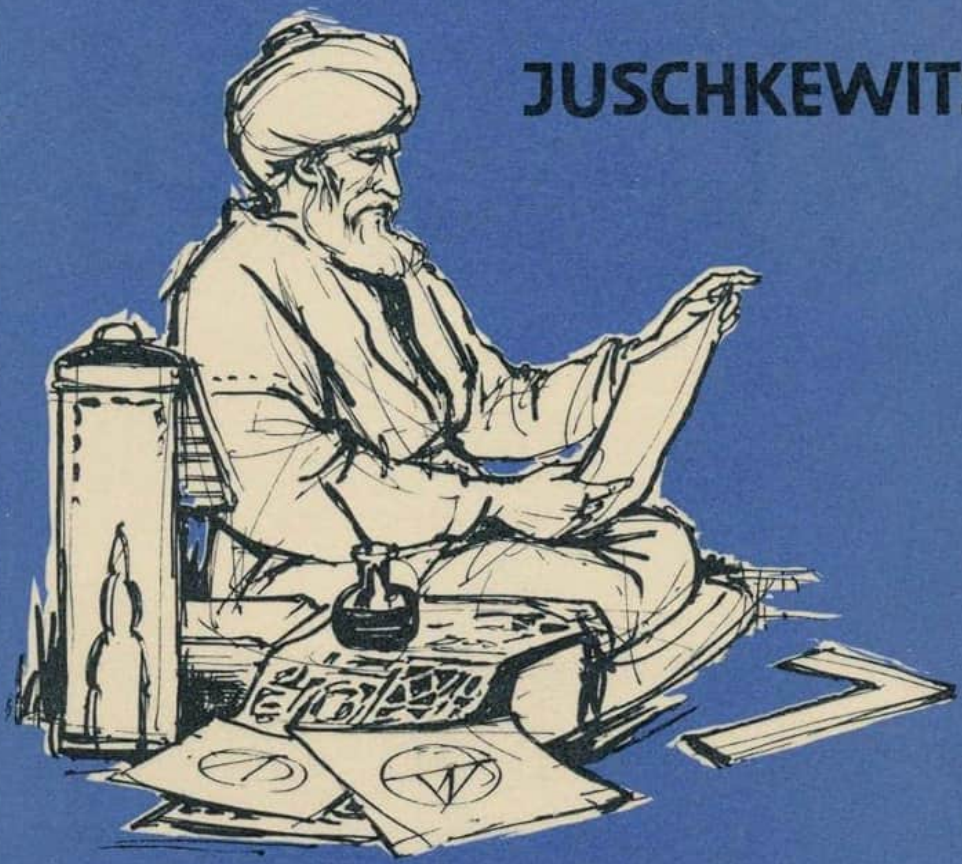
JUSCHKEWITSCH



MATHEMATIK IM MITTELALTER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER

VON

PROFESSOR A. P. JUSCHKEWITSCH
INSTITUT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND TECHNIK
AN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR



B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG
1964

А. П. Юшкевич
История математики в средние века
Erschienen im Staatlichen Verlag für Physikalisch-Mathematische Literatur
Moskau 1961
Deutsche Übersetzung: Viktor Ziegler, Leipzig
Wissenschaftliche Redaktion: Dr. Hans Wußing, Leipzig

Liz.-Nr. 294-375/44/64 · ES 19 B 1

Copyrigth 1964 by B. G. Teubner Verlagegesellschaft in Leipzig

Printed in the German Democratic Republic

Satz und Druck: Betriebsberufsschule Otto Grotewohl, Leipzig (III-18-3)

VORWORT ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Die russische Originalausgabe des vorliegenden Werkes erschien 1961. Zusammen mit dem Buch „История математики в Древности" (Die Geschichte der Mathematik im Altertum) von Professor E. Kolman bildete es eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik bis zur Renaissance. Da das Buch von Kolman nicht in deutscher Übersetzung vorliegt, verweist der Verfasser den Leser hinsichtlich aller Fragen über die Mathematik im Altertum auf das Buch von H. Wußing, „Mathematik in der Antike".

Was die Einteilung der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik nach Perioden betrifft, von der auch der chronologische Rahmen der Darlegung abhängt, so schließt sich der Verfasser eng an die Konzeption an, die A. N. Kolmogorow in seinem Beitrag „Mathematik" in der Großen Sowjetenzyklopädie (2. Aufl., Bd. 26) ausführlich beschrieben hat. In einer gewissen Beziehung weicht aber der Verfasser von Kolmogorow ab. Während Kolmogorow die Mathematik des antiken Griechenlands und des Mittelalters zu einer einheitlichen Periode der Elementarmathematik zusammenfaßt, vertritt der Verfasser die Meinung, daß diese Periode auf ganz natürliche Weise in zwei Abschnitte zerfällt. Der erste hiervon ist die antike Periode, in der in Griechenland die Mathematik erstmalig als Gesamtheit mehrerer deduktiver Disziplinen entstand, zu denen die höhere Geometrie des Apollonios, die Infinitesimalmathematik des Eudoxos, des Archimedes und ihrer Nachfolger gehören. Diese Periode könnte man als die Periode der Entstehung und ersten Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft bezeichnen. Der zweite Abschnitt umfaßt das Mittelalter. Er zeichnet sich dadurch aus, daß vornehmlich elementare Teilgebiete der Mathematik und verschiedene numerische Algorithmen im Rahmen der Arithmetik, der Algebra, aber auch im Rahmen der Anwendung dieser Disziplinen auf die Geometrie und Trigonometrie entwickelt wurden, obwohl sich bereits in dieser Zeit die Gelehrten sporadisch auch infinitesimalen Problemen zuwandten. Ausführlich wird diese Konzeption in der Arbeit dargelegt, die im Literaturverzeichnis am Ende des Buches unter der Nr. 91 aufgeführt ist.[1])

Obwohl die geschichtliche Periode der Mathematik, mit der sich dieses Buch beschäftigt, erst im 16. Jh. zum Abschluß gelangt, hielt es der Verfasser für zweckmäßig, mit der Renaissance abzubrechen, denn die Tätigkeit der Gelehrten dieses Jahrhunderts hat unmittelbar die Entstehung der neuen Mathematik der veränderlichen Größen, der Lehre von den Funktionen und geometrischen Transformationen gefördert. Andererseits mußte der Verfasser in seinem Bestreben, z. B. die Mathematik in Indien erschöpfend zu behandeln, häufig auf Werke zurückgreifen, die lange

[1]) Die deutsche Übersetzung dieser Arbeit findet der Leser in „Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften", herausgegeben von G. Harig, Berlin 1960.

vor dem Beginn des Mittelalters im allgemeingebräuchlichen Sinne dieses Wortes erschienen waren.

Das Hauptziel des Verfassers bestand darin, den Entwicklungsgang der mathematischen Grundbegriffe, der Theorien und der Algorithmen zu klären, wobei nach Möglichkeit deren Interesse und Wichtigkeit vom Gesichtspunkt des gegenwärtigen Standes der Mathematik berücksichtigt werden sollten. Die geschichtliche Perspektive ändert sich mit dem Fortschritt der modernen Wissenschaft (und selbstverständlich auch mit der Erweiterung unserer geschichtlichen Kenntnisse). So wurde z. B. die Lehre von den Parallelen im Orient recht ausführlich behandelt. Das gleiche gilt für die Anfänge der Infinitesimalmathematik in den islamischen Ländern und in Europa oder für gewisse numerische Methoden und sogar für einzelne Berechnungen. Die Beschreibung der Tätigkeit einzelner Gelehrter wurde dem genannten Ziel untergeordnet. Gleichzeitig war der Verfasser bestrebt, soweit wie möglich die Wechselbeziehungen zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften, der Technik und der Philosophie im Blickpunkt zu behalten. Denn letztlich wird die Entwicklung der Mathematik durch die gesellschaftliche Praxis bestimmt, und sogar die immanenteste Entwicklung unserer Wissenschaft hängt von den örtlichen und zeitlichen Umständen ab. Außerdem war dem Verfasser daran gelegen, den internationalen Charakter der Entwicklung der Mathematik hervorzuheben, d. h. die internationalen Beziehungen aufzudecken, wobei die nationalen Besonderheiten der Entwicklung zu dieser oder jener Zeit gebührend Berücksichtigung fanden.

Die Darstellung im Buch ist in gewissem Sinne inhomogen. In verschiedenen Fällen erschien es zweckmäßig, Fragen ausführlich zu erörtern, die den Lesern weniger bekannt sein dürften und die bisher in den verschiedenen Übersichtsberichten kaum berücksichtigt wurden.

Für die deutsche Ausgabe hat der Verfasser das zweite Kapitel nahezu völlig neu abgefaßt. Auch im dritten Kapitel wurden nicht unerhebliche Änderungen vorgenommen. Darüber hinaus wurden einige Ergänzungen geschrieben, die im Anhang des Buches zusammengefaßt sind. Diese Eingriffe waren notwendig, denn in den Jahren, die seit der Abfassung seines Buches verflossen sind, haben sich unsere Kenntnisse, insbesondere was die Länder des Orients betrifft, erheblich erweitert.

Dem Verlag B. G. Teubner, der durch die Herausgabe der deutschen Übersetzung mein Werk dem deutschen Leser zugänglich macht, bin ich sehr zu Dank verbunden. Mein Dank gilt ferner dem Übersetzer des Buches, Herrn V. Ziegler, und dem wissenschaftlichen Betreuer der deutschen Ausgabe, Herrn Dr. H. Wußing, für deren mühevolle Arbeit. Darüber hinaus schulde ich Dank Herrn Professor B. Rosenfeld, der seinerzeit den russischen Text des Manuskriptes gelesen und mir wertvolle Ratschläge erteilt hat, sowie Frau Dr. E. Bereskina, durch deren Vermittlung ich viele Arbeiten in chinesischer Sprache kennengelernt habe und die die Transkription der chinesischen Namen und Termini überprüft hat.

Moskau, im September 1963 A. P. Juschkewitsch

INHALT

Einführung

I. Die Mathematik in China

Vorbemerkungen (10). Das altchinesische Zahlensystem (12). Das Rechenbrett (16). Brüche (19). Dezimalbrüche (21). Die „Mathematik in neun Büchern" (23). Lineare Aufgaben; die erste Methode des Überschusses und des Mangels (26). Lineare Aufgaben; die zweite Methode des Überschusses und des Mangels oder die regula duorum falsorum positionum (29). Systeme linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten (32). Negative Zahlen (36). Lineare unbestimmte Gleichungen (39). Das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln (41). Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen (48). Geometrie; Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks (51). Ausmessung ebener Figuren (55). Die Berechnung von π (57). Volumenberechnungen (59). Geometrie und Algebra (62). Kubische Gleichungen (63). Die Algebra im 13. Jahrhundert; die Methode tian-yuan (65). Nichtlineare Gleichungssysteme (70). Binomialkoeffizienten (73). Probleme der Zahlentheorie (74). Die Summation endlicher Reihen (78). Interpolation (84). Die geschichtliche Rolle der Mathematik des alten China (87).

II. Die Mathematik in Indien

Vorbetrachtungen (89). Die wichtigsten mathematischen Werke (91). Die Mathematik in den Büchern der „Schnurregeln" (96). Die Entstehung des dekadischen Stellenwertsystems (102). Die arithmetischen Grundrechnungsarten (109). Brüche (113). Das Radizieren (114). Die Neunerprobe (117). Rechenaufgaben; Dreisatzregel (118). Die Regel des falschen Ansatzes (120). Grundlagen der Algebra; Symbolik (122). Negative und irrationale Zahlen (126). Lineare und quadratische Gleichungen (129). Unbestimmte Gleichungen (140). Numerische Reihen (150). Komplexionen (153). Geometrie (153). Anfänge der Trigonometrie (163). Die Berechnung von π und die Arcustangensreihe (167).

III. Die Mathematik in den Ländern des Islam

Allgemeines (175). Die Ausbreitung des dezimalen Stellenwertsystems (186). Brüche (197). Die algebraische Abhandlung des Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī (204). Die Dreisatzregel (214). Regeln des falschen Ansatzes (214). Die Geometrie in den Werken al-Ḫuwarizmīs (217). Die algebraischen Abhandlungen von Abū Kāmil und

al-Karaǧī (220). Probleme der Zahlentheorie (232). Die Entwicklung des Stellenwertsystems; Dezimalbrüche (236). Das Radizieren und der binomische Lehrsatz (242). Irrationalzahlen und Proportionenlehre (248). Geometrische Probleme und kubische Gleichungen (256). Die geometrische Theorie der kubischen Gleichungen des 'Umar al-Ḫayyām (259). Die algebraische Symbolik des al-Qalasādī (269). Probleme der Geometrie. Abū-l-Wafā (270). Die Lehre von den Parallelen (277). Kegelschnitte; Infinitesimalbetrachtungen (288). Die Entwicklung der Trigonometrie (295). Sphärische Trigonometrie (303). Die Abhandlung über das vollständige Vierseit des Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (304). Trigonometrische Tafeln (308). Die Kreisberechnung des Ghiyāth ad-Dīn al-Kāšī (312). Die algebraische Auflösung der Gleichung für die Winkeldreiteilung (319). Der Einfluß der Mathematik der islamischen Länder auf die westeuropäische Wissenschaft (325).

IV. Die Mathematik im Europa des Mittelalters

Die gesellschaftlichen Verhältnisse (326). Die Anfänge des mathematischen Wissens (328). Die Mathematik in Byzanz (329). Die Mathematik in Armenien und Grusien (331). Nikolaos Artabasdos (334). Beda und Alcuin (335). Die Voraussetzungen für die weitere Entwicklung der Mathematik (338). Gerbert (339). Übersetzungen aus dem Arabischen und Griechischen (340). Die ersten Universitäten (345). Der Abakus (346). Die Ausbreitung der Arithmetik im Stellenwertsystem (349). Die Bücher über den Algorismus (352). Die Entwicklung der Zahlenschreibweise in Rußland (357). Sexagesimal- und Dezimalbrüche (362). Die Rechenoperationen (365). Rechengeräte; die russische Stschjoty (счеты) (367). Leonardo Fibonacci von Pisa und sein „Liber abaci" (371). Die „Praxis der Geometrie" und das „Buch der Quadrate" (384). Jordanus Nemorarius (387). Einige Probleme der „Elemente" (391). Thomas Bradwardine. Die Lehre vom Kontinuum (394). Nicole Oresme und die Lehre von den gebrochenen Verhältnissen (401). Die Theorie der Formlatituden (402). Der Entwicklungsstand der Mathematik in Mittel- und Südeuropa (413). Der Beginn der Renaissance (417). Regiomontanus und die Entwicklung der Trigonometrie (418). Die Anfänge einer symbolischen Algebra (421). Leonardo da Vinci (424). Luca Paçioli (427). Nicolas Chuquet (431). Schlußbetrachtung (433).

Literatur 435

Namensverzeichnis 447

EINFÜHRUNG

Bereits lange vor dem Zerfall des römischen Weltreiches begann ein neuer großer Entwicklungszyklus der Mathematik im fernen Osten, in China und Indien, der dann seine Fortsetzung in den arabischen Ländern, im Iran und in Mittelasien und später in Europa fand und etwa im 15. bis 16. Jahrhundert zum Abschluß gelangte.

In Mesopotamien hatte die Mathematik bereits zwanzig Jahrhunderte v. u. Z. einen hohen Entwicklungsstand erreicht. Im Mittelpunkt des Interesses standen Aufgaben der praktischen Arithmetik, Vermessung verhältnismäßig einfacher Figuren und später Probleme der Astronomie, die bereits kompliziertere Berechnungen erforderten. Typisch war die umfangreiche Anwendung ausführlicher vorgerechneter Multiplikations- und Divisionstabellen. Im Verlaufe einer Entwicklung zum Abstrakten erfolgte die Umkehrung verschiedener Aufgaben in dem Sinne, daß praktisch gegebene Größen als die gesuchten und die gesuchten Größen als die gegebenen aufgefaßt wurden. Dies war bereits eine der Vorstufen zur Entwicklung algebraischer Methoden. Die größten Errungenschaften der babylonischen Mathematik bestanden in einem sexagesimalen Stellenwertsystem für ganze Zahlen und Brüche, später unter Anwendung eines Lückenzeichens, in der Lösung quadratischer Gleichungen durch Radikale sowie in der Lösung der auf quadratische Gleichungen führenden Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten; sie bestanden ferner in einem Iterationsverfahren zur angenäherten Berechnung von Quadratwurzeln mit Hilfe der arithmetischen Mittelwertbildung aus vorgegebenen, zu groß und zu klein angesetzten Näherungswerten sowie im später sogenannten Satz des Pythagoras. Ferner müssen, wie man indirekt schließen kann, die ersten Ansätze von Beweismethoden in Form einzelner algebraischer Umformungen und geometrischer Konstruktionen vorhanden gewesen sein, wenn sie sich auch in den überlieferten Texten nicht finden.

Ein weniger hohes Niveau hatte offenbar die Entwicklung der Mathematik in Ägypten erreicht. Hier bediente man sich bei der Multiplikation bzw. Division der Verdoppelung bzw. Halbierung; Operationen mit Brüchen wurden auf Operationen mit Stammbrüchen und auf die Anwendung von Tabellen zurückgeführt, in denen Zerlegungen von Brüchen der Form $\frac{2}{2n+1}$ angegeben waren, wobei diese Brüche in der Summe wieder Stammbrüche ergaben. Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen, traten nicht auf. Die Darlegungen auf den babylonischen Keilschrifttafeln und ägyptischen Papyri hatten die Form von Vorschriften ohne jegliche Begründung; mitunter wurden Proben angegeben.

Die griechische Mathematik, die in ihrem frühen Stadium der orientalischen Mathematik umfangreiches Tatsachenmaterial verdankte, nahm in der klassischen Epoche

im 5. bis 3. Jahrhundert v. u. Z. eine prinzipiell andere Gestalt an. In die mathematischen Untersuchungen drangen in starkem Maße Beweisführungen ein. Als wichtigstes Werkzeug zur Entdeckung neuer Wahrheiten trat die logische Überlegung an die erste Stelle, selbstverständlich verknüpft mit Beobachtungen und induktiv gewonnenen Erkenntnissen. Umfangreiche Gebiete der Mathematik formten sich zu deduktiven Systemen, es wurde eine Theorie des mathematischen Beweisens aufgebaut. Die Ergebnisse fanden ihren Niederschlag in Darlegungen, die in ihrem Stil als Lehrbücher oder wissenschaftliche Abhandlungen anzusprechen sind. Unmittelbar numerische Probleme, aus denen umfassende Theorien hervorgegangen sind, traten in den Hintergrund. Verschiedener Umstände wegen trat die Algebra der quadratischen Gleichungen als ein System geometrischer Sätze über Flächenverwandlungen auf. Die Entdeckung der Irrationalitäten führte zur Schaffung einer allgemeinen Verhältnislehre, die allerdings nur zum Teil entwickelt war und daher die Lehre von den reellen Zahlen nicht ersetzen konnte. Im 3. Jahrhundert fand der Aufbau der Elemente der Geometrie seinen Abschluß; es entstanden die ersten Grundlagen einer Zahlentheorie, der Lehre von den Kegelschnitten und der antiken Formen von Integrations- und Differentiationsverfahren. Wesentlich neue Beiträge auf diesen Gebieten sind erst zweitausend Jahre später geleistet worden. Schließlich wurden die ersten Fundamente der mathematischen Naturwissenschaften gelegt: Musikwissenschaft, Mechanik einschließlich Mechanik der Flüssigkeiten, Optik und Kosmographie.

Vom 2. Jahrhundert v. u. Z. an erreichte die Entwicklung der klassischen Richtungen in der griechischen Mathematik nahezu einen völligen Stillstand. Gleichzeitig fand in den hellenistischen Staaten eine enge Berührung der griechischen mit den orientalischen Kulturen statt, und im Zusammenhang mit verschiedenen Problemen der Astronomie und Geodäsie wurden andere Richtungen erfolgreich entwickelt: sphärische Geometrie, Trigonometrie der Sehnen und Näherungsrechnung. Die Interessen verlagerten sich auf numerische Mathematik: Zum Teil wurden das Sexagesimalsystem und die Stammbrüche übernommen, es entwickelte sich eine numerische Algebra der linearen und quadratischen Gleichungen, und es wurden unbestimmte Gleichungen in rationalen Zahlen gelöst. Ferner entstand in bescheidenem Rahmen eine algebraische Symbolik. Dieser Tendenz war aber, bedingt durch den Verfall der antiken Welt, keine lange Lebensdauer beschieden. Sie hinterließ jedoch ein für die weitere Entwicklung wichtiges Erbe in den asiatischen und afrikanischen Gebieten des früheren römischen Weltreiches.

Nach dem Zusammenbruch der antiken Sklavenhaltergesellschaft vollzog sich die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften viele Jahrhunderte lang hauptsächlich in den Ländern des Orients. Die orientalische Mathematik des Mittelalters war im Grunde genommen eine Lehre von konstanten Größen und unveränderlichen geometrischen Figuren. Jedoch ist eine derartige Charakterisierung noch nicht konkret genug. Sie war vor allem eine numerische Mathematik, eine Gesamtheit von Algorithmen zur Lösung arithmetischer, algebraischer und geometrischer Aufgaben, die zunächst verhältnismäßig einfach waren, später aber schwieriger wurden. Es handelte sich zunächst um einzelne Algorithmen, die später zu ganzen wissenschaftlichen Disziplinen vereinigt wurden. Die Entwicklung der Mathematik im Osten be-

gann im Mittelalter auf einer Stufe, die weit unter der in den hellenistischen Ländern erreichten lag. Doch gegen Ende dieser Periode ließ sie in verschiedenen Entwicklungsrichtungen die Wissenschaft der Ptolemäerzeit weit hinter sich. Wir denken dabei an Gebiete wie kaufmännisches Rechnen, numerische Algebra nebst Anwendungen, Näherungsrechnung, Zahlenlehre und Trigonometrie. Alles bisher Gesagte bezieht sich auf China, Indien und die arabischen Länder (aus Mangel an Quellenmaterial sind wir gezwungen, das alte Choresm, Vietnam und Indonesien unberücksichtigt zu lassen).

Die einheitliche Entwicklungsrichtung der Mathematik im mittelalterlichen Asien war letztlich durch die verwandte gesellschaftliche Struktur in den Ländern des Orients bedingt. Die Bevölkerung beschäftigte sich viel mit Landwirtschaft, Handwerk und Handel in solchen Formen, die der allmählich erstarkenden feudalistischen Gesellschaftsordnung eigen waren. In politischer Hinsicht waren die mittelalterlichen Staaten des Orients wenig gefestigte Despotien, die mitunter für einige Jahrhunderte oder auch gar nur für einige Jahrzehnte große Gebiete vereinigten, mitunter jedoch in ihre Bestandteile zerfielen und häufig eine leichte Beute eroberungslustiger Nachbarn wurden.

Eine Existenzfrage für diese Staaten war die künstliche Bewässerung der Felder, die Schaffung und ständige Unterhaltung eines Bewässerungssystems, der Kampf mit den verheerenden Flußüberschwemmungen usw. „Hieraus ergab sich", schrieb Marx, „jene ökonomische Funktion, zu deren Ausübung sämtliche asiatischen Regierungen gezwungen waren, und zwar die Funktion zur Organisierung der gesellschaftlichen Arbeit" [5 S. 337]. In der gleichen Richtung äußerte sich auch Friedrich Engels:„ Die künstliche Bewässerung ist hier erste Bedingung des Ackerbaus, und diese ist Sache entweder der Kommunen, Provinzen oder der Zentralregierung. Die Regierung im Orient hatte immer auch nur drei Departements: Finanzen (Plünderung des Inlands), Krieg (Plünderung des Inlands und des Auslands) und travaux publics (Sorge für die Reproduktion)." Die Fruchtbarkeit des Bodens beruhte ganz auf der künstlichen Bewässerung und „... sie erklärt die Tatsache," fügt Engels hinzu, „daß ein einziger Verwüstungskrieg ein Land für Jahrhunderte entvölkern und seiner ganzen Zivilisation entkleiden konnte" [6, S. 580].

Unter den Problemen, die die Mathematiker des Orients seit altersher und auch im Verlaufe der gesamten betrachteten Zeit zu lösen hatten, nahmen solche Aufgaben einen großen Teil ein, die sich beim Bau von Kanälen und Staudämmen, von Straßen, Befestigungen, Palast- und Tempelbauten u. a. ergaben. Hierbei mußten Volumina und Flächeninhalte berechnet werden, und es waren die benötigten Mengen an Baustoffen und Arbeitskräften sowie der Aufwand für deren Verpflegung und Entlohnung zu ermitteln. Die Finanzämter hatten die Verteilung der Steuerlasten vorzunehmen, die sich nach den einzelnen Besteuerungsnormen richtete, sowie die Naturalabgaben zu regeln, die von der Bodenqualität, der Entfernung zum Sammelpunkt u. dergl. abhängig waren. Hinzu kamen verschiedenartigste Aufgaben aus der Handelspraxis und, insbesondere in den arabischen Ländern, Aufgaben über die Aufteilung von Erbschaften, bedingt durch die verhältnismäßig komplizierten Richtlinien des muselmanischen Erbrechts. Von praktischem Interesse war offenbar die Bestimmung

der Entfernung nach unzugänglichen Objekten bzw. die Ermittlung der Abmessungen solcher Gegenstände. Daraus entsprang ein reichhaltiges Material, aus dem verschiedene Klassen typischer Aufgaben über Proportionen, über lineare Gleichungen, über lineare Gleichungssysteme und über das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln hervorgingen. Bei komplizierteren Problemstellungen ergaben sich Aufgaben zur Auflösung quadratischer und sogar kubischer Gleichungen.

Typisch in diesem Sinne ist die klassische chinesische Abhandlung „Mathematik in neun Büchern" (Jiu zhang suan shu) [42], die etwa im 2. bis 1. Jahrhundert v. u. Z. nach älteren, uns nicht überlieferten Quellen zusammengestellt worden war. Es handelt sich um eine Aufgabensammlung mit Lösungen und lakonischen Lösungsanweisungen. Häufig sprechen hier bereits die Titel einzelner Bücher für sich: „Feldmessung", „Beziehungen zwischen den verschiedenen Getreidearten" usw. Tausend Jahre später schrieb einer der Begründer der arabischen Mathematik und Astronomie, Muhammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmi, am Anfang seines „Kurzen Buches über Rechnungen der Wiederherstellung und Gegenüberstellung"[1]) (Al-kitāb al-muktaṣar fi ḥiṣāb al-ǧabr wa-l-muqābala), daß er in sein Buch all das aufgenommen hat, was „die Leute ständig bei Erbschaftsfragen und Testamenten, bei der Aufteilung von Vermögen und in Gerichtsprozessen sowie in verschiedenen gegenseitigen Beziehungen, sowohl bei der Landvermessung, beim Bau von Kanälen, in der Geometrie und in verschiedenen anderen Fragen benötigen" [104, S. 4, englisch].

Die mathematische Problematik wurde jedoch nicht nur unmittelbar durch die Bedürfnisse des wirtschaftlichen Lebens oder des Staates bestimmt. Die Praxis förderte die Entwicklung der Mathematik auch durch die Vermittlung anderer Wissenschaften, vornehmlich der Astronomie. Die Erforschung der Gesetzmäßigkeiten bei den astronomischen Erscheinungen und die Kalenderberechnungen bedurften besonderer mathematischer Methoden. In China wurden erfolgreiche Arbeiten am Kalender und an der Abstimmung des Sonnenjahres auf die Mondmonate bereits im 14. Jahrhundert v. u. Z. durchgeführt. In China und Indien hing die Auflösung unbestimmter Gleichungen in ganzen Zahlen, wie wir sie später auch in der arabischen Literatur finden, ebenfalls mit der Astronomie zusammen. Auf die Astronomie geht ferner eine ganze Reihe chinesischer Arbeiten zur Interpolation mit Hilfe empirischer Formeln bis einschließlich des 3. Grades zurück. In Indien und später in den arabischen Ländern wurden für astronomische Bedürfnisse die Trigonometrie und der damit zusammenhängende Apparat von Näherungsrechnungen entwickelt. Im Kalifat von Bagdad wirkte sich in ähnlicher Richtung die Geodäsie aus: hier wurden im 9. Jahrhundert nach dem Beispiel des antiken Alexandria Gradmessungen vorgenommen. Etwa hundert Jahre früher wurde die Länge eines Meridiangrades in China vermessen. Bezeichnend ist die Tatsache, daß die meisten Mathematiker des Orients gleichzeitig auch Astronomen waren.

In allen Gesellschaftsordnungen, in denen die mathematischen Kenntnisse über die Grenzen eines Rechnens mit kleinen Zahlen und über einfachste Messungen hin-

[1]) Gemeint sind Gleichungsumformungen durch „Hinüber- und Herüberschaffen". Hieraus ist später das Wort Algebra entstanden. (D. Red. d. dt. Ausg.)

ausgehen, stoßen wir auf eine mehr oder weniger intensive Eigenentwicklung der Mathematik. Sie hat wegen ihrer hohen Abstraktheit, ihrer Allgemeinheit und der inneren Wechselbeziehungen ihrer Begriffe und Methoden stets, wenigstens zum Teil, für die Zukunft gearbeitet. Dies ist bereits in Mesopotamien und in Ägypten zu beobachten. Ebenso lagen die Dinge in China und Indien. In der bereits erwähnten altchinesischen „Mathematik in neun Büchern", in der viele Aufgaben und ganze Bücher unmittelbar auf die Anwendungen abgestimmt sind, gibt es andere umfangreiche Abschnitte, die zwar aus einer Analyse praktischer Probleme hervorgegangen sind, in jener Zeit jedoch vornehmlich nur von abstraktem Interesse war. Eben durch eine derartige immanente Entwicklung entstand z. B. ein Algorithmus zur Auflösung eines Normalsystems linearer Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten, wie wir ihn im achten Buch der „Mathematik in neun Büchern" finden.

Das gleiche gilt für eine allgemeine Methode zur numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen beliebig hohen Grades, die durch Verallgemeinerung der Methode zum Ausziehen von Kubik- und Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen entstanden war. Beispiele dieser Art, etwa eine zyklische Methode zur Lösung der Pellschen Gleichung, trifft man nicht selten auch in der indischen Mathematik an, von der arabischen ganz zu schweigen.

Wir haben nun in allgemeinen Zügen den Gegenstand der mathematischen Untersuchungen der orientalischen Länder im Mittelalter umrissen. Es soll nunmehr einiges über die Methode dieser Forschungen gesagt werden.

In einigen Arbeiten zur Wissenschaftsgeschichte wurde die Meinung geäußert, daß die Mathematik des antiken China rein empirisch war. Es wird darauf hingewiesen, daß die alten chinesischen Bücher keine Beweise enthalten, daß sie im wesentlichen Rezeptsammlungen sind, die durch Beispiele erläutert werden. Viele chinesische Werke über Mathematik enthalten in der Tat keinerlei theoretische Schlußfolgerungen. In dieser Beziehung jedoch ähneln die chinesischen Bücher vielen Büchern mittelalterlicher indischer, arabischer und europäischer Verfasser über praktische Arithmetik oder Geometrie. Man muß aber zwischen der Art der Darstellung, die hauptsächlich durch den Zweck des Buches bestimmt ist, und den Untersuchungsmethoden unterscheiden. Der Dogmatismus der Darstellung, das mechanische Auswendiglernen verschiedener Regeln sowie die Vielfalt und Zersplitterung der letzteren waren dadurch bedingt, daß die mittelalterlichen Lehrbücher vor allem für Praktiker, wie Kaufleute, Landvermesser, Beamte, Bauleute usw., bestimmt waren. Solche Leser benötigten mechanische und nach Möglichkeit kurze Regeln zur Lösung eines scharf umrissenen und engen Problemkreises.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß keineswegs sämtliche alten chinesischen Werke über Mathematik frei von Schlußfolgerungen und Erläuterungen sind. Beides ist z. B. in verschiedenen Werken enthalten, deren Ziel die Erläuterung und Weiterentwicklung der „Mathematik in neun Büchern" war. Viele wissenschaftliche Ergebnisse konnten überhaupt nicht empirisch gewonnen werden und mußten sich auf eine logische Deduktion stützen. Es dürfte auch kein Zweifel daran bestehen, daß bei der Ausbildung der Fachleute, d. h. der Mathematiker und Astronomen, gelegentlich Beweise mündlich dargeboten wurden.

Verschiedene Teile der Mathematik standen natürlich in Wechselwirkung. So wurden mitunter arithmetische Aussagen, z. B. Summationsregeln für gewisse Reihen, geometrisch begründet; andererseits wurde die Algebra bei der Lösung geometrischer Aufgaben angewandt, indem diese durch Gleichungen ausgedrückt wurden. Demgegenüber finden wir in der alten chinesischen Mathematik keine entwickelten deduktiven Systeme, wie sie für das klassische Griechenland charakteristisch sind, keine Herausbildung geometrischer Axiome, keine logisch aufgebaute theoretische Arithmetik u. dergl. Die Mathematik gliederte sich hier noch nicht in verhältnismäßig selbständige Zweige, obwohl Ansätze für eine derartige Gliederung bereits in einer Aufspaltung der Regeln und Aufgaben augenscheinlich wurden. Insbesondere schälte sich auch die Geometrie nicht als besondere Wissenschaft heraus. Hier läßt sich eine gewisse Parallele zur babylonischen Wissenschaft ziehen, über die Neugebauer schrieb: „Im Vergleich zum algebraischen und numerischen Bestandteil in der babylonischen Mathematik ist die Rolle der ‚Geometrie' sehr unbedeutend. Das ist jedoch nicht an sich verwunderlich. Das Zentralproblem in der frühen Entwicklung der Mathematik liegt in der numerischen Bestimmung der Lösung, die gewisse Bedingungen erfüllt." Weiter schreibt er: „... die ‚Geometrie' ist keine besondere mathematische Disziplin, sondern sie wird auf der gleichen Ebene behandelt wie irgendeine andere Form numerischer Beziehungen zwischen praktischen Dingen." [48a, S. 44—45, englisch]. Im übrigen war der Umfang der geometrischen Kenntnisse in China erheblich größer als in Babylon.

Die Frage nach den Gründen für diese Besonderheit der altchinesischen Mathematik ist äußerst schwierig zu beantworten. Eine andere Seite der gleichen Frage ist das Problem der Entstehung und erfolgreichen Entwicklung einer deduktiven Wissenschaft in Griechenland. Wir wollen uns mit der Bemerkung begnügen, daß die Antwort letztlich wahrscheinlich in dem großen Unterschied zu suchen ist, der zwischen der Struktur und Ideologie der griechischen Stadtstaaten, d. h. von Sklavenhalterstaaten mit einer verhältnismäßig demokratischen Regierungsform, auf der einen Seite und den agrarbürokratischen feudalistischen oder halbfeudalistischen Despotien des Ostens auf der anderen Seite bestand.

Das Niveau der Mathematik in Indien und insbesondere in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens war in theoretischer Hinsicht erheblich höher als in China. Hier äußerte sich der Einfluß der griechischen Wissenschaft, und zwar weniger nachhaltig in Indien, wo die Bindung zu den fernen Zentren der hellenistischen Welt, die durch die Züge Alexanders des Großen hergestellt worden waren, nicht allzu eng waren, dagegen erheblich intensiver in den islamischen Ländern, zu denen die Territorien der früheren hellenistischen Länder gehörten. Die Gelehrten des Nahen und Mittleren Ostens übernahmen im 8. bis 9. Jahrhundert von den Griechen nicht nur reiche Vorräte an konkretem Wissen, sondern lernten auch deren deduktive Methoden der Forschung und Darstellung beherrschen. Gerade darin unterschied sich die Mathematik in den arabischen Ländern von der chinesischen und, in geringerem Maße, von der indischen. Darin lagen auch ihre besonderen Vorzüge.

Im Mittelpunkt des Interesses der Mathematiker im Nahen und Mittleren Osten standen die gleichen Probleme wie in China und Indien. Doch waren sie, gestützt auf

das griechische Erbe, in der Lage, in der Entwicklung der numerischen Mathematik wesentlich weiterzugehen. Hatten sich z. B. die Inder darauf beschränkt, in der Trigonometrie die Sehne durch den Sinus zu ersetzen, den Kosinus und den sinus versus einzuführen und auf die Berechnung wenig umfangreicher Tabellen für einfachste Zusammenhänge anzuwenden, die lediglich auf dem Satz des Pythagoras beruhten, so gelang es den Mathematikern in den Ländern des Islams, die Trigonometrie als eine weitverzweigte Wissenschaft aufzubauen. Das starke Interesse an den algebraischen Aufgaben der Geometrie führte hier nicht nur wie in China zur Entwicklung von Methoden für die numerische Auflösung von Gleichungen, sondern zur Entstehung der Algebra als selbständige Disziplin. Ein prägnantes Beispiel für die theoretische Bearbeitung konkreter Operationen der numerischen Mathematik ist hier die Entwicklung einer allgemeinen Proportionenlehre und die Einführung des Begriffes der (positiven) irrationalen Zahl. Doch wollen wir hier keineswegs behaupten, daß die arabischen Mathematiker sich ausschließlich mit numerischen Problemen und den damit zusammenhängenden Verallgemeinerungen beschäftigt haben. Diese Probleme standen zwar im Vordergrund, und mit der Zeit gewannen sie auch immer mehr an Bedeutung, jedoch wurden in den islamischen Ländern wertvolle Ergebnisse auch in klassischen Richtungen gewonnen, z. B. auf dem Gebiet der Grundlagen der Geometrie in der Parallelenlehre.

Die Allgemeinheit der mathematischen Forschung in den asiatischen Ländern wurde durch die wirtschaftlichen, politischen und kulturellen Verbindungen aufrechterhalten. Selbstverständlich waren in jener Zeit die wissenschaftlichen Kontakte unregelmäßig, sie rissen häufig ab. Betrachtet man jedoch große Zeiträume, so erkennt man ihre bedeutende Rolle. Welche Kontakte bestanden haben, ist zur Zeit noch nicht vollständig erforscht. Die Untersuchung ist dadurch erschwert, daß in den entsprechenden Werken keinerlei Hinweise auf die Arbeiten anderer Gelehrter vorhanden sind. Wir sind hier gezwungen, uns auf die Daten der allgemeinen Geschichte, auf die chronologische Folge der Entdeckungen, auf die uns bekannten Reisen der antiken Gelehrten, auf die Ähnlichkeit der Aufgaben und Methoden u. ä. zu stützen. Nur die Gesamtheit aller dieser Angaben erzeugt ein mehr oder weniger klares Bild, in dem dennoch verschiedene Lücken klaffen.

Der Geschichte der Mathematik in den Ländern des Orients sind die ersten drei Kapitel dieses Buches gewidmet. Das vierte Kapitel behandelt die Mathematik in Europa. Die Entwicklung der Mathematik im mittelalterlichen Europa begann auf einem sehr niedrigen Niveau. In Rom und seinen westeuropäischen Provinzen gab es keine naturwissenschaftlichen Zentren wie in den östlichen Gebieten des Weltreichs. Die neuen Feudalstaaten der Franken, der Germanen, der Kelten, der Slawen und der anderen Völker übernahmen nur ganz bescheidene arithmetisch-geometrische Kenntnisse angewandter Natur, die sich im frühen Stadium des europäischen Feudalismus mit seiner primitiven Technik, mit seinem spärlichen Handel und seinen kaum erwähnenswerten äußeren Bindungen als ausreichend erwiesen. Die Lage änderte sich in der Zeit des entwickelten Feudalismus, der Entstehung der Städte und der nationalen Monarchien. Vom 11. und 12. Jahrhundert an eröffneten sich den Europäern die Reichtümer der arabischen und antiken Kultur auf der Pyrenäenhalbinsel

durch Kriegszüge oder Handelsreisen in den islamischen Ländern Asiens und Afrikas sowie in Byzanz. Sehr rasch wurde die arabische philosophische und wissenschaftliche Literatur erschlossen und über diese oder auch unmittelbar das antike Schrifttum. Es entstand eine eigene Literatur in lateinischer Sprache und später auch in den neuen Nationalsprachen. Die mathematischen Ideen und Methoden des feudalen Ostens fanden einen guten Nährboden in den in ihrer sozialen Struktur ähnlichen Ländern Europas und trugen hier neue Früchte. Im 13. und 14. Jahrhundert begannen die Gelehrten Italiens, Frankreichs, Englands und Deutschlands nicht nur den größten Teil der mathematischen und astronomischen Kenntnisse ihrer Lehrer schöpferisch zu beherrschen, sondern hatten in einigen Richtungen, z. B. der Algebra, auch Fortschritte zu verzeichnen. Darüber hinaus entstanden hier Keime der Idee der Funktion, ihrer grafischen Darstellung und neuer infinitesimaler Methoden als erste Vorboten für das Eintreten der Mathematik in eine neue Entwicklungsperiode, die Methode der Mathematik der variablen Größen.

DIE MATHEMATIK IN CHINA

Vorbemerkungen. Vereinzelte Mitteilungen über die Mathematik Chinas in der ältesten Zeit gehen auf die Mitte des 2. Jahrtausends v. u. Z. zurück; sie stützen sich hauptsächlich auf Angaben über den Kalender. Die Landwirtschaft war bereits zu dieser Zeit die Hauptbeschäftigung der Bevölkerung, und eine richtige Bestimmung der Zeiten für die Aussaat und die Ernte der Hirse und anderer Getreidearten erlangte eine entscheidende Bedeutung für die gesamte Wirtschaft. Daher wurde in China die Beobachtung der Tag- und Nachtgleichen sowie der Sonnenwenden durch besondere gelehrte Beamte z. B. nach der Kulmination einzelner Sterne durchgeführt, und die Vervollkommnung des Kalenders über Jahrtausende war eine wichtige Funktion des Regierungsapparates. Bereits im 14. Jahrhundert waren die Astronomen bemüht, den allgemein gebräuchlichen Mondkalender mit dem Sonnenkalender in Einklang zu bringen. Die Einteilung in große und kleine Monate zu je 30 bzw. 29 Tagen war durch die Mondphasen gegeben, jedoch war das zwölfmonatige Mondjahr mit 354 Tagen für die Bedürfnisse der Landwirtschaft äußerst ungünstig. Die Tage des Jahreszeitenwechsels sind in diesem Kalender *nicht* starr an irgendwelche Daten gebunden: Das Mondjahr ist elf Tage kürzer als das tropische, dessen Dauer die Chinesen mit $365\,^1/_4$ Tagen recht genau angegeben haben. Um 600 v. u. Z. wurden in China nach jeweils 19 Jahren sieben zusätzliche Monate eingebaut: der neunzehnjährige Sonnenzyklus unterscheidet sich von 235 Mondmonaten um weniger als einen vollen Tag. In Griechenland hat der Athener Meton den gleichen Zyklus etwa 150 Jahre später eingeführt [39].

Die zugehörigen Kalenderberechnungen erforderten gute arithmetische Kenntnisse. Leider besitzen wir über die Entwicklung der Mathematik in China bis zum Beginn unserer Zeitrechnung keine hinreichend ausführlichen Angaben.

In dem ersten uns überlieferten speziell mathematischen Werk, der „Mathematik in neun Büchern", finden wir bereits einen sehr reichhaltigen Wissenskomplex vor, der den Zustand der Mathematik zur Zeit der Frühen Han-Dynastie (206 v. u. Z. bis 25 u. Z.) kennzeichnet.

Das Reich der Han-Dynastie, in dem sich bereits die feudalistischen Verhältnisse weit entwickelt hatten, umfaßte ein sehr großes Territorium. Zu dieser Zeit wurden große Straßenbauarbeiten vorgenommen. Kurz zuvor wurde der Bau der großen chinesischen Mauer begonnen, und das hydrotechnische Bauwesen entwickelte sich stark. Die Herrscher der Han-Dynastie verwandten große Sorgfalt auf die Festigung des weitverzweigten Staatsapparates, der sämtliche großen Bauunternehmen leitete, die Steuern einnahm, den Frondienst organisierte und ähnliche Funktionen mehr innehatte.

Zur Zeit der Herrschaft der Frühen und Späten Han-Dynastie (bis 220 u. Z.) wurden die astronomischen Arbeiten erfolgreich fortgesetzt. Die Sternkataloge wurden präzisiert und erweitert, der Sonnenkalender wurde vervollkommnet usw. Neben der seit altersher verwendeten Wasseruhr kam die Sonnenuhr in Gebrauch. Die Beobachtungsarbeit erreichte eine hohe Vollkommenheit. So wurde die Zeit für einen stellaren Umlauf des Saturns, die hundert Jahre v. u. Z. mit 28 Jahren angenommen wurde, kurz vor Beginn unserer Zeitrechnung mit 29,79 und am Ende des 1. Jahrhunderts u. Z. mit 29,51 Jahren angegeben, ein Wert, der den richtigen Wert um nur 0,05 Jahre übersteigt. Der hervorragende Astronom Zhang Heng (1.—2. Jahrhundert) konstruierte einen drehbaren Globus und ein Planetarium und lehrte die Kugelgestalt der Erde sowie die räumliche und zeitliche Unendlichkeit des Weltalls. Ferner leitete er eine Reihe von Arbeiten zu einer genaueren Berechnung des Wertes von π ein. Etwa 330 entdeckte Yu Xi erneut die Präzession der Tag- und Nachtgleichen, und an der genaueren Ermittlung ihrer Werte arbeiteten die Beobachter auch später.

Die chinesische mathematische Literatur aus dem ersten Jahrtausend unserer Zeitrechnung ist nur zu einem geringen Teil erhalten geblieben. Aus den überlieferten Werken und Chroniken geht hervor, daß in den ersten fünf Jahrhunderten die Methoden der „Mathematik in neun Büchern" weiterentwickelt wurden. Daran waren so hervorragende Kommentatoren beteiligt wie Liu Hui (3. Jahrhundert), ferner Sun-zi (3. oder 4. Jahrhundert), Zu Chong-zhi (5. Jahrhundert), Liu Zhuo (6. Jahrhundert), Li Chun-feng (7. Jahrhundert) und andere.

Ungeachtet der häufigen äußeren und inneren Kriege und der häufigen Bauernaufstände wurde das chinesische Reich immer mächtiger. Zur Zeit der Tang-Dynastie (618—907) war China das größte Reich und erstreckte sich vom Stillen Ozean bis nach Tibet sowie von der Großen Mauer bis nach Vietnam. In den großen Städten blühte das Handwerk. Chinesischen Ingenieuren gelangen zu dieser Zeit wertvolle Erfindungen. Für die Entwicklung der Wissenschaft war die Erfindung der Buchdruckerkunst von großer Bedeutung, die im 7. Jahrhundert Holzschnittplatten und im 11. Jahrhundert bereits bewegliche Lettern verwendete. Mit der Papierherstellung wurde bereits im 1. oder 2. Jahrhundert begonnen. Ein hervorragendes Beispiel für die Tätigkeit der chinesischen Ingenieure ist der große Kanal, der die südlichen Gebiete des Landes mit den nördlichen verbindet. Sein Bau wurde im 7. Jahrhundert begonnen. Als der Kanal im 13. Jahrhundert nach mehreren Bauunterbrechungen fertig war, hatte er eine Länge von 1700 km.

Zur Zeit der Tang-Dynastie wurden auch die internationalen Beziehungen bedeutend erweitert. Bereits im 2. Jahrhundert v. u. Z. trieb China einen Karawanenhandel mit Mittelasien und über diese Zwischenstation auch mit Europa. Chinesische Seiden und Brokate waren in Rom sehr geschätzt. Im 1. Jahrhundert festigten sich die Beziehungen zu Indien, wovon die Ausbreitung des Buddhismus zu dieser Zeit in China zeugt. Chinesische Reisende — wie etwa Fa Xian Ende des 4./ Anfang des 5. Jahrhunderts — bereisten ganz Indien. Auf Wasserwegen über das Chinesische Meer und den Indischen Ozean wurden Verbindungen zwischen China und Indonesien, Indien, Persien und Arabien unterhalten. Im 7. Jahrhundert wirkten in China einzelne indische Gelehrte. Wie lebhaft die Beziehungen Chinas zu anderen Staaten zur Zeit der

Tang-Dynastie waren, zeigt der Reisebericht eines Arabers, nach dessen Angabe in der Hauptstadt Guanzhou (Kanton) zu jener Zeit etwa 120000 Ausländer wohnten.

Zur Zeit der Tang-Dynastie formte sich eine eigenartige Hierarchie des bürokratischen Apparates, zu dem auch wissenschaftliche Institutionen wie die Gelehrtenkammer und das astronomische Büro gehörten. Um staatliche Ämter bekleiden zu können, mußte man in China Prüfungen ablegen, darunter auch über Mathematik.

Es sei darauf hingewiesen, daß in China sehr früh dem mathematischen Unterricht große Bedeutung beigemessen wurde. Bereits zur Zeit der Zhou-Dynastie (1027—249 v. u. Z.) wurde ein System für die arithmetische Ausbildung sechs- bis achtjähriger Kinder ausgearbeitet. Das mathematische Bildungs- und Prüfungswesen hatte in der zweiten Hälfte des ersten Jahrtausends unserer Zeitrechnung einen hohen Stand erreicht. Das Lehrprogramm der kaiserlichen Akademie beinhaltete zur Zeit der Tang-Dynastie unter den sechs Disziplinen auch die Mathematik; dafür waren sieben Jahre vorgesehen. Im Lande gab es zu jener Zeit einen großen Stab von staatlich geprüften Mathematikern, deren Zahl während der Herrschaft des Kaisers Tai-zun (627—649) mit 3260 angegeben wurde.

Zu den bedeutendsten wissenschaftlichen Unternehmen dieser Zeit ist die Gradmessung zu rechnen. Die Idee, einen Meridiangrad mit Hilfe der Schnur auszumessen, wurde bereits um 600 u. Z. von Liu Zhuo geäußert, aber erst im Jahre 725 durch den Astronomen Nan Gong-yue verwirklicht. An der Gradmessung beteiligte sich auch Yi Xing, der nach dem Vorbild von Liu Zhuo an der Entwicklung von Interpolationsverfahren für astronomische Zwecke arbeitete.

Eine Einschätzung über die Genauigkeit dieser Vermessungsarbeiten läßt sich nicht geben, da wir nicht in der Lage sind, das Ergebnis von 351 li und 80 bu in unsere Maßeinheiten zu übersetzen. Ein Zeitgenosse von Yi Xing war der Astronom und Algebraiker Wang Xiao-tong, der sich u. a. mit der Auflösung numerischer kubischer Gleichungen beschäftigte.

Die dritte wichtige Periode in der Entwicklung der chinesischen Wissenschaft fällt in die Herrschaftszeit der Sung-Dynastie (960 — 1279). Der Überseehandel nahm einen noch größeren Aufschwung. Es entwickelte sich der Schiffsbau, die Seefahrer begannen den bereits bedeutend früher erfundenen Kompaß zu benutzen. Eine der ersten wissenschaftlichen Beschreibungen der Eigenschaften der Magnetnadel lieferte im 11. Jahrhundert der Ingenieur und Mathematiker Shen Gua, der sich außerdem mit Astronomie beschäftigte und einen Kalender vorschlug, der die klimatischen Besonderheiten des Jahreszeitenwechsels besser berücksichtigte. In der Technik und im Kriegswesen wurde Schießpulver verwendet. Durch die Beziehungen zum Ausland wurden geographische und kartographische Arbeiten gefördert. Eine hohe Blüte erreichte die Algebra, ihr sind die klassischen Abhandlungen von Qin Jiu-shao, Li Ye, Yang Hui und Zhu Shi-jie aus dem 13. Jahrhundert gewidmet. Neben diesen Namen ist noch der Astronom und Mathematiker Guo Shou-jing zu nennen. An der Grenze zwischen 13. und 14. Jahrhundert leitete Guo Shou-jing ein umfangreiches Netz von Observatorien, an denen äußerst genaue astronomische und geographische Beobachtungen angestellt wurden. Wie viele andere chinesische Mathematiker war auch er ein bedeutender Kalenderreformator.

Die Eroberungen der Mongolen im 13. Jahrhundert führten zu engeren Bindungen zwischen China und Mittelasien. Chinesische Gelehrte besuchten die Observatorien arabischer Länder, in Peking arbeiteten Fachleute aus Mittelasien. Infolge dieser Kontakte befruchteten sich Astronomie und Mathematik wechselseitig. Die Errungenschaften der chinesischen Gelehrten auf dem Gebiet der Algebra wurden im Westen verbreitet, die Geräte und wissenschaftlichen Kenntnisse der arabischen Astronomen wurden den Chinesen zugänglich. Im 13. und 14. Jahrhundert erschienen in China Handwerker und Kaufleute aus Europa.

Das Mongolenjoch, das erst um die Mitte des 14. Jahrhunderts abgeschüttelt werden konnte, lang andauernde und schwere Kriege und in der Hauptsache die Aufrechterhaltung der bürokratisch-feudalistischen Verhältnisse sowie die ökonomische Stagnation haben die weitere Entwicklung der Wissenschaft in China für lange Zeit aufgehalten. Die feudalistische Ordnung wurde dadurch weiter gefestigt, daß im 17. Jahrhundert mandschurische Eroberer in das Land einfielen und daß später das ganze große Land durch ausländische kapitalistische Großmächte geknebelt wurde. Aus dem 14. bis 16. Jahrhundert sind uns mehrere Dutzend Bücher über kaufmännische Arithmetik überliefert worden, die von Geschäftsleuten zwar sehr geschätzt wurden, jedoch wenig von eigentlich mathematischem Interesse sind. Vom Ende des 16. Jahrhunderts an wurden in China allmählich die neuen Entdeckungen der europäischen Mathematiker bekannt. Aber für lange Zeit blieb das Niveau der eigenständigen wissenschaftlichen Untersuchungen erheblich niedriger als im Europa der Neuzeit. Neue Wege der schöpferischen Entwicklung betrat die Mathematik in China erst nach dem Aufschwung der nationalen Befreiungsbewegung in den letzten Jahrzehnten und insbesondere nach dem Sieg des chinesischen Volkes und der Gründung der chinesischen Volksrepublik.

Wir hatten erwähnt, daß viele antike chinesische Werke über Mathematik nicht erhalten geblieben sind. Hinzu kommt noch, daß die uns überlieferte Literatur noch ungenügend erforscht ist und die Originalarbeiten der Klassiker der chinesischen Mathematik nur wenigen zugänglich sind. Eine vollständige Übersetzung in europäische Sprachen liegt nur für die erwähnte „Mathematik in neun Büchern" sowie für ein kleineres Werk über Geometrie von Liu Hui [46] vor.[1]) Für das übrige muß man sich auf Kommentare stützen [34, 40]. Viele äußerst wichtige Arbeiten über die Geschichte der Mathematik in China sind darüber hinaus in chinesischer Sprache erschienen [35, 36, 37].

Das altchinesische Zahlensystem. Die ältesten aufgezeichneten Zahlzeichen findet man in China auf Zauberwürfeln aus dem 14. bis 11. Jahrhundert v. u. Z., auf Hausrat aus Ton und Bronze und auf Münzen aus dem 10. bis 3. Jahrhundert; die größte dabei auftretende Zahl ist 30000. Bereits zu jener Zeit war das Zahlensystem dezimaler Natur. Die zugehörigen Ziffern für die Zahlen 1 bis 10 sind in der vierten und fünften Spalte der Tabelle 1 angegeben. Das Bildungsprinzip für die ersten vier Zah-

[1]) Während der Satzarbeiten an der deutschen Ausgabe erschien eine russische Übersetzung des Werkes von Sun-zi [43*c* und 43*d*].

len ist äußerst einfach: es sind parallele Striche. Der Ursprung der Ziffern für die Zahlen 5 bis 9 ist unbekannt; 10 wird wieder durch einen einzigen, jedoch vertikalen Strich bezeichnet.

Beim Schreiben großer Zahlen benutzte man sowohl das additive als auch das multiplikative Prinzip, wobei individuelle Zeichen für 100 und 1000 existierten. Für die Zahlen 11 bis 14 setzte man zu einem vertikalen Strich die erforderliche Anzahl kleiner horizontaler Striche hinzu. Die Zahlen 20 bis 40 stellte man entweder als einen Zweizack, Dreizack bzw. Vierzack dar oder indem man das Zeichen für die Zahl 10 mit dem Zeichen für die Zahl 2, 3 oder 4 durchstrich. Zur Darstellung der Zahl 50 oder etwa 80 setzte man über das Zeichen für 5 oder 8 das Zeichen für 10; Kombinationen der Zeichen für 2, 3 usw. mit den Zeichen für 100 und 1000 stellten die entsprechende Anzahl der Hunderter bzw. Tausender dar. Einige Elemente dieser Darstellungs-

Tabelle 1. Ziffern im China des Altertums und Mittelalters (nach J. Needham)

Ziffern	Hieroglyphenziffern	Aussprache	Ziffern auf Zauberwürfeln aus dem 14.–11. Jh. v. u. Z.	Ziffern auf Bronzegefäßen und Münzen aus dem 10.–3. Jh. v. u. Z.	Stäbchenziffern			
					2. Jh. v. u. Z. bis 12. Jh. u. Z.		13. Jh.	
					Einer	Zehner	Einer	Zehner
1	一	yi	—	—	𝍠	𝍡	𝍠	𝍡
2	二	er	𝌆	𝌆	𝍢	𝍣	𝍢	𝍣
3	三	xian	𝌇	𝌇	𝍤	𝍥	𝍤	𝍥
4	四	si	𝌈	𝌈	𝍦	𝍧	𝍦	𝍧
5	五	on	𝌉	𝌉	𝍨	𝍩	𝍨	𝍩
6	六	liu	𝌊	𝌊	𝍪	𝍫	𝍪	𝍫
7	七	qi	𝌋	𝌋	𝍬	𝍭	𝍬	𝍭
8	八	ba	𝌌	𝌌	𝍮	𝍯	𝍮	𝍯
9	九	jiu	𝌍	𝌍	𝍰	𝍱	𝍰	𝍱
10	十	shi	𝌎	𝌎				
100	百	bai	𝌏	𝌏				
1000	千	tian	𝌐					
10000	萬	wan						
0	零	ling					○	

weise drangen auch in die viel systematischere Schreibweise mit Hilfe der sog. Ziffernstäbchen ein.

Vom 4. Jahrhundert v. u. Z. an oder vielleicht schon früher verwendeten die Chinesen bei Berechnungen die Ziffernstäbchen (Tabelle 1), die anderthalb Jahrtausende lang, d. h. bis zum 13. Jahrhundert, und auch z. T. noch später gebräuchlich waren. Diese Ziffern wurden ebenfalls nach dem additiven Prinzip aus vertikalen und horizontalen Strichen gebildet. Eine übermäßige Anhäufung von Stäbchen, die eine Aufzeichnung unanschaulich machen würde, vermied man, indem man einem Stäbchen die Bedeutung 5 für die Zahlen 6 bis 9 und entsprechend die Bedeutung 50 für die Zahlen 60 bis 90 beimaß. Es könnte sein, daß wir es hier mit Resten eines Fünfersystems zu tun haben. In der betrachteten Zahlenschreibweise gibt es insgesamt 18 Ziffern, und zwar für die Einer von 1 bis 9 und für die Zehner von 10 bis 90. Beide Zifferngruppen sind sehr ähnlich und unterscheiden sich nur durch die Anordnung. Die Ziffernstäbchen wurden beim Schreiben genauso dargestellt wie die betreffende Zahl auf dem Rechenbrett (Abakus) mit Hilfe richtiger Stäbchen. Das Rechnen mit Hilfe der Ziffernstäbchen hatte Stellenwertnatur. Die Ziffern für die Einer dienten gleichzeitig zur Darstellung der Hunderter, Zehntausender usw., die Ziffern für die Zehner zur Darstellung der Tausender, Hunderttausender usw. Das Stellenwertprinzip finden wir bei dem chinesischen Gelehrten Sun-zi im 3. oder 4. Jahrhundert explizite ausgedrückt. Er schrieb: „Beim Rechnen müssen wir vor allem die Stellung der Zahlen kennen. Die Einer sind senkrecht, die Zehner waagerecht; die Hunderter stehen, während die Tausender liegen; somit haben die Tausender und Zehner gleiche Form, desgleichen die Zehntausender und die Hunderter." (Zitiert in [43, S. 23]).

Die Zahlen wurden in einer Reihe geschrieben. Die Zahl 6728 wurde z. B. wie folgt dargestellt:



Das System der Ziffernstäbchen ist das älteste aller dezimalen Stellenwertsysteme, ebenso wie das Zahlensystem der Babylonier das älteste sexagesimale Stellenwertsystem darstellt. In beiden Systemen wird jedoch das Stellenwertprinzip nicht bis zur letzten Konsequenz durchgeführt: im schriftlichen Zahlensystem der Ziffernstäbchen fehlte ein Zeichen für die Null. Das erklärt sich durch den unmittelbaren Zusammenhang des Ziffernstäbchenrechnens mit dem Rechenbrett. Das Fehlen eines Zeichens für die Null störte hier nicht, da die entsprechenden Stellen des Rechenbrettes einfach freigelassen wurden. Wahrscheinlich war gerade der Umstand, daß die meisten Berechnungen sogar nach der Erfindung des Papiers auf dem Abakus vorgenommen wurden, ein Hindernis für eine Vervollkommnung der chinesischen Zahlenschreibweise und für die Einführung eines Nullzeichens.

Das Symbol für die Null kam aus China nach dem Ausland. Es wird erstmalig in einer Abhandlung über Astronomie und Astrologie erwähnt, die zwischen 718 und 729 verfaßt worden ist. Der Autor dieser Abhandlung war der Inder Gautama Siddharta, der im Astronomischen Büro Chinas tätig war. Die Chinesen nannten ihn Qiutan Xida. Bei der Erläuterung der indischen Rechenmethoden weist Qiutan Xida darauf hin, daß zur Bezeichnung der Leerstelle in der betreffenden Spalte des Abakus ein Punkt zu setzen ist [40, S. 12]. Eine derartige Neuerung fand jedoch nicht sofort Eingang. Im

Druck tritt das Nullzeichen in Form eines Kreises erstmalig im Jahre 1247 im Werk „Neun Bücher über Mathematik" von Qin Jiu-shao auf. Übrigens vertreten einige chinesische Wissenschaftler die Auffassung, daß das Nullzeichen in China selbständig eingeführt worden ist.

Es gab in China auch andere Zahlensysteme. Sehr alt und beim Schreiben am gebräuchlichsten waren die Hieroglyphenziffern (Tabelle 1, Spalte 2), deren Form sich bereits im 3. Jahrhundert v. u. Z. herausgebildet hatte. Sie werden auch gegenwärtig noch angewandt, in der Wissenschaft sind sie jedoch vollständig durch die sog. arabischen Ziffern verdrängt worden. In diesem System gab es spezielle Zeichen für einige höhere Potenzen von 10, und beim Schreiben von Zahlen kam das multiplikative Prinzip zur Anwendung, mit dem das Stellenwertprinzip eng zusammenhängt. Hier existierten keine besonderen Hieroglyphen für 20, 200, 2000 usw. wie etwa im alphabetischen System, und zur Bezeichnung etwa der Zahl 200 hat man die Hieroglyphen von 2 und 100 nebeneinanderzusetzen. Hierbei wurden die Hieroglyphen für die Zehner, Hunderter usw. nur benutzt, um die Größenordnung der davorstehenden Einerziffer anzugeben; sie waren also keine selbständigen Ziffern. Um etwa die Zahl 325 darzustellen, mußte man hintereinander die Hieroglyphen für drei, hundert, zwei, zehn und fünf schreiben, d. h. verwendet man römische Ziffern für die Zehnerpotenzen und arabische Ziffern für die Einer, so würde die obengenannte Zahl in einer Zeile geschrieben 3C2X5 lauten. Diese Schreibweise spiegelt unmittelbar die mündliche Wiedergabe der Zahl dreihundert-zweizehn-fünf wider. Man könnte diese Schreibwiese als benanntes dezimales Stellenwertsystem ohne Nullziffer bezeichnen.

Wir wollen uns nicht bei den einzelnen Spielarten der Hieroglyphenziffern, etwa bei den kaufmännischen Ziffern, aufhalten.

Die gleichen Hieroglyphen für die höheren Zehnerpotenzen hatten bereits im 2. Jahrhundert v. u. Z. unterschiedliche Bedeutung. Nach einem Buch, das unter dem Namen von Xu Yue (etwa 190) überliefert ist, aber möglicherweise später von seinem Kommentator Zhen Luan (etwa 570) geschrieben wurde, haben drei Varianten des Zählsystems existiert: die „obere", die „untere" und die „mittlere".

	obere Variante	mittlere Variante	untere Variante
wan	10^4	10^4	10^4
yi	10^8	10^8	10^5
zhao	10^{16}	10^{12}	10^6
jing	10^{32}	10^{16}	10^7

Die höchste Potenz heißt zai, was in der mittleren Variante 10^{44} entspricht. Übrigens geht Xu Yue selbst nicht über die in der Tabelle angegebenen Potenzen hinaus. Von den drei Darstellungsmöglichkeiten war nach Shen Gua (11. Jahrhundert) die untere die älteste Variante.

Eine entsprechende Erscheinung finden wir auch bei anderen Völkern. So existierten nach den russischen mathematischen Handschriften des 17. Jahrhunderts in der

Mitte des Jahrhunderts zwei verschiedene Systeme von Grundeinheiten für die höheren Zehnerpotenzen — die „kleine Zählung" und die „große Zählung".

	kleine Zählung	große Zählung
Tma	10^4	10^6
Legion ..	10^5	10^{12}
Leodr ...	10^6	10^{24}
Woron ..	—	10^{48}

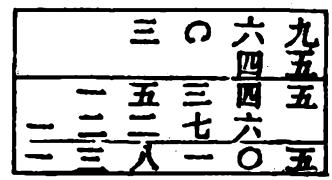


Abb. 1

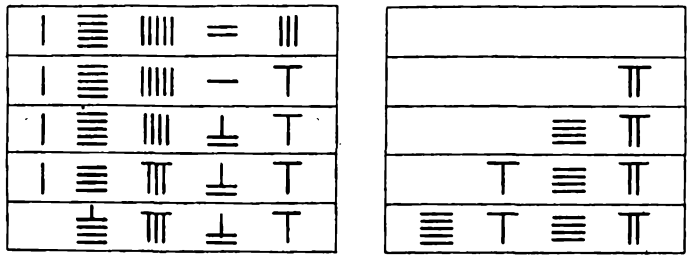
Eine weitere Parallele hierzu stellt die Zählweise nach Millionen, Billionen, Trillionen usw. dar, die sich in Europa im 14. und 15. Jahrhundert entwickelt hat. Heute noch werden in manchen Ländern die Billionen, Trillionen usw. durch die Größen 10^9, 10^{12} usw. dargestellt, d. h. durch Potenzen von 1000, während sie in anderen Ländern mit den Größen 10^{12}, 10^{18}, ..., d. h. mit Potenzen der Million bezeichnet werden.

Die chinesischen Hieroglyphenziffern wurden gewöhnlich zur Darstellung von Zahlen, jedoch nicht zum Rechnen benutzt. In späterer Zeit treten mitunter Zahlennotizen und Berechnungen im dezimalen Stellenwertsystem auf, jedoch mit Hieroglyphenzeichen für die ersten neun Ziffern und einem Kreis für die Null. (Vgl. dazu die Abb. 1 mit der Wiedergabe einer Aufzeichnung aus einer chinesischen Arithmetik vom Jahre 1355, in der die Multiplikation $3069 \cdot 45 = 138105$ dargestellt ist.) Einer analogen Erscheinung begegnen wir auch in der alexandrinischen Mathematik und später im Zahlensystem des mittelalterlichen Europa.

Das Rechenbrett. Wie bereits erwähnt, wurden sämtliche komplizierteren Berechnungen auf dem Rechenbrett mit Hilfe von Stäbchen vorgenommen. Im Grunde genommen wurde ein besonderes Rechenbrett gar nicht benötigt, da als solches jede horizontale ebene Fläche dienen konnte, auf der die Zahlenstäbchen spaltenweise ausgelegt werden konnten. Die Stäbchen hatten im antiken China eine Länge von 15 cm und eine Stärke von $^1/_2$ cm. Als Material diente hierzu Holz, später Gußeisen und für die Wohlhabenden Elfenbein. Die gleichen Stäbchen bedeuteten in horizontaler Lage Einer, Hunderter usw., in vertikaler Lage Zehner, Tausender usw.

Wir wollen uns nun an Hand von Beispielen vergegenwärtigen, wie man mit Hilfe von Stäbchen die einfachsten Rechenoperationen vornahm [41]. Wir addieren 9876 und 5647. Zunächst werden beide Zahlen nebeneinander gestellt. (Der im folgenden beschriebene und in der Tabelle 2 skizzierte Rechengang ist von unten nach oben zu lesen.) Sodann werden die Tausender des zweiten Summanden zum ersten Summanden hinzugezählt; es ergibt sich die Zahl 14876. Vom zweiten Summanden bleiben 647 übrig. Sodann werden die Hunderter des zweiten Summanden zur ersten Zwischensumme addiert. Analog verfährt man mit der zweiten Zwischensumme und den Zehnern des zweiten Summanden usw.

Tabelle 2



1	5	5	2	3
1	5	5	1	6
1	5	4	7	6
1	4	8	7	6
	9	8	7	6

			7
		4	7
	6	4	7
5	6	4	7

Tabelle 3

234	234	34	34	34	4	4	4	
	48	48	54	552	552	560	5616	5616
24	24	24	24	24	24	24	24	

Bei der Multiplikation, beispielsweise von 234 mit 24, die in Tabelle 3 wiedergegeben ist, wurde die niedrigste Stelle des Multiplikators 24 unter die höchste Stelle des Multiplikanden gesetzt und der Multiplikator mit 2 multipliziert. Das Resultat 48 wurde in der mittleren Zeile ausgelegt. Danach wurde der Multiplikator 24 um eine Stelle nach rechts verschoben, die Ziffer 2 im Multiplikanden weggelassen, 24 in zwei Schritten mit 3 multipliziert, und zwar wurde erst die 2 mit 3 multipliziert und 6 zu 48 addiert, was 54 ergab; anschließend wurde 4 mit 3 malgenommen und das Ergebnis 12 zu 540 addiert, was 552 ergab, usw.

Der beschriebene Rechengang unterscheidet sich von dem modernen dadurch, daß die Rechenoperation bei den höchsten Stellen begonnen wird und allmählich zu den niedrigeren Stellen fortschreitet. Diese Reihenfolge erforderte häufige Korrekturen der einzelnen Zwischenergebnisse. Eine weitere Besonderheit besteht darin, daß die Zwischenergebnisse und die bereits benutzten Ziffern der einen oder beider Zahlen allmählich vom Rechenbrett verschwinden. Beide Momente finden wir in der indischen und später auch in der arabischen Mathematik wieder.[1])

Wir wollen noch ein Divisionsbeispiel anführen, und zwar von 5616:24 = 234, das in Tabelle 4 wiedergegeben ist.

[1]) Die Griechen der Antike haben zumindest bei der Multiplikation ebenfalls bei den höchsten Stellen begonnen.

Tabelle 4

	2	2	23	23	234	234
5616	5616	1616	816	216	96	
24	24	24	24	24	24	

Es sei darauf hingewiesen, daß vor Beginn der Division die Stellenzahl des Quotienten bestimmt wurde. Hierzu wurde der Divisor, der vorher stellenweise unter dem Dividenden ausgelegt wurde, so lange nach links verschoben, bis die Anfangsziffern des Dividenden die kleinstmögliche Zahl darstellen, die den Divisor übersteigt. Dann ergibt die um eins vermehrte Anzahl der Spalten, um die der Divisor verschoben werden muß, die Anzahl der Ziffern des Quotienten. Bei der Division mit Rest bleibt dann schließlich auf dem Rechenbrett der ganzzahlige Teil des Quotienten, darunter der Rest und darunter wieder der Divisor stehen, so daß das Ergebnis aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch besteht.

Neben dem Rechnen mit Hilfe von Instrumenten wandte man natürlich in engeren Grenzen das mündliche Rechnen an. Die Kenntnis des Einmaleins bis zu 9×9 gehörte spätestens im 8. Jahrhundert v. u. Z. zum Bestand der mathematischen Ausbildung. Es sind auch mit Lack beschriebene Holztafeln erhalten geblieben, die die Produkte von 1×1 bis 9×9 enthalten. Die Archäologen geben als ihre Entstehungszeit das erste Jahrhundert u. Z. an.

Die chinesischen Mathematiker haben es im Stäbchenrechnen zu einer hohen Virtuosität gebracht. Mit seiner Hilfe nahmen sie nicht nur die vier Grundrechenarten vor, sondern auch das Ausziehen von Wurzeln und das numerische Auflösen algebraischer Gleichungen. Große Zahlen störten sie beim Rechnen nicht. In der „Mathematik in neun Büchern" treten sehr große Zahlen auf. Die größte davon ist 1644866437500, diese soll mit $\frac{16}{9}$ multipliziert werden.

Es gibt keine exakten Belege dafür, wie und wann eine andere Form des chinesischen Abakus, der Suanpan (Abb. 2) entstanden ist. Suanpan heißt wörtlich Rechenbrett. Bekannt ist lediglich, daß nicht später als im 7. Jahrhundert, vielleicht aber schon im 2. Jahrhundert v. u. Z. neben dem Rechnen mit Zahlenstäbchen andere Formen des instrumentellen Rechnens angewandt wurden. In einem alten Buch, das dem bereits erwähnten Xu Yue zugeschrieben wird (vgl. S. 15), sind derartige Methoden beschrieben. In dem einen Falle handelt es sich um ein Brett mit mehreren parallelen Drähten oder Fäden, auf die jeweils fünf Kugelperlen aufgezogen sind. Die jeweils letzte Perle auf jeder Schnur hatte eine Farbe, die von der der übrigen vier verschieden war; sie bedeutete fünf Einheiten der betreffenden Stelle, so daß durch die Kugeln sämtliche Ziffern bis 9 dargestellt werden konnten; die Kugeln mit

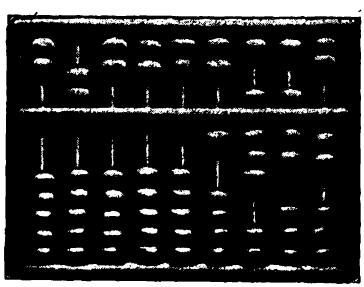


Abb. 2 Der chinesische Suanpan, auf dem die Zahlen 10^8 und 1872 abgetragen sind

dem Wert 5 sind von den Einerkugeln durch eine Leiste getrennt. Bei dem anderen Instrument zeichnete man zehn horizontale Geraden und verschob senkrecht zu diesen in einzelnen Spalten Kugeln; der Zahlenwert einer Kugel in einer Spalte wurde durch den Streifen bestimmt, in dem sich diese Kugel befand [40, S. 77].

Durch die Weiterentwicklung der ersten Form entstand offenbar der Suanpan, dessen Beschreibung wir in der Literatur des 15. und 16. Jahrhunderts finden. Der Suanpan erinnert an das russische Rechenbrett „Stschjoty". Der Suanpan besteht aus einem rechteckigen Rahmen, in dem mindestens 9 parallele Drähte oder Fäden gespannt sind. Senkrecht hierzu ist der Suanpan durch eine Leiste in zwei ungleiche Teile geteilt. Im größeren Teil sind auf jedem Draht je fünf Kugeln beweglich angebracht, im kleineren Teil je eine oder häufiger je zwei. Die ersteren entsprechen sozusagen den fünf Fingern, die letzteren einer Hand oder beiden Händen. Die Drähte entsprechen den Dezimalstellen. Jede Kugel in der kleineren Abteilung hat den fünffachen Wert der Kugeln, die sich auf dem gleichen Draht in der größeren Abteilung befinden. Zur Darstellung der Zahlen werden die Kugeln an die Trennungsleiste herangeschoben. Bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation genügt es, je eine Kugel aus der kleineren Abteilung zu benutzen, jedoch ist es bei der Division günstiger, beide Kugeln zu verwenden. Ebenso wie auf dem russischen Stschjoty lassen sich auch auf dem Suanpan die Berechnungen sehr rasch durchführen.

Gegen Ende des Mittelalters war der Suanpan nicht nur in China, sondern auch in Japan sehr weit verbreitet, wo er die Bezeichnung Soroban erhielt. In der kleineren Abteilung des Soroban befand sich auf den Drähten jeweils nur eine Kugel mit dem fünffachen Wert. Beide Geräte sind in diesen Ländern auch heute noch äußerst populär, genauso wie in der UdSSR die russischen Stschjoty.

Brüche. Die gemeinen Brüche der Form $\frac{m}{n}$ waren in China seit alters her bekannt. Ein besonderes Zeichen für die Brüche besaß man nicht und schrieb den Bruch $\frac{m}{n}$ im allgemeinen in der Form „m n-te Teile". Für die am häufigsten verwendeten Brüche gab es besondere aus alter Zeit überlieferte Namen und Hieroglyphen. So wird in den Büchern II bis VIII der „Mathematik in neun Büchern" ein Halb (ban) durch die Hieroglyphe 半, ein Drittel — „die kleine Hälfte" (shao ban) — durch 少半 bezeichnet, während zur Bezeichnung von zwei Dritteln — „große Hälfte" (tai ban) — die Hieroglyphe 太半 gebräuchlich war. In dem artihmetischen Leitfaden des Xiahou Yang (um 500 entstanden) finden wir auch einen besonderen Namen für ein Viertel — es wird dort als „schwache Hälfte" bezeichnet. Die Existenz besonderer Individualzeichen für die wichtigsten Brüche wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ist, wie wir wissen, nicht eine besondere Eigenschaft der chinesischen Mathematik; die gleiche Erscheinung finden wir z. B. bei den Griechen.

Die Rechenoperationen mit Brüchen, die ebenfalls auf dem Rechenbrett ausgeführt wurden, waren in der chinesischen Arithmetik bis ins einzelne entwickelt; dabei wurde von der Möglichkeit, die Brüche zu kürzen, reichlich Gebrauch gemacht. Davon zeugt z. B. die Tatsache, daß die ersten Aufgaben der „Mathematik in neun Büchern"

dem Kürzen von Brüchen gewidmet sind und der Addition und Subtraktion von Brüchen vorausgehen. Die Kürzungsregel lautet: „Das, was du durch zwei teilen kannst, teile durch zwei; kannst du nicht durch zwei teilen, so stelle die Größe des Zählers und des Nenners fest und ziehe vom größeren Wert den kleineren ab; setze das gegenseitige Vermindern solange fort, bis sich gleiche Zahlen ergeben; durch diese gleiche Zahl kürze dann" [42, S. 440, russisch].

Diese lakonische Regel ist nichts anderes als ein Verfahren zum Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Der Euklidische Algorithmus für zwei Zahlen a und b läßt sich bekanntlich durch das folgende Schema darstellen

$$\begin{aligned} a - bq &= r_1, \\ b - r_1 q_1 &= r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_{n-2} - r_{n-1} q_{n-1} &= r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned}$$

Übrigens spricht Eukleides ebenso wie die chinesischen Mathematiker nicht von einer Division der Zahl r_{k-1} durch r_k, sondern von einer Subtraktion der Zahl r_k von r_{k-1}, so oft sich diese ausführen läßt. Der größte gemeinsame Teiler ergibt sich folgendermaßen: „... man nimmt ... abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muß (schließlich) eine Zahl (nämlich r_n, der Verf.) übrig bleiben, die die vorangehende mißt" [33a, Buch 7, Satz 2].

Bei der schematischen Darstellung des Algorithmus aus der „Mathematik in neun Büchern" brauchen wir lediglich die letzte Zeile der oben angegebenen Gleichungen durch nachstehende zu ersetzen:

$$r_{n-1} - r_n (q_n - 1) = r_n;$$

hier tritt der größte gemeinsame Teiler r_n auf, sobald sich „gleiche Zahlen ergeben". Die ersten Worte der chinesischen Regel könnten möglicherweise aus der Zeit stammen, als Brüche nur in dem einfachsten Falle des geraden Zählers und Nenners gekürzt wurden.

Die Rechenoperationen mit Brüchen sind in den alten chinesischen Büchern äußerst komprimiert und nicht immer klar ausgedrückt. Dies gilt übrigens auch für viele andere Regeln und ist dadurch zu erklären, daß sie mündlich eingehender erläutert wurden. Nach der Regel aus dem Buch I der „Mathematik in neun Büchern" erhielt man den Nenner einer Summe von Brüchen, indem man die Nenner der Summanden multiplizierte; vom Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist nicht die Rede. Nach der Addition wurde die gewonnene Summe gekürzt. Im Buch IV desselben Werkes wird in den Aufgaben 1 bis 11 die sukzessive Addition folgender Brüche gefordert:

$$1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12}.$$

Als Hauptnenner dienen dabei die Zahlen 2, 6, 12, 60, 120, 420, 840, 2520, 2520, 27720 und 83160. Hier sind alle Nenner mit Ausnahme zweier (120 und 83160)

kleinste gemeinsame Vielfache. Möglicherweise wurde hier ein vollkommeneres Verfahren zum Aufsuchen des Hauptnenners mehrerer Brüche verwendet, jedoch ist diese Regel nicht explizite formuliert. Die moderne Regel für das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Nenners geht im Orient auf Abū-l-Wafā (10. Jahrhundert) und in Europa auf Leonardo Fibonacci von Pisa zurück; weite Verbreitung fand ihre Anwendung erst im 16. und 17. Jahrhundert [33, I, S. 171 bis 172].

Um eine Zahl durch einen Bruch zu dividieren, wurde der Dividend mit dem Nenner des Divisors multipliziert und das Ergebnis durch den Zähler dividiert. Diese für uns heute selbstverständliche Regel trat erstmalig in der chinesischen Mathematik auf; später finden wir sie bei den indischen Gelehrten Brahmagupta (7. Jahrhundert), Mahâvîra (9. Jahrhundert) und Bhâskara (12. Jahrhundert) wieder.

Die Mathematiker der Antike und des Mittelalters brachten beim Dividieren gemeiner Brüche beide Zahlen auf den Hauptnenner, wonach der Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors geteilt wurde. So verfuhren die Griechen der Antike und Byzantiner, die Mathematiker der arabischen Länder und des mittelalterlichen Europa. Erst Michael Stifel hat in seiner „Arithmetica integra" vom Jahre 1544 die Regel für die Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dessen reziprokem Wert erneut formuliert und ganz besonders auf die Einfachheit dieser Methode hingewiesen.

Erwähnenswert ist, daß die chinesischen Gelehrten bereits sehr frühzeitig auch die Zahl Eins als Spezialfall eines Bruches auffaßten; dies geht aus den ersten Aufgaben des Buches IV der „Mathematik in neun Büchern" hervor.

Dezimalbrüche. Die Dezimalschreibweise wurde in China auch auf Brüche ausgedehnt, und früher als in irgendeinem anderen Lande wurden hier die Dezimalbrüche benutzt. Dies hatte seinen Grund in der Entwicklung eines dezimalen Maßsystems. Bereits im 2. Jahrhundert v. u. Z. wurde das nachstehende Maßsystem verwendet:

1 chi[1]) = 10 cun,
1 cun = 10 fen,
1 fen = 10 li,
1 li = 10 fa,
1 fa = 10 hao.

Im 3. Jahrhundert wurde dieses System der Längenmaße weiterentwickelt, und zu dieser Zeit tauchten neben anderen Maßsystemen dezimale Maßsysteme für Volumen und Gewicht auf. Im 10. Jahrhundert wurde ein dezimales Maßsystem für Gewichte mit folgenden Einheiten offiziell eingeführt:

1 liang = 10 qian, 1 li = 10 hao,
1 qian = 10 fen, 1 hao = 10 si,
1 fen = 10 li, 1 si = 10 hu.

Die Geschichte der chinesischen dezimalen Maße ist bisher noch nicht vollständig erforscht worden. Möglicherweise war diese Entwicklung durch die weite Verbreitung

[1]) Die Länge eines chi schwankte zwischen 0,2 und 0,3 m.

des seinem Wesen nach dezimalen Rechenbrettes sowohl im täglichen Leben als auch in der Wirtschaft bedingt. Mitunter wird vermutet, daß die Termini in den Maßsystemen ursprünglich zur Bezeichnung des Stellenwertes der Abakusspalten gedient haben. Wie dem auch sei, diese Termini erhielten eine mathematische Bedeutung zur Kennzeichnung des Stellenwertes bei den Dezimalbrüchen.

Das Eindringen der Dezimalbrüche in die Mathematik wurde dadurch begünstigt, daß in den mathematischen Werken der Flächen- und Volumenmessung viel Platz eingeräumt wurde. Der Kommentator der „Mathematik in neun Büchern", Liu Hui, schrieb im 3. Jahrhundert die Länge eines Durchmessers von 1,355 Fuß in folgender Form: 1 chi, 3 cun, 5 fen, 5 li. Beim Ausziehen von nicht ganzzahligen Wurzeln schlug derselbe Gelehrte vor, Brüche mit den Nennern 10, 100 usw. zu verwenden[1]).

Somit traten die Dezimalbrüche zuerst als benannte Zahlen, d. h. als Einheiten eines dezimalen Maßsystems auf. Allmählich gewannen sie jedoch den Charakter abstrakter Dezimalbrüche. Noch im 7. Jahrhundert wurde der Näherungswert $\pi \approx 3{,}1415927$, der im 5. Jahrhundert von Zu Chong-zhi an einem Kreis mit dem Durchmesser von 10^8 Fuß bestimmt wurde, in der folgenden Form geschrieben: 3 zhang, 1 chi, 4 cun, 1 fen, 5 li, 9 hao, 2 miao, 7 hu. Doch bereits kurz darauf wurden schon die Bezeichnungen für die einzelnen Dezimalstellen weggelassen, und man trennte lediglich den ganzzahligen Anteil der Zahl von dem gebrochenen durch die spezielle Hieroglyphe „dian", die soviel wie „Punkt" bedeutet.

Dezimalbrüche trifft man sowohl bei Maßeinheiten als auch beim Ausziehen von Wurzeln in Dezimalschreibweise in den Werken der Algebraiker des 13. Jahrhunderts an. So verwandelte Yang Hui in vielen Fällen zuerst gemeine Brüche in Dezimalbrüche und geht erst dann zur Berechnung über. Bei der Ermittlung des Flächeninhaltes eines rechteckigen Feldes von 24 Schritt und $3\frac{4}{10}$ Fuß Breite und 36 Schritt und $2\frac{8}{10}$ Fuß Länge verwandelt er alles in Dezimalteile eines Schrittes (1 Schritt = 5 Fuß) und multipliziert dann

$$24{,}68 \cdot 36{,}56 = 902{,}3008.$$

Wir wollen uns nicht bei den Besonderheiten der Terminologie solcher Gelehrter des 13. Jahrhunderts, wie Yang Hui, Qin Jiu-shao, Li Ye und Zhu Shi-jie, aufhalten. Erwähnt sei lediglich, daß der Letztgenannte den Terminus „xiao-shu" verwendete, der auch heute noch die Bedeutung von „Dezimalbruch" hat[2]). Offenbar haben die chinesischen Gelehrten des 13. Jahrhunderts die Bequemlichkeit des Rechnens mit Dezimalbrüchen schätzen gelernt. Übrigens schrieb bereits im 5. oder 6. Jahrhundert Xiahou Yang, daß es bei der Division durch eine Potenz der Zahl 10 eigentlich nicht notwendig sei zu dividieren [40, S. 82f.]

Die Entdeckung der Dezimalbrüche war eine hervorragende Errungenschaft der chinesischen Mathematiker. Jedoch blieben die Dezimalbrüche bis zum Ende des Mittelalters eng an das dezimale Maßsystem gebunden. Eine vollständigere und

---

[1]) Vgl. Nachtrag (1) [am Ende des Buches].
[2]) Vgl. Nachtrag (2).

systematischere Darlegung und Begründung erhielt das System der Dezimalbrüche durch Ğamšid al-Kāši im 15. Jahrhundert und durch den Holländer Simon Stevin im 16. Jahrhundert.

Die „Mathematik in neun Büchern“. Wir wollen uns nun dem zentralen Werk der frühen chinesischen mathematischen Literatur, der „Mathematik in neun Büchern“ (Jiu zhang suan shu) [42, 43], zuwenden. In dieser Abhandlung finden wir die Zusammenfassung der Arbeit der Mathematiker, die im ersten Jahrtausend v. u. Z. gelebt haben. Darüber hinaus hat dieses Werk die gesamte weitere Entwicklung der Mathematik in China und teilweise auch außerhalb Chinas sehr stark beeinflußt. Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei dieser Abhandlung um das älteste uns überlieferte speziell mathematische chinesische Werk. Seine Sprache ist das Chinesisch des Altertums, das sich sehr erheblich von der modernen chinesischen Literatursprache unterscheidet.

Entstehungszeit, Quellen und Autoren der „Mathematik in neun Büchern“ sind uns nicht bekannt. Liu Hui, der die „Mathematik in neun Büchern“ im 3. Jahrhundert kommentierte, schreibt, daß dieses Werk nach älteren Quellen von Zhang Cang verfaßt worden sei, einem hohen Beamten des Finanzwesens, der lange Jahre hindurch den Posten des ersten Ministers bekleidet hat. Zhang Cang starb alten chinesischen Chroniken zufolge im Jahre 152 v. u. Z. Liu Hui berichtet, daß 100 Jahre später das Buch durch einen anderen hohen Beamten und Minister, Geng Shou-chang, überarbeitet worden sei, dessen Haupttätigkeit in die Regierungszeit des Kaisers Xuan-di (73—49 v. u. Z.) fällt.

Die „Mathematik in neun Büchern“ ist in der Fassung des Liu Hui aus dem Jahre 263 erhalten geblieben. Sie hat andere entsprechende Werke aus der Zeit der Han-Dynastie verdrängt, von denen nicht eines erhalten geblieben ist. Die „Mathematik in neun Büchern“ wurde mehrfach abgeschrieben und kommentiert, und zur Zeit der Tang-Dynastie wurde sie dem Sammelwerk „Zehn beispielhafte Abhandlungen über Mathematik“ eingegliedert, das bereits im Jahre 656 offiziell als Hauptlehrbuch eingeführt worden war. Die erste uns bekannte gedruckte Auflage dieses Werkes erschien im Jahre 1084.

Der Inhalt der „Mathematik in neun Büchern“ ist äußerst mannigfaltig. Im Grunde genommen ist es eine Enzyklopädie der mathematischen Kenntnisse, bestimmt für Geodäten und Baumeister, für Beamte des Finanz- und Wirtschaftswesens, für Kaufleute, Handwerker usw. In jedem Buch, ja nahezu in jeder Aufgabe fühlt man den Pulsschlag des Wirtschafts- und Verwaltungslebens des riesigen Staatsorganismus: Dort ist vom Warenaustausch, vom Kanal- und Deichbau, von der Errichtung von Befestigungsmauern, von Arbeitskräften, Steuern, von der Verteilung des Einkommens usw. die Rede. Wir haben bereits die charakteristischen Titel einiger Bücher wie etwa „Vermessung der Felder“ erwähnt. Im übrigen gibt es auch Bücher mit rein mathematischen Titeln. Recht eigenartig mutet die Stoffverteilung in der „Mathematik in neun Büchern“ an. Ihrem Wesen nach verschiedene Aufgaben werden mitunter in einem Buch zusammengefaßt, wobei als verbindendes Element nicht die gemeinsame Methode, sondern die Einheit des Gegenstandes der Aufgabe oder der Zusammenhang der Aufgaben vom Standpunkt des beruflichen Interesses u. dergl. dient.

So enthält z. B. das neunte Buch Aufgaben, in denen rechtwinklige Dreiecke angewandt werden, wobei in manchen Aufgaben der pythagoreische Lehrsatz, in anderen Aufgaben die Ähnlichkeit von Dreiecken ausschlaggebend ist. Im ersten Falle wird die Lösung quadratischer Gleichungen gefordert, im zweiten Falle wird die unbekannte Größe aus einer einfachen Proportion bestimmt.

In der „Mathematik in neun Büchern" spiegelt sich deutlich jener ungegliederte Zustand unserer Wissenschaft wider, von dem früher die Rede war (vgl. S. 6). Die Geometrie tritt nicht als selbständige Disziplin hervor, und es ist bezeichnend, daß ein Teil der geometrischen Kenntnisse im ersten Buch unter dem Titel „Vermessung der Felder", der andere Teil — über Volumenberechnungen — im fünften Buch unter dem Titel „Einschätzung der Arbeiten" zu finden ist, während die Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke im neunten Buch behandelt werden.

Die Darlegungen in der „Mathematik in neun Büchern" sind streng dogmatisch. Das Werk stellt eine Sammlung von 246 Aufgaben ohne einführende Texte, vorbereitende Erläuterungen usw. dar. Jedesmal wird erst die Aufgabe formuliert, dann wird die Lösung angegeben und schließlich, stets beginnend mit den Worten „Gemäß der Regel ...", in gedrängter Form auf die Lösungsmethode hingewiesen. In vielen Fällen reicht der Text nicht aus, um selbst von einem findigen Leser verstanden zu werden. Die Lektüre dieses Werkes setzte eine gewisse Vertrautheit mit den Anfangsgründen voraus, z. B. mit den vier Grundrechenarten und der Verwendung des Abakus, und bedurfte vielfach der mündlichen Erläuterung durch den Lehrer.

Das erste Buch der „Mathematik in neun Büchern" mit dem Titel „Vermessung der Felder" enthält Regeln zur Berechnung der Flächeninhalte einiger einfacher geradlinig begrenzter Figuren, des Kreises und seiner Teile sowie Hilfsbetrachtungen über die Rechenoperationen mit Brüchen.

Das zweite Buch mit dem Titel „Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten der Körnerfrüchte" beginnt mit einer umfangreichen Tabelle der Normen, unter denen die Körnerarten gegeneinander ausgetauscht werden können, z. B. Hirse, Bohnen, Weizen, Erbsen, Reis, Weinmaische usw. Dabei wurden 50 Einheiten unverarbeiteter Hirse gegen 30 Einheiten grob bearbeitete bzw. 27 Einheiten gereinigte bzw. 24 Einheiten besser gereinigte Hirse bzw. gegen 21 Einheiten der für Fürsten bestimmten Hirse getauscht. Danach folgen 31 Aufgaben, in denen es um die Bestimmung der Menge der einen oder anderen Warensorte geht, die gegen eine gegebene Menge einer anderen Sorte getauscht werden soll. An diese Aufgaben, die auf Proportionen mit einer unbekannten Größe führen, schließen sich Aufgaben an, bei denen nach dem bekannten Preis für eine bestimmte Anzahl gewisser Gegenstände der Preis für einen oder mehrere Gegenstände der gleichen Art ermittelt werden soll. Derartige Aufgaben erhielten später in Europa die Bezeichnung Dreisatzaufgaben. In den letzten Aufgaben des zweiten Buches wird der Preis mehrerer verschiedener Gegenstände aus Bedingungen ermittelt, die sich durch unbestimmte lineare Systeme ausdrücken lassen, wobei diese allerdings eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung besitzen.

Im dritten Buch über „Stufenweise Division" sind einige Aufgaben enthalten, in denen gewisse Größen proportional zu gewissen Zahlen aufgeteilt werden sollen. In der mittelalterlichen europäischen Literatur pflegte man derartige Aufgaben unter der

Rubrik „Genossenschaftsregel" zusammenzufassen. So wird in der ersten Aufgabe des dritten Buches gefordert, fünf Hirsche unter Beamte unterschiedlichen Ranges im Verhältnis der Zahlen 5:4:3:2:1 aufzuteilen. In der fünften Aufgabe soll ermittelt werden, wieviel Arbeiter jeder von drei Verwaltungsbezirken für den Frondienst abzustellen hat, wenn insgesamt 378 Mann benötigt werden und die Anteile der Verwaltungsbezirke, bezogen auf die Anzahl der Steuerzahler, den Zahlen 8758:7236:8356 proportional sind. Die gefundenen Lösungen müssen gerundet werden, da die unmittelbare Berechnung die gebrochenen Werte $135\frac{11637}{12175}$, $112\frac{4004}{12175}$ und $129\frac{8709}{12175}$ liefert. Es treten auch Dreisatzaufgaben auf.

Im vierten Buch, das den Titel „shao-guang"[1]) trägt, geht es um die Bestimmung der einen Seite des Rechtecks aus dessen Flächeninhalt und der anderen Seite, der Quadratseite aus dem Flächeninhalt des Quadrates und der Würfelkante aus dem Volumen des Würfels, ferner um die Ermittlung der Durchmesser von Kreis und Kugel.

Das fünfte Buch, „Einschätzung der Arbeiten", hat zum Gegenstand die Messung der Volumina von Mauern, Kanälen, Dämmen, Gräben verschiedenster, mitunter recht komplizierter Form und die Berechnung der Anzahl der Arbeiter, die für verschiedene Bauarbeiten benötigt werden. Es wird z. B. der Gesamtumfang der Arbeiten und die Arbeitsleistung eines Menschen im Winter, Frühjahr, Sommer und Herbst angegeben. Die Lösungen der Aufgaben führen häufig auf Brüche und werden daher gerundet.

Das sechste Buch, „Proportionale Aufteilung", enthält lineare Aufgaben unterschiedlichen Typs. Eine wichtige Aufgabenserie ist der Berechnung des Umfanges von Kornfruchtlieferungen aus vier Verwaltungsbezirken unter Berücksichtigung allmählich komplizierter werdender Bedingungen gewidmet: Die Ablieferungsquoten sind der Anzahl der Gehöfte proportional und umgekehrt proportional der Anzahl der Tage, die man zum Transport an den Ablieferungsort benötigt; außerdem werden der Getreidepreis in dem betreffenden Kreis und die Länge des Transportweges berücksichtigt. Ferner findet man Aufgaben zur Bestimmung des Weges bzw. der Zeit, der bis zum Treffpunkt zurückgelegt werden muß bzw. die bis zum Zusammentreffen verflossen ist, wenn zwei Wanderer einander entgegengehen oder in der gleichen Richtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten wandern. Des weiteren sind dort Aufgaben über Wasserbehälter vorhanden, wie sie etwa um die gleiche Zeit in Alexandria gerechnet wurden. Äußerst interessant ist eine Aufgabe über arithmetische Reihen, auf die wir an späterer Stelle noch zurückkommen werden (S. 78 bis 79).

Im siebenten Buch über „Überschuß und Mangel" werden Methoden zur Lösung von Systemen aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angegeben. Eine der Lösungsmethoden besteht darin, daß man für die Lösungen zwei willkürliche Annahmen macht und sie zunächst nur in die eine Gleichung einsetzt.

Das achte Buch, „fang-cheng", enthält den allgemeinen Algorithmus zur Lösung bestimmter linearer Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten[2]).

---

[1]) Dieser Terminus läßt sich schwer übersetzen und wird verschieden gedeutet.

[2]) Fang-cheng ist die Bezeichnung für diesen Algorithmus.

Das neunte Buch unter dem Titel „gou-gu" enthält, wie bereits erwähnt, eine Sammlung von Aufgaben zur Anwendung rechtwinkliger Dreiecke. Darunter gibt es Aufgaben zur Bestimmung von Entfernungen nach unzugänglichen Punkten, zur Ermittlung der Tiefe von Brunnen usw. Das Buch führt die Bezeichnung „gou-gu", da man mit „gou" die kleinere, horizontal angenommene und mit „gu" die größere und vertikal angenommene Kathete des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnete. Mit „gou-gu" bezeichnete man ferner auch den mathematischen Zusammenhang, der durch den pythagoreischen Lehrsatz vermittelt wird.

Zweifellos sind die einzelnen Bücher der „Mathematik in neun Büchern" zu verschiedenen Zeiten geschrieben worden; sie entsprechen dem jeweils erreichten Niveau der Mathematik. Sogar im gleichen Buch unterscheiden sich die Aufgaben mitunter sehr stark in ihrem Abstraktionsgrad. Die einen sind praktischer Natur und dürften als Beispiele zur Lösung gleichartiger oder ähnlicher Aufgaben aus dem Vermessungswesen, dem Handel usw. gedient haben. Andere stellen Übungen abstrakten Inhalts dar, obwohl sie in ein praktisches Gewand gekleidet auftreten. Es sind theoretische Aufgaben späteren Ursprungs, die aus den Aufgaben der ersten Gruppe dadurch hervorgegangen sind, daß man diese absichtlich komplizierter gestaltete oder variierte, indem man z. B. die Rollen von gegebener und gesuchter Größe vertauschte. Besonders häufig treten derartige Aufgaben in den drei letzten algebraischen Büchern auf, doch findet man sie auch in den ersten Büchern, die offenbar früher entstanden sind. Interessant ist die 18. Aufgabe aus dem ersten Buch, in der eine gewisse Summe unter $3^1/_3$ Personen aufgeteilt werden soll. Etwas Ähnliches findet man in den mathematischen Werken anderer Völker des Altertums nicht.

Infolge ihrer Inhomogenität überstieg die „Mathematik in neun Büchern" insgesamt gesehen bei weitem die Bedürfnisse der Kreise der niederen Beamten, Kaufleute usw., für die viele andere, elementare Leitfäden herausgegeben wurden. Diese enhielten die Anfangsgründe über die vier Grundrechenarten, über die einfachsten Dreisatzaufgaben und über die Berechnung der einfachsten Figuren.

Wir wollen nun die wichtigsten Methoden und Gedanken betrachten, die in der „Mathematik in neun Büchern" enthalten sind.

Lineare Aufgaben; die erste Methode des Überschusses und des Mangels. Die Behandlung von Aufgaben, die auf Systeme von linearen Gleichungen hinauslaufen, wird im siebenten und achten Buch der „Mathematik in neun Büchern" dargelegt. Sie ist einer eingehenden Analyse wert. In diesem Falle haben wir es wie auch in manchen anderen Fällen mit einer Anhäufung von Methoden zu tun, die zu recht verschiedenen Zeiten entwickelt worden sind.

Durch das ganze Buch hindurch ist zu beobachten, wie die linearen Aufgaben, angefangen von der einfachen Proportionalität und der Dreisatzregel, ständig komplizierter werden und die Lösungsmethoden schrittweise verbessert werden.

Es folgen Regeln zur Lösung spezieller Typen von Systemen mit zwei Unbekannten, sodann zur Lösung allgemeiner Systeme mit zwei Unbekannten nach der Methode zweier willkürlicher Annahmen und abschließend der allgemeine Algorithmus zur Lösung eines beliebigen eindeutig bestimmten Systems mit mehreren Unbekannten, das vor-

her auf die Normalform zu bringen ist. Hierbei wurden offenbar die speziellen Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten durch die allgemeineren und offenbar später entstandenen Methoden nicht verdrängt. Es gibt keinerlei Anhaltspunkte für Zusammenhänge zwischen diesen Methoden.

Am ältesten sind zweifellos die beiden Methoden des „Überschusses und Mangels", die im siebenten Buch auf lineare Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angewandt werden. Die erste Methode des „Überschusses und des Mangels" wird auf eine Aufgabengruppe (Aufgaben 1 bis 8) angewandt, bei der die Koeffizienten der einen Unbekannten gleich eins sind. Der Name der Methode hängt damit zusammen, daß in den Aufgaben von einem Überschuß oder einem Mangel eines gewissen Geldbetrages die Rede ist. In der zweiten Aufgabe des siebenten Buches z. B. werden die Anzahl der Käufer und der Preis des zu kaufenden Gegenstandes unter folgenden Bedingungen gesucht: a) wenn jeder Käufer die „Norm" 9 beiträgt, so ist der Überschuß 11; b) wenn jeder die „Norm" 6 beiträgt, so ist der Fehlbetrag 16. Die Lösungsregel wird in Worten formuliert. Aus dem Text geht hervor, daß die Berechnungen auf dem Rechenbrett durchgeführt wurden, auf dem die gegebenen Koeffizienten abgetragen wurden. Übrigens wird die Regel erst nach der 4. Aufgabe angegeben.

Da die Verfasser der „Mathematik in neun Büchern" im siebenten Buch nur mit positiven Zahlen operieren, zerfällt die Methode des „Überschusses und Mangels" in drei einzelne Regeln. Bei der ersten handelt es sich um die Lösung von Aufgaben, die in unseren Bezeichnungen durch das folgende Gleichungssystem wiederzugeben wären:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y + d_1, \\ a_2 x &= y - d_2 \end{aligned}\right\} \quad (a_1 > a_2); \tag{1}$$

hierbei sind die Normen a_1 und a_2, der Überschuß ist d_1 und der Fehlbetrag d_2.

Nach der Regel sind auf dem Rechenbrett die Normen der Aufgabe auszulegen; unter diesen sind entsprechend Überschuß und Fehlbetrag unterzubringen. Sodann ist über Kreuz zu multiplizieren. Anschließend sind die Produktsumme „shi" sowie die Summe von Überschuß und Fehlbetrag „fa" und die Differenz zwischen der größeren und der kleineren Norm zu bilden. Die Quotienten der Division von „shi" und „fa" durch die Differenz der Normen ergeben dann den Preis bzw. die Anzahl der Käufer. Treten Brüche auf, so werden diese zunächst auf den Hauptnenner gebracht: dadurch hat man beim gesamten Rechengang nur noch ganze Zahlen vorliegen.

In unseren Bezeichnungen sieht der Algorithmus zur Lösung des Systems (1) folgendermaßen aus: aus den Zahlen

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{matrix}$$

bildet man

$$\begin{aligned} \text{shi} &= a_1 d_2 + a_2 d_1, \\ \text{fa} &= d_1 + d_2, \\ \text{Differenz} &= a_1 - a_2 \end{aligned}$$

und berechnet die Unbekannten nach den Formeln

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2}, \qquad y = \frac{a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 - a_2} \tag{2}$$

Dieselbe Regel enthält auch noch eine weitere Lösungsvariante. Zunächst bestimmt man

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2},$$

und ermittelt dann aus den Gleichungen (1)

$$y = a_1 x - d_1$$

oder

$$y = a_2 x + d_2.$$

Die Regel zur Berechnung von y nach der ersten Variante wurde offenbar mit Hilfe algebraischer Umformungen gewonnen. Höchstwahrscheinlich wurde hier x durch Angleichen der Koeffizienten eliminiert. Diese Methode wird im achten Buch der „Mathematik in neun Büchern" verwendet.

An die Regel des „Überschusses und Mangels" schließen sich zwei analoge Regeln an. Sie lauten: „Beide Überschüsse — beide Mängel" und „Überschuß — Gleichgewicht oder Mangel — Gleichgewicht".

In der Regel „Beide Überschüsse — beide Mängel" werden Aufgaben betrachtet, die sich durch das System

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y + d_1, \\ a_2 x &= y + d_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y - d_1, \\ a_2 x &= y - d_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ausdrücken lassen; die zugehörigen (positiven) Lösungen lauten

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2}, \\ y &= \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 - a_2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}, \\ y &= \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In der zweiten Lösungsvariante ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2}, \\ y &= a_1 x - d_1 = a_2 x - d_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}, \\ y &= a_1 x + d_1 = a_2 x + d_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Regel „Überschuß — Gleichgewicht oder Mangel — Gleichgewicht" schließlich wurde auf Aufgaben angewandt, die sich durch Gleichungssysteme der Form

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y + d_1, \\ a_2 x &= y \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= y - d_1, \\ a_2 x &= y \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ausdrücken ließen. Die zugehörigen Lösungen lauteten

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1}{a_1 - a_2}, \\ y &= a_2 x \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d_1}{a_2 - a_1}, \\ y &= a_2 x. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

In den beschriebenen Regeln fand der wichtigste Wesenszug der antiken chinesischen Mathematik seinen Niederschlag, der sich auch im weiteren ganz klar äußerte, und zwar in dem Bestreben, bis ins einzelne durchgeführte Algorithmen zur Lösung bestimmter Aufgabenkomplexe zu gewinnen. Soweit bekannt ist, findet man eine derartige direkte Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten erstmalig in der chinesischen Literatur.

Bisher handelte es sich um Gleichungen, bei denen der Koeffizient der einen Unbekannten gleich eins ist. Der allgemeinere Fall eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten wird später in dem gleichen Buch VII nach einer anderen Methode gelöst, die übrigens zunächst nicht gesondert betrachtet wird und sogar unter dem gleichen Namen läuft. Diese zweite Lösungsmethode fand später weite Verbreitung in der indischen, arabischen und europäischen Literatur. Die Araber bezeichneten sie als die Regel zweier Fehler (vgl. S. 215), während sie in Europa als die regula duorum falsorum positionum (Regel der beiden falschen Ansätze) bezeichnet wurde.

Lineare Aufgaben; die zweite Methode des Überschusses und des Mangels oder die regula duorum falsorum positionum. Die Regel der beiden falschen Ansätze besteht, auf eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten

$$ax = b \tag{1}$$

oder

$$ax + c = d \tag{1'}$$

angewandt, darin, daß man der Unbekannten x zwei vom richtigen Wert verschiedene Werte x_1 und x_2 gibt, die beim Einsetzen in die linke Seite die Fehler d_1 und d_2 erzeugen:

$$\left.\begin{aligned} ax_1 &= b + d_1 \\ ax_2 &= b + d_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus erhält man leicht die Proportion

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2}$$

und damit den Wert für x:

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1} \tag{3}$$

Selbstverständlich liegt für die Anwendung der regula duorum falsorum positionum auf Aufgaben vom Typ (1) kein besonderer Grund vor. Die geschichtliche Rolle dieser Regel besteht darin, daß sie einen bequemen Algorithmus für die automatische Lösung beliebig komplizierter Aufgaben liefert, die sich durch lineare Gleichungen mit einer Unbekannten ausdrücken lassen; dabei wird weder eine Analyse der Aufgabe noch eine Darstellung in Form einer algebraischen Gleichung noch eine Umformung auf die „Normalform" (1) benötigt. Darüber hinaus läßt sich diese Regel auf Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten erweitern. Liegt z. B. das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

vor, so erhält man, sobald man x die Werte x_1 und x_2 gibt und dann die zugehörigen Werte y_1 und y_2 aus der ersten Gleichung des Systems bestimmt, nach Einsetzen dieser Werte in die zweite Gleichung praktisch anstelle des Systems eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten:

$$a_2 x + b_2 \left(\frac{c_1 - a_1 x}{b_1}\right) = c_2. \tag{5}$$

Nach der regula duorum falsorum positionum werden im Buch VII der „Mathematik in neun Büchern" die Aufgaben 9 bis 20 mit einer oder zwei Unbekannten gelöst. In sämtlichen zwölf Fällen liefert die eine falsche Voraussetzung ein zu kleines, die andere ein zu großes Ergebnis, d. h. Fehler mit verschiedenen Vorzeichen. Verwendet man daher nur positive Zahlen, so erhält die Lösung die Form

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}. \tag{3'}$$

Wahrscheinlich war die Strukturähnlichkeit der Ausdrücke (2) für y bei der ersten Methode des „Überschusses und Mangels" und des Ausdruckes (3') für x bei der zweiten Methode[1]) auch der Grund für die gleiche Bezeichnung und Zusammenfassung dieser beiden verschiedenen Methoden, obwohl sie zu verschiedenen Aufgabentypen gehören. Für den Leser dürften die ersten neun Aufgaben zur regula duorum falsorum positionum schwieriger gewesen sein, da sie hinsichtlich ihrer Formulierung keinerlei Ähnlichkeit mit den vorhergehenden aufweisen[2]), während der Rat zur Anwendung

[1]) Aber auch die Strukturähnlichkeit der Gleichungen (1) aus dem vorigen Paragraphen und der Gleichungen (2) in diesem Paragraphen, wobei d_2 im letzteren Falle als Subtrahend auftritt. Vgl. [43 *a*].

[2]) Hier seien noch die ersten beiden Aufgaben zur Regel der falschen Voraussetzung angegeben: Nr. 9. In einem Faß von 10 dou Inhalt ist eine unbekannte Menge Hirse enthalten. Das

der Regel des „Überschusses und Mangels" ohne zusätzliche Erläuterung unverständlich war, da z. B. im Ausdruck (3′) der Nenner die Summe aus Überschuß und Mangel darstellt, während bei der ersten Methode diese Summe den Dividenden (für x) lieferte und als Divisor die Differenz der Normen diente. Die Regel wird erst in der 18. Aufgabe formuliert, die wir nachstehend betrachten wollen. Vorher sei lediglich noch erwähnt, daß für die Maßeinheiten der Gewichte die Beziehungen 1 jin = 16 lang = 16 · 24 zhu gelten.

In der Aufgabe geht es darum, die Gewichte eines Gold- und eines Silberbarrens nach folgenden Bedingungen zu bestimmen: 1. Das Gewicht von 9 Goldbarren ist gleich dem Gewicht von 11 Silberbarren. 2. Vertauscht man einen Goldbarren und einen Silberbarren, so wird das Gold um 13 lang leichter. Dies führt zu dem Gleichungsystem

$$\left.\begin{aligned} 9x &= 11y \\ 8x + y + 13 &= 10y + x. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Berechnung erfolgt auf dem Rechenbrett. Wie bereits bei der ersten Methode des „Überschusses und Mangels" gesagt wurde, werden gemeinsame Nenner nicht ausgelegt.

Zunächst wird die „Norm" $x_1 = 3$ jin = 48 lang genommen, so daß der ersten Gleichung des Systems (6) zufolge

$$y_1 = 2\frac{5}{11} \text{ jin} = 39\frac{3}{11} \text{ lang}$$

gilt. Man hat daher in der zweiten Gleichung des Systems (6) auf der linken Seite einen Mangel von $\frac{49}{11}$ lang, während im Text der Mangel mit 49 angegeben wird. Danach wird die „Norm" $x_2 = 2$ jin = 32 lang angewandt; hierbei gilt

$$y_1 = 1\frac{7}{11} \text{ jin} = 26\frac{2}{11} \text{ lang}.$$

Man hat also in der zweiten Gleichung des Systems (6) auf der linken Seite einen Überschuß von $\frac{15}{11}$ lang, während im Text nur von einem Überschuß von 15 die Rede ist. Sodann wird empfohlen, den Überschuß 15 und den Mangel 49 über Kreuz mit

---

Faß wurde mit ungereinigter Hirse aufgefüllt, und wenn man diese reinigt, so erhält man insgesamt 7 dou Hirse. Die Aufgabe läßt sich durch die Gleichung

$$x + \frac{3}{5}(10 - x) = 7$$

ausdrücken; $\frac{3}{5}$ ist dabei der Umrechnungskoeffizient beim Übergang von ungereinigter zu gereinigter Hirse aus dem Buch II der „Mathematik in neun Büchern". In der Abhandlung werden die „Normen" $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ gewählt.

Nr. 10. Auf einer Mauer von 90 cun wächst ein Kürbis, dessen Stengel an Länge täglich um 7 zunimmt; unten wächst ein Melonenkürbis, dessen Stengel täglich um 10 zunimmt. Wann werden sie sich treffen? Die Aufgabe läßt sich durch die Gleichung

$$(7 + 10)x = 90$$

ausdrücken. In der Abhandlung wird $x_1 = 5$ und $x_2 = 6$ gesetzt.

den gewählten Normen, d. h. mit 2 und 3 zu multiplizieren und die Summe der Produkte durch die Summe von Überschuß und Mangel zu dividieren. Demnach ergibt sich das Gewicht eines Goldbarrens zu

$$x = \frac{2 \cdot 49 + 3 \cdot 15}{15 + 49} \text{ jin} = 2 \text{ jin } 3 \text{ lang } 18 \text{ zhu}. \tag{7}$$

Schließlich ermittelt man aus der ersten Gleichung des Systems (6)

$$y = \frac{9}{11} x = 1 \text{ jin } 13 \text{ lang } 6 \text{ zhu}. \tag{8}$$

In der „Mathematik in neun Büchern" wird die regula duorum falsorum positionum für den Fall betrachtet, daß die Fehler verschiedene Vorzeichen haben. Die Untersuchung des Falles für Fehler mit gleichem Vorzeichen finden wir später in der arabischen Literatur.

Die regula duorum falsorum positionum, die eine exakte Lösung linearer Aufgaben liefert, ist zugleich eine Methode zur angenäherten Lösung nichtlinearer Gleichungen und zur Interpolation. Für die lineare Interpolation wurde sie vom alexandrinischen Astronomen Ptolemaios bei der Aufstellung der Sehnentabellen verwendet.

Systeme linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die Methode fang-cheng, die im Buch VIII der „Mathematik in neun Büchern" behandelt wird, stellt den Gipfel des von den chinesischen Gelehrten auf dem Gebiet der linearen Probleme Erreichten dar. Es handelt sich hierbei um einen regelrechten Algorithmus zur Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Bei Verwendung unserer modernen Symbolik kann man sagen, daß die fang-cheng-Methode auf die Normalform

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_1 x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_2 x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

eines derartigen linearen Gleichungssystems angewandt wurde.

Das System wurde auf dem Rechenbrett durch die fang-cheng-Tabelle dargestellt, die unsere Schreibweise (1) vollständig ersetzte und in gewisser Beziehung sogar einfacher war, da die Symbole für die Unbekannten nicht eingetragen wurden. Die Koeffizienten der einzelnen Gleichungen wurden von oben nach unten eingetragen, während die Gleichungen von rechts nach links aufeinanderfolgten:

$$\left.\begin{aligned} &a_{n1} \cdots a_{21}\ a_{11} \\ &a_{n2} \cdots a_{22}\ a_{12} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &a_{nn} \cdots a_{2n}\ a_{1n} \\ &b_n \ \ \cdots\ b_2\ \ b_1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Tabelle (2) oder, in unserer heutigen Ausdrucksweise, die Matrix des Systems (1) wird umgeformt, indem man sukzessiv die Elemente der ersten Spalte von rechts von

Zahlen abzieht, die den entsprechenden, mit a_{11} multiplizierten Elementen der 2., 3. usw. Spalten gleich sind. Dabei wird die Subtraktion so lange fortgesetzt, bis die gesamte erste Zeile mit Ausnahme des Elements a_{11} aus lauter leeren Stellen besteht.[1]) Anschließend verfährt man in gleicher Weise mit dem Teil der transformierten Tabelle, der im nachstehenden Schema durch die Winkellinie abgetrennt ist:

$$\left.\begin{array}{cc|c} & & a_{11} \\ \hline a_{n2}^{(1)} & \cdots\ a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}^{(1)} & \cdots\ a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(1)} & \cdots\ b_2^{(1)} & b_1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Die fortgesetzte Anwendung dieses Prozesses ergibt schließlich die Tabelle

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{22}^{(1)}\ a_{1n} \\ a_{33}^{(2)}\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{nn}^{(n-1)} \ldots a_{3n}^{(2)}\ a_{2n}^{(1)}\ a_{1n} \\ b_n^{(n-1)} \ldots b_3^{(2)}\ b_2^{(1)}\ b_1. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Wie man leicht sieht, entsprechen diese Transformationen einer schrittweisen Elimination der Unbekannten und einer Aufstellung des Hilfssystems

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Unbekannten x_n, x_{n-1}, ..., x_1 werden sodann nacheinander mit Hilfe der Tabelle (4) berechnet.

Dieses allgemeine Schema wollen wir an Hand der ersten Aufgabe aus dem Buch VIII veranschaulichen, unter deren Zuhilfenahme die fang-cheng-Regel dort formuliert wird:

Drei Garben einer guten Ernte, zwei Garben einer mittleren Ernte und eine Garbe einer schlechten Ernte ergeben 39 dou Korn; zwei Garben einer guten Ernte, drei Garben von der mittleren und eine Garbe von der schlechten Ernte ergeben 34 dou; eine Garbe von der guten, zwei von der mittleren und drei von der schlechten liefern 26 dou (Abb. 3). Gefragt ist, wieviel Korn eine Garbe der guten, eine Garbe der mittleren und eine Garbe der schlechten Ernte liefert.

[1]) Die Koeffizienten in den Aufgaben der „Mathematik in neun Büchern" sind ganze Zahlen.

Im Text des Buches wird die Aufgabe in Worten dargelegt. Die ursprüngliche fang-cheng-Tabelle ist in der Abb. 3 wiedergegeben.

Die Hauptschritte der Tabellentransformation, die im chinesischen Text nicht schriftlich festgehalten sind, sich jedoch aus der in Worten ausgedrückten Regel ergeben, lauten wie folgt:

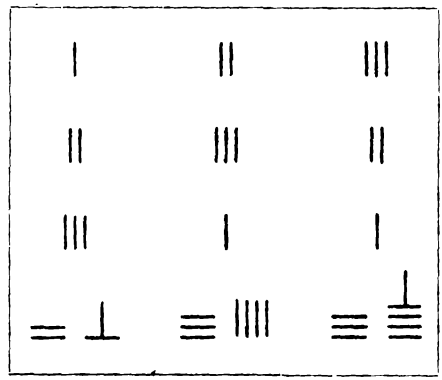


Abb. 3

Die ursprüngliche Tabelle:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Die Transformation der zweiten Spalte, deren Elemente mit 3 multipliziert werden, ergibt:

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Die Umformung der dritten Spalte, deren Elemente ebenfalls mit 3 multipliziert werden, liefert

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Die Umformung der linken Spalte der durch die Winkellinie abgetrennten Tabelle ergibt bei Multiplikation der Elemente mit 5

		3	
	5	2	(4′)
36	1	1	
99	24	39	

Die letzte Tabelle entspricht dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99. \end{aligned}\right\}$$

Die Methode zur Berechnung der Unbekannten aus der transformierten Tabelle (4′) wird in der Terminologie der Rechenoperationen mit ganzen Zahlen auf dem Rechenbrett unter Vermeidung der Bruchrechnung formuliert. In der Regel wird gesagt, daß die obere Zahl der linken Spalte der Nenner des Bruches ist, der die Zahl z ausdrückt, während die untere Zahl den zugehörigen Zähler darstellt. Die genannte obere Zahl

wird als gemeinsamer Nenner aller drei Unbekannten gewählt. Den Zähler für y ermittelt man aus der mittleren Spalte wie folgt: Vom Produkt aus der unteren Zahl der mittleren Spalte und dem gemeimsamen Nenner wird der Zähler des Bruches für z abgezogen und die Differenz durch die obere Zahl der mittleren Spalte dividiert. Der Zähler für x schließlich ergibt sich folgendermaßen: Vom Produkt der unteren Zahl der rechten Spalte mit dem gemeinsamen Nenner werden der Zähler des Bruches für z und der mit der zweiten Zahl der rechten Spalte multiplizierte Zähler des Bruches für y subtrahiert. Die so gewonnene Differenz wird durch die obere Zahl der rechten Spalte geteilt. Man erhält somit

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4},$$

$$y = \frac{24 \cdot 36 - 99}{5} : 36 = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4},$$

$$x = \frac{39 \cdot 36 - 99 - 2 \cdot 153}{3} : 36 = \frac{333}{36} = 9\frac{1}{4}.$$

Das Buch VIII enthält ferner Aufgaben, die auf Systeme mit zwei, vier und fünf Unbekannten führen. Das nachstehende Beispiel zeigt, allerdings in unserer modernen Symbolik, ein System mit fünf Unbekannten:

$$\left.\begin{aligned} 9x + 7y + 3z + 2u + 5v &= 140,\\ 7x + 6y + 4z + 5u + 3v &= 128,\\ 3x + 5y + 7z + 6u + 4v &= 116,\\ 2x + 5y + 3z + 9u + 4v &= 112,\\ x + 3y + 2z + 8u + 5v &= 95. \end{aligned}\right\}$$

Die Lösung lautet hier $x = 7$, $y = 4$, $z = 3$, $u = 5$, $v = 6$.

Obwohl die fang-cheng-Regel in der Mathematik an Hand eines konkreten Beispiels mit drei Unbekannten erläutert wird, ist sie doch hinreichend allgemein formuliert. Die Gelehrten anderer Länder haben bereits früher lineare Probleme gelöst, ein einheitlicher Algorithmus zur Auflösung eines auf die Normalform gebrachten Systems linearer Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten jedoch war eine Errungenschaft der Gelehrten Chinas.

Die Umformung der fang-cheng-Tabelle (2) erinnert an Operationen mit den Spalten von Matrizen und Determinanten. Bei ihrer Weiterentwicklung im Orient[1]) wurde sie in der Tat zu einer eigenartigen Lehre über Determinanten ausgebaut, vor allem in einem handschriftlichen Werk des japanischen Mathematikers Seki Shinsuke Kova aus dem Jahre 1683. In Europa kann man die ersten Ansätze zu einer Lösung linearer Gleichungssysteme bei Leonardo von Pisa und danach bei G. Cardano (1545)[2])

---

[1]) Liu Hui und Sun-zi ersetzten das wiederholte Abziehen der Elemente irgendeiner Spalte durch die Subtraktion des entsprechenden Vielfachen dieser Elemente [vgl. 43*c* und 43*d*]

[2]) Cardano hat eine mechanische Regel zur Auflösung von Systemen aus zwei Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2$$

nach den Koeffizienten angegeben.

erkennen. In völliger Klarheit wurde die Idee von der Einführung der Determinante im Zusammenhang mit der Elimination von Unbekannten durch Leibniz in seinem Brief an l'Hospital (1693) formuliert. Eine ausführlichere Entwicklung und die Anwendung zur Auflösung linearer Systeme verdanken wir Gabriel Cramer (1750).

Negative Zahlen. Im Buch VIII der „Mathematik in neun Büchern" tritt in der geschichtlichen Entwicklung der Wissenschaft erstmalig die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Zahlen auf. Aller Wahrscheinlichkeit nach wurden die negativen Zahlen gerade bei der Erweiterung der fang-cheng-Methode auf beliebige lineare Gleichungssysteme eingeführt. Negative Zahlen benötigte man bereits bei der Aufstellung der Tabellennormalform (2), denn im allgemeinen lassen sich die Ausgangsbedingungen der Aufgaben nicht von vornherein durch ein System der Form (1) ausdrücken. Ferner benötigte man die negativen Zahlen bei der Transformation der Tabelle (2) auf die Form (4). Von entscheidender Bedeutung war hier die Anwendung des Rechenbrettes, wo man die Stäbchen, die additive oder subtraktive Größen darstellten, irgendwie voneinander unterscheiden mußte und wo diese Stäbchen unabhängig von den Bedingungen der Aufgabe sozusagen ein Eigenleben führten.

Wir treffen Transformationen einer Tabelle auf die Normalform (2), die der Übertragung von Gliedern der Gleichung von einer Seite des Gleichheitszeichens auf die andere entsprechen, in mehreren Aufgaben des Buches VIII an, in denen es sich wieder darum handelt, die Getreidemenge in den Garben guter, mittlerer und schlechter Ernteerträge zu ermitteln. So lautet für die Aufgabe Nr. 4, die sich unmittelbar durch die Bedingungen

$$5x - 11 = 7y,$$
$$7x - 25 = 5y$$

ausdrücken läßt, die fang-cheng-Tabelle

$$\begin{array}{rr} 7 & 5 \\ -5 & -7 \\ 25 & 11 \end{array}$$

In einer anderen Aufgabe (Nr. 5) mit den Bedingungen

$$6x - 18 = 10y,$$
$$15y - 5 = 5x$$

erhält die fang-cheng-Tabelle folgende Form:

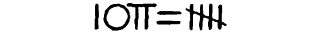
$$\begin{array}{rr} -5 & 6 \\ 15 & -10 \\ 5 & 18. \end{array}$$

(Fortsetzung der Fußnote 2 von S. 35)

Nachdem er die Zahlenkoeffizienten in zwei Zeilen schreibt, formuliert er an Hand eines Beispiels die Regel

$$x = \frac{\frac{c_1 b_2}{b_1} - c_2}{\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2}.$$

Zur Unterscheidung positiver und negativer Koeffizienten — und auch von Zahlen schlechthin — wurden besondere Termini und spezielle Stäbchen und später auch Zeichen eingeführt. Die positiven Elemente einer Tabelle nannte man zheng, die negativen fu.[1]) Nach Liu Hui wurden die ersteren durch rote, die letzteren durch schwarze Zählstäbchen dargestellt. Diese Unterscheidungsmethode wurde auch im Buchdruck angewandt: Zur Zeit der Sun-Dynastie wurden die positiven Zahlen häufig in roter, die negativen in schwarzer Farbe gedruckt. Es gab auch andere Methoden zur Kennzeichnung: Man stellte z. B. die zheng-Zahlen durch Stäbchen mit dreieckigem Querschnitt, die fu-Zahlen durch solche mit quadratischem Querschnitt dar, oder aber man legte im ersten Falle die Stäbchen in senkrechter Richtung, im zweiten Falle schräg aus. Li Ye stellte im 13. Jahrhundert die negativen Zahlen durch Ziffernstäbchen dar und durchstrich hierzu die letzte Ziffer schräg. Die Zahl -10724 z. B hatte die Form



In der Entwicklung der mathematischen Begriffe ist es häufig nicht leicht, die Grenze festzustellen, bei deren Überschreiten diese Begriffe einen neuen Sinn erhielten. Es ist schwer zu sagen, wann der negative Koeffizient die Bedeutung einer negativen Zahl erlangte oder zumindest als solche gedeutet werden kann. Diophantos und vermutlich manche seiner Vorgänger kannten die Regel für das Operieren mit den Koeffizienten subtraktiver Mengen, die neben additiven Mengen in Polynomen enthalten waren und erst nach diesen geschrieben werden durften. Diophantos formulierte sogar die Regel, wonach eine subtraktive Größe mit einer subtraktiven multipliziert eine additive Größe ergibt, während eine mit einer additiven Größe multiplizierte subtraktive Größe wieder eine subtraktive Größe liefert. Dessen ungeachtet kannte Diophantos die negativen Zahlen nicht. Die subtraktiven Zahlen waren bei ihm keine selbständigen Objekte, und die Regeln für das Operieren mit Vorzeichen bezogen sich lediglich auf die Glieder von Differenzen, wie etwa die bei uns gebräuchlichen Ausdrücke $a - b$ oder $ax^2 - bx$ usw., bei denen der Minuend größer ist als der Subtrahend. In der Mathematik des antiken China traten die subtraktiven Koeffizienten als selbständige Objekte auf. Die Methode ihrer Darstellung auf dem Rechenbrett — getrennt von anderen Zahlen oder von den Mengen, denen sie als Koeffizienten zugeordnet werden konnten — begünstigte ihre Einführung. Ein Symbol vom Typ $-a$ tritt in der chinesischen Wissenschaft nicht nur als Bestandteil von Differenzen auf, bei denen der Minuend größer ist als der Subtrahend, sondern auch als Ergebnis der Subtraktion einer größeren Menge von einer ausdrücklich kleineren. Dies war ein prinzipiell neuer Gedanke von außerordentlicher Wichtigkeit.

Es ist anzunehmen, daß die fang-cheng-Methode zunächst bei Aufgaben angewandt wurde, bei denen Transformationen der Tabelle (2) die Subtraktion kleinerer Zahlen von gegebenen Größen erfordern. Die Anwendung desselben Algorithmus auf andere Aufgaben mußte unweigerlich auf die Schwierigkeit führen, die beim Abziehen größerer Zahlen von kleineren oder sozusagen vom Nichts auftraten.

---

[1]) Das Wort zheng bedeutet soviel wie richtig, gerecht usw. Das Wort fu hat die Bedeutung von Schuld, Fehlbetrag usw., aber auch von falsch.

Betrachten wir einmal die dritte Aufgabe des Buches VIII, wo erstmalig von zheng-Zahlen und fu-Zahlen die Rede ist. Die Bedingungen der Aufgabe erfordern die Einführung negativer Differenzen; an der gleichen Stelle werden auch die einfachsten Regeln für das Operieren mit negativen Zahlen formuliert.

„Bei zwei Garben eines guten Ernteertrages bzw. drei Garben eines mittleren Ernteertrages bzw. bei vier Garben eines schlechten Ernteertrages fehlt bis zu einem dou eine Garbe eines mittleren bzw. eine Garbe eines schlechten bzw. eine Garbe eines guten Ernteertrages. Gefragt ist, wieviel Korn man jeweils von einer Garbe bei guter, mittlerer und schlechter Ernte erhält" [42, S. 500, russisch].

Die Aufgabe führt auf die Gleichungen

$$2x = 1 - y,$$
$$3y = 1 - z,$$
$$4z = 1 - x.$$

In der Regel zur Auflösung wird gesagt, daß eine fang-cheng-Tabelle aufzustellen ist, die freilich im Text fehlt.

1		2
	3	1
4	1	
1	1	1

Offenbar führen die durch die fang-cheng-Methode vorgeschriebenen Operationen mit den Spalten hierbei auf negative Zahlen. Daher wird weiterhin empfohlen, nach der zheng-fu-Regel zu verfahren, die in folgenden Worten formuliert wird:

„Wenn die Bezeichnungen gleich, so wird abgezogen; wenn die Bezeichnungen verschieden, so wird zugezählt; wenn Positives allein, so (wird) es negativ; wenn Negatives allein, so (wird) es positiv. Wenn die Bezeichnungen verschieden, so wird abgezogen; wenn die Bezeichnungen gleich, so wird zugezählt; wenn Positives allein, so (wird) es positiv; wenn Negatives allein, so (wird) es negativ" [42, S. 500, russisch].

In unserer Symbolik lautet die erste Regel:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm (a - b),$$
$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (a + b),$$
$$0 - (\pm b) = \mp b;$$

der zweite Teil der Regel läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$(\pm a) + (\mp b) = \pm (a - b),$$
$$(\pm a) + (\pm b) = \pm (a + b),$$
$$0 + (\pm b) = \pm b.$$

Die entsprechenden Regeln für die Multiplikation und Division sind in der „Mathematik in neun Büchern" nicht erläutert und werden auch in den behandelten Aufgaben nicht benötigt.

Die antiken chinesischen Mathematiker operierten mit den negativen Zahlen völlig frei. In den Aufgaben des Buches VIII sind nicht nur die Zwischenelemente negative Zahlen, sondern auch die Anfangselemente der Spalten in der fang-cheng-Tabelle

(vgl. S. 36). Ja, es treten sogar freie Gleichungsglieder in negativer Form auf. Darüber hinaus vermochten es die Gelehrten Chinas, den negativen Zahlen die einfachste reale Deutung zu geben, wie dies aus der 8. Aufgabe hervorgeht, in der ein Geldfehlbetrag durch eine fu-Zahl wiedergegeben wird. In der genannten Aufgabe sind die Preise für einen Büffel, einen Hammel und ein Schwein aus folgenden Bedingungen zu ermitteln: 1. Beim Verkauf von zwei Büffeln, fünf Hammeln und dem Kauf von 13 Schweinen verbleiben 1000 qian; 2. beim Verkauf von 3 Büffeln und 3 Schweinen könnte man genau 9 Hammel kaufen; 3. beim Verkauf von 6 Hammeln und 8 Schweinen kauft man 5 Büffel, wobei 600 qian fehlen. Die Tabelle hierzu lautet wie folgt:

— 5	3	2
6	— 9	5
8	3	— 13
— 600		1000

In der Vorschrift zur Auflösung heißt es:

„Stelle die fang-cheng-Tabelle auf. Stelle fest, daß 2 Büffel und 5 Hammel positiv und daß 13 Schweine negativ sind, während der Rest an qian positiv ist. Stelle ferner fest, daß 3 Büffel positiv, 9 Hammel negativ und 3 Schweine positiv sind. Des weiteren stelle fest, daß 5 Büffel negativ, 6 Hammel positiv, 8 Schweine positiv und der Fehlbetrag an qian negativ sind. Nun rechne nach dem Verfahren zheng-fu" [42, S. 502, russisch].

Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß wir hier erstmalig eine Bedingung antreffen, die einer homogenen Gleichung entspricht ($3x - 9y + 3z = 0$).

Negative Lösungen von Gleichungen kannte man in der chinesischen Mathematik bis zum Ende des von uns betrachteten Zeitraumes jedoch nicht.

Die Einführung der negativen Zahlen und der Additions- und Subtraktionsregeln für diese war eine der größten Entdeckungen, die wir den chinesischen Gelehrten verdanken. Später drangen die negativen Zahlen in die indische Mathematik ein; wir treffen sie dort erstmalig in den Werken Brahmaguptas an, d. h. zu Beginn des 7. Jahrhunderts. Erste Ansätze zur Einführung der negativen Zahlen in Europa findet man im 13. Jahrhundert bei Leonardo von Pisa. Eine explizite Anwendung jedoch finden wir erst am Ende des 15. Jahrhunderts bei Nicolas Chuquet bzw. in der Mitte des darauffolgenden Jahrhunderts bei Michael Stifel.

Beachtenswert ist die Tatsache, daß die negativen Zahlen in China eingeführt wurden, um den Algorithmus zur Auflösung linearer Gleichungen formal auf beliebige entsprechende Aufgaben erweitern zu können. Eine analoge Erscheinung begegnet uns in der weiteren Geschichte der Erweiterung des Zahlenbegriffes ebenfalls: bekanntlich haben die italienischen Algebraiker des 16. Jahrhunderts die imaginären Zahlen eingeführt, um die Allgemeingültigkeit des kurz vorher entdeckten Algorithmus zur Auflösung von kubischen Gleichungen in Radikalen zu gewährleisten.

Lineare unbestimmte Gleichungen. Wir hatten bereits erwähnt, daß man im Buch II der „Mathematik in neun Büchern" eine Reihe von Aufgaben findet, bei denen der Preis einer Anzahl von Gegenständen aus dem gegebenen Preis einer anderen Anzahl

der gleichen Gegenstände zu bestimmen ist. An diese Aufgaben, die auf Proportionen führen, schließen sich Aufgaben an, in denen der Preis zweier verschiedener Gegenstände bestimmt werden soll. Diese beiden Aufgabentypen haben zwar eine verwandte Problemstellung, jedoch sind sie in ihrem Wesen verschieden. Die Aufgaben zur Berechnung der Preise zweier Objekte werden durch Systeme von drei Gleichungen mit vier Unbekannten ausgedrückt, die sich leicht auf eine einzige Gleichung mit zwei Unbekannten reduzieren lassen. Diese letzte Gleichung hat in jeder Aufgabe eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung.

Die erste und einfachste dieser Aufgaben, die Aufgabe 38, lautet: 78 Bambusstangen großer und kleiner Länge kosten 567 qian; gefragt ist, was jede einzelne kostet. In den Bedingungen der Aufgabe ist die Voraussetzung, daß der Preisunterschied für die langen und kurzen Bambusstangen 1 qian beträgt und daß die Preise ganzzahlig sein sollen, nicht erwähnt. Gleiches gilt für sämtliche neun Aufgaben dieser Art.

Bezeichnet man die gesuchten Stückzahlen mit x und y und die zugehörigen Preise mit u und v, so läßt sich diese Aufgabe durch das System

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 78, \\ ux + vy &= 576, \\ v &= u + 1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ausdrücken, woraus

$$78u + y = 576 \qquad \text{und} \qquad u + \frac{y}{78} = 7 + \frac{30}{78}$$

folgt. Das einzige ganzzahlige Wertepaar für u und y, das sowohl der ersten als auch der letzten Gleichung genügt, ist $u = 7$, $y = 3$, woraus $v = 8$ und $x = 48$ folgen.

Einige darauffolgende Aufgaben unterscheiden sich von der oben betrachteten dadurch, daß der Kauf — diesmal von Seidenzwirn — durch benannte Zahlen verschiedener Einheiten ausgedrückt wird. In diesen Aufgaben, die recht komplizierte Überlegungen erfordern, gilt

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{m}{n}, \\ ux + vy &= A \\ v &= u + 1 \end{aligned}\right\} \quad (An > m) \tag{2}$$

Die Lösung besteht im wesentlichen darin, daß das System (2) mit Hilfe der Substitution

$$x' = xn, \quad y' = yn \tag{3}$$

in das System

$$\left.\begin{aligned} x' + y' &= m, \\ ux' + vy' &= An, \\ v &= u + 1 \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

mit lauter ganzzahligen Koeffizienten überführt wird. Nunmehr gilt

$$\left.\begin{aligned} um + y' &= An, \\ u + \frac{y'}{m} &= \frac{An}{m}. \end{aligned}\right\}$$

Sodann wird u als die größte ganze Zahl in $\frac{An}{m}$ und y' als Zähler des echten Bruches ermittelt, der nach Abspaltung der größten ganzen Zahl von $\frac{An}{m}$ übrig bleibt.

In der chinesischen Abhandlung enthält die Lösungsvorschrift lediglich den Hinweis, wie Zähler und Nenner des Bruches $\frac{An}{m}$ zu bilden sind, aus dem man dann u und y' ermittelt.

Das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Die in der „Mathematik in neun Büchern" angegebenen Methoden zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln beruhen auf den Formeln für das Quadrat und die dritte Potenz eines Binoms, obwohl an keiner Stelle darüber auch nur ein Wort gesagt wird. Die Methoden ähneln denen, wie sie noch vor kurzem im Rahmen des algebraischen Lehrstoffes an den allgemeinbildenden Schulen gelehrt wurden; sie besitzen allerdings einige wichtige Besonderheiten. Wir wollen zwei Beispiele aus dem Buch IV betrachten und dabei die in diesem Buch formulierten allgemeinen Regeln anwenden. Diese Regeln sind äußerst konzentriert und nur unvollständig angegeben, so daß ihre Rekonstruktion erst vor kurzem gelungen ist [44].

Der Algorithmus zum Ausziehen einer Wurzel aus einer ganzen Quadrat- oder Kubikzahl besteht in der sukzessiven Ermittlung der Ziffern der Dezimalstellen der Wurzel. Die Rechnung wird in so viele Schritte zerlegt, wie die Wurzel Ziffern besitzt. Bei jedem Schritt bestehen die Überlegungen im Aufsuchen des ganzzahligen Anteils der Wurzel aus irgendeiner quadratischen oder kubischen Hilfsgleichung oder Hilfsungleichung durch Probieren; mit Hilfe einer linearen Substitution der Form $10^n x = x_1$ wird dabei jedesmal erreicht, daß diese Wurzel kleiner als 10 ist. Jede Gleichung, abgesehen von der ersten, wird aus der vorhergehenden durch eine lineare Substitution der Form $x = p + y$ gewonnen. Selbstverständlich wird im chinesischen Text weder von Gleichungen noch Substitutionen gesprochen, jedoch sind die vorgenommenen Rechenschritte dem Gesagten völlig adäquat.

Das Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer Quadratzahl verdeutlichen wir an dem aus der Aufgabe 12 stammenden Beispiel $\sqrt{55225}$. Diese Aufgabe entspricht der Bestimmung der positiven Wurzel x der reinquadratischen Gleichung

$$x^2 = 55225, \tag{1}$$

die man sich in der Form $x = 100p + 10q + r$ geschrieben denken kann.

Wir wollen nun den Gang der Rechnung unter Vernachlässigung einiger Einzelheiten in zwei Spalten aufschreiben, und zwar links nach der rekonstruierten Regel der „Mathematik in neun Büchern", rechts in moderner Symbolik. Die Anzahl der Ziffern der Wurzel wurde im wesentlichen ebenso bestimmt wie heute.

Die Bestimmung der Hunderterstelle der Wurzel

Auf dem Rechenbrett wird die gegebene Zahl, der „Dividend" shi, ausgelegt. Auf die Zehntausenderstelle kommt das jie-suan, d. h. ein Zählstäbchen, das die

Wir setzen in (1)

$$x = 100\,x_1$$

mit $x_1 = p + y$, wobei $p < 10$ und $0 \leq y < 1$

Zahl 10000 darstellt:

55225 shi
10000 jie-suan

Nun ermitteln wir als erste Ziffer der Wurzel die Zahl $p = 2$ als die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft, daß $(p \cdot 10000) \cdot p \leq 55225$ oder $p^2 \leq 5$ gilt. Diese Ziffer tragen wir nun in die Zeile fang über der gegebenen Zahl in der Hunderterstelle ein.

In der Zehntausendertstelle legen wir entsprechend der gefundenen Ziffer $p = 2$ zwei Stäbchen aus, die den „Divisor" fa $p \cdot 10000$, d. h. 20000, darstellen, der suo-de genannt wird:

2 fang
55225 shi
20000 fa
10000 jie-suan

Nun dividieren wir shi durch fa, wobei der Rest bereits die gefundene Ziffer der Wurzel ist, und legen den Rest an der Stelle von shi aus, wobei wir die erste Ziffer von shi, d. h. die Ziffer 5 durch 1 ersetzen:

2 fang
15225 Rest
20000 fa
10000 jie-suan

Wir verdoppeln fa und verschieben dann die Ziffer 4 um eine Stelle nach rechts, was den „fixierten Divisor" ding-fa, d. h. 40000 ergibt. Jie-suan wird um zwei Stellen nach rechts verschoben.

ist, und erhalten

$$10000\,x_1^2 = 55225. \qquad (1')$$

Nun wählen wir $p = 2$, so daß $x_1 = 2 + y$ gilt

Setzen wir $x_1 = 2 + y$ in (1′) ein, so ergibt sich

$$40000 + 40000\,y + 10000\,y^2 = 55225$$

oder

$$40000\,y + 10000\,y^2 = 15225. \qquad (2)$$

Die chinesischen Mathematiker bestimmten den Rest 15225 nicht durch Subtraktion, sondern mittels Division durch fa $= 2 \cdot 10000$. In der Regel ist angegeben, wie die Koeffizienten der Gleichungen (2) und (2′) (s. u.) zu bestimmen sind.

In (2) setzen wir $10\,y = y_1$, was die Gleichung (2′) ergibt (s. u.).

Die Bestimmung der Zehnerstelle der Wurzel

Nunmehr liegt das Schema zur Bestimmung der Ziffer q in der Zehnerstelle der Wurzel auf der Hand:

$$4000\,y_1 + 100\,y_1^2 = 15225; \qquad (2')$$

dabei gilt $y_1 = q + z$ mit $q < 10$ und $0 \leq z < 1$, so daß

23 fang
15225 Rest
4000 ding-fa
100 jie-suan

Wir wählen $q = 3$ als die größte ganze Zahl, die der Ungleichung (2′) genügt. Wie q zu bestimmen ist, wird in der Regel eigentlich nicht gesagt, wahrscheinlich bestimmte man es durch Division des Restes durch ding-fa.[1]) Die gefundene Ziffer 3 tragen wir in der fang-Zeile in die Zehnerstelle ein. Das neue jie-suan, d. h. die Zahl 100, multiplizieren wir mit der Anzahl der Zehner der Wurzel, d. h. mit 3, was das neue suo-de 300 liefert. Dieses Produkt addieren wir zu ding-fa, d. h. zu 4000 und erhalten für das neue ding-fa 4300. Den Rest 15225 dividieren wir durch das ding-fa 4300 und erhalten als Quotienten die bereits gefundene zweite Ziffer der Wurzel; dadurch überprüfen wir diese Ziffer sowie den neuen Rest 2325. Zum neuen ding-fa addieren wir das neue suo-de, d. h. die Zahl 300. Die Summe von 4300 und 300, das sog. zong-ding-fa oder den „zusätzlichen fixierten Divisor", d. h. die Zahl 4600, verschieben wir um eine Stelle nach rechts, das jie-suan wird wieder um zwei Stellen nach rechts verschoben.

$$(4000 + q)\ q \leq 15225 \qquad (2'')$$

und

$$q = 3, \text{ sowie } y_1 = 3 + z$$

gilt.

Schreibt man (2′) in der Form

$$(100\, y_1 + 4000)\, y_1 = 15225$$

und setzt $y_1 = 3 + z$, so folgt $[100(3 + z) + 4000](3 + z) = 15225$, d. h.

$$(300 + 4000 + 100z)\ (3 + z) = 15225$$

oder

$$(4300 + 100z)\ (3 + z) = 15225.$$

Auf der linken Seite erhält man als freies Glied 12900 und als Koeffizienten für z den Wert 4300 + 300. Man erhält so die Gleichung

$$4600z + 100z^2 = 2325. \qquad (3)$$

Der Rest 2325 auf der linken Seite wird wiederum durch Division und nicht durch Subtraktion ermittelt. Die Regel gibt an, wie man die Koeffizienten der Gleichung (3) und der unten angeführten Gleichung (3′) ermittelt.

In (3) setzen wir $10z = z_1 = r$, woraus sich die Gleichung (3′) ergibt (s. u.).

Die Bestimmung der Einerstelle der Wurzel

Nunmehr ist das Schema zur Bestimmung der Ziffer r in der Einerstelle der Wurzel klar:

23
2325 Rest
460 zong-ding-fa
1 jie-suan.

$$460z_1 + z_1^2 = 2325, \qquad (3')$$
$$z_1 = r = 5,$$
$$x = 200 + 30 + 5 = 235.$$

[1]) Über die Verwendung der „Divisoren" zur Feststellung der Ziffern einer Wurzel in der indischen Mathematik s. S. 115.

Die Wahl fällt auf $r = 5$. Dabei kann es sein, daß die nächste Ziffer der Wurzel ebenfalls durch Division des Restes durch zong-ding-fa zu bestimmen ist.

Zum Vergleich betrachten wir den ursprünglichen Text der Regel:

„Bestimme den Flächeninhalt (des Quadrats) als Dividenden. Nimm ein Zählstäbchen und schreite über eine (Spalte). Beurteile suo-de. Die erste (ausgewählte Ziffer der Wurzel) multipliziere mit jie-suan, dies ist der Teiler. Teile (durch diesen). Nach der Division verdopple den Divisor, dies ist der fixierte Divisor. Bringe ihn zurück (um eine Teilung), (du erhältst den) gestutzten (fixierten) Teiler. Bringe unten das hingelegte Zählstäbchen um einen Schritt zurück. (Fahre fort) wie vorhin. Eine gewählte (Ziffer) multipliziere mit diesem. Suo-de addiere zum (gestutzten) fixierten Teiler. Nun teile. Suo-de addiere zum fixierten Teiler, verkürze durch Rückkehr, du erhältst (den gestutzten) fixierten zusätzlichen Teiler. Weiter nun wie vorhin" [42, S. 468—469, russisch].

In der Terminologie der „Mathematik in neun Büchern" spiegelt sich der historische Zusammenhang zwischen der Division und dem Radizieren wider. Der Radikand heißt shi, d. h. Dividend. Die bei jedem Schritt auftretende Hilfszahl führt die Bezeichnung fa (oder ding-fa bzw. zong-ding-fa), d. h. Divisor, und durch diese fa werden jedesmal die anfallenden Reste dividiert. Dieser Zusammenhang war offenbar dadurch bedingt, daß das Ausziehen der Quadratwurzel bei einer geometrischen Aufgabe benötigt wurde, die sich unmittelbar an eine andere Aufgabe anschloß, bei der die Lösung durch Division gefunden worden war. Im Buch IV sind zunächst Aufgaben enthalten, bei denen eine Rechteckseite zu bestimmen ist, wenn man den Flächeninhalt und die andere Seite kennt. Es folgen Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung der Seite eines Quadrats von gegebenem Flächeninhalt geht. In beiden Fällen wird der Flächeninhalt als Dividend aufgefaßt; die Regel zum Ausziehen der Wurzel beginnt mit den Worten: „Bestimme (auf dem Brett) den Flächeninhalt als Dividenden." Offenbar faßte man das Ausziehen der Quadratwurzel als einen Spezialfall der Division auf, bei dem der Quotient gleich dem Divisor ist. Bekanntlich wurde auch in der mittelalterlichen europäischen Literatur das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln als eine Spielart der Division betrachtet. Selbst Descartes vertrat noch die Auffassung, daß das Ausziehen einer Wurzel mit beliebigem natürlichen Wurzelexponenten eine Form der Division sei.

Von besonderem Interesse ist die Bildung von Hilfsgleichungen bei einer Substitution der Form $x = p + y$. Zwar lag die Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

der gesamten Radizierung zugrunde, doch gerade bei dieser Substitution wird sie nicht unmittelbar benutzt.

Wir wollen den Übergang von der Gleichung

$$100\,y_1^2 + 4000\,y_1 = 15225 \qquad (2')$$

zur Gleichung

$$100z^2 + 4600z = 2325 \tag{3}$$

betrachten.

Würde man $y_1 = 3 + z$ in (2′) einsetzen und in der Gleichung

$$100(3 + z)^2 + 4000(3 + z) = 15225$$

ausmultiplizieren, so würde man den Koeffizienten von z zu $100 \cdot 3 \cdot 2 + 4000 = 4600$ und das absolute Glied zu $100 \cdot 3^2 + 4000 \cdot 3 = 12900$ erhalten. In der „Mathematik in neun Büchern" läuft der Rechengang aber anders. Zunächst wird der „Divisor", das neue ding-fa $3 \cdot 100 + 4000 = 4300$ gebildet. Dieser „Divisor" wird benutzt, um das absolute Glied der Gleichung (3) als Rest der Division von 15225 durch 4300 zu bestimmen; die Division dient gleichzeitig dazu, die zweite Ziffer der Wurzel zu überprüfen. Außerdem liefert der um $3 \cdot 100$ vermehrte Divisor 4300 den Koeffizienten von z, der sich nunmehr durch die Addition allein und nicht als $4000 + 100 \cdot 3 \cdot 2$ ergibt. Dieser Weg zur Bildung der Gleichung (3) mochte entstanden sein, indem man die Gleichung (2′) zunächst in der Form

$$(100\,y_1 + 4000)\,y_1 = 15225$$

mit $y_1 = 3 + z$ schrieb und dann so weiterrechnete, wie das in der rechten Spalte auf S. 43 angegeben ist. Für das weitere sei noch erwähnt, daß man den Rechengang durch das nachstehende Schema wiedergeben kann, das sich von unseren Überlegungen nur durch die Anordnung unterscheidet:

100	4000	15225
	$+ 100 \cdot 3$	$- 4300 \cdot 3$
	4300	2325
	$+ 100 \cdot 3$	
	4600	
100		

Die eben genannten Besonderheiten, die die Berechnung vereinfachen und beim Rechnen auf dem Rechenbrett durchaus natürlich erscheinen, äußerten sich auch beim Ausziehen der Kubikwurzel.

Es sei vorausgeschickt, daß die Gleichung

$$ay^3 + by^2 + cy = d \tag{4}$$

durch die Substitution $y = p + z$ folgende Form annimmt:

$$az^3 + (3ap + b)z^2 + (3ap^2 + 2bp + c)\,z = d - (ap^3 + bp^2 + cp). \tag{5}$$

Die Koeffizienten von (5) lassen sich berechnen, indem man $(p + z)^2$ und $(p + z)^3$ nach den bekannten binomischen Formeln entwickelt und dann die gleichnamigen Glieder zusammenzieht. Man kann sie aber auch nach dem Schema

$$[(ay + b)\,y + c]\,y = \{[a(p + z) + b]\,(p + z) + c\}\,(p + z)$$

oder, was dasselbe bedeutet, nach dem Schema

$$\begin{array}{llll} a & b & c & d \\ & +\,ap & +\,bp+\,ap^2 & -\,cp+bp^2+ap^3 \\ \hline & b+\,ap & c+\,bp+\,ap^2 & d-(cp+bp^2+ap^3) \\ & +\,ap & +\,bp+2ap^2 & \\ \hline & b+2ap & c+2bp+3ap^2 & \\ & +\,ap & & \\ \hline & b+3ap & & \end{array}$$

berechnen. Dieses Schema, das heute unter dem Namen Hornersches Schema allgemein bekannt ist, erfordert jedesmal nur eine Multiplikation mit p, während sonst nur noch Additionen auftreten. Auf dieses Schema sind wir im Grunde genommen schon bei der Umformung der quadratischen Gleichung gestoßen.

Das Ausziehen der Kubikwurzel in der „Mathematik in neun Büchern" weist in verschiedener Beziehung Ähnlichkeit mit dem Hornerschen Schema auf.

Wir berechnen nach der Aufgabe 19 die Kubikwurzel aus der Kubikzahl 1860867, d.h., wir lösen die kubische Gleichung

$$x^3 = 1860867. \tag{6}$$

Der Einfachheit halber führen wir die Rechnung abgekürzt und in unserer heutigen Symbolik durch.

Zunächst setzen wir $x = 100\,x_1$. Aus

$$1000000\,x_1^3 = 1860867 \tag{6'}$$

erhalten wir durch Probieren

$$x_1 = 1 + y \qquad (0 < y < 1).$$

Die Gleichung (6') geht über in die Gleichung

$$1000000\,y^3 + 3000000\,y^2 + 3000000\,y = 860867. \tag{7}$$

(Die chinesischen Mathematiker ermittelten diesen „Rest", indem sie durch fa dividierten.) Sodann setzen wir $10\,y = y_1$; dann gilt

$$1000\,y_1^3 + 30000\,y_1^2 + 300000\,y_1 = 860867. \tag{7'}$$

Durch Probieren erhalten wir den ganzzahligen Anteil von y_1:

$$y_1 = 2 + z \qquad (0 < z < 1).$$

Nun betrachten wir den Übergang zur nächsten Hilfsgleichung in z, wobei wir die Buchstabengleichungen (4) und (5) verwenden. Zunächst wird in der angegebenen Reihenfolge der Wert

$$app + bp + c = 1000 \cdot 2 \cdot 2 + 30000 \cdot 2 + 300000 = 364000$$

ermittelt.

Durch Division des von y_1 freien Gliedes der Gleichung (7), d.h. der Zahl 860867, durch die eben bestimmte Zahl erhält man als Rest das freie Glied der gesuchten Gleichung, d.h.

$$d - (ap^3 + bp^2 + cp) = 132867.$$

Anschließend wird

$$app \cdot 2 + bp = 4000 \cdot 2 + 60000 = 68000$$

berechnet und der Koeffizient der ersten Potenz von z

$$(app + bp + c) + (app \cdot 2 + bp) = 3ap^2 + 2pb + c = 432000$$

gebildet. Schließlich ergibt sich

$$ap = 2000, \qquad ap \cdot 3 = 6000, \qquad ap \cdot 3 + b = 36000;$$

die letzte Zahl ist der Koeffizient von z^2. Man erhält also

$$1000z^3 + 36000z^2 + 432000z = 132867 \tag{8}$$

und durch die Substitution $10z = z_1$ die Gleichung

$$z_1^3 + 360z_1^2 + 43200z_1 = 132867, \tag{8'}$$

woraus $z_1 = 3$ und $x = 123$ folgt.

In der Folgezeit entwickelten die chinesischen Mathematiker aus dem Algorithmus zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln eine allgemeine Methode zur Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten.

Die in der „Mathematik in neun Büchern" enthaltene Beschreibung des Ausziehens von Quadrat- und Kubikwurzeln ist die erste, die uns aus der Geschichte bekannt ist. In der hellenistischen Literatur findet man das Ausziehen einer Quadratwurzel, bei dem das Verfahren auf der Formel für das Quadrat einer Summe beruht, erstmalig in den Kommentaren des Theon von Alexandria, die dieser zu den astronomischen Werken des Ptolemaios geschrieben hat. In späterer Zeit trifft man auf Regeln zur Bestimmung von Quadrat- und Kubikwurzeln bei dem Inder Âryabhaṭa, ferner bei anderen indischen Gelehrten und in der arabischen Literatur. Die Regel für das Ausziehen der Quadratwurzel trat in Europa im zweiten Viertel des 12. Jahrhundert auf, die Regel für die Kubikwurzel erstmalig bei Leonardo von Pisa.

In den Beispielen zur Wurzelberechnung trifft man im Buch IV der „Mathematik in neun Büchern" große Zahlen an. In der Aufgabe 24 ist der Durchmesser einer Kugel mit dem Volumen 1644866437500 chi nach der Formel $d = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 16}{9}}$ (vgl. S. 61) zu bestimmen; hier ist $d = 14300$ chi.

Für Quadratwurzeln aus Brüchen mit nichtquadratischem Nenner wird die Regel

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b},$$

für Kubikwurzeln dementsprechend die Regel

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab^2}}{b}$$

empfohlen.

Die Regel zum Ausziehen einer Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl im Buch IV schließt mit dem Hinweis, daß „man wie bisher fortfahren kann", wenn die Operation nicht aufgeht. Es ist nicht ausgeschlossen, daß hierbei die Bestimmung des gebrochenen Anteils einer Wurzel in Form einer Dezimalbruchentwicklung gemeint ist.

Zwar findet man eine derartige Auffassung an keiner Stelle des Textes durch irgendein Beispiel bestätigt; im Prinzip jedoch dürfte die Fortsetzung der Operation in das Gebiet der Dezimalstellen keine Schwierigkeit bedeutet haben, denn man brauchte lediglich neue Spalten des Rechenbrettes hinzuzunehmen[1]).

Es sei noch erwähnt, daß die chinesischen Mathematiker Näherungsregeln zur Bestimmung der Quadratwurzel aus Nichtquadratzahlen besaßen. So wandte Liu Hui die Näherungswerte und Ungleichungen

$$a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{a^2+r}<a+\frac{r}{2a}$$

an; dabei ist a^2 die größte ganzzahlige Quadratzahl, die im Radikanden $N=a^2+r$ enthalten ist.

Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen. Der Auflösung von quadratischen Gleichungen ist in der „Mathematik in neun Büchern" kein selbständiger Abschnitt vorbehalten. Einige Aufgaben dieser Art sind unter anderen, nämlich linearen Aufgaben, im Buch IX enthalten, das den Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes gewidmet ist. Zur Lösung von Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen, werden zwei verschiedene Methoden angewandt.

Die eine hiervon ist unserer Regel zur Auflösung einer vollständigen quadratischen Gleichung äquivalent. Wir finden sie in der Aufgabe 11 zur Bestimmung der Seiten eines Rechtecks aus der Differenz $x-y=l=6,8$ und der Diagonale $\sqrt{x^2+y^2}=d=10$. Zwischenrechnungen sind im Text nicht angegeben. Die Unbekannten werden unmittelbar nach folgenden Regeln berechnet:

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}-\frac{l}{2}=2{,}8,$$

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}+\frac{l}{2}=9{,}6.$$

Eliminiert man aus den gegebenen Bedingungen x und bestimmt man y als positive Wurzel der Gleichung

$$2y^2+2ly+l^2=d^2$$

nach unseren üblichen Formeln, so erweist sich das Schema zur Bestimmung von y von der Vorschrift der „Mathematik in neun Büchern" verschieden. In der Abhandlung des Yang Hui „Ausführliche Erläuterung der mathematischen Regeln in den neun Büchern und eine neue Klassifizierung" (Xiang jie jiu zhang suan fa zuan lei), die im Jahre 1261 erschienen ist, wird der Rechengang wie folgt erläutert: Durch Elimination von x wird die Aufgabe auf eine vollständige quadratische Gleichung zurückgeführt, die sich in der Form

$$2y^2+4\left(\frac{l}{2}\right)^2+4\frac{l}{2}y=d^2$$

[1]) Die in Anführungsstrichen angegebenen Worte stellen nicht die einzig mögliche Übersetzung des unklaren Originaltextes dar. [42, S. 540] und [44, S. 356, 364].

schreiben läßt. Subtrahiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung $2\left(\frac{l}{2}\right)^2$ und dividiert dann beide Seiten durch 2, so folgt

$$\left(y+\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right],$$

woraus sich

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}-\frac{l}{2}$$

mit

$$x=y+l$$

ergibt.

Zu bemerken ist, daß zwischen der Entstehung der „Mathematik in neun Büchern" und der des Kommentars von Yang Hui mehr als ein Jahrtausend liegt. Es ist keineswegs ausgeschlossen, daß zur Zeit der Han-Dynastie die Aufgabe nicht auf eine vollständige quadratische Gleichung, sondern unmittelbar auf deren reinquadratische Form zurückgeführt wurde, so daß man nur noch eine Quadratwurzel auszuziehen braucht. Die Lösung hätte durch Einführung einer Hilfsunbekannten z als Mittelwert zwischen x und y gewonnen werden können; um den gleichen Betrag, um den x den Wert z übersteigt, ist auch y kleiner als z, und da l gleich der Differenz $x-y$ ist, gilt

$$x=z+\frac{l}{2},\quad y=z-\frac{l}{2}.$$

Daraus folgt

$$\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2=d^2,$$

$$2z+2\left(\frac{l}{2}\right)^2=d^2,$$

$$z=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}$$

usw. Eine derartige Annahme ist durchaus berechtigt. Die hierbei benötigten Umformungen waren den Verfassern der „Mathematik in neun Büchern" wohlbekannt, denn lineare Umformungen wurden beim Ausziehen von Quadratwurzeln verwendet. Die Mittelwertbildung findet man ebenfalls in der Abhandlung: Im Buch I sind Aufgaben enthalten, in denen es darum geht, mehrere Brüche einander anzugleichen, d. h., deren arithmetisches Mittel zu bilden. Die Zurückführung von Systemen der Form

$$\left.\begin{aligned} x\pm y&=a,\\ xy&=b \end{aligned}\right\}$$

auf eine quadratische Gleichung mit Hilfe linearer Substitutionen wurde bereits in Babylon angewandt. In Keilschrifttexten findet man z. B. Aufgaben, die sich von den eben betrachteten durch die Zahlenangaben unterscheiden; der Rechengang allerdings verlief dort ganz anders.

Wie dem auch sei, die Formel zur Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung, die sowohl den Babyloniern als auch den Griechen bekannt war, ist in der chinesischen Wissenschaft zur Zeit der Han-Dynastie nicht belegt. Andererseits steht

außer Zweifel, daß zur Lösung derartiger Gleichungen die Verfasser der „Mathematik in neun Büchern" eine andere Methode anwandten, und zwar den oben beschriebenen Algorithmus zum Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl. Bei jedem Schritt dieser Operation, d. h. bei der Lösung der quadratischen Gleichung, muß man nach dem Bestimmen der ersten Ziffer Zahlen suchen, die entweder dreigliedrigen quadratischen Ungleichungen oder Ungleichungen der Form

$$x^2 + px \leq q$$

genügen. Sobald Aufgaben auftraten, die sich unmittelbar durch eine vollständige quadratische Gleichung ausdrücken ließen, mußten die chinesischen Gelehrten naturgemäß auf ihren Zusammenhang mit dem Problem aufmerksam werden, das dauernd beim Ausziehen der Wurzeln auftrat. Die Auflösung in Radikalen, d. h. die Zurückführung einer dreigliedrigen Gleichung auf eine zweigliedrige, hatte unter diesen Bedingungen keinerlei praktische Bedeutung und hätte nur von theoretischem Interesse sein können. Vom numerischen Standpunkt ist die Auflösung in Radikalen nur bei Vorhandensein umfangreicher Quadratwurzeltabellen zweckmäßig.

Die ersten dreigliedrigen quadratischen Gleichungen, auf die der Algorithmus zum Ausziehen der Quadratwurzel angewandt wurde, waren Gleichungen der Form

$$x^2 + px = q, \qquad p, q > 0;$$

diese besitzen stets eine einzige positive Wurzel. So führt die Aufgabe 20 des Buches IX auf eine solche Gleichung: In der Mitte jeder Seite einer Stadt mit quadratischem Grundriß ist ein Tor. In einer Entfernung von 20 bu nach Norden vom nördlichen Tor steht ein Mast. Geht man vom südlichen Tor um 14 bu nach Süden und dann um 1775 bu nach Westen, so wird der Mast gerade sichtbar. Wie groß ist die Länge der Quadratseite?

Die Herleitung der zugehörigen quadratischen Gleichung[1]) und der Lösungsweg sind nicht angegeben (Abb. 4). Der Text der Regel ist jedoch völlig klar. Darin wird beschrieben, wie man die Koeffizienten zu bilden hat, und die verwendete Terminologie zeugt von der Anwendung des Algorithmus zum Ausziehen der Wurzel. Die Regel lautet: „Die Anzahl der bu, die man vom nördlichen Tor aus zu gehen hat, multipliziere mit der verdoppelten Anzahl der bu, die man nach Westen (zurückgelegt hat), dies ist der Divisor (shi). Addiere mit der Anzahl der bu, die man vom südlichen Tor aus gegangen ist, dies ist der zusätzliche Divisor (zong-fa). Ziehe die Quadratwurzel, dies ist dann die Seite der Stadt." [42, S. 511, russisch]. Es wird also empfohlen, den Divisor shi $= 2 \cdot 20 \cdot 1775$ und das zong-fa $= 20 + 14$ zu bilden. Damit steht der Rechner vor dem Schritt beim Ausziehen der Quadratwurzel, bei dem die Lösung ($x = 250$) der Gleichung

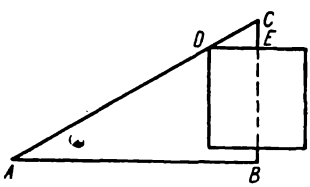


Abb. 4

$$x^2 + (20 + 14)\, x = 2 \cdot 20 \cdot 1775$$

zu bestimmen ist.

[1]) Man erhält sie leicht, z. B. aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und DEC.

Nach dieser Methode wurden die quadratischen Gleichungen auch später gelöst. An einem Beispiel, das Liu Yi (um 1080) untersucht hatte, wurde von Yang Hui die Methode recht ausführlich erläutert und geometrisch veranschaulicht. Es handelt sich dabei um die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 12x = 864.$$

Wir wissen nicht, wann in der Mathematik Chinas Aufgaben aufgetreten sind, die auf quadratische Gleichungen anderer Form führten. Yang Hui zufolge löste Liu Yi bereits Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten der Form

$$-x^2 + ax = b \quad \text{und} \quad x^2 - ax = b.$$

Es ist durchaus möglich, daß Gleichungen dieser Form bereits im 5. Jahrhundert von Zu Chong-zhi bearbeitet wurden.

Eine derartige Normalform, in der negative Koeffizienten auftraten, resultierte offenbar aus dem Wunsch, bei allen drei Fällen das gleiche Lösungsschema anwenden zu können. Ähnliche Erscheinungen sind auch in der Algebra der Inder zu verzeichnen; in anderen Ländern des Altertums und des Mittelalters wurden quadratische Gleichungen auf Normalformen mit positiven Koeffizienten zurückgeführt, weshalb man drei leicht voneinander abweichende Lösungsregeln erhielt.

Geometrie; Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks. Die frühesten Hinweise auf die geometrischen Kenntnisse der Chinesen sind aus dem 13. bis 12. Jahrhundert v. u. Z. überliefert. Es handelt sich hierbei um Ornamente, die man bei archäologischen Ausgrabungen auf Gegenständen des täglichen Gebrauchs gefunden hat, insbesondere um Darstellungen von Fünf-, Sieben-, Acht- und Neunecken. In der weiteren Entwicklung finden wir keine besondere Erforschung der regulären Vielecke und Polyeder, die in der antiken griechischen Geometrie eine sehr bedeutende Rolle gespielt hat.

Die Beziehungen zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks hingegen lenkten schon sehr frühzeitig die Aufmerksamkeit der chinesischen Mathematiker auf sich. Nach einem astronomischen Werk, der „Mathematischen Abhandlung über Zhou-bi" (Zhou-bi[1]) suan jing), zu urteilen, das früheren Ursprungs ist als die „Mathematik in neun Büchern", kannte Shang Gao den sog. pythagoreischen Lehrsatz bereits 1100 Jahre v. u. Z.[2]), allerdings nur für das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. In seiner allgemeinen Form war der Satz derselben Quelle zufolge Chen-zi bekannt, der etwa im 6. Jahrhundert v. u. Z. gelebt haben dürfte [45]. Wie bereits erwähnt, fand der Satz umfassende Anwendung im Buch IX der „Mathematik in neun Büchern". Eine Aufgabe zu diesem Thema hatten wir bereits betrachtet. Nachstehend seien noch einige Aufgaben genannt, die ebenfalls Aufmerksamkeit verdienen.

Im Mittelpunkt eines Beckens mit der Seite ($2a =$) 1 zhang = 10 chi wächst ein Rohrkolben, der aus dem Wasser ($h =$) 1 chi herausragt. Neigt man den Rohrkolben,

---

[1]) Das Zhou-bi ist ein Stab zur Messung des Sonnenschattens.

[2]) Späteren Chroniken zufolge war dieser Fall bereits 2200 Jahre v. u. Z. bekannt.

so berührt seine Spitze gerade das Ufer. Wie groß ist die Wassertiefe (x)? Die Regel gibt die Lösung nach folgender Formel

$$x = \frac{a^2 - h^2}{2h} = 12 \text{ chi}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe Nr. 6 könnte unmittelbar aus dem Satz des Pythagoras gewonnen worden sein:

$$(x + h)^2 - x^2 = a^2.$$

Liu Hui erläutert in seinem Kommentar die Identität

$$(x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

durch die Gnomonfigur, die für die gesamte geometrische Algebra der Griechen kennzeichnend war. Von besonderem Interesse ist die Aufgabe schon deshalb, weil sie später beim Inder Bhâskara (12. Jahrhundert) vorkommt, allerdings mit anderen Zahlenangaben: $h = \frac{1}{2}$, $a = 2$ (vgl. S. 95).

Bricht man einen senkrecht stehenden Bambusstab der Höhe 10 chi um und beugt die Spitze nach unten, so berührt diese die Erde in 3 chi Entfernung vom Fußpunkt des Stabes. In welcher Höhe wurde der Bambusstab geknickt? Die Antwort lautet:

$$x = \frac{10 - \frac{3^2}{10}}{2}.$$

Diese Aufgabe (Nr. 13) findet man später in Indien bei Brahmagupta in der ersten Hälfte des 7. Jahrhunderts und bei Bhâskara im 12. Jahrhundert wieder, freilich mit anderen Zahlenwerten.

In der Aufgabe 14 des Buches IX der „Mathematik in neun Büchern" verwendet man eine Regel zur Gewinnung rationaler und ganzzahliger Seitenlängen bei rechtwinkligen Dreiecken, die auf der Identität

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right)^2 + (pq)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2$$

beruht.

Es handelt sich hierbei um die Bestimmung von Weglängen, die von zwei Fußgängern unter folgenden Bedingungen zurückgelegt werden: Beide gehen von einem Punkt aus mit den Geschwindigkeiten 7 bzw. 3. Der erste geht in südlicher Richtung und legt eine Wegstrecke von 10 zurück. Danach ändert er seine Richtung derart, daß er mit dem anderen, der dauernd in östlicher Richtung geht, in einem Punkt zusammentrifft. In der Regel wird empfohlen, das folgende Zahlentripel zu bilden:

$$\frac{7^2 + 3^2}{2}, \quad 7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2} = \frac{7^2 - 3^2}{2}, \quad 7 \cdot 3.$$

Der schräg durchlaufene bzw. nach Osten zurückgelegte Weg werde wie folgt berechnet:

$$\left[10 \; \frac{7^2 + 3^2}{2}\right] : \left(7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2}\right) = 14\frac{1}{2}$$

bzw.

$$10 \cdot (7 \cdot 3)\left(7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2}\right) = 10\frac{1}{2}.$$

Die Lösung kann man sich wie folgt vorstellen. Wir bezeichnen die nach Osten bzw. nach Süden zeigenden Katheten mit x bzw. y und die Hypotenuse mit z; aus

$$\frac{x}{y+z} = z \quad \text{und} \quad x : y : z = \alpha\beta : \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} : \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

folgt dann

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{7}.$$

Setzt man nun $\beta = 3$, $\alpha = 7$ und beachtet man, daß $y = 10$ ist, so erhält man für x und z die Werte

$$x = \frac{y \cdot \alpha\beta}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}} = 10\,\frac{1}{2}, \qquad z = \frac{y\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}} = 14\,\frac{1}{2}.$$

Ganzzahlige Zahlentripel, die der unbestimmten Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen, verstanden bereits die Griechen und vor ihnen die Babylonier zu bilden. Die Regel

$$x : y : z = 2\alpha\beta : (\alpha^2 - \beta^2) : (\alpha^2 + \beta^2),$$

die alle möglichen Tripel relativ primer pythagoreischer Zahlen durch zwei relativ prime Parameter α und β verschiedener Qualität ausdrückt, war sowohl den Babyloniern als auch den Griechen bekannt. Diese Regel ergibt sich unmittelbar aus dem Satz 6 im Buch II der „Elemente", obwohl sie dort explizite nicht genannt ist. Im 9. Jahrhundert wurde die gleiche Regel vom Inder Mahavira, zu Beginn des 13. Jahrhunderts von Leonardo von Pisa und am Ende des 16. Jahrhunderts durch François Viète gelehrt.

In der Aufgabe 4 wird gefordert, aus einem runden Balken von gegebenem Durchmesser ein rechtwinklig profiliertes Kantholz gegebener Stärke herauszusägen. Bei der Lösung wird der pythagoreische Lehrsatz benutzt, wobei implizite vorausgesetzt wird, daß ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter ist. Die gleiche Erkenntnis wird in einer etwas anderen Form in der „Abhandlung über das Zhou-bi" erwähnt; dort wird erläutert, daß die Spitzen rechtwinkliger Dreiecke, die über dem Durchmesser errichtet werden, auf der Kreisperipherie liegen [38].

Erwähnenswert ist noch die Aufgabe 5, bei der es um die Ermittlung der Gesamtlänge von sieben Windungen einer Schraubenlinie geht: Man hat einen Baum von 2 zhang Länge und 2 chi Umfang. Am Fuße des Baumes wächst eine Pueraria[1]). In sieben Windungen schlingt sich diese um den Baum bis zu dessen Spitze. Wie lang ist die Pueraria? Die Antwort lautet: 2 zhang und 9 chi, d. h. $\sqrt{20^2 + (7 \cdot 3)^2}$. Man erhielt sie selbstverständlich durch Abwicklung des Zylinders in die Ebene.

Über die Lösungsmethoden für die einzelnen Aufgaben wird im Buch IX der „Mathematik in neun Büchern" nichts mitgeteilt. Bei den Aufgaben 15 und 16, bei denen es sich um die Berechnung der Seiten eines Quadrates bzw. des Radius eines

[1]) Diese sich windende Pflanze, die schon in sehr früher Zeit als Textilgrundlage verwendet wurde, gehört zur Familie der Leguminosen und ist in Ostasien heimisch.

Kreises handelt, die einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck einbeschrieben sind, mag man die Zerlegung eines Flächenstückes in einzelne Teile und im ersten Fall auch die Ähnlichkeit verwendet haben. Die Ähnlichkeitslehre liegt auch einer Reihe von Aufgaben zur Bestimmung der Seiten einer quadratischen Stadt und auch den drei letzten Aufgaben des Buches IX zugrunde; in diesen handelt es sich um die Bestimmung nicht direkt ausmeßbarer Entfernungen oder um die Bestimmung der Höhe eines Berges und der Tiefe eines Brunnens. Diese Aufgaben sind äußerst elementar, weshalb wir uns nicht bei ihnen aufhalten wollen.

Aufgaben zum pythagoreischen Lehrsatz und über die Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke fanden später in China große Verbreitung. Im 18. Jahrhundert u. Z. systematisierte Li Rui die Aufgaben zur Bestimmung irgendwelcher Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks oder der Kombination solcher Bestimmungsstücke nach irgendwelchen gegebenen Beziehungen, indem er sie in 25 Gruppen zusammenfaßte. Die Lösungsmethoden des Li Rui sind ebenso wie die seiner früheren Vorgänger algebraischer Natur.

In der Geschichte der praktischen Geometrie spielt eine Ergänzung zum Kommentar des Liu Hui eine bedeutende Rolle, die unmittelbar an die letzten Aufgaben der „Mathematik in neun Büchern" anschließt und später unter dem Titel „Mathematische Abhandlung über eine Meeresinsel" (Hai dao suan jing) zu einer selbständigen Abhandlung wurde. Im 7. Jahrhundert wurde sie in die Sammlung der „Zehn Musterabhandlungen über die Mathematik" [46] aufgenommen.

Die „Abhandlung über die Meeresinsel" behandelt die Bestimmung von nicht direkt ausmeßbaren Entfernungen und Abmessungen. Die erste Aufgabe, in der es um die Höhe einer Insel über dem Meeresspiegel geht, hat dem gesamten Werk den Namen gegeben. Die Abhandlung enthält die Lösungen von neun Aufgaben. Außer (1.) der Höhe der Insel werden hier bestimmt: 2. die Höhe eines Baumes auf einem Hügel, 3. die Höhe einer entfernten Stadt, die von einer Mauer umgeben ist, 4. die Tiefe einer Schlucht, 5. die Höhe eines Turmes auf einem Felde, den man von einem Hügel aus betrachtet, 6. die Breite einer Flußmündung, 7. die Tiefe eines durchsichtigen Teiches, 8. die Breite eines Flusses, den man von einem Hügel aus betrachtet, und 9. die Höhe einer Stadt, die man von einem Berg aus betrachtet. Zweifellos wurden sämtliche Lösungsregeln aus Ähnlichkeitsüberlegungen gewonnen.

Die zweite Aufgabe des Liu Hui lautet so: „Auf einem Hügel wächst eine Kiefer von unbekannter Höhe. Unten in der Ebene sind zwei Stangen von jeweils (a =) 20 chi Höhe aufgestellt, so daß sie auf einer Geraden mit dem Baum liegen und voneinander den Abstand (b =) 50 zhang haben. Der Wipfel des Baumes und die Spitze der ersten Stange bilden mit einem Punkt auf der Erde, der in (c =) 7 zhang und 4 chi Entfernung hinter der Stange liegt, eine Gerade. Von diesem Punkt aus schneidet die Verbindungsgerade zum Fußpunkt des Baumes (e =) 2,8 chi vom oberen Ende der Stange ab. Der Wipfel des Baumes bildet wiederum eine gerade Linie mit dem Ende der hinteren Stange und einem Punkt auf der Erde, der in (d =) 8 zhang und 5 chi Entfernung hinter der Stange liegt. Gesucht wird die Höhe (x) der Kiefer und die Entfernung (y) von der vorderen Stange bis zum Hügel [46, S. 254, französisch]. Die Regel des Liu Hui entspricht den Formeln (Abb. 5)

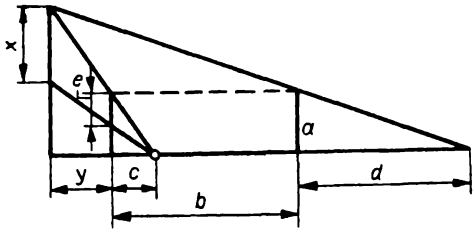


Abb. 5

$$x = \frac{be}{d-c} + e, \quad y = \frac{bc}{d-e}.$$

Später waren derartige Aufgaben Forschungsgegenstand vieler europäischer Mathematiker; sie fanden Eingang in vielen Leitfäden der praktischen Geometrie, der Kriegskunst usw. zu Beginn der Neuzeit.

Ausmessung ebener Figuren. Im Buch I der „Mathematik in neun Büchern" werden Regeln zur Bestimmung der Flächeninhalte von Rechtecken, Dreiecken, Trapezen, Kreisen, Kreissektoren, Kreissegmenten und Kreisringen angegeben.

Bezeichnet man den Durchmesser[1]) des Kreises mit d und den Kreisumfang mit c, so lassen sich die vier Regeln des Buches I zur Bestimmung des Kreisinhalts S durch die Formeln

$$S = \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{cd}{4} = \frac{dd}{4} \cdot 3 = \frac{cc}{12}$$

ausdrücken. Der Wert der Zahl π wird hier gleich 3 gesetzt. Dieser Wert, der schon erheblich früher im alten Babylon benutzt wurde, der in der Bibel genannt wird und in der chinesischen Literatur früher in der „Mathematischen Abhandlung über den Meßstab" auftrat, wird sowohl für den Flächeninhalt als auch für den Umfang des Kreises benutzt. Es sei hier erwähnt, daß auch in Babylon eine Formel angewandt wurde, die den Flächeninhalt eines Kreises durch dessen Umfang ausdrückt.

