiralförmig aufgebracht ist. Dieser gleitet drehbar auf einem inneren Zylinder H, welcher mit einem Griff gehalten wird. Die Einstellungen werden vorgenommen und die Rechnungen ausgeführt durch Verwendung der metallenen Läufer A & B und F, die in der Illustration sichtbar sind.

Da die Genauigkeit eines logarithmischen Rechners, wenn alle anderen Bedingungen gleich sind, direkt proportional zu seiner Länge ist, ist die riesige Überlegenheit dieses Rechners über alle anderen, die nach demselben Prinzip arbeiten, offensichtlich.
Das Instrument wird aufbewahrt in einem Mahagonikasten, der auch als Ständer genutzt wird, um die Mühsal zu ersparen, das Instrument in der Hand zu halten. Erhältlich sind drei verschiedene Modelle. Alle besitzen dieselbe Konstruktion, aber zwei von ihnen tragen zusätzliche Skalen auf dem inneren Zylinder H. ..."

In diesem Teilprogramm können Sie eine solche Fuller-Rechenwalze testen. Gerechnet wird durch die Bewegung des großen Zeigers und der Skala – im Original ein Zylinder. Der kleine Zeiger ist fest. Dabei wird hier der Zylinder des Kalkulators auf die Ebene aufgerollt.
Den beweglichen gelben Zeiger verschieben Sie, indem Sie auf die gelbe Fläche klicken und bei festgehaltener Maustaste die Maus verschieben. Die Skala verschieben Sie durch Anklicken eines Punktes der weißen Skala.

Multiplikation:
Bringen Sie die 1 der Skala zum festen Zeiger. Stellen Sie den beweglichen Zeiger auf den ersten Faktor. Bringen Sie den zweiten Faktor zum festen Zeiger. Lesen Sie an dem beweglichen Zeiger das Produkt ab.

Division:
Bringen Sie den Divisor zum festen Zeiger. Stellen Sie den beweglichen Zeiger auf den Dividenden.
Bringen Sie die 1 zum festen Zeiger. Lesen Sie an dem beweglichen Zeiger den Quotienten ab.

6.15 Napier-Stäbchen

Die erste Multiplikationshilfe erfand der schottische Mathematiker Lord John Napier of Merchiston (1550-1617). Napier schrieb das kleine Einmaleins für die Zahlen 0 bis 9 auf die vier Seiten von Holzstäbchen.

Diese sind Vierkanthölzer, bei denen jeweils oben auf jeder der vier Seiten eine Ziffer aufgetragen ist, die man Kopfzahl nennt, und darunter deren Vielfache. Für die Multiplikation mit einer mehrstelligen Zahl wurden die entsprechenden Stäbchen einfach nebeneinander gelegt. Diese Idee verwendete auch Wilhelm Schickard bei der Konstruktion der Tübinger Rechenmaschine.

Dieses Teilprogramm simuliert diese Rechenstäbchen.
Tragen Sie in die Eingabezeilen zwei natürliche Zahlen bis maximal 99999 ein, so zeichnet das Programm die Abschnitte der Rechenstäbchen, die für die Multiplikation notwendig sind.
Längs der farbigen diagonalen Bereiche wird nun die Summe gebildet. Nach einer abschließenden Korrektur des Übertrags erhält man das Produkt beider Zahlen.

6.16 Genailles Multiplizierstäbchen

Von dem französischen Eisenbahner Henri Genaille wurden 1885 drei Arten von Rechenstäben entwickelt und von dem Mathematiker Èdouard Lucas in Paris über die Librairie Classique Eugène Belin in den Handel gebracht.

Ein Satz von 11 Holzstäben (1 cm x 1 cm x 17,3 cm) in einem Pappkasten konnte für die Multiplikation großer Zahlen mit einem einstelligen Faktor genutzt werden. Auf den Multiplizierstäbchen sind rundherum Einmaleins-Tabellen auf Papier aufgeklebt, wobei der Zehnerübertrag aus der niederwertigeren Stelle bereits eingerechnet ist, sodass man diesen nicht mehr im Kopf ausführen muss wie bei den Napierschen Rechenstäbchen.

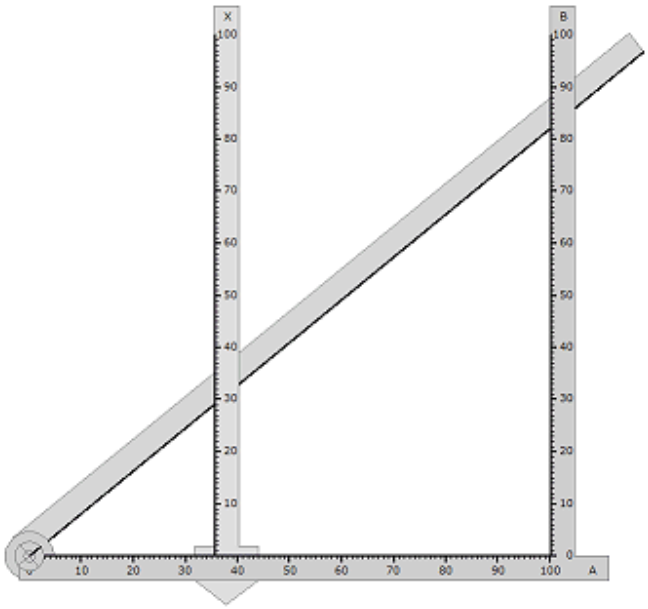
Zur Multiplikation eines mehrstelligen Faktors mit einem einstelligen Faktor legt man die mehrstellige Zahl aus den Kopfzahlen der Stäbchen zusammen und den Indexstab links daneben. Dann beginnt man in der Zeile des einstelligen Faktors rechts direkt unter der Trennlinie, folgt den Pfeilen von Stab zu Stab nach links und notiert so bei der letzten Stelle beginnend bis zur höchsten Stelle auf dem Indexstab das gesuchte Produkt.

In diesem Teilprogramm können Sie dies testen. Nach Eingabe des mehrstelligen und des einstelligen Faktors werden die Stäbchen entsprechend gelegt, sodass das Produkt in der untersten Zeile abgelesen werden kann.

6.17 Cashmore-Proportionsrechner

Der Cashmore-Proportionsrechner ist ein einfaches Gerät, mit dem auf der Grundlage des Strahlensatzes Aufgaben zur Multiplikation, Division und Proportionalität näherungsweise gelöst werden können. Der Proportionsrechner wurde 1915 von Bellingham & Stanley UK zum Patent angemeldet und bis 1920 produziert. Seine Erfinder war M.Cashmore.

Die metallenen Teile des Gerätes bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit den Massen 38·38·52 cm. Eine Kathete A ist mit der Hypotenuse H an einem Drehpunkt fixiert. Die zweite Kathete B ist mit A im rechten Winkel verschraubt. Parallel zu B ist eine in zwei Richtungen verschiebbare und skalierte Flachstange X angebracht.



Im Original war die Skala auf dem Grundarm A in 500 Einheiten geteilt, zu je 0,6096 mm. Der senkrechte Arm und der Ablesearm hatten die gleiche Teilung.
Nach dem Strahlensatz: „Die Streckenabschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf den Strahlen" gilt dann hier

a : 500 = x : b

Soll die Aufgabe 340 : 500 = x : 180 gelöst werden, wird der senkrechte Arm X auf dem Grundarm A horizontal auf die Marke 340 verschoben. Der Hypotenusenarm wird auf B zu dem Wert 180 bewegt. Auf X kann dann in vertikaler Richtung der gesuchte Wert abgelesen werden, hier 122,4.
Damit sind Proportionen näherungsweise ablesbar.

In diesem Teilprogramm wird das Cashmore-Proportionsrechner modifiziert. Durch die Einteilung der Achsen in 100 Teile sinkt zwar die Ablesegenauigkeit, jedoch ergibt sich die Möglichkeit Multiplikations- und Divisionsaufgaben zu lösen.

Zur Multiplikation x = a·b kann man wie folgt vorgehen:
Die Hypotenuse wird so bewegt, dass der Faktor b auf der Kathete B eingestellt ist. Die Stange x wird so verschoben, dass sie auf dem Wert a der Kathete A steht. Am Schnittpunkt der Stange x mit der Hypotenuse kann das Produkt abgelesen werden.
Eingestellt und abgelesen werden allerdings nur Ziffernfolgen. Ein Überschlag ist stets notwendig.
Für eine Division ist das Verfahren umgekehrt anzuwenden.

Der Cashmore-Proportionsrechner war ein zwar originelles Gerät, allerdings nur eine kurzlebige Randerscheinung in der Geschichte mathematischer Rechengeräte.

6.18 Zahlzeichen

Neben den heute in vielen Gegenden der Erde üblichen lateinischen Zahlzeichen gibt es auch Völker, die ihre eigenen Ziffern zur Bezeichnung von Zahlen

verwenden.
Dazu gehören vor allem die arabischen Völker, der Iran oder das riesige Indien mit über 1 Milliarde Menschen.

In der Geschichte gab es darüber hinaus viele verschiedene Ziffernsysteme, die zum einen Additionssysteme ohne Null (römische Ziffern) oder zum anderen Positionssysteme zur Basis 60 (assyrisch, Keilschrift) oder zur Basis 20 (Maya) darstellten. In diesem Teilprogramm können Sie in zwei Übersichten für 60 ausgewählte Systeme eine natürliche Zahl von 0 bis 60000 in der jeweiligen Form darstellen lassen.

Dezimalsystem

Auf dem dekadischen Positionssystem beruhen: Arabisch, Bengali, Brahmi, Chinesische Zählstabzahlen, Farsi, Fingerzahlen, Hindi, Morsecode, N'Ko, Semaphor und Tibetisch sowie in der 2. Übersicht Ath-Seikai, Dancing Men, Futurama, Gorwelion, Hieratisch, Kannada, Kayah, Khmer, Klingon, Laotisch, Mong, Narn, Oriya, Osmnanya, Postcode, SpaceKees, Stargate-Antik, Tamil, Thai, Tecntonese und Zentlardy.
Bei diesen wird die Zahl genau wie im europäischen System von links nach rechts ziffernweise geschrieben. Die ungewohnte Form ergibt sich nur aus den fremdartigen Ziffern.

Additives Dezimalsystem

Das chinesisch-japanische Kanji, das Jin-Chinesische (Mandschu), das Suzhou-Chinesische und das koreanische System sind eine Mischung aus Positions- und Additionssystem. Vor den Zeichen für 10, 100 ... werden die entsprechenden Vielfachen durch eine Ziffer gekennzeichnet.

Additive Systeme mit 10 als Grundzahl

In den altgriechischen, attischen = herodianischen, römischen und himyarischen Systemen werden die Zahlen durch besondere Zeichen für 5, 10, 50, 100, 1000 und 10000 gekennzeichnet. Der Zahlenwert wird durch Hintereinanderschreiben entsprechender Symbole dargestellt. Dabei schreibt man im Himyarischen zusätzlich von rechts nach links. Im altägyptischen System existieren Zeichen für 1, 10, 100, 1000 usw.

Weitere additive Systeme

Die amharischen, armenischen, ionischen Systeme sowie die ungarischen und gotischen Runen kennen eigene Symbole nicht nur für die Zehnerpotenzen und evtl. 5, 50 ..., sondern auch für 11 bis 19, die vollen Zehner und evtl. sogar die Hunderter. Auch in diesen Schreibweisen werden die Zeichen additiv hintereinander geschrieben.
In Sanskrit wird diese Zahlschreibweise zur Perfektion gebracht. Hier kennt man

spezielle Kennzeichnungen auch für die Tausender, Zehntausender usw.

Positionssysteme zu anderen Basen

Das assyrische ist ein Positionssystem zur Basis 60, das System der Maya zur Basis 20. Die Ziffern im Maya-System werden durch nur zwei Zeichen für die 5 und die 1 zusammengesetzt. Außerdem kannten die Maya die Null . Eine Besonderheit ist noch das in diesem Teilprogramm verwendete „lange System" der Maya. Dabei liegt kein reines 20er-System vor. Die dritte Stelle von rechts wird nicht mit 20^2 multipliziert, sondern mit $18 \cdot 20 = 360$ - in Bezug auf das Kalendersystem - die vierte Stelle mit $18 \cdot 20^2$, die fünfte mit $18 \cdot 20^3$ ...
Auch das Hieroglyphen-System der Maya mit den merkwürdigen „Köpfen" beruht auf der Basis 20, einem reinen 20er-System.

Im Assyrischen werden nur Keilschriftzeichen für die 10 , die Ziffer 1 und für die Leerstelle verwendet.
Die Schriften Diamond, Ecclemony und Four Line sind Systeme zur Basis 16. D'Ni nutzt die Basis 25, Dual die Basis 2, Pékrif die Basis 12 und Quadnary die Basis 4.

Kurzerklärung der Systeme

Einige dieser Zahlensysteme sind relativ unbekannt, andere wiederum künstliche Konstruktionen. Nachfolgend eine kurze Erklärung:

Ägyptisch	Hieroglyphen des antiken Ägypten
Altgriechisch	Altgriechisches System (um 600 v.u.Z.)
Amharisch	Äthiopisches System (um 400)
Arabisch	Heutiges arabisches System
Armenisch	Mittelalterliches armenisches System
Assyrisch	Keilschrift (um 2500 v.u.Z.)
Ath-Sekai	Kunstsystem für japanische SciFi-Roman (1996)
Attisch	Altgriechisches System (um 500 v.u.Z.)
Bengali	Heutiges System in Bangladesh, Indien
Brahmi	Brahmi-Schrift (um 200 v.u.Z.)
Braille	6-Punkte-Blindenschrift
D'Ni	Kunstsystem für Computerspiele
Dancing Men	System aus "Sherlock Holmes - The Dancing Men" von 1903
Diamond	Hexadezimale Computerkunstschrift (2002)
Dual	Duale Computerkunstschrift (2002)
Ecclemony	Hexadezimale Computerkunstschrift (2002)
Farsi	Heutiges System im Iran
Fingerzahlen	Internationale Gebärdensprache
Four Line	Hexadezimale Computerkunstschrift (2002)
Futurama	Kunstsystem der SF-Serie Futurama
Gallifrey	Kunstsystem der SF-Serie Dr.Who
Gorwelion	Kunstsystem von Pieter Rottiers
Gotisch	Frühmittelalterliche Wulfila-Runen
Hebräisch	Hebräische Kabbalistik-

	Schreibweise
Hieratisch	Antikes ägyptisches System (um 1800 v.u.Z.)
Himyarisch	Südarabisches System (um 600 v.u.Z.)
Hindi	Indisches System (seit 700)
Ionisch	Altgriechisches System (um 200 v.u.Z.)
Kanji	Traditionelle chinesische und japanische Zahlen
Kannada	Indische Sprache
Kayah	Sprache eines burmesischen Volkes
Khmer	Traditionelles kambodschanisches System
Klingon	Kunstsystem der SF-Serie Star Trek
Koreanisch	Traditionelle koreanische Zahlen
Laotisch	Traditionelles laotisches System
Mandschu	Chinesisches System des Frühmittelalters
Maya	Maya-System (um 300 v.u.Z.)
Maya-Hierogl.	Maya-System mit Hieroglyphen
Mong	Alternatives System für Mong-Sprachen
Morsecode	Telegrafen-Morse-Schrift
N'Ko	Niger-Kongo-Sprache (seit 1949)
Narn	Kunstsystem der SF-Serie Babylon 5
Osmanya	Somalische Sprache
Oxidilogi	Kunstsystem von Mike Lensman
Pékrif	Kunstsystem von Zack Hart (2001)
Postcode	System der Deutschen Post auf Briefen
Quadnary	4stellige Computerkunstschrift (2002)
Römisch	System des antiken Roms
Sanskrit	System des Aryabhata (um 600)
Semaphor	Internationales Flaggenalphabet
SpaceKees	Künstliches Ersatzsystem für Englisch
Stargate-Antik	Kunstsystem der SF-Serie Stargate
Suzhou	Frühchinesisches System
Tamil	Traditionelles tamilisches System
Tenctonese	Kunstsystem der SF-Serie Alien Nation
Thai	Traditionelles System Thailands
Tibetisch	Traditionelles System Tibets
Ungar.Runen	Mittelalterliche ungarische Runenzeichen
Zählstabzahlen	Frühchinesische Stabzahlen
Zentlardy	Kunstsystem für die Cartoons Robotech (1980)

6.19 Gebrochene Zahlen, Kettenbruchentwicklung

Beim Aufruf dieses Punktes haben Sie die Möglichkeit, positive gebrochene Zahlen von einer Darstellung in zwei andere zu konvertieren sowie einfache Rechnungen mit gemeinen Brüchen auszuführen. Mögliche Darstellungsformen sind

- Darstellung als gemeiner Bruch
- Darstellung als Dezimalbruch
- Darstellung als Kettenbruch
- Darstellung als p-adischer Bruch

Zuerst muss der Eingabetyp in den linken Schaltfeldern *Gemeiner Bruch,*

Dezimalbruch und *Kettenbruch* gewählt werden.

Darstellung als gemeiner Bruch

In die zwei Eingabefelder *Zähler* und *Nenner* können Sie die entsprechenden Zahlen eingeben. Beide müssen positiv, also größer 0, sein und können jeweils maximal 2 Milliarden erreichen. Geben Sie größere Zahlen oder von dem Programm nicht auswertbare Werte ein, erfolgt eine Fehlermeldung: *Nenner/Zähler gleich 0 oder größer 2 Milliarden*

Nach der Wahl von *RETURN* bzw. des Aktionsschalters *Berechnung* ermittelt das Programm die Darstellung als Dezimalbruch und Kettenbruch. Für den Dezimalbruch wird eine auftretende Periode bis 8000 Kommastellen ermittelt. Angezeigt wird sie, wenn die Periodenlänge kleiner als 200 Ziffern ist.

Hinweis: Größere Periodenlängen können Sie für Stammbrüche im Teilprogramm *Stammbruchperiode* ermitteln.

Unter einem Kettenbruch versteht man eine Entwicklung eines Bruchs in der Form

$$b_0 + 1/(b_1 + 1/(b_2 + 1/(b_3 + ... + 1/b_n)))$$

wobei alle b_i für $i > 0$ natürliche Zahlen größer Null sind. Zur Gewährleistung der Eindeutigkeit fordert man noch, dass b_n verschieden 1 ist. Jede rationale Zahl lässt sich in einen Kettenbruch entwickeln.
Umgekehrt beschreibt jeder Kettenbruch eindeutig eine rationale Zahl.
Zu bemerken ist hier, dass irrationale Zahlen in unendliche Kettenbrüche verwandelt werden können. So approximiert der Kettenbruch 1; 2; 2; 2; 2; ... die Quadratwurzel von 2.

Beispiel: Für den Bruch 12345 / 37891 ermittelt das Programm eine Periodenlänge von 2706 Ziffern (Ziffernfolge 0,325802 961125 333192 578712 623050 328574 067720 566889 234910 ...) und eine Kettenbruchentwicklung 0; 3; 14; 2; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 1; 2. Für 12345 / 37892 erhalten Sie den Kettenbruch 0; 3; 14; 2; 2; 7; 1; 3; 5.
Über den Schalter *Kürzen* können Sie den eingegebenen gemeinen Bruch weitestgehend kürzen.

Darstellung als Dezimalbruch

Wählen Sie den Eingabetyp *Dezimalbruch*, müssen Sie in die Felder *Vorperiode* und *Periode* die bekannten Größen eingeben. Im Feld *Vorperiode* wird der nicht periodische Teil aufgenommen. Dabei kann es sich um eine beliebige positive rationale Zahl, z.B. 0,2345 oder 23,4, handeln. Ist dieses Feld leer, geht das Programm davon aus, dass Ihr Dezimalbruch keinen nichtperiodischen Teil besitzt.

Nach Quittierung der Eingabe wird der Bruch in die Darstellung als gemeiner Bruch und Kettenbruch konvertiert. Ist dies nicht möglich, da Zähler oder Nenner

den zulässigen Zahlbereich überschreiten, erhalten Sie die Fehlermeldung
Umwandlung nicht möglich.

Beispiel: Vorperiode 1 und Periode 203147 ergibt den gemeinen Bruch 171878 / 142857 sowie den Kettenbruch 1; 4; 1; 11; 1; 10; 13; 1; 1; 7.

Darstellung als Kettenbruch

Kennen Sie die Kettenbruchdarstellung, dann wählen Sie den Eingabetyp *Kettenbruch*. Im Eingabefeld geben Sie nun die Zahlenfolge an. Jede Nichtziffer wird als Trennzeichen betrachtet, d.h., die Eingabe von 1; 2; 3; bezeichnet den gleichen Bruch wie die Eingabe von 1, 2, 3.
Beachten Sie bitte: Nach der Definition eines Kettenbruchs darf die Folge der b_i keine Null enthalten (außer b_0 natürlich). Weiterhin muss das letzte b_i verschieden 1 sein.

Beispiel:

1; 2	= 1,5
1; 2; 2	= 1,4
1; 2; 2; 2	= 1,41666666666...
1; 2; 2; 2; 2	= 1,413793103 ...
1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;	= 1,414213564 ... (Näherung von √2)

Darstellung als p-adischer Bruch

Zusätzlich wird die gebrochene Zahl noch in einen p-adischen Bruch transformiert. Als mögliche Basen können Sie 2 bis 36 eingeben.

Kettenbruchentwicklung

Jeder Dezimalbruch kann schrittweise in einen Kettenbruch transformiert werden und diese Kettenbruchentwicklung in gemeine Brüche, die damit ständig bessere Näherungsbrüche der Ausgangsdezimalzahl darstellen. Diese ist auch für rationale Näherungswerte reeller Zahlen, z.B. der Kreiszahl π, möglich.

Geben Sie im unteren Teil dieses Teilprogramms eine Dezimalzahl ein und bestätigen mit *Bruch umwandeln*, so berechnet das Programm die Kettenbruchentwicklung und Näherungsbrüche der Dezimalzahl.
Für die Näherung der Kreiszahl 3,14159265358979323846 erhalten Sie zum Beispiel als Näherungsbrüche die bekannten Werte 22/7, 333/106, 355/113, 103993/33102 usw.

6.20 Bruchrechnung

In diesem Teilprogramm können Sie einfache Berechnungen mit gebrochenen Zahlen durchführen.

Die zwei Brüche werden dabei in der Form „ganzer Anteil Nenner/Zähler" eingegeben. Tragen Sie beide Operanden unter *1.Bruch* bzw. *2.Bruch* ein.
Haben Sie einen Bruch nur als Dezimalbruch gegeben, so kann dieser mit dem Schalter *Umwandeln* in einen gemeinen Bruch transformiert werden. Dabei wird eine eventuelle Periode durch einen senkrechten Strich markiert, d.h. zum Beispiel, 16,596|911 bedeutet 16,596 Periode 911 und wird in 16 119263/199800 umgewandelt.

Wurden zwei Brüche eingegeben, so können diese mit den vier Schaltern +, -, * und : verknüpft werden. Das Programm ermittelt, wenn möglich, das Ergebnis und zeigt dies in korrekter Bruchschreibweise an; ebenso die Zwischenschritte der Berechnung und die Dezimaldarstellung.
Wurde das Feld *Ergebnis in 1.Bruch kopieren* markiert, überträgt das Programm automatisch den berechneten Wert in die Eingabefelder des 1.Bruchs. Damit ist einer Weiterrechnung einfach möglich.

Weitere Berechnungsmöglichkeiten sind das Kürzen, Erweitern (dazu muss als 2.Bruch eine ganze Zahl eingetragen werden) und das Packen, d.h. die Umwandlung eines gemischten Bruchs, bestehend aus ganzem und gebrochenem Anteil, in einen gemeinen Bruch.
Klicken Sie wiederholt auf den Schalter *Beispielaufgabe*, so werden Ihnen die Berechnungsmöglichkeiten dieses Teilprogramms demonstriert.

Alle Berechnungen können in die Zwischenablage kopiert bzw. gedruckt werden. Dabei ist zu beachten, dass dies auf Grund der Bruchschreibweise in Form einer Abbildung erfolgt.

6.21 Addition rationaler Zahlen

Natürliche, gebrochene und rationale Zahlen können sehr einfach auf einem Zahlenstrahl grafisch veranschaulicht werden. Dabei kann jede dieser Zahlen eindeutig einem Punkt auf dem Strahl zugeordnet werden.
Das Modell des Zahlenstrahls kann auch zur Veranschaulichung der Addition und Subtraktion von Zahlen genutzt werden.

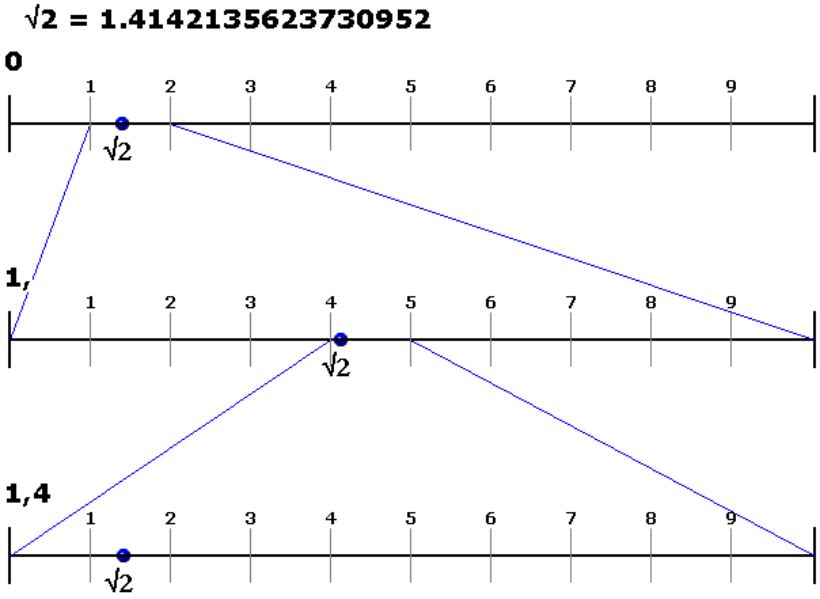
In diesem Teilprogramm können Sie an zwei Rollbalken zwei rationale Zahlen a und b einstellen. Das Programm stellt diese als Pfeile vom Nullpunkt des Zahlenstrahls beginnend dar.
Möchte man die zwei Zahlen addieren, so verschiebt man den zweiten Pfeil an das Ende des ersten. Das Ergebnis a + b kann nun als Pfeil vom Nullpunkt zum Ende des zweiten Pfeils abgelesen werden.

Für die Subtraktion wird mit der entgegengesetzten Zahl von b addiert, d.h., der entgegengesetzte Pfeil von b wird erneut an das Ende des Pfeils von a gelegt und das Ergebnis wieder abgelesen.
Diese grafische Addition zweier Zahlen können Sie hier untersuchen.

6.22 Intervallschachtelung: Wurzel und Dezimalbruch

Im Gegensatz zu rationalen Zahlen existieren reelle Zahlen, deren Dezimaldarstellung weder endlich noch periodisch ist. Insbesondere gilt dies für die Mehrzahl der Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen.

Zur Berechnung dieser Zahlen können Näherungsverfahren herangezogen werden. Eine einfache Methode besteht in dem Verfahren der Intervallschachtelung.



Das Verfahren sei am Beispiel √2 erläutert. Nach einer ersten Schätzung liegt √2 zwischen 1 und 2, d.h. im Intervall [1;2]. Jetzt unterteilt man dieses Intervall in zehn Teile und prüft, für welchen Intervallwert das Quadrat kleiner bzw. größer als 2 ist. Man findet $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$, d.h., √2 liegt im Intervall [1,4 ; 1,5]. Setzt man dies fort, so gewinnt man je Intervall eine weitere Dezimalziffer Genauigkeit hinzu.

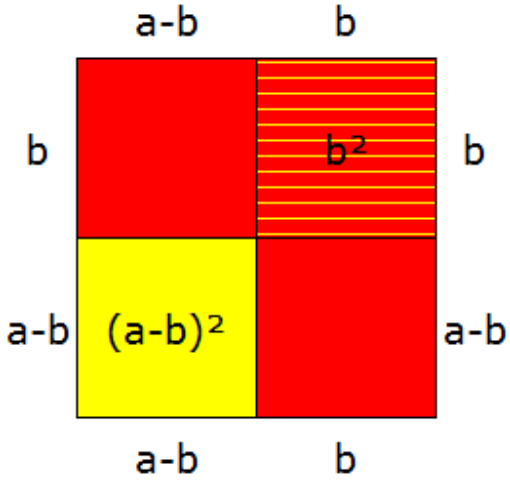
In diesem Teilprogramm veranschaulicht das Programm diese Ineinanderschachtelung von Intervallen. Für einen Dezimalbruch stellen Sie *Zähler* und *Nenner* an den Rollbalken ein; für die Quadratwurzel den Radikanden der Wurzel sowie die *Tiefe* der Intervallschachtelung.

6.23 Binomische Formeln 2.Grades

Das Teilprogramm *Binomische Formel* veranschaulicht die erste und zweite binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

grafisch.



Die erste binomische Gleichung kann als Zusammensetzung zweier Quadrate der Seitenlängen a und b und zweier Rechtecke mit den Seitenlängen a, b veranschaulicht werden. Ordnet man diese Flächen wie in der Darstellung

ersichtlich an, so entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge a + b und somit als Flächeninhalt $(a + b)^2$, was gerade der binomischen Formel entspricht.
An den zwei Rollbalken können Sie die Werte für a und b verändern.
Die Berechnungsergebnisse werden nur angezeigt, wenn Sie das Feld *Rechnung* markieren; die Seiten beschriftet bei Markierung von *Beschriftung*.

2.binomische Formel

Für die grafische Darstellung der zweiten binomischen Gleichung wird von einem Quadrat der Länge a ausgegangen (o.b.d.A. sei hier a größer als b).
Von diesem werden zwei Rechtecke (rot) der Seitenlängen a-b abgezogen.

Da diese beiden Rechtecke sich überlappen, muss das gemeinsame Quadrat mit der Seitenlänge b wieder addiert werden. Andernfalls hätte man diese Fläche doppelt vom Ausgangsquadrat subtrahiert.
Der verbliebene Flächenrest (gelb) ist dann gerade $(a-b)^2$, so dass sich ergibt:

$$a^2 - 2\,ab + b^2 = (a-b)^2$$

d.h. die zweite binomische Formel.

6.24 Binomische Formel 3.Grades

Das Teilprogramm *Binomische Formel 3. Grades* veranschaulicht die binomischen Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

grafisch.
Zur Demonstration der binomischen Formel 3. Grades benötigt man eine räumliche Darstellung.
Hier wird ein Würfel der Kantenlänge a + b aus einem Würfel der Länge a, einem Würfel der Länge b und jeweils 3 Quadern mit den Kantenlängen a, a, b bzw. a, b, b zusammengesetzt.

Die Werte für a und b tragen Sie in die Eingabezeilen ein. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit können Sie an mehreren Markierungsfeldern auswählen, welche der acht Teilkörper dargestellt werden sollen.
Über die kleinen Schalter bei *Drehung um x-Achse, ... y-Achse* und *... z-Achse* haben Sie weiterhin die Möglichkeit, den zusammengesetzten Würfel von allen Seiten zu betrachten.

Markieren Sie das Feld *Körper drehen*, dreht das Programm den Würfel im Raum. Die Geschwindigkeit der Drehung um die x-, y- bzw. z-Achse können Sie über die untersten Pfeilschalter regeln.

6.25 Mittelwerte reeller Zahlen

Sind zwei positive reelle Zahlen a und b gegeben, so können von diesen mehrere verschiedene Mittelwerte gebildet werden, die wiederum in vielen

mathematischen Aufgabenstellungen, z.B. der Statistik oder Geometrie, von Bedeutung sind.

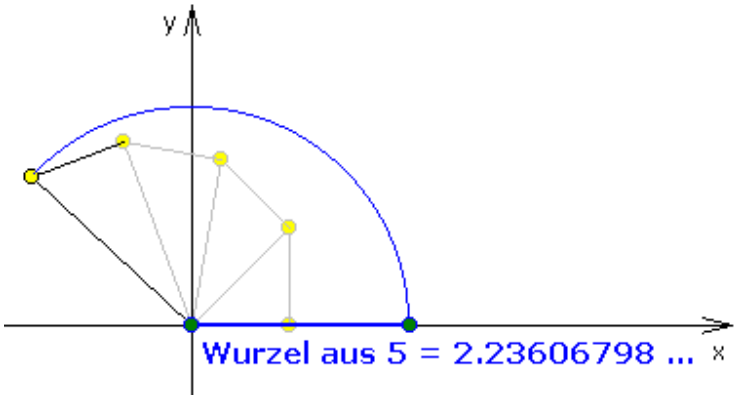
Die fünf wesentlichsten Mittelwerte sind das arithmetische Mittel, das geometrische Mittel, das harmonische Mittel, das quadratische Mittel und das logarithmische Mittel. Sind die Zahlen a und b positiv und verschieden voneinander, so gilt stets:
Harmonisches Mittel < Geometrisches Mittel < Logarithmisches Mittel < Arithmetisches Mittel < Quadratisches Mittel

Dass dies der Fall ist, können Sie in diesem Unterprogramm zumindest grafisch nachvollziehen, wenngleich natürlich eine grafische Veranschaulichung kein Beweis ist.

Auf einem Zahlenstrahl werden zwei Zahlen A und B und die fünf Mittelwerte angetragen.
Die Zahlen verändern Sie wieder, indem Sie sie durch Anklicken und Ziehen mit der Maus längs des Zahlenstrahls verschieben. Dabei werden Sie feststellen, dass die oben genannten Größenbeziehungen für positive A und B stets gelten. Mit dem *Simulation*-Schalter verschieben Sie die Zahl A kontinuierlich auf dem Zahlenstrahl.

6.26 Irrationale Zahlen

Wie die gebrochenen Zahlen liegen auch die rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl dicht beieinander. Dennoch füllen diese Zahlen nicht den ganzen Zahlenstrahl aus – es bleiben Lücken. Zahlen, die diese Lücken ausfüllen, heißen irrational.
Spezielle irrationale Zahlen, nicht natürliche Wurzeln aus natürlichen Zahlen, können mithilfe des Satzes von Pythagoras konstruiert werden.



Nutzt man für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge 1, also $c^2 = 1^2 + 1^2$, so erhält man für die Länge der Hypotenuse die irrationale Länge $\sqrt{2}$. Konstruiert man nun auf dieser Hypotenuse ein weiteres rechtwinkliges Dreieck, sodass diese Hypotenuse zur Kathete wird und die zweite Kathete erneut die Länge 1 hat, so ergibt sich für die Hypotenuse des neuen Dreiecks $c^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ und somit die Länge $\sqrt{3}$. Kontinuierliches Fortsetzen des Verfahrens erzeugt so alle Wurzeln n natürlicher Zahlen.

In diesem Teilprogramm wird dieses Verfahren grafisch veranschaulicht. Am Rollbalken stellen Sie den Wert n ein. Das Programm konstruiert die Hypotenuse

der Länge n und projiziert den Wert auf die Abszissenachse.

6.27 Schriftliche Multiplikation und Division

Schriftliche Multiplikation

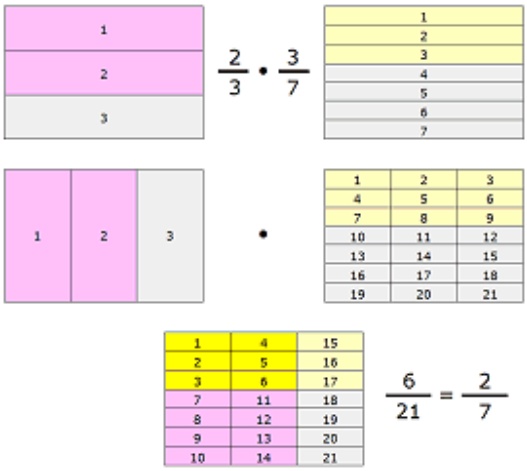
In diesem Teilprogramm wird die schriftliche Multiplikation zweier gebrochener Zahlen angezeigt. Beide Zahlen dürfen maximal 9 Stellen besitzen.

Schriftliche Division

In diesem Teilprogramm wird die schriftliche Division zweier natürlicher Zahlen angezeigt. Beide Zahlen dürfen maximal 9 Stellen besitzen.
Eine Periode wird erkannt, wenn deren Länge maximal 24 Ziffern beträgt.

6.28 Bruchmultiplikation und Bruchaddition

In diesem Teilprogramm wird die einfache Addition und Multiplikation von gemeinen Brüchen grafisch veranschaulicht.



An den Rollbalken stellen Sie die Zähler und Nenner der zwei zu verknüpfenden gebrochenen Zahlen ein.
Das Programm stellt beide gebrochene Zahlen als Anteile von Rechtecken im oberen Fensterteil dar. In der zweiten Zeile werden diese Brüche entsprechend erweitert, so dass die Multiplikation bzw. Addition möglich wird. Insbesondere bei der Addition wird der Hauptnenner beider Brüche, d.h. das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, gebildet.

Im unteren Fensterteil werden beide Brüche verknüpft und das Ergebnis der Operation ermittelt. Zwischen Multiplikation und Addition schalten Sie durch Markieren des Feldes *Bruchaddition* um.

6.29 Kopfrechen-Test

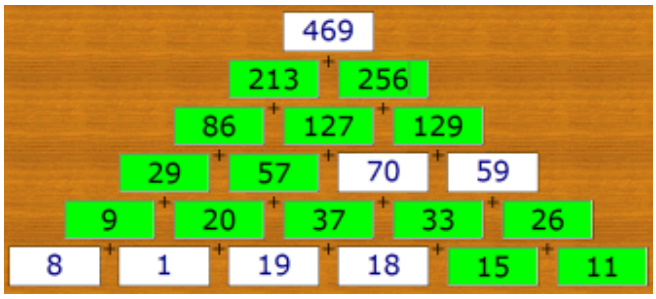
In diesem Teilprogramm wird die Fähigkeit getestet, einfache Rechenaufgaben ohne Hilfsmittel schnell im Kopf zu lösen.
Vor dem Start legen Sie zuerst fest, welche Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder alle vier) abgefragt werden und wie groß der verwendete Zahlenbereich (*untere Grenze ... obere Grenze*) ist.

Klicken Sie auf *Start*, werden nun 60 Sekunden lang verschiedene Aufgaben gestellt. Die Lösungen tragen Sie in das Eingabefeld ein und bestätigen mit *Return*. Nach Ablauf der Testzeit erfolgt die Auswertung. Ziel sollte es sein, möglichst viele Aufgaben korrekt zu lösen. Haben Sie Administratorrechte, so wird wieder eine Bestenliste geführt.

Anmerkung: Bei einem Test in einer 8. Klasse eines Chemnitzer Gymnasiums erreichte der Beste bei der Wahl der *Zufallsoperatoren* und der *oberen Grenze* 50 erstaunliche 36 richtige Lösungen in 1 Minute!

6.30 Zahlenpyramide

Bei einer Zahlenpyramide sind Zellen mit Zahlen so aufgeschichtet, dass auf je zwei benachbarte Zellen einer Schicht eine dritte Zelle gesetzt wird, in die ein Rechenergebnis der beiden unteren Steine eingetragen wird. Meist wird die Summe der zwei unteren Zahlen verwendet, seltener die Differenz.



Da verschiedene Zahlen in der Zahlenpyramide vorgegeben sein können, erfordert das Ausfüllen der Pyramide Additionsaufgaben (Rechnen "von unten nach oben") oder Subtraktions- bzw. Ergänzungsaufgaben (Rechnen "von oben nach unten").

Zahlenpyramiden werden bevorzugt im Grundschulbereich, aber auch in den unteren Klassen der Sekundarstufe I genutzt.
Der große Vorteil von Zahlenpyramiden liegt darin, dass Additions- und Subtraktionsaufgaben in gemischter Form vorkommen können. Die Kinder sind so gefordert, bei jedem Bestimmen einer freien Zelle genau zu überlegen, wie sie ihn mit Hilfe einer Addition oder Subtraktion berechnen können.

Geht man von einer Zahlenpyramide mit 6 Etagen aus, so müssen für eine eindeutige Lösbarkeit mindestens 6 Zellen vorgegeben sein. Soll keine der 21 Rechenaufgaben schon eingetragen sein, können höchstens 13 Zellen gefüllt sein. Insgesamt gibt es, ohne Berücksichtigung von Symmetrie, 335890 Ausgangsmöglichkeiten.

In diesem Teilprogramm werden Zahlenpyramiden konstruiert. Klicken Sie auf *Neue Aufgabe*, wird eine derartige Pyramide mit mindestens sechs gefüllten Zellen angezeigt. Aufgabe ist es, die freien Zellen korrekt auszufüllen.
Vier verschiedene *Aufgabentypen* können gewählt werden. Zum einen wird nur mit natürlichen Zahlen, zum anderen mit ganzen Zahlen addiert. Der dritte Typ ersetzt die Addition durch die Subtraktion.
Wählen Sie *gemischte Operationen*, so werden auch einige

Multiplikationsaufgaben gestellt. Beachten Sie bitte, dass die Zahlen nun deutlich größer werden können und damit die Aufgaben anspruchsvoller.

Während des Ausfüllens kann eine Computerhilfe zugeschaltet werden (*Eingabekontrolle*). Ist das Feld markiert, so wird ein korrekt eingetragenes Resultat mit einem grünen Hintergrund angezeigt.

6.31 Zahlen zuordnen

Dual- und Hexadezimalzahlen, Römische Zahlen

In diesem kleinen Übungsprogrammteil sollen natürliche Zahlen aus dem Dezimalsystem in das Dual- bzw. Hexadezimalsystem umgewandelt und gleiche Zahlen zugeordnet werden. Ebenso kann die Zuordnung von Zahlen in römischer Schreibweise geübt werden.
Nach dem Start des Tests werden 24 Zahlen angezeigt, im oberen Fensterteil 12 Zahlen im Dezimalsystem, im unteren 12 Dualzahlen bzw. Hexadezimalzahlen. Jeweils 10 dieser Zahlen bilden Paare, die die gleiche Zahl darstellen. 4 der angezeigten Felder können nicht zugeordnet werden.

Die Aufgabe besteht nun darin, die 10 Paare durch Anklicken mit der Maus zu finden. Dazu wird zuerst eine Zahl im oberen Teil und anschließend die zugeordnete Zahl im unteren Teil markiert.
Der Schwierigkeitsgrad kann vor Testbeginn in der Liste eingestellt werden; ebenso ob die Umwandlung in Dualzahlen, in Hexadezimalzahlen oder in römischer Zahlschreibweise getestet werden soll.

Lösungen linearer und quadratischer Gleichungen

In der Liste des Aufgabentyps können auch Übungen zum Zuordnen von Lösungen zu linearen bzw. quadratischen Gleichungen ausgewählt werden.

Nach dem Start des Tests werden 24 Einträge angezeigt, im oberen Fensterteil 12 Gleichungen, linear bzw. quadratisch, im unteren 12 Lösungsmengen. Jeweils 10 dieser Gleichungen und Zahlen bilden Paare, die zueinander gehören.

6.32 Mathematik-Test

Unter diesem Punkt finden Sie kleine Multiple-Choice-Tests zu mathematischen Fragen.
Nach dem Start wählen Sie zuerst einen Test in der linken Liste aus und laden ihn mit dem Schalter.

Nun markieren Sie für jede der 16 Fragen eines der Auswahlfelder. Beachten Sie bitte, dass bei jeder Frage genau eine der Antworten richtig ist. Sind alle Fragen

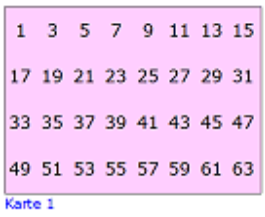
beantwortet erfolgt die Auswertung automatisch. Danach ist keine Änderung mehr möglich.
Richtig gelöste Aufgaben werden blau angezeigt, falsche Lösungen rot. Haben Sie eine Frage falsch beantwortet, so wird die richtige Antwort mit *** gekennzeichnet. Außerdem erhalten Sie eine Bewertung in Form einer Schulnote.
Mit dem Schalter können Sie die Fragen ausdrucken.

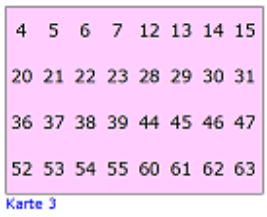
6.33 Binärkartenspiel, Ternärkartenspiel

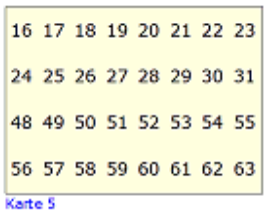
Eine einfache Anwendung des Dual- bzw. Binärsystems ist das als Binärkartenspiel (engl. Binary Card Game) bezeichnete Problem.

Auf sechs Karten sind jeweils 32 natürliche Zahlen von 1 bis 63 notiert. Aufgabe ist es, alle die Karten auszuwählen, auf der eine gedachte Zahl von 1 bis 63 notiert ist. Die gedachte Zahl ergibt sich, indem man die ersten Zahlen der gewählten Karten addiert.

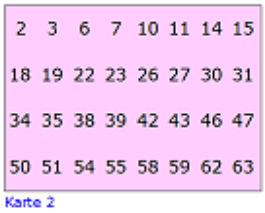
Zum Beispiel ergibt sich für die natürliche Zahl 39 die Dualzahl 100111 = $2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 4 + 2 + 1$.

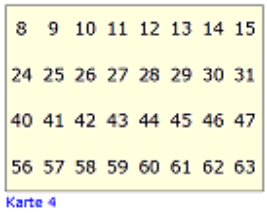


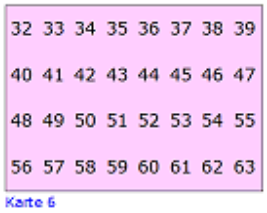




Auf Grund der Dualdarstellung ist die Zahl 39 auf den Karten mit den ersten Zahlen 1, 2, 4 und 32 notiert.







In diesem Teilprogramm wird das Binärkartenspiel dargestellt. Eine Karte wird ausgewählt bzw. nicht ausgewählt, indem diese mit der linken Maustaste angeklickt wird.
Bei Markierung des Feldes *Ternärkarten*, wird ein analoges Spiel, hier jedoch mit Karten auf der Basis des Ternärsystems, demonstriert.

6.34 Eigenschaften einer Zahl

Dieses Teilprogramm ergänzt die Vielzahl von Teilprogrammen zur Arithmetik und speziellen Eigenschaften von Zahlen.
Geben Sie die zu untersuchende *Zahl z* ein und quittieren Sie mit *Berechnung*, so wird über eine Langarithmetik Folgendes ermittelt:

- Die Primfaktorzerlegung der Zahl
- Die benachbarten Primzahlen
- Die Anzahl der Primzahlen bis z und die z-te Primzahl
- Die Darstellung der Zahl in den Positionssystemen von Basis 2 bis 16
- Die Zahlenfolge 3a + 1 mit der Startzahl z
- Die z-te Fibonacci-Zahl und Lucas-Zahl

- Die z-te Catalan-Zahl
- Die Keith-Folge von z, evtl. eine Zahlenbasis von 2 bis 32, für die z Keith-Zahl ist
- Die Goldbachsche Zerlegung in zwei Primsummanden
- Die Zerlegung in einer Summe von zwei bzw. drei Quadratzahlen
- Fakultät z! und Doppelfakultät z!!
- Die Potenzen 2^z, z^z und z^2 bis z^{25}
- Die Reihesummen der natürlichen Zahlen, Quadrate, Kuben, vierten und fünften Potenzen von 1 bis z

Beachten Sie bitte: Die Berechnung der Catalan-Zahl, der Fakultät, aber auch von z^z kann sehr viel Zeit benötigen. Dabei können auch Ergebnisse entstehen, die durchaus mehr als 10000 Ziffern haben. Ähnliches gilt auch für die anderen Berechnungen.

Deshalb sind die Berechnung von z^z auf maximal 4000, von z!, z!! und der Catalan-Zahl auf maximal 5000 begrenzt. Die anderen Ergebnisse werden bis z = 50000 ermittelt.

6.35 Zwei Zahlen

Geben Sie zwei Zahlen a und b in die Eingabezeilen ein (beide Zahlen kleiner als 500 Milliarden) und bestätigen Sie mit *Berechnung*. Dann werden bestimmt:

- Die Summe und das Produkt beider Zahlen.
- Die Quotienten Zahl1/Zahl2 bzw. Zahl2/Zahl1 werden auf insgesamt 60 Stellen genau angezeigt.
- Der ganzzahlige Divisionsrest
- Die Wurzeln beider Zahlen
- Der größte gemeinsame Teiler ggT und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache kgV beider Zahlen werden ermittelt.
- Von jeder Zahl wird die Anzahl, die Summe und die Menge ihrer ganzzahligen Teiler (Teiler und Komplementärteiler) sowie die Summe ihrer echten Teiler berechnet. Voraussetzung dafür ist, dass die jeweilige Zahl kleiner als 2 Milliarden ist.

Die Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers erfolgt mit dem Euklidischen Algorithmus.
Diese Ermittlung benötigt etwas Zeit, insbesondere wenn die Zahlen sehr viele kleine Primfaktoren besitzen. Mit der *ESC*-Taste oder dem *Abbruch*-Schalter stoppen Sie die gerade laufende Berechnung; entweder für Zahl 1 oder für Zahl 2.

Beispiel: Für die Zahlen 1234567890 und 2345678 ermittelt das Programm:

Summe	1 236 913 568
Produkt	2 895 898 739 079 420
Quotient	526,3160118311208955363864946510134809637128369708033242
1	41434672

Wurzel 1	35136,418286444621616658231167580770371591427181243191984318268404
Quotient 2	0,00189999919728999269533893352758429510101708541925547731522 4
Wurzel 2	1531,560641959697265450614684047176560702410167892478574 0633049
ggT	2
kgV	1 447 949 369 539 710

Für das Beispiel berechnet das Programm weiterhin 48 Teiler für Zahl 1:

- 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90, 3607, 3803, 7214, 7606, 10821, 11409, 18035, 19015, 21642, 22818, 32463, 34227, 36070, 38030, 54105, 57045, 64926, 68454, 108210, 114090, 162315, 171135, 324630, 342270, 13717421, 27434842, 41152263, 68587105, 82304526, 123456789, 137174210, 205761315, 246913578, 411522630, 617283945 und 1234567890
- Teilersumme = 3211610688

sowie acht Teiler für Zahl 2:

- 1, 2, 23, 46, 50993, 101986, 1172839, 2345678
- Teilersumme = 3671568

Hier können Sie beide Zahlen in beliebigen Zifferngruppen eingeben.

Beachten Sie bitte, dass sowohl Zahl 1 als auch Zahl 2 natürliche Zahlen kleiner als 500 Milliarden und größer Null sein müssen.

6.36 Stammbruchperiode

Eine natürliche Zahl z kann in diesem Unterprogramm untersucht werden. Nach Eingabe in *Zahl z* = und Quittierung mit *RETURN* oder dem Schalter *Berechnung* wird Folgendes berechnet:

Primfaktorzerlegung und Eulersche Funktion φ(z)

Die Zahl z wird faktorisiert, d.h., die vollständige Primfaktorzerlegung wird ermittelt. In dem Prozentfeld (rechts vom Eingabefeld) können Sie den Fortschritt der Zerlegung nachvollziehen. Zugelassen sind Zahlen, welche kleiner als 1 Billiarde (10^{15}) sind.

Das Faktorisieren von Zahlen zählt zu den rechenintensiven mathematischen Operationen, sodass der Vorgang gewisse Zeit in Anspruch nehmen kann. Mit der Taste *ESC* oder dem Schalter *Abbruch* können Sie diese Routine jederzeit abbrechen.

Enthält die Zahl z mehrere Primfaktoren größer als 2 Millionen oder ist selbst eine Primzahl größer 4 Billionen, erzielt dieses Unterprogramm in vertretbarer Zeit nicht immer ein Ergebnis, sodass in diesem Fall mit einer Fehlermeldung automatisch abgebrochen wird.

Beispiel: 111 111 111 111 117 wird nach etwa 30 Sekunden vollständig in 3, 13 und 2849002849003 zerlegt. Dagegen wird von 111 111 111 111 121 nur ein Primteiler, die 11, gefunden: Diese Zahl enthält mindestens zwei Primteiler, die größer als 2 Millionen sind.

Zusätzlich ermittelt das Programm den Funktionswert der Eulerschen Funktion $\varphi(z)$. Sind 0,1,2,3, ..., z - 1 die kleinsten positiven Reste bei der Division mit z, so existieren unter diesen stets Reste, welche relativ prim zu z sind, d.h., der Rest und z haben einen größten gemeinsamen Teiler von 1.
Die Menge aller relativ primen Reste nennt man reduziertes Restsystem modulo m. Die Anzahl seiner Elemente ist gerade der Funktionswert der Eulerschen Funktion $\varphi(z)$. Diese Funktion ist eine der wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen. Für Primzahlen p gilt $\varphi(p) = p-1$, für Nicht-Primzahlen ist $\varphi(z)$ aus der Menge der Primteiler berechenbar.
Beispiel: Für die oben genannte Eingabe 111 111 111 111 117 erhalten Sie $\varphi(z)$ = 68376068376072, des Weiteren $\varphi(21) = 12$ oder $\varphi(140) = 48$.

Stammbruchperiode

Zahlentheoretisch von großer Bedeutung sind Periodenlängen von gemeinen Brüchen. Von dem Stammbruch 1 / z werden 1250 Kommastellen berechnet. Besitzt dieser Bruch eine Periode mit einer Länge kleiner 1251, wird diese angezeigt. Darüber hinaus wird weiter nach einer Periode gesucht. Entsprechend der Periodenlängeneinstellung am Rollbalken (von 10000 bis 10 Millionen) sucht das Programm nach wiederkehrenden Ziffernfolgen in der Dezimalbruchdarstellung. Voreingestellt ist eine Suche bis 10000 Dezimalstellen.

Beachten Sie bitte: Erhöhen Sie den Suchbereich, so vergrößert sich auch die erforderliche Rechenzeit. Die Suche nach einer Periode kann mit der *ESC*-Taste oder dem *Abbruch*-Schalter gestoppt werden.

Beispiel: Geben Sie die Zahl z = 1111119 ein, erhalten Sie
Primfaktorzerlegung 1111119 = 3 * 370373
für das Quadrat = 1 234 585 432 161
die Quadratwurzel =
1054,096 295 411 382 232 792 481 572 351 353 582 580 628 607 ...

und des Weiteren die Potenzen mit den Exponenten 1 bis 8. Mit der Voreinstellung wird keine Periode gefunden. Erhöhen Sie auf 100000 Suchstellen, meldet das Programm eine Periodenlänge von 92593 Stellen, beginnend mit den Ziffern 000000 899993 610045 368677 882387 035052 051130 436973 ...

Da das Eintippen sehr großer Zahlen mitunter mühsam ist, können Sie z hier in beliebigen Gruppen eingeben, z.B. statt 12345678901 12 34 56 78 90 1 oder 12 345 678 901. Andere Zeichen als Ziffern werden ausgeblendet, d.h., -1234 wird als 1234, 3.567 als 3567 ausgewertet.

6.37 Figurierte Zahlen

Figurierte Zahlen sind Zahlen, welche als Summe von Eckpunkten einer Folge von gleichliegenden Punkten von N-Ecken gebildet werden können. Sind die N-Ecke regulär, so spricht man von Polygonzahlen.
Abbildung: Dreieckszahlen

In diesem Teilprogramm werden einige dieser Zahlenarten grafisch veranschaulicht.
Wählen Sie zuerst, welche Zahlenart dargestellt werden soll. An dem Rollbalken *Anzahl* stellen Sie ein, wie viele dieser Zahlen angezeigt werden.
Zusätzlich werden die ersten 200 Zahlen dieser Art in einer Liste genannt.

6.38 Primzahlsieb des Eratosthenes

Das berühmteste Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen ist das von dem griechischen Mathematiker Eratosthenes von Kyrene (276-194 v.u.Z.), der 235 v.u.Z. Vorsteher der Bibliothek in Alexandria wurde, entwickelte Primzahlsieb. Es ermittelt Primzahlen in einem Intervall, indem alle zusammengesetzten Zahlen ausgesiebt werden:

"... Man denke sich die Folge der natürlichen Zahlen hingeschrieben und streiche, zunächst von 2 ausgehend, jede zweite Zahl, also, 4, 6, 8 ... , dann von 3 ausgehend, jede dritte Zahl, also 6, 9, 12 ... , dann von 5 ausgehend, jede fünfte Zahl usw. Die 4 wurde als Ausgangszahl übergangen, weil sie als Vielfaches von 2 bereits gestrichen war ... Übrig bleiben augenscheinlich nur die Primzahlen ..."
("Über Zahlen und Überzahlen", von Krbek)

Dieses Teilprogramm veranschaulicht die Wirkung dieses Verfahrens.
Je nach eingestelltem Startwert werden jeweils 210 Zahlen angezeigt.
Entsprechend dem Siebverfahren streicht das Programm sofort zuerst alle durch zwei teilbaren Zahlen (rot), danach alle durch 3 teilbaren (violett), alle durch 5 teilbaren (blau) usw.
Beenden kann man das Verfahren jeweils, wenn das Quadrat der Streichzahl größer als die letzte zu untersuchende Zahl ist. Im Ergebnis bleiben nur Primzahlen als nicht durchgestrichene Zahlen übrig.

Möchten Sie keine farbige Darstellung der gestrichenen Zahlen, so markieren Sie das Feld *farbige Darstellung* nicht. Am Rollbalken stellen Sie die Größe der ersten Zahl des untersuchten Intervalls ein. Als höchster Wert ist dabei 10 Millionen möglich. Markieren Sie das Feld *Streichzahl*, trägt das Programm für jedes Feld die Primzahl ein, bei der diese Zahl zuerst gestrichen wurde.

Wählen Sie *Zahl ausblenden*, so löscht das Programm die zusammengesetzten Zahlen und zeigt nur noch die Primzahlen an.
Möchten Sie das schrittweise Aussieben der zusammengesetzten Zahlen nachvollziehen, so ändern Sie den Rollbalken *Streichzahl.* Voreingestellt ist *alle*, d.h., alle Zahlen werden ausgesiebt. Ändern Sie den Wert auf 2, 3 ..., werden nur die Zahlen von 2 bis zum eingestellten Wert zum Streichen genutzt. Stellen Sie *keine* ein, erhalten Sie ausschließlich die Auflistung der zu testenden Zahlen.

6.39 Primzahlen

Innerhalb des Programmteils *Arithmetik* finden Sie mehrere Teilprogramme zur Untersuchung von Primzahlen, deren Eigenschaften, der Berechnung von Zahllisten usw. Dazu gehören:

- Primzahlen
- Primzahlzwillinge, Primzahlvierlinge, Doppel-Primzahlzwillinge
- Distanz-m-Primzahlen
- Primzahltupel
- Primfaktorzerlegung

Das Teilprogramm *Primzahlen* ermöglicht die Berechnung von
Primzahlen, Primzahlzwillingen, Primzahlvierlingen, Doppel-Primzahlzwilligen, umkehrbaren Primzahlen, guten Primzahlen und Sophie-Germain-Primzahlen
und die Zerlegung von Primzahlen der Form 4N+1

Auf der linken Fensterseite ist ein Berechnungsintervall einzugeben. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* werden die gesuchten Zahlen ermittelt und in die Tabelle eingetragen.
Erfordert die Berechnung zu viel Zeit, können Sie sie jederzeit mit der *ESC*-Taste oder dem Schalter *Abbruch* unterbrechen.

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau 2 Teiler besitzt, d.h., diese Zahl p ist nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar. Per Definition ist die 1 keine Primzahl. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Schon Euklid von Alexandria (um 365-300 v.u.Z.) bewies, dass unendlich viele Primzahlen existieren müssen. Im Buch VII der "Elemente" begründet Euklid auch die Bezeichnung πρντοσ αριθμοσ (Lateinisch: numerus primus; Deutsch: erste Zahl), indem er alle anderen Zahlen als aus Primzahlen, den ersten grundlegenden Zahlen, zusammengesetzt erklärt. Neben zahlentheoretischen Untersuchungen erhalten diese Zahlen immer stärkere Bedeutung, weil mithilfe besonders großer Primzahlen schwer zu entschlüsselnde Codierungen aufgebaut werden können. Ein Code basierend auf 2 etwa 60-70-stelligen Primzahlen gilt heute als praktisch sicher. Die Besonderheit und der von diesen Zahlen ausgehende Reiz besteht in der Tatsache, dass selbst für Laien interessante Untersuchungen möglich sind. Insbesondere die ungleichmäßige Verteilung gibt ständig Rätsel auf.
Das Programm ermittelt alle Primzahlen von der unteren bis zur oberen Grenze.

Primzahlzwilling

In der Liste werden ausschließlich Primzahlzwillinge angezeigt. Unter einem Primzahlzwilling versteht man zwei benachbarte Primzahlen, deren Differenz gleich 2 ist. Das kleinste Paar ist (3;5). Bis heute gelang es nicht, nachzuweisen, dass tatsächlich unendlich viele Primzahlzwillinge existieren.

Primzahlvierlinge

Ausschließlich Primzahlvierlinge erscheinen in der Tabelle. Unter einem Primzahlvierling versteht man ein Quadrupel von Primzahlen, welche die Abstände 2, 4 und 2 aufweisen, d.h., ein Primzahlvierling tritt innerhalb eines Zehners auf, bei dem die auf 1, 3, 7 und 9 endenden Zahlen gleichzeitig Primzahlen sind – Ausnahme ist der Primzahlvierer 5, 7, 11 und 13. Bis heute ist nicht sicher, ob ein größter Vierling existiert.

Setzt man die Konstruktion Primzahl-Zwilling-Vierling fort und fragt nach dem kleinsten Abstand zweier Primzahlvierlinge, so lässt sich leicht nachweisen, dass dieser mindestens 30 sein muss. Der kleinste Primzahlachter existiert für 1006301; 1006303; 1006307; 1006309 1006331; 1006333; 1006337; 1006339 Interessant ist, dass zwischen 1006300 und 1006340 keine anderen Primzahlen liegen. Für den nächsten "Achter"
2594951; 2594953; 2594957; 2594959 2594981; 2594983; 2594987; 2594989 findet man dazwischen die Primzahl 2594971.

Doppelprimzahl-Zwilling

In der Liste werden sogenannte Primzahlzwillinge angezeigt. Darunter versteht man zwei Paare von Primzahlzwillingen der Form z - 1, z + 1, 2z - 1 und 2z + 1.

Umkehrbare Primzahlen

Umkehrbare Primzahlen sind Primzahlen deren umgekehrte Ziffernfolge erneut eine Primzahl bilden. Zum Beispiel ist 13 umkehrbar, da auch 31 Primzahl ist. Die ersten umkehrbaren Primzahlen größer 10 sind 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 101, 107, 113, 131, 149, 151, 157, 167, 179, 181, 191, 199, …
Eine besondere Art umkehrbarer Primzahlen sind Palindrom-Primzahlen, d.h. Primzahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Die ersten derartigen Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, …
Da jede Palindrom-Zahl mit einer geraden Anzahl von Ziffern durch 11 teilbar ist, existiert nur eine Palindrom-Primzahl mit gerader Stellenzahl, die 11.

Gute Primzahlen

Hier wird eine sehr spezielle Art von Primzahlen gesucht, die sogenannten "guten Primzahlen".
Eine Primzahl wird als "gut" bezeichnet, wenn ihr Quadrat größer ist als das Produkt der vorhergehenden und der nachfolgenden Primzahl.

Sophie-Germain-Primzahlen

In dieser Routine werden ausschließlich *Sophie-Germain-Primzahlen* der 1. und 2.Art berechnet. Bei Wahl des 2.Auswahlfeldes werden Primzahlen der 2.Art ermittelt, d.h. die, für die 2p-1 ebenfalls Primzahl ist.

Primzahlen der Form 4n + 1

Primzahlen der Form p = 4n + 1 besitzen besondere Eigenschaften. U.a. können diese nach einem Satz von Fermat eindeutig in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt werden. Das Programm zeigt bei Aktivierung dieses Schalters nur derartige Primzahlen mit deren Zerlegung an.

Beispiel: 233 = 82 + 132 oder 190000241 = 104962 + 89352

6.40 Berechnung spezieller langer Zahlen

Dieses Teilprogramm ermöglicht die Berechnung spezieller Zahlen bis zu einer Stellenzahl von 100 Ziffern.
Wählen Sie zuerst die Art der Zahlen aus:

- Primzahlen
- Primzahlzwillinge
- Primzahldrillinge
- Primzahlvierlinge
- Sexy-Primzahlen
- Sophie-Germain-Primzahlen 1.Art und 2.Art

- Cunnigham-Reihe 1. und 2.Art
- Fastprime Quadrupel

Tragen Sie einen *Startwert* n ein.
Nach dem Start der Berechnung sucht das Programm ab dem Wert n nach der nächsten Zahl des gewählten Typs. Möchten Sie mehrere aufeinander folgende Zahlen berechnen, so tragen Sie unter *Anzahl* eine entsprechende Größe ein.
Zum Beispiel erhalten Sie mit der 50stelligen Startzahl
10000000000000000000000000000000000000000000000000 als ersten Primzahlvierling
10000000000000000000000000000000000000000058537891
10000000000000000000000000000000000000000058537893
10000000000000000000000000000000000000000058537897
10000000000000000000000000000000000000000058537899

Beachten Sie bitte: Je nach Startwert und gewähltem Typ kann die Berechnung, trotz sehr schneller Arithmetik von Wolfgang Ehrhardt, einige Zeit benötigen.

6.41 Faktorisierung von Zahlen, Primzahltest

„Dass die Aufgabe, die Primzahlen von den zusammengesetzten zu unterscheiden und letztere in ihre Primfaktoren zu zerlegen zu den wichtigsten und nützlichsten der gesamten Arithmetik gehört und die Bemühungen und den Scharfsinn sowohl der alten wie auch der neueren Geometer in Anspruch genommen hat, ist so bekannt, dass es überflüssig wäre, hierüber viele Worte zu verlieren."
Gauß 1801 in „Disquisitiones Arithmeticae"

Eines der anspruchsvollsten mathematischen und rechentechnischen Probleme ist die Faktorisierung sehr großer Zahlen. Mehr als 150-stellige Zahlen sind heutzutage nur auf Supercomputern in vertretbarer Zeit faktorisierbar. Dabei ist es nicht mehr möglich, die gegebene Zahl mittels Testdivisionen zu zerlegen. Für eine nur 18-stellige Zahl wären dies; ohne Berücksichtigung von besonderen Zahleigenschaften – etwa 500 Millionen Divisionen. Einen Ausweg aus dem Problem bieten zwei Verfahren.

Nach dem sogenannten "Kleinen Satz von Fermat" lässt die Potenz a^{p-1} für jede natürliche Basis a < p bei Division mit p den Rest 1, wenn p eine Primzahl ist, d.h.

$$2^{p-1} \bmod p = 1 \text{ bzw. } 2^p \bmod p = 2$$

Liegt also eine natürliche Zahl n vor, für welche $2^n \bmod n$ nicht den Rest 2 liefert, so ist n mit Sicherheit keine Primzahl. Leider kann aus dem Rest kein Schluss über einen Teiler gezogen werden. Leider gilt die Umkehrung nicht.

In diesem Programm haben Sie die Möglichkeit, eine bis zu 100-stellige Zahl n einzugeben.
Für diese wird nach dem kleinen Satz von Fermat ein Primzahltest durchgeführt. Ergibt sich, dass die Zahl n wahrscheinlich eine Primzahl ist, wird ein weiterer,

aufwendigerer Test gestartet, der BPSW-Test. Dieser wurde 1980 von Baillie, Wagstaff und Pomerance entwickelt.
Bis heute ist keine zusammengesetzte Zahl bekannt, bei der dieser Test versagt.

Sollte der Test keine Zerlegbarkeit nachweisen, wird die Faktorisierung abgebrochen.
Ist bekannt, dass eine Zahl n zerlegbar ist, kann nach Primteilern gesucht werden. Je nach Größe der Zahl existieren effiziente Möglichkeiten, die Faktoren zu finden. In diesem Teilprogramm werden vier Verfahren eingesetzt:

- Probedivision mit allen Primzahlen bis 1 Million
- Pollard-Rho-Verfahren
- Faktorisierung mit elliptischen Kurven
- Faktorisierung mit einem quadratischen Sieb, dem multiple polynomial quadratic sieve MPQS

Pollard-Rho-Verfahren

Ein schnelles Verfahren ist eine Monte-Carlo-Methode, welche von Pollard entwickelt wurde.

Will man einen Primfaktor p der Zahl n gewinnen, so sucht man nach einem Paar a,b, sodass p | (a - b). Über den ggT von a - b und n lässt sich dann p ermitteln (p muss nicht notwendigerweise der kleinste Primteiler sein). Das Paar a,b wird nun mittels Zufallsgenerator bestimmt, bis a und b kongruent mod p sind. Nach der Theorie sind im Mittel $\sqrt{(\pi\ p\ /\ 2)}$ Paare zu testen. Passende Paare ergeben sich mittels Floyds Zyklenalgorithmus $f(x) = x^2 + a$, mit a <> 0 und a <> -2.

Das wirklich Verblüffende daran ist, dass dieses Verfahren nur sehr selten versagt. Während etwa $5 \cdot 10^7$ Testdivisionen für die z.B. 17-stellige Zahl 11111111111111111 notwendig sind, genügen im Mittel nach Pollard nur wenige.

Vorsicht ist aber dennoch geboten: Der Vorteil einer geringeren Anzahl von Tests wird durch den erhöhten Aufwand für kleine Zahlen bis etwa 8-9 Stellen wieder aufgehoben. Erst jenseits von 15 Ziffern kommt das Verfahren voll zur Wirkung, allerdings sind andere Verfahren am 20 Stellen noch effektiver. In diesem Unterprogramm können Sie nach dem Fermat-Primzahltest Teiler der Zahl mittels Pollard-ρ-Verfahren und einem von Brent modifizierten Verfahren suchen lassen.

Methode mit elliptischen Kurven

Durch Lenstra wurde ein hoch interessantes Faktorisierungsverfahren entwickelt. Um einen Primteiler p zu finden, betrachtet man Punkte (x, y) der Form

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

wobei x, y aus dem Restklassenring modulo p und a, b ganze Zahlen sind. Man kann zeigen, dass diese elliptische Kurve eine abelsche Gruppe ist, d.h. es ist möglich, beliebige Punkte auf der Kurve zu addieren bzw. zu invertieren.

Um p zu finden, wird nun versucht, das neutrale Element O_p durch Punktadditionen zu konstruieren. Ob das gelingt, hängt entscheidend von der Gruppenordnung ab. Sind alle ihre Primteiler kleiner als eine Schranke b, so hat man eine Chance. Über die Kurvenparameter kann auf die Ordnung Einfluss genommen werden, wobei der Effekt nicht vorhersagbar ist.
Die optimalen Werte für die genutzten Schranken hängen von der Größe des zu findenden Primteilers p ab, der allerdings nicht bekannt ist. Daher ist das Auffinden eines Primteilers nicht sicher.
Obwohl die Methode der elliptischen Kurven asymptotisch langsamer ist, als das Faktorisieren mit einem quadratischen Sieb, ist das Lenstra-Verfahren wesentlich effektiver als das Pollard-Faktorisierungsverfahren.

Faktorisierung

Wird die eingegebene Zahl als zerlegbar erkannt, so wird zuerst nach kleinen Primteilern bis 1 Million gesucht. Die verbliebene Restzahl wird nun dem Pollardschen Verfahren unterzogen. Wird ein Teiler gefunden, so wird die Ausgangszahl durch diesen geteilt, und mit dem Ergebnis neu gerechnet, bis die Restzahl prim ist, d.h. die Zahl vollständig faktorisiert ist.

Wenn das Verfahren von Pollard nach einer festgelegten Anzahl von *Pollard-Iterationen* kein Ergebnis findet, wird eine *Faktorisierung mit Hilfe elliptischer Kurven* nach Lenstra durchgeführt. Hier werden nun die eingestellte Anzahl elliptischer Kurven ausgewertet.

Für größere Zahlen ab 50 Stellen nutzt man eine der schnellsten, heute bekannten Methode, die Zahlzerlegung mit Hilfe eines quadratischen Siebes. Haben Sie den Punkt *MPQS-Faktorisierung sofort bei weniger als xx Stellen verwenden* markiert, wird dieses 4.Verfahren gestartet, wenn die verbleibende Zahl weniger als die eingegebene Stellenzahl hat. Ermittelt das Verfahren der elliptischen Kurven kein Ergebnis, wird automatisch zur Faktorisierung mit dem quadratischen Sieb umgeschaltet.

Mit den neuen Methoden der elliptischen Kurven und des quadratischen Siebes konnte auch die als Teiler der R74-Zahl auftretende zusammengesetzte Zahl 125339984708521865560332401639447 = 422650073734453 · 296557347313446299 in 0,11 Sekunden zerlegt werden. Das reine Verfahren nach Pollard schlug nach 80 Millionen Iterationsschritten fehl.

Ebenso gelang es alle Repetition-Unit-Zahlen bis R96 und die Mersenneschen Zahlen bis M299 zu faktorisieren. Die Repetition-Unit-Zahlen R97, d.h. eine Zahl aus 97 Einsen bestehend, entzieht sich hier der Zerlegung. Sollten Sie allerdings viel Zeit haben, so wird auch für diese Zahl eine Lösung gefunden. Auf dem Testrechner wird eine theoretische Berechnungszeit von 48 Stunden vorhergesagt.

Besonders interessant ist auch, dass die 78stellige 257.Mersennesche Zahl 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168 01

5826259279871
in die drei Primfaktoren

Faktorisierung von
2315841784746323908471419700173758157065399693312811280789151680 15826259279871 (78 Ziffern)
keine Primzahl
Pollard-Rho-Verfahren

Faktorisierung mit elliptischen Kurven
gefundener Teiler535006138814359
Restzahl =
432862656469423142931042426214547535783388063929571229938474969 (63)
Faktorisierung mit quadratischem Sieb
gefundener Teiler1155685395246619182673033 (25)
gefundener Teiler3745505985018109365817766300963131813 93 (39)
Zeit = 46,3 s

zerlegt werden konnte.
Gegenwärtig kann da mit jede Zahl bis 80 Stellen in vertretbarer Zeit in diesem Teilprogramm zerlegt werden.

Zahleingabe

Normalerweise wird die zu zerlegende Zahl mit ihren Ziffern eingegeben. Zwei Besonderheiten können aber genutzt werden:

1. Rufen Sie über den Schalter *Langarithmetik* das entsprechende Teilprogramm auf, so können Sie dort mit einer Art Taschenrechner die lange Zahl berechnen. Wählen Sie in der Langarithmetik den Menüpunkt *Kopieren* und in dem Faktorisierungsteilprogramm den Schalter *Einfügen*, so wird das Ergebnis übernommen.

2. Geben Sie unter *Zahl* Terme der Form F(x) für Fibonacci-Zahlen, M(x) für Mersennesche Zahlen oder P(k,n) für Prothsche Zahlen ein, so berechnet das Teilprogramm diese Zahl und faktorisiert anschließend.
Dabei tragen Sie für x für den Index der Zahl, für k den Faktor und für n den Exponenten der Prothschen Zahl $k \cdot 2^n+1$ ein.

MPQS-Faktorisierung (Multiples polynomisches quadratisches Sieb)

Ein quadratisches Sieb ist einer der schnellsten bekannten Algorithmen zur Faktorisierung großer natürlicher Zahlen. 1981 wurde diese Verfahren von Richard Schroeppel und Carl Pomerance entwickelt.

Das Besondere ist, dass die Laufzeit von der Größe der zu faktorisierenden Zahl

abhängt und nicht von speziellen Eigenschaften der Zahl. Für Zahlen von 40 bis 100 Dezimalstellen ist es das schnellste allgemeine Faktorisierungsverfahren. Ist n die zu zerlegende Zahl, so ist die Laufzeit von der Ordnung $e^{\sqrt{(\ln n \ln \ln n)}}$.

Bei der von J.A.David und D.B.Holdridge gefundenen Weiterentwicklung, dem Multiple Polynomial Quadratic Sieve (MPQS), definiert man verschiedene Funktionen, die jeweils einen festen Faktor enthalten. Aus deren Eigenschaften gewinnt man spezielle Relationen, aus denen wiederum der gesuchte Faktor bestimmt wird. Die Beschreibung des Verfahrens ist sehr anspruchsvoll. Weitere Erklärungen sind in entsprechender Fachliteratur zu finden.

Während der Berechnung wird Ihnen angezeigt, wie weit der Algorithmus fortgeschritten ist (*Fortschritt*), wie lange wahrscheinlich die Gesamtvorgang dauern wird und wie viele Relationen gefunden wurden. Nach dem Siebvorgang muss außerdem zeitaufwändig ein Gleichungssystem gelöst werden, dass bei 70stelligen und größeren Zahlen aus mehr als 10000 Variablen und 10000 Gleichungen besteht.
Ist die Faktorisierung erfolgreich, erhalten Sie in der Ausgabe die entsprechenden Teiler.

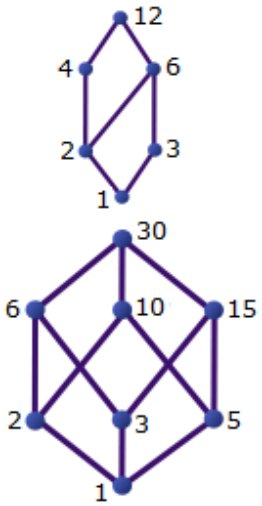
Beachten Sie bitte: Auch wenn MPQS zu den schnellsten Faktorisierungsverfahren gehört, ist die Zerlegung einer mehr als 80stelligen mit diesem Teilprogramm eine zeitaufwendige Herausforderung. Eine 90stellige Zahl benötigt zum Beispiel etwa 10 mal so viel Zeit, wie eine 80stellige. Für eine 100stellige erhöht sich der Aufwand sogar auf die 80fache Zeit.

Die Grenze dieses Teilprogramms liegt hier bei etwa 90stelligen Zahlen.
Für die Zerlegung der Zahl
15914343565113172548972231940698266883214596825515126958094847260581103904401068017057791 mit 80 Stellen ergab sich auf einem Testrechner:
= 396645227028138890415611220710757921643910743103031701971222447 (63) · 401223624556162219711223 53 (26)
Zeit: 5h 27,5min

Mit der Laufzeitabschätzung würde also für eine 100stellige Zahl in diesem Programm eine Berechnungszeit von etwa 60 Stunden auftreten. Wenn man bedenkt, dass man 1977 für die Faktorisierung einer 100-stelligen Zahl 40 Billiarden Jahre schätzte und 1994 noch 8 Monaten auf 1600 Internet-Rechnern benötigt wurden, so ist die Entwicklung sehr beeindruckend.

Allerdings ist diese Faktorisierungsroutine 20mal langsamer als das schnellste gegenwärtig im Internet verfügbare Programm „yafu-x64". „yafu" benutzt ein selbstinitialisierendes quadratisches Sieb (SIQS) und ein Zahlkörpersieb (GNFS), die beide Weiterentwicklungen des MPQS-Verfahrens sind.

6.42 Faktorbaum und Hasse-Diagramm



Hasse-Diagramm

Für endliche geordnete Mengen veranschaulicht man die Ordnungsstruktur in Form von speziellen Graphen. Diese werden Ordnungsdiagramme oder Hasse-Diagramme genannt. Die Elemente der geordneten Menge werden als Punkte dargestellt und zwei direkt vergleichbare Elemente werden durch Strecken verbunden, wobei kleinere Elemente weiter unten stehen.

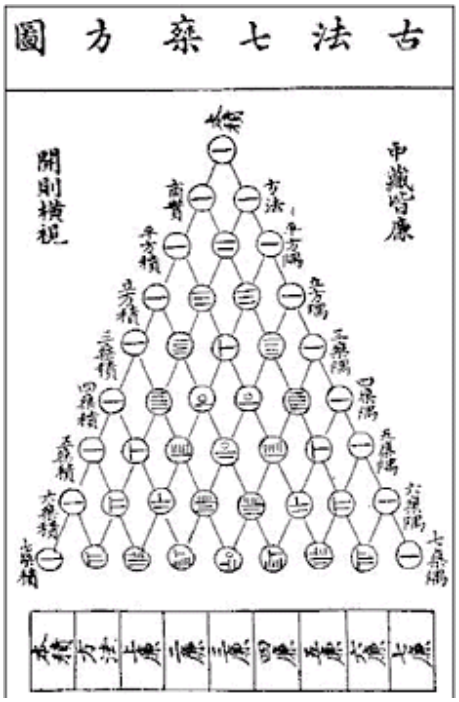
Mithilfe solcher Hasse-Diagramme kann die Teilermenge einer natürlichen Zahl veranschaulicht werden. Geben Sie in diesem Teilprogramm eine natürliche Zahl bis maximal 1 Million ein, so zeichnet das Programm das Teilerbaumdiagramm.
In der Abbildung sind zum Beispiel die Hasse-Diagramme der Teiler von 12 und 30 zu sehen. Angezeigt werden in zwei Listen die Primteiler und alle Teiler der Zahl.

Faktorbaum

Wählen Sie *Faktorbaum* aus, wird ein einfacher, binärer Baum bestehend aus den Primteilern einer Zahl und deren Restteilern aufgebaut.
Auch hier werden in zwei Listen die Primteiler und alle Teiler der Zahl angezeigt.

6.43 Zahlendreiecke

Eine der berühmtesten Anordnungen von Zahlen in Form eines Dreiecks ist das Pascalsche Dreieck. Zwar wurde es Jahrhunderte vor Pascal durch chinesische Mathematiker schon beschrieben, der Name Pascalsches Dreieck hat sich aber eingebürgert.



Außer diesem Dreieck gibt es auch andere Zahlen, die ebenfalls sinnvoll in Dreiecksform angeordnet werden können.
In diesem Teilprogramm werden folgende Zahlendreieck veranschaulicht

- Pascalsches Dreieck
- Catalansches Dreieck
- Quadratzahldreieck
- Fibonacci-Zahlendreieck
- Primzahlen-Dreieck

- Clark-Dreieck für f=6
- Eulerzahlen-Dreieck
- Leibniz-Dreieck
- Potenzendreieck
- Stirling-Dreieck und
- Binomialdreieck ($^{p}_{q}$)
- Lozanitsch-Dreieck

Die Art des Dreiecks wählen Sie in der Liste aus. Als *Rekursionstiefe* ist 16 voreingestellt.
Voreingestellt wird jedes Zahlendreieck ab der ersten Zeile dargestellt. Möchten Sie nur einen Teil des Dreiecks mit einem anderen Anfangswert sehen, so verändern Sie die Werte bei *Anfangszeile* und *Anfangsdiagonale*. Das Element aus dieser Zeile und Diagonale wird dann als oberste Zelle verwendet.

Interessant ist außerdem, die Zahleinträge in Bezug auf einen Modul zu betrachten. Wählt man bei dem Pascalschen Dreieck einen *Modul* gleich 2 und färbt die Einträge mit verschiedenen Farben, so ergibt sich erstaunlicherweise ein Muster, das dem Sierpinski-Dreieck entspricht.

6.44 Zahlendiagramme

In diesem Teilprogramm können Sie für ausgewählte Zahlarten Verteilungsdiagramme zeichnen lassen. Dazu gehören

- der Primzahlabstand
- die Zeilerzahl einer natürlichen Zahl
- die echte Teilersumme einer natürlichen Zahl
- die Primzahlhäufigkeit
- die Anzahl der Primzahlzwillinge
- der größte Goldbach-Summand
- die Anzahl der verschiedenen Goldbach-Zerlegungen
- die Andrica-Vermutung, also der Abstand zwischen den Wurzeln aufeinander folgender Primzahlen
- die Eulersche φ-Funktion
- die Eulersche Psi-Funktion mit $\psi(n) = n - \varphi(n)$
- die n.te Primzahl
- und die Länge der Collatz-Folge 3a+1

In das Feld *Startwert* geben Sie ein, ab welcher Zahl, Primzahl oder ab welchem Intervall das Diagramm angezeigt werden soll.

6.45 Primzahltupel

Während bei Primzahlzwillingen bzw. -vierlingen Primzahlen gesucht werden, die bestimmte, feste Abstände (2 bzw. 2-4-2) zueinander haben, können im Teilprogramm *Primzahltupel* Tupel von Primzahlen gesucht werden, deren

Abstände eingegeben werden können.

Eine Eingabe *'2 * 4 2'* bewirkt, dass nur Fünfergruppen von Primzahlen angezeigt werden, deren Abstände 2, *, 4 und 2 sind.
Der Eintrag * bedeutet, dass die nächste Primzahl genutzt wird, unabhängig davon, wie groß der Abstand zur vorhergehenden ist.

Markieren Sie das Feld *aufeinanderfolgend*, dürfen innerhalb des Tupels keine anderen Primzahlen auftreten.

Beachten Sie bitte, dass nicht für jede Kombination von Abständen Primzahltupel existieren.

6.46 Distanz-m-Primzahlen

Eine Verallgemeinerung der Begriffe Primzahlzwillinge, Cousin-Primzahlen und Sexy-Primzahlen sind die Distanz-m-Primzahlen bzw. minimalen m-distanten Primzahlen.
Hier betrachtet man als Differenz zweier Primzahlen auch Werte größer 6.

So findet man zum Beispiel für m = 14 als kleinstes Paar 14-distanter Primzahlen das Paar (3;17).

Mitunter wird gefordert, dass zwischen beiden Zahlen keine weiteren Primzahlen liegen. Das Programm berechnet solche Paare berechnet, wenn das Feld *freies Intervall* markiert ist. In diesem Fall wird zum Beispiel für 14 das kleinste Paar (113;127) ermittelt.

Beachten Sie bitte, dass die Besonderheit der Primzahl 2, gerade zu sein, hier nicht betrachtet wird. Die kleinste untere Intervallgrenze ist 3. Dadurch werden auch nur Distanzen m ausgewertet, die gerade sind.

Cousin-Primzahlen

Tragen Sie unter m den Wert 4 ein und wählen *freies* Intervall, so werden in Analogie zu den Primzahlzwillingen ausschließlich Cousin-Primzahlpaare angezeigt. Unter einem solchen Paar versteht man zwei benachbarte Primzahlen, deren Differenz gleich 4 ist. Das kleinste Paar ist (7;11).
Das Primzahlpaar (3;7) hat zwar auch die Differenz 4, gilt jedoch nicht als Cousin-Primzahlpaar im eigentlichen Sinne, da zwischen beiden noch die Primzahl 5 liegt. Bis heute gelang es nicht, nachzuweisen, dass tatsächlich unendlich viele Cousin-Primzahlen existieren.

Sexy-Primzahlen

Während bei Cousin-Primzahlpaaren die Differenz der beiden Primzahlen gleich 4 ist, betrachtet man auch die Differenz 6.

Diese Primzahlen werden Sexy-Primzahlen genannt, wobei man sich über den Sinn dieser Bezeichnung doch etwas wundern kann.

Hier werden Sexy-Primzahlen im eigentlichen Sinne berechnet, d.h., zwischen beiden Primzahlen dürfen keine weiteren Primzahlen liegen. Wählen Sie dazu m = 6 und ein *freies Intervall.* Damit ist das Paar (23;29) das kleinste. Lässt man auch Paare zu, bei denen weitere Primzahlen dazwischen liegen, bildet (5;11) das kleinste Sexy-Primzahlpaar.

6.47 Cunningham-Reihen

In dem Teilprogramm *Cunningham-Reihen* werden in einem eingegebenen Intervall besondere Arten von Primzahlen ermittelt.

Unter einer Sophie-Germain-Primzahl versteht man eine Primzahl p, für die 2p + 1 ebenfalls Primzahl ist. Diese Primzahlart ist insbesondere für größere Zahlen sehr selten. Sophie-Germain-Primzahlen 2.Art sind Primzahlen p, für die 2p - 1 ebenfalls Primzahl ist. Diese zwei Primzahlarten sind Grundlage der Cunningham-Reihen.

Unter einer Cunningham-Reihe der 1. Art versteht man die Folge von Primzahlen der Form p, 2p - 1, 4p - 3, 8p - 7 ...
Eine sehr lange Reihe der Länge 6 fand im Oktober 1999 Dirk Augustin mit $620060805 \cdot 2^n - 1$, die für n = 252, 253, 254, 255, 256 und 257 prim ist.
Bei der 2. Art betrachtet man die Folge von Primzahlen der Form p, 2p + 1, 4p + 3 usw.
Die Cunningham-Reihen werden in diesem Teilprogramm erst ab einer Länge 3 angezeigt. Eine Cunningham-Reihe 2. Art der Länge 2 entspricht einer Sophie-Germain-Primzahl p und der zugehörigen Primzahl 2p + 1.

6.48 Primzahlketten

Ist d eine ungerade, natürliche Zahl, dann heißt eine arithmetische Zahlenfolge (p, p+d, p+2d, ..., p+kd) eine Primzahlkette der Länge k+1, wenn alle Glieder dieser Zahlenfolge Primzahlen sind.
Eine Primzahlkette der Länge 10 ist zum Beispiel 199, 199+210, 199+2·210, ..., 199+9·210.

1923 vermuteten Hardy und Littlewood, dass es Primzahlketten jeder Länge gibt. 2004 bewiesen Ben Green und Terence Tao, dass die Vermutung korrekt ist.

In diesem Programm werden Primzahlketten berechnet.
Einzugeben sind das Intervall der Anfangsprimzahl, die *Differenz* d der arithmetischen Folge und die *Mindestlänge* der Primzahlkette.

6.49 Ulam-Spirale

1963 wurde eine interessante Primzahlspirale von Stanislaw Ulam entdeckt, die jetzt als "Ulamspirale" bezeichnet wird. Sie enthüllt eine seltsame Eigenschaft der Primzahlen.

Die Ulamspirale lässt sich wie folgt konstruieren: Man beginnt mit einem Punkt im Zentrum und ordnet die positiven ganzen Zahlen in einer Spiralform an. Die Primzahlen werden dann farbig markiert. Dabei gibt es eine Tendenz der Primzahlen diagonale Linien zu bilden. U.a. sieht man dies sehr gut für eine Startzahl 41.

Diese Spirale wird hier gezeichnet. An den Rollbalken stellen Sie den Abstand der Spiralarme und die Gesamtlänge der Spirale ein.
Auf Wunsch wird auch eine *archimedische Spirale* statt der Ulamspirale gezeichnet. Allerdings bilden sich bei der archimedischen Spirale keine typischen Muster aus.

6.50 Primfaktorzerlegung

Alle ungeraden Zahlen des eingestellten Intervalls werden in ihre Primfaktoren zerlegt bzw. als Primzahlen ausgewiesen.

Da es für 3, 5 und 11 sehr einfache Teilbarkeitsregeln und für 7 eine selten genutzte, aber dennoch verwendbare Regel gibt, können Sie auf die Anzeige der durch 3, 5, 7 oder 11 teilbaren Zahlen verzichten. Dazu schalten Sie die entsprechenden Markierungsfelder aus. Möchten Sie keine Primzahlen aufgelistet haben, so entfernen Sie die Markierung aus dem Feld *Primzahlen*.
Zusätzlich können Sie in der Eingabezeile *Teilerzahl* die Mindestanzahl der Primteiler festlegen. *Teilerzahl > 4* bewirkt, dass ausschließlich Primfaktorzerlegungen in der Liste erscheinen, die mindestens fünf Teiler besitzen.

Beispiel: Im Bereich von 123456780 bis 123460000 findet das Programm 161 Primzahlen und genau eine Zahl, die mindestens fünf Primteiler, davon keiner kleiner als 17, besitzen. Diese Zahl ist 123458549 = 23 * 23 * 23 * 73 * 139.

Beachten Sie bitte: Wird das Intervall zu groß gewählt, ist die anzeigende Liste nicht in der Lage, alle Werte aufzunehmen. In diesem Fall erhalten Sie die Fehlermeldung:

Überlauf! Listbox kann keine weiteren Werte aufnehmen.

Das Programm ist nur in der Lage, maximal 64000 Zeilen zu speichern.
Zum Beispiel können Sie damit den Zahlenbereich von 1 bis 2631647 auf einmal nach Primzahlen absuchen. Dabei werden 192006 Primzahlen gefunden.

Wünschen Sie ein größeres Intervall, so müssen Sie dies aufteilen. Die bis 2631647 berechneten 196422 Primzahlen würden immerhin über 250 (!) Druckseiten bzw. 1,5 MByte als Textdatei in Anspruch nehmen.

Die Berechnungen können insbesondere für große Zahlen viel Zeit in Anspruch nehmen. Soll eine laufende Berechnung abgebrochen werden, so betätigen Sie die *ESC*-Taste oder den Schalter *Abbruch*. Als letzte Zeile der Listbox erscheint in diesem Fall

Abbruch der Berechnung durch Anwender.

Geben Sie Zahlen ein, welche die obere zugelassene Grenze von 1 Milliarde überschreiten, erfolgen entsprechende Fehlermeldungen. Zusätzlich setzt das Programm das Standardintervall von 1 bis 100.

6.51 Teilersummenfolge

Zur Konstruktion sozialer, befreundeter und geselliger Zahlen wird die Teilersumme aller echter Teiler und der Zahl 1 einer natürlichen Zahl n gebildet. Ist a_2 die Teilersumme von a_1, a_3 die von a_2, …, und a_1 die von a_r, so bildeten diese r Zahlen eine r-gliedrige Kette von sozialen Zahlen.
Ist die Länge r=2 liegen befreundete Zahlen vor, für r=1 ist die Zahl vollkommen.
Interessant ist nun, die Folge dieser Teilersummen zu betrachten. Für n = 30 ergibt sich

42, 54, 66, 78, 90, 144, 259, 45, 33, 15, 9, 1

d.h. die Folge endet bei 1.
Bei Untersuchung der ersten natürlichen Zahlen zeigt sich nun, dass

1. die Folge nach Erreichen einer Primzahl anschließend bei 1 endet
2. die Folge zyklisch wird (vollkommene, befreundete oder gesellige Zahlen oder in der Teilersumme treten solche Zahlen auf)
3. das Verhalten der Folge noch nicht bekannt ist, evtl. wächst die Folge über alle Grenzen, sie divergiert

Zu vermuten ist, dass der 3.Fall, stets in den ersten oder zweiten einmündet. Da es wesentlich mehr defiziente als abundante Zahlen gibt, ist eine divergente Teilersummenfolge unwahrscheinlich.
Allerdings ist diese Vermutung, die Catalansche Vermutung, heute noch nicht bewiesen. Derartige Folgen, deren Verhalten noch nicht bekannt ist, werden Offenendketten genannt. Startzahlen, welche bei der gleichen Primzahl enden, werden Primzahlfamilie genannt.

In diesem Programm wird nach derartigen Teilersummenfolgen gesucht. Tragen Sie dazu die *Startzahl* und die *Anzahl der Folgenglieder* ein.
Zur Berechnung ist die vollständige Faktorisierung der Folgenglieder notwendig. Insbesondere für Zahlen ab 20 Stellen ist dies aufwendig. Hier werden nach Probedivisionen das Brent-Rho-Verfahren (auf Wunsch auch das etwas

langsamere Pollard-Rho-Verfahren) und die Faktorisierung mit elliptischen Kurven verwendet.

Beachten Sie bitte, dass die Faktorisierung ein sehr aufwendiger Prozess ist, der durchaus längere Zeit benötigt. Abbrechen können Sie jederzeit über den Schalter.

Die Berechnung stoppt automatisch, wenn die 1 oder die Startzahl erreicht wird. Unter Umständen ist die Primteilersuche zu aufwendig. In diesem Fall bricht das Programm automatisch ab.
Insbesondere tritt dies für Startzahlen, die zu den Lehmer-Five gehören, ein. Für diese Startzahlen ist bis heute nicht bekannt, wie die Folge endet. Die kleinste dieser Zahlen ist die 276.
Immerhin gelingt es hier, für die 840 die vollständige Folge mit 748 Gliedern zu berechnen.

6.52 Zahlenfolge 3a+1

Vor mehr als 50 Jahren gab der Student Lothar Collatz der Universität Hamburg die Beschreibung einer Zahlenfolge an, die heute immer noch ungelöste Rätsel aufgibt.
Das Glied a_1 ist eine beliebige natürliche Zahl. Die folgenden Glieder der Zahlenfolge werden definiert mit

- $a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist
- $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1$, falls a_n ungerade ist

Beginnt man die Folge mit 3, ergibt sich damit (3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1 ...) usw.

Wählt man ein beliebiges anderes Glied, so endet die Folge erneut periodisch auf 4, 2, 1. Verblüffend ist, dass dies bisher bei allen Testzahlen erfolgte; der Japaner Yoneda überprüfte alle Zahlen bis 1,2 Billionen. Ein Beweis der Periodizität gelang aber bisher nicht.
1996 wurde von Thwaites ein Preis von £ 1000 für die Lösung ausgesetzt. Der ungarische Mathematiker Erdos kommentiert das Problem mit: "*Die Mathematik ist noch nicht reif für solche Probleme*."

Wählen Sie dieses Unterprogramm, berechnet Ihnen das Programm für jede eingegebene natürliche Zahl die entstehende Zahlenfolge. Die Zahl kann dabei maximal 300 Stellen haben. Interessant ist z.B. die Zahlenfolge für den vordefinierten Ausgangswert von 31911. Erst nach 160 Iterationen wird die 1 erreicht.

Markieren Sie den Punkt *verkürzte Folge*, so werden die durch $3 \cdot a_n + 1$ entstehenden geraden Glieder sofort durch 2 geteilt, d.h.

- $a_{n+1} = a_n / 2$, falls a_n gerade ist
- $a_{n+1} = (3 \cdot < a_n + 1) / 2$, falls a_n ungerade ist

Damit wird die Folge bis zum Erreichen der 1 kürzer.

6.53 196-Algorithmus

Gegeben ist eine zwei- oder mehrstellige natürliche Zahl n.

Zu dieser Zahl wird die natürliche Zahl addiert, die dadurch entsteht, dass die Ziffernfolge von n umgekehrt wird. Diese Addition wird mit der Summe immer wiederholt, bis eine Palindrom-Zahl entsteht,
z.B. n = 5180 ... 5280, 6105, 11121, 23232.

Die entstehende Zahl kann teilweise sehr groß werden, z.B. ergibt sich für 89 die Zahl 8813200023188. Die kleinsten Zahlen, für die nicht bekannt ist, ob der Algorithmus irgendwann eine Palindrom-Zahl liefert, sind: 196, 887, 1675, 7436, 13783 ...

Aus diesem Grund wird dieses Verfahren 196-Algorithmus genannt. In den Neunzigerjahren wurden für die Zahl 196 über 9 Millionen Iterationen durchgeführt. Als Ergebnis erhielt man eine Zahl mit rund 4 Millionen Ziffern, aber immer noch keine Palindrom-Zahl.

In diesem Teilprogramm können Sie diesen Algorithmus testen.

Unter *196-Algorithmus* ermittelt das Programm für eine eingegebene Zahl n die Glieder der hier entstehenden Zahlenfolge. Das Programm bricht automatisch ab, sobald ein Glied größer als 10^{Stellen} wird. Diese Stellenzahl können Sie eingeben, wobei der größtmögliche Wert 2000 ist.

Mit dem gefundenen Palindrom kann der Vorgang erneut gestartet werden. Markieren Sie das Feld *Wiederholung*, setzt das Programm die Berechnung fort. Mitunter kann es mehrere Zyklen geben, bis keine weitere Palindromzahl gefunden wird. Die Kette endet in "palindromischer Ungewissheit" (nach K.G. Kröber).

Zusätzlich zum Dezimalsystem können Sie diesen Algorithmus auch für das Dual-, Ternär- und Oktalsystem testen. Die eingegebene Dezimalzahl wird dazu in das jeweilige System verwandelt.
Interessant ist, das man z.B. weiß, dass im Dualsystem die $22 = [10110]_2$ niemals zu einem Palindrom führt.

6.54 Pythagoreische Tripel und Quadrupel

In diesem Teilprogramm können Sie zwei Arten von pythagoreischen Zahlen

berechnen:

Pythagoreische Tripel

Unter einem Pythagoreischen Zahlentripel versteht man ein Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
Da diese Zahlen ganzzahlige Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen könnten, wurden sie nach Pythagoras von Samos (um 580 - 496 v.u.Z.) benannt, auf den (der Erzählung nach) der berühmte Flächensatz am rechtwinkligen Dreieck zurückgeht. Über Pythagoras gibt es zahlreiche Legenden – so galt er seinen Schülern als der vollkommene Weise und soll schon zu Lebzeiten göttliche Verehrung als Inkarnation Apollons genossen haben.

Das kleinste nicht triviale Tripel ist 3, 4 und 5. Alle echten Tripel, d.h., a^2, b^2 und c^2 sind nicht gleichzeitig restlos mit einer Quadratzahl teilbar, erhält man mit folgendem Verfahren:
Sind u und v teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ergibt sich ein Pythagoreisches Tripel mit

- $a = u \cdot v$ $\quad b = (u^2-v^2)/2$ $\quad c = (u^2+v^2)/2$

Gesichert ist, dass jedes Tripel derart bestimmt werden kann.

Nach Auswahl dieser Zahlenart werden entsprechend dem eingestellten Intervall derartige Zahlentripel in der Liste ausgewiesen. Diese werden jedes Mal neu berechnet.

Die untere Intervallgrenze *(von =)* gibt den Mindestanzeigewert für die kleinste Zahl des Tripels, die obere Grenze *(bis =)* den nicht zu überschreitenden Maximalwert an.
Dabei ist zu beachten, dass die Anzeige abgebrochen wird, wenn das erste c > Maximalwert des Tripels (a, b, c) berechnet wird. Darüber hinaus kann die Liste maximal 32000 Einträge aufnehmen.
Außer dem Tripel werden auch die zwei nichtrechten Innenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks angegeben, das genau die Zahlen als Seitenlängen besitzt.

Pythagoreische Quadrupel

Eng verwandt mit den Tripeln ist das Problem der Suche nach Quadrupeln (a, b, c, d), welche die Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

erfüllen.
Markieren Sie das Auswahlfeld, werden nach Eingabe der Intervallgrenzen solche Zahlen gesucht.
Die Rechnung stoppt automatisch, wenn eine der vier Zahlen größer als der eingegebene Maximalwert wird.

6.55 Teilerzahl und Teilersumme

Als Ergänzung zu dem Teilprogramm ggT, kgV, Teiler können Sie unter dem Punkt *Teilerzahl und Teilersumme* die Anzahl der Teiler für alle natürlichen Zahlen eines eingegebenen Intervalls [a;b] ermitteln lassen.

Zusätzlich wird die Summe aller Teiler der Zahl und die Summe der echten Teiler berechnet. Unter *Teilerzahl* > können Sie außerdem festlegen, wie viele Teiler anzuzeigende Zahlen mindestens besitzen müssen.
Da Primzahlen keine echten Teiler haben, werden diese nur dann angezeigt, wenn Sie das Feld *ohne Primzahlen* ausschalten.

Zusätzlich können Sie entscheiden, ob
- alle untersuchten Zahlen
- abundante Zahlen oder
- defiziente Zahlen

in der Liste gezeigt werden sollen.
Markieren Sie das Feld *Teilermenge*, so wird zusätzlich die Menge aller Teiler der Zahl bestimmt. Berücksichtigen Sie bitte, dass diese ergänzende Berechnung etwas Zeit benötigt.

6.56 Quasibefreundete Paare

Unter einem Paar sozialer bzw. befreundeter Zahlen versteht man zwei natürliche Zahlen a und b, bei denen die Summe ihrer echten Teiler und 1 gerade die andere Zahl ergibt. Das kleinste Paar sozialer Zahlen ist (220;284):

Teiler von 220: 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
Teiler von 284: 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

Als Erweiterung des Begriffs der befreundeten Zahlen werden auch quasibefreundete Paare betrachtet. Dabei gilt: Wenn σ(a) die Summe der Teiler a (mit Ausnahme von a selbst) und σ(b) die Summe aller Teiler von b ist, so gilt für das quasibefreundete Paar (a,b):

$$\sigma(a) = \sigma(b) = a + b + 1.$$

Überbefreundete Zahlenpaare erfüllen die Gleichung $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b - 1$.
Eine weitere Verallgemeinerung fragt nun nach Paaren bzw. einzelnen Zahlen (erfüllen die Beziehung zu sich selbst), für die
$\sigma(a) = \sigma(b) = a + b + m$
gilt, wobei m eine beliebige ganzzahlige Konstante ist.

Derartige Paare und Zahlen werden in diesem Teilprogramm berechnet. Geben Sie dazu die Intervallgröße und die Distanz m ein. Das Programm durchsucht nun den Bereich und weist die Paare bzw. zu sich selbst quasibefreundeten Zahlen

aus. Markieren Sie das Feld *nur Paare*, zeigt das Programm zu sich selbst befreundete Zahlen nicht mehr an.

Für m = 0 erhalten Sie vollkommene Zahlen bzw. befreundete Paare, für m = 1 quasibefreundete Paare, für m = -1 überbefreundete Paare und Zahlen.

Beachten Sie bitte, dass die aufwendige Berechnung auch auf schnellen Computern einige Sekunden bis Minuten benötigen kann.

6.57 Goldbachsche Vermutung

Am 7. Januar 1742 schrieb der deutsche Mathematiker Christian Goldbach an Leonhard Euler:

"Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die größer ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sei."

Dies ist äquivalent zur Vermutung, dass sich jede gerade Zahl größer 4 als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt, was heute als binäre Goldbachsche Vermutung bezeichnet wird.
Gegenwärtig (2009) ist man davon überzeugt, dass diese Vermutung korrekt ist, allerdings fehlt noch ein vollständiger Beweis.

Deshalb wird die Aussage für große Zahlen unter Einsatz von Computertechnik getestet. Nachdem Desboves 1855 (ohne Computer) alle Zahlen bis 10000 geprüft hatte, testeten Deshouillers, te Riele und Saouter 1998 unter Verwendung eines optimierten, segmentierten Siebverfahrens und eines effizienten Prüfalgorithmus alle geraden Zahlen bis $4 \cdot 10^{14}$. Sollte die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung gelten, so wäre damit die Goldbachsche Vermutung bewiesen, da es gelang zu zeigen, dass dann eine Zahl, welche die Vermutung nicht erfüllt, größer als $1{,}615 \cdot 10^{12}$ sein müsste.

In diesem Teilprogramm wird für jede Zahl eines eingegebenen Intervalls *von* ... *bis* wenigstens eine Zerlegung nach Goldbach ermittelt.
Wie viele Zerlegungen eine Zahl jeweils besitzt, ist noch unbekannt – unter Umständen können dies sehr viele sein. Zum Beispiel findet man für die 34:

34 = 3 + 31 = 5 + 29 = 11 + 23 = 17 + 17, 42 = 5 + 37 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23

Möchten Sie mehr als eine Zerlegung sehen, so tragen Sie unter *Anzahl* einen höheren Wert ein – maximal 9. In diesem Fall ermittelt das Programm, wenn möglich, mehrere Summendarstellungen.
Markieren Sie das Feld *alle Zahlen anzeigen*, so werden auch die Zahlen in die Liste eingetragen, für die keine Lösung gefunden werden konnte.

Zu beachten ist hierbei, dass als obere Grenze maximal 100 Millionen genutzt

werden kann.

Nach einer bisher unbewiesenen Vermutung können alle geraden Zahlen größer 4 mit Ausnahme von endlich vielen auch als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden, wobei jede dieser Primzahlen Teil eines Primzahlzwillings ist. Markieren Sie *Zwillingssummanden*, so werden nur solche Zerlegungen angezeigt.
Die ersten Zahlen, für die es keine solche Zerlegung gibt, sind 94, 96, 98, 400, 402, 404, 514, 516, 518 ...

6.58 Waring-Problem

Im Jahre 1776 warf der britische Mathematiker Edward Waring (1734-1798) folgende Problemstellung auf:

Jede natürliche Zahl n ist als Summe von höchstens g(k) k-ten Potenzen natürlicher Zahlen darzustellen, wobei g(k) nicht von n abhängig ist.

Dieses Problem ist auch heute nur teilweise gelöst.

1909 konnte Hilbert zwar allgemein nachweisen, dass so ein g(k) stets existiert, aber es blieb unklar, wie das g(k) zu berechnen ist. Es ist g(2) = 4 (Vierquadratesatz von Lagrange) und nach Lagrange g(3) = 9, d.h., jede natürliche Zahl kann als Summe von höchstens vier Quadraten und höchstens neun Kuben dargestellt werden. Weiterhin ist bekannt, dass g(4) = 19 und g(5) = 39 sind.

Das Programm enthält vier Routinen zur Zerlegung natürlicher Zahlen von 2 bis 10 Millionen in die Summe von Quadraten (*Waring-Problem k = 2*), in die Summe von Kuben (*Waring-Problem k = 3*) sowie die Summe von Biquadraten (*Waring-Problem k = 4*) bzw. die Summe von fünften Potenzen (*Waring-Problem k = 5*).

Wählen Sie zuerst in der Liste die Zerlegungsart und geben Sie anschließend den Bereich *von* - *bis* an.
Nach Betätigung der *RETURN*-Taste bzw. des *Berechnung*-Schalters zerlegt das Programm die Zahlen in die jeweiligen Summen. In der rechten Liste finden Sie dann je Zeile die zerlegte Zahl und eine Auflistung der Basen der Potenzen, d.h. zum Beispiel bei k = 2

23 3; 3; 2; 1;

bedeutet dies, dass $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$ ist.

Im Normalfall existiert für eine Zahl n eine Waring-Zerlegung g(k), die mit der k-ten Wurzel von n beginnt. Bei einigen Ausnahmen ist das erste Glied jedoch kleiner, zum Beispiel bei der oben erwähnten 23. Möchten Sie nur diese *Sonderfälle*, so markieren Sie das entsprechende Feld.

Anzumerken ist hierbei, dass die Zerlegung nicht eindeutig ist. Außerdem kann die Berechnung der Summanden für große Zahlen und kleine Potenzen (k = 2) extrem lange dauern.
Zum Beispiel benötigt die Darstellung der einzelnen Zahl 100096 als Summe von Quadraten auf etwas langsameren Rechnern einige Zeit.
Abbrechen können Sie jederzeit mit dem *Abbruch*-Schalter.

6.59 Scherk-Zerlegung

Der deutsche Mathematiker Heinrich Ferdinand Scherk untersuchte die Darstellung einer Primzahl als Summe bzw. Differenz aller vorhergehenden Primzahlen inklusive der 1. Dabei fand er:

Jede Primzahl, welche in der Primzahlfolge einen geradzahligen Index hat, lässt sich aus allen kleineren Primzahlen sowie der 1 durch bloße Addition und Subtraktion gewinnen, wobei jede kleinere Primzahl genau einmal berücksichtigt wird.
Jede Primzahl, welche in der Primzahlfolge einen ungeradzahligen Index hat, lässt sich aus allen kleineren Primzahlen sowie der 1 durch bloße Addition und Subtraktion gewinnen, wobei jede kleinere Primzahl genau einmal berücksichtigt wird, mit Ausnahme der nächstkleineren Primzahl, welche genau zweimal berücksichtigt wird.
Zum Beispiel ergibt sich: P6 : 13 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11
P7 : 17 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2·13

Ein möglicher Algorithmus zur Konstruktion einer solchen Zerlegung ist folgender: Beginnend ab 1 erhalten alle Primzahlen alternierende Vorzeichen. Die entstehende Summe wird im Allgemeinen nicht die Gesuchte sein, sie ist zu groß! Als Korrekturmöglichkeit kann man erstens zwei Vorzeichen - und + tauschen, wobei das - bei der kleineren Primzahl steht. Gibt es keine Lösung, so werden jeweils drei Primzahlen betrachtet. Ist deren vorzeichenbehaftete Summe die Hälfte des Überschusses zur Zielsumme, wird getauscht.

In diesem Teilprogramm wird ab einem eingegebenen Index, kleiner 50000, für diese Primzahl und die nachfolgenden 40 eine derartige Scherk-Zerlegung gesucht.
Insbesondere für größere Indizes wird die Darstellung sehr lang. Markieren Sie *nur abweichende Vorzeichen anzeigen*, werden nur die Primzahlen ausgegeben, deren Vorzeichen von der ursprünglichen alternierenden Folge abweichen.
Beachten Sie bitte, dass für größere Primzahlen die Berechnung einige Zeit benötigt.

6.60 Rivera-Vermutung, Rivera-Zerlegung

Im Jahr 2000 stellte Rivera in Anlehnung an die Goldbachsche Vermutung die Hypothese auf, dass jedes natürliche n > 5 als Summe bzw. Differenz von

aufeinanderfolgenden Primzahlen gebildet werden kann. Eine solche Zerlegung wird Rivera-Zerlegung genannt.

Zum Beispiel erhält man für n = 14 die Darstellung

14 = 11 + 7 - 5 + 3 - 2

Je größer n wird, desto mehr Zerlegungen werden im Allgemeinen gefunden, z.B. für n = 60 zehn verschiedene, darunter

60 = 59 + 53 - 47 - 43 + 41 - 37 + 31 + 29 - 23 - 19 + 17 - 13 + 11 + 7 - 5 - 3 + 2

60 = 37 + 31 - 29 + 23 - 19 + 17

60 = 31 + 29 usw.

Als optimale Zerlegung wird die Darstellung bezeichnet, die aus der kleinsten Anzahl Primzahlen besteht. Optimale Lösungen sind zum Beispiel

21 = 17 + 13 - 11 + 7 - 5

32 = 19 + 17 - 13 + 11 - 7 + 5

111 = 101 + 97 - 89 + 83 - 79 - 73 + 71

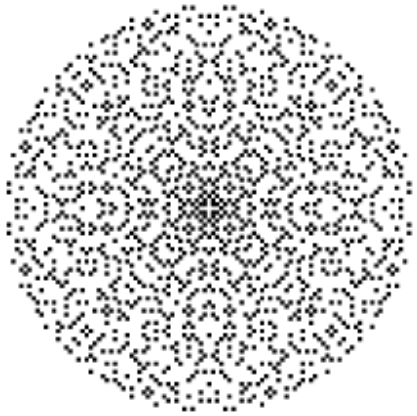
In diesem Teilprogramm werden solche Rivera-Zerlegungen gesucht. Tragen Sie dazu die zu zerlegende Zahl in das Eingagefeld ein. Der maximale Wert für n ist 100000.
Das Programm sucht nun nach möglichst vielen Zerlegungen. Markieren Sie das Feld *mit Primzahl 2*, wird auch die einzige gerade Primzahl, die 2, in die Untersuchung einbezogen, andernfalls nicht.

Hat eine Summe mehr Einzelterme als unter *Termzahl* < eingegeben, so wird die Summe verkürzt in die Liste geschrieben. Markieren Sie *vollständige Summen*, so finden Sie in der Liste ausschließlich Summen, die mit allen Termen angegeben werden.

Beachten Sie bitte, dass diese Berechnung für größere Zahlen sehr viel Zeit benötigt. Nach 64000 Zeilen Eintrag in der Liste wird automatisch abgebrochen.

6.61 Gaußsche Primzahlen

In diesem kleinen Teilprogramm werden Gaußsche Primzahlen in der komplexen Zahlenebene dargestellt.



Eine Gaußsche Primzahl ist eine Gaußsche ganze Zahl $a + b \cdot i$, d.h., a und b sind ganze Zahlen, die eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllen müssen:
1. Sind a und b verschieden von Null, dann ist $a + b \cdot i$ Gaußsche Primzahl genau dann, wenn $a^2 + b^2$ in den natürlichen Zahlen gewöhnliche Primzahl ist.
2. Ist a = 0, dann ist $b \cdot i$ Gaußsche Primzahl, wenn |b| gewöhnliche Primzahl ist und $|b| \equiv 3 \bmod 4$ gilt.
3. Ist b = 0, dann ist a Gaußsche Primzahl, wenn |a| gewöhnliche Primzahl ist und $|a| \equiv 3 \bmod 4$ gilt.

Die Gaußschen Primzahlen werden durch kleine gelbe Kreise gekennzeichnet. An dem Rollbalken stellen Sie das Darstellungsintervall ein.

Markieren Sie *Zyklus anzeigen* und klicken sie mit der linken Maustaste auf eine der angezeigten Primzahlen, so zeichnet das Programm folgenden Zyklus.

Ist $a_1 + b_1i$ die gewählte Primzahl, so wird sie mit der nächsten Gaußschen Primzahl $a_2 + b_2i$ verbunden, für die a_2 größer als a_1 ist und $b_1 = b_2$ gilt.
Von dieser Zahl aus wird die Primzahl gewählt, die als nächste unterhalb liegt, d.h. der Realteil bleibt erhalten und der Imaginärteil wird kleiner. Von dort sucht man die nächste Primzahl nach links, dann nach oben, wieder nach rechts usw. Der Zyklus stoppt, wenn die Ausgangszahl erreicht wird und ein symmetrische Graph entsteht.

Beachten Sie bitte: Mitunter kann der Zyklus sehr lang werden. Haben Sie die Anzeige in der *Tabelle* zugeschaltet, kann die Berechnung eines Zyklus etwas Zeit benötigen.

6.62 Fastpythagoreische Tripel

Unter einem Pythagoreischen Zahlentripel versteht man ein Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Eng mit diesen verwandt sind fastpythagoreische Tripel.

In diesem Programmpunkt werden Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) gesucht, für die

$$a^2 + b^2 = c^2 \pm k$$

gilt, wobei k im eigentlichen Sinne gleich 1 ist, hier aber verändert werden kann. Vor der Berechnung geben Sie die Obergrenze für a und b an.

Dreiecke mit derartigen Seitenlängen a, b und c sind "fast" rechtwinklig. Der zur Seite c gehörende Winkel γ ist fast ein rechter. Angezeigt werden in der Liste nur solche Tripel, für die die prozentuale Abweichung Gammas von 90° kleiner als der bei *Fehler-%* einzugebende Wert ist.
Außer den Zahlen des Tripels werden auch die Innenwinkel entsprechender Dreiecke angezeigt.

6.63 Fibonacci Zahlen

Im Jahre 1202 erschien das Buch "Liber abaci" von Leonardo von Pisa (Fibonacci = Filius Bonacii). In diesem Buch findet sich unter der Überschrift "Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur" seine berühmte Kaninchen-Aufgabe:

"Wie viele Kaninchen-Paare gibt es nach einem Jahr, wenn anfangs ein Paar

existiert, jedes Paar jeden Monat ein neues Paar zur Welt bringt und alle Jungen sich jeweils nach einem Monat fortpflanzen?"

Überträgt man diese Fragestellung auf eine Zahlenfolge, so erhält man 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ..., die sogenannte Zahlenfolge des Fibonacci. Diese ist innermathematisch, aber auch bei vielen Fragen der Biologie von Bedeutung. Ihre Bildungsvorschrift ist mit

$F_0 = 0 ; F_1 = 1 ; F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

natürlich rekursiv.
Dieses Unterprogramm ermittelt die ersten Glieder dieser Zahlenfolge. Geben Sie dazu den Anfangs- und Endeindex ein.
Als maximaler Index ist dabei 15000 möglich. Beachten Sie bitte, dass die Berechnung der Fibonacci-Zahlen mit großem Index etwas Zeit benötigt.

Im Übrigen gehört die Herleitung einer expliziten Bildungsvorschrift dieser Folge zu den anspruchsvollen elementaren mathematischen Aufgaben. Man erhält:

$F_n = 1 / \sqrt{5} [((1 + \sqrt{5}) / 2)^n - ((1 - \sqrt{5}) / 2)^n]$,

wobei $(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618033989$ das Verhältnis des Goldenen Schnitts angibt. Nach einem Jahr wären 377 Kaninchenpaare vorhanden, wenn das erste Paar nach einem Monat Junge bekommt, nach zwei Jahren über 240000 Kaninchen. Allerdings muss man auch feststellen, dass die Kaninchen-Aufgabe Fibonaccis relativ wenig Realitätsbezug besitzt.

6.64 Bernoullische Zahlen

Bernoullische Zahlen treten als Koeffizienten der unendlichen Reihe

$t / (e^t - 1) = 1 + B_1 t/1! + B_2 t^2/2! + B_3 t^3/3! + \ldots$

auf.
Es ist: $B_0 = 0$, $B_1 = -1/2$ und alle anderen $B_k = 0$ für ungerades k. Durch $B_0 = 1$ und

$\binom{k+1}{1} B_k + \binom{k+1}{2} B_{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} B_1 + B_0 = 0$

können die Bernoullischen Zahlen rekursiv definiert werden. Zum Beispiel wird

$-1/2 + 3 B_2 = 0$
$-3/2 + 10 B_2 + 5 B_4 = 0$
$-5/2 + 21 B_2 + 35 B_4 + 7 B_6 = 0$
$-7/2 + 36 B_2 + 126 B_4 + 84 B_6 + 9 B_8 = 0$

Bernoullische Zahlen sind gebrochene Zahlen. Alle Bernoullischen Zahlen mit ungeradem Index größer als 1 sind gleich 0. Die ersten von Null verschiedenen sind $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$ und $B_{10} = 5/66$.

In diesem Teilprogramm werden die Bernoullischen Zahlen bis zum Index 2500 exakt berechnet, d.h. Zähler und Nenner werden ermittelt und angezeigt. Beachten Sie bitte, dass die Berechnung für höhere Indizes längere Zeit benötigt.

6.65 g-adische Bruchdarstellung

In diesem Teilprogramm können Sie gemeine Brüche in die Bruchdarstellung eines Positionssystems der Basen 2, 3, ..., 36 transformieren.
Einen derartigen Bruch nennt man einen g-adischen Bruch.

Tragen Sie dazu den Zähler und den Nenner des gemeinen Bruchs in die Eingabefelder ein. Mit dem Schalterklick ermittelt das Programm die Bruchdarstellungen in den einzelnen Positionssystemen.

Enthält dieser Bruch eine Periode mit einer Länge < 200, so wird diese automatisch erkannt. Weiterhin können Sie die maximale Länge der Zifferndarstellung in einer weiteren Zeile festlegen. Der Höchstwert beträgt dabei 5000 Ziffern.

Wandeln Sie zum Beispiel 1 / 10 = 0,1 in das Dreiersystem um, so erhalten Sie als Ziffernfolge 0,0022 ... mit der 4-ziffrigen Periode = 0022.

Zusätzlich erhalten Sie die Darstellung in der altbabylonischen Bruchdarstellung als g-adischer Bruch zur Basis 60.

6.66 Moser-Problem

Nach der Goldbachschen Vermutung kann jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden.

Ebenso interessant ist die Frage, ob es möglich ist, eine natürliche Zahl als Summe von aufeinander folgenden Primzahlen darzustellen. Diese Frage wurde zuerst durch Leo Moser aufgeworfen und nach ihm benannt.
Zum Beispiel erhält man für 1164 vier verschiedene Summen von aufeinander folgenden Primzahlen:

1164 = 29 + 31 + ... + 103 = 97 + 101 + ... + 139 = 281 + ... + 307 = 577 + ... 587

Gegenwärtig (August 2009) kennt man verschiedene natürliche Zahlen, die auf eine bis neun verschiedene Arten dargestellt werden können. Offen ist noch, ob es auch Zahlen gibt, für welche 10 oder mehr verschiedene Summen existieren.

Wählen Sie dieses Teilprogramm, können Sie die Anzahl und die zugehörigen Summendarstellungen für natürliche Zahlen von 1 bis 32767 berechnen lassen. Nach einem Klick auf *Berechnung* wird für jede Zahl *von* ... *bis* nach Primzahlsummen gesucht. Ein Tabelleneintrag der Form

83 83, 11 ... 23, 23 ... 31

bedeutet dabei, dass für die 83 drei verschiedene Zerlegungen 83 = 83 = 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 23 + 29 + 31 existieren.

Allgemeines Moser-Problem

Verallgemeinert man das Moser-Problem auf die Darstellung einer natürlichen Zahl n als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen (nicht notwendigerweise Primzahlen), so ergeben sich auch für kleine n eine Vielzahl von Möglichkeiten.
Derartige Zerlegungen können Sie auch in diesem Teilprogramm (Feld *Allgemeines Problem* markieren) berechnen.

6.67 Heron-Verfahren

Die numerische Berechnung von Quadratwurzeln hat eine lange Geschichte. Vor etwa 4000 Jahren kannten die Sumerer und Babylonier die iterative Gleichung

$$x_{n+1} = ½ (x_n + a/x_n)$$

zur Berechnung der Quadratwurzel von a. Verallgemeinert man diese Formel auf beliebige p-te Wurzel, so erhält man die schon dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 130) bekannte einfache Rechenvorschrift

$$x_{n+1} = 1/p ((p-1) x_n + a/x_n^{p-1})$$

Diese spezielle Form der Newton-Iteration ermittelt schrittweise den Wert von $\sqrt[p]{a}$.

Wählen Sie dieses Teilprogramm, so können Sie näherungsweise Wurzeln n.ten Grades berechnen. Unter *Radikand* geben Sie den Radikanden sowie den *Wurzelexponenten* ein. Den reellen Radikanden können Sie im Bereich von 1 bis 9999999 wählen. Für den Wurzelexponenten können Sie Werte von 2 bis 100 verwenden.

Nach dem Schalter *Berechnung* ermittelt das Programm schrittweise die Zwischenlösungen. Dazu werden drei *Startwerte* genutzt, die Sie ebenfalls eingeben können. Der Abbruch erfolgt automatisch sobald der Fehler kleiner als 10^{-8} wird.

6.68 Des chiffres et des lettres

Im französischen Fernsehen ist eine Spielshow besonderer Art sehr beliebt: Aus einer Menge vorgegebener ganzer Zahlen ist durch schrittweise Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division eine Zielzahl zu ermitteln. Dabei darf und muss jede gegebene Zahl und jedes Zwischenergebnis genau einmal verwendet werden!

Beispiel: Aus den Zahlen 1 bis 6 ist die 278 zu konstruieren:

$$4 \cdot 5 = 20$$
$$3 + 20 = 23$$
$$23 \cdot 6 = 138$$

1 + 138 = 139
139 · 2 = 278

Als einzelne Gleichung würde sich damit ((3 + 4 · 5) · 6 + 1) · 2 = 278 ergeben.

Wie schwierig die Aufgabe ist, erkennt man vielleicht daran, dass zum einen die Lösung nicht immer eindeutig ist, mitunter aber auch keine existiert, und zum anderen allein für sechs Ausgangszahlen rund 21 Millionen Möglichkeiten der Kombination von Zahlen und Operationen existieren. Liegen sogar acht Zahlen vor, wird das Problem um ein Vielfaches schwieriger (444,4 Milliarden Möglichkeiten). Gegenwärtig erscheint es so, dass die Suche nach einer solchen Lösung zu den NP-Problemen der Informatik gehört.

In diesem Programmteil ermittelt das Programm eine, sofern existierende, entsprechende Lösung. An den Pfeilschaltern stellen Sie die Anzahl der Ausgangszahlen ein, die zufällig ermittelt werden, aber auch von Ihnen direkt eingegeben werden können.

Wählen Sie *Problem lösen*, sucht das Programm nach einer Lösung. Sehr oft werden Sie schnell ein Ergebnis erhalten, jedoch kann es durchaus auch sehr viel Rechenzeit benötigen. Bei acht Ausgangszahlen benötigt der Nachweis, dass keine Lösung existiert, auch auf einem 2,2-GHz-Computer mehrere Minuten Zeit. Die Suche können Sie jederzeit abbrechen.

Hat man die Kandidaten im französischen Fernsehen einmal gesehen, so kann man nur bewundernd staunen, mit welcher Geschwindigkeit dort Lösungen gefunden werden. Es ist äußerst bedauerlich, dass eine derartige Spielshow im deutschen Fernsehen keinen Erfolg haben würde – zum einen, da die meisten deutschen Zuschauer wahrscheinlich das Spielkonzept nicht verstehen würden und zum anderen, weil sie völlig gelangweilt wären, da sie keine Chance hätten, aktiv an der Show teilzunehmen.

Mit dem Prinzip "Des chiffres et des lettres" sind auch interessante zahlentheoretische Fragen verbunden. Zum Beispiel kann nach der jeweils kleinsten natürlichen Zahl z gesucht werden, die sich nicht durch die Ausgangszahlen 1, 2, 3, ..., n auf die genannte Weise konstruieren lässt. Dabei findet man für n = 4, 5, 6, 7 und 8 als kleinste z = 29, 76, 284, 1413 sowie 7187.

Folge berechnen

Solche Folgen von Zerlegungen können Sie auch vom Programm berechnen lassen. Tragen Sie dazu Ausgangszahlen und unter *von ... bis* einen Suchintervall ein. Klicken Sie nun auf den Schalter *Ziele suchen*, werden die Ausgangszahlen auf eine kontinuierlich ansteigende Zielzahl angewandt und in der Liste angezeigt. Die gefundenen Zerlegungen können Sie später in einer Datei speichern, kopieren bzw. drucken.

Die Berechnung stoppt erst, wenn für jede Zahl des Intervalls eine Lösung gefunden wurde oder sich ist, dass es keine weiteren Lösungen gibt bzw. wenn Sie den Vorgang mit dem *Abbruch*-Schalter unterbrechen.

Beachten Sie bitte: Wie oben erwähnt, kann die Suche nach einer einzelnen Lösung schon Minuten dauern. Berechnen Sie eine Folge, können durchaus Stunden als Zeitaufwand möglich sein. Insbesondere dann, wenn im Hintergrund andere Prozesse laufen, wie z.B. Internetprogramme, Bildschirmschoner, Druckaufträge und vieles andere mehr.

Alle Lösungen berechnen

Für eine solche Aufgabenstellung kann es auch mehrere Lösungen geben, teilweise sogar sehr viele.
Möchten Sie (theoretisch) alle möglichen Lösungen berechnen lassen, so markieren Sie das Feld *alle Lösungen suchen*.
Das Programm versucht nun, alle Kombinationen der Operanden und Operationszeichen zu finden und trägt diese in die untere Liste ein. Nach Beendigung der Berechnung können Sie die Liste speichern oder in die Zwischenablage kopieren.

Achtung! Auch diese Berechnung kann unter Umständen sehr lange dauern!

6.69 Arithmetik in verschiedenen Positionssystemen

Dieses Teilprogramm stellt einen Taschenrechner dar, der allerdings in verschiedenen Positionssystemen rechnen kann.

Zuerst stellen die am Rollbalken *Basis* die Grundzahl des Positionssystems von 2 bis 16 ein.
Die Operanden geben Sie ein, indem Sie entweder die Tastatur nutzen oder auf den jeweiligen Schalter klicken. Gleiches gilt für die Operationen. Vorgesehen sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation, das Quadrat, die ganzzahlige Division, die ganzzahlige Restbildung sowie der größte gemeinsame Teiler als auch das kleinste gemeinsame Vielfache.
Nach Klick auf *Berechnung* oder *RETURN* wird die Operation ausgeführt.
Angezeigt wird das Ergebnis im gewählten Positionssystem als auch im Dezimalsystem.
Zu beachten ist, dass dieser Rechner alle Operationen nach der Reihenfolge der Eingabe ausführt.

6.70 Kommandozeilen-Rechner

Dieses Teilprogramm stellt einen einfachen Rechner dar, der mittels Kommandozeileneingabe gesteuert wird.

Tragen Sie in die untere Zeile den auszuwertenden Ausdruck ein und quittieren Sie mit dem Schalter bzw. mit *RETURN*.
Das Programm berechnet daraufhin den Term und weist das Ergebnis einer neuen Variablen der Form _x zu. Darüber hinaus können neue Variablen mittels „name = ausdruck" zur weiteren Berechnung definiert werden.
Vordefiniert sind an Funktionen, Operationen usw. folgende Möglichkeiten:

Ausdruck	
ausdruck + term	Addition
ausdruck – term	Subtraktion
Term	
term / wert	Division
term * wert	Multiplikation
term % wert	ganzzahlige Division
Wert	
Zahl	eine Zahl (Formate: 5.3 -5.3 5.3e-4 5.3e4) e/E trennt den Exponenten ab , '.' ist Dezimaltrennzeichen
Name	Konstante, Variable
name = ausdruck	Zuweisung eines Wertes an eine Konstante/Variable
| ausdruck |	Absolut-Betrag
name(ausdruck)	Funktion mit einem Parameter
name(ausdruck, ausdruck)	Funktion mit zwei Parametern
wert ^ wert	Potenz
wert!	Fakultät, nur für ganze Zahlen < 26
Konstanten	
Pi	
E	
Random/Rnd	Zufallszahl aus [0, 1]
Einparametrige Funktionen	
Sqr	Quadrat des Argumentes
Sqrt	Quadratwurzel
Exp	Exponentialfunktion
Ln	natürlicher Logarithmus
log10, log, lg	Logarithmus zur Basis 10
log2, lb	Logarithmus zur Basis 2
Abs	Absolutbetrag
random, rnd	Zufallszahl aus [0, Argument]
randomint, rndint	ganzzahlige Zufallszahl aus [0, Argument]

Arccos, arcsin, arctan	Arkus-Funktionen
arccosh, arcsinh, arctanh	Hyperbolische Arkus-Funktionen
cos, sin, tan, cot	trigonometrische Funktionen
cosh, sinh, tanh	hyperbolische Funktionen
Ceil	kleinster Ganzzahl-Wert, der größer oder gleich X
Floor	Abrunden
Round	Runden
Frac	Nachkommaanteil
Int	ganzzahliger Anteil
Sgn	Signum-/Vorzeichen-Funktion
Zweiparametrige Funktionen	
logn(N, ex)	Logarithmus zur Basis <N> von <ex>
hypot(X, Y)	Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (Sqrt(X**2 + Y**2))

Ihre Berechnungen können Sie über die Schalter in der Schalterleiste speichern, laden, drucken bzw. in die Zwischenablage kopieren.

6.71 Zahlwörter

Unter *Zahlwörter* finden Sie ein kleines Teilprogramm, das eine jede Zahl eines Intervalls als Zahlwort in der jeweiligen Fremdsprache ausgibt.

Wählen Sie eine der Sprachen Dänisch, Englisch, Esperanto, Französisch, Griechisch, Italienisch, Niederländisch, Polnisch, Russisch, Schwedisch, Sorbisch, Spanisch, Tschechisch, Türkisch, Ungarisch, Plattdeutsch, Japanisch (Aussprache) oder Latein, so gibt das Programm für alle Zahlen von Zahl a bis Zahl b das fremdsprachige Zahlwort aus. Wahlweise erhalten Sie auch die Zahlwörter in deutsch.

Ein mathematisches Wörterbuch in mehreren Sprachen, in dem Sie auch Zahlwörter in anderen Sprachen nachschlagen können, finden Sie im Teilprogramm *Fachwörterbuch.*

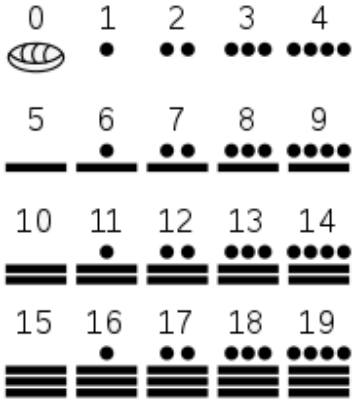
Hinweis: Zur Darstellung mehrerer Sprachen werden besondere Schriftarten benötigt, die normalerweise nicht auf Ihrem Computer installiert sind. Dieses Programm erzeugt die speziellen Schriftarten nur temporär, d.h. es werden auch hier keinerlei Änderungen an Ihrem System vorgenommen!

6.72 Lange Zahlnamen

In diesem kleinen Teilprogramm wird eine als Ziffernfolge eingegebene lange Zahl in ein deutsches Zahlwort ungewandelt. Die Zahl darf dabei maximal 300 Ziffern haben.

Alternativ können Sie das Zahlwort in der US-amerikanischen Form anzeigen lassen.
In den USA kennt man die Zahlwortendung "-illiarde" nicht. Die 1 Milliarde wird dort als 1 Billion, unsere Billion als Trillion usw. bezeichnet.
Dies führt öfters zu fehlerhaften Übersetzungen, da leider die Mehrzahl der Politiken aber auch Journalisten diesen Unterschied nicht kennen oder aber nicht kennen wollen.

6.73 Maya-Multiplikation



Eine der faszinierendsten Kulturen Amerikas waren die Maya. Sie besiedelten breite Gebiete des heutigen Guatemala, Belize, Honduras, El Salvador und Teile im Süden von Mexiko. In der klassischen Periode (300 v.u.Z. bis 300 u.Z.) erfanden die Maya das Schreiben und man nimmt an, dass sie bereits in der vorklassischen Periode rechneten. Sie waren große Astronomen und verfolgten genau die Bahnen von Sonne und Mond und führten Tabellen über Sonnenfinsternisse und die Perioden der Sichtbarkeit anderer Planeten.

Die Maya nutzten im Gegensatz zu unserem Dezimalsystem ein Positionssystem mit der Basiszahl 20. Besonders hervorzuheben ist dabei, dass das Volk der Maya schon mehr als 1000 Jahre vor den Europäern die Zahl Null kannten und nutzten.

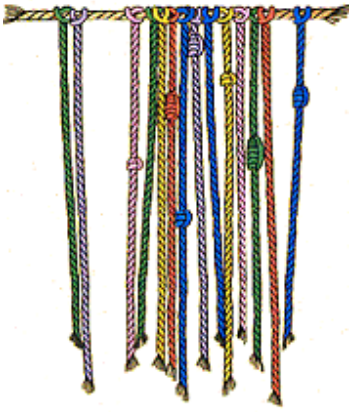
Insgesamt verwendeten die Maya drei verschiedene Zeichen, um alle anderen Zahlen zu entwerfen: eine Muschel für die Null, einen Punkt für die Eins und einen Balken für die Zahl Fünf.

In diesem Teilprogramm wird Ihnen die Multiplikationstafel des "kleinen Maya-Einmaleins" angezeigt. Wegen der Grundzahl 20 geht dieses Einmaleins von 1 * 1 bis 19 * 19.
An den Rollbalken können Sie die zwei Operanden der Tabelle einstellen, am 3.Rollbalken die Tabelle senkrecht verschieben. Markieren Sie das Feld *Additionstafel*, so wird die Tabelle der Addition der Zahlen 1 bis 19 angezeigt.

6.74 Zahldarstellung der Inka

Die Inkas kannten keine herkömmliche Form der Schrift. Der Inka-Herrscher und

seine Untertanen benutzten statt dessen den Quipu, ein Bündel von kompliziert verknoteten Schnüren.



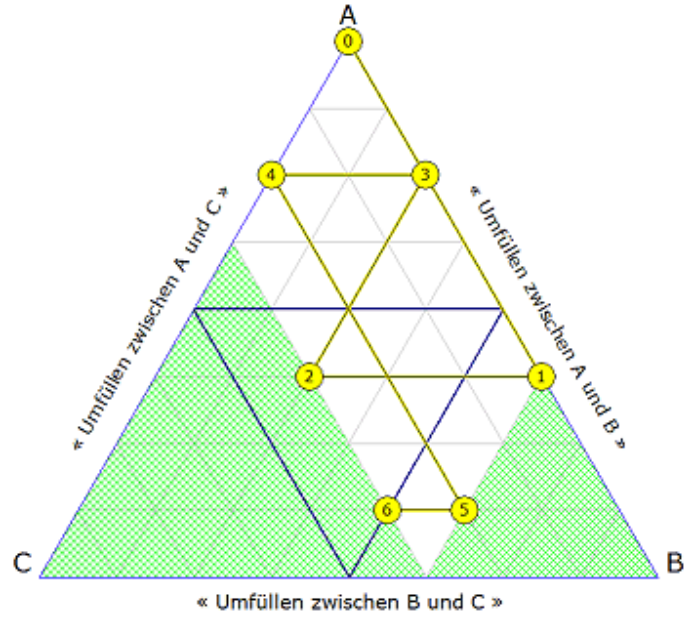
Ein Quipu ("Knoten") bestand in der Regel aus einer Kopfschnur, von der etwa hundert Schnüre verschiedener Farben und Längen herabhingen. Oft wurden noch mehr Schnüre an den Hauptstrang angebracht, so dass ein Bündel von bis zu mehreren tausend Schnüren entstand.

Die Position und Zahl der Knoten an einer Schnur haben eine genaue Bedeutung.
Ein einzelner Knoten oben ist gleich 1000, ein Knoten auf der nächsten Ebene bedeutet 100 und ein Knoten am Ende des Fadens entspricht der Zahl 1.
Eine Gruppe von vier Knoten bedeutet je nach ihrer Position 4 000, 400, 40, oder 4. Von rechts nach links gelesen ergaben die Schnüre mehrere Zahlen. Verschiedene Farben dienten der weiteren Kennzeichnung.

Der Inka-Herrscher gebrauchte den Quipu z.B. um die Größe seiner Armee aufzuzeichnen. Die Inka-Familie benutzte den Quipu, um über ihren Besitz wie Gold, Silber, Kleidung, Mais oder Lamas genau Buch zu führen.

In diesem Teilprogramm wird diese Zahldarstellung der Inkas veranschaulicht. Abgebildet sind sieben Einzelschnüre, auf denen Zahlen bis maximal 99999 in Form verschieden farbiger Knoten angezeigt werden.
Auf der linken Schnur wird die Summe der sieben Einzelzahlen angezeigt.

6.75 Milchmädchenrechnung



Unter der "Milchmädchenrechnung" wird in diesem Teilprogramm folgendes Problem verstanden:

Ein Milchmädchen hat eine volle Kanne mit 8 Litern Milch und zwei leere Kannen, von denen eine 5, die andere 3 Liter fasst.
Ein Käufer möchte exakt 4 Liter Milch haben. Das Milchmädchen hat keine anderen Hilfsmittel als ihre drei Kannen, um die Milch abzumessen. Wie oft muss sie Milch von einer Kanne in eine andere gießen, um schließlich in irgendeiner der Kannen die gewünschte Menge zu haben?

Im rechten Fensterteil können die Größen der drei Kannen an den Rollbalken eingestellt werden, ebenso unter *Zielvolumen* die gewünschte Menge Milch in einer der Kannen.
Das Programm ermittelt sofort die Möglichkeiten für das Füllen der Kannen und zeigt ebenso die Anzahl der notwendigen Umfüllungen an. Zu beachten ist, dass nicht stets eine Lösung existiert. Mit den Kannengrößen 8,5,3 und den Zielfüllungen 4,3,1 gibt es zum Beispiel keine Lösung.
Klicken Sie nun eine der gefunden Lösungen an, wird Ihnen in der Liste *Ausgewählte Lösung* die Abfolge der Umfüllungen schrittweise angezeigt.
Interessant ist, dass neben einem rein numerischen Verfahren eine schöne, grafische Lösungsmethode existiert. Dazu wird ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet, in das waagerechte und schräge Linien eingezeichnet werden.

Waagerechte Linien geben den Füllstand in der Kanne A an, schräge Linien von rechts nach links den Füllstand der Kanne B, die anderen schrägen Linien den Füllstand von C. Je weiter eine Linie von den Punkten A, B und C entfernt ist, desto geringer ist die Füllung der Kanne. Schraffiert sind außerdem alle Bereiche, die keinen gültigen Füllungen von B und C entsprechen.

Zusätzlich werden Linien in Dunkelblau hervorgehoben, die alle Füllstände charakterisieren, die eine Lösung darstellen. Bewegt sich man sich in dem Gitter entsprechend den beschrifteten Richtungen wird zwischen den Kannen umgefüllt.

Interessant ist nun, dass man allein durch Abschreiten der möglichen Linien im Gitter (ohne Rechnung!) eine Lösung, wenn sie existiert, finden kann. Man beginnt bei A und bewegt sich längs der Linien. Durch geschickte Auswahl gelangt man evtl. auf einen Punkt der dunkelblauen Linien, d.h. eine Lösung. Wählen Sie eine Lösung aus, zeigt das Programm in gelben Kreisen die Reihenfolge der Umfüllungen an.

Hinweis: Dieses Teilprogramm wurde nach einer Vorlesung von Herrn Dr. F. Göring (TU Chemnitz) gestaltet.

6.76 Magisches Quadrat

Am 5. Oktober 2002 wurde ein Kandidat aus Österreich mit einer mathematischen Wette zum Wettkönig bei "Wetten, dass" gewählt. Er konstruierte in wenigen Minuten ein magisches Quadrat der Ordnung 4, das eine zuvor zufällig ausgewählte sechsstellige Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme besitzen sollte.

Da die Wahl des Wettkönigs durch die Zuschauer erfolgt, werden wohl viele Millionen fasziniert auf diese "große" mathematische Leistung geblickt haben ... aber: Die vorgeführte Leistung entpuppt sich schnell als ein seit mehreren Jahrzehnten immer wieder gezeigtes Kunststückchen und beruht auf nichts anderem als einer einfachen Division durch 4!
Soll ein solches magisches Quadrat konstruiert werden, so ist der Ausgangspunkt

das magische Quadrat

8 11 14 1
13 2 7 12
3 16 9 6
10 5 4 15

das man allerdings auswendig lernen muss. Im ersten Schritt wird die ausgewählte Summe Z, die sogenannte magische Zahl, um 30 vermindert und mit 4 ganzzahlig dividiert. Ergebnis und Rest merkt man sich.

(Zeilensumme Z - 30) / 4 = A Rest B

also relativ einfaches Kopfrechnen.
Im 2. Schritt wird beginnend mit 1 der Wert A eingetragen, bei 2 A + 1, bei 3 A + 2 usw. Sollte der Rest B nicht 0 sein, so werden die Felder mit den Ausgangszahlen 13, 14, 15 und 16 zusätzlich noch mit B addiert.

Beispiel mit der Zeilensumme Z = 574385

1.Schritt: (574385 – 30) : 4 = 143588 Rest 3
2.Schritt: es entsteht das Quadrat

143595 143598 143601 143588
143600 143589 143594 143599
143590 143603 143596 143593
143597 143592 143591 143602

3. Schritt: Da B = 3 ist, werden die ursprünglichen Felder mit 13 bis 16 noch um 3 erhöht.

143595 143598 143604 143588
143603 143589 143594 143599
143590 143606 143596 143593
143597 143592 143591 143605

Das magische Quadrat hat die nun gesuchte Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme. Die vier äußeren und inneren Felder ergeben in der Summe ebenfalls 574385. Sollen die Zahlen nicht "so gleich groß" aussehen, subtrahiert man z.B. in den Ausgangsfeldern 1, 2, 3 und 4 evtl. 20000 und addiert dies zu den Feldern 5, 6, 7 und 8 oder auch 9 bis 12 usw.

In diesem Teilprogramm werden derartige magische Quadrate der Ordnung 4 ermittelt. Möchten Sie nicht annähernd gleich große Zahlen, so wählen Sie das zweite magische Quadrat der gleichen Zeilensumme, dass im unteren Fensterteil dargestellt wird.
Abschließend bleibt nur festzustellen, dass man mit einfachen Kopfrechenleistungen in Deutschland schon für Aufsehen sorgt!

Magische Quadrate verschiedener Ordnung

Im zweiten Teil dieses Programmfensters können über den Schalter *Konstruieren* magische Quadrate der Ordnung 4 bis 16 konstruiert werden. Geben Sie dazu die Ordnung ein.
Durch Anklicken der 1. Spalte oder 1. Zeile ist es möglich, diese zu verschieben und so weitere derartige Quadrate zu erzeugen.

6.77 Eulersche Quadrate

Ein lateinisches Quadrat ist ein Zahlenquadrat der Ordnung n, in dem jede Zahl von 1 bis n in jeder Zeile und Spalte genau einmal vorkommt. Reduziert oder normiert heißt ein lateinisches Quadrat, wenn in der 1.Spalte und Zeile die Zahlen 1 bis n in natürlicher Reihenfolge auftreten.
U.a. sind die lateinischen Quadrate der Ordnung 9 die mathematische Grundlage für das beliebte Ziffernspiel Sudoku.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

+

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

=

A1	B2	C3	D4
C2	D1	A4	B3
D3	C4	B1	A2
B4	A3	D2	C1

Kombiniert man zwei lateinische Quadrate, so entsteht ein neues Quadrat. Treten alle Paare von Kombinationen genau einmal auf, spricht man von einem Eulerschen Quadrat oder auch griechisch-lateinischen Quadrat.
Die beiden Ausgangsquadrate werden dann orthogonale lateinische Quadrate genannt.

In der Abbildung werden zwei lateinische Quadrate der Ordnung 4 zu einem Eulerschen Quadrat zusammengefügt. Jede mögliche Kombination aus einem Buchstaben A bis D und den Zahlen 1 bis 4 tritt in den Feldern des Quadrates genau einmal auf.
Lateinische und Eulersche Quadrate treten in verschiedensten Problemen der angewandten Mathematik, vor allem in der Kombinatorik, auf.

In diesem Teilprogramm werden Eulersche Quadrate mit einer ungeraden Ordnung n (n = 5, 7, ..., 27) erzeugt.
Für ungerade Ordnung existiert ein relativ einfacher Algorithmus; für größere, gerade Ordnung ist die Konstruktion nur mit extremen Computereinsatz möglich.

Zum einen werden die Einträge in die Eulerschen Quadrate durch Kombination von Großbuchstaben A,...,Z,Ä,Ö mit Kleinbuchstaben des zweiten lateinischen Quadrates angezeigt, zum anderen durch zwei farbige Quadrate.
Die Textform kann ausgedruckt, kopiert und gespeichert werden.

Wählen Sie unter *Spaltentausch* einen Wert größer 0 ein, so werden wiederholt Spalten der erzeugen Eulerschen Quadrate ausgetauscht, wodurch z.B. weniger regelmäßige Quadrate entstehen.

Dieses Teilprogramm wurde nach einem sehr schönen Delphi-Programm von Wolfgang Bartsch gestaltet.

6.78 Karten mischen

Als Mischen bezeichnet man die Erzeugung einer zufälligen Reihenfolge der Spielkarten eines Kartenspiels.
Es gibt verschiedene Methoden, Karten zu mischen. Gewisse Methoden ergeben eine bessere Durchmischung, während andere Methoden leichter zu erlernen und zu handhaben oder besser für spezielle Situationen geeignet sind.

Eine beliebte Methode wird im Englischen "riffle shuffle" genannt, zu Deutsch Bogenmischen. Dabei wird jeweils eine Hälfte der Karten in jeder Hand nach innen gewölbt. Sodann werden die Karten gleichzeitig von den Daumen losgelassen, sodass sie ungleichmäßig (!) ineinander verzahnen.
Wichtig ist die Forderung "ungleichmäßig"! Werden die Hälften so gemischt, dass abwechselnd von jedem Stapel genau eine Karte gewählt wird (geübte Spieler können das), so ist die Reihenfolge des gemischten Stapels nach mathematischen Gesetzen klar vorhersagbar. Nach einer endlichen Anzahl von Mischvorgängen wird sogar die Ausgangssituation wieder erreicht.

Bei dem "in shuffle" wird zuerst von der zweiten Hälfte und dann von der ersten Hälfte genau eine Karte eingemischt. Dort gilt:

Werden 2n Karten 2n mal mit "in shuffle" gemischt und ist 2n + 1 eine Primzahl, so ist die Ausgangssituation wiederhergestellt.
Im Allgemeinen erreichen 2n Karten nach s Schritten den Anfangszustand, wenn

$$2^s \equiv 1 \bmod 2n+1$$

gilt.
Beim "out shuffle" wird zuerst von der ersten Hälfte und dann von der zweiten Hälfte genau eine Karte eingemischt. Hier erreichen 2n Karten nach s Schritten den Anfangszustand für

$$2^s \equiv 1 \bmod 2n-1$$

Die 52 Karten eines Standardspiels sind hier nach nur acht Vorgängen wieder im Originalzustand.

Die Kartenmischung können Sie in diesem Teilprogramm testen.
Unter *Anzahl von Karten* legen Sie zuerst fest, mit wie vielen Karten Sie arbeiten möchten. Das Programm versucht dabei, wenn möglich, stets etwa gleich viele Karten jeder Farbe zu verwenden.
Von links mischen entspricht dem oben beschriebenen "out shuffle", *von rechts mischen* dem "in shuffle".

Klicken Sie nun auf *Mischen*, dann teilt das Programm die Karten in zwei Hälften und sortiert sie entsprechend dem gewählten Modell ein. Wiederholen Sie das Mischen, so werden Sie nach einer gewissen Anzahl von Vorgängen wieder den Originalzustand erreichen.
Der Schalter *1. Mischen* beginnt die Untersuchung mit dem Mischen der Originalreihenfolge erneut.

Monge-Mischen

Von dem französischen Mathematiker Gaspard Monge wurde eine spezielle Art des Mischens von Karten vorgeschlagen. Dabei werden die Karten abwechselnd hinten und vorn im neuen Stapel einsortiert. Auch bei diesem Verfahren wird die Ausgangssituation relativ schnell wieder erreicht.
Diese Methode können Sie ebenfalls in diesem Teilprogramm testen.

6.79 Josephus-Problem

Der jüdische Historiker Flavius Josephus (37-95) berichtete davon, dass er mit 40 anderen Juden vor den Römern in einen Keller flüchtete. Um dem Feind nicht in die Hände zu geraten, beschlossen sie, sich gegenseitig umzubringen – nur Josephus war dagegen. Deshalb schlug er vor, sich in einem Kreis aufzustellen und jeweils jeden Dritten auf der Stelle zu erschlagen. Da er sich "geschickt" in den Kreis stellte, blieb er als Letzter übrig und überlebte. In Auswertung der Überlieferung bedeutet dies:

N Personen (im Programm von 3 bis 20000) stehen in einem Kreis. Beginnend bei der ersten Person wird in Schritten von k abgezählt, wobei eine erreichte Person ausscheidet. Das Ganze wird so lange durchgeführt, bis nur noch eine Person übrig bleibt. Dieses Verfahren wird in der Literatur als *Josephus-Problem* bezeichnet.

Unter dem Eintrag *Josephus-Problem* können Sie dies untersuchen. Tragen Sie zuerst die *Personen* und die *Zählweite* ein. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* bzw. der Taste *RETURN* berechnet das Programm die Reihenfolge des Ausscheidens einzelner Personen. Kann die 1. Person die Schrittweite festlegen, so gelingt es ihr, bei einer Vielzahl von Personenzahlen zu erreichen, dass sie selbst als Letzte übrig bleibt. Für 60 Personen müsste sie z.B. eine Schrittweite von 34 festlegen, bei 59 Personen eine Schrittweite von 46 ... Allerdings gibt es beispielsweise bei 55 Personen keine solche Lösung. Die optimale Lösung (bei mehreren die kleinste) ermittelt das Programm zusätzlich.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnung für mehr als 5000 Personen sehr lange dauern kann.

Übrigens:
Josephus musste sich als 31. in den Kreis stellen, um zu überleben. Wäre das Abzählen bei ihm begonnen worden, hätte er als Abzählweite 16 vorschlagen

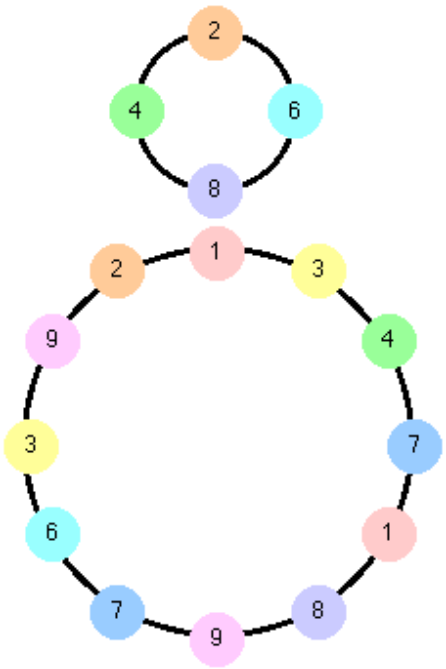
müssen.
Allerdings ist die von Josephus erfundene Geschichte über die Jahrhunderte inhaltlich verändert worden. Im Originaltext waren es mit ihm zusammen 40 Juden, die sich durch Losentscheid paarweise umbrachten, bis er sich mit dem Letzten "einigte". Diese Abänderung der Gesamtzahl ist für die mathematische Behandlung "notwendig", da für 40 Personen keine optimale Abzählweite existiert.

Josephus wurde durch seine irrwitzigen Schilderungen von geschichtlichen Ereignissen bekannt, wie zum Beispiel dem Tod des Kaisers Titus. Historische Tatsachen ersetzte er gern durch sensationslüsterne, horrorartige, von ihm erfundene Erzählungen. Er war wohl der erste Boulevard-"Journalist" der Menschheit.

Darstellung des Josephus-Problems

Im rechten Teil des Fensters wird das Abzählen grafisch dargestellt. An den Rollbalken können Sie maximal 50 Personen und die entsprechende Abzählweite einstellen.
Wählen Sie nun mit einem Mausklick die von Ihnen gewünschte Person aus, beginnt das Programm zu streichen. Wenn Sie richtig wählen, bleiben Sie am Ende sogar übrig. ☺

6.80 Addington-Ketten



Susan Addington stellte folgendes Problem vor: Gegeben sind die zehn Zahlen 0 bis 9. Zwei der Zahlen werden als Startzahlen gewählt und addiert. Die Summe wird modulo 10 (Anzahl der Ausgangszahlen) gebildet und der Vorgang mit dem Ergebnis und der vorhergehenden Zahl wiederholt, bis eine Zahl erreicht ist, sodass sich die schon gebildete Folge anschließend wiederholt.

Startet man zum Beispiel mit (0, 4), so ergibt sich die endliche Folge

0 4 4 8 2 0 2 2 4 6 0 6 6 2 8 0 8 8 6 4

Die beiden nächsten Zahlen wären wieder 0 und 4. Eine solche endliche, in sich geschlossene Folge nennt man Addington-Kette (Engl. Bracelet). Die Länge der Beispielkette wäre 20.

Die kürzeste Kette hat die Länge 1 und beginnt mit 0, 0. Startet man mit 0 und 5, so ergibt sich die Länge 3: 0 5 5; bei 2 und 6 die abgebildete Kette der Länge 4. Der zweite abgebildete Zyklus beginnt mit 1, 3. Allerdings würden auch 3, 4 oder 4, 7 ... die gleiche Kette ergeben.

Die Aufgabe besteht nun darin, für unterschiedliche Ausgangsmengen von Zahlen alle möglichen verschiedenen (!) Ketten und deren Längen zu bestimmen. Nachgewiesen ist, dass sich die Kette für jedes Paar von Startzahlen in endlich vielen Schritten schließt.

Eine vollständige Lösung des Problems existiert noch nicht. Aus diesem Grund werden vor allem Computer zur Berechnung verschiedener Ketten herangezogen.

In diesem Teilprogramm können Sie Addington-Ketten berechnen.
Unter *Modul* tragen Sie die Anzahl der Ausgangszahlen ein. Weiterhin können Sie festlegen, ob nur Ketten einer bestimmten Länge angezeigt werden.
Das Programm ermittelt alle möglichen Ketten, zeigt aber voreingestellt nur verschiedene Ketten an. D.h., wiederholt sich eine Folge mit einem anderen Startpaar, so wird sie nicht angezeigt.
Möchten Sie alle Folgen sehen, dann markieren Sie *alle anzeigen*.

Beachten Sie bitte, dass das maximale Modul, d.h. die Anzahl Ausgangszahlen, 1000 beträgt. Für n > 200 werden auch nur noch verschiedene Addington-Ketten angezeigt.

6.81 EAN-Strichcode

EAN ist eine Abkürzung für "Europäische Artikelnummer", die man auf sehr vielen Artikeln in Form eines Strichcodes bzw. als 13- oder 8-stellige Ziffernfolge findet. Mithilfe von Scannern kann der Strichcode an Computerkassen eingelesen werden.
Bei der 13-stelligen Nummer geben die ersten beiden Ziffern das Herstellungsland an, z.B. 40, 41, 42, 43 oder 44 für Deutschland. Die nächsten fünf Ziffern stehen für den Hersteller und eine weitere Gruppe von fünf Ziffern für das entsprechende Produkt. Die letzte Ziffer ist die Prüfziffer p.

Man erhält die Prüfziffer, wenn man die ersten 12 Ziffern abwechselnd von links, beginnend mit 1 bzw. 3 multipliziert und die Summe dieser Produkte durch Addition der Prüfziffer p zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt. Somit gilt für die Artikelnummer ab cdefg hikm p mit der Prüfziffer p:

a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p = 0 modulo 10

Durch dieses Prüfziffernverfahren werden an der EAN Fehler durch Verwechslung einer Ziffer immer aufgedeckt und Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern in den meisten Fällen erkannt. Oft nicht aufgedeckt werden hingegen Drehfehler durch Vertauschen nicht benachbarter Ziffern und Verwechslungen zweier Ziffern.

Für den Strichcode werden die EAN-Codes in Bitcodes umgewandelt. Der Wert 1 bedeutet eine Linie, der Wert 0 einen Zwischenraum.
EAN kodiert zwei getrennte Zifferngruppen mit je sechs Stellen. Jede Ziffer ergibt ein Muster aus zwei Streifen und zwei Zwischenräumen ganz spezieller Breite. Die erste Ziffer des Codes wird in den ersten Sechserblock verschlüsselt. Am Anfang, am Ende und in der Mitte werden spezielle Strichcodes eingefügt. Weitere Informationen zu diesem Thema finden Sie im Lexikon.
In diesem Teilprogramm geben Sie die 12-stellige Artikelnummer ein. Das Programm berechnet die Prüfziffer und stellt den zugehörigen Strichcode dar. Geben Sie 13 Stellen ein, so prüft das Programm, ob die Prüfziffer korrekt ist.

EAN-8

Neben dem dreizehnstelligen Code gibt es auch einen verkürzten 8-stelligen Code. Geben Sie sieben oder acht Stellen ein, wird dieser gezeichnet. Im zweiten Fall wird die Prüfziffer wieder überprüft.

EAN-Strichcode lesen

Im rechten Teil des Fensters können Sie über den Schalter *Bild laden* einen als BMP-, GIF- oder JPEG-Datei gespeicherten Strichcode laden.
Wählen Sie den Schalter *Auswerten,* so versucht das Programm den 13-stelligen Strichcode auszuwerten.

6.82 Zinsrechnung und Annuitätentilgung

In diesem Unterprogramm können Sie einfache Berechnungen zur Zins- und Rentenrechnung durchführen. Nach Eingabe des *Kapitals*, des *Zinssatzes in Prozent*, der Tages- und Jahreszahl bzw. der *Rate* ermittelt das Programm:

- den einfachen Jahreszins
- den Tageszins/Diskont (entsprechend der Tageszahl)
- die Tilgungsrate, d.h. die notwendige zu zahlende Rate, um das Kapital innerhalb der angegebenen Jahreszahl zu diesem Zinssatz vollständig zurückzuzahlen – zum einen vorschüssig, zum anderen nachschüssig.

Weiterhin enthält die Liste je Jahr folgende Werte:

- den Zinseszins
- den Endwert einer Kapitalsvermehrung bzw. -verminderung für nachschüssige bzw. vorschüssige Ratenzahlung

Wird ein vorhandener Kapitalbetrag K durch Zahlung eines festen Betrags R (der Rate) jeweils am Jahresende vermehrt bzw. durch Abhebung vermindert, so spricht man von nachschüssig. Erfolgt die Zahlung/Abhebung am Jahresanfang, handelt es sich um eine vorschüssige Rente.

Beispiel: Ein fester Betrag von 1000 € soll nachschüssig je Jahr um 500 € erhöht werden. Bei einem Zinssatz von 5% wächst der Betrag nach 10 Jahren auf

8232,29 € – eingezahlt wurden 6000 €.

Beispiel2: Ein Kredit von 100000 € soll bei einem Zinssatz von 12,5% innerhalb von 25 Jahren nachschüssig vollständig abgezahlt werden. Das Programm ermittelt als Tilgungsrate 13194,34 €. Eine Kontrolle durch Eingabe einer Rate von 13194 € ergibt bei nachschüssiger Kapitalverminderung nach 25 Jahren eine Restschuld von 49,56 € (das sind die 34 Cent in 25 Jahren!). Beachten Sie bitte, dass Sie auch negative Zinssätze einsetzen können.

Annuitätentilgung

Im zweiten Teilprogramm zur Berechnung der Tilgung eines Kredits wird eine Annutitätentilgung berechnet. Dabei wird eine Anfangsschuld mit einer für die gesamte Laufzeit konstanten Annuität (Zahlung je Zinszeitraum) getilgt.
Dadurch werden zu Beginn der Tilgung fast ausschließlich Zinsen gezahlt und die Schuld wird nur minimal verringert. Erst gegen Ende der Kreditlaufzeit bewirken die Zahlungen eine deutliche Senkung der Schuld. In die Eingabezeilen tragen Sie *Schuld, Annuität* und *Zinssatz* ein. Dabei ist zu beachten, dass die Annuität größer als die anfallenden Zinsen = Schuld * Zinssatz ist. Andernfalls würde der Kredit nie getilgt werden.

Anmerkung: Kredite zur Finanzierung größerer Projekte, wie zum Beispiel Häuser, werden von den Sparkassen und Banken mit einer Annuitätentilgung gewährt. Dies hat zur Folge, dass die Kreditnehmer oft nach vielen Jahren regelmäßiger Zahlung noch fast ihre Ausgangsschuld besitzen: Der überwiegende Teil der gezahlten Beträge wurde für die Zinsen aufgebracht.

6.83 Zins- und Zinseszinsdiagramm

Hinterlegt man bei einer Bank oder Sparkasse einen Geldbetrag, so erhält man normalerweise eine Vergütung, den Zins. Damit kann ein anfänglicher Grundbetrag über eine längere Zeit langsam aber stetig anwachsen.

Entnimmt man am Ende eines Jahres die gezahlten Zinsen, so steigt der Grundbetrag stets um den gleichen Betrag. Werden die Zinsen auf dem Konto belassen, so werden auch diese Zinsen im darauf folgenden Jahr verzinst, es entsteht der Zinseszins. Interessant ist nun das Gesamtkapital, den Anfangsbetrag plus alle gezahlten Zinsen, über einen längeren Zeitraum zu betrachten.

In diesem Teilprogramm wird das Anwachsen des Guthabens im Laufe der Zeit grafisch dargestellt. An dem Rollbalken stellen Sie die Höhe des Zinssatzes von 0,25% bis zu "utopischen" 20% ein. Am zweiten Rollbalken können Sie die Länge des Berechnungszeitraums verändern.
Das Programm zeichnet die Entwicklung von Guthaben + Zins sofort blau bzw. von Guthaben + Zinseszins rot ein. Ist der Zinssatz hinreichend groß, erkennt man sehr deutlich, dass ein Anfangsguthaben mit Zinseszins nach vielen Jahren

doch zu beträchtlicher Höhe anwachsen kann.

6.84 Jahreszinsen

Während Sie in *Zinsrechnung* praktisch nur Jahreszinsen unveränderlicher Beträge im jeweiligen Jahr berechnen können, ermöglicht Ihnen dieses Unterprogramm die Berechnung von Jahreszinsen auch bei veränderlichem Kontostand.

Außer dem Zinssatz und dem Kapital zum Jahresbeginn können Sie bis zu 140 Kontoveränderungen eingeben. Dazu tragen Sie jeweils das Datum im Format *dd.mm.* und den neuen Betrag ein. Nach Betätigung der *RETURN*-Taste bzw. des Schalters *Berechnung* errechnet das Programm die zu erwartenden Jahreszinsen, wobei vorausgesetzt wird, dass vom letzten eingegebenen Datum bis zum Jahresende keine Veränderungen mehr eintreten. Ihre eingegebenen Tabellen können Sie selbstverständlich speichern, auf Wunsch wieder laden und ausdrucken.

Beispiel: Zinssatz 2,25%, Kapital am 31. Dezember des Vorjahres: 1000 €:
Veränderungen des Kontostandes

Datum	Betrag	Datum	Betrag	Datum	Betrag
1.2.	2000	6.5.	1110,45	17.8.	123,56
3.5.	857,23	1.6.	2110,45	1.9.	2000,56

Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* errechnet das Programm 36,03 € als Jahreszinsen.

7. Geometrie - Planimetrie

„Eine Sprache, die allgemeinverständlicher und einfacher, freier von Irrtümern und Verschwommenheiten... würdiger wäre, die unveränderlichen Beziehungen der natürlichen Dinge auszudrücken als die Mathematik, kann es nicht geben."
Joseph Fourier, 1822

Schwerpunkt des Programmteils *Geometrie* sind elementargeometrische Untersuchungen verschiedenster Gebilde in der Ebene, im Raum, die Berechnung und Darstellung von Dreiecken, N-Ecken, Kreisen, Polyedern, krummlinig begrenzten Körpern usw. sowie die analytische Geometrie in der Ebene und im dreidimensionalen Raum.

7.1 Analytische Geometrie der Ebene

In diesem Teilprogramm können Sie im Rahmen der analytischen Geometrie der Ebene Punkte, Geraden und Kreise berechnen und grafisch veranschaulichen. Das Programmfenster ist in drei Abschnitte untergeteilt: Rechts finden Sie den Bereich zur Auswahl und Festlegung der geometrischen Gebilde, in der Mitte den Darstellungs- und Berechnungsbereich und links Steuerelemente für die Darstellung und Auswertung.

Objektauswahl

Zur Untersuchung können Sie folgende geometrische Gebilde definieren:

- Punkt ... Koordinaten x,y eingeben
- Gerade (2 Punkte) ... zwei Punkte der Geraden festlegen
- Gerade (Punkt-Richtung) ... einen Punkt und Richtungsvektor festlegen
- Gerade (Punkt-Anstieg) ... einen Punkt und Anstieg m angeben
- Gerade (Y=M*X+N) ... Anstieg m und Verschiebung n auf der y-Achse angeben
- Gerade (Normalform) ... Ortsvektor eines Punktes und einen Normalenvektor angeben
- Dreieck ... drei Dreieckspunkte festlegen
- Kreis (Punkt-Radius) ... Mittelpunkt und Radius festlegen
- Kreis (3 Punkte) ... drei Punkte auf der Kreisperipherie festlegen
- Kreis (Koordinatenform) ... Parameter a, b und c der Gleichung $X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$ festlegen

Nach Eingabe der jeweiligen Stücke übernehmen Sie diese durch einen Klick auf den Schalter *Objekt übernehmen* in die Objektliste.

Berechnung der geometrischen Gebilde

Enthält die Objektliste definierte Punkte, Geraden bzw. Kreise, so können Sie

diese über den Schalter *Berechnung* rechnerisch auswerten.
Dazu ermittelt das Programm für jedes Objekt Eigenschaften, aber auch für je zwei Objekte Beziehungen zwischen diesen. Zum Beispiel wird jeder definierte Punkt mit einem eingegebenen Kreis betrachtet Folgendes berechnet:

- die Lage des Punktes P zum Kreis
- liegt P außerhalb, die Gleichungen der Tangenten von P an den Kreis
- die Berührungspunkte dieser Tangenten
- die Lage der Geraden g zum Kreis
- gegebenenfalls die Schnittpunkte bzw. den Berührungspunkt

Beispiel: Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt M(-1;2), einem Radius von 5 und dem Punkt P(6;1) ermittelt das Programm:

- P liegt außerhalb des Kreises
- die Tangenten von P an den Kreis sind 4x+3y=27 und 3x-4y=14
- die Tangenten berühren den Kreis in (3;5) und (2;-2)

Für eine weitere Gerade g mit dem Stützvektor (0;1) und dem Richtungsvektor (1;4) ergibt sich, dass sie den Kreis in den Punkten (-1;-3) und (1,353 ; 6,412) schneidet.
Die Besonderheit besteht darin, dass jede mögliche Kombination betrachtet wird. Haben Sie zum Beispiel fünf Objekte in der Objektliste definiert, so erhalten Sie Aussagen über jedes dieser Objekte und weiterhin über jedes mögliche Paar, d.h. zehn Beziehungen.

Eine Besonderheit ergibt sich bei der Untersuchung eines Punktes und eines Kreises. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, so können zwei Tangenten an den Kreis gelegt werden. Diese Tangenten werden berechnet.
Möchten Sie diese Tangenten aber auch in der grafischen Darstellung sehen, so müssen diese in der Objektliste vorhanden sein. Dies erreichen Sie, in dem Sie das Schaltfeld *Kreistangenten eintragen* markieren. Berechnet das Programm nun eine Kreistangente, so wird diese automatisch in die Objektliste übernommen.

Darstellung der geometrischen Gebilde

Wählen Sie den Schalter *Darstellung,* werden die ermittelten Werte innerhalb eines Koordinatensystems dargestellt. Das Programm zeichnet dabei alle Objekte der Liste, die per Mausklick markiert wurden. Damit können Sie einzelne Punkte, Geraden ... auswählen und eine bessere Übersicht erhalten.
Mittels der Schalter und können Sie die Größe des Darstellungsintervalls einstellen. Der mittlere Schalter stellt die Standardgröße wieder ein. Die Lage des Koordinatenursprungs können Sie an den vier Pfeilschaltern nach links, rechts, oben und unten verschieben.

Mittels eines linken Mausklicks und Aufziehen eines Bereichs können Sie das

Darstellungsintervall ebenso wählen. Beachten Sie bitte, dass dabei die Auflösung in Abszissen- und Ordinatenrichtung stets angepasst wird – Kreise sollen schließlich auch als Kreise zu sehen sein und nicht als Ellipsen.

Weitere Steuerelemente

Die Liste der Objekte können Sie wie oben beschrieben erweitern. Möchten Sie einen Punkt, eine Gerade oder einen Kreis aus der Liste entfernen, so markieren Sie das entsprechende Gebilde und klicken auf den Schalter *Löschen.*

Im Menü finden Sie die Punkte *Abbildung/Druck Maßstab 1:1* und *Abbildung/Druck Maßstab 1:2*. Damit können Sie die Darstellung maßstabsgerecht ausdrucken.

7.2 Dynamische Konstruktionen

In diesem Programm können Sie geometrische Konstruktionen in der Ebene erstellen und anschließend durch einfaches Verschieben von Punkten mit der Maus verändern.
Nach dem Start dieses Programms erscheint die Zeichenfläche, welche optional mit einem Hilfsraster überzogen ist. Eine Konstruktion können Sie auf zwei verschiedene Arten erstellen: Entweder tragen Sie den jeweiligen Konstruktionsschritt auf der rechten Fensterseite ein oder Sie wählen die Schalter der Schalterleiste *Konstruktionselemente.*

Konstruktion mithilfe der Aktionsschalter

Insgesamt finden Sie folgende Möglichkeiten:

Zeichenwerkzeuge Schalter	Wirkung und Nutzung
Löschen	Löschen der Konstruktionsliste
Gitternetz	Zu- und Abschalten eines Gitternetzes
Millimeternetz	verfeinertes Gitternetz zu- und abschalten
Koordinatenachsen	Zu- und Abschalten der Koordinaten
Standardgröße	Einstellen der Standard-Darstellungsgröße
Vergrößern	Darstellung vergrößern
Verkleinern	Darstellung verkleinern
Befehl aufheben	Aufheben des mit einem der nachfolgenden Schalter aufgerufenen Konstruktionsschrittes
Punkt	Darstellung eines Punktes; Zeichenfläche anklicken
Gerade	Darstellung einer Geraden; Startpunkt links anklicken, Maus zum Zielpunkt bewegen, zweiten Punkt anklicken
Strahl	Darstellung eines Strahls, einer Halbgeraden; Startpunkt links

	anklicken, Maus zum Zielpunkt bewegen, zweiten Punkt anklicken
Strecke	Darstellung einer Strecke; Startpunkt links anklicken, Maus zum Endpunkt bewegen, zweiten Punkt anklicken
Vektor	Darstellung eines Vektors, eines Verschiebungspfeils; Startpunkt links anklicken, Maus zum Zielpunkt bewegen, zweiten Punkt anklicken
Winkel antragen	Antragen eines Winkels durch Festlegung eines Punktes auf dem zweiten Schenkel; einen Punkt auf dem ersten Schenkel und Scheitelpunkt anklicken; zuvor evtl. neuen Winkel auf der rechten Fensterseite eintragen und mit dem Schalter OK bestätigen bzw. gemessenen Winkel verwenden
Punkt auf Strecke	Festlegen eines Punktes der zu einer Strecke gehört; Startpunkt der Strecke anklicken, Endpunkt anklicken; der neue Punkt wird im Teilverhältnis 0,5 positioniert und kann durch Klicken und Mausbewegung anschließend verschoben werden
Mittelpunkt	Konstruktion des Mittelpunktes zweier Punkte; 1.Punkt links anklicken und Maus zum zweiten Punkt bewegen, nach erneutem Mausklick wird der Mittelpunkt gekennzeichnet, die Strecke zwischen den beiden Punkten nicht
Mittelsenkrechte	Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke; Anfangspunkt der Strecke links anklicken und Maus zum Endpunkt bewegen, nach erneutem Mausklick wird die Mittelsenkrechte gezeichnet, die Strecke selbst nicht
Senkrechte	Konstruktion der Senkrechten zu einer Strecke/Geraden durch einen Punkt; Anfangspunkt der Strecke links anklicken und Maus zum Endpunkt bewegen, dort erneut linker Mausklick, nach dem Loslassen der Taste ist die Senkrechte zu positionieren und mit einem linken Mausklick zu bestätigen
Parallele	Durchführung einer Parallelverschiebung einer Geraden; einen Punkt der Geraden links anklicken und die Maus längs der Geraden bewegen, nach zweiten Mausklick kann eine parallele Gerade frei über die Zeichenfläche bewegt werden. Mit einem erneuten linken Mausklick wird die Lage der Parallelen festgelegt
Winkelhalbierende	Konstruktion der Winkelhalbierenden eines Winkels; der Reihe nach Punkt auf erstem Schenkel, Scheitelpunkt und Punkt auf dem zweiten Schenkel mit der Maus anklicken
Dreieck	Zeichnen eines Dreiecks; ersten Punkt links anklicken und Maus zum 2.Punkt bewegen, nach Mausklick zum dritten Punkt bewegen und links markieren
Kreis	Darstellung eines Kreises; Radius wird durch Mausbewegung bestimmt, Mittelpunkt anklicken und Kreis mit Maus aufziehen, bei gewünschtem Radius erneut klicken, dort wird ein weiterer Punkt gesetzt, mit dem später des Radius des Kreises auch verändert werden kann
Punkt auf Kreis	Festlegen eines Punktes der zu einem Kreis gehört; Mittelpunkt des Kreises anklicken, einen Peripheriepunkt anklicken; der neue Punkt wird mit einem Winkel von 45° zur positiven Abszissenachse positioniert und kann durch Klicken und Mausbewegung anschließend verschoben werden
Kreisbogen	Darstellung eines Kreisbogens; Radius wird durch

	Mausbewegung bestimmt, Mittelpunkt anklicken und Maus zum Bogenanfangspunkt bewegen, linke Taste klicken und Maus zum Bogenende bewegen, Bogenende mit linkem Mausklick bestätigen
Kreis 3 Punkte	Zeichnen eines Kreises, welcher durch 3 Punkte bestimmt wird; ersten Punkt links anklicken und Maus zum 2.Punkt bewegen, nach linkem Mausklick zum dritten Punkt bewegen und links markieren
Rechteck	Zeichnen eines Rechtecks; Linken oberen Punkt anklicken und Rechteck aufziehen, abschließend Klicken; alle vier Rechteckpunkte können später verschoben werden
Ellipse	Zeichnen einer Ellipse; Halbachsenendpunkt anklicken und Ellipse aufziehen, zum Abschluss zweiten Halbachsenendpunkt anklicken
Bézier-Kurve	Zeichnen einer Bézier-Kurve; die zwei Endpunkte der Kurve und die zwei Punkte zur Steuerung anklicken
Kreis mit Radius	Darstellung eines Kreises; Mittelpunkt anklicken, der Radius wird aus der Eingabezeile Aktuelle Länge entnommen
Bogen mit Radius	Darstellung eines Kreisbogens; Mittelpunkt des Kreises anklicken; Maus zum Bogenmittelpunkt bewegen und links anklicken; der Radius wird aus der Eingabezeile Aktuelle Länge entnommen
Punktspiegelung	Punktspiegelung eines Punktes; zu spiegelnden Punkt anklicken; anschließend Spiegelpunkt anklicken
Geradenspiegelung	Geradenspiegelung eines Punktes; zu spiegelnden Punkt anklicken; anschließend ersten Punkt und anschließend zweiten Punkt der Spiegelgeraden anklicken
Verschiebung	Verschiebung eines Punktes; Punkt anklicken und dann Anfangs- und Endpunkt des Verschiebungspunktes anklicken
Drehung	Drehung eines Punktes; zu drehenden Punkt und Drehzentrum anklicken; zuvor evtl. neuen Winkel auf der rechten Fensterseite eintragen und mit dem Schalter OK bestätigen bzw. gemessenen Winkel verwenden
Parallelogrammpunkt	Bestimmung des vierten Punktes eines Parallelogramms; der Reihe nach den ersten, zweiten und dritten Punkt anklicken
Schnittpunkt festlegen	Erklärung siehe weiter unten
Strecke messen	Bestimmung der Entfernung zweier Punkte; Startpunkt links anklicken und Maus zum Zielpunkt bewegen, abschließend linker Mausklick; das Ergebnis wird unter Aktuelle Länge eingetragen
Winkel messen	Nach dem Anklicken eines Punktes auf dem 1.Schenkel, dem Scheitelpunkt und eines Punktes auf dem 2.Schenkel ermittelt das Programm die Größe des Winkels und trägt diesen in die Liste Messergebnisse ein

Führen Sie einen Konstruktionsschritt mit diesen Schaltern aus, so trägt das Programm die Zeilen automatisch in die Konstruktionsliste ein.
Müssten Sie für den Konstruktionsbefehl einen vorhandenen Punkt anklicken und klicken auf eine "leere" Stelle der Zeichenfläche, so fügt dieses Programm diesen neuen Punkt automatisch ein.

Schnittpunkt festlegen

Einer der wichtigsten Konstruktionsschritte ist das Festlegen von Schnittpunkten. Zum einen können Sie dies über die *Direkte Befehlseingabe* realisieren (siehe weiter unten), zum anderen über den Schalter : Klicken Sie diesen an und bewegen Sie die Maus über die Zeichnung. Klicken Sie nun auf einen Schnittpunkt zweier Geraden, von Gerade und Kreis oder zweier Kreise, so übernimmt das Programm ihn automatisch.

Beachten Sie aber, dass Sie den Schnittpunkt genau anklicken müssen. Aus diesem Grund empfiehlt es sich die unten beschriebene Fangfunktion zu aktivieren und erst dann zu klicken, wenn eines der beiden geometrischen Gebilde, die sich schneiden sollen, vom Programm "dicker" hervorgehoben wird. Auf diese Weise ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schnittpunkt gefunden wird, deutlich höher.

Direkte Befehlseingabe

Möchten Sie die neue Konstruktion über die Eingabe der Befehle erzeugen, so gehen Sie wie folgt vor:
In der aufklappbaren Liste der *neuen Konstruktionsschritte* wählen Sie den gewünschten Befehl aus. Als mögliche Konstruktionsschritte sind vorgesehen:

Punkt mit zwei Koordinaten	Ein Punkt, dessen Koordinaten eingegeben werden, wird gezeichnet
Drehung eines Punktes um einen Punkt	Ein Punkt wird um ein Drehzentrum um einen bestimmten Winkel gedreht
Farbe und Stiftstärke setzen	Die Zeichenfarbe, die Linienart und –stärke festlegen
Gerade durch Punkt senkrecht zu Gerade	In einem Punkt wird eine Gerade errichtet, die senkrecht zu einer 2.Geraden ist
Gerade durch zwei Punkte	Die Gerade durch zwei Punkte wird gezeichnet
Geradenspiegelung eines Punktes	Ein Punkt wird an einer Geraden gespiegelt
Kreis durch 3 Punkte	Ein Kreis wird so gezeichnet, dass die 3 Punkte auf dessen Peripherie liegen
Kreis mit Mittelpunkt und Peripheriepunkt	Ein Kreis wird so um einen Punkt gezeichnet, dass er durch den 2.Punkt verläuft
Kreis mit Mittelpunkt und Radius	Ein Kreis wird mit vorgegebenen Radius um den Punkt gezeichnet
Kreisbogen durch Punkt	Durch einen Punkt wird ein Kreisbogen gezeichnet. Dabei kann der Winkel des Bogens angegeben werden
Lot durch Punkt auf Gerade	Von einem Punkt aus wird auf eine Gerade das Lot gefällt
Mittelpunkt zweier Punkte	Der Mittelpunkt einer Strecke wird berechnet
Mittelsenkrechte zu zwei	Im Mittelpunkt einer Strecke wird die Senkrechte errichtet

Punkten	
Parallele zu Geraden durch Punkt	Durch einen Punkt wird eine Gerade gezeichnet, die parallel zu einer anderen Geraden ist
Parallelogrammpunkt	Zu drei gegebenen Punkten wird ein vierter Punkt bestimmt, der die 3 Punkte zu einem Parallelogramm ergänzt
Punkt auf Kreis	Festlegen eines Punktes der zu einem Kreis gehört
Punkt auf Strecke	Festlegen eines Punktes der zu einer Strecke gehört
Punktspiegelung eines Punktes	Ein Punkt wird an einem anderen Punkt gespiegelt
Schnittpunkt zweier Geraden/Strecken	Der Schnittpunkt zweier Geraden bzw. Strecken wird ermittelt
Schnittpunkte Gerade-Kreis	Die evtl. vorhandenen Schnittpunkte zwischen einer Geraden und einem Kreis werden ermittelt
Schnittpunkte Kreis-Kreis	Die evtl. vorhandenen Schnittpunkte zweier Kreise werden ermittelt
Schnittpunkte Strahl-Kreis	Die auf dem Strahl liegenden Schnittpunkte zwischen einem Strahl und einem Kreis werden ermittelt
Schnittpunkte-Strecke-Kreis	Die evtl. vorhandenen Schnittpunkte zwischen einer Strecke und einem Kreis werden ermittelt
Strahl von einem Punkt zu einem Punkt	Die Halbgerade von einem Punkt in Richtung eines anderen wird gezeichnet
Strecke zwischen zwei Punkten	Zwei Punkte werden miteinander verbunden
Vektor zeichnen	Zwei Punkt werden durch einen Verschiebungspfeil miteinander verbunden
Verschiebung eines Punktes	Einen Punkt mit einem ausgewählten Verschiebungsvektor verschieben
Winkel messen	Bestimmung der Größe eines Winkels
Winkelhalbierende für zwei Geraden	Die Winkelhalbierende eines Winkels wird gezeichnet. Dabei wird der Winkel durch Angabe von drei Punkten festgelegt
Kommentar	Einfügen eines Kommentars zur Beschreibung der Konstruktionsschritte

Je nach gewähltem Konstruktionsschritt müssen neben der Bezeichnung auch Parameter wie Punkte, Geraden, Strecken oder Kreise eingegeben werden. Zum Beispiel sind bei *Punkt mit zwei Koordinaten* die x- und y-Koordinate des Punkte festzulegen. Dabei ist zu beachten, dass das Programm sowohl in Abszissen- als auch in Ordinatenrichtung ein Standardintervall von -7 bis 7 zeichnet.

Einen Konstruktionsschritt übernehmen Sie in die Liste mit dem Schalter *Hinzufügen.* Markieren Sie einen schon vorhandenen Befehl in der Liste und wählen den Schalter *Einfügen,* so wird der neue Konstruktionsschritt vor (!) dem markierten eingefügt.

Die Konstruktion mit diesem Programm erfordert etwas Übung. Insbesondere das genaue Anklicken von Punkten bedarf eines sicheren Umgangs mit der Maus. Nach jeder Änderung der Konstruktionsliste wird die Zeichnung sofort neu erstellt. Dabei zeichnet das Programm alle Konstruktionsbefehle, bei denen links neben der Liste ein "Häkchen" zu sehen ist. Entfernen Sie eines der Häkchen

(Mausklick), wird dieser Konstruktionsschritt zwar berechnet, aber nicht gezeichnet!

Löschen einer Zeichenaktion

Sollte eine Zeichenaktion nicht zufriedenstellen, können Sie diese nach Markieren in der Liste über den Schalter *Löschen* auch wieder aus der Liste entfernen.

Beachten Sie dabei unbedingt!
Entfernen Sie ein Zeichenobjekt mit dem in nachfolgenden Zeichenbefehlen Aktionen durchgeführt werden, so werden diese ebenfalls alle(!) entfernt. Löschen Sie zum Beispiel den ersten Zeichenschritt, so kann es durchaus geschehen, dass alle weiteren Befehle entfernt werden!

Gemessene Werte weiter verwenden

Über die Schalter und können Sie die Länge einer Strecke bzw. die Größe eines Winkels messen. Über die reinen Messwerte hinaus, sind diese Größen auch für die weitere Konstruktionen von großer Bedeutung.
Stehen rechts neben den Eingabezeilen *Aktuelle Länge* bzw. *Aktueller Winkel* Einträge der Form *A*|*B* bzw. *D*|*E*|*F,* so sind die aktuelle Länge und der aktuelle Winkel nicht statisch feste Werte, sondern dynamisch von der Lage der Punkte abhängig.

Messen Sie zum Beispiel einen Winkel *D*|*E*|*F*, der vielleicht 35° groß ist, und drehen anschließend mittels des Schalters einen Punkt X um das Drehzentrum Y, so wird X um genau 35° gedreht. Verändern Sie aber zu einem späteren Zeitpunkt die Lage der Winkelpunkte D, E oder F, verändert sich die Größe des Winkels und somit auch der Drehwinkel für den Bildpunkt von X.

Objekte umbenennen

Während der Konstruktion erhielten die Objekte die von Ihnen zugewiesenen Namen oder auch automatische Bezeichnungen.
Möchten Sie diese nachträglich ändern, dann markieren Sie das Objekt in der Konstruktionsliste. Klicken Sie nun mit der rechten Maustaste auf den Eintrag, können Sie einen veränderten Namen eintragen.

Beachten Sie bitte, dass Sie nur neue Bezeichnungen verwenden können, die noch nicht in der Konstruktion verwendet wurden.

Dynamische Veränderung

Die Besonderheit dieses Teilprogramms besteht nun darin, dass Sie jeden gelb gezeichneten Punkt – d.h. jeden Ausgangspunkt, der nicht berechnet wird – per Maus verschieben können. Klicken Sie einen solchen Punkt an, halten die

Maustaste gedrückt und bewegen die Maus, so wird der Punkt verschoben und die vollständige Konstruktion neu gezeichnet.
Im oben gezeigten Beispiel können Sie dann sehr schön sehen, wie auch bei geänderter Lage der beiden Kreise die Tangenten gezeichnet werden.
Fertige Konstruktionen können Sie dauerhaft auf der Festplatte speichern und natürlich auch wieder laden.

Simulation der Bewegung der Ausgangspunkte

Auch in diesem Teilprogramm können Sie den Computer wieder veranlassen, eine Simulation durchzuführen. Dabei ist es möglich, die von Ihnen in der Konstruktion festgelegten Ausgangspunkte entweder waagerecht oder senkrecht kontinuierlich zu verschieben.
Wählen Sie dazu die *Punktliste* und markieren Sie die *Simulationsrichtung*.
Der Punkt, dessen Eintrag Sie in der Tabelle ausgewählt haben, wird während der Simulation verschoben.

Ein Klick auf den Schalter *Start* startet die Bewegung, ein erneuter Klick stoppt den Vorgang. Die Geschwindigkeit der Darstellung können Sie ebenfalls einstellen.

Beachten Sie bitte: Haben Sie eine anspruchsvolle Konstruktion ausgewählt, muss Ihr Prozessor bei dieser Simulation eine Höchstleistung vollbringen. Auf langsameren Rechnern kann es dadurch zu einer etwas ruckartigen Simulation kommen. Darüber hinaus kann eine Verfälschung der Konstruktion auftreten, wenn der sich bewegende Punkt über einen anderen der Ausgangspunkte hinwegläuft.

Standardkonstruktionen

Weitere Beispiele finden Sie sind in der aufklappbaren Liste in der oberen Schalterleiste. Dort sind vordefiniert:

- die Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks
- die Konstruktion des Schwerpunktes eines Dreiecks
- die Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks
- die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks
- die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks
- die Konstruktion eines regelmäßigen Zwölfecks
- die Konstruktion der stetigen Teilung einer Strecke (Goldener Schnitt)
- die Konstruktion des Mittendreiecks
- Konstruktion von Schnittpunkten zwischen einem Kreis und mehreren Geraden
- die Konstruktion der äußeren Tangenten von zwei Kreisen
- die Konstruktion der Ankreise eines Dreiecks
- die Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks
- die Konstruktion der Gergonne-Geraden eines Dreiecks
- die Konstruktion des Lémoine-Punktes eines Dreiecks

- die Konstruktion des Lémoine-Kreises eines Dreiecks
- die Konstruktion der Pascal-Geraden eines Dreiecks
- die Konstruktion des geometrischen Mittels
- die Konstruktion des Parry-Kreises am Dreieck
- Konstruktion eines Dreiecks aus den Seiten a,b,c
- Konstruktion eines Dreiecks aus seinem Höhendreieck
- die Konstruktion des Symmetralen-Dreiecks
- die Konstruktion des Fuhrmann-Dreiecks
- die Konstruktion des Miquel-Punktes eines Dreiecks
- die Konstruktion des Brocard-Winkels

Schrittweise Konstruktion

Durch Markierung des Feldes *Einzelschritt* können Sie die Konstruktion Schritt für Schritt anzeigen lassen. Dazu klicken Sie einfach auf einen der Schalter ⇦ bzw. ⇨. Der zweite Schalter geht einen Konstruktionsschritt weiter, der erste Schalter einen zurück.

Messung der Ergebnisse

Wählen Sie den Marker *Messergebnisse* aus, so erscheint auf der rechten Seite eine Liste, in der das Programm die Koordinaten aller Punkte, die Längen aller Strecken und für jeden Kreis den Mittelpunkt und den Radius anzeigt. Gegebenenfalls werden auch Winkel und andere Werte ausgewiesen.

Hinweis: Während der Verschiebung einzelner Punkte mithilfe der Maus wird die Liste der Messergebnisse ausgeblendet.

Farb- und Linieneinstellung

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit Ihrer Darstellung können Sie auf der rechten Fensterseite zwischen 16 Farben (Mausklick) und drei verschiedenen Linienarten wählen. Zum Beispiel bietet es sich an, Hilfslinien als Punkt-Punkt-Linien zu zeichnen oder die Kanten des fertigen Gebildes mit einer stärkeren, andersfarbigen Linie hervorzuheben. Für durchgehend gezeichnete Linien können Sie an dem Rollbalken die Linienstärke von 1 bis 5 Pixel Breite einstellen.

Kommentar

Bei eingeschalteter Option *Kommentar* erhalten Sie am unteren Bildrand eine kurze Erklärung der nächsten Zeichenaktion. Außerdem ist dann auch das Ergebnis der *Fangfunktion* sichtbar.

Fangfunktion

Ist dieser Punkt gewählt, prüft das Programm bei einer Bewegung der Maus über die Zeichenfläche, ob sich die Spitze des Mauspfeils auf einem gezeichneten

Objekt befindet.
Ist dies der Fall, wird diese Gerade, dieser Kreis usw. etwas stärker gezeichnet und gleichzeitig in der Leiste im unteren Teil des Fensters der Name dieses Objekts angezeigt. Damit können Sie auch nachträglich (ohne Durchsuchen der Konstruktionsliste) herausfinden, um welches Objekt es sich handelt.

7.3 Geometrische Grundoperationen

Unter *Ebene Geometrie* finden Sie Teilprogramme, mit denen Sie Grundbewegungen in der Ebene untersuchen können. Dazu gehören:

- Verschiebung
- Punktspiegelung
- Geradenspiegelung
- Schrägspiegelung
- Gleitspiegelung
- Drehung und zentrische Streckung
- Scherung
- Parallelstreckung
- Umkehrung einer Drehstreckung

Bei der Mehrzahl der Aufgabenstellungen legen Sie zuerst durch einen einfachen linken Mausklick die Lage von drei bis acht Punkten fest. Das Programm stellt Ihnen dann sofort das Gewünschte dar.
Die Besonderheit besteht nun darin, dass Sie die festgelegten Punkte, aber z.B. auch die Position des Streckungszentrums, den Drehpunkt oder die Lage der Spiegelachse durch Ziehen mit der Maus beliebig verändern können und sofort die neue Darstellung erhalten.

Tabelle der Punktkoordinaten

In diesen Teilprogrammen finden Sie links ein Markierungsfeld *Tabelle anzeigen.* Wählen Sie dieses Feld aus, zeigt das Programm die Tabelle der Punktkoordinaten an.

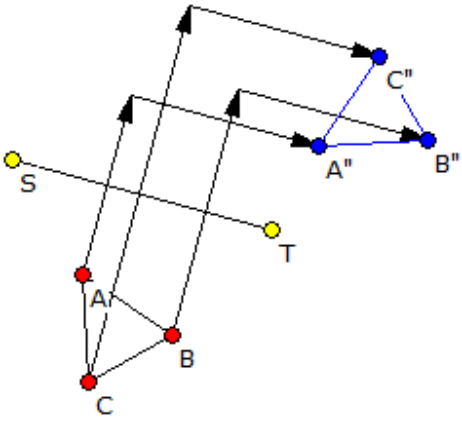
Einige der Tabellenfelder sind farbig unterlegt, die Schrift ist hervorgehoben. In diesen Feldern können Sie Werte angeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld und tragen Sie den neuen Wert ein. Nach Bestätigung der Eingabe mit der *TAB*-Taste oder den Cursortasten übernimmt das Programm den neuen Wert und erstellt die Darstellung neu.

Punktspiegelung

In diesem Programm können Sie bis zu acht Punkte an einem Punkt S spiegeln. Dieser Punkt ist mit der Maus verschiebbar.

Spiegelt man ein geometrisches Gebilde nacheinander an zwei Punkten, so ergibt sich ein Bild, das auch mit einer Bewegung hätte erreicht werden können: eine Verschiebung. Markieren Sie die Felder *2. Spiegelung* und *Verschiebung zeigen*,

trägt das Programm einen zweiten Spiegelpunkt T und die entsprechenden Verschiebungspfeile ein.



Geradenspiegelung

In diesem Programm können Sie bis zu acht Punkte an einer Geraden spiegeln. Diese Gerade wird durch zwei Punkte S und T beschrieben, welche Sie mit der Maus verschieben können. Die acht Punkte legen Sie zuerst durch einen einfachen linken Mausklick fest. Das Programm stellt Ihnen dann sofort das Gewünschte dar.

Gleitspiegelung

Unter einer Gleitspiegelung oder Schubspiegelung versteht man eine spezielle Kongruenzabbildung. Dabei handelt es sich in der ebenen Geometrie um eine Hintereinanderausführung einer Parallelverschiebung und einer Geradenspiegelung, bei der die Verschiebung parallel zur Geraden geschieht.

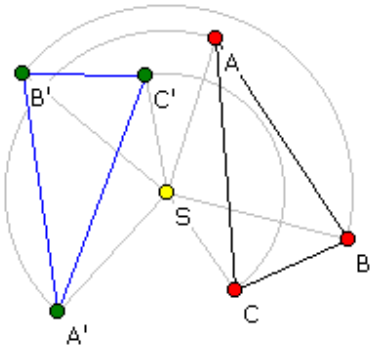
In diesem Teilprogramm werden Gleitspiegelungen angezeigt.
Dabei können bis zu acht Punkte transformiert werden. Die Spiegelgerade wird durch zwei Punkte S und T beschrieben, welche Sie mit der Maus verschieben können.
Die acht Punkte legen Sie zuerst durch einen einfachen linken Mausklick fest. Das Programm stellt Ihnen dann sofort das Gewünschte dar. Die Größe der Parallelverschiebung können Sie am Rollbalken einstellen.

Schrägspiegelung

In diesem Programm können Sie bis zu acht Punkte an einer Gerade schräg spiegeln. Diese Gerade wird durch zwei Punkte S und T beschrieben, welche Sie mit der Maus verschieben können. Die Richtung der Schrägspiegelung wird durch einen Vektor XY gekennzeichnet. Dessen Punkte X und Y können Sie ebenfalls mit der Maus verschieben.
Die acht Punkte legen Sie zuerst durch einen einfachen linken Mausklick fest. Das Programm stellt Ihnen dann sofort das Gewünschte dar. Entfernen können Sie einen Punkt mit einem rechten Mausklick.

Besonders interessant ist die Schrägspiegelung eines Kreises. Dessen Spiegelbild ist im Allgemeinen einen Ellipse. Möchten Sie dies testen, so markieren Sie den Punkt *Kreis verwenden*. In diesem Fall wird der Punkt A als Mittelpunkt des Kreises interpretiert, Punkt B liegt auf der Peripherie. Die Lage des Kreises und dessen Größe stellen Sie durch Bewegung von A und B ein.

Drehung und zentrische Streckung



Hier legen Sie durch einen einfachen linken Mausklick die Lage von drei bis acht Punkten fest. Das Programm stellt daraufhin sofort das Gewünschte dar. Die Besonderheit besteht nun darin, dass Sie die festgelegten Punkte, aber z.B. auch das Drehzentrum S durch Ziehen mit der Maus beliebig verändern können und sofort die neue Darstellung erhalten.

Wählen können Sie zwischen einer reinen *Drehung*, einer *zentrischen Streckung* und einer Kombination beider einer *Drehstreckung*.
Den Drehwinkel *Drehung* können Sie an dem Rollbalken von -360° bis 360° verändern.
Im Teilprogramm *Drehung* bewirkt die Simulation eine kontinuierliche Erhöhung des Drehwinkels.

Für die zentrische Streckung wird der Punkt S zum Streckungszentrum. An dem Rollbalken stellen Sie weiterhin den Streckungsfaktor ein.
Markieren Sie das Feld *Drehstreckung*, so wird zusätzlich zur Drehung noch eine Streckung ausgeführt, als Nacheinanderausführung, also eine Drehstreckung.

Verschiebung

In diesem Teilprogramm legen Sie zuerst durch einen einfachen linken Mausklick die Lage von einem bis acht Punkten fest. Das Programm stellt die Punkte sofort dar.
Die Besonderheit besteht nun darin, dass Sie die festgelegten Punkte durch Ziehen mit der Maus beliebig verändern können und sofort die neue Darstellung erhalten.

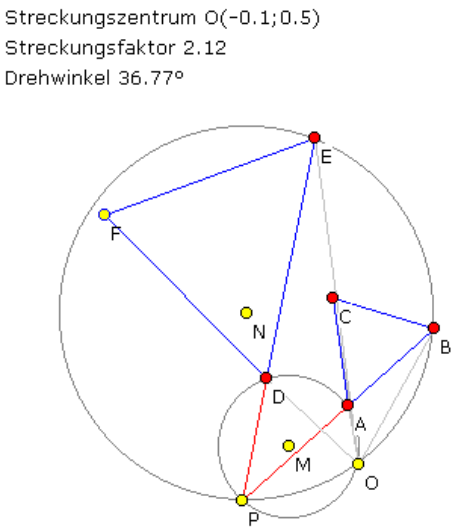
Die Stärke der waagerechten bzw. senkrechten Verschiebung stellen Sie an zwei Rollbalken ein.
Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, wird die waagerechte Verschiebung kontinuierlich verändert, markieren Sie *senkrechte Verschiebung*, dann diese.

Scherung

Legen Sie zuerst per linkem Mausklick die Lage von einem bis acht Punkten fest. Das Programm stellt daraufhin sofort die Grafik dar.
Bei einer Scherung müssen Sie außer dem *Scherungswinkel* am Rollbalken auch eine Scherungsrichtung einstellen. Dies machen Sie, indem Sie die Lage der beiden Punkte S und T verschieben. Während der Simulation wird der Scherungswinkel kontinuierlich verändert.

Parallelstreckung

Zuerst legen Sie per linkem Mausklick die Lage von einem bis acht Punkten fest.



Eine besondere Bewegung ist die Parallelstreckung. Dabei wird das Polygon in Bezug auf die Lage einer Ursprungsgeraden längs einer Richtung gestreckt oder gestaucht.
Die Punkte des Polygons legen Sie wie oben beschrieben fest.
Der Streckungsfaktor ist an dem Rollbalken einstellbar. Die Gerade, bezüglich der die Streckung erfolgt, wird durch die Punkte S und T gekennzeichnet, die Richtung, in der die Streckung erfolgt, durch die Gerade XY. Die vier Punkte S, T, X und Y können Sie per Mausklick wieder verschieben.

Anmerkung: Stehen die beiden Geraden ST und XY senkrecht zueinander und stellen Sie einen Streckungsfaktor -1 ein, erhalten Sie als Spezialfall eine Geradenspiegelung.

Umkehrung einer Drehstreckung

Eine der wichtigsten affinen Abbildungen in der Ebene ist die Drehstreckung, die eine Kombination aus einer zentrischen Streckung und einer Drehung darstellt. Die Bildkoordinaten sind dabei einfach durch Anwendung der Abbildungsmatrix auf die Ausgangspunkte zu gewinnen. Dabei ist k der Streckungsfaktor und f der Drehwinkel.
Umgekehrt können auch die Parameter der Drehstreckung aus der Lage zweier Ur- und Bildpunkte ermittelt werden.

Die Drehstreckung ist durch die Angabe zweier Urbildpunkte und deren Abbildung eindeutig bestimmt. Gegeben seien zwei Punkte A und B und deren Bilder A' und B'. Das Drehstreckungszentrum O kann daraus wie folgt konstruktiv ermittelt werden:

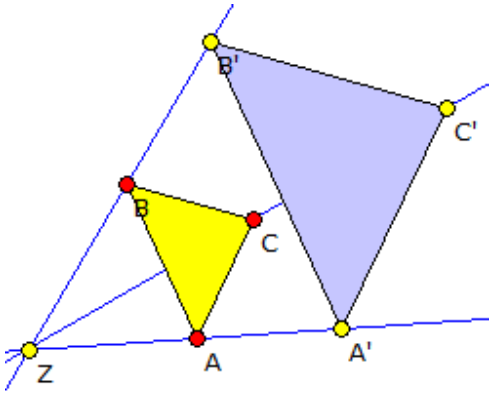
1. Punkt P ist der Schnittpunkt der Geraden AB und A'B'.
2. Von den Dreiecken PAA' und PBB' werden die Umkreise konstruiert.
3. Der von P verschiedene Schnittpunkt der beiden Umkreise ist dann das Drehstreckungszentrum O.
4. Der Streckungsfaktor ergibt sich aus dem Verhältnis A'B' / AB; der Winkel aus dem Winkel ∠ AOA'.

Diese Konstruktion wird im Teilprogramm *Umkehrung Drehstreckung* simuliert. Die Lage der Punkte können Sie wieder durch Verschieben mit der Maus oder durch Eintragen in die Wertetabelle verändern.

7.4 Ähnliche Figuren

Geometrische Figuren sind ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung (evtl. eine Drehstreckung) ineinander überführt werden können.

In diesem Teilprogramm können Sie durch linken Mausklick eine Figur mit maximal acht Eckpunkten festgelegt werden. Die Lage der Punkte A bis evtl. H können mit der Maus verschoben werden.
Am Rollbalken *Faktor* wird eingestellt, mit welchem Maßstab eine zweite ähnliche Figur gezeichnet werden soll. Deren Lage können Sie durch Verschieben das Punktes A' ändern.



Das Programm ermittelt in jedem Fall (Faktor verschieden 1) die zentrische Streckung, welche die ähnlichen Figuren aufeinander abbildet. Angezeigt wird die Streckung nur, wenn Sie das Feld *Ähnlichkeitszentrum* auswählen.
Mit *Tabelle anzeigen* können Sie die Koordinaten auch direkt eingeben bzw. ablesen.

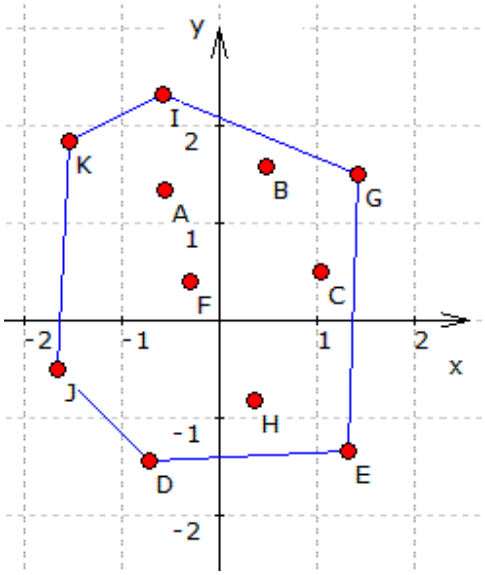
7.5 Winkel und Winkelmaße

Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei in der Ebene liegenden Strahlen, Halbgeraden, mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird, d.h. ein geordnetes Paar zweier von einem Punkt (Scheitel) ausgehender Halbgeraden (Schenkel). Die Größe des Winkels ist der Richtungsunterschied zwischen den beiden Schenkeln.

Für die Angabe der Größe eines Winkels werden verschiedenen Winkelmaße verwendet.
Das klassische Maß ist das Gradmaß, bei dem der Vollwinkel in 360 Grad eingeteilt wird. Vor allem in der Analysis und höheren Geometrie werden Winkel im Bogenmaß angegeben, d.h. durch die Bogenlänge des Winkels in einem Einheitskreis. 360° Gradmaß entsprechen dabei einem Bogenmaß von 2π.
Ein drittes Winkelmaß, dass vorwiegend in der Nautik und Geografie genutzt wird, ist das Neugrad gon. Hier wird der Vollwinkel in 400 gleiche Abschnitte unterteilt.

In diesem kleinen Teilprogramm können Sie an einem Modell eines Winkelmessers zwei Winkel α und β über Rollbalken einstellen.
Das Programm ermittelt die Winkelmaße im Grad- und Bogenmaß.
An den Auswahlfeldern können Sie außerdem einstellen, in welchem Winkelmaß die Einteilung des Winkelmessers erfolgt.

7.6 Konvexe Hülle



Unter der konvexen Hülle einer Menge von Punkten P versteht man den mengentheoretischen Durchschnitt aller konvexen Mengen, welche die Punkte P enthalten.
Damit ist die konvexe Hülle von n Punkten das kleinstmögliche Polygon mit m ≤ n Kanten, in dem sich alle Punkte befinden, inklusive der Seitenkanten.

Die konvexe Hülle von drei Punkten ist stets das von diesen Punkten gebildete Dreieck.

Im Teilprogramm *Konvexe Hülle* können Sie bis zu 15 Punkte per Mausklick festlegen. Das Programm zeichnet sofort die zugehörige konvexe Hülle.

Verschieben Sie nun einen der Punkte mit der Maus, wird stets die konvexe Hülle erneuert. Markieren Sie das Feld *transparent*, wird das entstehende Polygon durchsichtig gezeichnet, d.h., das Koordinatensystem wird auch in der konvexen Hülle sichtbar.
Das Koordinatensystem und das Gitter können Sie in der Aktionsschalterleiste zu- und abschalten.

7.7 Teilverhältnis

Ein wichtiger Begriff der Vektorgeometrie ist das Teilverhältnis. Ist eine Strecke AB und ein weiterer Punkt T auf der Geraden durch AB gegeben, so teilt dieser Punkt die Strecke AB entweder innen oder außen in einem bestimmten Verhältnis.

Dieses Teilverhältnis ist definiert als $\lambda = AT / TB$. Liegt T zwischen A und B, so ist λ positiv. Liegt T rechts von B, so ist λ negativ und kleiner -1, links von A negativ und größer als -1.
Markieren Sie das Feld *Teilverhältnisse*, so werden einige Punkte angezeigt, die spezielle Teilverhältnisse besitzen.

In diesem Teilprogramm können Sie die Lage der Streckenpunkte A und B sowie des Teilungspunktes T durch Klicken und Bewegen der Maus verändern. Das Programm stellt das Verhältnis sofort dar.

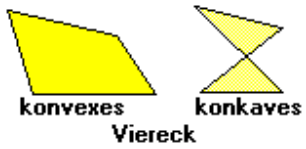
7.8 Affine Abbildung, Abbildung von Polygonen

Berechnung von Polygonen

Das Programm ermöglicht Ihnen unter diesem sehr komplexen Teilprogramm die Berechnungen an Polygonen (Dreieck bis 10-Eck), d.h., nach der Eingabe der kartesischen Koordinaten der Eckpunkte

- die Fläche, den Umfang sowie
- die Koordinaten des Ecken- bzw. Flächenschwerpunktes

zu berechnen sowie die affine Abbildung der Polygone in der Ebene, rechnerisch wie auch grafisch.
Zur Berechnung eines N-Ecks tragen Sie in die Tabelle der linken Fensterseite die Koordinaten der Punkte A bis maximal J ein. Klicken Sie auf den Schalter *Berechnung*, wird das Fenster der grafischen Darstellung aus- und eine Liste der Berechnungsergebnisse eingeblendet.



Ist das Polygon konvex oder konkav, ist die Ermittlung des Flächenschwerpunktes möglich. Ist das N-Eck überschlagen, d.h. zwei Seiten kreuzen sich, ist die Ermittlung nicht möglich.

Beispiel: Für die Eckpunktkoordinaten (1;1), (2;3), (3;0), (2;0) und (0;0) entsteht ein konkaves Fünfeck mit den Werten

Flächeninhalt = -4	Umfang = 9,8126
Eckenschwerpunkt bei	(1,6 ; 0,8)
Flächenschwerpunkt bei	(1,75 ; 0,958)

Negativer Flächeninhalt bedeutet, dass die Reihenfolge der Punkte entgegen der mathematisch positiven Richtung eingegeben wurden – in Uhrzeigerrichtung.
Wählen Sie den Schalter *Darstellung*, stellt das Programm das N-Eck dar.

Affine Abbildungen in der Ebene

Unter einer affinen Abbildung versteht man jede Bewegung von Punkten, die folgende Kriterien erfüllen:

- Geraden bleiben Geraden
- Parallelität bleibt erhalten
- Teilverhältnisse bleiben erhalten

Zu diesen Abbildungen gehören die allgemein bekannten Abbildungen in der Ebene:

- Drehung, Punkt- und Geradenspiegelung, Streckung, Scherung, ...

In diesem Teilprogramm können Sie diese Bewegungen untersuchen. Dabei ist das Programmfenster in drei Bereiche eingeteilt: Rechts finden Sie die Möglichkeit zur Festlegung der Abbildung, in der Mitte die Darstellungsfläche bzw. einschaltbar die Berechnungsergebnisse und links Möglichkeiten zur Steuerung der Darstellung.

Festlegung der affinen Abbildungen

Sie können wählen zwischen:

- Verschiebung, Geradenspiegelung, Punktspiegelung, Streckung, Drehung, Drehstreckung, Scherung an der x-Achse, allgemeine affine Abbildung, allgemeine Scherung

Klicken Sie auf eine dieser Bewegungen in der *Bewegungsauswahl*-Liste, so müssen Sie die Parameter der Abbildung eintragen. Nach der Eingabe bestätigen Sie mit dem Schalter *Bewegung übernehmen,* wodurch selbige in die linke *Bewegungsliste* aufgenommen wird.
Festzulegen sind:

- Verschiebung … Die Einheiten der Verschiebung in x- und y-Richtung
- Geradenspiegelung … Zwei Endpunkte P und Q der Spiegelgeraden
- Punktspiegelung … Die Koordinaten des Spiegelpunktes S
- Streckung … Die Koordinaten des Streckungszentrums P und der Streckungsfaktor
- Drehung … Das Drehzentrum P und der Drehwinkel in Grad; Drehungen werden in mathematisch positiver Richtung, also entgegen der Uhrzeigerrichtung gezeichnet
- Drehstreckung … Das Drehzentrum P, der Drehwinkel in Grad und der Streckungsfaktor
- Scherung an der x-Achse … Der Scherungsfaktor s, der den Scherungswinkel α durch s = tan α charakterisiert
- Affine Abbildung … Die Koeffizienten der Abbildungsmatrix; eine affine Abbildung wird beschrieben durch $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, wobei x, y die Ausgangskoordinaten und x' und y' die Bildkoordinaten sind
- Scherung, allgemein … Der Scherungswinkel in ° und die Eckpunkte einer Geraden, welche die Scherungsrichtung angibt

Nach der Eingabe der Bewegungen können Sie den rechten Eingabebereich auf Wunsch auch ausblenden bzw. wieder sichtbar machen.

Darstellung der affinen Abbildungen

Vor der Anwendung der Abbildungen müssen Sie die Koordinaten des zu

transformierenden Polygons in *Punktkoordinaten* eintragen. Dabei ist auch die Eingabe eines einzelnen Punktes möglich. Ein Klick auf den Schalter *Darstellung* zeigt Ihnen das N-Eck an.

Markieren Sie nun in der linken Bewegungsliste eine festgelegte Abbildung und quittieren mit *Darstellung*, wird das Polygon entsprechend abgebildet. Mit dem Feld *Hilfslinien* werden vom Originalpunkt zum Bildpunkt Hilfslinien gezeichnet. Markieren Sie *farbige Polygone*, werden die N-Ecke farbig ausgefüllt, andernfalls "durchsichtig" gezeichnet. Mittels der Schalter und können Sie die Größe des Darstellungsintervalls einstellen.
Da Sie mehrere affine Abbildungen definieren und ausführen können, ist eine Nacheinanderausführung mehrerer Abbildungen möglich.

Berechnung der affinen Abbildungen

Die Auswahl des Schalters *Berechnung* blendet die grafische Darstellung aus und eine Tabelle der Berechnungsergebnisse ein. In dieser Liste finden Sie neben den oben beschriebenen allgemeinen Berechnungen die Koordinaten der Ausgangspunkte und deren Ergebnisse bei den Bewegungen. Wichtig ist, dass nur diejenigen affinen Abbildungen berechnet werden, die in der Bewegungsliste auch markiert sind.

Erklärung der Affinen Abbildung

Jede Bewegung eines geometrischen Gebildes, sei es eine Drehung, eine Verschiebung, eine Spiegelung oder eine Scherung, kann als affine Abbildung der Ebene auf sich selbst interpretiert werden. Eine derartige affine Abbildung kann analytisch in der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ beschrieben werden, wobei x, y die Koordinaten des Originals, x' und y' die Koordinaten des Bildpunktes sind. Die Matrix beschreibt die Transformation der Koordinaten, der Spaltenvektor eine zusätzliche Verschiebung des Gebildes in der Ebene. Beispiele für Abbildungsmatrizen sind:

Verschiebung	(1 0) (0 1)	Achsenspiegelung	(1 0) (0 -1)
Punktspiegelung	(-1 0) (0 -1)	Drehung	(0 -1) (1 0)
Zentrische Streckung	(3 0) (0 3)	Schrägspiegelung	(1 -2) (0 -1)

Über die Liste *Transformationen* können Sie neun Grundtransformationen aufrufen und in die Eingabefelder eintragen lassen. Zu diesen affinen Abbildungen gehören:

Menüpunkt	Beschreibung

Identische Transformation	Original und Bild sind identisch
Skalierung in x-Richtung	Stauchung oder Streckung in x-Richtung, voreingestellter Faktor 3
Skalierung in y-Richtung	Stauchung oder Streckung in y-Richtung, voreingestellter Faktor 3
Skalierung in x-y-Richtung	Stauchung oder Streckung sowohl in x- als auch in y-Richtung, voreingestellte Faktoren 2 und 3
Spiegelung an der x-Achse	Spiegelung des Gebildes an der x-Achse
Spiegelung an der y-Achse	Spiegelung des Gebildes an der y-Achse
Spiegelung am Koordinatenursprung	Spiegelung des Gebildes nacheinander an der x-Achse und y-Achse
Rotation mit 90° um Ursprung	Drehung des Gebildes um 90° in mathematisch positiver Richtung um den Koordinatenursprung (0;0)
Rotation mit 45° um Ursprung	Drehung des Gebildes um 45° in mathematisch positiver Richtung um den Koordinatenursprung (0;0)
Scherung x-Achse	Scherung in Richtung der x-Achse, voreingestellt ist ein Wert 2
Scherung y-Achse	Scherung in Richtung der y-Achse, voreingestellt ist ein Wert 2

7.9 Analyse affiner Abbildungen

Jede Bewegung eines geometrischen Gebildes, sei es eine Drehung, eine Verschiebung, eine Spiegelung oder eine Scherung, kann als eine affine Abbildung der Ebene auf sich selbst interpretiert werden. Diese Abbildungen sind zum Beispiel die Grundlage der Computergrafik.

Mitunter ist aber die umgekehrte Aufgabe gegeben: Original- und Bildpunkte der Abbildung sind bekannt, woraus die zugehörige affine Abbildung zu bestimmen ist.

Dabei gilt theoretisch: Gegeben ist die affine Abbildung

$x' = ax + by \; ; \; y' = cx + dy$

Zur Analyse ist das lineare Gleichungssystem $\vec{x'} = \lambda \vec{x}$ zu lösen. Dieses Gleichungssystem

$(a - \lambda) x + by = 0 \; ; \; cx + (d - \lambda) y = 0$

hat genau dann eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante den Wert Null hat $\rightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$. Die charakteristische Gleichung der Eigenwerte λ lautet:

$\lambda^2 - (a+d) \lambda + ad - bc = 0$

Existieren Eigenvektoren, so sind über

$(a - \lambda_1) x + by = 0 \qquad cx + (d - \lambda_1) y = 0$ und

$(a - \lambda_2)\, x + by = 0 \qquad cx + (d - \lambda_2)\, y = 0$
die Eigenvektoren $t(1 \mid m_1)$ und $t(1 \mid m_2)$ zu bestimmen.

Nun sind drei Fälle möglich:

(1) A besitzt zwei Eigenvektoren, wodurch die gesuchte Abbildung durch zwei Parallelstreckungen gebildet wird.
(2) A besitzt genau einen Eigenwert. In diesem Fall ergibt sich eine zentrische Streckung, eine Scherung oder eine Streckscherung und
(3) A besitzt keinen Eigenwert. Dann entsteht eine Affindrehung oder Euler-Affinität.

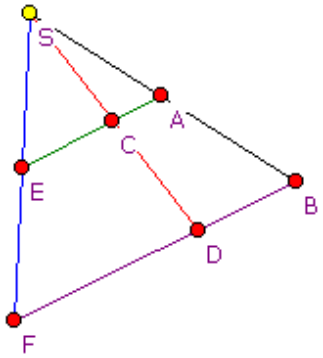
In diesem Teilprogramm können Sie eine Analyse affiner Abbildungen durchführen.

Tragen Sie zuerst die Originalkoordinaten der Punkte A, B und C und deren Bildkoordinaten ein. Das Programm stellt diese dar.
Das Koordinatensystem können Sie wie in anderen Teilprogrammen auch verändern.
Auch die Lage der Punkte ist durch Anklicken und Verschieben mit der Maus veränderbar.

Klicken Sie auf *Darstellung*, wird außerdem eine Analyse der Abbildung durchgeführt.
Neben der Transformationsmatrix und einem eventuell auftretenden Verschiebungsvektor gibt das Programm auch die Art der affinen Abbildung und deren Eigenschaften an.

7.10 Strahlensatz

Unter diesem Punkt sind einfache Untersuchungen an der klassischen Strahlensatzfigur möglich.



Entsprechend der Skizze können Sie die sieben Punkte (Zentrum S und die Punkte A bis F) durch Anklicken mit der linken Maustaste und Verschieben in ihrer Lage ändern.
Das Programm ermittelt sofort die Längen der Strecken SA, SB, SC, SD, SE, SF AC, CE, BD und DF sowie die Streckenverhältnisse, die nach dem Strahlensatz identisch sind. Diese lauten:

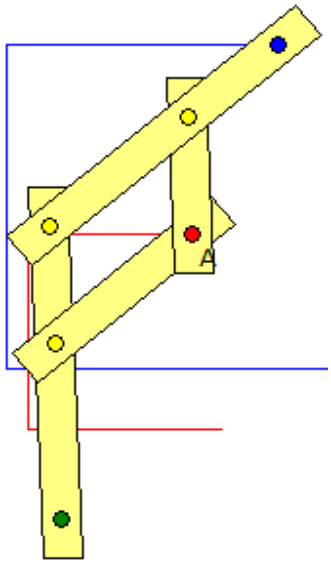
Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt:

1. Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl, z.B.: SA / SB = SE / SF.
2. Gleichliegende Parallelenabschnitte verhalten sich zueinander wie die

zugehörigen Strahlenabschnitte auf ein und demselben Strahl, z.B.: BD / AC = SB / SA.
3. Parallelenabschnitte auf einer Parallelen verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Parallelenabschnitte auf einer anderen Parallelen, z.B.: AC / CE = BD / DF.

Markieren Sie das Feld *2. Satzfigur*, so stellt das Programm die Strahlensatzfigur dar, bei der die Punkte A, C und E auf der anderen Seite bezüglich dem Zentrum S liegen.

7.11 Pantograph



Der Pantograph ist ein Gerät, auch als Storchenschnabel bezeichnet, zum Übertragen von Zeichnungen in einen gleichen, größeren oder kleineren Maßstab.
Bereits 1603 wurde der mechanische Pantograph von Christoph Scheiner erfunden.

Der Pantograph besteht aus vier Leisten, die gelenkig miteinander verbunden. Um einen festen Punkt wird der Pantograph gedreht. Bei Vergrößerung einer Vorlage wird diese mit einen Stift A (roter Punkt) abgefahren, während ein zweiter Stift (blauer Punkt) die Vergrößerung erzeugt.

In diesem Teilprogramm wird dieses Zeichengerät demonstriert. Die *Grundlänge* und die Länge des Stabes mit dem blauen Stift stellen Sie am Rollbalken ein.
Der Punkt A ist frei mit der Maus bewegbar und zeichnet eine *Spur*, wenn das Markierungsfeld ausgewählt wurde. Dabei ist der Weg des roten Punktes gerade die vergrößerte, ähnliche Darstellung.

Für die *Simulation* sind vier Ausgangsfiguren vordefiniert. Wählen Sie eine aus, bewegt sich A automatisch auf der Kurve, während der rote Punkt die ähnliche Kurve zeichnet.

Beachten Sie bitte, dass A nur soweit bewegt werden kann, dass der Mechanismus nicht "zerstört" wird, d.h. entsprechend der Längen der Stäbe. Insbesondere während der Simulation stoppt diese, wenn der Pantograph zerstört würde.

7.12 Peaucellier-Inversor

Der Inversor von Peaucellier ist ein Mechanismus zur Überführung einer Kreisbewegung in eine Geradenbewegung und umgekehrt. Benannt ist er nach Charles-Nicolas Peaucellier, der ihn 1864 erfand.
Das Gerät beruht auf der Inversion am Kreis, die die Eigenschaft besitzt, Kreise

durch den Inversionsmittelpunkt in Geraden zu überführen. Auf Grund dieser Eigenschaft kann der Inversor von Peaucellier auch zur Konstruktion eines Bildpunktes unter der Inversion verwendet werden.

Dazu sind sechs Stäbe an fünf Punkten drehbar miteinander verbunden. Vier Stäbe bilden einen Rhombus, die Strecken zum Hauptdrehzentrum sind gleich lang.
Wird der Inversor im Zentrum festgehalten und der Punkt A auf einer beliebigen Kurve bewegt, so beschreibt der Punkt C die zugehörige inverse Kurve und umgekehrt.
Überstreicht A zum Beispiel eine Kreiskurve die durch B verläuft, so beschreibt C eine gerade Linie und umgekehrt.

In diesem Teilprogramm wird dieses Zeichengerät demonstriert. Die Länge der Stäbe stellen Sie am Rollbalken ein.
Der Punkt A ist frei mit der Maus bewegbar und zeichnet eine *Spur*, wenn das Markierungsfeld ausgewählt wurde. Dabei ist der Weg des Punktes C gerade die Inversionskurve.
Für die *Simulation* sind vier Ausgangsfiguren vordefiniert. Wählen Sie eine aus, bewegt sich A automatisch auf der Kurve, während B die inverse Kurve zeichnet.

Beachten Sie bitte, dass A nur soweit bewegt werden kann, dass der Mechanismus nicht "zerstört" wird, d.h. entsprechend der Längen der Stäbe. Insbesondere während der Simulation stoppt diese, wenn der Inversor zerstört würde.

7.13 Ellipsograf nach Delaunay bzw. de Witt

Zum Zeichnen von Ellipsen wurden im Laufe der Jahrhunderte eine Vielzahl mechanischer Vorrichtungen erfunden, darunter der Ellipsograf von Delaunay.

Mit dieser raffinierten, aber einfachen Maschine können Ellipsen gezeichnet werden.
Die Punkte C und D sind auf einer Waagerechten beweglich angeordnet. Bewegt sich der Punkt P kreisförmig um einen festen Punkt A, so verschieben sich C und D. Über die Stäbe bei E und F beschreibt dann der frei bewegliche Punkt Q eine Ellipse. Je nach Länge der Stäbe und dem Abstand von A zur Gerade CD entstehen Ellipsen unterschiedlicher Form.

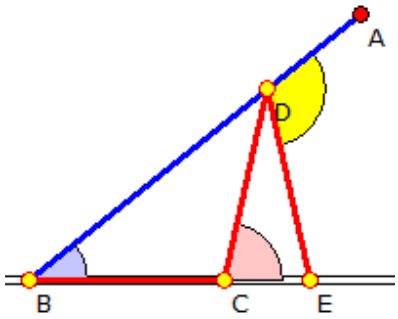
In diesem Programm wird der Ellipsograf simuliert.
Den Mittelpunkt A des Kreises verschieben Sie mit der Maus, den Kreisradius verändern Sie am Rollbalken.
Die Lage der Punkte E und F wird durch deren *relative Lage* auf den Strecken AC und AD beschrieben. Diesen Wert können Sie am zweiten Rollbalken einstellen.

Ellipsograf nach de Witt

Auf der Basis der Ellipsenkonstruktion von de Witt konstruierte Frans van Schooten der Jüngere (1615-1660) ein Gerät zum mechanischen Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsograf.

Zwei Stangen sind dabei im Punkt P mit einem Scharnier verbunden. Im Punkt D befindet sich ein Zeichenstift. Der Endpunkt A einer Stange ist im Ursprung befestigt, während der Punkt C der zweiten Stange waagerecht bewegt werden kann. Verändert man die Lage von C kontinuierlich, so beschreibt D dann eine Ellipse.

7.14 Winkeldreiteilung



Die nachfolgende Methode nutzte Archimedes zur Dreiteilung eines Winkels:
Gegeben ist ein Punkt B an dem ein Strahl BA drehbar gelagert ist. Von B wird eine Länge BC abgetragen und in C ein Stab gleicher Länge mit dem Endpunkt D auf dem Strahl BA konstruiert. Wird nun von D auf die Verlängerung von BC ein weiterer beweglicher Stab E gewählt, so gilt für die Winkel

$$\angle ADE = 3 \cdot \angle ABE$$

, d.h. ein mechanische Dreiteilung eines Winkels.

Dieses Verfahren ist aber keine Konstruktion im Platonschen Sinne, da das Auswählen der Stäbe nicht in endlichen Schritten mit einem Zirkel und einem unmarkierten Lineal möglich ist.
Bekannt gemacht wurde dieses Verfahren erst 1590 durch den französischen Mathematiker Francois Viete. Erstmals findet sich das Verfahren in Archimedes "Liber assuptorum", Satz 8.

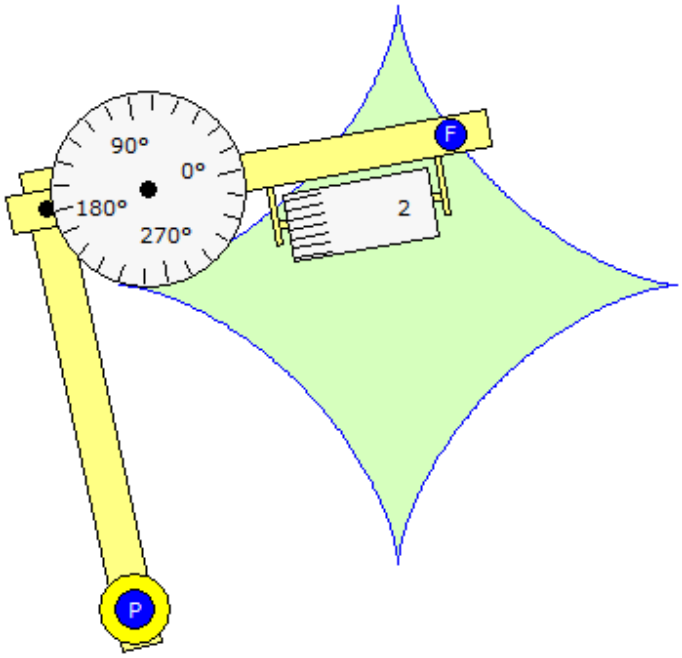
In diesem Teilprogramm können Sie die Archimedische Idee testen, in dem Sie den Punkt A mit der Maus verschieben.

7.15 Polarplanimeter

Planimeter sind Messgeräte, mit denen man den Inhalt von Flächen in Landkarten und Zeichnungen bestimmen kann, indem man mit einem Fahrstift die gewünschte Fläche umfährt und die Anzeige des Planimeters mit einem Tabellenwert multipliziert, der die Maße des Planimeters berücksichtigt. Eine besonders elegante Variante ist das Polarplanimeter.

Das Polarplanimeter besteht aus zwei Stäben, die mit einem Gelenk verbunden sind. Am Ende des Polarmes befindet sich der Pol P, der auf der Vorlage befestigt werden kann.

Den Polarm kann man frei um den Pol herum drehen. Er greift drehbar in den Fahrarm, an dessen anderem der Fahrstift F montiert ist. Am Fahrarm ist in der Nähe des Gelenks ein Messrad angebracht, dessen Drehachse parallel zum Fahrarm liegt.



Bei der Bewegung des Fahrstiftes gleitet bzw. rollt das Rad über das Papier, je nachdem in welche Richtung der Stift geführt wird. Den Weg, den das Rad abrollt, zeigt ein Messwerk an.
Multipliziert man den gemessenen Zahlenwert mit einem Faktor k, so erhält man den Inhalt der umfahrenen Fläche.
Zwischen Polararm und Fahrarm treten zwei Winkel α und β auf. Das Rad dreht sich jeweils um

$$\cos \alpha \, d\beta$$

und zählt so die gesuchte Fläche.

Dieses Teilprogramm simuliert ein Polarplanimeter.
Die Länge von Pol- und Fahrarm stellen Sie am Rollbalken ein. Der Pol P und der Fahrpunkt F können mit der Maus verschoben werden. Bewegen Sie F, so verändert sich die Anzeige an der Scheibe und dem Rad.

Möchten Sie eine Messung durchführen, so bewegen Sie F auf einen Punkt der Fläche und klicken mit der rechten Maustaste. Daraufhin wird das Planimeter kalibriert, d.h. alle Werte zurückgesetzt.
Umfahren Sie nun mit F (bei gedrückter linker Maustaste) vollständig die Figur, so erhalten Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt.
Dabei gilt: Je genauer und langsamer Sie F über die Randlinie verschieben, desto genauer wird der Näherungswert.

Wichtiger Hinweis: Der Pol darf sich nicht innerhalb der zumessenden Fläche oder in unmittelbarer Nähe des Flächenrandes befinden.

Vordefinierte Figuren

In der aufklappbaren Liste *Beispiele* finden Sie sechs vordefinierte Figuren. Wählen Sie eine aus und betätigen den Schalter *Demonstration*, bewegt das Programm automatisch das Planimeter und ermittelt die Fläche.
Interessant sind die Beispiele *Genfer See* und *Insel Rügen*. Hier wird eine geografische Karte mit der Abbildung des Genfer Sees bzw. Rügens geladen.

Während der Demonstration fährt der Punkt F die Küstenlinie ab und bestimmt die Fläche. Auf Grund des Maßstabs der Karte muss die ermittelte Fläche mit einem Kalibrierungsfaktor versehen werden.
Für den Genfer See beträgt dieser rund 3,9 km² je Einheit und ergibt damit eine Seeoberfläche von etwa 590 km². Da der Kartenmaßstab der Insel Rügen größer ist, ist der Faktor hier 2,36.

Für eigene Messexperimente können Sie diese Beispiele nutzen oder aber über *Bild laden* eine Abbildung nutzen.

7.16 Flächen (Viereck, Kreis)

Dieses Teilprogramm ermöglicht die Berechnung und Darstellung von ebenen Flächen. Zuerst wählen Sie in der rechten Liste eine der vorgegebenen Flächen:

- Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Drachenviereck, Rhombus, allgemeines Viereck
- Kreis, Kreissektor und –segment
- Ellipse und Ellipsensektor

Auf der linken Fensterseite finden Sie dann Eingabezeilen sowie Steuerelemente für die grafische Darstellung. Die Koordinatenachsen und das Gitter können Sie über die Schalter in der oberen Schalterleiste zu- und abschalten.

Berechnungen an Vierecken

Je nach Wahl des Vierecks sind folgende Größen einzugeben:

Viereck	einzugebende Größen
Rechteck	Seiten a, b
Parallelogramm	Seiten a, b, Höhe h
Trapez	Seiten a, c, Höhe h, Winkel α
Drachenviereck	Seiten a, c, Winkel α, der Winkel zwischen den Strecken AB und AC
Rhombus	Seitenlänge a und Winkel α
Allgemeines Viereck	Seitenlängen a, b, c und d, Winkel α bei Eckpunkt A

Ermittelt werden jeweils die Längen der Diagonalen, der Flächeninhalt und der Umfang, verschiedene Winkel, beim allgemeinen Viereck auch die anderen vier Innenwinkel.

Zusätzlich stellt das Programm des eingegebene Viereck dar. Über die Schalter auf der linken Seite stellen Sie den Maßstab der Darstellung ein. Auf der Darstellungsfläche befindet sich ein gelb markierter Punkt, der Koordinatenursprung, der sich durch Anklicken und Bewegen mit der Maus frei verschieben lässt. Auf Wunsch werden auch die *Diagonalen* der Vierecke

eingezeichnet.

Berechnungen am Kreis

Nach Eingabe von *Radius r*, *Fläche A* oder *Umfang u* eines Kreises werden die jeweils anderen Größen berechnet. Tragen Sie für Kreissektor und -segment zusätzlich einen *Winkel* ein, ermittelt dieses Unterprogramm die Bogenlänge b, die Länge der Sehne s sowie die Flächeninhalte des zugehörigen Kreissegments und -sektors.

Berechnungen an der Ellipse

Für die Ellipse müssen zwei der fünf Größen große Halbachse a, kleine Halbachse b, lineare Exzentrizität e, numerische Exzentrizität und die Fläche eingegeben werden:

Flächeninhalt: $A = \pi\ a\ b$

Die drei fehlenden Größen sowie den Umfang und den Halbparameter p ermittelt das Programm. Zum Ellipsenumfang ist zu bemerken, dass dieser nicht vollständig analytisch darstellbar ist.
Hierfür gilt: Umfang: $U = 4\ a \cdot E(e)$, wobei E(e) das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist, d.h. nicht auflösbar. Deshalb ist die Nutzung von Näherungsformeln notwendig (die erste Gleichung wird in diesem Programm genutzt):

$$U = \pi\ (1{,}5\ (a+b) - \sqrt{(ab)})$$
$$U = 1{,}38\ \pi\ \sqrt{(a^2+b^2)}$$

Beispiel: Bei Eingabe von a = 3 und *lineare Exzentrizität* e = 2 erhalten Sie die Ergebnisse:

Halbachse b = 2,2361
Flächeninhalt A = 21,0744
Halbparameter p = 1,6667
Numerische Exzentrizität 0,6667
Umfang u = 16,5367

Beachten Sie bitte: In diesem Programm wird vorausgesetzt, dass die Halbachse b kleiner als a ist. Des Weiteren darf die numerische Exzentrizität nicht gleich 0 bzw. 1 sein. Widersprechen die eingegebenen Werte diesen Forderungen, meldet das Programm:

Keine eindeutige Lösung.

Wählen Sie Ellipsensektor, so sind die Halbachsen der Ellipse und die beiden Winkel einzugeben, die den Sektor beschreiben. Außer den Ellipsenwerten werden auch die Länge des Sektorbogens und der Flächeninhalt des Sektors berechnet.

7.17 Größen am Viereck

Das Teilprogramm *Größen am Viereck* ermöglicht Ihnen einfache Untersuchungen am Viereck.

Die Eckpunkte A, B, C und D können Sie durch Anklicken und Ziehen mit der Maus frei auf der Zeichenfläche verschieben.
Das Programm stellt das Viereck sofort dar und ermittelt die Seitenlängen und Diagonalenlängen.

An diesem Viereck (auch konkaves Viereck!) können Sie die Diagonalen und Mittelsenkrechten einzeichnen lassen.
Wählen Sie Seitenhalbierende und Höhen, stellt das Programm von jedem Viereckspunkt die entsprechenden Transversalen zu den beiden gegenüberliegenden Seiten dar.

Markieren Sie das Feld *Umkreise*, so zeichnet das Programm für jedes Tripel der vier Eckpunkte einen Umkreis, d.h. also genau vier. Nur dann, wenn das Viereck ein Sehnenviereck ist, d.h. gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen, fallen alle vier Kreise zu einem zusammen. Dann besitzt das Viereck einen Umkreis im eigentlichen Sinne.

Wie Sie durch Verschieben der Eckpunkte schnell feststellen werden, schneiden sich die eingezeichneten Strecken und Geraden bei einem Viereck nur in Ausnahmefällen in einem Punkt.

7.18 Regelmäßiges Vieleck

Dieses Teilprogramm ermöglicht die Berechnung und Darstellung von regelmäßigen Vielecken.

Nach Eingabe der Eckenzahl n des regelmäßigen N-Ecks am Rollbalken und einer Größe der Vielecks (im Allgemeinen des Radius r des erzeugenden Kreises) werden die Seitenlänge s, der Zentriwinkel α, die Fläche, der Umfang des Polygons sowie die Diagonalenanzahl ermittelt.

Regelmäßige N-Ecke sind nur dann vollständig berechenbar (mit Zirkel und Lineal konstruierbar), wenn n eine Primzahl der Form $2 \hat{} 2^k + 1$ ist.
Diesen Nachweis erbrachte als erster der 19-jährige C.F. Gauß. U.a. gab Gauß eine nur aus rationalen Zahlen und Quadratwurzeln (Radikale) bestehende Darstellung des Zentriwinkels des regelmäßigen 17-Ecks an, welches konstruierbar ist.

In der Darstellung des N-Ecks wird der Umkreis ebenfalls eingezeichnet. Interessante Darstellungen ergeben sich auch, wenn Sie den Punkt *Diagonalen einzeichnen* markieren.

Auf der linken Fensterseite finden Sie dann Eingabezeilen sowie Steuerelemente für die grafische Darstellung. Die Koordinatenachsen und das Gitter können Sie über die Schalter in der oberen Schalterleiste zu- und abschalten.

7.19 Polygramme, Sternpolygone

Betrachtet man regelmäßige, aber überschlagene, nichtkonvexe N-Ecke, so entstehen regelmäßige Sternvielecke.
Diese wurden zuerst von Thomas Bradwardine (1290-1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht.

Zum Beispiel existieren genau zwei regelmäßige Achtecke, außer dem konvexen, einem Sternachteck. Bei diesem verbindet man jede Ecke mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man mit der übernächsten Ecke, so entsteht kein Achteck, sondern ein Quadrat. Ein regelmäßiges nichtkonvexes Sechseck gibt es nicht.
Verbindet man die Eckpunkte eines regelmäßigen N-Ecks, sodass eine geschlossene symmetrische Kurve entsteht und ist das entstehende N-Eck nichtkonvex, so nennt man dies ein Polygramm. Umgekehrt ist aber nicht jedes Polygramm ein regelmäßiges überschlagenes N-Eck.

Allgemein gilt: Ein N-Eck, konvex bzw. nichtkonvex, ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindung der Ecken n und k liefert dasselbe N-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n - k.

In diesem Teilprogramm können Sie solche Polygramme und Sternvielecke zeichnen.
Als *Eckenzahl* ist maximal 36 vorgesehen. Die wievielten Ecken miteinander verbunden werden, legt der *Modus* fest. Den *Umkreisradius* des zu zeichnenden Polygons können Sie ebenfalls wählen.
Auf Wunsch ermittelt das Programm je nach eingestellten Radius, Eckenzahl und Modus die Seitenlänge des Sternpolygons.

Ein Hexagramm kann nicht durch eine einzelne geschlossene Kurve am Sechseck gezeichnet werden, da dieses aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Markieren Sie den Punkt *vollständige Kurve*, so wird nicht nur die Kurve ab dem Punkt 1 gezogen, sondern jede mögliche Kurve ab einem beliebigen Punkt.

7.20 Sehnenviereck

Dieses kleine Teilprogramm stellt Ihnen ein Sehnenviereck dar. Die Lage der Viereckspunkte verändern Sie durch Verschieben mit der Maus. Den Radius des umgebenden Kreises stellen Sie am Rollbalken ein.

Durch Markieren der Auswahlfelder können Sie verschiedene Untersuchungen

durchführen. Zum einen werden Diagonalen eingezeichnet und der Satz des Ptolemäus, dass für die Seitenlängen a, b, c, d und die Diagonalenlängen e und f

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

gilt, demonstriert.

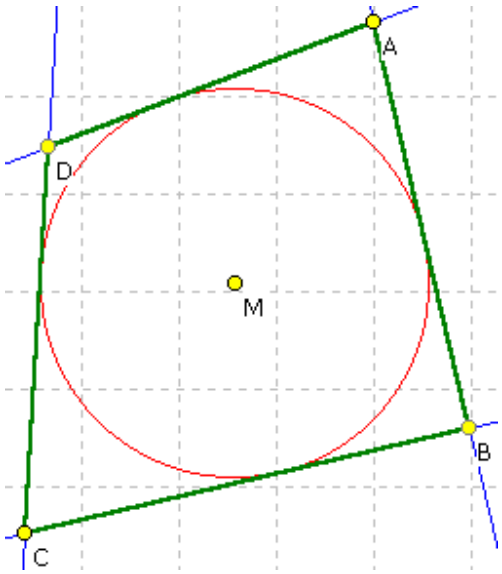
Interessant ist auch das van Aubel-Rechteck. Auf den Seiten des Sehnenvierecks werden dazu Rechtecke errichtet, deren zweite Seite gerade der im Viereck ABCD gegenüberliegenden Strecke kongruent ist. Haben die entstehenden Vierecke die Schwerpunkte A', B', C' und D', so ist A'B'C'D' ein Rechteck, das van Aubel-Rechteck.

Verschieben Sie die Punkte A, B, C und D, können Sie stets nachvollziehen, dass gerade ein Rechteck entsteht. Beachten Sie aber, dass ABCD ein konvexes Sehnenviereck sein muss.
Betrachtet man je drei der vier Eckpunkte des Sehnenvierecks, so bilden diese vier Dreiecke. Die jeweiligen Höhenfußpunkte dieser vier Dreiecke bilden ein Viereck, das Höhenfußpunktviereck. Dieses ist erstaunlicherweise kongruent zum Sehnenviereck. Markieren Sie das Feld, wird auch dieses Viereck eingezeichnet.

Während der Simulation wird der Punkt A auf dem Umkreis des Sehnenvierecks verschoben.

In die Punkttabelle (*Tabelle anzeigen*) trägt das Programm neben den Eckpunkten des Sehnenvierecks auch die des van Aubel-Rechtecks und des Höhenfußpunktvierecks ein.
Auf Wunsch werden die Seitenlängen des Sehnenvierecks und des van Abel-Rechtecks ermittelt.

7.21 Tangentenviereck



Während ein Dreieck stets einen Inkreis besitzt, gilt dies für Vierecke nur in Ausnahmefällen. Vierecke, in die ein Kreis eingepasst werden kann, heißen Tangentenvierecke, da die vier Seiten nun Tangenten des Kreises bilden.

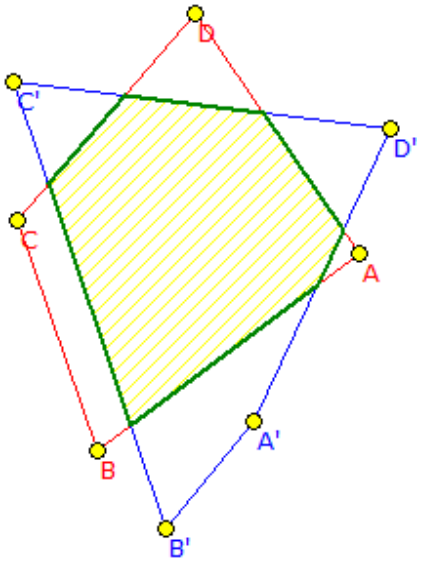
Ist ein Kreis vorgegeben, so kann ein solches Viereck durch zwei außerhalb des Kreises gelegene Punkte A und C erzeugt werden. Legt man von diesen Punkten die Tangenten an den Kreis, so schneiden sich diese in den anderen zwei Punkten B und D des Vierecks.

Auf diese Weise werden in diesem Teilprogramm Tangentenvierecke erzeugt. Zum einen können Sie die Größe des Kreises und die Lage des Mittelpunktes verändern, zum anderen sind die Punkte A und C mit der Maus verschiebbar. Das Programm

zeichnet sofort das Viereck.
Tangentenvierecke besitzen eine weitere Besonderheit. Die Summe der Seitenlängen gegenüberliegender Seiten ist gleich der Summe der anderen beiden.

In der Punkttabelle finden Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes M sowie der vier Punkte des Tangentenvierecks. Ebenso werden die Koordinaten der Tangentenberührungspunkte an den Kreis angegeben.
Für die Punkte M, A und C können Sie auch neue Werte eingeben. Auf Wunsch werden die Seitenlängen des Tangentenvierecks ermittelt.

7.22 Überlappung von Polygonen



Sind in der Ebene zwei beliebige Vielecke gegeben, so können sich diese überlappen. Von Interesse ist dabei die gemeinsame Fläche zu ermitteln.

In diesem Teilprogramm können Sie zwei Polygone (Eckenzahl 3 bis 12) festlegen, in dem Sie zuerst die Eckenzahl an den Rollbalken einstellen und anschließend die Eckpunkte der Vielecke mit der Maus beliebig verschieben.

Sind beide Vielecke konvex, so ermittelt das Programm alle Schnittpunkte der Vieleckseiten und damit die Gestalt des Überlappungspolynoms. Zusätzlich erhalten Sie die Flächeninhalte beider Polygone und der Überlappung angezeigt. Das Schnittgebilde wird mit dem Feld *Schnitt hervorheben* verstärkt angezeigt.

Möchten Sie die Koordinaten der Eckpunkte genau eingeben, so wählen Sie den Punkte Tabelle anzeigen. In die gelben Felder können Sie die gewünschten Koordinaten eintragen. Angezeigt werden auch die Schnittpunktkoordinaten.

Hinweis: In der Punktetabelle werden jeweils 5 Punkte angezeigt. Weitere Punkte sehen Sie, wenn Sie in die Tabelle klicken und sich mit den Maustasten ↑ und ↓ auf- und abwärts in der Tabelle bewegen.
Während der Simulation können die Punkte A und B des ersten Polygons verschoben werden.

7.23 Gitterpolygon, Satz von Pick

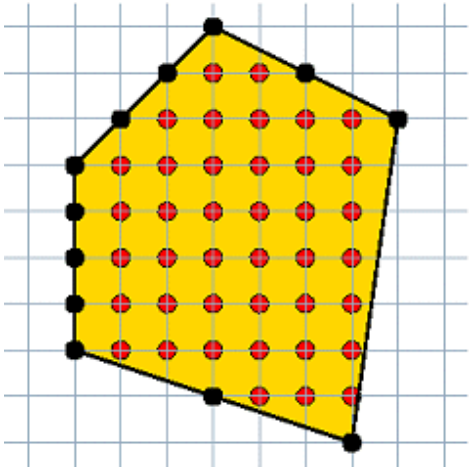
Der Satz von Pick, benannt nach dem österreichischen Mathematiker Georg Alexander Pick, beschreibt eine grundlegende Eigenschaft von einfachen Gitterpolygonen.
Dies sind Vielecke, deren sämtliche Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.

Der Satz besagt:

Sei A der Flächeninhalt des Polygons, I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Polygons und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons, dann gilt:

$$A = I + R/2 - 1$$

Im abgebildeten Beispiel ist R = 12 und I = 40. Die Fläche dieses Polygons beträgt somit 40 + 6 - 1 = 45 Gitterquadrateinheiten.



Diese Gitterpolygone können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen.
Zur Eingabe der maximal fünfzehn Punkte klicken Sie mit der linken Maustaste auf einen Gitterpunkt der Darstellung oder tragen die Koordinaten in die Tabelle ein (Bestätigen mit dem Schalter *Koordinaten übernehmen*. Ein Punkt löschen Sie mit einem Klick der rechten Maustaste.

Das Programm zeichnet das Polygon und ermittelt die Anzahl der Eck- und Randpunkte und der inneren Punkte sowie die Fläche.

Die eingezeichneten Punkte können Sie auch mit der Maus verschieben. Dabei ist zu beachten, dass nur ganzzahlige Koordinaten möglich sind.

Außerdem wird das Gitterpolygon nur ausgewertet, wenn dieses konvex ist. Befindet sich einer der Punkte innerhalb der konvexen Hülle der anderen Punkte, so wird dieser ignoriert.

7.24 Polygonschwerpunkt und -fläche

Das Problem von einem beliebigen konvexen oder konkaven Polygon den Flächeninhalt und den Schwerpunkt S zu bestimmen, ist relativ einfach.

Gegeben sei ein Polygon mit n Ecken (x_i, y_i), i = 0 ... n-1. Die letzte Ecke (x_{n-1}, y_{n-1}) ist mit der ersten verbunden, so dass das Vieleck geschlossen ist. Weiterhin sei zur Berechnung $x_n = x_0$ und $y_n = y_0$. Dann gilt für die Fläche

$$A = 1/2 \sum_{i=0}^{n-1} (x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i)$$

Diese Gleichung gilt nicht für sich selbstschneidende Vierecke.
Für die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s , y_s)$ wird dann

$$x_s = 1/(6A) \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})\, (x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i)$$

$$y_s = 1/(6A) \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})\, (x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i)$$

Im Teilprogramm *Polygonschwerpunkt* können Sie bis zu 15 Punkte per Mausklick festlegen. Das Programm zeichnet das Vieleck, bestimmt deren Flächeninhalt und die Lage des Schwerpunktes.
Ist das Polygon selbstschneidend wird der Schwerpunkt nicht ermittelt.

Verschieben können Sie die Punkte mit der Maus. Markieren Sie das Feld *transparent*, wird das entstehende Polygon durchsichtig gezeichnet, d.h., das Koordinatensystem wird auch im Polygon sichtbar.
Zusätzlich können die konvexe Hülle und die Längen der Polygonseiten angezeigt werden.
Markieren Sie das Feld *Flächenkreis*, zeichnet das Programm für nichtselbstschneidende Polygonen um den Schwerpunkt S einen Kreis, der den gleichen Flächeninhalt wie das Vieleck besitzt.
Das Koordinatensystem und das Gitter können Sie in der Aktionsschalterleiste zu- und abschalten.

7.25 Varignon-Parallelogramm

Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen (auch nichtkonvexen) ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.

In diesem Teilprogramm können Sie vier Punkte A, B, C und D durch Mausklick verschieben. Das Programm zeichnet dieses Parallelogramm sofort.

Verschiebt man die Diagonalen des Vierecks ABCD durch die Eckpunkte, so schneiden sich diese Geraden paarweise in vier Punkten. Auch diese Schnittpunkte bilden wieder ein Parallelogramm, das Außen-Varignon-Parallelogramm. Das Varignon-Parallelogramm und das Außen-Parallelogramm gehen aus einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k = 2 und dem Diagonalenschnittpunkt des Vierecks als Streckungszentrum hervor. Auf Wunsch können Sie dies darstellen.

Übrigens bilden die Mittelpunkte der Strecken auch im Raum ein ebenes Parallelogramm, wenn A, B, C und D vier beliebige Punkte im Raum sind.

In der Punkttabelle finden Sie die Koordinaten der vier Ausgangspunkte und der berechneten Mittelpunkte M_1 bis M_4. Die Längen der Viereck und Parallelogrammseiten werden auf Wunsch angezeigt.
Während der Simulation können Sie die Punkte A oder B wahlweise senkrecht oder waagerecht bewegen.

Wittenbauer-Parallelogramm

Werden die Seiten des Vierecks ABCD gedrittelt und die entstehenden Punkte paarweise verbunden, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in vier Punkten. Diese vier Punkte bilden ebenfalls ein Parallelogramm, das Wittenbauer-Parallelogramm.
Markieren Sie den entsprechenden Punkt, wird auch dieses Parallelogramm eingezeichnet.

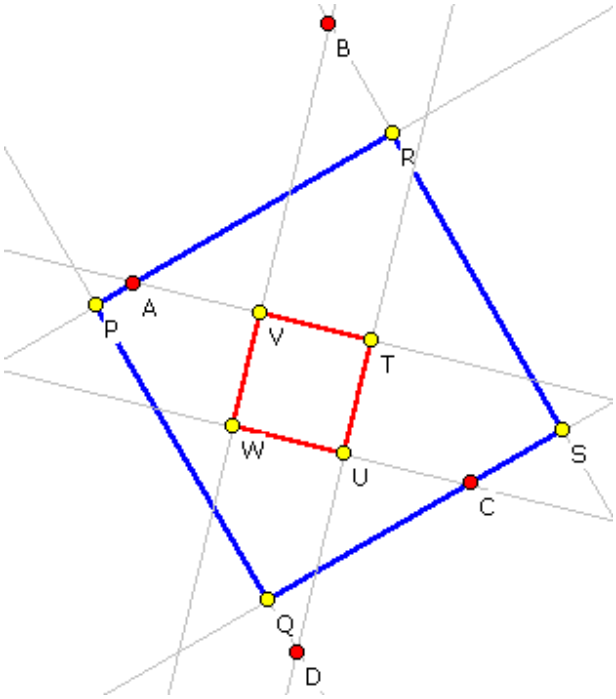
7.26 Mittelpunktfünfeck

In Analogie zum Varignon-Parallelogramm kann man auch Polygone betrachten, deren Eckpunkte die Mittelpunkte von n-Ecken sind, wobei n größer als 4 ist, bzw. die Frage stellen, ob man aus den Mittelpunkten das Ausgangspolygon ermitteln kann.

Da das Varignon-Viereck stets ein Parallelogramm ist, gibt es für vier beliebige Punkte nicht immer ein Viereck, das diese Punkte als Seitenmittelpunkte besitzt. Mit etwas Aufwand kann sogar gezeigt werden, dass bei einer geraden Anzahl 2n von Punkten nicht immer ein 2n-Eck existiert.
Anders ist der Sachverhalt bei einer ungeraden Anzahl 2n + 1 von Ausgangspunkten (n > 1). Dann existiert stets genau ein 2n + 1-Eck, für das die Ausgangspunkte die n-Eckseiten halbieren.

In diesem Teilprogramm zeichnet das Programm zu fünf beliebigen Punkten A bis E stets ein Fünfeck, sodass A bis E die Mittelpunkte der Fünfeckseiten sind. Dieses Fünfeck muss nicht unbedingt konvex sein. Die Lage der gegebenen Punkte können Sie durch einen linken Mausklick und Verschieben mit der Maus verändern.

Verändern Sie die Eckenzahl am Rollbalken von 3 bis maximal 9, so wird statt des Fünfecks das entsprechende Dreieck, Siebeneck oder Neuneck der Mittelpunkte gezeichnet.
In die Tabelle werden die Koordinaten der entsprechenden Punkte A bis I und die Koordinaten der berechneten Mittelpunkte eingetragen. Auf Wunsch werden auch die Seitenlängen beider Vielecke angezeigt.



Während der Simulation können Sie die Punkte A oder B wahlweise senkrecht oder waagerecht bewegen.

7.27 Quadrat durch vier Punkte

Eine weitere interessante Aufgabe besteht in der Konstruktion eines Quadrats, bei dem von vier gegebenen Punkten A, B, B und D in der Ebene jeweils einer der Punkte auf genau einer eventuell verlängerten Quadratseite liegt.

Die nicht ganz einfache Konstruktion ist im Lexikon beschrieben. In diesem Unterprogramm können Sie so ein Quadrat konstruieren lassen.

Die Lage der vier Ausgangspunkte A, B, C und D können Sie wieder mit der Maus verändern. Markieren Sie das Feld *verlängerte Seiten*, zeichnet das Programm die durch die Quadratseiten bestimmten Geraden.

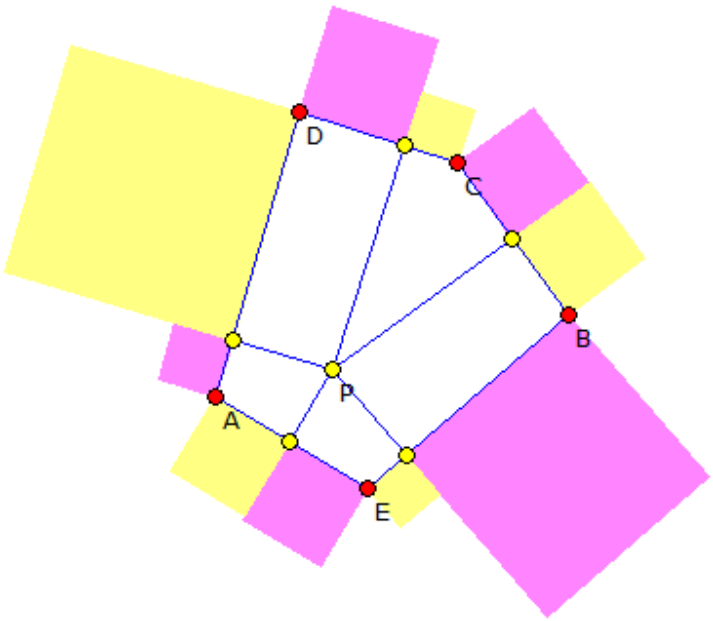
Da bei der Konstruktion des Quadrats eine Anfangsstrecke und eine Drehrichtung gewählt werden muss und diese verändert werden können, existieren mehrere Lösungen, insgesamt sechs. Da es sechs Kreispermutationen der vier Punkte und je zwei Drehrichtungen gibt, wären eigentlich 12 Lösungen zu erwarten – je zwei sind aber identisch.

Wählen Sie *zweite Lösung*, erhalten Sie ein weiteres Quadrat, das die Bedingung erfüllt. Markieren Sie *alle Lösungen*, werden die sechs möglichen Quadrate gezeichnet.
Durch Markierung des Feldes *Quadratseiten* zeigt Ihnen das Programm die Länge der Seiten der angezeigten Quadrate an. Die Eckpunktkoordinaten der Quadrate PQRS und TUVW finden Sie in der *Tabelle*.

Während der Simulation können Sie die Punkte A oder B wahlweise senkrecht oder waagerecht bewegen.

7.28 Quadratkette am Vieleck

Sind n > 2 Punkte in der Ebene gegeben und im Inneren des von den Punkten gebildeten konvexen N-Ecks ein weiterer Punkt P, so können von P auf die N-Eckseiten die Lote gefällt werden.
Errichtet man nun auf den Vieleckseiten in den Lotfußpunkten nach außen entsprechende Quadrate, so entsteht ein N-Ecke, dass von einer Kette von Quadraten umgeben ist.



Werden diese Quadrate, wie in der Abbildung dargestellt, abwechselnd mit zwei Farben gefüllt, so gilt stets:
Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate einer Farbe ist gleich der Summe der Quadrate der zweiten Farbe.

In diesem Teilprogramm werden derartige Quadratketten dargestellt.
Die Anzahl der Eckpunkte der N-Ecks legen Sie mit der Maus fest. Ein linker Mausklick auf einen Punkt der Ebene fügt einen Punkt hinzu, ein rechter Klick auf einen schon vorhandenen Punkt löscht diesen. Außerdem können Sie die Eckpunkte mit der Maus verschieben.

Das Programm stellt sofort das N-Eck dar, ermittelt die konvexe Hülle und ergänzt diese mit der Quadratkette.

Diese Beziehung am Vieleck kann verallgemeinert werden. Statt den Lotfußpunkten werden auf jeder Lotgeraden durch P beliebige Punkte gewählt. Dann wird die Figur erneut ergänzt. Wiederum verschwindet die alternierende Quadratsumme.
Diesen allgemeinen Fall können Sie darstellen, in dem Sie am Rollbalken *Parameter* ein anderen Wert als 1 einstellen. Dann wird der Bezugspunkt nach außen verschoben.

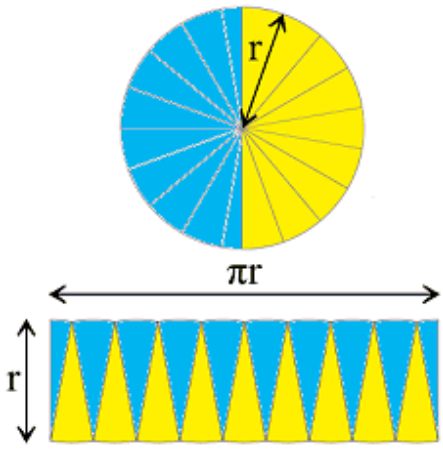
7.29 Scherung eines Rechtecks

Wählen Sie das Thema *Scherung eines Rechtecks*, können Sie nachvollziehen, dass bei einer Scherung einer Fläche deren Flächeninhalt konstant bleibt. Dazu ziehen Sie den Punkt C in eine beliebige Lage.

Zur besseren Veranschaulichung können Sie in das entstandene Parallelogramm Hilfsrechtecke eintragen lassen. Nach dem Cavalierischen Prinzip müssen dann die Flächeninhalte des Rechtecks und des Parallelogramms gleich groß sein. Während der Simulation wird die Zahl der kleinen Rechtecke erhöht und gesenkt.

7.30 Kreisflächeninhalt

Der Flächeninhalt der Kreisfläche A ist nach Archimedes proportional zum Quadrat des Radius r bzw. des Durchmessers d des Kreises.
Um die Formel für den Kreisinhalt zu erhalten, sind Grenzwert-Betrachtungen möglich. Aus der Abbildung ergibt sich eine dieser Möglichkeiten:



Die Kreisfläche wird in einer Anzahl von kongruenten Kreissektoren zerlegt und diese wie im unteren Teil der Abbildung wieder zusammengesetzt. Die Kreisfläche ist dann zerlegungsgleich mit der Fläche der entstandenen Figur.
Diese nähert sich bei immer mehr Kreissektoren einem Rechteck mit dem halben Umfang π r als Länge und dem Radius r als Breite an. Für die Fläche wird damit

$$A = \pi \cdot r^2 \approx 3{,}141592653590\ r^2$$

In diesem Teilprogramm wird das Beschriebene veranschaulicht. Die Anzahl der im Kreis betrachteten Sektoren stellen Sie dazu am Rollbalken ein.

7.31 Satz des Thales, Möndchen des Hippokrates, Polygonmöndchen

Das Thema *Satz des Thales* wird an einer Halbkreisfigur demonstriert. Auch hier können Sie die Lage des Punktes C auf der Kreisperipherie durch Verschieben des Lotfußpunktes F verändern. Die Größe des Durchmessers AB verändern Sie ebenfalls durch Verschieben der Punkte.

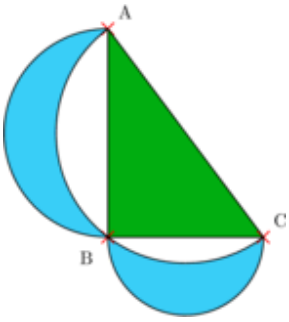
Das Programm zeichnet sofort den Halbkreis und das darin einbeschriebene Dreieck neu. Ganz deutlich erkennt man, dass die Lage des Punktes C auf der Kreisperipherie keinen Einfluss auf die Größe des Peripheriewinkels hat. Entsprechend der Erkenntnis von Thales gilt:

Der Peripheriewinkel über dem Durchmessers eines Kreises ist stets ein rechter Winkel.

Die Simulation bewirkt eine kontinuierliche Verschiebung des Höhenfußpunktes von links nach rechts.

Zusätzlich zur Thales-Figur können Sie auch den *Inkreis* und zwei weitere Paare von Kreisen einzeichnen lassen. Die Paare *Außenkreise* und *Innenkreise* wurden schon in der mittelalterlichen japanischen Wasan-Mathematik untersucht.

Möndchen des Hippokrates



Ein rechtwinkliges Dreieck bietet sehr viele Möglichkeiten für interessante Untersuchungen. Neben Berechnungen mit dem Satz des Pythagoras, dem Kathetensatz und dem Höhensatz oder einfachen trigonometrischen Aufgaben, gibt es auch andere verblüffende Beziehungen.

Auf den griechischen Mathematiker Hippokrates geht das Problem der "Möndchen" zurück.

Über den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise gezeichnet. Zusätzlich wird der Umkreis des Dreiecks eingetragen. Dabei entstehen zwei Flächen in Form eines zunehmenden Mondes, die sogenannten "Möndchen".
Überraschend ist nun, dass die Summe der Flächeninhalte dieser Möndchen gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist. Diese Tatsache war Hippokrates und anderen antiken griechischen Mathematikern bekannt und eine wesentliche Ursache dafür, dass man glaubte eine Möglichkeit für die Quadratur des Kreises zu finden.
In diesem Teilprogramm können Sie zusätzlich diese Möndchen untersuchen.

Polygonmöndchen

Im Teilprogramm *Polygonmöndchen* werden über den Seiten eines regelmäßigen

Polygons mit den Eckenzahlen 3 bis 20 Möndchen konstruiert.
Nur für das regelmäßiges Viereck, d.h. das Quadrat, ist der Flächeninhalt der Möndchen gleich dem des Polygons.

7.32 Winkel am Kreis

Im Unterprogramm *Winkel am Kreis* haben Sie die Möglichkeit, einfache Berechnungen zu Winkeln am Kreis durchzuführen.

An der Kreisfigur werden Peripherie-, Zentri-, Sehnen- und Sehnentangentenwinkel in einander umgewandelt. Hier können Sie die Lage der Peripheriepunkte A, B, C und D an Rollbalken einstellen, ebenso den Durchmesser des Kreises.

7.33 Kreistangenten

In diesem Teilprogramm werden die gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten zweier Kreise konstruiert.
Die Kreise seien k1, k2, deren Mittelpunkte A, B und deren Radien r1, r2, wobei r1 größer oder gleich r2 sei. Schneiden sich beide Kreise, gibt es nur zwei äußere Tangenten, haben sie keine Punkte gemeinsam, zusätzlich zwei innere Tangenten.

Verschiebt man die Tangenten so parallel, dass sie durch B gehen, so würden sie einen Kreis um A mit dem Radius r1 - r2 berühren. Die gesuchten Tangenten konstruiert man damit als Tangenten an einen Kreis um A mit dem Radius r1 - r2 und verschiebt sie parallel.
Berühren sich die beiden Ausgangskreise außen, gibt es nur eine gemeinsame äußere Tangente, deren Konstruktion einfach ist.

Die Lage der beiden Kreismittelpunkte A und B verschieben Sie durch Anklicken und anschließende Bewegung der Maus. Die Größe der Radien können Sie an den Rollbalken einstellen.
Das Programm stellt sofort die äußeren und inneren Tangenten dar. Die Simulation bewirkt eine kontinuierliche Verschiebung des Kreismittelpunktes B von links nach rechts.

In der Tabelle (Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*) sehen Sie die Koordinaten der beiden Mittelpunkte, deren x-Wert Sie eingeben können, und die Koordinaten der Berührungspunkte sowohl der inneren als auch äußeren Tangenten, soweit diese natürlich existieren.
Markieren Sie *Ergebnisse*, werden die Gleichungen der Tangenten angezeigt.

7.34 Apollonius-Problem

Unter einem Apollonius-Kreis versteht man einen Kreis, der andere gegebene

geometrische Stücke, zum Beispiel Punkte oder Geraden, berührt. Der anspruchvollste Fall besteht in der Suche nach Kreisen, die drei gegebene Kreise jeweils berühren.

Schneiden sich die drei Kreise nicht, so existieren genau acht Lösungen. Haben die Ausgangskreise die Mittelpunkte $(x_i;y_i)$ und die Radien r_i, so ergeben sich die gesuchten Kreise als Lösungen des Gleichungssystems:

- $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0$
- $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0$
- $(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0$

In diesem Teilprogramm berechnet und konstruiert das Programm für gegebene Kreise diese acht Lösungen.

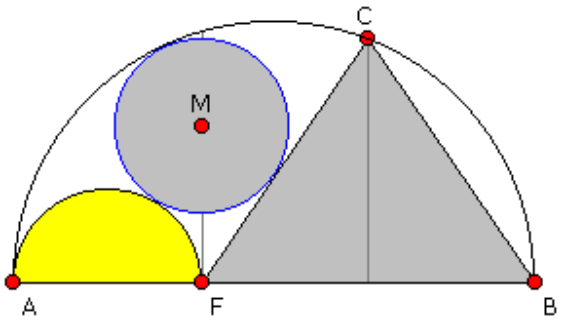
Die Lage der Kreise verändern Sie durch Verschieben derer Mittelpunkte, die Größe durch Verschiebung der drei auf den Peripherien liegenden Punkte A, B und C. Interessant ist nun, dass sich die Anzahl der möglichen Apollonius-Kreise ändert, wenn sich die Ausgangskreise berühren bzw. sogar schneiden.
Die Simulation verschiebt den 1. Kreis bzw. 2. Kreis waagerecht oder senkrecht.

M x	M y	Radius	M x	M y	Radius	M x	M y	Radius
-3	**4**	**2**	-1.1434	0.2817	2.156	-0.848	-2.3104	4.667
-4	**-2**	**1.5**	-2.0008	1.0319	5.132	-1.834	2.7432	3.714
2	**0**	**1**	-2.2	-1.3532	3.413	0.01	0.02	2.99
			-0.2496	3.1571	4.877	-3.6549	1.2798	4.798

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* so gibt Ihnen das Programm die Parameter aller berechneten Kreise an, d.h. die Koordinaten der Mittelpunkte und die zugehörigen Radien:

In den ersten drei Spalten finden Sie die Mittelpunkte und Radien der Ausgangskreise. In diesen Feldern können Sie neue Werte eingeben, die das Programm, nach Bestätigung mit der TAB-Taste oder den Cursor-Tasten, übernimmt und das Apollonius-Problem neu berechnet.

7.35 Sangaku-Problem



Das Sangaku-Problem aus dem Jahre 1803 ist dem der Archimedischen Kreise ähnlich.

Gegeben ist ein Halbkreis, in den ein Kreis mit dem Durchmesser AF eingezeichnet wird. FBC ist weiterhin ein gleichschenkliges Dreieck, das den Kreis berührt. Gesucht ist nun ein Kreis, der Sangaku-Kreis, der sowohl den Kreis AF als auch das Dreieck berührt und sich innerhalb des

Ausgangshalbkreises befindet.

Wird der Durchmesser AB mit 1 und AF = r mit 0 < r < 1 angenommen, so gilt, da MF senkrecht zu AB steht, dass der Radius des Sangaku-Kreises gleich r (1 - r) / (1 + r) ist.
Der Punkt MF liegt dann r (2(1 - r)) / (1 + r) über dem Durchmesser AB.

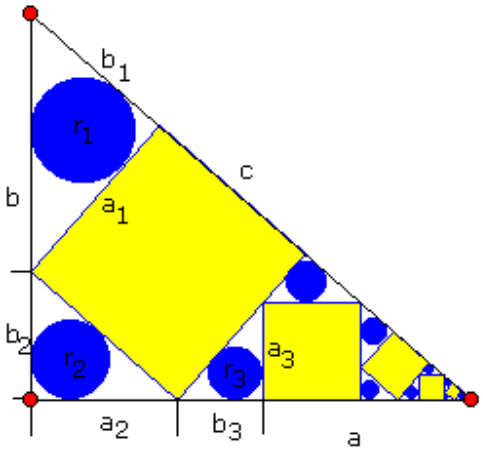
In diesem Teilprogramm können Sie wieder den Fußpunkt F und die Punkte A und B des Durchmessers mit der Maus verschieben. Auch hier zeichnet das Programm den gesuchten Kreis sofort wieder neu.

Anmerkung: Der Nachweis, dass MF tatsächlich senkrecht auf AF steht, ist auf keinen Fall trivial, sondern erfordert intensive Überlegungen!

Sangaku-Problem 2 und 3

Markieren Sie Problem 2, so wird eine zweite Aufgabe aus der Japanischen Tempel-Geometrie dargestellt.
Gesucht sind drei verschieden große Kreise, die einander jeweils paarweise in einem Punkt berühren und die eine gemeinsame Tangente besitzen. Für die Radien gilt dann

$$1/\sqrt{r_3} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$$



Dieses Problem kann nun auf den linken und mittleren Kreis wieder bezogen werden usw., so dass weitere Kreise eingezeichnet werden können.

In diesem Teilprogramm stellen Sie die Lage der Kreise durch Verschieben von A und B ein, die Größe des ersten Kreises durch Verschieben des Punktes C.
Im 3.Sangaku-Problem wird ein Kreis gesucht der wieder Kreis A und Kreis B tangiert, aber zusätzlich eine weitere Gerade berührt.

Sangaku-Problem 4: Quadrate im rechtwinkligen Dreieck

In jedes rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann eine Folge von Quadraten und Kreisen eingeschrieben werden, sodass die Quadrate abwechselnd mit der Hypotenuse und einer Kathete eine Seite gemeinsam haben und die anderen beiden Quadratpunkte auf den anderen Seiten liegen.

Wählen Sie Problem 4, so können Sie diese Folge von Quadraten und Kreisen zeichnen. Die Gestalt des Dreiecks ändern Sie durch Verschieben der Punkte A, B und F.

Sangaku-Problem 5: Kreispackung

Gegeben ist ein Kreis K mit dem Radius R. In diesen werden n gleichgroße Kreise (n > 2), so eingeschrieben, dass sie K von innen und jeweils zwei dieser Kreise sich gegenseitig berühren.
Dann kann in das Innere von K ein weiterer Kreis so eingefügt werden, dass er die anderen Kreise tangiert. Gesucht sind hier die Radien der Kreise. Allgemein gilt:

Zentralkreis $r = R (1 - \sin(\pi/n)) / (1 + \sin(\pi/n))$
Tangentialkreise $\rho = (R - r) /2$

In diesem Programmteil werden je nach Festlegung von n diese Kreise gezeichnet.

7.36 Außen- und Innenpolygone am Kreis

Das Thema *Polygone am Kreis* veranschaulicht das Verfahren der Annäherung der Kreisfläche durch Ein- und Umbeschreiben regelmäßiger N-Ecke. Diese Idee wurde erstmals von Archimedes aufgegriffen.

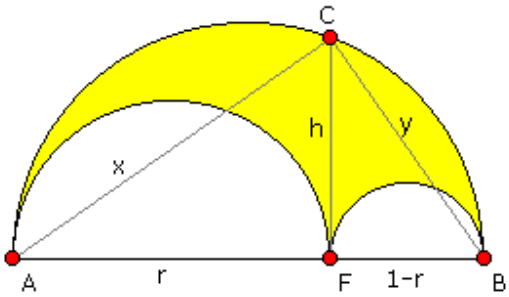
Ob ein umschreibendes oder ein eingeschriebenes Polygon betrachtet wird, stellen Sie an den Markierungsfeldern ein.

Erhöhen Sie die Eckenzahl des Polygons, schmiegt es sich dem Kreis immer besser an. Damit konvergiert der Flächeninhalt der N-Ecke auch gegen den Kreisflächeninhalt.

7.37 Arbelos, Archimedische Kreise und Kreise des Pappus

In diesem Teilprogramm werden der *Arbelos*, die *Archimedischen Kreise* und die *Kreise des Pappus* innerhalb eines Halbkreises untersucht. Wählen Sie an den Auswahlfeldern das Thema aus.

Arbelos



Von den vielen aus Kreisbögen zusammengesetzten Figuren ist eine, die schon von Archimedes untersucht wurde, sehr interessant, der Arbelos, zu Deutsch "Schusterkneif".

Der Arbelos entsteht, indem in einem Halbkreis zwei nebeneinander liegende Halbkreise so eingezeichnet werden, dass sie sich berühren und die Summe ihrer Durchmesser gleich dem Durchmesser des Ausgangskreises ist. Errichtet man an der Berührungsstelle der zwei Halbkreise die senkrecht zum Durchmesser

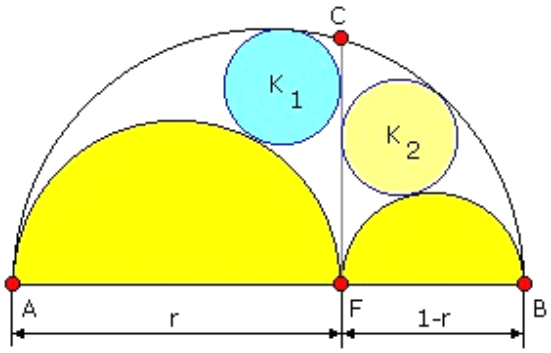
stehende Halbsehne, so besitzt ein Kreis mit dieser Sehne als Durchmesser den gleichen Flächeninhalt wie der Arbelos.

Ist d der Durchmesser des Ausgangshalbkreises und q der Abstand AF, so beträgt der Flächeninhalt des Arbelos $A = \pi\ q\ (d-q)/4$.

In diesem Teilprogramm können Sie den Arbelos untersuchen. Die Größe der Hypotenuse AB des Dreiecks stellen Sie durch Verschieben der zwei Punkte ein. Die Lage des dritten Dreieckspunktes C verändern Sie ebenfalls, indem Sie mit der Maus den Lotfußpunkt F längs der Hypotenuse verschieben. Das Programm stellt Ihnen sofort den Arbelos dar und ermittelt die entsprechenden Stücke sowie den Flächeninhalt des Arbelos.

Den *Sekantenkreis* sowie die gemeinsame *Arbelostangente* und das zugehörige *Arbelosrechteck* und den *Tangentenkreis* können Sie an den Markierungsfeldern ein- und ausschalten.
Die Simulation bewirkt eine kontinuierliche Verschiebung des Höhenfußpunktes von links nach rechts.

Archimedische Kreise



Zur Konstruktion geht man wie folgt vor:
Über dem Durchmesser eines Kreises werden Halbkreise gezeichnet, sodass ein Arbelos entsteht. Errichtet man die Senkrechte auf dem Durchmesser am Berührungspunkt der zwei Halbkreise, so existieren zwei Kreise K_1 und K_2, für die gilt:

1. Beide Kreise berühren die Senkrechte, die zwei kleinen Halbkreise und den Ausgangshalbkreis
2. Beide Kreise sind kongruent

Diese Kreise werden als Archimedische Kreise bezeichnet. Der Radius der Kreise ist gleich (AB)(BC) / (AC) und für AC = 1 und AB = r somit

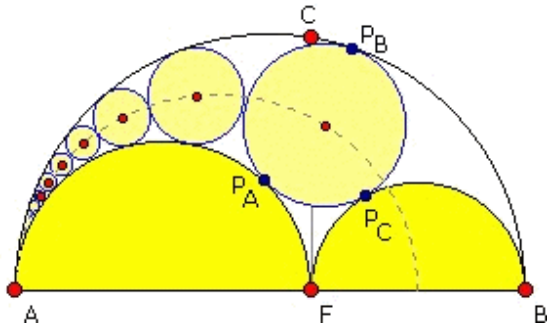
$$R=r/2\ (1-r).$$

Über die Markierungsfelder *verschobene Kreise, Apollonius-Kreis* und *Bankoff-Kreis* können Sie weitere besondere Kreise darstellen lassen. Eine genauere Beschreibung finden Sie im Lexikon des Programms. Interessant ist, dass alle weiteren gezeichneten Kreise den gleichen Radius wie die Archimedischen Zwillingskreise haben.

Kreise des Pappus

Ein weiteres Problem an der Grundfigur der Archimedischen Kreise ist die von Pappus erstmals beschriebene Folge von Kreisen, die sogenannte Reihe des

Pappus.

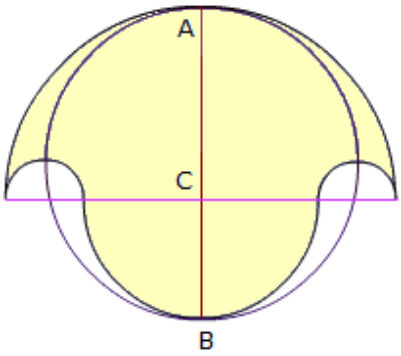


Gegeben ist ein Halbkreis und in diesem ein Arbelos. Unter der Pappus-Reihe versteht man nun die Folge von Kreisen, die derart in den Arbelos eingefügt werden, dass sie sowohl den Arbelos als auch den vorhergehenden Pappus-Kreis berühren. Diese Reihe existiert immer und ist unendlich, wenngleich die Radien der Kreise gegen 0 konvergieren.

In diesem Programmteil zeichnet das Programm bei Wahl diese Kreise des Pappus in beide Richtungen vom Fußpunkt F aus.
Zwischen den Halbkreisen des Arbelos und den Kreisen der Pappus-Reihe können Apollonius-Kreise, d.h. Kreise, die drei Kreise berühren, eingetragen werden. Mit diesen erweiterten Kreisen können Apollonius-Kreise immer höherer Ordnung konstruiert werden.
Das Programm zeichnet die erweiterten Pappus-Kreise 2. und 3. Ordnung bei Markierung der zugehörigen Felder.

7.38 Salinon

Eng verbunden mit dem Arbelos ist auch die Figur des Salinon, das „Salzfass des Archimedes"; in der Abbildung die farbige Fläche. Archimedes gab als Erster in seinem „Buch der Sätze" den Inhalt der Fläche an.



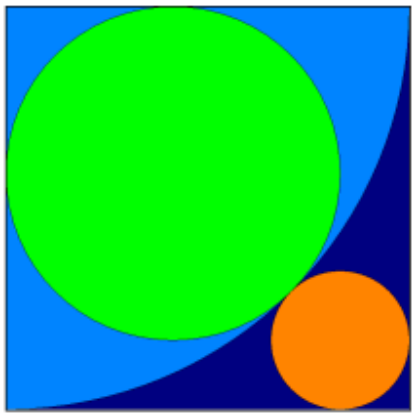
In der archimedischen Fassung liegt dabei der Punkt C genau zwischen A und B. Dies ist notwendig.
Wird die Salinonfläche durch einen Halbkreis um C mit dem Radius AC, einem Halbkreis um C mit dem Radius CB und zwei ausschneidende weiße Halbkreise gebildet, so ist der Flächeninhalt stets gleich dem Flächeninhalt des Kreises mit dem Durchmesser AB.

In diesem Teilprogramm wird die Figur des Salinon gezeichnet. Die Lage der Punkte A, B und C können Sie wieder mit der Maus verändern.

7.39 Wasan-Geometrie

Wasan ist die Bezeichnung für die in Japan während der Edo-Zeit (1603-1867) betriebene Mathematik. Wasan entstand unter dem Einfluss chinesischer Mathematikbücher, insbesondere Suanxue Qimeng ("Einführung in mathematische Studien") von Zhu Shijie und das bis in die Han-Zeit zurückreichende Jiuzhang Suanshu ("Die 9 Kapitel der mathematischen Kunst").

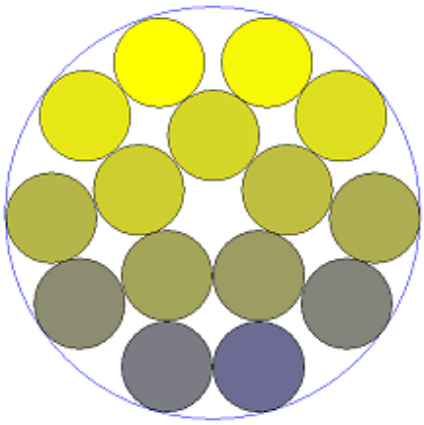
Eine besondere Form dieser Mathematik ist das Sangaku, d.h. Holztafeln, auf denen geometrische Rätsel beschrieben wurden. Diese Tafeln wurden in Tempeln als Dank für eine Shinto-Gottheit ausgehängt.



In diesem Teilprogramm werden einige geometrische Probleme der Wasan-Geometrie dargestellt. Ausgangspunkt ist stets ein Quadrat der Seitenlänge 1, in das Kreise verschiedener Radien so eingefügt werden, dass sie sich gegenseitig berühren.
Die Abbildung zeigt eine der Aufgabenstellungen mit drei Kreisen.

Das Problem wählen Sie in der Liste aus. Daraufhin werden Quadrat und Kreise gezeichnet und die Kreisradien links angezeigt. Die Darstellung der einzelnen Kreise können Sie an den Markierungsfeldern links neben der Radiusangabe zu- und abschalten.
Die verwendeten Farben können Sie an den entsprechenden Schaltern auswählen.

7.40 Kreise im Kreis, Kreispackung



Unter einer Kreispackung versteht man die Anordnung von n möglichst großen Kreisen mit gleichem Radius in einer anderen geometrischen Form.
In diesem Teilprogramm werden die n Kreise in einen großen Kreis eingepasst.

Während man für 3, 4, 5 oder 6 Kreise die optimale Anordnung beweisen kann, wird für größere n die Kreispackung mit möglichst großen Kreisen über Computer näherungsweise ermittelt. Zeigen kann man, dass für den Grenzübergang $n \to \infty$ sich eine maximale Dichte von

$$\rho_{\text{kreisförmige Anordnung}} = 3/4 = 75\ \%$$

ergibt.

An dem Rollbalken *Kreiszahl* stellen Sie die Anzahl der Kreise von 2 bis 64 ein. Das Programm zeigt die bisher bekannte beste Lösung.
Mit weiteren Einstellungsmöglichkeiten können Sie die Darstellung noch verändern.
Wählen Sie *Radien abnehmend*, so wird die beste Lösung gezeigt, bei der die Kreise mit abnehmendem Radius ermittelt werden. Die Kreisradien bilden dabei eine arithmetische Folge.

7.41 Theorem von Monge

Sind drei Kreise p, q, r gegeben und sind P und P' das innere bzw. äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise q und r, Q und Q' das innere bzw. das äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise r und p und R und R' das innere bzw. das äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise p und q, so gilt

1. Satz von Monge
Die Punkte P', Q' und R' liegen auf einer Geraden. Das heißt, die paarweisen äußeren Ähnlichkeitszentren dreier Kreise liegen stets auf einer Geraden.

2. Satz von Monge
Die Punkte P' , Q und R liegen auf einer Geraden; die Punkte P, Q' und R liegen auf einer Geraden; die Punkte P, Q und R' liegen auf einer Geraden.
Das heißt, zwei paarweise innere Ähnlichkeitszentren dreier Kreise und das äußere Ähnlichkeitszentrum des verbliebenen Paars liegen auf einer Geraden.

Liegen die Kreise so, dass jeweils die Außentangenten zweier Kreise existieren, so sind die äußeren Ähnlichkeitszentren gerade die Schnittpunkte der Außentangenten. Analoges gilt für die inneren, gemeinsamen Tangenten.

In diesem Teilprogramm werden beide Theoreme demonstriert. Die äußeren Ähnlichkeitszentren haben die Bezeichnung X, Y und Z, die inneren S, T und U. Markieren Sie das Feld *2.Monge-Geraden*, so werden die Geraden nach dem 2.Satz gezeichnet. Markieren Sie *äußere Tangenten*, so erhalten Sie auch diese dargestellt, so fern sie existieren.

Die Größe der Radien der drei Kreise stellen Sie an den Rollbalken ein, die Lage der Mittelpunkte der Kreise verändern Sie mit der Maus.

7.42 Ford-Kreise

Unmittelbar mit der Farey-Folge (siehe Lexikon) sind die Ford-Kreise, benannt nach Lester R. Ford, verbunden. Die Kreise wurden erstmals 1938 in "American Mathematical Monthly, volume 45, number 9" von Ford beschrieben.

Eine Eigenschaft der Ford-Kreise ist, dass sie sich nicht überlappen, aber gegenseitig berühren. Die Ford-Kreise zeigen, je nach Auflösung, die Farey-Reihe einer bestimmten Ordnung.

Ist p / q der vollständig gekürzte, beschreibende Term eines Ford-Kreises, so hat der Kreis den Mittelpunkt $M(p / q, 1 / (2q^2))$ und den Radius $1 / (2q^2)$.
Die Ford-Kreise können auch als Teilmenge der Kreise der Apollonius interpretiert werden, die von den Geraden $y = 0$, $y = 1$ und einem Kreis $C(0;1)$ erzeugt werden.

In diesem Teilprogramm werden die Ford-Kreise 1. bis 12. Ordnung gezeichnet. Die Mittelpunkte der Kreise werden in der *Tabelle* angezeigt.

7.43 Winkel an der Uhr

In diesem kleinen Teilprogramm werden die an einer Zeigeruhr auftretenden Winkel ermittelt und angezeigt.

An den Rollbalken stellen Sie die Zeit in Stunden, Minuten und Sekunden ein. Das Programm zeichnet die Uhr und berechnet die Winkel des Stundenzeigers, des Minutenzeigers und den Differenzwinkel.
Während der Simulation wird die Zeit fortlaufend erhöht.

Markieren Sie das Feld *Systemzeit nutzen*, verwendet das Programm während der Simulation die aktuelle Zeit Ihres Computers. Veränderungen an den Rollbalken werden in diesem Fall nicht berücksichtigt.

7.44 Inversion einer Geraden bzw. eines Kreises

Durch Jakob Steiner wurde 1830 eine besondere Form der geometrischen Beziehung eingeführt, die Inversion am Kreis.

Gegeben ist ein Kreis K mit dem Mittelpunkt O, dem Zentrum der Inversion, und dem Radius r. P ist ein von O verschiedener Punkt. Dann ist der zu P inverse Punkt P' derjenige auf dem Strahl OP, der von O die Entfernung $OP' = r^2 / OP$ besitzt.
Eine Inversion vertauscht das Innere des Kreises K mit dem Äußeren. Die einzigen Punkte, die unverändert bleiben, sind die auf der Kreisperipherie liegenden Punkte. Bei einer Inversion werden Geraden und Kreise wieder in Geraden und Kreise überführt. Es gilt:

Eine Inversion an einem Kreis überführt

- eine Gerade durch O in eine Gerade durch O
- eine Gerade, die nicht durch O geht, in einen Kreis durch O
- einen Kreis durch O in einer Geraden, die nicht durch O geht
- einen Kreis, der nicht durch O geht, in einem Kreis, der nicht durch O geht

In den Teilprogrammen *Kreisinversion einer Geraden* und *Kreisinversion eines Kreises* können Sie dies untersuchen.
Dabei können Sie am Rollbalken den Radius im Inversionskreis einstellen und die Lage des Mittelpunktes bzw. des invertierten Kreises oder der Geraden durch Mausklick verschieben.

Im Teilprogramm *Inversion eines Kreises* können Sie wahlweise einen 2.Kreis mit dem Mittelpunkt N und dem Peripheriepunkt Q zuschalten, der ebenfalls invertiert

wird.

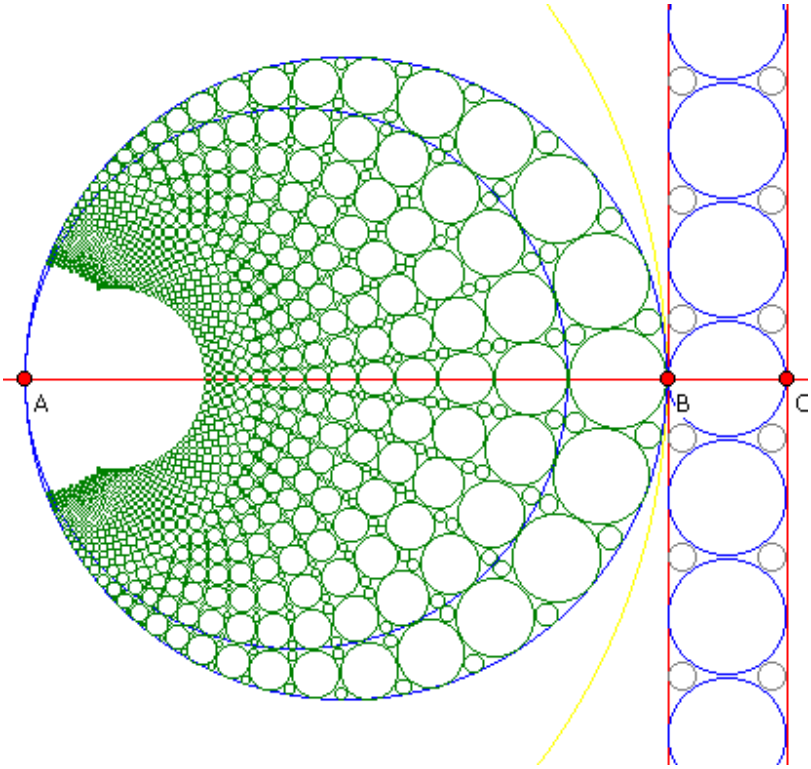
Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* so können Sie die Inversion am Kreis auch rechnerisch nachvollziehen. In die Tabelle trägt das Programm zum einen die Koordinaten der Ausgangsstücke (Mittelpunkt des Kreises, Lage der Geraden bzw. Größen des zweiten Kreises) als auch die Koordinaten der berechneten Stücke ein. Einige der Tabellenfelder sind farbig unterlegt. Hier können Sie auch Koordinaten und Größen direkt eingeben, die daraufhin vom Programm übernommen werden.

7.45 Inversion am Arbelos

Im Teilprogramm *Arbelos* wurden die *Kreise des Pappus* erklärt. Deren Berechnung und die Herleitung der entsprechenden Gleichungen ist auf klassischem Weg nicht so einfach. Eine äußerst elegante Methode ergibt sich wieder über die Inversion am Kreis.

Ausgangspunkt ist ein Kreis, an den eine Tangente gezeichnet wird und eine weitere Gerade parallel zu dieser Tangente. Die Inversion dieser Geraden am Ausgangskreis ergibt zwei Kreise, von denen einer im anderen liegt.

Werden nun zwischen die beiden Geraden Kreise mit konstantem Radius eingeschrieben und invertiert, so erhält man gerade die Kreise des Pappus.



In diesem Programmteil können Sie diese Konstruktion erstellen. Durch Verschiebung der Punkte A, B und C stellen Sie die Ausgangsgrößen ein. An den Rollbalken wählen Sie weiterhin aus, wie viele Kreise invertiert werden sollen. Mit der Inversionstiefe können Sie einstellen, ob die invertierten Kreise erneut invertiert werden sollen usw.

Die Markierungsfelder erlauben es, zusätzliche Objekte darzustellen. *Punkte* hebt die Kreismittelpunkte deutlicher hervor, *Hilfsstrecken* zeichnet vom Punkt A aus Strecken zu den Mittelpunkten der zu invertierenden Kreise, *Bankoff-Kreise* ermöglicht die Darstellung zusätzlicher Kreise, ebenso das Schaltfeld *Kreise 2. Stufe.*

7.46 Steiner-Kette

Gegeben sind zwei Kreise, von denen einer vollständig im Inneren des anderen liegt.
Unter einer Steiner-Kette versteht man dann eine Folge von Kreisen, die beide Ausgangskreise und jeweils zwei andere Kreise der Kette tangential berühren. Zusätzlich wird gefordert, dass die Kreise der Kette keine "Lücke" lassen.

Eine derartige Steiner-Kette kann als Kreisinversion von Kreisen verstanden werden, welche einen Ausgangskreis von innen berühren. Dabei wird in dem Ausgangskreis die entsprechende Anzahl von Innenkreisen symmetrisch angeordnet. Diese werden nun an einem weiteren Kreis, dem Inversionskreis, nach den Regeln der Kreisinversion invertiert.

In diesem Teilprogramm können Sie solche Steiner-Ketten konstruieren lassen. Legen Sie dazu an den Rollbalken die *Kreiszahl* n sowie die zwei Radien des Ausgangs- und Inversionkreises fest. Diese beiden Kreise können Sie auf Wunsch auch anzeigen lassen.

Klicken Sie auf den *Simulation*-Schalter, so werden die in den Ausgangskreis eingefügten Kreise um den Mittelpunkt A gedreht. In der Folge verändern auch die Kreise der Steiner-Kette ihre Lage.

7.47 Hyperbolische Inversion

Im Teilprogramm Poincaré-Scheibe können Sie einige Untersuchungen zu einer nichteuklidischen, hyperbolischen Geometrie durchführen.
Das Teilprogramm *Hyperbolische Inversion* basiert auf dieser Geometrie Poincarés.

Auf dem Horizont der Poincaré-Scheibe werden uneigentliche Punkte A, B, C, ... betrachtet und für diese die hyperbolischen D-Geraden gezogen.
Diese Geraden; in der Abbildung euklidische Kreisbögen; werden nun an den Kreisen invertiert und die Bilder eingetragen. Invertiert man nun alle D-Geraden erneut an allen anderen D-Geraden, so entsteht ein interessantes Muster. Derartige Muster sind in der Kunst sehr beliebt. Zu einer wahren Meisterschaft hat dies M.C.Escher gebracht, dessen Grafiken weltweit berühmt sind.

Hier können Sie die *Anzahl der Punkte* und die *Inversionstiefe* an den Rollbalken einstellen.
Die Ausgangspunkte A, B, C, ... befinden sich für einen Wert *Größe* = 1 auf dem Horizont. Verändern Sie diesen Wert, so verschiebt das Programm die Punkte zum Zentrum. Auch in diesem Fall entstehen sehr interessante Gebilde.

7.48 Poincaré-Scheibe

Der große französische Mathematiker Henri Poincaré beschrieb ein einfaches Modell einer Nicht-Euklidischen Geometrie: die Poincaré-Scheibe.

Gegeben ist ein Euklidischer Kreis und die Punkte sowohl im Inneren als auch auf der Peripherie. Dann werden definiert:
der Horizont ... der Kreis, die Scheibe ... das innerhalb des Horizonts liegende Gebiet, ein D-Punkt ... ein Punkt der Scheibe und eine D-Gerade ... ein Euklidischer Kreisbogen, der den Horizont senkrecht schneidet.

Eine D-Strecke ist dann der Teil einer D-Geraden zwischen zwei D-Punkten, wobei die D-Punkte zur D-Strecke gehören.
Mit diesen Definitionen kann nun eine vollständige Geometrie aufgebaut werden, in der aber zum Beispiel das Parallelenaxiom nicht gilt.

In diesem Teilprogramm können Sie einfache D-Geraden zeichnen und verändern. Legen Sie dazu fest, wie viele D-Punkte angezeigt werden sollen und verschieben Sie diese nach Wunsch an eine andere Position.
Das Programm stellt die entsprechenden D-Geraden dar und ermittelt für die D-Strecken AB, AC und BC deren Länge. Dazu müssen Sie die *Tabelle* zuschalten. Während der Simulation wird A bewegt.

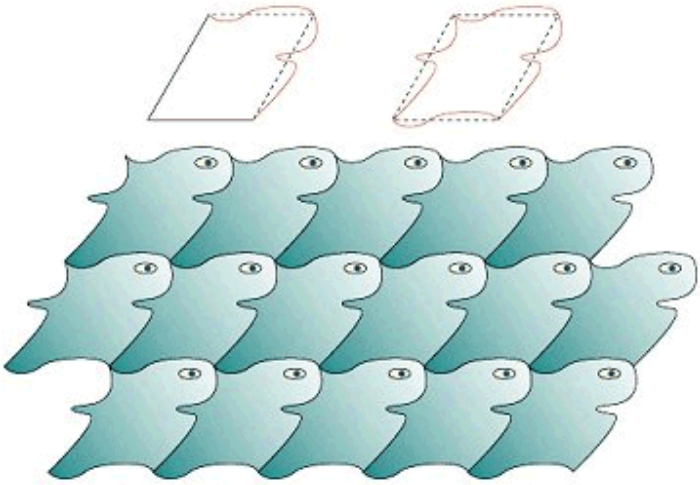
7.49 Fibonacci-Sonnenblume

Die Betrachtung der Kerne im Fruchtstand der Sonnenblume zeigt, dass hinter den auf den ersten Blick zufällig erscheinenden Anordnungen tiefere mathematische Gesetzmäßigkeiten stehen können.
Die Kernanordnungen bei der Sonnenblume sind ein Beispiel für ein Phänomen, das in der Botanik mit dem Begriff "Phyllotaxis" = "Blattabstand" bezeichnet wird. Die meisten Pflanzen bilden in regelmäßigen Abständen neue Blätter. Die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Blattstellung zu untersuchen, ist ein eigenes Wissenschaftsgebiet.

Eine der wichtigsten Beobachtungen ist, dass zeitlich aufeinander folgende Blätter mit sehr geringen Abweichungen stets den gleichen, für die jeweilige Pflanze charakteristischen Winkel einschließen. Dem liegt die Tatsache zugrunde, dass Wachstumsprozesse von Pflanzen in der Regel einer logarithmischen Spirale folgen.
Die ersten Erklärungsversuche für das Auftreten der Fibonacci-Zahlen bei Pflanzen gab es schon im 18. Jahrhundert.
Durch Untersuchungen kann man zeigen, dass der Winkel des Goldenen Schnitts bevorzugt wird; gegen den Goldene Schnitt wiederum konvergiert das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen.

In diesem Teilprogramm wird der Fruchtstand einer Sonnenblume auf diesem

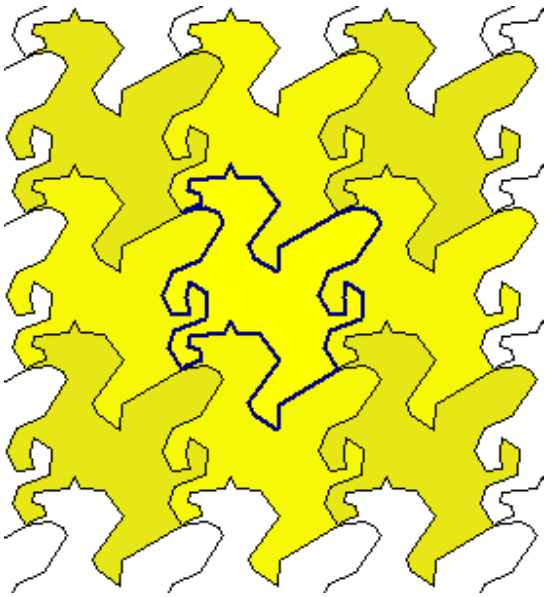
Goldenen Schnitt berechnet und dargestellt. Darüber hinaus können Sie auch das Verhältnis aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen als *Parameter* einstellen. Wählen Sie *Außenwachstum*, so wird zusätzlich noch berücksichtigt, dass die Samen von innen nach außen in der Größe zunehmen.



7.50 Escher-Heesch-Konstruktionen

Durch den niederländischen Künstler M.C.Escher wurden mathematische Strukturen besonders umfangreich in die darstellende Kunst eingeführt. Außer den faszinierenden „unmöglichen" Figuren, wie zum Beispiel dem Escher-Würfel, beschäftigte er sich vor allem mit Flächenfüllungen. Intuitiv gelang es ihm eine Vielzahl möglicher Parkettierungen der Ebene in seinen Grafiken zu verwenden.

1963 gelang Heinrich Heesch und Otto Kienzle der Nachweis, dass genau 28 verschiedene Klassen solcher Escher-Parkette existieren. Diese entstehen durch Translationen, Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen von Polygonzügen.



In der Abbildung werden zwei benachbarte Seiten eines Parallelogramms beliebig verändert und zu den gegenüberliegenden Seiten verschoben. Aneinandergefügt erhält man so eine lückenlose Überdeckung der Ebene.
Dieses Escher-Parkett wird in der Fachliteratur mit TTTT bezeichnet, für 4 Translationen, und ist der Typ der Heesch-Klassifizierung.

In diesem Teilprogramm können Sie für die 28 möglichen Heesch-Typen eine Parkettierung der Ebene erzeugen. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit werden dabei spezielle Vielecke vorgegeben.

In der Liste *Heesch-Typ* wählen Sie den Typ aus. Das Programm zeigt nun das erzeugende Vieleck, die *Anfangsmasche*, an. Einige Punkte (Markierung *Hilfspunkte*) sind hellblau hervorgehoben und können mit der Maus verschoben werden. Je nach Heesch-Typ werden dabei andere Punkte der Masche

verschoben.
Mitunter werden veränderte Kanten zur gegenüberliegenden Seite verschoben oder zu benachbarten Seiten gedreht oder aber an den Mittelpunkten von Seiten gespiegelt und vieles anderes mehr.
Insgesamt entsteht eine vollständige Überdeckung der Zeichenfläche.
Möchten Sie selbst experimentieren, so sollten Sie zu Beginn die Anzahl der Punkte je Strecke festlegen. Je höher der Wert ist, desto mehr Veränderungen der Linien können Sie durchführen.

Zur optisch schöneren Darstellung können Sie auch zwei verschiedene *Färbung*en einstellen. Ebenso ist die *Darstellungsgröße* veränderbar.
Wählen Sie *Einzelfarben*, so sind die benutzten Farben auch über die Schalter *Farbe 1* bis *Farbe 4* veränderbar.
Die von Ihnen gestalteten Muster sind über die zwei Schalter mit der Abbildung einer Diskette speicherbar und zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufrufbar.

Vordefiniert sind 12 Beispiele, die Sie am unteren Rollbalken wählen können. Die ersten drei Beispiele entsprechen bekannten Darstellungen aus Escher-Grafiken, z.B. der abgebildete Pegasus der Escher-Grafik No.105. Grundlage dieser Grafik ist die Symmetriegruppe p1, d.h. die Heesch-Konstruktion Typ 1.

Hinweis: Da die erzeugte Grafik wieder als Vektorgrafik speicherbar und kopierbar ist, sowie auch als solche gedruckt werden kann, haben Sie hier die Möglichkeit wirklich ansprechende Parkettierungen zu erzeugen und weiterzuverarbeiten.

7.51 Eulerscher Graph, Euler- und Hamiltonkreis

Ist ein Graph mit Knoten und Kanten gegeben, so kann nach einer Eulerschen Linie (Eulerweg, Eulerkreis) gesucht werden.
Dabei versteht man unter einem Eulerweg einen geschlossenen Kantenzug längs des Graphen, bei dem jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Ein bekanntes Beispiel ist das Königsberger Brückenproblem. Dort sollen alle sieben Brücken bei einem Spaziergang genau einmal passiert werden. Leonhard Euler beschrieb dieses Problem 1736 und begründete auch, warum es keine Lösung geben kann.
Eine Eulersche Linie existiert, wenn von jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten ausgeht. Eine geschlossene Linie kann aber auch existieren, wenn maximal zwei Knoten mit ungeradzahliger Kantenzahl existieren. Einen Graph, der einen Eulerkreis besitzt, bezeichnet man auch als Eulerschen Graphen.

In diesem Teilprogramm können Sie Graphen auf die Existenz von Euler- und Hamiltonkreisen untersuchen. Zuerst müssen Sie einen Graphen mit Knoten und Kanten konstruieren bzw. von der Festplatte laden.

Koordinaten der Knoten

Einen neuen Knoten des Graphen geben Sie ein, indem Sie unter *X* = und *Y* = die Koordinaten des Knotens eintragen. Quittieren Sie mit *Knoten hinzufügen*, wird der Knoten der Liste hinzugefügt und sofort dargestellt.
Im linken Fensterteil wird der entstehende Graph gezeigt. Im rechten Teil wird der Eulersche Kreis später gezeichnet.

Eingetragene Knoten können Sie wieder löschen (Schalter *Löschen*) oder deren Koordinaten ändern. Für das Ändern empfiehlt sich folgendes Verfahren: Klicken Sie einen Knoten in der Knotenliste mit der Maus doppelt an, so werden dessen Koordinaten in die Eingabezeilen übertragen. Geben Sie dort nun die Änderung ein und bestätigen Sie mit dem Schalter *Ändern*.

Koordinatenänderungen der Knoten können Sie auch mit der Maus durchführen: Klicken Sie im linken Darstellungsbereich einen Knoten an und bewegen Sie die Maus (Maustaste festhalten), so werden die Koordinaten automatisch übernommen.
Die Knoten werden automatisch mit A beginnend beschriftet. Markieren Sie das Feld *Punkte beschriften*, werden die Buchstaben auch angezeigt.

Beachten Sie bitte, dass Sie maximal 26 Knoten je Graph festlegen können!

Kanten des Graphen

Nach der Eingabe der Knoten müssen die durch Kanten miteinander verbundenen Knoten angegeben werden.
Dazu können Sie unter *Kante von ... bis* den Anfangs- und Endknoten einer Kante eintragen und mit dem Schalter *Hinzufügen* wieder bestätigen.

Effektiver und vor allem schneller ist es, wenn Sie die Kanten mittels Maus zeichnen.
Klicken Sie dazu mit der rechten (!) Maustaste den Anfangsknoten der Kante an. Bewegen Sie nun die Maus bei festgehaltener rechter Maustaste, so sehen Sie eine Strecke. Verschieben Sie die Maus einfach auf den Endknoten und geben Sie die Taste frei.
Das Programm übernimmt die eingezeichnete Kante sofort in die Kantenliste.

Beachten Sie bitte, dass Sie zwei Knoten durch maximal eine Kante verbinden können.

Ermittlung des Eulerkreises

Nachdem der Graph konstruiert wurde, können Sie nach einem Eulerweg suchen lassen. Klicken Sie dazu auf den Schalter.

Das Programm analysiert den Graphen und testet, ob ein Eulerweg existiert. Ist

dies der Fall, beginnt die Suche. Für Graphen ohne ungerade Knoten wird ab dem Knoten A gesucht, bei ungeraden Knoten beginnend ab diesen Stellen. Im rechten Fensterteil werden die Eulerwege in einer Liste angezeigt, und zwar in der Reihenfolge der besuchten Knoten.

Bei größeren Graphen mit relativ vielen Kanten kann die Suche einige Zeit in Anspruch nehmen. Abbrechen können Sie jederzeit über den Schalter *Abbruch*. Das Programm stoppt auch automatisch, wenn 100000 Eulerwege gefunden wurden.

Anzeige eines Eulerkreises

Wurden Eulersche Kreise gefunden, so können Sie diese nach beendeter Suche veranschaulichen. Markieren Sie dazu einen Eintrag in der Liste der *Eulerwege* und quittieren Sie mit *Eulerweg anzeigen*. Ein Doppelklick auf einen Eintrag startet die Anzeige sofort.
Das Programm zeigt Ihnen nun im rechten Fensterteil, wie in der Abbildung zu sehen, Schritt für Schritt die Kantenfolge des Eulerweges an.

Hamilton-Kreis

Ein Elementarkreis in einem Graphen, der alle Knoten des Graphen genau einmal durchläuft, heißt Hamilton-Kreis. Ist ein Graph mit Knoten und Kanten gegeben, so kann nach einem solchen Hamilton-Kreis gesucht werden.
Die Springertour ist eine berühmte Anwendung eines Hamilton-Kreises: Der Springer soll sich auf einem Schachbrett so bewegen, dass er jedes Feld nur einmal passiert und zum Startpunkt zurückkehrt.

Mitunter kann man auf einem Graphen keinen geschlossenen Hamilton-Kreis finden: Es gelingt nicht, zum Anfangsknoten zurückzukehren. Ist es trotzdem möglich, jeden Knoten genau einmal zu erreichen, ohne den Weg zu schließen, so spricht man von einem Hamilton-Pfad.
Nachdem der Graph konstruiert bzw. geladen wurde, können Sie nach Hamilton-Kreisen oder Pfaden suchen lassen. Markieren Sie dazu links oben *Hamiltonkreis*.

Mit dem Schalterklick beginnt das Programm mit der Suche. Im Normalfall wird ab dem Knoten A gesucht. Markieren Sie einen Knoten in der Knotenliste, beginnt die Suche ab diesem Knoten.
Im rechten Fensterteil werden die gefundenen Ergebnisse in einer Liste angezeigt, und zwar in der Reihenfolge der besuchten Knoten.
Wird kein geschlossener Hamilton-Kreis ermittelt, so können Sie auch nur nach *Hamilton-Pfaden* suchen lassen, indem Sie das entsprechende Feld markieren.

Bei größeren Graphen mit relativ vielen Kanten kann die Suche sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Abbrechen können Sie wieder über den Schalter *Abbruch*.
Das Programm stoppt auch automatisch, wenn 100000 Kreise bzw. Pfade gefunden wurden. Die Anzeige des Hamiltonkreises verläuft in gleicher Weise wie

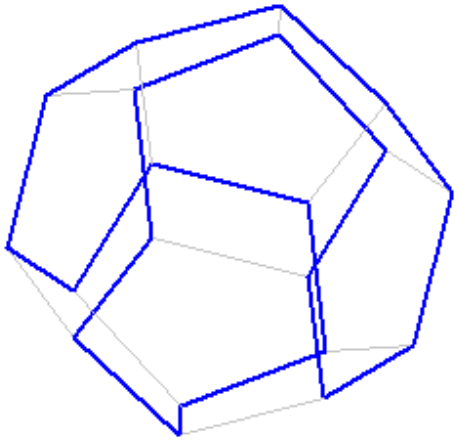
die Darstellung des Eulerkreises.

Weitere Teilfunktionen

Einen konstruierten Graphen, konkret dessen Knoten und Kanten, können Sie über den Schalter auf der Festplatte speichern und mittels zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden. Zum Lieferumfang gehören einige Dateien, die Sie testen können.
Möchten Sie einen neuen Graphen zusammensetzen, so können Sie über alle Knoten und Kanten in den zwei Listen löschen.

7.52 Hamilton-Wege auf Polyedern

Ein Elementarkreis in einem Graphen, der alle Knoten des Graphen genau einmal durchläuft, heißt Hamilton-Kreis. Ist ein Graph mit Knoten und Kanten gegeben, so kann nach einem solchen Hamilton-Kreis gesucht werden.



Mitunter kann man auf einem Graphen keinen geschlossenen Hamilton-Kreis finden: Es gelingt nicht, zum Anfangsknoten zurückzukehren. Ist es trotzdem möglich, jeden Knoten genau einmal zu erreichen, ohne den Weg zu schließen, so spricht man von einem Hamilton-Pfad. Auch auf den Kanten von Polyedern kann es Hamilton-Kreise und -Pfade geben.

In diesem Teilprogramm können verschiedene Polyeder dargestellt werden. Anschließend können Hamilton-Wege gesucht werden.

Ermittlung des Hamilton-Kreises oder -Pfades

Nach Auswahl des Polyeders in der Liste und der Darstellung über den entsprechenden Schalter können Sie nach Hamilton-Kreisen oder Pfaden suchen lassen. Klicken Sie dazu auf den Schalter *Hamilton-Wege*.

Das Programm beginnt sofort mit der Suche. Dabei wird stets ab dem ersten Eckpunkt des Polyeders gesucht. Neben dem Schalter werden die gefundenen Ergebnisse in einer Liste angezeigt, und zwar in der Reihenfolge der besuchten Eckpunkte.
Wird kein geschlossener Hamilton-Kreis ermittelt, so können Sie auch nur nach *Hamilton-Pfaden* suchen lassen, indem Sie das Feld markieren.

Bei größeren Polyedern mit relativ vielen Kanten kann die Suche sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Abbrechen können Sie jederzeit über den Schalter *Abbruch*.

Das Programm stoppt auch automatisch, wenn 100000 Kreise bzw. Pfade gefunden wurden. Während der Suche zeigt das Programm die Anzahl der schon gefundenen Kreise und Pfade an.

Anzeige eines Hamilton-Kreises bzw. -Pfades

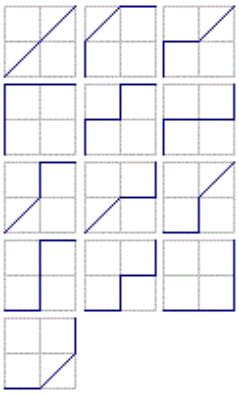
Wurden Ergebnisse gefunden, so können Sie diese nach beendeter Suche veranschaulichen. Markieren Sie dazu einen Eintrag in der Liste. Im rechten Fensterteil wird der Hamilton-Weg dargestellt.
Wie bei anderen Polyederdarstellungen können die Polyeder mithilfe der Standardschalter vergrößert oder verkleinert dargestellt bzw. gedreht werden (linke Maustaste oder Schalter *Rotation*).
Markieren Sie *Punkte beschriften*, so zeigt das Programm die Nummer des im Hamilton-Pfad genannten Punktes auch in der rechten Darstellung an.

7.53 Wege im Rechteckgitter

Gegeben ist ein rechteckiges Gitter der Größe a x b. Gesucht ist die Anzahl aller möglichen Wege vom Punkt (0,0) nach (a,b), wenn ausschließlich Schritte (1,0), (0,1) und (1,1) möglich sind.

Durch Delannoy wurde eine mathematische Lösung gefunden. Die Delannoy-Zahlen werden definiert durch:

$$D(a,b) = D(a-1,b) + D(a,b-1) + D(a-1,b-1)$$ wobei D(0,0) = 1 ist.



Diese Zahlen geben die Anzahl der gesuchten Wege vom Punkt (0,0) zum Punkt (a,b) an. Gilt n = a = b, so ergeben die Delannoy-Zahlen die Anzahl der direkten Königszüge im Schach. In der Abbildung sind die 13 möglichen Wege für ein 2 x 2 Feld eingezeichnet.

Für die ersten Delannoy-Zahlen D(n,n) ergibt sich für n = 0,1,2,3,…:
1, 3, 13, 63, 321, 1683, 8989, 48639, 265729, 1462563, 8097453, 45046719, 251595969, 1409933619, 7923848253, 44642381823, 252055236609, 1425834724419, 8079317057869, 45849429914943, 260543813797441, …

Eng verbunden mit den Delannoy-Zahlen sind die Schröder-Zahlen.
Die Schröder-Zahl S(n) ist die Anzahl der möglichen Wege auf einem Gitter vom Punkt (0,0) zum Punkt (n,n), wenn nur Schritte (0,1), (1,0) und (1,1) zugelassen sind und die Gerade y = x nie überschritten werden darf. Damit beschränken sich die Wege auf ein Dreiecksgitter. Für diese Wege wurde durch Schröder eine mathematische Lösung gegeben:
Definition

$$S(n) = S(n-1) + \text{Summe}(S(k) \cdot S(n-1-k))$$; Summenbildung von k = 0 bis n-1

S(0) = 1
Die nachfolgende Tabelle enthält die ersten Schröder-Zahlen von S(1) bis S(100).

Die ersten Schröder-Zahlen S(n) sind 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098, 1037718, 5293446, 27297738, 142078746, 745387038, 3937603038, 20927156706, 111818026018, 600318853926, 3236724317174, 17518619320890, 95149655201962, 518431875418926, 2832923350929742, 15521467648875090, 85249942588971314, ...

Das Problem der Wegsuche kann durch Sperren von einzelnen Weggabelungen erweitert werden. Ebenso ist es möglich, die Schröder-Zahlen auch auf rechtwinklige Dreiecke zu erweitern, deren Katheten nicht gleich lang sind.

In diesem Programmteil kann die Größe des Rechteckgitters bis maximal 25 in jeder Richtung eingestellt werden. Weggabelungen können durch linken Mausklick auf einen Gitterpunkt gesetzt oder gelöscht werden. Je nach gesperrter Weggabelung werden die nicht erreichbaren Punkte besonders gezeichnet. Ebenso kann man zwischen Delannoy-Wegen und Schröder-Wegen wählen.

Zusätzlich können Sie auch die Anzahl der Wege ermitteln, die bei einem reinen Rechteckgitter ohne Diagonalen möglich sind.
Sind a die Anzahl der senkrechten Linien und b die der waagerechten Linien, so ergibt sich, wenn kein Knoten ausgeschlossen ist, für die Anzahl der möglichen Wegen = (a+1+b+1)! / ((a+1)! (b+1)!)

7.54 Minimaler Spannbaum

Ein Spannbaum, auch aufspannender Baum oder spannender Baum genannt (Engl. spanning tree), ist ein Teilgraph eines ungerichteten Graphen, der ein Baum ist und alle seine Knoten enthält. Spannbäume existieren nur in zusammenhängenden Graphen.
Zum Auffinden eines minimalen Spannbaumes gibt es den Algorithmus von Kruskal und den Algorithmus von Prim.
In diesem Teilprogramm können Sie auf einem Graphen einen minimalen Spannbaum suchen lassen. Dazu stehen beide genannten Algorithmen zur Verfügung.
Die Struktur des Graphen erzeugen Sie durch folgendes Vorgehen:

1) Klicken Sie mit der Maus auf eine freie Stelle in der grafischen Darstellung, so wird ein neuer Knoten angelegt.
2) Klicken Sie auf einen schon vorhandenen Knoten, so wird ein kleines Menü angezeigt, in dem Sie wählen können, ob Sie a) von dort eine neue Kanten ziehen, b) den Knoten bewegen oder c) ihn löschen wollen.
3) Möchten Sie eine neue Kante ziehen, dann bewegen Sie die Maus bis zum Zielknoten und klicken Sie ihn an. Die neue Kante wird mit einer Gewichtung von 5 versehen.
4) Klicken Sie auf eine Kante des Graphen, bietet Ihnen das Menü folgende

Möglichkeiten an: a) Kantengewicht ändern bzw. b) die Kante löschen

Zur Berechnung des minimalen Spannbaumes wählen Sie nun einen der beiden Schalter. Der Spannbaum wird sofort gezeichnet und dessen Verlauf in der Ergebnisliste angezeigt.
Vordefiniert sind 10 Beispielgraphen, die Sie an dem Rollbalken *Beispiel* auswählen können. *Beispiel 1* wird bei Teilprogrammstart sofort angezeigt.

7.55 Vierfarbenproblem

Im Jahre 1852 war der englische Mathematiker Francis Guthrie mit der Aufgabe beschäftigt, eine Karte mit den englischen Grafschaften zu kolorieren. Er bemühte sich, mit möglichst wenigen Farben auszukommen. Die Bedingung dabei war, dass benachbarte Länder farblich unterscheidbar sein sollten.
De Morgan gab eine Karte an, die zeigte, dass man mindestens vier Farben braucht. Da jedes Land an jedes andere angrenzt, braucht man zur Färbung vier Farben.

Daraus ergab sich die Frage: Wie viele Farben reichen aus, um eine beliebige Karte so einzufärben, dass je zwei aneinandergrenzende Länder unterschiedliche Farben haben?

Dieses Problem konnte lange Zeit nicht gelöst werden. Erst 1976 gelang K.Appel und W.Haken mit Hilfe eines Computers der Beweis, dem viele Mathematiker jedoch sehr skeptisch gegenüber stehen, da der Beweis eine Rechenzeit von 1200 Stunden erforderte und für die meisten Mathematiker nicht nachprüfbar war.

In diesem Teilprogramm können Sie die Färbung von Karten durch den Computer durchführen lassen.
Dazu laden Sie zuerst über *Bild laden* eine Abbildung. Diese muss im Format GIF vorliegen und darf nur Schwarz und Weiß als Farben enthalten. Ein derartiges Bild können Sie zum Beispiel mit dem Windows-Programm PAINT zeichnen und dort als Monochrom-GIF-Bild speichern.
Alternativ können Sie auch eines der acht vordefinierten Bilder in der linken Liste auswählen.

Die Färbung der Karte erfolgt nun in mehreren Schritten:

1) Über *Gebiete ermitteln* bestimmt das Programm wie viele weiße Gebiete mit schwarzem, geschlossenen Rand vorliegen.
2) Der Schalter *Grenze ermitteln* sucht die exakte Lage der Grenzen zwischen den Gebieten.
3) *Färbung suchen* füllt jedes Gebiet mit einer Farbe, so dass aneinandergrenzende Gebiete unterschiedliche Farben besitzen. Dabei können bis zu sieben Farben verwendet werden.
4) Erst der Schalter *Minimalfärbung* sucht nach einer Färbung mit maximal vier Farben.

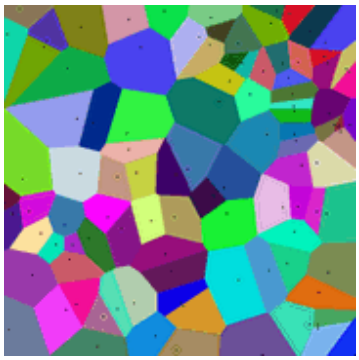
Beachten Sie bitte: Enthält die Karte viele Gebiete und viele Grenzen, so können die einzelnen Schritte auch auf schnellen Computern einige Zeit benötigen.

Beachte Sie bitte weiterhin:
Im Jahr 1975 veröffentlichte Martin Gardner unter dem Pseudonym W. McGregor eine aus 110 Ländern bestehende Landkarte von der er behauptete, zu ihrer Färbung benötige man mindestens 5 Farben, und damit sei die Vierfarbenvermutung widerlegt. Nach einiger Zeit wurde nachgewiesen, dass auch hier nur 4 Farben notwendig sind. Im Lexikon findet Sie unter dem Stichwort *Vierfarbenproblem (2)* eine Lösung.
Diese Karte können Sie auch auswählen. Das Programm findet auch eine Farbbelegung, allerdings mit 5 Farben. Bisher konnte das Programm noch keine 4-Farben-Lösung ermitteln, trotz sehr langer Rechenzeit.

7.56 Voronoi-Diagramm

Als Voronoi-Diagramm oder Dirichlet-Zerlegung wird eine Zerlegung des Raums in Regionen bezeichnet, die durch eine vorgegebene Menge an Punkten des Raums bestimmt werden.
Jede Region wird durch genau ein Zentrum bestimmt und umfasst alle Punkte des Raumes, die in Bezug zur Euklidischen Metrik näher an dem Zentrum der Region liegen als an jedem anderen Zentrum. Aus allen Punkten, die Grenzen der Voronoi-Regionen bilden, entsteht das Voronoi-Diagramm.

Voronoi-Diagramme werden in der Biologie, Chemie, Meteorologie, Kristallografie und anderen wissenschaftlichen Disziplinen wie der algorithmischen Geometrie und der Materialwissenschaft verwendet. Obwohl 1644 schon durch Descartes in seinem Buch "Principia Philosophiae" erwähnt, erfuhren sie erstmals durch Dirichlet und Voronoi eine genauere mathematische Analyse.



Das Voronoi-Diagramm verhält sich dual zur Delaunay-Triangulation und wird zur Konstruktion einer entsprechend triangulierten Oberfläche verwendet.
Um die Delaunay-Triangulation zu berechnen, wird der entsprechende duale Graph zum Voronoi-Diagramm gebildet. Dies geschieht, indem die Zentren der Polygone derart miteinander verbunden werden, dass zu jeder Voronoi-Kante eine orthogonale Linie eingezeichnet wird, die die entsprechenden zwei Zentren miteinander verbindet.

In diesem Teilprogramm werden Voronoi-Diagramme gezeichnet.
Nach dem Start müssen Punkte in der Ebene festgelegt werden. Ein linker Mausklick auf die Fläche fügt einen Punkt hinzu, ein rechter Mausklick auf einen Punkt löscht ihn.
Durch einen linken Mausklick auf einen vorhandenen Punkt und Mausbewegung kann er verschoben werden. Dabei ist zu beachten, dass keine drei Punkte

kollinear sind. Das Programm zeichnet das entsprechende Voronoi-Diagramm sofort.

An den Auswahlfeldern können Sie festlegen, dass anstelle eines einfachen Voronoi-Diagramms ein farbiges bzw. die Delaunay-Triangulation gezeichnet wird. Möchten Sie nur die Triangulation sehen, so entfernen Sie in diesem Fall die Markierung bei *Voronoi-Linien*.

7.57 Parkettierung

Unter einer Parkettierung versteht man jede lückenlose Überdeckung einer Ebene mit verschiedenen geometrischen Figuren, meist Polygonen.

Einer der ersten Mathematiker, der sich mit Parketten befasste, war Johannes Kepler. In seinem Werk "Harmonices mundi" beschrieb er alle regelmäßigen Parkette, die nur aus einer Art von regelmäßigen Polygonen bestehen, und sogenannte Archimedische Parkette, die aus zwei oder mehr Arten regulärer Vielecke gleicher Seitenlänge aufgebaut sind.

In diesem Teilprogramm können Sie einige dieser Parkettierungen zeichnen lassen sowie deren Größe und Farben verändern.
In der Liste finden Sie 25 verschiedene Möglichkeiten. Wählen Sie eine aus, wird diese sofort gezeichnet. Die Zahlen vor den Bezeichnungen geben an, welche Arten von N-Ecken an einer Ecke zusammentreffen.

8. Geometrie - Dreieckslehre

Unter dem Menüpunkt Dreieckslehre finden Sie Teilprogramme, die sich mit der Geometrie des Dreiecks beschäftigen.

8.1 Dreieck

Dieses Teilprogramm ist eines der komplexesten dieses Programms. Ausgehend von den drei Eckpunkten eines Dreiecks können Sie hier verschiedenste Punkte, Geraden und Kreise an einem beliebigen Dreieck darstellen und berechnen.

Durch die Möglichkeit, die Lage der Dreieckspunkte A, B und C durch Anklicken und Verschieben mit der Maus zu verändern, ist die Untersuchung vielfältiger geometrischer Gebilde leicht möglich.
Die zu zeichnenden Punkte, Geraden und Kreise wählen Sie durch Markierung in der Liste aus. Zur besseren Orientierung sind alle Darstellungsobjekte in vier Listen eingeordnet. Dies sind:

Allgemeine Liste

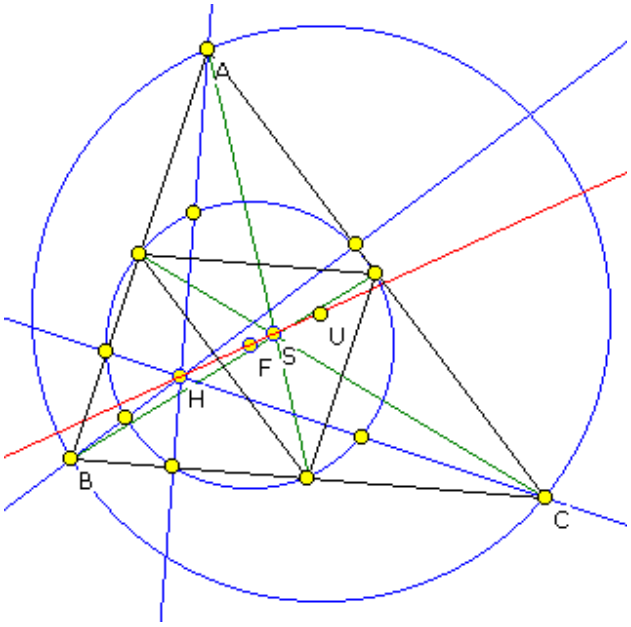
- Punkte A, B und C ... Die Eckpunkte des Dreiecks
- Seite a, b und c ... Die Dreiecksseiten
- Dreiecksseiten ... Die Seiten a, b und c werden deutlicher hervorgehoben
- Dreiecksgeraden ... Die Geraden, welche die Verlängerung der Dreiecksseiten darstellen
- Höhen ... Die Höhen des Dreiecks, d.h. die von den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Lote
- Seitenhalbierende ... Die Geraden durch die Eckpunkte und die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten
- Seitenmittelpunkte ... Die Mittelpunkte der drei Seiten
- Mittelparallelen ... Drei von den Seitenmittelpunkten gebildete Strecken, die jeweils zu einer Dreiecksseite parallel sind
- Winkelhalbierende ... Die Geraden, welche die Innenwinkel des Dreiecks halbieren
- Winkelhalbierende-Punkte ... Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Seiten
- Mittelsenkrechte ... Die Geraden, die in den Seitenmittelpunkten senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen
- Höhenschnittpunkt ... Der Schnittpunkt der drei Höhen
- Schwerpunkt ... Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, der zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ist
- Inkreismittelpunkt ... Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und zugleich der Mittelpunkt des Inkreises
- Inkreis ... Der Kreis, der die drei Dreiecksseiten von innen berührt
- Umkreismittelpunkt ... Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und zugleich der Mittelpunkt des Umkreises

- Umkreis ... Der Kreis, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft
- Ankreise ... Drei Kreise, die jeweils eine Dreiecksseite und die anderen beiden Verlängerungen der Dreiecksseiten berühren, die sogenannten Kreise des Apollonius
- Ankreisdreieck ... Das Dreieck, das von den drei Ankreismittelpunkten gebildet wird
- Ankreismittelpunkte ... Die drei Punkte, welche die Mittelpunkte der Ankreise sind
- Ankreis-Punkte ... Die drei Berührungspunkte der Ankreise an den eigentlichen Dreiecksseiten
- Euler-Gerade ... Die Gerade, auf welcher der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Feuerbach-Punkt liegen
- Feuerbach-Kreis ... Ein Kreis, der neun besondere Punkte enthält: die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmitten und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Dreiecksecken
- Feuerbach-Punkt ... Der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, der auch auf der Eulerschen Geraden liegt
- 9-Feuerbach-Punkte ... Die neun besonderen Punkte des Feuerbach-Kreises: die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmitten und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Dreiecksecken
- Soddy-Kreise ... Drei Kreise um die Dreiecksecken, die sich paarweise berühren
- Höhenfußpunkte ... Die Schnittpunkte der Höhen mit den Dreiecksseiten, die gleichzeitig die Lotfußpunkte von den Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten sind
- Höhendreieck ... Das Dreieck, das von den Höhenfußpunkten gebildet wird
- Inkreispunkte ... Die Berührungspunkte des Inkreises
- Kontakt-Dreieck ... Das von den Inkreisberührungspunkten gebildete Dreieck
- Lémoine-Punkt ... Der Schnittpunkt der Symmedian-Linien
- Senkrechte in A, B und C ... Senkrechte Geraden in den Dreiecksendpunkten zu den jeweils zwei Seiten
- Dreieck ausfüllen ... Das Ausgangsdreieck wird gefärbt

Die weiteren darstellbaren Objekte finden Sie in der Hilfedatei unter dem Punkt Objektliste aufgelistet.

Wählen Sie einige Stücke aus, so können Sie zum Beispiel nachvollziehen, dass Höhenschnittpunkt, Feuerbach-Punkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt auf der Eulerschen Geraden liegen, dass der Spieker-Kreis auch Inkreis des Nagel-Halbdreiecks ist oder auch, dass die Soddy-Kreise durch die Inkreisberührungspunkte verlaufen usw. Dem Experimentieren sind kaum Grenzen gesetzt.

In der Abbildung wurden die Höhen, Seitenhalbierenden, der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt, der Umkreis, der Feuerbach-Kreis mit Mittelpunkt, die neun besonderen Feuerbach-Punkte, die Euler-Gerade und die Mittelparallelen eingezeichnet.



Neben der Möglichkeit, die Eckpunkte mittels Maus zu verschieben, können Sie die Koordinaten auch eingeben. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Ursprung im Bildzentrum liegt. Veränderte Koordinaten quittieren Sie mit *Darstellung* oder *Berechnung.*

Achtung! Sollten Sie sehr viele Stücke oder sogar alle auswählen, wird die Darstellung vollkommen unübersichtlich. Hier gilt das alte Sprichwort: Weniger ist oft mehr!

Änderung des Darstellungsintervalls

Mithilfe der Schalter und können Sie die Größe des Darstellungsintervalls einstellen. Mit dem ersten Schalter wird das Bild des Dreiecks vergrößert, mit dem zweiten Schalter entsprechend verkleinert. Der mittlere Schalter stellt die Standardgröße wieder ein. Dabei wird Ihnen der *Streckungsfaktor* angezeigt. Beachten Sie bitte, dass bei Aufruf der Berechnungen (siehe unten) stets wieder auf den Originalmaßstab zurückgeschaltet wird.

Über das Menü oder die entsprechenden Schalter der Schalterleiste können Sie auch Koordinatenachsen sowie ein einfaches Gitter bzw. Millimetergitter zu- und abschalten.

Simulation der Bewegung der Dreieckspunkte

Auch in diesem Teilprogramm können Sie den Computer wieder veranlassen, eine Simulation durchzuführen. Dabei ist es möglich, die drei Eckpunkte A, B und C des Dreiecks entweder waagerecht, senkrecht, um den Ursprung kreisend oder in Richtung der Geraden AB kontinuierlich zu verschieben.
Markieren Sie den entsprechenden Punkt und die Simulationsrichtung. Ein Klick auf den Schalter startet die Bewegung, ein erneuter Klick stoppt den Vorgang.

Beachten Sie bitte: Haben Sie sehr viele Stücke ausgewählt, so muss Ihr Prozessor bei dieser Simulation eine Höchstleistung vollbringen. Auf langsameren Rechnern kann es dadurch zu einer etwas ruckartigen Darstellung kommen.

Berechnungen am Dreieck

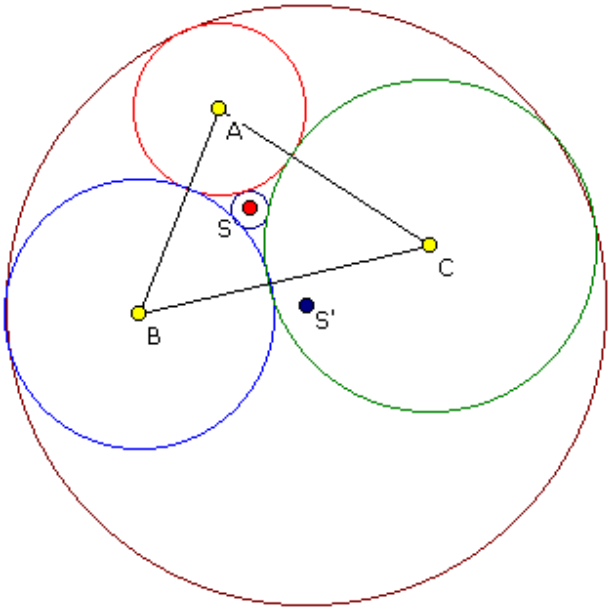
Die zu zeichnenden Stücke können Sie auch berechnen lassen. Markieren Sie das Feld *Berechnungsergebnisse,* zeigt das Programm in einer Liste die Koordinaten der Punkte, Längen von Strecken und Gleichungen von Geraden an. Dabei werden die Koordinaten der Eckpunkte übernommen.
Koordinaten berechneter Punkte werden in dem üblichen kartesischen Koordinaten angezeigt. Sollen zusätzlich die trilinearen Koordinaten angegeben werden, dann wählen Sie die den entsprechenden Menüpunkt.

Wünschen Sie die Berechnung für andere Werte, so ändern Sie die Koordinaten der drei Eckpunkte und quittieren mit *Berechnung.*
Um wieder zur Darstellung umzuschalten, markieren Sie einfach das entsprechende Feld.

Vordefinierte Themen

Auf Grund der großen Anzahl darstellbarer Objekte ist deren Auswahl nicht ganz so einfach. Aus diesem Grund sind unter dem Menüpunkt *Themen* einige besondere Beziehungen am Dreieck vordefiniert. Wählen Sie einen der Punkte aus, so zeichnet das Programm die einzelnen Punkte, Geraden, Kreise, ..., die für dieses Thema besonderes relevant sind.
Im Folgenden werden einige der vordefinierten Themen genauer vorgestellt:

8.1.1 Soddy-Kreise



In diesem Teilprogramm zeichnet das Programm die drei Kreise eines Dreiecks, die als Mittelpunkte die Dreieckspunkte besitzen und sich paarweise berühren. Verschieben Sie einen Eckpunkt des Dreiecks mit der Maus, werden die Kreise neu berechnet und gezeichnet.

Sind a, b und c die Länge der Dreiecksseiten, so gilt für die drei Radien dieser nach Soddy benannten Kreise:
$r_a = ½ (-a + b + c)$ $r_b = ½ (a - b + c)$ $r_c = ½ (a + b - c)$

Innerer und äußerer Soddy-Kreis

Für die drei sich paarweise berührenden Soddy-Kreise um die Dreieckspunkte existieren entsprechend dem Berührungsproblem von Apollonius genau zwei Kreise, die diese drei Kreise berühren: der innere und der äußere Soddy-Kreis.

Die Mittelpunkte der beiden Kreise, der innere S bzw. äußere S' Soddy-Punkt, ergeben sich als spezielle Lösungen des allgemeinen Apollonius-Problems für drei Kreise. Die Gerade, auf der S und S' liegen, heißt Soddy-Gerade. Auf dieser Geraden befinden sich auch der Inkreismittelpunkt, der Gergonne-Punkt, die Griffiths-Punkte, die Rigby-Punkte sowie der Fletcher-Punkt.
Markieren Sie die Felder *innerer, äußerer Soddy-Kreis* bzw. *Soddy-Gerade*, werden diese Gebilde berechnet und gezeichnet.

Während der Simulation werden die Punkte A oder B waagerecht bzw. senkrecht verschoben.

Wählen Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* so finden Sie in der Tabelle die Koordinaten der Punkte A, B und C des Dreiecks, die Sie ändern können, sowie die Koordinaten der Mittelpunkte und die Radien aller Soddy-Kreise.

Hinweis: Die Berechnung und Darstellung der Soddy-Kreise ist anspruchsvoll und aufwendig. Durch interne Rundungen kann es zu kleinen Abweichungen kommen, sodass zum Beispiel der äußere Soddy-Kreis mitunter in der Darstellung nicht ganz exakt die drei Kreise tangiert.

8.1.2 Ajima-Malfatti-Problem

Ein besonders interessantes Problem am allgemeinen Dreieck wurde Ende des 18. Jahrhunderts von dem japanischen Mathematiker Chokuen Ajima (1732-1798) und wenig später von dem Italiener Malfatti (um 1803) gestellt und gelöst.

Gegeben ist wiederum ein Dreieck ABC. In dieses sollen drei Kreise K(a), K(b) und K(c) konstruiert werden, die sich paarweise und zusätzlich jeweils zwei Seiten tangieren. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden dann das Malfatti-Dreieck.

Das Besondere an dieser Aufgabe ist die allgemeine rechnerische Lösung, die auf keinen Fall als elementar zu bezeichnen ist:
Sind a, b und c die Seitenlängen eines ähnlichen Dreiecks mit einem Halbumfang s = 1, so sind u, v und w die Abstände der Berührungspunkte von den drei Dreieckseckpunkten. Für diese wird dann:

$$u = \sin^2((\arcsin(b) + \arcsin(c) - \arcsin(a))/2)$$

und analog für v und w.

Die exakte Herleitung finden Sie in dem hervorragenden Werk "100 Great Problems of Elementary Mathematics" von Heinrich Dörrie.
In der Tabelle (Feld *Tabelle anzeigen*) finden Sie die Koordinaten der Dreieckspunkte, die Sie auch ändern können, und ebenso die Koordinaten der drei Kreise und des Ajima-Punktes.

Hinweis: Im Teilprogramm *Dreieck interaktiv* können Sie zusätzlich zu den Ajima-

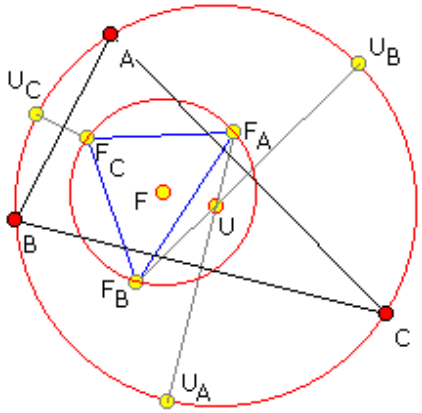
Malfatti-Kreisen auch den 1. und 2. Ajima-Malfatti-Punkt zeichnen und berechnen lassen.

8.1.3 Epstein-Punkte

Gegeben sei wieder ein Dreieck ABC und in ihm die Soddy-Kreise sowie der diese Kreise von außen berührende äußere Soddy-Kreis. Die Berührungspunkte seien dabei die Punkte P, Q und R. Konstruiert man in den Punkten P, Q und R die Tangenten an den äußeren Soddy-Kreis, so schneiden sich diese Geraden paarweise in drei Punkten X, Y und Z, die das äußere Soddy-Dreieck bilden.

Die Geraden durch die Punkte X, Y und Z und die jeweils gegenüberliegenden Dreieckspunkte schneiden sich in einem Punkt, dem 1. Epstein-Punkt, der auch innerer Oldknow-Punkt genannt wird. Dieser Punkt wurde 1996 erstmals von A. Oldknow ("The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle") angegeben und im Jahr 2001 von D. Epstein ("Tangent Spheres and Triangle Centers") wiederentdeckt.

Den 2. Epstein-Punkt erhält man als Schnittpunkt der Geraden durch P, Q und R und den Berührungspunkten der Soddy-Kreise auf den Dreiecksseiten.
Beide Epstein-Punkte, das äußere Soddy-Dreieck und die Soddy-Kreis-Berührungspunkte können Sie in diesem Teilprogramm zeichnen und untersuchen.



8.1.4 Fuhrmann-Dreieck

1890 veröffentlichte W. Fuhrmann in "Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze" eine weitere interessante Beziehung an Dreiecken.

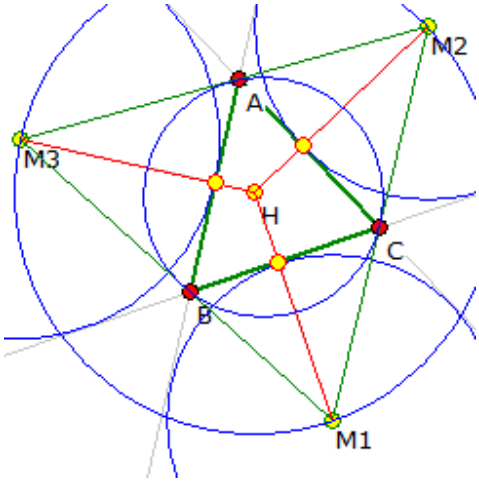
Halbiert man die Umkreisbogenabschnitte zwischen den Dreieckspunkten, so erhält man drei Punkte U(A) = D, U(B) = E und U(C) = F. Diese Punkte werden an den Dreiecksseiten gespiegelt.
Man erhält die Fuhrmann-Punkte F(A) = R, F(B) = S und F(C) = T. Sie bilden das Fuhrmann-Dreieck. Der Umkreis des Fuhrmann-Dreiecks ist der Fuhrmann-Kreis.

Aufgrund der Konstruktion der Fuhrmann-Punkte schneiden sich die Geraden U(A)F(A), U(B)F(B) und U(C)F(C) im Umkreismittelpunkt U des Ausgangsdreiecks. Die Beziehungen am Fuhrmann-Dreieck können in diesem Teilprogramm untersucht werden.

Neben der rein geometrischen Lösung erhalten Sie auch eine rechnerische. Markieren Sie dazu das Feld *Tabelle anzeigen.* In dieser Tabelle finden Sie die Koordinaten der drei Dreieckseckpunkte, die Punkte R, S, T des Fuhrmann-Dreiecks, den Mittelpunkt des Fuhrmann-Kreises sowie den Umkreismittelpunkt U

und die Punkte D, E und F auf dem Umkreis. In die farbig hervorgehobenen Felder können Sie auch direkt neue Koordinaten für die Eckpunkte des Dreiecks eintragen.

8.1.5 Hadamard-Kreis und Punkt



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit den Ankreisen k_1, k_2 und k_3 und deren Mittelpunkte M_1, M_2, M_3. Die Geraden von einem Dreieckspunkt durch den gegenüberliegenden Berührungspunkt des Ankreises schneiden sich in einem Punkt, dem Nagel-Punkt. Es gilt aber auch:

Die Geraden von den Ankreismittelpunkten durch die Ankreisberührungspunkte schneiden sich in einem Punkt.

Dieser Punkt wird Hadamard-Punkt genannt, da Jacques Hadamard diesen Punkt als erster in "Leçons de géométrie élémentaire I: Géometrie plane" 1911 beschrieb. Der Hadamard-Punkt ist der Umkreismittelpunkt des von den Ankreismittelpunkten gebildeten Dreiecks $M_1M_2M_3$. Dieser Umkreis wird Hadamard-Kreis genannt. Dessen Radius ist doppelt so groß wie der Umkreisradius des Dreiecks ABC.

8.1.6 Isodynamische Punkte

In diesem Teilprogramm können Sie weitere interessante Punkte und Beziehungen am Dreieck untersuchen.

Gegeben ist erneut ein Dreieck ABC. F und G seien die Punkte auf der Seite BC, wo die Winkelhalbierenden des Innenwinkels α und des Außenwinkels bei A die Gerade durch BC schneiden. Der Kreis um G durch F und A, d.h., er hat den Radius GF, wird A-Apollonius-Kreis genannt. Analog konstruiert man den B-Apollonius-Kreis und den C-Apollonius-Kreis.
Diese drei Kreise schneiden sich in zwei Punkten I und J, den sogenannten isodynamischen Punkten des Dreiecks ABC.

Die Mittelpunkte des A-Apollonius-Kreises, des B-Apollonius-Kreises und des C-Apollonius-Kreises liegen auf einer Geraden, der sogenannten Lémoine-Geraden. Weiterhin schneiden diese speziellen Apollonius-Kreise den Umkreis des Dreiecks in einem rechten Winkel. Untereinander schneiden sich die Kreise paarweise unter 60°.

Die isodynamischen Punkte, die Apollonius-Kreise und die Lémoine-Gerade sind hier darstellbar.

8.1.7 Lamoen-Kreis

Der Lamoen-Kreis geht auf eine Entdeckung des Niederländers Floor van Lamoen aus dem Jahre 2000 zurück.

Die Umkreismittelpunkte der sechs Teildreiecke, in die ein gegebenes Dreieck durch seine Seitenhalbierenden unterteilt wird, liegen auf einem Kreis, dem Lamoen-Kreis.
Nach dem Programmstart wird ein Dreieck ABC und in diesem die sechs Teildreiecke, deren Umkreise und der Mittelpunkt L des Lamoen-Kreises eingezeichnet.

8.1.8 Napoleon-Punkt und Fermat-Punkt

Gegeben ist das Dreieck ABC. Auf jeder der Dreiecksseiten wird ein gleichschenkliges Dreieck errichtet. Die dabei entstehenden zusätzlichen Punkte seien D, E und F.

Ist G nun der Schwerpunkt des Dreiecks DBC, H vom Dreieck CAE und I vom Dreieck ABF, so schneiden sich die Geraden AG, BH und CI erneut in einem Punkt N, dem sogenannten Napoleon-Punkt. Dieses Gebilde können Sie in einem eigenen Teilprogramm testen.

Verbindet man die Punkte D, E und F mit den gegenüberliegenden Dreieckspunkten, so schneiden sich die Geraden in einem weiteren Punkt: dem Fermat-Punkt.

Der Fermat-Punkt war die erste neue Entdeckung am Dreieck nach den Ergebnissen der antiken griechischen Mathematiker. Der französische Mathematiker Pierre Fermat fand diesen Punkt auf der Suche nach dem Punkt P in einem Dreieck, sodass die Summe der Abstände PA + PB + PC zu den Dreieckspunkten minimal ist.

Torricelli bewies, dass der Fermat-Punkt die gesuchte Lösung ist, wenn jeder Innenwinkel des Dreiecks ABC kleiner als 120° ist. Nur in diesem Fall liegt F im Inneren des Dreiecks. Der Punkt F wird auch Fermat-Torricelli-Punkt genannt. Diesen Punkt können Sie wahlweise ebenfalls darstellen.

8.1.9 Tangentialdreieck

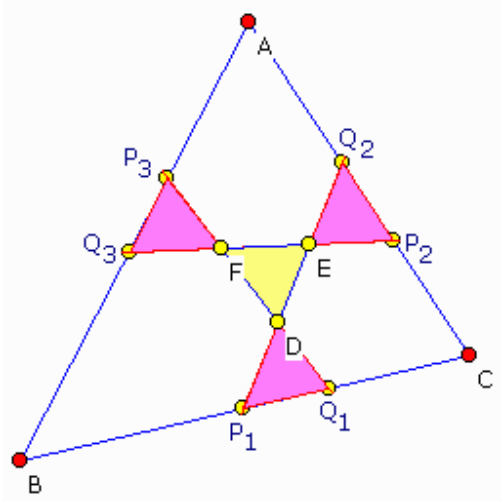
Am Dreieck existieren eine Vielzahl interessanter Beziehungen.

Werden zum Beispiel in den Dreieckseckpunkten die Tangenten an den Umkreis konstruiert, so bilden diese das Tangentialdreieck.
Der Schwerpunkt dieses Dreiecks, der Schnittpunkt der entsprechenden

Seitenhalbierenden, ist der Exeter-Punkt.

In diesem Teilprogramm können Sie den Exeter-Punkt und das Tangentialdreieck konstruieren. Zusätzlich können Sie sich auch den Umkreis und Inkreis anzeigen lassen.

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* zeigt das Programm eine Tabelle, die zum einen die Koordinaten der Ausgangspunkte A, B und C und zum anderen auch die ermittelten Punkte A', B' und C' sowie den Umkreismittelpunkt U und den Exeter-Punkt E enthält. Die Koordinaten der Ausgangspunkte können Sie hier eingeben.



8.1.10 Yff Zentraldreieck

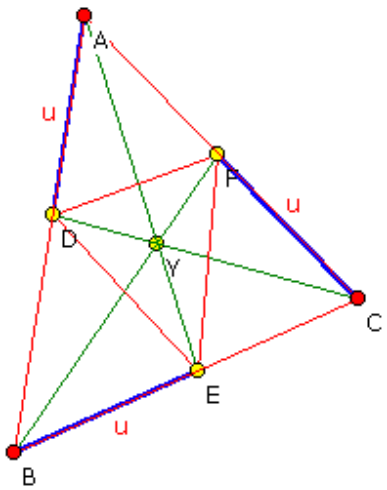
Ein Isoscelizer des Dreiecksinnenwinkels eines Dreiecks ABC durch einen Punkt P auf AC ist eine Strecke durch einen weiteren Punkt auf AB, sodass das Segment AP gleich dem Segment AQ ist. Damit ist das entstehende Dreieck APQ gleichschenklig.

1989 bewies der holländische Mathematiker Peter Yff, dass es genau eine Lage von gleich langen Isoscelizern der Innenwinkel gibt. Diese schneiden sich dann in einem Punkt, dem sogenannten Congruent-Isoscelizer-Punkt C.I.P., auch Yff-Zentralpunkt Y genannt.

Außer der Existenz des Yff-Zentralpunktes konnte Yff schon 1987 beweisen, dass es stets eine Lage der drei Isoscelizer gibt, sodass die vier Dreiecke P1Q1D, P2Q2E, P3Q3F und DEF kongruent sind. Das entstehende Dreieck DEF wird Yff-Zentraldreieck genannt.

In diesem Unterprogramm können Sie die Isoscelizer, den Yff-Zentralpunkt, das Zentraldreieck und die dieses begrenzenden Randdreiecke zeichnen.

8.1.11 Yff-Punkt und Yff-Dreieck



Durch den holländischen Mathematiker Peter Yff wurden viele interessante Eigenschaften am Dreieck gefunden und bewiesen. Dazu gehören auch die nach ihm benannten Punkte und Teildreiecke.

Auf den Seiten eines Dreiecks ABC werden drei Punkte D, E und F so markiert, dass deren Abstände u von einem Dreieckspunkt auf den Seiten BC, CA und AB

gleich sind. Dann schneiden sich die Transversalen AE, BF und CD in einem Punkt Y. Y wird 1. Yff-Punkt genannt, wenn u die Gleichung

$$x^3 = (a - x)\,(b - x)\,(c - x)$$

erfüllt. Diese Gleichung hat eine einzelne reelle Wurzel u, die durch Lösung von

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

mit $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$ und $r = abc$, gefunden werden kann.

Die Yff-Punkte wurde 1963 erstmals beschrieben und besitzen eine Vielzahl interessanter Eigenschaften. U.a. steht die Strecke YY' senkrecht zur Strecke Inkreiszentrum I-Umkreiszentrum U. Das Dreieck DEF wird dann weiterhin 1. Yff-Dreieck genannt.

In diesem Programmteil können Sie den 1. und 2. Yff-Punkt sowie das 1. Yff-Dreieck darstellen. Die Größe des Wertes u wird Ihnen in der *Tabelle* angegeben.

8.2 Größen am Dreieck

Das Teilprogramm *Größen am Dreieck* ermöglicht Ihnen einfache Untersuchungen am Dreieck.

Die Eckpunkte A, B und C können Sie durch Anklicken und Ziehen mit der Maus frei auf der Zeichenfläche verschieben.
Das Programm stellt die Figur sofort dar und ermittelt für das Dreieck die Seitenlängen und Innenwinkel.

Besonders interessant ist nun, dass Sie für das Dreieck an den Schaltfeldern vier Arten von Dreieckstransversalen einschalten können:

- die Seitenhalbierenden
- die Winkelhalbierenden
- die Höhen
- die Mittelsenkrechten

Das Programm zeichnet diese sofort ein. Auch wenn Sie nun die Lage der Eckpunkte verschieben, werden diese Geraden sofort aktualisiert. Deutlich erkennt man, dass sich alle Geradenarten bei einem Dreieck stets in einem Punkt schneiden, z.B. die Mittelsenkrechten im Mittelpunkt des Umkreises, die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt usw. Die Schnittpunkte der Dreieckstransversalen, Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H, Inkreismittelpunkt I und Umkreismittelpunkt U werden ebenfalls eingezeichnet und in die Punkttabelle eingetragen.
Zusätzlich können Sie neben den Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten auch die beiden wichtigen Kreise am Dreieck, den Inkreis und den Umkreis, darstellen lassen.

8.3 Allgemeines Dreieck

Dieses Unterprogramm gewährleistet verschiedene Berechnungen an beliebigen Dreiecken. Von den sechs möglichen einzugebenden Größen, die drei Seiten und die drei Winkel, müssen entsprechend den Kongruenzsätzen an Dreiecken drei bekannt sein. Werden diese eingetippt und wird dann der Schalter *Berechnung* gewählt, erfolgt die Berechnung der restlichen Werte. Zusätzlich werden bestimmt:

- die Länge der Winkelhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Länge der Seitenhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Höhen auf alle drei Seiten
- der Inkreis- und Umkreisradius
- der Dreiecksumfang sowie der Flächeninhalt

Beispiel: Für die Eingabe von a = 2, b = 3 und c = 4 ermittelt das Programm (stumpfwinkliges Dreieck):

Winkel	α = 28,955° , β = 46,568° , γ = 104,478°
Fläche	A = 2,905 FE
Umfang	U = 9
Inkreisradius	r = 0,646
Umkreisradius	R = 2,066

Und weiter: Winkelhalbierende w_α = 3,32 , w_β = 2,45 , w_γ = 1,47 ; Seitenhalbierende s_a = 3,391 , s_b = 2,784 , s_c = 1,581 und Höhen h_a = 2,905 , h_b = 1,937 , h_c = 1,452.

Beachten Sie: Die Eingabe der drei Winkel bestimmt das Dreieck nicht vollständig. Weiterhin müssen die eingegebenen Größen allgemeinen Regeln entsprechen. Dazu gehören die Dreiecksungleichungen, der Innenwinkelsatz sowie die Gültigkeit von Sinussatz und Kosinussatz. Widersprechen die Werte diesen Sätzen, d.h., das Dreieck ist nicht existent, erfolgt die Meldung:

Keine eindeutige Lösung.

Werden mehr als drei Größen eingegeben, erfolgt die Fehlermeldung:

Zu viele bekannte Größen.

Die Berechnungsergebnisse können Sie wieder drucken bzw. in die Zwischenablage kopieren.

Anmerkung: Die Eingabe bestimmter Größen des Dreiecks beschreibt nicht immer eindeutig genau ein Dreieck. Insbesondere tritt dies auf, wenn Sie zwei Seiten und einen anliegenden Winkel eingeben, der nicht der größten Seite des Dreiecks gegenüberliegt. Da der Kongruenzsatz SSW dann nicht gilt, ergeben sich zwei

Dreiecke. Das Programm ermittelt beide Dreiecke.

Zum Beispiel erhalten Sie für a = 5, c = 6 und α = 50° als berechnete Stücke b = 5,825, β = 63,18° und γ = 66,82°. Die zweite Lösung für die Ausgangswerte ist aber auch γ = 113,18° und dazugehörig β = 16,82° und b = 1,89.

Grafische Darstellung

Die Darstellung der Koordinatenachsen und des Koordinatengitters stellen Sie über die Schalter ein. Mithilfe der Schalter und können Sie die Größe des angezeigten Intervalls wieder verändern. Markieren Sie das Feld *In- und Umkreis*, so werden diese zwei Kreise eingezeichnet. Die 2. evtl. vorhandene Lösung wird dargestellt, wenn sie das Feld *evtl. 2.Lösung* auswählen.

8.4 Dreieck aus 3 Punkten

In Ergänzung zum Teilprogramm *Allgemeines Dreieck* können Sie ein Dreieck auch durch die Eingabe der Koordinaten seiner Eckpunkte A, B und C bestimmen. Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, berechnet das Programm die Dreiecksstücke:

- die Seitenlängen und Innenwinkel
- die Länge der Winkelhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Länge der Seitenhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Höhen auf alle drei Seiten
- den Inkreis- und Umkreisradius
- den Dreiecksumfang sowie den Flächeninhalt

sowie die Schwerpunktskoordinaten des Dreiecks. Betätigen Sie dazu den Schalter *Berechnung*. Sind A, B und C kollinear, d.h., das Dreieck existiert nicht, erscheint die Fehlermeldung:

Keine eindeutige Lösung,

Für die grafische Darstellung des Dreiecks und optional des In- und Umkreises benutzen Sie den Schalter *Berechnung*.

8.5 Innenwinkel am Dreieck, Winkel an Parallelen

Im Unterprogramm *Allgemeines Dreieck* können Sie Berechnungen an beliebigen Dreiecken durchführen. Dabei wird einer der wichtigen elementargeometrischen Sätze am Dreieck, der Innenwinkelsatz, genutzt.

Schon der griechische Mathematiker Euklid wusste, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks stets 180° beträgt.

In diesem Teilprogramm können Sie sich diesen Satz veranschaulichen. Die Länge der Dreiecksseite AB stellen Sie durch Verschieben der beiden Eckpunkte ein. Der dritte Punkt C kann durch Anklicken und Ziehen mit der Maus frei über die Darstellungsfläche bewegt werden.

Sofort ermittelt das Programm die Größe der drei Innenwinkel und deren Summe. Wie Sie feststellen werden, ist die Summe stets gleich 180°. Starten Sie die Simulation, so wird der Punkt C kontinuierlich von links nach rechts und zurück bewegt.

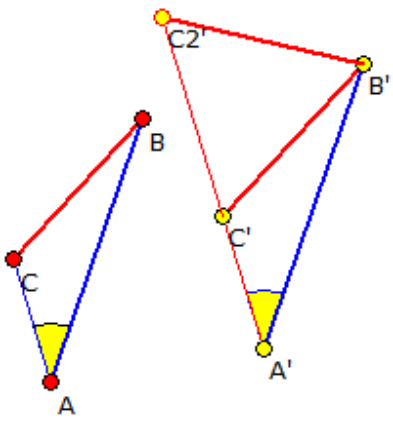
An den geschnittenen parallelen Geraden sind außerdem Neben-, Stufen-, Wechsel- und entgegengesetzte Winkel ablesbar. Auf Wunsch können Sie über die Schaltfelder festlegen, welche Winkel farbig hervorgehoben werden. Die mittlere Parallele kann durch Verschieben des Punktes D in ihrer Lage verändert werden. Nebenwinkel und entgegengesetzte Winkel ergänzen sich zu 180°. Stufenwinkel und Wechselwinkel sind identisch.

8.6 Ähnlichkeitssätze und Kongruenzsätze am Dreieck

Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, d.h. sie haben die gleiche Form aber nicht unbedingt die gleiche Größe,
- wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen (Hauptähnlichkeitssatz, WW-Theorem)
  $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$ und somit $\gamma = \gamma'$
- wenn sie im Verhältnis der 3 Seiten übereinstimmen (sss-Theorem)
  $a / a' = b / b' = c / c'$
- wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (sWs-Theorem)
  $a / a' = b / b'$; $\gamma = \gamma'$
- wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (ssW-Theorem)
  $a / a' = b / b'$; $\alpha = \alpha'$ oder $\beta = \beta'$

Ist der kleinere Winkel gegeben, so existiert ein zweites Dreieck, für dass zwar $a / a' = b / b'$ und $\alpha = \alpha'$ bzw. $\beta = \beta'$ gilt, das aber nicht zum anderen Dreieck ähnlich ist.



Diese 4 Bedingungen werden als die Ähnlichkeitssätze bezeichnet. In diesem Teilprogramm werden diese Sätze demonstriert.
Nach dem Start finden Sie im Darstellungsbereich zwei zueinander ähnliche Dreiecke ABC und A'B'C'. Die Eckpunkte A, B, C des Ausgangsdreiecks und den Punkt A' des ähnlichen Dreiecks können sie mit der Maus verschieben. Die Punkte können Sie auch direkt über *Tabelle anzeigen* eingeben. Am Rollbalken *Faktor* stellen Sie den Ähnlichkeitsfaktor bzw.

Streckungsfaktor ein.

Je nach Wahl des Satzes von WW, sss, sWs bzw. ssW werden die entsprechenden Größen hervorgehoben und mit ihrem Wert angezeigt.
Haben Sie das Feld Ähnlichkeitszentrum markiert, so zeichnet das Programm den Punkt Z ein, von dem aus Dreieck ABC auf A'B'C' gestreckt wird. Ist der Faktor gleich 1, so sind beide Dreiecke kongruent und Z befindet sich im „Unendlichen".

Besonders interessant ist der 4.Fall, d.h. beide Dreiecke stimmen im Verhältnis zweier Seiten und einem Gegenwinkel übereinstimmen (ssW-Theorem). Liegt dieser Gegenwinkel tatsächlich der größeren Seite gegenüber, so erhalten Sie ein eindeutig ähnliches Dreieck.
Anders wird es, wenn der Winkel nicht der größeren Seite gegenüberliegt. In diesem Fall existiert ein zweites Dreieck A'B'C2, dass zwar die gleichen Seitenverhältnisse und einen gleichen Winkel besitzt, aber dennoch nicht ähnlich ist. Dieses zweite Dreieck wird eingezeichnet.

Im Beispiel beträgt das Seitenverhältnis 0,93 und der Gegenwinkel $\alpha = 36°$. Da aber die Seite c größer ist als a, ist auch $\gamma > \alpha$ und es existiert ein zweites, nicht ähnliches Dreieck. Der Ähnlichkeitssatz ssW gilt nicht!

Kongruenzsätze

Im zweiten Teilprogramm werden die Kongruenzsätze am Dreieck vorgestellt.
Zwei Dreiecke sind Dreiecke sind kongruent,
- wenn sie in drei Seiten übereinstimmen (SSS)
- wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)
- wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW)
- wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (SSW)

Den entsprechenden Kongruenzsatz wählen Sie an den Auswahlfeldern.
Die Eckpunkte A, B, C des Ausgangsdreiecks und den Punkt A' des kongruenten Dreiecks können sie mit der Maus verschieben. Die Punkte können Sie erneut über *Tabelle anzeigen* eingeben.

8.7 Dreieckskonstruktion

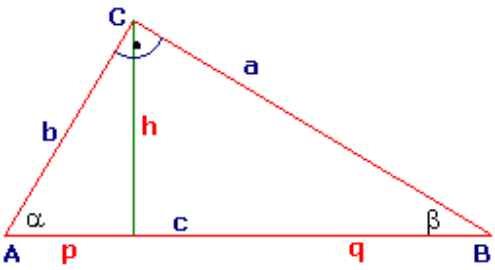
In diesem Teilprogramm werden einige Konstruktionsaufgaben für Dreiecke demonstriert. Wählen Sie zuerst, die gegebenen Stücke des Dreiecks aus. Vorgesehen sind von den Dreiecksseiten a, b, c, den Innenwinkeln α, β, γ, die Höhe h_c auf c sowie die Inkreis- und Umkreisradien r und R als Möglichkeiten

- a, b, c
- c, α, b
- c, α, β
- c, α, a
- c, α, R
- c, α, r

- c, a, h_c
- c, α, h_c
- c, R, h_c
- h_c, α, β

Geben Sie entsprechende Werte ein, berechnet das Programm die restlichen Dreiecksstücke. Zusätzlich wird das Dreieck schrittweise konstruiert und eine Konstruktionsbeschreibung gegeben.

8.8 Rechtwinkliges Dreieck



Dieses Unterprogramm gewährleistet verschiedene Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken.

Von den neun Größen, den drei Seiten des Dreiecks a, b und c, den zwei nicht rechten Winkeln α und β, der Höhe auf die Hypotenuse c, den Hypotenusenabschnitten p und q sowie der Dreiecksfläche A, müssen Sie genau zwei eingeben. Der Schalter *Berechnung* ermittelt die anderen sieben Werte. Zusätzlich werden bestimmt:

- die Längen der Winkelhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Längen der Seitenhalbierenden auf alle drei Seiten
- die Ankreisradien aller drei Seiten (Radien der Kreise des Apollonius)
- der Inkreis- und Umkreisradius
- der Abstand des Inkreismittelpunktes vom Umkreismittelpunkt
- der Dreiecksumfang

Zu beachten ist, dass die Eingabe der zwei Winkel das Dreieck entsprechend der Kongruenzsätze nicht vollständig beschreibt. Durch die drei Winkel werden nur zueinander ähnliche Dreiecke beschrieben. Geben Sie mehr als zwei Größen ein, werden von oben nach unten gerechnet die ersten zwei Werte zur Berechnung herangezogen.
Mit dem Schalter *Berechnung* wird das Dreieck auch sofort grafisch dargestellt. Punkt A wird in einen fiktiven Koordinatenursprung gelegt. Per Mausklick auf diesen Punkt A und Bewegung der Maus (bei festgehaltener Maustaste!) können Sie die Lage des Punktes verschieben. Die Hypotenuse wird immer parallel zur Abszissenachse gezeichnet. Zusätzlich werden, auf Ihren Wunsch hin, der In- und Umkreis gezeichnet.

Beispiel: Für die Eingabe von a = 3 und b = 5 erhalten Sie:

c = 5,831	h = 2,5725	p = 1,5435	q = 4,2875
α = 30,9638°	β = 59,0362°	A = 7,5	u = 13,831
ρ = 1,0845	r = 2,9155	Abstand = 1,4752	
	auf c	auf a	auf b
Winkelhalbierende	2,6517	5,1883	3,4475
Seitenhalbierende	2,9155	5,2202	3,9051

Ankreisradien	6,9155	1,9155	3,9155

Beachten Sie bitte: Nicht jedes Paar von Zahlen bestimmt ein rechtwinkliges Dreieck. Vielmehr müssen die eingegebenen Werte allgemeinen Gesetzmäßigkeiten entsprechen. Dazu gehören u.a.:

- die Dreiecksungleichungen: a < b + c, b < a + c und c < a + b
- die Regel: der größere Winkel liegt der größeren Seite gegenüber
- die Höhe auf c kann nicht größer als c / 2 sein usw.

Verstoßen Ihre Eingaben gegen diese Konditionen, meldet das Programm:
Keine eindeutige Lösung.

8.9 Satzgruppe des Pythagoras: Höhensatz, Kathetensatz, Satz des Pythagoras

"Kandidat: 'a² + b² = c².'
G. Jauch: 'Ist das nicht die binomische Formel?'"
RTL-Quizshow am 7.10.2002

Obwohl die mathematische Bildung der Bevölkerung in Deutschland im Vergleich zu anderen Industrienationen verheerend ist, können zumindest viele wenigstens einen mathematischen Satz nennen: den Satz des Pythagoras. Zwar wird dieser immer in der verkürzten Form a² + b² = c² genannt, ohne zu wissen, was er wirklich aussagt, aber immerhin ist dies ein Anfang!

Drei Sätze am rechtwinkligen Dreieck, der Höhensatz, der Kathetensatz oder Satz des Euklid und der Satz des Pythagoras, gehören seit rund 2500 Jahren zum mathematischen Wissen. Ihre Berühmtheit erlangten diese mathematischen Gesetze aufgrund ihrer einfachen Struktur und "inneren Schönheit". Schon die Pythagoräer waren, gemäß ihres Kernsatzes "Alles ist Zahl", von der Möglichkeit, geometrische Zusammenhänge mittels einfacher Zahlen auszudrücken, begeistert. Allerdings war der nach Pythagoras benannte Satz schon lange vorher im antiken Babylon (etwa 1600 v. u.Z.) bekannt.

Das Teilprogramme *Satzgruppe des Pythagoras* in der Auswahl geometrischer interaktiver Programmteile gibt Ihnen die Möglichkeit, diese drei Sätze geometrisch zu veranschaulichen und zu untersuchen.

Nach Auswahl des Satzes an den Auswahlfeldern stellen Sie die Größe der Hypotenuse AB des Dreiecks durch Verschieben der Punkte A und B ein. Die Lage des dritten Dreieckspunktes C verändern Sie, indem Sie mit der Maus den Lotfußpunkt F längs der Hypotenuse verschieben.

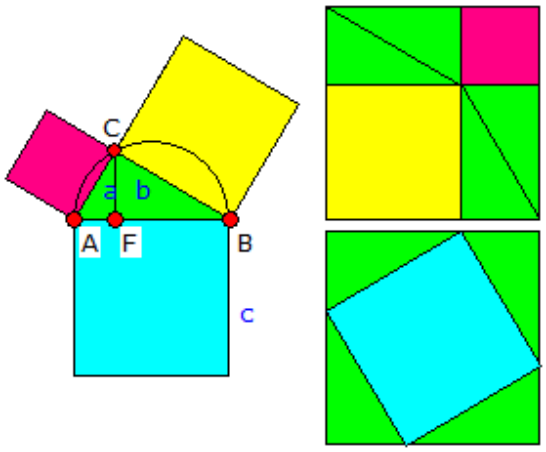
Das Programm stellt Ihnen sofort den entsprechenden Satz dar und berechnet die wichtigen Größen. Für den *Kathetensatz* können Sie zusätzlich entscheiden, ob die linke oder rechte Seite der Figur gezeichnet wird.

Insgesamt finden Sie:

- Höhensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse flächengleich mit dem Rechteck aus den Längen der Hypotenusenabschnitte.
- Kathetensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Länge der Hypotenuse und der Länge der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.
- Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten.

Die Simulation bewirkt stets eine kontinuierliche Verschiebung des Höhenfußpunktes von links nach rechts.

8.10 Nachweis des Satzes von Pythagoras



Zum Nachweis des Satzes von Pythagoras wurde im Laufe der Jahrhunderte eine Vielzahl von interessanten Beweisen erdacht. Neben rein rechnerischen existieren auch geometrische Beweise, bei denen die Beziehung zwischen den Quadraten über den Katheten und der Hypotenuse durch den Vergleich von Flächen gezeigt wird.

In dem Teilprogramm *Nachweis des Satzes von Pythagoras* wird Ihnen ein solcher Beweis demonstriert.
Rechts neben der Pythagoras-Figur sehen Sie zwei Quadrate mit den Seitenlängen a + b. Im unteren ist das Quadrat über der Hypotenuse eingetragen. Darüber hinaus finden Sie vier zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke.

Im oberen Quadrat sind die Quadrate über den Katheten und erneut vier kongruente rechtwinklige Dreiecke eingetragen. Offensichtlich sind beide Quadrate gleich groß und da jeweils vier Dreiecke eingetragen sind, müssen die Restflächen ebenfalls flächengleich sein, d.h., die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Möchten Sie diesen Nachweis für andere Werte untersuchen, so können Sie am Rollbalken die Länge der Seite AB ändern und den Lotfußpunkt F wieder mit der Maus verschieben. Während der Simulation wird die Lage von F verändert.

8.11 Nachweis des Kathetensatzes

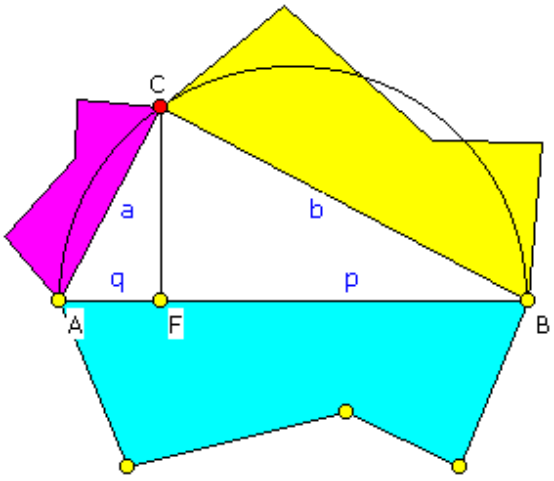
Zum Nachweis des Höhensatzes, des Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras wurden sehr viele Beweise gefunden (siehe Lexikon). Eine sehr interessante Variante existiert für den Kathetensatz.

Dabei wird ausgenutzt, dass Flächen bei einer Scherung oder einer Drehung in der Ebene ihren Flächeninhalt nicht verändern. Das Quadrat über der Kathete a wird nun durch eine Scherung längs der Seite in ein flächengleiches Parallelogramm verwandelt. Danach wird es um den Dreieckspunkt B gedreht und abschließend durch eine zweite Scherung längs der Dreieckshöhe in ein Rechteck verwandelt und mit dem Rechteck über dem Hypotenusenabschnitt zur Deckung gebracht.

Da beide Rechtecke zueinander kongruent sind, muss der Flächeninhalt des Quadrats über der Kathete gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks über dem Hypotenusenabschnitt sein. Damit ist der Kathetensatz nachgewiesen.
Die Darstellung der Scherungen und der Drehung starten Sie durch einen Klick auf den Schalter *Simulation.* Diese Bewegungen erfolgen so lange, bis Sie mit *Abbruch* quittieren. Die Geschwindigkeit der Simulation können Sie an dem kleinen Rollbalken beeinflussen.
Die Lage der Punkte A, B und F können Sie mit der Maus verschieben.

8.12 Pythagoreische Figuren

Eine interessante Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ist:
Der Flächeninhalt einer Figur über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Flächeninhalte ähnlicher Figuren über den Katheten.



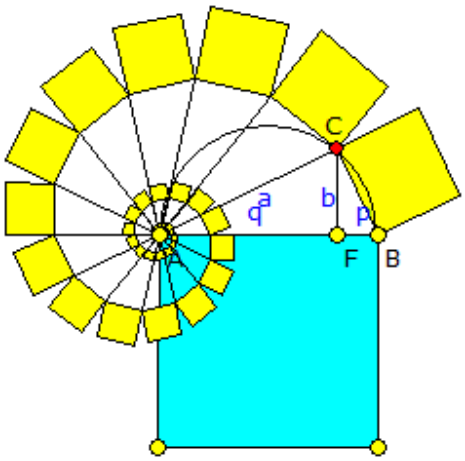
Dabei können die Figuren verschiedenste n-Ecke, aber auch Halbkreise oder andere Flächen sein. In diesem Teilprogramm können Sie dies darstellen.

Die Größe der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks stellen Sie wieder durch Verschieben von A und B ein, den Lotfußpunkt durch Verschiebung des Punktes F.

Am Rollbalken stellen Sie die Anzahl von Punkten ein, die über der Hypotenuse gezeichnet werden und die betrachtete Figur ergeben.
Diese gelb markierten Punkte können Sie mit der Maus verschieben. Wählen Sie eine Punktzahl von Null, zeichnet das Programm über den Dreiecksseiten Halbkreise.

Während der Simulation wird F waagerecht verschoben.

Pythagoreische Spiralen



Die klassische Pythagoras-Figur kann nicht nur durch Aufsetzen von ähnlichen N-Ecken modifiziert werden, es ist durchaus auch möglich, an die Katheten weitere, ähnliche rechtwinklige Dreiecke anzufügen und dort Quadrate bzw. andere Figuren aufzusetzen.
Wiederholt man dies immer wieder, so entsteht eine Pythagoreische Spirale wie in der Abbildung.

Dabei gilt: Das blaue Quadrat ist jeweils flächengleich der Summe der Flächen der an die Katheten angesetzten, hier gelben, Quadrate.

Das blaue Quadrat hat den Flächeninhalt c^2. Das erste gelbe Quadrat hat den Flächeninhalt a^2. Das zweite gelbe Quadrat ist gegenüber dem ersten gelben Quadrat längenmäßig mit dem Faktor b/c verkleinert, flächenmäßig also mit dem Faktor b^2/c^2.
Das dritte gelbe Quadrat ist gegenüber dem zweiten Quadrat ebenso flächenmäßig mit dem Faktor b^2/c^2 verkleinert, und so weiter.
Damit erhält man für die Summe der Flächeninhalte der gelben Quadrate:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} (b/c)^{2n}\, a^2 = a^2 / (1-b^2/c^2) = c^2$$

Derartige Pythagoreische Spiralen können Sie in diesem Teilprogramm auch zeichnen.
Verändern Sie am Rollbalken *Dreiecke* die Zahl auf mehr als 1, so werden an die Kathete entsprechende ähnliche Dreiecke angefügt.

Die Figur über der Hypotenuse kann auch hier, wie oben beschrieben, von einem Dreieck bis Achteck bzw. einen Kreis verändert werden.

8.13 Schnittkurven am Dreieck

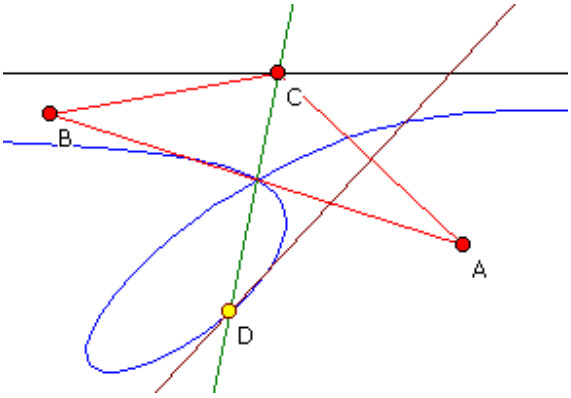
An der einfachsten geometrischen Figur, dem Dreieck, gibt es eine Unmenge von besonderen Punkten, Geraden, Kreisen und interessanten Beziehungen. Auch mit der Konstruktion von Kurven, insbesondere Kegelschnitten, ist das Dreieck verbunden. Dazu stellt sich folgendes Problem:

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch C wird eine Ecktransversale gezeichnet und mit einer Ecktransversalen durch A bzw. B oder der Mittelsenkrechten zu AC oder BC geschnitten.
Auf welcher Kurve bewegt sich dann der Schnittpunkt, wenn C auf einer Parallelen zu AB oder einer beliebigen Geraden bewegt wird?

In diesem Teilprogramm *Schnittkurven am Dreieck* wird diese Fragestellung für folgende Transversalenpaare untersucht:

- Höhe auf c – Mittelsenkrechte von AC
- Höhe auf c – Seitenhalbierende von b
- Höhe auf c – Winkelhalbierende von Beta
- Seitenhalbierende von AB – Höhe auf b
- Seitenhalbierende von AB – Mittelsenkrechte von AC
- Seitenhalbierende von AB – Winkelhalbierende von Beta
- Winkelhalbierende von Gamma - Höhe auf b
- Winkelhalbierende von Gamma - Mittelsenkrechte von AC
- Winkelhalbierende von Gamma - Seitenhalbierende von AC

Den *Typ* der sich schneidenden Geraden wählen Sie an der aufklappbaren Liste aus.
Die Lage der Dreieckseckpunkte können Sie wieder mit der Maus verändern oder die Koordinaten in die *Tabelle* eintragen. Ist das Feld *Y(C) feststellen* markiert, kann der Punkt C nur längs der waagerechten Geraden mit der Maus verschoben werden.



Bewegen Sie C nun von links nach rechts, so wird der jeweilige Schnittpunkt berechnet und sofort dargestellt. Mit einer Markierung bei *Kurve anzeigen* werden die Punkte ab der ersten Position von C bis zur aktuellen gezeichnet. Mit dem Feld *volle Kurve* wird die ganze Ortskurve angezeigt.

Interessant ist es nun, die *Simulation* zu starten. In diesem Fall können Sie die Lage der Punkte der Ortskurve gut nachvollziehen.
Die Ergebnisse sind teilweise sehr überraschend.

Im Beispiel sehen Sie die Kurve, die als Schnitt der Seitenhalbierenden von c und der Mittelsenkrechten von AC entsteht.

Kegelschnitte entstehen für das Paar Seitenhalbierende von AB – Winkelhalbierende von Beta. Je nach Lage kann eine Ellipse, eine Parabel, aber auch eine Hyperbel entstehen. Auch in den Fällen Seitenhalbierende von AB – Höhe auf b und Höhe auf c – Mittelsenkrechte von AC erhält man Kurven 2. Ordnung. Bei den anderen Möglichkeiten treten mitunter algebraische Kurven 3., aber auch 6. Ordnung auf.

8.14 Castillons Problem

1750 veröffentlichte Gabriel Cramer folgendes Problem:

Gegeben sind drei Punkte A, B, C und ein Kreis. Gesucht ist ein in den Kreis eingeschriebenes Dreieck, auf dessen evtl. verlängerte Seiten jeweils genau einer der Punkte A, B, C liegt.
1776 löste der italienische Mathematiker Castillon dieses Problem und seither wird diese Aufgabenstellung nach ihm benannt: Sind A, B und C kolinear, so ergibt sich als Sonderfall der Satz des Pappus.

Die Lösung ist sehr anspruchsvoll und wurde u.a. in "100 great problems of Elementary Mathematics" von Heinrich Dörrie veröffentlicht. Eine prinzipielle Beschreibung binden Sie im Lexikon des Programms. Die Beweisführung dieses Verfahrens ist sehr aufwendig und sollte daher in dem genannten Buch nachgelesen werden.

In diesem Teilprogramm wird dieses Dreieck für einen gegebenen Kreis und drei Punkte A, B, C konstruiert. Die Punkte A, B, C und der Kreismittelpunkt D können wieder mit der Maus verschoben werden. Den Radius des Kreises verändern Sie am Rollbalken.

Beachten Sie bitte, dass nicht für jede Ausgangssituation tatsächlich ein solches Dreieck existiert.

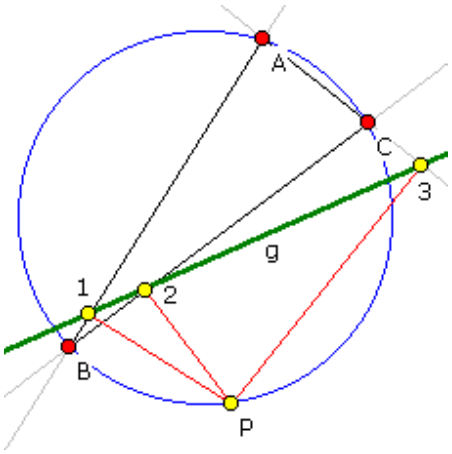
Während der Simulation wird der Radius des Kreises kontinuierlich verändert. Markieren Sie *D bewegen*, so wird der Punkt waagerecht verschoben.

8.15 Simson-Gerade

Eine äußerst interessante Gerade an einem Dreieck entsteht wie folgt:

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks. Fällt man von P die Lote auf die evtl. verlängerten Dreiecksseiten, so liegen die drei Lotfußpunkte (in der Abbildung 1, 2, 3) auf einer Geraden g, der Simson-Geraden.

Von Poncelet wurde die Entdeckung Simson zugeschrieben. Heute bezeichnet man diese Gerade auch als Wallace-Simson-Gerade. Die Umkehrung, dass der Ort der Menge aller Punkte P, deren Lotfußpunkte auf den Dreiecksseiten kollinear sind, gleich dem Umkreis ist, heißt Wallace-Simson-Theorem.



In diesem Programmteil zeichnet das Programm für ein beliebiges Dreieck und einen Punkt P auf dem Umkreis diese Gerade. Sowohl die Dreieckspunkte als auch den Punkt P können Sie wieder durch Anklicken und Ziehen mit der Maus verschieben. Zusätzlich können Sie die *Steiner-Gerade* eintragen.

Während der Simulation wird der Punkt P längs des

Umkreises bewegt. Dabei können einige der Eigenschaften der Simson-Gerade sehr schön nachvollzogen werden.
Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* so erhalten Sie Informationen zu den Koordinaten der drei Dreieckspunkte, dem Peripheriepunkt P und den drei berechneten Schnittpunkten X, Y und Z mit den verlängerten Dreiecksseiten.

8.16 Ceva-Dreieck

Gegeben sei wieder ein beliebiges Dreieck ABC und dieses Mal im Inneren des Dreiecks ein weiterer Punkt P. Zeichnet man nun die Dreieckstransversalen durch diesen Punkt ein, so schneiden sie die Seiten in drei weiteren Punkten.
Unter dem Ceva-Dreieck versteht man das Dreieck A'B'C', das aus den Schnittpunkten der Dreieckstransversalen durch P mit den Seiten gebildet wird. Dieses Dreieck hat einen Umkreis: den Ceva-Kreis.

Das Dreieck A''B''C'', das durch Spiegelung der Eckpunkte eines Ceva-Dreiecks an den Seitenmittelpunkten des Ausgangsdreiecks entsteht, ist selbst wieder ein Ceva-Dreieck.
Das 1. Ceva-Dreieck, den Ceva-Kreis und die gespiegelten Werte können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen. Erneut haben Sie die Möglichkeit, die Lage der drei Dreieckspunkte, aber auch des Punktes P mit der Maus zu verschieben. An den Schaltfeldern legen Sie fest, welche zusätzlichen Stücke eingezeichnet werden.

Wählen Sie das Markierungsfeld *Tabelle anzeigen*, zeigt das Programm eine Tabelle der Dreieckseckpunkte an. In die Felder der Punktkoordinaten können Sie neue Werte eingeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Zusätzlich gibt Ihnen das Programm auch die Koordinaten der berechneten Punkte D, E, F, die Schnittpunkte P und Q sowie die Mittelpunkte C1 und C2 der zwei Ceva-Kreise an.

8.17 Inneres Dreieck

Eine weitere interessante Aufgabenstellung ist die des inneren Dreiecks:

Jede Ecke eines Dreiecks ABC wird zyklisch mit dem Punkt der nächsten Seite verbunden, der diese im Verhältnis 1/3 zu 2/3 teilt. Gefragt ist nach dem Verhältnis der innen von diesen Linien begrenzten Fläche zu der des ganzen Dreiecks.

Lösung: Für einen einfachen Beweis zeichnet man drei Parallelenscharen mit je gleichen Abständen derart, dass das innere Dreieck zu einer Zelle darin wird. Von den Parallelogrammen, die blau, grün und rot getönt sind und die je die Fläche von vier solchen Zellen haben, gehört jeweils die kräftiger getönte Hälfte zum großen Dreieck. Die Fläche des "inneren" verhält sich also zu der des "ganzen" wie 4/13.

Auch für andere Teilverhältnisse kann diese Aufgabe gelöst werden. Allgemein ergibt sich für eine Teilung im Verhältnis m : n als Verhältnis des inneren Dreiecks zum Gesamtdreieck

$$(n-m)^2 : (m^2 + mn + n^2)$$

In diesem Programmteil können Sie solche inneren Dreiecke zeichnen lassen. An den zwei Rollbalken stellen Sie das Teilungsverhältnis m : n der Dreiecksseiten ein.

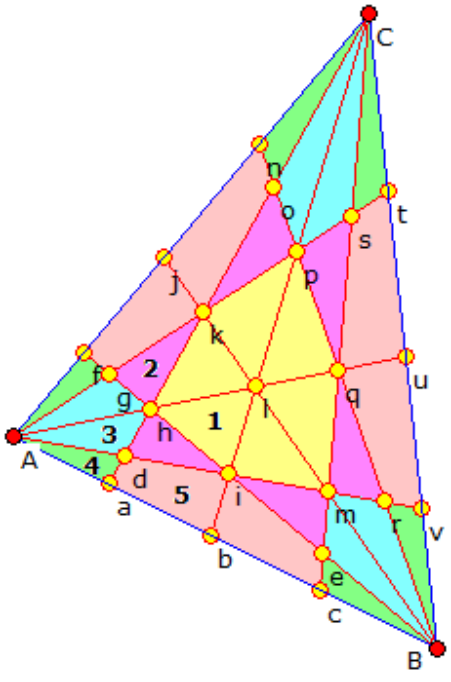
Die Punkte A, B und C können Sie wieder mit der Maus verschieben. Das zur Lösung genutzte Dreiecksgitter ist zu- und abschaltbar. Während der Simulation wird A kontinuierlich verschoben.

8.18 Dreiecksunterteilung

In einem Dreieck ABC werden die drei Seiten in den Verhältnissen p :q und q : p geteilt und die sechs zugehörigen Ecktransversalen und Seitenhalbierenden gezeichnet. Dadurch wird das Dreieck in mehrere Teilgebiete unterteilt.

Die Transversalen schneiden sich in 22 Punkten. Nutzt man trilineare Koordinaten mit Punkt A (1:0:0), Punkt B (0:1:0) und C(0:0:1), so ergeben sich für die Schnittpunkte die Koordinaten:

a (q:p:0) b (1:1:0) c (p:q:0)
d (q^2:pq:p^2) e (pq:q^2:p^2) f (q:0:p)
g (q^2:p^2:pq) h (q:p:p) i (q:q:p)
j (1:0:1) k (q:p:q) l (1:1:1)
m (p:q:p) n (p:0:q) o (pq:p^2:q^2)
p (p:p:q) q (p:q:q) r (p^2:q^2:pq)
s (p^2:pq:q^2) t (0:p:q) u (0:1:1)
v (0:0:1)

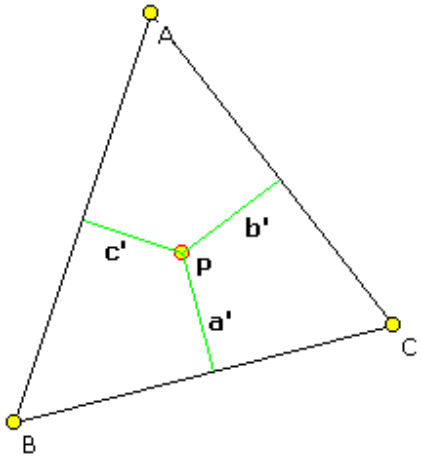


Außerdem entstehen 4 Arten von Dreiecken und ein Art Vierecke, die jeweils flächengleich sind.

In diesem Teilprogramm wird die Dreiecksunterteilung konstruiert. An den zwei Rollbalken stellen Sie die gewünschten Werte für p und q ein.
Die Eckpunkte A, B und C des Ausgangsdreiecks können Sie mit der Maus verschieben.
Markieren Sie *Tabelle anzeigen*, so erhalten sie die Koordinaten aller Punkte und die Flächeninhalte der Teilflächen.

8.19 Trilineare und baryzentrische Koordinaten

Eine Besonderheit bei der geometrischen Untersuchung von Dreiecken stellen die sogenannten trilinearen Koordinaten dar. Sie ermöglichen die Angabe signifikanter Punkte eines Dreiecks in Abhängigkeit von den Seitenlängen und Winkeln, ohne dass ein konkretes Koordinatensystem eingeführt werden muss.



Besonders interessant ist dabei, dass die mit trilinearen Koordinaten angegebenen Punkte eines Dreiecks, von dessen Gestalt unabhängig sind. Die trilinearen Koordinaten cos α : cos β : cos γ beschreiben zum Beispiel stets den Umkreismittelpunkt.

Sind das Dreieck ABC und ein weiterer Punkt P gegeben, so hat dieser Punkt P von den Dreiecksseiten die minimalen Abstände a', b' und c'. Für die trilinearen Koordinaten α, β und γ (Achtung: Das sind hier nicht die Innenwinkel des Dreiecks!) gilt in diesem Fall:

α = k a'; β = k b' und γ = k c'

Die trilinearen Koordinaten werden dann in der Schreibweise α : β : γ angegeben.

Zum Beispiel haben die Eckpunkte A, B und C die Koordinaten 1 : 0 : 0, 0 : 1 : 0 und 0 : 0 : 1. Für den Inkreismittelpunkt gilt 1 : 1 : 1, für den Lémoine-Punkt a : b : c, für den Umkreismittelpunkt cos (α) : cos (β) : cos (γ), wobei hier der Kosinus der Innenwinkel gebildet wird usw.

Weiterhin gilt u.a.: Dreiecksfläche A = 1 / 2 k (a α + b β + c γ), wobei α, β, γ trilineare Koordinaten und k der oben beschriebene Faktor sind. Sind α : β : γ die trilinearen Koordinaten eines Punktes P, so sind weiterhin (a α, b β, c γ) dessen baryzentrische Koordinaten.

Im diesem Teilprogramm können Sie die trilinearen Koordinaten eines Punktes am Dreieck eingeben und in Euklidische Koordinaten transformieren. Zusätzlich werden das Dreieck und der Punkt gezeichnet.
Die drei Dreieckspunkte A, B und C lassen sich per Mausklick in der grafischen Darstellung verschieben.

In die Eingabezeilen der trilinearen Koordinaten können Sie außer Zahlen auch Terme eingeben. Dabei verwenden Sie die Variablen a, b und c für die Seitenlängen des Dreiecks und die Abkürzungen wa, wb, wc für die entsprechenden Innenwinkel. Das Programm wertet diese Terme je nach Gestalt des Dreiecks aus.
In einer kleinen Liste finden Sie wenige vordefinierte, spezielle Punkte am Dreieck. Wählen Sie einen aus, werden dessen Koordinaten eingetragen.

Hinweis: Im Teilprogramm *Dreieck* werden auf Wunsch alle berechneten Punkte

am Dreieck auch in trilinearen Koordinaten angegeben.

8.20 Kugeldreieck

Drei sich schneidende Großkreisbögen einer Kugel bilden ein Kugeldreieck ABC. Dabei sind die Seiten AB, AC und BC in Grad anzugeben. Das Programm betrachtet ausschließlich Eulersche Kugeldreiecke, bei denen jede Seite und jeder Winkel kleiner 180 Grad (kleiner π) ist. Nicht-Eulersche Dreiecke ABC unterscheiden sich von der Halbkugel nur durch ein Eulersches Dreieck BAC und können somit auf diese zurückgeführt werden. Von den sechs Größen, den drei Seiten und drei Winkeln müssen genau drei eingegeben werden. Im Gegensatz zum Dreieck in der Ebene bestimmt auch die Eingabe der drei Winkel das Dreieck vollständig.

Allerdings sind bestimmte Regeln zu beachten. Auch ein Kugeldreieck muss die Dreiecksungleichungen erfüllen. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber und die Summe der Seiten darf 2π (360 Grad) nicht übersteigen. Die Innenwinkelsumme ist stets größer als 180 Grad aber kleiner als 540.

Bestimmen die eingegebenen Größen eindeutig ein Kugeldreieck, werden die anderen berechnet. Zusätzlich bestimmt das Programm den sphärischen Exzess des Dreiecks, d.h. die Innenwinkelsumme des Dreiecks - 180 Grad, sowie die Radien von In- und Umkreis. Existiert das Dreieck nicht, erscheint die Fehlermeldung:

Keine eindeutige Lösung.