Der Flächeninhalt eines Kreissektors wurde nach der Länge des zugehörigen Kreisbogenstückes s zu $\frac{ds}{4}$ bestimmt. Eine Regel zur Berechnung des Kreisbogens aus anderen Stücken ist nicht angegeben. Der Flächeninhalt eines Kreisringes wurde durch die elegante Formel

$$\frac{c_1 + c_2}{2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{2}$$

ausgedrückt. Den Flächeninhalt eines Segments, das durch eine Sehne von der Länge l abgeschnitten wurde und eine Höhe h hatte, berechnete man nach der Regel

$$\sigma = \frac{lh + h^2}{2}.$$

Es handelt sich hierbei um eine Näherungsformel. Im Bereich des Halbkreises liefert sie etwas zu kleine Näherungswerte, die um so schlechter sind, je kleiner die Höhe des Segments ist. Setzt man $l = 1$, so ändert sich der relative Fehler δ, d. h. der Quotient $\delta = \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma'}$, wobei σ und σ' (σ' bedeutet den wahren Wert des Flächeninhaltes) bis auf 10^{-4} genau genommen sind, nach Tabelle auf folgender Seite:

[1]) Ebensowenig wie die alten chinesischen Mathematiker besaßen auch die griechischen Mathematiker keinen besonderen Ausdruck für Radius.

h	σ	σ'	δ
0,01	0,0050	0,0067	25,0%
0,10	0,0550	0,0672	18,0%
0,30	0,1950	0,2137	8,8%
0,50	0,3750	0,3927	4,5%

Für $h \to 0$ geht der Quotient $\frac{\sigma}{\sigma'} \to 0{,}75$ und $\delta \to 25\%$. Für $h = r$, d. h. beim Halbkreis, liefert die chinesische Formel für das Kreissegment mit $\pi = 3$ einen genauen Wert, doch sind bei einem derartigen Wert für π die Näherungswerte für Segmente mit kleinem h äußerst grob und schlechter als der Näherungswert für π selbst, dessen Fehler bei 5% liegt. Für den Halbkreis, d. h. in Wirklichkeit für den Flächeninhalt eines Trapezes, dessen eine Seite der Durchmesser, die andere ein zum Durchmesser paralleles Tangentenstück von der Länge des Radius ist, gilt

$$\sigma = \frac{d + r}{2} r.$$

Möglicherweise ist dieses Ergebnis direkt auf Segmente übertragen worden, die kleiner sind als der Halbkreis, indem man d bzw. r durch l bzw. h ersetzte. Die Regel für den Halbkreis selbst könnte mit Hilfe des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gewonnen worden sein. Der halbe Flächeninhalt eines solchen Sechsecks ist kleiner als der des Halbkreises; zur Verbesserung hat man womöglich anstelle der Fläche des Trapezes $ACDB$ die des Trapezes $AC'B'D$ genommen, wobei $C'D' = CD$ ein Tangentenstück an dem oberen Peripheriepunkt des Kreises (Abb. 6) darstellt.

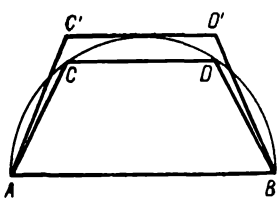


Abb. 6

Die altchinesische Regel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreissegments ist mit der Regel identisch, die von den Vorgängern Herons von Alexandria verwendet wurde. In der „Metrik", die wahrscheinlich im 1. Jahrhundert geschrieben wurde, teilt Heron mit, daß die „Alten" den Flächeninhalt des Segments verhältnismäßig ungenau berechneten, indem sie diesen gleich $\frac{l + h}{2} \cdot h$ setzten: Diese Regel ist jedoch nur unter der Voraussetzung $\pi = 3$ für den Halbkreis richtig. Heron gibt die wesentlich bessere Näherungsformel

$$\sigma = (l + h)\frac{h}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

an, die den Flächeninhalt des Halbkreises für $\pi = \frac{22}{7}$ liefert, und sagt ausdrücklich, daß man diese Regel nur benutzen darf, wenn die Grundlinie des Segments dessen dreifache Höhe nicht übersteigt. Die oben angegebene Formel finden wir auch in der althebräischen Schrift „Die Lehre vom Messen" (vgl. S. 219). Die Formel $\sigma = \frac{(l + h)h}{2}$ findet man später bei dem indischen Gelehrten Mahâvîra.

Die Übereinstimmung in der Methode zur Berechnung des Flächeninhalts eines Segments in China und Alexandrien läßt den Gedanken aufkommen, daß hier eine gemeinsame Quelle vorgelegen haben könnte.

Für die Bogenlänge s eines Segments schlug Shen Gua im Jahre 1086 die Formel $s = l + 2\frac{h^2}{a}$ vor [40, S. 39]. Möglicherweise liegt hier bei Shen Gua ein Schreibfehler vor, indem der Durchmesser anstelle der Sehne steht. In diesem Falle wäre die Regel damit äquivalent, den halben Bogen durch die zugehörige Sehne $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2}$ zu ersetzen. Dies liefert für den Bogen den Näherungswert $l + 2\frac{h^2}{l}$ (vgl. S. 48).

Die Berechnung von π. Der Näherungswert $\pi = 3$ wurde bei der Berechnung des Kreises in der geodätischen Praxis und in den Lehrbüchern der Mathematik noch viele Jahrhunderte nach der „Mathematik in neun Büchern" angewandt. Wahrscheinlich wurde dieser Wert ursprünglich gesondert für den Kreisumfang und für den Flächeninhalt des Kreises gewonnen, ohne daß der Zusammenhang zwischen beiden Größen bekannt war. Es könnte sein, daß die Übereinstimmung von π in beiden Fällen zunächst das Ergebnis empirischer oder halbempirischer Berechnungen gewesen ist; man setzte z. B. den Flächeninhalt des Kreises gleich $\frac{3}{4}$ des umbeschriebenen Quadrates, den Kreisumfang gleich dem Umfang des regelmäßigen einbeschriebenen Sechsecks. Den Verfassern der „Mathematik in neun Teilen" war der Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Flächeninhalt bereits bekannt. Sie selbst benutzten jedoch bei der Berechnung des Kugelvolumens eine Regel, die dem Wert $\pi = \frac{27}{8}$ (vgl. S. 61) entsprach, offenbar ohne die Quadratur des Kreises und die Kubatur der Kugel miteinander in Beziehung zu bringen.

Im ersten bis dritten Jahrhundert nahmen die chinesischen Astronomen und Mathematiker Forschungen vor, die einer genaueren Berechnung der Zahl π galten, vielleicht unter dem Einfluß über Indien eingedrungener griechischer Ideen. Der Astronom und Philosoph Zhang Heng (78—139) hat auf Grund uns unbekannter Überlegungen geschlossen, daß das Quadrat des Kreisumfanges sich zum Umfangsquadrat des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates verhält wie 5:8, was dem Wert $\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ entspricht. Dieser gute Näherungswert, dessen Fehler unter 1 % liegt, wurde später in China mehrfach verwendet, z. B. durch Qin Jiu-shao im Jahre 1247 und auch noch viel später. Den Näherungswert $\pi \approx \sqrt{10}$ trifft man auch in anderen Ländern an; im 7. Jahrhundert bei Brahmagupta, im 9. Jahrhundert bei Muḥammad ibn Mūsā al Ḫuwarizmī.

Der gelehrte Heerführer Wang Fan (gestorben 267) kam auf Grund uns unbekannt gebliebener Überlegungen zu einem etwas besseren Näherungswert mit $\pi = \frac{142}{45} = 3{,}155\ldots$ Dagegen kennen wir die Rechenweise des Liu Hui. In den Kommentaren zum ersten Buch der „Mathematik in neun Büchern" wandte er eine Methode an, die erstmalig bei Archimedes zu finden ist und auf der Annäherung des Flächeninhalts des Kreises durch eine Folge einbeschriebener regulärer $k \cdot 2^n$-Ecke beruht. Zunächst werden die

Seiten derartiger Vielecke vom Sechseck an berechnet und dann deren Flächeninhalte allerdings angenähert bestimmt, indem man die Seiten mit dem Radius multipliziert. Das Ganze läuft somit auf die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes und das Ausziehen von Quadratwurzeln hinaus. Die Genauigkeit seines Ergebnisses schätzte Liu Hui ab, indem er sich darauf berief, daß der Flächeninhalt des Kreises kleiner ist als der der Figur, die aus dem regulären einbeschriebenen Vieleck und der Summe der den Restsegmenten umbeschriebenen Rechtecke besteht. Und zwar benutzte er die Ungleichungen

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n),$$

wobei S den Flächeninhalt des Kreises und S_n bzw. S_{2n} die Flächeninhalte der einbeschriebenen regulären Vielecke mit den Seitenzahlen n bzw. $2n$ bedeuten. Diese Abschätzungen unterscheiden sich von denen in der „Kreismessung" des Archimedes insofern, als diese auf der Berechnung der Umfänge des einbeschriebenen und umbeschriebenen 96-Ecks beruhten.

Mit $d = 100$ Einheiten ergab sich hierbei

$$S_{96} = 313\frac{584}{625}, \quad S_{192} = 314\frac{64}{625},$$

so daß

$$314\frac{64}{625} < S < 314\frac{169}{625}$$

gilt. Als Näherungswert wählte Liu Hui das größte Ganze des Ergebnisses, d. h. die Zahl 314, setzte also $\pi \approx 3{,}14$. Später dehnte er seine Berechnungen bis zum 3072-Eck aus und erhielt einen noch genaueren Näherungswert, der in Dezimalschreibweise dem Wert $\pi \approx 3{,}14159$ entspricht.

Liu Hui deutet an, daß man den Prozeß zur Annäherung des Kreisflächeninhaltes durch die Flächeninhalte einbeschriebener Vielecke auch weiter fortsetzen kann. Er schrieb: „Je feiner man teilt, um so geringer ist der Fehlbetrag. Teilt man immer weiter und weiter, so lange, bis die Teilung unmöglich wird, so erhält man eine Übereinstimmung mit der Kreisfläche, und ein Fehlbetrag tritt nicht mehr auf" [47, chinesisch]. Diese Worte könnte man so auffassen, daß für Liu Hui der Kreis mit dem einbeschriebenen Vieleck im Grenzwert zusammenfällt, wenn man die Anzahl der Seiten unbegrenzt anwachsen läßt. Es ist aber auch möglich, daß Liu Hui hier einer atomistischen Vorstellung Ausdruck verlieh, der zufolge der Kreis mit einem Vieleck mit hinreichend vielen Seiten identisch ist. In ähnlicher Weise ging Liu Hui auch an die Berechnung des Pyramidenvolumens heran.

Mit noch größerer Genauigkeit wurde π durch den hervorragenden Astronomen, Mathematiker und Ingenieur Zu Chong-zhi (430 bis 501) berechnet, der in einem verloren gegangenen Werk die Ungleichung

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

bewies. Von Zu Chong-zhi stammt außerdem eine originelle Darstellung von π durch den Bruch $\frac{355}{113}$, der auf sechs Dezimalen nach dem Komma genau ist. Er bezeichnet diesen Wert als „genau", während er den ebenfalls bekannten Näherungswert $\frac{22}{7}$ „ungenau" nannte.

Die im 5. Jahrhundert in China erzielte Genauigkeit von π wurde erst tausend Jahre später durch Ghiyāth ad-Dīn Ǧamšid al-Kāšī übertroffen, der π auf 16 Dezimalen nach dem Komma genau berechnete. Den Näherungswert $\frac{355}{113}$ fand erneut der Holländer Valentin Otho am Ende des 16. Jahrhunderts. Bekanntlich ist dieser Wert einer der Näherungsbrüche, die sich bei der Entwicklung von π in einen Kettenbruch ergeben, doch kann aus dieser Tatsache nicht geschlossen werden, daß die Chinesen Kettenbrüche verwendet hätten. Dieser Bruch kann durchaus auch auf andere Weise gewonnen worden sein. So hat z. B. Otho den Wert $\frac{355}{113}$ erhalten, indem er vom Zähler bzw. Nenner des Näherungswertes des Ptolemaios $\frac{377}{120}$ den Zähler bzw. den Nenner des Näherungswertes des Archimedes $\frac{22}{7}$ abzog:

$$\frac{377-23}{120-7}=\frac{355}{113}.$$

Volumenberechnungen. Die altchinesischen Mathematiker haben bei der Rauminhaltsbestimmung von Körpern, die im Bauwesen vorkamen, große Erfolge erzielt. Wir finden bei ihnen keinerlei Interesse an regulären Polyedern wie etwa bei den Griechen, dafür aber berechneten sie die Volumina vieler anderer Körper, die völlig außerhalb des Gesichtskreises der Babylonier, Ägypter und Griechen geblieben waren.

Die wichtigsten Angaben über die Berechnung der Volumina finden wir im Buch V der „Mathematik in neun Büchern" (vgl. S. 25). Hier werden Quader mit quadratischer Grundfläche, gerade Prismen mit trapezförmigem und dreieckigem Grundriß sowie Pyramiden mit quadratischen und rechteckigen Grundflächen betrachtet. Man beschränkt sich jedoch nicht nur auf diese einfachsten Fälle, wir finden vielmehr im Buch V genaue Regeln zur Berechnung wesentlich komplizierterer Körper. Wie aus dem Kommentar des Liu Hui hervorgeht, zerlegte man diese zur Berechnung in Parallelepipeda, Prismen und Pyramiden. So berechnet Liu Hui den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grundfläche, indem er diesen in einen Quader, vier paarweis gleiche Prismen an den Seitenflächen und vier gleiche Pyramiden an den Ecken zerlegt.

Als Beispiel wollen wir den Text einer der kompliziertesten Aufgaben anführen, und zwar den der Nr. 17:

„Gegeben ist ein xian-chu. Die untere Breite ist 6 chi, die obere Breite 1 zhang (= 10 chi). Die Tiefe ist 3 chi, die obere Breite 8 chi, eine Tiefe ist nicht vorhanden, die Länge beträgt 7 chi. Gefragt wird, wie groß das Volumen ist." Die Regel ist wie stets lakonisch: „Zähle zusammen (alle) drei Breiten, multipliziere mit der Tiefe, multipliziere noch mit der Länge, nachdem du durch 6 geteilt hast, nimm 1 mal" [42, S. 475, russisch].

Der Körper, um den es sich hier handelt, ist in Abb. 7 dargestellt. Dem Text der Aufgabe entsprechend hat man $a = 6$, $b = 10$, $c = 8$, $l = 7$ und $h = 3$ zu setzen. Offenbar zerlegte man das xian-chu in ein gerades Prisma mit rechtwinklig-dreieckiger Grundfläche (Katheten l und h) und der Höhe a und zwei gleichgroße Pyramiden mit

der Höhe h, deren Grundfläche von jeweils einem Trapez mit den Seiten $\frac{b-a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ und der Höhe l gebildet wird. Die Regel

$$V = \frac{(a+b+c)\,l}{6}$$

zog noch einige Umformungen bei der Addition der Volumina des Prismas $\frac{1}{2}hla$ und der Pyramiden

$$2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}+\frac{c-a}{2}\right)l\right]\frac{h}{3}$$

nach sich. — Später, am Ende des 18. Jahrhunderts, wurde das Volumen eines solchen Körpers von A. M. Legendre im zwanzigsten Satz des Buches VI seiner „Elemente der Geometrie" (1794) bestimmt.

Das Volumen des Körpers chu-meng (Abb. 8) wird durch die Formel

$$V = \frac{1}{6}(2l_1 + l_2)\,ah$$

angegeben. Man gewinnt sie, wenn man aus dem Körper durch zur oberen Kante senkrechte Ebenen ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche und zwei gleich große Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche herausschneidet. Auch hier werden algebraische Umformungen benötigt.

Für das Volumen des Körpers chu-tung, der einem viereckigen Pyramidenstumpf ähnelt, dessen Seitenflächen jedoch nicht wie bei der Pyramide in einem Punkt zusammenlaufen (Abb. 9), wird die Formel

$$V = \frac{(2a_1 + a_2)\,b_1 + (2a_2 + a_1)\,b_2}{6}\,h$$

angegeben, wobei a_1, b_1 die Seiten der Grundfläche und a_2, b_2 die Seiten der Deckfläche sind, während h die Höhe des Körpers bedeutet. Den Beweis für die Formel findet man bei Wang Xiao-tong, einem Mathematiker des 7. Jahrhunderts. Den Körper kann man gemäß der Abb. 9 in Prismen und Pyramiden zerlegen. Dann gilt

$$V = h\left(a_2 b_2 + \frac{a_2 x}{2} + \frac{a_2 u}{2} + \frac{b_2 y}{2} + \frac{b_2 z}{2} + \frac{xy}{3} + \frac{xz}{3} + \frac{uy}{3} + \frac{uz}{3}\right) \text{usw.}^{1})$$

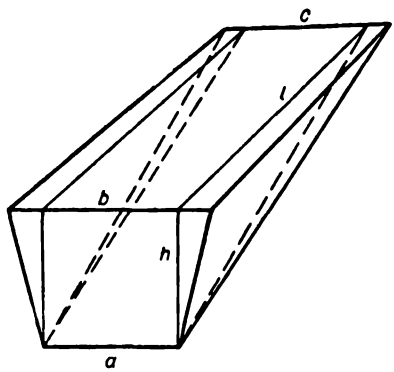


Abb. 7

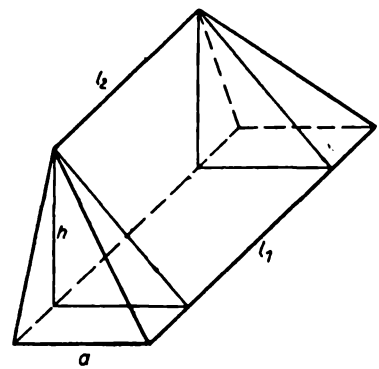


Abb. 8

[1]) Vgl. Nachtrag (3).

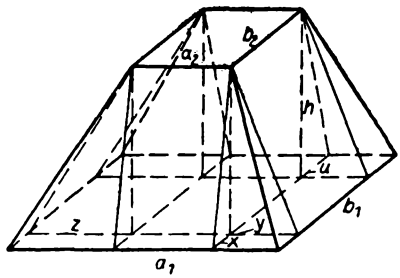


Abb. 9

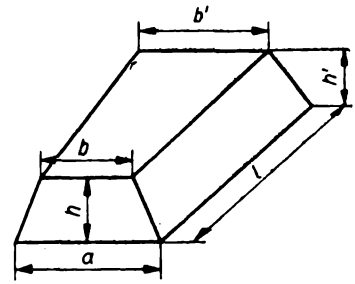


Abb. 10

Die Aufgaben zur Volumenberechnung in China ähneln teilweise denen, die man in Mesopotamien betrachtet hatte. In den Keilschrifttexten findet man ebenfalls Aufgaben, in denen es um die Berechnung der für Bau- und Erdarbeiten benötigten Arbeitskräfte sowie um die Berechnung der Volumina der Bauwerke geht. Das Volumen eines Belagerungswalles (Abb. 10) bestimmten die babylonischen Mathematiker durch die Näherungsformel

$$V \cong \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a'+b'}{2}\right)\frac{h+h'}{2}\,l.$$

Jedoch wissen wir über diese Seite der Mathematik in Babylon zu wenig, um solche Vergleiche weiterführen zu können.

An Körpern mit gekrümmten Oberflächen wurden in der „Mathematik in neun Büchern" Zylinder, Kegel und Kegelstumpf dem Volumen nach bestimmt, und zwar beziehungsweise durch die Formeln

$$V = \frac{c^2}{12}h,$$

$$V = \frac{c^2}{12}\,\frac{h}{3}$$

und

$$V = \frac{c_1c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12}\,\frac{h}{3}.$$

Sie sind richtig unter der Voraussetzung $\pi = 3$. Die Formel für die Berechnung des Kugelvolumens tritt explizite nicht auf, ist aber im Bruch über das Ausziehen der Wurzel zu finden. Der Kugeldurchmesser wird, wie bereits erwähnt, durch das gegebene Kugelvolumen mit Hilfe der Formel

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$$

ausgedrückt, so daß

$$V = \frac{9}{16}d^3$$

gilt. Da in Wirklichkeit der Koeffizient $\frac{\pi}{6}$ lauten muß, ist hier demnach $\pi = \frac{27}{8}$ gesetzt und hat somit einen anderen Wert als für Kreis, Zylinder oder Kegel. Es könnte sein, daß man das Kugelvolumen gleich dem eines Zylinders mit einem Großkreis als

Grundfläche und der Höhe $\frac{3}{4}d$ angenommen hat. Der Großkreis hat den Flächeninhalt $\frac{3}{4}d^2$, also ergibt sich

$$V = \frac{9}{16}d^3 = \frac{3}{4}d^2 \cdot \frac{3}{4}d.$$

Später findet man in dem Kommentar des Liu Hui, der, wie wir gesehen hatten, sich erfolgreich mit der näherungsweisen Quadratur des Kreises beschäftigt, für das Kugelvolumen die Ungleichungen [38]

$$\frac{8}{16}d^3 < V < \frac{9}{16}d^3,$$

womit die Zahl π zwischen den Grenzen

$$3 < \pi < 3\frac{3}{8}$$

eingeschlossen wird.

Geometrie und Algebra. Wir haben gesehen, daß sich auf dem Gebiet der Geometrie viele algebraische Aufgaben ergeben hatten. Geometrische Figuren wurden benutzt, um algebraische Beziehungen zu erklären und herzuleiten. Algebraische Beziehungen wiederum dienten zur Untersuchung geometrischer Figuren. Beispiele dafür findet man in der gesamten geschichtlichen Entwicklung der Mathematik Chinas.

In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, daß der erste Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes in China nicht rein synthetisch war und einfache Konstruktionen und algebraische Umformungen in sich vereinigte. Der Beweis steht im Kommentar zur „Abhandlung über das Zhou-bi" des Zhao Jun-qing (2. oder 3. Jahrhundert). Er beruht auf einer Zerlegung des Quadrats (Abb. 11) über der Kathetensumme eines gegebenen rechtwinkligen Dreiecks in acht dem ursprünglichen Dreieck kongruente rechtwinklige Dreiecke und ein kleineres inneres Quadrat, dessen Seite gleich der Kathetendifferenz ist. Das ergibt

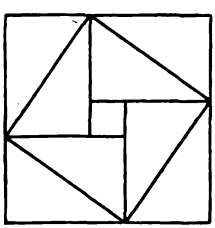


Abb. 11

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2$$

oder die bei Zhao Jun-qing in Worten angegebene Beziehung

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2.$$

Eine ähnliche Zeichnung findet man ohne jede Erläuterung, lediglich mit dem Hinweis „siehe!" bei dem indischen Mathematiker des 12. Jahrhunderts Bhâskara (siehe S. 99). In der „Abhandlung über das Zhou-bi" ist die gleiche Zeichnung wie hier für den Fall $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ angegeben, wobei das große Quadrat in 49 kleine Quadrate unterteilt ist; hier wird die Gleichung $25 = 49 - 4 \cdot 6$ benutzt.

Was die geometrische Darstellung algebraischer Beziehungen betrifft, so findet man Beispiele hierzu bereits bei Liu Hui und Zhao Jun-qing, die beide etwa um die gleiche Zeit gewirkt haben. Beide kannten planimetrische Veranschaulichungen der algebraischen Identitäten

$$2ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2b\,(a-b)$$

oder $$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b).$$

Später werden wir sehen, daß geometrische Hilfsmittel in äußerst scharfsinniger Weise zur Herleitung einiger numerischer Reihen benutzt wurden. Wir wollen uns hier lediglich mit dem Hinweis begnügen, daß die geometrischen Aufgaben einen großen Einfluß auf den Fortschritt der Algebra in China ausgeübt haben, indem sie zu Gleichungen 3. Grades führten.

Bevor wir uns wieder der Algebra zuwenden, sei noch hinzugefügt, daß im 13. Jahrhundert unter dem Einfluß der verstärkten wissenschaftlichen Beziehungen zu den mittelasiatischen Ländern bei einigen chinesischen Mathematikern das Interesse an der theoretischen Seite der Mathematik im allgemeinen und an der Geometrie im besonderen stark zunahm. So unterzog im Jahre 1275 Yang Hui die Arbeiten des Li Chun-feng und des Liu Yi einer scharfen Kritik, weil diese Methoden anwandten, ohne deren theoretische Begründung zu geben. Im Altertum, sagte Yang Hui, änderten die Gelehrten die Bezeichnung ihrer Methode von Aufgabe zu Aufgabe, wodurch die ursprünglichen Grundlagen verdeckt wurden. Yang Hui selbst gibt Beweise für viele Methoden und Sätze an, z. B. die Regel zur Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung — wie wir bereits besprochen hatten — oder den Satz über die Flächengleichheit von Ergänzungsrechtecken zu Rechtecken, die längs der Diagonale eines beliebigen Rechteckes konstruiert sind. Dieser Satz unterscheidet sich von dem 43. Satz im Buch I der „Elemente" des Eukleides lediglich dadurch, daß dort von Parallelogrammen die Rede ist.

Es besteht Anlaß zur Vermutung, daß um die siebziger Jahre des 13. Jahrhunderts chinesische Astronomen die „Elemente" des Eukleides als Lehrmittel benutzten; jedoch hat sich die Geometrie im mittelalterlichen China nicht zu einer selbständigen deduktiven Wissenschaft entwickelt, und die Beschäftigung mit den Werken des Eukleides hat, wenn sie überhaupt stattgefunden hat, keine merklichen Spuren hinterlassen [40, S. 104 bis 105]. Die ersten sechs Bücher der „Elemente" wurden erst sehr viel später, und zwar im Jahre 1607, ins Chinesische übersetzt.

Kubische Gleichungen. Aufgaben, die auf kubische Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten führen, sind bereits in der babylonischen Mathematik anzutreffen, wobei die Auflösung durch Probieren oder mit Hilfe von Tabellen erfolgte. Es ist jedoch unklar, ob die babylonischen Mathematiker die kubischen Gleichungen als solche erkannt hatten.

In der griechischen Literatur wurden, wie wir wissen, kubische Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten fast überhaupt nicht betrachtet. Ausnahmen hiervon bilden das näherungsweise Ausziehen der Kubikwurzel bei Heron von Alexandria und einzelne Beispiele polynomischer Gleichungen mit einer kleinen ganzzahligen Wurzel, wovon ein Beispiel in der „Arithmetik" des Diophantos erhalten geblieben ist. Im Beispiel des Diophantos, $$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3,$$

läßt sich die Wurzel $x = 4$ leicht ermitteln, wenn man die Gleichung auf die Form

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

bringt und durch $x^2 + 1$ dividiert.

Später traten numerische kubische Gleichungen in expliziter Form in China auf. Es ist durchaus möglich, daß sie bereits von Zu Chong-zhi untersucht wurden. Außer Zweifel steht die Behandlung von Aufgaben, die auf kubische Gleichungen mit mehr als zwei Gliedern führen, bei dem Astronomen und Mathematiker Wang Xiao-tong, (erste Hälfte des 7. Jahrhundert), dem Verfasser der „Fortsetzung der alten Mathematik" (Qi gu suan shu).

In einer solchen Aufgabe wird gefordert, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus dem Kathetenprodukt

$$xy = P = 706\frac{1}{50}$$

und der Differenz aus der Hypotenuse und einer der beiden Katheten

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = Q = 36\frac{9}{10}$$

zu bestimmen. Wang Xiao-tong drückt das Verfahren zur Aufstellung der zugehörigen Gleichung

$$x^3 + \frac{Q}{2}x^2 = \frac{P^2}{2Q}$$

in Worten aus und fügt lakonisch hinzu: „Führt die Operation zur Bestimmung der Wurzel gemäß dem Ausziehen der Wurzel aus. Das Ergebnis liefert die erste Seite. Addieren wir hierzu den Überschuß, so erhalten wir die Hypotenuse. Nun teilet das Produkt durch die erste Seite, der Quotient ist dann die zweite Seite" [34, S. 54, englisch]. Die in der Lösung angegebenen Seitenlängen $x = 14\frac{7}{20}$, $y = 49\frac{1}{5}$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = 51\frac{1}{4}$ sind die exakten Lösungen der Aufgabe. Die Lösungsmethode ist nicht angegeben, doch besteht kein Zweifel daran, daß es sich bei dieser um eine Weiterentwicklung der altchinesischen Methode zum Ausziehen von Kubikwurzeln handelt

Diese Methode liefert unmittelbar den ganzzahligen Anteil der Wurzel; der Bruchteil ließe sich in Gestalt eines Dezimalbruches bestimmen. Es ist aber auch möglich, daß man die Gleichung zunächst mit Hilfe einer linearen Transformation in eine Gleichung mit ganzzahliger Wurzel verwandelte: Derartige Substitutionen wurden von den chinesischen Algebraikern im 13. Jahrhundert angewandt (vgl. S. 68). Selbstverständlich sind die Zahlenangaben in der Gleichung entsprechend vorgegeben. Interessant ist auch die Wahl der rationalen Lösungen der Gleichung: Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind den Zahlen 287, 984 und 1025, d. h. 7, 24 und 25 proportional. Wir hatten bereits erwähnt, daß die chinesischen Gelehrten die Regel kannten, mit deren Hilfe sich ganzzahlige und rationale pythagoreische Zahlentripel konstruieren lassen.

Bei anderen Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke oder zur Berechnung der Stücke eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche bildet Wang Xiao-tong Gleichungen von der allgemeineren Form

$$x^3 + ax^2 + bx = c.$$

Gesucht werden z. B. die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus dem Produkt einer Kathete mit der Hypotenuse ($P =$) $1337\frac{1}{20}$ und aus der Differenz der Hypotenuse

und der anderen Kathete $(D =) 1\frac{1}{10}$. Bezeichnet man die Katheten mit x und y und eliminiert y, so ergibt sich

$$(x + D)^2 (2Dx + D^2) = p^2$$

oder

$$\left(x + 1\frac{1}{10}\right)^2 \left(2\frac{2}{10}x + 1\frac{21}{100}\right)^2 = \left(1337\frac{1}{20}\right)^2.$$

Wang Xiao-tong gibt völlig richtig den Wert[1]) $x = 92\frac{2}{5}$ an. Für die Hypotenuse ergibt sich dann $93\frac{1}{2}$ und für die andere Kathete $y = 14\frac{3}{10}$. Hier sind die Seiten den Zahlen 143, 924 und 935 proportional.

Über die weitere Entwicklung der Algebra in China bis zum Zeitpunkt ihrer höchsten Blüte im 13. Jahrhundert ist nichts Näheres bekannt.

Die Algebra im 13. Jahrhundert; die Methode tian-yuan. Innerhalb einer Zeitspanne, die nur einige Jahrzehnte des 13. Jahrhunderts umfaßte, wirkten in China die hervorragenden Algebraiker Qin Jiu-shao, Li Ye, Yang Hui und Zhu Shi-jie, deren wichtigste Werke erhalten geblieben sind. Zweifellos hatten diese Gelehrten viele Vorgänger, auf die sie sich auch mitunter berufen. So verweist Yang Hui auf die Arbeiten des Liu Yi, eines Mathematikers aus dem 11. Jahrhundert (vgl. S. 51), und des jüngeren Jia Xian, der um 1100 das Werk „Erläuterung von Tabellen zu einer wertvollen Methode der Wurzelberechnung" (Li cheng shi suo) verfaßt hatte. Yang Hui schreibt, daß sich Jia Xian mit dem Ausziehen von Wurzeln vierten Grades beschäftigt und eine Tabelle von Zahlen gekannt habe, die wir heute als Binomialkoeffizienten bezeichnen. Zhu Shi-jie erwähnt die uns unbekannten Yuan Hao-wen und Liu Ru-xie.

Obwohl Qin Jiu-shao, Li Ye, Yang Hui und Zhu Shi-jie gleichzeitig oder nahezu gleichzeitig gelebt haben, läßt sich nicht behaupten, daß deren Arbeiten in einer Wechselbeziehung standen. Auf jeden Fall beruft sich keiner der Genannten auf einen der drei anderen. Das ist im Falle des Qin Jiu-shao und des Li Ye. die beide in der Mitte des 13. Jahrhunderts gewirkt haben. durchaus erklärlich. Der erste war ein hoher Beamter in dem südchinesischen Staat Sun, der zu den Mongolen in Feindschaft stand. Diese hatten Nordchina erobert, wo der andere der beiden Genannten lebte und ebenfalls hohe Beamtenposten bekleidete. In den Werken dieser vier Mathematiker treten erhebliche Unterschiede in Terminologie und Schreibweise auf. Außerdem ergänzen sich diese Werke in sehr vielen Beziehungen inhaltlich.

Die „Neun Bücher über Mathematik" (Shu shu jiu zhang) des Qin Jiu-shao, die 1247 erschienen waren, enthalten am Anfang einen zahlentheoretischen Abschnitt und im algebraischen Hauptteil eine äußerst ausführliche Darlegung der sog. Hornerschen Methode zur Auflösung von Gleichungen höheren Grades, verbunden mit entsprechenden Aufgaben. Li Ye (1178 bis 1265) geht in seinem „Meeresspiegel der Kreis-

[1]) G. Loria, der bei seinen Überlegungen einen Fehler gemacht hatte, kam zu dem falschen Schluß, daß die Lösung des Wang Xiao-tong falsch ist und daß die Aufgabe keine Lösung hat [28, S. 156 — 157].

berechnung" (Ce yuan hai jing, 1248) und in seinen „Neuen Schritten der Berechnung" (Yi gu yan duan, 1259) mit großer Ausführlichkeit auf die Zurückführung geometrischer und anderer Aufgaben auf algebraische Gleichungen ein [47b]. Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch erwähnt, daß der Titel des ersten Buches von Li Ye nicht mit der Berechnung von π zusammenhängt, sondern verschiedene Aufgaben über Kreise enthält, die Dreiecken einbeschrieben sind, usw. Die im Jahre 1261 herausgegebene „Ausführliche Erläuterung der mathematischen Regeln in den ‚Neun Büchern' und deren neue Klassifizierung" (Xiang jie jiu zhang suan fa zuan lei) und andere spätere Werke des Südchinesen Yang Hui schlossen sich in thematischer Hinsicht vielfach an die antike „Mathematik in neun Büchern" an. Besondere Aufmerksamkeit wird hier der Summierung endlicher Reihen geschenkt. Der Wanderlehrer Zhu Shi-jie schließlich gab in seiner „Einführung in mathematische Untersuchungen" (Suan xue qi men, 1299) eine allgemeine Einführung in die Algebra und erläuterte insbesondere die Vorzeichenregeln bei der Addition und Multiplikation, während er in seinem „Jaspisspiegel der vier Elemente" (Si yuan yu jian, 1303) nach der Beschreibung der Hornerschen Methode und der Methoden zur Aufstellung von Gleichungen ein Bezeichnungssystem für Gleichungen höheren Grades mit vier Unbekannten entwickelte und eine Reihe von Aufgaben löste, die auf derartige Gleichungen führen [47c]. Man kennt die Namen einiger Vorgänger des Zhu Shi-jie, die sich mit der Lösung solcher Systeme mit zwei und drei Unbekannten beschäftigten, ja man kennt sogar die Titel der von ihnen geschriebenen Werke, doch ist es bisher nicht gelungen, diese aufzufinden [38].

Die Ursachen für die Blütezeit der Algebra im 13. Jahrhundert, in einer Zeit schwerer Kriege gegen die Mongolen, sind ungenügend erforscht. In der Mitte der dreißiger Jahre eroberten die Mongolen Nordchina und um 1280 auch den südlichen Teil des Landes. Das ganze Land kam dadurch in eine äußerste Notlage. Das Niveau einzelner mathematischer Untersuchungen hingegen konnte zeitweise ansteigen, zum Teil infolge eines stärkeren Kontaktes mit den Gelehrten der mittelasiatischen Länder, die ebenfalls unter die Herrschaft der Mongolen geraten waren, zum Teil durch die Förderung, die die mongolischen Herrscher den Astronomen und Mathematikern zuteil werden ließen.

Die wichtigste Errungenschaft auf algebraischem Gebiet war die Erweiterung der vorhin beschriebenen Methode zur Lösung von Gleichungen zweiten und dritten Grades auf beliebige algebraische Gleichungen mit numerischen Koeffizienten, d. h. eine Weiterentwicklung der Hornerschen Methode. Die Ziffern der gesuchten Wurzel werden schrittweise durch Probieren ermittelt, und zwar als die ganzzahligen Anteile von Wurzeln der ursprünglichen Gleichung und verschiedener Hilfsgleichungen. Die lineare Substitution

$$x = ky, \quad k = 10^m$$

ermöglicht es, daß der ganzzahlige Anteil der zu bestimmenden Wurzel die Zahl 9 nicht übersteigt. Eine weitere lineare Substitution,

$$y = p + z,$$

wo p der gefundene ganzzahlige Anteil der Wurzel der nächsten Hilfsgleichung ist,

liefert den Übergang zur nächsten Gleichung. Die Koeffizienten dieser Gleichung werden nach dem Schema berechnet, für das wir früher Beispiele angegeben hatten, d. h. nach dem sog. Hornerschen Schema.

Eine genaue Beschreibung dieser Methode gibt Qin Jiu-shao, indem er die biquadratische Gleichung

$$-x^4 + 736200x^2 - 40642560000 = 0$$

mit von vornherein gewählter Wurzel $x = 840$ löst. Interessant ist, daß auf eine Lösung in Radikalen kein Wert gelegt wird, obwohl das bei dieser in x^2 quadratischen Gleichung sehr leicht möglich ist. Die angegebene Methode wurde auch für Gleichungen höheren als vierten Grades verwendet.

Es ist unbekannt, ob Qin Jiu-shao der erste war, der die Hornersche Methode auf beliebige Gleichungen mit positiven Wurzeln übertragen hat. Auf die Gleichung

$$x^4 = 1336336,$$

wo $x = 34$ ist, wandte sie etwa anderthalb Jahrhunderte früher Jia Xian an. Qin Jiu-shao gebührt auf jeden Fall das Verdienst, diese Methode systematisch und vollständig dargelegt zu haben.

Das Schema zur Berechnung der Koeffizienten im allgemeinen Falle könnte auf verschiedene Art und Weise gewonnen worden sein. Entweder hat man es unmittelbar von der Gleichung $x^3 = a$ auf die übrigen Gleichungen übertragen, oder aber es entstand als Ergebnis konkreter Umformungen der Koeffizienten bei den übrigen numerischen Gleichungen höheren Grades bei Anwendung der linearen Substitution $x = p + y$, wobei die Reihenfolge der Rechnung so verlief, als hätte man die linke Seite der umzuformenden Gleichung auf die Form

$$\{[(ax + b)\, x + c]\, x + d\}\, x$$

gebracht.

Die beschriebene Methode erhielt bei Li Ye die Bezeichnung „Methode des Himmelselements" (tian-yuan shu); er nannte die Unbekannte das Himmelselement „tian-yuan", während „shu" Methode bedeutete.

Die Substitution $x = ky$, die zunächst nur angewandt wurde, um die Wurzeln der Hilfsgleichungen kleiner als zehn werden zu lassen, wurde später auch angewandt, um den Koeffizienten des höchsten Gliedes Eins werden zu lassen und um gebrochene rationale Wurzeln zu ermitteln. Es sei hier ein Beispiel von Zhu Shi-jie betrachtet [36, S. 142]. Bei der Lösung der Gleichung

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0$$

nimmt Zhu Shi-jie, nachdem er den ganzzahligen Anteil der Wurzel zu 8 bestimmt hat, die Substitution $x = y + 8$ vor und erhält

$$576y^4 + 15792y^3 + 159553y^2 + 704392y - 545300 = 0.$$

Dann setzt er $y = \frac{z}{576}$ und findet

$$z^4 + 15792z^3 + 91902528z^2 + 233700360192z - 104208452812800 = 0.$$

Hieraus ermittelt er, nachdem er $z = 384$ erhalten hat, die Werte $y = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}$ und $x = 8\frac{2}{3}$. Später wurde diese Substitution von Fr. Viète wieder eingeführt.

Die von uns benutzte moderne Schreibweise für die Gleichungen weicht natürlich von der Symbolik der chinesischen Algebraiker des 13. Jahrhunderts sehr stark ab. Für die Potenzen der Unbekannten und für das freie Glied wurden besondere Hieroglyphen benutzt. Ein Gleichheitszeichen existierte nicht, doch wurde dieser Mangel durch die Schreibweise selbst ausgeglichen. Qin Jiu-shao schrieb die Koeffizienten nach aufsteigenden Potenzen der Unbekannten, angefangen vom freien Glied, in einer Spalte von oben nach unten. Früher war das freie Glied stets positiv, und ihm wurde die Gesamtheit der übrigen Glieder gleichgesetzt. Nunmehr wird es mit den übrigen Gliedern vereinigt und mit negativem Vorzeichen genommen; es wird angenommen, daß die algebraische Summe der Glieder der Gleichung gleich Null ist. Diese Formänderung gewährleistete ein einheitliches Operieren im Hornerschen Schema: Sämtliche Koeffizienten der Hilfsgleichungen wurden früher mit Hilfe der Addition, das freie Glied durch Subtraktion gewonnen; jetzt wird auch dieses genauso wie die übrigen Koeffizienten bestimmt.

Die in einer Gleichung fehlenden Potenzen wurden durch einen Kreis, d. h. durch das Zeichen Null gekennzeichnet. Rechts vom Koeffizienten der ersten Potenz erschien die Hieroglyphe der Unbekannten, die die Potenz der übrigen Glieder be-

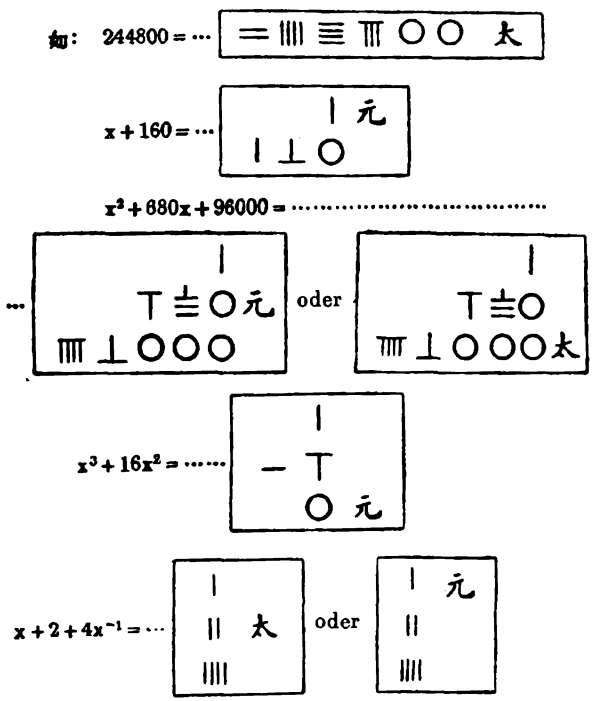


Abb. 12. Algebraische Ausdrücke (nach dem Buch des Li Yan)

stimmte; mitunter wurden auch das Zeichen des freien Gliedes oder die Hieroglyphen sämtlicher Potenzen geschrieben. In unserer Symbolik hätte die Schreibweise für die Gleichung

$$-x^4 + 736200x^2 - 40642560000 = 0$$

die Form

$$\begin{array}{r} -40642560000 \\ 0x \\ 736200 \\ 0 \\ -1. \end{array}$$

Die negativen Koeffizienten sind bei Qin Jiu-shao in schwarzer Farbe, die positiven in roter Farbe gedruckt; Li Ye verwandte zu dem gleichen Zweck ein Überstreichen der Ziffernzeichen. Ursprünglich ließ er das freie Glied unten erscheinen, doch im zweiten Buch verfährt er genauso wie Qin Jiu-shao. Wir wollen einige Beispiele für die chinesische Schreibweise angeben, aus denen u. a. hervorgeht, daß die chinesischen Algebraiker bei Anordnung der Koeffizienten auf beiden Seiten des freien Gliedes auch in der Lage waren, negative Potenzen der Unbekannten wiederzugeben. In diesen Beispielen bedeutet die Hieroglyphe tai 太 das freie Glied[1]), die Hieroglyphe yuan 元 (d. h. Himmel) bezeichnete die Unbekannte.

Die in China eingeführte Normalform für die Gleichungen entspricht der im 17. Jahrhundert von Th. Harriot und R. Descartes eingeführten Schreibweise, bei der sämtliche Glieder der Gleichung auf der einen Seite des Gleichheitszeichens erschienen, während auf der anderen Seite desselben Null stand. Die Ähnlichkeit wird dadurch noch stärker, daß Descartes und einige seiner Nachfolger das Fehlen einzelner Glieder der Gleichung durch Sternchen bezeichneten. Bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts schrieben die europäischen Mathematiker nach der griechisch-arabischen Tradition die Glieder der Gleichungen mit positiven Koeffizienten beiderseits des Gleichheitszeichens. In China bildete die Schreibweise der Gleichungen vom Typ $f(x) = 0$ die Grundlage für die einheitliche Anwendung des Hornerschen Schemas. Descartes betonte, daß diese Schreibweise die Grundlage für die einheitliche Formulierung verschiedener Sätze über die Eigenschaften der Gleichung bildet, z. B. für seine Vorzeichenregel usw.

Die Methode tian-yuan war eine der größten Errungenschaften der Mathematiker des alten China. Anderthalb Jahrhunderte später finden wir diese Methode bei Ğamšid al-Kāšī wieder, der sie auf das Ausziehen der Wurzeln beliebig hohen Grades anwandte. In Europa schlug im Jahre 1600 Viète in einer Arbeit ein analoges Verfahren vor; er hat jedoch kein bequemes Schema für die Berechnung der Hilfskoeffizienten angegeben. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde die Methode tian-yuan nahezu gleichzeitig von P. Ruffini (1804, 1813) und von W. Horner (1819) neu entdeckt; nach dem letzteren wird sie gegenwärtig am häufigsten benannt.

---

[1]) Mitunter schrieb man tai shi, d. h. die zu dividierende Zahl.

Die allgemeinen theoretischen Probleme der Theorie der Gleichungen höheren Grades ließen die chinesischen Mathematiker abseits liegen. Die Methode tian-yuan genügte den wissenschaftlichen Bedürfnissen Chinas im Mittelalter vollauf. In praktisch-numerischer Hinsicht gebührt ihr gegenüber der Lösung von Gleichungen in Radikalen der Vorzug, zumal diese nur auf spezielle Klassen von Gleichungen anwendbar ist. Andererseits stand die tian-yuan-Methode außerhalb jeden Zusammenhanges mit den grundlegenden Problemen, die durch die Untersuchungen der italienischen Mathematiker bei der Entdeckung der Lösungen der Gleichungen dritten und vierten Grades auf die Tagesordnung gesetzt wurden und mit deren Erforschung die gesamte Entwicklung der modernen Algebra zusammenhängt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich die chinesischen Algebraiker bis zum 14. Jahrhundert damit begnügten, eine positive Wurzel der Gleichung, d. h. eine einzige Lösung der Aufgabe zu ermitteln. Auf die Möglichkeit der Existenz mehr als einer Lösung bei Gleichungen zweiten und höheren Grades wies später Wu Jing in seiner „Vollständigen Klassifizierung der mathematischen Methoden des Werkes in neun Teilen" (Jiu zhang suan fa bi lei da quan, 1450) hin. Es wäre recht interessant, dieses Werk eingehender zu studieren [38].

Nichtlineare Gleichungssysteme. Die Lösung nichtlinearer Systeme mit vier Unbekannten war eines der Kernprobleme des „Jaspisspiegels der vier Elemente" von Zhu Shi-jie. Die vier Elemente, d. h. die Unbekannten, werden als die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und als irgendeine andere mit diesem zusammenhängende Größe aufgefaßt. Zhu Shi-jie bezeichnet sie als die Elemente des Himmels — tian,

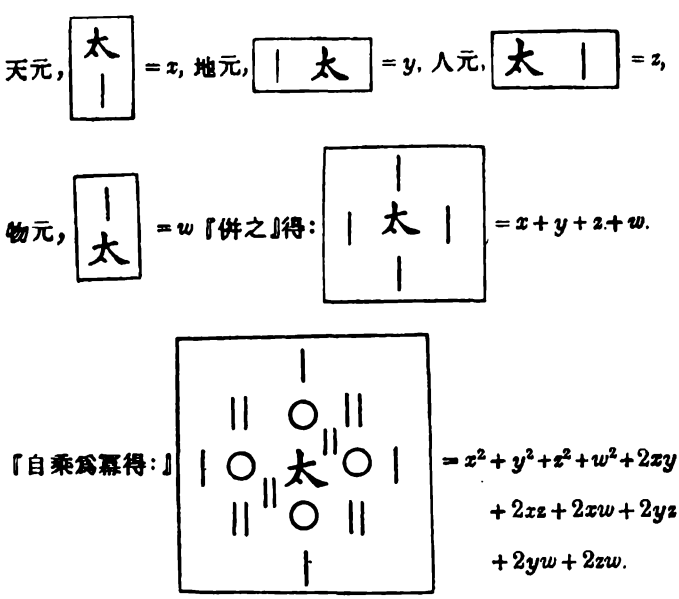


Abb. 13

der Erde — di, des Menschen — ren und schließlich des Dinges — wu. Wir wollen sie der Reihe nach mit x, y, z und w bezeichnen. Die Schreibweise für derartige Gleichungen spiegelte die Anordnung der Koeffizienten auf dem Rechenbrett wider. Die Koeffizienten werden in Form einer rechteckigen Tabelle geschrieben, in deren Mitte entweder das freie Glied steht oder, wenn ein solches fehlt, die Hieroglyphe tai (vgl. hierzu S. 69). Die Koeffizienten der Potenzen von x werden vom Mittelpunkt aus nach unten, die der Potenzen von y nach links, die der Potenzen von z nach rechts und die Koeffizienten der Potenzen von w schließlich nach oben geschrieben. Die Produkte xy, yw, wz, xz werden in den Schnittpunkten der entsprechenden Reihen eingetragen. Die Produkte xw und zy hingegen, für die derartige Plätze fehlen, erscheinen in schräger Richtung vom Mittelpunkt aus. Die Abb. 13 zeigt die Schreibweise für die Ausdrücke $x + y + z + w$ und

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw.$$

Die Gleichung

$$2y^3 - 8y^2 - xy^2 + 28y + 6xy - x^2 - 2x = 0$$

schrieb Li Ye in der Form, wie die Abb. 14 zeigt.

Die Aufgaben wurden durch sukzessive Elimination der Unbekannten gelöst. Die Zwischengleichungen wurden gleichzeitig auf mehreren Rechenbrettern durch Teile von Tabellen in der Art der angegebenen dargestellt. Wir wollen eine in unserer Symbolik dargestellte Aufgabe des Zhu Shi-jie betrachten, in der die wichtigste gesuchte Größe $u = 2x + 2y$ ist:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0, \\ 2x - x^2 + 4y - xy^2 + 4z + xz &= 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ 2x + 2y - u &= 0. \end{aligned}$$

Hier ist $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ und $u = 14$. Die zweite Gleichung drückt die folgende Bedingung der Aufgabe aus:

$$\frac{2x + 4y + 4z}{x} = x + y^2 - z.$$

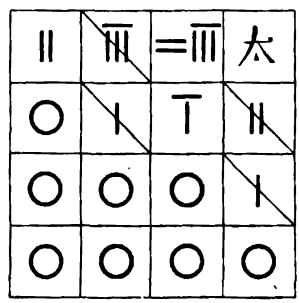


Abb. 14

Wie man sieht, beachtete Zhu Shi-jie das Prinzip der Dimensionstreue der Gleichungsglieder nicht und faßte lineare und quadratische Glieder usw. ein einer Gleichung zusammen.

Zum Abschluß der Übersicht über die Entwicklung der Algebra in China sind noch einige Besonderheiten einer recht umfangreichen Gruppe geometrischer Aufgaben hervorzuheben. Zur Übung im Lösen von Gleichungen höheren Grades führten die chinesischen Algebraiker häufig Aufgaben auch dann auf Gleichungen zurück, wenn dies nicht unbedingt erforderlich war, bzw. auf kompliziertere Gleichungen als unbedingt nötig. So bestimmte Qin Jiu-shao [28, S. 158] den Flächeninhalt x eines Drachenvierecks (Abb. 15), dessen Seiten bekannt sind, als Wurzel der Gleichung

$$-x^4 + 2(A + B)x^2 - (A - B)^2 = 0$$

mit $A=\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2, \qquad B=\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\left(\frac{c}{2}\right)^2.$

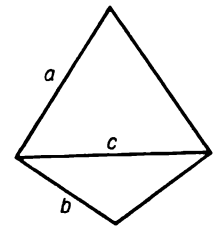


Abb. 15

Dabei kann man, sobald A und B bekannt sind, die Größe x unmittelbar zu

$$x=\sqrt{A}+\sqrt{B}$$

erhalten.

Äußerst komplizierte vorbereitende Umformungen werden in der folgenden Aufgabe des Zhu Shi-jie benötigt: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks sei 30 und dessen Kathetensumme 17. Gesucht ist die Summe aus der kleineren Kathete und der Hypotenuse. Wir würden das Gleichungssystem

$$xy=60, \quad x+y=17$$

lösen, dann aus $x=5$ und $y=12$ die Größe $\sqrt{x^2+y^2}=13$ und schließlich die gesuchte Summe $5+13=18$ berechnen. Zhu Shi-jie wählt als Hauptunbekannte die Summe aus der Kathete und der Hypotenuse $v=x+\sqrt{x^2+y^2}$ und sagt, daß die endgültige Gleichung

$$-3600-3706y-71v^2+34v^3-v^4=0$$

lautet. Die Wurzel 18 dieser Gleichung ist dann die gesuchte Größe. Die andere positive Wurzel, die den Wert 25 hat und die Zhu Shi-jie unbeachtet läßt, liefert die Summe aus der Hypotenuse und der anderen Kathete. Die beiden noch fehlenden Wurzeln sind -1 und -8. Danach löst Zhu Shi-jie gesondert die Aufgabe, bei der die Summe aus der größeren Kathete und der Hypotenuse gesucht ist, wobei er wieder auf dieselbe Gleichung kommt. Es ist äußerst verwunderlich, daß er dabei die Existenz zweier verschiedener positiver Wurzeln nicht bemerkt.

Es ist eine recht große Gewandtheit in algebraischen Umformungen erforderlich, um auf die angegebene Gleichung vierten Grades zu kommen.[1])

In den Werken aus dem 13. Jahrhundert findet man auch Gleichungen höheren als vierten Grades. So verallgemeinerte Qin Jiu-shao die oben (vgl. S. 50) angegebene Aufgabe aus der „Mathematik in neun Büchern" über eine Stadt mit quadratischem Grundriß auf einen Kreis und drückt unter der Voraussetzung $\pi=3$ die Unbekannte als Wurzel der Gleichung zehnten Grades

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$$

---

[1]) Berechnet man z. B. $x=\frac{v^2-y^2}{2v}$ aus $v=x+\sqrt{x^2+y^2}$, so ergibt sich

$$\frac{v^2-y^2}{2v}+y=17; \quad \frac{v^2-y^2}{2v}\cdot y=60$$

oder

$$y^2-2vy+(34v-v^2)=0, \qquad (a)$$

$$y^3-v^2y+120v=0 \qquad (b)$$

und aus (a)

$$y=v-\sqrt{2v^2-34v}.$$

Setzt man y in (b) ein, kürzt durch v, isoliert die Wurzel und quadriert dann, so ergibt sich

$$v^4-34v^3+71v^2+3706v+3600=0.$$

aus, die sich allerdings unmittelbar auf eine Gleichung fünften Grades zurückführen läßt. In der Aufgabe ist gefordert, den Durchmesser eines Kreises zu bestimmen, wenn — modern ausgedrückt — eine Tangente von einem gegebenen Punkt C einer Geraden, die den Kreis im Fußpunkt A eines Durchmessers AB berührt, die Verlängerung dieses Durchmessers AB in einem gegebenen Punkt D schneidet. Bei Qin jiu-shao ist $AC = 9$, $BD = 3$; die Wurzel x der Gleichung drückt den Radius des Kreises aus, der sich zu $\frac{9}{2}$ ergibt. Wie der Gelehrte auf seine Gleichung gekommen ist, bleibt unklar. Auf jeden Fall läßt sich die Aufgabe (siehe Abb. 16) auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke OED und DAC durch die Gleichung vierten Grades

$$4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 486x - 729 = 0$$

ausdrücken. Aus der Gleichung $\Delta\, DAC = \Delta\, OED + 2\,\Delta\, OAC$ über die Flächeninhalte der angeführten Dreiecke läßt sich [28, S. 159] die noch wesentlich einfachere kubische Gleichung

$$2x^3 + 3x^2 = 243$$

gewinnen.

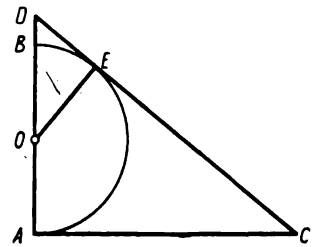


Abb. 16

Bei Li Ye tritt eine Gleichung sechsten Grades, bei Zhu Shi-jie eine solche 14. Grades auf.

Die Lösung von Gleichungen höherer Grade fand keine praktischen Anwendungen. Es wäre jedoch verfehlt, anzunehmen, daß die Entwicklung der Algebra unabhängig von den Bedürfnissen anderer Wissenschaften verlief. Wie wir später sehen werden, fanden Polynome zweiten und dritten Grades äußerst wichtige Anwendungen in den empirischen Formeln der chinesischen Astronomie.

Binomialkoeffizienten. Im „Jaspisspiegel der vier Elemente" gibt Zhu Shi-jie eine dreieckige Zahlentabelle an, die aus den Binomialkoeffizienten bis $n = 6$ einschließlich besteht (siehe Abb. 17). Der Verfasser des Werkes selbst erhebt keinen Anspruch auf Originalität bezüglich dieser Tabelle. Wir hatten bereits erwähnt, daß Yang Hui zufolge diese Tabelle bereits dem Jia Xian um 1200 bekannt war, allerdings nur bis $n = 6$. Der Titel des Werkes (vgl. S. 65) von Jia Xian deutet darauf hin, daß diese Tabelle beim Ausziehen von Wurzeln benutzt wurde.

Das Dreieck der Binomialkoeffizienten war indessen noch früher bekannt. Die indischen Mathematiker kannten es bereits im 2. Jahrhundert v. u. Z. Es wurde hier allerdings in kombinatorischen Aufgaben benutzt, und es liegt keinerlei Anlaß vor, zu behaupten, daß die Inder zu jener Zeit bereits die Potenzentwicklung eines Binoms kannten. Für den Exponenten 4 war der binomische Lehrsatz dem iranischen Mathematiker al-Karaǧī um 1000 bekannt. Es ist durchaus wahrscheinlich, daß der binomische Lehrsatz für einen beliebigen natürlichen Exponenten von ʿUmar al-Hayyām beherrscht wurde, der um 1100 gelebt hat.

Die Frage nach der Zeit der Entdeckung des binomischen Lehrsatzes für beliebige natürliche Exponenten bleibt zunächst offen. Nach Zhu Shi-jie findet man die Tabelle für die Koeffizienten bis zum Exponenten 9 bei Ǧamšid al-Kāšī und in Europa bei

Petrus Apianus 1527 und bei Michael Stifel 1544. Weite Verbreitung erhielt die Tabelle der Binomialkoeffizienten nach Erscheinen der Abhandlung Blaise Pascals über das arithmetische Dreieck, die 1665 erschien. Um die gleiche Zeit dehnte Newton die binomische Formel auf beliebige reelle Exponenten aus, wobei er sich auf die von ihm entdeckte Regel der multiplikativen Koeffizientenbildung stützte.

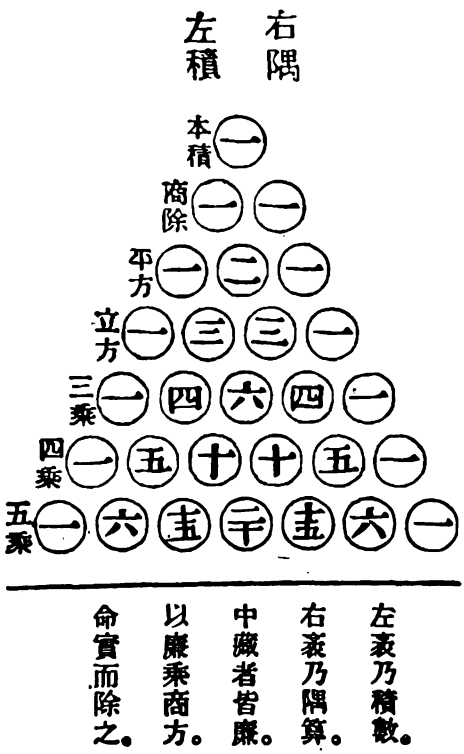


Abb. 17.
Binominalkoeffiizienten (aus der Enzyklopädie Yong – le da dian, 1403–1424).

Es ist keineswegs ausgeschlossen, daß die Binomialkoeffizienten von den chinesischen Mathematikern bei Aufgaben der kombinatorischen Analysis angewandt wurden. Der Gelehrte Shen Gua (11. Jahrhundert) berichtete, daß der buddhistische Priester und Astronom Yi Xing, der den weltlichen Namen Zhang Sui führte (683 bis 727), die Berechnung aller möglichen Stellungen für ein an das Schachspiel erinnerndes Spiel bei verschiedener Anzahl von Reihen und Figuren vorgenommen hat. Für 5 Reihen und 25 Figuren ermittelte Yi Xing die Anzahl der möglichen Kombinationen zu 827 288 699 433. Für 7 Reihen haben Shen Gua zufolge die entsprechenden Zahlen bereits keine Namen; für 361 Reihen erreicht die Zahl eine Größenordnung von etwa 10^{208}. Leider fehlt uns die genaue Kenntnis über die Bedingungen und Methoden bei den Berechnungen des Yi Xing, der weder der erste noch der einzige Gelehrte war, der sich mit kombinatorischen Aufgaben beschäftigte. Die Werke Yi Xings sind sämtlich verlorengegangen. Es ist durchaus möglich, daß die Binomialkoeffizienten erstmalig in China durch buddhistische Gelehrte eingeführt wurden.

Probleme der Zahlentheorie. Eine kleinere Gruppe von Aufgaben über unbestimmte lineare Gleichungen war, wie wir gesehen hatten, bereits in der altchinesischen „Mathematik in neun Büchern" enthalten. In diesen Aufgaben war die gesuchte ganzzahlige Lösung eindeutig. In der Folgezeit untersuchten die chinesischen Gelehrten eine Reihe anderer, allgemeinerer linearer Aufgaben aus dem Bereich der sog. diophantischen Analysis.

Nicht später als zu Beginn des 3. Jahrhunderts dürfte die „Aufgabe über die Vögel" entstanden sein. Zhen Luan zufolge, der um 570 einen Kommentar zum mehrmals erwähnten Werk des Xu Yue aus der Zeit um 190 geschrieben hatte, enthält dieses Werk die Lösung der folgenden Aufgabe: Wieviel Hähne, Hühner und Kücken

kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel kauft und wenn ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Kücken eine Münze kosten? Zhen Luan gibt folgende Lösung an: 15 Hähne, 1 Henne und 84 Kücken, wobei es sich um eine eindeutig bestimmte Lösung handelt. Bei einer anderen Aufgabe, die auf die Gleichung

$$4x + 3y + \frac{z}{3} = 100$$

führt, gibt Zhen Luan ebenfalls eine Lösung, und zwar $x = 8$, $y = 14$, $z = 78$ an, obwohl auch eine zweite Lösung mit $x = 16$, $y = 3$ und $z = 81$ existiert.

In der „Mathematischen Abhandlung" (Suan jing) des Zhang Qiu-jian, der wahrscheinlich in der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts gelebt hat, wird bereits die Möglichkeit mehrerer ganzzahliger Lösungen bei der Aufgabe über die Vögel berücksichtigt. Die Aufgabe, die er in Worten ausdrückt, lautet wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100. \end{aligned}\right\}$$

Zhang Qiu-jian gibt drei Lösungen an:

4 Hähne, 18 Hühner und 78 Kücken,
8 Hähne, 11 Hühner und 81 Kücken,
12 Hähne, 4 Hühner und 84 Kücken.

Er bemerkt dabei, daß die Anzahl der Hähne jedesmal um 4 zunimmt, die Zahl der Hühner um 7 abnimmt und die Anzahl der Kücken um 3 wächst. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die von ihm angegebenen Lösungen die einzigen ganzzahligen Lösungen in positiven Zahlen darstellen. Darüber hinaus existiert noch eine nichtnegative Lösung mit $x = 0$, $y = 25$ und $z = 75$ als einzige, die von dem chinesischen Mathematiker unbeachtet geblieben ist. Die Lösung des Systems läßt sich in Parameterform ausdrücken:

$$x = 4t, \quad y = 25 - 7t, \quad z = 75 + 3t.$$

Dabei durchläuft t die Werte $t = 0, 1, 2, 3$.

Die Aufgabe über die Vögel hat sowohl in China — bei Li Chun-feng im 11. Jahrhundert, bei Xie Cha-wei u. a. — als auch in anderen Ländern weite Verbreitung gefunden. Numerische Beispiele dazu findet man bei dem Inder Bhâskara (12. Jahrhundert), bei dem Ägypter Abū Kāmil (10. Jahrhundert), der den Varianten dieser Aufgabe eine besondere Abhandlung widmete (siehe S. 232), und bei vielen anderen Gelehrten des Nahen und Mittleren Ostens. Eine eingehende Untersuchung der Aufgabe stellte Ǧamšid al-Kāšī an. Dabei ist interessant, daß die rechten Seiten der Gleichungen bei ihm ebenfalls stets den Wert 100 haben. In Europa findet man eine ähnliche Aufgabe mit der gleichen rechten Seite erstmalig in einer Aufgabensammlung, die Alcuin (8. Jahrhundert) zugeschrieben wird. Unter verschiedenen Bezeichnungen tauchten diese Aufgaben später in der europäischen arithmetischen Literatur des Mittelalters auf.

Eine andere, kompliziertere zahlentheoretische Aufgabe erscheint in der „Mathematischen Abhandlung" (Suan jing), die von Sun-zi im 3. oder 4. Jahrhundert geschrieben wurde. Bei dieser Aufgabe muß ein Gleichungssystem ersten Grades nach verschiedenen Moduln gelöst werden. Gesucht wird eine Zahl, die bei Division durch 3, 5 und 7 die Reste 2, 3 und 2 ergibt. Bei Sun-zi lautet die Aufgabe mit Lösung:

„Es gibt Dinge, ihre Zahl ist unbekannt. Zählt man sie zu je drei ab, ist der Rest 2, zählt man sie zu je fünf ab, so ist der Rest 3, zählt man sie zu je sieben ab, so ist der Rest 2. Es ist gefragt, wieviel Dinge es sind.

Das Verfahren: Beim Abzählen zu je drei und dem Rest 2 nimm 140; beim Abzählen zu je fünf und dem Rest 3 nimm 63; beim Abzählen zu je sieben und dem Rest 2 nimm 30. Zähle dies zusammen, und du erhältst 233. Hiervon ziehe 210 ab, und du erhältst [das Gesuchte]. Ganz allgemein [wenn] beim Abzählen zu je drei der Rest 1 ist, so nimm 70; [wenn] bei ihrem Abzählen zu je fünf der Rest 1 ist, so nimm 21; [wenn] bei ihren Abzählen zu je sieben der Rest 1 ist, so nimm 15. [Wenn] die Summe größer ist als 106, so ziehe 105 ab, und du erhältst [das Gesuchte]" [43c, S. 37, russisch].

Man darf annehmen, daß solche Aufgaben im Zusammenhang mit astronomischen und Kalenderberechnungen entstanden sind. Auf jeden Fall haben sie gerade bei diesen Berechnungen Anwendung gefunden. Die Lösung einer Reihe derartiger Aufgaben behandelte der bereits genannte Astronom Yi Xing, der Schöpfer eines besonderen Kalendersystems. Qin Jiu-shao, der im ersten Buch seines Werkes (1247) eine ausführliche Lösung der Aufgabe des Sun-zi angegeben hat, sagt, daß die Methode von den Kalenderschöpfern und Astronomen entwickelt wurde. Er führt folgende Aufgabe an: Alten Kalendern zufolge wiederholt sich die Wintersonnenwende alle $365\frac{1}{4}$ Tage. Der Mondmonat hat $29\frac{499}{940}$ Tage, während der Zyklus ki sha-tsu 60 Tage enthält. Nach wieviel Jahren oder Monaten oder Tagen kehren diese drei Perioden zu einer gewissen Ausgangsstellung zurück?

Die Lösung der Aufgabe Sun-zi wollen wir nach Qin Jiu-shao betrachten, wobei wir die Bezeichnungsweise der modernen Theorie der Kongruenzen benutzen.

Gesucht ist die Lösung eines linearen Kongruenzensystems mit paarweise teilerfremden Moduln:

$$x \equiv r_1 \pmod{q_1},$$
$$x \equiv r_2 \pmod{q_2},$$
$$x \equiv r_3 \pmod{q_3}.$$

(In der Aufgabe des Sun-zi hat man

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2, \quad q_1 = 3, \quad q_2 = 5, \quad q_3 = 7$$

zu setzen.) Zunächst werden gewisse Hilfszahlen N_1, N_2, N_3 bestimmt, die folgenden Gleichungen genügen:

$$N_1 q_2 q_3 \equiv 1 \pmod{q_1}, \text{ d.h. } 35 N_1 \equiv 1 \pmod{3},$$
$$N_2 q_1 q_3 \equiv 1 \pmod{q_2}, \text{ d.h. } 21 N_2 \equiv 1 \pmod{5},$$
$$N_3 q_1 q_2 \equiv 1 \pmod{q_3}, \text{ d.h. } 15 N_3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Die letzten Gleichungen lassen sich durch einfachere ersetzen, wenn man als Koeffizienten die Reste der gegebenen Koeffizienten nach den Moduln

$$2N_1 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$N_2 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$N_3 \equiv 1 \pmod 7$$

nimmt. Man findet leicht

$$N_1 = 2, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 1$$

und erhält

$$N_1 q_2 q_3 = 70, \quad N_2 q_1 q_3 = 21, \quad N_3 q_1 q_2 = 15.$$

Schließlich ergibt sich die gesuchte Zahl zu

$$x \equiv (N_1 q_2 q_3 r_1 + N_2 q_1 q_3 r_2 + N_3 q_1 q_2 r_3) \pmod{q_1 q_2 q_3}.$$

d. h.

$$x \equiv (140 + 63 + 30) \bmod 105$$

oder

$$x = 233 - 105t,$$

wobei t eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Den kleinsten positiven Wert 23 erhält man für $t = 2$.

Bereits Yi Xing dehnte die Methode des Sun-zi auf den Fall nicht paarweise teilerfremder Moduln aus. In diesem Falle hat die Aufgabe nicht immer eine Lösung. Wir wollen nicht bei den entsprechenden Änderungen der Lösungsmethode verweilen, wie sie von Qin Jiu-shao dargelegt werden. Es sei nur erwähnt, daß Qin Jiu-shao u. a. folgendes Beispiel angibt:

$$x \equiv 32 \pmod{83},$$
$$x \equiv 70 \pmod{110},$$
$$x \equiv 30 \pmod{135}.$$

Nicht einfach sind auch die Überlegungen, die man bei der Lösung der Beispiele des Yi Xing anzustellen hat [40, S. 120].

Ähnlich der Aufgabe über die Vögel hat auch die Aufgabe des Sun-zi eine interessante geschichtliche Weiterentwicklung erfahren. In Indien tritt sie bereits bei Âryabhaṭa I. auf. Mit den gleichen Zahlenangaben, aber auch in anderen Varianten, erscheint sie im Jahre 212 im „Buch über den Abakus" Leonardos von Pisa und etwa 100 Jahre später in einer byzantinischen Handschrift. Im 15. Jahrhundert erscheint diese Aufgabe mit verschiedenen Zahlenwerten in deutschen handschriftlichen Rechenbüchern und im 17. Jahrhundert in russischen arithmetischen Handschriften [48].

Die altchinesische Methode wurde erneut von L. Euler entwickelt und 1740 veröffentlicht und schließlich in ihrer ganzen Tragweite von C. F. Gauß in den Paragraphen 32 bis 36 in seinen berühmten „Disquisitiones arithmeticae" vom Jahre 1801 abgehandelt. Euler und Gauß wußten nicht, daß man sich mit diesen Problemen anderthalb Jahrtausend früher in China beschäftigt hat.

Es sei noch erwähnt, daß sich die Mathematiker Chinas bereits vor Beginn unserer Zeitrechnung mit der Bildung der sog. magischen Quadrate beschäftigten, d. h. mit

dem Problem, n^2 aufeinanderfolgende Zahlen 1, 2, 3, ..., n^2 in einem quadratischen Schema so anzuordnen, daß die Summen der Zahlen in jeder Spalte und jeder Zeile gleich und somit den Wert $\frac{n}{2}(n^2+1)$ haben. Die magischen Quadrate wurden häufig zu mystischen Spekulationen verwendet. Außerdem gehörten sie zu den mathematischen Unterhaltungen. Yang Hui gelang es im Jahre 1275, in die Entwicklung der Methoden zum Aufbau magischer Quadrate eine gewisse Linie hineinzubringen. Seine Arbeit wurde von vielen Mathematikern Chinas und Japans fortgeführt. Die einfachsten magischen Quadrate kannte offenbar auch Theon von Smyrna um 130; mit ihnen beschäftigten sich arabische und byzantinische Gelehrte.

Die Summation endlicher Reihen. Aufgaben über arithmetische und geometrische Progressionen sind in der antiken „Mathematik in neun Büchern" enthalten, und zweifellos waren sie auch früher bekannt. Einige Aufgaben des genannten Werkes, die mit der Anwendung arithmetischer Progressionen zusammenhängen, sind recht kompliziert. Wir wollen zwei Beispiele hierzu angeben.

In der Aufgabe 19 des Buches VI sollen die Glieder einer arithmetischen Progression a_1, $a_2 = a_1 + d, \ldots, a_9 = a_1 + 8d$ aus den Bedingungen $a_7 + a_8 + a_9 = 4$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$ bestimmt werden. Der Lösungsweg, der $a_1 = \frac{39}{66}$ und $d = \frac{7}{66}$ liefert, ähnelt teilweise der Lösungsmethode bei einer altbabylonischen Aufgabe, in der $\sum_{k=1}^{10} a_k = 100$ und $a_3 = 6$ gegeben sind, während $d = \frac{8}{5}$ gesucht wird [42, S. 554 bis 557].

Ein Schüler aus unserer Zeit hätte höchstwahrscheinlich die Gleichungen

$$3a_1 + 21d = 4$$
$$4a_1 + 6d = 3$$

aufgestellt und nach Elimination von a_1 zunächst $d = \frac{4/3 - 3/4}{7 - 3/2}$ und dann a_1 bestimmt. Die chinesischen Gelehrten benutzten in dieser Aufgabe die arithmetischen Mittel aus den Summen der Glieder. Zunächst wurde der „untere Koeffizient" als 4:3 gebildet; diese Zahl wurde direkt als a_8 erklärt. In der Tat ist

$$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{3} = a_8 = \frac{4}{3}.$$

Danach wurde der „obere Koeffizient" 3:4 berechnet:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3}{4}\left(= \frac{a_2 + a_3}{2}\right).$$

Schließlich wurde die Differenz $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$ durch die Differenz $9 - \left(\frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)$ dividiert und damit $d = \frac{7}{66}$ gewonnen. Die zweite Differenz hat man offenbar auf Grund folgender Überlegungen erhalten: Das Glied $a_m = a_1 + (m-1)d$ unterscheidet sich von

$a_k = a_1 + (k-1)\,d$ um das $(m-1)-(k-1)$-fache von d. Daher unterscheidet sich a_8 von $\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2}$ um das

$$9-1-\frac{4-1}{2}-\frac{3-1}{2}=9-\frac{4+3}{2}\text{fache}$$

der Differenz d.

Spezielle Termini für Progressionen und die mit diesen zusammenhängenden Größen gibt es in der „Mathematik in neun Büchern" nicht. Bei der betrachteten Aufgabe war die Rede von einem Bambusstab aus 9 Gliedern, deren Umfänge sich von den jeweils benachbarten um die gleiche Größe unterschieden.

Die 19. Aufgabe des Buches VII hat folgenden Wortlaut: Ein Traber und eine alte Mähre beginnen ihren Weg am gleichen Punkt. Der Traber durchläuft am ersten Tag 193 li und an jedem weiteren Tag jeweils 13 li mehr. Die Mähre läuft am ersten Tag 97 li und an jedem darauffolgenden Tag jeweils $\frac{1}{2}$ li weniger. Nach einer Wegstrecke von 3000 li macht der Traber kehrt und trifft auf dem Rückwege wieder auf die Mähre. Gefragt ist, nach wieviel Tagen beide Pferde zusammentreffen und welche Wegstrecke jedes Pferd zurücklegt. Die Aufgabe wird nach der Methode der falschen Voraussetzung gelöst. An n ganzen Tagen durchlaufen Traber und Mähre zusammen $290n-6\frac{1}{4}(n^2-n)$ li; ihr Gesamtweg muß 6000 li ausmachen. Für $n=15$ ergibt sich der Fehlbetrag von $6000-5662\frac{1}{2}=337\frac{1}{2}$ li, für $n=16$ ein Überschuß von $6140-6000=140$ li. Es wird angenommen, daß sich im Verlaufe eines Tages die Geschwindigkeiten nicht ändern. Man erhält dann

$$x=\frac{15\cdot 140+16\cdot 337\frac{1}{2}}{140+337\frac{1}{2}}=15\frac{135}{191}\text{Tage}.$$

Irgendwelche Hinweise auf die Anwendung der Formel für die Summation der Glieder einer arithmetischen Progression enthält die „Mathematik in neun Büchern" nicht. Die Summationsregel für Progressionen ist vorläufig nur bei Zhang Qiu-jian (5. Jahrhundert) belegt. In einer Aufgabe zur Ermittlung der Differenz einer Progression verwendet er die Beziehung

$$d=\frac{2\frac{S}{n}-2a}{n-1},$$

wobei d die Differenz, S die Summe, a das erste Glied und n die Anzahl der Glieder bedeutet. Desgleichen wendet Zhang Qiu-jian die Formel $S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ an.

Die Aufgaben über geometrische Progressionen sind in der „Mathematik in neun Büchern" elementar gehalten. Der Quotient tritt nur mit dem Wert 2 auf, und eine allgemeine Summationsformel findet man nicht. Interessant ist, daß in einigen Aufgaben über arithmetische und geometrische Progressionen die Rede von der Arbeitsleistung von Weberinnen ist und daß man von einer wachsenden oder abnehmenden Arbeitsleistung spricht. Die Zahlenangaben selbst haben keinerlei praktische Bedeutung,

doch die Aufgaben zeugen, ebenso wie die früher erwähnten Aufgaben über den Kauf von Seidengarn u.a., von der großen Rolle, die die Textilmanufaktur in der Wirtschaft des Landes gespielt hat.

Mit wesentlich weiter fortgeschrittenen Kenntnissen über die Summation arithmetischer Progressionen haben wir es im 11. Jahrhundert bei dem Staatsmann, Ingenieur, Astronomen und Mathematiker Shen Gua (1030—1094) zu tun. Im 18. Buch seiner „Diskussionen des Meng-xi"[1] (Meng-xi bi tan, 1086) wird die Anzahl von Gegenständen berechnet, die zu einer n-schichtigen Stufenpyramide gestapelt sind, wobei die Schichten eine Rechtecksform aufweisen und von Schicht zu Schicht die Seitenlängen der Rechtecke von oben nach unten gesehen um 1 zunehmen. Enthält die obere Schicht ab Stück, so ist die Summe

$$S = ab + (a+1)(b+1) + \cdots + [a + (n-1)][b + (n-1)] \tag{1}$$

zu ermitteln. Shen Gua gibt ohne jede Begründung die Regel

$$S = \frac{n}{6}[a(2b + B) + A(2B + b) + (B - b)] \tag{2}$$

mit

$$A = a + n - 1, \quad B = b + n - 1$$

an. Zweifellos lagen dieser Regel die Summierungsvorschrift für die arithmetische Progression und die Summe der ersten n Quadrate der Reihe der natürlichen Zahlen zugrunde. Gruppiert man in (1) die Glieder, so ergibt sich

$$S = n\,a\,b + [1 + 2 + \cdots + (n-1)](a+b) + [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2].$$

Ist ferner bekannt, daß

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

gilt, so ist

$$S = \frac{n}{6}[6ab + 3(n-1)(a+b) + (n-1)(2n-1)];$$

hieraus erhält man dann wegen $n = A - a + 1$ und $n = B - b + 1$ die Beziehung (2). Die erforderlichen algebraischen Umformungen bedeuteten für die chinesischen Mathematiker jener Zeit keine Schwierigkeit.

Die Summen $\sum_{k=1}^{n} k$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2$ mögen mit Hilfe geometrischer Überlegungen gewonnen worden sein. Im Buch des Yang Hui „Schnelle Verfahren zur Feldvermessung" (Tian mu bi lei cheng yu jie fa, 1275) wird die Summe $3 + 5 + 7 + 9 = \frac{4}{2}(3 + 9)$ durch die Fläche eines Stufenparallelogramms veranschaulicht, das aus gleichen Schichten gebildet wird (Abb. 18). Im übrigen läßt sich die Summe einer arithmetischen Progression auch rein rechnerisch leicht gewinnen, und wir haben es hier möglicherweise mit der geometrischen Illustration einer bereits bekannten Tatsache zu

[1] Meng-xi — das ist einer der Namen von Shen Gua.

tun. Die Summe der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen dürfte jedoch aller Wahrscheinlichkeit nach geometrisch gewonnen worden sein.

Die Summationsformel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$ hat in der „Ausführlichen Erläuterung der mathematischen Regeln" (1261) des Yang Hui, wo sie für $n = 5$ auftritt, die folgende Form, die von der heute gebräuchlichen ein wenig abweicht:

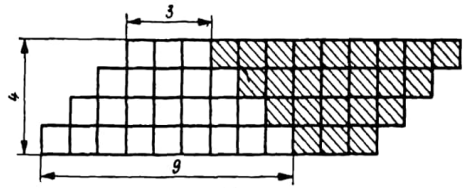


Abb. 18

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right). \quad (3)$$

Wie man diese Formel gewinnt, schrieb Yang Hui nicht. Seine Formulierung der Regel (3) jedoch gibt Anlaß zu einer äußerst wahrscheinlich anmutenden Rekonstruktion. Wir wollen uns die Summe

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

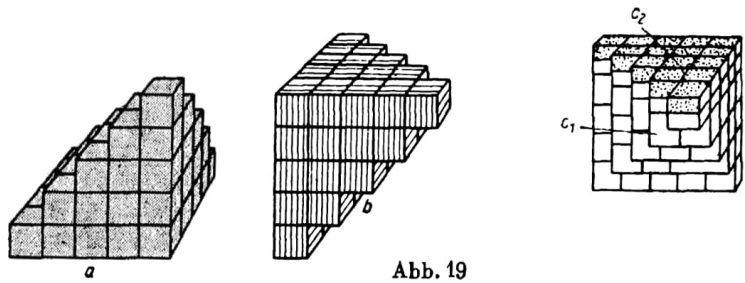


Abb. 19

in Form einer Stufenpyramide vorstellen, deren Schichten aus 1, 4, 9, 16 und 25 Würfeln bestehen. Die Anordnung der Würfel ist in Abb. 19 gezeigt. Legt man drei derartige Pyramiden so aneinander, wie es die Abb. 20 zeigt, so bilden diese einen Quader mit einer Grundfläche von $(5 + 1)\,5$ Würfeln, wobei auf die Deckfläche des Quaders noch eine unvollständige Schicht von $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ Würfeln zu liegen kommt (Abb. 19). Halbiert man die oben liegende unvollständige Schicht durch einen waagerechten ebenen Schnitt, so kann man diese auf der oberen Deckfläche des Quaders in Form einer vollen Schicht mit der Höhe $\frac{1}{2}$ unterbringen. Das Volumen des so entstandenen Quaders ist offenbar gleich $5\,(5 + 1)\left(5 + \frac{1}{2}\right)$, woraus die Formel (3) folgt.

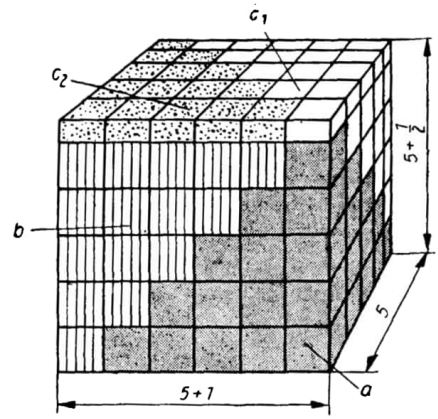


Abb. 20

Der Text des Yang Hui lautet wie folgt: „Zur unteren Seite addieren wir 1, multi-

plizieren mit der unteren Seite und addieren noch $\frac{1}{2}$ — dies ist die Höhe; nun multiplizieren wir mit dem unteren Quadrat (hierbei war offenbar der Flächeninhalt der Grundfläche des Quaders gemeint. Anm. des Verf.). Dieses Volumen teilen wir in drei Teile und nehmen einen davon." [49][1])

In demselben Werk aus dem Jahre 1261 gibt Yang Hui eine Regel zur Summation der ersten n ungeraden Zahlen

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \tag{4}$$

an. Es handelt sich hierbei um eine Folge von Zahlen, die wir nach dem Vorbild der Griechen als Dreieckszahlen bezeichnen.

Die in der Formel (4) angegebene Regel führt Yang Hui unmittelbar im Anschluß an die Berechnung des Volumens einer dreieckigen Pyramide an, wobei er die Summation (4) als Bestimmung des Volumens eines vielschichtigen, „von drei Seitenflächen begrenzten Körpers" auffaßt. Die Rekonstruktion ist analog der vorhin genannten.[2])

Eine große Anzahl von Summationsregeln ist ohne Beweis in den Werken des Zhu Shi-jie angegeben [36, S. 130 bis 134].

Hierzu gehören z. B. Reihen, die bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen, Dreieckszahlen und Quadratzahlen mit den Gliedern einer zunehmenden oder abnehmenden arithmetischen Progression entstehen:

$$\left.\begin{aligned} &1\cdot a+2(a+d)+\cdots+n[a+(n-1)d] \\ &\qquad=\frac{n(n+1)[2dn+(3a-2d)]}{6}, \\ &1\cdot[a+(n-1)d]+2[a+(n-2)d]+\cdots+na \\ &\qquad=\frac{n(n+1)[dn+(3a-d)]}{6}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1]) Diese Rekonstruktion, die kürzlich von Xu Chun-fang [49] vorgeschlagen wurde, stimmt im wesentlichen mit der Rekonstruktion der altbabylonischen Regel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)\sum_{k=1}^{n} k$$

überein, die im Jahre 1937 von S. J. Lurje [48c, S. 193 — 194] vorgeschlagen wurde. In einer Arbeit des Verfassers [50] ist eine andere geometrische Rekonstruktion für die Summe der ersten n Quadratzahlen angegeben, die Xu Chun-fang früher [51] angegeben hatte; sie erscheint aber weniger wahrscheinlich.

[2]) Aus der Summenformel für die ersten Dreieckszahlen erhält man leicht die Summenformel für die ersten n Quadratzahlen, indem man die nachstehenden beiden Gleichungen gliedweise addiert:

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$$1+3+\cdots+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1).$$

Geometrisch gesehen entspricht dies dem Zusammenfügen zweier entsprechender Stufenpyramiden zu einer einzigen. Vgl. Abb. 19.

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot a+3\,(a+d)+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\,[a+(n-1)\,d] \\ =\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,[3dn+(4a-3d)]}{24}, \\ 1\cdot[a+(n-1)\,d]+3\,[a+(n-2)\,d]+\cdots+\frac{n\,(n+1)}{2}\,a \\ =\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,[dn+(4a-d)]}{24}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} 1^2\cdot a+2^2\cdot(a+d)+\cdots+n^2\,[a+(n-1)\,d] \\ =\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\,a+\frac{1}{12}(n^2-1)\,n\,(3n+2)\,d, \\ 1^2\cdot[a+(n-1)\,d]+2^2\,[a+(n-2)\,d]+\cdots+n^2a \\ =\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\,a+\frac{1}{12}(n^2-1)\,n^2d. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Eine weitere Gruppe von summierten Reihen bilden verschiedene figurierte Zahlen, wie Dreieckszahlen, Pyramidenzahlen der Form $\frac{n(n+1)\,(n+2)}{6}$ u.a.:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)\,(k+2)}{6}=\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}{24}=\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{120}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)\,(2k+1)}{6}=\frac{n\,(n+1)\,(n+1)\,(n+2)}{12}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\,(k+1)\,(2k+1)}{6}=\frac{n(n+1)\,(n+2)}{60}\,n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

usw.

Die Berechnung der Summen (5) hängt eng mit der Summierung der ersten n Quadratzahlen zusammen, die der Summen (6) bis (8) mit der Summation der ersten n Kubikzahlen, die ebenfalls in der chinesischen Mathematik des 13. Jahrhunderts belegt ist. Es ist jedoch unbekannt, welche Summen zuerst gewonnen wurden.

Mit der Summation arithmetischer Progressionen beschäftigte sich erfolgreich auch Qin Jiu-shao in seinem Werk aus dem Jahre 1247.

Inwiefern die angegebenen Ergebnisse selbständig gefunden worden sind, wissen wir nicht. Die Summenformel für die ersten n Quadrate der natürlichen Zahlen war den Babyloniern bekannt; eine analoge Formel für den Fall der arithmetischen Progression hat Archimedes hergeleitet. Die Summenformeln für $\sum_{k=1}^{n}k^2$ und $\sum_{k=1}^{n}k^3$ kannte Âryabhaṭa. Die Griechen und der eben erwähnte Âryabhaṭa kannten die Summenformel für $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$. Mahâvîra summierte die Quadrate und Kuben der Glieder einer arithmetischen Progression, während der Inder Nârâyaṇa im 14. Jahrhundert

Formeln von der Art der Gleichung (8) und deren Verallgemeinerungen für arithmetische Progressionen anwandte. Die Summenformel des Shen Gua wurde außerhalb Chinas offenbar nicht verwendet.

Interpolation. Probleme der Astronomie, die das Interesse an der diophantischen Analysis geweckt hatten, bildeten auch den Anlaß zur Entwicklung der Interpolation. Hierbei gingen die chinesischen Mathematiker im Vergleich zu ihren Vorgängern insofern einen Schritt weiter, als sie zur quadratischen und kubischen Interpolation übergingen. Vorher wurde nur die lineare Interpolation angewandt, z.B. von Ptolemaios bei der Aufstellung der Sehnentabellen.

Die Entwicklung der Interpolationsmethoden in China diente unmittelbar dem Zweck, eine empirische Formel zu gewinnen, die die ungleichförmige sichtbare Winkelbewegung der Sonne längs der Ekliptik als Funktion der Zeit ausdrückte. Die Berechnung der Koeffizienten für die Formel erfolgte mit Hilfe gewöhnlicher Differenzen oder von Differenzen, die eine Art Differenzenquotienten darstellten; dabei schritt man bis zu Differenzen fort, die im Bereich der Beobachtungen konstant waren[1]).

Soweit bekannt ist, gehen die ersten Arbeiten in dieser Richtung auf die Kalenderberechnungen durch den Astronomen und Mathematiker Liu Zhuo (544—610) zurück, die etwa in das Jahr 600 fallen. Liu Zhuo wählte äquidistante Werte des Arguments und wandte zur Interpolation einen dreigliedrigen quadratischen Ausdruck an, wobei er Differenzen erster und zweiter Ordnung benutzte. Seine Interpolationsformel wandte im Jahre 664 Li Chun-feng (605—673) bei neuen Kalenderberechnungen an. Man benutzte sie auch später im Jahre 1224 bei der Arbeit am Kalender. Die Interpolation mit Hilfe eines dreigliedrigen quadratischen Ausdruckes genügte lange Zeit den Anforderungen der Astronomen. Im 13. Jahrhundert jedoch, als die Genauigkeit der Beobachtungen stieg, wurde noch ein Glied dritten Grades hinzugenommen. Die Formel zur kubischen Interpolation stammt von Guo Shou-jing (1231 bis 1316), der im Jahre 1276 zur Berechnung eines neuen Kalenders herangezogen wurde. Er war Ingenieur, Mathematiker und Hofastronom des Kublai-Hān (1260 bis 1294), eines Vetters des damals in Iran herrschenden Hūlāgū-Hān. Den Berechnungen lagen Beobachtungen des Observatoriums in Peking zugrunde, das mit den zu jener Zeit besten Instrumenten ausgerüstet war. Der Kalender des Guo Shou-jing wurde 1281 eingeführt und blieb bis 1367 in Kraft. Zwar sind die Werke Guo Shou-jings verlorengegangen, doch sind seine Kalenderberechnungen in anderen uns überlieferten Werken abgehandelt.

Die modernen Interpolationsformeln (Parabelformeln), in denen eine Funktion $f(x)$ mit $n+1$ vorgegebenen Werten $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ durch ein Polynom n-ten Grades ersetzt wird, das in den Punkten x_0, x_1, ..., x_n mit $f(x)$ übereinstimmt, gehen auf die britischen Mathematiker Gregory, Newton und Stirling zurück.

Die Formeln des Liu Zhuo und des Guo Shou-jing stellen Spezialfälle für $n=2$ bzw. $n=3$ einer heute häufig angewandten Formel dar, die von Newton 1711 und von

[1]) Bei unserer Wiedergabe der chinesischen Regeln durch moderne Formeln gehen wir nach der wichtigsten zur Verfügung stehenden Quelle [52] vor.

Stirling 1730 veröffentlicht wurde. Wir wollen unter Verwendung moderner Symbolik die Argumentwerte einer gegebenen Funktion und die Differenzen in Form einer Tabelle aufschreiben, wobei sich jede Differenz als algebraische Differenz der in der Spalte links daneben unmittelbar oberhalb und unmittelbar unterhalb stehenden Zahlen ergibt:

Argument	Funktion	Differenz 1. Ordnung	Differenz 2. Ordnung	Differenz 3. Ordnung
$x_0 - 2h$	$f(x_0 - 2h)$			
		$\Delta_{-\frac{3}{2}}$		
$x_0 - h$	$f(x_0 - h)$		$\Delta^{(2)}_{-1}$	
		$\Delta_{-\frac{1}{2}}$		$\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}}$
x_0	$f(x_0)$		$\Delta^{(2)}_{0}$	
		$\Delta_{\frac{1}{2}}$		$\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}}$
$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$		$\Delta^{(2)}_{1}$	
		$\Delta_{\frac{3}{2}}$		
$x_0 + 2h$	$f(x_0 + 2h$			

Dann hat die Formel von Newton-Stirling die Form

$$f(x_0 + h\,x) = f(x_0) + x\,\frac{\Delta_{-\frac{1}{2}} + \Delta_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{x^2}{2}\Delta^{(2)}_0 + \frac{x(x^2-1)}{6}\,\frac{\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots$$

Die in Worten ausgedrückten Regeln der chinesischen Mathematiker entsprechen genau dieser Formel mit der zugehörigen Anzahl von Gliedern. Zur Bezeichnung verschiedener in die Formel eingehender Größen benutzten die chinesischen Mathematiker besondere Termini.

Yi Xing dehnte bei seinen Kalenderberechnungen die Interpolation auf den Fall nicht äquidistanter Stützstellen aus. Die sog. dividierten Differenzen, die im Grunde genommen einen Differenzenquotienten darstellen und die in der quadratischen Interpolationsformel des Yi Xing enthalten waren, lassen sich durch die nachstehende Tabelle definieren:

Argument	Funktion	1. Differenzenquotient	2. Differenzenquotient
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	
x_2	$f(x_2)$		

Man kann sie bequem in der Form

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_0)}{x_2 - x_1};$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

darstellen. Die Formel des Yi Xing lautet

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2);$$

in ihrer allgemeinen Form wurde sie 1687 von Newton angegeben.

Die Entwicklung der Interpolationsformeln hing mit den Besonderheiten der Entwicklung der Astronomie in China zusammen und hat in einer gewissen Beziehung mit der Entwicklung der Astronomie im alten Babylon starke Ähnlichkeit. In Griechenland und später in Indien sowie in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens verwendeten die Astronomen geometrisch-kinematische Modelle, was zur Schaffung des zugehörigen trigonometrischen Rüstzeugs führte. In Babylon stützte sich ebenso wie in China die Berechnung der Ephemeriden auf eine numerische Interpolation der Beobachtungsergebnisse, ohne eine Modellbildung für die Bewegung der Himmelskörper vorzunehmen.

Im 11. Jahrhundert wurde die quadratische Interpolation für trigonometrische Tafeln von al-Bīrūnī empfohlen, und im 12. Jahrhundert wurde sie zu dem gleichen Zweck von Bhāskara angewandt. Es ist nicht bekannt, ob zwischen diesen Untersuchungen der Gelehrten Chinas, Indiens und der islamischen Länder Beziehungen bestanden.

Die glänzende Entwicklung der Astronomie und Geographie in der zweiten Hälfte des 13. und zu Beginn des 14. Jahrhunderts ging einher mit der Entwicklung der sphärischen Trigonometrie in China. Die ersten Angaben über eine Tabelle der Sinusfunktion gehen in China auf das 7. Jahrhundert zurück. Doch hat die Trigonometrie offenbar hier lange Zeit keine Anhänger gefunden. Nur Guo Shou-jing beschäftigte sich in recht großem Umfang mit der Untersuchung von Problemen der sphärischen Trigonometrie [53]. Obwohl seine Methoden einer Originalität nicht entbehren, ist es doch wenig wahrscheinlich, daß er nicht auf den Wissensreichtum zurückgegriffen hat, der auf diesem Gebiet in den Ländern Mittelasiens gesammelt worden war. Bestärkt wird diese Annahme dadurch, daß im Jahre 1267 in Peking aus dem Iran der Mitarbeiter des Observatoriums von Maraga, Zha-ma-lu-ding (Ğamāl ad-Dīn) eintraf, der eine Anzahl neuer astronomischer Geräte mitbrachte. Die Arbeiten des Guo Shou-jing haben jedoch im mittelalterlichen China keine Fortsetzung erfahren: Dieser Gelehrte war der letzte einer langen Reihe hervorragender Mathematiker und Astronomen des mittelalterlichen China.

Nach vielen Jahrhunderten einer stetigen, wenn auch langsamen Aufwärtsentwicklung begann in China von der Mitte des 14. Jahrhunderts an eine lange Zeit wissenschaftlicher Stagnation. Strenge bürokratische gesetzliche Regelung des wirtschaftlichen und kulturellen Lebens, Hemmung des technischen Fortschrittes nach einer Reihe glänzender Entdeckungen, Erstarrung der sozialökonomischen Formen

waren die Ursachen für den Niedergang in der weiteren Entwicklung der wissenschaftlich-schöpferischen Tätigkeit auf dem Gebiet der Naturwissenschaften und Mathematik. Vom Ende des 16. Jahrhunderts an begannen die Entdeckungen der europäischen Gelehrten auf dem Gebiet der Trigonometrie und Algebra in China einzudringen. Eukleides wurde übersetzt, man lernte Logarithmen und unendliche Reihen kennen und dergl. mehr. Doch lange Zeit noch blieb die Berührung mit der neuen europäischen Wissenschaft oberflächlich. Erst in unserem Jahrhundert, und insbesondere nach der Schaffung der chinesischen Volksrepublik, bricht für die Mathematik Chinas eine neue Blütezeit an.

Die geschichtliche Rolle der Mathematik des alten China. Wenn wir unsere bisherigen Betrachtungen zusammenfassen, so sehen wir, daß bis in das 14. Jahrhundert hinein die Mathematik in China sich vornehmlich als eine Gesamtheit von Rechenalgorithmen entwickelte, die für die Lösung verschiedener Klassen arithmetischer, algebraischer und geometrischer Aufgaben mit Hilfe des Rechenbrettes bestimmt waren. Die bemerkenswertesten dieser Algorithmen waren die Methode fang-cheng zur Lösung linearer Gleichungen und die Methode tian-yuan zur Lösung numerischer Gleichungen beliebig hohen Grades. Wir haben ferner gesehen, daß die Mathematiker Chinas nicht einfache „Empiriker" waren, sondern daß sie in großem Umfange algebraische und geometrische Umformungen vornahmen, daß sie Beweise für einige geometrische Sätze und arithmetische Identitäten besaßen und verschiedene Eigenschaften der wichtigsten geometrischen Figuren kannten usw. Nach Einführung der negativen Zahlen gingen sie daran, diese auf einfachste Weise zu deuten. Schließlich haben wir gezeigt, daß sie sich nicht auf Aufgaben beschränkten, die unmittelbar von der Praxis diktiert wurden, sondern daß sie von derartigen Problemen ausgehend abstraktere Teile der Mathematik entwickelten, die zu jener Zeit noch keinerlei Anwendungen außermathematischer Art gefunden hatten. Gleichzeitig waren die chinesischen Gelehrten von dem durch die griechischen Klassiker geschaffenen Ideal der Mathematik weit entfernt. Es gelang ihnen nicht, auf der Grundlage weniger Voraussetzungen ganze Disziplinen deduktiv aufzubauen und eine Theorie der mathematischen Beweisführung zu entwickeln.

Die Mathematik Chinas ist ein Bestandteil der numerischen Mathematik des mittelalterlichen Orients. Der Einfluß, den die Chinesen auf den Fortschritt der Mathematik in anderen Ländern ausgeübt haben mögen, läßt sich gegenwärtig noch nicht genau einschätzen: Die Wechselbeziehungen zwischen China und seinen Nachbarn sind bei weitem noch nicht vollständig erforscht, da in den alten Werken üblicherweise auf Quellen nicht verwiesen wird. Dessen ungeachtet zeigen die vorliegenden Materialien in ihrer Gesamtheit, daß mehrere Jahrhunderte lang ein Austausch mathematischer Entdeckungen zwischen China, Indien und den Ländern des Islam bestanden hat.

Wir hatten erwähnt, daß sich im ersten Jahrtausend in China der Buddhismus verbreitete, daß im 7. Jahrhundert im astronomischen Amt indische Fachleute gearbeitet haben und daß in Sanskrit geschriebene Werke übersetzt wurden. Im 13. bis 14. Jahrhundert wirkten im chinesischen astronomischen Amt Gelehrte des Irans und Mittelasiens. Auf der anderen Seite waren in Maraga im Observatorium des Naṣīr ad-Din

im 13. Jahrhundert chinesische Astronomen tätig; ja, in den Werken des aṭ-Ṭūsī wird die chinesische Zeitrechnung behandelt. Der chinesische Kalender war auch im Observatorium des Uluġbēk (15. Jahrhundert) wohlbekannt. Der persönliche Kontakt zwischen den Astronomen verschiedener Länder zog notwendig einen Austausch mathematischer Kenntnisse nach sich.

Von einer Verbindung zwischen der chinesischen Mathematik und der Mathematik anderer Länder zeugen auch zahlreiche Entdeckungen. Es dürfte kaum ein Zufall sein, daß die negativen Zahlen, die Regeln für das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, die Bambusaufgabe, ein dem chinesischen ähnlicher Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes in der indischen Mathematik einige Jahrhunderte später auftauchen. Ferner dürfte es ebenfalls nicht nur eine Dublizität der Ereignisse sein, daß in Mittelasien die Regel der zwei falschen Voraussetzungen oder das Hornersche Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln mit beliebig hohem Wurzelexponenten oder Dezimalbrüche angewandt wurden, nachdem diese Methoden bereits in China entwickelt worden waren. Das Gesagte gilt auch für die angeführten Beispiele unbestimmter Gleichungen.

Besonders eng waren im Mittelalter die Beziehungen Chinas zu Korea und Japan. Bereits im Jahre 554 wurde in Japan der chinesische Kalender übernommen. Vom 8. Jahrhundert an wurde in den japanischen Schulen das chinesische System der mathematischen Ausbildung eingeführt. Wir hatten bereits erwähnt, daß später, im 17. Jahrhundert, der japanische Gelehrte Seki Kova von chinesischen algebraischen Arbeiten ausgehend eine Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme entwickelte, die im wesentlichen mit der Methode der Determinanten identisch ist. Übersetzungen chinesischer Bücher bildeten auch die Grundlage für die mathematische Ausbildung in Korea.

Bei weitem nicht alle Entdeckungen der chinesischen Mathematiker wurden zu ihrer Zeit außerhalb Chinas bekannt. Doch insgesamt gesehen flossen die mathematischen Errungenschaften der chinesischen Gelehrten in den allgemeinen Strom der numerischen Mathematik des mittelalterlichen Orients ein. Weitere mathematikgeschichtliche Forschungen werden zweifellos unsere Kenntnisse über dieses Problem präzisieren und erweitern.

DIE MATHEMATIK IN INDIEN

Vorbetrachtungen. Archäologische Untersuchungen haben gezeigt, daß in der Mitte des 3. Jahrtausends v. u. Z. im Tal des Indus ein Sklavenhalterstaat mit einer hochentwickelten Kultur bestanden hat. In der Nähe des Hügellandes von Mohendjo-Dâro befand sich eine große wohldurchdacht angelegte Stadt; die anderen Städte waren nach dem gleichen Plan gebaut. Auf Gebrauchsgegenständen und Siegeln wurden bisher kaum entzifferte Inschriften nach Art einer Bilderschrift aufgefunden. Aus Ruinen der öffentlichen Gebäude, aus Systemen von Bewässerungs- und Abflußkanälen, aus Malereien auf keramischen Gegenständen und aus der Skulptur, ferner anhand eines aus einer Muschel angefertigten Lineals mit Dezimalteilung kann man indirekt schließen, daß auch ein gewisser Vorrat an mathematischen Kenntnissen zu den Elementen dieser Kultur gehört hat. Etwa um die Mitte des 2. Jahrtausends v. u. Z. aber war das Gebiet von Mohendjo-Dâro verödet. Zu dieser Zeit drangen neue indogermanische Stämme vom Nordwesten her nach Indien ein, die die Urbevölkerung zum Teil vernichteten, zum Teil unterjochten. Die Sprache der neuen Bewohner war das Sanskrit. Allmählich vermischten sich die Einwanderer mit der Urbevölkerung, genauso wie es in der Folgezeit den anderen Einwanderern erging.

Zu Beginn des 2. Jahrtausends v. u. Z. war die Hauptbeschäftigung der Inder die Landwirtschaft, die auf eine künstliche Bewässerung der Felder angewiesen war. Mit der Zeit begann eine intensive Entwicklung verschiedener handwerklicher Tätigkeiten: Man produzierte Baumwoll- und Seidenerzeugnisse, Gegenstände aus Elfenbein und Metall. Es entstanden verhältnismäßig große Staaten, denen jedoch eine feste ökonomische Einheit fehlte. Sie litten unter äußeren Kriegen und inneren Widersprüchen und waren daher nicht von langer Lebensdauer. Im Inneren der Staaten tobten Machtkämpfe unter den herrschenden Klassen, den varṇa oder Kriegern, den kṣatriya und brâhmaṇa. Es gab Aufstände der vais'ya, d. h. der freien Mitglieder ländlicher Gemeinden, der Händler und der s'ûdra, d. h. der Gemeindemitglieder mit eingeschränkten Bürgerrechten, der Handwerker und Diener. Die varṇa zerfielen in Kasten oder jâti, die Menschen des gleichen, häufig erblichen Berufes vereinigten. Unter den s'ûdra standen die Sklaven. Die Unzufriedenheit der ausgebeuteten Bevölkerungsschichten führte zu einer neuen Religion — dem Buddhismus, der etwa im 5. Jahrhundert v. u. Z. entstand, viele Anhänger erwarb und sich mit der Zeit auch in anderen Ländern ausbreitete. Auf etwa das 7. bis 5. Jahrhundert v. u. Z. gehen die ersten schriftlichen Denkmäler über die Mathematik in Indien zurück.

Etwa im 9. Jahrhundert v. u. Z., vielleicht aber auch früher, wurden Verbindungen mit Assyrien und Babylonien angeknüpft. Am Ende des 6. Jahrhunderts v. u. Z. eroberte der persische König Dareios Hystaspes einen Teil des Pañjâb und begründete

hier eine neue Satrapie[1]) mit dem Indus als Ostgrenze. Zweihundert Jahre später, zwischen 327 und 325 v.u.Z., drang Alexander der Große noch weiter vor als die Perser. Die Züge Alexanders und die nach seinem Tode entstandene Seleukidenmonarchie, die Syrien, Mesopotamien, den Iran und Teile von Mittelasien und Indien umfaßte, führten zu einer erheblich engeren Berührung mit der Kultur der Mittelmeerländer.

Fast gleichzeitig mit der Seleukidenmonarchie entstand im Indusbecken und im Gangestal das neue mächtige Reich der Maurya-Dynastie, das seine Begründung dem Aufschwung der nationalen Bewegung unter Čandragupta (322—298) verdankt. Seleukos I. Nikator nahm den Kampf gegen Čandragupta auf, schloß jedoch mit diesem, nachdem er auf Widerstand stieß, freundschaftliche Beziehungen. Dem Machtbereich Aśokas (273—232), eines Enkels von Čandragupta, erstreckte sich über ganz Nordindien und einen bedeutenden Teil Südindiens.

Im Maurya-Reich erreichte nicht nur der Binnenhandel, sondern auch der Außenhandel einen hohen Stand. Land- und Seewege führten nach China, Burma, Syrien und Ägypten. Nach mehreren Jahrzehnten der Blüte trat jedoch ein rascher Zerfall des Maurya-Reiches ein.

In der Mitte des 3. Jahrhunderts v.u.Z. löste sich aus dem Verband des Seleukidenreiches der griechisch-baktrische Staat, der das Territorium eines Teiles von Mittelasien, Afganistan, Kaschmir und das Industal umfaßte. Er existierte zwar nur wenig länger als ein Jahrhundert, hinterließ jedoch tiefe Spuren in der Entwicklung der indischen Kultur.

Im 1. Jahrhundert v.u.Z. wurden große Gebiete Mittelasiens und Nordwestindiens von den Skythen-Sakaen unterworfen. Der neue Staat der Kumanen erhielt seinen Namen nach einem Skythenstamm. Die Kumanen trieben Handel mit dem römischen Reich und mit China. Im Jahre 99 stattete eine Gesandtschaft des Kaisers Kanishka (78—123) einen Besuch in Rom ab. Etwas früher, im Jahre 64, weilten in Indien chinesische Gesandte. Zu dieser Zeit drang offenbar der Buddhismus nach China vor.

Im 3. Jahrhundert begann ein rascher Verfall des Kumanenreiches, das schließlich unter dem Druck der sog. weißen Hunnen endgültig zerfiel. Später erreichte die indische Kultur eine neue hohe Blüte im Reich der Gupta. Dieses wurde von einem anderen Čandragupta im Jahre 320 begründet, der vorher den Befreiungskampf der Inder angeführt hatte. Der chinesische Reisende Fa Sian, der in den Jahren 399 bis 414 das das Land bis nach Ceylon bereist hatte, hat das Reich der Gupta, das große Teile von Nord- und Mittelindien umfaßte, sehr eindrucksvoll beschrieben. In diese Zeit fallen viele Errungenschaften auf dem Gebiet der Kunst, Literatur und Wissenschaft. In der Hauptstadt Ujjayiní bestand eine große Universität; Hochschulen existierten auch in anderen Städten. Besonders berühmt war die Universität in Nâlanda in der Nähe von Pâṭaliputra (Patna), das früher die Hauptstadt der Maurya war. Hier wurden verschiedene humanistische Wissenschaften, Philosophie und Theologie, aber auch Naturwissenschaften und angewandte Disziplinen gelehrt. Die Studenten kamen nicht nur aus ganz Indien, sondern auch aus China, Tibet, aus der Mongolei, aus Buchara, Japan und Korea.

---

[1]) D. h. Statthalterschaft.

Im 4. Jahrhundert wurden mehrere astronomische Werke („Siddhânta") verfaßt. An der Grenze vom 5. zum 6. Jahrhundert wirkten der (ältere) Âryabhaṭa, der in der Nähe von Pâṭaliputra geboren war, und der aus der Umgebung von Ujjayinî stammende Varâhamihira. Dort hatte ein Jahrhundert früher der große Dichter und Dramaturg Kâlidâsa gewirkt. In der ersten Hälfte des 7. Jahrhunderts lebte in Ujjayinî Brahmagupta. In diese Zeit fällt die Entstehung und Vollendung des Dezimalsystems in Indien.

Das 6. und 7. Jahrhundert standen in Indien im Zeichen der Herausbildung des Feudalismus mit seinen eigenartigen, für dieses Land charakteristischen Formen. Auch die Kasteneinteilung entwickelte sich weiter und wurde in religiösen Dogmen und Bräuchen verankert. Auf der untersten Stufe standen viele Gruppen der sog. „Nichtzuberührenden" — parya. Das schwere Los der untersten Kasten begünstigte die Ausbreitung des Islam, der in den benachbarten Ländern Mittelasiens zur Staatsreligion wurde.

Die Verbindungen zu den islamischen Ländern hatten eine große Bedeutung für den weiteren Fortschritt der Wissenschaft. Im 7. und 8. Jahrhundert wurden die indischen astronomischen und mathematischen Werke im arabischen Kalifat bekannt. Zu jener Zeit wirkten, wie bereits erwähnt, indische Gelehrte mit großem Erfolg in China.

Die schwachen Staaten Indiens waren nicht imstande, dem Ansturm neuer Eroberer zu widerstehen. Im 6. Jahrhundert entstand in einem Teil Indiens für kurze Zeit ein Hunnenreich. In der ersten Hälfte des 7. Jahrhunderts führte das nur kurze Zeit bestehende Reich der Kananj im Gangestal einen schweren Krieg gegen China. Im 8. Jahrhundert stand das Gebiet am Unterlauf des Indus unter der Herrschaft arabischer Heerführer. Vom 9. Jahrhundert an begannen die verheerenden Eroberungszüge der Sultane des an den Nordwestgrenzen Indiens gelegenen Reiches der Gasna. Im Jahre 1206 begründeten die mittelasiatischen Eroberer das Sultanat von Delhi, das im Laufe von hundert Jahren fast ganz Indien mit Ausnahme der Südgebiete unterwarf. Von der Mitte des 14. Jahrhunderts an begann jedoch das Sultanat zu verfallen, nachdem es im Jahre 1398 durch den Eroberungszug Timurs (Tamerlans) einen vernichtenden Schlag erhalten hatte.

Unter diesen komplizierten Bedingungen vollzog sich die Entwicklung der Mathematik, die stets untrennbar mit der Astronomie verknüpft war. Die bedeutendsten Mathematiker waren Mahâvirâ in der südindischen Stadt Maisor (9. Jahrhundert), ferner Srîdhara, der jüngere Âryabhaṭa (10. Jahrhundert), Śrîpati (11. Jahrhundert), Bhâskara II. (12. Jahrhundert) und Nârâyaṇa (14. Jahrhundert).

Vom 14. bis 16. Jahrhundert wurden die wissenschaftlichen Forschungen mit großem Erfolg in den Südstaaten betrieben, insbesondere in dem reichen Vijaynagar, dessen Beschreibung wir den Berichten des russischen Reisenden Afanassi Nikitin verdanken, der hier in den Jahren 1469 bis 1472 weilte. Um 1500, am Ende des von uns betrachteten Zeitraumes, wirkte im Süden Indiens der hervorragende Mathematiker Nîlakanta.

Die wichtigsten mathematischen Werke. Die Mathematik genoß seit altersher in Indien großes Ansehen. Der Sage zufolge begann Gautama, d. h. Buddha, im Alter von acht Jahren Schreiben und dann Rechnen als die wichtigsten Wissenschaften

zu erlernen. Ein wahrhaft Hoheslied auf die Mathematik singt im 9. Jahrhundert Mahâvîra:

„Das Rechnen ist bei allen Arbeiten nützlich, die mit weltlichen, kultischen oder anderen ähnlichen religiösen Dingen zusammenhängen. Die Wissenschaft des Rechnens wird hoch geachtet in der Lehre der Liebe, in der Lehre vom Reichtum, in der Musik und im Drama, in der Kochkunst, in der Medizin, in der Architektur, bei der Silbenmessung, in der Dichtkunst und Poesie, in der Logik und Grammatik sowie in anderen Dingen. Sie wird verwendet im Zusammenhang mit der Bewegung der Sonne und anderer Himmelskörper, im Zusammenhang mit den Finsternissen und den Konjunktionen der Planeten sowie im Zusammenhang mit der Richtung, der Lage und der Zeit und mit dem Lauf des Mondes. Die Anzahl, die Durchmesser und Umfänge der Inseln, Ozeane und Berge, die Ausmaße der Ansiedlungen und der Gebäude der Weltbewohner, der Räume zwischen den Welten, der Welt des Lichtes, der Welt der Götter und der Bewohner der Hölle und andere mannigfache Vermessungen, all das wird mit Hilfe der Mathematik bewerkstelligt" [54, Vol. I, S. 5, englisch].

Dieser Lobgesang erinnert ein wenig an das „Lob der Arithmetik" in den Vorworten zu den arithmetischen Werken europäischer Verfasser aus dem Spätmittelalter.

Die frühesten Kenntnisse über die Mathematik in Indien beziehen sich auf die Zeit, in der die heiligen religiös-philosophischen Bücher der „Veda" enstanden sind[1]). Eine wertvolle Quelle sind hier die sogenannten „Schnurregeln" (Śulba-sûtra), die geometrische Konstruktionen und Ergebnisse einiger Berechnungen enthalten. Die „Schnurregeln" sind in drei verschiedenen Fassungen erhalten geblieben: der ältesten von Baûdhâyana und den beiden späteren von Âpastamba und Kâtyâyana [58]. Über die Entstehungszeit der „Schnurregeln" gehen die Meinungen der Forscher auseinander. Einige ordnen sie in die Zeit zwischen dem 15. und 12. Jahrhundert v. u. Z. ein, andere nehmen an, sie wären zwischen dem 8. und 3. Jahrhundert v. u. Z. entstanden. Die Mehrzahl hingegen neigt dazu, ihre Entstehungszeit zwischen das 7. und 5. Jahrhundert v. u. Z. zu verlegen.

Läßt man die „Schnurregeln" unberücksichtigt, so sind die wichtigsten uns bekannten mathematischen Werke der Inder in der Zeit zwischen dem 2. oder 5. und dem 16. Jahrhundert entstanden. In der Hauptsache sind es mathematische Abschnitte in astronomischen Büchern. Sie sind in Sanskrit geschrieben, das die Sprache der indischen Religion und Wissenschaft war, ähnlich wie das Arabische in den muselmanischen Ländern oder das Latein im mittelalterlichen Westeuropa.

Die Darlegung in den indischen mathematischen Werken ist sehr gedrängt und enthält häufig keine Beweise. Der lakonische Ton wird mitunter wie in der chinesischen Literatur bis zum äußersten getrieben. Der uneingeweihte Leser ist nicht in der Lage, die angeführten Regeln ohne zusätzliche Erläuterungen zu verstehen. Teilweise hängt dies damit zusammen, das eine Reihe von Werken in Versen geschrieben ist: Die Regeln sind in kurzen Strophen formuliert und wurden auswendig gelernt. Führt

---

[1]) „veda" bedeutet im Sanskrit soviel wie Wissen; vgl. dazu das russische ведать — auch das deutsche Wort Wissen hängt im Wortstamm damit zusammen.

man sich noch die starren Regeln des sanskritischen Versmaßes vor Augen, so ist verständlich, daß in der schriftlichen Fassung Lücken klaffen, die mitunter sehr wesentlich sind. Der Unterricht war in den meisten Fällen, wie überall im Mittelalter, dogmatischer Art und stützte sich mehr auf das Gedächtnis als auf einen Appell an den Verstand.

Die wichtigsten Quellen, aus denen wir unsere Kenntnisse über die indische Mathematik schöpfen, sind die folgenden Werke:

1. Eine anonyme Handschrift auf Ulmenrinde über Arithmetik und Algebra, die im Jahre 1881 in der Nähe des Dorfes Baksâlî in Nordwestindien ausgegraben wurde [64, 64*a*]. Die genaue Zeit ihrer Entstehung ist unbekannt. Manche Mathematikhistoriker verlegen sie in die Zeit um das Jahr 200, andere in das 6. bis 8. Jahrhundert.

2. Ein anonymes Werk über Astronomie aus dem 4. oder 5. Jahrhundert unter dem Titel „Sûrya siddhânta" oder die „Lehre der Sonne". Gemeint ist nicht eine Lehre von der Sonne, sondern eine Unterweisung, die einem gewissen Dämon von der Sonne erteilt wird [59]. Neben der „Lehre der Sonne" kennt man weitere vier analoge Werke oder Siddhântas. Eine davon wurde „Lehre des Puliśa" („Puliśa siddhânta") genannt. Ihr entnehmen wir die ersten Kenntnisse über die indische Trigonometrie. Dieses Werk ist verlorengegangen. Aber wir kennen seinen Inhalt aus den „Fünf Siddhântas" („Pañca siddhânta") von Varâhamihira, der um 505 sämtliche fünf Siddhântas erläutert und kommentiert hat [60]. Nach den Mitteilungen von al-Bīrūnī zu urteilen, der in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts die indische wissenschaftliche Literatur sorgfältig erforscht hatte, war Puliśa ein Grieche aus Santra (vermutlich Alexandria), und es ist durchaus möglich, daß es sich hierbei um den Astrologen Paulos Alexandrinos handelt, der im 4. Jahrhundert gelebt hat. In den verschiedenen Siddhântas fand die Bekanntschaft ihrer Verfasser mit der hellenistischen Astronomie und mit den Methoden der babylonischen Astronomen aus der Seleukidenzeit ihren Niederschlag [48*a*, S. 171 bis 175].

3. Eine in Versform abgefaßte Abhandlung über Astronomie und Mathematik, die „Âryabhaṭîya" [61], die im Jahre 499 von dem dreiundzwanzigjährigen Âryabhaṭa verfaßt wurde. In den astronomischen Abschnitten stützte sich Âryabhaṭa auf die kurz vorher verfaßten „Siddhântas". Zweifellos wurde auch der größte Teil des mathematischen Stoffes von seinen unbekannt gebliebenen Vorgängern beherrscht. Für die Abschätzung seines eigenen Beitrages haben wir keinerlei Anhaltspunkte. Das gleiche gilt übrigens auch für die anderen indischen Gelehrten.

Im ersten Teil der „Âryabhaṭiya" ist ein eigenartiges System für die mündliche Wiedergabe von Zahlen beschrieben. In den dreiunddreißig Strophen des zweiten Teiles werden Regeln zur Lösung einzelner Aufgaben aus Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie angegeben. Neben äußerst feinsinnigen Methoden, z. B. zur Auflösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen, werden hier auch sehr einfache Regeln erwähnt, z. B. die Dreisatzregel. Neben einem guten Näherungswert für die Berechnung des Kreisumfanges und der Kreisfläche, wobei die Zahl π mit $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ angegeben wird, enthält das Werk einen äußerst groben Ausdruck für das Kugelvolumen, dem ein π-Wert von

$\frac{16}{9} = 1{,}78$ entspricht. Âryabhaṭa hat bei weitem keine vollständige Zusammenstellung der mathematischen Kenntnisse gegeben, worauf bereits sein Schüler Bhâskara I. (um 522) hinwies. Trotzdem übte zweifellos die „Âryabhaṭîya" einen nachhaltigen Einfluß aus, denn noch tausend Jahre später wurde sie von Nîlakanta kommentiert.

4. Die „Vervollkommnung der Lehre Brahmas" (Brâhmasphuṭasiddhânta), die etwa 628 von Brahmagupta (geboren 598) [62] verfaßt wurde. Dieses Werk, das ebenfalls in Versform geschrieben ist, lehnt sich teilweise an die „Âryabhaṭîya" an, ist jedoch wesentlich inhaltsreicher. Der Mathematik sind zwei von zwanzig Büchern gewidmet. Das erste Buch, die „Gaṇitasâra-dhyâya", besteht aus zehn Abschnitten, von denen die ersten drei der Arithmetik, die restlichen der Berechnung von Abmessungen und Bestimmungsstücken einiger Figuren gewidmet sind. „Gaṇita" dürfte etwa soviel wie die Lehre vom Rechnen bedeuten; das Buch enthält nicht nur arithmetische, sondern auch geometrische Aufgaben. Das achtzehnte Buch ist die „Kuttakâdhyâya"; ihre acht Abschnitte enthalten Zahlentheorie und Algebra, wie Elemente algebraischer Berechnungen, Gleichungen ersten und zweiten Grades. Die Bedeutung des Namens wollen wir später erläutern (vgl. S. 141).

Einen wichtigen Kommentar zum Werk Brahmaguptas schrieb um 860 Pṛthûdakasvâmî.

5. Der „Kurze Lehrgang der Lehre vom Rechnen" (Gaṇitasâra-saṅgraha) von Mahâvîra (um 850) [63]. Mahâvîra bedeutet „großer Mann"[1].

6. Die „Kurze Lehre vom Rechnen" (Pâṭîgaṇitasâra) von Srîdhara, der zwischen 850 und 950 gelebt hat. Dieses Buch führt außerdem den Namen „Triśatikâ"[2] da es dreihundert Strophen enthält [65]. Die „Triśatikâ" ist eine verkürzte Bearbeitung eines anderen Werkes von Srîdhara, der „Lehre vom Rechnen" (pâṭigaṇita), [65*a*], die man auch „Navas'atikâ" nennt, woraus man schließen kann, daß sie 900 Strophen enthielt[3]). Beide Werke, insbesondere die „Triśatikâ", wurden infolge der Klarheit und Einfachheit ihrer Darstellung äußerst populär und verdrängten viele ältere Werke. Bhâskara II. erwähnt noch ein weiteres Werk von Srîdhara über Algebra und Zahlentheorie, das bisher aber noch nicht entdeckt wurde.

7. „Der Kranz der Wissenschaften" (Siddhânta-śiromaṇi) von Bhâskara II. (geboren 1114, gestorben nach 1178) [62]. Dieses um 1150 geschriebene Werk ist sowohl in historischer Sicht als auch hinsichtlich seines Wertes in der Tat die Krone der indischen Mathematik. Es ist größtenteils in Prosa abgefaßt und umfaßt vier Teile. Der erste Teil, die „Lîlâvatî", ist hauptsächlich arithmetischen und geometrischen Inhalts. Das Wort „Lîlâvatî", was soviel wie „Die Schöne" bedeutet, bezieht sich entweder auf die Tochter des Gelehrten oder aber auf die Mathematik selbst. Der zweite Teil, die „Bîjagaṇita"[4]) stellt eine Algebra dar, während die beiden letzten Teile auf die Astronomie Bezug nehmen.

---

[1]) Vgl. lat. magnus vir.
[2]) Trisatam = 300 (Sanskrit).
[3]) Navasatam = 900 (Sanskrit). Die erhalten gebliebene Handschrift umfaßt 251 Strophen.
[4]) Zur Erläuterung des Namens vgl. S. 122.

Das Werk von Bhâskara hängt in methodischer Beziehung sehr eng mit den vorausgegangenen Werken zusammen. Bhâskara verweist insbesondere auf Brahmagupta und Srîdhara. Im „Kranz der Wissenschaften" wechseln praktische Aufgaben und abstrakte Probleme einander ab. Wir wollen nun kurz den Inhalt der mathematischen Abschnitte dieses Buches betrachten.

Die „Lîlâvatî" gliedert sich in 13 Abschnitte. Der Abschnitt I enthält Tabellen von Maßeinheiten. Im nächsten Abschnitt werden die Operationen mit ganzen Zahlen beschrieben, und zwar einschließlich des Ausziehens von Quadrat- und Kubikwurzeln. Der Abschnitt III vermittelt die Lösung von Rechenaufgaben mit Hilfe der Methode der Umkehrung, der Regel eines falschen Ansatzes und der Dreisatzregel. Hier sind ferner ohne Beweis einige algebraische Kunstgriffe dargelegt, z. B. die Ermittlung zweier unbekannter Zahlen aus ihrer Summe und ihrer Differenz oder aus ihrer Differenz und der Differenz ihrer Quadrate. Darüber hinaus finden wir hier die Lösung von Gleichungen der Form

$$a x + b\sqrt{x} = c.$$

Im IV. Abschnitt treten Aufgaben über Wasserbehälter auf, die wahrscheinlich von den Griechen oder Chinesen übernommen wurden, und ferner Mischungsaufgaben. Der Abschnitt V bringt die Summation einiger arithmetischer Reihen. Probleme der Planimetrie sind im Abschnitt VI zusammengefaßt; hier finden wir neben der Messung ebener Figuren auch Aufgaben über einen geknickten Bambusstab und über aus dem Wasser herausragendes Schilf (Bhâskara nimmt dafür Lotos), wie sie auch in chinesischen Werken auftreten (siehe S. 52), sowie Aufgaben zur Berechnung der Seiten rechtwinkliger Dreiecke, die auf lineare Gleichungen führen. Die Abschnitte VII bis XI sind ebenfalls der Geometrie gewidmet, vor allem der Volumenberechnung. Aufgaben der sogenannten diophantischen Analysis, die im Abschnitt XII gelöst werden, sind in der Algebra ausführlicher behandelt. Im letzten Abschnitt schließlich werden verschiedene Aufgaben aus der Kombinatorik erörtert.

Die „Bijaganita", die aus acht Abschnitten besteht, stellt eine Lehre von algebraischen Gleichungen ersten und zweiten Grades dar, die, ebenso wie bei Brahmagupta, mit Hilfe einer recht entwickelten Symbolik behandelt wird. Im Abschnitt I werden die Grundregeln der algebraischen Rechnung dargelegt. Die Abschnitte II und III bringen die Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten und zweiten Grades in ganzen Zahlen. Dann folgt die Auflösung von Aufgaben über lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten (Abschnitt IV) sowie über quadratische Gleichungen (Abschnitt V). Hier werden ferner einige geometrische Probleme erörtert und zwei Beweise für den Lehrsatz des Pythagoras gegeben. Im Abschnitt VI sind verschiedene bestimmte und unbestimmte Aufgaben über lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten gesammelt. Die Abschnitte VII und VIII enthalten zusätzliche Erörterungen über unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

Der „Kranz der Wissenschaften" Bhâskaras wurde in Indien sehr populär. Der Enkel des Verfassers, Caṅgadeva, gründete zu Beginn des 13. Jahrhunderts eine spezielle Schule zum Studium dieses Buches. Mit der Deutung dieses Werkes beschäftigten sich mehr als vier Jahrhunderte lang viele Mathematiker. Einige Kommentare, z. B. von Gaṇeśa (1545) und Kṛishṇa (1580), sind äußerst interessant.

8. Das „Wissenschaftliche Sammelwerk" („Tantra-saṅgraha") von Nîlakanta (um 1500) enthält die Potenzreihenentwicklung von arctan x und verschiedene hieraus folgende Darstellungen der Zahl π mit Anwendungen auf deren angenäherte Berechnung.

Im weiteren werden wir noch einige andere Werke erwähnen müssen.

Die Mathematik in den Büchern der „Schnurregeln". Einen bedeutenden Teil der Bücher über die „Schnurregeln" nehmen Vorschriften über den Bau von Altären ein, wobei Schnüre und Bambusstäbe verwendet wurden. Die mathematischen Elemente dieses Werkes sind uneinheitlicher Natur, jedoch zeugen sie von bedeutenden Erkenntnissen der indischen Mathematiker zur Zeit der Entstehung dieser Bücher [66, 67, 68].

Der Bau von Opferaltären war verschiedenen Vorschriften unterworfen. Die Altäre wurden nach den Himmelsrichtungen orientiert. Die Fundamente waren genau festgelegte Figuren, etwa gleichschenklige Trapeze mit gegebenen Seitenverhältnissen. Zwischen den Fundamenten der Altäre pflegte man zweierlei Relationen zu berücksichtigen: Die Grundflächen waren entweder ähnlich und ihre Flächeninhalte verhielten sich wie die ganzen Zahlen 1 : 2 : 3, oder die Grundflächen waren verschiedener Form, aber flächengleich. Die zugehörigen geometrischen Aufgaben sind vor allem die Konstruktionen eines rechten Winkels, eines Quadrates, pythagoreischer rechtwinkliger Dreiecke, die Bildung von Trapezen aus den letzteren, die Konstruktion eines Quadrates der Fläche na^2 aus einem Quadrat der Fläche a^2, die Umwandlung eines Rechtecks usw. Eine hervorragende Stellung nimmt hierbei der Satz des Pythagoras ein.

Baudhâyana formulierte zunächst einen Spezialfall des Satzes für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck, genauer gesagt, für die Diagonale eines Quadrates: „Die quer über das Quadrat (gelegte) Schnur bringt die doppelt so große (Boden)-fläche hervor". Dann folgt der allgemeine Satz: „Die quer über das Rechteck (gelegte) Schnur bringt beides (d. h. beide Flächen zusammen) hervor, was die Längsseite und die Breitseite jede für sich hervorbringen" (67, S. 190). Bei Âpastamba und Kâtyâyana ist die Reihenfolge dieser Sätze geändert.

Die Verfasser der „Schnurregeln" wandten fünf rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen an:

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
12	35	37

Darüber hinaus wurden die aus diesen hervorgehenden ähnlichen Dreiecke verwendet. Aus solchen Dreiecken wurden gleichschenklige Trapeze in der Weise konstruiert, wie aus der Abb. 21 hervorgeht. In eine entsprechende Anzahl gleicher Teile eingeteilte Schnüre dürften zum Abstecken eines rechten Winkels gedient haben. Um eine Strecke zu halbieren, wurden von deren Endpunkten aus mit der Streckenlänge als Radius Kreisbogen geschlagen und die Schnittpunkte der beiden Bogen durch eine

Gerade, das Mittellot der Strecke, verbunden. Diese Konstruktion wurde zur Gewinnung eines Quadrates mit der vorgegebenen Seite $2a$ angewandt. Zunächst wird ein Kreis vom Radius a beschrieben und der Durchmesser WE gezogen (Abb. 22). Dann wird im Mittelpunkt des Durchmessers auf diesem eine Senkrechte errichtet, die den Kreis in den Punkten S und N schneidet. Schließlich werden um die Punkte S, E, N, W Kreise mit dem Radius a geschlagen, die sich in den Punkten A, B, C, D, den Eckpunkten des gesuchten Quadrates, schneiden.

Mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes werden Verdopplungen, Verdreifachungen usw. eines gegebenen Quadrates vorgenommen. Die Verdopplung eines Quadrates erfordert lediglich die Konstruktion eines Quadrates über der Diagonale des ersten, etwa so, wie es die Abb. 23 zeigt, in der zwei mit ihren Seiten aneinandergelegte Quadrate jeweils halbiert und anschließend die Teile I und II in die Stellungen I′ und II′ verschoben sind. Diese Konstruktion, die der Verwandlung eines gegebenen Rechtecks in ein Quadrat äquivalent ist, wurde von Baudhâyana zur Lösung der inversen Aufgabe, d. h. zur Verwandlung eines gegebenen Quadrates in ein Rechteck angewandt. Das Quadrat wird durch die Diagonale halbiert und dann das eine der gewonnenen Quadrate ebenfalls in zwei Teile geteilt. Die beiden kleinen Teildreiecke werden dann in geeigneter Weise an die Seiten des übriggebliebenen größeren Dreiecks angelegt. Das so konstruierte Rechteck hat die Seiten $a\sqrt{2}$ und $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Für das Weitere genügt es, ein Quadrat konstruieren zu können, das mit der Summe der Flächen zweier ungleicher Quadrate, also mit $a^2 + b^2$, flächengleich ist. Wie es in den „Schnurregeln“ heißt, „reiße man mit der Seite des kleineren auf dem größeren einen (Parallel-)streifen auf. Die quer über diesen Streifen (gelegte) Schnur vereinigt beide (Quadrate)“ [67, S. 194]. Der Sinn der Vorschrift geht aus der Abb. 24 hervor, die in den „Schnurregeln“, wie auch jede übrige Abbildung, fehlt. Es gilt nämlich

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2.$$

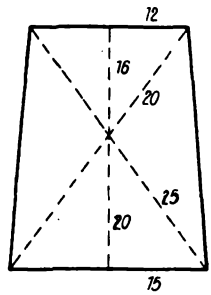


Abb. 21
Gleichschenkliges Trapez, das aus rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen zusammengesetzt ist.

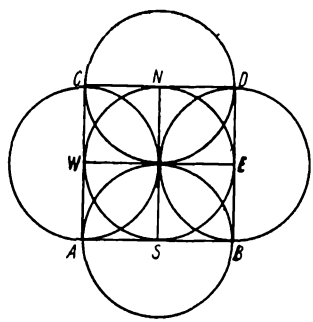


Abb. 22

Kâtyâyana konstruiert die Seite eines Quadrates, das der Fläche von n gegebenen Quadraten a^2 flächengleich ist, auch unmittelbar als Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie $(n-1)a$ und den Seiten $\frac{(n+1)a}{2}$. In der Tat ist das Quadrat dieser Höhe

$$\left(\frac{n+1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}a\right)^2 = na^2.$$

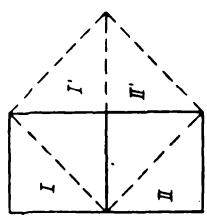


Abb. 23

In den „Schnurregeln" wird ferner mitgeteilt, wie man die Seite eines Quadrates findet, das der Differenz zweier gegebener Quadrate $b^2 - a^2$ flächengleich ist. Hierzu trägt man vom Punkt A aus (Abb. 24) mit der Seite des größeren Quadrates auf dessen Grundlinie die Strecke CD ab; hierbei gilt

$$\overline{CD}^2 = b^2 - a^2.$$

Der pythagoreische Lehrsatz wird noch für eine andere Umwandlung eines gegebenen Rechtecks in ein Quadrat verwendet. Im Rechteck mit den gegebenen Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ (Abb. 25) wird ein Quadrat $ABFE = a^2$ abgeteilt. Die Restfläche $EFCD$ wird durch die Gerade HG halbiert und an BF das Rechteck $BIKF$ angelegt, das mit $EFGH$ flächengleich ist. Damit ist das Rechteck $ABCD$ in den Gnomon $AIKFGHA$ verwandelt, der den gleichen Flächeninhalt hat wie die Differenz der beiden gegebenen Quadrate $AILH$ und $FKLG$. Damit ist das Ganze auf die vorhergehende Konstruktion zurückgeführt. Algebraisch gesehen bedeutet das

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Konstruktion von der des Eukleides verschieden ist. Im Satz 14 des zweiten Buches seiner „Elemente" konstruiert Eukleides auf der Strecke $\overline{AB}$, d. h. auf der Summe der Rechteckseiten AC und CE, einen Halbkreis und stützt sich dann (Abb. 26) auf den Satz 5 desselben Buches, demzufolge

$$\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2$$

gilt, woraus $\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{AC} \cdot \overline{CE}$ folgt. Übrigens wird auch im Beweis des Satzes 5 selbst der Gnomon verwendet.

Zieht man bei der Konstruktion eines Quadrates, das der Flächensumme zweier ungleicher Quadrate flächengleich ist, Hilfslinien in der in Abb. 27 angegebenen Weise, so entsteht eine Figur, die den pythagoreischen Lehrsatz anschaulich illustriert. Das Quadrat über der Hypotenuse besteht aus den Flächen S, III, IV und s, die Summe der Quadrate über den Katheten aus den Flächen S, I, II und s, wobei die Dreiecke I, II, III, IV gleich sind. Dies gibt den Anlaß anzunehmen, daß die indischen Mathematiker den pythagoreischen Lehrsatz auf Grund einer derartigen Konstruktion gefunden haben [67]. Möglicherweise hat man so den ersten Beweis für den allgemeinen

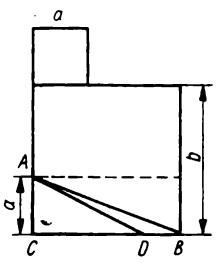


Abb. 24

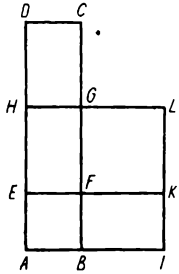


Abb. 25

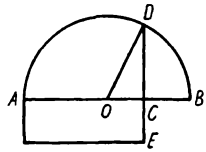


Abb. 26

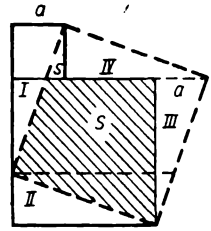


Abb. 27

Satz in Indien gefunden, den man vorher für die Spezialfälle der pythagoreischen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenverhältnissen kannte. Andererseits ist es durchaus möglich, daß in der Architektur mathematische Mittel angewandt wurden, die man früher gefunden hatte oder die von anderen Völkern übernommen wurden. Bei dieser Gelegenheit sei auf die Ähnlichkeit des Problems der Quadratverdoppelung und des griechischen Problems der Würfelverdoppelung hingewiesen, das nach der Sage ebenfalls im Zusammenhang mit dem Bau eines Altars entstanden ist. Man fragt sich, ob es sich hier um eine zufällige Ähnlichkeit oder um eine Wechselbeziehung handelt.

Später gab Bhâskara II. einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes an, der auf einer anderen Zerlegung der Fläche des Hypotenusenquadrates beruht und vorher in China bekannt gewesen ist (vgl. S. 62). Der indische Gelehrte gibt zur Zeichnung (Abb. 28) keinerlei Erläuterungen und beschränkt sich auf den lakonischen Hinweis „siehe“. Bei Bhâskara finden wir noch einen weiteren Beweis für den pythagoreischen Lehrsatz, bei dem von der Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks in zwei ähnliche durch die Höhe und die Anwendung von Proportionen ausgegangen wird. Dieser Beweis wurde später (1220) erneut von Leonardo Fibonacci von Pisa und im 17. Jahrhundert von J. Wallis gefunden. Im Grunde war dieser Beweis bereits Eukleides bekannt [33*a*, VI, Sätze 8 und 31].

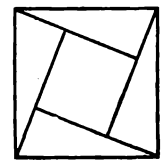


Abb. 28

An der Bestimmung rechtwinkliger Dreiecke mit ganzzahligen Seitenverhältnissen arbeiteten die indischen Gelehrten auch später. Brahmagupta und Mahâvîra gaben die zugehörige allgemeine Regel zur Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen an, eine Regel, die früher in China (vgl. S. 53) und in Griechenland angewandt worden war. Dabei ist zu beachten, daß in Indien dieses Problem in engem Zusammenhang mit architektonischen Konstruktionen stand.

Die Konstruktion eines Quadrates x^2, dessen Fläche das n-fache der Fläche a^2 eines gegebenen beträgt, ist der Lösung der reinquadratischen Gleichung $x^2 = na^2$ äquivalent. Auf die gleiche Aufgabe führen auch einige andere in den „Schnurregeln“ beschriebene Verwandlungsaufgaben, z. B. die Verwandlung der Grundfläche des „Großen Altars“ (Abb. 21). Kompliziertere Konstruktionen lassen sich algebraisch durch die vollständige algebraische Gleichung ausdrücken. Dies gilt z. B. für die folgende Aufgabe: Gegeben ist die Grundfläche eines Altars „in Gestalt eines Falken“ (Abb. 28*a*), dessen Körper von vier gleichen Quadraten mit der Länge I, dessen Flügel von zwei Rechtecken mit den Seiten $\overline{EH} = \overline{E'H'} = 1$ und $\overline{EF} = \overline{E'F'} = 1 + \frac{1}{5}$ und dessen Schwanz von einem Rechteck mit den Seiten $\overline{PS} = 1$ und $\overline{PQ} = 1 + \frac{1}{10}$ gebildet wird. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $7\frac{1}{2}$. Es sollen nun alle linearen Abmessungen der Figur außer den konstant

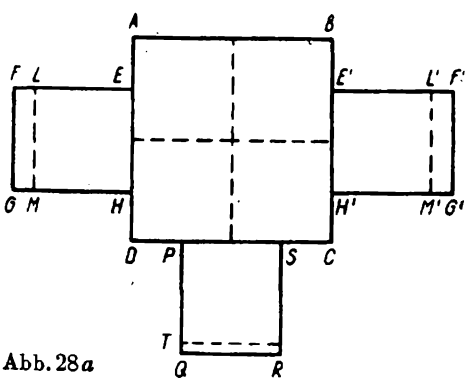


Abb. 28*a*

bleibenden Längen $\overline{FL} = \overline{F'L'} = \frac{1}{5}$ und $TQ = \frac{1}{10}$ im Verhältnis x derart vergrößert werden, daß die Gesamtfläche um m Flächeneinheiten größer wird. Diese Bedingung läßt sich durch die Gleichung

$$4x^2 + 2x\left(x + \frac{1}{5}\right) + x\left(x + \frac{1}{10}\right) = 7\frac{1}{2} + m \quad \text{oder} \quad 7x^2 + \frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} + m$$

ausdrücken. Kâtyâyana begnügt sich mit der Angabe der Näherungslösung $x^2 = 1 + \frac{m}{7}$. Ob die Verfasser der „Schnurregeln" die Lösung der quadratischen Gleichung in Radikalen kannten, wissen wir nicht.

Interessant ist die in den „Schnurregeln" angegebene rationale Näherung für die Diagonale eines Quadrates gegebener Seitenlänge, d. h. für $\sqrt{2}$. Diese Zahl wurde durch den Bruch $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ dargestellt. Hier ist einmal die Anwendung der Stammbrüche und das Bestreben, mit wenigen sich wiederholenden Ziffern auszukommen, interessant, zum anderen die hohe Genauigkeit des Näherungswertes, der in dezimaler Schreibweise den Wert 1,4142157 anstelle des auf sieben Dezimalen genauen Wertes 1,4142136 annimmt. Der indische Text enthält keinerlei Hinweise darauf, wie man auf diesen eigenartigen Ausdruck gekommen ist. Höchstwahrscheinlich wurde hier ein Iterationsverfahren angewandt, das bereits viel früher den Babyloniern bekannt war. Wählt man als ersten — zu groß angesetzten — Näherungswert $a_1 = \frac{3}{2}$, so ist der diesem entsprechende zu kleine Näherungswert $b_1 = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$. Die zweite Näherung lautet

$$a_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{3 \cdot 4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4};$$

Diesem entspricht

$$b_2 = 2 : \frac{17}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{17}.$$

Die dritte Näherung a_3 lautet:

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{289 + 288}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 289}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Etwa in 18. Jahrhundert v. u. Z. gaben babylonische Mathematiker in sexagesimaler Schreibweise für $\sqrt{2}$ den Wert 1; 24, 51, 10 an, der sich von dem indischen nur in der sechsten Dezimale nach dem Komma unterscheidet. Der babylonische Näherungswert ergibt sich ebenfalls beim zweiten Rechenschritt, wenn man von dem in Babylon bekannten Näherungswert $\frac{17}{12} = 1; 25$ ausgeht. Diese Umstände deuten auf einen Kontakt zwischen indischen und babylonischen Mathematikern zur Zeit der Abfassung der „Schnurregeln" hin. Es existieren jedoch andere, kompliziertere Rekonstruktionen des angegebenen Näherungswertes (vgl. z. B. [67]).

Für den Übergang von Altären mit quadratischer Grundfläche zu solchen mit kreisförmiger Basis und umgekehrt werden in den „Schnurregeln" einige Methoden für die Zirkulatur des Quadrates und die Quadratur des Kreises angegeben.

Die Konstruktion eines Kreises, der einem gegebenen Quadrat flächengleich ist, wird wie folgt angegeben (Abb. 29): Vom Mittelpunkt 0 des Quadrates wird senkrecht zur Quadratseite $\overline{AB}$ eine Strecke $\overline{OP}$ von der Länge der halben Diagonale und auf $\overline{HP}$ die Strecke $\overline{HK} = \frac{1}{3}\overline{HP}$ abgetragen. Für den gesuchten Radius nimmt man dann die Strecke $\overline{OK}$. Mit anderen Worten: Der gesuchte Durchmesser d wird durch die Quadratseite mittels folgender Irrationalität ausgedrückt:

$$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)a.$$

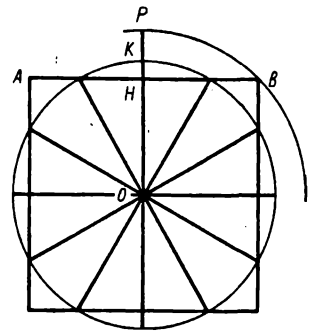


Abb. 29

Einen entsprechenden arithmetischen Ausdruck finden wir in den „Schnurregeln" übrigens nicht. Der zugehörige Wert von π ergibt sich dann zu

$$\pi = 18\,(3 - 2\sqrt{2}) \approx 3{,}088.$$

Die nachfolgende Regel für die Quadratur des Kreises ist sehr einfach: es wird $a = \left(1 - \frac{2}{15}\right)d = \frac{13}{15}d$ gesetzt. Hierbei wäre dann

$$\pi = \frac{676}{225} = 3\frac{1}{225} \approx 3{,}004.$$

Möglicherweise wurde diese Konstruktion folgendermaßen gewonnen: Man teilte den Kreis in zwölf gleiche Teile; diese Aufgabe dürfte den Verfassern der „Schnurregeln" kaum Schwierigkeiten bereitet haben. Sodann konstruierte man ein Quadrat, dessen Seiten durch acht Teilpunkte hindurchgehen — ähnlich dem Quadrat in Abb. 29 —, und setzte dieses angenähert gleich der Fläche des Kreises. Die Quadratseite ist dann $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$d. Nimmt man als ersten Näherungswert für $\sqrt{3}$ den Bruch $\frac{5}{3}$ als zu kleinen Näherungswert, so ist der diesem entsprechende zu große Näherungswert $3 : \frac{5}{3} = \frac{9}{5}$. Als zweite Näherung erhält man dann durch Mittelwertbildung $\frac{5/3 + 9/5}{2} = \frac{26}{15}$, wobei dann $a = \frac{13}{15}d$ ist. Zur Berechnung der halben Seiten des genannten Quadrates nach dem Satz des Pythagoras braucht man lediglich zu wissen, daß die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gleich dem Radius ist, und daß der Radius, der auf der Sehne senkrecht steht, diese halbiert.

Möglicherweise hat man hieraus die Konstruktion des Kreises abgeleitet, der einem gegebenen Quadrat flächengleich ist, obwohl im Text der „Schnurregeln" die genannte Konstruktion der Quadratur des Kreises vorausgeht. In der Tat, aus $a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$ folgt $r = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2}$, die Identität $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ wird in den „Schnurregeln" verwendet. In diesem Falle ist für $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ der Radius $r = \frac{10}{9} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{a}{2}$. Andererseits hat für $\sqrt{2} = \frac{4}{3}$ die Strecke $\overline{HP}$ (Abb. 29), d. h. der Ausdruck $(\sqrt{2} - 1)\frac{a}{2}$, die Länge $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}$. Für die Zirkulatur des Quadrates hat man daher seine Seite um $\frac{1}{3}\overline{HP}$ zu verlängern.

In einer anderen Vorschrift für die Kreisquadratur ist

$$a = \left[1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)\right] d.$$

Für π erhält man hier ebenso wie bei der Zirkulatur des Quadrates den Wert 3,088. Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, Vermutungen darüber anzustellen, auf welchem Wege der letzte Ausdruck gewonnen worden war, der, ebenso wie auch der Ausdruck für $\sqrt{2}$, von dem Bestreben der Inder zeugt, in den dabei benutzten Stammbrüchen eine gewisse Harmonie zu erzielen. Wir beschränken uns lediglich auf den Hinweis, daß als Ausgangspunkt für die Rekonstruktion [67] die Umformung der Gleichung $d = \left(1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{3}\right) a$ in $a = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} d$ dient.

Somit haben die Verfasser der „Schnurregeln" offenbar den Zusammenhang zwischen der Aufgabe der Quadratur des Kreises und dem Problem der Zirkulatur des Quadrates benutzt. Jedoch waren sie, soweit bekannt ist, weit davon entfernt, eine tiefere Untersuchung der Eigenschaften des Kreises vorzunehmen. Die numerischen Abschätzungen für die Genauigkeit der Konstruktionen, die wir für den heutigen Leser angegeben haben, lagen außerhalb des Gesichtskreises der indischen Gelehrten jener Zeit. Es gibt auch keine Anzeichen dafür, daß sie um die Zusammenhänge zwischen dem Flächeninhalt eines Kreises und dem Kreisumfang gewußt oder diesen Zusammenhang gar benutzt haben. Der Kreisumfang wird dort zu $3d$ angenommen. Dies spricht für die früher erwähnte Annahme, daß den Verfassern der „Schnurregeln" der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks bekannt war.

Bereits diese fragmentarischen, in den „Schnurregeln" enthaltenen Mitteilungen über die Mathematik zeigen, daß um die Mitte des ersten Jahrtausends v. u. Z. die indischen Gelehrten verschiedene geometrische Kunstgriffe beherrschten und eine gewisse Fertigkeit in der Berechnung von Näherungswerten besaßen. Viele Aufgaben und Methoden wurden dann im mittelalterlichen Indien weiterentwickelt.

Die Entstehung des dekadischen Stellenwertsystems. Die größte wissenschaftliche und allgemein kulturhistorische Errungenschaft der indischen Völker war die Schaffung des auf dem Positionsprinzip beruhenden dekadischen Zahlensystems. Der Entstehungsprozeß dieses Systems war langwierig und ist bei weitem nicht in allen seinen Entwicklungsstadien bekannt [29, 69, 70].

Die indische Zählweise war schon seit altersher dezimal aufgebaut, allerdings mit der Ausnahme, daß in einzelnen Zeitabschnitten und in einzelnen Gegenden Spuren einer Zählweise vorhanden sind, bei der als Grundzahl die Vier diente.

Die sanskritischen Zahlwörter für die ersten neun Ziffern sowie für zehn, hundert und tausend lauteten wie folgt[1]):

1 ekaḥ, ekâ ekam	4 catvârah, catasrah catvâri	7 sapta	10 daśa
2 drau, dve dve	5 pañca	8 aṣṭa	100 śatam
3 trayah, tisrah trîni	6 ṣaṭ	9 nava	1000 saharsam

[1]) Sämtliche Zahlwörter sind im Nominativ angegeben. Die Endungen der ersten vier sind für Maskulinum, Femininum und Neutrum verschieden.

Die Zehner und Hunderter wurden nach dem additiven Prinzip bezeichnet, d. h. 20 hieß vimśat, 30 hieß trim-śat, ..., 200 hieß dvi-śatam (oder dve-śate), 300 hieß tri-śatam usw.

Zahlen, die aus Einheiten verschiedener Zehnerpotenzen gebildet waren, wurden ebenfalls nach dem additiven Prinzip benannt. In Einzelfällen wurde auch das subtraktive Prinzip angewandt, z. B. konnte man die Zahl 19 als nava-daśa, d. h. neunzehn, oder auch als ekâuna-vimśati, d. h. als ein-bis-zwanzig[1]), bezeichnen.

Für die höheren Zehnerpotenzen existierte eine große Anzahl von Zahlwörtern. So heißt es in der „Lalitavistara", einem indischen literarischen Werk aus dem 3. Jahrhundert v. u. Z., daß Buddha Gautama die Frage, ob er weiter als bis 100 koti = $100 \cdot 10^7$ zählen könnte, durch Nennung weiterer 22 Zahlen beantwortet habe, von denen jede das Hundertfache der vorangegangenen darstellte, und so bis zur Zahl tallakśana = $10^{7+2\cdot 23} = 10^{53}$ gekommen sei. Ferner soll Buddha hinzugefügt haben, daß alle diese Zahlen nur die erste Zahlenreihe bilden, deren es insgesamt neun gäbe. Die letzte Zahl in der neunten Zahlenreihe wäre $10^{7+9\cdot 46} = 10^{421}$.

Buddha wird ferner auch die Lösung einer anderen Aufgabe zugeschrieben, bei der man ebenfalls mit riesigen Zahlen operieren muß, nämlich die Anzahl der Atome in einer yojana aufzuzählen. Sieben Atome bilden ein feinstes Staubkorn, sieben solche ein feines Staubkorn, sieben feine Staubkörner ein Staubkorn, das noch vom Wind weggeweht wird, sieben solche ein Staubkorn der Spur eines Hasen, sieben solche ein Staubkorn der Spur eines Hammels, sieben solche ein Staubkorn der Spur eines Stiers, sieben hiervon ein Mohnkorn, sieben hiervon ein Senfkorn, sieben hiervon ein Gerstenkorn, sieben hiervon ein Fingerglied, zwölf Glieder eine Spanne, zwei davon eine Elle, vier Ellen einen Stab, tausend Stäbe eine krośa[2]) und schließlich bilden vier derartige krośa eine yojana[3]). Insgesamt enthält eine yojana $384 \cdot 7^{13}$ Atome. Buddha fügt hinzu, daß man auch die Anzahl der Atome auf der Erde und sogar auf dreitausend Erden zählen könne. Diese Legende erinnert an den „Psamitos" des Archimedes, der mit Hilfe eines Oktadensystems die Anzahl der Sandkörner im Weltall angibt.

In späteren Werken werden häufig die aufeinanderfolgenden Bezeichnungen für die Zehnerpotenzen angegeben. Srîdhara gibt sie bis 10^{17} an, Mahâvîra bis 10^{23}. In den Bezeichnungen gab es einige Unterschiede. So bezeichnet Srîdhara 10^4, 10^5 bzw. 10^6 mit ayuta, lakśa und prayuta, während Mahâvîra dafür die Bezeichnungen daśa-saharsa, d. h. 10000, lakśa und daśa-lakśa verwendet. Es sei erwähnt, daß große Zahlen in der indischen Astronomie verwendet wurden, in der die Periode Mahayuga die Hauptrolle spielt und 4320000 Jahre umfaßt. Nach Âryabhaṭa I. enthält sie 1577917500 Tage.

Vor der Entstehung des Positionssystems traten in Indien, möglicherweise durch Einflüsse von außerhalb, verschiedene Zahlen- und Ziffernsysteme auf, die dann aber

[1]) Vgl. dazu das lateinische undeviginti.

[2]) „krośa" bedeutet Ruf, d. h. eine Entfernung, die die Inder der Rufweite gleichsetzten.

[3]) Die Längenmaße von einem Gerstenkorn bis zu einer Meile (yojana) waren seit altersher bei den Babyloniern, Persern und anderen Völkern in Gebrauch. Die Verhältnisse zwischen den Maßeinheiten stimmten mitunter überein, mitunter waren sie verschieden. Sehr großen Schwankungen unterlagen die absoluten Werte der Maßeinheiten. Die Einteilung einer yojana in krośa, Stäbe, Ellen und Fingerglieder blieb mit geringen Abweichungen auch im mittelalterlichen Indien erhalten. So ist bei Srîdhara I. eine krośa gleich 2000 Stäben. Viele ähnliche Züge finden wir auch im Maßsystem der islamischen Länder (vgl. dazu S. 313).

wieder verschwanden. Die Vielfältigkeit der Ziffern in verschiedenen Gegenden blieb auch später erhalten und erschwert die Erforschung der Einflußbereiche. Vom 4. Jahrhundert v. u. Z. bis zum 3. Jahrhundert u. Z. waren im Gebiet des heutigen Ostafghanistan und des nördlichen Pandshab die sogenannten Kharoṣṭi-Ziffern in Gebrauch (vgl. Abb. 30), die hier mit der Verbreitung der syrisch-aramäischen Schrift auftraten. Es handelte sich hierbei um ein positionsloses Dezimalsystem mit besonderen Zeichen für 1, 4, 10, 20[1]) und 100. Die Einheiten wurden nach dem additiven Prinzip aus den Ziffern für 1 und 4 kombiniert, die Zehner wurden mit Hilfe der Zei-

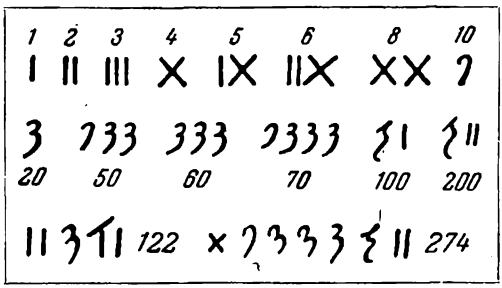


Abb. 30 Indische Kharoṣṭi-Ziffern

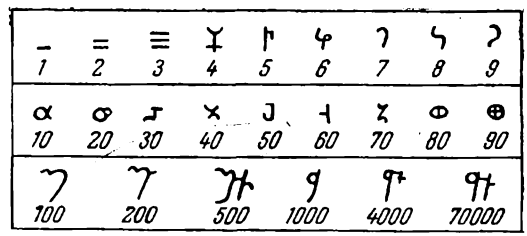


Abb. 31. Indische Brâhmi-Ziffern

chen für 10 und 20 geschrieben, während die Hunderter multiplikativ dargestellt wurden, d. h., man setzte das nicht selbstständig verwendete Zeichen für einen Hunderter und bezeichnete daneben durch Ziffern die Anzahl der Hunderter. Die Zeichen für die ersten drei Zahlen stimmen in vielen Systemen mit den chinesischen überein (die Vier in Form eines Kreuzes war mitunter auch in China anzutreffen). Die Zahlen wurden von rechts nach links geschrieben.

Auf höherer Stufe standen die Brâhmi-Ziffern, die seit altersher in einem bedeutenden Teil Indiens verbreitet waren. In vielen Inschriften aus der Zeit des Königs Aśoka sind die Zahlen in diesem System dargestellt. Die Brâhmi-Ziffern wurden ohne wesentliche Veränderungen über tausend Jahre lang benutzt. Auf Ceylon, wohin sie zusammen mit dem Buddhismus gelangten, waren sie bis zum Ende des 19. Jahrhunderts in Gebrauch. Im Brâhmi-System gibt es besondere Zeichen für die Einer, die Zehner sowie für die Zahlen hundert und tausend. Die Hunderter und Vielfache von Tausend wurden multiplikativ dargestellt (Abb. 31). Die Zahlen wurden von links nach rechts geschrieben.

[1]) Das Zeichen für 20 ist offenbar eine Kombination zweier Zeichen für die Ziffer 10.

Besondere Zeichen für die ersten neun natürlichen Zahlen gab es ganz allgemein in vielen indischen Ziffernsystemen, zumindest seit dem 2. Jahrhundert v. u. Z. Die Existenz spezieller Symbole für die Ziffern eins bis neun war ein charakteristisches und wichtiges Merkmal der indischen Arithmetik und bildete die Voraussetzung für die Entstehung des dekadischen Stellenwertsystems.

Das multiplikative und positionelle Prinzip äußerte sich auch in einem eigenartigen System zur Bezeichnung der Zahlen, das in astronomischen und mathematischen Werken angewandt wurde. Die Eins wurde dabei durch irgendein Wort bezeichnet, dessen Bedeutung irgendwelchen, nur in der Einzahl existierenden Dingen entsprach, z. B. „Mond", „Erde", „Brâhma", die Zwei durch irgendein Wort, das stets paarweise auftretende Gegenstände benennt, wie „Augen", „Hände". Für die Zahl Fünf wurden die Wörter „Sinne" oder „Pfeile" benutzt; mit dem Wort „Pfeile" wurde auf die fünf Pfeile des Liebesgottes Kamadeva angespielt. Das Wort „Surya" bezeichnete die Zahl Zwölf; dabei hatte man die zwölf „Häuser" der Sonne, d. h. die Tierkreiszeichen, im Auge. Die Zahl 867 z. B. wurde wie folgt bezeichnet und geschrieben: giri-rasa-vazu, d. h. Berge (7) — Düfte (6) — Götter (8), wobei von den niederen zu den höheren Dezimalen fortgeschritten wurde. Dieselbe Zahl läßt sich daher auf verschiedene Weise ausdrücken. Diese Zahldarstellung war für die Aufstellung von Merkregeln in Versform äußerst günstig. In dieser Weise sind die Sinustabellen in der „Sonnenlehre" (vgl. S. 165) aufgezeichnet worden. Die gleiche Zahldarstellung benutzte auch Brahmagupta. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß eine unbesetzte Dezimalstelle durch das Wort „Loch" gekennzeichnet wurde. Für die Zahl 1021 schrieb man z. B. saśi-paksa-kha-ekâ, d. h. Mond (1) — Flügel (2) — Loch (0) — eins (1).

Einer anderen Methode bediente sich Âryabhaṭa, der die Zahlen durch Silben bezeichnete. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, wollen wir lediglich darauf hinweisen, daß dieses System keinerlei Stellenwertcharakter hatte, denn jeder Zahl der Form $k \cdot 10^n$, $k = 1, 2, \ldots, 9$, wurde eine besondere Silbe zugeordnet. Das reichhaltige sanskritische Alphabet gestattete dabei die Darstellung hinreichend großer Zahlen. Mit Hilfe von 33 Konsonanten und Halbvokalen, zu denen der Vokal *a* hinzugefügt wurde, bezeichnete man sukzessiv: $k = 1$, $kh = 2$, $g = 3$, ..., $m = 20$, $y = 30$, $r = 40$, ..., $h = 100$. Die Vokale *i*, *u*, ... und die Doppellaute *e*,*a* bezeichneten die Potenzen von 100, z. B. $ga = 3$, $gi = 300$, $gu = 30\,000$, ...; $ya = 30$, $yi = 3000$, $yu = 300\,000$ usw. Eine Schriftzeichenverbindung in der Art der Silbe *koi* bezeichnete die Addition der jeweils mit 100 multiplizierten Zahlen $k = 1$ und $v = 60$, d. h., es ist $koi = 6100$. Der Schüler Âryabhaṭas, Bhâskara I., verlieh der silbenhaften Ziffernschreibweise[1]) Stellenwertcharakter. Er führte eine Silbe zur Bezeichnung einer Lückenstelle ein und, was die Hauptsache war, ließ zu, daß ein und dieselbe Silbe in einer gegebenen Zahl zur Bezeichnung der Zahlen 3, 30, 300 usw. dienen konnte.

Etwa um die gleiche Zeit, d. h. in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts, wurde auch die Reihenfolge der Stellenanordnung geändert, und man begann von da ab mit den höchsten Stellen.

---

[1]) Diese besitzt, wie wir sehen werden, auch Analogien in der indischen Algebra. Vgl. dazu S. 124.

Auf diese Weise näherte man sich in Indien von verschiedenen Seiten dem dekadischen Stellenwertsystem.

Das Auftreten des neuen Stellenwertsystems kann man sich wie folgt vorstellen. Das Positionssystem schließt drei Momente ein: 1. Multiplikative Schreibweise für die Anzahl der Stellen in der betreffenden Zahl, 2. Weglassen der Zeichen für die Einheiten der einzelnen Zehnerpotenzen. Diesen Wesenszug finden wir bereits in der Arithmetik der Babylonier und Chinesen. Ein voll entwickeltes Stellenwertsystem erfordert jedoch 3. ein Zeichen für die Null, das anzeigt, daß an der betreffenden Stelle keine entsprechenden Potenzen vorhanden sind. In der babylonischen Mathematik tauchte die Null etwa um die Mitte des 1. Jahrtausends v. u. Z. auf, wurde jedoch nicht systematisch angewandt. Das ist vielleicht dadurch zu erklären, daß im Sexagesimalsystem die Null verhältnismäßig selten benötigt wird. Bei Zahlen unter hundert ist es die Zahl 60 allein, für die ein solches Zeichen benötigt wird, und in der Zahlenreihe bis tausend treten insgesamt nur 16 derartige Zahlen auf. Im Dezimalsystem hingegen gibt es bis hundert bereits neun, und bis tausend bereits 180 solche Zahlen. Die alexandrinischen Astronomen, die von den Babyloniern die Sexagesimalbrüche übernommen hatten, benutzten ebenfalls ein Nullzeichen in Form eines kleinen Kreises, der durch einen darübergesetzten Strich oder auf eine andere Weise besonders gekennzeichnet wurde. Diese Handhabung finden wir in den Sehnentafeln des Ptolemaios und auch in den griechischen Papyri der letzten Jahrhunderte v. u. Z. und des ersten Jahrhunderts u. Z.[1]). Auch die Existenz besonderer Zeichen für eine geringe Anzahl kleiner Zahlen ist eine Voraussetzung für ein Stellenwertsystem. In diesem Sinne sind die alphabetischen Systeme mit ihren besonderen Ziffern für 20, 30, ..., 200, 300, ... dem Übergang zu einem Stellenwertsystem eher hinderlich gewesen.

Die verbreitete Anwendung des multiplikativen und teilweise des positionellen Prinzips in den mündlichen und schriftlichen Zahlensystemen, die Existenz der Ziffern für die ersten neun Zahlen, ein weit entwickeltes dezimales Numerationssystem, alle diese Momente schufen in Indien günstige Bedingungen für die Entstehung eines vollständigen Stellenwertsystems zur Basis zehn. Möglicherweise wurde diese Entwicklung durch die Kenntnis des sexagesimalen babylonischen Zahlensystems begünstigt, das durch Vermittlung der antiken griechischen astronomischen Werke nach Indien gekommen sein mag. Im 7. Jahrhundert war das Dezimalsystem, in dem die ersten neun Ziffern einen wohlbestimmten Stellenwert hatten und die Null in der heutigen Bedeutung verwendet wurde, voll entwickelt[2]).

---

[1]) Einige Historiker nehmen an, daß dieser Kreis aus dem griechischen Omikron entstanden ist, dem ersten Buchstaben des Wortes *οὐδέν*, das soviel wie „nichts" bedeutet. In der Form *0* jedoch tritt die Null erst in den späteren byzantinischen Handschriften des „Almagest" und den dazu verfaßten Kommentaren auf; in den früheren Papyri ähnelt die Schreibweise dieses Zeichens nur wenig der dieses Buchstabens. Daher ist es auch möglich, daß das hellenistische Nullzeichen speziell erfunden wurde, ähnlich dem entsprechenden babylonischen Keilschriftzeichen. (Vgl. [48*a*, S. 13 bis 14].)

[2]) Mitunter wird die Meinung geäußert, daß bereits Âryabhaṭa I. die Null gekannt haben muß, da diese in dem von Âryabhaṭa beschriebenen Verfahren zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln benötigt wurde. Beim Radizieren auf dem Abakus kann man jedoch, wie die chinesische Mathematik zeigt, ohne die Null auskommen, die durch leere Spalten ersetzt wird.

Die Positionsschreibweise für Zahlen, und zwar für Kalenderdaten, trifft man in Indien zumindest seit dem 6. Jahrhundert an, allerdings ohne Nullzeichen. So ist z. B. in einer Handschrift mit Hilfe der Brâhmi-Ziffern 3, 4 und 6 die Jahreszahl 346 angegeben, die nach unserer Zeitrechnung dem Jahr 595 entspricht. Verschiedene derartige Notizen mögen in späterer Zeit gefälscht worden sein, doch ist zu bezweifeln, daß dies für die Mehrzahl solcher Angaben zutrifft.

Auf jeden Fall drangen bereits im 7. Jahrhundert die ersten Nachrichten über das indische Zahlensystem nach dem Westen vor. Das erste Zeugnis hierfür finden wir bei dem syrischen Gelehrten Severus Sebocht (662) vor, der im Kloster Keneschra am Oberlauf des Euphrat gelebt hat. In einer Polemik gegen eine übertrieben hohe Einschätzung der Wissenschaft anderer Völker weist Sebocht auf „sinnvolle Entdeckungen (der Inder, d. Verf.) in der astronomischen Wissenschaft" hin, auf „Entdeckungen, die scharfsinniger sind als die der Griechen und Babylonier". Weiter schreibt er, daß „ihre Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von neun Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben ist" [71, S. 225, französisch]. Er spricht hier allerdings von neun Zeichen. Möglicherweise kannte Sebocht Rechenmethoden mit neun Ziffern, wobei den fehlenden Zehnerpotenzen leere Stellen entsprachen. Es kann aber auch sein, daß er den Punkt oder den Kreis, der die Null darstellte, nicht zu den Zahlzeichen rechnete[1]). In Inschriften aus den Jahren 683 und 686 in Kambodscha und Indonesien wird explizite das Zeichen der Null sowohl in der Form eines Punktes als auch in der Form eines kleinen Kreises angewandt [72]. So tritt z. B. dort die Null der Jahreszahlen 605 und 608 der Zeitrechnung nach Sakha[2]) in beiden Formen auf. Erwähnenswert ist die Tatsache, daß man noch ältere Inschriften aus Kambodscha kennt, bei denen die Zahlen mit Hilfe einer positionellen Anordnung symbolischer Worte dargestellt sind, wie das im benachbarten Indien üblich war. So wurde das Jahr 526 der Sakha-Zeitrechnung durch „Sinne (6) — Asvin (2 Söhne der Sonne) — Pfeile (5)" wiedergegeben. Ähnliche Inschriften aus dem 8. Jahrhundert findet man auf der Insel Java. Über die Verwendung einer Null in Form eines Punktes schrieb um 725 Gautama Siddharta, der um diese Zeit in China tätig war (vgl. S. 15). In Indien selbst stammt die älteste bekannte Inschrift mit einer Null, die in einer Wandinschrift aus Gualiora auftritt (Abb. 32), aus dem Jahre 876; dort erscheinen die Zahlen 270, 933 und 187. Eine interessante Mitteilung finden wir in einem Kommentar des Varâha-Mihira; diesem zufolge wurde das Wort sunja, was soviel wie null bedeutet, beim mündlichen Rechnen bereits im 5. Jahrhundert verwendet. Nach diesem Kommentar nämlich wurde in der „Pauliśa-siddhânta" eine große Zahl, die auf 7800 endet, entgegen der bei uns üblichen Reihenfolge, wie folgt gelesen: „Null, null, acht, sieben..." [54, Vol. I, S. 59, englisch].

Die Darstellung der Null durch einen Kreis hat deren Darstellung durch einen Punkt verdrängt und ist allgemein gebräuchlich geworden. Das sanskritische Wort śunja,

[1]) Von neun Zeichen sprach später al-Ḫuwarizmī, obwohl er selbst die Null verwendete (vgl. S. 189).

[2]) Die Zeitrechnung nach Sakha pflegt man gewöhnlich vom Jahre 78 an zu zählen. Nach der Meinung einiger Forscher beginnt diese Zeitrechnung jedoch mit dem Jahre 128. Dann wären die Jahreszahlen 683 und 686 durch 733 und 736 zu ersetzen.

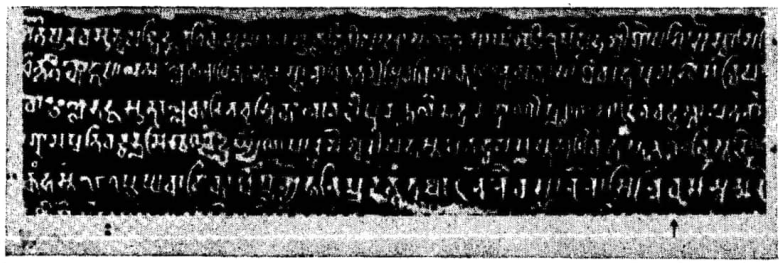


Abb. 32. Wandinschrift in Gualiori. In der ersten Zeile sieht man unter dem Punkt die Zahl 933 (eine Jahreszahl, die dem Jahr 876 u. Z. entspricht). In der vierten Zeile am Schnittpunkt der Pfeile erkennt man die Zahl 270 und in der fünften Zeile, durch zwei Punkte gekennzeichnet, die Zahl 187. (Vgl. hierzu die Ziffern in Abb. 33.)

das soviel wie leer bedeutete und von den Indern zur Benennung der Null verwendet wurde, haben die Araber durch das Wort „as-ṣifr" übersetzt, auf das unser Wort Ziffer zurückgeht.

Es ist übrigens nicht eindeutig festzustellen, ob die Null in Indien neu entdeckt wurde. Einige Historiker vertreten die Ansicht, daß diese aus den Werken griechischer Astronomen übernommen wurde, die ihrerseits die Idee eines Lückenzeichens von den Babyloniern entlehnt hatten [70a, S. 77, 78; 48a, S. 13, 14]. Die „Sûrya-siddhânta" weist deutliche Anzeichen auf, daß ihre Verfasser die griechische Astronomie kannten. Griechischen Ursprungs sind hier sogar einige Termini, wie etwa das Wort „kendra" [Abstand vom Zentrum, vom griechischen *κέντρον*) oder „lipta" (Minute, vom griechischen *λεπτόν*). Die oben erwähnte Änderung in der Reihenfolge beim Schreiben der Dezimalstellen mag ebenfalls unter dem Einfluß der Griechen erfolgt sein, die von den höheren Stellen zu den niedrigeren fortschritten. Andererseits lassen die Überlieferungen, die von einem mündlichen Gebrauch des Stellenwertsystems und von der zeitigen Anwendung des Nullzeichens in Kambodscha und Indonesien berichten, die Vermutung aufkommen, daß das Nullzeichen durch das Aufeinandertreffen der Kulturen Indiens und Chinas entstanden ist [40, S. 11 und 12]. Dafür spricht auch der dezimale Stellenwertcharakter der chinesischen Zahlendarstellung mit Hilfe von Ziffernstäbchen. Wie dem auch sei, den Indern gebührt das große Verdienst, eigene und fremde Elemente

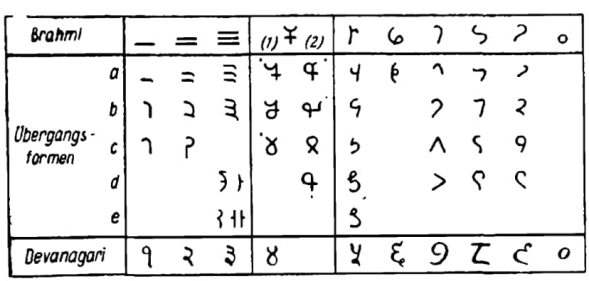


Abb. 33. Die Entwicklung der Brâhmi-Ziffern in Indien

zu einem einheitlichen dezimalen Stellenwertsystem verschmolzen zu haben. Erst diese Schreibweise ließ die schriftlichen Berechnungen so einfach werden, daß sie mit der Anwendung des Abakus in Konkurrenz treten konnten.

Die Ziffernzeichen in Indien variierten sowohl von Ort zu Ort als auch von Zeit zu Zeit. Unter anderem wurden zur Darstellung von Zahlen die Ziffern der Schrift devanagari angewandt, die auch heute noch in Indien hauptsächlich in Gebrauch sind. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Ziffern durch eine stetige Formveränderung aus den Brâhmi-Ziffern entstanden sind (Abb. 33).

Am Ende des 8. Jahrhunderts lernte man die arabische Zahlenschreibweise in Baghdad kennen. Die arabischen Gelehrten haben die Vorzüge des neuen Systems sehr rasch schätzen gelernt. Die weitere Ausbreitung des indischen Zahlensystems wollen wir später behandeln (vgl. S. 189, 349—352).

Die arithmetischen Grundrechenarten. Die Arithmetik wurde, wie wir gesehen haben, zusammen mit einigen geometrischen und algebraischen Methoden im Rahmen der „Lehre vom Rechnen" behandelt, die in eine große Zahl von Regeln aufgegliedert wurde. Brahmagupta zählt zwanzig „Operationen" und acht „Determinationen" auf, bei Srîdhara sind es neunundzwanzig bzw. neun. Unter die Operationen rechnete Srîdhara vor allem acht Rechenarten mit ganzen Zahlen einschließlich des Quadrierens bzw. des Erhebens in die dritte Potenz, ferner die hierzu inversen Operationen des Radizierens. Allerdings enthalten die Rubriken der Addition und Subtraktion bei ihm einige Regeln, die sich auf die Summation der natürlichen Zahlenreihe beziehen, z. B.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{mit} \quad n = \frac{\sqrt{8S_n + 1} - 1}{2} \quad \text{bzw.} \quad n = [\sqrt{2S_n}]$$

und

$$S_n - S_m = \frac{(n-m)[n+m+1]}{2} \quad \text{für} \quad n > m.$$

Gewöhnliche Addition und Subtraktion galten offenbar bereits als bekannt. Anschließend folgen Rechenoperationen mit Brüchen und dann Operationen und Determinationen, die Lösungsanweisungen enthalten. Auf diese werden wir später noch eingehen, jetzt wollen wir uns den Rechenoperationen mit ganzen Zahlen zuwenden.

In manchen Fällen wird die Definition der Rechenoperation gegeben. So definierte Âryabhaṭa II. die Addition als das Zusammenfassen mehrerer Zahlen zu einer, die Subtraktion als das Abziehen einer Zahl von etwas Ganzem. Solche Definitionen finden wir erheblich später in europäischen Lehrbüchern. Bhâskara I. sagte unter Bezugnahme auf unbekannte frühere Lehrer, daß die Multiplikation bzw. Division auf die Addition bzw. Subtraktion zurückzuführen sind.

Die vergleichende Untersuchung alter Texte mit Rechenmethoden, die sich in manchen Gegenden Indiens bis in die heutige Zeit erhalten haben, hat gezeigt, daß in den älteren Zeiten sämtliche komplizierteren Berechnungen auf dem Abakus mit Hilfe von Kauri-Muscheln vorgenommen wurden[1]) [73]. Von einer weiten Verbreitung

[1]) Die Kauri-Muscheln wurden seit altersher in Indien und anderen Ländern als eine Art Kleingeld benutzt.

des Rechenbrettes im alten Indien zeugt unter anderem das sanskritische Wort Pâṭîgaṇita von „Pati", Brett, und „gaṇita", was, wie wir bereits erwähnt hatten, soviel wie die Lehre vom Rechnen bedeutet. Geschriebene Ziffern wurden, ähnlich wie im alten China, lange Zeit nicht zum Rechnen, sondern nur zur Angabe von Zahlen in Texten, für chronologische Daten usw. benutzt. Der Rechner hatte in seiner Tasche mehrere hundert längliche Muscheln — „anka rasi", mit deren Hilfe er in den Spalten des Abakus die Zahlen 1 bis 9 auslegte, und etwa ein Dutzend runder Muscheln — „śûya rasi", die zur Darstellung des der Null äquivalenten Lückenzeichens dienten. Möglicherweise ist die Anwendung der runden Muscheln eine Angelegenheit späterer Zeiten gewesen, nachdem in Schriftstücken bereits das Lückenzeichen auftrat, von dem oben die Rede war. Die Kauri wurden auf dem Abakus gruppenweise ausgelegt. Auf diese Weise wurde z. B. die Zahl 52077 so dargestellt, wie es die Abb. 34 zeigt. (Bei unserer Wiedergabe werden die länglichen Muscheln durch Schrägstriche, die runden durch kleine Kreise dargestellt.) In Worten wurde dies wie folgt gelesen: sieben-sieben-Leerstelle-zwei-fünf. Eine derartige Zählweise wurde von den orthodoxen Buddhisten, den Pandit, bis in die jüngste Zeit angewandt.

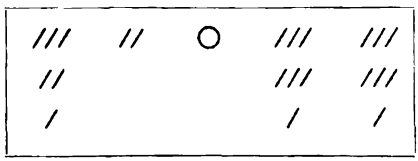


Abb. 34

Für das Rechnen auf dem Abakus mußte man sich für jede unterhalb 10 liegende Zahl deren Komplement — „prati rasi" — bis zur Zahl 10 merken. War beim Addieren die hinzuzufügende Ziffer, die man sich übrigens im Kopf merken mußte, kleiner als das zugehörige Komplement der entsprechenden Ziffer beim ersten Summanden auf dem Abakus, so wurde einfach die benötigte Anzahl von Muscheln dazugelegt. War die zu addierende Ziffer dem Komplement gleich, so wurde in der nächsten Stelle links beim ersten Summanden eine längliche Muschel dazugelegt, während die Muscheln der betreffenden Stelle selbst entfernt und durch eine runde Muschel ersetzt wurden. War schließlich die zu addierende Ziffer größer als das Komplement, so wurde in der Stelle links davon eine längliche Muschel dazugelegt, während an der betreffenden Stelle selbst das Dezimalkomplement der Ziffer des zweiten Summanden abgezogen wurde. Ähnlich wurde subtrahiert, wobei erforderlichenfalls die Identität $a - b = a + (10 - b) - 10$ angewandt wurde. Ein derartiger Kunstgriff ist bei Bhâskara II. beschrieben. Die Multiplikation wurde auf eine wiederholte Addition, die Division auf eine wiederholte Subtraktion zurückgeführt.

Später ging man dazu über, die Rechenoperationen schriftlich vorzunehmen, und zwar auf einem Rechenbrett, das entweder mit Staub oder Sand bedeckt war. Auf diesem schrieb man die Ziffern mit Hilfe eines angespitzten Stäbchens. Da das Rechenbrett gemessen an der Größe der Ziffern klein war, war man gezwungen, Zwischenergebnisse, die bei der weiteren Rechnung nicht benötigt wurden, wegzuwischen. Dabei wurde sowohl in aufsteigender als auch in absteigender Stellenfolge addiert, subtrahiert und multipliziert, d. h. sowohl von rechts nach links als auch von links nach rechts. Bei dem zuletzt genannten Verfahren kann es eintreten, daß bei den vorübergehend gefundenen Ziffern des Ergebnisses viele Korrekturen erforderlich werden.

Manche indischen Gelehrten waren trotzdem der Auffassung, daß diese Methode, z. B. beim Subtrahieren, günstiger sei[1]).

Um multiplizieren zu können, mußte man recht umfangreiche Multiplikationstabellen auswendig lernen. Es bestanden viele verschiedene Multiplikationsverfahren nebeneinander. So gab es eine Methode, bei der der Multiplikator, der Stelle für Stelle über den Multiplikanden geschrieben wurde, nach dem Ausmultiplizieren mit der jeweils fälligen Ziffer des Multiplikanden jedesmal um eine Stelle zu verschieben war, während die bereits benutzte Ziffer des Multiplikanden gelöscht wurde. Das Produkt erschien nach und nach in der Zeile des Multiplikanden. Um etwa 135 mit 12 zu multiplizieren, schrieb man zunächst

12
135

Nach der Multiplikation $5 \cdot 12 = 60$ und dem Wegwischen der Ziffer 5 wurde 60 eingetragen,

12
1360,

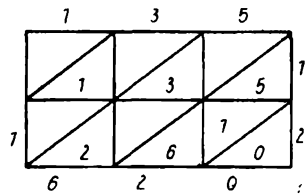


Abb. 35

und der Multiplikator verschoben:

12
1360

Nach der Multiplikation von 3 mit 2 und der Addition von 6 zu 6 mußte unten die 6 weggewischt und durch 2 ersetzt werden, während man sich eine 1 merken oder am Rand hinschreiben mußte. Diese 1 mußte dann zum Produkt von 3 und 1 addiert und die Summe 4 unten an Stelle der weggewischten 3 eingetragen werden:

12
1420

Eine erneute Verschiebung des Multiplikators ergibt

12
1420

Nun multiplizierte man 1 mit 2, erhielt 2 und addierte dieses Ergebnis zu der unten stehenden 4; die 4 wurde weggewischt und an ihrer Stelle die 6 eingetragen. Aus $1 \cdot 1$ erhielt man schließlich 1. In diesem Falle brauchte die untere 1 nicht weggewischt zu werden. Zum Abschluß wurde der Multiplikator weggewischt, und auf dem Rechenbrett blieb nur noch das Produkt 1620.

Die Inder besaßen aber auch günstigere Multiplikationsverfahren. Man teilte z. B. das Rechenbrett durch ein orthogonales Netz in Rechtecke ein und zog durch diese Rechtecke parallele Diagonalen. An den Seiten des Netzes wurden die Faktoren eingetragen. Die Zwischenergebnisse schrieb man in die Dreiecke ein und addierte diese in der in Abb. 35 angegebenen Weise. Bei einem weiteren Verfahren wurden sukzessiv,

[1]) Zu Beginn des 19. Jahrhunderts hat C. F. Gauß und vor kurzem A. N. Krylow darauf hingewiesen, daß es zweckmäßiger sei, bei der Addition von links nach rechts fortzuschreiten.

angefangen von den Einern, sofort im Kopf die Ziffern der Faktoren miteinander multipliziert und diejenigen Produkte addiert, die gleiche Stellen des Produkts ergeben. Hierbei wurden die Faktoren stellenweise untereinander geschrieben. Die Ziffern des Ergebnisses wurden erforderlichenfalls im Kopf korrigiert. Auf diese Weise erhielt man das Produkt der im dezimalen Positionssystem geschriebenen beiden Zahlen

$$(a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots)\,(b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \ldots)$$

in der Form

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot 10 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot 10^2 + \ldots$$

Dieses Verfahren wurde später im Orient von Ǧamšid al-Kašī und im Westen von J. Fourier empfohlen.

Mitunter stellte man die Faktoren zur Vereinfachung des Rechenganges günstigerweise in Form von Summen oder Differenzen, etwa in der Gestalt

$$135 \cdot 12 = 135\,(12 + 8) - 135 \cdot 8$$

oder

$$135 \cdot 12 = 135\,(12 - 2) + 135 \cdot 2,$$

dar.

Die Division ist recht ausführlich von Âryabhaṭa II. beschrieben worden. Der Divisor wurde unter den Dividenden geschrieben, und zwar die ersten Ziffern untereinander. Vom Dividenden wurde dann ein geeignetes Vielfaches des Divisors subtrahiert. Danach wurde diese Operation mit dem Rest und dem verschobenen Divisor wiederholt usw.

Die Voraussetzung für das Rechnen im Stellenwertsystem ist das Operieren mit der Null. Die Eigenschaften der Zahl Null haben die indischen Mathematiker vollständig formuliert. Srîdhara und Âryabhaṭa gaben, in Worten formuliert, folgende Regeln an:

$$\begin{aligned} a \pm 0 &= a \\ 0 + a &= a \\ a - a &= 0 \\ a \cdot 0 = 0 \cdot a &= 0 \\ 0 : a &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Division einer von Null verschiedenen Zahl durch null konnte man zunächst nichts anfangen. Später kam man auf den Gedanken, daß die Division durch null sozusagen eine unendlich große Zahl ergibt. Bhâskara II. schrieb, daß eine Größe wie $\frac{a}{0}$ mit $a \neq 0$ unverändert bleibt, wenn man ihr beliebig viel hinzufügt oder von ihr beliebig viel abzieht. Bei dem Kommentator der Werke von Bhâskara, Kṛishṇa, finden wir feinsinnige Betrachtungen über die Multiplikation und Division mit null. Je kleiner der Multiplikand wird, schreibt er, um so kleiner wird das Produkt; wird das erste bis zum äußersten verringert, so geschieht das gleiche auch mit dem zweiten. Da aber die größtmögliche Verringerung einer Größe eine Reduktion dieser Größe auf Null bedeutet, gilt $a \cdot 0 = 0$. Analog wird die Gleichung $0 \cdot a = 0$ und in einer geeigneten Weise das Unendlichwerden des Quotienten bei Division durch null begründet. Was jedoch das Problem der Division von Null durch null betrifft, so haben die indischen Mathematiker darin keine Klarheit erzielt.

Das Erheben in die zweite und dritte Potenz wurde nach den Regeln für das Quadrat oder die dritte Potenz eines Binoms vorgenommen. Im Falle eines Polynoms wurden diese Regeln wiederholt angewandt.

Brüche. Die Bruchrechnung wurde in Indien sehr ausführlich behandelt. Man schrieb die Brüche in einer der heutigen ähnlichen Form: Man setzte den Zähler über den Nenner, verwendete allerdings noch keinen Bruchstrich.[1]) Bei einer gemischten Zahl setzte man die ganze Zahl noch über den Zähler des Bruches.[2]) Beim Rechnen mit Brüchen und ganzen Zahlen wurden die ganzen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 wiedergegeben. Gemeine Brüche mit von 1 verschiedenem Zähler traten erstmalig in der „Schnurregel" des Âpastamba auf, doch wurden dort auch Stammbrüche bzw. durch ganze Zahlen dividierte Stammbrüche angewandt. Für die letzteren hatte man eine besondere Bezeichnung. So bedeutete

1	1	1	1
1	2	3	5

das Produkt $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. Möglicherweise sind die durch ganze Zahlen dividierten Stammbrüche bereits in einem verhältnismäßig frühen Entwicklungsstadium der Arithmetik entstanden, zu einer Zeit, als der praktisch angewandte Vorrat an Brüchen, d. h. von Maßeinheiten der Form $\frac{1}{n}$, noch verhältnismäßig gering war, während bereits eine Unterteilung derartiger Maßeinheiten benötigt wurde, z. B. die Hälfte eines Drittels usw. Derartige Brüche treffen wir später in der arabischen und in der europäischen mittelalterlichen Literatur an.

Srîdhara gibt 14 Regeln für das Rechnen mit Brüchen an. Die ersten acht, nämlich Addition, Subtraktion usw. bis zum Ausziehen der Kubikwurzel, sind die gleichen wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen. Eine Methode zum Aufsuchen des Hauptnenners ist hier nicht angegeben, doch offenbar war an ein gewöhnliches Ausmultiplizieren sämtlicher Nenner gedacht. Das liegt daran, daß die Methode zum Bestimmen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier nichtteilerfremder Nenner erst später beschrieben wird, und zwar unmittelbar vor den sechs Regeln zur „Reduktion" der nachstehenden Kombinationen von ganzen Zahlen und Brüchen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}, \quad a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}, \quad a \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm c}{d}, \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a(d \pm c)}{bd}.$$

Die besondere Hervorhebung derartiger Regeln findet ihre Erklärung in der „Regel zur Reduktion der Maßkette", d. h. in der Methode zur mechanischen Überführung einer Summe oder Differenz mehrerer Maßeinheiten in irgendwelche vorgegebenen Einheiten. Zum Beispiel wird gefordert, die Geldsumme von

$$5 \text{ purâṇa } 3 \text{ paṇa } 1 \text{ kâkinî} - 1 \text{ varâṭaka} - \frac{1}{5} \text{ varâṭaka}$$

[1]) Diese Schreibweise findet sich auch in einem griechischen Papyrus aus dem 1. Jahrhundert u. Z.

[2]) Eine ähnliche Anordnung ergab sich auch auf dem chinesischen Rechenbrett bei Ausführung einer Division mit Rest (vgl. dazu S. 18).

in purâṇa zu überführen, wobei die Umrechnungen

$$\begin{aligned} 1 \text{ purâṇa} &= 16 \text{ paṇa}, \\ 1 \text{ paṇa} &= 4 \text{ kâkinî}, \\ 1 \text{ kâkinî} &= 20 \text{ varâṭaka}^1) \end{aligned}$$

gelten. Hierzu werden nacheinander die schrittweise sich ergebenden Teilsummen der gegebenen Summe in purâṇa überführt: 5 purâṇa und 3 paṇa sind $5 + \frac{3}{16} = \frac{83}{16}$ purâṇa; $\frac{83}{16}$ purâṇa und 1 kâkinî sind $\frac{83}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \cdot \left(83 + \frac{1}{4}\right) = \frac{333}{64}$ purâṇa; $\frac{333}{64}$ purâṇa $-$ 1 varâṭaka sind $\frac{333}{64} - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{64} = \frac{6659}{1280}$ purâṇa; schließlich erhält man $\frac{6659}{1280} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1280} = \frac{33294}{6400} = \frac{16647}{3200} = 5\frac{647}{3200}$ purâṇa. Die zugehörigen Notizen haben die Inder in Kolumnen angeordnet.

Im vorliegenden Falle hatten sie folgende Form:

5	83	333	6659	33294	oder	16647
1	16	64	1280	6400		3200
3	1	−1	−1			
16	4	20	5			
1	−1	−1				
4	20	5				
−1	−1					
20	5					
−1						
5						

Der Leser wird sich in diesem Schema leicht zurechtfinden. Wir wollen lediglich bemerken, daß in jeder Spalte mit den vier oberen Zahlen a, b, c, d, und zwar mit dem Ausdruck $\frac{1}{b}\left(a \pm \frac{c}{d}\right)$, die gleiche Umformung $\frac{ad \pm c}{bd}$ vorgenommen wurde. Srîdhara gibt weder den Rechengang noch das Ergebnis an.

Interessanterweise sind in nahezu sämtlichen Beispielen Srîdharas die Ausgangszahlen Stammbrüche, die seit altersher in der indischen Arithmetik eine große Rolle spielten. Die Sexagesimalbrüche hingegen haben in Indien keine größere Verbreitung gefunden.

Das Radizieren. Die Wurzel bezeichneten die Inder mit „mûla", was soviel wie Wurzel eines Baumes oder einer anderen Pflanze bzw. Basis, Element, Ursprung und dergl. bedeutet. Auch wurde hierfür das Wort „pada" benutzt, das die Bedeutung von Unterteil, Seite u. ä. hatte. Unser Terminus „Wurzel", das lateinische „radix", ist eine Übersetzung des arabischen „ǧidhr", das soviel wie Wurzel oder Basis eines Quadrats bedeutete und seinerseits eine Übersetzung des sanskritischen Wortes „mûla" war.

---

[1]) Eine Tabelle, in der Maßeinheiten für Zahlungsmittel, Gewichte, Volumina, Längen und Zeiträume angegeben sind, ist auch am Anfang der „Pâṭîgaṇita" enthalten. Es sei erwähnt, daß das alte indische Maßsystem nicht dezimal war; dort herrschten die Verhältnisse 1 : 4, 1 : 5 und 1 : 6 vor.

Die erste Beschreibung für das Ausziehen einer Quadrat- oder Kubikwurzel finden wir in Indien bei Âryabhaṭa I. Die zugehörigen Regeln, die in Versform angegeben waren, können als Beispiel für die bereits erwähnte äußerst lakonische Ausdrucksweise dienen. Nicht viel ausführlicher sind auch die Formulierungen bei anderen Verfassern. Nachstehend sei die Regel Srîdharas für das Ausziehen der Quadratwurzel angegeben: „Nach Abziehen des (größtmöglichen) Quadrats von der (letzten) ungeraden Stelle teile den Rest durch die verdoppelte (unter die nächste Stelle) verschobene Wurzel; den Quotienten setze auf die Linie (der verdoppelten Wurzel) und, nach Subtraktion seines Quadrats, verdopple dies (den Quotienten). Dann, nach Verschieben der erhaltenen Menge (in der Linie der verdoppelten Wurzel) um eine Stelle nach vorne, dividiere durch diese wie vorhin. (Durch Wiederholung der Operation bis zum Schluß) halbiere die verdoppelte Menge." (Zitiert nach [65*a*, S. 9].)

Wir wollen diese Regel, die auch nach Einfügung unserer in Klammern gesetzten Ergänzungen äußerst lakonisch bleibt, am Beispiel $\sqrt{186\,624}$ erläutern. Wir kennzeichnen die ungeraden Stellen durch senkrechte, die geraden durch waagerechte Striche:

$$\begin{array}{c} -/-/-/ \\ 1\,8\,6\,6\,2\,4 \end{array}$$

Nun suchen wir das kleinste Quadrat aus, das kleiner ist als 18, d. h. die Zahl 16, und schreiben, nachdem wir dieses von 18 abgezogen haben, die verdoppelte Wurzel $2 \cdot 4 = 8$ unter die nächste Stelle des Restes:

$$\begin{array}{c} /-/-/ \\ 2\,6\,6\,2\,4 \\ \quad 8 \end{array}$$

Nun dividieren wir 26 durch 8, ersetzen 26 durch den Divisionsrest, d. h. durch 2, (was in der Regel nicht vermerkt ist) und setzen den Quotienten 3 auf die Linie der verdoppelten Wurzel:

$$\begin{array}{c} -/-/ \\ 2\,6\,2\,4 \\ 8\,3 \end{array}$$

Wir subtrahieren nun von 26 das Quadrat des Quotienten, d. h. die Zahl 9, und ersetzen in der Linie der verdoppelten Wurzel 3 durch $2 \cdot 3 = 6$:

$$\begin{array}{c} -/-/ \\ 1\,7\,2\,4 \\ 8\,6 \end{array}$$

Die Zahl 86 wird um eine Stelle verschoben:

$$\begin{array}{c} -/-/ \\ 1\,7\,2\,4 \\ \quad 8\,6 \end{array}$$

Die Zahl 172 dividieren wir durch 86, ersetzen 172 durch den Rest, der in diesem Falle null ist, und schreiben den Quotienten 2 in die Linie der verdoppelten Wurzel:

/
4
862

Von der verbliebenen Zahl 4 subtrahieren wir das Quadrat des Quotienten, d. h. die Zahl 4, verdoppeln den Quotienten und ersetzen in der Linie der verdoppelten Wurzel die 2 durch $2 \cdot 2 = 4$. Der Radikand ist damit erschöpft, und auf der Linie der verdoppelten Wurzel erscheint die Zahl

864,

nach deren Halbierung wir die Wurzel 432 erhalten.

Dieses Verfahren weicht ein wenig von der in China angewandten Radizierungsmethode ab. Beide Methoden beruhen zwar auf der Formel für das Quadrat eines Binoms, doch weder in der beschriebenen Regel noch in der indischen Methode zum Ausziehen der Kubikwurzel treten irgendwelche Momente auf, die an das Hornersche Schema erinnern. Es sei darauf hingewiesen, daß für den indischen Algorithmus der Quadratwurzelbestimmung die ständige Verwendung des verdoppelten Wurzelteils und die Halbierung des Ergebnisses kennzeichnend sind. In der gleichen Form finden wir diesen Algorithmus später bei den Arabern wieder.

Um Quadratwurzeln aus Brüchen zu ziehen, deren Nenner keine Quadratzahl ist, brachte man einen Bruch $\frac{a}{b}$ auf die Form $\frac{ab}{b^2}$. Darüberhinaus wurde zur Erzielung einer größeren Genauigkeit der Zähler mit einer geraden Potenz von 10 multipliziert.

Für die näherungsweise Bestimmung der Quadrat- bzw. Kubikwurzel gibt Âryabhaṭa I. die Regel $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ bzw. $\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a^2}$ an; die zuletzt genannte finden wir auch bei Brahmagupta. In der Handschrift von Bakhshâlî wird ein Iterationsalgorithmus angewandt, den bereits die alten Babylonier und später Horner kannten: Für $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$, wobei a^2 das größte in A enthaltene ganzzahlige Quadrat dargestellt, werden nacheinander die folgenden Näherungswerte[1]) gebildet:

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a + \frac{r}{2a}, \qquad a_3 = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

[1]) Der dritte Näherungswert a_3 ist bei kleinem $\frac{r}{a}$ nur wenig von der Summe der ersten drei Glieder in der Potenzreihenentwicklung

$$\sqrt[3]{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a} - \frac{1}{8}\frac{r^2}{a^3}$$

der dritten Wurzel verschieden, denn es gilt

$$\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)} = \frac{1}{8}\,\frac{r^2}{a^2 + \frac{ra^2}{2}}.$$

Es handelt sich demnach um die arithmetischen Mittel

$$a_1 = a, \qquad b_1 = \frac{A}{a},$$
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \frac{A}{a_2},$$
$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 = \frac{A}{a_3}.$$

Dieses Verfahren wurde später, am Ende des 12. Jahrhunderts, von al-Ḥassār, von Leonardo Fibonacci von Pisa u. a. angewandt.

Nahezu sämtliche indischen Rechenverfahren wurden später in die arabischen und europäischen Lehrbücher aufgenommen.

Die Neunerprobe. Das Verschwinden sämtlicher beim Rechengang verwendeten Ziffern vom Rechenbrett machte es unmöglich, die Zwischenergebnisse zu überprüfen. Womöglich ist gerade darauf die große Popularität der sogenannten Neunerprobe zurückzuführen, für die man erste Ansätze bereits in der griechischen Literatur aus dem 3. Jahrhundert findet. Zur Überprüfung der Multiplikation, Division, der Potenzbildung und der Radizierung empfahlen die indischen Gelehrten nicht die inversen Operationen, sondern eine Probe, die darauf beruht, daß die Reste bei der Division einer beliebigen ganzen Zahl durch 9 die gleichen sind wie die Ergebnisse der sukzessiven Quersummenbildung bis zur einstelligen Quersumme bei diesen Zahlen (d. h., man rechnete in Wirklichkeit im Restklassenring nach dem Modul 9).

Die erste Beschreibung der Regel, angewandt auf die Multiplikation, die Division mit Rest, ferner auf das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln (auch für Zahlen, deren Quadrat- und Kubikwurzeln sich nicht ganzzahlig ziehen lassen), treffen wir im 10. Jahrhundert bei Âryabhaṭa II. an. Bezeichnen wir als Prüfzahl den Rest der Quersumme der gegebenen Zahl bei Division durch 9, so muß bei der Multiplikation zweier Zahlen die Prüfzahl ihres Produktes dem Produkt aus den Prüfzahlen beider Zahlen gleich sein. Entsprechendes gilt auch für die anderen genannten Operationen. Mit Hilfe von Kongruenzen läßt sich diese Regel in folgender Weise ausdrücken: Es sei

$$N = n_1 n_2 n_3 + R,$$

und die Prüfzahl von N sei p. Die Prüfzahlen von n_1, n_2, n_3 seien p_1, p_2, p_3, und die Prüfzahl von R sei r. Die Prüfzahl von p_1, p_2, $p_3 + r$ schließlich sei ϱ. Dann gilt $p = \varrho$.

In der Tat folgt aus den Kongruenzen nach dem Modul 9

$$n_1 n_2 n_3 + R \equiv p$$
$$n_1 \equiv p_1, \quad n_2 \equiv p_2, \quad n_3 \equiv p_3$$
$$R \equiv r, \quad p_1 p_2 p_3 + r \equiv \varrho,$$

und daraus ergibt sich

$$p \equiv n_1 n_2 n_3 + R \equiv p_1 p_2 p_3 + r \equiv \varrho;$$

alle Kongruenzen genommen nach dem Modul 9.

Da nun die Prüfzahlen p und ϱ kleiner sind als 9, sind sie gleich. Hieraus folgt die entsprechende Regel für die Multiplikation ($R = 0$) und das Ausziehen von Wurzeln

($n_1 = n_2$, $n_3 = 1$ oder $n_1 = n_2 = n_3$). Die Gleichheit der Prüfzahlen ist lediglich eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingung für die Richtigkeit des Rechenergebnisses. Dieser Umstand blieb lange unbeachtet bzw. unerwähnt, höchstwahrscheinlich deshalb, weil in der Praxis Fehler, auf Grund deren die Regel Trugschlüsse zuläßt, sehr wenig wahrscheinlich sind.

Im 14. Jahrhundert dehnte Nârâyaṇa das Prinzip der Neunerprobe auch auf andere Moduln aus.

Die Neunerprobe wurde auch von arabischen Mathematikern angewandt, die sie aus indischen Quellen kennenlernten. Später gelangte sie nach Europa. Leonardo Fibonacci von Pisa bewies die Notwendigkeit der Bedingung für das Produkt zweier Zahlen. Er führte für die Prüfzahl den Terminus „Probe" ein. Auf die Tatsache, daß diese Regel nicht hinreichend ist, wiesen N. Chuquet (1484) und L. Pacioli (1494) hin.

Rechenaufgaben; Dreisatzregel. In den indischen Werken findet man eine Vielzahl verschiedener Rechenaufgaben, die bei manchen Verfassern in einer eleganten poetischen Form ausgedrückt sind. Manche derartige Aufgaben hatten unmittelbar praktische Bedeutung, andere dienten der Übung oder der Unterhaltung. Brahmagupta schrieb, daß ein Gelehrter, ähnlich wie die Sonne die Sterne überstrahlt, in einer öffentlichen Versammlung den Ruhm der anderen überstrahlen kann, wenn er mathematische Aufgaben stellt, erst recht dann, wenn er sie löst. Manche Aufgaben ließen sich rein rechnerisch lösen, andere bedurften algebraischer Überlegungen. Wir wollen uns zunächst einigen arithmetischen Kunstgriffen zuwenden.

Die Dreisatzregel läuft darauf hinaus, eine Zahl x zu bestimmen, die mit drei gegebenen Zahlen a, b und c die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

bildet oder, wie die Mathematiker früherer Zeiten zu sagen pflegten, auf folgende Frage die Antwort gibt: a erzeugt b; was wird von c erzeugt? Die Dreisatzregel nahm in der indischen Arithmetik eine Zentralstellung ein, da sie die routinemäßige Lösung einer großen Klasse von Rechenaufgaben aus dem täglichen Leben gestattete. Bei Brahmagupta schließt sich die Dreisatzregel mit ihren Varianten unmittelbar an die elementaren Rechenoperationen an und umfaßt die „Rechenoperationen" 14 bis 20. Bei Srîdhara sind es die „Rechenoperationen" 23 bis 29. Bhâskara II. sprach davon, daß die Regeldetri das Wesen der Arithmetik ausmacht, der er die Algebra als die Wissenschaft gegenüberstellte, die Überlegung und Scharfsinn erforderte.

Man nannte diese Regel in Indien „trairâśika", was etwa soviel wie das „Dreistellige" bedeutet. Bei Âryabhaṭa I. lautete das Rezept: In der Dreisatzregel wird das „Ergebnis" (b) nach Multiplikation mit dem „Geforderten" (c) durch das „Gegebene" (a) geteilt. Der Quotient ist das Ergebnis für das „Gesuchte" (x). Brahmagupta fügte hinzu, daß das erste und das letzte Glied, d. h. das Gegebene und das Gesuchte, von gleicher Art sein müssen. Die gegebenen drei Zahlen führen in sämtlichen Werken die genannten Bezeichnungen und werden bei der Lösung der Aufgabe in einer Zeile angeordnet:

Das Gegebene — Das Ergebnis — Das Gesuchte.

In einer Aufgabe des Śrîdhara z. B., in der gesagt wird, daß $1\frac{1}{4}$ Maß Holz des Sandelholzbaumes $10\frac{1}{2}$ paṇa kosten, wird nach dem Preis von $9\frac{1}{4}$ Maß gefragt. Die Zahlen werden dort nach folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 21 & 37 \\ 4 & 2 & 4. \end{array}$$

Das Endergebnis $\frac{21 \cdot 4 \cdot 37}{2 \cdot 5 \cdot 4}$ wird anschließend noch in 5 purâṇa, 13 paṇa, 2 kâkiṇî und 16 varâṭaka überführt.

Brahmagupta und spätere Autoren fügten noch die inverse Dreisatzregel sowie die Regeln mit 5, 7, 9 und 11 Eingangsgrößen hinzu, die man als pañca-râśika, sapta-râśika, nava-râśika bzw. ekâdaśa-râśika bezeichnete, was soviel wie „Das Fünfstellige", „Das Siebenstellige", „Das Neunstellige" bzw. „Das Elfstellige" bedeutet. Die inverse Dreisatzregel, „vyasta-trairâśika" genannt, diente dazu, Aufgaben zu lösen, in denen die gesuchte Größe dem „Geforderten" nicht direkt, sondern umgekehrt proportional war, etwa in der Art der folgenden, im Mittelalter äußerst populären Aufgabe: Es leisten a Arbeiter eine Arbeit in b Tagen; in wieviel Tagen wird die gleiche Arbeit von c Arbeitern geleistet? Hier gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{b}.$$

In der Regel für fünf Eingangsgrößen wird die gesuchte Zahl x, die den Proportionen

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{e}, \quad \frac{y}{a} = \frac{b}{c}$$

genügt, unmittelbar in der Form $\frac{abd}{ce}$ ermittelt. Wir wollen das Gesagte anhand einer Aufgabe aus den Lîlâvatî erläutern: Der Prozentsatz von 100 betrage monatlich 5. Wie groß sind die Zinsen für 16 bzw. 12 Monate? Bezeichnen wir mit y die Zinsen von 100 in 12 Monaten und mit x die Zinsen von 16 in 12 Monaten, so erhalten wir

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{16}{100}.$$

Bhâskara gibt die Lösung der Aufgabe an, indem er, der Regel mit fünf Eingangsgrößen entsprechend, die Zahlen 16, 12, 5 und 100, 1 in zwei Spalten anordnet und das Produkt der Zahlen in der längeren Spalte durch das Produkt der Zahlen in der kürzeren Spalte dividiert.

Zur Dreisatzregel gehörten auch Aufgaben, die den Leser unserer Zeit recht eigenartig anmuten, weil der Preis für Lebewesen zu bestimmen war, wobei dieser, selbstverständlich in vereinfachter Weise, umgekehrt proportional dem Alter angesetzt wurde. „Wenn", so schrieb Śrîdhara, „5 Frauen im Alter von 16 Jahren 200 kosten, so sage mir, oh Mathematiker, wieviel 2 Frauen im Alter von 20 Jahren kosten?" [65*a*, S. 29]. Im Anschluß daran folgt eine ähnliche Aufgabe über Kamele!

Die Erläuterung der Regeln war in den indischen Werken formaler Art, doch hatten die indischen Mathematiker unzweifelhaft Verständnis für deren gemeinsame Grund-

lage und deren Querverbindungen. Bhâskara I. schreibt in seinem Kommentar zur „Âryabhaṭiya“: „Hier beschrieb der Âcârya[1]) Âryabhaṭa nur die Dreisatzregel. Wie erhält man aber die wohlbekannten Regeln der fünf Größen usw.? Ich werde dazu folgendes sagen: Der Âcârya beschrieb nur die Grundlagen der Proportion. Alle übrigen Regeln, wie die der fünf usw. Größen, gehen aus dieser Grundregel der Proportion hervor. Jedoch wie? Die Regel der fünf Größen usw. besteht aus Kombinationen der Dreisatzregel... In der Fünferregel hat man zwei Dreisatzregeln, in der Siebenerregel drei Dreisatzregeln usw.“ [54, Vol. 1, S. 211, englisch].

Aufgaben, in denen eine Größe gesucht wird, die mit drei gegebenen Größen eine Proportion bildet, waren nicht neu. Sie wurden überall auch früher gelöst. Die Inder haben diese Aufgabengruppe besonders hervorgehoben und ein zwar umständliches, auf der anderen Seite aber elegantes System mechanischer Regeln mit eigener Terminologie, besonderer Anordnung der gegebenen Größen beim Schreiben und mit einer eigenen Reihenfolge der Überlegungen geschaffen.

Von Indien breitete sich die Dreisatzregel nach Westen in die islamischen Länder aus und gelangte später nach Europa. Auch hier wurde sie zum wichtigsten Kunstgriff bei der arithmetischen Lösung von Aufgaben, wobei sich die formale Art, diese Regel zu lehren, über Jahrhunderte gehalten hat. Aus dem schulischen Unterricht wurde die formale Dreisatzregel in Europa erst im 19. Jahrhundert allmählich verdrängt.

Gehörten auf der einen Seite die Dreisatzregeln zusammen mit den Regeln für die Grundrechenarten zu den „Operationen“, so waren andererseits die übrigen Methoden zur Lösung der Aufgaben der Pâṭîgaṇita zu acht „Determinationen“ zusammengefaßt. Die erste Determination umfaßte Aufgaben zur Prozentrechnung, zur Mischungsrechnung, Aufgaben über Legierungen, die sog. Genossenschaftsregel, unbestimmte Aufgaben „über hundert Vögel“ (vgl. S. 75), Aufgaben über Wanderer (vgl. S. 130) über Behälter, die aus mehreren Rohren gleichzeitig mit Wasser gefüllt werden, Aufgaben über Komplexionen (vgl. S. 153) und Aufgaben über die Entlohnung der Arbeit. Hier wurden auch die Regeln zur Lösung quadratischer Gleichungen mitgeteilt, für die der Beweis allerdings nur in der Algebra erbracht wurde. Aus der Vielfalt dieser Aufgaben und Methoden wollen wir lediglich die Umkehrregel zur Bestimmung einer Zahl erwähnen, wobei bestimmte Operationen mit dieser zur gegebenen Zahl führen. Die Regel besteht darin, daß mit der gegebenen Zahl in umgekehrter Reihenfolge inverse Operationen vorgenommen werden. Die zweite Determination enthält Aufgaben über arithmetische und geometrische Reihen, während die restlichen auf die Geometrie entfallen.

Die Regel des falschen Ansatzes. Zur Lösung von Aufgaben, die sich im Rahmen der Algebra durch die Gleichung

$$ax = c$$

erfassen lassen, wurde in der Arithmetik auch die Regel eines falschen Ansatzes angewandt. Sie findet sich bei Mahâvîra, Srîdhara und Bhâskara II., der sie als iṣṭa-karma

[1]) Acarya bedeutet „der Gelehrte.“

bezeichnete, d. h. als Operation mit einer gewählten Zahl. Der gesuchten Größe wird irgendein willkürlicher Wert x_1 beigemessen. Ist dann $ax_1 = c_1$, so gilt

$$x = x_1 \frac{c}{c_1}.$$

Diese Regel ist für die rein mechanische Lösung von Aufgaben, die auf eine Gleichung der Form $ax = c$ führen, sehr günstig, da die Zurückführung auf diese Grundform überflüssig wird und keinerlei algebraische Mittel benötigt werden. Ergab sich z. B. der Koeffizient a der Aufgabe als Summe oder Differenz mehrerer Brüche, so wählte man für x_1 zur Vereinfachung des Rechenganges häufig ein gemeinsames Vielfaches aller Nenner. Nachstehend sei eine bei Bhâskara II. behandelte Aufgabe angegeben: „Aus einem Bündel reiner Lotosblumen sind ein Drittel, ein Fünftel bzw. ein Sechstel den Göttern Shiva, Vishnu bzw. Sûrya geweiht, während ein Viertel Bhavani dargeboten wird. Die verbliebenen sechs erhält ein angesehener Würdenträger. Nenne mir rasch die Anzahl der Lotosblumen." Bhâskara setzt $x_1 = 60$, d. h., er wählt für x_1 das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 3, 4, 5 und 6, und bestimmt, nachdem er festgestellt hat, daß als Rest nicht 6, sondern 3 verbleiben, die Lösung zu $60 \cdot \frac{6}{3} = 120$.

In der Handschrift von Bakhshâlî wird die Regel eines falschen Ansatzes bei Aufgaben angewandt, die sich durch die Geichung

$$ax + b = c$$

ausdrücken lassen. Hier liegt schon nicht mehr, wie im ersten Falle, eine einfache Proportionalität zwischen x und x_1 vor. Die Lösung erhält man nach der folgenden Regel:

$$x = x_1 + \frac{c - c_1}{a} \quad \text{mit} \quad ax_1 + b = c_1.$$

Ferner wird die Regel des falschen Ansatzes in der Handschrift auf Aufgaben mit mehreren Unbekannten angewandt. Es wird z. B. gefordert, den Wohlstand (x_1, x_2, x_3) dreier Personen zu bestimmen, wenn die Summe aus dem Vermögen der ersten und zweiten 13, die Summe aus dem Vermögen der zweiten und dritten 14, und die Summe aus dem Vermögen der ersten und dritten 15 beträgt.

In der Handschrift wird x_1 gleich 5 gesetzt, was für x_2 den Wert 8, für x_3 den Wert 6 und für $x_3 + x_1$ den Wert 11 anstelle von 15 liefert. Der wahre Wert ist dann

$$x_1 = 5 + \frac{1}{2}(15 - 11) = 7,$$

und man erhält auf Grund der ersten und zweiten Bedingung $x_2 = 6$ und $x_3 = 8$.

Algebraisch gesehen läßt sich eine derartige Lösung wie folgt begründen: Gilt

$$x_1 + x_2 = a_1,$$
$$x_2 + x_3 = a_2,$$
$$x_3 + x_1 = a_3,$$

so erhält man nach Addition sämtlicher drei Gleichungen

$$2x_1 + 2(x_2 + x_3) = a_1 + a_2 + a_3 \text{ oder } 2x_1 + (a_2 - a_1) = a_3.$$

Nun setzen wir $x_1' = p$ und $2p + (a_2 - a_1) = q$. Dann ergibt sich, der beschriebenen Methode gemäß, die Lösung einer Gleichung der Form $ax + b = c$ zu

$$x_1 = p + \frac{a_3 - q}{2}.$$

Andererseits folgt für $x_1' = p$ aus den ersten beiden Gleichungen $x_2' = a_1 - p$, $x_3' = a_2 - a_1 + p$ und demnach $x_3' + x_1' = a_2 - a_1 + 2p = q$. Diese Methode läßt sich leicht auf gleichartige Systeme mit einer beliebigen ungeraden Anzahl von Unbekannten und Gleichungen übertragen.[1]) In der Handschrift von Bakhshâlî sind noch weitere derartige Beispiele, darunter auch solche mit fünf Unbekannten, enthalten.

Die Regel zweier falscher Ansätze ist in den uns überlieferten Werken indischer Mathematiker nicht zu finden.

Grundlagen der Algebra; Symbolik. Die Algebra der Inder umfaßte sowohl die Algebra nach unserer Auffassung als auch die Zahlentheorie, und zwar die Lösung einiger Klassen unbestimmter Gleichungen in ganzen oder rationalen Zahlen. Brahmagupta bezeichnete die Algebra mit den Worten kuṭṭaka-gaṇita, wobei er die Bezeichnung eines bestimmten, für äußerst wichtig erachteten Teilgebietes auf die gesamte Algebra übertrug. Es handelt sich dabei um die Auflösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten (vgl. S. 141). Spätestens im 9. Jahrhundert wird ein anderer Name für die Algebra, das Wort bîjagaṇita, gebräuchlich, das wir später bei Bhâskara II. antreffen. Das Wort bîja bedeutet Element oder auch Analyse; das Wort bîjagaṇita läßt sich demnach auf zweierlei Art übersetzen: Entweder als „Lehre von der Berechnung mit Hilfe der Elemente" oder als „Lehre von der Berechnung mit Hilfe der Analyse".

Bhâskara II. schrieb: „Die Analyse (bîja) ist zweifellos die angeborene Vernunft, die durch verschiedene Symbole (varṇa) unterstützt wird." [54, Vol. II, S. 1, englisch]. Die Anwendung der Symbole ist zwar für die Algebra wesentlich, doch liegt keineswegs darin ihr Hauptunterschied gegenüber der Arithmetik, in der ebenfalls, wenn auch nicht im gleichen Maße, Symbole verwendet wurden. Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal äußert sich darin, daß die Werte der arithmetischen Symbole bekannt und eindeutig bestimmt sind, während in der Algebra die Werte der Symbole unbekannt sind und zunächst unbestimmt bleiben. Dementsprechend bezeichnete man die Algebra auch als avyakta-gaṇita, d. h. als die Lehre vom Rechnen mit Unbekannten, und die Arithmetik als vyakta-gaṇita, d. h. als die Lehre vom Rechnen mit bekannten Größen (vyakta bedeutet das Bekannte, avyakta das Unbekannte).

Man räumte der Algebra gegenüber der Arithmetik den Vorzug ein. „Die Lehre vom Rechnen mit Unbekannten ist die Quelle für die Lehre vom Rechnen mit bekannten Größen", erklärte Bhâskara II. [54, Vol. II, S. 3, englisch]. Die Arithmetik wurde lediglich als eine einfache Sammlung von Regeln ohne Beweise aufgefaßt, ähnlich der Logistik im antiken Griechenland. Die Methoden der Algebra bedürfen jedoch,

[1]) Beträgt die Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen jeweils $2n$, so ist dieses Gleichungssystem entweder unverträglich oder unbestimmt, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die linken und die rechten Seiten der ersten $2n - 1$ Gleichungen addiert.

wie Bhâskara hervorhob, des Beweises: „Die Mathematiker erklären, daß die Algebra eine Rechnungsform ist, die von einem Beweis begleitet wird: andernfalls gäbe es keinen Unterschied zwischen der Arithmetik und Algebra." [54, Vol. II, S. 3, englisch]. So lassen sich die Regeln zur Lösung quadratischer Gleichungen auch in den Aufgaben der einfachen gaṇita anwenden, doch werden ihre Herleitung und Analyse erst in der bîjagaṇita gegeben.

Die Algebra wurde sehr hoch eingeschätzt. Brahmagupta beginnt das 18. Kapitel seines Werkes mit einem Loblied auf die Algebra, auf eine Wissenschaft, ohne die die Lösung mathematischer Probleme nahezu unmöglich ist. Diese Worte wiederholte später Bhâskara II. Auch die anderen indischen Gelehrten sahen in der algebraischen Methode das Allgemeinste in der Mathematik und sprachen daher von der Algebra nahezu mit religiöser Hochachtung. Nârâyaṇa schrieb: „Wie diese gesamte sichtbare und unendliche Welt aus Brâhma entspringt, so folgt aus der Algebra die gesamte Arithmetik mit ihrer unendlichen Vielfalt. Deshalb bin ich stets Siva und auch der (ạvyakta)-gaṇita untertänig." [54, Vol. II, S. 5, englisch].

In der Algebra der Inder heben sich zwei Hauptteile heraus: algebraisches Rechnen und Auflösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades. Die Ansätze zur Zahlentheorie wollen wir zunächst außer acht lassen.

Das algebraische Rechnen gründete sich auf eine verhältnismäßig gut entwickelte Symbolik, die hauptsächlich durch Abkürzung der entsprechenden Termini entstanden ist. Eigenartig ist die Symbolik der Handschrift von Bakhshâlî, die von der in den anderen Werken gebräuchlichen sehr erheblich abweicht. Die Addition wurde mit yu bezeichnet (von yuta = das Hinzugefügte), die Subtraktion durch ein Kreuzchen (möglicherweise hervorgegangen aus kṣa, von kṣaya = das Verminderte). Die Multiplikation wurde mit gu (guna = das Vervielfachte) bezeichnet und die Division durch bhâ (bhâga = das Geteilte). Diese Zeichen wurden keineswegs systematisch angewandt, häufiger zur Kennzeichnung der Subtraktion und Division als zur Bezeichnung der Addition und Multiplikation. Die Addition und Multiplikation wurden häufig als Vollständigkeit bezeichnet; mitunter wurden sie überhaupt nicht benannt, und auf die Art der Operation mußte man aus dem Text schließen. Die Abkürzung mû (von mûla = Wurzel) bedeutete die Quadratwurzel. Die Gleichheit wurde mitunter stillschweigend als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt, mitunter durch pha (von phalam = gleich) ausgedrückt.

Hierzu seien einige Beispiele gegeben:

$$\begin{array}{|cc|}\hline 5 & 7 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array}\ \text{yu pha } 12, \text{ d. h. } 5+7=12;$$

$$\begin{array}{|cccc c||c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & \text{bhâ} & 36 \\ 1+1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 2 & 3 & 4+6 & & & \\ \hline\end{array}, \text{ d. h. } \frac{36}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)};$$

$$\begin{array}{|ccc||c|}\hline 11 & \text{yu} & 5\ \text{mû} & 4 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline\end{array}, \text{ d. h. } \sqrt{11+5}=4.$$

Für die Unbekannte hatte man mehrere Namen, doch wurde sie, ebenso wie die Null, durch einen kleinen Kreis, d. h. durch das Symbol der leeren, noch unbesetzten Stelle bezeichnet. Das von der Unbekannten freie Glied nannte man dṛśya (d. h. dasjenige, was man sieht). So hätten wir

0	2	3	4	dṛśya	200
1	1	1	1		1

folgendermaßen zu schreiben:

$$\frac{x}{1}+\frac{2x}{1}+\frac{3x}{1}+\frac{4x}{1}=\frac{200}{1}.$$

In einem Falle werden die fünf Unbekannten nacheinander durch die abgekürzten ersten fünf Ordinalzahlen bezeichnet: pra (prathama = der Erste), dvi (dvitîya = der Zweite), tṛ (von tṛtîya), ca (caturha) und pam (pañcama).

Die von Brahmagupta, Bhâskara II., Nârâyaṇa und anderen angewandte Symbolik unterscheidet sich von der eben beschriebenen sehr stark. Sie enthält weniger Operationszeichen, und das Gleichheitszeichen fehlt überhaupt; dafür ist die Bezeichnungsweise für die Unbekannten und deren Potenzen wesentlich besser entwickelt. Die unbekannte Größe wurde seit altersher, bereits in den Jahrhunderten v. u. Z., yâvat-tâvat genannt, was etwa soviel-wieviel, d. h. eine beliebige Menge, bedeutet. Diesen Terminus finden wir sowohl bei Brahmagupta als auch bei späteren Gelehrten. Weitere evtl. noch auftretende Unbekannte wurden nach verschiedenen Farben benannt[1]), während das absolute Glied gewöhnlich mit rûpa (äußeres Aussehen, das Äußere, das Sichtbare) bezeichnet wurde. Die zugehörigen Symbole waren Abkürzungen dieser Wörter. Die Symbole selbst nannte Brahmagupta varṇa, ein Wort, das sowohl der Kennzeichnung der Farben als auch der Buchstaben des Alphabets diente[2]). Nachstehend geben wir nach Bhâskara II. eine Tabelle der Unbekannten an; er erklärte selbst, er gehe nach dem Vorbild „früherer Lehrer" vor. Wir wollen uns mit sechs Unbekannten begnügen, obwohl Bhâskara insgesamt fünfzehn aufzählte:

Terminus	Symbol	Bedeutung
rûpa	rû	Absolutes Glied
yâvat-tâvat	yâ	Erste Unbekannte
kâlaka (schwarz) ..	kâ	Zweite Unbekannte
nîlaka (blau)	nî	Dritte Unbekannte
pîtaka (gelb)	pî	Vierte Unbekannte
lohitaka (rot)	lo	Fünfte Unbekannte
harîtaka (grün) ...	ha	Sechste Unbekannte

[1]) Mitunter wird die Vermutung geäußert, daß der Terminus yâvat-tâvat ursprünglich ebenfalls eine Farbe bedeutet hat, und zwar sei er durch Verstümmelung aus yâvakastâvat entstanden; yâvaka bedeutet rot. Es ist durchaus denkbar, daß die Bezeichnung der Unbekannten durch Farben darauf zurückzuführen ist, daß man sie ursprünglich beim Rechnen durch verschiedenfarbige Kugeln bezeichnete. Zugunsten einer derartigen Hypothese spricht die Tatsache, daß Âryabhaṭa I. die Unbekannte mit gulikâ (Kugel) bezeichnete [54, Vol. II, S. 20].

[2]) Dieses Wort hat noch andere Bedeutungen, z. B. die der Kaste. – Vgl. dazu die S. 89.

Die indischen Zeichen für yâ, kâ, nî, pî, lo sehen wie folgt aus: पा, का, नी, पी, लो. Nârâyaṇa weist darauf hin, daß man die Unbekannte auch durch die Namen der Gerüche oder anderer derartiger Dinge mit verschiedenen Anfangsbuchstaben bezeichnen kann. Den Koeffizienten schrieb man rechts von der Unbekannten.

Die Potenzen bildete man durch Kombinationen der Worte varga (Quadrat), ghana (Körper, Würfel) und ghâta (Produkt, gemeint ist damit das Produkt der Potenzen). Im Gegensatz zu Diophantos, dessen Schreibweise der Addition der Exponenten entsprach (z. B. bedeutete dynamokubos den Quadratkubus, d. h. die fünfte Potenz), bezeichnete in der indischen Symbolik das Aneinanderreihen der Exponenten deren Multiplikation. So bedeutet varga-ghana hier die sechste und nicht die fünfte Potenz. Das Wort ghâta kennzeichnete die Addition der Exponenten. Die fünfte Potenz z. B. bezeichnete man durch varga-ghana-ghâta. Aus der nachstehenden Tabelle können wir Einzelheiten über die Bezeichnung der Potenzen entnehmen.

Terminus	Symbol	Bedeutung
varga	va	2. Potenz
ghana	gha	3. Potenz
varga-varga	va-va	4. Potenz
varga-ghana-ghâta	va-gha-ghâta	5. Potenz
varga-ghana	va-gha	6. Potenz
varga-varga-ghana-ghâta	va-va-gha-ghâta	7. Potenz
varga-varga-varga	va-va-va	8. Potenz
ghana-ghana	gha-gha	9. Potenz

Das Zeichen für die Potenz setzte man nach dem Zeichen für die Unbekannte. Das Produkt von Potenzen mehrerer Unbekannter kennzeichnete man, indem man auf die Unbekannten die Abkürzung bhâ (bhâvita = Produkt) folgen ließ. Die Schreibweise yâva-kâgha-bhâ bedeutete z. B. $x^2 y^3$.

Brahmagupta verwendete auch andere Bezeichnungen für die oberhalb von vier liegenden Potenzen der Unbekannten, indem er sie mit Hilfe des entsprechenden Exponenten und des Suffix gata bildete: z. B. pañca-gata usw. Bhâskara II. verwendete diese Schreibweise mitunter auch für Potenzen, angefangen von der ersten.

Das Zeichen für die Wurzel war ka (von karaṇî = Wurzel; der Terminus geht auf die Zeiten zurück, in denen die „Schnurregel" entstanden war). So bedeutet ka 9 ka 450 ka 75 ka 54 soviel wie $\sqrt{9} + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}$. Seit Âryabhaṭa I., vielleicht aber seit noch früherer Zeit, bezeichnete man die Quadratwurzel, Kubikwurzel usw. durch varga-mûla, ghana-mûla usw. (mûla = Wurzel).

Die Addition drückte man aus, indem man die Summanden nebeneinander schrieb. Bei der Subtraktion setzte man über den Koeffizienten einen Punkt oder einen kleinen Kreis. Irgendein festumrissener Terminus für den Koeffizienten existierte nicht. Mitunter bezeichnete man den Koeffizienten als Faktor (guṇaka oder guṇakâra bei Brahmagupta, prakṛti bei Pṛtûdakaswâmî), mitunter als Zahl (saṁkhyâ bei Brahmagupta, aṅku bei Pṛtûdakaswâmî). Diese Termini traten auch in den Werken von Śrîpati und Bhâskara II. auf. Wollte man in einer Regel die Operation mit irgendeinem

Koeffizienten beschreiben, so sprach man gewöhnlich von der Operation mit der betreffenden Potenz der Unbekannten. Die gleiche Erscheinung treffen wir auch in der arabischen und europäischen mittelalterlichen Literatur an. Die Koeffizienten waren nur Zahlenwerte. Buchstabenkoeffizienten und den zugehörigen Terminus hat erst François Viète im 16. Jahrhundert eingeführt.

Die indischen Gelehrten haben bei der Entwicklung einer symbolischen Algebra einen großen Fortschritt erzielt, obwohl ihre Bezeichnungen umständlich und die zugehörigen Zeichen, d. h. die sanskritischen Buchstaben, kompliziert waren. Die Nachfolger der indischen Algebraiker, die Gelehrten der arabischen Länder und Zentralasiens haben nicht nur keinerlei Fortschritte auf diesem Gebiet erzielt, sondern haben jahrhundertelang die algebraischen Ausdrücke durch Worte umschrieben.

Negative und irrationale Zahlen. Die negativen Zahlen spielten in der Algebra der Inder eine bedeutende Rolle. Es ist unbekannt, wann der Begriff der negativen Zahl in Indien aufgekommen ist. Der erste uns bekannte Hinweis auf die negativen Zahlen findet sich bei Brahmagupta. Aber bereits bei ihm treten sämtliche Grundregeln für das Operieren mit diesen Zahlen auf; es ist durchaus möglich, daß die Initiative hierzu von ihm selbst ausgegangen ist. Wie wir wissen, wurden in China die negativen Zahlen bereits vor Beginn unserer Zeitrechnung angewandt. Sollten die Inder die ersten Kenntnisse über negative Zahlen von den Chinesen übernommen haben — was zwar durchaus möglich, jedoch nicht belegt ist —, so haben sie ihnen zumindest neue Anwendungsbereiche erschlossen und neue wichtige Eigenschaften dieser Zahlen erkannt.

Die positiven Zahlen nannte man dhana oder sva (Eigentum), die negativen bezeichnete man als rina oder kśaya (Verminderung, Schuld). Die letzteren kennzeichnete man, wie bereits erwähnt, durch Darübersetzen eines Punktes.

Die Rechenregeln für positive und negative Zahlen sind in den Strophen 30 bis 35 des 18. Kapitels im Werk Brahmaguptas enthalten. Sie beschränken sich dabei nicht nur auf die Addition und Subtraktion, wie in der chinesischen „Mathematik in neun Büchern", sondern sie werden auch auf die Multiplikation, Division, das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzeln ausgedehnt. „Die Summe zweier positiver Zahlen", schrieb Brahmagupta, „ist positiv, die zweier negativer Zahlen negativ. Die Summe einer positiven und negativen Zahl ist deren Differenz." Selbstverständlich wußte er darum, wie das Vorzeichen dieser Differenz zu wählen ist, die zugehörigen Erläuterungen jedoch finden wir erst viel später bei Śrîpati: „Das Vorzeichen der Differenz ist das gleiche wie das der größeren (Zahl)." Śrîpati erwähnte insbesondere auch die Regel $+a + (-a) = 0$: Die Summe „zweier gleicher (Zahlen), einer positiven und einer negativen, ist null". Wie man aus dem angeführten Zitat ersieht, faßte Śrîpati die Ordnungsbeziehungen bei relativen Zahlen anders auf als wir es heute gewohnt sind. Er verglich nur die absoluten Beträge miteinander. Das Gesagte ist auch beim Lesen der Subtraktionsregel bei Brahmagupta zu beachten[1]): „Von dem

[1]) Die gegenwärtige Auffassung der Ordnungsrelationen „größer" und „kleiner" wurde in Europa im 17. Jahrhundert eingeführt.

Größeren ist das Kleinere abzuziehen; es (das Ergebnis) ist positiv, wenn man Positives vom Positiven, und negativ, wenn man Negatives vom Negativen (abzieht). Wird hingegen das Größere vom Kleineren abgezogen, so kehrt sich diese Differenz (in bezug auf das Vorzeichen) um, das Negative wird positiv und das Positive wird negativ. Wird Positives vom Negativen oder Negatives vom Positiven abgezogen, so sind sie zu addieren." Kürzer ist die Regel Bhâskaras II., die die Subtraktion direkt auf die Addition zurückführt: „Bei der Subtraktion wird das Positive negativ und das Negative positiv; sodann (wird) die Addition so (durchgeführt), wie früher erläutert." [54, Vol. II, S. 20—24, englisch.] In der gleichen Weise wurde das Subtrahieren auch von Śrîpati und Mahâvîra gelehrt.

Nach Angabe der Vorzeichenregel bei der Multiplikation und Division — wobei die Fälle $\frac{+a}{-b}$ und $\frac{-a}{+b}$ gesondert betrachtet werden — sowie für das Quadrieren erklärt Brahmagupta, daß das Vorzeichen der Quadratwurzel „das gleiche ist, wie das der Größe, aus der das Quadrat hervorgegangen ist", d. h. $\sqrt{(+a)^2} = +a$ und $\sqrt{(-a)^2} = -a$. In der gleichen Weise wird das Vorzeichen der Quadratwurzel auch bei Mahâvîra und Śrîpati ermittelt. In der Praxis hatte man es allerdings mit Wurzeln aus positiven Zahlen zu tun, die man keineswegs von vornherein als Quadrate aus positiven oder negativen Zahlen gewonnen hatte. Wie ist das Vorzeichen in diesem Falle zu wählen? Offenbar ist die allgemeinere Auffassung über die Operation des Radizierens nicht auf einmal entstanden. In seinem Kommentar zu den oben zitierten Worten Brahmaguptas schrieb Pṛthûdakasvâmî, daß die Quadratwurzel entweder positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem, welche von beiden für die späteren Operationen geeigneter erscheint. Bei Bhâskara II. schließlich findet man die exakte Formulierung: „Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als auch negativ." [54, Vol. II, S. 24, englisch.]

An der Schwelle zur Einführung imaginärer Zahlen sind die Inder stehengeblieben. Mahâvîra sagte, daß die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht existiert, da diese ihrer Natur nach kein Quadrat ist; das gleiche schrieb auch Bhâskara II.

Ein Grundelement der algebraischen Rechnung der Inder bildeten die Operationen mit numerischen quadratischen Irrationalitäten, mit denen sie recht geschickt hantierten. Anhand verschiedener Beispiele lehrte z. B. Brahmagupta, wie man sich einer Irrationalität im Nenner eines Bruches, etwa von der Art

$$\frac{\sqrt{9} + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}}{\sqrt{18} + \sqrt{3}},$$

entledigt. Man multipliziert Zähler und Nenner mit einem geeignet gewählten Ausdruck, in dem genannten Falle mit $\sqrt{18} - \sqrt{3}$, woraus $\frac{75 + \sqrt{675}}{15}$ und sodann $5 + \sqrt{3}$ folgt. Bhâskara II. gab die zugehörige allgemeine Regel an. Das alles setzte die Kenntnis der einfachsten Regeln für das Operieren mit quadratischen Radikalen voraus.

Die Identität

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

war bereits den Griechen bekannt, trat jedoch bei diesen in geometrischer Form unter Anwendung einer komplizierten Terminologie auf. Diese ist uns aus dem Buch X der

„Elemente" des Eukleides bekannt, das der Klassifizierung der quadratischen Irrationalitäten sowie der Untersuchung ihrer Eigenschaften und Wechselbeziehungen gewidmet ist. Die genannte Identität erscheint hier innerhalb der Sätze 112—114, wobei Eukleides' Urheberschaft allerdings umstritten ist. Bhâskara II. beherrschte noch eine weitere wichtige Identität, die im Buch X der „Elemente" auftritt (Satz 54):

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Ist $a^2 - b$ selbst ein Quadrat, also $a^2 - b = c^2$, so läßt sich die auf der linken Seite stehende Irrationalität zweiter Klasse mit Hilfe dieser Transformation durch die einfacheren Irrationalitäten erster Klasse

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} + \sqrt{\frac{a - c}{2}}$$

ausdrücken, was für die angenäherte Berechnung der Wurzeln günstig sein kann. Bei Bhâskara II. findet man auch kompliziertere Transformationen, wie etwa

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

oder $\sqrt{16 + \sqrt{120} + \sqrt{72} + \sqrt{60} + \sqrt{48} + \sqrt{40} + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$.

Diese Identitäten wurden gewonnen, indem man die auf der rechten Seite stehenden Summen quadrierte.

Mit einer theoretischen Analyse der Natur und der Eigenschaften quadratischer Irrationalzahlen haben sich die Inder nicht beschäftigt. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist das Buch X der „Elemente" ihnen zu dieser Zeit unbekannt geblieben, zumindest hat es auf die indischen Mathematiker keinen merklichen Einfluß ausgeübt (vgl. hierzu S. 162). Die genannten Umformungen konnten sowohl selbständig entdeckt als auch von Griechenland über mehrere Zwischenstationen übernommen worden sein. Doch bereits die rein verbale Form allein, in der die quadratischen Irrationalitäten ausgedrückt wurden, sowie die an ihnen vorgenommenen Operationen bezeugen eine ganz andere Betrachtungsweise sowie einen ganz anderen Standpunkt. In der indischen Algebra traten die quadratischen Irrationalitäten völlig gleichberechtigt neben den ganzen und rationalen Zahlen auf. Eine stärkere Entwicklung nahm diese Auffassung später in den islamischen Ländern.

Schließlich gehörten zur algebraischen Rechnung der Inder Operationen mit Mononomen und Polynomen. Brahmagupta und die nachfolgenden Autoren entwickelten die Regeln zur Addition und Subtraktion gleichnamiger Glieder sowie zur Multiplikation und Division algebraischer Mononome und Polynome. Nachstehend sei ein Beispiel von Bhâskara II. angegeben, das Kṛishṇa in seinem Kommentar eingehend untersucht hat; Bhâskara hatte nur das Resultat angegeben. Es handelt sich dabei um die Multiplikation von $5x - 1$ mit $3x + 2$:

yâ 3	yâ 5	rû 1	yâ va 15	yâ 3	
rû 2	yâ 5	rû 1		yâ 10	rû 2
			yâ va 15	yâ 7	rû 2

Auf eine kurze Regel über die Division läßt Bhâskara II. das Beispiel

$$\frac{(18x^2+24xy-12xz-12x+8y^2-8yz-8y+2z^2+4z+2)}{(-3x-2y+z+1)}=(-6x-4y+2z+2)$$

folgen, wiederum ohne die Zwischenrechnungen anzugeben. Aus den Erläuterungen Kṛishṇas geht hervor, daß die Rechnung in der Hauptsache ebenso verlief, wie wir sie gegenwärtig vornehmen würden.

Über die Anwendung der Regel zum Erheben eines Binoms ins Quadrat oder in die dritte Potenz wurde früher gesprochen. Bhâskara II. zeigte ferner, wie man die Quadratwurzel aus einem Polynom zieht, das ein vollständiges Quadrat ist. Er stützt sich hierbei auf die Identität

$$\left(\sum_1^n a_k\right)^2=\sum_1^n a_k^2+2\sum_{(i\neq j)} a_i a_j,$$

die er auch bei der Umformung quadratischer Irrationalitäten anwandte.

Lineare und quadratische Gleichungen. Um die Algebra auf die Lösung von Problemen anwenden zu können, muß man Gleichungen verwenden, die im Sanskrit smî-karaṇa (von sama = gleich und kṛ = machen) heißen. Manche Gelehrte haben beschrieben, wie man beim Aufstellen von Gleichungen vorzugehen hat. Pṛtûdakaswâmî schrieb: „In der vom Fragenden vorgelegten Aufgabe wird der Wert der Unbekannten als yâvat-tâvat genommen; danach werden die in der Aufgabe geforderten Multiplikationen, Divisionen usw. vorgenommen und sehr sorgfältig zwei gleiche Seiten gebildet. Nachdem auf diese Weise die Gleichung aufgestellt wurde, folgt die Regel (zu deren Auflösung)“ [54, Vol. II, S. 29, englisch]. Ähnliche Hinweise gaben auch Bhâskara II. und Nârâyaṇa, wobei sie etwas eingehender die Methoden beschrieben, die hierbei benötigt werden könnten, wie etwa die Dreisatzregel, die Summation von Reihen, Eigenschaften von Figuren und dergl. Man kann nicht umhin, die Ähnlichkeit dieser knappen Hinweise mit der ausführlichen Regel zur „Aufstellung von Gleichungen bei der Lösung von Aufgaben“ hervorzuheben, die nahezu ein Jahrtausend später von R. Descartes in seiner „Geometrie“ (1637) angegeben wurde, einer Regel, die bei dem französischen Mathematiker unmittelbar auf die Skizzierung einer algebraischen Rechnung folgte.

Eine Besonderheit der indischen Schreibweise für Gleichungen, in der ein Gleichheitszeichen fehlte, bestand darin, daß gleichnamige Glieder untereinander geschrieben wurden.

Hierbei wurden die Symbole sämtlicher Potenzen der Unbekannten nach fallenden Potenzen geordnet; sollte irgendein Glied fehlen, so wurde dies durch den Koeffizienten Null gekennzeichnet (vgl. S. 69). Auf jeder Seite der Gleichung stand wenigstens ein von Null verschiedenes Glied. So bedeutete in einem bei Pṛtûdakaswâmî auftretenden Beispiel die Schreibweise

yâ va 0 yâ 10 rû 8
yâ va 1 yâ 0 rû 1

die Gleichung $10x - 8 = x + 1$, während die Schreibweise einer bei Bhâskara II. vorkommenden Gleichung

yâ gha 8 yâ va 4 kâ va yâ bhâ 10
yâ gha 4 yâ va 0 kâ va yâ bhâ 12

die Gleichung $8x^3 + 4x + 10y^2x = 4x^3 + 12y^2x$ darstellte.

Gleichungen mit einer Unbekannten brachte man vor dem Lösen auf eine Normalform, in der die von der Unbekannten freien Glieder zusammengefaßt wurden; fehlende Glieder wurden mitunter nicht durch die Null gekennzeichnet. So hätte man die erste der beiden obengenannten Gleichungen auf die Form

yâ va 1 yâ 10
rû 9,

d. h. $x^2 - 10x = 9$ gebracht. Eine derartige Operation hatte ihren besonderen Namen, und zwar hieß sie samaśodhana (sama = gleich oder vollständig, śodhana = Bereinigung) oder einfach śodhana.

Die Inder begnügten sich fast ausschließlich mit dem Lösen von Gleichungen ersten und zweiten Grades. Bei Âryabhaṭa I. finden wir Aufgaben, die auf die lineare Gleichung $ax + b = c$ mit einer Unbekannten führen. Obwohl der Lösungsweg nicht angegeben ist, kann man annehmen, daß hier algebraisch vorgegangen wurde, wie wir es später bei Brahmagupta sehen. In einer Aufgabe gibt Âryabhaṭa die Regel zur Berechnung des Preises für einen Gegenstand unter der Bedingung an, daß die Vermögen zweier Personen aus einer gegebenen Anzahl von Gegenständen mit gleichem Preis und einer gegebenen Barsumme bestehen und dabei gleich sind. Dies führt auf die Gleichung $ax + b = ax_1 + b_1$.

Interessant ist eine weitere Aufgabe des Âryabhaṭa, die später in der gesamten algebraischen Literatur der Welt unter der Bezeichnung „Kurieraufgabe" zu finden war. Diese Aufgabe ist der Astronomie entnommen, der die „Âryabhaṭîya" hauptsächlich gewidmet ist. Es wurde hier nach dem Zeitpunkt der Konjunktion zweier Himmelskörper gefragt, wenn deren Geschwindigkeiten und Abstände gegeben sind. Âryabhaṭa sagt, daß bei entgegengesetzter Bewegung der Himmelskörper deren Abstand durch die Summe der Geschwindigkeiten, bei gleichgerichteter Bewegung der Abstand durch die Differenz der Geschwindigkeiten zu dividieren ist, wobei er hinzufügt, daß die Quotienten den Zeitpunkt der Konjunktion entweder in der Vergangenheit oder in der Zukunft angeben. Bezeichnet man den Abstand mit a und die Geschwindigkeiten mit v_1 bzw. v_2, so gilt bei Bewegung in gleicher Richtung

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2},$$

und für $v_1 < v_2$ hat die Begegnung der Himmelskörper in der Vergangenheit stattgefunden. Der indische Text gibt uns keine Möglichkeit, zu entscheiden, ob Âryabhaṭa die negativen Zahlen und deren Deutung gekannt hat. Im allgemeinen haben die Inder negative Lösungen der Gleichungen nicht zugelassen (vgl. S. 138). Darüber hinaus läßt sich der Zeitpunkt der Begegnung in der Vergangenheit durch die positive Zahl $\frac{a}{v_2 - v_1}$ ausdrücken, wenn nach den Bedingungen der Aufgabe der zweite, schnel-

lere Himmelskörper den ersten bereits überholt hat. Bei Srîdhara ist die Formulierung der Aufgabe so gewählt, daß die Lösung notwendigerweise positiv ist: Der zweite, schneller gehende Wanderer holt den ersten, früher gestarteten ein.

Die „Kurieraufgabe" tritt darüber hinaus auch in komplizierteren Varianten auf. So lehrte Srîdhara, wie man den Zeitpunkt der Begegnung zweier Wanderer zu bestimmen hat, die gleichzeitig von einem Ort mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 8$ yojana bzw. $v_2 = 2$ yojana pro Tag ausgehen, wobei der erste nach Durchwanderung von $a = 100$ yojana dem zweiten wieder entgegengeht. Die Lösung $t = a : \frac{v_1 + v_2}{2}$ läßt sich sowohl durch Aufstellung einer Gleichung als auch durch einfache Überlegung gewinnen: Die gesuchte Zeit ist die gleiche, als hätten die beiden Wanderer, einander entgegengehend, den doppelten Weg zurückgelegt. In einer anderen Aufgabe des Srîdhara bewegt sich der eine Wanderer mit veränderlicher Geschwindigkeit, die wie die Glieder einer arithmetischen Reihe zunehmen; dabei ist $v_1 = 3$ und die tägliche Geschwindigkeitszunahme $w = 1$. Der zweite startet gleichzeitig am gleichen Ort mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 = 10$. Der Zeitpunkt der Begegnung wird nach der Regel

$$t = \frac{2(v_2 - v_1)}{w} + 1$$

bestimmt. Eine etwas allgemeinere Aufgabe wird in der Handschrift von Bakhshâlî gelöst: Gesucht ist der Zeitpunkt der Begegnung, wenn beide Wanderer gleichzeitig mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 und Beschleunigungen w_1 bzw. w_2 starten. In der Handschrift finden wir nur die fertige Lösung

$$t = \frac{2(v_2 - v_1)}{w_1 - w_2} + 1.$$

Die „Kurieraufgabe" führte auch auf quadratische Gleichungen, jedoch soll davon später die Rede sein.

Zur Lösung einzelner einfacherer Gleichungssysteme ersten Grades hatte man fertig vorbereitete Lösungen, wie etwa für das System $x + y = a$, $x - y = b$. Das Lösen beliebiger linearer Gleichungssysteme lehrte man nach einer Methode, die man heute als das Gleichsetzungsverfahren bezeichnet. Seine Beschreibung finden wir sowohl bei Brahmagupta als auch bei Pṛtûdakasvâmî. Irgendeine willkürlich gewählte Unbekannte wird in sämtlichen Gleichungen durch die anderen ausgedrückt; die so gewonnenen Ausdrücke werden sodann paarweise einander gleichgesetzt. Das gleiche Verfahren wird nunmehr auf das neue dadurch entstandene System angewandt, bei dem die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten jeweils um eins kleiner ist. Die Iteration des Verfahrens führt schließlich auf eine einzige Gleichung mit einer oder mehreren Unbekannten. Im ersten Falle gestattet der ermittelte Wert der einen Unbekannten, nunmehr in umgekehrter Reihenfolge die übrigen Unbekannten nacheinander zu berechnen. Verbleiben in der resultierenden Gleichung zwei oder mehrere Unbekannte, so wird empfohlen, die entsprechenden Methoden zur Lösung unbestimmter Gleichungen anzuwenden [54, Vol. II, S. 54 bis 56, englisch].

Dieses Verfahren wandte z. B. Bhâskara II. bei einer Aufgabe an, bei der das Vermögen zweier Personen zu ermitteln ist, wenn die erste nach Erhalt von 100 von der zweiten Person doppelt so reich würde, während die zweite nach Erhalt von 10 von der

ersten ihren Reichtum auf das Sechsfache steigern würde[1]), d.h. bei der Lösung einer Aufgabe, die auf das Gleichungssystem

$$x + 100 = 2\,(y - 100)$$
$$y + 10 = 6\,(x - 10)$$

führt. Jedoch gibt Bhâskara noch eine zweite Lösung an, bei der unter Verwendung eines Hilfsparameters das Problem unmittelbar auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt wird. Er nimmt an, daß das Vermögen der ersten Person $2z - 100$ beträgt. Dann ist nach der ersten Bedingung das Vermögen der zweiten $z + 100$ und nach der zweiten Bedingung

$$z + 110 = 6\,(2z - 110),$$

woraus $z = 70$, $x = 40$ und $y = 170$ folgt. Diese Lösung ist darüber hinaus auch an einer anderen Stelle der „Bîjagaṇita" zu finden, wo Beispiele für eine Gleichung mit einer Unbekannten gesammelt sind. Dort soll diese Aufgabe als Muster dafür dienen, wie man Aufgaben mit zwei Unbekannten durch ausgeklügelte Kunstgriffe auf eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten zurückführt.

Bhâskara II. wandte die Einführung von Parametern auch in anderen Fällen an. So nimmt er in einer Aufgabe, die sich durch das Gleichungssystem

$$x + \frac{x}{2} = y + \frac{y}{5} = z + \frac{z}{9},$$
$$x - \frac{y}{5} - \frac{z}{9} = y - \frac{z}{9} - \frac{x}{2} = z - \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 60$$

ausdrücken läßt, an, daß sämtliche drei Ausdrücke der oberen Zeile gleich v sind. Dann gilt $x = \frac{2}{3}v$, $y = \frac{5}{6}v$, $z = \frac{9}{10}v$, und jede Gleichung der unteren Zeile liefert $v = 150$, woraus $x = 100$, $y = 125$ und $z = 135$ folgt.

Darüber hinaus wurden noch weitere virtuose Kunstgriffe benutzt. Seit Âryabhaṭa I. begegnet man häufig Aufgaben der Form

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i = c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

deren Lösung sich zu $x_i = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_k - c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$

ergibt. Hier wurde vorerst durch gliedweise Addition der Gleichungsseiten die Summe $\sum x_k$ bestimmt. Diese Aufgabe trat auch bei Mahâvîra auf. Bei ihm lautet die Bedingung der Aufgabe wie folgt: Ein Zolleinnehmer fragt vier Kaufleute einzeln nach dem Preis ihrer Waren. Der erste antwortet, indem er seine eigene Ware verschweigt, daß der Gesamtwert 22 sei. Der zweite sagt, in gleicher Weise verfahrend, der Wert der Waren sei insgesamt 23. Vom dritten bzw. vom vierten erhält er die Zahlen 24 bzw. 27. Gefragt wird nach dem Wert der Ware jedes einzelnen Kaufmannes.

Brahmagupta betrachtete auch den allgemeineren Fall

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \pm b x_i = c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[1]) Solche Aufgaben waren auch im alten Griechenland bekannt.

während Mahâvîra sogar ein Beispiel für das noch allgemeinere System

$$a_i \sum_{k=1}^{n} x_k - b_i x_i = c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

untersuchte. Allerdings tritt diese Aufgabe bei Mahâvîra in einer etwas anderen Form auf, bei der die Koeffizienten nicht völlig willkürlich wählbar sind. Es geht dabei um die Bestimmung des Vermögens mehrerer Personen, wenn bekannt ist, daß jede Person nach Erhalt bestimmter gegebener Summen von den anderen Personen ein gegebenes Vielfaches des Vermögens der übrigen aufzuweisen hat)[1]. Wir bezeichnen die gesuchten Vermögenswerte mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mit $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,i-1}, a_{i,i+1}, \ldots, a_{in}$ die von der i-ten Person von den anderen erhaltenen Summen und mit r_i den zugehörigen Koeffizienten. Dann läßt sich die Aufgabe durch das Gleichungssystem

$$x_i + \sum{}' a_{i,k} = r_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i - \sum{}' a_{i,k}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ausdrücken, wobei in der Summe $\sum' a_{i,k}$ über k von 1 bis n summiert wird, außer über $k = i$. Stellt man die Gleichung in der Form

$$x_i + \sum{}' a_{i,k} = \frac{r_i}{r_i + 1} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dar, so liefert die Addition die Summe der Unbekannten

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} \sum{}' a_{i,k} : \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i + 1} - 1\right),$$

wonach sich der Wert jeder einzelnen Unbekannten leicht bestimmen läßt. Es ist

$$x_i = \frac{r_i}{r_i + 1} \sum_{1}^{n} x_k - \sum{}' a_{i,k}.$$

Mahâvîra und nach ihm Nârâyana formulierten nur die Regel zur Berechnung der x_i, die sich nur unwesentlich von der letzten Formel unterscheidet. In ihrem Beispiel ist

$n = 3$; $a_{1,2} = 4$, $a_{1,3} = 5$; $a_{2,1} = 4$, $a_{2,3} = 6$; $a_{3,1} = 5$, $a_{3,2} = 6$; $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$.

Daher gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 24, \; x_1 = \frac{2}{3} \cdot 24 - 9 = 7, \; x_2 = \frac{3}{4} \cdot 24 - 10 = 8,$$

$$x_3 = \frac{5}{6} \cdot 24 - 11 = 9.$$

Derartige Aufgaben wurden später in der mittelalterlichen arabischen und europäischen Literatur äußerst populär.

Wie wir bereits gesehen haben, traten Probleme, die auf vollständige quadratische Gleichungen führen, bereits bei den Verfassern der „Schnurregeln" auf. Der Lösung derartiger Gleichungen begegnen wir allerdings erstmalig in der Handschrift von Bakhshâlî — falls ihre Entstehungszeit richtig in den Zeitraum um 200 u. Z. verlegt wird. Hier ging es zunächst um eine Gruppe von „Kurieraufgaben" mit komplizierteren Bedingungen: Der eine Wanderer startet mit konstanter Tagesgeschwindigkeit v_1, während der andere d Tage später vom gleichen Ort aus mit der Anfangs-

[1]) Vgl. dazu die oben angegebene Aufgabe des Bhâskara II.

geschwindigkeit v_2 und der Beschleunigung w_2 geht. Gefragt wird nach der Anzahl t der Tage, nach denen der zweite den ersten einholt, wobei die Zeit vom Start des zweiten an gerechnet wird. Die entsprechende Gleichung

$$w_2 t^2 - 2(v_1 - v_2) + w_2 t = 2 v_1 d,$$

ist in der Handschrift nicht angegeben, jedoch entsprechen die Lösungsvorschrift und die Überlegungen genau der Lösungsformel

$$t = \frac{\sqrt{[2(v_1 - v_2) + w_2]^2 + 8 w_2 v_1 d} + [2(v_1 - v_2) + w_2]}{2 w_2}$$

für die positive Wurzel. In dem einen Beispiel ist $v_1 = 5$, $v_2 = 3$, $w_2 = 4$ und $d = 6$, so daß sich $t = 5$ ergibt. Die Zahlenangaben eines anderen Beispiels lauten $v_1 = 7$, $v_2 = 5$, $w_2 = 3$ und $d = 5$; sie liefern die irrationale Lösung $t = \frac{\sqrt{889} + 7}{6}$.

Bei Srîdhara ist diese Aufgabe noch komplizierter: Beide Wanderer haben die Beschleunigungen w_1 bzw. w_2. Die Analyse der zugehörigen quadratischen Gleichung, die Srîdhara jedoch nicht angegeben hat, ist recht schwierig. Übrigens wird diese Analyse zur Lösung des von Srîdhara behandelten Problems nicht benötigt. Denn er gibt eine Regel an, die die Anzahl der Tage D zwischen dem ersten und zweiten Zusammentreffen der Wanderer ausdrückt:

$$D = \frac{\frac{s}{n-d} - \frac{s}{n} - \frac{1}{2} n w_1 - (n-d) w_2}{\frac{1}{2}(w_1 - w_2)}.$$

Hierbei bedeutet n die Anzahl der Tage vom Start des ersten Wanderers bis zum ersten Zusammentreffen, $n - d$ die Anzahl der Tage vom Start des zweiten Wanderers bis zum ersten Zusammentreffen und s den Weg, den jeder Wanderer bis zum ersten Zusammentreffen zurückgelegt hat. Die Herleitung dieser Regel ist nicht schwierig. Im Beispiel sind die Werte $d = 6$, $v_1 = 1$ und $w_2 = 2$ gegeben, und es wird empfohlen, n (= 10) und w_1 (= 6) w_2 willkürlich zu wählen. Aus n lassen sich v_2 und s und dann auch $D = 8$ berechnen [Vgl. 65 a, S. 79 bis 90].

Darüber hinaus müssen die Aufgaben, in denen nach der Anzahl n der Glieder einer arithmetischen Reihe bei gegebener Summe s, bekanntem Anfangsglied a und der Differenz d gesucht wurde, ebenfalls auf quadratische Gleichungen führen. Die Gleichung

$$d n^2 + (2a - d) n = 2s$$

ist wiederum in der Gleichung nicht angegeben, und man findet lediglich die Lösungsvorschrift

$$n = \frac{\sqrt{8ds + (2a - d)^2} - (2a - d)}{2d}.$$

Das Zahlenbeispiel $s = 60$, $a = d = 1$ ist so gewählt, daß man für n den irrationalen Wert $\frac{1}{2}\sqrt{481}$ erhält.

Die eben genannte Aufgabe findet man auch bei Âryabhaṭa I., der als erster den Ausdruck der Summe der Glieder einer arithmetischen Reihe vom m-ten bis zum

n-ten Glied angibt und in der darauffolgenden Regel die Lösung der Aufgabe in der Gestalt

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8ds + (2a-d)^2} - 2a}{d} + 1\right]$$

formuliert. In einer anderen Aufgabe des Âryabhaṭa lautet die Bedingung: Ein verzinstes Vermögen p ($p = 100$) bringt monatlich die unbekannten Zinsen (x). Diese Zinsen werden danach wiederum t Monate ($t = 6$) verzinst. Die ursprünglichen Zinsen ergeben zusammen mit ihren anschließend genannten Zinsen q ($q = 16$). Man bestimme den Zinsfuß.

Die zugehörige Gleichung müßte hier

$$tx^2 + px = qp$$

lauten. Die Lösung wird mit folgenden Worten angegeben: Man multipliziere die Summe aus den Zinsen und deren Zinsen (d. h. q) mit der Zeit und dem Vermögen, addiere hierzu das Quadrat der Hälfte des Kapitals und ziehe hieraus die Quadratwurzel. Danach ziehe man hiervon die Hälfte des Kapitals ab und dividiere den verbliebenen Rest durch die Zeit. Es ergibt sich

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t} = 10;$$

Ähnliche Aufgaben zur Zinsrechnung traten auch bei Brahmagupta, Mahâvîra und anderen Gelehrten auf. Interessant ist die Tatsache, daß in den „Elements d'algèbre" von A. Clairaut (1746), der nach natürlicher Darlegung der Mathematik und deren Verbindung mit der Praxis strebte, die erste Aufgabe über quadratische Gleichungen ebenfalls der Zinseszinsrechnung entnommen ist.

Nach der Form der Lösungen zu urteilen, wurden in der ersten Aufgabe des Âryabhaṭa beide Seiten der Gleichung mit dem vervierfachten Koeffizienten der höchsten Potenz multipliziert, in der zweiten Aufgabe hingegen wurde einfach mit diesem Koeffizienten multipliziert. Beide Verfahren waren auch später üblich.

Somit beherrschten sowohl der Verfasser der Handschrift von Bakhshâlî als auch Âryabhaṭa I. die Lösung quadratischer Gleichungen, obwohl dies an keiner Stelle explizite erwähnt wird. Die erste derartige Darlegung der Lehre von den quadratischen Gleichungen finden wir in der indischen Literatur bei Brahmagupta. Dabei ist sofort ein gewisser Fortschritt gegenüber der Behandlung quadratischer Gleichungen bei älteren Gelehrten zu verzeichnen, die je nach den drei Normalformen quadratischer Gleichungen mit positiven Koeffizienten[1])

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + c = bx$$

noch drei verschiedene Regeln auseinanderhielten. Brahmagupta gibt eine allgemeine Regel für eine Gleichung an, die auf die gegenwärtig übliche Normalform

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0$$

[1]) Sämtliche drei Formen treten auch bei Diophantos auf. In den babylonischen Texten sind bisher die ersten beiden nachgewiesen worden, während der dritten Form das System $x + y = p$, $xy = q$ entspricht.

gebracht ist und wo b und c auch negative Werte annehmen dürfen. Die Gelehrten der islamischen Länder, die die Anwendung negativer Zahlen vermieden, kehrten wieder zu den drei Hauptfällen der älteren Gelehrten zurück. Ihrem Vorbild folgten zunächst auch die europäischen Mathematiker des Mittelalters, und erst Michael Stifel formulierte im Jahre 1544 erneut eine einheitliche Regel zur Lösung der Gleichung

$$x^2 = bx + c,$$

unabhängig vom Vorzeichen der Koeffizienten b und c.

Die Regel zur Lösung der quadratischen Gleichung gab Brahmagupta in zwei Varianten an. Beide beruhen auf der quadratischen Ergänzung, die er als madhyamâharaṇa (von madhyamâ = das Mittlere und âharaṇa = Beseitigung, Vernichtung) bezeichnete, was soviel wie „Beseitigung des mittleren Gliedes" bedeutete.[1]) Der Unterschied der beiden Varianten besteht lediglich darin, daß in der ersten die Gleichung zunächst mit $4a$ und in der zweiten mit a multipliziert wird; das zuletzt genannte Verfahren war bereits den Babyloniern und den Griechen bekannt. Die beiden Regeln Brahmaguptas lauten

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a} \quad \text{und} \quad x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Schließlich gelangt Brahmagupta bei einigen Aufgaben durch Division der Gleichung durch den Koeffizienten des höchsten Gliedes zu Gleichungen der Form

$$x^2 + px = q,$$

so daß sich die Lösung zu

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

ergibt. So verfährt er z. B. in einer Zinsaufgabe, die sich von der vorhin betrachteten (vgl. S. 134) dadurch unterscheidet, daß das Vermögen p die gesuchten Zinsen x für t_1 Monate liefert und daß diese Zinsen x wiederum für t_2 weitere Monate verzinst werden. Die zugehörige Gleichung würde

$$\frac{t_2}{pt_1} x_2 + x = q$$

lauten. Die Lösung Brahmaguptas

$$x = \sqrt{\left(\frac{pt_1}{2t_2}\right)^2 + \frac{qpt_1}{t_2}} - \frac{pt_1}{2t_2}$$

zieht explizite die Transformation dieser Gleichung auf die Form

$$x^2 + \frac{pt_1}{t_2} x = \frac{qpt_1}{t^2}$$

nach sich. Allerdings wurde diese dritte Lösungsform nicht in eine besondere Regel gefaßt.

Sämtliche drei Lösungsformen wurden auch von späteren indischen Mathematikern angewandt, wobei mitunter der einen oder anderen Form der Vorzug eingeräumt wurde.

---

[1]) Es ist zu beachten, daß das lineare Glied in der Normalform der Gleichung in der Mitte stand:

$$ax^2 + bx + 0 = 0x^2 + 0x + c.$$

Brahmagupta erwähnt nirgends die Möglichkeit, daß eine quadratische Gleichung zwei Wurzeln besitzen kann. Allerdings hat Pṛthûdakaswâmî bemerkt, daß man zwei verschiedene Aufgaben Brahmaguptas durch eine einzige quadratische Gleichung, und zwar

$$x^2 - 10x = -9,$$

ausdrücken kann, wobei der Lösung der ersten die Wurzel 9 und der Lösung der zweiten die Wurzel 1 entspricht. Diese Tatsache bildete den Anlaß anzunehmen, daß Brahmagupta Beispiele von quadratischen Gleichungen mit zwei positiven Wurzeln kannte, obwohl er aus praktischen Erwägungen heraus stets nur eine dieser Wurzeln in Betracht zog [54, Vol. II, S. 75, englisch]. Diese Vermutung läßt sich gut mit der Art und Weise in Einklang bringen, mit der Brahmagupta an die Wahl des Vorzeichens für die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl heranging (vgl. S. 127). Jedoch lassen sich die Aufgaben Brahmaguptas, von denen die Rede ist, auch unmittelbar durch verschiedene Gleichungen ausdrücken:

$$10\left(\sqrt{y-2}-1\right)+2=y-1$$

(mit den Wurzeln 83 und 3) und

$$\left(\frac{y}{4}-3\right)^2=y$$

(mit den Wurzeln 36 und 4), während Pṛthûdakaswâmî beide auf die eine Gleichung $x^2-10x=-9$ zurückgeführt hat, indem er für die Unbekannte im ersten Falle x^2+2 $(=y)$ und im zweiten Falle $4x$ $(=y)$ setzte. Zur Zeit Pṛthûdakaswâmîs war die Möglichkeit der Existenz zweier Wurzeln bei einer quadratischen Gleichung zweifellos bereits bekannt, jedoch wissen wir nicht, welchen Weg Brahmagupta bei seinen Überlegungen eingeschlagen hatte.

Mahâvîra verband mit der Existenz zweier Wurzeln der quadratischen Gleichung bereits völlig klare Vorstellungen. In einer seiner Aufgaben wird gefordert, die Anzahl von Pfauen aus der folgenden Bedingung zu ermitteln: Ein Sechzehntel der Pfauenherde sitzt auf einem Mangobaum, während das Quadrat von einem Neuntel des Restes und vierzehn weitere Pfauen auf einem Tamalabaum sitzen. Demnach gilt

$$\left(\frac{1}{16^2}+\frac{15^2}{9^2\cdot 16^2}\right)x^2+14=x.$$

Zuvor formuliert Mahâvîra die Lösungsregel für Gleichungen der Form

$$\frac{l}{m}x^2-x=-n$$

in der Gestalt

$$x=\frac{\frac{m}{l}\pm\sqrt{\left(\frac{m}{l}-4n\right)\frac{m}{l}}}{2},$$

wobei er ausdrücklich betont, daß die „Quadratwurzel sowohl zu addieren als auch zu subtrahieren" ist [54, Vol. II, S. 73, englisch]. In unserem Falle entspricht nur die größere Wurzel 48 den Bedingungen der Aufgabe, da die kleinere $\frac{16\cdot 21}{17}$ nicht ganzzahlig ist.

Die Bedingung für die Existenz zweier positiver Wurzeln einer quadratischen Gleichung wurde von Bhâskara II. formuliert, der sich dabei auf den uns nur dem Namen nach bekannten Padmanabha beruft. In der Regel wird vorausgesetzt, daß die Gleichung auf die Form

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

gebracht ist. Die Lösungsvorschrift selbst lautet: „Wenn die Quadratwurzel aus der bekannten Seite kleiner ist als das negative freie Glied in der Quadratwurzel der unbekannten Seite, so sind, wobei man diese Wurzel sowohl positiv als auch negativ zu nehmen hat, zwei Werte der Unbekannten zu bestimmen. Dies (hat) von Fall zu Fall (zu geschehen)" [54, Vol. II, S. 70, englisch]. Wie man sieht, wird vorausgesetzt, daß in der Gleichung

$$x^2+px=q$$

beide Koeffizienten p und q negativ sind und daß in der Tat die Wurzeln einer derartigen Gleichung, falls sie existieren, beide reell sind.[1]) Alle übrigen Gleichungen besitzen wenigstens eine negative Wurzel, und solche Wurzeln blieben bei der Lösung einer Aufgabe unberücksichtigt.

Die letzten Worte der Regel besagen, daß beide mit ihrer Hilfe ermittelten Wurzeln auf ihre Eignung als Lösungen der Aufgabe hin überprüft werden müssen. Als Beispiel für eine Aufgabe, bei der beide Wurzeln den Bedingungen genügen, mag folgende Aufgabe Bhâskaras dienen: Das Quadrat aus $\frac{1}{8}$ einer Affenherde tummelt sich im Walde, während die zwölf übrigen auf dem Gipfel eines Hügels brüllen. Wieviel Affen sind es insgesamt? Bei der Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{64}x^2+0x+12=0x+x+0$$

erhält Bhâskara zunächst

$$x-32=\pm 16$$

und damit die beiden Lösungen 48 und 16.

Falls eine positive Wurzel einer Gleichung mit irgendwelchen Bedingungen des Problems nicht in Einklang steht, lehnt Bhâskara diese Wurzel ab. Bei der Bestimmung der Anzahl der Affen in einer Herde, wobei das um 3 verminderte und ins Quadrat erhobene Fünftel der Herde sich in einer Höhle versteckt, während man einen Affen sieht, der auf einen Baum geklettert ist, d. h. bei der Lösung der Gleichung

$$x=\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1 \quad \text{oder} \quad x^2-55x=-250,$$

sondert Bhâskara die eine der beiden Wurzeln 50 und 5 aus, da die Zahl $\frac{1}{5}\cdot 5-3$ negativ ist. Dies motiviert er mit den Worten, daß „die Leute kein Zutrauen zu der Tatsache haben, daß das Bekannte negativ wird". Die negativen Zahlen waren ledig-

[1]) Eine vollständige Analyse der Gleichungen dieser Form hat etwa 300 Jahre vor Bhâskara Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī angestellt. Vgl. S. 205.

lich ein Hilfsmittel für algebraische Zwischenrechnungen. Ein späterer Kommentator bemerkte, daß man diese Wurzel durchaus hätte akzeptieren können, wenn man die Formulierung der Aufgabe modifiziert hätte („drei vermindert um ein Fünftel der Herde"); allerdings hätte man unter diesen Umständen auf die Wurzel 50 verzichten müssen.

Manche Probleme lassen sich durch Gleichungen ausdrücken, die in irgendeinem algebraischen Ausdruck quadratisch sind. In verschiedenen Aufgaben bei Mahâvîra, Srîdhara und Bhâskara II. ergibt sich die gesuchte Größe — so die Stückzahl einer Affenherde oder einer Kamelherde oder einfach eine gesuchte Zahl usw. — aus einer Gleichung, die in $\sqrt{x}$ quadratisch ist, d. h. aus einer Gleichung der Form

$$x + p\sqrt{x} = q.$$

Kompliziertere Aufgaben, die bei diesen Gelehrten auftreten, laufen auf die Lösung einer Kette quadratischer Gleichungen hinaus. Dieser Art ist z. B. eine Aufgabe bei Srîdhara, die sich durch die Gleichung

$$x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})-\sqrt{x-x-\tfrac{1}{6}(x-x)-\tfrac{1}{5}\left[x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})-\sqrt{x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})}\right]}$$
$$-2\sqrt{\left[x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})-x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})\right]-\tfrac{1}{5}\left[x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})-x-\sqrt{x}-\tfrac{1}{6}(x-\sqrt{x})\right]}=8$$

ausdrücken läßt. Setzt man, wie das eigentlich auch gehandhabt wurde, nacheinander

$$x-\sqrt{x}=y,\quad y-\tfrac{1}{6}y=z,\quad z-\sqrt{z}=u,\quad u-\tfrac{1}{5}u=v,\quad v-2\sqrt{v}=8,$$

so erhält man aus der letzten Gleichung $v = 16$ und demnach $u = 20$, $z = 25$, $y = 30$ und $x = 36$.

Schließlich finden sich bei den indischen Gelehrten seit Âryabhaṭa I. Regeln zur Lösung von Gleichungssystemen der Form

$$x + y = a,\ xy = b;\quad x \pm y = a,\ x + y = b.$$

Derartige Aufgaben traten immer dann auf, wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus irgendwelchen Beziehungen zwischen diesen Seiten zu ermitteln hatte.

Bei der Lösung von Aufgaben, die auf dem pythagoreischen Lehrsatz beruhen, haben die indischen Mathematiker eine große Findigkeit gezeigt. Als Beispiel sei eine kompliziertere Aufgabe von Bhâskara II. angeführt: Man bestimme die Katheten x und y sowie die Hypotenuse z aus dem Umfang und dem Flächeninhalt. Setzt man

$$xy = p, \tag{1}$$
$$x + y + z = q, \tag{2}$$

so ergibt sich der folgende Rechengang:

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2p,\quad (x + y + z)(x + y - z) = 2p.$$

Hieraus folgt

$$x + y - z = \frac{2p}{q}, \tag{3}$$

und wegen (2) und (3) folgt

$$z = \frac{q^2 - 2p}{2q}.$$

Aus denselben Gleichungen folgt

$$x + y = \frac{q^2 + 2p}{2q}. \tag{4}$$

Danach wird

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = \left(\frac{q^2 + 2p}{2q}\right)^2 - 4p \tag{5}$$

ermittelt, wonach sich aus den Gleichungen (4) und (5) die Katheten x und y bestimmen lassen.

In einer anderen Aufgabe sind $xyz = p$ und $x + y + z = q$ gegeben. Bhâskara löst diese Aufgabe, indem er zunächst wiederum z bestimmt. Diese Aufgaben erinnern an chinesische Aufgaben zur Lehre vom rechtwinkligen Dreieck (vgl. S. 54)

Bei der Lösung von Gleichungen höheren Grades haben die indischen Mathematiker keine Ergebnisse von allgemeiner Bedeutung erzielt. Bei Bhâskara II. finden wir Beispiele im vorhinein gewählter Gleichungen dritten und vierten Grades derart, daß sich deren ganzzahlige Wurzeln mit Hilfe mehrerer Transformationen bestimmen lassen. In der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 12x = 35$$

z. B. fehlt auf der linken Seite bis zur Ergänzung zu einer vollständigen dritten Potenz lediglich das Glied -8, so daß die Beziehung

$$(x - 2)^3 = 27$$

gilt. Um die Gleichung

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

zu lösen, addiert Bhâskara auf beiden Seiten jeweils $4x^2 + 400x + 1$, woraus die Beziehung

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

folgt, usw.

Unbestimmte Gleichungen. Den ersten Anstoß zur Lösung unbestimmter Gleichungen gaben in Indien, ebenso wie in China, astronomische Probleme und Kalenderberechnungen. Es ging darum, die Perioden gleicher relativer Lagebeziehungen von Himmelskörpern (der Sonne, des Mondes, der Planeten) mit verschiedenen Umlaufzeiten zu bestimmen oder andere damit im Zusammenhang stehende Probleme zu lösen. Diese Problemstellung läuft darauf hinaus, ganze Zahlen zu finden, die bei Division durch vorgegebene Zahlen vorgegebene Reste ergeben, d. h. unbestimmten linearen Gleichungen und Systemen solcher Gleichungen genügen. Derartige Aufgaben traten in China bereits im 3. und 4. Jahrhundert auf und kurz danach, vom 5. Jahrhundert an, auch in Indien [73a].

Es erscheint durchaus wahrscheinlich, daß die Mathematiker beider Länder, zumindest was die Lösung unbestimmter Gleichungen betrifft, miteinander in Verbindung gestanden haben. Sowohl den Chinesen als auch den Indern gebührt das Ver-

dienst, das Problem der Lösung unbestimmter Gleichungen in ganzen Zahlen aufgeworfen zu haben. Die hervorragenden Forschungen des Diophantos sind offenbar auch nicht ohne Einfluß auf die Inder geblieben. Nach diesem bedeutenden hellenistischen Mathematiker wird gegenwärtig der betreffende Teil der Zahlentheorie benannt, obwohl Diophantos selbst lediglich die Rationalität der Lösungen gefordert hatte.

Auf dem Gebiet der unbestimmten Gleichungen hatten die Inder große Erfolge zu verzeichnen, und es gelang ihnen, originelle Methoden zu entwickeln. Das Verfahren zur Lösung einer allgemeinen linearen Gleichung mit zwei Unbekannten [54, Vol. II; S. 74] wollen wir nun genauer betrachten.

Bereits Âryabhaṭa I. hatte die Regel zur Bestimmung einer ganzen Zahl N angegeben, die bei der Division durch zwei gegebene Zahlen a und b die vorgegebenen Reste r_1 und r_2 ergibt, wenn auch seine Formulierungen noch recht unklar waren. Bezeichnend ist die Tatsache, daß diese Regel unmittelbar auf die Rechenvorschrift zur Ermittlung der Konjunktion zweier Planeten folgt. Schreibt man die Zahl N in der Form

$$N = a x + r_1 = b y + r_2,$$

so läßt sich die Aufgabe durch die Gleichung

$$a x + c = b y \tag{1}$$

oder

$$\frac{a x + c}{b} = y \tag{1'}$$

erfassen, wobei das absolute Glied sowohl positiv als auch negativ sein kann, je nachdem, welches Vorzeichen die Differenz $r_1 - r_2$ hat. Bei Âryabhaṭa handelte es sich um den Fall $c > 0$. Zur Lösung der Gleichung (1) haben später verschiedene Mathematiker Beiträge geleistet. Bhâskara I. erweiterte die Methode für den Fall $c < 0$ und zeigte hierbei, daß sich die Lösung dieser Gleichung aus der Lösung der Gleichung $a x - 1 = b y$ ergibt. Brahmagupta, Mahâvîra, Âryabhaṭa II., Śrîpati, Bhâskara II. und Nârâyaṇa verbesserten und präzisierten die Formulierungen und vereinfachten die Rechenverfahren für verschiedene Spezialfälle. Eine Begründung für das Lösungsverfahren wurde nicht gegeben. Dafür enthielt der Rechengang selbst eine Erklärung für die einzelnen Rechenschritte.

Das Lösungsverfahren nannte man, wie wir bereits erwähnt hatten, kuṭṭaka, was soviel wie wie Zerstäuber bedeutet, vom Verbum kuṭṭ — zerstäuben, verstreuen, zerkleinern usw. Der Terminus kuṭṭaka bezeichnete darüber hinaus auch das zugehörige Teilgebiet der Mathematik. Besondere Bezeichnungen hatte man auch für sämtliche Größen, die in einer solchen Aufgabe auftraten. Die gegebenen Größen a, b bzw. c bezeichnete man als Dividenden, Divisor bzw. Einfügung; x nannte man den Multiplikanden und y den Quotienten. Bei unserer Beschreibung der indischen Lösungsverfahren wollen wir uns an die Darlegungen von Bhâskara II. anlehnen und dabei mit dem Fall $c > 0$ beginnen. Zunächst erläutert Bhâskara den Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen; ferner wird vorausgesetzt daß die Gleichung bereits durch (a, b), d. h. durch den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten der Unbekannten durchdividiert ist. Über das Kürzen mit (a, b)

schrieb bereits Bhâskara I., und Śrîpati betonte, daß eine Aufgabe unzulänglich ist, wenn (a, b) nicht in c aufgeht. Das Lösungsverfahren unterschied sich im Grunde genommen nicht von dem, das in modernen Lehrbüchern bei Anwendung von Kettenbrüchen geboten wird. Wir wollen uns dieses Verfahren unter Verwendung unserer modernen Bezeichnungen kurz ins Gedächtnis zurückrufen.

Es sei $(a, b) = 1$, $a > b$, und der Quotient $\frac{a}{b}$ möge sich durch den Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

ausdrücken lassen (ist $a < b$, so ist $q_0 = 0$). Einen solchen Kettenbruch wollen wir wie üblich abgekürzt durch

$$q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{n-1}, q_n$$

bezeichnen. Als Näherungsbruch $\frac{P_k}{Q_k}$ bezeichnet man den Kettenbruch $[q_0, q_1, \ldots, q_k]$. Der vorletzte Näherungsbruch $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ist $[q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}]$, während der letzte Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$ mit $\frac{a}{b}$ identisch ist. Dann lassen sich sämtliche Lösungen der Gleichung (1) unter der Voraussetzung $(a, c) = 1$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n c\, Q_{n-1} + b\, t \\ y &= (-1)^n c\, P_{n-1} + a\, t \end{aligned} \tag{2}$$

ausdrücken, wobei t beliebige ganzzahlige Werte annehmen kann. Es sei noch hinzugefügt, daß sich sämtliche Partialnenner q_k eines Kettenbruches bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (a, b) nach dem euklidischen Algorithmus als Quotienten der zugehörigen Divisionen

$$\begin{aligned} a &= b\, q_0 + b_1, \\ b &= b_1 q_1 + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-2} &= b_{n-1} q_{n-1} + b_n, \\ b_{n-1} &= b_n q_n \end{aligned}$$

ergeben, wobei b_n den größten gemeinsamen Teiler (a, b) ergibt; ist $b_n = 1$, so ist $(a, b) = 1$.

Je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, sind die absoluten Glieder in (2) positiv oder negativ, und die Bestimmung der kleinsten positiven Lösungen nach (2) bedarf zusätzlicher Operationen, die jedoch keineswegs kompliziert sind. Bhâskara II. formuliert seine Regel so, daß sich in beiden Fällen unmittelbar nur die kleinsten positiven Lösungen ergeben. Seine Worte lauten wie folgt:

„Teile den Dividenden und den Divisor durcheinander, die bereits relativ prim sind, bis der Rest des Dividenden Eins ist[1]). Nun schreibe sukzessiv die Quotienten unter-

[1]) Das heißt, bis wir $b_{n-2} = b_{n-1} q_{n-1} + b_n$ mit $b_n = 1$ erreicht haben.

einander, unter diesen die Einfügung und darunter Null. Multipliziere mit der vorletzten (Zahl) die Zahl, die sich unmittelbar über dieser befindet, und zähle die letzte hinzu; sodann laß diese letzte weg. Verfahre in dieser Weise wiederholt bis nur noch ein Zahlenpaar übrig bleibt. Wird nun die obere davon durch den angegebenen Dividenden dividiert, so ist der Rest der Quotient, wird hingegen die untere davon durch den angegebenen Divisor dividiert, so ist der Rest der Multiplikator. So lautet das Verfahren, wenn die Anzahl der Quotienten (der wechselseitigen Division) gerade ist. Ist ihre Anzahl ungerade, so müssen die auf diese Weise gewonnenen Quotient und Multiplikator vom Dividenden bzw. Divisor abgezogen werden, und die Differenzen sind dann der echte Quotient und der echte Multiplikator" [54, Vol. II, S. 110—111, englisch].

Die beiden nachfolgenden Beispiele Bhâskaras erläutern diesen Text.

1. Die Gleichung lautet

$$100x + 90 = 63y \quad (n \text{ gerade}).$$

Die Entwicklung von $\frac{100}{63}$ in einen Kettenbruch oder aber die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (100, 63) ergibt

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{100}{63} = (1, 1, 1, 2, 2, 1, 3).$$

Hierbei ist $n = 6$ und

$$\frac{P_6}{Q_6} = (1, 1, 1, 2, 2, 1) = \frac{27}{17}.$$

Daher gilt wegen (2)

$$x = 90 \cdot 17 + 63t = 1530 + 63t, \; y = 90 \cdot 27 + 100t = 2430 + 100t.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $2430 = 90 \cdot 27$ und $1530 = 90 \cdot 17$ in der Regel Bhâskaras zwei obere Grenzen darstellen. Die beiden kleinsten positiven Werte $y = 30$ und $x = 18$ ermittelte er als Reste der Divisionen $2430 = 100 \cdot 24 + 30$ und $1530 = 63 \cdot 24 + 18$. Diesem Kunstgriff entspricht die Gewinnung der kleinsten Lösung aus der allgemeinen, wenn man diese in der Form

$$x = 18 + 63\,(t + 24), \quad y = 30 + 100\,(t + 24)$$

schreibt und dann $t + 24 = 0$ setzt.

2. Die Gleichung lautet

$$60x + 16 = 13y \; (n \text{ ungerade}).$$

Hierbei ist

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{60}{13} = [4, 1, 1, 1, 1, 2]$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = [4, 1, 1, 1, 1] = \frac{23}{5},$$

so daß

$$x = -16 \cdot 5 + 13t = -80 + 13t$$

$$y = -16 \cdot 23 + 60t = -368 + 60t$$

gilt.

In diesem Beispiel ergeben sich als obere Grenzen nach dem Schema Bhâskaras die Zahlen 368 und 80. Die kleinsten positiven Werte für y und x werden hier in zwei Schritten bestimmt. Zunächst werden die Reste 8 und 2 der Division $368 = 60 \cdot 6 + 8$ und $80 = 13 \cdot 6 + 2$ bestimmt und dann die Differenzen $60 - 8 = 52 = y$ sowie $13 - 2 = 11 = x$ ermittelt. Wir könnten dementsprechend die allgemeine Gleichung in der Form

$$x = -2 + 13\,(t - 6), \quad y = -8 + 60\,(t - 6)$$

schreiben (-2 und -8 sind die Werte von x und y, die die kleinsten absoluten Beträge haben) und dann $t - 6 = 1$ setzen.

Wie wir erkennen, sahen die indischen Mathematiker ihre Hauptaufgabe darin, die kleinsten positiven Werte für x_0 und y_0 zu bestimmen. Die übrigen positiven Lösungen ermittelten sie danach gemäß der Regel

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 + at,$$

deren Formulierung in Worten wir bei Âryabhaṭa II. und Bhâskara II. finden.

Die indischen Mathematiker beachteten auch die natürlichen Vereinfachungen, die dann möglich sind, wenn die Zahlen a und c (oder b und c) einen gemeinsamen Teiler besitzen, da eine Kürzung von a und c durch (a, c) (oder von b und c durch (b, c)) auf Gleichungen mit kleineren Koeffizienten führt. Die zugehörigen Rechenregeln, die wir sowohl bei Âryabhaṭa II. als auch bei Bhâskara II. vorfinden, lassen sich durch die Substitutionen $x = (a, c) \cdot u$ (oder $y = (b, c) \cdot v$) adäquat ausdrücken. So ist im ersten Beispiel $(90, 63) = 9$, und die Substitution $x = 9u$ führt die Gleichung $100x + 90 = 63y$ direkt in die Gleichung $100u + 10 = 7y$ über. Ferner ist $(100, 90) = 10$, so daß die ursprüngliche Gleichung durch die Substitution $y = 10v$ in die Gleichung $10x + y = 63v$ übergeht. Eine gleichzeitige Anwendung beider Substitutionen ergibt die Gleichung

$$10u + 1 = 7v,$$

deren Koeffizienten erheblich kleiner sind als die der Ausgangsgleichung. Hier gilt $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, so daß sich die beiden oberen Zahlen sehr rasch bestimmen lassen:

1	$1 \cdot 2 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 1 + 1 = 2$
1	
0	

Die Division $3 : 10$ liefert den Rest 3, die Division $2 : 7$ den Rest 2. Daher ist $v = 3$, $u = 2$ und somit $y = 3 \cdot 10 = 30$ und $x = 2 \cdot 9 = 18$.

Bisher handelte es sich um die Gleichung (1) für $c > 0$. Den Fall $c < 0$ führte Bhâskara II. auf den vorhergehenden zurück. Es sei x_0, y_0 eine Lösung der Gleichung (1) für $c > 0$; dann liefern $x_1 = b - x_0$ und $y_1 = a - y_0$ eine Lösung der Gleichung $ax - c = by$. Dies läßt sich leicht verifizieren. Die Gleichungen $ax + by = \pm c$ führte man ebenfalls auf die bereits betrachteten zurück. Ist z. B. x_0, y_0 eine Lösung der Gleichung $ax + c = by$, so erhält man aus $x_1 = b - x_0$ und $y_1 = y_0 - a$ eine Lösung der Gleichung $-ax + c = by$. Auf diese Weise löste Bhâskara II. die Gleichung

$$-60x + 3 = 13y.$$

Zunächst bestimmte er die kleinsten positiven Werte $x_0 = 11$ und $y_0 = 51$ für die Gleichung $60x + 3 = 13y$ und konstruierte die Lösung der vorgegebenen Gleichung, indem er $x_1 = 13 - 11 = 2$ und $y_1 = 51 - 60 = -9$ setzte. Dieses Beispiel zeigt, daß die Inder in der Theorie der diophantischen Gleichungen durchaus negative Lösungen zuließen, die sie in der Algebra ablehnten. Unter anderen Umständen wäre die gegebene Gleichung auch gar nicht lösbar, denn sie besitzt keine rein positiven Lösungen.

Es sei noch erwähnt, daß die Inder zumindest seit Bhâskara I. um den Zusammenhang zwischen den Lösungen der allgemeinen Gleichung (1) und ihres Spezialfalles

$$ax \pm 1 = by \tag{1'}$$

wußten. Ist x_0, y_0 eine Lösung der Gleichung (1'), so ist cx_0, cy_0 eine Lösung von (1). Diesen Umstand benutzte Âryabhaṭa II. beim Lösen von Gleichungen der allgemeinen Form.

Es dürfte wohl außer Zweifel stehen, daß die Methode der Streuung (kuṭṭaka) (vgl. S. 141) als Folge davon entstanden ist, daß man Gleichungen vom Typ (1) nach einem Verfahren löste, das noch vor nicht allzu langer Zeit in den algebraischen Lehrbüchern für Schulen behandelt wurde und der beschriebenen Methode gleichwertig ist. Für $b < a$ berechnet man aus der Gleichung (1)

$$y = \frac{ax + c}{b} = q_0 x + \frac{b_1 x + c}{b},$$

wonach die Bestimmung eines ganzzahligen x, wobei auch

$$z = \frac{b_1 x + c}{b}$$

ganzzahlig sein muß, auf die Lösung einer ähnlichen Gleichung mit einem Koeffizienten b_1 zurückführt, der kleiner ist als b. Der Prozeß wurde so lange fortgesetzt, bis die vorletzte Hilfsunbekannte sich durch die letzte in ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken läßt. Möglicherweise hängt die Bezeichnung der Methode kuṭṭaka eben mit der Bildung dieser Gleichungskette zusammen, in der die Koeffizienten schrittweise kleiner werden.

Wir erwähnten bereits, daß die Gleichung (1) bei der Aufgabe entstanden war, eine Zahl N zu bestimmen, wenn die Reste ihrer Division durch zwei gegebene Zahlen bekannt sind. Die Inder haben auch das allgemeine Problem dieser Art untersucht, bei dem es darum geht, die Zahl N aus n vorgegebenen Teilern $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und aus n Divisionsresten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ zu bestimmen. Für $n = 3$ hatte schon früher Sun-zi die Aufgabe gelöst. Allerdings ist die indische Methode von der chinesischen verschieden (vgl. S. 76 u. 77). Sie besteht in einer sukzessiven Auflösung von unbestimmten Gleichungen ersten Grades nach der Methode der Streuung. Denn ist

$$N = q_1 x_1 + r_1 = q_2 x_2 + r_2 = \cdots = q_n x_n + r_n,$$

so bestimmt man zunächst α_1, d. h. den kleinsten Wert für x_1, aus der Gleichung

$$q_1 x_1 + r_1 = q_2 x_2 + r_2,$$

so daß allgemein $x_1 = \alpha_1 + q_2 t$ gilt. Dann ist

$$N = (q_1 \alpha_1 + r_1) + q_1 q_2 t.$$

Wird nun die nächstfolgende Bedingung hinzugezogen, so ergibt sich

$$N = q_1 q_2 t + (q_1 \alpha_1 + r_1) = q_3 x_3 + r_3,$$

woraus der allgemeine Ausdruck für $t = \alpha_2 + q_3 u$ und

$$N = q_1 q_2 q_3 u + (q_1 q_2 \alpha_2 + q_1 \alpha_1 + r_1)$$

usw. bestimmt wird. Der Prozeß wird so lange fortgesetzt, bis sämtliche Ausgangsgleichungen verbraucht sind. Das beschriebene Verfahren war bereits Âryabhaṭa I. bekannt, und bei Bhâskara I. finden wir auch Zahlenbeispiele. Hiervon wollen wir eine Aufgabe anführen. Es soll eine Zahl bestimmt werden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 ergibt und darüber hinaus durch 7 teilbar ist. Bhâskara I. fand als Lösung die Zahl 721, allerdings ohne zu beachten, daß unter den Teilern Paare auftreten, die nicht relativ prim sind. Später fanden die indischen Mathematiker auch die kleinste Zahl, die dieser Bedingung genügt, und zwar die Zahl 301. Den Fall, daß die Teiler nicht paarweise teilerfremd sind, untersuchte Pṛthûdakaswâmî in seinem Kommentar zum Werk des Brahmagupta. Gilt z. B. $(q_1, q_2) = c$, (wobei $r_2 - r_1$ durch d teilbar sein muß), so ist N in der folgenden Form anzusetzen:

$$N = (q_1 \alpha_1 + r_1) + \frac{q_1 q_2}{d} t.$$

Ähnlich wie in China traten auch in Indien Aufgaben über Vögel auf. Hiervon sei eine angeführt, die wir durch zwei Gleichungen mit vier Unbekannten ausdrücken können:

$$x + y + z + u = 100,$$

$$3 \cdot \frac{x}{5} + 5 \cdot \frac{y}{7} + 7 \cdot \frac{z}{9} + 9 \cdot \frac{u}{3} = 100.$$

Dieses Beispiel ist nach den Worten Bhâskaras II. von Gelehrten älterer Zeiten entlehnt.

Elegant ist das Verfahren zur Lösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades

$$xy = ax + by + c, \tag{3}$$

die durch die Substitutionen $x = u + b$, $y = v + a$ in die Form

$$uv = c + ab \tag{3'}$$

übergeht. Man zerlegte hierzu die Zahl $c + ab$ in ganzzahlige Faktoren und erhielt die ganzzahligen Lösungen der vorgegebenen Gleichung durch paarweises Angleichen der Faktoren auf der linken und auf der rechten Seite. Die algebraische Umformung wurde durch eine geometrische Transformation erläutert, wobei die Gnomonfigur benutzt wurde, die bereits den Verfassern der „Schnurregeln" bekannt war. Die Differenz aus den Flächeninhalten des Rechtecks xy und des Gnomons $ax + by - ab$ (Abb. 36) wird durch das Rechteck $(x - b)(y - a)$ dargestellt. Nach Voraussetzung ist diese Differenz aber gleich $ab + c$, und hieraus folgt die Gleichung (3'). Wir haben hier ein interessantes Beispiel der Anwendung geometrischer Vorstellungen auf die Zahlentheorie vor uns.

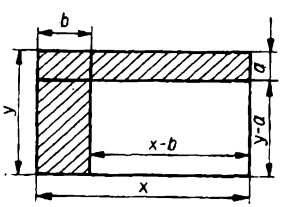


Abb. 36

Eine hervorragende Errungenschaft der indischen Mathematiker auf dem Gebiet der Zahlentheorie war ferner die ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$a x^2 + b = y^2 \tag{4}$$

sowie des wichtigen Spezialfalls

$$a x^2 + 1 = y^2 \tag{5}$$

dieser Gleichung. Dabei ist a eine ganze Zahl, jedoch kein Quadrat.

Erstmalig traten derartige Gleichungen in der griechischen Mathematik auf. Vor allem handelte es sich hierbei um die Gleichung

$$2x^2 \pm 1 = y^2,$$

auf die man bei der Suche nach rationalen Näherungswerten für $\sqrt{2}$ gekommen war. Später dann, im 2. Jahrhundert, beschrieb Theon von Smyrna einen regulären Prozeß zur Gewinnung immer größerer ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung. Überhaupt hat die Gleichung (5) eine große Bedeutung bei der Lösung der Frage nach der Bestimmung eines möglichst genauen Näherungswertes für $\sqrt{a}$. Von diesem Typ einer unbestimmten Gleichung zweiten Grades war ferner die Gleichung

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 353 x^2 + 1 = y^2,$$

die sich im Rahmen eines Problems des Archimedes (des sog. Rinderproblems) ergeben hatte. In der erhalten gebliebenen Darlegung der Aufgabe fehlt allerdings die Gleichung selbst; die kleinste ihrer Lösungen ist eine riesige Zahl, und es ist nahezu unmöglich, daß Archimedes seine Lösung bis zum numerischen Ergebnis durchgeführt hat.

Die umfassendsten Ergebnisse gewannen die indischen Mathematiker im Zusammenhang mit der Lösung der Gleichung (5). Hierbei waren einige Sätze von grundlegender Bedeutung, die bereits von Brahmagupta formuliert worden waren. Es handelt sich hierbei vor allem um folgende Aussagen:

(1) Sind $x = \alpha$, $y = \beta$ und $x = \alpha'$, $y = \beta'$ die Lösungen der Gleichungen

$$a x^2 + b = y^2 \text{ und } a' x^2 + b' = y^2,$$

so ist $x = \alpha\beta' \pm \alpha'\beta$, $y = \beta\beta' \pm a\alpha\alpha'$ eine Lösung der Gleichung $a x^2 + bb' = y^2$. Hieraus folgt:

(2) Ist

$$a\alpha^2 + b = \beta^2,$$

so gilt

$$a(2\alpha\beta) + b^2 = (\beta^2 + a\alpha^2)^2.$$

Hieraus wiederum folgt für $b = 1$, daß man

(3) aus einer beliebigen ganzzahligen Lösung α, β der Gleichung (5) eine neue Lösung $2\alpha\beta$, $\beta^2 + a\alpha^2$, aus diesen beiden eine dritte Lösung usw. bilden kann. Die Aussage über die Existenz unendlich vieler ganzzahliger Lösungen der Gleichung (5) finden wir bei Śrîpati und Bhâskara II. Diese Behauptung wurde in Europa im Jahre 1657 von P. Fermat neu entdeckt. Ein weiterer wichtiger Satz Brahmaguptas besagt, daß $x = \frac{\alpha}{k}$, $y = \frac{\beta}{k}$ eine Lösung der Gleichung $a x^2 + 1 = y^2$ liefert, wenn α, β eine Lösung der Gleichung $a x^2 + k^2 = y^2$ ist.

Unter Verwendung der genannten Sätze läßt sich eine rationale Lösung der Gleichung (5) leicht durch Probieren finden. Man wählt rationale Zahlen α, β und ein ihnen entsprechendes b derart, daß $a\alpha^2 \pm b = \beta^2$ ist. Dann ist $x = \frac{2\alpha\beta}{b}$, $y = \frac{\beta^2 + a\alpha^2}{b}$ eine Lösung der Gleichung (5). Man kann die rationalen Lösungen auch nach einem anderen Verfahren gewinnen, wenn man nach Śrîpati von der Identität

$$a \cdot 1^2 + (m^2 - a) = m^2$$

oder, was dasselbe bedeutet, von

$$a \cdot 1^2 - (a - m^2) = m^2$$

ausgeht, wobei m eine beliebige rationale Zahl ist. In der Tat ist hierbei

$$a(2m)^2 + (m^2 - a)^2 = (m^2 + a)^2,$$

und $x = \frac{2m}{m^2 - a}$, $y = \frac{m^2 + a}{m^2 - a}$ ist dann eine Lösung von (5). Beide Verfahren gestatten in einzelnen Fällen die Gewinnung auch ganzzahliger Lösungen. So läßt sich (dieses Beispiel stammt von Bhâskara II.) die Gleichung

$$11x^2 + 1 = y^2$$

leicht mit Hilfe der Identität von Śrîpati lösen, wenn man $m = 3$ setzt; denn dann gilt

$$11 \cdot 1^2 - 2 = 3^2,$$

und man erhält

$$x = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3, \quad y = \frac{3^2 + 11}{2} = 10.$$

Ganz allgemein kann man, wenn sich eine Gleichung der Form (4) durch geeignete Wahl mit dem absoluten Glied ± 1, ± 2 oder ± 4 ergibt, aus deren ganzzahliger Lösung mit Hilfe der Sätze des Brahmagupta eine ganzzahlige Lösung der Gleichung (5) erhalten. Dieser Umstand war sowohl Brahmagupta als auch Śrîpati bekannt.

Eine Beschreibung der allgemeinen Methode zur Lösung der Gleichung (5) finden wir erstmalig bei Bhâskara II. Die Inder bezeichneten diese Methode als die zyklische und hatten hierfür den Terminus cakra-vâla, was im Sanskrit soviel wie Kreis bedeutet. Diese Bezeichnung rührt offenbar daher, daß das Verfahren aus einer wiederholten Bildung von Hilfsgleichungen mit ganzzahligen Lösungen vermittels der gleichen Operationen besteht, wobei man schließlich zu einer Gleichung mit dem absoluten Glied ± 1, ± 2 oder ± 4 gelangt.

Zunächst wählt man ganzzahlige x_1 und y_1 sowie ein zugehöriges b_1, so daß diese durch die Gleichung

$$a x_1^2 + b_1 = y_1^2 \tag{6}$$

verknüpft sind. Dabei sucht man zu erreichen, daß b_1 möglichst klein wird. Bei dieser Eigenschaft von x_1 und y_1 kann man probeweise die Glieder der Näherungswerte $\sqrt{a} \approx \frac{y_1}{x_1}$ verwenden. Hier sind x_1 und b_1 relativ prim; denn bei Auftreten eines gemeinsamen Teilers beider Zahlen wäre dessen Quadrat ein Teiler sämtlicher Glieder,

so daß sich die Gleichung (6) durch Kürzung vereinfachen ließe. Ferner gilt für ein beliebiges ganzzahliges t

$$a \cdot 1^2 + (t^2 - a) = t^2.$$

Wendet man auf diese Identität und die Gleichung (6) die erste Identität Brahmaguptas an, so erhält man

$$a(x_1 t + y_1)^2 + b_1(t^2 - a) = (y_1 t + a x_1)^2$$

oder

$$a\left(\frac{x_1 t + y_1}{b_1}\right)^2 + \frac{t^2 - a}{b_1} = \left(\frac{y_1 t + a x_1}{b_1}\right)^2.$$

Darauf folgt der Hauptschritt des zyklischen Verfahrens, der zu einer neuen Hilfsgleichung führt. Wir bilden nämlich die lineare unbestimmte Gleichung mit den Unbekannten t und x_2

$$\frac{x_1 t + y_1}{b_1} = x_2, \quad \text{d. h.} \quad x_1 t + y_1 = x_2 b_1.$$

Diese lösen wir nach der Methode der Streuung in ganzen Zahlen und wählen den Wert von t so, daß der absolute Betrag $|t^2 - a|$ möglichst klein wird. Es läßt sich zeigen, daß bei ganzzahligem t auch $\frac{t^2 - a}{b_1} = b_2$ und $\frac{y_1 t + a x_1}{b_1} = y_2$ ganzzahlig sind. Infolgedessen entsteht eine neue Gleichung

$$a x_2^2 + b_2 = y_2^2, \tag{6'}$$

die ebenfalls in ganzen Zahlen lösbar ist. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir eine Folge von ganzzahligen Lösungen für Gleichungen der gleichen Form. Als Schlußglied der Kette ergibt sich dann die Gleichung

$$a x_k^2 + b_k = y_k^2,$$

wobei b_k eine der Zahlen ± 1, ± 2 oder ± 4 ist.

Bhâskara II. behandelte unter anderem das folgende Beispiel:

$$67 x^2 + 1 = y^2.$$

Man erhält für $x_1 = 1$, $y_1 = 8$ und $b_1 = -3$ als erste Identität

$$67 \cdot 1^2 - 3 = 8^2.$$

Nun bildet man die Gleichung

$$67\left(\frac{t + 8}{-3}\right)^2 + \frac{t^2 - 67}{-3} = \left(\frac{8t + 67}{-3}\right)^2.$$

Aus der Gleichung

$$t + 8 = -3 x_2$$

wird $t = -3k + 1$ bestimmt. Der dem Betrag nach kleinste Wert $t^2 - 67$, der $t = 7$ entspricht, ist -18; hierbei ist $x_2 = -5$, $\frac{t^2 - 67}{-3} = 6$, $\frac{8t + 67}{-3} = -41$, so daß

$$67 \cdot 5^2 + 6 = 41^2$$

gilt. Die weiteren Rechengänge liefern

$$67 \cdot 11^2 - 7 = 90^2 \text{ und } 67 \cdot 27^2 - 2 = 221^2,$$

woraus (nach dem zweiten Satz von Brahmagupta)

$$67(2 \cdot 27 \cdot 221) + 4 = (221^2 + 67 \cdot 27^2)^2,$$

d.h.

$$67 \cdot 11\,934^2 + 4 = 97\,684^2$$

oder, nach Division durch 4,

$$67 \cdot 5967^2 + 1 = 48\,842^2$$

folgt. Somit ist $x = 5967$ und $y = 48\,842$.

Das Rechnen mit großen Zahlen bildete für die indischen Mathematiker kein Hindernis. In einem anderen Beispiel von Bhâskara II., der Gleichung

$$61x^2 + 1 = y^2,$$

erhält man als Lösung eine neunstellige und eine zehnstellige Zahl, und zwar

$$x = 226\,153\,980 \text{ und } y = 1\,766\,319\,049.$$

Eine Begründung für die zyklische Methode haben die Inder nicht gegeben. In ihren Werken findet man weder einen Beweis dafür, daß b_2 und y_2 ganze Zahlen sind, noch dafür, daß das Verfahren notwendig zum Ziel führt. Doch beeinträchtigt das Fehlen derartiger Beweise keineswegs unsere Bewunderung für die Genialität der Schöpfer des zyklischen Verfahrens.

Die Gleichung (5) bildete später ein Untersuchungsobjekt für Fermat, Euler und Lagrange. Eine vollständige und exakte Lösung dieser Gleichung sowie der Gleichung (4) gab im Jahre 1769 Lagrange an, dessen Verfahren der zyklischen Methode der Inder ähnlich ist. Infolge eines Mißverständnisses im 18. Jahrhundert führt die Gleichung (5) den Namen des englischen Mathematikers Pell, obwohl er auf diesem Gebiet keinerlei Verdienste aufzuweisen hat. Die Lösung der allgemeinen unbestimmten Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten läßt sich auf eine Pellsche Gleichung zurückführen, die in der Theorie der quadratischen Formen, in der Theorie der algebraischen Zahlen usw. eine Rolle spielt.

Hinsichtlich der Erforschung anderer unbestimmter Gleichungen zweiten Grades, insbesondere der Gleichung (4)[1]), sind die Errungenschaften der Inder weniger von Bedeutung. Wir wollen uns daher bei diesen nicht aufhalten.

Es sei noch erwähnt, daß sich die indischen Mathematiker, ähnlich wie Griechen und Chinesen, mit der Aufstellung magischer Quadrate beschäftigt haben.

Numerische Reihen. Einzelne Beispiele für arithmetische und geometrische Reihen treten in den „Kenntnissen" auf. Von Âryabhaṭa I. an gehörte die Summation der arithmetischen Reihen ständig zum Interessengebiet der indischen Mathematiker. Es wurde eine besondere Terminologie entwickelt, und eine Vielzahl von Reihen wurde summiert [75].

[1]) Ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung der ganzzahligen Lösung der Gleichung (4) hatten die Inder nicht. Nach Ermittlung irgendeiner Lösung dieser Gleichung erhielten sie eine unendliche Menge anderer Lösungen, indem sie die erste Lösung mit der Lösung der Gleichung (5) kombinierten usw.

Âryabhaṭa I. war ein guter Kenner verschiedener Eigenschaften der arithmetischen Reihen. Er kannte die Formeln für Zwischenglieder, für das allgemeine Glied und für die Summe. Wie bereits erwähnt, führt eine seiner Aufgaben über geometrische Reihen auf eine quadratische Gleichung. Bei ihm findet man ferner Regeln zur Summierung von Dreieckszahlen sowie zur Summierung der Quadrate und Kuben von natürlichen Zahlen. Mahâvîra behandelte Aufgaben über geometrische Reihen. Alle diese Dinge waren bereits den Babyloniern und Griechen bekannt.

Interessant ist eine Verallgemeinerung der arithmetischen Reihe für den Fall, daß, wie sich Srîdhara ausdrückt, die Anzahl der Glieder „teilweise ganzzahlig und teilweise gebrochen ist" [65*a*, S. 72]. Hierunter hat man die Reihe $a + (a + d) + \dots + [a + (n-1)\,d] + \frac{p}{q}(a + dn)$ zu verstehen. Srîdhara gibt an, wie die Summe einer solchen Reihe, das erste Glied aus der Summe, die Differenz, die Anzahl der Glieder usw. zu berechnen sind. Den Anlaß zu dieser Verallgemeinerung gaben Aufgaben etwa folgender Art:

Ein Arbeiter erhält im ersten Monat $1\frac{1}{2}$ Rupien und in jedem darauffolgenden $\frac{1}{3}$ Rupien mehr; wieviel erhält er für die ersten $3\frac{1}{2}$ Monate? (Antwort: $6\frac{3}{4}$ Rupien). Ferner findet man bei Srîdhara die geometrische Deutung der arithmetischen Reihe $a + (a + d) + \dots + [a + (n-1)\,d] + \frac{p}{q}(a + d)$ als Flächeninhalt eines gleichschenkligen Trapezes mit der unteren Basis $a - \frac{d}{2}$, der oberen Basis $a + \left(n - \frac{1}{2}\right) d$ und der Höhe h.

Die Âryabhaṭa I. bekannten Ergebnisse wurden von Mahâvîra verallgemeinert, der die Reihe der Quadrate der Glieder einer arithmetischen Reihe (dieses Ergebnis hatte bereits Archimedes erzielt), die Reihe der Kuben und die Reihe der verallgemeinerten Dreieckszahlen, d. h. der Summen einer arithmetischen Reihe, summiert hatte. Ist das erste Glied einer Reihe a_1 und die Differenz d, so gilt nach Mahâvîra

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{r} a_m\right) = \frac{n}{2}\left[\left\{\frac{(2n-2)^2 d^2}{6} + \frac{d}{2} + a_1 d\right\}(n-1) + a_1(a_1+1)\right].$$

In der Mitte des 14. Jahrhunderts nahm Nârâyaṇa noch allgemeinere Summationen vor. Wir setzen

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= S_n^{(1)}, \\ S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \dots + S_n^{(1)} &= S_n^{(2)}, \\ S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \dots + S_n^{(2)} &= S_n^{(3)} \end{aligned}$$

usw. Nârâyaṇa gab den Ausdruck für

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)}$$

an. Ähnliche Ergebnisse waren etwa um die gleiche Zeit auch in China bekannt (vgl. S. 82 und 83). Diese Ergebnisse verallgemeinerte Nârâyaṇa für den Fall der arithmetischen Reihe mit gegebenem ersten Glied a_1 und der Differenz d; in diesem Falle erhält man für die Summe

$$\sigma_n^{(m)} = a_1 \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + d S_{n-1}^{(m)}.$$

Seine Regeln wandte Nârâyaṇa auf eine Aufgabe an, bei der es um die Ermittlung der Kopfzahl einer Kuh- und Kälberherde geht, die sich aus der Nachkommenschaft einer einzigen Kuh im Laufe von 20 Jahren ergibt. Dabei wird vorausgesetzt, daß eine Kuh am Anfang eines jeden Jahres ein Kalb zur Welt bringt und daß die Kälber nach Erreichen eines Alters von 3 Jahren die gleiche Nachkommenschaft liefern. Nârâyaṇas Rechengang verläuft wie folgt:

1. Eine Kuh bringt in 20 Jahren 20 Kälber der ersten Generation zu Welt;

2. das erste Kalb bringt 17 Kälber der zweiten Generation, das zweite Kalb 16 derartige Kälber usw. zur Welt. Insgesamt ergibt sich für die Kälber der zweiten Generation die Anzahl

$$17 + 16 + \cdots + 1 = S_{17}^{(1)};$$

3. das erste Kalb der zweiten Generation bringt 14 Kälber der dritten Generation zur Welt, das zweite 13 usw. Die Kälber dieser Gruppe erzeugen die Nachkommenschaft

$$14 + 13 + \cdots + 1 = S_{14}^{(1)}.$$

Das erste Kalb der 16 Kälber der zweiten Generation liefert 13 Kälber der dritten Generation, das zweite 12 usw. Die Kälber dieser Gruppe haben insgesamt die Nachkommenschaft

$$13 + 12 + \cdots + 1 = S_{13}^{(1)}.$$

Sämtliche Kälber der zweiten Generation liefern in der dritten Generation

$$S_{14}^{(1)} + S_{13}^{(1)} + \cdots + S_{1}^{(1)} = S_{14}^{(2)}.$$

Durch Fortsetzung dieser Überlegungen drückt schließlich Nârâyaṇa die Gesamtkopfzahl der Herde durch die folgende Summe aus:

$$1 + 20 + S_{17}^{(1)} + S_{14}^{(2)} + \cdots + S_{2}^{(6)} = 1 + 20 + \frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 1 + 20 + 153 + 560 + 1001 + 792 + 210 + 8 = 2745.$$

Man kann diese Aufgabe auch etwas anders lösen. Zu Beginn des ersten Jahres bestand die Herde aus 2 Tieren, zu Beginn des zweiten Jahres aus 3 und dann aus 4 bzw. 6 Tieren. Vom vierten Jahr an läßt sich die Kopfzahl der Herde zu Beginn des k-ten Jahres durch die rekurrente Relation

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-3}$$

ausdrücken, woraus sich $S_{20} = 2745$ ergibt. Auf diese Weise hat später Leonardo Fibonacci von Pisa eine ähnliche Aufgabe über die Nachkommenschaft eines Kaninchens gerechnet. Aufgaben ähnlicher Art findet man auch in dem juristischen Sammelband „Russkaja Prawda“ (Russisches Recht) in Abschriften aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts.

Am Ende des 14. Jahrhunderts beherrschten die Inder die fallende unendliche geometrische Reihe, und ein Jahrhundert später entdeckten sie die Potenzreihenentwicklungen für den Arcustangens, den Sinus und Kosinus (vgl. S. 167 ff.).

Komplexionen. Seit alters her kannte man in Indien bereits die Bildung der Kombinationen von n Elementen zur m-ten Klasse, d.h. die Zahlen $\binom{n}{m}$. Nach Galâyuda, einem Gelehrten aus dem 10. Jahrhundert, waren diese Zahlen bereits im 2. Jahrhundert v.u.Z. bekannt, wobei man auch um die Beziehung

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

wußte. Bhâskara II. untersuchte die Methoden zur Berechnung der Permutationen von n Elementen ohne und mit Wiederholung sowie zur Berechnung von Kombinationen. Die Regel $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}$ findet man ferner auch bei Mahâvîra und Srîdhara. Die Kombinationen wurden im Zusammenhang mit der indischen Poesie angewandt, wobei es darum ging, die Anzahl der möglichen Kombinationen aus langen und kurzen Silben bei einem n-teiligen Versmaß zu ermitteln. Bei dieser Gelegenheit mögen sie auch entstanden sein.

Geometrie. Das Material, das uns die geometrischen Kenntnisse der indischen Mathematiker überliefert, ist weit spärlicher und weit weniger von Bedeutung als das Material über ihre Kenntnisse auf den Gebieten der Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie. Spezielle geometrische Werke gab es nicht, und die Regeln zur Messung geometrischer Figuren gehörten, wie wir bereits wissen, zum Bestand der allgemeinen Lehre vom Rechnen. Bei Brahmagupta und Srîdhara z. B. treten sie in Gestalt sog. „Determinationen" unter folgenden Bezeichnungen auf: „ebene Figuren", „Gruben", „Ziegelsteinhaufen", „geschnittene Hölzer", „Sandhaufen" oder „Schatten", wobei mit letzteren die Messungen mit Hilfe des Schattens eines Stabes gemeint sind.

Die wichtigsten ebenen Figuren, deren Flächeninhalte nach bestimmten Regeln ermittelt wurden, waren das Dreieck, das Viereck, der Kreis und das Kreissegment und mitunter auch der Kreisring und die Ellipse. Die Flächen der anderen Figuren wurden entweder exakt oder näherungsweise in Flächen dieser Grundfiguren zerlegt.

Âryabhaṭa I. vermittelte vor allem Methoden zur Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats, des Volumens einer Kugel, des Flächeninhalts eines Dreiecks nach der Formel $\left(\frac{ah_a}{2}\right)$ und des Volumens eines Tetraeders. Im letzten Falle ist seine Regel falsch: Das Produkt aus Grundfläche und Höhe wird durch zwei dividiert. Sodann werden die Beziehungen zwischen dem Flächeninhalt S eines Kreises, seinem Umfang s und dem Durchmesser d formuliert $\left(S = \frac{s}{2} \cdot \frac{d}{2}\right)$. Ferner wird ein (falscher) Ausdruck für das Volumen einer Kugel angegeben, wobei dieses durch den Flächeninhalt S eines Großkreises ausgedrückt wird $(V = S\sqrt{S})$; dieser Formel entspricht der Wert $\pi = \frac{16}{9}$. Aber fast unmittelbar danach — und zwar nach dem Satz des Pythagoras und dem Satz, nach dem die zum Sechstel des Kreisumfanges gehörende Sehne gleich dem Halbmesser des Kreises ist — wird gesagt, daß sich der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 20000 zu 62832 ergibt. Der zugehörige Näherungswert $\pi = 3{,}1416$, der bis auf 0,0001 genau ist, wird von Âryabhaṭa in seinen Ausführungen über die Größe der Erdkugel, deren Durchmesser und Umfang er mit 1600

bzw. mit $5026\frac{14}{25}$ yoyana angibt, sowie in den Sinustabellen verwendet (vgl. S. 164 und 165). Den gleichen Näherungswert benutzten Varâha-Mihira, Âryabhaṭa II., Bhâskara II. und andere.

Bei Âryabhaṭa findet man ferner die Regel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Trapezes. Interessant ist, daß die Trapeze in der indischen Einteilung der Vierecke eine besondere Stellung einnahmen. Vierecke wurden folgendermaßen klassifiziert: 1. Quadrate (die man „Gleichseite" nannte), 2. Rechtecke (Vierecke „mit paarweise gleichen Seiten"), 3. gleichschenklige Trapeze (Vierecke „mit zwei gleichen Seiten"), 4. Trapeze mit drei gleichen Seiten („Dreigleichseite") und 5. Vierecke mit lauter verschiedenen Seiten. Selbstverständlich drücken die in Anführungsstrichen angegebenen Figurenbezeichnungen deren Eigenschaften nicht vollständig aus, sie sind daher keineswegs als Definitionen aufzufassen. Die griechische Terminologie war übrigens in dieser Hinsicht keineswegs vollwertiger: Das Quadrat nannte man einfach Viereck (τετραγωνον), das Rechteck bezeichnete man als Ungleichseit (ετερομηκες); das Wort „Tischchen" (τραπεζια) bezeichnete bei Eukleides ein Viereck allgemeiner Form und bei Poseidonios von Rhodos sowie bei Heron von Alexandria ein Trapez.

Definitionen der Figuren findet man in der indischen Literatur im allgemeinen nicht. Die Trapeze charakterisierte man übrigens durch die Eigenschaft, daß die aus den beiden oberen Eckpunkten auf die Grundlinie gefällten Lote in diesem Viereck gleich lang sind. Die Parallelität der beiden Grundlinien wird nicht erwähnt.[1]) Überhaupt ist es bisher nicht gelungen, bei den Indern irgendwelche Elemente einer Lehre von den Parallelen nachzuweisen. Desgleichen kannten sie auch keine Parallelogramme. Die angegebene Klassifikation ist, wie wir sehen, ebenfalls unvollständig. Auch ihre Herkunft ist in Dunkel gehüllt. Die Hervorhebung der Quadrate und Rechtecke ist durchaus natürlich. Die Sonderstellung, die die gleichseitigen Trapeze einnehmen, wäre — ebenso wie im alten Ägypten, in China und in den hellenistischen Ländern — aus der Anwendung dieser Figuren bei der praktischen Flächenmessung zu erklären. Es sei hier noch daran erinnert, daß die gleichseitigen Trapeze seit alters her in Indien beim Bau von Altären Anwendung fanden. Unerklärlich bleibt die Hervorhebung der Trapeze mit drei gleichen Seiten. Insgesamt gesehen spiegelt diese Klassifizierung das geringe Interesse der indischen Mathematiker an der Geometrie und insbesondere an deren Grundlagen wider.

Bedeutend reichhaltiger und auch eigenartiger als bei Âryabhaṭa I. sind die geometrischen Aussagen bei Brahmagupta. Der Abschnitt „Ebene Figuren" enthält mehr als 20 Regeln zur Berechnung von Dreiecken, Vierecken, Kreisen und Kreissehnen. Mitunter werden diese Regeln systematisch angeordnet, doch insgesamt gesehen läßt die Reihenfolge auch hier, ebenso wie in der Âryabhaṭiya, keinerlei Schlüsse auf irgendwelche inneren logischen Zusammenhänge zu.

Zur Berechnung von Vierecken und Dreiecken bei gegebenen Seiten empfiehlt Brahmagupta zwei Verfahren. Nach dem ersten wird der Flächeninhalt als das Produkt der halben Summen aus je zwei gegenüberliegenden Seiten, also nach der

[1]) Die Definition des Trapezes als eines nicht zu den Parallelogrammen gehörenden Vierecks geht offenbar auf Poseidonios von Rhodos (etwa 100 v. u. Z.) zurück.

Formel $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, berechnet; im Falle eines Dreiecks wird die eine Seite gleich Null angenommen. Dabei betont Brahmagupta ausdrücklich, daß es sich hier um eine Näherungsformel handelt.[1]) Anschließend gibt er einen weiteren Ausdruck für den Flächeninhalt als Funktion der Seiten an, und zwar

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}$$

für das Viereck und

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

für das Dreieck, wobei p den halben Umfang der Figur bedeutet. Die zweite der beiden Formeln, die von Archimedes entdeckt und von Heron angewandt wurde, könnte aus den hellenistischen Ländern nach Indien gelangt sein. Das gleiche gilt auch für die Methode zur Berechnung der Höhe aus den Seiten, die an der gleichen Stelle von Brahmagupta behandelt wird. Was jedoch die oben angegebene bemerkenswerte Formel zur Berechnung der Fläche eines Vierecks betrifft, so tritt diese erstmalig bei Brahmagupta auf. Dieser Ausdruck ist im allgemeinen nur ein Näherungswert, denn einen exakten Wert des Flächeninhaltes liefert er nur bei Sehnenvierecken[2]). Brahmagupta selbst behauptete, diese Regel sei genau, und er gab daher auch keine Einschränkungen für ihre Anwendbarkeit an. Dadurch wurden manche Gelehrte, die wie Mahâvîra und Srîdhara die Formel Brahmaguptas zur Anwendung empfahlen, irregeführt, während andere darin einen Anlaß zur Kritik sahen. Sie hoben hervor, daß sich ein Viereck im allgemeinen durch die Angabe der Seiten nicht eindeutig bestimmen läßt. Âryabhaṭa II. schrieb bereits, daß ein Mathematiker, der den Flächeninhalt eines Vierecks ohne Kenntnis der Diagonale berechnen will, „entweder ein Tor oder ein Irregeführter" ist [65*a*, S. 91]. Ebenso scharf urteilte später Bhâskara II.

Im Anschluß daran teilt Brahmagupta mit, wie man die Diagonale und die Höhe eines gleichschenkligen Trapezes berechnet, gibt den Satz des Pythagoras an und berechnet aus den Seiten den Durchmesser des einem Viereck bzw. einem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Danach ist die Rede von einigen Sätzen über die Diagonalen, die Höhen und einige weitere Strecken des Vierecks. Hier finden wir unter anderem die bereits dem Ptolemaios bekannte Beziehung

$$ef = ac + bd$$

---

[1]) Diese Regel ergänzte Srîdhara durch die Bemerkung, daß sie nur für Figuren geeignet sei, deren Höhe sich nur wenig von der Länge der seitlichen Begrenzungsstrecken unterscheidet; denn andernfalls würde das Ergebnis zu stark von dem wahren Wert abweichen. Als Beispiel führt er ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie 24 und den Seiten 13 an. Die Regel liefert $S = 156$, während in Wirklichkeit $S = 60$ herauskommen muß.

Interessant ist, daß Srîdhara der Berechnung geradlinig begrenzter Figuren deren „Haupteigenschaft" vorausschickt: Die Summe sämtlicher Seiten außer einer ist dieser letzteren weder gleich noch kleiner als diese, denn der Umweg ist weder kürzer als der gerade noch diesem gleich [65*a*, S. 86]. Die gleiche Warnung finden wir, allerdings etwas anders formuliert, bei Âryabhaṭa II. und Nârâyaṇa wieder.

[2]) Bezeichnet man mit α die halbe Summe zweier gegenüberliegender Winkel, so gilt

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d) - abcd\cos^2\alpha}.$$

In einem Sehnenviereck ist $\alpha = 90°$.

zwischen den Diagonalen e, f und den gegenüberliegenden Seitenpaaren a, c und b, d sowie erstmalig die wichtige Proportion

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Diese Regeln, die sämtlich nur für Sehnenvierecke gelten, sind wiederum ohne jede Einschränkung formuliert.

Schließlich gibt Brahmagupta Regeln zur Konstruktion von Dreiecken und Vierecken mit rationalen oder ganzzahligen Seiten, Diagonalen, Höhen, Umkreisdurchmessern und Flächeninhalten an. Dieses Problem geht, wie wir wissen, auf die „Schnurregeln" zurück. Die Konstruktionen Brahmaguptas beruhen auf der Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen oder ganzzahligen Seiten, wobei die Relationen

$$m, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} - n\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} + n\right) \quad \text{und} \quad 2mn, \; m^2 - n^2, \; m^2 + n^2$$

zugrunde liegen. Aus diesen Dreiecken werden dann gleichschenklige und verschiedenseitige Dreiecke, gleichschenklige Trapeze sowie Trapeze mit drei gleichen Seiten und schließlich Vierecke einer besonderen Klasse gebildet, die nachstehend beschrieben werden.

Als Ausgangspunkt der Konstruktion werden zwei rechtwinklige Dreiecke mit rationalen oder ganzzahligen Seiten p, q, r und u, v, w gewählt, wobei r und w die Hypotenusen sind. Die Multiplikation sämtlicher Seiten des ersten mit jeder Kathete des zweiten liefert zwei neue Dreiecke mit den Seiten pu, qu, ru bzw. pv, qv, rv; beide Dreiecke sind dem ersten ähnlich. Analog ergibt die Multiplikation sämtlicher Seiten des zweiten Dreiecks mit beiden Katheten des ersten zwei dem zweiten Dreieck ähnliche Dreiecke mit den Seiten up, vp, wp bzw. uq, vq, wq. Danach werden die Dreiecke 1 bis 4 mit den jeweils gleichen Katheten aneinandergelegt, so daß sich ein Viereck mit den Seiten $a = wr$, $b = wp$, $c = vr$ und $d = wq$ gemäß der Abb. 37 ergibt, in der von den Dreiecken mit den Seiten 3, 4, 5 und 5, 12, 13 ausgegangen wurde. Unser Viereck hat dann die Seiten $a = 25$, $b = 39$, $c = 60$ und $d = 52$.[1])

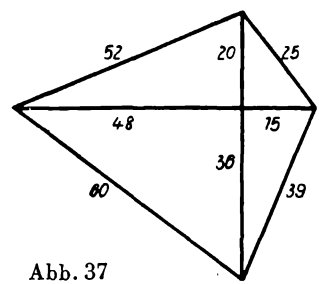


Abb. 37

Offenbar sind auch die Seiten des auf diese Weise konstruierten Vierecks ganzzahlig, wenn die Seiten der Ausgangsdreiecke diese Eigenschaft aufweisen. Ferner sieht man leicht ein, daß die Diagonalen dieses Vierecks aufeinander senkrecht stehen und die ganzzahligen Längen $pu + qv$ bzw. $pv + qu$ haben. Ganzzahlig sind ferner auch die anderen erwähnten Stücke der Figur. Ferner kann man sich leicht davon überzeugen, daß es sich bei dem so konstruierten Viereck um ein Sehnenviereck handelt, obwohl diese Tatsache weder von Brahmagupta noch von späteren Autoren erwähnt wird.

Wir fragen uns, ob Brahmagupta darum wußte, daß seine Regeln die Eigenschaften beliebiger Sehnenvierecke und nur dieser ausdrücken. Um diese Frage eindeutig

[1]) Das Beispiel tritt sowohl bei Mahâvîra als auch bei Bhâskara II. auf; Brahmagupta gibt keine Zahlenbeispiele an.

beantworten zu können, reichen die zur Verfügung stehenden Quellen nicht aus, und die Meinungen der Historiker hierüber gehen auseinander [21, Bd. I; 75a; 108]. Ja, wir können nicht einmal angeben, wann diese Regeln entdeckt wurden. Die vorliegenden Materialien lassen lediglich mehr oder weniger wahrscheinliche Vermutungen zu.

Die Heronsche Flächenformel für das Dreieck ist höchstwahrscheinlich hellenistischen Quellen entnommen worden. Ihre Entstehung auf dem mageren Boden der indischen Geometrie ist wenig wahrscheinlich; wir dürfen nicht außer acht lassen, daß diese Formel in Griechenland von keinem Geringeren als Archimedes zur Zeit der höchsten Blüte der Elementargeometrie entdeckt wurde. Die Ausdehnung der Formel auf den Fall des Vierecks, welche offenbar in Indien vorgenommen wurde, war selbstverständlich eine induktive Folgerung, zu deren theoretischer Begründung man wohl kaum in der Lage war. Doch konnte man sie leicht an Zahlenbeispielen jener beiden Viereckgruppen verifizieren, mit denen sich Brahmagupta vornehmlich beschäftigte, d. h. anhand von gleichschenkligen Trapezen und Vierecken mit orthogonalen Diagonalen. Das Bestreben, einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Vierecks zu finden, der der Heronschen Formel entsprechen würde, war für die indischen Mathematiker eine durchaus natürliche Erscheinung. Denn sie kannten auch andere Methoden zur Berechnung der Flächeninhalte von Vierecken, die als Spezialfälle die entsprechenden Regeln für Dreiecke enthielten, etwa den Ausdruck $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ oder die Formel $S = \frac{a+c}{2} h$, die für $c = 0$ den Flächeninhalt eines Dreiecks lieferte [65a, S. 88]. Das Gesagte gibt aber keine Antwort auf die Frage, ob Brahmagupta die Formel

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

nur für die Vierecke als exakt ansah, mit denen er sich speziell beschäftigte, oder aber für allgemeine Sehnenvierecke oder gar für Vierecke ganz allgemein. Wir nehmen an, daß Brahmagupta diese Formel für ganz allgemein anwendbar hielt. Dafür spricht zunächst die Tatsache, daß bei gleichschenkligen Trapezen und Vierecken mit orthogonalen Diagonalen die Flächeninhalte sich viel einfacher und ohne mehrfaches Multiplizieren und Radizieren berechnen lassen. Zum zweiten enthält der gesamte zugehörige Text Brahmaguptas keinerlei Hinweise darauf, daß hier beliebige Sehnenvierecke gemeint sind. Eine derartige Annahme wäre als sehr willkürlich anzusprechen. Sollte andererseits Brahmagupta stillschweigend angenommen haben, die betrachtete „exakte" Regel beziehe sich nur auf spezielle oder allgemeine Sehnenvierecke, so haben zumindest solche Nachfolger Brahmaguptas wie Mahâvîra und Srîdhara ihre Allgemeingültigkeit impliziert.

Es ist unbekannt, ob den Indern der Nachweis der Allgemeingültigkeit dieser Formel für Sehnenvierecke gelungen ist. Der früheste uns überlieferte Beweis, der sehr schwierig und kompliziert ist, stammt von Abū 'Abdallah aš-Šanni, einem jüngeren Zeitgenossen Aḥmad al-Bīrūnīs, in dessen Formulierung der Beweis erhalten geblieben ist [167a, 167b]. Danach tritt die Formel Brahmaguptas lange Zeit nicht mehr auf. In Europa beschäftigte sich Regiomontanus (vgl. S. 416) im 15. Jahrhundert mit der Bestimmung der Flächeninhalte von Sehnenvierecken; die Formel Brahmaguptas wurde im Jahre 1615 auf induktivem Wege von Snellius wieder entdeckt. Einen neuen Beweis

lieferte im Jahre 1727 Ph. Naudé der Jüngere. Einfachere Beweise wurden später von L. Euler, N. I. Fuß (1797) und anderen gefunden.

Die Regeln Brahmaguptas zur Berechnung der Diagonalen und anderer Strecken an Vierecken können auf verschiedene Weise entdeckt worden sein. So kann man sie als Eigenschaften beliebiger Sehnenvierecke nach Art der geometrischen Methode von Eukleides unter Hinzuziehung der Ähnlichkeitslehre herleiten. Es besteht jedoch kein Anlaß, Brahmagupta diese Methode zuzuschreiben. Seine Regeln beziehen sich, wie wir bereits hervorgehoben haben, auf die beiden genannten Viereçksgruppen, d. h. auf gleichschenklige Trapeze und Vierecke mit orthogonalen Diagonalen, die sich aus Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen konstruieren lassen. In beiden Fällen lassen sich seine Regeln ganz elementar, fast ausschließlich unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes gewinnen. So erweist sich für die zweite Gruppe der Satz über das Produkt der Diagonalen (der sog. „Satz des Ptolemaios") als eine einfache Formulierung der Identität

$$\begin{aligned} ef &= (pu + qv)\,(pv + qu) = uv(p^2 + q^2) + pq(u^2 + v^2) \\ &= (ur)\,(vr) + (wp)\,(wq) = ac + bd, \end{aligned}$$

wobei es völlig ohne Bedeutung ist, ob die Umformungen in allgemeiner Form oder nur für ganze Zahlen vorgenommen wurden. Sehr einfach läßt sich auch der Ausdruck $D^2 = b^2 + d^2 = r^2 w^2$ für den Durchmesser D des Umkreises gewinnen (vgl. [33], Bd IV). Diese Methoden liegen sowohl im Geiste der alten indischen mathematischen Traditionen als auch im Geiste Brahmaguptas selbst. Daher nehmen wir an, daß bei dieser Regelgruppe Brahmagupta entweder gleichschenklige Trapeze meinte, wie das in den entsprechenden Fällen auch direkt behauptet wird, oder aber, wenn die Rede von „Vierecken" schlechthin war, Vierecke mit orthogonalen Diagonalen zur Debatte standen. Daß die Vierecke der letztgenannten Gruppe einen Umkreis besitzen, war Brahmagupta bekannt, doch ist dieser Umstand lediglich als Nebenergebnis aufzufassen.

Mit der Weiterentwicklung der Viereçksgeometrie beschäftigten sich Mahâvîra, Śrîpati, Bhâskara II., Gaṇeśa und andere. Es sei erwähnt, daß Bhâskara II. aus den gleichen ganzzahligen Strecken Sehnenvierecke mit nichtorthogonalen Diagonalen konstruierte. Hierzu vertauschte er zwei benachbarte Seiten miteinander, wobei er z. B. $a = 25$, $b = 39$, $c = 52$ und $d = 60$ setzte. Die eine der beiden Diagonalen bleibt ungeändert, während die andere sich als Produkt der Hypotenusen zu 65 ergibt. — Wesentlich später, im 19. Jahrhundert, erlebte die Viereçksgeometrie eine Wiedergeburt in den Werken M. Chasles, E. Kummers und anderer.

Von dieser besonders eigenwilligen Erscheinungsform der indischen Geometrie, die unmittelbar mit der Zahlentheorie und den einfachsten Problemen der quadratischen Formen im Zusammenhang steht, wollen wir uns wieder abwenden und die Berechnung allgemeingebräuchlicher Figuren betrachten.

Bei Sätzen über den Kreis gibt Brahmagupta verschiedene Beziehungen zwischen dem Durchmesser d, einer hierzu senkrechten Sehne und den von dieser auf dem Durchmesser abgetragenen Abschnitten an. Zur Berechnung des Kreises empfiehlt er zwei Arten von Näherungswerten: die in der Praxis angewandten Werte $s = 3d$,

$S = 3\left(\frac{d}{2}\right)^2$ und die genaueren Werte $s = \sqrt{10d^2}$, $S = \sqrt{10\left(\frac{d}{2}\right)^4}$ (der Wert $\pi = \sqrt{10}$ entspricht 3,16227), wobei S den Flächeninhalt des Kreises bedeutet. Der Näherungswert $\pi = \sqrt{10}$ trat bereits früher in China auf (vgl. S. 57), und es ist durchaus möglich, daß er von dort übernommen wurde. Bhâskara II. begründet die Anwendung dieses außerdem auch bei Mahâvîra und anderen auftretenden Näherungswertes damit, daß er äußerst einfach sei.

Unter den Methoden zur Berechnung von Rauminhalten gibt es drei besonders interessante Ausdrücke für das Volumen eines Pyramidenstumpfes, dessen quadratische Grundflächen die Seitenlängen a_1 und a_2 besitzen. Die erste Regel, mit der sich die Praktiker begnügten, lautet

$$V' = h\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2;$$

die zweite, „näherungsweise exakte Formel" hat die Gestalt

$$V'' = h\frac{a_1^2 + a_2^2}{2};$$

die dritte, genaue, ist eine Kombination der beiden vorhergehenden:

$$V = V' + \frac{1}{3}(V'' - V').$$

Im ersten Falle wird der Pyramidenstumpf durch ein Parallelepiped mit der gleichen Höhe und einer quadratischen Grundfläche ersetzt, deren Seite die Mittellinie des Seitenflächentrapezes ist. Im zweiten Falle tritt an die Stelle der Pyramide ein Parallelepiped, dessen Grundfläche das arithmetische Mittel aus den Grundflächen des Pyramidenstumpfes bildet. Die dritte Formel war in etwas abgeänderter Form Heron und noch früher den Babyloniern bekannt. Es sei hier erwähnt, daß in den Keilschrifttexten diese Regel bei der Berechnung des Rauminhalts einer Grube mit quadratischem Boden und quadratischer Öffnung auftritt, während sie bei Brahmagupta in der mit der Überschrift „Gruben" versehenen „Definition" erscheint. Die erstgenannte Regel wurde ebenfalls in Babylonien angewandt.

Von der Berechnung des Rauminhalts und der Oberfläche der Kugel ist bei Brahmagupta nicht die Rede. Nach Âryabhaṭa I. hat die Regel zur näherungsweisen Berechnung des Kugelvolumens verschiedene Verbesserungen erfahren. Bhâskara I. nannte die Formel

$$V = \frac{9}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \left(\text{dies bedeutet } \pi = \frac{27}{8} = 3{,}375\right);$$

Mahâvîra gab die Regel

$$V = \frac{9}{2}\cdot\frac{9}{10}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \left(\pi = \frac{243}{80} = 3{,}0375\right)$$

an, Srîdhara und danach Âryabhaṭa II. benutzten die Formel

$$V = \left(1 + \frac{1}{18}\right)\frac{d^3}{2} \left(\pi = 3\frac{1}{6} = 3{,}1666\ldots\right).$$

Bei Âryabhaṭa II. findet man erstmalig in der indischen Literatur eine Methode zur Berechnung der Kugeloberfläche als Produkt aus dem Flächeninhalt eines

Großkreises und des Durchmessers. Bhâskara II. drückte diese Fläche etwas anders, und zwar als den vierfachen Flächeninhalt eines Großkreises aus; er wies ferner darauf hin, daß das Produkt aus Kugeloberfläche und $\frac{d}{6}$ das Kugelvolumen ergibt. Für Praktiker empfahl Bhâskara den Wert $\pi = \frac{22}{7}$, der bereits Âryabhaṭa II. und nach al-Bīrūnī auch Brahmagupta[1]) bekannt war. Für exaktere Berechnungen verwies er auf den Wert $\pi = \frac{3927}{1250}$, also auf einen Wert, der von Âryabhaṭa I. benutzt worden war. Der Kommentator Gaṇeśa schrieb, daß diese Zahl durch sukzessive Verdoppelung der Seitenzahl des regulären Sechsecks bis zum regulären Vieleck mit $384 = 6 \cdot 2^6$ Seiten gewonnen worden sei. Dies reicht in der Tat aus, um diesen Wert für π mit der geforderten Genauigkeit zu ermitteln.

Wir wollen noch auf zwei Näherungsformeln für Segment und Bogen eines Kreises hinweisen. Mahâvîra gab für den Flächeninhalt eines Segments über eine Sehne von der Länge l und mit der Höhe h die beiden Formeln

$$\sigma = \frac{l+h}{2}h \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{\sqrt{10}\,lh}{4}$$

an. Möglicherweise war für den zweiten Fall das Verhältnis zwischen den Flächeninhalten des Kreises und des umbeschriebenen Quadrates, das sich zu $\frac{\pi}{4}$ ergibt, auf den Flächeninhalt des Segments übertragen worden; denn dieses Verhältnis ist näherungsweise gleich $\sqrt{10}:4$. Die erste Regel erscheint später bei Srîdhara bzw. bei Âryabhaṭa II. unter Hinzunahme von Korrekturkoeffizienten in der Form

$$\sigma = \frac{\sqrt{10}}{3}\,\frac{l+h}{2}h \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{\frac{22}{7}}{3}\,\frac{l+h}{2}h.$$

Diese beiden Regeln, deren zweite auch bei Heron vorhanden war, sind etwas genauer als die erste Regel Mahâvîras (vgl. S. 55).

Bhâskara führt zur Berechnung der Sehne l aus Kreisumfang C, Bogenlänge s und Durchmesser d in der Lîlâvatî die Formel

$$l = \frac{4ds\,(C-s)}{\frac{5}{4}C^2 - s\,(C-s)}$$

an. Mit Hilfe dieses Ausdruckes bestimmt er die ganzzahligen Werte der Sehnen zu den Bogen von 20°, 40°, ..., 180° für $d = 240$. Wird $s = \frac{C}{n}$ gesetzt, so läßt sich die Regel in der Form

$$l = \frac{4(n-1)d}{\frac{5}{4}n^2 - n + 1} \quad \text{oder auch} \quad 2\sin\frac{\pi}{n} = \frac{32\,(n-1)}{5n^2 - 4n + 4}$$

[1]) Es sei daran erinnert, daß in China der Näherungswert $\frac{22}{7}$ bereits Zu Chong-zhi (5. Jh.) bekannt war. Ein anderer Näherungswert, und zwar $\frac{355}{113}$, der erstmalig von Zu Chong-zhi berechnet worden war, tritt völlig unerwartet in einem indischen Werk aus dem Jahre 1426 und später bei Nîlakanta auf [75*b*].

schreiben. Sie liefert exakte Werte für $n = 2$ und $n = 6$, während man für $n \to \infty$ den Näherungswert 3,2 für π erhält. Die Herkunft dieser Regel ist unbekannt. Bhâskara kehrt sie durch Lösung einer quadratischen Gleichung um und drückt damit die Bogenlänge als Funktion der Sehne aus. Für genauere Berechnungen benutzte man trigonometrische Tabellen.

Im Abschnitt über „Schatten" behandelten die Inder einige Aufgaben zur Messung von Entfernungen und Höhen mit Hilfe eines senkrechten Stabes (vgl. S. 55). Bei Brahmagupta finden wir z. B. die beiden folgenden Aufgaben: 1. Man bestimme die Länge des Schattens aus der Länge des Stabes, der Höhe der Lichtquelle und aus der Entfernung zwischen den Fußpunkten von Stab und Lichtquelle. 2. Man bestimme die Höhe der Lichtquelle aus den Schattenlängen eines Stabes in zwei verschiedenen Lagen.

Bei Bhâskara II. finden wir ferner eine Aufgabe, in der der Stab von zwei verschiedenen punktförmigen Lichtquellen beleuchtet wird. Aus der Differenz der Schattenlängen und der Differenz der Hypotenusen der entstehenden Dreiecke sind die Schattenlängen zu bestimmen oder, was dasselbe bedeutet, es ist ein Dreieck aus der Differenz zweier Seiten, der auf die dritte Seite gefällten Höhe und aus der Differenz der Fußpunktsentfernungen, die durch die Höhe auf dieser Seite abgetragen werden zu konstruieren (vgl. S. 167).

Beweise für geometrische Aussagen treffen wir in indischen Büchern selten an; werden sie einmal gegeben, so fallen sie sehr knapp aus. Im Text wird häufig das Ganze auf eine Zeichnung und den Hinweis „siehe" zurückgeführt; mitunter werden kurze Erläuterungen hinzugefügt. Es sei hier an den früher erwähnten Beweis für den Satz des Pythagoras erinnert (S. 98 u. 99) und, um ein weiteres Beispiel anzuführen, die Begründung der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks nach Gaṇeśa angegeben. Die Herleitung besteht aus einer Zeichnung (Abb. 38), in der ein über der Grundlinie des Dreiecks mit der halben Dreieckshöhe als Höhe konstruiertes Rechteck dargestellt ist; der Zeichnung ist der Hinweis „siehe!" hinzugefügt.[1]) In diesem Falle sind in der Tat zusätzliche Erläuterungen nahezu überflüssig, zumindest für einen findigen Leser. Analog erläutert Gaṇeśa den Satz, demzufolge der Flächeninhalt eines Kreises dem eines Rechtecks mit dem halben Kreisumfang und dem Halbmesser als Seiten gleich ist (Abb. 39).

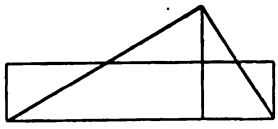


Abb. 38

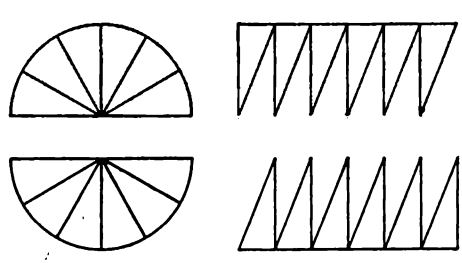


Abb. 39

[1]) Ein solcher Beweis, übrigens mit ähnlichen Erläuterungen, ist mitunter in der arabischen Literatur und später bei den europäischen Mathematikern zur Zeit der Renaissance anzutreffen.

Wir haben mehrfach betont, daß die Geometrie der Inder ebenso wie die der Chinesen prinzipiell von der griechischen Geometrie zu unterscheiden ist. Darauf hat seinerzeit bereits al-Bīrūnī hingewiesen. Er war ein guter Kenner der griechischen Klassiker, hatte mehrere Jahre in Indien zugebracht, das Sanskrit erlernt und die indische Literatur von den Siddhântas an studiert. In seinem Bericht über die Wissenschaft der Inder drückt er sein Erstaunen darüber aus, daß dort die Sätze ungeordnet aufeinanderfolgen und daß „Kristalle mit gewöhnlichen Steinchen" vermischt werden [76, Bd. 1, S. 25]. Von dem Wunsche beseelt, wissenschaftliche Kenntnisse zu verbreiten, hat er einerseits in seinem Werk über Indien die arabische Welt mit vielen Errungenschaften der indischen Gelehrten bekannt gemacht, andererseits den Versuch unternommen, die „Elemente" des Eukleides und den „Almagest" des Ptolemaios ins Sanskrit zu übersetzen [76, Bd. 1, S. 137]. Ob al-Bīrūnī die Übersetzungen zu Ende geführt hat, wissen wir nicht; auf jeden Fall ist der Geist der griechischen Geometrie auch nach ihm den Mathematikern Indiens fremd geblieben.

Trotzdem wäre es falsch, die Geometrie der Inder als ein ungeordnetes, mit empirischen Regeln zur Berechnung von Figuren überhäuftes und mit manchen Sätzen der indischen „Geometrie der Zahlen" verknüpftes Konglomerat aufzufassen. Die betrachteten Texte und die zugehörigen Kommentare, die wir nur selten erwähnt haben, zeigen, daß viele Sätze deduktiv gewonnen wurden. Beim Unterrichten wurden zweifelsohne viele Sätze ausführlich erläutert. Vor den Schülern eröffnete sich eine Fülle von Gedankengängen, deren Frucht die Fassung mathematischer Ergebnisse in Form auswendig zu lernender Gedichte war. Für den Satz des Pythagoras, der verschiedenen anderen Sätzen zugrunde liegt, wurden zwei Beweise gegeben. Vielfach wurden das Kongruenzprinzip sowie die Ähnlichkeit der Figuren angewandt, obwohl die Grundbegriffe der Ähnlichkeitslehre weder scharf abgegrenzt noch eindeutig definiert waren. Die Proportionalität der Seiten von Dreiecken mit gleichen Winkeln wurde in der Schattenlehre angewandt. Wie aus dem Kommentar zu den Werken Brahmaguptas hervorgeht, wurde die Ähnlichkeitslehre auch beim Beweis der Regel zur Bestimmung des Radius eines einem Dreieck umbeschriebenen Kreises verwendet: Der Durchmesser ist gleich dem Produkt zweier Seiten, das durch die auf die dritte Seite gefällte Höhe zu dividieren ist [108, S. 207 bis 208]. Gleichzeitig wurden verschiedene Sätze, wie auf der Hand liegt, auch ohne Beweis angewandt.

In anderen Fällen wurden infinitesimale Überlegungen angestellt, die allerdings logisch nicht exakt waren. So fügt der Kommentator in seinen Erläuterungen zu Bhâskaras II. Regeln über Oberfläche und Volumen einer Kugel hinzu, daß man die Kugel als eine Gesamtheit nadelförmiger Pyramiden auffassen kann, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt und deren Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel liegen. In der Tat läßt sich aus derartigen Überlegungen leicht ein Zusammenhang zwischen Kugelvolumen und Kugeloberfläche herleiten. Ähnliche atomistische Vorstellungen findet man auch bei Gaṇeśa, und zwar bei der Erläuterung des Satzes über den Flächeninhalt des Kreises. Darüber hinaus wissen wir schließlich, daß in der Geometrie zahlentheoretische und algebraische Mittel angewandt wurden und daß umgekehrt geometrische Vorstellungen zur Erläuterung mancher arithmetischen Aussagen dienten.

Solche Beispiele haben wir bereits früher angegeben. Hier sei noch angefügt, daß wir bei Bhâskara II. Zeichnungen finden, die zur Begründung der Identitäten

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$
$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$$
$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

herangezogen werden. Die erste Identität war von Bedeutung für den einen seiner Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes (vgl. S. 99).

Anfänge der Trigonometrie. Für die Entwicklung der Mathematik waren die Arbeiten der indischen Gelehrten auf dem Gebiet der Trigonometrie von außerordentlicher Bedeutung, obwohl sie hier noch nicht weit vordringen konnten.

Im Zusammenhang mit dem Aufschwung der Astronomie wurden in den hellenistischen Ländern, die später teilweise zu römischen Provinzen wurden, sowohl in der Entwicklung graphischer Lösungsverfahren als auch bei der Berechnung der Sehnenlängen bedeutende Fortschritte erzielt. Im „Analemma" des Ptolemaios wurden die graphischen Konstruktionsmethoden zur Herstellung von Sonnenuhren, d. h. die Methoden zur Feststellung der zeitabhängigen Sonnenlage, erläutert, die damit auch zur Bestimmung der Tageszeit geeignet waren. Den Konstruktionen lag die orthogonale Projektion einer Kugel auf die drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen des Meridians, des Horizonts und des Vertikalkreises zugrunde. Die gesuchten Bogenstücke wurden hierbei mit Hilfe der bekannten Halbsehnen bekannter Bogenteile konstruiert. Auf der anderen Seite ist im „Almagest" des Ptolemaios bereits eine recht entwickelte Sehnentrigonometrie vorhanden. Die Inder stützten sich auf die Werke der hellenistischen Astronomen, leisteten jedoch auch wesentliche eigene Beträge. Offenbar wurde die Entwicklung der Astronomie in Indien durch die früheren im „Analemma" enthaltenen Methoden beeinflußt, die hier zu einem System von Berechnungsverfahren ausgebaut wurden. Das wichtigste war die Ersetzung der Sehne durch den Sinus. An und für sich scheint dies nicht so wesentlich zu sein, da die zum Bogen φ gehörende Sehne gleich dem doppelten Sinus des Bogens $\frac{\varphi}{2}$ ist, d. h., sich vom Sinus nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. In Wirklichkeit war aber der Übergang von der Sehne zur Halbsehne von weittragender Bedeutung, da er naturgemäß die Einführung von Funktionen gestattete, die die Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks miteinander verknüpfen. In Indien wurde das Fundament der Trigonometrie als der Lehre von den trigonometrischen Größen gelegt, obwohl paradoxerweise gerade der Berechnung von Dreiecken die geringste Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

Sinus, Kosinus und Sinus versus, d. h. die Differenz zwischen dem Radius und dem Kosinus, treten bereits in den Siddhântas und in der „Âryabhaṭîya" auf. Die Sinuslinie wurde ardhajîva (oder ardhajyà) genannt: ardha bedeutet halbe, jîva Bogensehne. Später bezeichnete man den Sinus abgekürzt mit jîva. In der arabischen Literatur wurde aus diesem indischen Terminus ǧiba; da aber in der arabischen Schrift nur die Konsonanten gesetzt werden, verwandelte sich das ungebräuchliche Wort ǧiba in

das echte arabische Wort ǧaib, was soviel wie Busen, Kleiderausschnitt, Erhabenheit bedeutet. Die Verwendung dieses Wortes in dieser Bedeutung treffen wir bereits in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts bei al-Ḫuwarizmī und al-Ḥabas; al-Battānī benutzte übrigens das Wort vatar – Sehne. Gegen 1154 benutzte Robert of Chester bei der Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische das Wort sinus, das die gleiche Grundbedeutung hat wie das arabische ǧaib. Etwas früher, etwa 1120, übersetzte Platon von Tivoli das Wort vatar durch chorda.

Den Kosinus bezeichneten die Inder als kotijivā, d. h. als Sinus des Restes (d. h. des Komplements zu 90°), oder abgekürzt als koti, was im Arabischen mit ǧaib al-tamam oder vatar al-tamam übersetzt wurde. Im 12. Jahrhundert treffen wir in den lateinischen Übersetzungen des Gerhard von Cremona die Ausdrücke sinus residui bzw. bei Platon von Tivoli den Ausdruck chorda residui an. Im 15. Jahrhundert benutzte man seit Peurbach und Regiomontanus den Terminus sinus complementi. Soweit bekannt ist, tritt das hieraus durch Umstellung und Abkürzung entstandene co. sinus erstmalig bei dem englischen Astronomen E. Gunter (1581—1626) im Jahre 1620 auf.

Mit dem Wort utkramajîvâ bezeichneten die Inder den Sinus versus, den wir auch bei Gerhard von Cremona antreffen. Dieser Übersetzer bezeichnete den Sinus zum Unterschied von dem Sinus versus mit dem Terminus Sinus rectus und den Radius des Kreises als sinus totus, d. h. als vollständigen Sinus. Der zuletzt genannte Terminus hielt sich in den europäischen Werken über Trigonometrie bis in die Zeiten Eulers hinein, als man allmählich dazu überging, die trigonometrischen Formeln für $r = 1$ zu schreiben.

Die ersten Beziehungen zwischen trigonometrischen Größen ergaben sich unmittelbar aus dem pythagoreischen Lehrsatz. Neben der einfachsten Beziehung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

spielte die Regel zur Berechnung des Sinus des halben Bogens

$$\sin^2\alpha + \sin \text{ vers}^2\alpha = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

eine große Rolle. Die Inder formulierten diese Sätze in Worten für einen von eins verschiedenen Radius. Sie waren bereits den Verfassern der Siddhântas bekannt; explizite formuliert treten sie allerdings erst bei Varâhamihira auf. Bhâskara benutzte im 12. Jahrhundert bereits die Formeln für den Sinus der Winkelsumme bzw. der Winkeldifferenz.

Die Inder betrachteten die trigonometrischen Größen nur im Bereich des ersten Quadranten.

Die Anwendung der Trigonometrie in der Astronomie ist ohne Tabellen unmöglich. Die ersten Tabellen für den Sinus und für den Sinus versus finden wir bereits in der „Sûryasiddhânta“ und in der „Âryabhaṭiya“. In dem zuletzt genannten Werk sind für beide Funktionen je 24 Werte angegeben, und zwar von $3°45' = 225'$ mit einer Schrittweite von je 225′. Sollte hier als Vorbild irgendeine griechische Sehnentabelle gedient haben, so war es keineswegs die des Ptolemaios. Im „Almagest“ beträgt die Schrittweite des Arguments 30′, was einer Sinustabelle mit einer Schrittweite von 15′

entspricht; ferner sind dort die Werte genauer tabelliert. Wir wollen den Anfang und das Ende der altindischen Tabelle anführen. Die Spalte der ersten Differenzen Δ^1 fehlt zwar in der „Sûryasiddhânta", doch ist sie bei Âryabhaṭa vorhanden. Die zweiten Differenzen Δ^2 und die bis auf hundertstel Minuten genauen Sinuswerte sind für weitere Erläuterungen angegeben.

Bogen		Sinus der Inder			Sinus versus	Sinuswerte in Minuten
in Grad und Minuten	in Minuten	in Minuten	Δ^1	Δ^2		
3° 45′	225	225	224		7	224,84
7 30	450	449	222	−2	29	448,72
11 15	675	671	219	−3	66	670,67
15 00	900	890		−4	117	889,76
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	. . . .	. . . . .
78 45	4725	3372		−14	2767	3371,70
82 30	4950	3409	37	−15	2989	3408,24
86 15	5175	3431	22	−15	3213	3430,39
90 00	5400	3438	7		3438	3437,75

Die Sinustabelle ist zum größten Teil bis einschließlich der letzten Ziffern genau angegeben; in zehn von 24 Fällen beträgt der Fehler in der letzten Stelle eine Einheit, wenn man von den heute gebräuchlichen Rundungsregeln ausgeht.

Eine charakteristische Besonderheit der Tabelle ist das Maß der trigonometrischen Größen. Ebenso wie in der hellenistischen Wissenschaft wurde der Kreis in 360° und 1° in 60′ eingeteilt, jedoch haben die alexandrinischen Astronomen den Durchmesser des Kreises in 120, d. h., den Radius in 60 Teile geteilt und drückten in diesen Teilen und deren Sexagesimalteilen die Sehnenlängen aus. Die Verfasser der Siddhântas und Âryabhaṭa hingegen drückten sowohl den Radius als auch die trigonometrischen Größen in Teilen des Kreisumfanges aus. Den Gelehrten, die in den Traditionen der klassischen griechischen Mathematik erzogen worden waren, wäre die Messung gerader Strecken in Teilen des Kreisumfanges völlig fremd gewesen. Wie man aus den Tabellen entnehmen kann, setzten die Inder den Radius des Kreises gleich 3438′. Zweifellos ist dieser gerundete Wert aus der Zahl 3437,7... hervorgegangen, die sich für den Radius aus $2\pi r = 21\,600'$ mit $\pi = 3.14146$ ergibt. Dieser Wert für π ist in der „Âryabhaṭîya" belegt.

Das Verfahren zur Berechnung der Tabellen ist in der bekannten indischen Literatur nicht beschrieben, jedoch dürfte es die folgende Form gehabt haben: Zunächst bestimmte man den Sinus von 30°, der sich als halbe Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks zu 1719′ ergibt, den Sinus $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3438' = 2978'$ (der Fehler in der letzten Stelle ergibt sich offenbar aus dem zu ungenauen Näherungswert für $\sqrt{3}$) und den Sinus $45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3438' = 2431'$. Die Anwendung der Regel für den Sinus des halben Bogens lieferte dann den Sinus von 22°30′, 11°15′, 15°, 7°30′ und 3°45′. Sodann

konnte man die Sinus der zugehörigen Komplementbogen, der halben Komplementbogen usw. bestimmen. Man ging nicht weiter als bis zum Bogen von 225′, wahrscheinlich deshalb, weil der Wert von Sinus 225′ im Rahmen der Rechengenauigkeit mit der Bogenlänge selbst übereinstimmte. Den Sinus noch kleinerer Bogen setzte man naturgemäß ebenfalls gleich der Bogenlänge der zugehörigen Bogen, zumal für kleine Bogen eine solche Annäherung durchaus anschaulich ist. Die Spalte der ersten Differenzen gestattete es, die in der Tabelle fehlenden Funktionswerte durch lineare Interpolation zu ermitteln.

In der „Sûryasiddhânta" ist noch eine Regel angegeben, mit deren Hilfe man vom Sinus 225′ ausgehend die gesamte Tabelle reproduzieren konnte, so daß der indische Astronom gleichsam die gesamte Sinustabelle im Kopf hatte. Denn bezeichnet man den indischen Sinus mit Sin, so gilt

$$\mathrm{Sin}\,(n+1)\,\alpha = \mathrm{Sin}\,n\alpha + \Delta^1_{n-1} - \frac{\mathrm{Sin}\,n\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

mit

$$\Delta^1_{n-1} = \mathrm{Sin}\;\; n\alpha - \mathrm{Sin}\;\;(n-1)\alpha \;\text{ und }\; \alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha = 225'.$$

Man muß annehmen, daß diese Regel bei der Analyse der Tabelle der Sinuswerte und der ersten Differenzen entdeckt worden ist. Es fällt nahezu in die Augen, daß die zweiten Differenzen mit den Sinuswerten wachsen, wobei der Quotient $\frac{\mathrm{Sin}\,n\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$ sehr nahe beim Wert der zweiten Differenz Δ^2_{n-1} liegt.

Varâhamihira stellte ähnlich den Alexandrinern die Tabelle der Sinuswerte für den Durchmesser 120 auf. Bhâskara kehrte im 12. Jahrhundert wieder zum Radius 3438 zurück. Im vierten Teil der „Krone der Wissenschaften" Bhâskaras finden wir ein anderes Verfahren zum Aufstellen einer Tabelle mit der Schrittweite von einem Grad, beginnend mit dem Sinus 1°, der zu 60′ angenommen wurde. Dieses Verfahren beruht auf der Regel für die Summe oder die Differenz, die man bei beliebigem Radius in der Form

$$\mathrm{Sin}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta \pm \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}{r}$$

schreiben kann. Hier bezeichnen Sin und Cos den Sinus bzw. Kosinus für einen Kreis vom Radius r. Für $r = 3438$ und $\mathrm{Sin}\,1° = 60$ erhält Bhâskara

$$\frac{\mathrm{Sin}\,1°}{r} = \frac{10}{573}, \qquad \frac{\mathrm{Cos}\,1°}{r} = 1 - \frac{1}{6569}$$

(der letzte Wert ist auf fünf Dezimalen hinter dem Komma genau) und schließlich

$$\mathrm{Sin}\,(\alpha \pm 1°) = \mathrm{Sin}\,\alpha - \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{6569} \pm \frac{10\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{573}.$$

Die Tabellen Bhâskaras sind erheblich genauer als die Âryabhaṭas.

Bei der Lösung astronomischer Probleme schlugen die indischen Gelehrten einen Weg ein, der zur Schaffung von Rechenregeln führte, die den graphischen Konstruktionen im Sinne des „Analemma" entsprachen. Um aus irgendwelchen Daten die Höhe der Sonne, die Dauer eines Tages oder einer Nacht usw. zu bestimmen, wurden in den Regeln der Siddhântas und anderer Werke die Schritte der Rechenoperationen, die

man mit dem Sinus, dem Sinus versus und dem Radius vorzunehmen hatte, genau angegeben. Somit erfolgte die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke gleichsam auf dem Umwege. Ein System von Regeln zur Berechnung von Dreiecken, dessen Anfänge im „Almagest" enthalten sind, trat hier nicht in Erscheinung.

In den indischen Regeln sind implizite einige Sätze der sphärischen Trigonometrie enthalten. So können wir durch einfache Umformungen aus den Vorschriften der „Sûryasiddhânta" den Sinussatz für das rechtwinklige Dreieck und sogar den allgemeinen Kosinussatz herleiten. Die Inder selbst jedoch haben derartige Sätze als allgemein anwendbare Beziehungen zwischen den Dreieckselementen nicht ausgesprochen. Sie blieben zunächst noch in Hinweise zur Lösung von Einzelproblemen eingebettet, und zwar in einer Form, die von der späteren sehr verschieden war.

Zur Berechnung von Höhen und Entfernungen wurden in Indien einige Regeln entwickelt, die auf der Messung des Schattens eines vertikalen Gnomonstabes und auf der Ähnlichkeit von Dreiecken beruhten. (vgl. S. 161). Der in zwölf gleiche Teile eingeteilte Gnomon und seine Projektion (Schatten) werden auch in trigonometrischen Aufgaben angewandt, wobei sie sowohl im Zähler als auch im Nenner von Bruchausdrücken auftreten. Dadurch wurde die Einführung des Tangens und des Kotangens vorweggenommen, die wir den Gelehrten des arabischen Kalifats aus der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts verdanken.