Für ein Eulersches Kugeldreieck existieren sechs Hauptfälle der Dreiecksberechnung:

- gegeben sind drei Seiten
- gegeben sind drei Winkel
- gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel
- gegeben sind eine Seite und die anliegenden Winkel
- gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel, welcher einer Seite gegenüberliegt
- gegeben sind zwei Winkel und eine Seite, welcher einem Winkel gegenüberliegt

Alle sechs Fälle werden vom Programm behandelt. Für die Berechnung existieren auch für das sphärische Dreieck zur Ebene geometrieanaloge Sätze wie der Kosinussatz oder der Sinussatz.

Beispiel: Für a = 52,5°, b = 107,8° und γ = 141,5° ermittelt das Programm c = 141,01°, α = 51,7157° und β = 70,397° sowie einen sphärischen Exzess von 83,6128°.

9. Geometrie - Stereometrie

Schwerpunkt der Programme des Menüpunktes Stereometrie sind Themen der Geometrie von Körpern sowie die analytische Geometrie im dreidimensionalen Raum.

9.1 Analytische Geometrie des Raumes

In diesem Teilprogramm können Sie im Rahmen der analytischen Geometrie des Raums Punkte, Geraden, Ebenen und Kugeln berechnen und grafisch veranschaulichen.

Dieser Programmteil ist analog zu Analytische Geometrie der Ebene gestaltet, wo geometrische Untersuchungen in der Ebene im Vordergrund standen.
Die Grundlagen der modernen analytischen Geometrie wurden von Pierre de Fermat (Behandlung von geometrischen Problemen mit analytischen Ausdrücken; 1601-1665), von René Descartes (kartesische Koordinaten; 1596-1650) und von Blaise Pascal (Theorie der Kegelschnitte; 1623-1662) gelegt.

Das Programmfenster ist in drei Abschnitte eingeteilt. Rechts finden Sie den Bereich zur Auswahl und Festlegung der geometrischen Gebilde, in der Mitte den Darstellungs- und Berechnungsbereich und links Steuerelemente für Darstellung und Auswertung.

Objektauswahl

Zur Untersuchung können Sie folgende geometrische Gebilde definieren:

- Punkt ... Angabe der Koordinaten x, y und z des Punktes
- Gerade ... Eingabe durch Koordinaten zweier Punkte oder als Punktrichtungsform (Punkt und Richtungsvektor)
- Ebene ... Festlegung durch 3 Punkte, einen Punkt und zwei Spannvektoren, in Koordinatenform oder in Hessescher Normalenform (Orts- und Normalenvektor)
- Dreieck ... Festlegung durch die 3 Eckpunkte
- Kugel ... Festlegung durch Mittelpunkt und Radius oder durch 4 auf der Kugelperipherie liegende Punkte
- Spat und ebenes Viereck ... Festlegung durch 4 Punkte im Raum
- Dreiseitige Pyramide ... Festlegung durch die Koordinaten der vier Eckpunkte

Nach Eingabe der jeweiligen Stücke übernehmen Sie diese durch einen Klick auf den Schalter *Objekt übernehmen* in die Objektliste.

Berechnung der geometrischen Gebilde

Enthält die Objektliste definierte Punkte, Geraden, Ebenen usw., so können Sie diese über den Schalter *Berechnung* rechnerisch auswerten.
Dazu ermittelt das Programm für jedes Objekt Eigenschaften, aber auch für je zwei Objekte Beziehungen zwischen diesen.

Darstellung der geometrischen Gebilde

Wählen Sie den Schalter *Darstellung,* werden die ermittelten Werte innerhalb eines Koordinatensystems dargestellt. Das Programm zeichnet dabei alle Objekte der Liste, die per Mausklick markiert wurden. Damit können Sie einzelne Punkte, Geraden, Ebenen ... auswählen und eine bessere Übersicht erhalten. Mit dem Schalter *Alles auswählen* werden alle Objekte gezeichnet.
Mithilfe der Schalter und können Sie die Größe des Darstellungsintervalls einstellen. Der mittlere Schalter stellt die Standardgröße wieder ein. Markieren Sie das Feld *Würfel*, wird zur besseren räumlichen Orientierung ein "Koordinatenwürfel" eingezeichnet. Das Feld *Hilfslinien* bewirkt für jeden Punkt das Eintragen von Linien entsprechend seiner Koordinaten. Die Koordinatenachsen werden gezeichnet, wenn das entsprechende Feld markiert wurde.

An den drei Rollbalken *Drehwinkel* können Sie zusätzlich eine Drehung des Koordinatensystems erreichen. Damit können Sie u.U. die räumliche Lage der gezeichneten Objekte anschaulicher gestalten. Mit dem Schalter *Drehung* wird eine kontinuierliche Drehung der Objekte um die z-Achse gestartet.

9.2 Polyeder

In diesem Unterprogramm können Sie unter neunzehn Polyedern – darunter alle Platonischen Körper – wählen. Nach Eingabe der entsprechenden Größen *Kantenlänge*, *Höhe* usw. ermittelt das Programm weitere Größen für die fünf regelmäßigen Körper, z.B.

- Volumen und Oberfläche
- Radius der Inkugel (diese Kugel berührt Flächenmittelpunkte)
- Radius der Mittelkugel (Kugel berührt Kantenmittelpunkte)
- Radius der Umkugel (Kugel berührt Körpereckpunkte)

Die Berechnungsergebnisse für die ausgewählten Körper werden nur dann angezeigt, wenn Sie das Feld *Ergebnisse* markiert haben.
Die Geschichte der regelmäßigen Körper ist bereits älter als unsere Zeitrechnung. Über Hippasos von Metapont (um 450 v.Z.) wird berichtet, dass er "... zuerst die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieb und deshalb als ein Gottloser im Meer umgekommen sei ...". Plato (429-348 v.Z.), nach dem sie benannt sind, ordnete diese fünf Körper in seinem Dialog "Timaios" in Anlehnung an die Pythagoräer den Weltbestandteilen zu. Über Euklid (365-300 v.Z.) und Johannes Kepler (1571-1630) beschäftigen sich auch heute noch mathematisch

Interessierte mit diesen Gebilden.

Beispiel: Für ein Ikosaeder mit der Kantenlänge a = 1 erhalten Sie:

Volumen	2,1817 RE	Oberfläche	8,6603 FE
Inkugelradius	0,7558	Mittelkugelradius	0,809
Umkugelradius	0,9511		

Die Berechnungsergebnisse werden nur angezeigt, wenn Sie das Markierungsfeld *Ergebnisse* zugeschaltet haben. Zusätzlich zur Berechnung wird der gewählte Körper grafisch veranschaulicht. Voreingestellt ist ein Schrägbild mit Animationsmöglichkeit. Klicken Sie auf das Feld *Zweitafelprojektion,* erhalten Sie sowohl einen Aufriss als auch einen Grundriss. Haben Sie die Zweitafelprojektion markiert, so bewirkt das Feld *Dreitafelprojektion* zusätzlich die Darstellung eines dritten Risses, des Seitenrisses des Körpers.

Bei Auswahl eines anderen Körpers, z.B. eines Quaders, einer Pyramide, eines Pyramidenstumpfes usw., sind die unter *Größen* genannten Stücke einzugeben. In der Liste der Polyeder finden Sie neben konvexen auch zusammengesetzte Körper.

Archimedische Körper

Im dreidimensionalen Raum existieren genau fünf Körper, die ausschließlich von genau einer Art regelmäßiger Polygone begrenzt werden, den berühmten Platonischen Körpern, von Johannes Kepler auch Kosmische Körper genannt. Schon Archimedes wusste, dass es weitere 13 sogenannte halbregelmäßige Körper gibt, die von mehr als einer Art regelmäßiger Vielecke begrenzt sind. Ihm zu Ehren nennt man diese Körpergruppe auch Archimedische Körper.

Archimedische Körper können aus den fünf Platonischen Körpern hergestellt werden. Dabei werden von den regelmäßigen Polyedern symmetrisch andere regelmäßige Körper "abgeschnitten". Das Ikosidodekaeder entsteht zum Beispiel, indem an den Eckpunkten eines Pentagondodekaeders regelmäßige Tetraeder, also dreiseitige Pyramiden, entfernt werden. Während bei den Platonischen Körpern nur regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Fünfecke als Seitenflächen vorkommen, können dies bei den Archimedischen Körpern nun auch Sechsecke, Achtecke und Zehnecke sein.

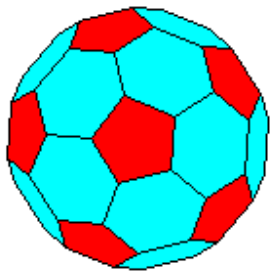


Abbildung: Abgestumpftes Ikosaeder mit Berücksichtigung der verdeckten Körperkanten

Anmerkung: Das abgestumpfte Ikosaeder ist der Archimedische Körper, welcher am besten eine Kugel annähert. Deshalb bildet dieses Polyeder die Grundlage für die Herstellung von Fußbällen usw.

Einige der Archimedischen Körper sind besonders interessant. Während die meisten der Körper eine Vielzahl von Symmetrieebenen aufweisen, fehlen diese beim Cubus simus und beim Dodecaedron simum (Bezeichnungen von Johannes Kepler). Beide zeichnen sich durch eine besonders hohe Anzahl von Dreiecksseitenflächen aus.

Dieses Teilprogramm bietet Ihnen die Möglichkeit, jeden der 13 Archimedischen Körper darzustellen und auf Wunsch wieder im Raum zu bewegen. Wählen Sie dazu in der Liste einen der dreizehn Einträge aus und bestätigen Sie mit dem Schalter *Darstellung*.

Erneut können Sie die Darstellung als Gitternetz unter Berücksichtigung verdeckter Körperkanten bzw. mit farbigen Seitenflächen zeichnen. Schalten Sie dazu an den Markierungsfeldern *verdeckte Kanten* und *farbige Flächen* die Optionen ein oder aus.

Außer den Platonischen und Archimedischen Körpern gibt es noch weitere interessante Körper, darunter zum Beispiel die zu den Archimedischen Körpern zählenden polaren Polyeder, die sogenannten Catalanschen Polyeder. Auch diese finden Sie in der Liste dieses Teilprogramms.

Johnson-Polyeder

Ein Polyeder heißt Platonischer Körper, wenn er nur von einer Art regelmäßiger N-Ecke begrenzt wird. Fordert man, dass an einer Ecke stets die gleiche Anzahl und Art von regelmäßigen N-Ecken zusammenstoßen und lässt verschiedene N-Ecke zu, so ergeben sich die Archimedischen Körper.

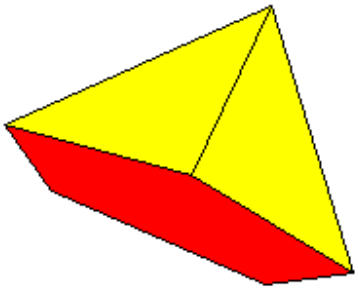
Begnügt man sich nun mit der Forderung nach regelmäßigen N-Ecken, verschiedener Eckenzahl und unterschiedlichen Polygonen an den Körperecken, so existieren weitere 92 derartige Körper. Erstmals wurden diese Polyeder von Johnson beschrieben und auch nach ihm benannt.

Im Programm können Sie alle 92 Körper betrachten. Auch hier ist es wieder möglich, ihre Anschaulichkeit durch Drehung zu erhöhen.

Darstellung und Animation der Körper

Die Darstellung der Körper kann ebenfalls gesteuert werden. Klicken Sie nach Auswahl eines Körpers auf den Schalter *Darstellung*, wird dieser Körper gezeichnet.
Ein Klick auf die Schalter und verkleinert bzw. vergrößert die Körperdarstellung. Der Schalter stellt die Grundeinstellung wieder her.
Ist die Darstellung des Körpers möglich, so können Sie ihn um seine räumliche Achsen bewegen und so die Anschaulichkeit verbessern.

Der Körper wird in einem räumlichen Koordinatensystem dargestellt. Starten Sie die *Rotation*, wird der Körper zur besseren Veranschaulichung um zwei Achsen gedreht. Mithilfe dieser Bewegung wird der räumliche Eindruck verstärkt sowie eine bessere Vorstellung der Gestalt des Körpers möglich.



Die Geschwindigkeit und Richtung der Drehung stellen Sie über die Pfeilschalter für die Drehung in x-, y- und z-Richtung ein. Mit der *ESC* -Taste oder dem Schalter *Stopp* beenden Sie die Simulation.

Beispiel: Darstellung einer fünfseitigen Pyramide mit Berücksichtigung der unsichtbaren Körperkanten

Möchten Sie, dass die Eckpunkte des Körpers besonders hervorgehoben werden, so markieren Sie das Auswahlfeld *Punkte hervorheben*. Beachten Sie bitte, dass dies nur bei der Eintafelprojektion dargestellt wird.

An dieser Stelle sei noch auf die Berücksichtigung der Körperkanten hingewiesen. Diese können Sie, zumindest für die Polyeder, an dem Auswahlfeld *verdeckte Kanten* einstellen. Schalten Sie auf *Kantenmodell*, dann zeichnet das Programm ein Gittermodell des Körpers, d.h., alle Kanten werden sichtbar dargestellt.
Bei Beachtung der verdeckten Kanten stellt das Programm weiße Körperflächen dar. Auf Ihren Wunsch zeichnet das Programm auch farbige Seitenflächen. Zum einen werden bei *bunte Flächen* 24 Farben so verteilt, dass möglichst benachbarte Flächen unterschiedliche Färbungen besitzen. Markieren Sie das Feld *farbige Flächen*, so werden die Flächen in Abhängigkeit von ihrer Eckenzahl eingefärbt.

Die verwendeten Farben sind vordefiniert. Bei weißem Hintergrund werden Dreiecke gelb, Vierecke grün, Fünfecke rot, Sechsecke grau, Achtecke rosa und Zehnecke blau gezeichnet. Über die Schalter

bis

können Sie andere Farben für die Dreiecke, Vierecke ... bis Zwölfecke auswählen.

Seitenflächenanzahl

Nach Auswahl eines Körpers in der rechten Liste stellt das Programm alle Seitenflächen der Körpers dar. Möchten Sie für verschiedene Untersuchungen weniger Flächen darstellen, so stellen Sie deren Anzahl an den Pfeilschaltern ein. Beachten Sie bitte, dass ein Klick auf den Schalter *Darstellung* die Ausgangssituation wiederherstellt.

Achtung: Insbesondere bei Körpern mit einer größeren Anzahl von Körperkanten (z.B. Archimedische oder Johnson-Polyeder) kann es auf langsameren Computern zu einem Flimmern der Darstellung kommen. Die Ursache liegt dabei in der Geschwindigkeit der Grafikkarte.

2/3-Tafel-Projektion

Bei dieser Wahl stellt das Programm den gewählten Körper in Zweitafelprojektion (Grund- und Aufriss) bzw. Dreitafelprojektion dar. Auch hier können die Körper gedreht werden.

Freie Drehung der Polyeder und anderer Körper

Das Programm ermöglicht Ihnen über die einfache Darstellung und die ständige Drehung der Polyeder hinaus zusätzlich die freie Drehung um die Abszissen- und Ordinatenachse. Klicken Sie dazu mit der linken Maustaste einmal in das Darstellungsfenster. Daraufhin interpretiert das Programm – bei weiterhin festgehaltener Maustaste – jede weitere Mausbewegung als Aufforderung, die Darstellung zu drehen.
Eine Mausbewegung nach links oder rechts dreht den Körper sofort um die y-Achse, das Verschieben der Maus nach oben oder unten dreht die Darstellung um die Abszissenachse.

Punktkoordinaten

Wenn Sie das Feld *Koordinatentabelle* markieren, zeigt Ihnen das Programm in einer Tabelle die Koordinaten der Eckpunkte des gewählten Körpers an. Dabei wird die Darstellung ausgeblendet. Entfernen Sie die Markierung, so können Sie den Körper durch erneuten Klick auf den Schalter *Darstellung* betrachten.

Abgestumpfte Körper

Ein weiteres Teilprogramm zu Polyedern beschäftigt sich mit der Abstumpfung von Polyedern.
Dabei wird der Ausgangskörper durch Abschneiden von Pyramiden an den Polyederecken verändert und somit ein weiterer Polyeder konstruiert. Dabei gibt es mehrer Möglichkeiten die Größe der Pyramiden festzulegen.

In der Abbildung ist die Abstumpfung eines Würfels zu sehen. Von oben nach unten werden gezeigt:

- Würfel
- Abstumpfung mit 1/4 der Kantenlänge
- Abstumpfung mit 1/2 der Kantenlänge, abgestumpftes Hexaeder
- Abstumpfung mit 3/4 der Kantenlänge
- Abstumpfung mit 4/4 der Kantenlänge, Kuboktaeder

Würde man den Vorgang noch einmal durchführen, so ergibt sich aus dem Kuboktaeder ein Oktaeder, usw.

In diesem Teilprogramm können Sie mehr als 50 Polyeder abstumpfen. Wählen Sie in der rechten Liste einen Körper aus, wird dieser voreingestellt so abgestumpft, dass ursprüngliche Kanten auf 1/3 reduziert werden.
An dem Rollbalken *Abstumpfung* können Sie die Stärke der Abstumpfung von 0,

der Ausgangskörper, bis 0,50 für den vollkommen abgestumpften Körper einstellen.

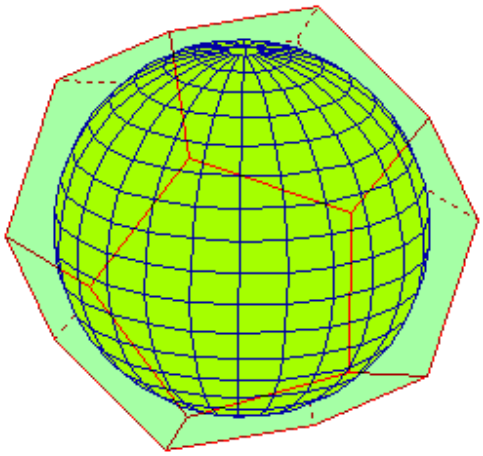
Darüber hinaus gelten alle Bemerkungen zur Darstellung von Polyedern.
Ein Klicken auf den Schalter *stetige Verformung* startet die kontinuierliche Veränderung der Abstumpfung des Körpers.

Sternkörper

Ein weiteres Teilprogramm beschäftigt sich mit der Konstruktion von Sternpolyedern aus konvexen Polyedern.
Dabei wird auf jeder Seitenfläche des Ausgangskörpers eine Pyramide aufgesetzt und somit ein weiterer Polyeder konstruiert, ein Sternpolyeder. Dabei gibt es mehrer Möglichkeiten die Größe der Pyramiden festzulegen.

In diesem Teilprogramm können Sie aus 70 Polyedern Sternkörper konstruieren, Wählen Sie in der rechten Liste einen Körper aus, wird dieser voreingestellt so mit Pyramiden versehen, dass diese eine Höhe von 1/3 des Abstandes des Schwerpunktes der Seitenfläche vom Koordinatenursprung besitzen.
An dem Rollbalken *Pyramidenh.* können Sie die Höhe der Pyramiden von 0, der Ausgangskörper, bis 1 einstellen. Zusätzlich können Sie auch negative Werte bis −0,5 auswählen. In diesem Fall werden die Pyramiden in Richtung des Koordinatenursprungs nach innen aufgesetzt. Das Polyeder wird damit „ausgehöhlt".

9.3 In- und Umkugel



Für spezielle Polyeder existieren Kugeln, die diese berühren. Man unterscheidet Inkugel, Mittelkugel und Umkugel.
Die Inkugel berührt die Polyeder in den Flächenmittelpunkten der regelmäßigen Seitenflächen, die Mittelkugel verläuft durch die Kantenmittelpunkte des Körpers und die Umkugel berührt die Polyeder in deren Ecken.

Platonische Körper (Tetraeder, Würfel, Hexaeder, Ikosaeder und Dodekaeder) besitzen alle 3 Kugeln, die archimedischen Körper Mittelkugel und Umkugel und die catalanischen Körper (dual zu den archimedischen Polyeder) eine Inkugel und die Mittelkugel. Die Abbildung zeigt das Dodekaeder mit seiner Inkugel.

In diesem Teilprogramm werden für die platonischen, archimedischen und catalanischen Polyeder In- und Umkugel dargestellt. Wählen Sie dazu in der rechten Liste das Polyeder und an den Auswahlfeldern *Polyeder*, *Inkugel* oder

Umkugel.
Existiert die jeweilige Kugel wird diese in das Polyeder eingeschrieben bzw. das Polyeder in die Kugel.
Für die archimedischen Körper wird an Stelle einer Inkugel die Kugel dargestellt, die zumindest einige Seitenflächen berührt. Drehen Sie den Körper mit der Maus oder während der *Simulation*, kann man erkennen, dass nicht alle Flächen berührt werden. Analoges gilt für Umkugel bei den catalanischen Polyedern.

9.4 Duale Polyeder

Nach dem Dualitätsprinzip existiert zu jedem Polyeder ein duales oder reziprokes Polyeder. Bei diesem sind die Positionen von Ecken und Flächen komplementär getauscht. Existiert die Umkugel des Polyeders, so wird diese beim dualen Polyeder zur Inkugel.
Die Platonischen Körper sind zum Beispiel paarweise zueinander dual.
Das Tetraeder ist zu sich selbst dual, während der Würfel zum Oktaeder dual ist und umgekehrt. Analog gilt dies für Dodekaeder und Ikosaeder. Die dualen Polyeder der Archimedischen Körper sind die Catalanschen Polyeder.

In diesem Teilprogramm können Sie duale Polyeder parallel betrachten.

Unter *Körpertyp* wählen Sie eine Klasse von Körpern aus, anschließend in der rechten Liste einen Körper. Das Programm stellt dieses Polyeder auf der linken Seite dar, berechnet (!) aus diesem einen dualen Körper, bei dem die Eckpunkte genau die Flächenmittelpunkte des Ausgangskörpers sind, und zeichnet ihn rechts.

Wählen Sie *Durchdringung* bzw. *Durchdringung 2*, so werden beide Polyeder ineinander gezeichnet, im zweiten Fall mit farbiger Hervorhebung eines der Polyeder.

Beachten Sie bitte Folgendes:
In diesem Programmteil werden die dualen Polyeder der Platonischen und Archimedischen Körper nach der Dorman-Luke-Konstruktion (siehe Lexikon) berechnet. Da dieses Verfahren aber für nicht uniforme Körper, wie z.B. die Catalanschen Polyeder, nicht gilt und für solche Polyeder noch kein allgemeingültiger Algorithmus entdeckt wurde, werden deren duale Polyeder so berechnet, dass genau der Flächenschwerpunkt der Eckpunkt des dualen Polyeders ist. Streng genommen sind derartige duale Polyeder nur pseudodual, das heißt zum Beispiel, dass die aus den Catalanschen Körpern entstehenden dualen Körper nicht vollständig halbregelmäßig sind.

Quasiduale Polyeder

Fordert man, dass für ein Ausgangspolyeder genau jeder Flächenschwerpunkt ein Eckpunkt eines neuen Polyeders ist, ohne weitere Forderungen wie Konvexität usw., so ergeben sich quasiduale Polyeder. Insbesondere bei nicht uniformen

Polyedern, wie zum Beispiel einigen Johnson-Polyedern, entstehen dann auch nichtkonvexe quasiduale Polyeder.
Dabei ist zu beachten, dass zum Beispiel an einer Ecke des Ausgangspolyeders, an der fünf Kanten zusammentreffen, nicht notwendigerweise ein Fünfeck als Seitenfläche des quasidualen Polyeders entsteht. Diese fünf Punkte des Fünfecks müssen nicht in einer Ebene liegen, sodass kein ebenes Fünfeck entsteht. Für ein Polyeder muss diese Seitenfläche daher in kleinere Teilflächen, meist Dreiecke, zerlegt werden. Eine solche Zerlegung ist nicht eindeutig, sodass für ein nicht uniformes Polyeder mehrere quasiduale Polyeder existieren können.

Für die *Johnson-Polyeder* werden hier derartige quasiduale Polyeder konstruiert.

Für die Darstellung und Animation gelten die unter dem Thema Polyeder gemachten Bemerkungen.

9.5 Polyeder konstruieren

In diesem Teilprogramm können Sie Polyeder aus Ecken und Kanten konstruieren.

Koordinaten der Eckpunkte

Einen neuen Punkt des Polyeders geben Sie ein, indem Sie unter *X* =, *Y* = und *Z* = die Koordinaten des Punktes eintragen. Quittieren Sie mit *Punkt hinzufügen*, wird der Eckpunkt der Liste hinzugefügt und sofort dargestellt.

Im linken Fensterteil wird eine senkrechte Zweitafelprojektion gezeigt: oben der Aufriss, unten der Grundriss. Im rechten Teil wird der Körper in schräger Parallelprojektion gezeichnet. Welches Verfahren dazu genutzt wird, legen Sie in der aufklappbaren Liste fest. Neben dem klassischen, aus der Schule bekannten Schrägbild in Kavalierperspektive können Sie außerdem Dimetrie, Isometrie, Kabinettperspektive, Militärperspektive (Vogelperspektive) und Trimetrie wählen. Insbesondere die Trimetrie entspricht am besten der Darstellung, wie sie unser Auge in der Realität wahrnimmt.

Eingetragene Punkte können Sie wieder löschen (Schalter *Löschen*) oder deren Koordinaten ändern. Zum Ändern empfiehlt sich folgendes Verfahren: Klicken Sie einen Punkt in der Punktliste mit der Maus doppelt an, so werden dessen Koordinaten in die Eingabezeilen übertragen. Geben Sie dort nun die Änderung ein und bestätigen Sie mit dem Schalter *Ändern*.

Koordinatenänderungen der Punkte können Sie auch mit der Maus durchführen. Klicken Sie im Darstellungsbereich der senkrechten Parallelprojektion, entweder im Grund- oder im Aufriss, einen Punkt an und bewegen Sie die Maus (Maustaste festhalten), so werden die Koordinaten automatisch übernommen. Auch im Schrägbild wird die Veränderung sofort sichtbar.

Beachten Sie, dass Sie im Grundriss nur Abszisse (x-Koordinate) und Ordinate (y-Koordinate) des Punktes beeinflussen, im Aufriss Abszisse und Aplikate (z-Koordinate).

Die Punkte werden automatisch mit A beginnend beschriftet. Markieren Sie das Feld *Punkte beschriften*, werden die Buchstaben auch angezeigt. Das Feld *Hilfslinien* schaltet die in der Zweitafelprojektion üblichen Senkrechten zwischen Grundriss- und Aufrissbild ein und aus.

Kanten des Polyeders

Nach Eingabe der Punkte müssen die durch Kanten miteinander verbundenen Punkte angegeben werden.
Dazu können Sie unter *Kante von ... bis* den Anfangs- und Endpunkt einer Kante eintragen und wieder mit dem Schalter *Hinzufügen* bestätigen.

Effektiver und vor allem schneller ist es, wenn Sie die Kanten mit der Maus zeichnen.
Klicken Sie dazu, entweder im Aufriss oder im Grundriss, mit der rechten (!) Maustaste den Anfangspunkt der Kante an. Bewegen Sie nun die Maus bei festgehaltener rechter Maustaste, dann sehen Sie eine Strecke. Verschieben Sie die Maus einfach auf den Endpunkt und geben Sie die Taste frei.
Das Programm übernimmt die eingezeichnete Kante sofort in die Kantenliste.

Animation des Polyeders

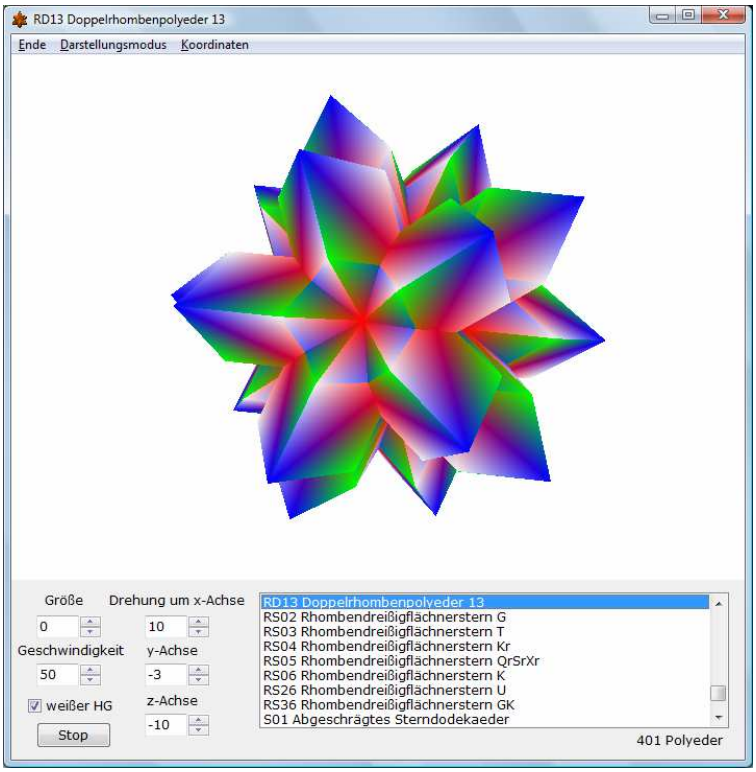
Möchten Sie das Polyeder unter einem anderen Winkel sehen, so ändern Sie den Winkelwert im unteren linken Fensterteil.
Der Schalter startet und beendet auch in diesem Teilprogramm das kontinuierliche Drehen des Körpers.

Weitere Teilfunktionen

Ein konstruiertes Polyeder, konkret dessen Ecken und Kanten, können Sie über den Schalter auf der Festplatte speichern und mittels zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden. Zum Lieferumfang gehören einige wenige Dateien, die Sie testen können. Diese finden Sie, in dem Sie in der aufklappbaren *Beispiel*-Liste einen Körper auswählen.
Möchten Sie einen neuen Körper zusammensetzen, so können Sie über alle Ecken und Kanten in den zwei Listen löschen.

9.6 Polyederbibliothek

In diesem Teilprogramm finden Sie eine Zusammenstellung von 2200 Polyedern verschiedener Art.
Jedes Modell wird dabei in Zentralperspektive dargestellt und um eine Achse



gedreht.

Mit dem Schalter *Start/Stopp* beeinflussen Sie die Simulation. Unter diesem Schalter finden Sie zwei Felder mit kleinen Schaltern. Der untere verändert die Simulations*geschwindigkeit*, der obere die Entfernung, d.h. die *Größe* des Polyeders.
An den Rollbalken x-, y- und z-Achse können Sie einstellen, um welche Achsen und wie schnell gedreht werden soll.

Der Menüpunkt *Koordinaten* schaltet die Anzeige der Koordinaten der Polyedereckpunkte und die Eckennummern der Seitenflächen ein und aus.
Unter *Darstellungsmodus* können Sie drei verschiedene Arten der Polyederdarstellung auswählen: die Darstellung der Flächen, zusätzlich das Hervorheben der Kanten oder ein Gittermodell.

Die verschiedenen Polyeder finden Sie in einer Liste. Dabei haben die Kürzel vor dem Namen folgende Bedeutungen:

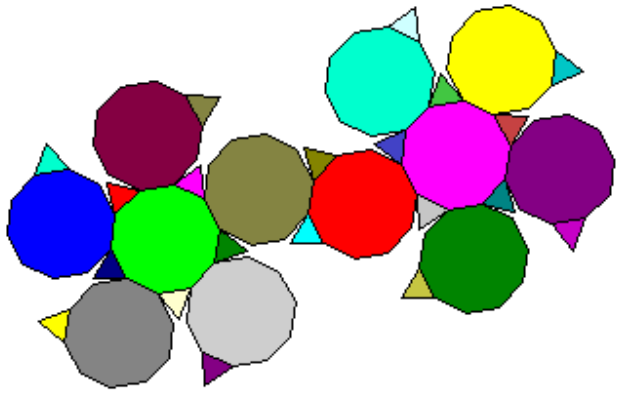
- A ... Archimedischer Körper
- AC ... Archimedisch-Catalansche Hülle
- C ... Catalanscher Körper
- DE ... selbstduales Dekader, Zehnflächner
- DK ... Doppelkugel-Polyeder
- DO ... selbstduales Dodekader, Zwölfflächner
- DP ... Diamantpolyeder
- DR ... dihedrales Rhomboeder
- DS ... Drachenviereckstern
- F ... Facettiertes Polyeder
- FJ ... Fast-Johnson-Polyeder
- GD ... geodätische Kuppel
- ID ... isogonales und isohedrales Deltaeder, Cundy-Polyeder, koptisches Polyeder
- IS ... Ikosaederstern
- J ... Johnson-Polyeder
- JD ... duales Polyeder zu den Johnson-Polyedern
- JI ... inverses Polyeder zu den Johnson-Polyedern
- K ... Kepler-Poinsot-Sternpolyeder
- KK ... Keilkranz
- KP ... Kronenpolyeder
- KR ... krummlinig begrenzter Körper
- KS ... Kuboktaederstern
- KU ... Coupoloïde
- MO ... Molybi-Polyeder
- MP ... Conway-modifiziertes Polyeder
- P ... Platonischer Körper
- PD ... Doppelpyramide
- PE ... Petrie-Polyeder
- PR ... Prisma bzw. Antiprisma
- PS ... Polygramm-Prisma bzw. Antiprisma
- PT ... abgestumpftes Prisma bzw. Antiprisma
- PY ... Pyramide
- PZ ... zirkuläres Prisma

- R,RH ... Rhomboeder
- RS ... Rhombendreißigflächnerstern
- RZ ... Zonoeder
- SP ... Sphenoid-Prisma
- SY ... Polyeder spezieller Symmetrie
- T ... Trapezoeder
- TD ... selbstduale Tetradekader, Vierzehnflächner
- TO ... Toroid
- TP ... polyederischer Torus
- U ... uniformes Polyeder
- UD ... duales Polyeder zu den uniformen Polyedern
- UV ... uniformer Verbundkörper
- V ... Verbundkörper
- X ... Akroeder
- XM ... McNeill-Polyeder
- Y ... spezieller abgestumpfter Körper
- Z ... sonstiges Polyeder und Körper

Hinter den Abkürzungen sind die allgemeinen üblichen Nummerierungen der Polyeder zu finden. Einige Polyeder erscheinen in der Liste mehrfach, dabei mit unterschiedlichen Nummern. So ist zum Beispiel der Platonische Körper P05 Dodekaeder auch das uniforme Polyeder U23 und das zum Ikosaeder duale uniforme Polyeder UD22 ...

Beachten Sie bitte: Dieses Teilprogramm ist der einzige Programmteil, der eine zusätzliche Software verwendet, und zwar OpenGL. Sollte OpenGL nicht auf Ihrem Rechner installiert sein, kann dieses Teilprogramm leider nicht genutzt werden!

9.7 Polyedernetze



In diesem Teilprogramm werden vordefinierte Polyeder, darunter alle Platonischen, Archimedischen und Catalanschen Körper, in ihre Polyedernetze aufgefaltet.

Wählen Sie zuerst in der Liste den gewünschten Körper aus.
Nun können Sie wählen, ob das Polyeder schrittweise (Schalter *Netz erzeugen*) oder vollständig (Schalter *vollständig falten*) angezeigt werden soll. Die Geschwindigkeit des Faltens stellen Sie am Rollbalken *Faltwinkel* ein.

Lassen Sie das Netz schrittweise erzeugen, so wird es nach dem Entfalten wieder zum Körper zusammengefügt usw., bis Sie mit *Stopp* abbrechen. Das Markierungsfeld *Stopp nach Falten* unterbricht den Faltvorgang automatisch. Mit *zufällige Reihenfolge* werden die einzelnen Flächen bei jedem Faltvorgang in zufälliger Abfolge bewegt.

Während des Falten können Sie den Körper auch um die x-Achse drehen lassen, bzw. die Ausrichtung in den drei Koordinatenrichtungen an den Rollbalken selbst einstellen.

Die Darstellung können Sie an den unteren Schaltern vergrößern bzw. verkleinern.

Beachten Sie bitte, dass gleichzeitiges Drehen und Falten hohe Anforderungen an Ihren Computer stellen.

9.8 Polyedernetz konstruieren

In diesem Teilprogramm können Sie Netze von Polyedern konstruieren.

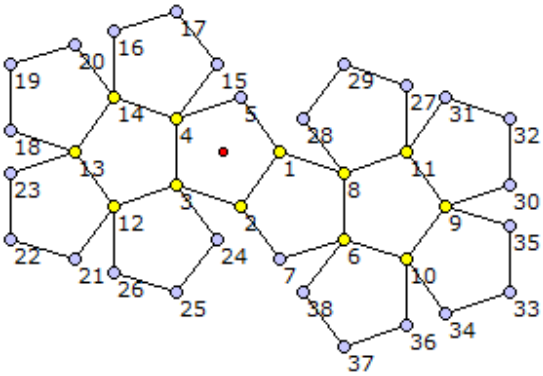
Konstruktion

Klicken Sie zuerst auf einen Schalter mit dem von Ihnen gewünschten regelmäßigen N-Eck (*Dreieck*, *Quadrat*, *Fünfeck* ...) oder wählen Sie eine Sonderfläche aus.
Dazu können Sie mit *Polygon* und der Eingabe der *Seiten*zahl ein regelmäßiges Polygon erzeugen. Der Schalter *gleichschenkliges Dreieck* konstruiert ein solches Dreieck, dessen Schenkel um den Faktor *mit 2.Seite* verändert werden. Mit *Rhombus* erhalten Sie dieses Viereck mit dem festgelegten Innenwinkel.
Der Schalter *Sonderflächen* wählt das Polygon aus, das in der aufklappbaren Liste angezeigt wird.

Nach der Auswahl wird die Figur auf der Zeichenfläche dargestellt. Steht *Skalierungsfaktor* auf dem Wert 1, so erscheinen alle N-Ecke in Grundgröße, ansonsten um den Faktor gestreckt.

Klicken Sie nun einen der blauen Eckpunkte an, so können Sie das N-Eck beliebig verschieben. Geben Sie die linke Maustaste frei, so wird das Polygon platziert. Befindet sich der angeklickte Punkt nun auf einem Eckpunkt eines anderen N-Ecks, so wird das verschobene Polygon an diesem Punkt fixiert und der Punkt gelb dargestellt.

Um nun eine fixierte Figur in die gewünschte Lage zu drehen, klicken Sie einen freien blauen Punkt an, und drehen die Figur. Liegt ein blauer Punkt auf einem anderen Punkt korrekt, muss er zur Feststellung dennoch leicht gedreht werden. Sind zwei Punkte eines Polygons fixiert (gelb), so kann dieses nicht mehr verschoben werden.



Ein Polygon löschen Sie, in dem Sie mit der rechten Maustaste auf einen seiner Eckpunkte klicken.

Ein Klick auf die Schalter ⤢ und ⤡ verkleinert bzw. vergrößert die Netzdarstellung.
Die Eckpunkte des Netzes werden nur

beschriftet, wenn Sie das entsprechende Feld markieren.

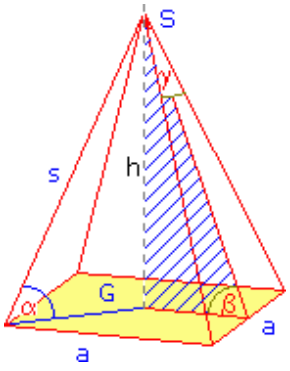
Vordefinierte Netze

Rechts oben im Fenster finden Sie eine aufklappbare Liste. In dieser finden Sie vordefinierte Netze verschiedener Polyeder. Wählen Sie einen Eintrag aus, wird das Netz angezeigt.

9.9 Berechnung verschiedener Körper

Zu den Standardaufgaben der Schulmathematik gehört die Berechnung verschiedener Körper aus gegebenen Stücken.
In diesem Teilprogramm können Sie für eine Auswahl dieser Körper aus eingetragenen Werten die anderen Größen berechnen. Die Art des Körpers wählen Sie in der linken Liste. Im Moment sind verfügbar:

- Prismen, Pyramiden, Pyramidenstümpfe, platonische Körper, Zylinder, Kegel, Kegelstumpf und weitere



Nach der Wahl des Körpers zeigt das Programm eine einfache Skizze des Körpers an und im rechten Fensterteil die zu untersuchenden Größen. Befindet sich rechts neben der Größe eine Eingabezeile mit Rahmen, so können Sie dort einen Wert eintragen. Für die zwei Körper *N-seitige Pyramide* und *N-seitiges Prisma* müssen Sie zusätzlich an dem nun sichtbaren Rollbalken die Anzahl n der Seitenflächen festlegen.

Mit dem *Berechnungs*-Schalter ermittelt das Programm die nicht eingetragenen Größen. Ist der Schalter *Körper darstellen* verfügbar, so können Sie einen entsprechenden Körper in den Programmteilen *Polyeder* bzw. *Krummlinig begrenzte Körper* anzeigen.

Für eine wiederholte Berechnung müssen Sie beachten, dass nur die Größen neu eingetragen werden, deren Eingabezeile leer ist. Daher sollten Sie mit dem Schalter *Eingabe löschen* zuerst alle Werte entfernen.

Wichtig ist darüber hinaus, dass für jede Körperart unterschiedlich viel Größen zur eindeutigen Berechnung notwendig sind. Sie benötigen

1 Größe	für die Platonischen Körper
2 Größen	für die Prismen, Pyramiden, den Kegel und Zylinder
3 Größen	für die Pyramidenstümpfe, den Quader, Kegelstumpf
6 Größen	für den Spat

Allerdings ist nicht stets die eindeutige Existenz eines Körpers gesichert.
Geben Sie für einen Pyramidenstumpf zum Beispiel die Grundseite a, die Höhe h und die Grundfläche G ein, so kann der Stumpf nicht berechnet werden, da die

zwei Werte a und G unmittelbar auseinander hervorgehen und keine Information über die Größe der Deckfläche vorliegt.
Ergibt sich aus den Eingaben sogar ein berechneter Wert, der negativ ist, so existiert ein solcher Körper nicht und Sie erhalten eine entsprechende Fehlermeldung.

Beachten Sie bitte unbedingt!
Die Berechnung des Volumens oder der Oberfläche einer Pyramide aus Grundseite und Höhe ist elementar.
Allerdings ändert sich dies sofort, wenn Sie zum Beispiel aus dem gegebenen Volumen und der Seitenlinie eines Kegels die restlichen Werte berechnen wollen. Diese Aufgabe wird anspruchsvoll und führt zu der ganzrationalen Gleichung 3.Grades $0 = \pi/3\ h^3 - \pi/3\ s^2\ h + V$.
Für andere Körper können auch Gleichungen noch höheren Grades entstehen (z.B. Kegelstumpf mit R, V, s ergibt 6.Grades) bzw. sogar transzendente Gleichungen.

Im Moment kann das Programm leider noch nicht alle Möglichkeiten lösen. So sind von den 56 verschiedenen Aufgabenstellungen an einem n-seitigen Pyramidenstumpf 4 noch nicht erfasst. Folgende möglichen Eingaben werden nicht ausgewertet:

Körper	Eingabetupel
Pyramidenstumpf	(h, V, M); (V, A, s); (V, A, h_s); (V, M, s)

Für die Prismen, die platonischen Körper, die Pyramiden, den Kegel, den Kegelstumpf und den Zylinder werden alle Kombinationen berechnet, soweit der Körper eindeutig bestimmt ist und existiert.

9.10 Körperdarstellungen

In diesem Teilprogramm können Sie mehrere Körper

- Quader, Prisma, n-seitiges Prisma
- Pyramide, n-seitige Pyramide, n-seitiger Pyramidenstumpf
- n-seitige Doppelpyramide, n-seitiger Doppelpyramidenstumpf
- Antiprisma
- Zylinder, Kegel, zwei Kegel als Doppelkegel, Kugel und Ellipsoid
- Kegelstumpf, Doppelkegel
- Hyperboloid

in verschiedenen räumlichen Lagen betrachten und bewegen.

An den Rollbalken *Winkel Alpha* und *Winkel Beta* stellen Sie die Winkel ein, unter denen Sie den Körper betrachten möchten. Der Winkel Alpha beschreibt dabei den Drehwinkel um die Symmetrieachse des Körpers, der Winkel Beta die Lage der Ebene, auf der sich die Körper befinden.

Weitere Rollbalken ermöglichen die Einstellung der *Höhe* und der *Breite* (der Radius bei Zylinder, Kegel ...) und anderer Parameter des Körpers. Bei den Körperstümpfen und dem Doppelkegel kann zusätzlich noch ein zweiter Radius festgelegt werden.

Verändern Sie nun die beiden Winkel, zeichnet das Programm die Körper sofort in der entsprechenden Lage.
Möchten Sie eine fortlaufende Darstellung, so klicken Sie auf *Simulation*. Das Programm dreht nun den Körper um dessen Symmetrieachse, d.h., der Wert des Winkels Alpha wird kontinuierlich erhöht. Während der Drehung können Sie die anderen Parameter und den Körper ändern. Klicken Sie erneut auf den Schalter, hält die Animation an. Die Drehgeschwindigkeit können Sie an dem kleinen Rollbalken links neben dem Schalter einstellen.

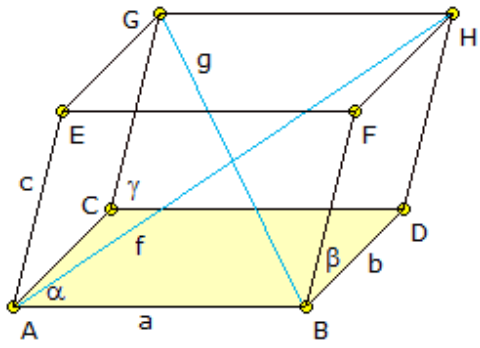
Wollen Sie eine n-seitige Pyramide, einen n-seitigen Pyramidenstumpf oder ein n-seitiges Prisma darstellen, so können Sie an einem weiteren Rollbalken die Anzahl N der Seitenflächen von 3 bis 32 verändern. Dabei erkennt man sehr gut, dass sich die Körper mit zunehmender Zahl der Seitenflächen in ihrem Äußeren immer stärker einem Zylinder bzw. einem Kegel annähern.

Berechnung

Für mehrere dieser Körper können Sie über das Feld *Berechnung* einige Berechnungsergebnisse zum jeweiligen Körper anzeigen lassen.

9.11 Spat, Vektor- und Spatprodukt

Unter einem Parallelepiped (von griechisch επιπεδο, epipedo = Fläche); auch Spat, Parallelflach, Parallelotop; versteht man einen Körper, der von sechs paarweise kongruenten in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Die Bezeichnung Spat rührt vom Kalkspat (Calcit $CaCO_3$) her, dessen Kristalle die Form eines Spats aufweisen.



Die Berechnung des Volumens eines solchen Spats ist mit klassischen Mitteln sehr umständlich. Mit Hilfe der Vektorrechnung erhält man dagegen einfache Beziehungen und Gleichungen.

Wird der Spat vom Punkt A aus mit drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt, so ergibt sich die Grundfläche des Spats als Betrag der Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$.
Da die Höhe des Spats der Betrag des Vektors $\vec{c}$ multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist, wird mit dem Skalarprodukt insgesamt

$$\text{Volumen } V = | (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} |$$

D.h., mit Hilfe des sogenannten Spatprodukts kann das Volumen einfach ermittelt werden.

In diesem Teilprogramm wird ein Spat dargestellt. Die Längen der aufspannenden Vektoren und die zwei Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ können eingestellt werden. Auf Wunsch stellt das Programm auch die Vektoren dar.
Der Flächeninhalt der Grundfläche und das Volumen des Spats werden ermittelt.

9.12 Vergleich von Körpern

Durch Archimedes wurde gezeigt, dass das Volumen einer Kugel gleich 2/3 des Volumens eines Zylinders ist, in den die Kugel einbeschrieben ist. Auf diese Entdeckung war er so stolz, dass er sich erbat, eine entsprechende Zeichnung auf seinem Grabstein abzubilden.
Schon vor Archimedes war es Eudoxos der Beweis zum Volumen des Kegels gelungen: Das Volumen eines Kegels ist ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders:

$$V_{Kegel} = 1/3\ V_{umschreibender\ Zylinder} = 1/3\ \text{Höhe} \cdot \text{Grundfläche}$$

Diese beiden Erkenntnisse wurden in der Antike besonderes gewürdigt.

In diesem Teilprogramm können Sie diese drei Körper nebeneinander darstellen und Oberfläche und Volumen berechnen.

Die Größen stellen Sie über *Grundradius* und *Höhe* ein. Für die Darstellung der Kreise werden außerdem Hilfslinien (Meridiane) genutzt. Auch deren Anzahl ist veränderbar.
Für die Darstellung der Körper wird eine schräge Parallelprojektion genutzt. Diese können Sie von *Dimetrie* bis *Trimetrie* in der Liste wählen; ebenso einen Drehwinkel in °.

Neben den Körpern Zylinder, Kugel und Kegel können Sie auch andere nutzen. Wählen Sie diese in den drei aufklappbaren Listen aus.

Für den Vergleich der krummlinig begrenzten Körper und Polyeder ist es noch wichtig, welche Größe gleich sein soll. Dazu können Sie zwischen gleichem *Grundflächeninhalt* und gleichem *Grundkreisradius* wählen.

Bei einem Start dieses Teilprogramms ist das Archimedische Problem voreingestellt, links der Zylinder, in der Mitte die Kugel und rechts der Kegel. Und wie zu erwarten, gilt für deren Volumina das Verhältnis 3 : 2 : 1.

9.13 Darstellung von Rotationskörpern

Dieses Teilprogramm ermöglicht es Ihnen, verschiedenste Rotationskörper zu definieren, diese darzustellen, zu rendern, also mit einer Oberfläche mit Lichteffekten zu versehen, und um zwei Achsen im Raum zu drehen.

Hinweis: Das Rendering eines Körpers, hier das Verfahren von Gouraud, ist ein mathematisch und rechentechnisch sehr anspruchsvoller Vorgang. Hier wurde besonderes Augenmerk auf eine hohe Geschwindigkeit gelegt, sodass die Darstellung unter Umständen leichte Ungenauigkeiten aufweisen kann.
Auf etwas langsameren Computern müssen Sie während der Simulation mit einer ruckartigen Darstellung rechnen.

Im linken Fensterteil finden Sie den Bereich *Rotationskurve.* Hier sind 32 kleine Punkte eingetragen. Durch einen linken Mausklick auf einen dieser Punkte und anschließendes Verschieben der Maus können Sie die y-Koordinate, die Auslenkung, eines dieser Punkte verändern. Die Abfolge dieser Punkte beschreibt die Kurve, die um die x-Achse gedreht wird und so den Körper bestimmt.

In der grafischen Darstellung sehen Sie sofort, wie sich der zugehörige Rotationskörper verändert.
Auf Wunsch können Sie auch einige vordefinierte Beispiele testen. Wählen Sie dazu in der aufklappbaren Beispielliste einen Körper aus.

Haben Sie einen Körper festgelegt, so können Sie eine Vielzahl von Änderungen vornehmen. Am Rollbalken *Genauigkeit* legen Sie fest, wie viele Teilflächen bei 360° zur Konstruktion genutzt werden. Ein hoher Wert erzeugt einen sehr runden Körper, eine geringere Genauigkeit stellt den Körper nur grob dar.
Mit *Bildgröße* verändern Sie die Abmessungen der Darstellung.

Die zwei Eingabebereiche *Lichtquellenrichtung* gestatten Ihnen die Richtung, aus der das Licht auf den Körper einfällt, zu verändern. Dabei sollten Sie experimentieren, bis Sie das gewünschte Ergebnis erhalten.
Über den Schalter *Drehung* starten Sie die kontinuierliche Lageveränderung des Rotationskörpers. Die Schnelligkeit der Drehung um die x- bzw. y-Achse können Sie in den zwei zugehörigen Eingabebereichen einstellen.

Eine Drehung oder Verschiebung des Körpers können Sie auch mit der Maus erzeugen. Klicken Sie mit der linken Maustaste auf den Körper und verschieben Sie die Maus bei festgehaltener Taste, so wird der Körper gedreht. Wenn Sie die rechte Maustaste nutzen, lässt sich der Körper verschieben.
Der Rollbalken *Punktzahl* ist nur vor der Festlegung eines neuen Körpers wichtig. Wenn Sie weniger als 32 Punkte nutzen wollen, können Sie dies hier einstellen.

Farbgestaltung

Zur Darstellung der Rotationskörper werden verschiedene Farben genutzt. Klicken Sie auf den Schalter in der Aktionsschalterleiste, so erscheint ein kleines Fenster, in dem Sie eine Farbe auswählen können.
Beachten Sie bitte, dass die gewählte Farbe als Grundfarbe benutzt wird und Ihr Rotationskörper durch die Lichteffekte etwas anders aussehen kann.

Den von Ihnen definierten Körper können Sie natürlich auf Wunsch speichern und später laden. Die Abbildung ist ebenso speicherbar und druckbar. Nutzen Sie dazu bitte die entsprechenden Schalter in der Schalterleiste.

Aufruf dieses Teilprogramms aus der Integralrechnung

Haben Sie diesen Programmteil aus dem Fenster *Integration/Rotationskörper* aufgerufen, so gelten nahezu alle Aussagen analog.
Einige Teilfunktionen sind dann allerdings abgeschaltet, da die von *Integration/Rotationskörper* übermittelten Daten sonst beeinflusst werden könnten.

9.14 Krummlinig begrenzte Körper

Zur Unterstützung von Berechnungen an krummlinig begrenzten Körpern können Sie hier Zylinder, Hohlzylinder, Kegel und Kegelstumpf untersuchen. Wählen Sie zuerst in der Liste den gewünschten Körper. Nach Eingabe des *Körperradiuses* und evtl. der *Höhe* und *Radien* der kleineren Fläche usw. ermittelt das Programm interessante Größen dieser Körper und stellt diese dar.
Die Berechnungsergebnisse für die ausgewählten Körper werden nur dann angezeigt, wenn Sie das Feld *Ergebnisse* markiert haben.

Zylinder, Hohlzylinder, Kegel, Kegelstumpf

Volumen, Oberfläche und Mantelfläche (d.h. die Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche) werden berechnet. Im Falle des Hohlzylinders ist es notwendig, den kleinen Radius des "herausgeschnittenen" Zylinders einzugeben. Wählen Sie den Punkt *Zylinder schräg geschnitten*, müssen Sie zusätzlich die kleine Höhe angeben, für die eine Ebene den Zylinder schräg schneidet. Für Kegel und Kegelstumpf werden Volumen, Oberfläche und Mantelfläche berechnet. Zusätzlich erhalten Sie den Wert der Seitenlinie und des Neigungswinkels der Seitenlinie gegen die Grundfläche.
Als weitere Körper können Sie einen Torus, aber auch ein Sphericon (siehe Lexikon) wählen.

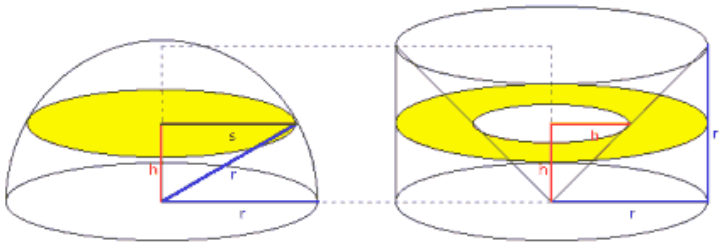
Diese Körper werden als Modell, auch unter Berücksichtigung unsichtbarer Bereiche, dargestellt. Die Drehung der Körper ist um zwei Achsen möglich. Hier können Sie auch auf eine Zwei- oder Dreitafelprojektion schalten.

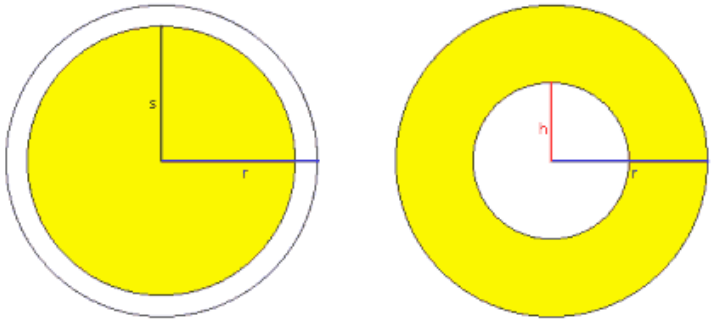
9.15 Rotationsparaboloid

Ein Rotationsparaboloid kann durch eine Vielzahl übereinander liegender Kreiszylinder mit abnehmenden Radien angenähert werden. Verringert man die Höhen der Zylinder, d.h., man muss mehr Zylinder nutzen, so konvergiert die Summe der Zylindervolumina gegen das Volumen des Paraboloids.

In diesem Teilprogramm können Sie diesen Vorgang nachvollziehen. Dabei können Sie die Höhe des Paraboloids durch Verschieben des Punktes C ändern. Die Anzahl der einzuschreibenden Kreiszylinder legen Sie am Rollbalken fest. Das Programm stellt daraufhin sofort den Körper mit den Zylindern dar und ermittelt das exakte Volumen und die Summe der Zylindervolumina.

9.16 Kugelvolumen





Zur Bestimmung der Gleichung zur Berechnung des Kugelvolumens benutzt man eine Idee von Archimedes, die Jahrhunderte später durch den Satz von Cavalieri bewiesen wurde:

Man legt in einem beliebigen Abstand h vom Kugelmittelpunkt eine Ebene durch die Kugel. Die Schnittfläche ist dann ein Kreis mit dem Radius s, wobei nach dem Satz des Pythagoras

$$s^2 = r^2 - h^2$$

mit r als Kugelradius ist. Daher ist die Fläche des Schnittkreises:

$$\pi s^2 = \pi (r^2 - h^2)$$

Die rechte Seite der Gleichung beschreibt nun die Differenz zweier Kreisflächen, die man als Fläche eines Kreisrings deuten kann. Dabei versteht man unter einem Kreisring die Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen.

Die Radien des Kreisrings sind hier r und h. Für h = 0 wird der Kreisring zum Kreis mit dem Radius r, für wachsendes h wächst der innere Kreis, sodass der Kreisring immer schmaler wird, bis er für h = r in die Kreislinie mit dem Radius r zusammenschrumpft, die ja selbst keine Fläche mehr hat.

Dieselben Schnittflächen kann man erhalten, wenn man sich einen Zylinder vom Radius r und der Höhe 2r vorstellt, aus dem zwei Kegel ausgebohrt sind, deren Grundflächen mit den Begrenzungskreisen des Zylinders zusammenfallen und deren Spitzen in der Achsenmitte liegen. Da bei diesem Restkörper die Schnittflächen im Abstand h vom Mittelpunkt ebenfalls den inneren Radius h haben, ist die Größe der Schnittfläche tatsächlich $\pi (r^2 - h^2)$

Nach dem Cavalierischen Prinzip ist daher des Volumen der Halbkugel gleich dem Inhalt des Restkörpers, also eines Zylinders mit dem Inhalt: $V(1) = \pi\ r^2\ 2r = 2\ \pi\ r^3$
vermindert um den Inhalt zweier Kegel: $V(2) = 2/3\ \pi\ r^2\ r = 2/3\ \pi\ r^3$

Und damit erhält man die bekannte Volumenformel 4/3 π r³.
In diesem Teilprogramm können Sie dieses Verfahren nachvollziehen. An dem Rollbalken stellen Sie die Höhe der Schnittebene im Verhältnis zur Gesamthöhe ein.

9.17 Projektionsarten

Zur Ergänzung der Teilprogramme *Körperdarstellungen* beschäftigen sich die Teilprogramme

- Parallelprojektion: Ikosaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Prisma, Pyramide, Quader, Tetraeder, Würfel,...

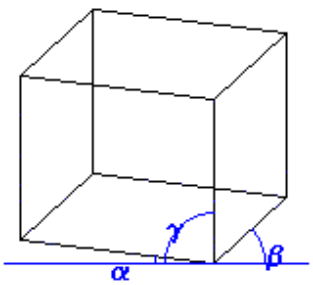
mit unterschiedlichen Projektionsverfahren zur Darstellung von Körpern. Während das sogenannte Schrägbild (hier Kavalierperspektive) aufgrund seiner Unkompliziertheit in der allgemeinbildenden Schule gelehrt wird, besitzen andere Verfahren in der Praxis größere Bedeutung. U.a. entspricht gerade die Projektion mittels Trimetrie dem Sehverhalten des menschlichen Auges.

In diesem Teilprogrammen können Sie fünf verschiedene Projektionsverfahren testen. Dazu wählen Sie in der linken Liste einen Eintrag aus. Die implementierten Verfahren

Dimetrie, Isometrie, Kavalierperspektive, Militärperspektive und Trimetrie

gehören alle zur Gruppe der Parallelprojektionsverfahren, d.h., man denkt sich auf einen Körper einfallende parallele Lichtstrahlen (sie kommen also von einer Lichtquelle im "Unendlichen"), die auf einen ebenen Bildschirm treffen und dort das Bild erzeugen.

Je nach Lage der Lichtstrahlen und der Projektionsebene zum Körper können drei Winkel angegeben werden, welche die Projektion eindeutig bestimmen.



Auf dem Bildschirm finden sich diese Winkel α, β, und γ als Drehung der drei Körperkanten eines Quaders zur Horizontalen (siehe Abbildung). Zum Beispiel gilt für die Projektion mittels Dimetrie α = 7°, β = 42° und γ = 90°. Zusätzlich können die Körperkanten um einen Faktor verkürzt werden. Bei der Dimetrie würde die um 42° gedrehte Körperkante um 0,5 verkürzt.

Nach der Wahl des Abbildungsverfahrens bzw. nach der individuellen Einstellung der drei Winkel und des *Breiten-* und *Tiefenverhältnisses* stellt das Programm den in der rechten Liste gewählten Polyeder dar. An einem weiteren Rollbalken *Phase* ist das Polyeder um seine Längsachse frei drehbar.

Auch hier können Sie den Körper automatisch drehen lassen. Klicken Sie dazu auf den Schalter *Simulation.* Der Abbruch erfolgt wieder über den Schalter *Stopp*.

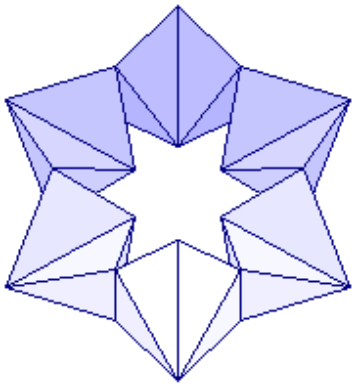
9.18 Zentralprojektion

In diesem Teilprogramm werden verschiedene Körper in Zentralprojektion gezeichnet. Aus der aufklappbaren Liste wählen Sie einen der Körper (Würfel, Kugel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Archimedische und Catalansche Polyeder) aus.

Für die Darstellung werden weiterhin fünf Parameter benötigt, zum einen die Position des Betrachters, d.h. den *Höhenwinkel* und den *Abstand* zum Körper, zum anderen die Maße des Bildschirms (*Breite, Kameraabstand)*. Diese Werte stellen Sie an den Rollbalken ein.
Entsprechend der gewählten Parameter zeichnet das Programm daraufhin den Körper in Zentralprojektion.

Die Darstellung können Sie über die Schalter der Schalterleiste wieder speichern, kopieren oder drucken. Klicken Sie auf *Körper drehen*, wird die Darstellung um die z-Achse gedreht.
Klicken Sie mit der linken Maustaste auf die Darstellung und bewegen die Maus, so wird die Darstellung ebenfalls gedreht. Eine waagerechte Mausbewegung dreht um die z-Achse, eine senkrechte Bewegung verändert den Höhenwinkel.

9.19 Kaleidozyklus



Unter einem Kaleidozyklus versteht man einen Ring aus einer geraden Anzahl von Tetraedern. Die Tetraeder sind an je zwei gegenüberliegenden Kanten verbunden. Diese Kanten sind windschief und verlaufen senkrecht zueinander.

Derartige Ringe aus Tetraedern wurden erstmals in dem Buch "M.C.Escher Kaleidozyklen" von Doris Schattenschneider und Wallace Walker als Kaleidozyklen bezeichnet. Dieser Name hat sich durchgesetzt.

Das Besondere ist, dass man diese Ringe ohne Ende in sich drehen kann und dass sich dabei jede Pyramide von allen Seiten zeigt. Es gibt beliebig viele Kaleidozyklen, wobei die Tetraeder dann zu Dreieckspyramiden werden.
Fordert man regelmäßige Tetraeder, so ist der einfachste Fall ein Kaleidozyklus aus acht Tetraedern.

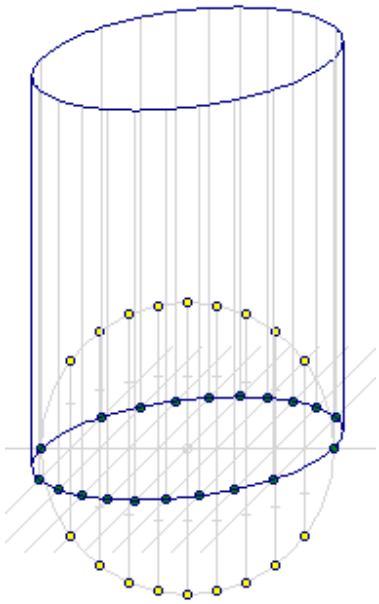
In diesem Teilprogramm werden Kaleidozyklen gezeichnet und deren Drehung veranschaulicht.
An dem Rollbalken *Tetraederzahl* stellen Sie die Anzahl der Tetraeder im Ring ein.

Mit *Kantenlänge* können Sie die Größe der Tetraeder verändern, mit dem Rollbalken *Höhenwinkel* die Blickrichtung auf den Kaleidozyklus.

Klicken Sie auf den Schalter *Animation* stellt das Programm die Drehung des Kaleidozyklus dar. Diese Drehung können Sie auch selbst durch Änderung des Wertes *Drehwinkel* steuern.

9.20 Schrägbild Zylinder, Kegel

Eine Grundaufgabe der darstellenden Geometrie besteht in der Konstruktion eines Schrägbildes (Kavalierperspektive) eines krummlinig begrenzten Körpers, z.B. eines geraden Kreiszylinders oder eines geraden Kreiskegels.
Da die affine Abbildung der kreisförmigen Grundfläche eine Ellipse darstellt, muss diese näherungsweise aus Hilfspunkten erzeugt werden.

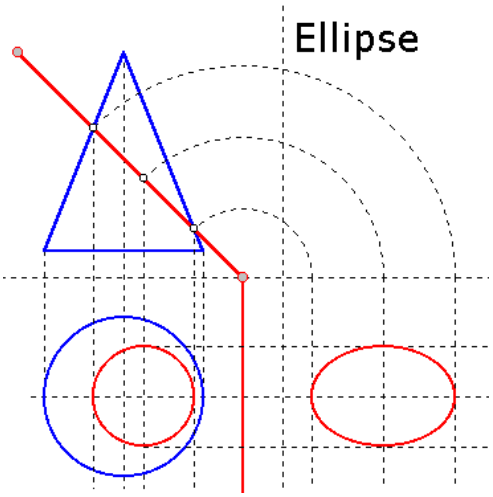


Folgende Schrittfolge ist für einen Kreiszylinder möglich:
1) Grundlinie zeichnen
2) Kreis als Grundfläche zeichnen
3) hinreichend viele Hilfspunkte auf dem Kreis wählen
4) durch jeden Hilfspunkt Senkrechte zeichnen
5) alle Senkrechte um 45° neigen
6) Strecken Hilfspunkte-Grundlinie halbieren
7) auf den geneigten Geraden die Tiefe = halbe Strecken abtragen
8) Ellipse zeichnen
9) an allen Näherungspunkten der Ellipse Höhen antragen
10) Ellipse als Deckfläche zeichnen
11) Seitenlinien tangential an den Ellipsen zeichnen
12) sichtbare Körperkanten zeichnen

In diesem Teilprogramm können Sie diese Grundkonstruktion für einen Zylinder oder Kegel durchführen. Wählen Sie dazu den entsprechenden Körper aus. Außerdem können Sie an 3 Rollbalken den *Radius* der Grundfläche, die *Höhe* des Körpers und die Anzahl der *Hilfspunkte* einstellen.

9.21 Schnitt eines Kegels und einer Pyramide

Gegeben ist ein Kegel in Grund- und Aufriss, der von einer Ebene senkrecht zur Aufrissebene geschnitten wird. Bei einem derartigen Schnitt können die bekannten Schnittflächen (Kegelschnitte) eine Ellipse, im Spezialfall der Kreis, eine Parabel oder eine Hyperbel ergeben.



Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, die wahre Gestalt dieser Schnittflächen konstruieren zu lassen.
Von der Ebene werden ihre zwei Spurgeraden im Grund- und Aufriss angezeigt.

Klicken Sie auf einen der beiden grau markierten Punkte und bewegen Sie die Maus, können Sie zum einen den Abstand der Ebene (der Punkt auf der Rissachse) und zum anderen deren Neigungswinkel gegen die Grundrissebene verändern. Je nach Lage der Schnittebene zeichnet das Programm das Schnittgebilde.

In der Darstellung entsteht eine Ellipse. Schneidet die Ebene die Kegelgrundfläche kann ein Ellipsenabschnitt entstehen. Ist der Neigungswinkel der Ebene gegen die Grundrissebene gleich dem Neigungswinkel der Kegelseitenlinie, erhalten Sie eine Parabel, ist der Neigungswinkel der Ebene sogar größer, entsteht eine Hyperbel als Schnittfläche.

Schnitt einer Pyramide

Markieren sie das Feld *Pyramidenschnitt*, können Sie zusätzlich auch eine quadratische regelmäßige Pyramide mit einer Ebene schneiden.
Die Lage der Schnittebene stellen Sie wieder durch Verschieben der grau markierten Punkte ein. Als Schnittfläche entsteht im Allgemeinen ein Trapez, da die Ebene die Pyramide in vier Kanten schneidet. Verläuft die Schnittebene genau durch die Spitze der Pyramide, entsteht ein Dreieck.

9.22 Drehung eines Körpers im Raum

Zu den Aufgaben der Computergrafik gehört es auch, dreidimensionale Körper um beliebig im Raum liegende Achsen zu drehen. Dieses Problem bedarf einiger Überlegungen.
Die Rotation um eine beliebige Achse mit einem Winkel σ wird dabei durch eine Gerade beschrieben. Die Berechnung der gedrehten Koordinaten erfolgt nun in mehreren Schritten.

Zuerst werden alle Körperpunkte verschoben, sodass die Rotationsachse durch den Koordinatenursprung verläuft. Dazu wird die vierdimensionale Matrix auf jeden Punkt angewandt. Anschließend werden die verschobenen Punkte um zwei Achsen gedreht: zuerst um die x-Achse, sodass die Drehachse in der xz-Ebene liegt, anschließend um die y-Achse, sodass die Drehachse endgültig mit der z-Achse übereinstimmt.

Nun erfolgt die eigentliche Drehung des Körpers. Da die Rotationsachse jetzt mit

der z-Achse zusammenfällt, ist die Drehung elementar mit der Matrix erreichbar. Anschließend sind die Bewegungen der Rotationsachse wieder rückgängig zu machen. Bei diesen Rücktransformationen sind in den Drehungen der Achse die Cosinus-Terme unverändert zu belassen, da cos(α) = cos(-α), während die Sinus-Terme, da sin(α) = -sin(-α), durch die negativen zu ersetzen sind.

In diesem Teilprogramm können Sie die beschriebene Vorgehensweise an vier Körpern schrittweise nachvollziehen. Nach Eingabe der Lage der *Drehachse* und des *Drehwinkels* können Sie am Rollbalken einstellen, welcher Transformationsschritt dargestellt werden soll. Wünschen Sie den *Ausgangskörper* als Vergleich bei jeder Bewegung zu sehen, so markieren Sie das Feld. Mit dem Schalter *Animation* wird eine ständige Rotation des Körpers dargestellt.
Das beschriebene Verfahren bewegt einen Punkt im dreidimensionalen Raum. Das Ergebnis muss nun noch auf die Ebene projiziert werden. Welche Darstellungsform Sie bevorzugen, z.B. Trimetrie, können Sie zusätzlich auswählen. Am Rollbalken *Phase* legen Sie die Lage der x-Achse in der Darstellung fest.

10. Stochastik

„Alles was relativ wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch."
Blaise Pascal

Unter dem Punkt *Stochastik* finden Sie Teilprogramme, die sich mit Fragen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik) beschäftigen.
Der Schwerpunkt liegt dabei auf der statistischen Auswertung von Daten, diskreten und stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, statistischen Testverfahren und klassischen Zufallsexperimenten.

10.1 Statistik

"There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics."
Benjamin Disraeli (1804-1881)

Liegt Ihnen eine Menge reeller Zahlen vor, zufällig erzeugt oder zum Beispiel Messwerte eines physikalischen Experiments, so können Sie diese in diesem Unterprogramm statistisch untersuchen.

Bis zu 120 Messwerte – rationale Zahlen – x[i] können Sie von links oben nach rechts unten in die Felder der Tabelle eingegeben. Zwischen den Feldern schalten Sie mit der *TAB*-Taste weiter. Das erste leere Feld wird vom Programm als Ende-Markierung betrachtet, auch wenn danach weitere Zahlen folgen.

Dabei erfolgt die Abfrage der eingegebenen Werte zeilenweise, d.h. zuerst von links nach rechts in der 1. Zeile, danach von links nach rechts in der zweiten Zeile usw. Nach Betätigung des Schalters *Auswertung* werden folgende statistische Auswertungen durchgeführt:

- Bestimmung der Anzahl n der eingegebenen Zahlenwerte, d.h., die Anzahl der gültigen Eingabewerte wird bestimmt. Sollte diese Zahl nicht mit den von Ihnen eingetragenen Werten übereinstimmen, kontrollieren Sie, ob nicht ein leeres Feld innerhalb der Zahlenmenge auftritt.
- Ermittlung des Minimums bzw. Maximums, d.h., der kleinste und größte Wert werden ermittelt.
- Berechnung des arithmetischen und geometrischen Mittels. Das arithmetische Mittel bildet gleichzeitig den sogenannten Erwartungswert m Ihrer statistischen Verteilung. Außerdem existiert das geometrische Mittel nur, wenn das Produkt aller eingegebenen Werte größer gleich Null ist.
- Berechnung des quadratischen Mittels.
- Berechnung des harmonischen Mittels. Ist ein Element gleich 0, dann ist das harmonische Mittel nicht berechenbar.
- Berechnung des Medians (Zentralwertes) Z der Zahlenmenge. Das Programm sortiert dabei intern die eingegebenen Zahlen. Ist die Anzahl n ungerade, so ist der Median der mittelste Wert, also $Z = a_{(n-1)/2} + 1$, ist die

Anzahl gerade, wird der Zentralwert als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte berechnet: $Z = (a_{n/2} + a_{n/2+1}) / 2$.
- Berechnung der Standardabweichung, der Varianz und des Variationskoeffizienten. Die Standardabweichung, auch quadratische Streuung oder mittlere quadratische Abweichung genannt, repräsentiert einen Wert, der die durchschnittliche Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert μ angibt. Nach dem Satz von Tschebyschow beträgt zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Werte im Intervall $]\mu - 2\sigma;\mu + 2\sigma[$ liegt, mindestens 75%. Die Standardabweichung σ ist die Quadratwurzel der Varianz unserer Verteilung. Im Programm wird die Varianz nach der Gleichung $s^2 = 1 / (n - 1) \Sigma (x_i - x_m)^2$ - Summe von i = 1 bis n – berechnet.
- Berechnung der mittleren Abweichung, d.h. der durchschnittlichen Abweichung (Betrag) zum Mittelwert.
- Berechnung des arithmetischen Mittels ohne den kleinsten Wert (minimaler Ausreißer) bzw. ohne den größten Wert (maximaler Ausreißer) sowie ohne beide Ausreißer.

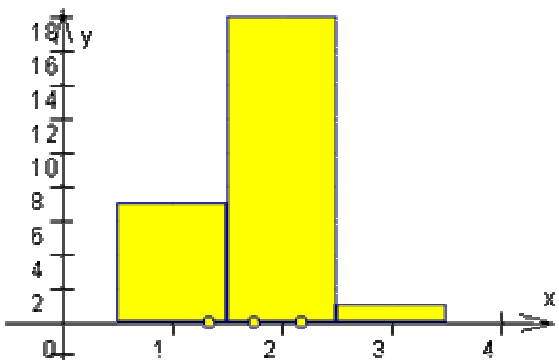
Anmerkung: Zur Beschreibung des Variationskoeffizienten benutzen Sie die Formelsammlung mit dem Stichwort *Stichprobenstreuung*.

Beispiel: Es wurden 26 Messwerte einer Größe eingegeben.

1 1,3 2 1,8 1,7 2 3,1 1,4 1,7 1,8 2,2 1,4 1,4
1,5 2,1 2 1,5 1,6 2 1,7 1,4 1,34 2,3 1,8 1,6 2,1

Mit diesen Werten erhalten Sie als Ergebnisse:
- Anzahl = 26
- Maximum = 3,1
- Minimum = 1
- Median = 1,7
- Mittelwert = 1,75923
- Geometrisches Mittel = 1,71445
- Harmonisches Mittel = 1,67185
- Quadratisches Mittel = 1,80699
- Standardabweichung = 0,42087
- Varianz = 0,17714
- Stichprobenvarianz = 0,17032
- Variationskoeffizient= 0,10069

Sofort nach der Berechnung erhalten Sie eine Vorschaugrafik. Wählen Sie nun den Schalter *Darstellung*, wird ein zugehöriges Histogramm gezeichnet. Hierbei werden die Zahlen in Klassen eingeteilt. Die *Klassenbreite* beträgt voreingestellt 1, kann aber von Ihnen geändert werden.
Eine Beschreibung der grafischen Möglichkeiten finden Sie unter Grafische Darstellung.



In unserem Beispiel erhalten Sie bei einer Klassenbreite von 1 dieses Histogramm:

Zusätzlich zum Diagramm erscheint optional eine Dichtekurve einer Gaußschen Normalverteilung (Markierungsfeld *Normalverteilung)* mit dem berechneten Mittelwert und der Varianz. Auf der Abszissenachse werden der Erwartungswert und die Differenz μ - σ sowie die Summe μ + σ der Standardabweichung bezüglich des Mittelwertes durch kleine Kreise markiert.

Beachten Sie bitte: Die grafische Darstellung ermöglicht maximal ein Abszissenintervall von 600 Einheiten Breite. Deshalb sollten Sie vermeiden, Werte größer 100 einzugeben. Zu untersuchende Zahlen, wie etwa 123, 234, 146 usw., dividieren Sie z.B. mit 100 und werten 1,23, 2,34, 1,46 usw. aus. Den berechneten Mittelwert oder Median multiplizieren Sie dann mit 100. Standardabweichung und Varianz werden exakt angegeben.

Über die Aktionsleistenschalter *Laden* und *Speichern* können Sie Ihre Daten dauerhaft in einer Datei aufbewahren und nach Bedarf wieder laden. Möchten Sie Beispieldaten ausprobieren, so können Sie über den Schalter ***B*** Zufallswerte erzeugen lassen.

10.2 Statistik von Datenpaaren

Bei einer Auswertung physikalischer Messreihen entstehen mitunter große Datenmengen von mehreren Hundert und Tausend Wertepaaren. Diese können in den bisher beschriebenen Teilprogrammen nicht ausgewertet werden.

Unter diesem Teilprogramm können Sie Dateien laden, welche im ASCII-Format Tausende von Wertepaaren (max. 32000) enthalten und die Daten statistisch auswerten sowie grafisch veranschaulichen.
Dabei können Sie drei Messwertreihen parallel untersuchen bzw. die dritte durch mathematische Verknüpfungen aus den ersten beiden erzeugen. Wählen Sie zuerst an den Auswahlfeldern *Werte 1*, *Werte 2* und *Werte 3*, welche der drei Messwertreihen aktiv sein soll.

Über den Schalter *Datei laden* können Sie nun Ihre Daten in die aktive Liste laden. In der ausgewählten Datei sollten die reellen Zahlen im ASCII-Format vorliegen, d.h., die Datei muss eine Textdatei sein. Erstellen können Sie eine derartige Datei z.B. mit dem Windows-Notepad-Programm oder aber Sie exportieren sie aus verschiedenen anderen Programmen. Wählen Sie dort jeweils den Dateityp ASCII oder TEXT.

Innerhalb der Datei können die reellen Zahlen einzeln je Zeile stehen oder aber mehrere Zahlen in einer Zeile durch ein Trennzeichen aufgelistet sein. Trennzeichen sind das Leerzeichen, das Komma und das Semikolon – ein Tabulatorzeichen wird nicht korrekt erkannt. Zum Beispiel könnten die ersten Zeilen Ihrer Datei wie folgt aussehen:

Möglichkeit 1:

1000,11240
1948,11159
3105,66452
1192,39585
426,79393

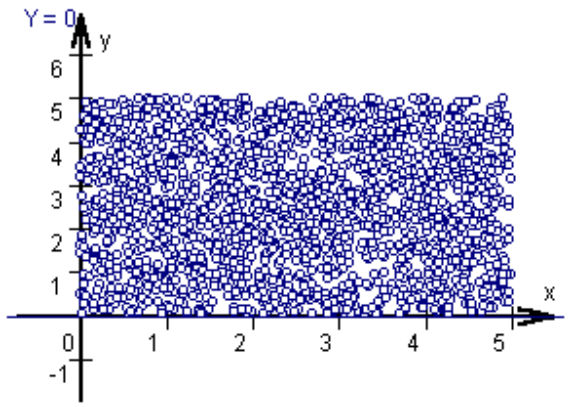
Möglichkeit 2:

1000,11240 1948,11159
3105,66452 1192,39585
426,79393 3382,03248
2222,17126 3731,12061

Möglichkeit 3:

1000,11240, 1948,11159, 3105,66452, 1192,39585, 426,79393,
3382,03248, 2222,17126, 3731,12061, 4009,77148, 1285,68120,
4394,18055, 1409,80013, 4245,35792, 419,67477

Beachten Sie bitte, dass in dieser Datei eine gerade Anzahl von Zahlen vorhanden sein muss, da jeweils Paare eingelesen werden – andernfalls wird der übrig bleibende letzte Wert ignoriert. Außerdem sollten keine Buchstaben oder andere Zeichen auftreten. Kann das Programm keine korrekte Umwandlung der ASCII-Zeichen in Zahlen durchführen, erhalten Sie die Fehlermeldung:



Zahlenformatfehler in der Datei

Direkte Eingabe

Zusätzlich können Sie die Daten direkt in die Datenlisten links und in der Mitte eingeben. Klicken Sie dazu in den Eingabebereich und tragen Sie jeweils zwei Zahlen je Zeile durch einen Tabulator getrennt ein.

Auswertung

Wurden die Daten korrekt eingelesen, können Sie mit *Berechnung* eine Auswertung vornehmen. Das Programm ermittelt die Anzahl der Paare, die arithmetischen und geometrischen Mittelwerte, die Standardabweichung und

Varianz, die Stichprobenvarianz, den Varianzkoeffizienten und das Minimum und Maximum sowohl für die x- als auch die y-Werte.

Möchten Sie Beispieldaten ausprobieren, so können Sie über den Schalter ***B*** Zufallswerte erzeugen lassen. Je nachdem, welches Auswahlfeld *Werte 1*, *Werte 2* oder *Werte 3* Sie markiert haben, werden die Zahlen eingetragen.

Wählen Sie *Darstellung*, schaltet das Programm zur grafischen Darstellung um und trägt alle Werte in ein Koordinatensystem ein.

Dabei spaltet das Programm automatisch die größtmögliche Zehnerpotenz von den Daten ab und versucht, die Koordinatenpaare sowohl auf der Abszisse als auch auf der Ordinate im Intervall [-10;10] darzustellen. Die Streckungsfaktoren in Richtung beider Achsen werden angezeigt. Laden Sie eine weitere Datei in dieselbe Liste, werden die neuen Werte angefügt, d.h., die Liste wird vorher nicht gelöscht! Wünschen Sie dies nicht, so leeren Sie zuvor die aktuelle Liste mit dem Schalter *Löschen*.

Die dritte Messwertreihe können Sie auch durch gliedweise Verknüpfung der ersten und zweiten Liste gewinnen. Als Operationen sind Addition, Subtraktion und Multiplikation vorgesehen. Befinden sich in den beiden Ausgangslisten unterschiedlich viele Paare, werden Sie darauf hingewiesen. Das Programm trägt in die dritte Liste nur so viele Werte ein, wie mindestens in der ersten und zweiten enthalten sind.

10.3 Regression, Korrelation

Lineare Regression

Zur Untersuchung der linearen Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen besteht die Möglichkeit, in diesem Teilprogramm bis zu 40 Wertepaare (x[i],y[i]) einzugeben. Mittels der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate wird eine Korrelationsgerade $y = f(x) = m \cdot x + b$ ermittelt, welche den Wertepaaren am besten entspricht, d.h. die Abweichung der Ausgangszahlenpaare von theoretischen Werten der Geraden wird minimal.
Die Aufgabenstellung besteht dabei darin, für

$$\Sigma_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

ein Minimum zu finden.

Die Eingabe der Werte erfolgt paar- und spaltenweise, d.h., zuerst wird in der 1. Zeile und 1. Spalte der x-Wert, dann in der 2. Spalte der y-Wert eingegeben. Anschließend wird die 1. Zeile der 3. und 4. Spalte gefüllt usw. Sind 12 Paare eingegeben worden, erfolgt die weitere Eingabe in der 2. Zeile usw., d.h., die Eingabe erfolgt waagerecht.

Außer Zahlen können Sie auch Terme in der Form PI/2, SQRT(2), usw. eingeben. Die Schreibweise muss sich an die unter Implementierte Funktionen gemachten

Bemerkungen orientieren und einen berechenbaren Wert ergeben.

Beispiel: Von 10 Schülern ist die Körpergröße in Metern und deren Masse in kg gemessen worden.

X	1,35	1,45	1,39	1,42	1,37	1,37	1,34	1,44	1,35	1,46
Y	29,3	35,2	34,5	32,1	33,6	32,3	27,2	36,7	26,9	38,3

Das Programm bewertet die Messwertreihe und schätzt die Beziehung (Korrelation) zwischen Körpergröße und Masse ein. Vermutet man einen linearen Zusammenhang, so ergibt sich die Korrelationsgerade Y = 74,5943 X - 71,3745. Der Korrelationskoeffizient wird zu 0,871762 und die Stichprobenvarianz für die x-Werte zu 0,001824 (y-Werte ... 13,3549) ermittelt.

Über die Güte der Korrelation, d.h. die Qualität des tatsächlichen Zusammenhangs beider Messgrößen, gibt der Korrelationskoeffizient Auskunft. In Abhängigkeit von der Anzahl von Paaren und der Wahl der Größe eines Konfidenzintervalls (Vertrauensintervalls) wird die Korrelation bewertet. Wurde zum Beispiel ein Konfidenzintervall von 90% gewählt, so bedeutet das Ergebnis

Korrelation sicher

dass mit einer anzunehmenden Sicherheit von 90% ein linearer Zusammenhang zwischen beiden Zufallsgrößen x und y besteht. Bei einer Einschätzung von

Korrelation unsicher

besteht entweder kein Zusammenhang oder der Stichprobenumfang ist zu klein, um eine sichere Aussage zu treffen. In unserem Beispiel beträgt der Konfidenzwert für 10 untersuchte Paare bei einer Sicherheit von 90% 0,5490. Da der Korrelationskoeffizient größer ist, besteht mit 90%iger Sicherheit ein linearer Zusammenhang zwischen der Körpergröße und der Masse der Schüler. Dagegen muss diese Vermutung verworfen werden, wenn Sie 99,9% Garantie erwarten.

Die Größe des Konfidenzintervalls können Sie in der aufklappbaren Box einstellen. Zur Ermittlung der Größe des Konfidenzintervalls wird die Student-t-Verteilung für eine kleine Stichprobe benutzt.

Möchten Sie eine Veranschaulichung der Untersuchung, so wählen Sie den Schalter *Darstellung*. Das Programm stellt die Korrelationsgerade bzw. -funktion und die Punktwolke der Wertepaare dar. Anzumerken ist, dass Sie bei einer Vielzahl von Wertepaaren die Darstellungsintervalle auf der x- und y-Achse einstellen müssen, da die Standardbereiche von [-5 , 5] oft überschritten werden. Welche Möglichkeiten zur Veränderung der Darstellungsbereiche Sie haben, erfahren Sie in der Beschreibung der "Grafischen Darstellung".

Beachten Sie bitte: Bei einer Regressionsgeraden von x = const. bzw. y = const

wird die Auswertung abgebrochen. Zur Auswertung sind weiterhin mindestens drei Paare notwendig.
Sie können auch eine Ursprungsgerade Y = m * X als Regressionstyp wählen.

Zum Lieferumfang gehört das Beispiel REGEN, das interessante Daten zur Untersuchung auf Korrelation enthält.
REGEN enthält Wertepaare, deren erster Wert das Mittel der Sonnenfleckenzahl und als zweite Zahl den Gesamtniederschlag (in mm) der Sternwarte Ukkel (Belgien) der Jahre 1901 bis 1935 darstellen. Interessant ist, ob – wie oft behauptet – ein Zusammenhang zwischen aktiver Sonne und der Häufigkeit von Regen existiert. Wählen Sie das Beispiel in der aufklappbaren Liste aus, ermittelt das Programm einen Korrelationskoeffizienten von 0.1148. Ein Zusammenhang ist daher äußerst unwahrscheinlich.

Die weiteren *Beispiele* der Liste sind:

- Länderschulden : erster Wert = Schulden der Bundesländer in Milliarden Euro, zweiter Wert = Einwohnerzahl in Millionen
- Schüler : erster Wert = Körperhöhe von Schülern, zweiter Wert = Masse in Kilogramm
- Sinuswerte : erster Wert = Argumente x, zweiter Wert = genäherte Funktionswerte für die Sinusfunktion
- Störche und Babys : erster Wert = Anzahl Störche je Hektar in Brandenburg, zweiter Wert = Babys je Tausende Einwohner in Berlin (Achtung! Beispiel für „Cum hoc ergo propter hoc")

Anmerkung: Ein größerer Korrelationskoeffizient (-0,8) ergibt sich für die Vermutung einer geometrischen Regression (siehe nachfolgender Abschnitt).
Möchten Sie Beispieldaten ausprobieren, so können Sie über den Schalter ***B*** Zufallswerte erzeugen lassen.

Nichtlineare Regression

Innerhalb der linearen Regression geht man davon aus, dass die Beziehung zwischen den Größen linear ist. In der Praxis muss dies nicht der Fall sein. Vielmehr treten andere Zusammenhänge wesentlich häufiger auf. Im Programm können Sie daher nichtlineare Zielfunktionen wählen:

- Logarithmische Regression $Y = A + B \cdot LN(X)$
- Exponentielle Regression $Y = A \cdot B^X$
- Geometrische Regression $Y = A \cdot X^B$
- Trigonometrische Regression $Y = A + B \cdot SIN(X)$
- Reziproke Regression $Y = A + B/X$
- Quadratische Regression $Y = A + B \cdot X^2$
- Kubische Regression $Y = A + B \cdot X^3$
- Reziprok-quadratische Regression $Y = A + B/X^2$

Hierfür sucht das Programm ebenso die Parameter A und B für die beste

Annäherung an die gegebenen Werte. Darüber hinaus werden die ermittelten Regressionsfunktionen grafisch dargestellt. Durch den Vergleich der Korrelationskoeffizienten können Sie schnell überprüfen, welcher Regressionstyp Ihre Werte am besten annähert.

Beispiel: Für das oben genannte Beispiel Größe-Masse von Schülern erhalten Sie:

Regressionstyp	Funktion	Korrelationskoeffizient
linear	Y=74,5943 X-7,13745	0,871762
logarithmisch	Y=104,6126 LN(X)-2,0911	0,873646
exponentiell	$Y=1,2898\cdot 10,1002^{X}$	0,862667
geometrisch	$Y=11,0433\cdot X^{3,2488}$	0,864966
trigonometrisch	Y=444,0170 SIN(X)-404,0869	0,884007
reziprok	Y=-146,6227/X+137,8893	-0,875492

und somit nur unwesentliche Unterschiede der Korrelationsstärke. Dennoch würde man die logarithmische Regression vorziehen. Dies würde die Erweiterung der Daten um Größen und Massen von älteren Schülern verdeutlichen. Eine weitere Möglichkeit der Ermittlung von Messwertpaaren annähernden Funktionen finden Sie im Abschnitt "Allgemeine Kurvenanpassung".

Beachten Sie bitte: Die Struktur der nichtlinearen Zielfunktionen erfordert folgende Einschränkungen:

Logarithmisch:	alle x_i müssen größer 0 sein
Exponentiell:	alle y_i müssen größer 0 sein
Geometrisch:	alle x_i und y_i müssen größer 0 sein
Reziprok:	alle x_i müssen verschieden von 0 sein

Verstoßen Ihre Eingaben gegen diese Forderungen, erhalten Sie entsprechende Fehlermeldungen.

10.4 Interaktive lineare und quadratische Regression

In Ergänzung des Teilprogramms *Regression, Korrelation* können Sie in einem Teilprogramm eine lineare Regressionsgerade bzw. eine quadratische Regressionsparabel für maximal 15 Punkte untersuchen.

Nach dem Programmstart können Sie bis zu 15 Punkte im Koordinatensystem anklicken und evtl. nachträglich mit der Maus verschieben.

Das Programm ermittelt ab drei Punkten die entsprechende lineare Regressionsgerade bzw. -parabel, stellt diese dar und gibt Ihnen für den linearen Fall Korrelationskoeffizient, Konfidenzwert und Güte der Korrelation an.

Verschieben Sie nun die Punkte, können Sie sofort nachvollziehen, wie sich Gerade bzw. Parabel ändern und evtl. die Korrelation der Werte besser oder auch

schlechter wird.

Wählen Sie das Feld *ohne Ausreißer*, so wird der Punkt, der am stärksten von der Regressionsgeraden bzw. -parabel abweicht, von der Berechnung ausgeschlossen. Das Programm ermittelt nun zusätzlich die Regressionsfunktion ohne den Ausreißer, zeichnet diese rot ein und markiert den ausgeschlossenen Punkt gelb.

Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen,* sehen Sie eine Tabelle, die die Koordinaten der Punkte enthält.
Einige der Tabellenfelder sind farbig unterlegt, die Schrift ist hervorgehoben. In diese Felder können Sie Werte eingeben, die dann vom Programm übernommen und ausgewertet werden. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld und tragen Sie den neuen Wert ein. Nach Bestätigung der Eingabe mit der *TAB*-Taste oder den Cursortasten übernimmt das Programm den neuen Wert und erstellt die Darstellung neu.

Während der Simulation wird der Punkt A wahlweise waagerecht oder senkrecht verschoben. Dabei kann der Einfluss eines einzigen Punktes auf die Regression untersucht werden.

10.5 Diagramme

Statistisches Material wird durch eine grafische Darstellung anschaulicher. In diesem kleinen Unterprogramm haben Sie die Gelegenheit, einige dieser Darstellungsmöglichkeiten zu nutzen. Geben Sie dazu Ihre Zahlenwerte je Kriterium spaltenweise in die Tabelle ein. Die oberste Zeile ist für Bezeichnungen vorgesehen.

Nach Betätigung des Schalters *Darstellung* erscheint im unteren Teil des Fensters die grafische Veranschaulichung der Zahlen. Als Diagrammöglichkeiten, die Sie in der aufklappbaren Liste auswählen können, sind vorgesehen:

	nebeneinander	als Stapel	100%	als Feld
Balken	X	X	X	
2D-Säulen	X	X	X	
3D-Säulen	X	X	X	X

Markieren Sie zusätzlich *Hilfslinien zeichnen*, erhalten Sie innerhalb der Darstellung weitere Orientierungslinien.
Klicken Sie auf den Schalter ***B***, trägt das Programm fiktive Zahlenwerte ein.

Ihr Zahlenmaterial können Sie speichern und auf Wunsch zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden (Schalter *Datei laden* und *Datei speichern*).

Mit Einschränkungen können Sie auch negative Zahlen darstellen. Als Diagrammtyp sind dabei *Balken nebeneinander* und *2D-Säulen nebeneinander* nutzbar.

10.6 Box-Plot

Ein Box-Plot, auch Box-Whisker-Plot oder Kastengrafik, ist ein Diagramm, das zur grafischen Darstellung der Verteilung statistischer Daten verwendet wird. Ein Boxplot soll einen Eindruck vermitteln, in welchem Bereich die Daten liegen und wie sie sich über diesen Bereich verteilen.
Dazu werden alle Werte der Fünf-Punkte-Zusammenfassung, der Median, die zwei Quartile und die beiden Extremwerte, dargestellt.

Ein Boxplot besteht aus einem Rechteck und zwei Linien, die dieses Rechteck verlängern. Diese Linien werden als Whisker bezeichnet und werden durch einen Strich abgeschlossen.
Die Box entspricht dem Bereich, in dem die mittleren 50 % der Daten liegen. Sie wird durch das obere und das untere Quartil begrenzt. Deren Differenz, der Interquartilsabstand IQR, ist ein Maß für die Streuung der Daten
Außerdem wird der Median als durchgehender Strich in der Box eingezeichnet. Dieser Strich teilt das gesamte Diagramm in zwei Hälften, in denen jeweils 50 % der Daten liegen.
Ist der Median im linken Teil der Box, so ist die Verteilung rechtsschief und umgekehrt.

In diesem Teilprogramm werden zwei Box-Plots gezeichnet.
Zur Festlegung der Daten klicken Sie mit der linken Maustaste auf die zwei gezeichneten Zahlenstrahlen. Einmal festgelegte Zahlen können Sie mit der Maus beliebig verschieben und mit einem rechten Mausklick auch wieder löschen.

Ab zwei Zahlen je Strahl werden Median, Mittelwert und die Extrema gezeichnet, ab fünf Daten der vollständige Box-Plot.

10.7 Allgemeine Kurvenanpassung

Das Prinzip der Suche nach am besten zu Messwerten passenden Geraden oder nichtlinearen Funktionen kann auch auf Linearkombinationen von Funktionen erweitert werden. Unter diesem Punkt finden Sie die Möglichkeit, zu maximal 40 Wertepaaren eine diese möglichst gut annähernde Funktion der Form

$$y = a\, f_0(x) + b\, f_1(x) + c\, f_2(x)$$

ermitteln zu lassen, wobei die drei Funktion f1, f2 und f3 frei wählbar sind und von Ihnen in den Eingabezeilen festgelegt werden können. Selbstverständlich muss deren Syntax den im Programm festgelegten Kriterien entsprechen.

Wendet man auf dieses Problem das Gaußsche Verfahren der kleinsten Quadrate an, ergeben sich die Koeffizienten a, b und c. Nach dem Start des Teilprogramms geben Sie die drei Funktionen ein. Die Struktur der Lösung erfordert unter allen Umständen folgende Bedingungen:

- genau drei Funktionen, sprich alle drei Eingabefelder, müssen belegt sein
- keine Funktion darf gleich der Nullfunktion sein
- je zwei Funktionen müssen voneinander verschieden sein
- jede Funktion muss über den Bereich der Argumente ihrer Wertepaare definiert und stetig sein

Anschließend geben Sie Ihre Wertepaare ein. Entweder tragen Sie die x und y-Werte direkt ein oder Sie laden über *Datei laden* eine schon früher erzeugte Liste. Über den Schalter *Datei speichern* können Sie Ihre Daten anschließend dauerhaft in einer Datei aufbewahren und nach Bedarf wieder laden.

Außer Zahlen können Sie auch Terme in der Form PI / 2, SQRT(2) usw. eingeben. Die Schreibweise muss sich an den unter "Implementierte Funktionen" gemachten Bemerkungen orientieren und einen berechenbaren Wert ergeben.

Die Eingabe erfolgt ausgehend von der ersten Reihe von oben nach unten, anschließend folgt die zweite Reihe usw. Das erste freie x-Feld beendet die Liste, auch wenn weiter unten noch Paare folgen.
Betätigen Sie nun den Schalter *Berechnung* oder die *RETURN*-Taste, ermittelt das Programm die günstigsten Koeffizienten Ihrer Funktionen. Ist dies nicht möglich, erhalten Sie entsprechende Fehlermeldungen. Zum Beispiel müssen mindestens drei Wertepaare vorliegen, die Funktionen korrekt definiert sein (siehe oben) usw.

Wählen Sie nun den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm die Wertepaare sowie die berechnete Gesamtfunktion in ein Koordinatensystem ein. Gleich nach der Auswertung sehen Sie schon eine Vorschaugrafik.

Beispiel: Zum Lieferumfang gehört die Datei B001.KUR, die Sie im Unterverzeichnis *Dat* des Hauptverzeichnisses finden. Diese Datei enthält 20 Wertepaare, welche durch eine Funktion der Form y = a sin x + b sin(2x) + c sin(3x) erzeugt wurden. Tragen Sie in die Felder der Funktionen die Teilfunktionen f1(x) = SIN(X), f2(x) = SIN(2 * X) und f3(x) = SIN(3 * X) ein, so ermittelt das Teilprogramm die Koeffizienten a = 1,2, b = -0,77 und c = 0,39.

10.8 Nichtlineare Kurvenanpassung

Wie im Teilprogramm *Interpolation* ausgeführt, sind bei einer Vielzahl von Problemen, zum Beispiel bei der Untersuchung physikalischer Zusammenhänge, nur einzelne Punkte einer Funktion bekannt, deren Funktionsgleichung jedoch nicht.

In diesen Fällen versucht man, eine geeignete Funktion – die Interpolationsfunktion – zu ermitteln, deren Graph annähernd die gegebenen Punkte enthält. Über die Suche nach einer ganzrationalen Funktion hinaus, kann man auch nach andersartigen Funktionen, u.U. nicht algebraischen, suchen.

In diesem Teilprogramm können Sie maximal 35 Paare (Argument – Funktionswert) eingeben und für diese aus zwölf vordefinierten Funktionsgruppen die bestmögliche Kurve ermitteln lassen.

Außer Zahlen können Sie auch Terme in der Form PI / 2, SQRT(2) usw. eingeben. Die Schreibweise muss sich an den unter Implementierte Funktionen gemachten Bemerkungen orientieren und einen berechenbaren Wert ergeben.

Dabei wird das berühmte Gaußsche Verfahren der Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung der Parameter herangezogen. Wählen können Sie unter:

- Lineare Funktion Y = A x + B
- Gebrochenrationale Funktion Y = A / x + B
- Gebrochenrationale Funktion Y = D / (x + C)
- Gebrochenrationale Funktion Y = 1 / (Ax + B)
- Gebrochenrationale Funktion Y = 1 / (Ax + B) ^ 2
- Gebrochenrationale Funktion Y = x / (Ax + B)
- Logarithmische Funktion Y = A ln(x) + B
- Exponentialfunktion Y = C e ^ (Ax)
- Exponentialfunktion Y = C x e ^ (-Dx)
- Exponentialfunktion Y = A / (1 + C e ^ (Bx))
- Potenzfunktion Y = C x ^ A (unbekannter Parameter A)
- Ganzrationale Funktion Y = C x ^ A (A ist bekannt und ganzzahlig)

Markieren Sie die gesuchte Funktion. Für die Funktion Y = C x^A (A ist bekannt und ganzzahlig) müssen Sie zusätzlich den Wert für A, für die Funktion Y = A / (1 + C e^(Bx)) den Grenzwert A eingeben.

Wählen Sie nun den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Programm die Parameter, damit die Funktion und für alle in die Tabelle eingetragenen Argumente den Funktionswert der Anpassungsfunktion sowie die Abweichung. Über den Schalter *Darstellung* können Sie sich die Punkte und die berechnete Funktion grafisch veranschaulichen lassen.

Zu beachten ist, dass einige Funktionen Forderungen an die Tabellenwerte stellen. So sollte für Y = A/x + B kein Argument x = 0 auftreten, bei der logarithmischen Funktion keine x-Werte kleiner gleich 0.

Auch hier können Sie Ihre Tabellenwerte über den Schalter *Datei speichern* bzw. über *Datei laden* wieder untersuchen. Mit dem dritten Schalter kopieren Sie die Daten in die Zwischenablage.
Klicken Sie auf den Schalter ***B***, so trägt das Programm zufällige Werte in die Tabelle ein, an denen Sie das Programm testen können.

10.9 Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate oder der kleinsten Fehlerquadrate ist das mathematische Standardverfahren zur Ausgleichungsrechnung.

Es ist eine Menge aus Datenpunkten gegeben, die physikalische Messwerte, wirtschaftliche Größen usw. repräsentieren kann. In diese Punktwolke soll eine möglichst genau passende parameterabhängige Modellkurve gelegt werden. Dazu bestimmt man die Parameter dieser Kurve numerisch, indem die Summe der quadratischen Abweichungen der Kurve von den beobachteten Punkten minimiert wird.

In der Stochastik wird die Methode der kleinsten Quadrate meistens als Schätzmethode in der Regressionsanalyse benutzt. In der mathematischen Statistik nennt man das Verfahren auch Kleinste-Quadrate-Schätzung, während in der Physik die Bezeichnung Fitting verwendet wird.

Am Neujahrstag 1801 entdeckte der italienische Astronom Giuseppe Piazzi den Asteroiden Ceres. 40 Tage lang konnte er die Bahn verfolgen, dann verschwand Ceres hinter der Sonne. Im Laufe des Jahres versuchten viele Wissenschaftler die Bahn zu schätzen. Die meisten Rechnungen waren unbrauchbar – als einzige war diejenige des 24-jährigen Carl Friedrich Gauß genau genug. Gauß erlangte dadurch Weltruhm.
Sein Verfahren, die Methode der kleinsten Quadrate, publizierte er erst 1809 im zweiten Band seines himmelsmechanischen Werkes "Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium". Unabhängig davon entwickelte der Franzose Adrien-Marie Legendre 1806 dieselbe Methode.

1829 konnte Gauß eine Begründung liefern, wieso sein Verfahren im Vergleich zu den anderen so erfolgreich war: Die Methode der kleinsten Quadrate ist in einer breiten Hinsicht optimal. Die genaue Aussage ist als der Satz von Gauß-Markow bekannt.

In diesem Teilprogramm können Sie das Gaußsche Verfahren testen.
Tragen Sie dazu in die Wertepaartabelle x- und y-Werte ein oder laden Sie diese von der Festplatte. Vor der Berechnung wählen Sie, welche *Zielfunktion* gesucht ist. Vorgesehen sind hier ganzrationale Funktionen von 2. bis 6. Grades.
Sobald Sie auf den Schalter *Auswertung* klicken, berechnet das Programm das Polynom und die Summe der Fehlerquadrate. Die Wertepaare und die Funktion werden in der grafischen Darstellung gezeigt.

Unterhalb des Schalters finden Sie in einer Tabelle die Parameter a_i des Polynoms und deren Varianz s^2.
Markieren Sie eines der Auswahlfelder *Streuung*, zeichnet das Programm außer dem besten Polynom auch die Polynome, bei denen das gewählte a_i durch a_i + Standardabweichung und a_i - Standardabweichung ersetzt wird.

10.10 Trigonometrische Regression

In diesem Teilprogramm können Sie eine weitere Variante der nichtlinearen Regression nutzen.
Gegeben ist ein Menge von Wertepaaren (x_i, y_i) und die trigonometrische Funktion

$$f(x) = a \sin (bx + c) + d$$

Ziel ist es, die Parameter der Funktion so zu bestimmen, dass diese möglichst gut die Menge von Wertepaaren approximiert, d.h. mit möglichst minimaler Fehlerquadratsumme $\Sigma (f(x_i) - y_i)^2$.

Für die Berechnung ermittelt man partielle Ableitungen

$$g_a(x) = \sin (bx + c) \cdot \Delta a$$
$$g_b(x) = a \, x \cos (bx + c) \cdot \Delta b$$
$$g_c(x) = a \cos (bx + c) \cdot \Delta c$$
$$g_d(x) = \Delta d$$

wobei a, b, c, d die konkreten Näherungswerte darstellen. Δa, Δb, Δc und Δd sind noch zu bestimmende Koeffizienten der Linearkombination

$$g(x) = a \sin (bx + c) + d + \sin (bx + c) \cdot \Delta a + a \, x \cos (bx + c) \cdot \Delta b + a \cos (bx + c) \cdot \Delta c + \Delta d$$

sind.
Diese Koeffizienten (Δa, Δb, Δc, Δd) werden mit dem Gaußschen Algorithmus der kleinsten Quadrate nun so bestimmt, dass die Fehlerquadratsumme $\sigma^2 = \Sigma((y_i - g(x_i))^2)$ minimal wird.
Bessere Näherungen für die Parameter a bis d ergeben sich durch $a \rightarrow a + \Delta a$, $b \rightarrow b + \Delta b$ usw. Mehrere Wiederholungen des Verfahrens ergeben eine günstige Lösung.

Tragen Sie zur Auswertung x- und y-Werte in die Wertepaartabelle ein oder laden Sie diese von der Festplatte. Klicken Sie auf den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Programm die Parameter.
Im Gegensatz zu anderen Regressionsverfahren existiert hier keine eindeutige Lösung. So zeigt sich, dass für höhere Koeffizienten b meist Lösungen mit kleiner Fehlerquadratsumme gefunden werden. Zusätzlich kann der Parameter c natürlich noch durch Addition der Periodenlänge verändert werden.

Die gefundenen Koeffizienten hängen sehr stark von den gewählten Startparametern ab. Aus diesem Grund berechnet das Programm zehnmal die Koeffizienten für andere Startwerte und trägt die gefundenen Funktionen in die Liste ein.
Möchten Sie eine dieser Funktionen anzeigen, so wählen sie diese in der Liste aus.

Voreingestellt werden alle vier Parameter a bis d berechnet. Kennen Sie einen der vier, so können Sie das Feld *xx fest* markieren und den Wert eintragen.
Bei einer Berechnung wird dann dieser Koeffizient unverändert gelassen.

10.11 Gleitende Mittelwerte

„Alle Täler sollen erhöht werden, und alle Berge und Hügel sollen erniedrigt werden, und was uneben ist, soll gerade, und was hügelig ist, soll eben werden."
Jesaja. 40.4

Gegeben sei eine Folge von n Paaren von reellen Zahlen x_i, y_i. Unter dem schrittweisen Mittelwert bzw. gleitenden Mittelwert der Ordnung n versteht man dann die Folge von n Paaren $\{x_i , y_i\}$, die aus den Gliedern

$$x_{in} = 1/n\ (x_i + x_{i+1} + ... + x_{i+n-1}) \qquad y_{in} = 1/n\ (y_i + y_{i+1} + ... + y_{i+n-1})$$

besteht. Für n=2 ergibt sich damit die Folge der arithmetischen Mittel benachbarter Glieder der Ausgangsfolge.

In diesem Teilprogramm werden Kurven gleitender Mittelwerte gezeichnet. Tragen Sie dazu in die Tabelle die Wertepaare ein und quittieren Sie mit *Darstellung.* An dem Rollbalken *Modul* stellen Sie die Ordnung n der Kurve ein. Für n = 1 erhalten Sie die Kurve der Ausgangsdaten.

Über die Schalter *Laden* und *Speichern* können Sie Ihre Daten dauerhaft in einer Datei aufbewahren und nach Bedarf wieder laden. Möchten Sie Beispieldaten ausprobieren, so können Sie über den Schalter ***B*** Zufallswerte erzeugen lassen.

10.12 Kartenexperiment

Als zweites Zufallsexperiment können Sie unter diesem Punkt das Ziehen einer Anzahl von Karten aus einem Kartenspiel simulieren. Vor Beginn der Simulation legen Sie fest:

- Kartenanzahl: entweder Skatblatt (mit 4 x 8 = 32 Karten) oder Bridgekarten-Set (d.h. halbes Rommékarten-Set) (mit 4 x 13 = 52 Karten)
- Anzahl der bei jedem Versuch gezogenen Karten (von 1 bis maximal 12)
- Art der Ziehung (Schaltfeld *Ziehen mit Karten zurücklegen*): Entweder wird jede einzelne Karte sofort wieder zurückgelegt oder erst nachdem die festgelegte Anzahl vollständig gezogen wurde. Ziehen ohne Zurücklegen bedeutet praktisch, dass die Anzahl von Karten auf einmal aus dem Kartenstapel entnommen wird.
- Schrittweite: Dieser Wert legt fest, alle wie viel Durchläufe des Experiments die gezogenen Karten sowie die aktuellen Ergebnisse angezeigt werden. Wählen Sie einen kleinen Wert (< 100), läuft die Simulation deutlich

langsamer ab, da der Computer viel Zeit für die Darstellung der Karten benötigt.

Anschließend legen Sie das jeweilige Zufallsexperiment fest. Ergänzen Sie dazu den Satz

Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen von ___ Karten genau (oder mindestens)
__ A __ 2 __ 3 __ 4 __ 5 __ 6 __ 7 __ 8 __ 9 __ Z __ B __ D __ K
__ rote __ schwarze
enthalten sind.

Möchten Sie zum Beispiel experimentell die Wahrscheinlichkeit ermitteln, dass unter sechs gezogenen Karten aus einem Skatblatt genau vier Asse enthalten sind, so geben Sie vor *A* die Zahl 4 ein. Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige gezogene Karte schwarz ist, setzen Sie z.B. die Kartenzahl auf 1 und tragen vor *schwarz* ebenso eine 1 ein.

Wählen Sie nun den Schalter *Experiment starten*, simuliert das Programm dieses Experiment. Entsprechend der von Ihnen eingestellten *Schrittweite* stellt das Programm die gezogenen Karten sowie die Auswertung dar. Dabei werden die Karten nur dargestellt, wenn Sie das Feld *Karten darstellen* markieren. Werden die Karten abgebildet, sinkt die Geschwindigkeit des Experiments deutlich.
Ist das Feld *Experiment neu starten* markiert, so beginnt das Programm nach dem Klicken auf *Experiment starten* wieder bei Null zu zählen. Entfernen Sie die Markierung, wird nach einer Unterbrechung bei den schon gefundenen Werten fortgesetzt.

In der Auswertung finden Sie die durchgeführten Ziehungen, die Anzahl der eingetretenen Treffer sowie deren prozentuale Häufigkeit. Nach dem Gesetz der Großen Zahl nähert sich dieser Wert für wachsende Ziehungszahlen der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens Ihres Experiments an. Abbrechen können Sie die Simulation durch Betätigung des *Stopp*-Schalters oder der *ESC*-Taste.

Zusätzlich ermittelt das Programm die längste Phase hintereinander ermittelter Treffer sowie die längste Phase von nur roten bzw. schwarzen gezogenen Karten. In Klammern erhalten Sie als ersten Wert die genäherte Wahrscheinlichkeit, dass bis zu diesem Zeitpunkt genau diese Länge der Phase zu erwarten ist, als zweiten Wert die Wahrscheinlichkeit, dass eine um 1 größere Phasenlänge zu erwarten ist.

Dieses Zufallsexperiment kann als eine Bernoulli-Kette der Länge 8 mit einer theoretischen Wahrscheinlichkeit p = 1 / 8 (4 Asse unter den 32 Karten) angesehen werden. Damit liegt eine Binomialverteilung vor. Tragen Sie im Teilprogramm *Diskrete Verteilung* n = 8 und p = 1 / 8 ein, so ermittelt das Programm die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Asse auftreten zu P(X = 4) = 0,01001775. Damit weicht das empirisch gefundene Ergebnis von 0,0095514 nur wenig vom zu erwartenden Wert ab.

Beispiel 2:
Auf die Frage:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 7 auf einmal gezogenen Skatkarten, d.h. ohne Zurücklegen, mindestens 5 rote Karten enthalten sind?

ermittelt das Programm nach 25000 Ziehungen eine genäherte Wahrscheinlichkeit von 19,22%.

Wollen Sie das Ergebnis theoretisch überprüfen, so müssen Sie beachten, dass das Ziehen ohne Zurücklegen eine hypergeometrische Verteilung bedeutet. Tragen Sie im Teilprogramm *Diskrete Verteilung* die Parameter 32 (die Kartenzahl) in *Anzahl der Kugeln*, 16 (die Anzahl der roten Karten) in *... davon weiße Kugeln* und 7 (die Anzahl der gezogenen Karten) in *Stichprobenumfang* ein, berechnet das Teilprogramm für die Grenzen a = 5 und b = 7, d.h. mindestens 5 rote Karten, die Wahrscheinlichkeit P(5 <= X <= 7) = 19,71%, also erneut eine gute Übereinstimmung.

10.13 Wurfexperiment

„Iacta est alea – Gefallen ist der Würfel"
Caesar, 49 v.u.Z. bei der Überschreitung des Rubikon

Ein sehr wichtiges Arbeitsmittel der Stochastik ist die Erhebung von Stichproben, also die Durchführung eines Zufallsexperiments. In den nachfolgenden Teilprogrammen können Sie einige der klassischen Experimente simulieren. Zur Simulation eines Zufallsexperiments können Sie in diesem Unterprogramm einen oder zwei Würfel bis zu 100 Millionen mal vom Computer werfen lassen.

Die erzielten Augenzahlen – bei zwei Würfeln die Summe der Augenzahlen – werden gezählt und prozentual ausgewertet. In der grafischen Darstellung erscheint ein Histogramm der prozentualen Anteile. Die Anzahl der Würfe tragen Sie unter *Wurfzahl* ein. Ob ein oder zwei Würfel genutzt werden, legen Sie in den Auswahlfeldern fest.

Der Start der Simulation erfolgt mit dem Schalter *Experiment starten*. Während des Experiments kann die Ermittlung der Augenzahl durch den Schalter *Stopp* abgebrochen werden. Den prozentualen Anteil der schon durchgeführten Würfe finden Sie während der Simulation im rechten oberen Teil des Fensters.
Ist das Feld *Neu starten* markiert, so beginnt das Programm nach dem Klicken auf *Experiment starten* wieder bei Null zu zählen. Entfernen Sie die Markierung, wird nach einer Unterbrechung bei den schon gefundenen Werten fortgesetzt.

Normalerweise ist die Wahrscheinlichkeit, eine Augenzahl von 1 bis 6 bei einem idealen Würfel zu erzielen, 1 / 6. Für Würfel 1 oder aber beide Würfel können Sie die erzielbaren Augenzahlen und zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten in den

Feldern *Wahrscheinlichkeit* ändern. Die betrachteten Würfel können dabei auf ihren Seiten 0 Augen bis 14 Augen tragen.

Zu beachten ist dabei allerdings, dass die Summe aller 15 Wahrscheinlichkeiten gleich 1 sein muss. Als Eingabewert sind neben reellen Zahlen auch Brüche, z.B. 1 / 3, 3 / 4 usw., möglich. Zum Beispiel können Sie für Würfel 1 die Augenzahlen 1 bis 8 ("Oktaeder-Würfel") mit jeweils 1 / 8 Wahrscheinlichkeit einstellen. Diese Wahrscheinlichkeiten können Sie für beide Würfel unabhängig voneinander einstellen.

Wählen Sie aus der aufklappbaren Liste einen vordefinierten Würfel aus, so werden dessen Ereigniswahrscheinlichkeiten bei beiden Würfeln eingetragen.

10.14 Lottosimulation

Ein weiteres Teilprogramm zur Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit der Simulation eines Lottospiels.

Nach dem Start dieses Programmteils legen Sie unter *Lottospiel ... aus ...* zuerst fest, aus wie viel Zahlen der Tipp gezogen werden soll und wie viele Zahlen ein Tipp beinhaltet. Voreingestellt ist das bekannte "6 aus 49". Beachten Sie bitte, dass ein Tipp hier maximal 8 Zahlen beinhalten kann. Als obere Grenze können Sie aus 60 Zahlen die Ziehung ermitteln lassen.
Markieren Sie das Feld *Zusatzzahl,* wird während der Simulation auch eine Zusatzzahl gezogen und ausgewertet.

In die acht Eingabefelder *Tipp* können Sie einen konkreten Tipp eintragen. Dieser wird während der Simulation zur Auswertung genutzt. Unter *Ziehungen* legen Sie weiterhin die Anzahl der Versuche fest.

Klicken Sie nun auf *Experiment starten,* beginnt das Programm, Zahlen zu ziehen und diese mit Ihrem Tipp zu vergleichen. Haben Sie das Feld *Ziehung anzeigen* markiert, werden Ihnen auch die gezogenen Kugeln angezeigt. Da diese Anzeige zeitintensiv ist, können Sie in der Eingabezeile *Schritte* angeben, alle wie viel Ziehungen die Anzeige erfolgt.
Abbrechen können Sie die Simulation über den Schalter *Stopp.*
Markieren Sie *Experiment fortsetzen*, so werden nach einem neuerlichen Start die Werte nicht auf Null gesetzt, sondern die bisherigen Ergebnisse erweitert.

In der Auswertung zeigt Ihnen das Programm in der ersten Tabelle die Anzahl der richtig getippten Zahlen, in der zweiten Tabelle die Anzahl der gezogenen Zahlen.

10.15 Spielautomat

Dieses Teilprogramm simuliert einen Spielautomaten, einen sogenannten "einarmigen Banditen".

Nach dem Programmstart wird rechts der Automat dargestellt. Er besteht aus drei Rollen, die jeweils acht verschiedene Symbole enthalten:

Würfel		Körper		Bücher		Wurzel	
Rechner		Dreieck		Diagramm		ABC	

Die Anzahl der Symbole kann auf maximal 10 erhöht werden.

Nach dem Start des Automaten werden die drei Rollen zufällig gedreht und drei Symbole erscheinen. Je Spiel setzt man theoretisch einen Einsatz von 1 Euro. Auf der linken Seite befindet sich eine Gewinntabelle. In dieser ist aufgelistet, bei welchen Symbolen welcher Betrag gewonnen wird. Die Höhe der Gewinnbeträge können Sie durch die Eingabe anderer Werte ändern.

Das Programm ermittelt aus der Gewinntabelle den zu erwartenden theoretischen Gewinn und vergleicht ihn mit Ihrem Spielergebnis. "Fair" ist ein Spielautomat nur dann, wenn der theoretische Erwartungswert bei Null liegt.
In Deutschland beträgt die Auszahlungsquote realer Spielautomaten maximal 80% der um die gesetzliche Umsatzsteuer verminderten Einsätze, d.h., der Spieler verliert auf die Dauer garantiert! Dies ist auch beabsichtigt, da allein kommerzielle Interessen im Vordergrund stehen. Ein angeblicher Unterhaltungswert wird dem Spieler nur vorgetäuscht. Selbst Spielsüchtige werden gern einkalkuliert, auch wenn man dies verlogenerweise wortgewaltig abstreitet.
Sichere Gewinner sind nur die Betreiber der Spielautomaten und der Staat, der einen beträchtlichen Teil des Gewinns für das Glücksspiel erhält.

Möchten Sie eine längere Folge von Ziehungen durchführen, so können Sie auch eine *Simulation* starten.

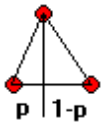
10.16 Galton-Brett

Zur Untersuchung einer Binomialverteilung kann ein von dem englischen Botaniker Francis Galton (1822-1911) erdachtes, 1889 erstmals beschriebenes und nach ihm benanntes Experiment benutzt werden. Auf einem Brett sind mehrere Reihen von Nägeln befestigt, wobei von Zeile zu Zeile je ein Nagel mehr angebracht wird und diese Nägel alle auf "Lücke stehen".

Lässt man nun von oben aus einer Öffnung Kugeln auf diese Nägel fallen, so werden diese durch Zufall nach links oder rechts abgelenkt und treffen auf die nächste Reihe von Nägeln, wo sie erneut abgelenkt werden usw. Unterhalb der

letzten Nagelreihe befinden sich Auffangbehälter für die Kugeln.

Wiederholt man dieses Experiment sehr oft, ordnen sich die Kugeln entsprechend einer Binomialverteilung in den Behältern an. Beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Nagel nach links abgelenkt wird, genau 50%, so ergibt sich eine Binomialverteilung mit dem Parameter p = 0,5.

Anmerkung: Die relative Lage der Nägel zueinander entscheidet darüber, wie groß die Wahrscheinlichkeit p ist, dass eine Kugel nach links bzw. nach rechts (Wahrscheinlichkeit 1 - p) abgelenkt wird. Betrachten Sie das von drei Nägeln gebildete Dreieck 

, so charakterisieren die vom Lot auf der unteren Dreiecksseite gebildeten Teilstücke die Wahrscheinlichkeiten. Bilden je drei Nägel ein gleichseitiges Dreieck, so ist p damit 0,5. Die mechanische Herstellung eines guten Galton-Bretts ist anspruchsvoll, da die Lage der Nägel so genau wie nur möglich eingehalten werden muss. Andernfalls erhält man keine guten Testergebnisse.

In diesem Unterprogramm können Sie das Galton-Brett simulieren. Fünf Nagelreihen verteilen die Kugeln auf sechs mögliche Auffangbehälter. Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kugel nach links abgelenkt wird, stellen Sie an dem Rollbalken *Wahrscheinlichkeit (linke Seite)* ein. Die Simulation selbst starten Sie mit dem Schalter *Start.* Abbrechen können Sie jederzeit mit dem Schalter *Stopp* oder der Taste *ESC*.

Während des Experiments stellt das Programm die Bewegung der Kugel als Linie dar, ordnet diese in den sechs Fächern an und ermittelt die Anzahl sowie die prozentuale Häufigkeit der Kugeln je Fach. Letzteres wird zusätzlich durch Balken grafisch veranschaulicht.
Die Geschwindigkeit der Animation können Sie an dem Rollbalken neben dem *Start*-Schalter beeinflussen. Jedes Fach kann maximal 12 Kugeln aufnehmen. Trifft eine weitere ein, wird das Fach zuerst entleert.

10.17 Urnenmodell

Eines der wichtigsten Arbeitsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Urnenmodell. Dabei geht man davon aus, dass in einem Gefäß, der Urne, eine gewisse Zahl von unterschiedlich gefärbten Kugeln enthalten sind. Das Zufallsexperiment besteht nun darin, aus dieser Urne eine oder mehrere Kugeln ohne Hinzusehen zu ziehen.

Je nach Aufgabenstellung (die Reihenfolge der Kugeln ist wichtig oder nicht bzw. jede Kugel wird wieder zurückgelegt oder nicht) werden nun die Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Neben einer reinen Rechnung kann sehr gut die Pfadregel genutzt werden.

In diesem Teilprogramm wird ein solches Urnenmodell simuliert. An den Pfeilschaltern stellen Sie die Anzahl der blauen, roten bzw. gelben Kugeln in der Urne ein. Unter *Zugangszahl* wählen Sie die Zahl der Wiederholungen des Zufallsexperiments. Wichtig ist weiterhin, ob die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird oder nicht. Im ersten Fall bleibt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer einzelnen Kugel gleich, im zweiten Fall verändert sich diese.

Das Programm stellt sofort das zugehörige Baumdiagramm dar, an dem Sie die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ergebnisse ablesen können.

10.18 Pfadregel

Eine gute Methode zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Laplace-Experimente ist die grafische Umsetzung des Multiplikationssatzes, die Pfadregel bzw. der "Ereignisbaum". Dabei versteht man unter einem Laplace-Experiment ein Zufallsexperiment, bei dem jedem Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

Zum Beispiel ist das Würfeln einer Augenzahl von 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 ein Laplace-Experiment. Das Erzielen einer bestimmten Augenzahl, z.B. 11, beim Werfen von zwei Würfeln ist kein Laplace-Experiment, da z.B. die Augensumme 7 wesentlich häufiger erzielt wird als beispielsweise 2. Allerdings kann dieses Experiment als Nacheinanderausführung zweier Laplace-Experimente "Werfen eines Würfels" aufgefasst werden, d.h. als zweistufiges Experiment. Liegt nun ein Laplace-Experiment vor, das nur zwei mögliche Elementarereignisse hat, so kann die Pfadregel besonders günstig eingesetzt werden.

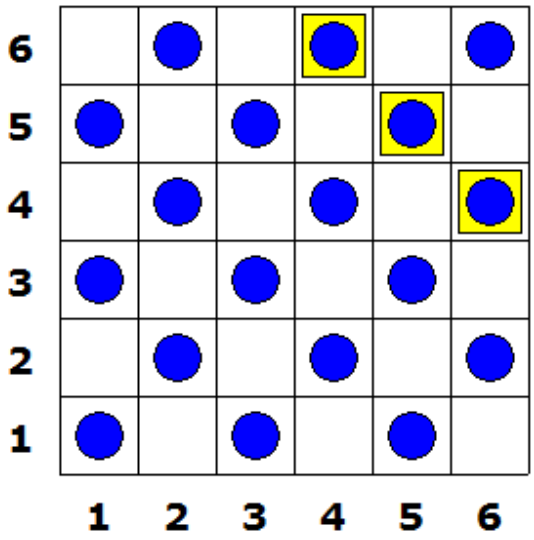
In diesem Unterprogramm können Sie diese Regel für ein derartiges Experiment bis zu einer Tiefe von 5 berechnen lassen. Am Rollbalken stellen Sie zuerst die *Wahrscheinlichkeit* für eines der beiden möglichen Elementarereignisse ein; im Programm wird dieses Ereignis in roter Farbe im Ereignisbaum nach links dargestellt. An jedem der Baumknoten erhalten Sie entweder die Reihenfolge der Ereignisse r (rot) oder b (blau) bzw. bei Markierung des Feldes *Wahrscheinlichkeit* die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieser Kombination angezeigt.

In der Liste werden zusätzlich noch die Wahrscheinlichkeiten angegeben: zum einen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge des Eintretens der Elementarereignisse und zum anderen mit Berücksichtigung.

10.19 Additionssatz von Wahrscheinlichkeiten

Liegen zwei Ereignisse A und B vor, so wird auch nach deren Verknüpfungen wie "A und B treten ein" bzw. "A oder B treten ein" gefragt.
Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nutzt man den Additionssatz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



In diesem Teilprogramm wird der Additionssatz an einem Beispiel demonstriert.

Es werden zwei Spielwürfel betrachtet, deren maximale Seitenzahl eingestellt werden kann. Von beiden Würfeln werden jeweils die Einzelergebnisse bzw. die Würfelsumme ausgewertet.
Dabei werden je Wurf acht verschiedene Ereignisse untersucht. Ereignis A wird durch ein gelbes Quadrat gekennzeichnet, Ereignis B durch einen blauen Kreis.
Treten beide Symbole auf, so bedeutet dies, dass in diesem Fall sowohl Ereignis A als auch Ereignis B eintritt, d.h. das Ereignis $P(A \cap B)$.
Unter $P(A \setminus B)$ und $P(B \setminus A)$ finden Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eines der Ereignisse eintritt, das andere aber nicht.
Durch Auszählen können die interessanten Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

10.20 Kombinatorik

In diesem Unterprogramm können Sie kombinatorische Berechnungen durchführen. Nach Festlegung der *Anzahl N* von Elementen einer Grundgesamtheit und der *Anzahl K* aus dieser Menge ausgewählter Elemente bestimmt das Programm die drei klassischen Arten kombinatorischer Operationen

- *Permutationen*, *Variationen* und *Kombinationen*.

n und k können im Intervall von 1 bis 99999 liegen und müssen ganzzahlig sein, wobei Sie beachten sollten, dass k stets kleiner gleich n sein muss.
Geben Sie n = 0 ein, wird der Wert automatisch auf n = 1 verändert. Geben Sie rationale oder negative Zahlen ein, entfernt die Eingaberoutine die nicht auswertbaren Zeichen wie - oder . ohne Fehlermeldung.

Permutation, Variation, Kombination

Die Anzahl der Permutationen n! (n Fakultät) von n Elementen (Anzahl unterschiedlicher Reihenfolgen dieser Elemente) wird neben einer rein numerischen Berechnung auch mittels Stirlingscher Näherungsformel ermittelt. Diese Näherungsgleichung ist für große n eine sehr gute Näherung des Wertes n!, was durch die Angabe der prozentualen Abweichung des tatsächlichen Wertes verdeutlicht wird. Für eine Eingabe von n <= 1000 wird die Ziffernfolge von n! exakt berechnet.

Beispiel:
n = 56; n! = 710 998 587 804 863 451 854 045 647 463 724 949 736 497 978 881 168 458 687 447 040 000 000 000 000 bzw.
n = 99999; n! = $2{,}8241463805 \cdot 10^{456568}$ (eine Zahl mit 456569 Stellen!!)

Unter einer Variation versteht man die Auswahl von k Elementen aus n Elementen, wobei die Anordnung der Elemente berücksichtigt wird. Zum einen fragt man nach Variationen ohne Wiederholungen, d.h., kein Element darf zweimal auftreten, zum anderen nach Variationen mit Wiederholungen von Elementen. Berechnet wird die Anzahl mit

- Variation ohne Wiederholungen = n! / (n - k)!
- Variation mit Wiederholungen = n^k

Für eine Eingabe von n <= 1000 werden die Variationen exakt berechnet.

Beispiel 1: n = 56, k = 14 ergibt für Variation ohne Wiederholung = $5{,}0604661348 \cdot 10^{23}$ ..., für Variation mit Wiederholung $2{,}9828566195 \cdot 10^{24}$.

Beispiel 2: Die Blindenschrift besteht aus sechs Punkten, welche erhaben oder gelocht in Papier gedruckt werden. Mit den zwei variierenden Elementen "Buckel" oder "Loch" zur 6. Klasse mit Wiederholungen können auf diese Weise $2^6 = 64$ verschiedene Zeichen dargestellt werden.

Eine Kombination ist eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung. Das Programm bestimmt deren Anzahl erneut, zum einen ohne Wiederholungen (nur verschiedene Elemente k), zum anderen mit Wiederholungen

- Kombination ohne Wiederholungen = n! / ((n - k)! k!)
- Kombination mit Wiederholungen = (n + k - 1)! / (k! (n - 1)!)

Für eine Eingabe von n <= 1000 werden die Kombinationen exakt berechnet.

Beispiel: n = 56, k = 14 ergibt für eine Kombination ohne Wiederholung = 5 804 731 963 800 , mit Wiederholung $1{,}5460300554 \cdot 10^{14}$.

Eine Besonderheit stellt die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von Elementen dar. Dieser Wert entspricht dem in der Mathematik allgemein sehr wichtigen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, der u.a. im Binomischen Satz oder im Pascalschen Dreieck auftritt. Der Wert des Binomialkoeffizienten wird hier bis etwa 10^{22} exakt angezeigt.

Permutationen mit Wiederholung

Treten in einer Menge von Elementen Gruppen gleicher Elemente auf, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner als im Fall voneinander verschiedener

Elemente. Geben Sie in der Eingabezeile *Gruppen gleicher Elemente* je Gruppe die Anzahl gleicher Elemente p_i als Folge natürlicher Zahlen ein, ermittelt das Programm die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen von Elementen.

- Permutation mit Wiederholungen = n! / (p_1! P_2! ... p_k!)

Die einzelnen Gruppen können dabei durch ein Leerzeichen, Komma usw. getrennt sein. Für eine Eingabe von n <= 200 werden diese Permutationen exakt berechnet.

Beispiel: Ein Skat-Kartenset enthält 32 Karten, das in Gruppen von 3 mal 10 Karten und 2 Karten für den "Skat" ausgegeben wird. Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge ein Spieler seine Karten erhält (die Permutationen innerhalb der 10 Karten eines Spielers bedeuten dasselbe Spiel), ist die Anzahl aller möglichen Kartenverteilungen beim Skat eine Permutation von 32 Karten mit 10, 10, 10 und 2 gleichen Elementen.

Nach Eingabe von *10,10,10,2* in die Zeile *Gruppen gleicher Elemente* und *32* für *n* ermittelt das Programm $2{,}7532944082 \cdot 10^{15}$ Kartenverteilungen. Schafft ein Spieler täglich 200 Spiele, so kann er in 100 Jahren jedoch nur 7,3 Millionen Möglichkeiten spielen.

Zu beachten ist, dass die Anzahl gleicher Elemente im Programm je Gruppe 32000 nicht überschreiten darf.

Permutationen mit Fixpunkt

Ist P eine Permutation von n Elementen {1,2, ..., i, ..., n}, so heißt jedes i aus dieser Menge Fixpunkt, wenn dieses Element innerhalb der Permutation an i-ter Stelle auftritt, d.h. zum Beispiel, dass sich bei der Permutation der Elemente 1, 2, 3 und 4 folgende Permutationen ergeben:

1 2 3 4	1 2 4 3	1 3 2 4	1 3 4 2 (*)	1 4 2 3 (*)
1 4 3 2	2 1 3 4	2 3 1 4 (*)	2 4 3 1 (*)	3 1 2 4 (*)
3 2 1 4	3 2 4 1 (*)	4 1 3 2 (*)	4 2 1 3 (*)	4 2 3 1

Permutationen mit mindestens einem Fixpunkt sind (Anzahl 15). Bei den mit einem (*) markierten Permutationen gibt es jeweils genau einen Fixpunkt – im Beispiel acht. Das Programm ermittelt (bis n = 166) die Anzahl der Permutationen mit genau einem und mit mindestens einem Fixpunkt. Für eine Eingabe von n <= 120 werden diese Permutationen exakt berechnet.

Zur Theorie lesen Sie bitte im Lexikon unter dem Stichwort *Permutationen mit Fixpunkt* nach.

Beispiel: Fünf Personen nehmen an einem Tisch Platz, ohne die aufgestellten Tischkarten zu beachten. Insgesamt gibt es 5! = 120 verschiedene

Sitzanordnungen, darunter 76 mit mindestens einem Fixpunkt, d.h., mindestens eine Person sitzt auf dem richtigen Platz, sowie 45 mit genau einem Fixpunkt, d.h., genau eine Person sitzt richtig.

Beachten Sie bitte: Die Ermittlung von Permutation, Variation und Kombination erfordert bei großem n (n > 1000) etwas Zeit. Gedulden Sie sich bitte – ein Abbruch der Berechnung kann einige Sekunden verzögert sein.

10.21 Partitionen

Unter einer Partition oder Zerfällung versteht man die Zerlegung einer natürlichen Zahl n in Summanden größer gleich 1, wobei deren Reihenfolge keine Rolle spielt. Zum Beispiel hat die Zahl 6 genau 11 Partitionen

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Das Programm ermittelt bis n = 100 die Anzahl der möglichen Partitionen und zeigt bis zu 64000 Zerfällungen an, wobei Sie beachten müssen, dass deren Anzahl sehr schnell ansteigt.
Für 50 gibt es schon 204226 Möglichkeiten. Eine Abschätzung der Anzahl stammt aus dem Jahr 1918 von Ramanujan: $p(n) = 1 / (\sqrt{3}n)\ e^{\pi\sqrt{(2n/3)}}$.
Eine Liste der Anzahl von Partitionen finden Sie auch im Lexikon.

Markieren Sie das Feld *paarweise fremd,* so berechnet das Programm ausschließlich Partitionen, die paarweise verschiedene Summanden enthalten.
Über das Feld *ohne Einsen* können nur Partitionen angezeigt werden, in denen keine 1 auftritt.
Möchten Sie nur Partitionen angezeigt haben, die eine Mindestzahl bzw. eine Höchstzahl von Summanden besitzen, so können Sie die Werte unter *Termzahl* verändern.

10.22 Zufallszahlen

Eng verbunden mit mathematischen Problemen der Stochastik und der Simulation ist die Bestimmung von Zufallszahlen. Neben dem in Compilern enthaltenen Zufallsgenerator können auch andere eingesetzt werden. Dabei werden auch Zufallszahlen benötigt, die nicht gleichverteilt sind, sondern auch Verteilungsgesetzen entsprechen.

In diesem Teilprogramm können für 11 verschiedene Verteilungen Zufallszahlen berechnet werden. Diese Verteilungen sind

- Gaußsche Normalverteilung
- Gleichverteilung
- Gamma-Verteilung
- Exponentialverteilung

- Beta-Verteilung
- t-Verteilung
- inverse Gaußverteilung
- Poisson-Verteilung
- Binomialverteilung
- negative Binomialverteilung
- Weibull-Verteilung
- chi²-Verteilung

Wählen Sie eine Verteilung aus, müssen Sie für diese die notwendigen Parameter eingeben. Beachten Sie bitte, dass im Allgemeinen (bis auf wenige Ausnahmen) Parameter kleiner gleich 0 nicht korrekt sind. Unter *Anzahl* legen Sie die Zahl der zu berechnenden Zufallszahlen im Intervall [1000 ; 50000] fest.

Nach dem Berechnungsstart werden die Zahlen in einer Liste angezeigt (Markierungsfeld: *Zahlen anzeigen*!) und auf der rechten Seite deren Verteilung im Berechnungsintervall sowie ein Histogramm angezeigt.
Über *Speichern* erhalten Sie eine Textdatei der Zahlen, über *Drucken* werden Ihre Werte auf den Drucker ausgegeben, und über *Kopieren* in die Zwischenablage als Textdatei kopiert.

10.23 Geburtstags-Problem

Das Geburtstagsproblem ist ein Beispiel dafür, dass Wahrscheinlichkeiten durch den „gesunden Menschenverstand" häufig falsch geschätzt werden.
Zur falschen Einschätzung der Wahrscheinlichkeit kommt es, da gefragt wird, wie viele Personen anwesend sein müssen, damit mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, und man intuitiv glaubt, bei 365 Tagen des Jahres müssten es folglich rund 180 Personen sein. Die korrekte Lösung aber ist

Befinden sich in einem Raum mindestens 23 Personen, dann ist die Chance, dass zwei oder mehr dieser Personen am selben Tag Geburtstag haben, größer als 50 %.

Das Geburtstagsproblem wird oft Richard von Mises zugeschrieben, ist aber in Wirklichkeit schon länger bekannt. Allgemeiner gilt:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_a(n,d)$, dass unter n willkürlich ausgewählten Personen a Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, wenn d verschiedene Tage zu Grund gelegt werden ?
Lösung: $P_2(n,d) = 1 - d! / [(d-n)!\, d^n] \approx 1 - (1 - n/(2d))^{n-1}$

In diesem Teilprogramm wird das Problem simuliert.
An den Rollbalken stellen Sie die *Personenzahl* und die *Simulationsläufe* ein.
Klicken Sie auf *Test,* so werden für die angegebene Personenzahl zufällig Geburtstage ermittelt und in den Kalender eingetragen.
Ein gelber Kreis gibt an, dass an diesem Tag genau 1 Person Geburtstag hat. Ist

einer der Kreise rot, blau bzw. dunkelblau, so haben an diesem 2, 3 oder noch mehr Personen Geburtstag.
Während der *Simulation* werden die Wahrscheinlichkeiten für Doppelgeburtstage, Dreifachgeburtstage und Mehrfachgeburtstage ermittelt. Läuft die Simulation hinreichend lange, so werden Sie für 23 Personen die berechnete Wahrscheinlichkeit von rund 50 % erhalten.

10.24 Häufigkeitsdiagramm eines Wurfs

In diesem Teilprogramm können Sie den Ausgleich der relativen Häufigkeiten bei einem Zufallsexperiment nachvollziehen.
Nach der Auswahl des Experimentes

- Wurf eines idealen Würfels
- Wurf von zwei Würfeln
- Wurf eines Oktaederwürfels
- Wurf eines Dodekaederwürfels
- Wurf eines Spielwürfels mit 49 Seiten

und einem Klick aus *Simulation* stellt das Programm für eine kontinuierlich steigende Anzahl von Würfen das Diagramm der relativen Häufigkeiten dar.
Im Laufe der Simulation erkennt man, dass sich die relativen Häufigkeiten nach dem Gesetz der großen Zahlen ausgleichen.

Mit dem Schalter *Darstellung* wird die Wurfzahl um die eingestellte *Schrittzahl* erhöht.
Der „49er-Würfel" gibt die Möglichkeit, das Häufigkeitsdiagramm der Ziehungen beim Lotte 6 aus 49 zu simulieren.

10.25 Bestimmung der Kreiszahl PI, Buffonsches Nadelexperiment

„Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum".
1.Buch der Könige, Kapitel 7 Vers 23

Monte Carlo-Methode

In diesem Teilprogramm haben Sie die Möglichkeit, die Kreiszahl π mittels einem dem Buffon-Nadelexperiment ähnlichen Verfahren experimentell zu bestimmen. Folgendes Experiment ist äquivalent zum Buffon-Nadelexperiment und ebenfalls zur Simulation geeignet.

Gegeben sei ein Einheitsquadrat und ein in dieses Quadrat eingetragener Kreis mit dem Durchmesser 1. Durch einen Zufallsgenerator werden beliebige Punkte

des Quadrats ermittelt. Bei n Versuchen mit k Treffern, der Punkt liegt im Kreis, ergibt sich damit $\pi = 4k / n$.
Da für die Koordinaten von Punkten P(x,y) innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 <= 1$ gilt, ist dieses Verfahren programmtechnisch leicht umzusetzen.

Hier ist dies realisiert. Nach dem Start werden, bei Betätigung von *Darstellung*, jeweils 10000 Würfe simuliert und angezeigt. Das Programm ermittelt die Trefferzahl und daraus näherungsweise π. Markieren Sie *Neustart durchführen*, werden alle Werte zurückgesetzt. Beispielwerte:

Würfe	10000	50000	100000	200000	400000
Treffer	7876	39366	78650	157119	314057
Näherung für π	3.15040	3.14928	3.14600	3.14238	3.14057
Fehler %	0.280	0.244	0.140	0.025	-0.032

Buffonsches Nadelexperiment

„Das wunderbar geheimnisvolle Pi ist zu einem Gurgelmittel verkommen, das Rechenmaschinen zum Rachenputzen dient."
Philip J.Davis (The lore of large numbers)

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die Kreiszahl experimentell bestimmt werden kann.
Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand d gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge s < d fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Ist nun 2s = d, so ergibt sich für k Treffer bei n Würfen $\pi = n / k$
Wiederholt man also das Zufallsexperiment sehr oft, so nähert sich der Quotient n / k der Kreiszahl π an.

In diesem Teilprogramm wird auch das Buffonsche Experiment simuliert. Wählen Sie dazu *Nadelexperiment* aus. Es werden parallele Geraden eingezeichnet, auf die Nadeln geworfen werden. Die Wurfanzahl je Experiment stellen Sie am Rollbalken ein. Werfen Sie sehr häufig, so wird die Fläche bald vollständig von den Nadeln bedeckt.
Während des Experiments werden die Treffer gezählt und daraus die Näherung für π berechnet.

10.26 Stein, Papier, Schere

Im klassischen Spiel "Stein, Papier, Schere" ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel unentschieden ausgeht, immerhin 1/3. Von den 9 Paaren haben 3 identisch gewählte Objekte.
Zur Erhöhung der Wahrscheinlichkeit eines klaren Ausgangs auf 4/5 erdachte der in der "Big Bang Theorie" erfundene Internetpionier Sam Kass "Stein, Papier, Schere, Echse, Spock".

Da, laut Sheldon, die Wahrscheinlichkeit durch Stein, Schere, Papier bei Leuten, die sich gut kennen auf eine gleiche Wahl zu kommen sehr hoch ist, wurden Echse und Spock zum Spiel hinzugefügt. Regeln:

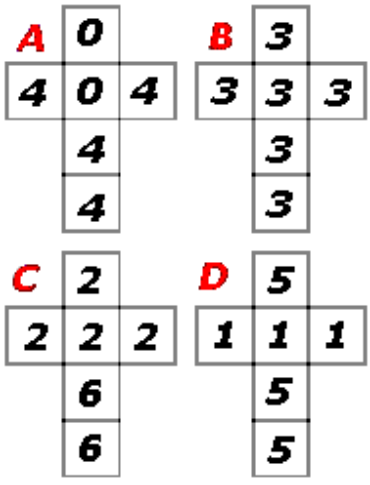
- Schere schneidet Papier
- Papier bedeckt Stein
- Stein zerquetscht Echse
- Echse vergiftet Spock
- Spock zertrümmert Schere
- Schere köpft Echse
- Echse frisst Papier
- Papier widerlegt Spock
- Spock verdampft Stein
- Und wie gewöhnlich: Stein schleift Schere

Da von den 25 möglichen Paaren genau 5 unentschieden enden, ergibt sich in 80 % der Fälle ein Sieger.

In diesem Teilprogramm können beide Spiele, das klassische "Stein, Papier, Schere" und die Erweiterung "Stein, Papier, Schere, Echse, Spock" simuliert werden. Mit dem Schalter *Spiel* wird eine Runde aufgerufen, der Schalter *Simulation* führt wiederholt Einzelspiele durch.

In der Tabelle wird angezeigt, welche Wahl die beiden Spieler trafen, wie viele Siege (gelb unterlegt) erzielt wurden, sowie deren prozentualen Anteil.
Dieses Spiel ist ein faires Spiel. Bei hinreichend häufiger Wiederholung gleichen sich die relativen Häufigkeiten aus. Es gibt keine Möglichkeit, durch eine spezielle Wahl einen Vorteil zu erzielen.

10.27 Würfel von Efron



Liegen vier verschiedene Zufallsereignisse A, B, C und D vor, für welche die Wahrscheinlichkeiten P(A) > P(B), P(B) > P(C) und P(C) > P(D) sind, so ist es „vollkommen klar" (es entspricht dem gesunden Menschenverstand), dass dann die Wahrscheinlichkeit von A auch größer als die von D ist. Dies ändert sich sofort, wenn bedingte Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden!

Dieses Teilprogramm demonstriert diesen Sachverhalt mithilfe der „Würfel von Bradley Efron":
Gegeben sind vier Würfel A, B, C und D (siehe Abbildung). Kain darf sich zuerst einen dieser Würfel auswählen, anschließend wählt Abel einen der übrigen drei Würfel. Wer die höhere Punktzahl wirft, gewinnt.

Das unerwartete Ergebnis ist nun, dass Abel in Kenntnis der Wahl Kains stets so wählen kann, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 / 3 das Spiel gewinnt!

Dieses verblüffende und unserem gesunden Menschenverstand widersprechende Ergebnis entsteht dadurch, dass nun keine klassischen Wahrscheinlichkeiten vorliegen, sondern bedingte.
Es gilt: D schlägt A, A schlägt B, B schlägt C und C schlägt D jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 / 3.
Den Gewinnplan für beide ausgewählten Würfel sehen Sie im rechten Teil des Fensters.

An den Auswahlfeldern stellen Sie ein, mit welchem Würfel Kain und Abel spielen. Klicken Sie auf *Simulationsstart,* werden voreingestellt 1 Million Würfe simuliert. In der Tabelle können Sie die Ergebnisse nachvollziehen. Als Erweiterung können Sie außer den Efronschen Würfeln auch den allgemein bekannten idealen Würfel für die Simulation auswählen. Mit diesem Würfel würde man gegen jeden der vier Efronschen Würfel gewinnen.
Markieren Sie *Simulation fortsetzen*, so werden die schon angezeigten Ergebnisse erweitert.

10.28 Ziegenproblem

Das Ziegenproblem tauchte zu Beginn der Neunzigerjahre auf und sorgte bei vielen Nichtmathematikern für Verwirrung und Erstaunen.

Vor einer Versuchsperson sind drei Türen aufgebaut. Der Versuchsleiter erklärt, dass hinter zwei der Türen jeweils eine Ziege, hinter einer aber ein Auto sei. Die Person darf sich nun vor eine beliebige der drei Türen stellen. Egal, was sich hinter der erwählten Tür befindet, es gibt immer noch mindestens eine andere, hinter der eine Ziege steht. Eine solche öffnet der Moderator, der genau weiß, was hinter welcher Tür ist. Gibt es zwei, so öffnet er eine zufällig.

Es sind zu diesem Zeitpunkt also noch exakt zwei Türen geschlossen und der Person ist natürlich bekannt, dass sich auf diese Türen eine Ziege und das Auto aufteilen. Der Versuchsleiter macht nun folgenden Vorschlag:
Sie können das Auto gewinnen, wenn Sie vor der richtigen Tür stehen. Sie dürfen vor der zu Beginn ausgewählten Tür stehen bleiben oder zu der anderen, noch verschlossenen Tür wechseln!
Das Ziegenproblem ist nun:

Soll die Person wechseln oder nicht?

Geht alles korrekt zu, ist die Antwort klar: Wechseln!
In diesem Fall erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, von ursprünglich 1 / 3 auf 2 / 3. So merkwürdig dies ist, so ist das Ergebnis mathematisch exakt.
In diesem Teilprogramm können Sie dieses Zufallsexperiment simulieren. Nach Eingabe der *Simulationszahl* spielt das Programm durch und gibt die Gewinne des Autos für beide Fälle

- der Spieler wechselt die gewählte Tür
- der Spieler bleibt bei seiner ersten Wahl

an.

Natürlich kann man das Ziegenproblem auch auf mehr als drei Türen erweitern. An den Pfeilschaltern können Sie bis zu 10 Türen wählen.
Neben der schon beschriebenen Simulation gibt Ihnen das Programm in der unteren Tabelle auch die simulierten und theoretischen Wahrscheinlichkeiten für den Fall an, dass der Spieler bei mehreren Türen zwar immer noch genau einmal die gewählte Tür wechseln kann, er dies aber nach wiederholtem Öffnen von „Ziegentüren" entscheiden kann.
Für alle Türanzahlen gilt dann, dass es immer am günstigsten ist, bei der letzten Möglichkeit die Tür zu wechseln. Dies ist im Übrigen auch richtig, wenn der Spieler mehrmals wechseln darf. In diesem Fall muss er sich bis zur letzten Möglichkeit zurückhalten und dann tauschen.

10.29 Gesetz der großen Zahl

Eines der bedeutendsten historischen Werke der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die "Ars conjectandi", wurde 1713 veröffentlicht. In diesem Buch behandelt Jakob Bernoulli erstmals die ständige Wiederholung von Zufallsexperimenten und die dabei auftretenden Erscheinungen. Sinngemäß fand er:

"Nach einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h(A) eines Ereignisses A."

Mit anderen Worten: Wiederholt man ein Zufallsexperiment immer wieder, so wird sich die relative Häufigkeit immer mehr der Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A annähern; die Abweichung des empirisch gefundenen Wertes vom theoretischen wird immer kleiner.

Dieses Gesetz nennt man das Empirische Gesetz der Großen Zahlen, welches Sie in diesem Teilprogramm für gleichverteilte Ereignisse untersuchen können. Das Programm simuliert dazu Tausende von Zufallsexperimenten und zeichnet Ihnen ein Diagramm der relativen Häufigkeiten des Eintretens der einzelnen Ereignisse.

An dem Rollbalken *Elementarereignisse* stellen Sie ein, wie viele Ergebnisse (von 2 bis 50) das Zufallsexperiment haben soll. In diesem Teilprogramm werden Laplace-Experimente betrachtet, d.h., alle Elementarereignisse haben die gleiche theoretische Wahrscheinlichkeit. Zusätzlich legen Sie am Rollbalken *Schrittweite* fest, alle wie viel Experimente das Programm die grafische Darstellung ergänzt. Zum Beispiel ergibt die Voreinstellung von 5, dass Sie insgesamt 2500 Experimente durchführen können. Die Schrittweite können Sie bis auf 1000 erhöhen, was eine Maximalzahl von 1 Million Experimente ergibt. Dabei müssen Sie beachten, dass auch auf schnellen Computern 1 Million Simulationen eine gewisse Zeit benötigen. Abbrechen können Sie jederzeit mit der *ESC*-Taste oder dem *Abbruch*-Schalter.

Betätigen Sie nun den Schalter *Darstellung*, simuliert das Programm das Zufallsexperiment. Im Diagramm werden die relativen Häufigkeiten angezeigt. Für jedes Elementarereignis wird dabei eine andere Farbe genutzt. Läuft das Experiment einen gewisse Zeit, können Sie entsprechend der Entdeckung Bernoullis beobachten, wie sich alle relativen Häufigkeiten einem Wert nähern und die Abweichungen immer geringer werden.

Ausgleichskurve

„Die Kugel hat weder Gedächtnis noch Gewissen"
aus „Der Spieler", Fjodor Dostojewski

Das häufigste und gefährlichste Beispiel einer Folgerung, die aus dem Gesetz der Großen Zahlen **nicht** geschlossen werden kann und der dennoch unzählige Spieler Tag für Tag auf den Leim gehen, ist der Glaube an den Ausgleich; an das Gesetz des Ausgleichs. Auch für eine immer größer werdende Zahl von Wiederholungen eines zufälligen Prozesses gibt es keine Garantie, dass sich die absoluten Häufigkeiten ausgleichen. Im Gegenteil! Eine genaue Analyse zeigt sogar ein (für mathematische Laien) unerwartetes Ergebnis: Je größer die Anzahl der Zufallsexperimente, desto kleiner (!) wird die Wahrscheinlichkeit des Ausgleichs zwischen gleichwahrscheinlichen Ereignissen! Im Lotto stets die Zahlen zu tippen, die über die Jahre hinweg am wenigsten oder am häufigsten gezogen wurden, ist also, mathematisch gesehen, unsinnig – auf lange Sicht sogar kontraproduktiv.

Markieren Sie das Feld *Ausgleichskurve*, zeichnet das Programm zusätzlich eine Kurve, deren Funktionswert den Abstand der kleinsten und größten Werte der absoluten Häufigkeiten angibt. In den meisten Fällen werden Sie feststellen, dass diese Kurve mit kurzfristigen Schwankungen dennoch kontinuierlich steigt. Der Ausgleich der absoluten Werte erfolgt nicht!

10.30 Ausgleichsgesetz

Wie schon in der Beschreibung zum Teilprogramm *Gesetz der großen Zahlen* ausgeführt, glauben täglich viele Spieler an den Ausgleich der absoluten Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten wie dem Lottospiel, Roulette oder Ähnlichem.

Dagegen gilt in Wirklichkeit:
Auch für eine immer größer werdende Zahl von Wiederholungen eines zufälligen Prozesses gibt es keine Garantie, dass sich die absoluten Häufigkeiten ausgleichen. Im Gegenteil! Die Differenz zwischen der kleinsten und der größten eingetretenen absoluten Häufigkeit driftet immer weiter auseinander.

Im Lotto stets die Zahlen zu tippen, die über die Jahre hinweg am wenigsten oder am häufigsten gezogen wurden, ist somit kontraproduktiv. Das immer wieder zitierte Gesetz der Großen Zahlen gilt für relative Häufigkeiten und nicht für absolute.

In diesem Teilprogramm wird diese Tatsache noch einmal simuliert. Das Programm ermittelt immer wieder Zahlen des Lottospiels "6 aus 49" und vergleicht diese mit einem fiktiven Tipp. Dabei können Sie wählen, welche Zahlen getippt werden sollen. Zur Auswahl stehen

- die bis dahin am wenigsten gezogenen Zahlen
- die bis dahin am häufigsten gezogenen Zahlen
- feste Zahlen (3, 9, 14, 18, 29, 42)
- jeweils zufällige Zahlen

Während der Simulation wertet das Programm die aufgetretenen Dreier, Vierer, Fünfer und Sechser aus und stellt die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Zahlen in einem Diagramm dar. Dabei wird als unterer Ordinatenwert des Diagramms die kleinste absolute Häufigkeit, als oberer Ordinatenwert die höchste absolute Häufigkeit gewählt. Oberhalb der Darstellung finden Sie die Differenz beider Werte, die im Laufe des Experiments unabhängig von zeitweiligen Schwankungen kontinuierlich steigt.

Testen Sie dieses Teilprogramm, so werden Sie feststellen, dass einer bei höheren Anzahl von Ziehungen bei der Mehrzahl der Programmstarts die gezogenen Gewinne bei dem Tipp der am wenigsten bzw. am häufigsten gezogenen Zahlen hinter den Erwartungswerten zurückbleiben. Dabei ist zu beachten, dass Sie durchaus auch einmal ein Simulationsergebnis erhalten, bei dem dies gerade nicht der Fall ist. Es ist eben ein stochastischer Prozess.

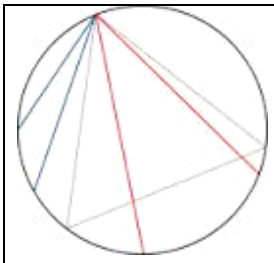
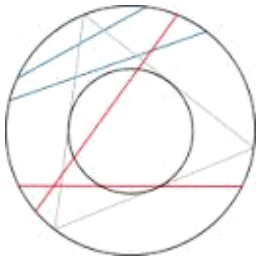
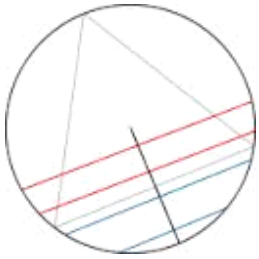
Anmerkung: Am 15. Februar 2006 war der Jackpot des Mittwochslottos auf stolze 24 Millionen Euro angewachsen. Im Sat.1-Frühstücksfernsehen wurden die Zuschauer zum Tippen aufgerufen. Was glauben Sie, welche Zahl nach der Meinung von Sat.1 getippt werden soll? Natürlich die 13! Begründung: "Da sie bisher am wenigsten gezogen wurde."

10.31 Bertrand-Experiment

Durch Joseph Bertrand wurde ein verblüffendes Paradoxon der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden.

Gegeben ist ein Kreis und in diesem eingeschriebenes gleichseitiges Dreieck. Eine Kreissehne wird zufällig ausgewählt. Die Frage ist nun, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Sehne länger als eine Seite des Dreiecks ist? Paradox ist, dass die Art und Weise der Wahl der Sehne über die Wahrscheinlichkeit entscheidet. Bertrand gab selbst 3 Möglichkeiten an:

"Endpunkte-Methode"	Zwei beliebige Punkte auf dem Kreisumfang werden zur Sehne verbunden. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, stellt man sich das Dreieck so gedreht vor, dass ein Eckpunkt mit einem der Endpunkte zusammenfällt.

	Liegt nun der andere Endpunkt der Sehne auf dem Segment des Umfangs, der zwischen den anderen beiden Eckpunkten des Dreiecks liegt, so ist die Sehne länger als die Dreiecksseite. Die Länge dieses Segments beträgt ein Drittel des Kreisumfangs, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als die Dreiecksseite, gleich 1/3.
 "Radius-Methode"	Ein Radius und ein zufälliger Punkt auf dem Radius werden gewählt und die Sehne senkrecht zum Radius durch den Punkt gezogen. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, stellt man sich das Dreieck so gedreht vor, dass eine Seite orthogonal zum gewählten Radius liegt. Die Sehne ist länger als die Dreiecksseite, wenn der zufällig gewählte Punkt näher am Mittelpunkt des Kreises liegt als der Schnittpunkt der Dreiecksseite mit dem Radius. Die Dreiecksseite halbiert den Radius, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als die Dreiecksseite, gleich 1/2.
"Mittelpunkt-Methode" 	Ein zufälliger Punkt im Innern des Kreises wird gewählt und die Sehne mit diesem Punkt als Mittelpunkt konstruiert. Die Sehne ist länger als die Dreiecksseite, wenn der zufällig gewählte Punkt in einem konzentrischen Kreis mit der Hälfte des Radius des äußeren Kreises liegt. Die Fläche des kleinen Kreises beträgt ein Viertel der Fläche des großen Kreises, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als die Dreiecksseite, gleich 1/4.

Die Lösung des Paradoxons ergibt sich dadurch, dass die Fragestellung keine klare Definition des Auswahlverfahrens der Sehne enthält.

In diesem Teilprogramm wird das Bertrand-Paradoxon simuliert. Nach dem Simulationsstart werden zufällig Sehnen gewählt; links nach der Endpunkt-Methode, in der Mitte nach der Radius-Methode und rechts nach der Mittelpunkt-Methode.
In dem jeweils oberen Kreis werden 1000 Sehnen gezeichnet, in die unteren Kreise die Mittelpunkt der zufälligen Sehnen. Außerdem wird die Häufigkeit für eine längere Sehne gezählt und die experimentelle Wahrscheinlichkeit ermittelt.

10.32 Markow-Kette

Zur Beschreibung mehrstufiger Zufallsexperimente, welche mehrere Zustände annehmen können, die mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auseinander hervorgehen, wurde durch Markow die grafische Veranschaulichung der Markow-Kette geschaffen. Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, eine einfache Markow-Kette auszuwerten.

Gegeben sind eine gewisse Anzahl von Objekten ("Teilchen"), die sich in sechs verschiedenen Zuständen 0 bis 5 befinden können. Aus jedem Zustand gelangt eines dieser Teilchen mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit in einen anderen Zustand.

Legen Sie die Anfangswerte fest und wählen den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Teilprogramm entsprechend der eingegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten die theoretische Belegung der Zustände.

Die Parameter der Markow-Kette können Sie über die Schalter in der Schalterleiste auf der Festplatte speichern bzw. laden.

Beachten Sie bitte, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten des Austritts aus einem Zustand gleich 1 sein sollte. Andernfalls "erschaffen" oder "vernichten" Sie eine gewisse Anzahl Teilchen. Dies führt nicht zur Einstellung eines Gleichgewichts.

10.33 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, grundlegende Untersuchungen für eine beliebige Verteilung von Wahrscheinlichkeiten durchzuführen.

Tragen Sie dazu bis zu 40 Werte k und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten P(X = k) in die linke Tabelle ein. Nach *Berechnung* ermittelt das Programm den Erwartungswert, die Streuung und die Varianz und vergleicht diese Verteilung mit einer theoretischen Binomialverteilung.

Erneut können Sie diese Verteilung grafisch veranschaulichen. Wählen Sie den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm ein Ihren Werten entsprechendes Histogramm.

10.34 Bedingte Wahrscheinlichkeit

„Nichts in der Natur ist zufällig... Etwas erscheint nur zufällig aufgrund der Unvollständigkeit unseres Wissens.“ Spinoza

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden oft untereinander verbundene, voneinander abhängige, Ereignisse betrachtet. Dabei interessieren neben den Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten des Eintretens des einen Ereignisses unter der Bedingung, dass das andere schon eingetreten ist. Für diesen Aufgabentyp können Sie dieses Unterprogramm einsetzen.

Geben Sie zuerst Ihr stochastisches Material einer Stichprobe in die Tabelle ein. Dabei sind festzulegen:

- Zahl des Eintretens von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
- Zahl des Eintretens von A unter der Bedingung, dass B nicht eingetreten ist
- Zahl des Nicht-Eintretens von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
- Zahl des Nicht-Eintretens von A unter der Bedingung, dass B nicht eingetreten ist

Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* oder der *RETURN*-Taste ermittelt Ihnen das Programm die Wahrscheinlichkeiten

- der Ereignisses A ... P(A), des Gegenereignisses P(Ã), die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)
- die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten für Ereignis B
- und alle möglichen Kombinationen der bedingten Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Ein neues Medikament soll auf seine Wirkung überprüft werden. 355 Personen erhalten dieses Medikament, 183 ein Placebo. Von den 355 Menschen sind 123 von der besonderen Wirkung überzeugt, von den Patienten, welche die unwirksame Tablette erhielten, aber auch 87. Zur Auswertung wird festgelegt

- Ereignis A ... das verabreichte Medikament ist besonders wirksam
- Ereignis B ... der Patient erhielt das korrekte Medikament

sowie folgende Tabelle eingegeben:

	Ereignis A	Gegenereignis zu A
Ereignis B	123	232
Gegenereignis zu B	87	96

Ergebnis u.a.: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament wirkt, ist bei den tatsächlich verabreichten mit P(B|A) = 0,5857 = 59% niedriger als bei denen, welche "an der Nase herumgeführt wurden" = 0,7073 = 71%. Eine Tatsache, die sehr oft zu verzeichnen ist. Offensichtlich spielt die "Psyche" des Patienten eine bedeutende Rolle.

Testen einer Nullhypothese

Stellt man zusätzlich eine Nullhypothese H_0 auf, dass das Ereignis B keinen Einfluss auf die Häufigkeit des Eintretens von A hat, kann diese Hypothese mit einem einfachen Vierfeldertest geprüft werden. Konkret ermittelt das Programm, zu welchem Niveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) diese Hypothese abgelehnt werden müsste.

Vierfeldertest

Die Vierfeldertafel kann zur Überprüfung eines signifikanten Unterschieds

zwischen zwei Stichproben genutzt werden.
Gegeben sind zwei Proben A und B. Diese werden nach einem Kriterium auf Erfolg und Misserfolg getestet. Die entsprechenden absoluten Häufigkeiten für Erfolg seien E_A, E_B, für Misserfolg M_A und M_B. Sind die Summe $E_A + M_A$ und $E_B + M_B$ jeweils größer als 5, so kann die Testgröße

	Erfolg	Misserfolg	
Probe A	E_A	M_A	E_A+M_A
Probe B	E_B	M_B	E_B+M_B
	E_A+E_B	M_A+M_B	N

	Alkohol	Nüchtern	
Test 1	9	591	600
Test 2	2	398	400
	11	989	1000

$$TG = (N-1)(E_A \cdot M_B - E_B \cdot M_A)^2 / ((E_A+E_B)(M_A+M_B)(E_A+M_A)(E_B+M_B))$$

berechnet werden.
Ist TG < 2,71, so gibt es keinen signifikanten Unterschied zwischen Probe A und B; für 2,71 < TG < 3,84 eine Signifikanz mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%, für 3,84 < TG < 6,64 mit 5%, für 6,64 < TG < 10,83 mit 1% und für TG > 10,83 mit 0,1%.

In einem Beispiel (nach "Der Hund, der Eier legt" von Dubben und Beck-Bornholdt) wurden zwei Alkoholtests bei Autofahrern durchgeführt. Im 2. Test wurden "nur" zwei Alkoholsünder erwischt, also deutlich weniger als im 1. Test. Für die Prüfgröße TG ergibt sich 2,2. D.h., es gibt keinen signifikanten Unterschied. Dass im 2. Test weniger alkoholisierte Fahrer auftraten, war Zufall!

Auch diese Testgröße wird in diesem Teilprogramm berechnet.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Im unteren Teil des Fensters können Sie einfache Berechnungen zu zwei Ereignissen A und B durchführen. Dabei können Sie die Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse A und B, die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens von A und B, der vereinigten Ereignisse und der bedingten Ereignisse eingeben bzw. berechnen. Betätigen Sie den Schalter *Berechnung*, werden die jeweils nicht eingetragenen Werte berechnet. Voraussetzung dafür ist, dass deren Ermittlung aus den eingegebenen Werten möglich ist.

10.35 Diskrete Verteilungen

Das Programm ermöglicht unter diesem Punkt die Berechnung von vier diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktionen, der Binomial-, der Poisson-, der hypergeometrischen, der Pólya-Verteilung und der negativen Binomialverteilung. Wählen Sie zuerst in der Liste die gewünschte Wahrscheinlichkeitsverteilung aus.

Binomialverteilung

Ein Zufallsexperiment wird n mal wiederholt, wobei die Einzelversuche der Serie voneinander unabhängig sind, z.B. beim Entnehmen von Kugeln aus einer Urne

werden diese wieder zurückgelegt, und ein Ereignis A mit einer Wahrscheinlichkeit p eintreten kann. Damit liegt eine sogenannte Bernoulli-Kette der Länge n vor. Ist (X = k) das Ereignis, dass A genau k mal bei n Versuchen eintritt, so nennt man die Zufallsvariable X binomialverteilt.

Nach Eingabe der *Anzahl der Versuche n* und der Eintritts-*Wahrscheinlichkeit p* des interessierenden Ereignisses A berechnet das Programm die Ereigniswahrscheinlichkeiten P(X = k) und die Verteilungsfunktion F(X <= k) für k = 0,1,2, ..., n dieses Zufallsexperiments. Die Wahrscheinlichkeit P(X = k) berechnet sich nach dem Satz von Bernoulli zu

$$B_{n;k} = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beispiel: Aus einer Urne wird jeweils eine Kugel gezogen und wieder in die Urne zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, sei jeweils 0,4 (z.B. unter 20 Kugeln sind genau 8 schwarze). Wiederholen wir den Vorgang zehnmal, entsteht die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit zehnmal, neunmal, ..., einmal oder gar nicht eine schwarze Kugel gezogen wird. Betätigung des Schalters *Berechnung* ergibt:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 (25%) werden am häufigsten 4 schwarze Kugeln gezogen. Zehnmal schwarz ist sehr unwahrscheinlich (0,01%), ebenso keine schwarze Kugel zu ziehen (0,6%). Betätigen Sie den Schalter *Darstellung von*, zeichnet das Programm Ihnen ein Diagramm der errechneten Wahrscheinlichkeiten.

Anmerkung: Wählen Sie wie im Beispiel einen höheren Wert für n (größer 20), können Sie mithilfe der Darstellung den Übergang der Binomialverteilung in die Normalverteilung für gegen Unendlich strebende n veranschaulichen.

Sehr oft interessieren Fragestellungen, wie

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehe ich
- *mindestens 5 Kugeln*
- *höchstens 3 Kugeln*
- *5 oder 6 Kugeln*

usw., d.h., nicht die Wahrscheinlichkeit P(X = k) ist gefragt, sondern P(X <= k), P(X >= k) oder P(k_1 <= X> = k_2).
Zur Beantwortung dieser Aufgaben benutzt man die Dichtefunktion F(X <= k) der Binomialverteilung. Auch diese wird Ihnen berechnet. Dabei ist

$$F(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k)$$

Wollen Sie für das obige Beispiel (n = 20 Kugeln, davon 8 schwarze, und 10 Wiederholungen) die genannten drei Fragen beantworten, so ermitteln Sie:

Frage	abzulesende Werte	Ergebnis

mindestens 5 Kugeln	F(X<=4) = 0,6331	P(X>=5) = 1-F(X<=4) = 0,3669
höchstens 3 Kugeln	F(X<=3) = 0,3822	P(X<=3) = 0,3822
4, 5 oder 6 Kugeln	F(X>=3)= 0,3822 und F(X>=6) = 0,9452	P(4<=X<=6) = F(X>=6) - F(X>=3) = 0,5630

Schneller erhalten Sie das Ergebnis, wenn Sie unter der rechten Liste in die Felder *a* und *b* die Grenzen für F(a <= X <= b) = P(a <= X <= b) eingeben und den Schalter *Berechnung* betätigen.
Die Dichtefunktion F(X <= k) können Sie auch grafisch veranschaulichen. Markieren Sie dazu das Feld *F(X <= k)* und wählen Sie den Schalter *Darstellung*.

Poissonverteilung

Eine Zufallsvariable ist Poisson-verteilt, wenn sie die abzählbar unendlich vielen möglichen Werte 0, 1, 2, ... mit von einem Parameter abhängigen Wahrscheinlichkeiten annimmt. Zum Beispiel ist die Anzahl X der Reifenpannen eines Autos nach 100000 km Fahrt eine Poisson-verteilte Zufallsgröße. Für große n und kleine Wahrscheinlichkeiten p stellt die Poisson-Verteilung eine gute Näherung der Binomialverteilung dar, wobei die Poisson-Verteilung einfacher als die Binomialverteilung zu berechnen ist.

Geben Sie den *Parameter* λ ein, berechnet das Teilprogramm bei Auswahl des Schalters *Berechnung* die Ereigniswahrscheinlichkeiten P(X = k) und die Dichtefunktion F(X <= k) für k = 0, 1, 2, ..., n, ...
Für einen positiven Parameter λ strebt die Poisson-Verteilung mit wachsendem k gegen Null. Das Programm berechnet die Einzelwahrscheinlichkeiten, bis diese kleiner als 10^{-38}, d.h. praktisch Null wird.

Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne seien N Kugeln, davon M weiße und N - M schwarze. Nacheinander werden ohne (!) Zurücklegen oder eben gleichzeitig n Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable, die das Ereignis beschreibt, dass unter den n Kugeln genau k weiße sind, ist dann hypergeometrisch verteilt.

Bei Eingabe der *Kugelzahl N*, der Anzahl *weißer Kugeln M* sowie der Größe der gezogenen *Stichprobe n* werden die Ereigniswahrscheinlichkeiten P(X = k) und die Dichtefunktion F(X <= k) für k = 0, 1, 2, ..., n ermittelt. P(X = k) ermittelt man mit der Gleichung

$$P(X=k) = p_k(N, M, n) = \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$$

Beispiel 1: Aus einer Urne, in der sich 20 Kugeln, davon 8 weiße befinden, werden gleichzeitig 5 Kugeln gezogen. Zu ermitteln ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich in der Stichprobe 0, 1, ..., 5 weiße Kugeln befinden. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm:

p(X=0)=0,051 p(X=1)=0,255 p(X=2)=0,397
p(X=3)=0,238 p(X=4)=0,054 p(X=5)=0,004

d.h., am häufigsten sind zwei der gezogenen Kugeln weiß.

Beispiel 2: Bei dem Lottospiel "6 aus 49" (ohne Zusatzzahl usw.) interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, 3, 4, 5 oder 6 Richtige zu erzielen. Die Gesamtzahl N ist 49, M sind die 6 Richtigen und n ebenso 6 (unser Tipp). Als Ergebnis erhalten Sie:

- Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige = 0,01765040
- Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige = 0,00096862
- Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige = 0,00001845
- Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige = 0,00000007

d.h., nur etwa alle 14 Millionen Tipps ergibt sich ein Sechser – ein Resultat, das einem die Lust am Lottospiel vermiesen kann.

Erneut können Sie Verteilungs- und Dichtefunktion grafisch darstellen sowie Wahrscheinlichkeiten der Form P(a <= X <= b) berechnen.

Pólya-Verteilung

Auf die Pólya-Verteilung führt folgendes Modell: Aus einer Urne, die b schwarze und c weiße Kugeln enthält, wird eine Kugel zufällig gezogen. Ist sie weiß, so legt man sie zusammen mit s weiteren weißen in die Urne zurück, ist sie schwarz, so wird sie mit s weiteren schwarzen zurückgelegt. Wird dieser Vorgang n mal wiederholt, so ist die Zufallsgröße, dass bei n Ziehungen k mal eine weiße Kugel gezogen wird, Pólya-verteilt.
Die etwas aufwendige Berechnung ist im Lexikon des Programms beschrieben.

Diese Verteilung kann bei Erscheinungen, die sich wie Infektionskrankheiten verhalten, angewendet werden, da derartige Vorgänge dadurch charakterisiert werden, dass das Erkranken einer Person die Wahrscheinlichkeit des Erkrankens anderer Personen erhöht. Das Erhöhungsmaß s nennt man deshalb auch Ansteckungserhöhung und die Pólya-Verteilung (nach Georg Pólya, geb. 1887) auch Ansteckungsverteilung.

Für diese Verteilung geben Sie zusätzlich zu den unter der hypergeometrischen Verteilung genannten Größen das Erhöhungsmaß ein. Auch diese Verteilung kann grafisch dargestellt werden.

Negative Binomialverteilung

Die negative Binomialverteilung (auch Pascal-Verteilung) ist ebenfalls eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Versuche, die erforderlich ist, um in einem Bernoulli-Prozess eine vorgegebene Anzahl von Erfolgen zu erzielen. Neben der Poisson-Verteilung ist die negative Binomialverteilung die wichtigste Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik. Dort wird sie insbesondere als Schadenzahlverteilung in der Krankenversicherung benutzt, seltener im Bereich Kraftfahrzeug-Haftpflicht oder Kasko.

Man kann diese Verteilung mithilfe des Urnenmodells mit Zurücklegen beschreiben:

In einer Urne befinden sich zwei Sorten Kugeln. Der Anteil der Kugeln erster Sorte beträgt p. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel erster Sorte gezogen wird, ist damit p.
Es wird nun so lange eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt, bis erstmalig genau r Kugeln erster Sorte resultieren. Man kann eine Zufallsvariable X:

"Zahl der Versuche, bis erstmals r Erfolge resultieren"

definieren. Da r vorgegeben ist, variiert man die Zahl n der Versuche und erhält als Ausprägungen von X die Menge r, r + 1, ..., n, ..., d.h., X hat abzählbar unendlich viele Ausprägungen.
Alternativ kann auch nach der Anzahl von Misserfolgen bis zum Erreichen der r Erfolge gefragt werden. Diese Variante ist hier umgesetzt.

10.36 Binomialverteilung

Eine der Standard-Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die Binomialverteilung.
Eine Zufallsgröße X heißt binomialverteilt, wenn die Wahrscheinlichkeiten über

$$b(n;p;k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

berechnet werden können. Als Verteilungsfunktion ergibt sich

$$B(n;p;k) = \Sigma \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}, \text{ Summenbildung für } i = 0, \ldots, k$$

Typische Aufgabenstellungen zur Binomialverteilung sind
1. Eine Urne enthält 4 schwarze, 3 rote und 3 weiße Kugeln. Es wird 10-mal mit Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau 5 schwarze Kugeln zu ziehen?
2. Ein fairer Würfel wird 36 mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl, also 6-mal, eintritt.
3. Der Anteil der Nichtschwimmer an einer Schule beträgt 10%. In einer Klasse werden vier Schüler zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der Schüler Nichtschwimmer ist?
4. In einem Keller sind alte Weine gelagert; man weiß, dass im Durchschnitt 20% davon nicht mehr genießbar sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) von zehn Flaschen acht noch genießbar sind, b) von 20 Flaschen 16 noch genießbar sind.

usw. usf.

In diesem Teilprogramm können Sie die Binomialverteilung berechnen und ein Wahrscheinlichkeitsdiagramm anzeigen lassen. Geben Sie dazu die Parameter n (maximal 100) und p ein.
In der Tabelle finden Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P(X=k) und die kummulierten Wahrscheinlichkeiten. In einem Diagramm wird die Verteilung dargestellt.

10.37 Stetige Verteilungen

Neben diskreten Verteilungen sind stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, d.h. Verteilungen, bei denen die Zufallsgröße kontinuierlich jeden Wert eines Intervalls reeller Zahlen annehmen kann, von größtem Interesse. Das Programm beinhaltet unter diesem Punkt sechs derartige Verteilungen, für die Sie die Verteilungsfunktion (Exponential-, Maxwell-, Beta-, Gamma- und Weibull-Verteilung) und zusätzlich für die vier Statistik-Testverteilungen (Normierte Gaußverteilung, Student-t-Verteilung, F-Verteilung und χ^2-Verteilung) Quantile für Irrtumswahrscheinlichkeiten berechnen können.

Exponentialverteilung

Eine Zufallsgröße heißt exponentialverteilt, wenn sie folgende Dichtefunktion hat: $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$.
für alle x größer gleich 0 und 0 für alle negativen x. Der Wert λ ist der Parameter der Verteilung und stets positiv. Aufgrund des negativen Exponenten sinkt der Wert von f(x) mit zunehmendem Argument x.
Zum Beispiel kann die Lebensdauer von Glühlampen als exponentialverteilt angesehen werden. Nach Eingabe des Parameters und Festlegung der Tabellenwerte (*Anfangswert*, *Endwert* und *Schrittweite*) ermittelt das Programm die Dichte dieser Verteilung.

Maxwell-Verteilung

Die Dichte der Maxwell-Verteilung wird durch $f(x) = 2x^2 / (\sigma\, \sqrt[3]{2\pi})\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ angegeben, wobei σ der Parameter der Verteilung ist. Diese Verteilung spielt innerhalb der Physik eine sehr wichtige Rolle, zum Beispiel bei der Beschreibung der Ortsverteilung von Gasmolekülen in einem abgeschlossenen Volumen.
Eine Zufallsgröße X, die Maxwell-verteilt ist, kann in der Form $X = \sigma \sqrt{Y}$ dargestellt werden, wobei nun Y eine χ^2-verteilte Zufallsgröße mit drei Freiheitsgraden ist. Das Programm ermittelt erneut zu jedem eingegebenen Parameter die Dichtefunktionswerte.

Student-t-Verteilung

Innerhalb der mathematischen Statistik erfüllt die Student-t-Verteilung eine fundamentale Rolle, insbesondere bei einem t-Test zur Überprüfung statistischer

Hypothesen. Diese Verteilung wurde 1907 von William S. Gosset (Pseudonym: Student) gefunden. Eine Zufallsgröße X ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden, wenn ihre Dichtefunktion die Form

$$f(x) = \Gamma((n+1)/2) / (\Gamma(n/2) \sqrt{n\pi}) (1 + x^2/n)^{(-n+1)/2}$$

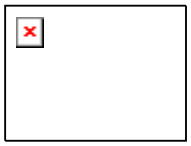
hat, wobei $\Gamma(x)$ die Eulersche Gammafunktion ist.
Liegt nun ein statistisches Problem der Art:

Aus der Untersuchung von n = 49 Proben eines Werkstoffes stellt man den Anteil eines chemischen Elements mit x = 2,4% bei einer Varianz von s² = 0,4 fest. Der Sollwert beträgt dagegen m = 3%.
Frage: Ist diese Abweichung zufällig?

vor, so bedarf es mathematischer Tests.

Für kleine Stichproben oder Aufgaben, bei denen der Mittelwert oder die Varianz geschätzt werden müssen, ist die Gaußsche Normalverteilung nicht mehr anwendbar, da der Stichprobenumfang dort nicht in die Rechnung mit einfließt. Dies geschieht bei der Student-t-Verteilung, welche die Größe der Stichprobe berücksichtigt. Strebt n gegen unendlich, geht die t-Verteilung in die Gaußsche Normalverteilung über.

Insbesondere fragt man nach einer von einer Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängigen Quantile der Verteilung. Ist X eine Zufallsgröße, f(x) deren Verteilungs- und F(x) deren Dichtefunktion (die Fläche unter f(x) von minus Unendlich bzw. 0 bis x) sowie p eine reelle Zahl des Intervalls [0;1], so heißt jede



Zahl Q_p mit $F(Q_p) <= p$ ein p-Quantil. Ist z.B. p = 0,95, so gibt Q_p das Argument an, für welches der linke Teil der Fläche unter der Funktion f(x) genau 95% der Gesamtfläche entspricht. Rechts von Q_p befindet sich 5% der Gesamtfläche, d.h., die Zufallsgröße X nimmt nur mit 5% Wahrscheinlichkeit Werte größer als Q_p an.

Ergibt nun der statistische Test einen Testparameter t und ist dieser kleiner als das zu einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - p$ gehörende Quantil Qp, so kann man mit der Wahrscheinlichkeit α schlussfolgern, dass Abweichungen der Testgröße zufälliger Natur sind. Dabei ist zu beachten, dass natürlich sogenannte Fehler 1. und 2. Art auftreten können.
Das Programm ermittelt nach Eingabe der *Freiheitsgrade* n (n - 1 für den t-Test) für die Student-t-Verteilung alle Quantile der Irrtumswahrscheinlichkeiten 0,99 bis 0,01. Für den t-Test ist die Testgröße nach $t = |x - \mu| / s \sqrt{n}$ zu ermitteln und mit den Tabellenwerten zu vergleichen.

Für das oben genannte Beispiel erhalten Sie t = 6,6. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 und f = n - 1 = 48 Freiheitsgraden ergibt die Tabelle ein Quantil von 2,010. Da t größer ist, muss die Annahme einer zufälligen Abweichung verworfen werden. Die Stichprobe des Werkstoffes besitzt signifikante (wesentliche) Unterschiede zum Sollwert.

Die Berechnung der Tabelle der Quantile ist sehr aufwendig. Wählen Sie *Dezimale = 3* als Genauigkeit, kann sich die Rechenzeit vervielfachen. Ein Abbruch ist durch Betätigung einer beliebigen Taste möglich. Insgesamt können Sie zwei bis sechs Dezimalstellen als Genauigkeit wählen. Ausnahme: Für 1 und 2 Freiheitsgrade berechnen sehr schnelle und genaue Näherungsroutinen die Quantil-Tabelle auf fünf Kommastellen.

F-Verteilung

Eine weitere, für die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutsame Verteilung bildet die F-Verteilung (Fisher-Verteilung). Diese Verteilung besitzt zwei Parameter m und n von Freiheitsgraden und ist definiert mit

$$f(x) = a^a\, b^b\, \Gamma(a+b) \,/\, (\Gamma(a)\, \Gamma(b))\, x^{a-1} \,/\, (ax+b)^{a+b},$$

wobei a = m / 2 und b = n / 2 zu setzen ist. Insbesondere für statistische Tests ist diese Verteilung wichtig. Das Programm ermittelt je nach Freiheitsgraden m und n die Dichtefunktion.

χ^2-Verteilung, Chi²-Verteilung

Im Zusammenhang mit der Gaußschen Fehlertheorie untersuchte der deutsche Astronom Helmert Quadratsummen von Größen, die normalverteilt sind. Die dabei auftretende stetige Verteilungsfunktion nannte Pearson χ^2-Verteilung. Diese besitzt ebenfalls fundamentale Bedeutung für statistische Tests. Deren Dichtefunktion

$$f(x) = x^{n/2-1}\, e^{-x/2} \,/\, (2^{n/2}\, \Gamma(n/2))$$

ist wie die t-Verteilung vom Freiheitsgrad n, die Verteilungsfunktion zusätzlich von der Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängig.

Die Berechnung der Tabelle der Quantile ist für diese Verteilung noch aufwendiger. Wählen Sie *3 Dezimale* Genauigkeit und eine Zahl von Freiheitsgraden von 3 bis 9, kann die Rechenzeit auch auf schnellen Rechnern einige Minuten beanspruchen. Ein Abbruch ist durch Betätigung einer beliebigen Taste möglich. Für 1 und 2 sowie ab 10 Freiheitsgraden existieren schnelle und genaue Näherungsformeln, die zur Berechnung von vier Kommastellen verwendet werden.

Während zum Test von Mittelwerten zweier Stichproben der t-Test über die Student-t-Verteilung herangezogen wird, nutzt man den χ^2-Test zum Prüfen zweier Verteilungen.

Beispiel: Von 80 gefertigten Werkstücken werden ein Merkmal gemessen (siehe nachfolgende Tabelle), die Maße in Klassen eingeteilt und deren Häufigkeiten h_i berechnet. Vermuten Sie eine vorliegende Normalverteilung, ermitteln Sie mittels

Gaußverteilung zu jeder Klasse die theoretische Häufigkeit k_i. Die Testgröße berechnet sich nun zu

$$\chi^2 = (h_1 - k_1)^2/k_1 + (h_2 - k_2)^2/k_2 + ... + (h_n - k_n)^2/k_n$$

wobei k die Klassenzahl darstellt und der Freiheitsgrad f auf k - m - 1 zu setzen ist. Dabei ist m die Anzahl der geschätzten Parameter. Für das Beispiel erhält man

h_i	11	13	25	16	15
k_i	10,1	16,5	22,1	18,4	12,4

und damit für χ^2 den Wert 2,06. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von 0,05 und 2 Freiheitsgraden ermittelt das Programm ein Quantil von 5,99. Die Hypothese einer Normalverteilung der Werkstücke kann angenommen werden. Möchten Sie die Berechnung der theoretischen Häufigkeiten lieber vollständig dem Programm überlassen, so nutzen Sie das Unterprogramm *Verteilungstest.* Für n = 2 geht die χ^2- Verteilung in die Exponentialverteilung über.

Normierte Gaußverteilung

Zur Realisierung von Konfidenzabschätzungen bietet das Programm die Möglichkeit, für die normierte Gaußsche Normalverteilung Quantile (Konfidenzintervalle) zu berechnen. Dabei sind der Mittelwert auf $\mu = 0$ und zusätzlich für die Berechnung der Quantile die Varianz auf $\sigma^2 = 1$ festgeschrieben. Die Quantile werden unabhängig von der eingegebenen Stellenzahl stets auf 6 Dezimale mit einer Schrittweite von 0,001 berechnet.

Beispiel: X sei eine normalverteilte Zufallsgröße, n der Stichprobenumfang, m der Mittelwert und s die Standardabweichung. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit entnehmen Sie aus der vom Programm errechneten Tabelle den Wert λ zu 1,960. Mit der Gleichung $\lambda = \lambda(\alpha)\ \sigma / \sqrt{n}$ erhalten Sie für $\lambda = 0{,}735$, womit der Parameter m mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% im Intervall $\mu - 0{,}735 < m < \mu + 0{,}735$ liegt. Darüber hinaus können Sie Konfidenzintervalle in dem Teilprogramm *Konfidenzintervall* berechnen lassen.

Weibull-Verteilung

Eine Zufallsgröße heißt Weibull-verteilt mit den Parametern a und b, wenn sie eine Dichte der Form

$$f(x) = ab\ x^{b-1}\ e^{-ax\hat{}b}$$

für alle x größer gleich 0, und 0 für alle negativen x, hat. Beide Parameter a und b müssen stets positiv sein. Als Spezialfall ergibt sich für den Parameter b = 1 die Exponentialverteilung.
Insbesondere für komplexere Systeme beschreibt die Weibull-Verteilung die

Lebensdauer elektronischer Systeme und deren Ausfallwahrscheinlichkeiten. Nach Eingabe der Parameter und Festlegung der Tabellenwerte (*Anfangswert*, *Endwert* und *Schrittweite*) ermittelt das Programm die Dichte dieser Verteilung.

Stetige Verteilungen

Je nach Wahl des Schaltfeldes *Dichtefunktion* bzw. *Quantile* werden die Tabellenwerte nach Quittierung mit der *RETURN*-Taste bzw. dem Schalter *Berechnung* ermittelt. Möchten Sie den prinzipiellen grafischen Verlauf der Dichtefunktion erhalten, betätigen Sie *Darstellung*. Beachten Sie bitte, dass je nach Verteilungsfunktion das Darstellungsintervall von Ihnen eingestellt werden muss.

10.38 Gaußsche und logarithmische Normalverteilung

Strebt bei der Binomialverteilung die Anzahl der Versuche gegen unendlich, erhält man eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Gaußsche Normalverteilung. Diese Verteilung zählt zu den wichtigsten überhaupt, da in der Praxis eine Vielzahl stochastisch verteilter Prozesse normalverteilt sind. Das Programm berechnet in diesem Teilprogramm bei Eingabe eines *Erwartungswertes* μ und einer *Varianz* σ^2 die Dichtefunktion nach der Gleichung

$$f(x, \mu, \sigma^2) = 1/\sqrt{(2\pi\ \sigma^2)}\ e^{-(x-\mu)/(2\ \sigma^2)}$$

Die Verteilungsfunktion F(x) ergibt sich als Integral dieser Dichtefunktion von minus Unendlich bis x.

Entsprechend der Festlegung für die *Intervallbreite*, die relativ zum Erwartungswert betrachtet wird, und der *Schrittweite* erscheinen die Werte in den beiden Listboxen. Aufgrund der Bedeutung der Gaußverteilung und der anspruchsvollen Berechnung sind beide Funktionen in vielen Büchern tabelliert. Mit diesem Programm können Sie beliebige Werte dieser Verteilung sehr genau ermitteln.

Beispiel: Bei der Produktion eines Werkstücks tritt ein Mittelwert der Länge 2 m und eine Varianz von 2,5 auf. Das Stück ist Ausschuss, wenn die Länge zwischen 2,5 und 2,7 Meter liegt. Ist es noch länger, kann es nachbearbeitet werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stück Ausschuss ist. Für eine Schrittweite von 0,1 erhalten Sie in der Tabelle der Verteilungsfunktion für x = 2,5 den Wert 0,624, für x = 2,7 entsprechend 0,671. Die Differenz beider Werte gibt die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss an, also 4,7 Prozent.

Logarithmische Normalverteilung

Neueste Untersuchungen haben ergeben, dass statistische Verteilungen verschiedener natürlicher Größen nicht der bekannten Gaußschen Normalverteilung, sondern vielmehr der logarithmischen Normalverteilung folgen.

Beispiele sind u.a.: Durchmesser von Bäumen oder Bakterien, Körpergröße des Menschen, Verteilung der Galaxien, Größe von Ölfeldern, Verteilung chemischer Elemente in Sedimenten, Größe von Städten und Gemeinden, Partikelgrößen in Eis- oder Wasserwolken, Wachstumsgröße von Kristallen, Windgeschwindigkeiten, Lebenszyklus einer Art, Bilanzgröße US-amerikanischer Banken, Korrosion von Metallen, für eine Heilung notwendige Penizillindosis usw. usf.

Die Parameter der logarithmischen Normalverteilung sind nicht durch einfaches Logarithmieren der entsprechenden Normalverteilung zu erhalten! Insbesondere nehmen die bei der Normalverteilung zusammenfallenden Größen Modalwert, Medianwert und Mittelwert voneinander verschiedene, aber immer in dieser Reihenfolge aufsteigende Werte an.

10.39 Wahrscheinlichkeitsnetz

Das Wahrscheinlichkeitsnetz oder Wahrscheinlichkeitspapier ist ein mathematisches Hilfsmittel.
Mit einem Wahrscheinlichkeitspapier kann man die Daten eines statistischen Merkmals daraufhin untersuchen, ob ihm eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt.
Es ist mit einem Koordinatennetz versehen, in dem auf der Abszisse die Quantile der Verteilung äquidistant, dagegen auf der Ordinate die dazugehörigen Funktionswerte der Verteilung in linearisierter Form abgetragen sind.
Allgemein bekannt ist vor allem das Wahrscheinlichkeitsnetz der Normalverteilung.

Durch diese Linearisierung ergibt sich für die Wertepaare $(x;\Phi(x))$ eine Gerade. Das Wahrscheinlichkeitspapier ermöglicht damit ein einfaches Zeichnen einer solchen Funktion bzw. die einfache Prüfung, ob gegebene Wertepaare zu einer Normalverteilung passen. Diese müssen dann auf einer Geraden liegen.

Im Teilprogramm *Wahrscheinlichkeitsnetz* können Sie dies testen.
In die Tabelle *Messwerte* tragen Sie zuerst eine gewisse Anzahl von Werten ein – mindestens drei. Diese Daten können Sie über die Schalter im oberen Teil des Fensters auch von der Festplatte laden bzw. auf diese speichern.

Bestätigen Sie nun mit *Auswertung*, so trägt das Programm die sortierten Messwerte in das Wahrscheinlichkeitsnetz ein und ermittelt die zugehörige Korrelationsgerade.
Die Güte der Korrelation wird zusätzlich angezeigt. Ist dieser Wert größer als 0,95, so können Sie von einer normalverteilten Stichprobe ausgehen.

Die zwei mitgelieferten Beispieldateien Beispiel_01.mne und Beispiel_02.mne enthalten im ersten Fall keine normalverteilten, im zweiten Fall normalverteilte Werte.

10.40 Poisson-, Binomial-, geometrische und hypergeometrische Verteilung

Diese drei Teilprogramme stellen Ihnen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Binomialverteilung, der Poisson-Verteilung und der hypergeometrischen Verteilung in einem Diagramm dar.

Für die Poisson-Verteilung ist der Parameter a veränderbar.
Bei der hypergeometrischen Verteilung sind die Größe des Gesamtumfangs N, die Anzahl M der darin vorkommenden interessierenden Objekte und die Stichprobengröße n an den Rollbalken einzustellen.

10.41 Statistische Tests

In der Praxis der mathematischen Statistik spielen Tests von Zufallsgrößen eine herausragende Rolle. In diesem Unterprogramm können Sie drei Arten von Tests durchführen.

Wählen Sie *Stichprobentest* werden drei auf der Student-t-Verteilung basierende Tests von normalverteilten Größen angeboten:

- Test eines normalverteilten Stichprobenmittelwertes
- Test zweier normalverteilter Stichprobenmittelwerte
- Test einer Stichprobenhäufigkeit

Weiterhin können Sie einen *Chi²-Verteilungstest* oder einen *Binomial-Signifikanztest* als Testverfahren auswählen.

Test eines normalverteilten Stichprobenmittelwertes

Von einer Stichprobe mit dem Umfang n und der Varianz s^2 aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem ermittelten Mittelwert m soll überprüft werden, ob dieser Mittelwert m von einem zu erwartenden Mittelwert μ zufällig abweicht. Für einen statistischen Test wird dazu die Nullhypothese H_0 aufgestellt:

- H_0 = Die Abweichung des Mittelwertes m vom Erwartungswert μ ist zufälliger Natur, d.h. m = μ.

Nach der Ermittlung einer Testgröße t wird ein Vergleich mit einem Tabellenwert t_b der t-Verteilung durchgeführt. Dieser Wert ist von einer gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängig. Gilt $t < t_b$, so kann die Nullhypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α angenommen werden. Andernfalls muss die Hypothese verworfen werden. Es ist dann davon auszugehen, dass die Abweichung nicht zufällig, sondern signifikant ist.

Dabei muss aber beachtet werden, dass aufgrund der zufälligen Stichprobe Fehlentscheidungen möglich sind.
Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist. Wird H_0 angenommen, obwohl die Hypothese falsch ist, tritt ein Fehler

2. Art auf.
Je größer die Stichprobe ist, desto geringer wird die Häufigkeit einer Fehlentscheidung. In der Technik werden Irrtumswahrscheinlichkeiten α von 0,05 bevorzugt, in der Medizin 0,01. Entscheidet der statistische Test über sehr brisante Fakten, sollte α sehr klein und der Stichprobenumfang so groß wie möglich gewählt werden. Damit sinkt sowohl die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art als auch die des mitunter "schlimmeren" Fehlers 2. Art.

Für den Stichprobenmittelwert ist nun die Testgröße $t = \sqrt{n}\ |m - \mu| / s$ zu berechnen. Aus der Student-t-Verteilungstafel ist die Testgröße t_b mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden zu entnehmen, was natürlich das Programm für Sie übernimmt.

Beispiel 1: Aus einer 65 Teile umfassenden Stichprobe wird ein Mittelwert von m = 14,3 bei einer Varianz s^2 von 1,6 berechnet. Der erwartete Mittelwert m beträgt jedoch 14. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 ermittelt das Programm:

Testgröße = 1,912 Tabellenwert = 1,99

Damit kann die Hypothese, dass die Abweichung zufällig ist, angenommen werden.

Beispiel 2 (einseitiger Test): Für n = 5000 Batterien gibt der Hersteller eine mittlere Betriebszeit von 180 Stunden an. Zur Überprüfung werden 50 Stück getestet und ein Mittelwert m von 175 Stunden bei einer Standardabweichung von 18 Stunden ermittelt. Ein einseitiger Test mit 0,05 Irrtumswahrscheinlichkeit führt zur Ablehnung der Nullhypothese, d.h., mit 95% Sicherheit wäre eine Reklamation berechtigt. Bei 99% Sicherheit wird die Nullhypothese angenommen.