Obwohl die Inder keine neuen trigonometrischen Funktionen explizite eingeführt haben, äußerte sich doch das letzte helle Aufflammen der indischen Mathematik am Ende der von uns betrachteten Zeit in der Entdeckung der unendlichen Potenzreihen für den Tangens und den Arcustangens.

Die Berechnung von π und die Arcustangensreihe. Das Ziel der Entwicklung des Kreisbogens nach Potenzen des Tangens oder des Kotangens bestand in der genaueren Berechnung von π. Den Anstoß zur Entwicklung neuer Ideen in der Mathematik gaben wiederum numerische Problem der Astronomie.

Die älteste zuverlässige Quelle ist hier das in Sanskrit geschriebene „Wissenschaftliche Sammelwerk" (Tantrasârasaṁgraha) des südindischen Gelehrten Nîlakaṇṭha, der auch durch seine wertvollen Kommentare zur „Âryabhaîyṭa" bekannt geworden ist. Nach den astronomischen Daten im „Wissenschaftlichen Sammelwerk" zu urteilen, ist es in der Zeit von 1501 bis 1502 verfaßt worden [77 — 81a].

Ähnlich wie andere Gelehrte des Orients (vgl. S. 318) war auch Nîlakaṇṭha davon überzeugt, daß das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser irrational ist. In seinem Kommentar zur „Âryabhaṭiya" heißt es:

„Ist der Durchmesser, der mit Hilfe irgendeiner Maßeinheit gemessen wird, mit dieser Einheit kommensurabel, so läßt sich der Kreisumfang nicht genau mit Hilfe der gleichen Maßeinheit messen; ist jedoch in Bezug auf irgendeine Maßeinheit der Kreisumfang meßbar, so läßt sich der Durchmesser nicht mit Hilfe dieser Einheit messen" [77, S. 81, Sanskrit, englisch]. Zur genauen Berechnung von π, dessen Wert die Gelehrten aus dem 6. bis 12. Jahrhundert bestenfalls bis auf vier Dezimalen hinter dem Komma genau kannten, wird der Viertelkreis im „Wissenschaftlichen Sammelwerk" in Form unendlicher Zahlenreihen dargestellt, die man aus der allgemeinen

Potenzreihe für den Arcustangens erhält. Beweise werden in dem in Versform geschriebenen Werk nicht gegeben. Die allgemeine Entwicklungsregel lautet:

„Nimm einen Bogen des Kreises derart, daß sein Sinus kleiner ist als sein Kosinus. Multipliziere den Sinus des Bogens mit dem Radius und teile durch den Kosinus. Dies gibt die erste Menge. Multipliziere diese Menge mit dem Quadrat des Sinus und dividiere durch das Quadrat des Kosinus, und du erhältst die zweite Menge. Wiederhole dies, indem du mit dem Quadrat des Sinus multiplizierst und durch das Quadrat des Kosinus dividierst. Die gewonnenen Mengen dividiere nacheinander durch die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... Beginnst du jetzt damit, die gewonnenen Mengen abwechselnd von der ersten zu subtrahieren und zu dieser zu addieren, so erhältst du schließlich den Kreisbogen" [77, S. 77, Sanskrit, englisch].

Der angegebenen Regel entspricht die Formel

$$r\varphi = \frac{r\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \frac{r\,\mathrm{Sin}^3\varphi}{3\,\mathrm{Cos}^3\varphi} + \frac{r\,\mathrm{Sin}^5\varphi}{5\,\mathrm{Cos}^5\varphi} - \cdots \tag{1}$$

mit der Einschränkung $\mathrm{Sin}\,\varphi < \mathrm{Cos}\,\varphi$ (die Forderung $\mathrm{Sin}\,\varphi \leq \mathrm{Cos}\,\varphi$ wäre genauer). Offenbar berücksichtigte Nilakantha die Konvergenz der Reihe (1) für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ und deren Divergenz für $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Im letzteren Falle wird die Verwendung einer Reihe empfohlen, die den Komplementbogen zum Viertelkreis liefert, nämlich

$$r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{r\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} - \frac{r\,\mathrm{Sin}^3\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{3\,\mathrm{Cos}^3\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} + \frac{r\,\mathrm{Sin}^5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{5\,\mathrm{Cos}^5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} - \cdots \tag{2}$$

In unseren modernen Bezeichnungen würden für $r = 1$ die Reihen (1) und (2) den Reihen

$$\varphi = \tan\varphi - \frac{\tan^3\varphi}{3} + \frac{\tan^5\varphi}{5} - \cdots \tag{1'}$$

und

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \cot\varphi - \frac{\cot^3\varphi}{3} + \frac{\cot^5\varphi}{5} - \cdots \tag{2'}$$

entsprechen.

Zur Berechnung von π wird in dem „Wissenschaftlichen Sammelwerk" eine Reihe angegeben, die sich aus (1) für $\varphi = 45°$ ergibt. Bemerkenswert ist, daß $\frac{C}{4d}$ oder $\frac{\pi}{4}$ nicht einfach durch eine Partialsumme S_n, sondern durch die Summe S_n und die Korrektur K_n ausgedrückt werden, wobei K_n in drei verschiedenen Formen angegeben wird, und zwar

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n \tag{3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K_n^{(1)} &= \frac{(-1)^n}{4n}, \\ K_n^{(2)} &= \frac{(-1)^n n}{4n^2+1}, \\ K_n^{(3)} &= \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n(4n^2+5)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wie man leicht sieht, gilt $|K_n^{(1)}| > |K_n^{(3)}| > |K_n^{(2)}|$. Diese Korrekturen verbessern sogar bei kleinen Werten von n die Näherungswerte sehr erheblich. Begnügt man sich z. B. damit, auf Tausendstel genau zu rechnen, so gilt $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$, $S_3 = 0{,}825$ und $S_3 + K_3^{(1)} = 0{,}775$, so daß der Fehler bei Benutzung des Korrekturgliedes auf ein Viertel reduziert wird.

Neben der langsam konvergierenden Reihe (3) sind in dem „Wissenschaftlichen Sammelwerk" auch noch andere Reihen angegeben, die bei gleicher Gliederzahl wesentlich bessere Näherungswerte liefern. Am einfachsten ist die Reihe

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2 - 1} + \cdots \tag{5}$$

mit einem Korrekturglied in den beiden folgenden Formen:

$$K_n' = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)^2}, \qquad K_n'' = \frac{(-1)^n}{2(2n-1)^2 + 2}. \tag{6}$$

Die ersten beiden Glieder von (5) geben für $\frac{\pi}{4}$ den Wert 0,767 und mit dem Korrekturglied K_2' den Wert 0,787, dessen Fehler bei etwa 0,002 liegt.

Noch günstiger für die Berechnung sind die Reihen

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^5 - 5} + \frac{1}{7^7 - 7} - \cdots \tag{7}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5} - \cdots\right). \tag{8}$$

Die Zahl π wird im „Wissenschaftlichen Sammelwerk" durch den Bruch $\frac{104348}{33215}$ angegeben. Der zugehörige Dezimalbruch, den wir mit der elften Ziffer abbrechen, lautet 3,1415926539 und weist zehn richtige Ziffern auf. Dies war ein hervorragendes Ergebnis der numerischen Mathematik, obwohl bereits zu Beginn des 15. Jahrhunderts Ǧamšid al-Kāšī auf anderem Wege genauere Näherungswerte gewonnen hatte (vgl. S. 312 ff).

Nicht weniger bemerkenswert als die im „Wissenschaftlichen Sammelwerk" angegebenen Resultate waren die Methoden, mit deren Hilfe man diese Ergebnisse gefunden hat. Nīlakaṇṭha formuliert zwar nur die Regeln, doch sind wir, wenn auch nicht ganz vollständig, über das Verfahren ihrer Herleitung informiert. Eine solche Herleitung finden wir z. B. in dem anonymen „Erläuternden Kommentar" (Yuktibhāṣā), einem in Prosa verfaßten Werk aus dem 17. Jahrhundert, das in der auch heute noch in Südindien gebräuchlichen Sprache Malayalam geschrieben ist. Es gibt keinen Grund zu der Annahme, daß Nīlakaṇṭha und seine unbekannten Vorgänger oder Zeitgenossen, die sich mit Reihen beschäftigten, andere Methoden angewandt haben als die in dem „Erläuternden Kommentar" beschriebenen. Wir wollen diese Methoden in modernen Bezeichnungen und Termini wiedergeben, ohne allerdings an ihrem Wesen etwas zu verändern.

Ausführlicher wollen wir uns mit der Herleitung der allgemeinen Arcustangensreihe (1) beschäftigen. Wie wir bald sehen werden, spielen hierbei drei Gesichtspunkte

die Hauptrolle: 1. Die Anwendung eines infinitesimalen Dreiecks zur Herleitung eines Ausdruckes, der dem Differential des Arcustangens äquivalent ist; 2. die Entwicklung dieses Ausdruckes, der die Form eines Bruches hat, in eine unendliche Potenzreihe und 3. die gliedweise Integration, die auf einer in der Grenze richtigen und der Integration von x^n bei natürlichem n äquivalenten Gleichung beruht.

1. Es sei $\widehat{BC}$ ein kleiner Kreisbogen eines Kreises mit dem Radius 1. $\overline{BD}$ und $\overline{B_1D_1}$ seien senkrecht zu $\overline{OC}$ (Abb. 40). Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

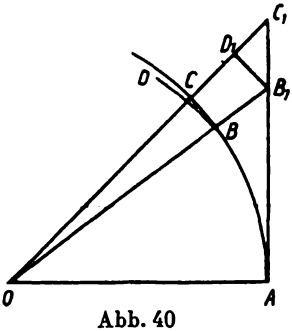


Abb. 40

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{1}{\overline{OB_1}},\quad \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{1}{\overline{OC_1}},\quad \overline{BD}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{OB_1}\cdot\overline{OC_1}}.$$

Ersetzen wir $\overline{BD}$ durch den Bogen $\widehat{BC}$ und ferner $\overline{OC_1}$ durch $\overline{OB_1}$, so folgt

$$\widehat{BC}=\frac{\overline{B_1C_1}}{1+AB_1^2}$$

oder, wenn $\sphericalangle AOB=\varphi$ gesetzt wird,

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}. \tag{9}$$

2. Die Tangensstrecke $t=\tan\varphi$ wird in n gleiche Teile geteilt und auf jeden die Gleichung (9) angewandt. Durch nachfolgende Summation und einen Grenzübergang, der keineswegs im modernen Sinne vorgenommen wird, erhält man für den Bogen φ die Zwischengleichung

$$\varphi=\arctan t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{kt}{n}\right)^2}. \tag{10}$$

Die Division unter dem Summenzeichen wird durch wiederholte Anwendung der Identität

$$\frac{b}{c}=1-\frac{c-b}{b}\cdot\frac{b}{c}$$

vorgenommen, die für $b<c$ die Reihe

$$\frac{b}{c}=1-\frac{c-b}{b}+\frac{(c-b)^2}{b^2}-\cdots \tag{11}$$

ergibt. Wird in (11) $b=1$, $c=1+\left(\frac{kt}{n}\right)^2$ gesetzt, so folgt

$$\varphi=\arctan t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t}{n}\left[1-\left(\frac{kt}{n}\right)^2+\cdots+(-1)^{m-1}\left(\frac{kt}{n}\right)^{2m-2}+\cdots\right]. \tag{12}$$

3. Zur Berechnung der rechten Seite von (12) wird zunächst die Summe

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1} \tag{13}$$

berechnet. Endliche Summen für die Potenzen der natürlichen Zahlen waren für $p=1, 2, 3$ bekannt. Den allgemeinen Satz (13) hat man wahrscheinlich durch Induk-

tion gewonnen. Wegen (13) geht die rechte Seite von (12) schließlich in die Arcustangensreihe (1) über.

Über die Methoden, mit deren Hilfe die unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots \tag{3'}$$

in besser konvergente Reihen umgeformt wurde, und darüber, wie man die Korrekturen zu den Partialsummen gewonnen hat, wissen wir weniger.

Dem „Erläuternden Kommentar" zufolge wurde die Reihe (5) gefunden, indem man die Glieder der Reihe (3') paarweise in Klammern zusammenfaßte, und zwar vom ersten oder vom zweiten ausgehend, und dann die so entstandenen beiden Reihen gliedweise voneinander subtrahierte. In der Tat erhält man im ersten Falle

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \cdots$$

und im zweiten Falle

$$\frac{4-\pi}{8} = \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots$$

Hieraus erhält man durch Subtraktion die Reihe (5).

Es existiert eine hinreichend einfache und durchaus glaubwürdige Rekonstruktion [81] für die Herleitung der Korrekturen (4) und zugleich der Reihen (7) und (8). Sie ist mit Mitteln durchgeführt, die den indischen Mathematikern des 15. Jahrhunderts durchaus geläufig waren. Setzt man für $\frac{\pi}{4}$ den Wert $\frac{377}{480}$ ein, der dem Wert $\pi = 3\frac{17}{120}$ entspricht und der bereits Âryabhaṭa und Bhâskara bekannt war, so ergibt die Berechnung der Differenzen zwischen $\frac{\pi}{4}$ und den Partialsummen (3') bereits in der ersten Näherung die Korrekturen $K^{(1)}$. Entwickelt man die Differenzen in Kettenbrüche, so erhält man in der zweiten Näherung die etwas kleineren Korrekturen $K^{(2)}$. In der Tat gilt

$$S_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{103}{480} = \frac{1}{4 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{35}{68}}}, \quad K_1^{(1)} = \frac{1}{4}, \quad K_1^{(2)} = \frac{11}{5},$$

$$\frac{\pi}{4} - S_2 = \frac{19}{160} = \frac{1}{8 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{8}}}, \quad K_2^{(1)} = \frac{1}{8}, \quad K_2^{(2)} = \frac{2}{17},$$

$$S_3 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{160} = \frac{1}{12 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}}, \quad K_3^{(1)} = \frac{1}{12}, \quad K_3^{(2)} = \frac{3}{27},$$

$$\frac{\pi}{4} - S_4 = \frac{69}{1120} = \frac{1}{16 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{5}{16}}}, \quad K_4^{(1)} = \frac{1}{16}, \quad K_4^{(2)} = \frac{4}{65}.$$

Dies wäre völlig ausreichend für eine vorläufige Annahme, daß $\left|\frac{\pi}{4} - S_k\right|$ sich in guter Näherung durch Brüche der Form $\frac{1}{4n}$ oder $\frac{n}{4n^2+1}$ ausdrücken läßt. Die weitere numerische Überprüfung könnte von der Richtigkeit der Schlußweise überzeugt haben. Wie man sieht, setzt diese Rekonstruktion neben der Anwendung von Kettenbrüchen oder eines diesen gleichwertigen Apparates nur eine sorgfältige Analyse der Zahlenbeziehungen bei der Suche nach den in ihnen steckenden Gesetzmäßigkeiten voraus. Diese Eigenart hatten aber die indischen Gelehrten seit jeher aufzuweisen.

Den Zähler und den Nenner der Zwischenkorrektur $K_n^{(3)}$ mag man als Summen der Zähler und Nenner von $K_n^{(1)}$ und $K_n^{(2)}$ gewonnen haben, wenn man für $K_n^{(2)}$ Zähler und Nenner vorher mit n multipliziert hat. Diese Operationen sind sämtlich nicht schwierig, obwohl sie sich auch nicht von selbst anbieten. Schließlich können die Reihen (7) und (8) auf folgendem Wege hergeleitet worden sein:

Setzt man

$$N_n^{(1)} = S_n + K_n^{(1)}, \quad K_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4n}$$

mit $N_1^{(1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} N_n^{(1)}$. Wegen

$$N_{n+1}^{(1)} - N_n^{(1)} = S_{n+1} - S_n + K_{n+1}^{(1)} - K_n^{(1)} = K_{n+1}^{(1)} - K_n^{(1)} + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

gilt

$$N_{n+1}^{(1)} - N_n^{(1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)(2n+2)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3 - (2n+1)}.$$

Drücken wir nun $N_2, N_3, \ldots, N_n, \ldots$ nacheinander aus, so erhalten wir die Reihe (7). Völlig analog kann man $N_n^{(2)} = S_n + K_n^{(2)}$ und $K^{(2)} = \frac{(-1)^n n}{4n^2+1}$ setzen und erhält

$$N_{n+1}^{(2)} - N_n^{(2)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{(2n+1)(4n^2+1)[4(n+1)^2+1]} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)},$$

woraus sich die Reihe (8) ergibt. Die Transformationen, die wir algebraisch in allgemeiner Form wiedergegeben haben, mögen in Wirklichkeit rechnerisch für einige Anfangsglieder vorgenommen worden sein.

Die Entwicklung des Arcustangens in eine Potenzreihe und deren Anwendung zur Berechnung von π sind außerdem in der Abhandlung „Die Technik der Rechenoperationen" (Karana-paddhati) beschrieben. Der Verfasser des Werkes ist unbekannt; die Entstehungszeit dürfte in das 15. oder 16. Jahrhundert fallen. In diesem Werk ist die Regel zur Gewinnung der Potenzreihenentwicklungen des Sinus und des Kosinus in Worten ausgedrückt: „Teile den Bogen des Kreises durch zwei, drei usw. Radien, multipliziere dann den Bogen mit dem ersten Ergebnis, das Gewonnene mit dem zweiten Ergebnis usw. Schreibe die geraden Größen unter den Bogen und die ungeraden unter den Radius und ziehe jede zweite ab. Es ergibt sich der Sinus und der Kosinus des Bogens" [81b, 81c, S. 326]. Mit anderen Worten: Bezeichnet man den Bogen, der dem Winkel φ entspricht, mit s und den Radius mit r, so ergeben sich die beiden Folgen

$$s, \frac{s^3}{2 \cdot 3 r^2}, \frac{s^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 r^4}, \ldots \quad \text{und} \quad r, \frac{s^2}{2r}, \frac{s^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^3}, \ldots$$

und aus diesen die Reihenentwicklungen

$$r \sin\varphi = s - \frac{s^3}{3!\, r^2} + \frac{s^5}{5!\, r^4} - \cdots$$

und

$$r \cos\varphi = r - \frac{s^2}{2!\, r} + \frac{s^4}{4!\, r^3} - \cdots$$

Darüber hinaus wird unter der Voraussetzung, daß der Bogen klein ist, der Sinus durch die Partialsumme

$$r \sin\varphi \approx s - \frac{s^3}{6r^2}$$

ausgedrückt. Bemerkenswert ist, daß ein kleiner Bogen seinerseits durch die Summe der ersten beiden Glieder der Arcustangensentwicklung wiedergegeben wird:

$$s = r\,\varphi \approx r \sin\varphi + \frac{(r \sin\varphi)^3}{6r^2}.$$

Analoge Sätze finden wir auch in dem „Wissenschaftlichen Sammelwerk" des Nīlakaṇṭha.

Die „Technik der Rechenoperationen" ist ähnlich dem „Wissenschaftlichen Sammelwerk" in Versen abgefaßt und enthält die Formulierungen der Regeln ohne Beweise. Die Herleitung der Sinusreihe finden wir im „Erläuternden Kommentar". Ohne uns mit Einzelheiten zu befassen, wollen wir lediglich erwähnen, daß hier aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke, von denen das eine durch die Sehne eines unendlich kleinen Kreisbogens und die zugehörigen Inkremente der Ordinate und Abszisse gebildet wird, während das andere den durch den Mittelpunkt des Bogens gelegten Radius sowie die Ordinate und Abszisse zu Seiten hat, eine Beziehung hergeleitet wurde, die der Differentialgleichung

$$y\,ds = r\,dx$$

mit $y = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$ äquivalent ist. Bei der weiteren Umformung der Integralsumme solcher Ausdrücke in eine Potenzreihe wurden die Eigenschaften von Dreieckszahlen, Pyramidenzahlen und ähnlicher Summen verwendet, die bereits Nārāyaṇa bekannt waren.

Die zuletzt betrachteten Entdeckungen krönen als würdiger Abschluß die Entwicklung der Mathematik im mittelalterlichen Indien. Hier haben die indischen Gelehrten viele Ergebnisse vorweggenommen, die in Europa im 17. oder sogar erst im 18. Jahrhundert entdeckt wurden. Die Arcustangensreihe (1) wurde von James Gregory im Jahre 1671 und von Gottfried Wilhelm Leibniz, nach dem die Reihe (3′) auch heute noch benannt wird, im Jahre 1673 wiederentdeckt. Die Darstellung des Arcustangens in der Form (10) benutzte im Jahre 1739 Leonhard Euler, als er π in eine halbkonvergente Reihe entwickelte, die zwölf Dezimalstellen lieferte [21, III, S. 672 ff.]. In den modernen Lehrbüchern der Analysis wird die Arcustangensreihe häufig nach einer Methode hergeleitet, die der indischen ähnlich ist: In der Gleichung

$$\arctan t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

wird der Integrand in eine Potenzreihe entwickelt und dann gliedweise integriert.

Reihenentwicklungen durch unbegrenzte Division etwa in der Form von (11) wurden um die Mitte der sechziger Jahre des 17. Jahrhunderts durch N. Mercator und I. Newton systematisch eingeführt. Die Grenzwerte (13) oder diesen gleichwertige Sätze wurden in den dreißiger Jahren des 17. Jahrhunderts für beliebiges natürliches p durch P. Fermat, Bl. Cavalieri, G. Roberval u. a. entdeckt, und zwar zunächst durch unvollständige Induktion. Mit dem Problem der Konvergenzverbesserung für unendliche Reihen begannen sich im 18. Jahrhundert Chr. Goldbach u. a., insbesondere L. Euler, zu beschäftigen.

So haben die Inder, von der angenäherten Berechnung der Zahl π ausgehend, die man bis dahin mit den Mitteln der Elementarmathematik erledigte, eine ganze Reihe von Verfahren entwickelt, die Keime der Differential- und Integralrechnung und der Reihenlehre enthielten. Allerdings sind diese Keime nicht in Indien selbst zur Blüte gekommen. Da sie auf spezielle Einzelprobleme zugeschnitten waren, konnten sie keine breiteren, weitere Forschungen fördernde Anwendungen finden, wie das etwas später in Europa der Fall war. Hier entwickelte sich die Infinitesimalrechnung in dauernder Wechselwirkung mit der allgemeinen Mechanik und der Himmelsmechanik, mit den Anfängen der theoretischen Physik usw.

Das unendlich kleine Dreieck, das den Indern zur Herleitung der Sinusreihe gedient hatte, wurde später von Bl. Pascal untersucht (1658), allerdings mit dem Unterschied, daß in dem Dreieck Pascals als Hypotenuse nicht die Sehne, sondern die Tangente an den Mittelpunkt des Kreisbogens gewählt war. Aus diesem Dreieck, das Leibniz als das charakteristische bezeichnete, leitete Pascal verschiedene wichtige Folgerungen ab, angefangen von der obengenannten Differentialgleichung $y\,ds = r\,dx$ und der dieser entsprechenden Integralbeziehung, wofür auch der Verfasser des „Erläuternden Kommentars" ein Äquivalent kannte. Die Potenzreihen für Sinus, Kosinus und Arcussinus wurden in Europa erstmalig von Isaac Newton etwa im Jahre 1666 hergeleitet, wobei dieser vom charakteristischen Dreieck und der Gleichung $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für den Kreis $y^2 = 1 - x^2$ ausging. Mit Hilfe des von ihm entdeckten binomischen Lehrsatzes und unter Verwendung der gliedweisen Integration leitete er zunächst die Arcussinusreihe her, sodann aus dieser durch Reiheninversion die Sinusreihe und schließlich durch Ausziehen der Quadratwurzel die Kosinusreihe.

Die Gedanken und Ideen des „Wissenschaftlichen Sammelwerkes" von Nīlakaṇṭha und der anderen hier beschriebenen Werke blieben seinerzeit außerhalb Indiens unbekannt. Andere grundlegende Entdeckungen der indischen Gelehrten, wie das dezimale Stellenwertsystem, Elemente der Trigonometrie, verschiedene Verfahren der Algebra und der Zahlentheorie fanden bereits seit dem Ende des 8. Jahrhunderts Verbreitung in den arabischen Ländern, wodurch sie auf die spätere Entwicklung der Wissenschaft in Ost und West einen ungeheuren Einfluß ausgeübt haben.

DIE MATHEMATIK IN DEN LÄNDERN DES ISLAM

Allgemeines. Im 7. Jahrhundert ließ ein ungewöhnlich rascher Aufschwung des arabischen Reiches die Welt aufhorchen. Ende des 6./ Anfang des 7. Jahrhunderts hatte Arabien eine schwere wirtschaftliche und politische Krise zu überstehen. Im Jahre 622 war Muḥammad (Mohammed), der Begründer der neuen Religion, gezwungen, vor seinen politischen und religiösen Gegnern von Mekka nach Yatrib, dem heutigen Medina, zu fliehen. Diese Form des Monotheismus, Islam[1]) genannt, hatte sich in den unteren Gesellschaftsschichten auf der Basis bereits bestehender Glaubensformen als Gegenpol zum Polytheismus der herrschenden Schichten Arabiens entwickelt. In Medina gründete Muḥammad einen Bund der zum Islam übergetretenen arabischen Stämme. Muḥammad selbst wurde als Prophet Allahs anerkannt. Das Jahr 622, d. h. das Jahr seiner Flucht (Hiǧra) aus Mekka, wurde zum ersten Jahr der Zeitrechnung im neuen Kalender der Moslem, wie man die Anhänger des Islam nennt, erklärt. Im Jahre 630 kehrte Muḥammad als Sieger nach Mekka zurück, starb jedoch zwei Jahre später. Nachfolger des „Propheten" wurden die Kalifen[2]); diese begannen eine Reihe von Eroberungszügen in die reichen Länder des Ostens und Westens. Sie kämpften zur Verbreitung des Islam unter der Losung des heiligen Krieges gegen die Ungläubigen. Karl Marx schrieb am 2. Juni 1853 in einem Brief an Friedrich Engels: „Was die Religion angeht, so wird sich die Frage in die allgemeine und darum leicht beantwortbare auflösen: Warum *erscheint* die Geschichte des Orients als eine Geschichte der Religionen?" [6, Bd. 1, S. 574]

In einem knappen Jahrhundert gelang es den Arabern, ein riesiges Gebiet zu erobern. Im Jahre 637 beherrschten sie bereits Syrien und den Iran, bis zum Jahre 642 hatten sie Ägypten unterworfen. Die byzantinischen Garnisonen in Syrien und Ägypten waren außerstande, stärkeren Widerstand zu leisten, und die schwer geknechteten Handwerker und Bauern neigten in der Hoffnung auf eine Besserung ihrer Lebenslage hier ebenso wie in den anderen Ländern sogar dazu, die Araber zu unterstützen. Im Jahre 711 überschritten die Araber gemeinsam mit den Berbern die Meerenge zwischen Afrika und Europa, die später nach dem Namen des arabischen Heerführers Tarek ben Said Gibraltar genannt wurde (ǧebel at-Tarek, d. h. der Berg des Tarek). 712 eroberten arabische Heere Choresm und einen Teil des Pañjāb. Um die Mitte des 8. Jahrhunderts beherrschten die Kalifen die iberische Halbinsel außer einem schmalen Landstreifen Asturiens, sämtliche Mittelmeergebiete Afrikas, den Nahen

[1]) Islam bedeutet soviel wie Ergebenheit (gegenüber Allah).

[2]) Kalif bedeutet soviel wie Stellvertreter (des Propheten).

Osten, große Gebiete von Kleinasien, des Kaukasus und Mittelasiens und einen Teil des Tales beiderseits des Indus. Allerdings hatte der anfangs unaufhaltsame Vormarsch allmählich an Kraft eingebüßt. Chinas Grenzen widerstanden ihm. 717 bis 718 gelang es den Byzantinern, den letzten Versuch der arabischen Flotte abzuschlagen, Konstantinopel von der See aus zu erobern. Auf den Feldern Frankreichs wurden die arabischen Heere im Jahre 732 vom Heer Karl Martells in der Schlacht bei Poitiers geschlagen. Dafür gelang es den Arabern, in der Mitte des 9. Jahrhunderts für nahezu zwei Jahrhunderte festen Fuß auf Sizilien zu fassen.

Zur Zeit der Omajjadendynastie befand sich die Hauptstadt des Kalifats seit dem Jahre 635 in Damaskus in Syrien. Im Jahre 772 verlegte der zweite Kalif der neuen Dynastie der Abbāsiden, al-Manṣūr, die Hauptstadt nach dem von ihm gegründeten Baghdād im Irak.

Im Hintergrund der politischen Ereignisse im Kalifat stand der Verfall der Sklavenhaltergesellschaft und die Entstehung der Feudalordnung. Die Herrscher Baghdāds schenkten der Landwirtschaft und folglich auch der künstlichen Bewässerung große Aufmerksamkeit. Die städtische Kultur erlebte eine hohe Blüte, es entstanden großartige architektonische Bauwerke, das Handwerk nahm einen großen Aufschwung, und es wurde ein weit verzweigter Handel getrieben. Gleichzeitig erfolgte in etwas anderer Form als in Europa eine Belehnung von Feudalherren mit Ländereien, wodurch dezentralisierende Tendenzen gefördert wurden. Ferner erschütterten die von Zeit zu Zeit auftretenden Bauern- und Sklavenaufstände die Grundpfeiler der Kalifenherrschaft. Dadurch wurde der spätere Verfall des Kalifats gefördert.

Die Araber zeigten, vor allem am Anfang, eine gewisse Toleranz gegenüber dem Glauben und den Sitten der unterworfenen Völker. Doch brachte das Bekenntnis zum Islam entschiedene Vorteile. Allmählich trat unter gleichzeitiger Wirkung von Förderung und Zwang der größte Teil der Bevölkerung im Kalifat zum Islam über. Dies wurde insbesondere durch den eklektischen Wesenszug des Islam gefördert, der Elemente des Polytheismus, des mosaischen Glaubens und des Christentums in sich aufnahm. Das Arabische, die offizielle Sprache des Staates und der Konfession, wurde in vielen Ländern zur Volkssprache und ganz allgemein zur Sprache der Intelligenz.

In den eroberten Ländern stießen die Araber auf eine höhere Kultur als die eigene und machten sich bald die dort herrschenden komplizierten geistigen Auffassungen zu eigen, die sich in langer Zeit herausgebildet hatten. Zusammen mit den Syrern, Persern und Juden begannen die Araber mit dem Aufbau einer neuen Kultur von besonderer Eigenart. Einer Überlieferung zufolge hat der zweite Kalif Omar (634 bis 644) eine große Menge im Iran erbeuteter Bücher vernichten lassen, wobei er folgendes geäußert haben soll: „Enthalten diese Bücher etwas, was zur Wahrheit führt, so hat uns Allah das gegeben, was noch besser zu dieser hinführt; sollten sie aber etwas Falsches enthalten, so sind sie überflüssig." Möglicherweise drückte sich in diesen Worten die Einstellung der ersten Eroberer aus, doch war einer Reihe späterer islamischer Herrscher ein derart extremer Fanatismus fremd. Starke rationalistische und materialistische Strömungen innerhalb der islamischen Philosophie förderten die Übernahme des geistigen Erbes der alten Welt und ein Aufblühen der Naturwissenschaften.

In manchen Fällen waren die Eroberungszüge der Araber von einer grausamen Unterdrückung der Bevölkerung in den eroberten Ländern und einer Vernichtung ihrer kulturellen Errungenschaften begleitet. Das war z. B. im hochentwickelten choresmischen Staat der Fall. Der aus Choresm gebürtige al-Bīrūnī schrieb im 11. Jahrhundert über die Eroberung seiner Heimat durch die Araber wie folgt: „Und so vernichtete Qutaiba die Menschen, die die choresmische Schrift gut beherrschten, die die choresmischen Überlieferungen kannten und das Wissen lehrten, das bei den Choresmiern vorhanden war; er unterwarf sie verschiedenen Quälereien, so daß (diese Überlieferungen) derart in Dunkel gehüllt wurden, daß man bereits nicht mehr genau feststellen kann, was (in Choresm sogar) nach der Entstehung des Islam vor sich gegangen war" [82, S. 46, russisch]. Infolgedessen wissen wir bis heute so gut wie gar nichts über die Entwicklung der Wissenschaften im alten Choresm, obwohl viele hervorragende Gelehrte der islamischen Länder aus Choresm stammen.

Für die Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse war in jener Zeit der Handel von großer Bedeutung. Die Handelsbeziehungen des Kalifats reichten sehr weit: Die Araber handelten mit Indien und China, mit Byzanz und Rußland und mit sämtlichen Küstengebieten des Mittelmeeres. Arabische Händler und Reisende unternahmen weite Reise wolgaaufwärts, drangen bis nach Zentralafrika vor und gelangten auf Wegen entlang der Westküste Afrikas bis nach Madagaskar. Gesandte der Kalifen erschienen an den Höfen Karls des Großen und der chinesischen Kaiser.

Das erste große wissenschaftliche Zentrum des Kalifats war Baghdād. Der Boden für eine neue Blüte der Wissenschaft im arabischen Reich war bereits gut vorbereitet. In Syrien, in Mesopotamien und im Iran waren bereits seit altersher wissenschaftliche Schulen tätig, in denen auch weiterhin die Philosophie des Aristoteles, ferner Naturwissenschaften und Mathematik, aber auch Medizin, insbesondere die Werke des Hippokrates und des Galenos gelehrt wurden. Solche Schulen exisitieren in Edessa (ar-Rucha), Nisibia, Gundischapur, Kenneschra usw. Im 6. und 7. Jh. fanden im nahen Osten die aus Byzanz vertriebenen heidnischen und verschiedenen Sekten angehörenden christlichen Gelehrten Zuflucht. Als im Jahre 529 auf Anordnung des Kaisers Iustinianus (527—565) die Akademie der Neoplatoniker in Athen geschlossen wurde, verbrachten sieben Philosophen, darunter Simplikios, der bekannte Kommentator des Aristoteles und Eukleides, mehrere Jahre am Hof des persischen Königs Hosrov Anuschirwana (531—579). Ferner studierten die Ärzte dieses Königs die indische Medizin, und allem Anschein nach wurde zu dieser Zeit im Iran das aus Indien stammende Schachspiel bekannt. Viele griechische philosophische und wissenschaftliche Werke wurden ins Syrische und Persische übersetzt. So übersetzte der bereits erwähnte Severus Sebocht aus Nisibia in der Mitte des 7. Jh. die „Analytika" des Aristoteles ins Syrische und versah das Werk mit eigenen Kommentaren. Ferner schrieb er, auf griechischen Quellen fußend, über Astronomie und Geographie und verfaßte auch eine Abhandlung über den Astrolab[1]). Ein anderer Syrer, Georgios, der

[1]) Vgl. hierzu die Begeisterung, mit der sich Severus Sebokht über die indische Astronomie äußert (S. 107). Es ist klar, daß Sebokht den „Almagest" des Ptolemaios nicht gekannt hat, und daß er nur mit der zweitrangigen griechischen Literatur zur Astronomie vertraut war, wenn er die astronomischen Errungenschaften der Inder höher einschätzte als die der Griechen.

am Ende des 7. Jh. als Bischof einer arabischen christlichen Sekte in al-Kufa südlich von Baghdād tätig war, übersetzte und kommentierte den „Organon" und verfaßte in seiner Muttersprache eine Dichtung über den Kalender. In Ägypten waren noch die Epigonen der einstmals so berühmten alexandrinischen Schule erhalten geblieben. Der Kalif 'Umar II. (717—720) befahl im Jahre 718 die Umsiedlung der Gelehrten des Museion nach Antiochia. Als unter den Abbasiden die syrischen Städte ihre Vorrangstellung einbüßten, wurde die Schule zunächst nach Harran und schließlich nach Baghdād verlegt. Der griechische Einfluß war sehr stark, jedoch vereinigte er sich und wetteiferte auch zum Teil mit dem indischen und insbesondere mit den alten babylonischen Traditionen, die für die Astronomie und die Mathematik sehr wesentlich waren.

Gegen Ende des 8. und zu Beginn des 9. Jh. hatte man in Baghdad viele Gelehrte und Übersetzer aus verschiedenen Gegenden konzentriert. Verschiedene Kalifen, so al-Manṣūr (754—775) und Harūn ar-Rašīd (786—809), der Held der Märchen von „Tausendundeine Nacht", förderten die Entwicklung der Naturwissenschaften und der Mathematik. Unter Harun ar-Rašid wurde eine große Bibliothek gegründet, die sogar von Byzanz her mit Handschriften beliefert wurde. Später entsandte dorthin der Kalif al-Ma'mūn (813—833) eine besondere Mission. In der Stadt befanden sich mehrere Dutzend weitere Bibliotheken und Buchhandlungen; viele Leute waren mit der Abschrift wissenschaftlicher Werke beschäftigt. Nach dem Vorbild der Ptolemäer faßte al-Ma'mūn die Gelehrten in einer Art Akademie, dem Bait al-ḥikma, dem Haus der Weisheit, zusammen. Neben einer Bibliothek bestand am Haus der Weisheit ein wohlausgerüstetes Observatorium. Ein weiteres bestand in Damaskus. Es wurden umfangreiche Arbeiten zur Astronomie und Geographie unternommen. Dazu gehörten neue Messungen der Neigung der Ekliptik und der Länge des Meridiangrades sowie die Zeichnung einer neuen geographischen Karte. Reiche Liebhaber der Wissenschaften ließen ebenfalls der wissenschaftlichen Forschung eine wirksame Förderung zuteil werden und beschäftigten sich mitunter selbst mit den Wissenschaften, wie z. B. die Söhne des Würdenträgers Mūsā ibn Šākir, der zur Zeit al-Ma'mūns gelebt hatte. In manchen Fällen hing das Mäzenatentum der Herrscher und der Würdenträger mit dem astrologischen Aberglauben zusammen.

Gleichzeitig entwickelten sich Chemie, Medizin, Pharmakologie, Zoologie, Botanik und Mineralogie erfolgreich. Schließlich bildeten sich zu dieser Zeit philosophische Schulen heraus, die für die gesamten Naturwissenschaften und für die Mathematik von großer Bedeutung waren. Ähnlich Aristoteles zeichneten sich die Denker der islamischen Ländern durch enzyklopädische Interessen und Kenntnisse aus und beteiligten sich nicht selten selbst an der philosophischen Forschung. Die Breite der wissenschaftlichen Interessen war auch für die Gelehrten kennzeichnend. Zum Beispiel beschäftigten sich die Mathematiker recht häufig nebenher mit der Medizin. Der erste große Philosoph war der aus Basra stammende Araber Abū Yūsuf Ya'qūb ibn Iṣḥāq al-Kindi (gestorben etwa 873); er wirkte in Baghdād zur Zeit al-Ma'mūns und al-Mu'taẓīms (833—843). Als zur Zeit al-Mu'tavaquīls (847—861) der Einfluß der moslemischen Orthodoxie zunahm, war er Verfolgungen ausgesetzt. Die genannte orthodoxe Tendenz war die Reaktion auf die liberalen und rationalistischen Strömungen unter den Mu'taziliten, die von den ersten Abbasiden und insbesondere von al-Ma'mūn gestützt

wurden. Al-Kindi war ein guter Kenner der griechischen Wissenschaft und insbesondere des Aristoteles, dessen Anschauungen er jedoch nicht blind übernahm. Im Gegenteil, er warnte davor, das Wissen nur aus dem Studium der Alten zu schöpfen und zeigte in der Behandlung einzelner Probleme selbständige Tendenzen. Von ihm stammen viele Werke über Optik, Musik und Medizin, die teilweise später ins Lateinische übersetzt wurden. Er war einer der ersten, der eine Beschreibung der indischen Arithmetik in arabischer Sprache lieferte.

Den Anstoß zur Beschäftigung mit der Astronomie gab in Baghdād die Kenntnis von der indischen Wissenschaft. In seinem biographischen Lexikon schrieb der hohe Beamte und Mäzen des 13. Jahrhunderts Abū-l-Hasan al-Qifṭī (1172 bis 1288):

„Im Jahre 156 der Hiǧra (d. h. im Jahre 773) traf aus Indien kommend in Baghdād ein Mann ein, der das Wissen seiner Heimat sehr gut beherrschte. Dieser Mann beherrschte die Methode Sindhind, die sich auf die Bewegung der Himmelskörper sowie Berechnungen mit Hilfe von Sinuswerten von Viertelgrad zu Viertelgrad bezogen. Er kannte ferner Verfahren zur Bestimmung der Finsternisse sowie des Aufganges der Sternbilder des Tierkreises. Er schrieb eine kurze Erläuterung zu einem entsprechenden Werk, das einem indischen Herrscher namens Figar zugeschrieben wird. In diesem Werk wurden die kardaǧa durch Minuten ausgedrückt. Der Kalif befahl die Übersetzung der indischen Abhandlung ins Arabische, damit die Moslem in die Lage versetzt würden, genaue Kenntnisse über die Sterne zu erlangen. Die Übersetzung wurde Muḥammad, einem Sohn des Ibrāhīm al-Fāzārī, übertragen, der sich als erster unter den Moslem einer vertieften Erforschung der Astronomie widmete. Später nannten die Astronomen diese Übersetzung das Große Sindhind" [83, S. 392, französisch]. Das Wort Sindhind bedeutet siddhānta, kardaǧa ist wahrscheinlich das indische ardhajīvaka (vgl. S. 163), während Figar möglicherweise eine arabische Entstellung des indischen Herrschernamens Vyagra oder Vyagramukha ist, unter dessen Herrschaft Brahmagupta sein Werk geschrieben hatte. Welche der Siddhântas unter al-Manṣūr übersetzt worden ist, wissen wir nicht. Der Bericht des al-Qifṭī deckt sich nahezu mit einem früheren Bericht des Astronomen Muḥammad ibn Ḥāmid etwa aus dem Jahre 900 [18, Bd. I, S. 44 bis 45]. Sollte jedoch in der Tat die Ankunft des indischen Gelehrten erstmalig die Möglichkeit eröffnet haben, in Baghdād die Astronomie der Siddhânțas kennenzulernen, so war andererseits der Boden für eine astronomische Betätigung bereits vorbereitet; desgleichen war das Interesse an der Astronomie schon früher vorhanden. Man kennt die Namen von drei Astronomen, deren Wirken in die Herrschaft des al-Manṣūr fällt. Es sind dies die von al-Quifṭī erwähnten Abū Iṣḥāg Ibrāhīm al-Fāzārī (gestorben etwa 777), der erste Konstrukteur der arabischen Astrolabien, dessen Sohn Muḥammad (gestorben etwa 800) und schließlich Ya'qūb ibn Ṭārik (gestorben etwa 796), Verfasser von Arbeiten über Sphärik und Kompilator verschiedener Tabellen.

Die mathematische Schule von Baghdād entwickelte zwei Jahrhunderte lang eine rege Tätigkeit. In der ersten Zeit richtete sich die Hauptarbeit auf das Studium der antiken Werke und deren Herausgabe in arabischer Sprache. Hierbei wurde rasch eine arabische wissenschaftliche Terminologie entwickelt, die früher nahezu völlig fehlte. Im Laufe von 100 bis 150 Jahren wurden die wichtigsten Werke von Eukleides,

Archimedes, Apollonios, Heron, Ptolemaios, Diophantos und anderer entweder nach griechischen Originalen oder nach syrischen Übersetzungen ins Arabische übertragen. Manche Werke wie etwa die „Elemente" des Eukleides wurden mehrfach übersetzt. An den Übersetzungen und Kommentierungen beteiligten sich hervorragende Gelehrte, die der genannten Literatur neues Leben verliehen. Die Werke der Griechen, die bereits seit mehreren Jahrhunderten in einem Dornröschenschlaf gelegen hatten, wurden wieder zu täglich benutzten Handbüchern. Für die Herausbildung der Mathematik in den islamischen Ländern spielten ferner Kenntnisse, die aus Indien übernommen wurden, sowie Traditionen von Choresm, Persien und Mesopotamien eine große Rolle. Später erlangten Beziehungen zu China eine gewisse Bedeutung, obwohl es direkte Übersetzungen aus dem Chinesischen ins Arabische, soweit bisher bekannt ist, nicht gegeben hat.

Ausschlaggebend für den Fortschritt der Mathematik im Nahen und Mittleren Osten war neben Problemen des Bauwesens, der Geodäsie, des Handels und des Staatshaushaltes, die uns heute mitunter recht eigenartig anmuten (verwickelte Aufgaben über die Aufteilung von Erbschaften, komplizierte Konstruktionen und Berechnungen in der Architektur), die Astronomie. Ebenso wie in Indien und in China waren die Mathematiker der islamischen Länder meistens auch Astronomen. Hier spielt wiederum das Problem des Mondkalenders eine große Rolle. Einen hohen Stand erreichte die Fertigung wissenschaftlicher Instrumente. Viele Mathematiker beschäftigten sich selbst mit der Verbesserung bereits bekannter sowie mit der Konstruktion neuer astronomischer Geräte. Unter anderem wurde auch die Wasseruhr vervollkommnet. Die astronomischen Beobachtungen, die in den nach dem technischen Höchststand jener Zeit ausgerüsteten Observatorien vorgenommen wurden, waren genauer als die seinerzeit in Alexandria angestellten Beobachtungen; dadurch wurden die Anforderungen an die Rechengenauigkeit höher, so daß man häufig mit einer großen Anzahl von Sexagesimalstellen rechnete. Der Fortschritt der Astronomie und der beschreibenden Geographie wurde durch Reisen in ferne Länder sowie durch langwierige Seefahrten gefördert. Besondere mathematische Kenntnisse benötigte man in der geometrischen Optik bei der Untersuchung der Eigenschaften verschiedenartig geformter Spiegel. Im Mittelpunkt des Interesses der mathematischen Schule in Baghdād standen somit von Anfang an Probleme der kaufmännischen Arithmetik, der Berechnung geometrischer Figuren, der Näherungsrechnung und der Näherungskonstruktionen, der Trigonometrie und der numerischen Algebra.

In der Entwicklung der Mathematik in den islamischen Ländern lassen sich drei unmerklich ineinander übergehende Etappen unterscheiden. Ursprünglich stand naturgemäß die Erfassung sowohl des griechischen als auch des orientalischen Kulturerbes an erster Stelle, wobei eine Zeitlang offenbar den griechischen Elementen der Vorrang eingeräumt wurde. Aber bereits im 9. Jahrhundert, zugleich mit der Anfertigung zahlreicher Übersetzungen mit den zugehörigen Kommentaren, bildete sich eine eigene mathematische Kultur heraus, deren Besonderheiten wir soeben betrachtet haben. Bereits zu jener Zeit wurden die Kenntnisse und Methoden der Griechen vielfach zur Lösung von Problemen der numerischen Mathematik angewandt. Diese Tendenz wurde im 10. und 11. Jahrhundert immer stärker, denn die astronomischen

Berechnungen und die Näherungsmethoden der Algebra und Trigonometrie nahmen immer größeren Umfang an. In voller Klarheit trat diese Richtung dann im 13. bis 15. Jahrhundert zutage. Hier war offenbar die Anknüpfung engerer Beziehungen zu China von Bedeutung.

Gleichzeitig war, wie bereits betont, das tiefgründige und langwierige Studium der Werke des Eukleides, Archimedes und Ptolemaios für die Mathematik im Nahen und Mittleren Osten von ausschlaggebender Bedeutung. Darin ist der Grund für den wesentlichen Unterschied in der Behandlungsweise der hinsichtlich der Interessenrichtung verwandten chinesischen und indischen wissenschaftlichen Schulen zu suchen.

Die Aneignung des klassischen Erbes versetzte die Mathematiker der islamischen Länder in die Lage, in der Entwicklung der numerisch-algorithmischen Probleme ein höheres Niveau zu erreichen und zu ihrer Lösung und Verallgemeinerung wesentlich wirksamere Mittel heranzuziehen, als sie den Indern und Chinesen zur Verfügung standen. Dort, wo die Inder und Chinesen sich damit begnügten, eine isolierte Rechenregel zu schaffen, gelang es den Gelehrten der islamischen Länder häufig, ganze Theorien zu entwickeln. Auf der Basis der antiken Kegelschnittlehre schufen sie z. B. eine hochentwickelte geometrische Theorie der Gleichungen dritten Grades. Auch in den Kommentaren zu den griechischen Werken entwickelten sie neue Ideen und ersetzten z. B. die Verhältnislehre von Eudoxos und Eukleides durch eine andere, die einen weiter gefaßten Begriff der reellen Zahl enthielt und den neuen Anforderungen an die Wissenschaft und ihre Anwendungen besser entsprach.

Der Einfluß der griechischen Mathematik äußerte sich nicht nur in den Forschungsmethoden, sondern auch im Stil der arabischen Werke, in denen man sehr ernsthaft um Beweisführungen, systematische Anordnung des Stoffes und vollständige Darlegung bemüht war. In den Fällen, in denen die Verfasser auf die Herleitung der Regeln verzichten, zeichnen sich ihre Formulierungen durch Ausführlichkeit und Klarheit aus. In vielen Büchern finden wir gleichzeitig die für die östliche Mathematik charakteristische Fülle von Beispielen und Aufgaben, deren Inhalt häufig der Praxis entnommen ist.

Der erste in der Reihe der hervorragenden Gelehrten der Baghdāder Schule ist der Klassiker der Mathematik der islamischen Länder Muḥammad al-Huwarizmī, dessen Tätigkeit in die Zeit der Herrschaft von al-Ma'mūn fällt. Zu der gleichen Zeit wirkte im Haus der Weisheit der erste Übersetzer der „Elemente" al-Ḥaǧǧaǧ und deren Kommentator al-Ǧauharī, ferner die Astronomen al-Habaš, al-Ḥāsib und al-Farghānī, dessen Werke sich später im mittelalterlichen Europa großer Beliebtheit erfreuten. Aus der Vielzahl hervorragender Gelehrten seien hier nur noch Abū-l-Wafā, al-Khūī und al- Karaǧī (9. und 10. Jh.) genannt. Die wissenschaftliche Arbeit wurde in Damaskus und in anderen Städten geführt. Der hervorragende Astronom und Mathematiker al-Battānī z. B. wirkte an der Grenze vom 9. zum 10. Jh. am Observatorium in ar-Rakka am Euphrat.

Ähnlich anderen Feudalstaaten des Mittelalters war das arabische Kalifat durchaus kein festes politisches Gebilde. Am Ende des 8. Jahrhunderts lösten sich aus seinem Verband die fernen spanischen und afrikanischen Provinzen und dann auch weitere

Teile Nordafrikas. Gegen Ende des 9. Jahrhunderts erlangte, zusammen mit einigen anliegenden Gebieten, Ägypten seine Unabhängigkeit, während kurze Zeit vorher sich ganze Gebiete des Iran, des Tadshikistan und des Kaukasus abgespalten hatten. Es entstanden und verfielen große Staaten. Von starkem Einfluß auf die sehr wechselvolle Folge der Staaten und Dynastien waren die feudalrechtlichen Streitigkeiten sowie Zwistigkeiten zwischen den Nationalitäten und Stämmen. Auf der Bildfläche erschienen türkische Stämme mit ihren Heerführern. Auf einem Gebiet, das heute den nördlichen und östlichen Iran, Tadshikistan und Afghanistan umfaßt, entstand der in Wirklichkeit selbständige, obwohl zunächst formal von den Abbasiden abhängige Staat der Samaniden (875 bis 999) mit der Hauptstadt Buchara. Im westlichen und südlichen Iran und im Irak ging die Herrschaft in die Hände der persischen Buidendynastie (932-1055) über, die im Jahre 945 Baghdād eroberten und dem Kalifen von Baghdād nur noch die geistliche Herrschaft überließen. Für eine Zeitlang wird Choresm mit der Hauptstadt Gurgandsh, dem heutigen Urgentsch, wieder selbständig. Ein samanidischer Heerführer organisierte, gestützt auf türkische Heere, einen Aufstand und begründete den Staat der Gasneviden (962—1186), der seinen Namen seiner Hauptstadt, der afghanischen Stadt Gasna, verdankt. Diese Stadt wurde zu einem großen wissenschaftlichen und kulturellen Zentrum. Der gasnevidische Sultan Mahmūd (998—1030) beherrschte den Ostteil des Iran, Afghanistan, das Pañjāb und eroberte im Jahre 1017 Gurgandsh. Während die südlichen Teile des Samanidenreiches eine Beute der Sultane von Gasna wurden, wurden die nördlichen Gebiete mit Buchara und Samarkand von den Karachaniden (932 bis 1165), den Fürsten einiger türkischer Stämme erobert. Das turkmenische Herrschergeschlecht der Seldschuken begründete ein großes Reich im Südteil Mittelasiens, im Iran, im Irak und in einem Teil Kleinasiens und Transkaukasiens (1038-1157). Im Jahre 1055 eroberte der seldschukische Sultan Togrul-bek (1038-1063), der früher den gasnevidischen Heeren eine schwere Niederlage beigebracht und den Gasneviden große Gebiete entrissen hatte, Baghdād und setzte die buidischen Herrscher ab. Unter den Seldschuken erlebten die Städte Rei, Merv (heute Mary) und Isfahan eine neue Blüte. Im ersten Viertel des 13. Jh. brachen die Mongolen unter der Führung Chingiz-Khāns (1206 bis 1227) herein, wobei sie das Wirtschaftssystem ruinierten und unter der Bevölkerung wüteten. Nachdem die Mongolen ihre Macht in Mittelasien und im Iran gefestigt hatten, drangen sie weiter vor, und im Jahre 1258 eroberte Hūlāgū-khān Baghdād. Bald darauf erhielt er von seinem Vetter Hublai-khān, dem letzten großen mongolischen Khān, der Kaiser von China wurde, den Titel Ilkhān, d. h. Beherrscher des Volkes. Aber auch das mongolische Reich wurde durch innere Widersprüche zerrüttet, so daß es mitunter auseinanderfiel, um zeitweise durch stärkere Herrscher, wie etwa Timur (1370 bis 1405), wieder vereinigt zu werden. Um ihre Macht zu festigen, förderten die Mongolen den Wiederaufbau der Wirtschaft in den verwüsteten Ländern, insbesondere in Mittelasien. Die halbzerstörten Städte wurden in noch größerem Glanze wieder aufgebaut, Kanäle wurden gereinigt und neu angelegt, es wurden neue Straßen gebaut, und Handwerk und Handel erlebten eine neue Blütezeit.

Die Lage der Gelehrten war häufig schwer. Ebenso wie die gesamte Bevölkerung konnten sie Eroberern zum Opfer fallen. Darüber hinaus mußten sie vermeiden,

mit der offiziellen Religion in Konflikt zu geraten; ferner, und das war wohl die Hauptsache, befanden sie sich in einer direkten materiellen Abhängigkeit von den Herrschern und Magnaten. Häufig gelang es durchziehenden Quacksalbern und Astrologen, sich das Vertrauen der ungebildeten und abergläubischen Herrscher zu erschleichen. Diese Leute waren naturgemäß erbitterte Feinde der echten Gelehrten. Der berühmte Dichter, Astronom und Mathematiker 'Umar al-Ḫayyām, dessen Jugend in die Zeit der Kämpfe um die Macht der Seldschuken fiel, schrieb:

„Wir waren Zeugen des Unterganges der Gelehrten, von denen nur ein kleines aber vielgeplagtes Häuflein übrig blieb. Die Härten des Schicksals jener Zeit hinderten sie daran, sich voll der Vervollkommnung und Vertiefung ihrer Wissenschaft zu widmen. Der größte Teil derer, die sich gegenwärtig den Anschein von Gelehrten geben, umhüllen die Wahrheit mit Lüge; in der Wissenschaft selbst gelangen sie nicht über die Grenze des Plagiats und der Heuchelei hinaus, und das bißchen Wissen, das sie beherrschen, nutzen sie nur für niedrige und sinnliche Zwecke aus. Und stoßen sie auf einen Menschen, der sich dadurch auszeichnet, daß er die Wahrheit sucht und die Wahrheit liebt und daß er bemüht ist, Lüge und Heuchelei zurückzuweisen und auf Prahlerei und Betrug zu verzichten, so machen sie ihn zum Gegenstand ihrer Schmähungen und ihres Spottes" [132, S. 16, russisch].

Alle diese Umstände jedoch konnten den wissenschaftlichen Fortschritt auf die Dauer nicht aufhalten. In den großen Städten, insbesondere in den Residenzen, entstanden neue Schulen und Bibliotheken; neue Observatorien wurden gegründet. Die aufgeklärteren Herrscher richteten, um ihrer Herrschaft mehr Glanz zu verleihen, etwas ähnliches wie Akademien ein, wie später die europäischen Monarchen des 17. und 18. Jahrhunderts. Dadurch war die Überlieferung der Kenntnisse gewährleistet, wenn auch nicht in dem Maße, wie dies nach der Erfindung der Buchdruckerkunst durch die umfangreiche Herausgabe wissenschaftlicher Werke möglich wurde.

Zu verschiedenen Zeiten waren die Städte Buchara, Choresm, Gasna, Rei und andere die größten wissenschaftlichen Zentren. Zu hoher Blüte gelangte die Kultur in Mittelasien unter den Samaniden. Als hervorragendes Beispiel hierfür sei das Wirken des Klassikers der persischen und tadschikischen Literatur, des Dichters Ferdousi (etwa 940—1020), genannt, der das geschichtliche Epos „Schahname", d. h. „Buch der Könige" verfaßte. An der Grenze des 10. und 11. Jh. wirkte unter der Schirmherrschaft der choresmischen Herrscher eine ganze Gelehrtengruppe, zu der unter anderen der hervorragende Philosoph und Arzt ibn Sīnā (Avizenna), der sich auch mit Mathematik beschäftigte, der Astronom und Mathematiker al-Hoǧǧendi, der früher am Observatorium in Rei in der Nähe des heutigen Teheran tätig war, ibn 'Irāq und dessen Schüler al-Bīrūnī gehörten. Nach der Eroberung Choresms durch den Gasneviden Maḥmūd zerfiel diese Gruppe. Al-Ḫayyām leitete am Ende des 11. Jh. das Observatorium in Isfahan. Nach der Zerstörung Baghdāds setzte der mongolische Khān Hūlāgū den hervorragenden Astronom und Mathematiker Naṣir ad-Din at-Tūsī als Leiter der neuen Sternwarte in Maraga südlich von Tauris ein. Einer besonderen Förderung erfreuten sich die Gelehrten unter dem samarkanischen Herrscher Ulugbēk (1409—1449), der sich selbst mit Astronomie beschäftigte. Ulugbēk versammelte

in seinem hervorragend eingerichteten Observatorium viele Gelehrte, zu denen Ğamšid Ghiyāth ad-Dīn al-Kāšī, Qādi zāda ar Rūmī, ibn Rustam al-Kūhī und andere gehörten.

In Ägypten wirkte um 900 der Algebraiker Abū Kāmil. Im Jahre 969 wurde Ägypten von Tunis her durch die Fatimiden (969—1171) erobert, die den Anspruch erhoben, von der Tochter des Propheten Fatime abzustammen und daher den Titel Kalif zu führen. Unter den Fatimiden erlebte der ägyptische Staat, zu dem Nordafrika, Syrien und Westarabien gehörten, einen allgemeinen wirtschaftlichen und kulturellen Aufschwung. Ähnlich den Abbasiden förderten auch die Herrscher dieses Staates die Wissenschaft. In Kairo, das im Jahre 969 gegründet und bald zur Hauptstadt erklärt wurde, wurde ein wohlausgerüstetes Observatorium erbaut und eine eigene Akademie, das Dār al-ḥikma, d. h. Wohnsitz der Wissenschaften, gegründet, die bis zum Ende der Herrschaft der Dynastie bestand. An der Grenze vom 10. zum 11. Jh. erlangte das Dār al-ḥikma Berühmtheit durch die Wirksamkeit des Astronomen ibn Yūnis und des Mathematikers, Physikers und Astronomen ibn al-Haitham.

Mathematische Forschungen wurden auch auf der iberischen Halbinsel und in Nordwestafrika betrieben. Kurz nach der Eroberung durch die Araber und Berber (sowohl die einen als auch die anderen wurden hier später als Mauren bezeichnet) wurden diese Provinzen des Kalifats praktisch unabhängig (756). Im Jahre 929 ließ sich der Emir von Cordoba 'Abd ar-Raḥmān III. (912—961) zum Kalifen ausrufen und vollzog so auch formal die Lösung von Baghdād. Im Staat von Cordoba erblühte eine originelle maurisch-spanische Kultur, die spanisch-römische, orientalisch-arabische, berberische und hebräische Elemente aufwies. Der Sohn 'Abd ar-Raḥmāns, al-Ḥakam II. (961—976), finanzierte großzügig den Aufkauf und das Abschreiben der Bücher in anderen islamischen Ländern, wodurch mit der Zeit eine riesige Bibliothek mit 400000 Handschriften entstand, deren Katalog allein 44 Bände füllt. Auch nachdem durch die fortschreitende Feudalisierung das Kalifat von Cordoba in mehrere Fürstentümer zerfiel (1031), blieben die Bedingungen für Kultur und Wissenschaft noch lange Zeit günstig. In diese Zeit fällt die Tätigkeit des größten mauretanischen Philosophen, des aus Cordoba stammenden ibn Rušd (1126—1198), der in Europa unter dem Namen Averroes bekannt wurde, sowie des aus der gleichen Stadt stammenden jüdischen Denkers Moses ben Maimon (1135—1204). Die enzyklopädischen Interessen beider Gelehrter umfaßten auch Astronomie und Mathematik. Ein älterer Zeitgenosse der beiden war der hervorragende, aus Seuda stammende Geograph al-Idrisi (1099 oder 1100 bis 1166), der in Cordoba studiert hatte und später an den Hof der Normannenkönige nach Palermo ging. Dieser Gelehrte hat sich um die Wiedergeburt und Vervollkommnung der mathematischen Kartographie verdient gemacht. Vorher war die genaue Kartenbezeichnung durch die Verfertigung grober schematischer Karten verdrängt worden, die uns an die schematischen Streckenpläne in den heutigen Kursbüchern erinnern. In Sevilla wirkte im 12. Jh. Ğabir ibn Aflā, von dem wertvolle Arbeiten über Trigonometrie stammen. Etwas später, im 13. und 14. Jh., erregten die mathematischen Arbeiten des Marokkaners ibn al-Bannā Aufsehen. Für die Entwicklung der Mathematik und Astronomie in den mauretanischen Ländern hatte die Kenntnis der Werke der ostarabischen Gelehrten große Bedeutung, insbesondere auch der

Werke Muḥammad al-Ḫuwarizmīs. Infolge des politischen und wirtschaftlichen Zerfalls jedoch wurden die kulturellen Beziehungen schwächer, und viele Entdeckungen des Ostens blieben im Westen unbekannt. So kannte man die hervorragenden Arbeiten al-Ḫayyāms über Algebra nur vom Hörensagen. Häufig liefen die Forschungen unabhängig und parallel.

Insgesamt gesehen hat die Mathematik in den mauretanischen Ländern nie den hohen Stand erreicht wie im Osten.

Der Prozeß der fortschreitenden Feudalisierung führte zu Beginn des 11. Jahrhunderts dazu, daß das Kalifat von Cordoba in viele kleine Fürstentümer zerfiel. Im 11. Jh. verstärkte sich die Reconquistabewegung, d. h. die Wiedereroberung der von den Mauren besetzten Gebiete durch die Spanier und Portugiesen. Im Jahre 1085 besetzten die Spanier Toledo. Der Einfall neuer Berberstämme hat zwar die Reconquista aufgehalten, doch bereits 1236 fiel Cordoba, und kurze Zeit darauf verblieb unter maurischer Herrschaft nur das Emirat von Südgranada. 1492 wurde auch dieses Gebiet zurückerobert, nachdem kurz vorher der letzte große maurische Mathematiker al-Qalasādī nach Tunis übergesiedelt war. Das 15. Jahrhundert war zugleich das letzte, in dem die Mathematik auch in den östlichen islamischen Ländern noch Fortschritte gemacht hat.

Die Entwicklung der Wissenschaft in den maurischen Staaten oder in den von den Spaniern zurückeroberten Ländern hatte große Bedeutung für die Verbreitung der wissenschaftlichen Kenntnisse in Europa. Von hier aus wurde das wissenschaftliche Erbe des Orients und Griechenlands in arabischen Übersetzungen an die anderen europäischen Länder weitergegeben. Im 12. und 13. Jahrhundert arbeiteten in Spanien, insbesondere in Toledo, viele Übersetzer und Kompilatoren, denen die Wissenschaft die lateinischen Texte oder die lateinischen Überarbeitungen vieler wichtiger arabischer oder ins Arabische übersetzter griechischer Werke verdankt. Die Tätigkeit dieser Gelehrten war für einen neuen Aufschwung der Mathematik in Europa ebenso wichtig wie die Tätigkeit der Übersetzer in Baghdād für die Wissenschaft in den islamischen Ländern.

Wir sprechen hier entweder von der arabischen Mathematik oder von der Mathematik der islamischen Länder. Beide Bezeichnungen sind mangelhaft. Die mathematischen Entdeckungen in den mohammedanischen Gebieten waren das Ergebnis einer schöpferischen Zusammenarbeit zwischen den Gelehrten vieler Völker. Aus der Mitte der Araber selbst sind verhältnismäßig wenig Gelehrte und Philosophen hervorgegangen. Zur Zeit der Eroberungen und der Festigung ihrer Macht hatten die Araber am häufigsten die Posten von Militärkommandanten im Verwaltungsapparat am Hofe sowie im Rahmen der priesterlichen Hierarchie inne, während zur wissenschaftlichen Arbeit die einheimische Intelligenz herangezogen wurde. In den eroberten Ländern war die Schicht der Araber im allgemeinen nicht sehr stark, und in der Folgezeit setzte naturgemäß der Prozeß einer Vermischung der Araber mit der Masse der Urbevölkerung ein. Anfänglich waren das vor allem Syrer, Iraner, Choresmier, Griechen und Juden. Viele hiervon waren nicht Mohammedaner und bekannten sich zu verschiedenen Spielarten des Christentums und der heidnischen Religion. In der Folgezeit spielten im wissenschaftlichen Leben die Bewohner der Länder die entscheidende Rolle, auf deren Gebieten das heutige Iran und die Sowjetrepu-

blikeń Tadshikistan, Usbekistan und Turkmenistan liegen. Muḥammad al-Ḫuwarizmī und al-Bīrūnī stammten aus Choresm, al-Ḫayyām und Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī aus Horasan, al-Kāšī aus der iranischen Stadt Kaschan usw. Selbstverständlich gab es unter den Gelehrten auch Araber. Bei all dem ist zu beachten, daß einmal im Verlaufe der vielen Eroberungszüge, Einfälle und Völkerwanderungen dauernd eine Verschmelzung und Neubildung von Nationalitäten erfolgte, und daß zum zweiten unsere Kenntnisse in den meisten Fällen eine Aussage über Herkunft und Ort der Tätigkeit irgendeines Gelehrten, nicht aber über seine nationale Zugehörigkeit im ethnographischen Sinne des Wortes liefern. Der Umstand, daß die wichtigste mathematische Literatur, die wir nunmehr analysieren wollen, in arabischer Sprache geschrieben ist, charakterisiert selbstverständlich ihren Inhalt genausowenig wie die Tatsache, daß die meisten Verfasser Mohammedaner waren.

Eine völlig zutreffende kurze Bezeichnung für diesen Komplex der mathematischen Forschungstätigkeit, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, gibt es leider nicht. Wir wollen daher auch fernerhin die beiden obengenannten und allgemeingebräuchlichen Termini benutzen, die wesentlich bequemer zu handhaben sind als etwa der Ausdruck „die Mathematik in den Ländern des Nahen und Mittleren Orients".

An dieser Stelle sei einiges zur Literatur gesagt. In den Bibliotheken und Museen vieler Länder wird eine riesige Zahl mathematischer und astronomischer Handschriften in arabischer oder persischer Sprache sowie in Form von lateinischen Übersetzungen aus dem Arabischen aufbewahrt. Viele davon sind bereits herausgegeben oder zumindest eingehend beschrieben. Uns stehen die in europäische Sprachen übersetzten wichtigsten Abhandlungen al-Ḫuwarizmīs, Abū-l-Wāfās, Abū-Kāmils, al-Karaǧīs, al-Bīrūnīs, aṭ-Ṭūsīs und anderer Gelehrter zur Verfügung. Jedoch ist die Erforschung der arabischen mathematischen Literatur noch sehr weit davon entfernt, abgeschlossen zu sein. Äußerst wichtige Werke sind bisher nur wenig bekannt oder unbekannt geblieben. Das haben überzeugend die Forschungen der letzten Zeit gezeigt, als erstmalig derartige Spitzenwerke untersucht wurden wie die Kommentare al-Ḫayyāms zu den „Elementen" des Eukleides oder das Werk des al-Kāši über die Messung des Kreises. Das hier gezeichnete Bild der Entwicklung der arabischen Mathematik wird sich zweifellos in der nächsten Zeit als unvollständig herausstellen, wobei diese Unvollständigkeit durchaus nicht nur auf Einzelheiten beschränkt bleiben dürfte. Doch auch die weiteren Ergänzungen können nur dazu beitragen, die Errungenschaften der Mathematiker des Nahen und Mittleren Orients und Zentralasiens noch höher einzuschätzen [84 bis 94].

Die Ausbreitung des dezimalen Stellenwertsystems. Wir wollen uns zunächst den Werken des Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī al-Maǧūsī (etwa 780 bis etwa 850) zuwenden. Über sein Leben wissen wir nur wenig. Der Namensteil al-Ḫuwarizmī zeigt, daß dieser Gelehrte aus Choresm gebürtig war, während das Wort Maǧūsī darauf hinweist, daß unter seinen Vorfahren Magier, d.h. Priester der zoroastrischen Religion waren: In Choresm hatte sich der Zoroastrianismus ausgebreitet. Al-Ḫuwarizmī stand im Mittelpunkt einer Gruppe von Mathematikern und Astronomen, die unter al-Ma'mun am Haus der Weisheit gewirkt haben. Von seinen Werken sind fünf

erhalten geblieben, zum Teil in Form von Überarbeitungen. Es handelt sich hierbei um je ein Werk über Arithmetik, Algebra, Astronomie, Geographie und Kalenderrechnung. Es ist durchaus möglich, daß auf seine Urheberschaft verlorengegangene Werke über die Sonnenuhr und den Astrolab zurückzuführen sind [95].

Die Werke al-Ḫuwarizmīs, insbesondere seine Abhandlungen über Arithmetik und Algebra, haben auf die weitere Entwicklung der Mathematik einen großen Einfluß ausgeübt. Sie wurden zum Ausgangspunkt vieler Untersuchungen, wurden kommentiert und Teile davon in andere Werke aufgenommen; an ihnen schulten sich Dutzende von Generationen. Dieser Gelehrte hat in seinen Werken das Wichtigste zusammengefaßt, was sowohl für die Gelehrten als auch für die Praktiker von Bedeutung war, wobei er die Bedürfnisse des täglichen Lebens besonders berücksichtigt hat (vgl. S. 4).

Die arithmetische Abhandlung al-Ḫuwarizmīs war das erste arabische Werk, in dem das dezimale Stellenwertsystem und die auf diesem beruhenden Rechenoperationen erläutert wurden. Dieses Werk ist uns nur in Gestalt einer lateinischen Übersetzung [96, 96a] überliefert. Die Übersetzungsarbeit dürfte vor der Mitte des 12. Jahrhunderts vorgenommen worden sein, doch die einzige bisher bekannte Handschrift stammt aus dem 13. Jahrhundert. Darüber hinaus handelt es sich hier keineswegs um eine exakte Übersetzung des ursprünglichen arabischen Originals; hiervon zeugen eindeutig verschiedene Ergänzungen und Fehler. Ob diese von dem ersten Übersetzer oder vom Abschreiber stammen, ist unbekannt. Ferner hat der Kopist seine Arbeit nicht abgeschlossen, insbesondere hat er fast nirgends die neuen Ziffern eingetragen, für die er die Lücken freigelassen hatte. Die Handschrift wird in der Bibliothek der Universität Cambridge aufbewahrt. Sie beginnt (vgl. Abb. 41) mit den Worten „Dixit Algorizmi", d.h. „Algorizmi sagte ...", und bricht mitten in einem Beispiel zur Multiplikation von Brüchen ab. Glücklicherweise wird uns die Erforschung der arithmetischen Abhandlung al-Ḫuwarizmīs dadurch erleichtert, daß zwei weitere sich eng daran anlehnende lateinische Werke vorhanden sind. Das eine ist das zusammenfassende „Buch des Algorismus über praktische Arithmetik" („Liber Algorismi de pratica arismetrice"); dieses wurde aller Wahrscheinlichkeit nach von Johannes von Sevilla bzw. von Toledo verfaßt, einem zum Christentum übergetretenen spanischen Juden, der etwa von 1135 bis 1153 in Toledo gewirkt hat [96]. Die am Anfang stehenden Abschnitte des „Liber Algorismi" stehen inhaltlich der Handschrift von Cambridge sehr nahe. Das andere Werk ist das „Buch der Einführung des Algorismus in die astronomische Kunst, zusammengestellt vom Magister A." („Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus") (siehe S. 352). Man kennt davon mehrere Abschriften, von denen die eine mit der Jahreszahl 1143 versehen ist, während die andere nur wenig später entstanden sein dürfte. Man vermutet, daß es sich bei dem „Magister A." um den Engländer Adelard of Bath handelt, der ebenfalls der Schule von Toledo angehörte. Möglicherweise hat dieser Adelard of Bath auch die arithmetische Abhandlung al-Ḫuwarizmīs übersetzt [97 bis 98a]. Der Übersetzer könnte auch ein anderer Engländer, und zwar Robert of Chester, gewesen sein, der im Jahre 1145 die algebraische Abhandlung al-Ḫuwarizmīs ins Lateinische übersetzt hatte. Darüber hinaus schließt sich an die Arithmetik al-Ḫuwarizmīs das Werk „Ausreichendes

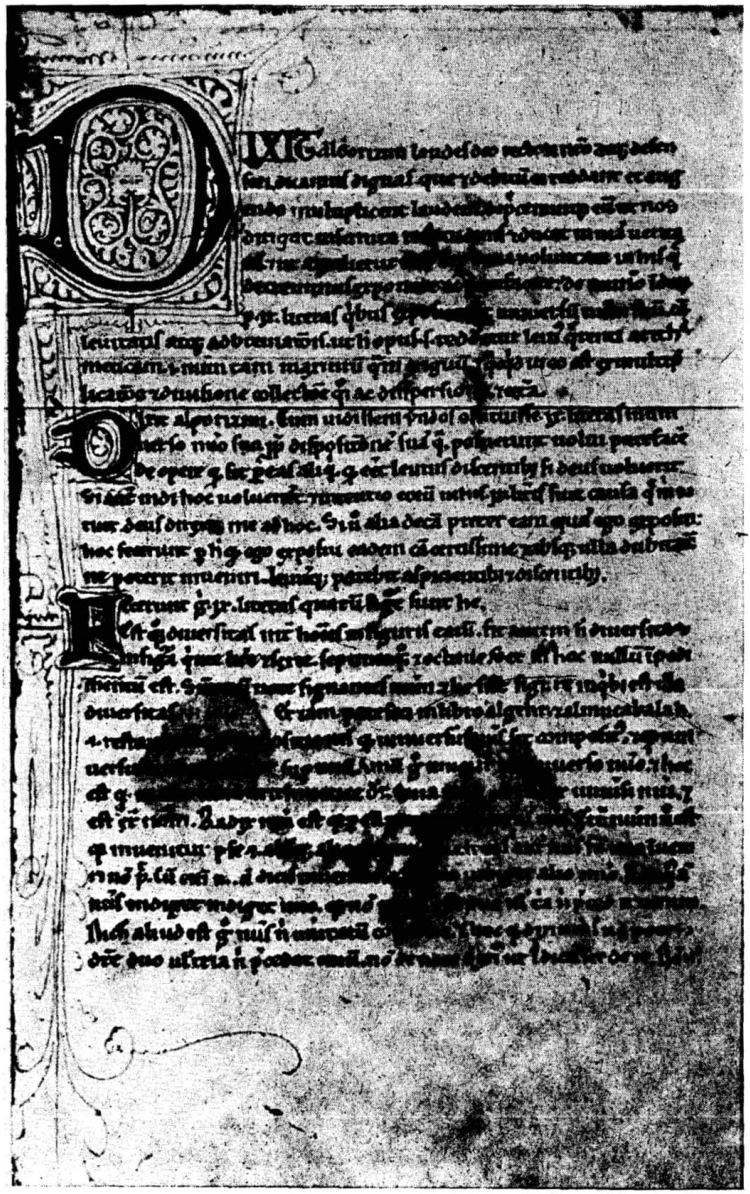


Abb. 41. Die erste Seite des lateinischen Textes der arithmetischen Abhandlung al-Ḫuwarizmīs (Cambridger Handschrift, 13. Jh.).

über die indische Arithmetik" (Al-muqnī fī-l-ḥisāb al-Hindī) eng an. Dieses Werk stammt von dem aus der Stadt Nasa in der Nähe des heutigen Aschchabad gebürtigen Abu-l-Ḥasan 'Ali ibn Aḥmad an-Nasawī, der zur Zeit des buidischen Sultans Maǧd ad-Daula (gestorben 1029 oder 1030) gelebt hatte [99, 99*a*.]

Obwohl die Handschrift von Cambridge keine Überschrift trägt, darf man nach Vergleich einiger darin enthaltener Ausdrücke mit der Liste der Werke al-Ḫuwarizmīs im „Katalog der Wissenschaften" (Fihrist al-Ulm) des Baghdāder Historikers und Bibliographen Ya'qūb an-Nadim (gestorben 995) annehmen [97, S. 18—19], daß der Titel des Buches etwa „Das Buch über die Addition und Subtraktion nach der Rechenweise der Inder" (Kitāb al-ǧam' wa-t-tafrīg bi ḥisāb al-Hind) gelautet haben dürfte. Möglicherweise hat al-Ḫuwarizimī im Titel nur die beiden wichtigsten Rechenarten genannt, auf die sich die anderen zurückführen lassen. Wie dem auch sei, in den ersten Zeilen des Buches, nach den für jene Zeit üblichen Lobpreisungen Allah's wird gesagt: „. . . wir haben uns entschlossen, die Rechenweise der Inder mit Hilfe von IX. Buchstaben darzustellen und zu zeigen, durch die sie der Leichtigkeit und der Kürze halber ihre sämtlichen Zahlen darstellen, um dieses Unterfangen dem die Arithmetik Erlernenden zu erleichtern, d. h. sowohl große als auch kleine Zahlen und alles was bei diesen auftritt, von der Multiplikation und der Division, aber auch vom Zusammenzählen und Abziehen usw." [96, S. 1]. Die Buchstaben, d. h. die Ziffern, sind, wie bereits erwähnt, in der Handschrift zumeist nicht eingetragen. Es sind lediglich die dafür vorgesehenen Lücken freigelassen. Man findet daher nur hin und wieder die neuen Ziffern für 1, 2, 3, 5 und einen Kreis für die Null. Manche Ziffern, sagt al-Ḫuwarizmī, werden verschieden geschrieben, z. B. 5 und 6, aber auch 7 und 8. Hierzu führt er die Ziffernzeichen an, die in der Handschrift fehlen. Die Ziffern, mit deren Hilfe die Zahl 325 in der Handschrift geschrieben ist, sind nicht die ostarabischen Ziffern, sondern stimmen mit den Ziffernzeichen überein, die im 12. und 13. Jh. in Westeuropa Verbreitung fanden (vgl. S. 350—351).

Nach einer eingehenden Erläuterung der Zahlendarstellung im dezimalen Stellenwertsystem mit Hilfe der indischen Zeichen und insbesondere der Verwendung „eines kleinen Kreises ähnlich dem Buchstaben o" [96, S. 3] gibt al-Ḫuwarizmī eine Unterweisung über die Aussprache der Zahlwörter für große Zahlen, wobei er die kurz zuvor definierten Begriffe Einer, Zehner und Tausender verwendet.

Als Beispiel dient eine riesige Zahl, deren Ziffernschreibweise nicht angegeben ist, und zwar die Zahl 1180703051492863. Diese Zahl wird folgendermaßen gelesen: eintausend tausend tausend tausend Tausender fünfmal und hundert tausend tausend tausend Tausender viermal und achtzig tausend tausend tausend Tausender viermal und dann siebenhundert tausend tausend Tausender dreimal und drei tausend tausend Tausender dreimal und einundfünfzig tausend Tausender zweimal und vierhundert Tausender und zweiundneunzig Tausender und achthundertdreiundsechzig. Ähnlich umständliche Bezeichnungen haben sich sehr lange in der arabischen und europäischen Literatur gehalten.

Dann folgt eine eingehende Beschreibung der Rechenoperationen nach indischem Vorbild. Die Zahlen in den Beispielen sind entweder in Worten oder in römischen Ziffern wiedergegeben, mitunter erscheinen sie auch in einer gemischten Form, etwa

„zweitausenddreihundert .XXVI." usw. Die Addition und Subtraktion empfiehlt al-Ḫuwarizmī von links nach rechts, d. h. mit den höchsten Stellen beginnend vorzunehmen, denn so sei es nützlicher und leichter. Eindringlich wird empfohlen, das Schreiben der Nullen nicht zu vergessen, um die Stellen nicht durcheinander zu bringen. Gesondert wird der Fall der Subtraktion betrachtet, bei dem an irgendeiner Stelle des Subtrahenden eine größere Ziffer steht als an der entsprechenden Stelle des Minuenden, d. h. wenn aus der nächsthöheren oder mehreren nächsthöheren Stellen des Minuenden Einheiten geborgt werden müssen. Das Zahlenbeispiel für diesen schwierigen Fall, das im Original offenbar vorhanden war, ist in der Cambridger Handschrift weggelassen. Von den drei versprochenen Beispielen ist hier nur das erste, und zwar 6422—3211 vollständig behandelt und das zweite, 1144—144, angefangen. Bei Johannes von Sevilla findet man die Beispiele 12026—3064 und 10000 bis 15. Viele Mathematikhistoriker machten al-Ḫuwarizmī den Vorwurf, daß seine Erläuterungen unvollständig seien und daß er bei der Beschreibung der Subtraktion die Hauptschwierigkeit umgangen habe [vgl. z. B. 12, S. 298]. In Wirklichkeit darf dieser Vorwurf nur gegenüber der uns vorliegenden unvollständigen lateinischen Handschrift erhoben werden.

Im Anschluß an die Subtraktion wird die Halbierung (mediatio) behandelt, bei der geradezu als Ausnahme gegenüber den anderen Operationen, das Fortschreiten von den niedrigeren zu den höheren Stellen empfohlen wird. Falls die Zahl ungerade ist, wird von dieser eine Einheit abgespalten und deren Hälfte als Sexagesimalbruch 30/60 dargestellt. Nach der Halbierung wird kurz die Verdoppelung (duplatio)[1]) beschrieben. Dann geht al-Ḫuwarizmī zur Multiplikation über. Vor allem sollte das Einmaleins bis einschließlich $9 \cdot 9$ auswendig gelernt werden[2]). Sodann wird beschrieben, wie man die Faktoren anzuordnen und die Operation vorzunehmen hat. Nebenbei werden die multiplikativen Eigenschaften des „Kreises" angegeben, und zwar $0 \cdot n = 0$ und $n \cdot 0 = 0$. Bei der Beschreibung der Multiplikation wird gesagt, daß die Operation „auf einem Brett oder irgendeinem anderen Gegenstand" vorzunehmen sei [96, S. 10]. Dies könnte ein mit Staub oder Sand bedecktes Brett gewesen sein, wie in Indien, oder ein geweißtes Brett, wie es später von Leonardo Fibonacci von Pisa empfohlen wurde, der vieles von seinem Wissen aus dem Orient geschöpft hatte. Sämtliche komplizierteren Rechnungen wurden auf diese Weise durchgeführt[3]). Die Summe, Differenz und das Produkt trug man an den entsprechenden Stellen der oberen Zahl, d. h. eines der Summanden des Minuenden oder des Multiplikanden ein, wozu man die bereits verbrauchten Ziffern dieser Zahl löschte. Papier, das zu jener

---

[1]) Verwunderlich erscheint die Tatsache, daß die Halbierung vor der Verdoppelung behandelt wird. Die Schuld daran könnte beim Abschreiber zu suchen sein. Sowohl bei Johannes als auch bei an-Nasawī steht die Verdoppelung vor der Halbierung. Einige europäische Gelehrte des Mittelalters, z. B. Sacrobosco (13. Jh.), lehrten ebenfalls die Halbierung vor der Verdoppelung.

[2]) Die Tabelle selbst wird nicht angeführt: Man findet sie bei Johannes von Sevilla und in der lateinischen Handschrift aus dem Jahre 1143.

[3]) Beim Rechnen mit kleinen Zahlen bediente man sich in Geschäftskreisen der Finger als Hilfsmittel. Ob in den islamischen Ländern der Abakus mit Steinchen oder gekennzeichneten Rechenmarken verwendet wurde, ist völlig unbekannt [vgl. 100 und 98].

Zeit in Baghdād bereits bekannt war, wurde wegen seiner Seltenheit und seines hohen Preises nicht verwendet. Später, als das Papier weitere Verbreitung fand, wurde das Löschen der Ziffern vermieden, indem man sämtliche Zwischenrechnungen mit hinschrieb: Auf dem Brett, auf dem man mit großen Schriftzeichen schrieb, wäre das in vielen Fällen ungünstig gewesen. Eine derartige Schreibweise finden wir in einigen europäischen Handschriften aus dem 12. Jh. vor. Später ging man in Europa dazu über, die Zwischenergebnisse zu streichen, wodurch man zu einer überladenen und schlecht übersehbaren Schreibweise gelangt (vgl. Abb. 99). Verschiedene Mathematikhistoriker haben al-Ḫuwarizmī und seinen Nachfolgern nicht das Löschen, sondern das Streichen und Darüberschreiben zugeschrieben, jedoch entspricht dies nicht den Tatsachen [33, Bd. I, S. 92].

In dem Zahlenspiegel zur Multiplikation, $2326 \cdot 214$, ist nur das Endergebnis angegeben. Wir wollen hier nach Vorbild von al-Ḫuwarizmī nur die Hauptschritte der Rechnung wiedergeben. Am Anfang steht unter der höchsten Stelle des Multiplikanden die erste Stelle des Multiplikators:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,2\,6 \\ 2\,1\,4 \end{array}$$

Die Multiplikation der Ziffer 2, die in der oberen Zahl an der höchsten Stelle steht, mit den Stellen der unteren Zahl in absteigender Reihenfolge ergibt 428. Diese Zahl wird über 214 in der Zeile des Multiplikanden eingetragen, wozu vorher die obere Ziffer 2 gelöscht wird. In der Handschrift heißt es hierzu: „Sobald die Multiplikation die erste Stelle der unteren Zahl erreicht hat, löschen wir das, was an der Stelle stand, die darüber ist, und stattdessen tragen wir das ein, was wir bei der Multiplikation erhalten haben“ [96, S. 12]. Nun wird der Multiplikator um eine Stelle nach rechts verschoben:

$$\begin{array}{r} 4\,2\,8\,3\,2\,6 \\ \quad 2\,1\,4 \end{array}$$

Die Ziffer 3, unter der die erste Stelle der unteren Zahl steht, wird mit 214 multipliziert, $3 \cdot 214 = 642$. Dabei wird die 64 zur 28 dazugezählt, woraus sich 92 ergibt. Diese Zahl wird über 21 eingetragen. Die Zahl 2 erscheint an Stelle der gelöschten 3. Anschließend wird der Multiplikator wieder um eine Stelle nach rechts verschoben:

$$\begin{array}{r} 4\,9\,2\,2\,2\,6 \\ \quad\quad 2\,1\,4 \end{array}$$

Sodann wird das gleiche Verfahren auf die obere 2 über der unteren 4 angewandt; daraus folgt

$$\begin{array}{r} 4\,9\,6\,4\,8\,6 \\ \quad\quad\quad 2\,1\,4. \end{array}$$

Schließlich werden die gleichen Operationen mit der oberen 6 vorgenommen, wonach auf dem Brett in der oberen Zeile das Produkt

$$4\,9\,7\,7\,6\,4$$

erscheint. Die Übereinstimmung des beschriebenen Verfahrens mit einem entsprechenen indischen liegt auf der Hand. Man trifft es später bei an-Nasawī, Johannes von Sevilla und anderen an. Wir haben uns hier mit dem Multiplikationsverfahren al-Ḫuwarizmīs eingehender beschäftigt, weil in vielen Darstellungen der Geschichte der Mathematik dieses Verfahren entweder unklar oder ungenau beschrieben ist [11; 21, Bd. I; 33, Bd. I, S. 95].

Die Verdoppelung und Multiplikation überprüft al-Ḫuwarizmī mit Hilfe der Neunerprobe. Von einer Überprüfung der anderen Rechenoperationen ist in der Handschrift nicht die Rede. Die Anwendung der Neunerprobe auf sämtliche Rechenoperationen finden wir bei an-Nasawī und Johannes von Sevilla, der auch eine Probe mit Hilfe der inversen Operationen empfahl.

Am ausführlichsten ist in der Cambridger Handschrift die Division mit dem zugehörigen Beispiel 46468: 324 behandelt, jedoch auch hier, wie in den anderen Fällen, die Eintragung des Beispiels in den neuen Ziffern unterblieben. Die Hauptschritte der Rechnung lauten wie folgt:

1	1	1 4	1 4	1 4 3	1 4 3
4 6 4 6 8	1 4 0 6 8	1 4 0 6 8	1 1 0 8	1 1 0 8	1 3 6
3 2 4	3 2 4	3 2 4	3 2 4	3 2 4	3 2 4

Im Quotienten „sind dann .CXLIII. und .CXXXVI. Teile von .CCCXXIII. Teilen der Eins" [96, S. 16]. Die letzte Schreibweise unseres Schemas entspricht der in der arabischen Literatur üblichen Bezeichnung gemischter Zahlen und Brüche (siehe unten).

Die Definitionen der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen fehlen in der Cambridger Handschrift. Johannes von Sevilla schrieb: „Zusammenzählen (aggregare) heißt Sammeln (colligere) irgendwelcher zwei oder mehrere Zahlen zu einer" und „Abziehen (diminuere) heißt ... Wegnehmen (subtrahere) irgendeiner Zahl von einer größeren" [96, S. 30 und 32)[1]). Über die Multiplikation (multiplicatio) wird in der Cambridger Handschrift gesagt, daß die eine Zahl als Vielfaches entsprechend den Einheiten der anderen Zahl genommen wird (duplicetur) [96, S. 10]. An dieser Stelle findet man in der Handschrift einen Hinweis auf das Werk al-Ḫuwarizmīs über Algebra, in dem die Multiplikation analog definiert wird[2]). Von der Division wird gesagt, daß sie „der Multiplikation ähnlich sei, doch werde sie entgegengesetzt zu dieser vorgenommen, denn bei der Division wird abgezogen, dort hingegen hinzugezählt" [96, S. 14]. Gleichzeitig wird gesagt, daß das Ergebnis der Division dasjenige sei, was „auf die Einheit entfällt" [96, S. 14ff]. Nach Johannes von Sevilla bedeutet Teilen (dividere) das „Aufteilen in Teile (partiri) einer größeren Zahl entsprechend dem Quantum einer

[1]) Analoge Definitionen, die auf die antike griechische Logistik zurückgehen [96b, S. 378 und 382], trifft man in vielen arabischen und europäischen Werken des Mittelalters, aber auch später an. Im Rahmen mengentheoretischer Betrachtungen wären sie durchaus sinnvoll.

[2]) Duplicare heißt eigentlich Verdoppeln, hat aber auch die Nebenbedeutung von Vergrößern. Möglicherweise hat der Übersetzer durch diesen Terminus das arabische Verbum tadā'afa wiedergegeben, das die Bedeutung von „verdoppelt werden" und „als Vielfaches genommen werden" hat.

kleineren, d. h. die kleinere von der größeren so oft abzuziehen, wie diese in jener enthalten ist" [96, S. 41]. Ähnlich klingen auch die Definitionen späterer Autoren. Doch bereits Abū-l-Wafā fügt hinzu, daß bei der Multiplikation dasjenige gesucht werde, was einer von zwei gegebenen Zahlen entspricht, während „bei der Division das Gesuchte der Einheit entspricht" [102, S. 290], woraus auch hervorgeht, daß die Division zur Multiplikation invers ist. Eine solche Definition der Division $a : b$ durch die Proportion $\frac{q}{1} = \frac{a}{b}$ ist, wie Abū-l-Wafā betont, auch für Brüche geeignet; offenbar gilt das gleiche auch für die Multiplikation[1]).

Das Verdoppeln und Halbieren behandelte al-Ḫuwarizmī als besondere Rechenoperationen. Sie spielten, wie wir wissen, eine hervorragende Rolle in der ägyptischen Mathematik; sie dienten dort als Hilfsmittel zur Multiplikation und Division mit anderen Zahlen. Woher al-Ḫuwarizmī diese beiden rudimentären Operationen übernommen hat, ist unklar. Möglicherweise hat er sie infolge eines Hanges zu alten Traditionen aufgenommen[2]). Die Mathematikhistoriker machen nicht selten al-Ḫuwarizmī Vorwürfe wegen der Einführung dieser überflüssigen und speziellen Operationen, die durch ihn in nahezu die gesamte mittelalterliche arabische und europäische Literatur eingeschleppt worden sind. Höchstwahrscheinlich hat er aber an diesen Operationen nur festgehalten, um dem Lernenden das Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel zu erleichtern. Jedenfalls war er sich darüber im klaren, daß das Verdoppeln einen Spezialfall der Multiplikation und das Halbieren einen solchen der Division darstellte. Dieser Umstand wird zwar in der Cambridger Handschrift nicht erwähnt, dafür heißt es im „Buch des Algorismus" des Johannes von Sevilla, daß das Halbieren eine Art der Division, das Verdoppeln eine Art der Multiplikation sei und daß sie „notwendig sind beim Aufsuchen der Wurzel, die mit Hilfe des Verdoppelns und Halbierens gefunden werde. Daher sind sie hier selbständig angeführt, obwohl sie besser nach der Behandlung der Multiplikation und Division hätten angeführt werden sollen" [96, S. 38]. An-Nasawī faßte die Halbierung als eine Spielart der Subtraktion auf. Das Halbieren tritt bekanntlich auch beim Auflösen der vollständigen quadratischen Gleichung auf, und in seiner Algebra charakterisiert al-Ḫuwarizmī diese Gleichungen, im Gegensatz zu den zweigliedrigen, als solche, in denen sich die „Wurzeln mediieren lassen", – wir würden dafür sagen, als solche, daß zur Berechnung ihrer Wurzeln der Koeffizient der ersten Potenz der Unbekannten halbiert werden muß [vgl. S. 207].

Nach Behandlung der Rechenoperationen mit ganzen Zahlen wandte sich al-Ḫuwarizmī den Brüchen zu. Auf diese wollen wir erst später eingehen und hier nur anführen, daß zu Beginn des den Brüchen gewidmeten Abschnittes al-Ḫuwarizmī für das Weitere

---

[1]) Ebensolche verallgemeinerte Definitionen der Multiplikation und Division gibt viel später al- Kāšī. Er gibt z. B. im Anschluß an die Definition der Multiplikation für ganze Zahlen als einer wiederholten Addition deren „allgemeine Definition" an: es ist dies „die Gewinnung einer Zahl, deren Verhältnis zu einem der Faktoren dem Verhältnis des anderen Faktors zur Zahl 1 gleich ist" [126, S. 17 und 23].

[2]) Manchen Überlieferungen zufolge haben die orientalischen Händler beim mündlichen Rechnen seit alters her das Verdoppeln und Halbieren bei schwierigeren Multiplikationen und Divisionen angewandt [101, S. 104].

verspricht, das Ausziehen der Quadratwurzel zu zeigen. In der Cambridger Handschrift fehlt die Beschreibung dieser Operation. Aus dem Werk des Johannes von Sevilla, in dem dieser Operation viel Platz eingeräumt ist (20 Seiten des gedruckten Textes) ist zu ersehen, daß al-Ḫuwarizmī das Ausziehen der Quadratwurzeln nach indischem Vorbild lehrte (vgl. S. 114ff.). Johannes beschreibt auch das „Aufsuchen der Wurzeln mit Hilfe der Kreise", d. h. der Nullen [96, S. 86], worunter die näherungsweise Bestimmung der Wurzel aus einer Zahl N, N kein Quadrat, mit Hilfe der Umwandlung

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}$$

gemeint ist, wonach der gebrochene Anteil des Ergebnisses in Sexagesimalbrüche umgewandelt wird. Je mehr Nullen hinzugefügt werden, um so genauer ist das Ergebnis. Als Beispiel dient die Rechnung

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} = \frac{1414}{1000}$$

oder angenähert

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{24}{60^3}.$$

Zuvor hatte Johannes dasselbe Verfahren zur unmittelbaren Berechnung von $\sqrt{2}$ in Sexagesimalbrüche angewandt und $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 60 \cdot 60}}{60} = 1 + \frac{24}{60}$ erhalten. In Wirklichkeit, so erläutert er, hat jede Zahl nur eine Wurzel, jedoch besitzt die Zahl 2 keine echte Wurzel, und im zweiten Falle wurde diese genauer bestimmt. Darüber hinaus gibt Johannes für Nichtquadratzahlen folgende Regel an:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}:$$

Bei An-Nasawī wird eine Näherungslösung angegeben, bei der der Näherungswert zu klein ausfällt:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + 1}.$$

Die Form der Ziffern, wie sie al-Ḫuwarizmī selbst angewandt hat, ist unbekannt, und man kann auch nicht anhand einiger Ziffernzeichen in der Cambridger Handschrift auf die Ziffernform bei al-Ḫuwarizmī schließen. Es ist durchaus möglich, daß er für die Zahlen eins bis neun Buchstaben des Alphabets benutzt hat, wie manche auch später noch verfuhren, z. B. al-Bīrūnī. Andererseits ist es aber durchaus möglich, daß er bereits die ostarabischen Ziffern benutzt hat (Abb. 42). Überhaupt bestehen hinsichtlich der Geschichte unserer heutigen Ziffern noch viele Unklarheiten. Die wenigen exakt bekannten Tatsachen laufen auf folgendes hinaus:

Nach der Eroberung Ägyptens, Syriens und Mesopotamiens pflegte man in den arabischen Texten die Zahlen entweder in Worten oder mit Hilfe der griechischen alphabetischen Schreibweise auszudrücken. Die wörtliche Ausdrucksweise blieb neben dem Ziffern-Positionssystem noch viele Jahrhunderte lang erhalten, ja sogar in Lehrbüchern, in denen die „indische Arithmetik" gelehrt wurde. Die griechischen Ziffern-

buchstaben hingegen werden immer seltener und kamen im 12. Jh. ganz außer Gebrauch. Im 8. bis 9. Jh. tauchte eine eigene arabische alphabetische Schreibweise auf, die sich an die griechische anlehnt und bis in das 10. Jh. hinein sich einer verhältnismäßig großen Verbreitung erfreute. Sie blieb auch später in der Sexagesimalarithmetik in Gestalt der Ziffern „ǧumal" erhalten (vgl. S. 226). Doch bereits in der ersten Hälfte des gleichen Jahrhunderts gewann ein Stellenwertsystem an Verbreitung, bei dem die Zahlen durch die sog. ostarabischen Ziffern und ein besonderes Zeichen für die Null dargestellt wurden. Aller Wahrscheinlichkeit nach handelte es sich bei den ostarabischen Ziffern um eine gewisse Modifikation der Brahmi-Ziffern. Etwa um die gleiche Zeit tauchten auf der Pyrenäenhalbinsel die sog. westarabischen Ziffern „gubar" auf, die teilweise den ostarabischen ähnlich waren. Auf diese werden wir später im vierten Kapitel eingehen müssen (S. 349ff.). Die ostarabischen Ziffern wurden in verschiedenen Ländern beibehalten: Ägypten, Syrien, Türkei, Iran usw. Insgesamt

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ostarabische Ziffern	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Westarabische Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Abb. 42. (Die zweite Zeile ist nach einer ägyptischen Handschrift aus dem 10. Jh. wiedergegeben).

gesehen haben die ostarabischen Ziffern im Laufe der Jahrhunderte nur unbedeutende Änderungen erfahren; sie betrafen hauptsächlich die Zeichen für die Ziffer Fünf und für die Null. Ursprünglich hatte die Ziffer Fünf eine Gestalt, die etwa einem auf dem Kopf gestellten lateinischen Buchstaben b entspricht, doch mit der Zeit nahm sie die Form eines kleinen Kreises oder Ovals an, wie wir das in Abb. 42 sehen können. Die Null hingegen, die ursprünglich durch einen kleinen Kreis bezeichnet wurde, begann man allmählich durch einen Punkt wiederzugeben[1]). Die westarabischen Ziffern werden gegenwärtig in Marokko verwendet. Vom Ende des 9. Jahrhunderts sind einige Urkunden mit neuen Ziffern erhalten geblieben, wobei die älteste aus den Jahren 873 bzw. 874 stammt. Darin ist das entsprechende Datum der moslemitischen Zeitrechnung, d.h. die Jahreszahl 260 mit der Null in Gestalt eines Punktes, enthalten [33, Bd. I, S. 41].

Wie schon gesagt, hat sich das schriftliche Ziffern-Positions-System nur langsam durchgesetzt und hat im Laufe des Mittelalters andere Zahlensysteme nicht vollständig verdrängen können. Weite Bevölkerungskreise benutzten nach wie vor die rein verbale Zählweise. Hiervon zeugt u.a. das „Buch über das, was die Schreiber, Geschäftsleute und andere über die arithmetische Wissenschaft wissen müssen" (Kitab fīma yaḥtāǧ ilaihi al-kuttāb min 'ilm al-ḥisāb), das von Abū-l-Wafā zwischen 961 und 976 verfaßt wurde. Die ersten beiden Abschnitte des Buches behandeln das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen, der dritte die Berechnung ebener Figuren, räumlicher Körper sowie das Messen von Entfernungen, während die letzten vier Teile, die bisher unerforscht sind (vgl. [143]), verschiedene Probleme der praktischen Arith-

[1]) Über die Entwicklung der Form der arabischen Ziffern siehe [103a].

metik behandeln wie kommerzielle Vorgänge, Besteuerung, Maßeinheiten, Austausch verschiedener Getreidesorten, Wechseln von Geld, Ausgabe von Verpflegung und Sold an die Truppen, Berechnungen beim Errichten von Gebäuden und Staudämmen usw. In diesem Werk, das sich speziell an die Praktiker wendet, wird das dezimale Stellenwertsystem nicht verwendet; sämtliche Zahlen werden in Worten ausgedrückt. Das Gesagte gilt auch für ein anderes bekanntes Werk über Arithmetik, das an der Grenze vom 10. zum 11. Jahrhundert von al-Karaǧī verfaßt wurde und den Titel trägt „Ausreichendes Buch über die Wissenschaft der Arithmetik" (vgl. S. 228). Dieses Werk hat ähnliche Züge wie die Abhandlung Abū-l-Wafās und viele spätere Lehrbücher bis in das 16. Jahrhundert hinein. Diese Darlegung der Arithmetik entsprach besser den Gepflogenheiten großer Kreise von Geschäftsleuten und stand lange Zeit in erfolgreichem Wettbewerb mit der neuen Zahlenschreibweise, deren Vertreter al-Ḫuwarizmī, an-Nasawī u.a. waren (vgl. [102]). Sogar in algebraischen Werken wurden die Zahlen häufig durch Worte wiedergegeben. Das gilt insbesondere auch für den uns überlieferten Text der Algebra des al-Ḫuwarizmī selbst. In vielen Werken war die wörtliche Schreibweise für Zahlen mit der Anwendung der indisch-arabischen Ziffern verflochten. Im wissenschaftlichen Gebrauch, insbesondere bei astronomischen Berechnungen, wurden die Zahlen im Sexagesimalsystem dargestellt, wobei man entweder die alphabetische oder die neue Ziffernschreibweise benutzte. In Europa tauchte die moderne Schreibweise für Zahlen später auf als in den arabischen Ländern. Aber dort hat sich dieses System schneller durchgesetzt.

Das mehrfach erwähnte Lehrbuch der Arithmetik von an-Nasawī ist vollständig in russischer Übersetzung erschienen [99a]. Zur Kennzeichnung dieses Werkes wollen wir einige Worte aus dem Vorwort des Verfassers anführen. Nach dem Hinweis, daß die Leitfäden seiner Vorgänger, darunter al-Kindis, des aus Cordoba stammenden Ali ibn Nasr, des Kušyar al Gili und anderer, entweder inhaltlich dürftig und übermäßig lang oder aber schwierig sind bzw. abschweifen, schrieb an-Nasawī: „Daher schrieb ich eine Abhandlung, in der ich mich streng an den Gegenstand halte und langweilige Längen und ungenügende Kürze vermeide. Ich habe den Stoff so angeordnet, daß er den Menschen in verschiedenen praktischen Fragen und den Astronomen in ihrer Kunst nützlich ist. Ich habe das Werk in vier Bücher eingeteilt: das erste – über das Operieren mit ganzen Zahlen, das zweite – über das Operieren mit Brüchen, das dritte – über ganze Zahlen und Brüche und das vierte – über Grade und Minuten. Ich habe hier die geometrischen Beweise weggelassen, um die Darlegung nicht übermäßig lang werden zu lassen" [99a, S. 389, russisch]. Die methodischen Qualitäten dieses Lehrbuches sind sehr hoch einzuschätzen, und anhand dieses Werkes kann man wohl am besten über die Form urteilen, die die „indische Arithmetik" in den islamischen Ländern im 9. bis 11. Jh. angenommen hatte. Gegenüber der arithmetischen Abhandlung al-Ḫuwarizmīs ist bei an-Nasawī eine sehr ausführliche und klare Beschreibung eines Verfahrens zum Ausziehen der Kubikwurzel prinzipiell neu (vgl. S. 242).

Brüche. Wie bereits erwähnt, behandelte ein Teil des arithmetischen Werkes von al-Ḫuwarizmī die Brüche, lateinisch fractiones genannt. Dies stellt eine Über-

setzung des arabischen kasr, von kasra — brechen dar. Hiervon leiten sich auch das französische nombre rompu, das altrussische ломанное число, das englische fraction und das deutsche Wort Bruch her. Der lateinische Text der Arithmetik al-Ḫuwarizmīs drückt eine charakteristische Eigenschaft der arabischen Sprache aus, in der besondere Zahlwörter für Stammbrüche nur bis $\frac{1}{10}$ einschließlich vorhanden waren, und zwar $\frac{1}{2}$ = nisf, $\frac{1}{3}$ = thulth, $\frac{1}{4}$ = rub', $\frac{1}{5}$ = ḫums, $\frac{1}{6}$ = suds, $\frac{1}{7}$ = sub', $\frac{1}{8}$ = thumn, $\frac{1}{9}$ = tus' und $\frac{1}{10}$ = 'ušr. Die Wortstämme dieser Numeralia (abgesehen von dem Wort für ein Halb) sind dieselben wie die der Zahlwörter für die zugehörigen ganzzahligen reziproken Werte, z. B. 3 = thalātha und 5 = ḫams. Die übrigen Stammbrüche wurden arabisch nicht durch besondere Wörter, wie bei uns etwa ein Dreizehntel, bezeichnet, sondern in der Form „ein Teil von dreizehn Teilen" oder einfacher „ein Teil von dreizehn" genannt. Entsprechendes gilt für die Bezeichnung von Brüchen der Form $\frac{m}{n}$; die arabische Sprache kannte zwar „drei Fünftel", jedoch nicht „drei Siebzehntel", wofür man entweder „drei Teile von siebzehn" oder „drei Teile von siebzehn Teilen" sagte. Daher nannte man die Stammbrüche bis $\frac{1}{10}$ einschließlich „aussprechbar", während man die anderen als „unaussprechbar" bezeichnete.

Al-Ḫuwarizmī beschreibt zunächst die Sexagesimalbrüche, die er ebenso wie Johannes von Sevilla den Indern zuschreibt. Man schrieb diese Brüche ebenso wie die gemeinen Brüche nach indischem Vorbild, d. h. in einer Spalte, und zwar zunächst die Grade, darunter die Minuten, dann die Sekunden usw. An erster Stelle steht die Multiplikation. Zuvor werden die Regeln zur Bestimmung der Größenordnung des Produktes bei der Multiplikation einzelner Sexagesimalstellen[1]) angegeben. Bei der Multiplikation von echten oder unechten Brüchen wird empfohlen, jeden Faktor in Einheiten der niedrigsten Stelle auszudrücken, wonach die gesamte Aufgabe auf die Multiplikation ganzer Zahlen im Dezimalsystem und eine anschließende Zurückverwandlung des Produktes in Sexagesimalbrüche hinausläuft. Al-Ḫuwarizmī bemerkt, daß es noch eine weitere und kürzere Multiplikationsmethode gibt; wahrscheinlich meinte er hierbei eine Multiplikation von Sexagesimalbrüchen, die unserer Multiplikation mit Dezimalbrüchen ähnlich ist und den babylonischen sowie spätgriechischen Gelehrten bekannt war. Beim Dividieren werden Dividend und Divisor ebenfalls in Einheiten der niedrigsten Stelle ausgedrückt. Besitzt hierbei der Dividend weniger derartige Einheiten, so wird er in Einheiten der nächstniedrigen Sexagesimalstelle ausgedrückt. Danach folgt die Beschreibung der Addition, Subtraktion, Verdoppelung und Halbierung der Sexagesimalbrüche. Bei Johannes von Sevilla finden wir auch die Regel zum Ausziehen einer Quadratwurzel. Erwähnt sei, daß die Cambridger Handschrift im Abschnitt über Brüche viele Fehler enthält.

Den gemeinen Brüchen ist die letzte Seite der Handschrift von Cambridge gewidmet, die, wie bereits erwähnt, mitten im Beispiel der Multiplikation von $3\frac{1}{2}$ mit $8\frac{3}{11}$

[1]) Die astronomischen Tafeln al-Ḫuwarizmīs enthalten eine Multiplikationstabelle für Sexagesimalstellen bis zu den Sexten einschließlich [117 und 117a, Tafel 57b]. Bei Johannes von Sevilla ist diese Tabelle bis zu den Nonen fortgesetzt.

abbricht. Dieses Beispiel ist auch bei Johannes von Sevilla enthalten, dessen Werk ungefähr fünfzehn Druckseiten über Brüche enthält. Beim Rechnen des Beispiels fügt Johannes hinzu: „Dies ist auch das, was Alcorismus über die Multiplikation und Division ganzer Zahlen und Brüche sagt, wenn auch mit anderen Worten," [96, S. 68]. Bei der Erläuterung der Operationen mit gemeinen Brüchen heben sowohl al-Ḫuwarizmī als auch Johannes von Sevilla die Analogie mit den Sexagesimalbrüchen hervor, indem sie sagen, daß die ursprünglichen Stammbrüche den Minuten, deren Produkte hingegen den Sekunden ähnlich seien. Bei der Multiplikation bedienen sie sich des nachstehend angegebenen Schemas. Dessen Bedeutung wird daraus ersichtlich, daß der Bruch $8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5}$, auf den Hauptnenner gebracht, den Wert $\frac{358}{40}$ hat, während für den rechten Bruch $3\frac{1}{3}\frac{1}{9}$ entsprechend $\frac{93}{27}$ folgt. Das Produkt ergibt sich dann zu $\frac{33294}{1080} = 30\frac{894}{1080}$ nach nebenstehenden Schema.

8		3
1		1
2		3
1		1
4		9
1		
5		
40	1080	27
358	33294	93
	.30.	
	.894.	
	.1080.	

Dieses Beispiel zeigt, daß die Mathematiker der arabischen Länder zur Zeit al-Ḫuwarizmīs und zweifelsohne bereits früher gemeine Brüche als Summen von Stammbrüchen darstellten. Dieses Verfahren war seit alters her in den Gebieten Ägyptens und Babyloniens verbreitet, die von den Arabern erobert worden waren.

Beim Dividieren werden beide Zahlen auf den Hauptnenner gebracht, so daß die ganze Angelegenheit auf eine Division der ganzzahligen Zähler hinausläuft. Johannes betont insbesondere, daß das Aufsuchen des „Hauptnenners" (was durch gewöhnliches Ausmultiplizieren sämtlicher Nenner erfolgte) sowohl für die Division, Addition als auch Subtraktion wichtig sei. Um die Quadratwurzel aus einem Bruch zu ziehen, dessen Nenner keine Quadratzahl ist, wurde die Regel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ angewandt. Handelte es sich hierbei um Brüche der Form $\frac{M}{60^{2k-1}}$, so wurden Zähler und Nenner mit 60 multipliziert.

Sehr ausführlich ist die Lehre von den Brüchen im bereits erwähnten „Buch über das, was die Schreiber, Geschäftsleute und andere über die Wissenschaft Arithmetik wissen müssen" des Abū-l-Wafā abgehandelt. In diesem Werk wurden die Erfahrungen der arabischen Rechner zusammengefaßt und weiterentwickelt. Da das Buch für Praktiker gedacht ist, enthält es keinerlei Beweise, sondern nur Definitionen, Regeln und Beispiele. Diese Handschrift wurde bisher zwar noch nicht veröffentlicht, jedoch sind ihre uns besonders interessierenden Abschnitte in [102] beschrieben.

Zunächst weist Abū-l-Wafā darauf hin, daß das Verhältnis das Maß einer von zwei Zahlen im Vergleich zu der andern ist, wobei man drei Arten von Verhältnissen hat: das des Kleineren zum Größeren, das des Größeren zum Kleineren und das zweier gleicher Größen. Wegen der Einzelheiten verweist er auf ein anderes eigenes Werk, das bisher noch nicht entdeckt wurde. Die Brüche entstehen aus den Verhältnissen

kleinerer Zahlen zu größeren. Diese Behandlungsweise der Brüche ist griechischen Ursprungs. In den „Elementen" des Eukleides, auf die Abū-l-Wafā mehrfach verweist, finden wir eine ähnliche Definition des Verhältnisses oder der Brüche nicht, doch lautet der Satz 4 des Buches VII, daß jede kleinere Zahl (im Verhältnis) zur größeren entweder einen oder mehrere Teile dieser größeren Zahl, in unserer Schreibweise also $\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$, darstellt. Es könnte sein, daß in dem erwähnten, jedoch nicht überlieferten Werk Abū-l-Wafā die Lehre von den Brüchen und den Operationen mit diesen auf der Verwendung von Verhältnissen aufbaute. In dem Buch für Schreiber ist dieser Aufbau nicht enthalten, doch der Begriff bzw. der Terminus „Verhältnis" wird dauernd verwendet.

Das rationale Verhältnis eines beliebigen Zahlenpaares läßt sich auf verschiedene Weise ausdrücken. Al-Kāšī, der den Bruch als „das auf das Ganze als Einheit bezogene Quantum" definierte [126, S. 45, russisch], schrieb: „Jedes Verhältnis des Zählers eines Bruches zu seinem Nenner läßt sich unendlich vielfältig in Zahlen ausdrücken, doch das Beste hiervon für die Anwendung ist das Kleinste aus zwei ganzen Zahlen mit demselben Verhältnis; alle anderen Ausdrücke sind schlechter" [126, S. 46, russisch]. Abū-l-Wafā lehrt auch, wie man mit gemeinen Brüchen operiert und wie man diese kürzt, doch im Mittelpunkt des Interesses steht bei ihm das Verfahren des „In-das-Verhältnis-setzens von Zahl zu Zahl", wie es bei Geschäftsleuten üblich war, d. h., Verhältnisse durch Stammbrüche auszudrücken. Diesem Problem ist der gesamte erste Abschnitt des Buches für die Schreiber gewidmet.

Abū-l-Wafā unterscheidet drei Gruppen von Brüchen, die wir insgesamt als die Grundbrüche bezeichnen wollen. Es handelt sich dabei um die folgenden:

1. die Hauptbrüche, d. h. die Stammbrüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{10}$ einschließlich;

2. zusammengesetzte Brüche der Form $\frac{m}{n}$, $m < n \leq 10$, unter denen der Bruch $\frac{2}{3}$ eine besondere Stellung einnimmt;

3. vereinigte Brüche, d. h. Produkte der Hauptbrüche in der Form $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \ldots \frac{1}{p}$ (mit Ausnahme der Hauptbrüche selbst).

Die Grundbrüche sowie sämtliche Brüche, die sich als Summen und Produkte der Grundbrüche darstellen lassen, nennt Abū-l-Wafā „ausdrückbar" oder „aussprechbar", die übrigen bezeichnet er als „unausdrückbar" oder „unaussprechbar", als aṣamm, als taub. Mit dem gleichen Terminus bezeichnete man, wie wir sehen werden, auch die Irrationalzahlen. Ausdrückbar sind die Brüche, deren Nenner die Faktoren 2, 3, 5 und 7 besitzen; die unausdrückbaren Brüche haben im Nenner Primfaktoren, die größer als 7 sind. Diese Terminologie hängt offenbar mit der bereits erwähnten Besonderheit der arabischen Sprache zusammen.

Im Rechnungs- und Finanzwesen und ähnlichen Fällen praktischer Rechentätigkeit benutzten die Bewohner des Nahen und Mittleren Ostens in großem Umfang Stammbrüche, während sie die übrigen Brüche als Summen und Produkte von Stammbrüchen darstellten. Abū-l-Wafā formuliert eine Vielzahl von Regeln für eine derartige Darstellung, und zwar exakt für die darstellbaren Brüche und angenähert für die nicht ausdrückbaren. Im Grunde genommen besteht alles in einer Entwicklung der Brüche

in Sexagesimalbrüche, die ihrerseits wiederum durch Grundbrüche dargestellt werden. Vor allem geht es darum, zwei Typen von Verhältnissen in Hauptbrüche und zusammengesetzte Brüche zu zerlegen, und zwar Verhältnisse mit dem Nenner 60 und mit ganzzahligem, gebrochenem oder gemischtem Zähler. Den entsprechenden Regeln werden vier Tabellen vorangestellt, in denen für die gebräuchlichsten Brüche deren Darstellungen in Sexagesimalbrüchen angegeben sind, d. h. die jeweils zum Nenner 60 gehörigen Zähler. Abū-l-Wafā selbst bezeichnet dies als „Zerlegungen, die aus Sechzigsteln zusammengesetzt sind". Die Tabelle 1 enthält die Darstellungen für die Hauptbrüche:

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ 30 & 20 & 15 & 12 & 10 & 8\frac{4}{7} & 7\frac{1}{2} & 6\frac{2}{3} & 6. \end{array}$$

Die Tabelle 2 enthält die Darstellungen für verschiedene zusammengesetzte Brüche, beginnend mit $\frac{2}{3}$ und endend mit $\frac{9}{10}$. Gleichzeitig werden für diese Brüche (außer für $\frac{2}{3}$) „schönere Ausdrücke" in Form von Summen aus Hauptbrüchen und zusammengesetzten Brüchen angegeben, z. B.

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10},\quad \ldots,\quad \frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}.$$

In der Tabelle 3 sind die Darstellungen einiger besonders wichtiger Summen von je zwei Brüchen zusammengefaßt, etwa $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$ usw. bis $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$. Die Tabelle 4 schließlich enthält die Sexagesimaldarstellungen für einige Produkte von je zwei Brüchen, z. B. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$ usw. bis $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}$.

Diese Tabellen werden sämtlich benutzt, um andere Brüche zu zerlegen.

I. Verhältnisse der Form $\frac{n}{60}$ mit ganzzahligem $n<60$

Die Zerlegungen werden nach folgenden Regeln gewonnen:

a) Für $n=10k+5$ mit $k=2, 3, 4, 5$ wird im Zähler 15 abgespalten, d. h., die Umformung

$$\frac{n}{60}=\frac{n-15}{60}+\frac{1}{4}$$

verwendet.

b) Für $n=10k+2$ und $n=10k+7$ mit $k=1, 2, 3, 4, 5$ wird im Zähler 12 abgespalten, und man erhält die Umformung

$$\frac{n}{60}=\frac{n-12}{60}+\frac{1}{5}.$$

c) Für $n=6, 7, 8, 9$, $n=10k+1$, $n=10k+3$, $n=10k+6$, $n=10k+8$ wird im Zähler 6 abgespalten, d. h.

$$\frac{n}{60}=\frac{n-6}{60}+\frac{1}{10}$$

gesetzt.

d) Für $n = 10k + 4$ und $n = 10k + 9$ wird durch die Umformung

$$\frac{n}{60} = \frac{n-4}{60} + \frac{1}{15}$$

die Zahl 4 abgespalten.

Es gilt beispielsweise

$$\frac{49}{60} = \frac{45}{60} + \frac{4}{60} = \frac{30}{60} + \frac{15}{60} + \frac{4}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10};$$

ja sogar die Zahl $\frac{48}{60}$ wird nicht durch den zusammengesetzten Bruch $\frac{4}{5}$, sondern in der Form

$$\frac{48}{60} = \frac{42}{60} + \frac{6}{60} = \frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

dargestellt. Das liegt daran, daß man es vorzog, auch die zusammengesetzten Brüche $\left(\text{mit Ausnahme von } \frac{2}{3}\right)$ durch Hauptbrüche und zusammengesetzte Brüche darzustellen, obwohl man sie bei Zwischenrechnungen häufig benutzte.

II. Verhältnisse der Form $\frac{n+\alpha}{60}$, wobei $n < 60$ ist und α die Form $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{k}$ hat, $1 \leq p < q \leq k \leq 10$, oder selbst eine Summe solcher Brüche ist.

Hier gibt Abū-l-Wafā eine große Anzahl von Regeln für verschiedene α an. Ohne uns auf Einzelheiten einzulassen, wollen wir lediglich bemerken, daß man im allgemeinen eine Zerlegung für $\frac{n+\alpha}{60}$ nicht einfach als eine Summe von Zerlegungen für $\frac{n}{60}$ und $\frac{\alpha}{60}$ erhält, sondern es wird eine Anzahl von Hilfszerlegungen des Zählers in Summanden vorgenommen, die auf ein ganz anderes Ergebnis führen. Der Zerlegungsalgorithmus erweist sich als nicht eindeutig; der Vorzug wird dem Ausdruck oder den Ausdrücken eingeräumt, die aus einer kleineren Anzahl von Hauptbrüchen bestehen.

III. Andere Verhältnisse

In den übrigen Fällen wird die Zerlegung vorgenommen, indem man mit 60 multipliziert und dann zu 60 ins Verhältnis setzt. In den Beispielen Abū-l-Wafās wird die Umformung

$$\frac{s}{t} = \left(\frac{s \cdot 60}{t}\right) : 60 = \frac{n+\alpha}{60}, \quad n < 60, \quad \alpha < 1$$

benutzt und dadurch die Zerlegung entweder direkt auf die Fälle I und II zurückgeführt, oder man iteriert erforderlichenfalls, indem man erneut mit 60 multipliziert und durch 60 dividiert. Für $t = 2^{m_1}\, 3^{m_2}\, 5^{m_3}\, 7^{m_4}$ führt dieses Verfahren auf eine exakte Zerlegung. Beim Auftreten anderer unkürzbarer Primfaktoren im Nenner wird der Zerlegungsprozeß, der sich bis ins Unendliche fortsetzen ließe, entweder nach dem ersten oder zweiten Schritt abgebrochen, z. B.

$$\frac{3}{17} = \frac{180}{17} : 60 = \frac{10 + \frac{10}{17}}{60}.$$

Hier rundet Abū-l-Wafā den Zähler auf 11 ab mit der Bemerkung, daß $10 > \frac{1}{2} \cdot 17$ ist:

$$\frac{3}{17} \approx \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}.$$

Zur Erzielung größerer Genauigkeit hat man den Prozeß fortzusetzen:

$$\frac{3}{17} = \frac{10 + \frac{10}{17}}{60} = \left(10 + \frac{600}{17} : 60\right) : 60 = \left(10 + \frac{35}{60} + \frac{5}{17} : 60\right) : 60.$$

Mit der Begründung, daß $5 < \frac{1}{2} \cdot 17$ ist, läßt Abū-l-Wafā den letzten Summanden in der Klammer weg und erhält

$$\frac{3}{17} \approx \left(10 + \frac{35}{60}\right) : 60 = \left(10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : 60 = \left(6 + 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}\right) : 60 = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}.$$

Dieses Verfahren war eine Entdeckung der Gelehrten, vielleicht Abū-l-Wafās selbst. Die Schreiber, sagte er, zählen in solchen Fällen zum Zähler und Nenner eines unausdrückbaren Bruches irgendeine Zahl hinzu, um so einen ausdrückbaren Bruch zu erhalten, in unserem Falle

$$\frac{3}{17} \approx \frac{3+1}{17+1} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Der Näherungswert ist um so schlechter, je größer die hinzugefügte Zahl ist, und die Wahl hinreichend kleiner gebrochener Summanden ist schwierig. Daher empfiehlt Abū-l-Wafā die Anwendung des oben beschriebenen Verfahrens. In der Tat erhält man für die drei Näherungswerte folgende Fehler: Der erste Näherungswert Abū-l-Wafās differiert um 4%, der zweite nur noch um 0,05%, während der Näherungswert $\frac{2}{9}$ mit einem Fehler von 26% behaftet ist. Abū-l-Wafā selbst gibt den absoluten Fehler des zweiten Näherungswertes mit $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$ an und rechnet auch noch einen dritten Näherungswert mit dem absoluten Fehler $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$ aus, was einem relativen Fehler von 0,001% entspricht.

Im zweiten Abschnitt des Buches sind die Operationen mit ganzen Zahlen, mit gemeinen Brüchen sowie mit Brüchen beschrieben, die durch Grundbrüche ausgedrückt sind. Die Division ganzer Zahlen hatten wir bereits erwähnt. Beachtenswert ist die Tatsache, daß die Operationen der Verdopplung und Halbierung fehlen. Noch bemerkenswerter ist ferner, daß mit allem Nachdruck die Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen empfohlen wird, wenn es darum geht, den Hauptnenner von Brüchen zu bestimmen. Die von den Schreibern und Rechnern angewandten Methoden der Bruchrechnung waren zum Teil sexagesimaler Natur. Dies geht aus den nachstehenden Beispielen zur Addition und Subtraktion klar hervor:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 60 + \frac{2}{3} \cdot 60 + \frac{3}{10} \cdot 60}{60} = \frac{106}{60} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10};$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{1}{5} \cdot 60\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{60} = \frac{22\frac{1}{2}}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Die Frage nach der Herkunft der beschriebenen Verfahren bleibt zur Zeit noch ungeklärt. Außer Zweifel steht ihre große und frühe Verbreitung im Gebiet der arabischen Länder; sicher handelt es sich um Reste der altbabylonischen Rechnungsweise. Sehr wahrscheinlich ist der Zusammenhang mit der Anwendung der Stammbrüche in Ägypten, im alten Babylon und in den hellenistischen Staaten. Bei all dem sind die von Abū-l-Wafā beschriebenen Methoden sowohl hinsichtlich der am Anfang stehenden Auswahl der Grundbrüche als auch hinsichtlich der angewandten Umformungen so originell, daß wir durchaus berechtigt sind, hier die Existenz fest eingebürgerter nationaler Traditionen zu vermuten, die den Mathematikern Anlaß zu weiteren Vervollkommnungen gegeben haben. In diesem Zusammenhang mag auch der Umstand Bedeutung gehabt haben, daß unter den verschiedenen Währungssystemen in den Gebieten des arabischen Orients das Verhältnis der Währungseinheiten 1 dinār = 6 daniq[1]) = 60 ša'ir die größte Verbreitung gefunden hatte.

Die Darstellung der gemeinen Brüche als Summe und Produkt von Stammbrüchen finden wir auch später bei vielen Verfassern arithmetischer Leitfäden: im Osten bei al-Karaǧī, im Westen bei Abū Zakāriyā Muḥammad ibn 'Abdallah al-Ḥassār [103] und Abū-l-Ḥasan 'Ali ibn Muḥammad al-Qalasādī u.a.

Eine Abart des Rechnens mit Stammbrüchen war das bei Geschäftsleuten und allgemein unter der Bevölkerung Mittelasiens und des Iran verbreitete Rechnen mit daniq, ṭasūǧ und ša'ir, dessen eingehende Beschreibung wir z.B. bei al-Kāšī finden. Die daniq, ṭasūǧ und ša'ir sind mittelalterliche Gewichts- und Geldeinheiten, die $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$ bzw. $\frac{1}{96}$ der Grundeinheit (dinār, dirham u.a.) ausmachen. Zu ihrer Darstellung wurden besondere Ziffern „sijaka" verwendet, die aus einer Art stenographischem Schriftbild der arabischen Zahlwörter entstanden sind. Um zu noch kleineren Brüchen zu gelangen, bildete man die daniq der ša'ir, die ṭasūǧ der ša'ir und die ša'ir der ša'ir, d.h. die Brüche $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{96}$, $\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{96}$, $\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{96}$ usw.

Al-Kāšī lehrt zunächst, wie man gemeine Brüche in daniq, ṭasūǧ und ša'ir und umgekehrt diese in gemeine Brüche verwandelt. Im ersten Falle sind die Überlegungen den eben angeführten ähnlich, lediglich mit dem Unterschied, daß anstelle des Faktors 60 nacheinander die Faktoren 6, 24 und 96 auftreten, z.B.

$$\frac{5}{7}=\frac{30:7}{6}=\frac{4}{6}+\frac{8\cdot 7}{24}=\frac{4}{6}+\frac{1}{24}+\frac{4:7}{96}=4\,\text{d.}\;1\,\text{ṭ.}\;\frac{4}{7}\,\text{š.}$$

Bei der Multiplikation und Division von Brüchen, die in diesem System dargestellt waren, benutzte man Tabellen, die Produkte von Vielfachen der einzelnen Elementarbrüche enthielten. Um etwa 5 d. 3 ṭ. 3 š. mit 4 d. 1 ṭ. 2 š. zu multiplizieren, suchte man unmittelbar in der Tabelle sämtliche neun Zwischenprodukte auf, schrieb diese stellenweise untereinander und erhielt durch Addition das Ergebnis 4 d. 1 ṭ. 1 š. 1 d.š. 2 ṭ.š. 2 š.š. Die Division wurde entsprechend vorgenommen.

---

[1]) Die gleiche Wurzel wie das Wort dang besitzt das russische Wort деньга, das heute in der Pluralform soviel wie Geld bedeutet, ursprünglich aber (im 14. Jh.) die Bedeutung einer Geldeinheit im Wert von einem Hundertstel des Moskauer Rubel (später $^1/_{200}$) hatte.

Die algebraische Abhandlung des Muhammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizīm. Die Algebra al-Ḫuwarizmīs ist uns in einem wesentlich besser erhaltenen Zustand überliefert als seine Arithmetik. In der Bibliothek der Universität Oxford wird eine arabische Handschrift der Algebra aufbewahrt, die im Jahre 1342 vollendet wurde [104][1]). Darüber hinaus existieren mehrere lateinische Handschriften, die entweder auf die Übersetzung des Engländers Robert of Chester, angefertigt im Jahre 1145 in Segovia, oder auf die Übersetzung des Italieners Gerhard von Cremona (1114 bis 1187), geschrieben in Toledo [105, 106], zurückgehen. Der arabische Text trägt die Überschrift „Kurzes Buch über das Rechnen der Algebra und Almukabala" (Al-kitāb al-muktaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala) und besteht 1. aus einem eigentlich algebraischen Abschnitt, auf den ein kurzes Kapitel über kaufmännische Berechnungen, und zwar über die einfache Dreisatzrechnung nach dem indischen Vorbild, folgt, 2. aus einem nicht allzu umfangreichen geometrischen Kapitel über Messungen unter Verwendung der Algebra und 3. aus einem umfangreichen Teil über testamentarische Angelegenheiten. In den lateinischen Übersetzungen sind der zweite und dritte Abschnitt nicht enthalten. Die Texte weisen unerhebliche Abweichungen voneinander auf. Irgendwelche Symbole verwendet al-Ḫuwarizmī nicht; seine Überlegungen sind rein verbal und sehr weitschweifig.

Wir hatten bereits erwähnt, daß al-Ḫuwarizmī bei der Abfassung seiner Abhandlung über Algebra hauptsächlich das Ziel verfolgte, einen Leitfaden zur Lösung von Aufgaben aus dem täglichen Leben zu geben. Dadurch erklärt sich auch der große Anteil, den er insbesondere den Aufgaben über Testamente und Erbschaften widmet, der etwas mehr als die Hälfte des Buches ausmacht. Das moslemitische Erbrecht war (wie es in manchen Gegenden auch heute noch der Fall ist), einem strengen und komplizierten Reglement unterworfen, das die möglichen Anteile der Erben in Abhängigkeit von deren Verwandschaftsgrad (Ehefrau, Ehemann, Tochter, Sohn, Eltern usw.) festlegte und die Rechte des Erblassers einschränkte. Daher standen die Juristen häufig vor recht verwickelten Problemen, die in den Lehrbüchern der Übung halber noch komplizierter gestaltet wurden. Mit Erbschaftsaufgaben hatte man sich schon vor al-Ḫuwarizmī (bereits im alten Babylon) und auch nach ihm beschäftigt [107].

Die Algebra al-Ḫuwarizmīs ist eine Lehre vom Auflösen quadratischer und linearer Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten. In der Arithmetik, sagt er, haben es die Leute mit gewöhnlichen Zahlen zu tun. In der Algebra betrachtet man dreierlei Zahlen: Es sind dies einfache Zahlen oder dirham (dirham vom griechischen drachme — Geldeinheit), ferner ǧidhr (Wurzel) oder šai (Ding) und schließlich māl (Eigentum, Geldbetrag usw., aber auch Quadrat). Māl, sagt al-Ḫuwarizmī, ist das Produkt von ǧidhr mit sich selbst, während ǧidhr eine Größe ist, die man mitunter mit sich selbst multiplizieren muß.

Über den Ursprung der algebraischen Termini bei al-Ḫuwarizmī bestehen verschiedene Vermutungen. Im Abschnitt über die Erbschaften und Testamente bedeutet „māl" das Eigentum und dient als unbekannte Größe in linearen Aufgaben. Offenbar hat später māl die Bedeutung des Quadrats im Gegensatz zur Wurzel „ǧidhr" erlangt. Das Wort „šai" dürfte naturgemäß zur Bezeichnung der gesuchten Größe, d. h.

---

[1]) Kürzlich wurden zwei arabische Handschriften dieses Werkes entdeckt, doch sind sie bisher noch nicht näher untersucht worden [110*a*, S. 95].

des gesuchten Dinges, gewählt worden sein. Das Wort „ǧidhr" ist höchstwahrscheinlich einfach eine Übersetzung des sanskritischen Wortes „mūla", was soviel wie Wurzel bedeutet. Es ist auch möglich, daß ein Zusammenhang zwischen dem Wort „dirham" und dem sanskritischen „rūpa" besteht, das ebenfalls eine Geldeinheit bezeichnet. Auf jeden Fall ist der mathematische Sinn dieser Termini klar, und wir können hier für „ǧidhr" einfach Unbekannte oder Wurzel und für „māl" Quadrat sagen.

An den Anfang stellt al-Ḫuwarizmī eine Klassifizierung der von ihm betrachteten sechs Typen von linearen und quadratischen Gleichungen mit den dazugehörigen Lösungsverfahren. Dann zeigt er an Beispielen, wie man andere Gleichungen auf die sechs Normalformen zurückführt. An dieser Stelle treten auch die beiden wichtigsten Operationen auf, al-ǧabr und almuqābala, die im Titel des Werkes stehen.

In der Normalform müssen sämtliche Glieder der Gleichungen als additive und nicht als subtraktive Größen auftreten. Daher gibt es auch sechs Typen, da die Fälle, in denen eine positive Lösung nicht existiert, nicht berücksichtigt werden. Diese sechs Typen lauten:

1. Die Quadrate sind den Wurzeln gleich, $a x^2 = b x$;
2. die Quadrate sind einer Zahl gleich, $a x^2 = c$;
3. die Wurzeln sind einer Zahl gleich, $a x = c$;
4. die Quadrate und Wurzeln sind einer Zahl gleich, $a x^2 + b x = c$;
5. die Quadrate und Zahlen sind den Wurzeln gleich, $a x^2 + c = b x$;
6. die Wurzeln und Zahlen sind den Quadraten gleich, $b x + c = a x^2$.

Jede andere Gleichung muß vor der Lösung auf eine dieser Normalformen gebracht werden. Beim Auftreten subtraktiver Glieder entledigt man sich dieser mit Hilfe des al-ǧabr, d. h. der Auffüllung, wozu man auf beiden Seiten der Gleichung Glieder vom Betrag der subtraktiven Größe hinzufügt. Sodann werden sämtliche gleichnamigen Glieder mit Hilfe der al-muqābala, d. h. der Gegenüberstellung, zu einem zusammengefaßt. Darüber hinaus muß der höchste Koeffizient der quadratischen Gleichung auf den Wert 1 gebracht werden, da die Regeln zur Auflösung der Gleichungen 4. bis 6. für diesen Fall formuliert sind.

In einer Aufgabe, deren Bedingungen man in der Form

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

oder

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

schreiben kann, nimmt al-Ḫuwarizmī z. B. nacheinander folgende Umformungen vor:

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x \text{ (al-ǧabr)};$$

es folgt eine Division durch 2 und ein Zusammenfassen der gleichnamigen Glieder

$$x^2 + 21 = 10x \text{ (al-muqābala)};$$

damit ergibt sich eine Gleichung von Typ 5.

Die Bezeichnung der Umformung al-ǧabr, die im Titel der Abhandlung an erster Stelle steht, wurde bald auf die gesamte Lehre von den Gleichungen ausgedehnt. Bereits al-Hayyām sprach von den „Lösungsverfahren der Algebra" und von den

„Algebraikern“[1]). Die Westaraber, durch deren Vermittlung das Werk al-Ḫuwarizmīs in Europa bekannt wurde, sprachen den Buchstaben „ǧim“ als g aus und sagten daher nicht al-dschabr, sondern al-gabr. In Europa tauchte das Wort Algebra als Bezeichnung für diese Wissenschaft im 14. Jahrhundert auf.

Bei der Lösung der ersten drei Gleichungstypen sind zwei Besonderheiten beachtenswert: Einmal behandelt al-Ḫuwarizmī die Gleichung $ax^2 = bx$ als lineare Gleichung und berücksichtigt die Lösung Null nicht, da sie in konkreten Aufgaben uninteressant ist. So wurde bis ins 17. Jahrhundert hinein verfahren. Zum anderen, und das ist besonders zu beachten, tritt als gesuchte Größe nicht nur die Wurzel der Gleichung, sondern auch deren Quadrat auf. So fügt al-Ḫuwarizmī, nachdem er aus der Gleichung $x^2 = 5x$ die Wurzel $x = 5$ bestimmt hat, hinzu, daß ihr Quadrat 25 beträgt. Auch im Fall der linearen Gleichung $\frac{1}{2}x = 10$ gibt er neben der Wurzel 20 auch deren Quadrat 400 an. Darüber hinaus wird im ersten Beispiel dieser Art sofort angegeben, daß die Wurzel 3 und deren Quadrat 9 beträgt [vgl. S. 222].

Die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichungen bedarf besonderer Betrachtungen. Zunächst gibt der Verfasser in Worten die Regeln dafür an, wie man die Wurzeln solcher Gleichungen in Radikalen ausdrückt, und liefert dann die geometrischen Beweise. Diese werden zwar an Zahlenbeispielen vorgenommen, doch sind sie durchaus allgemeiner Natur. Die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 10x = 39,$$

die, wie viele andere Beispiele al-Ḫuwarizmīs, nahezu in alle arabischen und europäischen Lehrbücher der Algebra im Mittelalter Eingang gefunden hat, wird mit Hilfe zweier verschiedener Konstruktionen begründet, die beide der quadratischen Ergänzung entsprechen. Bei der einen Konstruktion wird das gesuchte Quadrat x^2 konstruiert, über dessen Seiten Rechtecke mit der Höhe $\frac{10}{4}$ hinzugefügt werden (Abb. 43); schließlich werden die Ecken durch vier Quadrate von der Seitenlänge $\frac{10}{4}$ ausgefüllt. Das dabei entstandene Quadrat hat den Flächeninhalt $39 + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$; seine Seite, d.h. $x + 2 \cdot \frac{10}{4}$, hat die Länge 8, so daß sich $x = 3$ ergibt. Im Falle der Gleichung

$$x^2 + px = q$$

entsprechen die geometrischen Umformungen den folgenden algebraischen:

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x + 2 \cdot \frac{p}{4} = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2}.$$

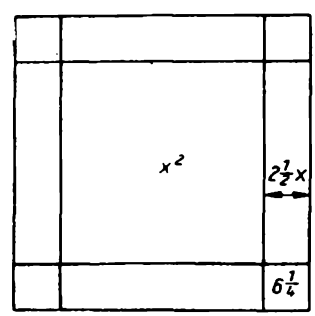


Abb. 43

[1]) Es ist durchaus möglich, daß dieser Terminus bereits um 1000 verwendet wurde [97, S. 13].

Daraus folgt die Regel al-Ḫuwarizmīs

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Ein anderer geometrischer Beweis geht klar aus der Abb. 44 hervor; hier gilt

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

usw. Die Bezeichnungen auf beiden Abbildungen wurden vom Verfasser hinzugefügt.

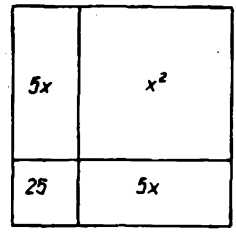


Abb. 44

Die negative Wurzel der Gleichung wird weder hier noch in anderen Fällen berücksichtigt.

Den sechsten Gleichungstyp, der etwa durch die Gleichung

$$x^2 = 3x + 4$$

repräsentiert wird (in diesem Falle hat die Gleichung eine und nur eine positive Wurzel), wollen wir zunächst übergehen und betrachten die Gleichung

$$x^2 + q = px.$$

Al-Ḫuwarizmī weiß, daß in diesem Falle entweder zwei (positive) Wurzeln, eine Wurzel (Doppelwurzel) oder keine Wurzel (beide Wurzeln sind nicht reell) auftreten können. Die Regel wird für die Gleichung

$$x^2 + 21 = 10x$$

in folgenden Worten ausgedrückt: „Halbiere die Wurzeln; das ergibt fünf; multipliziere dies mit sich selbst, und du erhältst fünfundzwanzig; ziehe davon die einundzwanzig ab, die dem Quadrat hinzugefügt sind; es verbleiben vier; ziehe hieraus die Wurzel — das ergibt zwei, und ziehe dies von der Hälfte der Wurzel ab, d. h. von fünf, es verbleiben drei; dies ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst, und das Quadrat ist neun. Falls du willst, addiere dies zur Hälfte der Wurzeln, das gibt sieben, und das ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst, und das Quadrat ist neunundvierzig. Triffst du auf eine Aufgabe, die auf dieses Kapitel führt, so überprüfe ihre Richtigkeit mit Hilfe der Addition; ist das nicht der Fall, so erhält man zweifellos (die Lösung) mit Hilfe der Subtraktion. Nur in diesem Kapitel von den drei Kapiteln, in denen man die Wurzeln halbieren muß, bedient man sich der Addition und Subtraktion. Wisse ferner, daß die Aufgabe nicht möglich ist, wenn du in diesem Kapitel die Wurzel halbierst und mit sich selbst multiplizierst und das Produkt kleiner ist als die dirham, die dem Quadrat hinzugefügt sind; ist es jedoch den dirham gleich, so ist die Wurzel des Quadrats gleich der Hälfte der Wurzel, ohne daß man etwas hinzufügt oder abzieht" [104, S. 11 und 12, englisch]. Der letzte Fall $x = \frac{p}{2}$ wird in der bisher bekannten Literatur hier erstmalig erwähnt.

Der geometrische Beweis unterscheidet zwei Fälle, entsprechend den Wurzeln

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Zunächst wird an dem gegebenen Beispiel der erste Fall eingehend untersucht. Das Rechteck $GCDE$ mit den Seiten $\overline{GC} = p$ und $\overline{CD} = x$ (Abb. 45) wird aus dem Quadrat $ABCD = x^2$ und dem an dieses angelegten Rechteck $GBAE = (p - x)x = q$ gebildet. Nimmt man $x < \frac{p}{2}$ an (dies wird von al-Ḫuwarizmī nicht besonders erwähnt), so kann man in F, dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{GC}$ die Senkrechte $\overline{FH}$ errichten, die man um die Strecke $\overline{HK} = \overline{AH} = \frac{p}{2} - x$ verlängert. Nunmehr werden die Quadrate $GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ und $JHKL = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2$ konstruiert. Nach Konstruktion sind die Rechtecke $EJLM$ und $FBAH$, in denen die entsprechenden Seitenpaare gleich sind, kongruent. Daher ist das Quadrat $JHKL$ als Differenz aus dem Quadrat $GFKM$ und der Summe der Rechtecke $GFHE$ und $EJLM$ gleich der gegebenen Differenz der Größen $GFKM$ und $GBAE$, d. h.

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Für die Seite des Quadrats $JHKL$ folgt demnach $\overline{JH} = \overline{AH} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, während die gesuchte Seite $\overline{AD} = \overline{HD} - \overline{HA}$ ist, d. h.

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Der zweite Fall wird in der in Oxford aufbewahrten arabischen Handschrift nicht untersucht; es wird lediglich gesagt, daß man die größte Wurzel erhält, wenn man zu $\overline{DH}$ die Strecke $\overline{JH}$ addiert. Es ist durchaus möglich, daß al-Ḫuwarizmī auch die Konstruktion für den zweiten Fall kannte. In manchen lateinischen Texten seiner Algebra [106, S. 84 bis 87] sind entsprechende Zeichnungen enthalten (vgl. Abb. 46; hier wird unter der Voraussetzung $x > \frac{p}{2}$ der Mittelpunkt F der Strecke $\overline{GC} = p$ im Innern der Strecke $\overline{BC} = x$ bestimmt; $\overline{AB} = \overline{BC}$ und das Quadrat $BFHJ$ mit der Seite $\overline{BF} = x - \frac{p}{2}$ ist gleich der Differenz aus dem Quadrat $GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ und aus der Summe der Rechtecke $GBLM$ und $JHKL$, die ihrerseits gleich $GBAE = q$ ist, so daß $\overline{BF} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x = \overline{CF} + \overline{FB}$ ist; der Bequemlichkeit halber haben wir die Zeichnung ein wenig abgeändert).

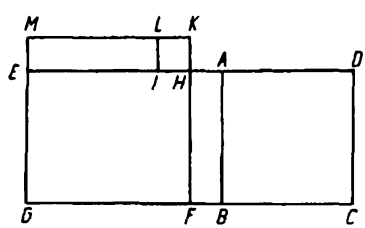


Abb. 45

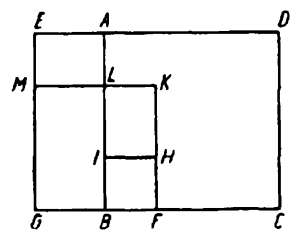


Abb. 46

Nach Behandlung der Auflösung von Gleichungen der Normaltypen erläutert al-Ḫuwarizmī an Beispielen die Grundregeln für das Operieren mit algebraischen Ausdrücken: Multiplikation von Monomen und Binomen, etwa in der Art $\left(10+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-5x\right)$, Zusammenfassung gleichnamiger Glieder in Summen und Differenzen, Einmultiplizieren von Faktoren unter die Wurzel oder Vorziehen von Faktoren vor die Wurzel bei quadratischen Radikalen sowie die Multiplikation solcher Radikale. Die Beispiele sind einfach, etwa $2\sqrt{x}=\sqrt{4x}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}$ usw. Die Addition und Subtraktion veranschaulicht er an Strecken, wobei er die Einhaltung des Dimensionsprinzips fordert. Einen Ausdruck der Form

$$(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2),$$

den er selbstverständlich in Worten beschreibt, kann man nach al-Ḫuwarizmī nicht in einer Zeichnung darstellen, da hier drei verschiedene Dimensionen auftreten; doch könnte man ihn, fügt er hinzu, leicht in Worten erklären.

In diesen Kapiteln des Buches, die gleichsam eine Einführung in das algebraische Rechnen darstellen, findet man einen Hinweis auf die Existenz numerischer quadratischer Irrationalitäten, die al-Ḫuwarizmī ǧidhr aṣamm, d.h. stumme oder taube Wurzel, nennt. Höchstwahrscheinlich ist das eine Übersetzung des griechischen alogos, das man etwa im Sinne von unaussprechbar, nicht in Worten ausdrückbar, nicht aber im Sinne von beziehungslos zu verstehen hat[1]). Gerhard von Cremona übersetzte das Wort aṣamm durch das lateinische surdus, das sich bis ins 18. Jahrhundert hinein neben dem Wort irrationalis gehalten hat, dem man bereits im Altertum begegnete.

Im übrigen hat al-Ḫuwarizmī irrationale Größen nur in geringem Umfang angewandt. Seine Beispiele für Gleichungen haben sämtlich rationale Koeffizienten und häufig auch ganzzahlige Lösungen. Ausnahmen bilden nur einige Gleichungen der Form $x^2=q$ und eine vollständige quadratische Gleichung

$$10x=(10-x)^2,\ \text{d.h.}\ x^2+100=30x,$$

deren irrationale Lösung $x=15-5\sqrt{5}$ nicht angegeben ist.

Auf diese Abschnitte folgen sechs Zahlenbeispiele für Gleichungen aller sechs Typen. In vier Fällen geht es um die Zerlegung der Zahl 10 in zwei Teile nach irgendeiner vorgegebenen Bedingung. Die ersten drei Beispiele lauten

$$4x(10-x)=x^2,\ \text{d. h.}\ 5x^2=40x,$$

$$2\tfrac{7}{9}x^2=10^2,\ \text{d. h.}\ \tfrac{25}{9}x^2=100,$$

$$\frac{10-x}{x}=4,\quad \text{d. h.}\quad 5x=10.$$

Es sei erwähnt, daß al-Ḫuwarizmī in der zweiten Aufgabe Stammbrüche benutzt und um 100 durch $\frac{25}{9}$ zu dividieren, den Bruch $\frac{9}{25}$ in der Form $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$ darstellt. Bei der

[1]) Es sei daran erinnert, daß Abū-l-Wafā die „unaussprechbaren" Brüche auch als aṣamm bezeichnete (vgl. S. 99).

fünften Aufgabe ist die Zahl 10 so in zwei Teile zu zerlegen, daß deren Quadrate die Summe 58 ergeben. Dies ergibt die bereits auf Seite 205 genannte Gleichung

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Im nächsten Abschnitt, der verschiedene Aufgaben behandelt, werden Systeme gelöst, in denen die erste Bedingung ebenfalls $x + y = 10$ lautet, während die zweiten Bedingungen die folgenden sind:

$$xy = 21,$$
$$y^2 - x^2 = 40,$$
$$x^2 + y^2 + (y - x) = 54,$$
$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}$$

usw. Allerdings benutzt al-Ḫuwarizmī die zweite Unbekannte nicht explizite, sondern operiert mit den Teilen x und $10 - x$, d. h. mit dem „Ding" und „zehn ohne das Ding". Im übrigen sind das nicht die einzigen Beispiele, die er anführt. Unter vielen anderen verdient eine Aufgabe besonderes Interesse, in der die Anzahl x von Leuten bestimmt werden soll, wenn $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$ ist.

Die Lösungen al-Ḫuwarizmīs zeigen, wie er die Wurzeln der Gleichungen vom fünften Typ verwendet hat. In der ersten der beiden eben genannten Aufgaben, die ebenso wie die vorhergehende auf die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ hinausläuft, gibt er die beiden Lösungen 3 und 7 an, denn jede dieser beiden Zahlen kann als ein Teil der Zahl 10 aufgefaßt werden. Anders liegen die Dinge in der dritten Aufgabe, die sich auf die Gleichung $x^2 + 28 = 11x$ mit den Wurzeln 4 und 7 zurückführen läßt. Hier gibt al-Ḫuwarizmī nur die eine Lösung $x = 4$ an. Eine Erklärung für diese Wahl wird nicht gegeben, doch zweifellos hat sich al-Ḫuwarizmī bei der „Überprüfung der Richtigkeit der Aufgabe", wie er das selbst sagte, davon überzeugen müssen (S. 207), daß nur die „Lösung mit Hilfe der Subtraktion", d. h. $x = 4$, geeignet ist. Die zweite Lösung „mit Hilfe der Addition", d. h. $x = 7$, liefert für den zweiten Teil von $y = 10 - x$ den Wert 3, wobei die zweite Bedingung der Aufgabe nicht erfüllt ist: die Summe der Quadrate der beiden Teile ergibt zusammen mit ihrer (positiven!) Differenz nicht 54 sondern 58. Übrigens treten auch Fälle auf, in denen al-Ḫuwarizmī nur eine Wurzel verwendet, obwohl beide Wurzeln der Bedingungen der Aufgabe genügen. Das ist z. B. bei der letzten angeführten Aufgabe der Fall, in der al-Ḫuwarizmī von den beiden Wurzeln 4 und 6 der zugehörigen Gleichung $x^2 + 24 = 10x$ nur die Lösung $x = 4$ angibt.

Vollständige quadratische Gleichungen werden sodann im geometrischen Abschnitt der Algebra al-Ḫuwarizmīs angewandt, wo sie als Zwischenergebnisse auftreten, da die Probleme nach Reduktion auf Gleichungen ersten Grades hinauslaufen. Viel größer ist die Anzahl der Aufgaben über lineare Gleichungen: Sie füllen den gesamten Abschnitt des Buches über Erbschaften und Testamente aus.

Wir wollen eine solche Aufgabe al-Ḫuwarizmīs betrachten. Dabei werden wir erkennen, daß seine Lösung trotz Fehlen jeglicher Symbolik algebraischer Natur ist, obwohl sie eben aus diesem Grunde umständlich und weitschweifig ist.

Jemand hinterließ bei seinem Tode seinen vier Söhnen jeweils gleiche Teile seines Vermögens, während er einem Manne so viel hinterlassen hat als ein Anteil jedes der Söhne ausmacht und ein Viertel dessen, was von einem Drittel des Vermögens nach Abzug dieses Anteils übrigbleibt, und ein dirham. Bezeichnen wir das Vermögen mit z, den Anteil eines Sohnes mit x und das dem Manne hinterlassene mit y, so erhalten wir für die Aufgabe die Gleichungen

$$z = y + 4x, \quad y = x + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) + d.$$

Daraus würden wir nach entsprechenden Umformungen die Beziehung $z = 5\frac{2}{11}x + 1\frac{1}{11}d$ erhalten. Das Gleiche macht im Grunde genommen auch al-Ḫuwarizmī. Die Lösungsregel, sagt er, lautet wie folgt: Man nehme ein Drittel des Vermögens und ziehe davon einen Teil ab. Dann ziehe man ein Viertel dessen ab, was von einem Drittel des Vermögens ohne einen Anteil übriggeblieben ist, und ein dirham, so daß drei Viertel von einem Drittel des Vermögens oder ein Viertel des Vermögens ohne drei Viertel des Anteils und ohne ein dirham übrigbleibt (mit anderen Worten und in moderner Schreibweise: $\frac{1}{3}z - x - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) - d = \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d\Big)$. Dies wird zu zwei Dritteln des Vermögens hinzugefügt; dann sind elf von zwölf Teilen des Vermögens ohne drei Viertel des Anteils und ohne ein dirham gleich vier Anteilen (mit anderen Worten: $\frac{2}{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3}{4}x - d = \frac{11}{12}z - \frac{3}{4}x - d = 4x\Big)$. Danach wird mit drei Vierteln eines Anteils und einem dirham aufgefüllt, wonach elf von zwölf Teilen des Vermögens gleich vier Dreiviertel Anteilen und einem dirham sind $\Big($mit anderen Worten: $\frac{11}{12}z = 4\frac{3}{4}x + d\Big)$. Wir würden nunmehr mit $\frac{12}{11}$ multiplizieren; al-Ḫuwarizmī addiert zu jedem Glied je ein Elftel davon und findet, daß das Vermögen $5\frac{2}{11}$ eines Anteils und $1\frac{1}{11}$ dirham beträgt.

In der betrachteten und in einigen verwandten Aufgaben spielt das dirham die Rolle eines Parameters. Im Grunde genommen handelt es sich hier um eine Serie von Aufgaben über unbestimmte Gleichungen, die häufig homogen sind (d wird von vornherein gleich null gesetzt). In manchen Fällen zeigt al-Ḫuwarizmī außerdem, wie man bei ganzzahligem d ganzzahlige Werte von z und x erhält. In anderen Aufgaben läßt sich die Bedingung durch eine Gleichung mit einer Unbekannten ausdrücken, wobei diese, wenn sie nicht Vermögen im eigentlichen Sinne des Wortes darstellt, als Ding bezeichnet wird.

Es ist nicht bekannt, ob al-Ḫuwarizmī eigene algebraische Leistungen aufzuweisen hat. Am Anfang seiner Abhandlung schreibt er, daß ein Teil der Gelehrten die Priorität der Entdeckung besitzt, der andere Teil die schwierigen Stellen ihrer Vorgänger erläutert und somit deren Verständnis erleichtert. Die dritten wiederum ordnen die bereits vorhandenen Kenntnisse, indem sie Ungenauigkeiten korrigieren und die Gedanken ihrer Genossen vervollkommnen, „ohne Hochmut und ohne Stolz in der Seele". Sich selbst hat al-Ḫuwarizmī keine neuen Entdeckungen zugeschrieben.

Bisher ungelöst bleibt das Problem der Quellen für die Algebra al-Ḫuwarizmīs. In seiner Arithmetik lehnt er sich explizite in der Hauptsache an indische Vorbilder an (sogar das Sexagesimalsystem schreibt er, wie wir gesehen haben, den Indern zu),

seine Algebra jedoch weist eine Reihe von Besonderheiten auf. In der indischen Algebra findet man keine geometrischen Begründungen für die Regeln zur Auflösung quadratischer Gleichungen oder für die Operationen mit algebraischen Größen, die bei al-Ḫuwarizmī eine hervorragende Stellung einnehmen. Im Gegensatz zu den indischen Mathematikern verwendet der Gelehrte aus Baghdād keine negativen Zahlen und keine Symbole. Außerdem wurde bei den Indern die Regel für die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung von vornherein für einen beliebigen Koeffizienten des höchsten Gliedes formuliert, und bereits Brahmagupta unterschied nicht mehr zwischen den Typen 4) bis 6). Mit der griechischen Algebra verbindet al-Ḫuwarizmī allem Anschein nach die geometrische Konstruktion der Wurzeln einer quadratischen Gleichung [33, Bd. III, S. 72 ff.], doch insgesamt gesehen unterscheidet sich seine Behandlungsweise sehr wesentlich von der geometrischen Algebra in den „Elementen" des Eukleides. Eine echte Ähnlichkeit erkennt man nur zwischen der zweiten Konstruktion al-Ḫuwarizmīs für Gleichungen vom vierten Typ und dem Satz 2 im Buch II der „Elemente", wo die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ geometrisch dargestellt wird. Doch bereits die erste Konstruktion al-Ḫuwarizmīs für dieselbe Gleichung besitzt in der griechischen Mathematik keinen uns bekannten Prototyp. Die Zeichnung al-Ḫuwarizmīs für den ersten Fall der Gleichung vom fünften Typ erinnert an die Konstruktion des Satzes 5 im Buch II, doch in den Ausführungen hierzu gibt es erhebliche Unterschiede. Darüber hinaus liefert der Satz 5 nicht die zweite Wurzel der Gleichung „mit Hilfe der Addition" ebenso wie der entsprechende Satz 28 des Buches VI der „Elemente". Die Konstruktion al-Ḫuwarizmīs für den sechsten Gleichungstyp besitzt überhaupt kein Analogon bei Eukleides. Schließlich ist der gesamte Stil der Überlegungen und Erläuterungen bei beiden Autoren grundverschieden. Sollte die antike geometrische Algebra einen Einfluß auf al-Ḫuwarizmī ausgeübt haben, so kann das nur in einer stark veränderten und den Bedürfnissen der numerischen Algebra angepaßten Form geschehen sein, die allerdings geschichtlich bisher nirgends belegt ist. Mit Diophantos gemeinsam hat al-Ḫuwarizmī die Reduzierung der quadratischen Gleichung auf drei Normalformen (allerdings mit dem Unterschied, daß Diophantos den Koeffizienten des quadratischen Gliedes nicht auf den Wert eins bringt). In vielen anderen Dingen bestehen wesentliche Unterschiede. So löst z. B. Diophantos Aufgaben, die auf Systeme der Form

$$x + y = a, \quad xy = b$$

oder

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b$$

führen, durch Hinzunahme einer unbekannten Hilfsgröße $\frac{x-y}{2} = z$. Im übrigen ist ein direkter Einfluß des Diophantos wenig wahrscheinlich, denn soweit bekannt ist, wurden die ersten arabischen Übersetzungen des Diophantos in Baghdād durch den christlichen Gelehrten Qusṭa ibn Lūqā al-Ba' labakkī aus Baalbek (Heliopolis) in Syrien (gest. 912 in Armenien) und später von Abū-l-Wafā angefertigt [108, S. 261 bis 264; 109, 110].

Höchstwahrscheinlich war al-Ḫuwarizmī sehr gut mit den Traditionen vertraut, die sich im Nahen und Mittleren Orient herausgebildet hatten und Elemente sowohl der babylonischen als auch der griechisch-römischen Wissenschaft in modifizierter

Form mit einbezogen. Mitunter wird angenommen, daß das Wort al-ğabr selbst durch Vermittlung der Syrer und Aramäer aus dem assyrischen gabru-ğabru-maharu und weiter aus dem Terminus maharu-gabru entstanden ist, der bei den Babyloniern verwendet wurde, um die Gleichheit zweier Dinge zum Ausdruck zu bringen [109, S. 275].

Von großem Interesse ist der kürzlich, mit türkischen und englischen Übersetzungen versehene, in arabischer Sprache veröffentlichte Text des Abschnittes über quadratische Gleichungen aus dem „Buch über Algebra und al-muqābala" (kitāb al ğabr wa-l-muqābala) des 'Abd al-Ḥāmid ibn Wāsi ibn Turk [110*a*]. Ibn Turk dürfte etwa ein Zeitgenosse al-Ḫuwarizmīs gewesen sein, da der Baghdāder Mathematiker Abū Barza, ein Nachkomme und vermutlich der Enkel ibn Turks, im Jahre 910 starb. Es gibt keine genauen Anhaltspunkte, aus denen man eindeutig schließen könnte, ob das algebraische Werk al-Ḫuwarizmīs oder das des ibn Turk früher entstanden ist. Der tunesische Historiker ibn Ḫaldūn (1332—1406) schrieb, daß der erste Gelehrte, der über Algebra geschrieben habe, al-Ḫuwarizmī gewesen sei, und daß danach Abu Kāmil gekommen sei. Den Namen ibn Turks erwähnt ibn Ḫaldūn nicht. Abū Kāmil selbst, der in der zweiten Hälfte des 9. und zu Beginn des 10. Jh. gelebt hat, behauptet, daß hier die Priorität al-Ḫuwarizmī gehöre, und lehnt entschieden die Ansprüche Abū Barzas auf die Priorität seines Vorfahren ab [110*a*, S. 89 bis 92].

Insgesamt gesehen ist die Lehre über die quadratischen Gleichungen bei ibn Turk ähnlich wie bei al-Ḫuwarizmī, allerdings erheblich vollständiger abgehandelt. Für die Gleichungen vom vierten Typ gibt er am Beispiel der Gleichung $x^2 + 10x = 24$ nur eine Konstruktion an, die der zweiten Konstruktion al-Ḫuwarizmīs entspricht (Abb. 44). Dafür untersucht er für den fünften Typ der durch das gleiche Beispiel wie bei al-Ḫuwarizmī, also durch die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ repräsentiert wird, mit großer Ausführlichkeit die Konstruktion beider Wurzeln. Zunächst nimmt er explizit an, daß der Mittelpunkt der Strecke $\overline{GC}$, d. h. der Punkt F (Abb. 45), im Inneren von $\overline{BG}$ liegt; sodann setzt er voraus, daß dieser Punkt im Inneren von $\overline{BC}$ liegt. Darüber hinaus zeigt er, daß in dem vorliegenden Beispiel der Punkt F nicht mit dem Punkt B zusammenfallen kann, denn dann wäre $\overline{GB} = \overline{BC} = \frac{p}{2} = 5$, und das Rechteck $GBAE = q$ wäre gleich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 25$, und nicht wie gefordert $q = 21$. Die Zeichnung ibn Turks zur Konstruktion der zweiten Wurzel unterscheidet sich von der in Abb. 46 nur durch die Buchstabenbezeichnungen und dadurch, daß die Strecke $\overline{CD}$ ebenso wie in anderen Fällen horizontal liegt. Den Fall, bei dem F mit B zusammenfällt, und das gilt nur für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ (wobei $x = \frac{p}{2}$, wie wir sagen, eine Doppelwurzel ist), untersucht ibn Turk ebenfalls anhand einer Zeichnung (vgl. Abb. 53). Weiterhin begründet er geometrisch die Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 + q = px$ für $q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$, wobei er als Beispiel die Gleichung $x^2 + 30 = 10x$ verwendet. Zunächst führt er die Annahme, daß hierbei F im Inneren von $\overline{BG}$ liegt, auf einen Widerspruch zurück (Abb. 45), denn dann wäre, weil das Rechteck $HKME$ größer ist als das Rechteck $FBAH$, das Quadrat $GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 25$ größer als das Rechteck $GBAE = q = 30$. Sodann wird analog

die Annahme, daß F im Inneren von $\overline{BC}$ liegt (Abb. 46) ad absurdum geführt. Der sechste Gleichungstyp, durch das Beispiel $x^2 + 4x = 5$ repräsentiert, wird ebenso behandelt wie bei al-Ḫuwarizmī.

Die Dreisatzregel. Wir hatten erwähnt, daß in der Algebra al-Ḫuwarizmīs der einfache Dreisatz angeführt und erläutert wird. Diese Regel war auch bei anderen Mathematikern gebräuchlich. Ein besonderes Werk widmete al-Bīrūnī den Dreisatzregeln, wobei er die von den Indern vorgenommenen Verallgemeinerungen mit behandelte (vgl. S. 120). In seiner Abhandlung „Über die indischen rāšīkāt" (Fī rāšīkāt al-Hind [110*b*] betrachtet er direkte und indirekte Proportionalität sowie Regeln für fünf, sieben und noch mehr Eingangsgrößen. In Indien, sagt al-Bīrūnī, hätte er Aufgaben angetroffen, bei denen mehr als elf Eingangsgrößen auftraten, doch könnte es deren eine beliebige ungerade Anzahl sein. Das Wesen der Regel und das Rechenschema werden eingehend an praktischen Beispielen erläutert, deren Eingangswerte in zwei Spalten eingetragen werden. Besonders glücklich ist die Betrachtung einiger Aufgaben mit fünf Eingangsgrößen, deren Zahlenangaben zwar gleich sind, deren Größen aber in verschiedenen Beziehungen zueinander stehen, d. h. einmal direkt proportional, zum anderen umgekehrt proportional sind. In den angegebenen Aufgaben treten bis zu siebzehn Größen auf. In sämtlichen Beispielen al-Bīrūnīs treten nur ganze Zahlen auf, doch sind die Dreisatzregeln mit Hilfe der allgemeinen Theorie der zusammengesetzten Verhältnisse begründet; hierbei beruft sich der Verfasser auf Eukleides und dessen Kommentatoren. Die Beweise al-Bīrūnīs sind daher allgemeinen Charakters. Hier stoßen wir bereits auf das charakteristische Bestreben der Mathematiker in den islamischen Ländern, Regeln, die in der praktischen Mathematik verwendet werden, mit Hilfe antiker griechischer Theorien zu begründen.

Regeln des falschen Ansatzes. Es ist durchaus möglich, daß zur Zeit al-Ḫuwarizmīs in Baghdād bereits die Regel zweier falscher Ansätze bekannt war. Eine Beschreibung dieser Regel finden wir in der aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzten Handschrift „Das Buch über die Vergrößerung und Verminderung", in der die Regel den Indern zugeschrieben wird[1]) [111, 112]. Der Verfasser des Werkes ist unbekannt; manche Historiker vermuten, es handele sich hierbei um den aus Ägypten stammenden Abū Kāmil Šuǧā' ibn Aslam ibn Muḥammad al-Ḥāsib al Miṣrī (um 900); andere nehmen an, das Buch sei von dem spanischen Juden Abraham ben Meyir ibn Ezra (geb. um 1090, gest. 1167) verfaßt. Die Regel wird hier auf Aufgaben angewandt,

[1]) Der vollständige Titel der Handschrift lautet: „Das Buch über die Vergrößerung und Verminderung, genannt das Rechnen des Erratens, das Abraham gesammelt und zusammengestellt hat, aus dem, was die indischen Weisen festgestellt hatten nach dem Vorbild des Buches, das das indische genannt wird" (Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit). Die Ähnlichkeit der Terminologie mit den chinesischen Ausdrücken „Überschuß" und „Fehlbetrag" läßt sich hier nicht übersehen.
Es könnte durchaus sein, daß diese Regel auf irgendeinem Wege aus China kommend unter Umgehung Indiens in die arabische Literatur eingedrungen ist, denn in den bisher bekannt gewordenen indischen mathematischen Werken wird diese Regel nirgends erwähnt.

die sich durch eine große Anzahl von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten oder durch lineare Systeme mit zwei Unbekannten ausdrücken lassen.

Als Beispiele wollen wir eine ganze Serie von Aufgaben anführen, in denen der bei zwei Personen befindliche Geldbetrag aus zwei symmetrischen Bedingungen zu ermitteln ist: Übergibt der eine dem anderen diese oder jene Summe, so haben danach ihre Bargeldbeträge ein vorgegebenes Verhältnis. Die Aufgaben lassen sich durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$x + a = m(y - a),$$
$$x - b = n(y + b).$$

Derartige Aufgaben findet man bereits in der griechischen Literatur (z. B. einen populären Zweizeiler über einen Esel und ein Maultier, die verschieden schwere Lasten zu tragen haben), in Byzanz, darunter bei Nikolaos Artabasdos, in Indien bei Bhâskara II., bei den Nachfolgern al-Ḫuwarizmīs, z. B. bei al-Karaǧī, in Europa bei Alcuin und bei Leonardo Fibonacci von Pisa usw.

Ein spezielles Werk über die Regel zweier falscher Ansätze oder, wie man sie in der arabischen Literatur nannte, die Regel al-ḫaṭain (d. h. Regel zweier Fehler), schrieb Qusṭa ibn Lūqā al-Ba'labakkī unter dem Titel „Abhandlung des Qusṭa ibn Lūqā über den Beweis der Operationen bei der Rechnung zweier Fehler" (Maqāla li-Qusṭa ibn Lūqā fī-l-burhān 'ala a'māl ḥisāb al-haṭain) [113]. Es beginnt mit der Bemerkung, daß man nach dieser Methode sämtliche Aufgaben der Wissenschaft vom Rechnen lösen kann, die keine Wurzeln enthalten, d. h. lineare Probleme. Den Hauptinhalt der Abhandlung bildet der Beweis der Regel. Der Verfasser führt zwei Beweisformen an: eine rein arithmetische, die, vielleicht durch die Schuld des Kopisten, nicht ganz klar ist, und eine, die sich auf die Mittel der geometrischen Algebra der Antike stützt. Dies ist ein weiteres Beispiel unter vielen für die Anwendung griechischer Theorien zur Begründung der Algorithmen der numerischen Mathematik.

Der Beweis wird für eine Aufgabe geführt, die sich durch eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \cdots + \frac{m_k}{n_k}\right) x = b$$

oder kürzer durch die Gleichung

$$ax = b$$

ausdrücken läßt (bei Qusṭa ibn Lūqā selbst tritt am Anfang die Aufgabe $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 10$ auf, doch sind die Ausführungen allgemeinen Charakters). Dabei werden drei Fälle einzeln betrachtet:

1. Beide falsch angesetzten Werte sind kleiner als die Unbekannte.
2. Beide Ansatzwerte sind größer als die Unbekannte.
3. Die Unbekannte liegt zwischen beiden Ansatzwerten.

Die Beweisführungen verlaufen in allen drei Fällen ähnlich; daher wollen wir nur den dritten betrachten.

Der Wert der gesuchten Größe ad und die Werte ag und ae der Ansätze werden durch Abschnitte auf einer horizontalen Geraden dargestellt, wobei $ag < ad < ae$ ist

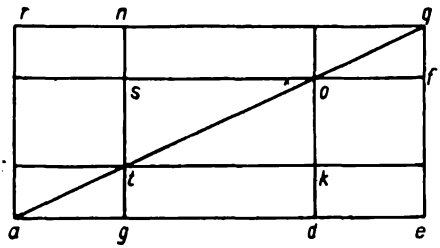


Abb. 47

(Abb. 47); das absolute Glied wird durch das Lot do wiedergegeben. Wir ziehen die Strecke ao und errichten die Senkrechten gt und eq bis zum Schnitt mit ao und deren Verlängerung aq. Wegen der Proportionalitätsrelation

$$\frac{gt}{ag} = \frac{eq}{ae} = \frac{do}{ad}$$

stellen die Senkrechten gt und eq die Werte der linken Gleichungsseite für $x = ag$ und $x = ae$ dar. Da der falsche Ansatzwert ag gegeben ist, sind auch gt und der erste Fehler ts gegeben; analog sind auch eq und der zweite Fehler $fq = sn$ bekannt. Somit erweisen sich als gegeben der Flächeninhalt des Rechtecks $fc = ts \cdot ae$ als Produkt aus dem 1. Fehler und dem 2. Ansatzwert und ferner der Flächeninhalt des Rechtecks $rs = fq \cdot ag$ als Produkt aus dem 2. Fehler und dem 1. Ansatzwert. Damit ist auch deren Summe, Rechteck fc + Rechteck rs, gegeben. Nach einem Satz über das Gnomon aber ist das Rechteck no gleich dem Rechteck fk und daher Rechteck fc + Rechteck rs = Rechteck rk, das sich ebenfalls als bekannt erweist. Schließlich ist Rechteck $rk = ad(ts + sn)$ und somit

$$ad = \frac{\text{1. Fehler} \times \text{2. Ansatzwert} + \text{2. Fehler} \times \text{1. Ansatzwert}}{\text{1. Fehler} + \text{2. Fehler}}.$$

Setzt man $ag = x_1$, $b - ax_1 = d_1$, $ae = x_2$, $ax_2 - b = d_2$, so folgt

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}.$$

Die Regel zweier falscher Ansätze wurde in den Ländern des Nahen und Mittleren Orients und in den mauretanischen Staaten sehr viel angewandt. Ihre ausführliche Beschreibung finden wir z. B. in der „Kurzen Darlegung der arithmetischen Operationen" (Talkhīṣ fī a'māl al-ḥisāb) [114] des aus Marakesch stammenden Abū-l-'Abbās Aḥmed ibn Muḥammad ibn al-Bannā al-Marraqušī (etwa 1256 bis etwa 1321). Der Name ibn al-Bannā bedeutet Sohn des Baumeisters. Hier erscheint die Regel zweier falscher Ansätze unter der Bezeichnung „Regel der Waagschalen", die schematisch in der Abb. 48 wiedergegeben ist. Die Zahl b wird in der oberen Vertiefung eingetragen, während x_1 und x_2, zwischen den beiden parallelen Geraden links und rechts geschrieben, nach den Worten ibn al-Bannās auf die Waagschalen gelegt werden. Die Fehler d_1 und d_2 werden entweder unter den Waagschalen oder über den Waagschalen für x_1 und x_2 geschrieben, je nachdem, ob diese Fehler (hierbei bedienen wir uns unserer modernen Ausdrucksweise) positiv oder negativ sind. Wahrscheinlich wußte ibn al-Bannā um den geometrischen Beweis der Regel, obwohl er diesen nicht anführt:


Abb. 48

Diese Regel, schreibt er, stützt sich auf die Geometrie. Al-Bannā formuliert die Regel der Waagschalen nicht an einem Zahlenbeispiel, sondern unmittelbar in allgemeinen Ausdrücken. Diese

charakteristische Besonderheit der „Kurzen Darlegung" weisen auch die anderen in dem Werk enthaltenen Regeln auf. Dies erschwerte sein Studium, weshalb im Laufe der nächsten zwei Jahrhunderte eine Reihe von Kommentaren dazu verfaßt wurden.

Mitunter trifft man in der arabischen mathematischen Literatur auch die Regel eines falschen Ansatzes an.

Die Geometrie in den Werken al-Ḫuwarizmīs. Im geometrischen Abschnitt der Algebra al-Ḫuwarizmīs sind die Regeln zur Berechnung geometrischer Figuren zusammengefaßt und die einfachsten Anwendungen der Algebra in Aufgaben über das Dreieck dargelegt. Einige Regeln sind mit Definitionen und Beweisen oder zumindest mit kurzen Erläuterungen gegeben.

Von den ebenen Figuren behandelt al-Ḫuwarizmī Dreiecke, Vierecke und den Kreis. Er unterscheidet drei Arten von Dreiecken, und zwar rechtwinklige, spitzwinklige und stumpfwinklige. Als Merkmale zu deren Unterscheidung gibt er entsprechende Gleichheits- oder Ungleichheitsbeziehungen zwischen dem Quadrat der größten Seite und der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten an. Dieser Stoff ist sämtlich im Buch I und II der „Elemente" des Eukleides enthalten, die al-Ḥaǧǧāǧ ibn Yūsuf ibn Maṭār erstmalig unter Harūn ar-Rašīd und zum zweiten Male unter al-Ma'mūn übersetzt hatte. Ferner sind diese Elemente auch in den Werken Herons enthalten. Den Satz des Pythagoras beweist al-Ḫuwarizmī für den Spezialfall des gleichschenkligen Dreiecks; sein Beweis, zu dessen Verständnis ein Blick auf die Abb. 49 genügt, stimmt mit einem in Griechenland und in Indien bekannten Beweis überein (siehe S. 97). Bei Vierecken unterscheidet er fünf Typen: Quadrate, Rechtecke, Rhomben („die die Form des Auges haben"), Parallelogramme oder „rhombusähnliche" Vierecke und schließlich Vierecke mit „vollständig ungleichen" Seiten und Winkeln. Der Flächeninhalt des Rhombus wird aus den Diagonalen oder aus einer Diagonale und einer Seite berechnet: Ein beliebiges Viereck wird durch eine Diagonale in Dreiecke zerlegt (offenbar werden die Seiten und eine Diagonale als bekannt vorausgesetzt). Ganz ähnlich ist die Klassifizierung der Viereckformen im Buch I der „Elemente" des Eukleides; Heron fügt außerdem die Definition des Trapezes hinzu.

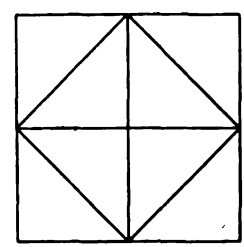


Abb. 49

Manche Aufgaben al-Ḫuwarizmīs stimmen mit denen Herons sogar mit Einschluß der Zahlenangaben überein. Dieser Art sind z. B. die Aufgaben über die Berechnung des Flächeninhalts eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 10 (die Lösung lautet: 43 und etwas darüber), über die Konstruktion eines einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie 12 und der Seite 10 einbeschriebenen Quadrates sowie über die Berechnung des Flächeninhalts eines spitzwinkligen Dreiecks mit den Seiten 13, 14 und 15.

Ein gewisser Unterschied in der Formulierung der zweiten Aufgabe besteht darin, daß bei Heron die Grundlinie 12 und die Höhe 8 gegeben sind. Ein anderer, bedeutenderer Unterschied liegt in der Lösung. Heron drückt unmittelbar[1]) die Seite des

[1]) Offenbar unter Heranziehung der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.

Quadrats durch den Bruch $\frac{8 \cdot 12}{8+12}$ aus, während al-Ḫuwarizmī nach Berechnung der Höhe die gesuchte Seite aus der Gleichung zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks und der Summe der vier Teile bestimmt, in die die Fläche des Dreiecks durch das einbeschriebene Quadrat zerlegt wird. Ein Unterschied besteht auch in der Lösung der dritten Aufgabe. Al-Ḫuwarizmī wählt als Unbekannte (Abb. 50) den Teil der Seite $\overline{BC}$, der von der Höhe auf dieser Seite abgeschnitten wird und im Winkel bei C mit der Seite $\overline{AC}$ zusammenstößt. Indem er die Höhe zweimal nach dem Satz des Pythagoras berechnet, erhält er die Gleichung

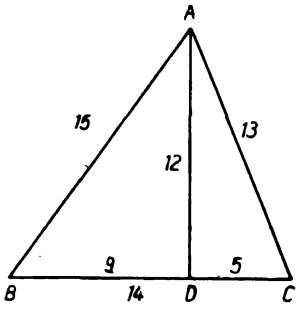


Abb. 50

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

oder

$$28x = 140,$$

woraus $x = 5$ folgt, während sich die Höhe zu 12 und der Flächeninhalt zu 84 ergeben. Heron hingegen wendet unmittelbar den Satz 13 des Buches II der „Elemente" über das Quadrat einer Seite im spitzwinkligen Dreieck

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{CB} \cdot \overline{CD}$$

an, woraus $\overline{CD} = x = 5$ folgt.[1]) Die Beispiele zur Berechnung des Flächeninhalts eines stumpfwinkligen Dreiecks sind bei al-Ḫuwarizmī und bei Heron verschieden.

Für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser gibt al-Ḫuwarizmī drei Werte an, und zwar $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$, wobei er vom letzten sagt, daß dieser von den Astronomen angewandt werde. Die beiden zuletzt genannten hat er höchstwahrscheinlich von den Indern übernommen. Alle diese Werte, fügt al-Ḫuwarizmī hinzu, sind nahezu gleich. Der Flächeninhalt des Kreises, heißt es weiter, sei gleich dem halben Durchmesser multipliziert mit dem halben Umfang; dies wird durch die Bemerkung erläutert, daß der Flächeninhalt eines beliebigen regelmäßigen Vielecks gleich dem Produkt aus dem halben Umfang und dem halben Durchmesser des einbeschriebenen Kreises ist. Für den Flächeninhalt S des Kreises wird außerdem ein Ausdruck angegeben, in dem der Durchmesser d auftritt:

$$S = d^2 - \frac{1}{8}d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}d^2;$$

al-Ḫuwarizmī weist darauf hin, daß diese Formel mit der ersten Regel übereinstimmt, was in unserer Ausdrucksweise bedeutet, daß hier $\pi = 3\frac{1}{7}$ gesetzt ist. Einen solchen Ausdruck für S finden wir auch bei Heron; anstelle des für die arabische Arithmetik charakteristischen Produkts $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ steht hier lediglich der Bruch $\frac{1}{14}$.

Al-Ḫuwarizmī führt ferner eine Regel zur Berechnung des Flächeninhalts σ eines Kreissegments aus dem Bogen s, der Sehne a und der Segmenthöhe h an. Zunächst

[1]) Es sei erwähnt, daß diese Aufgabe auch bei Mahâvîra und bei Bhâskara II. anzutreffen ist.

wird der Durchmesser zu

$$d = \frac{a^2}{4h} + h$$

bestimmt; dann gilt für ein Segment, das kleiner ist als der Halbkreis,

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{a}{2},$$

und für ein Segment, das größer ist als der Halbkreis,

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right)\frac{2}{a}.$$

Die von al-Ḫuwarizmī hier verwendeten Termini sind aller Wahrscheinlichkeit nach indischer Herkunft. Den Kreisbogen bezeichnet er durch das Wort „qaus" (Bogen als Schußwaffe) und die Höhe des Segments durch das Wort „sahm" (Pfeil).

Die Regeln zur Berechnung der Volumina sind für das gerade Prisma, den Zylinder, die Pyramide, den Kegel, den Pyramidenstumpf mit gegebener quadratischer Grundfläche und Höhe angegeben. Das zuletzt genannte Volumen wird als Differenz der Volumina zweier vollständiger Pyramiden aufgefaßt, deren Höhen zuerst bestimmt werden. Die Kugel wird nicht behandelt.

Im geometrischen Kapitel der Algebra al-Ḫuwarizmīs fand die Tatsache ihren Niederschlag, daß er die Literatur kannte, die sich an die Werke des Heron anschloß (wenn nicht gar diese Werke selbst), und daß ihm auch die indische Geometrie bekannt war.

Inhaltlich gesehen steht mit der Geometrie al-Ḫuwarizmīs eine althebräische Abhandlung, „Die Lehre vom Messen" (Mišnat ha-middot), im Zusammenhang, deren Entstehung in die Zeit zwischen die Mitte des 2. Jahrhunderts und das 9. Jahrhundert gefallen sein dürfte. Wahrscheinlich muß man das Datum ihrer Entstehung mehr an den Anfang als an das Ende des genannten Zeitraumes verlegen. In mancher Hinsicht schließt sich das Mišnat ha-middot enger an Heron an. So wird für π nur der Wert $3\frac{1}{7}$ angegeben. Die Aufgabe, in der der Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten berechnet werden soll, wird nach der Heronischen Formel gelöst; auch die Heronische Näherungsformel für den Flächeninhalt eines Kreissegments wird angegeben (vgl. S. 56). Es ist nicht ausgeschlossen, daß al-Ḫuwarizmī die hebräische Sprache beherrscht hat. Vor kurzem wurde ein Werk al-Ḫuwarizmīs mit dem Titel „Bestimmung des jüdischen Kalenders" (Istihrāǧ ta'rīh al-yahūd) entdeckt und veröffentlicht, das einige Bibelzitate enthält und zeigt, daß al-Ḫuwarizmī gewisse Kenntnisse über die jüdische Religion besaß [116].

Höchstwahrscheinlich haben al-Ḫuwarizmī und dem unbekannten hebräischen Verfasser gleiche Quellen zur Verfügung gestanden.

Ungeachtet seines geringen Umfanges hat das geometrische Kapitel der Algebra al-Ḫuwarizmīs für die Praktiker äußerst wichtiges Material enthalten, das in durchaus verständlicher und hinreichend korrekter Form dargelegt ist. Die Vermessungsfachleute jener Zeit verfügten nur über äußerst bescheidene Kenntnisse und wandten häufig sehr grobe oder direkt falsche Regeln an. Abū-l-Wafā schreibt im geometrischen Abschnitt des Buches für die Schreiber, daß die Vermessungsfachleute jener Zeit

den Flächeninhalt eines Dreiecks, eines Vielecks oder eines Kreises berechneten, indem sie ein Viertel des Umfanges ins Quadrat erhoben (für den Kreis liefert das den Wert $\pi \approx 4$); der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks wäre als Produkt aus den halben Summen der gegenüberliegenden Seiten berechnet worden. Die Geometrie al-Ḫuwarizmīs hat ähnlich seiner Arithmetik und Algebra einen großen Einfluß auf die späteren Werke ausgeübt.

Außerdem hat al-Ḫuwarizmī ein Werk über Astronomie geschrieben, das auf der Grundlage altpersischer, indischer und griechischer Quellen entstanden war und die ersten arabischen Tabellen für Sinus- und Tangenswerte enthält [117, 117a]. Allerdings ist unklar, ob die Tangenstabelle ebenfalls von al-Ḫuwarizmī stammt, da dessen Werk uns lediglich in der Überarbeitung des Astronomen Abū-l-Qāsim Maslama ibn Aḥmad al-Maǧritī (der aus Madrid stammte und in Cordoba tätig war, gest. etwa 1007) und ausführlicher in der lateinischen Übersetzung dieser Überarbeitung überliefert ist, die im 12. Jahrhundert von Adelard of Bath besorgt wurde.

Schließlich war al-Ḫuwarizmī der Verfasser eines wertvollen geographischen Werkes, das auf der „Geographie" des Ptolemaios beruhte, jedoch manches Selbständige enthielt [86, S. 79—81].

Die algebraischen Abhandlungen von Abū Kāmil und al-Karaǧī. Kurz nach al-Ḫuwarizmī hatte der aus Ägypten stammende Abū Kāmil Šuǧa' ibn Aslam ibn Muḥammad al-Ḥāsib al Mišrī große Fortschritte auf dem Gebiet der Algebra und deren Anwendungen zu verzeichnen (die letzten beiden Worte seines Namens bedeuten: ägyptischer Rechner). Er lebte etwa 850 bis 930 und hat uns mehrere mathematische Werke hinterlassen. Wir wollen uns nun mit seiner algebraischen Abhandlung beschäftigen, die wir nicht nach ihrem arabischen Text, sondern nach einer lateinischen und einer althebräischen Übersetzung kennen. Die zuletzt genannte Fassung wurde etwa 1460 von Morduchai Finzi aus Mantua, möglicherweise nach einer spanischen Übersetzung [118, 119][1]) geschrieben. In der Übersetzung Finzis trägt die Abhandlung die Überschrift „Berechnung von Flächen", vielleicht im Zusammenhang mit einem anderen Werk Abū-Kāmils, von dem später die Rede sein soll. Der richtige Titel des Werkes dürfte „Buch über Algebra und al-Mukabala" (Kitab al-ǧabr wa-l-muqābala) gelautet haben. Das Werk erfreute sich lange Zeit größter Beliebtheit und ist zumindest dreimal kommentiert worden; allerdings hat man die Kommentare bisher noch nicht entdeckt.

Die Algebra des Abū-Kāmil reicht ebenso wie die des al-Ḫuwarizmī bis zu den quadratischen Gleichungen. Der ägyptische Mathematiker hat in sein Werk keinen geometrischen Abschnitt und keine Aufgabensammlung zum Erbrecht aufgenommen. Im übrigen jedoch ähnelt der Aufbau dem der Algebra seines Vorgängers aus Baghdād: Zunächst werden die Lösungen der Normalformen angegeben, dann folgen Elemente des algebraischen Rechnens und schließlich Beispiele und Aufgaben. Bei beiden werden die Lösungsregeln, wenn auch unterschiedlich, so doch geometrisch begründet. Die

[1]) Für die Übersendung einer Photokopie des Werkes, das eine bibliographische Seltenheit darstellt [119], ist der Verfasser Herrn Professor Kurt Vogel sehr zu Dank verbunden.

Darlegung erfolgt in Worten. Übrigens werden in der Übersetzung Finzis mitunter die indisch-arabischen Ziffern, mitunter an deren Stelle die ersten neun Buchstaben des hebräischen Alphabets und ein unserer Null ähnliches Zeichen verwendet. Bei Abū-Kāmil finden wir ungeachtet der Ähnlichkeit seines Werkes mit dem al-Ḫuwarizmīs sowohl in der Theorie als auch in den Beispielen und Anwendungen viel Neues.

Am Anfang des Buches führt Abū-Kāmil unter Bezugnahme auf al-Ḫuwarizmī drei Arten von Größen — gewöhnliche Zahlen, Wurzeln und Quadrate — an, denen er an anderen Stellen die höheren Potenzen der Unbekannten hinzufügt, und zwar: den Kubus (ka'b), das Quadrat des Quadrates (māl māl), das Quadrat des Quadrates eines Dinges (māl māl šai), den Kubus des Kubus und schließlich unter Überspringung der siebenten Potenz das Quadrat des Quadrates des Quadrates eines Quadrates. Wie wir sehen, wendet Abū-Kāmil die additive Bildung der Exponenten ähnlich wie Diophantos an, allerdings mit dem Unterschied, daß dieser die fünfte Potenz als Quadratokubus bezeichnete. Auch hinsichtlich der Anwendung von mehreren Unbekannten geht Abū-Kāmil weiter als al-Ḫuwarizmī, der sich mit einer einzigen Unbekannten begnügt hatte. Er führt für diese besondere Bezeichnungen an: für die erste Unbekannte Wurzel oder Ding (šai), für die zweite dīnār, für die dritte fals (kleine Münzeinheit) und für die vierte ḫatam (Stempel, Ende).

In der Lehre von den quadratischen Gleichungen werden die Regeln an Zahlenbeispielen erläutert, die von al-Ḫuwarizmī übernommen wurden; dabei weist Abū-Kāmil besonders darauf hin, daß diese Beispiele willkürlich gewählt sind. Beim Beweis der Regeln weicht er allerdings von seinem Vorgänger ab, indem er sich unmittelbar auf die Sätze des Buches II der „Elemente" stützt, die einer Abspaltung des vollständigen Quadrats einer Summe oder einer Differenz in einem quadratischen zweigliedrigen Ausdruck äquivalent sind. Bekanntlich haben diese Sätze, und zwar die Sätze 5 und 6 zusammen mit den Sätzen 28 und 29 aus dem Buch VI der „Elemente" in der griechischen Mathematik als das geometrische Äquivalent zur Auflösung quadratischer Gleichungen in Radikalen gedient.

Wir wollen nun die von Abū-Kāmil angegebene Lösung der Gleichung

$$x^2 + q = px$$

betrachten; er setzt ebenso wie al-Ḫuwarizmī voraus, daß der höchste Koeffizient gleich 1 ist. Abū-Kāmil begründet die Regeln für beide positive Wurzeln, während bei Eukleides nur die Konstruktionen für die Wurzel

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

angegeben sind. Neu ist auch die Untersuchung des Falles einer einzigen Wurzel, d. h. nach unserer Terminologie einer Doppelwurzel (vgl. S. 213).

Abū-Kāmil setzt $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ und untersucht zunächst den Fall, in dem das gesuchte Quadrat kleiner ist als die gegebene Zahl, d. h. $x^2 < q$ und demnach $x^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Nun stellt er das gesuchte Quadrat $x^2 = ACBD$ geometrisch dar und fügt diesem das Rechteck $DCEF = q$ mit $\overline{DF} > \overline{DA}$ hinzu (Abb. 51). Dann ist Rechteck $ABEF = px$,

$\overline{AF} = p$, und es wird, falls G die Mitte der Strecke $\overline{AF}$ ist, $\overline{AF}$ durch G in zwei gleiche Teile und durch D in zwei ungleiche Teile geteilt, so daß Abū-Kāmil hier direkt auf das Buch II der „Elemente" des Eukleides verweist, wobei er den Satz 5 im Sinn hat; es ist daher

$$\overline{DF} \cdot \overline{DA} + \overline{GD}^2 = \overline{AG}^2.$$

Da $\overline{DF} \cdot \overline{DA} = q$, $\overline{AG} = \frac{p}{2}$ und nach Voraussetzung $\overline{GD} = \frac{p}{2} - x$ ist, gilt

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Zusätzlich beweist Abū-Kāmil nach dem Vorbild des Eukleides die Flächengleichheit des Gnomons $CKGAJLC$ und des Rechtecks $DCEF$.

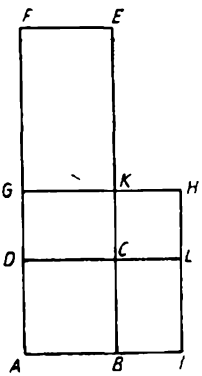


Abb. 51

Sodann setzt Abū-Kāmil $x^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ voraus (vgl. Abb. 52, in der $ABCD = x^2$, Rechteck $ABFE = q$, Rechteck $CDEF = px$ und G der Mittelpunkt von $\overline{CF} = p$ ist) und verwendet die Gleichung

$$\overline{BF} \cdot \overline{BC} + \overline{BG}^2 = \overline{GC}^2.$$

Wegen $\overline{BF} \cdot \overline{BC} = q$ und $\overline{BG} = x - \frac{p}{2}$ gilt dann

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

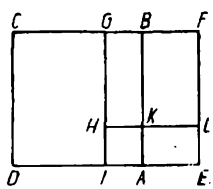


Abb. 52

Schließlich setzt Abū-Kāmil $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, legt an $ABCD = x^2$ das Rechteck $ABFE = q$ an (Abb. 53) und beweist mit Hilfe der gleichen Sätze des Eukleides durch Zurückführung auf einen Widerspruch, daß der Punkt G als Mittelpunkt von $\overline{CF}$ weder höher noch tiefer als der Punkt B liegen kann, so daß beide Punkte zur Deckung kommen; demnach gilt

$$x = \frac{p}{2}.$$

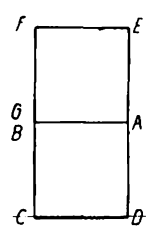


Abb. 53

Wir hatten bereits erwähnt, daß in der frühen arabischen Algebra das Quadrat der Wurzel gleichberechtigt mit der Wurzel selbst als gesuchte Größe auftrat. Dies äußert sich bei Abū-Kāmil besonders deutlich; er gibt besondere Regeln für die unmittelbare Bestimmung von x^2 in Radikalen an. In unserer Symbolik lauten diese Regeln für die vierte bis sechste Normalform

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}.$$

Jede Regel wird mit den Mitteln der geometrischen Algebra begründet, jedoch mit dem Unterschied, daß bei Abū-Kāmil Strecken und Flächeninhalte ohne Unterschied sowohl Zahlen als auch die erste bzw. zweite Potenz der Unbekannten bezeichnen können. Dieser Verzicht auf die klassische Forderung nach der Dimensionstreue in geometrischen Beweisführungen ist beachtenswert; doch haben die Mathematiker des Nahen und Mittleren Orients diesen Weg nicht weiter verfolgt und sind damit nicht zur Streckenrechnung gekommen. Dies blieb erst viel später Descartes vorbehalten. Im Falle der Gleichung

$$x^2 + px = q$$

zum Beispiel, in der $p = 10$ und $q = 39$ gesetzt sind, stellt Abū-Kāmil x^2 durch eine Strecke $\overline{AB}$ dar, die er dann um $\overline{BC} = 10x$ verlängert, so daß die Summe der beiden Strecken $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ bereits die Zahl 39 darstellt (Abb. 54). Über das Quadrat $CBDE$ wird gesagt, es sei 100mal größer als die Strecke $\overline{AB}$ nach Multiplikation mit einer ihrer Einheiten, so daß die Strecke $\overline{BC}$ gleich zehn Wurzeln aus der Strecke $\overline{AB}$ ist usw. In unserer Buchstabensymbolik bedeutet das $\overline{BC} = px$, $CBDE = p^2x^2$; sodann wird $\overline{FA} = \overline{GB}$ gleich p^2 gewählt. Die weiteren Überlegungen, die wir unmittelbar in die Symbolik der Algebra übersetzen, sind

Rechteck $ACHF = \overline{AF} \cdot \overline{AC} = p^2q$,

Rechteck $ABGF = p^2x^2 =$ Quadrat $CBDE$

und somit

Rechteck $GHED = \overline{EH} \cdot \overline{CE} = p^2q$,

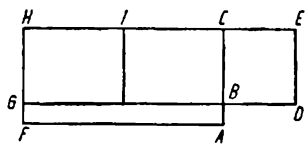


Abb. 54

d. h.

$$p^2x^2 + p^2 \cdot px = (p^2 + px)\ px = p^2q.$$

Bezeichnet I den Mittelpunkt von $\overline{CH}$, so gilt (vgl. Satz 6 des Buches VI der „Elemente“)

$$\overline{EH} \cdot \overline{CE} + \overline{JC}^2 = \overline{JE}^2,$$

d. h.

$$p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2 = \left(px + \frac{p^2}{2}\right)^2,$$

woraus

$$\overline{JE} = \overline{BC} + \overline{CJ} = px + \frac{p^2}{2} = \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

folgt. Wegen $\overline{AC} + \overline{CJ} = q + \frac{p^2}{2}$ gilt schließlich mit $x^2 = \overline{AB}$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2},$$

was zu beweisen war.

Ähnlich wie al-Ḫuwarizmī läßt auch Abū-Kāmil den Beispielen und Aufgaben verschiedene Regeln für algebraische Umformungen vorangehen, allerdings in einem wesentlich größeren Umfang. Neben der Multiplikation algebraischer Mononome und Binome, der Multiplikation und Division von Quadratwurzeln führt Abū-Kāmil

manche anderen Elemente des algebraischen Rechnens an; einige hiervon finden sich verstreut in den Aufgaben. Er hält es z. B. für notwendig, sogar so einfache Regeln wie

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$$

zu formulieren (die zuletzt genannte Regel finden wir auch bei al-Ḫuwarizmī) und behandelt auch gesondert die Regel

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Eine eingehende Untersuchung widmet er dem Fall, daß die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ entweder rational oder eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sqrt{ab}$ oder, was dasselbe bedeutet, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ rational ist. Hierbei wendet Abū-Kāmil die Regel

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

an. Als Zahlenbeispiele dienen

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}}, \quad \text{dh.} \quad \sqrt{50} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{2}$$

und

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{10 + 2 \pm 2\sqrt{20}}.$$

In der Behandlung des algebraischen Rechnens erkennen wir zwei Besonderheiten im Entwicklungsprozeß der Algebra: eine Erhöhung des theoretischen Niveaus und, ungeachtet der Anwendung geometrischer Beweisverfahren, die Tendenz zur Arithmetisierung. Regelmäßig weist Abū-Kāmil den Leser auf die Allgemeingültigkeit der algebraischen Identitäten hin, die er zunächst an Zahlenbeispielen erläutert, jedoch unmittelbar im Anschluß daran durch Worte in voller Allgemeingültigkeit formuliert. In vielen Fällen begründet er diese Identitäten mit Hilfe der Proportionenlehre, insbesondere die Sätze über die Gleichheit der Produkte aus den Innen- bzw. Außengliedern einer Proportion. An dieser Stelle ist eine interessante Abweichung von den klassischen Traditionen zu verzeichnen. Abū-Kāmil macht keinen Unterschied zwischen der allgemeinen Proportionenlehre des Eudoxos und der Proportionenlehre für kommensurable Größen, sondern spricht ganz allgemein von Proportionen, ohne kommensurable und inkommensurable Glieder zu unterscheiden. Ganz offensichtlich, und das äußert er auch explizite, sind die Glieder der Proportionen bei ihm Zahlen, die sowohl rational als auch irrational sein können. Auf diese äußerst wichtige Tatsache werden wir auch im weiteren noch zu sprechen kommen. Hier sei lediglich erwähnt, daß in den Beispielen Abū-Kāmils zur Gleichungslehre die quadratischen Irrationalitäten ständig als Zahlen, als Objekte rein arithmetischer Natur vorkommen. Sie treten dort sowohl als Wurzeln von Gleichungen als auch als Koeffizienten auf. Im zuletzt genannten Sinne traten sie bei al-Ḫuwarizmī überhaupt nicht auf, während sie als Wurzeln bei ihm äußerst selten vorkommen.

Die Beispielsammlung im Werk des Abū-Kāmil ist außerordentlich reichhaltig. Zwei Aufgabengruppen schließen sich an die Algebra von al-Ḫuwarizmī an. Es handelt sich

hier um eine Serie von Aufgaben, bei denen es darum geht, die Zahl 10 in zwei Teile zu zerlegen, die durch eine Nebenbedingung gekoppelt sind, sowie um eine Serie von Aufgaben zur Bestimmung der Anzahl x von Leuten aus der Bedingung $\frac{a}{x} = \frac{a}{x+b} + c$. Aber auch in diesen Aufgabenserien nimmt der Schwierigkeitsgrad sehr rasch zu; vor allen Dingen werden recht hohe Anforderungen an die Technik des Rechnens mit quadratischen Irrationalitäten gestellt. Andere Aufgaben sind gegenüber al-Ḫuwarizmī neu hinzugekommen.

Wir wollen hier einige Beispiele betrachten, die von einer umfangreichen Anwendung und von der souveränen Beherrschung quadratischer Irrationalitäten zeugen.

Die Zahl 10 ist in zwei Summanden x und $10 - x$ so zu zerlegen, daß die Bedingung

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$$

erfüllt ist. Die zugehörige quadratische Gleichung

$$(2 + \sqrt{5})\,x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})\,x$$

reduziert sich nach Multiplikation mit $\sqrt{5} - 2$ auf die Gleichung

$$x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x$$

mit der Wurzel

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}.$$

Damit begnügt sich der Verfasser nicht; er findet eine andere, einfachere Lösung, indem er für das Ding, d. h. für die Wurzel, $\frac{10-x}{x}$ setzt. Wird nun $\frac{10-x}{x}$ mit y bezeichnet, so gilt

$$y^2 + 1 = \sqrt{5}\,y$$

und

$$y = \sqrt{1\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}.$$

Aus der linearen Gleichung

$$\frac{10-x}{x} = \sqrt{1\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}$$

wird nun die Unbekannte x, die einen irrationalen Nenner aufweist, bestimmt. Daher quadriert Abū-Kāmil beide Seiten der Gleichung

$$10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1\tfrac{1}{4}x^2}$$

und bestimmt $x = \sqrt{125} - 5$ aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 10x = 100.$$

Noch kompliziertere Irrationalitäten treten in einer anderen Aufgabe auf, die sich unmittelbar durch die Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + 3\right)\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + 2\right) = 20$$

ausdrücken läßt. Der erste Teil des Lösungsweges läßt zunächst vermuten, daß sich Abū-Kāmil nur wenig um die Suche nach einem möglichst einfachen Lösungsweg kümmert. Statt die Gleichung in der Form

$$x + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\, x = 14\sqrt{6}$$

darzustellen und die von ihm selbst hergeleitete Formel für das Quadrat der Wurzel anzuwenden und damit sofort

$$x = 15 + 20\sqrt{6} - \sqrt{1449 + 600\sqrt{6}}$$

zu erhalten, nimmt Abū-Kāmil zunächst die folgenden Umformungen vor:

$$6 + \sqrt{\frac{x^2}{6}} + \sqrt{3x} + \sqrt{2x} = 20,$$

$$\left(14 - \sqrt{\frac{x^2}{6}}\right)^2 = 196 + \frac{x^2}{6} - \sqrt{130\frac{2}{3}x^2} = 5x + \sqrt{24x^2},$$

$$5x + \sqrt{24x^2} + \sqrt{130\frac{2}{3}x^2} = 196 + \frac{x^2}{6},$$

$$x^2 + 1176 = 30x + \sqrt{864x^2} + \sqrt{4704x^2}.$$

Hieraus ermittelt er den äußerst umständlichen Ausdruck

$$x = 15 + \sqrt{1176} + \sqrt{216} - \sqrt{441 + \sqrt{1058400} + \sqrt{1016064} + \sqrt{194400}}.$$

Unmittelbar im Anschluß daran findet Abū-Kāmil jedoch auch die oben angegebene einfachere Lösung. Er bemerkt in der vorletzten Gleichung

$$\sqrt{24} + \sqrt{130\frac{2}{3}} = \sqrt{154\frac{2}{3} + 2\sqrt{24 \cdot 130\frac{2}{3}}} = \sqrt{266\frac{2}{3}}$$

die Identität, so daß

$$x^2 + 1176 = 30x + \sqrt{9600x^2}$$

ist. Hieraus ermittelt Abū-Kāmil den oben angegebenen Wert für x, jedoch mit dem Unterschied, daß bei ihm $\sqrt{2400}$ und $\sqrt{2160000}$ anstelle von $20\sqrt{6}$ und $600\sqrt{6}$ auftreten.

Einige interessante Beispiele, in denen die Zerlegung von Brüchen in Summen von Grundbrüchen angewandt wird, wollen wir unbeachtet lassen und uns einer Aufgabe zuwenden, in der eigentlich algebraische Verfahren mit der Regel des falschen Ansatzes gekoppelt werden. Die Zahl 10 soll unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10, \\ xz &= y^2, \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (x < y < z)$$

in drei Summanden zerlegt werden. Abū-Kāmil spricht dabei vom kleineren, mittleren und größeren Teil.[1]) Zunächst wird $x_1 = 1$ gesetzt; dann erhält man aus der

[1]) Hier und in ähnlichen Fällen bedient sich Abū-Kāmil nicht der von ihm neu eingeführten Bezeichnungen für mehrere Unbekannte beim Aufstellen der Gleichungen (wie er in seinem zahlentheoretischen Werk verfährt); in der Algebra werden diese Bezeichnungen lediglich mitunter bei der Substitution der Variablen angewandt.

zweiten und dritten Bedingung für y_1 die biquadratische Gleichung

$$1 + y_1^2 = y_1^4$$

und die Gleichungen

$$z_1 = y_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}.$$

Daher gilt

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

und

$$x : 1 = 10 : \left(1\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}}\right).$$

Um x in einer bequemeren Form darzustellen, nimmt Abū-Kāmil, alles in Worten formulierend (!), Umformungen vor, durch die die zuletzt genannte lineare Gleichung in die quadratische Gleichung

$$100 + 3x^2 + \sqrt{5x^4} = 30x + \sqrt{500x^2}$$

übergeht. Durch Multiplikation mit $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ erhält er aus der Normalform

$$x^2 + 75 - \sqrt{3125} = 10x$$

schließlich

$$x = 5 - \sqrt{\sqrt{3125} - 50}.$$

Nachdem Abū-Kāmil in der gleichen Weise z berechnet hat, ermittelt er $y = 10 - x - z$. Zusätzlich berechnet er noch y, indem er von dem falschen Ansatz $y_1 = 2$ ausgeht.

Bei der Lösung dieser Aufgabe hatte Abū-Kāmil eine biquadratische Gleichung zu lösen. Auch in anderen Aufgaben treten Gleichungen auf, die in irgendeiner Potenz der Unbekannten quadratisch sind, z. B. in der Aufgabe, die sich durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2, \\ xz &= y^2, \\ yz &= 10 \end{aligned}\right\} \quad (x < y < z)$$

ausdrücken läßt, und die der Verfasser auf die Gleichung

$$x^8 + 100x^4 = 10000$$

mit der Lösung

$$x = \sqrt[4]{\sqrt{12500} - 50}$$

zurückführt.

Etwas komplizierter sind die Aufgaben, die sich auf eine Kette von zwei quadratischen Gleichungen etwa der Form

$$4\sqrt{x - 3\sqrt{x}} = x - 3\sqrt{x} + 4$$

zurückführen lassen. Hier setzt Abū-Kāmil $x - 3\sqrt{x}$ gleich dem Quadrat der Hilfsunbekannten usw.

In der Abhandlung Abū-Kāmils finden wir keine geometrischen Anwendungen. Algebraische Methoden wandte er in einem besonderen Werk, dem „Buch über die Messung“ [120] an. Dieses Werk, das uns — allerdings unvollständig — in lateinischer und althebräischer Übersetzung überliefert ist, behandelt regelmäßige Fünfecke und Zehnecke. Es handelt sich hier nicht um die Konstruktion dieser Figuren und nicht um die Klassifizierung der zugehörigen Irrationalitätentypen, wie etwa in den „Elementen“, sondern um die numerischen Beziehungen ihrer Teile untereinander sowie mit den Durchmessern der Um- und Inkreise. So wird die Seite des einbeschriebenen Fünfecks beim Durchmesser 10 durch die Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\frac{x^2}{5} = 5 + \frac{x^4}{625}$$

ausgedrückt, so daß

$$x = \sqrt{62\tfrac{1}{2}} - \sqrt{781\tfrac{1}{4}}$$

gilt. Abū-Kāmil berechnet auch die Seitenlänge des einbeschriebenen Zehnecks, ferner die Größen der umbeschriebenen Figuren. Dann drückt er den Durchmesser durch die Seiten aus und bestimmt schließlich die Beziehungen zwischen den Flächeninhalten und Seiten. Eine Aufgabe, in der die klassische Forderung nach Dimensionstreue nicht eingehalten wird, wollen wir besonders erwähnen: Gesucht ist die Höhe x eines gleichseitigen Dreiecks, wenn die Summe aus Flächeninhalt und Höhe 10 beträgt. Das Problem läuft auf die Gleichung

$$x^2 + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{300}$$

mit der Lösung

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

hinaus.

Die beiden genannten Werke Abū-Kāmils haben auf die weitere Entwicklung der Algebra einen großen Einfluß ausgeübt.

An die Werke al-Ḫuwarizmīs, Abū-l-Wafās und Abū-Kāmils schließen sich zwei Bücher des Baghdāder Gelehrten Abū Bakr Muḥammad ibn al-Ḥasan al-Karaǧī (gest. zwischen 1019 und 1029) eng an; er stammte aus der Stadt Karaǧa, die etwa auf halbem Wege zwischen Teheran und Kaswin gelegen hat. Nicht selten trifft man für diesen Gelehrten auch den Namen al-Karḫī an, da der arabische Buchstabe „ǧim“ wie „ḫ“ gelesen wird, wenn der darunterstehende Punkt weggelassen wird.

Das „Ausreichende Buch über die Wissenschaft der Arithmetik“ (Kitāb al-kāfī fī-l-ḥisāb) al-Karaǧīs [121] hatten wir bereits erwähnt. Dieses Werk war ähnlich dem Leitfaden Abū-l-Wafās über praktische Arithmetik, wie der Autor selbst betonte, für Schreiber und Rechner bestimmt. Es besteht aus 70 kurzen Kapiteln. Die ersten 43 behandeln die Arithmetik, die Kapitel 44 bis 53 die Geometrie. Hier lehnt sich al-Karaǧī in vieler Hinsicht an Abū-l-Wafā an. Die Kapitel 54 bis 70 sind wieder algebraischen Inhalts.

Im arithmetischen Teil benutzt al-Karaǧī ebenso wie Abū-l-Wafā die Ziffern nicht; bei der Behandlung der Rechenoperationen werden das Verdoppeln und Halbieren nicht gesondert behandelt. Viel Raum wird der Zerlegung der gemeinen Brüche in

Summen von Grundbrüchen eingeräumt; es wird dabei erläutert, wie gemeine Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bringen sind. Ein Novum in der arabischen Literatur war offenbar die Einführung der Elferprobe neben der Neunerprobe. Die Dreisatzregeln wurden mit Hilfe einer recht ausführlich dargelegten Proportionenlehre begründet — in Gasna schrieb um diese Zeit al-Bīrūnī ausführlich darüber.

Den geometrischen Kapiteln des „Ausreichenden Buches" werden wir uns später zuwenden müssen. Hier wollen wir lediglich zwei Aufgaben zur Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes erwähnen, die früher bereits in China und in Indien bekannt waren. In der einen soll die Länge eines in einem Teich wachsenden Schilfrohres bestimmt werden, das fünf Ellen aus dem Wasser herausragt, wenn die Spitze des Rohres durch Windeinfluß in 10 Ellen Entfernung von der ursprünglichen Stellung des Rohres gerade die Höhe der Wasseroberfläche hat. Hier wendet al-Karaǧī unmittelbar die Regel zur Berechnung des Kreisdurchmessers aus der Höhe und der Sehne eines beliebigen Kreissegments an, die wir bereits bei al-Ḫuwarizmī kennengelernt hatten (vgl. S. 219). Die Bedingungen der zweiten Aufgabe lauten: Auf den gegenüberliegenden Ufern eines Flusses von 50 Ellen Breite wachsen einander genau gegenüber zwei Palmen von 20 bzw. 30 Ellen Höhe. Auf dem Wipfel der Palmen sitzen zwei Vögel, die an der Oberfläche einen Fisch erblicken. Sie stürzen sich beide gleichzeitig auf den Fisch und erreichen diesen gleichzeitig auf der Verbindungsgeraden der Palmenfußpunkte. Gesucht ist der Punkt, an dem die Vögel zusammentreffen, und der von den beiden Vögeln zurückgelegte Weg. Die Aufgabe läuft auf eine Gleichung erstens Grades hinaus.

Den Hauptinhalt der algebraischen Abschnitte des „Ausreichendes Buches" bildet die Auflösung der sechs Normalformen der Gleichungen. Beweise werden nicht angegeben. In methodischer Hinsicht hat die Darlegung al-Karaǧīs große Vorzüge aufzuweisen. Bei al-Ḫuwarizmī und Abū-Kāmil werden die Elemente des algebraischen Rechnens im Anschluß an die Lösung der Normaltypen in der Text eingebaut, wobei sie beim zuletzt genannten Gelehrten noch jeweils nach Bedarf ergänzt wurden. Al-Karaǧī stellt dieses gesamte Material vor der eigentlichen Lösung der Gleichungen und Aufgaben zusammen. Er lehrt systematisch die Grundoperationen mit Mononomen und Polynomen sowie Irrationalitäten, führt die wichtigsten Identitäten an, summiert die arithmetische Reihe und nennt erst im vorletzten Kapitel die Auflösungsregeln für die sechs Gleichungstypen, wobei er sich bei den quadratischen Gleichungen auf die Beispiele al-Ḫuwarizmīs stützt. Das 70. Kapitel stellt eine Aufgabensammlung dar. Das Ganze dient gleichsam als eine Einführung in ein umfassendes Werk al-Karaǧīs über Algebra, das etwa im Jahre 1010 geschrieben wurde und den Titel „Al-Faḫrī" trägt, da es dem Baghdāder Wesir Faḫr al-Mulk gewidmet worden war [121a].

Das „Al-Faḫrī" besteht aus einem Vorwort und zwei Teilen, von denen der erste den theoretischen Stoff und die Beispiele enthält und in 15 Kapitel unterteilt ist. In sein Werk hat al-Karaǧī alles Wichtige aus der Algebra Abū-Kāmils aufgenommen, doch hat er an vielen Stellen neue Dinge eingefügt, und zwar sowohl in die Theorie als auch in die Aufgaben, wobei er insbesondere die „Arithmetica" des Diophantos verwendete.

Im Vorwort zum „Al-Fahrī" wird das Ziel der Wissenschaft vom Rechnen dahingehend definiert, daß es hier um die Bestimmung unbekannter Größen mit Hilfe von bekannten nach den besten Methoden geht. Dazu dienen die Regeln der Algebra, die Allgemeinheit und Wirksamkeit aufweisen. Sodann erläutert er die Bildung der verschiedenen Potenzen der Unbekannten, wobei er sich an Diophantos anlehnt, indem er die fünfte Potenz als Quadratokubus bezeichnet. Nachdem al-Karaǧī bis zum Kubo-Kubo-Kubus gelangt ist, weist er darauf hin, daß man die Folge der Potenzen bis ins Unendliche fortsetzen kann und daß die Potenzen eine Kette von Proportionen bilden, die wir heute in der Form

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \dots$$

schreiben würden. An die Folge der Potenzen schließt sich, ebenso wie bei Diophantos, die Folge der „Teile" an, d. h. die Folge der reziproken Potenzen der Unbekannten, die durch die Proportionen

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} = \cdots$$

miteinander verknüpft sind. Der „Teil" einer Zahl wird als das definiert, was bei der Multiplikation mit der Zahl die Eins ergibt.

Wesentlich reichhaltiger und systematischer als bei Abū-Kāmil ist der Apparat der verschiedenen Regeln, „die bei algebraischen Berechnungen benötigt werden", und der Sätze, „die zur Lösung von Schwierigkeiten dienen". Al-Karaǧī gibt nicht nur die binomischen Formeln für das Quadrat einer Summe und Differenz und die dritte Potenz einer Summe an, sondern nimmt nach der Betrachtung von Identitäten etwa der Form

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} + (a - b)\right] = a, \quad \frac{1}{2}\left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} - (a - b)\right] = b$$

für verschiedene Ausdrücke, die die Form eines vollständigen Quadrats haben usw., auch die Summation verschiedener arithmetischer Reihen vor. Außer den arithmetischen Reihen finden wir hier die Regeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}\right)$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

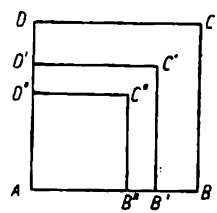


Abb. 55

Nach seinen eigenen Worten war al-Karaǧī ein Beweis für die Summe der Quadrate nicht gelungen; für die Summe der Kuben hingegen gibt er einen einfachen und eleganten geometrisch-algebraischen Beweis an. Die Seite eines Quadrates (Abb. 55) $ABCD$ sei $1 + 2 + \dots + n$; bei al-Karaǧī ist $n = 10$ gesetzt. In diesem Quadrat wird ein Gnomon $BB'C'D'DC$ konstruiert, wobei $\overline{BB'} = n$ ist. Der Flächeninhalt des Gnomons ergibt sich zu

$$2n(1 + 2 + \dots + n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Im Quadrat $AB'C'D'$ wird nun der Gnomon $B'B''C''D''D'C'$ mit $\overline{B'B''} = n - 1$ konstruiert. Dieser Gnomon hat nun den Flächeninhalt $(n-1)^3$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schließlich bis zu einem Quadrat mit der Seite 1, wobei, wie man sieht, der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates aus den Flächeninhalten sämtlicher Gnomone und dem Quadrat $1^2 = 1^3$ besteht, so daß

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

gilt.

Darüber hinaus gibt al-Karaǧī die Summen einiger weiterer Reihen an, die unmittelbar mit den vorhergehenden zusammenhängen, wie etwa

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n=1} k\right)\left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{3}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \sum_{k-1}^{n-1} k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) - \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Die letzte Summation beruht auf der Identität

$$(k-1)\,k\,(k+1) = k^3 - k.$$

In der Lehre von den quadratischen Gleichungen lehnt sich al-Karaǧī eng an Abū-Kāmil an und gibt z. B. auch die gleichen Herleitungen für die Regeln zur Berechnung von x und x^2 an. Doch auch hier finden wir im „Al-Faḫrī" Neues. So wird neben der geometrischen Herleitung der Formel für die Wurzel (vgl. S. 221) die rein arithmetische quadratische Ergänzung vorgenommen, und zwar ohne Verweis auf geeignete Sätze des Buches II der „Elemente". Da in den von Diophantos entlehnten Beispielen der Koeffizient des höchsten Gliedes häufig von eins verschieden ist, gibt al-Karaǧī entsprechende Regeln an, die eine vorhergehende Transformation auf die Normalformen al-Ḫuwarizmīs überflüssig machen. Diese Regeln werden geometrisch bewiesen. Besondere Beachtung verdient die Tatsache, daß al-Karaǧī mit der systematischen Untersuchung dreigliedriger Gleichungen begann, die in irgendeiner Potenz der Unbekannten quadratisch sind oder die sich auf solche Gleichungen zurückführen lassen, wenn man sie durch eine geeignete Potenz der Unbekannten dividiert, d. h. Gleichungen der Form

$$ax^{2n} + bx^n = c, \quad ax^{2n} + c = bx^n, \quad bx^n + c = ax^{2n}$$

und

$$ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^n.$$

Er gibt die Regeln zur Berechnung von x^n an und betrachtet Beispiele von Gleichungen vierten, sechsten und im letzten Falle siebenten Grades. Die Lösung $x = 0$ bleibt selbstverständlich unbeachtet.

Am Ende des ersten Teiles lehrt al-Karaǧī, wie man gewisse Umformungen vorzunehmen hat, um im Nenner auftretende quadratische Irrationalitäten zu beseitigen. Es wird z. B. eine Zahl gesucht, die mit $(3 + \sqrt{5})$ multipliziert 1 ergibt; diese Aufgabe läßt sich rasch auf die Auflösung einer quadratischen Gleichung zurückführen (vgl. S. 227).

Die darauffolgenden fünf Abschnitte des zweiten Teiles des „Al-Fahrī" stellen eine umfangreiche Aufgabensammlung zur Algebra und Zahlentheorie dar; sie enthalten mehr als 250 Aufgaben. Bevor wir uns den zahlentheoretischen Aufgaben dieser Sammlung zuwenden, wollen wir noch eine Bemerkung einfügen.

Ausgehend von der Tatsache, daß al-Karaǧī in seinen beiden Werken die arabischen Ziffern nicht benutzt hat, ferner auch deswegen, weil er vieles aus der „Arithmetica" des Diophantos entlehnt hat, schließen manche Wissenschaftshistoriker, daß al-Karaǧī (und auch Abū-l-Wafā) insgesamt gesehen die indische Lehre abgelehnt haben und daß damals ein Kampf zweier Schulen, der proindischen und der progriechischen, ausgefochten worden sei, dessen Hintergrund der Streit zwischen zwei religiösen Sekten gebildet habe [21, Bd. II, S. 763 bis 765; 12]. Hierbei wird jedoch nicht geleugnet, daß die indische Wissenschaft auch auf die Verfechter der griechischen Mathematik einen gewissen Einfluß ausgeübt habe. Es ist zu bezweifeln, daß diese Hypothese auf einer soliden Grundlage beruht. Bei Abū-l-Wafā und al-Karaǧī findet man in großer Zahl sowohl Elemente indischen als auch griechischen Ursprungs und in nicht geringerer Anzahl Bestandteile uralter Traditionen oder solcher Auffassungen, die in jener Zeit zum traditionellen Bestandteil der Wissenschaft in den islamischen Ländern geworden waren. Es dürfte schwierig sein, das Gewicht aller dieser verschiedenen Bestandteile objektiv abzuschätzen. Vor allem liegt kein Grund vor, auf die Existenz und den Kampf ganzer wissenschaftlicher „Schulen" bezüglich der Behandlung der Zahlenschreibweise zu schließen. Es sei hier darauf hingewiesen, daß ein derartig überzeugter Verfechter der Anwendung indischer Ziffern wie al-Ḫuwarizmī diese in seiner eigenen Algebra sehr spärlich angewandt hat. Wenn sich die wörtliche Darstellung von Zahlen jahrhundertelang in vielen Werken gehalten hat, so lagen dafür ausreichend Gründe in den traditionellen Fertigkeiten und Bedürfnissen der Menschen, für die diese Bücher geschrieben waren, und solche Traditionen änderten sich im Mittelalter nur langsam. Selbstverständlich spiegelte sich in den Werken einzelner Gelehrter auch deren persönlicher Geschmack wider sowie das Vorhandensein entsprechender griechischer und indischer Literatur, die Möglichkeit, diese zu studieren usw. Das ist jedoch eine ganz andere Frage.

Probleme der Zahlentheorie. Abū-Kāmil schrieb ein besonderes Werk über die Auflösung von Systemen unbestimmter linearer Gleichungen. Es handelt sich um das „Buch der Seltenheiten in der Arithmetik" (Kitāb ṭarāif fī-l-ḥisab); wir kennen es nach einer arabischen Abschrift, die in der Zeit zwischen 1211 und 1218 von Mas'ūd ibn Muḥammad al-Ǧulfarī, einem aus Ǧulfar bei Mary stammenden Gelehrten, angefertigt wurde. Ebenso wie die Algebra Abū-Kāmils wurde auch dieses Werk ins Althebräische, Spanische und wahrscheinich auch ins Lateinische [122] übersetzt.

In einem kurzen Vorwort bemerkt Abū-Kāmil, daß die ganzzahligen Lösungen solcher Aufgaben manchmal eindeutig sind, häufig seien jedoch mehrere Lösungen vorhanden; manche Aufgaben ließen sich überhaupt nicht in ganzen Zahlen lösen. Dann führt er Beispiele für alle drei Fälle an, wobei er den Schwierigkeitsgrad allmählich steigert und den Lösungsgang ausführlich erläutert.

Sämtliche Aufgaben werden als Aufgaben über Vögel formuliert. Das Lösungsverfahren ist von dem indischen verschieden. Zunächst löst Abū-Kāmil das System

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 5x + \tfrac{y}{20} + z &= 100. \end{aligned}\right\}$$

Er eliminiert z und drückt y durch x aus:

$$100 - x - y = 100 - 5x - \tfrac{y}{20},$$

$$y = 4x + \tfrac{4}{19}x.$$

Hieraus schließt er, daß die Lösung $x = 19$, $y = 80$ und $z = 1$ lautet. Sodann bestimmt er in ähnlicher Weise sechs Lösungen des Systems

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ \tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{2} + 2z &= 100 \end{aligned}\right\}$$

sowie 98 bzw. 304 Lösungen zweier Gleichungssysteme, die jeweils aus zwei Gleichungen mit je vier Unbekannten bestehen.

In der Aufgabe 5 lautet das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ 3x + \tfrac{y}{20} + \tfrac{z}{3} &= 100, \end{aligned}\right\}$$

woraus

$$x = 25 + \tfrac{17}{160}y$$

folgt. Da sich das kleinste ganzzahlige x erst bei $y = 160$ ergibt und diese Zahl größer ist als die Gesamtzahl 100 der Vögel, folgert er, daß die Aufgabe keine Lösung besitzt.

Das Glanzstück des Werkes ist die Aufgabe 6:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 100, \\ 2x + \tfrac{y}{2} + \tfrac{z}{3} + \tfrac{u}{4} + v &= 100. \end{aligned}\right\}$$

Hier gilt

$$x = \tfrac{y}{2} + \tfrac{2}{3}z + \tfrac{3}{4}u$$

mit

$$x + y + z + u = \tfrac{3}{2}y + \tfrac{5}{3}z + \tfrac{7}{4}u < 100.$$

Abū-Kāmil konstruiert zwei Serien ganzzahliger Lösungen. Zunächst setzt er für y die Werte 1, 3, 5 usw. und für z die Werte 3, 6, 9 usw., für u nacheinander 2, 6, 10 usw. ein und betrachtet die Kombinationen, die den Bedingungen $y \leq 59$, $z \leq 54$, $u \leq 50$ genügen. Das ergibt 1443 Lösungen. Sodann werden die Lösungsfolgen $y = 2$,

4, 6, ..., $z = 3, 6, 9, \ldots$, $u = 4, 8, 12, \ldots$ betrachtet; nunmehr ist $y \leq 58$, $z \leq 51$ und $u \leq 52$. Dies liefert weitere 1233 Lösungen, so daß man insgesamt 2676 Lösungen erhält!

Die zahlentheoretischen Aufgaben im „Al-Fahrī" al-Karagīs sind zu einem beträchtlichen Teil der „Arithmetica" des Diophantos entlehnt; andere entspringen einer spezifisch orientalischen Tradition. Eine Aufgabe zur Lösung eines unbestimmten linearen Systems mit fünf Unbekannten sei besonders erwähnt:

$$x + \frac{1}{3}(y + z + u) = s,$$
$$y + \frac{1}{4}(z + u + x) = s,$$
$$z + \frac{1}{5}(u + x + y) = s,$$
$$u + \frac{1}{6}(x + y + z) = s.$$

Sie war bereits bei Diophantos zu finden und trat später bei Leonardo Fibonacci von Pisa auf, allerdings mit einigen Änderungen in den Koeffizienten. Die Auflösung solcher Aufgaben werden wir im vierten Kapitel betrachten.

Es ist durchaus möglich, daß al-Karagī als erster das Problem aufwarf, eine Quadratzahl zu bestimmen, deren Summe oder Differenz mit einer gegebenen anderen Zahl wieder eine Quadratzahl ist. Er behandelt zwei Beispiele:

$$x^2 + 5 = y^2 \text{ und } x^2 - 10 = y^2.$$

Im ersten Fall setzt er $y = x + 1$, im zweiten $y = x - 1$, was die Lösungen $x = 2$ bzw. $x = \frac{11}{2}$ liefert. Beide Aufgaben sind Spezialfälle der unbestimmten Gleichung

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

die bereits von Diophantos und auch von al-Karagī am Ende des ersten Teils des Werkes „Al-Fahrī" behandelt wurde. Ist a eine Quadratzahl, so setzt al-Karagī $y = \sqrt{a}x + d$, wobei d irgendeine gegebene Zahl ist; ist hingegen c eine Quadratzahl, so setzt er $y = mx + \sqrt{c}$, wobei m beliebig gewählt wird.

Die diophantischen Substitutionen wendet al-Karagī auch auf einige neue Gleichungsformen an, etwa in der Art des Systems

$$y^2 = x^3 + ax^2,\ z^2 = x^3 + bx^2.$$

Wird

$$y = mx,\quad z = nx$$

gesetzt, so ist

$$x = m^2 - a = n^2 - b,$$

und die Aufgabe ist damit auf die Bestimmung zweier Quadratzahlen m^2 und n^2 mit gegebener Differenz $b - a$, d. h. auf die vorhergehende Aufgabe zurückgeführt.

In etwas komplizierterer Form findet sich diese Aufgabe auch in dem Werk über die Konstruktion rationaler rechtwinkliger Dreiecke des Abū Ğa'far Muḥammad ibn

al-Ḥusain (erste Hälfte des 11. Jahrhunderts [123]). Die Aufgabe wird geometrisch formuliert und gelöst: Es geht um die Konstruktion rationaler Quadrate, die beim Vergrößern oder Vermindern um die gleiche gegebene Größe wieder in rationale Quadrate übergehen. Die Konstruktion al-Ḥusains läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Sind die rationalen Zahlen x, y und z durch die Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2$$

verknüpft, so gilt

$$z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2.$$

Dies war bereits Diophantos bekannt. Setzt man für x, y bzw. z die Zahlen $a^2 - b^2$, $2ab$ bzw. $a^2 + b^2$ ein (diese ganzzahligen pythagoreischen Zahlentripel waren ibn al-Ḥusain bekannt), so erhält man die Identitäten

$$(a^2 + b^2)^2 \pm 4ab\,(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 \pm 2ab)^2,$$

die es gestatten, durch geeignete Wahl von a und b ganzzahlige und rationale Lösungen unbestimmter Systeme der Form

$$u^2 + k = v^2,$$
$$u^2 - k = w^2$$

zu ermitteln. Später wurde eine scharfsinnige allgemeine Lösungsmethode für derartige Systeme von Leonardo Fibonacci von Pisa gefunden.

Wir wollen noch eine Aufgabe des ibn al-Haitham erwähnen, bei der es um die Bestimmung einer durch 7 teilbaren Zahl geht, die bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 liefert. Auch diese Aufgabe trat bei Leonardo Fibonacci erneut auf. Noch früher finden wir diese Aufgabe bei Bhâskara I. (Vgl. S. 146).

Die zahlentheoretischen Untersuchungen der Mathematiker in den islamischen Ländern waren nur wenig originell, und wir wollen daher nicht auf einzelne Werke über magische Quadrate, lineare unbestimmte Systeme (in der Art der bereits früher erwähnten Aufgabe „über die Vögel") usw. eingehen. Wir wollen lediglich zwei Untersuchungen besonders hervorheben.

In dem einen Fall handelt es sich um den Versuch nachzuweisen, daß es unmöglich ist, die Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

in rationalen Zahlen zu lösen, d. h. um den ersten Spezialfall des berühmten Fermatschen Problems. Nach Mitteilungen des ibn al-Ḥusain sei dies von dem aus Huǧand (heute Leninabad) stammenden Astronomen und Mathematiker Abū Muḥammad Ḥamīd ibn al-Ḥidr al-Huǧandī (gest. etwa 1000) bewiesen worden. Der Beweis al-Huǧandīs ist nicht erhalten geblieben; wie al-Ḥusain mitteilt, sei dieser Beweis jedoch unzureichend gewesen.

Eine andere bemerkenswerte Entdeckung machte der in Baghdād tätig gewesene Gelehrte Abū-l-Ḥasan Thābit ibn Qurra aṣ-Ṣābī al-Ḥarrānī (etwa 830 bis 901). Er gehörte der Sekte der Sabier der Sternanbeter an und stammte aus der mesopotamischen Stadt Ḥarrān, dem religiösen Zentrum der Sabier [124]. Thābit ibn Qurra zeigte, daß die Zahlen $M = 2^n \cdot p \cdot q$ und $N = 2^n \cdot r$ sog. befreundete Zahlen sind, d. h., jede von

ihnen ist gleich der Summe der Teiler der anderen, wie etwa 220 und 284, wenn $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ und $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ ungerade Primzahlen sind. Das Paar 220 und 284, das $n = 2$ entspricht, war lange Zeit das einzige Beispiel für befreundete Zahlen; neue Paare fanden P. Fermat, R. Descartes (17296 und 18416 für $n = 4$ und 9363584 und 9437056 für $n = 7$) und L. Euler, der den befreundeten Zahlen ein besonderes Werk gewidmet (1749) und eine Tabelle mit 61 Paaren solcher Zahlen aufgestellt hat. Das allgemeine Bildungsgesetz für befreundete Zahlen ist bis heute noch nicht entdeckt.

Wir wollen uns nun der weiteren Geschichte einzelner mathematischer Wissenschaften und Probleme zuwenden.

Die Entwicklung des Stellenwertsystems; Dezimalbrüche. Das Stellenwertsystem der Zahlenschreibweise fand immer mehr Verbreitung, vor allem als Sexagesimalsystem, das von den Astronomen verwendet wurde. Es handelte sich hier um ein vollständiges positionelles Sexagesimalsystem für ganze Zahlen und Brüche, das erheblich vollkommener war als die im Altertum geschaffenen. Es war höchstwahrscheinlich in dieser Form bereits Abū-l-Wafā bekannt, doch finden wir die erste Beschreibung in dem Werk „Über die Elemente der Rechnung der Inder" (Fī uṣūl ḥisāb al-Hind), das von Kušyār ibn Labbān al-Ǧilī (etwa 971 bis 1024) verfaßt wurde, der aus der Stadt Ǧilan südlich vom Kaspisee stammte [125].

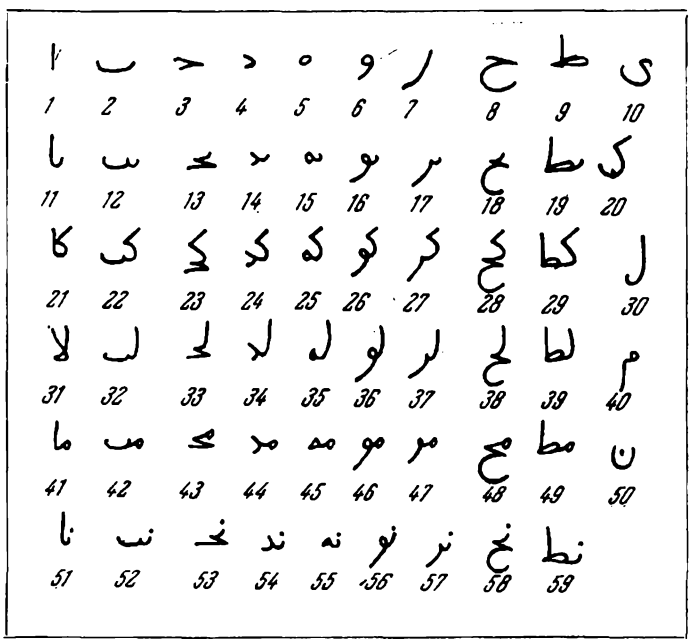


Abb. 56. Ǧumal-Ziffern

Jede Zahl von 1 bis 59 wird in diesem System (Abb. 56) durch ein individuelles Zeichen, die alphabetische Bezeichnung dieser Zahl, wiedergegeben. Da hierbei die Zahlen von 1 bis 59 entweder durch einen oder zwei Buchstaben gekennzeichnet werden, wobei die Summe der diesen entsprechenden Zahlenwerte die betreffende Zahl ergibt, bezeichnet man diese Ziffern als „ğumal", die Mehrzahl des Wortes „ğumala", was soviel wie Summe bedeutet. Hierbei werden die Zehnerbuchstaben rechts von den Einerbuchstaben geschrieben. Für die Null benutzte man ein besonderes Zeichen ъō, das möglicherweise aus der Bezeichnung der Null in dengriechisch-alexandrinischen Papyri hervorgegangen ist [103*a*, S. 11—12]. Im Laufe der Zeit veränderte sich diese Form der Null und nahm allmählich eine Gestalt an die etwa dem zyrillischen Härtezeichen ъ entsprach.

Die anderen ganzen Zahlen und Brüche wurden, erforderlichenfalls näherungsweise, in der Form

$$a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} 60^{-1} + \cdots + a_{-m} 60^{-m}$$

wiedergegeben, wobei sämtliche a_k die Werte von 0 bis 59 annehmen können. Die Bruchstellen bezeichnete man nach griechischem Vorbild mit Minuten, Sekunden, Terzen usw., die Einerstellen als Grade, die höheren Stellen der Sexagesimalschreibweise als „die ersten Gehobenen", „die zweiten Gehobenen" usw. Ausführlicher als bei Kušyār ibn Labbān war das Rechnen im sexagesimalen Stellenwertsystem im „Schlüssel der Arithmetik" des al-Kāšī [125, 126] beschrieben.

Ğamšid ibn Mas'ūd al-Kāšī oder al-Kāšānī mit dem Beinamen Ghiyāth ad-Dīn, was soviel wie „Hilfe des Glaubens" bedeutet, stammte aus der iranischen Stadt Kašan zwischen Teheran und Isfahan. Er wurde im dritten oder zu Beginn des vierten Viertels des 14. Jahrhunderts geboren. In den zwanziger Jahren des 15. Jahrhunderts zog er auf Einladung Ulugbēks nach Samarkand, wo er verschiedene astronomische Arbeiten leitete. Er starb im Jahre 1429 oder etwas später. Ihm verdanken wir viele Werke über Astronomie und drei hervorragende mathematische Abhandlungen, von denen der „Schlüssel der Arithmetik" (Miftāḥ al-ḥisāb) am 2. März 1427 vollendet wurde [126*a*]. Auf die beiden anderen Abhandlungen werden wir ebenfalls noch eingehen.

Der „Schlüssel der Arithmetik" ist ein meisterhaft abgefaßter Leitfaden über Elementarmathematik, in dem der Verfasser die Interessen eines sehr großen Leserkreises berücksichtigt hat. Im Hinblick auf die Reichhaltigkeit des Materials, auf die Klarheit und Eleganz der Darstellung steht das Buch nahezu einmalig in der gesamten mittelalterlichen Literatur da. Selbstverständlich ist ein großer Teil der darin enthaltenen Tatsachen nicht neu, und man findet Aufgaben, denen man bereits Jahrhunderte früher begegnete. Der Titel des Werkes, den man auch bei früheren Werken antrifft, bedeutet, daß man die Arithmetik als den Schlüssel zur Lösung verschiedener Aufgaben auffaßte, die durch Rechnung gelöst werden müssen. Al-Kāšī selbst definierte die Arithmetik als die Lehre von der Bestimmung unbekannter Zahlengrößen mit Hilfe der ihnen entsprechenden bekannten Größen; so hatte es bereits al-Karağī getan. Das Werk besteht aus fünf Büchern: 1. über die Arithmetik der Ganzen, 2. über die Arithmetik der Brüche, 3. über die Rechenweise der Astronomen, 4. über das

Messen und 5. über die Bestimmung unbekannter Größen mit Hilfe der Algebra, der Regel zweier falscher Ansätze usw. Wegen seiner großen Vorzüge wurde der „Schlüssel der Arithmetik" jahrhundertelang immer wieder abgeschrieben; ja, eine lithographierte Ausgabe des Werkes erschien in Teheran noch im Jahre 1889.

Das sexagesimale Stellenwertsystem wird im dritten Buch des „Schlüssels der Arithmetik" behandelt, in dem die Rechenweise der Astronomen beschrieben wird. Zur Darstellung einer Zahl werden nacheinander deren sämtliche Ziffern hingeschrieben und dann zur Angabe der Größenordnung entweder sämtliche Stellen oder aber nur die niedrigste Stelle bezeichnet, z. B. bedeutet 1 33 26 45 37 Sekunden die Zahl $1 \cdot 60^2 + 33 \cdot 60 + 26 + 45 \cdot 60^{-1} + 37 \cdot 60^{-2}$. Sie wird gelesen 1 zweimal Gehobene, 33 Gehobene, 26 Grad, 45 Minuten und 37 Sekunden. Die Multiplikation und Division beruhten auf der Anwendung zweier Tabellen. Die erste hiervon, das Einmaleins bis $59 \cdot 59$ mußte jederzeit dem Rechner zur Verfügung stehen, da es nicht einfach ist, sich die darin enthaltenen $59 \cdot 30 = 1770$ Produkte zu merken. Die zweite Tabelle diente zur Bestimmung des Stellenwerts des Produkts oder des Quotienten zweier Sexagesimalstellen. Al-Kāšī formuliert die zugehörigen Regeln in allgemeiner Form für beliebige ganze Exponenten, die er als die „Nummern der Stellen" bezeichnet. Hierzu gibt er den Graden, d. h. den Einern des Sexagesimalsystems, als Stellennummer die Null, d. h., er setzt in Wirklichkeit $a^0 = 1$. Negative Exponenten umgeht er dadurch, daß er unterscheidet, nach welcher Seite die Exponenten der ganzen Stellen und der Bruchstellen von den Graden aus angetragen werden oder, wie er selbst sagt, zwischen „aufsteigenden" und „absteigenden Ketten". Unsere Regeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{und} \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

formuliert al-Kāšī folgendermaßen:

„Die Summe der Nummern zweier Stellen einfacher Faktoren, wenn sie auf der einen Seite der Einer liegen, oder die Differenz zwischen ihnen, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen, ist die Nummer der Stelle des Produkts auf der Seite der Summe oder auf der Seite des Überschusses, und die Differenz der Nummern zweier Stellen eines einfachen Dividenden und Teilers, wenn sie auf der einen Seite Eins liegen, und deren Summe, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen, ist die Nummer der Stelle des Quotienten der Division in der aufsteigenden Kette, wenn die Stelle des Dividenden über der Stelle des Divisors steht, und in der absteigenden Kette, wenn dies nicht der Fall ist" [126, S. 93, russisch].

Ebenso wie seine Vorgänger beherrschte al-Kāšī das Zusammenfassen eines Produktes von Radikalen unter einem gemeinsamen Exponenten und formulierte in Worten derartige Regeln, etwa die folgende:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m}\,\sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n}.$$

Die Entwicklung der Operationen mit Exponenten wurde um diese Zeit auch in Europa vorangetrieben. Am Ende des 14. Jahrhunderts führte Nicole Oresme unter Verwendung der Terminologie der antiken Proportionenlehre gebrochene Exponenten ein. Nicolas Chuquet führte im Jahre 1484 den Exponenten Null und negative Exponenten ein, während Michael Stifel, von dem das Wort „Exponent" stammt,

im Jahre 1544 einfach sagen konnte: Bei der Multiplikation werden die Exponenten addiert, bei der Division subtrahiert.

Die Multiplikation und Division der sexagesimalen ganzen und gebrochenen Zahlen wird bei al-Kāšī genauso vorgenommen wie in unserem Dezimalsystem. Die früheren arabischen Mathematiker überführten ähnlich wie al-Ḫuwarizmī zunächst die Sexagesimalbrüche in ganze Dezimalzahlen, drückten sie in Einheiten der niedrigsten Stelle aus, führten die Operationen im Dezimalsystem aus und vollzogen dann die Rückführung ins Sexagesimalsystem. Zur Überprüfung des Ergebnisses wendete al-Kāšī die Division durch $59 = 60 - 1$ an, die hier die gleiche Rolle spielt wie die Neunerprobe ($9 = 10 - 1$) im Dezimalsystem.

In der Behandlung der sexagesimalen Stellenwertarithmetik ging al-Kāšī im wesentlichen nach dem Vorbild vieler früherer Gelehrter vor. Einen prinzipiell neuen Schritt vollzog er, indem er das dezimale Rechnen mit ganzen Zahlen auch auf Brüche übertrug.

Im ersten Kapitel des zweiten Buches des „Schlüssels der Arithmetik", das den Brüchen gewidmet ist, erwähnt al-Kāšī, daß er in Anlehnung an die Sexagesimalbrüche Brüche eingeführt habe, die aus den aufeinanderfolgenden Potenzen eines Zehntels zusammengesetzt sind; er nennt diese Potenzen Zehntel, dezimale Sekunden, dezimale Terzen usw. und die Brüche selbst Dezimalbrüche.[1]) Sein Ziel war es, ein System von Brüchen zu schaffen, in dem wie im Sexagesimalsystem sämtliche Operationen genauso vorgenommen wurden wie in ganzen Zahlen, das aber auf der allgemein gebräuchlichen Basis Zehn beruhte und daher auch denen zugänglich war, die das „Rechnen der Astronomen" nicht beherrschten. Im vierten Buch über die Messung der Figuren werden viele Ergebnisse in Dezimalbrüche überführt. Die Operationen mit Dezimalbrüchen werden im dritten Buch beschrieben. Al-Kāšī hätte sich im Grunde genommen mit der Bemerkung begnügen können, daß diese Operationen nach den bereits bekannten Regeln des „Rechnens der Astronomen" vollzogen werden, jedoch formuliert er noch einmal die Regel über die Exponenten beim Multiplizieren und Dividieren gesondert. Den Wortlaut dieser Regel hatten wir auf Seite 238 wiedergegeben. Große Aufmerksamkeit widmet er der Überführung von Sexagesimalbrüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt. Als Rechenhilfe stellt er äußerst gedrängte Tabellen zusammen, mit deren Hilfe Dezimalzahlen der Form $a_k \cdot 10^n$ mit $-10 \leq n \leq 10$, $a_k = 1, \ldots, 9$ durch Sexagesimalbrüche ausgedrückt werden können.

Sobald sich eine Sexagesimalzahl nicht durch einen endlichen Dezimalbruch ausdrücken läßt (ein Dezimalbruch läßt sich stets genau durch einen Sexagesimalbruch ausdrücken), rundet al-Kāšī die Näherungswerte in der Form, wie wir es heute gewohnt sind. In dieser Weise verfuhr übrigens bereits Abū-l-Wafā. Nachdem er z.B. festgestellt hat, daß $8'29''44'''$ (der gebrochene Anteil von π) gleich 0,141592 ist, wobei noch ein Rest von $35'33''20'''$ der letzten Dezimalstelle, also mehr als deren Hälfte verbleibt, rundet er den Dezimalbruch, indem er die letzte Ziffer um 1 erhöht. Der Rechengang selbst verläuft folgendermaßen: Ist

$$\frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = \frac{x}{10} + \frac{y}{10^2} + \frac{z}{10^3} + \cdots,$$

[1]) Die Dezimalbrüche finden auch in einem früheren Werk al-Kāšīs über die Kreisberechnung Anwendung, das wir noch näher kennenlernen werden.

so erhalten wir nach Multiplikation mit 10

$$1+\frac{24}{60}+\frac{57}{60^2}+\frac{20}{60^3}=x+\frac{y}{10}+\frac{z}{10^2}$$

und folglich $x=1$. In der gleichen Weise verfahren wir mit der Gleichung

$$\frac{24}{60}+\frac{57}{60^2}+\frac{20}{60^3}=\frac{y}{10}+\frac{z}{10^2}+\cdots$$

usw. Hierbei entsteht eine Tabelle, bei der in der zweiten Spalte (rechts) die Ziffern des Dezimalbruches und in der ersten (unter den Strichen) die zu transformierenden Sexagesimalbrüche stehen (Abb. 57). Es sei darauf hingewiesen, daß al-Kāšī offenbar die augenfällige Periodizität des von ihm gewonnenen Bruches 0,141(592) nicht vermerkt hat.

Zur Darstellung von Dezimalbrüchen, die in einer Zeile mit dem ganzzahligen Teil zusammengeschrieben werden, benutzte al-Kāšī verschiedene Methoden: Er trennte

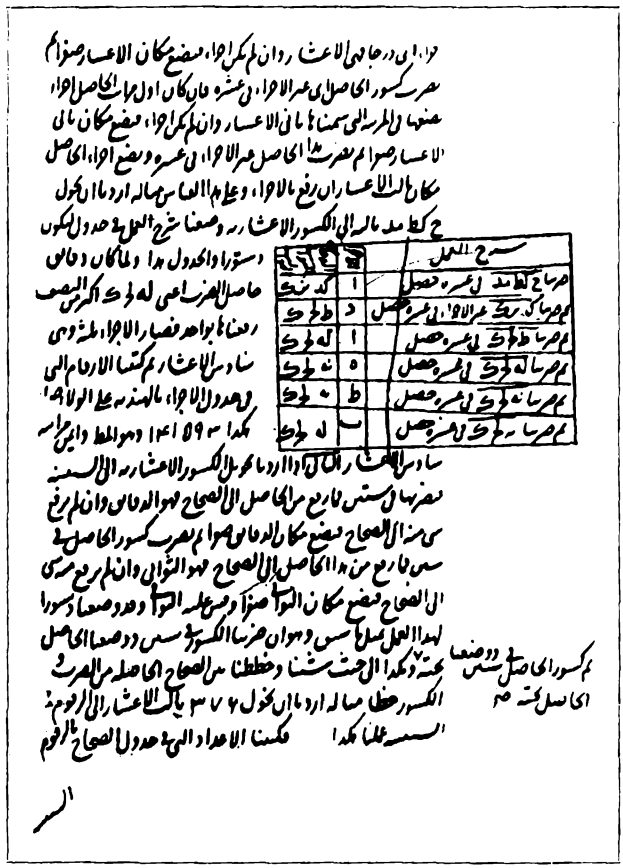


Abb. 57. Umrechnung des Sexagesimalbruches 8°29′44″′ in den Dezimalbruch 0,141592.
Aus dem „Schlüssel der Arithmetik" al-Kāšīs (Leidener Handschrift, 1554).

den ganzzahligen Teil durch einen senkrechten Strich ab, schrieb den Bruchteil in einer anderen Farbe oder über die Ziffern die Bezeichnungen der Stellen; am häufigsten jedoch verfuhr er so, daß er nur die niedrigste Stelle nannte, die die anderen mitbestimmte.

Einer	Minuten	Sekunden	Terzen
1	24	57	20
4	9	33	20
1	35	33	20
5	55	33	20
9	15	33	20
2	35	33	20

Versuche zur Einführung der Dezimalbrüche wurden auch früher unternommen. Ihrer Anwendung begegnete man bekanntlich in China. Möglicherweise hat al-Kāšī irgendwelche Kenntnisse darüber erhalten. Jedenfalls hielt er die Einführung der Dezimalbrüche für sein eigenes Verdienst, und zweifellos ist die klare Fassung und die reguläre Anwendung der Dezimalbrüche sowie die Beschreibung der zugehörigen Rechenoperationen eine hervorragende Tat dieses Gelehrten. Die kurze Skizze eines Systems von „Primen", „Sekunden", „Terzen" usw. in einer Handschrift des jüdischen Mathematikers Immanuel ben Jakob Bonfils, der im 14. Jahrhundert in Tarascon gelebt hat, ist im Vergleich zur Dezimalbruchlehre al-Kāšīs völlig unbedeutend (vgl. S. 363). Dabei hat Bonfils keinerlei Berechnungen mit Hilfe von Dezimalbrüchen vorgenommen (vgl. Ergänzung III).

Die Dezimalbrüche al-Kāšīs fanden in der zweiten Hälfte des 15. und im 16. Jh. eine gewisse Verbreitung in der Türkei (möglicherweise durch Vermittlung seines Schülers al-Kuščī, der sich im Jahre 1465 in Stambul ansiedelte). Davon zeugen zwei Aufgaben aus einer anonymen byzantinischen Aufgabensammlung, die aus dem 15. Jh. stammt. In der 36. Aufgabe dieses Werkes heißt es: „Die Türken führen die Multiplikationen und Divisionen nach einem besonderen Rechenverfahren durch. Sie führen (ihre) Brüche ein, seit sie hier in unserem Land regieren." [126*b*, S. 33]. Das Verfahren besteht darin, daß man gemeine Brüche in Dezimalbrüche verwandelt. Zur Multiplikation der Zahlen $153\frac{1}{2}$ und $16\frac{1}{4}$ (Aufgabe 36) wird 5 an Stelle von $\frac{1}{2}$ und 25 an Stelle von $\frac{1}{4}$ genommen. Sodann werden entsprechend im Produkt $1535 \cdot 1625 = 2494375$ die drei letzten Stellen abgetrennt, wodurch sich 2494,375 ergibt. Dabei wird angegeben, daß der gebrochene Anteil gleich $\frac{3}{8}$ ist. Die Berechnung selbst erfolgt im Stellenwertsystem unter Verwendung griechischer Buchstabenziffern, und der gebrochene Anteil wird durch einen Strich abgetrennt. Die Null (*οὐδέν* = Nichts) wird nach arabischem Vorbild durch einen Punkt wiedergegeben.

$\alpha\varepsilon\gamma \mid \varepsilon$			153 | 5	
$\alpha\varsigma \mid \beta\varepsilon$			16 | 25	
$\zeta_\varsigma\zeta\varepsilon$			7675	
$\gamma.\zeta.$	$\frac{\gamma}{\eta}$	d. h.	3070	$\frac{3}{8}$
$\vartheta\beta\alpha.$			9210	
$\alpha\varepsilon\gamma\varepsilon$			1535	
$\beta\delta\vartheta\delta \mid \gamma\zeta\varepsilon$			2494 | 375	

In der nachfolgenden Aufgabe 37 wird die Division von 3562 durch $35\frac{3}{8}$ auf die Division 3562000 : 53 | 375 zurückgeführt, wobei empfohlen wird, dem Divisor drei Nullen anzuhängen; der Quotient wird aus Versehen auf 66 (statt auf 67) gerundet [126a, S. 32—35 und Tabelle XI]. Es sei erwähnt, daß diese byzantinische Handschrift im Jahre 1562 nach Wien gebracht wurde und jetzt in der Österreichischen Nationalbibliothek aufbewahrt wird.

Das Radizieren und der binomische Lehrsatz. Nach al-Ḫuwarizmī haben die arabischen Mathematiker verschiedene Vereinfachungen für die Durchführung der vier Grundrechenarten gefunden. Sie übernahmen entweder von den Indern neue Methoden des Rechenganges oder fanden selbst solche. Doch wollen wir uns hier nicht bei Einzelheiten aufhalten. Wesentlich bedeutender ist die Vervollkommnung der Methoden zum Ausziehen von Wurzeln [127].

Das Ausziehen der Kubikwurzel nach einem Verfahren, das mit dem altchinesischen und somit mit dem Verfahren von Ruffini-Horner übereinstimmte, beschrieb erstmalig an-Nasawī. Abū-l-Wafā schrieb ein Werk über das Ausziehen von dritten, vierten und siebenten Wurzeln[1]), al-Bīrūnī eine Abhandlung über das Ausziehen dritter und höherer Wurzeln. Diese Werke sind bisher nicht wieder entdeckt worden. Verlorengegangen ist auch die Abhandlung al-Ḫayyāms „Die Schwierigkeiten der Arithmetik" (Muškilāt al-ḥisāb), in der ein Verfahren zur Bestimmung ganzzahliger Wurzeln aus ganzen Zahlen bei beliebigem natürlichen Wurzelexponenten beschrieben war. In seiner Algebra sagt al-Ḫayyām, daß er einen rechnerischen Beweis für das indische Verfahren zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln gegeben habe, das auf der Formel für das Quadrat und für die dritte Potenz eines Binoms beruhe, und das er auf beliebige ganze Exponenten ausgedehnt habe. Man könnte danach annehmen, daß al-Ḫayyām den binomischen Lehrsatz für ganzzahlige Exponenten gekannt hat [132, S. 22 und 119].

Die einzige uns bekannte Beschreibung für ein allgemeines Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln aus ganzen Zahlen in der arabischen Literatur ist im „Schlüssel der Arithmetik" al-Kāšīs enthalten. Im Kapitel „Über die Bestimmung der Basis einer Potenz" des ersten Buches dieses Werkes gibt er eine ausführliche Beschreibung der Regel und erläutert diese, ebenfalls ausführlich, am Beispiel $\sqrt[5]{44240899506197}$, wobei er sämtliche Berechnungen in einer äußerst übersichtlichen Tabelle anordnet. Später werden Beispiele zum Ausziehen von Wurzeln aus Sexagesimalzahlen angegeben, wobei auf eine Überführung in Dezimalzahlen verzichtet wird. Darunter befindet sich das Beispiel

$$\sqrt[6]{34^{IX}\,59^{VIII}\,1^{VII}\,7^{VI}\,14^{V}\,54^{IV}\,24^{III}\,3^{II}\,47^{I}\,37^{\circ}\,40'}.$$

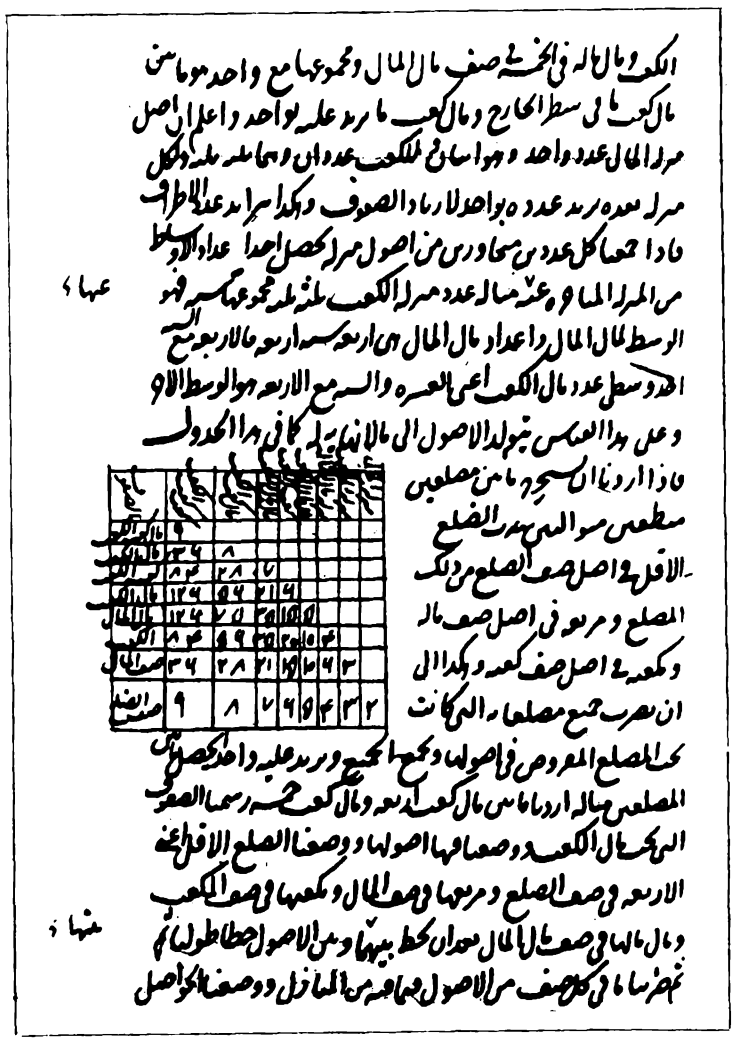
[1]) Dieses Werk hat den Titel „Das Buch über die Bestimmung der Kante des Kubus, des Quadrato-Quadrats und dessen, was aus diesen besteht" (Kitāb istiḫrāǧ dil' al-ka'b wa māl al-mal wa mā yutrikab minhumo). In der Auffassung über den Gegenstand dieses Buches schließen wir uns der Meinung Paul Luckeys [127] an. Franz Woepcke nahm an, daß in diesem Werk neben dem Ausziehen der dritten und vierten Wurzel auch die Lösung der Gleichung

$$x^4 + ax^3 = b$$

behandelt worden sei.

Die Methode al-Kāšīs zur Bestimmung des ganzzahligen Teils einer Wurzel ist die gleiche wie bei Ruffini und Horner, und al-Kāšī erhebt auch nicht den Anspruch, sie entdeckt zu haben. Möglicherweise haben er oder seine Vorgänger das Verfahren von den Chinesen übernommen.

Im „Schlüssel der Arithmetik" ist ferner die einzige uns aus jener Zeit bekannte Beschreibung der Regel für das Erheben eines Binoms in eine beliebige Potenz mit natürlichem Exponenten enthalten; auch diese gibt der Verfasser nicht als seine Entdeckung aus. Allerdings benutzt al-Kāšī diese Regel nicht zur Bestimmung des ganz-



~~Abb. 58. Tabelle der Binomialkoeffizienten.~~
Aus dem „Schlüssel der Arithmetik" al-Kāšīs (Leidener Handschrift, 1554).

zahligen Anteils einer Wurzel, sondern zur näherungsweisen Berechnung des gebrochenen Anteils einer irrationalen Wurzel aus einer ganzen Zahl.

Die Binomialkoeffizienten bezeichnet al-Kāšī als Elemente der Exponenten, wobei er diesen Terminus allerdings nicht auf die Koeffizienten des ersten und letzten Gliedes der Entwicklung bezieht, die ja bekanntlich gleich eins sind. Das Quadrat besitzt ein Element des Exponenten, die dritte Potenz deren zwei, und bei jedem weiteren Exponenten erhöht sich deren Anteil jeweils um eins. Ferner gibt al-Kāšī eine additive Regel zur sukzessiven Berechnung der Koeffizienten an, die unserer Formel $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$ entspricht, und stellt eine Tabelle der Binomialkoeffizienten (Abb. 58) bis zur neunten Potenz einschließlich auf:

9							
36	8						
84	28	7					
126	56	21	6				
126	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

Den binomischen Lehrsatz formuliert al-Kāšī für die fünfte Potenz. Da aber das Bildungsgesetz durch das „Pascalsche Dreieck" bekannt ist, gilt seine Formulierung ganz allgemein. Die Form der Regel weicht von der uns geläufigen ein wenig ab; al-Kāšī drückt die Differenz so aus:

$$(a+b)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n.$$

Gesondert gibt er die Regel für die Differenz

$$(a+1)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots + 1.$$

Das ist deshalb der Fall, weil $(a+1)^n - a^n$ Nenner des gebrochenen Anteils der Wurzel ist. Die Wurzel $\sqrt[n]{a^n + r}$ mit ganzzahligem a und $r < (a+1)^n - a^n$ drückt al-Kāšī angenähert in der Form

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

aus. Für die Quadratwurzel erhält er insbesondere die Näherung

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}.$$

Wie al-Kāšī auf seine Formel gekommen ist, gibt er nicht an. Die Korrektur zum ganzzahligen Anteil mag durch lineare Interpolation gewonnen worden sein. Es sei $y = \sqrt[n]{x}$; ist $x_1 = a^n$, so ist $y_1 = a$; ist hingegen $x_2 = (a+1)^n$, so ist $y_2 = a+1$. In diesem Falle gilt für $x = a^n + r$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \approx \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{d. h.} \quad y = \sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

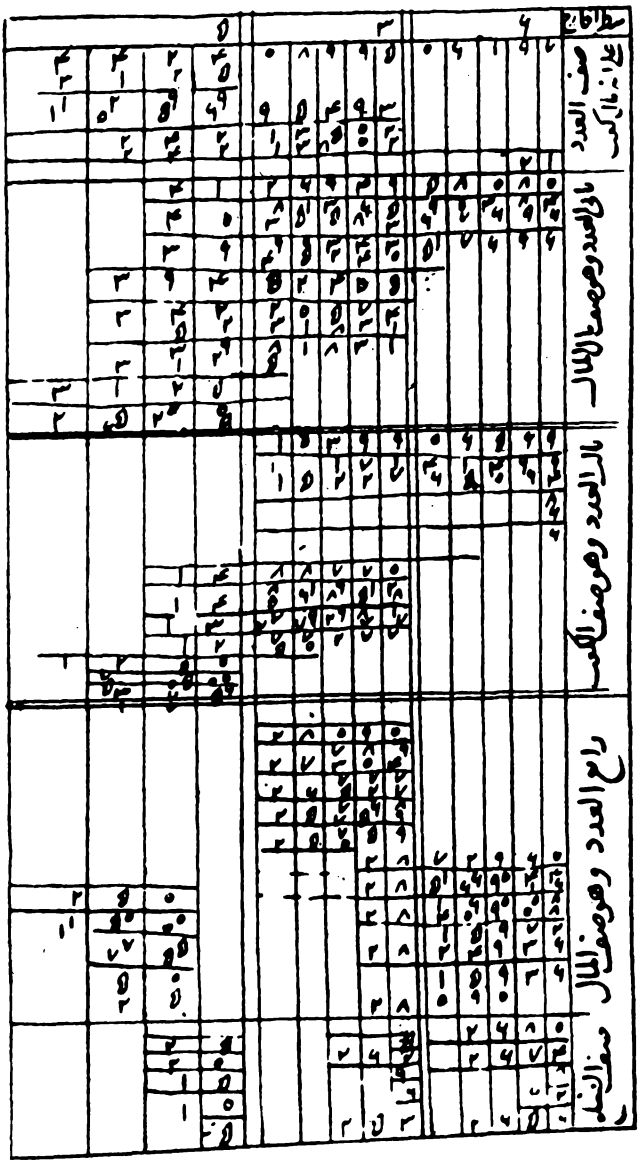


Abb. 59.
Ausziehen der fünften Wurzel aus der Zahl 44 240 899 506 197.
Aus dem „Schlüssel der Arithmetik“ al-Kāšīs
(Leidener Handschrift, 1554).

Es ist aber auch möglich, daß die Korrektur mit Hilfe der binomischen Formel gewonnen wurde. Ist

$$\sqrt[n]{a^n + r} = a + \varrho \quad (\varrho < 1),$$

so gilt

$$a^n + r = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\varrho + \binom{n}{2} a^{n-2}\varrho^2 + \cdots + \varrho^n$$

und

$$\varrho = \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2}\varrho + \cdots + \varrho^{n-1}} \approx \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots + 1} = \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

Es sei erwähnt, daß diese Bruchkorrektur nicht gesondert berechnet werden muß: Der Zähler und sämtliche Summanden des Nenners ergeben sich nebenher bei der Bestimmung des ganzzahligen Anteils der Wurzel. In dem von al-Kāšī betrachteten Beispiel (Abb. 59) gilt

$$\sqrt[5]{44\,240\,899\,506\,197} \approx 536\,\frac{21}{414\,237\,740\,281}.$$

Spezialfälle der allgemeinen Formel für die angenäherte Berechnung von Wurzeln waren in den islamischen Ländern bereits lange vor al-Kāšī bekannt. An-Nasawī wandte z. B. die Regeln

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}, \quad \sqrt[3]{a^3 + r} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + a}$$

an. Mitunter wurden, wie bereits erwähnt (vgl. S. 116 und 117), die gewonnenen Näherungswerte mit Hilfe eines Iterationsverfahrens verbessert, das bereits den Babyloniern bekannt war. So wandte der westarabische Gelehrte Abū Zakāriyā (oder Abū-Bakr) Muḥammad ibn 'Abdallah al-Ḥassār Ende des 12. Jahrhunderts die folgende Näherungsformel an:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^3}{\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

In Europa wurde das Ausziehen von Wurzeln auf der Basis des binomischen Lehrsatzes für Exponenten bis zum 8. Grade einschließlich von Petrus Apianus im Jahre 1527 und in allgemeinerer Form von Michael Stifel im Jahre 1544 beschrieben, der auch eine Tabelle der Binomialkoeffizienten bis zum 17. Grade einschließlich aufgestellt hat.

Für eine genauere Berechnung einer irrationalen Wurzel empfiehlt al-Kāšī, den Radikanden mit einer geeigneten Potenz von 10 zu multiplizieren:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{nk} N}}{10^k}.$$

Beim Ausziehen einer Wurzel aus einem Bruch wird, wenn die Wurzel aus dem Nenner irrational ist, die Regel

$$\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{N^{n-1} M}}{N}$$

angewandt. Bezeichnend für das ständige Streben al-Kāšīs nach möglichst hoher Genauigkeit der Näherungswerte sind die Beispiele für das Ausziehen von Wurzeln aus gemischten Zahlen. Die Quadratwurzel aus $7\frac{1}{6}$ wird zunächst als

$$\sqrt{4+3\tfrac{1}{6}} \approx 2\tfrac{19}{30}$$

berechnet. Das Resultat wird besser, wenn man vorher den Radikanden als unechten Bruch darstellt:

$$\sqrt{\frac{43}{6}} = \frac{\sqrt{258}}{6} = \frac{\sqrt{256+2}}{6} \approx 2\tfrac{67}{99}.$$

In der Tat, der Fehler des ersten Wertes liegt bei 0,04, der des zweiten bei 0,004.

Mit großer Genauigkeit berechnet der Verfasser die Kanten der regulären Polyeder. Die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}$ werden bis auf Quinten genau, d. h. bis auf 60^{-5} genau, berechnet, was der Dezimalzahl $1{,}3 \cdot 10^{-9}$ entspricht. Wir finden hier auch die Näherungswerte

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)} \approx 1^\circ\,10'\,32''\,3'''\,13''''\,55'''''$$

und

$$\frac{1}{6}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right) \approx 0^\circ\,21'\,24''\,33'''\,34''''\,17'''''.$$

Jetzt wissen wir, daß etwa anderthalb Jahrhunderte früher als im „Schlüssel der Arithmetik" al-Kāšīs wurden das gleiche allgemeine Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln und die gleiche Regel zum Erheben eines Binoms in eine beliebige natürliche Potenz in dem 1265 verfaßten „Sammelband zur Arithmetik mit Hilfe von Brett und Staub" (ǧami'al-hisāb bi-t-taht wa-t-tu rab) des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī beschrieben [127a]. Der „Sammelband" umfaßt drei Kapitel, und zwar über ganze Zahlen, über gemeine Brüche und über Sexagesimalbrüche. Das Ausziehen der Wurzeln und die Entwicklung der Potenzen eines Binoms sind im Abschnitt XI des Kapitels I beschrieben, der den Titel „Über die Bestimmung anderer Basen von Potenzen" trägt (das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln ist vorher gesondert beschrieben). Die ausführliche Beschreibung der Regel für das Radizieren illustriert aṭ-Ṭūsī an dem Beispiel

$$\sqrt[6]{244\,140\,626} = 25\frac{1}{26^6-25^6} = 25\frac{1}{64\,775\,151}.$$

Die „Tabelle der Elemente der Exponenten" erstreckt sich bis zur zwölften Potenz einschließlich. Ebenso wie bei al-Kāšī findet man die Regel für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$. Im Anschluß an diese Tabelle werden die allgemeinen Regeln zur Bildung der Differenzen $(a+1)^n - a^n$ und $(a+b)^n - a^n$ formuliert und an den Beispielen $7^4 - 6^4$ und $9^4 - 6^4$ illustriert. Aṭ-Ṭūsī erhebt keinerlei Ansprüche darauf, diese Regeln sämtlich selbst entdeckt zu haben. Da er in einigen anderen Fällen die Ideen al-Ḫayyāms (vgl. S. 255 und S. 285) weiterentwickelt hat, könnte man annehmen, daß er sich hier auf dessen Werk „Schwierigkeiten der Arith-

metik" (S. 242) gestützt hat. Es ist allerdings nicht ausgeschlossen, daß er über diese Methoden durch die Vermittlung der in Maraga tätigen chinesischen Astronomen Kenntnis erhalten hat (vgl. S. 304).

Irrationalzahlen und Proportionenlehre. Was die Technik und die Genauigkeit der Berechnungen betrifft, so hat al-Kāšī seine Vorgänger zwar weit übertroffen, jedoch hat er hierbei nur eine jahrhundertelange Entwicklung fortgesetzt. Trigonometrische und planimetrische Berechnungen, insbesondere die Aufstellung immer genauerer astronomischer Tabellen führten dazu, daß die Mathematiker der islamischen Länder ständig mit Irrationalzahlen rechnen mußten. Die geometrischen Anwendungen der Algebra und deren rasche Entwicklung führten ebenfalls dazu, daß die Irrationalitäten und hier vor allem die Quadratwurzeln aus nichtquadratischen ganzen und gebrochenen Zahlen notgedrungen und in immer größerem Umfange zum Untersuchungsobjekt wurden. Treten die Irrationalitäten bei al-Ḫuwarizmī nur selten auf und sind sie dort noch völlig elementar, so operiert bereits Abū-Kāmil regelmäßig und äußerst virtuos mit wesentlich komplizierteren quadratischen Irrationalitäten; das gleiche gilt auch für al-Karaǧī.

Unter diesen Bedingungen erfolgte naturgemäß eine Arithmetisierung der antiken Lehre von den quadratischen Irrationalitäten, und zwar vor allem des Buches X der „Elemente" des Eukleides, dessen einzelne Sätze unmittelbar zur Umformung und Vereinfachung von Radikalen in den Ausdrücken für die Wurzeln quadratischer Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten verwendet wurden.

Die „Elemente" dienten in den islamischen Ländern als das wichtigste Lehrwerk und als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen. Vom Ende des 8. Jahrhunderts an bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts kann man nahezu fünfzig Mathematiker nennen, die sich mit der Übersetzung, Bearbeitung und Kommentierung dieses Werkes beschäftigt haben.

Eine wesentliche Rolle für das große Interesse, das den „Elementen" entgegengebracht wurde, hat der bedeutendste Philosoph jener Zeit, Abū Naṣr Muḥammad ibn Muḥammad al-Fārābī (870? bis 950 oder 951), gespielt. Er war aus einem kleinen Ort in der Nähe der Stadt Fārāb an der Mündung des Flusses Arys in den Syr-Darja gebürtig und entstammte dem mittelasiatischen türkischen Kriegsadel. Er hat in Baghdād und in Aleppo gewirkt. Die Anschauungen al-Fārābīs stellen eine Synthese moslemitischer Ideen mit dem Platonismus und insbesondere dem Aristotelismus dar, den er erfolgreich im Orient verbreitete. Das Interesse des Philosophen an den „Elementen" erklärt sich aus der Bedeutung, die in diesen die Analyse der Grundbegriffe der Geometrie und Arithmetik spielt, also der Begriffe, die in den Werken des Aristoteles von großer Bedeutung waren. Die von al-Fārābī zusammengestellten „Kommentare zu den Schwierigkeiten in den Einführungen zu den Büchern I und V des Eukleides" (Šarḥ al-mustaglaq min muṣādara al-maqāla al-ūlā wa-l-ḫāmisa min Uqlīdis) sind uns in althebräischer Übersetzung überliefert. Über die Definitionen von Punkt, Linie und Fläche schrieb al-Fārābī: „Das Lernen ist mit einem greifbaren Körper zu beginnen, und dann ist mit der Betrachtung eines Körpers zu beginnen, der von den mit ihm verbundenen Sinneswahrnehmungen losgelöst ist; dann gehe

man zur Fläche, dann zur Linie und schließlich zum Punkt über" [128, S. 96, russisch]. Hier lehnt sich al-Fārābī an Aristoteles' Auffassung an, daß die mathematischen Begriffe durch Abstraktion von den Eigenschaften der realen Dinge geschaffen werden. Die mathematische Bedeutung der Kommentare al-Fārābīs ist übrigens gering; viel wichtiger ist deren fördernde Auswirkung als der konkrete Inhalt gewesen. Al-Fārābī lenkte ebenso wie andere Philosophen die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Werke des Aristoteles, was in Kürze weittragende Bedeutung für spezielle mathematische Untersuchungen, z. B. für das Schaffen al-Ḫayyāms, erlangen sollte.

Dauerndes Interesse beanspruchten bei den Mathematikern insbesondere die Kernprobleme der „Elemente": die Lehre von den Parallelen, die Verhältnislehre und die Theorie der quadratischen Irrationalitäten. Bereits unter al-Ma'mūn wurden Kommentare zum Buch V geschrieben; diese stammten von al-'Abbās ibn Sa'īd al-Ǧauharī und dem Leiter der Sternwarte, Abū-t-Taǧīb Sanad ibn 'Alī. Thābit ibn Qurra, der eine neue Übersetzung der „Elemente" vorgenommen hatte, schrieb dazu Erläuterungen, insbesondere zum Buch V, und einen besonderen Kommentar zur Lehre von den Parallelen. Von dem in Baghdād tätigen und aus der iranischen Stadt Mahan stammenden Abū 'Abdallah Muḥammad ibn 'Isā al-Māhānī (gest. etwa 880) wurden Kommentare zu den Büchern I, V, X und XIII geschrieben. Nach al-Māhānī beschäftigten sich mit der Deutung der „Elemente" der aus Baghdād stammende Mathematiker und Astronom Abū-l-'Abbās al-Fadl ibn Ḥātim an-Nairīzī, der auch unter dem latinisierten Namen Anaritius (gest. etwa 922) bekannt ist, ferner Muḥammad ibn 'Abd al-Bāqī al-Baghdādī (gest. 1100) u. a.

Die Theorie der quadratischen (und biquadratischen) Irrationalitäten wird im Buch X der „Elemente" aufgebaut, indem man diese Irrationalitäten durch geometrische Gebilde, d.h. Strecken und Rechtecke, darstellt. Es wird dort eine Klassifizierung gegeben, und es werden dort Eigenschaften von Größen hergeleitet, die man als irrationale Wurzeln allgemeiner quadratischer und biquadratischer Gleichungen auffassen kann. Die genannte Klassifizierung dient im Buch XIII zur Bestimmung und Konstruktion der Kanten der regulären Polyeder. Im Buch X werden u. a. so wichtige Umformungen hergeleitet wie

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}, \tag{2}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \tag{3}$$

Die arabischen Kommentatoren deckten den arithmetischen Gehalt dieser Umformungen auf und erläuterten sie an Zahlenbeispielen. Analog verfuhr auch Bhâskara, jedoch in wesentlich geringerem Umfang. Nachstehend seien einige Beispiele al-Baghdādīs angegeben [129]:

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}},$$

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1,$$

$$\sqrt[4]{12} \pm \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{27} \pm \sqrt{24}} = \sqrt{51 \pm \sqrt{2592}}.$$

Die letzte Umformung erhält man leicht, wenn man die linke Seite in der Form $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2} \pm \sqrt{1}) = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\sqrt{9} \pm \sqrt{8}}$ darstellt:

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{4\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.$$

Bei al-Karaǧī finden wir auch Umformungen verschiedener kubischer Radikale, z. B. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{16}$, $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$.

Auf diese Weise wird in der Wissenschaft des Nahen und Mittleren Ostens der Unterschied zwischen den inkommensurablen geometrischen Größen und den numerischen Irrationalitäten verwischt. Die Irrationalzahlen werden zu einem vollwertigen Gegenstand der Arithmetik und Algebra. Die Äußerung eines derartigen Standpunktes findet man z. B. bei al-Bīrūnī, auf den die indischen Werke einen gewissen Einfluß ausgeübt haben. Im trigonometrischen Buch seines „Kanon des Mas'ūd" schreibt al-Bīrūnī: „Umfang und Durchmesser eines Kreises stehen in einem Verhältnis; es ist dies das Verhältnis der Maßzahl des Kreisumfanges zur Maßzahl des Durchmessers, und dieses Verhältnis ist irrational" [166, Vol. I, S. 303]. Bezeichneten viele Mathematiker nach dem Vorbild der Griechen und Alexandriner das Produkt zweier Strecken als „Rechteckfläche", so sprach al-Bīrūnī in einem solchen Falle stets vom „Produkt der Linien".

Die Mathematiker in den islamischen Ländern begnügten sich nicht wie die Inder damit, die Irrationalzahlen nur zu benutzen, sondern machten diese zum Gegenstand theoretischer Untersuchungen. Dabei verwendeten sie die antike Verhältnislehre, analysierten und kritisierten diese und entwickelten dann eine eigene Theorie, wobei sie den Zahlbegriff auf die Menge der positiven reellen Zahlen ausdehnten.

Eine kritische Analyse der Verhältnislehre von Eudoxos und Eukleides wurde bereits von al-Māhānī gegeben; seinem Beispiel folgten viele hervorragende Gelehrte [130]. Hierbei leugnete niemand die Richtigkeit der klassischen Definition für die Gleichheit zweier Verhältnisse. Die Mehrzahl der Mathematiker nahm jedoch an, daß diese Definition das Wesen der Proportion nicht aufdeckt, wir würden sagen, die messende Funktion des Verhältnisses nicht ausdrückt. Während in der Definition der Proportionalität kommensurabler Größen der Prozeß der Messung einer Größe mit Hilfe einer anderen die Hauptrolle spielt, also der euklidische Algorithmus, werden in der allgemeinen Definition des Buches V der „Elemente" die gleichen Vielfachen der Glieder der Proportionen unmittelbar miteinander verglichen.[1]) Bereits in der Definition der Gleichheit der Verhältnisse selbst äußerte sich bei den Mathematikern der islamischen Länder das Bestreben, den Prozeß der Messung in den Vordergrund zu rücken und damit einen engen Zusammenhang zwischen den inkommensurablen und kommensurablen Verhältnissen herzustellen, wobei die letzteren zur Approximation der ersteren dienten. Allmählich wird die klassische Definition

[1]) Nach dieser Definition stehen die Größenpaare A, B und C, D in demselben Verhältnis, wenn für beliebige natürliche Zahlen m, n bei Gültigkeit einer der Bedingungen $nA \gtrless mB$ auch die entsprechende Bedingung $nC \gtrless mD$ erfüllt ist [33a, I, Buch V, Def. 5].

der Proportion durch eine neue ersetzt, die im wesentlichen die voreudoxische, sog. antiphairetische Definition reproduzierte, die auf dem euklidischen Algorithmus beruht; diese war der Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse durch die Gleichheit der entsprechenden Partialquotienten bei Entwicklung dieser Verhältnisse in Kettenbrüche äquivalent.[1]) Eine solche Definition findet sich auch bei al-Māhānī, bei dem wir allerdings noch keine logische Analyse des Zusammenhanges zwischen dieser Definition und der Definition im Buch V der „Elemente" des Eukleides finden. Verschiedene Autoren schlossen sich al-Māhānī an: an-Nairīzī, ibn al-Haitham, der erstmalig den Zusammenhang zwischen den beiden genannten Definitionen untersuchte, u.a. Seit Thābit ibn Qurra wurde der Lehre von den zusammengesetzten Verhältnissen eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet, auf der wichtige Abschnitte der Geometrie, Trigonometrie und Arithmetik (Dreisatzregeln) beruhen.

Eine ausgebaute Theorie der Verhältnisse finden wir in den „Kommentaren zu den Schwierigkeiten in den Einführungen des Buches des Eukleides" (Risāla fī šarḥ mā aškāl min muṣādarat kitāb Uqlīdis), die im Jahre 1077 von Umar al-Ḫayyām verfaßt wurden [131, 132]. Das erste Buch der „Kommentare" ist dem Parallelenproblem gewidmet, und wir wollen es daher später besprechen. Die beiden nächsten Bücher behandeln die Verhältnislehre.

Die Definition der Proportion im Buch V der „Elemente" hält al-Ḫayyām ebenfalls für richtig, jedoch nicht für „wahr", d. h. das Wesen der Sache nicht ganz treffend, da der wahre Sinn des Verhältnisses im Prozeß der Messung einer Größe mit Hilfe einer anderen bestehe.

Für Zahlenverhältnisse akzeptiert al-Ḫayyām die euklidische Definition der Proportion [vgl. 33*a*, Buch VII, Def. 21], und im Falle inkommensurabler Größen definiert er die Proportion sozusagen „antiphairetisch".

„Wir tragen auf der zweiten alle Vielfachen der ersten so ab, daß der Rest kleiner ist als die erste; auf der vierten tragen wir sämtliche Vielfachen der dritten so ab, daß der Rest kleiner ist als die dritte; die Vielfachheit der ersten in der zweiten sei gleich der Vielfachheit der dritten in der vierten. Sodann tragen wir auf der ersten sämtliche Vielfachen des Restes der zweiten so ab, daß der Rest kleiner wird als der Rest der zweiten, und in der gleichen Weise tragen wir auf der dritten sämtliche Vielfachen des Restes der vierten so ab, daß der Rest kleiner wird als der Rest der vierten, und es sei die Vielfachheit des Restes der zweiten gleich der Vielfachheit des Restes der vierten. In der gleichen Weise tragen wir auf dem Rest der zweiten sämtliche Vielfachen des Restes der ersten und auf dem Rest der vierten sämtliche Vielfachen des Restes der dritten ab, und es seien ihre Vielfachheiten gleich. In dieser Weise werden wir nacheinander die Vielfachen der Reste aufeinander so abtragen, wie wir das erklärt hatten, und es sei die Anzahl der Reste der ersten und zweiten gleich der Anzahl der entsprechenden Reste der dritten und vierten und so bis ins Unendliche. In diesem Falle ist das Verhältnis der ersten zur zweiten notwendig gleich dem Verhältnis der dritten zur vierten. Das ist die wahre Proportionalität nach geometrischer Art" [132, S. 88 bis 89, russisch.] Mit anderen Worten: Das Verhältnis $\frac{A}{B}$ möge

[1]) Über die antiphairetische Theorie der alten Griechen siehe [133, I].

sich in einen Kettenbruch mit den Partialquotienten $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ und das Verhältnis $\frac{C}{D}$ in einen Kettenbruch mit den Partialquotienten $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, \ldots$ entwickeln lassen. Nach Definition sind diese Verhältnisse gleich, wenn $q'_n = q_n$ für alle n ist.

Al-Ḥayyām erweitert auch die euklidische Definition des größeren Verhältnisses [33*a*, Buch V, Def. 7]. Nach al-Ḥayyām gilt $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ dann, wenn bei Gültigkeit von $q'_k = q_k$ mit $k < m$ die Ungleichung $q_m < q'_m$ für ungerades m und die Ungleichung $q_m > q'_m$ für gerades m erfüllt ist. Bemerkenswert ist, daß al-Ḥayyām in die letzte Definition auch den Fall mit einschließt, daß irgendein Größenpaar kommensurabel ist (d. h., daß bei einem gewissen Schritt kein Rest auftritt); damit gibt er ein Kriterium zum Vergleich einer irrationalen und einer rationalen Zahl.[1])

Die Definition der Gleichheit von Verhältnissen, wie sie al-Ḥayyām gegeben hat, unterscheidet sich nicht von der einiger seiner Vorgänger. Die Definition der Ungleichheit hingegen stammt anscheinend von al-Ḥayyām selbst. Eine zentrale Stellung nimmt bei ihm das Bemühen ein, eine Äquivalenz beider Theorien, d. h. seiner und der eudoxisch-euklidischen, herzustellen. In einer ganzen Reihe von Sätzen zeigt al-Ḥayyām, daß Verhältnisse, die gleich oder ungleich im Sinne des Eukleides sind, auch in seinem Sinne gleich oder ungleich sind und umgekehrt. Seine Beweise beruhen auf dem Satz über die Existenz einer vierten Proportionalen zu drei gegebenen Größen A, B, C.

Der eben genannte Satz fehlt im Buch V der „Elemente", obwohl Eukleides ihn beim Beweis einiger Sätze implizite benutzt. Im Satz 12 des Buches VI beweist Eukleides diesen Satz mit Hilfe der Parallelentheorie. Für den Spezialfall von Strecken jedoch benutzt er ihn im Buch XII wieder implizite bei der Berechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke. Al-Ḥayyām betont die Wichtigkeit dieses Satzes und versucht, ihn aus dem Stetigkeitsprinzip herzuleiten. In der europäischen Literatur erscheint dieser Satz erstmalig in Form eines Axioms in der kommentierten lateinischen Übersetzung der „Elemente" des Johannes Campanus von Novara (Mitte des 13. Jahrhunderts), der sich auf die lateinische Übersetzung des Adelhard of Bath aus dem Arabischen und andere arabische Texte stützte [11*a*, S. 336].

Das Stetigkeitsprinzip hat al-Ḥayyām, wie er selbst sagt, bei Aristoteles entlehnt. Es besteht in der Behauptung, daß man Größen bis ins Unendliche teilen kann, d. h., daß sie nicht aus Indivisibeln bestehen. Der Beweis des Satzes über die Existenz einer vierten Proportionalen zu gegebenen Größen A, B, C verläuft wie folgt. Man kann durch Verdoppeln eine so große Größe N erhalten, daß $\frac{C}{N} < \frac{A}{B}$ gilt; durch Halbieren kann man eine so kleine Größe M gewinnen, daß $\frac{C}{M} > \frac{A}{B}$ gilt. Da die Größen unbegrenzt teilbar sind, muß zwischen M und N eine Zwischengröße D derart existieren, daß $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ ist. Selbstverständlich kann man die Behauptung, daß eine kontinuierliche Größe beim Übergang vom kleineren Wert $\frac{C}{N}$ zum größeren Wert $\frac{C}{M}$ notwendig jeden Zwischenwert annimmt, mit Hilfe des Stetigkeitsprinzips al-Ḥayyāms nicht

[1]) In moderner Formulierung der Definition al-Ḥayyāms können wir in diesem Falle die entsprechenden q_m oder q'_m gleich $+\infty$ setzen.

einwandfrei beweisen. Stetig im Sinne der Definition al-Ḥayyāms wäre z. B. im Intervall (0,1) die Menge der rationalen Punkte; das, wofür er stetig sagt, nennen wir heute „überall dicht". Das große Verdienst al-Ḥayyāms besteht aber allein in der Idee, die Eigenschaften der kontinuierlichen Größen zur Begründung des Existenzsatzes für die vierte Proportionale heranzuziehen.[1])

Nachdem al-Ḥayyām die Äquivalenz beider Theorien bewiesen hatte, konnte er die im Buch V der „Elemente" bewiesenen Eigenschaften der Proportionen verwenden. In der antiken Verhältnislehre war aber eine sehr empfindliche Lücke vorhanden. In vielen Texten der „Elemente" (Buch VI) tritt eine Definition (die fünfte) auf, die wie folgt lautet: „Das Verhältnis heißt aus Verhältnissen zusammengesetzt, wenn die Abmessungen der Verhältnisse miteinander vervielfältigt ein solches bilden" [33*a*, II. Teil, S 37].[2]) Diese Definition ist zweifellos eine spätere Ergänzung, da nicht erklärt wird, was man unter „Abmessung eines Verhältnisses" zu verstehen hat, und nirgends weiter bei Eukleides die Rede von der Multiplikation solcher Abmessungen ist. Trotzdem wird die Zusammensetzung von Verhältnissen in den „Elementen" in der Tat angewandt, z. B. im 23. Satz des Buches VI, der besagt, daß die Flächeninhalte ähnlicher Parallelogramme im zusammengesetzten Verhältnis ihrer Seiten stehen. Hier formuliert Eukleides nebenbei die Aussage, daß das Verhältnis $\frac{K}{M}$ aus den Verhältnissen $\frac{K}{L}$ und $\frac{L}{M}$ gebildet wird, während er bei der Zusammensetzung von Verhältnissen $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ ohne gemeinsames Glied auf den Satz über die vierte proportionale Strecke zurückgreift [11*a*, S. 402 bis 406; 96*b*, S. 449 bis 453].

Die Zusammensetzung, d. h. nach unserem Sprachgebrauch die Multiplikation von Verhältnissen, benötigte man bei trigonometrischen Berechnungen, insbesondere im Satz des Menelaos über das vollständige Vierseit (vgl. unten S. 302). Daher haben spätere Herausgeber der „Elemente", vielleicht Theon von Alexandria (etwa 370), in das Buch VI die dem Geist der „Elemente" fremde Definition der „Abmessung" eines Verhältnisses aufgenommen. Die „Abmessung" eines Verhältnisses, d. h. eigentlich ihr Zahlenwert, war in der spätgriechischen Mathematik das Vorbild für den Begriff der reellen Zahl.

Al-Ḥayyām hebt die Wichtigkeit der Lehre von der Zusammensetzung der Verhältnisse in der Geometrie und Astronomie hervor und gibt deren Begründung. Mit Hilfe der vorhergehenden Sätze beweist er zwei Eigenschaften der zusammengesetzten Verhältnisse:

---

[1]) Die Eigenschaft der kontinuierlichen Größen, zwischen zwei gegebenen Werten sämtliche Zwischenwerte zu durchlaufen, war bereits den Griechen bekannt; sie wurde von ihnen mitunter ausgesprochen (z. B. von Aristoteles) und angewandt. Man hat jedoch nicht versucht, sie zu beweisen, und hat sie auch nicht in mathematischen Formulierungen verwendet [133, I und II].

[2]) Im Buch V werden das Doppelte, das Dreifache und weitere vielfache Verhältnisse definiert, die aus proportionalen Größen gebildet werden. Ist $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$, so ist $\frac{A}{C}$ das doppelte Verhältnis $\frac{A}{B}$ (wir würden dafür Quadrat sagen) usw.

1. Für drei gleichartige Größen A, B, C wird das Verhältnis $\frac{A}{C}$ aus den Verhältnissen $\frac{A}{B}$ und $\frac{B}{C}$ zusammengesetzt.

2. Für vier gleichartige Größen A, B, C, D ist das Verhältnis $\frac{A}{D}$ aus den Verhältnissen $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ und $\frac{C}{D}$ zusammengesetzt. Das Ganze läßt sich leicht, fügt er hinzu, auf eine größere Anzahl von Größen übertragen.

Die Ausführungen al-Ḥayyāms bei der Herleitung dieser Sätze sind von besonderem Interesse. Die Herleitung selbst ist nicht einwandfrei, doch wurde dort eine neue Auffassung von der Zahl geäußert.

Nach dem Vorbild der Antike versteht al-Ḥayyām unter einer Zahl im eigentlichen Sinne des Wortes eine Zusammenfassung indivisibler Einheiten. Gleichzeitig wirft er die Frage nach dem Zusammenhang der Begriffe Verhältnis und Zahl auf. Dieses Problem ist nach den Worten al-Ḥayyāms philosophischer Natur und wird deshalb von den Geometern nicht untersucht: „Kann ein Verhältnis von Größen seinem Wesen nach eine Zahl sein oder wird es nur von einer Zahl begleitet oder ist das Verhältnis mit einer Zahl nicht seiner Natur nach, sondern mit Hilfe von irgendetwas Äußerem verknüpft, oder ist das Verhältnis mit einer Zahl seiner Natur nach verknüpft und bedarf daher keines Äußeren?“ [132, S. 102, russisch]. Indem al-Ḥayyām die „philosophische“ Seite dieser Angelegenheit beiseite läßt, hält er es für notwendig, in der Mathematik eine teilbare Einheit und eine neue Kategorie von Zahlen einzuführen, die beliebigen Verhältnissen von Größen entsprechen. Beim Beweis der ersten Eigenschaft der zusammengesetzten Verhältnisse wählt er eine gewisse Einheit und setzt deren Verhältnis zu einer Hilfsgröße G gleich dem Verhältnis von A zu B. Diese Größe G, sagt er, wollen wir „nicht als Linie, Fläche, Körper oder Zeit auffassen, sondern wir wollen sie auffassen als eine durch den Verstand von all dem losgelöste und zu den Zahlen gehörende Größe, jedoch nicht zu den absoluten und echten Zahlen, da das Verhältnis von A zu B häufig auch nicht zahlenmäßig sein kann, d. h., daß man keine zwei Zahlen finden kann, deren Verhältnis diesem Verhältnis gleich wäre“ [132, S. 105, russisch]. So, erläutert al-Ḥayyām, verfahren die Rechner und Feldvermesser, die von der Hälfte oder von einem anderen Teil einer als unteilbar vorausgesetzten Einheit oder von einer Wurzel aus fünf oder zehn usw. sprechen. Die gewählte Einheit ist ebenfalls teilbar, und „die Größe G, die eine willkürliche Größe ist, wird als Zahl in dem angegebenen Sinne angesehen“ [132, S. 106, russisch].

So stellt al-Ḥayyām seine Auffassung von der Zahl der antiken, insbesondere der aristotelischen gegenüber. Beliebige Verhältnisse werden jetzt durch Zahlen ausgedrückt, und zwar entweder durch Zahlen im eigentlichen Sinne oder aber durch „uneigentliche Elemente“ des Zahlengebietes, d. h. durch die irrationalen Zahlen. Die Zusammensetzung von Verhältnissen wird nunmehr auf die Multiplikation von Zahlen zurückgeführt, und die Verhältnisse übernehmen jetzt in vollem Maße die Funktion der Messung beliebiger Größen.

Die dargelegte Auffassung war in der arabischen Wissenschaft nicht die einzige. Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Yusuf al-Ġayyānī, ein Zeitgenosse al-Ḥayyāms, der am Ende des 11. Jahrhunderts in Sevilla gelebt hat, vertrat die euklidische Theorie [130].

Die Auffassungen der Kritiker der antiken Theorie entsprachen jedoch besser den Bedürfnissen der rechnenden Mathematik. Etwa 150 Jahre später — Zwischenglieder sind nahezu unbekannt (vgl. S. 268) — finden die Auffassungen al-Ḥayyāms eine Weiterentwicklung in der „Darlegung des Eukleides" und in der trigonometrischen „Abhandlung über das vollständige Vierseit" des Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. In seinem Lehrbuch der Trigonometrie behandelt Naṣīr ad-Dīn die Theorie der zusammengesetzten Verhältnisse noch ausführlicher, indem er z. B. deren Kommutativität bei der Multiplikation beweist. Jedes Verhältnis hat nach Naṣīr ad-Dīn seine Abmessung.

Die Zusammensetzung der Verhältnisse wird in den Sätzen durch die Multiplikation ihrer Abmessungen ersetzt. Mit noch größerer Bestimmtheit wird der Gedanke durchgeführt, daß jedes Verhältnis „eine Zahl genannt werden kann, die durch die Eins gemessen wird, ebenso wie das vorhergehende Glied eines Verhältnisses durch das nachfolgende gemessen wird" [169, S. 22, russisch]. Im Endergebnis werden alle Verhältnisse trigonometrischer Linien zu Zahlen, die sich durch rationale Brüche angenähert ausdrücken lassen.

Die Chinesen und Inder haben die negativen Zahlen eingeführt, die Mathematiker der Länder des Nahen und Mittleren Orients gelangten zum Begriff der reellen Zahl, der sowohl die rationalen als auch die irrationalen positiven Zahlen umfaßt. Diese hervorragende theoretische Errungenschaft wurde in Europa an der Grenze vom 16. zum 17. Jahrhundert bekannt, und zwar durch die Herausgabe einer Fassung der „Darlegung des Eukleides" des Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī in Rom (vgl. S. 288).

Im 17. Jahrhundert entwickelte Gregorius a Sancto Vincentic eine Theorie der quantitativen „Benennungen der Verhältnisse", die den „Abmessungen der Verhältnisse" seiner Vorgänger entsprachen.

Andreas Tacquet kritisierte und „korrigierte" den Eukleides von einem Standpunkt, der dem des al-Ḥayyām nahesteht. René Descartes verknüpfte die antike allgemeine Verhältnislehre mit der Arithmetik, und Isaac Newton definierte schließlich die Zahl nicht als eine Zusammenfassung von Einheiten, sondern als abstraktes Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe der gleichen Art, die als Einheit gewählt wurde.

Selbstverständlich stützte sich die Entwicklung des Zahlbegriffes in Europa vor allem auf die stürmische Entwicklung der numerischen Mathematik und ging hier eigene Wege.

Bereits am Ende des 16. Jahrhunderts trat Simon Stevin entschieden dafür ein, die Irrationalitäten als Zahlen anzuerkennen; er lehnte es ab, sie als irrational oder unausdrückbar zu bezeichnen, da sie in Wirklichkeit nur inkommensurabel wären. Es wäre interessant, zu klären, ob zwischen der Verhältnislehre im 17. Jahrhundert und den Gedanken der arabischen mathematischen Literatur direkte Zusammenhänge bestanden haben.

Für die Erweiterung des Zahlbegriffes zur reellen Zahl war die Anerkennung der negativen Zahlen von großer Bedeutung. Die Mathematiker der Länder des Nahen und Mittleren Orients übernahmen diese Zahlenform von den Indern nicht; erst kürzlich wurde ein Einzelfall der Verwendung negativer Zahlen [134] im Buch des Abū-l-Wafā für die Schreiber entdeckt. Abū-l-Wafā formuliert die Regel für die abgekürzte

Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen mit gleichen Zehnern

$$(10a + b)(10a + c) = [10a + b - \{10(a + 1) - (10a + c)\}] \cdot 10(a + 1) + [10(a + 1) - (10a + b)] \cdot [10(a + 1) - (10a + c)]$$

und überträgt sie unmittelbar im Anschluß daran auf die Multiplikation einstelliger Zahlen. Im Beispiel mit $a = 0$, $b = 3$ und $c = 5$ sagt er: „... Wollen wir drei mit fünf malnehmen, so ziehen wir den Überschuß von zehn über der einen dieser Zahlen von der anderen ab und erhalten die Schuld zwei. Nun nehmen wir jede Einheit für zehn und multiplizieren dann den Überschuß von zehn über fünf mit dem Überschuß von zehn über drei, und wir erhalten fünfunddreißig. Wenn wir von ihnen die Schuld, d. h. zwanzig, abziehen, so erhalten wir als Rest fünfzehn, und dieses ist das Ergebnis der Multiplikation von fünf mit drei" [134, S. 596, russisch][1]).

Hier ist, ebenso wie in den anderen uns bekannten Fällen, die Einführung der negativen Zahlen aus dem Bestreben heraus erfolgt, die Allgemeingültigkeit einer Rechenregel aufrechtzuerhalten, die zunächst für eine engere Klasse von Aufgaben gewonnen worden war. Andere Beispiele für die Anwendung negativer Zahlen sind in der arabischen Literatur nicht bekannt. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß in einer lateinischen Handschrift, bei der es sich um eine Übersetzung oder Bearbeitung eines arabischen Lehrwerkes handelt, das der Algebra al-Ḫuwarizmīs nahesteht, subtraktive Größen durch daruntergesetzte Punkte bezeichnet werden [21, Bd. I, S. 803 bis 804]. Sowohl diese Bezeichnungsweise als auch die bei Abū-l-Wafā angetroffene Subtraktion einer größeren Zahl von einer kleineren könnten auf das Studium indischer Literatur zurückzuführen sein.

Geometrische Probleme und kubische Gleichungen. Wir wenden uns nun der Algebra zu. In den Werken des al-Ḫuwarizmī, des Abū Kāmil und des al-Karaǧī ging die Gleichungslehre nicht über den Rahmen linearer und quadratischer Gleichungen hinaus. Bestenfalls wurden noch Gleichungen behandelt, die in irgendeiner Potenz der Unbekannten quadratisch waren. Doch bereits im 9. Jahrhundert begannen die Baghdāder Mathematiker, kubische Gleichungen zu untersuchen; sie hatten dabei hervorragende Entdeckungen zu verzeichnen. Den Anstoß für diese Arbeiten gab die Erforschung einer Aufgabe des Archimedes, bei der es darum ging, eine Kugel durch eine Ebene so zu teilen, daß die Volumina der beiden dabei entstehenden Kugelsegmente in einem gegebenen Verhältnis stehen (Satz 4 im Buch II „Über Kugel und Zylinder"). Der Byzantiner Eutokios von Askalon, der die Werke des Archimedes kommentiert hat (um 500), gibt eine offenbar auf Archimedes selbst zurückgehende geometrische Lösung dieses Problems mit Hilfe einer Parabel und einer verschobenen gleichseitigen Hyperbel an. Nach Mitteilung desselben Eutokios hat Dionysodoros, wahrscheinlich ein Zeitgenosse des Apollonios, diese Aufgabe mit Hilfe einer verschobenen, zur Abszissenachse symmetrischen Parabel und einer Hyperbel gelöst, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind. Diokles (2. Jahrhundert v. u. Z.) hingegen hat die Konstruktion einer verallgemeinerten Hilfsaufgabe des Archimedes über die

[1]) Durch das Wort „Schuld" wird hier das arabische dain genau wiedergegeben.

Teilung einer Strecke mit Hilfe von Ellipse und Hyperbel angegeben. Die Aufgabe des Diokles läßt sich bereits nicht mehr durch eine dreigliedrige kubische Gleichung ausdrücken, sondern bedarf zu ihrer Formulierung der vollständigen Form dieser Gleichung [135, S. 287 bis 291].

Die Aufgaben über die Würfelverdopplung und die Teilung einer Kugel sind die einzigen, die die Griechen in der ihnen eigenen Art auf kubische Gleichungen zurückgeführt haben. Bei Archimedes geht es im Grunde genommen um die Verhältnisgleichung $(a - x):b = c^2:x^2$, die in Worten ausgedrückt ist. Eine derartige Zurückführung wurde nicht einmal bei der Dreiteilung des Winkels vollzogen, die man mit Hilfe von Einschiebungen oder mittels Kurven bewerkstelligte, die keine Kegelschnitte waren. Die griechischen Geometer entwickelten zwar eine geometrische Methode zur Konstruktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung, doch haben sie dieses Verfahren nicht auf irgendeinen größeren Problemkreis und erst recht nicht auf die Entwicklung einer allgemeinen Theorie dieser Gleichung angewandt. Diese Arbeit blieb den Gelehrten der islamischen Ländern vorbehalten.

Mit dem Problem des Archimedes beschäftigte sich erstmalig al-Māhānī, der — einer Quelle zufolge — versuchte, diese Aufgabe algebraisch zu lösen, indem er sie durch eine „Gleichheitsbeziehung" zwischen einem Kubus und einer Zahl einerseits und einem Quadrat andererseits ausdrückte. Jedoch war es al-Māhānī nicht gelungen, die Gleichung zu finden. Erfolgreiche Untersuchungen hierzu setzten etwas später ein, wobei sie sehr rasch auf einen größeren Kreis geometrischer und sogar physikalischer Probleme ausgedehnt wurden, die auf kubische Gleichungen mit allgemeinen und numerischen Koeffizienten führen. Abū Ğa'far al-Ḫazīn aus Horasan (gest. zwischen 961 und 971), Verfasser eines Kommentars zum Buch X der „Elemente" des Eukleides und anderer mathematischer und astronomischer Werke, gab eine konstruktive Lösung der Aufgabe des Archimedes mit Hilfe von Kegelschnitten an.

Nahezu gleichzeitig wurde die Aufgabe des Archimedes mit Hilfe einer Parabel und einer Hyperbel von Abū 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haitham gelöst, der aus Basra im Irak stammte und in Kairo wirkte (geb. etwa 965, gest. etwa 1039). Ibn al-Haitham, der in Westeuropa Alhazen genannt wurde, war Mathematiker, Astronom, Physiker und Arzt. Sein „Buch der Optik" (Kitāb al-manāzir), das wichtige Entdeckungen über die Physiologie des Sehens und über die Lehre von der Reflexion und Brechung des Lichtes enthält, hat in lateinischen Übersetzungen einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Optik im Europa des Mittelalters ausgeübt. In diesem Werk wird insbesondere auch das Problem untersucht, in dem es um die Bestimmung der Reflexionsstelle eines leuchtenden Punktes an einem Kreiszylinderspiegel geht, wenn die Lage des Punktes und des Auges gegeben sind. Das Problem läuft auf die folgende Aufgabe hinaus: In einer Ebene seien ein Kreis und zwei außerhalb von diesem liegende Punkte gegeben; auf dem Kreis ist der Punkt zu ermitteln, dessen Verbindungsgeraden zu den gegebenen Punkten mit dem durch ihn hindurchgehenden Kreisradius gleiche Winkel einschließen. Diese Aufgabe läßt sich durch eine Gleichung vierten Grades erfassen; ibn al-Haitham löste sie mit Hilfe eines Kreises und einer Hyperbel. Mit dem „Problem des Alhazen" beschäftigten sich im 17. Jahrhundert Christiaan Huygens, Isaac Barrow [136] und andere. Ibn al-Haitham fand

außerdem eine elegante mechanische Lösung der Aufgabe des Archimedes, doch wollen wir uns nicht mit dieser Lösung beschäftigen, da sie außerhalb der allgemeinen Richtung liegt.

Ein neues Problem warf Abū-s-Sahl Waiǧān ibn Rustam al-Kūhī aus Kuha in Tabaristan (südlich vom Kaspisee) am Ende des 10. Jahrhunderts auf. Gesucht ist ein Kugelsegment, dessen Volumen dem eines gegebenen Kugelsegments, und dessen Oberfläche der eines anderen gegebenen Kugelsegments gleich ist. Bezeichnen wir den Radius der zugehörigen Kugel mit x und die Höhe des Segments mit y, das gegebene Volumen mit a und die gegebene Oberfläche mit b, so erhält man aus den Bedingungen

$$\frac{\pi}{3} y^2 (3x - y) = a, \quad 2\pi x y = b$$

nach der Substitution $\frac{a}{b} = a'$, $\frac{b}{a} = b'$ die Gleichungen

$$y^3 + 3a'b' = \frac{3}{2} b' y \tag{1}$$

und

$$x^3 + \frac{b'^2}{24a'} = \frac{b'}{4a'} x^2 \tag{2}$$

Al-Kūhī gab mit Hilfe der Parabel

$$y^2 = \left(\frac{b'}{2a'} - 2x\right) 3a'$$

und der Hyperbel

$$xy = \frac{b'}{2}$$

eine Konstruktion an, die die Wurzeln beider Gleichungen liefert, und untersuchte in streng antiker Art die Bedingungen, unter denen die Aufgabe lösbar ist. Ferner gab er eine vollständige Analyse der Aufgabe des Archimedes.

Man stieß immer häufiger auf Probleme, die auf Gleichungen dritten Grades führen. Unter anderem wurden die Seitenlängen einiger regulärer Vielecke in der Form der Wurzeln kubischer Gleichungen ermittelt, was sowohl für geometrische Vermessungsarbeiten als auch bei der Zusammenstellung von Sehnen- oder Sinustabellen von Interesse war (im 3. Kapitel des Buches III des Al-Qānūn al-Maśūdī, vgl. S. 301 und 311). Al-Bīrūnī führte die Bestimmung der Seiten eines regelmäßigen Neunecks durch zwei wohldurchdachte Konstruktionen auf eine kubische Gleichung zurück. Bei der einen erhält man durch geeignete Wahl der Maßeinheit die Gleichung

$$x^3 = 1 + 3x,$$

wobei x die Sehne zu $\frac{2}{9}$ des Kreisumfanges bedeutet.

Die zweite Konstruktion al-Bīrūnīs, die auch von seinem Zeitgenossen Abū-l-Ǧūd Muḥammad ibn Laiṯ angegeben wurde, läßt sich kurz etwa folgendermaßen wiedergeben. In einem Einheitskreise möge ein Zentriwinkel AHB 20° betragen (Abb. 60). Die Sehne $\overline{AB} = x$ ist in diesem Falle die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regulären Achtzehnecks. Zwischen die Schenkel HA und HB des Zentriwinkels legen wir (was stets möglich ist) einen Polygonzug $ACDG$, dessen Teilstrecken die Länge $\overline{AB} = x$ haben. Ferner fällen wir von G auf HA das Lot $\overline{GT}$ und von A auf HB das Lot $\overline{AR}$.

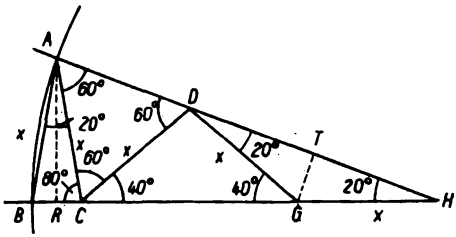


Abb. 60

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BAC und AHB folgt

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}, \quad \text{d. h.} \quad \overline{BC} = x^2$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ARH und GTH

$$\frac{\overline{HR}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HT}}{\overline{HG}}, \quad \text{d. h.} \quad \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) : 1 = \frac{1-x}{2} : x$$

oder

$$x^3 + 1 = 3x.$$

Nach Berechnung von x, d. h. der Seite des Achtzehnecks, ergibt sich die Seite des Neunecks durch Ausziehen einer Quadratwurzel. Thābit ibn Qurra machte die arabischen Gelehrten mit dem Werk des Archimedes über das reguläre Siebeneck bekannt (der griechische Text ist bis heute unbekannt geblieben), wobei die Seite mit Hilfe einer Einschiebung konstruiert wird, die man unter Verwendung von Kegelschnitten herstellen kann. Eine ähnliche Konstruktion hatte bereits al-Kūhī durchgeführt; eine Zurückführung dieser Konstruktion auf eine Gleichung treffen wir übrigens in der arabischen Literatur nicht an.[1]) Abū-l-Ǧūd fand die Konstruktion der Gleichung

$$x^3 + 13\tfrac{1}{2}x + 5 = 10x^2, \tag{3}$$

die al-Kūhī nicht gelungen war. Die Gleichung (3) drückte eine arithmetische Aufgabe etwa so aus, wie wir sie bei al-Ḫuwarizmī und bei Abū Kāmil antreffen: Die Zahl 10 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß die Summe ihrer Quadrate mit dem Quotienten aus der Division des größeren Teiles durch den kleineren 72 ergibt. Die ganzzahlige Wurzel 2 dieser Gleichung ist offensichtlich, während man die andere positive Lösung $4 + \frac{1}{2}\sqrt{74}$ zu jener Zeit schwerlich gefunden haben dürfte, da das Verfahren zur Reduzierung des Grades einer Gleichung für den Fall, daß eine Wurzel bekannt ist, nicht zur Verfügung stand. Schließlich fand man auch die Gleichung zur Dreiteilung des Winkels, von der später noch die Rede sein soll [137, S. 96ff].

Die Vielzahl und die Wichtigkeit der Aufgaben, die man auf kubische Gleichungen verschiedener Form zurückgeführt hatte, ließen es notwendig erscheinen, einerseits eine allgemeinere Theorie aufzubauen, andererseits Methoden zur numerischen Lösung zu finden. Offenbar war Abū-l-Ǧūd einer der ersten, die es versucht haben, auf der Grundlage antiker geometrischer Verfahren eine allgemeine Lehre von den kubischen Gleichungen zu entwickeln. Sein Werk jedoch, das 'Umar al-Ḫayyām erwähnt, ist nicht erhalten geblieben. Dafür ist uns eine algebraische Abhandlung al-Ḫayyāms überliefert, die zu den größten Errungenschaften der arabischen Wissenschaften zählt.

Die geometrische Theorie der kubischen Gleichungen des 'Umar al-Ḫayyām. Abū-l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrāhīm al-Ḫayyām wurde im Jahre 1048 in der Stadt Nischapur in Horasan geboren. Die politischen Wirren der Zeit brachten es mit sich, daß sein Leben

[1]) Die zugehörige Gleichung hat bei geeigneter Wahl der Maßeinheiten die Form

$$x^3 + 1 = x^2 + 2x.$$

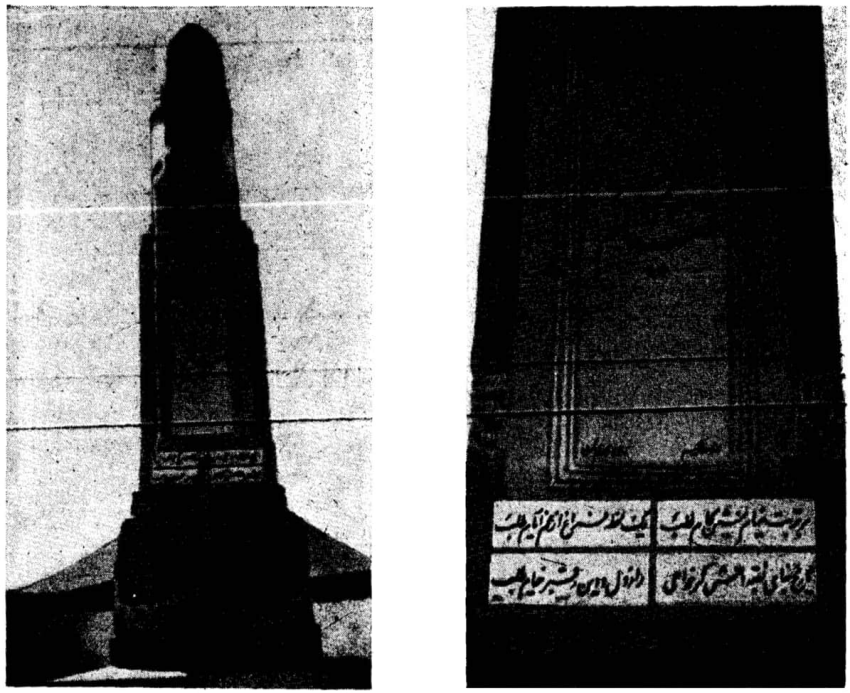


Abb. 61. Obelisk am Grabe des 'Umar al-Ḫayyām in Nischapur (erbaut im Jahre 1934)

unstet verlief und er seinen Wohnsitz häufig wechselte. Feinde, über die uns allerdings nichts Näheres bekannt ist, zwangen ihn zur Flucht nach Samarkand; ferner wirkte er in Merv, Isfahan, Rea und anderen Städten Zentralasiens und des Iran. Etwa 1074 schrieb al-Ḫayyām das Buch „Über die Beweise für die Aufgaben der Algebra und Almukabala" (Risāla fī-l-barāhin 'ala masāil al-ğabr wa-l-muqābala) [132]. Im Jahre 1077 entstanden seine uns bereits bekannten Kommentare zu den „Elementen". Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß al-Ḫayyām auch eine bisher nicht wieder entdeckte Abhandlung über das Ausziehen von Wurzeln geschrieben hat.

1074 wurde al-Ḫayyām an den Hof des seldschukischen Sultans Ğamāl ad-Dīn Malikšāh berufen, wo er sich sowohl der Gönnerschaft des Sultans als auch des fortschrittlichen Wesirs Nizām al-Mulk erfreute und mit der Leitung des neuen Observatoriums in Isfahan betraut wurde. Hier wurden genauere astronomische Tabellen aufgestellt und die Vorbereitungsarbeiten für eine Kalenderreform getroffen. Allerdings kam diese nicht zustande, weil Nizām al-Mulk ermordet wurde und Malikšāh starb (1092). Im Anschluß an diese Ereignisse wurde auch das Observatorium geschlossen. Die Meinungen über den Kalender al-Ḫayyāms gehen in der späteren arabischen Literatur zwar auseinander, doch ist man sich über die außerordentliche

Genauigkeit seiner Berechnungen einig: Ein Fehler, der einen ganzen Tag ausmacht, läuft erst in 3770 oder 5000 Jahren auf.

Die Zeitgenossen schätzten al-Ḫayyām als Gelehrten hoch ein. Noch größeren Ruhm jedoch brachten ihm seine weltberühmten „Rubā 'iyāt" ein, d. h. seine Vierzeiler, in denen er Liebe und Freiheit, Trübsal und Vergänglichkeit des Daseins und die Unvollkommenheit des Lebens auf der Erde besang und dabei die offizielle Religion bespöttelte. Die „Rubā 'iyāt" al-Ḫayyāms sind ein klassisches Werk der persisch-tadshikischen Dichtkunst, das in europäische Sprachen übersetzt und im 19. und 20. Jahrhundert in der Welt allgemein bekannt wurde. Seine freigeistige Denkungsart zog ihm nach dem Tode seiner Gönner Feindschaft und Verfolgung zu, so daß er in hohem Alter gezwungen war, eine Pilgerfahrt nach Mekka zu unternehmen. Er starb in seiner Heimatstadt im Jahre 1131 [132a, 138, 139].

Algebra und Arithmetik wurden früher als die Wissenschaft von der Ermittlung der Unbekannten aus ihren Beziehungen zu bekannten Größen aufgefaßt. Eine scharfe Trennung zwischen Arithmetik und Algebra wurde nicht vorgenommen. In seiner Abhandlung betrachtet al-Ḫayyām nur die Auflösung algebraischer Gleichungen und erläutert das Wesen dieser Wissenschaft. „Die algebraischen Lösungen", schreibt er, „werden mit Hilfe einer Gleichung ausgeführt, d. h. auf wohlbekannte Weise durch Gleichsetzen verschiedener Potenzen" [132, S. 18, russisch]. Mit anderen Worten: Die Algebra ist die Lehre vom Auflösen von Gleichungen zwischen ganzen Polynomen. Als gesuchte Größe können absolute, also ganze Zahlen oder auch kontinuierlich veränderliche Größen auftreten, zu denen der Verfasser nach dem Vorbild von Aristoteles Linie, Fläche, Körper und Zeit rechnet. Es sei zwar nicht üblich, die Zeit als Gegenstand algebraischer Aufgaben aufzufassen, doch sei es immerhin zulässig. In Anbetracht des Unterschiedes zwischen den ganzen und den kontinuierlichen Unbekannten benötigte man in der Algebra sowohl numerische Lösungen von Gleichungen als auch geometrische Lösungskonstruktionen. Enthalten die Gleichungen Zahlen, Dinge oder Seiten und Quadrate, so folgt die zahlenmäßige Lösung aus der geometrischen, die man mit Hilfe der „Elemente" und „Data" des Eukleides begründen kann. Für Gleichungen jedoch, die außerdem noch Kuben enthalten und sich nicht auf quadratische Gleichungen reduzieren lassen (gemeint ist eine Division der Gleichung durch die erste Potenz der Unbekannten), ist eine Lösung nur mit Hilfe von Kegelschnitten möglich, wobei man sich in diesem Falle auf die ersten beiden Bücher des Werkes des Apollonios zu stützen habe. Soweit bekannt ist, handelt es sich hier um den ersten Hinweis auf die Tatsache, daß sich Gleichungen dritten Grades im allgemeinen nicht mit Hilfe des Zirkels (und Lineals) lösen lassen. Eine ähnliche Behauptung sprach im Jahre 1637 René Descartes aus; 200 Jahre später wurde sie von P. L. Vantzel bewiesen (1837).

Al-Ḫayyām wirft zwar das Problem der rechnerischen Lösung der kubischen Gleichung in Anlehnung an das entsprechende Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen auf, muß aber zugeben, daß alle Bemühungen in dieser Richtung erfolglos geblieben sind: „Der Beweis dieser Formen für den Fall, daß der Gegenstand der Aufgabe eine absolute Zahl ist, ist weder für uns noch für irgendeinen anderen von denen, die diese Kunst beherrschen, möglich. Es könnte sein, daß jemand von denen, die nach

uns kommen, dies erfahren wird ..."[1]) [132, S. 19, russisch]. Die Lösung der kubischen Gleichung in Radikalen fanden im 16. Jahrhundert die Italiener Scipione del Ferro und Niccolo Tartaglia.

Der Inhalt des Werkes al-Ḫayyāms über die Algebra besteht in der Hauptsache aus einer Klassifizierung der Gleichungen, aus geometrischen Konstruktionen der Wurzeln und aus Bestimmungen der Grenzen für die Existenz positiver Lösungen. Die Gleichungen werden in allgemeiner Form betrachtet, d. h. mit beliebigen positiven Koeffizienten, jedoch werden sie in Worten ausgedrückt. Die Klassifizierung beruht auf dem Grad der Gleichung und der Anzahl der Glieder, die auf beiden Seiten der Gleichung auftreten. Insgesamt erhält man 25 kanonische Typen, von denen sechs bereits von al-Ḫuwarizmī untersucht worden waren; fünf weitere lassen sich auf diese zurückführen, indem man die Gleichung durch die Unbekannte dividiert, während die restlichen vierzehn mit Hilfe von Kegelschnitten konstruiert werden. Diese vierzehn Formen gliedern sich in: 1. eine Form mit zwei Gliedern, 2. sechs Formen mit drei Gliedern und 3. sieben Formen mit vier Gliedern, die ihrerseits wieder in zwei Klassen zerfallen: in dem einen Fall wird ein dreigliedriger Ausdruck einem Mononom, im anderen Fall werden zwei Binome einander gleichgesetzt. In der Einteilung sind nur Gleichungen enthalten, die positive Lösungen besitzen können.

Die Auflösung der quadratischen Gleichungen enthält nichts Neues, und wir wollen uns daher den kubischen Gleichungen zuwenden. Nach dem Vorbild der Antike hält sich al-Ḫayyām streng an das Prinzip der Dimensionstreue. Er weist z. B. darauf hin, daß er dann, wenn er von der Gleichheit einer Zahl und einer Fläche spricht, unter der Zahl ein Rechteck versteht, dessen eine Seite die Länge 1 hat, während die andere Seite in entsprechender Weise gewählt ist. Ebenso versteht er unter einer körperlichen Zahl ein gerades Parallelepiped, dessen Grundfläche das Einheitsquadrat ist und dessen Höhe zur Seite der Grundfläche im gleichen Verhältnis steht wie die gegebene Zahl zu 1. Jede Gleichung wird vor Beginn der Lösungskonstruktion in eine homogene Form gebracht, z. B. die Gleichung

$$x^3 + ax = b \tag{1}$$

auf die Form

$$x^3 + p^2 x = p^2 q. \tag{1'}$$

Diese Umformung beruht auf speziellen elementargeometrischen Sätzen.

Zu Beginn gibt al-Ḫayyām die Konstruktion der Wurzel einer binomischen kubischen Gleichung mit Hilfe zweier Parabeln an. Dann wird entweder die Gleichung (1) oder (1') mit Hilfe des Kreises

$$x^2 + y^2 = qx$$

und der Parabel

$$x^2 = py$$

gelöst (vgl. Abb. 62, in der die positive Richtung der Abszissenachse nach links und die der Ordinatenachse nach unten weist).[2]) Die Abszisse des Schnittpunktes dieser Kurven

[1]) Für die numerische Gleichung $x^3 = a$ kennt al-Ḫayyām selbstverständlich im Falle einer ganzen Kubikzahl die exakte Lösung, jedoch beruht diese Lösung, wie er sagt, auf der Wahl der Zahlengrößen und nicht auf dem „Gesetz der Kunst" [132, S. 22, russisch].

[2]) Al-Ḫayyām zeichnet nur die Teile der Kurve, die man für die Konstruktion der positiven Wurzel benötigt.

liegt nicht im Koordinatenursprung und genügt der gegebenen Gleichung. Al-Ḥayyām beweist dies mit Hilfe in Worten ausgedrückter Proportionen. Er sagt, daß auf Grund der Eigenschaften der Parabel $\frac{p}{x} = \frac{x}{y}$ und auf Grund der Eigenschaften des Kreises

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{q-x}$$

gilt. Daraus folgt

$$\frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{q-x}$$

und

$$p^2(q-x) = x^3.$$

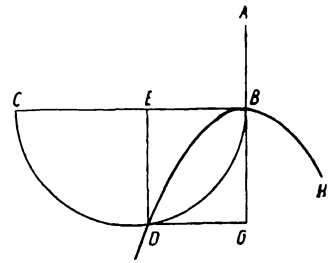


Abb. 62

Durch Addition von p^2x auf beiden Seiten erhält al-Ḥayyām

$$x^3 + p^2x = p^2q.$$

Bei dieser Form der Gleichung, schließt al-Ḥayyām, gibt es keine Mehrdeutigkeit der Fälle und keine unmöglichen Aufgaben, d. h., die Gleichung (1) besitzt stets eine eindeutige positive Wurzel. Dies geht aus der Konstruktion klar hervor.

Die Konstruktion der Wurzeln der nächsten Gleichungsform

$$x^3 + a = bx \tag{2}$$

(der Einfachheit halber wollen wir im weiteren das Prinzip der Dimensionstreue nicht mehr beachten) ist von besonderem Interesse. Diese Gleichung löst al-Ḥayyām mit Hilfe der Parabel

$$x^2 = \sqrt{by}$$

und des linken Zweiges der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - \frac{a}{b}x = y^2.$$

Hier, sagt al-Ḥayyām, gibt es mehrere Fälle, und es treten auch unlösbare Aufgaben auf. In der Tat brauchen hier die Kurven keinen Schnittpunkt zu besitzen, da der rechte Zweig der Hyperbel, der durch den Scheitel der Parabel hindurchgeht und diese noch in einem weiteren Punkt schneidet, nicht in die Betrachtung einbezogen wird; die zugehörige Wurzel ist negativ: Dann ist die Aufgabe nicht lösbar, und die Gleichung besitzt eine negative und zwei komplexe Wurzeln. Außerdem können sich beide Kurven entweder berühren oder in zwei Punkten schneiden. Im ersten Falle hat die Gleichung (2) eine Lösung[1]), im zweiten deren zwei. Auf diese Weise stellt al-Ḥayyām explizite fest, daß eine Gleichung dritten Grades auch zwei Wurzeln haben kann; im weiteren treten noch mehrere derartige Fälle auf.

Wir wollen noch die Analyse der Gleichung

$$x^3 + a = cx^2 \tag{3}$$

[1]) Der Begriff der Doppelwurzel tauchte erst im 17. Jahrhundert auf.

betrachten, die in der Aufgabe des Archimedes auftritt. Die Konstruktion der Wurzeln erfolgt mit Hilfe der Parabel

$$y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$$

und der Hyperbel

$$xy = \sqrt[3]{a^2}.$$

Nach al-Ḫayyām kann die Gleichung zwei oder eine positive Wurzel besitzen, je nachdem, ob sich der obere Zweig der Parabel und die Hyperbel schneiden oder berühren; es braucht keine Lösung vorhanden zu sein, wenn sich diese Kurvenzweige verfehlen (vgl. Abb. 63, wo $\overline{AC} = c$, $H = \sqrt[3]{a}$, $\overline{BC} = H$ und $\overline{AB} = c - \sqrt[3]{a}$ ist). Hierbei gibt al-Ḫayyām für die Wurzeln gewisse Grenzen an. Zunächst zeigt er, daß für $\sqrt[3]{a} \geq c$ keine Lösung existiert, da dann $cx^2 \leq a$ für $x = \sqrt[3]{a}$, $cx^2 < a$ für $x < \sqrt[3]{a}$ und $x^3 > cx^2$ für $x > \sqrt[3]{a}$ gilt, was der vorgegebenen Gleichung widerspricht. Sodann untersucht er die Fälle $\sqrt[3]{a} \gtrless \frac{c}{2}$, wobei er die Ordinaten der Parabel und Hyperbel ($\overline{BD}$) für $x = c - \sqrt[3]{a}$ miteinander vergleicht. 1. Ist $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$, so sind die Ordinaten beider Kurven gleich $\sqrt[3]{a}$, und es existiert, wie man leicht sieht, noch ein weiterer Schnittpunkt, so daß sich zwei Lösungen ergeben. 2. Ist $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$, so gilt $x = c - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a}$, und die Ordinate der Hyperbel $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{c - \sqrt[3]{a}}$ ist größer als die Ordinate der Parabel $\sqrt[3]{a}$. Rechts von $\overline{BD}$ können sich dann die Kurven entweder verfehlen, schneiden oder berühren; die Aufgabe ist dementsprechend unlösbar, oder sie besitzt zwei bzw. eine Lösung, die kleiner als $c - \sqrt[3]{a}$ sind. 3. Ist schließlich $\sqrt[3]{a} < \frac{c}{2}$, so liegt der Hyperbelpunkt D im Inneren der Parabel, so daß zwei Schnittpunkte und damit auch zwei Lösungen vorhanden sind.

Die recht ausführliche Analyse al-Ḫayyāms ist dennoch nicht erschöpfend. Bereits Archimedes und später al-Kūhī haben festgestellt, daß die Grenze der positiven Wurzeln durch die Bedingung $a \leq \frac{4c^3}{27}$ bestimmt wird, während al-Ḫayyām lediglich ge-

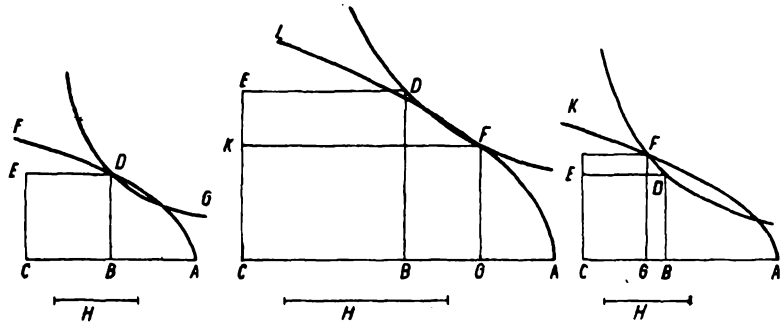


Abb. 63

zeigt hat, daß für $a \leq \frac{c^3}{8} = \frac{3\frac{3}{8}c^3}{27}$ zwei, für $a > \frac{3\frac{3}{8}c^3}{27}$ entweder zwei oder eine oder aber keine Wurzel auftreten können, während für $a \geq c^3$ keine Lösung existiert.

Bei der Untersuchung der Gleichung des Archimedes bemerkt al-Ḥayyām, daß Abū-l-Ǧūd hier insofern ein Fehler unterlaufen ist, als er annahm, daß für $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$ eine Berührung stattfindet, während für $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ die Kurven sich verfehlen. Diesen Fehler widerlegt al-Ḥayyām am Beispiel der Gleichung

$$x^3 + 144 = 10x^2.$$

In diesem Falle ist $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{144} > 5 = \frac{c}{2}$. Dabei treffen sich die Kurven

$$y^2 = \sqrt[3]{144}(10 - x) \quad \text{und} \quad xy = \sqrt[3]{144^2}$$

für $x = 6$ (die Wurzel $2 + 2\sqrt{7}$ ist nicht angegeben). Nebenbei bemerkt begeht al-Ḥayyām in einem anderen, und zwar in dem sich anschließenden Beispiel selbst einen Rechenfehler. In dem Bestreben, einen Fall vorzuführen, bei dem unter der Annahme, daß $\sqrt[3]{a}$ etwas größer ist als $\frac{c}{2}$, die Kurven einander nicht schneiden, betrachtet er die Gleichung

$$x^3 + 41^3 = 80x^2.$$

Für die Abszissenwerte $x_1 = \sqrt[3]{a} = 41$ und $x_2 = \sqrt[3]{a} + \frac{3}{4}(c - \sqrt[3]{a}) = 41 + \frac{3}{4} \cdot 39$ erweisen sich die Ordinaten als kleiner als die zugehörigen Ordinaten der Hyperbel, und al-Ḥayyām schließt daraus, daß sich die Kurven nicht schneiden. In Wirklichkeit liegen zwischen diesen beiden Abszissen zwei Schnittpunkte; dies folgt z.B. daraus, daß bei dem Zwischenwert $x_3 = \frac{11}{10} \cdot 41$ die Hyperbelordinate kleiner ist als die Parabelordinate. Al-Ḥayyām hätte das absolute Glied etwas größer wählen müssen, etwa 43^3.

Diese beiden Beispiele sind äußerst illustrativ. Sie zeugen davon, daß die allgemeine geometrische Theorie der Wurzelabspaltung auf Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten angewandt wurde. Im Anhang zu seiner Abhandlung, in dem beide Beispiele behandelt werden, bemerkt al-Ḥayyām, sein Bestreben sei es gewesen, die Analyse vollständig zu geben und sich kurz zu fassen, weshalb er nicht für jeden Fall und hier für jede Form ein Zahlenbeispiel gegeben hätte. Er „beschränkte sich auf die Darlegung der allgemeinen Regeln und setzte Vertrauen in den Verstand des Lernenden, da der, der sich diese Abhandlung gut vorstellen kann, nicht durch spezielle Beispiele und die zugehörige Auswahl aufgehalten wird" [132, S. 63, russisch].

Unter den bei al-Ḥayyām auftretenden Lücken ist wohl die am bedauernswertesten, daß er die Gleichung

$$x^3 + bx = cx^2 + a \tag{4}$$

unvollständig analysiert hat, zu deren Lösungskonstruktion der Kreis

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(c - x)$$

und die Hyperbel

$$x\left(\sqrt{b} - y\right) = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

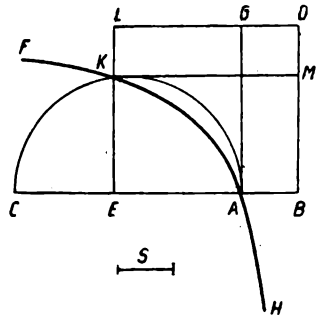
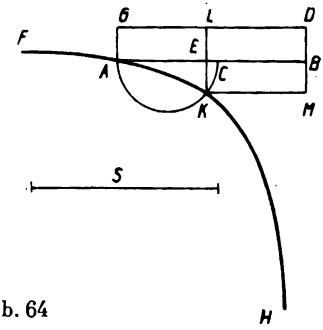


Abb. 64



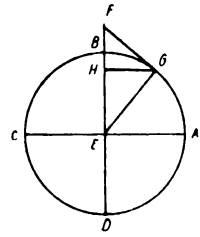


Abb. 64a

dienen. Al-Ḥayyām weist richtig darauf hin, daß die Gleichung stets eine Lösung besitzt, und zwar die Abszisse des Punktes K (Abb. 64, wo $\overline{BC} = c$, $\overline{BD} = b$ und $S = \overline{AB} = \frac{a}{b}$ gesetzt ist), und daß für $\frac{a}{b} \geq c$ diese Wurzel eindeutig ist.[1]) Jedoch hat er nicht bemerkt, daß für $\frac{a}{b} < c$ zwei weitere positive Wurzeln existieren können. Daher gelang es ihm nicht, die Existenz dreier Wurzeln einer kubischen Gleichung zu entdecken. Dies blieb im 16. Jahrhundert Geronimo Cardano vorbehalten. Im übrigen ist es nicht leicht, die Möglichkeit der Existenz zweier weiterer Schnittpunkte zwischen A und K auf der Zeichnung al-Ḥayyāms zu entdecken.

Nach Untersuchung der 25 Gleichungstypen betrachtet al-Ḥayyām Gleichungen, die negative Potenzen der Unbekannten enthalten und sich auf die vorhergehenden Gleichungstypen zurückführen lassen. Über die Gleichung

$$x^2 = a\frac{1}{x^3}$$

sagt er, daß ihre Lösungskonstruktion, die auf die Bestimmung von vier mittleren Proportionalen zwischen 1 und a hinausläuft, bereits von al-Haitham angegeben worden sei, doch sei sie zu kompliziert, um sie in seinem Buch anzuführen. Hinsichtlich der Gleichung

$$x^2 + 2x = 2 + 2 \cdot \frac{1}{x^2},$$

also einer Gleichung vierten Grades, bemerkt al-Ḥayyām, daß ein Lösungsverfahren für sie nicht bekannt ist.

Kürzlich wurde ein kleineres Werk al-Ḥayyāms über Algebra entdeckt, das früher entstanden ist als seine große Abhandlung [139a, 139b]. Diese Handschrift, die in Teheran aufbewahrt wird, hat keinen besonderen Titel; sie entstand zur Lösung der folgenden Aufgabe: Man soll den Viertelbogen $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises $ABCD$ im Punkt G so

[1]) Die Abszisse des Punktes A, d.h. $x = \frac{a}{b}$, genügt der Gleichung (4) nicht: Die Kurvengleichungen liefern bei Elimination von y Hilfsgleichungen vierten Grades mit der überzähligen Wurzel $\frac{a}{b}$.

teilen, daß das Verhältnis $\frac{\overline{AE}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{HB}}$ erfüllt ist; dabei ist $\overline{GH}$ das Lot vom Punkt G auf den Durchmesser $\overline{DD}$ (vgl. Abb. 64a). Indem al-Ḥayyām den Tangentenabschnitt $\overline{GF}$ bis zum Schnittpunkt mit der Geraden BD konstruiert, führt er seine Aufgabe auf eine andere zurück, und zwar auf die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, bei dem die Summe aus einer gegebenen Kathete $\overline{EG}$ und der Höhe $\overline{GH}$ gleich der Hypotenuse $\overline{EF}$ ist. Diese zweite Aufgabe führt er, wobei er die Projektion der genannten Kathete auf der Hypotenuse gleich 10 setzt, auf die kubische Gleichung

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

zurück. Die Wurzel dieser Gleichung $x = \overline{GH}$ konstruiert er als Abszisse des Schnittpunktes des Kreises $y^2 = (x-10),(20-x)$ und der Hyperbel $xy = \sqrt{2}\,10(x-10)$. Sodann wendet sich al-Ḥayyām wieder der ersten Aufgabe zu und drückt sie, mit der Absicht, eine Näherungslösung zu suchen, durch die trigonometrische Gleichung $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ aus, wobei α der Winkel GEH ist. Aus dieser Gleichung erhält er $\sin\alpha = \frac{50}{60}$, d. h. 0,8333 ... und $\alpha = 57°$ (genauere Werte sind $\sin\alpha = 0{,}8393$ und $\alpha = 57°4'34''$). Diese Werte erhielt al-Ḥayyām, wie er selbst sagt, unter Verwendung der Hilfsmittel, die bei der Aufstellung der Sinustabellen benutzt werden, d. h. offenbar durch Probieren und Interpolieren.

Nebenher behandelt al-Ḥayyām die uns bereits bekannte Klassifizierung der kubischen Gleichungen, berichtet über die Ergebnisse einiger seiner Vorgänger von al-Māhānī an und gibt der Hoffnung Ausdruck, daß es ihm gelingen werde, die Lehre von den 14 Gleichungsformen ausführlich zu behandeln, deren Lösung nur mit Hilfe von Kegelschnitten möglich ist. Es sei erwähnt, daß al-Ḥayyām übersehen hat, daß seine erste Aufgabe sich leicht auf eine Gleichung der Form $x^3 + cx^2 = a$ zurückführen läßt, deren konstruktive Lösung nach seiner Behauptung von Abū Naṣr ibn'Irāq bei der Beschäftigung mit der archimedischen Aufgabe über das regelmäßige Siebeneck angegeben worden war.

Die Mathematiker der islamischen Länder haben sich auch nach al-Ḥayyām mit der geometrischen Theorie der Gleichungen höheren Grades beschäftigt. In einer anonymen Handschrift finden wir die Konstruktion für eine Aufgabe, die auf eine Gleichung vierten Grades führt. Dort wird gesagt, daß eine Zeitlang die Geometer und Algebraiker sich gegenseitig diese Aufgabe gestellt hätten, ohne ihre Lösung finden zu können. Es handelt sich dabei um die Konstruktion eines Trapezes $ABCD$ mit $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = 10$, dessen Flächeninhalt gleich 90 ist. Nimmt man an, die Aufgabe sei gelöst (Abb. 65), und fällt man das Lot $\overline{AK}$ auf die Verlängerung von $\overline{CD}$, wählt man ferner als Unbekannte $\overline{DK} = z$, so ist

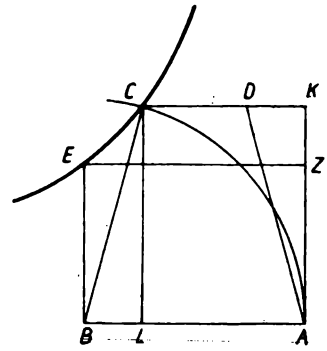


Abb. 65

$$z^4 + 2000z = 20z^2 + 1900.$$

Wir zeichnen die Strecke $\overline{BE} = \frac{9}{10}\overline{AB}$ senkrecht zu $\overline{AB}$ und legen durch E die Hyperbel

$$(10 - x)\, y = 90,$$

(die Abszissenachse soll dabei auf $\overline{BA}$, die Ordinatenachse auf $\overline{BE}$ fallen). Um B als Mittelpunkt konstruieren wir den Kreis

$$x^2 + y^2 = 10^2.$$

Die Abszisse des Schnittpunktes C beider Kurven ist Wurzel der Gleichung; die weitere Konstruktion liegt auf der Hand [132, S. 138 und 139].

Aus dem „Schlüssel der Arithmetik" des al-Kāšī erfahren wir, daß ein Werk über die 19 Gleichungsformen, die neben den allgemeinbekannten sechs bestehen (d. h. neben den Formen, die früher von al-Ḫayyām untersucht wurden), von Šaraf ad-Dīn al-Mas'ūdī verfaßt worden ist, einem Mathematiker, der im 12. und 13. Jahrhundert in Tus gewirkt hat und einer der Lehrer des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī war. Es dürfte wohl außer Zweifel stehen, daß sowohl al-Mas'ūdī als auch sein Schüler die Werke al-Ḫayyāms kannten. Al-Kāšī selbst hat sich mit Gleichungen vierten Grades beschäftigt und behauptet, er habe die Lösungen für 70 verschiedene Formen angegeben (in Wirklichkeit sind es nur 65), die weder seine Vorgänger noch seine Zeitgenossen behandelt hätten. Ferner deutete al-Kāšī an, er hätte die Absicht, diesem Problem ein besonderes Werk zu widmen; ob er zur Verwirklichung dieses Vorhabens gekommen ist, wissen wir nicht [126, S. 192].

In den mauretanischen Ländern hat die geometrische Theorie der Gleichungen keine Verbreitung gefunden; zumindest haben sich die Westaraber nicht mit ihr beschäftigt, obwohl sie um manches wußten. Im 14. Jahrhundert schrieb ibn Ḫaldūn: „Wir haben Kunde erhalten, daß manche großen Gelehrten des Ostens die Anzahl der Gleichungen über diese sechs Formen erweitert haben und über die Zahl von 20 hinausgekommen sind; sie haben dafür zuverlässige Lösungen mit Hilfe geometrischer Beweise gefunden. Allah erhöht diejenigen, denen er gnädig ist . . ." [139, S. 148, russisch].

Im 17. Jahrhundert hat die geometrische Konstruktion der Wurzeln für Gleichungen höheren Grades großes Interesse bei den europäischen Mathematikern erweckt. Descartes hat seiner universellen Mathematik die Konstruktion der reellen Wurzeln beliebiger algebraischer Gleichungen mit Hilfe entsprechend gewählter algebraischer Kurven zugrunde gelegt. Insbesondere hat er eine einheitliche Konstruktion der Lösungen von Gleichungen dritten und vierten Grades mit Hilfe einer Parabel und eines Kreises angegeben. Mit der Anwendung geometrischer Konstruktionen in der Algebra war bei Descartes auch die Entwicklung der analytischen Geometrie eng verknüpft, z. B. die Entwicklung einer Klassifizierung der algebraischen Kurven. Mit der Konstruktion geometrischer Lösungen für Gleichungen beschäftigten sich nahezu sämtliche großen Mathematiker des 17. und sogar des 18. Jahrhunderts einschließlich Isaac Newton, der diesem Problem einen ganzen Abschnitt seines Buches über Algebra gewidmet hat. Übrigens wird die allgemeine geometrische Methode zur Lösung von Aufgaben, wie sie noch bei Descartes auftrat, bereits bei Newton lediglich zu einer Methode, mit deren Hilfe man die ersten zwei bis drei Ziffern einer Wurzel angenähert

bestimmt. Im 17. Jahrhundert und in den nachfolgenden Jahrhunderten fand auch die bereits von Archimedes und später in der arabischen Algebra aufgeworfene Frage nach den Grenzen der Wurzeln ihre Lösung.

Die algebraische Symbolik des al-Qalasādī. In nahezu sämtlichen uns überlieferten Werken der Mathematiker aus den islamischen Ländern fehlt eine algebraische Symbolik. Dies gilt in vollem Umfang für sämtliche Gelehrten des Ostens von al-Ḫuwarizmī bis al-Kāšī. Im arabischen Westen hingegen stoßen wir auf eine hervorragende und unerwartete Ausnahme in der arithmetisch-algebraischen Abhandlung des früher bereits erwähnten Abū-l-Ḥasan 'Alī ibn Muḥammad al-Qalasādī, der in Granada vor dem Untergang des letzten mauretanischen Emirats im Süden Spaniens gewirkt hat und im Jahre 1486 in Afrika in der Verbannung starb. Der Titel des Werkes von al-Qalasādī ist uns in mehreren Varianten überliefert; die eine hiervon lautet: „Lüftung des Schleiers der Wissenschaft Ġubar" (Kašf al-maḥǧūb min 'ilm al-ġubār) [140]. Der Terminus ġubār tritt hier übrigens als Synonym für den Begriff der schrift-

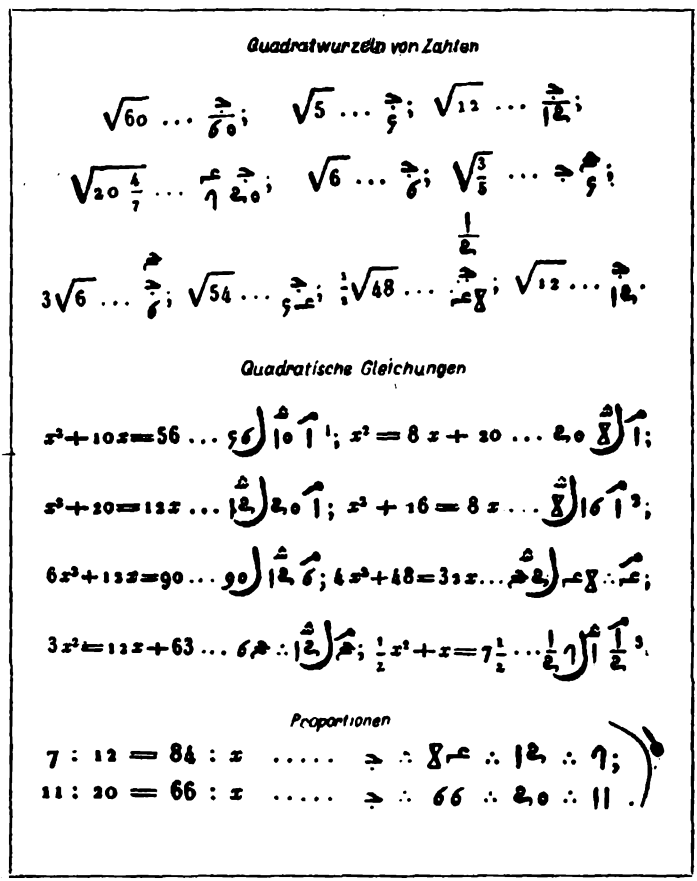


Abb. 66. Einige Beispiele für die Schreibweise al-Qalasādīs

lichen Arithmetik und nicht als Bezeichnung der Ziffern auf (vgl. S. 195). Wir wollen uns hier nicht bei der eingehenden Betrachtung des reichhaltigen Inhalts dieses Werkes aufhalten, dessen erster Teil die Arithmetik der ganzen Zahlen behandelt, während der zweite Teil den Brüchen, darunter auch den Stammbrüchen, Brüchen mit Stammbrüchen als Zähler, der dritte Teil dem Ausziehen von Wurzeln und der vierte Teil der Lösung von Gleichungen gewidmet sind. Al-Qalasādī hat keine wesentlich neuen Ergebnisse aufzuweisen; von historischem Interesse ist lediglich die äußerst weit entwickelte Symbolik. Die Quadratwurzel wird mit dem ersten Buchstaben des Wortes ǧidhr (Wurzel) bezeichnet, der über die Zahl gesetzt wird. Der gleiche Buchstabe (möglicherweise als erster Buchstabe des Wortes ǧa'ala, die Unbekannte) dient zur Bezeichnung der unbekannten Größe in den Proportionen des Dreisatzes, wobei die einzelnen Glieder der Proportionen durch Konfigurationen aus drei Punkten der Form ∴ voneinander getrennt werden. In den Gleichungen werden die erste Potenz, das Quadrat und die dritte Potenz der Unbekannten mit den ersten Buchstaben der Wörter šai, māl und ka'b bezeichnet, wobei diese Zeichen ebenfalls über den Koeffizienten erscheinen.

Auch ein Gleichheitszeichen finden wir bei al-Qalasādī, das möglicherweise aus dem letzten Buchstaben des Wortes 'adala, was soviel wie Gleichheit bedeutet, hervorgegangen ist. Die Abb. 66 gibt einige Besonderheiten dieser Bezeichnungsweise wieder.

Die Symbolik al-Qalasādīs ist so weit entwickelt, daß man kaum annehmen darf, sie wäre von ihm allein durchgebildet worden. Allerdings wissen wir nahezu nichts über seine Vorgänger bei der Entwicklung der algebraischen Bezeichnungsweise. Offenbar gehörte dazu im 13. Jahrhundert ibn al-Bannā, der einer Mitteilung ibn Haldūns zufolge in einem uns unbekannten Werk bei den Beweisen algebraische Bezeichnungen verwendet hat, die sowohl der „abstrakten Überlegung" als auch der „anschaulichen Vorstellung" dienten [21, Bd. I, S. 805].

In Europa setzte die Entwicklung der algebraischen Symbolik etwa um die gleiche Zeit, am Ende des 15. Jahrhunderts, ein.

Probleme der Geometrie. Abū-l-Wafā. Nach dem Erscheinen der ersten arabischen Übersetzungen der „Elemente" des Eukleides und des geometrischen Kapitels der Algebra al-Ḫuwarizmīs wurde das geometrische Erbe des Westens und des Orients rasch ausgewertet, und es setzte bald eine selbständige Forschungsarbeit auf diesem Gebiet ein.

Kurz nach al-Ḫuwarizmī entwickelten in Baghdād die Brüder banū Mūsā, d. h. die Brüder Abū Ǧa'far Muḥammad (gest. 872), al-Ḥasan und Aḥmad, die Söhne des Mūsā ibn Šakir, eines Mannes, der dem Kalifen al-Ma'mūn nahestand, eine rege wissenschaftliche Tätigkeit. Sie beschäftigten sich mit Mathematik, Astronomie, Musikinstrumenten und Mechanik. Sie errichteten ein eigenes Observatorium, sammelten Handschriften und förderten die Übersetzung der Werke griechischer Autoren ins Arabische. Gelegentlich einer Reise brachte der älteste Bruder den uns schon bekannten Gelehrten Thābit ibn Qurra nach Baghdād mit. Es ist unmöglich festzustellen, welchen Beitrag jeder der Brüder einzeln für die Wissenschaft geleistet hat. Es ist übrigens bekannt, daß Aḥmad sich mehr für die Mechanik interessierte. Unter

dem Namen aller drei Brüder ist uns das „Buch der drei Brüder über Geometrie" (Liber trium fratrum de geometria) [140*a*, 141] in der lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona überliefert.

Der genaue Titel des Werkes lautet: „Das Buch von der Berechnung ebener und sphärischer Figuren" (Kitāb ma 'rifa masaha al-aškal al-basita wa-l-kurryya). Die ersten Sätze sind der Kreisberechnung gewidmet, und hier wird erstmalig in der arabischen Originalliteratur das antike griechische Exhaustionsverfahren, allerdings nicht immer ganz einwandfrei, angewandt. Insbesondere wird im Satz IV bewiesen, daß der Flächeninhalt eines Kreises sich als Produkt aus dem Radies und dem halben Umfang des Kreises darstellen läßt. Der Satz V besagt, daß das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser konstant ist, und im Satz VI wird nach dem Vorbild von Archimedes gezeigt, daß dieses Verhältnis zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ liegt. Im darauffolgenden Satz wird die sogenannte Heronische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks bewiesen; der Beweis verläuft etwas anders als die Herleitung des Verfassers der „Metrika". Von den Sätzen über Kegel und Kugel wollen wir den Satz XIV erwähnen, demzufolge die Oberfläche einer Halbkugel dem doppelten Flächeninhalt des zugehörigen Großkreises gleich ist, und den Satz XV, in dem das Volumen der Kugel als Produkt aus dem halben Durchmesser und einem Drittel der Kugeloberfläche ausgedrückt ist. Sodann wird unter Berufung auf Menelaos das komplizierte stereometrische Verfahren zur Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Größen angegeben, ähnlich dem, das nach Eutokios auf Archytas zurückgeht (eine Beschreibung des Verfahrens bei Menelaos ist uns unbekannt). Anschließend wird ein einfacheres Verfahren beschrieben, das Eutokios Platon zuschreibt. Dabei wird gezeigt, wie man die Konstruktion praktisch mit Hilfe eines Gerätes durchführt, das aus gelenkig verbundenen Linealen und darauf gleitenden Schienen besteht. Im Satz XVIII wird mit Hilfe eines Kreises und eines graduierten Lineals, d. h. nach der Methode der „Einschiebung", die Winkeltrisektion vorgenommen. Zum Abschluß wird gezeigt, wie man in Sexagesimalbrüchen die Kubikwurzel aus einer Nichtkubikzahl mit beliebiger Genauigkeit berechnet. Hierzu wird die gegebene Zahl N entweder in Terzen, Sexten, Nonen usw. je nach Bedarf überführt, wonach die kleinste ganzzahlige Kubikzahl gesucht wird, die in $N \cdot 60^{3n}$ enthalten ist. Den Näherungswert erhält man dann in Minuten, Sekunden usw., d. h. $\sqrt[3]{N} \cong \frac{\sqrt[3]{N \cdot 60^{3n}}}{60^n}$

Wie man eine derartige Kubikzahl findet, wird nicht erklärt. Es ist durchaus möglich, daß man zu dieser Zeit in Baghdād bereits das Verfahren zum Ausziehen der Kubikwurzel kannte, dessen Beschreibung wir später bei an-Nasawī finden (vgl. S. 196). Inhalt und Art der Darstellung in diesem Werk, in dem sämtliche Sätze mit Beweisen versehen sind, zeugen von den großen Erfolgen auf dem Gebiet der Geometrie, die in wenigen Jahrzehnten in Baghdād erzielt worden sind. Die geometrische Abhandlung der banū Mūsā hat auf die weitere Entwicklung der Geometrie einen großen Einfluß ausgeübt. Man studierte das Werk im Orient noch Jahrhunderte später, und Nasīr ad-Dīn at-Tūsī z. B. schrieb dazu einen Kommentar. Die lateinische Übersetzung dieses Werkes war in Europa bekannt. Es sei noch erwähnt, daß nach dem

Zeugnis von as-Siǧizī, eines Mathematikers aus dem 10. und 11. Jh., die Brüder banū Mūsā die Fadenkonstruktion (Gärtnerkonstruktion) der Ellipse kannten. Von ihnen stammen, gemeinsam oder einzeln verfaßt, verschiedene weitere Werke über Geometrie, insbesondere über Kegelschnitte, über Astronomie, Statik, Philosophie usw.

Unmittelbar an den geometrischen Abschnitt der Algebra al-Ḫuwarizmīs schließt sich die praktische Geometrie in Abū-l-Wafās Buch für die Schreiber an, das wir bereits in einem anderen Zusammenhang erwähnten (siehe S. 198 ff). Abū-l-Wafā Muḥammad ibn Muḥammad al-Būzǧanī (940—997/8) wurde in Horasan in der Stadt Buzǧan zwischen Herat und Nischapur geboren. Im Alter von zwanzig Jahren zog er nach dem Irak und hatte bald in Baghdād Anerkennung als großer Mathematiker und Astronom gefunden. Von ihm stammen viele Originalwerke sowie umfangreiche Kommentare zu Eukleides, Diophantos, Ptolemaios u.a. Viele seiner Werke sind bis heute noch nicht wieder entdeckt worden. Besonders groß sind seine Verdienste um die Geometrie und insbesondere die Trigonometrie.

Abū-l-Wafā nahm in den geometrischen Abschnitt seines Buches für Schreiber neben dem von al-Ḫuwarizmī übernommenen Material eine Menge zusätzlichen Stoff auf, allerdings ohne die Hinweise auf die Beweisführung, die sein Vorgänger für nützlich hielt. Unter anderem sind hier angegeben: die eben erwähnte Heronische Flächenformel, Regeln zur Berechnung der Kugeloberfläche aus dem Flächeninhalt des Großkreises, des Kugelvolumens aus dem Kugeldurchmesser und dem Umfang des Großkreises $\left(d^2 \cdot \frac{c}{6}\right)$ und des Kugelvolumens aus der Kugeloberfläche $\left(\frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{d}{2}\right)$. Die Zahl π ist in allen Fällen zu $\frac{22}{7}$ angenommen. Zur Berechnung der Fläche eines Kreissegments aus Bogen oder Sehnen sind die Sehnenlängen in einem Kreis mit dem Durchmesser 14 tabelliert, und zwar mit der Schrittweite $\frac{k}{22}\,180°$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, 22$); die Sehnen sind in Sechzigsteln, d. h. in ša'ir, und deren Teilen ausgedrückt. Darüber hinaus gibt Abū-l-Wafā die Regeln zur Umrechnung auf einen beliebigen Kreis sowie die Regeln zur linearen Interpolation an. Neben der Sehnentabelle, in deren Zusammenhang Ptolemaios erwähnt wird, führt Abū-l-Wafā die nachstehende, als indisch bezeichnete Näherungsregel an, die den Durchmesser d eines Kreises durch die Anzahl n der Seiten und die Seite a_n eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ausdrückt:

$$d^2 = a_n^2 \left[\frac{(n-1)\,n}{2} + 3\right] \cdot \frac{2}{9} = \frac{a_n^2\,(n^2 - n + 6)}{9}.$$

Wie man leicht sieht, liefert diese Regel den genauen Wert des Durchmessers für $n = 3$, 4 und 6. Für $n = 5$ macht der Fehler etwa 0,1 % aus, für $n = 10$ beträgt er 1,0 % und für $n = 20$ etwa 2 %, während er für $n \to \infty$ gegen $\frac{\pi - 3}{3}$, d. h. gegen etwas weniger als 5 % strebt. Die Herkunft dieser Näherungsformel ist unbekannt.

Zum Abschluß beschreibt Abū-l-Wafā Methoden, um die Entfernungen unerreichbarer Objekte bzw. deren Höhe mit Hilfe eines am Rande graduierten rechteckigen Brettes und einer darauf drehbar befestigten Visiereinrichtung zu ermitteln.

Wir wissen, daß mehrere Kapitel des arithmetischen Werkes von al-Karaǧī der Geometrie gewidmet sind. Ihr Inhalt deckt sich so weit mit dem des Buches für die

Schreiber, daß man das Werk hier übergehen könnte. Erwähnt werden möchte dennoch eine eigenartige Regel zur Berechnung des Kugelvolumens, nämlich

$$V = d^3\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)^2;$$

das ist aber nichts anderes als $= d\left(\frac{\pi d}{4}\right)^2$ für $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$. Falls hier die Schuld nicht beim Kopisten liegt, so muß man daraus folgern, daß al-Karaǧī das Kugelvolumen dem eines geraden Parallelepipeds gleichsetzt, dessen Höhe der Kugeldurchmesser und dessen Grundfläche ein Quadrat mit dem vierten Teil des Großkreisumfanges als Seite ist. Dies erinnert an die groben Quadraturmethoden, die nach Abū-l-Wafā die Feldvermesser jener Zeit angewandt haben (vgl. S. 275).

Die Regel al-Karaǧīs erregt bei uns weniger Verwunderung, wenn man beachtet, daß im enzyklopädischen Leitfaden des hervorragenden iranischen Mathematikers Behā ad-Dīn al-'Amūlī fünf Jahrhunderte später (vgl. S. 324) das Kugelvolumen mit

$$V = d^3\left\{\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left[\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)\right]\right\} = \left(\frac{11}{14}d\right)^3,$$

angegeben ist, d. h., für $\pi = \frac{22}{7}$ erhält man $V = \left(\frac{\pi d}{4}\right)^3$. Mit anderen Worten, Behā ad-Dīn setzt das Volumen der Kugel dem eines Würfels mit einem Viertel des Großkreisumfanges als Kantenlänge gleich. Der Wert von π, der der Regel Behā ad-Dīns tatsächlich entspricht, ist 2,9; er ist also nur wenig besser als der der Regel al-Karaǧīs entsprechende π-Wert von etwa 3,7. Übrigens teilt Behā ad-Dīn an derselben Stelle mit, daß $V = \frac{d}{2}\cdot\frac{S}{3}$ gilt, wobei er vorher für den Flächeninhalt S der Kugeloberfläche den Ausdruck $4d^2\left(1-\frac{3}{14}\right)$, d. h $\frac{22}{7}d^2$ angibt.

Abū-l-Wafā schrieb ferner ein besonderes Werk über praktische Geometrie: Das „Buch über das, wessen ein Handwerker aus den geometrischen Konstruktionen bedarf" (Kitāb fī ma yaḥtāǧ ilaihi aṣ-ṣanā'min a'māl al-handasiyya). Überliefert sind eine von einem Gelehrten verfaßte Auslegung des Werkes in arabischer Sprache [142] sowie eine persische Übersetzung [143], die etwa aus der gleichen Zeit stammt. Beide Texte ergänzen einander.

Das Buch besteht aus 12 Kapiteln, die eine große Zahl verschiedener Konstruktionen enthalten, soweit diese in der Feldvermessung, in der Architektur, in der Technik und in der Geodäsie wichtig sind. Besonders interessant ist die Tatsache, daß etwa eineinhalb Dutzend Aufgaben mit Hilfe eines einseitigen Lineals und eines Zirkels konstanter Öffnungsweite gelöst werden. Mitunter wurde diese Forderung in die Bedingung der Aufgabe aufgenommen, mitunter nur in der Konstruktion angewandt. Die praktische Bedeutung ähnlicher Konstruktionen ist dadurch bedingt, daß es im Gelände häufig unvorteilhaft ist, Kreise verschiedener Radien zu schlagen. Die ersten Konstruktionen mit konstanter Zirkelöffnung gehen vielleicht auf die indischen „Schnurregeln" zurück; ferner findet man sie auch bei den Griechen. Abū-l-Wafā jedoch gebührt das Verdienst, eine Reihe von Grundaufgaben auf diesem Gebiet systematisch gelöst und das Prinzip als solches klar hervorgehoben zu haben. Sein Verdienst wird keineswegs dadurch geschmälert, daß der Einfachheit halber in man-

chen Aufgaben die Zirkelöffnung nicht beliebig gewählt wird, sondern durch eine in der Aufgabe gegebene Strecke festgelegt ist. Im 16. Jahrhundert setzten Forschungen in dieser Richtung in Italien ein, wo sie wieder von den Bedürfnissen der Praxis diktiert wurden. Dort beschäftigten sich damit Leonardo da Vinci, G. Benedetti, N. Tartaglia, G. Cardano, am Ende des 18. Jahrhunderts L. Mascheroni, im 19. Jahrhundert Jacob Steiner in Deutschland u. a.

In der Einführung konstruiert Abū-l-Wafā mit Hilfe eines Lineals und eines Zirkels mit fester Öffnung die Senkrechten zum Mittelpunkt und zum Endpunkt einer gegebenen Strecke. Im ersten Kapitel, das die Grundkonstruktionen enthält, wird mit den gleichen Mitteln eine beliebige Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile unterteilt und ein Winkel halbiert. Im zweiten Kapitel, das den regelmäßigen Vielecken gewidmet ist, werden mit einer gegebenen Strecke als Seite 3-, 4-, 5-, 6-, 8- und 10-Ecke konstruiert. Im dritten Kapitel wird die Konstruktion der einem gegebenen Kreis einbeschriebenen 3-, 5-, 6- und 8-Ecke behandelt.