Test zweier normalverteilter Stichprobenmittelwerte

Liegen zwei Stichproben mit den Umfängen n_1 und n_2 aus normalverteilten Grundmengen vor und haben Sie die Mittelwerte m_1 und m_2 sowie die Varianzen s^2_1 und s^2_2 berechnet, so ergibt sich für diesen Test die Testgröße zu

$$t = |m_1 - m_2| / S \sqrt{(n_1 n_2 / (n_1 + n_2))},$$

wobei der Parameter S aus den Varianzen zu ermitteln ist. Für die Freiheitsgrade gilt $f = n_1 + n_2 - 2$.

Beispiel: Bei zwei Werkstoffen wurden aus 20 bzw. 32 Teststücken mittlere Zerreißfestigkeiten von $m_1 = 18$ bzw. $m_2 = 24$ ... bei Varianzen von 4 und 6 ermittelt. Die Nullhypothese besagt, dass dieser Unterschied zufällig ist. Nach Eingabe der Werte erhalten Sie t = 9,2 und bei 50 Freiheitsgraden (Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05) einen Tabellenwert von 2,01, womit die Hypothese abgelehnt werden muss. Der Unterschied der Zerreißfestigkeiten ist signifikant, also nicht zufällig.

Test einer Stichprobenhäufigkeit

Tritt in einer Stichprobe vom Umfang n ein Ereignis a mal ein, ist dagegen die zu erwartende Wahrscheinlichkeit des Eintritts p und nicht gleich dem empirisch ermittelndem Wert a / n , so erhalten Sie mit $t = |a - np| / \sqrt{(np (1 - p))}$ eine Testgröße für die Nullhypothese eines zufälligen Abweichens.

Beispiel: Aufgrund langfristiger Untersuchungen besteht bei einer Tiererkrankung eine Sterbeziffer von p = 0,4. 71 erkrankte Tiere werden mit einem neuen Medikament behandelt, mit dem Ergebnis, dass nur 20 Tiere sterben. Für die Freiheitsgrade f = n - 1 = 70 und einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von 0,01 ergibt sich ein Tabellenwert von 2,65. Die Testgröße beträgt 2,035, womit die Nullhypothese bestätigt wird, d.h., eine besondere Wirkung des neuen Medikaments kann nicht festgestellt werden.

Je Test wählen Sie zuerst die gewünschte Irrtumswahrscheinlichkeit zwischen 0,05, 0,01 und 0,001 (für einseitige Tests 0,005). Ausgehend vom jeweiligen Beispiel entscheiden Sie zusätzlich an den Schaltfeldern für Tests normalverteilter Mittelwerte, ob der Test einseitig oder zweiseitig durchgeführt werden soll.

Binomial-Signifikanztest

Während bei den bisherigen Teilprogrammen zur Stochastik die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses entweder bekannt war oder aber aus bestimmten Werten berechnet werden sollte, gibt es Situationen, wo die Wahrscheinlichkeit p unbekannt ist oder aber nur Behauptungen aufgestellt werden können, deren Wahrheitswert einzuschätzen ist. Dazu verwendet man statistische Prüfverfahren. Ist zu erwarten, dass die Stichprobenverteilung binomialverteilt ist, so benutzt man einen Binomial-Signifikanztest, der in diesem Teilprogramm umgesetzt wurde.

Liegt eine binomialverteilte Stichprobe des Umfangs n vor, bei der das interessierende Ereignis A genau k mal eingetreten ist, so beträgt die empirisch gefundene Wahrscheinlichkeit p = k / n. Ist nun zu erwarten, dass das Ereignis A theoretisch mit der Wahrscheinlichkeit p_0 eintreten müsste, so kann ein Unterschied zwischen p und p_0 zufällig oder aber signifikant, d.h. wesentlich sein.

Zur Überprüfung wird nun die Nullhypothese $H_0 / p = p_0$ aufgestellt und für eine frei wählbare Irrtumswahrscheinlichkeit α der sogenannte Ablehnungsbereich K ermittelt. Zuvor prüft man, ob der Test zweiseitig, d.h., der Irrtum wird gleichmäßig auf die Randbereiche des Intervalls [1;n] verteilt, oder einseitig (linksseitig oder rechtsseitig) ist. Zum Beispiel wird man die Güte eines Spielwürfels zweiseitig testen, da ein Würfel, der zu wenig oder aber zu viel Sechsen würfelt, nicht günstig ist.

Verspricht Ihnen hingegen ein Hersteller, dass sein Artikel zum Beispiel 100 Stunden ohne Defekt arbeitet, wird man nur einen einseitigen Test durchführen,

da Sie sicherlich nichts gegen eine längere Betriebsdauer des Artikels einzuwenden hätten. Anschließend ermitteln Sie für die theoretische Binomialverteilung $B_{n;p0}$ die Zahlen a und b, für die

- zweiseitig: $P(X<a) \leq \alpha/2$ und $P(X \geq b) \leq \alpha/2$
- rechtsseitig: $P(X \geq b) = 1 - F_{n;p0}(b-1) \leq \alpha$
- linksseitig: $P(X<a) = F_{n;p0}(a) \leq \alpha$

gilt. Aus diesen Werten ergibt sich damit der Ablehnungsbereich K zu

- zweiseitig: $K = \{0, ..., a\} \cup \{b, ..., n\}$
- rechtsseitig: $K = \{b, ..., n\}$
- linksseitig: $K = \{0, ..., a\}$

Liegt der in der Stichprobe gefundene Werte k des Eintretens des Ereignisses A in dem Ablehnungsbereich, müssen Sie davon ausgehen, dass Ihre Nullhypothese nicht korrekt ist. Die Hypothese wird damit abgelehnt und Sie können mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α annehmen, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit p_0 von der empirisch gefundenen p signifikant abweicht. Zu beachten ist hierbei aber, dass Ihnen mit der Wahrscheinlichkeit α ein Fehler 1. Art (Risiko 1. Art) unterlaufen kann. Dieser tritt ein, wenn Sie Ihre Nullhypothese ablehnen, da $k \in K$ ist und dennoch die Nullhypothese H_0 wahr ist.

Diese etwas langwierige Rechnung nimmt Ihnen das Programm in diesem Unterprogramm ab.
Tragen Sie dazu den *Stichprobenumfang n*, die *theoretische Wahrscheinlichkeit p(0)*, die Anzahl des Eintretens des Ereignisses A in der Stichprobe und die Irrtumswahrscheinlichkeit α unter *Signifikanz* (in %) ein. Betätigen Sie den Schalter *Berechnung* oder die *RETURN*-Taste berechnet das Programm den Annahmebereich K und entscheidet, ob die Nullhypothese abgelehnt oder angenommen wird.

Beispiel: Der Hersteller eines Artikels verspricht, dass der Ausschussanteil höchstens 3% beträgt. Ein Käufer findet aber unter 100 erworbenen Artikeln 7 defekte Teile. Ist eine Reklamation zur Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% berechtigt?

Offensichtlich ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen. Nach Eingabe der Werte n = 100, p_0 = 0,03, k = 7 und α = 5% ermittelt das Programm einen Annahmebereich von 0 bis 6. Da k = 7 außerhalb dieses Bereichs liegt, wird die Nullhypothese, dass die hohe Ausschussrate Zufall ist, abgelehnt. Eine Reklamation ist somit berechtigt.

Chi²-Test, χ^2-Verteilungstest

Neben Tests von Mittelwerten und Häufigkeiten werden empirisch gefundene Verteilungen mit theoretischen Verteilungen verglichen. In diesem Unterprogramm können Sie Ergebnisse eines Zufallsexperiments auf Normal- bzw. Gleichverteilung sowie eine von Ihnen eingegebene theoretische Verteilung testen.

Ergibt ein Zufallsexperiment, eine Messreihe usw. die Menge x_i von Ergebnissen, so teilen Sie diese in k (maximal 12) unbedingt gleich breite Klassen, d.h. Intervalle, ein, stellen in diesen die absolute Häufigkeit h_i des Eintritts fest und tragen die *Klassenmittelpunkte* und die *absoluten Häufigkeiten* in die zwei Spalten ein.

Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* errechnet das Programm den Mittelwert sowie die Varianz der eingegebenen Werte und daraus, je nach Wahl an den Schaltfeldern, eine theoretische absolute Häufigkeit k_i für eine normalverteilte bzw. gleichverteilte Zufallsgröße.

Über einen χ^2-Verteilungstest (Anpassungstest) wird nun die Testgröße zu

$$\chi^2 = (h_1 - k_1)^2/k_1 + (h_2 - k_2)^2/k_2 + ... + (h_n - k_n)^2/k_n$$

ermittelt. Dabei wird gefordert, dass die theoretische Häufigkeit je Klasse mindestens 5 beträgt. Ist dies nicht der Fall, fasst das Programm selbstständig einzelne Klassen automatisch zusammen.

Anschließend bestimmt dieses Unterprogramm Tabellenwerte der χ^2-Verteilung und vergleicht diese mit der Testgröße. Die Anzahl der Freiheitsgrade f = k - m - 1 ergibt sich für die Normalverteilung zu f = k - 3 (m = 2 ... Mittelwert und Varianz wurden geschätzt) bzw. für die Gleichverteilung zu f = k - 2 (m = 1 ... Mittelwert wird geschätzt).
Daraus resultiert, dass eine Mindestzahl von Klassen k mit einer theoretischen Häufigkeit größer 5 notwendig ist. Ist dies nicht der Fall, erhalten Sie die Fehlermeldung: *Zu wenig verwertbare Klassen !*
Widersprechen die Werte generell einem Test, z.B. weniger als drei eingegebene Klassen, meldet das Programm: *Kein Test durchführbar !*

Ausgehend von der Nullhypothese, dass die zu testenden Werte gleich- bzw. normalverteilt sind, fällt das Programm die Entscheidung, ob die Nullhypothese verworfen werden muss oder angenommen werden kann.
Beachten Sie: Wie unter "Statistische Tests" ausgeführt, ist diese Entscheidung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit behaftet. Sogenannte Fehler 1. bzw. 2. Art sind möglich.

Beispiel 1 (siehe Anmerkungen zur χ^2-Verteilung im Teilprogramm *Stetige Verteilungen*): Von 80 gefertigten Werkstücken werden ein Merkmal gemessen, die Maße in acht Klassen eingeteilt und deren Häufigkeiten h(i) berechnet. Die Klassen haben eine Breite von 2.

Klassenmittelpunkte	34	36	38	40	42	44	46	48
h_i	1	2	8	13	25	16	13	2

Bei Vermutung einer Normalverteilung berechnet das Programm die theoretischen

Klassenhäufigkeiten:

k_i	0,38	2,15	7,56	16,44	22,08	18,32	9,39	2,97

Da die Forderung einer Mindesthäufigkeit von 5 existiert, werden die ersten drei und die letzten zwei zu Klassen zusammengefasst und die Testgröße zu t = 2,045 berechnet. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 beträgt der Vergleichswert 5,99, womit das Zahlenmaterial als gleichverteilt angesehen werden kann.

Beispiel 2: Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Für die Augenzahlen ergibt sich:

Klassenmittelpunkte	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	21	16	11	26	12	14

Ein Test auf Gleichverteilung ergibt für die Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 eine Testgröße von 10,04 und einen Tabellenwert von 9,49, d.h. eine Ablehnung der Nullhypothese. Scheinbar liegt kein idealer Würfel vor. Eine endgültige Entscheidung ist hier aber nicht möglich oder sollte zumindest nicht getroffen werden. Die sehr kleine Zahl von nur 100 Würfen provoziert einen Fehler 1. Art. Erst mit einer größeren Zahl (etwa 10000) von Würfen sollte die Güte des Würfels eingeschätzt werden.

Test einer theoretischen Verteilung

Wünschen Sie zwei Verteilungen zu vergleichen, d.h., beide Verteilungen müssen nicht notwendigerweise normal- bzw. gleichverteilt sein, so tragen Sie in der Spalte *theoretische Häufigkeit* Ihre zweite Reihe ein. Der Schalter *Berechnung* ermittelt nun, ob zwischen den Werten ein signifikanter Unterschied besteht oder nicht.

Beispiel: Für die Haltbarkeit von Zündkerzen eines Fahrzeugmotors wird ermittelt, wie viele 10000 km eine Zündkerze funktionstüchtig bleibt und nicht gewechselt werden muss. Dabei vermutet man, dass die Haltbarkeit eine exponentialverteilte Zufallsgröße darstellt. Zur Überprüfung der Vermutung werden die absoluten Häufigkeiten h_i der Haltbarkeit gezählt und eine theoretische Exponentialverteilung eingetragen. Diese Werte können Sie zum Beispiel im Unterprogramm *Stetige Verteilungen* ermitteln und dem Beispiel anpassen.

Klassenmittelpunkte in 10000 km	40	45	50	55	60	65	70
h_i	1048	176	42	6	2	1	1
Theoretische Exponentialverteilung k_i	968	195	39	7,9	1,6	0,33	0,1

Wählen Sie nun eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,01, ermittelt das Programm eine Testgröße von 8,694. Da der Tabellenwert jedoch nur 6,64 beträgt, muss die Hypothese fallen gelassen werden. Es ist wahrscheinlich, dass die Haltbarkeit der

Zündkerzen nicht exponentialverteilt ist. Zu bemerken wäre, dass in der Praxis neben dem χ^2-Test auch Tests mittels F- oder t-Verteilung gebräuchlich sind.

10.42 Konfidenzintervall für Mittelwert und Varianz

In diesem Teilprogramm ermittelt das Programm für eine Menge von Ausgangswerten entsprechend eines Signifikanzwertes (Irrtumswahrscheinlichkeit α) Konfidenzintervalle (Annahmebereiche) für den Mittelwert und die Varianz einer Stichprobe.

Bis zu 70 Messwerte bzw. reelle Zahlen x_i können Sie in die Felder eingegeben. Zwischen den Feldern schalten Sie mit der *TAB*-Taste weiter; zuerst die 1. Zeile von links nach rechts, anschließend die 2. Zeile von links nach rechts usw. Das erste leere Feld wird als Ende-Markierung betrachtet, auch wenn danach weitere Zahlen folgen sollten.

Außer Zahlen können Sie auch Terme in der Form PI / 2, SQRT(2) usw. eingeben. Die Schreibweise muss sich an den unter "Implementierte Funktionen" gemachten Bemerkungen orientieren und einen berechenbaren Wert ergeben.

Weiterhin legen Sie die *Signifikanz*, also die Irrtumswahrscheinlichkeit α sowie die *Losgröße* fest und bestimmen, ob die Stichprobe *mit* oder *ohne Zurücklegen* erfolgt. Kennen Sie die *Standardabweichung* der Stichprobe, so geben Sie diese zusätzlich ein. Vergessen Sie in diesem Fall nicht, das Markierungsfeld *Standardabweichung des Loses bekannt?* einzuschalten.
Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für die Varianz, so müssen Sie zusätzlich entscheiden, ob der Test *ein*- oder *zweiseitig* erfolgen soll. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* werden folgende statistische Auswertungen durchgeführt:

- Bestimmung der Stichprobenstandardabweichung
- Ermittlung des Stichprobenmittelwertes bzw. der Stichprobenvarianz
- die untere und obere Konfidenzgrenze, entsprechend der gewählten Signifikanz

Beispiel: Es wurden 26 Messwerte einer Größe eingegeben:

1	1,3	2	1,8	1,7	2	3,1	1,4	1,7	1,8	2,2	1,4	1,4
1,5	2,1	2	1,5	1,6	2	1,7	1,4	1,34	2,3	1,8	1,6	2,1

Mit diesen Werten und der Losgröße 4, Signifikanz 5%, erhalten Sie als Ergebnisse:

- Stichprobenstandardabweichung = 0,42087
- Stichprobenmittelwert = 1,75923
- mit Zurücklegen: untere Konfidenzgrenze = 1,58582 , obere Konfidenzgrenze = 1,93264

- ohne Zurücklegen: untere Konfidenzgrenze = 1,35254, obere Konfidenzgrenze = 2,16592
- Stichprobenvarianz = 0,17714
- einseitiger Test: untere Varianzgrenze = 0,11762, obere Varianzgrenze = 0,29419
- zweiseitiger Test: untere Varianzgrenze = 0,10893, obere Varianzgrenze = 0,31957

Kennen Sie die Stichprobenvarianz des Loses (zum Beispiel 0,1), so erhalten Sie die Konfidenzintervalle für den Mittelwert:

- mit Zurücklegen: untere Konfidenzgrenze = 1,26894, obere Konfidenzgrenze = 2,24952
- ohne Zurücklegen: untere Konfidenzgrenze = 0,43152, obere Konfidenzgrenze = 3,08694

Über die Schalter *Datei laden* und *Datei speichern* können Sie Ihre Daten dauerhaft in einer Datei aufbewahren und nach Bedarf wieder laden.

10.43 Fehler 2.Art

„Irrtümer haben ihren Wert; jedoch nur hie und da.
Nicht jeder, der nach Indien fährt, entdeckt Amerika."
Erich Kästner

Da bei einem Binomial-Signifikanztest (Teilprogramm *Signifikanztest*) die Entscheidung über die Annahme oder die Ablehnung der Nullhypothese von einem Zufallsexperiment abhängt, treten unausweichlich Fehler auf.

Ist die Nullhypothese wahr (H_0 / $p = p_0$), wird aber zu einer Irrtumswahrscheinlichkeit α im Signifikanztest abgelehnt, so tritt ein Fehler 1. Art auf. Diesen kann man leicht abschätzen, da er von α abhängig ist. Schwieriger ist der Fall, dass der Test die Nullhypothese bestätigt, diese aber dennoch falsch ist. In diesem Fall spricht man von einem Fehler 2. Art oder einem Risiko 2. Art. Die Teilprogramme *Fehler 2. Art* berechnen die Wahrscheinlichkeit β des Risikos 2. Art und stellen diese grafisch dar.

Tritt ein Fehler 2. Art auf, ist die wirkliche Wahrscheinlichkeit p_1 nicht bekannt. Aus diesem Grund kann für jedes frei wählbare p_1 ein Risiko 2. Art berechnet werden. Zuerst wählen Sie an den Auswahlfeldern das konkrete Teilprogramm, d.h. ob der Test

- zweiseitig, rechtsseitig oder linksseitig

geführt werden soll. Danach geben Sie in den linken Feldern den *Stichprobenumfang* n, die absolute Häufigkeit k des Eintretens (*Objektzahl)*, die theoretische *Wahrscheinlichkeit* p_0 und die Irrtumswahrscheinlichkeit (*Signifikanz)*

α an.

Betätigen Sie den Schalter *Berechnung* oder die *RETURN*-Taste, führt das Programm einen Binomial-Signifikanztest durch, bestimmt den Annahmebereich und entscheidet über die Nullhypothese. Zusätzlich ermittelt das Teilprogramm nun für alle theoretischen Wahrscheinlichkeiten p_1 von 0 bis 1 die Wahrscheinlichkeit β eines Risikos 2. Art. In der grafischen Darstellung finden Sie die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Anmerkung: Wundern Sie sich nicht, dass das Risiko 2. Art teilweise extrem groß werden kann; bis zu 100%. Naheliegend ist es, die Irrtumswahrscheinlichkeit α so zu verändern, dass auch das Risiko 2. Art β kleiner wird. Dies ist nicht möglich. Verringern Sie α, das Risiko 1. Art, so steigt aber β; andererseits soll β sinken, steigt nun der Irrtum α . Die einzige Chance beide Fehlerarten zu senken, besteht darin, den Stichprobenumfang zu erhöhen.

Dieses Ergebnis muss auch als Warnung vor statistischen Erhebungen angesehen werden. Glaubt man, mit vielleicht 10 bis 50 Testobjekten eine aussagekräftige Analyse abgeben zu können, so sei darauf hingewiesen, dass bei einem derartig kleinen Stichprobenumfang das Risiko 2. Art fast immer im Bereich von über 90% liegt. Das bedeutet, jede statistische Erhebung oder Umfrage, bei welcher der Stichprobenumfang nicht veröffentlicht wird, ist praktisch wertlos!

11. Chaostheorie

"Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."
„Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz."
Hardy

Seit Benoit Mandelbrot 1980 seine berühmte Figur, die später von der Bremer Forschungsgruppe für komplexe Dynamik "Apfelmännchen" genannt wurde, fand, faszinieren grafische Veranschaulichungen fraktaler Gebilde. Fraktale sind nicht mehr durch herkömmliche Begriffe wie Punkt, Linie, Fläche und Körper beschreibbar. Vielmehr sind sie mit einer Breite 0 unendlich lang, wobei sie sich durch Selbstähnlichkeit auszeichnen. Ordnung geht dabei in Chaos über, wodurch Länge oder Flächeninhalt nicht mehr bestimmbar sind. Komplexe Iterationsgleichungen und Vereinbarungen über Iterationstiefe und Grenzwerte erzeugen so verblüffende grafische Gebilde.

In diesem Programmteil können Sie eine Vielzahl interessanter Teilprogramme zu diesem modernen Zweig der Mathematik und Informatik nutzen.

11.1 Fraktaldarstellung

In allen Teilprogrammen können Sie die Schalter der rechts oben befindlichen Leiste nutzen:

Darstellung neu zeichnen
Simulation der Farbrotationen starten und stoppen
Steuerelemente ein- und ausschalten
y-Auflösung an den x-Maßstab anpassen

Grafische Darstellung

Jedes der Fraktale wird grafisch veranschaulicht. Dabei wird bei Mandelbrot- und Juliamengen, Feigenbaum-Diagrammen, Attraktoren, iterativen Systemen und IFS-Fraktalen ein Koordinatensystem zugrunde gelegt.
Die Größe des Koordinatensystems können Sie in den Eingabezeilen *x1 =, x2 =, y1=* und *x2 =* festlegen. Nach Quittierung mit dem Schalter *Darstellung* werden die Werte übernommen und das Fraktal im Abszissenintervall [x1, x2] neu gezeichnet.

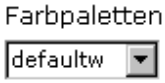
Darüber hinaus können Sie weitere sechs Schalter zur Steuerung nutzen. Klicken Sie auf die Schalter und , so wird die Größe des Darstellungsintervalls verkleinert oder vergrößert. Ein Klick auf stellt die Grundeinstellung wieder her.
Weiterhin können Sie durch Mausklick auf einen der vier Pfeilschalter in der

Schalterleiste das Koordinatensystem nach links, rechts, oben oder unten verschieben. Die Festlegung des Darstellungsintervalls für die Abszisse bzw. Ordinate erfolgt auch sehr schnell mittels Maus.

Ein neues Darstellungsintervall erreichen Sie durch Ziehen eines Rahmens innerhalb des Grafikfensters. Betätigen Sie die linke Maustaste und bewegen Sie die Maus (Maustaste weiterhin festhalten!), so erscheint ein Rahmen, der das neue Intervall kennzeichnet. Nach dem Loslassen der Tasten wird der im Rahmen sichtbare Bereich auf die Fenstergröße vergrößert.
Wichtig ist ebenfalls der Schalter . Haben Sie zum Beispiel die rechten Auswahllisten abgeschaltet, das Programmfenster auf die Bildschirmgröße maximiert oder haben Sie beim Aufziehen eines neuen Darstellungsintervalls eine wesentlich andere Auflösung in x-Richtung als in y-Richtung gewählt, so können Sie mit dem genannten Schalter die Intervallgröße in Abszissen- und Ordinatenrichtung angleichen. Klicken Sie auf , wird das y-Intervall entsprechend der Größe des Darstellungsfensters auf die Größe in x-Richtung angepasst und das Fraktal neu gezeichnet.

Farbpalette

Fraktale Darstellungen leben vor allem von ihrem Farbreichtum. Zur Gestaltung der Abbildungen können Sie vor dem Zeichnen des Fraktals an der aufklappbaren Liste *Farbpaletten* eine besondere Farbgestaltung auswählen. Voreingestellt ist die Palette *defaultw*, welche die Windows-Standardfarben benutzt.



Wählen Sie eine andere Farbpalette aus, z.B. *Neon*, *Vertigo* oder *Argon*, so können Sie faszinierende Darstellungen erhalten. An der aufklappbaren Liste der Farbpalettennamen können Sie einen Wert verändern. Mit diesem werden die einzelnen Farben der Palette untereinander verschoben, wodurch sich weitere Farbgestaltungsmöglichkeiten ergeben.
Über die Vielfalt der Farbmöglichkeiten können Sie sich auch im Teilprogramm *Abbildungen* bei der Betrachtung gespeicherter Fraktale informieren.

Farbrotation

In mehreren Teilprogrammen wird auf der linken Seite ein *Farbrotation*-Schalter eingeblendet.

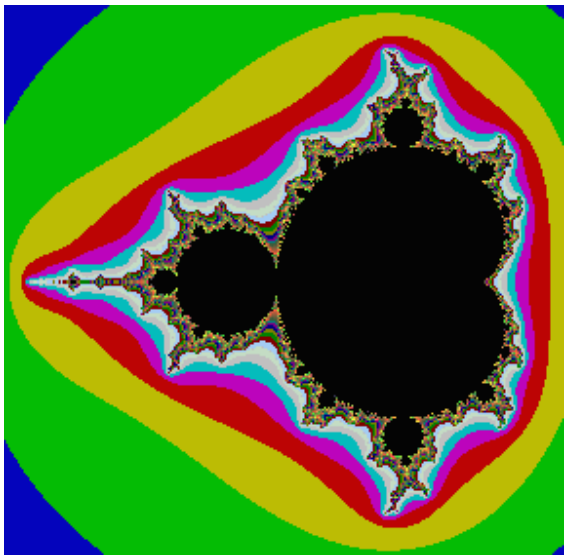
In diesem Fall können Sie eine Besonderheit nutzen: eine Rotation der zum Zeichnen des Fraktals genutzten Farben. Klicken Sie auf diesen Schalter, werden die 256 verwendeten Farben in schneller Folge zyklisch vertauscht. Dadurch entstehen sehr interessante Animationen, die den Eindruck der Fraktale vertiefen – es scheint, als ob die Farben "nach außen oder innen laufen" würden.

In dem Eingabebereich links neben dem Schalter können Sie die Geschwindigkeit des Farbtauschens regulieren. Erhöhen Sie den Wert, so werden die Farben mit einer Zeitverzögerung vertauscht, nutzen Sie einen kleinen Wert, so erfolgt der

Tausch sehr schnell.
Stellen Sie einen negativen Wert ein, so laufen die Farben nicht mehr nach außen, sondern nach innen.

Während diese Farbrotation bei einer Windows-Farbtiefe von 256 Farben eine einfach zu nutzende Eigenschaft von Windows ist, ist sie bei modernen True-Color-Auflösungen sehr anspruchsvoll. Dieses Programm gehört zu den wenigen Softwarelösungen, die diese Animation der Farben auch auf modernen Computern realisieren.

11.2 Mandelbrotmenge



Mandelbrot untersuchte die Funktion $y = x^z + 1$ in der komplexen Zahlenebene, wobei jede komplexe Zahl als Paar zweier Koordinaten x und y in der Gaußschen Ebene benutzt wird. Als Iterationsgleichung ergibt sich $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Überträgt man dies in den komplexen Zahlenbereich, erhält man:

$z = x + y \cdot i$ und $c = c_{reell} + c_{imaginär}$, d.h.
$f(z_n) = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + c_{reell} + i\,(2\,x_{n-1}\,y_{n-1} + c_{imaginär})$

Wird die Iteration mit den Startwerten x = y = 0 begonnen und die Iteration entweder nach einer gewissen Anzahl von Iterationen oder nach der Überschreitung eines Abbruchwertes durch den Betrag der komplexen Zahl abgebrochen, erhält man das berühmte Apfelmännchen (Mandelbrotmenge):

Abbildung: "Apfelmännchen" für -0,8 < x < 1,8; -1 < y < 1; 100 Iterationen und Abbruchwert 4

Der Anfangswert z_0 der Iteration wird aus der komplexen Zahl 0 + 0i gebildet. Für die Entscheidung, ob die Iteration bei gegebenem Wert c konvergiert oder divergiert, müsste der zugehörige Grenzwert gebildet werden. Da dies aber nicht möglich ist, behilft man sich, indem man eine obere Grenze und eine maximale Iterationszahl (*Iterationen)* festlegt.

Überschreitet die Iteration – genauer der Betrag der iterierten Größe z – auch nur einmal diese obere Grenze, geht man davon aus, dass eine Divergenz vorliegt. Wird im Laufe der maximalen Zahl von Iterationsschritten dieser Wert nicht überschritten, vermutet man eine Konvergenz. Für die voreingestellte obere Grenze = 4 ist übrigens nachgewiesen, dass tatsächlich bei einmaligem Überschreiten des Wertes eine Divergenz vorliegt.

Im Programm können Sie als zusätzliche Fraktale modifizierte Mandelbrotmengen sowie weitere Fraktale nutzen. Eine Beschreibung der weiteren Fraktale finden Sie im Lexikon des Programms.

Die eigentliche Mandelbrotmenge besteht aus dem schwarz gefärbten Innenbereich, für dessen Punkte die Iteration nicht divergiert.
Auch der Konvergenzbereich kann farbig dargestellt werden. Markieren Sie das Feld *Farbverlauf*, zeichnet das Programm für die Mandelbrotmenge in Abhängigkeit von dem nach der Iteration erreichten Funktionswert farbige Punkte.

Inversionsdarstellung

Markieren Sie das Feld *Inversionskurve*, so ermittelt das Programm die am Ursprungskreis mit dem Radius 1 invertierte Darstellung. Dabei entstehen teilweise sehr verblüffende Ergebnisse.

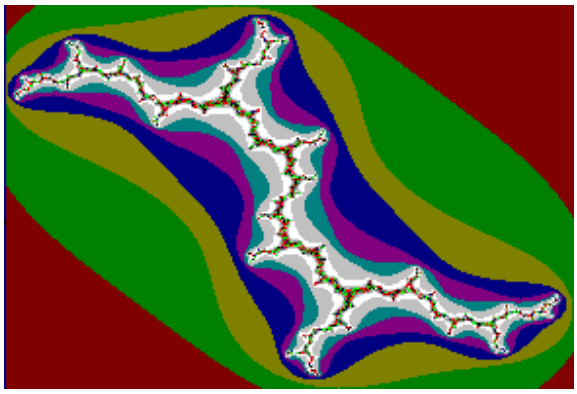
Verbindung zu Juliamengen

Zu jedem Punkt der Mandelbrotmengendarstellung existiert eine Juliamenge. Klicken Sie mit der Maus rechts auf die Mandelbrotmenge, übernimmt des Programm die Punktkoordinaten, schaltet zur entsprechenden Juliamenge um und stellt diese dar. Mit einem erneuten rechten Mausklick gelangen Sie zum Apfelmännchen zurück.
Beachten Sie bitte, dass dies nur bei dem Original-Apfelmännchen und den Varianten $z^3 + c$ und $z^4 + c$ möglich ist.

11.3 Juliamengen

Die unter Mandelbrotmenge genannten Fraktaltypen können auch als sogenannte Juliamengen dargestellt werden.

Die zugehörige Grundidee wurde schon vor 80 Jahren – allerdings ohne großes Interesse bei seinen Zeitgenossen zu wecken – von dem französischen Mathematiker Gaston Julia entwickelt. Da ihm aber noch keine rechentechnischen Hilfsmittel zur Verfügung standen, konnte er die Schönheit und Faszination seiner Mengen auch noch nicht bewundern.



Während bei der Mandelbrotmenge – jeweils vom Startpunkt z=(0;0) ausgehend – die Färbung des Pixels durch die veränderliche Konstante c (Koordinaten des Punktes) bestimmt wird, bleibt nun die zur Iteration wichtige Konstante c tatsächlich konstant. Als Startwert z werden die Punktkoordinaten der Gaußschen Zahlenebene

genutzt.

Abbildung: Juliamenge z^2+c für 100 Iterationen; Konstante c = i, d.h. $c_{reell} = 0$, $c_{imaginär} = 1$

Damit führt jeder Wert c zu einer eigenen Juliamenge – mit verblüffenden Ergebnissen. Zu einer Mandelbrotmenge existieren damit unendlich viele verschiedene Juliamengen. In den Eingabezeilen *reell* und *imaginär* legen Sie den reellen und imaginären Teil von c fest.

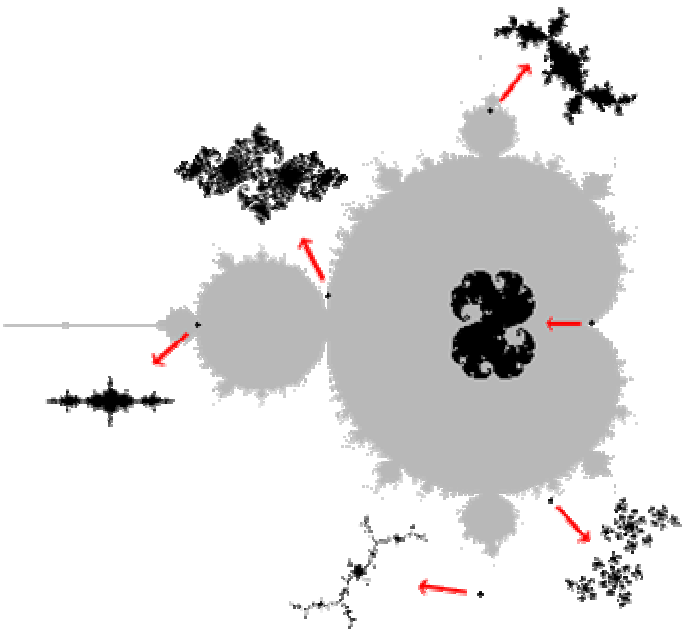
Streng genommen versteht man unter der Juliamenge nur die Punkte der Koordinatenebene, für welche die Iteration nicht den Abbruchwert überschreitet, also konvergiert.

11.4 Beziehung Mandelbrot-Julia-Mengen

Mit dem Apfelmännchen sind weitere Fraktale verwandt: die sogenannten Juliamengen.

Die Berechnung einer Juliamenge unterscheidet sich nur in der Addition der Konstanten c. Während beim Apfelmännchen für jeden zu berechnenden Bildpunkt eine andere Konstante verwendet wird, nämlich die komplexe Koordinate des zu berechnenden Punktes, ist die Konstante c bei der Juliamenge für jeden Punkt gleich. D.h.:

z_0 ist weiterhin der Punkt, dessen Farbe bestimmt werden soll,
c ist jedoch unabhängig von dem zu berechnenden Punkt.



Durch Variation der Konstanten c kann sehr unterschiedliche Juliamengen erhalten. Dabei gilt:

- Wird der Wert aus dem schwarzen Bereich des Apfelmännchens gewählt, so entstehen zusammenhängende Gebilde.
- Wird ein Wert außerhalb gewählt, entstehen mehrere nicht miteinander verbundene Gebilde.

Die interessantesten Formen entstehen, wenn man c aus dem Rand des Apfelmännchens wählt.

Faszinierend ist der Übergang an der Grenze des schwarzen Bereichs: Während

zuerst ein zusammenhängendes Gebiet zu sehen ist, löst sich dieses immer mehr auf, bis schließlich getrennte Bereiche zu erkennen sind.

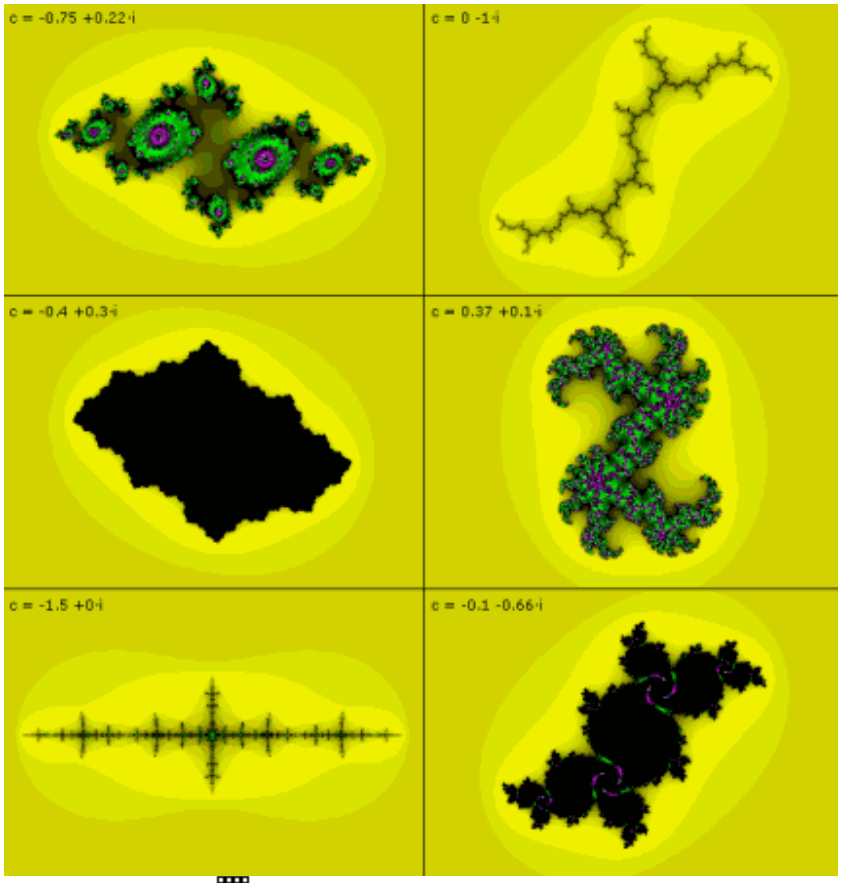
Diese Beziehung zwischen Mandelbrotmenge und den zugehörigen Juliamengen kann in diesem Teilprogramm untersucht werden.

In der dargestellten Mandelbrotmenge sind sechs rote Punkte eingezeichnet. Diese beschreiben die Koordinaten von sechs entsprechenden Juliamengen. Die Punkte können mit der Maus verschoben werden. Außerdem können Sie die Koordinaten auch direkt in die Tabelle eintragen.

Wählen Sie *Juliamengen zeichnen*, so zeichnet das Programm die sechs Juliamengen.

Beachten Sie bitte: Die sehr komplexe Berechnung erfordert auch auf schnellen Computern einige Zeit.

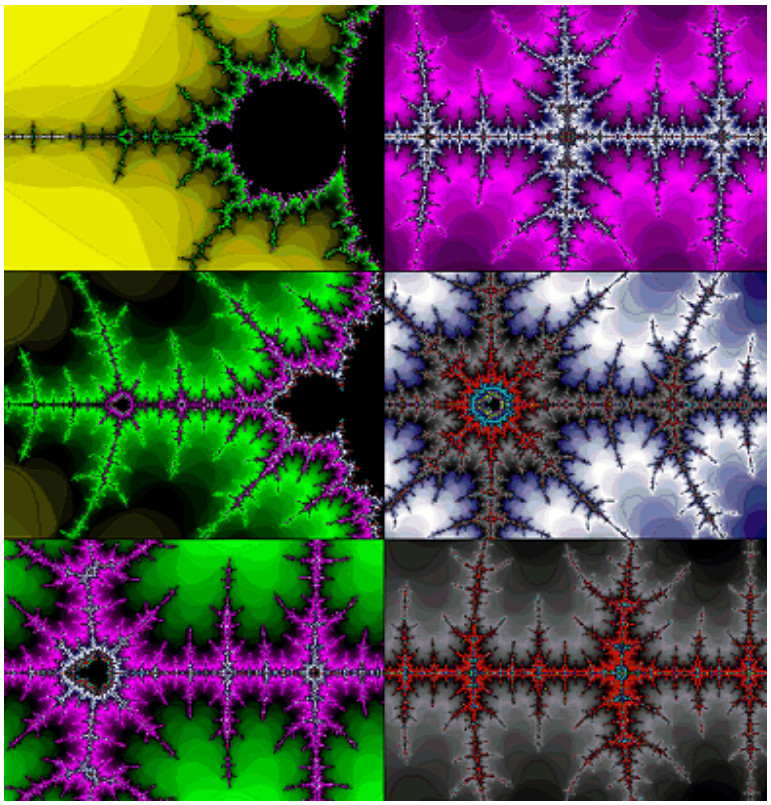
Animation der Juliamengen



Verschieben Sie einen der Punkte in der Mandelbrotmenge und haben Sie das Feld *bei Ziehen sofort zeichnen* markiert, so können Sie die Änderung unmittelbar nachvollziehen.

Auch diese Darstellung erfordert die volle Leistung Ihres Prozessors. Auf etwas langsameren Computern kann es daher zu einer ruckartigen Bewegung kommen.

Punkt 1 kann zusätzlich automatisch verschoben werden. Diese Animation starten und stoppen Sie über den Schalter .
An der aufklappbaren Liste können Sie wählen, wie Punkt 1 bewegt wird. Insbesondere die oben beschriebene Bewegung auf der Kardioide des Apfelmännchens ist sehr interessant.



11.5 Vergrößerungen an der Mandelbrotmenge

Besonders schöne Fraktale erhalten Sie in den Teilprogrammen Apfelmännchen, Juliamengen und deren Verbindung miteinander unter Mandelbrot-Julia-Mengen.

Im vierten Teilprogramm zu diesem Thema können Sie an der Mandelbrotmenge $z^2 + c$, dem Apfelmännchen, Vergrößerungen zeichnen lassen.

In der links dargestellten Mandelbrotmenge befindet sich ein roter Punkt. Dieser beschreibt die Koordinaten des Mittelpunktes aller zu zeichnenden Vergrößerungen. Diesen Punkt können Sie mit der Maus verschieben oder in die Eingabefelder *Zielpunkt* dessen Koordinaten direkt eintragen.

Zielpunkt x = -1,41, y = 0

Wählen Sie *Vergrößerungen zeichnen*, so konstruiert das Programm sechs Ausschnitte der Mandelbrotmenge. Die zugehörigen Vergrößerungsfaktoren können in der Tabelle verändert werden. Der größtmögliche Faktor ist 100 Millionen!

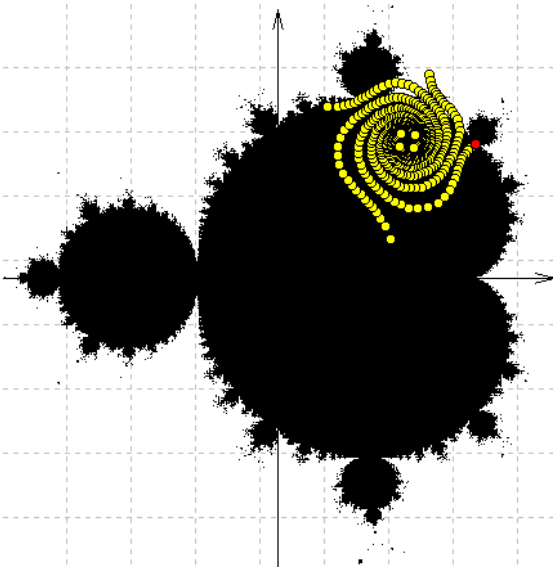
Beachten Sie bitte: Die sehr komplexen Berechnungen und Darstellungen erfordern auch auf schnellen Computern einige Zeit. Unter Umständen kann dies sogar sehr lange dauern, insbesondere wenn Sie einen Zielpunkt gewählt haben, der sich in einem Konvergenzbereich befindet. Abbrechen können Sie mit dem entsprechenden Schalter.

11.6 Mandelbrotmengen-Folge

Grafische Veranschaulichungen fraktaler Gebilde üben auch auf den mathematischen Laien eine merkwürdige Faszination aus. Insbesondere das Mandelbrotsche Apfelmännchen wird gern und häufig gezeichnet.

Mandelbrot untersuchte die Funktion $y = x^z + 1$ in der komplexen Zahlenebene,

wobei jede komplexe Zahl als Paar zweier Koordinaten x und y in der Gaußschen Ebene benutzt wird. Diese komplexe Zahl wird einer Iteration mit der Iterationsgleichung $z_n = z_{n-1}^2 + c$ unterzogen. Überträgt man dies in den komplexen Zahlenbereich, erhält man $z = x + y\,i$ und $c = c_{reell} + c_{imaginär}$, d.h. $f(z_n) = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + c_{reell} + i\,(2\,x_{n-1}y_n\text{-}1 + c_{imaginär})$



Je nach Startwert verhält sich die entstehende Zahlenfolge verschieden. Zum einen können die Glieder sehr schnell große Beträge erreichen und die Folge divergiert. Zum anderen kann diese Folge einen echten Grenzwert besitzen bzw. zwischen zwei, vier oder mehreren Werten oszillieren.

Divergiert die Folge für einen Startwert $z = x + y\,i$ nicht, so gehört z zur eigentlichen Mandelbrotmenge. Diese wird sehr oft schwarz dargestellt.

In diesem Teilprogramm veranschaulicht das Programm Ihnen das Verhalten dieser Folge. Klicken Sie auf die Darstellungsfläche, so übernimmt das Programm den Punkt als Startwert und berechnet die ersten Glieder der Mandelbrotfolge. Die Anzahl der Glieder stellen Sie am Rollbalken ein.

Die berechneten Zahlen werden ebenfalls in der Darstellung angezeigt. Im Beispiel sehen Sie, dass sich die Glieder, beginnend bei dem roten Kreis, einem Punkt der Mandelbrotmenge von vier Seiten annähern. Für diesen Anfangswert konvergiert die Folge.
Klicken Sie nun auf den roten Startpunkt und verschieben diesen, so können Sie deutlich nachvollziehen, dass Startpunkte innerhalb der schwarzen Mandelbrotmenge auch zu Zielpunkten in der Menge führen.

Die Simulation bewirkt in dem Teilprogramm *Mandelbrotfolge* eine kontinuierliche Verschiebung des ausgewählten Punktes von links nach rechts durch das Koordinatensystem.
Markieren Sie das Feld *Tabelle anzeigen*, so sehen Sie eine Tabelle, die die Koordinaten des Startpunktes und die ersten 14 berechneten Iterationspunkte enthält. Die Startkoordinaten können Sie direkt eintragen. Klicken Sie dazu auf das zu ändernde Feld, tragen Sie den neuen Wert ein und bestätigen Sie mit der *TAB*-Taste.

11.7 Fraktale Abbildungen

„Die Mehrheit bringt der Mathematik Gefühle entgegen, wie sie nach Aristoteles durch die Tragödie geweckt werden sollen, nämlich Mitleid und Furcht. Mitleid mit denen, die sich mit der Mathematik plagen müssen, und Furcht, dass

man selbst einmal in diese gefährliche Lage geraten könne."
Paul Epstein

Das Programm enthält neben vielen Berechnungsmöglichkeiten und dem Lexikon auch eine Vielzahl von Abbildungen, Skizzen und Fotos. Unter diesem Punkt rufen Sie ein Teilprogramm auf, welches Ihnen einige zusätzliche Abbildungen fraktaler Objekte anzeigt.

Zwischen den einzelnen Abbildungen schalten Sie mit den Aktionsschaltern und oberhalb des Fensters oder den Tasten bzw. weiter.
Weiterhin finden Sie im rechten Teil eine Liste mit den Titeln der Bilder. Diese Liste können Sie über den Schalter *Bildliste* zu- und abschalten.

Fraktalshow

Klicken Sie auf den Abspiel-Schalter, so beginnt das Programm mit der kontinuierlichen Anzeige von außergewöhnlich schönen, faszinierenden Abbildungen von Fraktalen.
Die Mehrzahl wurde mit diesem Programm gezeichnet und abgespeichert.
Die angezeigte Abbildung wird jede Sekunde verändert. Abbrechen können Sie diese „Show der Fraktale", in dem Sie auf einen beliebigen Schalter der Aktionsschalterleiste klicken.

Klicken Sie auf den Schalter , der eine Uhr zeigt, so wird ein Rollbalken sichtbar, an dem Sie das Zeitintervall von 0,2 bis 10 Sekunden für zwei Abbildungen einstellen können. Ein erneuter Klick auf den Schalter verbirgt den Rollbalken wieder.

11.8 Kreisfraktale, Circle-Fraktale

Sehr interessante und vor allem farbenprächtige Abbildungen erhält man, wenn die von Connett beschriebene Konstruktionsmöglichkeit genutzt wird.
Connett konstruierte seine Fraktale nach folgender Vorschrift:

Betrachtet wird die Gaußsche Zahlenebene und die Koordinaten eines Punktes werden als komplexer Startwert $x + i \cdot y$ festgelegt. Der Funktionswert wird mit $z = a\,(x^2 + y^2)$ berechnet. Dabei stellt a eine beliebige Konstante dar.

Die Farbe des Pixels wird anschließend aus dem ganzzahligen Anteil von z modulo einer einzugebenden Farbanzahl gebildet (Eingabezeile *Codierung* und *Farbanzahl*).
In diesem Teilprogramm wurde die Konstruktion der Kreisfraktale dahingehend erweitert, dass Sie auch andere Berechnungsvorschriften testen können. Diese

tragen Sie unter *Typ* ein oder Sie wählen einen Eintrag aus der rechten Liste der Kreisfraktale.

Inversionsdarstellung

Markieren Sie das Feld *Inversionskurve*, so ermittelt das Programm die am Ursprungskreis mit dem Radius 1 invertierte Darstellung. Dabei entstehen teilweise noch interessantere Abbildungen.

11.9 Iterated Function System

„Das wird ja immer merkwürderlicher !" schrie Alice
Lewis Carroll, „Alice im Wunderland"

Michael Barnsley (Georgia Institute of Technology) entwickelte ein spezielles Verfahren zur Kompression von Darstellungen natürlicher Gebilde auf der Basis von Fraktalen. Prinzipiell kann für jede Darstellung eine Fraktal-Kompression (Iterated Function System) gefunden werden.

Das Programm enthält über 40 verschiedene Fraktale des Typs IFS, u.a. Fern (zu Deutsch: Farn), dessen Bild die Darstellung eines Farns simuliert.

Zweidimensionale IFS entstehen durch multiplikative Verknüpfung quadratischer Matrizen mit Spaltenvektoren (affine Transformationen). Die jeweilige Matrix des Index i wird durch zufällige Wahl aus einer gewissen Grundgesamtheit gebildet. Das obige Gebilde eines Farns entsteht durch die Parameter (Parameter der affinen Transformation) der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

wobei x, y die Ausgangskoordinaten und x, und y, die Bildkoordinaten sind mit den Parametern:

a(i)	0,85	0,2	-0,15	0
b(i)	0,04	-0,26	0,28	0
c(i)	-0,04	0,26	0,23	0
d(i)	0,85	0,22	0,24	0,16
e(i)	0	0	0	0
f(i)	1,6	1,6	0,44	0

Für die grafische Darstellung wählen Sie den entsprechenden Schalter. Die Anzahl der Iterationen können Sie in der Eingabezeile (Vorgabe 200000) verändern. Die Darstellung kann verschiedenfarbig erfolgen. Voreingestellt ist, dass aller 100 Iterationen zufällig eine neue Farbe genutzt wird.

Interessant ist es auch, sich die Wirkung der einzelnen affinen Abbildungen veranschaulichen zu lassen. Markieren Sie dazu den Punkt *farbige Abbildung darstellen.*

Wollen Sie nur eine der Abbildungen hervorheben, so markieren Sie in der Tabelle der Parameter die entsprechende Abbildung.
Optisch anspruchsvolle Abbildungen erhalten Sie auch, wenn Sie den Zeichenhintergrund auf Schwarz schalten.

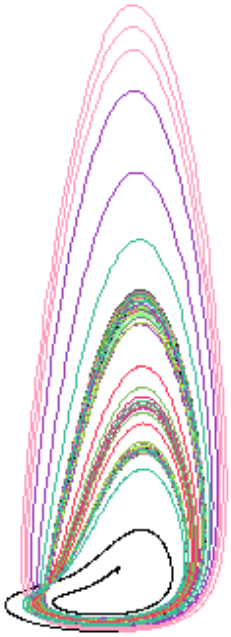
Die besondere Bedeutung von IFS besteht in der Möglichkeit, beliebige Bilder auf diese Weise zu komprimieren. Die Problematik besteht im Auffinden der entsprechenden affinen Transformationen (es gibt unendlich viele!). Das von Barnsley entwickelte Computerprogramm "POEM Images Incorporated" erreicht Komprimierungsraten über dem Faktor 100.

Verändern der IFS-Tabelle

Wählen Sie ein IFS-System, zeigt Ihnen das Programm die entsprechende Matrixtabelle an. Möchten Sie etwas "experimentieren", dann verändern Sie einzelne Werte und beobachten die Veränderung der Darstellung.
Die IFS-Tabelle können Sie über das Markierungsfeld *Editor abschalten* zu- und wegschalten.

11.10 Iterative Systeme

Seltsame Kurven, sogenannte Attraktoren (seltsame Attraktoren, strange attractors) ergeben sich z.B. bei der Darstellung numerischer Lösungen von Systemen dreier gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. der punktweisen Darstellung rekursiver Folgen. Das Programm ermöglicht gegenwärtig das Zeichnen von über 25 Attraktoren und iterativen Systemen.



Der Rössler-Attraktor wird durch das Gleichungssystem

- dx / dt = - y - z
- dy / dt = x + a * y
- dz / dt = b * x - c * z + x * z

gebildet.

Der deutsche Mediziner Otto Rössler fand dieses System, nachdem er von Lorenz und seinem Attraktor erfuhr. Über seinen Attraktor sagt er selbst:

"Er ist wie ein offener Strumpf mit einem Loch am Ende und der Wind bläht ihn auf. Dann sitzt der Wind in der Falle. Gegen ihren Willen bewirkt die Energie nun etwas Produktives, so, wie der Teufel in mittelalterlichen Geschichten. Das Prinzip ist, dass die Natur etwas gegen ihren eigenen Willen tut und durch Selbstverwirklichung Schönheit hervorruft."

Als Startwerte wurden a = 0,41, b = 0,1 und c = 2,2 verwendet. In dem Feld *Iterationszahl* legen Sie die Anzahl der durchzuführenden Iterationsschritte fest.

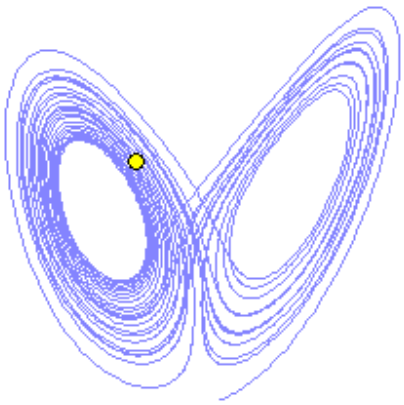
Voreingestellt sind 10000. Während das obige Beispiel die Projektion des Rössler-Attraktors in die x-z-Ebene darstellt, erhalten Sie mittels *Rössler (y-z-Ebene)* und *Rössler (x-y-Ebene)* die anderen zwei ebenen Projektionen. Wählen Sie *Rössler 3D*, erhalten Sie eine räumliche Darstellung des Attraktor-Verlaufs.

Lorenz-Attraktor, Saltzmann-Lorenz-Attraktor und Tomita-Attraktor entstehen durch verschiedene Systeme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Der Lorenz-Attraktor kann (bei Wahl entsprechender Parameter, z.B. a = 10, b = 28 und c = 2,5) in zwei markante Bereiche eingeteilt werden. Meist verweilt die Kurve längere Zeit in einem Bereich, um dann plötzlich und unvorhersehbar die Seite zu wechseln. Dieses chaotische Verhalten ist gut zu beobachten. Der Lorenz-Attraktor stellt eine sehr gute Simulation der Bewegung einer Masse in einem von zwei weiteren (größeren) Massen aufgespannten Gravitationsfeld dar. Gefunden wurde dieses Fraktal durch Lorenz bei der Simulation von Wettervorhersagesystemen und ging unter der Bezeichnung "Schmetterlingseffekt" in die mathematische Geschichte ein.

Lorenz- und Saltzmann-Lorenz-Attraktor können Sie erneut in verschiedenen ebenen Projektionen zeichnen lassen.

Henon-, Hopalong-, Martin- und Gingerbread-Attraktor entstehen durch die Darstellung der Punktmengen zweier rekursiver Zahlenfolgen.
Der Kamtorus-Attraktor stellt eine Serie von Attraktoren dar. Je Attraktor werden im Parameter a eingestellte Punkte gezeichnet. Parameter b gibt an, um welchen Wert der Start des nächsten Attraktors erhöht werden soll. Ausgangspunkt dieses Gebildes ist die quadratische Henon-Gleichung. Der Name "Kamtorus" bezieht sich auf das KAM-Theorem (Kolmogorov (1954), Arnold (1963), Moser (1973)). Ästhetisch sehr schöne Bilder erhalten Sie für die Parameter c = 1,3 bzw. c = 1,5732

Unter A tragen Sie die Punktzahl je Einzelattraktor ein, unter B die Schrittweite zwischen den Einzelkurven. Unter der Bezeichnung Martin 2 können Sie einen Attraktor wählen, für den ein interessanter Verlauf für Parameter nahe PI auftritt. In der grafischen Darstellung werden standardmäßig 10000 Iterationen gezeichnet. Dieser Wert kann bis zu 2 Milliarden erweitert werden, verlängert die Rechenzeit dann aber erheblich. Wählen Sie einen Attraktor, stellt das Programm günstige Parameter ein.



11.11 Schmetterlingseffekt

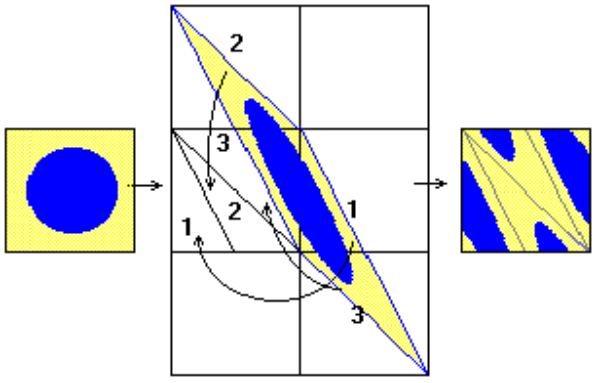
Als Schmetterlingseffekt (butterfly effect) ist die Erscheinung, dass in komplexen, nichtlinearen dynamischen Systemen eine große Empfindlichkeit auf kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen besteht. Geringfügig veränderte Anfangsbedingungen können im langfristigen Verlauf zu einer völlig anderen Entwicklung führen.

Der Begriff Schmetterlingseffekt stammt von dem US-amerikanischen Meteorologen Edward N.Lorenz, der 1972 in einem Vortrag über ein meteorologisches Berechnungssystem mit der Frage "Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen?" für Aufsehen sorgte. Ursprünglich sprach Lorenz aber vom Flügelschlag einer Möwe statt eines Schmetterlings.
Die Fragestellung ist unklug gewählt, da viele Menschen den Schmetterlingseffekt als Synonym für einen Schneeballeffekt ansehen, bei dem kleine Effekte sich über eine Kettenreaktion selbst verstärken.
Diese Aussage hat Lorenz nicht getroffen. Vielmehr zeigte er, dass kleine Abweichungen langfristig ein ganzes System vollständig und unvorhersagbar verändern können.

Bei einer ersten Berechnung seines Lorenz-Attraktors (Abbildung) verwendete er einen auf sechs Stellen genauen Wert, bei der zweiten Berechnung einen auf drei Stellen genauen.
Obwohl die Abweichung nur etwa 1/10000 betrug, wich die Berechnung mit der Zeit von der ersten stark ab. Diesen Effekt können Sie in diesem Teilprogramm nachvollziehen.

Klicken Sie auf Animation, zeichnet das Programm links und rechts den Verlauf des Lorenz-Attraktors. Beide Darstellungen unterscheiden sich nur dadurch, dass rechts der Startwert für x um 0,0001 größer gewählt wurde.
Zu Beginn nimmt man keinen Unterschied wahr. Im Laufe der Berechnung tritt ab einem (von den Parametern abhängigen) Moment jedoch ein deutlicher Unterschied ein. Während z.B. in der linken Darstellung die Zeichnung im linken Teil des Attraktors erfolgt kann es rechts entgegengesetzt sein.
Die Animation stoppt automatisch nach 10000 Berechnungsschritten.

11.12 Poincaré-Transformation



Die Grundlage der heutigen Chaosforschung wurde u.a. von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré (1854-1912) gelegt. Seine Idee besteht darin, mathematische Gebilde (Bilder) durch affine Transformationen zu entwickeln. Dabei wird das Bild "verzerrt", in Teilflächen zerlegt und diese Teilflächen werden wieder zusammengesetzt. Einzige Forderung ist, dass der Flächeninhalt erhalten bleibt.

Wiederholt man diese Transformationen ständig, entstehen kuriose Bilder, die zu dem berühmten Ausspruch Poincarés führten: "Diese Dinge sind so bizarr, dass ich es nicht aushalte, weiter darüber nachzudenken."

Das Verblüffende ist, dass nach endlich vielen Transformationen (abhängig von der gewählten affinen Abbildung) das Originalbild wieder erscheint. Das zwischenzeitlich vorliegende "Chaos" ist damit offensichtlich deterministisch. Mathematisch wird bei jeder derartigen Transformation ein Bildpunkt mit den Koordinaten (x;y) mittels einer Transformationsmatrix verknüpft. Für die neuen Koordinaten erhält man: xneu = a * x + b* y und yneu = c * x + d * y. Die Transformationsmatrix ist beliebig wählbar, wobei zum Erhalt der Flächentreue der Betrag der Determinante gleich 1 sein muss, d.h. | a * d - b * c | = 1.

Im Programm können Sie eine entsprechende Matrix eingeben. Über den Schalter *Laden* wählen Sie ein beliebiges Bild im Bitmap-Format aus. Während des Ladevorgangs wird dieses auf die Bildgröße 250 x 250 Pixel gestaucht bzw. gestreckt und im linken Feld angezeigt.

Klicken Sie auf den Schalter **B**, lädt das Programm ein "verzerrtes" Bild. Dieses wurde mit der voreingestellten Matrix ($^{1}_{2}$ $^{1}_{1}$) manipuliert. Möchten Sie wissen, welches Ausgangsbild verwendet wurden, dann laden Sie diese Bitmaps, stellen Sie die Transformationsmatrix ein und starten Sie die Poincaré-Transformation. Nach einiger Zeit werden Sie das Original sehen können.

Nach *Zykluslänge* wird ein voraussichtlich notwendige Schrittzahl angegeben, um das Original wieder zu erhalten. In der Praxis ist die tatsächlich notwendige Schrittzahl bis zur "Wiederkehr" mitunter ein Vielfaches des Angegebenen. Obwohl die Transformation maschinennah programmiert wurde, benötigen derartige Transformation etwas Zeit. Möchten Sie nicht jeden einzelnen Schritt angezeigt haben, geben Sie unter *Schritte* eine andere Schrittweite ein. Abbrechen können Sie die Transformation durch einen Klick auf den Schalter *Stopp!!!*. In diesem Fall müssen Sie sich aber bitte etwas gedulden, da der Abbruch erst nach einer vollständigen Transformation erfolgt. Starten Sie erneut, wird prinzipiell die aktuelle linke Darstellung als Original benutzt.

Wenn Sie selbst "verschlüsselte" Bilder erzeugen und weitergeben möchten, so können Sie die Transformation mit dem Schalter *Stopp!!!* oder der *ESC-Taste* abbrechen und anschließend über die zwei Schalter entweder die linke oder die rechte Abbildung als Bitmap auf Ihrer Festplatte speichern.

Anmerkung: Da unendlich viele verschiedene Transformationsmatrizen existieren, können so praktisch Bildinformationen verschlüsselt werden. Nur mit großem Computeraufwand kann das Originalbild ohne Kenntnis der Matrix gewonnen werden.

Über die Verzerrung der Bilder hinaus kann dieser Programmteil auch für andere interessante Untersuchungen genutzt werden.
Laden Sie eine Abbildung und testen Sie die Matrix ($^{1000}_{1001}$ $^{999}_{1000}$). Das Ergebnis ist verblüffend und einige Überlegungen wert.

11.13 L-System (Lindenmayer-System)

Dieses Teilprogramm erlaubt einen Einblick in eine weitere Kategorie von Fraktalen: das L-System. Dieses System ermöglicht das Zeichnen von Fraktalen durch rekursive Definitionsgleichungen.

In Weiterführung der Ergebnisse von J.W. Backus, P. Naur und S. Ginsburg über kontextfreie Chomsky-Grammatiken entwickelte 1968 Aristid Lindenmayer die Theorie der L-Systeme.
In "The Fractal Geometry of Nature by Mandelbrot" wurden diese besonders durch Adrian Mariano verwirklicht. Eine Definitionsgleichung besteht aus einer Folge von Zeichen der Menge

- F , G, H, + , - , [,] , / , \ , <, > ! und | .

Hauptbefehl ist dabei F (für "forward"), der den eigentlichen Zeichenvorgang realisiert. Mariano nutzt darüber hinaus weitere Steuerzeichen, allerdings wird im Programm nur auf diese Grundmenge zurückgegriffen.
Die verwendete Syntax wurde in den Achtzigerjahren mithilfe der bekannten Befehle der Turtle-Grafik von S. Papert interpretiert. Dabei bedeutet:

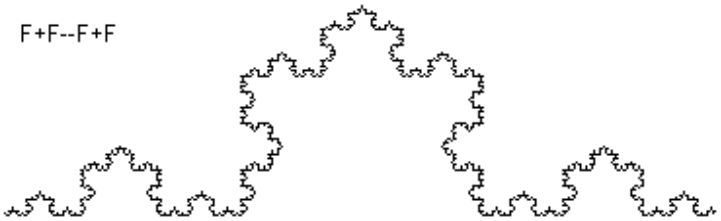
F	Zeichnen einer Linie
G	Bewegen ohne Zeichnen der Linie
H	Zeichnen einer Linie (äquivalent zu F)
X, Y, L, R, A, B	Variablen zur Beschreibung komplexerer L-Systeme
+	Drehung der Zeichenrichtung um einen Winkel nach oben
-	Drehung der Zeichenrichtung um einen Winkel nach unten
/nn	Drehung der Zeichenrichtung um den Winkel nn in Grad nach oben; nn kann als rationale Zahl mit Dezimalpunkt eingegeben werden
\nn	Drehung der Zeichenrichtung um den Winkel nn in Grad nach unten; nn kann als rationale Zahl mit Dezimalpunkt eingegeben werden
<nn	die Zeichenlänge wird mit dem Faktor nn/10 multipliziert
>nn	die Zeichenlänge wird mit dem Faktor nn/10 dividiert
@xx	die Zeichenlänge wird mit der Zahl xx multipliziert; nn kann als rationale Zahl mit Dezimalpunkt eingegeben werden
@Ixx	die Zeichenlänge wird mit der Zahl xx dividiert; nn kann als rationale Zahl mit Dezimalpunkt eingegeben werden (Für nn müssen stets 2 (!) Ziffern eingegeben werden)
|	Drehung der Zeichenrichtung um 180°
!	Vertauschen der Wirkung von +,- bzw. / und \
[	Speichern der aktuellen Zeichenposition (PUSH)
]	Einstellen der zuletzt abgespeicherten Zeichenposition (POP)
C	Änderung der Zeichenfarbe

Anmerkung: Der Faktor nn bei den Befehlen < und > kann zwischen 01 (Faktor 0,1) und 99 (Faktor 9,9) liegen. Zur Vermeidung von numerischen Problemen ist aber bei großen Faktoren Vorsicht geboten.

Da die Definitionsgleichungen in der einfachsten Form

F = f(F, G, +, -, [,], /, \, <, >, |, !)

gegeben werden, entsteht eine rekursive Vorschrift. Eine höhere Anzahl von *Iterationen* bewirkt ein immer stärkeres Ausbilden der typischen Fraktalform. Die Festlegung des Drehwinkels erfolgt in ganzzahligen Anteilen des Vollwinkels, d.h., Winkel 6 bewirkt jeweils eine Drehung um 60 Grad. Im Programm ist die Anzahl der Iterationen auf den Bereich von 1 bis 10 beschränkt.



Im Beispiel wurde eine von Kochsche Kurve mit fünf Iterationen und einem Winkel von 6 (60°) gezeichnet. Die Definitionsgleichung lautet: F = F + F -- F + F, d.h., nach dem Zeichnen einer Linie erfolgt eine Drehung um 60° nach oben, Zeichnen, Drehung um 120° nach unten, Zeichnen, Drehen um 60° nach oben, Zeichnen. Das Besondere an dieser Kurve und allen Kurven des L-Systems liegt in der Tatsache, dass ihr keine Bogenlänge im klassischen Sinne zugeordnet werden kann.

Beachten Sie bitte: Mit steigender Iterationstiefe wächst die notwendige Berechnungs- und Darstellungszeit exponentiell an. Abbrechen können Sie die Darstellung wie gewohnt durch Betätigung der *ESC*-Taste oder des Schalters *Abbruch!*

Ein Fraktal des L-Systems wird in diesem Programm im Darstellungsfenster stets so gezeichnet, dass es die volle Größe des Fensters nutzt, d.h. unabhängig von einem Koordinatensystem. In der Liste des L-Systems finden Sie rund 70 interessante Gebilde dieser Art.

Damit Sie selbst experimentieren können, besteht die Möglichkeit, Ihr eingegebenes Regelsystem in einer Bibliothek aufzubewahren. Beachten Sie aber bei der Festlegung des Fraktals, dass Sie den Drehwinkel im Bereich 3 bis 99 wählen. Zum Abspeichern klicken Sie auf den Schalter *Speichern*. Tragen Sie bitte vor dem Speichern einen typischen Namen ein.
Möchten Sie einen Eintrag wieder entfernen, so markieren Sie ihn und klicken mit der rechten Maustaste auf *Löschen*.

Erweitertes L-System

Die Definition eines Fraktals des L-Systems ist auch über die Festlegung des Axioms und mehrerer Ersetzungsregeln möglich. Damit können noch interessantere Gebilde grafisch erzeugt werden. Zum Beispiel definiert man ein Axiom in Abhängigkeit von F, G sowie X und Y und gibt Regeln für alle Größen an. Soll die nach Hilbert benannte Kurve gezeichnet werden, setzt man:

Axiom X
F = F
X = -YF+XFX+FY-
Y = +XF-YFY-FX+

Im Ergebnis erhalten Sie die Hilbert-Kurve.

Beachten Sie bitte, dass das Programm zur Darstellung der Kurven intern im Speicher die rekursive Ersetzung des Axioms aufbereitet. Erhöhen Sie die Rekursionstiefe, steigt zum einen die notwendige Rechenzeit (Abbruch jederzeit mit der *Stopp*-Taste), andernfalls kann unter Umständen der reservierte Speicher nicht ausreichen. In diesem Fall wird automatisch die vorhergehende Rekursionsstufe gezeichnet.

Darstellung mehrerer Iterationsstufen

Markieren Sie das Feld *4 Stufen*, so versucht das Programm, vier aufeinander folgende Iterationen des Fraktals zu zeichnen.
Dabei müssen Sie beachten, dass zum einen die Berechnungszeit stark ansteigen und zum anderen auch die maximale Iterationstiefe überschritten werden kann. Wollen Sie ein solches Bild als Metafile (siehe unten) weiterverarbeiten, kann dieses durchaus einige MByte (!) groß werden.

11.14 Kochkurve, Pythagoras-Baum, Dreiecksfaktal

Die drei Teilprogramme
- Kochkurve, Kochinsel
- Pythagoras-Baum
- Dreiecksfraktal und Blumenfraktal

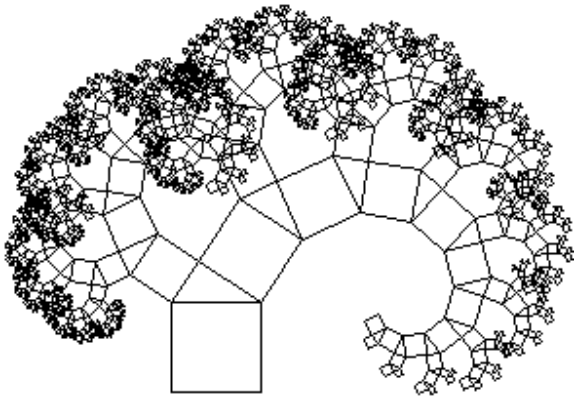
ermöglichen Ihnen die schrittweise Konstruktion dieser drei bekannten Fraktale.

Kochkurve

Im Jahre 1904 konstruierte der Stockholmer Mathematikprofessor Helge von Koch eine Kurve, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Aus dieser kann die Kochsche Schneeflocke zusammengesetzt werden.
Die Kochkurve ist streng selbstähnlich, d.h. man kann sie sich aus z = 4 Bausteinen aufgebaut denken, wobei jeder dieser Bausteine mit dem Steckfaktor

k = 3 gesteckt werden muss, um die selbst die Gestalt der ganzen Kochkurve anzunehmen. Interpretiert man die Kurve im L-System, so ist das erzeugende Axiom F → F+F--F+F.
Die Selbstähnlichkeitsdimension der Kochkurve ist d = log(z) / log(k) = log 4 / log 3 = 1,261859...

Für die Koch-Insel werden mehrere Kochkurven zusammengesetzt.



Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck. Auf jede Seite wird ein Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge in der Mitte platziert. Wird nur die äußere Berandung betrachtet und dieser Vorgang unendlich oft wiederholt, so entsteht die fraktale Kurve.

An den Auswahlfeldern können Sie an Stelle der ursprünglichen Kurve eine verschobene Kurve (Axiom F → F+F--F+FF) oder die Cesaro-Kurve (Axiom F → F+F-F-F+F) einstellen.

Pythagoras-Baum

Je nach Fraktal können Sie an dem Rollbalken neben *Iterationstiefe* weitere Parameter wie Winkel und Höhe einstellen.

Dreiecksfraktal

Bei diesem Fraktal werden in ein Einheitsquadrat fortlaufend Dreiecke derart eingefügt, dass die neuen Dreieckspunkte waagerecht zwischen benachbarten Punkten liegen und in der Senkrechte der Abstand zum oberen Rand halbiert wird.
Dadurch entsteht ein Gebilde, dass unendlich oft fortgesetzt werden kann und fraktalen Charakter besitzt.

Blumenfraktal

Bei diesem Fraktaltyp kann zusätzlich noch die Anzahl der Blütenblätter am Rollbalken gewählt werden.

11.15 Feigenbaum-Diagramm

Ist eine Gleichung der Form f(X) = 0 gegeben, so kann eine Nullstelle über Iteration, z.B. mit dem Newton-Verfahren, bestimmt werden. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt dabei entscheidend vom Startwert x0 ab. Allerdings gibt es auch Funktionen und Anfangswerte, bei denen die Iteration divergiert oder ganz andere Eigenschaften demonstriert.

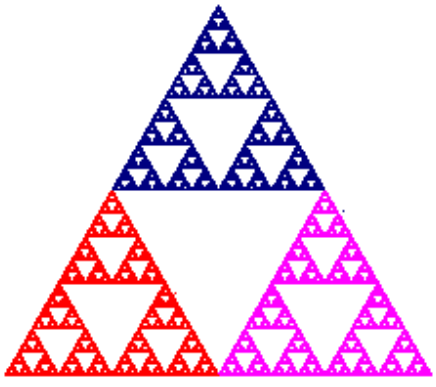
Zur Untersuchung dieses Verhaltens kann eine Funktion f(X,P) in das Eingabefeld *X* = eingegeben werden, bei der die Variable X als variabler Startwert und P als ein Parameter, über den die Iteration erfolgt, zu sehen ist.
Der Anfangswert für Parameter P muss unter *p* = festgelegt werden, ebenso die Anzahl der darzustellenden Iterationsschritte (Voreinstellung 50). Unter *Voriteration* ist die Anzahl der Iterationsschritte einzugeben, die zum Abfangen von Anfangsschwankungen vor dem Beginn der grafischen Darstellung durchgeführt werden, da das typische Verhalten der Konvergenz erst für relativ viele Schritte abgelesen werden kann. Während der grafischen Darstellung wird der Anfangswert X entsprechend dem eingestellten Darstellungsintervall verändert.

Anhand des Iterationsgraphen lässt sich das Verhalten der Funktion ablesen. Bereiche der Konvergenz – es entsteht nur 1 Funktionswert –, Bereiche der Periodizität (2, 4, 8, ... Werte) und chaotische Bereiche (Divergenz!) sind festzustellen.
Das Beispiel konvergiert von x = -1 bis x = 1. Ab x = 1,3 sind zuerst zwei, später vier Werte abzulesen, zwischen denen die Funktion oszilliert. Der Abstand zwischen den Punkten dieser Verdoppelung nimmt ständig um einen Faktor ab. Dieser strebt gegen einen Grenzwert:

- die Feigenbaum-Konstante = 4,6992016609102990 97...

Dieser Wert ist eine Naturkonstante und allem Anschein nach so bedeutend wie die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e. Ohne weiter darauf einzugehen, sei darauf hingewiesen, dass die Verzweigungspunkte (Bifurkationspunkte, von Lat. furca = gabel) gerade an den Stellen auftreten, an denen zugeordnete Mandelbrotmengen ihr Aussehen verändern. Die entstehenden grafischen Gebilde nennt man nach ihrem Entdecker Mitchell Feigenbaum "Feigenbaum-Diagramme".

11.16 Chaosspiel



Von Michael Barnsley wurde folgendes Chaosspiel erfunden:

Gegeben sind drei Punkte A, B und C eines gleichseitigen Dreiecks und zusätzlich ein beliebiger Punkt P1 der Zeichenebene. Als Nächstes wird ein beliebiger Eckpunkt des Dreiecks gewählt, z.B. C. Nun bildet man den Mittelpunkt P2 der Strecke von P1 nach C und markiert diesen. Erneut wird ein Dreieckspunkt, z.B. A gewählt und der Mittelpunkt P3 von P2 nach A gebildet und markiert usw. Ergebnis: das berühmte Sierpinski-Dreieck.

Interessant ist, dass dieses Chaosspiel auch für vier, fünf oder noch mehr Ausgangspunkte verblüffende Ergebnisse liefert. Dabei ist allerdings zu beachten,

dass nun nicht mehr die Strecke halbiert, sondern ein gewisser Abstand von den gefundenen Punkten P(i) gewählt wird. Für fünf Punkte beträgt er z.B. 62,4% der Gesamtstrecke, für sechs Punkte 66,67%. Verallgemeinert man dies auf n Ausgangspunkte, so ergibt sich ein guter Näherungswert zu n / (n + 3).

Dieses Teilprogramm ermöglicht Ihnen die Simulation des Chaosspiels. Geben Sie unter *Punktzahl* die Zahl der Ausgangspunkte und unter *Codierung* den Faktor zur Ermittlung des jeweils neuen Punktes an, also für drei Punkte z.B. 0,5. Allerdings ist auch jeder andere Wert größer als 0 und kleiner als 1 möglich. Tragen Sie einen Wert gleich 0 ein, ermittelt das Programm automatisch den für die Punktzahl günstigsten Wert der *Codierung*.

Betätigen Sie nun den Schalter *Darstellung*, zeichnet das Programm genau 500000 Punkte des Chaosspiels. Die etwas Zeit benötigende Darstellung können Sie jederzeit mit *ESC* oder dem *Abbruch*-Schalter abbrechen.
Markieren Sie das Feld *Punkte darstellen*, so zeichnet das Programm die Ausgangspunkte.

Wird das Feld *Drehung* gewählt, so dreht der Algorithmus vor dem Zeichnen der Punkte diese stets um den Zielpunkt mit dem eingegeben Winkel *w* (in °). Dabei entstehen weitere merkwürdige Gebilde.

Schrittweise Konstruktion

Möchten Sie die Konstruktion schrittweise verfolgen, so können Sie an den zwei Schaltern an der unteren Skala *Schritte* jeweils einen Punkt mehr bzw. auch weniger zeichnen. Angezeigt werden die Zielpunkte, die schon gezeichneten Punkte und besonders hervorgehoben werden der letzte Punkt P und die Strecke, die zu seinem Erreichen halbiert wurde. Maximal können Sie in diesem Schrittmodus 2500 Punkte darstellen.

Sierpinski-Teppich

Im Teilprogramm Sierpinski-Teppich wird mit einem leicht veränderten Algorithmus – 9 quadratisch angeordnete Punkte, Teilungswert 1 / 3 – das entsprechende Fraktal punktweise erzeugt.

11.17 Chaotisches Doppelpendel, Mathematisches Doppelpendel

Eine der auch heute noch interessantesten Aufgaben der Mechanik ist die Untersuchung des Verhaltens eines mathematischen Doppelpendels. Dabei ist ein Massekörper an einer masselosen Stange angebracht (Stangenpendel).
Ein zweites Stangenependel wird nun zusätzlich an dem ersten Massekörper befestigt. Beide Körper können unterschiedlich ausgelenkt werden.

Möchte man die Orte der Körper während der Schwingung wissen, wäre es notwendig, zwei Schwingungsdifferenzialgleichungen zu lösen. Extrem schwierig

wird dies aber dadurch, dass sich der Aufhängepunkt der zweiten Schwingung selbst bewegt und durch die Verbindung beider Schwingungen eine ständige Energieübertragung stattfindet. Deshalb kann das Problem nicht mehr rein analytisch gelöst werden, sondern bedarf eines Näherungsverfahrens bzw. der Simulation mit dem Computer. Insbesondere zeigt sich, dass die Bewegung eines solchen Pendels extrem stark von den Anfangsbedingungen abhängig ist. Dieses dynamische System besitzt Eigenschaften, die von der modernen Chaostheorie untersucht werden.

In diesem Unterprogramm wird das Verhalten eines solchen mathematischen Doppelpendels simuliert. Zu Beginn können Sie die Parameter der zwei Pendel wie folgt festlegen: Geben Sie in die Felder *Winkel* und *dW/dt* die Anfangswinkel und die schon vorgegebenen Winkelgeschwindigkeiten für beide Pendel ein. Die Darstellung des Pendels aktualisieren Sie mit dem Schalter *Darstellung.*

Im Eingabefeld *Zeitintervall* kennzeichnen Sie die Qualität der Berechnung und Darstellung.

Für die Berechnung der veränderlichen Orte beider Pendel benötigt das Programm ein Zeitintervall, mit dem das Näherungsverfahren arbeitet. Erhöhen Sie den Wert im Feld *Zeitintervall*, werden die neuen Orte in größeren Abständen ermittelt, d.h., die Berechnung und Darstellung werden fehlerbehafteter und damit ungenauer. Verringern Sie den Wert, erhalten Sie eine genauere Zeichnung. Allerdings steigen die Anforderungen an Ihren Computer. Auf einem Pentium mit geringer Taktfrequenz erwies sich der voreingestellte Wert von 0,002 s als optimal.

Die Berechnung und Animation starten Sie mit dem Schalter *Simulation.* Abbrechen können Sie jederzeit mit dem Schalter *Abbruch.* Die *ESC*-Taste stoppt die Berechnung ebenso. Während der Animation können Sie über das Schaltfeld *Spur* den zurückgelegten Weg des äußeren Massepunktes darstellen lassen. Das Programm zeichnet die Orte der letzten 1000 Berechnungen ein, d.h. bei einem Zeitintervall von 0,01 s den Weg in den letzten 10 Sekunden.

Wählen Sie zum Beispiel als Startwerte

	Startwinkel	dW/dt
Pendel 1	1	1,5
Pendel 2	0	1

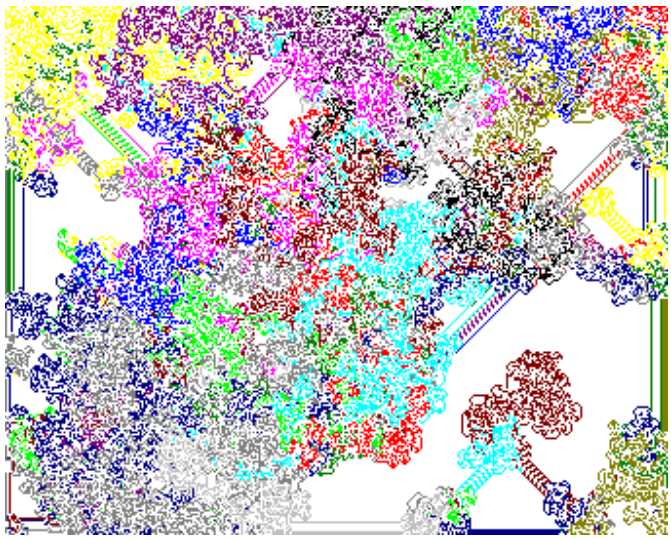
und starten die Bewegung, führt das Doppelpendel scheinbar unregelmäßige Bewegungen aus. Anhand der Spur können Sie verfolgen, dass sich das Pendel oft längere Zeit annähernd gleichmäßig bewegt und dann plötzlich ein völlig anderen Weg nimmt. Dieses chaotische Verhalten führte auch zu der Bezeichnung "Chaospendel" für dieses mathematische Doppelpendel.

Wählen Sie *2. Doppelpendel*, so wird ein zweites chaotisches Doppelpendel berechnet. Dieses erhält zu Beginn eine um 1 / 1000 höhere Winkelgeschwindigkeit des äußeren Pendels.
Anfangs werden beide Pendel die gleiche Bahn beschreiben. Allerdings ändert sich dies nach etwa 20 Sekunden – dann weichen beide deutlich voneinander ab. Eine kleine Änderung der Anfangsgrößen führt damit zu einer großen Wirkung.

Anmerkung: Im Forum Matheraum.de wurde durch "Al-Chwarizmi" (Nutzername!) folgendes angemerkt:

"Würde man ein Doppelpendel wirklich durch zwei aneinander gehängte Fadenpendel realisieren, so erhielte man ein noch deutlich komplexeres System, da die beiden Fäden längst nicht immer gespannt wären und sich insbesondere die zweite Masse sehr oft auf Wurfparabeln bewegen würde (jeweils bis der Faden wieder gespannt ist).
Anstatt von Fadenpendeln sollte man also besser von "Stangenpendeln" oder "Stabpendeln" sprechen."
Danke für den Hinweis. Der ursprüngliche Fehler wurde gern korrigiert.

11.18 Ameisensimulation



Eine weitere interessante Simulation wird in der Literatur als Ameisensimulation bezeichnet.
Diese Simulation wurde erstmals im Juli 1994 in "Scientific American" beschrieben.
Chris Langtons Ameise ist eine Turingmaschine mit einem 2-dimensionalen Speicher, mit sehr einfachen Regeln und sehr verblüffenden Ergebnissen. Nach ihrem Erfinder werden diese Ameisen auch Langton-Ameisen genannt.

Zu Beginn befindet sich die "Ameise" auf einer theoretisch unbegrenzten weißen Zeichenfläche und bewegt sich um einen Punkt vorwärts. Hat der erreichte Punkt eine weiße Farbe, färbt die Ameise den Punkt schwarz und wendet sich um 90° nach links. Ist der Punkt schwarz, wird er weiß gefärbt und die Ameise dreht sich um 90° nach rechts.

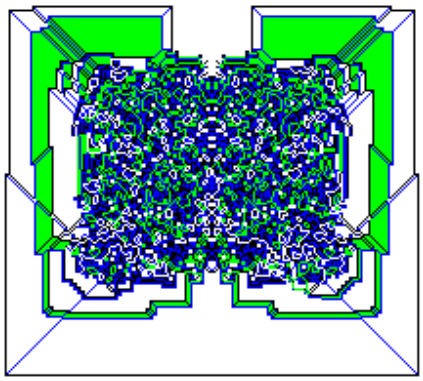
Wählen Sie die Programmauswahl *Simulationen*, so können Sie diese Simulation testen.
Das Programm enthält neben dem Standardmodell auch noch weitere Möglichkeiten. Geben Sie dazu an, wie viele Ameisen gleichzeitig und eventuell einfarbig laufen sollen. Maximal können Sie 50 Ameisen gleichzeitig betrachten.

Testen Sie diese Möglichkeiten. Sie werden sehen, dass jedes Modell seinen eigenen Reiz besitzt. Bei jedem Neustart ermittelt das Programm zufällig einen neuen Anfangspunkt. Abbrechen können Sie die Bewegung der Ameise mit *ESC* oder dem *Abbruch*-Schalter.

Das wirklich Interessante ist, dass die Ameise immer, allerdings kaum vorhersehbar wann, diagonal über den Bildschirm läuft. Chaotisches Verhalten schlägt in geordnetes um und umgekehrt. Die Ursache für so ein Verhalten ist bis heute noch nicht bekannt. Genauer gesagt kennt man noch keinen deterministisch polynomialen Algorithmus, mit dem bei gegebener Ausgangssituation das entstehende Bild ermittelt werden kann.

Anmerkung: Die Ameisen bewegen sich auf einer torusartigen Fläche, d.h., links und rechts sowie oben und unten sind miteinander verbunden. Verblüffend ist, dass dabei Darstellungen entstehen, die sich mitunter nach Tausenden von Schritten umkehren und alle gezeichneten Schritte bis zur Ausgangssituation wieder löschen.

11.19 Langton-Ameisen



Durch Greg Turk und Jim Propp wurde 1995 eine einfache, aber sehr interessante Erweiterung des klassischen Regelsystems der Langton-Ameisen beschrieben, die Turk-Popp-Langton-Ameisen. Diese finden Sie im 2.Teilprogramm *Langton-Ameisen*.

Anstelle der Langton-Rechts-Links-Regel RL werden nun Zyklen aus beliebigen R- und L-Bewegungen betrachtet und andersfarbig dargestellt. Mehrere Regeln erzeugen symmetrische Muster mit regelmäßigen und chaotischen Anteilen, z.B. RLLR. Die Abbildung zeigt die Regel LLRR.
Andere Bewegungsfestlegungen ergeben vollkommen chaotische Muster, manche nichts, wie z.B. LL und RR.

Voreingestellt ist die Regel LLRR (HHP-Code 19).
Interessante Regeln sind zum Beispiel: LLRR, RLLR, RLR, LRRRRRLLR, LLRRRLRLRLLR oder RRLLLRLLLRRR.
Zur Eingabe wird zuerst der HHP-Code verwendet; tragen Sie dort nichts ein, wird die Regel aus der dritten Eingabezeile entnommen.
Der HHP-Code wird zur systematischen Beschreibung der Regeln genutzt. Dazu werden die 'L' und 'R' einer Regel, z.B. 'LRRL', als '0' und '1' interpretiert und die entstehende Dualzahl in das Dezimalsystem transformiert. Um führende 'L' = '0' zu berücksichtigen, wird der Dualzahl eine 1 vorangestellt. Zum Beispiel wird 'LRRL' damit zur Dualzahl 10110, d.h. 22 als Dezimalzahl. Jeder natürlichen Zahl größer 3 ist somit eine eindeutige Regel zugeordnet und umgekehrt.

Bei der Berechnung wird eine torusförmige Spielfläche betrachtet. Möchten Sie das nicht, d.h. beim Erreichen der Bildränder stoppt die Animation automatisch, so entfernen Sie das Häkchen bei *Toruspielfeld*.

Die Berechnung und Darstellung wird hier mit möglichst großer Geschwindigkeit durchgeführt. Möchten Sie eine langsamere Darstellung, so tragen Sie unter *Schritte* eine kleinere Zahl ein; analog eine größere für eine schnellere Berechnung.

11.20 Turmiten

Unter Turmiten versteht man ein zweidimensionale Turing-Maschine, in der ein Objekt je nach Zustand und Regelsystem eine Bewegung auf der Ebene ausführt und dabei Punkte färbt. Die Langton-Ameisen sind ein Spezialfall der Turmiten, ebenso die Paterson-Würmer.
Nachdem die Langton-Ameisen 1986 beschrieben wurden, erweiterte Allen H.Brady 1988 die Idee auf eine zweidimensionale Turing-Maschine mit Orientierung. Bekannt wurde das System 1989 durch eine Veröffentlichung von Dewdney.

Für Turmiten mit 2 Zuständen und 2 Farben wird eine Regelsystem der Form

1, 8, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 8, 1

angegeben.
Der erste Eintrag beschreibt die neue Farbe der aktuellen Zelle, der 2.Eintrag die anschließende Drehung (1 = keine, 2 = nach rechts, 4 = um 180°, 8 = nach links) und der dritte Eintrag den neuen Zustand der Turing-Maschine.
Nach dem Färben der Zelle führen die Turmiten die Drehung aus und bewegen sich eine Zelle vorwärts. Mit dem neuen Zustand wird der Vorgang wiederholt.
Je nach Regelsystem entstehen sehr unterschiedliche Gebilde, u.a. ein spiralförmiges Wachstum, chaotische Formen mit und ohne Textur, ein goldenes Rechteck mit einer Fibonacci-Spirale, aber auch Systeme die in einem Zyklus enden.

In diesem Programm können Turmiten gezeichnet werden. Wählen Sie dazu eine der vordefinierten Regeln aus. Außer den Turmiten mit 2 Zuständen sind auch die klassischen Langton-Ameisen (1 Zustand) und Turmiten mit 3 Zuständen enthalten; weiterhin Turmiten mit einem erweiterten Farbsystem. Die ersten zwei Zahlen der Regel geben die Anzahl der Zustände und die Anzahl der Farben an.

Markieren Sie das Feld *blau*, wird ein blauer Hintergrund gezeichnet. Die Turmiten bewegen sich in diesem Programmteil auf einem abgewickelten Torus, d.h. links und rechts und oben und unten sind miteinander verbunden. Die *Geschwindigkeit* der Berechnung und Zeichnung kann ebenfalls eingestellt werden.

11.21 Ameisenwelt

In diesem Teilprogramm zur Simulation einer Population werden Ameisen betrachtet. Diese befinden sich in einem Gebiet und bewegen sich frei.

Ziel ist es nun, die Ameisen zur Futtersuche zu animieren und sie das gefundene Futter in ihren Ameisenbau transportieren zu lassen.
Dazu wählen Sie zuerst rechts eine Aktion aus und klicken anschließend auf das Spielfeld.

Mit *Hindernis setzen* legen Sie einen Stein, ein Blatt oder eine Muschel in den Weg der Ameisen.
Futter festlegen produziert eine gewisse Menge Futter, die die Ameisen allmählich wegtragen können, d.h., das Futter nimmt während der Simulation ab.
Eingang bauen konstruiert den Eingang des Ameisenbaus. Ameisen mit Futter bewegen sich dorthin, legen ihr Futter ab und gehen wieder auf Nahrungssuche.
Gefahr auslösen bewirkt, dass die Ameisen für kurze Zeit den angeklickten Punkt meiden.

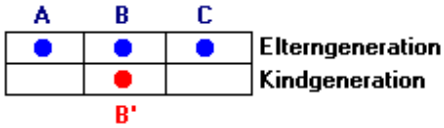
In den Eingabezeilen können Sie zusätzlich die Ameisenzahl, deren Geschwindigkeit und einen Zufallsfaktor einstellen. Ist dieser klein, finden die Ameisen Bau und Futter schneller.

Das Verblüffende an der Simulation ist nun, dass die Ameisen nach einiger Zeit stets Futter und Bau finden und sich die berühmten „Ameisenstraßen" ausbilden. Und legen Sie den Ameisen auf ihrer Straße ein Hindernis in den Weg, so werden sie dieses relativ schnell umgehen. Bei mehreren Ameisenbauen und Futterquellen treten auch mehrere Ameisenstraßen auf, die sich scheinbar chaotisch auch ändern können.

11.22 Zellularautomat

In den Vierziger- und Fünfzigerjahren des 20. Jahrhunderts wurden durch John von Neumann und Alan Turing die Anfänge der Automatentheorie geschaffen. Von Interesse sind dabei vor allem die Zellularautomaten, in denen einzelne Zellen wegen gewisser Regeln und dem Zustand ihrer Nachbarn "leben" bzw. "sterben". Ein berühmtes Beispiel dafür ist Conways "Game of Life".

In diesem Unterprogramm simuliert das Programm acht verschiedene eindimensionale, lineare, binäre Automaten.
Diese bestehen aus einer Reihe von Zellen, die jeweils den Zustand 0 oder 1 annehmen können. Von einer Anfangskonfiguration ausgehend, sterben bzw. leben die Zellen je gewähltem Automaten in Abhängigkeit von drei, fünf, sieben oder neun Nachbarn, mit Zufallsbelegung oder nicht.



Zur Erläuterung sei der Zellularautomat mit drei

Nachbarn gewählt. Die jeweils drei nebeneinander liegenden Zellen beeinflussen die mittlere der drei Zellen für die nächste Generation, in der Darstellung also eine Zeile tiefer.

In der Darstellung würden die Belegungen der Zellen A, B und C damit über die Zelle B entscheiden. Eine Regel (Übergang von der Eltern- zur Kindgeneration) könnte zum Beispiel besagen, dass B, nur dann den Zustand 1 hat, wenn alle drei Elternzellen gesetzt sind.

Für drei Nachbarn gibt es insgesamt 2^3 mögliche Übergänge und damit $2^8 = 256$ verschiedene Bildungsregeln. Interessiert man sich nur für Regeln, die weder links noch rechts bevorzugen, verbleiben noch 32. Kodiert man die acht wichtigen Übergänge

111 → a 110 → b 101 → c 100 → d
011 → e 010 → f 001 → g 000 → h

und kodiert man diese acht Variablen nach Wolfram mit einer Codezahl C = 128a + 64b + 32c + 16d + 8e + 4f + 2g + h, so ergeben sich Codierungen C im Bereich von 0 bis 255. Für die Darstellung des Wolfram-Dreiecks ist C = 150, für das Sierpinski-Dreieck C = 90.

Geben Sie unter *Zellen* 3 ein, können Sie damit eine Codierung im genannten Bereich eingeben und nach Betätigung des Schalters *Darstellung* deren Wirkung nachvollziehen. Ausgangspunkt ist jeweils eine lebende Zelle in der Mitte der Darstellung. Möchten Sie, dass mit einer Zufallsbelegung der ersten Generation begonnen wird, so setzen Sie die Markierung im Feld *keine Einzelzelle verwenden.* Wählen Sie das Feld *Zufallszelle*, wird je Generation (Zeile) eine weitere Zelle zufällig auf den Status "lebend" gesetzt.

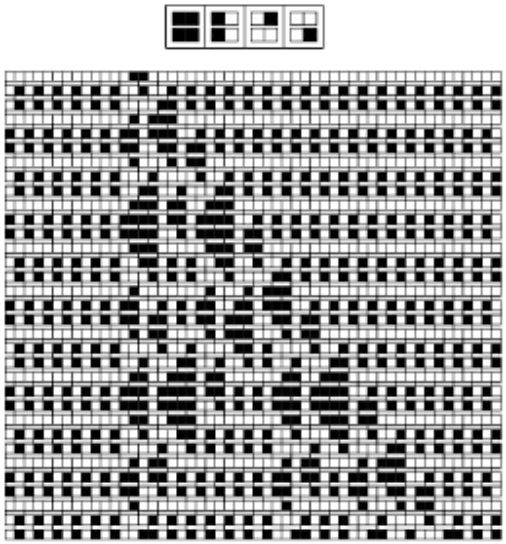
Außer drei Zellen können Sie auch fünf, sieben oder neun eingeben. Andere Eingaben werden automatisch korrigiert. Zellularautomaten mit fünf Nachbarn sind für Codierungen <= 64 interessant; mit sieben und mehr Nachbarn <=255. Interessante Beispiele erhalten Sie für Zellularautomaten mit fünf wirkenden Nachbarn bei zufälliger Belegung der Startzeile:

Struktur und Verhalten	Codierungen
Homogen	0, 16, 32, 36, 48
Periodisch	8, 24, 40, 56, 58
Fraktal	6, 10, 12, 14, 18
Komplex quasiperiodisch	20, 52

Außer den genannten Codierungen sind zum Beispiel folgende Zahlenwerte interessant:

Zellularautomat mit 3 Nachbarn: 30, 45, 50, 54, 57, 60, 73, 75, 105, 107, 110,

126, 129, 131, 135, 137, 150, 151, 153, 169, 182, 183, 193
Zellularautomat mit 3 Nachbarn (erste Zeile zufällig): 0, 9, 15, 18, 22, 26
Zellularautomat mit 5 Nachbarn (erste Zeile zufällig): 0, 2, 5, 9, 10, 12, 17, 18, 20-23, 25
Zellularautomat mit 7 Nachbarn (erste Zeile zufällig): 0, 2, 9, 17, 20, 25, 34, 36, 49
Zellularautomat mit 9 Nachbarn (erste Zeile zufällig): 0, 2, 9, 10, 17, 21, 25, 36, 43, 52, 53

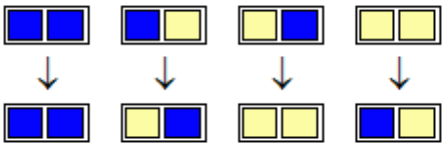


11.23 Dualer Zellularautomat

Unter einem dualen Zellularautomaten (engl. block cellular automaton) versteht man einen Automaten mit zwei Zuständen je Zelle, schwarz oder weiß.

Das Regelsystem besteht aus vier Übergangsregeln. Eine Zelle der neuen Generation wird auf Grund der Belegung von zwei benachbarten Zellen der vorhergehenden Generation gefüllt.
Dabei sind die Belegungen schwarz-schwarz, schwarz-weiß, weiß-schwarz und weiß-weiß möglich. (siehe obere Abbildung)
Von Generation zu Generation alternieren zusätzlich die Paare von benachbarten Zellen.

Ein Regelsystem kann als Dualzahl aufgefasst werden. Jeweils schwarze Zellen der ausgetauschten Zellen werden als Bit betrachtet.
Das oben dargestellte Regelsystem ergibt damit $11100001_2 = 225_{10}$.
Für eine Doppelzelle in der ersten Generation erhält man mit diesen Regeln die unten dargestellte Entwicklung des Automaten.
In diesem Teilprogramm können Sie einen dualen Zellularautomaten testen.



Das Regelsystem wählen Sie, in dem Sie am Rollbalken *Regel* den Wert verändern oder, in dem Sie an der Darstellung der Übergangsregeln die „Bits" der unteren Zeile mit einem linken Mausklick ein- und ausschalten.

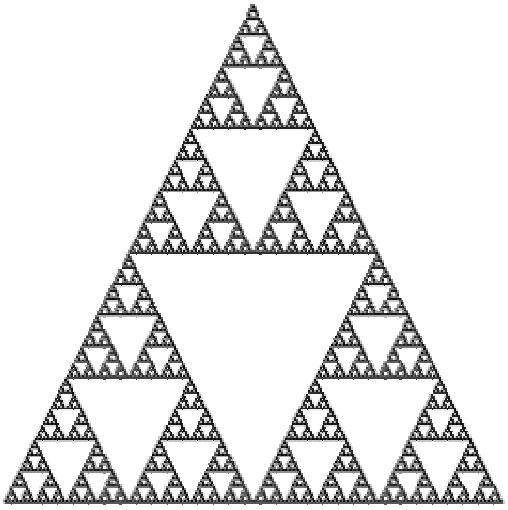
Wichtig für die Darstellung ist die Anfangsbelegung. Markieren Sie dazu eine der fünf Möglichkeiten unter *Startzeile*.
Zusätzlich können Sie noch die zwei Farben der Zellen über die entsprechenden Schalter verändern.

11.24 Sierpinski-Dreieck, Teppich und Würfel

In diesem Teilprogramm können Sie drei fraktale Gebilde, die auf Sierpinski zurückgehen, veranschaulichen.

Sierpinski-Dreieck

Der polnische Mathematiker Sierpinski erdachte 1910 das Sierpinski-Dreieck zu dem Zweck, dass seine Studenten begreifen, dass die Begriffe Linie und Fläche durchaus nicht trivial sind.



Wenn man aus einem Dreieck die Mitte herausnimmt und aus den drei Restdreiecken wieder die Mitte und wieder und wieder ..., ist es dann eigentlich noch eine Fläche?

Nein! Die Dimension ist nicht 2, noch 1, sondern ln(3) / ln(2) = 1,58 ... – es ist ein Fraktal (fractum, Lat. = gebrochen).
In diesem kleinen Programm können Sie bis zur Iterationstiefe 10 die Dreiecke entfernen und so das Sierpinski-Dreieck erzeugen.

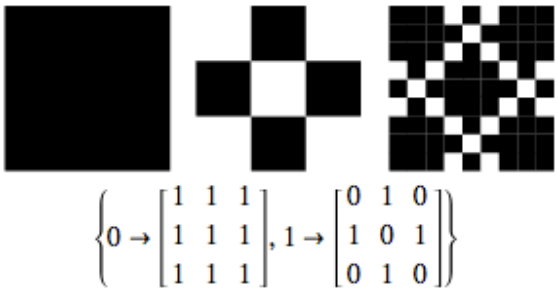
Sierpinski-Teppich

Der Sierpinski-Teppich ist ein Fraktal, das auf ähnliche Weise entsteht.
Aus einem Quadrat wird in der Mitte ein Neuntel der Fläche entfernt. Aus den von dem Quadrat um das Loch verbliebenen acht quadratischen Feldern wird wiederum je ein Neuntel der Fläche entfernt, usw.
Die fraktale Dimension des Sierpinski-Teppich beträgt ln 8 / ln 3 = 1,892...; sein Flächeninhalt ist null. Im dreidimensionalen Raum wird aus der Konstruktion des Sierpinski-Teppichs die Konstruktion des Menger-Schwamms.
Hinweis: Für den Sierpinski-Teppich beträgt hier die maximale Iterationstiefe 6.

Sierpinski-Würfel

Bei dem Sierpinski-Würfel handelt es sich um ein Fraktal im Raum.
Ausgangspunkt ist ein Würfel, an den drei kleine Würfel mit halber Kantenlänge angesetzt werden. An diese kleinen Würfel werden jeweils wieder 3 Würfel mit halber Kantenlänge angesetzt usw.
Insgesamt entsteht ein räumliches Gebilde, dass ein endliches Volumen aber eine unendlich große Oberfläche besitzt.
Hinweis: Für den Sierpinski-Würfel beträgt hier die maximale Iterationstiefe 7.

11.25 Teppichfraktale



Unter diesem Programmpunkt können Sie fraktale Muster zeichnen, die nach folgendem System erzeugt werden:

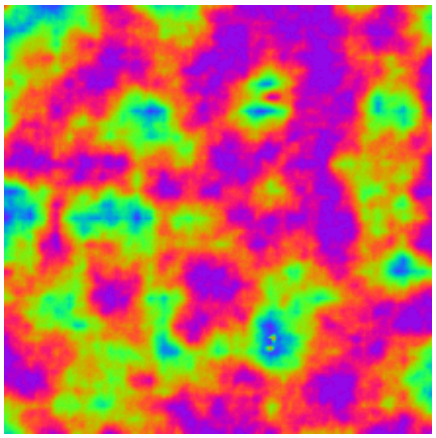
Ausgangspunkt ist eine schwarze oder weiße Zelle. Schwarz bedeutet eine Belegung mit einer 1, Weiß mit einer 0.
Nach einem Übergangsschema (wie in der Abbildung) wird nun jede Zelle durch neun Zellen ersetzt, die je nach Schema weiß oder schwarz sind. Dieses Verfahren wird immer wiederholt.
Dabei entstehen fraktale Muster: die Teppichfraktale.

In diesem Teilprogramm ist die Menge der möglichen Belegungen auf 0 bis 3 erhöht. Dabei bedeutet 2 eine blaue Zelle, 3 eine gelbe. Tragen Sie eine andere Zahl als 0 bis 3 ein, wird die Zelle rot gefärbt, aber durch die Belegungstabelle der Null ersetzt.
Tragen Sie zuerst das von Ihnen gewünschte Übergangsschema ein. Wichtig ist außerdem, welche Farbe die *Startzelle* besitzen soll. Wählen Sie die *Iterationstiefe* bzw. den Schalter *Darstellung*, so wird das Gebilde gezeichnet.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnung und Darstellung des Fraktals für die Iterationstiefen 5 und 6 einige Zeit benötigt.

Im linken unteren Bereich finden Sie einige Beispiele für Teppichfraktale. Klicken Sie auf einen Eintrag, werden die Parameter sofort eingetragen.

11.26 Plasma



Ein sehr interessantes fraktales Gebilde ist die Konstruktion eines Plasmas. Dabei werden rekursiv aus schon vorhandenen Punkten weitere farblich gekennzeichnete Punkte als Mittelwert mit einem gewissen zufälligen Anteil berechnet.

Im Ergebnis entsteht ein Bild, das irgendwie an Wolken oder Aufnahmen von Wärmestrahlung erinnert.

In dem Beispiel wurde die Farbpalette *Firestorm* verwendet. Sehr schöne Gebilde entstehen auch mit der Palette *Neon*.
Anzumerken ist hier, dass für dieses Fraktal die *Farbrotation* genutzt werden kann.

11.27 Primzahlfraktal

Folgender Algorithmus erzeugt eine merkwürdige, auch heute (2012) noch nicht verstandene grafische Veranschaulichung der Primzahlen.

Ausgehend vom Koordinatenursprung mit den Koordinaten x = 0, y = 0 werden die aufeinander folgenden Primzahlen modulo 5 gerechnet. Für die verschiedenen Reste wird bestimmt:

Restoperation	1	x = x + 1	2	y = y + 1
	3	x = x - 1	4	y = y - 1

Die Farbe des Bildpunktes mit den neuen Koordinaten wird um einen gewissen Betrag dunkler oder heller gesetzt. Mit den neuen Koordinaten und der nächsten Primzahl wird der Vorgang wiederholt.
Als Ergebnis entsteht eine merkwürdige Grafik. Die Punkte der Ebene werden sehr ungleichmäßig verändert. Außerdem ist eine Tendenz in Richtung negativer x- und y-Achse festzustellen.
Das Gebilde sieht fraktalen Strukturen ähnlich – daher auch der Name. Allerdings ist völlig unklar, ob dies tatsächlich ein Fraktal ist.

Analoge Strukturen ergeben sich, wenn modulo einer anderen Primzahl p gerechnet wird.

11.28 Riemannprojektion eines Fraktals

In diesem kleinen Teilprogramm werden wahlweise zwei Fraktale auf die komplexe Riemannsche Zahlenkugel projiziert.
Voreingestellt ist die Darstellung der Mandelbrotmenge. Wählen Sie *Newton-Fraktal*, so wird dieses Fraktal bezeichnet.
Für die Projektion können Sie in den Eingabezeilen die Drehwinkel um die drei Raumachsen eingeben.

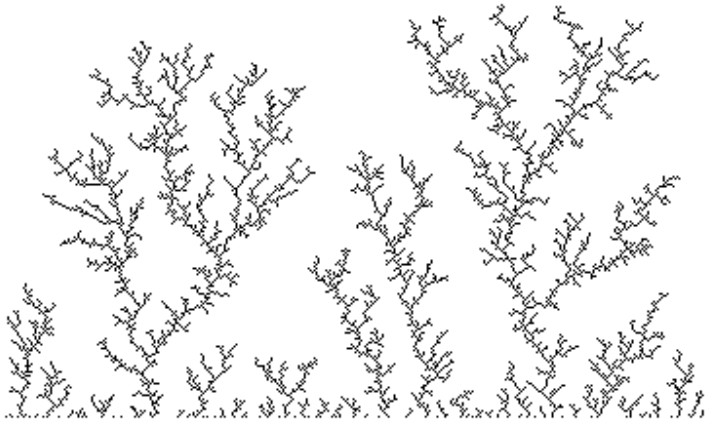
11.29 Clusterbildung

Das Bilden von Clustern findet u.a. beim Anlagern von Teilchen an Oberflächen, elektrischen Entladungen, Wachstum von Dendriten und Diffusion von Wasser in Öl statt. Biochemisch interessante Cluster, wie z.B. aus Peptiden oder Nucleotiden, gelten als Modellsysteme für biologische Reaktionsprozesse. Im Englischen spricht man dabei von Diffusion Limited Aggregation (DLA), d.h. durch Diffusion begrenztes Wachstum.

Der Mechanismus der Clusterbildung ist theoretisch auch heute noch (2009) nicht voll verstanden. Daher sind Computersimulationen dieser Vorgänge von großem Interesse, wenngleich diese sehr rechenaufwendig sind.

Ein einfacher und die Entwicklung von Clustern gut beschreibender Algorithmus ist folgender:

- Auf der Simulationsfläche wird ein beliebiger Punkt zufällig ausgelost.
- Innerhalb seiner von-Neumann-Umgebung (d.h. nach links, rechts, oben oder unten) wird dieser Punkt zufällig verschoben.
- Befindet sich nun in der Moore-Umgebung (d.h. links, rechts, oben, unten, links oben, links unten, rechts oben und rechts unten) ein Clusterteilchen, so wird der Punkt gesetzt. Ist sein Abstand vom Startpunkt größer als der momentane Distanzwert, wird dieser Wert aktualisiert.
- Kann der Punkt nicht gesetzt werden, wird er so lange in der von-Neumann-Umgebung verschoben und in der Moore-Umgebung getestet, bis er entweder markiert werden kann oder sein Abstand zum Startpunkt den aktuellen Distanzwert um vier Pixel überschreitet. In diesem Fall wird der Punkt verworfen und von vorn begonnen.



In diesem Teilprogramm können Sie die Bildung dieser Cluster durch den Computer simulieren lassen.

Wählen Sie dazu zuerst, ob der Cluster längs einer Geraden (Markierungsfeld *Längscluster*) oder kreisförmig berechnet werden soll.
Der *Parameter* gibt die Schrittweite bei der zufälligen Ermittlung neuer Teilchen an. Der voreingestellte Wert 0,01 wurde empirisch gefunden und beschreibt die Cluster am besten. Selbstverständlich können Sie auch mit anderen Werten experimentieren.

Mit dem Schalter *Darstellung* starten Sie die Simulation.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnung eines Clusters höchste Anforderungen an Ihren Computer stellt. Daher sollten im Hintergrund keine anderen Programme laufen. Der Abbruch der Simulation ist über die *ESC*-Taste oder den *Stopp*-Schalter möglich.

11.30 Brownsche Bewegung

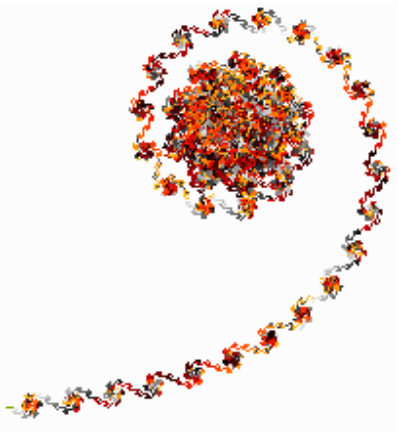
Im Jahre 1827 machte der englische Botaniker Robert Brown bei der mikroskopischen Beobachtung von Schwebeteilchen in einer Flüssigkeit eine verblüffende Beobachtung. Die kleinen Teilchen bewegten sich in der Flüssigkeit in regellosen Zickzackbewegungen.
Sein Verdienst ist der erste Erklärungsversuch. Ursache ist die Molekularbewegung der Moleküle und Atome auf Grund ihrer vorhandenen

kinetischen Energie.

Während dieser Bewegung stoßen diese auch makroskopische Teilchen an und sorgen so für deren scheinbar regellose Bewegung. Da diese Entdeckung von keinem Physiker gemacht wurde, wurde diese noch jahrelang übersehen. 30 Jahre nach Brown suchte z.B. Rudolf Clausius nach einer Möglichkeit die Molekularbewegung nachzuweisen. Da er die Brownsche Bewegung nicht kannte, suchte er leider vergeblich.

Diese Brownsche Bewegung können Sie in diesem Teilprogramm für ein einzelnes makroskopisches Teilchen simulieren.
Stellen Sie dazu an den Rollbalken die *Anzahl* der darzustellenden Schritte (10000 bis 1 Million) sowie aller wieviel Schritte die neue Position des Teilchens (*Länge*, 1 bis 100) gezeichnet werden soll ein.
Wählen Sie nun den Schalter *Darstellung* verfolgt das Programm die Zickzackbewegung des Teilchens und stellt dessen neue Position entsprechend Ihrer Einstellungen dar.

11.31 Kurvenfraktale



Eine besonders merkwürdige Art von Fraktalen entsteht durch folgendes Verfahren:

Für eine beliebige, möglichst irrationale Zahl z wird mit den Startwerten w_0 und p_0 die Iteration

$$p_{n+1} = (p_n + 2\ \pi\ z) \pmod{2\pi}$$
$$w_{n+1} = p_n + w_n \pmod{2\pi}$$

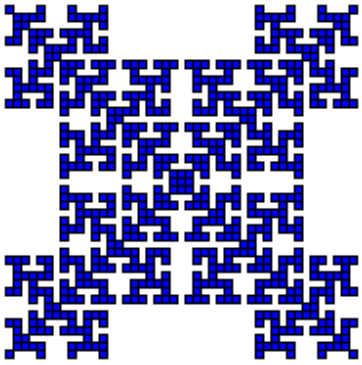
durchgeführt und jeweils an eine Ausgangsstrecke der Länge 1 eine weitere Strecke der Länge 1 gezeichnet, die den Winkel w_{n+1} zur Horizontalen bildet.
Wiederholt man den Vorgang zum Beispiel 10000 mal, so entsteht für jede Zahl z ein anderes, teilweise sehr merkwürdiges fraktales Gebilde.

Während das abgebildete Fraktal mit $z = \pi$ noch eine gewisse Regelmäßigkeit zeigt, ergeben sich für die Eulersche Zahl oder Wurzel aus 2 ziemlich chaotische Abbildungen. In der englischen Fachliteratur werden diese Fraktale auch "Curlicue Fractals" genannt, was wörtlich übersetzt "gekräuseltes Fraktal" bedeutet.

Diese Fraktale können Sie in diesem Teilprogramm zeichnen. Geben Sie dazu unter *Parameter* die Ausgangszahl z ein.
Um möglichst gute Näherungen für irrationale Zahlen zu erhalten, können Sie auch Terme der Form PI', EXP(1) oder auch SIN(1) oder SQRT(2) eingeben.
Tragen Sie *PHI* ein, wird das Verhältnis des Goldenen Schnitts genutzt.

Nach einem Klick auf *Darstellung* zeichnet das Programm 30000 Iterationen.
Möchten Sie keine farbige Darstellung, so wählen Sie die Farbpalette *white* aus.

11.32 Zweidimensionales Wachstum - Zellularautomat



Ein zweidimensionaler Zellularautomat kann auch mit folgendem Regelsystem aufgebaut werden:

1. Ausgang sind eine oder mehrere linear angeordnete Zellen.
2. Je Zyklus (Generation) wird eine leere Zelle genau dann gefüllt, wenn sie eine vorgegebene Anzahl von Nachbarn hat.
3. Dabei werden entweder vier Nachbarn (links, rechts, oben, unten) oder acht Nachbarn (auch die Diagonalen) betrachtet.

Auch bei diesem Automaten ergeben sich sehr interessante Figuren.

Nach dem Start des Teilprogramms stellen Sie ein, welches *Regelsystem* Sie verwenden möchten. Über die Felder *1 Nachbar* bis *4 Nachbarn* können Sie festlegen, bei wie vielen Nachbarn eine neue Zelle gefüllt wird. Der Rollbalken *Anfangszellen* legt die Startzahl fest, der Balken *Zyklen* die Anzahl der Generationen.

11.33 Logistische Gleichung

Eine der wichtigsten, in der Chaostheorie untersuchten Gleichungen ist die logistische Gleichung:

$$x_{neu} = p\,(1 - x_{alt})\,x_{alt}$$

In Abhängigkeit von einem *Startwert* und dem *Parameter* p zeigt diese Gleichung unterschiedliches Verhalten, z.B. konvergiert die Zahlenfolge für x(0) = 0,1 und p = 1,5. Für p = 2,8 schwingt sich die Zahlenfolge ein, für p = 3 zeigt sie periodisches und für p = 3,6 chaotisches Verhalten.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Verhalten der logistischen Gleichung veranschaulichen. Dargestellt wird die Funktion y = (1 - x) x im Intervall zwischen ihren beiden Nullstellen. Wählt man nun einen Startwert x(0) und bildet die Iteration x_{neu} = (1 - x) x, so entspricht dies grafisch einer Streckenfolge, die durch abwechselndes "Gehen" parallel zur x- und y-Achse zwischen der Funktion und der Geraden y = x entsteht.
Je nach Faktor p nähert sich dann die Streckenfolge dem Schnittpunkt zwischen Funktion und y = x immer mehr. In diesem Fall liegt eine Konvergenz vor. Für steigende p ändert sich das Verhalten der Streckenfolge bis hin zu einem vollkommen chaotischen Verhalten, d.h., die Strecken pendeln in verschiedenen Abständen um den Schnittpunkt und nähern sich diesen nicht an.

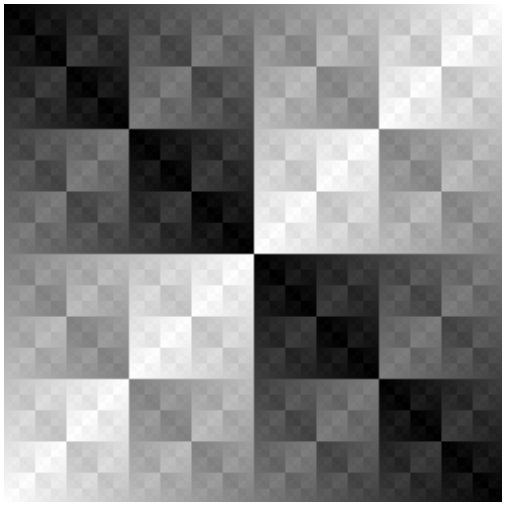
Unterschiedliche Werte für p stellen Sie hier ein, indem Sie die Lage des Scheitelpunktes S der Parabel vertikal verschieben. Dadurch verändert sich auch der Winkel zwischen der Geraden y = x und der Tangente an die Parabel im Schnittpunkt. Für große Winkel erhalten Sie wie beschrieben chaotisches Verhalten. Die Anzahl der darzustellenden Iterationen stellen Sie an dem Rollbalken ein.

11.34 Pascalsches Dreieck

Das Pascalsche Dreieck ist erstaunlicherweise auch mit der Konstruktion fraktaler Gebilde verbunden.

Zeichnet man für jeden Eintrag des Dreiecks einen Punkt mit einem dem Wert entsprechenden Farbwert in eine grafische Darstellung, so entsteht ein buntes Gebilde. Dies ändert sich, sobald man die Einträge des Dreiecks modulo 2 oder einem anderen Parameter z rechnet.
Wird nun gezeichnet, mit 0 = Weiß und 1 = Schwarz, so entsteht das Sierpinski-Dreieck!
In diesem Teilprogramm können Sie dies für verschiedene *Parameter z* darstellen lassen. Markieren Sie *1 = mod z zeichnen*, werden nur die Punkte mit dem Rest = 1 veranschaulicht.

11.35 Quadratmuster



Eine einfache Methode zur Erzeugung interessanter quadratischer Muster verknüpft die Koordinaten des Punktes mit einer logischen Operation.

Hat ein Punkt die ganzzahligen Koordinaten (x ; y), so wird, je nach gewählter Verknüpfung
XOR, AND, OR oder NOR
der Wert w = x xor y, w = x and y, w = x or y bzw. w = x nor y mit einem *Farbmodul* m verbunden, der die Farbe des Punktes in einer gewählten Farbpalette auswählt.
Im Ergebnis entstehen regelmäßige quadratische Muster mit teilweise überraschendem Aussehen.
Je nach Operator und Farbmodul entstehen auch wieder Kopien eines Sierpinski- oder Wolfram-Dreiecks.
Insbesondere während der *Simulation*, bei der die Farben zyklisch getauscht werden, treten fraktale Strukturen auf.

11.36 Ljapunow-Diagramm

In der Mathematik sind Ljapunow-Diagramme – nach Alexander Michailowitsch Ljapunow – Fraktale, hergeleitet von einer Erweiterung der logistischen Gleichung, in der der Wachstumsgrad der Population r periodisch zwischen zwei Werten A und B schwankt.
Die logistische Gleichung lautet: $x_{n+1} = r_n x_n(1 - x_n)$
mit einem Startwert, der üblicherweise bei $x_0 = 0{,}5$ gewählt wird.
Dabei wird $r_n = a$ oder $r_n = b$ für die n-te Iteration der logistischen Gleichung gewählt, je nach dem Wert an der Stelle n in einer unendlichen Folge, die aus der Hintereinanderreihung von einfachen Mustern von Symbolen (a,b) gebildet wird, z. B. mit dem Muster (aababab).
Ljapunow-Diagramme beschreiben die Intensität der Ordnung und des Chaos eines jeden Wertes einer chaotischen Gleichung im zweidimensionalen Raum.

In diesem Teilprogramm werden Ljapunow-Diagramme berechnet.
Geben Sie dazu zuerst eine Folge von a,b ein oder wählen Sie unter *Parameter* ein voreingestelltes Muster. Über die Parameter *a, b* stellen Sie die Darstellungsintervalle ein sowie unter *Abbildungsgröße* die Größe des zu berechnenden Bildes.

Dabei ist zu beachten, dass die Berechnung eines Ljapunow-Diagramms auch auf schnellen Computern sehr viel Zeit benötigt. Zu Beginn sollten Sie eine kleine Abbildungsgröße wählen.

Nach dem *Start* wird das Bild ermittelt. Wählen Sie nach Beendigung der Rechnung *Ljapunow-Diagramm*, wird dieses angezeigt.
In den Farbauswahlen für die Bereiche der Ordnung und des Chaos können Sie weitere Parameter einstellen und so farblich anders gestaltete, interessante Abbildungen erhalten.

11.37 Fraktale Landschaft

Objekte aus der Natur können durch fraktale Darstellungen realistisch angenähert werden.
Geht man von einem Dreieck im R^3 aus, fügt in dieses 4 kleinere Dreiecke ein und wiederholt diesen Prozess mehrfach, so ergibt sich das Modell eines Gebirges, eine fraktale Landschaft.
Dieses Teilprogramm erzeugt eine fraktale Landschaft.

Nach dem Start wird Ihnen eine derartige Konstruktion angezeigt. An dem Rollfeld *Iterationstiefe* stellen Sie die Verfeinerung der Darstellung ein. Bei einer Iterationstiefe von 1 wird ein Dreieck genutzt; mit jedem weiteren Schritt werden, wie oben beschrieben, jeweils vier Dreiecke eingefügt und so die Landschaft konstruiert.

Unter *Zeichenmodus* können Sie auswählen, ob das Fraktal als Gitter, mit ausgefüllten Dreiecksflächen oder durch gerenderte graue Flächen gezeichnet werden soll.
Insbesondere im letzten Zeichenmodus entsteht der Eindruck eines Gebirges. Möchten Sie eine andere Landschaft erzeugen, so nutzen Sie den Schalter *Neu erzeugen*. Einige Landschaften haben sehr viele blaue Flächen, d.h. das „Gebirge" geht bis an das „Meer" heran.

12. Anwendung

„In jeder reinen Naturlehre ist nur soviel an eigentlicher Wissenschaft enthalten, als Mathematik in ihr angewandt werden kann."
Immanuel Kant

Unter diesem Punkt finden Sie Anwendungen, die nicht konkret den Stoffgebieten Analysis, Algebra, Geometrie und Stochastik zuzuordnen sind, darunter zum Beispiel allgemeine Berechnungen, die Kalenderrechnung, die Umwandlung von Maßeinheiten, Programmteile zu chemischen Anwendungen usw. Außerdem finden Sie Anwendungen, die sich mit Fragen der algorithmischen Bearbeitung von Problemen beschäftigen. Damit beinhaltet dieser Programmteil auch Fragestellungen der mathematischen Informatik. Die Beschreibung der Themen der Informatik wird im Kapitel 13 gegeben.
Anwendungen zur Physik und Astronomie werden in einem separaten Kapitel besprochen.

12.1 Maßeinheiten

"Der wichtigste Schritt für den Fortschritt einer jeder Wissenschaft ist das Messen von Größen."
James Clerk Maxwell

Das Umwandeln von Maßeinheiten gehört, obwohl eigentlich relativ einfach, zu den mühevollen und oft fehlerbehafteten Arbeiten mit physikalischen und mathematischen Größen. In diesem Unterprogramm können Sie Maßeinheiten und Größen ineinander umwandeln.

Nach dem Start wählen Sie einen der 20 Ordner aus. Diese rufen Listen von Maßeinheiten folgender physikalischer Größen auf:

Masse, Länge, Zeit, Fläche, Energie, Kraft, Winkel, Volumen, Druck, Geschwindigkeit, Leistung, Beschleunigung, Vorsilben, Leuchtdichte, Datengröße (Computer), Stromstärke, Spannung, Konzentration, Frequenz, Zählmaße, Aktivität

Zur Umwandlung einer Einheit in eine andere markieren Sie links die Ausgangsgröße, in der rechten Liste die Zielgröße. Oberhalb beider Listen zeigt das Programm den Umrechnungsfaktor an. Tragen Sie unter *Wert* eine Zahl ein, ermittelt das Programm automatisch das Ergebnis in der anderen Maßeinheit. Dabei werden hier unter "Maßeinheit" neben korrekten physikalischen Maßeinheiten (SI-Einheiten und veraltete Einheiten) auch konkrete Werte aus der Natur verstanden. Zum Beispiel können Sie unter dem Punkt *Energie* berechnen, wie viel Joule das menschliche Herz durchschnittlich je Herzschlag an Arbeit leistet.

Insgesamt enthält das Programm für alle 21 physikalische Größen über 1000 Einheiten. Damit sind über 150000 verschiedene Umwandlungen möglich.
In den Listen finden Sie neben SI-Einheiten auch alte, teilweise nicht mehr gebräuchliche Einheiten sowie konkrete konstante Größen, z.B. eben die Erdmondmasse, die Elektronenmasse, die Masse eines Flusspferdes usw.

Hinweis: Möchten Sie die Umwandlungsrichtung tauschen, so klicken Sie einfach auf den Schalter .

Wählen Sie *Drucken*, *Kopieren* oder *Speichern*, so werden die Einheiten aus der linken Liste in die markierte Einheit der rechten Liste umgerechnet und das Ergebnis entsprechend weiterverarbeitet.

Erweiterung der Listen

Die Listen der Maßeinheiten und der konkreten Werte aus Natur, Wissenschaft und Technik können Sie wieder erweitern bzw. auf Wunsch auch Werte löschen und verändern.

Das Programm zeigt Ihnen rechts stets die Liste der aktuell gewählten Maßeinheiten an. Wollen Sie also eine Maßeinheit der Länge ergänzen, müssen Sie zuvor den Ordner *Länge* betätigt haben. Tragen Sie Ihre neue Maßeinheit sowie ein bekanntes Verhältnis zwischen dieser und einer anderen schon in der Liste enthaltenen Maßeinheit ein. Nach dem Quittieren mit *Maßeinheit aufnehmen* übernimmt das Programm Ihre Eingabe. Eine in der Listbox gewählte Einheit entfernen Sie – ohne Nachfrage durch das Programm – mit *Maßeinheit löschen*.
Im Beispiel soll eine neue Einheit der Masse in die Bibliothek aufgenommen werden. Zuerst wird im Unterprogramm der Ordner *Masse* und anschließend der Schalter *Neue Maßeinheit* gewählt.
In die Eingabezeilen werden nun eingetragen:

- unter *Neue Maßeinheit* die Bezeichnung Tonne (lton) (GBR). Dabei sollten Sie beachten, dass es zu keiner Doppelbenennung kommt
- unter *Einheiten* und *entsprechen ... Einheit von* ist das Verhältnis der Maßeinheiten festzulegen. Da 1 lton = 1016,1 kg gilt, tragen Sie diese Werte ein
- in der Liste ist zusätzlich die Zielmaßeinheit zu markieren, d.h. also in diesem Beispiel Kilogramm (kg)

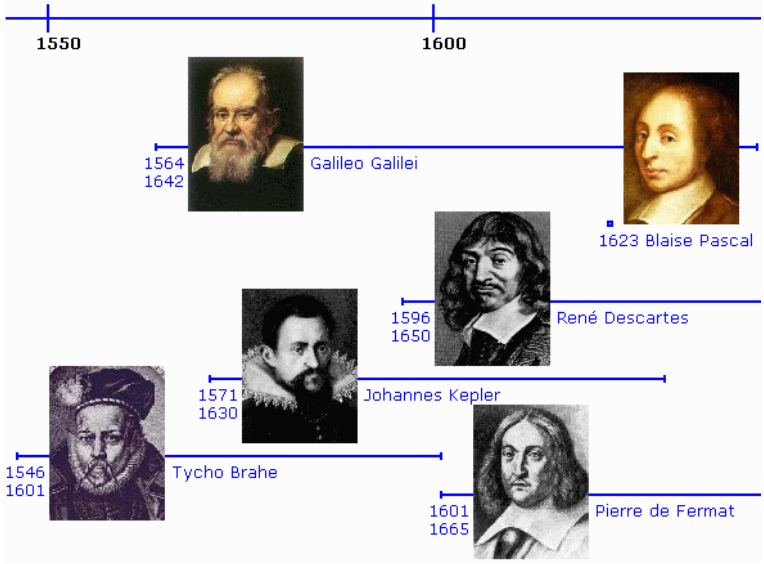
Anschließend bestätigen Sie Ihre Werte mit dem Schalter *Maßeinheit aufnehmen.*

12.2 Historischer Zeitstrahl

„Von demjenigen, der die Geschichte irgendeinen Wissens überliefern will, können wir mit Recht verlangen, dass er uns Nachricht gebe, wie die Phänomene nach und nach bekannt geworden und was man darüber phantasiert, gewähnt, gemeint

und gedacht habe."
Johann Wolfgang von Goethe

Im Lexikon dieses Programms finden Sie eine Vielzahl von Kurzbiografien bedeutender Mathematiker und Naturwissenschaftler.



Zum Beispiel erfahren Sie dort, dass Johannes Kepler 1571 geboren wurde und 1630 starb. Interessanter ist aber, in welchem Zeitraum Kepler lebte, welche wichtigen historischen Ereignisse eintraten, wer zur gleichen Zeit wie Kepler lebte und wirkte usw.

Im Teilprogramm *Zeitstrahl* zeigt Ihnen das Programm für jeweils 150 Jahre im Gesamtzeitraum von 550 v.u.Z. bis 2000 die bedeutendsten Mathematiker und evtl. andere Persönlichkeiten in einem Zeitstrahl an.

Neben diesen Personen werden im unteren Teil die wichtigsten historischen Ereignisse angezeigt. So werden Sie zum Beispiel feststellen, dass die letzten Lebensjahre Keplers vom 30-jährigen Krieg in Deutschland gezeichnet waren. Andererseits waren Kepler und Galilei Zeitgenossen und hätten sich sicherlich gegenseitig positiv beeinflussen können. Warum sie sich eher ignorierten, bleibt wohl vorläufig ein Geheimnis. Wahrscheinlich waren es religiöse Gründe: Kepler war Protestant, Galilei Katholik.

Ebenso können Sie sehen, dass die großen griechischen Mathematiker Pythagoras von Samos und Euklid keineswegs zur gleichen Zeit lebten, wie oft angenommen: Es liegen über 125 Jahre zwischen ihnen. Und Pappus von Alexandria, einer der letzten großen antiken griechischen Mathematiker wurde 760 Jahre nach Pythagoras' Tod geboren. Zwischen diesen beiden liegen also etwa so viele Jahre wie zwischen Einstein und Kaiser Barbarossa. Umso bewundernswerter ist, dass diese antiken griechischen Mathematiker mindestens acht Jahrhunderte lang die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft entscheidend beeinflussten. Welches andere Volk kann dies von sich behaupten?

Den anzuzeigenden Zeitraum stellen Sie am Rollbalken bzw. den Schaltern ein. In der aufklappbaren Liste finden Sie weitere Mathematiker mit ihren Lebensdaten. Wählen Sie einen aus, zeichnet das Programm die Lebensjahre dieses Wissenschaftlers farbig.

Die mit einem Bild angezeigten Personen und Ereignisse sind entweder blau oder

rot beschriftet. Eine blaue Schrift kennzeichnet einen Mathematiker. Bewegen Sie dort die Maus auf das Bild, verändert sich der Mauszeiger zu einer Hand. Klicken Sie nun, wird das Teilprogramm beendet und der erklärende Text des Lexikons aufgerufen.

12.3 Fachwörterbuch

"La Matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo."
Galileo Galilei

In den letzten Jahren hat sich die englische Sprache zu der führenden Sprache in der Wissenschaft entwickelt. Immer mehr Veröffentlichungen, Texte und Internetseiten werden in Englisch verfasst, so dass man kaum noch ernsthaft wissenschaftlich arbeiten kann, wenn man nicht die Grundlagen der englischen Sprache versteht. Wörterbücher gibt es in einer großen Vielfalt, jedoch behandeln diese die mathematische Fachsprache nicht immer zufriedenstellend.

Aus diesem Grund finden Sie unter dem Menüpunkt *Fachwörterbuch* ein Teilprogramm, in dem Sie mathematische Fachausdrücke aus dem Deutschen in eine Fremdsprache und umgekehrt übersetzen können.

Auch wenn Englisch die im Moment führende Sprache ist, bedeutet dies nicht, dass man auf alle anderen Fremdsprachen verzichten könnte.

Eine Vielzahl hervorragender mathematischer Bücher zu allen Fachbereichen erschien und erscheint in Russisch. Bis etwa 1990 gehörten sowjetische Mathematiker zur absoluten Weltspitze, war die Mathematik in der UdSSR doch eine besonders hoch angesehene Wissenschaft.
Und noch immer sind mathematische Bücher in Russisch sehr interessant. Zum einen wegen der unglaublichen mathematischen Vielfalt, Exaktheit und „Liebe" zum Detail, zum anderen wegen ihres extrem niedrigen Preises. Eine 100-seitige, ausführliche Formelsammlung mit Beispielen zum Unterrichtsstoff bis zum Abitur kostet bei www.kniga.de gerade einmal 1,99 Euro. Natürlich sind die russischen Lehrbücher nicht so schön bunt und auf Hochglanzpapier erhältlich wie die deutschen. Dafür sind sie aber didaktisch durchdacht, garantiert fehlerfrei und enthalten immer(!) auch die Lösungen zu den gestellten Aufgaben. Insbesondere die Fehlerfreiheit vermisst man bei deutschen Schullehrbüchern immer mehr.

Dank des Internets ist es jedem verstärkt möglich, auch Veröffentlichungen zu lesen, die eben nicht in Englisch geschrieben sind, sondern in einer anderen wichtigen Fremdsprache.
Unter der Internetadresse www.pandd.demon.nl findet man zum Beispiel eine riesige Auswahl an hervorragenden Seiten zur Geometrie vom niederländischen Autor Dick Klingens (PandD Software - Rotterdam), natürlich in Niederländisch.

Die nordeuropäischen Länder sind seit Jahren bestrebt, interessante Mathematikseiten im Internet zu präsentieren. Zum Beispiel finden Sie unter

http://matleks.infa.dk/ sehr gute Mathematikinformationen in Dänisch. Unsere direkten Nachbarn Tschechien und Polen sind traditionell ebenfalls mathematisch sehr interessiert. Und auch aus den lateinamerikanischen Ländern und aus Spanien kommen immer mehr wichtige mathematische Veröffentlichungen. So gehört z.B. die *Revista Matemática Iberoamericana* heute weltweit zu den besten Zeitschriften, besonders im Hinblick auf das Gebiet der Analysis.

Aufgrund ihres gesunden Nationalstolzes werden französische Autoren ihre Werke stets in Französisch veröffentlichen. Zum Beispiel lohnt sich ein Besuch der nahezu einmaligen Internetseiten www.mathcurve.com zu allen Arten von Kurven, Körpern usw. Und diese sind in Französisch!

Allgemein bekannt ist, dass die überwiegende Anzahl von Fachtermini direkt aus dem Lateinischen und Griechischen abgeleitet wurden. Daraus folgt, dass selbstverständlich auch andere Sprachen in der Mathematik benötigt werden.

Aus diesem Grund beschränkt sich dieses Teilprogramm auch nicht nur auf Englisch, sondern bietet Ihnen zusätzlich noch andere wichtige "Mathematik"-Sprachen.

Insgesamt sind 24 Sprachen integriert. Wählen Sie im Untermenü *Sprachauswahl* einfach die gewünschte Sprache aus. Zur Auswahl stehen:

> Bulgarisch, Dänisch, Englisch, Esperanto, Finnisch, Französisch, Griechisch, Isländisch, Italienisch, Kroatisch, Latein, Niederländisch, Polnisch, Portugiesisch, Rumänisch, Russisch, Schwedisch, Serbisch, Slowenisch, Spanisch, Tschechisch, Türkisch, Ungarisch und Vietnamesisch

Das Programm ruft in zwei Tabellen die entsprechenden Fachbegriffe auf. Neben reinen Fachwörtern finden Sie auch Wörter und Redewendungen, die in mathematisch-naturwissenschaftlichen Texten häufiger auftreten.
Klicken Sie nun in der linken fremdsprachlichen Liste einen Begriff an, so zeigt das Programm unten die zugehörige deutsche Entsprechung an. Klicken Sie in die rechte Liste, so bekommen Sie oben das Fremdwort angezeigt.

Wenn Sie Buchstabenfolgen in die Eingabezeilen eintragen und mit dem jeweiligen Schalter *Filter* quittieren, werden nur Begriffe in den Listen angezeigt, die diese Buchstabenfolge enthalten. Möchten Sie wieder die vollständige Vokabeltabelle sehen, so leeren Sie die Eingabezeilen und klicken auf *Filter.*
Für Buchstaben, die nicht auf der Computertastatur verfügbar sind, nutzen Sie das unter der Filterzeile angezeigte Alphabet. Klicken Sie jeweils auf den gewünschten Buchstaben. Buchstaben mit einem Akzent erhalten Sie, in dem Sie zuerst die Akzenttaste (´ Akut, ` Gravis, ^ Zirkumflex) drücken und anschließend den gewünschten Buchstaben.

Gegenwärtig umfassen die Fachwörterbücher folgende Vokabularbestände:

Begriffe	Sprache
19000	Russisch
14000	Italienisch, Französisch, Englisch
11000	Polnisch
10000	Tschechisch, Esperanto
9000	Dänisch, Schwedisch, Niederländisch, Isländisch
8000	Vietnamesisch, Spanisch, Portugiesisch
7000	Finnisch, Ungarisch
6000	Griechisch, Türkisch, Rumänisch, Slowenisch, Bulgarisch, Kroatisch
5900	Serbisch, Latein

Insgesamt ergeben sich also mehr als 225000 Übersetzungsmöglichkeiten. Der Begriffsumfang variiert dabei von Sprache zu Sprache.

Auf Wunsch können Sie die vollständigen Listen ausdrucken und erhalten damit eine umfassende Zusammenstellung der in mathematischen Texten häufig vorkommenden Wörter. Die Vokabellisten werden alphabetisch nach der Fremdsprache sortiert ausgegeben. Möchten Sie Tabellen haben, die nach den deutschen Wörtern sortiert sind, so benutzen Sie bitte den Menüpunkt *Datei | Liste umgekehrt drucken*. Beachten Sie dabei aber, dass beispielsweise die Liste der russischen Begriffe 200 DIN-A4-Seiten (Schriftgröße 9) lang ist.

Natürlich ersetzen diese Fremdwörtertabellen kein umfangreiches gedrucktes Fachwörterbuch – dafür reicht das Begriffsvolumen nicht aus. Als erste Hilfestellung zur inhaltlichen Übersetzung fremdsprachiger Texte sind sie aber sicher geeignet.

Hinweis: Zur Darstellung mehrerer Sprachen werden besondere Schriftarten benötigt, die normalerweise nicht auf Ihrem Computer installiert sind.
Dieses Programm erzeugt die speziellen Schriftarten nur temporär, d.h. es werden auch hier keinerlei Änderungen an Ihrem System vorgenommen!

Persönliche Anmerkung des Programmautors

Die Vokabellisten wurden mit extrem hohen Einsatz in wochenlanger Arbeit aus Wörterbüchern, Fachbüchern, Internetseiten usw. zusammengestellt. Dabei wurde großer Wert auf Exaktheit gelegt. Da aber der Autor nur Kenntnisse in Russisch, Englisch, Französisch und Esperanto besitzt, können sich leider Fehler eingeschlichen haben. Dafür wird um Entschuldigung gebeten.
Hinweise auf evtl. Fehler sind gern willkommen.
Übrigens: Der Besuch nicht englischsprachiger Internetseiten, z.B. französische oder russische, ist auf Grund der Vielfalt und Schönheit dieser Sprachen im Gegensatz zur Abgedroschenheit des mit der Globalisierung immer primitiver werdenden Flughafen-Englisch geradezu erfrischend.

Bei den Begriffen in Latein sei an dieser Stelle darauf verwiesen, dass die alten

Römer natürlich weder eine Null noch eine Relativitätstheorie kannten. Fachbegriffe, die zu Zeiten Cäsars noch nicht bekannt sein konnten, wurden aus mittelalterlichen Fachtexten und besonders aus dem „Lexicon recentis latinitatis" entnommen. Dieses vom Vatikan autorisierte Werk beinhaltet mehrere Tausend neuzeitliche Begriffe in Latein.

Quellen, verwendete Wörterbücher

· Daum, *Wörterbuch Russisch-Deutsch*, Verlag Enzyklopädie, Leipzig 1978
· Elöd, *Német-Magyar Szótár*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971
· Engländer, *Mathematisch-naturwissenschaftliches Wörterbuch Deutsch-Vietnamesisch*, Enzyklopädie Verlag, Leipzig 1981
· Fainaru, *Dicţionar de ... cibernetică şi automatică român-german*, Editura Tehnica, Bukarest 1979
· Fischer, *Taschenwörterbuch Tschechisch-Deutsch*, Enzyklopädie Verlag, Leipzig 1975
· Hau, *Globalwörterbuch Lateinisch-Deutsch*, Klett Verlag Stuttgart, 1994
· Hielscher, *Základní Slovní Zásoba Nemciny*, Kvarta, Prag 2002
· Iliescu, *Wörterbuch Rumänisch-Deutsch*, Enzyklopädie Verlag, Leipzig 1971
· Iwanow, *Немско-Български машино-строителен речник*, Staatsverlag Technika, Sofia 1972
· Kocha, *Slownik techniczny*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warschau 1971
· Kotnik, *Taschenwörterbuch Slowenisch*, Langenscheidt, Berlin 1963
· Krause, *Wörterbuch Deutsch Esperanto*, Verlag Enzyklopädie, Leipzig 1983
· Menge, *Taschenwörterbuch Griechisch*, Langenscheidt, Berlin 1967
· Skrzynska, *Slownik naukowo-techniczny angielsko-polski*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warschau 1994
· Tkaczyk, *Kieszonkowy Slownik Niemiecko Polski*, Wilga Warschau, 2003
· Walther, *Polytechnisches Wörterbuch Deutsch-Englisch*, Verlag Technik Berlin, 1973
· *Compact-Wörterbuch Spanisch*, Compact-Verlag, München 1994
· *Englisch-Deutsch Wörterbuch*, Enzyklopädie-Verlag, Leipzig 1980
· *Harrap's Global Dictionnaire Allemand-Francais*, Pons, Edinburgh 2000
· *Italienisch-Deutsch*, Weltbildverlag Augsburg, 1995
· *Kompaktwörterbuch Neugriechisch-Deutsch,* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2004
· *Lexicon recentis latinitatis,* Libraria Editoria Vaticana, Vatikan 1992
· *Немецко-Русский Математический Словарь*, Verlag Sowjetskaja Enzyklopedija, Moskau 1968
· *Universalwörterbuch Dänisch*, Langenscheidt, Berlin 1991
· *Wörterbuch Deutsch-Lateinisch,* Buch und Zeit Verlag, Köln

12.4 Kalender

"Caelum mea regula - Der Himmel ist mein Maß"

Kalender bieten Gelegenheit zu einfachen aber aufwendigen Berechnungen. Insbesondere die Bestimmung der veränderlichen Feiertage erfordert mehrere Überlegungen. Ausgehend vom tropischen Jahr, d.h. die Zeitdauer der scheinbaren Bewegung unserer Sonne von Frühlingspunkt zum Frühlingspunkt = 365 d 12 h 44 min 3 s, wurde der Julianische Kalender durch Julius Cäsar im Jahre 46 v.u.Z. eingeführt. Die Abweichung dieses Kalenders zum tropischen Jahr um wenige Minuten führte bis zum 16. Jahrhundert zu einer Verschiebung des Frühlingsbeginns um 11 Tage, sodass Papst Gregor XIII. eine Kalenderkommission zur Neubearbeitung ins Leben rief – mit dem Ergebnis, dass auf Donnerstag, den 4. Oktober 1582 (Fest des heiligen Franziskus von Assisi) sofort der Freitag, 15. Oktober (Fest der heiligen Theresia von Avila) folgte. Übrigens feierte Papst Gregor XIII. die blutige Pariser Bartholomäusnacht mit einem Dankgottesdienst.

Dieser Gregorianische Kalender gilt heute noch, wenngleich weitere kleine Änderungen vorgenommen wurden. In der heutigen Zeit gleicht man Abweichungen zum Sonnenjahr (Differenzen von mehr als 0,7 Sekunden) durch das Einfügen oder Streichen von Schaltsekunden am Ende eines jeden Jahres aus. Die allgemeine Schaltregel besagt: Gemeinjahre haben 365 Tage, Schaltjahre 366. Ein Schaltjahr ist jedes ohne Rest durch vier teilbare Jahr, mit Ausnahme der durch 100 ohne Rest teilbaren. Alle durch 400 ohne Rest teilbaren Jahre sind Schaltjahre, d.h., das Jahr 2000 war ein Schaltjahr, das Jahr 1900 war es nicht.

Nach Aufruf dieses Unterprogramms berechnet das Programm für den aktuellen Monat den Kalender und stellt diesen dar. An den Rollbalken können Sie Monat und Jahr ändern. Klicken Sie auf den Schalter *Heutiges Datum*, übernimmt das Programm automatisch das aktuelle Datum.

Grundlage der Berechnung ist der Gregorianische Kalender – für Daten vor dem 15. Oktober 1582 schaltet das Programm automatisch auf den Julianischen Kalender, sodass z.B. das Osterfest auch vor dem Jahr 1582 korrekt ausgewertet wird. Ein Vergleich mit dem Datum des ersten Frühlingsvollmondes verdeutlicht die entstandene Differenz, die zur Kalenderreform führte. Die maximale Laufzeit des Kalenders ist das Jahr 3000. Jahreszahlen vor 1000 können nicht genutzt werden.

Beachten Sie bitte: Der Gregorianische Kalender wurde zwar von den katholischen Staaten im Jahr 1582 übernommen, galt in Deutschland aber erst per Gesetz ab März 1700, in Großbritannien ab 1752, in der Türkei ab 1927.

Zusätzlich trägt das Programm die wesentlichsten Feiertage im deutschsprachigen Raum ein, d.h. Neujahr, Heilige Drei Könige, Fasching, Karfreitag, Ostersonntag

und -montag, Maifeiertag, Himmelfahrt, Pfingsten, Fronleichnam, Reformationstag, Allerheiligen, Bußtag und Weihnachten.

Weiterhin können Sie die Zeitdauer zwischen zwei Daten ermitteln. Tragen Sie Start- und Zieldatum im Format *dd.mm.jjjj* ein und betätigen Sie den Schalter *Differenz*. Zeitdifferenzen können Sie ab dem 1. Januar des Jahres 1 berechnen lassen. Zu beachten ist hierbei allerdings, dass im Ergebnis der Starttag, nicht jedoch der Zieltag enthalten sind.

Das Programm ermittelt für das gewählte Datum:

Wochentag, Nummer des Tages im laufenden Jahr, Nummer der Woche
das Julianische Datum und das modifizierte Julianische Datum
das Datum des Tages in anderen Kalendern

Im Programm sind folgende Kalender enthalten:

Julianischer Kalender
UNO-Weltkalender
Klassischer Römischer Kalender
Ägyptischer Kalender
Japanischer Kalender
Chinesischer Kalender
Maya-Kalender, Azteken-Kalender
Französischer und sowjetischer Revolutionskalender
Islamischer Kalender
Jüdischer Kalender (heute noch gültig)
Seleukidischer Kalender
Alter und neuer iranischer Kalender
Koptischer und äthiopischer Kalender
Armenischer Kalender
Bahâi-Kalender
Indischer reformierter Kalender
Sikh-Kalender
Positivisten-Kalender
Göttinnen-Kalender
Solilunar-Kalender
Darischer Marskalender
60-Wochen-Kalender
Diskordianischer Kalender

Informationen zu diesen Kalendern und Zeitmaßen finden Sie im Lexikon.

Zusätzlich zu den Kalenderdaten können Sie sich auch astronomische Daten des Tages und bedeutende historische Ereignisse anzeigen lassen. Wählen Sie dazu *zusätzliche Daten anzeigen*.

U.a. werden die Geburtstage von über 100 bedeutenden Mathematikern (mit der Nummer des Jahrestages) angezeigt. Weitere Informationen zu diesen Wissenschaftlern finden Sie im Biografieteil des Lexikons.
Mittels anspruchsvoller Berechnungen erfahren Sie außerdem das aktuelle Mondalter, die Mondphase, die Daten des nächsten Neu- und Vollmondes, den Beginn und das Ende der bürgerlichen Dämmerung sowie die Aufgangs-, Kulminations- und Untergangszeiten des Mondes und der Sonne. Die angegebenen Zeiten beziehen sich dabei auf die Mitteleuropäische Standardzeit (östliche Länge 15°) und werden an Ihrem Wohnort möglicherweise um einige

Minuten differieren.

Julianisches Datum

Der 1540 in Frankreich geborene Gelehrte Joseph Justus Scaliger schlug im Jahre 1583 eine fortlaufende Zählung der Tage innerhalb einer "Julianischen Periode" vor.
Diese Periode hat eine Länge von 7980 Jahren und stellt das kleinste gemeinsame Vielfache von Mondzyklus (19 Jahre), Sonnenzyklus (28 Jahre) und Indiktion (15 Jahre) dar.
Das Jahr 4713 v.u.Z. ist das erste in allen drei Zyklen, daher beginnt die Zählung am 1. Januar 4713 v.u.Z. Angaben im Julianischen Datum werden durch die nachgestellten Buchstaben "JD" bezeichnet. Hauptsächliches Anwendungsgebiet für das Julianische Datum ist die Astronomie.

Jüdischer Kalender

Die Jahreszählung des modernen jüdischen Kalenders beginnt mit dem Jahr 3761 v.u.Z., in dem nach dem jüdischen Glauben die Welt erschaffen wurde. Diese Zählweise wurde ungefähr im 10. Jahrhundert u.Z. festgelegt, der Kalender selber hatte schon im 4. Jahrhundert u.Z. seine heutige Form angenommen.
Der jüdische Kalender beruht auf einem Lunisolarjahr mit einem komplizierten Regelwerk zur Festlegung der Schaltmonate. Die besondere Kompliziertheit ist das Bestreben, bestimmte Feiertage nicht auf als unpraktisch empfundene Wochentage fallen zu lassen. Daher wird nach "mangelhaften", "regelmäßigen" und "überzähligen" Gemeinjahren mit 353, 354 und 355 Tagen und entsprechenden Schaltjahren mit 383, 384 und 385 Tagen unterschieden.

Islamischer Kalender

Vollkommen unabhängig vom Lauf der Jahreszeiten ist der Islamische Kalender. In ihm besteht ein Jahr stets aus zwölf Monaten, die wiederum streng an die Mondphasen gebunden sind. Der Beginn eines jeden Monats wird durch das erste Sichtbarwerden der Mondsichel nach Neumond bestimmt.
Damit ist die Monatslänge nicht im Voraus zu bestimmen, denn die Mondbeobachtung ist stark wetterabhängig, sodass es schon zu Monaten mit 31 Tagen gekommen ist, obwohl ein Mondmonat eine Länge von nur etwa 29,5 Tagen hat.

Beachten Sie bitte, dass die Angabe des islamischen Datums in diesem Programm durchaus um ein bis zwei Tage abweichen kann.

12.5 Monatskalender

In diesem Teilprogramm werden vier Monatskalender berechnet, ein chinesischer, islamischer bzw. jüdischer Monatskalender bzw. eine Übersicht der Mondphasen.

Über den aufklappbaren gregorianischen Monatskalender links oben im Programmfenster können Sie Ausgangstag, -monat und -jahr wählen. Dort können Sie auch das Datum direkt angeben. Zu beachten ist hierbei, dass der Kalender erst ab dem Jahr 1800 berechnet wird.
Die Art des Kalenders wählen Sie an den Auswahlfeldern links.

Chinesischer Kalender

Der chinesische Kalender ist eine der kompliziertesten Strukturen im Kalenderwesen. Es handelt sich um einen astronomischen Kalender, d.h., der Eintritt bestimmter Ereignisse ist an das Beobachten der Himmelskörper geknüpft.

Im alten China wurde ein Lunisolarjahr benutzt. Für die dazu notwendige Interkalation von Schaltmonaten hat auch hier die Entwicklung zum Metonischen Zyklus von 19 Jahren geführt. Durch das Einschieben von sieben Schaltmonaten in 19 Jahren wird der Kalender mit dem Sonnenjahr ausgeglichen. Der Jahresanfang ist der zweite Neumond vor der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche. Neben den Mondmonaten gibt es eine streng mathematische Einteilung des Sonnenjahres in 24 gleich lange Abschnitte.

Es gab ursprünglich keine Jahreszählung. Stattdessen wurden die Jahre durch eine Kombination aus einem unübersetzbaren Symbol aus der chinesischen Naturphilosophie und einem Tierzeichen, das nicht identisch mit den Tierkreiszeichen der europäischen Astrologie ist, bezeichnet.
Es existieren 10 Symbole und 12 Tierzeichen, die jeweils zyklisch durchlaufen werden. In einem 60-jährigen Zyklus hat damit jedes Jahr eine eindeutige Bezeichnung.
Die großen Zyklen von 60 Jahren Länge wurden durch die Angabe eines darin hineinfallenden wichtigen Ereignisses oder die Nennung einer Herrscherpersönlichkeit der Epoche gekennzeichnet.

Ratte - zi, Ochse - chou, Tiger - yin, Hase - mao, Drache - chen, Schlange - si, Pferd - wu, Ziege - wei, Affe - shen, Huhn - you, Hund - xu, Schwein - hai

Für die 10 Symbole gibt es keine deutsche Entsprechung. Sie lauten: jia, yi, bing, ding, wu, ji, geng, xin, ren gui.
Mitunter wird dennoch eine fortlaufende Jahreszählung durchgeführt. Diese beginnt jedoch nicht im ersten Jahr des ersten Zyklus, also 2673 v.u.Z., sondern entsprechend chinesischer Tradition mit dem Beginn der Herrschaft des Kaisers im Jahr 2698 v.u.Z. Deshalb begann am 12. Februar 2002 das chinesische Jahr 4700 (19. Jahr im 78. Zyklus, Jahresbezeichnung "ren-wu").

In der Praxis ist der Aufbau dieses Kalenders noch komplizierter, da eine Vielzahl von Zyklen in Einklang gebracht werden müssen.
Allein die Ermittlung des Schaltmonats ist sehr anspruchsvoll. Dieser kann an jeder Stelle des Jahres eingefügt werden und wird mit der gleichen Bezeichnung

wie der Vormonat versehen, jedoch zusätzlich mit dem Wort "tan" markiert.

Das Programm berechnet die Tagesdaten im chinesischen Kalender. Je Tag wird von oben nach unten eingetragen: gregorianischer Tag, chinesischer Tag in chinesischen Schriftzeichen, chinesischer Tag als gewohnte Datumsangabe. Rechts oben neben der Monatsangabe finden Sie die Bezeichnung des jeweils gültigen Abschnitts des Sonnenjahres. Außerdem ermittelt das Programm die Jahresnummer und die Bezeichnung.

Jüdischer Kalender

Das Programm berechnet die Tagesdaten im jüdischen Kalender. Je Tag wird von oben nach unten eingetragen: gregorianischer Tag, jüdisches Datum in hebräischen Schriftzeichen, jüdisches Datum als gewohnte Datumsangabe.

Darüber hinaus markiert das Programm jüdische Feiertage farbig. Rechts oben neben der Monatsangabe finden Sie den jüdischen Namen des Monats.

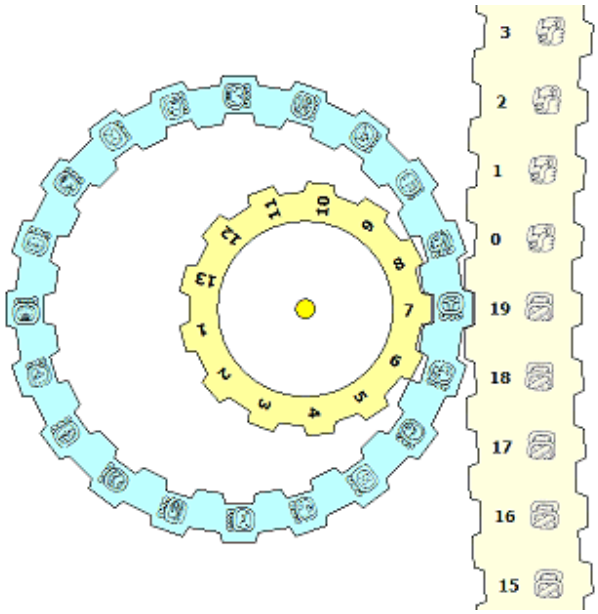
Mondphasenkalender

Der Mondphasenkalender zeigt für einen gewählten Monat die jeweiligen Mondphasen an.

Welcher Monat angezeigt werden soll, stellen Sie links bei der Datumsauswahl ein. Der dargestellte Kalender kann wieder ausgedruckt bzw. in die Zwischenablage kopiert werden.

12.6 Maya-Kalenderrunde

Das Maya-Kalender kennt zwei verschiedene Daten: das Haab-Datum und das Tzolkin-Datum. Das Haab-Datum setzt sich aus Tageszahl und Monatsname zusammen.
Das Tzolkin-Datum ist das älteste der Maya-Kalendersysteme, der 260-tägige Ritualkalender. Er basiert auf der Kombination von zwanzig Tageszeichen mit den Zahlen von eins bis dreizehn. Der vierzehnte Tag wurde wieder mit der Zahl eins kombiniert. Nach 260 Tagen waren somit alle möglichen Kombinationen durchgelaufen, und der Zyklus begann wieder neu.



Man kann die zwei Jahresräder von Haab (rechts) und Tzolkin (links) aneinanderfügen.

Da der größte gemeinsame Teiler der beiden Jahreslängen 5 ist, kann z.B. auf den Neujahrstag 1 Pop nur jeder fünfte Tzolkin-Tag treffen, nämlich Akbal, Lamat, Ben und Etznab. Unter Berücksichtigung der Jahreslängen von 365 bzw. 260 Tagen ergibt sich ein Zyklus von 18980 Tagen. Nach 18980 treffen sich beide großen Räder an derselben Position. In dieser Zeit sind 73 Tzolkin-Jahre oder 52 Haab-Jahre vergangen.
Die Kombination aus Tzolkin- und Haab-Datum heißt Kalenderrundendatum oder kurz Kalenderrunde. Dieses Datum nutzten nicht nur die Maya, sondern auch andere mittelamerikanische Völker.

Diese Kalenderrunde wird in diesem Teilprogramm simuliert.
Tragen Sie unter *Tag, Monat, Jahr* ein Datum ein und quittieren mit *Datum übernehmen*, so werden die zwei Jahresräder dargestellt. Links zeigt das kleine Rad die Zahlen 1 bis 13, das große Rad die Tageszeichen im Tzolkin-Kalender. Auf der rechten Seite zeigt das „sehr große" Rad das Haab-Datum, Tageszahl und Monatsname.

Mit den Schaltern *1 Tag weiter, 1 Tag zurück* können Sie das Datum ändern. Die *Simulation* erhöht kontinuierlich das Datum.

Zu beachten ist, dass die Berechnung und Darstellung auf langsameren Computern zu einer langsamen Simulation führen kann.

12.7 Feiertage, Gedenktage, Jahrestage

„Ostern ist ein Feiertag und kein Planet"
Johannes Kepler 1613 auf dem Regensburger Reichstag

Dieses Teilprogramm ermittelt für einen einzugebenden Zeitraum von Jahren chronologisch geordnet Feier- und Gedenktage.
Dabei werden neben staatlichen und christlichen auch jüdische Feiertage ausgewertet.

Jahrestag-Kalender

Markieren Sie das Feld *Jahrestag*, so werden die "runden" Jubiläen bedeutender Ereignisse von Mathematik, Physik, Astronomie und Raumfahrt für das eingegebene Jahr ermittelt, darunter "runde" Geburts- und Sterbedaten von Mathematikern.

12.8 Arbeits- und Feiertage

Mitunter ist es notwendig, die Anzahl von Arbeitstagen zwischen zwei festgelegten Daten zu ermitteln. Dazu sind die Differenz der Tage zu berechnen und die Sonnabende und Sonntage zu berücksichtigen.
Zusätzlich können Feiertage auch auf den Wochenenden liegen bzw. sogar frei

beweglich sein, so dass sie nur in bestimmten Jahren in einem gewissen Zeitraum liegen.
Insbesondere betrifft die Ostern und die daran gekoppelten Feiertage Karfreitag, Himmelfahrt, Pfingsten und Fronleichnam, aber auch den Buß- und Bettag, der von der Lage der Advente abhängig ist.
Darüber hinaus gelten in den 16 Bundesländern, in Österreich, in Liechtenstein und den Kantonen der Schweiz sehr unterschiedliche Regeln, ob ein spezieller Tag Feiertag ist, oder nicht.

In den deutschen Bundesländern sind Feiertage:
Neujahr, 1.Mai, 3.Oktober, 25.Dezember, 26.Dezember, Karfreitag, Ostersonntag und -montag, Himmelfahrt, Pfingstsonntag und -montag
Weitere Feiertage werden begangen:
Heilige 3 Könige ... Baden-Württemberg, Bayern, Sachsen-Anhalt
Fronleichnam ... Baden-Württemberg, Bayern, Hessen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland
Maria Himmelfahrt ... Bayern, Saarland
Reformationstag ... Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt, Thüringen
Aller Heiligen ... Baden-Württemberg, Bayern, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland
Buß- und Bettag ... Sachsen

Österreich und Liechtenstein haben landesweit einheitliche Regeln, jedoch weichen die der Schweizer Kantone sehr stark voneinander ab.
In diesem Teilprogramm werden für Deutschland, Österreich, die Schweiz und Liechtenstein Arbeits- und Feiertag ermittelt. Dazu wählen Sie in den beiden aufklappbaren Kalendern Anfangs- und Enddatum aus.

In der linken Liste werden für die unterschiedlichen Regionen die Anzahl der Arbeitstage und in Klammern die Zahl der Feiertage, die nicht am Wochenende liegen, angezeigt.
Markieren Sie einen der Einträge mit der Maus, zeigt das Programm für die gewählte Region rechts alle Feiertage des Zeitraums an.

12.9 Weltzeituhr

In diesem Teilprogramm können Sie für jeweils vier Orte unserer Erde die aktuelle Uhrzeit "ablaufen" lassen. Wählen Sie dazu in den vier aufklappbaren Listen je einen Ort aus. Für die erste Liste ist der aktuell eingestellte Beobachtungsort ausgewählt.
Daraufhin präsentiert Ihnen das Programm die Uhrzeit an diesen Orten an und aktualisiert sie ständig.

Haben Sie das Programmfenster maximiert und eine waagerechte Auflösung von mindestens 1280 Pixel eingestellt, zeigt das Programm fünf Listen und die entsprechenden Uhren an.

Unterhalb der vier Uhren sehen Sie noch weitere. Diese zeigen die Ortszeit an, also jene Zeit, die für den gewählten Ort dem wirklichen mittleren Verlauf der Sonne entspricht. Zum Beispiel gehen die Uhren für fast alle Orte Deutschlands im Verhältnis zum realen Standpunkt etwas vor, denn die Mitteleuropäische Zeit gilt exakt für einen Ort mit einer geografischen Länge von 15°, d.h. zum Beispiel für Görlitz.

Entfernen Sie die Markierung aus dem Feld *Ortszeit*, zeigt das Programm an den unteren Uhren die Sternzeiten der Orte an.

12.10 Berechnung einer Sonnenuhr

In diesem Teilprogramm wird eine Horizontalsonnenuhr berechnet, genauer gesagt, der Verlauf des Schattens eines senkrecht stehenden Stabes während der täglichen Bewegung der Sonne.

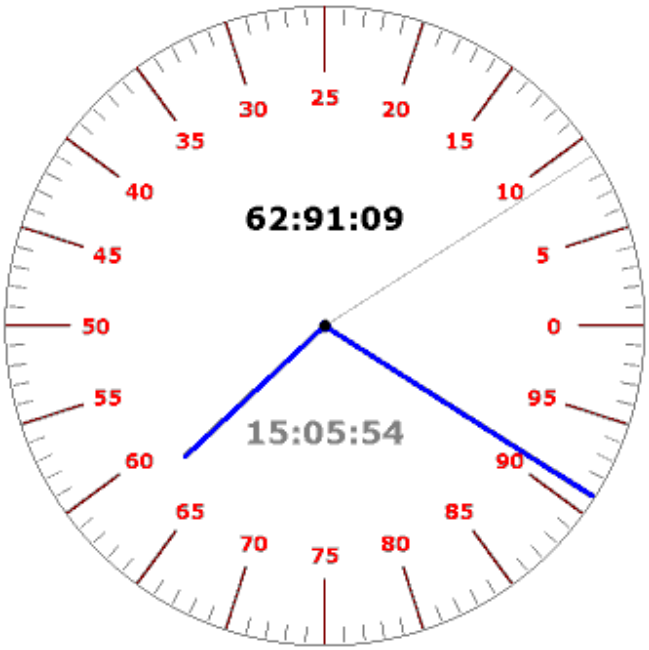
Für die Berechnung ist die Eingabe der *geografischen Länge* und *Breite* an den Pfeilschaltern und des gewünschten *Datums* wichtig. Beachten Sie bitte, dass die Berechnung erst ab dem Jahr 1900 möglich ist.

Das Programm ermittelt sofort die Koordinaten des Schattenendpunktes eines 1 m hohen Stabes für mehrere Zeiten des Tages. Im unteren Teil des Fensters wird der Verlauf des Schattens grafisch angezeigt. Dabei ist das Koordinatensystem so ausgerichtet, dass die Abszisse von West nach Ost und die Ordinate von Süd nach Nord verläuft.

Während der Simulation wird das Datum kontinuierlich erhöht, sodass man die Änderung der Lage und die Größe des Schattens im Laufe eines Jahres nachvollziehen kann.

12.11 Mathematikeruhr

Eine der wichtigsten Errungenschaften des Menschen ist seine Fähigkeit, die Zeit zu messen. Schon vor über 4000 Jahren kamen die Babylonier auf die Idee, den Tag in 24 gleiche lange Abschnitte, die Stunden, zu teilen. Später wurde jede Stunde in 60 Minuten und diese wiederum später in 60 Sekunden aufgeteilt. Weshalb die Babylonier ausgerechnet 24 Stunden wählten, ist bis heute nicht vollkommen geklärt.



Insbesondere einem Mathematiker kann dies natürlich nicht gefallen, denn die Basis unseres Zahlsystems ist die 10 und nicht die 24 oder die 60. Aus diesem Grund macht das Programm den Vorschlag, die Zeit zu reformieren.
In diesem Programmteil finden Sie eine Uhr, die sich streng an die Mathematik hält:

- Erstens wird jede Mathematikerstunde in je 100 Mathematikerminuten mit wiederum jeweils 100 Mathematikersekunden geteilt. Die 100 wird als Quadrat von 10 gewählt, da die Einteilung mit je 10 Einheiten die Mathematikersekunden sehr lang machen würde.
- Zweitens wird der Tag ebenfalls in 100 Mathematikerstunden unterteilt. Damit ist gewährleistet, dass nicht zwei verschiedene Skalen an der Uhr abzulesen sind wie bisher, wo auf 360° zum einen 24 Stunden, zum anderen 60 Minuten bzw. Sekunden abgetragen werden.
- Drittens wird der Nullpunkt der Uhr entsprechend den Regeln des Koordinatensystems nach rechts und nicht nach oben verlegt.
- Viertens läuft der Zeiger in mathematisch positiver, d.h. korrekter Richtung, also entgegen der bisher üblichen Uhrzeigerrichtung.

Starten Sie das Programm, so zeigt Ihnen diese Mathematikeruhr die aktuelle Zeit an.

Die Grundzahl und die Anzahl der Stunden je Tag können Sie an zwei Eingabefeldern einstellen. Voreingestellt sind jeweils 100.

Wie man schnell sieht, ist eine Mathematikersekunde kürzer als die klassische Sekunde. Dies braucht auch nicht zu wundern, da den 86400 klassischen Sekunden nun 1 Million Mathematikersekunden gegenüberstehen. Die sensationellen Vorteile liegen klar auf der Hand: Zum einen kann man mit dieser Uhr noch viel genauere Zeiträume exakt angegeben, was uns das Leben nach der Uhr noch erleichtern würde, zum anderen müsste die riesige Gruppe von mathematisch Interessierten sich nicht ständig umstellen, sondern könnte immer das Dezimalsystem verwenden. Und für Programmierer würde es auch deutlich einfacher – die Zahlen 24 und 60 sind wirklich sehr behindernd.

Natürlich kann es sein, dass Sie die 100 als Grundzahl z.B. aus persönlichen Gründen nicht mögen. Kein Problem: In den Eingabefeldern können Sie diese Grundzahl einstellen und so Ihre individuelle Zeitzählung schaffen.

Zusätzlich zur normalen Mathematikeruhr wird rechts eine zweite angezeigt, die zwar gleich aufgebaut ist, aber wahlweise die Ortszeit, Weltzeit bzw. Sternzeit anzeigt. Für Orts- und Sternzeit wird die geografische Länge des Ortes benötigt. Diese kann eingestellt werden.

Wichtige Anmerkung für Anwender, die keinen Spaß verstehen: Der Vorschlag, den Tag in neue Zeiträume einzuteilen, ist nicht wirklich ernst gemeint!

12.12 Ortsbibliothek

Innerhalb des Unterprogramms *Planetenephemeriden* benötigen Sie die geografischen Koordinaten von Orten auf der Erdoberfläche als Beobachtungsstandort – ebenso in anderen Teilprogrammen.

Wählen Sie dieses Unterprogramm, erscheint ein Programmfenster, das die aktuelle Ortsbibliothek anzeigt. In der Liste können Sie einen der vordefinierten Orte auswählen. *Ort als Beobachtungsort einstellen* legt den aktuell gewählten Ort als neuen Bezugsort fest und trägt ihn in die Initialisierungsdatei ein.

Möchten Sie die Bibliothek z.B. um Ihren Heimatort erweitern, so tragen Sie in *aktueller Ort* dessen Name, weiterhin die *geografische Breite* b und *Länge* l (in Grad, Winkelminuten, Winkelsekunden) sowie die Korrekturzeit im Verhältnis zur Weltzeit ein. Mitteleuropäische Zeit bedeutet +1 relativ zur Weltzeit (Greenwich-Zeit).
Für die Koordinaten gilt:

- positive geografische Breite = oberhalb des Äquators (nördliche Erdhalbkugel)
- negative geografische Breite = unterhalb des Äquators
- positive geografische Länge = östlich von Greenwich
- negative geografische Länge = westlich von Greenwich

Neben der Eingabe der geografischen Koordinaten im Format xx° xx' xx" können Sie diese Werte auch als reine Dezimalzahl eingeben.

Beispiel: Für Chemnitz wäre neben 50°50' geografische Breite auch die Eingabe 50,83333 möglich. Sie sollten aber die nicht dezimale Form in Grad, Minuten, Sekunden vorziehen.
Mit dem Schalter *Ort einfügen* wird Ihr neu eingegebener Ort in die Bibliothek übernommen. Die mitgelieferte Ortsbibliothek enthält insgesamt über 3000 Standorte. Mit dem Schalter *Ort löschen* entfernen Sie einen markierten Eintrag aus der Ortsbibliothek.

Kennen Sie die geografischen Koordinaten Ihres Ortes nicht, dann nutzen Sie die im rechten Fensterteil dargestellte Deutschlandkarte. Fahren Sie mit der Maus über diese Karte, werden Ihnen genäherte Koordinaten der Orte angezeigt. Klicken Sie mit der linken Maustaste auf die ungefähre Position Ihres Heimatortes, so übernimmt das Programm diese Koordinaten in die Eingabezeilen. Zum Abspeichern des neuen Ortes verfahren Sie dann wie oben beschrieben.

Hinweis: Selbstverständlich können nur exakte geografische Koordinaten des Beobachtungsortes auch genaue Ergebnisse liefern. Dennoch sind die genäherten Werte hinreichend genau.

Zeitanzeige

Für astronomische Beobachtungen benötigen Sie neben Ihrer aktuellen Uhrzeit auch die Sternzeit. Die Drehung der Erde um ihre eigene Achse wird im Allgemeinen mit 24 Stunden angegeben, der Dauer eines Tages. Dies ist aber nur korrekt, wenn damit die Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne gemeint ist, d.h. die Zeit, nach der die Sonne wieder genau im Süden steht. Durch die Bewegung der Erde um die Sonne benötigt die Erde aber für eine vollständige Rotation von einer Kulmination zur nächsten eines Sterns keine 24 Stunden, sondern nur 23 h 56 min – einen Sterntag. Da sich die Astronomie aber vorwiegend mit der Beobachtung von Sternen beschäftigt, muss diese Sternzeit unbedingt berücksichtigt werden, andernfalls ist der Stern nicht dort, wo er berechnet wurde.

Haben Sie einen Ort in der Ortsbibliothek ausgewählt, stellt das Programm zwei Uhren dar. Die obere Uhr (in der Abbildung links) gibt Ihnen die Systemzeit Ihres Computers an, die rechte entsprechend des eingestellten Beobachtungsortes die aktuelle Sternzeit. Diese Sternzeit ist vom Ort des Beobachters in hohem Maße abhängig. Beide Uhren werden im Sekundenakt aktualisiert. Ändern Sie den Beobachtungsort, so ändern sich natürlich auch die angezeigten Zeiten.

Unterhalb der rechten Uhr zeigt das Programm weiterhin an, um welchen Betrag die Sternzeit vor der Ortszeit läuft. Zu Beginn des astronomischen Herbstes sind beide Uhren identisch, zu Frühjahrsbeginn geht die Ortszeit genau 12 Stunden nach.

Das schnellere Voranschreiten der Sternzeit beträgt pro Tag rund 237 Sekunden, d.h. etwa alle sechs Minuten eine Sekunde. Lassen Sie die Zeitanzeige einige Minuten laufen, so können Sie nachvollziehen, dass die Differenz zwischen Sternzeit und Ortszeit kontinuierlich anwächst.

Sehr wichtiger Hinweis

Das Schaltfeld *Zeit in Bezug auf MEZ anzeigen* hat besondere Bedeutung.
Ist dieses Feld ausgewählt, geht das Programm davon aus, dass Sie sich mit Ihrem Computer in der Mitteleuropäischen Zeitzone aufhalten. D.h., die Computerzeit wird als MEZ gewertet und für den gewählten Ort die zu diesem Zeitpunkt aktuelle Zeit ausgewiesen.

Zum Beispiel erhalten Sie für 14:20:00 Uhr und den markierten Ort Hongkong die Zeit 21:20:00, da es um 14.20 Uhr in Mitteleuropa im fernen China sieben Stunden später ist. Diese Zeitverschiebung wird auch bei der Sternzeit berücksichtigt. Damit können Sie das Programm als einfache "Weltzeituhr" nutzen.
Ist das Schaltfeld nicht markiert, geht das Programm davon aus, dass Sie sich am gewählten Ort befinden. Die Computerzeit wird nun als aktuelle Zeit an diesem Beobachtungsort interpretiert.

Weiterhin berücksichtigt das Programm in diesem Teilprogramm die Mitteleuropäische Sommerzeit.

Beachten Sie bitte, dass diese außerhalb Europas nicht unbedingt gilt und auch einige europäische Länder zu anderen Terminen auf die Sommerzeit umschalten.

12.13 Tag- und Nachtgrenze

Die Tag-Nacht-Grenze der Erde, auch Terminator genannt, ist die Licht- bzw. Schattengrenze zwischen der von der Sonne beleuchteten und der unbeleuchteten Seite der Erde.

Im Laufe eines Tages durchwandert der Terminator einen Punkt am Äquator in etwa 12 Stunden, sodass Tag und Nacht in ihrer Länge kaum schwanken. Durch die Neigung der Erdachse ändert sich dies aber immer stärker, je weiter man sich vom Äquator entfernt. Ab ±66° geografischer Breite in Richtung Nord- bzw. Südpol kommt es sogar zu monatelangen Polarnächten, d.h. die Sonne geht lange Zeit überhaupt nicht auf.

Die Lage des Terminators ist damit keine einfache Kurve.
Nach der Festlegung von Datum und Uhrzeit (Mitteleuropäische Zeit!) und dem Schalter *Darstellen* zeichnet das Programm eine Erdkarte in Rechteckprojektion und zeichnet die aktuelle Tag- und Nacht-Grenze ein. Der Teil der Erde, auf dem dann Nacht ist, wird etwas dunkler gezeichnet.

Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, so verändert das Programm die Darstellungszeit und demonstriert so das Wandern des Terminators, im Laufe des Tages bzw. Jahres.
Haben Sie *Sommerzeit berücksichtigen* markiert, springt der Terminator an zwei Tagen im Jahr, Ende März bzw. Oktober, um 1 Stunde. Dies geschieht, wenn wir zur Sommerzeit schalten bzw. wieder zurück.

In der Darstellung finden Sie zusätzlich einen gelben Punkt. Dieser kennzeichnet den Punkt auf der Erde, über dem die Sonne zum gewählten Zeitpunkt genau im Zenit steht.

12.14 Europäische Mathematiker

Die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft wurde im Laufe der Jahrhunderte besonders von europäischen Mathematikern vorangetrieben. Darüber hinaus waren im Mittelalter vor allem arabische, persische, chinesische und indische Mathematiker Weltspitze.

In diesem Teilprogramm werden die Geburtsorte der bedeutendsten Mathematiker Europas dargestellt.
Wählen Sie in der Liste *Geburtsorte* einen Eintrag aus, dann stellt das Programm

den Ort auf einer Europakarte dar und gibt die dort geborenen Mathematiker an. Alternativ dazu können Sie auch in der zweiten Liste direkt einen Mathematiker auswählen.
Bewegen Sie die Maus über die Karte auf einen markierten Ort, so werden der Ort bezeichnet und die dort geborenen Mathematiker genannt.

An den Auswahlfeldern *Städte* bzw. *Länder* wählen Sie, ob die Auswertung nach Städten oder Staaten erfolgt. Beachten Sie dabei bitte, dass heutige (!) Staatsgrenzen zur Auswahl herangezogen werden. Zum Beispiel wird Apollonius von Perge zur Türkei gezählt – historisch war das Gebiet von Perge aber zu Zeiten Apollonius' griechisch.

Anmerkung: Die Ermittlung der Geburtsorte führender antiker Mathematiker ist leider nicht immer möglich. Daher fehlen einige der führenden antiken Wissenschaftler in der Liste.

12.15 Klimadiagramme

In diesem Teilprogramm haben Sie die Möglichkeit, sich über die jährlichen Temperatur- und Niederschlagswerte von mehr als 1500 Orte zu informieren bzw. zwei Orte miteinander zu vergleichen.

Wählen Sie dazu in den zwei Listen jeweils den gewünschten Ort aus, so zeichnet das Programm sofort die Diagramme. Der jährliche Temperaturverlauf wird mit einer roten Linie gekennzeichnet, die Niederschlagsmenge mit blauen Balken. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sind die Orte nach Kontinenten und gesondert Deutschland sortiert. Klicken Sie zur Anzeige der Orte eines Gebiets auf den entsprechenden Schalter.

Markieren Sie das Feld *Walter-Diagramme*, zeichnet das Programm Klimadiagramme, die auf Walter zurückgehen. Der Temperaturverlauf für die einzelnen Monate über das Jahr hinweg wird hier als Kurve (rot) dargestellt, der Niederschlag als Fläche (blau). Die entsprechenden Werte für den Niederschlag lassen sich an der rechten Ordinate und für die Temperatur an der linken Ordinate ablesen.

Für Niederschlagswerte, die in einem Monat ein Mittel von 100 mm überschreiten, wird ab diesem Schwellenwert eine um den Faktor 10 verkürzte Skala gewählt, um für extreme Monatsniederschlagssummen noch eine sinnvolle Darstellung zu erhalten. Ein monatlicher Niederschlag von mehr als 500 mm wird in diesem Teilprogramm noch einmal um einen Faktor 10 reduziert und braun dargestellt. Auf der Abszisse sind die Monate als Zahlenwerte von 1 bis 12 aufgetragen. Liegt die Temperaturkurve oberhalb der Niederschlagskurve, so herrscht Trockenzeit, im anderen Fall fällt ausreichend Niederschlag.

12.16 Orte in Deutschland, Österreich und der Schweiz

Unter diesem Menüpunkt finden Sie einfache Berechnungen für verschiedene Orte in Deutschlands, in Österreich und der Schweiz.

In der aufklappbaren Liste können Sie einen der in der *Ortsbibliothek* gespeicherten Orte auswählen. Das Programm ermittelt für diesen Ort Zeitpunkte verschiedener astronomischer Ereignisse wie Sonnen-, Mond- und Planetenauf- und -untergänge, die Zeiten der Dämmerung sowie die mittlere Sonnenzeit und die Sternzeit. Diese Berechnungen beziehen sich auf ein Datum, das Sie in dem aufklappbaren Kalender einstellen können.

Zur Berechnung wird auch der eingestellte Beobachtungsort verwendet. Diesen können Sie im Hauptfenster und über den Menüpunkt *Ortsbibliothek* oder in diesen Teilprogrammen mit dem Schalter verändern.

Neben dem allgemeinen Überblick können auch hier interessante Zusammenhänge untersucht werden.

Wählen Sie zum Beispiel für den 7. Dezember 2003 zum einen den Ort Saßnitz und zum anderen Ruhpolding, so liegen beide Orte angenähert auf dem gleichen Längengrad. Da Saßnitz aber im Norden auf der Insel Rügen liegt (geografische Breite 54,5°), Ruhpolding dagegen in Oberbayern eine Breite von 47,8° hat, unterscheiden sich die Sonnenaufgangs- und -untergangszeiten. Und das nicht, wie man glauben könnte, geringfügig.

Nein! An dem gewählten Datum ist die Tageslänge (gemeint ist der Zeitraum zwischen Morgen- und Abenddämmerung) in Saßnitz 7 Stunden 29 Minuten 53 Sekunden, in Ruhpolding aber 8 Stunden 33 Minuten und 45 Sekunden. Das bedeutet, in Ruhpolding ist es mehr als eine Stunde länger hell, obwohl beide Orte nur 750 Kilometer auseinander liegen!
Testen Sie dies übrigens für einen Sommertag, so werden Sie feststellen, dass im Sommer die Tage im Norden Deutschlands länger sind als im Süden.

Auf die Frage, wo die Sonne mittags um 12 Uhr am Himmel steht, werden viele antworten, genau im Süden. Dies ist aber, wie Sie auch in diesem Teilprogramm testen können, fast immer falsch!
Zum einen "geht" die Sonne aufgrund der elliptischen Bahn der Erde vor oder nach, sodass sie nur an vier Tagen des Jahres zu Mittag etwa im Süden steht, zum anderen verhindern die Abweichung der mittleren Sonnenzeit von der Mitteleuropäischen Zeit und zusätzlich die Sommerzeit dies für manchen Ort völlig.

Wählen Sie als Ort Aachen und verändern den Berechnungstag zum Beispiel kontinuierlich auf 1. Januar 2003 bis 31. Dezember, so werden Sie feststellen, dass die Sonne in Aachen nie genau um 12 Uhr kulminiert, also exakt im Süden steht. Übrigens gilt dies für alle Orte, die westlicher als etwa Lübeck liegen.

12.17 Geografie: Entfernungen auf der Erde

Sind zwei Orte auf der Erde mit ihrer geografischen Breite und Länge gegeben, so kann deren minimale Entfernung auf der als Kugel (Radius 6371 km) angenommenen Erde ermittelt werden. Diesen Teil eines Großkreises auf der Erde bezeichnet man als Orthodrome.

So liegen z.B. die Flugplätze von Helsinki und Anchorage fast genau auf der gleichen nördlichen Breite. Man brauchte also von Helsinki aus nur direkt nach Westen zu fliegen, um Anchorage zu erreichen. Dieser konstante Westkurs ist allerdings ein Umweg, weil die Erdoberfläche nicht in einer Ebene, sondern auf einer Kugel liegt. Der portugiesische Mathematiker Pedro Nunez (1492-1577) erkannte als Erster, dass ständige Kursänderungen den Weg zwischen weit entfernten Orten erheblich verkürzen könnten.

Innerhalb zweier Listen im Teilprogramm *Entfernungen auf der Erde* können Sie aus einer Anzahl vordefinierter Orte auf der Erde den Ausgangs- und Zielort auswählen.

Sofort nach Markierung des Ortes ermittelt das Programm die gesuchte Orthodrome. Der Vorteil für ein Schiff oder ein Flugzeug, bei der Fahrt bzw. dem Flug längs einer Orthodrome in kürzester Zeit das Ziel zu erreichen, schließt den Nachteil ein, den Kurs dauernd, streng genommen sogar in jedem Augenblick, ändern zu müssen, da sich der Kurswinkel auf einer Orthodrome kontinuierlich ändert. Dies ist für praktische Zwecke äußerst ungünstig.

Eine Kurve, die alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, wird Loxodrome genannt. Sie ist im Allgemeinen länger als die Orthodrome (mitunter wesentlich länger), bringt aber den Vorteil, das Ziel mit konstantem Kurs ansteuern zu können. Zum Beispiel ist die kürzeste Entfernung von Anchorage (USA) nach Auckland (Neuseeland) 11365 km, aber die Loxodrome 32010 km lang – fast das Dreifache.

Die Loxodrome ist dabei eine spiralförmige Linie, die sich mit zunehmender geografischer Breite in immer kleineren Schleifen den Polen nähert. Das Programm berechnet die Länge des Bogens auf der Loxodrome zwischen den beiden Orten und den nunmehr konstanten Kurswinkel.

Zwischen Chemnitz und Honolulu ist die kürzeste Entfernung nur 11941 km lang, die Loxodrome dagegen 15345 km. Während die Orthodrome über die Polregion hinwegführt, verläuft die Loxodrome "um die Erde herum" und ist deshalb 3500 km länger. Ein Flug würde mit einem Winkel von 77,6° gegen Nord bzw. 12,3° gegen West starten.

Während die Orthodrome als Lösung eines Eulerschen Kugeldreiecks leicht zu finden ist, sind für die Loxodrome mehr Überlegungen notwendig. Weitere Informationen hierzu finden Sie im Lexikon des Programms.

Darstellung und Bewegungssimulation

Zusätzlich zur Berechnung zeichnet das Programm auf einer "Erdkugel" die Loxodrome ein. Deren Lage auf der Erdoberfläche können Sie sich noch deutlicher veranschaulichen, indem Sie auf den Schalter *Simulation* klicken.

Das Programm beginnt nun, die Erde zu drehen und damit die vollständige Loxodrome sichtbar zu machen. Über das Feld *entgegengesetzte Richtung* steuern Sie, ob die Erde von West nach Ost oder umgekehrt gedreht wird. Zusätzlich können Sie durch Änderung des Winkels an den Rollbalken neben dem Simulationsschalter die Erdkugel nach Ihren Wünschen um deren Achse drehen.

12.18 Geografie: Projektionen der Erdkugel

Da die Oberfläche einer Kugel sich nicht in die Ebene abwickeln lässt, ist es nicht einfach, eine geografische Karte der Erdkugel zu erstellen.
Über die Jahrhunderte hinweg wurden verschiedene Verfahren erdacht, von denen Sie in diesem Teilprogramm einige untersuchen können.

Wählen Sie zuerst, welche Projektionsart dargestellt werden soll:

- Zylinderprojektion
- Mercator-Projektion
- Miller-Projektion
- Rechteck-Projektion
- Kugelprojektion

Das Programm stellt daraufhin eine Karte der Erdkugel dar.
Für einige der Projektionsarten können Sie über den Schalter *Simulation* den in der Mitte dargestellten Längenkreis verschieben. Zusätzlich können Sie durch Änderung des Winkels an den Rollbalken neben dem Simulationsschalter die Erdkugel nach Ihren Wünschen um deren Achse drehen.

In der rechten Liste von Städten der Welt können Sie einzelne Orte auswählen. Deren Lage wird dann in der Projektion besonders markiert.
Halten Sie während des Klickens mit der linken Maustaste die *Strg*-Taste gedrückt, so können Sie, wie unter Windows allgemein üblich, auch mehrere Orte gleichzeitig auswählen. Über die beiden Schalter kann eine solche Ortsliste gespeichert und später wieder geladen werden.

Erde drehen

Die Mehrheit der Europäer und US-Amerikaner ist sicherlich der Meinung, dass in ihren Ländern der "Nabel der Welt" liegt – zumindest wird man diesen Eindruck nicht los, wenn man die Medien verfolgt. Dass aber Europa und Nordamerika auf der Erdkugel streng genommen ziemlich weit weg vom Äquator entfernt liegen, sieht man erst, wenn man die Erde einmal dreht. Klicken Sie auf den Schalter mit der "gedrehten" Erde oder wählen Sie den Menüpunkt *Datei* | *Erde drehen*, so wird die Erdkugel um 180° gedreht gezeichnet.

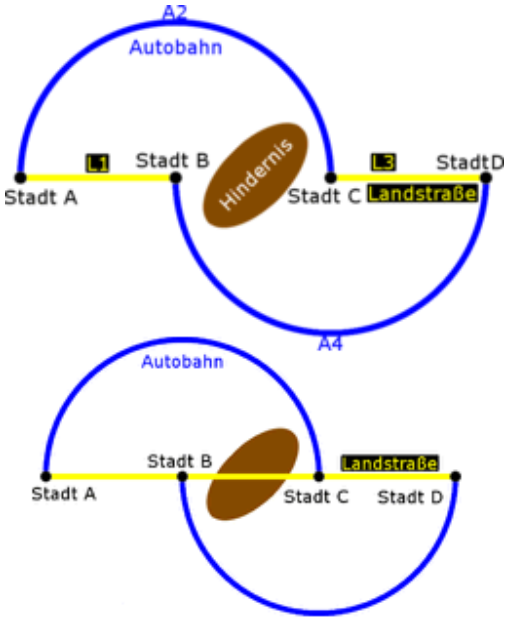
Dieser ungewöhnliche Anblick ist aber genauso berechtigt. Die Tatsache, dass wir in geografischen Darstellungen fast immer Norden oben darstellen, verdanken wir dem griechischen Mathematiker Ptolemäus – er hätte sich aber auch andersherum entscheiden können.

Mercator-Projektion

Die Mercator-Projektion ist die wahrscheinlich berühmteste Projektion. Sie erhielt ihren Namen von Mercator, der dieses Verfahren 1569 vorstellte.
Die Mercator-Projektion ist eine winkeltreue, zylindrische Projektion und besitzt keine Verzerrung am Äquator. Ihre für die Navigation wichtige Eigenschaft besteht darin, dass eine Linie konstanten Azimuts gerade erscheint. Eine solche Linie heißt auch Loxodrome.

Mercator-Projektionen werden häufig für Weltkarten verwendet, wobei die Verzerrung für die Polargebiete sehr stark wächst. So entsteht zum Beispiel der falsche Eindruck, Grönland sei größer als Südamerika, oder die ehemalige Sowjetunion größer als Afrika.
Die Mercator-Projektion erzeugt rechteckige Darstellungen des Gebiets. Gebiete nördlich von 85°N und südlich von 85°S werden nicht dargestellt.

12.19 Braess-Paradoxon, Nash-Gleichgewicht



Das Braess-Paradoxon der Spieltheorie veranschaulicht, dass eine zusätzliche Handlungsoption bei rationale Entscheidung zu einer Verschlechterung der Situation für alle führen kann. 1968 veröffentlichte der deutsche Mathematiker Dietrich Braess dieses Paradoxon.

Gegeben sei ein Straßennetz, dass vier Städte A, B, C und D miteinander verbindet.
Von A nach C und von B nach D verläuft jeweils eine relativ lange Autobahn, auf der die Fahrtzeit kaum von der Verkehrsdichte abhängt. Bei einer Verkehrsdichte (in Tausend Autos pro Stunde) beträgt die Fahrtzeit je Fahrer

$$t_{AC}(x) = t_{BD}(x) = 50 + x \text{ Minuten}$$

Die Städte A und B sind wie die Städte C und D durch eine Landstraße verbunden, mit einer Fahrtzeit je Fahrer

$$t_{AB}(x) = t_{CD}(x) = 0 + 10\ x \text{ Minuten}$$

Alle Autofahrer wollen von A nach D fahren, wobei jeder Fahrer den für sich schnellsten Weg wählt. Es stellt sich ein Nash-Gleichgewicht ein, bei dem die Hälfte der Fahrer die Strecke über Stadt B, die andere Hälfte über Stadt C fährt. Bei 6000 Autofahrern fahren somit auf jeder Strecke 3000 Autos. Die Fahrtzeit beträgt für jeden 83 Minuten.

Wird zusätzlich eine Straße zwischen den Städten B und C gebaut mit der Fahrzeit

$t_{BC}(x) = 10 + x$ Minuten

so fahren auch Autos direkt von B nach C. Das nun entstehende Gleichgewicht ergibt

2000 Fahrer wählen die Strecke ABD
2000 Fahrer wählen die Strecke ACD
2000 Fahrer wählen die Strecke ABCD

Durch die vielen Fahrzeuge auf den Landstraßen erhöht sich die Fahrtdauer für alle Fahrer auf 92 Minuten, d.h. länger als ohne die Neubaustrecke.

In diesem Teilprogramm wird dieses Paradoxon demonstriert.
Für die fünf Teilstrecken können Sie die Koeffizienten linearer *Zeitfunktionen* eingeben. Dabei entspricht x eintausend Autofahrern je Stunde. Für die Berechnung des Nash-Gleichgewichts muss außerdem die *Gesamtzahl der Autofahrer* festgelegt werden.

Mit dem Schalter Berechnung ermittelt das Programm die zu erwartenden Fahrerströme je Strecke, zum einen ohne Zusatzstrecke BC, zum anderen mit dieser.
Interessant ist, dass bei mittlerem Verkehrsaufkommen die neue Strecke sehr oft zu einer Erhöhung der Fahrtzeit für alle führt; eine paradoxe Situation.

12.20 Himmelsrichtungen

Im geografischen Koordinatensystem der Himmelsrichtungen ist jeder Himmelsrichtung ein Winkel zugeordnet.

Winter wird mit 0° festgelegt. Durch die Zählung über Osten werden somit Osten = 90°, Süden = 180° und Westen = 270°.
Für die Zwischenrichtungen ergeben sich dann zum Beispiel NO = 45° oder WSW = 247,5°.

In diesem kleinen Teilprogramm wird dies dargestellt.
Verändern Sie dazu am Rollbalken den *Winkel*. Die Kompassnadel (*Nadel drehen*) oder Grundscheibe (*Scheibe drehen*) werden daraufhin entsprechend eingestellt.
An der Kompassnadel ist die Nordrichtung rot gezeichnet, Südrichtung schwarz.

12.21 Stöchiometrisches Rechnen

Dieses Teilprogramm enthält eine mathematische Anwendung aus dem Fachgebiet der Chemie.
Aufgrund des Gesetzes von der Erhaltung der Masse (nach Lomonossow) und des Gesetzes der konstanten Proportionen (nach Proust 1797) lassen sich für jede vollständig verlaufende chemische Reaktion, von der chemischen Gleichung

ausgehend, aus der Menge eines Reaktionsteilnehmers die Mengen aller anderen Reaktionsteilnehmer berechnen. Solche Berechnungen sind Gegenstand eines Teilgebiets der Chemie der Stöchiometrie.

Ein Schwerpunkt der chemischen Anwendungen im Programm ist dieses Unterprogramm zum stöchiometrischen Rechnen. Sie können durch die Auswahl von Ausgangssubstanzen und Reaktionsprodukten eine chemische Reaktionsgleichung erstellen, deren Koeffizienten ermitteln und bei Eingabe der Menge einer der Substanzen die Werte der anderen berechnen.

Beispiel: Reagiert Eisen(II)-sulfat $FeSO_4$ mit Schwefelsäure H_2SO_4 unter Anwesenheit von Kaliumpermanganat $KMnO_4$, so entstehen nach der Reaktionsgleichung

$$FeSO_4 + H_2SO_4 + KMnO_4 \rightarrow H_2O + Fe_2(SO_4)_3 + MnSO_4 + K_2SO_4$$

neben Wasser drei Salze, Eisen(III)-sulfat, Mangansulfat und Kaliumsulfat. Soll das Gesetz der Erhaltung der Masse eingehalten werden, kann die Gleichung so aber nicht akzeptiert werden. So treten auf der linken Seite nur ein Eisenatom, rechts aber zwei, links 12 Sauerstoffatome, rechts aber 21 auf. Daher werden alle Substanzen mit einem entsprechenden Faktor versehen, sodass auf beiden Gleichungsseiten die gleiche Anzahl von Atomen für jedes Element vorhanden sind. Für die genannte Gleichung ergibt sich damit:

$$10\ FeSO_4 + 8\ H_2SO_4 + 2\ KMnO_4 \rightarrow 8\ H_2O + 5\ Fe_2(SO_4)_3 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4$$

Die Bestimmung dieser Koeffizienten gehört zwar zu den Elementaraufgaben des Chemieunterrichts, kann aber doch lästig sein. Das Programm berechnet Ihnen diese Werte. Mit der korrekten Reaktionsgleichung kann nun weitergerechnet werden.

Sollen 100 g Eisen(II)-sulfat reagieren, so tragen Sie diesen Wert ein. Mit dem Schalter *Berechnung* erhalten Sie als Ergebnis:
Um diese 100 g Eisen(II)-Sulfat umzusetzen, müssen Sie 51,6 g Schwefelsäure und 20,8 g Kaliumpermanganat zugeben. An Reaktionsprodukten erhalten Sie 9,5 g Wasser, 131,6 h Eisen(III)-sulfat, 19,9 g Mangansulfat und 11,5 g Kaliumsulfat.

Erstellen einer Reaktionsgleichung

Eine neue Reaktionsgleichung erstellen Sie, indem Sie an den acht Schaltfeldern – vier für Ausgangssubstanzen, vier für die Reaktionsprodukte – wählen, welche Substanz Sie festlegen wollen. Nach der Wahl können Sie aus den beiden linken Listboxen eine Substanz wählen. Die erste Listbox enthält alle chemischen Elemente (atomar!), die zweite Box chemische Verbindungen (welche in der Chemiebibliothek enthalten sind), d.h. z.B. auch Sauerstoff oder Wasserstoff, aber dieses Mal molekular.

Klicken Sie auf einen der Einträge, trägt das Programm den Namen, die Formel sowie die molare Masse ein. Für die Festlegung der zweiten Substanz wählen Sie zuerst die neue Zeile am Schaltfeld und verfahren analog. Beispiel: Eisen soll mit Sauerstoff reagieren. Dazu gehen Sie wie folgt vor:

1. Wahl des ersten Schalters
2. Anklicken des Eintrages Eisen in der linken Listbox der chemischen Elemente
3. Wahl des zweiten Schalters
4. Anklicken des Eintrages Sauerstoff in der zweiten Listbox der chemischen Verbindungen
5. Wahl des 5.Schalters (des ersten der Reaktionsprodukte)
6. Anklicken des z.B. Eisen(III)-oxids in der zweiten Box

Daraufhin finden Sie unter *Reaktionsgleichung* die chemische Reaktion:

$$? Fe + ? O_2 \rightarrow ? Fe_2O_3$$

Betätigen Sie nun den Schalter *Berechnung* ermittelt das Programm die fehlenden Koeffizienten, d.h. in diesem Beispiel: $4 Fe + 3 O_2 \rightarrow 2 Fe_2O_3$

Zu bemerken ist, dass das Programm nur in den Fällen die Koeffizienten ermitteln kann, in denen kein Koeffizient größer als 12 wird. In die acht Eingabefelder (im Beispiel sinnvollerweise nur die drei mit Substanzen versehenen) können Sie Ihre zu berechnenden Massen eingeben. Der Schalter *Berechnung* berechnet dann die übrigen.
Soll im Beispiel 100 g Eisen reagieren, so tragen Sie 100 in der Zeile des Eisens ein und erhalten: 43 g Sauerstoff und 143 g Eisen(III)-oxid.

Beachten Sie bitte, dass das Programm ausschließlich mit Massen und nicht mit molarem Volumen rechnet. Die ermittelte Sauerstoffmasse müssten Sie also noch in das Gasvolumen umrechnen.

Vordefinierte Reaktionsgleichungen

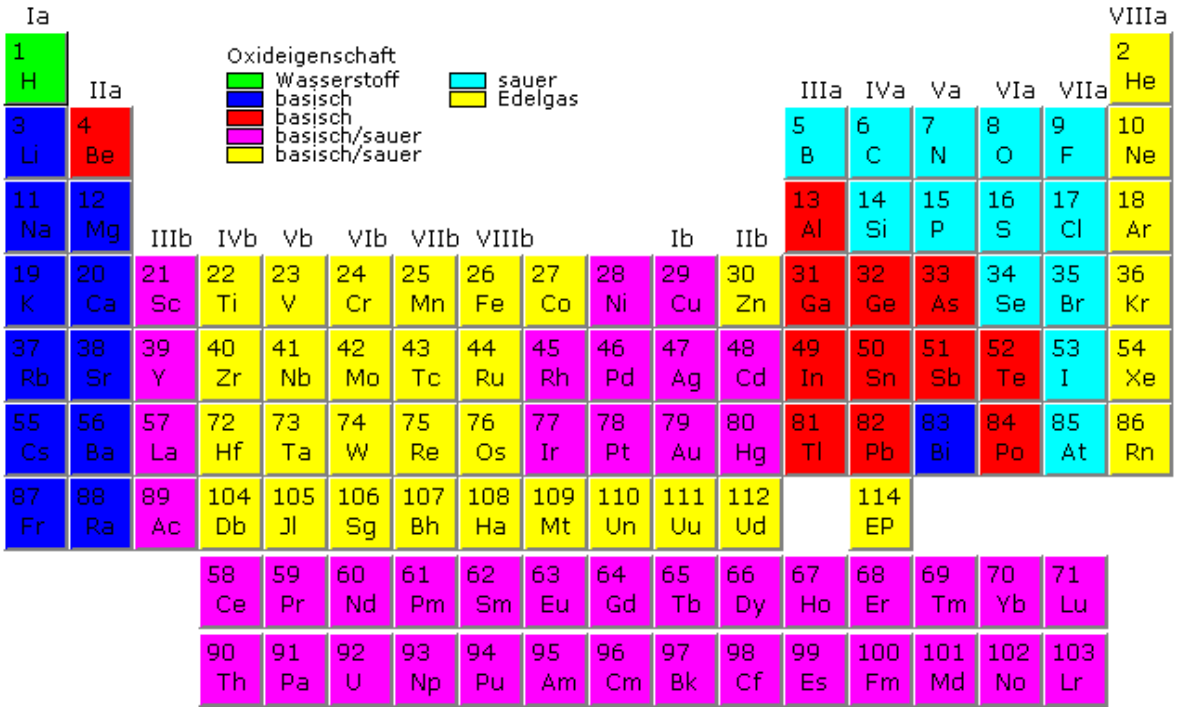
Die dritte Listbox des Fensters enthält schon vordefinierte Reaktionsgleichungen, die mit einem typischen Namen in einer internen Bibliothek gespeichert wurden. Möchten Sie so eine Reaktion berechnen, wählen Sie einfach einen Eintrag aus. Das Programm trägt dann alle Ausgangs- und Reaktionsstoffe ein.

Diese Bibliothek können Sie erweitern. Legen Sie zuerst eine Reaktionsgleichung fest und betätigen Sie dann den Schalter *Gleichung hinzufügen,* so werden Sie nach einem typischen Namen gefragt. Nach Bestätigung mit *OK* ist Ihre Gleichung dauerhaft in der Bibliothek enthalten.

12.22 Periodensystem der Elemente

Führen Sie stöchiometrische Berechnungen durch, werden Sie evtl. auch weitere Informationen zu chemischen Elementen benötigen. Deshalb enthält das Programm auch ein Periodensystem der Elemente.

Am Ende des 18. Jahrhunderts waren etwa 30 chemische Elemente bekannt, um 1863 bereits 63. Diese stetig wachsende Anzahl forderte eine Systematik. So veröffentlichte Johann Wolfgang Döbereiner 1817 die Triaden, das sind vier Gruppen von je drei Elementen, welche gleiche Eigenschaften aufwiesen. Von Dimitrij I. Mendelejew wurde zwischen 1868 und 1871 das Periodensystem der Elemente in der noch heute gültigen Form geschaffen.



Dieses Hilfsmittel ist heute aus der Chemie und Atomphysik nicht mehr wegzudenken. So entdeckte Winkler 1886 das Element Germanium, das aufgrund theoretischer Überlegungen zum Aufbau des Periodensystems schon 15 Jahre früher von Mendelejew als Eka-Silicium mit seinen Eigenschaften vorhergesagt wurde.

In der modernen Form des Periodensystems sind die Elemente nach steigender Protonenzahl schematisch in sieben Perioden (horizontal) und acht Gruppen (vertikal) angeordnet. Diese Gruppen werden nochmals in Haupt- und Untergruppen eingeteilt und mit den Ziffern 0 bis 8 und einem "A" für die Hauptgruppe und einem "B" für die Nebengruppe bezeichnet.
Innerhalb dieses Teilprogramms erhalten Sie die Darstellung eines solchen Langperiodensystems der Elemente. In der heute wissenschaftlich üblichen Form sind die Elemente von links nach rechts mit aufsteigender Ordnungszahl entsprechend ihrer Perioden dargestellt.

Da die Ordnungszahl gleich der Protonenzahl im Atomkern ist bzw. der Elektronenzahl in der Atomhülle entspricht, die Elektronen sich nun nach klaren Gesetzen anordnen müssen, entsteht die etwas merkwürdige Form des Periodensystems. Da auf der ersten Elektronenschale nur zwei Elektronen Platz finden, kann die 1. Periode auch nur zwei Elemente, Wasserstoff und Helium, enthalten. Acht Elektronen auf der zweiten Schale bewirken, dass die 2. Periode genau acht Elemente (Lithium bis Neon) enthält. Die möglichen 18 Elektronen der 3. Schale garantieren allerdings nicht 18 verschiedene Elemente der 3. Periode. Hier und bei den weiteren Elektronenschalen sind die Verhältnisse komplizierter.

In das Periodensystem werden die Ordnungszahlen und die Elementsymbole eingetragen. Der Hintergrund eines jeden Elements wird entsprechend einer Option, einer chemischen oder physikalischen Eigenschaft der Elemente, eingefärbt. Über die Auswahlfelder *Eigenschaften* haben Sie die Möglichkeit, diese Option zu wählen unter einer Färbung in Abhängigkeit von

- den Eigenschaften der Oxide (Voreinstellung)
- Metall- und Nichtmetalleigenschaften
- den Haupt- und Nebengruppen
- der Elektronegativität
- der Entdeckungszeit
- der Dichte
- dem Atom- und Ionenradius
- der Ionisierungsspannung
- dem 2. und 3.Ionisierungspotential
- dem Vorkommen in der Erdrinde
- der Bildungsenthalpie
- der Hauptwertigkeit
- der Schmelz- bzw. Siedetemperatur
- der Kristallstruktur
- dem Aggregatzustand bei 20 °C
- der spezifischen Wärmekapazität

bzw. ein "leeres" Periodensystem.
Je nach gewählter Farbgebung wird zusätzlich eine Legende dargestellt, welche die verwendete Farbabstufung kennzeichnet.
Wählen Sie die Darstellung entsprechend dem Aggregatzustand, so wird voreingestellt eine Temperatur von 20°C angenommen. An den nun zusätzlich sichtbaren Pfeilschaltern können Sie die Temperatur verändern.

Zusätzlich können Sie unter den *Darstellungsoptionen* einige Elementgruppen

- Metalle
- Nichtmetalle
- Leichtmetalle
- Halogene (7.Hauptgruppe)
- Edelgase (8.Hauptgruppe)
- Hauptgruppen
- Nebengruppen
- Lanthanide, „Seltene Erden“ (Elemente 58 bis 71)
- Aktinide (Elemente 90 bis 103)
- Geschichte

wahlweise zu- oder abschalten. Beachten Sie bitte, dass im Programm der Bereich der *Nichtmetalle* nicht die Halogene enthält. Diese werden gesondert betrachtet. Zur Option *Geschichte* lesen Sie bitte weiter unten.
Klicken Sie mit der linken Maustaste eines der chemischen Elemente des Periodensystems an, erhalten Sie weitergehende Informationen. Dazu gehören:

- vollständiger deutscher Elementname und in Klammern der lateinische Name
- Hauptgruppe, bzw. Nebengruppe, Charakter der Hauptgruppe
- relative Atommasse, Elektronenkonfiguration, Elektronegativität, Dichte bei 20°C
- Entdeckungsjahr und Entdecker
- Schmelz- und Siedetemperatur
- und die Orbitalbelegung im Grundzustand

Darstellungsoption Geschichte

Wählen Sie die Darstellungsoption *Geschichte,* so können Sie schrittweise die Geschichte der Entdeckung der chemischen Elemente beginnend im Jahr 1600 bis heute nachvollziehen. Wie schon oben erwähnt, waren Ende des 18. Jahrhunderts nur wenige chemische Elemente bekannt.

Das Programm zeigt Ihnen, angeordnet in dem Langperiodensystem, für das jeweils an den Pfeilschaltern eingestellte Jahr alle bis dahin bekannten Elemente an - z.B. waren 1700 erst 13 chemische Elemente als solche erkannt.
Ändern Sie das Jahr am Rollbalken, wird sofort eine entsprechende Änderung der Elemente vorgenommen. Für einige damals noch fehlende Elemente wurden Lücken gelassen.

12.23 Raumgitter, Chemische Moleküle

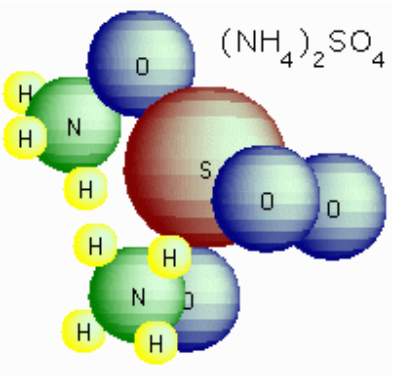
Raumgitter

Chemische Elemente und Verbindungen liegen im festen Aggregatzustand oft in kristalliner Form vor. Für diese Kristalle existieren 14 verschiedene Raumgitterstrukturen.

In diesem Teilprogramm können Sie sich die prinzipielle räumliche Anordnung dieser Kristallgitter anzeigen lassen. Wählen Sie dazu aus der Liste eines der Raumgitter aus und klicken Sie auf Darstellung.
Je Gitterpunkt wird eine Kugel gezeichnet und auf Wunsch auch das Gitter. Markieren Sie *Gitter erweitern,* so wird die Darstellung um vier weitere angrenzende Basiszellen erweitert.

Betätigen Sie *Rotation* beginnt das Programm das Gittermodell zu drehen. Mithilfe dieser Bewegung wird der räumliche Eindruck verstärkt sowie eine bessere

Vorstellung der Gestalt des Körpers möglich. Klicken Sie auf die Schalter und , wird die Größe der Körperdarstellung verkleinert oder vergrößert. Ein Klick auf stellt wieder die Grundeinstellung her.
Die Geschwindigkeit und Richtung der Drehung stellen Sie an Pfeilschaltern für die Drehung in x-, y- und z-Richtung ein. Mit der *ESC*-Taste oder dem Schalter *Stopp* beenden Sie die Simulation.



Ein berühmtes Beispiel in Form eines Raumgitters ist das Atomium in Brüssel, das zur Weltausstellung 1956 errichtet wurde. Das Bauwerk symbolisiert ein Eisenkristall. Da es auf einer Spitze steht, ist nicht sofort zu sehen, dass hier ein raumzentriertes kubisches Kristallgitter (Würfel) vorliegt.

Moleküldarstellung

In diesem Teilprogramm ist die räumliche Darstellung von Molekülen möglich. Nach dem Aufruf des Unterprogramms können Sie in einer Liste aus über 180 verschiedenen chemischen Verbindungen eine auswählen.

Beispiel: Ammoniumsulfat

Markieren Sie einen Listeneintrag und klicken auf *Darstellung*, stellt das Programm sofort den Aufbau des zugehörigen Moleküls dar. Dabei werden die einzelnen Atome vereinfacht durch Kugeln symbolisiert. Besondere Bindungsverhältnisse wie Doppel- oder Dreifachbindung werden (in der Darstellung mittels Kugeln) nicht berücksichtigt. Die relative Lage der Einzelatome zueinander wird berücksichtigt. Die jeweiligen Elemente werden durch unterschiedlich große und verschieden gefärbte Kugeln verdeutlicht.

Neben den chemischen Verbindungen finden Sie auch Reaktionsgruppen, z.B. die Aldehydgruppe oder die Aminogruppe. Die jeweils freien Enden werden durch ein R gekennzeichnet.
In der Liste der chemischen Elemente finden Sie neben einfachen organischen Verbindungen wie Methan, Äthan ... auch komplexere Moleküle, darunter verschiedene Aminosäuren (z.B. Alanin, Asparagin, Glutaminsäure), Ringverbindungen (Benzol, Phenol, Phenylalanin), Stickstoffverbindungen usw.

Mit dem Schalter *Rotation* können Sie wie bei den Raumgittern die Moleküle automatisch drehen lassen.

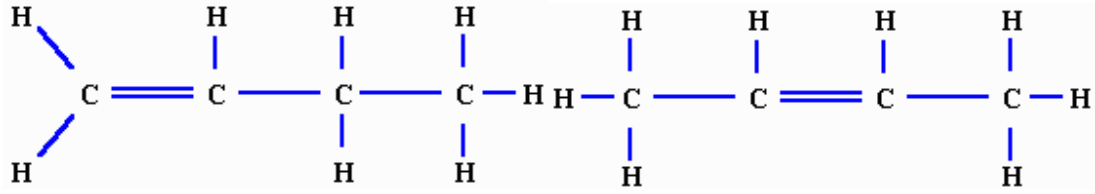
Freie Bewegung der Raumgitter und Moleküle

Da Sie sicher die Raumgitter- und Moleküldarstellungen aus verschiedensten Richtungen auch längere Zeit betrachten möchten, haben Sie durch einen linken

Mausklick auf die Darstellung und anschließende Bewegung der Maus (Maustaste festhalten!) die Möglichkeit, die Moleküle in beliebiger Richtung und Stärke zu drehen.
Dabei verändert jede Bewegung der Maus die Lage des Objekts. Eine waagerechte Bewegung dreht um die z-Achse, eine senkrechte Bewegung um die y-Achse. Mit etwas Übung sollte es Ihnen so gelingen, die dargestellten Gitter bzw. Moleküle aus unterschiedlichsten Richtungen zu betrachten.

12.24 Chemische Strukturformeln

Werden chemische Verbindungen nur als Summenformeln angegeben, ist es teilweise nicht einfach sofort zu entscheiden, um welche Verbindung es sich handelt bzw. welche Eigenschaften der Stoff besitzt.
Unter der unüblichen Formel C2H6O wird man nicht gleich Ethanol vermuten. Deshalb wird normalerweise die Alkanolgruppe OH gesondert ausgewiesen, d.h. also C2H5OH. Noch deutlicher wird die Struktur der Verbindung, wenn diese in Form einer Strukturformel angezeigt wird.



Die zwei gezeigten Strukturformeln sind die von 1-Buten und 2-Buten. Beide Verbindungen haben ebenfalls die gleiche Summenformel C4H8, aber, da die Doppelbindung an unterschiedlichen Stellen liegt, unterscheiden sich beide Substanzen doch in einigen Eigenschaften ziemlich deutlich.
Während die Summenformel die Anzahl der einzelnen Atome in einer chemischen Verbindung nur in Symbolen und Zahlen wiedergibt, ist die Strukturformel eine zweidimensionale Wiedergabe der geometrischen Bindungsverhältnisse in einer chemischen Verbindung. Dabei werden international standardisierte Vereinfachungen vorgenommen.

Zur Anzeige einer Strukturformel wählen Sie in den zwei Listen von rund 380 Verbindungen eine aus. Das Programm zeigt Ihnen die Strukturformel, wobei Doppel- und Dreifachbindungen sowie zusätzliche Elektronen angezeigt werden. Benzolringe werden in der üblichen Darstellungsform (als regelmäßiges Sechseck mit Kreis) gezeichnet. Besondere strukturelle Gruppen treten nun besonders deutlich hervor.

12.25 Diagramme zur Chemie

In diesem Unterprogramm gibt Ihnen das Programm nach verschiedenen Eigenschaften sortierte Tabellen und Diagramme der chemischen Elemente an. Wählen Sie eines der Kriterien aus

- Atommasse

- Dichte in g/cm³
- Elektronegativität
- Atomradius in pm
- Ionenradius in pm
- Ionisierungsspannung in V und 3.Ionisierungspotential
- Schmelztemperatur in °C
- Siedetemperatur in °C
- Bildungsenergie, Bildungsenthalpie und Verdampfungsenergie in kJ/mol
- Neutronenüberschuss der Kerne
- Spezifische Wärme in J/(gK)
- Wärmeleitfähigkeit in W/(cmK)
- Vorkommen in der Erdrinde in g/t

erhalten Sie ein entsprechendes Diagramm.

Dabei wird auf der horizontalen Achse die Ordnungszahl der Elemente angetragen; auf der vertikalen Achse die entsprechende Eigenschaft. Die Elemente Kohlenstoff C, Eisen Fe, Zinn Sn und Uran U werden gesondert gekennzeichnet. Zum Beispiel kann man aus diesen Diagrammen entnehmen, dass für einige Eigenschaften, u.a. den Ionenradius oder die Ionisierungsspannung, periodisch wiederkehrende Höchstwerte auftreten. Dabei sind die Perioden gut erkennbar.
Im linken Teil des Fensters werden Ihnen die ersten 109 chemischen Elemente in Tabellenform sortiert nach den gewählten Kriterien angezeigt.

Damit können Sie z.B. das Element mit der höchsten Schmelztemperatur (Kohlenstoff bei 3730°C) oder das Element mit dem größten Ionenradius (Antimon 245 pm) finden. Beachten Sie aber bitte, dass die konkreten Zahlenwerte von anderen Veröffentlichungen etwas abweichen können. Da die experimentelle Bestimmung z.B. der Ionisierungspotentiale sehr anspruchsvoll ist, können unterschiedliche Messverfahren teilweise abweichende Ergebnisse liefern. Dadurch sind einige Werte von Zeit zu Zeit gewissen Veränderungen unterworfen.

12.26 Biorhythmus

Dem Programmautor ist klar, dass dieses Teilprogramm bei einigen Nutzern Kopfschütteln hervorrufen kann. Die Theorie des Biorhythmus des Menschen ist wissenschaftlich umstritten und besitzt auf jeden Fall einen Hauch von Esoterik. Allerdings ist dies nicht mit der Astrologie zu vergleichen, da die völlige Sinnlosigkeit astrologischer Aussagen wissenschaftlich bewiesen ist, dagegen die Biorhythmustheorie vielleicht nur fragwürdig ist und kaum zur Verdummung der Menschen (wie die Astrologie!) führt.
Dennoch stellt ein Unterprogramm zu diesem Thema eine Ergänzung dar, vielleicht auch als Warnung vor derartigen Theorien.

Die Verfechter des Biorhythmus gehen davon aus, dass vier periodische Zyklen das Leben eines Menschen von der Geburt bis zum Tod begleiten. Dabei treten in

regelmäßigen Abständen Phasen der erhöhten Leistungsfähigkeit auf, die von Abschnitten mit verminderter Lebensqualität abgelöst werden.

Zum Beweis werden Beispiele herangezogen, wie z.B., dass am Todestag Ludwig van Beethovens dessen körperlicher Biorhythmus unter dem Nullpunkt lag. Gerade dieser Nachweis über Einzelbeispiele ist wissenschaftlich natürlich nicht exakt. Andererseits konnte in den Siebzigerjahren in der Schiffswerft von Odessa (Ukraine) die Zahl der Arbeitsunfälle radikal gesenkt werden, als man dazu überging, Arbeiter an deren kritischen Tagen nur für einfache und ungefährliche Arbeiten einzusetzen. Inwieweit hier allerdings ein rein psychologischer Effekt eine Rolle spielte, wurde nicht geklärt.

Folgende Biorhythmuskurven werden berechnet:

- physischer (körperlicher) Zyklus mit einer Periode von 23 Tagen
- emotionaler (seelischer) Zyklus mit einer Periode von 28 Tagen
- intellektueller (geistiger) Zyklus mit einer Periode von 33 Tagen
- intuitiver Zyklus mit einer Periode von 38 Tagen

Werden diese Zyklen vom Geburtsdatum an berechnet und grafisch veranschaulicht, erhalten Sie vier sinusförmige Kurven, die periodisch über bzw. unter dem Nullpunkt liegen. Verläuft eine der Kurven im unteren Bereich, soll dies verminderte Leistungsfähigkeit bedeuten, z.B. im physischen Zyklus Müdigkeit, Abgespanntheit, Anfälligkeit gegenüber Krankheiten usw.

Als besonders kritisch werden Tage angesehen, an denen mehrere Kurven gleichzeitig den Nullpunkt kreuzen. Sollten sich drei oder sogar alle vier Linien gleichzeitig kreuzen, läge ein besonders kritischer Tag vor. Gerüchten zufolge stehen Anhänger des Biorhythmus an diesen Tagen gar nicht erst aus dem Bett auf!

Nach dem Start dieses Unterprogramms geben Sie zuerst das Geburtsdatum der ersten Person ein. Eventuell geben Sie auch das Geburtsdatum für die zweite Person ein, sodass Sie die Diagramme vergleichen können. Danach wählen Sie in dem aufklappbaren Kalender das gewünschte Anzeigedatum aus bzw. tragen dies ein und bestätigen mit einem Klick auf *Daten übernehmen*. Daraufhin berechnet das Programm die Kurven und stellt diese dar. Markieren Sie das Schaltfeld *Allgemeinbefinden*, wird die Summe über alle vier Leistungskurven gebildet. Zur Anzeige anderer Tage schalten Sie an den Rollbalken weiter.

Anmerkung

Seit Jahren überrollt eine wahre Flut von Esoterik, Astrologie und anderen Schwachsinnigkeiten Deutschland. Nun wurde auch der "Biorhythmus" von diesen selbsternannten Hellsehern und Propheten entdeckt. In einem Werbetext zu einem – sehr primitiven – "Biorhythmus"-Programm heißt es:

"Weise aus dem fernen Osten sagen, dass der Energiewirbel der Liebenden beim Sex die Kinderseele anzeigt – Männchen oder Weibchen, je nach Energieart. Und hier kommt der Biorhythmus ins Spiel: Viel physische und geistige Energie gibt einen Jungen, viel seelische und feingeistige Energie gibt ein Mädchen.
Mit ... [dem] Programm kann man den Biorhythmus berechnen – und gleich die besten Zeugungstage für das Wunschkind ..."

Außer, dass dieser Werbetext Klischees von der Rolle der Frau aufwärmt und somit sexistisch ist, weist der Programmautor ausdrücklich darauf hin, dass derartiger Blödsinn nichts mit dem hier enthaltenen Teilprogramm zu tun hat.

12.27 Lebenserwartung

In diesem kleinen Teilprogramm wird die allgemeine deutsche Sterbetafel ausgewertet.

Nach Eingabe des aktuellen Alters und des Geschlechts zweier Personen berechnet das Programm die Lebenserwartung beider Personen sowie eine Reihe von Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen bestimmter Alter.
Berechnet werden neben der mittleren Lebenserwartung für jede Person die Wahrscheinlichkeiten, dass nach n Jahren

- p1 = beide noch leben
- p2 = keiner mehr lebt
- p3 = genau einer noch lebt
- p4 = höchstens noch einer lebt
- p5 = in den n Jahren Partner 1 überlebt 2
- p6 = in den n Jahren Partner 2 überlebt 1

12.28 Mendelsche Gesetze

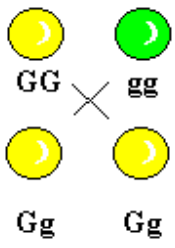
Eine schöne Anwendung der Kombinatorik sind Fragen der Vererbung nach den Mendelschen Gesetzen:

Die Gesetze der Vererbung von einzelnen Merkmalen wurden von dem Lehrer für Naturwissenschaften Gregor Johann Mendel 1865 entdeckt und später nach ihm benannt. Die in seinen Kreuzungsexperimenten gefundenen Zusammenhänge und Gesetze werden in diesem und dem nächsten Teilprogramm dargestellt. Von Zeitgenossen seinerzeit wenig beachtet, mussten die Mendelschen Gesetze 1900 von Correns, Tschermak und de Vries wiederentdeckt werden. Nachdem 1875 die Bedeutung der Chromosomen für die Vererbung entdeckt wurde, gelang es Sutton und Boveri 1902, eine Chromosomentheorie der Vererbung aufzustellen.

1.Mendelsches Gesetz

Markieren Sie *1. Mendelsches Gesetz*, das Uniformitätsgesetz, so können Sie zwei

reinerbige Pflanzen kreuzen, die sich nur in einem Merkmal unterscheiden: der Farbe.



Nach Mendel gilt dann: „Kreuzt man zwei reinerbige Lebewesen, die sich in einem Merkmal unterscheiden, so entstehen in der F1-Generation mischerbige Lebewesen, die untereinander gleich, d.h. uniform aussehen."

Wählen Sie zuerst, ob der Erbgang *dominant-rezessiv* oder *intermediär* sein soll. Im ersten Fall dominiert die Farbe der linken Pflanze, während das zweite Allel (Gene, die sich unterscheiden) unterliegt. Im intermediären Fall liegt die Farbe zwischen denen der beiden Elternpflanzen, bei weißen und roten Ausgangsblüten sind die gezüchteten z.B. rosa gefärbt. Die Elternpflanzen bezeichnet man dabei als Parentalgeneration (P) und die Kinderpflanzen als 1. Filialgeneration (F1). Die Farben der Parentalgeneration können Sie mithilfe der Auswahlfelder *P-Blüte 1* und *P-Blüte 2* festlegen.
Nach jeder Änderung der Voraussetzungen stellt das Programm den korrekten Erbgang dar.

In den Kreisen bei den P- oder F1-Pflanzen erhalten Sie zusätzlich die interessierenden Gene angezeigt. Interessant ist, dass beim dominant-rezessiven Erbgang das äußere Erscheinungsbild, der Phänotypus, der P- und F1-Pflanzen identisch ist, obwohl sich der Genotyp unterscheidet.
Genotypen, die zweimal den gleichen Erbfaktor haben, z.B. GG oder gg, bezeichnet man als reinerbig oder homozygot. Der Genotyp der Samen aus F1 mit Gg heißt mischerbig oder heterozygot oder hybrid. Zellen wie die Körperzellen, die für jedes Merkmal zwei Erbanlagen enthalten, heißen diploid. Die Geschlechtszellen, die nur ein Gen enthalten, nennt man haploid. Von Bedeutung wird dies, wenn diese Pflanzen erneut gekreuzt werden. In diesem Fall wirkt dann das zweite Mendelsche Gesetz, das im Folgenden beschrieben wird.

2.Mendelsches Gesetz

Das Teilprogramm stellt Ihnen auch das 2. Mendelsche Gesetz, das Spaltungsgesetz, dar. Dabei werden mischerbige Monohybride der ersten Kind-Generation weiter gekreuzt.

2. Mendelsches Gesetz: „Werden Monohybride der F1-Generation untereinander weiter gekreuzt, so sind die Individuen der F2-Generation untereinander nicht gleich, sondern in festen Zahlenverhältnissen aufgespalten."

Nach dem 2.Mendelschen Gesetz spalten sich die Pflanzen der F2-Generation nach dem genauen Zahlenverhältnis 1:2:1 auf, wobei die äußere Erscheinungsform wieder von der Art des Erbgangs abhängt. Diese Spaltung geht auf die Trennung der homologen Chromosomen in der Meiose zurück. Das bedeutet, die haploiden Gameten können nur jeweils eines der zwei unterschiedlichen Allele enthalten, in unserem Beispiel entweder die eine oder aber die andere Blütenfarbe. Dies ist im Gesetz von der Reinheit der Gameten

begründet.

Da aber die Blüten der F1-Generation im Phänotyp gleich sind, ist es unerheblich, ob die Genherkunft von dem einen oder dem anderen Elternteil der P-Generation kam. Damit muss sich zwangsläufig das angegebene Verhältnis von 1 : 2 : 1 im Genotyp der F2-Generation einstellen. In den dargestellten Kreuzungen zweier Pflanzen entsteht, bezeichnet man die Allele mit B und b, jedes Mal die Aufspaltung

- BB : Bb : bb = 1 : 2 : 1

Dennoch sind die Erscheinungsbilder (Phänotype) nicht gleich. Die Ursache hierfür liegt in der Art des Erbgangs. Im linken Beispiel erfolgt er dominant-rezessiv, im rechten intermediär, wodurch im ersten Fall die blaue Farbe im Phänotyp im Verhältnis 3 : 1 überwiegt.
Möchten Sie diesen Erbvorgang untersuchen, stellen Sie erneut zuerst die Art des betrachteten Erbgangs, ob *dominant-rezessiv* oder *intermediär*, an den Markierungsfeldern ein. Beachten Sie bitte, dass die F1-Generation bei intermediärer Vererbung ein anderes Erscheinungsbild (Mischfarbe!) bietet als bei farbdominanter Vererbung. Das Programm stellt dies korrekt ein. Wählen Sie anschließend den *Genotyp* und die *dominante Farbe*, die aber nur für die erste Art der Vererbung von Bedeutung ist.

3.Mendelsches Gesetz

Nach dem 3. Mendelschen Gesetz, dem Unabhängigkeits- und Neukombinationsgesetz, gilt: Werden Individuen einer Art gekreuzt, die sich in mehr als einem Merkmal reinerbig unterscheiden, dann wird jede Erbanlage unabhängig voneinander vererbt und neu kombiniert, sodass in der F2-Generation neben den Merkmalen der Elterngeneration neue Merkmale auftreten. So können reinerbige Individuen mit neu kombinierten Erbanlagen entstehen.

Als Ausgangsblüten haben Sie zwei vorliegen, die sich in zwei Merkmalen – zum einen in der Farbe, zum anderen in der Form – unterscheiden. Dabei ist die erste Form dominant, während die Farbe wahlweise dominant-rezessiv oder intermediär vererbt werden kann. Dies stellen Sie erneut an den Auswahlfeldern ein. Ebenso können Sie erneut die Kombinationen der Farben *blau-rot, weiß-blau* und *rot-weiß* wählen.

Haben Sie für die Farbe einen dominant-rezessiven Erbgang gewählt, müssen Sie zusätzlich noch die dominante Farbe markieren. Während die F1-Generation identisch ist, treten in der F2-Generation die von Mendel vorhergesagten Neukombinationen auf. Obwohl die Stammeltern nur zwei verschiedene Typen zeigen, treten nun vier verschiedene auf. Dies ist die Folge der völlig freien Kombinationsmöglichkeiten der Gene. Allerdings teilen sich die Nachkommen wieder in ein feststehendes Zahlenverhältnis auf:

9 verschiedene Genotypen: AA BB : AA Bb : AA bb : Aa BB : Aa Bb : Aa bb : aa BB : aa Bb : aa bb = 1 : 2 : 1 : 2 : 4 : 2 : 1 : 2 : 1

Dagegen sind die Phänotypen untereinander teilweise wieder identisch. Im dominant-rezessiven Fall existieren vier verschiedene Erscheinungsformen im Verhältnis 9 : 3 : 3 : 1, im intermediären Fall sechs Phänotypen im Verhältnis 3 : 3 : 6 : 2 : 1 : 1. Diese Verhältnisse entstehen, da im diesem Teilprogramm für die Form der Blüten stets die Dominanz der ersten Form festgesetzt wurde.

Die Bedeutung dieses Mendelschen Gesetzes ist für die Evolution der Organismen fundamental. Treten z.B. durch Mutation zehn abweichende neue Rassen einer Art auf, so würde bei einer ungeschlechtlichen Fortpflanzung, also ohne die Möglichkeit der Neukombination der Gene, die Anzahl der abweichenden Organismen bei 10 bleiben. Durch die Neukombination kann aber jedes abweichende Gen mit jedem anderen kombiniert werden, wodurch aus den zehn ursprünglichen Neubildungen nunmehr $2^{10} = 1024$ neue Genotypen entstehen können – mit der entsprechenden Weiter- und Höherentwicklung der Art.

12.29 Bakterienkultur

In diesem Teilprogramm wird die Vermehrung von Bakterien simuliert. Zu Beginn liegt ein einzelnes Bakterium vor, das sich nach einer gewissen Zeit (Einstellung am Rollbalken) durch Teilung vermehrt.
Lässt man das Experiment nun laufen, dann kann man beobachten, dass am Anfang lediglich ein geringer Zuwachs zu verzeichnen ist, die Anzahl der Bakterien im Laufe der Zeit allerdings sprunghaft steigt. Eine Situation, die auch der Realität entspricht.

Hat die simulierte Bakterienkultur 800 Individuen erreicht, stoppt das Experiment automatisch.

12.30 Populationssimulation

Mit der aufkommenden Computertechnik und vielversprechenden Ergebnissen der Chaosforschung trat vor Jahren erneut die Problematik der Untersuchung einer Populationsdynamik in den Vordergrund. Liegt eine Anfangspopulation p_0 vor, welche jährlich mit dem Parameter p wachsen soll, so ergibt sich nach n Jahren

$$p_n = p_0 * (1+p)^n.$$

Diese, für die Berechnung von Zinseszinsen durchaus brauchbare Gleichung ist für die Beschreibung des Populationsverhaltens jedoch ungeeignet, da bremsende Einflüsse ("Absterben") keine Berücksichtigung finden.

Eine Erweiterung des Definitionsbereichs von p auf negative Werte genügt nicht, da in der Realität die Dynamik einer Population von mehreren Faktoren, u.a. auch von der Populationsgröße selbst (!) abhängig ist. Mit Einführung eines dies

beinhaltenden Wachstumsparameters w erhält man

$$p_{n+1} = p_n * w - p_0 2^w.$$

d.h. einen linearen "treibenden" Term und einen nichtlinearen "bremsenden" Term.

Da eine Umwelt sowohl durch äußere als auch durch innere Einflüsse verändert wird, kann w nicht konstant bleiben, sondern unterliegt einer Vielzahl von verändernden Größen. Untersuchungen mit variablen Wachstumsparametern ergeben verblüffende Ergebnisse, bis hin zu chaotischem Verhalten der Population.

An dieser Stelle setzt der Gedanke ein, Populationsverhalten mittels komplexer Systeme auf Computern zu simulieren.

Von dem britischen Mathematiker John Horton Conway wurde 1970 ein System, das "Game of Life" geschaffen, das es mit einfachen Regeln gestattet, die Dynamik von Anfangssituationen zu simulieren. Donnelly simuliert mit seinem Modell das Wahlverhalten einer Gruppe von Menschen. Auf Dewdney geht die Simulation eines Räuber-Beute-Systems auf dem fiktiven Planeten "Wa-Tor" zurück.

Dieses Teilprogramm ermöglicht das Testen dieser drei Simulationen. Welches Modell Sie untersuchen möchten, wählen Sie an den Schaltern in der Aktionsschalterleiste des Teilprogramms:

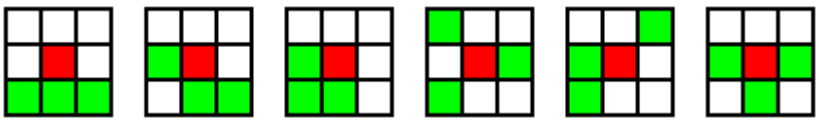
- ... Game of Life
- ... Donnelly-Simulation
- ... Wa-Tor-Simulation

Conways "Game of Life"

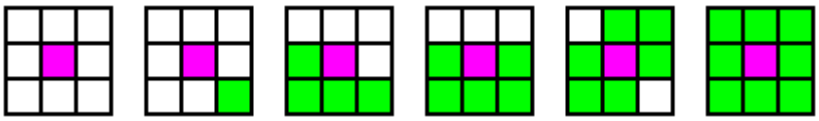
In der Ebene werden "lebende" und "tote" Zellen betrachtet. Dieses Zellmuster entwickelt sich von Generation zu Generation nach folgenden Regeln:

- Eine lebende Zelle stirbt genau dann, wenn sie weniger als *zwei* oder mehr als *drei* lebende Nachbarn besitzt.
- Eine tote Zelle wird lebendig, wenn sie genau drei lebende Nachbarn besitzt, d.h. mindestens *drei* und höchstens *drei*.

Erklärung:



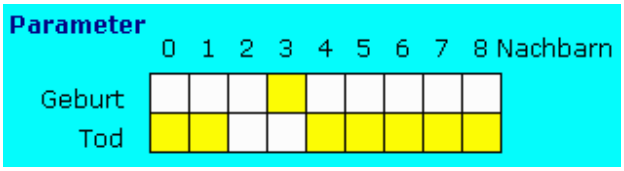
Rot: Tote Zelle, die in der nächsten Generation geboren wird; Grün: Nachbarn der Zelle



Magenta: Zelle, die in der nächsten Generation sterben wird; Grün: Nachbarn der Zelle

Das Fortbestehen einer Zelle ist damit von ihren acht Nachbarn abhängig und über mehrere Generationen hinweg von der Gesamtpopulation. Kleinste Veränderungen der Ausgangssituation führen damit zu vollkommen andersartigen Entwicklungen. Als Endstadien sind völliges Aussterben, periodische Bilder, chaotisches Verhalten usw. möglich.

Im Programm wurde die Conway-Simulation modifiziert. Spielfeld ist eine n x n Felder große Ebene (Voreinstellung n = 64, maximale Größe n = 72). Es werden drei Arten von Zellen betrachtet: die zwei klassischen Arten lebende und tote Zellen sowie feste Zellen, die ständig leben, d.h. nicht absterben können.
Nach dem Start des Programms sind die ursprünglichen Regeln für Geburt und Tod eingestellt. Nach den vier, oben kursiv geschriebenen Zahlen wird dies auch Life-2333 genannt.



Über *Parameter* können Sie diese Werte verändern und somit völlig andere Verhaltensmuster simulieren. Klicken Sie dazu auf eines der weißen oder gelben Kästchen. Gelb bedeutet, dass bei der entsprechenden Anzahl Nachbarn entweder einer Zelle geboren wird bzw. abstirbt. In der Darstellung ist die Ausgangssituation zu sehen.
Zu bemerken ist hierbei aber, dass Conway und seine Studenten Tausende von Berechnungen mit unterschiedlichen Parametern durchführten und das voreingestellte Life-2333 als das interessanteste auswählten.
Ihre Anfangskonfiguration erzeugen Sie

- durch Laden eines gespeicherten Bildes über den Schalter *Datei laden*
- durch die Wahl des Schalters *Zufall*, wodurch eine zufällige Population erzeugt wird
- durch Auswahl eines der in der Liste *Standardsituationen* genannten Punkte
- mit der linken und rechten Maustaste

Klicken Sie ein leeres Feld mit der linken Maustaste an, erzeugen Sie eine lebende Zelle, mit der rechten Maustaste eine feste Zelle. Klicken Sie ein belegtes Feld an, wird dieses gelöscht. Nach der Eingabe können Sie Ihre Konfiguration über *Datei speichern* dauerhaft aufbewahren.

Die Simulation starten Sie mit dem Schalter *Start*. Unterbrechen können Sie, indem Sie abermals auf den gleichen Schalter klicken.
Ein erneuter Start setzt an der Unterbrechungsstelle fort. Auf einem modernen Computer läuft die Simulation mit hoher Geschwindigkeit ab. Ist Ihnen der Ablauf zu schnell, so können Sie an den Pfeilschaltern *Verzögerung* die Geschwindigkeit herabsetzen.
Möchten Sie die einzelnen Phasen nachvollziehen, können Sie auch durch Betätigung des Toolbarschalters zur jeweils nächsten Generation schalten. Sind zwei aufeinander folgende Generationen identisch, stoppt das Programm automatisch. Das Löschen des Feldes und Zurücksetzen aller Werte erreichen Sie mittels Schalter.

In der ursprünglichen Form geht Conway von einem unendlichen Spielfeld aus. Dies ist hier nicht möglich. Das z.B. 24 x 24 Felder große Gebiet kann auf zwei verschiedene Arten genutzt werden: Schalten Sie das Feld *Torus als Spielfeld* ein (Voreinstellung), so ist das Spielfeld als Torus aufzufassen, d.h., der obere und untere sowie der linke und rechte Rand sind miteinander verbunden. So kann z.B. ein "Gleiter" am linken Rand verschwinden und rechts wieder auftauchen. Das Spielfeld ist damit eine in sich geschlossene Fläche.
Schalten Sie das Feld aus, bilden die Ränder einen Abschluss. Zum Beispiel beendet ein "Gleiter" am Rand als "Block" sein Leben. Beide Varianten ergeben selbstverständlich ein anderes Simulationsverhalten.

Die Größe des Spielfeldes können Sie über die Schalter und einstellen. Mit dem Schalter schalten Sie das Gitternetz ein und aus. Während der Simulation wird die Anzahl der lebenden Zellen gespeichert und in einem Diagramm angezeigt.

Anmerkung: Nach der Erstveröffentlichung des "Game of Life" im Scientific American fand das Spiel eine riesige Anhängerschaft. Amateure und Profis verbrauchten Jahre an Computerrechenzeit, um neue, interessante Konstellationen zu finden. Darüber hinaus wurde die Conway-Simulation auch eine hervorragende Übungsaufgabe für Programmieranfänger.

Anmerkung 2: Eine sehr interessante Frage ist auch, ob es Konstellationen gibt, die keinen Vorgänger besitzen. Nach langer Suche fand man solche "Gärten Eden". Eine derartige Konstellation können Sie über den Menüpunkt *Game of Life - Standardsituationen* laden.

Donnelly-Simulation

Peter Donnelly vom University College of Swansea in Wales und Dominic Welsh von der Universität Oxford entwickelten dieses faszinierende "Wahl-Spiel". Gegeben ist eine gewisse Menge von Wählern und eine Anzahl von Parteien bzw. Gruppierungen. Zu Beginn hat jeder Wähler eine bestimmte politische Orientierung. In gewissen Zeitabständen wird ein beliebiger Wähler schwankend

und ändert seine Meinung zufällig in die Meinung eines seiner acht Nachbarn. Lässt man diese einfache Regel über einen längeren Zeitraum laufen, treten erstaunliche Effekte zutage.

Im Programm können Sie an dem Rollbalken die Anzahl der Gruppierungen von 2 bis 15 wählen. Voreingestellt sind 5. Donnelly arbeitete mit zwei Gruppen. Zu Beginn werden zufällig annähernd gleich viel Anhänger jeder Gruppe durch einen farbigen Kreis erzeugt.
Nach einem Klick auf *Start* beginnt die Wählerwanderung. Unterbrechen können Sie jederzeit mit dem gleichen Schalter. Auf einem modernen Computer läuft die Simulation mit hoher Geschwindigkeit ab. Ist Ihnen der Ablauf zu schnell, so können Sie die Geschwindigkeit über die Pfeilschalter *Verzögerung* herabsetzen.

Während der Simulation wird Ihnen anhand eines Balkendiagramm die Entwicklung der einzelnen Gruppen angezeigt. Diese Anzeige wird bei allen von ihnen eingegebenen *Änderungen* erneuert.
Verblüffend ist, dass jede (!) Ausgangssituation irgendwann einmal zum Totalitarismus führt: Eine Gruppe bleibt übrig, während alle anderen aussterben. Von Donnelly und Welsh wurde deshalb die Frage aufgeworfen, ob nicht jede bürgerliche Demokratie nach einer gewissen Zeit dem Totalitarismus weichen muss. Zu bemerken wäre hierbei, dass der Sieg einer Gruppe umso früher eintritt, je kleiner die Größe des Spielfeldes gewählt wird.

Anmerkung: Der "endgültige Sieg" einer Gruppe ist sicher. Allerdings kann dies länger dauern. Ein Testlauf von 15 Gruppierungen ergab nach 2 Millionen Wählerwanderungen erst das Aussterben von 9 Gruppen, während von den verbleibenden sechs Gruppen fünf "ums Überleben" kämpften und eine Partei schon eine 2 / 3-Mehrheit erzielt hatte.

Populationssimulation: Wa-Tor

Irgendwo, weitab von unserer Erde, existiert der sagenhafte Planet "Wa-Tor". Er hat die Form eines Torus und ist über und über mit Wasser bedeckt. Bewohnt wird der Planet von Fischen und Haien, die herumschwimmen und sich vermehren. Darüber hinaus fressen die Haie die Fische, wodurch die Populationen von beider Spezies Schwankungen unterworfen sind.
Zu Beginn der Simulation müssen Sie einige Parameter festlegen:

- Prozentualer Anteil der Fische
- Prozentualer Anteil der Haie
- Brutzeit der Fische ... Zeit in "Chrononen", nach denen ein Fisch einen Jungfisch (auf einem evtl. freien Feld) gebären kann
- Brutzeit der Haie ... Zeit in "Chrononen", nach denen ein Hai einen Junghai (auf einem evtl. freien Feld) gebären kann
- Fastenzeit der Haie ... Zeit in "Chrononen", nach denen ein Hai verhungert, wenn er inzwischen keinen Fisch fressen konnte

Voreingestellt sind: 50% Fische, 3% Haie, 6 Chrononen Fisch-Brutzeit, 12 Chrononen Hai-Brutzeit und 3 Chrononen Fastenzeit. Ändern können Sie diese Werte in den Eingabezeilen.

Nach dem Start schwimmen alle Bewohner frei herum, wobei ein Hai das dringende Bedürfnis hat, einen Fisch zu fressen. Nutzt man ähnliche Startwerte wie die Schöpfer dieses Systems, Dewdney und Wiseman, so stellt sich ein interessanter Effekt ein.

Die Fische vermehren sich, wodurch mehr Haie überleben und sich ebenfalls vermehren können. Dadurch wird eine größere Zahl Fische gefressen und deren Population geht zurück. Die Haie verhungern, wodurch wieder mehr Fische überleben usw.usf. Damit erhalten Sie die Simulation eines klassischen Räuber-Beute-Systems. Im Extremfall sterben alle Haie bzw. Fische (und damit auch die Haie – sie verhungern!) aus. Vergleicht man die Verlaufsdiagramme mit statistisch ermittelten Werten in der realen Natur, so stellt man fest, dass dieses System nicht die gewünschten Ergebnisse bringt. Eine Modifikation des Original-"Wa-Tors" durch E. Couda können Sie als Variante 2 nutzen. In diesem System gewinnt ein Hai, je mehr er frisst, an Lebenskraft hinzu und überlebt somit länger.
Die damit erzielten Diagramme sind Daten, die zwischen 1850 und 1890 von der Hudson's Bay Company über die Menge von Luchsen und Hasen gewonnen wurden, sehr ähnlich.

Die Berechnung, aber insbesondere die grafische Darstellung einer Generation ist zeitaufwendig. Wünschen Sie nicht die Darstellung jeder einzelnen Generation, so erhöhen Sie unter *Spielstandsanzeige* den Wert: Bei einem Eintrag von 50 wird nun nur jede 50. Generation grafisch veranschaulicht – mit dem Ergebnis einer deutlich erhöhten Gesamtgeschwindigkeit.

12.31 Optische Täuschungen

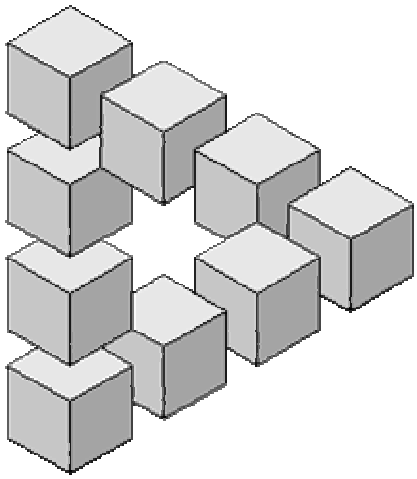
In diesem Teilprogramm werden einige berühmte optische Täuschungen und Illusionen demonstriert.
Wählen Sie zuerst aus der Liste eine der Täuschungen aus. U.a. finden Sie dort

- die Hering-Illusion
- die Hering-Zöllner-Illusion
- die Hermann-Illusion
- die Müller-Lyer-Illusion
- die Münsterberg-Illusion
- die Munker-White-Illusion
- die Ouchi-Illusion
- die Poggendorf-Illusion
- die Shapiro-Illusion
- das Stereokinetisches Phänomen
- die Titchenersche Täuschung
- die Vasarely-Täuschung

und weitere.
Je nach Auswahl können Sie eine *Simulation* starten oder das *Bild umschalten*. Erscheint unter den Schaltern der Hinweis, dass Sie mit der Maus Bildteile

verschieben können, so hilft dies, die optische Illusion aufzulösen. Das gleiche erreichen Sie auch durch das Umschalten des Bildes.

12.32 Unmögliche Figuren



Unmögliche Figuren sind besonders durch die Bilder des holländischen Grafikers Escher bekannt geworden: Wasser fließt im Kreis, aber immer bergauf, Soldaten laufen im Kreis immer die Treppe rauf, in Gebäuden wechselt vorne und hinten. Diese Bilder werden oft für optische Täuschungen gehalten, sind es aber nicht.

Außer M.C.Escher haben sich weitere Mathematiker und Künstler mit derartigen Gebilden beschäftigt, vor allem Oscar Reutersvärd.
In diesem Teilprogramm werden Ihnen 320 derartige „unmögliche Figuren" gezeigt. Wählen Sie dazu nur einen Eintrag in der Liste aus.

Die faszinierenden Bilder wurden der Internetseite
http://imp-world.narod.ru/grey/gimp01.html
des russischen Mathematikers Vlad Alexeev entnommen. Dort findet man noch weitere interessante Darstellungen.

Die Autoren der Bilder sind u.a. Alan King, Anatoly Konenko, Bruno Ernst, M.C.Escher, Hermann Paulsen, Jos de Mey, Josef Albers, Oscar Reutersvärd, Roger Penrose, Sandro del Prete, Steve Leishman, Tamas Farkas, Vicente Meavilla Seguí und Vlad Alexeev.

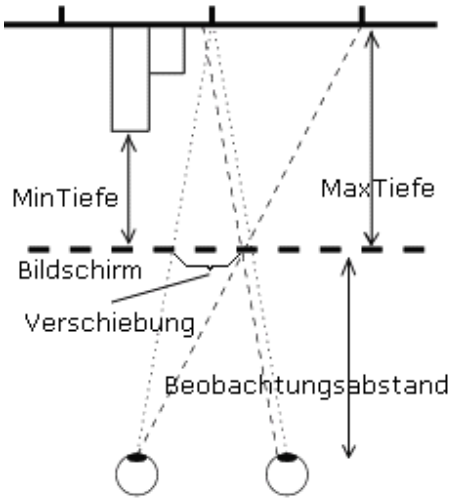
12.33 Stereogramme

Ein Stereogramm ist ein Abbildungsverfahren, bei dem räumliche Gebilde so dargestellt werden, dass der Betrachter ein dreidimensionales Bild wahrnimmt, obwohl die Darstellung auf der Ebene erfolgt.

Mitte der 1990er Jahre wurden spezielle Stereogramme, die Autostereogramme, bekannt.
Dazu wird ein kontrastreiches Bild, die *Maske/Textur*, so verändert, dass Teile der gewünschten Abbildung (*Tiefenabbildung*) zu einer Verschiebung von Pixeln der Maske führen.
Im Allgemeinen werden schwarze Abschnitte der Abbildung nicht verschoben, weiße Pixel um den maximalen Wert. Die Abbildung muss daher so erzeugt werden, dass weiter hinten liegende Teile dunkler gefärbt sind, weiter vorn liegende Abschnitt heller.

Je nach Stärke der maximalen Pixelverschiebung kann eine große Tiefenwirkung erzielt werden. In diesem Teilprogramm werden für die maximale Tiefe (schwarz) 30 cm, für die minimale Tiefe (weiß) 20 cm, als Beobachtungsabstand 30 cm und als maximale Verschiebung 90 Pixel genutzt.

Der Betrachter eines Stereogramms soll möglichst entspannt "durch das Bild hindurchsehen". Auf keinen Fall darf er versuchen, sich auf einzelne Muster der Maske zu konzentrieren.
Nach einiger Beobachtungszeit "entsteht" der Eindruck einer räumlichen Darstellung im Gehirn(!). Je häufiger man Stereogramme betrachtet, d.h. sich trainiert, desto leichter erkennt man das räumliche Gebilde. Allerdings gibt es auch Menschen, die es nie schaffen, auf diesen Darstellungen etwas sinnvolles wahrzunehmen.



In diesem Teilprogramm können Sie Stereogramme erzeugen.
Dazu können Sie über die zwei kleinen Schalter ein *Tiefenbild* und eine *Maske* laden.

Beachten Sie dabei bitte, dass die Abbildung, das Tiefenbild, so gestaltet sein muss, dass vorn liegende Bereiche heller als hinten liegende sind. Die Maske sollte eine Abbildung sein, die nicht zu hell ist und ein möglichst „chaotisches" Muster aufweist.

Klicken Sie auf *Stereogramm erzeugen* wird das Bild berechnet und angezeigt. Voreingestellt ist die Konstruktion eines farbigen Stereogramms unter Nutzung der Textur der Maske. Alternativ können Sie als *Stereogramm-Typ* auch Schwarz-Weiß-Bilder bzw. Farbbilder jeweils ohne Textur anzeigen lassen.

Zum Testen enthält das Programm 34 Beispiele für Abbildungen und 14 verschiedene Masken. Um diese zu nutzen, wählen Sie das Gewünschte in den zwei aufklappbaren Listen aus.
Möchten Sie die Originalabbildung nicht sehen, um zum Beispiel sich selbst zu „testen", so entfernen Sie die Markierung bei *Tiefenbild*.

12.34 Kunst und Goldener Schnitt

„Ohne Mathematik gibt es keine Kunst."
Luca Pacioli

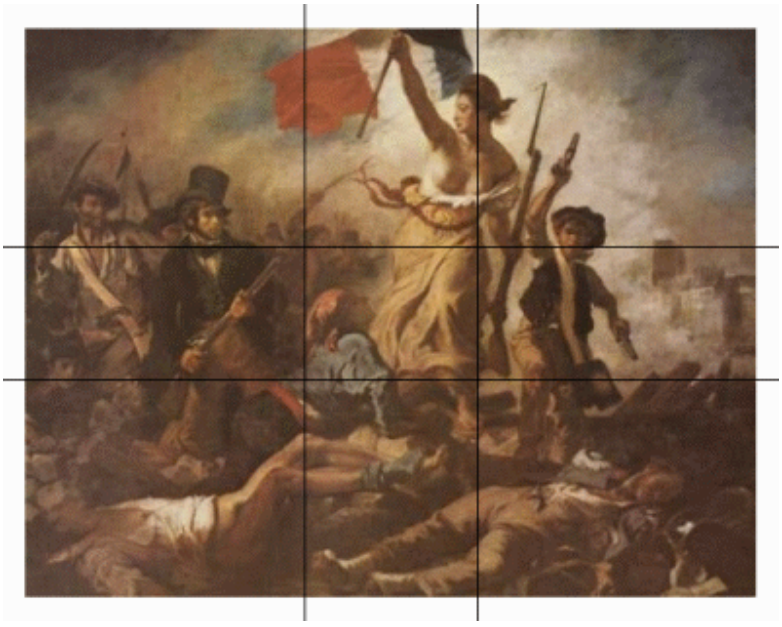
Mathematik und Kunst sind mehr miteinander verbunden, als mancher glauben möchte. Wirklich große darstellende Künstler sind oft auch gute Mathematiker. Als Beispiel seien nur Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer genannt.

Insbesondere Kenntnisse über den Goldenen Schnitt sind für einen Maler, Bildhauer oder Architekten von größter Bedeutung. Der Mensch empfindet nun einmal im Goldenen Schnitt dargestellte Objekte als besonders harmonisch und schön.
Dieses Schönheitsempfinden der Menschheit ist auch der Grund, warum diese Proportion so häufig in der Architektur, der Bildhauerei, der Malerei und der Fotografie zu finden ist. Ein guter Fotograf wird sein Hauptmotiv nie in die Mitte setzen, sondern in die Proportion des Goldenen Schnitts. Platziert man eine Blumenvase auf einer Kommode, so wird der Sinn für Schönheit und Harmonie den Betrachter, ohne dass er nachdenken muss, den Punkt für den Goldenen Schnitt finden lassen.

Ob bereits die Ägypter ihre Pyramiden nach dem Goldenen Schnitt oder nach anderen geometrischen Prinzipien bauten, darüber streiten sich die Experten noch heute. Die Bedeutung des Goldenen Schnitts erkannte Euklid 300 v.u.Z. Dieses Streckenverhältnis bildete später die Grundlage der griechischen Malerei, Plastik und Architektur (Beispiel: das Parthenon).
Im Mittelalter hielt man den Goldenen Schnitt gar für göttlich – er war die Verkörperung der vollkommenen Schöpfung –, in der Renaissance stellte er die göttliche Logik dar. Danach verschwand er als Grundlage der Kunst für einige Zeit, wurde aber in den Zwanzigerjahren unseres Jahrhunderts wieder von vielen Künstlern angewandt, so zum Beispiel von Le Corbusier in der Architektur und von Piet Mondrian in der Malerei. Prominente Beispiele im Bildnerischen sind die Mona Lisa von Leonardo da Vinci und das Selbstbildnis von Albrecht Dürer.

Zum Beispiel zeichnete Eugène Delacroix in seinem berühmten Werk über die Julirevolution 1830 in Frankreich „Die Freiheit führt das Volk auf die Barrikaden" die allegorische Darstellung der Freiheit genau in den Goldenen Schnitt. Dadurch wirkt das Bild noch dynamischer und spricht den Betrachter stärker an.
Eine eindrucksvollste Bildbeschreibung stammt zum Beispiel von Heinrich Heine:

"*... trotz etwaiger Kunstmängel atmet in dem Bilde ein großer Gedanke, der uns wunderbar entgegenweht. Eine Volksgruppe während den Juliustagen ist dargestellt, und in der Mitte, beinahe wie eine allegorische Figur, ragt hervor ein jugendliches Weib, mit einer roten phrygischen Mütze auf dem Haupte, eine Flinte in der einen Hand, und in der anderen eine dreifarbige Fahne. Sie schreitet dahin über Leichen, zum Kampfe auffordernd, entblößt bis zur*



Hüfte, ein schöner, ungestümer Leib, das Gesicht ein kühnes Profil, frecher Schmerz in den Zügen, eine seltsame Mischung von Phyrne, Poissarde und Freiheitsgöttin. ... „

In diesem kleinen Teilprogramm können Sie Abbildungen von zum Beispiel Gemälden laden und zusätzlich Linien einzeichnen lassen, die sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung die Bildabmessungen im Goldenen Schnitt teilen.

Welche Linien im Goldenen Schnitt eingeblendet werden sollen, wird an den Auswahlfeldern festgelegt. In der unteren Liste sind 15 Abbildungen vorinstalliert. Andere Darstellungen können Sie über den Schalter *Bild laden* untersuchen.
Bei nahezu jedem Bild werden Sie feststellen, dass der Künstler das ihm Wichtige in die Proportion des Goldenen Schnitts gesetzt hat.

Goldenes Dreieck, Goldenes Trapez

Zusätzlich trägt das Programm bei Markierung von *goldenes Dreieck* mehrere sogenannte goldene Dreiecke ein. Dies sind gleichschenklige Dreiecke mit Innenwinkeln von 72° und 36°. Auch längs deren Seitenkanten dargestellte Objekte werden vom menschlichen Sinn als besonders wichtig und harmonisch eingeteilt wahrgenommen.
Mehrere Kunstwissenschaftler weisen darauf hin, dass das rätselhafte Lächeln der Mona Lisa da Vincis gerade dadurch hervorgerufen wird, dass der Künstler Mund und linkes Auge längs der Seiten der goldenen Dreiecke positionierte.

Ähnliche Effekte erzielt man auch mit sogenannten goldenen Trapezen. Die Seiten derartiger Trapeze stehen im Verhältnis $1 : 1 : 1 : \varphi = (\sqrt{5}-1)/2$, d.h. die vierte Seite ist der Minor eines goldenen Schnittes. Diese Trapeze können Sie ebenfalls zuschalten, wobei jeweils zwei Trapeze von den kürzeren Seiten des Bildes gezeichnet werden.

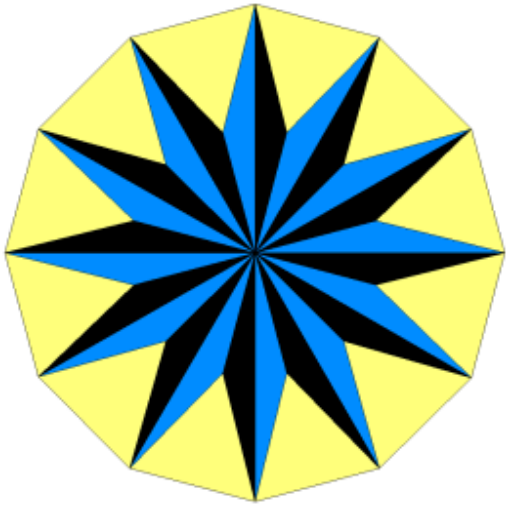
Hinweise zu den Bildern:

Die im Programm enthaltenen Beispielbilder sind:

- Albrecht Dürer: Melancholie
- Albrecht Dürer: Selbstbildnis (Alte Pinakothek, München)
- Claude Monet: Impression Sonnenaufgang (Musée Marmottan Monet, Paris)
- Eugène Delacroix: Die Freiheit führt das Volk auf die Barrikaden (Museé National du Louvre, Paris)
- Franz Marc: Blaues Pferd (Staatliche Kunsthalle, Karlsruhe)
- Giorgione da Castelfranco: Schlummernde Venus (Gemäldegalerie, Dresden)
- Jacopo d'Barbari: Luca Pacioli (Nazionale di Capodimonte, Neapel)
- Jan van Eyck: Anbettung des Lamms (Kathedrale Sint Baafs, Gent)
- Jan Vermeer: Mädchen mit Perlenohrring (Mauritshius, Den Haag)
- Jean-Étienne Liotard: Das Schokoladenmädchen (Gemäldegalerie, Dresden)
- Karl Schmidt-Rottluff: Waldlandschaft (Galerie Henze, Bern)

- Walter Womacka: Am Strand (Museum Eisenhüttenstadt)
- Leonardo da Vinci: Mona Lisa (Museé National du Louvre, Paris)
- Michelangelo Buonarroti: Erschaffung Adams (Capella Sistina, Vatikan)
- Piero della Francesca: Geißelung Christi (Galleria Nazionale delle Marche, Urbino)
- Pablo Picasso: Guernica (Museo Reina Sofia, Madrid)
- Pinturiccio: Bildnis eines Knabens (Gemäldegalerie, Dresden)
- Raffael Santi: Sixtinische Madonna (Gemäldegalerie, Dresden)
- Katsushika Hokusai: Die große Welle von Kanagawa
- Salvador Dali: Das letzte Abendmahl (National Gallery of Art, Washington)
- Tizian: Zinsgroschen (Gemäldegalerie, Dresden)
- Vincent Willem van Gogh: Sonnenblumen (Neue Staatsgalerie, München)

12.35 Symmetrische Polygonteilung



Regelmäßige Vielecke besitzen eine besonders große Symmetrie. Zum einen können Sie durch Drehung um den Umkreismittelpunkt auf sich selbst abgebildet werden, zum anderen haben Sie eine Vielzahl von Symmetrieachsen. Hat das Polygon eine gerade Anzahl von Ecken, so verlaufen die Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Eckpunkte oder durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte.

Aus diesem Grund können regelmäßige Polygonen durch Unterteilung in kleinere Flächen (Dreiecke, Vierecke, ...) zu schönen symmetrischen Figuren verändert werden.

In diesem Teilprogramm können Sie einige dieser Figuren erzeugen.
Am Rollbalken *Polygonecken* stellen Sie die Anzahl Ecken ein, am Rollbalken *Teilungsart* wählen Sie eine der 18 im Moment vorhandenen Muster aus.
Bei einigen Teilungen werden Strecken im Polygon mit einem bestimmten *Teilverhältnis* verändert, dass Sie ebenfalls wählen können.
Das Muster 18 behandelt das Problem der geschachtelten Polygone, das im Lexikon beschrieben wird.

Mit einem Klick auf einen der vier Schalter *Farbe* besteht zusätzlich die Möglichkeit, die Farben der Darstellung zu verändern. Damit können Sie die symmetrische Figur konstruieren, die Ihren Vorstellungen eines schönen Gebildes am besten entspricht.

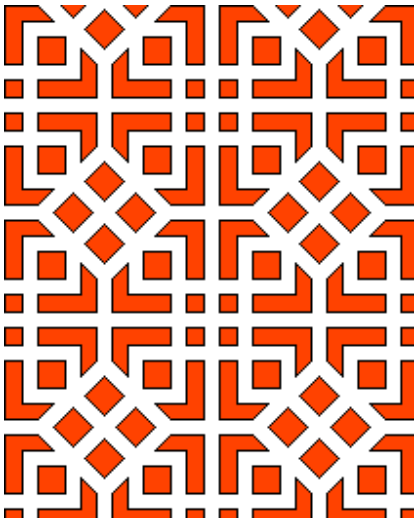
12.36 Künstlerische Parkettierung

Diese kleine Teilprogramm zeigt einige Beispiele für Parkettierungen der Ebene in

der Kunst.

In der linken Liste sind verschiedene Ausgangsmuster enthalten. Klicken Sie diese an, wird das rechte Fenster vollständig mit diesem Muster überdeckt.

U.a. finden Sie Muster, die auf den holländischen Künstler Maurits Escher zurückgehen, berühmte Parkettmuster aber auch Meisterwerke der indischen Architektur. Insbesondere an verschiedenen Palästen und Moscheen in den indischen Städten Jaipur, Udaipur und Fatehpur Sikri findet man eine Vielzahl geometrischer Muster, die dort als hochkünstlerische Verzierungen genutzt werden.
Die Abbildung zeigt eine Fenstergestaltung am Stadtpalast von Udaipur.



Unter *Ausgangsmuster* wählen Sie, ob die Liste *indische Muster* oder *verschiedene Muster* anzeigen soll.

Anregungen für diese schönen Muster wurden u.a. auf http://tabletoptelephone.com/~hopspage/HopsTiles.html und der außergewöhnlichen Internetpräsentation http://www.bernhardpeter.de gefunden.

12.37 Dürers magisches Quadrat

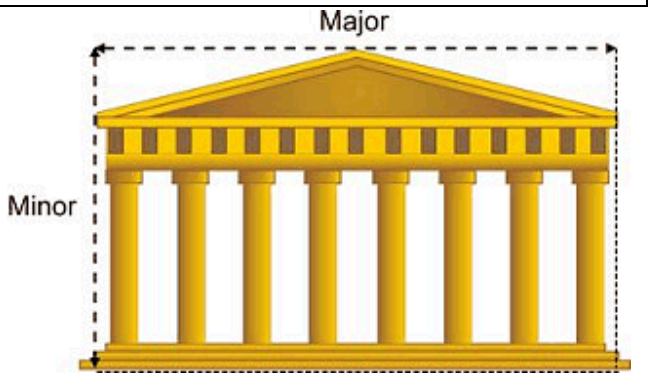
Das wahrscheinlich berühmteste magische Quadrat befindet sich auf Albrecht Dürers "Melancholie" und enthält in der Mitte der untersten Zeile die Zahlen 15 und 14, welche das Jahr 1514 angeben, in welchem Dürer den Kupferstich erstellte.

In diesem symmetrischen magischen Quadrat findet man die magische Summe von 34 nicht nur in den Zeilen, Spalten und Hauptdiagonalen, sondern auch in einer Vielzahl weiterer symmetrische Strukturen:
Die Summe der Elemente der vier Quadranten ist jeweils die magische Zahl 34.
Auch die Summe der vier Eckfelder und der vier Zentrumsfelder ist jeweils 34.
Auch die Summe der vier Felder, die jeweils von den vier Eckfeldern um 1 oder um 2 im Uhrzeigersinn weiterversetzten Felder ist jeweils 34 (8+14+9+3 und 12+15+5+2). Auch die Summe der in Form eines Drachenvierecks angeordneten Elemente (z. B. 2+10+8+14; 3+9+7+15) ist 34, usw.
Diese magische Summen bleiben auch erhalten, wenn man das Quadrat
1) in der Mitte waagerecht oder senkrecht spiegelt
2) an den Hauptdiagonalen spiegelt oder
3) um jeweils 90° dreht

In diesem Teilprogramm können Sie diese magischen Summen und die

Symmetrie dieses Quadrates untersuchen.
An den fünf Schaltern *Symmetrieoperationen* können Sie das Quadrat an verschiedenen Achsen spiegeln sowie in mathematischer Richtung drehen.
Markieren Sie in der Liste einen Eintrag, so werden diejenigen Felder mit gleichen Farben markiert, deren Summe gerade der magischen Summe von 34 entsprechen.

12.38 Parthenontempel



Der "goldene Schnitt" ist die am häufigsten angewandte Gestaltungsregel: In der Antike als "Maß aller Dinge" bezeichnet.
In der bildenden Kunst wird der goldene Schnitt vorrangig deshalb verwendet, um dem Gesamtwerk einen harmonischen Eindruck zu verschaffen oder um bestimmte Details hervorzuheben.
Ein besonderes Beispiel ist das Parthenon auf der Akropolis in Athen.

Die vordere Fassade des Parthenon, des griechischen Staatstempels, passt genau in ein goldenes Rechteck, d.h. die Breite steht zur Höhe im Verhältnis des goldenen Schnitts. Die Säulenhöhe zur Höhe des Giebels ist ebenfalls in dieser Proportion. Der Grundriss selbst besteht aus goldenen Rechtecken.

In diesem Programm können Sie durch Verschieben von 2 Punkten A und B die Abmessungen des Parthenons so einstellen, dass er dem harmonischen Empfinden am besten entspricht.
Haben Sie dies getan, so können Sie durch Zuschalten des *goldenen Rechteck*s und Strecken im *goldenen Verhältnis* diese Wahl kontrollieren.
Stimmen die von Ihnen vorgenommenen Einstellungen mit den eingezeichneten überein, so haben Sie ein ähnliches Schönheitsempfinden wie die antiken Griechen.

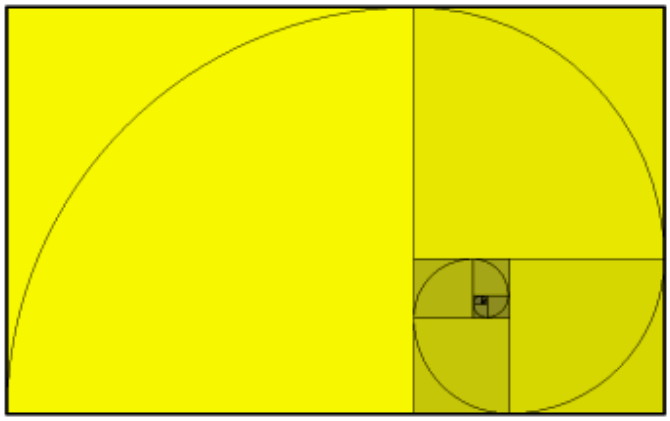
Weiterhin können Sie das Verhältnis von Dachhöhe zur Säulenhöhe verändern. Auch dieses sollte etwa 0,62 betragen.
Verändern Sie die Anzahl der Säulen werden Sie feststellen, dass auch die 8 Säulen des Originaltempels am schönsten wirken.

12.39 Goldenes Rechteck

„Geometrie besitzt zwei große Schätze: einer ist das Theorem des Pythagoras; der andere ist die Teilung einer Linie in das äußere und das mittlere Verhältnis. Die erste mögen wir mit dem Wiegen des Goldes vergleichen; die zweite verdiente den Namen eines Edelsteins."

Johannes Kepler

Ein Rechteck, dass nach Abschneiden von einem Quadrat dem Restrechteck ähnlich ist, wird goldenes Rechteck genannt.



Die Seiten eines solchen Rechtecks haben die Längen a und φ a = 0,618034 a, d.h. beiden Seiten stehen im goldenen Verhältnis. Von diesem goldenen Rechteck kann erneut in gleicher Weise ein Quadrat abgeschnitten werden, wodurch ein weiteres goldenes Rechteck entsteht usw. usf.

In ein solches Rechteck und die abgeschnittenen Quadrate kann eine Spirale gelegt werden, die eine logarithmische Spirale ist.

Der Begriff des goldenen Rechtecks kann verallgemeinert werden. Dazu werden Rechtecke untersucht, bei denen nach Abschneiden von n ($n \in N$) übereinander liegenden Quadraten ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck übrig bleibt.

In diesem Teilprogramm können Sie goldene Rechtecke zeichnen.
An den Rollbalken werden die Anzahl abzuschneidender *Quadrate n* und die *Iterationstiefe* eingestellt.
Für den Fall n = 1, dem eigentlichen goldenen Rechteck, können Sie auch die *Spirale* einzeichnen lassen.

12.40 Kaleidoskop

Ein Kaleidoskop ist ein optisches Gerät, das unter Ausnutzung von Lichtreflexion symmetrische Abbildungen erzeugt. Kaleidoskop bedeutet "schöne Formen sehen" und ergibt sich aus den griechischen Wörtern καλος = schön, ειδοω = Form und σκοπεω = sehen.
Obwohl das Kaleidoskop schon im antiken Griechenland verbreitet war, wurde es erst 1816 vom schottischen Physiker David Brewster wiederentdeckt und als Patent angemeldet. Im Kaleidoskop sind drei oder vier Spiegel angebracht, die sich an ihren Längskanten berühren. Darin spiegeln sich die Gegenstände mehrfach, so dass ein symmetrisches farbiges Muster sichtbar wird, das sich beim Drehen ändert.

In der Mathematik werden auch Kaleidoskopbilder betrachtet, die durch Aneinanderreihung von regelmäßigen Dreiecken oder Quadraten die Ebene parkettieren. Die Parkettkacheln gehen dabei durch Rotation, Achsenspiegelung oder Translation auseinander hervor. Im Ergebnis erhält man interessante, symmetrische Muster.

In diesem Teilprogramm werden Kaleidoskop-Bilder durch Spiegelung und Drehung von dreiseitigen oder quadratischen Bildern erzeugt.

Dazu laden Sie zuerst eine *Abbildung* oder wählen in der Liste eines der Beispielbilder aus. Unter *Transformationsverfahren* entscheiden Sie, ob ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck aus dem Bild ausgeschnitten und zu einem Kaleidoskopbild zusammengesetzt werden soll.
Diese Bildabschnitte werden dabei längs ihrer Seiten gespiegelt oder um einen der Eckpunkte gedreht. Im Ergebnis entsteht eine vollständige Parkettierung. Die *Größe* des Kaleidoskopbildes können Sie ebenfalls einstellen.

Die ausgewählte Abbildung ist im Allgemeinen größer als der zu verarbeitende Ausschnitt. Im rechten Fensterteil sehen Sie auf dem Bild ein rotes Quadrat. Durch linken Mausklick und Verschiebung verändern Sie den Ausschnitt des Bildes, der Grundlage des Kaleidoskopbildes ist.

12.41 Riemann-Projektion

Berühmt wurde der niederländische Künstler M.C. Escher durch seine faszinierenden Grafiken.
Ein mathematisch besonders interessantes Bild ist das Selbstporträt, das in einer Metallkugel gespiegelt wurde, d.h. "Hand mit refkletierender Kugel".

Zur Konstruktion einer solchen Grafik sind anspruchsvolle mathematische Algorithmen anzuwenden.

Vor der reflektierenden Kugel befindet sich das Originalbild.
Jedes Pixel des Originals wird nun einer Inversion an der Kugel unterzogen. Dazu wird ein Sehstrahl vom Punkt zum Mittelpunkt der Kugel gezogen. Dieser Strahl durchstößt die Kugeloberfläche an einem Punkt. Für diesen Punkt wird das Bild des Originalpunktes eingezeichnet.
Ein ähnliches Verfahren ist die Projektion der komplexen Zahlenebene auf eine Kugel, die Riemannsche Zahlenkugel.

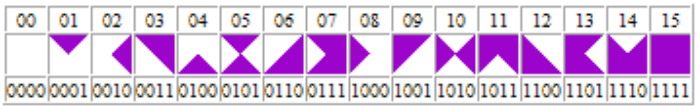
In diesem Teilprogramm wird der Versuch unternommen, derartige Bilder zu erzeugen.

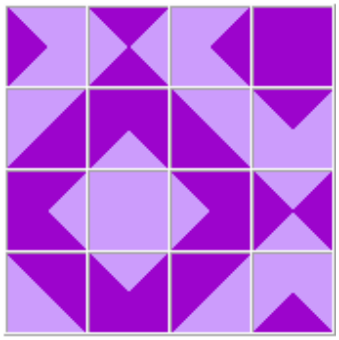
Laden Sie dazu ein Originalbild oder wählen Sie in der Liste ein vordefiniertes Bild aus.
Mittels *Bild projizieren* wird im linken Fensterteil das Bild erzeugt.
Voreingestellt ist, dass der Mittelpunkt des Originals auch der Mittelpunkt des Bildes auf der Kugel ist. Über *waagerechte* und *senkrechte Verschiebung* ist die Lage des Mittelpunktes in gewissen Grenzen veränderbar.

12.42 Magische Quadratmuster

Magische Quadrate können zur Konstruktion interessanter Muster verwendet werden.
Nutzt man magische Quadrate der Ordnung 4 und trägt die Zahlen von 0 bis 15 ein, so können diese binär mit maximal vier Ziffern dargestellt werden.

Für jede der möglichen Zahlen von 0 bis 15 wird ein eindeutiges Muster gewählt, zum Beispiel





Entsprechend der Belegung des magischen Quadrats werden die Zahlenmuster zu einem "magischen Muster" zusammengesetzt. Zum Beispiel ergibt sich für das magische Quadrat

8 5 2 15
6 11 12 1
13 0 7 10
3 14 9 4

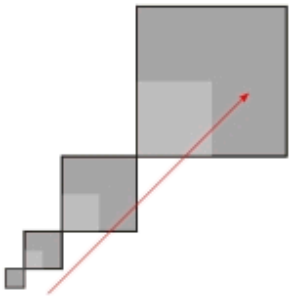
das Muster
Überdeckt man nun mit diesem Muster die Ebene, ergeben sich interessante Parkettierungen.

In diesem Teilprogramm können Sie derartige Muster erzeugen. Zuerst wählen Sie, welches magische Quadrat als Ausgangsvorlage verwendet werden soll. Vordefiniert sind 419 magische Quadrate. Unter *Muster* klicken Sie auf eines der vier Grundsymbole, aus denen die Ziffernmuster konstruiert werden.
Das Programm erzeugt sofort das Gesamtmuster.
Dieses können Sie durch Auswahl der Vorder- und Hintergrundfarbe sowie durch Spiegeln und Drehen des magischen Quadrats verändern.

12.43 Farbreihen nach Lohse

Durch den Grafiker Richard Paul Lohse wurde ein einfaches und interessantes

Verfahren zur Erzeugung ansprechender Grafiken auf der Grundlage der Mathematik gegeben.
Sein Konstruktionsplan besteht aus 3 Schritten:

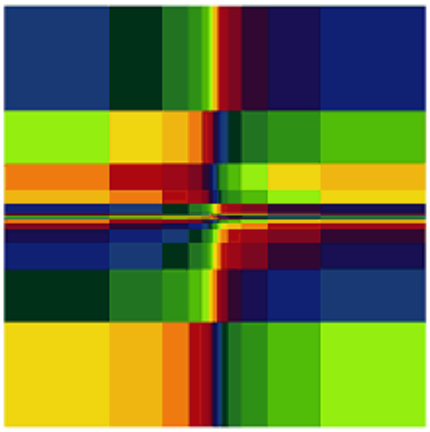


1) Ein kleines Quadrat im Zentrum des Bildes wird durch mehrfache zentrische Streckung um den Faktor 2 in Richtung einer seiner Diagonalen vervielfältigt.

2) Dieser Arm aus 7 Quadraten wird um 90°, 180° und 270° gedreht

3) Schließlich werden alle waagerechten und senkrechten Linien verlängert.

Das entstandene Raster ist vierfach drehsymmetrisch, punktsymmetrisch zum Zentrum und hat vier Spiegelachsen.



Zur Farbgebung der entstandenen Teilrechtecke wählte Lohse 15 Ausgangsfarben. Diese bilden einen Farbzyklus.
Die erste Zeile wird mit diesem Zyklus gefärbt. Für jede weitere Zeile wird der Farbzyklus so verschoben, dass jede Zeile mit einer anderen Farbe beginnt.

In diesem Teilprogramm wird eine solche Grafik erstellt. An dem Rollbalken *Feldgröße* stellen Sie die Anzahl der zentrischen Streckungen ein. Über *Verschiebung* regeln Sie, mit welcher der Farben begonnen wird.
Die vordefinierten Farben können Sie ändern, in dem Sie auf eine der Farben in der linken Übersicht klicken. Daraufhin öffnet sich ein Dialogfenster, in dem Sie eine neue Farbe wählen können.

12.44 Modulare Muster

In diesem Teilprogramm wird mit einer einfachen Auswertung einer Funktion ein grafisches Muster erstellt.
Für die eingegebene Funktion f(x,y) wird mit unterschiedlichen Argumenten der Wert

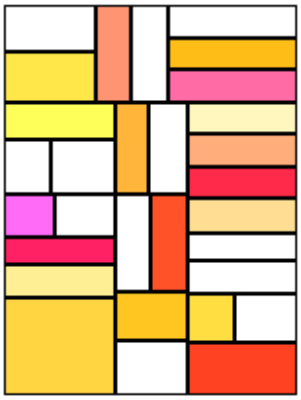
[f(x,y)] mod n

berechnet. Dabei bedeutet [ ] den ganzzahligen Anteil und n ein am Rollbalken veränderbarer *Modul n*.
Ist das Ergebnis ungerade, so wird das Muster 1 gesetzt, andernfalls das Muster 2.

Muster 1 Muster 2

Je nach Wahl der Funktion, des Moduls n und der Farben für den Vorder- und Hintergrund entstehen unterschiedliche, teils interessante modulare Muster. Zusätzlich können Sie unter *Breite* die Linienstärke einstellen.

12.45 Mondrian-Bilder



Pieter Cornelis Mondriaan (1872-1944) gehört zu den Pionieren der abstrakten Malerei und besonders des niederländischen Konstruktivismus.

Mondrians Bilder sind für abstrakte, rechteckige Farbflächen in den Grundfarben Rot, Blau und Gelb, sowie die Abgrenzungen mit schwarzen Linien und weißen Grundflächen bekannt.
Ursprünglich war Mondrian Impressionist, wechselte aber um 1900 zur abstrakten Kunst. Um 1920 schuf Mondrian seine erste an Gitternetze erinnernde Bilderserie in schwarz, weiß und den Primärfarben; eine Technik, die er bis zum Ende seiner Karriere verfeinerte und für die der Name Mondrian bis heute steht.

In diesem Teilprogramm wird ein Versuch unternommen, ähnliche mathematische Bilder zu konstruieren.
Dazu stellen Sie an den Rollbalken ein:

1) die *Anzahl* der zu zeichnenden Rechtecke
2) die *x-Größe* und *y-Größe* des Bildes in Pixeln
3) den prozentualen Anteil, der Weiß zu zeichnenden Rechtecke

Darüber hinaus können Sie neun verschiedene *Farbmuster* wählen.
Die entstehenden Bilder haben natürlich nicht die Qualität von Mondrian-Werken. Sie sind aber dennoch geometrisch interessant und einigermaßen schön.

12.46 Lottoauswertung

In Ergänzung des Teilprogramms *Lottosimulation* finden Sie hier eine Möglichkeit zur Auswertung aller deutschen Lottoziehungen „6 aus 49" vom Anfang im Jahr 1955 bis zum Februar des Jahres 2014.

Geben Sie einen beliebigen Tipp, also sechs Zahlen von 1 bis 49 ein oder wählen Sie einen *Zufallstipp,* so erhalten Sie mit dem Schalter *Auswertung* die Tage von 1955 bis 2014 dargestellt, an denen diese Zahlen einen Gewinn erzielt hätten. Angezeigt werden das Datum, Samstags- oder Mittwochsziehung, die Anzahl der Richtigen, evtl. mit Zusatzzahl, und die tatsächlich gezogenen Zahlen.
Testen Sie dies zum Beispiel mit dem Tipp 12, 13, 19, 37, 44, 47, so erhalten Sie

als Ergebnis, dass diese Zahlen in den fast 50 Jahren nur 48 mal einen Dreier und 3 mal einen Vierer ergeben hätten – ein wahrlich deprimierendes Ergebnis.
Aber auch für die meisten anderen Tipps sieht das Ergebnis nicht viel besser aus.

Im unteren Teil des Programmfensters erhalten Sie für einen gewählten Zeitraum die grafische Auswertung, wie oft jede einzelne der 49 Zahlen gezogen wurde. Für alle Ziehungen seit Beginn bis 2014 ergibt sich, dass die 32 immerhin 505 mal gezogen wurde und damit am meisten. Für Zahlenmystiker dürfte es nicht verwunderlich sein, dass ausgerechnet die „Unglückszahl" 13 am wenigsten gezogen wurde!

Sollten Sie nun aus dem Ergebnis ableiten, dass Sie für die nächste Lottoziehung genau die Zahlen ankreuzen, die bisher am wenigsten gezogen wurden, so sei auf das Teilprogramm *Stochastik* | *Ausgleichsgesetz* verwiesen.

Ab dem 4.Mai 2013 wurden in Deutschland Änderungen im Lottosystem vorgenommen. Die bisherige Superzahl ersetzt nun die Zusatzzahl. Damit stiegen die Gewinnchancen leicht, da die Superzahl nur aus den Ziffern 0 bis 9 gezogen wird. Außerdem wurde die Gewinnklasse "2 Richtige plus Superzahl" eingeführt und der Preis je Tipp um über 30% erhöht.
Zusätzlicher, gewollter Effekt ist, dass in der Spitzen-Gewinnklasse höhere Jackpot-Gewinne zu erwarten sind, wodurch die Spieler zu noch höheren Einsätzen verführt werden sollen.
Auf Grund des deutlich höheren Preises je Tipp wäre auch eine wesentlich höhere theoretische Quote zu erwarten. Dies ist nicht der Fall.
In diesem Programmteil werden Ziehungen ab dem 4.Mai 2013 wie Ziehungen vor der Einführung der Zusatzzahl behandelt.

12.47 Olympiaden-Auswertung

„Ich glaube nur der Statistik, die ich selbst gefälscht habe!" Churchill

In diesem Teilprogramm werden die Mathematik-Olympiaden, sowohl international als auch national, ausgewertet.

Wählen Sie zuerst, welche Art von Olympiaden Sie untersuchen möchten. In der Auswahlliste werden daraufhin die Austragungsorte mit den Jahreszahlen angezeigt.
Klicken Sie nun einen oder mehrere der Einträge an, werden die Daten gelesen und entsprechend ausgewertet. Dabei können Sie eine Liste der errungenen Preise oder eine grafische Auswertung erhalten. Weiterhin erfolgt die Auswertung nach fünf verschiedenen Kriterien:

- 1.Preis, 2.Preis, 3.Preis
- Anzahl der Preise
- Punkte

Die Punkte werden bei den nationalen deutschen Mathematik-Olympiaden aus den Medaillen berechnet – bei der Internationalen Mathematik-Olympiade werden die absolut erreichten Punktzahlen verwendet.
Markieren Sie nur einen Austragungsort, erhalten Sie eine Übersicht über diese Veranstaltung. Wählen Sie mehrere aus, können Sie sich auch einen Gesamtüberblick verschaffen.

Aufgrund der politischen Entwicklungen nach 1945 (Spaltung Deutschlands durch die Abtrennung der Bi- und Trizone) nahm Deutschland erst ab 1991 an der Internationalen Olympiade teil. Für den Zeitraum von 1959 bis 1990 werden die Ergebnisse der DDR und BRD einzeln gezählt.
Die ehemaligen Staaten UdSSR und GUS werden automatisch zu Russland gezählt, ebenso die Tschechoslowakei zu Tschechien. Das ehemalige Jugoslawien wird zum heutigen Serbien gezählt.

Für die Internationalen Mathematikolympiaden können Sie zusätzlich in einer Europakarte die Erfolge einzelner Staaten grafisch veranschaulichen. Für die Deutsche Mathematikolympiade wird diese Auswertung für die Bundesländer vorgenommen.

Für die Internationale Mathematik-Olympiade können Sie auch für die Teilnehmerländer einen Überblick über die historische Entwicklung erhalten. Klicken Sie dazu auf den Eintrag *Geschichte* und wählen Sie aus der aufklappbaren Liste ein Land aus. Die Auswertungskriterien stellen Sie wieder auf der linken Seite des Fensters ein. Für die Auswertung der Internationalen Mathematik-Olympiaden können Sie sich anstelle der Preisanzahl auch die Platzierung des Landes anzeigen lassen.

12.48 Wahlauswertung

"Wenn Wahlen etwas ändern würden, wären sie längst verboten."

Verfolgt man die Wahlsendungen am Tag einer Bundestags- oder Landtagswahl, so verwundert es mitunter, wie aus den abgegebenen Stimmen die Mandate vergeben werden. Rechnet man nach, so ist es nicht unbedingt so, dass eine Partei mit 20% aller Stimmen auch genau 20% der Mandate erhält. Die Ursache hierfür liegt zum einen in dem verwendeten Berechnungsverfahren und zum anderen auch in der sogenannten 5%-Hürde. Dies bedeutet, dass eine Partei mindestens 5% der Stimmen erhalten muss, um in das jeweilige Parlament einzuziehen. Andernfalls werden diese Stimmen einfach ignoriert.

In diesem Teilprogramm können Sie drei verschiedene Berechnungsverfahren für die Mandatsvergabe vergleichen. Zuerst legen Sie die Anzahl der *Mandate* sowie die Höhe der *Prozenthürde* fest. Dies muss nicht unbedingt 5% sein, da zum Beispiel 5% aller Stimmen in der Bundesrepublik Deutschland über 1 Million Wähler bedeutet. Da das Ignorieren der Meinung einer solch großen Gruppe fragwürdig ist, gibt es in letzter Zeit Diskussionen, diese Hürde evtl. auf einen

kleineren Wert festzulegen.

Tragen Sie nun in die Tabelle die Parteien und deren Stimmen ein. Mit dem Schalter *Berechnung* ermittelt das Programm nach vier verschiedenen Verfahren die Vergabe der Mandate.

Verfahren nach d'Hondt

Jede Partei erhält einen Quotienten zugewiesen, der anfangs gleich der Stimmenanzahl ist. Die Partei mit dem größten Quotienten bekommt das erste Mandat und einen neuen Quotienten zugewiesen, gleich Stimmenzahl / (Mandate + 1). Das nächste Mandat erhält die Partei, die nun den größten Quotienten besitzt. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

Verfahren nach Hare-Niemeyer

Für jede Partei wird die Anzahl ihrer Stimmen durch die Anzahl aller Stimmen dividiert und dann mit der Anzahl aller Mandate multipliziert. Die Partei erhält zunächst so viele Mandate, wie das ganzzahlige Ergebnis angibt. Eventuell aufgrund der Rundung übrig bleibende Mandate werden an die Parteien mit den größten gebrochenen Anteilen vergeben.

Verfahren nach Hagenbach-Bischoff

Die Gesamtstimmenzahl wird durch die um 1 erhöhte Anzahl der Mandate geteilt und auf die nächste ganze Zahl aufgerundet. Die Mandate der Parteien erhält man, indem man die Parteistimmenzahl durch diesen Wahlquotienten teilt und auf die nächste ganze Zahl abrundet. Bleiben Mandate übrig, so wird die Stimmenzahl jeder Partei durch die um 1 erhöhte Zahl der ihr bereits zugewiesenen Mandate geteilt. Das erste der noch zu verteilenden Mandate wird der Partei mit der größten Verteilungszahl zugewiesen. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

Automatisches Verfahren

Das vierte Verfahren ist das automatische Verfahren. Dieses Verfahren kam in der Weimarer Republik zur Anwendung. Dabei wird ein bestimmter Stimmenanteil für die Zuordnung eines Abgeordnetensitzes gesetzlich festgelegt, d.h., wenn zum Beispiel 120000 Stimmen notwendig sind, erhält eines Partei mit 370000 Stimmen drei Mandate, eine Partei mit 119000 Stimmen keinen Sitz.
In diesem Teilprogramm wird die maßgebliche Stimmenzahl ermittelt, indem die Anzahl der Wahlberechtigten durch die Mandatszahl geteilt wird. Ist die Anzahl der Wahlberechtigten nicht bekannt, werden die abgegebenen Stimmen gezählt. Dieses Verfahren hätte allerdings zur Folge, dass ein Parlament ziemlich klein wäre, wenn die Menschen aus Politikfrust nicht zur Wahl gingen. Insbesondere die Länderparlamente der letzten Jahre wären sehr klein. In diesem Fall müssten sich unsere Politiker doch etwas anstrengen, um ihre gut bezahlten Jobs zu behalten.

Für dieses Verfahren ist eine Prozenthürde ohne Bedeutung, die "Hürde" liegt in der notwendigen Stimmenzahl.
In sehr vielen Fällen liefern die drei ersten Verfahren gleiche Mandatsverteilungen. Dies muss aber nicht sein. Zum Beispiel erhalten Sie für die nachfolgenden fiktiven Werte bei einer 5%-Hürde und 500 Mandaten:

Partei	Stimmenzahl	%-Anteil	d'Hondt	Hare-Niemeyer	Hagenbach-Bischoff
Partei 1	1234567	45,1484	241	240	241
Partei 2	897654	32,8274	175	175	175
Partei 3	201010	7,351	39	39	39
Partei 4	44444	1,6253	0	0	0
Partei 5	234567	8,5782	45	46	45
Partei 6	122221	4,4697	0	0	0

Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn nur eine 4%-Hürde gelten würde. Dann wird:

Partei	Stimmenzahl	%-Anteil	d'Hondt	Hare-Niemeyer	Hagenbach-Bischoff
Partei 1	1234567	45,1484	231	229	230
Partei 2	897654	32,8274	167	167	168
Partei 3	201010	7,351	37	37	37
Partei 4	44444	1,6253	0	0	0
Partei 5	234567	8,5782	43	44	43
Partei 6	122221	4,4697	22	23	22

Offensichtlich begünstigt das Verfahren nach Hare-Niemeyer die kleineren Parteien. Welches der Verfahren das "beste" ist, kann natürlich nicht festgelegt werden.
Bei den österreichischen Nationalratswahlen wird das Verfahren des Schweizer Hagenbach-Bischoff für das erste Ermittlungsverfahren angewandt. Verbleibende Restmandate werden dann im zweiten Ermittlungsverfahren nach dem d'Hondtschen Verfahren zugewiesen. Das automatische Verfahren begünstigt im Normalfall keine Partei.
Das Verfahren nach dem belgischen Mathematiker d'Hondt war in der Bundesrepublik bis 1985 üblich. Seit 1985 wird nach dem Verfahren von Hare-Niemeyer gerechnet:

Zuerst werden im Wahlgebiet alle auf die Landesliste entfallenden Zweitstimmen addiert und die Mandate im Bundestag entsprechend verteilt. Bei erneuter Verrechnung nach dem Hare-Niemeyer-Verfahren werden die den Parteien zugesprochenen Mandate auf deren einzelne Landeslisten verteilt. Hat eine Partei mehr Direktmandate (Siege in den Wahlkreisen) gewonnen, als ihr Mandate auf Länderebene zustehen, so bleiben ihr diese Überhangmandate erhalten. Dadurch kann vor der Wahl die genaue Größe des zukünftigen Bundestags nicht angegeben werden. Bei einigen Landtagswahlen ist das anders. Dort werden Überhangmandate auf Kosten der anderen Parteien rückgerechnet.

Zum Testen des Teilprogramms finden Sie die Ergebnisse einer Vielzahl von Wahlen vor. Klicken Sie zum Laden der Werte auf die aufklappbare Liste und wählen Sie einen Eintrag aus.
Vorgesehen sind alle Bundestagswahlergebnisse, die Ergebnisse der österreichischen und schweizerischen Nationalratswahlen, die Ergebnisse der Volkskammerwahlen der DDR, die Europawahlen in Österreich und Deutschland und alle Ergebnisse der Landtagswahlen der deutschen und österreichischen Bundesländer, soweit sie ermittelbar waren. Darüber hinaus finden Sie auch einige Wahlergebnisse des deutschen Reichstages und deutscher Landtage vor 1945.
Für die deutschen Bundestagswahlen und die Europawahlen können Sie wahlweise CDU und CSU zusammenfassen, da diese i.A. als Union stets koalieren.

Beachten Sie bitte, dass die Zahlen in unterschiedlichen Veröffentlichungen abweichen. Wie das bei Wahlergebnissen möglich ist, bleibt unklar.
Außerdem zeigt das Programm die tatsächlich vergebenen Mandatszahlen. Mitunter entsprechen diese nicht der Berechnung. Dies liegt an Überhangmandaten, an anderen oder fehlenden Sperrklauseln (Deutschland vor 1945) oder an diversen Zusatzbedingungen.

Quelle der Daten zu den deutschen Wahlen: http://www.wahlen-in-deutschland.de/index.html

12.49 Analyse der Buchstabenhäufigkeit

„Habe nun, ach! Philosophie, Juristerei und Medizin, Und leider auch Theologie
Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh ich nun, ich armer Tor! Und bin so klug als wie zuvor; ...“
Goethe, Faust I

In der Kryptologie werden Angriffe auf mono- oder polyalphabetische Verschlüsselungssysteme oft durch eine Analyse der Häufigkeit auftretender Buchstaben durchgeführt. So ist allgemein bekannt, dass in der deutschen Sprache der Buchstabe E überdurchschnittlich oft auftritt. Das bedeutet, dass in einem einfachen Verschlüsselungssystem wie zum Beispiel dem Cäsar-Code das im kodierten Text am häufigsten auftretende Zeichen wahrscheinlich dem E entspricht. Das "Knacken" des Textes ist damit kein Problem mehr.
Unabhängig von diesen kryptologischen Überlegungen können Texte aber ganz allgemein auf das Auftreten von Buchstaben untersucht werden.

In diesem Teilprogramm analysiert das Programm eingegebene Texte und zählt die auftretenden Buchstaben. Den zu untersuchenden Text (bis zu 1 MByte) können Sie entweder über den Schalter *Text laden* auswählen oder Sie markieren einen der vordefinierten Beispieltexte in der aufklappbaren Liste.

Klicken Sie nun auf *Analyse*, dann zählt das Programm die Buchstaben und stellt diese grafisch dar.

Markieren Sie das Feld *Erwartungswert*, erhalten Sie zusätzlich das Diagramm der durchschnittlich in einem deutschen Text zu erwartenden Buchstabenhäufigkeit.

Die Felder *nach Häufigkeit sortieren* und *absolute Häufigkeiten* verändern ebenfalls die grafische Darstellung.

Da im Englischen z.B. der Buchstabe Y häufiger und das K seltener als im Deutschen auftritt, können Sie für geladene englische Text zusätzlich noch das Feld *englischer Text* auswählen. Zum Beispiel finden Sie unter den Beispieltexten Heines „Deutschland ein Wintermärchen" oder „Alice's Adventures in Wonderland" von Lewis Carroll. Auch französisch- und italienischsprachige Texte können Sie analysieren.

Die ermittelte Verteilung kann mit der theoretischen verglichen werden. Dazu prüft das Programm, ob es eine signifikante, sprich wesentliche Abweichung gibt. Zum Beispiel ist erstaunlich, dass Goethes "Erlkönig" signifikant von der Theorie abweicht. Bedenkt man aber, dass sich Goethe selbst nie als einen Dichter für das Volk betrachtete, sondern vielmehr für die "höher gestellten" Personen schrieb, so wundert es nicht, dass er weniger die Volkssprache nutzte.

Koinzidenzindex

Zur Berechnung des Koinzidenzindex einer Sprache nutzt man die Formel

$$\kappa = (n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{26}^2) / (n (n-1))$$

wobei n die Gesamtzahl der Buchstaben ist und die n_i die absolute Häufigkeit der einzelnen Buchstaben darstellen.

Es zeigt sich, dass jede Sprache ihr eigenes Kappa hat: Deutsch 7,62%, Spanisch 7,75%, Englisch 6,61%, Französisch 7,78%, Russisch 5,29%, Italienisch 7,38% ...
Kommt jeder Buchstabe bei einem Alphabet aus 26 Buchstaben mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 1 / 26 vor, so ergibt sich der Wert κ = 3,85%. Durch Ermittlung des κ eines Textes kann festgestellt werden, in welcher Sprache der Klartext verfasst wurde oder ob es eine Kunstsprache ist.

12.50 Buchstabenreihenfolge in Texten

Am 23. September 2003 veröffentlichte eine große deutsche Tageszeitung einen Artikel in ähnlicher Form:

Die Buhcastnebeirhneoflge in einem Wrot ist eagl
Ncah eeinr nueen Sdutie, die utner aendrem von der Cmbadrige Unvirestiy dcurghefhürt wroden sien slol, ist es eagl, in whelcer Rehinfeolge Buhctasben in eienm Wrot sheten, Huapstache, der estre und lzette Buhcatsbe snid an der rchiitgen Sltele.
Die rteslichen Buhctsaben knnöen toatl druchiennaedr sien, und man knan es tortzedm onhe Porbmele lesen, wiel das mensclhiche Geihrn nihct jdeen

Buhcstaben enzieln leist, sdonern das Wrot als Gnzaes.
Mit dem Pnhäeomn bescfähgiten scih mhreree Hcohshcueln, acuh die aermikasinhce Uivnresätit in Pittusbrgh. Ertslams üebr das Temha gecshireebn hat aebr bereits 1976 Grhaam Rwlaisnon in sneier Dssiretitaon an der elgncishen Uinvsertiy of Nttoginham.

Obwohl die Buchstabenreihenfolge in den einzelnen Wörtern teilweise vollständig durcheinander gewürfelt wurde, kann man den Text doch relativ fließend lesen.

Dieses Phänomen, dass das menschliche Gehirn Wörter eines Textes nicht mit Einzelbuchstaben, sondern als Ganzes wahrnimmt, ist in der Informationsübertragung seit Längerem bekannt. Streicht man zum Beispiel aus einem Text alle Vokale "E", so kann die Information in den meisten Fällen dennoch entschlüsselt werden. Der scheinbar nicht notwendige Überfluss an Buchstaben wird Redundanz genannt.

In diesem Teilprogramm können Sie Texte auf drei verschiedene Arten "verstümmeln": Zum einen wird die Buchstabenreihenfolge getauscht, zum Zweiten werden, bis auf führende, alle Vokale entfernt und zum Dritten können als Buchstaben "E" aus dem Text gestrichen werden.
Einen Text laden Sie über den Schalter . Welches Verfahren genutzt wird, entscheiden Sie mit dem entsprechenden Aktionsschalter. Veränderte Texte können Sie mit den Schaltern , und speichern, in die Zwischenablage kopieren oder drucken.

Möchten Sie die Buchstabenreihenfolge durch das Programm verändern lassen, so ist noch von großer Bedeutung, wie weit die einzelnen Buchstaben in einem Wort verschoben werden dürfen. Diese Länge stellen Sie am Rollbalken *Zyklus* ein. Das mit einem Zyklus von 2 veränderte Wort *Buhcastnebeirhneoflge* ist noch gut als *Buchstabenreihenfolge* zu erkennen. Erhöht man allerdings den Zyklus auf 24, so werden die Buchstaben viel stärker permutiert und es entsteht zum Beispiel *Bnbufteehsioehrclnage.* Dieses Wort schnell zu erkennen, dürfte vielen schwer fallen. Offensichtlich ist es also doch nicht völlig gleichgültig, wie die Buchstabenreihenfolge in einem Wort ist. Unser Gehirn kann die Vertauschungen wahrscheinlich nur bis zu einem gewissen Maß ausgleichen.

13. Anwendung - Informatik

Unter diesem Punkt finden Sie Anwendungen, die sich mit Fragen der algorithmischen Bearbeitung von Problemen beschäftigen, zum Beispiel kryptografischen Problemen.

13.1 Kryptografie

Eines der wichtigsten Teilgebiete der modernen Informatik und Mathematik ist die Kryptografie. Die Zielstellung dieser Wissenschaft besteht u.a. in der Konstruktion von Kodierungsverfahren, dem Nachweis ihrer (praktischen) Sicherheit, aber auch in der Suche nach Entschlüsselungsmethoden.
Mit der ständig wachsenden Globalisierung der Weltwirtschaft, dem immer stärkeren Zusammenwachsen der Staaten und dem Einzug moderner Rechentechnik in alle Bereiche des täglichen Lebens kommt der sicheren Verschlüsselung brisanter Daten immer größere Bedeutung zu.

Dieses Teilprogramm demonstriert einfache Verschlüsselungsverfahren.

Cäsar-Code

Die Geschichte der Geheimhaltung von Nachrichten ist über 2000 Jahre alt. Eines der ersten Verschlüsselungsverfahren ist nach Cäsar benannt. Hierbei wird die geheim zu haltende Nachricht mit einer Codezahl verändert. Jedem Buchstaben wird eine Nummer entsprechend seiner Position im Alphabet zugeordnet, dann wird die Codezahl hinzuaddiert und das Ergebnis wieder in das Alphabet zurückübersetzt. Eventuell muss zuvor von der Summe die Anzahl der Buchstaben des Alphabets subtrahiert werden. Der Erzählung nach soll Cäsar die konstante Codezahl 3 benutzt haben.

Wenn man nur Großbuchstaben zulässt, kennt dieses Verfahren lediglich 26 verschiedene Codezahlen, wodurch es mit einem kleinen und einfachen Computerprogramm sehr schnell gelingt, jede derartig verschlüsselte Botschaft zu knacken. Heute hat diese Kryptografiemethode keinerlei praktische Bedeutung mehr. In diesem Unterprogramm können Sie Texte mit dem Cäsar-Code bzw. mit dem weiter unten beschriebenen Vigenere-Code kodieren und dekodieren.

Wählen Sie in der Liste *Verschlüsselungsverfahren* für das Cäsar-Verfahren den Eintrag *Cäsar-Code (Buchstaben)*, werden ausschließlich Buchstaben übersetzt. Kleinbuchstaben werden automatisch in Großbuchstaben umgewandelt. Wollen Sie auch andere Zeichen einbeziehen, so markieren Sie *Cäsar-Code (ASCII-Satz)*. In diesem Fall benutzt das Programm das vollständige Computer-Alphabet (ASCII).

Vigenere-Code

Beim Start des Teilprogramms ist das Verschlüsselungsverfahren *Vigenere-Code,* das von dem französischen Mathematiker Vigenére entwickelte wurde, voreingestellt. Grundlage der Verschlüsselung ist hier ein Codewort, nicht bloß eine Zahl, das zyklisch zum eigentlich zu verschlüsselnden Text byteweise addiert (Modulo-Addition) wird. Das bedeutet z.B.:

Der Text POLSTER soll mit dem Codewort BIT verschlüsselt werden. Legt man nur Großbuchstaben und somit 26 als Modul zugrunde, ergibt die schrittweise Umwandlung:

Text	P	O	L	S	T	E	R
ASCII	80	79	76	83	84	69	82
ASCII – 64	16	15	12	19	20	5	18
Codewort	B	I	T	B	I	T	B
ASCII	66	73	84	66	73	84	66
ASCII – 64	2	9	20	2	9	20	2
Summe	18	24	32	21	29	25	20
Modulo 26	18	24	6	21	3	25	20
+ 64	82	88	70	85	67	89	84
Codierter Text	Q	X	F	U	C	Y	T

Der kodierte Text würde damit QXFUCYT lauten. Da die Länge des Codewortes und der Wert des Moduls normalerweise nicht bekannt sind, ist es etwas schwieriger, diesen Code zu "knacken". Mit hinreichender Rechentechnik und einigen theoretischen Überlegungen, die hier allerdings zu weit führen, ist es aber prinzipiell möglich (siehe weiter unten).

Legen Sie zuerst das Codewort fest. Hierbei gilt: Je länger, desto aufwendiger wäre ein unbefugtes Entschlüsseln. Danach tragen Sie unter *Unverschlüsselter Text* Ihren Ausgangstext ein oder laden diesen als ASCII-Datei über den entsprechenden Schalter. Betätigen Sie *Text kodieren*, kodiert das Programm Ihren Text. Der Wert des verwendeten Moduls bleibt das "Geheimnis" des Programmautors. Den kodierten Text können Sie speichern und, wenn Sie es wünschen, z.B. per E-Mail an einen Bekannten senden.
Wählen Sie in der Verfahrensliste *Vigenere-Code (Großbuchstaben)*, werden das Codewort und der unverschlüsselte Text in Großbuchstaben verwandelt und nach der Kodierung ebenfalls in den Bereich der Großbuchstaben zurücktransformiert.

An dieser Stelle sei nochmals darauf verwiesen, dass dieses Verfahren nicht sicher ist. Allerdings ist ab Codewortlängen über 10 Buchstaben schon ein erheblicher Aufwand zum Entschlüsseln notwendig. Selbstverständlich muss der Empfänger das Codewort kennen, andernfalls erhält er nur eine Datei, die aus einer Menge "Datenmüll" besteht. Erhalten Sie kodierten Text, können Sie diesen über den Schalter *Codierten Text laden* einladen und anschließend dekodieren.

Binäres Verschlüsseln

Bei diesem Verfahren wird in Analogie zum Vigenere-Code der Originaltext mit einem Codewort verschlüsselt. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass die einzelnen Zeichen nicht entsprechend ihrer Stellung im Alphabet "addiert", sondern bitweise Exklusiv-Oder verknüpft werden. Allerdings wird dieses Verschlüsselungsverfahren durch diesen Mechanismus nicht sicherer als der Vigenere-Code. Haben Sie dieses Verfahren gewählt, können Sie den Text in Analogie zum oben beschriebenen Verfahren ver- und entschlüsseln.

Atbasch-Kodierung

Bei der Atbasch-Kodierung wird einfach der erste Buchstabe des Textes durch den letzten Buchstaben des Alphabets ersetzt, der zweite durch den vorletzten usw. Natürlich ist auch dieses Verfahren in keiner Weise sicher.
Historisch ist die Atbasch-Kodierung im antiken Judentum nachzuweisen.

Permutations-Code

Viele einfachen Verschlüsselungen sind sehr unsicher. (Vor allem, wenn in einem Text gleiche Zeichen hintereinander vorkommen.) Wesentlich sicherer wird der verschlüsselte Text, wenn man die darin enthaltenen Buchstaben vorher "verwirbelt", d.h., man vertauscht die Buchstaben des Textes – sie werden permutiert. Führt man dann noch ein Passwort ein, wird für jeden Buchstaben eine zusätzliche Permutation durchgeführt.
Auch diese Verschlüsselung lässt sich mittels einer Known-Plaintext-Attacke brechen.

Gartenzaunkodierung

Bei der Gartenzaunkodierung wird die Nachricht, hier "das ist ein test", in n Reihen aufgeteilt und diese in Form einer Zickzacklinie (Gartenzaun) untereinander aufgeschrieben.
Die kodierte Nachricht ergibt sich, indem die Buchstaben der einzelnen Zeilen aneinander gefügt werden.
Im Beispiel ist n = 3 und aus der Nachricht "dasisteintest" wird mit den Zwischenschritten

```
d           s           n           t
   A     i     t     i     t     s
      S           e           e
```

der Codetext "dsntaititssee"
Wählen Sie das Teilprogramm *Gartenzaunkodierung (Ziffern, Buchstaben)* werden nur die Buchstaben und Ziffern in ihrer Lage verändert. Leerzeichen und Sonderzeichen behalten ihre Position, so dass die Grundstruktur des Textes erhalten bleibt.

Skytale
Vor 2500 Jahren verwendete Sparta eine interessante Methode zur Übermittlung geheimer Nachrichten.
Sender und Empfänger mussten beide eine sogenannte Skytale haben. Dies waren zwei Zylinder mit denau dem gleichen Radius.
Der Sender wickelte ein schmales Band aus Pergament spiralförmig um seinen Zylinder und schrieb dann der Länge nach seine Nachricht auf das Band. War nun das Band abgewickelt, konnte die Nachricht nur von einer Person gelesen werden, die einen Zylinder genau desselben Umfangs hatte.
In diesem Teilprogramm geben Sie den Zylinderdurchmesser für die Verschlüsselung an.

Differenzkodierung und weitere Verfahren
Bei der Differenzkodierung wird ausgehend von ersten Zeichen des Klartextes jedes weitere Zeichen mit seinem Abstand im ASCII-Code zum vorhergehenden Zeichen kodiert.
Der monotone Cäsar-Code verschiebt das erste Zeichen um 1 im Alphabet, das zweite Zeichen um 2, das dritte um 3, usw.
Der Up-Down-Cäsar-Code verschiebt die Zeichen im Alphabet alternierend um 1 aufwärts bzw. abwärts im Alphabet.

RC4-,RC5-,RC6-Verschlüsselung

Ron's Code oder der Rivest Cipher No.4 (RC4) ist ein Verfahren zur Stromchiffrierung. Es wurde 1987 von Ronald L.Rivest für RSA Data Security Inc. entwickelt und lange Jahre geheimgehalten.
Im September 1994 veröffentlichte eine anonyme Person einen Algorithmus, der zu RC4 identische Ergebnisse erzeugte und daher "apparantly RC4" ist. Im Gegensatz zu DES ist die Schlüssellänge variabel und kann bis zu 2048 Bit (256 Zeichen) betragen, wobei bereits 128 Bit als sicher gelten.

Es wird immer ein Byte auf einmal verschlüsselt. Der Algorithmus ist einfach und sicher und kann effizient programmiert werden.
Zuerst wird eine S-Box initialisiert. Das gefüllte Feld wird mit Hilfe des Schlüssels untereinander vertauscht. Danach wird für jeden Buchstaben des Eingabetextes ein Zufallsbyte aus der S-Box ermittelt, wobei die Felder des Array erneut vertauscht werden. Am Ende werden das Zufallsbyte und das Textzeichen XOR miteinander verknüpft.
RC5 und RC6 sind Weiterentwicklungen des RC4-Codes und können ebenfalls in diesem Programmteil verwendet werden. RC6 gilt heute (2014) als praktisch nicht angreifbar.
Weiterhin Weiterhin sind auch IDEA und Rijndael (AES) nutzbar. Zur Beschreibung siehe Teilprogramm "IDEA-Verschlüsselung".

"Knacken" des Vigenere-Codes

Wie oben erwähnt, ist es möglich, den Vigenere-Code zu knacken. Voraussetzung dafür ist ein hinreichend langer Text. Das Programm bietet Ihnen die Möglichkeit, mit dem Vigenere-Code verschlüsselte Botschaften ohne Kenntnis des Codewortes zu entschlüsseln. Dies bedingt Folgendes:

- der Text muss eine Mindestlänge von 16 mal der Codewortlänge haben
- der Text muss mit dem in diesem Programm verwendeten Codierungsverfahren verschlüsselt sein.

Die erste Voraussetzung ergibt sich aus der Methode der internen Codewortberechnung. Die zweite Bedingung ist notwendig, da in jedem Vigenere-Verschlüsselungsprogramm ein anderes Gesamtalphabet zugelassen sein kann.

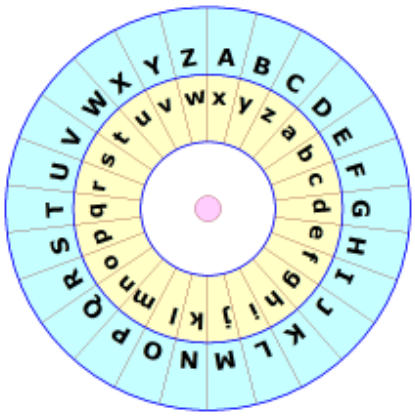
Zum Dekodieren eines verschlüsselten Textes ohne Kenntnis des Codewortes laden Sie den Text über den Punkt *Codierten Text laden.* Betätigen Sie nun den Schalter *Vigenere-Code knacken*, analysiert das Programm den Text und sucht nach auftretender Periodizität. Wird ein Codewort gefunden, zeigt das Programm dieses an und transformiert den Text. Ist der Text für eine vollständige Dekodierung zu kurz, erhalten Sie eine Fehlermeldung der Form:

Textlänge lässt nur das (wahrscheinliche) Erkennen eines maximal ... Zeichen langen Codewortes zu!

In vielen Fällen wird der Text dennoch korrekt umgewandelt.
Ein Beispiel erhalten Sie, wenn Sie den Schalter **B** betätigen: Das Programm übernimmt einen verschlüsselten Text mit Informationen über die sächsische Stadt Chemnitz.

13.2 Cäsar-Verfahren und Alberti-Kodierung

In diesem Teilprogramm werden zwei Verschlüsselungsverfahren betrachtet, die mit Hilfe einer Verschlüsselungsscheibe durchgeführt werden können.



Cäsar-Verfahren

Eines der ältesten überlieferten Verschlüsselungsverfahren ist das Cäsar-Verfahren; benannt nach Gaius Julius Cäsar, der dieses Verfahren zur Verschlüsselung von Nachrichten genutzt haben soll.

Gegeben ist ein Alphabet mit zum Beispiel 26 Buchstaben (A…Z). Die einfachste Form der Verschlüsselung ist, jeden Buchstaben des Klartextes durch z.B. den drittnächsten Buchstaben

(Verschiebung = 3) im Alphabet zu ersetzen; gemäß der alphabetischen Reihenfolge und zyklisch, d.h. auf Z folgt wieder A. Das Ergebnis ist der Geheimtext.
Der Empfänger kann aus dem Geheimtext den Klartext wieder zurückgewinnen. Er muss dazu wissen, mit welchem Algorithmus die Verschlüsselung vorgenommen wurde und er muss die Verschiebung kennen. Durch Umkehrung des Verschlüsselungsalgorithmus unter Verwendung des richtigen Schlüssels ergibt sich wieder der Klartext.

Die Zuordnung der Buchstaben von Klartext und Geheimtext kann mit einer Chiffrierscheibe geschehen. Diese besteht aus zwei konzentrischen, beweglichen Kreisen. Auf beiden Kreisen sind die 26 Buchstaben alphabetisch sortiert geschrieben. Die Scheiben können gegeneinander verdreht werden.
Zur Kodierung eines Klartextes wird das a der inneren Scheibe auf ein beliebiges Zeichen der äußeren eingestellt. Jeder Klartextbuchstabe wird auf dem inneren Kreis gesucht und durch das Zeichen auf der äußeren Scheibe ersetzt.
Zum Beispiel wird bei der in der Abbildung gezeigten Einstellung aus

CHEMNITZ

der kodierte Text FKHPQLWC

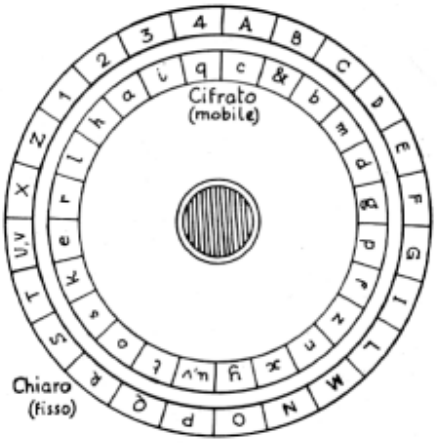
Das Verfahren ist monoalphabetisch, d.h. gleiche Buchstaben werden gleich kodiert. Außerdem gibt es nur 25 verschiedene Verschiebungen, wodurch das Knacken eines Geheimtextes sehr einfach ist.

Das Cäsar-Verfahren wird in diesem Teilprogramm demonstriert. Die zwei Scheiben können Sie durch linken Mausklick und Bewegen der Maus gegeneinander verschieben und so einen veränderten Kode einstellen.

Unter *Klartext* tragen Sie den Ausgangstext ein. Ist das Feld *Text sofort kodieren* markiert, wird der Chiffretext sofort erzeugt. Mit den zwei Schaltern *Kodieren* und *Dekodieren* können Sie ebenso den jeweils anderen Text erzeugen.

Alberti-Kodierung

Leon Battista Alberti (1404-1472) beschrieb in seinem Werk "Trattato della cifra" ein auf dem Cäsar-Code basierendes Verschlüsselungsverfahren, dass allerdings wesentlich schwerer zu knacken ist.



Zur Kodierung benutzt er eine Chiffrierscheibe. Diese besteht aus zwei konzentrischen, beweglichen Kreisen. Auf den äußeren Kreis sind 24 Zeichen alphabetische sortiert geschrieben, lateinische Großbuchstaben außer dem H, K, W und Y, sowie die Ziffern 1, 2, 3 und 4.
Auf der inneren Scheibe findet man in zufälliger Reihenfolge 23 lateinische Kleinbuchstaben und das Zeichen &. Die Buchstaben u und w werden durch v vertreten, das j durch das i. Die

Scheiben können gegeneinander verdreht werden.
Zur Kodierung eines Klartextes wird das & auf ein beliebiges Zeichen eingestellt. Jeder Klartextbuchstabe wird auf dem inneren Kreis gesucht und durch das Zeichen auf der äußeren Scheibe ersetzt.
Zum Beispiel wird bei der in der Abbildung gezeigten Einstellung aus

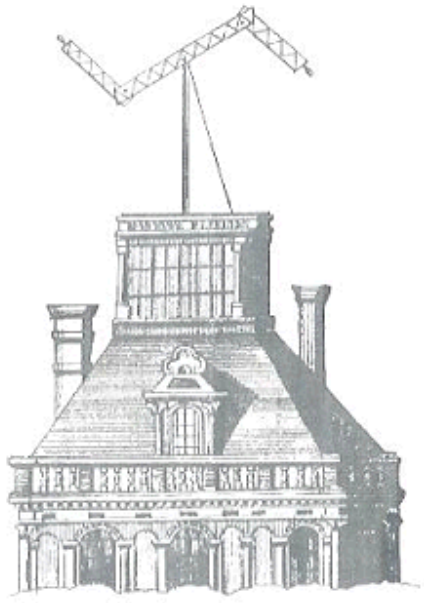
CHEMNITZ

der kodierte Text A1VDM3QL

Durch die veränderte Reihenfolge der inneren Zeichen wird, obwohl monoalphabetisch, dennoch anspruchsvoller als beim Cäsar-Kode verschlüsselt. Das Knacken ist nur durch eine Häufigkeitsanalyse möglich.
Alberti beschreibt eine zusätzliche Idee. Nach der Verschlüsselung eines Zeichens soll die Scheibe um ein Zeichen weiter gedreht werden. Damit entsteht ein polyalphabetisches Verschlüsselungsverfahren; das erste in der Geschichte beschriebene.

Das Kodierungsverfahren von Alberti wird in diesem Teilprogramm beschrieben. Die zwei Scheiben können Sie durch linken Mausklick und Bewegen der Maus gegeneinander verschieben und so einen veränderten Kode einstellen.

Unter *Klartext* tragen Sie den Ausgangstext ein. Ist das Feld *Text sofort kodieren* markiert, wird der Chiffretext sofort erzeugt. Mit den zwei Schaltern *Kodieren* und *Dekodieren* können Sie ebenso den jeweils anderen Text erzeugen.



Haben Sie polyalphabetisch angekreuzt, wird die erweiterte Alberti-Kodierung verwendet, andernfalls monoalphabetisch verschlüsselt.

13.3 Telegraphen-Alphabet

Unter optischer Telegrafie verstand man oft, das von Claude Chappe im 18.Jahrhundert in Frankreich eingeführt System optisch-mechanischer Telegrafen. 1794 wurde die erste Telegrafenlinie zwischen Paris und Lille eingerichtet, bei der mit 22 Telegrafenstationen 270 km überbrückt wurden. Ein Zeichen konnte dabei in etwa 2 Minuten übermittelt werden.

Für diese Telegrafie entwickelte Chappe ein spezielles Alphabet. An einem hohen Mast waren zwei schwenkbare Querbalken mit zwei weiteren schwenkbaren Balken an jedem Ende angebracht, womit je nach Position anhand des Codes unterschiedliche Buchstaben signalisiert werden konnten.
Dies wird in diesem Teilprogramm simuliert.

Zum Einstellen eines Zeichens des rechts abgebildeten Alphabets klicken Sie einfach auf den Buchstaben oder die Ziffer.

Möchten Sie eine längere Nachricht "übertragen", so tragen Sie diese ein und klicken *Nachricht anzeigen*. Auf etwas langsameren Computern werden Sie die *Abstand* zwischen den Zeichen vergrößern müssen.

13.4 Vigenère-Verfahren

Durch Blaise de Vigenère wurde Ende des 16.Jahrhunderts ein damals mächtiges Verschlüsselungssystem geschaffen.

Grundlage der Verschlüsselung ist hier ein Codewort, nicht bloß eine Zahl wie beim Cäsar-Code, das zyklisch zum eigentlich zu verschlüsselnden Text byteweise addiert (Modulo-Addition) wird. Damit ist das Verfahren polyalphabetisch und blieb lange Zeit nicht „knackbar".

Beispiel: Der Text MATHEMATIK soll mit dem Codewort KEPLER verschlüsselt werden. Legt man nur Großbuchstaben und somit 26 als Modul zugrunde, ergibt die schrittweise Umwandlung:

Klartext	M	A	T	H	E	M	A	T	I	K
ASCII-Code I	77	65	84	72	69	77	65	84	73	75
Codewort	K	E	P	L	E	R	K	E	P	L
ASCII-Code	75	69	80	76	69	82	75	69	80	76
minus 64 = II	11	5	16	12	5	18	11	5	16	12
Summe I+II	88	70	100	84	74	95	76	89	89	87
Überlauf -26			74			69				
Geheimtext	X	F	J	T	J	E	L	Y	Y	W

Der kodierte Text würde damit XFJTJELYYW lauten. Da die Länge des Codewortes und der Wert des Moduls normalerweise nicht bekannt sind, ist es etwas schwieriger, diesen Code zu knacken. Mit hinreichender Rechentechnik und einigen theoretischen Überlegungen ist es aber prinzipiell möglich.
Als zusätzliche Verschlüsselungsverahren steht die Binäre Verschlüsselung und das klassischen Cäsar-Verfahren zur Verfügung. Beim Cäsar-Verfahren ist eine Codezahl von 1 bis 26 einzutragen. Diese wird in einen Buchstaben A bis Z verwandelt und danach kodiert. Damit ist das Cäsar-Verfahren ein Sonderfall des Vigenère-Verfahrens mit einem einbuchstabigen Codewort.

Einen längeren Text können Sie mit dem Vigenère-Verfahren im Teilprogramm *Verschlüsselungsverfahren* bearbeiten, evtl. auch einen kodierten Text knacken.

Dieses Teilprogramm stellt eine Ergänzung dar und ermöglicht Verschlüsselungen in Form der oben gezeigten Tabelle nachzuvollziehen. Tragen Sie dazu einfach den *Klartext* und das *Codewort* in die Eingabezeilen ein.

13.5 Hebräisches Verfahren

Bei einem Transpositionsverfahren werden die Zeichen des Klartextes nicht durch andere ersetzt, sondern lediglich in der Reihenfolge vertauscht.
Als Grundlage dient eine Matrix in die das zu chiffrierende Wort zeilenweise eingetragen wird. Die Anzahl der Spalten ist der geheime Schlüssel. Daraus und aus der Gesamtlänge des Klartextes ergibt sich die Anzahl der Zeilen in der Matrix. Der Geheimtext wird durch spaltenweises Auslesen der Matrix gebildet.

I	C	H	B	I	N
D	E	R	D	O	K
T	O	R	E	I	S
E	N	B	A	R	T

Im Beispiel mit einer Matrix des Schlüssels 6 wird spaltenweise ausgelesen:
IDTECEONHRRBBDEAIOIRNKST
In dieser einfachen Form wird dieses Verschlüsselungsverfahren auch hebräisches Verfahren genannt.

In diesem Teilprogramm wird ein Text dem hebräischen Verfahren unterzogen. Über die kleinen Schalter laden Sie den Originaltext bzw. den kodierten Text. An dem Rollbalken *Spalten* können Sie die Anzahl der Spalten der Matrix einstellen. Transformiert werden die Texte mit den Schaltern *Text kodieren* und *Text dekodieren*.
Zu beachten ist, das ein Originaltext nach dem Laden oder der Änderung der Spaltenzahl sofort umgewandelt wird.

Dieses klassische Verschlüsselungsverfahren ist natürlich heute nicht mehr sicher, da mit einfachem Computereinsatz, selbst ohne Häufigkeitsanalyse, der Originaltext ermittelt werden kann.

13.6 Buchchiffren

In diesem Teilprogramm können Sie zwei verschiedene Buchchiffren verwenden, das *Augustus-Verfahren* und die *Bacon-Chiffre*.

Augustus-Verfahren

In seiner Autobiografie beschreibt der römische Kaiser Tiberius Claudius Nero Germanicus (10 v.u.Z.-54 u.Z.) ein Verschlüsselungsverfahren, dass von Augustus (Gaius Octavius, 63 v.u.Z.-14 u.Z.) verwendet worden sein soll. Grundlage der Methode ist das Cäsar-Verfahren. Allerdings wird nicht jeder Buchstabe um den gleichen Wert im Alphabet zyklisch verschoben.

Vielmehr nutzt Augustus zur Festlegung der Codes die Buchstabenfolge eines von ihm gewählten Buches.
Der erste Buchstabe des Klartextes wird damit mit dem ersten Buchstaben des Buches verknüpft, ebenso die zweiten, dritten usw. Als Geheimtext wird die

Differenz der Positionen beider Buchstaben im Alphabet notiert. Ist die Differenz negativ wird 26 addiert. Zur Dekodierung muss dann ein Zeichen des Geheimtextes nur um die entsprechende Differenz verringert werden, evtl. plus 26.
Mit der Verwendung eines unterschiedlichen Codes für jedes Zeichen wird das Verfahren polyalphabetisch und ähnelt dem Prinzip des Vigenere-Codes, der erst Jahrhunderte Jahre später entwickelt wurde.

In einer modernen Erweiterung werden alle darstellbaren Zeichen, inkl. Ziffern und Sonderzeichen, betrachtet. In diesem Fall wird das Augustus-Verfahren durchaus schwierig zu knacken, vorausgesetzt der Codetext ist nicht bekannt. Diese Variante wird hier im Programm demonstriert.

Im Programmfenster finden Sie drei Textbereiche. Im ersten (*Originaltext*) können Sie einen Text eingeben oder diesen über die kleinen Schalter von der Festplatte laden.
Der Bereich *Codetext* kann einen vorbereiteten Text aufnehmen, der für die Verschlüsselung und Entschlüsselung genutzt wird. In der aufklappbaren Liste finden Sie acht vordefinierte Texte.
Klicken Sie auf den Schalter *Verschlüsseln*, wird die Augustus-Chiffre angewendet. Den Geheimtext können Sie auf der Festplatte speichern und zu gegebenem Zeitpunkt wieder laden.
Für das Entschlüsseln eines Geheimtextes laden Sie diesen unter *Verschlüsselter Text* und verfahren entsprechend weiter.

Bacon-Chiffre

Die Bacon-Chiffre wurde von Francis Bacon (1561-1626) entwickelt und stellt ein Steganographieverfahren dar und ist eine der ersten Anwendungen des Binärsystems in Europa.
Jedem Buchstaben des Klartextes wird ein fünfstelliger Code zugeordnet:

Buchstabe	Code	Buchstabe	Code	Buchstabe	Code
A	aaaaa	I, J	abaaa	R	baaaa
B	aaaab	K	abaab	S	baaab
C	aaaba	L	ababa	T	baaba
D	aaabb	M	ababb	U, V	baabb
E	aabaa	N	abbaa	W	babaa
F	aabab	O	abbab	X	babab
G	aabba	P	abbba	Y	babba
H	aabbb	Q	abbbb	Z	babbb

Das Wort "Mathe" wäre kodiert: "ababb aaaaa baaba aabbb aabaa". Diese Kodierung wird anschließend in einem Text versteckt. Dazu existieren mehrere Möglichkeiten.

1.Möglichkeit: Für die einzelnen Buchstaben eines Textes werden zwei unterschiedliche Schriftarten verwendet. Eine Schriftart steht für den Buchstaben a, die andere für den Buchstaben b.
Francis Bacon entwickelte dazu eine Handschrift aus 21 Zeichen, die für jeden Groß- und Kleinbuchstaben zwei unterschiedliche Darstellungen enthielt.

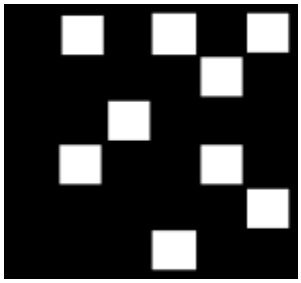
2.Möglichkeit: Im Text werden alle "a" als Kleinbuchstaben und die "b" als Großbuchstaben geschrieben.
Die Kodierung des Wortes "Mathe" ergibt dann zum Beispiel:
"dAs HÖchste LebEn isT MAthEmatik."

In diesem Teilprogramm wird die zweite Möglichkeit umgesetzt.
Im Programmfenster finden Sie drei Textbereiche. Im ersten (*Originaltext*) können Sie einen Text eingeben oder diesen über die kleinen Schalter von der Festplatte laden.
Der Bereich *Codetext* kann einen vorbereiteten Text aufnehmen, der für die Verschlüsselung und Entschlüsselung genutzt wird. In der aufklappbaren Liste finden Sie acht vordefinierte Texte. Klicken Sie auf den Schalter *Verschlüsseln*, wird die Bacon-Chiffre angewendet. Den Geheimtext können Sie auf der Festplatte speichern und zu gegebenem Zeitpunkt wieder laden.
Für das Entschlüsseln eines Geheimtextes laden Sie diesen unter *Verschlüsselter Text.* Zum Entschlüsseln benötigen Sie den *Codetext* jedoch nicht, da dieser ja im Geheimtext enthalten ist.

13.7 Fleißnersche Schablone

Die Fleißnersche Schablone ist ein Verschlüsselungsverfahren, bei dem eine Transposition mit einer Schablone den Klartext verschlüsselt.
Die Schablone wurde von dem österreichischen Oberst Eduard Fleißner von Wostrowitz 1881 in seiner Schrift "Neue Patronengeheimschrift" veröffentlicht. Bekannt wurde das Verfahren durch Jules Verne. In seinem Roman "Mathias Sandorf" nutzte er 1885 die Schablonen.

Die Fleißnersche Schablone besteht aus einem Quadrat, aus dem kleinere Quadrate ausgeschnitten sind. Die Schablone wird auf ein Blatt Papier gelegt und jeweils ein Buchstabe des Klartextes in ein ausgeschnittenes Quadrat eingetragen.



Sind alle Felder gefüllt, wird die Schablone um 90° gedreht und die nächsten Buchstaben in die Lücken geschrieben. Wird der Vorgang noch zweimal wiederholt, entsteht ein Quadrat mit Buchstaben. Ist die Nachricht länger, wird ein neues Quadrat begonnen.

In diesem Programmteil werden einfache Texte mit Hilfe der Fleißnerschen Schablone verschlüsselt.
Über die kleinen Schalter und laden bzw. speichern Sie die entsprechenden

Texte, den Klartext oder den verschlüsselten Text. Die Kodierung und Dekodierung starten Sie über die entsprechenden Schalter.
Markieren Sie das Feld *Großbuchstaben* werden die 26 Buchstaben von a bis z vor der Umwandlung in Großbuchstaben transformiert. Im Allgemeinen wird dadurch die unbefugte Dekodierung erschwert.

Klicken Sie mit der Maus in eine der Tabellen, Klar- oder Geheimtext, so werden die Zeichen der ausgewählten Zeile in die Fleißnersche Schablone und ihre gedrehten Darstellungen auf der linken Seite eingetragen.

13.8 Pollux-Kodierung

Die Pollux-Kodierung basiert auf dem Morse-Kode.
In der ersten Verschlüsselungsrunde wird der Klartext mittels Morse-Alphabet (obere Tabelle) in eine Folge von Punkten, Strichen und Leerzeichen verwandelt.

Anschließend wird jeder Punkt, jeder Strich und jedes Leerzeichen durch eine Ziffer oder einen Buchstaben ersetzt.
Dabei wird zufällig eines der Zeichen aus der unteren Tabelle ausgewählt. Zum Beispiel kann ein Punkt durch die Ziffern 2, 3, 8 oder 9 bzw. durch die Buchstaben A, F, G, M, N, Q, S, W, Y kodiert werden. Im Ergebnis entsteht ein polyalphabetisch verschlüsselter Geheimtext.

a	·-	b	-···	c	-·-·
d	-··	e	·	f	··-·
g	--·	h	····	i	··
j	·---	k	-·-	l	·-··
m	--	n	-·	o	---
p	·--·	q	--·-	r	·-·
s	···	t	-	u	··-
v	···-	w	·--	x	-··-
y	-·--	z	--··	ä	·-·-
ö	---·	ü	··--	0	-----
1	·----	2	··---	3	···--
4	····-	5	·····	6	-····
7	--···	8	---··	9	----·

Zum Beispiel wird aus dem Klartext "Pollux" der Geheimtext

31495777591930819909276493 16

oder

21190447684330979263915438 75.

Wird die Zuordnung der Ziffern und Buchstaben für jede Verschlüsselung verändert, so ergibt sich ein relativ schwer "knackbares" Kodierungsverfahren.
Eine weitere Erhöhung der Sicherheit ergibt sich durch eine zusätzliche Transposition der Zeichen des Geheimtextes.
Hauptnachteil des Verfahrens ist, dass der Geheimtext im Durchschnitt die drei- bis vierfache Länge besitzt.

·	2,3,8,9
-	1,4,7
	0,5,6
·	A,F,G,M,N,Q,S,W,Y
-	B,E,H,K,L,O,P,T,X
	C,D,I,J,R,U,V,Z

Dieses Kodierungsverfahren ist in diesem Teilprogramm umgesetzt.
Über die kleinen Schalter und laden bzw. speichern Sie die entsprechenden Texte. Während der Verschlüsselung bzw. Entschlüsselung wird in der mittleren der Morse-Kode als Zwischenschritt angezeigt.
Ob das Programm Ziffern oder Buchstaben zur Kodierung nutzt, stellen Sie an

den zwei Auswahlfeldern *Zahlenkode* bzw. *Buchstabenkode* ein.

13.9 Jefferson-Walze

Die Jefferson-Walze (engl. wheel cipher) war ein Hilfsmittel zur Verschlüsselung von Nachrichten. Die Walze wurde 1790 von Thomas Jefferson entwickelt.

Das Chiffrenrad war ein 5 cm dicker und 14 cm langer Zylinder aus Holz. Dieser Zylinder bestand aus 36 nummerierten Scheiben, deren Randflächen in 26 Abschnitte für die 26 Buchstaben aufgeteilt sind.
Zur Chiffrierung wurde eine spezielle Reihenfolge der Scheiben eingestellt. Der Text wurde in einer Zeile eingestellt. Die kodierte Nachricht wurde dann aus einer der anderen 25 Zeilen abgelesen. Der Empfänger wählte die gleiche Scheibenreihenfolge und in einer Zeile die kodierte Nachricht. Unter den anderen 25 Zeilen befindet sich dann auch die Klarbotschaft.

Die Jefferson-Walze wurde zu seiner Lebenszeit nicht genutzt. Erst im 2.Weltkrieg verwendete die US-Armee eine auf 25 Scheiben reduzierte Variante. Diese Variante wird in diesem Teilprogramm demonstriert.

Das Programm zeigt die 25 Scheiben, die mit den Buchstaben B bis Z bezeichnet werden. Mit dem Schalter *Scheiben vertauschen* wird eine zufällige Reihenfolge der Scheiben erzeugt. Tragen Sie selbst eine Reihenfolge der Scheiben ein, so müssen Sie beachten, dass nur die Großbuchstaben B bis Z möglich sind und es auch genau 25 Buchstaben sein müssen. Ihre Eingabe bestätigen Sie mit *Übernehmen*.

Unter *Originalnachricht* tragen Sie eine maximal 25 Zeichen lange Nachricht ein. Klicken Sie *Nachricht kodieren*, so werden die Scheiben so gedreht, dass in der mittleren Zeile die Originalnachricht zu sehen ist. Natürlich können Sie auch durch Mausklick in den oberen bzw. unteren Bereich einer Scheibe diese drehen.
Die Simulationsgeschwindigkeit können Sie verändern. Höhere Werte können auf langsameren Computern allerdings auch zu einer deutlich längeren Simulationszeit führen.

Je nach Eingabe des *Verschiebungskodes* (von 1 und 25) wird die kodierte Nachricht aus, dem Wert entsprechend, einer nachfolgenden Zeile der Jefferson-Walze entnommen.
Zur Dekodierung wird die *Geheimnachricht* eingestellt und das Original in der Zeile abgelesen, die dem Verschiebungskode in entgegen gesetzter Richtung entspricht.

13.10 Enigma

Die Enigma ist eine Rotor-Schlüsselmaschine, die im zweiten Weltkrieg im

Nachrichtenverkehr des faschistischen deutschen Militärs verwendet wurde. Das Wort "Enigma" (αἰνιγμα) kommt aus dem Griechischen und bedeutet Rätsel.

Die Maschine besteht aus der Tastatur, einem Walzensatz von drei austauschbaren Walzen – Rotoren mit einem Durchmesser von etwa 100 mm –, einem Steckerbrett und einem Lampenfeld zur Anzeige.
Die drei Walzen sind drehbar angeordnet und zeigen 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets. Drückt man eine Buchstabentaste, so fließt elektrischer Strom über die gedrückte Taste durch den Walzensatz und das Steckerbrett und lässt eine Anzeigelampe aufleuchten. Der aufleuchtende Buchstabe entspricht der Verschlüsselung des gedrückten Buchstabens. Da sich bei jedem Tastendruck die Walzen ähnlich wie bei einem mechanischen Kilometerzähler weiterdrehen, ändert sich das geheime Schlüsselalphabet nach jedem Buchstaben.
Spätere Versionen enthielten zusätzlich eine Umkehrwalze, mit welcher der kodierte Buchstabe ein zweites Mal durch die Walzen verschlüsselt wurde.
Das zusätzliche Steckerbrett ermöglichte außerdem, vor dem Passieren der Walzen bestimmte Buchstabenkombinationen zu tauschen, wodurch die Anzahl der verschiedenen Kodierungsschlüssel nochmals erhöht wurde.

In diesem Teilprogramm wird das Prinzip der Enigma demonstriert.
An der *Walzenreihenfolge* stellen Sie ein, in welcher Reihenfolge die drei vordefinierten Rotoren angeordnet sein sollen. Unter *Walzenstellung* drehen Sie die Rotoren in eine mögliche Anfangsstellung, die entscheidend für die Kodierung ist.
Um Buchstaben mit dem *Steckerbrett* zu vertauschen, klicken Sie zuerst auf eines des Markierungsfelder und stellen dann an den aufklappbaren Listen ein, welche zwei Buchstaben gegeneinander getauscht werden.
Die damit eingestellte *Maschineneinstellung* können Sie im linken Fensterteil speichern bzw. zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden.

Beachten Sie bitte: Haben Sie einen Text mit einer bestimmten Maschineneinstellung verschlüsselt, diese Maschineneinstellung aber vergessen, so werden Sie sie mit hoher Wahrscheinlichkeit durch Ausprobieren nicht wiederfinden. Die in diesem Programmteil vorhandene Enigma-Maschine ermöglicht 10 Billiarden (10 705 702 343 606 400) verschiedene Einstellungen!

Den Originaltext geben Sie entweder über die Tastatur ein oder Sie laden eine Textdatei. Mit einem Klick auf *Chiffrieren* wird die Maschine aktiviert. Den kodierten Text können Sie wieder als Textdatei speichern.

Zum Entschlüsseln verwenden Sie die gleiche Maschineneinstellung und laden den kodierten Text unter *Ausgangstext* erneut ein. Mit dem Schalter *Chiffrieren*

erhalten Sie anschließend wieder das Original.

Die Enigma-Verschlüsselung galt lange als nicht "knackbar". Durch die Arbeit des polnischen Mathematikers Marian Rejewski, einer Vielzahl französischer und englischer Mathematiker und insbesondere durch Alan Turing gelang es ab 1940, die verschlüsselten Nachrichten des faschistischen Militärs zu entziffern. Von verschiedenen Historikern wird diese Leistung als wichtige Grundlage für den Sieg über Hitler-Deutschland und die Befreiung vom Faschismus angesehen.

Auch im 21. Jahrhundert sind Nachrichten, die mit einer Enigma verschlüsselt werden, noch nicht ohne Weiteres lesbar. Das Knacken des Codes erfordert auch heute noch intensiven Einsatz des menschlichen Geistes und hochentwickelter Technik.

13.11 Steganografie

Die Steganografie ist eine besonders interessante und verblüffende Methode, um Texte zu verschlüsseln. Hierbei wird als Vorlage ein Foto genutzt, dessen Bildinformation mit dem zu kodierenden Text verändert wird. Die Veränderung ist dabei so gering, dass es dem menschlichen Auge schwer fällt, die Unterschiede zum Ausgangsbild zu erkennen.
Zur Dekodierung werden Originalbild und verändertes Bild wieder verglichen.

Das Besondere an diesem Verfahren ist, dass es theoretisch möglich, aber praktisch doch unmöglich ist, den verschlüsselten Text ohne das Ausgangsbild zu erkennen.
In diesem Teilprogramm können Sie Texte mit diesem Verfahren auf beliebige Abbildungen übertragen und gegebenenfalls wieder dekodieren.

Über die Schalter laden Sie zum einen das Originalfoto und zum anderen den Originaltext. Dabei können nur Fotos im Bitmap-Format genutzt werden. Das speichergünstigere JPEG-Format ist hier natürlich ungeeignet, da es bei der Kompression Bildinformationen leicht verändert. Bei der Steganografie ist aber jedes einzelne Bit von Bedeutung. Die Originaltexte dürfen weiterhin maximal 50000 Byte groß sein.

Klicken Sie nun auf den Schalter *Kodieren*, wird die Information übertragen und am Ende das verschlüsselte Foto gezeigt. Im Normalfall werden Sie keinen Unterschied zum Original feststellen.
Das kodierte Foto können Sie mithilfe des Schalters auf der Festplatte speichern.

Zum Entschlüsseln einer Nachricht benötigen Sie beide Bilder, das Original und das Codebild. Beide laden Sie wieder über die entsprechenden Schalter. Nach einem Klick auf *Dekodieren* erfolgt die Rückumwandlung.

Beachten Sie bitte, dass das Kodieren und Dekodieren eine gewisse Zeit beansprucht, und das umso mehr, je größer das Foto ist. Beide Vorgänge können Sie jederzeit abbrechen. Weiterhin können Sie in einer Abbildung von 400 x 300 Pixel Größe rund 15000 Byte "verstecken". Wollen Sie längere Texte verschlüsseln, so benötigen Sie auch eine größere Abbildung.

Durch einen Klick auf den Schalter **B** trägt das Programm als Beispiel ein Originalbild und das kodierte Foto ein. Beim Entschlüsseln werden Sie einen Teil der Lausbubengeschichten von Max und Moritz erhalten.

13.12 Playfair-Kodierung

Die Playfair-Verschlüsselung ist ein klassisches Verschlüsselungsverfahren, bei dem jedes Buchstabenpaar des Klartextes durch ein anderes Buchstabenpaar ersetzt wird.
Sie wurde 1854 von Sir Charles Wheatstone erfunden. Sein Bekannter, Lord Lyon Playfair, unter dessen Namen sie berühmt wurde, empfahl diese Methode zur Benutzung beim britischen Militär. Sie wurde erstmals im Krimkrieg eingesetzt und war bis zum Ersten Weltkrieg, in modifizierter Form sogar noch während des Zweiten Weltkriegs in Gebrauch.

Zum Zeitpunkt ihrer Erfindung war die Playfair-Verschlüsselung ein sehr sicheres Verfahren. Dies änderte sich jedoch im frühen 20. Jahrhundert: Ab 1915 wurde das Verfahren geknackt.

Aus einem Schlüsselwort oder -satz wird ein permutiertes Alphabet mit 36 Zeichen (26 Buchstaben, 10 Ziffern) gewonnen. Im Originalverfahren wurden nur 25 Buchstaben verwendet.
Die 36 Zeichen werden in 6er-Reihen aufgeschrieben. Dabei wird das Schlüsselwort zeilenweise in eine 6×6-Matrix eingetragen, wobei bereits eingetragene Buchstaben übersprungen werden. Danach werden die zum kompletten Zeichensatz fehlenden Zeichen in alphabetischer Reihenfolge ergänzt. So erhält man eine quadratische Anordnung von 36 Zeichen, genannt das Playfair-Quadrat.

Ver- und Entschlüsselung

Die Originalnachricht wird in Zweiergruppen von Buchstaben aufgespalten. Stehen beide Buchstaben in der gleichen Spalte oder in der gleichen Zeile, werden jeweils die unteren bzw. rechten Nachbarbuchstaben als Geheimbuchstaben genommen. Sollten die Buchstaben am Rand des Playfair-Quadrats stehen, wird einfach am anderen Rand fortgesetzt. Das Quadrat ist somit links und rechts sowie oben und unten als verbunden anzunehmen, also ein Torus.

Stehen die beiden Buchstaben des Klartext-Bigramms hingegen in unterschiedlichen Zeilen und Spalten, so ersetzt man den ersten Klarbuchstaben

durch den in derselben Zeile, aber in der Spalte des zweiten liegenden. Der zweite Klarbuchstabe wird durch den in derselben Zeile, aber in der Spalte des ersten Klarbuchstabens ersetzt. Das Klartextpaar bildet also die diagonal gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks. Das Geheimtextpaar wird aus den übrigen beiden Ecken dieses Rechtecks erzeugt.

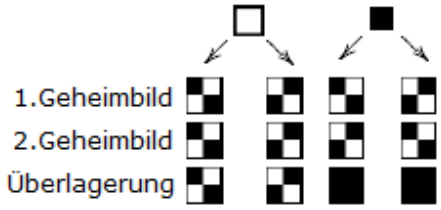
Zur Entschlüsselung wird das Verfahren einfach umgekehrt genutzt.

In diesem Teilprogramm können Sie das Verfahren testen. Unter *Kodewort* tragen Sie die Zeichenkette zur Konstruktion des Playfair-Quadrats ein.
Über die Schalter laden und speichern Sie die Originaltextdateien bzw. die kodierten Zeichenfolgen.

Beachten Sie, dass hier nur die 26 Großbuchstaben und die 10 Ziffern verschlüsselt werden.

13.13 Visuelle Kryptografie

Das hier verwendete kryptografische Verfahren wurde erstmals 1994 von Adi Shamir und Moni Naor beschrieben.



Die zu verschlüsselnde Nachricht liegt in Form eines Schwarzweißbildes vor. Für jedes Pixel der Nachricht werden je vier Pixel in zwei Teilbildern erzeugt, gemäß dem Schema in der Abbildung.
Es entstehen zwei Bilder, deren vertikale und horizontale Auflösung doppelt so hoch ist wie die der Nachricht und deren Inhalt aus zufällig gesetzten schwarzen und weißen Pixeln besteht.

Die Entzifferung erfolgt durch Überlagerung der Teilbilder. Praktisch geschieht dies, indem man das eine Teilbild auf eine transparente Folie und das andere auf ein Blatt Papier druckt. Ein schwarzes Pixel der Nachricht wird in der Überlagerung durch vier schwarze Pixel repräsentiert. Ein weißes Pixel hingegen durch zwei weiße und zwei schwarze. Der Kontrast der rekonstruierten Nachricht verringert sich um 50% im Vergleich zum Original. Dennoch ist der Inhalt erkennbar.
Da die Entschlüsselung allein durch visuelle Wahrnehmung geschieht, spricht man von visueller Kryptografie.

Das Verfahren ist nicht knackbar. Für jedes Pixel der Nachricht wird zufällig eine von zwei Kodierungen gewählt, sodass sich der Inhalt der Teilbilder nicht von einem zufälligen Rauschen unterscheidet. Ein Teilbild allein lässt keinen Rückschluss auf die ursprüngliche Nachricht zu. Auch dann nicht, wenn Vermutungen über den Inhalt der Nachricht oder große Rechenkapazitäten vorhanden sind. Damit bietet das Verfahren die kryptografische Sicherheit eines One-Time-Pads.

In diesem Teilprogramm wird das Verfahren demonstriert.
Geben Sie unter *Text* die zu verschlüsselnde Nachricht ein, ermittelt das Programm das Original-Bitmap und die zwei Geheimbilder.
Klicken Sie auf das zweite Geheimbild und verschieben Sie es nach oben, kann die Nachricht gelesen werden, sobald beide Bilder absolut deckungsgleich sind.

13.14 RSA-Verfahren

Das vielleicht berühmteste und am weitesten verbreitete Verfahren ist das nach seinen Erfindern Ron Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman benannte RSA-Verfahren.

Dieses Verfahren besticht dadurch, dass es ein "Public Key"-Verfahren ist, d.h., der Schlüssel zum Kodieren einer Nachricht kann öffentlich gemacht werden und trotzdem gelingt es nicht, die Nachricht zu dekodieren, da der Entschlüsselungscode vom Verschlüsselungscode verschieden (asymmetrisches Verfahren) und in vertretbarer Zeit auch mit größtem rechentechnischen Aufwand ein "Knacken" nicht möglich ist.

Dieses Teilprogramm simuliert für kleinere Zahlen die Wirkungsweise dieses Verfahrens. Geben Sie zuerst zwei Primzahlen p und q ein. In der Praxis werden mehr als 50-stellige Zahlen gesucht, von denen p - 1, p + 1, q - 1 und q + 1 keine kleinen Teiler enthalten. Außerdem dürfen |p - q| nicht klein sein und p * q sollten mehr als 129 Dezimalstellen besitzen.

Für das Programm sind zur Demonstration p und q auf Primzahlen mit maximal fünf Stellen beschränkt. Soll das Programm selbst Primzahlen wählen, so nutzen Sie den Schalter *Primzahlen p,q.* Ist das Feld *kleine Primzahlen* markiert, beschränkt sich das Programm auf höchstens 3-stellige Zahlen.

Daraus wird mittels *Berechnung n,e* der öffentliche Schlüssel n = p * q berechnet und eine weitere Zahl e gesucht, die mit n0 = (p-1) * (q-1) teilerfremd ist. Die Zahl e wird automatisch ermittelt und ebenso wie n bekannt gemacht.

Möchte Ihnen jemand eine Nachricht senden, so wandelt er diese in Zahlen m um und berechnet $v = m^e \bmod n$. Das Ergebnis, eine Folge von Zahlen, wird abgeschickt.
Ihren geheimen Parameter d finden Sie wie folgt: Es existiert nur eine einzige Zahl d < (p-1) * (q-1) mit (e * d) mod (p-1) * (q-1) = 1. Diese ermittelt das Teilprogramm mit dem Schalter *Berechnung d* für die Beispielzahlen. Zur Dekodierung rechnen Sie nun m = v^d mod n und erhalten das Original m.

Beachten Sie bitte, dass gerade in der Bestimmung von d die Stärke des RSA-Verfahrens liegt. Ohne Kenntnis von p und q ist es praktisch nicht möglich, d zu ermitteln. Zwar gelang es nach mehrmonatigem Einsatz von Supercomputern, einen öffentlichen, 129-ziffrigen Schlüssel zu "knacken", allerdings können p und

q jederzeit größer gewählt werden, sodass das Verfahren wieder praktisch sicher ist.

Mit dem Schalter *Verschlüsseln mit e* wird der Originaltext transformiert. Haben Sie das Feld *ASCII-Zeichen* markiert, so wird jedes Zeichen einzeln kodiert; im anderen Fall immer zwei Zeichen als Block.
Ist das Produkt der beiden Primzahlen kleiner als 256^2, so ist nur die Umwandlung einzelner Zeichen und nicht als Block möglich.
Zu beachten ist natürlich, dass bei Dekodieren die gleiche Variante gewählt wird.

Dieses Teilprogramm ist als Demonstration gedacht, d.h., es besteht nicht die Absicht, größere Datenmengen zu ver- und entschlüsseln. Aus diesem Grund können Sie über den Schalter zwar eine Textdatei laden, jedoch nimmt das Programm nur maximal 100 Textzeilen auf!
Über die weiteren Schalter und können Sie kodierte Texte laden und speichern. Dabei werden außer dem Code auch die öffentlichen und geheimen Parameter abgespeichert.

Wichtiger rechtlicher Hinweis!

Gute Verschlüsselungsalgorithmen wie RSA oder IDEA unterliegen in einigen Ländern rechtlichen und patentrechtlichen Einschränkungen.

In den USA und einigen anderen Ländern ist es möglich, Algorithmen patentieren zu lassen. Der RSA-Algorithmus war in den USA von der Firma RSA Data Security patentiert. RSA Data Security forderte alle Benutzer des RSA-Algorithmus auf, eine Lizenz von RSAGEN, der eigenen Implementierung des RSA-Algorithmus, zu erwerben. Das Patent lief jedoch im Jahr 2000 aus und dürfte deshalb keine Auswirkungen mehr haben.

Da Algorithmen in Deutschland und den meisten europäischen Ländern nicht patentiert werden können, ist die Verwendung von RSA innerhalb Deutschlands und anderer europäischen Länder legal. Es bestehen keine Import- oder Exportbeschränkungen.
In Frankreich sowie in einigen asiatischen und fernöstlichen Ländern ist die Verwendung und teilweise schon der Besitz (!) von Verschlüsselungsprogrammen gesetzlich verboten.
Die hier gemachten Aussagen sind als Hinweis zu verstehen und haben keine rechtliche Bindung, zumal sich die Gesetzeslage in ständigem Fluss befindet.

Sollten Sie eine rechtlich bindende Aussage über die Legalität der Verwendung von Verschlüsselungsverfahren benötigen, so wenden Sie sich bitte an einen Rechtsanwalt.

13.15 Diffie-Hellman-Schlüsseltausch und Data Encryption Standard

Eines der Sicherheitsrisiken der symmetrischen Verschlüsselungsverfahren wie dem Data Encryption Standard ist der Austausch der geheimen Schlüssel (Codes). Das bekannteste Verfahren, wie sich Sender und Empfänger über elektronische Medien darauf einigen können, welchen geheimen Schlüssel sie verwenden wollen, ohne dass ein Unbefugter aus ihren Nachrichten den Schlüssel herauslesen kann, wurde 1976 von Diffie und Hellman entwickelt und als "exponentieller Schlüsselaustausch" bezeichnet.

Vor dem Schlüsselaustausch einigen sich beide Teilnehmer A und B auf eine möglichst große Primzahl p und eine weitere ganze positive Zahl s, die kleiner als p sein sollte. Dann wählt A ein geheime Zahl a, die ebenfalls kleiner ist als p. B wählt ebenso geheim eine analoge Zahl b.

A berechnet $\alpha = s^a \bmod p$ und B $\beta = s^b \bmod p$. Jeder sendet sein Ergebnis an den anderen, sodass A den Wert von β und B den von α kennt. A berechnet nun $k = b^\beta \bmod p$ und B $k = a^\alpha \bmod p$. Beide Ergebnisse sind identisch. Diesen gefundenen Wert k verwenden nun beide als geheimen Schlüssel für ein symmetrisches Verfahren wie eben Data Encryption Standard.

Die verblüffende Sicherheit dieses Verfahrens beruht auf der Tatsache, dass es äußerst schwer ist, aus der öffentlichen Zahl a, selbst bei Kenntnis von p und s, auf das geheime a zu schließen, entsprechend auch für b. Die Ermittlung von a und b, das sogenannte "Diskrete Logarithmusproblem" ist heute mit vertretbarer Rechenzeit auch auf schnellen Computern nicht zu bewerkstelligen, wenn die verwendeten Zahlen mehrere Hundert Dezimalstellen besitzen.

Dieses Teilprogramm ermöglicht es Ihnen, einen derartigen Schlüsseltausch zu berechnen. Wählen Sie zuerst eine möglichst große Primzahl (maximal 35 Stellen) und die Hilfszahl s. Nach der Eingabe mindestens einer geheimen Zahl a oder b und Betätigung des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm den Wert von k und bereitet diesen als 64-bit-Codezahl auf.

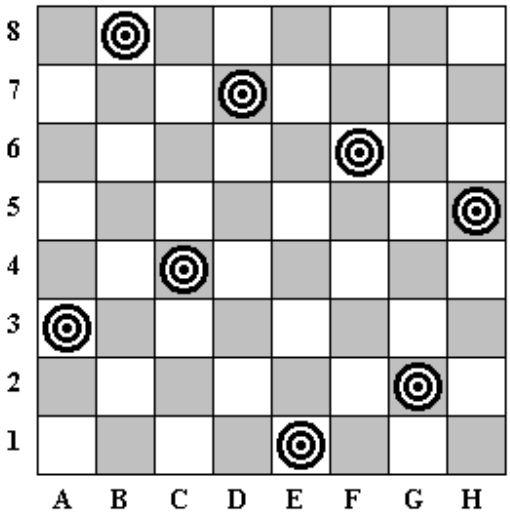
Da es nicht einfach ist, schnell eine möglichst große Primzahl zu bestimmen, finden Sie im unteren Fensterteil eine Primzahlliste. Klicken Sie in eine Eingabezeile und anschließend auf einen Eintrag der Liste, übernimmt das Programm die gewählte Primzahl.

Data Encryption Standard

Im zweiten Teil dieses Teilprogramms wird die ermittelte Codezahl zur Verschlüsselung eines Textes mittels Data Encryption Standard verwendet. Über die kleinen Schalter laden bzw. speichern Sie eine Textdatei. Der Schalter *Text kodieren* transformiert diesen mittels DES und trägt den Codetext im hexadezimalen Format in die untere Liste ein. Den verschlüsselten Text können Sie erneut speichern bzw. laden.

Beachten Sie bitte: Haben Sie einen Text kodiert und wollen ihn wieder dekodieren, so benötigen Sie die Codezahl. Haben Sie diese vergessen, so wird eine Dekodierung praktisch unmöglich, da DES auch heute (2009) noch nur von Supercomputern geknackt werden kann.

13.16 Acht-Damen-Problem



Das Acht-Damen-Problem wurde 1845 von M. Bezzel erstmalig in einer Schachzeitung veröffentlicht. Fünf Jahre später gab Dr. Nauk, ein blinder Schachspieler, alle 92 möglichen Lösungen an.

Die Aufgabe beim Acht-Damen-Problem ist es, alle möglichen Positionen von acht Damen auf dem Schachbrett zu ermitteln, sodass diese sich nicht gegenseitig bedrohen. Da es aber insgesamt 8^8 = 16777216 Gesamtmöglichkeiten für das Aufstellen von acht Damen auf einem Schachbrett gibt, sodass in jeder Zeile genau eine Dame steht, ist dieses Problem gegenwärtig nur mit einem nichtpolynomialen Algorithmus lösbar.

Prinzipiell ist es nicht notwendig, ein Schachbrett mit 8 x 8 Feldern zu betrachten. Daher können Sie im Programm die Größe des Spielfeldes von 4 x 4 bis 16 x 16 Felder an dem Rollbalken einstellen. Nach Auswahl des Schalters *Simulation* werden alle möglichen Kombinationen ermittelt und deren Suche grafisch veranschaulicht. So ergeben sich z.B.:

Feldgröße	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	9 x 9	10 x 10	11 x 11
Möglichkeiten	2	10	4	40	92	352	724	2680

Wählen Sie das Feld *Belegungen*, trägt das Programm alle gefundenen Damenstellungen in die Liste ein. Nach Beendigung der Berechnung können Sie durch Auswahl dieser Einträge die möglichen Positionen auf dem Schachbrett nachvollziehen. Die in der Liste enthaltenen Zeilen beschreiben die jeweilige Spaltennummer einer Dame auf dem Brett. Zum Beispiel bedeutet der erste Eintrag bei einem 10 x 10-Feld : 1368A59247, dass eine Dame in der 1. Zeile/1. Spalte, 2. Zeile/3. Spalte, 3. Zeile/6. Spalte usw. steht. Der Eintrag 10. bis 13. Spalte erfolgt hexadezimal, also mit den Buchstaben A, B, C und D.

Beachten Sie bitte, dass die Liste nur maximal 200000 Einträge aufnehmen kann.

Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie der Lösungen, d.h. es wird z.B. bei dem 8x8-Spielfeld nur solange gesucht, bis erstmals das Feld E8

belegt würde. In der Liste erscheinen alle Lösungen, wenn es nicht mehr als 200000 sind.
Möchten Sie eine laufende Simulation abbrechen, betätigen Sie den Schalter *Abbruch*. Zur Erhöhung der Berechnungsgeschwindigkeit können Sie über das Feld *Animation* die grafische Veranschaulichung ausschalten.

Spielmodus

In Analogie zum Teilprogramm *Springerproblem* können Sie auch in diesem Teilprogramm einen *Spielmodus* testen. Haben Sie diesen aktiviert, werden Sie aufgefordert:

Positionieren Sie mit der linken Maustaste xx Damen auf dem Spielfeld !

Dabei steht für *xx* jeweils die Größe des Spielfeldes, voreingestellt 8. Ihre Aufgabe besteht nun darin, die acht Damen so auf dem Spielfeld unterzubringen, dass sie sich nicht schlagen können. Positionieren Sie eine Dame falsch, markiert das Programm sie mit einem roten Kreuz. Durch erneutes Anklicken entfernen Sie eine gesetzte Spielfigur.

Superdamen-Problem

Eine Dame besitzt im Schachspiel die Zugmöglichkeiten der anderen Figuren, mit Ausnahme des Springers. Betrachtet man eine "Superdame", die auch zusätzlich wie ein Springer ziehen kann, so ergibt sich erneut die Frage, ob man n derartige Superdamen auf einem n x n-Spielfeld positionieren kann, ohne dass sie sich gegenseitig bedrohen.
Es zeigt sich, dass dies erst ab n = 10 möglich ist. Auf dem 10 x 10-Feld existieren 4 dreh- bzw. spiegelsymmetrische Lösungen.
Markieren Sie das Feld *Superdame*, so ermittelt das Programm nur Lösungen für diese Art von Dame.

13.17 Springer-Problem

Ebenso bekannt wie das *Acht-Damen-Problem* ist das *Springerproblem*, das 1759 von Leonhard Euler diskutiert wurde.

Das Springerproblem besteht darin, einen Springer so von einem beliebigen Feld des Schachbretts ziehen zu lassen, dass er auf seinem Weg jedes mögliche Feld des Schachbretts genau einmal berührt.

Da ein Pferd auf jedem Feld des Schachbretts außer den Randfeldern acht Zugmöglichkeiten besitzt, ergeben sich etwa 10^{14} Zugmöglichkeiten. Eine derartige Vielfalt lässt sich in vertretbarer Zeit nur auf einem Computer untersuchen. Neben verschiedenen Backtracking-Verfahren überzeugt eine heuristische Methode durch einen phantastischen Geschwindigkeitsgewinn gegenüber herkömmlichen Methoden. Diese wurde 1991 von einem Jugend-

forscht-Team umgesetzt und ist im Programm enthalten.

Möchten Sie die herkömmliche Methode nutzen, wählen Sie das Feld *Lückensuche.* Die nun zeitlich aufwendige Suche können Sie nachvollziehen und jederzeit mit der *ESC*-Taste oder dem *Stopp*-Schalter abbrechen.

Nach Auswahl der Spielfeldgröße (4 x 4 bis 18 x 15 Felder) und Eingabe des Startfeldes in *X* und *Y* ermittelt das Programm einen möglichen Springerzug. Der Ablauf des Zuges wird dadurch beschrieben, dass die Schachbrettfelder in der Reihenfolge des Betretens durch den Springer nummeriert werden.

Beachten Sie bitte: Findet das Programm keine Lösung, so erhalten Sie eine entsprechende Meldung. Insbesondere tritt dies ein, wenn für das quadratische n x n-Feld n ungerade ist und die Summe der X- und Y-Koordinaten des Startfeldes ebenfalls ungerade ist. In diesem Fall enthält das Schachbrett unterschiedlich viele weiße und schwarze Felder. Da der Springer auf einem der weniger vertretenen Felder starten würde, kann somit kein vollständiger Springerzug existieren.

Die Anzahl aller möglichen Züge zu bestimmen, ist gegenwärtig ein noch nicht gelöstes mathematisches Problem. In diesem Teilprogramm wurde das ursprüngliche Springerproblem von einem quadratischen auf ein rechteckiges Spielfeld erweitert. Die Anzahl der Felder horizontal und vertikal stellen Sie an den beiden Rollbalken ein.

Hinweis: Die Aufgabenstellung, jedes Feld genau einmal mit dem Springer zu besuchen, kann noch verschärft werden, indem man fordert, dass der Springer vom 64. Feld wieder auf das Ausgangsfeld gelangen kann. In diesem Fall spricht man von einem "geschlossenen Springerzug". Einen derartigen Zug zu ermitteln, ist wesentlich komplizierter. In diesem Teilprogramm wird dies z.B. für eine Feldgröße 8 x 8 und ein *Startfeld* X = 4, Y = 8 automatisch durchgeführt.

Noch interessanter ist das Problem des Rösselsprungs. Diese Aufgabe erfordert nicht nur einen vollständigen Springerzug, sondern zusätzlich, dass die Folge der Sprünge ein magisches Quadrat bilden.
Für die 64 Felder des 8 x 8-Schachbretts ergibt sich als Zeilen- und Spaltensumme des gesuchten magischen Quadrats 260. Die oben gezeigte Lösung ist nicht nur eine (der wenigen!) Lösungen der Rösselsprungaufgabe, sondern bildet auch einen geschlossenen Springerzug!

Spielmodus

Eine interessante Möglichkeit, sich selbst zu testen, bietet der *Spielmodus*. Haben Sie diesen aktiviert, werden Sie aufgefordert:

Legen Sie das Anfangsfeld und die Sprünge mit der linken Maustaste fest !

Klicken Sie nun links, trägt das Programm die von Ihnen gewünschten Springerzüge ein und markiert nach jedem Klick die jetzt noch möglichen weiteren Züge. Mit jedem weiteren Mausklick können Sie nun versuchen, einen geschlossenen Springerzug zu finden. Möchten Sie einen Zug zurücknehmen, so klicken Sie auf das Feld mit einer angezeigten Nummer.

Sollte es Ihnen nicht gelingen, alle Felder des Schachbretts genau einmal zu "besuchen", so können Sie sich vom Programm helfen lassen. Markieren Sie das Feld *Heuristik*, zeigt Ihnen das Programm nicht nur die möglichen Züge an, sondern gibt auch an, wie viele Felder im übernächsten Schritt noch zu erreichen sind. Befolgen Sie nun die Strategie, zuerst Felder zu besetzen, von denen die wenigsten weiteren Züge möglich sind, wird es Ihnen schneller gelingen, alle 64 Felder zu erreichen und so den geforderten vollständigen Springerzug zu ermitteln.

13.18 Turm von Hanoi (3 und 4 Stangen), Dreifarben-Türme

1883 erfand der französische Mathematiker Edouard Lucas das bekannte Problem der Türme von Hanoi und machte es in Form eines Spiels allgemein bekannt. Dabei berichtete er von einer Legende:

„In der Stadt Hanoi stehen in einem Brahma-Tempel drei Säulen. Auf einer dieser Säulen liegen 64 Scheiben, die, von oben nach unten gesehen, einen streng monoton wachsenden Durchmesser haben. Die Welt wird in Schutt und Asche fallen, wenn die Mönche die Scheiben der ersten Säule auf eine andere Säule gelegt haben. Dabei darf nie mehr als eine Scheibe gleichzeitig bewegt und niemals eine größere Scheibe auf eine kleinere gelegt werden ..."

Im Programm ist dieses Problem unter diesem Programmpunkt wie folgt umgesetzt:

Der Turm von Hanoi besteht aus drei Säulen, auf die Scheiben unterschiedlicher Radien gesteckt werden können. Ziel ist es, den Turm von links nach rechts zu transportieren, wobei entsprechend der Legende folgende zwei Regeln zu beachten sind:

- bei jedem Zug darf nur eine Scheibe bewegt werden.
- eine Scheibe darf nur auf eine andere Scheibe gelegt werden, wenn diese einen größeren Radius hat

An den Rollbalken und Schaltfeldern können Sie folgende Einstellungen vornehmen:

- die Scheibenzahl von 3 bis 36 Scheiben
- eine Verzögerungszeit der Darstellung von 0 bis 20

Eine Scheibe bewegen Sie, in dem Sie zuerst auf den Ausgangsstab mit der Maus

klicken und anschließend auf den Zielstab. Jeder Zug wird gezählt und angezeigt. Wenn Sie optimale Lösung finden, so haben Sie am Ende genau so viele Züge benötigt, wie unter *Gesamtzüge* angezeigt.

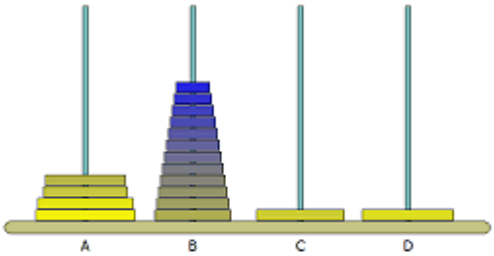
Betätigen Sie nun den *Simulation*-Schalter, beginnt das Programm mit der Bewegung der Scheiben. Diese Simulation kann jederzeit mit der *ESC*-Taste abgebrochen werden.
Während die Scheibenzahl die notwendigen Scheibenbewegungen festlegt, bewirkt die *Verzögerung* eine langsamere oder schnellere Animation. Je höher dieser Wert ist, desto langsamer wird das Programm die Scheiben bewegen.
Wählen Sie das Feld *Umlegen animieren* aus, so wird das Umlegen jeder Scheibe langsam vorgeführt.

Markieren Sie das Feld *Zugliste anzeigen*, so trägt das Programm die Zugfolge in eine Liste ein.

Übrigens: Da die Anzahl der notwendigen Bewegungen bei n Scheiben $2^n - 1$ beträgt, müssen die Mönche in Hanoi 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen und 551615 mal eine Scheibe transportieren. Benötigen sie für jede Bewegung genau 1 Sekunde, schlafen nicht, essen nicht usw., so sind alle Scheiben nach etwa 585 Milliarden Jahren umgelegt. Da das gesamte Weltall erst 15 Milliarden Jahre existiert und unsere Sonne in etwa 5 Milliarden Jahre erlischt, brauchen wir uns über den Weltuntergang durch die Türme von Hanoi wahrlich keine Gedanken zu machen.

Auf einem 2,6 GHz-Testrechner wurden ohne(!) grafische Darstellung 6 Millionen Umlagerungen je Sekunde berechnet. Für die 64 Scheiben benötigt dieser Computer also rund 100000 Jahre. Auch dieser Zeitabschnitt ist unvorstellbar groß.
Mit einer *Animation* der Scheiben (ohne Verzögerung) wurden für 20 Scheiben 35 s benötigt. Für 36 Scheiben wären dies rund 2,3 Millionen Sekunden, d.h. über 26 Tage! Wahrscheinlich wird kein Nutzer dieses Programmteils die maximal 36 Scheiben wirklich umlegen lassen. Die reine Berechnung der Verschiebungen benötigt für 36 Scheiben schon über 4 Stunden!

Vierstangen-Turm von Hanoi



Ein interessante Variante des Turms von Hanoi ist die analoge Problemstellung mit vier statt drei Stangen. Steht die vierte Stange zur Verfügung, so verringert dies die Anzahl der notwendigen Züge für höhere Scheibenzahlen erheblich.
Heute (2012) ist noch keine vollständige Lösung für die kürzeste notwendige Zugzahl gefunden.
Allgemein werden aber folgende Zugzahlen als die kleinsten für n = 1, 2, 3, ...

Scheiben angesehen:
1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 161, 193, 225, 257, 289, ...

Zur Lösung wird der empirische Frame-Stewart-Algorithmus verwendet, dessen optimale Strategie bis 30 Scheiben nachgewiesen wurde.
Gegeben sind n Scheiben:
1) für eine Anzahl k, werden die obersten k Scheiben auf einen zweiten Stab transportiert unter Ausnutzung aller 4 Stäbe
2) die verbliebenen n-k Scheiben werden von der 1.Stange zur 4. bewegt ohne Berücksichtigung der belegten 2.Stange.
3) die k Scheiben der 2.Stange werden unter Nutzung aller 4 Stangen zur 4. verschoben.

Die Schwierigkeit besteht darin, dass das k so gewählt werden muss, dass die Schrittzahl möglichst gering ist. Dabei ist der Parameter k für alle n Scheiben im Allgemeinen ein anderer Wert als der Wert für k, der im ersten und dritten Schritt genau k Scheiben verschiebt.

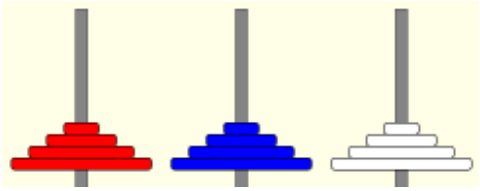
Wählen Sie links oben 4 Stangen aus, so können Sie diese Variante untersuchen. Auch hier können Sie mit Mausklick Scheiben verschieben und so selbst nach einer optimalen Zugfolge suchen.

Hinweis: Dieses Programm enthält den heute bekannten, optimalen Algorithmus und ermittelt so eine optimale Abfolge der Scheibenbewegungen!
Die kürzeste Zugfolge für maximal 72 Scheiben wird im Lexikon des Programms auf der Seite *Vierstangen-Turm von Hanoi (2)* berechnet.

Dreifarben-Turm von Hanoi

Eine weitere, interessante Variante des ursprünglichen Spiels ist der mehrfarbige Turm von Hanoi.

In diesem Fall befinden sich auf allen 3 Stangen die gleichen Scheiben, jedoch unterschiedlich gefärbt. Ziel ist es, die farbigen Türme um eine Position weiterzuverschieben oder die Lage von zwei Türmen auszutauschen. Dabei dürfen wieder nur Scheiben auf größere oder gleich große gelegt werden.
Überraschend ist auch dieses Problem lösbar.



Für n = 3, 4, 5, ... Scheiben auf jeder Stange benötigt man im optimalen Fall eine Zugzahl von 80, 192, 424, 896, 1848, 3760, 7592, 15264, 30616, 61328, ...
Der Tauschalgorithmus ist anspruchsvoll und besteht aus mehreren rekursiven Aufrufen des Tauschverfahrens des ursprünglichen Spiels.

Dieses Teilprogramm demonstriert einen Dreifarben-Turm von Hanoi.

An den Rollbalken und Schaltfeldern können Sie folgende Einstellungen vornehmen:

- die Scheibenzahl je Stange von 3 bis 12 Scheiben
- eine Verzögerungszeit der Darstellung von 0 bis 20

Eine Scheibe bewegen Sie, in dem Sie zuerst auf den Ausgangsstab mit der Maus klicken und anschließend auf den Zielstab. Jeder Zug wird gezählt und angezeigt. Wenn Sie optimale Lösung finden, so haben Sie am Ende genau so viele Züge benötigt, wie unter *Gesamtzüge* angezeigt.

Betätigen Sie nun den *Simulation*-Schalter, beginnt das Programm mit der Bewegung der Scheiben. Diese Simulation kann jederzeit mit der *ESC*-Taste abgebrochen werden.
Während die Scheibenzahl die notwendigen Scheibenbewegungen festlegt, bewirkt die Verzögerung eine langsamere oder schnellere Animation. Je höher dieser Wert ist, desto langsamer wird das Programm die Scheiben bewegen.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnungszeit der Züge ab 9 Scheiben hoch ist und mit höherer Scheibenzahl schnell stark ansteigt.

13.19 Standardalgorithmen

Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, einfache, standardisierte Algorithmen der Mathematik Schritt für Schritt nachzuvollziehen. Zu diesen unkomplizierten, u.a. für das Erstellen kleiner Computerprogramme wichtigen Algorithmen gehören:

- Die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers nach Euklid
- Die Bauernmultiplikation zweier natürlicher Zahlen
- Die Berechnung der Fibonacci-Zahlenfolge
- Das schnelle Berechnen einer Potenz
- Die Transformation einer Dezimalzahl in ein anderes Zahlsystem

Wählen Sie zuerst in der Liste den gewünschten Algorithmus. Danach geben Sie die Grundgrößen, z.B. die zwei natürlichen Zahlen bei der ggT-Bestimmung oder die Nummer der gesuchten Fibonacci-Zahl, ein. Betätigen Sie nun wiederholt den Schalter *Nächster Schritt*, durchläuft das Programm schrittweise den Algorithmus. In der linken Hälfte des Fensters sehen Sie den ausgeführten Einzelschritt, in der rechten Hälfte die Zwischenergebnisse.

ggT-Bestimmung nach Euklid

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen eignet sich besonders gut das von Euklid entwickelte Verfahren. Dieser Algorithmus findet

sich im Kapitel 7 der "Elemente", Satz 1-2. Ausgehend von der Tatsache, dass für zwei natürliche Zahlen m und n stets eine Darstellung der Form $a = b\ q_1 + r_1$ existiert, kann durch wiederholtes Zerlegen der Zahlen und Austausch der Zwischenergebnisse der größte gemeinsame Teiler von a und b ermittelt werden. Dabei wird:

$a = b\ q_1 + r_1$, wobei dann r(n) der gesuchte größte gemeinsame Teiler ist.

Der Listeneintrag *Euklid-Verfahren* berechnet mit diesem Verfahren den größten gemeinsamen Teiler. Dabei können Sie schrittweise die Zwischenergebnisse verfolgen. Im linken Teil des Fensters finden Sie den Programmablaufplan, der in eine Computersprache umgesetzt werden könnte. Geben Sie zuerst unter *X* = und *Y* = die zwei zu untersuchenden Zahlen ein. Für eine optimale Darstellung sollten Sie maximal fünfstellige Zahlen benutzen. Betätigen Sie nun den Schalter *Nächster Schritt* bzw. die *RETURN*-Taste, absolviert das Programm jeweils einen Schritt des Algorithmus, zeigt diesen links an und rechts die aktuellen Werte für die Variablen X, Y und R.

Bauernmultiplikation

Das Verfahren einer Multiplikation, ausschließlich durch Verdoppelungen und Halbierungen durchzuführen, war schon im alten Ägypten bekannt. Da es vor kurzer Zeit auch noch bei alltäglichen Rechnungen in Russland benutzt wurde, wird es russische Bauernmultiplikation genannt.

Fibonacci-Zahlen

Der hier genutzte Algorithmus zur Berechnung der Fibonacci-Zahlenfolge basiert auf deren impliziten Definition $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Weitere Erläuterungen hierzu finden Sie im Lexikon des Programms.

Schnelles Potenzieren

Ein besonders schnelles Verfahren zur Berechnung der Potenz einer natürlichen Zahl basiert auf einfacher Multiplikation und Division ohne Rest. Damit ist dieser Algorithmus gerade für Computerprogramme sehr effektiv, da schnell und einfach umzusetzen.

Zahltransformation

Erstaunlich häufig ist es notwendig, eine Dezimalzahl z in ein anderes Positionssystem der Basis b zu transformieren. Dazu wird im Allgemeinen in der Schule gelehrt, dass man eine Liste der Potenzen von b erstellt, um nun beginnend mit der größten Potenz von b, die noch kleiner ist als z, durch wiederholte Subtraktion eine Summe von Potenzen zu ermitteln, die gerade gleich z ist. Zum Beispiel würde die Zahl z = 430 wie folgt in das Dreiersystem transformiert: Dreierpotenzen 1 3 9 27 81 243 729

Subtraktion	Potenz	Exponent	Ziffer
430 – 243 = 187	$243 = 3^5$	5	1
187 – 81 = 106 ; 106 – 81 = 25	$81 = 3^4$	4	2
27 ist größer als 25	$27 = 3^3$	3	0
25 – 9 = 16 ; 16 – 9 = 7	$9 = 3^2$	2	2
7 – 3 = 4 ; 4 – 3 = 1	$3 = 3^1$	1	2
1 – 1 = 0	$1 = 3^0$	0	1

Als Ziffernfolge im Dreiersystem ergibt sich damit 120221. So schön wie dieser Algorithmus aussieht, so unpraktisch, langsam und aufwendig ist er. Gerade die Berechnung der Potenzen der Basis ist mühevoll. Viel eleganter ist der hier benutzte, auf dem Euklidischen Verfahren basierende Algorithmus. Da hier ausschließlich dividiert wird, erhält man sehr schnell das Gewünschte. Einziger Nachteil: Man erhält die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge.

13.20 NP-Probleme: Teilsummen-, Rucksack- und Heiratsproblem

In diesem Teilprogramm können Sie drei NP-Probleme untersuchen,

1. das Teilsummenproblem
2. das Rucksackproblem
3. das Heiratsproblem

Wählen Sie zuerst oben aus, welches der Probleme untersucht werden soll.

Teilsummenproblem

Das Teilsummenproblem ist dem sogenannten Rucksackproblem sehr verwandt. Hier wird versucht, aus einer Grundmenge von Zahlen jede Summenmöglichkeit zu ermitteln, die genau einem vorgegebenen Wert entspricht. Damit liegt die umgekehrte Aufgabenstellung der Partition oder Zerfällung einer Zahl vor.

Diese Aufgabenstellung gehört zu den NP-schweren Problemen. Die Suche nach allen Lösungen erfordert daher auch auf schnellen Rechnern eine gewisse Zeit.

Nach der Eingabe der *Summanden* und des *Maximalwerts* sucht das Programm nach allen möglichen Summen. Zusätzlich wird Ihnen die Anzahl der Teilsummen angezeigt.

Haben Sie mehr als 20 und vor allem relativ kleine Summanden eingegeben, kann die Berechnung sehr lange dauern. Mit einem erneuten Klick auf den Schalter bzw. durch Betätigung der *ESC*-Taste können Sie die Suche abbrechen.

Beispiel:
Bei Eingabe der Summanden 7, 14, 18, 23, 22, 26, 28, 31, 35, 39, 42, 55 und 79 und des Maximalwertes 100 findet das Programm 14 verschiedene Teilsummen,

beginnend bei 7 + 14 + 18 + 22 + 39.

Hinweis: Das Programm ermittelt nur Teilsummen, wenn der kleinste Summand kleiner als der Maximalwert ist und die Summe aller Summanden mindestens dem Maximalwert entspricht. Außerdem werden in der Liste maximal 100000 Summen angezeigt.

Rucksackproblem

Dieses Problem stellt ein Optimierungsaufgabe dar.
Hierbei geht es darum, aus einer Gesamtmenge von Gegenständen, die unterschiedliche Massen, aber auch unterschiedliche Werte haben, diejenigen so auszuwählen und in einen "Rucksack" zu packen, dass dieser möglichst gut gefüllt ist, aber auch einen größtmöglichen Wert enthält, d.h.

$$g_{max} < \Sigma\, g_i \; ; \; g_{max} \rightarrow \max$$

wobei g(max) die Gesamtmasse und g(i) die Einzelmassen sind.

Nach dem Start dieses Teilprogramms geben Sie in die Felder *Masse* und *Wert* die Angaben für die jeweiligen Gegenstände ein. Zusätzlich legen Sie das *Fassungsvermögen* des Rucksacks fest. Beachten Sie, dass dieses kleiner als die Summe der von Ihnen festgelegten Gegenstände sein sollte. Außerdem können Sie maximal 24 Gegenstände eingeben.
Nach Betätigung der *RETURN*-Taste bzw. des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm die günstigste Rucksackbelegung.

Beispiel: Bei der Eingabe

Masse	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Wert	18	20	17	19	25	21	27	23	25	24

und einem Fassungsvermögen von 120 errechnet das Programm, dass die Gegenstände mit den Nummern 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 eingepackt werden sollten. Die Masse dieser Gegenstände beträgt 120, ihr Wert 183.
Wenn Sie den Wert des dritten Gegenstands auf 21 ändern, würde das Programm nun die Nummern 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 und 10 auswählen.

Heiratsproblem

Ein weiteres Problem, das zu den NP-Problemen (Probleme, die nur von einer nicht-deterministischen Turing-Maschine in polynomialer Zeit gelöst werden können) gezählt werden kann, ist das Heiratsproblem.

Gegeben sind n (im Programm 8) "heiratswillige" Frauen und Männer. Jede Frau und jeder Mann stellt eine Rangfolge der vorhandenen acht Partner auf. Ziel ist es nun, eine für möglichst alle Beteiligten optimale Partnerzuordnung zu berechnen.

Wählt man die Eheschließungen so, dass es einen Mann bzw. eine Frau gibt, die nicht miteinander verheiratet sind, sich aber gegenseitig ihren jeweiligen Ehepartnern vorziehen, so nennt man die Heirat unstabil, andernfalls stabil.

Bei der Berechnung sind damit unstabile Eheschließungen auszuschließen. Die Besonderheit dieses Problems besteht darin, dass Nebenbedingungen auf zwei Ebenen einzuhalten sind.
Zuerst geben Sie die Rangfolgen ein oder laden eine der vorher gespeicherten Dateien.

Zu beachten ist, dass jede Frau und jeder Mann eine vollständige Reihenfolge angeben müssen, d.h., je waagerechte Reihe müssen alle Zahlen von 1 bis 8 in einer beliebigen Anordnung erscheinen. Andernfalls meldet das Programm einen Fehler.

Wurden alle Rangfolgen eingegeben, ermittelt das Programm nach Betätigung des Schalters *Berechnung* mehrere Zuordnungsmöglichkeiten stabiler Eheschließungen. Dabei entspricht eine angezeigte Variante mit einem möglichst niedrigen Rang den Wünschen der Frauen bzw. Männer am besten.
Über den Schalter ***B*** können Sie in jedem der Teilprogramme Beispieldaten aufrufen. Außerdem können Sie mittels und die Daten laden und speichern, sowie die Ergebnisse drucken, kopieren und speichern.

13.21 Labyrinthproblem

Der griechischen Mythologie zufolge befand sich das erste Labyrinth auf der Insel Kreta und war von dem Baumeister und Erfinder Daedalus, dem Vater des Ikarus, geschaffen worden. Bei dem römischen Dichter Ovid heißt es in seinen "Metamorphosen" (8. Buch):

"Daedalus, rühmlich bekannt durch Geschick in den bildenden Künsten, / Schaffet das Werk. Merkmale verwirrt er und führt in die Irre / Täuschend den Blick durch die Zahl vielfältig gewundener Wege. / So wie der lautere Strom des Maeandrus in phrygischen Auen / Treibt sein Spiel ... so machte der Gänge / Wirrwarr Daedalus auch voll Trug, und er fand zu der Schwelle / Selbst kaum wieder den Weg: so ist das Gebäude verfänglich."

In diesem Labyrinth lebte der Minotaurus, ein blutrünstiges Ungeheuer, halb Stier, halb Mensch, dem jedes Jahr je sieben der schönsten Mädchen und Jungen Athens geopfert werden mussten. Mithilfe eines Fadenknäuels, das er von Ariadne erhielt, gelang es Theseus, das Monster zu besiegen und aus dem Labyrinth zurückzukehren.
Seit der Beschreibung der "Heldentat" Theseus' durch Ovid gehören Labyrinthe und die Frage nach dem Ausweg daraus zur Gedankenwelt der Menschheit.

In diesem Teilprogramm soll der Ausweg aus einem solchen Labyrinth gefunden

werden. Die Aufgabenstellung ist eine der klassischen Fragen der Mathematik, die mit einem rekursiven Algorithmus lösbar sind.
Nach dem Start erzeugt das Programm zufällig ein Labyrinth. Den Anteil an freien Stellen können Sie über den Rollbalken verändern. Als günstiger Wert haben sich dabei die voreingestellten 70% ergeben. Danach legen Sie mit einem rechten Mausklick die Startposition fest, die mit einem S gekennzeichnet wird.

Betätigen Sie nun den Schalter *Weg suchen*, sucht das Programm einen Weg aus diesem Labyrinth und zeigt alle beschrittenen Felder mit einem x markiert an. Sollte es keinen erfolgreichen Weg geben, werden dennoch alle getesteten Felder ausgewiesen. Markieren Sie *Schrittfolge anzeigen*, so wird die Reihenfolge der besuchten Felder gezeigt. Darüber hinaus kann auch der *kürzeste Weg* gesucht werden.

Für die Suche ist es wichtig, welche Richtung und Orientierung als Hauptsuchrichtung verwendet wird. Entweder wendet sich die Figur zum einen an einer Mauer zuerst in Uhrzeigerrichtung oder nicht und zum anderen wählt sie als Hauptrichtung nach unten, links, oben oder rechts. Auch dies können Sie einstellen. Im Allgemeinen werden Sie dann auch unterschiedliche Wege erhalten.

Klicken Sie nach erfolgreicher Suche auf einen Eintrag in der unteren Liste, so zeigt das Programm die entsprechende Position der Figur an. Mit dem Schalter *Animation* wird die Figur automatisch längs des kürzesten Weges durch das Labyrinth bewegt.

Das vom Programm zufällig erzeugte Labyrinth können Sie "per Hand" verändern. Klicken Sie links auf ein leeres Feld, wird dort eine Mauer errichtet, klicken Sie auf eine Mauer, wird diese entfernt.

13.22 Rundreiseproblem

Das Problem des Handlungsreisenden (engl. Traveling Salesman Problem, kurz TSP) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem der theoretischen Informatik. Die Aufgabe besteht darin, eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu wählen, dass die gesamte Reisestrecke des Handlungsreisenden nach der Rückkehr zum Ausgangsort möglichst kurz ist. Komplexitätstheoretisch gehört das TSP zur Klasse der NP-äquivalenten Probleme.

Es wird angenommen, dass die schlechteste Laufzeit eines deterministischen Algorithmus, der für dieses Problem stets optimale Lösungen liefert, im besten Fall exponentiell von der Anzahl der Städte abhängt. Schon für wenige Städte kann die benötigte Laufzeit eines solchen Algorithmus viel Zeit beanspruchen.

In diesem Teilprogramm wird das Rundreiseproblem für einige deutsche Städte simuliert.

Nach Auswahl der *Anzahl von Orten* und des Schalters *Zufallsauswahl* zeigt das Programm auf einer Karte die Lage einiger Orte an. Für diese soll nun eine möglichst kurzer Rundreiseweg gefunden werden.
In der Liste der Orte können Sie auch selbstänsig diese durch einen Mausklick zur Suchliste hinzufügen bzw. entfernen.
Klicken Sie auf *Vollständige Suche*, wird der Weg durch kontinuierliches Testen aller möglichen Verbindungen ermittelt. Im ungünstigsten Fall sind damit für n Punkte (n-1)!/2 Wege zu kontrollieren, bei nur 16 Orten, wären dies etwa 700 Milliarden verschiedene Wege! Dies erfordert auch auf schnellen Computern einige Zeit.
Durch ein Vorsortieren der Orte von West nach Ost, kann erreicht werden, dass der kürzeste Weg meist am Anfang der Gesamtberechnungszeit gefunden wird.

Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl heuristischer Verfahren, welche die Ermittlung eines günstigen, nicht unbedingt des optimalen, Weges ermöglichen. Hier sind drei dieser Verfahren vorhanden.
Wählen Sie *Heuristische Suche*, so wird mit jedem der 3 Verfahren der kürzeste Weg gesucht und der beste angezeigt. Zu beachten ist aber, dass der heuristische Weg nicht notwendig auch der wirklich kürzeste ist.
Die angegebenen Entfernungen sind dabei die Luftlinie und orientieren sich nicht an den tatsächlichen Straßen.

Entfernen Sie die Markierung bei *Rundreise suchen*, wird nur ein einfacher Weg ermittelt. Dazu können Sie mit einem Mausklick einen der Orte als Startort festlegen.
Durch wiederholtes Klicken auf die angezeigten Orte können Sie auch einen vollständigen Rundweg einzeichnen. Ob dieser optimal ist, können Sie durch die vollständige bzw. heuristische Suche überprüfen lassen.

Beachten Sie bitte! Als maximalen Wert der Anzahl Orte können Sie 50 festlegen. Auf einem heutigen PC ist hierfür eine vollständige Suche unmöglich.
Würde Ihr Computer je Sekunde 1 Milliarde Möglichkeiten testen (das schafft er niemals!), so würde er 1 Oktillion Jahre benötigen, das ist 75 Sextillionen mal mehr als das Alter des Universums!

Auf einem schnellen Testrechner konnten je Sekunde 6 Millionen Möglichkeiten gestestet werden. Damit sind in vertretbarer Zeit höchstens Aufgabenstellungen mit 16 Orten vollständig analysierbar (etwa 60 Stunden). In diesem Programm wird nach 24 Stunden automatisch abgebrochen.

13.23 Mathematikersuchbaum

Diese Unterprogramm simuliert ein einfaches trainierbares Frage-Antwort-Spiel über einen binären Suchbaum, d.h. ein Programm, welches selbstständig während des Einsatzes lernen kann.
Dabei haben Sie die Möglichkeit durch die Beantwortung von Alternativfragen einen gedachten Mathematiker zu erraten.

Beim erstmaligen Starten dieses Teilprogramm kann es nur wenige Mathematiker bestimmen, wird aber durch Ihre Eingaben auf Wunsch immer umfangreicher. Gehen Sie wie folgt vor:

Nach jedem Neustart müssen Sie beginnend mit der Startfrage
Lebte der Mathematiker vor unserer Zeitrechnung?
durch Betätigen der Schalter *Ja* oder *Nein* eine Folge von Fragen beantworten. Ist das Programm nach einer ausreichenden Menge von Antworten in der Lage den gesuchten Mathematiker zu bestimmen, erhalten Sie dessen Namen angezeigt.

War der Mathematiker in der Datenbank enthalten, müsste das Ergebnis mit dem Gesuchten übereinstimmen. Bestätigen Sie dies mit *Ja*.
Sollte die Bestimmung nicht korrekt sein, so können Sie die Datenbank erweitern. Wählen Sie *Nein* erscheint auf dem Bildschirm ein Eingabefenster.

In dieses tragen Sie nun eine Alternativfrage ein, welche das angezeigte Ergebnis von Ihrem gedachten Mathematiker eindeutig(!) unterscheidet. Danach tragen Sie den Namen des gesuchten Mathematiker ein, sowie welcher der beiden Wissenschaftler mit einer bejahenden Beantwortung der Frage gefunden werden soll. Quittieren Sie alle Eingaben mit *Speichern* trägt das Programm alle Eingaben in die Datenbank ein.