In denselben Kapiteln finden wir die Konstruktionen für parallele Geraden, für die Tangente an einen Kreis, für das regelmäßige Siebeneck (als Seite des Siebenecks ist angenähert die halbe Seite des dem gleichen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gewählt), für die mechanische Winkeldreiteilung, für die mechanische Würfelverdoppelung usw. Im ersten Kapitel sind zwei Konstruktionen für einen Spiegel angegeben, der mit Hilfe von Sonnenstrahlen einen in einer bestimmten Entfernung befindlichen Gegenstand entzündet. In dem einen Falle wird die Schablone, d. h. die Parabel, aus den Punkten eines Kreises ermittelt, dessen Radius gleich der doppelten Brennweite ist. Auf Senkrechten, die über dem Durchmesser des Kreises errichtet sind, werden Strecken von der Länge der Sehnen abgetragen, die das eine Ende des Durchmessers mit den Schnittpunkten der genannten Senkrechten mit dem Kreis verbinden; die Endpunkte der so konstruierten Strecken liegen auf der gesuchten Parabel. Bei der zweiten Konstruktion wird eine Schar von Kreisen verwendet, deren Mittelpunkte auf einem Strahl liegen, wobei die Kreise durch den Ausgangspunkt des Strahles hindurchgehen. Beide Konstruktionen treten hier zum ersten Male auf.

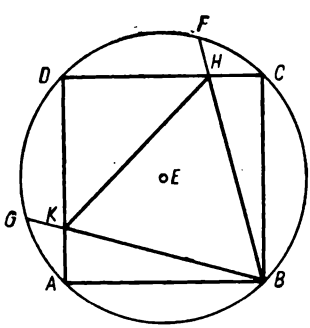


Abb. 67

Im sechsten Kapitel werden Aufgaben über Vielecke behandelt, die entweder einander einbeschrieben werden oder einem Kreis umbeschrieben sind. Als Beispiel sei eine der fünf Methoden zur Konstruktion eines einem Quadrat einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks angegeben. Dem Quadrat mit dem Mittelpunkt E wird zunächst der Kreis umbeschrieben (Abb. 67). Mit dem Radius $\overline{ED}$ schlägt man von D aus einen Kreisbogen, der den Kreis in den Punkten F und G schneidet. Die Schnittpunkte H und K der Geraden $\overline{BF}$ und $\overline{BG}$ mit den Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ sind die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks BHK.

Im achten bis zehnten Kapitel wird die Teilung geradlinig begrenzter Figuren und des Kreises behandelt, z. B. die Halbierung eines Vierecks durch eine Gerade, die durch

irgendeinen Eckpunkt hindurchgeht oder die Abspaltung des n-ten Teiles eines Parallelogramms durch eine Gerade, die durch einen gegebenen, außerhalb des Parallelogramms liegenden Punkt hindurchgeht. Derartigen Aufgaben hatte bereits Eukleides ein besonderes Werk gewidmet.

Schließlich werden im elften Kapitel verschiedene Aufgaben gelöst, bei denen es darum geht, ein Quadrat in eine Summe mehrerer Quadrate zu zerlegen oder aber eine Summe mehrerer Quadrate durch ein einziges Quadrat darzustellen. Dies, schrieb Abū-l-Wafā, werde von vielen Praktikern benötigt, doch seien „alle Methoden, die von den Arbeitern angewendet werden, durch kein Prinzip begründet und daher unzuverlässig und äußerst ungenau" [143, S. 345]. Abū-l-Wafā hatte die Absicht, ein allgemeines Prinzip zur Lösung derartiger Aufgaben aufzustellen. Zunächst werden die einfachsten Konstruktionen eines Quadrats aus n^2 oder aus $n^2 + m^2$ bekannten Quadraten angegeben. Im zuletzt genannten Falle wird praktisch die Beziehung $n^2 + m^2 = 2nm + (n - m)^2$ verwendet: Man erhält das gesuchte Quadrat, wenn man um das Quadrat $(n - m)^2$ vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten n und m gruppiert. Diese Konstruktion, die sich verhältnismäßig leicht realisieren läßt, entspricht der Konstruktion für den Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes in China und Indien (vgl. Abb. 28, S. 99) und ist auch aller Wahrscheinlichkeit nach von den Indern übernommen worden. Anschließend werden ebensolche Aufgaben für die Zerlegung eines Quadrats gelöst.

Danach wird das Problem erörtert, wie ein Quadrat aus einer beliebigen vorgegebenen Anzahl von Quadraten zu konstruieren sei. Eine allgemeine Analyse stellt Abū-l-Wafā nicht an, sondern untersucht den Fall der Quadratverdreifachung. Dies läßt sich erreichen, wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, dessen Katheten gleich der Seite bzw. der Diagonale des vorgegebenen Quadrates sind. Eine solche Lösung, sagt Abū-l-Wafā, reicht für den Geometer aus, doch ist sie für die Praxis ungeeignet. Offenbar ist hier die Rede davon, daß in Wirklichkeit das vorgegebene Quadrat in Teile zerlegt werden muß, aus denen das neue Quadrat zusammenzusetzen ist. Die Abb. 68 gibt die Konstruktion Abū-l-Wafās wieder. Zwei vorgegebene Quadrate werden längs der Diagonale zerschnitten und an ein verbliebenes Dreieck so angelegt, wie wir es in der Abb. 68 sehen. Danach werden die Eckpunkte E, F, G, H miteinander so verbunden, daß ein Quadrat entsteht. Sein Flächeninhalt ist gleich dem dreifachen Flächeninhalt des vorgegebenen Quadrats $ABCD$, denn die schmalen Dreiecke, die über $EFGH$ hinaustreten, sind den innerhalb der Begrenzung des Quadrats liegenden Dreiecken kongruent.

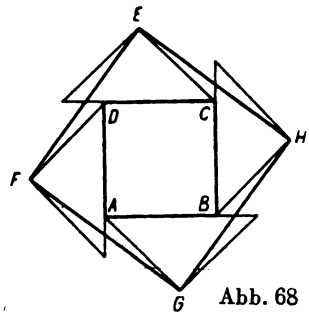


Abb. 68

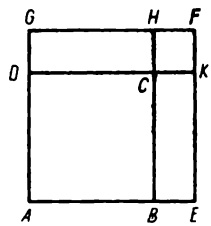


Abb. 69

Sodann formt Abū-l-Wafā zwei vorgegebene Quadrate mit verschiedenen Seitenlängen in ein Quadrat um. Hierzu wird das kleinere Quadrat $ABCD$ auf das größere Quadrat $AEFG$ gelegt (Abb. 69). Die Summe der beiden Quadrate wird nun mit Hilfe der beiden kongruenten Rechtecke $ABHG$ und $AEKD$ sowie des Quadrates $CKFH$ gebildet. Dazu zerlegt man die beiden Rechtecke in vier kongruente Dreiecke, die dann um das Quadrat $CKFH$ entsprechend angeordnet werden. Wir erhalten auf diese Weise ein Quadrat, das gleich der Summe der beiden gegebenen Quadrate ist. Schließlich behandelt Abū-l-Wafā die Zerlegung eines gegebenen Quadrats in zwei andere, von denen das eine eine vorgegebene Seitenlänge besitzt.

Abū-l-Wafās Konstruktion eines Quadrats, dessen Flächeninhalt gleich der Summe zweier gegebener Quadrate ist, enthält im Grunde genommen einen Beweis für den pythagoreischen Lehrsatz, der auf dem Prinzip der gleichen Zusammensetzung beruht. Dieses Prinzip tritt hier ganz deutlich zutage. Einen ebensolchen Beweis mit einer von der Abb. 28 ein wenig abweichenden Zeichnung, die für die Feststellung der gleichen Zusammensetzung noch etwas anschaulicher ist, gab bereits im 9. Jahrhundert Thābit ibn Qurra; wir kennen seine Beweisverfahren durch an-Nairīzī [146].

Zum Fall einer beliebigen Anzahl k gleicher Quadrate bemerkt Abū-l-Wafā, daß man sich hier auf den Lehrsatz des Pythagoras stützen könnte, doch sei dies, wie er erneut hinzufügt, für die Praxis ungünstig. In der Tat ist die Zerlegung in kongruente Teile unter Verwendung des pythagoreischen Lehrsatzes verhältnismäßig kompliziert, obwohl praktisch auch nicht komplizierter als die Konstruktion für drei gleiche Quadrate. Es ist auch nicht möglich, ganz ohne den pythagoreischen Lehrsatz auszukommen. Man könnte lediglich die Frage aufwerfen, wie man eine möglichst günstige Zerlegung einer gegebenen Anzahl von Quadraten so vornehmen kann, daß der pythagoreische Lehrsatz möglichst selten zur Anwendung kommt. Mit Hilfe des Satzes von Fermat, wonach eine beliebige Zahl sich als Summe von höchstens vier Quadraten darstellen läßt, wurde gezeigt, daß man bei beliebigem k den pythagoreischen Lehrsatz höchstens einmal anzuwenden braucht [143].

Im zwölften Kapitel behandelt Abū-l-Wafā eine Methode zur Zerlegung der Kugeloberfläche in reguläre sphärische Vielecke. Selbstverständlich sind die Eckpunkte dieser Vielecke zugleich die Eckpunkte der zugehörigen Polyeder, doch hierüber sagt Abū-l-Wafā nichts. Die eleganten und einfachen Konstruktionen dieses Kapitels liefern die zwölf regulären Polyeder und zwei von den dreizehn von Archimedes entdeckten halbregulären Polyedern, und zwar das Vierzehnflach, das aus acht Dreiecken und sechs Quadraten besteht, sowie das Zweiunddreißigflach mit zwanzig Dreiecken und zwölf Fünfecken. Die Konstruktionen von weiteren drei halbregulären Körpern sind nicht ganz exakt. Die Quellen, auf die sich Abū-l-Wafā hierbei stützte, sind kaum bekannt. Neben den „Elementen" dürfte er zweifelsohne auch die Werke des Pappos gekannt haben, doch sind verschiedene Konstruktionen des Baghdāder Mathematikers in der früheren Literatur nicht anzutreffen und könnten somit von ihm selbst stammen. Viel später beschäftigten sich S. Stevin und J. Kepler erneut mit den halbregulären Polyedern, über die man einiges nur aus der kurzen Beschreibung und Klassifizierung des Pappos wußte.

Wir haben gesehen, daß in arithmetisch-algebraischen Werken der Araber häufig geometrische Abschnitte enthalten sind. Über den Fortschritt, der auf dem Gebiet der Figurenberechnung am Ende des von uns betrachteten Zeitraumes erzielt wurde, kann man nach dem „Schlüssel der Arithmetik" des al-Kāšī urteilen. Das vierte Buch dieses Werkes, „Über Messungen", ist wesentlich reichhaltiger als die entsprechenden Teile der Bücher von al-Ḫuwarizmī und al-Karaǧī, und die Zahlenwerte für inkommensurable Strecken sind, wie bereits erwähnt, mit hoher Genauigkeit berechnet. Manche Aufgaben löst al-Kāšī rein algebraisch, bei anderen verwendet er einzelne trigonometrische Formeln. Für die regelmäßigen n-Ecke mit $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15$ und 16 stellt er Tabellen auf, die das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat der Seite, d. h. $\frac{n}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$, in Sexagesimalbrüchen mit einer Genauigkeit bis zu 60^{-5} und in Dezimalbrüchen mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-6} angeben. Die Tabelle der Werte für $k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots, 60$) wird in Sexagesimalbrüchen bis zu den Terzen und in Dezimalbrüchen ($k = 1, 2, \ldots, 10$) bis 10^{-6} geführt. Neben den Volumina der gewöhnlichen krummlinig begrenzten Körper werden auch die Volumina des schiefen Zylinders, des schiefen Kegels sowie die Volumina hohler Körper betrachtet, etwa in der Art eines „konischen Exzesses" (Kegelstumpf mit einem Hohlraum in Gestalt eines Kegels mit der kleineren Deckfläche des Stumpfes als Grundfläche und mit der Spitze in der Mitte der größeren Deckfläche), in der Art eines „rhombischen Exzesses" (Kombination aus einem Kegel und einem Kegelstumpf mit einem kegelförmigen Hohlraum, dessen Grundfläche die kleinere Deckfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Spitze in die Spitze des Vollkegels fällt), von Hohlzylindern usw. In einer besonderen Tabelle sind die numerischen Charakteristiken der fünf regulären Körper sowie die der beiden halbregulären Polyeder zusammengefaßt, die bereits Abū-l-Wafā konstruiert hatte. An den Schluß stellt al-Kāšī komplizierte Berechnungen und Konstruktionen für Spitzbogen, Gewölbe, Kuppeln und die für die arabische Architektur charakteristischen sog. Stalaktiten[1]) [144].

Die Lehre von den Parallelen. Eine hervorragende Bedeutung hatten die Forschungen, die dem fünften Postulat des Eukleides über die Parallelen gewidmet waren. Einen Beweis für dieses Postulat hatten bereits die Griechen versucht.[2]) Die zugehörigen Forschungen dauerten über vier Jahrhunderte an.

Die Entwicklung der Lehre von den Parallelen begann ebenso wie die der Verhältnislehre in den islamischen Ländern kurz nach der Übersetzung der „Elemente" ins Arabische. Die erste uns bekannte Untersuchung zur Theorie der Parallelen geht auf den bereits erwähnten Zeitgenossen und Mitarbeiter al-Ḫuwarizmīs, den Astronomen und Mathematiker al-'Abbas ibn Sa'īd al-Ǧauharī aus Farab (heute Otrar in der

[1]) Unter Stalaktiten versteht man mehrreihige Systeme übereinanderhängender, mehrflächig begrenzter Prismen mit ebenen oder gekrümmten Begrenzungsflächen, die als Ornamente an Gesimsen, Erkern, Portalen usw. dienen.

[2]) Nach dem fünften Postulat gilt: Bildet eine Gerade mit zwei anderen in der gleichen Ebene liegenden Geraden innere einseitige Winkel, die zusammen weniger als zwei Rechte ergeben, so schneiden sich bei hinreichender Verlängerung diese beiden Geraden auf der Seite, auf der die Summe kleiner ist als zwei Rechte [33a, Buch I, Post. 5].

Kasachischen SSR) zurück. Den zugehörigen Abschnitt seines Werkes „Vervollkommnung des Buches der ‚Elemente'" (Islāḥ li kitāb al-Uṣūl) kennen wir aus der Darlegung des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī [144*a*]. Al-Ǧauharī schlug einen Beweis für das fünfte Postulat vor, der auf der folgenden implizite vorgenommenen Voraussetzung beruht: Wenn beim Schneiden zweier Geraden durch eine beliebige dritte die Wechselwinkel gleich sind, so ist dies auch der Fall, wenn diese beiden Geraden durch eine beliebige andere Gerade geschnitten werden. Dies Annahme verwendet al-Ǧauharī in seinem ersten Satz, in dem behauptet wird, daß zwei solche Geraden einander nicht schneiden und äquidistant sind. Ferner leitet al-Ǧauharī die Sätze daraus her, daß die Mittellinie eines Dreiecks gleich der halben Grundlinie ist, und daß man durch jeden beliebigen im Innern eines Winkels liegenden Punkt eine Gerade ziehen kann, die beide Schenkel des Winkels schneidet (woraus dann das fünfte Postulat folgt). Der letzte Satz ist besonders bemerkenswert.

Auf einer verstärkten Annahme dieses Satzes beruht der berühmte „Beweis" des fünften Postulats von Eukleides, der im Jahre 1800 durch den französischen Mathematiker A. M. Legendre vorgeschlagen wurde.

Um 900 widmete an-Nairīzī der Lehre von den Parallelen einen bedeutenden Teil seiner Kommentare der „Elemente" [144*b*]. Abū-l-'Abbās al-Faḍl ibn Hātim an-Nairīzī (gest. etwa 922) aus Nairiza bei Schiraz wirkte in Baghdād währen der Herrschaft des Kalifen Mu'tadīd (892—903). Er beschäftigte sich mit Astronomie und Mathematik, schrieb Werke über den sphärischen Astrolab sowie über die Bestimmung der Richtung der Ḳibla[1]) und kommentierte den Ptolemaios und den Eukleides. Die Kommentare zu den Büchern I bis VI der „Elemente" sind in einer arabischen Handschrift [145], die zu den Büchern I bis X in der lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona [146] erhalten geblieben.

In seinen Kommentaren zur Lehre von den Parallelen beruft sich an-Nairīzī auf den griechischen Philosophen Simplikios aus der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts. Es ist durchaus möglich, daß er über Simplikios mit der sehr ausführlich dargelegten Parallelenlehre des Aganis, eines Zeitgenossen des Simplikios, bekannt geworden ist.

Eine Zentralstellung in der Parallelenlehre des Aganis nimmt die Definition der Parallelen als solcher Geraden ein, die, falls sie in einer Ebene liegen, bei beliebiger Verlängerung äquidistant bleiben. Unter dem Abstand zwischen zwei Geraden versteht Aganis, wie es bei an-Nairīzī heißt, den von einem Punkt der einen Geraden zu anderen Geraden gemessenen kürzesten Abstand.

Die Definition des Aganis enthält eine Behauptung, die dem fünften Postulat des Eukleides äquivalent ist. Sie war keineswegs neu. Von Proklos wissen wir, daß Poseidonios im 1. Jahrhundert v. u. Z. die Parallelen ähnlich definiert hatte. Für Poseidonios waren die Parallelen solche Geraden, die, in einer Ebene befindlich, sich weder einander näherten noch voneinander entfernten, so daß die Lote, die von den Punkten der einen Geraden auf die andere gefällt werden, sämtlich gleiche Länge haben [147, 148].

Sodann beweist an-Nairīzī verschiedene von Aganis angegebene Sätze: Der Abstand zwischen zwei Parallelen wird durch eine Strecke bestimmt, die auf beiden Geraden senkrecht steht; zwei Gerade, die zu einer dritten orthogonal sind, sind parallel;

[1]) Die Seite, nach der die Mohammedaner beim Gebet das Gesicht zu richten haben (nach der Kaaba in Mekka).

eine Gerade, die zwei parallele Geraden schneidet, erzeugt auf der einen Seite zwei Innenwinkel, die zusammen zwei Rechte ergeben. Der letzte Satz ist der Satz 29 aus dem ersten Buch der „Elemente", und zwar der erste, den Eukleides mit Hilfe seines fünften Postulats beweist. Im Verlauf des Beweises, der bei Aganis auf der Annahme der Existenz äquidistanter Geraden beruht, wird nebenher die Existenz eines Rechtecks nachgewiesen.

Etwas später wird in Gestalt des Satzes 35 das fünfte Postulat selbst bewiesen, wobei der Schnittpunkt der zugehörigen Geraden konstruiert wird. Natürlich ist dies ein Zirkelschluß. Bei der Konstruktion wird angenommen, daß man bei hinreichend häufiger Halbierung einer von zwei gegebenen Strecken eine Strecke erhält, die kleiner ist als die kleinere der beiden gegebenen. Dieser Satz ist dem sog. Axiom von Eudoxos und Archimedes äquivalent.

Die Gedanken, die im Kommentar des an-Nairīzī ausgesprochen wurden, wurden bald weiterentwickelt. Eine besondere Bedeutung hatte die Definition der Parallelen nach Poseidonios-Aganis vor allem für ibn al-Haitham.

Als Zwischenglied zwischen dem Werk über die Parallelentheorie von al-Ǧauharī und den Werken der Mathematiker des 10. und der späteren Jahrhunderte sind neben den Kommentaren an-Nairīzīs zwei Werke des Thābit ibn Qurra aufzufassen: „Das Buch über den Beweis des bekannten Postulats von Euklid" (Maqāla fī burhān al-muṣādara al-mašḫūra min Uqlīdis) [148*a*] und das „Buch darüber, wie zwei Linien, die unter Winkeln gezogen werden, die kleiner sind als zwei rechte, einander treffen" (Maqāla fī anna al-hattain iz a uḫriǧa 'alai aqall min zawijatain qaimatain iltaqyyn) [148*b*]. Diese beiden Versuche, das fünfte Postulat Eukleides' zu beweisen, sind wesentlich voneinander verschieden; welcher davon der ältere ist, ist unbekannt.

Im erstgenannten Werk lehnt sich Thābit ibn Qurra eng an al-Ǧauharī an. Der erste Satz ibn Qurras stimmt inhaltlich mit dem ersten Satz al-Ǧauharīs überein (s. S. 278). Darin wird behauptet, daß zwei Gerade „sich weder einander nähern, noch voneinander in irgendeiner der beiden Richtungen entfernen", wenn beim Schnitt der zwei Geraden durch eine dritte die Wechselwinkel einander gleich sind [155a, S. 593]. Der Terminus „Parallellinien" wird in dieser Abhandlung nicht benutzt. Nachdem ibn Qurra gezeigt hat, daß zwei Gerade, die sich auf der einen Seite der schneidenden Geraden einander nähern, sich auch auf der anderen Seite dieser Geraden einander nähern müssen, wiederlegt er diese Möglichkeit auf Grund der Tatsache, daß zwei Geraden, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, sich auf der einen Seite voneinander entfernen müssen, wenn sie auf der anderen Seite sich einander nähern. Diese Behauptung gehört in das Gebiet der absoluten Geometrie. Weiter jedoch erklärt ibn Qurra einfach: „Genauso wird widerlegt, daß sie sich voneinander entfernen" [ebenda, S. 594]. Damit wird eine dem fünften Postulat äquivalente Behauptung aufgestellt, daß zwei Geraden, sobald sie sich auf der einen Seite einer dritten, die beiden schneidenden Geraden voneinander entfernen, sich auf der anderen Seite einander nähern. Im Satz III wird die Existenz eines Parallelogramms bewiesen; anschließend folgt der Satz über die Mittellinie des Dreiecks (bei al-Ǧauharī ist es der Satz II). Schließlich wird unter Verwendung des Axioms von Eudoxos und Archimedes das fünfte Postulat bewiesen.

Ganz anders sind die Ausführungen ibn Qurras in der zweiten Abhandlung. Hier begründet er zunächst sehr ausführlich die Notwendigkeit, den Begriff der Bewegung in den geometrischen Beweisen anzuwenden (das könnte auch damit zusammenhängen, daß er ein ausgezeichneter Kenner des Archimedes war und sich auch selbst mit der Mechanik beschäftigt hat)[1]). Sodann stellt er die Behauptung auf, daß ein beliebiger Punkt eines jeden Körpers, der sich als Ganzes in einer Richtung einfach bewegt, in dieser Richtung eine gerade Linie beschreibt. Diese „einfache" Bewegung ist offenbar die geradlinige gleichförmige Bewegung. Auf dieser kinematischen Grundlage wird im Satz IV die Existenz eines Rechtecks bewiesen. Im Satz VII wird, wieder unter Anwendung des Axioms von Eudoxos und Archimedes, das fünfte Postulat bewiesen. Es sei noch erwähnt, daß im Satz II folgendes bewiesen wird: In einem Viereck, in dem zwei Winkel an der einen Seite und die beiden sich anschließenden Seiten gleich sind, sind auch die beiden übrigen Winkel gleich. Ein solches Viereck (in dem die ersten beiden Winkel rechte sind) untersuchten später al-Ḫayyām, aṭ-Ṭūsī und Saccheri.

Der gedankliche Zusammenhang zwischen den kinematischen Beweisen ibn Qurras und al-Ḫayyāms, der gleichfalls nicht nur Mathematiker, sondern auch Physiker war, ist augenfällig, obwohl der aus Kairo stammende Gelehrte seinen Vorgänger nicht erwähnt. Al-Ḫayyām nennt in seinem Beweis des fünften Postulats ibn-Qurra nur als Übersetzer der „Elemente" des Eukleides, der einige Verbesserungen angebracht habe. Jedoch läßt die Ähnlichkeit verschiedener Sätze in der zweiten Abhandlung ibn Qurras und in der Abhandlung al-Ḫayyāms schließen, daß dieser das Werk ibn Qurras zumindest in irgendeiner Bearbeitung gekannt hat.

Der Analyse des klassischen Werkes des Eukleides hat ibn al-Haitham zwei Werke gewidmet, das „Buch der Kommentare zu den Einführungen des Buches des Eukleides, die ‚Elemente'" (Kitāb šarḥ muṣadarāt kitāb Uqlīdis fī-l-Uṣūl), in dem die Definitionen, Axiome und Postulate untersucht werden, und das spätere Werk „Über die Auflösung der Zweifel im Buch des Eukleides, die ‚Elemente'" (Fī ḥall šukūk kitāb Uqlīdis fī-l-Uṣūl), in dem die Sätze kommentiert werden. Die Theorie der Parallelen wird im ersten Werk behandelt [149, 150].

Ibn al-Haitham hält es für notwendig, vor allem den Begriff der Parallelen als solcher Geraden zu begründen, die in einer Ebene liegen und sich bei Verlängerung auf keiner Seite schneiden, da es nicht möglich ist, eine unendliche Verlängerung darzustellen. Daher ist die Möglichkeit sowohl der Konstruktion einer unendlichen Geraden ganz allgemein als auch speziell der Konstruktion paralleler Geraden erst nachzuweisen. Das erste wird durch Konstruktion einer Strecke bewerkstelligt, die ein beliebiges Vielfaches einer gegebenen Strecke darstellt, d. h. in Wirklichkeit durch Anwendung des sog. Axioms von Eudoxos-Archimedes, das allerdings nicht explizite erwähnt wird. Für das zweite führt ibn al-Haitham eine neue Definition der Parallelen ein, die implizite einen das fünfte Postulat mit umfassenden Satz enthält und sich auf die Anwendung einer kontinuierlichen Bewegung in der Geometrie stützt. Er betrachtet die Linie, die in der Ebene durch das freie Ende eines Lotes konstanter Länge zu einer gegebenen Geraden beschrieben wird, wenn der Fußpunkt des Lotes auf

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen über banū Mūsā S. 271

der gegebenen Geraden entlanggleitet. Eine solche Bewegung nennt man einfach. Etwas vage, wenn auch sehr breite Ausführungen über die „Gleichheit und Ähnlichkeit" sämtlicher Punkte des beweglichen Lotes lassen dann den Autor auf die Kongruenz der Bahnkurven schließen, die durch sämtliche Punkte des Lotes in der gleichen Zeit beschrieben werden; ferner schließt er hieraus, daß die vom Endpunkt des Lotes beschriebene Linie eine zur gegebenen Geraden äquidistante Gerade ist. Damit ist für ibn al-Haitham die Existenz paralleler Geraden nachgewiesen und die Frage nach deren Konstruktionsmöglichkeit geklärt. In Wirklichkeit schließt, wie wir bereits erwähnten, die Behauptung ibn al-Haithams das fünfte Postulat des Eukleides bereits mit ein.[1])

Sodann geht ibn al-Haitham zum Beweis des fünften Postulats über. Der Beweis stützt sich wesentlich auf die eben angegebene Definition der parallelen Geraden und enthält verschiedene in historischer Beziehung interessante Momente. Ibn al-Haitham betritt hier bereits den Weg, den später viele seiner direkten und indirekten Nachfolger einschließlich der Geometer des 18. Jahrhunderts eingeschlagen haben. Er betrachtet ein Viereck $ABCD$ (Abb. 70), in dem die Winkel bei A und B an der Basis rechte sind; $\overline{CD}$ sei ein Lot, das von einem beliebigen Punkt C der Seite $\overline{AC}$ auf $\overline{BD}$ gefällt wurde, d. h., er betrachtet das gleiche Viereck mit drei rechten Winkeln, das später Johann Heinrich Lambert seinen Arbeiten zur Parallelentheorie zugrunde gelegt hat. Es ist zu zeigen, daß auch der vierte Winkel bei C ein rechter ist. Dazu wird bewiesen, daß die dem vierten Winkel anliegende Seite der gegenüberliegenden Seite $\overline{AB}$ gleich ist. Beim Beweis stützt sich al-Haitham auf einen Gedanken, der in verschiedenen Varianten von späteren Geometern benutzt wurde, d. h., er führt den Beweis indirekt, indem er aus der Annahme $\overline{CD} > \overline{AB}$ oder $\overline{CD} < \overline{AB}$ einen Widerspruch herleitet.

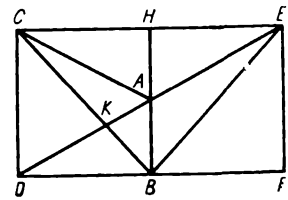


Abb. 70

Zunächst wird angenommen, es sei $\overline{CD} > \overline{AB}$. Die Seite $\overline{CA}$ wird um die Strecke $\overline{AE} = \overline{CA}$ verlängert; auf die Verlängerung von $\overline{DB}$ wird das Lot $\overline{EF}$ gefällt, und es werden die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{BE}$ gezogen. Ohne Schwierigkeiten wird nun bewiesen, daß $\overline{EF} = \overline{CD}$ ist, so daß auf Grund unserer Annahme $\overline{EF} > \overline{AB}$ gilt. Nun nehmen wir an, $\overline{EF}$ bewege sich längs FBD derart, daß es zu dieser dauernd senkrecht bleibt, bis es mit $\overline{CD}$ zur Deckung kommt. Sobald F mit B zur Deckung gelangt, fällt die Strecke $\overline{EF}$ auf $\overline{BA}$ und nimmt auf Grund unserer Annahme die Lage von $\overline{BH}$ ein, wobei $\overline{BH} > \overline{BA}$ ist. Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt: Auf Grund ihrer Konstruktion ist die Linie CHE eine Gerade; das gleiche gilt auch für die Linie CAE, und zwei Geraden können keine Fläche begrenzen. Somit ist unsere Annahme $\overline{CD} > \overline{AB}$

[1]) In der nichteuklidischen Lobatschweskischen Ebene und ebenso in der nichteuklidischen Ebene Riemanns ist eine einer Geraden äquidistante Linie gekrümmt.

nicht haltbar. Ähnlich wird bewiesen, daß auch die Annahme $\overline{CD} < \overline{AB}$ unhaltbar ist.[1])

Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß es sich bei dem Viereck $CDFE$ um das berühmte Viereck von al-Ḥayyām und Saccheri handelt, von dem in Kürze die Rede sein soll.



Abb. 71. Beweis des Satzes über das Viereck mit drei rechten Winkeln in der Abhandlung des ibn-al-Haitham (Kasaner Handschrift)

[1]) Die Ungleichung $\overline{CD} > \overline{AB}$ gilt in der nichteuklidischen Lobatschweskischen Ebene, die Ungleichung $\overline{CD} < \overline{AB}$ hingegen in der nichteuklidischen Ebene Riemanns.

Nachdem ibn al-Haitham die Gleichheit der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nachgewiesen hat, zeigt er leicht, das auch der vierte Winkel C des Vierecks mit drei rechten Winkeln ein rechter ist, d. h., er beweist die Existenz von Rechtecken und damit auch das fünfte Postulat selbst. Er unterscheidet hierbei drei Fälle: 1. Der eine der beiden auf derselben Seite der Schnittgeraden liegenden Winkel ist ein rechter; 2. dieser Winkel ist spitz und 3. dieser Winkel ist stumpf. Wir wollen diese Fälle nicht einzeln untersuchen, da sie nicht von prinzipieller Bedeutung sind. Es sei lediglich erwähnt, daß ibn al-Haitham beim Beweis, daß zwischen einem Lot und einer geneigten Geraden ein Schnittpunkt existiert, einen Satz als selbstverständlich formuliert, der im Jahre 1882 von Moritz Pasch als wichtiges Axiom der Planimetrie eingeführt wurde. Es handelt sich dabei um eines der sog. Anordnungsaxiome (in der Terminologie David Hilberts): Eine Gerade, die nicht durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und eine Dreieckseite schneidet, schneidet auch eine der beiden anderen Dreieckseiten. Diesen Satz benutzt später auch Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī.

Zum Abschluß erklärt ibn al-Haitham, das von ihm bewiesene fünfte Postulat müsse aus der Reihe der Postulate gestrichen werden und müsse als Satz dem Satz 29 des Buches I der „Elemente" vorausgehen. Zu den verbliebenen vier Axiomen sei der Satz hinzuzunehmen: Zwei Gerade begrenzen keine Fläche.[1])

Eines der wichtigsten Ergebnisse ibn al-Haithams war die klare Herausstellung der Wechselbeziehung zwischen dem Parallelenpostulat und der Winkelsumme im Viereck. Bei Eukleides war diese Beziehung noch einseitig: Aus dem Parallelenpostulat folgte, daß ihre Summe vier Rechten gleich sei. Zu erwähnen ist noch, daß ibn al-Haitham einen weiteren Satz aussprach, der in der Entwicklung der Parallelenlehre eine große Rolle gespielt hat. Es handelt sich um die Behauptung, daß zwei einander schneidende Geraden nicht ein und derselben Geraden parallel sein können. Im zweiten Kommentar zu den „Elementen" äußerte er, daß dieser Satz auf „eine von Eukleides bewiesene Behauptung hinausläuft", jedoch „für das Gefühl anschaulicher sei" [144*a*, S. 526]; diesen Satz benutzt er im weiteren beim Beweis des Satzes 29 aus dem Buch I der „Elemente".

Eine Weiterentwicklung erlebte die Theorie der Parallelen bei 'Umār al-Ḫayyām [132]. In seinen „Kommentaren zu den Schwierigkeiten in der Einführung des Buches des Eukleides" ist al-Ḫayyām im Prinzip mit ibn al-Haitham einig. Nach dem Vorbild von Aristoteles und Eukleides wendet sich al-Ḫayyām gegen die Verwendung der Bewegung in der Geometrie. Ibn al-Haitham beruft sich bei der Einführung seiner Definition auf Eukleides selbst, der die Kugel als Ergebnis der Rotation eines Halbkreises um den Durchmesser definierte. Al-Ḫayyām hingegen sagt, daß der Verfasser der „Elemente" hier inkonsequent gewesen sei. In den stereometrischen Büchern seien überhaupt viele Liederlichkeiten vorhanden, die Eukleides möglicherweise deshalb hat durchgehen lassen, weil der Leser, der bis zu diesen Büchern gekommen

[1]) Dieser Satz, den Eukleides explizite als offenbar richtig beim Beweis des Satzes über die Kongruenz zweier Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, benutzt, tritt in manchen späteren Ausgaben der „Elemente" als IX. Axiom auf. Die meisten Mathematikhistoriker bezweifeln jedoch, daß dieses IX. Axiom von Eukleides selbst stammt.

sei, bereits eine gewisse Erfahrung gesammelt habe. Eukleides definiere ja auch den Kreis nicht als Ergebnis der Drehung einer an einem Punkt befestigten Strecke in einer Ebene. Al-Ḫayyām schlägt vor, das Parallelenpostulat durch ein anderes Prinzip zu ersetzen, das nach seinen Worten bereits Aristoteles vorgeschlagen habe[1]): Zwei zusammenlaufende (d. h. einander sich nähernde) Geraden schneiden sich, und es ist unmöglich, daß sie in Richtung des Zusammenlaufens auseinanderlaufen. Das gesamte erste Buch seiner „Kommentare" ist der Herleitung des Parallelenpostulats aus diesem Prinzip gewidmet.

In der Parallelenlehre des al-Ḫayyām selbst finden sich verschiedene schwache Stellen, Längen und einzelne Unexaktheiten. Bereits das von ihm vorgeschlagene „Prinzip" besteht aus zwei Behauptungen, deren jede dem fünften Postulat des Eukleides äquivalent ist, so daß man nach Belieben eine davon weglassen kann. Wir wollen uns nicht auf eine Kritik der Überlegungen al-Ḫayyāms einlassen, sondern die Momente hervorheben, die historisch wertvoll sind.

Zunächst formuliert al-Ḫayyām das Axiom des Archimedes und das eben erwähnte Axiom über die zusammenlaufenden Linien. Aus diesem Axiom geht, wie die Ausführungen al-Ḫayyāms zeigen, hervor, daß zwei auf eine Gerade gefällte Lote äquidistant sind. Sodann leitet er acht Sätze her, durch die der Satz 29 des Buches I der „Elemente" zu ersetzen ist.[2])

Hier wird das „Saccherische Viereck" untersucht, das aus einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$, zwei gleichen Loten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ an den Endpunkten von $\overline{AB}$ und von der Strecke $\overline{CD}$ gebildet wird.

Im Satz 1 wird bewiesen, daß die beiden oberen Winkel dieses Vierecks gleich sind. Der Satz 2 zeigt, daß das Lot $\overline{EG}$ auf die Mitte der unteren Grundlinie auch zur oberen Grundlinie senkrecht ist und diese halbiert. Eine zentrale Stellung nimmt der 3. Satz al-Ḫayyāms ein. In diesem werden drei Annahmen untersucht, und zwar: 1. die oberen Winkel des Vierecks sind spitz, 2. die oberen Winkel sind stumpf, 3. die oberen Winkel sind rechte. Die ersten beiden Annahmen werden unter Verwendung des neuen Parallelenpostulats auf einen Widerspruch zurückgeführt. Zum Beweis wird das Lot $\overline{EG}$ auf die Mitte der unteren Grundlinie $\overline{AB}$ um die Strecke $\overline{GK} = \overline{EG}$ verlängert; auf $\overline{EK}$ wird das Lot $\overline{FH}$ bis zum Schnitt mit den Verlängerungen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gefällt; im Viereck $CDFH$ sind die Seiten $\overline{CH}$ und $\overline{DF}$ gleich. Sodann wird die Zeichnung (Abb. 72) längs der Geraden $\overline{CD}$ geknickt. Hierbei wird unter der Voraussetzung eines spitzen Winkels die Strecke $\overline{HF}$ in die Strecke $\overline{SN}$ übergehen, die größer ist als die untere Grundlinie. Wird hingegen ein stumpfer Winkel vorausgesetzt, so geht $\overline{HF}$ in die Strecke $\overline{LM}$ über, die kürzer ist als die untere Grundlinie. Sodann wird die gesamte Zeichnung um die Gerade $\overline{AB}$ geklappt.

---

[1]) In den uns bekannten Werken des Aristoteles findet man die Formulierung dieses Prinzips nicht.

[2]) Eine Gerade, die zwei parallele Geraden schneidet, bildet gleiche Wechselwinkel, ein äußerer Winkel ist gleich dem gegenüberliegenden inneren Winkel, und die Summe zweier auf derselben Seite liegenden Innenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Dann müssen, einen stumpfen Winkel vorausgesetzt, zwei Lote zur Strecke $\overline{AB}$ auf beiden Seiten von $\overline{AB}$ auseinandergehen, während sie bei spitzem Winkel auf beiden Seiten von $\overline{AB}$ zusammenlaufen. Zwei Lote auf eine Gerade sind indessen, wie bereits bewiesen, äquidistant, weshalb nur die Voraussetzung eines rechten Winkels zulässig ist.

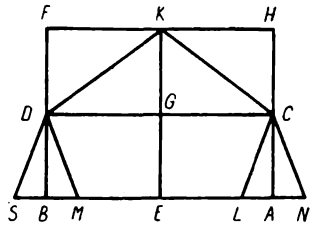


Abb. 72

Die weiteren Sätze werden zum Beweis des Satzes 7 benutzt, der mit dem Satz 29 im Buch I der „Elemente" identisch ist; ferner dienen sie zur Begründung des Satzes 8, in dem das fünfte Postulat des Eukleides bewiesen wird.

Es sei bemerkt, daß manche Besonderheiten in der Darlegung al-Ḫayyāms davon zeugen, daß er die Kommentare an-Nairīzīs gut gekannt hat. Al-Ḫayyām erwähnt diese Kommentare und spricht auch von einigen anderen Versuchen, das fünfte Postulat zu beweisen. Er analysiert jedoch nur die Auffassungen, die in der „Auflösung der Zweifel" des ibn al-Haitham niedergelegt sind.

Den nächsten Schritt in der Entwicklung der Lehre von den Parallelen vollzog Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, von dem wir drei Werke kennen, in denen dieses Problem behandelt wird. Das erste hiervon ist die „Abhandlung, die die Bedenken hinsichtlich der parallelen Linien zerstreut" (Ar-risāla aš-šatiyya 'an aš-šakk fī-l-ḫuṭūṭ al-mutawāziyya) [144*a*], die vor 1251 entstanden ist. Die beiden anderen sind zwei verschiedene Fassungen der „Darlegungen des Eukleides" [151, 152, 153, 153a], d. h. zwei Ausgaben der „Elemente" mit Ergänzungen und Abänderungen von aṭ-Ṭūsī.

In der Abhandlung aṭ-Ṭūsīs wird ausführlich, mitunter wortgetreu, obwohl auch mit einigen wesentlichen Lücken, die Parallelentheorie des al-Ǧauharī, des ibn al-Haitham (nach dessen Werk „Über die Auflösung der Zweifel im Buch des Eukleides ‚Die Elemente'") und des al-Ḫayyām dargelegt. Jede Theorie wird einer kritischen Analyse unterzogen, und zum Abschluß entwickelt aṭ-Ṭūsī einen eigenen Aufbau der Parallelenlehre, wobei er sich weitgehend auf al-Ḫayyām und teilweise auf al-Ǧauharī stützt. Später wurde dieser Aufbau in verbesserter Form in die erste Fassung der „Darlegung des Eukleides" aufgenommen, die erst 1888 in Teheran veröffentlicht wurde. Neu ist hier der Umstand, daß aṭ-Ṭūsī in seiner Abhandlung versucht hat, das fünfte Postulat ohne irgendwelche zusätzliche Voraussetzungen zu beweisen; dabei hat er in Wirklichkeit implizite eine Behauptung benutzt, durch die er in der ersten Fassung der „Darlegung des Eukleides" dieses Postulat ersetzt hatte. Dieses eigene Postulat des Nasīr ad-Dīn lautet: Falls zwei in einer Ebene liegende Geraden in einer Richtung auseinanderlaufen, so können sie in dieser Richtung nicht zusammenlaufen, sofern sie sich nicht schneiden.[1])

Auch Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī fügt nach dem 28. Satz der „Elemente" eine ganze Serie von Sätzen ein. Er betrachtet das gleiche Viereck wie oben, und sein Satz 3 ist

[1]) Im 18. Jahrhundert wurde dieses Postulat anstelle des euklidischen von Robert Simson vorgeschlagen.

mit dem dritten Satz al-Ḫayyāms identisch. Die Widerlegung der Annahme eines stumpfen oder spitzen Winkels nimmt er allerdings auf andere Art vor.

Bei Voraussetzung eines stumpfen Winkels (Abb. 73) wird im Scheitel A zu $\overline{AC}$ die Senkrechte $\overline{AE}$ errichtet. Da B ein rechter Winkel ist, ist im Dreieck ABE die Hypotenuse $\overline{AE}$ länger als die Kathete $\overline{AB}$. Sodann wird in E zu $\overline{BD}$ die Senkrechte $\overline{EG}$ errichtet, die als Hypotenuse des Dreiecks AEG länger ist als $\overline{AE}$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens zeigt Nasīr ad-Dīn, daß die Grundlinien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Vierecks in der Richtung von $\overline{AB}$ nach $\overline{CD}$ auseinanderlaufen. Analog wird gezeigt, daß die Geraden CA und DB in der Richtung von $\overline{CD}$ nach $\overline{AB}$ auseinanderlaufen. Damit wird die Annahme des stumpfen Winkels auf einen Widerspruch zum vorausgesetzten Postulat zurückgeführt. Ähnlich wird auch die Annahme des spitzen Winkels widerlegt; in diesem Falle müssen die Grundlinien in zwei entgegengesetzten Richtungen zusammenlaufen.

Nachdem er festgestellt hat, daß in dem betrachteten Viereck sämtliche Winkel rechte sind, beweist Nasīr ad-Dīn im Satz 5 ebenso wie al-Ḫayyām den Satz 29 aus dem Buch I der „Elemente". Es folgen zwei Varianten des Beweises für das fünfte Postulat. In der einen Variante wird bewiesen, daß zwei Geraden, von denen die eine eine dritte Gerade senkrecht, die andere diese schiefwinklig schneidet (Satz 6), auch einander schneiden müssen, woraus dann das fünfte Postulat (Satz 7) hergeleitet wird. In der zweiten Variante wird bewiesen, daß man durch einen Punkt, der zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt, eine Gerade legen kann, die beide Schenkel schneidet (Satz 7), woraus dann wiederum das fünfte Postulat (Satz 8) folgt.

In der zweiten Fassung der „Darlegung des Eukleides" schlägt Nasīr ad-Dīn einen anderen Weg ein. Anstelle des Postulats der ersten Fassung setzt er zwei Voraussetzungen:

1. Sind AB und CD zwei Geraden (Abb. 74) derart, daß die Lote $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{KL}$, die von den Punkten der Geraden AB auf die Gerade CD gefällt werden, stets ungleiche Nebenwinkel erzeugen, wobei diese stets auf der Seite der Richtung B spitz und auf der Seite der Richtung A stumpf sind, so werden sich die beiden Geraden AB und CD so lange einander nähern, bis sie sich auf der Seite der spitzen Winkel schneiden und auf der Seite der stumpfen Winkel auseinanderlaufen, d. h., die Lote werden in Richtung der Punkte B und D immer kleiner und in Richtung der Punkte A und C immer größer.

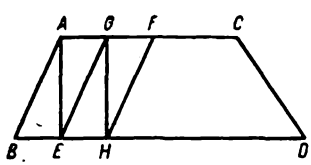


Abb. 73

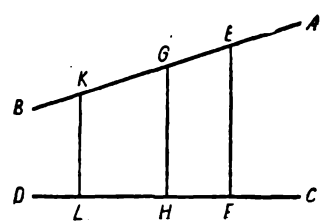


Abb. 74

2. Wenn umgekehrt die auf diese Weise gefällten Lote in Richtung der Punkte B und D immer kürzer und in Richtung der Punkte A und C immer länger werden, so daß sich die Geraden AB und CD in Richtung der Punkte B und D einander nähern, während sie sich in der entgegengesetzten Richtung entfernen, so bildet jedes Lot mit der Geraden AB zwei Winkel, von denen der eine stumpf und der andere spitz ist; dabei liegen sämtliche spitzen Winkel nach der Seite der Punkte B und D, die stumpfen dagegen auf der entgegengesetzten Seite.

Mit Hilfe dieser Voraussetzungen versucht Nasīr ad-Dīn zu beweisen, daß in dem bereits erwähnten Viereck sämtliche Winkel rechte sind, d. h. damit den Satz 3 aus der ersten Fassung der „Darlegung des Eukleides". Der Beweis wird wiederum indirekt geführt, allerdings benutzt hier Nasīr ad-Dīn, ohne es selbst zu bemerken, einen Satz, der dem fünften Postulat äquivalent ist. Das liegt daran, daß die beiden genannten Voraussetzungen, die man mit den Mitteln der absoluten Geometrie, d. h. unabhängig vom fünften Postulat, beweisen kann, nicht ausreichen, um den genannten Satz 3 zu beweisen. Wir wollen uns bei dieser Lücke in den Ausführungen Nasīr ad-Dīns nicht aufhalten, die später Saccheri ganz klar erkannt hat. Wir wollen aber einen anderen wichtigen Umstand erwähnen. Bei der Durchführung des Beweises für den Satz 3 beweist Nasīr ad-Dīn gesondert, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, und zwar zunächst für das rechtwinklige Dreieck, indem er ein Viereck mit vier rechten Winkeln durch eine Diagonale zerlegt. Sodann führt er diesen Beweis für beliebige Dreiecke, indem er diese durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegt. Schließlich beweist er den Satz 29 des Buches I der „Elemente", wobei er ebenso wie früher ibn al-Haitham nebenbei das spätere „Axiom von Pasch" formuliert.

Die Gedanken des al-Ḫayyām und des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī nehmen in der Entwicklung der Parallelenlehre und in der Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie eine hervorragende Stellung ein. Selbstverständlich waren sie weit davon entfernt, die Idee der Möglichkeit eines geometrischen Systems zu äußern, das von dem euklidischen verschieden sei; sie waren lediglich bestrebt, das Parallelenpostulat auf Grund von Sätzen zu beweisen, die sie selbst für anschaulicher hielten. Dabei haben sie nebenher eine Reihe wichtiger Entdeckungen gemacht. Über die eine, nämlich die wechselseitige Abhängigkeit zwischen dem Parallelenpostulat und der Winkelsumme des Vierecks und damit des Dreiecks, hatten wir bereits gesprochen. Ein anderes wichtiges Moment bildete der Versuch, die Hypothesen des spitzen und stumpfen Winkels durch Zurückführung auf einen Widerspruch zu widerlegen. Darüber hinaus hatte es al-Ḫayyām, als er unter der Voraussetzung eines spitzen und eines stumpfen Winkels feststellte, daß die obere Grundlinie seines Vierecks länger bzw. kürzer ist als die untere, in Wirklichkeit bereits mit den einfachsten Sätzen der nichteuklidischen Geometrie zu tun, obwohl er weit davon entfernt war, derartige Sätze als denkbar zuzulassen. Nochmals sei die explizite Anwendung des „Axioms von Pasch" hervorgehoben, obwohl es bei ihm nicht als Axiom figurierte.

Das Werk al-Ḫayyāms blieb lange Zeit unbekannt; es erschien erstmalig 1936 im Druck in arabischer Sprache in Teheran. Die zweite Fassung der „Darlegung des Eukleides" von Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī erschien in arabischer Sprache in Rom im Jahre 1594 und in einer (unvollständigen) lateinischen Übersetzung im Jahre 1657

ebenfalls in Rom [154, 155]. Den oben betrachteten Beweis Nasīr ad-Dīns kannten John Wallis, der ihn in seinem Werk über das fünfte Postulat dargelegt hat, sowie Girolamo Saccheri, der ihn seinem äußerst scharfsinnig durchdachten Versuch zugrunde gelegt hat, den Eukleides „von allen Makeln" reinzuwaschen, indem er die Voraussetzung des spitzen und stumpfen Winkels in dem von Nasīr ad-Dīn betrachteten Viereck widerlegen wollte. In der Literatur zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie wird dieses Viereck bis in die Gegenwart nach Saccheri benannt.

Es sei noch der kürzlich aufgefundene Beweis des fünften Postulats erwähnt, der von dem Mathematiker Šams-ad-Dīn as-Samarkandi [155*c*, 155*a*] aus dem 13. Jahrhundert stammt und in dessen „Grundlegenden Sätzen" (Aškal at-ta sis) enthalten ist. In diesem Werk analysiert er 35 „grundlegende" Sätze der „Elemente" des Eukleides. Den Überlegungen as-Samarkandis liegt die Annahme zugrunde, daß man durch einen beliebigen Punkt im Innern eines Winkels eine Gerade legen kann, die die beiden Schenkel des Winkels schneidet (vgl. S. 278). Die „Grundlegenden Sätze" waren noch im 15. Jahrhundert bekannt, und z. B. Qādi-zāda ar-Rūmī schrieb zu diesem Werk im Jahre 1413 einen Kommentar. Demnach haben auch 150 Jahre nach aṭ-Ṭūsī und as-Samarkandi die Mathematiker der islamischen Länder das Interesse an der Lehre von den Parallelen nicht verloren.

Kegelschnitte; Infinitesimalbetrachtungen. Die Lehre von den Kegelschnitten fand in den islamischen Ländern ein breites Anwendungsfeld bei der Konstruktion der Wurzeln der algebraischen Gleichungen dritten und sogar gelegentlich vierten Grades. Das Interesse an diesem Gebiet der Geometrie steht in enger Beziehung zu den Arbeiten über Optik. Die Physiker kannten die Eigenschaften der Parabolspiegel, und in dem fundamentalen Werk des ibn al-Haitham über Optik nehmen die zugehörigen geometrischen Konstruktionen eine wichtige Stellung ein [156].

Wir erwähnten bereits einzelne interessante Konstruktionen der Ellipse durch die Brüder banū Mūsā und der Parabel durch Abū-l-Wafā. Die Aufgabe, Kegelschnitt zu zeichnen, interessierte auch andere Mathematiker. Der Enkel Thābit ibn Qurras, Ibrāhīm ibn Sīnān, schrieb ein Spezialwerk über die Konstruktion von Ellipse, Hyperbel und Parabel mit Hilfe von Zirkel und Lineal durch Bestimmung einzelner Punkte. Es wurde auch ein besonderes Gerät zum Zeichnen von Kegelschnitten, der sogenannte vollkommene oder konische Zirkel konstruiert, der sich von einem gewöhnlichen Zirkel dadurch unterscheidet, daß sich der eine Schenkel beim Drehen des Zirkels gleichmäßig verlängert oder verkürzt. Eine Beschreibung dieses Geräts finden wir in besonders hierfür geschriebenen Werken des as-Šigīzī, des al-Kūhī und des ibn al-Ḥusain [156*a*]. Soweit man jedoch aus der erforschten Literatur entnehmen kann, ist die antike Kegelschnittlehre im Mittleren und Nahen Osten nicht durch wesentliche Beiträge bereichert worden. Das Hauptverdienst der Mathematiker der islamischen Länder bestand hier darin, die antiken Entdeckungen erhalten und weitergegeben zu haben. Über die arabische Literatur drangen die ersten Kenntnisse über die Kegelschnitte nach Europa. Ein großer Teil des grundlegenden Werkes des Apollonios, nämlich die Bücher IV bis VII, ist nur in der arabischen Übersetzung des

Thābit ibn Qurra erhalten geblieben, die am Ende des 10. Jahrhunderts durch den aus dem Iran stammenden Abū-l-Fatḥ Mahmūd ibn Muḥammad ibn Qāsim Fadl al-Iṣfahāni neu redigiert wurde.

Verschiedene Gelehrte des 10. und 11. Jh. beschäftigten sich mit der Quadratur der Parabel, mit der Volumenberechnung von Rotationskörpern und mit der Bestimmung von Schwerpunkten. Hier waren die antiken griechischen Traditionen von großer Bedeutung. Die „Kreismessung" des Archimedes war, wie wir bereits erwähnten (womöglich in irgendeiner Bearbeitung), den banū Mūsā bekannt. Thābit ibn Qurra übersetzte Archimedes' Abhandlung „Über Kugel und Zylinder" ins Arabische, jedoch waren die Werke des Archimedes über die Quadratur der Parabel, über Konoide und Sphäroide, über Spirallinien sowie sein Brief über das mechanische Verfahren der Quadraturen und Kubaturen anscheinend nicht ins Arabische übersetzt worden [156a]. Auf jeden Fall waren sie den Gelehrten unbekannt, von denen nachstehend die Rede sein soll. Davon zeugen deren Werke, in denen auf völlig neuem Wege, wenn auch mit Hilfe des Exhaustionsverfahrens, dieser Infinitesimalmethode der Antike, einige Ergebnisse des Archimedes hergeleitet werden. Zugleich wurden einige neue Entdeckungen gemacht, die durchaus Erwähnung verdienen.

Wir wollen das erste derartige Werk, und zwar die Abhandlung Thābit ibn Qurras „Das Buch über die Ausmessung des Kegelschnittes, der Parabel genannt ist" (Kitāb fī masāḥa kaṭ al-mahrūṭ alla zī jusammā al-muqāfī) [157] näher betrachten. Archimedes löste das Problem der Quadratur eines Parabelsegments nach zwei Verfahren: einmal nach einem mechanischen Verfahren, das auf dem Hebelprinzip beruhte zum anderen mit Hilfe einer Folge von eingeschriebenen Vielecken, deren Flächeninhalte und deren Flächeninhaltsummen eine unendliche abnehmende geometrische Reihe bilden und den Flächeninhalt des Segments mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Dieses Ergebnis des Archimedes (der Flächeninhalt eines Parabelsegments S ist gleich $\frac{4}{3}$ des Flächeninhalts des Dreiecks mit der gleichen Grundlinie und Höhe) wird in den ersten Zeilen seiner Abhandlung „Über Kugel und Zylinder" erwähnt und war auch ibn Qurra bekannt. Jedoch löste ibn Qurra die Aufgabe anders, und zwar nach der Methode der sogenannten Integralsummen, ohne zu wissen, daß die gleiche Methode erstmalig in mehreren Fällen durch denselben Archimedes angewandt worden war (Quadratur der Spirale, Kubatur des Rotationsparaboloids u. dgl.). Die von Thābit ibn Qurra betrachtete Parabel wird durch die Eigenschaft definiert, die sich genau durch unsere Gleichung $y^2 = px$ ausdrücken läßt, und die Parabelquadratur ist der Berechnung des Integrals $\int_0^a \sqrt{px}\,dx$ äquivalent. Die unmittelbare Berechnung eines solchen Integrals als des Grenzwertes der Integralsumme bei Unterteilung des Integrationsinuervalls (O, a) in gleiche Teile hätte aber die Summation der Reihe $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$ erfordert. Ibn Qurra umging diese Schwierigkeit durch einen sinnreichen Kunstgriff. Er unterteilte einen Abschnitt der Segmentachse in ungleiche Teile so, daß die Abzissen der Teilpunkte den aufeinanderfolgenden Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ proportional sind. Dann verhalten sich die zugehörigen

Ordinanten $y = \sqrt{px}$ ebenso wie die Zahlen 1, 2, 3, ... Die Lösung ibn Qurras stützt sich auf 15 arithmetische Hilfssätze, unter denen vier besonders wichtig sind. Es sind dies der Satz 4 über die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2,$$

der Satz 10, der die Summe einer Folge ungerader Quadratzahlen angibt,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right] \cdot 2n,$$

der unmittelbar daraus folgende Satz 12,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,\frac{(2k-2)+2k}{2} + 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right] \cdot 2n,$$

den der Verfasser selbst für seine Zwecke nicht für die Zahlen 1, 3, 5, . . . und 2, 4, 6, . . ., sondern für zu diesen Zahlen proportionale Strecken formuliert, und schließlich der Satz 14, in dem behauptet wird, daß bei hinreichend großem n das Verhältnis

$$n : \left[\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right] \cdot 2n$$

kleiner wird als ein beliebiges vorgegenebes Verhältnis A/B. Im Satz 15 wird die gleiche Behauptung für Strecken formuliert.

Danach geht ibn Qurra zur Quadratur eines Parabelsegments über, das durch eine irgendeinem Durchmesser konjugierte Sehne abgeschnitten wird. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall eines geraden Segments, bei dem die Sehne senkrecht auf der Achse steht. Er beruft sich auf die „Konika" des Apollonios und beweist den folgenden Satz (Satz 16): Unterteilt man eine vorgegebene Strecke der Achse in n Teile, die den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, . . ., $(2n-1)$ proportional sind, so sind die in den Teilpunkten hindurchgelegten konjugierten Sehnen (unsere verdoppelten Ordinaten) den geraden Zahlen 2, 4, 6, . . ., $2n$ proportional. Dabei gilt auch die inverse Behauptung. Sodann werden (Abb. 74a) der Parabelscheitel und die Endpunkte der benachbarten Sehnen durch Strecken verbunden. Im darauffolgenden Satz 17 wird bewiesen, daß das hierbei entstehende Vieleck S_n, das aus einem Dreieck σ_n und $n-1$ Trapezen besteht, um die Größe $\frac{n}{3}\sigma_n$ kleiner ist als $\frac{2}{3}$ des um das Segment beschriebenen Rechtecks R, also $\frac{2}{3}R - S_n\frac{n}{3} < \sigma_n$; hierbei ist σ_n das Produkt aus dem ersten Teilstück der Achse und der ersten Halbsehne. In der Tat, die Teile der Achse sind u, $3u$, $5u$, . . ., $(2n-1)\,u$ mit $u = \frac{a}{n^2}$, während sich die Sehnen nach der Parabelgleichung zu $2\sqrt{pu}$, $4\sqrt{pu}$, $6\sqrt{pu}$, . . ., $2n\sqrt{pu}$ ergeben. Demnach erhält man für den Flächeninhalt des einbeschriebenen Vielecks, d. h. für die Integralsumme

$$s_n = u\frac{2\sqrt{pu}}{2} + 3u\frac{2\sqrt{pu}+4\sqrt{pu}}{2} + \cdots + (2n-1)\,u\,\frac{(2n-2)\sqrt{pu}+2\sqrt{pu}}{2}.$$

Da sich der Flächeninhalt des umbeschriebenen Rechtecks zu

$$R = [u + 3u + \cdots + (2n-1)\,u] \cdot 2n\sqrt{pu}$$

ergibt, folgt der Satz 17 unmittelbar aus dem Satz 12. Im Satz 18 wird gezeigt, daß man bei hinreichend großer Anzahl n der Teile die Differenz $S = S_n$ kleiner machen kann als einen beliebigen vorgegebenen Flächeninhalt. Hier werden einige einbeschriebene Figuren und selbstverständlich auch der Satz 10 der „Elemente" verwendet, der den antiken Beweisen nach der Exhaustionsmethode zugrunde liegt. Dieser lautet: Wenn man von der größeren zweier gegebener Größen mehr als die Hälfte wegnimmt, von dem Rest wieder mehr als dessen Hälfte, von dem neuen Rest wiederum mehr als dessen Hälfte usw., so kann man bei hinreichend langem Fortsetzen des Verfahren seinen Rest erhalten, der kleiner ist als die kleinere der gegebenen Größen. Im 19. Satz wird mit Hilfe des Satzes 15 festgestellt, daß bei hinreichend großer Anzahl n der Teile die Differenz $\frac{2}{3}R - S_n$ um eine Größe unterscheidet, die kleiner ist als ein beliebiger vorgegebener Flächeninhalt. Der Grenzübergang selbst wird im Satz 20 vollzogen. Hier werden auf Grund der beiden vorangehenden Sätze die Annahmen $S > \frac{2}{3}R$ und $S < \frac{2}{3}R$ auf einen Widerspruch zurückgeführt, woraus dann $S = \frac{2}{3}R$ folgt.

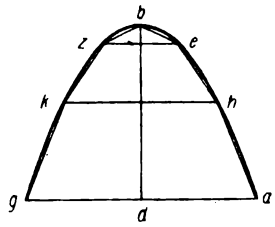


Abb. 74a

Der beschriebene Kunstgriff Thābit ibn Qurras ist äußerst bemerkenswert. Durch diesen wurde das in Vergessenheit geratene Verfahren der Integralsummen wiederbelebt, und mit seiner Hilfe berechnete ibn Qurra faktisch erstmalig ein Integral des Potenz x^n für einen gebrochenen Exponenten, und zwar $\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx$, wobei er ebenfalls erstmalig eine Unterteilung des Integrationsintervalls in ungleiche Teile vornahm. In der Mitte des 17. Jh. hat P. Fermat durch ein ähnliches Verfahren, wobei er die Abzissen in Teile unterteilte, die eine geometrische Reihe bilden, die Quadratur der Kurven $y = x^{\frac{m}{n}}$ für $\frac{m}{n} - 1$ vorgeuommen [158a].

An das Werk über die Parabel schließt sich ein anderes Werk ibn Qurras, „Über die Berechnung des Paraboloids" (Fī musāḥa al-muǧassamat al-muqāfīya), an [158]. Am Anfang des Werkes wird eine Klassifizierung der Rotationsparaboloide gegeben, die bei der Drehung von Segmenten entstehen, die durch irgendeine Sehne oder durch irgendeinen Durchmesser und die konjugierte Ordinate abgeschnitten werden. Diese Körper werden in zwei Gruppen, die „parabolischen Kuppeln" und die „parabolischen Kugeln", eingeteilt. In der ersten Gruppe unterscheidet man Kuppeln 1. „mit gemäßigter Spitze", wobei die Drehung um die Parabelachse erfolgt, 2. „mit scharfer Spitze", wobei die Drehung so erfolgt, daß das rotierende Segment die Parabelachse nicht enthält, und 3. „mit eingedrückter Spitze", wobei das rotierende Segment die Parabelachse enthält. Die zweite Gruppe bilden 4. die „kürbisartigen Kugeln", wobei ein gerades Segment um eine zur Achse konjugierte Sehne rotiert, und 5. die „eiförmigen Kugeln", wobei das Segment um eine zum konjugierten Durchmesser

nicht senkrechte Sehne gedreht wird. Ibn Qurra beschäftigte sich nur mit der Berechnung der Volumina parabolischer Kuppeln; sein Verfahren ist jedoch von dem des Archimedes verschieden. Neu ist auch die Berechnung der Volumina von Kuppeln mit zugespitztem oder eingedrücktem Scheitel; Archimedes hätte sich nur mit Rotationsparaboloiden beschäftigt, bei denen die Parabelachse zugleich Rotationsachse ist. Der wichtigste arithmetische Satz (Nr. 11) lautet hier:

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\left[(2k+2)^2+(2k)^2+2k(2k+2)\right]+\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right]\cdot(2n+2)^2.$$

Diese Identität benötigt man zur Berechnung eines der Kuppel einbeschriebenen Körpers, der aus einem Kegel und einer Folge von Kegelstümpfen besteht (vgl. Abb. 74a). Wir wollen hier nur einen Umstand besonders hervorheben. Um das Exhaustionsverfahren anwenden zu können, muß der Verfasser hier den Satz 10, I der „Elemente" verallgemeinern, und im entsprechenden Satz 31 beweist er: Nimmt man von der größeren zweier gegebener Größen einen Teil weg, der sich zu dieser in einem nicht kleineren Verhältnis als $\frac{a}{b}<1$ befindet, entnimmt man ferner dem Rest wieder einen Teil, der zu diesem Rest in dem gleichen Verhältnis steht, usw., so erhält man bei hinreichender Fortsetzung des Verfahrens einen Rest, der kleiner ist als die kleinere der beiden gegebenen Größen. Die gleiche Verallgemeinerung des Satzes 10, I der „Elemente" finden wir später bei ibn al-Haitham vor.

Die Werke ibn Qurras haben weitere Forschungen nach sich gezogen. Sein Enkel Abū Isḥāq Ibrāhīm ibn Sīnān ibn Thābit ibn Qurra (908—946) fand ein weiteres Verfahren zur Quadratur der Parabel [159], während al-Kūhī [158] ein viel einfacheres und kürzeres Verfahren zur Kubatur „parabolischer Kuppeln" angeben konnte. Benötigte ibn Qurra insgesamt 36 arithmetische und geometrische Sätze, so war al-Kūhī mit insgesamt 3 Sätzen ausgekommen. An einer anderen Stelle hat al-Kūhī ohne Kenntnis der entsprechenden Sätze des Archimedes erneut den Schwerpunkt eines Kugelsegments, eines Sphäroids und eines Paraboloids bestimmt.

Den nächsten für die Geschichte der Infinitesimalrechnung wichtigen Beitrag leistete ibn al-Haitham, der das Volumen des Rotationskörpers eines Parabelsegments bei dessen Rotation um eine beliebige Ordinate berechnete. In einer speziellen „Abhandlung über die Messung eines parabolischen Körpers" (Fī masāḥat al-muǧassam al-muqāfī [160]), die wir in einer ungefähr aus dem 16. Jahrhundert stammenden Abschrift kennen, berichtet ibn al-Haitham, daß die Arbeiten des Thābit ibn Qurra und des al-Kūhī den Anstoß zu diesen Untersuchungen gegeben haben. Er formuliert die von diesen beiden Mathematikern gelösten Aufgaben, wobei er die Methoden des ersten wegen der Schwierigkeit und der Breite der Darlegung, die des zweiten wegen ihrer Unvollständigkeit und übermäßigen Kürze kritisiert. Die Lösung ibn al-Haithams selbst für den Fall der „parabolischen Kuppel" ist originell, doch unser Hauptinteresse gilt der Kubatur der zweiten Gruppe der Rotationskörper, die weder ibn Qurra noch al-Kūhī gelungen war.

Den Beweis dieses aus Ägypten stammenden Mathematikers wollen wir nicht im einzelnen wiedergeben und lediglich die wichtigsten Hilfssätze und Sätze aufzählen. Zunächst werden die vier verschiedenen Ausdrücke für die Summen der ersten bis vierten Potenzen der natürlichen Zahlen gewonnen, wobei die Summe der vierten Potenzen, die hier erstmalig auftritt, von ibn al-Haitham in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[(n+1)\, n - \frac{1}{3}\right]$$

angegeben wurde. Später tritt diese Summe in einer etwas abgeänderten Schreibweise erneut, jedoch ohne Beweis in dem „Schlüssel der Arithmetik" des al-Kāšī auf. Ferner leitet ibn al-Haitham für die Abschätzung der Näherungswerte, die er beim (impliziten) Grenzübergang und beim Eindeutigkeitsbeweis benötigt, die Ungleichungen

$$\frac{8}{15}(n-1)\, n^4 < \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 < \frac{8}{15}\, n \cdot n^4$$

sowie die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 > \frac{8}{15}\, n \cdot n^4$$

her.

Seine wichtigsten Ergebnisse sind:

1. Das Volumen des Rotationskörpers der Fläche abg um einen beliebigen Durchmesser ag (bg ist die konjugierte Ordinate) ist gleich dem Volumen des halben Zylinders, dessen Höhe gleich der Strecke $\overline{ag} = \overline{kl}$ auf dem Durchmesser und dessen Radius gleich dem Lot $\overline{bk}$ auf den Durchmesser ist (Abb. 75).

2. Das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Parabelsegments abg um die Ordinate $\overline{ag}$ entsteht, ist gleich $\frac{8}{15}$ vom Volumen des Zylinders mit der Höhe $\overline{ag} = \overline{kl}$ und einem Grundkreisradius, der dem Lot $\overline{bk}$ auf die Ordinate gleich ist (Abb. 76).

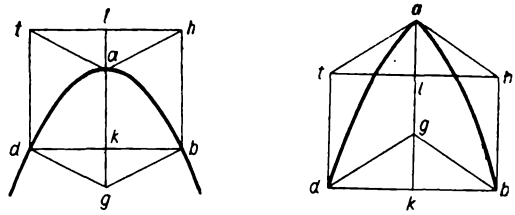


Abb. 75

Dieser Satz setzte eine Berechnung voraus, die der Ermittlung des bestimmten Integrals $\int_0^a t^4 dt$ äquivalent ist. Wählt man im Falle $\overline{bg} \perp \overline{ag}$ die Strecke $\overline{ag}$ als Ordinatenachse und $\overline{bg}$ als Abszissenachse, setzt man ferner $\overline{dg} = \overline{bg} = r$ und $\overline{ag} = h$, so

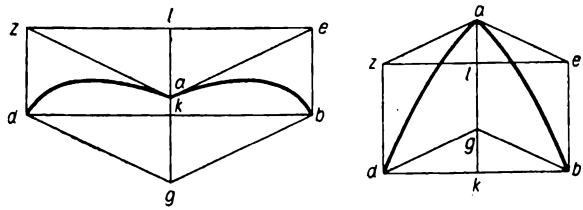


Abb. 76

läßt sich das Volumen V des Rotationskörpers des Segments abg der Parabel $y^2 = p \cdot (x + r)$ durch das folgende Integral ausdrücken:

$$V = \pi \int_0^h x^2 \, dy = \pi \int_0^h \left(\frac{y^4}{p^2} - \frac{2ry^2}{p} + r^2 \right) dy = \pi \left(\frac{h^5}{5p^2} - \frac{2rh^3}{3p} + r^2 h \right).$$

Wegen $y = h$ und $p = \frac{h^2}{r}$ für $x = 0$ gilt, wie auch ibn al-Haitham gefunden hat,

$$V = \frac{8}{15} \pi r^2 h.$$

Das hier angeführte Ergebnis des ibn al-Haitham war den griechischen Mathematikern nicht bekannt. Es wurde von den europäischen Mathematikern in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zusammen mit der allgemeineren Regel zur Integration einer Potenz für einen beliebigen natürlichen Exponenten wiederentdeckt und nahezu unmittelbar auf gebrochene und negative Exponenten übertragen.

Neben diesen hervorragenden Werken waren auch mißlungene Arbeiten entstanden, etwa das Werk des Aḥmad ibn 'Umar al-Karabīsī (etwa 970) zur Berechnung des Volumens einer Kreiswulst (Torus). Dieses Werk enthält eine unexakte Begründung des bereits den hellenistischen Mathematikern bekannten Ergebnisses [159*a*].

Bedeutende Erfolge wurden auf dem Gebiet der angenäherten Quadratur des Kreises erzielt; es erscheint jedoch günstiger, diese im Zusammenhang mit trigonometrischen Berechnungen zu betrachten.

Nebenbei sei erwähnt, daß in der arabischen philosophischen Literatur auch die antike atomistische Lehre von Raum und Zeit ihren Niederschlag gefunden hat, die bekanntlich von Aristoteles und auf dem Gebiet der Mathematik von Eudoxos und seinen Nachfolgern abgelehnt wurde. Diesen Standpunkt entwickelten Abū-l-Ḥasan 'Alī ibn Ismā'īl al-Aš'arī (873 oder 874 bis 935 oder 936), ein Araber aus Basra, der in Baghdād gewirkt hat, sowie ein Schüler von einem seiner Schüler, von Abū Bakr Aḥmad ibn 'Alī al-Baqilānī ((gest. 1013), der ebenfalls aus Basra stammte und in Baghdād gelebt hat. Al-Aš'arī war der Begründer der moslemitischen Scholastik „kalam" und der philosophischen Schule der „mutaqallim". Aus der Lehre vom diskreten Charakter der Zeit und der Bewegung zogen die Mutaqallim unbegründet die indeterministische Folgerung, daß in jedem gerade fälligen Zeitatom Allah die gesamte Welt neu erschafft und daß somit in der Welt keinerlei kausale Zusammenhänge herrschen können.

Diese Lehre wird in den philosophischen Abhandlungen al-Ḥayyāms erwähnt und wurde von dem jüdischen Philosophen Moses ben Maimon (geb. 1135 in Cordoba,

gest. 1204 in Kairo) ausführlich behandelt [159*b*]. Sie hat auf mathematische Gedankengänge einen gewissen Einfluß ausgeübt. Vom Standpunkt der Mutaqallim sind zwei beliebige gleichartige Größen stets kommensurabel, und irrationale Verhältnisse existieren nicht. Beim Aufbau seiner allgemeinen Verhältnislehre erwähnt al-Ḫayyām diese Auffassung, obwohl er sie nicht teilt, wobei er gleichzeitig die Möglichkeit des Triumphes des mathematischen Atomismus in der Zukunft nicht leugnet (und es vielleicht auch nicht für zweckmäßig hält, dies zu leugnen) [132*a*, S. 282 und 292]. Berührt wird dieses Problem auch von al-Bīrūnī in seiner Korrespondenz mit ibn Sīnā, wobei er unter anderem folgendes sagt: „Den Atomisten sind auch nicht wenige (zweifelhafte) Behauptungen eigen, die den Geometern wohl bekannt sind, doch sind die Worte derer, die den Atomisten widersprechen, noch weniger annehmbar" (ebenda, S. 282). Gleichzeitig fragt al-Bīrūnī, wie man sich von solchen Widersprüchen befreien könnte. Aṭ-Ṭūsī versucht auf Grund atomistischer Vorstellungen von der Struktur geometrischer Figuren die Postulate von Größenverhältnissen der umfaßten und umfassenden Linien und Oberflächen zu beweisen, die von Archimedes in seinem Werk „Über Kugel und Zylinder" angeführt werden [159*c*].

Die Entwicklung der Trigonometrie. In der Mathematik der islamischen Länder nahm die Trigonometrie einen breiten Raum ein. Sie bildete das Zwischenglied, das die Mathematik unmittelbar mit der führenden Naturwissenschaft jener Zeit, der Astronomie, ferner mit dem Kalenderwesen und der Gnomonik, der Lehre von der Sonnenuhr, verband, die auf Grund des meist sonnigen Wetters in den islamischen Städten weit verbreitet war. Die Probleme der Trigonometrie förderten die Entwicklung anderer Teile der Mathematik, insbesondere verschiedener Methoden der Näherungsrechnung.

Die Berechnung sphärischer Dreiecke benötigte man für die Durchführung von Ritualbräuchen. Die Mohammedaner sprechen ihre Gebete mit dem Gesicht gen Mekka, der Heimatstadt Muḥammads. Die Richtung, in der sich Mekka befindet, wird in einer besonderen Nische jeder Moschee, Kibla genannt, angezeigt, und diese Richtung wurde neben den Stundenstrichen ebenfalls auf sämtlichen öffentlichen Sonnenuhren angegeben. Bezeichnet man (siehe Abb. 77, in der der Kreis den Nullmeridian darstellt) die Länge und Breite des vorgegebenen Punktes A und Mekkas (M) mit φ_1 bzw. φ_2 und λ_1 bzw. λ_2, so sind in dem spärischen Dreieck AMP, dessen dritter Eckpunkt der Nordpol ist, zwei Seiten, $AP = 90° - \varphi_1$ und $MP = 90° - \varphi_2$, sowie der von diesen eingeschlossene Winkel $\lambda_1 - \lambda_2$ gegeben. Gesucht ist dann der Winkel MAP. Die Berechnung des Dreiecks liefert zugleich die Seite AM, d. h. den Abstand zwischen den Punkten A und M in Grad oder, falls der Erdradius bekannt ist, in Längeneinheiten. Die betrachtete Aufgabe ist gleichzeitig eines der Grundprobleme der mathematischen Geographie.

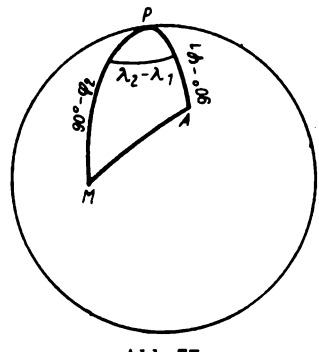


Abb. 77

Zur Bestimmung der Breiten und Längen wurde der Astrolab benutzt, ein von den Griechen übernommenes Winkelmeßgerät, das in den islamischen Ländern erheblich vervollkommnet wurde [159*d*].

Die Arbeiten zur Trigonometrie begannen die arabischen Gelehrten ebenso wie zur Mathematik allgemein, indem sie die Werke ihrer Vorgänger studierten. Wir hatten bereits erwähnt, daß etwa um das Jahr 773 in Baghdād eine der indischen „Siddhāntas" bekannt wurde, die Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Ibrāhīm al-Fāzārī ins Arabische übersetzte. Im 9. Jahrhundert wurden Übersetzungen vom „Almagest" des Ptolemaios angefertigt, und zwar zuerst durch Sahl aṭ-Ṭabarī und al-Ḥaǧǧaǧ. Darüber hinaus wurde die „Sphärik" des Menelaos[1]) übersetzt. Zu diesen Werken wurden Kommentare verfaßt. Die drei genannten Werke bildeten das Fundament, auf dem die arabischen Mathematiker erfolgreich weiterbauten. Die Astronomen Alexandrias hatten nur eine trigonometrische Größe, die Sehne eines Bogens, eingeführt. Der Satz des Ptolemaios, der dem Satz vom Sinus der Winkelsumme äquivalent ist, bildet zusammen mit dem Satz über die Sehne des halben Bogens die Grundlage für die griechische Sehnentabelle. Der Satz des Menelaos über das vollständige Vierseit diente zur Berechnung einiger Fälle des sphärischen Dreiecks. Die Inder haben die Sehne durch den Sinus ersetzt, die Kosinuslinie und die Linie des Sinus versus hinzugenommen und eine kleine Tabelle der Sinuswerte zusammengestellt. Die Mathematiker der islamischen Länder, die neue trigonometrische Größen einführten, deren Eigenschaften erforschten und die Lösung sämtlicher Fälle der ebenen und sphärischen Dreiecke fanden, haben allmählich die Trigonometrie zu einer selbständigen Wissenschaft ausgebaut. Der Name „Trigonometrie", d. h. Dreiecksmessung, tauchte im Druck erstmalig im Jahre 1595 bei Bartholomaeus Pitiscus auf.

Wie bereits erwähnt, stammte eines der ersten in Baghdād verfaßten Werke über Trigonometrie von al-Ḫuwarizmī (vgl. S. 220). Bei der Erwähnung dieses Werkes hatten wir geäußert, daß die in diesem Werk enthaltenen Tabellen der Tangenswerte auch später hinzugefügt worden sein können. Mit Bestimmtheit kann man jedoch sagen, daß Tangens und Kotangens dem Zeitgenossen und Mitarbeiter al-Ḫuwarizmīs im Haus der Weisheit, Aḥmad ibn 'Abdallah al-Marwarī aus der Stadt Mary, bekannt waren, den man häufig auch al-Ḥabaš al-Ḥāsib, d. h. Rechner, nannte. Dieser Gelehrte starb zwischen 864 und 874 im Alter von etwa hundert Jahren [161, 162].

Der Tangens und der Kotangens (und auch der Kosekans)[2]) tauchten ursprünglich nicht als mit dem Kreis verknüpfte Linien auf, sondern wurden in der Gnomonik zum Vergleich der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks benutzt. Nimmt man die Höhe h eines senkrechten Gnomonstabes als feste Größe an, so ändert sich das Verhältnis des von diesem Stab geworfenen Schattens t zu h mit der Höhe α der Sonne (Abb. 78). Al-Ḥabaš setzt $h = 60' = 1$ und berechnet eine Tabelle der Schattenwerte t für $\alpha = 1°, 2°, 3°, \ldots$ auf Sekunden genau. Diese Tabelle, d. h. die Tabelle der Kotangenswerte

$$t = h \cot \alpha = \cot \alpha,$$

[1]) Die „Sphärik" des Menelaos ist nur in arabischen Übersetzungen erhalten geblieben.

[2]) Im Lateinischen bedeutet tangens soviel wie der Berührende und secans soviel wie der Schneidende.

gestattete es, die Höhe der Sonne aus der Schattenlänge und umgekehrt die Länge des Schattens aus der Sonnenhöhe zu bestimmen. Für einen horizontalen Gnomon (Abb. 79), der senkrecht zu einer senkrechten Wand befestigt ist, stellte al-Ḥabaš eine Tabelle der „reziproken Schatten", d. h. der Tangenswerte

$$\tau = h \tan \alpha = \tan \alpha,$$

auf. Obwohl man später anstelle der Tangens- und Kotangenswerte mitunter die Verhältnisse der Sinus- und Kosinuswerte benutzte, griffen viele Mathematiker diese Neuerung gern auf, die bei Vorhandensein entsprechender Tabellen zur erheblichen

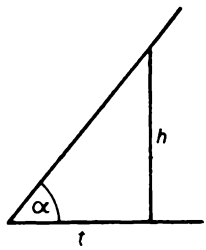


Abb. 78

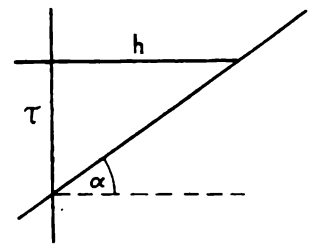


Abb. 79

Vereinfachung der trigonometrischen Rechnungen beitrug. Bereits bei al-Ḥabaš geht die Anwendung des Tangens und Kotangens über die Grenzen der Gnomonik hinaus. So drückt er die Beziehung zwischen dem direkten Aufstieg der Sonne α, der Deklination δ und der Neigung der Ekliptik ε durch die folgende Regel aus:

$$\sin \alpha = \tan \delta \cot \varepsilon.$$

Es ist nicht ausgeschlossen, daß al-Ḥabaš unter dem Einfluß indischer Werke über Berechnungen mit Hilfe des Schattens stand, wovon wir eines auf Seite 167 erwähnt hatten. Die Einführung und Tabellierung des Tangens und Kotangens jedoch, ferner ihre Anwendung in der Astronomie war zweifellos eine Neuerung, die der Geschichte der Trigonometrie angehört. Die Bezeichnungen zill (Schatten) und zill ma'qūs (umgekehrter Schatten) sind offenbar Übersetzungen aus dem Sanskrit. Ins Lateinische wurden sie ebenfalls wörtlich übersetzt; z. B. ist in der lateinischen Übersetzung der Tabellen al-Ḫuwarizmīs, die von Adelhard of Bath verfaßt wurde, von umbra recta (direkter Schatten) und umbra versa (umgekehrter Schatten) die Rede. Der Terminus Tangens, d. h. der Berührende, wurde im Jahre 1583 von Thomas Fink eingeführt; der Ausdruck Kotangens (und auch Kosinus) stammt aus dem Jahre 1620 und geht auf E. Gunter zurück.

Im gleichen Zusammenhang verwendet al-Ḥabaš im Falle eines vertikalen Gnomons den Begriff des Kosekans als „Durchmesser des Schattens" für eine gegebene Sonnenhöhe, d. h. als Hypotenuse. Für den Kosekans hat al-Ḥabaš eine Tabelle mit der Schrittweite von einem Grad aufgestellt. Die theoretische Bedeutung der Kosekans- und Sekansfunktion ist gering, doch war deren Anwendung vor der Einführung der Logarithmen für die Praxis wertvoll, da man bei Existenz entsprechender Tabellen die Division durch eine Multiplikation ersetzen konnte. Eine umfassendere Anwen-

dung fanden diese Linien in der europäischen Literatur des 16. und 17. Jahrhunderts; das Wort Sekans stammt von Th. Fink.

Lange Zeit benutzte man in der Astronomie auch nach al-Ḫuwarizmī und al-Ḥabaš neben dem Sinus noch die Sehne. Manche Mathematiker benutzten häufig beide Größen in ein und demselben Werk, andere hingegen zogen es vor, nur mit der Sehne zu operieren. Mit der Zeit fanden die trigonometrischen Linien immer weitere Verbreitung. Eine recht weit entwickelte Theorie dieser Größen finden wir bei dem hervorragenden Astronomen und Mathematiker Abū 'Abdallaḥ Muḥammad ibn Ǧabīr al-Battānī (geb. vor 858, gest. 929). Dieser Gelehrte stammte entweder aus Harran oder aus der Nähe dieser Stadt und war ebenso wie Thābit ibn Qurra ein Abkömmling der Sternanbeter. Al-Battānī wirkte in ar-Rakk. In seinem astronomischen Werk „Vervollkommnung des Almagest" (Islāh al-Maǧisṭī) [163] wandte al-Battānī systematisch die trigonometrischen Linien an, wobei er den Sinus und den Sinus versus zwischen Null und 180° betrachtete. Da der Kosinus als Sinus des Komplementwinkels gedeutet wird und negative Zahlen nicht angewandt werden, wird der Sinus versus im zweiten Quadranten nicht durch eine Differenz, sondern durch die Summe $r + r \sin(\alpha - 90°)$ definiert. Von den Beziehungen zwischen trigonometrischen Linien führt al-Battānī die folgenden an (im Grunde genommen waren diese bereits al-Ḥabaš bekannt):

$$\frac{\cot\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{\tan\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{r}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{r}{\sec\alpha}, \quad r\sec\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\tan^2\alpha},$$

$$r\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\cot^2\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}.$$

Noch systematischer sind die Elemente der Trigonometrie in der astronomischen Abhandlung Abū-l-Wafās, dem „Vollkommenen Buch" (Kitāb al-kāmil), dargelegt [164]. Im Vorwort zu diesem Werk schrieb Abū-l-Wafā: „Wir haben in diesem Buche einen Weg eingeschlagen, den keiner unserer Vorgänger gegangen ist; wir haben die bekannten Methoden vermieden, wenn das Eindringen in sie den Studierenden schwierig war, wie z. B. die Methode mit dem Viereck und die Regel der 6 Größen. Wir haben auch mehrere Sätze eingefügt, die die Griechen nicht erwähnten ... Wir haben die Tafeln mit der größten Sorgfalt berechnet." [18, Bd. I, S. 55]. Den Arbeiten über sphärische Trigonometrie und der Berechnung der Tabellen werden wir uns später zuwenden. Hier sei erwähnt, daß Abū-l-Wafā sämtliche trigonometrischen Linien einheitlich im Kreis definiert; so wird z. B. der Tangens nicht über das rechtwinklige Dreieck, sondern als eine Strecke auf der Kreistangente definiert. Er fügt die Beziehung

$$\frac{\tan\alpha}{r} = \frac{r}{\cot\alpha}$$

hinzu und formuliert einige Regeln, indem er den Radius gleich 1 setzt. Den Satz über den Sinus der Winkelsumme und der Winkeldifferenz drückt er unter Verwen-

dung des Sinus allein aus (vgl. S. 309). Mitunter gibt er auch die Formeln der Sehnentrigonometrie an

$$\frac{\text{Sehne}\,\alpha}{\text{Sehne}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\ \text{Sehne}\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)}{1}.$$

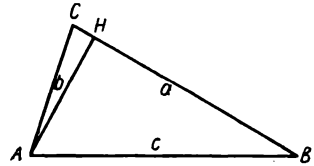


Abb. 80

Die ebenen Dreiecke berechneten die Mathematiker der islamischen Länder mit minimalen Hilfsmitteln und daher häufig recht umständlich. Lange Zeit wurde jedes schiefwinklige Dreieck nach dem Vorbild der Antike vorher durch eine Höhe in rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Bei gegebenen Seiten b und c und dem der einen gegenüberliegenden Winkel C (Abb. 80) berechnet al-Battānī die Seite a folgendermaßen: Zunächst werden die Höhe $\overline{AH} = b \sin C$ und die Strecke $\overline{CH} = b \cos C$ bestimmt. Sodann ermittelt er von der Seite $\overline{CB}$ den zweiten Teilabschnitt $\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC}$ und schließlich mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus $\overline{AH}$ und $\overline{BH}$ die Seite a. Den Sinussatz für ebene Dreiecke kannte al-Battānī offenbar nicht. Den Beweis dieses Satzes lieferte einer der Übersetzer der „Sphärik" des Menelaos, Abū Naṣr Manṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq (gest. zwischen 1000 und 1020), ferner dessen Schüler al-Bīrūnī u. a. Bekanntlich läßt sich ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel nicht immer konstruieren. Ist dies möglich, so kann die Lösung sowohl eindeutig als auch doppeldeutig sein. Auf diesen Umstand wies Ǧābir ibn Aflā' hin. In Europa wurde die Schwierigkeit dieses Falles von Regiomontanus (15. Jahrhundert) u. a. beachtet, während erst Fr. Viète die vollständige Analyse anstellte.

Auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke führte man auch den Fall zurück, wenn die Seiten b und c und der von ihnen eingeschlossene Winkel α gegeben sind. Auch hier berechnete man die Abschnitte, die auf einer Seite durch die Höhe erzeugt werden, ferner die Höhe selbst, wonach man aus einem rechtwinkligen Dreieck die dritte Seite und den zweiten Winkel bestimmte. Um schließlich die Winkel nach drei gegebenen Seiten zu bestimmen, fällte man die Höhe auf irgendeine Seite und berechnete nach den Sätzen des Eukleides über das Quadrat einer Seite, die einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, wiederum die vom Höhenfußpunkt erzeugten Teilstrecken.

Der in den erwähnten Sätzen des Eukleides (Sätze 12 und 13 im Buch II seiner „Elemente") enthaltene wichtige Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

blieb aus irgendeinem Grunde unbeachtet. Man näherte sich ihm zwar mehrfach, und al-Bīrūnī formulierte ihn sogar nebenbei bei der Lösung einer Aufgabe, ohne ihm allerdings Bedeutung beizumessen, aber erst viel später drückte al-Kāšī das Quadrat der Seite a bei gegebenen b, c und α in der Form

$$a^2 = (b \pm c \cos \alpha)^2 + c^2 \sin^2 \gamma$$

aus (das doppeldeutige Vorzeichen hängt damit zusammen, daß man den Kosinus des stumpfen Winkels als den Kosinus des Supplementwinkels auffaßte). Man hätte

hier nur noch die rechte Seite entwickeln müssen, um die übliche Formulierung des Kosinussatzes zu erhalten. In der heutigen Gestalt finden wir diesen Satz erst bei Fr. Viète.

Der Apparat der trigonometrischen Formeln blieb die ganze Zeit über spärlich. Mitunter wurden wichtige und einfache Beziehungen nicht klar genug formuliert, um ihnen den Charakter von Regeln oder Sätzen zu geben. Zum Beispiel gibt al-Kāšī mit dem Ziel, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen, die Regel zur Berechnung des Inkreisradius

$$r = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c}$$

an, die er definitiv für seine eigene Entdeckung hält. In dem unmittelbar darauffolgenden Beispiel wird gesagt, daß man den Flächeninhalt erhält, wenn man diesen Radius mit dem halben Umfang

$$\frac{r(a + b + c)}{2}$$

multipliziert. Hieraus folgt sofort die Formel

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Trotzdem formuliert al-Kāšī keine besondere Regel zur Berechnung des Flächeninhalts aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel; dies war W. Snellius im Jahre 1627 vorbehalten.

Bei dem in Kairo tätigen Astronomen und Mathematiker Abū-l-Hasan 'Alī ibn abī Sa'īd 'Abd ar-Raḥmān ibn Aḥmad ibn Yūnis (gest. 1009), einem hervorragenden Beobachter und Schöpfer astronomischer Tabellen, finden wir eine mit Hilfe der Orthogonalprojektion hergeleitete Beziehung, die der Formel

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

äquivalent ist. Diese Formel wurde von Tycho Brahe und anderen benutzt, um die Multiplikation durch eine Addition zu ersetzen. Später diente sie dazu, die Summe zweier Kosinus oder Sinus in eine logarithmierbare Form zu bringen.

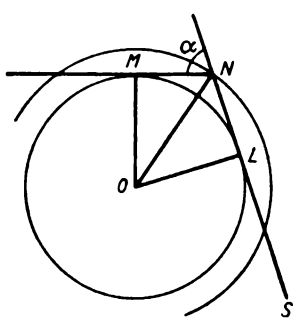


Abb. 81

Ein interessantes, mathematisch allerdings sehr einfaches Beispiel für die Anwendung der Trigonometrie auf die Naturwissenschaft ist die erste Bestimmung der Höhe der Atmosphäre durch ibn al-Haitham. Sie beruht darauf, daß die Dämmerung so lange andauert, bis die Sonne um mehr als 19° unter den Horizont sinkt. Es sei N eine hohe Wolke, die nach Beendigung der Dämmerung den Sonnenstrahl SN zum Beobachter M reflektiert (Abb. 81). Der Winkel, den der Strahl mit dem Horizont bildet, ist $\alpha = 19°$, während nach dem Reflexionsgesetz $\sphericalangle LNO = \sphericalangle MNO$ gilt. Daher ist im rechtwinkligen Dreieck OMN der Winkel $\sphericalangle MNO = 80°30'$, und man erhält für die Höhe der Atmosphäre

$$h = \frac{r}{\sin 80° 30'} - r.$$

Das Ergebnis ibn al-Haithams, das auf der Breitengradmessung jener Zeit beruht, liefert für die Höhe der Atmosphäre 10 bis 12 km. Selbstverständlich ist diese Größe vom wahren Wert weit entfernt, da ibn al-Haitham die ihm bekannte Brechung der Lichtstrahlen unberücksichtigt ließ, die Grenze der Atmosphäre mit der Höhe der sichtbaren Wolke identifizierte usw.

Ein anderes analoges Beispiel zur Anwendung der Trigonometrie, allerdings in der mathematischen Geographie, finden wir bei al-Bīrūnī. Abū-r-Raiḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī wurde im Jahre 973 in einem Vorort Bīrūn von Kiat, der Hauptstadt von Choresm, geboren. Von 1010 bis 1017 arbeitete er zusammen mit seinem Lehrer Abū Naṣr, dem berühmten Philosophen ibn Sīnā und anderen am Hofe des Schah al-Ma'mūn II. in von Kiat (jetzt Biruni). Nach der Eroberung von Choresm im Jahre 1017 durch den Sultan von Gasna, Maḥmūd, mußte er nach Gasna übersiedeln, das zu einem der großen kulturellen und wissenschaftlichen Zentren wurde. Al-Bīrūnī verbrachte mehrere Jahre in Indien, dessen Nordteil von Maḥmūd erobert wurde. Er erlernte das Sanskrit und vollendete im Jahre 1031 ein äußerst reichhaltiges Werk über Indien; ein großer Teil dieser Schrift enthält Mitteilungen über die Entdeckungen der Inder auf dem Gebiet der Mathematik und Astronomie. Unter den vielen Werken al-Bīrūnīs haben neben dem Werk über Indien ein Werk über die Kalender und die Zeitrechnungen verschiedener Völker, verfaßt im Jahre 1000, ein Lehrbuch der Mathematik und Astronomie, das sog. „Buch der Belehrung in den Anfängen der Kunst der Sternenkunde" (Kitāb at-tafhīm al-awā'il ṣinā 'at at-tanǧīm), entstanden in den Jahren 1029 bis 1034, sowie der „Kanon des Mas'ūd über die Astronomie und die Sterne" (Al-Qānūn al-Mas'ūdī fī-l-hai'a wa-n-nuǧūm), abgeschlossen im Jahre 1030, besondere Bedeutung. Der Titel des zuletzt genannten Werkes ist dadurch zu erklären, daß der Verfasser dieses dem Sultan von Gasna, Mas'ūd, dem Sohn Maḥmūds, gewidmet hatte. Al-Bīrūnī war auf allen Gebieten der Naturwissenschaft tätig; von ihm stammen auch Werke über Physik, Pharmakologie und Medizin. Er starb im Jahre 1048 [165, 165*a*].

Der „Kanon des Mas'ūd" [166, 167] ist für die Geschichte der Trigonometrie sehr wichtig. In diesem faßte der Verfasser die Ergebnisse aus den Arbeiten vieler Vorgänger und aus den eigenen Beobachtungen und Berechnungen zusammen. Der „Kanon" umfaßt elf Bücher; in den Büchern I und II werden Probleme der Zeitrechnung und des Kalenders behandelt.

Das Buch III des „Kanon" ist der Trigonometrie gewidmet. Es besteht aus zehn Kapiteln. Im ersten Kapitel werden die Seitenlängen der regelmäßigen einbeschriebenen Vielecke berechnet, und zwar des Dreiecks, des Quadrats, des Fünfecks, des Sechsecks, des Achtecks und des Zehnecks, wobei er von der Konstruktion der zugehörigen Sehne mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausgeht. Im zweiten Kapitel werden Sätze über Sehnen bewiesen, die den Sätzen über den Sinus der Summe zweier Winkel, über den Sinus der Differenz zweier Winkel, über den Sinus des doppelten Winkels, über den Sinus des halben Winkels usw. äquivalent sind. Im dritten Kapitel wird die Seite des regelmäßigen einbeschriebenen Neunecks konstruiert. Diese Aufgabe löst al-Bīrūnī durch die Auflösung kubischer Gleichungen (vgl. S. 258) sowie mit Hilfe eines besonderen Iterationsverfahrens (vgl. S. 311). Das vierte Kapitel ist dem allgemeineren

Problem der Winkeldreiteilung gewidmet. Hier werden zwölf Verfahren zur Winkeldreiteilung angeführt, die von verschiedenen Mathematikern von Archimedes bis al-Bīrūnī selbst stammen. Hier wird auch die Sehne 1° berechnet, die dem doppelten Sinus von $\frac{1}{2}°$ gleich ist. Im fünften Kapitel wird auf Grund der Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser berechnet. Das sechste Kapitel enthält Tabellen für den Sinus, während die Regeln zu deren Benutzung im siebenten Kapitel behandelt werden. Unter diesen finden wir auch die Regeln der linearen und quadratischen Interpolation (vgl. S. 311). Das achte Kapitel bringt Betrachtungen über Tangens und Kotangens sowie eine Tabelle der Tangensfunktion und die zugehörige Benutzungsanweisung, darunter wieder dieselben Regeln der linearen und quadratischen Interpolation. In demselben Kapitel wird der Sinussatz der ebenen Trigonometrie bewiesen. Das neunte und zehnte Kapitel sind der sphärischen Trigonometrie gewidmet. Insbesondere wird hier der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie hergeleitet.

Die Beweise der Sätze über die Sehnen, wie sie in den ersten beiden Kapiteln des Buches III im „Al-Qānūn al-Mas'ūdī" auftreten, finden wir auch in einem etwas früheren Werk al-Bīrūnīs, und zwar in der „Abhandlung über die Bestimmung der Sehnen im Kreis mit Hilfe einer diesem einbeschriebenen gebrochenen Linie" (Risāla fī istiḫrāǧ al-awtar fi-d-daira bi hawass al-hatt al-munhani al-waqi'fiha) [167*a*]. Den Ausgangspunkt bildet hier der folgende Satz von Archimedes: Ist einem Kreis ein zweigliedriger Streckenzug einbeschrieben und fällt man aus dem Mittelpunkt des von dem Streckenzug bestimmten Bogens ein Lot auf das größere Glied des Streckenzuges, so wird der Streckenzug durch dieses Lot halbiert. Al-Bīrūnī führt etwa 20 Beweise des Satzes an, die von Archimedes, ibn al-Haitham, ibn 'Irāq u. a., stammen, darunter 8 von ihm selbst. Der Satz des Archimedes wird ferner in den genannten Kapiteln des Buches III des „Al-Qānūn al-Mas'ūdī" vielfach angewandt.

Gegenstand des Buches IV sind Probleme der sphärischen Astronomie und der Gnomonik, während das Buch V Geodäsie behandelt. Die Bücher VI bis IX sind speziellen astronomischen Problemen gewidmet (Mondbewegung und Mondphasen, Sternkataloge, Planetenbewegung usw.).

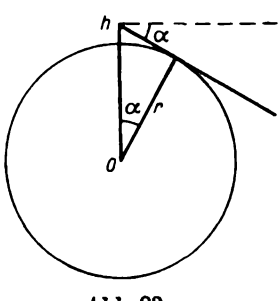


Abb. 82

Im siebenten Kapitel des Buches V des „Kanon" wird eine neue Methode zur Berechnung des Meridiangrades auf der Erde beschrieben. Die erste Breitengradmessung wurde in den islamischen Ländern, wie bereits erwähnt, unter al-Ma'mūn vorgenommen. Hierzu haben zwei Gruppen von Gelehrten mit Hilfe von Meßleinen im ebenen Gelände bei Damaskus Messungen längs des Meridians zwischen Tadmar (Palmyra) und ar-Rakka durchgeführt. Die Ergebnisse beider Messungen wurden verglichen und ergaben für einen Grad den Wert von $56\frac{2}{3}$ arabischen Meilen, was etwa 113 km ausmacht. Um diesen Wert zu überprüfen, bestieg al-Bīrūnī in Indien einen Berg, der von einer weiten Ebene umgeben war. Diese Ebene war nach den Worten des Gelehrten glatter als die Oberfläche des Meeres. Mit Hilfe des Astrolabiums berech-

nete er die sog. Horizontaldepression, d. h. den Winkel α (Abb. 82), für den er 34′ erhielt. Aus der Höhe $h = 652{,}05$ Ellen (eine Elle betrug etwa 0,5m) des Berges und der Depression berechnete al-Bīrūnī aus dem Verhältnis $r : h = \cos\alpha : (1 - \cos\alpha)$ den Erdradius zu $1081\frac{2}{3}$ farsang. Hieraus erhielt er für den Erdumfang 6800 farsang, und da ein farsang drei Meilen entspricht, kam er ebenfalls wie die Gelehrten des 9. Jahrhunderts auf $56\frac{2}{3}$ Meilen für einen Grad.

Sphärische Trigonometrie. Probleme der sphärischen Trigonometrie, die unmittelbar in der Astronomie Anwendung fanden, standen naturgemäß im Vordergrund. Bereits Ptolemaios berechnete vier Fälle des rechtwinkligen Dreiecks, und zwar: 1. nach den Katheten, 2. nach der Kathete und Hypotenuse, 3. nach der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel und 4. nach einer Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel. Auf diese führte er die benötigten schiefwinkligen Dreiecke zurück. Bei der Lösung wurde der Satz des Menelaos über das vollständige Vierseit angewandt, also über eine Figur, die aus dem Dreieck ABE und dem Großkreisbogen DFC (in der Ebene einer Geraden) gebildet wurde, der die Seiten $\widehat{AB}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{EA}$ in den Punkten D, F, C schneidet. Hierbei gelten bekanntlich Gleichungen der Form

$$\sin\widehat{AE} \cdot \sin\widehat{CD} \cdot \sin\widehat{BF} = \sin\widehat{AC} \cdot \sin\widehat{DF} \cdot \sin\widehat{BE}$$

(in der Ebene werden die Sinus der Kreisbogen durch Strecken ersetzt). Die Araber bezeichneten den Satz des Menelaos als die Regel der sechs Größen und drückten ihn, ebenso wie die antiken Gelehrten, durch zusammengesetzte Verhältnisse aus.

Die gleichen Fälle des rechtwinkligen Dreiecks behandelten zunächst auch die arabischen Astronomen. Doch bereits Thābit ibn Qurra und al-Battānī gingen weiter, indem sie den Sinussatz für den Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$ explizite formulierten. Selbstverständlich ergibt sich dieser Satz unmittelbar aus den beiden Gleichungen, die die Sinus der Katheten und der Hypotenuse miteinander verknüpfen, doch war es wichtig, diese Beziehung als besonderen Satz hervorzuheben. Bei einer Aufgabe erhielt al-Battānī eine Beziehung, die sich nur ihrer äußeren Form nach von einem der wichtigsten Sätze der sphärischen Trigonometrie, dem Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cos A, \qquad (1)$$

unterscheidet, mit dessen Hilfe man bekanntlich einen Dreieckswinkel aus drei gegebenen Seiten bzw. eine Seite bei gegebenen zwei Seiten und dem eingeschlossen Winkel berechnen kann. Die Aufgabe al-Battānīs bezieht sich auf den ersten Fall: Dort war das Azimut der Sonne aus ihrer Deklination und Höhe sowie aus der Polhöhe zu bestimmen. Ein ähnliches Ergebnis hatte auch ibn Yūnis zu verzeichnen. Die Mathematiker der islamischen Länder haben jedoch dieser Beziehung keine Bedeutung beigemessen. Der Kosinussatz wurde aus dem Werk al-Battānīs erst durch Regiomontanus herausgezogen und gebührend gewürdigt, der diesen als den „Satz des Albategnius" bezeichnete.

Wesentliche Erfolge erzielte man insofern, als die Verfahren zur Berechnung von Dreiecken vereinfacht wurden, denn die Anwendung des Satzes von Menelaos sowie dessen Zuordnung zu den einzelnen Spezialfällen ist recht umständlich. Erste Schritte in dieser Richtung wurden bereits zur Zeit al-Battānīs vollzogen. An-Nairīzi und Abū-l-Wafā betrachteten gesondert den Fall $\widehat{AC} = \widehat{CD} = 90°$ und wandten diesen auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke an. Hierbei ergibt sich die (übrigens auch dem Menelaos bekannte) Regel der vier Größen

$$\frac{\sin \widehat{DF}}{\sin \widehat{AE}} = \frac{\sin \widehat{BF}}{\sin \widehat{BE}}.$$

Die gleichen Gelehrten formulierten auch den sog. Tangenssatz

$$\frac{\tan \widehat{DF}}{\tan \widehat{AE}} = \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{AB}}.$$

Schließlich wurde auch der allgemeine Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

hergeleitet, für den an-Nairīzī, Abū-l-Wafā, al-Huǧandī und Abū Naṣr verschiedene Beweise gegeben haben. Die Anwendung der neuen Sätze erleichterte die Berechnung der bekannten Fälle des rechtwinkligen Dreiecks erheblich, so daß man z. B. den Sinussatz als den Satz bezeichnete, „der vom vollständigen Vierseit befreit" [169, S. 167].

Im 12. und 13. Jahrhundert hatte man bereits sämtliche Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks erledigt. Die Berechnung eines Dreiecks, wenn die Kathete a und der anliegende Winkel B gegeben sind, gelang erstmalig dem Westaraber Ǧābir ibn Aflā', und zwar führte er eine der Formel

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin B$$

äquivalente Beziehung ein, die später in den lateinischen Übersetzungen als die Regel des Geber bezeichnet wurde.

Den letzten Fall, die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks bei gegebenen Winkeln A und B erledigte Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī mit Hilfe der Formel

$$\cos c = \cot \alpha \cdot \cot \beta.$$

Die Abhandlung über das vollständige Vierseit des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Der bedeutendste orientalische Gelehrte auf dem Gebiet der Trigonometrie, Abū Ǧa'far Muḥammad ibn Muḥammad Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, wurde im Jahre 1201 in Tus, dem Kulturzentrum von Horasan, geboren [168, 151]. Nach Mitteilung eines Chronisten stammten seine Vorfahren aus Hamadan. Lange Jahre lebte aṭ-Ṭūsī in seiner Heimat und besuchte einmal Baghdād; im Alter von etwa 50 Jahren treffen wir ihn in Kuhistan am Hofe des Herrschers des Staates der Haschischin-Assasin an. Als Kuhistan von den Mongolen erobert wurde, zog der neue Herrscher des Iran, Hūlāgū-ḫān, den Gelehrten aṭ-Ṭūsī in den Kreis seiner engsten Mitarbeiter und befahl auf dessen Rat in seiner Wahlhauptstadt Maraga den Bau eines Observatoriums. An dieser Sternwarte, die im Jahre 1259 ihrer Bestimmung übergeben wurde, stand aṭ-Ṭūsī an

der Spitze einer großen Gruppe von Gelehrten, die aus Damaskus, Mosul, Kaswin, Tbilissi und anderen Gegenden zusammengezogen worden waren; ja sogar chinesische Astronomen gehörten ihr an. Hinsichtlich seiner Ausrüstung, des Umfangs der Bibliothek und des Arbeitsbereiches war dieses Observatorium eines der besten im Mittelalter. Ein Ergebnis der Arbeit an dieser Institution waren Tabellen, die dem Hān zu Ehren „Zīğ Īlhānī" genannt wurden. Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī starb im Jahre 1274 auf einer Reise nach Baghdād.

Aus der Feder aṭ-Ṭūsīs stammen mehrere Dutzend Originalwerke, Übersetzungen und Kommentare. Über seine Arbeiten zur Verhältnislehre und zur Parallelentheorie hatten wir bereits berichtet.

Nun wollen wir uns seinem Hauptwerk „Kitāb aš-šakl al-qitā'", d.h. dem Buch über die Sekantenfigur[1]), zuwenden, das man gegenwärtig gewöhnlich als die „Abhandlung über das vollständige Vierseit" bezeichnet [169].

Die „Abhandlung über das vollständige Vierseit" wurde in persischer Sprache verfaßt und im Jahre 1260 vom Verfasser selbst ins Arabische übersetzt, wahrscheinlich für die Bedürfnisse des Observatoriums von Maraga. Es ist dies vor allem das erste Werk, in dem die Lehre von der Berechnung der Dreiecke als selbständiger Wissenschaftszweig behandelt wird, während früher die Trigonometrie lediglich als Hilfsmittel der Astronomie in astronomischen Werken behandelt wurde. Ferner handelt es sich hier um den ersten vollständigen und abgerundeten Aufbau des gesamten Systems der Trigonometrie von den Grundbegriffen und Grundbeziehungen bis zum Algorithmus für die Lösung aller typischen Aufgaben. Wichtige Ergebnisse stammen vom Verfasser selbst, insbesondere die Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke in den schwierigsten Fällen, etwa nach den drei Seiten oder nach den drei Winkeln. Schließlich hat die „Abhandlung über das vollständige Vierseit" aṭ-Ṭūsīs einen entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der Trigonometrie in Europa ausgeübt [170].

Die „Abhandlung über das vollständige Vierseit" umfaßt fünf Bücher. Das Buch I, in dem sich der Verfasser an al-Ḫayyām anlehnt, enthält die Lehre von den zusammengesetzten Verhältnissen (vgl. S. 253). Im Buch II sind mehrere Varianten für den Beweis des Satzes des Menelaos für verschiedene Formen des ebenen vollständigen Vierseits angegeben. Die Beweise sind einfach und ergeben sich sämtlich aus der Ähnlichkeit von Dreiecken, die dann entstehen, wenn man durch irgendeinen Schnittpunkt eine Parallele zu einer nicht durch diesen Schnittpunkt hindurchgehenden Seite bis zum Schnitt mit der zweiten derartigen Seite hindurchlegt. Im Buch III werden die Begriffe des Sinus und Kosinus eines Bogens eingeführt und Hilfssätze bewiesen, insbesondere wurde die Aufgabe gelöst, zwei Bogen aus ihrer Summe oder Differenz sowie aus dem Verhältnis ihrer Sinus zu berechnen (beide Aufgaben sind auch bei Ptolemaios vorhanden). Hier wird auch die Berechnung der ebenen Dreiecke beschrieben, zunächst der rechtwinkligen und dann der allgemeinen; dabei wird hervorgehoben, daß unter den gegebenen Elementen wenigstens eine Seite vorhanden sein muß. Aṭ-Ṭūsī unterscheidet zwei Methoden: die Methode der Bogen und Sehnen und die Methode der Bogen und

[1]) Das Wort šakl bedeutet sowohl Figur als auch Satz (im Sinne des Eukleides); das Wort itā' bezeichnet Sekanten.

Sinus; um die letzteren anwenden zu können, wird der Sinussatz bewiesen. Hier leistet der Verfasser keinen neuen Beitrag; ebenso wie in anderen Arbeiten aus jener Zeit fehlt auch hier der Fall des nicht eindeutig bestimmten schiefwinkligen Dreiecks. Gegenstand des Buches IV ist der Satz des Menelaos für das sphärische Dreieck; er wird mit Hilfe einer verhältnismäßig einfachen Konstruktion aus dem Satz für das ebene vollständige Vierseit und aus den Hilfssätzen des Buches III hergeleitet. Den Satz

$$\frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{EA}} = \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{FD}} \cdot \frac{\sin \widehat{DB}}{\sin \widehat{BA}}$$

bezeichnet aṭ-Ṭūsī als den expliziten und den Satz

$$\frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{AE}} = \frac{\sin \widehat{CD}}{\sin \widehat{DF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FB}}{\sin \widehat{BE}}$$

als den impliziten Satz des Ptolemaios. Am Ende des Buches IV wird die Bedeutung des Satzes über das vollständige Vierseit zur Berechnung von Kreisbogen erläutert, die sich durch den Schnitt von Großkreisen auf der Kugel ergeben, wobei die einen Bogen als bekannt vorausgesetzt, die anderen hingegen gesucht werden. Die Alten hätten nach Meinung aṭ-Ṭūsīs diesen Satz mit großer Sicherheit gehandhabt.

„Viele der späteren Gelehrten hingegen beweisen, da sie die Verwirrung bei der Untersuchung verschiedener Verhältnisse und ihrer Spielarten fürchten, andere Sätze, um das vollständige Vierseit zu ersetzen und den aus diesem zu ziehenden Nutzen zu gewinnen, indem sie die Zuflucht zu den vielfältigen Fällen zusammengesetzter Verhältnisse suchen" [169, S. 127, russisch]. Das Buch V ist nunmehr der Berechnung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von „Methoden, die das Vierseit ersetzen", gewidmet. Es beginnt mit einer ausführlichen Klassifizierung der zehn Haupttypen sphärischer Dreiecke nach ihren Winkeln (je nachdem, ob diese spitze, rechte oder stumpfe Winkel sind) und Seiten (je nachdem, ob diese kleiner, gleich oder größer als ein Viertel des Großkreises sind). Danach beweist aṭ-Ṭūsī zwei wichtige Sätze, den Sinussatz und den Tangenssatz. Charakteristisch ist die arabische Bezeichnung „aš-šakl al-muqni", was soviel wie „ausreichender Satz" bedeutet, womit gesagt sein soll, daß man bei seiner Anwendung ohne das vollständige Vierseit auskommt. Aṭ-Ṭūsī führt viele Beweise für diese Sätze an, die seine Vorgänger geliefert haben, und stützt sich dabei auf die Darlegung al-Bīrūnīs, den er mit Hochachtung als den großen Lehrer und Gelehrten bezeichnet. Dabei werden die Begriffe Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans eingeführt. Sodann bringt aṭ-Ṭūsī seine eigenen, äußerst einfachen Beweise für den Sinussatz und Tangenssatz, die auf dem als Regel der vier Größen bezeichneten Spezialfall des Satzes von Menelaos beruhen.

Nachdem er den Tangenssatz für das rechtwinklige Dreieck in der Form — das Verhältnis des Tangens der Kathete zum Tangens des gegenüberliegenden Winkels ist gleich dem Verhältnis des Sinus der anderen Kathete zum Sinus des rechten Winkels $\left(\frac{\tan b}{\tan B} = \sin a\right)$ — bewiesen hat, leitet aṭ-Ṭūsī aus diesem verschiedene für die prak-

tische Anwendung bestimmte Folgerungen ab. So zerlegt er ein beliebiges Dreieck ABC durch die Höhe $\widehat{CD}$ (Abb. 83) und erhält die Sätze

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{AD}}, \qquad \frac{\tan C_1}{\tan C_2} = \frac{\tan \widehat{AD}}{\tan \widehat{BD}}$$

sowie einige Folgerungen aus diesen. Aṭ-Ṭūsī weist darauf hin, daß viele den Tangenssatz meiden, weil die Differenzen der Tangenswerte für Winkel über 45° sehr rasch anwachsen, wodurch das Interpolieren bei Anwendung der Tabellen schwierig wird. Er erläutert, daß in den empfohlenen Regeln diese Gefahr nicht droht und daß man mit Tangenswerten auskommt, die unterhalb von 1 liegen. Im letzten Kapitel des Buches V werden die Methoden zur Berechnung sphärischer Dreiecke behandelt. Zunächst werden sämtliche sechs Fälle des rechtwinkligen Dreiecks untersucht, wobei die Berechnung des einen Falles, wie wir vorhin erwähnten, auf aṭ-Ṭūsī selbst zurückgeht. Die Lösungen, die auf dem Sinussatz bzw. auf dem Tangenssatz beruhen, behandelt er gesondert. Schließlich werden mit Hilfe derselben spärlichen Hilfsmittel die schiefwinkligen Dreiecke berechnet. Wir wollen hier die beiden schwierigsten Fälle betrachten, und zwar wenn entweder drei Seiten oder drei Winkel gegeben sind. Für den ersten Fall, den bereits al-Battānī in einer Nebenbetrachtung untersucht hatte (vgl. S. 302), gibt aṭ-Ṭūsī ein eigenes Verfahren an, während die Berechnung des zweiten Falles hier erstmalig auftritt.

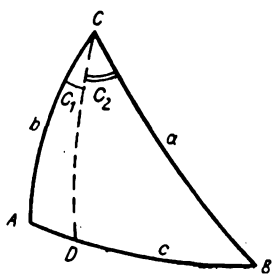


Abb. 83

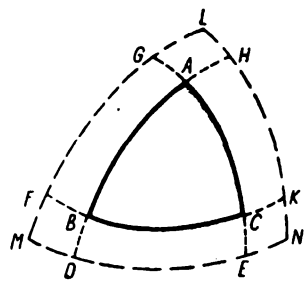


Abb. 84

Im Dreieck ABC seien sämtliche Seiten gegeben. Wir verlängern $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ bis D bzw. E, so daß $\widehat{AD}$ und $\widehat{AE}$ jeweils die Länge eines Viertelbogens des Großkreises haben; ferner wird $\widehat{BC}$ bis zum Schnittpunkt F mit dem verlängerten Großkreisbogen $\widehat{DE}$ verlängert (Abb. 84). Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{BF}} = \frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{BD}};$$

da die Differenz $\widehat{BC}$ der Bogen $\widehat{CF}$ und $\widehat{BF}$ und das Verhältnis der Sinus dieser Bogen bekannt ist, kann man die Bogen $\widehat{CF}$ und $\widehat{BF}$ selbst berechnen. In den rechtwinkligen Dreiecken BDF und CEF sind die Katheten $\widehat{BD} = 90° - \widehat{AB}$ und

$\widehat{CE} = 90° - \widehat{AC}$ sowie die Hypotenusen bekannt. Hieraus ermittelt man $\widehat{BF}$ und $\widehat{CF}$, deren Differenz den Winkel A ergibt. Die anderen Winkel ermittelt man in der gleichen Weise.

Sind in einem Dreieck ABC, dessen Seiten kleiner sind als jeweils ein Viertel des Großkreisbogens (Abb. 84), die Winkel gegeben, so ergänzt aṭ-Ṭūsī jede Seite zweimal zu einem viertel Großkreisbogen, $\widehat{AB}$ zu $\widehat{AD}$ und $\widehat{BH}$, $\widehat{BC}$ zu $\widehat{BK}$ und $\widehat{CF}$ und $\widehat{AC}$ zu $\widehat{CG}$ und $\widehat{EA}$, und legt durch die Punktepaare D und E, F und G sowie K und H die Großkreise und konstruiert das Dreieck LMN, dessen Eckpunkte in den Schnittpunkten dieser Großkreise liegen. Das Dreieck LMN erhielt später die Bezeichnung Polardreieck zu einem gegebenen Dreieck ABC, da die Pole seiner Seiten die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks sind. Das gegebene Dreieck ABC ist seinerseits Polardreieck zu LMN, während die Winkel jedes Dreiecks die entsprechenden Seiten des anderen jeweils zu 180° ergänzen. Wegen $\widehat{MD} = \widehat{EN} = 90° - \widehat{DE} = 90° - \sphericalangle A$ gilt z. B. $\widehat{MN} = 180° - \sphericalangle A$; wegen $\widehat{BF} = \widehat{CK} = 90° - \widehat{BC}$ gilt gleichermaßen $\sphericalangle L = \widehat{FK} = 180° - \widehat{BC}$. Nachdem aṭ-Ṭūsī das Dreieck LMN aus seinen Seiten berechnet hat, kann er durch die Winkel L, M und N die gesuchten Seiten des Dreiecks ABC ausdrücken. Er erwähnt auch den Fall, daß eine Seite des Dreiecks ABC größer ist als ein Viertel des Großkreisbogens.

Die „Abhandlung über das vollständige Vierseit" des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī hat, wie bereits erwähnt, für die Entwicklung der Mathematik in Europa eine große Rolle gespielt. Insbesondere hat Regiomontanus hieraus viel für seine „Fünf Bücher über Dreiecke aller Art" geschöpft. Sein Werk, das erst im Jahre 1533, nach dem Tode seines Verfassers, erschien, bildet die Grundlage für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Trigonometrie [170]. In Europa wurde das Polardreieck durch W. Snellius im 17. Jahrhundert eingeführt.

Trigonometrische Tafeln. Bei der Berechnung von Dreiecken benötigt man trigonometrische Tafeln. Solche Tabellen gehörten zum Bestand der sog. zīǧ. Das Wort zīǧ, das der persischen Sprache entstammt, bedeutet im Arabischen eine Sammlung von Tabellen für Astronomen und Geographen. In der Regel bestanden diese zīǧ aus Kalenderbeschreibungen, die mitunter sehr ausführlich waren und die islamischen, syrischen, persischen, hebräischen, indischen, chinesischen, christlichen und andere Kalender umfaßten, aus Angaben über die Zeitrechnung in verschiedenen Reichen, aus trigonometrischen Tafeln, Sternkatalogen sowie aus verschiedenen astronomischen Tabellen. Darüber hinaus enthielten die zīǧ mehr oder weniger ausführliche Hinweise, wie man die Grundaufgaben der Zeitrechnung zu lösen und die sichtbare Bewegung der Himmelskörper, Sonnen- und Mondfinsternisse usw. zu berechnen hat.

Aus der Zeit vom 8. bis 15. Jahrhundert sind mehr als hundert verschiedene zīǧ erhalten geblieben (oder zumindest bekannt geworden), von denen etwa zwanzig auf den Beobachtungen ihrer Verfasser beruhen [171]. Aufschlußreich ist ihre Verteilung auf die einzelnen Gegenden und Jahrhunderte. Im 8. Jahrhundert wurden mehrere zīǧ im Irak und eine im Iran zusammengestellt. Im 9. Jahrhundert erschien eine be-

deutende Anzahl neuer zīǧ im Irak, einige in Syrien und im Iran. Nach dieser Zeit entstammt der bei weitem überwiegende Teil aller zīǧ dem Iran. Seit dem Ende des 9. und 10. Jahrhunderts entstanden einige zīǧ in Ägypten und in den mauretanischen Ländern Europas (insbesondere im 11. und zu Beginn des 12. Jahrhunderts), fünf in Mittelasien und eine in Afghanistan. Diese statistischen Angaben kennzeichnen teilweise die astronomische Aktivität in den verschiedenen islamischen Ländern, jedoch darf man die Qualität und die Bedeutung der einzelnen zīǧ und auch die Unbestimmtheit der Grenzziehung etwa zwischen dem Iran jener Zeit und seinen Nachbarn nicht außer acht lassen. Zu den vollständigsten gehören neben der zīǧ des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī der „Kanon des Ma'sūd", zusammengestellt von al-Bīrūnī in Gasna, die zīǧ, die etwa 1120 in der Stadt Merv durch einen Schüler des Umar' al-Ḫayyām, den großen Physiker und Astronomen griechischer Herkunft, Abū-l-Fatḥ 'Abd ar-Raḥmān al-Ḫāzinī al-Marwazī, verfaßt wurde, und die zīǧ, die im Observatorium von Samarkand des Ulugbēk zusammengestellt wurde.

Die ältesten Tabellen, die im Kalifat auf der Grundlage der indischen Siddhāntas entstanden, sind nahezu sämtlich verlorengegangen. In der zīǧ des Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī waren sexagesimale Tabellen der Sinuswerte mit einer Schrittweite von einem Grad und drei Sexagesimalstellen (für $r = 60$), ferner Tabellen der Tangenswerte mit einer Sexagesimalstelle nach dem „Komma" enthalten [117]. Die zīǧ des al-Ḥabaš al-Ḥāsib enthält Werte für die Funktionen Sinus, Tangens, Kotangens, Sinus versus und Kosekans mit der Schrittweite von einem Grad und mit der gleichen Genauigkeit. In einer anderen Handschrift, die uns unter dem Namen dieses Gelehrten überliefert ist, ist der Sinus mit einer Schrittweite von $\frac{1}{4}^\circ$ und mit vier Stellen, der Tangens mit einer Schrittweite von $\frac{1}{2}^\circ$ und mit zwei Stellen tabelliert. Dabei ist zu beachten, daß wir die Tabellen des al-Ḥabaš al-Ḥāsib ebenso wie die Tabellen al-Ḫuwarizmīs nur aus späteren Bearbeitungen kennen.

Die Genauigkeit der ersten arabischen Tabellen war etwa die gleiche wie in der Sehnentafel des Ptolemaios.

Das Berechnungsverfahren des Ptolemaios liefert in den Tabellen einen spürbaren Fehler bereits in den Terzen [18, Bd. I]. Eine neue, genauere und elastischere Methode zur Berechnung von Tabellen geht auf Abū-l-Wafā zurück. Es handelt sich hier ebenfalls um ein gewisses Interpolationsverfahren, das bei der Berechnung von $\sin \frac{1^\circ}{2}$ die Lösung der Winkeltrisektionsgleichung zu umgehen und hinreichend genaue Abschätzungen nach unten und nach oben zu gewinnen gestattet. Zunächst werden die Sinuswerte für drei Bogen bestimmt, die in der Nähe von $\frac{1^\circ}{2}$ liegen, und zwar für $\frac{12^\circ}{32}$, $\frac{15^\circ}{32}$ und $\frac{18^\circ}{32}$ mit einem Intervall von $\frac{3^\circ}{32}$. Diese Sinus lassen sich aus sin 36° und sin 60° durch rationale Operationen und das Ausziehen einer Quadratwurzel gewinnen, die aus der Anwendung der Formel für den Sinus des halben Winkels resultiert. Der Wert von $\sin \frac{12^\circ}{32} = \sin \frac{72^\circ - 60^\circ}{32}$ wird mit Hilfe der Formel für den Sinus der

Winkeldifferenz bestimmt; diese drückte Abū-l-Wafā ohne Verwendung des Kosinus in der folgenden Form aus:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Die Interpolation Abū-l-Wafās beruht auf einem Satz aus den Kommentaren des Theon von Alexandria zum „Almagest", der unter Verwendung der Termini der Trigonometrie wie folgt lautet: Bei konstantem Zuwachs des Arguments werden die Differenzen der Sinuswerte kleiner. In der Tat (Abb. 85), sind die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{BC}$ gleich, so ist der Sehnenabschnitt $\overline{CD}$ kleiner als die Strecke $\overline{AD}$, und der Satz folgt unmittelbar aus der Proportion

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BF}}=\frac{\widehat{CD}}{\widehat{DA}}<1.$$

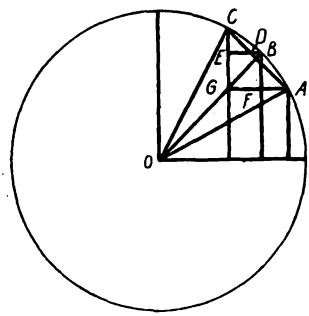


Abb. 85

Aus den Ungleichungen

$$\sin(\varphi+3h)-\sin(\varphi+2h)<\sin(\varphi+h)-\sin\varphi<\sin\varphi-\sin(\varphi-h),$$
$$\sin(\varphi+2h)-\sin(\varphi+h)<\sin(\varphi+h)-\sin\varphi<\sin(\varphi-h)-\sin(\varphi-2h),$$
$$\sin(\varphi+h)-\sin\varphi=\sin(\varphi+h)-\sin\varphi<\sin(\varphi-2h)-\sin(\varphi-3h)$$

erhalten wir durch gliedweise Addition

$$\sin\varphi+\frac{1}{3}[\sin(\varphi+3h)-\sin\varphi]<\sin(\varphi+h)<\sin\varphi+\frac{1}{3}[\sin(\varphi)-\sin(\varphi-3h)].$$

Für $\varphi=\frac{15}{32}$ und $h=\frac{1}{32}$ liefern die letzten Gleichungen die Grenzen

$$\sin\frac{15^\circ}{32}+\frac{1}{3}\left(\sin\frac{18^\circ}{32}-\sin\frac{15^\circ}{32}\right)<\sin\frac{1^\circ}{2}<\sin\frac{15^\circ}{32}+\frac{1}{3}\left(\sin\frac{15^\circ}{32}-\sin\frac{12^\circ}{32}\right).$$

Abū-l-Wafā bildet nun das arithmetische Mittel aus dem linken und dem rechten Wert und erhält für den Radius 60

$$\sin\frac{1^\circ}{2}=31'\,24''\,53'''\,54^{IV}\,55^{V}.$$

Dieser Wert ist bis einschließlich der Quarten genau, da er bis einschließlich der Quinten genau $31'24''55'''54^{IV}0^{V}$ lauten müßte. In Dezimalbrüchen geschrieben ergibt sich der Näherungswert Abū-l-Wafās zu 0,0087265373 anstelle des richtigen Wertes 0,0087265355. Er ist demnach bis auf 10^{-8} genau. Der Fehler der Methode Abū-l-Wafās, d. h.

$$\sin\frac{1^\circ}{2}-\left[\sin\frac{15^\circ}{32}+\frac{1}{6}\left(\sin\frac{18^\circ}{32}-\sin\frac{12^\circ}{32}\right)\right]$$

macht 47 Quinten aus; beim Baghdāder Mathematiker hatte sich ein Fehler von 55 Quinten ergeben, weil seine Ausgangswerte bereits Fehler im Bereich der Quinten aufwiesen.

Die Sinustabelle Abū-l-Wafās hatte eine Schrittweite von 15′. Darüber hinaus hat er eine Tangens- und Kotangenstabelle zusammengestellt.

Hervorragende trigonometrische Berechnungen hatte ibn Yūnis in der nach langjähriger Arbeit im Jahre 1007 vollendeten „Zīğ al-Ḥakimī" aufzuweisen, die

dem Kalif von Kairo, al-Ḥakim (996—1020) zu Ehren so benannt wurde. Ibn Yūnis berechnete selbständig sin 1°, wobei er das Verfahren des Ptolemaios verbesserte. Vor allem ging er von Argumentwerten aus, die näher bei 1° liegen. Aus sin 18° und sin 15° wurden sin $\frac{9°}{8}$ und sin $\frac{15°}{16}$ berechnet. Die hierbei nach dem Verfahren des Ptolemaios für sin 1° sich ergebenden Grenzen weisen eine Differenz von nur $5'''6^{IV}$ auf. Sodann dividierte ibn Yūnis diese Größe im Verhältnis der Bogendifferenzen $\left(\frac{9}{8}-1\right):\left(1-\frac{15}{16}\right)=2:1$ und erhielt auf diese Weise sin $1°=1;\ 2'49''43'''28^{IV}$. Diesen Wert präzisierte er noch weiter, indem er die Werte sin $(3°-1°)$ und sin $(2\cdot 1°)$ miteinander verglich. Sein endgültiger Wert sin $1°=1;\ 2'49''43'''4^{IV}$ unterscheidet sich vom wahren Wert nur um etwas mehr als 7^{IV} und ist somit in dezimaler Schreibweise auf 10^{-7} genau. Ebenso genau sind seine Sinustabellen, die in der „Zīǧ al-Ḥakimī" eine Schrittweite von 1′ aufweisen. Darüber hinaus stellte ibn Yūnis auch Sinustafeln mit einer Schrittweite von 1″ zusammen. Seine Tangenstafeln, die ebenfalls eine Schrittweite von 1′ haben, sind noch nicht untersucht worden [167].

Im Buch III des „Kanon des Ma'sūd" hat al-Bīrūnī sin 1° ebenfalls bis auf Quarten genau berechnet und eine äußerst genaue Sinus- und Tangenstafel zusammengestellt, in der u. a. der Radius gleich 1 gesetzt ist. Al-Bīrūnī motiviert diese Wahl[1]) speziell durch das Bestreben, sich der lästigen und immer wieder erforderlichen Multiplikation und Division mit $r=60$ zu entledigen.[2])

Von besonderem Interesse ist das Verfahren al-Bīrūnīs zur Berechnung von Näherungswerten. Die Fehler in den Berechnungen Abū-l-Wafās und des Ptolemaios hängen von den als Ausgangswerte gewählten Sinuswerten und von deren Differenzen ab, und sie stellen auch keine Folge von Näherungswerten dar, die gegen den genauen Wert der gesuchten Größe konvergieren. Al-Bīrūnī wandte verschiedene Methoden der schrittweisen Näherung an, deren Fehler beliebig klein gemacht werden konnten. Leider hat al-Bīrūnī sein Verfahren zur numerischen Auflösung der kubischen Gleichung nicht hinterlassen. Er gibt lediglich den Wert für die Wurzel der Gleichung $x^3=1+3x$ an, wobei x die Sehne zu einem Kreisbogen von $\frac{2}{9}$ des Kreisumfanges ist, und zwar $x=1;52'45''47'''13^{IV}$; hieraus ergibt sich die Sehne für 40° zu $41'2''32'''41^{IV}55^{V}$ (vgl. S. 258). Dafür kennen wir aber ein anderes äußerst einfaches Verfahren al-Bīrūnis zur Berechnung der Seite des regelmäßigen Neunecks bzw. der zum Winkel von 40° gehörenden Sehne. Als Ausgangswerte für die weiteren Berechnungen dienen

$$\text{Sehne } 30°=31'3''29'''49^{IV}36^{V},$$
$$\text{Sehne } 12°=12'32''37'''17^{IV}46^{V}.$$

---

[1]) In Europa wurde diese Handhabung erstmalig von Thomas Bradwardinus im 14. Jahrhundert vorgeschlagen. Allgemein gebräuchlich wurde der Radius von der Länge 1 für den trigonometrischen Kreis erst im 18. Jahrhundert, was insbesondere Euler zu verdanken ist.

[2]) Es sei bemerkt, daß im Sexagesimalsystem der Radius von der Länge 60 im Grunde genommen die gleiche Rolle spielt wie bei uns der Radius von der Länge 1. Eine Multiplikation oder Division mit der Zahl 60 entspricht einer einfachen Erhöhung oder Erniedrigung des Multiplikanden um einen Stellenwert.

Sodann werden mit Hilfe der trigonometrischen Regeln die Sehnen zu $30° + 12° = 42°$ und $\frac{42°}{4} = 10\frac{1°}{2}$, danach $30° + 10\frac{1°}{2} = 40\frac{1°}{2}$ und $\frac{40\frac{1°}{2}}{4} = 10\frac{1°}{8}$, sodann $30° + 10\frac{1°}{8} = 40\frac{1°}{8}$ und $\frac{40\frac{1°}{8}}{4} = 10\frac{1°}{32}$ usw., d. h. die Werte der Sehnen für $a_n = 40° + \frac{2°}{4^n}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ berechnet. Al-Bīrūnī brach bei der zu $40°\,24^{\mathrm{IV}}$ gehörenden Sehne ab, für die er den Wert $41'\,2''\,32'''\,42^{\mathrm{IV}}\,29^{\mathrm{V}}$ erhielt, der bis auf Quarten genau ist.

Der Wert für sin 1°, d. h. die Halbsehne für 2°, bezeichnete al-Bīrūnī indem er von der Sehne für 6° ausging, und erhielt den bis einschließlich der Quarten genauen Wert $1'\,2''\,49'''\,43^{\mathrm{IV}}$.

Die Sinustafel al-Bīrūnīs weist ebenso wie die Abū-l-Wafās eine Schrittweite von 15′ auf; die Schrittweite seiner Tangenstafel beträgt 1°. Neben der seit der Zeit des Ptolemaios allgemein gebräuchlichen linearen Interpolation wendet al-Bīrūnī hier die quadratische Interpolation an, die, wie wir gesehen hatten, zu Beginn des 7. Jahrhunderts von den Astronomen Chinas bei ihren Kalenderberechnungen angewandt wurde (vgl. S. 84 bis 86). Im Unterschied zu der chinesischen Regel, die einen Spezialfall der Newton-Stirlingschen Formel darstellt, lauten die von al-Bīrūnī empfohlenen Regeln, die sich auf $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \operatorname{tg} x$ beziehen,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + (x - x_0)^2 \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}}{h}.$$

Schreibt man diese Formel in der Gestalt

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2} + (x - x_0)(x - x_0 - h)\frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}}{h},$$

so sieht man, daß sich die Regel al-Bīrūnīs von der Formel für die parabolische Interpolation lediglich durch das Fehlen des Koeffizienten $\frac{1}{2}$ im Glied zweiten Grades unterscheidet.

Nach der Erläuterung der Regel zur Interpolation beim Gebrauch der Sinus- und Tangenstafeln fügt al-Bīrūnī hinzu, daß seine Regel für „alle Tafeln", d. h. für alle zu seiner Zeit bekannten trigonometrischen und astronomischen Tabellen, geeignet sei [172, 172*a*].

Wir wollen später noch die Tabellen des Observatoriums von Samarkand genauer betrachten, doch vorher wollen wir uns der Berechnung von π zuwenden, die mit den trigonometrischen Berechnungen in engem Zusammenhang steht.

Die Kreisberechnung des Ghiyāth ad Dīn al-Kāšī. Mit der Berechnung des Verhältnisses von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, d. h. der Zahl π, beschäftigten sich ibn al-Haitham, al-Bīrūnī u. a. Lange Zeit war es nicht gelungen, die im antiken Griechenland erreichte Genauigkeit zu überbieten. Im Buch III des „Kanon des Mas'ūd'«

berechnete al-Bīrūnī die Umfänge des einbeschriebenen und umbeschriebenen 180-Ecks und bildete aus beiden das arithmetische Mittel. Jedoch war sein Ergebnis, das in Dezimalbrüchen geschrieben 3,1417... lautet, etwas schlechter als der früher bekannte Wert 3,1416. Das lag daran, daß al-Bīrūnī aus irgendeinem Grunde den dazu benötigten Wert für die Länge der Sehne von 2° mit $2'\,5''\,39'''\,43^{IV}\,36^{V}$ ansetzte, obwohl er in anderen Kapiteln desselben Buches des „Kanon des Mas'ūd" den besseren Wert $2'\,5''\,39'''\,25^{IV}\,58^{V}$ angibt (der genaue Wert müßte lauten $2'\,5''\,39'''\,26^{IV}\,22^{V}\,29^{VI}$).

Ein anderer Näherungswert wurde in einer Handschrift, die mit dem Jahre 1322 datiert ist, in Wirklichkeit jedoch auf die Mitte des 13. Jahrhunderts zurückgeht, dadurch gewonnen, daß man die Umfänge des einbeschriebenen und umbeschriebenen 720-Ecks berechnete. Bei dieser Berechnung war ebenfalls gleich am Anfang ein Fehler unterlaufen, indem man für die Sehne eines halben Grades den Sinus zu diesem Bogen ansetzte, wie ihn Abū-l-Wafā berechnet hatte. Diese Werte differieren bereits in den Terzen. Daher ergab sich für den Umfang des umbeschriebenen 720-Ecks ein Wert, der unterhalb der Länge des Kreisumfanges liegt. Die Grenzen für π werden hier mit $3;8'\,29''\,35'''$ und $3;8'\,29''\,42'''$ angegeben, während sich in Wirklichkeit die Zahl π auf Terzen genau zu $3;8'\,29''\,44'''$ ergibt. Später hatte man diese Berechnung Abū-l-Wafā zugeschrieben, jedoch ist kaum anzunehmen, daß dieser die Sehne von einem halben Grad durch den zugehörigen Sinus ersetzt hatte.

Bemerkenswert ist die Berechnung von π, die Ğamšid Ghiyāth ad-Dīn al-Kāšī in seiner „Abhandlung über den Kreis" (Risāla al-muḥīṭiyya) vorgenommen hat; das Werk wurde im Jahre 1424 abgeschlossen. Diese Rechenarbeit ist ein Glanzstück einer Näherungsrechnung, und zwar nicht nur, was das Ergebnis betrifft, das auf 17 Dezimalen genau ist, sondern auch hinsichtlich der Eleganz und Einfachheit der Abschätzungen, der sparsamen Auswahl des Genauigkeitsvorrates für die Zwischenwerte usw. [126, 173].

Zu Beginn seiner Abhandlung unterzieht al-Kāšī die von seinen Vorgängern gewonnenen Näherungswerte einer Kritik, da diese für große Kreise große absolute Fehler liefern. Für das Verständnis des Weiteren wollen wir die von ihm verwendeten Maßeinheiten anführen:

1 Farsang = 12000 Ellen (etwa 6 km),
1 Elle (etwa 50 cm) = 24 Zoll bzw. Finger,
1 Zoll = 6 Breiten eines mittleren Gerstenkornes,
1 Breite eines mittleren Gerstenkornes = 6 Pferdehaarstärken.

Die letzte Größe entspricht etwa einem halben Millimeter. Den Erdradius nimmt al-Kāšī mit 2485 Farsang und den Umfang eines Großkreises auf der Erde mit etwa 8000 Farsang an. Schließlich vermutet er nach dem Vorbild des iranischen Astronomen Quṭb ad-Dīn aṭ-Šīrāzī (1236—1311), daß der Halbmesser der Fixsternsphäre $70073\frac{1}{2}$ Erddurchmesser beträgt.

Die von Archimedes angegebenen Grenzen für π, d. h. $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, differieren um $\frac{1}{497}$. Daher sagt al-Kāšī, daß bei einem Kreis mit einem Durchmesser von 497 Einheiten der Kreisumfang im Bereich einer ganzen Einheit unsicher ist, was für den Großkreis

der Erde bereits einen Unsicherheitsbereich von 5 Farsang und für den Großkreis der Fixsterne einen solchen von mehr als 300000 Farsang ergibt. Bei der Berechnung von Flächeninhalten wird der Fehler noch größer. Nachdem er auf die Unzulänglichkeiten der Ergebnisse des al-Bīrūnī und (wie al-Kāšī vermutet) des Abū-l-Wafā hingewiesen hat, wirft er das Problem einer genauen Berechnung von π auf, das er in Gestalt der folgenden originellen Forderung formuliert: Der Umfang eines Kreises soll durch den Durchmesser so genau ausgedrückt werden, daß der Fehler beim Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 600000 Erddurchmesser beträgt, eine Haaresbreite nicht übersteigt.

Die Kreisberechnung stützt sich bei al-Kāšī ebenso wie bei seinen Vorgängern seit Archimedes auf die Berechnung der Umfänge der einbeschriebenen und umbeschriebenen regulären Vielecke. Allerdings führt al-Kāšī seine Berechnungen nach einem etwas anderen Programm durch. Er bestimmt in einem Kreis vom Radius 60 die aufeinanderfolgenden Werte der Sehnen $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ für die Bogen von 120°, 150° 165°, $172\frac{1}{2}^\circ$ und ganz allgemein für die Bogen

$$\alpha_n = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^{n-1}}.$$

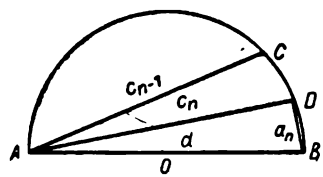


Abb. 86

Die Grundlage für die Berechnungen bildet der Satz: Das Rechteck mit dem Halbmesser $\overline{OA}$ als die eine Seite und der Summe aus dem Durchmesser $\overline{AB}$ und der Sehne zu einem Bogen $\widehat{AC}$, der kleiner ist als 180°, als andere Seite ist gleich dem Quadrat der Sehne $\overline{AD}$, die sich als Sehne zur Summe der Kreisbogen $\widehat{AC}$ und $\frac{180^\circ - \widehat{AC}}{2}$ ergibt (Abb. 86, D bedeutet also den Mittelpunkt des Bogens $\widehat{BC}$). Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich ein beliebiges Glied unserer Sehnenfolge durch das vorhergehende ausdrücken:

$$(d + \operatorname{ch}\alpha)\,\frac{d}{2} = \left[\operatorname{ch}\left(\alpha + \frac{180^\circ - \alpha}{2}\right)\right]^2; \tag{1}$$

hier bezeichnet d den Durchmesser und ch α die Sehne zum Bogen $\widehat{BC} = \alpha$. Setzt man $\frac{180^\circ + \alpha}{2} = \alpha_n$, so gilt $\alpha = \alpha_{n-1}$ und die Formel (1) nimmt die Gestalt

$$(\operatorname{ch}\alpha_n)^2 = (d + \operatorname{ch}\alpha_{n-1})\,\frac{d}{2} \tag{1'}$$

an, wobei $\alpha_0 = 60^\circ$ und ch $\alpha_0 = c_0 = 60$ oder, was dasselbe bedeutet,

$$c_n = \sqrt{r\,(2r + c_{n-1})} \tag{1''}$$

ist; hierbei bedeutet r den Radius des Kreises.

Für $\alpha = 2\varphi$ und $d = 2$ geht der Satz des al-Kāšī in die trigonometrische Formel

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{2}}$$

über, die wir erstmalig bei J. H. Lambert im Jahre 1770 vorfinden. Die Folge der Sehnen c_n dient zur Berechnung der Seiten der einbeschriebenen Vielecke, denn die

Sehne zur Ergänzung des Bogens α_n zu 180° ist gerade die Seite a_n des einbeschriebenen regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecks. Nach dem Satz des Pythagoras gilt daher

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2}; \tag{2}$$

wählt man n hinreichend groß, so kann man eine beliebig kleine Seite a_n berechnen.

Die weiteren Rechenoperationen, die im Sexagesimalsystem vorgenommen werden, bestehen aus rationalen Operationen und dem Ausziehen von Quadratwurzeln gemäß den Formeln (1′) und (2). Bevor al-Kāšī an das Rechnen selbst heranging, legte er fest: 1. die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen $3 \cdot 2^n$-Ecks, dessen Umfang die geforderte Genauigkeit der Kreisberechnung gewährleistet, und 2. die für diese Zwecke benötigte Stellenzahl für sämtliche c_k und andere Hilfsgrößen. In einem Kreis, dessen Durchmesser das 600000fache des Erddurchmessers beträgt, übersteigt eine Oktave, d. h. $\frac{1}{60^8}$, eine Haaresbreite nicht, denn es gilt

$$\frac{1}{60^9} \cdot \frac{1}{360} \cdot 600000 \cdot 8000 \cdot 10368000 \approx \frac{4}{5}.$$

Hieraus folgt, daß die geforderte Genauigkeit gewährleistet ist, wenn man die Umfänge des umbeschriebenen und einbeschriebenen Vielecks so bestimmt, daß ihre Differenz nicht größer ist als 60^{-8}, bzw. wenn man zum Einheitskreis übergeht, nicht größer als 60^{-9}, denn für den Einheitskreis gilt

$$P - p < \frac{1}{60^9} \tag{3}$$

für die Differenz der Peripherien.

Nach der Abschätzung der Umfangsdifferenz geht al-Kāšī zur Abschätzung der Seitenlänge des einbeschriebenen Vielecks über, wobei er es virtuos versteht, sehr kleine Differenzen zu vernachlässigen.

Wir bezeichnen den Umfang des einbeschriebenen Vielecks mit p und die Höhe der zugehörigen Teildreiecke mit h, ferner den Umfang des umbeschriebenen Vielecks mit P, den Kreisradius mit r und die Differenz $r - h$, d. h. die Segmenthöhe, mit s. Dann gilt

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{h}$$

$$\frac{P-p}{p} = \frac{r-h}{h} = \frac{s}{r-s}. \tag{4}$$

Nach der Kreisberechnung des Archimedes gilt für das Verhältnis des Kreisumfanges C zum Radius r die Ungleichung $6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7}$, so daß

$$\frac{1}{6} - \frac{r}{C} < \frac{1}{6} - \frac{7}{44} = \frac{1}{132} < \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{126} \tag{5}$$

gilt. Mit Hilfe der Formeln (3) bis (5) läßt sich die gesuchte Anzahl der Seiten des einbeschriebenen Vielecks bestimmen. Bei hinreichend großer Anzahl der Seiten, d. h., wenn p nur noch wenig von C abweicht und dementsprechend die Segmenthöhe s klein ist, läßt sich (4) näherungsweise durch

$$\frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r} \tag{4'}$$

ersetzen.

Ferner gilt gemäß (3) und (5)

$$\frac{P-p}{C} < \frac{r}{60^9 C} \approx \frac{1}{60^9}\left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right)$$

mit $\varepsilon < \frac{1}{126}$ und $\frac{1}{6} - \varepsilon \approx \frac{8}{60}$, so daß

$$\frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r} \approx \frac{8}{60^{10}}$$

und für $r = 60$

$$s \approx \frac{8}{60^9} \tag{6}$$

gilt. Danach schätzt al-Kāšī die Sehne c des Bogens ab, der den äußerst kleinen Bogen über der Seite des einbeschriebenen Vielecks zu 180° ergänzt. Dazu setzt er diese Sehne der doppelten Höhe der Teildreiecke des Vielecks gleich:

$$c \approx 2h = 2(r-s) \approx 2r - \frac{16}{60^9}. \tag{7}$$

Schließlich ergibt sich die Seite des einbeschriebenen Vielecks nach (2) und (7) zu

$$a \approx \sqrt{(2r)^2 - (2r-2s)^2},$$

und für den Radius 60 erhält man

$$a < \sqrt{2 \cdot 2r \cdot 2s} = \sqrt{\frac{64}{60^8}} = \frac{8}{60^4}; \tag{8}$$

Somit erreicht man die geforderte Genauigkeit der Kreisberechnung, wenn man einem Kreis vom Radius 60 ein Vieleck mit einer Seite einbeschreibt, die 8 Quarten nicht übersteigt. Dann stellt al-Kāšī eine Tabelle der Bogen auf, die man beim Halbieren des Bogens von 120° erhält, und findet, daß man bei der 28. Halbierung einen Bogen bekommt, der kleiner ist als 6 Quarten und dessen Sehne der Ungleichung (8) genügt. Die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen Vielecks muß daher $3 \cdot 2^{28}$ oder 805306368 betragen, was im Sexagesimalsystem der Zahl $1^{V}\,2^{IV}\,8^{III}\,16^{II}\,12^{I}\,48$ entspricht.

Nunmehr bestimmt der Verfasser die Anzahl der Stellen, die man bei der Bestimmung der Seitenlänge benötigt, wobei er von der Überlegung ausgeht, daß man diese mit der Anzahl der Seiten, d. h. mit einer Zahl der Größenordnung 60^5 multiplizieren muß und daß das Ergebnis beim Radius 60 bis einschließlich der Oktaven genau sein muß. Er berücksichtigt auch, daß unter den benötigten Operationen auch das Quadrieren auftritt. Hier sind seine Überlegungen unvollständig, doch gelangt er in der Endkonsequenz zu der richtigen Schlußfolgerung, daß die geforderte Genauigkeit gewährleistet ist, wenn man die Berechnungen bis zur 18. Stelle beim Radius 60 durchführt. In Wirklichkeit greift er sogar auf einen überflüssigen „gleichmäßigen" Vorrat an Genauigkeit zurück, wahrscheinlich um unvorhergesehene Differenzen in allen Berechnungen zu vermeiden: In den meisten Fällen hätte man sich mit einer geringeren Anzahl genauer Ziffern begnügen können.

Die Berechnungen der Sehnen $c_1, c_2, \ldots, c_{28}$ sind in 28 umfangreichen Tabellen zusammengefaßt. Die Berechnungen der Quadratwurzeln, die durch die Formeln (1″)

gefordert werden, werden durch Quadrieren überprüft, wobei außerdem in den meisten Fällen auch noch die Neunundfünfzigerprobe angesetzt wurde.[1]) Beim Runden der letzten Ziffer wurde stets die nachfolgende Ziffer berücksichtigt. Setzt man $r = 1$, so erhält man in der k-ten Tabelle

$$c_k = 60\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}, \tag{9}$$

wobei die Anzahl der Radikale dem Index k gleich ist.

Nachdem er am Schluß der 28. Tabelle das Quadrat der gesuchten Seite

$$a_{28}^2 = d^2 - c_{28}^2$$

und die Seite selbst

$$a_{28} = \sqrt{d^2 - c_{28}^2}$$

bestimmt hat, was für $r = 1$

$$a_{28} = \sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \tag{10}$$

ergibt[2]), ermittelt al-Kāšī durch Multiplikation mit der Seitenzahl den Umfang des einbeschriebenen $3 \cdot 2^{28}$-Ecks. Die Näherungsgleichung

$$\frac{P_{28} - p_{28}}{p_{28}} \approx \frac{r - \frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}}$$

liefert nach (7) den Umfang des umbeschriebenen Vielecks. Als Kreisumfang wird schließlich das arithmetische Mittel $\frac{P_{28} + p_{28}}{2}$ gewählt, das sich beim Radius 60 zu

$$6\,16\,59'\,28''\,1'''\,34^{IV}\,51^{V}\,46^{VI}\,14^{VII}\,50^{VIII}$$

ergibt. Dieselbe Zahl liefert für $r = 1$ den Wert von 2π, wenn man sämtliche Stellen, von der höchsten angefangen, um eins vermindert. Sämtliche zehn Ziffern des Ergebnisses sind genau, jedoch überprüft al-Kāšī nochmals seine Berechnungen und zeigt, daß einzelne Ungenauigkeiten, die in den letzten Stellen der Zwischenwerte auftraten, keinen Einfluß auf das Endergebnis hatten.

Danach transformiert al-Kāšī den Wert für 2π in den Dezimalbruch

$$2\pi = 6{,}283\,185\,307\,179\,586\,5,$$

---

[1]) In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß al-Kāšī im „Schlüssel der Arithmetik" die Neunerprobe völlig korrekt formuliert, wobei er betont, daß bei Nichtübereinstimmung der zugehörigen Prüfzahlen die Operation fehlerhaft vorgenommen wurde.

[2]) Der Ausdruck (9) konvergiert bei unbegrenzter Verlängerung gegen $60 \cdot 2$ und der Ausdruck (10) nach vorheriger Multiplikation mit $3 \cdot 2^n$ gegen 2π. Hiervon schreibt al-Kāšī nichts. Eine Darstellung von $\frac{2}{\pi}$ in Gestalt eines unendlichen Produktes von Quadratwurzeln wurde von Fr. Viète (1593) erhalten.

wobei die Anzahl der Ziffern auf die im Sexagesimalsystem gewonnene Ziffernzahl abgestimmt ist, denn es gilt

$$\frac{1}{10^{16}} - \frac{1}{60^9} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60^{10}}.$$

Hier sind ebenfalls sämtliche 17 Ziffern genau (vgl. Abb. 87). Wir hatten bereits erwähnt, daß in der „Abhandlung über den Kreis" in der Mathematik der islamischen Länder erstmalig Dezimalbrüche auftreten.

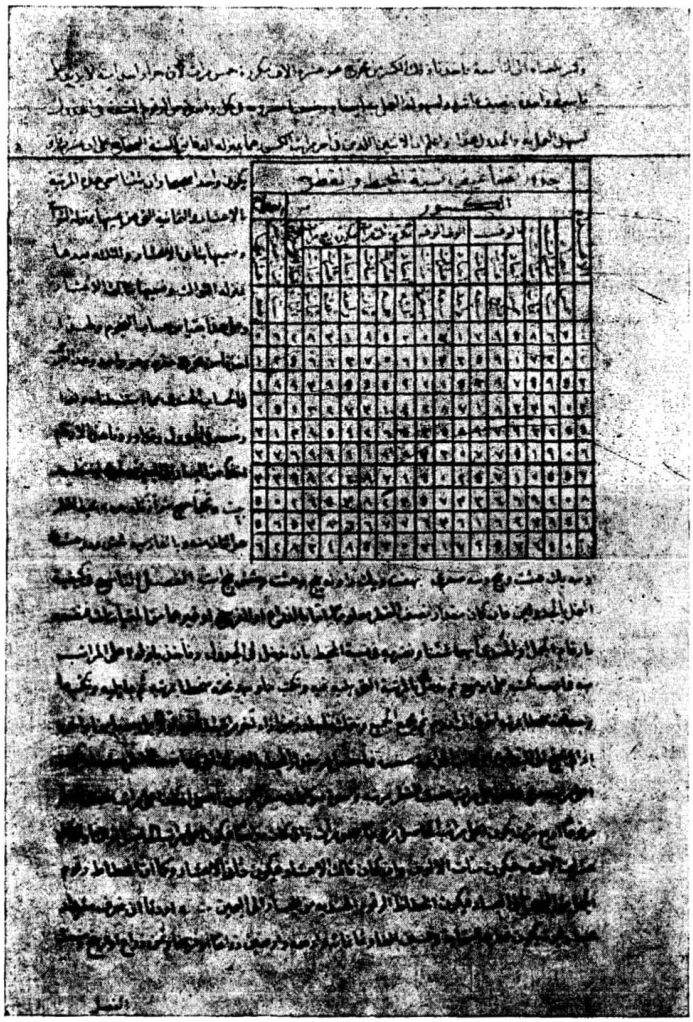


Abb. 87. Die Zahl 2π mit 17 Dezimalen in Versform zur Gedächtnisstütze.
Aus der „Abhandlung über den Kreis" von al-Kāšī
(Istanbuler Handschrift, vermutlich aus dem 17. Jh.).

Die hinsichtlich ihrer Genauigkeit glänzende Kreisberechnung al-Kāšīs, die alles Bisherige weit in den Schatten stellte, ist eine Spitzenleistung der numerischen Mathematik in den islamischen Ländern. Das Ergebnis al-Kāšīs wurde im Jahre 1597 durch A. van Roomen mit Hilfe des 2^{30}-Ecks reproduziert und ein wenig später durch L. van Ceulen verbessert, der mit Hilfe des $60 \cdot 2^{29}$-Ecks zwanzig Dezimalen und bald darauf 32 Dezimalen der Zahl π bestimmte (veröffentlicht 1615).

Die Methoden zur Berechnung des Kreisumfanges ließen naturgemäß den Gedanken aufkommen, daß Kreisumfang und Kreisdurchmesser inkommensurabel seien. Der Berechnungsprozeß erwies sich als unbegrenzt und beruhte außerdem auf einer sukzessiven Berechnung quadratischer Irrationalitäten. Selbstverständlich folgt weder aus dem einen noch aus dem anderen Umstand die Irrationalität des Grenzwertes. Der Nachweis der Irrationalität von π gelang erst J. H. Lambert in der Mitte des 18. Jahrhunderts, doch vertrat man die Überzeugung, daß π eine irrationale Zahl sei, bereits in der arabischen Literatur. Moses ben Maimon äußerte in seiner philosophischen Abhandlung „Dalālat al-ḥairīn", d. h. „Wegweiser der im Irrtum Befindlichen", die etwa um das Jahr 1190 in arabischer Sprache abgefaßt wurde, daß man $\sqrt{5000}$ ebensowenig genau berechnen könne wie das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser, denn „man erreiche hier nie die Grenze der Rechnung" [25, S. 225]. Moses ben Maimon drückte hier die Meinung der Mathematiker aus. Al-Kāšī fügte, als er davon sprach, daß sein π-Wert erheblich genauer sei als der des Archimedes, hinzu, daß „die gesamte Wahrheit dieser Dinge niemand wisse außer Allah" [126, S. 126]. Bereits früher schrieb al-Bīrūnī über die Irrationalität von π (vgl. S. 250).

Die algebraische Auflösung der Gleichung für die Winkeldreiteilung. Die genauesten trigonometrischen Tabellen wurden im Observatorium des Ulugbēk (1394 bis 1449) aufgestellt [174]. Der Herrscher von Samarkand und Enkel des Timur, Muḥammad Guragān Ulugbēk[1]), war nicht nur ein Förderer der Wissenschaften und einer der gebildetsten Leute seiner Zeit, sondern entwickelte auch selbst eine rege wissenschaftliche Tätigkeit. In Samarkand und in anderen Städten gründete er mehrere Hochschulen und ließ in den zwanziger Jahren des 15. Jahrhunderts in Samarkand ein Observatorium bauen, das nach dem Höchststand der Technik jener Zeit ausgerüstet war. An dieser Institution wirkte eine große Gruppe hervorragender Mathematiker und Astronomen mit Ğamšid Ghiyāth ad-Dīn al-Kāšī an der Spitze, der sich, nach dem Vorwort zum „Schlüssel der Arithmetik" zu urteilen, bereits im Jahre 1427 in Samarkand befunden hat.[2]) Obwohl al-Kāšī hier nicht lange gewirkt hat, waren seine Werke über Mathematik und Astronomie, insbesondere die etwa 1414 bis 1420 in persischer Sprache abgefaßte Zīğ ḫaqānī[3]), von sehr großer Bedeutung für

[1]) Ulugbēk bedeutet Großfürst.

[2]) Al-Kāšī betont selbst, daß er dieses Buch für die Bibliothek Ulugbēks geschrieben habe [126, S. 10].

[3]) Den Sinn dieser Tabellen sah al-Kāšī darin, die Tafeln des Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī zu korrigieren und zu präzisieren. Sinus und Tangens sind darin mit einer Schrittweite von 1′ auf vier Stellen genau tabelliert. Die Tabellen al-Kāšīs sind dem Hakan, d. h. dem Khan der Khane, gewidmet, worunter er entweder den Ulugbēk oder dessen Vater Šāhruh verstanden hat.

die Arbeit der Samarkander Schule [171]. Neben al-Kāšī beteiligten sich an den Beobachtungen und theoretischen Forschungen der aus Kleinasien gebürtige Ṣalāḥ ad-Dīn Mūsā ibn Muḥammad Qāḍī-zāda ar-Rūmī, dessen Arbeiten sich an die Werke al-Kāšīs anschließen, ferner 'Ala ad-Dīn 'Alī ibn Muḥammad al-Kuščī, der nach dem Tode Ulugbēks nach Istanbul übersiedelte (gest. 1474 oder 1475), weiterhin 'Abd al-'Alī ibn Muḥammad al-Birǧandī, Ulugbēk selbst u. a. Im Samarkander Observatorium

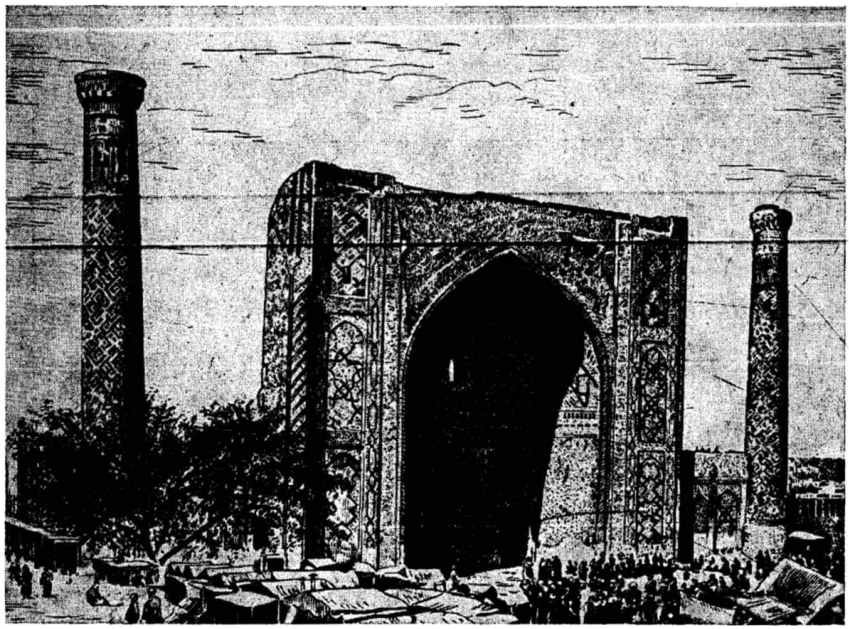


Abb. 88. Der Madras des Ulugbēk in Samarkand (etwa 1420).

wurde die berühmte „Zīǧ Ulugbēk" oder „Zīǧ Guragānī" zusammengestellt, die 1440, bereits nach dem Tode al-Kāšīs und Qāḍī-zādas, abgeschlossen wurden. Diese Tabellen, die inhaltlich den anderen Zīǧ nahestehen, zeichnen sich durch Vollständigkeit und hervorragende Genauigkeit aus. Die Tafel der Sinuswerte hat eine Schrittweite von 1′, die Tafel der Tangenswerte bis 45° eine solche von 1′, dann eine von 5′. Beide Tafeln sind mit fünf Sexagesimalstellen durchgeführt. Der Berechnung liegt eine genauere Bestimmung von sin 1° durch Lösung der Winkeldreiteilungsgleichung zugrunde.

Die ersten Lösungen des Problems der Winkeldreiteilung bestanden sowohl in der griechischen als auch in der arabischen Literatur in geometrischen Konstruktionen. Abd Sa'īd Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Ǧalīl as-Siǧzī (geb. etwa 951, gest. etwa 1024) löste dieses Problem erstmalig dadurch, daß er einen Kreis und eine gleichseitige Hyperbel zum Schnitt brachte. Im 11. Jahrhundert wurde das Problem durch eine kubische Gleichung ausgedrückt, so daß man vor der Frage stand, diese numerisch zu lösen. Wir hatten bereits erwähnt, daß für den Fall des regulären Neunecks diese Gleichung von al-Bīrūnī durch Probieren gelöst wurde, sein Verfahren uns allerdings nicht bekannt ist.

Ein originelles Iterationsverfahren, das sich durch Einfachheit und rasche Konvergenz auszeichnet, wurde von al-Kāšī entwickelt. Seine „Abhandlung über Sehne und Sinus" (Risāla al-watar wa-l-ǧaib) konnte zwar nicht wieder entdeckt werden, sie wird am Anfang des „Schlüssels der Arithmetik" erwähnt, wobei in einer der Handschriften direkt gesagt wird, daß die dort behandelte Methode zur Berechnung von sin 1° von al-Kāšī stammt. Wir kennen sein Verfahren aber aus einer ausführlichen Beschreibung, die der Enkel Qādī-zādas, Maḥmud ibn Muḥammad Mariām Chelebi (gest. 1524 oder 1525), hinterlassen hat. Dieser wirkte in verschiedenen Städten der Türkei und schrieb um 1500 einen Kommentar zu den astronomischen Tafeln des Ulugbēk unter dem Titel „Regeln des Operierens und Korrektur der Tabellen" (Dastūr al-'amal wa taṣḥīḥ al-ǧadwal) [126, 175]. In den Erläuterungen zu den trigonometrischen Tafeln beschreibt Mariām Chelebi die Berechnung von sin 1° nach einer bereits von Abū-l-Wafā angegebenen Methode, nimmt dann aber Bezug auf das Werk seines Großvaters und sagt: „Die Perle des Ruhmes und der Ehre seiner Zeit, Ghiyāth ad-Dīn Ǧamšid, führte, indem er die Methode der al-ǧabr wa-l-muqābala anwandte und den Sinus als Ding auffaßte, diese Aufgabe auf folgende Aufgabe zurück: 45 einmal erhoben, multipliziert mit dem Ding sind gleich dem Kubus und der Zahl" [126, S. 317, russisch].

Die Herleitung der Winkeldreiteilungsgleichung beruht auf dem Satz des Ptolemaios und dem Satz des Eukleides, wonach bei zwei einander schneidenden Kreissehnen das Produkt der Abschnitte auf der einen Sehne dem Produkt der Abschnitte auf der anderen Sehne gleich ist. In einem Halbkreis ABO mit gegebenem Radius R (Abb. 89) mögen die Bogenstücke $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ und $\overset{\frown}{CD}$ gleich sein. Konstruiert man über dem Radius $\overline{AM}$ einen zweiten Halbkreis AEM und zieht die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$, so werden die auf AEM abgetragenen Bogenstücke $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{EG}$ und $\overset{\frown}{GH}$ ebenfalls untereinander gleich sein. Es sei nun $\overline{AH}$ die gegebene Sehne, während die gesuchte die Sehne zum Drittel des Bogens $\overset{\frown}{AE}$ sei. Nach dem Satz des Ptolemaios gilt im Viereck $AEGH$ wegen $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{EH}$ und $\overline{AG} = \overline{EH}$ die Gleichung

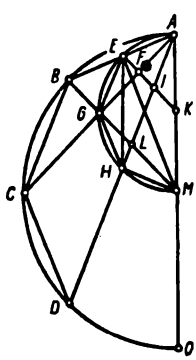


Abb. 89

$$\overline{AE}^2 + \overline{AE} \cdot \overline{AH} = \overline{AG}^2. \tag{1}$$

Nach dem Satz des Eukleides und wegen $\overline{AG} = \overline{CG}$ (ein Kreisradius, der auf einer Sehne senkrecht steht, halbiert diese) gilt

$$\overline{AG}^2 = \overline{BG}(2R - \overline{BG}). \tag{2}$$

Ferner gilt $\overline{AB}^2 = \overline{BG} \cdot 2R$, d. h. $\overline{BG} = \dfrac{\overline{AB}^2}{2R}$ oder, da $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AE}$ ist, $\overline{BG} = \dfrac{2\overline{AE}^2}{R}$. Nun setzen wir $\overline{BG} = \dfrac{2\overline{AE}^2}{R}$ in (2) ein und erhalten

$$\overline{AG}^2 = 4\overline{AE}^2 - \frac{4\overline{AE}^4}{R^2}. \tag{3}$$

Schließlich ergibt sich aus (1) und (3) die Dreiteilungsgleichung für einen beliebigen Winkel

$$4\overline{AE}^3 + R^2\overline{AH} = 3R^2 \cdot \overline{AE}. \tag{4}$$

Nimmt man an, daß der Bogen $\overset{\frown}{AH}$ dem Winkel 6α entspricht, wobei der Bogen $\overset{\frown}{AE}$ zum Winkel 2α gehört, so ist $\overline{AH} = R \sin 3\alpha$ und $\overline{AE} = R \sin \alpha$, und man erhält die bekannte Formel für den Sinus des dreifachen Winkels

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

die in trigonometrischer Schreibweise erstmalig bei Fr. Viète auftritt.

Mariām Chelebi setzt nach dem Vorbild von al-Kāšī $R = 60$ und den Bogen $\overset{\frown}{AH}$ mit 6° an. Hierbei läßt sich sin 3° auf elementarem Wege aus dem Sinus von 72° (d. h. aus der Seite des regulären Fünfecks) und aus dem Sinus von 60° berechnen. Er setzt

$$\overline{AE} = 60 \cdot \sin 1° = x,$$

ferner

$$\overset{\frown}{AH} = 60 \cdot \sin 3° = 3\ 8\ 24\ 34\ 59\ 34\ 28\ 15 \text{ Septimen}$$

und erhält die Gleichung

$$45 \cdot 60x = x^3 + 47\ 6\ 8\ 29\ 51\ 53\ 37\ 3\ 45 \text{ Septimen}. \tag{5}$$

Die Methode al-Kāšīs zur Lösung einer Gleichung der Form

$$x = \frac{q + x^3}{p} \tag{6}$$

besteht in Folgendem. Es sei

$$x = a + b + c + \cdots,$$

wobei a, b, c die sukzessiven Ziffernwerte in den Sexagesimalstellen, von der ersten gültigen Stelle an gerechnet, sind. Da man von vornherein weiß, daß die gesuchte Wurzel sehr klein ist, kann man ihre dritte Potenz vernachlässigen, und man erhält den ersten Näherungswert aus (6) als den „ersten Quotienten" bei der Division des „Dividenden", d. h. des freien Gliedes q, durch den „Divisor", d. h. den Koeffizienten p der ersten Potenz, wobei die Operation bis zur ersten gültigen Stelle durchgeführt wird:

$$x_1 = \frac{q}{p} \approx a.$$

Nun setzen wir in (6) auf der linken Seite den um eine Stelle erweiterten Wurzelwert, d. h. $(a + b)$, und auf der rechten Seite den ersten Näherungswert a ein. Die erste Korrektur b oder den „zweiten Quotienten" erhält man dann wiederum durch Division,

$$\frac{q - ap + a^3}{p} = b + \cdots,$$

wobei wiederum nur die erste gültige Ziffer des Quotienten verwendet wird (die im Dezimalsystem natürlich auch durch eine zweistellige Zahl dargestellt werden kann).

Die zweite Korrektur oder den „dritten Quotienten" c erhält man analog aus

$$\frac{(q - ap + a^3) - bp + [(a + b)^3 - a^3]}{p} = c + \cdots,$$

d. h., in Wirklichkeit aus

$$\frac{q - (a + b)\, p + (a + b)^3}{p} = c + \cdots$$

usw.

Bezeichnet man die aufeinanderfolgenden Näherungswerte mit $x_1 = a$, $x_2 = a + b$, $x_3 = a + b + c$ usw., so erhält man

$$x_1 = a,$$
$$x_2 = \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + x_1^3}{p},$$
$$x_3 = \frac{q + (a+b)^3}{p} = \frac{q + x_2^3}{p}$$

und allgemein (unter Berücksichtigung der notwendigen Stellenzahl!)

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}.$$

Es läßt sich zeigen, daß dieses Verfahren konvergiert, wenn in der Nähe der Wurzel

$$\frac{3x^2}{p} < r < 1$$

gilt, was im vorliegenden Falle offenbar zutrifft.

Das Iterationsverfahren al-Kāšīs erfordert nur eine äußerst geringe Zahl von Rechenoperationen, die in so viel Einzelschritte unterteilt werden, als man Ziffern der Wurzel bestimmen will. Bei jedem Schritt hat man einmal die vorausgegangene Näherung in die dritte Potenz zu erheben und eine Division vorzunehmen. Wir hatten bereits geäußert, daß al-Kāšī wahrscheinlich mit der Anwendung der chinesischen Methode tian-yuan bei der Auflösung algebraischer Gleichungen vertraut war. Trifft diese Vermutung zu, so ist leicht zu verstehen, warum al-Kāšī es vorzog, die Gleichung (6) nach seinem eigenen Verfahren zu lösen: Im vorliegenden Falle führt dieses nämlich viel rascher und leichter zum Ziel, wobei insbesondere die komplizierte Auswahl des ganzzahligen Anteils der Wurzeln der vollständigen kubischen Hilfsgleichungen entfällt, wie diese beim Verfahren von Ruffini-Horner auftreten. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit der Näherungswerte sich von selbst während des Rechenganges ergibt; denn auf diese kann man Rückschlüsse aus den Korrekturwerten für die bereits bestimmten Stellen der Wurzeln ziehen.

Nach nur fünf Divisionen erhielt Mariām Chelebi für sin 1° einen bis einschließlich der Quarten genauen Wert. Al-Kāšī bestimmte sin 1° mit der gleichen Genauigkeit, mit der er die Berechnung von π vorgenommen hatte. In dezimaler Schreibweise lautet sein Ergebnis

$$\sin 1° = 0{,}017\,452\,406\,437\,283\,571.$$

Die Methode al-Kāšīs stellte eine ebenso verdienstvolle Krönung der Arbeiten der islamischen Mathematiker über die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen dar wie die geometrische Theorie al-Ḥayyāms in der allgemeinen Theorie der Gleichungen dritten Grades. Bereits H. Hankel schrieb mit Recht über die Methode al-Kāšīs, daß sie „an Feinheit und Eleganz sämtlichen nach Viète im Occidente entdeckten Approximationsmethoden nicht nachsteht“[1]) [108, S. 292].

[1]) Nachdem das Buch bereits zum Druck gegeben war, hatte der Verfasser Gelegenheit, die „Abhandlung über die Bestimmung des Sinus von einem Grad“ (Risāla fī istiḫrāǧ ǧaib daraǧa wāḥida) des Qāḍī-zāda [175a] kennenzulernen, der sich unmittelbar auf die Mitteilungen al-Kāšīs stützt. Die Abhandlung enthält eine Beschreibung des Verfahrens von al-Kāšī (mit

Ein anderer, dem Verfahren al-Kāšīs analoger Iterationsalgorithmus wurde im Nahen und Mittleren Orient auf eine transzendente Gleichung bei der Aufstellung von Tabellen angewandt, die in der Theorie der Parallaxe benötigt wurde [176]. Es handelte sich dabei um eine Gleichung der Form

$$t = \theta - m \sin \theta,$$

in der θ bei gegebenem m und festem t zu berechnen ist. Die erstmalige Anwendung des genannten Algorithmus treffen wir bei al-Ḥabaš al-Ḥāsib, einem Zeitgenossen al-Ḫuwarizmīs, an. Sein Rechengang entspricht der sukzessiven Bildung der Näherungswerte

$$\theta_0(t) = t + m \sin t,$$
$$\theta_1(t) = t + m \sin \theta_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_n(t) = t + m \sin \theta_{n-1}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die arabischen Rechner begnügten sich mit Näherungswerten, die sich bei den ersten Schritten dieses verhältnismäßig rasch konvergierenden Verfahrens ergeben; al-Ḥabaš al-Ḥāsib selbst wählte den Näherungswert θ_3. Entstehungszeit und Herkunft dieses Algorithmus sind unbekannt. Es gibt gewisse Anlässe zu der Vermutung, daß dieses Verfahren bereits früher in Indien angewandt wurde. Im 17. Jahrhundert wurde diese Gleichung im Zusammenhang mit einem Problem der Planetenbewegung von Johannes Kepler hergeleitet, unter dessen Namen sie heute in der modernen Himmelsmechanik allgemein bekannt ist.

In den Werken der samarkandischen Schule hat die numerische Mathematik der orientalischen Länder ihre höchste Blüte erreicht. Diese Schule hat jedoch nicht lange bestanden. Da sie von dem Schicksal ihrer Schirmherren völlig abhängig war, zerfiel sie bald nach der Ermordung Ulugbēks im Jahre 1449, die von reaktionären Kreisen inspiriert wurde. Danach setzte in den islamischen Ländern ein Niedergang der mathematischen Forschung ein. Hiervon zeugt z. B. das bereits erwähnte (S. 263) und gehaltvolle, jedoch fast ausschließlich kompilative Werk „Kurzer Lehrgang der Arithmetik" (Ḫulāṣat al-ḥisāb) des Behā ad-Dīn al-'Amūlī (1547—1622), das sich über zwei Jahrhunderte einer großen Popularität in der Türkei, im Iran und in Indien erfreute [177].

Hinweis auf eine angebliche Ungenauigkeit bei der Herleitung der kubischen Gleichung für Sinus 1°) sowie eine eigene Herleitung des Qādī-zāda für die Gleichung der Sehne von 2°, d. h. für den verdoppelten Sinus 1°. Das Iterationsverfahren al-Kāšīs das von Qādī-zāda (ebenso wie von Chelebi) als Einführung des Kubus in die Division bezeichnet wird, ist in der Abhandlung in allgemeiner Form beschrieben (bei Chelebi wird es anhand eines gegebenen Zahlenbeispiels erläutert): „Zunächst werden einige (Ziffern) Zahlen durch die Anzahl der Dinge geteilt. Es wird der Kubus des Quotienten gebildet und zum Rest der Zahl hinzugefügt. Sodann wird (ihre) Summe noch einmal geteilt. Es wird der Kubus der Summe der beiden Quotienten gebildet und sein Überschuß über den zuerst gewonnenen Kubus wird dem Rest der Summe hinzugefügt. Sodann wird (ihre) zweite Summe noch eimal geteilt. Es wird der Kubus der Summe der (drei) Quotienten gebildet und sein Überschuß über den Kubus der Summe zweier Quotienten dem Rest der zweiten Summe hinzugefügt. Sodann wird die dritte Summe noch einmal geteilt, und es wird verfahren wie vorhin. Die Operation wird abgeschlossen, sobald man das erreicht, was man in die Rechnung setzt" [175*a*, S. 547, russisch].

Der Einfluß der Mathematik der islamischen Länder auf die westeuropäische Wissenschaft. Wir haben einzelne Gelehrte erwähnt, die in den mauretanischen Ländern der Pyrenäenhalbinsel gewirkt haben. Doch waren, wie bereits gesagt, die dort gewonnenen Ergebnisse wesentlich weniger eigenständig als im Orient. Zu den herausragenden Leistungen gehören hier einzelne Entdeckungen des Ǧābir ibn Aflaʿ auf dem Gebiet der Trigonometrie. Die meisten Werke der westarabischen Mathematiker enthalten verhältnismäßig elementares Material der Arithmetik, Algebra usw.

Spanien blieb es aber vorbehalten, eine andere äußerst wichtige kulturhistorische Rolle zu spielen. Hier entwickelten sich insbesondere die kulturellen und wissenschaftlichen Kontakte zwischen den islamischen Ländern und den christlichen Ländern Europas. In die spanischen Gebiete, die sich vom mauretanischen Joch befreiten, reisten aus vielen Gegenden Gelehrte, um Mathematik und Naturwissenschaften kennenzulernen. Eine hohe Blüte erlangte hier im 12. Jahrhundert die Tätigkeit der Übersetzer und der Kompilatoren arabischer oder aus dem Griechischen übersetzter Werke.

Das Studium der arabischen Literatur wurde von europäischen Gelehrten auch außerhalb der spanischen Grenzen und auch nach dem 12. Jahrhundert betrieben. Es genügt der Hinweis, daß zu den Grundlagen, auf denen sich die mathematische Tätigkeit des Leonardo Fibonacci von Pisa auf den Gebieten der Arithmetik, Geometrie und Algebra entwickelte, das Studium der Werke des Abū Kāmil gehörte, während die trigonometrischen Arbeiten des Regiomontanus auf dem Studium der Werke al-Battānīs und Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsīs beruhten.

Die Mathematik der islamischen Länder wirkte sich befruchtend auf die Entwicklung der europäischen Wissenschaft aus und bereicherte diese sowohl durch eigene Entdeckungen als auch durch solche, die die arabische Kultur von den Griechen, Indern, Syrern, Babyloniern usw. übernommen hatte. Die Gelehrten des mittelalterlichen Europa konnten daher auf einem festen Fundament weiterbauen, ohne den gesamten von ihren Vorgängern durchlaufenen Weg noch einmal betreten zu müssen. Die europäischen Mathematiker haben verhältnismäßig leicht und vollständig die Werke der Gelehrten des Orients übernehmen und weiterentwickeln können, da anfänglich vor ihnen die gleichen Aufgaben standen wie vor den islamischen Gelehrten. Es ging darum, die einfachsten Vermessungs- und Berechnungsalgorithmen auf den Gebieten der Arithmetik, der geometrischen Vermessung, der Algebra und der Trigonometrie zu erlernen bzw. zu schaffen. Bedauerlich ist nur, daß durch die Kluft, die zwischen der islamischen und der christlichen Welt, ja sogar zwischen den islamischen Ländern des Orients und des Westens immer tiefer wurde, viele Errungenschaften solcher Gelehrten wie al-Ḫayyām oder al-Kāšī in Europa erst bekannt wurden, nachdem man sie hier bereits neu entdeckt hatte.

DIE MATHEMATIK IM EUROPA DES MITTELALTERS

Die gesellschaftlichen Verhältnisse. Nachdem durch Aufstände der Sklaven und Kolonen und durch die Eroberungen der „Barbaren" der Untergang des römischen Reiches besiegelt worden war, bildete sich auf europäischem Gebiet die Feudalordnung aus, zu deren Merkmalen die Leibeigenschaft gehörte. Diese soziale Epoche, die im 5. und 6. Jahrhundert einsetzte und bis zur bürgerlichen englischen Revolution in der Mitte des 17. Jahrhunderts andauerte, wird als das Mittelalter bezeichnet.