Bei einem Test mit den gleichen Antworten werden Sie auf Ihre Frage treffen, welche von nun an verfügbar ist. Damit können Sie dieses Programm selbstständig "anlernen". Mit jeder weiteren Frage wird dieses kleine Expertensystem intelligenter.
Beenden Sie dieses Unterprogramm werden Sie gefragt, ob die geänderte Datenbank dauerhaft auf Ihrer Festplatte gespeichert werden soll. Bestätigen Sie mit *Ja*, sind bei einem Neustart alle Erweiterungen verfügbar. Wählen Sie *Nein* gehen die in dieser Sitzung gemachten Eingaben wieder verloren.

Hinweis: Die Erweiterung der Datenbank ist in Netzwerken nur mit Administratorrechten möglich.

13.24 Bildbearbeitung

Zu den Grundaufgaben der modernen Informatik gehört die Bereitstellung geeigneter Methoden zur Verarbeitung und Bearbeitung von Abbildungen. Diese Algorithmen beinhalten mathematische Verfahren.
In diesem Teilprogramm werden einige dieser Methoden demonstriert. Laden Sie zuerst über den Schalter eine Abbildung. Deren Bildformat darf bmp, jpg oder gif sein.

Über die fünf Schalter *Graustufenbild*, *Mittelwertbild, Bild invertieren*, *Helligkeit erhöhen* und *Kontrast erhöhen* können Sie erste Manipulationen am Bild

vornehmen.
Haben Sie das Feld *Autorücksetzen* markiert, so wird immer das Ausgangsbild verändert. Andernfalls verarbeitet das Programm die gerade angezeigte Abbildung.

Ein Graustufenbild ergibt sich zum Beispiel, in dem für jeden Bildpunkt der Anteil Rot, Grün und Blau bestimmt wird, diese Anteile nach der Gleichung
grau = (rot * 77 + grün * 151 + blau * 28) div 256 in eine Zahl von 0 bis 255 verwandelt werden, und dieser Wert den neuen Rot-, Grün- und Blauwert darstellt.
Mit dem Schalter *Mittelwertbild* wird das arithmetische Mittel der drei Farben berechnet. Das Ergebnis ist oft ein Graustufenbild mit geringerem Kontrast.
Der Schalter *Sepia-Tönung* erzeugt ein Bild mit dem typischen Sepia-Effekt. Dieser ist von älteren Fotografien bekannt, bei denen der Schwarz-Anteil durch die UV-Strahlung bräunlich verfärbt ist, während das Papier gelblich wurde. Für einen guten Sepia Effekt, sollte das Ausgangsbild möglichst kräftige Kontraste aufweisen. Insbesondere Landschafts- und Porträtaufnahmen besitzen mit Sepia-Tönung einen besonderen Reiz.

Die drei Schalter *Rot*, *Grün* und *Blau* zeigen jeweils die Farbanteile der Grundfarben an. Mit *R-G*, *R-B* und *G-B* tauschen Sie die Farbanteile Rot gegen Grün, Rot mit Blau und Grün gegen Blau, mit verblüffenden Ergebnissen. *R inv*, *G Inv* und *B inv* invertiert die Farbkanäle Rot, Grün bzw. Blau.
Die drei Schalter , und spiegeln das Bild horizontal, vertikal bzw. drehen es um jeweils 90° in Uhrzeigerrichtung.

Moderne Bildbearbeitungssoftware gibt darüber hinaus die Möglichkeit, sogenannte Filter auf die Bilddaten anzuwenden. Dazu werden jeder Bildpunkt mit seinen acht benachbarten Pixeln in Verbindung gesetzt und die 3x3-Matrix der neun Punkte mit einer Filtermatrix multipliziert. Ein zusätzlicher *Faktor* beschreibt die Stärke des Filters. Das Ergebnis der Berechnung beschreibt dann die Bilddaten der modifizierten Abbildung.
Um eine Abbildung schärfer zu zeichnen, wird zum Beipiel die Filtermatrix

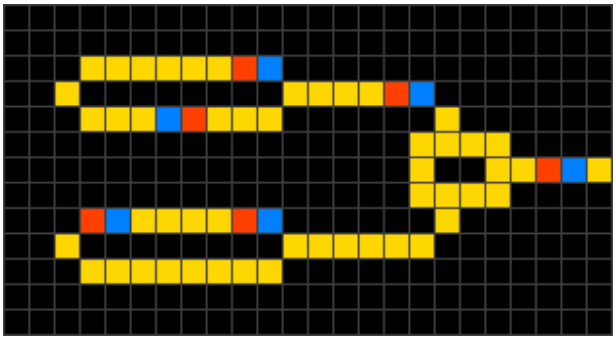
```
-1   -1   -1
-1   16   -1
-1   -1   -1
```

verwendet.
Für die Pixel am Rand der Abbildung existieren nicht alle acht Nachbarpixel. Für diese Punkte muss daher ein *Randoption* eingestellt werden.

Möchten Sie einen Filter anwenden, so wählen Sie diesen in der aufklappbaren Liste aus, oder tragen selbst Zahlenwerte in die Matrix ein. Als Eingabewerte können natürliche Zahlen bis 255 genutzt werden.
Zur Veränderung des Bildes klicken Sie dann auf den Schalter *Filter anwenden*.
Über *Zurücksetzen* erhalten Sie wieder das Ausgangsbild.

13.25 Wireworld

Wireworld ist ein zellulärer Automat, der erstmals von Brian Silverman 1987 entwickelt wurde. Wireworld eignet sich besonders für die Simulation elektronischer Logikelemente wie Gatter oder Flip-Flops. Trotz der Einfachheit seiner Regeln ist es möglich, vollständige Computer mittels Wireworld zu implementieren.



Eine Wireworld-Zelle kann vier unterschiedliche Zustände einnehmen (die jeweils angegebene Farbe wird in den animierten Grafiken auf dieser Seite verwendet):

- leer (*schwarz*)
- „elektrischer Leiter" (*gelb*)
- „Elektronenkopf" (*blau*)
- „Elektronenende" (*rot*)

Die Zeit verläuft in diskreten Schritten, den sogenannten Generationen. Dabei bleibt eine leere Zelle grundsätzlich leer. Die übrigen Zellen verhalten sich beim Übergang von einer Generation zur nächsten wie folgt:

- Aus einem Elektronenkopf wird ein Elektronenende.
- Aus einem Elektronenende wird ein Leiter.
- Aus einem Leiter wird ein Elektronenkopf, wenn genau ein oder zwei der benachbarten Zellen Elektronenköpfe sind.

Durch die geeignete Ausbildung von Leiterverzweigungen und -kreuzungen können logische Schaltelemente vom einfachen Gatter bis zum komplexen Rechenwerk realisiert werden.

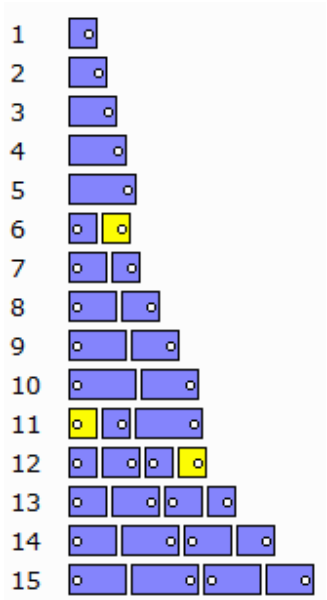
Dieser Zellularautomat kann in diesem Teilprogramm getestet werden.
Dazu geben Sie zuerst mit der Maus eine Ausgangssituation ein. Ein linker Mausklick verändert eine Zelle zyklisch von Schwarz nach Blau, Rot, Gelb und wieder Schwarz, ein rechter Mausklick löscht die Zelle.
Die Ausgangssituationen können Sie über die zwei kleinen Schalter auf der Festplatte speichern bzw. wieder laden.

Zum Starten der Simulation klicken Sie auf den entsprechenden Schalter. An den kleinen Pfeilschaltern ist die Geschwindigkeit einstellbar.

13.26 Kontextfreies L-System, Anabaena Catenula

Mittels eines einfachen Beispiels aus der Natur kann das Prinzip eines kontextfreien L-Systems erklärt werden.

Die blaugrüne Bakterie Anabaena Catenula formiert sich zu einer sogenannten Schwingfadenalge, d.h. eine eindimensionale Kette von Bakterien. Unter dem Mikroskop sieht sie wie eine Reihe unterschiedlich langer Zylinder aus. Für das Wachstum von Anabaena Catenula sind Elemente aus zwei verschiedenen Bakterientypen verantwortlich, die sich durch ihre Größe sowie ihr Teilungsverhalten unterscheiden. Nennen wir sie A und B.



Da beide Typen asymmetrisch aufgebaut sind, können sie in der Kette entweder nach links oder nach rechts orientiert sein. Es gibt daher aus praktischer Sicht vier unterschiedliche Elemente, nämlich A und B nach rechts sowie a und b nach links orientiert.
Das Alphabet V des ersten L-Systems beschränkt sich auf vier Zeichen: V = (A, a, B, b).
Eine nach rechts orientierte A-Bakterie teilt sich nach einer gewissen Zeit in eine nach rechts orientierte B-Bakterie und in eine nach links orientierte A Bakterie, d.h.

A → a B bzw. a → b A

B-Bakterien werden nach einer gewissen Zeit zu A-Bakterien

B → A bzw. b → a

Aus jedem Wort, das aus den Symbolen des Alphabets gebildet werden kann, kann man genau ein neues Wort erzeugen, indem zur gleichen Zeit alle Symbole des Wortes ihre Vorgänger annehmen und diese durch ihre Nachfolger ersetzen. Aus dem erhaltenen Wort ergibt sich durch Iteration ein neues Wort usw.
Mit einer Startbakterie A (Axiom) ergibt sich dann das Wachstum der Alge.

In diesem Teilprogramm wird dieses L-System veranschaulicht. Tragen Sie ein Axiom und die Bildungsregeln ein, so werden die Iterationen grafisch dargestellt. Für die Symbole B und b wird eine andere Farbe genutzt. Die Symbole C bis F werden wie A gezeichnet, jedoch breiter (siehe unten).
Der beschriebene Satz von Regeln wird eingetragen, wenn Sie auf den Schalter *vereinfachtes System* klicken.

Realistisches System

Abbildung: die ersten 15 Generationen des realistischen Modells

Im Labor wurde beobachtet, dass sich die größere A-Bakterie etwa alle 15 Stunden teilt. Die kleineren B-Bakterien werden nach etwa drei Stunden zu A-Bakterien.
Als Zeiteinheit für ein verbessertes Modell eignet sich damit eine Dauer von 3 h. Eine B-Bakterie formt sich also in einer Zeiteinheit in eine A-Bakterie um. Die Entwicklung einer A-Bakterie teilen wir in fünf Schritte auf: A → C → D → E → F

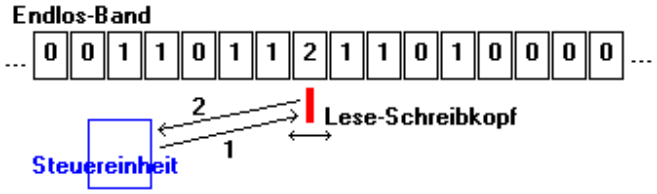
und entsprechend für die linksgerichteten Bakterien.
Damit wird das Regelsystem umfangreicher. Klicken Sie auf *realistisches System*, so wird dieses eingetragen.
Die grafische Interpretation des verbesserten Modells entspricht ziemlich genau der Wirklichkeit. Beachten Sie hierbei bitte, dass Bakterien verschiedener Stadien sowie verschiedener Generationen koexistieren.

Das Teilprogramm wurde nach Informationen der hervorragenden Internetseite zu L-Systemen (Peter Jossen, Daniel Eyer, 2001)
http://www.fraktalwelt.de/lsys/seite16.html gestaltet.

13.27 Turing-Maschine

1936 wurde von dem englischen Mathematiker Alan M. Turing das Modell einer Maschine erdacht, mit der jeder berechenbare Algorithmus bearbeitet werden kann. Die Besonderheit der Turing-Maschine besteht darin, dass seit ihrer Erfindung kein berechenbarer Algorithmus, und sei er noch so kompliziert, gefunden wurde, der nicht auf ihr berechnet werden kann. Heute geht man davon aus, dass die Curchsche These:

Jeder Algorithmus kann durch eine Turing-Maschine realisiert werden.



richtig ist, womit jede Turing-Maschine ebenso mächtig wie alle unsere Personalcomputer oder auch Supercomputer ist. Zu beachten ist dabei, dass zum einen nicht jedes Problem algorithmisierbar ist, zum anderen eine Berechnungsvorschrift auf Turing-Maschinen auch für an sich einfache mathematische Aufgaben sehr umfangreich und kompliziert sein kann. Eine Turing-Maschine besteht aus folgenden Teilen:

- Einem unendlich langen Band. Dieses Band besteht aus Zellen. Jede Zelle speichert genau ein Zeichen. Diese Zeichen entstammen einem Bandalphabet A, im Programm: A = {0,1,2,3,4}
- Einem Lese-Schreibkopf. Er kann jeweils genau ein Zeichen vom Band lesen bzw. auf das Band schreiben. In jedem Takt bewegt er sich genau eine Zelle nach links oder rechts bzw. bleibt an der gleichen Stelle stehen. Die Menge der Bewegungen ist damit {L,R,S}.
- Einem Leitwerk. Dieses Leitwerk steuert die Arbeit des Lese-Schreibkopfes. Im Leitwerk ist das Programm (die Turing-Tafel) gespeichert. Das Leitwerk befindet sich ständig im aktuellen Zustand und kann diesen entsprechend dem Programm ändern. Die Menge aller Zustände sei Z.

Zu Beginn befindet sich das Leitwerk im Zustand Z0. Folgende Schrittfolge steuert die Maschine:

- Lesen des Zeichens auf dem Band, z.B. 1

- Lesen der Turing-Tafel für den Zustand Z0, z.B. [0,0,S | 0,1,R | 2,0,S | 3,0,S]
- Bestimmung des Befehls entsprechend des Zeichens, im Beispiel neues Zeichen = 0, neuer Zustand = Z1, Bewegung nach R
- Eintragen des neuen Zeichens, im Beispiel 0
- Ausführung der Bewegung, im Beispiel eine Zelle nach rechts
- Beginn bei 1. mit neuem Zustand, im Beispiel Z1

Die hier unter diesem Programmpunkt implementierte Turing-Maschine, eine deterministische Ein-Band-Maschine, stoppt, wenn erneut der Zustand Z0 erreicht wird. Entsprechend der beschriebenen Arbeitsweise sind folgende Überlegungen und Eingaben vorzunehmen:

- Festlegung der Anzahl der Zustände, maximal 0 ... 9
- Festlegung des Bandalphabets, maximal 0, 1, 2, 3, 4
- Je Zustand sind je Zeichen in das entsprechende Feld „Neues Zeichen, Neuer Zustand, Bewegung" (mit Komma getrennt) einzugeben

Beispiel:

Zeichen	0	1	2	3
Zustand Z0	0,0,S	0,1,R	2,0,S	3,0,S
Zustand Z1	1,2,R	1,1,R	2,1,S	3,1,S
Zustand Z2	0,5,L	2,3,L	2,2,R	3,2,R
Zustand Z3	0,4,R	3,2,R	2,3,L	3,3,L
Zustand Z4	0,2,L	1,2,L	1,4,R	0,4,R
Zustand Z5	0,6,R	1,2,R	0,5,L	1,5,L
Zustand Z6	0,0,S	1,6,R	2,6,S	3,6,S

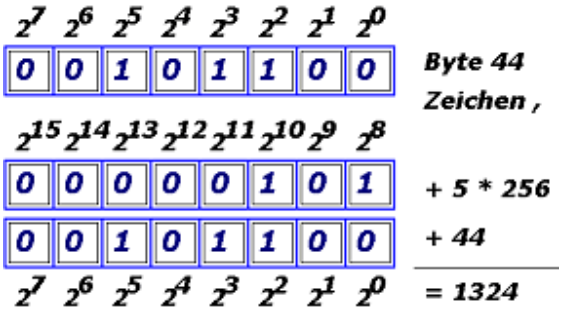
Zusätzlich geben Sie unter *Bandinschrift* die Anfangsbelegung des Bandes ein. Mit > kennzeichnen Sie die Position des Startzustands. Nach Betätigung der *RETURN*-Taste bzw. des Schalters *Start der Turing-Maschine* arbeitet die Turing-Maschine. Sie erhalten als Anzeige die aktuelle Belegung des Bandes in der Nähe des aktuellen Zustands, die Anzahl der abgelaufenen Schritte und die Anzahl der Zeichen '1', '2', '3' und '4' auf dem ganzen Band. In *Anzeige nach ... Schritten* geben Sie an, nach wie vielen Schritten die Anzeige aktualisiert wird. Unter *Verzögerung* können Sie einen Wert von 0 bis 30000 wählen, der eine Zeitschleife in Millisekunden angibt, die nach jedem Schritt eingefügt wird. Dieser Wert ermöglicht es Ihnen, den Lauf der Turing-Maschine Schritt für Schritt zu verfolgen.

Beispiel: Geben Sie für die oben angegebene Turing-Tafel die Startinschrift *>111111011111111* ein, so ermittelt diese Turing-Maschine den größten gemeinsamen Teiler von 6 und 8 und stoppt nach 164 Schritten mit der Bandinschrift 2.
Die Turing-Tafel und die Startinschrift können Sie mittels der Schalter laden und speichern.

13.28 Zahldarstellung und logische Verknüpfungen

Bit, Byte, Integer

Für die Verarbeitung von Zahlen in Computersystemen ist es absolut notwendig, diese in eine für die "Maschine" verständliche Form zu bringen. Im Laufe der Geschichte der Rechentechnik erwies sich die Verwendung des Dualsystems (Binärsystem) als erfolgreich.



Zur Speicherung einer Dezimalzahl wird diese daher in das 2er-System transformiert. Jede Ziffer dieser Dualzahl, entweder eine 1 oder eine 0, wird in je einem Bit abgespeichert. Fasst man acht Bits zu einem Byte zusammen, können so nicht nur acht Zahlen (= 8 Bit), sondern Zahlen von 0 bis 255 verarbeitet werden, da jedem Bit ein Stellenwert zugeordnet wird. Für größere Zahlen verbindet man zwei Byte zu nun 16 Bit und könnte so einen Zahlenbereich bis 65535 verarbeiten. Wünscht man ein Vorzeichen, so wird das höchste Bit für dessen Speicherung verwendet.

In diesem Teilprogramm können Sie die Speicherung derartiger Zahlen nachvollziehen. Tragen Sie unter *Eingabe* eine Zahl von 0 bis 65535 ein. Das Programm stellt Ihnen sofort die einzelnen Bits dar. Dabei finden Sie im oberen Teil nur das "untere" Byte, im unteren Teil des Fensters beide Bytes.

Die Multiplikation bzw. ganzzahlige Division einer Dualzahl mit 2 ist nun besonders einfach: Sie besteht nur in der Verschiebung der Bits nach links bzw. rechts. Dies können Sie an den Schaltern ← und → testen.
Umgekehrt können Sie eine Zahl auch über ihre Bits eingeben. Klicken Sie links mit der Maus eines der dargestellten Bits an, so wird durch das Programm dessen Belegung verändert: von 0 auf 1 bzw. von 1 auf 0. Erneut transformiert das Programm die Eingabe, dieses Mal in die Dezimalzahl.

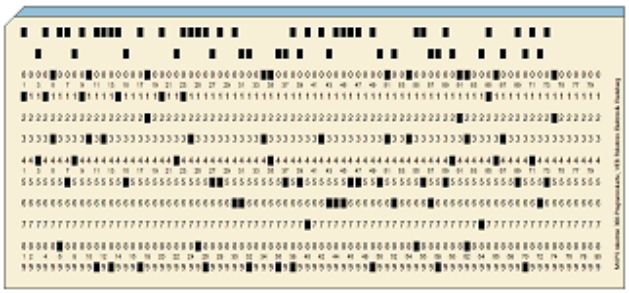
Logische Verknüpfungen: And, Or, Xor

Markieren Sie *Logische Verknüpfung* finden Sie die Verarbeitung dieser Dualzahlen.
Dafür enthalten Sie Mikroprozessoren der Computer als einfachste Verknüpfungsoperationen das bitweise UND, ODER und ENTWEDER-ODER und deren jeweilige Negation, im Fachenglisch AND, OR, XOR und die Negierungen NAND, NOR und NXOR.
Tragen Sie die beiden Zahlen (Operanden) durch linken Mausklick in die gezeichneten Bits ein und wählen an den Markierungsfeldern eine der sechs Operationen, ermittelt das Programm das Ergebnis dieser Verknüpfung.

13.29 Robotron 300-Lochkartencode

Eine Lochkarte ist eine Pappkarte, in die Löcher zur Informationsspeicherung, -verarbeitung und -übertragung eingestanzt werden. Dabei dient die Lochkarte als dauerhafter mechanischer Speicher für Dateneingaben.

Die Lochkarte wurde im Allgemeinen maschinell beschrieben und ausgelesen, kann aber auch manuell entziffert werden. Die maschinelle Datenspeicherung geschieht durch den Lochkartenlocher, die Auslesung durch einen Lochkartenleser. Bei dem R300 erfolgte das Kartenlesen fotoelektrisch mit einer Geschwindigkeit von 270 Zeichen/s, d.h. etwas mehr als 3 Karten je Sekunde. Der Lochkartenleser EC6016 erreichte sogar 1000 Karten/Minute!



Für die Kodierung der Zeichen wird ein spezieller Lochkartencode verwendet. Auf einer Karte können maximal 80 Zeichen gespeichert werden, je Kartenspalte ein Zeichen.
Über den Zeilen 0 bis 9 mit je 80 Spalten befinden sich zwei zusätzliche Zeilen A und B.
Auf den Lochkarten des DDR-Großcomputers R300 wurden die Ziffern 0 bis 9 durch ein Loch an der Stelle 0 bis 9 markiert. Für die Buchstaben galt:

- A ... I : Loch bei A und 1 bis 9
- J ... R : Loch bei B und 1 bis 9
- S ... Z : Loch bei 0 und 2 bis 9

Für die Sonderzeichen gab es spezielle Codes.

In diesem Programmteil können sie bis zu 80 Zeichen auf einer solchen Lochkarte platzieren. Geben Se dazu in der Eingabezeile den entsprechenden Text ein. Alternativ können Sie mit einem Mausklick auf die Lochkarte Löcher stanzen bzw. wieder füllen.
Da Sie die Darstellung auch als Bild speichern können, ist es möglich Informationen „verschlüsselt" zu versenden. Wer kennt heute schon noch den R300-Code und kann die Information lesen. ☺

13.30 Binäruhr, BCD-Uhr

In diesem kleinen Teilprogramm wird die aktuelle Systemzeit des Computers im binären Code dargestellt. Stunden, Minuten und Sekunden werden in eine Dualzahl transformiert und eine auftretende "1" als gelber Kreis gezeichnet. Mit dem Schalter *Simulation* starten Sie die fortlaufende Anzeige.

BCD-Uhr

Markieren Sie das Feld *BCD-Uhr*, so wird eine binärkodierte Dezimalzahl angezeigt.
In der BCD-Darstellung wird jede Dezimalstelle einer Zahl für sich als 4-Bit-Dualzahl (Tetrade) codiert. Von links nach rechts werden damit die Zehnerstelle und die Einerstelle der Stunden, Minuten und Sekunden als BCD-Zahl angezeigt.

14. Anwendung aus der Physik

„Die Nachwelt wird ihre ernsthaften Überlegungen einzig der Physik zuzuwenden haben."
Gottfried Wilhelm Leibniz

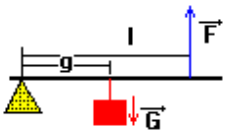
Unter diesem Punkt finden Sie mathematische Anwendungen zu Fragen der Physik. So werden hier beispielsweise die Schwingungen und Vorgänge in elektrischen Schaltkreisen behandelt.

14.1 Hebelgesetz

"Gib mir einen Punkt, auf dem ich stehen kann, und ich werde die Erde bewegen."
Archimedes

Der Legende nach soll Archimedes nach der Findung des Hebelgesetzes geäußert haben, dass man ihm nur einen festen Platz im Weltall geben solle und er würde die Erde ausheben. Obwohl etwas derartiges praktisch nicht möglich ist, war es nach dem Wissensstand seiner Zeit durchaus denkbar.

Dieser Programmteil beschäftigt sich mit diesem Archimedischen Hebelgesetz, einer einfachen Anwendung von Proportionen in der Physik. Dabei unterscheidet man zweiseitige und einseitige Hebel. Hier wird ein einseitiger Hebel betrachtet.



Bei dem einseitigen Hebel liegt ein Stab (Hebel) auf einem Auflagepunkt. Im Abstand g, der Länge des Lastarms, hängt ein Massenstück (Last) mit der Gewichtskraft G. Um einen Fall nach unten zu vermeiden, muss eine Kraft F im Abstand l (Kraftarm) vom Auflagepunkt entgegenwirken. Nach Archimedes gilt dann stets im Gleichgewicht: $F \cdot l = G \cdot g$.

Führt man den Archimedes noch nicht bekannten Begriff des Drehmoments ein, sind im Gleichgewicht des Hebels die von den zwei Kräften erzeugten Drehmomente betragsmäßig gleich groß.
An den drei Rollbalken *Lastarm*, *Last* und *Kraftarm* stellen Sie die gewünschten Werte ein. Das Programm berechnet daraufhin sofort die notwendige Kraft F, um das Gleichgewicht am Hebel zu halten und veranschaulicht dies grafisch an einem einseitigen Hebel.

Im Beispiel beträgt die Last (genauer gesagt die Gewichtskraft des Massekörpers) 100 N, die Länge des Lastarms ist 175 cm und die Länge des Kraftarms ist 145 cm. Nach dem Hebelgesetz muss die für das Gleichgewicht notwendige Kraft größer als das Gewicht des Körpers sein. Das Programm berechnet 120,69 N.

Starten Sie die Simulation, wird die Last kontinuierlich verschoben, also der Lastarm verändert, und die Darstellung neu gezeichnet.

14.2 Balkenwaage

Wenn ein gerader Hebel im Schwerpunkt aufgehängt wird, befindet er sich in allen Lagen im Gleichgewicht. Möchte man nun eine an einer Seite angebrachte Masse mit einer anderen vergleichen, so muss man auf beiden Seiten das gleiche Drehmoment erzeugen.
Sind diese nicht gleich, dreht sich der Hebel, bis er senkrecht steht, eine so konstruierte Waage also bis zum Anschlag. Ein derartiges System ist für eine Waage nicht zu gebrauchen.

Um aus dem Hebel eine brauchbare Balkenwaage zu machen, setzt man in der Mitte einen dritten Hebel an, der nach unten gerichtet ist. Dieses System ist nun im stabilen Gleichgewicht, d.h., versucht man, die Lage des Hebels zu stören, schwingt dieser wieder in die stabile Lage zurück.

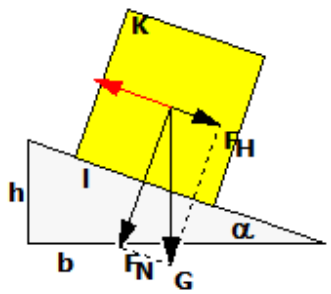
Eine derartig konstruierte Balkenwaage können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen.

Dabei können Sie für alle drei Hebelarme deren Länge und die angehängte Masse in gewissen Bereichen frei ändern. Das Programm stellt dann sofort das aktuelle Gleichgewicht her. An den Hebelarmen finden Sie unter dem Massenstück den Wert des aktuellen Drehmoments. Die Differenz der Drehmomente der äußeren Massenstücke muss durch den Mittelhebel ausgeglichen werden.

Dessen wichtige Funktion können Sie untersuchen, indem Sie die Länge des Mittelshebels schrittweise verkleinern. Da nun die Wirkung der in der Mitte befindlichen Masse auf die Balkenwaage immer kleiner wird, stellt sich der Hebel auch immer steiler. Würde man den Mittelhebel entfernen, träte genau der oben beschriebene ungünstige Fall ein.

14.3 Geneigte Ebene

Ein weiteres physikalisches Teilprogramm befasst sich mit Kräften an der geneigten Ebene. Der Legende nach sollen geneigte Ebenen im alten Ägypten zum Bau der Pyramiden gedient haben, weil damit auch sehr große Massen in die Höhe transportiert werden können. Das Programm zeichnet eine geneigte Ebene, deren *Neigungswinkel* am entsprechenden Rollbalken verändert werden kann. Auf dieser Ebene befindet sich ein Körper, dessen Masse ebenso variabel ist. Die unterschiedliche Masse und damit das Gewicht stellen Sie am Rollbalken *Gewicht* ein.



Das Programm trägt in die Darstellung der Ebene die Gewichtskraft des Körpers ein und zerlegt diese in die Hangabtriebskraft F_H und die Normalkraft F_N. Dabei gilt der Zusammenhang

$F_H = G \sin \alpha$ $F_N = G \cos \alpha$

wobei α den Neigungswinkel der Ebene darstellt. Ändern Sie den *Neigungswinkel* der Ebene (bis maximal 70°), können Sie verfolgen, wie sich die Größen dieser beiden Teilkräfte verändern. Für $\alpha = 0°$ verschwindet zum Beispiel die Hangabtriebskraft, während die Normalkraft mit der Gewichtskraft identisch ist.

Erhöhen Sie den Neigungswinkel der Ebene, verschiebt sich das Lot vom Schwerpunkt des Körpers, bis es außerhalb der Grundkante (Auflagefläche) des Körpers liegt. In diesem Fall ist das Kippmoment G * sin α * h (G = Gewicht des Körpers, h = Höhe des Körperschwerpunktes) des Körpers größer als sein Standmoment, wodurch er umkippen würde. Das Programm meldet in diesem Fall:

Körper kippt!

Im Beispiel würde dies bei einem Neigungswinkel von 24,5° geschehen. Erhöhen Sie die Masse des Körpers, wird das in diesem Teilprogramm in der Form umgesetzt, dass die Höhe des Körpers vergrößert wird.
Im Beispiel wurde ein Neigungswinkel von 17,0° und ein Gewicht von 110 N eingestellt. Die Hangabtriebskraft beträgt 32,16 N, die Normalkraft 105,19 N. Außerdem erhalten Sie den Anstieg (Verhältnis der Ebenenhöhe zur Grundbreite) sowie die Steilheit der Ebene (Verhältnis Höhe zur Länge der Ebene) in Prozent. In diesem Fall ergibt sich ein Anstieg von 0,306 und eine Steilheit von 29,24%.

Haft- und Gleitreibung

Der physikalische Vorgang der Reibung wird oft als störend empfunden und dargestellt. Immerhin müssen Millionen von Maschinen täglich große Energiebeträge aufwenden, um Reibungskräfte zu überwinden. Nach Schätzungen verwandeln alle Eisenbahnen jährlich 1 Million Tonnen Stahl durch Reibung, vor allem beim Bremsen, in Staub – wahrscheinlich produzieren alle Autos genauso viel Gummistaub ihrer abgefahrenen Reifen.
Aber! Ohne Reibung würde nichts funktionieren. Die Fortbewegung von Menschen, Tieren oder Fahrzeugen ist ohne Reibung absolut undenkbar. Wahrscheinlich hat jeder schon einmal mit mehr oder weniger großem Erfolg versucht, sich bei Glatteis fortzubewegen.

Die Hangabtriebskraft F_H würde bei fehlender Reibung zwischen der Ebene und dem Körper diesen nach unten beschleunigen und ihn damit bewegen. Die dieser Bewegung entgegenwirkende Haftreibung verhindert das Herabgleiten auf der Ebene. Die Ursache für die Haftreibung liegt in der Wirkung der Adhäsionskräfte zwischen den Teilchen der Unterlage und des Körpers. Sind die Oberflächen der Materialien rauer, sind die Adhäsionskräfte und damit auch die Haftreibung größer. Das Programm enthält in der rechten unteren Liste dieses Fensters 32 verschiedene Stoffkombinationen für das Material des Körpers und die Unterlage.

Markieren Sie zum Beispiel den Eintrag *Bronze auf Stahl*, geht das Programm von der Annahme aus, dass der Körper aus Bronze und die geneigte Ebene aus Stahl besteht. Die Stärke der Reibungskräfte wird mit den materialspezifischen Werten der Haft- und Gleitreibungszahl beschrieben. Für das Beispiel ermittelt das Programm als Haftreibungszahl $\mu_0 = 0{,}19$ sowie für die Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}18$. In der Mehrzahl der Fälle ist die Haftreibungszahl μ_0 größer als die Gleitreibung.

Außer der Anzeige der Haft- und Gleitreibungszahlen berechnet das Programm auch die Haft- und Gleitreibungskraft. Ist die entgegengesetzt wirkende Haftreibungskraft geringer als die Hangabtriebskraft, beginnt der Körper nach unten zu rutschen. In diesem Fall meldet das Programm:

Körper rutscht!!

Die Werte der Gleit- und Haftreibungszahlen sind Näherungswerte, welche empirisch ermittelt werden und somit in unterschiedlichen Publikationen auch etwas voneinander abweichen können.
Für das oben genannte Beispiel würde der Körper mit der Voreinstellung *Eiche auf Eiche* ab einem Neigungswinkel von 28,4° rutschen.

14.4 Auftrieb

Der Überlieferung nach deckte der griechische Wissenschaftler Archimedes von Syrakus eine Straftat auf:
König Hieron von Syrakus ließ von einem Goldschmied aus einem Barren reinen Goldes eine Krone herstellen, vermutete aber, dass der Goldschmied in betrog und einen Teil des Goldes mit Silber vertauschte. Archimedes wurde beauftragt, die Echtheit der Krone zu prüfen, allerdings ohne diese zu zerstören. Eine Waage konnte nicht genutzt werden, da der Schmied natürlich auf die Gesamtmasse geachtet hatte.

Als Archimedes gerade ein Bad nahm, soll ihm die Lösungsidee gekommen sein. Der Legende nach soll er vor lauter Aufregung unter dem Ausruf "Heureka" ("Ich hab's gefunden") nackt auf die Straße gelaufen sein. Archimedes hatte das Prinzip des Auftriebs von Körpern in Flüssigkeiten entdeckt und konnte so das Problem lösen. Im Übrigen wurde der Goldschmied des Betrugs überführt.

In diesem Teilprogramm wird der Auftrieb eines Körpers, eines Spielzeugentchens, in einer Flüssigkeit simuliert und berechnet.

Wählen Sie dazu in den Listen die Art der Flüssigkeit und das Material des Körpers aus. Das Programm ermittelt daraufhin, die Dichten, die wirkenden Kräfte, die Masse der verdrängten Flüssigkeit und ob der Körper schwimmt, schwebt oder zu Boden sinkt.

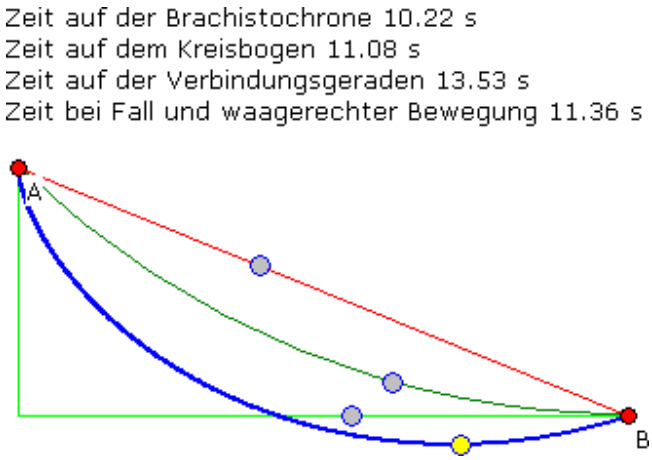
Schwimmt der Körper in der Flüssigkeit, so taucht er gerade so weit ein, dass die

Masse der verdrängten Flüssigkeit seiner eigenen Masse entspricht. Ist die Eintauchtiefe fast 100%, so bedeutet dies, dass der Körper "gerade noch" schwimmt. Körper und Flüssigkeit haben ähnlich große Dichten.

Finden Sie in den Listen nicht die gewünschten Stoffe, können Sie über die Rollbalken *Flüssigkeitsdichte* und *Körperdichte* auch beliebige Werte einstellen.

14.5 Brachistochrone

Von Johann Bernoulli wurde 1696 das Problem gelöst, auf welcher Bahnkurve sich ein Massenpunkt reibungsfrei von einem oberen zu einem unteren Punkt in kürzester Zeit bewegen kann. Der Name der Kurve ergibt sich aus dem griechischen "brakhisto" = "am kürzesten" und "chronos" = "Zeit". Erstaunlicherweise kann sich der Punkt auf einer Kurve bewegen, die sogar unterhalb des Zielpunktes verläuft. Die Brachistochrone ist ein Stück einer Zykloide.



Das Teilprogramm *Brachistochrone* simuliert hier auf vier verschiedenen Bahnkurven die Bewegung eines Körpers von A nach B. Anfangspunkt A und Endpunkt B können wieder mit der Maus verschoben werden.

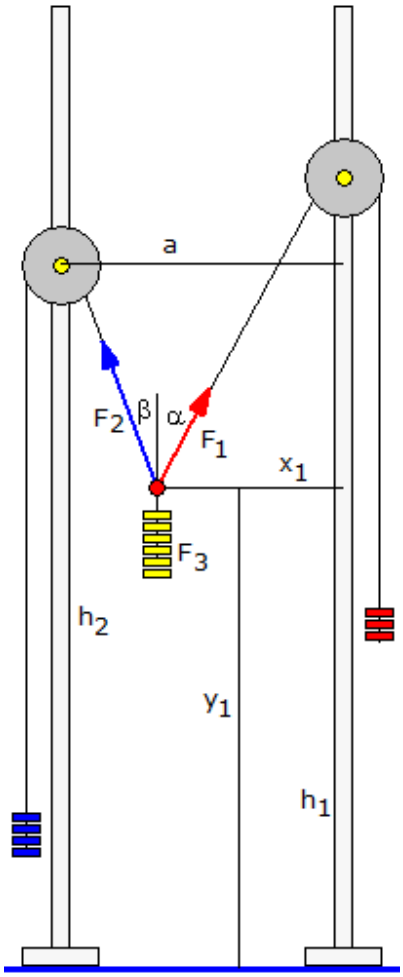
Zusätzlich zur Brachistochronenkurve (blau) können Sie die Verbindungsgerade, einen Kreisbogen und viertens den freien Fall mit anschließender waagerechter Bewegung zuschalten.
Sobald Sie die Simulation starten, werden Sie sehen, dass gleichgültig, wo A und B liegen, stets der Körper auf der Brachistochrone die kürzeste Bewegungszeit benötigt.

Rollende Körper

Markieren Sie das Feld *rollende Körper*, wird davon ausgegangen, dass die Massenkörper nicht gleiten, sondern auf ihren Bahnen rollen und Vollkugeln mit gleicher Masse und gleichem Radius darstellen.
Da nun die Kugeln die potenzielle Energie nicht nur in kinetische, sondern auch in Rotationsenergie umwandeln müssen, werden die Bewegungen langsamer. Dennoch bleibt die Brachistochrone (fast) immer die Kurve mit der kürzesten Bewegungszeit von A nach B.

Eine Ausnahme ergibt sich, wenn der Körper zuerst ohne Rotation frei fällt und (theoretisch) erst auf der Waagerechten mit dem Rollen beginnt. Ist der horizontale Abstand von A und B gegenüber dem vertikalen Abstand gering, so

kann nun dieser Weg zeitlich kürzer sein als auf der Brachistochrone.
Dies ist aber keine wirkliche Ausnahme zum Brachistochronen-Problem, da dort von nicht rollenden Massenpunkten ausgegangen wird.



14.6 Gleichgewicht dreier Kräfte

Über zwei Rollen sind zwei Massestücke m_1, m_2 mit einem dritten Massestück m_3 wie in der Abbildung verbunden.
Das System befindet sich dabei im Gleichgewicht.

Sind die Gewichtskräfte der drei Massen F_1, F_2 und F_3, so gilt dann für die einstellenden Winkel α und β

$$\cos \alpha = (F_1^2 + F_3^2 - F_2^2) / (2\ F_1\ F_3)$$
$$\cos \beta = (F_2^2 + F_3^2 - F_1^2) / (2\ F_2\ F_3)$$

Für die Lage der Masse m_3 erhält man dann, wenn h_1 und h_2 die Höhen der Rollen und a der waagerechte Abstand der Rollen sind:

$$y_1 = h_2 - (a - (h_1 - h_2) \tan \beta) / (\tan \alpha + \tan \beta)$$
$$x_1 = \tan \alpha\ (a - (h_1 - h_2) \tan \beta) / (\tan \alpha + \tan \beta)$$

Sind m_1 und m_2 gleich groß und die Höhen der Rollen ebenfalls gleich groß, so befindet sich die Masse m_3 genau in der Mitte zwischen den senkrechten Stäben.
Ist m_3 größer oder gleich der Summe von m_1 und m_2, so ist das System nicht stabil.

In diesem Teilprogramm können Sie das Gleichgewicht der drei Gewichtskräfte untersuchen. An den Rollbalken stellen Sie die Massen m_1 bis m_3 ein.
Die Lage der Rollen können Sie durch einen linken Mausklick auf die gelben Rollenmittelpunkte und Mausbewegung verändern.

Beachten Sie bitte, dass nicht für alle einstellbaren Massen und unterschiedliche Orte der Rollen, das System sich tatsächlich im Gleichgewicht befindet.
Ist dies nicht der Fall, erhalten Sie eine entsprechende Fehlermeldung.

14.7. Lose und feste Rolle

Dieses Teilprogramm simuliert einfache kraftumformende Einrichtungen, eine feste und zwei lose Rollen. Diese sind mit einem Seil verbunden.

Wird nun am rechten freien Ende des Seils gezogen, entweder mit der Maus oder aber während der *Simulation*, so bewegen sich die zwei losen Rollen nach oben. Auf Grund der Regel, dass bei einer losen Rolle die Kraft halbiert wird, während der Weg sich verdoppelt, bewegen sich die Rollen nur jeweils um den halben bzw.

ein Viertel des Weges. Allerdings kann mit einer kleinen Kraft so ein Massestück mit doppelter bzw. vierfacher Gewichtskraft bewegt werden; das Flaschenzugprinzip.

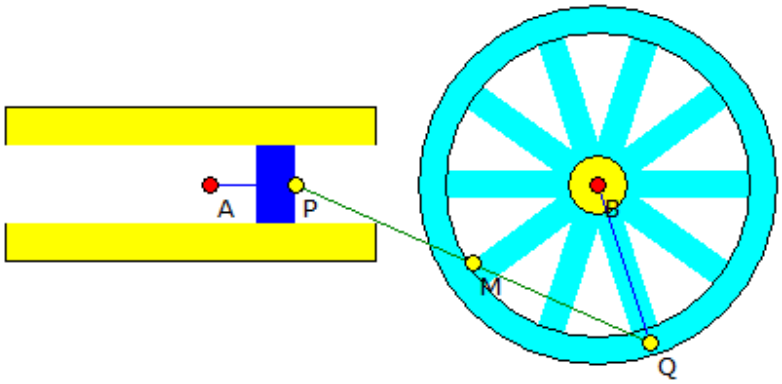
14.8 Stangenmechanismus

Mechanismen, die aus verschiedenen Stangen und rotierenden Rädern zusammengesetzt wurden, waren seit der Erfindung der ersten Wärmekraftmaschinen sehr beliebt.
Mit diesen Getrieben wurde es möglich, lineare Bewegungen, zum Beispiel die Bewegung eines Kolben, in Kreisbewegungen zu transformieren und umgekehrt. Insbesondere in Verbrennungsmotoren wird die Bewegung des Kolbens über die Kurbelwelle in eine rotierende Bewegung verwandelt.

Dieses kleine Teilprogramm simuliert die Umwandlung einer Translationsbewegung in eine Kreisbewegung.

Der Kolben P führt eine waagerechte Bewegung aus. Über eine Stange ist er mit einem Punkt Q verbunden, der sich auf einem Rad befindet.
Während der *Simulation* wird die Lage von P kontinuierlich verändert und so das Rad in Drehung versetzt.

Die Größe des Rades und die Hublänge des Kolbens stellen Sie unter *Hublänge* ein. Der Wert am Rollbalken *Auslenkung* beschreibt die Lage von P. Die Lage des Rades und des Kolbens verändern Sie durch Verschieben der Punkte A und B.



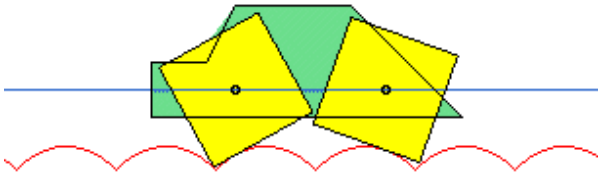
Soll sich das Rad möglichst gleichförmig bewegen, so darf sich P nicht mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Vielmehr muss seine Geschwindigkeit an den Rändern kleiner werden, seine Geschwindigkeit muss sich *sinusförmig* ändern.
Markieren Sie *linear*, so ist die Geschwindigkeit von P konstant. Während der Simulation erkennen Sie dann deutlich, dass das Rad nicht „rund läuft".

Mathematisch interessant sind auch Kurven die von Punkten auf der Strecke PQ erzeugt werden. Der Mittelpunkt M der Strecke PQ erzeugt eine eiförmige Kurve. Verändern Sie den Wert *Teilverhältnis*, so wird M auf PQ verschoben, sodass auch andere eiförmige Kurven erzeugt werden können.

14.9 Fahrzeug mit Polygonrädern

Zu den Merkwürdigkeiten mathematischer Kurven gehört, dass ein Fahrzeug mit quadratischen(!) Rädern auf einer Unterlage bestehend aus Bögen der Kettenlinie ruhig "rollen" könnte, ohne dass sich das Fahrzeug hebt oder senkt.

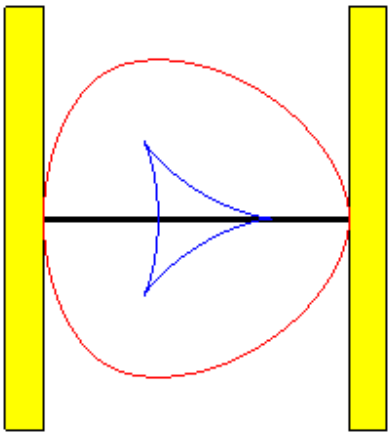
Allgemein kann sogar jedes gleichseitige N-Eck auf Kettenlinienstücken abrollen.



In diesem Teilprogramm können Sie so ein Fahrzeug untersuchen.
Nach dem *Simulation*sstart wird das Gefährt längs der Kettenlinien bewegt. Die Größe der Polygonräder können Sie am Rollbalken einstellen. Die Anzahl der Ecken des Polygons können Sie von 3 bis 10 verändern.
Markieren Sie *Kurve anzeigen*, so erhalten Sie zusätzlich die mathematische Kurve, auf der sich einer der Eckpunkte der Räder bewegt.

Anmerkung: Durch die spezielle Straßenform wirde erreicht, dass scheinbar ein rüttelfreies Fahren möglich ist.
Dies ist aber nicht ganz richtig. Hat das Fahrzeug einen normalen Motor, d.h. die Radachse wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt, so werden die Fahrgäste in horizontaler Richtung durchgeschüttelt, wenn auch nicht sehr toll. Jedesmal, wenn sich die Räder gerade in den Spitzen der zusammentreffenden Kettenlinien befinden, ist die Geschwindigkeit am größten, nimmt dann ab und ab der waagerechten Radstellung wieder zu.

14.10 Reuleaux-Räder, Drehkolbenmotor



Gleichdicke sind zylindrische Hohlkörper, deren Leitkurve aus Kreisbögen zusammengesetzt ist. Die längste Sehne von einem Punkt der Leitkurve zu einem anderen ist stets gleich lang.
Derartige Figuren wurden erstmals 1778 von Euler untersucht. Intensive Studien lieferte 1875 Franz Reuleaux (1829-1905).

Das Standard-Gleichdick ist das Kreisbogendreieck oder Reuleaux-Dreieck. Die Figur besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit drei auf die Seiten gesetzten Kreisabschnitten. Man erhält die Kreisbögen, in dem man um jeden Dreieckseckpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius der Dreiecksseite zeichnet.

Das Besondere an Reuleaux-Dreiecken ist, dass diese als Räder eines Fahrzeuges verwendet werden können. Dabei ist der Abstand zwischen unterstem und obersten Punkt der Dreiecke konstant.

Die spezielle Rolleigenschaft sieht man auch in der Darstellung.

Im Teilprogramm Reauleaux-Räder wird ein solches Fahrzeug demonstriert. Eingestellt werden kann, ob Reuleaux-Dreiecke pder -Fünfecke genutzt werden sollen; außerdem die *Radgröße*.
Während der Simulation wird das Fahrzeug kontinuierlich von links nach rechts bewegt. Auch wenn solche Räder möglich sind, erkennt man, dass Fahrgäste ziemlich durchgeschüttelt würden.

Drehkolbenmotor

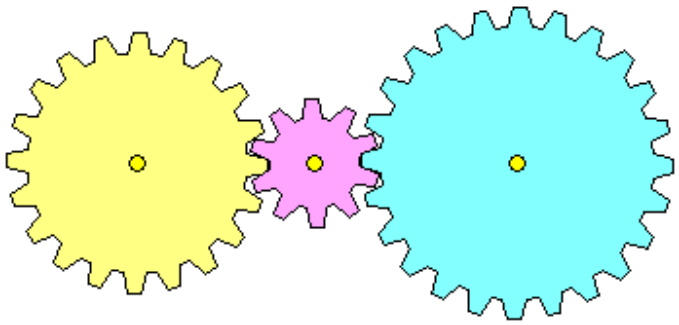
Eine wichtige Anwendung der Reuleaux-Dreiecke ist der Drehkolbenmotor oder Wankel-Motor.
Bei diesem bewegt sich ein Gleichdick drehend so in einem Motorraum, dass drei Brennkammern entstehen.

Der Vorteil dieses Motors besteht darin, dass jeder Takt ein Arbeitstakt ist. Leider erweist sich die technischen Umsetzung als problematisch. Insbesondere die Haltbarkeit der Motoren ist relativ gering. Gegenwärtig vertreibt nur die Firma Mazda Autos mit Drehkolbenmotoren.

In diesem Teilprogramm wird die prizipielle Wirkungsweise eines solchen Motors demonstriert.
Die merkwürdige Form des Motorraums ist eine Epitrochoide.

14.11 Zahnradgetriebe

Ein Zahnrad ist ein Rad mit über den Umfang gleichmäßig verteilten Zähnen. Es wird zur Übertragung zwischen zwei Drehungen oder einer Drehung und einer geradlinigen Bewegung verwendet, zum Beispiel bei Schaltgetrieben von Autos oder dem Räderwerk einer Uhr.



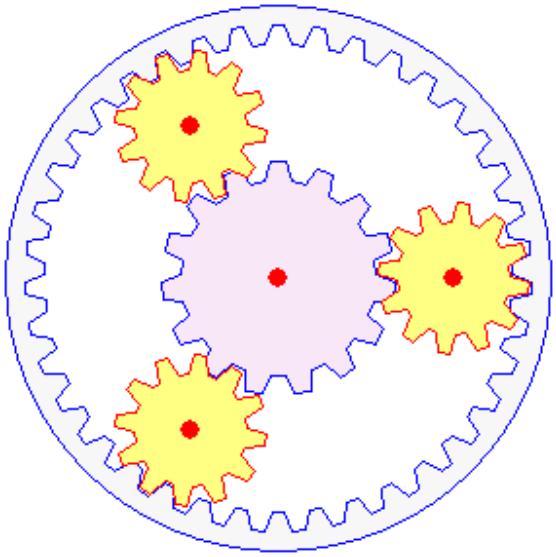
In diesem Teilprogramm können Sie ein einfaches Getriebe aus zwei oder drei Zahnrädern untersuchen.
An den drei Rollbalken stellen Sie die Anzahl der Zähne der Zahnräder von links nach rechts ein. Den Mittelpunkt des linken Zahnrades können Sie mit der Maus verschieben.
Wählen Sie nun den Schalter *Simulation*, so wird das linke Rad gedreht und die Drehung auf die anderen zwei Räder übertragen. Dabei gilt: Haben zwei Zahnräder die Anzahl von Zähnen z_1 und z_2, so verhalten sich die Umdrehungszahlen u1 und u2 indirekt proportional, d.h. $z_1 / z_2 = u_1 / u_2$.

Markieren Sie *nur 2 Räder*, zeichnet das Programm das dritte Rad nicht. Mit den

anderen Markierungsfeldern können Sie das Aussehen der Räder verändern.

14.12 Planetengetriebe

Ein Planetengetriebe besteht aus 4 Komponenten, dem Sonnenrad, dem Hohlrad, den Planetenrädern und dem Planetenträger. Daher kommt auch der Name Planetengetriebe, die Planetenräder umkreisen das Sonnenrad wie Planeten die Sonne. Die Berechnung eines Planetengetriebes ist nicht ganz einfach. Lesen Sie dazu bitte im Lexikon des Programms.



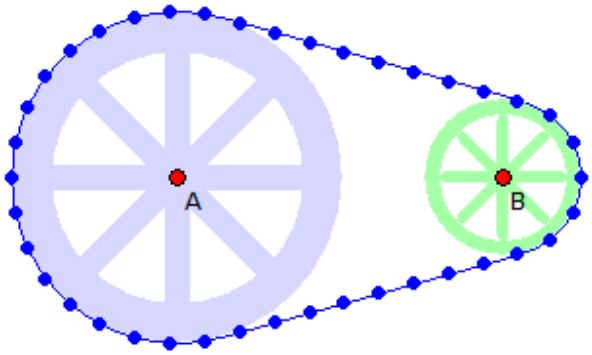
Dieses Teilprogramm stellt ein Planetengetriebe dar.
An den Rollbalken stellen Sie die Größe des Sonnenrades und der Planetenräder ein. Welche Objekte gezeichnet werden sollen, wählen Sie an den Markierungsfeldern aus. Während der Simulation bewegen sich die Planetenräder um das Sonnenrad. Interessant ist, das dadurch auch das Hohlrad in Bewegung versetzt wird.

14.13 Riemengetriebe

Ein Riemengetriebe besteht aus mindestens zwei Rädern, die durch einen Riemen, ein Band, eine Zahnkette usw. verbunden sind.
Dreht sich das eine Rad, so wird auf Grund der Reibung zwischen Riemen und Rad die Drehung auf das zweite Rad übertragen.

In diesem Teilprogramm können Sie ein einfaches Riemengetriebe aus zwei Rädern untersuchen.
An den zwei Rollbalken stellen Sie die Radien der zwei Räder ein. Die Mittelpunkte der Räder können Sie mit der Maus verschieben, allerdings nur soweit dass beide sich nicht überlagern. Eine vertikale Verschiebung ist nur möglich, wenn die Markierung *y-Koordinate fest* entfernt ist.

Wählen Sie nun den Schalter *Simulation*, so wird das linke Rad gedreht und die Drehung auf das andere Rad übertragen. Dabei gilt: Haben zwei Räder die Radien r_1 und r_2, so verhalten sich die Umdrehungszahlen u_1 und u_2 indirekt proportional, d.h. $r_1 / r_2 = u_1 / u_2$.



Verläuft der Riemen außen um beide Räder, so sind die Drehrichtungen gleich.

Allerdings kann auch ein *Innenriemen* betrachtet werden. In diesem wird nicht nur die Drehgeschwindigkeit, sondern auch die Drehrichtung geändert.
Der Rollbalken *Knoten* gibt die Möglichkeit, auf dem Riemen Punkte, die Knoten, hervorzuheben. Während der Simulation erhöhen diese die Anschaulichkeit.

14.14 Kreisbewegung zweier Körper

In der Kinematik und Dynamik werden außer Translationen (geradlinige Bewegungen) auch weitere einfache Bewegungen untersucht, z.B. die Kreisbewegung.
Diese tritt in der Technik bei einer Vielzahl von Anwendungen in der einen oder anderen Form auf. Bewegt sich dabei der Körper (Massenpunkt) mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag (die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich!), so nennt man die Kreisbewegung gleichförmig. Damit er auf der Kreisbahn bleibt, muss er aber durch eine Kraft, die Radialkraft, ständig auf der Bahn gehalten werden.

In diesem Teilprogramm können Sie die gleichförmige Kreisbewegung einer Massen simulieren. Bei Programmstart hat der Körper eine Masse von 1 kg, einen Bahnradius von 1 m und eine Umlaufzeit von 2 s.
Über die Rollbalken *Umlaufzeit* und *Bahnradius* können Sie diese Größen verändern. Das Programm stellt die Situation neu dar und berechnet die Bahngeschwindigkeit v, die Kreisfrequenz ω und die Radialkraft F.

Klicken Sie auf den Schalter *Simulation* bewegt sich der Körper.
Rechts werden in Abhängigkeit Ihrer Wahl Zeitdiagramme gezeichnet, die für eine der drei physikalischen Größen Ort, Geschwindigkeit und Radialkraft die Komponenten in Richtung x- und y-Achse anzeigen.

14.15 Schräger Wurf

In diesem Teilprogramm wird ein schräger Wurf berechnet und grafisch veranschaulicht.
In den Eingabezeilen sind die *Anfangswurfgeschwindigkeit* v_0, die *Anfangswurfhöhe* h_0, der *Abwurfwinkel* und die Stärke der *Gravitationsbeschleunigung* g einzutragen.

Das Programm berechnet nun für den Zeitraum t von 0 bis 800 s die Flugbahn eines Objektes und trägt die Ergebnisse in einer Tabelle ein. Gleichzeitig wird die Wurfkurve grafisch veranschaulicht.
Außerdem erhalten Sie die Werte der maximalen Wurfweite, d.h. bis zum Überschreiten der Höhe = 0, die maximale Wurfhöhe, die Steigzeit und die Weg-Koordinate, an der die Wurfbahn ihren höchsten Punkt erreicht.

14.16 Stoßsimulation

Das Teilprogramm *Stoßsimulation* gibt Ihnen die Möglichkeit die Vorgänge bei einem Stoß bewegter Kugeln zu untersuchen und zu veranschaulichen.

Dazu können Sie mit bis zu 30 Kugeln unterschiedlicher Masse Stoßexperimente durchführen. Nach dem Start erzeugt das Programm eine zufällige Belegung von 3 bis 25 Kugeln. Diese werden verschiedenfarbig dargestellt.
Die auf der jeweiligen Kugel notierte Zahl kennzeichnet deren Masse in Masseneinheiten. Alle Kugeln besitzen eine kinetische Energie und damit eine Geschwindigkeit in einer zufälligen Richtung.

Betätigen Sie nun den Schalter *Simulation*, startet das Programm die Simulation. Die Kugeln bewegen sich entsprechend ihrer Geschwindigkeit. Dabei stoßen sie an andere Kugeln an und werden entsprechend der Gesetze für einen zentralen Stoß abgelenkt. Zusätzlich werden die Kugeln an den Wänden reflektiert.
Abbrechen können Sie die Simulation mit einem Klick auf den Schalter *Stopp* oder durch Betätigung der *ESC*-Taste.

Auch bei dieser Animation können Sie vor dem Start Einstellungen verändern bzw. während der Darstellung korrigierend eingreifen, indem Sie die Werte an den Rollbalken verändern.

Die Kugeln im Darstellungsfenster löschen Sie über den Menüpunkt *Zurücksetzen* – anschließend erzeugt das Programm eine neue Ausgangssituation. Möchten Sie diese selbst beeinflussen, so können Sie durch einen linken Mausklick in die Darstellungsfläche eine Kugel hinzufügen. Mit der rechten Maustaste entfernen Sie auf Wunsch eine Kugel.

Jede neue Kugel erhält per Zufall eine Masse und Geschwindigkeit zugewiesen. Möchten Sie die den Kugeln innewohnende kinetische Energie durch Geschwindigkeitsvektoren charakterisiert sehen, so markieren Sie das Feld *Vektoren*.

Elastischer und unelastischer Stoß

In der Schulphysik betrachtet man zwei Spezialfälle des zentralen Stoßes: den elastischen und den unelastischen Stoß.

Bei einem elastischen Stoß wird der Stoß ohne Betrachtung der Verformung der zusammenstoßenden Kugeln berechnet, wodurch ein reiner Energie- und Impulsaustausch erfolgt. Bei einem unelastischen Stoß wird davon ausgegangen, dass ein Teil der Bewegungsenergie in Verformungsarbeit und im Endeffekt in Wärme umgewandelt wird. Die Kugeln bewegen sich nach dem reinen unelastischen Stoß mit gleicher Geschwindigkeit fort.

Beide Modelle sind Idealfälle des teilelastischen Stoßes und treten in der Realität

praktisch nicht auf. In Wirklichkeit wird nur ein gewisser Teil der Bewegungsenergie in Wärme transformiert. Sind m_1 und m_2 die Massen der Kugeln, v_1 und v_2 deren Geschwindigkeiten vor dem Stoß und k eine materialspezifische Konstante, der Stoßparameter, so wird die Energie umgewandelt und geht den Kugeln "verloren". Nach jedem Stoß sinkt damit die Gesamtbewegungsenergie, die Kugeln werden langsamer.

Diesen Stoßparameter k stellen Sie an dem Rollbalken *Stoßparameter* ein. Ein Wert gleich 1 entspricht einem elastischen Stoß, der Wert 0 einem unelastischen. Verwenden Sie zum Beispiel Billardkugeln aus Elfenbein, so ist der Stoßparameter gleich 0,89. Weitere typische Stoßparameter finden Sie im Lexikon unter dem Stichwort *Teilelastischer Stoß*. Möchten Sie, dass auch die Reflexion der Kugeln an den Wänden teilelastisch erfolgt, so markieren Sie das Feld *unelastische Wand.*

Neben der Darstellung zeigt Ihnen das Programm den jeweils aktuellen Wert der Gesamtbewegungsenergie aller Kugeln an. Simulieren Sie einen teilelastischen oder sogar unelastischen Stoß, können Sie während der Darstellung die kontinuierliche Abnahme der Gesamtenergie nachvollziehen.

Beachten Sie bitte, dass die Animation nicht selbstständig stoppt – auch dann nicht, wenn als Gesamtenergie 0 Einheiten angezeigt werden. Sie müssen die Simulation in jedem Fall selbst abbrechen.

14.17 Freier Fall mit Luftreibung

Dieses Teilprogramm berechnet einen freien Fall in Abhängigkeit vom Luftwiderstand. Tragen Sie dazu unter *Luftwiderstand* einen für den fallenden Körper typischen Wert ein oder wählen Sie diesen in der Liste *Luftwiderstandszahlen.* Fällt z.B. eine Scheibe senkrecht nach unten, so erzeugt die Luft einen wesentlich größeren Widerstand als bei einem Stromlinienkörper.

Nach der Festlegung der Fallzeit *(Berechnungszeit)* und Betätigung des Schalters *Berechnung* ermittelt das Programm für das Berechnungsintervall den zurückgelegten Fallweg und die erreichte Geschwindigkeit. Zusätzlich wird Ihnen die mögliche Grenzgeschwindigkeit für einen lang andauernden freien Fall angezeigt. So erreicht eine Kugel (mit hinreichend großer Masse) bei einem erdnahen freien Fall eine Maximalgeschwindigkeit von rund 53 km/h. Möchten Sie einen freien Fall ohne Luftreibung berechnen, so tragen Sie unter *Luftwiderstand* den Wert Null ein.

Dass alle Körper im Vakuum und in der Luft bei hinreichend großer Masse und gleichem Luftwiderstand gleich schnell fallen, war schon Galilei bekannt. Dazu nutzte er folgendes Gedankenexperiment:

Zwei gleich schwere getrennte Körper werden bei einem Fall aus größerer Höhe zum gleichen Zeitpunkt den Boden erreichen. Verbindet man beide Körper zu

einem einzigen, mit nunmehr doppelter Masse, sodass sie nunmehr dicht nebeneinander die gleiche Höhe durchfallen, muss sich dieselbe Fallzeit ergeben.

Innerhalb der grafischen Darstellung im linken oberen Fensterbereich wird der zeitliche Verlauf von Fallweg und Fallgeschwindigkeit veranschaulicht.

14.18 Schwingungsdifferenzialgleichung

Dieses Teilprogramm wertet die Schwingungsdifferenzialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung $d^2y/dt^2 + 2\,\delta\, dy/dt + \omega_0\, y = 0$

sowohl rechnerisch als auch grafisch aus.
Eine harmonische Schwingung kann dabei entweder gedämpft oder ungedämpft ablaufen. Je nach Stärke der Dämpfung tritt einer der drei Fälle

- harmonische gedämpfte (langsam abklingende) Schwingung
- aperiodischer Grenzfall
- Kriechfall (die Schwingung ist extrem gedämpft und geht sofort in den Ruhezustand über)

ein. Zur Auswertung einer Schwingung tragen Sie in die Eingabezeilen *Auslenkung, Anfangsgeschwindigkeit,* eine das schwingende System charakterisierende Größe (im Programm *Federkonstante*), die Stärke der Dämpfung, die Masse des schwingenden Körpers und die Länge der *Berechnungszeit* ein.

Nach einem Klick auf den Schalter *Berechnung* ermittelt das Programm in Abhängigkeit von der Zeit die jeweilige Auslenkung und Momentangeschwindigkeit des Federschwingers. Oberhalb der Tabelle finden Sie die grafische Auswertung, der Sie die Art der Schwingung entnehmen können.

14.19 Ideales Gas

Die Untersuchung des Verhaltens von Gasen gehört zu den wichtigsten Themen der Thermodynamik. Da aber die Theorie bei einem real existierenden Gas äußerst kompliziert ist und von einer Vielzahl von Faktoren beeinflusst wird, wurde das Modell des idealen Gases geschaffen.
Als ideal wird ein Gas bezeichnet, wenn bei unveränderter Temperatur das Gesetz von Boyle und Mariotte p * V = konstant ohne Einschränkung gilt. Dies bedeutet:

Die Teilchen (Atome bzw. Moleküle) sind Massenpunkte, d.h., dass ihr Volumen vernachlässigt werden kann.
Die Teilchen bewegen sich völlig unregelmäßig und unabhängig voneinander in dem ihnen zur Verfügung stehenden Raum.

Bei Zusammenstößen verhalten sich die Teilchen wie elastische Kugeln. Zwischen den Teilchen wirken, außer beim Zusammenstoß, keine Kräfte.

In diesem Unterprogramm wird das Verhalten eines idealen Gases simuliert. Zu Beginn befinden sich 40 kleine Moleküle des Typs A und 10 Moleküle größeren Radius des Typs B oberhalb einer optionalen Membran. Wählen Sie *Simulation*, simuliert das Programm die Molekularbewegung dieser Teilchen.

Aufgrund der Größe der "Löcher" in der *Membran* können nun die kleinen Moleküle in den unteren Fensterbereich gelangen, sie diffundieren, während die größeren Moleküle zurückgehalten werden. Schalten Sie die Membran aus, bewegen sich alle Teilchen durch den Gesamtbereich. Im Durchschnitt stellt sich, entsprechend den stochastischen Gesetzen des idealen Gases, nach einiger Zeit eine Gleichverteilung im oberen und unteren Raum ein.

Die *Anzahl der Teilchen* beider Sorten (maximal 100 für Molekül A und 30 für Molekül B) sowie die *Temperatur* können Sie an den Rollbalken einstellen. Erhöhen Sie die Temperatur steigt die mittlere kinetische Energie der Teilchen an. Dadurch läuft die Bewegung der Teilchen bzw. der Diffusionsvorgang schneller ab. Bei geringer Temperatur benötigt der Vorgang längere Zeit.

Allerdings ist es völlig gleichgültig, welche Werte Sie festlegen. Entsprechend der statistischen Gesetze der Molekularbewegung erfolgt immer die Einstellung eines Gleichgewichts, das heißt, im Durchschnitt befinden sich etwa gleich viele Teilchen im oberen wie auch im unteren Bereich.

Beachten Sie bitte, dass diese Simulation gewisse Anforderungen an Ihren Computer stellt. Auf einem nicht so schnellen Rechner wird die Berechnung und Darstellung etwas ruckartig erfolgen, wenn Sie z.B. alle möglichen 100 Moleküle A und 30 Moleküle B benutzen.

14.20 Pendelschwingung

Im täglichen Leben begegnet man in vielfältigster Form Vorgängen, die wiederholt, d.h. periodisch, ablaufen. Mechanische oder elektromagnetische Schwingungen sind Grundlage praktisch aller modernen technischen Geräte. In diesem Unterprogramm können Sie die Abläufe an einer einfachen mechanischen Schwingung verfolgen: dem Fadenpendel.

Der Theorie zufolge lässt sich die Auslenkung y eines Fadenpendels, d.h. der Abstand des Pendelkörpers von der Nulllage, durch die Gleichung

$$y = y_{max} \sin(\omega t)$$

beschreiben. y(max) stellt dabei die maximal mögliche Auslenkung dar, die Amplitude, t repräsentiert die verstrichene Zeit und $\omega = 2\pi / T$ die Kreisfrequenz, die sich für das Fadenpendel aus seiner Schwingungsdauer T berechnen lässt. Die

Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist nur von dessen Länge l und der wirkenden Gravitationsbeschleunigung g abhängig.

Anmerkung: Dies gilt nur für kleine Auslenkwinkel bis etwa 5°, danach liegt keine harmonische Schwingung mehr vor.

Nach dem Start des Teilprogramms stellen Sie an den Rollbalken die *Amplitude*, die *Länge* des Pendels und die *Fallbeschleunigung* in Einheiten der Normalfallbeschleunigung ein. Betätigen Sie den Schalter *Simulation*, beginnt das Programm die Schwingung des Pendels und zeichnet Ihnen zusätzlich das Elongation-Zeit-Diagramm und das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Schwingung. Abbrechen können Sie die Animation jederzeit durch einen Klick auf den Schalter *Stopp*. Markieren Sie *Kräfte*, so zeichnet das Programm die Vektoren der Gewichtskraft, der rücktreibenden Kraft und der Fadenkraft ein.

Während des Simulationslaufs können Sie alle Änderungen des Pendels an den Rollbalken ausführen.
Außerdem wird die Schwingungsdauer des Pendels berechnet.

Beachten Sie bitte, dass die Bewegung des Pendels in Echtzeit erfolgt. Dies bedeutet: Der Computer versucht, die Bewegung des Pendels entsprechend der berechneten Schwingungsdauer darzustellen. Sollte Ihr Computer über eine etwas langsamere Grafikkarte verfügen und der Prozessor etwas älter sein, kann es leider zu einer ruckartigen Darstellung kommen.

Beispiel: In der Darstellung wurde die Grundeinstellung des Fadenpendels genutzt. Ändern Sie z.B. die Länge des Pendels auf 40 cm, verringert sich die Schwingungsdauer auf 1,26875 Sekunden. Eine Änderung der Amplitude hat entsprechend der Theorie, zumindest für kleine Auslenkwinkel, keinen Einfluss. Verringern Sie nun zusätzlich die Fallbeschleunigung auf 0,2 g (etwa Mondfallbeschleunigung), erhöht sich die Schwingungsdauer auf 3,47 Sekunden. Starten Sie die Animation, schwingt das Pendel deutlich langsamer.

Gedämpfte Pendelschwingung

Alle bisher gemachten Aussagen gelten nur, wenn davon ausgegangen wird, dass das Pendel während der Schwingung keinerlei Energie verliert, also zum Beispiel keine Reibung auftritt.

In der Praxis ist dies aufgrund des Energieerhaltungssatzes nie realisierbar. Das Pendel wird durch die auftretende Reibung immer gedämpft und seine Amplitude damit im Laufe der Zeit kleiner. Für kleine Dämpfungen kann dies am einfachsten durch die Gleichung $y = e^{-kt}\, y_{max} \sin(\omega t)$ beschrieben werden.

Diesen Effekt können Sie nachvollziehen, indem Sie am Rollbalken *Dämpfung* einen von Null verschiedenen Wert einstellen. Je größer Sie die Dämpfung wählen, desto schneller wird während der Animation die maximale Auslenkung

des Pendels auf Null zurückgehen und damit die mechanische Energie in Wärme (Reibungsenergie) umgewandelt.

Beachten Sie bitte, dass das Programm die Bewegung des gedämpften Pendels nicht selbst stoppt, wenn die Amplitude sehr klein wird. Sie müssen die Animation in jedem Fall z.B. mit *ESC* beenden.

14.21 Gekoppelte Schwingung

Unter diesem Teilprogramm finden Sie eine Routine zur erzwungenen Schwingung. Hier sind zwei Fadenpendel gleicher Länge über eine mechanische Kopplung (mit Massenstück versehener Verbindungsfaden) verbunden. Wird das erste Pendel in Bewegung versetzt, überträgt sich die Energie auf das zweite, bis das erste Pendel zum Stehen kommt und nun das rechte Pendel der Erreger für das linke Pendel, den neuen Resonator, wird. Ist die Energie wieder zurücktransformiert, beginnt der Vorgang von vorn.

An den Rollbalken stellen Sie die *Amplitude* (maximale Auslenkung), die Pendel*längen* sowie die *Fallbeschleunigung* ein.

Nach *Simulation* beginnt das linke Pendel zu schwingen und die Energieübertragung setzt ein. Das Programm ermittelt erneut die Schwingungsdauer und stellt die Elongation-Zeit-Diagramme beider Fadenpendel dar. Über die Einstellung der *Dämpfung* können Sie festlegen, ob eine Schwächung der Amplitude durch Umwandlung in Wärmeenergie dargestellt werden soll. Der Abbruch der Simulation erfolgt wie üblich mit dem *Stopp*-Schalter. Während der Simulation können Sie die Parameter frei ändern.

14.22 Physisches Pendel

In den bisherigen Unterprogrammen zu Schwingungsprozessen wurde die periodische Bewegung eines Massenpunktes (Pendelkörper oder Federkörper) betrachtet bzw. die Masse des Schwingers theoretisch in einem Punkt vereinigt gedacht.

Dies ist selbstverständlich nur ein mathematisches Modell und die gefundenen Lösungen stellen nur Näherungslösungen realer Prozesse dar.

In der Praxis treten jedoch auch schwingende Körper auf, die aufgrund ihrer Ausdehnung nicht mehr als Punktmasse angesehen werden können. Schwingt zum Beispiel ein Stab um einen Drehpunkt an einem seiner Endpunkte, so liegt ein physisches oder physikalisches Pendel vor. Nach dem Start dieses Programmteils können Sie ein physisches Pendel (Stab) mit einem mathematischem Pendel (Fadenpendel) vergleichen. Für beide Pendel können Sie erneut die *Amplitude* sowie die *Längen* an den Rollbalken einstellen.

Das Programm ermittelt die Schwingungsdauer beider Pendel sowie die reduzierte Pendellänge. Unter der reduzierten Pendellänge versteht man die Länge eines Fadenpendels, das die gleiche Schwingungsdauer wie ein physisches Pendel besitzt. Für die Schwingungsdauer eines allgemeinen physikalischen Pendels gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{(J_A/(mgs))} = 2\pi \sqrt{(2l/(3g))}$$

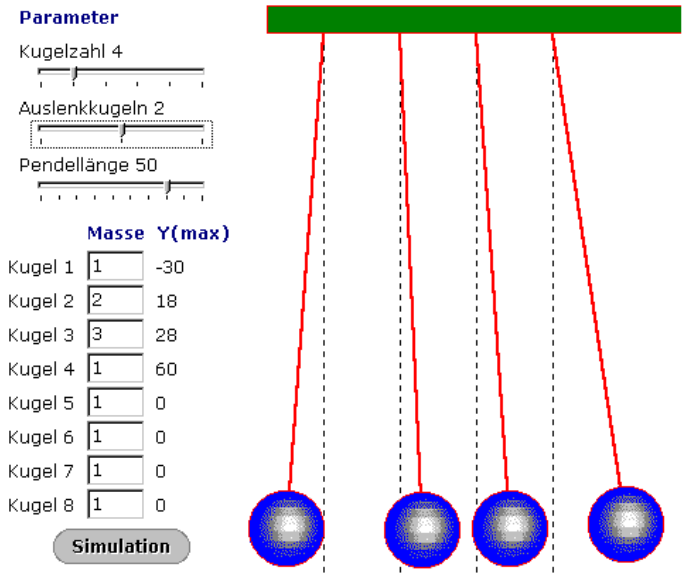
wobei J_A das Trägheitsmoment des pendelnden Körpers bezüglich der gewählten Drehachse, l die Länge des schwingenden Stabes, m die Masse des Körpers und s der Abstand des Drehpunktes vom Körperschwerpunkt sind. Die reduzierte Pendellänge erhalten Sie mit $l' = J_A / (ms) = 2/3\ l$.

Stellen Sie einen 60 cm langen Stab und ein Fadenpendel von 40 cm Länge ein, so können Sie zum einen an den synchronen Schwingungen, zum anderen aber auch an den identischen Elongations-Zeit-Diagrammen die gleichen Schwingungszeiten nachvollziehen.

Die Demonstration der Bewegung starten Sie erneut mit dem Schalter *Simulation*. Abbrechen können Sie jederzeit mit einem erneuten Schalterklick. Während der Animation können Sie wie gewohnt die Parameter verändern.

14.23 Pendelkette

Eine immer wieder verblüffende Versuchsanordnung zur Demonstration des Energie- und Impulserhaltungssatzes ist die Pendelkette (Impulspendel). Mehrere Fadenpendel sind so hintereinander angebracht, dass sich die Pendelkörper gegenseitig berühren. Wird nun auf der linken Seite eine Kugel ausgelenkt und freigegeben, so stellt man fest, dass auch nur eine Kugel auf der rechten Seite eine Auslenkung erfährt. Nimmt man zwei Kugeln, fliegen auch zwei rechts weg und nicht, wie man zuerst meint, eine Kugel mit doppelter Stärke usw. Die Ursache hierfür liegt in der Übertragung sowohl der kinetischen Energie der Kugeln als auch deren Impuls.



Dieses berühmte Experiment können Sie unter diesem Teilprogramm demonstrieren.

Dabei gibt Ihnen das Programm die Möglichkeit, auch Pendelkörper verschiedener Massen zu betrachten. Geben Sie dazu die *Masse* eines jeden Körpers in die Felder ein. Legen Sie weiterhin die *Pendellänge* fest sowie die *Anzahl der Auslenkkugeln*. Die Anzahl der Kugeln der Pendelkette können Sie an den Pfeilschaltern von 3 bis maximal 8 festlegen. Die Animation

starten Sie mit dem Schalter *Simulation*. Abbrechen können Sie mit *ESC* oder dem Schalter.

Während der Animation berechnet das Programm die Werte der maximalen Auslenkungen der Pendelkörper.

Die Bewegung der Kugeln wird ohne Reibung (Dämpfung) betrachtet. Außerdem erfolgt der Stoß hundertprozentig elastisch. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Berechnung bei unterschiedlichen Pendelmassen anspruchsvoll ist und nicht zur gymnasialen Ausbildung gehört.
Vor Beginn der Animation ermittelt das Programm den maximalen Auslenkwinkel der einzelnen Kugeln. Geben Sie zu große Massen ein oder verwenden Sie eine sehr kleine Pendellänge, können die Winkel 90° überschreiten. In diesem Fall meldet Ihnen das Programm: *Impuls würde Pendel zerstören*
und startet die Animation nicht.

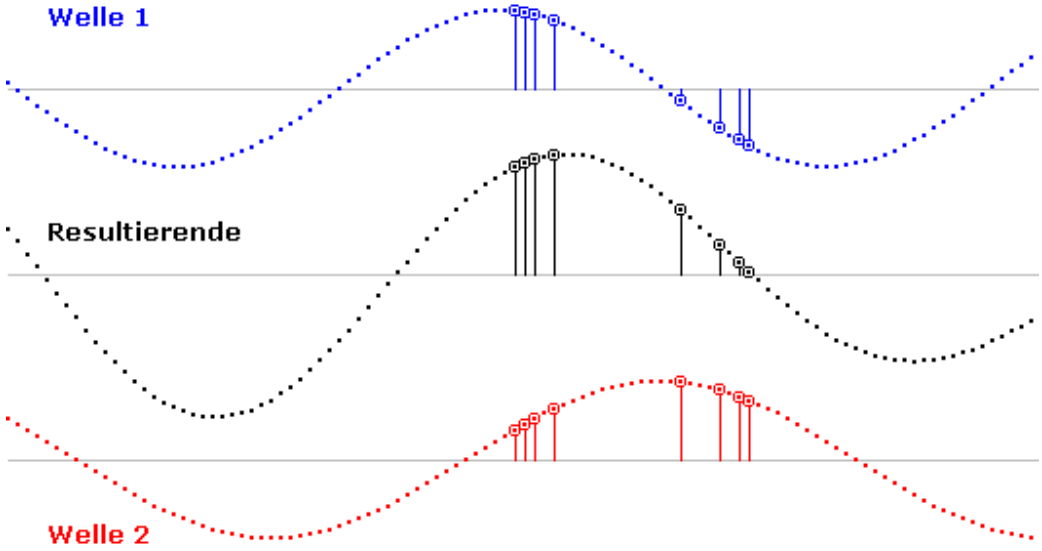
14.24 Wellenmaschine

Unter diesem Punkt stellt Ihnen das Programm die räumliche und zeitliche Überlagerung zweier Wellen dar – im Gegensatz zu anderen Teilprogrammen nicht als Interferenzbild, sondern die räumliche Schwingung der einzelnen Teilchen. Aus mathematischer Sicht werden hier zwei um einen Phasenwinkel verschobene Sinusfunktionen addiert.

Im Darstellungsfenster laufen im oberen und unteren Teil zwei Wellen.
Deren *Frequenz* und *Amplitude* stellen Sie für beide Wellen einzeln an den Rollbalken ein. In der Fenstermitte zeichnet Ihnen das Programm während der Simulation, die Sie erneut durch den Schalter *Simulation/Stopp* ein- und ausschalten, die resultierende Welle, also die Überlagerung beider Wellen. Zusätzlich können Sie unter Berücksichtigung der Leistungsfähigkeit Ihres Computers die Darstellungs-*Geschwindigkeit* sowie eine evtl. *Phasenverschiebung* zwischen beiden Wellen einstellen.

Außer normalen sinusförmigen Wellen können Sie auch Dreieckswellen oder Rechteckwellen einstellen.
Interessant ist ebenso, beide Wellen aufeinander zulaufen zu lassen. Markieren Sie dazu den Punkt *gegenläufige Wellenbewegung.* Bewegen sich beide Wellen aufeinander zu und haben Sie keine Phasenverschiebung sowie gleiche Amplituden und Frequenzen eingestellt, können Sie somit eine stehende Welle als Resultierende konstruieren. Dabei versteht man unter einer stehenden Welle eine Welle, bei der die "Wellenknoten" (Teilchen ohne Auslenkung) konstant am gleichen Ort bleiben.
Konkret erreichen Sie dies z.B. mit

- Amplitude 1 = 40 , Amplitude 2 = 40
- 1.Frequenz = 50 , 2.Frequenz = 50
- und zusätzlich *gegenläufige Wellenbewegung* an



Das vollständige Auslöschen zweier Wellen können Sie ebenso simulieren. Nutzen Sie zwei Wellen mit gleicher Amplitude und Frequenz, aber mit einer Phasenverschiebung von 180°, so löschen sich diese gegenseitig vollständig aus. Zu bemerken ist hier, dass während der Simulation alle Parameter weiterhin veränderbar sind.

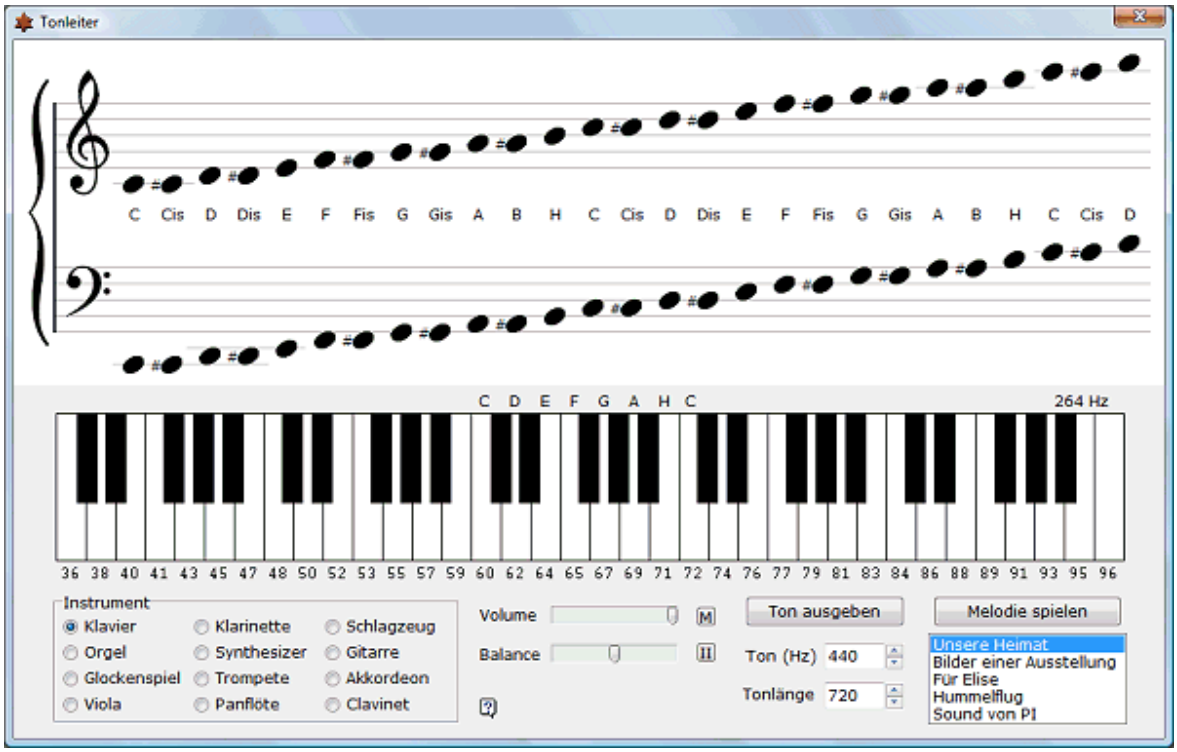
Stellen Sie sich die dargestellten Wellen z.B. als Wasserwellen vor, so wird, streng physikalisch gesehen, keine Masse, sondern ausschließlich Energie übertragen. Dazu schwingen die Wasserteilchen am Ort auf und ab. Diese Einzelschwingungen können Sie ebenso in der Simulation darstellen.
Klicken Sie dazu links mit der Maus auf solche "Wasserteilchen". Das Programm zeigt Ihnen nun, wie diese Teilchen während der Wellenbewegung auf- und abwärts schwingen. Insgesamt können Sie maximal 200 Teilchen markieren. Markieren Sie das Feld *200 Teilchen*, so werden diese sofort angezeigt.

14.25 Tonleiter

Mathematik und Musik sind seit altersher eng miteinander verbunden. So gehörten zu den vier Wissenschaften der Antike Arithmetik, Geometrie, Astronomie und eben die Musik. Insbesondere die Pythagoreer glaubten, die Planeten und Sterne seien so durch Intervalle voneinander getrennt, die den harmonischen Klängen von Saiten entsprächen. Die Bewegung der Planeten erzeuge dann die so genannte Sphärenmusik.
Johannes Kepler nannte sein Hauptwerk „Harmonice mundi" und sah in der Weltharmonie auch eine Verbindung von mathematischen und musikalischen Harmonien. Wie bei Pythagoras entsprach die Ordnung der Zahlenverhältnisse denen der Musik.

Dieses Teilprogramm beschäftigt sich auf einfache Weise mit den mathematisch-physikalischen Verhältnissen bei der Tonausgabe.
Im oberen Fensterbereich finden Sie eine Tonleiter, beginnend beim

eingestrichenen C im oberen Teil mit dem Violinschlüssel, beim großen C im unteren Teil mit dem Bassschlüssel.



Klicken Sie auf eine der Noten, spielt das Programm einen Ton der gewählten Höhe ab. Ein Ton ist dabei physikalisch gesehen, eine reine Sinusschwingung bestimmter Frequenz. So hat der Ton A, der sogenannte Kammer- bzw. Stimmton, in Deutschland die Frequenz 440 Hz, in Frankreich 432 Hz, in den USA mitunter 450 Hz. Er ist die Bezugsfrequenz, aus der für die Tonleitern die Frequenzen aller anderen Töne errechnet werden.

Die harmonische oder diatonische Tonleiter besteht aus acht Tönen. Die C-Dur Tonleiter beinhaltet z.B. die Töne c, d, e, f, g, a, h und c (Prime, Sekunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime und Oktave). Die Frequenzen der einzelnen Töne stehen dann in folgendem Verhältnis zu einander:

d = 9/8 c	e = 10/9 d	f = 16/15 e	g = 9/8 f
a = 10/9 g	h = 9/8 a	C = 16/15 h	

Die Verhältnisse 9/8 und 10/9 bezeichnet man als ganzes und 16/14 als halbes Intervall. Das Verhältnis von Prime zu Oktave beträgt 2 : 1. In der chromatischen Tonleiter werden die ganzen Intervalle in zwei halbe aufgeteilt. Dabei werden entweder die tieferen Töne um 25/24 erhöht (cis, dis, fis, gis, ais) oder die höheren Töne werden 24/25 erniedrigt (des, es, ges, as, b).

Unterhalb der Tonleiter ist die Tastatur eines Klaviers abgebildet. Klicken Sie mit der Maus auf einer der Tasten, so wird ebenfalls der zugehörige Ton abgespielt.

Unter *Instrument* können Sie eines der vordefinierten auswählen.
Über den Schalter *Ton ausgeben* wird ein Ton der eingestellten Frequenz erzeugt.

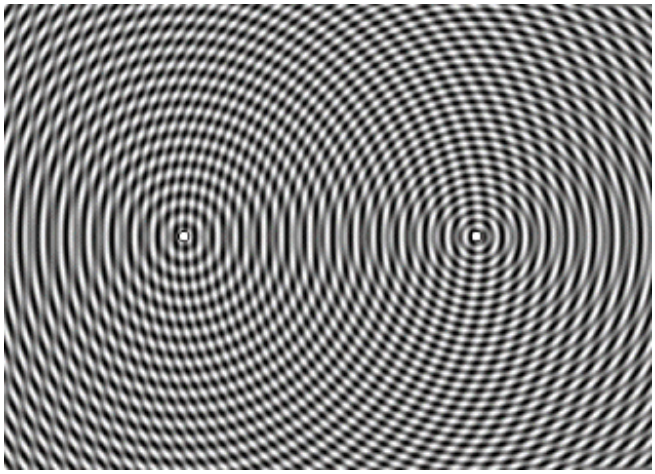
Melodie spielen

Neben dem Schalter *Melodie spielen* finden Sie vier vordefinierte Tonfolgen, das wunderschöne Lied „Unsere Heimat" von Horst Naumilkat, den 1.Teil „Promenade" der „Bilder einer Ausstellung" („Картинки с выставки") von Modest Mussorgski, „Für Elise" von Ludwig van Beethoven und den „Hummelflug" („Полёт шмеля") aus der Oper „Das Märchen vom Zaren Saltan" von Nikolai Rimski-Korsakow.
Die Geschwindigkeit des Musikstücks können Sie unter *Tonlänge* regeln, die Tonausgabe über *Volume* = Lautstärke, *Balance* und die Schalter *M* (Mute = Stillschalten) und *II* (gleichmäßige Balance).

Seit Jahrhunderten suchen Mathematiker nach Mustern in der Ziffernfolge von PI. Dabei werden zum einen merkwürdigste Grafiken erstellt und zum anderen die Ziffern mit Tönen veranschaulicht.
Wählen Sie *Sound von PI* spielt das Programm die 50 ersten Ziffern der transzendenten Zahl als Tonfolge ab. Der Programmautor findet, dass dies äußerst wirr und auf jedem Fall komisch klingt, aber vielleicht finden Sie in der „Melodie" eine Regelmäßigkeit.

14.26 Interferenz- und Beugungsbilder

Eine Welle ist ein örtlich und zeitlich periodischer Vorgang, bei dem Teilchen oder Feldgrößen Schwingungsvorgänge ausführen. Bei Querwellen (transversale Wellen) ist die Richtung des Schwingungsvorgangs senkrecht zur Richtung der Wellenausbreitung.
In diesem Fall unterscheidet man lineare Wellen, Flächenwellen und Raumwellen.



Treffen zwei Wellen gleicher Natur aufeinander, so überlagern sich die Schwingungsvorgänge. Dabei kann es zu einer zeitlichen Verstärkung oder Abschwächung, ja sogar zur Auslöschung der Schwingung kommen. Diese Überlagerung wird Interferenz genannt.

Da auch bei Wellen das "Prinzip der ungestörten Überlagerung" gilt (Superpositionsprinzip), ermittelt sich die Elongation zur Zeit t an einem Ort x von zwei Wellenzügen gleicher (!) Frequenz mit:

$$y_R = y_{max,1} \sin(\omega (t - x/c)) + y_{max,2} \sin(\omega (t - (x+\Delta x)/c))$$

Δx ist die Differenz der Laufstrecken (Gangunterschied) beider Wellen am Ort der Überlagerung.

Wünscht man nur einen prinzipiellen Überblick über die auftretende Interferenzerscheinung, so nutzt man zweckmäßigerweise eine grafische Darstellung. Hier werden je Bildpunkt die Auslenkungen je Welle ermittelt, addiert und mit einer entsprechenden Farbe gezeichnet. Wählen Sie dieses Teilprogramm, können Sie ein derartiges Interferenzbild zweier Wellen konstruieren lassen.

An den Rollbalken stellen Sie die *Wellenlängen* der zwei Wellen und den *Abstand* der Erregungszentren ein. Im Anschluss an einen Klick auf den Schalter *Darstellung* ermittelt das Programm das Interferenzbild.

Nach der Konstruktion des Interferenzbildes sind deutlich Gebiete der Verstärkung und Abschwächung zu sehen: Dunkle Gebiete charakterisieren die Verstärkungsbereiche, helle Gebiete die Abschwächung. Zum besseren Verständnis stellen Sie sich bitte folgendes Modell vor:

In einem durchsichtigen Wasserbehälter werden die zwei Wellen (mechanische!) durch periodisches Eintauchen eines Körpers erzeugt. Unter dem Behälter befindet sich eine Lichtquelle, die das Wasser auf eine Bildwand projiziert. In Bereichen der Verstärkung (Wellenberge im Wasser) muss das Licht mehr Wasser durchdringen und wird dadurch abgeschwächt. Die Projektion erscheint dunkler. In den Abschwächungsbereichen (Wellentäler) wird weniger Wasser durchdrungen und das Bild wird heller.

Intensitätsverhältnis beider Wellen

Hier können Sie auch die Amplituden beider Wellen verändern. Voreingestellt ist, dass beide Wellen gleich "stark" sind, d.h., es kann tatsächlich zu einer vollständigen Auslöschung bei Interferenz kommen. In der Praxis werden sich aber beide Wellen nicht nur in der Wellenlänge, sondern auch in ihrer Energie unterscheiden – fallen zwei Steine in ein stehendes Gewässer, so bewirken die Masse und Größe der Steine auch zwei unterschiedlich starke Wasserwellen.

Zur Untersuchung dieser Situation können Sie am Rollbalken *Intensität* das Verhältnis der Amplituden der links und rechts gezeichneten Wellen einstellen. Eine Intensität von 10 : 10 bedeutet gleiche Stärke, 1 : 10 bewirkt, dass die linke Welle nur mit 1 / 10 der Stärke der anderen dargestellt wird. Umgekehrt berechnet das Programm bei einem Verhältnis von 10 : 40 die zweite Welle viermal stärker als die erste.

Beugung von Wellen

Bei mechanischen und elektromagnetischen Wellen treten außer den allgemein bekannten Eigenschaften der Reflexion, Brechung und Interferenz auch

sogenannte Beugungserscheinungen auf. Diese entstehen, wenn die Welle auf ein für sie undurchdringliches Hindernis trifft. Nach dem Huygensschen Prinzip ist jeder von einer Wellenbewegung erfasste Punkt eines Mediums selbst wieder Ausgangspunkt einer neuen Welle, einer Elementarwelle. Das Zusammenwirken aller Elementarwellen liefert eine neue Wellenfront.

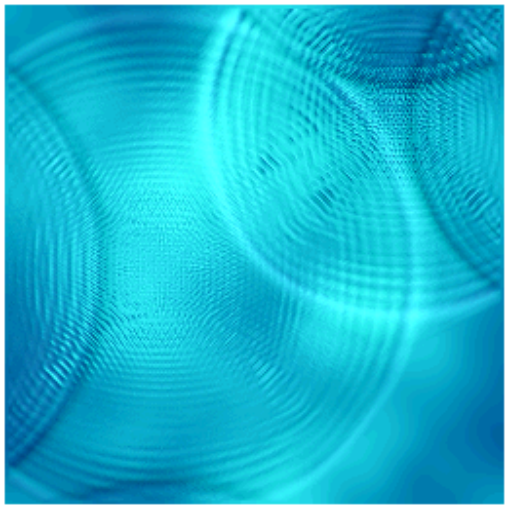
Dadurch entsteht auch hinter einem Hindernis in dem eigentlich für die Welle direkt nicht erreichbaren Gebiet eine Wellenerscheinung. Dieser Effekt wird als Beugung bezeichnet. Trifft eine Welle auf ein Hindernis, einen Spalt oder Doppelspalt, entstehen aufgrund dieser Beugung typische Bilder. Diese Beugungsbilder können Sie auch in diesem Teilprogramm zeichnen lassen. Markieren Sie dazu das Feld *Beugung von Wellen.*

Wählen Sie zuerst das entsprechende Hindernis (*Spalt* oder *Doppelspalt*) und anschließend die *Wellenlänge* der Welle. Das Programm benutzt zur Darstellung eine lineare Welle, die nach dem Hindernis entsprechend modifiziert wird. Zur Veränderung der entstehenden Beugungsbilder können Sie weiterhin die *Breite des Spalts* bzw. den *Abstand der Öffnungen* des Doppelspalts verändern. Betätigen Sie dazu den Rollbalken. Nach einem Klick auf *Darstellung* zeichnet das Programm das Beugungsbild.

Phase ändern

Mit dem Schalter Phase ändern starten Sie eine Simulation, bei der die Wellen mit einer sich verändernden Phasenverschiebung gezeichnet werden. Damit ergibt sich der Effekt, dass die Welle scheinbar sich bewegt.
Beachten Sie bitte, das die Berechnung und Simulation sehr zeitintensiv ist. Auf einem älteren Computer wird die Simulation nur langsam ablaufen.

14.27 Wasserwellen



Fällt ein Gegenstand auf eine ruhige Wasseroberfläche, so entsteht eine nach außen laufende, kreisförmige Wasserwelle. Treffen zwei solcher Wellen aufeinander, so überlagern sie sich; es kommt zur Interferenz mit Verstärkung und Auslöschung der Wellenschwingung an verschiedenen Stellen. Ein ähnlicher Effekt entsteht, wenn eine Welle am Rand der Wasserfläche reflektiert wird.

In diesem Teilprogramm können Sie derartige Effekte simulieren. Nach dem Start wird eine Wasseroberfläche dargestellt, bei der ein unterschiedlich gefärbter Untergrund hindurchscheint.
Möchten Sie einen einfarbigen Untergrund, so wählen Sie diesen aus.

Klicken Sie nun mit der linken Maustaste auf die Wasserfläche, so wird eine Kreiswelle ausgelöst. Die Stärke der Welle können Sie an dem Rollbalken einstellen. Klicken Sie mehrfach auf eine Stelle, so wird eine wesentlich stärkere Welle ausgelöst. Diese wird am Rand reflektiert und interferiert.
Durch die Reibung der Teilchen wird eine Wasserwelle nach einiger Zeit schwächer, sie wird gedämpft. Die Stärke der Dämpfung können Sie ebenfalls wählen.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnung anspruchsvoll ist und auf langsameren Computern nur eine langsame Ausbreitung der Wellen ermöglicht.

14.28 Wellendarstellungen

Fallen Regentropfen in einen See oder wirft man selbst einen Stein hinein, so entstehen kreisrunde Wellen, die sich immer weiter ausdehnen. Auch wenn dies etwas ganz Einfaches ist, so gibt es wohl kaum jemanden, der nicht zumindest als Kind schon einmal durch einen Steinwurf diese Wellen erzeugt hat und ihnen interessiert nachsah.

Im Untermenü *Physik* | *Mechanik* finden Sie in unter *Wellendarstellungen* sechs Auswahlpunkte zu Wellen, beginnend bei *Welle 1* bis *Addition von Wellen*. Nach Auswahl eines Eintrags stellt das Programm die Wellen in einem Schrägbild dar. Die Wellenlänge, d.h. der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Wellenbergen, stellen Sie am Rollbalken ein.
Klicken Sie nun auf den Schalter *Simulation*, beginnt das Programm mit einer Animation dieser Welle. Dabei wird die Ausbreitung der Welle im Lauf der Zeit dargestellt.

Insgesamt können Sie wählen unter:

- Welle 1 ... Welle mit dem Ausbreitungszentrum in der Darstellungsmitte
- Welle 2 ... Kreiswelle mit Erregungszentrum am Rand
- Querwelle ... Welle mit linearer Ausdehnung
- Welleninterferenz 1 ... Überlagerung zweier Kreiswellen
- Welleninterferenz 2 ... Überlagerung zweier Längswellen
- Addition von Wellen ... Überlagerung zweier Kreiswellen gleicher Wellenlänge, jedoch mit Phasenverschiebung (*2.Amplitude* einstellbar)

14.29 Doppler-Effekt

Als Doppler-Effekt bezeichnet man die Veränderung der Frequenz von Wellen bei einer Relativbewegung zwischen Wellenerreger und Beobachter. Bei Verringerung des Abstandes zwischen Wellenerreger und Beobachter nimmt die wahrgenommene Frequenz zu, bei Vergrößerung des Abstandes nimmt sie ab. Diesen Effekt kennt jeder von einem Auto, dass an einem vorüberfährt. Deutlich ändert sich dabei das Geräusch des Fahrzeugs.

In diesem Teilprogramm wird dieser Doppler-Effekt demonstriert.
Starten Sie die Simulation erzeugt der Sender eine Welle, deren Wellenberge bei dem Empfänger eintreffen. Stellen Sie nun eine *Geschwindigkeit der Quelle* ein, so treffen die Wellenberg beim Herannahen schneller ein, beim Entfernen mit größerem Abstand. Damit ist die Frequenz zuerst höher, später kleiner.

Erhöhen Sie sogar die Bewegungsgeschwindigkeit c auf einen Wert größer 1, so eilt der Sender seinen Wellen voran. Dabei entsteht eine Stoßwelle, der Machsche Kegel. Bewegt sich ein Objekt schneller als die Schallgeschwindigkeit, d.h. schneller als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, formen die Schallwellen diesen Kegelmantel.
Bei Überschallflugzeugen ist das Eintreffen des Machschen Kegels beim Empfänger als der unangenehme Überschallknall wahrzunehmen.

14.30 Fermatsches Prinzip: Brechungs- und Reflexionsgesetz

In diesem Teilprogramm können Sie das Fermatsche Prinzip am *Brechungs*- und *Reflexionsgesetz* testen.

Brechungsgesetz

Hier tritt ein Lichtstrahl aus Luft in das optisch dichtere Medium Wasser ein. Am Punkt B wird der Lichtstrahl gebrochen. In Luft hat das Licht eine Geschwindigkeit von knapp 300000 km/s, in Wasser ist es dagegen deutlich "langsamer", hier erreicht es nur 225000 km/s.
Hinweis: In Wasser können Teilchen schneller sein als das Licht, was im Vakuum unmöglich ist!

Da hier das Licht das Fermatsche Prinzip des zeitlich kürzesten Weges erfüllt, muss der Strahl aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten seinen Weg ändern.
Verschieben Sie nun den Brechungspunkt B, ermittelt das Programm die Zeitdauer für den Lichtweg von der Quelle zum Auge. Sind Sie der Meinung, die kürzeste Zeit und damit den optimalen Weg gefunden zu haben, so können Sie über das Markierungsfeld *Winkel einschalten* die Darstellung des Einfalls- und Brechungswinkels zuschalten. Allerdings nützt dies scheinbar nicht viel. Fällt der Lichtstrahl unter einem Winkel von z.B. 61° ein, so wissen nur die Wenigsten, dass der Brechungswinkel im Wasser dann 41° beträgt. Aus diesem Grund gibt das Programm zusätzlich zu dem Winkel den Quotienten der Sinuswerte beider Winkel an. Nach dem Brechungsgesetz muss dann

> Sin(Einfallswinkel) : Sin(Brechungswinkel) = Brechungszahl(Wasser) : Brechungszahl(Luft)

gelten. Da die Brechungszahl n für Wasser rund 1,33 und für Luft rund 1 beträgt, haben Sie den tatsächlichen Weg des Lichts gefunden, wenn genau der Wert 1,33 als Quotient angezeigt wird.

In der Darstellung ist der optimale Weg noch nicht gefunden worden. Da der Quotient gleich 1,48 ist, muss der Brechungswinkel zu klein sein.

Verschieben Sie den Brechungspunkt etwas nach links, werden Sie die korrekte Einstellung finden. Auch in diesem Teilprogramm können Sie durch Anklicken von Q (Lichtquelle) und A (Auge) deren Position verschieben.

Reflexionsgesetz

Trifft ein Lichtstrahl auf eine lichtundurchlässige Fläche, so wird er von dieser zurückgeworfen, reflektiert. Ist die Fläche besonders glatt, evtl. sogar ein Spiegel, so wird die überwiegende Lichtmenge zurückgegeben. Die Art und Weise der Reflexion unterliegt dabei einem physikalischen Gesetz, dem Reflexionsgesetz:

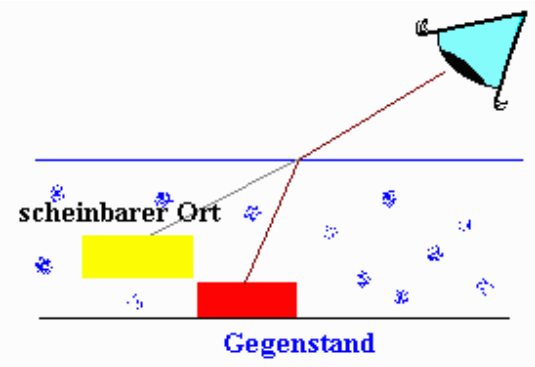
Der einfallende Strahl, das Einfallslot und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene, der Einfallsebene. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

Dieses Gesetz lässt sich dabei relativ einfach aus dem Fermatschen Prinzip herleiten, dass ein Lichtstrahl stets den Weg wählt, bei dem er in kürzester Zeit von der Quelle zum Empfänger gelangt.

Nach dem Start finden Sie in der Darstellung eine spiegelnde Fläche, die Lichtquelle und das Auge. Eingezeichnet sind theoretische Lichtstrahlen von der Quelle zum Spiegel und zum Auge. Das Programm ermittelt die Zeit, die der Lichtstrahl auf diesem Weg benötigen würde. Um nun das Fermatsche Prinzip zu realisieren, verschieben Sie den Reflexionspunkt auf dem Spiegel so lange, bis die Zeit für den Lichtweg minimal wird.

14.31 Brechungsgesetz

Steht man am Rande eines klaren Sees, Flusses oder des Beckens eines Freibades, so erscheint die Tiefe des Wassers meist gering. Spätestens beim Baden merkt man dann, dass dies ein Trugschluss war: Das Gewässer ist tiefer als zunächst angenommen. Die Ursache dafür liegt in der Brechung des Lichts.



Befindet sich z.B. ein Gegenstand auf dem Grund eines Sees, so wird der Lichtstrahl an der Wasseroberfläche gebrochen. Für das menschliche Auge und entsprechend unserer Erfahrung sieht es aber so aus, als ob der Lichtstrahl ungebrochen ist, d.h., der Gegenstand erscheint uns in geringerer Tiefe und zusätzlich weiter entfernt (siehe Abbildung). Mit der Brechung des Lichts beschäftigt sich dieses Teilprogramm.

Tritt ein Lichtstrahl aus einem optischen Medium in ein anderes über, so wird er

nach dem Brechungsgesetz abgelenkt, gebrochen, d.h., der Winkel zu einer gedachten Senkrechten (Lot) bzgl. Der Grenzfläche wird nach dem Gesetz

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

verändert, wobei n das für diese beiden Medien typische Brechungsverhältnis (bezogen auf Vakuum) darstellt.

Zum Beispiel wird Licht bei einem Übergang Luft - Wasser zum Lot hin gebrochen, bei einem Übergang Glas - Luft vom Lot weg. Dieses Gesetz können Sie in dem Teilprogramm *Brechungsgesetz* simulieren. Sie können Folgendes einstellen:

- *Einfallswinkel* - den Winkel zwischen dem von links oben einfallenden Lichtstrahl und dem Lot,
- *Brechungsindex* - den für die Art und Stärke der Brechung verantwortlichen Parameter.

Dieser Brechungsindex wird automatisch ermittelt, wenn Sie in den beiden Listboxen jeweils eines der vorgegebenen Medien auswählen. Dabei stehen Ihnen 80 verschiedene Stoffe zur Verfügung.

Beispiel: Wählen Sie als Ausgangsmedium Kohlendioxid und als zweites Medium Wasser, ermittelt das Programm einen Brechungsindex von 1,33. Bei einem Einfallswinkel von 45° würde der gebrochene Lichtstrahl unter einem Winkel von 32,1° zum Lot austreten.

Totalreflexion

Neben der grafischen Darstellung erhalten Sie zusätzlich den Wert des Brechungswinkels und den Grenzwinkel der Totalreflexion. Dieser Effekt tritt immer dann ein, wenn Licht aus einem optisch "dichten" Stoff in einen "dünneren" übertritt und der Einfallswinkel zu groß wird. In diesem Fall müsste entsprechend dem Brechungsgesetz der Brechungswinkel über 90° anwachsen, was physikalisch unmöglich ist. In diesem Fall wird das Licht an der Grenzschicht vollständig reflektiert.

Den Winkel α_G, ab dem Totalreflexion einsetzt, ermitteln Sie mit $\sin \alpha_G = n$, wobei n erneut der Brechungsindex ist. Tritt das Licht aus einem optisch "dünneren" in einen "dichteren" Stoff über, wird $n > 1$. Für diesen Fall ist der Sinus nicht definiert und der Totalreflexionswinkel existiert nicht.

Der Vorgang der Totalreflexion ist im Übrigen Tauchern sehr bekannt: Befinden sie sich unter Wasser, so können sie nur in einem relativ kleinen Bereich senkrecht über ihnen Gegenstände über dem Wasser sehen. Außerhalb des Sichtfeldes tritt Totalreflexion auf. Eine sehr wichtige Anwendung der Totalreflexion sind Lichtleiterkabel, bei denen fast verlustfrei riesige Datenmengen mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden können.

14.32 Bildentstehung an der Sammellinse und der Zerstreuungslinse

Optische Geräte wie Teleskope, Mikroskope, Fotoapparate, Videokameras und vieles andere mehr beinhalten optische Linsen und Spiegel. Diese Linsen bestehen aus Glas, Kunststoff oder anderen durchsichtigen Materialien. Zur Wende zum 17. Jahrhundert veränderte die Entdeckung der besonderen Wirkung dieser Linsen durch holländische Brillenmacher die Physik nachhaltig, vor allem aber die Astronomie.

Galileo Galilei erhielt Kunde vom Bau eines Fernrohrs in den Niederlanden und konstruierte sofort ein eigenes Gerät. Fasziniert berichtet er in seinem ersten Buch "Botschaft von den Sternen" im Jahre 1610:

"Zunächst stellte ich mir ein Fernrohr aus Blei her, an dessen Ende ich zwei Glaslinsen anbrachte, beide auf der einen Seite eben, aber der anderen die eine kugelförmig konvex, die andere konkav. Als ich dann das Auge an das Hohlglas brachte, sah ich die Gegenstände beträchtlich groß und nahe ..."

Sind die Begrenzungsflächen der Linsen Teile von Kugelflächen, nennt man solche Linsen sphärische Linsen. Prinzipiell unterscheidet man zwei Arten: Sammel- und Zerstreuungslinsen.

Vereinfacht kann man sagen, dass Sammellinsen in der Mitte dicker sind als am Rand, Zerstreuungslinsen entsprechend entgegengesetzt. Der Name Sammellinse wurde gewählt, da diese Art Linse ein paralleles Lichtbündel auf der anderen Linsenseite im Brennpunkt "sammelt".

Galilei nutzte als Objektiv eine Sammellinse, als Okular eine Zerstreuungslinse. Damit entdeckte er für seine Zeitgenossen unglaublich erscheinende Dinge, z.B. die Venusphasen, Berge auf dem Mond und vor allem die vier großen Jupitermonde Europa, Io, Kallisto und Ganymed, die ihm zu Ehren auch Galileische Monde genannt werden. Diese Entdeckungen und die von Galilei daraus gezogenen richtigen (!) Schlussfolgerungen führten zu den Problemen mit der mittelalterlichen Inquisition und später zum berühmten Abschwören Galileis.

Dieses Unterprogramm simuliert den Strahlenverlauf und die Bildentstehung an konvexen, dünnen optischen Linsen, den Sammellinsen. Für dicke Linsen sind die Vorgänge etwas komplizierter und werden hier nicht betrachtet.
An den Rollbalken können Sie einstellen:

- *Objektweite* - Abstand des Gegenstands "Pfeil" von der Mitte der Linse; von 0,5 bis 7 cm
- *Brennweite* - Abstand des Brennpunktes von der Linse; von 0,5 bis 7 cm
- *Objektgröße* - Höhe des darzustellenden Pfeils; von 0,5 bis 5 cm

Verändern Sie einen der Parameter, werden sofort die drei wichtigsten Strahlen

zur Konstruktion des Bildes, der Brennpunktsstrahl, der Mittelpunktsstrahl und der Parallelstrahl, sowie das Bild des Gegenstands gezeichnet. Zusätzlich berechnet das Programm den Abstand des Bildes von der Linse (negativ bedeutet rechts von der Linse) sowie die Größe des Bildpfeils. Zwischen den Größen besteht die Abbildungsgleichung 1 / f = 1 / g + 1 / b, wobei g die Gegenstandsweite, b die Bildweite und f die Brennweite ist.

Verändern Sie die Gegenstandsweite bzw. die Brennweite derart, dass die Brennweite größer als die Gegenstandsweite wird, entsteht an der Sammellinse ein sogenanntes virtuelles Bild, das nicht mehr durch einen Bildschirm aufgefangen werden kann, dafür aber durch die zusätzliche Linsenwirkung des menschlichen Auges von uns wahrgenommen werden kann. Dann wirkt die Sammellinse wie eine Lupe. Auch dieser Fall wird ermittelt und dargestellt.

Zerstreuungslinse

Markieren Sie das Feld *Zerstreuungslinse*, so können Sie analog konkave Linsen untersuchen. Zerstreuungslinsen werden z.B. in den oben beschriebenen Galileischen Fernrohren (Erdfernrohr, "Opernglas") eingesetzt.
Dabei entstehen bei der Zerstreuungslinse immer virtuelle Bilder.

14.33 Gekrümmte Spiegel

In diesem Teilprogramm können Sie den Strahlenverlauf an einem *sphärischen* (kugelförmigen) bzw. einem *parabolisch geformten* Spiegel untersuchen.

Nach der Wahl einer Spiegelart stellt das Programm einen derartigen Spiegel dar. Klicken Sie nun maximal 25 mal in das Darstellungsfenster zeichnet das Programm achsenparallele Lichtstrahlen, welche von dem Spiegel reflektiert werden. Durch Klicken auf einen der markierten Punkte und Ziehen mit der Maus können Sie die Lichtstrahlen nachträglich verschieben.
Die Stärke der Krümmung verändern Sie an dem Rollbalken *Krümmung*. Dabei können Sie nicht nur Hohlspiegel (konvexe Spiegel) sondern auch Wölbspiegel (konkave Spiegel) testen. Für diese stellen Sie einen negativen Wert der Krümmung ein. Für eine Krümmung = 0 ergibt sich ein ebener Spiegel.

Da das Teilprogramm sofort die reflektierten Strahlen einträgt, können Sie nachvollziehen, dass von einem Hohl- oder Konkavspiegel parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen im Brennpunkt gesammelt werden. Dabei ist der Abstand vom Scheitel des Spiegels zum Brennpunkt die Brennweite. Für einen kugelförmigen Spiegel ergibt sich, dass die Brennweite gleich dem halben Krümmungsradius der Kugeloberfläche ist.

Achtung! Bei sphärischen Spiegeln schneiden sich nur die achsnahen Strahlen exakt im Brennpunkt. Sollen auch die achsfernen Strahlen durch den Brennpunkt gehen, so muss ein Parabolspiegel vorliegen. Aus diesem Grund sind wertvolle optische Geräte mit einem parabolischen Spiegel an Stelle eines Kugelspiegels

ausgerüstet.

14.34 Planparallele Glasplatte

Trifft ein Lichtstrahl auf eine planparallele Glasplatte, so wird er beim Übergang von der Luft in das Glas entsprechend dem Brechungsgesetz gebrochen und damit seine Bewegungsrichtung verändert. Da aber beim Austritt aus dem Glas erneut eine Brechung erfolgt, hebt sich die Richtungsänderung wieder auf und der Lichtstrahl wird nur seitlich verschoben.

Die Größe der Verschiebung ist dabei zum einen vom Einfallswinkel und der Breite der Glasplatte abhängig, zum anderen aber auch vom Brechungsindex des Materials. Dabei gilt:

$$a = d \sin (\alpha - \beta) \cos \beta$$

wobei d die Breite der Platte, α der Einfallswinkel und β der durch den Brechungsindex bestimmte Brechungswinkel sind.

Ändern Sie an den drei Rollbalken die genannten beeinflussenden Größen, so zeichnet das Programm sofort den Strahlenverlauf. Vergrößert sich der Einfallswinkel, so verändert sich auch der Brechungswinkel und Sie können feststellen, dass die Verschiebung des Lichtstrahls größer wird. Fällt der Strahl senkrecht auf die Platte, kommt es zu gar keiner Verschiebung.

14.35 Beugung am Doppelspalt

Schickt man eine einfarbige (monochromatische) Lichtwelle auf einen Doppelspalt, dessen Spaltabstand in der Größenordnung der verwendeten Wellenlänge liegt, so entsteht auf einem Schirm dahinter ein sehr merkwürdiges Muster: ein Interferenzbild.

Die beiden Spalte wirken dabei als Zentren von Wellenfronten, die interferieren und das Interferenzmuster erzeugen. Dunkle Stellen entsprechen destruktiver, helle Stellen konstruktiver Interferenz. Aus den Abständen der Anordnung und der Interferenzstreifen kann man die Wellenlänge des verwendeten Lichts berechnen. Dieses Teilprogramm stellt dieses entstehende Interferenzbild dar.

Stellen Sie dazu zuerst die Spaltbreite, den Schirmabstand und die Wellenlänge des einfarbigen Lichts ein. An den Spaltöffnungen wird der einfallende Strahl um den Winkel α abgelenkt. Durch die zweite Öffnung tritt das Licht ebenso, sodass es auf dem Bildschirm durch Interferenz zu Maxima und Minima kommen kann. Nach der Theorie tritt für $\sin \alpha = \pm k \lambda / b$ ein Intensitätsmaximum ein. Dabei ist b die Spaltbreite, λ die Wellenlänge und k eine beliebige ganze Zahl k = ..., -2, -1, 0, 1, 2 ... Je kleiner der Betrag des Parameters 0 ist, desto höher fällt der Maximalwert aus.
Zwischen den Maxima liegen Minima, Stellen, an denen praktisch kein Licht auf

den Schirm trifft. Dunkle Stellen treten damit bei $\sin \alpha = \pm(k + 1 / 2) \lambda / b$ auf.

Verändern Sie nun z.B. die Wellenlänge, so stellt das Programm sofort das neue Interferenzbild dar. Wird die Wellenlänge größer, wird der Winkel α ebenfalls größer und die Maxima streben auseinander. Verringert sich die Wellenlänge, ist der entgegengesetzte Effekt zu beobachten. Andernfalls schiebt eine größere Spaltbreite die Extrema zusammen.

Anstelle eines Doppelspalts kann man zur Erzeugung der Interferenzbilder auch ein Beugungsgitter verwenden. Für Licht kleiner Wellenlänge, wie z.B. Röntgenstrahlen, benötigt man Gitter mit sehr kleinen Gitterabständen. Eine spezielle Form von Gittern sind Kristallgitter. Die Gitterabstände sind gegenüber Spalten bzw. Gittern, die für optische Versuche geeignet sind, wesentlich kleiner. Schießt man einen Elektronenstrahl auf ein Gitter (z.B. eine Silberfolie), so entsteht dann sogar ein ähnliches Interferenzmuster wie bei monochromatischen Röntgenstrahlen! Die Ursache dafür liegt in der von de Broglie gefundenen "Materiewelle" (besser de-Broglie-Welle).

14.36 Schatten und Halbschatten

"Am Montag, Mittwoch und Freitag ist das Licht ein Teilchen, Dienstag, Donnerstag, Samstag und Sonntag eine Welle." William Bragg

Mond- und Sonnenfinsternisse stellen immer wieder faszinierende Naturerscheinungen dar, die auch der sonst wenig an Astronomie Interessierte mit Interesse zur Kenntnis nimmt. Selbst unsere Medien, welche im Allgemeinen die riesigen Errungenschaften der Naturwissenschaften, wenn überhaupt, dann nur nebenläufig und immer äußerst kritisch erwähnen, können sich diesen astronomischen Erscheinungen nicht entziehen. Man denke nur an den monatelangen Rummel um die letzte am 11.August 1999 in Deutschland beobachtbare totale Sonnenfinsternis.

Grundlage dieser Erscheinungen sind die Bewegungen der Himmelskörper und die Tatsache, dass durch gegenseitige Überdeckungen Schatten und Halbschatten entstehen. Trifft nun der sogenannte Kernschatten des Mondes einen Teil der Erdoberfläche, so erlebt man dort eine totale Sonnenfinsternis. Die nächste Eklipse, d.h. totale Sonnenfinsternis, ist in der Nordschweiz und in Süddeutschland am 3.September 2081 beobachtbar; in Europa, genauer Spanien, findet die nächste am 12.August 2026 statt.

Das Teilprogramm *Schatten und Halbschatten* ermöglicht Ihnen, die Entstehung dieser Schattenarten zu untersuchen. Dabei stellen Sie an den Rollbalken die Quellengröße, den *Abstand* der Lichtquelle zum Körper und den Körper*durchmesser* des verdunkelnden Körpers ein.

Das Programm zeichnet daraufhin auf einem Bildschirm die Größe des Schattens (Kernschatten) und Halbschattens sowie die begrenzenden Lichtstrahlen ein.

Ändern Sie die Entfernung beider Körper, können Sie so die Änderung der Schattengröße nachvollziehen. Physikalisch gesehen ist es gleichgültig, ob das Licht von einem ausgedehnten Körper oder zwei einzelnen Lichtquellen kommt. Andererseits entsteht kein Halbschatten, wenn das Licht nur von einer einzelnen Quelle ausgestrahlt wird.
Dies können Sie untersuchen, indem Sie eines der Auswahlfelder

- punktförmige Lichtquelle
- ausgedehnte Lichtquelle
- zwei punktförmige Lichtquellen

markieren.

14.37 Farbmischung

Angeregt von der Newtonschen Entdeckung der spektralen Zerlegung von weißem Licht beschäftigte sich Goethe intensiv mit der Optik und veröffentlichte seine Farbenlehre.
Nach seiner Theorie entstehen Farben durch das Zusammentreffen verschiedener Grade von Helligkeit und Dunkelheit. Kritischen Einwürfen begegnete Goethe energisch:

"Es freut mich, dass meine Farbenlehre als Zankapfel die gute Wirkung tut. Meine Gegner schmatzen daran herum wie Karpfen an einem großen Apfel, den man ihnen in den Teich wirft. Diese Herren mögen sich gebärden, wie sie wollen, so bringen sie wenigstens dieses Buch nicht aus der Geschichte der Physik heraus."

Dennoch: Nach relativ kurzer Zeit war Goethes Theorie "vom Tisch", denn hier irrte er. Das menschliche Auge empfindet das zeitliche Nacheinander oder das enge räumliche Nebeneinander von verschiedenen Farben als Farbmischung.
In diesem Fall addieren sich die Wellenlängen der Einzelfarben. Eine solche Farbmischung wird additiv genannt.
Blendet man mittels Filter einzelne Farben aus dem weißen Licht aus, tritt eine subtraktive Farbmischung auf.

In diesem Teilprogramm können Sie beide Methoden der Farbmischung untersuchen.
Das Programm bietet die Möglichkeit, drei verschiedene Farben aus den Grundfarben Rot, Grün und Blau zusammenzusetzen. Dabei können die Grundfarben Werte von 0 (Grundfarbe zu 0% enthalten) bis 255 (Grundfarbe zu 100% enthalten) annehmen.
Die je Mischung verwendeten Grundfarben stellen Sie an den Schaltfeldern ein.

In der linken Darstellung werden die Farben additiv verknüpft, rechts subtraktiv. Rechts neben den Rollbalken finden Sie drei Zahlenwerte, die den Rot-, Grün- und Blauanteil an der jeweils ausgewählten Farbe angeben.

Zusätzlich zur Auswahl der Farben an den Rollbalken können Sie diese auch in einer Farbenübersicht auswählen. Klicken Sie dazu auf den jeweiligen Schalter

Farbe 1 bis 3. Wählen Sie eine Farbe aus und schließen den Dialog, werden die entsprechenden Werte übernommen.

HSB-Farbring

Im unteren Teil des Fensters werden Farben nach dem HSB-Farbmodell zusammengestellt.
Diese ergeben sich aus den Parametern

- Hue (Farbton),
- Saturation (Sättigung) und
- Brightness (Helligkeit).

Die Farbtöne hier werden durch Sättigung und Helligkeit modifiziert.
Durch einen Mausklick auf den Kreisring wird die Grundfarbe (Hue) ausgewählt. Mit dieser Grundfarbe wird ein Quadrat erstellt, bei dem die Grundfarbe rechts oben erscheint. In diesem Quadrat verliert der Farbton nach links an Sättigung, nach unten gewinnt er an Helligkeit.
Bewegen Sie die Maus über die Farben, werden Ihnen die RGB-Werte angezeigt.

14.38 Spektralzerlegung

In dem Werk "Optik" schreibt Isaac Newton:

"In einem sehr dunklen Zimmer brachte ich hinter einer runden, in dem Fensterladen befindlichen Öffnung von 1 / 3 Zoll Durchmesser ein Glasprisma an. Letzteres sollte den Lichtstrahl, der durch die Öffnung eindrang, ablenken, ihn aufwärts nach der gegenüberliegenden Wand des Zimmers werfen und dort ein farbiges Bild der Sonne erzeugen. ... Das Spektrum war farbig, und zwar rot in seinem am wenigsten gebrochenen Ende, violett dagegen in dem am stärksten abgelenkten Ende. Der dazwischen befindliche Raum war gelb, grün und blau."

Die Entdeckung Newtons leitete eine neue Etappe der Optik ein und veranlasste eine Vielzahl von Wissenschaftlern, darunter auch Goethe, sich auf das Gebiet der Physik zu begeben. Fällt weißes Licht durch ein Glasprisma, so wird dieses Licht je nach Eigenschaft des Prismenmaterials in seine Bestandteile, sprich die Spektralfarben zerlegt.
Wurde das Licht z.B. von einem glühenden Festkörper emittiert, so entsteht nach der spektralen Zerlegung das allgemein bekannte farbige Band, beginnend bei Rot über Grün, Gelb bis Blau und Violett. Dieses Spektrum nennt man ein kontinuierliches Spektrum oder kurz Kontinuum.

Nach dem Start dieses Teilprogramms wird ein derartiges Spektrum gezeichnet. Mithilfe der wissenschaftlichen Methode der Spektralanalyse können aus dem Spektrum Aussagen über die stoffliche Zusammensetzung des leuchtenden Stoffes oder aber über den Weg des Lichts von der Lichtquelle zum Prisma getroffen werden.

Absorptionsspektrum

Durchläuft weißes Licht (Kontinuum) z.B. ein Gas, so absorbieren die Gasmoleküle ganz bestimmte, elementspezifische Farben. Das entstehende Spektrum ist ein kontinuierliches Spektrum mit zusätzlichen schwarzen Linien, ein Absorptionsspektrum.

Emissionsspektrum

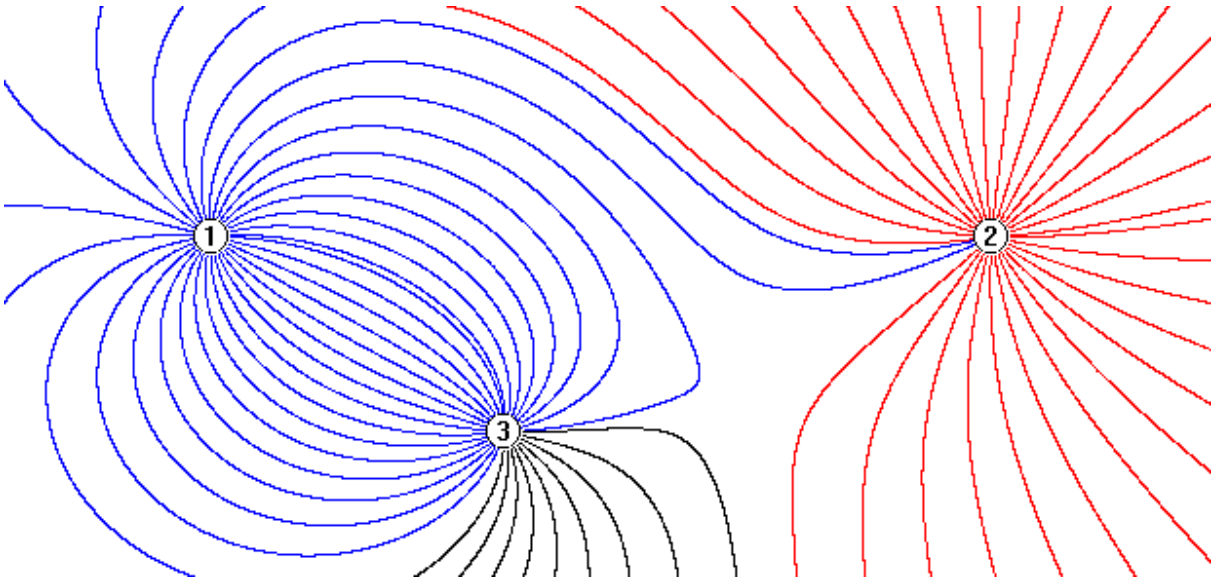
Wird das Licht von einem leuchtenden Gas ausgesandt, werden nur ganz bestimmte Wellenlängen – je nach Element – gesendet. Das entstehende Spektrum bleibt schwarz und enthält einige farbige Einzellinien, ein Emissionsspektrum.

Absorptions- und Emissionsspektrum können Sie ebenso darstellen. Wählen Sie zuerst links die *Art des Spektrums* und anschließend einen *Stoff* in der Liste (32 Stoffe enthalten) aus.

Das Programm zeichnet sofort das entsprechende Spektrum. In der zweiten Liste finden Sie die Wellenlängen der elementtypischen Spektrallinien in 10^{-8} m.

Innerhalb der Stoffliste finden Sie den Eintrag *Fraunhofer-Linien*. Josef Fraunhofer untersuchte als einer der ersten intensiv das Sonnenspektrum und entdeckte dabei die in der Sonnenchromosphäre und Korona entstehenden Absorptionslinien, die nach ihm benannt wurden. Das Programm stellt Ihnen die neun wichtigsten der in Wirklichkeit mehreren Hunderten Linien dar. Beachten Sie, dass diese Linien durch unterschiedliche chemische Elemente hervorgerufen werden.

14.39 Elektrisches Feld



Eine der bedeutendsten Entdeckungen, neben der Elektrolyse, des englischen Physikers Michael Faraday ist die des elektrischen Feldes. Als Erster äußerte er die Idee des Feldbegriffs und war damit Wegbereiter der modernen Physik. Ohne den Begriff des Feldes ist Physik nicht denkbar. Auf Faraday geht auch der Versuch zurück, das elektrische Feld zwischen zwei geladenen Körpern durch Feldlinien zu beschreiben und mithilfe verschiedener Mittel sichtbar zu machen.
Die Darstellung eines elektrischen Feldes zwischen Feldladungen ist neben dem unmittelbaren Experiment nur durch Näherungsberechnungen auf einem Computer möglich. In diesem Teilprogramm können Sie die Größe und relative Lage von maximal drei Ladungen zueinander festlegen. Das Programm ermittelt jeweils ein Bild der Feldlinien.

Legen Sie dazu an den Rollbalken die *Größe der Ladungen* in Coulomb

- 1. Ladung von +1 bis +50 C
- 2. und 3. Ladung von +50 bis -50 C

fest. Die Position der Ladungen zueinander verändern Sie, indem Sie mit der linken Maustaste eine der Ladungen anklicken und die Maus bei festgehaltener Taste über den Bildschirm bewegen. Bei Freigabe der Taste wird Ihre Ladung an der aktuellen Stelle positioniert.
Die Anzahl der zu berechnenden und zu zeichnenden Feldlinien legen Sie unter *Feinheit* fest. Ein höherer Wert bedeutet mehr Feldlinien, allerdings auch eine größere Berechnungs- und Darstellungszeit.

Beachten Sie bitte: Auch auf schnellen Computern kann die Konstruktion eines Feldlinienbildes aufgrund der aufwendigen Näherungsberechnung mittels Coulombschem Gesetz kurze Zeit benötigen.

Möchten Sie nur zwei oder eine Ladung untersuchen, so stellen Sie Ladung 2 und/oder 3 auf eine Ladungsgröße von 0 Coulomb ein.

Nach einem Klick auf den Schalter *Darstellung* berechnet das Programm ausgehend von den Ladungen die Kraftwirkung der drei geladenen Körper auf eine gedachte elektrische Ladung. Entsprechend dieser Kraft würde eine Ladung beschleunigt. Der dabei zurückgelegte Weg kann als gute Veranschaulichung der Richtung der elektrischen Feldlinien genommen werden.

14.40 Ladung im elektrischen Feld

Wird eine elektrische Ladung in das Feld eines Plattenkondensators gebracht, so wirkt auf diese eine Kraft. Losgelassen würde sie sich in Richtung einer der Kondensatorplatten bewegen. Befestigt man die Ladung nun an einem Faden, so wird sie nur um einen bestimmten Winkel ausgelenkt.

In diesem Unterprogramm können Sie dieses einfache Experiment untersuchen.
An den Rollbalken stellen Sie zum einen die Stärke und Richtung des elektrischen Feldes, zum anderen die Größe der Ladung und die Masse der Kugel ein, die sich

im Kondensatorfeld befindet.

Je nach Stärke des Feldes und der Ladung wirkt eine Kraft nach links bzw. rechts. Die Gewichtskraft der Kugel wirkt senkrecht nach unten, sodass sich ein Kräftegleichgewicht einstellt, dass Sie durch Markierung von *Kräfte anzeigen* sichtbar machen können. Wählen Sie *Feldlinien anzeigen*, so erhalten Sie eine grafische Veranschaulichung der Feldstärke.

Mit dem Schalter *Simulation* starten Sie ein Experiment, bei dem die Stärke des elektrischen Feldes kontinuierlich geändert wird. Mit dem Ergebnis: Die Kugel pendelt zwischen den Platten hin und her.

14.41 Stromkreis

Zu den wichtigen Aufgaben der Elektrodynamik gehört die Untersuchung des Verhaltens verschiedener elektrischer und elektronischer Bauelemente, insbesondere von ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen, im Gleich-, aber auch im Wechselstromkreis. Als Grundbausteine spielen diese drei Bauelemente in einer Vielzahl von elektrischen Schaltungen eine Rolle, z.B. in Schwingkreisen usw.

Dieses Unterprogramm simuliert das Verhalten von ohmschen Widerständen im Gleichstromkreis, zum einen als Reihenschaltung zweier Widerstände, zum anderen als Parallelschaltung dieser Widerstände. Wählen Sie dazu in der aufklappbaren Liste im rechten oberen Teil den Eintrag *Ohmscher Widerstand.*

Für rein ohmsche Widerstände, zum Beispiel einen Metalldraht ohne nennenswerte Kapazität und Induktivität, besteht kein Unterschied zwischen ihren Eigenschaften im Gleich- und Wechselstromkreis. Im linken Teil des Fensters finden Sie zwei hintereinander, also in Reihe geschaltete Widerstände. Im rechten Schaltkreis sind diese parallel geschaltet.

An den Rollbalken stellen Sie die Größen der jeweiligen *Widerstände* sowie die angelegten *Gleichspannungen* ein. Entsprechend der Gesetzmäßigkeiten in Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen ermittelt das Programm die Teilspannungen und -stromstärken und stellt diese dar.
Stellen Sie in der Reihenschaltung beide Widerstände auf 0 Ohm bzw. einen der beiden in der Parallelschaltung, so tritt ein Kurzschluss auf.

Kapazität und Induktivität im Wechselstromkreis

In Ergänzung dieses Unterprogramms *Gleich- und Wechselstromkreis* können Sie unter den beiden Einträgen *Kapazität bei Wechselstrom* und *Induktivität bei Wechselstrom* in der rechten aufklappbaren Liste kapazitive (Kondensator) und induktive Widerstände (Spulen) im Wechselstromkreis entweder in Reihen- oder in Parallelschaltung untersuchen.

Die Größe der anliegenden *Wechselspannung* sowie die spezifischen Größen der Kondensatoren – *Kapazität* – in Millifarad und Spulen – *Induktivität* – in Millihenry stellen Sie erneut an den Rollbalken ein. Das Programm ermittelt daraufhin sofort die an den Bauteilen anfallenden Teilspannungen bzw. die durch die Teilkreise fließenden Ströme.

Zusätzlich können Sie den Einfluss der Frequenz der anliegenden Wechselspannung untersuchen. Stellen Sie dazu an dem Rollbalken *Frequenz* einen Wert zwischen 1 und 250 Hz ein – voreingestellt sind 50 Hz. Damit können Sie z.B. nachvollziehen, dass der kapazitive Widerstand im Wechselstromkreis mit steigender Frequenz immer geringer wird, während dies für die Spule gerade entgegengesetzt ist.

14.42 Ohmscher Widerstand und Kondensator

Ohmscher Widerstand

In diesem Unterprogramm können Sie zwei einfache Berechnungen und eine Simulation zum ohmschen Widerstand ausführen. Im linken Teil finden Sie Berechnungsmöglichkeiten ...

- zum Widerstandsgesetz eines ohmschen Widerstandes in Abhängigkeit von Material, Länge und Querschnitt oder
- zum thermischen Verhalten des Widerstandes bei Temperaturveränderung.

berechnen wollen.
Die Materialkonstanten *spezifischer Widerstand* bzw. *Temperaturkoeffizient* können Sie selbstständig eingeben. Wählen Sie in der *Materialliste* ein vordefiniertes Material aus, werden die entsprechenden Werte automatisch eingetragen. Dabei können Sie für den spezifischen Widerstand aus 60 Materialien, für den Temperaturkoeffizienten aus 50 Materialien wählen.

Eine umfangreiche Tabelle spezifischer elektrischer Widerstände für verschiedenste Materialien finden Sie auch unter *Materialkonstanten.*

Verhalten ohmscher Widerstände bei Erwärmung

Die Größe eines ohmschen Widerstandes ist nicht nur von den geometrischen Abmessungen wie Länge, Querschnitt und Material abhängig, sondern verändert sich auch bei unterschiedlichen Temperaturen. Bei Metallwiderständen nimmt dabei der Widerstand in den meisten Fällen zu, bei halbleiterähnlichen Materialien, wie z.B. Graphit, sinkt die Größe des Widerstandes, da bei höherer Temperatur mehr freie Elektronen den elektrischen Strom transportieren können.

Im rechten Fensterteil dieses Unterprogramms wird diese Änderung des Widerstandes bei Erwärmung simuliert. Als Experimentalanordnung sehen Sie einen einfachen Gleichstromkreis, in dem sich ein ohmscher Widerstand und ein

Stromstärke-Messgerät befinden. Unter dem Widerstand befindet sich ein "Bunsenbrenner", mit dem Sie die Temperatur des Widerstandes erhöhen können.

In der *Materialliste* können Sie aus über 50 Materialien den Stoff auswählen, aus dem der Widerstand besteht. Voreingestellt ist aber in jedem Fall ein Ausgangswert des Widerstandes von 50 Ω. Klicken Sie nun auf den Schalter *Einschalten*, wird der Bunsenbrenner aktiviert, der Widerstand erwärmt und somit verändert.

Am Amperemeter und der Anzeige der Größe des Widerstandes können Sie nun die Änderungen nachvollziehen. Schalten Sie mit einem erneuten Schalterklick den Brenner wieder aus, geht die Temperatur wieder zurück und der Widerstand erreicht nach einer gewissen Zeit seinen Ausgangswert von 50 Ω. Im Übrigen wird der Brenner automatisch vom Programm ausgeschaltet, wenn die Temperatur 100°C übersteigt.
Wählen Sie als Material z.B. Graphit, so können Sie die Abnahme des Widerstandes simulieren, für ein Metall wie z.B. Stahl nimmt der Wert dagegen deutlich zu.

Kondensator

In diesem Teilprogramm haben Sie die Möglichkeit, die Kapazität verschiedenster Arten von Kondensatoren zu ermitteln sowie den Einfluss der Größe und des Abstands der Platten eines Kondensators zu untersuchen.

Das Programm bietet die Auswahl zwischen:
- Zweiplattenkondensator
- Hohlkugelkondensator (zwei ineinander befindliche Kugeln)
- Kapazität einer einzelnen Kugel
- Zylinderkondensator
- Kapazität einer parallelen Doppelleitung
- Kondensator bestehend aus zwei Kugeln

Wählen Sie zuerst das zu berechnende Objekt in den Auswahlfeldern aus. Das Programm zeigt Ihnen daraufhin die notwendigen Eingabewerte an, zum Beispiel für einen Zylinderkondensator die Eingabefelder *innerer Radius, äußerer Radius* und *Zylinderlänge.*

Zusätzlich können Sie das *Dielektrikum* (das Material zwischen den geladenen Kondensatorteilen) zwischen den zwei geladenen Objekten in der zweiten Liste auswählen. Die Größe der Permittivitätszahl (Dielektrizitätszahl) wird automatisch ermittelt. Sollte der von Ihnen gewünschte Stoff nicht enthalten sein, so tragen Sie die *Permittivitätszahl* in die Eingabezeile ein. Betätigen Sie nun den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Programm die Kapazität.

Sollten Ihre eingegebenen Werte nicht korrekt sein, z.B. muss der Abstand der

zwei Kugeln bei dem Zwei-Kugel-Kondensator größer als die Summe ihrer Radien sein, erhalten Sie als Anzeige eine Fehlermeldung.

Darstellung eines Plattenkondensators

Zur Speicherung elektrischer Ladungen ist als einfachstes Gerät ein Plattenkondensator sehr gut geeignet. Dieser besteht aus zwei gleich großen parallelen Metallplatten, die einen bestimmten Abstand d und einen Oberflächeninhalt A besitzen. Zwischen den Platten befindet sich ein isolierendes Material, im einfachsten Fall Vakuum (in guter Näherung Luft). Verändert man dieses Material, so spricht man davon, dass sich zwischen den Platten ein Dielektrikum befindet.

Lädt man nun die Platten des Kondensators mit elektrischen Ladungen auf, eine Platte negativ, die andere positiv, so entsteht zwischen beiden eine elektrische Spannung, die man mit einem Spannungsmessgerät ermitteln kann. Im Raum zwischen den Platten entsteht gleichzeitig ein homogenes elektrisches Feld. Die Stärke der Spannung und des Feldes sind von der Beschaffenheit der Kondensatorplatten, deren Abstand und dem Dielektrikum abhängig.

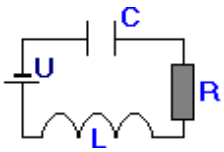
Diese Abhängigkeiten können Sie in diesem Teilprogramm untersuchen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Größe der Ladung im Kondensator konstant bleibt. Die Größe und den Abstand der Platten stellen Sie ein, indem Sie die Lage des Punktes A (Mausklick und Verschieben mit festgehaltener Maustaste) verändern. Das Programm zeichnet sofort die neue Situation. Da die Ladung unverändert bleibt, kann sich die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den Platten ändern. Dies sehen Sie in der Anzeige des Spannungsmessgerätes.

Die Stärke des elektrischen Feldes wird oft durch die Anzahl der gezeichneten Feldlinien symbolisiert. Mehr Feldlinien kennzeichnen ein stärkeres Feld. Ändern Sie die Abmessungen des Kondensators, kann sich die Feldstärke ebenfalls ändern.

Ziehen Sie z.B. die Platten bei gleichem Querschnitt auseinander, steigt die Spannung, während die Feldstärke unverändert bleibt. Erhöhen Sie den Querschnitt bei gleichem Abstand der Platten, sinken Spannung und Feldstärke usw.

Zusätzlich können Sie aus der Liste ein Dielektrikum in den Kondensator einfügen. Wählen Sie einen Stoff mit einem hohen angegebenen Zahlenwert (Permittivitätszahl, Dielektrizitätszahl), z.B. Tantaloxid, so erhöht sich die Kapazität des Kondensators, wodurch bei konstanter Ladung die anliegende Spannung und das elektrische Feld kleiner werden.
Markieren Sie das Auswahlfeld *Spannung konstant*, wird nun der Kondensator an eine Spannungsquelle angeschlossen, d.h., die anliegende Spannung bleibt konstant und mit den Änderungen der Abmessungen verändert sich die Kapazität des Kondensators und damit die in ihm gespeicherte Ladungsmenge.

14.43 Zeigerdiagramm im Wechselstromkreis



In diesem Teilprogrammen werden ein Zeigerdiagramm und ein Diagramm der Spannungen bzw. Stromstärken in einem Wechselstromkreis gezeichnet.

In einem Stromkreis sind drei Bauteile, ein Ohmscher Widerstand, ein Kondensator und eine Spule in Reihe zu einem RCL-Reihenschaltkreis verbunden. Welche Objekte betrachtet legen Sie an den Markierungsfeldern fest. Die Größe des Widerstands, die Kapazität des Kondensators und die Induktivität der Spule stellen Sie an den Balken ein, ebenso die Frequenz f des Wechselstromkreises.

Das Programm berechnet abfallende Spannungen, die Stromstärke sowie die Scheinwiderstände. Im Diagramm wird für jedes Bauelement die Spannungskurve gezeichnet. Haben Sie nur ein Bauteil gewählt, wird außerdem der zeitliche Verlauf der Stromstärke angezeigt.

Deutlich erkennt man, dass bei einem Ohmschen Widerstand zwischen der Spannung und der Stromstärke Phasengleichheit besteht. Dagegen eilt die Spannung der Stromstärke bei einer Spule um $\pi/2$ voraus, beim Kondensator die Stromstärke der Spannung.
Im RCL-Reihenschaltkreis beeinflussen alle drei Bauelemente den Phasenunterschied. Entsprechend der Resonanzbedingung C*L=1 erreichen Sie hier eine besonders hohe Leistung P = u * i, wenn Induktivität und Kapazität zueinander reziproke Werte haben.

14.44 Ablenkung im elektrischen Feld

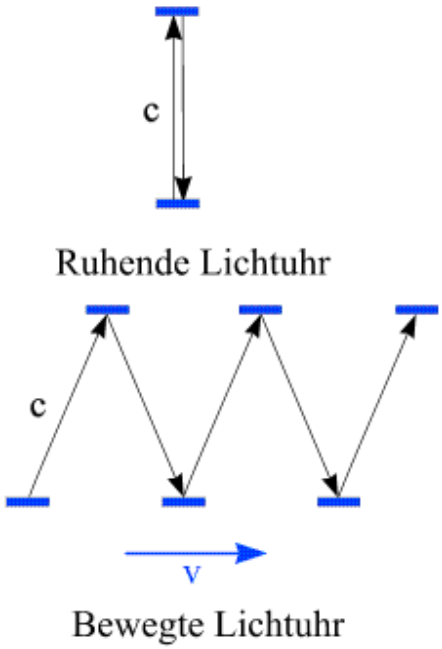
In diesem Programm wird die Ablenkung elektrischer Ladungen in einem elektrischen Feld demonstriert.
Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einem Plattenkondensator. In x-Richtung fliegt es, durch eine Beschleunigungsspannung auf eine konstante Geschwindigkeit gebracht, gleichförmig bewegt, in y-Richtung gleichmäßig beschleunigt.
Tritt das Teilchen aus dem elektrischen Feld aus, so fliegt es geradlinig weiter und trifft auf einen Bildschirm auf.

Die Stärke der Ablenkung hängt dabei von der Spannung am Kondensator, der Länge des Feldes, dem Abstand der Platten und der Ausgangsgeschwindigkeit der Elektronen ab.
Alle diese Größen können Sie an Rollbalken einstellen. Die Simulation verändert kontinuierlich die Größe, die Sie an den Auswahlfeldern markiert haben.

14.45 Zeitdilatation

Ein spezieller Effekt der Einsteinschen Relativitätstheorie ist die Zeitdilatation. Darunter ist zu verstehen, dass aus Sicht eines ruhenden Beobachters eine relativ zu ihm bewegte Uhr langsamer geht als eine baugleiche Uhr, die neben ihm ruht. Dasselbe gilt für alle Prozesse, die in einem bewegten Bezugssystem stattfinden, beispielsweise in einem an unserem Beobachter vorbeifliegenden Raumschiff: Die Uhren und alle Vorgänge in dem Raumschiff sind aus Sicht unseres Beobachters in derselben Weise verlangsamt.

Diesen Effekt kann man mit einem Gedankenexperiment begründen. Dazu wird eine Lichtuhr konstruiert. Deren Funktionsprinzip ist einfach: In konstantem Abstand werden zwei Spiegel angebracht, zwischen denen ein Lichtpuls auf- und abläuft. Jede Ankunft des Pulses bei einem Spiegel entspricht einem "Tick" der Uhr. Sind die Spiegel im Abstand von 300000 Kilometern angebracht, so tickt die Lichtuhr pro Sekunde genau einmal. In einem Raumschiff, dass sich am ruhenden Beobachter vorbeibewegt, befindet sich eine baugleiche Lichtuhr. So lange das Raumschiff ruht, sind vom ruhenden Beobachter aus gesehen beide Uhren synchron.



Dies ändert sich, wenn das Raumschiff am Beobachter vorbeifliegt. Die Spiegel der Uhr bewegen sich, von meiner Raumstation aus beurteilt, mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts. Licht, das vom oberen Spiegel zum unteren und zurück zum oberen Spiegel läuft, bewegt sich daher zwangsweise im Zickzack - vom ursprünglichen Ort des oberen Spiegels bis zu jenem etwas weiter rechts gelegenen Ort, zu dem sich der untere Spiegel bis zur Ankunft des Lichts hinbewegt hat, und weiter bis zu jenem Ort noch weiter rechts, den der obere Spiegel erreicht hat, wenn das Licht endlich wieder oben eintrifft. Der Lichtweg ist demnach deutlich länger als der Weg in der ruhenden Uhr.

Auf Grund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss daher der Lichtimpuls in der bewegten Uhr eine längere Zeit zurücklegen. Eine "Sekunde", gemessen auf der bewegten Lichtuhr, ist damit länger als eine Sekunde, gemessen auf meiner eigenen, relativ zu mir in Ruhe befindlichen Lichtuhr. D.h., vom Beobachter aus gesehen, verläuft die Zeit im Raumschiff langsamer.

In diesem Teilprogramm, wird dieses Gedankenexperiment simuliert. Im oberen Teil befindet sich eine bewegbare Lichtuhr, im unteren eine in Ruhe befindliche. Am Rollbalken wählen sie die Geschwindigkeit des Raumschiffs in Anteilen der Lichtgeschwindigkeit aus. Starten sie die Simulation werden die beschriebene Effekt dargestellt.

14.46 Radioaktiver Zerfall

„Die Wissenschaft ist erst erwachsen, wenn sie die Verantwortung für ihre Folgen übernimmt"
Carl Friedrich von Weizsäcker

Dieses Teilprogramm simuliert den Zerfall einer gegebenen Menge radioaktiven Materials. Die Anzahl der vorhandenen radioaktiven Atome stellen Sie am Rollbalken *Kernanzahl* ein.

Bei einem einzelnen radioaktiven Atomkern kann man nicht vorhersagen, zu welchem Zeitpunkt er zerfallen wird. Er kann in der nächsten Sekunde oder erst in Tausenden von Jahren zerfallen. Bei einer großen Anzahl von Atomen lässt sich aber eine Wahrscheinlichkeitsaussage über den Ablauf des Zerfalls machen. Es zerfällt zum Beispiel von einer Menge Wasserstoff-3 (Tritium) in ca.12,3 Jahren die Hälfte der Atome, nach weiteren 12,3 Jahren ist von dem Rest wiederum die Hälfte zerfallen usw.

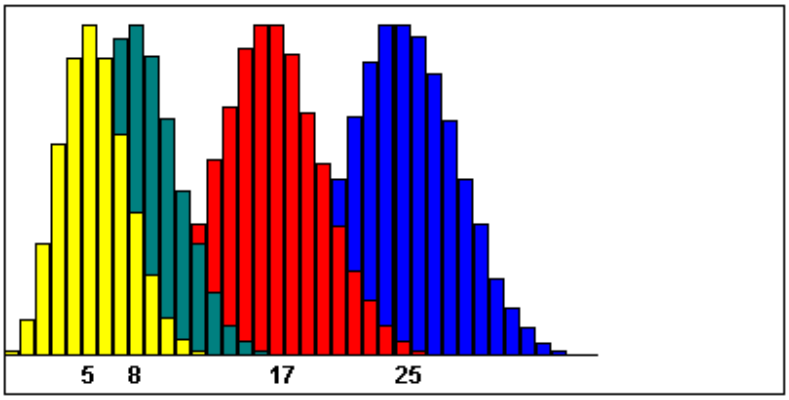
Die Zeit, nach der die Hälfte einer bestimmten Anzahl von Atomkernen zerfallen ist, wird Halbwertszeit (HWZ) genannt. Sie ist für jedes Radionuklid eine charakteristische Größe. Die Halbwertszeiten liegen zwischen vielen Milliarden Jahren und Sekundenbruchteilen. Die größte Halbwertszeit, die bisher nachgewiesen worden ist, besitzt Tellur-128 (HWZ $1{,}5 \cdot 10^{24}$ a), die kleinste Halbwertszeit Radium-216m (HWZ $7 \cdot 10^{-9}$s = 7ns).

Die *Halbwertszeit*, d.h. die Zeit in der im statistischen Mittel die Hälfte der noch vorhandenen Kerne zerfallen, legen Sie ebenso an dem entsprechenden Rollbalken fest.

Betätigen Sie nun den Schalter *Simulation* stellt das Programm den radioaktiven Zerfall dar. In der graphischen Darstellung sehen Sie die Zerfallskurve, d.h. die noch nicht zerfallenen Kerne im Laufe der Zeit. In der rechten Fensterhälfte erhalten Sie eine Veranschaulichung des Zerfalls. Blaue Punkte symbolisieren dabei radioaktive Kerne, grüne schon zerfallene.

In der linken Fensterhälfte können Sie weiterhin den nach einer gewissen Zeit zerfallenen Teil der Substanz für konkrete radioaktiver Materialien berechnen. Unter *HWZ* geben Sie die Halbwertszeit und unter Zeit den betrachteten Zeitraum ein. Als Maßeinheiten können dabei a für das Jahr, d für Tag, h für Stunden, min für Minuten und s für Sekunden verwendet werden.
In der Liste können Sie 13 radioaktive Kerne auswählen. Zum Beispiel erhalten Sie für Kohlenstoff-14 eine Halbwertszeit von 5760 Jahren. Tragen Sie als Zeit 1000 Jahre ein, so berechnet das Programm, dass zu diesem Zeitpunkt 11,3 % der Atomkerne zerfallen sind.

14.47 Ortsverteilung von Gasmolekülen



Liegen in einem abgeschlossenen Raum n Gasteilchen (Gasmoleküle) bei einer bestimmten Temperatur vor, so führen diese Teilchen eine stochastische Bewegung aus. Betrachtet man zwei Teilvolumina V_1 und V_2, wobei zuerst $V_1 = V_2$ gelten soll, so werden sich im Mittel in beiden Teilräumen gleich viel Moleküle aufhalten. Die Verteilung der n Teilchen auf beide Teilbereiche unterliegt dabei einer stochastischen Verteilung, der Binomialverteilung. In dem Unterprogramm *Ortsverteilung von Gasmolekülen* können Sie dieses Experiment simulieren.

Dazu stellen Sie zuerst an den Rollbalken ein:

- die *Anzahl der Teilchen* von 1 bis 100
- die *Anzahl der Versuche* von 1 bis 30000
- das *Verhältnis der beiden Teilvolumina* $V_1 : V_2$

Nach einem Klick auf *Simulation* startet das Programm die Animation und ermittelt zufällige Verteilungen der Teilchen in den beiden festgelegten Teilräumen. Im unteren Teil des Fensters wird nach jedem Teilexperiment die Verteilungskurve der Anzahl von Teilchen im Raum V_1 angezeigt. Zusätzlich erhalten Sie eine Aussage über die bis zu diesem Zeitpunkt eingetretene Anzahl von Teilchen mit der größten Wahrscheinlichkeit.

Nach Beendigung der Versuche finden Sie zusätzlich in der Liste die um den Faktor 10000 vergrößerten prozentualen Wahrscheinlichkeiten für eine konkrete Anzahl von Teilchen im Teilvolumen V_1. Die Simulation der Verteilung der Moleküle wird nur durchgeführt, wenn Sie das Schaltfeld *Animation* markieren. Andernfalls berechnet das Programm die Verteilung intern und zeigt Ihnen nur das Endergebnis an. Dies ist mindestens um einen Faktor 100 schneller.

Diese Darstellung enthält vier nacheinander durchgeführte Zufallsexperimente mit je 50 Teilchen und 30000 Durchgängen. Dabei lag einmal ein Verhältnis $V_1 ; V_2$ von 1 : 1 (blau), 1 : 2 (rot), 1 : 5 (grau) und 1 : 8 (gelb) vor. Alle vier Kurven entsprechen der zugehörigen Binomialverteilung.

14.48 Diagramme zur Physik

Das Programm enthält ein kleines Teilprogramme, in denen Diagramme zu

Fragen der Thermodynamik bzw. Atomphysik gezeichnet werden können:

Molekülgeschwindigkeit

Die Bewegung von Molekülen in einem Gas vollzieht sich nach statistischen Gesetzen. Im Durchschnitt besitzen alle Moleküle etwa gleiche Geschwindigkeit und gleiche Energie, allerdings kann diese Energie bzw. die Geschwindigkeit eines einzelnen Moleküls erheblich vom Durchschnitt abweichen. Durch Maxwell wurde ein Verteilungsgesetz für die Molekülgeschwindigkeiten entwickelt, welches in diesem Teilprogramm für Berechnungen und die graphische Veranschaulichung genutzt wird.

Das Programm berechnet in diesem Teilprogramm für 30 in der Listbox enthaltenen Gase aus der Maxwell-Verteilung die wahrscheinlichste, die mittlere quadratische und den Mittelwert der Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens bei T=300 K. Wählen Sie dazu einer der Substanzen aus. In der graphischen Darstellung erhalten Sie für die Temperaturen 300, 500, 700, 900 und 1000 Kelvin die Verteilungsfunktion. An der Abszisse finden Sie die Teilchengeschwindigkeit in Metern je Sekunde, an der Ordinate den prozentualen Anteil von Teilchen, welche in einem Geschwindigkeitsbereich von ± 5 m/s zum Abszissenwert liegen. Eine zusätzliche Senkrechte kennzeichnet die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Extremstelle der Verteilungsfunktion).

Reales Gas

Im Unterprogramm *Ideales Gas* wird theoretisch das Verhalten eines idealisierten Gases demonstriert. In der Praxis können die Verhältnisse aber sehr deutlich abweichen. Ursache dafür sind vor allem die zwischen den Teilchen des realen Gases wirkenden Kräfte. Bei hinreichend großer Temperatur und geringem Druck verhalten sich reale Gase nahezu wie ideale.

In diesem Unterprogramm können Sie für 28 reale Gase für unterschiedliche Temperaturen das Druck-Volumen-Diagramm zeichnen. Wählen Sie dazu zuerst aus der Liste eines der realen Gase aus. Das Programm berechnet die kritischen Gaswerte für Temperatur, Druck und Volumen. Diese kritischen Werte haben großen Einfluss auf die Möglichkeit einer Phasenumwandlung gasförmig - flüssig. Insbesondere kann ein Gas oberhalb der kritischen Temperatur allein durch Komprimierung nicht mehr verflüssigt werden. Zur Verflüssigung ist dann eine Temperatursenkung unbedingt notwendig.

In der grafischen Darstellung, einem Andrews-Diagramm, zeichnet das Programm 13 Isotherme (Linien gleicher Temperatur) ein. Die rot hervorgehobene Isotherme entspricht der berechneten kritischen Temperatur. Deren Horizontalwendepunkt entspricht gerade dem Punkt mit dem kritischen Druck und dem kritischen Volumen.

Der Bereich des Phasenübergangs gasförmig - flüssig wird im Diagramm grau

gefärbt. Nur für diesen Bereich kann das reale Gas durch Komprimierung flüssig werden. Links von dieser Fläche liegt das Gas im flüssigen Zustand vor, rechts davon als Dampf oder Gas.
Bei einigen gewählten Gasen liegen die Isothermen sehr dicht beieinander. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit können Sie dafür an den Schaltern den Darstellungsbereich der Abszisse strecken oder stauchen.

Plancksches Strahlungsgesetz

"Die Physik hat nicht Erlebnisse zu beschreiben, sondern sie hat die reale Außenwelt zu erkennen."
Max Planck

Das Strahlungsgesetz von Planck beschreibt die Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers als Funktion der Temperatur T und der Wellenlänge l . Unter dem Auswahlpunkt *Plancksches Strahlungsgesetz* berechnet und zeichnet das Programm die entsprechenden Strahlungsintensitätskurven. Geben Sie dazu in den vier Eingabezeilen die Temperaturen der Körper ein und betätigen Sie Berechnung.

In der graphischen Darstellung sehen Sie, dass die Körper dann für eine ganz spezielle Temperatur ein Strahlungsmaximum besitzen. Zu Orientierung zeichnet das Programm den Bereich des sichtbaren Lichtes ein. Zusätzlich werden für die erste eingegebene Temperatur für verschiedene Wellenlängen die Intensitäten in Prozent berechnet.

Elektronenbelegung

In diesem Teilprogramm wird die Elektronenbelegung in den Atomhüllen der chemischen Elemente im Schalenmodell, Orbitalmodell bzw. unter Berücksichtigung der Pauli-Regel gezeichnet.
Eine Schwierigkeit des Bohrschen Atommodells, den Aufbau des Periodensystems der Elemente korrekt zu beschreiben, konnte von dem österreichischen Physiker Wolfgang Pauli beseitigt werden. Das nach ihm benannte Prinzip fordert ergänzend:
Zwei Elektronen eines Atoms müssen sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden, d.h., sie können nicht in den vier Quantenzahlen Haupt-, Neben-, Spinquantenzahl und magnetische Quantenzahl übereinstimmen.

Insbesondere erfordert dies, dass sich die zwei Elektronen der 1. Schale in der sogenannten Spinquantenzahl unterscheiden müssen, da alle anderen Quantenzahlen dieser Elektronen identisch sind. Sehr vereinfacht – streng physikalisch ist dies natürlich Unsinn – könnte man dies etwa damit erklären, dass die zwei Elektronen mit entgegengesetztem Richtungssinn um ihre Achsen rotieren. Gleichzeitig folgt aus dem Prinzip zum Beispiel auch, dass sich die acht Elektronen der 2. Schale in zwei verschiedene "Niveaus" zu einmal zwei und einmal sechs Elektronen aufspalten usw.

Starten Sie das Teilprogramm *Elektronenbelegung*, markieren den Punkt *Pauli-Regel* und wählen in der Liste ein Element aus, zeichnet das Programm die Elektronenbelegung je Energieniveau inklusive der Berücksichtigung der Spinquantenzahl. Die dabei an der linken Seite angegebenen Bezeichnungen 1s, 2s, 2p, 3s usw. charakterisieren die Orbitale des Atoms.

Die Liste der chemischen Elemente ist voreingestellt nach der Ordnungszahl sortiert. Möchten Sie eine alphabetische Ordnung, so markieren Sie das Feld sortierte Liste.

14.49 Temperaturumwandlung

Im 18.Jahrhundert wurde das Bedürfnis, Temperaturen genauer zu müssen, immer größer. Dazu war es notwendig ein Messsystem, d.h. Bezugspunkte und eine Skaleneinteilung festzulegen.
Führende Physiker dieser Zeit führten ihre Skalen ein, von denen die Celsius-Skale und die Kelvin-Skale auch heute noch verwendet werden. Die Angabe der Temperatur in Grad Fahrenheit ist ausschließlich auf die USA beschränkt, obwohl es eine internationale Vereinbarung gibt, die Celsius-Skale zu verwenden.

1708 besuchte der deutsche Physiker Daniel Gabriel Fahrenheit den dänischen Astronomen und Mathematiker Rømer in Kopenhagen. Rømer zeigte Fahrenheit die von ihm entwickelte Temperaturskala, die einen Festpunkt bei 22,5°Rø, der Körpertemperatur des Menschen, und den zweiten Festpunkt bei 7,5°Rø, dem Gefrierpunkt von Wasser, hatte. Fahrenheit betrachtete die gebrochenen Werte der Festpunkte als unpraktisch und modifizierte Rømers Skale. Er teilte jedes Grad in vier Teile und legte den unteren Festpunkt auf 30° und den höheren auf 90° fest. Der Siedepunkt des Wassers betrug damit 205° Fahrenheit. 1717 veränderte er die Festpunkte auf 32°F für den Wassergefrierpunkt und 96°F für die menschliche Körpertemperatur. Der Hintergrund dieser Veränderung war die Tatsache, dass nun zwischen dem unteren und dem oberen Fixpunkt 64 Grad Differenz lagen.

Die Celsius-Skala wurde 1742 von dem schwedischen Astronomen Anders Celsius eingeführt. Er bezeichnete ursprünglich die Gefrierpunktstemperatur mit 100° und die Siedepunktstemperatur mit 0°. Kurz nach seinem Tod wurden jedoch die Temperaturwerte der beiden Fixpunkte getauscht.

William Thomson, Lord Kelvin, führte 1848 eine Temperaturskale ohne negative Werte ein, die heutige Kelvin-Skale.
Der Nullpunkt der Kelvinskala liegt am absoluten Nullpunkt bei -273,15 °C. Sie ist so eingerichtet, dass 1 °C und 1 K den gleichen Temperaturunterschied darstellen. Das Kelvin wird vor allem in Naturwissenschaft und Technik zur Angabe von Temperaturen und Temperaturdifferenzen verwendet.

Die Rankine-Skale setzt ebenfalls den Nullpunkt bei -273,15°C an, unterteilt aber in gleichen Schritten wie die Fahrenheit-Skale.

In diesem Teilprogramm werden Werte der Temperaturskalen ineinander umgerechnet.
Links werden ein stylisiertes Thermometer mit der Celsius-Temperatur, rechts mit der Kelvin-Skale dargestellt. Die Skalenart des mittleren Thermometers können sie an der aufklappbaren Liste auswählen.
Die unterschiedlichen Werte stellen Sie an den Rollbalken ein und tragen die Temperatur direkt in die Eingabezeilen ein.

15. Anwendung aus der Astronomie

Unter diesem Punkt finden Sie mathematische Anwendungen zu Fragen der Astronomie. So werden hier beispielsweise die Darstellung des Sternhimmels sowie Simulationen zur Bewegung der Planeten und anderer Himmelskörper in unserem Sonnensystem erörtert.

15.1 Sternzeituhr

Für astronomische Beobachtungen benötigen Sie neben Ihrer aktuellen Uhrzeit auch die Sternzeit.

Die Drehung der Erde um ihre eigene Achse wird im Allgemeinen mit 24 Stunden angegeben, der Dauer eines Tages. Dies ist aber nur korrekt, wenn damit die Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne gemeint ist, d.h. die Zeit, nach der die Sonne wieder genau im Süden steht. Durch die Bewegung der Erde um die Sonne benötigt die Erde aber für eine vollständige Rotation von einer Kulmination zur nächsten eines Sterns keine 24 Stunden, sondern nur 23 h 56 min – einen Sterntag.

Da sich die Astronomie aber vorwiegend mit der Beobachtung von Sternen beschäftigt, muss diese Sternzeit unbedingt berücksichtigt werden, andernfalls ist der Stern nicht dort, wo er berechnet wurde.

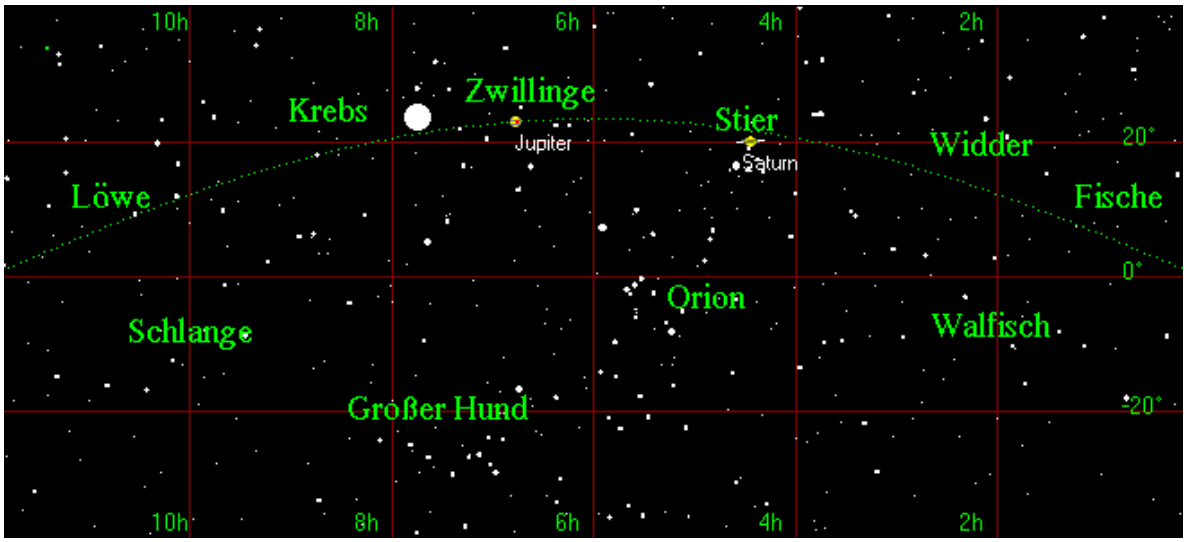
15.2 Planetenpositionen

„Erkennest dann der Sterne Lauf,
und wenn Natur dich unterweist,
dann geht die Seelenkraft dir auf ...“
Goethe, Faust

In der Geschichte der Wissenschaften zeigte sich immer wieder, dass bedeutende Mathematiker auch gute Astronomen waren (Gauß war Direktor der Sternwarte in Göttingen) und andererseits berühmte Astronomen auch geniale Mathematiker waren. Beispielhaft sind Johannes Kepler oder Isaac Newton.

Offenbar gibt es eine "unsichtbare" Verbindung zwischen Mathematik und Astronomie. Dieser Tatsache trägt auch das Programm Rechnung.

Ein besonderes Teilprogramm finden Sie unter diesem Punkt. Dieser Programmteil stellt Ihnen auf einer Sternkarte des Himmelsäquatorbereichs die Position der Planeten, der Sonne und des Mondes zu einem beliebigen Zeitpunkt und deren Bewegung im Laufe der Zeit dar.



Nach dem Programmstart finden Sie in zwei Karten die aktuellen Positionen der sechs mit bloßem Auge sichtbaren Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus, die Planeten Neptun und Pluto sowie die Sonne und den Mond eingetragen. Die dargestellten Positionen entsprechen dabei den wahren Positionen der Himmelskörper zu dem eingegebenen Datum.
Sie haben mehrere Möglichkeiten die Darstellungen zu verändern.

Geben Sie unter *Tag, Monat* und *Jahr* andere Werte ein und quittieren Sie mit dem Schalter *Datum übernehmen*, wird der Sternenhimmel zu diesem Zeitpunkt gezeichnet. Die zwei Schalter + und − erhöhen bzw. verringern das aktuelle Datum. Dabei wird voreingestellt um jeweils 1 Tag erhöht bzw. verringert. Die Schrittweite können Sie an dem Rollbalken + *1 Tag* einstellen. Als kleinster Zeitraum (Rollbalken ganz links) sind etwa 1 Stunde, als größter Zeitraum 2 Jahre möglich.

Im rechten oberen Fensterbereich finden Sie zehn Markierungsfelder. An diesen können Sie einstellen, welcher der Himmelskörper eingetragen wird und welcher nicht.
Interessant ist die Möglichkeit, den Sternbereich hervorzuheben (er wird invertiert), der ± 1,5 h Rektaszension von der Position der Sonne aus liegt und damit schwer bzw. gar nicht zu beobachten ist, da entweder die Sonne alles überstrahlt oder die Differenz zwischen Aufgangs- bzw. Untergangszeit der Objekte zu den Zeiten der Sonne zu gering ist und die Planeten nur in der astronomischen Dämmerung sichtbar wären.

Simulation der Planetenbewegung

Betätigen Sie den Schalter *Simulationsstart*, simuliert das Programm die Planetenbewegungen im Laufe der Zeit. Mit einem voreingestellten Zeitabschnitt von einem Tag berechnet das Programm die neuen Positionen und trägt diese in die Sternkarte ein. Diese Animation können Sie wie folgt steuern:

	Wirkung
Simulationsstart	Start der Animation
Stopp!!!	Abbruch der Animation, Neustart setzt an der letzen Position fort
Datum übernehmen	Datum wird auf die eingegebenen Werte zurückgesetzt
Merkur, ..., Mond	Himmelskörper werden aus- bzw. eingeblendet
Rollbalken	Länge des Zeitabschnittes von 1 Stunde bis 2 Jahre variieren
Schalter	Zeitlauf erfolgt rückwärts
Schalter	Zeitlauf erfolgt vorwärts
Unsichtbarkeitsbereich	Ein - und Ausblenden des von der Sonne überstrahlten Bereiches des Sternhimmels
Planetenspur zeichnen	Darstellung einer Bewegungsspur

Während der Bewegungssimulation können Sie über die oben genannten Schalter Markierungsfelder, einzelne Objekte ... zu- und abschalten.
Zusätzlich können Sie über das Zuschalten der *Planetenspur* entstehende Planetenschleifen zeichnen lassen. Eine Planetenschleife – eine scheinbare Bewegung – entsteht, wenn die äußeren Planeten auf ihrer Bahn von der Erde überholt werden bzw. die inneren Planeten die Erde überholen.

Beachten Sie bitte: Alle verwendeten Gleichungen zur Berechnung der Planetenposition beziehen sich auf das Jahr 2000. Berechnungen vor 1900 oder nach 2100 sind, je weiter diese vom Jahr 2000 entfernt liegen, immer stärker fehlerbehaftet. Aufgrund der hohen Komplexität von Planetenberechnungen mit einer sehr großen Zahl von beeinflussenden Parametern, die heute teilweise nur näherungsweise bekannt sind, ist es nur mit Spezialprogrammen auf "Superrechnern" möglich, ernsthaft die Positionen der Planeten zur Zeit Keplers oder etwa noch früher zu berechnen.

Sternbild

Ein weiterer Eintrag in der Tabelle der Planeten, neben den rotierenden Äquatorkoordinaten, ist das Sternbild, in dem sich der Himmelskörper befindet. Die unglaubliche Faszination, die von einem sternenübersäten Nachthimmel ausgeht (im dicht besiedelten Deutschland leider fast nur noch in einem Planetarium zu bewundern), führte schon vor über 5000 Jahren dazu, dass die Menschen in den Sternen Abbilder ihres Lebens, ihres Glaubens usw. suchten. In der Folge wurden schon in Babylonien (3000 Jahre v.u.Z.) Sterne zu Gruppen, d.h. zu Sternbildern zusammengefasst. Sternbilder, in denen sich die Sonne im Laufe eines Jahres aufhielt, erhielten eine besondere Bedeutung und bildeten den sogenannten Tierkreis. Während im alten Ägypten die Ekliptik in 36 Dekane unterteilt wurde und die chinesische Astronomie 28 "Häuser" kannte, setzten sich in Europa die altbabylonischen 12 allgemein bekannten Tierkreis-Sternbilder von Widder bis Fische durch. Unabhängig davon, ob man an astrologischen Humbug glaubt oder nicht, kennt wohl jeder sein "Geburtssternbild". Wer aber weiß, wie es wirklich am Sternhimmel aussieht?

Tragen Sie Ihr Geburtsdatum ein und bestätigen Sie mit *Datum übernehmen*, so erhalten Sie die Planetenpositionen zum Zeitpunkt Ihrer Geburt.

Wichtiger Hinweis

Sollten Sie z.B. am 4. März geboren sein, so sind Sie natürlich Sternbild "Fische". Oder vielleicht doch nicht?!

Die Einteilung der Sternbilder geht auf die babylonische Astrologie zurück und hat mit der astronomischen Realität praktisch nichts zu tun, da es in Wirklichkeit 13 (!) Tierkreis-Sternbilder gibt. Die Sonne befindet sich nur kurze Zeit im Sternbild Skorpion und bewegt sich dann in den Schlangenträger, das 13. Tierkreis-Sternbild.
Da diese Einteilung aber vor über 2000 Jahren durch die babylonischen Astronomen vorgenommen wurde, hat sich infolge der Präzession der Erdachse in den letzten 2000 Jahren der Frühlingspunkt um 30° und damit die Lage der Tierkreiszeichen um etwa ein Sternbild verschoben.

Dies bedeutet, dass Sie astronomisch gesehen als am 4. März Geborener ein Wassermann sind! Und deshalb steht in der Karte die Sonne auch im Wassermann. **Dies ist kein Programmfehler!**
Anfang des 21. Jahrhunderts befindet sich die Sonne zu folgenden Zeiten in den Tierkreis-Sternbildern:

Widder	17.4. - 10.5.
Stier	11.5. - 20.6.
Zwillinge	21.6. - 21.7.
Krebs	22.7. - 12.8.
Löwe	13.8. - 16.9.
Jungfrau	17.9. - 27.10.
Waage	28.10. - 21.11.
Skorpion	22.11. - 27.11.
Schlangenträger	28.11. - 17.12.
Schütze	18.12. - 21.1.
Steinbock	22.1. - 18.2.
Wassermann	19.2. - 11.3.
Fische	12.3. - 16.4.

15.3 Aktueller Sternhimmel

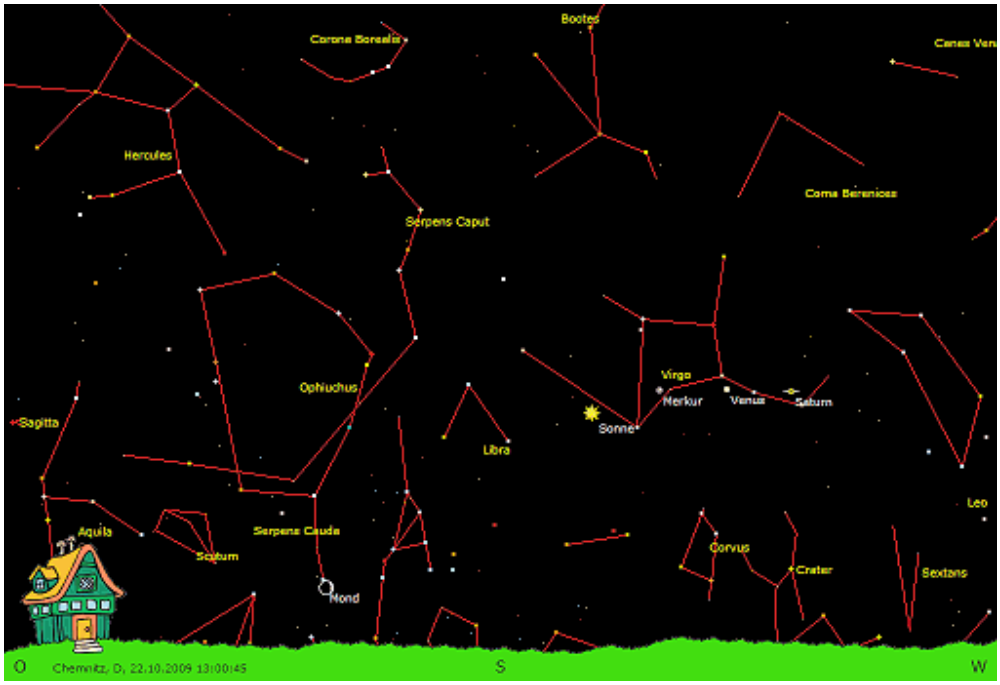
Dieses Teilprogramm stellt den aktuell sichtbaren Sternhimmel an Ihrem Beobachtungsort dar. Nach dem Start dieses Programmteils zeichnet das Programm einen Ausschnitt des Sternhimmels in Richtung Süden. Dargestellt werden die in der Sternbibliothek enthaltenen etwa 1500 mit bloßem Auge sichtbaren Sterne bis zur Größenklasse 5, Sonne, Mond und die Planeten.

Im linken Bildteil finden Sie die Himmelsrichtung Osten, rechts Westen. Die Richtung der Anzeige können Sie unter *Darstellung* verändern. Alle vier Haupthimmelsrichtungen können Sie in der Mitte des Fensters positionieren. Außerdem sind auch Zwischenwerte des Azimuts am oberen Eingabefeld wählbar, d.h. praktisch können Sie jede Himmelsrichtung auswählen. Klicken Sie mit der Maus links in das Darstellungsfenster und Verschieben die Maus wird die Himmelsrichtung ebenfalls verändert.

Über die Schalter der Aktionsschalterleiste sind folgende Veränderungen der Darstellung möglich:

Schalter	Erklärung
S	Ein- und Ausschalten der Beschriftung der Sterne mit deren Eigennamen
SB	Ein- und Ausschalten der Bezeichnung der Sternbilder
	Ein- und Ausschalten der Hilfsliniendarstellung der Sternbilder
	Start und Abbruch der Simulation
	Zeitlauf umkehren
	Auswahl eines anderen Beobachtungsortes
	An- und Abschalten der ständigen Aktualisierung der Darstellung entsprechend der Zeit und des Datums

An zwei aufklappbaren Listen stellen Sie zum einen das Datum zum anderen die Ortszeit ein. Das Programm übernimmt die Änderungen und zeigt sofort den entsprechenden Sternhimmel.



Weitere Einstellungen sind im Teilmenü *Darstellung* möglich, u.a. farbige Sterne nach ihrer Spektralklasse, Ausblenden des Horizontbildes, die Berücksichtigung der Sommerzeit, Zeichnen der Ekliptik, der Sternbildgrenzen, des Meridians und

der Höhenlinien usw.

Die Geschwindigkeit der *Simulation* stellen Sie an der dritten aufklappbaren Liste ein. Dabei können Sie zwischen 15 Sekunden und 24 Stunden wählen.
Bei Wahl von 24 Stunden bleibt zum Beispiel die gegebenenfalls schtbare Sonne im Fenster, bei 23h 56min (Sterntag!) verschieben sich die Sterne natürlich nicht.

Anmerkung: Wählen Sie einen Beobachtungsort der Südhalbkugel aus, so wundern Sie sich bitte nicht, dass in Südrichtung keine Sonne zu sehen ist. Auf der Südhalbkugel gehen die Himmelskörper im Osten auf und im Westen unter, erreichen aber ihren Höchststand, die Kulmination, in Richtung Norden!

Neben der Anzeige des *Azimut*s finden Sie eine Eingabemöglichkeit für die visuelle Helligkeit der Sterne, die angezeigt werden. Für einen Wert von 5 mag sehen Sie alle mit bloßem Auge erkennbaren Sterne, für einen geringeren Wert, diejenigen die in der Dämmerung mit dunkler werdenden Himmel zu erkennen sind.

Anzeige von Informationen zu Planeten, Mond und Sonne

Klicken Sie in der Darstellung auf einen angezeigten Planeten, den Mond oder die Sonne, so erhalten Sie in einem zusätzlichen Fenster Informationen zu dem Objekt inkl. Daten zur Position, Sichtbarkeit usw.

Anzeige von Informationen zu einzelnen Sternen

Wurde im Menü der Punkt *Sterninformationen anzeigen* markiert, so bewirkt ein linker Mausklick auf einen der Sterne die Anzeige von Informationen zu diesem Stern.
Neben Namen und Sternbild werden, soweit bekannt, die absolute Helligkeit M, die scheinbare Helligkeit m, die Entfernung r in Lichtjahren, die Spektralklasse SKL und die Koordinaten des rotierenden Äquatorsystems Rektaszension alpha und Deklination delta angezeigt.

15.4 Ephemeride

Für astronomisch Interessierte ist die Kenntnis der aktuellen Planetenpositionen von Bedeutung. Tabellenwerke stellen dabei eine wertvolle Hilfe dar, enthalten aber meist nur Werte für jeweils ein Jahr und einen Berechnungsort (in Mitteleuropa ein Standardort mit 50 Grad geografischer Breite und 15 Grad geografischer Länge).

Das Programm ermöglicht unter in diesem Teilprogramm eine genaue Berechnung interessanter Planetenparameter-Tafeln – sogenannter Ephemeride – für ein beliebiges Datum und einen beliebigen Ort. Stellen Sie zuerst an den Rollbalken das gewünschte *Datum* ein, dann errechnet das Programm das Julianische Datum sowie für die mit relativ einfachen astronomischen Mitteln zu

beobachtenden Planeten

- Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun

die aktuellen Himmelspositionen. Zu den berechneten Größen gehören:

- Heliozentrische Länge l und Breite b in Grad
- Radiusvektor, der Abstand des Planeten von der Sonne in AE
- Geozentrischer Abstand a des Planeten zur Erde in Astronomischen Einheiten (AE)
- Laufzeit des Lichts vom Planeten zur Erde
- Geozentrische Länge l und Breite b in Grad
- Rektaszension α (h min) und Deklination δ (°), Koordinaten des rotierenden Äquatorsystems
- Scheinbarer Durchmesser d des Planeten in Winkelsekunden "
- Scheinbare visuelle Helligkeit des Planeten in mag
- Aufgangs- und Untergangszeit am gewählten Tag bzgl. des Beobachtungsortes
- Sternbild, in dem sich der Planet befindet
- Azimut und Höhe des Planeten im Horizontsystem
- Heliozentrische Länge der Erde

Für sich schnell am Sternhimmel verschiebende Planeten wie Merkur oder Venus beeinflusst die aktuelle Uhrzeit die Koordinaten schon erheblich. Deshalb können Sie zusätzlich an den Rollbalken *Stunden* und *Minuten* die Feineinstellung der Uhrzeit vornehmen. Voreingestellt ist jeweils die aktuelle Systemzeit Ihres Computers. Grundlage der Berechnung ist die Epoche J2000.0, d.h. die Lage des Frühlingspunktes am 1.1.2000.

Insbesondere die scheinbare Helligkeit ist für einfache Amateurbeobachtungen ohne Fernrohr von Bedeutung, da das menschliche Auge höchstens Objekte der 6. Größenklasse sehen kann. In Städten mit ihrer Nachthelligkeit und der leider immer vorhandenen Dunstglocke reduziert sich der Wert auf die 4. bis 5. Größenklasse. Die in diesem Unterprogramm verwendeten Gleichungen schränken den möglichen Maximalfehler der Ephemeride bis zum Jahr 2050 auf:

	Maximalfehler		Maximalfehler
geozentrische Länge	0,1°	Geozentrische Breite	0,05°
Rektaszension	0,2°	Deklination	0,1°

Die Abweichungen der Planetenephemeride liegen fast immer unter diesen Werten. Zum Beispiel beträgt für den 1.1.1987 die Abweichung der Venusrektaszension 0,2 min und des Venusaufgangs für MEZ Standard 3 Minuten.

Alle angegebenen Zeiten sind "tatsächliche" Zeiten, also MEZ (ohne Berücksichtigung der Sommerzeit MESZ). Denken Sie daran: Die sogenannte Winterzeit ist die Mitteleuropäische Zeit.
Problematisch wird die Sache dadurch, dass z.B. Aufgangs- und Untergangszeiten

Winterzeiten (MEZ) darstellen. Sollten Sie aber Ihren Computer auf Sommerzeit (MESZ) umgestellt haben und die Horizontkoordinaten für z.B. 15.00 Uhr ermitteln wollen, nutzt das Programm 15.00 Uhr MEZ!

Für die Berechnung muss ein Beobachtungsort gewählt sein. Voreingestellt ist Chemnitz in Sachsen. Einen anderen Ort stellen Sie im Teilprogramm *Ortsbibliothek* ein. Dieser Ort wird dauerhaft gespeichert und bei einem Programmneustart automatisch geladen.

Befindet sich der Beobachtungsort innerhalb der Polarkreise, kennzeichnet die Meldung

sichtbar bzw. unsichtbar

dass der Planet ständig sichtbar ist bzw. am jeweiligen Tag nicht aufgeht.

Aktualisieren der Daten

Markieren Sie das Feld *Aktualisieren*, berechnet das Programm die Planetenwerte in jeder Sekunde neu, d.h., die angezeigten Daten werden mit fortlaufender Zeit stets auf dem aktuellen Stand gehalten.

Beachten Sie dabei, dass als Zeitmaß die in Ihrem Computer eingestellte Systemzeit genutzt wird.

Ephemeride-Tabellen

Klicken Sie auf eines der sieben Planetensymbole oder wählen Sie im Hauptfenster einen der Menüpunkte *Astronomie* | *Ephemeride* | *Merkur ... Pluto* aus, so gibt Ihnen das Programm die Möglichkeit, für einen konkreten Planeten die Ephemeride für einen längeren Zeitraum zu berechnen und die Ergebnisse zu speichern bzw. zu drucken.

15.5 Planetoiden Ephemeride

In der Neujahrsnacht des Jahres 1801 entdeckte der italienische Astronom Guiseppe Piazzi den ersten Kleinplaneten. Er erhielt nach der römischen Göttin der Feldfrüchte den Namen Ceres. Doch er war nur der erste kleine Himmelskörper im Sonnensystem, dem schon bald viele Entdeckungen nachfolgten (Pallas, Vesta und Juno).

Heute ist die Zahl der nummerierten Kleinplaneten, also derjenigen, deren Bahnen genau bekannt sind, stark angewachsen und liegt bei rund 60000. Von diesen haben 10000 einen Namen. Von weiteren rund 150000 Kleinplaneten liegen Beobachtungen vor, allerdings sind deren Bahnen noch nicht genau genug bestimmt, um sie zu nummerieren.

Die Kleinplaneten werden auch Planetoiden oder Asteroiden genannt. Sie bewegen sich vorwiegend zwischen dem Planeten Mars und Jupiter um die Sonne.

Damit benötigen sie im Mittel für einen Umlauf um unser Zentralgestirn zwischen 1,5 und 5 Erdenjahre. Der Asteroid Ceres hat einen Durchmesser von etwa 1000 km. Doch der weitaus größte Teil der Kleinplaneten ist deutlich kleiner als 50 km.

Nur sehr wenige Kleinplaneten kommen der Erde so nahe, dass man sie mit einem Feldstecher am Sternenhimmel finden kann. Viele Kleinplaneten wurden mit den Mitteln der Himmelsfotografie aufgespürt. Dafür benötigt man aber genauere Daten, die Ephemeride dieser Planetoiden.

In diesem Teilprogramm werden die Bahndaten für etwa 40 Kleinplaneten berechnet. Wählen Sie dazu zuerst in der Liste den Planetoiden aus. Nach Festlegung des *Startdatums* und der *Schrittweite* in Stunden erhalten Sie mit dem Schalter *Berechnung* für den Kleinplaneten die Äquatorkoordinaten Rektaszension und Deklination, für den eingestellten Beobachtungsort Azimut und Höhe, seine Entfernung zur Erde, den Radiusvektor, d.h. die Entfernung zur Sonne, und die scheinbare Helligkeit in Größenklassen.
Die vordefinierten Kleinplaneten wurden so gewählt, dass die hellsten in der Liste vorhanden sind. Dennoch werden Sie feststellen, dass selbst Ceres nur eine scheinbare Helligkeit von maximal 7 mag erreicht und somit für das bloße Auge nicht sichtbar ist.

15.6 Ephemeride einzelner Planeten

In Ergänzung des Teilprogramms Ephemeride können Sie hier in diesem Programmteil für einen konkreten Planeten die Ephemeride für einen längeren Zeitraum berechnen und die Ergebnisse speichern bzw. drucken.

Dabei ist für den Planeten Pluto zu beachten, dass die berechneten Werte nur im Zeitraum von etwa 1850 bis 2100 mit einem geringen Fehler behaftet sind. Zum einen verändert sich die Plutobahn durch Störungen anderer Planeten relativ schnell, zum anderen existiert nur eine von Goffin, Meeus und Steyaert entwickelte Näherungstheorie, die auf der Auswertung von Beobachtungsergebnissen zwischen 1914 und 1979 beruht. Interessant ist dabei, dass Pluto zwar erst 1930 entdeckt wurde, auf älteren Aufnahmen aber nachträglich bis in das Jahr 1914 zurück nachgewiesen werden konnte.

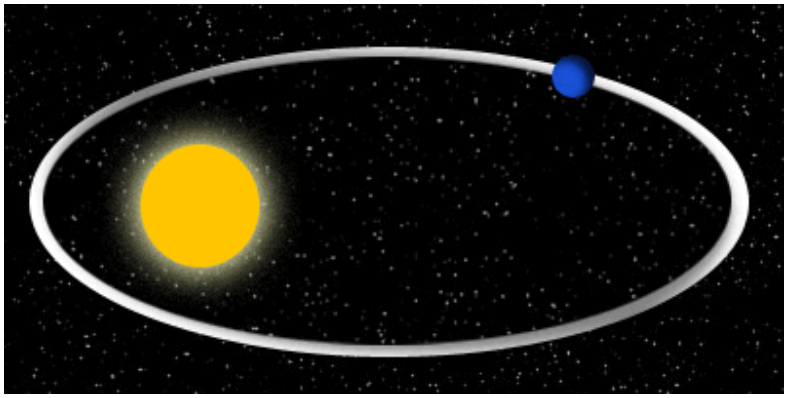
Hinweis: Am 24. August 2006 wurde der Pluto durch die Internationale Astronomische Union (IAU) als Zwergplanet eingestuft. Damit existieren im Sonnensystem noch acht große Planeten.

Haben Sie das Programmfenster maximiert und eine waagerechte Auflösung von mindestens 1280 Pixel eingestellt, so erhalten Sie bei den Ephemeriden-Tabellen der Planeten Merkur bis Neptun zusätzlich vier weitere Größen angezeigt. Dabei handelt es sich um den Radiusvektor (Abstand zur Sonne), die heliozentrische Länge und die Länge und Breite in geozentrischen Koordinaten.

15.7. Keplersche Gesetze

Anfang des 17.Jahrhunderts fand der große deutsche Astronom Johannes Kepler die nach ihm benannten Bewegungsgesetze der Planeten.

1.Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte befindet sich die Sonne.

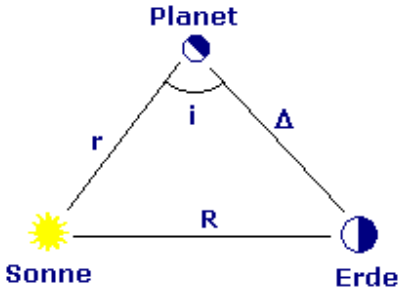


2.Keplersches Gesetz: Der Leitstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Folgerung: Der Planet bewegt sich in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne.
3.Keplersches Gesetz: Der Quotient aus dem Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten und der dritten Potenz dessen großer Halbachse ist für alle Planeten gleich groß: $T^2 : a^3 = konst.$

In diesem Teilprogramm werden diese drei Gesetze grafisch veranschaulicht. Wählen Sie zuerst, welches Gesetz gezeigt werden soll.

An dem Rollbalken *Exzentrizität* stellen Sie die numerische Exzentrizität der Planetenbahn ein, unter *Anomalie* die Lage des Planeten auf seiner Bahn. Starten Sie die Animation, so wird der Planet um die Sonne bewegt.
Bei der Demonstration des 2.Gesetzes, werden während eines Umlaufs zwei Flächen farbig markiert, für die der Strahl von der Sonne zum Planeten gleiche Zeit benötigt. Diese zwei Ellipsenbereiche sind flächengleich.
Beim 3.Gesetz wird ein zweiter Planet eingezeichnet. Dieser hat eine derartige Halbachse im Vergleich zum ersten Planeten, dass die Umlaufzeit gerade halb so groß ist.

15.8 Planetenphasen



Zu den bedeutendsten astronomischen Entdeckungen Galileis gehört neben den großen Jupitermonden auch die Feststellung, dass die Venus Phasen ausweist, d.h., ähnlich wie beim Mond gibt es "Neuvenus", "Vollvenus", abnehmende und zunehmende Venus. Obwohl diese Erscheinung auch mit dem ptolemäischen Weltbild erklärbar war, hielt Galilei die Phasengestalt der Venus für einen direkten Beweis des heliozentrischen Weltbildes von Kopernikus.

Während der Bewegung um die Sonne verändert sich die Größe des von der Erde sichtbaren beleuchteten Teils der Planeten. Zum einen sind dafür die unterschiedlichen Entfernungen, zum anderen die verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten verantwortlich.

Ein Maß für die Größe des sichtbaren beleuchteten Teils ist der Phasenwinkel i. Dieser kann aus den Abständen Sonne - Planet r, Sonne - Erde R und Planet - Erde Δ einfach über den Kosinussatz berechnet werden. Der prozentuale Anteil der beleuchteten Fläche wird dann $k = (1 + \cos i) / 2$.
Während k für die inneren Planeten Merkur und Venus zwischen 0 und 100% liegen kann, wird k bei Mars nie kleiner als 0,838, bei Jupiter nicht kleiner als 0,989. Das heißt, für die außerhalb der Erdbahn befindlichen Planeten kann zwar eine leichte "Verformung" wahrgenommen werden, einen "Neumars" können wir aber nicht beobachten.

In diesem Programmteil wird für einen wählbaren Tag die Lage der Planeten Merkur bis Jupiter ermittelt und aus einer Blickrichtung senkrecht auf die Ekliptik dargestellt.
An den Auswahlfeldern *Merkur* bis *Jupiter* wählen Sie, für welchen der vier Planeten das aktuell sichtbare Bild gezeichnet werden soll. Voreingestellt ist die Venus, da diese besonders schöne Phasen aufweist.
Das Datum legen Sie an dem aufklappbaren Kalender fest. Dabei ist zu beachten, dass als frühestmöglicher Zeitpunkt der 1. Oktober 1752 ausgewählt werden kann.

Ändern Sie nun das Datum manuell oder durch den Start der *Simulation*, können Sie einerseits die Bewegung der Planeten beobachten, andererseits die wechselnde Lichtgestalt des Planeten. Wie schon erwähnt, besitzt vor allem die Venus sehr schön ausgebildete zunehmende und abnehmende Phasen. Dabei werden Sie sehen, dass die Venussichel auch ihre Lage ändert. Ursache dafür ist die Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik.

15.9 Planetenbahnen

Nach den Keplerschen Gesetzen bewegen sich die Planeten und Monde, aber auch eine Vielzahl von Kometen und Kleinplaneten auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Diese Bahnen unterscheiden sich nicht nur in den Größen der Halbachsen (in etwa die Entfernung zur Sonne) und damit auch in ihren numerischen Exzentrizitäten, sondern auch in der Ausrichtung dieser Ellipsen, d.h., die großen Halbachsen (Apsidenlinien) sind nicht gleich orientiert. Zusätzlich sind die Bahnen unterschiedlich stark gegen die Ekliptik geneigt.

In diesem Teilprogramm haben Sie die Möglichkeit, die Form und Lage der Bahnen von acht Planeten (Merkur bis Neptun), 5 Kleinplaneten (u.a. Pluto), elf Planetoiden und weiteren elf periodischen Kometen darzustellen. Zur Darstellung eines Himmelskörpers klicken Sie bitte innerhalb der Listbox *Objekte* auf dessen Namen. Das Programm zeichnet sofort neu. Entfernen Sie das Häkchen vor dem

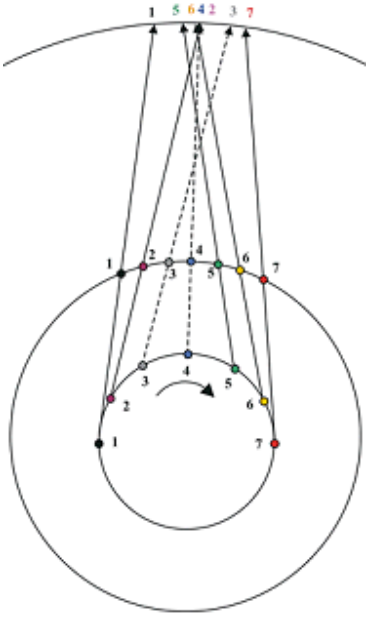
Namen des Planeten, Planetoiden oder Kometen, wird er aus der Darstellung entfernt.

Zusätzlich berechnet das Programm die aktuelle Position dieser Himmelskörper. Den für die Darstellung relevanten Zeitpunkt geben Sie in den Zeilen *Tag*, *Monat* und *Jahr* an. Nach einem Klick auf den Schalter *Darstellung* zeichnet das Programm die entsprechenden Positionen der Himmelskörper. Die Größe des abgebildeten Bereichs unseres Sonnensystems regeln Sie an den Schaltern + und -. Betätigen Sie + wird der Maßstab vergrößert. Zur Orientierung wird Ihnen rechts oben ein Vergleichsmaß angegeben.

Eine Besonderheit stellt die Möglichkeit dar, die Körper zu bewegen. Klicken Sie auf den Schalter *Simulation*, berechnet das Programm für fortlaufende Tage die Positionen der Planeten und Kometen neu und stellt diese dar. Während der Simulation können Sie außerdem den Maßstab verändern sowie weitere Körper hinzuschalten bzw. andere wieder entfernen. Zum Beenden der Bewegungssimulation klicken Sie auf *Stopp.* Die Geschwindigkeit der Darstellung regeln Sie an dem kleinen Rollbalken, ebenso ob die Darstellung zeitlich vorwärts oder rückwärts läuft.

Beachten Sie bitte, dass insbesondere für die Kometenberechnung Näherungslösungen genutzt werden. Durch die gravitativen Wirkungen gerade der großen Planeten kann eine Kometenbahn von Umlauf zu Umlauf teilweise erheblich abweichen.

Neben so bekannten Planetoiden wie Ceres oder Vesta finden Sie auch einige kleinere in der Liste. Zum Beispiel gehören Hathor, Aten und der Asteroid 2001 FR85 der sogenannten Aten-Gruppe an. Diese Kleinplaneten kommen der Erdbahn relativ nahe. Insbesondere 2001 FR85 hat eine erdähnliche Bahn um die Sonne. Doch auch wenn es in einer Simulation so scheint, kann dieser Asteroid dennoch niemals die Erde treffen – wegen der starken Neigung seiner Bahn zur Ekliptik.



Der Komet Tschurjumow-Gerassimenko erlangte Berühmtheit als im November 2014 die Kometensonde Rosetta erfolgreich den Lander Philae auf die Kometenoberfläche absetzte.

15.10 Planetenschleife

Als Planetenschleife bezeichnet man die Erscheinung, dass jeder Planet in regelmäßigen Zeitabständen am Sternhimmel scheinbar zurückwandert, um später seine rechtläufige Bahn wieder fortzusetzen.

Die Ursache liegt in den unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten der Planeten. Überholt die Erde auf ihrer Bahn einen höheren Planeten während seiner

Opposition, scheint der beobachtete Planet stillzustehen und seine Bewegungsrichtung sich dann umzukehren.
Für die zwei unteren Planeten, Merkur und Venus, tritt die Planetenschleife auf, wenn sich die Planeten in ihrer unteren Konjunktion befinden, d.h. Merkur bzw. Venus die Erde überholen.

Wenn sich die Erde vor dem Überholen eines höheren Planeten auf den Planeten zubewegt, scheint er einige Tage am Sternhimmel stillzustehen. Einige Zeit später erfolgt ein zweiter Stillstand.
Da die Bahnebenen der Planeten nicht exakt in der Ekliptik liegen, steht der Planet nur in ekliptikaler Länge "still". Durch Änderungen der ekliptikalen Breite entsteht die eigentliche Schleifenform.

In diesem Teilprogramm wird die Entstehung der Planetenschleife für die zwei Planeten Mars und Venus demonstriert.
Nach der Wahl des *Planeten* und der Eingabe eines *Datums* stellt das Programm im linken Fensterteil die Lage der Planeten im Sonnensystem dar. Im rechten Fensterteil wird der relative Ort des Planeten von der Erde aus gesehen angezeigt.

Starten Sie nun die *Simulation,* werden beide Planeten bewegt. Während des Umlaufs überholt die Erde den Mars bzw. die Venus die Erde. In diesem Moment entsteht in der rechten Darstellung eine Schleife mit Stillstand und retrograder Bewegung des Planeten.
Die Darstellungsgeschwindigkeit und die Darstellungsgröße können Sie verändern.

Markieren Sie das Feld *Sehstrahl*, so wird ein Strahl von der Erde zum Planeten eingezeichnet. Diese läuft über den Tierkreis, symbolisiert durch die zwölf Tierkreiszeichen. Tritt nun die Planetenschleife ein, so erkennt man, dass der Sehstrahl im Tierkreis zurück wandert, d.h. der Planet rückläufig wird.

15.11 Planetenstellungen

Während ihres Umlaufs um die Sonne nehmen die Planeten unterschiedlichste Positionen zur Erde ein und können damit unterschiedlich gut, unter Umständen auch gar nicht, beobachtet werden.
Dieses Teilprogramm verdeutlicht diese Planetenstellungen für einen inneren Planeten, die Venus, und einen äußeren Planeten, den Jupiter.
Die Demonstration starten Sie mit dem Schalter *Simulation*. Während der Bewegung regeln Sie die Geschwindigkeit mit dem Rollbalken. Folgende besondere Stellungen werden gesondert angezeigt:

- untere Konjunktion der Venus, d.h. die Venus steht vor der Sonne
- obere Konjunktion des Venus, d.h. die Venus steht hinter der Sonne
- Konjunktion des Jupiters
- Opposition des Jupiters

und zusätzlich alle Stellungen in welchen zwischen Erde - Sonne - Planet ein rechter Winkel auftritt (Quadratur).

Zusätzlich berechnet das Programm die siderischen Umlaufzeiten und die synodischen Umlaufzeiten beider Planeten. Möchten Sie, dass die Simulation automatisch bei einer eintretenden Konjunktion oder Opposition stoppt, so markieren Sie das Feld *automatischer Stopp*. Bei einem derartigen Halt setzen Sie die Simulation mit einem erneuten Klick auf den Simulationsschalter fort.

15.12 Konjunktion und Opposition der Planeten

Ende August 2003 überschlugen sich die deutschen Medien mit Berichten über Astronomie und Raumfahrt. Normalerweise geschieht dies nur, wenn entweder etwas Tragisches passiert, z.B. ein Space Shuttle abstürzt, oder wieder einmal die "Verschwendung" von Geld für Astronomie und Raumfahrt beklagt wird.
Wenn ein Nachrichten- oder Wettersatellit 10 Millionen € kostet, wird dies in deutschen Medien angeprangert, erhält die Bundeswehr für „Kriegsspiele" das Zehnfache oder mehr, so gilt dies als vollkommen normal.

Daher musste um den 28. August herum etwas Besonderes geschehen sein:
Der Mars näherte sich der Erde auf eine besonders kurze Entfernung, genauer gesagt auf nur 55,8 Millionen Kilometer. Annäherungen der beiden Planeten sind an sich nicht so selten, jedoch beträgt die Entfernung dann normalerweise zwischen etwa 70 und 100 Millionen Kilometer. In all diesen Fällen stehen die Sonne, die Erde und der Mars dann (fast) auf einer Geraden und zwar so, dass sich der Mars bezüglich der Erde auf der entgegengesetzten Seite befindet. Man sagt dazu: Der Mars befindet sich in Opposition. Liegt der Mars genau hinter der Sonne, so spricht man von einer Konjunktion.
Diese besonderen Stellungen werden für alle Planeten betrachtet.

Da die inneren Planeten Merkur und Venus niemals in Opposition kommen können, unterscheidet man die beiden möglichen Konjunktionen. Befindet sich der Planet zwischen Erde und Sonne, spricht man von einer unteren Konjunktion, sonst von einer oberen Konjunktion.

In diesem Teilprogramm können Sie für einige Planeten Oppositions- und Konjunktionsdaten berechnen.

Für einen einzugebenden Zeitraum werden alle derartigen Zeiten berechnet. Gleichzeitig ermittelt das Programm auch den Zeitpunkt, zu dem der Planet entweder eine minimale bzw. eine maximale Entfernung zur Erde hat. Dieser Moment entspricht nicht unbedingt der Opposition bzw. Konjunktion, sondern weicht teilweise um mehrere Tage ab. Die Ursachen hierfür sind zum einen die elliptische Form der Planetenbahnen und zum anderen die unterschiedliche Neigung der Planetenbahnen zur Ekliptik.

Zum Beispiel war der Mars am 28. August 2003 in Opposition. Die kürzeste Entfernung wurde aber schon einen Tag früher erreicht.

15.13 Planetenkalender

Die Erde benötigt auf ihrer Bahn um die Sonne für einen vollen Umlauf, dem tropischen Jahr, 365,2421896698 Tage. Andererseits dreht sich die Erde in 24 Stunden bezüglich der Sonne einmal um ihre eigenen Achse. Damit sind die Längen von Jahr und Tag in unserem bürgerlichen Kalender vorgegeben.

Die anderen sieben Planeten unseres Sonnensystems von Merkur bis Neptun haben andere Umlaufzeiten um die Sonne und andere Rotationszeiten.
Zum Beispiel benötigt der Ringplanet Saturn über 29 Jahre für eine Sonnenumlauf, rotiert aber in nur rund 10,5 Stunden um die eigene Achse. Damit ist das Saturnjahr 29 mal länger als ein Erdjahr, ein Saturntag weniger als die Hälfte eines Erdtages.

In diesem Teilprogramm wird ein Zeitraum von *Geburtsdatum* bis *Zieldatum* auf die einzelnen Planeten umgerechnet.
Angezeigt wird Ihnen, wie viele Plantenjahre (Sonnenumläufe) und -tage (Rotationen) in gewählten Zeitraum stattgefunden haben. Außerdem erhalten Sie die Angabe *Jahrestag*, zu welchem Erddatum auf dem entsprechenden Planeten ein weiteres Planetenjahr vollendet wird.

Wenn es Ihnen Spaß macht, können Sie damit bei Eingabe Ihres eigenen Geburtsdatums weitere acht „Geburtstage" für die Planeten Merkur bis Neptun feiern. Allerdings dürfte wohl kaum ein Mensch ein Neptunjahr alt werden.
Der Programmautor feierte jedenfalls seinen 250.Geburtstag am 29.5.2019, dem „250.Merkurgeburtstag". ☺

15.14 Astronomische Diagramme

Unter diesem Menüpunkt finden Sie sechs grafische Veranschaulichungen der Parameter

- Rektaszension und Deklination der Planeten
- mittlere visuelle Helligkeit der Planeten
- Entfernung des Planeten zur Erde
- scheinbarer Durchmesser des Planeten

für die acht Planeten Merkur bis Neptun. Zusätzlich ist ein Diagramm der Position der vier großen Galileischen Jupitermonde nutzbar. Wünschen Sie das Diagramm für ein anderes Jahr, tragen Sie dieses in die Zeile *Jahr* bzw. *Monat* ein und bestätigen Sie mit dem Schalter *Berechnung*.

Zum Beispiel können Sie aus dem obigen Diagramm schnell Informationen

beziehen, wann 2004 die einzelnen Planeten gut zu beobachten waren bzw. wann sie unsichtbar waren: Die Venus war bis Mitte Mai Abendstern (geht nach der Sonne unter), wurde dann bis Ende Juni relativ unsichtbar und blieb bis zum Ende des Jahres als Morgenstern sichtbar. Der Mars war bis Juni, Der Jupiter bis August gut zu beobachten.

Jupitermonde

Ein beliebtes Beobachtungsobjekt von Hobbyastronomen sind die vier 1610 von Galilei entdeckten und nach ihm benannten großen Jupitermonde Io, Europa, Ganymed und Kallisto. Diese sind schon durch kleine Teleskope bzw. hochwertige Ferngläser gut zu sehen.

Wählen Sie das Diagramm *Jupitermonde*, haben Sie die Möglichkeit für einen beliebigen *Monat* und ein frei wählbares *Jahr* ein Diagramm der relativen Abstände dieser Monde zum Jupiter zeichnen zu lassen. Das Programm berechnet für jeden Tag des eingegebenen Monats die Abstände der Monde in Jupiterradien und konstruiert die zugehörige Kurve.

Hinweis: Die Abstände der Jupitermonde und deren Bewegung um den Jupiter können Sie auch im Teilprogramm *Jupitermonde* nachvollziehen.

15.15 Aktuelle Sonnenparameter

In diesem Teilprogramm erhalten Sie aktuelle Informationen zur Sonne, unter anderem ihren Stand am Himmel, ihre Lage im Verhältnis zur Erde usw.

Tragen Sie zuerst das gewünschte Datum sowie die Uhrzeit in die Eingabefelder ein. In der aufklappbaren Liste *Beobachtungsort* wählen Sie den Ort aus, für den die Berechnungen erfolgen sollen. Ist dieser Ort nicht in der Liste enthalten, so können Sie die geografischen Koordinaten und die Differenz zwischen dem Greenwich-Meridian und dem für die Zeitzone wichtigen Meridian (*Länge der Zeitzone*) in ° eintragen. Für Orte mit Mitteleuropäischer Zeit wäre dies immer 15°.

Außer den astronomischen Berechnungen ermittelt das Teilprogramm auch den Schattenwurf der Sonne auf eine ebene Fläche, d.h. die grundlegenden Werte für den Bau einer Sonnenuhr. Diese Ebene ist zum einen um einen Winkel β gegen die Horizontale (*Flächenneigung*) geneigt, zum anderen um einen Winkel γ gegen Süden gedreht (*Flächenazimut*). Beide Winkel können Sie ebenfalls eintragen. Starten Sie nun die Berechnung, so erhalten Sie als Ergebnisse:

Zeitgleichung, d.h. die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonne
Deklination und Rektaszension der Sonne
Das Sternbild, in dem sich die Sonne befindet
Den Stundenwinkel, d.h. die Abweichung der Sonne von Süden
Die wahre Sonnenzeit

Den Abstand der Erde von der Sonne sowie Aufgangs-, Kulminations- und Untergangszeit

Für den Schatten auf der Ebene werden weiterhin der Flächeneinfallswinkel und die Sonnenhöhe berechnet. Zusätzlich wird die Länge eines 1 m langen Schattenstabes bestimmt.
Markieren Sie das Feld *ständig aktualisieren*, erneuert das Programm sekündlich die Zeit und die entsprechenden Ergebnisse.

15.16 Sonnenfleckendiagramm

Auf der Sonnenoberfläche sind in unregelmäßiger Folge "dunkle Verfärbungen", die Sonnenflecken, zu sehen. Die Häufigkeit der Sonnenflecken wird durch die Relativzahl erfasst und ist ein Maß für die Sonnenaktivität.
Man zählt die Einzelflecken f und addiert das Zehnfache der Gruppenanzahl g, wobei auch Einzelflecken als Gruppe gelten. Diese Maßzahl der Sonnenaktivität bewährt sich seit über 100 Jahren, ebenso wie die aufwendige Flächenmessung der Sonnenflecken.
Durch die einfache Berechnungsweise lässt sich R in die Vergangenheit zurück abschätzen. Bis 1979 wurden die Daten in der Eidgenössischen Sternwarte in Zürich, seitdem beim Royal Observatory von Belgien gesammelt.
In einem Minimumsjahr liegt R im Mittel bei 5 bis 20, zur Zeit des Maximums bei 60 bis 200.

Durch Astronomen wird seit langem nachgewiesen, dass die Sonnenfleckenhäufigkeit unmittelbar Auswirkung auf die Temperatur der Erde hat.
Insbesondere während des Maunderminimums (1645–1715) hatte die Sonne eine Phase geringer Sonnenfleckenaktivität. Das Minimum fiel mit den kältesten Jahren der Kleinen Eiszeit zusammen, während der in Europa, Nordamerika und China viele sehr kalte Winter auftraten.
Ähnliches trat während des Dalton-Minimums (1790-1830) auf, bei der eine durchschnittliche Abkühlung um 2°C auftrat.

Erstaunlich ist, dass seit 2005 die Sonnenaktivität stark abnimmt, die Sonnenfleckenrelativzahl sinkt und es erneut zu einer Abnahme der durchschnittlichen Temperatur auf der Erde kommt. Diese Aussage ist politischer "Sprengstoff", den die Verfechter der "globalen Erwärmung" und die dazu gehörige Multi-Milliarden-Dollar-Industrie nicht gern hören.

In diesem Teilprogramm werden die gemessenen Sonnenflecken seit 1740 grafisch veranschaulicht.
Im Diagramm werden die *mittlere* und die *absolute Sonnenfleckenrelativzahl* angezeigt. Interessant ist besonders das deutlich zu geringe Minimum der Sonnenaktivität nach 2010. Die Sonne ist weniger aktiv, als zu erwarten wäre, und die mittleren Temperaturen gehen wieder zurück.

15.17 Mond

In diesem Teilprogramm erhalten Sie Informationen zu unserem nächsten Himmelskörper, dem Erdmond. Zu den ausgewiesenen Größen gehören:

- Julianisches Datum, Weltzeit, Ortszeit (aktuelle Systemzeit des Computers), Sternzeit für den Beobachtungsort
- Entfernung Mondmittelpunkt - Erdmittelpunkt, scheinbarer Monddurchmesser
- Prozentualer Anteil der beleuchteten, sichtbaren Mondoberfläche, Mondalter
- Aufgangs-, Kulminations- und Untergangszeit für den Beobachtungsort
- Daten des nächsten Perigäums und Apogäums
- Lunationsnummer (Zählung ab 1.Januar 1923 12:00 (JD 2423421,0)
- Mondphasen mit den Daten des letzten und nächsten Neumondes, des ersten und letzten Viertels und des Vollmondes
- Sternbild, in dem sich der Mond zudem jeweiligen Zeitpunkt befindet
- Heliozentrische Länge des Mondes bezüglich des Frühlingspunktes

Die Aufgangs-, Kulminations- und Untergangszeiten beziehen sich auf den Mondrand bzw. während der oberen Kulmination auf den Mondmittelpunkt. Die angegebenen Zeiten sind die Zeiten des jeweiligen Tages.

Außer der Angabe in Weltzeit, gibt Ihnen das Programm auch die lokale Zeit des eingestellten Beobachtungsortes an. Diese Übersicht wird im Sekundentakt aktualisiert.
Hinweis: Die verwendeten Gleichungen sind, trotz der Kompliziertheit der Mondbewegung (siehe dazu die Beschreibung weiter unten), so genau, dass der maximale Fehler der Mondphasendaten im Zeitraum von 1980 bis Mitte 2020 den Wert von 17 Sekunden nicht übersteigt.

Mond Ephemeriden

Grundlage für die Berechnung der Ephemeride des Mondes ist die von Chapront veröffentlichte Mondtheorie ELP-2000/82. Da der Mond einer Vielzahl von Einflüssen, z.B. selbst durch den Planeten Venus, unterliegt, ist seine Bahn äußerst schwierig zu berechnen. In der Originaltheorie müssen mehrere Hunderte periodische Terme in der Länge, der Breite und der Entfernung des Mondes berücksichtigt werden.

In unterem Teil dieses Teilprogramms werden die wichtigsten Terme mit einbezogen, sodass zum einen die Berechnungsgeschwindigkeit vertretbar bleibt, zum anderen der maximale Fehler sowohl in Rektaszension als auch die Deklination den Wert von 1" = 1 / 3600° nicht übersteigt. Allein für die Berechnung eines einzigen Korrekturwertes für die geozentrische Mondbreite sind über 50 trigonometrische Terme zu berücksichtigen.

Das Programm berechnet Ihnen voreingestellt für einen Tag im Abstand von einer

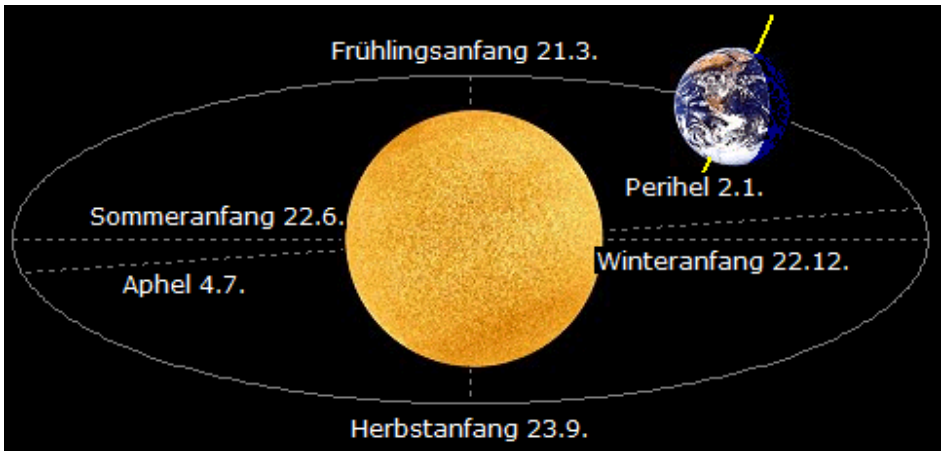
Viertelstunde die Rektaszension und Deklination des Mondes, die Größe des beleuchteten Teils, die Entfernung zur Erde und die Längen des aufsteigenden Knotens der Mondbahn und des Mondperigäums.

Beachten Sie bitte, dass der in den anderen Ephemeriden-Berechnungen genutzte Beobachtungsort für die Zeitangabe berücksichtigt wird, d.h. bei der Originalvoreinstellung ... Beobachtungsort = Chemnitz.

Einen anderen Beobachtungsort können Sie über das Teilprogramm *Ortsbibliothek* einstellen.

15.18 Jahreszeiten

Während der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne verändert sich neben dem Abstand auch der Einstrahlungswinkel der Sonne. Die Ursache ist die Neigung der Erdachse gegenüber der Ekliptik, der Bahnebene der Erde. Damit entstehen die Jahreszeiten.



Während des Winters auf der Nordhalbkugel ist die Erdachse von der Sonne maximal weggeneigt. Die Sonne steht Europa mittags sehr tief am Himmel. Aufgrund des flachen Winkels geht sie spät auf und früh unter, die Nacht ist lang - es ist Winter.

Am südlichen Wendekreis steht die Sonne im Zenit. Auf der Südhalbkugel steht die Sonne hoch am Himmel - Sommer. Am Südpol geht die Sonne den ganzen Tag nicht unter (Polartag).
Zur Frühjahrs- und Herbstbeginn steht die Erdachse quer zur Sonnenrichtung. Die Sonne steht auf Nord- und Südhalbkugel gleich hoch. Sie geht um 6 Uhr auf und um 18 Uhr unter, Tag und Nacht sind gleich lang. Am Äquator steht die Sonne im Zenit.

Zu Sommeranfang im Juni ist die Nordhalbkugel der Sonne maximal zugeneigt. Die Sonne steht in Europa mittags sehr hoch am Himmel. Aufgrund des steilen Winkels geht sie früh auf und spät unter, die Nacht ist kurz - es ist Sommer. Auf der Südhalbkugel steht die Sonne tief am Himmel - Winter.

Diesen Vorgang können Sie in diesem Teilprogramm simulieren.
An dem Rollbalken *Datum* stellen Sie den gewünschten Darstellungstag ein; mit *Neigung* und *Bahngröße* können Sie die Form der Ellipse verändern. Das

Programm zeichnet die Lage der Erde und ihrer Achse ein. Starten Sie die *Simulation* wird die Erde kontinuierlich bewegt.

Interessant ist zusätzlich, dass durch die elliptische Bahn auch die Jahreszeiten unterschiedlich lang sind. Gegenwärtig ist der Sommer immerhin 5 Tage länger als der Winter; auch wenn es einem bei dem M...wetter der letzten Jahre nicht so vorkommt.

15.19 Entstehung der Mondphasen

Diese kleine Teilprogramm demonstriert auf einfache Art die Entstehung der Mondphasen.
Dabei wird davon ausgegangen, dass die Sonnenstrahlen von oben auf die Erde und den Mond treffen. Die der Sonne zugwandte Seite des Mondes ist hell dargestellt.
Klicken Sie nun auf den Schalter *Simulation*, bewegt sich der Mond um die Erde. Die von der Erde sichtbare beleuchtete Seite des Mondes verändert sich nun, wodurch die Phasen entstehen.

Die dabei von der Erde wahrnehmbare Gestalt des Mondes ist dazu als zusätzlicher Kreis von Mondphasen eingezeichnet.

15.20 Zentrallinie einer Sonnenfinsternis

Zu den faszinierendsten astronomischen Ereignissen gehören Sonnenfinsternisse. Mittlerweile gibt es schon eine große Gruppe von Menschen, die ihren Jahresurlaub so planen, dass es ihnen möglich ist, die spektakulärste Finsternis des Jahres zu beobachten – und dies verwundert nicht, wenn man einmal eine totale Sonnenfinsternis erlebt hat.

Zur Planung eines solchen "Sonnenfinsternis-Urlaubs" ist es notwendig zu wissen, wann und vor allem wo eine totale Sonnenfinsternis zu beobachten ist.

Dieses Teilprogramm gibt Ihnen die Möglichkeit, den Verlauf der Zentrallinie einer totalen oder ringförmigen Sonnenfinsternis zu ermitteln. Dabei wird unter der Zentrallinie der Bereich auf der Erdoberfläche verstanden, in dem die Eklipse total oder ringförmig zu sehen ist.

Nach dem Teilprogrammstart ermitteln Sie mittels *Berechnung* alle auf der Erde sichtbaren totalen und ringförmigen Sonnenfinsternisse für den eingegebenen Zeitraum. Dabei ist der Zeitraum aus Genauigkeitsgründen (siehe weiter unten) auf die Jahre 1000 bis 3000 begrenzt.
Markieren Sie nun in der Liste der Eklipsen einen Eintrag ermittelt das Programm:

- für einzelne Punkte der Zentrallinie den Zeitpunkt der maximalen Eklipse, die geografische Breite und Länge sowie die Dauer der Finsternis in

Minuten,
- in einer Darstellung der Erde die Lage der Zentrallinie, zusätzlich wird der Beobachtungsort eingetragen,
- für den eingestellten Beobachtungsort die Sichtbarkeit und gegebenenfalls die Kontaktzeiten.

Markieren Sie einen Zeitpunkt in der Liste der Zentrallinie, dann zeigt Ihnen das Programm an, wo sich der gewählte Punkt befindet. Die Darstellung der Erde können Sie an dem Rollbalken etwas verändern.

Testen Sie das Programm, so werden Sie feststellen, dass für Europa die Sonnenfinsternis vom 12.8.2026 (total) besonders interessant sein wird. Sollten Sie einen anderen Beobachtungsort als den in der Ortsbibliothek eingestellten wünschen, können Sie ihn entsprechend aus der aufklappbaren Liste auswählen.

Markieren Sie den Punkt *Hohe Auflösung*, so werden die Küstenlinien mit größerer Präzision gezeichnet.

Orte längs der Kernschattenspur

Haben Sie in der oberen Liste eine Sonnenfinsternis ausgewählt, so können Sie das Programm mit dem Schalter *Orte suchen* veranlassen, längs der Schattenspur nach Orten suchen zu lassen, die Ihnen eine bessere Orientierung geben als eine reine, "leere" Karte. Dazu ermittelt das Programm auf der Schattenspur in gewissen Abständen Orte, die möglichst nah an der Sonnenspur liegen und zeigt diese mit einer Zahl an. Einer Legende können Sie die Ortsnamen entnehmen.

Wichtiger Hinweis: Zur Berechnung von Finsternisdaten sind sowohl die Weltzeit UT als auch die Ephemeridenzeit ET notwendig. Durch nicht vorhersehbare Schwankungen in der Rotationszeit der Erde besteht zwischen beiden eine Differenz t = ET - UT. Diese Differenz kann für die Zukunft **nicht** (!) berechnet werden, sondern wird aus empirischen Formeln der Vergangenheit abgeschätzt. Schon der Ausbruch eines größeren Vulkans, das Abbrechen einer großen Eisscholle in der Antarktis und ähnliche Dinge verändern die Rotationszeit unserer Erde. D.h., für die Jahre nach 2010 berechnete Finsternisse und damit auch ihre Zentrallinien können mit einem Fehler behaftet sein, der mit zunehmender Jahreszahl durchaus auch große Werte annehmen kann.

15.21 Astronomischer Jahreskalender

Bei Auswahl dieses Teilprogramms erhalten Sie für ein einzugebendes Jahr eine Liste besonderer astronomischer Ereignisse. Darunter finden Sie die Daten

- der Mondphasen
- Zeitpunkte der Opposition und Konjunktion der Planeten
- Daten des Perigäums und Apogäums des Mondes und von Perihel und Aphel

der Erde
- Zeitpunkte der größten Elongationen von Merkur und Venus
- Daten von Mondfinsternissen und Sonnenfinsternissen

Die Tabelle können Sie wieder ausdrucken, in die Zwischenablage kopieren bzw. als Textdatei speichern.

15.22 Sonnen- und Mondsichtbarkeit und Tageslänge

In diesem Teilprogramm werden für ein einzugebendes Jahr mehrere numerischen Berechnungen zu astronomischen Problemen durchgeführt. Dazu gehören:

- Sonnenkulmination, Sonnenaufgang, Sonnenuntergang und Tageslänge
- Mondkulmination, Mondaufgang und Monduntergang

Ob Sie die Berechnung für die Sonne oder den Mond durchführen, stellen Sie an den Auswahlfeldern ein.
Die Tageslänge wird als Differenz von Untergangs- und Aufgangszeit berechnet.

Für die Aufgangs-, Untergangs- und Kulminationszeiten ist zu beachten, dass diese sich immer auf einen Beobachtungsort beziehen. Voreingestellt ist Chemnitz mit einer geografischen Breite von 51° und einer geografischen Länge von 13° Ost. Diesen Ort können Sie ändern.
Entweder nutzen Sie dazu im Hauptfenster den Menüpunkt *Ortsbibliothek* oder in diesen Teilprogrammen den Schalter *Ortsbibliothek* . In diesem Fall wird das entsprechende Teilprogramm sofort aufgerufen.

15.23 Sonnen- und Mondfinsternisse

Unmittelbar mit der Bewegung des Mondes sind auch die Sonnenfinsternisse verbunden. Wählen Sie dieses Teilprogramm, so können Sie für den Zeitraum von 1600 bis 3000 die auftretenden Sonnenfinsternisse berechnen.

Neben dem Tag und der Uhrzeit der Finsternis erhalten Sie eine Angabe zur Art der Finsternis, also zum Beispiel, ob diese total, ringförmig oder nur teilweise ist. Während Mondfinsternisse immer auf fast einer Hälfte der Erde zu beobachten sind, ist dies bei Sonnenfinsternissen nur für einen kleinen Teil der Erde möglich. Deshalb erscheint es auch so, als ob Sonnenfinsternisse seltener wären als Mondfinsternisse. Aber das Gegenteil ist der Fall.

Das Programm gibt Ihnen daher zusätzlich an, ob diese Finsternis evtl. gesehen werden könnte. Deshalb erfolgt die Berechnung auch für den im Astronomieteil eingestellten Beobachtungsort.
Ist die Finsternis auf der Südhalbkugel der Erde sichtbar und befindet sich Ihr Ort auf der Nordhalbkugel, wird Ihnen dies angezeigt. Mit *unsichtbar* werden auch die

Finsternisse gekennzeichnet, die zu einem Zeitpunkt eintreten, wenn noch Nacht herrscht.
Alle anderen Eklipsen werden exakter untersucht. Dabei wird überprüft, ob und wie die Finsternis am Beobachtungsort gesehen werden kann. Unterschieden wird, ob die Finsternis

- partiell, d.h., die Sonne wird nur teilweise verdeckt,
- ringförmig, d.h., der Mond steht voll vor der Sonne, jedoch ist sein scheinbarer Durchmesser, kleiner, sodass ein Teil der Sonne sichtbar bleibt,
- total, d.h., die Sonne wird vollständig verdeckt,

ist.

Ist die Finsternis sichtbar, werden unter *M*= der scheinbare Monddurchmesser im Verhältnis zur Sonne und in Klammern die Stärke der Verdunkelung und der Zeitpunkt des Finsternismaximums angegeben.
Weiterhin werden die vier möglichen Kontaktzeiten berechnet. Grundlage ist stets die Weltzeit (Universal Time UT). Für einen Ort in Mitteleuropa muss daher 1 Stunde bzw. in der Sommerzeit müssen 2 Stunden addiert werden.
Unter dem 1. Kontakt versteht man den Zeitpunkt, zu dem der Mond die Sonnenscheibe von außen berührt. Zwischen dem 2. und 3. Kontakt ist die Sonne bei einer totalen Sonnenfinsternis vollständig vom Mond verdeckt. Der 4. Kontakt ist der Punkt, an dem sich Mond- und Sonnenscheibe am Ende der Finsternis gerade noch berühren.

Zum Beispiel erhält man für den Beobachtungsort Chemnitz und die Sonnenfinsternis vom 11. August 1999 die Ergebnisse:

Berechnungsort: Chemnitz/Rottluff, D
Geografische Breite: 50.81°
Geografische Länge: 12.9°
Zeitzone bzgl. WT: 1h
11.August 199913:04:21 SZtotal
Partielle Finsternis mit M=0.94 (0.93)
Maximum um 10:41: 9 UT
1. Kontakt: 11. 8.1999 9: 20: 59 UT (MEZ +1 Stunde, MESZ +2 Stunden)
4. Kontakt: 11. 8.1999 12: 2: 2 UT (MEZ +1 Stunde, MESZ +2 Stunden)

Hier war die Finsternis partiell sichtbar, wobei 93% der Sonnenscheibe verdunkelt wurden.

Für die Berechnung ist zu beachten, dass diese sich auf einen Beobachtungsort bezieht. Voreingestellt ist Chemnitz mit einer geografischen Breite von 51° und einer geografischen Länge von 13° Ost. Diesen Ort können Sie ändern.
Entweder nutzen Sie dazu im Hauptfenster den Menüpunkt *Ortsbibliothek* oder in diesen Teilprogrammen den Schalter *Ortsbibliothek* . In diesem Fall wird das entsprechende Teilprogramm sofort aufgerufen.

Mondfinsternisse

Mondfinsternisse (Eklipse = Finsternis) entstehen durch den Eintritt des Mondes in den Schattenkegel der Erde. In der gesamten Geschichte der Menschheit finden sich immer wieder Hinweise, dass Mondfinsternisse mit größtem Interesse beobachtet wurden:

Aristophanes beschreibt in seinem Stück "Die Wolken" die Mondfinsternis vom 9. Oktober 425 v.Z. Im Jahre 218 v.Z. verweigerten die gallischen Söldner ihrem Herrn Atalus I. aus Angst vor der Verdunkelung des Mondes die Gefolgschaft. Christoph Kolumbus, der von einer bevorstehenden Finsternis 1504 in Jamaika wusste, nutzte die Vorhersage, um die Eingeborenen unter Druck zu setzen, usw. usf.

In diesem Teilprogramm können Sie das Auftreten von Mondfinsternissen berechnen. Geben Sie dazu den Zeitraum der Berechnung unter *Jahr ... bis* ein und bestätigen Sie mit *Berechnung*. Das Programm berechnet nun die in diesem Zeitraum stattfindenden Mondfinsternisse, die Art der Verfinsterung (total, partiell) sowie die Uhrzeit der totalen Verfinsterung bzw. des Eintritts in den Halbschatten der Erde.
Die Berechnung der Mondbahn und damit der Finsternisse wird von einer Vielzahl von Faktoren beeinflusst wird. Schon für eine Jahresangabe vor 1900 müssen Sie mit einer Abweichung zum wahren Zeitpunkt der Mondfinsternis von 15 Minuten rechnen.

Beachten Sie bitte, dass die Berechnungen nur für einen Zeitraum von 1600 bis 3000 möglich sind. Geben Sie davon abweichende Jahreszahlen ein, korrigiert das Programm den Zeitraum automatisch.

15.24 Dämmerung

Unter diesem Menüpunkt finden Sie ein Teilprogramm zur numerischen Berechnung von:

- bürgerlicher, nautischer und astronomischer Morgen- bzw. Abenddämmerung

Als Dämmerung werden jeweils die Übergangszeiten zwischen Tag und Nacht bzw. Nacht und Tag bezeichnet.

Bürgerliche Dämmerung

Die bürgerliche Dämmerung beschreibt, wie lange es noch hell genug ist, um im Freien etwas lesen zu können. Es ist die Zeit der abnehmenden Dunkelheit vor dem Sonnenaufgang. Es ist die Zeit die der Sonnenmittelpunkt von 6 Grad unter dem wahren Horizont bis zum Sonnenaufgang braucht.

Nautische Dämmerung

Die nautische Dämmerung beschreibt die Zeit, bis wann man sowohl den Horizont als auch die Sterne zur besseren Orientierung noch sehen kann. Es ist die Zeit der

abnehmenden Dunkelheit vor dem Sonnenaufgang. Es ist die Zeit, die der Sonnenmittelpunkt von 12 Grad bis zum Sonnenaufgang braucht.

Astronomische Dämmerung
Es ist die Zeit, die der Sonnenmittelpunkt von 18 Grad unter dem wahren Horizont bis zum Sonnenaufgang braucht.

Für den Zeitpunkt der Dämmerung ist zu beachten, dass sie sich immer auf einen Beobachtungsort bezieht. Voreingestellt ist Chemnitz mit einer geografischen Breite von 51° und einer geografischen Länge von 13° Ost. Diesen Ort können Sie ändern.

15.25 Bahnbestimmung nach Gauß

Wie in der Beschreibung des vorhergehenden Teilprogramms erwähnt, entdeckte der Italiener Guiseppe Piazzi in der Neujahrsnacht des Jahres 1801 mit Ceres den ersten Kleinplaneten. Da dieser Kleinplanet mit einer großen Bahnhalbachse von 2,8 AE eine große tägliche Eigenbewegung besitzt, wäre er vermutlich verloren gegangen und erst mit Mühen irgendwann später wiederentdeckt worden.

Hier erhielten die Astronomen jedoch Hilfe von einem der größten Mathematiker aller Zeiten, von Carl Friedrich Gauß. Aus nur drei (!) Beobachtungen von Ceres gelang es ihm, die Bahndaten des Planetoiden mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen. Das dazu entwickelte geniale Verfahren gehört auch heute noch zu den Glanzpunkten der rechnenden Astronomie und ist auch nicht ohne Weiteres zu verstehen.
Eine sehr schöne Beschreibung dieser Methode finden Sie in "Astronomie mit dem Personalcomputer" von Montenbruck und Pfleger.

Ein etwas modifiziertes Verfahren ist in diesem Teilprogramm umgesetzt. Zur Ermittlung der Bahn eines Kometen oder eines Planeten benötigen Sie drei Beobachtungen und von diesen die genaue Beobachtungszeit sowie Rektaszension und Deklination des Objekts. Tragen Sie diese in die Tabelle ein.

Klicken Sie auf den Schalter ***B***, so erhalten Sie die Originaldaten, mit denen Gauß die Bahn des Planetoiden Ceres ermittelte. Weiterhin können Sie auch Beobachtungsdaten als Datei auf der Festplatte speichern und auf Wunsch wieder laden.
Wichtig ist noch, dass das Äquinoktium (Bezugsjahr) für die Messdaten und die Berechnung gewählt werden. Starten Sie nun die *Berechnung*, so erhalten Sie

- die ekliptikalen geozentrischen Koordinaten von Sonne und beobachtetem Objekt
- die heliozentrischen Entfernungen
- die genäherten Bahndaten wie große Halbachse, Periheldistanz, Exzentrizität, Bahnneigung, Perihellänge usw.

und damit die gesuchten Bahndaten des Objekts.

Hinweis: So leistungsstark die Gaußsche Methode ist, hat sie natürlich auch ihre Grenzen. Insbesondere für hyperbolische Kometenbahnen mit einer Exzentrizität größer als 1,1 sind die ermittelten Werte stark fehlerbehaftet. Wird das Objekt weiterhin in der Nähe seiner Konjunktion beobachtet, können mehrere Lösungen existieren. Es ist nicht sicher, dass die ermittelten Ergebnisse den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen.

Zur Ermittlung der Bahndaten wird eine umfangreiche Iteration durchgeführt. Mitunter kann diese auch nicht konvergieren. Auch in diesem Fall erhalten Sie keine Lösung.

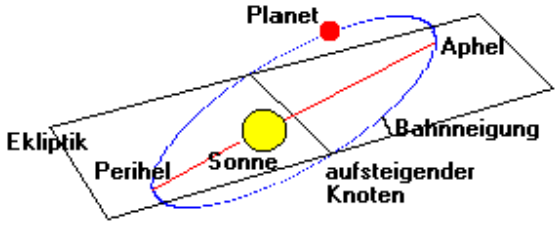
Wie "stark" das Gauß-Verfahren ist, kann man jederzeit testen. Mit dem Programm wurden für den Planeten Mars drei Beobachtungsdaten errechnet:

	Beobachtung 1	Beobachtung 2	Beobachtung 3
Datum und Zeit	15 9 2003 13.367	20 10 2003 23.5	30 11 2003 15.3
Rektaszension (h m s)	22 20 18	22 26 24	23 28 24
Deklination (° m s)	-16 30 54	-13 3 24	-4 23 18
Äquinoktium = 2000			

Nach Eingabe dieser Werte ermittelt das Teilprogramm für diesen Planeten u.a. eine große Halbachse von 1,538 AE (wahrer Wert 1,524), eine Exzentrizität 0,0967 (wahrer Wert 0,0934), eine Bahnneigung von 1,88° (1,85°) und eine Perihellänge von 339,2° (336°). Bedenkt man, dass die Marsbahndaten besonders großen Schwankungen unterliegen, ist die erzielte Genauigkeit faszinierend. Ein Auffinden des Planeten am Himmel wäre damit kein Problem.

15.26 Bahnparameter

Zur Beschreibung der Bewegung eines Planeten um die Sonne werden eine Vielzahl von Größen benötigt. Da jede Planetenbahn einer Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet, sind von Interesse:



- die kürzeste Entfernung des Planeten zur Sonne, das Perihel / für eine Bewegung um die Erde spricht man von einem Perigäum, für um den Mond vom Periselenum
- die längste Entfernung des Planeten zur Sonne, das Aphel / bei Bewegung um die Erde ... Apogäum
- die Bahnneigung, d.h. der Winkel zwischen der Ebene in welcher sich der Planet bewegt zur Ekliptik, der Ebene in welcher sich die Erde bewegt
- die Lage des aufsteigenden Knotens; das ist der Punkt, in welchem der Planet die Ekliptikebene von "unten" nach "oben" durchstößt. Dabei gilt der Halbraum als "unten", in dem sich der Südpol der Erde befindet.
- die große Halbachse der Bahn, d.h. die halbe Entfernung von Perihel nach Aphel bzw. Perigäum zu Apogäum

- die Geschwindigkeiten im nächsten und entferntesten Punkt zum Zentralkörper
- die lineare Exzentrizität der Bahn, d.h. die Entfernung der Sonne / Erde vom Mittelpunkt der Ellipsenbahn
- die numerische Exzentrizität ε, welche die Form der Ellipse beschreibt (für $\varepsilon = 0$ wird die Bahn zu einer Kreisbahn, für $\varepsilon \approx 1$ ist die Ellipse sehr lang gedrückt)

In diesem Teilprogramm können Sie einige dieser Parameter von Planeten- und anderen Himmelskörperbahnen berechnen.
Wählen Sie zuerst, welcher der 10 vordefinierten Körper (Sonne, Erde, ...) den *Zentralkörper* darstellt. Befindet sich in der Listbox der von Ihnen gewünschte Planet, Mond, ... nicht, so wählen Sie den Eintrag "-" und geben selbst die Masse in den nun sichtbaren Eingabefeldern ein, getrennt nach Faktor und Zehnerpotenz.

An den Schaltfeldern *Längeneinheit* und *Zeiteinheit* entscheiden Sie, ob mit Astronomischen Einheiten oder Kilometern bzw. Jahren oder Tagen gerechnet werden soll. Betrachten Sie eine Bewegung um die Sonne sollten Sie *Astronomische Einheiten* und *Jahre* wählen. Ist der Zentralkörper die Erde, der Mond, der Jupiter ... wählen Sie zweckmäßigerweise *Kilometer* und *Tage*.

Tragen Sie nun in die acht Eingabefelder
- *Bahnhalbachse, Peri-Distanz, Apo-Distanz, lineare Exzentrizität*
- *Umlaufzeit*
- *Geschwindigkeiten im Peri- und Apopunkt*
- *numerische Bahnexzentrizität*

mindestens zwei Größen ein.
Genügen Ihre Angaben zur Ermittlung der übrigen Werte, so bestimmt nach *Berechnung* das Programm die restlichen Größen. Gleichzeitig wird Ihnen die Bahnform und die Lage des Zentralkörpers relativ zur Bahn im rechten Teil des Fensters gezeichnet.

15.27 Bewegungssimulation

Die analytische Untersuchung der Bewegung von verschiedenen Himmelskörpern umeinander wird dadurch erschwert, dass diese Bewegungen durch ein System anspruchsvoller Differentialgleichungen beschrieben werden, die schon im Fall von nur drei Körpern nicht mehr exakt analytisch gelöst werden können. Allein die Auflösung der transzendenten Kepler-Gleichung für nur zwei betrachtete Körper ist rein analytisch nicht mehr möglich. Deshalb nutzt man Näherungsverfahren.

In dem Unterprogramm *Bewegungssimulation* haben Sie die Möglichkeit, bis zu zehn Körper, deren Massen, Abstände zueinander und Geschwindigkeiten einzugeben. Das Programm führt für diese Werte Näherungsrechnungen durch und stellt die Ergebnisse grafisch dar, d.h., Sie erhalten schrittweise den

Bewegungsverlauf der Körper angezeigt.

Festlegung der Körper

Die Eingabe der Körperparameter rufen Sie mit einem Klick auf den Schalter *Körper* auf. Daraufhin erscheint eine Tabelle, in die Sie folgende Daten eingeben:

- *Name* des Objekts (nur für Sie von Bedeutung)
- *Masse* des Objekts in kg, getrennt in zwei Eingabefelder (Wert und "abgetrennte" Zehnerpotenz), also z.B. für die Erdmasse von $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg: 5,976 in das erste Feld und 24 in das zweite Feld
- *Abstand* des Objekts vom Zentralkörper, also dem ersten eingegebenen Körper, in Astronomischen Einheiten (1 AE = 150 Millionen km)
- *Startwinkel* in °; dieser Winkel beschreibt die relative Lage des Körpers zum Zentralkörper bei der Betrachtung der Bahn von "oben", dabei gilt 0° = senkrecht nach unten in der Darstellung, 90° rechts vom Zentralkörper, 180° auf dem Bildschirm über dem Zentrum, 270° links vom Zentrum
- *Anfangsgeschwindigkeit* in km/s, getrennt nach Bewegung in x-Richtung (horizontale Richtung auf dem Bildschirm) und y-Richtung (vertikale Richtung); positive Werte gelten nach rechts bzw. oben

Zusätzlich legen Sie im Feld *Anzahl* die Gesamtzahl Ihrer Objekte fest. Der Wert im Feld *Zeiteinheiten* beschreibt, welche Zeitdifferenz zwischen zwei Punkten der Bewegung während der Berechnung genutzt wird. Der voreingestellte Wert von 0,01 genügt in der Regel. Verkleinern Sie diesen Wert, wird die Bewegung exakter ermittelt, was allerdings auch die Rechenzeit erhöht. Je nach Anzahl der Körper und dem Ihnen zur Verfügung stehenden Rechner sollten Sie etwas experimentieren.
Da aber eine Näherungslösung ermittelt wird, kommt diese der tatsächlich ablaufenden Bewegung näher, wenn Sie möglichst kleine Schrittweiten wählen.
Wählen Sie das Markierungsfeld *Bahnlinien*, stellt Ihnen das Programm während des Simulationslaufs die Bahnspuren der Körper dar.

Aufgrund des Wechselwirkungsgesetzes üben z.B. Planeten bei ihrer Bewegung um die Sonne eine Anziehungskraft auf die Sonne aus, wodurch diese ebenfalls eine kleine Bewegung (um den Schwerpunkt des Gesamtsystems) ausführt. Dies führt bei längeren Simulationen und großen Planetenmassen zu einer Verschiebung des Zentralkörpers, evtl. bis aus dem Bildschirm heraus. Wollen Sie dies verhindern, so markieren Sie das Feld *Unbewegliches Zentrum*.
Das Programm garantiert nun, dass der Zentralkörper immer in der Bildschirmmitte verbleibt und berücksichtigt dessen eigentliche Verschiebung bei der Bewegung der Planeten.

Hinweis: Wollen Sie z.B. die Bewegung eines Doppelsternsystems um den gemeinsamen Schwerpunkt simulieren, sollten Sie dieses Feld ausschalten.

Die eingegebenen Werte bestätigen Sie mit *Schließen*. Nach dem Schließen der

Eingabetabelle können Sie über den Schalter *Simulation* die Bewegungssimulation starten. Das Programm ermittelt die sich verändernden Bahnparameter und stellt sie sofort dar. Abbrechen können Sie die Bewegungsläufe mit dem *Abbruch*-Schalter.

Zur Verhinderung eines Programmüberlaufs und -abbruchs bei ungünstigen Werten bricht das Programm selbstständig ab, sobald sich ein Körper mehr als eine Bildschirmbreite bzw. -höhe außerhalb des sichtbaren Bildausschnitts befindet bzw. die Geschwindigkeit eines Körpers extrem ansteigt. Im Darstellungsfenster finden Sie links oben einen Maßstab, der die aktuelle Länge der Darstellung einer Astronomischen Einheit angibt. Über die Schalter und verkleinern bzw. vergrößern Sie das Darstellungsintervall.

Zu beachten ist noch, dass die Näherungslösung für sehr dichte Vorübergänge zweier Körper sehr fehlerhaft werden kann. Sollte es während Ihrer Darstellung zu einem engen Vorbeigang kommen, sollten Sie die Simulation mit einer kleineren *Zeiteinheit* nochmals ablaufen lassen.

Bewegungsparameter laden und speichern

Möchten Sie die eingegebenen Parameter Ihrer Bewegungssimulation dauerhaft speichern, dann nutzen Sie den Schalter *Speichern*. Das Programm legt Ihre Daten in einer Datei mit der Erweiterung *.PLX* ab. Zum Lieferumfang gehören einige dieser Dateien, die Sie zum Ausprobieren in der unteren aufklappbaren Liste laden können, z.B.:

- äußere Planeten von Jupiter bis Pluto unseres Sonnensystems
- innere Planeten von Merkur bis Mars unseres Sonnensystems
- 3 Dateien zur Darstellung eines Doppelsternsystems
- Bewegung der Erde um die Sonne
- Bewegung eines Planeten in einem Doppelsternsystem
- Kometenbahn
- Planetoid in unserem Sonnensystem

15.28 Jupitermonde

Unter diesem Menüpunkt können Sie die Bewegung der vier großen Jupitermonde Io, Europa, Ganymed und Kallisto zu einem beliebigen Zeitpunkt nachvollziehen.

Legen Sie zuerst den *Tag*, den *Monat* und das *Jahr* fest. Voreingestellt ist das jeweilige Systemdatum. Zur Übernahme der eingegebenen Werte betätigen Sie bitte den Schalter *Datum übernehmen*.

Das Programm stellt Ihnen nun die Lage der vier Galileischen Jupitermonde für die ebenfalls eingestellte Zeit (Weltzeit) des gewählten Tages dar. Im unteren Teil sehen Sie die Lage der Monde relativ zu Jupiter von einem Beobachtungsort

senkrecht zur Ekliptik. Die Erde würde sich in etwa 26 bis 40 Meter Entfernung (je nach Position der Erde und des Jupiters, gerechnet auf einen 17"-Bildschirm mit 1024 x 768 Pixel Windows-Auflösung) unterhalb des Bildschirms befinden.

Im oberen Teil der Darstellung finden Sie das Bild, das Sie in einem astronomischen, bildumkehrenden Teleskop sehen würden. Im Beispiel würden Io, Europa und Kallisto links von Jupiter zu sehen sein, während sich Ganymed rechts befinden würde. Klicken Sie nun auf *Simulation*, simuliert das Programm die Bewegung der Jupitermonde. Neben der grafischen Anzeige der Lage der vier Objekte erhalten Sie auch das entsprechende Julianische Datum angezeigt.

15.29 Periheldrehung

Die Allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins wurde immer wieder durch seine Zeitgenossen angegriffen und stand in der ständigen Kritik. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, empirisch die Richtigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu überprüfen.

Zum einen soll das Gravitationsfeld der Sonne eine messbare Ablenkung des Lichtes bewirken, was eindrucksvoll bei Messungen während verschiedener Sonnenfinsternisse bewiesen wurde, zum anderen soll sich die Apsidenlinie (Linie Perihel - Aphel) der inneren Planeten drehen, d.h. die Lage des Perihels sich im Laufe der Zeit ändern. Für den sonnennächsten Planeten Merkur ist diese Drehung besonders groß. Die auf Störungen durch andere Planeten zurückzuführende Drehung kann sehr gut durch die Newtonsche Klassische Mechanik erklärt und berechnet werden. Aber. Vergleicht man das Ergebnis mit der Beobachtung, verbleibt ein Überschuss von 43,11" pro Jahrhundert für den Merkur. Hier hilft Einsteins Relativitätstheorie.

Im November 1915 veröffentlichte Einstein die Arbeit "Erklärung der Periheldrehung des Merkurs aus der Allgemeinen Relativitätstheorie". In dieser leitet er eindrucksvoll genau die durch die Beobachtung vorhergesagte zusätzliche Periheldrehung des Merkurs von 43" in 100 Jahren her. Dabei ergibt sich [Strutz 1998]: $\Delta\phi = 24\,\pi^3\,a^3 / (c^2\,T^2\,(1-\varepsilon^2))$

für die jährliche zusätzliche Drehung des Perihels. Dabei stellt a die große Halbachse, T die Umlaufzeit, c die Lichtgeschwindigkeit und e die numerische Exzentrizität der Merkurbahn dar.
Diese durch die Allgemeine Relativitätstheorie erklärte Drehung der Lage von Planetenbahnen tritt bei jedem Planeten und anderem sich um die Sonne bewegenden Körper auf. Da der Wert aber sehr klein ist, ist er aber besonders für den Planeten Merkur "berühmt" geworden.

Im Teilprogramm Periheldrehung können Sie diese Drehung der Apsidenlinien berechnen und in einer Simulation nachvollziehen.
Möchten Sie die Drehung der Lage des Perihels nachvollziehen, so klicken Sie auf *Simulation*. Das Programm simuliert nun die Bewegung des Planeten um die

Sonne und bewegt das Perihel entsprechend dem berechneten Wert und einem Zeitfaktor, welchen Sie eingeben können. Je größer dieser Wert ist, desto schneller wird die Apsidenlinie gedreht.

Beachten Sie bitte, dass in diesem Teilprogramm die Bewegung des Planeten nur simuliert wird, d.h. Bewegungsgesetze, wie z.B. die Keplerschen Gesetze, werden nicht berücksichtigt. Bei großen Exzentrizitäten bewegt sich hier der Planet in "Sonnennähe" langsamer als in "Sonnenferne", was den tatsächlichen Verhältnissen widerspricht. Da aber die Drehung des Perihels im Vordergrund steht, hat dies keinen Einfluss. Ebenso ist die Periheldrehung stark überhöht dargestellt.

15.30 Parallaxe

Die jährliche parallaktische Bewegung der Fixsterne galt schon in der Antike als Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne.
Dass diese Verschiebung der Sterne am Himmel zu Zeiten Kopernikus nicht messbar war, wurde auch von den Kritikern des heliozentrischen Weltbildes als Hauptargument angeführt. Erst 1838 gelang es Bessel und Struve fast gleichzeitig, die Parallaxe zum einen am Stern 61 Cygni und zum anderen an der Wega zu messen.
Durch die Bewegung der Erde um die Sonne verschieben sich die Positionen der Sterne an der scheinbaren Himmelskugel im Laufe eines Jahres.
Der Winkel, unter dem die Entfernung Erde - Sonne von dem Stern aus erscheint, wird Parallaxe genannt. Dieser Winkel ist sehr klein. Über die Beziehung der trigonometrischen Entfernungsbestimmung $r = 1/p$

p ist die Parallaxe in Winkelsekunden – kann die Entfernung des Sterns in Parsec gemessen werden.

Das Teilprogramm *Parallaxe* verdeutlicht die Entstehung der parallaktischen Verschiebung.
Betätigen Sie den Schalter *Simulation*, beginnt die Erde sich um die Sonne zu drehen. Gleichzeitig wird ein Sehstrahl zu den Sternen eingezeichnet. Da uns alle Sterne als Projektionen an der scheinbaren Himmelskugel erscheinen, verschiebt sich die Lage beider Sterne relativ zueinander.
Markieren Sie das Feld *Sichtlinien*, zeichnet das Programm zusätzlich die Begrenzungslinien der Sehstrahlen und die Projektionskreise ein.

15.31 Weltbilder

Eng verbunden mit der Entwicklung der Astronomie als Wissenschaft ist die Veränderung der Vorstellungen vom Aufbau unseres Sonnensystems. In diesem Teilprogrammen wird Ihnen die Fortentwicklung der Ansichten über unser Planetensystem veranschaulicht. In der historischen Entwicklung finden Sie:

- das altgriechische System

- das pythagoreische System des Philolaos von Kroton
- das ptolemäische oder geozentrische System
- das herakleidische oder ägyptische System
- das tychonische System
- das kopernikanische oder heliozentrische System
- das keplersche-galileische System

Nach Auswahl eines Weltbildes in der Liste zeichnet das Programm entsprechend der damaligen Vorstellungen ein Modell des Planetensystems.
Berücksichtigt werden hierbei neben der Erde, dem Mond und der Sonne auch die bis ins späte Mittelalter bekannten Planeten Merkur bis Saturn.

Klicken Sie auf den Schalter, demonstriert das Programm die Bewegung der Himmelskörper. Im linken Teil des Darstellungsfensters finden Sie eine Legende, welche die benutzten Symbole für die Himmelskörper erklärt.

Altgriechisches System

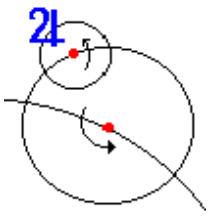
Schon sehr frühzeitig waren vor allem die bedeutenden antiken griechischen Gelehrten von der Kugelform der Erde und der Bewegung der Himmelskörper überzeugt. Eratosthenes ermittelte als Erster den Erdumfang, Aristoteles führte einen interessanten Beweis für die Kugelgestalt der Erde.
Nach den ersten Vorstellungen dieser Wissenschaftler bewegen sich alle bekannten Himmelskörper auf Kreisbahnen um die Erde. Ein derartiges System nennt man geozentrisch.

System des Philolaos

Abweichungen der Planetenpositionen von ihren mittels Berechnungen gewonnenen theoretischen Standorten und insbesondere der Versuch, die beobachtbaren Planetenschleifen zu erklären, führten immer wieder zu neuen Untersuchungen, um die Vorstellungen über den Aufbau des Planetensystems zu korrigieren. Der griechische Wissenschaftler Philolaos von Kroton, einer der Pythagoreer, ging davon aus, dass sich alle Planeten, der Mond und die Sonne um ein Zentralfeuer bewegen, das für uns unsichtbar ist. Zusätzlich existierte für ihn eine Gegenerde. Allerdings gab es nur wenige Anhänger seiner Theorie.

Ptolemäisches oder geozentrisches System

Zur Korrektur der Abweichungen der berechneten und beobachteten Planetenstellungen wurden schon frühzeitig Epizykel eingeführt. Dabei bewegt sich ein Planet auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich kreisförmig um die Erde bewegt.



Der Skizze zufolge würde sich der Planet Jupiter auf zwei Epizykeln bewegen. Mittels dieser Konstruktionen wurde es sogar möglich, die Planetenschleifen zu erklären und zu berechnen. Allerdings

wurde die Theorie extrem kompliziert, da bis zu sieben Epizykel genutzt wurden.

Zusammengefasst wurden alle antiken astronomischen Erkenntnisse durch Ptolemäus und sein Werk "Almagest". Danach steht die Erde im Zentrum (geozentrisch), während sich alle anderen Körper auf Kreisbahnen, inkl. Epizykel, um die Erde bewegen. Diese Weltvorstellung galt uneingeschränkt bis in das 15. Jahrhundert. Im Übrigen geht die "moderne" volkstümliche Astrologie in direkter Linie auf Claudius Ptolemäus zurück, mit all ihren unwissenschaftlichen, menschenverdummenden Aussagen.

Tychonisches oder herakleidisches System

Ausgehend von den im 15. Jahrhundert immer deutlich werdenden Fehlern im geozentrischen Weltbild versuchte der dänische Astronom Tycho Brahe durch Konstruktion seines Weltbildes Abhilfe zu schaffen. Die Bedeutung Brahes für die moderne Astronomie kann nicht hoch genug eingeschätzt werden, da seine Beobachtungen Grundlage für das Auffinden der Bewegungsgesetze durch Kepler waren. So äußerte Kepler, obwohl sein privates Verhältnis zu ihm stets problematisch war, auch über Brahe:

"Die göttliche Vorsehung schenkte uns in Tycho Brahe einen ... sorgfältigen Beobachter ..."

Nach Brahe bewegen sich alle Planeten auf Kreisbahnen um die Sonne, während diese und der Mond sich um die Erde bewegen. Ähnliche Vorstellungen existierten schon im antiken Ägypten, gingen aber wieder verloren. Im herakleidischen System bewegen sich Merkur und Venus um die Sonne, diese der Mond und der restlichen Planeten auf Kreisbahnen um die Erde.

Kopernikanisches oder heliozentrisches System

Nachdem im Spätmittelalter Kritik am überlieferten Weltbild geübt worden war, regten sich zu Beginn der Neuzeit auch naturwissenschaftlich begründete Zweifel an der Richtigkeit des Ptolemäischen Systems. Weil dieses System durch die Verbesserungsversuche der Nachfolger Ptolemäus' immer komplizierter geworden war, kam der in Thorn geborene polnische Astronom Nikolaus Kopernikus zu der Überzeugung, dass das geozentrische Weltsystem unmöglich die Wirklichkeit darstellen konnte. Überzeugt von einer "einfachen, göttlichen Schöpfung" suchte er nach einer logischeren Erklärung.

In seinem 1543 veröffentlichten Werk "De revolutionibus orbium coelesticum" ("Über die Umlaufbewegungen der Himmelskörper") beschrieb er unter anderem die Reihenfolge der Planetenbahnen und fuhr dann fort:

"In der Mitte aber von allem steht die Sonne. Denn wer möchte in diesem schönsten Tempel die Leuchte an einen anderen oder besseren Ort setzen, als von wo aus sie das Ganze zugleich erleuchten kann? Wenn anders nicht

unpassend nennen einige sie die Leuchte der Welt, andere die Seele, noch andere den Regierer. So lenkt in der Tat die Sonne, auf dem königlichen Throne sitzend, die sie umkreisende Familie der Gestirne."

Nach seinem Weltbild steht die Sonne im Zentrum des Systems (heliozentrisch), während sich die Erde und die Planeten um diese bewegen. Da Kopernikus noch an den gleichförmigen Kreisbahnen festhielt, konnte sich das System nur allmählich durchsetzen. Übrigens hatte schon Aristarch von Samos etwa 200 v.Z. die Idee eines heliozentrischen Weltbildes.

Keplersches-Galileisches System

Erst durch die Veröffentlichung der Keplerschen Gesetze, der Beobachtungen der vier großen Jupitermonde durch Galilei und der Entdeckung der Parallaxe wurde das kopernikanische Weltsystem allgemein anerkannt.
Weitere Erkenntnise von Kepler und Galilei waren: Merkur und Venus zeigen Lichtphasen wie der Mond. Die Planetenbahnen sind keine perfekten Kreisbahnen, sondern Ellipsen. Die Sterne sind unterschiedlich weit von uns entfernt. Deren Bewegung am Nachthimmel kommt durch die Drehung der Erde zustande.

Randglosse der Geschichte: Ausgehend von "*Gott begründet den Erdkreis unbeweglich..."* (1. Chronik 16,30) setzte die katholische Kirche 1616 Kopernikus' Werk "bis zur Berichtigung" durch lokale kirchliche Zensoren auf den Index, wo es auch bis 1835 blieb. Der Erfolg der Zensur war aber relativ gering. In Italien wurden nur 60% aller Exemplare und z.B. in Spanien keine einziges "berichtigt" (nach Owen Gingerich).
Das inquisitorische Urteil über Galileo Galilei wurde übrigens erst im 20. Jahrhundert durch den Vatikan als fehlerhaft aufgehoben: 1979 beauftragte Johannes Paul II. die Päpstliche Akademie der Wissenschaften, den berühmten Fall aufzuarbeiten. Am 31. Oktober 1992 wurde der Kommissionsbericht übergeben (nach 13 Jahren!!!!!) und Johannes Paul II. hielt eine Rede, die oft verkürzt als eine Entschuldigung dargestellt wird. In Wirklichkeit gab der Papst keine Entschuldigung. Eine solche Entschuldigung widerspricht allen katholischen Dogmen. Am 2. November 1992 wurde Galileo Galilei von der römisch-katholischen Kirche formal rehabilitiert; nicht weil Galilei nach katholischer Sicht unschuldig war, sondern aus Verfahrensfehlern!!!

15.32 Umwandlung astronomischer Koordinaten

Für die Orientierung am Sternenhimmel und insbesondere für exakte astronomische Beobachtungen sind mehrere Koordinatensysteme, unter anderem

- das Horizontsystem
- das rotierende Äquatorsystem
- das ruhende Äquatorsystem
- das ekliptikale System
- das galaktische System

von Bedeutung. Die moderne Astronomie kennt darüber hinaus noch mehr wichtige Systeme.

Dieses Unterprogramm ermöglicht die Transformation der Koordinaten in Abhängigkeit von Zeit, Datum und Beobachtungsort ineinander. Wählen Sie zuerst an den Rollbalken die *Zeit* und das *Datum*. Entsprechend dem gewählten Ort sofort die diesen Daten zugehörige Sternzeit ermittelt und angezeigt. Ausgehend vom Julianischen Datum JD wird dazu die Sternzeit Θ_0 für 0h0min Weltzeit (UT) und 0° geografischer Länge bestimmt:

$$\Theta_0 = 6h.697374558 + 0h.06570982442\ (JD - 2451545.0)$$

Mittels eingegebener Zeit (MEZ bzw. Zonenzeit ZZ) und der in der Ortsbibliothek gespeicherten Zeitzone gelangt man zur aktuellen Weltzeit t (Greenwich-Zeit). Mit der Kenntnis der geografischen Länge l des Beobachtungsortes wird die aktuelle Sternzeit Θ (in Stunden) zu:

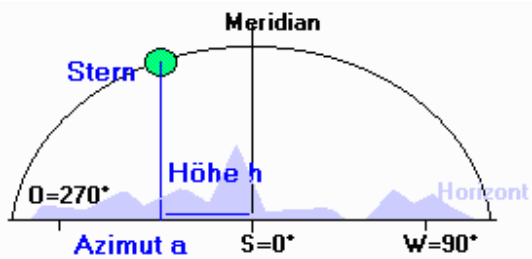
$$\Theta = \Theta_0 + 1{,}002737909 \cdot t + l / 15$$

Das Julianische Datum wird auf Vorschlag J. Scaligers (1582) in der Astronomie genutzt, da diese Zählweise es ermöglicht, auch über Jahre hinweg leicht Zeitdifferenzen zu bestimmen. Tagesbeginn ist dabei jeweils 12 h Weltzeit. Gezählt wird ab dem 1. Januar 4713 vor unserer Zeitrechnung. Das normale Datum wird hier bezüglich des Gregorianischen Kalenders (nach Papst Gregor XIII. 1502-1585) gezählt. Datumsangaben vor dem 15. Oktober 1582 (Einführungstag dieses Kalenders) sind damit fehlerhaft.

Je nach Wahl der einzugebenden Koordinaten (an den Schaltfeldern) und nach Quittierung mit *Berechnung* transformiert das Programm die Werte in die vier anderen Systeme.

Horizontsystem

In diesem System wird die Lage eines astronomischen Objekts durch zwei orts- und zeitabhängige Koordinaten beschrieben. Das Azimut a (Maßeinheit °) gibt die Himmelsrichtung an, mit dem Fixpunkt Süd = 0° und einer Zählung Richtung Westen. Die Höhe h (Maßeinheit °) beschreibt den Höhenwinkel des Sterns über dem Horizont.



Beachten Sie bitte, dass in einigen wenigen astronomischen Büchern das Azimut des Horizontsystems nicht mehr von Süden über Westen, sondern – in Analogie zum geografischen Horizontsystem – von Norden über Osten gezählt wird. Da aber in der Astronomie stets ab Süden (z.B. der Stundenwinkel) gezählt wird, halten wir es

hier mit dem astronomischen Standardwerk "A manual of Spherical and Practical Astronomy" von William Chauvenet, in dem er schreibt:

"The origin from which azimuths are reckoned is arbitrary; so also is the direction in which they are reckoned; but astronomers usually take the south point of the horizon as the origin, ... Navigators, however, usually reckon the azimuth from the north or south points, according as they are in north or south latitude."

Rotierendes Äquatorsystem

Im rotierenden Äquatorsystem beziehen sich die Koordinaten auf den Himmelsäquator (Projektion des Erdäquators auf die scheinbare Himmelskugel) und den Frühlingspunkt i (Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Himmelsäquator, im Sternbild Fische). Die Rektaszension α (Maßeinheit h min) ist der Richtungswinkel der Projektion des Sterns auf den Himmelsäquator, ausgehend vom Frühlingspunkt. Die Deklination δ (Maßeinheit °) bildet den Höhenwinkel zum Äquator. Da diese Koordinaten an die Erdrotation gebunden sind, sind sie weitgehend – lässt man die Eigenbewegung der Sterne außer Acht – zeit- und ortsunabhängig. In Sterntafeln finden Sie daher diese Koordinaten.

Ruhendes Äquatorsystem

Dieses Koordinatensystem beinhaltet die Vorteile des rotierenden Systems, trägt aber auch den Möglichkeiten astronomischer Beobachtungen Rechnung. Ist Ihr Fernrohr parallaktisch montiert, empfiehlt es sich, zur Suche eines Objekts dessen Stundenwinkel einzustellen. Diese Koordinate – Maßeinheit h min – berechnet sich zu:

Stundenwinkel τ = Sternzeit Θ - Rektaszension α

sodass die Kenntnis des Stundenwinkels und der Deklination eines Objekts zu dessen eindeutiger Beschreibung genügt. Der Stundenwinkel wird ausgehend vom Kulminationszeitpunkt Richtung Westen gezählt. Hier ist zu bemerken, dass der Stundenwinkel des Frühlingspunktes gleich der Sternzeit ist. Der Nachteil dieses Systems besteht in der Tatsache, dass der Stundenwinkel orts- und zeitabhängig ist.

Ekliptikales System

Im ekliptikalen, ekliptischen oder auch heliozentrischen System wird die Ekliptik, die scheinbare Sonnenbahn, als Bezugslinie und der Frühlingspunkt als Bezugspunkt genutzt. Längs der Ekliptik wird die ekliptikale Länge, senkrecht dazu die ekliptikale Breite gemessen. Es ist üblich, die Länge in ° von 0° bis 360° und die Breite im Bereich von -90° bis 90° anzugeben. Der ekliptikale Nordpol befindet sich im Sternbild Drache. Da diese Koordinaten vorwiegend für Berechnungen genutzt werden, verzichtet man auf Angaben der Form ° ' " .
Das Programm arbeitet nur mit rationalen Winkelangaben.

Galaktisches System

Das heute gültige galaktische System wurde 1959 durch die Internationale Astronomische Union festgelegt. Bezogen auf das äquatoriale System B1950.0 hat damit der galaktische Nordpol die Koordinaten:

Rektaszension $\alpha = 12^h49^m = 192{,}25°$ und Deklination $\delta = +27{,}4°$

Der Ursprung der galaktischen Länge wurde auf den Punkt des galaktischen Äquators gelegt, der 33° von aufsteigenden Knoten des galaktischen Äquators mit dem Äquator von 1950 entfernt ist. Dieser "Nullpunkt" befindet sich im Sternbild Sagittarius (Schütze). Gezählt werden in Analogie zum ekliptikalen System die Koordinaten galaktische Länge und Breite.
Beachten Sie bitte bei der Eingabe die Definitionsbereiche der einzelnen Koordinatensysteme. Zum Beispiel werden unsinnige galaktische oder ekliptikale Breiten kleiner -90° oder größer 90° vom Programm automatisch als -90° bzw. 90° interpretiert. Analog werden andere, über die Definitionsbereiche hinausgehende Werte intern umgewandelt.

Diese Koordinaten sind für kurze Zeiträume stabil. Aufgrund der Präzession der Erdachse unterliegen sie aber auch in längeren Zeiten gewissen Änderungen.

Um Koordinaten von einem in das andere System zu transformieren, benötigen Sie zumindest Ausgangswerte. Dies werden im Normalfall relativ konstante rotierende Äquatorkoordinaten sein. Dazu enthält das Programm im rechten unteren Teil dieses Teilprogramms eine Liste der großen Planeten und von Sternen. Wählen Sie einen Eintrag aus, trägt das Programm selbstständig die entsprechenden Äquatorkoordinaten in die Eingabezeilen ein. Betätigen Sie nun den Schalter *Berechnung*, werden diese Koordinaten transformiert. Interessant ist dabei, dass das Programm diese Koordinaten für Himmelskörper mit schnell veränderlichen Äquatorkoordinaten, also für die Planeten, den Mond und die Sonne, entsprechend der eingestellten Werte für Datum und Zeit berechnet.

Markieren Sie das Feld *Aktualisieren*, werden die Koordinaten in jeder Minute neu berechnet. Haben Sie in der rechten Liste einen Planeten, den Mond oder die Sonne ausgewählt, werden nicht nur die Koordinaten transformiert, sondern zuvor die neuen Positionen am Himmel exakt ermittelt.

Anzeige der berechneten Koordinaten

Möchten Sie den Ort der berechneten Koordinaten in der Sternkarte nachvollziehen, so betätigen Sie den Schalter *Sternkarte.* Das Programm schaltet sofort zur Sternkarte (siehe nächster Punkt) um und positioniert den dargestellten Ausschnitt so, dass der Punkt am Himmel mit den ermittelten Koordinaten im Zentrum des Fensters steht.

Gaußsches Zwei-Höhen-Problem

Carl Friedrich Gauß gelang es nicht nur, aus drei Beobachtungen des Planeten Ceres dessen Bahn zu berechnen, nein, der größte deutsche Mathematiker aller Zeiten löste noch eine Vielzahl weiterer, teilweise extrem komplizierter Probleme der rechnenden Astronomie.

Zu diesen Glanzleistungen gehört das nach ihm benannte Zwei-Höhen-Problem. Dabei werden zwei bekannte Sterne S_1 und S_2 zum gleichen Zeitpunkt beobachtet und deren Höhen h_1 und h_2 bestimmt. Aus diesen Höhen und den rotierenden Äquatorkoordinaten Rektaszension und Deklination der Sterne soll die geografische Breite des Beobachtungsortes und die Beobachtungszeit ermittelt werden. Wer sich einmal mit solchen Problemen beschäftigt hat, versteht schnell, dass die Lösung dieser jahrhundertlang ungelösten Aufgabenstellung der Genialität eines Gauß bedurfte.

Im unteren Teil des Programmfensters können Sie zwei bekannte Sterne auswählen. Tragen Sie die gemessenen Höhen der Sterne über dem Horizont ein, so berechnet das Programm nach *Auswertung* das Gewünschte. Dabei ist es noch wichtig, ob der erste Stern bezogen auf den Meridian östlich oder westlich steht, d.h., ob er aufgeht bzw. untergeht. Als Ergebnis erhalten Sie die geografische Breite und die Sternzeit des Beobachtungsortes.
Kennen Sie nun noch die Rektaszension der Sonne (siehe Tabellen oder im oberen Fensterteil abrufbar), so können Sie die mittlere Ortszeit und somit auch die geografische Länge berechnen.
Dies wird für die oben eingestellten Werte des Datums und der Uhrzeit automatisch durchgeführt. Findet das Programm eine Lösung, wird der entsprechende Beobachtungsort auf einer Weltkarte angezeigt.

Beachten Sie bitte: Nicht für alle einzugebenden Werte existiert eine Lösung. Insbesondere sollten Sie versuchen, nur Sterne zu verwenden, deren Höhe über dem Horizont wenigstens 10° beträgt bzw. deren Abstand am Himmel hinreichend groß ist. Aufgrund möglicher Mehrfachlösungen trigonometrischer Gleichungen erhalten Sie nicht in jedem Fall eine korrekte und exakte Lösung. Insbesondere, wenn das Programm keine Sternzeit ermittelt, ist davon auszugehen, dass die gewählten Sterne keine Berechnung ermöglichen. In der Praxis würde man zwei verschiedene Paare von Sternen wählen. Stimmen die zwei Lösungen überein, so kann die Lösung als korrekt angesehen werden.

15.33 Sternkarte

Hier können Sie sich den Sternhimmel darstellen lassen. Nach dem Start dieses Programmteils zeichnet Ihr Programm einen Ausschnitt des Sternhimmels in der Nähe des Himmeläquators. Dargestellt werden die in der Sternbibliothek enthaltenen etwa 1500 mit bloßem Auge sichtbaren Sterne bis zur Größenklasse 6.

Über die Schalter der Aktionsschalterleiste sind folgende Veränderungen der Darstellung möglich:

Schalter	Erklärung
	Verkleinerung des sichtbaren Bereichs, Zoom In
	Vergrößerung des sichtbaren Bereichs, Zoom Out
	Verschieben des Darstellungsbereichs nach links
	Verschieben des Darstellungsbereichs nach rechts
	Verschieben des Darstellungsbereichs nach unten
	Verschieben des Darstellungsbereichs nach oben
S	Ein- und Ausschalten der Beschriftung der Sterne mit deren Eigennamen
SB	Ein- und Ausschalten der Bezeichnung der Sternbilder
	Ein- und Ausschalten des Koordinatennetzes (Äquatorkoordinaten)
	Ein- und Ausschalten der Hilfsliniendarstellung der Sternbilder
	Ein- und Ausschalten der Linien zur Darstellung der Sternbildgrenzen
	Ein- und Ausschalten der Darstellung der Ekliptik
	Ein- und Ausschalten der Position der Planeten Merkur bis Neptun und der Zwergplaneten Pluto und Ceres
	Start und Abbruch der Simulation
	Änderung der Darstellungsgeschwindigkeit
	Zeitlauf umkehren

Über weitere Menüpunkte können die Größenklasse der noch gezeichneten Sterne, die Darstellungsradien der Sterne, weiße oder farbige Sterne, eine Anzeige der Tierkreiszeichen und die Beschriftung griechischen Buchstaben verändert bzw. eingeschaltet werden.

Anzeige von Informationen zu einzelnen Sternen

Wurde im Menü der Punkt *Sterninformationen anzeigen* markiert, so bewirkt ein linker Mausklick auf einen der Sterne die Anzeige von Informationen zu diesem Stern.
Neben Namen und Sternbild werden, soweit bekannt, die absolute Helligkeit M, die scheinbare Helligkeit m, die Entfernung r in Lichtjahren, die Spektralklasse SKL und die Koordinaten des rotierenden Äquatorsystems Rektaszension alpha und Deklination delta angezeigt.

Himmelskörperliste

Neben den Aktionsschaltern können Sie mit dem Schalter *Himmelskörper* eine Liste von Himmelskörpern sichtbar machen. Markieren Sie einen Planeten von *Merkur* bis *Pluto* bzw. den *Mond* oder die *Sonne,* so trägt das Programm deren aktuelle Position in die Sternkarte ein.

Möchten Sie einen bestimmten Punkt der scheinbaren Himmelskugel in der Mitte der Sternkarte darstellen, können Sie dessen Koordinaten unter *Rektaszension*

und *Deklination* eingeben. Klicken Sie auf den Schalter *Zentrieren*, wird die Sternkarte sofort neu gezeichnet.

Wählen Sie das gewünschte Objekt, einen Planeten, einen Mond, eine Sonne oder einen Stern mit Eigennamen, in der Liste aus. Daraufhin erhalten Sie unter *Rektaszension* und Deklination die entsprechenden Koordinaten. Ein Doppelklick auf das Objekt in der Liste zeichnet ebenfalls die Sternkarte mit dem gewählten Objekt in der Mitte neu.
Weiterhin finden Sie in der Liste die Einträge *Nebel, Haufen* und ... *Bezeichnung*. Markieren Sie diese, trägt das Programm die Position und evtl. die Beschriftung von Sternhaufen, Galaxien, Absorptions- und Reflexionsnebeln usw. in die Karte ein. Diese werden nur angezeigt, wenn deren scheinbare Helligkeit der aktuell eingestellten Helligkeit der Sterne entspricht.

Hinweis: Nach Auswahl der darzustellenden Planeten oder des Mittelpunktes der Karte können Sie die Himmelskörperliste wieder ausblenden. Es bleiben alle Einstellungen erhalten.

Simulation der scheinbaren Bewegung des Sternhimmels

Schalten Sie in der Himmelskörperliste die Darstellung der Planeten, des Mondes und der Sonne ein, so werden diese entsprechend der aktuellen Zeit (Systemzeit Ihres Computers) dargestellt. Als Besonderheit bietet dieses Teilprogramm die Möglichkeit, den scheinbaren Lauf des Sternhimmels, u.a. die Bewegung der Sonne durch die Sternbilder im Laufe eines Jahres, zu simulieren.

Klicken Sie dazu auf den Schalter , beginnt das Programm, die Lage der Sonne und der Planeten neu zu berechnen und darzustellen.
Wünschen Sie während der Simulation ein Himmelsobjekt immer in der Bildmitte zu halten, so wählen Sie in der aufklappbaren Liste ein Objekt aus. Zur Auswahl stehen:

Menüpunkt	in der Mitte der Karte positionierter Körper bzw. Ort
Sonne im Zentrum	Sonne
„Gegensonne“ im Zentrum	der um 12 Stunden verschobene Ort der Sonne
Merkur im Zentrum	Merkur
Venus im Zentrum	Venus
Mars im Zentrum	Mars
Jupiter im Zentrum	Jupiter
Saturn im Zentrum	Saturn
Uranus im Zentrum	Uranus
Neptun im Zentrum	Neptun
Pluto im Zentrum	Pluto
Ceres im Zentrum	Ceres
Mond im Zentrum	Mond
Himmelsnordpol	Himmelsnordpol
Himmelssüdpol	Himmelssüdpol

Achse fest	kein Objekt ständig im Zentrum, Drehung um die Achse Himmelsnordpol-Himmelssüdpol
Zentrum unbeweglich	der bei Simulationsstart angezeigte Mittelpunkt bleibt erhalten

Möchten Sie die Simulation beenden, klicken Sie erneut auf den Schalter .
Während dieser Simulation können Sie alle genannten Optionen zu- und abschalten sowie über je zwei Schalter die Animationsgeschwindigkeit und Richtung des Zeitlaufs verändern.
Während der Simulation können Sie mit der *Leertaste* den Vollbildmodus für die Sternkarte ein- oder ausschalten.

Beachten Sie bitte: Diese Simulation stellt extreme Anforderungen hinsichtlich Rechen- und Grafikleistung an Ihren Computer. Als Mindestforderung muss hier ein Pentium mit mindestens 500 MHz angesehen werden. Auf langsameren Computern wird die Taktrate von 10 Millisekunden kaum zu realisieren sein und die Simulation deutlich langsamer ablaufen. Insbesondere sollten Sie für diese Darstellung keine anderen Windows-Anwendungen im Hintergrund ablaufen lassen.
Da das Programm in einer Vielzahl von Teilprogrammen aufwendige Rechen- und Darstellungsarbeit leistet, sollten Sie eigentlich während der Arbeit mit diesem Programm stets auf Hintergrundprogramme verzichten.

Hinweis zur Position des Planeten Pluto: Für die Bewegung des Planeten Pluto wurde eine spezielle Näherungstheorie entwickelt. Dieser Planet entzieht sich durch die große Exzentrizität und Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik der normalen Berechnung. Exakte Werte sind deshalb nur in einem Zeitraum von etwa 1850 bis 2100 zu ermitteln. Beachten Sie bitte, dass vor und nach diesem Zeitraum die berechnete Position des Pluto von seinen wahren Koordinaten immer stärker abweichen kann.
Am 24. August 2006 wurde der Pluto durch die Internationale Astronomische Union (IAU) als Zwergplanet eingestuft. Damit existieren im Sonnensystem noch acht große Planeten.

Wahres Aussehen des Sternhimmels vor Jahrhunderten

Streng genommen, begeht das Programm bei der Darstellung des Sternhimmels einen „sehr schweren Fehler": Die Sternpositionen werden auf die Epoche 2000 bezogen, ohne dass die Präzession der Erdachse berücksichtigt wird!

Die Präzession, d.h. die langsame Veränderung der Lage der Erdachse, bewirkt aber, dass sich der Frühlingspunkt und damit auch der Himmelsnordpol verschieben. Die allgemein verbreitete Vorstellung, dass sich zum Beispiel die antiken griechischen oder phönizischen Seefahrer nach dem Polarstern orientiert haben, ist falsch, da sich der Polarstern zu dieser Zeit überhaupt nicht in der Nähe des Himmelsnordpols befand. Die langsame aber stetige Verschiebung der Erdachse führt auch zur Veränderung der Lage aller Sterne am Himmel.
Dies ist auch ein schwerwiegendes Argument gegen den ganzen schwachsinnigen

Astrologie-Unfug, da sich alle Tierkreiszeichen seit ihrer Einführung vor über 2000 Jahren um ein Bild verschoben haben, das heißt, ein „Jungfrau"-Geborener ist eigentlich ein „Löwe" usw.

Möchten Sie, dass das Programm Ihnen den Sternhimmel so darstellt, wie er tatsächlich vor einigen Hundert Jahren zu sehen war oder auch in ferner Zukunft zu sehen ist, so markieren Sie das Feld *im Jahr*. Daraufhin werden alle Koordinaten des Jahres 2000 auf das Jahr umgerechnet, das Sie hinter dem Feld *im Jahr* eingetragen haben.

Beachten Sie bitte, dass die Transformation einige Zeit benötigt, insbesondere kann eine gestartete Simulation nun deutlicher langsamer ablaufen, da die Umrechnung der Koordinaten ist sehr aufwendig ist.

Tragen Sie zum Beispiel in die Zeile das Jahr -500 (entspricht 500 v.u.Z.) ein, wählen dann in der aufklappbaren Liste *Himmelsnordpol* und starten die Simulation, so werden Sie zuerst sehen, dass sich der Polarstern heute tatsächlich in der Nähe des Nordpols befindet. Markieren Sie nun das Feld *im Jahr*, werden Sie deutlich erkennen, dass der Polarstern verschoben wird. Einen hellen Stern in der Nähe des Pols gab es damals nicht.

Wählen Sie das zukünftige Jahr 13500, so sehen Sie, dass dann die sehr helle Wega in der Nähe des Himmelsnordpols sein wird.
Neben der Eingabezeile finden Sie einen Animations-Schalter. Klicken Sie auf diesen, verändert das Programm kontinuierlich die Jahreszahlen im Zeitraum von -20000 bis 20000.

Anmerkung: Die Vorgänge am Sternhimmel sind äußerst komplex. Neben der Erdachsenpräzession tritt zusätzlich noch der Effekt ein, dass sich die Sterne selbst bewegen, d.h. sich gegeneinander verschieben. Diese Verschiebung ist relativ klein, kann sich aber über die Jahrtausende hinweg zu großen Werten aufsummieren. Die Eigenbewegung der Sterne wird in diesem Teilprogramm nicht berücksichtigt.

Anmerkung 2: Die Nichtberücksichtigung der Erdachsenpräzession finden Sie in nahezu allen einschlägigen Astronomie-Programmen. D.h., der oben beschriebene „schwere Fehler" des Programms ist eine in Computerprogrammen allgemein verbreitete Vereinfachung. Dass Sie in diesem Programm die Verschiebung des Frühlingspunktes und des Himmelsnordpols berücksichtigen können, ist eine Besonderheit!

15.34 Drehbare Sternkarte

Für die unmittelbare Beobachtung von Sternen, Planeten und anderen kosmischen Objekten nutzt der Astronom ein über ruhende Äquatorkoordinaten positionierbares Teleskop. Steht dies nicht zur Verfügung, stellt eine sogenannte drehbare Sternkarte ein sehr wertvolles Hilfsmittel dar.

Diese Karte verbindet eine Karte des Sternhimmels mit den geografischen Koordinaten des Beobachtungsortes und der jeweiligen Beobachtungszeit. In einem Sichtfenster wird dann der aktuell sichtbare Sternhimmel angezeigt.

In dem Unterprogramm *Drehbare Sternkarte* wird eine solche "drehbare" Sternkarte für Beobachtungsorte mit etwa 51° nördlicher geografischer Breite simuliert. Die Abweichungen für 1 bis 2° veränderte geografische Breite sind relativ gering, sodass dieses Unterprogramm für den deutschsprachigen Raum Mitteleuropas sehr gut genutzt werden kann.

Nach dem Start stellt das Programm automatisch das *Datum* sowie die *Uhrzeit* (Systemzeit des Computers) ein. Diese Werte können Sie in den Eingabefeldern ändern und mit *Datum übernehmen* quittieren. Daraufhin wird nun der Ausschnitt des nördlichen Sternhimmels gezeichnet, der am Himmel sichtbar ist (Inhalt des schwarzen Ovals).

Dabei liegt die Himmelsrichtung Süden unten, Osten links, Westen rechts und Norden oben. Die scheinbare Vertauschung von Ost und West entsteht dadurch, dass die drehbare Sternkarte normalerweise über den Kopf des Beobachters gehalten werden müsste ("etwas" schwierig mit einem Computermonitor).
Die von außen nach innen zum Zenit laufenden Linien geben in Schritten von 30° das Azimut an, die ovalförmigen, geschlossenen Hilfslinien die Höhe (30° Abstand) der Objekte.

In diese Karte werden ausschließlich Sterne eingetragen, die auch mit bloßem Auge gesehen werden können. Als Einstellungsoptionen stehen Ihnen folgende Schalter zur Verfügung:

- ***S*** ... Beschriftung der hellsten Sterne mit ihren Eigennamen
- und ... Darstellung schwächerer oder hellerer Sterne
- ... Darstellung des Horizont-Koordinatennetzes
- ... Darstellung des rotierenden Äquator-Koordinatennetzes
- ... Darstellung der Sternbildhilfslinien
- ... Darstellung der Sternbildgrenzen
- ... Darstellung der Ekliptik und der aktuellen Mond- und Planetenpositionen

Diese Punkte können Sie auf Wunsch über die Aktionsschalterleiste ab- oder zuschalten.

Drehung der Sternkarte

Diese Sternkarte ist tatsächlich "drehbar". Markieren Sie *aktuelle Zeit anzeigen,* wird die Karte jede Minute aktualisiert.
Mithilfe des Schalters stellen Sie stets das Systemdatum ein. Das Programm

zeichnet daraufhin die Karte neu.
In der Aktionsschalterleiste finden Sie weiterhin die vier Schalter +, −, + und −. Betätigen Sie einen dieser Schalter, erhöhen oder reduzieren Sie den verwendeten Darstellungszeitpunkt um je 1 Stunde bzw. 1 Tag.

Weiterhin können Sie das Programm die Karte auch automatisch langsam drehen lassen. Mit dem Schalter können Sie einen beschleunigten Zeitlauf starten und abschalten. Je Sekunde wird die Uhrzeit dabei um etwa 1 Minute erhöht und der sichtbare Sternhimmel neu dargestellt.
Auf diese Weise können Sie die zeitliche Veränderungen des sichtbaren Sternhimmels simulieren.

Beachten Sie bitte, dass diese Funktion sehr hohe Anforderungen an Ihr Computersystem stellt.

15.35 Sternbilder

Die unglaubliche Faszination, die von einem sternenübersäten Nachthimmel ausgeht (im dicht besiedelten Deutschland leider fast nur noch in einem Planetarium zu bewundern), führte schon vor über 5000 Jahren dazu, dass die Menschen in den Sternen Abbilder ihres Lebens, ihres Glaubens usw. suchten. In der Folge wurden schon in Babylonien (3000 Jahre v.u.Z.) Sterne zu Gruppen, d.h. zu Sternbildern zusammengefasst. Sternbilder, in denen sich die Sonne im Laufe eines Jahres aufhielt, erhielten eine besondere Bedeutung und bildeten den sogenannten Tierkreis.

Während im alten Ägypten die Ekliptik in 36 Dekane unterteilt wurde und die chinesische Astronomie 28 "Häuser" kannte, setzten sich in Europa die altbabylonischen 12 allgemein bekannten Tierkreis-Sternbilder von Widder bis Fische durch. Unabhängig davon, ob man an astrologischen Humbug glaubt oder nicht, kennt wohl jeder sein "Geburtssternbild". Wer aber weiß, wie es wirklich am Sternhimmel aussieht?

Nach Aufruf dieses Unterprogramms haben Sie die Möglichkeit, alle 88 Sternbilder des nördlichen und südlichen Sternhimmels einzeln darzustellen und einige Untersuchungen durchzuführen.
Dabei werden die Sterne folgenden Einstellungen entsprechend dargestellt:

- Am Rollbalken *Grenzhelligkeit* (Voreinstellung 12) legen Sie fest, bis zu welcher Größenklasse die Sterne gezeichnet werden.
- *Helligkeitsmaßstab* kennzeichnet die Radien der gezeichneten Sternkreise, hellere Sterne werden mit größeren Kreisen gezeichnet.
- *Farbige Sterne* garantiert die farbige Darstellung der Spektralklasse dieses Sterns.
- Wählen Sie *absolute Helligkeit*, wird für die Darstellung der Kreisradien nicht die scheinbare (visuelle) Helligkeit, sondern die absolute

herangezogen. Aufgrund der Definition der absoluten Helligkeit bedeutet dies, dass Sie die Sterne nun so sehen, als würden alle in einer konstanten Entfernung von 10 Parsec stehen.
- Ein *Koordinatennetz* wird nur bei Auswahl dieses Feldes eingetragen.
- *Beschriftung* bewirkt das Antragen der Sternbezeichnungen mit griechischen Buchstaben; am Rollbalken können Sie zur Erhöhung der Übersichtlichkeit die Anzahl der beschrifteten Sterne (beginnend bei α) einstellen. Voreingestellt sind die ersten acht griechischen Buchstaben von α bis η.
- *Hilfslinien* gewährleistet das zusätzliche Zeichnen der vom Menschen als Unterstützung gedachten Hilfslinien.

Veränderung der Sternbilder

Zusätzlich können Sie noch die Veränderung des angezeigten Sternbildes im Laufe der folgenden Jahrtausende untersuchen. Ändern Sie dazu am Rollbalken *Bild im Jahr* die Jahreszahl.

Daraufhin berechnet das Programm für alle Sterne, deren Eigenbewegungswerte in der Sternbibliothek hinterlegt sind, deren Bewegung in den nächsten Jahrhunderten (die Präzession wird vernachlässigt, da deren Auswirkung auf alle Sterne gleich ist). Hier können Sie innerhalb eines Zeitraums von 8000 v.u.Z. bis zum Jahr 12000 wählen. Klicken Sie auf den Schalter *Heute*, wird das Bild wieder für unsere Zeit berechnet.

Durch Zeichnen der Hilfslinien können Sie die Verschiebung der Sterne verfolgen und so die Veränderung des Sternbildes nachvollziehen. Beachten Sie bitte, dass die Berechnung auf den heute bekannten Eigenbewegungen der Sterne beruhen. Im Jahre 12000 kann das Sternbild auch etwas anders als hier gezeigt aussehen. Aber wer kann das schon überprüfen?

15.36 Photometrische Entfernungsbestimmung

Die scheinbare Helligkeit ist von der Leuchtkraft L eines Sternes und von seiner Entfernung vom Beobachter auf der Erde abhängig. Dabei bezeichnet man die Helligkeit, die man auf der Erde empfindet als scheinbare Helligkeit, Sterngröße oder Magnitudo.
Die absolute Helligkeit M ist die scheinbare Helligkeit, die ein Himmelskörper bei einem Abstand von 10 pc von der Sonne und 10 pc von der Erde hätte. Sie wird ebenfalls in Größenklassen angegeben. Dann gilt nach dem psycho-physischen Grundgesetz

$$m - M = -5 + 5 \lg r$$

Dabei sind M und m in Magnituden und r in Parsek einzugeben. Damit kann der Abstand eines Sterns ermittelt werden, wenn sowohl scheinbare als auch absolute Helligkeit bekannt sind.
Während die scheinbare Helligkeit gemessen wird, kann die absolute Helligkeit heute aus dem Sternspektrum berechnet werden.

In diesem Teilprogramm wird an Hand der 8 hellsten Sterne des Sternbilds Orions dieser Zusammenhang veranschaulicht. Wählen Sie *in 10pc Entfernung* werden die Sterne mit ihrer absoluten Helligkeit gezeigt, als würden sie gleichweit entfernt stehen.

Im rechten Teil des Programmfensters können Sie außerdem bei Eingabe zweier Größen die jeweils dritte mittels photometrischer Entfernungsbestimmung berechnen.

15.37 Spektralklassen

Die Spektralklassen der Sterne teilen 99% aller Sterne in sieben Grundtypen ein: O, B, A, F, G, K, M
Zwischen den Temperaturen der Sternoberflächen und den Spektralklassen besteht ein direkter Zusammenhang. Insbesondere kann man aus dem Auftreten oder Fehlen spezieller Spektrallinien auf die physikalischen Eigenschaften, u.a. die Oberflächentemperatur, schlussfolgern.
Sterne der verschiedenen Spektralklassen habe auch unterschiedliche Farbe. Dabei gilt: Spektralklasse O = blau, B = blau-weiß, A = weiß, F = gelb-weiß, G = gelb, K = rot-gelb und M = rot. Unsere Sonne ist Spektralklasse G2.

In diesem Teilprogramm werden die sieben Standardspektren mit einige wichtigen Beispielen angezeigt.
An dem Rollbalken *Oberflächentemperatur* können Sie zwischen 3000 und 40000 K Werte einstellen. Das Programm zeichnet daraufhin ein typisches Spektrum des entsprechenden Sterns.

15.38 Hertzsprung-Russell-Diagramm

Zu den wichtigen mathematisch-physikalischen Berechnungen der gymnasialen Schulastronomie gehört die Analyse von Zustandsgrößen von Sternen. Ein Stern wird durch die physikalischen Größen

- Oberflächentemperatur T, Masse m, Radius r, Leuchtkraft (Strahlungsleistung) L
- absolute M und scheinbare m visuelle Helligkeit, Entfernung r und
- Spektralklasse, Farbe und Leuchtkraftklasse

charakterisiert.

In diesem Unterprogramm haben Sie die Möglichkeit, ausgehend von der absoluten Helligkeit und der Spektralklasse des Objekts die anderen Größen zu ermitteln und die Sterneigenschaften im Rahmen eines Hertzsprung-Russell-Diagramms grafisch zu veranschaulichen. Dieses Diagramm ist Ejnar Hertzsprung (1911) zuzuschreiben. Zwei Jahre später wurde es von Russell in den USA neu

entdeckt.

Wählen Sie dazu aus den in der Listbox angezeigten rund 1000 Sternen einen aus, dann zeigt das Programm die absolute und scheinbare Helligkeit (in mag, Größenklassen), die Entfernung in Lichtjahren sowie die Spektralklasse (O, B, A, F, G, K, M) an und ermittelt die Oberflächentemperatur in Kelvin, die Leuchtkraft, die Masse und den Radius in Sonneneinheiten. Zusätzlich erhalten Sie die Koordinaten des Objekts im rotierenden Äquatorsystem.

Beachten Sie bitte: Alle ermittelten Werte sind Richtwerte. Aufgrund der Problematik der astronomischen Messung weichen Werte für ein und denselben Stern in verschiedenen Veröffentlichungen teilweise erheblich voneinander ab. Insbesondere die Massenbestimmung für "Weiße Zwergsterne" und "Rote Riesensterne" ist mit einem größeren Fehler behaftet, da diese Objekte im Allgemeinen nicht oder nur sehr ungenau der Masse - Leuchtkraft - Beziehung entsprechen.

Die Berechnung der Entfernung r geht davon aus, dass zwischen dem Beobachter und dem astronomischen Objekt kein lichtschwächendes Medium, wie z.B. interstellarer Staub, vorhanden ist.

Beispiel: Für den Stern Aldebaran (α Tauri) erhalten Sie die Werte: absolute Helligkeit M = $-0^m.8$, Spektralklasse K5, Oberflächentemperatur T = 4200 K, 161-fache Leuchtkraft, 4,3-fache Masse und 24-fachen Radius der Sonne. Da das Objekt eine scheinbare Helligkeit von $0^m.9$ hat, ist es 68 Lichtjahre von der Erde entfernt.

Zur Klassifizierung und grafischen Veranschaulichung der Zustandsgrößen von Sternen wird das Hertzsprung-Russell-Diagramm verwendet.
Nach der Entdeckung des dänischen Astronomen Ejnar Hertzsprung (1873-1967) im Jahre 1905, dass es für Sterne gleicher Temperatur Riesen und Zwerge gibt, kombinierte der US-amerikanische Wissenschaftler Henry Russell (1877-1957) dies 1913 in dem berühmten Diagramm. An den waagerechten Achsen finden Sie die Oberflächentemperatur in Kelvin und die Spektralklasse, an den senkrechten die absolute Helligkeit in Größenklassen und den Logarithmus der Leuchtkraft in Sonneneinheiten. Die Farben charakterisieren in etwa die Farbe des Sterns.

Wählen Sie den Schalter *alle Sterne eintragen*, zeichnet das Programm sofort alle in der Listbox enthaltenen Sterne in das Diagramm ein. Für die Darstellung des Hertzsprung-Russell-Diagramms können Sie einige Einstellungen verändern.

Das Markierungsfeld *Beschriftung* garantiert die Angabe der Sternbereiche. Auf Wunsch zeichnet das Programm voreingestellt alle Sterne der Bibliothek in das Hertzsprung-Russell-Diagramm ein. Mit den Auswahlfeldern *Sterne bis* bzw. *Sterne heller als* können Sie z.B. nur Sterne der Sonnenumgebung bzw. extrem helle Sterne eintragen lassen.

15.39 Bright Star Katalog

Den für den Amateur-Astronom sicherlich interessantesten Sternkatalog stellt der Bright Star Katalog von D.Hoffleit (Yale University Observatory) dar, welcher seit 1982 in der nun mehr vierten überarbeiteten Auflage vorliegt. Dieser Katalog umfasst über 9000 Sterne der Größenklasse bis etwa 6.5 mag sowohl der nördlichen als auch der südlichen Himmelshalbkugel, d.h. also vorwiegend die mit bloßem Auge oder einfachen optischen Hilfsmitteln sichtbaren Sterne.
In der vorliegenden Version wurden alle Sternparameter aktualisiert und die Koordinaten auf die Epoche 2000.0 umgerechnet. Insgesamt sind enthalten

Größenklasse	Anzahl der Sterne
heller als 1 mag	15
1 - 2 mag	31
2 - 3 mag	110
3 - 4 mag	322
4 - 5 mag	1024
5 - 6 mag	2964
6 - 7 mag	3233
schwächer als 7 mag	38

In diesem Teilprogramm können Sie in diesem Katalog gezielt nach Sternen mit bestimmten Eigenschaften suchen. Bei Wahl des Menüpunktes erscheint ein Fenster in welchem Sie die Suchkriterien eintragen können. Dabei sind 12 Kriterien vorgesehen, von denen Sie jeweils ein Minimum (*Eingabefeld von*) und ein Maximum (*Eingabefeld bis*) festlegen können. Tragen Sie keine Werte ein, wird für das Minimum der kleinstmögliche und für das Maximum der größtmögliche Wert voreingestellt.

Als Suchkriterien können Sie wählen:

· Bright Star Nummer ... die Nummer des Objektes im aktuellen Katalog (Bereich 1 bis 9109)
· Flamsteed Nummer ... die Nummer des Sterns im Flamsteed Katalog; 3.Ausgabe Hoffleit 1964 (Bereich 1 bis 139)
· Bayer Codierung ... die von Bayer eingeführte Kodierung der Sternbezeichnung mit griechischen Buchstaben, dabei entspricht z.B. der Code 1 dem α, die 2 dem β, ... , 24 dem ω
· Sternbild (lat.Abkürzung) ... die 3buchstabige, lateinische Abkürzung der Sternbildbezeichnungen, z.B. AND für Andromeda; (möglicher Suchbereich ist damit A bis ZZZ)
· Durchmusterung Bereich ... Grundlage des Bright Star Katalogs sind die zwei umfangreichen klassischen Sternkataloge die Bonner Durchmusterung (BD), die Cordoba Durchmusterung (CD; CP); in diesen wurden die Suchbereiche entsprechend der Deklination der Sterne eingeteilt (möglicher Suchbereich -90 bis +90)

· Durchmusterung Nummer ... innerhalb der Suchbereiche wurden die Sterne in den Durchmusterungen zusätzlich durchnummeriert (möglicher Bereich 1 bis 19790)
· Rektaszension ... die Koordinate RA im ruhenden Äquatorsystem; beachten Sie dass sowohl für die Stunde als auch die Minute stets zwei (!) Ziffern eingeben und beide Werte mit mindestens einem Leerzeichen getrennt werden müssen; (Bereich 00 00 bis 24 00)
· Deklination ... die Koordinate δ im ruhenden Äquatorsystem; beachten Sie dass sowohl für die Gradzahl als auch die Bogenminuten stets zwei (!) Ziffern eingeben und beide Werte mit mindestens einem Leerzeichen getrennt werden müssen; (Bereich -90 00 bis +90 00)
· Visuelle Helligkeit ... die scheinbare visuelle Helligkeit in Größenklassen (Bereich -2 bis 7.96)
· Spektralklasse ... die Harvard-Klassifizierung der Sternspektren; vorgesehen sind die Spektralklassen O, B, A, F, G, K, M, S und C und die übliche Einteilung in 10 Teilklassen; (Bereich O5 bis C9; Sterne noch früherer Spektralklassen als O5 sind nicht im Bright Star Katalog enthalten)
· Leuchtkraftklasse ... die Einteilung der Größen der Sterne nach dem MKK-System mittels römische Ziffern; dabei sind Ia ... leuchtkräftigste Überriesen, Ib ... Überriesen, II ... leuchtkräftige Riesen, III ... normale Riesen, IV ... Überriesen und V ... Hauptreihensterne und Zwerge; (Eingabebereich Ia bis V; Unterzwerge (Leuchtkraftklasse VI sind im Bright Star Katalog nicht vertreten)
· Trigonometrische Parallaxe ... die Parallaxe des Sterns in Bogensekunden; beachten Sie, dass nur für einen Teil der Sterne des Bright Star Katalogs Parallaxen bekannt sind; (Bereich 0.001 bis 0.8)

Tragen Sie nun Werte in die Eingabezeilen ein und betätigen Sie den Schalter Suche starten, zeigt das Programm in einer Liste die Sterne, für welche alle festgelegten Kriterien gleichzeitig eintreten.

Beachten Sie bitte, dass auch auf schnellen Rechnern die Suche eine gewisse Zeit in Anspruch nehmen kann; immerhin müssen Sie über 9000 umfangreiche Datensätze ausgewertet werden.

Haben Sie zum Beispiel die Absicht, Sterne mit ähnlichen Eigenschaften wie unsere Sonne zu suchen, so tragen Sie unter Spektralklasse von und bis jeweils G2 und in der Leuchtkraftklasse jeweils V ein. Das Programm ermittelt nun 31 Einträge.
Suchen Sie nur Sterne des nördlichen Sternhimmels, so geben Sie zusätzlich unter Deklination von 00 00 ein. Das Feld Deklination bis lassen Sie frei. Erneute Suche ermittelt 17 Sterne. Sollen diese Sterne auch bei weniger guten Beobachtungsbedingungen noch mit bloßen Auge sichtbar sein, tragen Sie in Visuelle Helligkeit bis den Wert 5.00 ein.
Die ermittelten Sterne können Sie über die beiden Schalter speichern und drucken. Eine Einschränkung ist dabei zu beachten. Enthält Ihre Liste alle Sterne des Katalogs wären dies über 140 Druckseiten!

15.40 Rotverschiebung

Durch die Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie werden verschiedene Effekte vorhergesagt, u.a.
1. Lichtstrahlen werden von Massen angezogen und ihre Laufbahn dadurch gekrümmt!
2. Gravitationsmassen verlangsamen den Zeitablauf. Je mehr Masse, um so langsamer vergeht die Zeit!
3. Rotation der Planetenbahnen

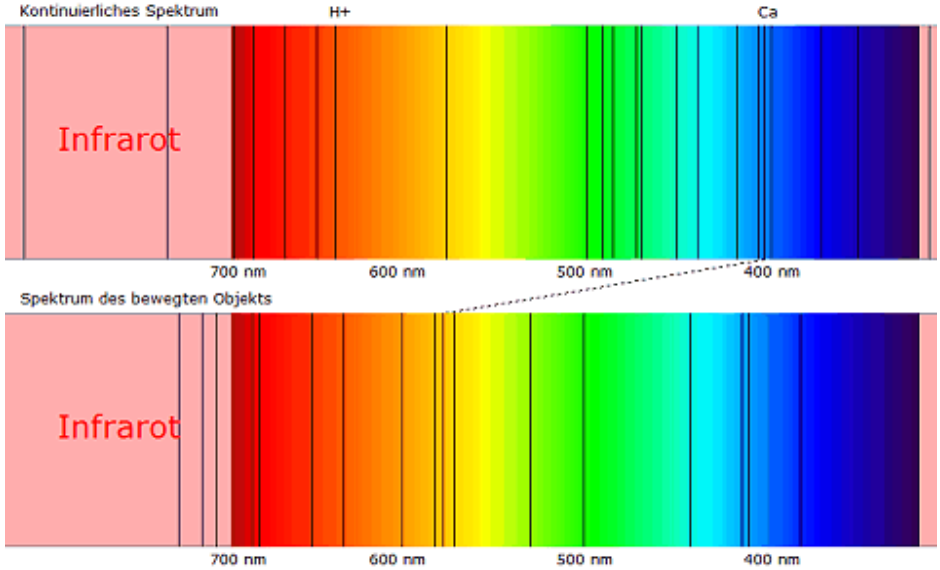
Darüber hinaus ergibt das Modell eines expandierenden Weltalls eine kosmologische Rotverschiebung des Lichts. Dies bedeutet, dass eine weit entfernte Galaxie eine Frequenzverschiebung ihres Lichtes in Richtung Rot erfährt. Ist λ_0 die Wellenlänge des emittierten Lichts und λ_e des empfangenen Lichts, so gilt

$$\lambda_0 / \lambda_e = 1 + z,$$

wobei z die Rotverschiebung ist. Die Rotverschiebung wird über die Fluchgeschwindigkeit v der Galaxie im expandierenden Weltall bestimmt.

$$z = \Delta\lambda / \lambda = \sqrt{[\ (1+v/c)/(1-v/c)\ ]} - 1.$$

Diese Teilprogramm simuliert die Wirkung der kosmologischen Rotverschiebung auf das Spektrum einer Galaxie.
Im oberen Fensterteil wird ein kontinuierliches Spektrum inkl. typischer Spektrallinien angezeigt, im unteren Teil das Spektrum des expandierenden Objekts, das wir empfangen.
Wird der Wert des Rotverschiebung z geändert, so verschieben sich die Spektrallinien im unteren Spektrum nach links, d.h. in Richtung Rot.



Berechnet werden die Fluchtgeschwindigkeit des Objektes relativistisch, aber auch klassisch nach Newtonscher Mechanik.
Außerdem wird ermittelt, in welchem Abstand ein Objekt sich zum Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs befinden müsste, um eine gleichstarke Rotverschiebung zu erfahren; allerdings hier nicht kosmologisch begründet sondern gravitativ.
Die Abbildung zeigt die Rotverschiebung z = 0,5. Die ursprünglich blaue Ca-Linie von 393,4 nm wäre nun im rot-gelben Bereich bei 590 nm zu beobachten. Das Objekt wäre 2090 MPc von uns entfernt.

15.41 Relativistischer Raumflug

„Beam me up, Scotty"

Seit dem Erscheinen der ersten phantastischen Romane geht von der Möglichkeit, interstellare Reisen unternehmen zu können, ein immer stärkerer Reiz aus. Gerade in den letzten Jahren haben Sciencefiction-Spielfilme und -Serien Höchstkonjunktur, wenngleich die Autoren den physikalischen Grundlagen ihrer Raumflüge keine Beachtung schenken können, andernfalls wäre wohl die Spannung aus den Filmen heraus.

In diesem Teilprogramm können Sie die tatsächlichen Verhältnisse eines interstellaren Raumfluges berechnen. Zu beachten ist dabei, dass die physikalischen Grundlagen durch Einsteins spezielle und allgemeine Relativitätstheorie gegeben werden. Das Programm geht von folgendem Modell aus:

Ein Raumschiff soll von der Erde zu einem Stern fliegen und anschließend wieder zurückkehren.
Prinzipiell sind dafür zwei Möglichkeiten denkbar (siehe Abbildung):

- Modell 1: Das Raumschiff beschleunigt stetig bis zur Hälfte der Flugstrecke und bremst anschließend bis zum Zielstern konstant ab.
- Modell 2: Das Raumschiff beschleunigt bis zu einer Maximalgeschwindigkeit (Reisegeschwindigkeit), fliegt anschließend ohne weitere Beschleunigung mit konstanter Geschwindigkeit, bis es nur noch die Länge der Beschleunigungsstrecke vom Ziel entfernt ist und bremst nun ab.

Gerade das zweite Modell ist energetisch wesentlich günstiger, d.h. auch kostenfreundlicher. Für die Berechnung geben Sie zuerst die *Entfernung zum Zielstern in Lichtjahren* sowie das zu berechnende *Modell* ein.
Wählen Sie die zweite Möglichkeit, müssen Sie weiterhin die *Maximalgeschwindigkeit* in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit eintragen. Diese wird bei der Berechnung wieder in Kilometer je Sekunde transformiert und angezeigt.

Beachten Sie bitte: Auch wenn Captain Kirk und Mister Spock schon mit Warp-Antrieb, sprich mehrfacher Lichtgeschwindigkeit reisten, ist dies leider aus heutiger physikalischer Sicht – trotz aller spektakulären Artikel in Zeitungen und Zeitschriften – auch in ferner Zukunft nicht möglich. Streng genommen, wahrscheinlich sogar nie möglich. Die Unüberschreitbarkeit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist ein Bollwerk, das nur durch eine völlig neue Physik

umgestoßen werden kann, und die gibt es im Moment eben noch nicht.

Geben Sie daher für die Maximalgeschwindigkeit 1 oder einen Wert größer 1 ein, erhalten Sie folglich eine Fehlermeldung. Eine sehr wesentliche Größe ist die auf das Raumschiff und ihre Besatzung wirkende *Beschleunigung*. Voreingestellt ist 1 g = 9,81 m/s², d.h. die Erdbeschleunigung. Da der Mensch dauerhaft nur Höchstbelastungen von maximal 2 g, d.h. rund 20 m/s², überlebt, sollten Sie für eine realistische Berechnung diesen Wert kaum überschreiten. Unbemannte Raumflugkörper könnten mit einer größeren Beschleunigung auf Reisegeschwindigkeit gebracht werden.

Betätigen Sie nun den Schalter *Berechnung*, ermittelt das Programm die Flugzeiten, zum einen von der Erde aus gemessen, zum anderen für die Raumschiffbesatzung. Aufgrund der relativistischen Zeitdilatation ist der zweite Wert stets kleiner als der erste. Die Ursache hierfür liegt in den Grundpostulaten der Einsteinschen Relativitätstheorie:

- In allen Inertialsystemen gelten die gleichen Naturgesetze.
- Die Lichtgeschwindigkeit ist von Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters unabhängig.

Im Beispiel wird ein Raumflug zu unserem nach der Sonne nächsten Stern, dem Dreifach-System α Centauri (Toliman), nach Modell 1 berechnet. Während auf der Erde rund 11,5 Jahre bis zur Rückkehr der Astronauten und Kosmonauten vergehen würden, würden diese selbst nur um knapp 7 Jahre altern. So verblüffend das ist, ist diese unter dem Namen Zwillingsparadoxon bekannt gewordene Theorie experimentell für Elementarteilchen nachgewiesen.

Experimentieren Sie mit verschiedenen Werten, werden Sie feststellen, dass bei Nutzung des Modells 1 auch gigantische Entfernungen bis zu 10000 Lichtjahren und mehr in einem menschlichen Leben zu bewältigen wären (10000 Lichtjahre in 35 Jahren), wenngleich auf der Erde schon Hunderte von Generationen untergegangen wären.

Aber: Diese Berechnungen vernachlässigen einen entscheidenden Aspekt, die Frage der Energie!
Um ein mittleres Raumschiff auf nur (!?) ein Drittel der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, würde man eine Energiemenge benötigen, die etwa 350 Jahren Weltenergieproduktion entspricht, d.h., für eine einzige Beschleunigung müssten alle Menschen dieser Erde mindestens 350 Jahre jegliche produzierte Energie in einen Teilchenbeschleuniger einspeisen, der diese Energie mit einem hypothetischen Wirkungsgrad von 1 in Antimaterie umwandelt. Ganz nebenbei müsste noch das Raumschiff gebaut und ein Annihilationstriebwerk entwickelt werden. Für einen Flug zum Sirius müsste das Verhältnis der Startmasse zur Nutzmasse etwa 100 : 1 betragen, d.h., um z.B. ein Raumschiff von nur 500 t zu bewegen, bräuchte man mindestens 50000 t Treibstoff (Anti- und Normalmaterie).

Einige Sciencefictionautoren umgehen dieses Problem, indem sie "unterwegs" interstellare Materie einfangen und als Treibstoff nutzen. Wie in dem hervorragenden Physikbuch "Gerthsen Physik" sehr schön nachgewiesen wird, bringt dies allerdings überhaupt nichts – im Gegenteil: Durch das Einfangen der Teilchen würde das Raumschiff nicht beschleunigt, sondern abgebremst.
So schade es ist: Interstellare Raumflüge werden wohl erst einmal Sciencefiction bleiben. Von UFOs, Aliens (warum sind die in Filmen und Büchern eigentlich fast immer bösartig?) und ähnlichen Träumereien ganz zu schweigen.

16. Logikspiele

Mathematik ist wirklich interessant! Auch wenn die meisten Menschen das nicht so recht glauben wollen, zeigt sich dies doch in vielen Anwendungen aus allen Naturwissenschaften. Hätten unsere Vorfahren vor vielen Tausend Jahren nicht begonnen zu zählen und zu rechnen, würden wir heute noch mit dem Faustkeil und dem Speer in der Hand hinter Tieren herlaufen. Und heutzutage kommt kein Bereich unseres Lebens mehr ohne Mathematik aus.

Mit anderen Worten: Ohne Mathematik ist der moderne Mensch nicht in der Lage, sein tägliches Leben zu meistern. Aber die ernsthafte Beschäftigung mit der Mathematik muss nicht immer nur mit Zahlen und Gleichungen zu tun haben. Auch für einfache kleine Spiele werden mathematische Fähigkeiten benötigt und trainiert.
Deshalb finden Sie unter dem Punkt *Logikspiele* mehr als 60 Teilprogramme, die zum einen interessante Simulationen, zum anderen aber auch kleine logische Spiele enthalten, die dennoch recht anspruchsvoll sein können.

16.1 Bestenliste

In mehreren dieser Logikspiele wird eine Bestenliste geführt. Darin werden die 20 besten Resultate gespeichert.

Tragen Sie daher vor dem Spiel in der angezeigten Eingabezeile Ihren Namen ein. Haben Sie dies vergessen, können Sie Ihren Eintrag auch in der Bestenliste nachholen und mit *Spielername übernehmen* quittieren.
Wenn Sie eine Liste löschen möchten, nutzen Sie den entsprechenden Schalter *Löschen*. Das beste Resultat wird dabei allerdings nicht entfernt. Möchten Sie auch dieses mit einschließen, dann entfernen Sie vor dem Löschen die Markierung *Bestwert.*

Beachten Sie bitte, dass der Spielername gespeichert und beim Start eines jeden neuen Spiels automatisch eingetragen wird. Spielt jemand anderes, so sollte er vor dem Spiel den Namen ändern.
Ein Problem kann auftreten, wenn Sie die Spiele in einem Netzwerk ohne Administratorrechte durchführen. Mitunter werden dort lokale Verzeichnisse bei jedem Neustart gelöscht. Evtl. kann dabei auch die Bestenliste entfernt werden.

16.2 Zahlenrätsel

In diesem mathematischen Spiel werden Fähigkeiten im Grundrechnen und logischen Denken gefordert.

Für eine neue Aufgabe klicken Sie zuerst auf den entsprechenden Schalter. Ausgangspunkt sind zehn Additionsaufgaben, deren Zahlen und Ziffern durch zehn verschiedene Symbole dargestellt werden, von denen jedes genau eine Ziffer von 0 bis 9 repräsentiert.
In der rechten Fensterhälfte können Sie nun die korrekten Lösungen auswählen. Klicken Sie dazu bei dem jeweiligen Symbol auf die Ihrer Meinung nach richtige Ziffer.

Haben Sie ein korrekte Entscheidung getroffen, so werden alle anderen Ziffern bei diesem Symbol entfernt. Die Aufgabe ist gelöst, sobald Sie alle Ziffern richtig zugeordnet haben.

Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben können Sie an den Auswahlfeldern einstellen, die Art der Bilder ebenso. Dabei können Sie zwischen Abbildungen zum Thema Essen und Trinken, zu geometrischen Mustern oder mathematischen Symbolen wählen.

Während die Ziffern 0 und 1 meist schnell richtig ermittelt werden können, ist es bei den anderen mitunter schwierig. Durch logische Überlegungen lässt sich die Lösung jedoch fast immer finden. Ist dies einmal nicht möglich, dann hilft je Aufgabenstellung ein Klick auf eines der Fragezeichen. Anschließend wird Ihnen die richtige Ziffer des ausgewählten Symbols angezeigt.

Für jede richtig ermittelte Ziffer erhalten Sie Punkte gutgeschrieben. Wurde eine Aufgabe richtig gelöst, können Sie eine weitere spielen. Haben Sie einen Fehler gemacht, so endet die Spielrunde und Sie können sich in die Bestenliste

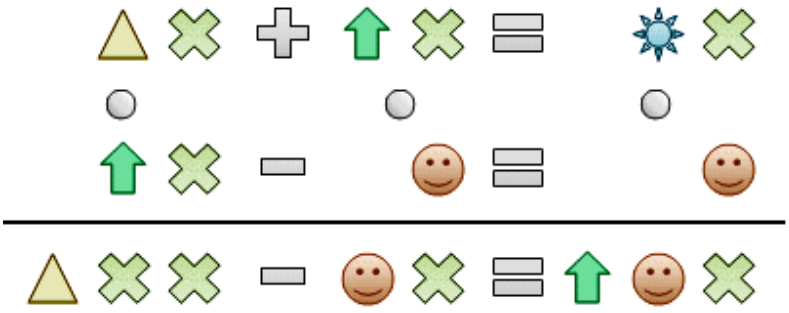
eintragen.
Klicken Sie auf den Schalter ***B***, so werden nacheinander zwei Standardbeispielaufgaben angezeigt, deren Lösung im Allgemeinen einfach.

16.3 Kryptogramme

Eine beliebte Aufgabe zum Trainieren mathematischer Rechenfertigkeiten ist das Lösen einer verschlüsselten Aufgabe, eines Kryptogramms, auch Zahlenrätsel genannt. Dabei sind sechs miteinander verbundene Aufgaben so zu lösen, dass jedem Bild, Buchstabe, Zeichen genau eine Ziffer entspricht. Ein Kryptogramm könnte z.B. wie folgt aussehen:

AB	**+**	**CB**	**=**	**DB**
*		*		*
CB	**-**	**E**	**=**	**E**
=		=		=
ABB	**-**	**EB**	**=**	**CEB**

Mit etwas Übung findet man nun heraus, welche Ziffern durch die einzelnen Buchstaben symbolisiert werden. Das Programm sucht systematisch nach allen möglichen Lösungen.
Zur Neueingabe und Lösung eines Kryptogramms tragen Sie für jedes Symbol bzw. Zeichen genau einen Buchstaben (keine anderen Zeichen!) von A bis höchstens J ein. In die Eingabefelder der Rechenoperationen tragen Sie eine der Verknüpfungen +, -, * oder : ein. Nach Betätigung des Schalters *Berechnung* sucht das Programm alle möglichen Lösungen und zeigt diese in der Tabelle an.



An Stelle des Programms können Sie auch selbst nach der korrekten Lösung suchen.
Dazu finden Sie mit oberen Teil des Fensters das Kryptogramm mit Hilfe von zehn verschiedenen Symbolen dargestellt. Unter der Darstellung befindet sich neben jedem Symbol ein kleiner Rollbalken, an dem Sie die richtige Ziffer einstellen können.

Zu Beginn wird der Buchstabe A angezeigt. Durch Klicken auf die kleinen Pfeilschalter können Sie die gewünschte Ziffer auswählen. Möchten Sie die gewählten Ziffern in dem Zahlenrätsel sehen, so markieren Sie das Feld *Ziffern anzeigen*.
Haben Sie alle Ziffern richtig gewählt, erhalten Sie die Meldung, dass das

Kryptogramm korrekt gelöst wurde.

Eine neue Aufgabe wird durch das Programm erzeugt, in dem Sie auf den Schalter *Neue Aufgabe* klicken.
Alternativ können Sie auch mit den kleinen Pfeilschaltern bei *Beispiele* eine vordefinierte Beispielaufgaben auswählen, bei denen Sie Ihre Fähigkeiten testen können. Beachten Sie aber bitte, dass einige Probleme nicht so einfach zu lösen sind.
Benötigen Sie *Hilfe*, so erhalten Sie mit dem Schalter Hilfe eine gesuchte Ziffer angezeigt.

Auch in diesem Programmteil wird eine Bestenliste geführt. Je schneller Sie das Problem lösen, desto höher ist die Punktzahl.
Ihre Kryptogrammaufgaben können Sie über die zwei kleinen Schalter speichern und laden.

Die vollständige Lösung eines Kryptogramms gehört zu den in nicht polynomialer Zeit lösbaren Problemen. Enthält Ihr Kryptogramm die maximal zehn möglichen verschiedenen Buchstaben, so benötigt das Programm auch auf schnellen Rechnern etwas Zeit. Abbrechen können Sie jederzeit mit dem *Abbruch*-Schalter.

16.4 Mathematik-Sudoku

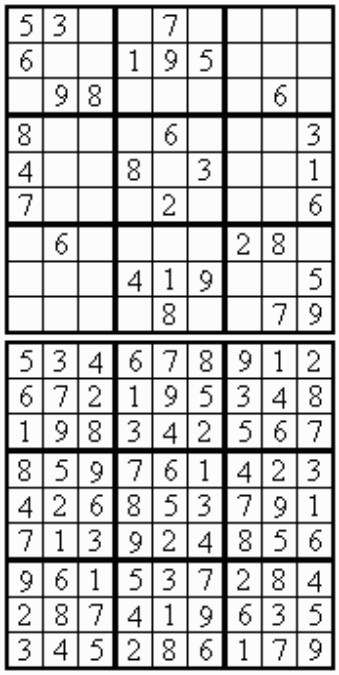
Dieses Teilprogramm ist eine spezielle Variante des klassischen Sudokus. Gegeben ist erneut ein Quadrat aus 9 x 9 = 81 Kästchen, in die aber hier noch keine Ziffern eingetragen sind. Vielmehr müssen diese Ziffern durch die Beantwortung von mathematischen und anderen Fragen, die im rechten Fensterteil angezeigt werden, ermittelt werden. Dazu steht vor jeder Frage eine Koordinatenangabe.

Die Zahlen tragen Sie in das Arbeitsfeld ein. Klicken Sie dazu auf das auszufüllende Feld und geben Sie die Werte ein. Die Eingabe wird mit dem Schalter ↵ oder ENTER quittiert.
Haben Sie alle Fragen korrekt beantwortet, so werden die Schalter *Feld ausfüllen* und *Problem lösen* verfügbar.
Die Aufgabe besteht nun darin, die restlichen, freien Kästchen so mit Ziffern zu besetzen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte, in jedem 3 x 3-Teilquadrat die Ziffern 1 bis 9 vorkommen.

Markieren Sie das Feld *Eingabekontrolle*, so erhalten Sie sofort eine Meldung, wenn eine eingetragene Ziffer nicht an der gewählten Stelle stehen darf.
Bei anspruchsvollen Rätsel ist es üblich, dass man sich in noch nicht ausgefüllte Felder Hilfszahlen schreibt. Geben Sie daher mehr als eine Ziffer in ein Feld ein, werden diese als kleine Zahlen angezeigt, die nicht zur eigentlichen Lösung gerechnet werden. Möchten Sie ein solches Feld mit der Lösungsziffer belegen, geben Sie dort einfach nur eine Ziffer ein.

Sollten Sie bei einem Rätsel gar nicht mehr weiterkommen, so können Sie auf den Schalter *Feld ausfüllen* klicken. In der Mehrzahl der Fälle erhalten Sie daraufhin ein zufällig ausgewähltes leeres Feld ausgefüllt.
Klicken Sie auf den Schalter *Hilfe geben*, so wird die mögliche Belegung, d.h. die für dieses Feld möglichen Ziffern, eingetragen. Klicken Sie auf *Problem lösen*, dann sucht das Programm nach einer Lösung. Dies kann im Falle schwierigerer Probleme durchaus auch längere Zeit dauern.
Möchten Sie das Rätsel lieber mit Papier und Bleistift lösen, so können Sie dies ausdrucken.

16.5 Sudoku



5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Sudoku (Japanisch, wörtlich Zahlen-Einzel)

Während eines Besuchs in Japan stieß der Neuseeländer Wayne Gould in einer Zeitschrift auf Sudoku und verfiel diesem Rätsel. Daraufhin entwickelte er ein Computerprogramm, das Sudoku-Rätsel generiert und veröffentlichte diese Rätsel im Internet. Ende 2004 schaffte er das schier Unmögliche und drang mit dem Spiel bis zur Redaktion von "The Times" vor. Dort konnte er einen Feuilleton-Redakteur von Sudoku begeistern und wie es dann weiterging, ist ja mittlerweile bekannt ...
Sudoku ist ein Knobelspiel.

Gegeben ist ein Quadrat aus 9 x 9 = 81 Kästchen, in die bestimmte Ziffern schon eingetragen sind.
Die Aufgabe besteht nun darin, die freien Kästchen so mit Ziffern zu besetzen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte, in jedem 3 x 3-Teilquadrat die Ziffern 1 bis 9 vorkommen.
Hier laden Sie ein Teilprogramm, in dem Sie Sudoku-Rätsel ausfüllen und vom Computer berechnen lassen können. Zum Beispiel finden Sie folgendes Rätsel:

Weitere 150 Rätsel erhalten Sie nach einem Klick auf den Schalter *Beispiel*.

Alle angezeigten Aufgaben werden in die Schwierigkeitsstufen *leicht*, *normal*, *mittelschwer*, *schwer* und *sehr schwer* eingestuft. Beachten Sie aber bitte, dass diese Einteilung etwas subjektiv ist: Es ist durchaus möglich, dass Sie ein als *schwer* gekennzeichnetes Problem sehr schnell lösen können. Auch hier macht die Übung wieder den Meister.
Ihre Lösung tragen Sie in das linke Arbeitsfeld ein.
Klicken Sie dazu auf das auzufüllende Feld und geben Sie die Werte ein. Die Eingabe wird mit dem Schalter ↵ quittiert.

Eine Teillösung können Sie durch einen linken Klick auf den nach rechts zeigenden Pfeil zwischenspeichern. Auf Wunsch können Sie sie mit dem zweiten Pfeil auch wieder in den Arbeitsbereich laden.

Markieren Sie das Feld *Eingabekontrolle*, so erhalten Sie sofort eine Meldung, wenn eine eingetragene Ziffer nicht an der gewählten Stelle stehen darf.
Bei anspruchsvollen Rätsel ist es üblich, dass man sich in noch nicht ausgefüllte Felder Hilfszahlen schreibt. Geben Sie daher mehr als eine Ziffer in ein Feld ein, werden diese als kleine Zahlen angezeigt, die nicht zur eigentlichen Lösung gerechnet werden. Möchten Sie ein solches Feld mit der Lösungsziffer belegen, geben Sie dort einfach nur eine Ziffer ein.

Hilfe

Sollten Sie bei einem Rätsel gar nicht mehr weiterkommen, so können Sie auf den Schalter *Feld füllen* klicken. In der Mehrzahl der Fälle erhalten Sie daraufhin ein zufällig ausgewähltes leeres Feld ausgefüllt.

Beachten Sie bitte, dass diese Hilfefunktion bei sehr komplizierten Rätseln durchaus einige Sekunden benötigen kann. Abbrechen können Sie mit dem Schalter.

Klicken Sie auf den Schalter *Hilfe geben*, so wird die mögliche Belegung, d.h. die für dieses Feld möglichen Ziffern, eingetragen.
Klicken Sie auf *Problem lösen*, dann sucht das Programm für das rechts angezeigte Sudoku-Rätsel nach einer Lösung. Dies kann im Falle schwierigerer Probleme durchaus auch längere Zeit dauern.

Problem generieren

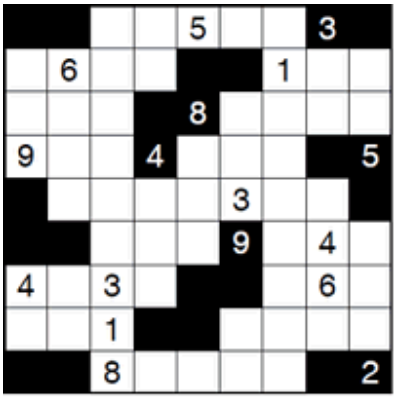
Sie können im Programm auch neue Sudoku-Rätsel erzeugen lassen. Klicken Sie auf den entsprechenden Schalter, wird mit einem Hochgeschwindigkeitsalgorithmus eine Sudoku-Aufgabe zusammengestellt. Diese Aufgabe ist garantiert eindeutig lösbar, kann aber durchaus anspruchsvoll sein.

Die Sudoku-Anhänger teilen sich in zwei große Gruppen: Die einen fordern von einem Sudoku-Rätsel unbedingte Symmetrie der vorgegebenen belegten Felder, den anderen ist dies egal. Mit dem hier umgesetzten Algorithmus werden Aufgaben erstellt, die nicht unbedingt symmetrisch sind. Der Spielspaß wird dadurch aber nicht eingeschränkt – im Gegenteil: Eine gewisse Routine, die beim Lösen vieler symmetrischer Rätsel entsteht, wird hier durch Abwechslung ersetzt.

Insgesamt kann das Programm über 82 Millionen verschiedene Aufgaben generieren, d.h., wenn Sie alle hier vorhandenen Möglichkeiten durchspielen wollen, müssen Sie 90 Jahre lang täglich über 2200 Sudokus lösen?!

Lösungstipps

Nehmen Sie das Rätsel stückweise in Angriff. Betrachten Sie entweder eine bestimmte Zeile, eine Spalte oder einen bestimmten Block.



Je weniger leere Felder eine Zeile, eine Spalte oder ein Block enthält, desto einfacher ist es, die fehlenden Zahlen zu finden. Konzentrieren Sie sich deshalb zunächst auf die Zeilen, Spalten und Blöcke, die die meisten vorgegebenen Zahlen enthalten.

Arbeiten Sie nach dem Ausschlussverfahren: Tragen Sie alle Zahlen, die passen könnten, in die Felder ein. Sobald Sie in der betreffenden Zeile, Spalte oder dem Block die richtige Zahl gefunden haben, radieren Sie sie in den anderen Feldern einfach wieder aus.

Achten Sie auf Zahlenpaare wie 2, 4 oder 3, 5 in einer Zeile oder Spalte der Felder. Diese Zahlen können Sie dann in der gleichen Zeile oder Spalte auf jeden Fall ausschließen, weil sie nur in diesen beiden Feldern vorkommen können.

16.6 Sudokuähnliche Spiele

Unter diesem Menüpunkt finden Sie eine Zusammenstellung verschiedener Rätsel, die dem Grundprinzip des Sudoku ähnlich sind.

Str8ts

Str8ts ist ein sudokuähnliches Logikrätsel. Das Rätsel wurde 2008 von dem Kanadier Jeff Widderich erfunden. Ziel war es, ein Logik-Rätsel mit ähnlich einfachen Regeln wie Sudoku zu entwerfen.

Auch bei Str8ts wird ein 9x9-Gitter mit den Ziffern 1 bis 9 gefüllt, so dass jede Ziffer in jeder Spalte und in jeder Zeile nur einmal vorkommt.
Darüber hinaus gibt es auch schwarze Felder, wie in Kreuzworträtseln. Gefüllt werden die weißen Felder. Schwarze Felder können leer oder mit einer Ziffer gefüllt sein.
Der Name "Str8ts" wird von "straight" abgeleitet, d.h. von "Straße". "Str8ts" wird wie "straights" ausgesprochen.
Zusammenhängende weiße Felder in Zeilen oder Spalten bilden bei Str8ts eine Straße, sie müssen eine Folge zusammenhängender Ziffern enthalten. Dabei kann die Reihenfolge beliebig sein.

Ziel des Spiels ist es, die leeren weißen Felder auszufüllen. Solange das Str8ts nicht gelöst ist, können in einem Feld mehrere Möglichkeiten für verschiedene Ziffern bestehen. Werden diese Möglichkeiten notiert, nennt man diese Kandidaten. Es gelten die Regeln:

1. Die weißen Felder müssen mit je einer Ziffer zwischen 1 und 9 gefüllt werden.

2. Keine Ziffer darf in einer Zeile oder Spalte mehrfach vorkommen, egal ob in einem weißen oder in einem schwarzen Feld.
3. Waagerecht oder senkrecht zusammenhängende weiße Felder dürfen nur Ziffern enthalten, die eine lückenlose Folge, eine Straße, bilden, gleichgültig in welcher Anordnung.

Da es auch leere schwarze Felder gibt, müssen nicht alle Ziffern von 1 bis 9 in jeder Zeile oder Spalte vorkommen. Die Ziffern 1 und 9 sind nicht benachbart, die Folge "9812" ist somit keine gültige Straße.

In diesem Teilprogramm können Sie Str8ts spielen.
Nach der Auswahl eines neuen Spiels wird das Spielfeld angezeigt.
Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste auf ein Feld ein. In diesem Fall wird eine Eingabezeile angezeigt, in der Sie die möglichen Kandidaten eintragen können. Dazu muss das Feld *mögliche Werte* markiert sein. Geben Sie nur einen Kandidaten ein, wird dieser als Lösung übernommen.

Haben Sie alle weißen Felder korrekt ausgefüllt, erfolgt eine Auswertung. Erneut wird eine *Bestenliste* geführt.

Sollten Sie Hilfe benötigen, so können Sie sich die korrekt ausgefüllten Zellen anzeigen lassen (Feld: *korrekte Einträge*). Klicken Sie auf den Schalter *Feld ausfüllen*, wird ein zufällig gewähltes Feld korrekt ausgefüllt.
Nutzen Sie den Schalter *Hilfe geben*, ermittelt das Programm die möglichen Kandidaten und trägt diese in die noch nicht ausgefüllten Felder ein. Dabei ist zu beachten, dass alle eingetragenen Werte benutzt werden. Sollten Sie bedauerlicherweise einen Fehler eingegeben haben, so wird dieser ebenfalls berücksichtigt; mit einem wahrscheinlich falschen Ergebnis.

Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel bei wenigen vorgegebenen Feldern sehr anspruchsvoll werden kann.

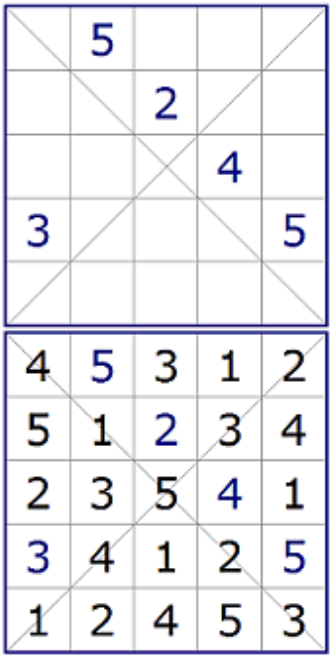
Sudoku 2D, Lateinische Quadrate

Sudoku 2D ist eine weitere Variante des japanischen Zahlenrätsels Sudoku.

In die Felder eines Diagramms der Größe n x n sind die Zahlen von 1 bis n einzutragen, wobei in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jeder der beiden Diagonalen jede Zahl genau ein mal vorkommen muss.
In den Zeitschriften Feierabend-Rätsel und Logisch wird diese Rätselart Magiequadrat genannt.

Mathematisch gesehen, sind erneut lateinische Quadrate zu konstruieren, bei denen auch die Hauptdiagonalen jede mögliche Ziffer genau einmal enthalten. Damit existieren beim 2-D-Sudoku im Allgemeinen weniger Kombinationsmöglichkeiten als beim Standard-Sudoku. Durch Verringerung der vorgebenen Zahlen kann ein Sudoku 2D Problem sehr anspruchsvoll werden.

In diesem Teilprogramm können Sie Sudoku 2D spielen.



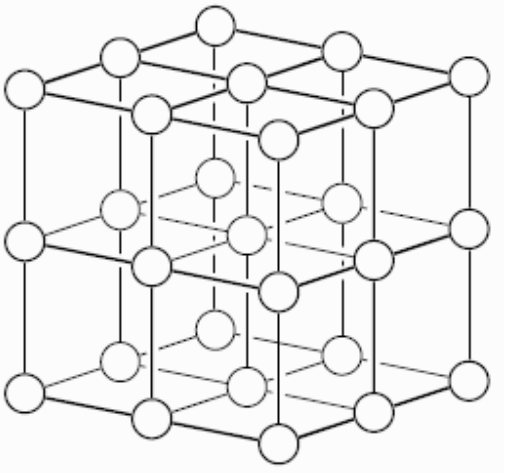
Nach der Auswahl eines neuen Spiels und der *Spielfeldgröße* an dem Rollbalken wird das Spielfeld angezeigt.
Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste auf ein Feld ein. In diesem Fall wird eine Eingabezeile angezeigt, in der Sie die möglichen Kandidaten eintragen können. Dazu muss das Feld *mögliche Werte* markiert sein.
Geben Sie nur einen Kandidaten ein, wird dieser als Lösung übernommen.

Haben Sie alle weißen korrekt ausgefüllt, erfolgt eine Auswertung. Erneut wird eine *Bestenliste* geführt.
Sollten Sie Hilfe benötigen, so können Sie sich die korrekt ausgefüllten Zellen anzeigen lassen (Feld: *korrekte Einträge*). Klicken Sie auf den Schalter *Feld ausfüllen*, wird ein zufällig gewähltes Feld korrekt ausgefüllt.

Nutzen Sie den Schalter *Hilfe geben*, ermittelt das Programm die möglichen Kandidaten und trägt diese in die noch nicht ausgefüllten Felder ein. Dabei ist zu beachten, dass alle eingetragenen Werte benutzt werden. Sollten Sie bedauerlicherweise einen Fehler eingegeben haben, so wird dieser ebenfalls berücksichtigt; mit einem wahrscheinlich falschen Ergebnis.

Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel bei wenigen vorgegebenen Feldern sehr anspruchsvoll werden kann.

Sudokubus



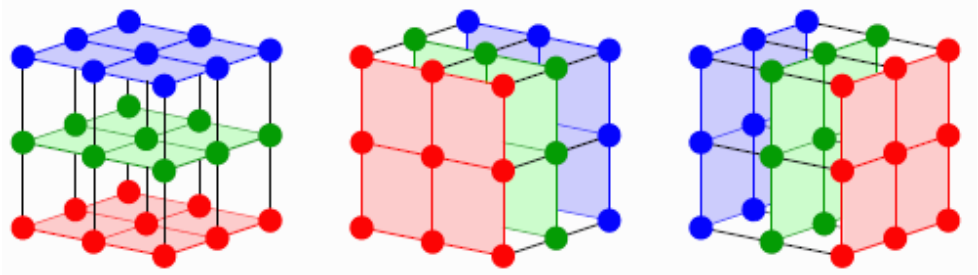
Sudokubus ist ein Variante des allgemein bekannten japanischen Zahlenspiels Sudoku.

Ein würfelförmiges Gerüst wird an den Knoten mit Kugeln versehen. Die Kugeln bilden eine 3x3x3-Anordnung.

Die Spielregeln sind einfach: Jede der 27 Kugeln ist mit den Zahlen 1 bis 9 zu versehen, so dass

- in jeder der drei Etagen jede Zahl genau ein Mal erscheint,
- in jeder der drei zur Frontalebene parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint und
- in jeder der drei zur Seitenwand parallelen Ebenen jede Zahl genau ein Mal erscheint.

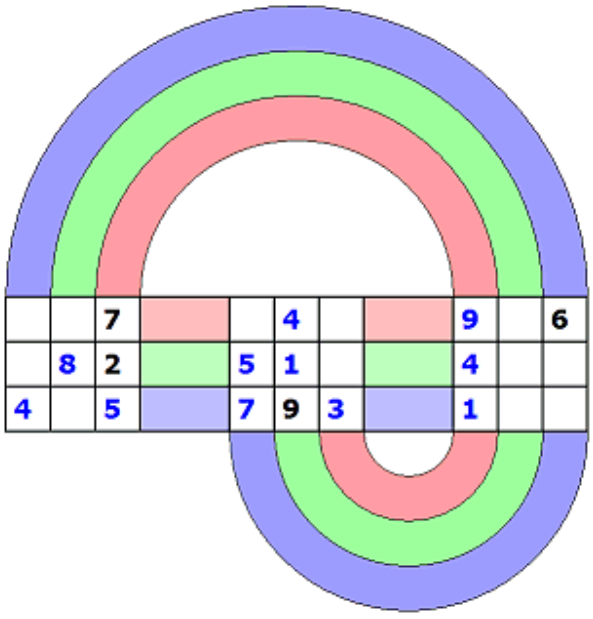
Die Abbildung illustriert die drei Etagen, die drei zur Frontalebene parallelen Ebenen und die drei zur Seitenwand parallelen Ebenen.



Eine neue Aufgabe wählen Sie über den Schalter. Kommen Sie einmal nicht weiter, so können Sie das ausgewählte Feld (der Eingabe-Cursor blinkt) mit dem Schalter *Feld ausfüllen* die richtige Zahl eintragen lassen. Der Schwierigkeitsgrad hängt von der Anzahl der vorgegebenen Zahlen ab.

Beachten Sie bitte: Der Sudokubus kann durchaus sehr anspruchsvoll sein.
Die Idee zu diesem Teilprogramm stammt von dem Schweizer Mathematiker Hans Walser.

Schneckenrätsel



Das Schneckenrätsel gehört zu den Sudoku-ähnlichen Spielen, d.h. auch hier sind Felder mit Ziffern auszufüllen.

Gegeben sind 3 Bereiche mit jeweils 3 x 3 Quadraten. Diese sind waagerecht und zusätzlich über drei Spiralen miteinander verbunden.
In dieser 27 Felder sind zu Beginn eine gewisse Anzahl von Zahlen eingetragen.

Die Spielregeln sind einfach:
Schreiben Sie in jedes kleine quadratische Feld eine der Zahlen 1 bis 9, so dass in jedem der drei 3x3-Felder, in jeder der drei Zeilen und in jeder der drei Spiralen jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal erscheint.

Damit ist das Schneckenrätsel mit dem Sudoku verwandt.
Eine neue Aufgabe wählen Sie über den Schalter. Kommen Sie einmal nicht weiter, so können Sie das ausgewählte Feld (der Eingabe-Cursor blinkt) mit dem Schalter Feld ausfüllen die richtige Zahl eintragen lassen.
Der Schwierigkeitsgrad hängt von der Anzahl der vorgegebenen Zahlen ab.
Beachten Sie bitte: Auch wenn hier wesentlich weniger Zahlen einzutragen sind,

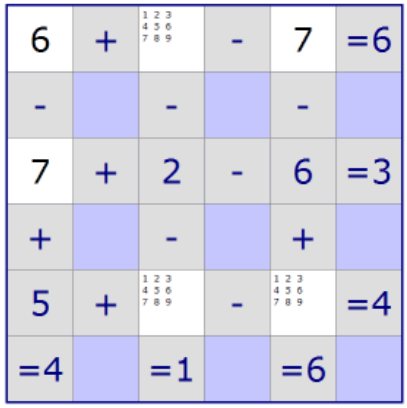
als bei einem Sudoku-Rätsel, kann das Schneckenrätsel durchaus sehr anspruchsvoll sein.

Dollarrätsel

Ein Variante des Schneckenrätsels ist das Dollarrätsel. Auch hier sind Felder mit Ziffern auszufüllen. Wieder sind 3 Bereiche mit jeweils 3 x 3 Quadraten gegeben, die waagerecht bzw. senkrecht und zusätzlich über Kreisbögen miteinander verbunden sind. Die Figur erinnert etwas an das Dollarzeichen; daher der Name. Die Idee zu diesem Teilprogramm geht auf Hans Walser und Peter Rothe zurück.

Gleichungsrätsel

In diesem Teilprogramm sind sechs einfache Gleichungen (Addition oder Subtraktion) zu lösen, die in einem Schema miteinander verbunden sind. Zum Beispiel wäre eine Aufgabe



Nach der Auswahl eines neuen Spiels wird das Spielfeld angezeigt. In die weißen Felder sind die korrekten Ziffern einzutragen. Dabei können ausschließlich die Lösungen 1, 2, ..., 9 verwendet werden.

Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste auf ein Feld ein. In diesem Fall wird eine Eingabezeile angezeigt, in der Sie die möglichen Kandidaten eintragen können. Dazu muss das Feld *mögliche Werte* markiert sein. Geben Sie nur einen Kandidaten ein, wird dieser als Lösung übernommen.

		3	5	
	11		10	
7				8
		15		8
4	7			

3	2	3	5	1
2	11	1	10	3
7	1	2	3	8
1	3	15	2	8
4	7	3	1	2

Haben Sie alle weißen Felder korrekt ausgefüllt, erfolgt eine Auswertung. Erneut wird eine *Bestenliste* geführt. Sollten Sie Hilfe benötigen, so können Sie sich die korrekt ausgefüllten Zellen anzeigen lassen (Feld: *korrekte Einträge*). Klicken Sie auf den Schalter *Feld ausfüllen*, wird ein zufällig gewähltes Feld korrekt ausgefüllt.

Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel mitunter, je nach Vorgaben, anspruchsvoll werden kann.

Lateinische Summen

„Lateinische Summen" ist eine weitere Variante eines Zahlenrätsels.

In die Felder eines Diagramms der Größe n x n sind die Zahlen von 1 bis m einzutragen, wobei in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jeder der beiden Diagonalen jede Zahl genau ein mal vorkommen muss. Dabei ist die höchste Zahl m gleich der Anzahl der leeren Felder einer Zeile bzw. Spalte.

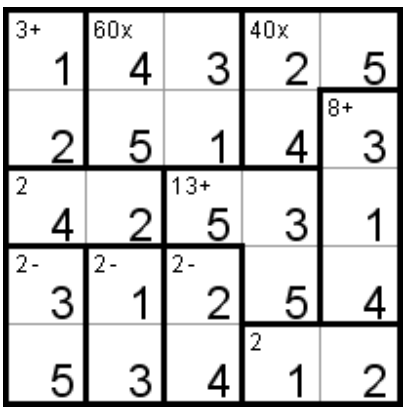
Vorgegeben sind weiterhin verschiedene Zahlen. Diese sind die Summe der Zahlen in den 8 Nachbarfeldern, links, rechts, oben, unten und den vier diagonal angrenzenden Felder. Bei Randfeldern reduziert sich die Anzahl der Nachbarfelder entsprechend.
Für diese Summen werden andere benachbarte Summenzahlen nicht mitgerechnet.

Mathematisch gesehen, sind erneut lateinische Quadrate zu konstruieren, allerdings nicht der Ordnung n sondern der Ordnung m.
Im Allgemeinen existieren für kleine Feldgrößen nur wenige Kombinationsmöglichkeiten. Für größere Feldgrößen kann das Spiel anspruchsvoll werden.

In diesem Teilprogramm können Sie „Lateinische Summen" spielen.
Nach der Auswahl eines neuen Spiels und der *Spielfeldgröße* an dem Rollbalken wird das Spielfeld angezeigt.
Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste auf ein Feld ein. In diesem Fall wird eine Eingabezeile angezeigt, in der Sie die möglichen Kandidaten eintragen können. Dazu muss das Feld *mögliche Werte* markiert sein.
Geben Sie nur einen Kandidaten ein, wird dieser als Lösung übernommen.
Haben Sie alle weißen Felder korrekt ausgefüllt, erfolgt eine Auswertung. Erneut wird eine *Bestenliste* geführt.

Sollten Sie Hilfe benötigen, so können Sie sich die korrekt ausgefüllten Zellen anzeigen lassen (Feld: *korrekte Einträge*). Klicken Sie auf den Schalter *Feld ausfüllen*, wird ein zufällig gewähltes Feld korrekt ausgefüllt.

Nutzen Sie den Schalter *Hilfe geben*, ermittelt das Programm die möglichen Kandidaten und trägt diese in die noch nicht ausgefüllten Felder ein. Dabei ist zu beachten, dass alle eingetragenen Werte benutzt werden. Sollten Sie bedauerlicherweise einen Fehler eingegeben haben, so wird dieser ebenfalls berücksichtigt; mit einem wahrscheinlich falschen Ergebnis.



16.7 Japanische Zahlenrätsel

Unter diesem Menüpunkt finden Sie eine Zusammenstellung verschiedener japanischer Zahlenrätsel.

Kendoku

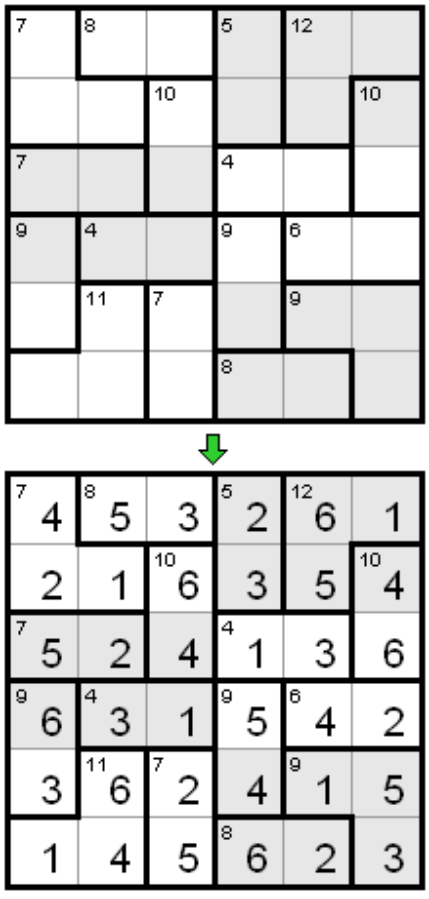
Kendoku (eigentlich Ken Ken = Weisheit) ist ein Zahlenrätsel aus Japan. Das Spiel wurde von dem japanischen Lehrer Tetsuya Miyamoto für seine Schüler entwickelt.

Es besteht aus einem n x n Spielfeld, in dem Kästchen durch dickere Umrandung zu ganz unterschiedlichen Blöcken zusammengefasst sind. In das Spielfeld sind Zahlen von 1 bis n nach den Spielregeln einzutragen.
Kendoku folgt ähnlichen Regeln wie Sudoku. Je Zeile und Spalte darf jede Zahl nur einmal vorkommen.
Anders als beim Sudoku sind jedoch keine Zahlen vorgegeben. Stattdessen stehen in jedem Kästchenblock Rechenergebnisse, die sich aus den eingetragenen Zahlen und der angegebenen Grundrechenart (Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division) ergeben.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel testen.

Nach der Auswahl der Größe des *Spielfeldes* wird ein Rätsel angezeigt. Die kleinen schwarzen Zahlen geben an, wie groß der Wert in diesem Zahlenblock ist. Dabei steht zuerst das Ergebnis dahinter die Rechenoperation +, -, * und : für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.
Gehören zu einem Zahlenblock mehr als 2 Zahlen, so sind diese alle zu addieren bzw. zu multiplizieren. Bei der Subtraktion und Division sind Minuend bzw. Dividend in dem Feld, das die Aufgabe enthält.

Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste ein. Klicken Sie wiederholt auf eines der Felder, so wird dessen Wert kontinuierlich erhöht und nach Überschreitung der maximalen Zahl wieder auf ein leeres Feld geschaltet.



Während Kendoku-Aufgaben mit einem 3 x 3-Spielfeld im Allgemeinen sehr einfach sind, wird die Aufgabe ab Spielfeldern von 6 x 6 und größer schnell anspruchsvoll.
Haben Sie keine Lösungsidee, so wird mit dem Schalter *Hilfe geben* ein leeres Feld ausgefüllt.

Grundlage dieses Spiels sind lateinische Quadrate. Da es bei einem 6 x 6-Spielfeld schon Millionen solcher Quadrate gibt, bei 7 x 7 und 8 x 8 sogar noch viel mehr, und die Quadrate, Zahlenblöcke und Aufgaben unterschiedlich zusammengestellt werden, können Sie hier eine unerschöpfliche Menge an Aufgaben lösen.

Kikagaku Nampure

Kikagaku ist ein weiteres Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde wahrscheinlich in Japan entwickelt. Allerdings ist seine Entstehung und Erstveröffentlichung nicht vollkommen geklärt.

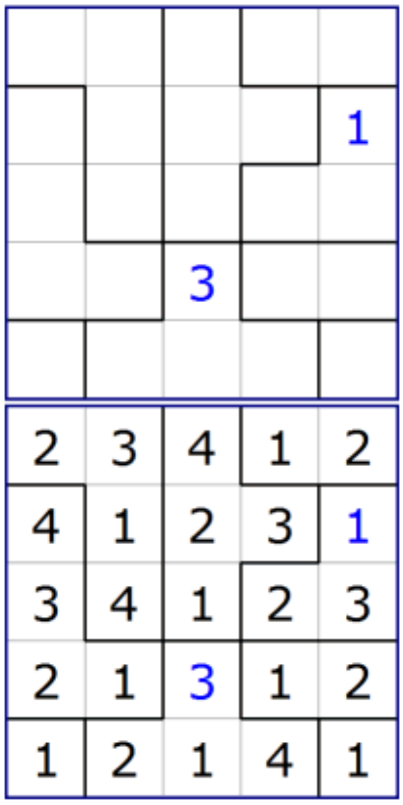
In die Felder eines n x n-Spielfeldes sind die Zahlen von 1 bis n so einzutragen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in jedem weißen bzw. grauen Bereich jede Zahl genau ein mal vorkommen muss.
Die Summe der Zahlen in einem fett umrandeten Gebiet muss der vorgegebenen Zahl entsprechen, wobei in einer Summe keine Summand mehrfach vorkommen darf.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel testen.
Die kleinen schwarzen Zahlen geben an, wie groß die Summe in diesem Zahlenblock ist.
Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste ein. Klicken Sie wiederholt auf eines der Felder, so wird dessen Wert kontinuierlich erhöht und nach Überschreitung der maximalen Zahl wieder auf ein leeres Feld geschaltet.

Andere Bezeichnungen für dieses Spiel sind Samunamupure, Killer Sudoku, Sum Number Place, Sum Sudoku, Sumdoku und Gebietssummen (Zeitschrift Logisch). Im Internet wird sehr oft von Samunamupure gesprochen. Dies ist aber kein japanisches Wort, sondern eine "Japanisierung" des englischen Sum Number Place. Das Spiel ist dem Kendoku sehr verwandt.

Hakyuu

Hakyuu ist ein weiteres Sudoku-ähnliches Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde in Japan entwickelt und sehr populär.



Gegeben ist ein n x n - Spielfeld. Dieses ist durch zusätzliche Linien in Gebiete eingeteilt.

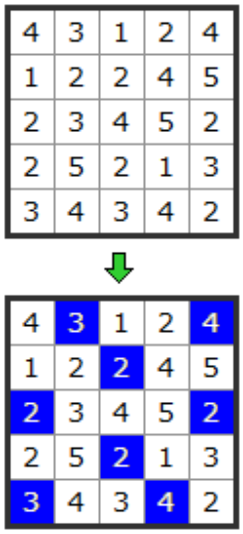
In jedes Feld ist eine Zahl einzutragen. Jedes Gebiet aus n Feldern muss alle Zahlen von 1 bis n genau einmal enthalten.
Wenn zwei gleiche Zahlen in einer Zeile bzw. Spalte stehen, müssen sich zwischen den beiden Zahlen mindestens so viele andere Zahlen befinden, wie die Zahl angibt.
Zum Beispiel müssen sich zwischen zwei Feldern mit der Zahl 3 mindestens drei andere Felder befinden.

Im Unterschied zu Sudoku können nun in einer Zeile oder einer Spalte Ziffern mehrfach auftreten, wie die Lösung des Beispiels zeigt.
Die Strategie zur Lösung unterscheidet sich auch deutlich von Rätseln wie Kendoku oder Sudoku.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel nutzen.
An dem Rollbalken wählen Sie die Spielfeldgröße 6 x 6 oder 7 x 7 aus. Einige Felder sind zu Beginn mit blauen Zahlen versehen. Diese Einträge sind eine Hilfe für die Lösung und nicht veränderbar.

Die gesuchten Zahlen werden eingetragen, in dem Sie so lange auf das weiße Feld klicken, bis die gewünschte Ziffer erscheint.

Hitori



Hitori ist ein weiteres Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde in Japan entwickelt und ist sehr populär. Das Spiel wurde erstmals im japanischen Rätselmagazin Puzzle Communication Nikoli (Nr. 20, März 1990) veröffentlicht.
Andere bekannte Bezeichnungen für „Hitori ni shite kure" (deutsch Lass mich allein; englisch Let Me Alone) sind „Zahlen streichen" und „Federstrich".

Gegeben ist ein n x n - Spielfeld. In jedes Feld ist eine Zahl eingetragen.
Die Aufgabe besteht darin, die Felder des Diagramms blau oder weiß einzufärben.
In einer Zeile oder Spalte des Diagramms darf dabei keine Zahl mehr als einmal auf einem weißen Feld stehen bleiben. Zwei blaue Felder dürfen nicht vertikal oder horizontal benachbart sein. Alle weißen Felder müssen einen einzigen waagerecht bzw. senkrecht zusammenhängenden Bereich bilden.

Die Strategie zur Lösung unterscheidet sich deutlich von Rätseln wie Kendoku, Sudoku oder Hakyuu.
In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel nutzen. An dem Rollbalken wählen Sie die Spielfeldgröße 5 x 5 bis 8 x 8 aus.
Zwischen weißer und blauer Farbe eines Feldes schalten Sie mit einem linken Mausklick um.

Fillomino

Fillomino ist ein weiteres Sudoku-ähnliches Zahlenspiel. Auch dieses Logikspiel wurde in Japan entwickelt und sehr populär.

Gegeben ist ein n x n - Spielfeld.
In jedes Feld ist eine Zahl einzutragen. Dabei sollen sich Gebiete aus Feldern mit gleichen Zahlen ergeben, die genauso groß sind wie die Zahl angibt.
Zwei verschiedene Gebiete der gleichen Größe dürfen nicht senkrecht, wohl aber diagonal, benachbart sein. Zwei Vorgabezahlen dürfen zum gleichen Gebiet gehören. Es können auch Gebiete entstehen, die keine einzige Vorgabezahl

enthalten.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel nutzen.
An den Auswahlfeldern wählen Sie die Spielfeldgröße 5 x 5 oder 7 x 7 aus. Einige Felder sind zu Beginn mit blauen Zahlen versehen. Diese Einträge sind eine Hilfe für die Lösung und nicht veränderbar.

Die gesuchten Zahlen werden eingetragen, in dem Sie so lange auf das weiße Feld klicken, bis die gewünschte Ziffer erscheint.

Kakuro

Kakuro ist ein Zahlenrätsel. Im deutschen Sprachraum sind außer Kakuro auch die Namen Kreuzzahlenrätsel und Kreuzsumme in Gebrauch. Im japanischen Wort Kakuro steckt die Wortwurzel kuro (= schwarz). Das ist der Grund, weshalb die Summenfelder häufig als schwarze Flächen dargestellt werden.

Der Aufbau ähnelt dem eines Kreuzworträtsels, nur mit Ziffern statt Buchstaben und Summen statt Wortdefinitionen. Dabei gelten folgende Regeln:

Es dürfen nur die Ziffern von 1 bis 9 vorkommen
In jeder Summe darf jede Ziffer nur einmal vorkommen
In jedes freie Feld darf nur eine Ziffer eingetragen werden

Normalerweise wird die Lösung durch die vorgegebenen Zahlen eindeutig festgelegt.

In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel testen. Nach der Auswahl eines neuen Spiels wird das Spielfeld angezeigt. Die weißen Zahlen geben an, wie groß die Summe waagerecht bzw. senkrecht ist.
Die Zahlen geben Sie durch Klicken mit der linken Maustaste ein. Klicken Sie wiederholt auf eines der Felder, so wird dessen Wert kontinuierlich erhöht und nach der 9 wieder auf ein leeres Feld geschaltet.
Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel bei größeren Feldern sehr anspruchsvoll werden kann.

Zehnergitter

Zehnergitter ist ein Additionsspiel. Es ist unbekannt, wer Zehnergitter erfunden hat bzw. wo diese Rätselart erstmals veröffentlicht wurde.

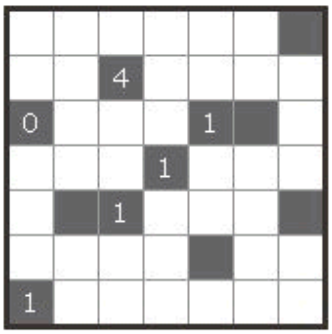
Gegeben ist ein 10 x 5 - Spielfeld.
In die Felder des Diagramms sind die Zahlen von 0 bis 9 einzutragen. In jeder Zeile muss jede Zahl genau einmal vorkommen. Gleiche Zahlen dürfen nicht benachbart sein, weder horizontal noch

7		5				8		6	
8	6			7			2	9	5
	7			2	5	9			
			7		1		3		8
	4	9	0	3	7		8		1
29	27	23	25	16	18	23	22	24	18

7	4	5	9	0	2	8	3	6	1
8	6	0	1	7	3	4	2	9	5
0	7	4	8	2	5	9	6	1	3
9	6	5	7	4	1	0	3	2	8
5	4	9	0	3	7	2	8	6	1
29	27	23	25	16	18	23	22	24	18

vertikal noch diagonal.
Die Summe der Zahlen einer Spalte muss mit der vorgegebenen Summe in der zusätzlich angegebenen Zeile übereinstimmen.

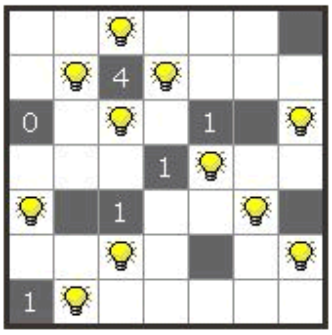
In diesem Teilprogramm können Sie dieses Logikspiel nutzen.
Einige Felder sind zu Beginn mit blauen Zahlen versehen. Diese Einträge sind eine Hilfe für die Lösung und nicht veränderbar.



Die gesuchten Zahlen werden eingetragen, in dem Sie so lange auf das weiße Feld klicken, bis die gewünschte Ziffer erscheint.

Akari

Der Name Akari bedeutet japanisch "Beleuchtung". Diese Rätselart wurde von der japanischen Zeitschrift "Nikoli" erstmals 2001 veröffentlicht.
"Nikoli" veröffentlichte auch als erste Zeitschrift Spiele wie Sudoku oder Kakuro und verhalf ihnen so zum weltweiten Durchbruch.



Spielregeln: Akari wird auf einem Quadratgitter mit schwarzen und weissen Feldern gespielt. Manche schwarze Quadrate sind mit Zahlen von 0 bis 4 markiert.
Auf den weißen Quadraten müssen Glühlampen platziert werden, so dass die folgenden Regeln eingehalten werden:

Die Zahlen auf den schwarzen Quadraten geben an, wie viele Glühlampen auf weißen Feldern sind, die über eine Kante, d.h. orthogoal, an dieses schwarze Feld grenzen.
Darüber hinaus können auch andere weiße Felder Glühlampen enthalten.
Jedes weiße Feld wird von mindestens einer Glühlampe beleuchtet. Eine Glühlampe leuchtet waagerecht und senkrecht bis zu einem schwarzen Feld oder zum Rand des Spielfeldes. Glühlampen dürfen sich nicht gegenseitig beleuchten.

In diesem Teilprogramm können Sie Akari auf 6 x 6, 8 x 8, 10 x 10, 12 x 12 und 14 x 14 Feldern spielen. Die Größe stellen Sie am Rollbalken *Spielstufe* ein.

Zum Platzieren bzw. Entfernen einer Glühlampe klicken Sie mit der linken Maustaste auf ein weißes Spielfeld. Ist der Punkt *beleuchtete Zellen* markiert, zeigt das Programm alle Felder farbig an, die nun beleuchtet sind.
Haben Sie alle Felder korrekt ausgefüllt, erfolgt eine Auswertung. Erneut wird eine *Bestenliste* geführt.

Sollten Sie Hilfe benötigen, so klicken Sie auf den Schalter *Hilfe geben.* Ein zufällig gewähltes Feld wird korrekt ausgefüllt bzw. eine fehlerhafte Glühlampe entfernt.

Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel sehr anspruchsvoll werden kann.

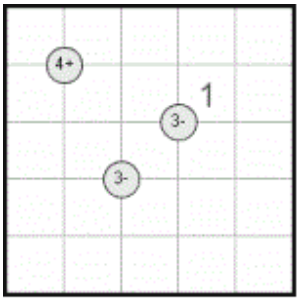
Nurikabe

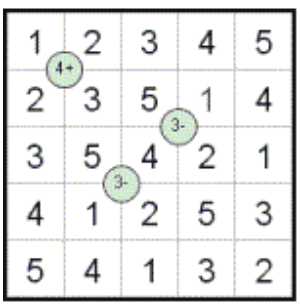
Nurikabe ist ein japanisches Zahlenrätsel, das von Nikoli erfunden wurde. Es erschien zum ersten Mal in der Zeitschrift Puzzle Communication 33 (März 1991). Ein anderer Name für das Rätsel ist Inseln im Strom.
Nurikabe wird auf einem rechteckigen Gitter von beliebiger Größe gespielt, in diesem Programm von der Größe 6x6 bis 10x10.
Einige Quadrate enthalten Zahlen. Ziel des Spieles ist es, für jedes Quadrat die Farbe (hier blau oder weiß) zu bestimmen. Dabei gelten die Regeln:

- Alle blauen Quadrate müssen über Kanten miteinander zusammenhängen.
- Ein blaues Quadrat der Größe 2×2 darf nicht vorkommen.
- Jede Zahl steht in einem weißen Bereich, der genauso viele weiße Quadrate enthält, wie die Zahl angibt.
- Im Besonderen sind die Quadrate mit den Zahlen weiß.
- Weiße Bereiche dürfen nicht über Kanten aneinander grenzen.
- Jeder weiße Bereich enthält nur eine Zahl.

Aufgrund der Bezeichnung "Inseln im Strom" werden die weißen Felder oft auch als Inseln, die blauen, im Original schwarzen, Felder als Strom und blaue Felder der Größe 2×2 als Teich bezeichnet. Die Regeln lassen sich auch in dieser Bildsprache formulieren, so darf dann beispielsweise kein Teich in der korrekten Lösung vorkommen. Deshalb werden auch manchmal die Felder nicht schwarz sondern blau eingefärbt, wie in dieser Variante. Die Lösung wird eindeutig durch die vorgegebenen Zahlen festgelegt.

Zum Färben der Felder klicken Sie mit der Maus wiederholt auf eines der Quadrate. Auch hier wird eine Bestenliste geführt. Zu beachten ist, dass dieses Logikspiel sehr anspruchsvoll ist.





Mathrax

Mathrax ist ein weiteres Zahlenrätsel, dessen Ursprung in Japan liegt. Bei diesem Logikrätsel ist in jedes Feld eines Gitters eine Zahl einzutragen, sodass diagonal benachbarte Felder mathematischen Bedingungen genügen.

Regeln: In die Felder eines Diagramms der Größe n x n sind die Zahlen von 1 bis n einzutragen, wobei in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Zahl genau ein mal vorkommen muss. Einige Schnittpunkte der Rasterlinien sind mit Kreisen versehen, in denen eine Zahl und ein Operator (+, -, x, :) angegeben sind. Die Zahl ist das Ergebnis der Operation, wenn man den Operator auf die beiden sich diagonal gegenüberliegenden Zahlenpaare anwendet.

Bei einem "e" (even) im Kreis müssen alle vier angrenzenden Zahlen gerade sein; bei einem "o" (odd) ungerade.

Eingetragen werden die Zahlen wieder durch wiederholten linken Mausklick auf ein Zahlenfeld. Die Abbildung zeigt eine Beispielaufgabe und darunter die gesuchte Lösung.
Die Idee zu diesem Zahlenrätsel stammt von www.janko.at.

Numbrix

Numbrix ist ein weiteres japanisches Zahlenspiel.
Gegeben ist ein n x n-Spielfeld, in dessen Felder Zahlen von 1 bis n^2 eingetragen werden müssen.
Außerdem müssen die Zahlen von 1 bis n^2 so angeordnet werden, dass die nächstgrößere Zahl von z waagerecht oder senkrecht an das Feld von z angrenzt.

D.h., ist das Rätsel gelöst, muss es möglich sein, beginnend bei der 1 durch waagerechtes oder senkrechtes Wandern zu einem Nachbarfeld alle Zahlen bis n^2 zu erreichen.

1	2	3	4	7	8	9
28						10
29						13
32						14
33						15
46						16
47	48	49	42	41	18	17

1	2	3	4	7	8	9
28	27	26	5	6	11	10
29	30	25	24	23	12	13
32	31	36	37	22	21	14
33	34	35	38	39	20	15
46	45	44	43	40	19	16
47	48	49	42	41	18	17

In den Abbildungen sind eine Aufgabenstellung und die zugehörige Lösung zu sehen.

Die Zahlen werden eingetragen, in dem so lange auf das Feld geklickt wird, bis die gewünschte Zahl erscheint. Ein rechter Mausklick auf ein Feld löscht die Zahl.

Mit dem Schalter *Neues Spiel* wird eine neue Ausgangssituation erzeugt. Dabei variiert auch die Größe des Spielfeldes.
Sollten Sie keine Lösung finden, können Sie über *Hilfe geben* ein Feld korrekt ausfüllen lassen.

Im Allgemeinen wird Numbrix mit etwas Übung lösbar sein. Mit einer Aufgabenstellung, bei der die Randfelder vorgegeben werden, ist Numbrix nicht besonders anspruchsvoll.

16.8 Schach

Es gibt wohl kein Spiel, das mehr mit logischem Denken zu tun hat als Schach.

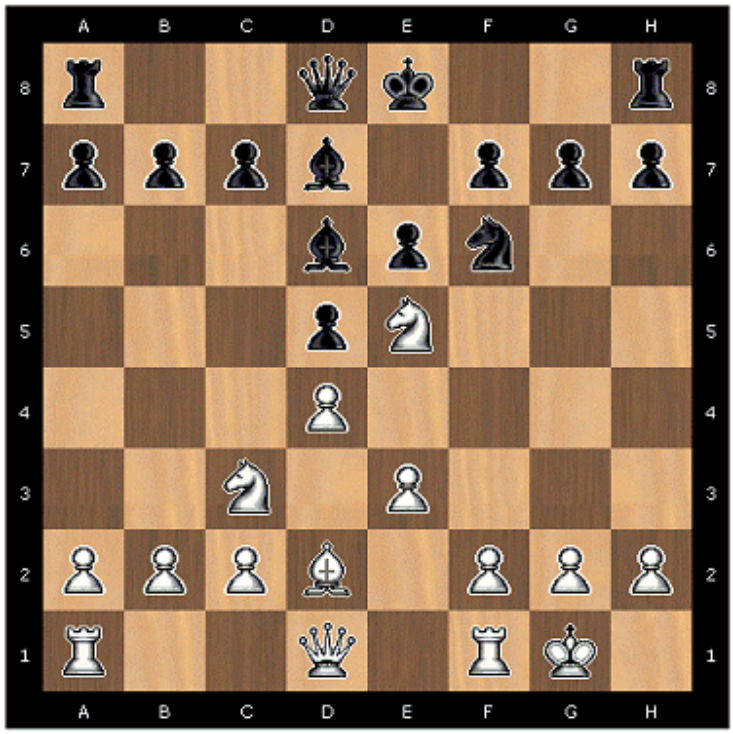
Das Programm enthält ein zusätzliches Programm, bei dem Sie gegen den Computer oder auch zu zweit Schach spielen können.

Wichtiger Hinweis: Das Programm ist kein eigentliches Schachprogramm. Das

Teilprogramm ist kein Gegner für einen geübten Schachspieler, da es dafür zu spielschwach ist. Für einen Anfänger oder Gelegenheitsspieler ist es jedoch ein würdiger Gegner.

Das Spiel entstand wahrscheinlich im 6. Jahrhundert v.u.Z. in Indien. Über Persien und das Byzantinische Reich verbreitete es sich in ganz Asien. Zwischen 700 und 900 kam Schach nach Europa. Nach einigen Regeländerungen im 16. Jahrhundert wurde 1851 erstmals ein internationales Turnier ausgetragen. Heute gilt Schach als die "Krone des Brettspiels".

Schach ist ein Brettspiel für zwei Personen. Jeder Spieler verfügt über 16 Figuren, der eine Weiß, der andere Schwarz. Jeder Satz von Figuren besteht aus einem König, einer Dame, zwei Läufern, zwei Springern, zwei Türmen und acht Bauern. Man spielt auf einem quadratischen Schachbrett, das in 64 abwechselnd helle und dunkle Felder unterteilt ist. Ziel des Spiels ist es, den gegnerischen König "schachmatt" zu setzen.
Eine genaue Beschreibung der Regeln finden Sie im Lexikon.



Nach dem Programmstart finden Sie auf dem Schachbrett die Grundaufstellung vor. Zuerst legen Sie einige Einstellungen fest:

Durch Markierung des Feldes *Weiß oben darstellen* wird das Schachbrett um 180 Grad gedreht. Am Rollbalken *Spielstufe* legen Sie die Stärke des Computergegners fest. Vorgesehen sind die Stärken von *sehr leicht* bis *sehr schwer*. Voreingestellt ist *leicht.* Unter diesen Spielstärken ist Folgendes zu verstehen:

Die Spielstärke *sehr leicht* bewirkt, dass der Computer zwei Züge vorausberechnet und den dort gefundenen besten Zug wählt. Je Spielstärke steigt die Anzahl der berechneten Züge um 1. Damit steigt natürlich auch die Rechenzeit erheblich an. Schon bei Stärke *mittelschwer* benötigt das Programm zur Ermittlung des nächsten Zuges teilweise mehrere Minuten. Bei *sehr schwer* können durchaus 1 bis 2 Stunden verstreichen, bis der Computer sich entscheidet. Zum Beispiel benötigte das Programm im Spielmodus gegen sich selbst bei der Schwierigkeitsstufe *mittelschwer* über 23 Minuten für eine Partie.

In den beiden Auswahlbereichen *Spieler weiß* und *Spieler schwarz* legen Sie fest,

wer die nachfolgende Partie absolviert. Die Steuerung erfolgt über Schalter im unteren rechten Fensterbereich.

Mit *Neues Spiel* stellen Sie den Ausgangszustand ein. Das automatische Spiel des Computers gegen sich selbst unterbrechen Sie mit *Abbruch.*
Während des Spiels bzw. nach Ende einer Partie können Sie über zwei Schalter einzelne Züge zurücknehmen bzw. wieder setzen. In der *Zugliste* werden alle Züge notiert. Nach Beendigung eines Spiels können Sie durch Klicken auf einen notierten Zug diese Position einstellen und von dort evtl. wieder weiterspielen.

Möchten Sie die Partie unterbrechen, so kann der aktuelle Spielstand über *Spielsteuerung* | *Spielstand speichern* auf der Festplatte gespeichert werden. Mittels *Spielstand laden* wird die Partie wieder hergestellt.
Dabei ist aber zu beachten, dass nur vollständige Züge gespeichert werden, d.h. Weiß und Schwarz müssen gezogen haben.

Spielen Sie in einer höheren Spielstufe gegen den Computer, so kann die Berechnung des Computers mehrere Minuten dauern. Möchten Sie in der Zwischenzeit etwas anderes unternehmen, so markieren Sie den Menüpunkt *Tonausgabe bei Computerzug.* Sobald sich das Programm nun für einen Zug entschieden hat, werden Sie durch ein Ton darüber informiert.

Varianten

Unter diesem Menüpunkt finden Sie drei "Varianten" der Ausgangsposition. Natürlich hat dies mit dem Originalspiel nichts zu tun, allerdings ist es durchaus interessant, zum Beispiel gegen den Computer zu spielen, wenn er keine Dame hat. Für Anfänger besteht so eine viel höhere Chance, auch einmal zu gewinnen.

Eröffnungen

Im Untermenü Eröffnungen können 26 verschiedene Standarderöffnungen, darunter die Sizilianische Verteidigung, die Spanische Eröffnung, verschiedene Gambits usw., aufgerufen werden. Das Programm trägt die ersten Züge jeweils ein.
Durch Auswahl in der Zugliste können Sie diese Eröffnungen schrittweise nachvollziehen.

Copyright-Hinweis: Der Autor der Schachkomponente, die als Grundlage für dieses Programm genutzt wird, ist Daniel Terhell aus Amsterdam.

Problemschach

Das Programm enthält neben der Möglichkeit, Schach zu spielen, auch ein Teilprogramm zur Analyse von

Schachproblemen.
Ein Schachproblem besteht aus einer Ausgangssituation und der Aufgabe, einen Zug (im Allgemeinen für Weiß) zu finden, der innerhalb einer vorgegebenen Anzahl von Zügen zu einem sicheren Matt für Schwarz führt. Das bedeutet, ist die Aufgabe, ein "Matt in 3 Zügen" zu finden, so muss der erste weiße Zug sicherstellen, dass nach drei Zügen das Matt folgt – gleichgültig, welche Maßnahmen Schwarz (entsprechend der Schachregeln!) ergreift.
Derartige Aufgaben zu "komponieren", erfordert strengste Logik und höchste Kreativität.

Klicken Sie auf den Menüpunkt *Schachprobleme ein- und ausschalten*, so erscheint eine Liste mit über 450 Schachproblemen. Wählen Sie eines aus, zeigt das Programm die Ausgangssituation und die Anzahl der Züge, bis wann das Matt für Schwarz erreicht werden muss.
Nun können Sie selbst suchen. Dabei gelten die gleichen Hinweise wie bei der Beschreibung des Schachprogramms an sich.

Sollten Sie keine Lösung finden oder Ihre Lösung überprüfen wollen, dann klicken Sie auf den Schalter *Lösung.* Das Programm sucht nun nach der korrekten Lösung.

In den meisten Fällen gilt: Je höher die vorgegebene Zugzahl ist, desto anspruchsvoller ist das Problem! Die Suchtiefe stellt das Programm automatisch ein. Allerdings können Sie dies auch an den Pfeilschaltern verändern.

Achtung! Aufgabenstellungen mit "Matt in 5 Zügen" oder noch anspruchsvoller fordern Ihren Computer extrem. Obwohl das Programm Hunderte von Möglichkeiten je Sekunde testet, kann die Suche nach dem richtigen Zug mehrere Minuten dauern.

Zum Beispiel benötigt ein i7-Prozessor 3 GHz unter Windows Vista für die Lösung des 127. bzw. 130. Schachproblems rund 36 Sekunden – mit einem verblüffenden Ergebnis!
Für das 7-zügige Schachproblem (Nr. 10) von Weber benötigte der Computer knapp 30 Sekunden. Die Lösung dieses Problems selbst zu finden, erfordert schon gute Schachkenntnisse.

Abbrechen können Sie jederzeit durch Klick auf den Schalter *Abbruch*.

Das Programm zeigt Ihnen den ersten Zug für Weiß an. Möchten Sie die vollständige Zugfolge bis zum Matt untersuchen, so ziehen Sie den weißen Zug, antworten für Schwarz und lassen nun erneut eine Lösung finden usw.

Anmerkung: In der Bezeichnung der Probleme wird neben der Zugzahl auch der Autor des Problems und das Jahr der Veröffentlichung genannt. Einige Probleme sind aus konkreten Spielsituationen entstanden. Die Urheber "ABC" und "Alpha" sind das Buch "ABC des Schachspiels" und die mathematische Schülerzeitschrift

"Alpha" aus der DDR.

Eingabe eines neuen Schachproblems

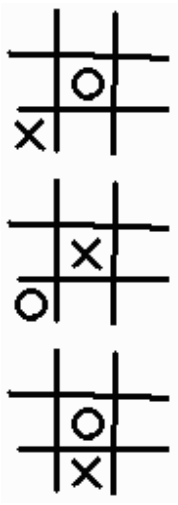
Möchten Sie selbst ein neues Problem eingeben, so klicken Sie zusätzlich auf den Menüpunkt *Neues Problem eingeben*.

In das angezeigte Spielfeld tragen Sie nun die Spielfiguren ein. Dabei gilt:

- Weiße Figuren werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet.
- Schwarze Figuren erhalten Kleinbuchstaben.
- Die Spielfiguren Bauer, Läufer, Springer, Turm, Dame und König werden mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichnet.

Haben Sie die Ausgangssituation eingetragen, so geben Sie noch eine Bezeichnung für das Problem sowie die maximale Zugzahl ein. Mit dem Schalter *Speichern* wird das neue Problem in die Liste aufgenommen.
Der Schalter bzw. der Menüpunkt *Eingabe löschen* löscht die Eingabefläche.
Der Schalter (Menüpunkt *Spielfeld kopieren*) überträgt die aktuell auf dem Schachbrett bestehende Situation in das Eingabefeld.

16.9 Tic-Tac-Toe



TicTacToe ist ein Spiel für zwei Personen. Gegeben ist ein 3x3-Spielfeld mit neun Feldern. Der Spieler, der beginnt, setzt in irgendein Feld ein Kreuz. Der zweite setzt einen Kreis. Abwechselnd zeichnen beide weitere Kreuze und Kreise. Derjenige, der als erster drei Kreuze bzw. drei Kreise nebeneinander, untereinander oder diagonal positioniert hat gewonnen. Im antiken Ägypten kannte man schon 1300 v.u.Z. ein analoges Spiel.

Der erste Spieler bestimmt den Spielverlauf, der zweite kann nur reagieren. Ziehen beide Spieler korrekt, so ergibt sich stets ein Untentschieden.
Für den Spielverlauf ist der zweite Zug entscheidend. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in eine Ecke, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in die Mitte. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in die Mitte, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in eine Ecke. Setzt der 1.Spieler sein Kreuz in eine Seitenmitte, so setzt der zweite Spieler seinen Kreis in die Mitte. Im Allgemeinen geht dann das Spiel unentschieden aus.
Das Spiel wird allerdings uninteressant, wenn beide Spieler die Strategien kennen.

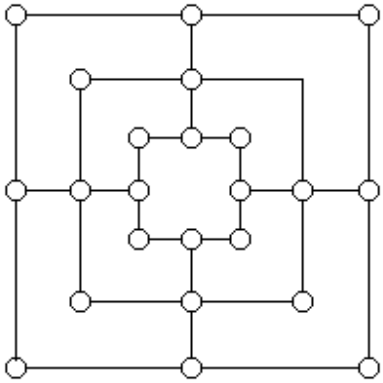
In diesem Teilprogramm können Sie Tic-Tac-Toe spielen.
Nach dem Start eines neuen Spiels wählen Sie mit einem linken Mausklick ein Feld aus; der Computer antwortet sofort. Möchten Sie, dass der Computer das

Spiel beginnt, so markieren Sie das Feld *Computer beginnt*.
Voreingestellt ist, dass ihr Zug stets mit einem blauen Kreuz, der Computerzug mit einem roten Kreis markiert werden, unabhängig davon, ob Sie oder der Computer den ersten Zug durchführt.

Sollten Sie keinen Fehler machen, so ändert das Spiel unentschieden. Gewinnen werden Sie wohl nie; vorausgesetzt, dass kein Programmierfehler vorliegt.
Wählen Sie *Computer gegen Computer*, so spielt der Computer 9999 mal gegen sich selbst. Im Ergebnis dürfen sich nur unentschiedene Spiele ergeben.

Damit Sie doch eine Chance gegen den Computer haben, können Sie die „*Intelligenz*" des Computers verringern. Reduzieren Sie den Wert, so macht der Computer ab und an Fehler. Bei einer Intelligenz von 0 % spielt das Programm völlig chaotisch. Nur bei 100 % ist der Computer unbezwingbar.
TicTacToe war eines der ersten Spiele, die auf Computern erschienen (Spiel OXO auf einem EDSAC-Computer, 1952). Eine entscheidende Rolle spielt TicTacToe auch im Film Wargames. Dort lernt ein Supercomputer, dass Spiele auch unentschieden ausgehen können, und stoppt so im letzten Moment einen thermonuklearen Krieg, da er erkennt, dass es keinen Sieger geben kann.

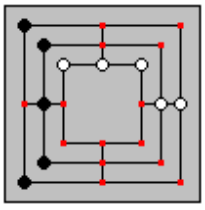
16.10 Mühle



Das Mühlespiel ist ein sehr altes Brettspiel.
Das Spiel gehörte in Deutschland zu den bekanntesten Brettspielen. Es gilt fälschlicherweise als Kinderspiel, da es sehr anspruchsvoll ist, wenn beide Spieler mit guter Strategie spielen. Das Spiel ist weltweit verbreitet. In Englisch heißt es "Nine Men's Morris", in Französisch "Marelle".

Das Spielfeld besteht aus drei ineinander gezeichneten Quadraten, welche in der Mitte jeder Geraden durch eine Linie verbunden sind. An jeder Ecke der Quadrate und an jeder Endung und Kreuzung jeder Linie befindet sich ein Feld.

Zum Spielen hat jeder Spieler neun Steine zur Verfügung, welche einer nach dem andern auf die Felder gesetzt werden.
Das Ziel des Spiels ist dem Gegner so viele Steine wegzunehmen, dass er keine Mühle mehr machen kann. Um eine Mühle zu machen braucht man drei Steine auf einer Linie.



Spielregeln

Ein Spieler beginnt und setzt einen Stein auf ein freies Feld. Danach setzt der Gegenspieler einen Stein, usw. bis alle neun Steine auf dem Brett verteilt sind.

Kann ein Spieler drei Steine auf eine Linie setzen hat er eine Mühle und kann dem Gegenspieler einen Stein wegnehmen. Man kann die Steine nur auf freie Felder setzen. Es ist schon beim Setzen der Steine möglich, eine Mühle zu konstruieren. Sobald alle Steine gesetzt sind, werden sie den Linien entlang, von einem Feld zum einem freien Nachbarfeld verschoben. Hat ein Spieler nur noch drei Steine, so kann er mit seinen Steinen frei springen, jedoch nur auf freie Felder. Wichtig ist auch, dass Spielsteine in Mühlen geschützt sind und nicht vom Gegner entfernt werden dürfen.

Um möglichst viele Mühlen zu erzielen, ohne die Gefahr, beim nächsten Zug des Gegners einen Spielstein aus der geöffneten Mühle zu verlieren, sollte man ein Zwickmühle konstruieren. Dies ist eine Doppelmühle, in welcher derselbe Zug, der die Mühle öffnet, gleichzeitig eine andere schließt.

Ziel des Spiels ist es, so viele Mühlen zu konstruieren und dem Gegenspieler einen Stein zunehmen, bis dieser nur noch zwei Steine besitzt und verliert. Ein Spieler, der keinen gültigen Zug mehr machen kann, hat ebenfalls verloren.

Das Mühlespiel wurde analytisch von Ralph Gasser gelöst. Kennen beide Spieler eine Strategie und machen keine Fehler, so geht das Spiel unentschieden aus. Für das praktische Spielen ist dies aber von geringer Bedeutung, da die optimale Strategie sehr kompliziert ist.

Das Mühlspiel wird von diesem Teilprogramm umgesetzt.

Nach dem Programmstart wählen Sie zuerst, ob Sie oder der Computer beginnen oder auch zwei Spieler gegeneinander antreten. Das Spiel beginnt mit dem Schalter *Spielstart*.
Danach werden die Steine abwechselnd auf das Spielfeld gesetzt, durch Sie mit einem linken Mausklick, durch den Computer automatisch. Auf der linken Seite des Fensters wird stets angezeigt, welche Aktion durchgeführt werden muss, wie viele Steine auf dem Spielfeld sind bzw. noch gesetzt werden müssen.

Das Verschieben und Springen mit den Steinen erfolgt, in dem Sie einen Stein anklicken und auf die neue Position mit der Maus (Taste festhalten) verschieben. Haben Sie ein Mühle erzielt, so klicken Sie den gegnerischen, zu entfernden Stein mit der Maus an.
Möchten Sie einen Zug zurücknehmen, was allerdings etwas unsportlich ist, so klicken Sie auf den Schalter *Zurück*. Ein laufendes Spiel wird mit *Abbruch* gestoppt.

Von Bedeutung ist auch die *Spielstärke* des Computers. Täuschen Sie sich nicht, schon bei Stufe 3 ist der Computer ein ernstzunehmender Gegner, zumindest, wenn Sie noch ungeübt sind. Bei einer Spielstärke 6 benötigt der Computer zur Berechnung des Zuges stets einige Zeit, ist aber kaum noch zu schlagen.

16.11 Damespiel

Dieses Teilprogramm beinhaltet ein klassisches Damespiel.

Das Damespiel ist wahrscheinlich weit über 2.500 Jahre alt. So entdeckte man in etruskischen Katakomben eine Wandmalerei mit der Abbildung eines (wahrscheinlich) Dame-ähnlichen Spiels. In dem berühmten Grab Tutenchamuns (1300 v.u.Z.) wurde ein Spielbrett entdeckt, auf dem „Senet" gespielt wurde, was dem Damespiel sehr ähnlich ist.
Heutzutage ist das Damespiel nicht mehr so verbreitet und wird nur noch wenig gespielt. Das ist schade, da es das logische Denkvermögen stark fördert.

Während es beim Schach absolut klare Spielregeln gibt, ist das beim Damespiel nur für internationale Turniere klar geregelt.
Nationale und regionale Besonderheiten ergeben teilweise sehr unterschiedliche Damepartien. In dem Buch „Zug um Zug" von Heinz Machatschek heißt es dazu:

„… Experten behaupten sogar, man könne die Nationalität von Damespielenden beim Zusehen bestimmen, ohne dass diese ein Wort zu wechseln brauchen …"

Spieler, die nur vorwärts und nicht rückwärts ziehen, sind von der Nationalität deutsch oder polnisch. Wird nur auf weißen Feldern gespielt und immer nur ein Feld gezogen, so sind die Spieler Engländer. Spieler, welche die Dame auf das Feld des geschlagenen Steins stellen (wie beim Schach) und nicht dahinter, kommen aus Nordamerika. Franzosen spielen ähnlich den deutschen Regeln, aber auf den weißen und nicht den schwarzen Feldern. Italiener schlagen mit einem einfachen Stein niemals die Dame („Signora"). In der Türkei spielt man auf dem ganzen Brett und zieht horizontal und vertikal usw.

Aus diesem Grund ist es notwendig, die hier verwendeten Regeln zu erklären. Gespielt wird nach den klassischen, in Deutschland üblichen Regeln.

Gespielt wird auf einem 8x8 Brett, nur auf den dunklen Feldern. Jeder Spieler hat zu Beginn 12 Spielsteine. Der Computer spielt mit den blauen Steinen, die Computernutzer mit den weißen.
Nach dem Programmstart wählen Sie zuerst, ob Sie oder der Computer beginnen oder auch zwei Spieler gegeneinander antreten. Das Spiel beginnt mit dem Schalter *Spielstart*.

Die Steine werden ein Feld in diagonaler Richtung gezogen (Klicken und Maus bewegen), aber nur vorwärts.
Gegnerische Steine müssen übersprungen werden (Sprungzwang !), sofern das dahinter liegende Feld frei ist. Wenn das Zielfeld eines Sprungs auf ein Feld führt, von dem aus ein weiterer Stein übersprungen werden kann, so wird der Sprung fortgesetzt. Mit einem einfachen Stein darf nicht rückwärts gesprungen werden. Alle übersprungenen Steine werden vom Brett genommen.

Erreicht ein Spielstein die gegnerische Grundlinie, wird er zu einer Dame. Im Programm wird dies sichtbar, indem der Stern zwei zusätzliche Kreise erhält.
Eine Dame darf beliebig weit vorwärts und rückwärts ziehen und springen. Beim Überspringen eines gegnerischen Steines muss die Dame auf dem unmittelbar dahinterliegenden Diagonalfeld aufsetzen.
Falls sie von dem neuen Feld aus über andere Steine springen kann, muss sie das tun. Es gelten die Sprungregeln für einfache Steine, mit der zusätzlichen Regel, dass die Dame über mehrere Felder vorwärts und auch rückwärts springen kann.

Wer keinen Zug ausführen kann, hat das Spiel verloren. Das Spiel endet spätestens nach 100 Zügen mit Remis oder das Spiel wird abgebrochen.

Möchten Sie einen Zug zurücknehmen, was allerdings etwas unsportlich ist, so klicken Sie auf den Schalter *Zurück*. Ein laufendes Spiel wird mit *Abbruch* gestoppt.

Von Bedeutung ist auch die *Spielstärke* des Computers. Täuschen Sie sich nicht, schon bei Stufe 3 ist der Computer ein ernstzunehmender Gegner, zumindest, wenn Sie noch ungeübt sind. Bei einer Spielstärke 6 benötigt der Computer zur Berechnung des Zuges stets einige Zeit, ist aber kaum noch zu schlagen.

16.13 Brettspiel: Go

In diesem Teilprogramm können Sie zu zweit eine Partie Go spielen.
Go ist ein strategisches Brettspiel für zwei Spieler. Dieses sehr alte Spiel stammt ursprünglich aus China, hat eine besondere Prägung in Japan und Korea erhalten und ist neuerdings auch in Europa, meist in der japanischen Form, sehr beliebt.

Spielregeln

Man spielt mit linsenförmigen schwarzen und weißen Steinen, die auf das Spielfeld gesetzt werden. Ziel des Spiels ist es, mit den Steinen seiner Farbe möglichst große Gebiete zu umzingeln. Am Ende wird die Größe der Gebiete sowie die Anzahl gefangener Steine von jedem der beiden Spieler verglichen.
Das Spielfeld besteht aus 19 horizontalen und 19 vertikalen Linien, die ein Gitter von 361 Schnittpunkten bilden, auf die man die Steine setzt. Beide Spieler, *Schwarz* und *Weiß* genannt, verfügen über eine im Prinzip unbegrenzte Anzahl gleichartiger Steine in der jeweiligen Farbe. Traditionell sind es 181 schwarze und 180 weiße Steine.
Für kürzere Partien und auch für Anfänger eignen sich kleinere Spielbretter, z.B. in den Größen 13 × 13 und 9 × 9.

Die Spieler ziehen abwechselnd, Schwarz beginnt. Der Spieler, der am Zug ist, kann entweder einen Stein auf einen beliebigen leeren Schnittpunkt *setzen* oder *passen*. Gesetzte Steine werden im weiteren Spiel nicht mehr bewegt. Daher spricht man hier nicht von „Ziehen", sondern von „Setzen".

Ein einzelner Stein wird *geschlagen*, also vom Brett genommen, wenn seine letzte *Freiheit* von einem gegnerischen Stein besetzt worden ist. Freiheiten sind die einem Stein horizontal und vertikal benachbarten, unbesetzten Schnittpunkte. Diagonal benachbarte Schnittpunkte zählen nicht als Freiheiten.
Gleiches gilt für *Ketten* von Steinen. Eine Kette ist eine Gruppe von Steinen einer Farbe, die sämtlich über horizontale oder vertikale Linien verbunden sind. Eine Kette wird dann geschlagen, wenn der Gegner ihre letzte Freiheit besetzt. Geschlagene Steine werden als *Gefangene* aufbewahrt. Jeder Gefangene zählt einen Punkt in der Endabrechnung.

Es ist nicht erlaubt, einen Stein so zu setzen, dass er bzw. die mit ihm verbundene Kette nach dem Zug keine Freiheit besitzt (Selbstmord). Zur vollständigen Ausführung eines Zuges gehört auch das Herausnehmen geschlagener Steine. Deshalb ist es kein Selbstmord, wenn mindestens ein gegnerischer Stein geschlagen wird, denn der gesetzte Stein erhält dadurch wieder eine Freiheit.

Das sofortige Zurückschlagen eines einzelnen Steins, der gerade einen einzelnen Stein geschlagen hat, ist verboten. Eine solche Situation nennt man *Ko* (sprich *koh*), zu Deutsch: Ewigkeit.