Die Merkmale des Feudalismus waren Naturalwirtschaft, Bindung der Bauern an den Boden und „außerökonomischer Zwang" [K. Marx, Kapital, Bd. III, Berlin 1956, S. 841], ferner ein niedriges, routinemäßiges Niveau der Technik. Die Feudalordnung durchlief in Europa drei verschiedene Stadien: 1. Das frühe Mittelalter (5. bis 11. Jahrhundert); während dieser Zeit erfolgte die Einbeziehung der freien Bauern und Gemeindeangehörigen in die Leibeigenschaft; es entstanden Nationalitäten und kleine Feudalstaaten mit wechselseitigen vertraglichen Bindungen; die christliche Kirche benutzte ihre Autorität, um die neuen Gesellschaftsformen zu festigen. 2. Die Zeit des Hochfeudalismus (11. bis 15. Jahrhundert); in dieser Zeit erfolgte eine Trennung des Handwerks von der Landwirtschaft, es wuchsen und erstarkten die Städte und damit Handwerk und Handel; in verschiedenen Ländern festigten sich die Feudalmonarchien; das Ende dieses Zeitabschnittes ist durch umfangreiche Bauernaufstände sowie durch Klassenkämpfe innerhalb der Städte gekennzeichnet. 3. Das Spätmittelalter (15. bis 17. Jahrhundert); zu dieser Zeit begann bereits der Zerfall der Feudalordnung, die Bourgeoisie entwickelte sich; es begannen sich Nationen herauszubilden; Deutschland war Schauplatz der Bauernkriege und der Reformation; in den Niederlanden kam es zur bürgerlichen Revolution, in England reifte sie heran.

Im weströmischen Reich, auf dessen Territorium die erobernden Germanen-, Kelten- und Slawenstämme eigene Staaten gebildet hatten, die ihrerseits den Einfall der Hunnen über sich ergehen lassen mußten, waren von der früheren Zivilisation nur einige halbzerstörte oder im Verfall begriffene Städte sowie als Ideologie das Christentum übriggeblieben. Das wirtschaftliche, technische und kulturelle Niveau blieb lange Zeit sehr niedrig; die gesamte gesellschaftliche Evolution verlief äußerst langsam. Es bestand eine primitive Agrargesellschaft mit extensiver Landwirtschaft und einem auf dem Austausch von Naturalien beruhenden Handel. Die Handelsbeziehungen und kulturellen Verbindungen mit dem Orient waren für einige Zeit abgerissen, insbesondere nachdem Byzanz durch die Araber vom Mittelmeer abgetrennt worden war. Der Niedergang der Kultur wurde in vieler Hinsicht durch das Beharren auf unwissenschaftlichen Dogmen der über der weltlichen Macht stehenden

christlichen Kirche begünstigt. Das Bestreben der Kirche lief darauf hinaus, die „heidnische" Kultur der Griechen und Römer vollständig zurückzudrängen, obwohl sie andererseits genötigt war, einige Elemente dieser Kultur zu übernehmen oder sogar weiterzuentwickeln. Der bedeutendste Ideologe des Christentums, Augustinus (354—430), sagte: „Man soll das Gute nicht ablehnen, auch wenn es von Heiden stammt."

Die allmähliche Entwicklung der Produktivkräfte, der Warenproduktion und des Handels, der Aufschwung der Städte, insbesondere seit dem 11. Jahrhundert, die Festigung der materiellen Lage und der gesellschaftlichen Rolle der Stadtbewohner bildeten die Grundlage für einen Aufschwung der Kultur insgesamt und der Wissenschaft im besonderen. In seiner Analyse über die „Schnelle des Mirakels", d. h. der Entwicklung der Wissenschaften in Westeuropa zu Beginn der Neuzeit, stellte Fr. Engels fest: „... so verdankten wir dieses Wunder wieder der Produktion" [3, S. 196]. Den wesentlichen Unterschied zwischen der Lage am Ausgang des Altertums und der um die Mitte des 15. Jahrhunderts drückte Engels in folgenden Worten aus: „Eine unendlich höhere Entwicklung der industriellen Produktion und des Handels, geschaffen durch das mittelalterliche Bürgertum; einerseits die Produktion vervollkommneter, mannigfacher und massenhafter, andrerseits der Handelsverkehr weit stärker, die Schiffahrt seit der Sachsen-, Friesen- und Normannenzeit unendlich kühner, und andrerseits die Menge Erfindungen und Import von orientalischen Erfindungen, die den Import und die Verbreitung der griechischen Literatur, die See-Entdeckungen und die bürgerliche religiöse Revolution nicht nur erst möglich machten, sondern ihnen auch ganz andre und raschere Tragweite gaben, und obendrein eine Masse wissenschaftlicher Tatsachen, wenn auch noch ungeordnet, lieferten, wie sie dem Altertum nie vorgelegen (Magnetnadel, Druck, Lettern, Leinenpapier — von Arabern und spanischen Juden seit dem 12. Jahrhundert gebraucht, Baumwollpapier seit dem 10. Jahrhundert allmählich aufkommend, im 13. und 14. Jahrhundert schon verbreiteter, Papyrus seit den Arabern in Ägypten ganz eingegangen) — Schießpulver, *Brillen, mechanische Uhren*, großer Fortschritt sowohl der *Zeitrechnung* wie auch der *Mechanik*" [3, S. 203].

Die geistige Welt des Europäers erfuhr im Laufe des Mittelalters eine Bereicherung durch das Aneignen eines Teiles des antiken Kulturerbes (womit bereits lange vor der Renaissance begonnen wurde, in der diese Tendenz ihre Blütezeit erlebte) sowie der Errungenschaften der orientalischen Länder. Die Kultur des feudalen Europas, die in geeigneter Form früher geschaffene Elemente in ihren Bestand aufnahm, hinterließ der Nachwelt derart großartige Schöpfungen wie die romanische und gotische Architektur, einmalige Erzeugnisse des Kunsthandwerks, Werke volkstümlichen literarischen Schaffens wie die „Göttliche Komödie" des Alighieri Dante, die wissenschaftliche Weltanschauung des Roger Bacon oder die Gemälde des Andrei Rublew.

Fortschrittliche Tendenzen in Kultur und Wissenschaft setzten sich im feudalistischen Westeuropa nur langsam durch, in hartem Kampf gegen reaktionäre Kräfte, am häufigsten in Form eines Kampfes zwischen religiösen Strömungen. Die größten Errungenschaften erzielten die Völker der entwickelten Staaten — Italien und Frankreich und später England und Deutschland —, obwohl manche großen Entdeckungen auch in anderen Ländern gemacht wurden; in Polen z. B. entwickelte Kopernikus

sein heliozentrisches System. Bei der Einschätzung der Besonderheiten in den verschiedenen Ländern schrieb Fr. Engels: „... entwickelte sich jetzt West- und Mitteleuropa inklusive Polen im Zusammenhang, wenn auch Italien kraft seiner altüberkommenen Zivilisation noch an der Spitze stand" [3, S. 196].

Viel Gemeinsames mit Westeuropa hatten zur Zeit des Feudalismus Byzanz, Rußland, Armenien und Grusien. Die Völker dieser Länder hatten ebenso wie die in Westeuropa das Christentum angenommen, allerdings nicht in Gestalt des Katholizismus, sondern in Form des orthodoxen Christentums oder der armenisch-gregorianischen Konfession. In Byzanz wandelte sich die vom römischen Reich übernommene Kaiserherrschaft in eine feudalistische Monarchie um, die manchmal in mehrere „Imperien" zerfiel; für Rußland, Grusien und Armenien war eine starke feudalistische Zersplitterung kennzeichnend, die langsam von der allmählich erstarkenden Zentralmacht überwunden wurde. Eine wichtige Besonderheit in der Geschichte dieser vier Länder war die jahrhundertelange Unterdrückung durch fremde Völker: in Byzanz durch die Türken, in Rußland durch die Mongolen und Tataren, in Grusien und Armenien sowohl durch die Araber als auch durch die Mongolen und Tataren, die Türken und die Perser. Den drei zuletzt genannten Ländern gelang schließlich die Befreiung vom fremden Joch, und zwar Rußland früher, Grusien und Armenien später. Von den Ländern, die im europäischen Teil des früheren byzantinischen Reiches lagen, befreiten sich Griechenland und die Balkanstaaten von der Herrschaft der Türken, während auf dem Hauptteil dieses Reiches der türkische Staat entstand. Die fremden Invasionen haben die kulturelle und wissenschaftliche Entwicklung der ostchristlichen Länder lange Zeit aufgehalten und sogar zurückgeworfen. In Rußland hat der Einfall der Mongolen und der Kampf gegen diese im 13. bis 15. Jahrhundert lange Zeit den kurz vorher begonnenen kulturellen und wissenschaftlichen Fortschritt gebremst. Der große russische Dichter A. S. Puschkin sagte hierzu, daß die Tataren mit den Mauren nur wenig Ähnlichkeit hatten: Nach Eroberung Rußlands haben sie diesem weder die Algebra noch den Aristoteles gebracht. Dadurch waren die östlichen christlichen Länder am Ende des Mittelalters gegenüber den westeuropäischen Ländern in der Entwicklung der Mathematik beträchtlich zurückgeblieben.

In diesem Kapitel, dessen Hauptteil der Entwicklung der Mathematik im mittelalterlichen Westeuropa gewidmet ist, wollen wir auch die Entwicklung der Mathematik in den Ländern Osteuropas und in Kleinasien einschließlich Byzanz betrachten, ferner aber auch in den außerhalb Europas liegenden Ländern Grusien und Armenien, deren Kultur aufs engste mit der byzantinischen Kultur verbunden war.

Die Anfänge des mathematischen Wissens. Es ist einzusehen, daß zur Zeit des Frühfeudalismus und der unbedingten Machtstellung der Kirche keinerlei Triebkräfte für eine wissenschaftliche Beschäftigung mit den Naturwissenschaften und der Mathemathik vorhanden waren.

In der Wirtschaft und im täglichen Leben begnügte man sich mit einem Minimum an arithmetischen und geometrischen Kenntnissen, die nicht über die elementaren Rechenoperationen mit ganzen Zahlen und Brüchen und über das Berechnen einfachster Figuren hinausgingen.

Das ständige Interesse, das der Mathematik in den Klöstern entgegengebracht wurde, war dadurch bedingt, daß die Klöster sowohl religiös-ideologische als auch große wirtschaftliche Organisationen darstellten. Aber auch hier beschränkte sich das Interesse an der Mathematik auf die Probleme der praktischen Arithmetik und Geometrie sowie auf die Berechnung des Kalenders und der kirchlichen Feiertage.

Zur Erziehung gebildeter Menschen waren mehrere Bücher verfaßt worden, die die Anfangsgründe der sieben „freien Künste" (artes liberales) beinhalteten. Diese wurden in das „trivium" und das „quadrivium" eingeteilt, eine Klassifikation, die aus den ersten Jahrhunderten der Zeit des römischen Reiches übernommen worden war. Das Trivium umfaßte die Grammatik, die Rhetorik als die Kunst der schönen Rede einschließlich der Elemente der Rechtswissenschaft und die Dialektik in der Bedeutung der Kunst der Rede und Gegenrede. Das Quadrivium beinhaltete die Arithmetik, die ohne Beweise dargelegt wurde und in einer Erläuterung der einfachsten Eigenschaften der Zahlen, kombiniert mit Zahlenmystik, bestand, ferner kurze Mitteilungen über die wichtigsten geometrischen Gebilde und über Maßeinheiten sowie über die Geographie, die Astronomie einschließlich der Lehre vom Kalender und schließlich über die Musik als die Lehre von den harmonischen Intervallen. Werke, in denen die „freien Künste" behandelt wurden, tauchten bereits in Rom auf. Einige davon, die im 5. oder 6. Jahrhundert von Martianus Capella, Cassiodorus und insbesondere von Boethius verfaßt worden waren, haben ihre Bedeutung lange Zeit behalten. An der Grenze zwischen dem 6. und dem 7. Jahrhundert tauchten die „Etymologien" („Origenes"), ein Werk in zwanzig Bänden von Bischof Isidorus von Sevilla (570—636), auf. Die Bezeichnung des Werkes hängt damit zusammen, daß der Verfasser den Sinn der Begriffe, zum größten Teil sehr ungeschickt, auf Grund einer philologischen Analyse der zugehörigen Termini erläuterte. Der mathematische Inhalt der „Etymologien", in denen das dritte Buch dem Quadrivium gewidmet ist, ist verschwindend gering.

Die Mathematik in Byzanz. Durch die massenhafte Vernichtung historischer Denkmäler zur Zeit der Bilderstürmer der byzantinischen Kirche im 6. bis 9. Jahrhundert sind nur wenige Daten über die Entwicklung der mathematischen Kenntnisse in Byzanz überliefert worden.

In der ersten Zeit der Existenz das byzantinischen Staates wurde die Mathematik in den Schulen der Städte Athen und Alexandria betrieben, die damals zum Bereich dieses Staates gehörten. Der hervorragende Kommentator der griechischen Klassiker, Proklos, stammte aus Byzanz und hat lange Jahre bis zu seinem Tode (im Jahre 485) die athenische Akademie geleitet. Sein Schüler Ammonios (gestorben im Jahre 515) war Leiter der alexandrinischen Schule. Schüler des Ammonios wiederum waren zwei weitere große Gelehrte, Simplikios, der Kommentator des Aristoteles und Eukleides, und Eutokios von Askalon, der Kommentator des Apollonios und Archimedes. Eutokios hat große Verdienste um die Verbreitung der klassischen griechischen Wissenschaft im byzantinischen Reich. In der Folgezeit wurde jedoch in Byzanz der Entwicklung der Mathematik, zumindest was die höheren Gebiete anlangt, nur sehr wenig Bedeutung beigemessen, insbesondere in Regierungskreisen. Für die weitere

Entwicklung der Mathematik war lediglich die Erhaltung und das Abschreiben der klassischen griechischen Werke von Bedeutung, die von hier aus auf verschiedenen Wegen zum Teil in die islamischen Länder, zum Teil nach Armenien und Georgien, und zum Teil in das mittelalterliche Europa gelangten [177*a*]. Trotzdem wollen wir ein wenig bei den Werken einiger byzantinischer Gelehrter verweilen.

Bekanntlich war der Baumeister der Hagia Sophīa in Konstantinopel, Anthemios von Tralleis (gest. 534), ein begabter Mathematiker, was man einem erhalten gebliebenen Fragment seines Werkes über Brennspiegel entnehmen kann. Anthemios kannte Brennpunkt und Leitlinie der Parabel sowie die Fadenkonstruktion der Ellipse, die wir später bei den Brüdern banū Mūsā antreffen (vgl. S. 272). Auch der Mitarbeiter des Anthemios beim Bau der Hāgia Sophīa, Isidoros von Miletos, war Mathematiker. Man nimmt an, daß eben dieser Isodoros von Miletos gemeint ist, wenn der Verfasser des Buches XV der „Elemente" schreibt, daß der „große Lehrer" Isidor das Problem der Bestimmung von Winkeln zwischen zwei Begrenzungsflächen regulärer Polyeder aufgeworfen und untersucht habe. Dieses Werk enthält außerdem einige weitere Sätze über die regulären Polyeder. Der Verfasser des Werkes ist unbekannt.

Um das Jahr 940 schrieb in Konstantinopel ein unbekannter Autor griechischer Herkunft, den man mitunter auch als Heron den Jüngeren bezeichnet, die „Geodäsie", ein Werk über die Vermessung von Grundstücken, insbesondere des Hippodroms von Konstantinopel, nach der Methode des Heron von Alexandria.

In der zweiten Hälfte des 11. Jahrhunderts lebte Michael Psellos (geb. 1018, gest. nach 1078). Ihm wird ein Werk über das Quadrivium zugeschrieben. In der Arithmetik wird nur eine Klassifizierung der Zahlen und Relationen gegeben, und in der Geometrie wird behauptet, daß die Meinungen darüber, wie der Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen ist, auseinandergehen; allerdings sei die Methode am populärsten, bei der als Flächeninhalt das geometrische Mittel aus den Flächeninhalten des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Quadrates genommen wird. Dies liefert für π den Wert $\sqrt{8} = 2{,}828$. Wir erkennen daraus, von welch niedrigem Stand die Mathematik sich erneut erheben mußte. Die byzantinischen Mathematiker schöpften ihre Kenntnisse nicht nur aus der antiken griechischen und lateinischen Literatur, sondern sie lernten auch die arabischen und persischen Werke kennen. Diesem Umstand ist zu verdanken, daß in Byzanz im 11. Jahrhundert die arabischen Ziffern und das Stellenwertsystem eine gewisse Verbreitung fanden [177*b*].

Der Mönch Maximos Planudes von Nikomedia, der etwa von 1260 bis 1310 gelebt hat und im Jahre 1297 Gesandter des Kaisers Andronikos II. in Venedig war, schrieb Kommentare zu den ersten beiden Büchern der „Arithmetik" des Diophantos. Die schwierigen Stellen des genannten Werkes hat er dabei umgangen. Ein anderes Werk des Planudes über die Arithmetik nach dem Vorbild der Inder beginnt mit der Erläuterung der Zeichen für die Zahlen 1 bis 9 sowie eines Zeichens, das man Ziffer (ψηφοα) nannte, und das „Nichts" bezeichnete. Diese neun Zeichen stammten ebenso wie das letzte, den Worten des Planudes zufolge, aus Indien (der Form nach sind sie bei ihm ostarabisch). Vor dem Werk des Planudes, im Jahre 1254, erschien ein Buch mit nahezu dem gleichen Titel, in dem für die Ziffern nicht das ostarabische

Bild wie bei Planudes, sondern das westarabische Bild gewählt war. Das Stellenwertsystem verbreitete sich in Byzanz nur langsam und in verschiedenen Formen. In einer Handschrift aus dem 14. Jahrhundert finden wir die Verwendung von Alphabetziffern bei gleichzeitiger Anwendung des Stellenwertprinzips: 18 wird in der Form $\alpha\eta$, der Bruch $\frac{13}{28}$ in der Gestalt $\frac{\alpha\gamma}{\beta\eta}$ geschrieben. (Vgl. S. 241).

Planudes stellt unter anderem folgende Aufgabe: Ein sterbender Vater teilte sein Geldvermögen zu gleichen Teilen unter seinen Söhnen auf und gab dabei dem ersten eine Münze und $\frac{1}{7}$ des restlichen Geldes, dem zweiten zwei Münzen und $\frac{1}{7}$ des Restes, dem dritten drei Münzen und $\frac{1}{7}$ des Restes usw.; doch in diesem Augenblick starb der Vater, und es soll festgestellt werden, wieviel Söhne er gehabt und wieviel Münzen er besessen hat. Eine weitere Aufgabe besteht darin, zwei Rechtecke mit gleichem Umfang zu bestimmen, so daß der Flächeninhalt des einen ein gegebenes Vielfaches vom Flächeninhalt des anderen ist. Übrigens gibt Planudes eine sehr spezielle Lösung dieser Aufgabe an. In seiner Schrift wird auch die „Neunerprobe" angegeben, und zwar mit der Bemerkung, daß sie von den Indern entdeckt und von den Arabern weitergegeben worden sei.

Ein Schüler und Freund des Planudes, Manuel Moschopulos, der am Ende des 13. und zu Beginn des 14. Jahrhunderts gelebt hat, schrieb eine Abhandlung über magische Quadrate, wobei er die Konstruktionsregeln für $n = 2m + 1$ und $n = 4m$ angab; er hat auch in Aussicht gestellt, die Regeln für $n = 4m + 2$ anzugeben, doch ist unbekannt, ob er sein Versprechen gehalten hat. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß Moschopulos dabei zyklische Permutationen angewandt hat [178].

Die Mathematik in Armenien und Grusien. Um die Mitte des ersten Jahrtausends waren große Gebiete Armeniens durch die Perser, andere wieder durch das byzantinische Reich besetzt. Ein wichtiges Ereignis in der Geschichte des armenischen Volkes und seines Kampfes um die Unabhängigkeit war die Schaffung eines eigenen Alphabets Ende des 4. Anfang des 5. Jahrhunderts. Schöpfer dieses Alphabets, das aus 36 Buchstaben besteht, war Mesrop Maschthoz (361—440); er entwickelte dieses auf der Grundlage des griechischen und des persischen Alphabets. Auf die neuen armenischen Buchstaben gründete sich auch die armenische alphabetische Zahlenschreibweise. Die schriftliche Zahlendarstellung der Armenier unterschied sich von der ionischen dadurch, daß sie Buchstabenbezeichnungen nicht nur für Einer, Zehner und Hunderter, sondern auch für Tausender kannte (Abb. 90). Die Zahl Zehntausend nannten die Armenier „bjur"; zur Bezeichnung von Zahlen, die größer waren als das „bjur", benutzten sie ein besonderes Zeichen,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ա	Բ	Գ	Դ	Ե	Զ	Է	Ը	Թ

10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ժ	Ի	Լ	Խ	Ծ	Կ	Հ	Ձ	Ղ

100	200	300	400	500	600	700	800	900
Ճ	Մ	Յ	Ն	Շ	Ո	Չ	Պ	Ջ

1000	10000
Ռ	Ս

Abb. 90

das den Wert der alphabetischen Ziffern auf das Zehntausendfache erhöhte: rechts oben vom Ziffernbuchstaben wurde ein besonderer Strich gesetzt [179].

In der zweiten Hälfte des 7. Jahrhunderts wirkte der hervorragende armenische Gelehrte, der Wardapet (was soviel wie Lehrer bedeutet) Anania Schirakazi. Aus seinem Namen ist zu ersehen, daß er aus dem Gebiet von Schirak stammte. Den Worten der ihm zugeschriebenen Autobiographie zufolge hat Anania, nachdem er „die Rechenkunst lieben gelernt hatte", lange Zeit nach einem guten Lehrer gesucht und diesen schließlich in der Person des griechischen Mathematikers Tychikos von Trapezunt gefunden. Nach seiner Rückkehr in die Heimat schrieb Anania mehrere Werke, darunter eine „Kosmographie und Zeitrechnung" sowie eine Aufgabensammlung zur Arithmetik, „Fragen und Antworten". Das letztgenannte Werk ist, offenbar ohne den einführenden theoretischen Teil, erhalten geblieben. Die Sammlung enthält 24 Aufgaben mit Lösungen, jedoch ohne deren Herleitung; in nahezu allen Aufgaben spiegelt sich das armenische Leben wider, denn es geht dort entweder um Ereignisse der armenischen Geschichte, oder aber es werden armenische Maßeinheiten und dergl. verwendet. Die Aufgaben sind linear und enthalten eine Unbekannte. In der einen (Nr. 22) geht es darum, eine Größe so aufzuteilen, daß die einzelnen Teile Glieder einer arithmetischen Reihe bilden. Ferner findet man dort eine alte griechische Aufgabe über die Füllung eines Behälters durch drei Rohre (Nr. 24). Wir wollen hier den Text der ersten Aufgabe anführen, die sich, wie viele andere, durch die folgende Gleichung darstellen läßt:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\cdots+\frac{x}{m}+n=x;$$

Der zugehörige Text lautet: „Von meinem Vater hörte ich folgendes: Zur Zeit der bekannten Kriege der Armenier mit den Persern hat Saurak Kamsarakan eine ungewöhnliche Heldentat vollbracht; nachdem er die persischen Streitkräfte dreimal im Laufe eines Monats überfallen hatte, hatte er beim ersten Mal die Hälfte des Heeres vernichtet. Während der Verfolgung schlug er sie zum zweiten Mal und vernichtete ein Viertel des Heeres, beim dritten Mal schließlich vernichtete er ein Elftel der Feinde. Die am Leben gebliebenen 280 wandten sich zur Flucht nach Nachtschawan. Aus diesem Rest müssen wir nun ermitteln, wieviel Perser vor der Vernichtung vorhanden waren"[1]) [180, S. 39, russisch; 180*a*].

Die in der Aufgabensammlung auftretenden Brüche sind in Gestalt von Summen von Stammbrüchen dargestellt. Dabei wird mitunter recht eigenartig verfahren. So ist die Lösung der Aufgabe Nr. 24, die wir mit $\frac{6}{11}$ angeben würden, durch die folgende Summe wiedergegeben:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22} \text{ und nicht etwa in der Form } \frac{1}{2}+\frac{1}{22}.^{2})$$

[1]) In dieser Aufgabe ist der Aufstand der Armenier gegen die Perser in der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts gemeint. Die Kamsarakane sind Fürsten, die Schirak und andere Teile Armeniens beherrscht haben. Die Stadt Nachtschawan heißt heute Nachitschewan.

[2]) Setzt man die Zerlegung $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$ an, die bereits im alten Ägypten bekannt war, so

Vor nicht allzu langer Zeit wurden die von Anania Schirakazi zusammengestellten umfangreichen Additions-, Subtraktions- und Multiplikationstafeln sowie eine Tabelle von Zahlenpaaren entdeckt, deren Produkt 6000 beträgt, wobei der erste Faktor sämtliche Werte der Buchstaben des armenischen Alphabets durchläuft, während die zweiten Faktoren erforderlichenfalls auf ganzzahlige Werte gerundet sind. Möglicherweise wurde diese Tabelle bei der Division angewandt. Ähnliche Tabellen hatte man in Armenien auch für die Zahlen 5000, 4000 und einige andere [179].

Zu Beginn des 8. Jahrhunderts befand sich Armenien unter der Herrschaft der Kalifen von Baghdād, doch hatte es gegen Ende des 9. Jahrhunderts seine Selbständigkeit praktisch wiedererlangt. Etwa zwei Jahrhunderte lang dauerte der wirtschaftliche und kulturelle Aufschwung Armeniens an. Es wuchs das Interesse an den Werken der klassischen griechischen Philosophie und Wissenschaft; mit deren Übersetzung ins Armenische wurde Anfang des 11. Jahrhunderts begonnen. Der Aufklärer und Gelehrte Grigor Magister (etwa 990 bis 1058) übersetzte insbesondere die „Elemente" des Eukleides. Ein erhalten gebliebenes Fragment einer wahrscheinlich von Grigor Magister stammenden Übersetzung enthält die Definitionen, Postulate, Axiome und die ersten drei Sätze aus dem Buch I der „Elemente" [181].

Aus der Schule des Klosters von Achpat in der Stadt Lori ging Owannes Sarkawag (etwa 1045 bis 1129) hervor, der Werke über Astronomie, Kalenderberechnungen und Mathematik verfaßte. Sein Werk „Vieleckszahlen" stützt sich auf griechische Quellen, etwa auf Nikomachos.

Der wirtschaftliche und kulturelle Aufschwung Armeniens wurde durch neue langanhaltende und grausame fremdländische Eroberungen unterbrochen. Armenische wissenschaftliche Literatur aus dieser Zeit ist nahezu überhaupt nicht überliefert. Aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts stammt das erste uns bekannte handschriftliche Lehrbuch der Arithmetik, in dem für das neue Stellenwertsystem geworben wird, das der Verfasser des Werkes der „finsteren" alphabetischen Zahlenschreibweise als „licht" gegenüberstellt [179].

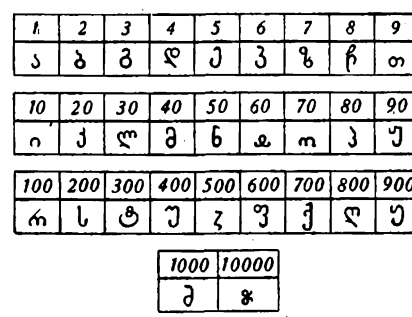


Abb. 91

Die Zahlenschreibweise in Grusien beruhte ebenfalls auf einem Alphabet, das aus dem griechischen und dem persischen Alphabet hervorgegangen war und 37 Buchstaben umfaßte; sie hatte starke Ähnlichkeit mit der armenischen (Abb. 91). Wir wollen lediglich hinzufügen, daß die grusinische Sprache seit alters her besondere Zahlwörter nicht nur für 10000 („bewri"), sondern auch für 1000000 („uschkari") und sogar für 10000000 („uschti") besaß. Die alphabetische Zahlenschreibweise hat sich in Grusien

(Fortsetzung der Fußnote von S. 332)

erhält man für $\frac{6}{11} = 3 \cdot \frac{2}{11}$ die Zerlegung $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22}$. Darüber hinaus kann auch die Zerlegung $\frac{2}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ verwendet worden sein.

sehr lange gehalten, obwohl bereits in einer grusinischen Handschrift aus dem Jahre 974 erstmalig die Darstellung von Zahlen durch ostarabische Ziffern auftritt [182].

Über die mathematische Kultur des mittelalterlichen Grusiens wissen wir nur wenig, da eigentliche mathematische Handschriften nicht erhalten geblieben sind. In grusinischen astronomischen Werken aus dem 10. bis 13. Jahrhundert spiegelt sich der wissenschaftliche Einfluß sowohl der griechischen als auch der syrischen und arabischen Literatur wider. In diesen wurden Regeln zur Berechnung des Kalenders, zur Bestimmung der Mondphasen und dergl. dargelegt. In philosophischen Werken aus der gleichen Zeit, die von einer guten Kenntnis der griechischen Literatur zeugen, findet man die Darlegung der wichtigsten geometrischen Begriffe.

So schreibt Ioane Petrizi (etwa 1055 bis 1130), Leiter der von dem grusinischen Kaiser, David dem Baumeister, gegründeten und unter starkem Einfluß der Neoplatoniker, insbesondere des Proklos Diadochos, stehenden Akademie zu Gelat: „Die Geometrie hält ihre drei (Dimensionen) als das Primäre von allem, und zwei davon leitet sie aus der einen her ... Denn wird der Punkt gedehnt, so entsteht eine gerade Linie, die somit sein erstes Erzeugnis darstellt, und wird die Linie verbreitert, so erzeugt sie eine Ebene" [183, S. 239, russisch]. Petrizi hat die philosophischen Schriften des Proklos ins Grusinische übersetzt und mit umfangreichen Kommentaren versehen. Zweifellos hat die Lektüre des Proklos sein Interesse an der Geometrie gefördert.

Nikolaos Artabasdos. Das früher erwähnte Werk des Moschopulos ist dem byzantinischen Gelehrten Nikolaos Rabdas Artabasdos aus Smyrna gewidmet, der seiner Herkunft nach ein Armenier war. Artabasdos lebte in der Mitte des 14. Jahrhunderts. Von ihm stammt eine Ausgabe des Werkes des Planudes über die indische Arithmetik, die er mit Ergänzungen versehen hat. Ferner sind zwei Werke des Artabasdos selbst in Form von Briefen erhalten geblieben. Der Titel des einen lautet: „Kurze und äußerst klare Darlegung der Lehre vom Rechnen, verfaßt im konstantinischen Byzanz von Rabdas Nikolaos Artabasdos aus Smyrna, einem Arithmetiker und Geometer, auf die Bitte des hochverehrten Gerichtsreferenten und Rechtsanwaltes Georg Chatschik, sehr leicht faßlich für die, die es studieren wollen". Hier wird die alphabetische Zahlenschreibweise und das Zählen mit Hilfe der Finger bis 9999 erläutert: Mit Hilfe der linken Hand wurden die Einer und Zehner, mit Hilfe der rechten Hand die Hunderter und Tausender dargestellt. Es ist die erste uns bekannte Beschreibung der Fingerzählung in griechischer Sprache, obwohl die Griechen diese Zählmethode bereits zur Zeit des Aristophanes benutzten. Bei der Beschreibung der arithmetischen Operationen bemerkt Artabasdos, im Falle großer Zahlen sei es zweckmäßig, die „große Zählweise der Inder" zu benutzen. Am Schluß des Briefes sind große Additions-, Subtraktions- und Multiplikationstabellen in alphabetischer Zahlenschreibweise zusammengestellt, die an die bereits erwähnten Tabellen des Anania Schirakazi erinnern.

Im zweiten Brief, der an den Freund des Verfassers, Theodoros aus Klazomene bei Smyrna, gerichtet ist, werden weitere arithmetische Probleme behandelt. Dort werden die Operationen mit Brüchen und ein Näherungsverfahren zum Ausziehen von Quadratwurzeln, das auf Heron zurückgeht, behandelt. Die Brüche werden stets

in Summen aus Stammbrüchen und aus dem Bruch $\frac{2}{3}$ zerlegt; beim Multiplizieren und Dividieren von Brüchen werden diese zunächst auf den Hauptnenner gebracht, doch wird das Ergebnis wieder in Stammbrüchen ausgedrückt. Neben Aufgaben zur Dreisatzregel enthält der Brief verschiedene Aufgaben, die sich durch lineare Gleichungen mit einer oder zwei Unbekannten der folgenden Form ausdrücken lassen:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\cdots+\frac{x}{m}=n,$$

$$x+y=n,\quad ax=by,$$

$$x+\frac{y}{a}=y+\frac{x}{b}=n.$$

Einen beachtlichen Teil seiner Ausführungen räumt Artabasdos den Kalenderberechnungen ein. Es sei noch erwähnt, daß Artabasdos beim Lösen von Aufgaben des täglichen Lebens nach der Dreisatzregel den später in die Literatur eingegangenen Terminus „politische Arithmetik" verwendet [178, 179]. Eine Handschrift des Artabasdos über Geometrie, die in Paris aufbewahrt wird, wurde bisher nicht erforscht.

Von den byzantinischen Mathematikern verdienen ferner Johannes Pediasimos und Isaak Argyros erwähnt zu werden, die in der Mitte des 14. Jahrhunderts gelebt haben. Pediasimos war der Siegelbewahrer des Patriarchen von Konstantinopel während der Herrschaft des Kaisers Andronikos III. (1328—1341). Von ihm stammen Bemerkungen zu schwierigen Problemen der Arithmetik, eine Abhandlung über die Würfelverdopplung und seine „Geometrie", ein Werk, das den „Vermessungen" des Heron nahesteht. Argyros war Mönch und einer der vielen byzantinischen Übersetzer der persischen astronomischen Werke. Er schrieb eine „Geodäsie" und Kommentare zu den ersten sechs Büchern der „Elemente" des Eukleides, ferner eine Abhandlung über das Ausziehen von Quadratwurzeln mit einer Quadratwurzeltabelle für die Zahlen 1 bis 102 in Sexagesimalbrüchen.

Die Tätigkeit dieser beiden Gelehrten fiel in eine Zeit des politischen Niederganges von Byzanz, um das sich der Ring der türkischen Armeen immer enger schloß. Im Jahre 1453 fiel Konstantinopel. Ein Teil der Gelehrten floh nach Westeuropa und förderte hier das Studium der überlieferten griechischen Handschriften.

Beda und Alcuin. In der Zeit, als das römische Reich zerfiel und der europäische Kontinent durch den Einfall neuer Volksstämme erschüttert wurde, lag Irland, wohin das Christentum bereits im 5. Jahrhundert vorgedrungen war, abseits von allen politischen Stürmen. Die irischen Klöster wurden für eine gewisse Zeit zu wichtigen Kulturzentren, und irische Mönche besuchten ferne Länder.

Wir hatten bereits das Interesse der Kirche am Kalender und an der Berechnung des Datums für das Osterfest erwähnt, an das viele wichtige christliche Feiertage gebunden sind. Der erste Ostertag wird durch Regeln festgelegt, die im Grunde genommen auf die Auflösung linearer unbestimmter Gleichungen in ganzen Zahlen hinausläuft. Die Hauptrolle spielt hierbei die Forderung, daß das Osterfest auf den ersten Sonntag nach dem ersten Vollmondtag nach Frühjahrsanfang fällt. Ein be-

stimmter Wochentag — etwa der erste Sonntag im März — fällt in verschiedenen Jahren auf verschiedene Daten, wobei ein achtundzwanzigjähriger Zyklus zu verzeichnen ist. Die Mondphasen wiederholen sich aller neunzehn Jahre. Daher verschieben sich die Ostertage im Kalender in einer gewissen Reihenfolge mit einer fünfhundertzweiunddreißigjährigen Periode. Wir haben lediglich auf die wichtigsten Wesens-

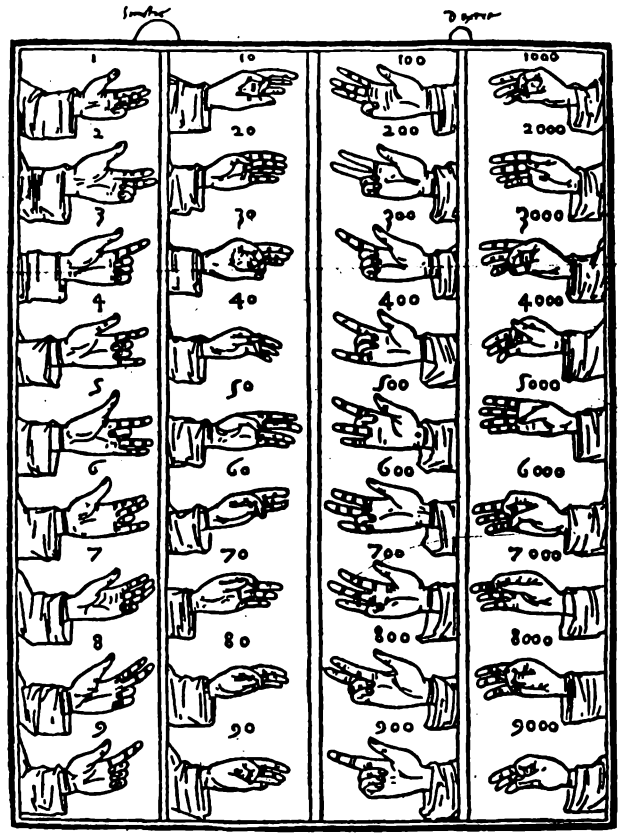


Abb. 92. Die Fingerzählung
(nach dem Buch „Summa de arithmetica" des Luca Pacioli, 1494).

züge der Ostertagsberechnung hingewiesen, die durch zusätzliche Bedingungen erschwert wird. In der christlichen Kirche herrschten hierüber lange Zeit Meinungsverschiedenheiten. Insbesondere traten derartige Streitigkeiten auch in der irischen und englischen Kirche auf, und dieses Problem wurde im Jahre 664 in Anwesenheit des Königs Oswin einer öffentlichen Disputation unterworfen.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß dieses Problem das Interesse des gelehrten irischen Mönches Beda mit dem Beinamen Venerabilis (d. i. der Ehrwürdige; etwa 673 bis 735) erregte, der der Chronologie ein besonderes Werk „Über die Zeitrechnung" (De temporum ratione) [184] widmete. Beda war ein vielseitiger Gelehrter. Über sich selbst sagte er, daß er stets gern entweder lerne, lehre oder schreibe. Groß

sind die Verdienste Bedas als Historiker, doch hinterließ er Spuren auch in der Entwicklung der Mathematik. Von ihm stammt die einzige vollständige Beschreibung der uns bereits bekannten Fingerzählweise, die er in sein Buch über die Zeitrechnung aufnahm. Verschiedene Stellungen der gekrümmten und ausgestreckten Finger bedeuteten Einer, Zehner, Hunderter und Tausender, wobei verschiedene Stellungen der Arme es gestatteten, diese Zählweise bis zu einer Million auszudehnen.

Das Rechnen und Zählen mit Hilfe der Finger war bereits im Altertum bekannt. Die Händler benutzten es, um in Gegenwart fremder Personen insgeheim Abmachungen zu treffen. Es konnte auch von ungebildeten Leuten angewandt werden, aber auch hervorragende Mathematiker, z. B. Leonardo Fibonacci von Pisa, verschmähten diese Rechenweise nicht. Er empfahl sie als Hilfsmittel beim Rechnen im Stellenwertsystem. Auf die Fingerrechnung geht auch die für die mittelalterliche Mathematik seit Boethius charakteristische Einteilung der Zahlen zurück, nämlich in digiti (Finger), d. h. Einer, articuli (Glieder), d. h. Zehner, und numeri compositi (zusammengesetzte Zahlen), worunter alle übrigen Zahlen verstanden werden. Die Engländer bezeichnen bis heute die Einer bzw. Ziffern als digits, die Franzosen als doigts. Die Bezeichnungen digiti und articuli benutzte man z. B. bei der Formulierung der Multiplikationsregeln.

Um die Mitte des 8. Jahrhunderts begann der fränkische Staat emporzustreben. Der mächtige König dieses Reiches, der spätere Kaiser Karl (768—814), war um die Hebung des kulturellen Niveaus der Geistlichkeit, der höheren Beamten und seines Gefolges bemüht. Die Leitung der Bildungstätigkeit wurde dem Schüler eines Freundes von Beda, dem Mönch Alcuin (eigentlich Alh-win, d. h. Freund des Tempels, gebürtig aus York, etwa 735 bis 804), übertragen, der im Jahre 781 an den Hof Karls berufen wurde. Dieser war bemüht, Wissen, darunter auch mathematische Kenntnisse, unter dem ungebildeten Feudaladel zu verbreiten. Auf sein Drängen hin wurden in Frankreich und in Deutschland verschiedentlich Elementarschulen eingerichtet, während in einem Kloster in der Nähe von Tours eine Schule mit höherem Niveau gegründet wurde, die Alcuin in den letzten Jahren seines Lebens selbst geleitet hat. Zur Popularisierung der Mathematik stellte Alcuin Aufgaben in Form von Rätseln und Scherzfragen zusammen, manchen gab er einen religiös-mystischen Anstrich. Er könnte auch der Verfasser der Sammlung „Aufgaben zur Übung der Jugendlichen" (Propositiones ad acuendos juvenes) [185] sein, von deren Existenz wir durch ein etwa im Jahre 1000 aufgestelltes Verzeichnis unterrichtet sind.

Diese Sammlung enthält z. B. auch die folgende Aufgabe, die nicht nur mathematische Kenntnisse, sondern auch Wendigkeit erfordert. Zwei Mann kauften für 100 Soldi eine Herde Schweine, und zwar 5 Schweine für 2 Soldi. Dann teilten sie die Herde und verkauften wieder 5 Schweine für 2 Soldi, wobei sie gut verdienten. Wie ist das möglich? Sie hatten insgesamt 250 Schweine, die sie in zwei Herden zu je 125 Schweinen teilten, wovon die eine aus fetten, die andere aus mageren Schweinen bestand. Der erste verkaufte 120 Schweine, und zwar 2 Schweine für 1 Soldi, während der zweite ebenfalls 120 Schweine, und zwar 3 Schweine für 1 Soldi verkaufte. Demnach verkauften sie zusammen 5 Schweine für 2 Soldi. Der erste hatte einen Erlös von 60, der zweite einen von 40 Soldi, so daß sie beide zusammen 100 Soldi einnahmen. Doch verblieben bei ihnen noch $5 + 5 = 10$ Schweine. Es sei noch an die wohlbe-

kannte Aufgabe über den Transport eines Wolfes, einer Ziege und eines Kohlkopfes über einen Fluß erinnert, die eine gewisse Findigkeit voraussetzt.

Doch enthält die Aufgabensammlung auch eine Menge reiner Rechenaufgaben, die sich auch später großer Popularität erfreuten. So soll in einer Aufgabe bestimmt werden, nach wieviel Sprüngen ein Hund einen in einer Entfernung von 150 Fuß vorauslaufenden Hasen einholt, wenn der Hase bei jedem Sprung 7 Fuß, der Hund hingegen 9 Fuß zurücklegt. In einer anderen Aufgabe werden 100 Scheffel unter 100 Männer, Frauen und Kinder so aufgeteilt, daß jeder Mann 3 Scheffel, jede Frau 2 Scheffel und je 2 Kinder 1 Scheffel erhalten. Ohne jede Begründung ist hier nur die eine Lösung 11, 15, 74 angegeben. Derartige unbestimmte lineare Probleme mit ganzzahligen Lösungen standen auch bei den Mathematikern des Orients zur Debatte (vgl. z. B. S. 232ff). Ferner ist dort eine Aufgabe über die Füllung eines Wasserbehälters durch Rohre vorhanden, die bereits bei Heron auftrat. Verschiedene Aufgaben lassen sich durch zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten erfassen usw. Die geometrischen Aufgaben gehen auf römische Quellen zurück und enthalten nur äußerst grobe Näherungswerte (der Flächeninhalt eines Kreises wird z. B. durch das Quadrat aus einem Viertel des Kreisumfanges wiedergegeben, die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks lautet: Produkt aus der halben Summe zweier Seiten und der Hälfte der dritten Seite usw.).

Die Voraussetzungen für die weitere Entwicklung der Mathematik. Mag die Entwicklung der Kultur seit dem Untergang des römischen Reiches (476) bis zu Beginn des 9. Jahrhunderts, als die ersten Spuren des geistigen Erwachens zu verzeichnen waren, auch nur äußerst langsam vor sich gegangen sein, so wurde auf der anderen Seite das Leben durch eine Vielzahl neuer technologischer Methoden, durch die gesamte Tradition der handwerklichen und landwirtschaftlichen Technik bereichert, die die „Barbaren" mitgebracht hatten. Mit der Einführung des schweren, mit Rädern ausgerüsteten Pfluges, mit dem Einsatz des Pferdes als Zugtier beim Pflügen, mit dem Übergang zur Dreifelderwirtschaft, mit der allgemeinen Verbreitung zunächst der Wassermühle (10. Jahrhundert) und dann der Windmühle (11. Jahrhundert) vollzog sich in der Gesellschaft eine gewisse Entlastung des Menschen von der körperlichen Arbeit, bildete sich ein gewisser Überschuß an Produkten heraus. Dadurch konnte sich der Handel entwickeln. Es entstanden Städte, in denen monumentale Kirchenbauten errichtet und später (im 11. bis 13. Jahrhundert) Universitäten gegründet wurden. Die Kirche und die Feudalherren wurden in die Lage versetzt, die auf Eroberung gerichteten Kreuzzüge zu unternehmen.

Früher als in den anderen Ländern Westeuropas setzte die Entwicklung des Handels und Handwerks in Italien ein. Bereits im 9. und 10. Jahrhundert entwickelten sich Burgen und bischöfliche Residenzen zu Stadtgemeinden. In ihnen konzentrierten sich das Textilhandwerk, die Waffen- und die Goldschmiedekunst sowie der Handel. Die Städte wurden die Vermittler zwischen Ost und West: Sie pflegten Beziehungen mit Deutschland, Frankreich und Burgund über die Alpenpässe hinweg und mit Byzanz, dem Nahen Orient und Ägypten auf dem Seewege.

Die nunmehr unentbehrlich gewordenen mathematischen Kenntnisse schöpfte man aus den in den Klöstern erhalten gebliebenen Resten der griechisch-römischen Gelehr-

samkeit und aus den praktischen Erfahrungen, wie sie etwa durch die Agrimensoren vermittelt wurden. Wie weit der Stand der Kultur im westlichen Europa damals gesunken war, geht z. B. daraus hervor, daß zu manchen Zeiten die Bücher in den Klöstern so selten geworden waren, daß man sie an Ketten anschloß. Dessenungeachtet waren gerade die Klöster lange Zeit hindurch die wichtigsten Zentren, von denen die Verbreitung der Bildung und der „weltlichen" Gelehrsamkeit ausging.

Mit der Ausweitung des Handels begannen sich auch die ersten wissenschaftlichen Beziehungen mit der arabischen Kultur anzubahnen, vor allem über Spanien und Sizilien.

Gerbert. Zu den ersten, die Spanien, und zwar Katalonien, besuchten, gehörte der gelehrte französische Mönch Gerbert (geb. zwischen 930 und 945 in der Auvergne), der später (999 bis 1003) unter dem Namen Sylvester II. den päpstlichen Stuhl bestieg.

972 bis 982 lebte Gerbert in Reims, wo er an der bald berühmt gewordenen Schule wirkte. Er lehrte die Fächer des Quadriviums. Neben Mathematik, Logik und Philosophie betrieb Gerbert Astronomie. Etwa 994 baute er in Magdeburg eine Sonnenuhr, wozu er Beobachtungen des Polarsterns angestellt hatte.

Von Gerbert sollen mehrere mathematische Werke stammen; doch weiß man nicht genau, ob er wirklich der Verfasser der ihm zugeschriebenen Bücher ist [186]. Mit der größten Wahrscheinlichkeit darf man dies wohl von dem „Büchlein über die Teilung der Zahlen" (Libellus de numerorum divisione), mit geringerer von den „Regeln für das Rechnen auf dem Abakus" (Regula de abaco computi) annehmen; jedenfalls müssen die beiden genannten Werke, die uns in Handschriften aus späterer Zeit überliefert sind, ihrem Inhalt nach den von Gerbert selbst verfaßten Werken nahestehen. Die Zahlen werden in beiden Handschriften entweder in Worten ausgedrückt oder durch römische Ziffern wiedergegeben. Vornehmlich römischer Einfluß spiegelt sich auch in dem dritten Gerbert zugeschriebenen Werk über Geometrie wider, das in Abschriften aus dem 12. Jahrhundert erhalten geblieben ist. In diesem werden die einfachsten Sätze der Geometrie und die einfachsten Regeln der Feldvermessung sowie Methoden zur Berechnung figurierter Zahlen (Vieleckszahlen, Pyramidenzahlen) behandelt.

Gerbert hat einen wissenschaftlichen Briefwechsel mit einigen Zeitgenossen geführt. Als Adelbold von Utrecht einmal den Flächeninhalt des Dreiecks mit den sog. Dreieckszahlen durcheinandergebracht hatte und seine Verwunderung darüber äußerte, daß der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 7 sich durch die beiden verschiedenen Zahlen $21 = \frac{7 \cdot 6}{2}$ und $28 = \frac{7 \cdot 8}{2}$ ausdrücken läßt, klärte Gerbert seinen Brieffreund über dessen Fehler auf. Die erste Zahl, schrieb Gerbert, liefert den Flächeninhalt des Dreiecks, da im gleichseitigen Dreieck die Höhe des Dreiecks um ein Siebentel kleiner ist als die Seite (somit benutzte Gerbert den Näherungswert $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$), während die zweite Zahl geometrisch gesehen den Flächeninhalt von 28 Einheitsquadraten darstellt (Abb. 93).

Bei seinen Bemühungen um die Popularisierung der Werke des Boethius, der Fragmente der „Elemente" des Eukleides und der praktischen Geometrie der römischen

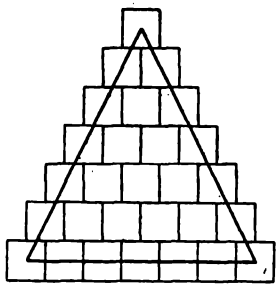


Abb. 93

Agrimensoren ging Gerbert an die Grundbegriffe der Geometrie kritisch heran. Er wies daraufhin, daß in Wirklichkeit weder ein Punkt noch eine Linie noch eine Fläche anders vorkommen als an irgendeinen Körper gebunden. Nur in Gedanken wären wir in der Lage, Punkte, Linien und Flächen aus dem Verband von Körpern zu lösen.

Für den Tiefstand des mathematischen Wissens jener Zeit war es bezeichnend, daß unter den Beschuldigungen, die gegen Gerbert erhoben wurden, als er als Anhänger der Cluny-Bewegung, die auf eine allseitige Stärkung der Kirche und des päpstlichen Thrones gerichtet war, die Macht des Papstes der Macht der Feudalherren entgegensetzte, auch die Tatsache angeführt wurde, daß er das Teilen beliebig großer Zahlen beherrsche und sich demnach dem Teufel verschrieben haben müsse.

Übersetzungen aus dem Arabischen und Griechischen. Sehr große Bedeutung für den Fortschritt der mathematischen Kenntnisse in Europa hatten, wie bereits erwähnt, Übersetzungen aus dem Arabischen, wobei es sich einerseits um arabische Originalwerke, andererseits um in arabischer Sprache vorliegende Übersetzungen der griechisch-hellenistischen Literatur handelte. Mit den Übersetzungen aus dem Arabischen beschäftigte man sich besonders intensiv im 12. und 13. Jahrhundert, doch hat das Studium der arabischen Handschriften noch im 15. bis 17. Jahrhundert die mathematischen Kenntnisse in Europa bereichert.

Die Verbreitung der Kenntnisse wurde durch arabische und jüdische Ärzte und Astrologen gefördert, die an den Höfen mancher europäischer Herrscher tätig waren. Der Hauptteil der Übersetzungsarbeit jedoch wurde auf der Pyrenäenhalbinsel geleistet, die durch die Spanier allmählich von den Mauren zurückerobert wurde. Als im Jahre 1085 Toledo gefallen war, wurde es von Wissensdurstigen überflutet, und bereits nach kurzer Zeit hatte hier unter der Schirmherrschaft des Erzbischofs Raymond I. (1126—1151) eine ganze Schule von Übersetzern und Kompilatoren ihre Tätigkeit entfaltet. Auch in Barcelona, Segovia, Pamplona, Toulruse, Marseille wurden Übersetzungen angefertigt. An dieser Arbeit beteiligten sich Menschen verschiedener Nationalitäten: zum Christentum übergetretene Araber, die sog. Morisken; Spanier, darunter auch solche, die vorher zum Islam übergetreten waren und die man als Mozaraber bezeichnete; spanische Juden, Engländer, Italiener, Slawen und Flamen. Das Ergebnis war eine äußerst umfangreiche wissenschaftliche und philosophische Literatur in lateinischer Sprache, die im Laufe des ganzen von uns betrachteten Zeitraumes in Westeuropa die gemeinsame Sprache aller Gelehrten war [187, 187*a*].

Unter der Herrschaft des Königs Alfons X. (1226—1284) von Kastilien und Leon, der die Wissenschaften förderte und daher den Beinamen „der Gelehrte" erhielt, entstanden in Toledo verschiedene spanische Übersetzungen arabischer Werke über Astronomie und benachbarte Gebiete. So tauchte unter dem Gesamttitel „Bücher der astronomischen Kenntnisse" (Libros del saber de astronomia) in spanischer Sprache eine Übersetzung auf, die teilweise als Kompilation zu werten ist und eine

ganze Reihe arabischer Werke über Astronomie und astronomische Geräte enthält. Besondere Bedeutung erlangten die sog. Alfonsinischen Tabellen der sichtbaren Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten; das Werk enthält außerdem einiges über Trigonometrie, Geographie, Chronologie, Astrologie u. a. Diese Tabellen wurden etwa 1270 von Jehuda ben Moses ha-Kohen und Isaac ha-Ḥazzan (d, h. Erzieher) auf der Grundlage der Tabellen des hervorragenden westarabischen Astronomen Abū Isḥāq Ibrāhīm ibn Yaḥyā an-Naqqāš, der auch unter dem Namen al-Zarql bzw. in der latinisierten Form Arzachel (etwa 1030 bis 1090) bekannt ist, zusammengestellt. Ebenso wie die beiden Erstgenannten hat auch er in Toledo gewirkt. Die Alfonsinischen Tabellen wurden mit einigen Textänderungen ins Lateinische übersetzt und seit 1483 wiederholt nachgedruckt [30, Vol. II]. Die Schaffung wissenschaftlicher Literatur in lebenden Nationalsprachen war jedoch im allgemeinen einer viel späteren Zeit vorbehalten.

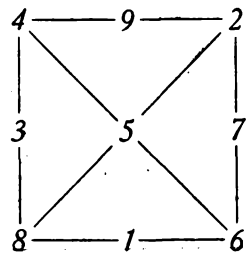
Neben Spanien war Sizilien ein wichtiges Zentrum, von dem die Verbreitung orientalischer und griechischer Erkenntnisse ausging. Von 878 an befand sich die Insel zwei Jahrhunderte lang unter arabischer Herrschaft; im Jahre 1091 wurde sie von den süditalienischen Normannen erobert. Hier waren das Latein, das Arabische und teilweise das Griechische allgemeinverbreitete Umgangssprachen.

Zu den ersten Übersetzern gehörte der große englische Gelehrte und Denker Adelhard of Bath. Er verfaßte eine Reihe philosophischer Werke, in denen auch Fragen der Naturphilosophie behandelt wurden, sowie Bücher unter dem Titel „Regeln des Abakus" (Regulae abbaci). Später hat er auch die auf dem Stellenwertprinzip beruhende Arithmetik gebührend gewürdigt. Adelhard hat Frankreich, Sizilien und den Nahen Orient besucht. Im Jahre 1126 übersetzte er die astronomischen Tabellen al-Ḫuwarizmīs in der Bearbeitung von al-Maǧriṭī, wodurch er die europäischen Gelehrten mit den Anfangsgründen der Trigonometrie bekannt machte. Eine große Leistung war auch die von ihm nach der arabischen Fassung vorgenommene Übersetzung der „Elemente" des Eukleides in 15 Büchern. Es könnte sein, daß Adelhard auch die arithmetische Abhandlung al-Ḫuwarizmīs übersetzt hat. Ein anderer Engländer, Robert of Chester, hat im Jahre 1145 in Segovia die Algebra al-Ḫuwarizmīs übersetzt und damit den Grund gelegt für die Verbreitung algebraischer Kenntnisse unter den europäischen Gelehrten (Vgl. S. 187).

Der slawische Gelehrte Hermann von Dalmatien übertrug aus dem Arabischen das „Planisphaerion" des Ptolemaios, dessen griechischer Text verlorengegangen ist, sowie eine Reihe anderer Werke über Astronomie und Mathematik. Hermann lebte in Spanien etwa um 1140.

Mitunter haben Übersetzer, die aus verschiedenen Sprachen übersetzten, zusammen gearbeitet. So bestand eine Zusammenarbeit zwischen dem spanischen Philosophen Domingo Gonsalez (Dominicus Gundissalinus) und Johannes von Sevilla (von Toledo), der im 12. Jahrhundert in Toledo gewirkt hat. Offenbar übertrug Johannes aus dem Arabischen in den kastilischen Dialekt, während Gonsalez die Weiterübersetzung ins Lateinische besorgte. Sie haben insgesamt etwa 20 Werke vornehmlich über Astronomie und Philosophie übersetzt, wovon ein Teil im 15. und 16. Jahrhundert gedruckt wurde. Auf Johannes von Sevilla geht bekanntlich auch die wichtige Handschrift „Buch des Algorismus und über die Praxis der Arithmetik" zurück [96].

Dieses Buch ist entweder die Übersetzung einer arabischen Kompilation oder eine eigene Kompilation des Johannes nach arabischen Quellen. Die Darlegung der arithmetischen Abhandlung al-Ḫuwarizmīs macht weniger als ein Drittel des Buches aus; der übrige Inhalt ist ergänzenden Kapiteln zur Arithmetik sowie der Lösung dreier Typen quadratischer Gleichungen gewidmet. Am Ende der Handschrift ist das nachstehende magische Quadrat angeführt.



Der Italiener Plato von Tivoli, der etwa von 1134 bis 1145 in Barcelona weilte, nahm Übersetzungen gemeinsam mit dem jüdischen Mathematiker Abraham bar Hiyya vor (etwa 1070 bis 1136), der in der lateinischen Literatur Savasorda genannt wurde (vom Arabischen sahib al-šurta, was soviel wie Führer der Wache bedeutet). Savasorda schrieb mehrere Werke über Mathematik, Astronomie und Kalender in hebräischer Sprache. Sein Buch über praktische Geometrie, „Ḥibbur ha-mešiḥa wə-ha-tišboret", das im Jahre 1116 verfaßt worden war und auch einiges aus der Algebra enthielt, wurde im Jahre 1145 von Plato von Tivoli unter dem Titel „Buch der Messungen" (Liber embadorum) [188 bis 189] ins Lateinische übersetzt. Von diesem Werk laufen die Fäden zu den Werken des größten europäischen Mathematikers im 13. Jahrhundert, zu Leonardo von Pisa.

Das vier Kapitel umfassende „Buch der Messungen" weist einen reichen Inhalt auf. Wegen seiner Bedeutung müssen wir einige Worte über das Werk verlieren. Im ersten Kapitel sind die Grundbegriffe der Geometrie einschließlich der Berechnung rechteckiger Figuren und der Begriff der Ähnlichkeit sowie einige arithmetische Definitionen behandelt. Das zweite Kapitel beginnt mit der Auflösung dreier Typen quadratischer Gleichungen auf der Basis der Sätze aus dem Buch II der „Elemente" des Eukleides. Neben der Übersetzung der Algebra al-Ḫuwarizmīs und dem Werk des Johannes von Sevilla war dies die erste Darlegung dieses Problemkreises in Europa. Ferner behandelt Savasorda die Berechnung von Dreiecken, insbesondere die aus drei Seiten (ohne Beweis), des weiteren die angenäherte Berechnung des Kreises $\left(\pi \approx 3\frac{1}{7}\right.$ und für Aufgaben der Astronomie $\left.\pi \approx 3 + \frac{8\frac{1}{2}}{60}\right)$ sowie des Flächeninhalts einer Ellipse, an dessen Stelle der Flächeninhalt eines Kreises eingesetzt wird, dessen Durchmesser dem arithmetischen Mittel der beiden Ellipsenachsen gleichgesetzt wird. Anschließend folgt eine kleine Sehnentabelle, und es wird über die Berechnung von Vielecken gesprochen, die in Dreiecke zerlegt werden. Das dritte Kapitel ist der Teilung von Figuren gewidmet. Im vierten Kapitel über die Berechnung der Volumina sei ein Satz über die Länge der Diagonale in einem geraden Parallelepiped erwähnt. Abschließend

sei noch darauf hingewiesen, daß Savasorda ähnlich seinen ostarabischen Vorgängern Abū-Kāmil u. a. bei der Lösung geometrischer Probleme geschickt die Algebra einsetzt. Nachstehend geben wir ein Beispiel zur Bestimmung der Grundlinie b und der Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks aus dem Schenkel a und dem Flächeninhalt S, das wir in unseren modernen Bezeichnungen wiedergeben wollen: Es ist

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}, \quad 2S = bh,$$

daher gilt

$$a^2 - 2S = \left(h - \frac{b}{2}\right)^2, \quad \frac{a^2 - 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$$

und

$$\frac{a^2 - 2S}{4} + S = \frac{a^2 + 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}\right)^2.$$

Sodann werden h und $\frac{b}{4}$ aus den Beziehungen

$$\frac{h}{2} - \frac{b}{4} = \frac{a^2 - 2S}{2}, \quad \frac{h}{2} + \frac{b}{4} = \frac{a^2 + 2S}{2}$$

durch Addition und Subtraktion bestimmt.

Die herausragende Übersetzerpersönlichkeit jener Zeit war der Italiener Gerhard von Cremona in der Lombardei (1114—1187). Der Aussage eines seiner Schüler zufolge wurde Gerhard durch sein Interesse am „Almagest" verlockt, nach Toledo zu gehen, da dieses Werk in Italien nicht zur Verfügung stand. Er erlernte die arabische Sprache und widmete sein ganzes Leben der Übersetzertätigkeit. Die Übersetzungen Gerhards von Cremona umfassen Logik und Philosophie (insbesondere Aristoteles und al-Fārābī), Mathematik, Astronomie, Alchimie, Physik und Medizin. Die Anzahl der von ihm aus dem Arabischen übersetzten Werke liegt bei nahezu neunzig. Er übersetzte die „Elemente" und die „Dedomena (Data)" des Eukleides, die „Kreisberechnung" des Archimedes, die „Konika" des Apollonios, den „Almagest" des Ptolemaios, Werke des Theodosios und des Menelaos, die „Algebra" des al-Ḫuwarizmī, die Kommentare zu den ersten zehn Büchern des Eukleides von an-Nairīzī, Werke des Thābit ibn Qurra, des ibn al-Haitham, des Ǧabir ibn Aflā' usw. Verschiedene Übersetzungen Gerhards wurden im 15. bis 17. Jahrhundert gedruckt.

Eine neue Übersetzung der „Elemente" des Eukleides in fünfzehn Büchern fertigte etwa 1250 bis 1260 der Mathematiker und Astronom Giovanni Campano aus Novara bei Mailand an. Dabei wurde neben arabischen Quellen die frühere Übersetzung des Adelhard of Bath benutzt. Campano ergänzte die Übersetzung mit Erläuterungen und eigenen Überlegungen, insbesondere zum Problem des Kontingenzwinkels, d. h. des Winkels zwischen einem Kreisbogen und der Tangente am Ende des Kreisbogens, ferner über allgemeine Eigenschaften stetiger Größen. Diese Probleme wurden in der mittelalterlichen lateinischen Literatur rege diskutiert. Die erste gedruckte Ausgabe der „Elemente", die 1482 in Venedig erschien, war eine Wiedergabe der Übersetzung von Campano.

Übersetzungen aus dem Griechischen blieben lange Zeit hindurch eine Seltenheit. Eine der frühesten war die lateinische Übersetzung des „Almagest", die von einem

unbekannten Übersetzer um das Jahr 1160 auf Sizilien angefertigt wurde. Diese Übersetzung, die etwas eher entstanden war als die nach arabischer Fassung vorgenommene Übertragung des Gerhard von Cremona, ist nahezu unbekannt geblieben, so daß 1451 eine neue Übersetzung durch den in Italien ansässigen Griechen Georgios von Trapezunt (1393—1486) vorgenommen wurde; allerdings ist diese Fassung als wenig gelungen zu bezeichnen. Besondere Erwähnung verdient wegen seiner unermüdlichen Arbeit auf diesem Gebiet Wilhelm von Moerbeke in Ostflandern (etwa 1215—1286), der zweimal für längere Zeit nach Griechenland gereist war und sogar Bischof von Korinth wurde. Neben Übersetzungen aus den Werken des Aristoteles und des Proklos stammen von Wilhelm Übersetzungen von Werken des Archimedes und des Heron. Auf Wilhelm von Moerbekes Werke stützte sich Tartaglia bei der Herausgabe der Werke des Archimedes, die im Jahre 1543 in Venedig erschienen. Die „Elemente" des Eukleides wurden erstmalig von B. Zamberti am Ende des 15. Jahrhunderts aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt; dieser Text wurde im Jahre 1505 in Venedig veröffentlicht.

Wir werden uns auch noch einigen anderen Übersetzern aus dem Arabischen oder Griechischen zuwenden müssen. Hier sei bemerkt, daß den verschiedenen Übersetzungen unterschiedliche Schicksale beschieden waren. Manche wirkten sich sehr rasch auf den Fortschritt der europäischen Wissenschaft und Kultur aus. Dies gilt vor allem für die „Arithmetik" und „Algebra" al-Ḫuwarizmīs und die sich daran anschließenden Werke, für die astronomischen und trigonometrischen Werke al-Ḫuwarizmīs und al-Farghānīs, für die Bücher Savasordas und Abū Kāmils, für die „Optik" des ibn al-Haitham, für die „Elemente" des Eukleides (wenigstens für die ersten Bücher), für die Werke des Aristoteles und der arabischen Philosophen. Der Inhalt dieser Werke entsprach mehr oder weniger den allgemeinen Bedürfnissen der Zeit, wurde in dieser oder jener Form erfaßt, war Gegenstand von Kommentaren, Einschätzungen, Diskussionen und weiterer Forschung. Andere Übersetzungen fanden anfänglich geringere Verbreitung und übten demgemäß auch einen geringeren Einfluß aus. Die Werke des Apollonios und Archimedes überstiegen zunächst noch die geistigen Fähigkeiten, und die Zeit zu ihrer schöpferischen Verarbeitung war noch nicht angebrochen. Dennoch darf man die Bedeutung auch der Übersetzungen dieser Werke nicht unterschätzen, da sie die erste Bekanntschaft mit den höchsten Errungenschaften der griechisch-hellenistischen Mathematik vermittelten. Darüber hinaus wurden manche dieser Übersetzungen von verschiedenen Gelehrten, die sich mit Naturwissenschaften befaßten, vorgenommen. Kenntnisse über die Theorie der Kegelschnitte benötigte man z. B. zum Verständnis der „Optik" ibn al-Haithams sowie des sich eng daran anschließenden Werkes des polnischen Physikers und Philosophen Witelo aus dem 13. Jahrhundert (etwa 1225 bis 1280). Ein Fragment des ersten Buches der „Konika" des Apollonios, wahrscheinlich in der Übersetzung des Gerhard von Cremona, tritt z. B. als Einführung zur lateinischen Fassung der „Optik" des ibn al-Haitham auf. Aus der Feder des Johannes von Palermo, der mehrere Jahre am Hofe des Kaisers Friedrich II. des Hohenstaufen (1194—1250) in Palermo gewirkt hat, stammt aller Wahrscheinlichkeit nach die Übersetzung eines kleinen anonymen Werkes über die Hyperbel aus dem Arabischen ins Lateinische. Derartige Beispiele stellen keineswegs Einzelfälle dar.

Die ersten Universitäten. Eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Mathematik spielten die Universitäten. Die älteste (medizinische) Universität in Europa wurde in Salerno nicht später als in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts gegründet. Etwa 1100 wurde in Bologna eine Universität eröffnet; diese stellte ursprünglich eine Schule dar, in der auf der Basis des römischen Rechts juristische Normen erarbeitet wurden. Das Interesse daran nahm infolge der Entwicklung der Städte ständig zu. Auf der Grundlage mehrerer Klosterschulen entstand am Ende des 12. Jahrhunderts die Pariser Universität, an der Tausende von Studenten aus allen Ländern Europas studierten. Etwa um die gleiche Zeit wurde die Universität Oxford und im Jahre 1209 die Universität Cambridge gegründet. Im 14. Jahrhundert entstanden die Universitäten in Prag (1348), in Krakau (1364), in Wien (1365), in Heidelberg (1385), dann in Leipzig (1409), in Basel (1459) usw. Diese Universitäten waren im Gegensatz zu den beiden ersten keine einseitig fachbegrenzten Lehranstalten. Der Unterricht war etwa folgendermaßen organisiert.

Die Universität bestand aus vier Fakultäten, die jeweils die Künste, die Theologie, das Recht und die Medizin vertraten. Die Studenten nahmen, häufig bereits als Jugendliche, das Studium zunächst an der Fakultät der Künste auf, an der sie etwa 6 Jahre studierten; nach Absolvierung entsprechender Prüfungen konnten sie auf eine der anderen Fakultäten überwechseln. Am populärsten und einflußreichsten war die theologische Fakultät, an der das Studium etwa 8 Jahre dauerte und durch eine Prüfung und eine Disputation abgeschlossen wurde. Bei den Lehrern unterschied man die niederen Grade, wie Baccalaurei und Magistri und die Doctores. An der Spitze der Universitäten standen aus Geistlichen hervorgegangene Theologen.

Die Mathematik wurde im Rahmen des Quadriviums an der Fakultät der Künste gelehrt; einige höher liegende Probleme wurden im Rahmen der Philosophie behandelt, insbesondere nachdem sich im 13. Jahrhundert der Aristotelismus eingebürgert hatte. Im Laufe der Zeit fand im Rahmen der Mathematikausbildung das Studium des ersten Buches oder der ersten beiden Bücher der „Elemente" des Eukleides Eingang; es erfolgte eine Einführung in die sphärische Astronomie, es wurden Vorlesungen über die Elemente der Optik, über die Theorie der Planetenbewegung, über die Proportionenlehre und über die Lehre von den Formlatituden (von der später noch die Rede sein soll) abgehalten. Aber mehrere Jahrhunderte hindurch blieb die Mathematik nur Hilfswissenschaft, und es gab keine selbständigen mathematischen Lehrstühle, ja nicht einmal besondere Lehrer für Mathematik. Der erste, der sich auf das Lehren mathematischer Disziplinen spezialisiert hatte, scheint der Magister der Universität Wien, Johannes von Gmunden (etwa 1380 bis 1442) gewesen zu sein. Von 1412 an las er in Wien über den Algorithmus der ganzen Zahlen und der Brüche, d. h. über die Arithmetik, die auf dem Stellenwertprinzip beruhte, ferner über Optik, Sphärik, über kirchliche Kalenderberechnungen und, allerdings erst später, über das Astrolabium.

Die Rolle der Mathematik als Hilfswissenschaft wirkte sich negativ auf die Kenntnisse der Studenten aus, die z. B. in der theoretischen Astronomie oft nicht weiter kamen als bis zu den ersten Sätzen aus dem ersten Buch der „Elemente". Der fünfte Satz dieses Buches, demzufolge in einem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der

Basis gleich sind, erhielt am Ende des 13. Jahrhunderts an der Universität Oxford die Bezeichnung „Flucht der Bettler". Noch zu Beginn des 16. Jahrhunderts mußten die Kandidaten, die sich um die Würde eines Magisters bewarben, an der Universität einen Eid leisten, daß sie die Vorlesungen über die ersten sechs Bücher der „Elemente" gehört hätten, statt eine Prüfung über Geometrie abzulegen. Aber trotz der Tatsache, daß im Lehrbetrieb Autoritätsglauben und Scholastik vorherrschend waren, trotz der untergeordneten Rolle, die der Mathematik zugedacht war, bildeten die Universitäten wichtige Zentren für die Verbreitung und Entwicklung der Mathematik, insbesondere was die abstrakteren Richtungen betrifft. Innerhalb der Theologie und der scholastischen Wissenschaft selbst wurde ein nahezu ununterbrochener Kampf zwischen den fortschrittlichen Denkern und den Vertretern orthodoxer Anschauungen ausgefochten. An der Universität Oxford lernten und wirkten so fortschrittliche Philosophen und Gelehrte wie Robert Grosseteste (etwa 1175—1253) und sein berühmter Schüler Roger Bacon (etwa 1212 bis 1294), die dazu aufriefen, die Naturwissenschaften auf das Experiment und die mathematische Deduktion zu gründen. Und obwohl die Ausbildung von Mathematikern nicht als eine besondere Aufgabe der Universitäten angesehen wurde, sind aus ihnen so hervorragende Mathematiker wie Thomas Bradwardine in England, Nicolas Oresme in Frankreich, Johannes Regiomontanus in Deutschland und Nicolaus Kopernikus in Polen hervorgegangen.

Der Abakus. Von größter Wichtigkeit war die Einführung und Vervollkommnung der Arithmetik auf der Grundlage des dezimalen Stellenwertsystems. Diese große Errungenschaft der Zivilisation war das Ergebnis eines langwierigen Kampfes zwischen den neuen orientalischen Einflüssen und fest eingebürgerten römischen und griechischen Traditionen.

Im Westeuropa des Mittelalters wurden zunächst ausschließlich die römische Zahlenschreibweise, die römischen Brüche und der Abakus als Rechenwerkzeug verwendet. Wir hatten bereits das Buch Gerberts erwähnt, das diesem Rechengerät gewidmet war. Eine ausführliche Beschreibung des Abakus und der mit diesem vorzunehmenden Rechenoperationen („Liber abaci") schrieb im 11. Jahrhundert in Paris Bernelinus, der möglicherweise ein Schüler Gerberts war [21, Bd. I]. Der Abakus bestand aus einem ebenen Brett, das mit Sand bestreut war und in 30 Spalten eingeteilt wurde, von denen drei für die Brüche bestimmt waren, während die übrigen zu je drei Spalten in neun Gruppen zusammengefaßt wurden. Mitunter waren auch weniger Spaltengruppen vorhanden. Oben wurden die Spalten durch Bögen abgeschlossen, die man als die „arcus Pythagorei" bezeichnete: Die Erfindung des Abakus wurde nämlich dem Pythagoras zugeschrieben. In den Spalten, die abwechselnd oben von links nach rechts mit den Buchstaben C (centum = Hundert), D (decem = Zehn) und S oder M (singularis oder griechisch monas = Eins) bezeichnet wurden, legte oder schrieb man die Zeichen für die Einheiten der jeweiligen Zehnerpotenzen. Im Gegensatz zu den antiken Formen des Rechenbrettes wurden die Einheiten nicht mit Hilfe mehrerer Steinchen dargestellt, sondern durch besondere numerierte Rechenmarken (Rechensteine) mit den entsprechenden Ziffernkennzeichen. Sowohl die Zeichen als auch die Rechenmarken bezeichnete man als apices. Man könnte, schrieb Bernelinus, auch die

Buchstaben des griechischen Alphabets verwenden. Nach Aussagen eines Schülers von Gerbert, des Richer von Reims (geb. zwischen 940 und 950, gest. nach 997), hat sein Lehrer numerierte Rechenmarken aus Horn verwendet.

Das Wort „apex" (pl. apices) bedeutet lateinisch u. a. auch soviel wie Schreibweise. Viel schwerer ist der Ursprung der Bezeichnung für die einzelnen „apices" zu erklären, die für 1, 2 usw. gebräuchlich waren. Man nannte sie: igin, andras, ormis, arbas, quimas, caltis (oder calcis), zenis, temenias (oder temeniam) und celentis. Über die Herkunft dieser Wörter bestehen verschiedene, keineswegs unumstrittene Hypothesen,

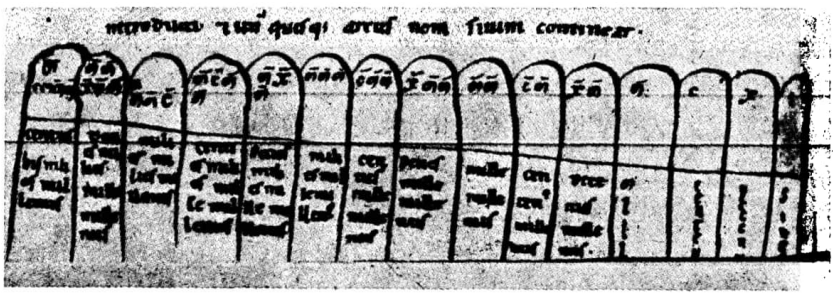


Abb. 94. Abakus mit fünfzehn Spalten (nach einer Handschrift aus dem 12. Jh.). Oben darüber steht die Erklärung: „Und jeder Bogen (gemeint ist jede Spalte) hat seinen Namen (d. h. entspricht einer bestimmten Stelle)". Von rechts nach links folgen aufeinander die Stellen der Einer, Zehner usw. Zum Beispiel steht in der siebenten Spalte von rechts MM, mille millenus, d. h. tausend Tausender. Die Angaben in der elften und dreizehnten Spalte sind falsch.

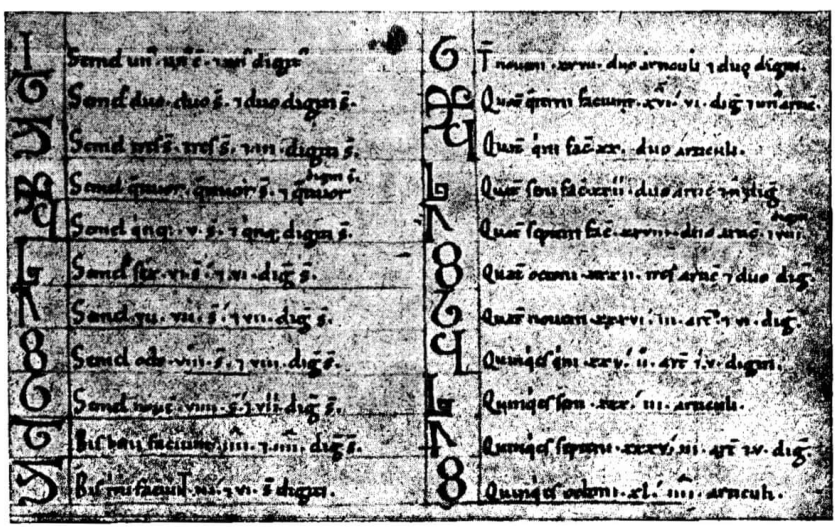


Abb. 95. Der Anfang einer Einmaleinstafel mit Apices und römischen Ziffern (Handschrift aus dem 11. Jh. aus dem Kloster St. Emeran zu Regensburg).

die einzelne Ausdrücke auf arabische oder griechische Wortstämme zurückführen. Offenbar gesellte sich zu diesen zwar nicht sofort, doch recht bald ein zehnter „apex" in Form eines Kreises mit einem Punkt in der Mitte, den man als „sipos" bezeichnete. Das Wort „sipos" leitet man vom Griechischen ψῆφος ab, was soviel wie Steinchen oder Jeton bedeutet. Der „sipos" war jedoch kein Zeichen für die Null, das man beim Rechnen auf dem Abakus auch gar nicht benötigte, sondern eine Rechenmarke von rein technischer Bedeutung, die man zur Unterstützung des Gedächtnisses entsprechend dem Rechengang von Spalte zu Spalte des Abakus verschob (vgl. S. 349).

Das Ersetzen der Steinchen oder anderer gleichartiger Rechenmarken durch die „apices" bedeutete in bezug auf die Übersichtlichkeit des Rechenganges keine Verbesserung, so daß man später wieder zu den ungezeichneten Rechenmarken zurückkehrte. Jedoch hatten die „apices" noch eine andere Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik: Wir sehen in ihnen die letzten Vorfahren der modernen europäischen Ziffern. Selbstverständlich hat sich im Laufe der Jahrhunderte die Form der Ziffern verändert und insbesondere vereinfacht. Dessenungeachtet ist die Ähnlichkeit in vielen Fällen direkt augenfällig, in anderen läßt sie sich leicht feststellen, wenn man den „apex" umdreht; dies gilt z. B. für 2, 4 und 9. Eine derartige Gegenüberstellung unter Vornahme einer Drehung ist um so mehr berechtigt, als man die „apices" in beliebiger Lage auf des Rechenbrett legen konnte. Vom Ursprung der Formen für die einzelnen „apices" soll später die Rede sein.

Bernelinus beschreibt ausführlich die Methoden, nach denen auf dem Abakus gerechnet wurde. Wir wollen die schwierigste Operation mit ganzen Zahlen, das Dividieren, betrachten. Bernelinus unterscheidet zwei Hauptverfahren der Division, und zwar eines ohne Verwendung, das andere mit Verwendung von Differenzen. Unter dem ersten ist eine Methode zu verstehen, die der uns geläufigen Division ähnlich ist, während das zweite die sog. Division nach der Ergänzungsmethode darstellt, bei der die Division durch irgendeine Zahl b durch die einfachere Division durch eine möglichst nahe bei b gelegene „runde" Zahl c ersetzt wird. Damit wird jedoch die Gesamtzahl der Einzeloperationen außerordentlich vergrößert, da ja nach jeder Division eine Multiplikation mit der Ergänzung $c - b$ (oder $b - c$) und eine Addition benötigt werden. Der Dividend wird hierbei noch jedes Mal in einzelne Stellen zerlegt. So kann man (das Beispiel stammt von Bernelinus) z. B. die Zahl 668 unter Verwendung der Differenz $10 - 6 = 4$ auf folgende Weise durch 6 teilen[1]):

$600:10 = \underline{60},\ 60 \cdot 4 = 240,\ 200:10 = \underline{20},\ 20 \cdot 4 = 80,\ 60 + 40 + 80 = 180,$
$100:10 = \underline{10},\ 10 \cdot 4 = 40,\ 80 + 40 = 120,\ 100:10 = \underline{10},\ 10 \cdot 4 = 40,$
$20 + 40 = 60,\ 60:10 = \underline{6},\ 6 \cdot 4 = 24,\ 20:10 = \underline{2},\ 2 \cdot 4 = 8,$
$8 + 4 + 8 = 20,\ 20:10 = \underline{2},\ 2 \cdot 4 = 8;$

[1]) Setzt man für den Divisor $a = 10m + n$, so beruht die Division auf der Gleichung $\frac{a}{6} = \frac{10m}{10} + \frac{4m+n}{6} = m + \frac{4m+n}{6}$. Analog läßt sich die Division durch $16 = 20 - 4$, durch $1\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4}$ usw. vornehmen.

schließlich liefert 8:6 den Quotienten 1 mit dem Rest 2. Durch Addition der unterstrichenen Ergebnisse erhalten wir den gesuchten Quotienten zu $60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = 111$ und als Rest 2.

Die beschriebene Operation spricht für sich selbst. Nicht ohne Grund wurde in der späteren Literatur über den Abakus, z. B. bei Adelhard of Bath oder bei Radulph von Laon, diese Komplementdivision als die eiserne (divisio ferrea) und die komplementfreie Division als die goldene (divisio aurea) bezeichnet.

Schwierig war das Rechnen mit römischen Brüchen, deren Division und Multiplikation im abschließenden Teil des Werkes von Bernelinus behandelt wird.

Im 11. bis 12. Jahrhundert wurden über den Abakus viele Werke geschrieben. Wir wollen eine kleine Abhandlung erwähnen, die vom Abt des Benediktinerklosters in Reichenau, Hermann dem Krüppel (Hermannus Contractus, 1013—1054) verfaßt worden war; seinen Beinamen verdankte der Abt der Tatsache, daß er gelähmt war. Aus dieser Abhandlung geht hervor, daß man den Abakus auch ohne „apices" benutzte: Hermann spricht nur von römischen Ziffern.

Die Einrichtung und Anwendung des Abakus ist eingehend bei Raoul oder Radulph (gest. 1131) beschrieben, der Lehrer an der berühmten Klosterschule in Laon war [190]. Radulph schreibt, daß der Abakus in der Musik, Astronomie, Geodäsie unentbehrlich sei, ferner beim Studium der antiken Schriftsteller. Fast überall wäre der Abakus im Westen in Vergessenheit geraten, weshalb die Verdienste des Gerbert und des Hermann besonders zu würdigen seien. Die Bezeichnungen für die zehn „apices" hält er für chaldäischen Ursprungs. Besonders wird hervorgehoben, daß der „sipos" keine Zahl ausdrücke, doch würde ihm ein vorsichtiger Abacist (providus abacista) benutzen, um die Stellen zu kennzeichnen, mit denen die jeweils fällige Operation vorzunehmen sei. Dazu benutzte man zwei solche „sipose", z. B. für den Multiplikand und den Multiplikator.

Eine weite Verbreitung hat der Abakus mit den „apices" nicht gefunden. Er blieb hauptsächlich auf Klosterschulen und Klosterzellen beschränkt. Mehr noch, die Arithmetik entwickelte sich im Kampf gegen die Anwendung eines derartigen Abakus. Trotzdem hat die Tätigkeit der Abacisten im gewissen Maße die Kenntnis der indischen Zahlenschreibweise, insbesondere der neuen Ziffern, gefördert.

Die Ausbreitung der Arithmetik im Stellenwertsystem. Spätestens im 10. Jahrhundert begannen die indisch-arabischen Ziffern über Spanien Eingang in Europa zu finden, und zwar in Form der „apices". Wie wir wissen, existierten zu dieser Zeit zwei Hauptformen der arabischen Ziffern, die ost- und die westarabischen. Die westarabischen Ziffern erhielten die Bezeichnung „gubar"; im Arabischen bedeutet dieses Wort Sand oder Staub, und der Terminus zeugt davon, daß man diese Ziffern auf einem mit Sand bestreuten Brett schrieb. Es genügt, einen Blick auf die Ziffern beider Formen zu werfen, um wesentliche Unterschiede festzustellen; eine zuverlässige Deutung hierfür gibt es allerdings nicht. Manche Forscher, die von der indischen Herkunft beider Formen überzeugt waren, versuchten, die zeitliche und räumliche Bewegung der indischen Ziffern bis nach Westeuropa hinein zu verfolgen [z. B. 191]. Das vorliegende Material reicht allerdings dazu nicht aus. Andere Historiker zweifeln ganz

allgemein die indische Herkunft der westarabischen und damit unserer Ziffern an [192; 70*b*, S. 442].

Wahrscheinlicher ist die Annahme, daß die Gubarziffern vom Osten her in die mauretanischen Länder importiert worden sind. Es gibt Handschriften, die vom Auftreten der Gubarziffern bereits im 9. und 10. Jahrhundert im Iran und in Ägypten zeugen. Kennzeichnend sind auch diejenigen Handschriften, in denen beide Formen der arabischen Ziffern nebeneinander auftreten. In einem ägyptischen Papyrus aus dem Jahre 260 nach der Hidšra (873 und 874 u. Z.) ist die 2 eine Gubarziffer, die 6 eine ostarabische Ziffer (Vgl. S. 195). In einer aus Siraz im Iran stammenden Handschrift treten etwa 100 Jahre später für 6, 7 und 8 ostarabische, für die übrigen Gubarziffern auf [33 Bd. I, S. 41]. Die Ziffer 9 ist in beiden Spielarten ähnlich. Darüber hinaus ist festzustellen, daß die Ähnlichkeit zwischen den Gubarziffern und den indischen nicht geringer ist als zwischen den ostarabischen und den indischen.

Höchstwahrscheinlich [29, Bd. II] sind die Gubarziffern in das mauretanische Spanien durch den Handel mit dem Orient gelangt, wobei sie beim kaufmännischen Rechnen auf dem Rechenbrett eingetragen wurden. Anfänglich benutzte man sie ohne das Zeichen für die Null; in schriftlichen Aufzeichnungen waren diese Ziffern mitunter überpunktet, und zwar von den Zehnern an mit 1, 2, 3 usw. Punkten; z. B. $\dot{4}\,5\,6$ (= 456), $\dot{4}\,\dot{5}$ (= 450), $\dot{4}\,6$ (= 406). Später setzte sich von Osten her das Zeichen für die Null in Form eines kleinen Kreises durch. Die Gubarziffern erschienen dann auch auf den Rechenmarken des europäischen Abakus in Form der „apices".

Die älteste erhalten gebliebene europäische Handschrift mit den neuen Ziffern aus dem Kloster Albeldo in der Nähe der Stadt Logroño in Nordspanien stammt aus dem Jahre 976 und enthält das Zeichen für die Null nicht. Später treten die neuen Ziffern in verschiedenen Handschriften des 11. und der nachfolgenden Jahrhunderte auf, wobei im Schriftbild in den einzelnen Handschriften wesentliche Unterschiede

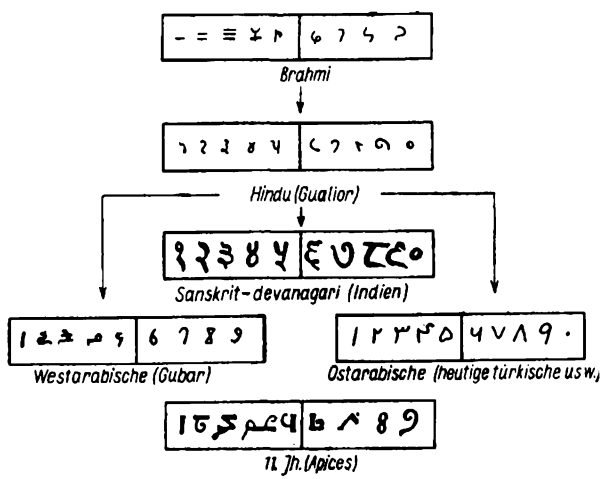


Abb. 96. Die Entstehung unserer Ziffern
(nach K. Menninger, Zahlwort und Ziffer).

zu verzeichnen sind. Eine gewisse Vorstellung über die Änderung der Ziffernbilder vermittelt die Abb. 97.

Das Wort Ziffer selbst ist arabischen Ursprungs und ist aus as-ṣifr (vgl. S. 108) hervorgegangen, der Bezeichnung für die Null in der arabischen Literatur. In eben diesem Sinne wird das Wort „ciffre" im Jahre 1143 in der Handschrift „Buch der Einführung des Algorismus in die astronomische Kunst, zusammengestellt vom Magister A" verwendet. Etwa um die gleiche Zeit tritt die Form „cifra" auf. Leonardo Fibonacci von Pisa bezeichnete zu Beginn des 13. Jahrhunderts die Null mit „cephirum" (wovon sich das italienische zero herleitet). Maximos Planudes schrieb dafür am Ende desselben Jahrhunderts τζίφρα — tsiphra (vgl. S. 330). Lange Zeit, bis in das 17. Jahrhundert hinein, wurde dieses Wort vornehmlich in der Bedeutung der Null gebraucht, und noch in der „Arithmetik" des L. F. Magnitzki (1703) heißt die Null „цифра или ничто". In der englischen Sprache hat das Wort „cipher" drei Bedeutungen: Ziffer, Chiffre und Null. Doch bereits im 14. und 15. Jahrhundert wird das Wort Ziffer ziemlich häufig zur Bezeichnung sämtlicher Zeichen 0, 1, ..., 9 verwendet, wobei manche Pedanten kategorisch gegen eine derartige „vulgäre" Verwendung des Wortes Einspruch erhoben. Als in Frankreich das Wort „chiffre" seine neue Bedeutung erhielt, wurde hier für die Null nach italienischem Vorbild das Wort „zéro" eingeführt.

In den lateinischen Handschriften des 12. und 13. Jahrhunderts wird die Null auch als „circulus" (kleiner Kreis), „nihil" (nichts) oder „figura nihili" (Darstellung des Nichts) bezeichnet. Möglicherweise tritt bereits zu dieser Zeit der Terminus „nullus" auf, svw. keiner, ein Wort, das seit dem 15. Jahrhundert im mündlichen Sprachgebrauch der Mathematiker Eingang gefunden hat und am Ende dieses Jahrhunderts in der Literatur Italiens, Deutschlands und Frankreichs auftrat. In der weiblichen Form „nulla" trifft man diesen Terminus in einer anonymen italienischen Arithmetik an, die im Jahre 1478 in Treviso gedruckt wurde, ferner in einem gedruckten Lehrbuch der „Arithmetik" des Piero Borghi aus dem Jahre 1484 und in einer deutschen arithmetischen Handschrift aus dem Jahre 1488. Der französische Gelehrte Nicolas Chuquet schrieb im Jahre 1484 über die Null, daß sie an und für sich nichts bedeute, doch würde die von ihr besetzte Stelle anderen Zeichen einen Wert beimessen, weshalb man sie als

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Handschrift a.d. Jahre 976										
Handschrift vom Anfang des 12. Jh.										
Handschrift eines Werkes von Sacrobosco a.d. Jahre 1442										
Ziffern Albrecht Dürers a.d. Jahre 1525										
Aus einem im Jahre 1489 gedruckten Werk von Widmann										

Abb. 97. Die Entwicklung der modernen Ziffern

„Ziffer oder Null oder ein Zeichen mit Nullwert" (chiffre ou nulle ou figure de nulle valeur) [241, S. 41, französisch] bezeichnet. Diese Auffassung von der Null hat Shakespeare scharfsinnig in seinem „König Lear" verwendet; der Narr sagt zu seinem König, der seine Ländereien verteilt hat: „Nun bist du wie eine Null ohne Ziffer (a cipher without figure). Somit bin ich besser als du. Ich bin ein Narr und du bist nichts."

Die Bücher über den Algorismus. Eine entscheidende Bedeutung für die Emanzipation des dezimalen Stellenwertsystems und der neuen Ziffern in Europa hatte vom 12. Jahrhundert an das Kennenlernen der lateinischen Übersetzungen der arabischen Bücher über Arithmetik, in erster Linie der Arithmetik des al-Ḫuwarizmī. Neben dieser Übersetzung spielte die lateinische Handschrift des Johannes von Sevilla, „Buch des Algorismus über praktische Arithmetik", eine große Rolle, ferner das „Buch der Einführung des Algorismus in die astronomische Kunst, zusammengestellt vom Magister A" [194, 195] und die lateinische Übersetzung des „Buches über Messungen" des Savasorda, in denen die arabische Zahlenschreibweise Anwendung fand. Das Wissen um die neue Zahlenschreibweise breitete sich rasch über große Entfernungen aus: Bereits im 12. Jahrhundert lernte man sie in Deutschland und in Österreich kennen. Etwas später, etwa um 1200, wurde ein ähnliches „Buch des Algorismus" (Liber algorismi) verfaßt, das lange Zeit im Kloster von Salem am Bodensee aufbewahrt wurde [194, 195, 196].

Neben Spanien war Italien das wichtigste Zentrum für die Verbreitung der neuen Arithmetik. Im Jahre 1202 schrieb Leonardo Fibonacci von Pisa sein hervorragendes „Buch des Abakus" (Liber abaci) [212, Bd. I]. Es handelt sich hier um ein sehr ausführliches Werk über Arithmetk und Algebra auf der Basis des dezimalen Stellenwertsystems.

Das Erscheinen des „Buches des Abakus" war ein äußerst wichtiges Ereignis. Die ersten europäischen Werke über die Stellenwertarithmetik wurden von Fachleuten verfaßt oder übersetzt, die entweder mit den Klöstern oder mit den Hochschulen in Verbindung standen. Leonardo Fibonacci war sowohl seiner Herkunft als auch seiner Tätigkeit nach eng mit kaufmännischen Kreisen verbunden; dieser Umstand gab seinem Buch auch das inhaltliche Gepräge, in dem die kaufmännische Arithmetik einen breiten Raum einnahm. Das Erscheinen des „Buches des Abakus" kündete vom raschen Erfolg der indisch-arabischen Zahlenschreibweise und der dazugehörigen Methoden auch weit außerhalb des engen Kreises der Gelehrsamkeit an Klöstern und Universitäten. Der Titel des Buches darf uns nicht irreführen. Es handelt sich darin gar nicht um das Rechnen auf dem Rechenbrett. Der Titel besagt nur, daß der Terminus Abakus für Leonardo Fibonacci zum Synonym für Arithmetik wude. In dieser Bedeutung wurde das Wort auch später noch von den Italienern gebraucht. Auf Leonardo Fibonacci von Pisa und seine Werke werden wir noch zurückkommen.

Der Name des Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī wurde in seinen latinisierten Formen, am häufigsten als Algorithmus oder Algorizmus, aber auch als Alchoarismus, Alkauresmus, Alchocharithmus usw.[1]) zur Bezeichnung für die neue Arith-

[1]) Den Namen al-Ḫuwarizmīs als Prototyp für diese lateinischen Termini hat der Orientalist J. Reinaud im Jahre 1849 nachgewiesen.

metik[1]) verwendet. Der Terminus Algorismus ist bei Leonardo Fibonacci von Pisa zu finden. Etwa um die gleiche Zeit begann man von den „Algoristen"[2]) zu sprechen, d. h. von den Anhängern der algoristischen Arithmetik, im Gegensatz zu den „Abacisten", d. h. den Anhängern des Rechnens auf dem Abakus, wie z. B. Gerbert. Die Anzahl der Werke über den Algorismus wuchs zusehends; sie tauchten in verschiedenen Ländern auf, zunächst in lateinischer Sprache, später aber auch in den lebenden Volkssprachen. Die Literatur ist hier sehr umfangreich, weshalb wir nur einige wenige Werke nennen wollen.

Großer Beliebtheit erfreute sich der „Gewöhnliche Algorismus" (Algorismus vulgaris) oder die „Abhandlung über die Kunst des Rechnens" (Tractatus de arte numerandi) des Engländers John of Halifax oder Hollywood (gest. 1256), der in Oxford studiert hatte und etwa 1230 nach Paris gezogen war, wo er an der Universität Astronomie und Mathematik lehrte [197]. Der lateinische Beiname dieses Gelehrten, unter dem er auch am meisten bekannt geworden ist, lautet Johannes von Sacrobosco. In seinem Buch werden ohne Herleitung Regeln und Beispiele für das Operieren mit ganzen Zahlen angegeben. Er behandelt die Zahlenschreibweise, die Addition, die Subtraktion, die Mediatio, die Duplatio, die Multiplikation, die Division, Reihen — wobei von der Summation der Reihe der natürlichen Zahlen und der Reihe der ungeraden Zahlen die Rede ist — sowie das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Manche Regeln gibt Sacrobosco, damit sie die Leser besser behalten können, in Versen an, z. B.:

Subtrahe aut addis a dextris vel mediabis;
A leva dupla, divide multiplicaque;
Extrahe radicem semper sub parte sinistra [3])

Von dem Erfolg dieses Werkes, aber auch von dem äußerst langsamen Fortschritt der Rechenkunst insgesamt zeugt die Tatsache, daß dieses Werk im Jahre 1488 in Straßburg im Druck herausgegeben wurde, d. h. fast zweieinhalb Jahrhunderte nach seiner Entstehung; auch später, bis in das Jahr 1582 hinein, wurde das Buch neu aufgelegt. Nach dem Buch des Sacrobosco hielt im 15. Jahrhundert der bereits erwähnte Johannes von Gmunden in Wien seine Vorlesungen. Es sei erwähnt, daß ein wissenschaftlich hervorragender Kommentar zum „Gewöhnlichen Algorismus" von Sacrobosco in Paris etwa 1290 von dem Dänen Petrus Ingvarssön (oder Petrus de Dacia) verfaßt wurde [197]. Er hat offenbar als erster empfohlen, beim Ausziehen einer Kubikwurzel aus einer vielstelligen Zahl die jeweils nächste Ziffer durch Division durch das Dreifache des bereits bestimmten Teils der Kubikwurzel zu ermitteln.

---

[1]) Später begann man mit dem Terminus Algorithmus jeden beliebigen regulären Rechenprozeß zu bezeichnen, der in endlich vielen Schritten die Lösung einer bestimmten Klasse von Aufgaben lieferte. Diese Anwendung des Wortes geht auf die mit dem Jahre 1684 beginnenden Arbeiten von Leibniz über Differentialrechnung und in einem engeren (arithmetischen) Sinne auf Christoph Rudolff (1525) zurück.

[2]) Von den Algoristen ist z. B. im „Buch des Algorismus" aus dem Kloster von Salem die Rede.

[3]) Du subtrahierst oder addierst bzw. halbierst von rechts; von links hingegen verdopple, teile und multipliziere; das Ausziehen der Wurzel beginne stets von links.

Fast gleichzeitig mit dem „Gewöhnlichen Algorismus" des Sacrobosco wurde die „Erläuterung des Algorismus" (Demonstratio de algorismo) des Jordanus Nemorarius [198] geschrieben, dem das Werk „Der erläuterte Algorithmus (oder Algorismus)" (Algorithmus demonstratus) sehr nahe steht; dieses ist in vielen Abschriften aus dem 13. und den späteren Jahrhunderten erhalten geblieben [199]. Auch das zuletzt genannte Werk wird häufig dem Nemorarius zugeschrieben, obwohl in der einen Handschrift der Verfasser als Magister Gernardus bezeichnet wird; die übrigen Handschriften sind anonym. Im „Erläuterten Algorithmus" sind die Operationen mit ganzen Zahlen einschließlich der Verdoppelung und Halbierung beschrieben, wobei bei der Multiplikation und Division die Probe durch die inverse Operation vorgenommen wird (die Neunerprobe wird überhaupt nicht erwähnt), ferner wird das Rechnen mit Brüchen dargestellt. Neben komplizierteren Dingen, wie Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, findet man hier die Ergänzungsmultiplikation für den Fall, daß einer der Faktoren, etwa b, zwischen 5 und 10 liegt:

$$ab = 10a - (10 - b)a.^{1})$$

Die systematische Reihenfolge der Darlegung wird mitunter durchbrochen. So ist zwischen das Ausziehen der Quadratwurzel und das Ausziehen der Kubikwurzel aus ganzen Zahlen der Satz über die Kommutativität der Multiplikation eingeschoben. Der „Erläuterte Algorithmus" wurde im Jahre 1534 in Nürnberg herausgegeben; im Jahre 1570 erschien er in Paris in französischer Sprache; er enthält, nach der ersten Ausgabe, insgesamt 57 Seiten.

In Versen, d. h. in 284 Hexameterzeilen, wurde der Algorismus der ganzen Zahlen von dem französischen Mathematiker Alexander von Villedieu aus der Normandie (gest. etwa 1240) beschrieben. Sein „Lied vom Algorismus" (Carmen de algorismo) wurde ins Französische, Englische und Isländische übersetzt [30, Vol. II]. Die isländische Übersetzung stammt von Gaukr Erlendson (etwa 1264 bis 1334). Es seien noch eine kleinere anonyme französische Algorithmushandschrift aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts, der älteste englische Algorismus unter dem Titel „Die Kunst des Rechnens" (Crafte of Nombrynge) und das erste bekannte Buch über den Algorismus in italienischer Sprache (Tractatus algorismi) erwähnt, das von einem gewissen Giacobo aus Florenz im Jahre 1307 verfaßt wurde (das zuletzt genannte Buch enthält auch einiges aus der Algebra, z. B. über die Auflösung von linearen und quadratischen Gleichungen) [200].

Die Werke des Sacrobosco und des Alexander von Villedieu haben offenbar besonders große Verbreitung gefunden und an den Universitäten den Unterricht in der algorithmischen Arithmetik bedeutend gefördert [200a].

Die neue Zahlenschreibweise setzte sich nur unter großen Schwierigkeiten durch. Sie war anfänglich Domäne einiger weniger Spezialisten und breitete sich nur sehr

[1]) Diese Regel findet sich sowohl bei Sacrobosco als auch in einer früheren Handschrift aus der Mitte des 12. Jahrhunderts [195]. In der Handschrift von Salem, die etwa aus dem Jahre 1200 stammt [196], steht eine Regel zur Multiplikation zweier Zahlen zwischen 5 und 10:

$$ab = 10[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b).$$

Vgl. das auf Seite 256 über Abū-l-Wafā Gesagte.

langsam im Volke aus[1]). Ihre Vorzüge erweckten das Interesse der Personen, die mehr als andere genötigt waren, umfangreiche Berechnungen vorzunehmen. also der Händler und Kassierer. Das Fehlen einer einheitlichen Ziffernschreibweise, wodurch Fälschungen und Betrug in den Eintragungen erleichtert wurden, war lange Zeit der vollen Anerkennung der neuen Zahlenschreibweise hinderlich. Bezeichnend ist die Tatsache, daß im Jahre 1299 in Florenz den Kaufleuten der Gebrauch der neuen Ziffern in der Buchführung verboten wurde und daß man empfahl, die Zahlen in Worten zu schreiben. Wie stark die Ziffernform variierte, erkennt man am besten anhand der Abb. 98, in der die verschiedenen Schreibweisen für die Ziffer 2 zusammen-

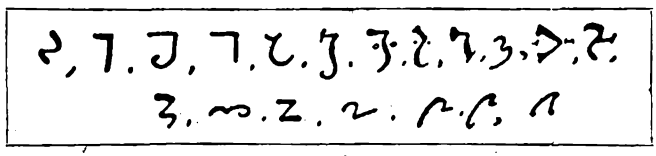


Abb. 98. Verschiedene Spielarten der Ziffer 2 in mittelalterlichen Handschriften

gestellt sind. Trotzdem waren die Vorzüge der neuen Schreibweise so groß, daß im 16. Jahrhundert die Algoristen entschieden über die Abacisten gesiegt hatten, und zwar nicht nur unter den Gelehrten, sondern auch in den Schulen und im täglichen Leben. Dies wurde durch die immer stärkere Verwendung und auch Verbilligung des Papiers begünstigt, dessen Herstellung in Europa im 12. Jahrhundert aufgenommen wurde. Dadurch konnte das schriftliche Rechnen immer besser mit dem Abakus in Konkurrenz treten. Ein interessantes Beispiel für den Triumph der Ideen der neuen Zahlenschreibweise liefern die Eintragungen von Zahlen mit Hilfe von römischen Ziffern und des Zeichens für die Null auf der Basis des Stellenwertprinzips. So verfuhr z. B. im 12. Jahrhundert Nicolaus Ocreatus, der wahrscheinlich ein Schüler des Adelhard of Bath war.

Die Verbreitung der neuen Arithmetik wurde durch die Entstehung rein weltlicher Schulen begünstigt. An diesen wurden junge Leute ausgebildet, die später im Handel oder im Finanzwesen tätig sein sollten. Offenbar tauchten die ersten derartigen Schulen in Italien auf. Im Jahre 1338 bestanden in Florenz sechs Abakusschulen (d. h. Rechenschulen, da das Wort Abakus allmählich die Bedeutung der Arithmetik insgesamt erlangte), deren jede bis zu 1200 Schülern zählte. Nach Absolvierung der Schule mußten die Schüler noch eine praktische Lehrzeit bei einem Kaufmann durchlaufen. Im nächsten Jahrhundert entstanden Rechenschulen in den reichen Handels- und Handwerkerstädten Süddeutschlands und später auch in den anderen Ländern. Die Organisation der weltlichen Bildung wurde von den Verwaltungen der daran interessierten Städte übernommen. Es tauchten städtische Lehrer auf, die sich an gewissen Tagen und Stunden zur Verfügung stellten, um die lernbegierigen Jugendlichen in

[1]) In manchen Winkeln Europas wurden die lateinischen Ziffern sehr lange verwendet. Man vgl. z. B. die Erzählung darüber, wie eine schweizerische Handelsfrau am Anfang des 19. Jh. rechnete, bei Gottfried Keller, Der grüne Heinrich, I. Teil, 6. Kapitel.

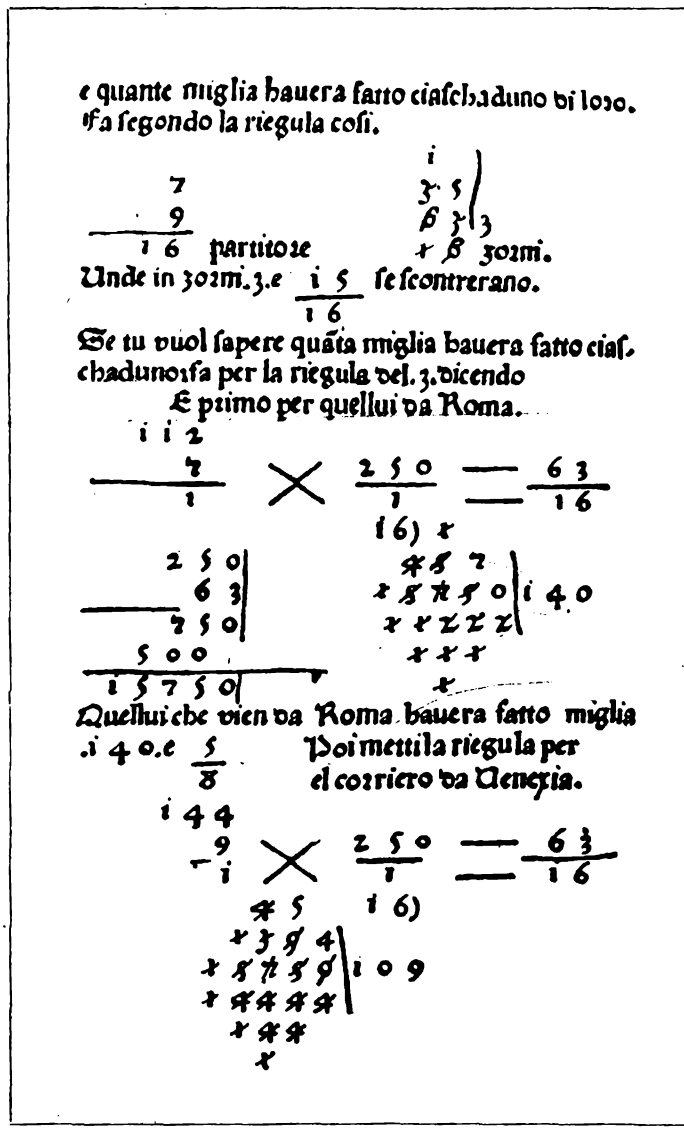


Abb. 99. Berechnungen aus einem italienischen im Jahre 1478 gedruckten Rechenbuch. Es handelt sich dabei um die Lösung einer Aufgabe über Zeit und Ort für das Zusammentreffen zweier Boten, von denen der eine die Entfernung zwischen Rom und Venedig (250 Meilen) in sieben Tagen und der andere in umgekehrter Richtung in neun Tagen zurücklegt.

die Grundlagen der Wissenschaften, darunter auch in die Mathematik und Buchführung, einzuweihen. Um diese Zeit entwickelte sich in der kaufmännischen Sphäre ein immer umfangreicher werdendes System des kaufmännischen Rechnens (Wechsel, Zinseszinsen). Den Hauptbeitrag leisteten hierbei unbekannt gebliebene Italiener, die die sogenannte doppelte Buchführung schufen. Ihrer Anwendung begegnen wir erstmalig um die Mitte des 14. Jahrhunderts in Genua.

Schließlich war für die endgültige Durchsetzung der neuen Arithmetik und auch für die Verbreitung der mathematischen Kenntnisse allgemein die Buchdruckerkunst von großer Bedeutung, die neben dem Kompaß, dem Schießpulver und der Räderuhr die größte Errungenschaft der Technik jener Zeit war. Kurz nachdem der Druck mit Hilfe von Holzschnittafeln durch den in Europa etwa 1430 von Johann Gutenberg (gest. 1468) neu erfundenen Druck mit Hilfe beweglichen Schriftsatzes ersetzt wurde, tauchten auch die ersten gedruckten mathematischen Bücher auf, die wesentlich billiger und zahlreicher waren als die bis dahin vorhandenen Handschriften. Das erste gedruckte mathematische Lehrbuch, und zwar ein Rechenbuch, wurde etwa 1475 in Trient herausgegeben, das zu der Zeit zu Deutschland gehörte. In diesem Werk werden die Operationen beim Rechnen auf den Linien (Vgl. S. 368) beschrieben und noch römische Ziffern verwendet. In vier weiteren deutschen Rechenbüchern aus dem Ende des 15. Jahrhunderts wurden jedoch die neuen Ziffern und die Methoden der Stellenwertarithmetik angewandt. Dies gilt insbesondere für eine kürzlich entdeckte Arithmetik in deutscher Sprache, die zwischen 1460 und 1482 von Holzschnitttafeln gedruckt wurde und möglicherweise das allerälteste in Europa gedruckte Mathematikbuch darstellt.[1]) Das gleiche gilt auch für das erste 1478 in italienischer Sprache in Treviso (Norditalien) gedruckte Rechenbuch [201; vgl. Abb. 99]. In Kalendern und anderen Büchern tauchten die neuen Ziffern schon früher auf, wenn auch nicht regelmäßig.

Auf Münzen tauchten die neuen Ziffern erstmalig im Jahre 1424 in der Schweiz auf, 1448 dann in Deutschland, 1478 in Schweden, 1485 in Frankreich, 1539 in Schottland und 1551 in England.[2]) Auf Grabsteinen verwendete man diese Ziffern noch eher: in Pforzheim (Baden) 1371 und in Ulm 1388.

Die Entwicklung der Zahlenschreibweise in Rußland. Während in den westeuropäischen Ländern die römische Zahlenschreibweise übernommen worden war, entwickelte sich im alten Rußland, das ähnlich den anderen slawischen Ländern einen engen kulturellen Kontakt zu Byzanz hatte, eine alphabetische Zahlenschreibweise, die der griechischen ähnlich war. In der altrussischen Numeration wurden die Zahlen von 1 bis 9, ferner auch die Zehner und Hunderter durch die aufeinanderfolgenden Buchstaben des slawischen Alphabets, und zwar der sogenannten Kyrilliza, die im 9. Jahrhundert eingeführt wurde, dargestellt (vgl. Abb. 100). Von dieser allgemeinen Regel gab es manche Abweichungen: Die 2 wurde nicht durch den zweiten Buchstaben

[1]) Die Kenntnis dieser Tatsache verdanken wir der freundlichen Mitteilung von Professor Kurt Vogel.

[2]) In Sizilien wurde unter dem Normannenkönig Roger II. eine Münze geprägt, die auf der einen Seite ein Christusbild und auf der anderen Seite eine arabische Inschrift trug. In westarabischen Ziffern ist dort das Jahr 533 nach der Hidŝra, d. h. das Jahr 1138 u. Z., angegeben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
а	в	г	д	є	ѕ	з	и	ѳ

10	20	30	40	50	60	70	80	90
і	к	л	м	н	ѯ	о	п	ѵ, ч

100	200	300	400	500	600	700	800	900
р	с	т	у	ф	х	ѱ	ѡ	ц

1000	10000
а	ⓐ

Abb. 100. Slawische (kyrillische) Ziffern

„buka", sondern durch den dritten Buchstaben „wedi" bezeichnet, da der Buchstabe β (das antike Beta bzw. das byzantinische Vita) im Altrussischen durch den Laut „w" wiedergegeben wurde. Der Buchstabe „fita", der am Ende des slawischen Alphabets stand, bezeichnete ebenso wie das griechische ϑ (das antike Theta, das byzantinische Phita) die Zahl 9, während die 90 durch den Buchstaben „tscherw" bezeichnet wurde (die Griechen benutzten hierfür den Buchstaben „Koppa", der im lebenden griechischen Alphabet fehlte). Manche Buchstaben wie „д" und „ж" wurden nicht benutzt. Zur Kennzeichnung der Tausender setzte man links unten an die Buchstaben des Alphabets das Zeichen ⸸. Im laufenden Text wurden die Zahlen durch das Zeichen, ⌐ „titlo" genannt, gekennzeichnet, das über die Ziffern gesetzt wurde.

Das erste bekannte in Rußland verfaßte Buch mathematischen Inhalts wurde im Jahre 1136 durch den Mönch Kirik von Nowgorod (geb. 1110) geschrieben.[1]) Es behandelt Fragen der Zeitrechnung und der Ermittlung des Datums für das Osterfest und heißt „Eine Lehre, damit der Mensch wisse die Zahlen aller Jahre" (Учение имже ведати человеку числа всех лет). Kirik benutzte die alphabetische slawische Zahlenschreibweise [202]. Die gleichen Ziffern finden wir in den Abschriften des juristischen Werkes „Russkaja Prawda" (Русская Правда), die aus dem 14. bis 15. Jahrhundert stammen. Das Fehlen von Materialien gestattet es nicht, das allmähliche Eindringen des Stellenwertprinzips in das mittelalterliche Rußland genau zu verfolgen. Aus dem 15. und 16. Jahrhundert ist uns nicht eine einzige Handschrift mathematischen Inhalts überliefert. Doch bereits in den zahlreichen russischen arithmetischen Handschriften aus dem 17. Jahrhundert wird die neue, auf dem Positionsprinzip beruhende Zahlenschreibweise verwendet, während die alte alphabetische Numeration lediglich einer ersten Einführung in den Gebrauch der neuen Ziffern diente: Die slawische Zahlenschreibweise wurde zusammen mit dem Lesen und Schreiben noch vor dem Rechnen gelehrt [203].

In den russischen gedruckten Büchern treten die neuen Ziffern bei der Numerierung der Seiten im „Psalter" (Псалтырь) auf, der im Jahre 1638 in dem Städtchen Vievis bei Vilnius herausgegeben wurde. In dem Buch „Die Lehre und die Weisheit der Kriegsausbildung des Fußvolkes" (Учение и хитрость ратного строения пеших людей), das 1647 in Moskau erschienen war, sind die Ziffern in vielen Zeichnungen und die zugehörigen Verweise im Text modern. Aber auch später wurden in den Büchern sowohl die „russischen Zahlen" (числа русские) als auch die „ziffrigen Zahlen" (числа цифирные) benutzt. Von der großen Popularität der alphabetischen Zahlenschreibweise zeugt die Tatsache, daß sie bei der Herausgabe einer Multiplikationstafel bis 100 × 100 unter dem Titel „Bequemes Rechnen, mit dessen Hilfe jeder kau-

[1]) Wir kennen das Werk nach Abschriften aus dem 17. bis 18. Jahrhundert.

fende oder verkaufende Mann sehr bequem die Anzahl aller Dinge aufsuchen kann" (Считание удобное, которым всякий человек, купующий или продающий, зело удобно изыскати может число всякия вещи) zugrunde gelegt wurde (M. 7190, d. h. 1682). Trotzdem war der alphabetischen Zahlenschreibweise nur noch eine kurze Lebensdauer beschieden. Der vollständige Übergang zum neuen System wurde unter Peter dem Großen vollzogen. Es wurde in dem „Kurzen und nützlichen Leitfaden der Arithmetik" (Краткое и полезное руковедении во аритметыку) von I. F. Kopiewski (oder Kopiewitsch) verwendet, der im Jahre 1699 in Amsterdam gedruckt wurde [204], sodann in

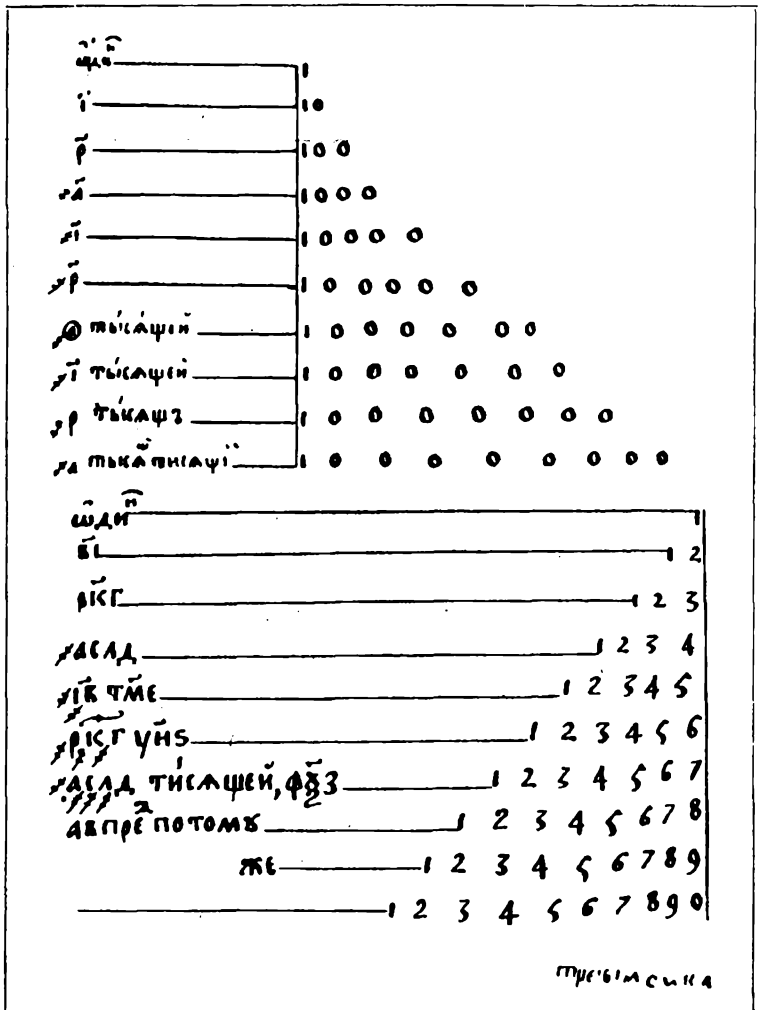


Abb. 101. Gegenüberstellung der modernen und der slawischen Ziffern in einer russischen arithmetischen Handschrift aus dem 17. Jh.

dem großen enzyklopädischen Leitfaden der Mathematik von L. F. Magnizki (1669 bis 1739), der im Jahre 1703 unter dem Titel „Die Arithmetik oder die Lehre vom Rechnen" (Арифметика сиречь наука числителная) in Moskau erschienen war, obwohl die Jahreszahl auf dem Titelblatt dieses Werkes und die Seitenzahlen noch in der slawischen Zahlenschreibweise angegeben sind [205]. Im Jahre 1714 wurde die oben erwähnte Multiplikationstafel unter Verwendung der neuen Zahlenschreibweise mit dem ein wenig veränderten Titel „Buch des bequemen Rechnens. Zur Benutzung für jeden, der ohne Mühe den Preis oder das Maß irgendwelcher Dinge erfahren will" (Книга считания удобного. Ко употреблению всякому хотящему без труда познати цену, или меру какия вещи) in Petersburg neu herausgegeben.

Im Jahre 1654 tauchten die ersten russischen Münzen mit den neuen Ziffern auf. Es handelt sich dabei um Goldmünzen im Werte von $\frac{1}{4}$ Tscherwonez, die weniger für den Geldverkehr, als vielmehr für Auszeichnungs- und Geschenkzwecke bestimmt waren. Unmittelbar danach wurden die in Rußland im Umlauf befindlichen westeuropäischen Taler, die dort als Jefimki bezeichnet wurden, mit dem Datum 1655 überprägt. Unter Peter I. wurden die slawischen Zahlzeichen auf den Münzen endgültig durch die modernen Ziffern verdrängt. Die slawischen Zahlzeichen erschienen letztmalig im Jahre 1718 auf Kupfermünzen.[1])

„Was ist die Numeratio?", fragt Magnizki am Anfang seiner „Arithmetik"; unmittelbar im Anschluß daran gibt er auch die Antwort: „Die Numeratio ist die Zählweise, bei der man vollständig alle Zahlen durch die Rede nennt, die in zehn Benennungen bzw. Darstellungen erfaßt und dargestellt sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0" [205, Blatt 20, russisch]. Mit der Vervollkommnung der schriftlichen Zahlendarstellung wurde auch deren mündliche Bezeichnungsweise vervollkommnet.

Wir haben gesehen (vgl. S. 189), wie umständlich und ungelenk bzw. schlecht erfaßbar die Bezeichnung großer Zahlen bei al-Ḫuwarizmī war, dem für Zahlen über Tausend keine Zahlwörter zur Verfügung standen. Aus tausend Tausendern oder hunderttausend Tausendern usw. bildeten auch die europäischen Mathematiker bis ins 16. Jahrhundert hinein die Bezeichnungen für die großen Zahlen, wobei der Anschaulichkeit halber die entsprechenden Stellen durch Punkte gekennzeichnet wurden: die Tausender durch einen, die Millionen durch zwei usw. Aber bereits im 15. Jahrhundert tauchte in italienischen Lehrbüchern der Arithmetik, darunter auch in der „Arithmetik" von Treviso aus dem Jahre 1478, das Wort Million auf, das auch früher schon benutzt wurde, z. B. von dem berühmten Weltreisenden Marco Polo (1254—1323); möglicherweise war es bereits in der Mitte des 13. Jahrhunderts in Gebrauch.[2]) Der französische Mathematiker Nicolas Chuquet ging in einem handschriftlichen Werk aus dem Jahre 1484 noch weiter und führte zur Bezeichnung des Quadrats und der folgenden Potenzen der Million, d. h. für 10^{12}, 10^{18}, 10^{24} usw., die

[1]) Diese Daten wurden uns brieflich von I. G. Spasski mitgeteilt.

[2]) In der italienischen Sprache dient das Suffix „one" zur Bildung der „Vergrößerungsform" eines Substantivs, so daß das Wort millione gleichsam einen großen Tausender bzw. viele Tausender wiedergibt. Möglicherweise hatte Marco Polo, als er von einer Million Menschen sprach, eben viele tausend im Sinn.

Termini Billion, Trillion, Quadrillion usw. ein. Diese Termini erschienen gedruckt in der „Arithmetik" (L'arismethique) des Estienne de la Roche, die 1520 in Lyon erschienen war. In dieser Bedeutung werden die Bezeichnungen in Deutschland, England und einigen anderen Ländern auch heute noch benutzt, während sie in Frankreich von der Mitte des 17. Jahrhunderts an zur Bezeichnung der auf die Million folgenden Tausenderpotenzen, d. h. 10^9, 10^{12}, 10^{15} usw., verwendet werden. Die gleiche Bedeutung haben sie auch in der UdSSR und in den USA. In der „Arithmetik" (L'arithmétique) des Jacques Peltier (1515—1582), die 1549 in Poitiers herausgegeben wurde, stoßen wir erstmalig auf das Wort Milliarde (im Sinne von einer Million Millionen).

Eigenartige Zahlwörter für die höheren Zehnerpotenzen existierten auch im alten Rußland. In den Berechnungen des Kirik von Nowgorod, der ein sehr geschickter Rechner war, treten große Zahlen auf. Auf Grund der byzantinischen Zeitrechnung, nach der von der „Schöpfung der Welt" bis zur Geburt Christi 5508 Jahre vergangen waren, stellte er fest, daß die Zahl der Tagesstunden (12 pro Tag), die bis zum Jahre 1136 verflossen waren, 29120652 beträgt. Indem er Hunderttausend mit dem Wort „neswedi" (несведи) bezeichnet, drückt er die Zahl der Millionen hier in der Form „zweihundert neswedi und neunzig neswedi" aus.

Später wurden Namen und Bezeichnungen für die Einheiten in den Stellen der höheren Zehnerpotenzen eingeführt. Das vollentwickelte System der dezimalen Numeration kennen wir aus den Handschriften des 17. Jahrhunderts; entstanden ist es jedoch früher [203].

10000 heißt in diesem System eine tma (тьма = Finsternis), 10 tma ergeben eine legion (легион), 10 legion einen leodr (леодр), 10 leodr einen wran (вран = Rabe), 10 wran ergeben eine koloda (колода = Klotz). Eine koloda entsprach demnach 10^8. Nicht selten pflegte man übrigens nur bis zu den leodr einschließlich zu zählen; in einer Handschrift z. B. wird die Zahl 9876543210 folgendermaßen gelesen: „Neuntausend leodr und achthundert leodr und siebzig leodr und sechs leodr und fünf legion und vier tma und dreitausend und zweihundertzehn". Zur Kennzeichung der tma wurden die Buchstaben, die sonst die Zahlen 1 bis 9 ausdrückten, eingeringelt: Ⓐ, Ⓑ usw. Bei denlegion umringelte man die Buchtsaben punktiert ⓐ bei und den leodr radial gestrichelt ⓐ. Es gab auch Zeichen für die wran und koloda, die allerdings wenig gebräuchlich waren.

Neben diesem System, das man als die „kleine Zählung" (малое число) bezeichnete, existierte noch ein zweites System, die „große Zählung" (великое число), in der die tma tausend Tausender, d. h. 10^6, eine legion eine tma von tma, d. h. 10^{12}, ein leodr 10^{24}, ein wran 10^{48}, eine koloda jedoch 10 wran bezeichnete. Die Zwischenpotenzen bildete man aus den zugehörigen Grundpotenzen, für 10^{23} z. B. sagte man hunderttausend tma legion.

Die beschriebene Zählweise kam zu Beginn des 18. Jahrhunderts außer Gebrauch. Magnizki benutzte bereits die westeuropäische Zählweise und sprach von Millionen und deren Potenzen.

Sexagesimal- und Dezimalbrüche. Mit dem dezimalen Stellenwertsystem für die ganzen Zahlen brachte die algoristische Arithmetik auch die Sexagesimalbrüche, die in astronomischen Berechnungen angewandt worden waren, nach Europa. Eine Beschreibung der Rechenoperationen mit Sexagesimalbrüchen war bereits bei al-Ḫuwarizmī und bei Johannes von Sevilla (vgl. S. 197) vorhanden und trat später in den Werken europäischer Gelehrter über den Algorismus auf. Mitunter wurde der Algorismus der Brüche („Algorismus de minutiis"), auch der Sexagesimalbrüche, als besondere Vorlesung an den Universitäten vorgetragen.

Wie wir gesehen hatten, wurde in den islamischen Ländern ein einheitliches Sexagesimalsystem der ganzen Zahlen und Brüche entwickelt. Versuche in dieser Richtung wurden auch in Europa unternommen, jedoch waren diese nicht so zielstrebig und konsequent, weshalb sie auch kaum günstig aufgenommen wurden. Eines der ältesten Zeugnisse für das Interesse an den Sexagesimalbrüchen ist die sexagesimale Multiplikationstafel bis 49×49, die von Petrus Ingvarssön zusammengestellt wurde. In seiner „Abhandlung über physikalische Brüche"[1]) (Tractatus de minutiis physicis) faßte Johannes von Gmunden je 60 Einheiten zu einer besonderen Stelle, dem signum physicum, zusammen, indem er darauf hinwies, daß man in dieser Weise bereits bei der Zusammenstellung der Alfonsinischen Tabellen verfahren sei; die Zahl $144°36'45''$ schreibt er in der Form .2 .24 .36 .45 [206].

Beim Ausziehen von Quadratwurzeln verfährt Johannes von Gmunden jedoch ebenso wie Johannes von Sevilla und führt seine Rechnung gemischt im sexagesimalen und dezimalen System, indem er einen gegebenen Bruch in Einheiten der niedrigsten (stets geraden) negativen Potenz von 60 ausdrückt, zu der so gewonnenen, dezimal geschriebenen Zahl eine gewisse gerade Anzahl von Nullen hinzuschreibt und nach Ausziehen der Wurzeln das Ergebnis wieder ins Sexagesimalsystem überführt.

Die Beschreibung des Sexagesimalsystems nimmt bei dem französischen Gelehrten Oronce Fine oder, in der latinisierten Form, Fineus (1494—1555) breiten Raum ein, der (seit 1532) der erste Professor der Mathematik am College de France in Paris war. In seiner „Urmathematik" (Protomathesis), die 1532 in Paris erschien und in 15 Büchern einen Lehrgang der Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Gnomonik umfaßt, schrieb er die Sexagesimalzahlen in der Form $64 = 1{,}4$, entsprechend $169 = 2{,}49$ usw.

Die Anwendung des regulären Systems der Sexagesimalbrüche war eine der Voraussetzungen für die Einführung der Dezimalbrüche in Europa. Die Vorteile, die die Brüche bei der Darstellung als Potenzen einer gegebenen Basis aufweisen, sind bereits im Buch des Johannes von Sevilla, in der „Erläuterung der Brüche" (Demonstratio de minutiis) des Jordanus Nemorarius, die etwa um die Mitte des 13. Jahrhunderts geschrieben wurde, im anonymen „Algorismus der Brüche" (Algorismus de minutiis) aus dem 14. Jahrhundert usw. hervorgehoben worden.

Im „Algorismus der Brüche" wird darauf hingewiesen, daß man anstelle des Basis 60, die wegen ihrer großen Anzahl von Teilern vorteilhaft wäre, auch die Grundzahlen 12 oder 10 benutzen könne.

---

[1]) Die sexagesimalen (astronomischen) Brüche nannte man auch physikalische und philosophische Brüche.

Ein anderer Umstand, der auf die Dezimalbrüche hinführte, war die näherungsweise Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln, von der oben die Rede war. Begünstigend wirkten sich ferner die astronomisch-trigonometrischen Berechnungen aus. Der Wiener Astronom und Mathematiker aus der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts, Georg Peurbach, hat in einer unveröffentlicht gebliebenen Sinustafel das sexagesimale und dezimale System kombiniert angewandt. Wie wir wissen, war in der Sehnentabelle des Ptolemaios der Radius des Kreises mit 60 angesetzt worden, während die Sehnen selbst in Sexagesimalbrüchen ausgedrückt wurden. Peurbach setzte den Radius des Kreises mit 600000 an, drückte aber die Sinuswerte durch ganze Zahlen im Dezimalsystem aus. Johannes Müller (Regiomontanus), ein Schüler Peurbachs, schlug zunächst den gleichen Weg ein; er erhöhte lediglich den Radius auf 6000000. Später jedoch löste er sich völlig vom Sexagesimalsystem. Im Jahre 1467 stellte er die ersten rein dezimalen trigonometrischen Tafeln auf, und zwar eine Tangenstabelle für den Radius 10^5 (Opus tabularum directionum, Ausgburg 1490), wobei er am Beispiel einer Aufgabe die Vorteile hervorhob, die sich bei Anwendung des Dezimalsystems für diesen Radius ergeben. Selbstverständlich erhielt man hierbei für die Tangenswerte ganze Zahlen und nicht etwa Dezimalbrüche; analog lagen die Dinge bei weiteren Tabellen mit Radien von 10^5 bis 10^{15}.

Der Weg bis zur Einführung echter Dezimalbrüche war nun nicht mehr weit. Den letzten Schritt vollzog im wesentlichen François Viète in seinen trigonometrischen Tafeln („Canon mathematicus seu ad triangula cum adpendicibus"), die erstmalig im Jahre 1579 in Paris herausgegeben wurden. Viète schrieb mitunter den Zähler eines Dezimalbruches ohne Angabe des Nenners. Einen solchen Zähler hob er entweder durch kleinere Schrift und durch Unterstreichen oder durch Abtrennen mit Hilfe eines senkrechten Striches hervor. Indem er z. B. den Radius gleich $100{,}000^{\underline{000,00}}$ setzte, wies er darauf hin, daß der zugehörige Halbkreis zwischen den Grenzen $314{,}159^{\underline{265,35}}$ und $314{,}159^{\underline{265,37}}$ liegt. Die Kommata dienten lediglich zur Gruppierung der Stellen zu je drei. In einem anderen Falle schrieb er sin 60° in der Form 86,602|540,37. Allerdings benutzte er seine Bezeichnungen nicht systematisch und schrieb häufig bei Dezimalbrüchen sowohl den Zähler als auch den Nenner.

Der erste Versuch einer systematischen Einführung von Dezimalbrüchen wurde in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts von Immanuel ben Jakob Bonfils aus Tarascon unternommen, der der damals in Blüte stehenden südfranzösischen jüdischen Schule der Astronomen und Mathematiker angehörte [207]. In einer kleinen Abhandlung, „Weg des Teilens" (Derek ḥilluq), die in althebräischer Sprache abgefaßt ist, konstruierte Bonfils ein System von Brüchen, in denen die Eins in zehn Primen, eine Prime in zehn Sekunden usw. unterteilt wird. Für diese Brüche werden Multiplikations- und Divisionsregeln formuliert, wobei der Verfasser naturgemäß ohne die Verwendung, wie wir sagen würden, negativer Exponenten auskommt. Die Abhandlung des Bonfils hat offenbar keine große Verbreitung gefunden.

Im Verlaufe des 14., 15. und 16. Jahrhunderts traten Dezimalbrüche in einzelnen Fällen auf. So schrieb im Jahre 1343 der französische Mathematiker Jean de Meurs, ein Zeitgenosse von Bonfils, daß man $\sqrt{2}$ auch in der Form 1414 schreiben kann, wenn

man die erste Eins als ganze Zahl, die darauffolgende Vier als Zehntel usw. auffaßt. In Deutschland hat Christoph Rudolff im Jahre 1530, als er bei einer Aufgabe zur Prozentrechnung die Größe $375\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$ für $n = 1, 2, \ldots, 10$ zu berechnen hatte, den ganzzahligen Teil des Ergebnisses vom Dezimalbruch durch einen senkrechten Strich getrennt. Das Ergebnis für $n = 3$ schrieb er z. B. in der Form 434|109375.

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts hing die Idee der Dezimalbrüche gleichsam schon in der Luft. Die Arithmetiker und Tabellenberechner gingen in verschiedenen Län-

12 S. STEVINS

VERCLARINGHE.

ALS 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, dat is te seggen 3 *Eerſten*, 7 *TWeeden*, 5 *Derden*, 9 *Vierden*, ende ſoo mochtmen oneyndelick voortgaen. Maer om van hare weerde te ſegghen, ſoo is kennelick dat naer luyt deſer Bepalinge, de voornoemde ghetalen doen $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, tſamen $\frac{3759}{10000}$. Alſoo oock 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③, ſijn weert $8\frac{9}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, dat is t'ſamen $8\frac{937}{1000}$ ende ſoo met allen anderen dier ghelijcke. Het is oock te anmercken, dat wy inde THIENDE nerghens gebroken getalen en ghebruycken: Oock dat het ghetal vande menichvuldicheyt der Teeckenen, uytghenomen ⓪, nummermeer boven de 9 en comt. By exempel, wy en ſchrijven niet 7 ① 12 ② maer in diens plaetſe 8 ① 2 ②, want ſy ſoo veel weert ſijn.

IIII. BEPALINGHE.

De ghetalen der voorgaender tvveeder ende derder bepalinghe, noemen wy int gemeen THIENDETALEN.

EYNDE DER BEPALINGHEN.

Abb. 102. Die zwölfte Seite des Werkes von Simon Stevin, „De Thiende", 1585.

dern selbständig an dieses Problem heran. Das Verdienst, die Dezimalbrüche in Europa erstmalig systematisch eingeführt, ihre Vorteile beschrieben und die Vorzüge eines dezimalen Maßsystems hervorgehoben zu haben, gebührt dem holländischen Kaufmann und späterem Ingenieur, Mathematiker und Mechaniker Simon Stevin (1548 bis 1620) aus Brügge. Er gab im Jahre 1585 in Leyden eine kleine Broschüre in flämischer Sprache unter dem Titel „Das Zehntel" (De Thiende) heraus, die er in französischer Übersetzung (unter dem Titel „La Disme") seiner zu derselben Zeit herausgegebenen „Praxis der Arithmetik" (La Pratique d'Arithmétique) [208] beigefügt hat. Die Wirksamkeit Stevins reicht weit über die hier betrachtete Zeit hinaus. Wir wollen in diesem Zusammenhang noch einiges erwähnen. Die Bezeichnungsweisen Stevins, die mit seiner algebraischen Symbolik im Zusammenhang stehen, waren unzweckmäßig. Die Zahl 8,937 schrieb er in der Form $8\textcircled{0}9\textcircled{1}3\textcircled{2}7\textcircled{3}$. Mitunter, allerdings seltener, kennzeichnete er nur die letzte Stelle, etwa für die Zahl 2,8 in der Form $28\textcircled{1}$. Bei den Rechenoperationen schrieb er die Kennzeichen für die einzelnen Dezimalstellen z. B. folgendermaßen:

$$\begin{array}{cccccc} & & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \\ & & 3 & 7 & 8 & \\ & & & 5 & 4 & \textcircled{2} \\ \hline & 1 & 5 & 1 & 2 & \\ 1 & 8 & & 0 & & \\ \hline 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & \\ \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \end{array}$$

d. h. $0{,}000378 \cdot 0{,}54 = 0{,}00020412$. Doch bereits John Neper (1550—1617), einer der Entdecker der Logarithmen, empfahl, den ganzzahligen Teil vom gebrochenen durch ein Komma oder einen Punkt zu trennen (1616—1617), eine Schreibweise, die sich im Laufe des 17. Jahrhunderts allmählich fest eingebürgert hat.[1]) [209] In der russischen Literatur erscheinen die Dezimalbrüche in einer etwas veralteten Form in der „Arithmetik" von L. F. Magnizki, der auch noch die Anwendung der Sexagesimalbrüche, die er als astronomische bezeichnete, lehrte.

Die Rechenoperationen. Das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen wurde in der algorithmischen Arithmetik ursprünglich ebenso vorgenommen, wie das in den Werken von al-Ḫuwarizmī und Johannes von Sevilla der Fall war. Das Erscheinen und die Verbreitung des Papiers führten zu grundlegenden Änderungen in der Rechentechnik. Es war auf dem Papier nicht möglich, die Ziffern wegzuwischen, wie etwa auf einem mit Sand bestreuten Brett, oder sie zu bewegen wie die Rechenmarken des Abakus. Anfänglich waren die schriftlichen Rechnungen umständlich. Es wurden keine Zwischenergebnisse im Gedächtnis behalten, sondern man ersetzte das Wegwischen durch das sukzessive Aufschreiben aller Zwischenrechnungen, z. B. aller

[1]) Etwas früher, im Jahre 1592, findet man die Verwendung der Dezimalkommas bei dem Astronomen G. Magini (1555—1617) aus Bologna, während der Dezimalpunkt im Jahre 1593 von Christoph Clavius (Schlüssel) verwendet wurde.

möglichen Reste beim Dividieren, und man schrieb auch die wiederholten Verschiebungen des Divisors jedesmal mit usw.

Später begann man die bereits verbrauchten Ziffern durchzustreichen (vgl. Abb. 99). Mitunter waren die Mathematiker hierbei bestrebt, das gesamte Ziffernmaterial in einer für ihre Begriffe äußerst eleganten Form anzuordnen, z. B. in der Gestalt eines Segelschiffes, wodurch die gesamte Niederschrift außergewöhnlich umständlich und kompliziert wurde. Drei Jahrhunderte lang waren die Arithmetiker Europas damit beschäftigt, die Rechentechnik zu vereinfachen und zu vervollkommnen. Allmählich verschwinden das Verdoppeln und das Halbieren als besondere Rechenoperationen. Völlig eliminiert waren sie in den weit verbreiteten Werken des Luca Pacioli (1494) und Johann Widmann (1489), von denen später die Rede sein wird. Und obgleich in der Literatur auch später eine große Vielfalt der Rechenverfahren herrschte, so erhielt bereits die „Äußerst nützliche und notwendige Abhandlung über den Algorismus" (Algorismi tractatus perutilis et necessarius) des Prosdocimo de. Beldomandi aus Padua (1380—1428), die 1483 in Padua und erneut im Jahre 1540 in Venedig herausgegeben wurde, im wesentlichen die moderne Form.

Genauso langsam entwickelte sich die Lehre von den gemeinen Brüchen. Wir wollen uns hier mit nur einigen Hinweisen begnügen. Der Terminus „Brüche" entstand in der europäischen Literatur als Übersetzung des arabischen kasr, von kasara = zerschlagen, brechen (bereits die Babylonier sprachen beim Subtrahieren und Dividieren vom „Abbrechen" einer Zahl von einer anderen). In der Übersetzung der Arithmetik al-Ḫuwarizmīs bezeichnete man den Bruch als fractio, vom lateinischen frangere = brechen, zerschlagen, zerkleinern. Neben diesem Terminus gebrauchte z. B. Leonardo Fibonacci von Pisa das Wort ruptus, von rumpere = reißen, abreißen, brechen, obwohl er auch den Terminus fractus und das römische minuta, das Verkleinerte, verwendete. Das Wort minutia trat, wie wir gesehen haben, verhältnismäßig häufig in den Büchern der Algoristen auf. Die Herkunft der französischen Termini nombre rompu oder fraction, des englischen Terminus fraction und des deutschen Bruch liegt auf der Hand. In der russischen handschriftlichen Literatur des 17. Jahrhunderts wurden die Brüche als „Teile" (доли) bezeichnet; bei Magnizki hießen sie „gebrochene Zahlen" (ломаные числа). Der moderne Terminus дробь (das Zerkleinerte) wurde im 18. Jahrhundert gebräuchlich. Die moderne Schreibweise für Brüche ist hauptsächlich indischen Ursprungs (vgl. S. 113). Der Bruchstrich zur Trennung von Zähler und Nenner tauchte bei Leonardo Fibonacci von Pisa im Jahre 1202 und etwa um die gleiche Zeit bei dem westarabischen Gelehrten al-Ḥassār auf.

Unter den Rechenoperationen mit Brüchen sind die Bestimmung des Hauptnenners, die Multiplikation und die Division von besonderem Interesse. Lange Zeit hindurch haben nahezu sämtliche europäischen Mathematiker bei der Addition und Subtraktion von Brüchen als Hauptnenner das Produkt sämtlicher Nenner verwendet, wobei sie mitunter das Ergebnis kürzten. Erst Leonardo Fibonacci von Pisa richtete seine Aufmerksamkeit auf den Fall, daß sämtliche Nenner der Summanden einen gemeinsamen Teiler besitzen. Er warnt davor, als Hauptnenner einfach das Produkt sämtlicher vorgegebener Nenner zu verwenden, und konstruiert selbst das kleinste gemeinsame Vielfache schrittweise, erst für die Nenner zweier Brüche, zu dem er dann den dritten

Nenner hinzunimmt, usw. Leonardo blieb lange Zeit der einzige, der dieses richtige Verfahren anwandte; seinem Vorbild schlossen sich erst die Mathematiker des 16. Jahrhunderts an — Niccolò Tartaglia (1500—1557) in seiner „Allgemeinen Abhandlung über Zahlen und Messungen" (General trattato di numeri et misure, Venedig 1556 bis 1560), Christophorus Clavius in seiner „Kurzen Darlegung der praktischen Arithmetik" (Epitome arithmeticae practicae, Rom 1583) und nach ihnen auch andere. Das neue Verfahren wurde im 17. Jahrhundert allgemein gebräuchlich.

Die Lehre von den Brüchen bereitete besondere Schwierigkeiten, da beim Operieren mit diesen manche bei ganzen Zahlen gewohnten Eigenschaften verlorengehen. Diese Schwierigkeiten fanden ihren Niederschlag u. a. in dem deutschen geflügelten Wort „in die Brüche geraten". Es verblüffte z.B. die Tatsache, daß bei der Multiplikation mit einem Bruch das Produkt, das im Falle eines von 1 verschiedenen Multiplikator größer ist als der Multiplikand, kleiner wird als dieser. Viele Autoren versuchten, die Schwierigkeiten zu klären, die bei der Multiplikation von Brüchen auftraten, aber sämtliche Deutungen waren wenig überzeugend, und den Lernenden blieb nichts anderes übrig, als schließlich die Regel auswendig zu lernen und sich an sie zu gewöhnen.

Der Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation war seit alters her bekannt, jedoch war man bestrebt, die Regel für die Division durch einen Bruch unabhängig zu erklären, wobei man von dieser oder jener Analogie ausging. In Analogie zu den benannten Zahlen nahm man z.B. an, daß man bei der Division von Brüchen mit gemeinsamem Nenner lediglich den Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors zu teilen brauche, und man führte darauf auch den allgemeinen Fall zurück:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc.$$

So verfuhr man in Griechenland und in Byzanz, so verfuhren Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī und Ǧamšid al-Kāšī, Leonardo Fibonacci von Pisa und viele spätere Mathematiker. Andere, z.B. Jordanus Nemorarius, übertrugen die Multiplikationsregel für Brüche auf die Division und sagten, daß bei der Division der Zähler durch den Zähler und der Nenner durch den Nenner zu teilen sei. Da aber beide Divisionen im Bereich der ganzen Zahlen im allgemeinen nicht möglich sind, dividierte man die Brüche nach der folgenden Regel:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd : c}{bcd : d}.$$

Zwar ist man geneigt zu glauben, daß sich hier eine Vereinfachung von selbst anbietet, indem man die Regel so formuliert, daß bei der Division durch einen Bruch der Dividend mit dem reziproken Wert des Bruches zu multiplizieren sei (eine Formulierung, die seit alters her in China und später in Indien bekannt war, vgl. S. 21), jedoch tritt sie erst in der „Vollständigen Arithmetik" (Arithmetica integra, Nürnberg 1544) von Michael Stifel auf [33, Bd. I; S. 210].

Rechengeräte; die russischen Stschjoty (счеты). Das schriftliche Rechnen hat das Rechnen mit Hilfe von Rechengeräten nicht verdrängen können. Seit dem Ende des 15. Jahrhunderts wurde in Deutschland, Frankreich, England, Holland und dann auch

in Rußland das „Rechnen auf den Linien" populär, das in vielen Werken über Arithmetik oder in eigens hierzu geschriebenen Leitfäden beschrieben wird, etwa in dem anonymen „Linearen Algorithmus" (Algorithmus linealis), der im Jahre 1490 in Leipzig erschienen ist. Das Rechnen wurde mit Hilfe spezieller Rechenmarken vorgenommen, die man deutsch Rechenpfennige, französisch jetons und englisch counters nannte; in Rußland hießen sie penjasi (пенязи) oder penjagi (пеняги), wohl vom deutschen Pfennig abgeleitet. Hier standen sie im Wettbewerb mit den einheimischen Rechenmarken, die kostotschki (косточки — kleine Kerne oder Knochen, aber auch Spielwürfel) genannt wurden (hierauf geht die russische Redewendung „счет костьми или пенязи" zurück, was soviel wie „Rechnen mit Spielmarken oder penjasi" bedeutet).

Die ersten Beschreibungen des „Rechnens auf den Linien" tauchen in der Literatur in der Mitte des 15. Jahrhunderts auf, doch möglicherweise ist dieses Rechenverfahren erheblich älter. Dafür spricht die Tatsache, daß Spielmarken erhalten geblieben sind, die in Frankreich um die Mitte des 13. Jahrhunderts, in Belgien am Ende des 13. Jahrhunderts und in Deutschland am Ende des 14. Jahrhunderts usw. in Gebrauch waren. Der Umstand, daß das Linienrechnen in der algorithmischen Literatur bis zum Ende des 15. Jahrhunderts keinerlei Erwähnung findet, dürfte demnach dafür sprechen, daß dieses Rechenverfahren hauptsächlich von Leuten angewandt wurde, die den Gelehrtenkreisen fern standen, also von Finanzbeamten der Städte und Regierungen, von Kaufleuten, Handwerkern und im täglichen Leben. Die zugehörigen Regeln konnte man erlernen und anwenden, ohne Lesen und Schreiben zu können. Andererseits ist es durchaus möglich, daß das Linienrechnen nur wenig früher entstanden ist, als die ersten bekannten Beschreibungen dieses Rechenverfahrens erschienen sind, während die älteren Rechenmarken auf anderen Spielarten des Rechenbrettes Verwendung fanden, etwa in der Art eines Schachbrettes, wie es in England im 14. Jahrhundert gebräuchlich war. Auch die Herkunft der Linienrechnung ist unklar. Der Unterschied zum Abakus des 10. bis 12. Jahrhunderts ist erheblich, doch könnte das Linienrechnen aus dem Abakus durch Vereinfachung und Anpassung an die neue Arithmetik hervorgegangen sein.

Der Buchdruck förderte die weitere Verbreitung des Linienrechnens, und dies um so mehr, als zu dieser Zeit das Bedürfnis an Berechnungen verschiedener Art beträchtlich zunahm. Die Herstellung formschöner Spielmarken aus Metall, darunter solcher, die speziell für den Export bestimmt waren, blühte insbesondere in Nürnberg im 16. und 17. Jahrhundert. Beim Rechnen auf den Linien benutzte man waagerechte Linien, auf die ungekennzeichnete Rechenmarken gelegt wurden. Außerdem benötigte man Rechenmarken, die dem Wert von fünf Einheiten entsprachen und somit an das Rechnen im Fünfersystem erinnerten. Auf einem Brett oder einem Tisch zeichnete man von unten beginnend mit Kreide die horizontalen Linien für Einer, Zehner, Hunderter usw. Auf jede Linie legte man bis zu vier Rechenmarken. Eine Rechenmarke, die zwischen zwei Linien gelegt wurde, bezeichnete fünf Einheiten der Stelle, die durch die nächstuntere Linie repräsentiert wurde. Außerdem wurde das Brett durch vertikale Linien in mehrere Spalten aufgeteilt, die jeweils für die einzelnen Summanden, Faktoren oder dergleichen sowie für das Ergebnis bestimmt waren. Die

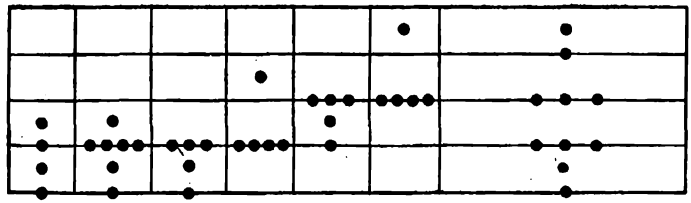


Abb. 103. Die Multiplikationsaufgabe $66 \times 96 = 6336$
„auf den Linien".

Abb. 103 zeigt das Multiplikationsschema für $66 \cdot 96 (= 36 + 540 + 360 + 5400) = 6336$; dieses Beispiel entstammt einer russischen Handschrift aus der Mitte des 17. Jahrhunderts.

Die Rechenmarken waren auch bei der Bruchrechnung verwendbar. Um z. B. den Goldgehalt in einer Gold-Silber-Legierung zu bestimmen, nahm man an, daß die Spalten des Rechenbrettes einem Lot, einem halben Lot, einem viertel Lot usw. bis $\frac{1}{256}$ Lot entsprachen. Manche Rechenbretter waren den Besonderheiten verschiedener Währungssysteme angepaßt. In diesem Falle bezeichnete man die Zeilen mit besonderen Zeichen, die den Wert der zugehörigen Rechenmarken angaben [29, II].

Das Linienrechnen war bis zum Ende des 17. Jahrhunderts sehr verbreitet. Es findet z. B. Erwähnung in den Werken Shakespeares und Molières; Leibniz zog es dem schriftlichen Rechnen vor. Dem preußischen König Friedrich II. wird der nachstehende scharfsinnige, in französischer Sprache abgefaßte Vierzeiler zugeschrieben:

Les courtisans sont des jetons,
leur valeur dépend de leur place:
Dans la faveur, des millions,
et des zéros dans la disgrâce.
(Die Höflinge sind wie die Rechenmarken,
ihr Wert hängt von ihrer Stellung ab:
Wird ihnen Gunst zuteil, so sind sie Millionen wert,
ihr Wert ist Null, wenn in sie Ungnade gefallen sind.)

In Rußland hatte die sog. Brettrechnung (дощаной счет) große Popularität erlangt. Dabei wurde ein Gerät benutzt, aus dem im 18. Jahrhundert die auch heute noch gebräuchlichen russischen Stschjoty (счеты) hervorgegangen sind. In seiner ursprünglichen Form entstand dieses Rechengerät etwa an der Grenze vom 16. zum 17. Jahrhundert. Das zunächst noch unvollkommene Gerät gestattete bereits damals, auch schwierige Rechnungen rasch abzuwickeln. Die „Brettrechnung" war bei den Landvermessern, bei den Beamten der Staatskanzlei, bei den Angestellten staatlicher Institutionen, bei den Wirtschaftsverwaltern der Klöster, bei Kaufleuten, Handlungsgehilfen usw. gebräuchlich. Wahrscheinlich ist dieses Gerät im Zusammenhang mit dem „Hakenpflugbrief" (сошное письмо) entstanden, wie man in Rußland im 16. und 17. Jahrhundert das System der Grund- und Bodenbesteuerung bezeichnete. Die Steuer wurde nach Umfang und Bodengüte des Grundbesitzes erhoben, den man in gewisse, eigens hierzu geschaffene und socha (coxa = Hakenpflug) genannte Ein-

heiten umrechnete. Die Umrechnungsfaktoren hingen dabei nicht nur von der Bodenbeschaffenheit, sondern auch von der Stellung des Besitzers ab und waren am günstigsten für die Kirche und danach für die Gutsbesitzer, am ungünstigsten jedoch für die Bauern. Mit der Bodenvermessung, mit der Umrechnung in sochas und mit der Berechnung der Steuersätze waren viele, eigens hierfür eingesetzte Beamte beschäftigt, für die ein besonderes Lehrbuch, das „Buch über den Hakenflugbrief" (Книга сошному письму), zusammengestellt worden war. Die sochas wurden nach dem System der binären Brüche in Teile $\frac{1}{2^n}$ oder, von einem Drittel ausgehend, in Teile der Form $\frac{1}{3 \cdot 2^n}$ unterteilt. Andere Teile wurden durch Summen oder Differenzen dieser Grundbrüche dargestellt.

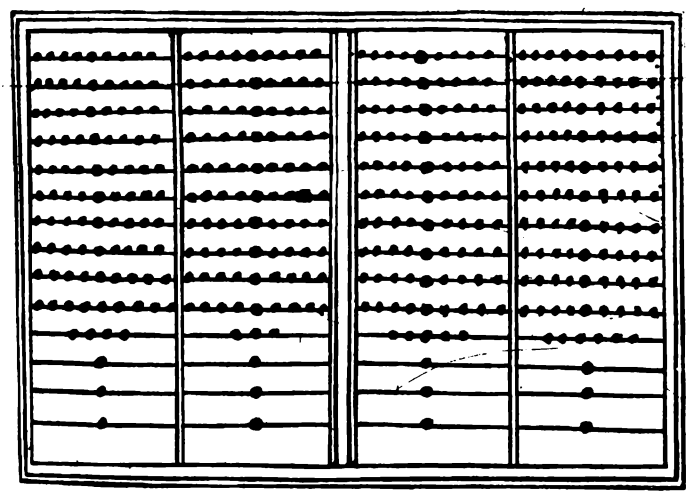


Abb. 104. Ein Rechenbrett (дощаной счет) mit vier Rechenfeldern (russische Handschrift aus dem Jahre 1691)

Die alten russischen Stschjoty bestanden aus vier Feldern, die zu je zwei in zwei Kästen zusammengefaßt waren (Abb. 104). In jedem Feld waren vierzehn Fäden oder Drähte parallel gespannt. Zum Rechnen mit ganzen Zahlen fädelte man auf diese je neun oder je zehn Rechenscheiben auf. Es gab auch Reihen, die speziell zum Rechnen mit den Sochabrüchen (сошные дроби) bestimmt waren. Von diesen Reihen enthielten einige je drei und vier Rechenscheiben, die anderen je eine. Gleichzeitig waren diese auch für das Rechnen mit Gewichtsmaßen geeignet, da 1 Pud (пуд) 40 Pfund (фунт), 1 Pfund 32 Lot und 32 Lot 96 Solotniki (золотники) enthielt. Bei manchen Stschjoty gab es speziell für Geldrechnungen Schnüre mit sechs Rechenscheiben, was den gängigen Geldeinheiten von 1 altyn (алтын) = 3 Kopeken (копейки) = 6 Dengi (деньги) = 12 Poluschki (полушки) enstprach. Die Addition zweier gleicher Sochabrüche ergab den nächst höheren Bruch, und auf den Stschjoty entsprach dieser Tatsache der Übergang zur Rechenscheibe in der nächst höheren Reihe. In dem „Buch über den Hakenpflugbrief" werden die Additionsverfahren beschrieben, wobei Bei-

spiele und Tabellen angeführt werden, in denen sowohl die slawischen als auch die neuen Ziffern auftreten.

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts kam der „Hakenpflugbrief" außer Gebrauch, da die Grund- und Bodenbesteuerung durch eine „Hofbesteuerung" und später durch eine „Seelenbesteuerung" ersetzt wurde. Die Stschjoty hatten sich jedoch bewährt und wurden daher auch beibehalten, allerdings änderte sich ihre Form. Es blieb nur noch ein Feld übrig; ferner wurden die nunmehr überflüssigen Drähte für das Operieren mit den binären und den binär-ternären Brüchen ausgemerzt. Übrigens sind im Zusammenhang mit dem Rechnen mit den Dengi und Poluschki, ferner mit den Poltiny (полтины) und den Tschetwertaki (четвертаки), die 50 bzw. 25 Kopeken wert waren, zwei Reihen zu je vier Rechenscheiben beibehalten worden. Die russischen Stschjoty sind auch gegenwärtig für das Rechnen im täglichen Leben und bei weniger komplizierten kommerziellen und statistischen Berechnungen sehr weit verbreitet [211].

Wir haben hier die Entwicklung des dezimalen Stellenwertsystems und des Rechnens in diesem System über mehrere Jahrhunderte hinweg verfolgt; ja, wir haben sogar in gewissem Maße die Grenzen des von uns betrachteten Zeitraumes überschritten. Wir wollen uns nun wieder der Geschichte der Mathematik in Europa im 13. und 14. Jahrhundert zuwenden. Vor allem wollen wir die Werke der vier größten Mathematiker dieser Zeit — Leonardo Fibonacci von Pisa, Jordanus Nemorarius, Thomas Bradwardine und Nicolas Oresme — kennenlernen, da jeder von diesen in irgendeiner Beziehung das aus dem Orient oder von der Antike übernommene Erbe weiter zu entwickeln vermochte.

Leonardo Fibonacci von Pisa und sein „Liber abaci". Im 12. und 13. Jahrhundert, standen in Europa, was die Entwicklung von Handwerk, Handel und Tauschverkehr betrifft, die italienischen Städte Pisa, Mailand, Venedig, Genua und Florenz an der Spitze. Die Kaufleute aus diesen Städten unternahmen, ähnlich wie Marco Polo, weite Reisen, wobei sie bestrebt waren, die Kunst und die Wissenschaft fremder Völker kennenzulernen. In den Städten entstanden neben kleinen Werkstättenbetrieben die ersten Manufakturen. Man baute Kanäle, Deiche und Häfen. Bedeutende Fortschritte wurden im Schiffsbau und in der Navigation erzielt. Man begann monumentale gotische Dome zu errichten, wozu man Pläne, Berechnungen und Baumaschinen benötigte. Die häufigen kriegerischen Zusammenstöße zwischen den Städten, die um die Märkte und Niederlassungen wetteiferten, führten zu einer Vervollkommnung der Befestigungsanlagen und etwas später zur Entstehung der Ballistik. Es wurden Turmuhren gebaut und Vergrößerungsgläser geschliffen. Man benötigte Architekten, Künstler, Lehrer, Rechnungsführer, Ärzte und Juristen; allmählich entstand eine bürgerliche Intelligenz.

Die Stadt Pisa besaß gegen Ende des 12. Jahrhunderts Handelsniederlassungen in Alexandria, Kleinasien, in Konstantinopel und an der Nordküste Afrikas. Diese Niederlassungen erstreckten sich von Bougie (heute in Algerien) im Westen bis nach Sfaks (in Tunesien) im Osten. Sie umfaßten Faktoreien, d. h. Handelskontore, Warenlager, Zollstationen und Unterkünfte für die Handlungsangestellten. Ein Stadtschreiber, der in den neunziger Jahren des 12. Jahrhunderts in Bougie tätig war und den

Beinamen Bonaccio (d. h. der Gutmütige) führte, besaß einen Sohn namens Leonardo, der in die Geschichte der Wissenschaft unter dem Namen Leonardo Fibonacci (d. h. Sohn des Bonaccio) von Pisa einging.

Leonardo wurde in Pisa im Jahre 1170 geboren; als Jugendlicher reiste er auf Wunsch des Vaters nach Bougie, um die Verfahren der Arithmetik kennenzulernen. Die Ausbildung Leonardos ging weit über die Grenzen dessen hinaus, was man als Kaufmann oder Beamter benötigte. Später erweiterte er seine mathematischen Kenntnisse durch seine Handelsreisen nach Ägypten, Syrien, Byzanz, Sizilien und in die Provence. Er starb nach 1240. Im Jahre 1202 schrieb er sein „Buch des Abakus" (Liber abaci), das er im Jahre 1228 einer gründlichen Überarbeitung unterzog. Dieses hervorragende Werk sollte zu einem der wichtigsten Träger der Entwicklung der neuen Arithmetik und anderer mathematischer Kenntnisse in Europa werden. Leonardo systematisierte darin ein umfangreiches Material, das er aus arabischen Werken schöpfte, wobei er einiges, wie er selbst sagt, von der geometrischen Kunst des Euklides hinzufügte, was im Grunde genommen dem antiken Erbe ganz allgemein entstammt. Darüber hinaus nahm er eigene Aufgaben und Methoden hinzu. Das Ergebnis war ein Werk, das bereits durch seinen Umfang Bewunderung heischt. Die gedruckte Fassung des Abakusbuches umfaßt 459 Seiten [212, Vol. I]. Die Arithmetik sowie die Algebra der linearen und quadratischen Gleichungen hat Leonardo mit einer Vollständigkeit und Tiefgründigkeit behandelt, die weder vor ihm noch lange Zeit nach ihm erreicht worden waren. Das Gesagte gilt sowohl für die lateinische als auch für die arabische Literatur.

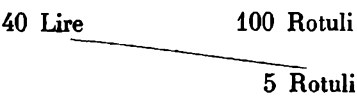
Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß man den Titel des Werkes, Liber abaci, als „Arithmetik" aufzufassen hat; es ist darin keineswegs vom Abakus des Gerbert und seiner Nachfolger die Rede. Von den ersten Zeilen an tritt Leonardo als entschiedener Verfechter jener Methoden auf, die er als die indischen bezeichnet und im Vergleich mit denen ihm die Methoden der Abacisten, die er als die „Bogen des Pythagoras" bezeichnet, als eine Abweichung vom rechten Wege erscheinen (vgl. S. 346). Das Buch enthält insgesamt fünfzehn Kapitel. In den ersten fünf wird die Arithmetik der ganzen Zahlen auf der Basis des neuen Zahlensystems behandelt. Um dem Leser die Vorteile dieses Systems vor Augen zu führen, stellt Leonardo eine Tabelle auf, in der verschiedene Zahlen mit römischen Ziffern und an der gleichen Stelle mit (seiner Auffassung nach) indischen Ziffern geschrieben werden:

MI	MMMXX	MCXI
1001	3020	1111
MMXXIII	MMMMDC	MCCXXXIIII
2023	4600	1234
MMMXXII	MMM	MMMMCCCXXI
3022	3000	4321

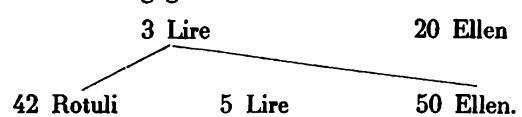
Für die Multiplikation empfiehlt er jene beiden Verfahren, die wir bereits in der Mathematik der Inder kennengelernt haben (vgl. Abb. 35 und S. 112). Zur Überprüfung des Multiplikationsergebnisses setzt er die Neunerprobe an. Er beweist die Notwendigkeit der Bedingung in allgemeiner Form, wobei er die Zahlen durch Buchstaben, etwa

in der Art *a.b.*; *b.g.* usw. bezeichnet, d. h. durch die Endpunkte der Strecken, die die Zahlen darstellen (die Punkte wurden gesetzt, um die Zahlen von Wörtern zu unterscheiden). Durch die kleinen lateinischen Buchstaben *a, b, g, d, e* gibt Leonardo, der mit der griechischen Tradition der Bezeichnung von Größen durch große Anfangsbuchstaben (Initialen) nicht vertraut war, die ersten Buchstaben des arabischen Alphabets wieder, und zwar alif, ba, ǧim (in Nordafrika gim), dal, ḥa. Das arabische Alphabet kennt keine solche Initialen. Nebenbei sei erwähnt, daß als „Probe", d. h. als Neunerrest, bei Leonardo auch die Null auftreten kann, so daß sie bei ihm die Rolle einer regulären Zahl spielt[1]). Im Kapitel über die Division wird die Zerlegung von Zahlen in Primfaktoren behandelt; es wird über die Teilbarkeitsmerkmale bei der Division durch 2, 3, 5 und 9 gesprochen. Ferner werden die Siebenerprobe und die Elferprobe eingeführt. In den Kapiteln VI und VII lehrt Leonardo das Rechnen mit gemischten Zahlen und Brüchen, die er nach arabischem Vorbild links vom ganzen Teil der Zahl schreibt. Wir hatten bereits die von ihm vorgenommene Vervollkommnung bei der Bestimmung des Hauptnenners mehrerer Brüche durch Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen erwähnt. Es sei noch hinzugefügt, daß Leonardo mehrere Verfahren zur Zerlegung von Brüchen in eine Summe aus zwei oder mehreren Stammbrüchen angibt (Vgl. S. 199).

In den nächsten Kapiteln (VIII bis X) werden die Methoden zur Lösung von Aufgaben aus dem kaufmännischen Rechnen behandelt, die auf der Proportionenlehre beruhen. Die Dreisatzregel (dieser Terminus tritt übrigens im „Liber abaci" nicht auf) wird in einer Standardform mitgeteilt, die wir am Beispiel einer Aufgabe erläutern wollen: 100 Rotuli (pisanisches Gewichtsmaß) kosten 40 Lire, wieviel kosten 5 Rotuli? Die zugehörige Schreibweise lautet:



Die durch den Strich verbundenen Zahlen sind miteinander zu multiplizieren, und das Ergebnis ist durch die freistehende obere Zahl zu dividieren. Aufgaben zur Bestimmung von Größen, die durch mehrere Proportionen miteinander verknüpft sind, wie sie etwa beim Tausch von Waren oder beim Geldwechseln auftreten, wobei die Valutawerte durch mehrere vorgegebene Verhältnisse verknüpft sind, werden ebenfalls nach dem Standardrezept gelöst. Es mögen z. B. 20 Ellen Tuch 3 Lire kosten; der Preis für 42 Rotuli Baumwolle betrage 5 Lire. Wieviel Rotuli Baumwolle kann man für 50 Ellen Tuch erhalten? Die gegebenen Zahlen werden nach dem folgenden Schema angeordnet:



Hier sind die durch Linien verbundenen Zahlen zu multiplizieren, und das Produkt ist durch das Produkt der übriggebliebenen Zahlen zu dividieren. Diese Regel, die im

[1]) Den Hinweis, daß die Gleichheit der „Proben" zwar eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für die Richtigkeit des Ergebnisses ist, finden wir bei Johannes von Sevilla [96, S. 41].

18. Jahrhundert Kettenregel genannt wurde, nennt Leonardo die figura cata oder chata; in diesem Zusammenhang erwähnt er den „Almagest" des Ptolemaios und das Buch über die Verhältnisse des Ametus, von dem gesagt wird, daß er 18 verschiedene Kombinationen dieser Figur untersucht habe. Gemeint ist hier der ägyptische Mathematiker Abū Ǧa'far Aḥmad ibn Yūsuf al-Miṣrī (gest. etwa 912), dessen Werk „De proportione et proportionalitate" uns aus der lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona [21, Bd. II, S. 16] bekannt ist. Den Terminus figura cata benutzte Leonardo im Zusammenhang mit den Kombinationen der zusammengesetzten Verhältnisse in der sog. Regel der sechs Größen oder dem Satz des Menelaos über das vollständige Vierseit, der in der arabischen Literatur šakl-al-qitā, d. h. Figur der Schneidenden, genannt wurde (vgl. S. 302 und 304). In anderen Aufgaben führt Leonardo bis zu neun gegebene Größen ein.

Die Behandlung der Aufgaben bei direkter und umgekehrter Proportionalität mit drei, fünf und mehreren Größen im „Buch des Abakus" geht auf die arabische Literatur zurück. Ähnlich wie seine orientalischen Vorgänger, die ihrerseits nach dem Vorbild von Eukleides vorgingen, bezeichnet Leonardo hier beliebige Glieder der Proportionen durch besondere Buchstaben. Eine genauere Analyse stellt er für die Regel der fünf Größen in allgemeiner Form an. Für sämtliche sechs Größen einschließlich der gesuchten gilt die Gleichheit der Produkte *.a.e.c.* und *.d.b.f.* in der gleichen Weise wie für die sechs Strecken im Satz über die Figur der Schneidenden. Das Verhältnis jeder Größe aus dem ersten Tripel zu irgendeiner Größe aus dem zweiten Tripel läßt sich auf zweierlei Art durch zusammengesetzte Verhältnisse der beiden Paare der verbliebenen Größen ausdrücken, so daß sich insgesamt 18 Kombinationsmöglichkeiten ergeben. Die anderen 18 Kombinationen, die den Größen des zweiten Tripels entsprechen, erwähnt Leonardo nicht. Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī zählt vollständig sämtliche 36 Kombinationen auf, und zwar im Kapitel über zusammengesetzte Verhältnisse seiner „Abhandlung über das vollständige Vierseit" [169, S. 36]. An diesen Problemkreis schließen sich bei Leonardo naturgemäß Aufgaben über die Genossenschaftsregel an, d. h. über die Aufteilung einer gewissen Summe im Verhältnis der Anteile der Beteiligten usw.

Im Kapitel XI werden Mischungsaufgaben betrachtet, deren Lösung rezeptmäßig angegeben wird. Bei der einen Gruppe der Aufgaben ist eine Legierung zu bestimmen, die aus bekannten Mengen von Legierungen bekannter Zusammensetzung hergestellt wird. In der anderen Gruppe ist das Verhältnis festzustellen, in dem die Mengen vorgegebener Legierungen stehen müssen, wenn sie zusammen eine Legierung vorgegebener Beschaffenheit ergeben sollen. Unter diesen Aufgaben tritt auch eine Variante der bekannten Vogelaufgabe auf, von der bereits früher die Rede war (vgl. S. 233): 30 Vögel kosten 30 Münzen, jedes Rebhuhn kostet 3 Münzen, jede Taube kostet 2 Münzen und ein Paar Sperlinge kostet 1 Münze; gefragt ist nach der Anzahl der Vögel jeder Art. Leonardo behandelt diese Aufgabe ebenso wie eine Aufgabe über Legierungen (eine Legierung vom Wert $30:30 = 1$ muß aus ganzzahlig gemessenen Mengen vom Wert 3 bzw. 2 bzw. $\frac{1}{2}$ zusammengesetzt werden) und gibt die eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung 3, 5, 22 an. Eine ähnliche Behandlung der Vogelauf-

gabe mit anderen Zahlenangaben erläutert Leonardo später in einem Brief an den Magister Theodorus, der am Hofe des Hohenstaufenkaisers Friedrich II. weilte.

Das Kapitel XII umfaßt eine große Anzahl verschiedenartiger Aufgaben. Wir wollen einige davon näher betrachten. Zunächst sei die Summation der arithmetischen und geometrischen Reihen erwähnt, ferner die Summation der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen sowie, erstmalig in der Geschichte der Mathematik, die Summation einer rekurrenten Reihe. Ein interessantes Beispiel für eine Scherzaufgabe, die in vielen Ländern große Popularität erlangte, ist die Aufgabe über 7 alte Frauen, die sich auf dem Wege nach Rom befanden, wobei jede Frau 7 Maultiere hatte, jedes Maultier mit sieben Säcken beladen war, in jedem Sack je 7 Brote enthalten waren, zu jedem Brot 7 Messer vorhanden waren, von denen jedes in 7 Scheiden steckte. Gefragt ist nach der Gesamtzahl der Dinge (137256). Eine ähnliche Aufgabe tritt bereits im alten Ägypten auf; andererseits treffen wir sie in leicht abgeänderter Modifikation in russischen Handschriften aus dem Mittelalter an [213, S. 314]:

„Es gehen sieben Weiber:	7
Jedes Weib hat sieben Stecken:	49
Auf jedem Stecken sind sieben Ästchen:	343
Auf jedem Ästchen hängen sieben Körbchen:	2401
In jedem Körbchen sind sieben gefüllte Brötchen:	16807
In jedem Brötchen sind sieben Sperlinge:	117649
In jedem Sperling sind sieben Magenteile:	823543
Und insgesamt sind es	960799".[1])

Die rekurrente Reihe tritt in einer Aufgabe über Kaninchen auf. Gefragt ist, wieviel Kaninchenpaare sich als Nachkommenschaft eines einzigen Paares ergeben, wenn jedes Paar monatlich ein Paar zur Welt bringt, das seinerseits nach einem Monat selbst vermehrungsfähig ist, und wenn kein Kaninchenpaar ums Leben kommt. Die Lösung liefert die Summe der Reihe $1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + 377$, wobei jedes Glied außer den ersten beiden gleich der Summe der beiden vorangehenden Glieder ist: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Diese Reihe wird jetzt als die Fibonaccische Reihe bezeichnet und stellt einen Spezialfall der wichtigen Klasse der rekurrenten Reihen dar, deren Glieder sich als Linearkombinationen mehrerer vorangehender Glieder ergeben.[2]) Der Terminus rekurrente Reihe stammt von Abraham de Moivre (veröffentlicht 1724). Wir wollen noch eine

[1]) „Идет семь баб: 7
У всякой бабы по семи посохов: 49
На всяком посохе по семи сучков: 343
На всяком сучку по семи кошелей: 2401
Во всаком кошеле по семи пирогов: 16807
Во всяком пироге по семи воробьев: 117649
Во всяком воробе по семи пупков: 823543
И всего 960799."

[2]) Anscheinend waren die ersten Zahlenfolgen, die durch rekurrente Beziehungen verknüpft waren, die Zahlen des Theon von Smyrna $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}$, $v_n = v_{n-1} + u_{n-1}$. Diese liefern bei $u_1 = v_1 = 1$ rationale Näherungswerte $\frac{u_n}{v_n}$, die gegen $\sqrt{2}$ streben (vgl. S. 147).

weitere wichtige, erstmalig bei Leonardo auftretende und später sehr populäre Aufgabe über die geringstmögliche Anzahl von Gewichtsstücken erwähnen, mit deren Hilfe man die ganzzahligen Gewichte, die kleiner sind als ein gewisses vorgegebenes ganzzahliges Gewicht, wiegen kann. Die Lösung Leonardos lautet: 1, 3, 9, 27, ... Sie beruht darauf, daß sich jede ganze Zahl als Summe oder Differenz verschiedener Potenzen der Zahl 3 sowie der Zahl 1 ausdrücken läßt.

Breiten Raum nehmen bei Leonardo Aufgaben ein, die auf lineare Gleichungen führen. Zu ihrer Lösung wendet Leonardo verschiedene Methoden an: Die Methode eines falschen Ansatzes, eine in Worte gekleidete algebraische Lösung, die durch unvollständige Induktion auf die Formulierung allgemeiner Regeln zur Auflösung eines Systems einer speziellen Form führt, und schließlich die Regel zweier falscher Ansätze, die im Kapitel XIII behandelt wird. Viele Aufgaben sind orientalischen oder antiken griechischen Ursprungs, ebenso wie die zugehörigen Lösungsmethoden, die Leonardo allerdings weiter entwickelt hat.

Nach dem Verfahren eines falschen Ansatzes wird im Kapitel XII eine Aufgabe zur Berechnung eines Baumes gelöst, von dem ein Drittel und ein Viertel, die zusammen 21 Spannen ausmachen, sich unter der Erde befinden. Als falsche Ansatzzahl wird die Zahl 12 benutzt, wobei der Verfasser ausdrücklich darauf hinweist, daß man hier eine beliebige Zahl wählen dürfe, in der die Nenner der Koeffizientenbrüche ganzzahlig aufgehen.

Die Methode des falschen Ansatzes verwendet Leonardo auch bei der Aufgabe zur Bestimmung des bei zwei Personen vorhandenen Bargeldes, eine Aufgabe, die wir bereits in dem arabischen „Buch über die Vergrößerung und Verminderung" kennengelernt haben, wo sie allerdings nach dem Verfahren zweier falscher Ansätze gelöst wird (vgl. S. 215). Diese Aufgabe wurde Leonardos Worten zufolge ihm von einem Lehrer in Konstantinopel vorgelegt. Darüber hinaus behandelt Leonardo auch ein anderes Lösungsverfahren, das er als regula recta bezeichnet und von dem er sagt, daß es von den Arabern angewandt werde und nicht hoch genug eingeschätzt werden könne, da sich mit seiner Hilfe unzählige Aufgaben lösen ließen. Dieses direkte Verfahren ist im Grunde genommen eine algebraische Methode, die Leonardo ähnlich den orientalischen Mathematikern ohne Verwendung einer algebraischen Symbolik verwendet. Die Unbekannte bezeichnet er hier als res, d. h. Ding (Übersetzung des arabischen šai). Die Aufgabe lautet wie folgt: Erhält der erste Mann vom zweiten 7 Dinare, so hat er fünfmal soviel wie der zweite; erhält hingegen der zweite von erstem 5 Dinare, so hat er siebenmal soviel wie der erste. Wieviel hatte ursprünglich jeder? Als Unbekannte, d. i. Ding, wählt Leonardo die um 7 verminderte Barschaft des zweiten; dann hat der erste nach den Bedingungen der Aufgabe 5 Dinge abzüglich 7 Dinare. Gibt der erste dem zweiten 5 Dinare, so verbleiben bei ihm 5 Dinge abzüglich 12 Dinare, während der zweite 1 Ding und 12 Dinare hat. Somit sind 1 Ding und 12 Dinare siebenmal soviel wie 5 Dinge abzüglich 12 Dinare. Daraus folgt, daß 34 Dinge 96 Dinare ausmachen, daß 1 Ding $2\frac{14}{17}$ Dinaren entspricht usw. Im Anschluß daran werden Aufgaben mit mehr als zwei Beteiligten gelöst. Es werden auch Beispiele für „unlösbare Fragen" angegeben, deren Bedingungen auf Widersprüche führen.

Das algebraische Lösungsverfahren wendet Leonardo auch auf eine weitere Gruppe von Aufgaben an, die im Mittelalter äußerst populär waren. In diesen wird gefordert, das Vermögen mehrerer Leute zu ermitteln, von denen jeder irgendeinen Gegenstand nur dann erwerben kann, wenn er seiner Barschaft gewisse Kapitalanteile der anderen Beteiligten hinzufügt [214]. Im Kapitel XII des „Liber abaci" sind 29 derartige Aufgaben enthalten. Der Preis des Gegenstandes wird außer in einer Aufgabe nicht erwähnt, so daß es sich hierbei um unbestimmte Probleme handelt, jedoch wird die Unbestimmtheit insofern behoben, als eine Auflösung in kleinstmöglichen ganzen Zahlen gesucht wird. Leonardo beginnt mit dem Fall zweier Beteiligter

$$x + \frac{1}{3}y = s,$$
$$y + \frac{1}{4}x = s$$

und gibt zunächst das Lösungsverfahren an:

$$x = (3 - 1)\,4 = 8,$$
$$y = (4 - 1)\,3 = 9,$$
$$s = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11.$$

Danach begründet er die Regel durch algebraische Überlegungen, die man adäquat durch folgende Transformationen wiedergeben kann:

$$x + \frac{1}{3}y = y + \frac{1}{4}x;$$
$$x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y = y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y, \quad x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}x;$$
$$x - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x, \quad \frac{3}{4}x = \frac{2}{3}y.$$

Sodann beruft sich Leonardo auf die von ihm kurz vorher erläuterte „Regel der Proportionen", die $x = \frac{2}{3}N$ und $y = \frac{3}{4}N$ mit $N = 12$ liefert. Dann gilt

$$s = x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}N = \frac{11}{12}N = 11.$$

Schreibt man dieses System in der Form

$$x + \frac{a_1}{b_1}y = s,$$
$$y + \frac{a_2}{b_2}x = s,$$

so läßt sich die Lösung Leonardos in der allgemeineren Form

$$x = \frac{b_1 - a_1}{b_1}N, \quad y = \frac{b_2 - a_2}{b_2}N, \quad s = \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{b_1 b_2}N$$

wiedergeben, wobei N das kleinste gemeinsame Vielfache von $b_1 b_2$ ist.