Das Spiel ist zu Ende, wenn beide Spieler nacheinander passen. Die Punktzahl eines Spielers ist die Summe der durch Steine der eigenen Farbe umschlossenen freien Schnittpunkte (Gebiet) und der gefangenen Steine (gegnerischer Farbe). Der Spieler mit der höheren Punktzahl gewinnt das Spiel.

In diesem Teilprogramm können Sie gegen einen Partner spielen. Die Spielfeldgröße stellen Sie links ein. Nacheinander klicken Sie nun mit der Maus eine freie Stelle des Spielfeldes an und versuchen, entsprechend der Regeln das Spiel für sich zu entscheiden.
Unter *Punkten* werden die geschlagenen Steine gezählt. Das Zählen der eingeschlossenen Gebiete wird vom Computer in diesem Teilprogramm nicht durchgeführt.

Wichtige Anmerkung: Obwohl die besten Programmierer weltweit versuchen, Go im Computer zu implementieren, ist es bis heute nicht gelungen, ein Programm für das 19 × 19-Brett zu schreiben, das mit einem normalen Spieler konkurrieren kann.

16.13 Klicks

Klicks ist ein weiteres Logikspiel. Ausgangssituation sind hier 100 Spielsteine in vier verschiedenen Farben (Rot, Grün, Gelb, Blau), die in einem Muster von 10 x 10 Steinen angeordnet sind. Ziel ist es, alle Steine durch Anklicken mit der Maus vom Spielfeld zu entfernen.

Ein gültiger Spielzug ist nur möglich, wenn unmittelbar über oder unter bzw. links

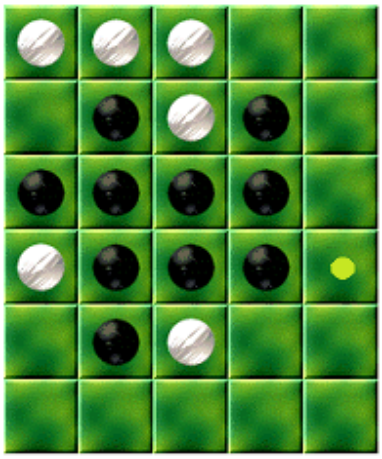
oder rechts von dem angeklickten Stein ein weiterer mit gleicher Farbe liegt. In diesem Fall werden alle so miteinander verbundenen "Kugeln" vom Spielfeld entfernt. Darüber befindliche Steine rutschen nach unten. Wird eine ganze Spalte frei, rutschen die rechts davon liegenden Steine nach links.

Das Programm stoppt automatisch, wenn keine weiteren Steine mehr entfernt werden können. Nicht jede Ausgangssituation ist vollständig auflösbar. Mit etwas Übung und Überlegung gelingt es jedoch oft, alle Kugeln zu löschen. Einfach ist es aber nicht!

In der Grundvariante befinden sich auf dem Spielfeld Kugeln in vier verschiedenen Farben. Dies können Sie an den Pfeilschaltern ändern. Verwenden Sie nur drei Farben, wird das Spiel sehr oft aufgehen, nehmen Sie mehr als vier, wird es ungleich schwerer.

16.14 Othello

Othello ist ein Brettspiel für zwei Personen, das Sie in diesem Teilprogramm gegen den Computer spielen können. Sie spielen mit den weißen Kugeln, der Computer mit schwarz. Auch hier ist wieder logisches Denkvermögen und etwas geometrische Vorstellungskraft gefragt.



Ziel des Spiels ist es, möglichst viele Felder mit weißen Kugeln zu besetzen.
Für einen Spielzug klicken Sie mit der Maus auf ein freies Feld. Werden horizontal, vertikal oder diagonal gegnerische (schwarze) Kugeln nun von zwei weißen begrenzt, ist der Zug gültig und alle eingeschlossenen Kugeln werden weiß. In der Darstellung würde ein Klick auf das gelb markierte Feld vier gegnerische Steine in Weiß umwandeln.
Nach einem gültigen Zug antwortet der Computer.
Verloren hat derjenige, der entweder keine Steine mehr besitzt, d.h., er kann nicht mehr ziehen, oder der nach Belegung aller Felder die kleinere Anzahl Kugeln auf dem Spielfeld sein Eigen nennt.

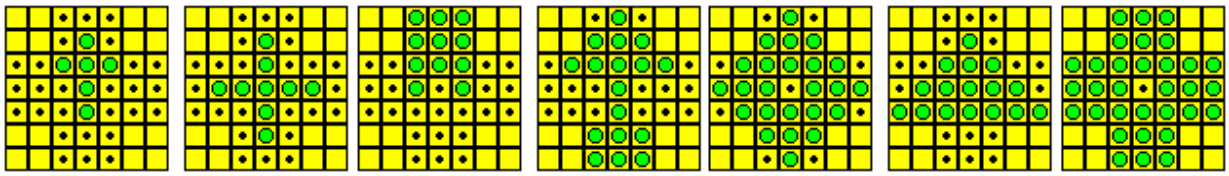
Sollten Sie anfänglich öfter gegen den Computer verlieren, so machen Sie sich folgenden Tipp zunutze: Vor allem Randfelder und ganz besonders die Eckfelder sind von besonderer Bedeutung!
An den Pfeilschaltern können Sie die Größe des Spielfeldes von minimal 6 x 6 bis 14 x 14 Felder einstellen.

16.15 Chinesisches Solitaire

Das chinesische Solitaire ist ein einfaches Brettspiel für einen einzelnen Spieler.

Dabei finden Sie 33 kreuzförmig angeordnete Spielfelder vor, auf denen sich einige Spielsteine befinden. Mindestens ein Feld muss frei sein.

Durch Überspringen der Steine (je Sprung maximal ein unmittelbar benachbarter Stein) sollen alle Steine entfernt und der letzte am Ende verbliebene Stein im Zentrum des Spielfeldes stehen. So einfach die Regeln sind, so kompliziert kann das Realisieren der Aufgabenstellung sein. Etwas Übung und Erfahrung ist schon erforderlich.



In der klassischen Ausgangssituation "Solitaire" befindet sich das erste freie Feld genau in der Spielmitte und alle anderen Felder sind mit Spielsteinen besetzt. Aber auch andere Konfigurationen sind interessant und anspruchsvoll!

Dazu gehören u.a. "Diamant" und "Pyramide". In der Abbildung sehen Sie die in dem Programm vordefinierten Ausgangsituationen (von links nach rechts): Kreuz, Plus, Feuerstelle, Pfeil, Diamant, Pyramide, Solitaire.
Gezogen wird, indem Sie mit der Maus einen Stein anklicken und die Maus nun auf ein freies Feld bewegen. Ist der Zug gültig, verändert sich der Mauszeiger in einen Pfeil, ist der Zug ungültig in ein Stoppschild. Beendet wird der Zug, indem Sie die Maustaste auf dem Zielfeld freigeben.

Einige der Startsituationen sind, wie erwähnt, anspruchsvoll. Möchten Sie, dass der Computer Ihnen eine mögliche Zugfolge simuliert, so klicken Sie auf den Schalter *Lösung.* Nach einiger Rechenzeit (evtl. auch mehrere Minuten!) führt Ihnen das Programm die Lösung vor.

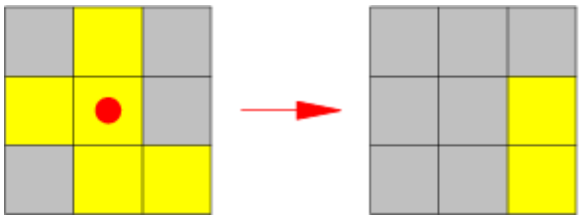
16.16 Cora

Cora ist ein Brettspiel gegen den Computer mit einfachen Spielregeln.
Zu Beginn liegt ein n x n-Spielfeld mit weißen Feldern vor. Die Größe des Spielfeldes können Sie von 5 bis 16 einstellen.
Auf dem Spielfeld sind nun abwechselnd durch den Spieler und den Computer weiße Felder anzuklicken, die sich grau färben.

Ziel ist es, durch das Auswählen eines Feldes drei nebeneinander oder übereinander liegende graue Felder zu erreichen. Diese drei Felder können allerdings auch über Eck verlaufen.
Gelingt dies, liegt ein Gewinnzug vor und die Felder werden mit farbigen Kreisen markiert: Blau für den Spieler, Rot für den Computer.
Nach so einem Gewinnzug muss der Spieler bzw. Computer einen weiteren Zug ausführen.

Sieger ist, wer am Ende die Mehrzahl der Felder eingenommen hat.

Achtung! Täuschen Sie sich nicht: So einfach, wie es aussieht, ist es doch nicht. Der Computer ist spielstark und Sie werden einige Übung benötigen, um zu gewinnen.



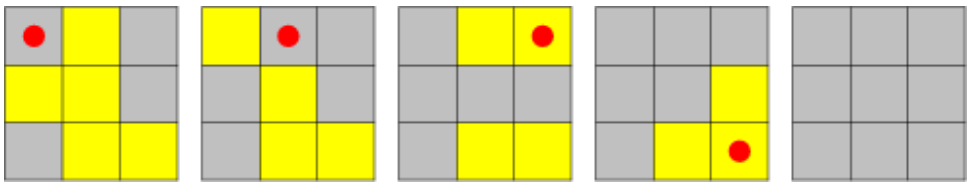
16.17 Logikspiel: Licht aus!

Dieses Logikspiel gehört zu den Spielen, die äußerst einfache Regeln haben, den Spieler aber zur "Verzweiflung treiben" können. Ausgangspunkt ist ein n x n-Spielfeld (Pfeilschalter), in dem einige Zellen eine leuchtende Glühlampe enthalten – in diesen ist "Licht an". Ziel ist es nun, in allen Feldern das Licht auszumachen.

Dabei wird durch einen Mausklick auf eine Zelle das Licht an- bzw. ausgeschaltet. Gleichzeitig wird das Licht aber auch in den Zellen links, rechts, oben und unten, aber nicht diagonal getauscht.
Im Beispiel würde ein Klick auf das Feld mit dem roten Punkt die rechts abgebildete Situation ergeben.

So einfach wie das Spiel zuerst erscheint, ist es allerdings nicht – im Gegenteil: Sie werden schnell feststellen, dass man sich scheinbar immer im Kreis bewegt. Sollten Sie nach vielen vergeblichen Versuchen glauben, das Spiel wäre nicht lösbar, dann halten Sie sich vor Augen, dass der US-amerikanische Mathematiker Sutner im Jahre 1989 bewies, dass es für ein quadratisches Spielfeld immer (!) eine Lösung gibt. Mittlerweile gibt es sogar eine streng mathematische Lösung, die mithilfe von Matrizen die optimale Zugfolge ermittelt.

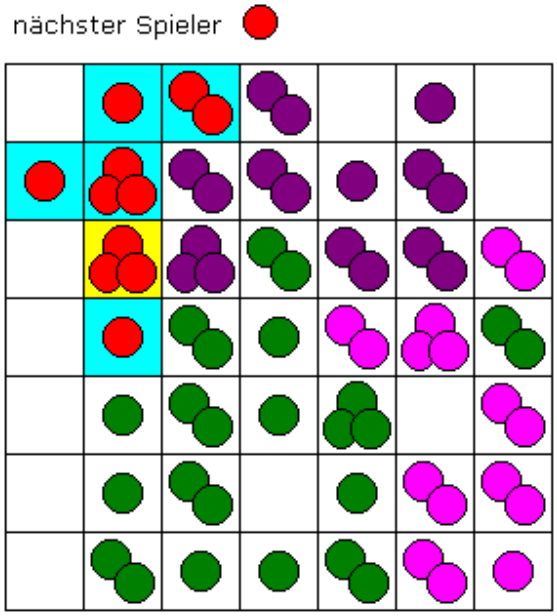
Als kleine Hilfestellung sei hier die Zugfolge für eine Situation auf dem 3 x 3-Spielfeld gezeigt:



16.18 Kettenreaktion

Kettenreaktion ist ein weiteres einfaches Brettspiel für maximal 6 Spieler. Auf Wunsch können Sie auch gegen den Computer spielen.

Auf einem Spielfeld von maximal 15 x 15 Feldern werden farbige Kugeln abgelegt. Dabei ziehen die Spieler abwechselnd.
Bei einem gültigen Zug platziert der Spieler eine Kugel auf ein leeres oder ein schon von seinen Steinen belegtes Feld.



Normale Spielfelder, d.h. keine Randfelder, können maximal drei Kugeln aufnehmen, Randfelder maximal zwei und die vier Eckfelder maximal eine Kugel. Überschreitet die Anzahl der Kugeln diese Maximalwerte, so werden die Kugeln auf die Nachbarfelder verteilt und diese Felder vom aktuellen Spieler eingenommen.

Sollte die Anzahl der Kugeln auf einem Nachbarfeld nach der Verteilung der Kugeln die maximale Anzahl überschreiten, so werden diese auch verteilt usw. usf. Dadurch kann das gezielte Ablegen einer Kugel eine Vielzahl von Nachbarfeldern betreffen – es entsteht eine Kettenreaktion, was dem Spiel den Namen gab.
Spielziel ist es, alle Felder einzunehmen bzw. gegnerische zu löschen!
Nachdem alle Spieler einmal gezogen haben, gilt zusätzlich folgende Regel: Besitzt ein Spieler keine von seinen Kugeln besetzten Felder mehr, so scheidet er aus – unabhängig davon, ob noch Felder frei sind oder nicht.

Im Beispiel ist links der Spieler mit den roten Kugeln am Zug. Klickt er auf das gelb markierte Feld, so überschreitet er die maximale Zahl von drei Kugeln. Durch die Verteilung der Kugeln überschreiten auch zwei Nachbarfelder die Kugelzahl und es tritt die Kettenreaktion ein.
Während des Spiels werden in einem Balkendiagramm die aktuellen Kugelzahlen der Spieler angezeigt.

An den Pfeilschaltern können Sie die Größe des Spielfeldes und die Anzahl der Spieler einstellen.

Wählen Sie das Feld *Computergegner,* so spielen Sie allein gegen den Computer. Haben Sie die Anzahl der Spieler auf 4 eingestellt, haben Sie drei verschiedene Computergegner.

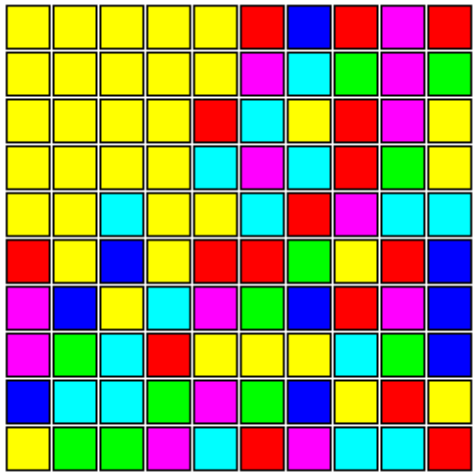
Bei Auswahl des Feldes *Animation* zeigt das Programm jede Änderung der Feldbelegung während einer Kettenreaktion einzeln an. Unter Umständen kann es dann mehrere Sekunden dauern, bis der nächste Spieler am Zug ist.

16.19 Farbflutung

Farbflutung ist ein weiteres, einfaches Logikspiel.

Ziel des Spiels ist es, das ganze Spielfeld mit einer einzigen Farbe zu färben, beginnend mit dem Feld links oben.

Wählen Sie eine Farbe indem Sie auf ein Feld klicken, so werden das Feld links oben sowie alle horizontal oder vertikal daran angrenzenden Felder der gleichen Farbe mit der neuen Farbe gefärbt.
Je kürzer die benötigte Zeit ist und je weniger Spielzüge Sie benötigen, desto höher wird die Punktzahl für die Bestenliste.
Die Größe des Spielfeldes und die Anzahl der Farben können Sie wieder einstellen.



16.20 Kipplabyrinth, Sprunglabyrinth

Ein weiteres Spiel, bei dem logisches Denken verlangt wird, ist das Kipplabyrinth.

Ausgangspunkt ist ein quadratisches Spielfeld, in dem Mauern so eingesetzt sind, dass ein einfaches Labyrinth entsteht. Eine oder mehrere farbige Kugeln befinden sich im Labyrinth, außerdem Löcher, zu den diese Kugeln transportiert werden sollen.
Das Labyrinth ist nach links, rechts, oben und unten "klappbar". Bei jeder Lageänderung des Labyrinths rollen dann die Kugeln, unter dem Einfluss der Schwerkraft so lange, bis sie auf eine Mauer treffen.

Die Aufgabe ist nun: Rollen Sie die farbigen Kugeln an die mit den farbigen Kreisen markierten Plätze. Sie können das Spielbrett nach links, rechts, oben und unten "kippen". Das "Kippen" erfolgt hier, indem Sie die vier Pfeiltasten *links*, *rechts*, *nach oben* oder *nach unten* drücken.
In diesem Teilprogramm sind 36 derartige Labyrinthe enthalten. Diese wählen Sie durch Eintragen der Spielnummer aus.

Beachten Sie bitte: Auch wenn die ersten Spielstufen vielleicht leicht zu lösen sind, wird es schnell anspruchsvoll. Sobald zwei Kugeln gleichzeitig zu transportieren sind, wird es kompliziert.

Sollten Sie keine Lösung finden, so können Sie sich diese mit dem Schalter *Demonstration* anzeigen lassen.
Das Spiel Kipplabyrinth gibt es schon längere Zeit als mechanisches Spiel. Es wurde zum Beispiel unter dem Namen "Space Tilt Maze Game" vertrieben.

Sprunglabyrinth

Ein weiteres Spiel, bei dem logisches Denken verlangt wird, ist das Sprunglabyrinth.
Ausgangspunkt ist ein quadratisches Spielfeld, in dem Mauern so eingesetzt sind, dass ein einfaches Labyrinth entsteht. Eine rote Kugel befindet sich im Labyrinth, außerdem ein Loch, zu dem diese Kugel transportiert werden sollen. Die Kugel ist nach links, rechts, oben und unten bewegbar.

Die Aufgabe ist nun: Bewegen Sie die rote Kugel auf das mit gelb markierte Zielfeld.
Die Kugel bewegt sich jedoch nicht beliebig, sondern nur orthogonal, nicht durch Wände und nur in bestimmten Schrittweiten, die bei der jeweiligen Aufgabe angegeben sind:
"1, 3, 5" bedeutet beispielsweise, dass sich die Kugel zunächst um ein Feld weiterbewegt, im nächsten Zug um 3 Felder, im nächsten Zug um 5 Felder, im nächsten Zug wieder um 1 Feld, usw.

Die Bewegung erfolgt hier, indem Sie die vier Pfeiltasten *links*, *rechts*, *nach oben* oder *nach unten* drücken.

In diesem Teilprogramm sind mehrere derartige Labyrinthe enthalten. Diese wählen Sie durch Eintragen der Spielnummer aus. Sollten Sie keine Lösung finden, so können Sie sich diese mit dem Schalter *Demonstration* anzeigen lassen.

Beachten Sie bitte: Auch wenn die ersten Spielstufen vielleicht leicht zu lösen sind, wird es schnell anspruchsvoll.

16.21 Minensuche

Dieses kleine Spiel ist ein einfache Variante des Spielklassikers „Minensuche" („Mine Sweeper").
Auf dem Spielfeld sind 40 nicht sichtbare „Minen" versteckt. Diese sind alle zu finden und zu markieren.

Mit der linken Maustaste legt man ein Feld frei; wenn unter diesem Feld eine Mine liegt, ist das Spiel verloren.
Mit der rechten Maustaste markiert man ein Feld als Mine. Dort erscheint dann eine rote Fahne. Um diese Markierung rückgängig zu machen, genügen ein oder zwei weitere rechte Mausklicks auf dasselbe Feld.

Mit der linken Maustaste freigelegte Felder, die keine Mine enthalten, enthüllen die Anzahl der Minen, die sich in den benachbarten acht Feldern befinden. Durch die Zahlen der aufgedeckten Felder ist es meist möglich, den Aufenthaltsort der Minen herauszufinden. Felder, die keine Minen in ihrer Nachbarschaft aufweisen, werden nicht mit einer Zahl versehen. Weiterhin werden alle noch verdeckten Felder in ihrer Nachbarschaft automatisch aufgedeckt.

16.22 Nonogramm

Nonogramme, auch japanische Rätsel genannt, sind Logikrätsel und wurden von der Designerin Non Ishida erfunden. Sie gewann 1986 den Window Art-Wettbewerb, bei dem es darum ging, in Wolkenkratzern nur in bestimmten Zimmern Licht zu machen, damit von außen ein Bild auf der Gebäudefassade

sichtbar wurde.

Gegeben ist ein 10 x 10-Feld aus Quadraten, mitunter auch andere Spielfeldgrößen.
An den Rändern stehen Zahlen, die angeben, wie viele zusammenhängende Felder in den jeweiligen Zeilen oder Spalten auszufüllen sind. Bei mehreren Zahlen sind die Blöcke durch mindestens ein Freifeld getrennt. Dieses logisches Rätsel kann sehr anspruchsvoll sein.

In diesem Teilprogramm besteht das Spiel aus einem Gitter aus 10 x 10 Kästchen.
Ziel es ist, die Zellen eines Gitters einzufärben, wobei Zahlen vor jeder Zeile und über jeder Spalte angeben, wie viele zusammenhängende Zellen einzufärben sind.

Die Zahlenfolge "4 2 1" vor einer Zeile enthält damit die Information, dass in dieser Zeile mit mindestens einem Kästchen Abstand ein Block von 4 zusammenhängenden Zellen, ein Block von 2 zusammenhängenden Zellen sowie eine einzelne Zelle in dieser Reihenfolge einzufärben sind. "Z" bedeutet 10.
Aus der Kombination von Zeilen- und Spaltenangaben lässt sich, meist eindeutig, eine Lösung logisch herleiten.

Mit einem linken Mausklick auf ein Quadrat färbt sich das Feld, beim zweiten Klick wird eine Markierung (roter Punkt) gesetzt und beim dritten Klick wird das Feld wieder gelöscht. Ein rechter Mausklick löscht sofort.

16.23 Spiel 2048

Einfache Spielideen sind immer wieder reizvoll. Das gilt auch für dieses Zahlenspiel, dessen Original unter gabrielecirulli.github.io/2048/ veröffentlicht wurde.

Gesteuert wird mit den Pfeiltasten der Tastatur.
Bei Tastendruck bewegen sich alle Kästchen in die entsprechende Richtung. Wenn man dabei 2 Kästchen mit der gleichen Zahl "aufeinander" schiebt, so vereinen sich diese Kästchen zu einem einzelnen Kästchen und der Wert des neu entstandenen Kästchens verdoppelt sich.
Ziel ist es, das Kästchen mit der 2048 erscheinen zu lassen. Haben Sie die Anzeige von *Buchstaben* gewählt, so müssen Sie ein "K" erreichen.
Zusätzlich können Sie die Spielfeldgröße verändern. Je größer Sie das Feld wählen, desto mehr Zeit benötigen Sie zur Lösung, allerdings wird die Aufgabe, die 2048 zu erreichen, einfacher.

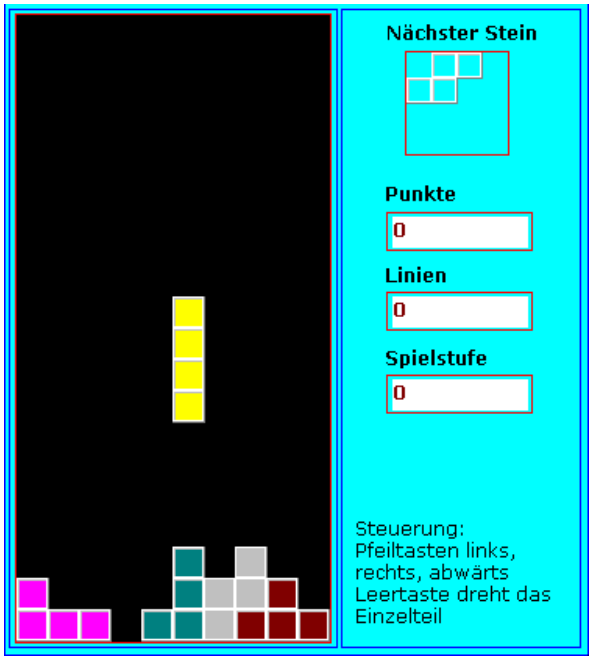
4	256	16	16
8	2	64	
2		16	

Schon nach kurzer Zeit werden Sie bemerken, dass dieses Spiel nicht so einfach ist.
Aus diesem Grund können Sie sich helfen lassen. Mit dem Schalter *Zugvorschlag* ermittelt das Programm einen Zug, der in der konkreten Situation zu empfehlen ist, und führt ihn aus. Wundern Sie sich nicht, dass evtl. der Zug Ihnen "unlogisch" erscheint. Das Programm rechnet 6 Züge voraus und wählt den, der perspektivisch das beste Ergebnis bringt.
Dabei ist aber zu beachten, dass auch der Computer irren kann. Da bei jedem Zug ein neuer Stein zufällig generiert wird, ist dieser bei der Berechnung noch unbekannt.

Mit dem Schalter *Simulation* führt das Programm solange Züge aus, bis die 2048 oder ein nicht weiter spielbare Belegung der Zellen eintritt.

16.24 Tetris

Tetris hat eine interessante Entstehungsgeschichte: Es wurde 1984 von dem sowjetischen Mathematiker Alexej Patschitnow erfunden, der damals im Computerzentrum der Moskauer Akademie der Wissenschaften tätig war. Es wurde schnell das Kultspiel unter den Moskauer Studenten.
Minoru Arakawa, Präsident von Nintendo, sah das Spiel auf einer Computermesse und kaufte die Vermarktungsrechte – günstig. Als dann der Game Boy auf den Markt kam, wurde er standardmäßig mit diesem Spiel ausgerüstet.



Spielregeln: Tetrominos fallen in einen Kasten. Nun müssen die Steine während des Falls durch seitliches Verschieben und Drehen so bewegt werden, dass unten eine waagerechte Schicht mit Quadraten ausgefüllt wird.
Füllt man eine Zeile vollständig aus, erhält man Punkte und die Reihe aus zehn Quadraten verschwindet. Der nächste Zufallsstein folgt von oben. Gelingt es nicht eine waagerechte Reihe zu bilden, so bildet sich ein Haufen. Sobald die Steine den oberen Rand erreichen, ist das Spiel beendet.

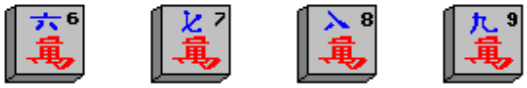
Das Ende ist unvermeidbar: Die Steine fallen mit zunehmender Punktezahl immer schneller – schließlich so schnell, dass man nur noch tatenlos zusehen kann.
Gesteuert werden die Steine in diesem Teilprogramm mit den Pfeiltasten. Gedreht wird mit der *Leertaste*.

16.25 Chinesisches Brettspiel Mahjongg

Neben so bekannten Brettspielen wie Schach oder Dame existiert vor allem in Asien eine Vielzahl sehr interessanter logischer Brettspiele. Aus China stammt zum Beispiel das Spiel Mahjongg (wörtliche Übersetzung "Spatzenspiel").
Bei diesem Spiel sind 144 Spielsteine paarweise aus einer Anfangsstellung zu entfernen. Dabei dürfen Steine nur dann entnommen werden, wenn sie nicht durch einen darüber liegenden Stein bedeckt sind und zusätzlich links oder rechts des zu entfernenden Steins kein anderer liegt.
Insgesamt befinden sich 42 verschiedene Steine im Spiel. 34 davon gibt es viermal, die restlichen acht sind in zwei Gruppen von je vier Steinen eingeteilt.

34 Steine je 4 mal:

Zahlzeichen



Punkte

Symbole

Drachen

Windrichtungen

Von diesen Steinen müssen jeweils zwei gleiche zum Entfernen markiert werden.

Zusätzliche Gruppen

Gruppe Blumen

Gruppe Jahreszeiten

Jede Gruppe stellt für das Spiel "praktisch" eine Art Stein dar, d.h., wählt man z.B. zwei Jahreszeiten-Steine, werden diese vom Spielfeld genommen.

Zu Beginn werden die Steine auf dem Spielfeld nach einem Muster angeordnet. Diese Ausgangssituation können Sie in der Liste aus gegenwärtig 50 verschiedenen auswählen. Jeder Eintrag hat einen Namen, der das dargestellte Bild beschreiben soll. Mit etwas Fantasie erkennt man auch den Baum, das Tor oder sogar das Raumschiff Enterprise.

Die erste Ausgangssituation "Fliegender Drache" ist der Klassiker. Mit dieser Verteilung der Steine ist das Spiel auch unter dem Namen "Taipei" bekannt. Ihre Aufgabe besteht nun darin, alle Steine nach der genannten Regel zu entfernen. Dabei wird es aber auch vorkommen, dass keine Paare mehr gefunden werden können. Bei einigen sehr komplizierten Ausgangssituationen, z.B. "Die Große Mauer", wird dies sogar eher die Regel sein. Ist das Weiterspielen nicht mehr möglich, meldet das Programm: *Keine weiteren freien Paare!*

Mitunter sind nur noch wenige Paare zu finden, die man trotz intensiver Suche übersieht. Klicken Sie dann auf *Paare anzeigen.* Beachten Sie aber, dass dies Ihr erreichtes Punktekonto belastet. Eine hohe Punktzahl erreichen Sie, wenn alle Steine entfernt werden und dies in möglichst kurzer Zeit geschieht.
Da auch hier eine Bestenliste geführt wird, sollten Sie vor Spielbeginn Ihren Namen eintragen.

16.26 Sokoban

Sokoban ist ein aus den Anfängen der PC-Spiele bekanntes Spiel.

Ziel ist es, die Kisten mit der Spielfigur auf die Felder zu verschieben, die mit einem Kreuz markiert sind.
Dabei kann eine Kiste nur bewegt werden, wenn das unmittelbar dahinter liegende Feld frei ist. Zwei oder mehr Kisten können nicht gleichzeitig verschoben werden. Die Spielfigur wird mit den Pfeiltasten bewegt.

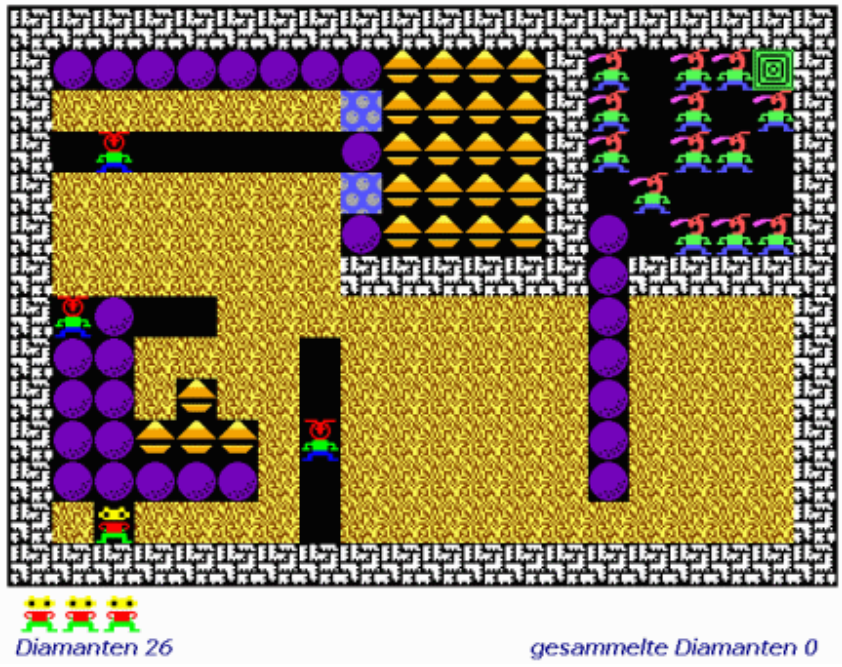
Während die ersten Spielstufen noch sehr einfach zu lösen sind, steigt der Schwierigkeitsgrad von Stufe zu Stufe an. Als kleiner Hinweis sei erwähnt, dass Kisten die in Ecken verschoben werden, nicht mehr bewegt werden können und es teilweise darauf ankommt, die Felder mit den Kreuzen in der richtigen Reihenfolge zu belegen. Ist die jeweilige Aufgabe nicht mehr lösbar, wird durch *Zurücksetzen* die Ausgangssituation wiederhergestellt.

Sind alle Kisten auf dem richtigen Platz, ist das Level gewonnen und das Programm zeigt die nächste Aufgabe an. Möchten Sie eine andere Spielstufe auswählen, so tragen Sie diese ein und quittieren mit *Spielstufe auswählen.* Damit können Sie zu einem späteren Zeitpunkt an der letzten Stelle weiterspielen, ohne wieder vom ersten Level an beginnen zu müssen.

Insgesamt enthält das Programm mehr als 160 Level, von denen einige hohe Anforderungen stellen.
Sollten Sie nach vielen, vielen Versuchen, ein Level zu lösen, glauben, dass es gar nicht lösbar ist, so sei an dieser Stelle versichert, dass jede dieser Aufgabenstellungen gelöst werden kann. Möchten Sie sich die eine oder andere Lösung (es ist nicht immer die optimalste!) anzeigen lassen, so klicken Sie einfach auf den Schalter *Demonstration.*
Ein falscher Zug kann sehr ärgerlich sein, da man evtl. wieder von vorn beginnen muss. Daher können Sie über den Schalter *Zug zurücknehmen* die jeweils 5 letzten Züge rückgängig machen.

Anmerkung: Die Spielstufen sind derart umfangreich, dass Sie die Figur zur vollständigen Lösung der ersten 160 Levels insgesamt über 70000 mal bewegen müssten. Der Computer benötigt zur Demonstration aller Stufen über 1 Stunde!

16.27 Digger



Ein weiterer Spieleklassiker aus den Zeiten der 286er und 386er PCs ist Digger. Bei diesem Spiel werden logisches Denkvermögen, eine zielstrebige Strategie und schnelles Reaktionsvermögen hervorragend miteinander verbunden.
Da das Spiel ursprünglich als SCP/DOS-Programm vertrieben wurde und leider keine moderne Windows-Version existiert, enthält dieses Programm eine Variante von "Digger".

Ziel des Spiels ist, die in 27 Räumen jeweils vorgegebene Anzahl von "blinkenden" Diamanten innerhalb von drei Minuten einzusammeln und den Weg zum Ausgang zu finden. Achten Sie dabei auf herabstürzende Kugeln und Diamanten sowie herumlaufende Geister und Monster! Es gibt drei Arten von Monstern: nur waagerecht bzw. senkrecht laufende und die besonders gefährliche Art der sich in alle Richtungen bewegenden Monster.

Wichtig ist, dass auf diese Monster fallende Kugeln zu einer "Explosion" führen und so mitunter Mauern und andere Hindernisse wegsprengen können.

Gesteuert wird die Spielfigur mit den Pfeiltasten. Für jede Spielstufe stehen Ihnen drei Minuten (plus 5 Sekunden je höherer Spielstufe) zur Verfügung, für eine Spielrunde insgesamt vier "Leben".
Das Programm führt auch hier wieder eine Bestenliste.

Da die Spielstufen sehr schnell recht anspruchsvoll werden, können Sie diese auch durch direkte Eingabe auswählen – allerdings ist dies nicht ganz "sportlich"!

16.28 Logikspiel: Quiz

Im Programm finden Sie auch ein Teilprogramm, in dem Sie Ihr Wissen auf dem Gebiet der Mathematik testen können. Dieses Quiz ist anspruchsvoll, interessant und zugleich auch etwas lehrreich.
Rufen Sie den Punkt *Quiz* auf, startet das Frage-Antwort-Spiel zur Mathematik.

Die Spielregeln:

1. Nach Betätigung des Schalters *Los geht's* stellt Ihnen das Programm mindestens 15 (evtl. mehr) Fragen, teilweise mit Abbildungen, zur Mathematik und den Naturwissenschaften.
2. Für jede Frage werden vier mögliche Antworten gegeben, von denen **genau eine** richtig ist.
3. Für die Beantwortung haben Sie je Frage genau eine Minute Zeit. Überschreiten Sie die Zeit, wird die Antwort als falsch gewertet.
4. Ihre Lösung wählen Sie, indem Sie mit der Maus auf einen der Buchstaben A bis D klicken bzw. die Tasten A bis D betätigen.
5. Ist die Antwort falsch, endet die Spielrunde und das Programm gibt Ihnen neben der korrekten Antwort das von Ihnen erreichte Ergebnis in Form einer Schulnote (von 6 = ungenügend bis 1+ = ausgezeichnet) an.
6. Ist die Antwort richtig, verbessert sich Ihr schon erreichtes Ergebnis um eine Note, z.B. von einer 3+ auf eine 2- usw.
7. Erreichen Sie das ausgezeichnete Ergebnis 1+, endet die aktuelle Runde erfolgreich. Spielen Sie nun weiter, haben Sie einen 50%-Bonus als Vorgabe. Damit ist praktisch jede Punktzahl erreichbar. Es gibt kein Limit.
8. Sind Sie sich bei einer Frage nicht sicher, so können Sie Hilfe erhalten. Klicken Sie auf die 1, wird eine falsche Antwort gelöscht.
9. Klicken Sie auf die 2, löscht das Programm zwei falsche Antworten.
10. Klicken Sie auf das Fragezeichen, dann löscht das Programm zwei falsche Antworten. Der Autor weist ausdrücklich darauf hin, dass die zu löschenden Antworten tatsächlich per Zufallsgenerator ausgewählt werden und keinerlei Manipulation vorgenommen wird! Diese Hilfe "erkaufen" Sie sich jedoch teuer: Für jedes Löschen zweier falscher Antworten verringert sich die von Ihnen erreichte Note um einen Grad!
11. Können Sie mit einer Frage "gar nichts anfangen", so können Sie auch einmal (!) je Spielrunde auf die 3 klicken. Damit wird die Frage ignoriert – allerdings wieder auf Kosten der schon erreichten Note und der Punktzahl.

Insgesamt stehen über 490 verschiedene Fragen der Bereiche zur Verfügung, die zufällig ausgewählt werden. Spielen Sie also mehrmals, so werden sich Fragen auch wiederholen. Haben Sie diese vielleicht beim ersten Mal falsch beantwortet, können Sie damit ein kleines bisschen lernen. Aber Vorsicht: Bei einer bestimmten Frage muss nicht immer der gleiche Buchstabe korrekt sein! Die Antworten "rotieren".

Sollten Sie ein besonders gutes Resultat erzielen, so können Sie sich in die Bestenliste eintragen. Erscheint die Bestenliste und haben Sie Ihren Namen noch nicht eingetragen, dann geben Sie ihn unter *Spielername* ein und quittieren Sie mit *Spielername übernehmen*. Den aktuellen Stand der besten Ergebnisse können Sie über den Schalter abrufen. Möchten Sie die Liste löschen, so können Sie dies während der Anzeige der Bestenliste über den entsprechenden Schalter bewerkstelligen.

Eine Einteilung in "schwere" und "leichte" Fragen erfolgt nicht – wer kann schon einschätzen, was für den einen schwer und für den anderen leicht ist. Allerdings können Sie vor dem Start einer Spielrunde in der rechten oberen aufklappbaren Liste wählen, bis zu welcher Klassenstufe die Fragen gestellt werden sollen. Allerdings können auch dann anspruchsvollere Fragen auftreten. Als Ausgleich haben Sie aber sehr viele Joker zur Verfügung.

Wichtiger Hinweis! Dieses Quiz ist wirklich anspruchsvoll. Fragen der Art
„Was ist rot und hat in der Mitte einen Kirschkern?"
werden Sie hier nicht finden. Wer die Note 1 erreichen will, muss hier viel wissen!

16.29 Kartenspiele

Es ist schon erstaunlich, dass die Mathematik als die Wissenschaft schlechthin auch unmittelbare Verbindung zu (Glücks-)Spielen besitzt: Die Bereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik entstanden aus dem Bedürfnis der Menschen, ihre Chancen beim Würfel- oder Kartenspiel vorherzusagen.

Andererseits fördert insbesondere das Kartenspiel das logische Denken, die Kombinationsgabe und evtl. sogar die Charakterbildung eines Menschen (man muss auch verlieren können!).
In diesem Teilprogramm finden Sie einfache Kartenspiele, die insbesondere die Fähigkeit zum logischen Denken fordern. Es handelt sich um verschiedene Varianten einer Patience. Ziel ist es immer, durch Umlegen von Karten eine Ausgangssituation den Spielfarben nach zu ordnen, meist beim Ass beginnend bis zum König.
Als Spielvarianten finden Sie:

- Solitair, im Allgemeinen als "Klondike" bezeichnet (das Standard-Windows-Spiel)
- Solitair Batsford
- Weitere Varianten: Dead King Golf, Pyramide, Offenes Solitair, Indian

Patience, Spider, Yukon, Easthaven, Große Pyramide, Superpyramide und Säulen
- "Die Königsbergerin", The Giant und Gypsy

Welche Variante Sie spielen wollen, stellen Sie an den Auswahlfeldern ein.
Links oben finden Sie einen Ausgangsstoß von verdeckten Karten, darunter sieben bzw. zehn Reihen aus verdeckten und sichtbaren Karten und rechts oben vier (bzw. acht) vorgesehene Plätze für die Zielstöße. Auf diesen sind in der Reihenfolge Ass, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame und König die vier Kartenfarben Karo, Herz, Pik und Kreuz zu sortieren. Ein neues Spiel starten Sie mit dem entsprechenden Schalter.
Gültige Spielzüge sind:

- Klicken auf die verdeckte Karte des Ausgangsstoßes, wodurch diese sichtbar wird. Sind alle Karten dieses Stoßes sichtbar, bewirkt ein Klick auf auf den freien Stapelplatz ein erneutes Umlegen ein erneutes Umlegen des noch vorhandenen Ausgangsstoßes.
- Klick auf eine vollständig sichtbare Karte einer Reihe und bewegen der Maus zu einer anderen Reihe. Diese Karte kann genau dann angelegt werden, wenn sie einen Wert geringer und eine andere Farbe (Rot oder Schwarz) besitzt. D.h. an eine „Herz-8" kann eine „Pik-7" oder „Kreuz-7" angelegt werden.
- Bei einem Klick auf eine nur teilweise sichtbare Karte und bewegen der Maus werden alle unter der Karte befindlichen weiteren Spielkarten mit verschoben.
- Auf eine leere Reihe darf ein „König" verschoben werden.
- Eine sichtbare Karte des Ausgangsstoßes darf zu einer Reihe verschoben werden.
- Kann eine Karte (Reihe oder Ausgangsstoß) auf einen Zielstoß abgelegt werden, so ist dies entweder durch Klick und Mausbewegung oder durch einen Doppelklick möglich.
- Eine schon auf einen Zielstoß abgelegte Karte kann wieder an eine Reihe angefügt werden. Haben Sie *sofort Umlegen* markiert, so transportiert das Programm automatisch Karten auf die Zielfelder. In diesem Fall kann nicht immer eine Karte wieder zurückgelegt werden.
- Ist die letzte und damit freie Karte einer Reihe noch verdeckt, so darf sie umgedreht werden (Achtung! Im Programm geschieht dies automatisch!)

Für die Varianten "Die Königsbergerin", The Giant und Gypsy ändern sich die Regeln etwas. Bei einem Klick auf den Ausgangsstoß werden stets alle acht Reihen mit einer neuen Karte versehen. Von den Zielstößen können auch keine Karten zurückgelegt werden. Besonders wichtig ist, dass von einer Reihe mehrere Karten nur dann auf einmal umgelegt werden können, wenn sie absteigende Werte und wechselnde Farben aufweisen.

Diese drei Patience-Varianten sind wesentlich schwerer als die anderen im Programm enthaltenen. Sie werden auch feststellen, dass die Auflösung nur in

wenigen Versuchen wirklich gelingt. Um den Schwierigkeitsgrad nicht unnötig zu erhöhen, ist hier auch das automatische Verschieben der Karten (bis auf die Asse) auf die Zielstöße deaktiviert.

Die 17 Spielvarianten unterscheiden sich in Ausgangssituation und Anzahl der Karten. Damit verändert sich auch die Schwierigkeit. "Batsford" dürfte deutlich komplizierter sein als die Klassik-Variante, die in anderen Veröffentlichungen als "Klondike" bezeichnet wird. In der Version "Yukon" gibt es keinen Ausgangsstoß, da alle Karten offen sind. Wie oben schon erwähnt, sind "Die Königsbergerin" und ihre Abarten besonders anspruchsvoll.

16.30 Pyramiden

Unter dem Menüpunkt Pyramiden finden sie zwei einfache Kartenspiele, "Pyramide" und "Drei Pyramiden".

Pyramide

Bei "Pyramide" müssen Karten (im Allgemeinen zwei, mit einer Ausnahme) angeklickt werden, so dass deren Augensumme gleich 13 wird. Dabei gilt (Ass=1, 2..10=2..10, B=11, D=12, K=13). Für den König genügt damit das Anklicken einer Karte.
Die korrekt gewählten Karten werden vom Spielfeld entfernt. Ziel ist es, alle im oberen Teil des Fensters angezeigten Karten zu entfernen.

Auswählen kann man auch die zwei Karten im unteren Fensterbereich. Ist kein Paar mehr verfügbar, wird mit "Ziehen" eine neue Karte unten von links nach rechts gelegt.
Gespielt werden wieder 3 Runden. In jeder Runde kann man die unteren Karten (Stapel) dreimal vollständig durchklicken. In die nächste Runde gelangt man, wenn keine Zugmöglichkeit mehr besteht. Entfernt man alle oberen Karten, werden diese in der gleichen Runde nochmals aufgelegt.

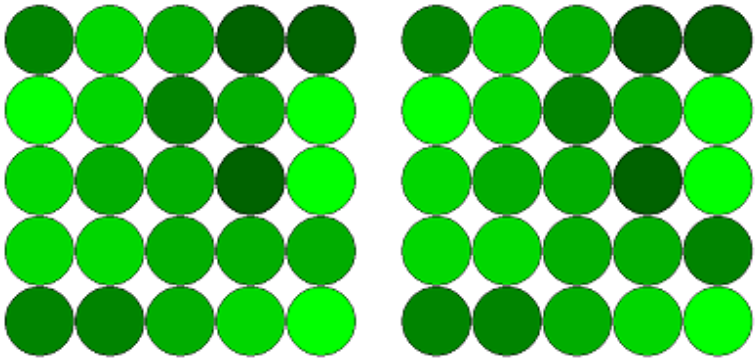
Drei Pyramiden

Ziel ist es, alle im oberen Teil des Fensters angezeigten Karten zu entfernen. Diese müssen auf den Kartenstapel rechts unten gelegt werden.
Das Umlegen erfolgt, in dem eine offene Karte angeklickt wird. Weicht ihr Wert vom Wert auf dem Kartenstapel nur um eins ab, wird die Karte automatisch auf den Stapel gelegt. Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Karten A-2-3-4-5-6-7-8-9-10-B-D-K ist und Ass und König hier auch nur um einen Wert voneinander abweichen. Die Farben der Karten spielen keine Rolle.
Kann keine Karte umgelegt werden, so kann von den links unten verdeckt liegenden Karten eine neue auf den Stapel gelegt werden.
Jedes Spiel besteht aus 3 Runden; anschließend erfolgt die Eintragung in die Bestenliste. Eine neue Runde beginnt, wenn kein Zug mehr möglich ist oder sie alle Karten entfernt haben.

16.31 Farbkreise finden

In diesem Teilprogramm wird ein einfaches Spiel zur Farbwahrnehmung simuliert. Nach dem Start (*Neues Spiel*) werden auf der linken und rechten Seite des Fensters jeweils n² farbige Kreise angezeigt. Die Kreise haben eine Grundfarbe, rot, grün oder blau, unterscheiden sich aber durch die Helligkeit der Farbe. Die Anzahl der Kreise können unter *Größe*, die Anzahl der Farbabstufungen unter *Farben* eingestellt werden.

Die Darstellungen auf der linken und rechten Seite unterscheiden sich nur in einem farbigen Kreis. Dieser ist in der rechten Fensterseite möglichst schnell mit der linken Maustaste anzuklicken.



In der Abbildung wäre der gesuchte Kreis der fünfte von links in der vierten Reihe von oben.

Wird der richtige Kreis gewählt, erscheint sofort eine neue Farbdarstellung. Nach 10 Spielrunden erfolgt eine Auswertung. Dazu wird die benötigte Zeit ermittelt und in Punkte umgerechnet.

Klicken Sie einen fehlerhaften Kreis an, erhalten Sie 15 s „Strafzeit". Lassen Sie sich über *Lösung anzeigen* den korrekten Kreis anzeigen, werden 2 Minuten addiert.
So einfach das Spielprinzip ist, so kompliziert wird die Lösung bei vielen Kreisen und den maximal 6 Farbabstufungen, da dann die Farbunterschiede der Kreise gering sind.

16.32 Band-Solitaire

In diesem einfachen Kartenspiel sind Spielkarten in Form eines Bandes von links oben nach rechts unten ausgelegt.

Die Aufgabe besteht darin, zwei Karten gleicher Farbe oder gleichen Wertes anzuklicken. Liegen die Karten nebeneinander, so wird die linke entfernt.
Haben die Karten einen Abstand 3, so wird die rechte nach links kopiert. In beiden Fällen werden die anderen Karte nach links verschoben. Ziel ist es, die Karten so zu entfernen, dass am Ende nur eine Karte übrig bleibt.
Im Allgemeinen werden Sie es nicht schaffen, alle Karten zu entfernen. Ist kein weiterer Spielzug mehr möglich, stoppt das Spiel automatisch und wertet das Ergebnis aus.
Auch hier wird wieder eine Bestenliste geführt.

16.33 Begriffe raten

In diesem Teilprogramm finden Sie eine Variante des unter dem "extremen" Namen bekannten Spiels "Galgenraten". Das Programm wählt zufällig aus 750 verschiedenen Wörtern einen mathematischen oder naturwissenschaftlichen Begriff aus und stellt Ihnen im oberen Fensterteil für jeden Buchstaben des Ratewortes ein Leerfeld dar.

Nun können Sie durch einen Mausklick auf einen der aufgelisteten 29 Buchstaben (A bis Z und Ä, Ö, Ü) einen dieser Buchstaben auswählen. Ist dieser im Wort enthalten, wird er sofort angezeigt. Ist dies nicht der Fall, verringert sich die Anzahl der möglichen Versuche um 1. Insgesamt können Sie sechsmal einen nicht vorhandenen Buchstaben auswählen.

Im Fernsehen wurde diese Spielidee in Form der Sendung "Glücksrad" bekannt. Im Gegensatz dazu spielen Sie hier aber allein. Dennoch können Sie ähnlich vorgehen. Da die Buchstaben E, A, R, N, S und T die in der deutschen Sprache am häufigsten vorkommenden Vokale und Konsonanten sind, wird es oft günstig sein, zuerst diese Buchstaben zu wählen.

16.34 Zahlensprungspiel

Dieses einfache Logikspiel wird auf einem quadratischen Spielfeld geführt, dessen Zellen mit Zahlen von 1 bis 3 gefüllt sind. Diese Zahlen geben die Länge des "Zahlensprungs" an.

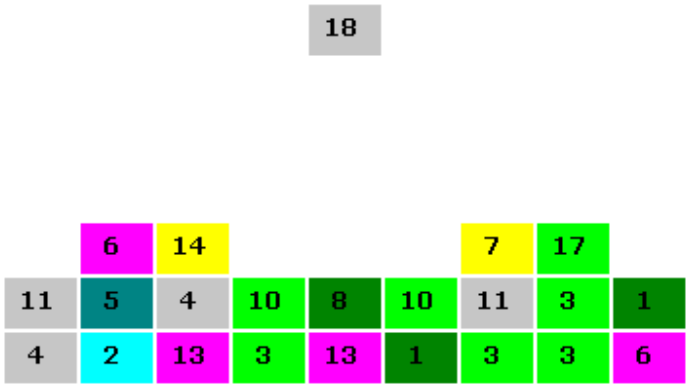
Die Aufgabe ist: Finden Sie einen Pfad, der durch möglichst viele Felder des Diagramms führt.
Starten Sie auf einem beliebigen Feld. Von diesem gehen Sie horizontal oder vertikal weiter auf das nächste Feld, das genau so weit entfernt ist, wie die Zahl in dem Startfeld angibt.
Von dort geht es weiter zum nächsten Feld, usw.

Das Spiel ist beendet, wenn kein Zug mehr möglich ist; entweder, weil sie bereits alle Felder besucht haben, oder, weil sie in einer Sackgasse gelandet sind.
Auch bei diesem Spiel wird eine Bestenliste geführt.

16.35 Zahlentetris

Tetris, eine Erfindung des sowjetischen Mathematikers Alexej Pajitnov, ist wohl von keinem Computersystem wegzudenken, ob Personalcomputer, Spielkonsole, selbst von grafikfähigen Taschenrechnern ... Das Spiel, bei dem Figuren herunterfallen und durch Drehung und Verschiebung vom Spieler zu vollständigen Flächen angeordnet werden müssen, ist der Spieleklassiker schlechthin.

Auch hier wird dieses Spiel angeboten, jedoch in einer stark veränderten Variante, die dem Spieler neben Reaktionsvermögen auch sehr gute "Kopfrechenfähigkeiten" abverlangt.
In diesem Teilprogramm *Zahlentetris* fallen Rechtecke, die alle einen Zahlenwert tragen, von oben nach unten. Über die Pfeiltasten *links* und *rechts* können die Zahlen während ihres "Fluges" nach links oder rechts verschoben werden. Bei Betätigung der Pfeiltaste *nach unten* fallen die Zahlen sofort ganz nach unten.



Bis hierhin unterscheidet sich Zahlentetris nicht vom Original. Ziel des Spiels ist es aber nicht, geschlossene Reihen zu erzielen, sondern drei übereinander liegende Zahlen zu erzeugen, bei denen die oberste die Summe der beiden darunter liegenden Zahlen ergibt. Im Erfolgsfall werden alle drei Zahlen vom Spielfeld entfernt und deren Summe dem Spieler als Punkte gutgeschrieben. Gelingt es Ihnen, sogar vier Zahlen so anzuordnen, dass die oberste Zahl die Summe der drei anderen ergibt, erhalten Sie den doppelten Punktwert.
Die Schwierigkeit des Spiels besteht somit darin, schnell die Summen übereinander liegender Zahlen zu bilden und zu entscheiden, ob sie dem herabfallenden Wert entsprechen. Damit ist in diesem Fall die Fähigkeit gefragt, sehr schnell Zahlen im Kopf addieren zu können.

Im Beispiel könnte die "18" zwei Spalten weiter links auf die "14" und die "4" abgelegt werden. Da 4 + 14 = 18 ist, würden die drei Steine entfernt und 36 Punkte gutgeschrieben.

Das Spiel endet, wenn kein neuer Stein mehr herabfallen kann oder der Spieler durch Betätigung der Taste *ESC* oder des Schalters *Stopp* selbst abbricht.
Die erreichten Punkte werden in eine Bestenliste eingetragen. Sie sollten daher vor dem ersten Spiel Ihren Namen unter *Spielername* eingeben.

Hinweis: Lassen Sie sich nicht davon täuschen, dass scheinbar nur kleine Zahlen erscheinen. Ganz so einfach ist dieses Spiel nicht!

Markieren Sie das Feld *Zahlentetris plus*, so können Sie eine zweite Variante spielen. In diesem Fall bewirkt das Drücken der *Leertaste*, dass der fallende Zahlenwert jeweils um 1 erhöht wird. Testen Sie es! Es wird dadurch nicht leichter!

16.36 Gedächtnistest

„Im Spiel kann man einen Menschen in einer Stunde besser kennenlernen als im

Gespräch in einem Jahr.“ Plato

Dieses Unterprogramm ist als kleine Unterhaltung für den "gestressten Nutzer" gedacht, kann aber auch eine echte Herausforderung werden.
Getestet wird die Wahrnehmung und Wiedergabe von Mustern (Abbildungen), also das Kurzzeitgedächtnis in Zusammenwirkung mit der optischen Wahrnehmungsfähigkeit.

Beim Programmstart finden Sie einen Schalter *Test* und eine Kurzbeschreibung des Wahrnehmungstests vor. Nach Betätigung des Schalters zeigt das Programm Ihnen für einen Bruchteil einer Sekunde (Voreinstellung 0,2 Sekunden) mehrere Muster an.

Danach erscheint auf dem Bildschirm eine Übersicht mit allen 20 verschiedenen Abbildungen. Ihre Aufgabe besteht nun darin, mit der Maus jedes der angezeigten Bilder anzuklicken. Wurden z.B. sieben Muster kurzzeitig eingeblendet, müssen Sie auch sieben Bilder anklicken. Das Programm prüft daraufhin Ihre Antwort und gibt Ihnen die Anzahl der "Richtigen" an. Weitere Spielregeln sind:

1. Beim Start des Teilprogramms ist die Schwierigkeitsstufe 3 voreingestellt.
2. In der Stufe 3 werden vier Abbildungen gezeigt, in der Stufe 4 genau fünf, in der Stufe 5 genau sechs usw.
3. Klicken Sie alle angezeigten Bilder richtig an, gelangen Sie in die nächste Spielstufe.
4. Die höchste Spielstufe ist 7 mit acht Bildern.
5. Können Sie kein einziges Bild korrekt auswählen, so verringert sich die Spielstufe, die niedrigste Stufe ist 1.
6. Können Sie nicht alle Abbildungen finden, so bleiben Sie in Ihrer Stufe. Dabei erhöht sich automatisch die Zeitspanne, in der die Bilder sichtbar bleiben.
7. Gelingt Ihnen nun die Erhöhung der Spielstufe, so wird die Anzeigezeit wieder auf den Grundwert eingestellt.

Ziel sollte es sein, die Spielstufe 7 zu erreichen und dort alle acht Bilder exakt zu erkennen.
Aber: Das ist sehr schwer!
Wahrscheinlich werden Sie dies nur mit Training schaffen. Sollten Sie diese Aufgabe allerdings sehr schnell erfüllen, können Sie zu Recht von sich behaupten, ein visueller Typ zu sein.

Insgesamt wählt das Programm aus 20 verschiedenen Abbildungen.
Da die angezeigten Abbildungen tatsächlich per Zufall ermittelt werden, kann ein Bild unter Umständen auch mehrfach auftreten.

Anmerkung: Dieses Teilprogramm wurde nach einer Idee des computerunterstützten Informationsstandes in den Technischen Sammlungen der Stadt Dresden gestaltet.

Zahlen- und Buchstabengedächtnistest

Dieses Unterprogramm *Gedächtnistest* ist als kleine Unterhaltung für den "gestressten Nutzer" gedacht, kann aber auch eine echte Herausforderung werden.

Getestet wird die Fähigkeit, nur kurze Zeit sichtbare abstrakte Zeichen korrekt aufzunehmen und zu reproduzieren, also das Kurzzeitgedächtnis in Zusammenwirkung mit der optischen Wahrnehmungsfähigkeit. Wählen Sie zuerst, ob Sie nur Zahlen oder Buchstaben bzw. beide im "Mix" ausprobieren möchten.

Nach Betätigung von *Teststart* zeigt Ihnen das Programm zuerst für einen Bruchteil einer Sekunde eine Ziffer (bzw. Buchstaben ...) an. Danach werden Sie aufgefordert, diese Ziffer einzugeben. Quittieren Sie mit dem Schalter *Ergebnis bestätigen* oder mit der *RETURN*-Taste (geht schneller!) und ist die Antwort richtig, zeigt Ihnen das Programm zwei Ziffern. Ist Ihre Eingabe erneut korrekt, drei Ziffern usw. Dabei wird die Zeitspanne, in der die Vorgabe sichtbar ist, schrittweise erhöht. Haben Sie einen Fehler begangen, wird Ihnen das korrekte Ergebnis angezeigt und der Test beginnt von vorn.

Möchten Sie den Test etwas schwieriger gestalten, dann lassen Sie sich statt Zahlen nun Buchstaben anzeigen. Noch anspruchsvoller sind Zahlen und Buchstaben durcheinander angeordnet.

Anmerkung: Bei einem Test mit Schülern der 10. und 12. Klasse eines Gymnasiums mit vertiefter Ausbildung in mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung schaffte es ein Schüler, 13 Buchstaben und Ziffern korrekt einzugeben. Probieren Sie es selbst – zehn korrekte Zeichen der Zahlen-Buchstaben-Kombination sind eine Glanzleistung!

16.37 Arithmomachiaspiel, Streichholzproblem

Dieses Spiel wurde erstmals 1624 von Bachet de Méziriac beschrieben.

Zwei Spieler A und B wählen eine beliebige Zahl von 1 bis 10. Zu deren Summe addieren beide abwechselnd eine weitere, frei wählbare Zahl von 1 bis 10. Gewonnen hat der, der zuerst eine im Voraus festgesetzte Zahl (im Allgemeinen 100) erreicht.
Dieses Spiel existiert in vielen Abwandlungen. Sehr verbreitet ist die umgekehrte Aufgabe:

Von einer vorgegebenen Anzahl Gegenstände nehmen beide Spieler abwechselnd 1, 2 oder 3 weg. Verloren hat derjenige, der den letzten Gegenstand nehmen muss.
In dieser Variante ist das Spiel in diesem Programmteil zu finden. Dabei werden die Zahlen durch Streichhölzer symbolisiert. Ein entferntes Holz wird hier als abgebranntes Streichholz dargestellt.

Sie können einige Einstellungen vornehmen:
Die Auswahl des Feldes *Zufall* bewirkt bei jedem neuen Spiel, dass eine zufällige Startanzahl gewählt wird. Markieren Sie das rechte Feld *Anzahl*, so wird die von Ihnen eingegebene Zahl genutzt.
An den Auswahlfeldern *Letztes Holz* legen Sie fest, ob das letzte Holz gewinnt oder verliert. Wie viele Hölzer Sie entfernen, können Sie an den drei Schaltern nach *Entfernen* eingeben.

In diesem Teilprogramm spielen Sie prinzipiell gegen den Computer. Dabei können Sie bestimmen, ob der Computer anfängt oder nicht. Diese Entscheidung ist sehr wichtig!
Kennen Sie dieses Spiel noch nicht, werden Sie nach einigen Runden vermuten, dass der beginnende Spieler durch kluges Vorgehen stets gewinnt. Dies kann man relativ leicht beweisen.

16.38 Kartenpaare (Memory-Spiel)

Ein Klassiker unter den Logikspielen ist das Kartenpaare-Spiel, auch bekannt als "Memory".
Zu Beginn liegt eine gewisse Anzahl, im Programm genau 40, Karten verdeckt auf der Spielfläche. Die 40 Karten bestehen aus 20 Paaren mit identischen Abbildungen. In diesem Programmteil werden die aus dem Teilprogramm *Gedächtnistest* bekannten 20 verschiedenen Abbildungen verwendet.

Der Spieler klickt nun zwei verdeckte Karten an, die vom Computer umgedreht werden. Sind die Abbildungen gleich, bleiben die Karten offen liegen, andernfalls werden sie nach kurzer Zeit (hier 0,3 Sekunden) wieder verdeckt. Das Ziel ist nun, in möglichst kurzer Zeit alle Paare zu finden. Dazu muss man sich sowohl die

Lage als auch die Abbildungen auf den Karten möglichst schnell einprägen.

Je schneller Sie sind, desto mehr Punkte erzielen Sie. Auch hier wird eine Bestenliste geführt. Tragen Sie daher vor Spielbeginn Ihren Namen unter *Spielername* ein.

Anmerkung: In Deutschland und Österreich hat sich die Firma Ravensburger den Namen "Memory" schützen lassen. Das Spielprinzip ist vernünftiger Weise nicht "schützbar". Daher heißt dieses Spiel hier "Kartenpaare".

16.39 Logiktrainer

Der Logiktrainer ist eine sehr beliebte logische Denkaufgabe, die vor allem durch die sehr empfehlenswerte naturwissenschaftliche Zeitschrift P.M. verbreitet wurde.

Ziel des Rätsels ist es, aus vier Begriffskategorien von je fünf Begriffen diejenigen herauszufinden, die zusammengehören. Dazu werden weitere Aussagen in der Form getroffen, dass bestimmte Zuordnungen möglich bzw. nicht möglich sind. In einem Schema können nun Beziehungen, die mit einem „Ja" zu beantwortet sind, mit einem „+" markiert werden, Beziehungen, die nicht möglich sind, mit einem „-".
Auf diese Weise ergeben sich im Diagramm neue (positive und negative) Informationen, die sich jeweils wiederum mit „+" oder „-" markieren lassen. Schritt für Schritt entsteht so die Lösung, und zwar absolut logisch zwingend. Bei diesen Aufgaben ist Ausprobieren oder Raten niemals notwendig.

Ein Beispiel für einen logischen Schritt aus einem Plus wäre, dass in demselben Kästchenblock (5 x 5-Felder) in der gleichen Zeile und der gleichen Spalte wie das Plus nur Minuszeichen stehen können. Ansonsten hätte ein Begriff zwei eindeutige Zuordnungen aus einer anderen Begriffskategorie (z.B. hätte ein Vorname plötzlich zwei Nachnamen).
Sie können die Zeichen in das Diagramm einsetzen, indem Sie mit einem Maustastenklick an die Stelle im Diagramm zwischen den Zeichen „+" , "-" und Leerzeichen zyklisch umschalten. Wenn Sie ganz neu beginnen möchten, betätigen Sie den Schalter *Alles löschen*.
Am Ende sind unter *Lösung* alle korrekten Antworten einzutragen. Zum Laden eines Rätsels wählen Sie es am Rollbalken aus.

Während Sie ein Rätsel lösen, läuft eine Uhr mit, sodass Sie immer über Ihre persönlichen Zeiten informiert sind. Vorgegeben sind in der Regel 20-30 Minuten pro Aufgabe, man kann aber bereits nach fünf Minuten fertig sein. Wenn Sie länger brauchen, verzweifeln Sie nicht: Auch hier gilt wie überall, Übung macht den Meister.

Sollten Sie gar nicht zurechtkommen, so können Sie zwei Hilfen aktivieren. Nach einem Klick auf *Assistent* trägt das Programm automatisch alle von Ihnen bei dem

jeweiligen Spielstand noch nicht gefundenen logischen „+" und „-" ein. Dies erkaufen Sie sich aber durch eine Strafzeit. Außerdem werden keine neuen Beziehungen aus dem Aufgabentext entnommen.

Markieren Sie das Feld *Lösungskontrolle zuschalten*, dann kontrolliert das Programm die unter *Lösung* eingetragenen Begriffe. Nicht korrekte Einträge werden mit weißer Schrift auf rotem Hintergrund gekennzeichnet. Insbesondere wenn Sie glauben, die Lösung gefunden zu haben, können Sie damit eine Kontrolle durchführen.

Anmerkung: Natürlich kann man die *Lösungskontrolle* zuschalten und nun einfach die möglichen Begriffe unter *Lösung* jeweils probeweise eintragen. So finden Sie wahrscheinlich sehr schnell das richtige Ergebnis. Das wäre allerdings unsportlich und stolz können Sie dann auf eine kurze Lösungszeit auch nicht sein.

16.40 Parkhaus

In diesem Spiel sollen Sie nur das rote Auto zur Ausfahrt transportieren.

Dabei stehen allerdings andere Autos im Weg. Diese können Sie durch linken Mausklick und Verschieben der Maus bewegen, jedoch nur in der von ihnen eingenommenen Richtung, d.h. waagerecht oder senkrecht. Ein Drehen der Autos ist nicht möglich.

Während die ersten Spielstufen noch sehr einfach sind, wird das Problem schnell anspruchsvoll.
Finden Sie keine Lösung, so können Sie sich einen Zug vorschlagen oder sogar die vollständige Lösung vom Computer berechnen lassen. Es wird wieder eine Bestenliste geführt.
Hinweis: Der Programmteil wurde nach der Idee des Spiels „Rush Hour" gestaltet.

16.41 Wythoff-Spiel

Durch den niederländischen Zahlentheoretiker Willem Abraham Wythoff wurde 1907 eine Variante des Nimm-Spiels veröffentlicht, die heute Wythoff-Spiel genannt wird.

In der Wythoff-Variante spielen zwei Personen gegeneinander.
Auf einem Tisch befinden sich zwei Stapel von Münzen, die unterschiedlich hoch sein können. Abwechselnd nehmen die Spieler entweder von einem Stapel eine beliebige Anzahl Münzen oder von beiden Stapeln jeweils die gleiche Anzahl Münzen. Der Spieler, der die letzte Münze vom Tisch nimmt, gewinnt.

Das Wythoff-Spiel kann auch als Spiel auf einem Schachbrett interpretiert werden. Gegeben ist eine Dame, die sich waagerecht nach links, senkrecht nach unten und diagonal nach links unten bewegen kann. Abwechselnd ziehen beide

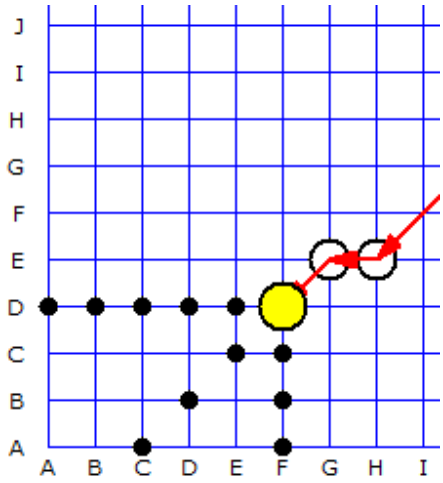
Spieler den Spielstein beliebig weit. Wer das linke untere Feld erreicht, hat gewonnen.

Durch Wythoff wurde eine vollständige Lösung angegeben. Das Spiel ist nicht fair, da der anziehende Spieler bei korrekter Strategie stets gewinnt.
Ist $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ das goldene Verhältnis, so muss ein Spieler versuchen, Felder mit den Koordinaten

$([\phi\, n], [\phi^2\, n])$ oder $([\phi^2\, n], [\phi\, n])$

für n = 0, 1, 2, ... zu erreichen. Dabei wird unter [x] die größte ganze Zahl kleinergleich x verstanden.
Der beginnende Spieler kann bei jeder Ausgangssituation mindestens ein derartiges Feld erreichen und so gewinnen.
Die ersten Siegfelder haben zum Beispiel die Koordinaten

(0 | 0), (1 | 2), (2 | 1), (3 | 5), (4 | 7), (5 | 3), (6 | 10), (7 | 4), (8 | 13), ...



In diesem Teilprogramm können Sie das Wythoff-Spiel in der Variante auf einem Schachbrett testen.
Zu Beginn legen Sie die Größe des *Spielfelds* fest; ebenso, ob der *Computer beginnt* oder nicht.

Abwechselnd ziehen Sie und der Computer den Spielstein beliebig weit waagerecht, senkrecht oder diagonal. Eine Zug führen Sie durch, in dem Sie ein freies Feld anklicken.
Wenn Sie selbst beginnen, können Sie durch ein gute Strategie gewinnen; beginnt der Computer werden Sie wohl verlieren.

Sollten Sie nach einigen verlorenen Spielen den Computer bezwingen wollen, so markieren Sie das Feld *Hilfestellung*. Das Programm zeigt Ihnen dann die Felder an, die Sie für ein gewonnenes Spiel besuchen müssen. Das ist allerdings etwas "unsportlich".

16.42 Puzzle und Bildschiebepuzzle

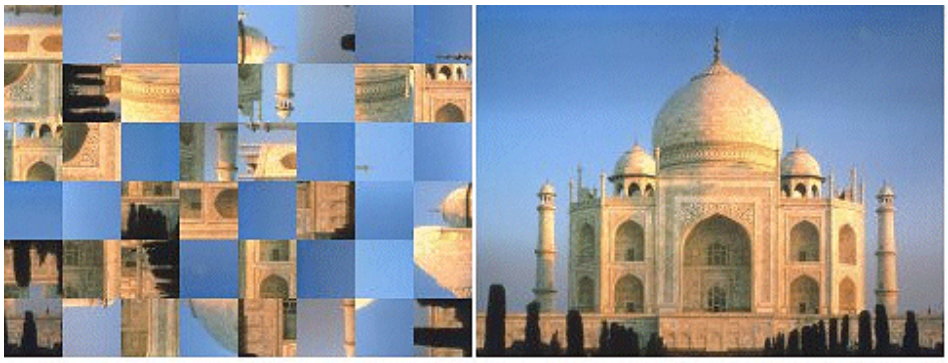
Bildpuzzle

Dieses Teilprogramm ermöglicht es Ihnen, ein klassisches Puzzlespiel durchzuführen.
Ausgangspunkt ist ein Bild, das je nach Einstellung (12, 48 oder 192 Teile) in Einzelbilder zerlegt wird, die dann in einer zufälligen Anordnung angezeigt werden. Ihre Aufgabe besteht nun darin, das Originalbild wieder korrekt zusammenzusetzen.

Um ein Bild zu laden, markieren Sie entweder einen Eintrag der Liste, klicken auf den Schalter *Zufallsbild laden* oder aber Sie wählen über den Schalter *Eigenes Bild laden* ein Foto oder eine Grafik, die sich auf Ihrer Festplatte befindet. Im

letzten Fall beachten Sie bitte, dass die Darstellung auf eine Größe von 640 x 480 Pixel gestreckt oder gestaucht wird, was das Bild stark verfälschen kann.

Nun können die Einzelteile mit der Maus verändert werden. Klicken Sie ein Teil mit der linken Maustaste an, halten die Taste gedrückt und bewegen die Maus, so kann das Teil an eine andere Position verschoben werden. Klicken Sie mit der rechten Maustaste, wird das Einzelteil um 90° gedreht.
Im Beispiel sehen Sie links das zerlegte Bild, rechts das Original. Zum Lieferumfang gehören über 100 verschiedene Darstellungen.



Und hier liegt das Problem: Wählen Sie als Einstellungen *12 Teile – leicht* und als Schwierigkeitsgrad *keine Drehung*, so ist die Aufgabenstellung sehr einfach, da zum einen nur wenige Teile gebildet werden und diese zum anderen nicht (!) gedreht sind.

Wählen Sie als Schwierigkeitsgrad *mit Drehung,* wird das Problem schon deutlich komplizierter. Eine Erhöhung der Anzahl der Teile verschärft dies noch. Die Auswahl *192 Teile mit Drehung* ist extrem anspruchsvoll. Der Programmautor hat hier für das "Zusammensetzen" des Bildes vom Picadilly Circus über 50 Minuten benötigt!

Versuchen Sie, eines der anspruchsvollen Puzzle zu lösen, so kann die verfügbare Zeit eventuell nicht ausreichen. In diesem Fall können Sie über den Schalter den Zwischenstand speichern. Dieser Spielstand kann mithilfe des Schalters zu einem späteren Zeitpunkt wieder geladen werden, sodass Sie das Spiel damit fortsetzen können.

Auch hier wird eine Bestenliste geführt.
Benötigen Sie während des Puzzles eine Darstellung des Originalbildes, dann verwenden Sie den Schalter *Lösung anzeigen*. Das Bild wird nun zwei Sekunden lang korrekt angezeigt – allerdings erhalten Sie dann auch eine "Strafzeit" von 10 Sekunden.

Schiebebildpuzzle

Im zweiten Programm zum Puzzeln eines Bildes wird das Ausgangsbild in

maximal 12 Teile zerlegt.
Hier können die Teile nicht beliebig mit der Maus verschoben werden, sondern müssen durch Anklicken eines der sieben Pfeile bewegt werden. Jeder waagerechte Pfeil verschiebt in der angezeigten Richtung eine ganze Zeile, jeder senkrechte Pfeil eine vollständige Spalte.

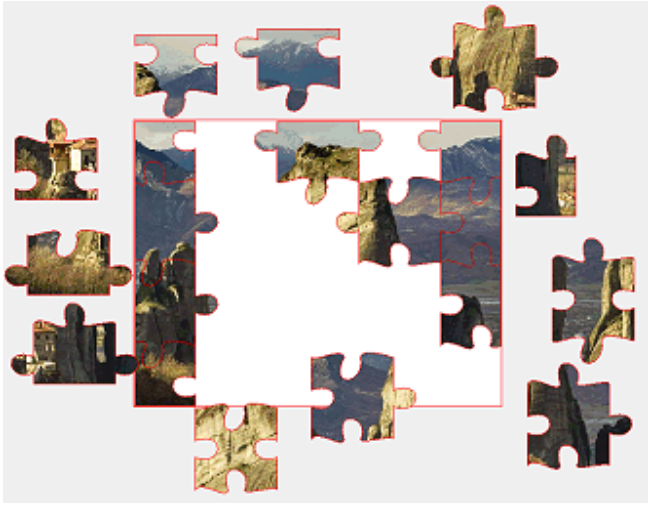
Beachten Sie bitte: Auch wenn dieses Puzzle zuerst sehr einfach erscheint, ist es doch extrem schwierig!

Im Normalfall kann jedes Puzzle mit maximal 25 Zügen gelöst werden. Möchten Sie Unterstützung, dann klicken Sie auf den Schalter *Zugvorschlag*. Das Programm führt dann automatisch den nächsten korrekten Zug auf. Allerdings erhalten Sie in diesem Fall eine "Strafzeit" von 1 Minute.

16.43 Klassisches Puzzle

Dieses Teilprogramm stellt ein Puzzle, im klassischen Sinn dar.

Wählen Sie zuerst aus der rechten aufklappbaren Liste oder durch den Schalter *Neues Bild* eine Darstellung aus, die Sie zusammensetzen wollen.
Natürlich können Sie auch ein beliebiges Bild Ihrer Wahl (jpg-Format) über den linken oberen Schalter von Ihrer Festplatte laden.



Das Programm zerlegt nun das Bild in die Puzzleteile. Die Anzahl der Teile hängt von der Größe und der Form der Bildes, vor allem aber von der gewählten *Spielstufe* ab. Stufe *0 Anfänger* erzeugt nur wenige Teile, die Stufe *4 Sehr schwer* allerdings meist über 150, was das Puzzlen schon anspruchsvoll macht.

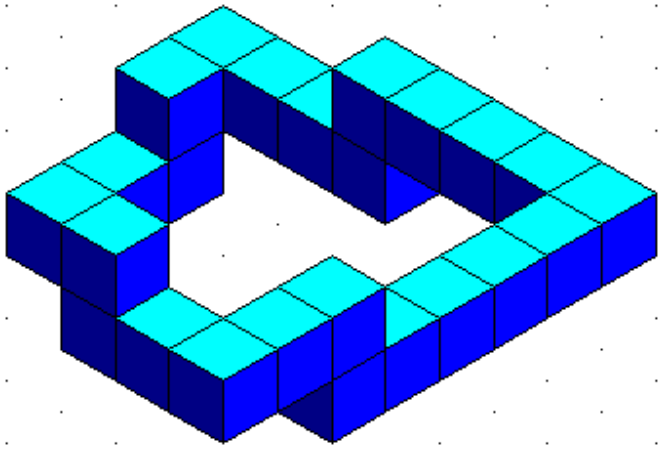
Das Puzzle setzen Sie zusammen, in dem Sie mit einem Mausklick und Mausbewegung das Teil an die richtige Position verschieben. Sie müssen nicht auf den Millimeter genau die Maustaste wieder freigeben. Befindet sich das Teil in unmittelbarer Nähe der korrekten Stelle, so „springt" es bei Loslassen der Maustaste an die richtige Position.

Möchten Sie einen Überblick über das gesamte Bild, so klicken Sie auf *Bild anzeigen*.
Sollten Sie gar nicht zurechtkommen, können Sie über den Menüpunkt *Lösung* auch den Computer das Bild zusammensetzen lassen.
Auch in diesem Teilprogramm werden Bestenlisten geführt, je nach Anzahl der Puzzleteile.

16.44 Figurenpuzzle

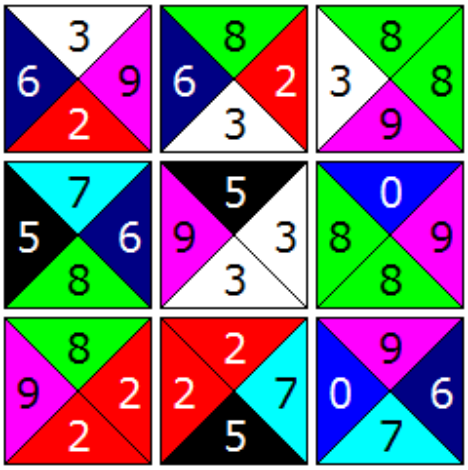
Zu Ehren des bedeutenden niederländischen Künstlers und Grafikers Maurits Cornelis Escher wurde 2002 in Den Haag ein eigenes Escher-Museum eingerichtet.
Es befindet sich im ehemaligen Palais der Königin Emma in der Altstadt von Den Haag. Neben seinem grafischen Werk sind dort auch Privatfotos und Arbeitsskizzen ausgestellt. Letztere vermitteln einen Eindruck davon, wie der Künstler Flächenfüllungen und unmögliche Geometrien entworfen hatte.

Im obersten Stockwerk findet man eine Vielzahl von Aktivitäten, bei denen man selbstständig die Ideenwelt des M.C.Escher entdecken kann, darunter Computermonitore mit einem Programm, bei dem aus einzelnen Teilen vorgegebene Figuren zusammengesetzt werden sollen.
Dieses Programm war Vorlage für den Programmteil *Figurenpuzzle*.



Nach dem Start können Sie in einer Liste vorgegebene Aufgaben auswählen.
Im linken Fensterteil werden nun Bausteine angezeigt, die durch Verschieben mit der Maus zu einer Figur kombiniert werden sollen, die im rechten Fensterteil zu sehen ist. Dabei genügt es oft nicht, einfach die Teile zusammenzuschieben, auch deren Reihenfolge (von hinten nach vorn) ist wichtig. Klicken Sie ein Teil an, so wird dies in den Vordergrund geholt.

Während die ersten Aufgaben noch einfach sind, wird dies, insbesondere bei den "unmöglichen" Figuren im Sinne Eschers, anspruchsvoll. Die Abbildung zeigt zum Beispiel immer aufsteigende Treppen, die der Grafik "Treppauf treppab" nachempfunden wurden.



16.45 Tetravex

Tetravex ist eine Puzzlespiel, bei dem eine Menge von quadratischen Teilen zu einem großen Quadrat anzuordnen sind. Jede der vier Seiten eines Teiles ist mit einer Zahl beschriftet (altgriechisch τετρα = vier, lateinisch vexo = zerrütten). Nebeneinanderliegende Seiten müssen in der Lösungsanordung die gleiche Zahl haben. Da für jedes Spiel neue Teile benötigt werden, ist

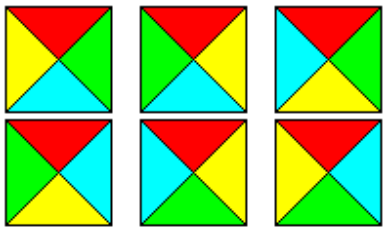
Textravex meist als Computerspiel umgesetzt. Meist werden die Zahlen von 0 bis 9 verwendet, es können aber beliebige Paare verwendet werden, etwa auch Farben, Bilder oder Vokabeln.

Gewöhnlich wird mit 9 Teilen gespielt. Häufig werden auch 4, 16, 25 oder sogar 36 Teile verwendet. An dem Auswahlfeld *Spielfeldgröße* können Sie zwischen 2 x 2 bis 6 x 6 Teilen wählen.

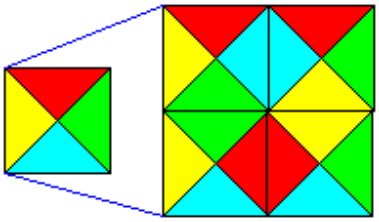
Die kleinen Quadrate sind nun mit der Maus so in das Zielquadrat zu verschieben, dass stets nur gleiche Zahlen aneinander treffen. Klicken Sie dazu mit der linken Maustaste an und verschieben Sie das Quadrat zur gewünschten Position und geben die Maustaste frei.
Über die zwei Schalter in der Titelzeile können Sie eine Spielsituation auf dem Computer speichern und zu einem späteren Zeitpunkt wieder laden. Gerade bei einem 6 x 6-Spielfeld kann das Lösen sehr viel Zeit beanspruchen, die man mitunter nicht hinereinander hat.

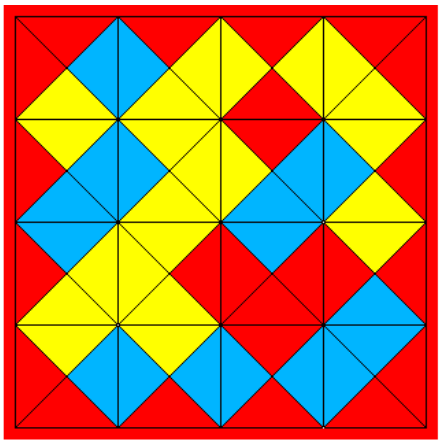
16.46 Mac Mahon Quadrate

Ein interessantes Logikspiel sind die Farbwürfel von Mac Mahon. Das sind die Würfel, die auf den Seitenflächen sechs verschiedene Farben in allen Kombinationen haben.
Geht man vom Würfel auf Quadrate zurück, muss man den Quadratseiten vier Farben geben. Diese Färbung erweitert man auf die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, die den Seiten anliegen.
Damit gibt es sechs verschiedene Farbquadrate mit vier verschiedenen Farben.



Das Würfelproblem von Mac Mahon lautet nun für Quadrate: Man greife ein Quadrat heraus und baue aus vier der fünf übrigen Quadrate ein doppelt so großes Quadrat mit gleichen Farben außen. Innen sollen gleiche Farben aufeinander treffen. Unten ist eine Lösung dargestellt.





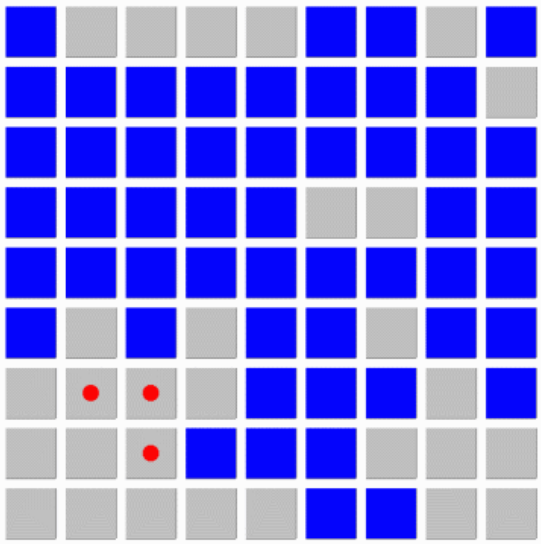
Diese Farbquadrate heißen auch Wang-Täfelchen, denn Hao Wang hat für sie 1961 das Parkettierungsproblem in vielen Variationen erfunden: Man soll die Steine in der Ebene so verlegen, dass immer gleiche Farben aneinander stoßen.

Diese Variante können Sie in diesem Teilprogramm nutzen.
Im linken Fensterteil finden Sie 24 Quadrate, die Sie rechts zusammensetzen

müssen. Die kleinen Quadrate sind mit der Maus so in das Zielquadrat zu verschieben, dass stets nur gleiche Farben aneinander treffen. Die äußeren Felder müssen außerdem die Farbe des Rahmens besitzen. Dafür können Sie 3 Varianten wählen.
Mitunter müssen die kleinen Quadrate rotiert werden: Klicken Sie mit der rechten Maustaste, so dreht sich ein Quadrat um 90°.
Die Aufgabe scheint einfach zu sein und mit etwas Übung ist sie auch schnell zu schaffen.
Haben Sie kein Glück, dann finden Sie hier eine mögliche Lösung:

16.47 Figuren setzen

In diesem Spiel müssen Sie vorgegebene Muster auf einem 9 x 9-Feld deckungsfrei platzieren. Ziel des Spiels ist es, die einzelnen Figuren so auf dem Spielfeld zu platzieren, dass so wenig wie möglich freie graue Flächen übrig bleiben.



Im linken Teil des Fensters wird Ihnen die aktuelle Figur angezeigt. Das gelbe Feld gibt dabei den Klickpunkt mit der Maus an, um die Figur auf dem Spielfeld zu platzieren. Klicken Sie mit der Maus auf ein freies Feld und sind alle von der aktuellen Figur angezeigten Felder entsprechend leer, so liegt ein korrekter Zug vor und das nächste Muster wird angezeigt.
Fällt es Ihnen zu Anfang etwas schwer, zu erkennen, ob die Figur gesetzt werden kann oder nicht, dann markieren Sie *Zugmöglichkeit anzeigen.* In diesem Fall zeigt das Programm die benötigten Felder mit roten Punkten an.

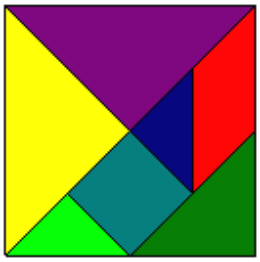
Wichtig ist außerdem, dass das Muster um jeweils 90° gedreht werden kann. Dies geschieht entweder über den Schalter oder schneller durch einen rechten Mausklick auf das Spielfeld. Oft werden Sie erst nach einigem Drehen die optimale Position finden.

Kann die nächste Figur nicht mehr auf dem Spielfeld platziert werden, so kommt man in die nächste Spielstufe. Alle noch leeren grauen Felder werden schwarz eingefärbt, sodass sie nicht mehr zur Verfügung stehen. Das Spiel ist zu Ende, wenn in einer Stufe keine Figur platziert werden kann (alle Felder sind schwarz). Auch für dieses Spiel wird eine Bestenliste geführt.

16.48 Tangram

Tangram ist ein klassisches chinesisches Puzzle, das aus sieben aus einem

Quadrat herausgeschnitten Teilen besteht. Dies sind fünf Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm.



Ziel ist es, eine vorgegebene Figur aus diesen Teilen zusammenzulegen. Dabei dürfen die Teile gedreht und gespiegelt werden.
Historisch ist bei Archimedes das erste Tangram-ähnliche Spiel nachgewiesen. Dabei wurden Figuren aus 14 vorgegeben Teilen zusammengesetzt. Die chinesische Variante wurde in Europa durch Lewis Carolls Werk "Alice im Wunderland" bekannt.

Der US-amerikanische "King of Puzzles" Sam Loyd gab diesem Spiel neue Anstöße, als er 1903 in seinem "Das achte Buch Tan" 600 Lösungen veröffentlichte.
Auf ihn geht auch die chinesische Herkunft mit mystischen Hintergründen zurück, was allerdings nicht wirklich nachzuweisen ist.

In diesem Teilprogramm können Sie über 80 vorgegebene Figuren aus den sieben Teilen zusammensetzen. Wählen Sie zuerst unter *Schwierigkeit* den gewünschten Schwierigkeitsgrad. Das Programm zeigt nun im linken Fensterteil die vorgegebene Figur, rechts davon die sieben Teile.

Die Figur setzen Sie mit der Maus zusammen. Klicken Sie ein Teil mit der linken Maustaste an und verschieben Sie es an die gewünschte Stelle. Mit einem weiteren linken Mausklick geben Sie das Teil wieder frei. Passt es tatsächlich in die Figur, so übernimmt das Programm die gewählte Position. Mitunter müssen Teile gedreht werden. Dies bewirkt ein Klick mit der rechten Maustaste auf das Teil. Es wird jeweils um 45° gedreht, d.h., nach acht rechten Mausklick befindet sich das Teil in seiner ursprünglichen Lage.
Für einige Figuren müssen einzelne Teile gespiegelt (umgedreht) werden. Das erreichen Sie, indem Sie die *Umschalttaste* (Shift) festhalten und mit der rechten Maustaste auf das gewählte Teil klicken.

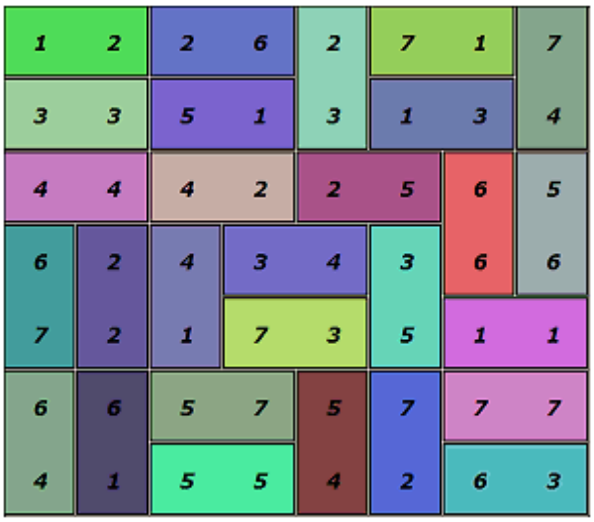
Haben Sie ein Teil falsch angelegt, so können Sie es auch wieder zurücklegen. Klicken Sie es dazu links an, bewegen Sie die Maus in den Programmbereich der noch freien Teile und klicken Sie erneut links.
Über vier Schalter können Sie das Spiel steuern. *Figur weiter* und *Figur zurück* zeigen Ihnen das vorhergehende bzw. nachfolgende Bild. Der Schalter *Figur neu* stellt den Grundzustand der aktuellen Figur ein.

16.49 Domino Puzzle

Domino Puzzle ist ein Legespiel, bei dem Dominosteine entsprechend einem vorgegebenen Muster angeordnet werden müssen.

Zuerst wählen Sie eine Spielfeldgröße von 5 x 4 bis 10 x 9 Feldern.

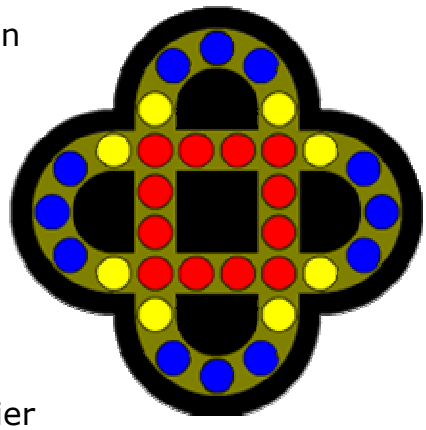
Unter *Verfügbare Domino-Steine* werden daraufhin die Belegungen der nutzbaren Domino-Steine angezeigt. Rechts finden Sie das Spielfeld, auf dem Sie die Steine ablegen müssen.



Um einen Stein abzulegen, klicken Sie mit der Maus auf eine noch nicht belegte Zahl, halten die Taste gedrückt und bewegen die Maus zum zweiten Feld. Sobald Sie die Maustaste wieder freigeben, wird der Stein platziert. Möchten Sie einen gelegten Stein löschen, dann klicken Sie in der Liste *Verwendete Domino-Steine* auf dessen Eintrag.
Mit *Zurücksetzen* wird die Ausgangsposition wiederhergestellt, mit *Neues Puzzle* erhalten Sie eine neue Aufgabenstellung.
Sollten Sie nicht erfolgreich sein, können Sie sich über den Schalter auch eine Lösung anzeigen lassen.

Beachten Sie bitte, dass dieses Spiel durchaus anspruchsvoll ist. Mitunter werden Sie etwas Übung brauchen, um die Lösung zu finden.

16.50 Rally



Rallye (im Original „Rally“) ist ein Puzzle mit 32 farbigen Kugeln, die wie in der Abbildung angeordnet sind.

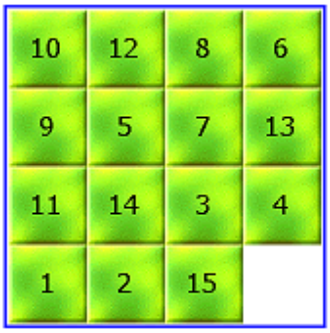
Diese Kugeln sind horizontal oder vertikal zu bewegen. Ziel ist es, die Kugeln durch Drehen so anzuordnen, dass das rote Quadrat durch ein blaues ersetzt wird.
Dieses Puzzle stammt aus dem Spaß Buch "1000 PlayThinks" von Ivan Moscovich.

Bewegt werden die Kugeln durch Anklicken eines der vier Schalter, die jeweils horizontale bzw. vertikale Drehungen in oder gegen die Uhrzeigerrichtung bewirken. Unter *Zuglänge* kann zusätzlich eingestellt werden, um wie viele Positionen jeweils verschoben wird.
Moscovich gab eine Lösung mit 10 Zügen an, die jedoch nicht optimal ist. Mit unterschiedlichen Zuglängen genügen sogar 3 Züge.

16.51 Spiel 15 und Allgemeines Schiebepuzzle

Dieses Puzzle wurde erstmals 1878 von Sam Loyd beschrieben und wird daher auch Loyd's 15 genannt. Es besteht aus 15 Quadraten, welche die Ziffern 1 bis 15

enthalten, die in einem 4 x 4-Quadrat angeordnet sind. Das 16. Feld bleibt frei. Aufgabe ist es, die 15 zunächst unsortierten Quadrate durch Verschieben jeweils eines Quadrats auf die "leere" Position numerisch zeilenweise von links nach rechts zu ordnen. Je nach Ausgangssituation ist dies in endlich vielen Schritten möglich oder prinzipiell unmöglich.



Wird die Summe S der Anzahl von Quadraten i (i = 1, 2, ..., 15) gebildet, die sich auf einer von links oben zeilenweise nach rechts unten gezählten richtigen Position i befinden, mit i < 15, so kann das Puzzle genau dann korrekt geordnet werden, wenn S gerade ist.

Betrachtet man ein entgegengesetzt angeordnetes 3 x 3-Puzzle mit den Zahlen 1 bis 8, so ist von diesem bekannt, dass es auf zehn verschiedene Arten in mindestens 30 Zügen geordnet werden kann. Für 32 Züge gibt es schon 112 Möglichkeiten, für 34 Züge 512.
In diesem Teilprogramm können Sie dieses Puzzle testen. Klicken Sie auf eine Zahl, die an das leere Feld angrenzt, so wird dieses Quadrat verschoben.
Die Größe des Puzzles können Sie von 3 x 3 bis 8 x 8 Felder einstellen.

Beachten Sie aber, dass die Lösung des 8 x 8-Puzzles durchaus mehr als eine Stunde Zeit benötigt.

Bei diesem logischen Spiel werden Bestenlisten geführt. Diese können Sie über den Schalter der Toolbarleiste ansehen bzw. auf Wunsch auch löschen. Achten Sie darauf, dass Sie vor Beginn eines Spiels Ihren Namen unter *Spielername* eintragen.

Allgemeines Schiebepuzzle

Unter diesem Punkt finden Sie eine Erweiterung des *Spiels 15*. In diesem Teilprogramm steht vor allem die Berechnung der Züge zum Lösen eines derartigen Puzzles im Vordergrund.

Zuerst wählen Sie unter *Spielfeldgröße*, wie groß das Spielfeld sein soll, d.h., ob Sie das klassische Spiel oder eine modifizierte Variante testen wollen.
Um die Spielfelder zu mischen, klicken Sie entweder auf den Schalter *Spielfeld mischen* oder markieren das Feld *Klick und Verschieben tauscht Felder*. Im zweiten Fall können Sie ein Spielfeld mit der Maus anklicken und an die von Ihnen gewünschte Position verschieben. Wird nach einer solchen Änderung ein Feld rot markiert, so ist das Puzzle nicht lösbar.
Lassen Sie automatisch mischen, so können Sie die Anzahl der Tauschoperationen unter *Zufallszüge* einstellen.

Ist das Feld *Mausklick bewegt auf freies Feld* markiert, können Sie nun versuchen, das Puzzle selbst zu lösen.

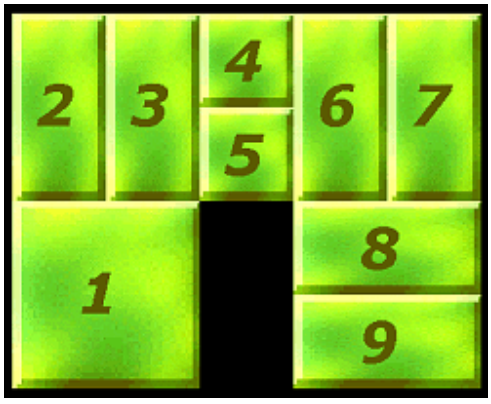
Um das Programm nach einer Lösung suchen zu lassen, klicken Sie auf *Puzzle lösen*.
Durch einen speziellen Algorithmus wird nun nach einer Lösungsstrategie gesucht. Dabei ist zu beachten, dass die Suche bei einer größeren Feldanzahl durchaus auch Minuten oder länger dauern kann. Der Lösungsalgorithmus gehört zu den NP-Problemen, deren Laufzeit mit mehr Ausgangsdaten sehr schnell ansteigt.

Findet das Programm eine Lösung, wird diese dargestellt und die Schrittfolge in einer Liste angezeigt.
Klicken Sie auf *Zug wiederholen*, so wird genau ein Zug der Lösung angezeigt. Mehrfaches Klicken zeigt Ihnen damit die vollständige Lösung.

16.52 Loyds Schiebepuzzle

Eines der berühmtesten Werke über mathematische Spiele, "Cyclopedia of Puzzles" von Sam Loyd, enthält neben dem "Spiel 15" auch eine Vielzahl interessanter Schiebepuzzles. Eines der berühmtesten kann in diesem Teilprogramm getestet werden.
Allerdings wurde das Puzzle schon 1909 von L.W.Hardy beschrieben und patentiert. Dort wird es Dad's Puzzle genannt. Über die Jahre hinweg wurden sehr viele Versionen entwickelt und unter sehr verschiedenen Namen veröffentlicht.

Gegeben ist ein 5 x 4-Spielfeld auf dem sich ein großes Quadrat (1), zwei kleine Quadrate (4) und (5), zwei liegende Rechtecke (8) und (9) sowie vier stehende Rechtecke (2), (3), (6) und (7) befinden. Ziel des Spiels ist es, durch Verschieben der Flächen das Quadrat (1) an die Position der Rechtecke (8) und (9) zu transportieren.



Verschoben wird durch einen linken Mausklick auf eine der Flächen. Beachten Sie dabei, dass mitunter mehrere Möglichkeiten des Verschiebens bestehen. Aus diesem Grund bewirkt ein Mausklick in den linken Bereich des Vierecks eine Bewegung nach links, ein Klick in den oberen Bereich eine Bewegung nach oben usw.

Von Sam Loyd wird dieses Puzzle als lösbar bezeichnet! Nach mehreren Aussagen genügen für eine leicht veränderte Ausgangssituation genau 59 Züge. Nach vielen, vielen Versuchen gelang es dem Programmautor, eine Lösung zu finden. Nachfolgend sind die dafür notwendigen Züge angegeben:

1, 2, 3, 5 zwischen 3 und 4, 1, 9, 8, 6, 7, 4, 5, 1, 9, 8, 6, 7, 4 zwischen 6 und 5, 7, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 8, 9, 5 zwischen 4 und 8, 9, 8, 5, 4, 9, 8, 4 zwischen 5 und 2, 3, 2, 4, 5, 3, 2, 5 zwischen 4 und 1, 2, 3, 9, 8, 1, 5, 4, 2, 3, 9, 8, 1, 5 zwischen 1 und 4, 7, 6, 1

Markieren die das Feld *Loyds Puzzle 2*, so wird das Rechteck (7) durch zwei kleine Quadrate ersetzt. Damit wird die Aufgabe deutlich leichter und Sie werden relativ schnell eine Lösung finden.
Beispiellösung: d5, d5, d4, d4, l6, l10, u10, u8, u9, r5, r5, d4, r4, r1, d2, d2, l3, l6, l10, l7, d10, l7, u8, u9, u5, r4, r1, d6, d6, l10, l9, u10, l9, u5, l5, u4, u4, r1

Eine weitere interessante Variante finden Sie unter *Flemings Puzzle*. In diesem Fall soll das Quadrat (1) von links ganz nach rechts transportiert werden. Dieses Puzzle ist noch anspruchsvoller. Die minimale Zugzahl beträgt 81. Bedeutet d = down (runter), u = up (hoch), l = links und r = rechts, so ist eine mögliche Lösung:

d7, r8, r5, u6, u9, l0, d5, r9, d6, d6, l4, l7, u4, l7, u9, u0, r0, r6, d7, d7, d4, d4, l9, l8, u0, u5, u0, u5, r6, r7, d4, d9, l5, d0, l5, l0, u6, u6, r9, u4, l7, d9, r4, r4, d0, d5, d8, r2, r2, u1, l5, u7, l5, l7, l0, l4, l9, d6, d6, r8, r2, r1, u5, l7, u5, l0, u7, l0, d1, l2, l2, u8, u6, r9, r3, d0, d7, d5, l2, l8, u6, r4, r1, r7, d5, d2, l8, l8, u1, r7, r5, u0, l3, l9, d4, r7, r7, d1, r8, r8, u2, u5, u0, u3, l9, l9, d1, r5, r5, r0, r0, d2, l8, u5, l8, l5, l6, u7, u4, u7, u4, r1, d0, d0, d5, d5, l6, l7, u4, u1

Auf der Internetseite
http://www.cs.brandeis.edu/~storer/JimPuzzles/ZPAGES/zzzRedDonkey.html
wird eine komplizierte Variante von Flemings Puzzle vorgestellt: "Super Century". Diese ergibt sich durch Verschiebung der Ausgangssituation. Das Ziel ist das gleiche wie bei Flemings Puzzle. Die kürzeste Lösung ist

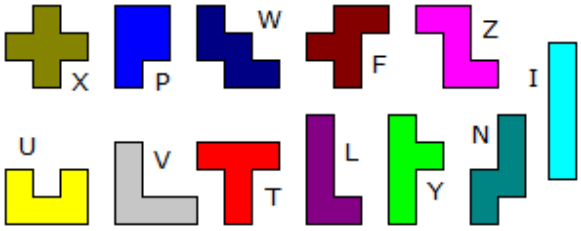
r6, d0, r5, r8, d4, u9, d3, r7, d2, r3, d2, l1, l9, l8, u0, r7, r3, r2, u4, l5, d3, l7, d0, r8, r9, r1, u4, l2, u4, u2, l7, l7, u3, r3, r7, d2, r5, d2, d4, d4, l1, l9, l8, u0, r3, d8, d8, r9, r1, u4, u2, u4, u2, l7, l8, l3, l5, l6, d0, d0, r9, u3, r8, u3, u8, r7, r7, d2, r2, d4, d4, l1, l8, u8, u7, u6, r5, d4, l2, l6, l0, d9, d9, r3, d3, r8, r8, u7, l3, l3, u0, u9, r5, r5, d6, r2, r2, d1, l7, u0, r2, d3, l7, l0, l8, u9, u2, u5, r6, r6, d3, d0, l3, d0, l2, d8, r7, r7, u1, u3, l3, l0, l5, d9, l6, d9, r8, r7, r2, r1, u3, u4, u3, u4, l0, l5, d2, l8, u9, r6, d5, d1, r3, u4, l7, u0, u9, l5, r2, l6, d2, d8, r8, r1, d3, r4, u0, u5, l6, l6, d1, r3, d4, l7, l9, u8, u2, u8, u2, r1, d3, d3, r5, d0, l7, l9, l2, u2, u1

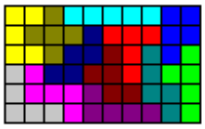
Wählen Sie den Schalter *Lösungen*, wird ein Zusatzfenster gestartet, in dem für Loyds Puzzle und für Flemmings Puzzle die Lösung demonstriert wird.

16.53 Pentomino

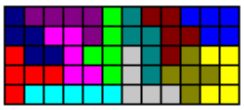
Das heutzutage unter dem Namen "Pentomino" bekannte Spiel wurde 1919 von H. E. Dudney als das Problem des "zerbrochenen Schachbretts" in "The Canterbury Puzzles" eingeführt. Der Begriff Pentomino stammt von Solomon Golomb.

Die Aufgabe besteht darin, aus den abgebildeten zwölf Spielsteinen gewisse vorgegebene Muster zusammenzusetzen.





10x6



12x5

15x4

20x3

Pentominos heißen die 12 Figuren, die man aus fünf Quadraten bilden kann. Die Quadrate muss man so zusammenstellen, dass sie mindestens eine Seite gemeinsam haben. Wegen ihrer mehr oder weniger großen Ähnlichkeit mit großen Buchstaben hat man sie nach ihnen benannt.

Das Grundproblem besteht darin, Rechtecke zu legen. Vier Rechtecke sind möglich (siehe Abbildung).
Es gibt 2339 Lösungen für das Rechteck 6x10, 2 Lösungen für 3x20, 368 Lösungen für 4x15 und 1010 Lösungen für 5x12.

In diesem Programm können Sie 100 vorgegebene Figuren mittels Pentominos zusammensetzen.
Die Figur wählen Sie aus der Liste *Aufgaben* aus.

Links werden die 12 Pentominos dargestellt, die Sie mit der Maus (linke Maustaste) über das Spielfeld verschieben können.
Rechts wird die Zielfigur mit grau gefärbten Zellen angezeigt. Ziehen Sie nun die 12 Teile so auf den grauen Bereich, dass dieser vollständig überdeckt wird.

Mitunter müssen Sie die Teile auch drehen. Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf das Pentomino. Einmaliger Klick dreht um jeweils 90°.

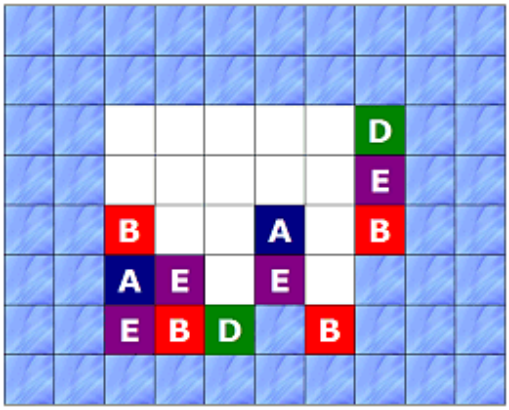
Die Teile P, W, F, Z, L, Y und N sind nicht spiegelsymmetrisch zur Waagerechten bzw. Senkrechten, d.h. wenn man sie spiegelt erhält man eine andere Ausrichtung. Auch dies ist mitunter notwendig. Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf das Teil und halten Sie dabei die Strg-Taste fest.

Beachten Sie bitte. Das Zusammensetzen einer Figur aus den 12 Spielsteinen kann sehr kompliziert sein. Das Pentomino-Spiel verlangt eine gute Vorstellungsgabe und einiges Training.
Sollten Sie keine Lösung finden, so können Sie sich eine Musterlösung über den Schalter anzeigen lassen.

16.54 Vexed-Puzzle

„Aller Anfang ist schwer!
Das mag in einem gewissen Sinne wahr sein;
allgemeiner kann man aber sagen:
Aller Anfang ist leicht,
und die letzten Stufen werden am schwersten und seltensten erstiegen.“
Johann Wolfgang von Goethe

Vexed-Puzzle (engl. be vexed = ärgerlich sein) ist ein Schiebespiel auf einem rechteckigen Spielfeld, hier auf einem 10 x 8 Spielfeld.



Ziel des Spiels ist es, alle farbigen, mit Buchstaben gekennzeichneten Objekte zu eliminieren, in dem man zwei oder mehr Objekte gleicher Farbe zusammenbringt, auf dass sie sich gegenseitig vernichten.

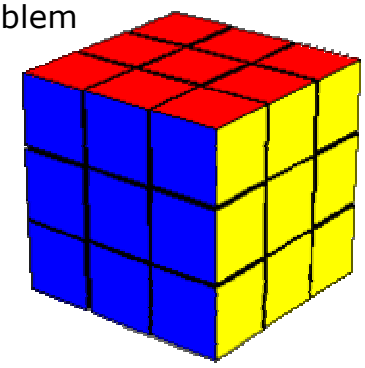
Die farbigen Felder werden durch Mausklick und -bewegung nach links oder rechts verschoben.
Nach unten fallen die Felder auf Grund der „Schwerkraft" selbstständig, wenn sich unter ihnen ein leeres Feld befindet.

Auch in diesem Spiel wird eine Bestenliste geführt. Zu Beginn haben Sie 8 „Leben". Setzen Sie eine Spielstufe zurück oder nutzen die Demonstration wird ein Leben gestrichen. Haben Sie 10 Spielstufen gelöst, erhalten Sie ein weiteres Leben. Sobald Sie das letzte Leben verloren haben oder aber auch das Teilprogramm beenden, werden die erzielten Punkte in die Bestenliste eingetragen.
Die im Programm enthaltenden Aufgaben stammen von James A. McCombe.

16.55 Rubik-Würfel, Master Cube, Pocket Cube und Walzenwürfel

Das wahrscheinlich populärste mathematische Puzzle der Neuzeit ist der "Rubik-Würfel", der von dem ungarischen Mathematiker Ernö Rubik 1974 erfunden wurde.

Der Würfel besteht scheinbar aus 3 x 3 x 3 kleineren Würfeln, die so gefärbt sind, dass die sechs Seiten des Gesamtwürfels sechs verschiedene Farben ausweisen. In Wirklichkeit besteht er aber nur aus 21 Teilen, nämlich aus 1 Achsensystem mit 6 festen Mittelstücken, 8 dreifarbigen Eckstücken und 12 zweifarbigen Kantenstücken.
Die Standardfarben sind weiß/gelb, orange/rot und grün/blau. Schon nach einigen Drehungen von Ebenen ist der Würfel bunt. Das Grundproblem besteht darin, den bunten Würfel so zu ordnen, dass die Seitenflächen zum Schluss wieder einfarbig sind.



Dieser Würfel wird hier simuliert. Über *Würfel verdrehen* verändert das Programm automatisch die Lage der Ebenen und es entsteht ein bunter Würfel.

Mittel 11 Schalter können Sie nun versuchen, die Ausgangssituation wieder herzustellen.
Dabei bewirken *Würfel drehen waagerecht* und *senkrecht*, dass der vollständige

Würfel gedreht wird, so dass Sie auch die verdeckten Seiten sehen können.

Die Ebenen ermöglichen neun Drehungen, drei von vorn nach hinten (Schalter vorn, mitte, hinten), drei von oben nach unten und drei von links nach rechts. Klicken Sie mit der Maus auf einen Schalter führt das Programm die entsprechende Drehung aus.

Beachten Sie bitte: Die Lösung dieses Puzzles ist mit einem realen Rubik-Würfel schon sehr anspruchsvoll. Als Computerprogramm, bei dem Sie immer nur drei Seiten sehen können und das Umdrehen des Würfels nur mittels Tastendruck möglich ist, wird das Problem leider noch schwieriger.

Der *Lösungs*-Schalter dreht den Würfel schrittweise wieder in die Ausgangslage zurück. Beachten Sie bitte, dass der Computer nicht unbedingt die optimale Lösung findet.

Rubik-Würfel 2x2x2, Pocket Cube

Markieren Sie in der oberen Auswahl des Puzzle-Typs den Punkt *Pocket-Cube*, so besteht der Würfel aus je 2 Ebenen, d.h. 8 kleinen Würfeln.
Diese Variante ist die einfachste und sollte zum Trainieren genutzt werden.

Rubik-Würfel 4x4x4, Master Cube

Markieren Sie in der oberen Auswahl des Puzzle-Typs den Punkt *Master-Cube*, so besteht der Würfel aus je 4 Ebenen, d.h. 64 kleinen Würfeln.
Einen derartigen magischen Würfel wieder in die Ausgangsstellung zurückzudrehen, erfordert schon sehr gute räumliche Vorstellungskraft und Übung.

Walzenwürfel

Eine Variante des Rubik-Würfels ist der Walzenwürfel. Er heißt auch Oktogon oder Teufelstonne.
Er entsteht aus einem Würfel, wenn man die vier vertikalen Kanten abschneidet. Auf diese Weise entstehen zehn Flächen, die unterschiedlich gefärbt sind. Er hat die Mechanik des Zauberwürfels und wird nach den gleichen Regeln gelöst. Wer den Würfel beherrscht, wird beim Ordnen keine Schwierigkeiten haben. Man muss allerdings schon bei der ersten Ebene eine bestimmte Farbverteilung einstellen. Ob sie richtig ist, merkt man erst bei der letzten Ebene.

17. Grafische Darstellung

"Mathematics is one of the essential emanations of the human spirit; a thing to be valued in and for itself, like art or poetry."
Oswald Veblen

In einer Vielzahl von Teilprogrammen haben Sie die Möglichkeit, die berechneten oder eingegebenen Werte grafisch veranschaulichen zu lassen. Diese grafischen Darstellungen stellen einen der wichtigsten Aspekte dieses Programms dar. Dabei erhalten Sie zum Beispiel das Bild einer Funktion oder einer mathematischen Kurve oder auch eines Körpers. Rotationskörper, Polyeder, ebene Flächen, Fraktale sowie Geraden und Ebenen usw. werden in weiteren Grafikfenstern gezeichnet.

In der Praxis werden Sie die grafische Darstellung jeweils aus dem Unterprogramm aufrufen. Im Folgenden finden Sie eine Zusammenstellung der Möglichkeiten der grafischen Darstellung von Funktionen, Kurven etc.

17.1 Speichern einer Darstellung

Über den Schalter *Abbildung speichern* können Sie die grafische Darstellung in verschiedenen Dateiformaten dauerhaft auf Ihrer Festplatte speichern. Bei Auswahl dieses Schalters werden Sie aufgefordert, eine Dateibezeichnung einzugeben. Auf Wunsch können Sie dieses Bild zu einem späteren Zeitpunkt z.B. in einem Grafikprogramm weiterverarbeiten. Alternativ zum Windows-Bitmap-Format können Sie hier auch das JPEG-Format nutzen. Der Vorteil des JPEG-Bildformats, nämlich das Erzeugen sehr kleiner Dateien, wird durch eine leicht verminderte Bildqualität erkauft. Als drittes Bildformat steht Ihnen auch das GIF89-Format zur Verfügung. Dieses birgt vor allem bei Zeichnungen den Vorteil, dass es besonders kleine Dateien ohne (!) Bildinformationsverlust erzeugt und ist deshalb für die grafische Darstellung zu empfehlen. Zu beachten ist hierbei aber, dass nicht alle Bildverarbeitungsprogramme das GIF-Format unterstützen.

Die Größe einer Bitmap-Datei hängt sehr stark von der eingestellten Farbtiefe ab. Normalerweise sind moderne Rechner auf die hohe 24-Bit-Farbtiefe oder mehr eingestellt. Damit wird das gespeicherte Bild bei 1024 x 768 Bildpunkten gut 2 MByte groß. Wählen Sie lediglich 16-Farben-Bitmaps aus, sind es nur noch knapp 400 KByte. Dieses Format ist voreingestellt. Da das Programm bei grafischen Darstellungen nur relativ wenig verschiedene Farben nutzt, verlieren Sie auch keine Informationen. Wie oben erwähnt, ist das GIF-Format jedoch noch effizienter.
Nutzen Sie eine hochauflösende Grafik von 1024 x 768 Bildpunkten oder mehr und vergrößern Sie das Grafikfenster auf die volle Bildschirmgröße, werden in Abszissenrichtung tatsächlich 1024 Funktionswerte berechnet und gezeichnet. Die Qualität der Darstellungen wird damit von Ihrer Windows-Installation bestimmt.

WMF-Format

Das Ablegen grafischer Darstellungen als Bitmap ist leider sehr speicherintensiv. Möchten Sie Ihre Festplatte nicht zu stark belasten, können Sie die Darstellung über den gleichen Schalter als Windows-Metafile (WMF-Format) speichern. In diesem Fall werden Zeichenbefehle in die Datei aufgenommen, d.h., WMF bildet ein Vektorgrafikformat.

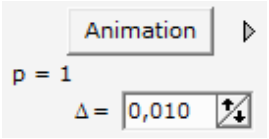
Beachten Sie bitte: Das Abspeichern einer Metadatei benötigt etwa die gleiche Zeit wie das Erstellen der Darstellung selbst. Der Vorteil der geringeren Speicherplatzbelastung wird nur bei Grafiken wirksam, die aus relativ wenig Zeichenbefehlen erstellt wurden. Zum Beispiel können Sie Funktions- und Kurvendarstellungen auf diese Weise optimaler speichern.

17.2 Animation parameterhaltiger Funktionen und Kurven

Zum besseren Verständnis von Funktions- und Kurvenscharen ist eine kontinuierliche Darstellung eines veränderlichen Funktions- oder Kurvenverlaufs möglich. Diese Animation können Sie für jede Hauptfunktion oder Kurve (Parameterdarstellung, Polarkoordinatendarstellung bzw. räumliche Kurve) nutzen, wenn in deren Gleichung(en) ein Parameter P enthalten ist.

Nach der normalen Darstellung des Graphen wählen Sie in der rechten Auswahlliste das Feld *Animationssteuerung*. Daraufhin stellt das Programm das Steuerelement

dar. Klicken Sie nun auf die Schalter, zeichnet das Programm für unterschiedliche Werte des Parameters P die Funktions- und Kurvenverläufe.



Dazu wird P um eine eingestellte Schrittweite erhöht bzw. verringert. Diesen Wert können Sie an den Pfeilschaltern Δx unterhalb des Schalters einstellen.

Mit einem linken Mausklick auf den Schalter nach links bzw. nach rechts schalten Sie von der Erhöhung von P auf eine Reduzierung bzw. umgekehrt. Ein Mausklick auf den Schalter *Stopp* unterbricht die Animation. Während der Darstellung können Sie über die genannten Schaltelemente die Geschwindigkeit und Richtung steuern.
Zum schnellen Aufruf der Simulation können Sie auch einige Schalter der Aktionsschalterleiste benutzen. Ein Klick auf startet bzw. stoppt die Animation. Über den Schalter stellen Sie die kontinuierliche Erhöhung des Parameters p ein; über seine Reduzierung. Zusätzlich können Sie über die Schalter und den Parameter p um jeweils 0,1 erhöhen bzw. senken.

Die Geschwindigkeit der Darstellungsfolge hängt im entscheidenden Maße von

- der eingestellten Schrittweite für P
- der eingestellten Grafikauflösung für die Animation und
- der Prozessor- und Grafikkartengeschwindigkeit

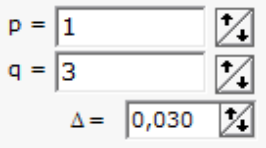
ab. Für eine "fließende" Animation ist eine Pentium-CPU mit einer Taktfrequenz von mindestens 500 MHz notwendig, da die Darstellung in Echtzeit erfolgt.

Beachten sollten Sie auch, dass andere, im Hintergrund ablaufende Programme die Darstellungsgeschwindigkeit extrem beeinflussen können.
Zur Erhöhung der Geschwindigkeit werden Polstellen und andere Unstetigkeitsstellen nicht gesondert behandelt, sodass mitunter nicht zur Kurve gehörende Linien entstehen.

17.3 Veränderung der Parameter P und Q

Zur Demonstration der Abhängigkeit des Funktions- und Kurvenverlaufs von einem Parameter P oder Q können Sie Kurvenscharen zeichnen bzw. eine Animation nutzen. Zusätzlich bietet das Programm die Möglichkeit, die Größen von p und q schrittweise zu ändern und den veränderten Graphen sofort darzustellen.

Klicken Sie dazu auf den Punkt *Parametersteuerung*. Auf der rechten Seite erscheint ein Eingabefeld, in dem Sie die Parameter verändern können.



Über die Schalter verändern Sie die Größe der Parameter. Um welchen Betrag ein Schalterklick P oder Q verändert, stellen Sie an den Pfeilschaltern Δ ein. Alternativ können Sie die Werte auch direkt in die beiden Eingabezeilen eingeben.
Wichtig ist, dass jede Änderung sofort registriert und die Darstellung neu gezeichnet wird.

Freie Veränderung der Parameter P und Q

Klicken Sie oberhalb der grafischen Darstellung auf den Schalter , haben Sie die Möglichkeit, durch freie Bewegung der Maus von links nach rechts bzw. von oben nach unten und umgekehrt die Wirkung der Parameteränderung von P und Q sofort nachzuvollziehen. Dabei bewirkt die horizontale Bewegung die Veränderung von P, die vertikale Bewegung eine Änderung des Parameters Q.

Klicken Sie zuerst links auf die Zeichnung und halten Sie die Maustaste fest. Bewegen Sie nun die Maus nach links, wird P verringert, bei einer Mausbewegung nach rechts wird p erhöht. Analog wird beim Bewegen der Maus nach unten der Parameter q erhöht, bei einer Mausbewegung nach oben hingegen entsprechend verringert. Insbesondere bei der Darstellung von parameterhaltigen Funktionen und Kurven bietet das Programm damit eine sehr einfache Möglichkeit, den Einfluss der Parameter zu untersuchen.

Nach dem Aufruf dieses Menüpunkts schaltet das Programm vollständig zur Verarbeitung der Mausbewegung. Rechts oberhalb der Darstellung wird der Modus

Freie Parameteränderung

angezeigt.
Beachten Sie bitte, dass in diesem Modus keine anderen Mausaktionen (z.B. Vergrößerung durch Aufziehen eines Rahmens) verfügbar sind.
Zum Ausschalten der freien Parameteränderung klicken Sie erneut auf .

Beachten Sie bitte, dass diese Darstellungsmöglichkeit höchste Anforderungen an Ihren Computer stellt. Auch auf schnellen Pentium-Rechnern ist ein leichtes "Flackern" der Darstellung normal, da jede kleinste Mausbewegung ein vollständiges Neuzeichnen des Fensters veranlasst.

17.4 Verlauf einer Funktion, Punkte auf einer Funktion

Zur Demonstration des Verlaufs einer Funktion können Sie das Schaltfeld *Verlauf einer Funktion* aktivieren. Nach Aufruf wird für X=0 der Punkt des Graphen des Funktion 1 ermittelt und mit einem farbigen Punkt markiert. In dem Steuerungsfeld werden die aktuellen Werte von Argument und Funktionswert angezeigt.
Durch Betätigen der kleinen Pfeilschalter nach oben und nach unten können Sie nun die Koordinaten schrittweise ändern und dabei den Verlauf Ihrer Funktion verfolgen.

Die Erhöhung bzw. Verminderung der Abszisse erfolgt je Schritt um den an dem Rollbalken eingestellten Wert. Voreingestellt ist 0,1.
Durch Entfernen der Markierung bei *Verlauf einer Funktion* beenden Sie diese Darstellungsmöglichkeit.

Eine weitere Möglichkeit, den Verlauf der Funktion durch Bewegen eines Funktionspunktes zu untersuchen, finden Sie im Teilprogramm *Verlauf einer Funktion*.

17.5 Einstellen der Koordinatensystemgröße

Nach dem Erststart ist das Koordinatensystem der grafischen Darstellung der Funktionen und Kurven auf ein Abszissenintervall von $-5 \leq x \leq 5$, das y-Intervall optional im gleichen Maßstab eingestellt. Diese Intervalle können Sie im Fenster der grafischen Darstellung verändern.

Klicken Sie auf die Schalter und , so wird das Darstellungsintervall verkleinert oder vergrößert. Die Lage des Koordinatenursprungs können Sie mit den vier Pfeilschaltern verschieben. Alternativ ist dies ebenso durch einen Doppelklick in das Fenster möglich. Möchten Sie den Koordinatenursprung

außerhalb des Fensters legen, so können Sie dies über die genannten Schalter erreichen.
Die Festlegung des Darstellungsintervalls für die Abszisse bzw. Ordinate erfolgt auch sehr schnell mittels Maus.

Klicken Sie mit der linken Mausklick in das Fenster und bewegen Sie die Maus (Maustaste festhalten), so verschieben Sie das Darstellungsintervall.
Ein neues Darstellungsintervall erreichen Sie auch durch Ziehen eines Rahmens innerhalb des Grafikfensters. Halten Sie die Taste STRG fest, betätigen Sie die linke Maustaste und bewegen Sie die Maus (Maustaste weiterhin festhalten !), so erscheint ein Rahmen, der das neue Intervall kennzeichnet.
Nach dem Loslassen der Maustaste wird der im Rahmen sichtbare Bereich auf Fenstergröße gezoomt.

Klicken Sie mit der linken Maustaste auf das Ende des Pfeils bei x, wird das x-Intervall auf 150 Prozent erweitert. Erneutes Betätigen der Maustaste erweitert den aktuellen Wert wieder um 50 Prozent usw. Benutzen Sie dagegen die rechte Maustaste, wird das Intervall jeweils um die Hälfte verringert, wobei der Koordinatenursprung nicht verschoben wird. Bereits gezeichnete Funktionen werden neu dargestellt und dabei gestreckt bzw. gestaucht. Befindet sich die Maus auf den Pfeilenden, verwandelt sich die Mausdarstellung in eine Hand, was das Auffinden der richtigen Stelle erleichtert.

Der maximal darstellbare Bereich beträgt sowohl für die Abszissen- als auch für die Ordinatenachse 100000 Einheiten. Befindet sich der Ursprung in der Bildmitte, werden folglich die Bereiche $-50000 < x < 50000$ und $-50000 < y < 50000$ gezeichnet. Das Zoomen zum Koordinatenursprung ist auf das kleinste Darstellungsintervall von $-0{,}015 < x < 0{,}015$ beschränkt. Versuchen Sie eine weitere Vergrößerung, erhalten Sie die Fehlermeldung

Höchste Vergrößerung erreicht !

Zur Veränderung des Abbildungsmaßstabe der Ordinaten ist analog das Ende des Pfeils bei y mit der Maus anzuklicken.

Direkte Eingabe der Intervalle für die x- und y-Achse

Die Größe und Lage der Darstellungsintervalle für die x- und y-Koordinaten können Sie über die Schalter im rechten oberen Fensterteil einstellen. Möchten Sie die Werte direkt eingeben, so markieren Sie das Feld *Darstellungsbereich*.
In die nun sichtbaren Eingabefelder können Sie die Größe der Intervalle für die Abszisse und die Ordinate eintragen. Quittieren Sie mit dem Schalter *Zeichnen*, wir die grafische Darstellung neu erstellt.

Normalerweise werden die Koordinatenachsen automatisch eingeteilt. Möchten Sie diese Einteilung selbst vornehmen, dann entfernen Sie die Markierung bei *automat.Einheiten*. Das Programm nutzt daraufhin die von Ihnen hinter *xE* und *yE*

eingegebenen Werte für die Einteilung der Achsen.

Beachten Sie bitte, dass für die x- und y-Einteilung als kleinstmöglicher Wert 0,1 vorgesehen ist. Außerdem prüft das Programm nicht, ob durch Ihre Eingabe eventuell eine extrem dichte und unübersichtliche Einteilung vorgenommen wird.

Beispiel: Mitunter haben Funktionen eine weit außerhalb des Intervalls [-5 ; 5] liegende lokale Extremstelle, die eventuell zusätzlich einen kleinen Funktionswert besitzt. Diese wäre zum Beispiel bei einer Gaußschen Normalverteilung mit einem Erwartungswert von 64 und einer Streuung von 20 der Fall. Der zugehörige Funktionsgraph verläuft in lediglich geringem Abstand zur x-Achse - globaler Funktionswert 0,199471 an der Stelle 64. Beabsichtigen Sie, diese Funktion als „Glockenkurve" darzustellen, ist dies unter Zuhilfenahme der oben beschriebenen Schalter und durch Aufziehen eines Intervalls extrem schwierig.

Leicht möglich ist es jedoch durch die direkte Eingabe der Intervalle für die x- und y-Achse. Tragen Sie dazu 0 < x < 120 und -0,01 < y < 0,025 ein und quittieren Sie mit dem Schalter *Zeichnen*, dann erhalten Sie die gewünschte Darstellung. Über den Markierungspunkt *Koordinatenrahmen* können Sie auf Wunsch zusätzlich die Anzeige der y-Werte ein- und ausschalten.

Gleicher Maßstab für x- und y-Achse

Insbesondere für die Darstellung von Kreisen, Rechtecken usw. ist es notwendig, dass sowohl in Abszissen- als auch in Ordinatenrichtung ein identischer Darstellungsmaßstab genutzt wird. Andernfalls erscheinen Kreise als Ellipsen, Quadrate als Rechtecke, Tangenten und Normalen erscheinen nicht senkrecht zueinander usw. Dieser identische Maßstab ist voreingestellt und kann durch ein einfaches Drücken der *Leertaste* zurückgesetzt werden.

Dabei stellt das Programm wieder die Standardwerte ein:

- Koordinatenursprung im Fensterzentrum
- Darstellungsintervall von -5 <= x <= 5

Die letzte Einstellung der Koordinatensystemgröße wird bei Programmende gespeichert.
Möchten Sie nur das y-Intervall an das x-Intervall anpassen, ohne die Grundeinstellungen wiederherzustellen, so klicken Sie einfach auf den Schalter .

17.6 Allgemeine Bemerkungen

Koordinatenbestimmung

Möchten Sie Koordinaten einzelner Punkte bestimmen, können Sie folgende

Möglichkeiten nutzen: Ein rechter Mausklick auf einen beliebigen Punkt des Darstellungsfensters zeigt dessen Koordinaten an.
Eine dauerhafte Anzeige der aktuellen Koordinaten von Bildpunkten während der Bewegung der Maus durch das Grafikfenster ist voreingestellt. Oberhalb der grafischen Darstellung erscheint die Abszisse und Ordinate des Punktes, auf welchen gerade der Mauspfeil verweist.

Farbige Funktionen

Zur besseren Unterscheidung mehrerer gleichzeitig gezeichneter Funktionen oder Kurven werden diese mit unterschiedlichen Farben dargestellt. Möchten Sie dies nicht, so entfernen Sie die Markierung bei *farbige Funktionen.*
Die Farben der ersten 5 dargestellten Funktionen können Sie an den Schaltern mit den Farbrechtecken und den Zahlen 1 bis 5 ändern.
Beachten Sie bitte, dass die eingestellten Farben bei Programmende gespeichert werden und bei einem neuen Start des Programms wieder geladen werden.

Funktionsbeschriftung

Zeichnet das Programm Funktionen bzw. Kurven und ist das Feld *Terme* aktiviert, so werden links oben in der grafischen Darstellung die Funktionsgleichungen in der gleichen Farbe angegeben. Möchten Sie diese aber direkt den Funktionsgraphen zuordnen, so können Sie diese Beschriftung verschieben. Klicken Sie dazu mit der linken Maustaste auf den ersten Buchstaben (bei Funktionen also auf das "Y") und bewegen Sie bei festgehaltener Maustaste die Beschriftung an die von Ihnen gewünschte Stelle. Insbesondere ist dies vor einem Ausdruck oder dem Speichern der grafischen Darstellung von Interesse. Außer den Funktionsgleichungen können auch die Funktionen durchnummeriert werden. Markieren Sie dazu das Schaltfeld *Nummern*.

Beenden Sie die grafische Darstellung und rufen Sie diese erneut auf, geht das Programm davon aus, dass Sie andere Funktionen zeichnen. Deshalb finden Sie nun die Gleichungen wieder im linken oberen Teil des Fensters.

Raster

Markieren Sie das Feld *mm*, so wird ein noch feineres Raster gezogen. Jeder Rasterbereich wird in x- und y-Richtung nochmals in 5 Teile zerlegt.
Als weitere Hilfe und Gestaltungsmöglichkeit der Graphen kann am Schaltfeld *Raster* die Anzeige eines Koordinatenrasters eingestellt werden. Hier haben Sie die Wahl zwischen:

- kein Raster – es werden nur die Koordinatenachsen mit Einheiten gezeichnet
- Punktraster – in allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten wird ein Punkt dargestellt

Markieren Sie das Feld *mm*, so wird ein noch feineres Raster gezogen. Jeder Rasterbereich wird in x- und y-Richtung nochmals in fünf Teile zerlegt.

Über den Menüpunkt *Einstellungen* | *Raster schwarz* können Sie dieses deutlicher sichtbar machen.

Flächen unter Funktion markieren

Eine Fläche zwischen der Funktion und den Koordinatenachsen können Sie einfärben, in dem Sie die Umsch-Taste festhalten und mit der rechten Maustaste in die gewünschte Fläche klicken.

Achseneinteilung

Für die Darstellung, z.B. trigonometrischer Funktionen ist es mitunter günstig, anstelle einer linearen Einteilung auf der x-Achse eine Teilung in Gradmaß zu erhalten. Dies kann unter *Winkel*einteilung eingestellt werden.
Wünschen Sie kein Grad-, sondern ein Bogenmaß, schalten Sie zusätzlich zur *Winkel*einteilung das Markierungsfeld *Bogenmaß* ein.
Wünschen Sie keine Koordinatenachsen und -beschriftung, dann deaktivieren Sie den Punkt *Koordinatenachsen*. Damit ist die Größe des Darstellungsintervalls nicht mehr sofort sichtbar. Schalten Sie dazu den *Koordinatenrahmen* ein. Am linken und oberen Rand des Fensters werden nun die aktuellen Abszissen- und Ordinatenwerte unabhängig von der Lage der Achsen angezeigt.
Möchten Sie, dass die Koordinatenachsen deutlicher hervorgehoben werden, so wählen Sie das Feld *Achsen hervorheben*.
Einige Nutzer möchten grafische Darstellungen von Funktionen oder Kurven z.B. auf Projektionsfolien oder Ähnliches drucken. Dabei erweist sich eine Linienstärke von 1 Pixel für die Koordinatenachsen oft als zu dünn. Zur Änderung der Darstellungsstärke stellen Sie die *Breite* von voreingestellt 1 Pixel auf maximal 5 Pixel. Zu beachten ist hierbei allerdings, dass die Darstellung mit steigender Breite wesentlich mehr Zeit benötigt.
Bei der Darstellung von Funktionsverläufen mit steilen Anstiegen (z.B. an Polstellen) können nicht zum Graphen gehörende senkrechte Linien auftreten. Möchten Sie dies unter allen Umständen verhindern, schalten Sie den *Punktmodus* ein. Die für das Zeichnen der Funktion (auch Ableitung und Stammfunktion) berechneten Punkte werden dann nicht mehr untereinander verbunden.

Logarithmisch geteilte Achsen

Unter dem Punkte *weitere Optionen* finden Sie die Schaltfelder *logarithm. x-Achse* und *logarithm. y-Achse*. Wählen Sie diese aus, so werden die x-Achse bzw. die y-Achse logarithmisch geteilt und die Graphen der Funktionen entsprechend gezeichnet.

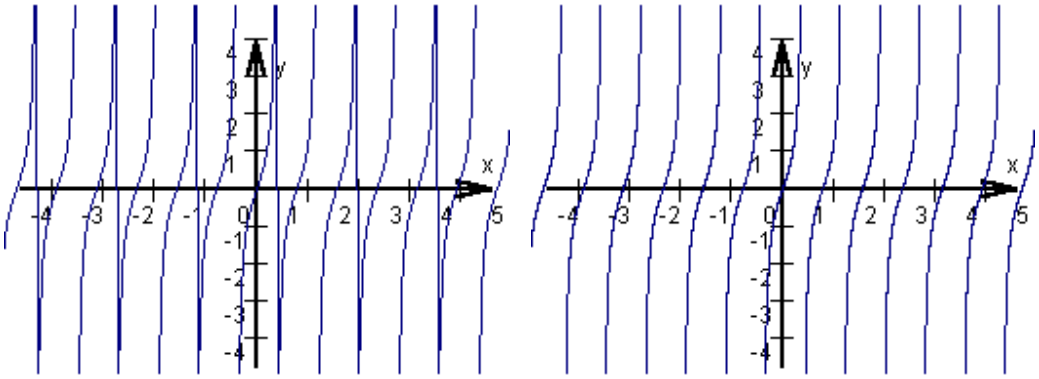
Beachten Sie bitte, dass die angegebenen Werte an den Achsen in diesem Fall dem natürlichen Logarithmus der x-Werte bzw. y-Werte entsprechen.
Zum Beispiel entspricht das Standarddarstellungsintervall [-5 ; 5] dann $[e^{-5} ; e^{5}]$.

x-y-Intervalle

Die Größe und die Lage der Darstellungsintervalle für die x- und y-Koordinaten können Sie über die Schalter im rechten oberen Fensterteil einstellen. Möchten

Sie die Werte direkt eingeben, so markieren Sie das Feld *Darstellungsbereich*. Für weitere Erklärung lesen Sie bitte unter Einstellen der Koordinatensystemgröße.

Extrem dichte Darstellung von Funktionen



Beispiel: Darstellung der Funktion Y=TAN(4*X), links im Normalmodus, rechts mit zugeschalteter extrem dichter Darstellung

Eine andere Möglichkeit, um störende und fehlerhafte Linien bei steilen Funktionsverläufen zu verhindern, haben Sie, indem Sie den Punkt *dichte Darstellung* wählen. In diesem Fall ermittelt das Programm die mehrfache Anzahl von Stützstellen.

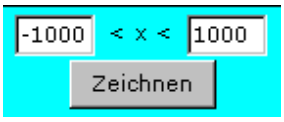
Beachten Sie bitte, dass bei einer extrem dichten Darstellung (voreingestellte Verdichtung 30) die Berechnungs- und Darstellungszeit steigt; bei der Voreinstellung auf das 30-Fache.

Achsenbeschriftung

In der Mathematik hat sich eingebürgert, dass die Abszissenachse als x-Achse, die Ordinatenachse als y-Achse bezeichnet werden. Diese Beschriftung wird standardmäßig auch verwendet.
Möchten Sie andere Achsenbeschriftungen, zum Beispiel wenn es sich um einen physikalischen Zusammenhang handelt, so ändern Sie die Einträge in den Eingabezeilen *x-Achse* und *y-Achse.*
Für die Beschriftung wird voreingestellt eine Schriftgröße von 10 Pixel verwendet. Möchten Sie z.B. eine größere Schrift, so ändern Sie dies durch Aufruf von *Einstellungen* | *Schriftgröße einstellen*.

Eingeschränkter Definitionsbereich

Bei der Darstellung von Funktionen versucht das Programm stets den maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen zu nutzen, d.h. ist die jeweilige Funktion innerhalb der reellen Zahlen vollständig definiert, wird der Graph der Funktion im gesamten Grafikfenster gezeichnet. Möchten Sie dies verhindern, so können Sie über das Schaltfeld *Definitionsbereich* den grundlegenden Definitionsbereich einschränken.



Tragen Sie dazu den Anfangs- und Endwert des Definitionsbereiches ein und quittieren mit dem Schalter *Zeichnen.* Bei einer Neuzeichnung der grafischen Darstellung wird dieses Intervall nun beachtet.
Die Einstellung eines eingeschränkten Definitionsbereiches wirkt sich nur auf die Darstellung von Funktionen aus. Andere Teilprogramme werden nicht beeinflusst.

Einstellung der absoluten Bildgröße

Das Programm versucht stets die grafische Darstellung in einen Fensterbereich von maximaler Größe zu zeichnen, d.h. bei einer Windows-Auflösung von 1024 x 768 Punkten und nicht weggeschalteter Auswahlliste wird ein 855 x 709 Pixel großer Fensterbereich genutzt.
Unter Umständen kann dies für die Weiterbearbeitung der Abbildungen, zum Beispiel beim Einfügen in eine Textdatei, zu groß sein. In diesem Fall wählen Sie den Punkt *Bildgröße ändern.*
Das Programm blendet nun einen Rollbalken ein, mit dessen Hilfe Sie die absolute Größe der Darstellung in Prozent reduzieren können. Daraufhin wird nur dieser Bereich zum Zeichnen der Funktionen, Kurven usw. genutzt und auch beim Speichern der Abbildung bzw. dem Kopieren in die Zwischenablage verwendet.

Beachten Sie bitte, dass das Programm bei Entfernung der Markierung unter *Bildgröße ändern* automatisch wieder 100% Bildgröße einstellt.

Zusammenfassung der Aktionsschalter

In dem Fenster der grafischen Darstellung finden Sie eine Vielzahl von Aktionsschaltern. Zur besseren Übersicht folgt nun eine Tabelle aller oben bereits beschriebenen Möglichkeiten.

Schalter	Wirkung
	Drucken der Darstellung
	Abbildung als Bitmap, GIF-, JPG-Datei oder Vektorgrafik speichern
	Darstellung in die Zwischenablage kopieren
	Verkleinerung des Darstellungsintervalls
	Vergrößerung des Darstellungsintervalls
	Start und Stopp der Animation
	Kontinuierliche Erhöhung des Parameters p während der Animation
	Kontinuierliche Verringerung des Parameters p während der Animation
	Erhöhung des Parameters p um 0,1
	Verringerung des Parameters p um 0,1
	Ein- und Ausschalten der freien Änderung der Parameter
	Grundeinstellung des Koordinatensystems
	Anpassen des y-Intervalls an das x-Intervall

18. Zusatzinformationen

18.1 Verfügbare Funktionen

Das Programm enthält einen Funktionsinterpreter, der es ermöglicht, über den Sprachumfang von Borland Pascal hinaus mathematische Operatoren und Funktionen zu definieren. Dabei wurde versucht, international übliche Bezeichnungen zu wählen. Vorbilder waren u.a. Mathematica und Derive. Folgende Operationen und Standardfunktionen sind nutzbar:

Operationen	Erklärung
+ - * /	Grundrechenoperationen
^	Potenzieren (schneller ist die Verwendung der Multiplikation)

Beachten Sie bitte: Das Programm hält sich an die strenge mathematische Definition der Zulässigkeit von rationalen Exponenten. Entsprechend der ausschließlich für positive reelle x gültigen Definition

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

(siehe "Kleine Enzyklopädie Mathematik", "Taschenbuch der Mathematik" bzw. "Höhere Mathematik - Formeln und Hinweise") werden in diesem Programm Terme der Form $x^{2/3}$, $x^{1/3}$ nur für positive Argumente berechnet.
Wünschen Sie z.B. für $x^{2/3}$ auch für negative x einen Funktionswert (d.h. also $\sqrt[3]{x^2}$), so geben Sie bitte (X^2) ^(1/3) ein.

Mit • versehene Funktionen und Konstanten werden nicht differenziert.

Wurzelfunktionen

	Erklärung
WURZEL(X), SQRT(X)	Quadratwurzel von x, x reell und x>=0
WURZEL3(X) •	3.Wurzel von x
WURZEL4(X) •	4.Wurzel aus x, x>=0
W(X) •	Quadratwurzel von x, x reell und x>=0
WP(X) •	Wurzel mit Wurzelexponent p, x positiv reell, der Wurzelexponent wird aus dem Parameter P entnommen
WP(X;A) •	Wurzel mit Wurzelexponent a, x positiv reell, der Wert von A wird automatisch in den Parameter P kopiert

Trigonometrische Funktionen

	Erklärung
SIN(X)	Sinus-Funktion, x im Bogenmaß
COS(X)	Kosinus-Funktion, x im Bogenmaß
TAN(X)	Tangens-Funktion, x im Bogenmaß
COT(X)	Kotangens-Funktion, x im Bogenmaß

ARCSIN(X)	Arkus-Sinus-Funktion, x reell
ARCCOS(X)	Arkus-Kosinus-Funktion, x reell
ARCTAN(X)	Arkus-Tangens-Funktion, x reell
ARCCOT(X) •	Arkus-Kotangens-Funktion, x reell
ARCSEC(X) •	Arkus-Sekans-Funktion, x reell, |x|>=1
ARCCSC(X) •	Arkus-Kosekans-Funktion, x reell, |x|<=1
SINH(X)	Sinus hyperbolicus-Funktion, x reell
COSH(X)	Kosinus hyperbolicus-Funktion, x reell
TANH(X)	Tangens hyperbolicus-Funktion, x reell
ARSINH(X)	Area Sinus hyperbolicus-Funktion, x reell
ARCOSH(X)	Area Kosinus hyperbolicus-Funktion, x reell, x>=1
ARTANH(X)	Area Tangens hyperbolicus-Funktion, x reell, |x|<1
SEC(X) •	Sekans-Funktion, x im Bogenmaß
CSC(X) •	Kosekans-Funktion, x im Bogenmaß
SINW(X) • COSW(X) • TANW(X) • COTW(X) •	Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion Das Argument muss hier im Gradmaß eingegeben werden. Diese speziellen Funktionen werden nicht differenziert.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

	Erklärung
EXP(X)	Exponentialfunktion, x reell
EXPP(X) •	Exponentialfunktion P^X, x reell, Basis ist Parameter P
LN(X)	Natürlicher Logarithmus, x positiv reell
LG(X)	Dekadischer Logarithmus, x positiv reell
LD(X)	Binärer Logarithmus, x positiv reell
LOG(X) •	Logarithmus zur Basis b, die Basis b wird aus dem Parameter P entnommen
LOG(X;A) •	Logarithmus zur Basis a, der Wert von A wird automatisch in den Parameter P kopiert

Sonderfunktionen

	Erklärung
ABS(X)	Absoluter Betrag von x, x reell
| X | •	Absoluter Betrag von x, x reell
INT(X)	Integer-Funktion, d.h. größte ganze Zahl kleiner als x
[X] •	Integer-Funktion, d.h. größte ganze Zahl kleiner als x
EULERPHI(X) •	Eulersche Phi-Funktion, x natürlich
FRAC(X) •	gebrochenzahliger Anteil der Zahl x
SGN(X) bzw. VORZEICHEN(X)	Vorzeichen von x, x reell
HEAVISIDE(X) •	Heaviside-Sprungfunktion, x reell
GAMMA(X) •	Eulersche Gammafunktion, x reell, x<33
DIGAMMA(X) •	Digammafunktion, Psi-Funktion, x reell

GAUSS(X) •	Gaußsche Normalverteilung, x reell
GSUMME(X) •	Normalverteilungssummenfunktion Φ(x), x reell
BETA(X) •	Betafunktion
SI(X) •	Integralsinus, 0<x<20
CI(X) •	Integralkosinus, 0<x<20
EI(X) •	Exponentialintegral, 0<x<10
BESSJ0(X) •	Bessellsche Zylinderfunktion 1.Gattung 0.Ordnung, 0 <= x
BESSJ1(X) •	Bessellsche Zylinderfunktion 1.Gattung 1.Ordnung, 0<= x
SN(X) •	Jacobische elliptische Funktion sn(x,k), Parameter k in Q eintragen
CN(X) •	Jacobische elliptische Funktion cn(x,k), Parameter k in Q eintragen
DN(X) •	Jacobische elliptische Funktion delta amplitunis dn(x,k), Parameter k in Q eintragen
AI(X) •	erste Airy-Funktion A(x)
BI(X) •	zweite Airy-Funktion B(x)
MCARLO(X) •	Zufallsfunktion, für x>0 ... random(trunc(x))
MCARLO(0) •	Zufallsfunktion, Funktionswert reell zwischen 0 und 1
TIME(X) •	Reduktion des Funktionswertes auf den Bereich [0 ... 24] durch Addition bzw. Subtraktion von 24

Parameter und Konstante

	Erklärung
P, Q, R	frei wählbare reelle Parameter
PI •	Kreiszahl π
É •	Eulersche Zahl e
PHI •	Goldenes Verhältnis (√5 + 1)/2
K0 bis K6 •	Konstante: √(2π), 1/π, π², √π, 1/e, e², √e

Verknüpfung von Funktionen

In der Definition der Funktionen 2 bis 4 können Verknüpfungen schon definierter Funktionen genutzt werden.

+ - * /	Addition, Subtraktion ... der Funktionen
F1(X)	Funktion 1
F2(X)	Funktion 2
F3(X)	Funktion 3
F4(X)	Funktion 4

Sonderfunktionen

Zu den Sonderfunktionen sind einige Anmerkungen erforderlich. Die Berechnung der Eulerschen Gammafunktion GAMMA(X), des Integralsinus SI(X), des Integralkosinus CI(X) und des Exponentialintegrals EI(X) erfolgt über

Näherungsverfahren bzw. unendliche Reihen. Daraus resultierend können nicht beliebige Genauigkeiten erzielt werden. Im Allgemeinen gilt die Genauigkeit:

GAMMA(X), DIGAMMA(X)	5 Dezimalstellen
SI(X), CI(X) und EI(X)	6 Dezimalstellen

Der für die Berechnung der Betafunktion B(x,y) notwendige zweite Wert wird vom Programm aus dem Parameter P entnommen. Insbesondere bei der Berechnung von Wertetabellen ist dies zu beachten. Zusätzlich wurden Integralsinus und -kosinus auf den Definitionsbereich $0 < x < 20$ eingeschränkt, das Exponentialintegral auf $0 < x < 10$.

Spezielle Operatoren

Zur Vereinfachung der Arbeit und Erweiterung der Möglichkeiten enthält das Programm sechs spezielle Operatoren. Mit diesen können Sie zwei Terme a und b, analog zur Summe oder dem Produkt, verknüpfen.

Operator	
<	a<b ermittelt das (absolute) Minimum der zwei Terme a und b
>	a>b ermittelt das (absolute) Maximum der zwei Terme a und b
&	a&b ermittelt das arithmetische Mittel von a und b
#	a#b ermittelt das geometrische Mittel von a und b
%	a%b ermittelt den Rest bei der ganzzahligen Division der auf ganze Zahlen gerundeten Werte von a und b
~	a~b ermittelt den erweiterten Binomialkoeffizienten

Erklärung: a ~ b entspricht im Programm der erweiterten Berechnung des Binomialkoeffizienten $\binom{a}{b}$. Im Beispiel wird der Binomialkoeffizient $\binom{3}{x}$ für verschiedene reelle x ermittelt. Per Definition existiert dieser spezielle Koeffizient für alle $x < 3$, außer 0, 1, 2 und 3.

Beachten Sie bitte: Bekanntermaßen besteht der Vorrang einer "Punktrechnung" vor einer "Strichrechnung". Durch die Erweiterung der Operatoren ergibt sich die Abstufung der Operatoren
Operation 1. Stufe Addition, Subtraktion, Minimum, Maximum
Operation 2. Stufe Multiplikation, Division, erweiterter Binomialkoeffizient
Operation 3. Stufe Potenzbildung

Dies bedeutet, dass zum Beispiel der Term X*SIN(X)<1+X streng genommen in der Form Y ← (Minimum von X*SIN(X) und 1) + X ausgewertet wird.

18.2 Systemvoraussetzungen

Das Programm stellt die folgenden Anforderungen an das Computersystem:

- IBM-PC mit Pentium CPU 1,5 GHz, oder 100% kompatiblen Rechner
- mindestens 1 GByte RAM-Speicher
- schnelle Grafikkarte (True-Color-Farbendarstellung; Echtfarbendarstellung; unter Windows mit mindestens 1024 x 768 Pixel Auflösung)
- die Benutzeroberfläche Windows XP SP 3, Windows Vista, Windows 7, 8/8.1, 10 oder 11
- 250 MByte freier Speicherplatz auf der Festplatte

Die hier genannten Anforderungen sind Mindestanforderungen. Je schneller und leistungsfähiger das Computersystem ist, desto leichter kann man mit dem Programm arbeiten. Für eine zügige Arbeit ist ein Pentium-1,5-GHz mit 2 GByte Hauptspeicher, Windows 8, 10 oder 11, CD ROM-Laufwerk und eine schnelle Festplatte oder ein noch leistungsstärkerer Rechner zu empfehlen. Nicht zu unterschätzen ist auch eine schnelle Grafikkarte. Viele Teilprogramme stellen mit ihren Simulationen hohe Anforderungen.
Unter Windows 2000 ist das Programm theoretisch auch ausführbar, eine Garantie kann aber nicht übernommen werden. Auch unter Linux/WINE traten keine größeren Probleme auf.
Bei einer zu geringen graphischen Auflösung (kleiner als 1024 x 768 Pixel) Ihres Windows-Systems kann das Programm nicht gestartet werden.

18.3 Druckeinstellung, allgemeine Einstellungen

Einstellung des Drucks

Möchten Sie eine Lexikonseite oder eine Darstellung in einem der vielen Teilprogramme ausdrucken, so nutzt das Programm praktisch die ganze Druckseite. Für einen optisch schöneren Ausdruck sollten Druckränder eingestellt werden. Wählen Sie dazu den Schalter .
Im nun angezeigten Dialog können Sie die Druckseitenränder links, rechts, oben und unten an vier Rollbalken einstellen. Dabei berücksichtigt das Programm die durch die Konstruktion des Druckers vorgegebenen Mindesträndern. In einer Skizze wird Ihnen zusätzlich die Größe des verbleibenden Druckbereichs angezeigt. Dabei wird von einer A4-Seite ausgegangen. Voreingestellt sind Seitenränder von links 2,5 cm, rechts 1,5 cm und oben und unten jeweils 1 cm.

Wichtig!
Die eingestellten Druckränder gelten für den Ausdruck einer Lexikonseite, jeder Abbildung und jeder Liste in den vielen Teilprogrammen.

Einstellung der Größe der Schrift

Weiterhin können Sie die Größe der Schrift bei einem Ausdruck über *?* | *Einstellungen* verändern. Voreingestellt nutzt das Programm die Schrift "Verdana". Deren Größe kann von 4 bis 20 verändert werden. Beachten Sie bitte, dass dies nur für Ausdrucke von Listen bzw. Lexikonseiten von Bedeutung ist.

Machen Sie einen reinen Bildschirmabzug, wird die Abbildung 1:1 übermittelt, d.h. ohne eine Veränderung der Schriftgröße.
In einer aufklappbaren Liste können Sie weiterhin eine andere als die voreingestellte Schriftart "Verdana" zum Druck einstellen.

Fenster senkrecht drucken

In allen Teilprogrammen können Sie das jeweilige Programmfenster ausdrucken. Dabei wird das Fenster als Abbildung so gedruckt, dass es maßstabgerecht vom linken zum rechten Druckrand reicht.
Da die Breite solcher Fenster aber mit über 1000 Pixel größer als die Höhe mit etwa 750 Pixel ist, ist es günstiger, die Abbildung um 90° gedreht, also senkrecht zu drucken.
Markieren Sie das Feld *Fenster senkrecht drucken,* druckt das Programm die Fensterabbildungen entsprechend und nutzt so die Papiergröße besser aus.

Dezimalkommazahlen

In diesem Programm wird weitgehend versucht, Dezimalzahlen in der in Mitteleuropa üblichen Form, d.h. mit einem Dezimalkomma, darzustellen. Allerdings existieren eine Vielzahl verschiedene Windows-Versionen und deren Ländereinstellungen, die das Dezimaltrennzeichen unterschiedlich einstellen. Sollten während der Arbeit mit dem Programm Probleme bei Eingabe von Dezimalzahlen mit einem Komma auftreten, so entfernen Sie die Markierung *Dezimalkommazahlen*. Danach werden im Programm alle Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt geschrieben. Im Lexikon wird weiterhin das Dezimalkomma genutzt.

Wichtig!
Die Änderung der *Anzeige der Dezimalzahlen* muss in einem Netzwerk von einem Administrator durchgeführt werden. Unabhängig von den Leserechten werden diese dann von jedem Anwender übernommen.

Allgemeine Probleme

Das Programm wurde sorgfältig programmiert und gewissenhaft auf Fehler untersucht. Zahlreiche Hinweise von Nutzern der früheren Versionen wurden beachtet und eingearbeitet. Dennoch können aber auch weiterhin kleinere Fehler oder Ungenauigkeiten vorhanden sein.
Dafür vorsorglich: Entschuldigung!

Das Programm wurde von verschiedenen Nutzern auf sehr unterschiedlichen Computern getestet. Insgesamt traten keine gravierenden Probleme auf. Es blieb stabil und beeinträchtigte andere Anwendungen nicht. Das Programm ist für Windows 7 und 8/8.1 optimiert. Unter XP, Vista und Windows 2000 gab es keine Mängel, unter Windows 98 einige wenige.
Bisher traten folgende Schwierigkeiten auf:

1. Kein Start möglich
Eine Ursache für dieses Problem liegt darin, dass Ihr Windows-System nicht mit der notwendigen Auflösung von mindestens 1024 x 768 Pixel eingestellt ist. Bei einer geringeren Auflösung kann das Programm nicht genutzt und nicht gestartet werden. Stellen Sie Ihr System daher unter *Eigenschaften* auf die notwendige Grafikauflösung um.

2. Arbeitsspeicher nicht ausreichend
Die Ursache der Meldung *Nicht ausreichend Arbeitsspeicher* konnte noch nicht festgestellt werden. In diesem Fall half bisher stets das Deinstallieren und eine anschließende Neuinstallation.

3. Das Hauptfenster und einige Teilprogrammfenster werden trotz einer Einstellung von 1024 x 768 Pixel nur teilweise angezeigt.
Diese Schwierigkeit entsteht, wenn sehr große Systemschriftarten unter Windows eingestellt sind. Für eine korrekte Arbeit mit dem Programm sollten diese Schriftarten unter *Einstellungen* | *Systemsteuerung* | *Anzeige* | *Darstellung* | *Schema* vorübergehend auf normale Größe eingestellt werden. Als Alternative kann das Programm auch problemlos unter einer größeren Windows-Auflösung als 1024 x 768 Pixel genutzt werden.

4. Die Hilfe-Datei zeigt in einem Netzwerk außer der Inhaltsliste keinen weiteren Text an.
Dieses Problem wird von einem Windows-Sicherheitsupdate erzeugt. Microsoft ist sich dessen bewusst, ist im Moment aber nicht in der Lage, dies zu ändern und bietet Hinweise auf der Microsoft-Supportseite
http://support.microsoft.com/kb/896358
an.

ACHTUNG !
Der Programmautor kann für fehlerhafte Funktionen oder Informationen und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

18.4 Das Programm in einem Netzwerk

Das Programm ist als Einzelplatzcomputerprogramm konzipiert! Sein Einsatz in einem Netzwerk ist daher eigentlich nicht geplant.
Dennoch gibt es die Möglichkeit, das Programm auch in diesem Fall zu nutzen, wobei ein paar Hinweise beachtet werden müssen.

Hinweis: Die weiteren Ausführungen sind allgemeine Bemerkungen. Bei der Vielzahl existierender Lösungen für Computernetze kann durch den Programmautor nicht garantiert werden, dass das Programm auf Ihrem Netz komplikationslos läuft. Unter Umständen ist es vielleicht überhaupt nicht möglich, das Programm in Ihrem Netz zu verwenden.

Folgende Vorgehensweise wird empfohlen :

Kopieren Sie den Inhalt der CD-ROM in ein frei wählbares Verzeichnis des Servers (Zentralrechner Ihres Netzes), z.B. *F:\MATHE2024*.
Auf den Arbeitsplatzrechnern (Terminals) müssen Sie dann das Programm einfach nur starten. Alle notwendigen Einträge liest das Programm aus der *matlex.ini* bzw. ohne Leserechte stellt das Programm diese automatisch ein.

Beachten Sie aber bitte: Installieren Sie das Programm auf dem Server, so müssen Sie mit Einschränkungen der Funktionsvielfalt rechnen. Änderungen der Programmeinstellungen oder z.B. die automatische Speicherung der zuletzt bearbeiteten Funktionen usw. sind in diesem Fall nicht mehr möglich!
Dies wird aber in der Praxis sogar beabsichtigt sein, um Unbefugte keine Änderungen der Einstellungen vornehmen zu lassen.

18.5 Quellen

„Wer ein mathematisches Buch nicht mit Andacht ergreift und es wie Gottes Wort liest, der versteht es nicht."
Novalis (Georg Friedrich Philipp Freiherr von Hardenberg)

Das Programm ist ein sehr komplexes Werk, das ohne eine große Anzahl von Fachliteratur als Ausgangsquellen nicht hätte erstellt werden können.
Im Folgenden finden Sie eine Liste von 308 Quellen und weiterführender Literatur. Besonders zu empfehlende Werke sind mit ✣ gekennzeichnet.

Allgemeine Quellen

[A1]✣ Autorenkollektiv, *Kleine Enzyklopädie der Mathematik*, Bibliographisches Institut der DDR Leipzig 1986
[A2]✣ *Alpha*, Mathematische Schülerzeitschrift der DDR, Volk und Wissen Berlin 1967-1990
[A3]✣ Arens usw., *Mathematik*, Spektrum Verlag Heidelberg 2012
[A4]✣ Bronstein / Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, BSB B.G.Teubner VG Leipzig 1985
[A5]✣ Glaeser, *Bilder der Mathematik*, Spektrum Heidelberg, 2010
[A6]✣ Kranzer, *So interessant ist Mathematik*, Aulis Verlag Deubner & Co. KG Köln 1989
[A7]✣ Pickover, *The Math Book*, Sterling Publishing London 2009 (engl.)
[A8]✣ Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall Boca Raton 1999 (engl.)
[A9]✣ Zeidler, *Springer-Handbuch der Mathematik Band I-IV*, Springer-Spektrum Wiesbaden 2012-2013
[A10] · Autorenkollektiv, *Lexikon der Mathematik*, Bibliographisches Institut der DDR Leipzig 1981
[A11] · Bartsch, *Mathematische Formeln*, Fachbuchverlag Leipzig 1972

[A12] · Behrends, *Pi & Co. - Kaleidoskop der Mathematik*, Springer Verlag Berlin 2008
[A13] · Bronstein, *Matematyka – Poradnik encyklopedyczny*, Warschau 1970 (poln.)
[A14] · Clapham, *Oxford Concise Dictionary of Mathematics*, New York 2009 (engl.)
[A15] · Cramer, *Vorkurs Mathematik*, Springer Berlin 2004
[A16] · Euler, *Einführung in die Analysis des Unendlichen*, Matzdorf Berlin 1791
[A17] · Gastineau, *Formulaire de mathématiques*, Librio Paris 2007 (franz.)
[A18] · Gellert / Kästner / Neuber, *Fachlexikon ABC Mathematik*, Harri Deutsch Verlag 1978
[A19] · Hartston, *Lexikon der Zahlen*, Droemer Knaur 1999
[A20] · Haupt, *Mengenlehre leicht verständlich*, Fachbuchverlag Leipzig 1971
[A21] · Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn*, Vieweg+Teubner Wiesbaden 2011
[A22] · Lietzmann, *Wo steckt der Fehler*, BSB B.G.Teubner VG Leipzig 1969
[A23] · Joos, *Höhere Mathematik*, Verlag Harri Deutsch Thun 1994
[A24] · Merziger, *Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik*, Binomi Verlag 2001
[A25] · Müller-Fonfara, *Mathematik verständlich*, Bassermann München 2010
[A26] · Reinhardt / Soeder, *dtv Atlas der Mathematik*, Dtv Verlag 1998
[A27] · Schmidt, *Kleiner Leitfaden Mathematik*, Gesellschaft für Bildung und Technik Berlin 1996
[A28] · Stöcker, *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Verlag Harri Deutsch Frankfurt 2003
[A29] · Stry, *Mathematik kompakt*, Springer Berlin 2005
[A30] · Such, *Mathématiques 4e*, Bordas Paris 1988 (franz.)
[A31] · van de Craats, *Grundwissen Mathematik,* Spektrum Berlin 2010
[A32] · Walz, *Brückenkurs Mathematik,* Spektrum Heidelberg 2011
[A33] · Wirz, *Analysis,* Berner Fachhochschule 1998
[A34] · Ziegler, *Mathematik - Das ist doch keine Kunst,* Knaus Verlag München 2013
[A35] · *Die Wurzel*, Mathematische Schülerzeitschrift, Friedrich-Schiller-Universität Jena
[A36] · *Formeln und Tabellen*, Gesellschaft für Bildung und Technik Berlin 1993
[A37] · *Квант*, Mathematisch-physikalische Schülerzeitschrift der UdSSR, Moskau (russ.)
[A38] · *Сборник формул по математике*, Astrel-Verlag Moskau 2004 (russ.)

Analysis

[B1] · Abramowitz, *Handbook of mathematical functions*, Washington 1972 (engl.)
[B2] · Autorenkollektiv, *Analysis für Ingenieur- und Fachschulen*, Fachbuchverlag Leipzig 1968
[B3] · Bronstein, *Symbolic Integration I*, Springer Verlag Berlin Heidelberg

1997 (engl.)
[B4] · Chintchin, *Восемь лекций по математическому анализу*, Verlag Nauka Moskau 1977 (russ.)
[B5] · Bourjala, *Maths pratiques, maths magiques*, Librio Paris 2006 (franz.)
[B6] · Deiser, *Analysis 2*, Springer Berlin 2012
[B7] · Deiser, *12x12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik*, Spektrum Heidelberg 2011
[B8] · Göhler, *Höhere Mathematik - Formeln und Hinweise*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 1987
[B9] · Graham, *Elementary Mathematics*, Harcourt New York 1970 (engl.)
[B10] · Kovalenko, *Высщая математика*, Eksamen-Verlag Moskau 2003 (russ.)
[B11] · Maor, *e: the story of a number*, University Press Princeton 1994 (engl.)
[B12] · Popow, *Шаргалка высшая математика*, Eksamen-Verlag Moskau 2003 (russ.)
[B13] · Rothe, *Höhere Mathematik Teil 1*, BSB B.G.Teubner VG Leipzig 1961
[B14] · Smirnow, *Lehrgang der höheren Mathematik Teil 1-5*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961
[B15] · Thuizat, *Math nouvelle collection Durrande Tome I Arithmétique*, Technique & Vilgarisation Paris 1979 (franz.)
[B16] · Thuizat, *Math nouvelle collection Durrande Tome II Analyse*, Technique & Vilgarisation Paris 1980 (franz.)
[B17] · Wegert, *Complex Beauties 2011*, TU Bergakademie Freiberg 2010
[B18] · Wegert, *Complex Beauties 2012*, TU Bergakademie Freiberg 2011
[B19] · Wegert, *Visual Complex Functions*, Birkhäuser Basel 2012 (engl.)
[B20] · Zienkiewicz, *Finite Element Methode: The Basis*, Butterworth Oxford 2000 (engl.)
[B21] · Zienkiewicz, *Finite Element Methode: Solide Mechanics*, Butterworth Oxford 2000 (engl.)

Algebra

[C1]✣ Basieux, *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 2000
[C2]✣ Kurosch, *Теория групп*, Wissenschaftlicher Staatsverlag der UdSSR Moskau 1953 (russ.)
[C3]✣ Livio, *The golden ratio*, Broadway Books New York 2003 (engl.)
[C4]✣ Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer-Verlag New York 2003 (engl.)
[C5]✣ van der Waerden, *Algebra I und II*, Springer-Verlag Heidelberg 1971
[C6] · Andreescu, Andrica, *Complex Numbers from A to Z*, Birkhäuser Verlag Boston 2006 (engl.)
[C7] · Alexandroff, *Einführung in die Gruppentheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
[C8] · Artin, *Galois Theory*, Dover Publications New York 1998 (engl.)
[C9] · Aufmann, *College Algebra and Geometry*, Brooks/Cole Belmont 2011 (engl.)
[C10] · Autorenkollektiv, *Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen*, Fachbuchverlag Leipzig 1967

[C11] · Basieux, *Abenteuer Mathematik*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 1999
[C12] · Borneleit, *Übungen für Junge Mathematik IV: Gleichungen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1976
[C13] · Bosch, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag Heidelberg 2001
[C14] · Bracken, *Elementary Algebra*, Brooks/Cole Bemont 2013 (engl.)
[C15] · Derbyshire, *Unknown Quantity*, Atlantic Books London 2006 (engl.)
[C16] · Ewgokimowa, *Алгебра в таблицах и схемах*, Litera-Verlag St.Petersburg 2004 (russ.)
[C17] · Fadejew, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Moskau 1960 (russ.)
[C18] · Fehringer, *Näherungsrechnen, Gleichungen, Ungleichungen*, Volk und Wissen Berlin 1978
[C19] · Golgitsch, *Алгебра решение уравнений*, Litera-Verlag St.Petersburg 2004 (russ.)
[C20] · Holliday, *Algebra 2*, McGraw-Hill Glencoe Columbus 2008 (engl.)
[C21] · Kersten, *Symmetries in Algebra and Number Theory*, Universitätsverlag Göttingen 2009 (engl.)
[C22] · Kleinfeld, *Übungen für Junge Mathematik III: Ungleichungen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1973
[C23] · Kliot-Daschinskir, *Алгебра, матриц и векторов*, Dan-Verlag St.Petersburg 2001 (russ.)
[C24] · Kostrikin, *Простые группы*, Kwant 2/87, Verlag Nauka Moskau 1987 (russ.)
[C25] · Kurosch, *Курс высшей алгебры*, Wissenschaftlicher Staatsverlag der UdSSR Moskau 1963 (russ.)
[C26] · Lau, *Algebra und diskrete Mathematik 1*, Springer-Verlag Heidelberg 2011
[C27] · Malloy, *Pre-Algebra*, McGraw-Hill Glencoe Columbus 2008 (engl.)
[C28] · Polster, *Direkte Summen von Multioperatorringen*, TH Karl-Marx-Stadt 1981
[C29] · Schmidt, *Einführung in der Moderne Matrix-Algebra*, Springer Berlin 2006
[C30] · Singh, *Fermats letzter Satz*, Deutscher Taschenbuchverlag 2000
[C31] · Spencer, *Das Buch der Zahlen*, Anaconda Verlag Köln 2007
[C32] · van der Waerden, *Modern Algebra*, Ungar Publishing New York 1950 (engl.)
[C33] · Zwerger / Klug, *Algebra*, Leibniz-Verlag München 1949

Zahlentheorie

[D2]✣ Conway, Guy, *The book of numbers*, Copernicus Books New York 2006 (engl.)
[D3]✣ du Sautoy, *The Music of the Primes*, Fourth Estate Ltd. London 2003 (engl.)
[D4]✣ Gauß, *Disquisitiones Arithmeticae*, Göttinger Digitalisierungszentrum 2007 (lat.)

[D5]✣ Gullberg, *Mathematics – from the birth of numbers*, Norton & Company London 1997 (engl.)
[D6]✣ Ribenboim, *Die Welt der Primzahlen*, Springer Berlin 2006
[D7]✣ Ribenboim, *The little book of bigger primes*, Springer New York 2000 (engl.)
[D8]✣ Scharlau, *Von Fermat bis Minkowski*, Springer Berlin 1980
[D9]✣ von Krbek, *Über Zahlen und Überzahlen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1964
[D10] · Caldwell, *Prime Curios*, CreateSpace Martin 2009 (engl.)
[D11] · Dantzig, *Number The Language of Science*, Penguin Book New York 2007 (engl.)
[D12] · Derbyshire, *Prime Obsession*, Penguin Book London 2003 (engl.)
[D13] · Forster, *Algorithmische Zahlentheorie*, Vieweg VerlagsGmbH Braunschweig 1996
[D14] · Gauß, *Mathematisches Tagebuch 1796-1814*, H.Deutsch Frankfurt 2005
[D15] · Havil, *Gamma*, Springer Spektrum Berlin 2013
[D16] · Horn, *Beiträge zur elementaren Zahlentheorie*, aus Wurzel 5/87, Schiller Universität Jena 1987
[D17] · Ifrah, *Universalgeschichte der Zahlen*, Campus-Verlag Frankfurt am Main 1993
[D18] · Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publications New York 1997 (engl.)
[D19] · Kowol, *Primzahlen*, Philosophisch- Anthroposophischer Verlag am Goethaneum Dornach 1995
[D20] · Kröber, *Bitte Zahlen!*, Eulenspiegel-Verlag Berlin 2005
[D21] · Kröber, *Mathematik der Palindrome*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 2003
[D22] · Lehmann, *Übungen für Junge Mathematik I: Zahlentheorie*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1970
[D23] · Miller, *Rechenvorteile*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1968
[D24] · Olivastro, *Das chinesische Dreieck*, Droemer Knaur München 1995
[D25] · Wells, *Dictionary of curios and interesting numbers*, Penguin Books Middlesex 1986 (engl.)
[D26] · Williams, *The Red Book of mathematical Problems*, Dover Publications New York 1988 (engl.)
[D27] · Worobjow, *Числа Фибоначчи*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1971 (russ.)

Geometrie

[E1]✣ Archimedes, *Abhandlungen*, Verlag Harri Deutsch 2003
[E2]✣ Byrne, *The first six books of the Elements of Euclid*, Taschen Köln, 2010 (engl.)
[E3]✣ Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley & Sons New York 1961 (engl.)
[E4]✣ Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications New York 1973 (engl.)
[E5]✣ Descartes, *Geometrie*, Übersetzung Schlesinger, Wissenschaftliche

Buchgesellschaft Darmstadt 1981
[E6]✣ Dörrie, *100 Great Problems of elementary mathematics*, Dover Publications New York 1965 (engl.)
[E7]✣ Euklid, *Die Elemente*, Übersetzung C.Thaer, Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main 2003
[E8]✣ Ghyka, *The geometry of art and life*, Dover Publications New York 1977 (engl.)
[E9]✣ Glaeser, *Geometrie und ihre Anwendungen*, Spektrum München 2007
[E10]✣ Hemenway, *Der geheime Code*, Evergreen Köln 2008
[E11]✣ Huntley, *The divine Proportion*, Dover Publications New York 1970 (engl.)
[E12]✣ von Krbek, *Geometrische Plaudereien*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1962
[E13] · Adam, *Platonische und Archimedische Körper ...*, Verlag Paul Haupt Bern 1984
[E14] · Altshiller-Court, *College Geometry*, Dover Publications New York 2007 (engl.)
[E15] · Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer London 2005 (engl.)
[E16] · Aschkinuse, *О числе полуправильных многогранников*, Wissenschaftlicher Staatsverlag der UdSSR Moskau 1957 (russ.)
[E17] · Biermann, *Ein Hobelspan aus Gauß, Werkstatt*, aus Alpha 1/82, Volk und Wissen Berlin 1982
[E18] · Bold, *Famous Problems of Geometry*, Dover Publications New York 1982 (engl.)
[E19] · Carral, *Géométrie*, Ellipses Paris 1995 (franz.)
[E20] · Cederberg, *A course in modern geometries*, Springer Verlag New York 1995 (engl.)
[E21] · Colerus, *Vom Punkt zur vierten Dimension*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Reinbek 1969
[E22] · Dergiades, *Some triangle centers associated with the tritangent circle*, Form Geometricorum 2009 (engl.)
[E23] · Drinfeld, *Quadratur des Kreises*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980
[E24] · Ewgokimowa, *Геометрия в таблицах и схемах*, Litera-Verlag St.Petersburg 2004 (russ.)
[E25] · Fetisow, *Proof in geometry*, Dover Publications New York 2006 (engl.)
[E26] · Filler, *Lehrgang Geometrie*, Volk und Wissen Berlin 1989
[E27] · Franz, *Topologie I*, de Gruyter & Co Berlin 1968
[E28] · Froese, *Euklid und die Elemente*, www.antike-griechische.de 2007
[E29] · Gastineau, *La géométrie*, Librio Paris 2006 (franz.)
[E30] · Gauthier, *Géométrie terminales c ete*, Cedic Paris 1980 (franz.)
[E31] · Grosche, *Übungen für Junge Mathematik II: Elementargeometrie*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1969
[E32] · Heesch, *Flächenschluss*, Springer Berlin 1963
[E33] · Klix, *Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig 1990
[E34] · Köhler, *Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung*, Verlag Moritz Diesterweg Frankfurt am Main 1974

[E35] · Lawlor, *Sacred Geometry*, Thames & Hudson Ltd. London 1982 (engl.)
[E36] · Lietzmann, *Riesen und Zwerge im Zahlenreich*, BSB B.G.Teubner VG Leipzig 1969
[E37] · Maor, *The Pythagorean Theorem*, University Press Princeton 2007 (engl.)
[E38] · Neveux, *Le nombre d'or*, Éditions du Seuil Paris 1995 (franz.)
[E39] · Nikolaou, *Θεωρητικη Γεωμετρια, Ογρανισμος Εκδοσεως Διδακτικων Βιβλιων*, Athen 1973 (griech.)
[E30] · Perelman, *Unterhaltsame Geometrie*, Volk und Wissen Berlin 1963
[E41] · Polster, *Die platonischen Körper*, TH Karl-Marx-Stadt 1981
[E42] · Radowitz, *Die Formeln der Geometrie und Trigonometrie*, Dümmler Berlin 1827
[E43] · Roman, *Reguläre und halbreguläre Polyeder*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1987
[E44] · Scharygin, *Кто открыл формулу Содди?*, Mathematik in der Schule Moskau 1992 (russ.)
[E45] · Scriba, Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Springer Berlin-Heidelberg 2005
[E46] · Skinner, *Sacred Geometry*, Sterling New York 2009 (engl.)
[E47] · Thuizat, *Math nouvelle collection Durrande Tome III Géométrie*, Technique & Vilgarisation Paris 1980 (franz.)
[E48] · von Krbek, *Formen und Formeln*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1967
[E49] · von Rucker, *Geometry, relativity and the fourth dimension*, Dover New York 1977 (engl.)
[E50] · Yale, *Geometry and symmetry*, Dover Publications New York 1968 (engl.)

Näherungsverfahren und Algorithmen

[F1] Herrmann, *Algorithmen Arbeitsbuch*, Addison-Wesley Publishing Company Bonn 1992
[F2] St. Denis, *BigNum Math*, Syngress Publishing Rockland 2006
[F3] · Autorenkollektiv, *Mathematische Hilfsmittel*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1974
[F4] · Beutelsbacher, *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, Vieweg+Teubner Wiesbaden 2011
[F5] · Chow, *Automatic Generation of Interlocking Shapes*, University of Illionois 1979 (engl.)
[F6] · Engel, *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*, Klett Verlag Stuttgart 1991
[F7] · Gutzner, *Spiel + Spaß mit dem Computer*, Urania-Verlag Leipzig 1987
[F8] · Heyl, *Kleine Formelsammlung der Zeitrechnung*, UHU Eisenach 1997
[F9] · Junger / Rapp, *Informatik*, Verlag Moritz Diesterweg Frankfurt am Main 1988
[F10] · Kerman, *Programming & Problem-Solving with Delphi*, Pearson Education Boston 2002 (engl.)

[F11] · Kerner, *Numerische Mathematik mit Kleinstrechnern*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1985
[F12] · Koepf, *Computeralgebra*, Springer Verlag Berlin 2006
[F13] · Maciej, *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN Warschau 1999 (poln.)
[F14] · Maeß, *Vorlesungen über numerische Mathematik II*, Akademie-Verlag Berlin 1988
[F15] · Oelschlägel / Matthäus, *Numerische Methoden*, BSB B.G.Teubner VG Leipzig 1988
[F16] · Pugh, *The Riemann-Siegel-Formula and large scale computations of the Riemann Zeta Function*, Universität New Brunswick 1992 (engl.)
[F17] · Richter, *Mathematische Probleme auf Mikrocomputern*, Akademie-Verlag Berlin 1989
[F18] · Vöcking / Alt, *Taschenbuch der Algorithmen*, Springer Berlin 2008
[F19] · Werner, *Taschenbuch der Informatik*, Fachbuchverlag Leipzig 1995
[F20] · Wilenkin, *Methoden der schrittweisen Näherung*, Teubner Verlag 1974
[F21] · *Eine Milliarde Stellen für π ...*, aus Der Mathematikunterricht 2/91, Friedrich-Verlag Seelze 1991

Stochastik und Statistik

[G1]✣ Sweschnikow, *Сборник задач по теория вероятностей*, Verlag Nauka Moskau 1965 (russ.)
[G2] · Antibi, *Math 1re es*, Éditions Nathan, Saint-Amand-Montrond 1993 (franz.)
[G3] · Bleymüller, *Statistische Formeln, Tabellen und Programme*, Verlag Vahlen München 1996
[G4] · Dubben, *Der Hund der Eier legt*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 1997
[G5] · Lamberton, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses Marketing 1998 (franz.)
[G6] · Lapin, *Statistics for modern business decisions*, Harcourt Brace Jovanovich Inc. New York 1982 (engl.)
[G7] · Maibaum, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Volk und Wissen Verlag Berlin 1987
[G8] · Polya, *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton New Jersey 1954 (engl.)
[G9] · Yaglom, *Challenging mathematical problems Volume I*, Dover New York 1987 (engl.)

Anwendungen und Geschichte

[H1]✣ Hawking, *The illustrated on the shoulders of giants*, Running Press Book London 2004 (engl.)
[H2]✣ Kepler, *Weltharmonik*, Reprint, Oldenbourg Verlag München 1997
[H3]✣ Wußing, *6000 Jahre Mathematik*, Springer Berlin-Heidelberg 2008
[H4]✣ Berggreen, *Mathematik im mittelalterlichen Islam*, Springer Berlin-

Heidelberg 2011
[H5] · Abbott, *Flächenland*, RabaKa-Publishing Neuenkirchen 2009
[H6] · Acheson, *1089 oder das Wunder der Zahlen*, Anaconda Verlag Köln 2006
[H7] · Barrow, *Ein Himmel voller Zahlen*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 1999
[H8] · Baudet, *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*, Vuibert Paris 2002 (franz.)
[H9] · Bergmann, *Geschichte und Kultur des alten Griechenlands*, Verlag Volk und Wissen Berlin 1975
[H10] · Blatner, *π - Magie einer Zahl*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 2000
[H11] · Bollobas, *The art of mathematics*, Cambridge University Press Cambridge 2010 (engl.)
[H12] · Borst, *Computus*, Verlag Wagenbach Berlin 2004
[H13] · Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley 1991 (engl.)
[H14] · Breidert, *George Berkeley*, Birkhäuser Verlag Basel 1989
[H15] · Burckhardt, *Lesebuch zur Mathematik*, Räber Verlag Luzern 1968
[H16] · Cantor, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Teubner Leipzig 1894
[H17] · Clark, *Leonardo da Vinci*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 1969
[H18] · Cotterell, *Mythologie Götter Helden Mythen*, Parragon Books Bath
[H19] · Daumas, Maurice, *Scientific Instruments of the 17th and 18th Centuries*, Portman London 1989 (engl.)
[H20] · Devlin, *The unfinished game*, Basic Books New York 2010 (engl.)
[H21] · Dilke, *Mathematik – Maße und Gewichte in der Antike*, Reclam Stuttgart 1991
[H22] · Dunham, *Journey through Genius*, Penguin Books London 1991 (engl.)
[H23] · Faulmann, *Schriftzeichen und Alphabete aller Zeiten und Völker*, Wien 1880
[H24] · Field, *Meisterwerke der Architektur*, Edition XXL Gmbh, Crumbach 2006
[H25] · Fomenko, *History: Fiction or Science? Chron.2*, Delamere Publishing, New York 2005 (engl.)
[H26] · Fröba, *Die bedeutendsten Mathematiker*, Marixverlag Wiesbaden 2007
[H27] · Fuchs, Tabachnikow, *Ein Schaubild der Mathematiker*, Springer Berlin 2011
[H28] · Gericke, *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*, Fourier-Verlag Wiesbaden 2003
[H29] · Glanville u.a., *Scientifica*, Ullmann Publishing Potsdam 2009
[H30] · Guillen, *Invitation aux mathématiques*, Éditions du Seuil Paris 1992 (franz.)
[H31] · Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses Marketing 2007 (franz.)
[H32] · Herrmann, *Die antike Mathematik*, Spektrum Spektrum Berlin 2014
[H33] · Kaplan, *Die Geschichte der Null*, campus
[H34] · Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, Schwickert Leipzig 1831

[H35] · Kastenberger, *Geometrie und Kunst: Der Zentralbau*, Wien 2005
[H36] · Paturi, *Chronik der Technik*, Chronik Verlag Gütersloh 1989
[H37] · Pedretti, *Wer ist Leonardo da Vinci*, Kaiser Verlag Klagenfurt 2006
[H38] · Petzold, *Moderne Rechenkünstler*, Verlag C.H.Beck München 1992
[H39] · Pickover, *Die Mathematik und das Göttliche*, Spektrum Verlag Heidelberg 2003
[H40] · Rochhaus, *Rechenbüchlein, gemacht nach Adam Riesens Feder*, Ries-Museum Annaberg-Buchholz 1998
[H41] · Schlote, *Chronologie der Naturwissenschaften*, Harri Deutsch Verlag 2002
[H42] · Schulz, *Zur Geschichte der Logarithmen ...*, TU Dresden 2006
[H43] · Seife, *Zwilling der Unendlichkeit*, Goldmann Verlag München 2000
[H44] · Stewart, *Taming the Infinite*, Quercus Publishing London 2009 (engl.)
[H45] · Sworykin, *Geschichte der Technik*, Fachbuchverlag Leipzig 1967
[H46] · Willers, *Zahlzeichen und Rechnen im Wandel der Zeit*, Verlag Volk und Wissen Berlin 1949
[H47] · Wußing, *Wissenschaftsgeschichte en miniature*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1989
[H48] · Ziegler, *Darf ich Zahlen?*, Piper München 2011
[H49] · Zinner, *Johannes Kepler*, Coleman Verlag Lübeck 1934
[H50] · *Harenberg Lexikon der Gegenwart*, Harenberg Lexikon Verlag Dortmund 1996

Chaostheorie, Informatik

[I1]✣ Herrmann, *Algorithmen für Chaos und Fraktale*, Addison Wesley Publishing Company Bonn 1994
[I2]✣ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser Verlag 1982
[I3] · Briggs, *Turbulent Mirror*, Harper & Rows Publisher New York 1989 (engl.)
[I4] · Clauß, *Programmieren in C*, Verlag Technik Berlin 1988
[I5] · Hofstadter, *Göthel Escher Bach*, dtv München 2008
[I6] · Jukna, *Crashkurs Mathematik für Informatiker*, Teubner Wiesbaden 2008
[I7] · Kippenhahn, *Verschlüsselte Botschaften*, Nikol Hamburg 2006
[I8] · Kurt, *Datenstrukturen und effiziente Algorithmen*, B.G. Teubner Stuttgart 1988
[I9] · Lunde, *Die Welt der Codes*, National Geographic Hamburg 2009
[I10] · Mandelbrot, *Les objets fractals*, Champs Flammarion Paris 1995 (franz.)
[I11] · Melnikow, *Программы, алгоритмы, конструкции*, Verlag Nauka Moskau 1980
[I12] · Sedgewick, *Algorithmen in C*, Addison-Wesley 1992
[I13] · Singh, *Geheime Botschaften*, dtv München 2006
[I14] · Socher, *Mathematik für Informatiker*, Fachbuchverlag Leipzig 2011
[I15] · Sprott, *Strange Attractors*, coldwell.net 2000 (engl.)
[I16] · Werner, *Taschenbuch der Informatik*, Fachbuchverlag Leipzig 1995
[I17] · Westerink, *De honingraatkubus*, Pythagoras Amsterdam 1990 (niederl.)

Logik, Logikspiele, Unterhaltung

[J1] · Awerbach / Beilin, *ABC des Schachspiels*, Sportverlag Berlin 1981
[J2] · Beetz, *1+1=10 Mathematik für Höhlenmensche*, Springer Berlin 2013
[J3] · Benecke, *Warum man Spaghetti nicht durch zwei teilen kann*, Bastei Lübbe Köln 2009
[J4] · Borucki, *Mathematik zum Schmökern*, Aulis Verlag Köln 1993
[J5] · Conway, *Über Zahlen und Spiele*, Vieweg Braumschweig 1983
[J6] · Cryan, Shatil, *Logik ein Sachcomic*, Tibia Press Verlag Überlingen 2012
[J7] · Dufresne, *Sammlung leichterer Schachaufgaben*, Anders Thulin Malmö 2009
[J8] · *Frösi*, DDR-Kinderzeitschrift der Pionierorganisation, Berlin 1956-1989
[J9] · Glaeser, *Der mathematische Werkzeugkasten*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2007
[J10] · Hemme, *Das große Buch der mathematischen Rätsel,* Anaconda Verlag Köln 2013
[J11] · Ketteler, *Zwei Nullen sind keine Acht*, Birkhäuser Verlag Basel 1997
[J12] · Kordemski, *Köpfchen, Köpfchen*, Urania-Verlag Leipzig 1965
[J13] · Loyd / Gardner, *Mathematische Rätsel und Spiele*, DuMont Buchverlag Köln 2006
[J14] · Loyd / Gardner, *Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele*, DuMont Buchverlag Köln 2004
[J15] · Paturi, *Mathematische Leckerbissen*, Patmos Düsseldorf 2008
[J16] · Schott, *Schotts Sammelsurium*, Bloomsbury Berlin 2005
[J17] · Schweigert, *Der Señor und die Punkte,* Hofmeister Leipzig 1962
[J18] · Shalit, *Science magic tricks*, Dover Publications New York 1981 (engl.)
[J19] · Steinhaus, *100 Aufgaben,* Urania-Verlag Jena 1968
[J20] · Stewart, *Mathematische Schätze*, Rowohlt Hamburg 2012
[J21] · Tschernjak, *Die Hühnchen von Minsk*, Rowohlt Taschenbuch Verlag Hamburg 2002
[J22] · Zich, *Unterhaltsame Logik*, B.B. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1973
[J23] · Leipziger Volkszeitung, *Unterhaltsames Mathe-ABC*, diverse Hefte

Fremdsprachige Aufgabensammlungen und Lehrbücher

[K1] Steinhaus, *Задачи и размышления*, Verlag Mir Moskau 1974 (russ.)
[K2] · Biasoni, *Mathématiques série collège*, Vuibert-Verlag Bonnat 2003 (franz.)
[K3] · Gerll, *Mathématique 3 Collection M*, Libraire Hachette Paris 1980 (franz.)
[K4] · Humphrey, *Less stress more success – Maths Paper 1*, Gill & Macmillan Dublin 2000 (engl.)
[K5] · Humphrey, *Less stress more success – Maths Ordinary Level*, Gill & Macmillan Dublin 2001 (engl.)
[K6] · Humphrey, *New consise Maths 4*, Gill & Macmillan Dublin 2003 (engl.)
[K7] · Kolmogorow, *Геометрия 8*, Moskau 1977 (russ.)
[K8] · Lungu, *Сборник задач по высшей математике I, II,* Airis Press Moskau

2008 (russ.)
[K9] · Schachno, *Сборник задач*, Minsk 1966 (russ.)
[K10] · Thirioux, *Mathématique contemporaine 3e*, Editions Magnard Paris 1980 (franz.)
[K11] · *Краткий справочник школьника математика, физика, химия*, Olymp-Verlag Moskau 2001 (russ.)
[K12] · *Ευκλειδεια Γεωμετρια, Ογρανισμος Εκδοσεως Διδακτικων Βιβλιων*, Athen 2003 (griech.)
[K13] · *Ματηματικα Β/Γ, Ογρανισμος Εκδοσεως Διδακτικων Βιβλιων*, Athen 2002 (griech.)
[K14] · *Ματηματικα γ Γυμνασιου, Ογρανισμος Εκδοσεως Διδακτικων Βιβλιων*, Athen 2001 (griech.)

Internet-Quellen

[L1] · http://www.mathe.tu-freiberg.de/, sehr gute Mathematik-Seiten zu allen Gebieten
[L2] · http://www.mathematik-online.de/, allgemeine Mathematikseiten
[L3] · http://www.utm.edu/research/primes/index.html, "Primzahl"-Seiten von Chris Caldwell, 1999 (engl.)
[L4] · http://www.pandd.demon.nl/, ausführliche Seiten zur Geometrie, insbesondere zur Geometrie am Dreieck (holl.)
[L5] · http://www.mathematik.ch/, allgemeine Mathematikseiten (Schweiz)
[L6] · http://www.mathe-bf.ch/index.html, Mathematikaufgaben und Lösungen (Schweiz)
[L7] · http://www.matematiksider.dk/, Seiten zur Geometrie, Mathematikgeschichte (dän.)
[L8] · http://www.mathcurve.com/, Super-Seiten zu zwei- und dreidimensionalen Kurven und Flächen (franz.)
[L9] · http://pagesperso-orange.fr/jean-paul.davalan/index.html, Seiten zu verschiedenen mathematischen Fragen (franz.)
[L10] · http://www.e-matematika.cz/, Fragen der Schulmathematik (tschech.)
[L11] · http://www.eddy.uni-duisburg.de/, allgemeine Seiten zur Mathematik
[L12] · http://www.math10.com/bg/, Lexikon, Aufgaben und Lösungen zur Mathematik (bulg.)
[L13] · http://www.hib-wien.at/leute/wurban/index.html, Mathematik, Physik, Informatik
[L14] · http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html, Polyederseiten (engl.)
[L15] · http://www.interocitors.com/polyhedra/, Polyederseiten (engl.)
[L16] · http://spazioinwind.libero.it/corradobrogi/index.htm, verschiedene Themen der Mathematik (ital.)
[L17] · http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html, virtuelles Mathematikmuseum (engl.)
[L18] · http://www.bymath.net/, elementare Mathematik (russ.)
[L19] · http://www.treasure-troves.com/math, Internet-Lexikon der Mathematik von Eric W.Weisstein, 1996-01 (engl.)

Weitere Internet-Quellen sind im Lexikon des Programms, insbesondere unter dem Stichwort "interessante World Wide Web Adressen", zu finden.

Fachübergreifende Quellen – Physik

[M1] Grehn, *Metzler Physik*, J.B.Metzlersche Verlagsbuchhandlung Stuttgart 1991
[M2] Pickover, *The Physics Book*, Sterling Publishing London 2011 (engl.)
[M3] Vogel, *Gerthsen Physik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997
[M4] · Bahr, *Faszinierende Physik*, Springer Spektrum Berlin 2015
[M5] · Breuer, *dtv-Atlas Physik*, Deutscher Taschenbuch Verlag München 1996
[M6] · Bührke, *Sternstunden der Physik*, Verlag C.H.Beck München 1997
[M7] · Durandeau, *Physique, Chimie 2*, Hachette éducation Paris 1993 (franz.)
[M8] · Hering, *Taschenbuch der Mathematik und Physik*, Springer Verlag Heidelberg 2009
[M9] · Jantschewskaja, *Физика в таблицах и схемах для школьников*, List Nju Moskau 2003 (russ.)
[M10] · Jantschewskaja, *Физика в таблицах и схемах*, Litera-Verlag St.Petersburg 2004 (russ.)
[M11] · Kakalios, *Physik der Superhelden*, Rogner & Bernhard Berlin 2006
[M12] · Kaku, *Visions*, Anchor Books New York 1997 (engl.)
[M13] · Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, Fachbuchverlag Leipzig 1995
[M14] · Lindner, *Das Bild der modernen Physik*, Urania-Verlag Leipzig, Jena, Berlin 1973
[M15] · Lindner, *Lehrbuch der Physik*, Fachbuchverlag Leipzig 1967
[M16] · Mende / Simon, *Physik - Gleichungen und Tabellen*, Fachbuchverlag Leipzig 1976
[M17] · Newton, *The Principia*, Prometheus Books 1995 (engl.)
[M18] · Ravaille, *Physique - chimie*, Éditions Baillière Paris 1980 (franz.)
[M19] · Rezac, *Abenteuer mit Archimedes*, Kinderbuchverlag Leipzig 1963
[M20] · Trapp, *Kleines Handbuch der Maße, Zahlen, Gewichte und der Zeitrechnung*, Reclam Stuttgart 2001
[M21] · Wilf, *Mathematics for the physical sciences*, Dover New York 1962 (engl.)

Astronomie

[N1] Bell, *The Space Book*, Sterling New York 2013 (engl.)
[N2] Henbest & Marten, *The New Astronomy*, Cambridge University Press Cambridge 1983 (engl.)
[N3] Kepler, *Astronomia nova*, Marixverlag Wiesbaden 2005
[N4] Kopernikus, *Das neue Weltbild*, Meiner Verlag Hamburg 2006
[N5] Meeus, *Astronomische Algorithmen*, Johann Ambrosius Barth Leipzig 1994
[N6] Mitton, *Cambridge Enzyklopädie der Astronomie*, Orbis Verlag München 1989

[N7] · Ahnert, *Kalender für Sternenfreunde*, Johann Ambrosius Barth Leipzig
[N8] · Bogdanov, *Reise zur Stunde Null*, Theiss Verlag Stuttgart 2008
[N9] · Celnik / Hahn, *Astronomie für Einsteiger*, Franckh-Kosmos Verlag 2002
[N10] · Galilei, *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme*, Voltmedia GmbH Paderborn 2006
[N11] · Gehren, *Einführung in der Astronomie & Astrophysik,* Sternwarte München 2002
[N12] · Guthmann, *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*, Wissenschaftsverlag Mannheim 1994
[N13] · Hanslmeier, *Einführung in die Astronomie und Astrophysik*, Springer Spektrum Berlin 2014
[N14] · Herrmann, *dtv-Atlas zur Astronomie*, Deutscher Taschenbuch Verlag München 1973 und 2005
[N15] · Herrmann, *Faszination Astronomie*, Cormoran Verlag München 1997
[N16] · Herrmann, *Geschichte der modernen Astronomie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1984
[N17] · Kastner, *Space mathematics*, NASA Washington D.C. 1985 (engl.)
[N18] · Marow, *Планеты солнечной системы*, Nauka Moskau 1981 (russ.)
[N19] · Montenbruck, *Astronomie mit dem Personalcomputer*, Springer Verlag Berlin 1999
[N20] · Nemiroff, *The Universe 365 Days*, Thames & Hudson London 2003 (engl.)
[N21] · Paturi, *Harenberg Schlüsseldaten Astronomie*, Harenberg Lexikon Verlag Dortmund 1996
[N22] · Ridpath, *Der Kosmos Himmelsführer*, Franckh-Kosmos Verlags GmbH Stuttgart 2004
[N23] · Roth, *Handbuch für Sternenfreunde*, Springer-Verlag Berlin 1989
[N24] · Roy, *Astronomy Principles and Practice*, Institute of Physics Publishing Bristol (engl.)
[N25] · Sagan, *Unser Kosmos*, Bechtermünz Verlag im Weltbild Verlag Augsburg 1996
[N26] · Seymour, *Astronomie ganz einfach,* Kosmos Stuttgart
[N27] · Schilling, *Unser Fenster zum Weltraum*, Wiley-VCH Weinheim 2009
[N28] · Vogtherr, *Zeitrechnung*, Verlag C.H.Beck München 2001
[N29] · Weigert, *brockhaus abc Astronomie*, Brockhaus Verlag Leipzig 1973
[N30] · Woronzow-Weljaminow, *Das Weltall*, Urania-Verlag Jena, Leipzig, Berlin 1976
[N31] · *Astronomie in der Schule*, Zeitschrift, Verlag Volk und Wissen Berlin
[N32] · Keller, *Kompendium der Astronomie*, Franckh-Kosmos Verlags GmbH Stuttgart 2019