Danach gibt Leonardo die algebraische Lösung der Aufgabe mit drei Beteiligten an und formuliert bei der Aufgabe mit vier Unbekannten in Worten das allgemeine

reguläre Verfahren zur Auflösung derartiger Systeme. Wir wollen diese verbale Regel Leonardos, die übrigens sehr kurz und klar formuliert ist, nicht wiedergeben. Es handelt sich dort im wesentlichen um das Operieren mit den Nennern und Zählern der aufeinanderfolgenden Koeffizienten bei den Unbekannten. Wir begnügen uns lediglich damit, für das System mit vier Unbekannten den Ausdruck der ersten Unbekannten durch einen Parameter s wiederzugeben:

$$x = \frac{[((b_1 - a_1)\, b_2 + a_1 a_2)\, b_3 - a_1 a_2 a_3]\, b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - a_1 a_2 a_3 a_4}\, s.$$

Bei Leonardo ist der Parameter s dem Nenner gleichgesetzt, weshalb er nur die Bildung des Zählers betrachtet. Dieser Leonardosche Algorithmus ist eine hervorragende Errungenschaft des 13. Jahrhunderts. Er unterscheidet sich von der altchinesischen Methode fang-cheng darin vorteilhaft, daß die Regel für den endgültigen Ausdruck der Unbekannten formulierbar ist. Andererseits beschränkt sich Leonardo hier auf die Betrachtung eines Systems der sehr speziellen Form

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{a_1}{b_1} x_2 &= s, \\ x_2 + \frac{a_2}{b_2} x_3 &= s, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ x_n + \frac{a_n}{b_n} x_1 &= s. \end{aligned}\right\}$$

Die Methode fang-cheng hingegen stellt einen Algorithmus zur Auflösung eines in Normalform dargestellten Systems linearer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten dar.

Im weiteren Text werden die Aufgaben allmählich schwieriger. So gibt Leonardo die Lösung eines Problems an, das sich durch das folgende Gleichungssystem wiedergeben läßt:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{a_1}{b_1}(y + z) &= s, \\ y + \frac{a_2}{b_2}(x + z) &= s, \\ z + \frac{a_3}{b_3}(x + y) &= s. \end{aligned}\right\}$$

Die Lösung wird äußerst scharfsinnig mittels einer Hilfsunbekannten

$$x + y + z = S$$

gewonnen. Die Subtraktion der gegebenen Gleichungen von der zuletzt genannten ergibt

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1}(y + z) = \frac{b_2 - a_2}{b_2}(x + z) = \frac{b_3 - a_3}{b_3}(x + y),$$

woraus nach der Proportionsregel

$$\begin{aligned} y + z &= \frac{b_1}{b_1 - a_1} Nf, \\ x + z &= \frac{b_2}{b_2 - a_2} Nf, \\ x + y &= \frac{b_3}{b_3 - a_3} Nf \end{aligned}$$

folgt; dabei bedeutet N das kleinste gemeinsame Vielfache der Differenzen $b_1 - a_1$ usw. und f einen Koeffizienten, der zur bequemeren Gestaltung der weiteren Rechnung eingeführt wird. Durch Addition der letzten Gleichungen erhält Leonardo, indem er $f = 2$ setzt,

$$x + y + z = S = \sum_{k=1}^{3} \frac{b_k}{b_k - a_k} N,$$

wonach sich sämtliche Unbekannten in ganzen Zahlen leicht bestimmen lassen. Es sei erwähnt, daß nach Mitteilung von Iamblichos bereits der griechische Mathematiker Thymaridas von Paros (5. Jahrhundert v. u. Z.) eine Aufgabe behandelt hatte, die auf das speziellere System

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= a, \\ x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_1 + x_3 &= a_2, \\ &\cdots \\ x_1 + x_n &= a_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

für bestimmte n-Werte führt.

Die eben beschriebene Methode wendet Leonardo auch auf eine in rechnerischer Hinsicht schwierige Aufgabe an, die ihm, wie er schreibt, von dem erfahrensten Lehrer aus Konstantinopel, von Musc, vorgelegt worden sei:

$$\left.\begin{aligned} x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(y + z + u + v) &= s, \\ y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(z + u + v + x) &= s, \\ z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{688}\right)(u + v + x + y) &= s, \\ u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(v + x + y + z) &= s, \\ v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(x + y + z + u) &= s. \end{aligned}\right\}$$

Die Quelle für diese Aufgabengruppe bei Leonardo war, zumindest zum Teil, die byzantinische Mathematik, wie aus den eigenen Hinweisen Leonardos hervorgeht. Ihrerseits mögen diese Aufgaben aus Alexandria nach Byzanz gelangt sein, etwa durch die Werke des Diophantos. Die Aufgabe Leonardos

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{1}{3}(z + y) &= s, \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= s, \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= s \end{aligned}\right\}$$

stimmt z. B. genau mit der 24. Aufgabe aus dem Buche I der „Arithmetik" des Diophantos überein; die unmittelbar darauffolgende analoge Aufgabe mit vier Unbekannten unterscheidet sich in jeder Gleichung bei Leonardo von der 25. Aufgabe

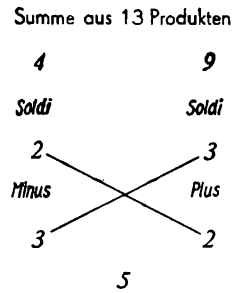
des Diophantos lediglich durch einige Koeffizienten: Im ersten Falle lauten diese $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, im zweiten $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. Die zuletzt genannte Aufgabe tritt auch bei al-Karaǧī auf, und es ist durchaus möglich, daß Leonardo sie aus den „Al-Fahrī" entnommen hat, obwohl ihm zweifellos diese Aufgabengruppe insgesamt gesehen in Byzanz begegnet ist. Wie dem auch sei, so hat Leonardo doch neue algebraische Methoden zu ihrer Lösung entwickelt.

Mit der Untersuchung linearer Gleichungen steht eine andere hervorragende Entdeckung des italienischen Mathematikers im Zusammenhang. Bei der Betrachtung einiger Aufgaben, die sich in der üblichen Form nicht lösen ließen, kam er als erster in Europa auf den Gedanken, negative Zahlen einzuführen und diese als Schuld zu interpretieren.

Beim Lösen der Aufgabe mit sieben Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + \tfrac{1}{2}(u + v + w + t) &= s, \\ y + z + u + \tfrac{1}{3}(u + w + t + z) &= s, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\

arabisch als die Regel elchatayn (d. h. al-ḥaṭain) bezeichnete. Diese Regel wird dort ausführlich für jeden der drei Fälle einzeln bewiesen. Das Beweisverfahren ist im Grunde genommen allgemein algebraisch, und die Zahlen werden durch Strecken dargestellt. Wir wollen hier lediglich das Schema für die Anordnung der Rechengänge am Beispiel der folgenden Aufgabe erläutern: 100 Rotuli kosten 13 Lire (1 Lire = 20 Soldi, 1 Soldi = 12 Dinare), wieviel kostet 1 Rotulus? Der erste Ansatz, 3 Soldi, ergibt einen Überschuß von 2 Lire; der zweite Ansatz, 2 Soldi, ergibt einen Fehlbetrag von 3 Lire. Die Rechnung verläuft nach dem Schema:



d. h. $x = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3 + 2} = 2$ Soldi $7\frac{1}{5}$ Dinare. Dieses mechanische Schema (mit den zugehörigen Varianten für die beiden anderen Fälle der Regel) hatte sich später in der europäischen arithmetischen Literatur fest eingebürgert. Hier treten erstmalig die Wörter minus (weniger) und plus (mehr) auf, allerdings nicht in der Bedeutung des Subtrahierens und Addierens, sondern als Fehlbetrag und Überschuß. Außerdem dient das Wort minus bei Leonardo auch als Bezeichnung der Subtraktion.

Die letzten beiden Kapitel des „Liber abaci" sind dem Radizieren und der Algebra gewidmet. Im Kapitel XIV erläutert Leonardo anhand numerischer Beispiele die Methoden zur angenäherten Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Im ersten Falle multipliziert er entweder zunächst den Radikanden mit 10^{2n}, oder aber er wendet einen Iterationsalgorithmus an, den wir bereits früher mehrfach erwähnt haben (vgl. z. B. S. 246). Ebenso wie seine Vorgänger bricht Leonardo sein Verfahren beim dritten Näherungswert ab.

Auf das Ausziehen der Quadratwurzeln folgen Aufgaben über Operationen mit quadratischen Irrationalitäten; dies zeugt davon, daß Leonardo den Stoff des Buches X der „Elemente" gut beherrscht hat. Die Regel zum Ausziehen der Kubikwurzel mit Hilfe der Näherungsformel

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$$

bezeichnet Leonardo definitiv als seine eigene Erfindung. Wie wir wissen, war er in dieser Hinsicht nicht der erste (vgl. S. 246). Im Falle der Kubikwurzeln begnügt sich Leonardo mit diesem zweiten Näherungswert, der häufig eine gute Genauigkeit liefert, z. B.

$$\sqrt[3]{900} \approx 9 + \frac{171}{271},$$

d.h. $\approx 9{,}631$, wobei Leonardo noch $\frac{171}{271}$ durch $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$ ersetzt; der auf vier Stellen genaue Wert lautet 9,655.

Schließlich enthält das Kapitel XV eine Reihe geometrischer Aufgaben zur Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes und eine Menge von Beispielen für quadratische Gleichungen, die mit Hilfe der „Algebra und Almuchabala" gelöst werden. Hier stützt sich Leonardo im wesentlichen auf die arabische Literatur. Er betrachtet die gleichen sechs Normalformen wie al-Ḫuwarizmī, auf den auch die von Leonardo als Musterbeispiel gewählte Gleichung $x^2 + 10x = 39$ über mehrere Zwischenstufen zurückgeht. Viele Aufgaben sind aus dem „Buch der Messungen" des Savasorda und aus der algebraischen Abhandlung des Abū Kāmil entlehnt, obwohl Leonardo auch eigene Aufgaben bringt [33, Bd. III, S. 80 und 110].

Bei der Darlegung benutzt Leonardo ebenfalls die verbale Form, jedoch sind in den Text Bezeichnungen von Strecken durch einen oder zwei Buchstaben eingestreut, durch die die gegebenen und gesuchten Größen oder deren Kombinationen bezeichnet werden. Das Quadrat der Unbekannten heißt census, d. h. Besitz, Vermögen, oder quadratus; die Unbekannte heißt res, d. h. Ding, oder radix, d. h. Wurzel; die gegebene Zahl wird als numerus oder denarius bezeichnet. Bei diesen Termini handelt es sich um die lateinischen Übersetzungen der arabischen Wörter māl, murabba', šai, ǧidhr, 'adad und dīnār (Vgl. S. 204).

Wir wollen nun die Formulierung einer Aufgabe wiedergeben, die wir heute in Gestalt des Systems

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10, \\ x\left(10 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) &= 114 \end{aligned}\right\}$$

schreiben würden. Leonardo sagt: „Teile wiederum 10 in zwei Teile und teile jene durch diese und diese durch jene und zähle die Teilungsergebnisse zu 10 hinzu, und was sich hierbei ergibt, multipliziere mit einem der Teile, und es ergibt sich 114" [215, S. 384, lateinisch]. Einen der Teile wählt er als Ding, d. h. x, und stellt diesen durch die Strecke $.a.$ dar; auf einer besonderen Geraden trägt er die Strecken $.b.g. = 10$ und $.g.d.$, $.d.e.$ ab, d.h. die Quotienten der Division der Teile $\frac{y}{x}$ und $\frac{x}{y}$ (Abb. 105). „Da das Produkt von $.a.$ und $.b.e.$ sich zu 114. ergibt, erhält man somit als Produkt von $.a.$ mit $.b.d.$ und mit $.g.d.$ und mit $.d.e.$ ebenfalls 114., und zieht man hiervon das ab, was sich beim Malnehmen von $.a.$ mit $.b.g.$ ergibt, d. h. das Produkt (multiplicatio) des Dinges mit 10., so verbleiben 114. minus 10. Dinge für das Produkt der Zahl $.a.$ mit $.g.e.$, und wenn du hiervon das Produkt von $.a.$ mit $.g.d.$, d. h. mit dem abziehst, was sich beim Teilen des anderen Teiles durch $.a.$ ergibt, wobei durch derartige Multiplikation sich der zu teilende Teil ergibt, der 10. minus das Ding beträgt, so verbleiben 104. minus 9. Dinge, für das Produkt von $a.$ mit $.d.e.$" [215, S. 384/385, lateinisch]. Indem er auf diese Art und Weise auf die Gleichung

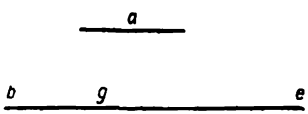


Abb. 105

$$\overline{104 - 9x} = x\frac{x}{10 - x}$$

kommt, fährt Leonardo fort: „Das Produkt *.a.* mit *.d.e.* ist gleich der Teilung des Quadrates der Zahl: *.a.* durch den zweiten Teil, d. h. durch 10. minus das Ding. Daher ergibt sich durch die Multiplikation von *.a.* mit sich selbst das Vermögen, bei dessen Teilung durch 10. minus das Ding sich 104. minus 9. Dinge ergeben; multiplizierst du daher 10. minus ein Ding mit 104. minus 9. Dinge, so ergibt sich 1040. und 9. Vermögen vermindert um 194. Dinge, die gleich dem Vermögen sind; daher stelle wieder her (restaura) die abzuziehenden Dinge und ziehe (extrahe) je ein Vermögen aus beiden Seiten, so verbleiben 8. Vermögen und 1040. Dinare, die gleich 194. Dingen sind, daher teile dieses Ganze durch die Anzahl der Vermögen, und es ergibt sich ein Vermögen und 130. Dinare, die gleich $24\frac{1}{4}$ Dingen sind" [215, S. 385, lateinisch], d. h.

$$x^2 + 130 = 24\tfrac{1}{4}x,$$

woraus sich nach der Regel

$$x = 8, \quad 10 - x = 2$$

ergibt.

Einige Beispiele für quadratische Gleichungen und Systeme mit zwei Unbekannten, die Leonardo bei Abū Kāmil entlehnt hat, hatten wir früher auf den Seiten 225 (erste Aufgabe) 226 und 227 angegeben. Von Interesse sind auch die eigenen Beispiele des italienischen Gelehrten. Nachdem z. B. Leonardo für die Wurzel der Gleichung

$$x^2 = \sqrt{6x}\sqrt{5x} + 10x + 20$$

den irrationalen Wert

$$x = 5 + \sqrt{7\tfrac{1}{2} + \sqrt{52\tfrac{1}{2} + \sqrt{750}}}$$

erhalten hat, hält er es für notwendig mitzuteilen, daß dieser angenähert gleich $16\frac{2}{3}$ ist (auf zwei Dezimalen genau erhält man $x = 16{,}68$). Die Gleichung

$$\left(\tfrac{1}{3}x^2 + 1\right)\left(\tfrac{1}{4}x^2 + 2\right) = x^2 + 13$$

führt Leonardo auf eine quadratische Gleichung mit Hilfe einer Substitution $x^2 = z$ zurück, indem er dieses „Vermögen" wiederum als „Ding" bezeichnet ($z = 12$). Unter den Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten, die Leonardo behandelt, tauchen ebenfalls verhältnismäßig viele neue Beispiele auf, etwa

$$x + y = 10,$$
$$\frac{xy}{x - y} = \sqrt{6}$$

mit

$$x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}, \quad y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}.$$

Von besonderem Interesse ist eine neue Lösung des Systems

$$x + y = 10$$
$$\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\tfrac{1}{4},$$

das auch bei Abū Kāmil auftrat. In der Analyse dieser Aufgabe haben beide Gelehrten viel Gemeinsames. Zum Beispiel begründen beide ausführlich die Gleichheit des Produkts und der Summe der Quotienten, die sich bei der Division einer beliebigen Zahl durch ihre beiden Teile ergibt, d. h. die Identität $\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ mit $a = x + y$. Nachdem jedoch Abū Kāmil in der zweiten Gleichung die Zahl 10 durch $x + y$ ersetzt hatte, führt er das Ganze auf eine in $\frac{y}{x}$ quadratische Gleichung zurück, während Leonardo den einen Teil gleich $2 - z$ setzt, so daß sich der andere zu $8 + z$ ergibt; dann gilt

$$(2 - z)(8 + z) = 16.$$

„Verfahre gemäß der Algebra (secundum algebra)", sagt Leonardo, „und du findest, daß das Ding Null ist (invenies rem esse nihil), so daß der eine der Teile 2 ist, der andere hingegen 8" [215, S. 470, lateinisch]. Es scheint sich hier um den ersten Fall der Anwendung der Zahl Null als Wurzel zu handeln, was erst Jahrhunderte später allgemein üblich wurde. Die zweite, negative Wurzel —6 berücksichtigt hier Leonardo naturgemäß nicht. Interessant ist, daß mit dieser Aufgabe und deren Varianten mit verschiedenen Zahlenwerten sowohl die algebraische Abhandlung des Abū Kāmil als auch der „Liber abaci" schließt.

Der „Liber abaci" überragt deutlich die gesamte arithmetisch-algebraische Literatur aus dem 12. bis 14. Jahrhundert, und zwar hinsichtlich der Vielfalt und Wirksamkeit der Methoden, der Reichhaltigkeit des Aufgabenmaterials und der Überzeugungskraft der Darstellung. Im Vorwort schrieb Leonardo, er habe dieses Werk abgefaßt, damit „das Geschlecht der Lateiner" nicht mehr in Unkenntnis der darin abgehandelten Dinge verharre. Es war jedoch kein Werk für die Lernenden und auch keines für diejenigen, die von der Mathematik lediglich Lösungsregeln, Standardprobleme der kaufmännischen Praxis und dergleichen erwarteten. Der „Liber abaci" konnte nur von den Gelehrten inhaltlich voll erfaßt werden, allerdings auch da von den Zeitgenossen nur zum Teil; der „Liber abaci" sollte hauptsächlich ein Werk für spätere Generationen werden.

Die späteren Mathematiker schöpften aus diesem Werk vielfach sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden, die im 15. bis 17. Jahrhundert in viele italienische, deutsche, französische, englische und russische Handschriften und gedruckte Bücher Eingang fanden. Die Aufgaben Leonardos wurden von Werk zu Werk übernommen; man findet sie noch in der berühmten „Algebra" Leonhard Eulers (1768) und auch noch viel später.

Die „Praxis der Geometrie" und das „Buch der Quadrate". Große Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik hatten auch die anderen Bücher Leonardos. Im Jahre 1220 schrieb er seine „Praxis der Geometrie" (Practica geometriae) [212, Vol. II], ein Buch, das im Gegensatz zu seinem Titel nicht etwa ein spezielles Werk für die angewandte geodätische Geometrie war, sondern verschiedene Sätze (mit Beweisen) enthielt, die sich auf das Messen von Größen, auf die Arithmetik, die Planimetrie und die Stereometrie bezogen. Neben Ergebnissen, die bereits im Altertum bekannt waren,

treten hier auch solche auf, die auf Leonardo selbst zurückgehen oder von ihm mit eigenen Beweisen versehen wurden. So bringt er nicht etwa allein die Behauptung, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden (was bereits Archimedes bekannt war), sondern beweist diesen Satz auch. Die Seitenhalbierende bz (Abb. 106) wird bis zu ihrem Schnittpunkt i mit der durch a parallel zu bg gezogenen Geraden verlängert. Dann ist $\triangle aiz \cong \triangle gbz$, und wegen $az = gz$ sind beide Dreiecke kongruent, d. h. $ai = gb = 2eb$. Ferner ist $\triangle aid \cong \triangle ebd$, und infolgedessen teilt wegen $ai = 2eb$, $ad = 2ed$ der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden diese im Verhältnis 2:1; daher ist dieser Punkt eindeutig bestimmt. Desgleichen fehlt bei Eukleides (allerdings ist er bei Savasorda vorhanden) der Satz über das Quadrat der Diagonale eines Quaders, der von Leonardo ausgesprochen wurde. Im letzten, siebenten Teil des Buches werden zwischen die eigentlich geometrischen Sätze einige Erläuterungen von vermessungstechnischen Methoden eingeflochten. Hier behandelt Leonardo auch die Bestimmung von Entfernungen und Höhen mit Hilfe eines in bestimmter Weise aufgerissenen Quadrates. Nicht unerwähnt bleiben auch die Aufgaben über die Zerlegung von Figuren (vgl. S. 247). Insgesamt gesehen findet in diesem Buch sowohl die griechische als auch die arabische Literatur ihren Niederschlag. Bei der Bestimmung der Zahl π berechnet Leonardo die Umfänge der regelmäßigen einbeschriebenen und umbeschriebenen 96-Ecke und erhält die Ungleichungen

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

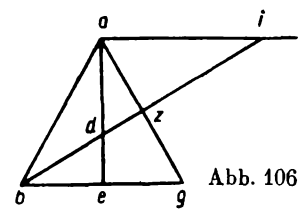


Abb. 106

Das arithmetische Mittel von $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{5}$ ist $\frac{29}{90}$ oder nahezu $\frac{1}{3}$, und für π wird der Wert $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275}$, d. h. 3,1418.. gesetzt.

Erwähnt seien noch geometrische Aufgaben, die mit Hilfe der Algebra gelöst werden, und zwar durch Zurückführung auf quadratische Gleichungen; solche Aufgaben treten auch in den anderen Werken Leonardos auf. Manche Probleme (z. B. das der Einbeschreibung eines regelmäßigen Fünfecks in ein Quadrat, in ein gleichseitiges oder gleichschenkliges Dreieck) schließen sich unmittelbar an das früher erwähnte Werk des Abū Kāmil über das Fünfeck und Zehneck an. Die hierbei auftretenden irrationalen Wurzeln der quadratischen Gleichungen berechnete Leonardo mit hoher Genauigkeit und drückt sie in Sexagesimalbrüchen aus (bis zu den Quarten einschließlich).

Ein Einzeldasein fristet am Schluß der „Praxis der Geometrie" die Aufgabe, in der eine Quadratzahl bestimmt werden soll, die zur Zahl 5 addiert wieder eine Quadratzahl ergibt; mit dieser Aufgabe beschäftigten sich früher die Mathematiker der islamischen Länder.

Um das Jahr 1225 schrieb Leonardo das „Buch der Quadrate" (Liber quadratorum), das Aufgaben über unbestimmte quadratische Gleichungen enthält [212, Vol. II]. In einer Aufgabe, die ihm vom Magister Johannes von Palermo, dem Philosophen des Kaisers Friedrich II., in dessen Gegenwart vorgelegt wurde, soll eine (rationale) Quadratzahl so bestimmt werden, daß sie um 5 vergrößert oder vermindert wiederum (rationale)

Quadratzahlen lieferte. Leonardo kannte wahrscheinlich die in der arabischen Literatur enthaltenen Lösungsverfahren für derartige Aufgaben (vgl. S. 235), jedoch wandte er eine eigene Methode an, wobei er davon ausging, daß jede Quadratzahl n^2 sich als Summe aus den ersten n ungeraden Zahlen ergibt. Dabei wendet er in eleganter Weise die von ihm aufgestellten Formeln zur Summation der ersten geraden und ungeraden Quadrate der natürlichen Zahlen an. Er stellt erneut fest, daß das System

$$\left.\begin{aligned} x^2 + a &= y^2 \\ x^2 - a &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

unter der Bedingung in ganzen Zahlen lösbar ist, daß $a = 4mn\,(m+n)\,(m-n)$ gilt, wobei m und n ganze Zahlen sind (dann gilt $x = m^2 + n^2$). Lassen sich m und n entsprechend wählen, so ist die Aufgabe gelöst, und zwar in ganzen Zahlen. Sodann beweist Leonardo, daß Zahlen der Form $4mn\,(m^2 - n^2)$ durch 24 teilbar sind. Ist jedoch a nicht von vornherein durch 24 teilbar, so ist die Gleichung mit einer ganzzahligen Quadratzahl in der Weise zu multiplizieren, daß das neue absolute Glied durch 24 teilbar wird und sich außerdem in Gestalt des angegebenen Produkts darstellen läßt. Aus den ganzzahligen Lösungen der neuen Gleichung lassen sich nunmehr die rationalen Lösungen der ursprünglich vorgelegten Gleichung finden. Für $a = 5$ ist der kleinste Multiplikator, der diesen Forderungen genügt, die Zahl 12^2; dabei gilt

$$5 \cdot 12^2 = 720 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (5+4) \cdot (5-4),$$

so daß $m = 5$, $n = 4$ und $m^2 + n^2 = 41$ ist. Man erhält somit

$$41^2 + 5 \cdot 12^2 = 49^2,$$
$$41^2 - 5 \cdot 12^2 = 31^2$$

und nach Division durch 12^2

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2 + 5 = \left(4\frac{4}{12}\right)^2,$$
$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2 - 5 = \left(2\frac{7}{12}\right)^2.$$

In einer anderen Aufgabe sollen drei Zahlen x, y und z so bestimmt werden, daß jede der Summen $x+y+z+x^2$, $x+y+z+x^2+y^2$, $x+y+z+x^2+y^2+z^2$ eine Quadratzahl ist. Leonardo gibt die Lösung $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$ und $z = \frac{144}{5}$ an. Diese Untersuchung Leonardos ist der einzige wertvolle Beitrag zur Zahlentheorie in der europäischen Mathematik in dem betrachteten Zeitabschnitt.

Johannes von Palermo legte Leonardo noch eine weitere schwierige Aufgabe vor, und zwar ging es um die Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

von der in der Abhandlung „Die Blume“ [212, Vol. II] die Rede ist. Zunächst wird bewiesen, daß x keine ganze (positive) Zahl sein kann, denn aus $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$ folgt, daß x kleiner ist als 2, während andererseits $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$ ist. Darüber hinaus kann x auch kein Bruch sein, ferner auch nicht Quadratwurzel aus einer ratio-

nalen Zahl. Im zuletzt genannten Falle wäre, da man unsere Gleichung auch in der Form

$$x = \frac{20 - 2x^3}{10 + x^3}$$

schreiben kann, die irrationale Zahl x einer rationalen Zahl gleich. Dann zeigt Leonardo, daß x nicht von der Form einer der bei Eukleides vorkommenden Irrationalitäten sein kann, und gibt die Näherungslösung

$$x = 1^0 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{VI}$$

(in sexagesimalen Brüchen) an, ohne allerdings das Verfahren zu beschreiben, mit dessen Hilfe er auf diesen Wert gekommen ist. Dieses bemerkenswert genaue Ergebnis überschreitet den wahren Wert der Wurzel nur um etwa $1\frac{1}{2}$ Sexten, d. h. um $3 \cdot 10^{-11}$. Der Beweis dafür, daß es unmöglich ist, eine kubische Gleichung in quadratischen Irrationalitäten zu lösen, war trotz seiner Unvollständigkeit und des Fehlens eines allgemeinen Gedankenganges der erste Schritt auf dem Wege zur Auflösung kubischer Gleichungen in Radikalen.

Wir wollen uns bei den anderen kleineren Abhandlungen und Briefen Leonardos nicht aufhalten und lediglich bemerken, daß für seine Tätigkeit die Tatsache kennzeichnend ist, daß er sich nicht nur bemüht hat, eine vorgelegte einzelne Aufgabe zu lösen, sondern eine Lösungsmethode für eine möglichst umfassende Gruppe ähnlicher Aufgaben zu schaffen.

Wie bereits erwähnt, überragten die Arbeiten Leonardo Fibonaccis von Pisa das allgemein niedrige Niveau der mathematischen Kenntnisse seiner Zeitgenossen so weit, daß sie einen wirklich nachhaltigen Einfluß erst viel später, nach zwei Jahrhunderten, ausüben konnten. Wesentlich populärer waren die mathematischen Werke seines Zeitgenossen Jordanus Nemorarius, obwohl sie hinsichtlich der Originalität und Reichhaltigkeit des Inhaltes den Werken Leonardos weit nachstanden.

Jordanus Nemorarius. Über die Person des Jordanus liegen keine genauen Angaben vor. Es ist durchaus möglich, daß er mit Jordan von Sachsen, dem zweiten General des Dominikanerordens, identisch ist, der aus Deutschland stammte, eine Zeitlang in Paris lebte und im Jahre 1237 starb. Jordanus Nemorarius war ein hervorragender Mechaniker und Mathematiker und verfaßte mehrere Werke über Arithmetik, Algebra und Geometrie.

Wir hatten bereits erwähnt, daß Jordanus der Verfasser einer damals populären Abhandlung über die algoristische Arithmetik war (vgl. S. 354).

In der „Arithmetik, dargelegt in zehn Büchern" (Arithmetica decem libris demonstrata) hält sich Jordanus im wesentlichen an die spätantike Tradition (Nikomachos, Boethius), indem er die allgemeinen arithmetischen Eigenschaften der Zahlen beschreibt [216]. Eine interessante Besonderheit dieses Werkes ist die Anwendung allgemeiner Buchstabenbezeichnungen anstelle von konkreten Zahlen. An und für sich war dieses Verfahren keineswegs neu, jedoch wird es von Jordanus Nemorarius wesentlich systematischer angewandt als von seinen Vorgängern. Bei der Formulierung der Sätze oder der Regeln zur Lösung von Aufgaben drückt er die Größen nicht durch

Strecken oder Rechtecke aus, weshalb bei ihm das Buchstabensymbol als rein arithmetisches Zeichen für eine beliebige Zahl auftritt. Noch bei Leonardo bezog sich die Buchstabenbezeichnung größtenteils sowohl auf die Größe als auch auf das diese Größe darstellende geometrische Gebilde und wurde im Grunde genommen vom zweiten auf das erste übertragen. Ferner bezeichnet Jordanus konsequent jede Größe durch einen Buchstaben und schwankt nicht mehr zwischen der Verwendung eines oder gleichzeitig zweier Buchstaben (als der beiden Endpunkte einer Strecke oder der Eckpunkte eines Rechtecks), wie das noch bei Leonardo der Fall war. Gleichzeitig fehlen aber bei Nemorarius nach wie vor das Gleichheitszeichen und die Zeichen für die algebraischen Operationen (lediglich anstelle unseres $a + b$ schreibt er $.a.b)$, weshalb er für die Ergebnisse der Zwischenschritte stets weitere neue Buchstabenbezeichnungen heranziehen muß.

Das gleiche Verfahren benutzt er, wie wir gleich sehen werden, in seiner Algebra. Dieses Werk „Über gegebene Zahlen" (De numeris datis) besteht aus vier Büchern und enthält 115 Aufgaben über lineare und quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme [216*a*, 217].

Manche Aufgaben des Nemorarius und des Leonardo Fibonacci von Pisa stimmen zwar überein, doch insgesamt gesehen unterscheidet sich die Behandlung der Algebra sowohl hinsichtlich der Auswahl der Aufgaben als auch hinsichtlich der Lösungsverfahren. Nemorarius abstrahiert vom konkreten Inhalt der Aufgaben, die bei ihm abstrakte Zahlenbeispiele darstellen; er verzichtet auf irgendwelche Anwendungen auf die Geometrie oder im kaufmännischen Rechnen usw. Die Abhandlung „Über gegebene Zahlen" ist gleichsam das Hochschullehrbuch der abstrakten Algebra des 13. Jahrhunderts; es ist auf einer methodischen Anordnung der Beispiele aufgebaut, die zunächst in allgemeiner Form gelöst und dann anhand von Zahlenbeispielen erläutert werden. Der Titel des Werkes hängt damit zusammen, daß in den Beispielen bei Angabe einiger Zahlen sich auch die anderen, von ihnen abhängenden als gegeben erweisen.

Im Buch I der Abhandlung sind die Aufgaben über Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten zusammengefaßt. Den Ausgangspunkt bilden die Aufgaben

$$\text{(Nr. 1)}\ \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}, \quad \text{(Nr. 3)}\ \begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{und (Nr. 5)}\ \begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases},$$

wobei die zugehörigen Lösungsregeln rein verbal formuliert werden. Die letzten beiden Systeme werden nicht auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt, sondern mit Hilfe offensichtlicher Transformationen auf die Form des ersten, linearen Systems gebracht. Auf diese drei Systeme werden sodann die anderen zurückgeführt, in denen neben der Summe oder Differenz der gesuchten Zahlen verschiedene Kombinationen aus deren Quadraten, Koeffizienten usw. als gegeben erscheinen. Die Aufgabe Nr. 7, die sich unmittelbar durch die quadratische Gleichung $x^2 + ax = x(x + a) = b$ ausdrücken läßt, wird hier auf das System Nr. 5 zurückgeführt. In vielen Zahlenbeispielen lautet die erste Bedingung $x + y = 10$, wie das bei al-Ḫuwarizmī, Abū Kāmil und auch bei Leonardo Fibonacci von Pisa der Fall ist. Der Lösungsweg ist allerdings bei Jordanus ein anderer: Sämtliche genannten Autoren hatten solche Systeme auf eine

quadratische Gleichung zurückgeführt. Die Aufgaben des Buches II, die im wesentlichen mit Hilfe von Proportionen ausgedrückt werden, stellen lineare Gleichungen dar, wobei mit den einfachsten begonnen und bis zu Gleichungssystemen mit vier Unbekannten fortgeschritten wird. Manche Verfahren zur Elimination der Unbekannten werden den modernen Leser ungewöhnlich anmuten. So löst Jordanus die Aufgabe Nr. 20 mit dem Zahlenbeispiel

$$x+6=\frac{5}{3}y,$$
$$y+4=2z,$$
$$z+2=\frac{5}{7}x$$

durch Bildung von Proportionen und unter Vermeidung von Subtraktionen. Nachdem er auf beiden Seiten der ersten Gleichung je $4\cdot\frac{5}{3}=6\frac{2}{3}$ addiert hat, erhält er

$$\frac{x+12\frac{2}{3}}{y+4}=\frac{5}{3}$$

und hieraus mit Hilfe der zweiten Gleichung

$$\frac{x+12\frac{2}{3}}{z}=\frac{10}{3};$$

analog erhält er ferner

$$\frac{x+19\frac{1}{3}}{z+2}=\frac{10}{3},$$

so daß sich auf Grund der dritten Gleichung

$$\frac{x+19\frac{1}{3}}{x}=2+\frac{2}{7}+\frac{2}{21}\quad\text{oder}\quad 19\frac{1}{3}=\left(1+\frac{8}{21}\right)x$$

und daraus $x=14$ ergibt. Hier sind, wie in nahezu allen übrigen Fällen, die gegebenen Zahlen so gewählt, daß sich die Lösungen in ganzen positiven Zahlen ergeben.

Interessant ist die Aufgabe Nr. 25 des Buches II mit dem Zahlenbeispiel

$$x+\frac{y}{2}=119,\quad z+\frac{u}{4}=119,$$
$$y+\frac{z}{3}=119,\quad u+\frac{x}{5}=119,$$

das sich von der auf S. 372 erwähnten Aufgabe des Leonardo Fibonacci von Pisa nur durch einige Koeffizienten und dadurch unterscheidet, daß Jordanus von vornherein dem absoluten Glied einen Zahlenwert beilegt. Leonardo formuliert im Zusammenhang mit dieser Aufgabe die endgültige Regel zur Berechnung der Unbekannten nach den Koeffizienten für eine ganze Klasse von Aufgaben gleichen Typs mit mehreren Unbekannten. Nemorarius geht nicht so weit. Er beschreibt lediglich den Prozeß der sukzessiven Elimination der Unbekannten, und zwar drückt er x nacheinander in der

Form

$$x = \frac{z}{6} + 59\frac{1}{2}, \quad x + \frac{u}{24} = 79\frac{1}{3}, \quad x - \frac{x}{120} = 74\frac{9}{24}$$

aus, woraus $x = 75$ folgt. Danach werden sofort die übrigen Unbekannten bestimmt.

Die Aufgabe Nr. 27 stimmt mit der schon erwähnten Aufgabe des Leonardo überein, die bereits bei Diophantos [I, 25] und bei al-Karaǧī (vgl. S. 380) zu finden ist. Der Unterschied besteht auch hier nur darin, daß Jordanus das absolute Glied sofort mit dem Wert 37 ansetzt, was sich bei Leonardo erst im Laufe des Lösungsganges ergibt. In der vorhergehenden Aufgabe formuliert Jordanus das Problem in der allgemeinen Form und löst die Aufgabe, indem er die Unbekannten durch Gleichsetzung und Substitution eliminiert. In der Aufgabe Nr. 27 jedoch legt er ein weiteres Verfahren vor, dessen Herkunft er den Arabern zuschreibt, das diese nach seinen Worten als „falschen Ansatz" bezeichneten. Leonardo hatte auch für diesen Fall einen Algorithmus zur direkten Bestimmung der Unbekannten und einiger Hilfsgrößen entwickelt.

Bei der Betrachtung analoger Aufgaben hatte sich Leonardo veranlaßt gesehen, einzelnen Unbekannten negative Werte beizumessen. Jordanus operiert nur mit positiven Lösungen, untersucht jedoch in der Aufgabe Nr. 28 die Lösbarkeitsbedingungen für die Aufgaben Nr. 26 und Nr. 27: Die Koeffizienten der zweiten Glieder auf den linken Seiten müssen entweder sämtlich größer oder sämtlich kleiner als 1 sein.

Im Buch III werden Aufgaben über Proportionen behandelt, während im Buch IV unter anderem unter den Nrn. 8 bis 10 Regeln zur Lösung dreier Typen quadratischer Gleichungen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung angegeben sind. Interessant ist die Tatsache, daß auch hier die Aufgaben Nr. 21 und Nr. 22 für Systeme der Form

$$\left.\begin{aligned} x \pm y &= a \\ x^2 y^2 &= b \end{aligned}\right\}$$

durch Ausziehen der Quadratwurzel auf die Aufgaben Nr. 3 und Nr. 5 des Buches I zurückgeführt werden und nicht auf quadratische Gleichungen. Um den Stil des Nemorarius zu kennzeichnen, wollen wir seine Formulierung der Lösung für die quadratische Gleichung $x^2 + px = q$ angeben.[1]) „Es sei das Quadrat .*a*., seine Wurzel .*b*. werde mit .*c.d.* multipliziert, wobei .*c*. und .*d*. seine Hälften sind; ferner sei .*b*. multipliziert mit .*c.d.* gleich .*e*., und es sei .*a.e.* gegeben. Da .*b.c.d.* mit .*b*. multipliziert .*a.e.* liefert, ergibt sich, nachdem man zu .*a.e.* das Quadrat von .*d*. addiert hat, .*a.e.f*., was sich durch Multiplikation von .*b.c*. mit sich selbst ergibt. Da .*a.e.f*. gegeben ist, ist auch .*b.c*. gegeben. Zieht man .*c*. ab, so erweist sich .*b*. als gegeben, so daß auch .*a*. gegeben ist." [216a, S. 124] Es kostet nicht wenig Anstrengung, die Bedeutung und den Zusammenhang dieser Symbole zu erfassen. Wir wollen es jedoch dem Leser überlassen, diese Herleitung in die moderne Sprache zu übersetzen. Dabei ist zu beachten, daß $x^2 = a$, $x = b$, $c = d = \frac{p}{2}$, $.c.d. = c + d = p$ usw. gilt. Wie man sieht, führt das Fehlen der Operationszeichen zu einer außerordentlichen Anhäufung nicht miteinander im Zusammenhang stehender Buchstabensymbole; einen algebraischen Kalkül hat Jordanus nicht entwickelt.

[1]) In der russischen Übersetzung [217, S. 639] ist der Text ein wenig modernisiert.

Der Geometrie sind vier Bücher des Werkes „Über Dreiecke“ (De triangulis) gewidmet. Zu Beginn werden darin Begriffsbestimmungen gegeben, deren Art wir uns am folgenden Beispiel vergegenwärtigen wollen: „Die Stetigkeit ist die Nichtunterscheidbarkeit der Grenzen insgesamt mit der Möglichkeit der Abgrenzung“ („Continuitas est indiscrecio terminorum cum terminandi potencia“) [218, S. 3]. Diese Worte stellen gewissermaßen eine Variante einer Definition dar, die früher einmal von Aristoteles in seiner „Physik“ gegeben wurde. In den ersten beiden Büchern finden wir die Sätze über die Unterscheidung der recht-, spitz- und stumpfwinkligen Dreiecke nach den Verhältnissen der gegenüberliegenden Seiten und Winkelhalbierenden, ferner Sätze über die Teilung von Strecken und die Zerlegung von geradlinig begrenzten Figuren, z. B. ein originelles Verfahren zur Zerlegung eines Dreiecks in drei flächengleiche, was in Wirklichkeit auf die Konstruktion des Dreiecksschwerpunktes hinausläuft usw. Dem Werk sind die Einflüsse griechischer und arabischer Quellen anzumerken. Zur Berechnung der Seite eines in einen gegebenen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks gibt Jordanus Nemorarius eine Regel an, die auch in der arabischen Literatur auftritt (vgl. S. 272); der Verfasser selbst bezeichnet das Verfahren als indisch. Bei der Würfelverdopplung bedient er sich der Methoden, die bereits den Griechen bekannt waren; beim Problem der Winkeldreiteilung geht er insofern weiter, als er in Wirklichkeit die Kreiskonchoide verwendete, während die Konchoide des Nikomedes von der Geraden hergeleitet war. Ferner tritt bei Nemorarius eine gewisse Kenntnis der isoperimetrischen Probleme zutage.

Darüber hinaus wird dem Jordanus Nemorarius ein Werk über des Planisphärion zugeschrieben, in dem die Eigenschaften der stereographischen Projektion etwas eingehender behandelt werden als bei Ptolemaios.

Einige Probleme der „Elemente“. In der zweiten Hälfte des 2. Jahrhunderts und zu Beginn des 14. Jahrhunderts erschienen verschiedene theoretische Werke, in denen wichtige Einzelprobleme der Mathematik erörtert wurden.

Zunächst sei erwähnt, daß etwa 1260 eine neue lateinische Übersetzung der „Elemente“ angefertigt wurde, die auch die Bücher XIV und XV mit einschließt und eine Reihe wertvoller Kommentare und Ergänzungen enthält. Diese Übersetzung, die auf die weitere Entwicklung der Mathematik einen großen Einfluß ausgeübt hat, stammt von Johannes Campanus (Vgl. S. 343). In den Ergänzungen zum Buch I wirft Johannes erstmalig das Problem der Erforschung der nichtkonvexen, und zwar der sternförmigen Vielecke auf (vgl. S. 395). Mit dem Satz 16 des Buches III hängen seine Betrachtungen über Berührungswinkel und Stetigkeit zusammen.

In dem eben genannten Satz wird bewiesen, daß der Winkel zwischen Kreis- und Kreistangente (der Kontingenzwinkel)[1]) kleiner ist als ein beliebiger geradlinig begrenzter spitzer Winkel. Trotz dieser Annahme vertrat Johannes Campanus die Ansicht, daß der Berührungswinkel dennoch nicht Null ist, wahrscheinlich auf Grund der Analogie zu der Vorstellung von dem Flächenelement in unmittelbarer Nähe des Scheitels eines solchen Winkels. Hieraus folgt (Abb. 107), daß der Halbkreiswinkel

[1]) Das Wort „angulus contingencie“ stammt anscheinend von Jordanus Nemorarius.

CAB eines Halbkreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ einerseits verschieden vom rechten Winkel CAD und kleiner als dieser ist, während er andererseits größer ist als jeder geradlinig begrenzte Winkel, etwa in der Art des Winkels CAE. Diese Überlegungen wandte Campanus auf die Analyse der Kreisquadratur an, die dem Griechen Bryson zugeschrieben wird. Eine wichtige Rolle spielte in der Argumentation des Bryson der Satz, demzufolge eine stetige Größe, die von einem kleineren Wert zu einem größeren übergeht, auch sämtliche Zwischenwerte durchläuft. Im Rahmen seiner Auffassung widerlegt Campanus diesen Satz. Wenn der Durchmesser $\overline{AC}$ bei Drehung um A schließlich die Lage der Tangente $\overline{AD}$ annimmt, so wächst der Winkel CAE, bis er zu einem rechten Winkel wird, nimmt dabei aber den Wert des Winkels ABC, der nunmehr von dem Halbkreis und den zur Tangente gewordenen Durchmesser $\overline{AC}$ gebildet wird, nicht an, obwohl dieser Winkel kleiner ist als ein rechter [133, II]. Der Satz des Johannes Campanus über die Existenz einer vierten Proportionalen zu drei gegebenen stetigen Größen war schon auf der S. 252 erwähnt worden.

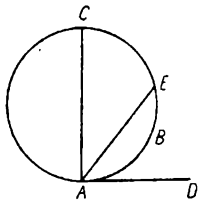


Abb. 107

Das Problem der hornförmigen Winkel stand seit Johannes Campanus und Jordanus Nemorarius im Mittelpunkt des Interesses der mittelalterlichen Mathematiker. Manche schlossen sich in ihrer Auffassung Johannes Campanus an, andere vertraten die Ansicht, derartige Winkel seien von besonderer Art und dürften mit Winkeln zwischen Geraden nicht verglichen werden. Der Streit darüber dauerte mehrere Jahrhunderte an. Jacques Peletier (1515—1582) bestand in seiner Analyse der „Elemente" (1557) auf der Behauptung, daß der Berührungswinkel den Wert Null habe. Dem widersprach ein anderer Kommentator der „Elemente", Christoph Clavius (erste Ausgabe 1574), während andererseits François Viète sich der Meinung Peletiers anschloß (1593). Mit dem Kontingenzwinkel und den Eigenschaften der mit diesem zusammenhängenden infinitesimalen Größen beschäftigten sich später John Wallis, Gottfried Wilhelm Leibniz und andere. Durch derartige Überlegungen wurde die Entstehung und Entwicklung der neuen Analysis vorbereitet. Eine streng logische Begründung des Problems überstieg aber die Kräfte der Wissenschaft jener Zeit. Heute wissen wir, daß man bei entsprechender Definition des Maßes für hornförmige Winkel diese als Beispiele für nichtarchimedische Größen heranziehen kann.

Wir wollen nun verschiedene interessante Ergänzungen des Johannes Campanus zu den „Elementen" übergehen und einiges über den ersten Versuch sagen, der im mittelalterlichen Europa zum Beweis des Parallelenpostulats unternommen wurde. Dieser Versuch geht auf einen jüdischen Mathematiker und Astronomen, Levi ben Gerson oder Leo Gersonides (1288—1344) zurück, der im Süden Frankreichs gelebt hat. Gersonides stammte aus Bagnols sur Cèze (die Franzosen nannten ihn Maître Léon de Bagnols) und lebte in Orange und Avignon. Von ihm stammen verschiedene Werke in althebräischer Sprache, wovon ein Teil in lateinischen Übersetzungen größere Verbreitung fand. Das Gesagte gilt z.B. für seine Arbeiten über Astronomie, in denen er den Versuch unternahm, das System des Ptolemaios durch ein gewisses System nicht-

konzentrischer Sphären zu ersetzen. Die lateinische Übersetzung der Trigonometrie des Gersonides (1342), der bei der Berechnung ebener Dreiecke den Sinussatz neu entdeckte (vgl. S. 298), begünstigte die Entwicklung dieses Teilgebietes der Mathematik in Europa. Auch Regiomontanus kannte dieses Werk. Besondere Popularität erlangte ein von Gersonides erfundenes einfaches Gerät zur Winkelmessung, das durch ein Mißverständnis den Namen Jakobsstab erhielt. Er bestand aus einem mit einer Einteilung versehenen Stab, auf dem senkrecht ein verschiebbarer Stab angebracht war. In seinem „Werk des Rechners“ (Sefer ma'ase ḥoŝeb, 1321) beschäftigte sich Gersonides mit Komplexionen. Bei der Herleitung der Haupteigenschaft $P_{n+1}=(n+1)P_n$ der Anzahl der Permutationen formulierte er erstmalig explizite das Prinzip der vollständigen Induktion (obgleich nicht in allgemeiner Form), das de facto bereits von den Griechen angewandt worden war [33, Bd. VI, S. 43 bis 44].

Ein interessanter Beweis des fünften Postulats ist im „Kommentar zu den Einführungen in die Bücher des Eukleides“ (Beyur ptiḥat sefer Iklidus, vgl. [219]) enthalten. Hierzu sei bemerkt, daß bis zu dieser Zeit die „Elemente“ bereits zweimal ins Althebräische übersetzt worden waren. Der Beweis des Gersonides schließt sich an den Beweis des ibn al-Haitham an, dessen Kommentare zu Eukleides kurz zuvor ebenfalls ins Hebräische übersetzt worden waren, ferner an die Beweise des al-Ḫayyām und des Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (vgl. S. 288ff) Ebenso wie al-Ḫayyām geht Gersonides von zwei Axiomen aus, dem Axiom des Archimedes und dem dem fünften Postulat gleichwertige Axiom: „Eine Linie die (gegen eine andere Gerade), geneigt ist, nähert sich auf der Seite, auf der der spitze Winkel gebildet wird“; dieses ist den Postulaten ähnlich, von denen auch al-Ḫayyām und aṭ-Ṭūsī ausgingen. Der Beweis der Gersonides beruht auf dem Unmöglichkeitsbeweis für die Existenz eines Vierecks, dessen sämtliche Winkel entweder stumpf oder spitz sind. Die Kommentare des Gersonides zu den „Elementen“ fanden jedoch nur unter den jüdischen Mathematikern jener Zeit Verbreitung, und ein neuer Versuch zum Beweis des Parallelenpostulats wurde erst von Christoph Clavius im 16. Jahrhundert unternommen.

Abseits von der Hauptentwicklungsrichtung der Mathematik, gleichsam an der Grenze zwischen Mathematik und Philosophie und sogar, wie man das seinerzeit einschätzte, jenseits dieser Grenze, bewegten sich die Gedankengänge des spanischen Denkers Ramón Lull (etwa 1235 bis 1315 oder 1316). Lull war vor allem Vertreter des Katholizismus und in seiner Philosophie extrem idealistisch. Etwa um 1274 kam er auf den Gedanken, eine allumfassende und nahezu automatische Methode zur Entdeckung von Wahrheiten zu schaffen, die er als die große oder allgemeine Kunst, als die ars magna oder ars generalis, bezeichnet. Diesem Problem widmete er mehrere Dutzend Werke. Außerdem beschrieb er eine Maschine, die aus konzentrischen, mit verschiedenen Begriffen und Zeichen beschrifteten Kreisen bestehen sollte. Die Drehung der Kreise und die Kombination der Termini sollte mechanisch neue Wahrheiten erzeugen. Der Grundfehler Lulls bestand in der Überzeugung, daß die Erkenntnis der Welt rein logisch, rein rationell möglich ist; die Bedeutung der Beobachtung und des Experiments ließ er außer acht. Seine Anschauungen waren recht wirr und seine Maschine primitiv und nutzlos. Er hat jedoch Gedanken geäußert, die, obzwar in mystisches Gewand gehüllt und bis zum Äußersten verallgemeinert, Ideen enthielten, deren

wissenschaftlicher Gehalt erst viel später zu erkennen war. Im 17. Jahrhundert fanden die Anschauungen Lulls eine rationellere Weiterentwicklung in der Lehre von der „characteristica universalis" bei Leibniz, wobei der große Philosoph und Mathematiker ebenfalls die Möglichkeit der Automatisierung des Erkenntnisprozesses verabsolutierte. Heute sind wir in der Lage, in den Gedankengängen Lulls die ersten noch verschwommenen Vorstellungen von der Möglichkeit einer mathematischen Logik und von einer Theorie der mathematischen Maschinen zu erkennen [30, Vol. II].

Thomas Bradwardine. Die Lehre vom Kontinuum. Während des 13. und 14. Jahrhunderts nahm an den englischen und französischen Universitäten die Entwicklung physikalischer Probleme einen breiten Raum ein, wobei als Ausgangspunkt die naturphilosophischen Schriften des Aristoteles und seiner Anhänger in den islamischen Ländern dienten. Besondere Aufmerksamkeit beanspruchten einerseits Probleme der Mechanik, andererseits gewisse Eigenschaften thermischer, optischer und anderer Erscheinungen.

Zu den Pionieren dieser Bewegung gehörte der englische Philosoph und Gelehrte Robert Grosseteste (d. h. der Großköpfige) (etwa 1168—1253) oder Robert von Lincoln: in dieser Stadt war er Bischof. Seine Ausbildung erhielt Robert Grosseteste in Oxford und möglicherweise auch in Paris; er war später Dozent und erster Kanzler der Universität Oxford [219a]. Noch größere Berühmtheit erlangte ein anderer führender Vertreter dieser Richtung, der Schüler Grossetestes, Roger Bacon (etwa 1214—1292), der ebenfalls in Oxford und in Paris studiert und später an beiden Universitäten gelehrt hat. Beide wiesen einen sehr hohen Bildungsstand auf, den sie hauptsächlich aus den Werken griechischer und arabischer Gelehrter geschöpft hatten; beide waren gute Kenner des Aristoteles. Sie waren Universalgeister, denn sie schrieben über Astronomie und über Optik, die zu jener Zeit die wichtigsten Teilgebiete der Physik waren, ferner über den Kalender, dessen Reformbedürftigkeit sie klar herausstrichen (die Reform ist allerdings erst viel später erfolgt). „Das Hauptwerk" (Opus majus) Bacons (1266—1267) stellte zusammen mit zwei Ergänzungen eine ausführliche Enzyklopädie der Wissenschaft des 13. Jahrhunderts dar, wobei die Geographie, die Alchimie usw. mit einbezogen waren.

Die Weltanschauung Grossetestes und Bacons war eingeengt, denn sie unterwarfen die Philosophie den Dogmen der Religion. Doch vertraten sie kühn die neue Richtung einer freieren und rationalistischen Forschung, einer kritischen Behandlung der anerkannten Autoritäten der Naturphilosophie. Bacon mußte seine freigeistigen Gedanken, ferner seine unerschrockene Kritik an den entarteten Sitten der Geistlichkeit und der Oberschichten gegen Ende seines Lebens durch jahrelange Kerkerhaft büßen. Grosseteste und stärker noch Bacon vertraten den für jene Zeit völlig neuen Gedanken, daß die Erkenntnis der realen Welt auf der Beobachtung und dem Experiment beruhen müsse und nicht auf Texten, die von der Kirche gutgeheißen wurden. Ferner schätzten beide Gelehrten die Mathematik als das wichtigste Hilfsmittel der Physik sehr hoch ein. Indem er die Gedanken Galileis vorwegnahm, schrieb Grosseteste: „Alle Ursachen der Naturwirkungen müssen mit Hilfe von Linien, Winkeln und Figuren gegeben sein" [220, S. 293]. Im IV. Teil seines „Hauptwerkes", das die bezeichnende Überschrift „Vom

Nutzen der Mathematik" trägt, lobt Bacon diese Wissenschaft und bezeichnet sie als das Tor und den Schlüssel zu den anderen Wissenschaften. Aus den Werken Bacons geht hervor, daß er mit den „Elementen" und der „Optik" von Eukleides, der „Optik" und dem „Almagest" von Ptolemaios sowie mit verschiedenen Ergebnissen von Archimedes, Apollonios, Zenodoros und anderer Gelehrter vertraut war.

Er begnügte sich aber nicht mit derartigen Erklärungen. Von Bacon stammt z. B. eine Regel, die den Intensitätsgrad einer Mischung zweier Mengen mit verschiedenen Intensitätsgraden ausdrückt; diese Regel stimmt formal mit der kalorimetrischen Formel überein, die im 18. Jahrhundert von Georg Wilhelm Richmann neu entdeckt und experimentiell überprüft wurde [221]. Die Lehre von den Kegelschnitten fand in der Optik Anwendung, die sich auf die Übersetzung des berühmten Werkes von ibn al-Haitham stützte (vgl. S. 257). Das geht insbesondere aus der Optik des polnischen Gelehrten Witelo hervor, der etwa um 1250 seine Ausbildung in Paris erhalten hat und mit dem früher erwähnten Übersetzer Willem von Moerbeke befreundet war. Das Interesse an der Lehre vom Unendlichen und vom Kontinuum wurde durch Probleme der Atomistik geweckt, denen in den Werken des Aristoteles eine zentrale Stellung eingeräumt ist und auf die sich auch ibn al-Haitham in seiner Optik stützte. Auch auf diesem Gebiet war Grosseteste einer der Wegbereiter im mittelalterlichen Europa, der selbst den Standpunkt des mathematischen Atomismus vertrat. Er selbst wirft zumindest die Fragen der Vergleichbarkeit verschiedener Unendlichkeitsstufen auf, und zwar in Gestalt einiger einfachster (divergenter) Reihen [220].

Das experimentelle Fundament der Physik war im 13. Jahrhundert mehr als spärlich. Die Idee einer experimentellen Wissenschaft, ja sogar der Terminus scientia experimentalis, scheint auf Bacon zurückzugehen; sie konnte in größerem Umfange erst viel später verwirklicht werden. Jahrhunderte sollte es noch dauern, bis die Grundlagen des mathematischen Apparates der neuen Naturwissenschaft geschaffen wurden. Zugleich haben die frühen Versuche einer Mathematisierung der Physik die Entwicklung mancher mathematischen Theorien begünstigt, wie etwa die Lehre von den Proportionen, die Lehre vom Kontinuum und die äußerst eigenartige Lehre von den Formlatituden. Auf allen diesen Gebieten wurden beachtenswerte Ergebnisse erzielt, in der Theorie des Kontinuums insbesondere durch den hervorragenden englischen Denker, den Magister Thomas Bradwardine (geb. etwa 1290, gest. etwa 1349). Dieser hat seine Ausbildung am Merton College der Universität Oxford erhalten, an der er etwa 1325—1335 selbst gelehrt hat. Gegen Ende seines Lebens wurde er Erzbischof von Canterbury [222]. Von Bradwardine stammen drei Werke über Mathematik und eines über Mechanik. Die geringste Bedeutung kommt wohl der „Theoretischen Arithmetik" (Arithmetica speculativa) zu, die eine gekürzte Arithmetik des Boethius darstellt. Origineller ist seine „Theoretische Geometrie" (Geometria speculativa); diese besteht aus vier Abschnitten, die jeweils durch entsprechende Definitionen eingeleitet werden. Im ersten Abschnitt werden sternförmige Vielecke betrachtet, die man aus regulären konvexen Vielecken erhält (vom Fünfeck angefangen), indem man deren Seiten bis zu den Schnittpunkten verlängert. Aus diesen sternförmigen Vielecken erster Ordnung (vom Siebeneck an) bildet Bradwardine sternförmige Vielecke zweiter Ordnung usw., indem er jedesmal die Anzahl der Eckpunkte um zwei erhöht. Die Summe

der Winkel eines jeden ersten sternförmigen Vielecks beliebiger Ordnung ist gleich zwei rechten und erhöht sich jedesmal um zwei rechte bei Hinzunahme eines weiteren Eckpunktes. Die Untersuchung der sternförmigen Vielecke ist ein völlig selbständiger Beitrag von Bradwardine zur Wissenschaft. Die Winkelsumme des sternförmigen Vielecks war etwas früher von Johannes Campanus bestimmt worden.

Im zweiten Abschnitt beschäftigt sich Bradwardine mit den isoperimetrischen Eigenschaften der Vielecke des Kreises und der Kugel, wobei er sich im wesentlichen auf eine anonyme lateinische Übersetzung aus dem Arabischen stützt, die auf dem Werk von Zenodoros beruht. Der dritte Abschnitt ist der Verhältnislehre gewidmet. Hier ist die Rede von der Irrationalität von $\sqrt{2}$ als vom Verhältnis der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite; ferner wird hier die „Kreismessung" des Archimedes erwähnt als ein Werk, in dem sich schwierige und komplizierte Stellen häufen. Aus diesem werden die Sätze zitiert, wonach der Flächeninhalt eines Kreises gleich dem eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem halben Kreisumfang und dem Halbmesser als Katheten ist. Des weiteren findet der Näherungswert $\pi = \frac{22}{7}$ Erwähnung. Im vierten Abschnitt geht es um die Existenz von nur fünf regulären Vielflachen. Ferner wird hier unter Verweis auf Averroës (Ibn Rušd) das Problem der Auffüllung des Raumes durch irgendwelche kongruenten regulären Körper untersucht. Averroës hatte darauf hingewiesen, daß eine derartige Auffüllung nicht nur mit Hilfe von Kuben, sondern auch mit Hilfe von Tetraedern möglich ist. Einige Sätze über Kugelkreise schließen an Theodosios an.

Im zweiten Abschnitt der „Theoretischen Geometrie" ist der Behandlung des Problems des Kontingenzwinkels viel Platz eingeräumt. Sowohl für Bradwardine als auch für Johannes Campanus ist der Kontingenzwinkel eine Größe, die zu den geradlinig begrenzten Winkeln in einem gewissen irrationalen Verhältnis steht, das allerdings vom irrationalen Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite verschieden ist.

Die „Theoretische Geometrie" des Bradwardine wurde von den Mathematikern des 14. und 15. Jahrhunderts sehr hoch eingeschätzt. Sie wurde nahezu 150 Jahre nach dem Tode von Bradwardine, im Jahre 1495, gedruckt und erlebte bald darauf zwei weitere Auflagen. Das arithmetische Lehrbuch wurde seit den Jahren 1494 und 1496 insgesamt zwölfmal aufgelegt.

In der „Abhandlung über Proportionen oder über Geschwindigkeitsverhältnisse bei Bewegungen" (Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus) aus dem Jahre 1328 verdient der Versuch Bradwardines das größte Interesse, den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v, der bewegenden Kraft F und dem Widerstand R mathematisch auszudrücken [223]. Der englische Gelehrte unterzieht die Behauptung der Peripatetiker, nach der modern gesprochen die Geschwindigkeit dem Verhältnis der bewegenden Kraft zum Widerstand proportional ist, einer Kritik. Wir wollen die scharfsinnigen Überlegungen, die zum Teil die spätere Argumentation Galileis vorweggenommen haben, aber auch die Tatsache übergehen, daß die Begriffe der Geschwindigkeit und Kraft selbst noch äußerst verschwommen waren. Wesentlich ist, daß Bradwardine zu einem neuen Bewegungsgesetz gelangt, indem er den Text des Aristoteles auf seine Weise interpretiert. Nach Aristoteles wird beim Ver-

doppeln, Verdreifachen usw. des Verhältnisses $\frac{F}{R}$ auch die Geschwindigkeit verdoppelt, verdreifacht usw. Bradwardine nimmt an, daß hier die Bildung eines zusammengesetzten doppelten, dreifachen usw. Verhältnisses vor sich gehen müsse, und zwar, wenn das Verhältnis der Kraft zum Widerstand wie eine geometrische Reihe wächst, nimmt die Geschwindigkeit wie eine arithmetische Reihe zu oder, in unseren Bezeichnungen $\frac{F}{R} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^v$. Hierbei sind F_1 und R_1 eine gewisse Anfangskraft und ein gewisser Anfangswiderstand mit der Nebenbedingung $\frac{F_1}{R_1} > 1$ [223*a*, 223*b*]. Im Zusammenhang mit mechanischen Betrachtungen wird die Lehre von den zusammengesetzten Proportionen ausführlich dargelegt, wobei sich Bradwardine der Idee gebrochener Exponenten nähert. Hatte man in der früheren Theorie der Verhältnisse mit doppelten, dreifachen und anderen ganzzahligen Verhältnissen operiert, die dem Quadrieren, dem Erheben in die dritte Potenz usw. entsprechen, so führt Bradwardine das „halbe" Verhältnis ein, das $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ entspricht. Er wußte nicht, daß er in dieser Hinsicht bereits vor langer Zeit einen Vorgänger in Gestalt des Archimedes gehabt hat, der vom „anderthalbfachen" Verhältnis $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$ gesprochen hatte. Unter dem Einfluß des Bradwardine sollte sowohl die mittelalterliche Mechanik als auch Lehre von den gebrochenen Verhältnissen bald darauf bei Nicole Oresme zu einer breiten Entfaltung gelangen.

Die „Abhandlung über das Kontinuum" (Tractatus de continuo), die in der Zeit von 1328 bis 1335 entstand, ist der Lehre vom Stetigen und Diskreten gewidmet, die an der Grenze zwischen Physik, Mathematik und Philosophie liegt [224]. Die europäischen Gelehrten kannten aus den Werken des Aristoteles und der arabischen Philosophen verschiedene Gesichtspunkte, unter denen das Problem der Struktur des Kontinuums beleuchtet wurde. Bradwardine nennt fünf verschiedene Auffassungen, die früher und zu seiner Zeit verbreitet waren. „Die einen", schreibt er, „wie Aristoteles, Averroës und die meisten Zeitgenossen behaupten, das Kontinuum bestehe nicht aus Atomen, sondern aus Teilen, die sich ohne Ende teilen ließen. Andere hingegen sagen, es bestehe aus Indivisibeln, und zwar auf zweierlei Art, denn Demokrit nimmt an, das Kontinuum bestehe aus unteilbaren Körpern. Andere nehmen an, es bestehe aus Punkten. Auch die letzte Auffassung zerfällt in zwei, denn Pythagoras, das Haupt dieser Richtung, Platon und unser Zeitgenosse Walter nehmen an, das Kontinuum bestehe aus einer endlichen Anzahl von Indivisibeln, die anderen, es bestehe aus einer unendlichen Anzahl solcher. Auch diese (zuletzt genannten) zerfallen in zwei Gruppen, denn die einen, wie unser Zeitgenosse Heinrich, behaupten, das Kontinuum bestehe aus unendlich vielen Indivisibeln, die unmittelbar miteinander verbunden wären, während die anderen, wie (Robert) von Lincoln, glauben, es bestehe aus einer unendlichen Anzahl solcher, die mittelbar miteinander verbunden wären" [224, S. 402 bis 403, russisch].

Bei den von Bradwardine erwähnten Zeitgenossen handelt es sich um den Engländer Walter Catton (gest. 1352), den Oxforder Gelehrten Henry Harclay (gest. 1317) und um Robert Grosseteste. Auch Roger Bacon beschäftigte sich mit diesem Problem, wobei er den Standpunkt der Peripatetiker vertrat. Der Meinung, das Kontinuum bestehe aus unteilbaren Teilen, setzte er nach dem Vorbild der Antike folgende Über-

legung entgegen: Besteht die Ebene aus Punkten, so ist die Diagonale des Quadrats seiner Seite gleich, da beide aus der gleichen Anzahl von Punkten bestehen. Andererseits ist aber die Diagonale der Seite nicht gleich, weshalb die Ebene somit nicht aus Punkten besteht.

Auch Bradwardine vertrat die Auffassung des Aristoteles. Seine Argumentation ist ausführlich und in vieler Hinsicht originell. Das Buch beginnt mit Definitionen, an die sich Sätze und Folgerungen anschließen, die als Sätze bewiesen werden. Das Kontinuum ist eine Menge, deren Teile miteinander verbunden sind. Einzeln werden das bleibende Kontinuum und dessen Teile definiert, und zwar der Körper als bleibendes Kontinuum, das Länge, Breite und Tiefe besitzt, sowie die Fläche und die Linie. Die Zeit ist das aufeinanderfolgende Kontinuum, das die Aufeinanderfolge mißt. Es werden die Definitionen des Punktes als einer unteilbaren Größe, die eine Lage besitzt, und des Augenblickes gegeben. Die Bewegung ist der Durchgang des räumlichen Kontinuums durch das zeitliche. Ferner wird zwischen zwei Arten des Unendlichen, der kategorematischen und der synkategorematischen, unterschieden. Sieht man von gewissen Nuancen in den Gedanken ab, so handelt es sich bei der ersten um die unerreichbare aktuale transfinite, bei der zweiten um die potentielle Unendlichkeit, die aus einer endlichen Größe durch unbegrenzte Vergrößerung hervorgeht, ähnlich wie die aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen über alle Grenzen wachsen.

Seinen Standpunkt faßt Bradwardine in folgenden Worten zusammen: „Die Behauptung, derzufolge des Kontinuum aus endlich vielen indivisiblen Teilen besteht, ist allen Wissenschaften feindlich, bekämpft sie alle und wird daher von ihnen allen einmütig abgelehnt" [224, S. 411]. Aus der großen Zahl der Argumente gegen die finit-atomistische Auffassung wollen wir lediglich eines nennen, das vom Experiment ausgeht. Stellt man sich vor, daß die Anzahl der Punkte eines Kreisdurchmessers endlich ist, also etwa 10 beträgt, so wird auch der Halbkreis ebensoviele Punkte enthalten, was einem klar wird, sobald man in jedem Punkt des Durchmessers eine Senkrechte errichtet. Man erhält so, daß die Länge des Kreises doppelt so groß ist wie die des Durchmessers. Dieser Überlegung stellt Bradwardine einige theoretische Ausführungen gegenüber, doch begnügt er sich nicht damit und beruft sich auf Zimmerleute, Maurer und alle anderen Meister, deren Erfahrung die Fehlerhaftigkeit ähnlicher Überlegungen zeigt.

Bei seiner Kritik der infinit-atomistischen Auffassung versucht Bradwardine zu zeigen, daß sich aus dieser widerspruchsvolle Folgerungen ergeben. Er konstruiert Beispiele, in denen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen unendlicher Mengen hergestellt wird. So werden die Punktmengen zweier verschiedener Strecken c und f, $c > f$, betrachtet, die (mit verschiedenen Geschwindigkeiten) in der gleichen Zeit h durchlaufen werden. Dann wird jedem Augenblick je ein Punkt auf diesen Strecken entsprechen, weshalb sie beide gleich viele Punkte haben müssen. Durchläuft man hingegen die Strecke c in derselben Zeit h und die Strecke f in einer größeren Zeit k, so folgt daraus, daß f mehr Punkte enthält als c. In der gleichen Weise läßt sich zeigen, daß f weniger Punkte hat als c.

Bei der Betrachtung dieser und ähnlicher Paradoxa nähert sich Bradwardine mengentheoretischen Problemen. In anderen Fällen finden wir bei ihm eine Vorweg-

nahme der Idee der Indivisibelnmethode von Bonaventura Cavalieri (1635) sowie der Argumente, die später die Gegner dieser Methode ins Feld geführt haben. So folgt nach der Meinung von Bradwardine aus der von ihm kritisierten Lehre das nachstehende Paradoxon: Ein endliches Flächenstück kann in einem beliebigen endlichen Verhältnis ein gleichgroßes Flächenstück übertreffen. In der Tat, bekanntlich hat ein Parallelogramm die gleiche Fläche wie ein anderes Parallelogramm mit der gleichen Grundlinie und der gleichen Höhe. Wir legen (Abb. 108) im Parallelogramm *cgke* durch sämtliche Punkte der Grundlinie *ce* „sämtliche Geraden" zu den Punkten der gegenüberliegenden Seite *gk*, und zwar parallel zu *cg*. Solcher Geraden gibt es ebensoviele wie der zugehörigen Senkrechten im Rechteck *cafe*. Die Geraden im Parallelogramm übertreffen aber die Senkrechten im Rechteck im Verhältnis *cg*:*ca*. Bestehen Flächenstücke aus Linien, so folgt daraus, daß sich die Flächeninhalte der flächengleichen Figuren Parallelogramm und Rechteck wie *cg*:*ca* verhalten.

Ähnlich läßt sich zeigen, daß das Dreieck *dec*, dessen Grundlinie zwei Seitenmitten des gleichseitigen Dreiecks *abc* verbindet und dessen Fläche ein Viertel der Fläche des großen Dreiecks ausmacht, den gleichen Flächeninhalt hat, wie die Hälfte des großen Dreiecks, denn (Abb. 109) jede Linie in *dec*, die durch die Spitze *c* hindurchgeht, ist gleich der Hälfte der entsprechenden Linie in *abc*. Bradwardine schließt nun: „Kein Kontinuum läßt sich aus unendlich vielen Indivisibeln integrieren (integrari) oder Zusammensetzen" und „jedes Kontinuum setzt sich aus unendlich vielen Kontinua der gleichen Form zusammen" [244, S. 439]. Wir wollen noch bemerken, daß viel später, im 17. Jh., die Brüder Jakob und Johann Bernoulli und Leibniz den allen bekannten Terminus „Integral" eingeführt haben.

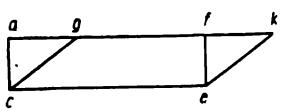


Abb. 108

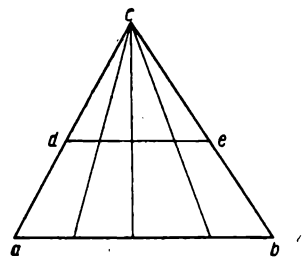


Abb. 109

Die Überlegungen des Bradwardine über das Stetige und das Unendliche waren nicht etwa darauf gerichtet, irgendwelche Algorithmen zur Lösung bestimmter Aufgaben aus der Geometrie und Physik zu schaffen. Ihm ging es ebenso wie anderen in gleicher Richtung tätigen Scholastikern darum, mit Hilfe der Mathematik einige sehr allgemeine quantitative Eigenschaften des Raumes, der Zeit und der Bewegung zu klären, ohne über die Grenzen der aristotelischen Philosophie weit hinauszugehen. Obwohl hierbei keine konkreten mathematischen Ergebnisse erzielt worden sind, so haben doch seine Diskussionen über die Natur des Kontinuums die Entwicklung der Infinitesimalrechnung im 17. Jahrhundert beeinflußt.



Abb. 110. Nicole Oresme bei der Arbeit. Rechts steht eine Armillarsphäre (aus Oresmes französischer Übersetzung des Aristotelesschen Werkes über das Weltall. Handschrift aus dem 14. Jh.).

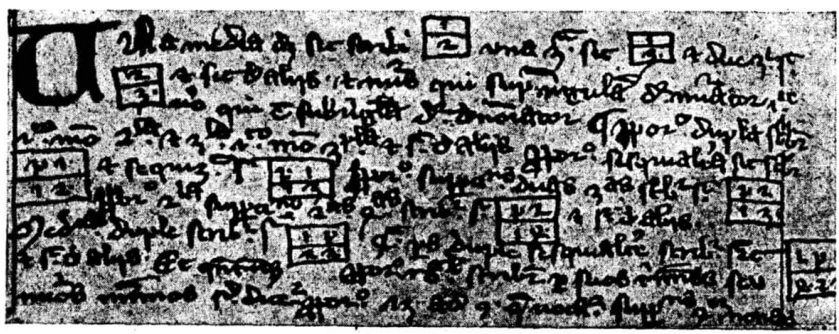


Abb. 111. Teilwiedergabe der ersten Seite aus dem „Algorithmus der Proportionen" von Nicole Oresme (Handschrift aus dem 14. Jh.).

Nicole Oresme und die Lehre von den gebrochenen Verhältnissen. Ähnlich wie England hat auch Frankreich im 14. Jahrhundert einen hervorragenden Mathematiker aufzuweisen, der seine Zeitgenossen weit übertraf. Es war der Doktor Nicole Oresme (etwa 1323—1382), der von 1348—1361 am Collègede Navarre in Paris lehrte, später hauptsächlich in Rouen wohnte und seit 1377 Bischof in Lisieux war. Oresme war ein außerordentlich aufgeschlossener Mensch, der an den Tagesfragen seiner Zeit lebhaften Anteil nahm. Er war einer der ersten, der wissenschaftliche Literatur in französischer Sprache abfaßte, und hat mehrere Übersetzungen der Werke des Aristoteles geliefert. In französischer Sprache schrieb er die "Abhandlung über die Kugel" (Traité de l'espère). Dabei hat er die französische wissenschaftliche Terminologie außerordentlich bereichert. Er trat gegen die Übergriffe der Kirche auf, ferner gegen Astrologie und Wahrsagerei, obwohl er selbst noch an die Magie glaubte. In einem besonderen Werk über das Geld verurteilte er die von den Regierungen verfügte Wertminderung der Münzen, die zur Senkung des Lebensstandards führte und ökonomische Schwierigkeiten hervorrief. Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß auch Kopernikus eine politisch-ökonomische Abhandlung über das Geld verfaßt hat. Verschiedene Werke Oresmes sind der Astronomie und Mechanik gewidmet.

Uns interessiert vor allem die von Oresme entwickelte Verhältnislehre, der er zwei Werke widmete. Die „Abhandlung über Proportionen" (De proportionibus proportionum), die etwa 1350 entstanden war, enthielt noch keine neuen Gedanken. Es war kein außergewöhnliches Werk, das etwa 1500 erstmalig im Druck erschien und dann im Jahre 1505 in Venedig wieder aufgelegt wurde. Von hervorragender Bedeutung hingegen ist sein „Algorismus der Proportionen" (Algorismus proportionum [225]) (Abb. 111). Im ersten Teil dieses Werkes führt Oresme neben doppelten, dreifachen und allgemein n-fachen Verhältnissen Viertelverhältnisse, anderthalbfache Verhältnisse und andere gebrochene rationale Verhältnisse ein, die wir heute in der Form $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{1\frac{1}{2}}$ usw. schreiben würden. Aus der Tatsache, daß $8 = \sqrt{64}$ und $4 = \sqrt[3]{64}$ ist, schließt er, daß 8 im anderthalbfachen Verhältnis zu 4 steht, wofür wir $8 = 4^{\frac{3}{2}}$ schreiben würden. Er selbst schreibt das in der Form $\boxed{\frac{p \cdot 1}{1:2}}\,4$ (p ist der erste Buchstabe des Wortes proportio). Die gebrochenen Verhältnisse bezeichnete Oresme als irrational; diesen Terminus hatten früher Johannes Campanus und Bradwardine benutzt. Sodann formuliert Oresme in Worten zahlreiche Regeln für das Operieren mit gebrochenen Verhältnissen, etwa

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}, \quad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}}, \quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{(mp)}{n}\left(\frac{1}{\frac{q}{n}}\right)}$$

usw. Im zweiten und dritten Abschnitt des „Algorismus der Proportionen" sind Beispiele für die Anwendung des Algorithmus in Aufgaben aus der Arithmetik, der Harmonielehre und der Geometrie angegeben. Oresme behandelte den Begriff des irrationalen Exponenten als den eines Verhältnisses, dessen „Bedeutung" weder „ausdrückbar" noch „erkennbar" ist. Solche Verhältnisse lassen sich, wie Oresme schrieb, zwischen „hinreichend nahe gelegenen" ganzen oder gebrochenen Verhältnissen einschließen [11a, S. 429].

Das Problem der arithmetischen Messung beliebiger „Verhältnisse" wurde praktisch erst 250 Jahre später in der Lehre von den Logarithmen gelöst.

Die Schaffung eines formalen Algorithmus der gebrochenen Verhältnisse, d. h. im Grunde genommen die Erweiterung des Potenzbegriffes auf positive gebrochene Exponenten, war eine wichtige Errungenschaft der mittelalterlichen Algebra. Obwohl das zuletzt genannte Werk von Oresme erst im 19. Jahrhundert gedruckt wurde, hat es bereits im Mittelalter Verbreitung gefunden. Insbesondere wurde sein Inhalt teilweise in das „Buch der Verhältnisse" (Liber proportionum) von Hieronimus de Angest (gest. 1538), das im Jahre 1508 in Paris erschien, aufgenommen. Das gleiche gilt für das „Buch über die dreifache Bewegung und Proportionen" (Liber de triplici motu proportionibus annexis[1]) des Portugiesen Alvarus Thomas, das ein Jahr später ebenfalls in Paris erschien, wo der Verfasser des Werkes als Magister an einem Collège wirkte. Die Weiterentwicklung des Algorithmus von Oresme hat dann Nicolas Chuquet zu seiner Angelegenheit gemacht.

Die Theorie der Formlatituden. Ein weiteres mathematisches Werk von Oresme ist einer bemerkenswerten Richtung der mittelalterlichen Mathematik gewidmet, für die man verschiedene Namen hatte: Man sprach von einer Konfiguration der Qualität, von einer Breite der Formen, von einer Gleichmäßigkeit und Ungleichmäßigkeit der Intensitäten usw. In dieser Lehre liegt der Keim für die Idee des funktionalen Zusammenhanges und seiner graphischen Darstellung. Die zugehörigen Begriffe und Methoden haben sich allerdings erst im 17. Jahrhundert endgültig herauskristallisiert.

Die genannte Richtung, die sich in Oxford und in Paris herausgebildet hatte, geht auf die Polemik über den logisch-philosophischen Begriff der „Form" und ihrer Änderung zurück; den Begriff selbst verdanken wir Aristoteles. Der nominalistische Philosoph John Duns, der wegen seiner schottischen Herkunft auch Duns Scotus genannt wurde (etwa 1265 bis 1308) verstand unter einer Form gleichsam eine durch die Sinne wahrgenommene Eigenschaft der Dinge, die früher existierten als allgemeine Begriffe. Er trat gegen die sog. Realisten, d. h. die Anhänger des Thomas von Aquino, auf und vertrat die Mannigfaltigkeit der Formen und deren Veränderlichkeit, wobei er zwischen Intensität oder Verstärkung (intensio) und Remission oder Schwächung (remissio) der Form unterschied. Duns Scotus, den Marx als den ersten Vertreter des Materialismus im Mittelalter bezeichnete, lehrte in Oxford und in Paris.

[1]) Nach dem Vorbild des Aristoteles unterschieden die mittelalterlichen Denker drei Grundformen der Bewegung: Änderung der Qualität, Änderung der Quantität und die Verschiebung oder Ortsbewegung (motus localis).

Die neue Lehre fand sowohl in mathematischer als auch in naturphilosophischer Hinsicht eine recht intensive Weiterentwicklung in dem „Buch der Kalkulationen" (Liber calculationum) von Richard Swineshead, der seine Ausbildung an der Universität Oxford erhalten hatte und im 14. Jahrhundert, ebenso wie Bradwardine, Mitglied des Merton College war; sein Buch entstand etwa zwischen 1328 und 1350 [223a, 223b]. Die Intensität der Form tritt als veränderliche Intensität einer Eigenschaft auf, z. B. als Wärme- oder Kältegrad, als Verdünnung oder Verdichtung, als Geschwindigkeit einer mechanischen Bewegung usw. Durch verschiedene, nicht immer klare Überlegungen analysiert Swineshead Beispiele zur Veränderung der Intensitäten. Diese Analyse ist rein abstrakter Natur, und weder die Voraussetzungen noch die Ergebnisse werden mit realen quantitativen Messungen oder mit experimentellen Daten bzw. Beobachtungen verknüpft. So beweist Swineshead, daß bei gleichmäßigem Wachstum der Intensität die mittlere Intensität in einem gewissen Intervall durch das arithmetische Mittel aus den Intensitäten am Anfang und am Ende gegeben wird. Dieses Ergebnis ist der Integralformel

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,dv = \frac{t_2 + t_1}{2}$$

äquivalent. Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten „Ortsbewegung", die Swineshead als gleichförmig ungleichförmig bezeichnete (uniformiter difformis), wird wie folgt formuliert: „Jeder gleichmäßig gewonnene oder verlorene Zuwachs an Geschwindigkeit entspricht ihrem mittleren Grad (gradus)", oder mit anderen Worten, „deshalb wird der so gewonnene Zuwachs (der Geschwindigkeit) genauso viel durchlaufen wie auch wegen des mittleren Grades (der Geschwindigkeit), wenn irgend etwas sich die ganze Zeit mit diesem mittleren Grad bewegte" [223*a*, S. 298]. Swineshead gibt vier arithmetisch-algebraische Beweise für dieses Gesetz. In einem anderen Beispiel wird die mittlere Intensität unter schwierigeren Bedingungen bestimmt. Die Intensitäten mögen in aufeinanderfolgenden Abschnitten eines Intervalls, nämlich einer Stunde, das gemäß der geometrischen Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ unterteilt ist, wie die Glieder der arithmetischen Reihe $1, 2, 3, \ldots$ wachsen. Dann ist nach Swineshead die mittlere Intensität gleich der Intensität im zweiten dieser Teilintervalle. Wir können dieses Ergebnis durch die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \cdots = 2$$

wiedergeben, die hier erstmalig in der scholastischen Literatur auftritt. Die Griechen kannten nur die unendlich abnehmende geometrische Reihe. Die umfangreiche, in Worte gekleidete Überlegung Swinesheads läßt sich wie folgt wiedergeben: Wird zur Reihe (A) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$, in der jedes Glied gleich der Summe sämtlicher auf dieses folgender Glieder ist, die Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ hinzugefügt, so erhält man dasselbe, als hätte man in der Reihe (A) selbst das erste Glied verdoppelt; wird außerdem noch die Reihe $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ hinzugefügt, so erhält man das gleiche wie durch

Verdoppelung des zweiten Gliedes in (A) usw. Auf diese Weise wird sukzessiv die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\ldots$ gebildet, deren Summe sich schließlich (in fine) als gleich der Summe der Reihe $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 2+\ldots=2$ erweist. Den Umstand, daß die mittlere Intensität endlich ist, obwohl die einzelnen Intensitäten unbegrenzt wachsen, erklärt Swineshead durch die unbegrenzte Abnahme der entsprechenden Teile des Zeitintervalls, wodurch das Anwachsen der Intensitäten kompensiert wird.

Swineshead benutzte mitunter, wenn er von einer Änderung der Qualität sprach, dem Terminus „Strömung (fluxus) der Qualität". Das Wort „Strömung" diente als Synonym für Änderung und Bewegung auch bei anderen Gelehrten, die sich mit „Kalkulationen" (kalkulationes) beschäftigt hatten. Zum Beispiel sagte Oresme, daß ein fließender Punkt (punctus fluens) eine Linie, eine fließende Linie eine Ebene und eine fließende Ebene einen Körper erzeugt [225*a*, S. 100]. Diese Gedanken und Ausdrücke fanden später Eingang in die Literatur über Geometrie und Infinitesimalrechnung im 16. und 17. Jahrhundert, insbesondere in der „Methode der Fluxionen" Newtons (vgl. hierzu den moderen Terminus „laufende Koordinaten"). Das Werk von Swineshaed wurde dreimal aufgelegt: etwa 1477 in Padua, 1498 in Pavia und 1520 in Venedig. Die Leistung von Swineshead war noch im 17. Jahrhundert gut bekannt. In zwei Briefen aus den Jahren 1670 und 1696 äußerte sich Leibniz über ihn als über einen der ersten Gelehrten, die die Mathematik in der Physik verwandt und die Mathematik in die scholastische Philosophie eingeführt hätten.

Gleichzeitig mit Swineshead wurde die Lehre von den Kalkulationen an dem gleichen Merton College von William Heytesbury (etwa 1313–1372) und John Dumbleton entwickelt. Im Laufe der Entwicklung dieser Lehre bildeten sich neue Begriffe und eine entsprechende Terminologie. Von besonderer Bedeutung für die Mechanik und die Mathematik war die Einführung der Begriffe der Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung. Dem ersten Begriff hatte sich bereits Bradwardine genähert und beide Begriffe traten bei Swineshead, Heytesbury und Dumbleton auf. In den „Regeln zur Lösung der Sophismen" (Regule solvendi sophismata, 1335) von Heytesbury heißt es, daß bei ungleichförmiger Bewegung die ungleichförmige oder momentane Geschwindigkeit (velocitas difformis seu instantanea) nicht durch den durchlaufenen Weg gemessen wird, wie etwa die stets gleiche Geschwindigkeit irgendeiner gleichförmigen Bewegung, sondern durch den Weg, den der Punkt durchlaufen hätte, falls er sich im Laufe einer gewissen Zeit mit dem gleichen Grad der Geschwindigkeit bewegt hätte, mit dem er sich im betreffenden Augenblick bewegt [223*a*, S. 241]. Hier gibt es, streng genommen, keine Definition des neu eingeführten Begriffes der Momentangeschwindigkeit, die im Grunde genommen als eine gewisse, an den Anfang gesetzte, nicht auf andere zurückführbare Idee auftritt. Dieser Begriff figuriert aber auch erheblich später, z.B. bei I. Newton, als Ausgangsbegriff, und viele Gelehrte des 17. und 18. Jahrhundert, wie etwa G. Galilei und C. Maclaurin, charakterisierten die Momentangeschwindigkeit nahezu durch die gleichen Ausdrücke wie Heytesbury. Es sei noch hinzugefügt, daß der Geschwindigkeitsbegriff ganz allgemein im Mittelalter anders behandelt wurde als in der Gegenwart. Die konstante Geschwindigkeit

der gleichförmigen geradlinigen Bewegung wurde überhaupt nicht als das Verhältnis des Weges zur Zeit, $s:t$, definiert; dem stand die antike Tradition im Wege, der zufolge nur gleichartige Größen ins Verhältnis gesetzt werden durften. Sowohl in der Antike als auch im Mittelalter betrachtete man zum Vergleich der Geschwindigkeiten zweier Körper entweder die Wege, die in der gleichen Zeit durchlaufen wurden, oder aber die Zeiten, die zum Zurücklegen des gleichen Weges benötigt wurden. Selbstverständlich hatte man dabei klar erkannt, daß die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zweier gleichförmiger Bewegungen im gleichen Verhältnis standen, wie die in der gleichen Zeit zurückgelegten Wege s_1 und s_2 oder aber im umgekehrten Verhältnis der Zeiten t_1 und t_2, in denen der gleiche Weg durchlaufen wurde. Der spezifische Geschwindigkeitsbegriff, der über eine eigentlich physikalische Dimension verfügt, begann nur langsam in den Werken der mittelalterlichen Gelehrten Fuß zu fassen. Es ist klar, daß unter diesen Umständen die Auffassung der Momentangeschwindigkeit als eines Verhältnisses eines infinitesimalen Weges zu einem infinitesimalen Zeitintervall in der Form $\frac{ds}{dt}$ nicht möglich war [223*a*, S. 214, 223*b*; S. 59ff].

Die Beschleunigung bzw. Verzögerung einer Bewegung bezeichnete Heytesbury auch als Intensität bzw. Remission der Ortsbewegung (intensio et remissio motus localis) [223*a*, S. 241][1]. Ferner wird zwischen einer gleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung, bei der in beliebigen gleichen Zeitabschnitten der gleiche Zuwachs an Geschwindigkeit gewonnen oder verloren wird, und einer ungleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung unterschieden. Analoge Charakteristika der Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der Ortsbewegung finden wir auch bei Swineshead.

Die Oxforder „Kalkulatoren" benutzten vornehmlich arithmetisch-algebraische Überlegungen, die in rein verbaler Form angestellt wurden, und griffen fast überhaupt nicht auf anschaulich-geometrische Vorstellungen zurück. Lediglich John Dumbleton stützte sich in seiner „Summe der Logik und Physik" (Summa de logicis et naturalibus) in gewissem Maße auf Zeichnungen. Beim Beweis des Satzes über die gleichförmig beschleunigte Bewegung stellt er z.B. die Geschwindigkeiten als Strecken auf einer Geraden dar.

Eine Weiterentwicklung fand die Lehre von der Intensität der Formen bei Oresme. Sein umfassendes Werk über diesen Gegenstand, das vor 1371 entstand, ist in vielen Abschriften unter verschiedenen Titeln erhalten geblieben: „Über die Konfiguration der Qualitäten" (De configuratione qualitatum), „Über die Gleichförmigkeit und Ungleichförmigkeit der Intensitäten" (De uniformitate et difformitate intensionum), „Abhandlung über die Figuration der Kräfte und das Maß der Ungleichförmigkeiten" (Tractatus de figuratione potentiarum et mensura difformitatum) u.a. [226, 227, 228].

Oresme verlieh dieser Lehre größere Einfachheit und Anschaulichkeit als Swineshead, da er geometrische Bilder der Größen und ihrer Wechselbeziehungen systematisch anwandte. Die Bedeutung der geometrischen Darstellungen betonte Oresme bereits eingangs des ersten Kapitels des Teiles I seiner Abhandlung. Jede einer Messung

[1] Das Wort intensio wurde in verschiedenen Bedeutungen benutzt, hier als Intensität und Intensivierung. Die Terminologie war überhaupt noch ungenügend entwickelt und unklar.

zugängliche Größe außer den Zahlen, sagte er, kann man sich in Form einer kontinuierlichen Größe vorstellen, und zur Messung benötigt man daher Punkte, Linien, Flächen, in denen nach Aristoteles sich Maß und Verhältnis primär äußern; in den übrigen Dingen erkennt man das Maß oder das Verhältnis dadurch, daß man Punkte, Linien und Flächen mit diesen Dingen verstandesmäßig in Beziehung setzt. Die Intensität der Qualitäten kontinuierlicher meßbarer Größen wird in Abhängigkeit von deren Extensitäten gleichsam in Art ihrer Ausdehnungen (von extensio — Ausdehnung) ermittelt, wie etwa die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers mit der für die Bewegung benötigten Zeit in Beziehung gesetzt wird (Teil II, Kapitel VII). Und da wir unter den verschiedenen Formen des Kontinuums am leichtesten und einfachsten die Größen und die Verhältnisse der Linien (gerader Strecken) erfassen, ist die Intensität durch Linien widerzugeben, die man in den Punkten der die Extensität charakterisierenden Geraden anlegt. Die erstgenannten Strecken bezeichnete Oresme als Breiten (latitudo) der Qualitäten oder Formen, während er die Strecken, an deren Endpunkten die Breiten angelegt werden, als Längen (longitudo) bezeichnete. Das Maß der Qualität wurde mitunter auch Grad (gradus — Schritt, Stufe) genannt; ein „Nichtgrad" entspricht der Null. Die Größen der Breiten sind den Intensitäten proportional; man kann sie in beliebiger Richtung anlegen, doch wäre es vorzuziehen, sie senkrecht zu den Linien der Längen verlaufen zu lassen. Somit wird die Abhängigkeit zwischen der Intensität und der Extensität durch eine gewisse ebene Figur dargestellt, die von oben durch eine Linie begrenzt wird. Diese nannte Oresme „Linie des oberen Randes" (linea summitatis) oder „Linie der Intensität" (linea intensionis) (Teil I, Kapitel X). Eine derartige Betrachtungsweise erleichtert naturgemäß die Messung und das Verständnis.

Wenn Oresme von der Größe einer Qualität sprach, betonte er stets den Nutzen der geometrischen Vorstellung: Manche Leute können z. B. nur schwer verstehen, was man sich unter einer gleichmäßig ungleichförmigen Qualität vorzustellen hat, doch gibt es nichts Einfacheres als die anschauliche Tatsache, daß die Höhen eines rechtwinkligen Dreiecks gleichmäßig ungleichförmig sind (Teil I, Kapitel IV).

Zunächst spricht Oresme von den Qualitäten, deren Intensitäten auf die Punkte einer Linie, eines eindimensionalen Kontinuums, verteilt sind; es sind dies die sog. „linearen Qualitäten". Doch existieren auch noch „flächenhafte" und „körperliche" Qualitäten, die auf die Punkte zweidimensionaler oder dreidimensionaler Kontinua verteilt sind. Die Ebenen, d.h. flächenhafte Qualitäten, werden durch Körper mit ebenen Grundflächen dargestellt. Das Problem der Darstellung körperlicher Qualitäten war für Oresme mit außerordentlichen Schwierigkeiten verbunden, und sein Text, in dem man eine gewisse Annäherung an die Vorstellung eines vierdimensionalen Raumes erblicken kann, ist recht unklar [229]. Ganz allgemein schreckte Oresme vor der Vorstellung einer vierten Dimension zurück und lehnte diese daher ab [226, S. 643 und 698].

Im ersten Kapitel des zweiten Teiles macht Oresme nebenbei noch eine interessante Bemerkung. Die Bewegung eines Gegenstandes erfolgt nicht nur in Beziehung zur Zeit, sondern auch in Beziehung zu den verschiedenen Teilen und Punkten des Gegenstandes. Daher besitzt die Bewegung zwei Extensitäten, eine gegenständliche und

eine zeitliche, und eine Intensität oder Geschwindigkeit. Oresme stellt die Extensitäten durch zwei aufeinander senkrechte Geraden in Gestalt eines Kreuzes und die Intensität in Gestalt einer zu den beiden Geraden senkrechten Höhe dar. Die Intensität, als Höhe aufgefaßt, hängt dann sowohl von der Länge als auch von der Breite ab, und kann im Bereich jeder der Extensitäten verschieden variieren [226, S. 678 bis 697[1]). Jedoch haben diese Gedanken, die uns an Koordinaten im Raum und an Funktionen zweier Veränderlicher erinnern, bei Oresme keinerlei Weiterentwicklung erfahren.

Wir wollen hier nur die Lehre von den linearen Qualitäten, insbesondere deren Klassifizierung, betrachten. Oresme unterscheidet drei Grundtypen von Qualitäten.

1. Gleichförmige, mit konstanter Intensität oder Breite; die Abhängigkeit zwischen Intensität und Extensität wird durch ein Rechteck wiedergegeben, d.h. die Intensitätslinie ist eine der Länge parallele Strecke.

2. Gleichförmig ungleichförmige (uniformiter difformis) Intensitäten, bei denen für drei beliebige Punkte auf der Linie der Längen das Verhältnis der Überschüsse der entsprechenden Intensitäten, und zwar der ersten gegenüber der zweiten und der zweiten gegenüber der dritten, gleich ist dem Verhältnis des Abstandes zwischen dem ersten und zweiten Punkt zum Abstand zwischen dem zweiten und dritten Punkt. Die Abhängigkeit zwischen Intensität und Extensität wird durch ein rechtwinkliges Dreieck oder durch ein Viereck mit schräg verlaufender oberer Seite wiedergegeben, je nachdem, ob die Intensitätslinie die Längengerade schneidet oder nicht, oder wie Oresme sagt, ob die Qualität mit einem „Nichtgrad" oder Grad zum Abschluß gelangt (Teil I, Kapitel XI).

3. Die ungleichförmig ungleichförmigen Qualitäten umfassen alle übrigen Qualitäten. Diese ungleichförmig ungleichförmigen Qualitäten gliedert Oresme in zwei Gruppen:

3a. Einfache ungleichförmig ungleichförmige Qualitäten, wenn die Intensitätslinie einheitlich ist und nicht aus mehreren Teilen besteht. Die Intensitätslinie kann dann „rational" wie der Bogen eines Kreises oder einer Ellipse oder aber „irrational" sein und zu irgendeiner anderen beliebigen Kurve gehören. Darüber hinaus kann sie konkav oder konvex sein. Insgesamt unterscheidet Oresme vier Arten der einfachen ungleichförmigen Ungleichförmigkeit (Teil I, Kapitel XIV bis XV). Das Wort Ellipse wird nicht verwendet, sondern Oresme spricht von einer Kurve, deren Höhen den Höhen des Kreisbogens proportional sind. Weshalb Oresme die Ellipsen mit den Kreisen in einer besonderen „rationalen" Gruppe zusammengefaßt hat, ist unklar.

3b. Zusammengesetzte ungleichförmig ungleichförmige Qualitäten, die sich durch Kombination der sechs vorhergehenden ergeben, und zwar zu je zwei, drei, vier, fünf oder sechs. Derartige Kombinationen gibt es $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$, also insgesamt 63 (Teil I, Kapitel XVI). Hier treten bei Oresme auch unstetige Abhängigkeiten auf, und zwar in Gestalt von Treppenkurven, die er als Stufenungleichförmigkeiten bezeichnet (difformitas gradualis). Ferner betrachtet er hier Intensitäten, die aus zwei Strecken, Kreis- oder Ellipsenbogen usw. bestehen (Abb. 112).

---

[1]) Man kann, sagte Oresme, die Intensität wie vorhin als Breite bezeichnen; dann besitzt sie zwei Längen.

Die graphischen Darstellungen der Qualitäten dienen nicht nur zur anschaulichen Vorstellung der Abhängigkeiten, sondern auch zur Untersuchung ihrer Eigenschaften Im Teil II der Abhandlung betrachtet Oresme gesondert die verschiedenen möglichen



Abb. 112. Einige Formen der zusammengesetzten ungleichförmigen Ungleichförmigkeiten bei Oresme

Fälle der Bewegung oder der Strömung (fluxus). Hier erscheint zum ersten Mal ein spezielles Fachwort für die Beschleunigung — velocitatio als der Intensität der Geschwindigkeit, wobei die Beschleunigung selbst sowohl gleichförmig, d.h. konstant, als auch auf verschiedene Weise ungleichförmig sein kann (Teil II, Kapitel V).

Im Kapitel VII des dritten Teiles untersucht Oresme geometrisch die Bewegung im Falle einer gleichmäßig ungleichförmigen Geschwindigkeit, d. h. die gleichmäßig beschleunigte Bewegung, und beweist die Äquivalenz einer solchen und einer gleichförmigen Bewegung mit einer mittleren Geschwindigkeit. Hierzu beweist er die Flächengleichheit des rechtwinkligen Dreiecks *abc* oder des Vierecks *abdc* und des Rechtecks *abgf*, dessen Höhe entweder der halben Höhe des rechtwinkligen Dreiecks oder der halben Summe aus den senkrechten Seiten des Vierecks gleich ist. Die ersten beiden Figuren dienen zur Darstellung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, deren Endgeschwindigkeit entweder Null oder verschieden von Null ist, während das Rechteck die gleichförmige Bewegung mit einer Geschwindigkeit wiedergibt, die der Geschwindigkeit der erstgenannten Bewegung im mittleren Augenblick gleich ist (Abb. 113). Oresme gibt keine Definition für die mittlere oder, wie er sagt, Gesamtgeschwindigkeit (velocitas totalis) und sagt auch nicht direkt, daß die Flächeninhalte der betrachteten Figuren den durchlaufenen Weg darstellen, jedoch folgt diese Auffassung naturgemäß aus seinen Überlegungen und liegt diesen sogar zugrunde. Um die Proportionalität von Weg und Flächeninhalt der Figur, deren Ordinaten die Momentangeschwindigkeiten darstellen, klar wiedergeben zu können, hätte man die Lehre von den infinitesimalen Größen gebraucht. Dessen ungeachtet kann man die überraschende Ähnlichkeit zwischen den Ausführungen Oresmes und dem ausführlicheren Beweis für denselben Satz nicht übersehen, den 250 Jahre später Galileo Galilei gegeben hat (1638).

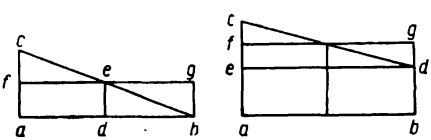


Abb. 133

Im Teil III der Abhandlung werden Beispiele von Bewegungen untersucht, deren Geschwindigkeit sich von Intervall zu Intervall sprungweise oder in noch komplizierterer Weise ändert. Neben der Reihe, die wir bereits bei Swineshead kennengelernt haben (Teil III, Kapitel VIII), werden dort weitere Reihen summiert, z.B. die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{7}{4}.$$

Oresme selbst sagt, daß die Bewegung auf dem ersten Abschnitt des Intervalls $\left(\frac{1}{2}\right)$ gleichförmig erfolgt (d.h. mit konstanter Geschwindigkeit), und zwar mit irgendeinem Grad; im zweiten Abschnitt $\left(\frac{1}{4}\right)$ mit dem genannten Grad beginnend gleichförmig ungleichförmig (gleichmäßig beschleunigt) vor sich geht und einen doppelt so großen Grad erreicht; im nächsten Abschnitt $\left(\frac{1}{8}\right)$ verlaufe sie wieder gleichförmig, im vierten Abschnitt $\left(\frac{1}{16}\right)$ vollziehe sie sich wieder gleichförmig ungleichförmig und erreiche einen doppelt so hohen Grad wie am Anfang dieses Abschnittes usw. (Teil III, Kapitel X).

Die Summation beruht darauf, daß jedes Glied der Reihe mit ungerader Nummer zum nachfolgenden Glied im Verhältnis 4:3 steht, und in dem gleichen Verhältnis 4:3 steht daher die Summe aller ungeraden Glieder, die gleich 1 ist, zur Summe aller geraden Glieder, deren Summe daher den Wert $\frac{3}{4}$ hat.

Indem er die Glieder derartiger Reihen geometrisch darstellt, erhält Oresme unendlich ausgedehnte Figuren mit endlichem Flächeninhalt. Im Falle der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ werden zwei Einheitsquadrate genommen, von denen das eine durch Parallelen zu der einen Seite in Rechtecke mit den Grundlinien $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ zerlegt wird. Dann wird aus dem anderen Quadrat und aus diesen Rechtecken, die in der entsprechenden Reihenfolge so übereinander gebaut werden, daß ihre rechten Seiten eine Gerade bilden, eine sich vertikal ins Unendliche erstreckende treppenartige Figur konstruiert, deren Flächeninhalt der gleiche ist wie der zweier Einheitsquadrate. Durch Drehen der Figur um 90° im Uhrzeigersinn erhält Oresme eine Figur, die sich in horizontaler Richtung ins Unendliche erstreckt. Er deutet diese Figur als Bewegung, die mit einer gewissen Geschwindigkeit im Laufe des ersten Tages erfolgt, mit der halben Geschwindigkeit im Laufe des zweiten Tages usw. (Teil III, Kapitel XI). Hierbei, schreibt Oresme, wird der Körper „erst in der gesamten Ewigkeit (nunquam nisi in eternum) einen Weg durchlaufen, der doppelt so groß ist wie der im ersten Teil der Zeit durchlaufene. Und welchen Abschnitt des durchlaufenen Weges man auch wählen mag, stets wird er kleiner sein als der verdoppelte, am ersten Tag durchlaufene Wegabschnitt" [226, S. 715]. Zum Schluß erläutert Oresme kurz, wie man diese Gedanken auf Körper mit unendlicher Ausdehnung, aber endlichem Volumen überträgt.

Die Abhandlung Oresmes ist nicht im Druck erschienen, doch fand sie in handschriftlichen Abschriften große Verbreitung. An manchen Universitäten wurde bereits am Ende des 14. Jahrhunderts die dann als Lehre von den Formlatituden bezeichnete Theorie als Unterrichtsgegenstand eingeführt. In Italien wurde diese Lehre von Biagio von Parma (Pelacani) (gest. 1416) propagiert und kommentiert. Hier wurde auch die Darstellung der Theorie nach Oresme unter dem Titel „Abhandlung über die Breiten der Formen" (Tractatus de latitudinibus formarum) dreimal gedruckt (und zwar 1482 und 1486 in Padua und 1505 in Venedig). Im Jahre 1515 erschien eine weitere Ausgabe in Wien [229]. In dieser Abhandlung finden wir eine interessante

Bemerkung über das Verhalten einer Größe in der Nachbarschaft ihres größten Wertes. Der Verfasser, wahrscheinlich einer der Schüler oder der unmittelbaren Nachfolger Oresmes, behauptet, daß in einer beliebigen Figur von der Art eines Halbkreises die Intensität mit dem „höchsten Grad der Langsamkeit" (tarditas) schließt, während die Remission mit dem höchsten Grad der Langsamkeit im mittleren Punkt beginnt, wo die Intensität schließt. Daß dieser „höchste Grad der Langsamkeit" nach der Terminologie Oresmes ein „Nichtgrad", d. h. Null, ist, wird dennoch nicht erwähnt. Eine ähnliche Bemerkung hat im Jahre 1615 Kepler gemacht (auf beiden Seiten des Maximums weist die Größe anfänglich eine unmerkliche Abnahme auf). Kurz darauf hat Fermat die notwendige Bedingung für die Existenz des Extremums einer glatten Kurve formuliert[1]). In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, daß Oresme in seinem Werk (Teil I, Kapitel XX bis XXI) sich dem Problem der quantitativen Abschätzung der Krümmung (curvitas) einer Kurve genähert hatte, und daß er insbesondere sagte, die Intensität der Krümmung eines Kreises sei dem Radius umgekehrt proportional. Im allgemeinen sind jedoch seine Ausführungen zu diesem Problem weit davon entfernt, klar zu sein.

In der Reihenlehre stammt von Oresme noch eine bemerkenswerte Entdeckung, und zwar der Beweis für die Divergenz der sogenannten harmonischen Reihe, der in seinem Werk „Questiones super Geometriam Euclidis" [230a] dargelegt ist. Diese Reihe wird in der zweiten „questio" im Zusammenhang mit dem Teilbarkeitsproblem des Kontinuums und der Summation einer unendlichen Menge von Teilen einer kontinuierlichen Größe behandelt. Werden einer Größe a z. B. einer Strecke, sukzessiv deren Teile hinzugefügt, die sich wie $\frac{a}{n}, \frac{a}{n^2}, \frac{a}{n^3}, \ldots$ mit $n > 1$ verhalten, so wird ihre Summe (totum) nie unendlich. Dabei formuliert Oresme die Regel zur Summation einer unendlich abnehmenden geometrischen Reihe. Jedoch kann die Hinzunahme unendlich vieler Teile einer Größe zu dieser, sogar wenn diese Teile unbegrenzt abnehmen, ein unendlich großes „totum" ergeben. Diese Behauptung erläutert Oresme ebenfalls anhand eines Beispiels. Eine Stunde wird in unendlich viele proportionale Teile zerlegt und in jedem dieser Stundenteile werden der Strecke von einem Fuß

[1]) Im Zusammenhang mit dem Auftreten der Idee von der Beschleunigung und der Analyse über das Verhalten einer Größe in der Nähe ihres Extremums in der mittelalterlichen europäischen Literatur ist es interessant zu bemerken, daß sich bereits al-Bīrūnī derartigen Gedankengängen genähert hatte. Im Buch VI seines „Al-Qānūn al-Mas'ūdī" untersucht er die Bewegung der Sonne und sagt hierzu: „Offenbar findet eine Langsamkeit beiderseits des Apogäums statt, und das Minimum der Langsamkeit liegt im Apogäum. Sodann wird die Langsamkeit geringer und geht in eine Schnelligkeit über, deren Maximum im Perigäum erreicht wird. Sodann wird die Schnelligkeit wieder geringer und geht in eine Langsamkeit beiderseits des Perigäums über, da die Langsamkeit und Schnelligkeit im Einklang mit dem Wachstum oder der Verminderung der Differenzen in den Gleichungen vor sich geht" [166. Teil II, S. 666]. Darüber hinaus hat al-Bīrūnī die beschleunigte Bewegung einer mathematischen Untersuchung mit Hilfe von Differenzen (die aus Tabellen unternommen wurden) vorgenommen. Einen Hinweis hierauf finden wir in den letzten Worten des angeführten Zitats. Auf diese Stelle haben W. Gartner und M. Schramm bei einem Symposium in Oxford (1961) hingewiesen [230b, S. 213—214].

Länge nacheinander die Teile von $\frac{1}{2}$ Fuß, $\frac{1}{3}$ Fuß, $\frac{1}{4}$ Fuß usw. hinzugenommen. Das „totum", d. h. die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$, ist dann unendlich, denn die Summe aus $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist größer als $\frac{1}{2}$, die Summe der Teile von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{8}$ ist ebenfalls größer als $\frac{1}{2}$, desgleichen ist es auch die Summe aller Teile von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{16}$ usw. Die Divergenz der harmonischen Reihe (dieser Terminus tauchte im 17. Jh. auf) wurde erneut, unabhängig von Oresme und auf andere Weise von P. Mengoli (1650) bewiesen. Weitere Beweise wurden dann von Johann und Jacob Bernoulli (1689) gegeben. Am einfachsten ist der Beweis des mittelalterlichen Mathematikers. Die anderen Probleme der „Questiones" beziehen sich auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrates, auf die Lehre von den Formlatituden, auf den Begriff des Winkels, dabei auch des Kontigenzwinkels usw.

Einige neue Reihen wurden in dem bereits erwähnten (vgl. S. 402) Werk des Thomas Alvarus summiert, der auch in dieser Beziehung unter dem Einfluß sowohl Swinesheads und Heytesburys als auch Oresmes gestanden hat [203 *a*]. Wie vorhin liegt auch hier die Teilung des Zeitintervalls der Bewegung in Teile zugrunde, die eine geometrische Reihe bilden. Auf die Summation einer abnehmenden geometrischen Reihe wird hier meisterhaft eine Reihe anderer Aufgaben zurückgeführt.

Für Reihen, die wir in der Form

$$1+2x+3x^2+\cdots$$

mit $|x|<1$ schreiben würden, formuliert Thomas im Gegensatz zu seinen Vorgängern eine allgemeine Regel: Die Summe einer solchen Reihe ergibt sich zu $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$. Der Beweis, der auch hier wie in den anderen Fällen fast ausschließlich in Worten und ohne Zuhilfenahme von Zeichnungen geführt wird, besteht in einer Zerlegung der gegebenen Reihe in eine Summe von Reihen $\sum_{n=k}^{\infty} x^n$ mit $k=0, 1, 2, 3, \cdots$, also von Reihen mit den Summen $\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}, \frac{x^2}{1-x}, \cdots$ Dieses Verfahren ist auch dem Studenten heutzutage geläufig.

Sodann werden Reihen der Form

$$1+x+\lambda x^2+\mu x^3+\lambda^2 x^4+\mu^2 x^5+\cdots$$

(die Bewegungsgeschwindigkeit ändert sich in den ungeraden und geraden Zeitintervallen nach zwei verschiedenen Gesetzmäßigkeiten) sowie der Form

$$1+\left(c+\frac{a}{b}\right)x+\left(c+\frac{a}{b\lambda}\right)x^2+\left(c+\frac{a}{b\lambda^2}\right)x^3+\cdots$$

summiert. Hierzu werden Beispiele der Form

$$1+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{19}{16}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{5}{2}$$

und

$$1+3\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+3\frac{1}{10}\cdot\frac{3^2}{5^2}+3\frac{1}{20}\cdot\frac{3^3}{5^3}+\cdots$$

gegeben, deren Untersuchung der Verfasser dem Leser überläßt.

Besonders bemerkenswert ist die Behandlung der Reihen

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \cdots; \quad 1 < \lambda_k \leq k + 1$$

Ihre Summen schließt Thomas zwischen die Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ein. Solche Abschätzungen wendet er an, wenn die Summation ihm nicht gelingt. Auf diese Weise erhält er die Abschätzungen

$$2 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots < 4$$

und

$$3 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \cdots < 9.$$

Wie wir leicht feststellen, gilt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{1-x} + \ln \frac{1}{1-x};$$

Die Summe der ersten Reihe ist also $2 + \ln 2$, die der zweiten $3 + \ln 3$. Die Logarithmen wurden aber erst am Ende des 16. Jahrhunderts und die Entwicklung von $\ln (1 + x)$ erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts entdeckt. Um diese Dinge konnte Thomas selbstverständlich nicht wissen. Er konnte nur erraten, daß Reihen dieser Art oder, wie er sich ausdrückte, die durchlaufenen Räume irrational sind (spacia pertransita irrationalia esse) [230*a*, S. 166].

Die Lehre von den Formlatituden enthielt eine Reihe Momente, die in der Mathematik der veränderlichen Größen im 17. und den nachfolgenden Jahrhunderten ihre Weiterentwicklung erfahren haben. Oresme befand sich an der Schwelle zur analytischen Geometrie von Descartes und Fermat, zur Dynamik Galileis und zur Geometrie der Indivisibeln Cavalieris. Im Mittelpunkt der Lehre Oresmes stand die Vorstellung von der veränderlichen Breite der Form und ihrer graphischen Darstellung. Zu dieser Vorstellung gelangten die hervorragenden Vertreter der scholastischen Wissenschaft durch ihre Versuche, die antike Naturphilosophie und die Naturphilosophie ihrer Zeit von einem neuen Gesichtspunkt aus zu erfassen. Versucht man, die Anschauung Oresmes in der modernen Form wiederzugeben, so entspricht seiner Behandlung der Abhängigkeiten zwischen Breiten und Längen wohl am ehesten unsere Vorstellung von der Funktion des Punktes eines Kontinuums mit ein, zwei oder drei Dimensionen. Allerdings definiert er seine Abhängigkeiten in Worten oder zeichnerisch, denn die unzureichende Entwicklung der Algebra ließ eine Anwendung von Formeln nicht zu, die bekanntlich zum wichtigsten Definitionsverfahren für Funktionen im 17. und 18. Jahrhundert wurden. Und obwohl die graphische Definition einer Funktion für Oresme eine entscheidende Bedeutung hat, ist bei ihm von der Gleichung einer Intensitätslinie nicht die Rede, ja nicht einmal die Rede von den Koordinaten

eines Punktes. Daneben hat Oresme auch eine eigenartige Klassifikation der Funktionen angegeben.[1])

Nach Oresme ist die Lehre von den Formlatituden nicht durch neue Gedanken bereichert worden; sie erstarrte in der Form, die sie in der Mitte des 14. Jahrhunderts erhalten hatte. Die Versuche ihrer Begründer, die Mathematik mit der Naturwissenschaft zu verknüpfen, reichte nicht über die Grenzen allgemeiner abstrakter Spekulationen hinaus. So haben sie nach der Feststellung der Äquivalenz zwischen einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung und einer gleichförmigen Bewegung mit der entsprechenden mittleren Geschwindigkeit dieses Ergebnis nicht etwa auf das wichtige Problem der Bewegung eines geworfenen Körpers angewandt. Die Lehre Oresmes enthielt einige tiefgreifende Gedanken, jedoch war der eigentlich mathematische Apparat zur Lösung konkreter Probleme recht spärlich. Darüber hinaus wurde dieser Apparat zur Untersuchung einzelner, zwar sehr scharfsinniger, jedoch gekünstelter Beispiele eingesetzt, wodurch er im Grunde genommen ins Leere stieß. Von den „Formen" wurden nur die untersucht, die durch gerade Strecken begrenzt werden, während die durch Teile des Kreises oder der Ellipse begrenzten nur als mögliche Formen erwähnt wurden. An eine algebraische Untersuchung der Kurven, die ja das Wesen der analytischen Geometrie ausmacht, war nicht zu denken.

Die Lehre von der Breite der Formen ist ein Beispiel für eine Theorie, in der reiche Möglichkeiten schlummern, die jedoch erstarren mußte, weil ihr einerseits ein lebendiger Kontakt mit der Naturwissenschaft fehlte und weil andererseits der (algebraische) Hilfsapparat ungenügend entwickelt war. Dennoch muß man die Tiefe der Ideen der Menschen hoch einschätzen, die im 14. Jahrhundert bereits, wenn auch in einer unklaren scholastischen Form, gewisse Leitgedanken einer neuen Mathematik der veränderlichen Größen ausgesprochen haben. Über den konkreten Einfluß dieser Lehre auf die Mathematik der neuen Zeit kann man nur schwer urteilen. Man kannte sie und schrieb über sie noch zu Beginn des 16. Jahrhunderts, und es ist durchaus wahrscheinlich, daß einiges von dieser Lehre auch den Gelehrten aus der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts bekannt war. Die Ähnlichkeit mancher Gedankengänge bei Galilei oder Descartes einerseits und bei Oresme andererseits ist augenfällig, obwohl weder der eine noch der andere sich auf Oresme beziehen. Man darf bei Cavalieri eine gute Kenntnis der mittelalterlichen Literatur, insbesondere der Polemik über die Natur des Kontinuums, wohl kaum bezweifeln. Gleichzeitig erhielt die Entwicklung der Mathematik der variablen Größen im 17. Jahrhundert die hauptsächlichsten Antriebe durch die Bedürfnisse der sich rasch entwickelnden Naturwissenschaften und der Technik. Eine Hauptvoraussetzung war hierbei ein gründliches Studium der antiken Klassiker, insbesondere des Archimedes und des Apollonios.

Der Entwicklungsstand der Mathematik in Mittel- und Südeuropa. Durch die Auswirkungen des „Hundertjährigen" englisch-französischen Krieges (1338 bis 1453), der

[1]) Interessant ist die Ähnlichkeit der zusammengesetzten ungleichförmigen Ungleichförmigkeiten Oresmes, die sich bei einer Vermischung (mixtio) von Bogenstücken gleicher Art ergeben, mit den „gemischten Funktionen" (functiones mixtae) Leonhard Eulers, die in verschiedenen Intervallen durch verschiedene analytische Ausdrücke definiert werden.

Bauernaufstände, des Kampfes zwischen England und Schottland und anderer Ereignisse erlitt die Wissenschaft in England und Frankreich einen gewissen Rückschlag, so daß sich das Zentrum der wissenschaftlichen Forschung wieder nach Mittel- und Südeuropa zu verschieben begann. Über den mathematischen Unterricht an den Universitäten in Paris, Wien, Heidelberg u.a. in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts sind uns Dokumente überliefert. Dort wurde z.B. ein halbjähriger Vorlesungszyklus über die ersten Bücher der „Elemente" des Eukleides abgehalten, wofür der Student als Hörergebühr 8 Groschen zu entrichten hatte (der Prager Groschen, der unter Wenzel II. geprägt worden war, war eine große silberne Münze mit einem Gewicht von etwa 3,5 g). Darüber hinaus waren der „Algorithmus der ganzen Zahlen", der „Algorithmus der Brüche", die „Proportionen des Bradwardine", die „Längen der Vorgänge", der „Almagest" usw. Gegenstand der Lehre. Die Unterrichtsmethode bestand im Lesen von Büchern, die sowohl dem Lehrenden als auch den Hörern zur Verfügung standen, wobei die Lektüre durch mündliche Erläuterungen des Lehrers ergänzt wurde. An den Universitäten wurden mitunter mathematische Dispute organisiert, durch die den Studenten Gelegenheit geboten wurde, gleichsam ihre Fortschritte zu zeigen.

Besondere Beachtung verdient die Tatsache, daß allerorts mathematische Werke nicht nur in lateinischer Sprache, sondern auch in den lebenden Nationalsprachen erschienen, die für Kaufleute, Finanzbeamte, Landesvermesser, Meister und Bauleute geschrieben waren. Es handelte sich dabei um Bücher über „praktische Arithmetik" und „praktische Geometrie", die Lösungsregeln für die am häufigsten auftretenden Probleme sowie eingehende Beschreibungen des Rechenganges und eine große Anzahl konkreter Aufgaben enthielten. Bereits Hugues aus der Abtei des heiligen Viktor in Paris (gest. 1141) sagte, daß jede geometrische Lehre entweder theoretisch, d.h. spekulativ, oder aber praktisch, d.h. aktiv, sei; die erste wäre die Grundlage der zweiten, deren sich die Zimmerleute, Schmiede, Mechaniker u.a. bedienten [230*c*]. Besondere Blüte erreichte die Literatur dieser Art, zunächst in Form von Handschriften, später aber auch in Form von Druckerzeugnissen, im 15. bis 17. Jahrhundert. Als Beispiel wollen wir eine reichhaltige Aufgabensammlung nennen, die um die Mitte des 15. Jahrhunderts im Kloster des heiligen Emmeran bei Regensburg verfaßt wurde und etwa 350 Aufgaben zur Dreisatzregel, zur Gesellschaftsregel, zur Mischungsregel, zur Regel zweier falscher Ansätze usw. umfaßte. Diese Aufgaben waren zum Teil in deutscher, zum Teil in lateinischer Sprache, ja zum Teil sogar in einer Kombination aus beiden Sprachen abgefaßt [231]. Im 17. Jahrhundert tauchten Handschriften über praktische Arithmetik auch in Rußland auf; sie enthielten auch geometrische Abschnitte [203]. Früher bereits entstand in Deutschland die sog. „Kulmer Geometrie", ein Leitfaden in fünf Teilen über die praktische Landesvermessung. Sie stammt von einem unbekannten Verfasser aus dem Ende des 14. Jahrhunderts [232]. Der Verfasser benutzte weitgehend die lateinische „Praxis der Geometrie" (practica geometriae), die im Jahre 1346 in Paris von dem Mathematiker und Hofastrologen Dominicus de Clavasio, einem gebürtigen Italiener, abgefaßt worden war.

Die gesamte Vielfalt der italienischen Handschriften aus dem 14. Jahrhundert wollen wir hier nicht betrachten. Es sei nur erwähnt, daß darin algebraische Aufgaben

gelöst werden, in denen die Unbekannte cosa genannt wird, ein Terminus, der durch die Übersetzung des lateinischen res, d.h. Ding, entstanden ist. Das Quadrat heißt quadrato censo oder quadrato oder censo, die dritte Potenz censo cubo oder cubo. Weiter folgen censo di censo und censo di cubo als Bezeichnungen für die vierte und fünfte Potenz. Das absolute Glied wird numero, d.h. Zahl, genannt. Neben der Lösung quadratischer Gleichungen stoßen wir hier auf die ersten Versuche, Gleichungen höherer Grade in Radikalen aufzulösen. Wie wir sehen, beschäftigte man sich damit bereits lange vor dem 16. Jahrhundert, in dem bekanntlich diese Lösung für die kubische Gleichung gelang. In einem Werk eines unbekannten Verfassers wird z. B. die kubische Gleichung

$$x^3 + px^2 + qx = r$$

nach der Regel

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r} - \frac{q}{p}$$

gelöst. Diese Formel ist im allgemeinen nicht richtig, sie gilt jedoch für $p^2 = 3q$, was allerdings in der Handschrift nicht erwähnt wird. Daher ist in dem in der Handschrift angegebenen Beispiel

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000$$

die Lösung $x = 12000 - 20$ richtig. Das Verfahren, nach dem der Verfasser seine Gleichung, für den Leser versteckt, ausgewählt hat, liegt auf der Hand. Auf ähnliche Weise versucht der Verfasser auch Gleichungen vierten und sogar fünften Grades zu lösen. Indessen hat der Scharfsinn dieses unbekannten Algebraikers ihn nicht vor verschiedenen Fehlern bewahrt [21, II].

In Böhmen, an der Universität Prag, entfaltete der Astronom und Mathematiker Jan Šindel aus Hradec Králové (1375—1453) seine Tätigkeit, der auch unter dem Namen Johannes Pragensis bekannt geworden ist. Ein anderer Prager Mathematiker Křišťan aus Prachatitz (etwa 1366 bis 1439) verfaßte etwa 1400 den „Prosaischen Algorismus" (Algorismus prosaycus). Etwas später wirkte Martin aus Lenczice bei Warchau (etwa 1405 bis 1463) an der Universität Prag als Professor der mathematischen Wissenschaften. Der hervorragendste Mathematiker Böhmens jener Zeit war jedoch Johannes Widmann, von dem später noch die Rede sein soll [233].

An der Universität Krakau wirkte in der Mitte des 15. Jahrhunderts Martin Krol aus Przemysl, der Verfasser eines Werkes über praktische Geometrie. Albert Blar Brudziewski (1455—1597) war Zögling und später Lehrer an der Universität Krakau, an der er Vorlesungen über Arithmetik, Perspektive und Astronomie hielt und sich insbesondere mit begabten Studenten beschäftigte. In den neunziger Jahren gab es hier 16 Hochschullehrer für Mathematik. In den Jahren 1491 bis 1494 studierte an dieser Universität Kopernikus, der später sein Studium in Italien abgeschlossen hat.

In Österreich hat sich Georg Peurbach (1423—1461) hervorgetan, der als Nachfolger von Johannes aus Gmunden an der Universität Wien Astronomie, Mathematik und auch römische Literatur lehrte. Seine Verdienste liegen hauptsächlich auf dem Gebiet der Entwicklung der Trigonometrie.

Wir hatten bereits einige lateinische Übersetzungen arabischer Werke über Trigonometrie erwähnt; ferner war bereits davon die Rede, daß sich Leo Gersonides mit

dieser Literatur beschäftigt hat. Von der Kenntnis der Elemente der Trigonometrie zeugt die erwähnte „Praxis der Geometrie" des Dominicus Clavasio. In England verfaßte auf der Basis der westarabischen Traditionen Richard Wallingford (etwa 1292 bis 1335) Werke über Trigonometrie; seine Ausbildung hatte er an der Universität Oxford erhalten. Das gleiche gilt für den Lektor der Universität Oxford und Zeitgenossen Wallingfords, John Mauduith. Johannes von Gmunden verfaßte ebenfalls ein spezielles Werk über Trigonometrie. Diese Werke hatten noch verhältnismäßig elementaren Charakter.

Die „Abhandlung zu den Sätzen des Ptolemaios über Sinus und Sehne" (Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis) Peurbachs zeigt, daß der Verfasser ein guter Mathematiker war. Peurbachs Aufgabe war es, neue Sinustafeln aufzustellen. In engem Anschluß an Johannes von Gmunden erläuterte er zu diesem Zweck Rechenverfahren, die er aus lateinischen Übersetzungen des Ptolemaios und aus der westarabischen Literatur entlehnt hatte. Die Tafeln Peurbachs, die er mit einer Schrittweite von 10′ bei einem Radius von 600000 berechnet hat, sind im Manuskriptzustand geblieben, und der gedruckten Ausgabe seiner Abhandlung, die im Jahre 1541 in Nürnberg erschien, wurden die Tafeln seines hervorragenden Schülers Regiomontanus beigegeben.

Für astronomische und geodätische Messungen entwickelte Peurbach ein neues Winkelmeßgerät, das „geometrische Quadrat" (Quadratum geometricum), dessen Beschreibung im Jahre 1516 in Nürnberg veröffentlicht wurde. Es handelt sich dabei um ein Quadrat mit drehbarer Diagonale, die mit Dioptern ausgestattet ist. Die horizontalen und vertikalen Seiten sind in 1200 gleiche Teile geteilt; das Gerät besitzt ein Lot, um es richtig einstellen zu können. Zu diesem Gerät stellte Peurbach eine Hilfstafel der Arcustangenswerte auf.

Der vielseitige deutsche Gelehrte und Humanist Nicolaus Cusanus (1401—1464) war ein Liebhaber der Mathematik. Dieser Sohn des Fischers Krebs aus dem Dorf Cues an der Mosel, der seine Ausbildung an den Universitäten in Heidelberg und Padua erhalten hatte und 1449 Kardinal wurde, beschäftigte sich intensiv mit Astronomie, Geographie, Mechanik, Philosophie, Rechtswissenschaft und auch Theologie. Er hatte eine Kalenderreform vorgeschlagen und eine Karte Europas zusammengestellt. In seinen philosophischen Werken, in denen pantheistische Gedankengänge mit scholastischer Mystik vermengt sind, widmete er auch mathematischen Problemen große Aufmerksamkeit, insbesondere dem Problem des Unendlichen und dem uralten Streit über das Stetige und Diskrete. In den Jahren 1445 bis 1459 schrieb er eine Reihe von Werken über die Rektifizierung des Kreises [234]. Ebenso wie Aristoteles und viele andere war Nicolaus Cusanus davon überzeugt, daß eine exakte Quadratur des Kreises nicht möglich sei. Er ging von dem Werk des Archimedes über die Kreisberechnung aus, das zugleich mit anderen Werken des großen griechischen Gelehrten zu jener Zeit durch Giacobo von Cremona (gest. 1452) ins Lateinische übersetzt worden war, und beschäftigte sich mit einfachen und hinreichend genauen Näherungskonstruktionen. Gemäß seinem Prinzip der „Koinzidenz der Gegensätze" faßt er den Kreis als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten auf. Das wichtigste Ergebnis für die angenäherte Rektifizierung des Kreises läßt sich in unseren Be-

zeichnungen durch die Formel

$$\varphi \cong \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}\left(= \varphi - \frac{\varphi^5}{180} - \cdots\right)$$

ausdrücken. Die Formel liefert gute Näherungswerte mit einem geringen Fehlbetrag. Für $\varphi = 45°$ erhält man z. B. 0,7836 anstelle von 0,7854, wobei der Fehler etwa 0,2 % beträgt.

Die mathematische Ausbildung des Nicolaus Cusanus war unzulänglich, seine scharfsinnigen Überlegungen kleidete er in eine äußerst unvollkommene Form. Die Genauigkeit der angegebenen Regel blieb unbekannt, und von seinen eigenen Näherungswerten von π war nur einer besser als $\frac{22}{7}$. Dadurch zog er sich die Kritik seiner Zeitgenossen, darunter auch des Regiomontanus, zu. Tiefgreifendere Forschungen auf diesem Gebiet wurden am Ende des 16. Jahrhunderts von François Viète und später von Willebrord Snellius vorgenommen. Der zuletzt Genannte hat die Näherungsformel des Nicolaus Cusanus neu entdeckt und außerdem eine entsprechende Näherungsformel mit Überschuß hinzugefügt. Noch bessere einfachere Näherungsformeln fand Christiaan Huygens, der auch eine elegante Konstruktion für den Ausdruck des Nicolaus Cusanus fand. Auch Isaac Newton und andere Gelehrte des 17. und 18. Jahrhunderts haben sich mit diesem Problem beschäftigt.

Der Beginn der Renaissance. „Die moderne Naturforschung ... datiert, wie die ganze neuere Geschichte, von jener gewaltigen Epoche, die wir Deutsche, nach dem uns damals zugestoßenen Nationalunglück, die Reformation, die Franzosen die Renaissance und die Italiener das Cinquecento nennen, und die keiner dieser Namen erschöpfend ausdrückt. Es ist die Epoche, die mit der letzten Hälfte des 15. Jahrhunderts anhebt" [3, S. 7]. Auch im weiteren hebt Engels eine Reihe von Besonderheiten dieser Zeit hervor: die Begründung großer auf der Nationalität basierender Monarchien durch das Königtum mit Unterstützung der Städtebürger, jedoch im Kampf gegen den Feudaladel, den Beginn neuer Klassenkämpfe, gleichzeitig aber auch eine starke Anlehnung an die antike Kultur sowie eine noch nie dagewesene Blüte der Künste und die Entstehung einer neuen Literatur. Nicht nur in Italien, das in dieser Hinsicht ein halbes Jahrhundert voraus war, sondern auch in Deutschland, Frankreich, England, Spanien, Böhmen, Polen und Dalmatien bildeten sich frühkapitalistische Verhältnisse heraus, die Engels wie folgt charakterisiert hat: „... die Erde wurde eigentlich jetzt erst entdeckt und der Grund gelegt zum späteren Welthandel und zum Übergang des Handwerks in die Manufaktur, die wieder den Ausgangspunkt bildete für die moderne große Industrie. Die geistige Diktatur der Kirche wurde gebrochen; ... Es war die größte progressive Umwälzung, die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit" [3, S. 8]. Als theoretische Grundlage für die Entwicklung der Produktivkräfte und als ideologische Waffe des Bürgertums formt sich die wissenschaftliche Naturforschung und gleichzeitig im Dienste dieser vornehmlich die Mechanik der Erd- und Himmels-

körper, es erfolgt „die Entdeckung und Vervollkommnung der mathematischen Methoden" [3, S. 10].

Wie bereits erwähnt, hatte für die Verbreitung und Beschleunigung der Entwicklung der Mathematik und anderer Wissenschaften die Erfindung des Buchdrucks große Bedeutung. Ferner wissen wir, daß im letzten Viertel des 15. Jahrhunderts und vielleicht etwas eher in Deutschland und in Italien die ersten gedruckten Lehrbücher der Arithmetik auftauchten. Etwa im Jahre 1484 wurde eine kurzgefaßte deutsche Geometrie heausgegeben, deren unbekannter Verfasser einige geometrische Grundkonstruktionen erläutert (darunter auch die Konstruktion eines Fünfecks bei konstant gehaltener Zirkelöffnung), wobei er wahrscheinlich die Bedürfnisse der Bauleute im Auge hatte. Danach erfolgte die Herausgabe mathematischer Bücher in Italien, Deutschland, Frankreich und anderen Ländern Europas in immer rascherer Folge; wir hatten bereits mehrfach Gelegenheit, die Ausgaben vom Anfang des 15. Jahrhunderts zu erwähnen.

Eine Besonderheit der Literatur der betrachteten Zeit verdient besondere Erwähnung. Den gesellschaftlichen Notwendigkeiten entsprechend erschienen immer zahlreichere Werke in den lebenden Nationalsprachen, und in diesen Sprachen wurde auch eine wissenschaftliche Terminologie entwickelt. Als Ausnahmefälle tauchten solche Werke auch früher auf, aber erst in den neuen Nationalstaaten begann der eigentliche Prozeß der Schaffung einer nationalen wissenschaftlichen Literatur, die jetzt nicht nur für eine kleine Oberschicht gebildeter Leute bestimmt war, die das Latein beherrschten. Wir werden uns davon überzeugen können, daß manche wichtigen wissenschaftlichen Werke aus dem Ende des 15. Jahrhunderts bewußt deutsch, französisch oder italienisch abgefaßt wurden.

Zu den wichtigsten mathematischen Disziplinen der betrachteten Zeit wurden Trigonometrie und Algebra.

Regiomontanus und die Entwicklung der Trigonometrie. Der herausragende Mathematiker und Astronom in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts war Johannes Müller aus Königsberg (in Coburg), den man latinisiert nach seinem Geburtsort Regiomontanus nannte (1436—1476). Im Alter von 12 Jahren begann er sein Studium an der Universität Leipzig, war dann an der Universität Wien Schüler von Georg Peurbach, um an dieser Universität von 1458 an selbst Vorlesungen abzuhalten. Während einer längeren Reise durch Italien erlernte er die griechische Sprache.

Im Jahre 1464 begann er in Padua Vorträge über den Astronomen Ahmad ibn Muhammad al-Ferghānī zu halten, denen er einen allgemeinen Abriß der Geschichte der Mathematik — den ersten in Westeuropa — vorangehen ließ. Er pflegte zu sagen, daß die Mathematik eine Wissenschaft von den Größen sei und sich in zwei Teile, die Geometrie und Arithmetik, gliedere, je nachdem, ob die betrachtete Größe kontinuierlich oder ein Zahlenwert sei. Die Geometrie sei in Ägypten entstanden, wo sie zur Wiederherstellung der Grenzen des bebauten Landes benötigt worden sei, die bei den immer wiederkehrenden Nilüberschwemmungen verwischt würden. Eukleides von Megara — Regiomontanus verwechselte, wie viele seiner Zeitgenossen, den Verfasser

der „Elemente" mit dem gleichnamigen Philosophen und Zeitgenossen Platons — habe in dreizehn Büchern das vereinigt, was er hier und dort gesammelt habe. Hypsikles habe diesen zwei weitere Bücher hinzugefügt und Boethius habe sämtliche fünfzehn Bücher ins Lateinische übersetzt, den Text hierbei jedoch nicht so wiedergegeben, wie er im Griechischen vorgelegen hätte. (Später haben Adelhard und Alfred und schließlich Johannes Campanus diese fünfzehn Bücher unter dem Namen des Eukleides neu überarbeitet herausgegeben, die ersten beiden elegant und äußerst kurz, der letztere mit größter Klarheit.) Danach folgte Apollonios mit seinen bisher nicht übersetzten „Kegelschnitten" und dann Archimedes, dessen Werke unter Papst Nicolaus V. durch Jakob von Cremona übersetzt worden seien. Im Werk des Archimedes über die Spiralen sei der Versuch unternommen worden, den Kreis als Gerade darzustellen, um damit die Quadratur des Kreises zu gewinnen, womit sich viele alten Gelehrten und auch die berühmtesten Männer seiner Zeit beschäftigt haben. Archimedes selbst habe auch über die Kreisberechnung geschrieben. Apollonios werde, sobald man seine Werke ins Lateinische übersetzt, allgemeine Bewunderung erregen. Um nicht allzu weit abzuschweifen, so erklärt Regiomontanus, wolle er nur noch Eutokios, den Kommentator des Archimedes, Theodosios und Menelaos erwähnen, die über die Kugel geschrieben haben, und er wolle viele Geometer übergehen, deren Werke in verschiedenen Sprachen verfaßt seien. Wo die Arithmetik entstanden sei, könne man schwerlich sagen, denn obwohl Pythagoras durch seine Zahlenkenntnis, die er von den Ägyptern und Arabern übernommen habe, auch unsterblichen Ruhm erlangt habe, so habe doch Eukleides in seinen Büchern VII, VIII und IX, aus denen Jordanus geschöpft habe, eine festere Grundlage geschaffen. Mit ihrer Hilfe habe Eukleides auch die drei hervorragenden Bücher „Über gegebene Zahlen" verfaßt. Die äußerst feinsinnigen dreizehn Bücher des Diophantos habe bisher noch niemand aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt. In ihnen sei die gesamte Blüte der Arithmetik verborgen, und zwar die Kunst der Unbekannten und des Quadrates, die man heute mit dem arabischen Namen Algebra bezeichnet. Im Anschluß daran wandte sich Regiomontanus der Geschichte der Astronomie zu [21, Bd. II, S. 261 bis 262].

Während seines Aufenthaltes in Italien hat Regiomontanus sein Werk „Fünf Bücher über Dreiecke aller Formen" (De triangulis omnimodis libri quinque) [235] verfaßt. Darin werden Aufgaben zur Konstruktion von Dreiecken behandelt, von denen manche nicht konstruktiv, sondern algebraisch gelöst werden, ferner die ebene und sphärische Trigonometrie. Es war dies das erste Werk in Europa, in dem die Trigonometrie weitgehend als eine selbständige mathematische Disziplin aufgefaßt wurde.

Der Hauptteil des Inhalts in der Trigonometrie des Regiomontanus ist aus der arabischen Literatur übernommen und geht auf Nasīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī und einige andere Autoren zurück [170]. Dafür gebührt Regiomontanus das Verdienst, das gesamte riesige Material systematisiert und hervorragend dargeboten zu haben, das er darüber hinaus durch eigene Teilergebnisse und in vielen durch eigene Beweise ergänzt hat. Dieses Werk entstand in den Jahren 1462 bis 1464, jedoch kam der Verfasser selbst nicht mehr dazu, es herauszugeben, so daß es erst im Jahre 1533 in

Nürnberg im Druck erschien. Es hat für die weitere Entwicklung der Trigonometrie eine hervorragende Rolle gespielt [236].

Im Jahre 1464 trat Regiomontanus mit einer Streitschrift gegen Nicolaus Cusanus auf, dem er vorwarf, sämtliche vorgelegten Kreisquadraturen unexakt vorgenommen und die Beweise nicht mathematisch, sondern philosophisch geführt zu haben. Eine weitere scharf polemische Abhandlung des Regiomontanus richtete sich gegen den Übersetzer des „Almagest", Georgios von Trapezunt (1396—1486), der nach der Meinung des Regiomontanus unberechtigterweise Aristoteles über Platon gesetzt habe.

In Italien hat Regiomontanus darüber hinaus Beobachtungen der Mondfinsternisse vorgenommen. Im Jahre 1468 kehrte er an die Universität Wien zurück und wirkte später, einem Ruf des ungarischen Königs Matthias Corvinus folgend, in Ofen (dem heutigen Teil Buda von Budapest), wo er astronomische Tafeln zusammenstellte; dieser Aufgabe hat er später große Bedeutung beigemessen. Im Jahre 1471 gründete Regiomontanus in Nürnberg, wo sein Schüler Bernhard Walther für seinen Lehrer ein Observatorium eingerichtet hatte, eine Werkstatt zum Bau astronomischer Winkelmeßgeräte und eine Druckerei. Regiomontanus beschäftigte sich mit der Aufstellung astronomischer und trigonometrischer Tabellen, mit Übersetzungen und mit dem Druck sowohl fremder als auch eigener Werke. Im Jahre 1475 begab sich Regiomontanus auf Einladung des Papstes nach Rom, um eine Kalenderreform vorzunehmen. Er starb aber bald darauf, und es ist nicht ausgeschlossen, daß ihn die Söhne des Georgios von Trapezunt vergiftet haben.

Die astronomischen Arbeiten des Regiomontanus, die in der Geschichte dieser Wissenschaft eine große Rolle gespielt haben, wollen wir hier außer acht lassen. Erwähnt sei, daß er eine Tafel zur Berechnung der Kathete a des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks nach dem gegenüberliegenden Winkel A und der Hypothenus c gemäß der Formel $\sin a = \sin c \cdot \sin A$ aufgestellt hat. Er selbst nannte diese Tafel „Tabelle mit doppeltem Eingang". Die Größen c und A wurden mit einer Schrittweite von 1° angegeben; die Tabelle besaß Hilfstafeln für die partes proportionales. In einer anderen Tabelle gibt Regiomontanus die Tangenswerte für verschiedene Winkel an, die er einfach als „numeri" (Zahlen) bezeichnete, wobei er erstmalig den Radius zu 100000 angesetzt hat. In einer seiner Sinustafeln, deren Schrittweite 1′ betrug, erzielte er noch höhere Genauigkeit, indem er den Radius mit 10^7 ansetzte (vgl. S. 363).

In einer von Regiomontanus nachgelassenen geometrischen Handschrift werden sternförmige Vielecke untersucht. In seiner zahlreichen Korrespondenz findet man eine Reihe interessanter Aufgaben, die er seinen Freunden stellte [237]. So finden wir in einem Brief an den italienischen Astronomen Bianchini (gest. 1466) eine Aufgabe, in der der Flächeninhalt eines einem Kreis vom Durchmesser 60 einbeschriebenen Vierecks gesucht ist, wenn sich dessen Seiten wie 4:7:13:17 verhalten. Von Interesse ist eine Aufgabe, in der nach einem Maximum gefragt wird. Es ist die erste Aufgabe dieser Art, die wir seit den Griechen kennen. Eine Stange von 10 Fuß Länge ist senkrecht so aufgehängt, daß bis zum Fußboden noch 4 Fuß fehlen. In welcher Entfernung vom unteren Ende der Stange befindet sich der Ort auf dem Fußboden, von dem aus man die Stange unter dem größten Winkel sieht. Der gesuchte Punkt ist

der, in dem ein durch die Endpunkte der Stange hindurchgehender Kreis den Fußboden berührt. Der Lösungsweg des Regiomontanus ist nicht bekannt, wurde jedoch in einer durchaus glaubwürdigen Weise rekonstruiert [21, Bd. II, S. 283]. Unter den Aufgaben zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie, die wir in der Korrespondenz des Regiomontanus finden, fällt eine Aufgabe auf, die auf eine kubische Gleichung führt und die ihr Verfasser nicht lösen konnte. Bemerkenswert ist jedoch sein Hinweis, daß die Lösung einer derartigen Aufgabe die Konstruktion der Sehne eines Winkels von 1° ermöglichen würde, falls man die Sehne eines Winkels von 3° kennt. In den Briefen des Regiomontanus findet man ferner Aufgaben über lineare und quadratische unbestimmte Gleichungen, wobei einige von ähnlichem Typ sind wie wir sie aus dem Orient oder von Leonardo Fibonacci von Pisa her kennen.

Die Anfänge einer symbolischen Algebra. Die Entwicklung des schriftlichen Rechnens und die Schaffung algebraischer Methoden führten in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts zur Herausbildung verschiedener algebraischer Zeichen und zur Entstehung der Elemente eines algebraischen Rechnens. Die ersten Versuche, die Allgemeinheit der algebraischen Methoden symbolisch wiederzugeben, waren, wie wir gesehen hatten, nicht von Erfolg gekrönt. Bei Leonardo Fibonacci von Pisa und Jordanus Nemorarius ging die Symbolik nicht weiter als bis zur buchstabenmäßigen Bezeichnung der Größen, wobei irgendein Prinzip zur Unterscheidung bekannter und unbekannter Größen verschiedener Potenzen usw. völlig fehlte. Nunmehr setzte in der Geschichte der Symbolik eine Umwälzung ein, die vor allem damit zusammenhing, daß Zeichen für die algebraischen Operationen eingeführt wurden. Erst danach konnten die verbal formulierten Regeln durch echte Formeln ersetzt werden, und die allgemeinen algebraischen Ausdrücke wurden selbst zum Objekt der Rechnung. Ein anderes entscheidendes Moment war die Schaffung einer differenzierten Symbolik für verschiedene Kategorien algebraischer Größen. Die Folgen dieser Handhabungsweise sollten weit über die Grenzen der Algebra selbst hinausgehen.

Am Anfang der symbolischen Algebra stehen die Werke des Johann Widmann. Dieser stammte aus der tschechischen Stadt Cheb (Eger), studierte an der Universität Leipzig und hielt an dieser nach Erlangung der Magisterwürde im Jahre 1485 Vorlesungen. Er war offenbar der erste, der algebraische Vorlesungen an einer Universität abhielt. Von Widmann stammt das Werk „Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft", das erstmalig im Jahre 1489 in Leipzig erschien und danach häufig neu aufgelegt wurde. In diesem Werk äußerte sich der Einfluß sowohl des Leonardo Fibonacci von Pisa als auch des Jordanus Nemorarius. In diesem Buch traten erstmalig in einem gedruckten Werk die Zeichen + (plus) für die Addition und − (minus) für die Subtraktion auf. Über den eigentlichen Ursprung dieser Zeichen werden auch bis in die Gegenwart die verschiedensten Mutmaßungen angestellt. Manche leiten sie von den Markierungen auf Warenkisten her, durch die angegeben werden sollte, ob diese Unter- oder Übergewicht aufweisen. Andere wiederum nehmen an, die Zeichen wären indischen Ursprungs. Es ist aber auch durchaus möglich, daß es sich bei diesen Zeichen ursprünglich um Abkürzungen für Wörter handelt und daß insbesondere das Zeichen + aus dem Zeichen & hervorgegangen ist,

das eine Ligatur des lateinischen et darstellt. Einige Jahre zuvor traten die Zeichen + und — in deutsch und lateinisch abgefaßten algebraischen Handschriften auf, die in Dresden aufbewahrt werden (Abb. 114).

Wie alle anderen Werke jener Zeit weist auch das Buch von Widmann eine große Anzahl von Einzelregeln auf, die sämtlich wohlklingende Namen führen und zur Lösung von Rechenaufgaben gleichen Typs dienen. Im algebraischen Teil stützt sich Widmann weitgehend auf frühere Werke, darunter auf deutsche Handschriften



Abb. 114. Zeugnisse vom erstmaligen Auftreten der Zeichen Minus und Plus in algebraischen Handschriften (etwa 1486)

und lateinische Manuskripte unbekannter deutscher Verfasser, die etwa in den sechziger Jahren des 15. Jahrhunderts oder etwas später entstanden sein dürften. In der einen dieser Handschriften sind 24 Regeln angegeben, wovon sich 6 auf die uns bekannten Grundformen des al-Ḫuwarizmī beziehen, während die restlichen Gleichungsformen betrachten, die sich entweder auf die ersten 6 durch Division zurückführen lassen oder aber auf biquadratische bzw. rein kubische und reine Gleichungen vierten Grades führen. In diesen Handschriften sind bereits Ansätze einer eigenartigen Terminologie und Symbolik vorhanden, durch die sich die Algebra in Deutschland im 16. Jahrhundert auszeichnet. Der Verfasser einer solchen Handschrift charakterisiert die Bedeutung der Algebra wie folgt: Er bemerkt, daß man alles, was man mit Hilfe eines Symbols vornimmt, durch das die Unbekannte bezeichnet ist, auch ohne dieses Symbol ausführen kann und daß man früher so verfahren sei, bevor die Algebra erfunden worden sei. Doch habe man hierzu vieler Mittel und Überlegungen bedurft.

Die Algebra selbst wird als die Regel „Algebre" oder „Coss" bzw. „Coß" bezeichnet. Das zuletzt genannte Wort geht aus der italienischen Bezeichnung cosa für die Unbekannte hervor, deren Herkunft sich über das lateinische Wort res bis in die arabische Terminologie zurückverfolgen läßt. In der Form „Coß" wurde es dann zur Bezeichnung der ersten Potenz der Unbekannten und auch für die algebraische Wissenschaft als Ganzes verwendet. Die Unbekannte und deren Potenzen erhielten die Bezeichnung cossische Zahlen. In den Namen und Bezeichnungen der Potenzen der Unbekannten traten zunächst unwesentliche Schwankungen auf, doch zu Beginn des 16. Jahrhunderts hatte die Terminologie und Symbolik der Coß bereits feste Formen angenommen. Wir wollen hier die Tabelle der Termini und Symbole aus dem äußerst populären Buch des Böhmen Christoph Rudolff aus Javor (etwa 1500 bis etwa 1545), „Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coss genennt werden" wiedergeben. Rudolff war in Wien als Privatlehrer der Mathematik tätig und konnte bei der Abfassung seines Werkes aus seiner reichen Erfah-

bo. Haben auch je eine von kürtz wegen mit einem character: genomen von anfang des worts oder namens: also verzeichnet

g dragma oder numerus
ze radix
z zensus
ce cubus
zz zenszenszens
ß fürsolidum
zce zenscubus
ßß bisfürsolidum
zzz zenszenszens
cce cubus de cubo

G. Dragma oder numerus würt hie genomē gleichsam 1. ist kein zal sunder gibt andern zalen ir wesen
G. Radix ist die seiten oder wurtzl eins quadrats.
G. Zensus: die dritt in der ordnūg: ist allweg ein quadrat/entspringt auß multiplicirūg des radix in sich selbst. Darumb wañ radix 2 bedeūt/ist 4 sein zensus.

Abb. 115. Cossistische Zeichen für die Potenzen der Unbekannten im Buch des Christian Rudolff (1525)

dañ ✓4 ist 2. ✓9 ist 3. pungen in einer summa 5

Exempl von communicanten

✓8 zů ✓18 item ✓20 zů ✓45 item ✓27 zů ✓48
fa: ✓50 facit ✓125. fa: ✓147
✓6 2/3 zů ✓41 2/3 it. ✓12 1/2 zů ✓40 1/2 it. ✓8 zů ✓12 1/2
fa: ✓81 2/5 fa: ✓98 fa: ✓40 1/2

Exempl von irracionaln

✓5 zů ✓7 facit ✓ des collects 12 + ✓140
item ✓4 zů ✓13 facit ✓ des collects 17 + ✓208

Abb. 116. Cossistische Zeichen im Buch des Christian Rudolff (1525)

rung schöpfen; sein Buch, das erstmalig im Jahre 1525 in Straßburg erschien, wurde bis in das Jahr 1615 immer wieder neu aufgelegt.

Die Herkunft einiger Termini und Zeichen des Coß ist durchaus bekannt. Das Zeichen für die Konstante, die man Drachme (das arabische dirham) oder Zahl nannte, ist eine Modifikation des Anfangsbuchstabens dieses Wortes, der noch durch einen Schnörkel ergänzt wurde. Das Zeichen für das Quadrat ist der erste Buchstabe des zugehörigen deutschen Wortes, das den lateinischen Terminus genau reproduzierte. Das Zeichen für die Unbekannte, die man auch als das Ding bezeichnete, konnte ebenfalls, eine gewisse Verzerrung vorausgesetzt, aus dem Anfangsbuchstaben hervorgegangen sein. Für die Bezeichnung und den Namen der fünften Potenz kennt man keine befriedigende Deutung [33, II].

Mag die beschriebene Symbolik uns auch ärmlich und umständlich anmuten, so bedeutete sie dennoch einen prinzipiellen Schritt vorwärts. Rudolff hat sie ein wenig weiterentwickelt. Zur Bezeichnung der zweiten Unbekannten in linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten benutzt er z. B. den Frakturbuchstaben q vom Wort quantitas, d.h. Menge. Auf ihn geht auch das moderne Zeichen für die Wurzel zurück, dem allerdings noch der waagerechte Strich fehlte: $\surd$. Die Kubikwurzel bezeichnete er mit $\surd\surd$ und die vierte Wurzel mit $\surd\surd$. In den deutschen Handschriften vom Ende des 15. Jahrhunderts wurde die Quadratwurzel durch einen Punkt vor der Zahl, die Kubikwurzel durch drei Punkte und die vierte Wurzel durch zwei Punkte als Quadratwurzel aus einer Quadratwurzel bezeichnet. Beim raschen Schreiben sind aus den Punkten Striche geworden.

Es sei noch erwähnt, daß Rudolff die cossistische Rechnung mehrfach mit dem Terminus „dieser Algorithmus" bezeichnet.

Die algebraische Symbolik entstand gleichzeitig in Deutschland, Italien und Frankreich und führte auf verschiedenen Wegen zu dem gleichen Ziel. Dieser Prozeß erstreckte sich nahezu über zwei Jahrhunderte und wurde erst durch René Descartes und dessen Nachfolger in seiner Grundkonzeption abgeschlossen.

Leonardo da Vinci. Neue Erfolge in der Entwicklung der Mathematik nach verschiedenen Richtungen zeichneten sich in Italien ab. Immer zahlreicher und zugänglicher wurden die Übersetzungen der antiken griechischen Klassiker. Wir hatten bereits erwähnt, daß Giacobo von Cremona die Werke des Archimedes aus dem Griechischen übersetzt hatte. Georgios von Trapezunt lieferte eine Übersetzung des „Almagest" mit den Kommentaren Theons. In der Druckerei des Deutschen Erhard Ratdolf (etwa 1443 bis 1528), der sich in Venedig niedergelassen hatte, erschien im Jahre 1482 die von Johannes Campanus nach einem arabischen Text vorgenommene Übersetzung der „Elemente" des Eukleides. Es war eines der ersten im Druck erschienenen mathematischen Werke, das auch Zeichnungen enthielt. Diese Übersetzung wurde bald darauf von Luca Pacioli neu herausgegeben (Venedig 1509). In der Zwischenzeit hatte B. Zamberti (geb. etwa 1473, gest. nach 1539) auch noch eine Übersetzung direkt aus dem Griechischen herausgebracht (Venedig 1505). Die Verbreitung der mathematischen Kenntnisse sowie die Entwicklung neuer mathematischer Lehren wurde durch den sich stürmisch entwickelnden Städtebau sowie durch die hohe Blüte

der bildenden Künste gefördert. In der Renaissance zeigten die Architekten, Ingenieure, Künstler und Handwerker verstärktes Interesse für die Mathematik im allgemeinen und für die Lehre von der Perspektive sowie die Proportionenlehre im besonderen. Eine ganze Reihe von Männern, die mit künstlerischen Kreisen in engem Kontakt standen, nahm die Entwicklung der Lehre von der Perspektive in Angriff, wobei die Erfahrungen der Praktiker verallgemeinert wurden. Es wurden die Begriffe des Fluchtpunktes, des Hauptpunktes eines Bildes eingeführt und Methoden für die perspektivische Darstellung eines Gegenstandes nach Grund- und Aufriß entwickelt usw. Rasch entwickelte sich die entsprechende Literatur, die die notwendigen geometrischen Tatsachen vermittelte [238]. Wir wollen hier lediglich drei italienische Werke dieser Art nennen: „Über die Malerei" (Della pictura, 1435) von Leon Battista Alberti (1404—1472), das im Jahre 1511 in Venedig erschien, und „Über die Perspektive beim Malen" (De prospectiva pingendi, etwa 1480) von Piero de Franceschi (1410? bis 1492), dessen Werk über reguläre Körper als Anhang zum Werk Luca Paciolis („Über die göttliche Proportion") (vgl. S. 427) erschienen war. An die Italiener schlossen sich auch Autoren anderer Länder an, so der Franzose Jean Pélerin (1445?—1523?) mit seinem Werk „Über die künstlerische Perspektive" (De artificiali perspektiva), das im Jahre 1505 in Toul erschienen war und vier Jahre später neu aufgelegt wurde; ferner der große deutsche Maler Albrecht Dürer (1471—1528), der speziell für Künstler seine „Underweysung der Messung mit dem zirckel und richtscheyt" geschrieben hatte. Das Werk erschien 1525 in Nürnberg und in lateinischer Übersetzung in Paris im Jahre 1532 sowie in verschiedenen späteren Ausgaben. Die Mathematiker selbst sind an die systematische Erforschung der Lehre von der Perspektive erst später herangegangen.

Unter den Vertretern der italienischen Kunst, die der Mathematik lebhaftes Interesse entgegenbrachten, ragt insbesondere der geniale Künstler, Gelehrte und Ingenieur Leonardo da Vinci hervor (1452—1519). Er beschäftigte sich mit experimentellen Wissenschaften wie Mechanik, Optik und Astronomie und sah in der Mathematik das Vorbild der wissenschaftlichen Beweisführung, während er die Mechanik als das „Paradies der Mathematik" bezeichnete. In seiner „Abhandlung über die Malerei" (Il trattato della pictura, veröffentlicht 1651) empfahl er den Künstlern, sich mit der Wissenschaft zu beschäftigen, darunter auch mit der in seinem Werk behandelten geometrischen Perspektive. Er wies darauf hin, daß der „in die Praxis Verliebte ohne die Wissenschaft einem Steuermann gleiche, der das Schiff ohne Steuer oder Kompaß betrete; denn er könnte nie sicher sein, wohin er fahre". Doch sei auch die Wissenschaft ohne Praxis „einem stehenden Gewässer gleich, in dem das Wasser entweder fault oder in der Kälte einfriert, während der Verstand des Menschen, wenn er nicht angewandt werde, verkümmere". Sein vielbewegtes Leben gab Leonardo nicht die Möglichkeit, seine wissenschaftlichen Ideen voll auszubauen und sie in Form abgeschlossener Werke darzulegen; seine Notizhefte sind jedoch erhalten geblieben, die fragmentarische Aufzeichnungen und Skizzen in größtenteils unvollendeter Form enthalten [239]. Darin wird die mathematische Thematik durch Übungen und Aufgaben repräsentiert, die in irgendeiner Form praktischen Zwecken dienen. Darüber hinaus sind darin einige philosophische Probleme enthalten, die mit

mathematischen Begriffen zusammenhängen. Viel Aufmerksamkeit ist der Ermittlung flächengleicher Figuren und volumengleicher Körper, den sternförmigen Vielecken, der Konstruktion regulärer Vielecke entweder bei gegebener Seite oder bei gegebenem Umkreisradius, häufig mit der Nebenbedingung einer konstanten Zirkelspanne, gewidmet, einem Problem, mit dem sich bereits Abū-l-Wafā beschäftigt hatte. Bei manchen Konstruktionen handelt es sich um Näherungslösungen (z.B. bei der Konstruktion des Siebenecks und Neunecks), und manche Ergebnisse hat Leonardo selbst später als fehlerhaft erkannt. Die Hefte enthalten ferner Untersuchungen über Möndchen, Bemerkungen über verschiedene Kurven einfacher und doppelter Krümmung, über die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises und über die Einführung der Zeichen + und −. Eine angenäherte Quadratur empfiehlt Leonardo unter Zuhilfenahme eines Rades, dessen Dicke der Hälfte seines Radius gleich ist. Rollt man dieses auf einer Ebene, so hat bei voller Umdrehung das abgewickelte Rechteck denselben Flächeninhalt wie die Grundfläche des Radzylinders

$$\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{r}{2};$$

Es ist beachtenswert, daß Leonardo bei der Untersuchung der Schwerpunkte von Figuren und Körpern, z.B. des Halbkreises und des Tetraeders, desgleichen aber auch bei der Bestimmung des Flächeninhalts der Ellipse die Methoden des Archimedes angewandt und damit vieles vorweggenommen hat, womit sich die Gelehrten des 17. Jahrhunderts beschäftigt haben. Er erfand auch einige mathematische Geräte, z.B. den Zirkel zur proportionalen Vergrößerung oder Verkleinerung von Figuren, ein Parabelzeichengerät u.a. Obwohl sich Leonardo theoretisch gegen die Indivisibeln ausgesprochen hat („das, was aktual teilbar ist, ist auch potentiell teilbar, jedoch lassen sich nicht alle potentiell teilbaren Größen auch aktual teilen", „ein Punkt ist nicht Teil einer Linie" und dergl.), so hat er doch praktisch die Methode der Indivisibeln angewandt, wobei er ihr offenbar heuristische Bedeutung beimaß. So hat er z.B. bei der Untersuchung des aus einem Gefäß ausströmenden Wassers das Wasser durch Hirse ersetzt und hierzu folgende Bemerkung gemacht: „Solltest du sagen, daß dieses Experiment nicht gut ist, da das Wasser an sich eine einheitliche und kontinuierliche Größe ist, während die Hirse etwas Diskretes darstellt, so werde ich dir antworten: ich möchte mir diese Freiheit, die ich mit den Mathematikern gemeinsam habe, leisten, und zwar ähnlich wie diese die Zeit in Grade einteilen und diese so aus einer kontinuierlichen Größe in eine diskrete verwandeln, tue ich das Gleiche, indem ich die Hirse oder den Sand dem Wasser gleichsetze".

In der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts war in Italien, das in viele kleine Fürstentümer, jedes mit einer eigenen Universität, zerfiel, die Sitte verbreitet, daß die Universitätslehrer, darunter auch die Mathematiker, häufig von einer Universität zur anderen zogen. Dieser Austausch förderte einen allmählichen Aufschwung der mathematischen Kenntnisse, die durch die erstarkenden kapitalistischen Verhältnisse, die Wirtschaft und Technik immer mehr benötigt wurden. Es erschienen viele mathematische Werke kompilativen Charakters, von denen wir insbesondere das im Jahre 1501 erschienene Werk von Georgius Valla (1430—1499) „Über beständige und vergängliche Dinge" (De rebus expetiendis et fugiendis) erwähnen

wollen; denn es handelt sich hier um das erste Werk in Westeuropa, in dem den Kegelschnitten Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Unter den genannten Wanderlehrern ragt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit Luca Pacioli hervor.

Luca Pacioli. Luca Pacioli (etwa 1445 bis etwa 1514) entstammte kaufmännischen Kreisen, wurde später Mönch und Lehrer für Mathematik an verschiedenen Universitäten. Es ist durchaus möglich, daß er eine Reise durch den Orient unternommen hat. Seine Hauptwerke sind „Summe (der Kenntnisse) über Arithmetik, Geometrie, Verhältnisse und Proportionalität" (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, verfaßt 1487, erschienen 1494 in Venedig) und das auf das Drängen seines Freundes Leonardo da Vinci verfaßte Werk „Über die göttliche Proportion" (De divina proportione, 1497, erschienen 1509 in Venedig). Beide Werke sind in italienischer Sprache abgefaßt [238; 240].

Die „Summe" stellte gleichsam eine Enzyklopädie der mathematischen Kenntnisse jener Zeit dar. Obwohl in der Darstellung der Arithmetik mystische, „pythagoreische" Wendungen auftreten, wie etwa, daß die vollkommenen Zahlen nur deshalb mit der Ziffer 6 oder 8 enden, weil die Guten und Vollkommenen stets eine vorgeschriebene Ordnung einhalten, während die Bedauernswerten in Unordnung leben, oder etwa die Überlegung, daß das Produkt zweier echter Brüche, da es kleiner ist als jeder der Faktoren, scheinbar dem biblischen Wort „liebet euch und mehret euch" widerspricht, propagiert das Buch dennoch progressive mathematische Gedanken. Dort werden verschiedene Methoden für die arithmetischen Grundrechenarten abgehandelt, wobei das Verdoppeln und Halbieren, wie es dort explizite heißt, nicht als selbständige Operationen anerkannt werden. Für die Multiplikation sind acht verschiedene Verfahren angegeben, wobei die Anordnung des Rechenganges häufig recht grotesk anmutet ebenso wie die Namen der einzelnen Verfahren. Unter der Bezeichnung „gelosia" tritt dort z.B. das bereits beschriebene und früher in Indien angewandte Verfahren auf (vgl. S. 111, Abb. 35). Das ist dadurch zu erklären, daß die schriftliche Anordnung der Rechnung an gitterförmige Fensterläden erinnert, die die hinter den Fenstern sitzenden Frauen vor den Blicken der Passanten verbergen.

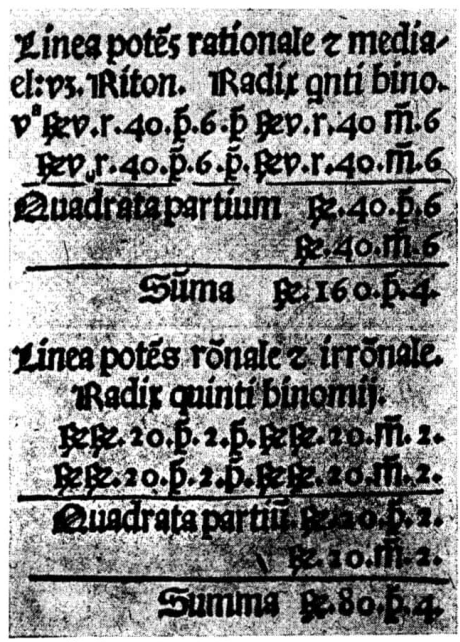

Linea potẽs rationale z media-
el: vs. Riton. Radix quinti bino.
v° ℞v.r.40.p.6.p ℞v.r.40 m.6
℞v.r.40.p.6.p.℞v.r.40.m.6
Quadrata partium ℞.40.p.6
℞.40.m.6
Summa ℞.160.p.4.
Linea potẽs rõnale z irrõnale.
Radix quinti binomij.
℞℞.20.p.2.p.℞℞.20.m.2.
℞℞.20.p.2.p.℞℞.20.m.2.
Quadrata partiũ ℞.80.p.2.
℞.20.m.2.
Summa ℞.80.p.4.

Abb. 117. Algebraische Berechnungen bei Luca Pacioli (nach der Ausgabe aus dem Jahre 1523). Im zweiten Beispiel ist die Abkürzung *u* weggelassen, die besagt, daß das Zeichen $\sqrt{\ }$ zu $\sqrt{20 \pm \sqrt{2}}$ gehört. In der Lösung des zweiten Beispiels steht fälschlicherweise $\sqrt{80} + 4$ anstelle von $\sqrt{80} + 8$.

Solche Fensterläden nannte man „gelosia", offenbar im Zusammenhang mit der anderen Bedeutung dieses Wortes, das ja auch Eifersucht heißt. In Frankreich und später auch in anderen Ländern hat sich dann dafür die Bezeichnung Jalousie eingebürgert. Man darf jedoch nicht annehmen, daß in der Praxis sämtliche Multiplikationsverfahren, deren man eine Unzahl ersonnen hatte, weitgehend angewandt wurden. Pacioli selbst äußert sich abfällig über die Sucht, stets neue Verfahren erfinden zu wollen. Gleichzeitig bürgerte sich unser heutiger Multiplikationsalgorithmus immer mehr ein, und Pacioli beschreibt diesen an erster Stelle unter der florentinischen Bezeichnung „bericuocoli", d. h. Plätzchen oder unter der venezianischen Bezeichnung „scacherii", d. h. Schachbrett.

Ferner erläutert Pacioli sowohl unser modernes Divisionsverfahren als auch das in jener Zeit populäre Verfahren mit Durchstreichen der Ziffern und wiederholtem Eintragen des Divisors. Für die Rechenbeispiele 15750:112 und 15750:144 ist es in Abb. 99 (S. 356) wiedergegeben. Dieses zuletzt genannte Verfahren wird seiner äußeren Anordnung nach als „galea vel batello", d. h. Galeere oder Schiff, bezeichnet. Pacioli hält es für das am raschesten zum Ziel führende Verfahren, ähnlich wie die Galeere das schnellste Schiff sei. In der deutschen Literatur bezeichnete man später dieses Verfahren als Überwärtsdividieren, da die einzelnen Zwischenschritte über den Dividenden geschrieben werden, während das heute allgemein gebräuchliche Verfahren als Unterwärtsdividieren bezeichnet wurde. Das Überwärtsdividieren wurde mitunter auch noch im 18. Jahrhundert angewandt.

Ein großer Teil des Inhaltes der „Summe" ist der Bruchrechnung, der Dreisatzregel, den Proportionen, den Regeln des falschen Ansatzes und auch der Algebra eingeräumt.

Bevor Pacioli zur Algebra überging, die er auch als regula della cosa, d. h. Regel der Unbekannten, oder als arte maggiora, d. h. höhere Kunst, bezeichnete, machte er den Leser mit den algebraischen Symbolen, den caratteri algebraici, bekannt.

Quadratische Irrationalitäten nannte er „surdi" (von ital. sordo = taub) und bezeichnete die Quadratwurzel durch das Zeichen R (vom lateinischen radix oder italienischen radice, d. h. Wurzel) oder $R2$. Für die Kubikwurzel schrieb er $R3$ oder R cuba, für die vierte Wurzel $R4$ oder RR.

Das absolute Glied wurde in den Gleichungen durch das Zeichen n° (numero), die Unbekannte durch *co.* (cosa), deren Quadrat durch *ce.* (censo), deren dritte Potenz durch *cu.* (cubo), die vierte Potenz durch *ce.ce.* (censo censo), die fünfte Potenz durch $p^\circ . r^\circ$. (primo relato), die sechste Potenz durch *ce.cu.*, die siebente Potenz durch $2^\circ \cdot r^\circ$. (secondo relato), die elfte Potenz durch $3^\circ . r^\circ$. (tertio relato) usw. bezeichnet. Der Ursprung des Wortes relato ist unbekannt. Für die zweite Unbekannte, die seinen Worten zufolge früher als cosa seconda bezeichnet wurde, führt er den Namen quantita ein und bezeichnet diese daher mit qp^a. Ähnlich verfuhr später, wie wir gesehen haben, Christoph Rudolff. Unser y^2 hat bei Pacioli die Form *ce. de* qp^a. Die Addition wird durch $\tilde{p}$ bezeichnet, was als plus oder piu gelesen wurde; für die Subtraktion benutzte er das Zeichen $\tilde{m}$, das als minus oder meno wiedergegeben wurde. Obwohl die subtraktiven Größen noch nicht als selbständige negative Zahlen erkannt wurden, sind die Multiplikationsregeln sehr genau herausgearbeitet, und zwar: 1. plus multipliziert mit

plus ergibt plus; 2. minus multipliziert mit minus ergibt plus; 3. plus multipliziert mit minus ergibt minus; 4. minus multipliziert mit plus ergibt minus. Pacioli bemerkt, daß die zweite Regel sinnlos erscheint, denn es sei „klar, daß $\tilde{m}$ 4 kleiner ist als null", doch könne man sie beweisen: 10 $\tilde{m}$ 2 ist gleich 8; das bedeutet, daß 10 $\tilde{m}$ 2 multipliziert mit 10 $\tilde{m}$ 2 64 ergibt; wendet man jedoch die Multiplikation über Kreuz an, so erhalten wir 10 multipliziert mit 10, also 100, sodann zweimal 10 multipliziert mit $\tilde{m}$ 2, was $\tilde{m}$ 40 ergibt, was zusammen 60 liefert; daraus aber folgt, daß $\tilde{m}$ 2 multipliziert mit $\tilde{m}$ 2 die Zahl 4 ergeben muß. Es ist begreiflich, daß die Unzulänglichkeit dieses „Beweises", die man erst im 19. Jahrhundert aufgedeckt hat, Luca Pacioli nicht einmal in den Sinn kam. Da Pacioli die Verwendung von Klammern nicht kannte, schrieb er unseren Ausdruck $\sqrt{40-\sqrt{320}}$ in der Form *R V40 m̃ R320* . Der Buchstabe *V* tritt hier als Anfangsbuchstabe des Wortes universal, d. h. allgemein, auf (in jener Zeit setzte man häufig anstelle von *u* den Buchstaben *v*); denn die Wurzel aus einem Polynom bezeichnete man als radice universale oder auch als legata, was soviel wie verbunden, vereinigt bedeutet. Pacioli beschreibt auch die Regeln für das Rechnen mit Quadratwurzeln, indem er beweist, daß z. B. $\sqrt{10}+\sqrt{40}=\sqrt{90}$ ist.

Pacioli erläutert ferner, daß die Algebra in der „Ergänzung" und „Gegenüberstellung" bestehe, und unterscheidet die gleichen drei uns bereits bekannten „einfachen" und die drei „komplizierten" Formen linearer und quadratischer Gleichungen. Um das Auswendiglernen der Lösungsregeln zu erleichtern, gibt Pacioli diese in lateinischen Hexametern an, die allerdings von keiner allzu hohen Sprachgewandtheit zeugen. Über die Gleichungen $ax=bx$ und $ax^2=bx^2$ sagt er, daß für $a=b$ die Gleichung unbestimmt, für $a \neq b$ hingegen unverträglich sei; die Lösung $x=0$ läßt er außer acht.

Sodann betrachtet Pacioli einige Typen der Gleichungen vierten Grades, die sich auf die vorhergehenden zurückführen lassen, und zwar

$$ax^4=e, \qquad ax^4=dx, \quad ax^4=cx^2,$$
$$ax^4+e=cx^2, \quad ax^4+cx^2=e, \quad ax^4=cx^2+e.$$

Gleichzeitig gibt er die beiden Gleichungsformen

$$ax^4+cx^2=dx \text{ und } ax^4+dx=cx^2$$

mit der Bemerkung „impossibile" (unmöglich) an. Über solche und ähnliche Gleichungen sagt er: Ebenso wie bisher die Quadratur des Kreises nicht gefunden sei, seien bisher auch die Gleichungen nicht gelöst, deren Glieder zueinander in „disproportionalen" Abständen liegen. Gleichzeitig weist er darauf hin, daß man auch Gleichungen höherer Grade auf quadratische Gleichungen zurückführen kann, falls sie den biquadratischen ähnlich gebaut sind.

Die „Summe" enthält auch Aufgaben des kaufmännischen Rechnens, darunter auch solche zur Zinseszinsrechnung. Unter diesen treten wiederum Aufgaben auf, die auf transzendente Gleichungen führen. So wird z. B. gefragt, in wieviel Jahren sich ein Kapital bei Zinsesverzinsung verdoppelt, wozu die Gleichung

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^x=2$$

gelöst werden muß. Als Lösung würden wir

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{n}{100}\right)} \approx \frac{69}{n}$$

anstelle des von Luca Pacioli gewonnenen Wertes $\frac{72}{n}$ erhalten. In einem anderen Falle, in dem eine Aufgabe auf die Gleichung $x \cdot 2^x = 30$ führt, versuchte Pacioli, diese durch Probieren zu lösen, indem er an den Anfang die Abschätzung $3 < x < 4$ setzte. Beachtenswert ist die Tatsache, daß viele Aufgaben, die äußerlich als Aufgaben der Praxis anmuten, bei Pacioli abstraktes Interesse erweckten. In einem Falle z.B., bei dem nach dem Text der Aufgabe (es handelt sich hierbei um eine Anzahl von Reisen) nur eine ganzzahlige Lösung sinnvoll gewesen wäre, gab Pacioli diese in Gestalt komplizierter Quadratwurzeln an, möglicherweise, um mehr Material für Übungzwecke zu haben. Darüber hinaus interessierte ihn beim Rechnen auch das rein Formale.

Im Abschnitt „Ungewöhnliche Aufgaben" formulierte Pacioli eine Aufgabe von der gerechten Aufteilung des Einsatzes beim Würfelspiel, wenn das Spiel vor Beendigung abgebrochen wurde und die Zahl der Augen bekannt ist, die jeder Spieler bis zur Unterbrechung gewürfelt hatte. Die Lösung Paciolis ist falsch, und sogar für einfache Fälle wurde die richtige Lösung erst im 17. Jh. gefunden. Derartige Probleme wurden auch früher aufgeworfen. Eine Abzählung aller möglichen Ergebnisse beim Würfeln mit zwei oder drei Spielwürfeln ohne Berücksichtigung der Permutationen wurde bereits im 10. und 11. Jh. vorgenommen. Der erste bekannte Versuch zur Abzählung aller möglichen Ausgänge beim Werfen dreier Spielwürfel mit Einschluß der Permutation findet man in dem Epos „De Vetula", als dessen Verfasser Richard de Fournival (1200—1250), der Kanzler des Domes zu Amiens gilt. Er bestimmte ganz richtig sämtliche 216 Möglichkeiten. Bei der Untersuchung ähnlicher Aufgaben wurden Methoden und Terminologien entwickelt, die später beim Ausbau der Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. Jh. Verwendung fanden. Würfelkombinationen, die sich nur auf eine Art erzielen ließen, hießen azari (von arabischen azar – schwierig); hiervon leitet sich der Begriff Hasard ab.

In der „Summe" wird den Regeln der doppelten Buchführung viel Aufmerksamkeit geschenkt. Ferner enthält sie Vergleichstabellen für Münzen und Gewichtseinheiten, d.h. alles, was den Bedürfnissen der Zeit enstprach. Im geometrischen Abschnitt seines Werkes lehnt sich Pacioli noch viel stärker als im arithmetisch-algebraischen Teil an Leonardo Fibonacci von Pisa an, jedoch enthält auch dieser Teil von Pacioli stammende Probleme, zu denen etwa die Aufgabe gehört, in eine vorgegebene Figur mehrere einander berührende Kreise einzubeschreiben (z.B. drei gleiche Kreise in ein gleichseitiges Dreieck). Eine Aufgabe, bei der es darum geht, festzustellen, wann sich zwei Personen, die sich auf konzentrischen Kreisen mit Geschwindigkeiten im Verhältnis 12:1 bewegen, wieder treffen, wenn sie ihre Bewegung gleichzeitig begonnen haben, wird auch gegenwärtig noch häufig gestellt, und zwar als Aufgabe über die Koinzidenz von Stunden- und Minutenzeiger bei der Uhr. Bei der Beschäftigung mit regulären Polyedern hat Pacioli seiner eigenen Mitteilung

zufolge deren Modelle konstruiert (offenbar aus Glastäfelchen), und zwar für die Sammlungen einiger Magnaten.

Das Buch „Über die göttliche Proportion", so nach dem „goldenen Schnitt" benannt, ist dem Bauwesen (in Anlehnung an Vitruvius), den fünf regulären Polyedern sowie Polyedern gewidmet, die man aus den erstgenannten durch „Abschneiden" bzw. „Aufsetzen" gewinnt (d.h. durch Abschneiden der Spitzen in Form von Pyramiden oder durch Konstruktion von Pyramiden über den Flächen). Ferner behandelt das Werk die Proportionen des menschlichen Körpers, die in ganzen Zahlen unterhalb 10 ausgedrückt werden. Den goldenen Schnitt behandelt Pacioli nach dem sog. Buch XV der „Elemente" des Eukleides (das in Wirklichkeit von Hypsikles stammt). Die Darstellungen der Vielecke in 59 Tabellen hat Leonardo da Vinci für das Werk seines Freundes gezeichnet, während Luca Pacioli seinerseits die Metallmenge berechnete, die Leonardo für eine Reiterstatue benötigte.

Außer diesen Hauptwerken und einer neuen verbesserten Ausgabe der Übersetzung der „Elemente" von Johannes Campanus (diese Ausgabe aus dem Jahre 1509 sollte nach Paciolis Idee die vier Jahre vorher erschienene Übersetzung des Zamberti ersetzen), schrieb Pacioli auch eine Sammlung unterhaltsamer Aufgaben „für findige Köpfe", in der so bekannte Aufgaben enthalten sind wie die über den Transport von Wolf, Ziege und Kohlkopf, die über die drei Ehepaare, eine Aufgabe über Türken und Christen, ferner über magische Quadrate und näherungsweise Konstruktionen der regelmäßigen Neun-, Elf- und Siebzehnecke.

Nicolas Chuquet. Einen originellen Beitrag zur Algebra leistete in Frankreich der Baccalaureus der Medizin Nicolas Chuquet. Dieser war aus Paris gebürtig und wirkte in Lyon, einem großen Handelszentrum. in dem sich eine starke italienische Kolonie niedergelassen hatte. Dieser Umstand war nicht ohne Einfluß auf die von Chuquet im Jahre 1484 abgeschlossene Handschrift „Die Lehre von den Zahlen in drei Teilen" (Le triparty en la science des nombres). Dieses in französischer Sprache abgefaßte Werk enthält Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen, ferner mit irrationalen Wurzeln und schließlich eine Gleichungslehre. Wie bereits erwähnt, treten in diesem Werk neben dem Wort „Million" auch die Termini „Billion", „Trillion" usw. bis zur „Nonillion" auf.

Erwähnenswert ist auch Chuquets Betrachtung über die arithmetische Folge

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

und die geometrische Folge

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^n.$$

Nachdem er diese Folgen untereinander geschrieben hatte, bemerkte er, daß dem Produkt zweier Glieder der unteren Folge die Summe der beiden darüberstehenden Glieder der oberen Folge entspricht. Man erkennt hier in gewissem Sinne einen Ausblick auf die Eigenschaften der erst später eingeführten Logarithmen, eine Erscheinung, die allerdings auch bei Archimedes bereits zu verzeichnen war. Ebenso wie Pacioli formuliert auch Chuquet die Regeln für das Operieren mit negativen Zahlen und benutzt für die Addition und Subtraktion die Zeichen $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$. Das Zeichen $\tilde{m}$ dient außerdem zur Bezeichnung negativer Zahlen, die Chuquet „ung moins" nennt,

d.h. weniger. Die negativen Zahlen werden bereits im ersten Teil des Buches beim Lösen von Aufgaben der Dreisatzrechnung und zur Regel des falschen Ansatzes benutzt. Noch wichtiger war deren Anwendung, wie wir sehen werden, in der Algebra. Als eigene Entdeckung führt Chuquet die „Regel der Mittelzahlen" an. Er behauptet (ohne Beweis), daß $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ liegt, und wendet diesen Mittelwert bei der Lösung von Aufgaben nach der Methode zweier falscher Ansätze an. So erhält er z.B. für die Gleichung $x^2 + x = 39\frac{13}{81}$ bei $x_1 = \frac{5}{1}$ und $x_2 = \frac{6}{1}$ mit $x_1 < x < x_2$, $x_3 = \frac{11}{2}$, $x_4 = \frac{17}{3}$, $x_5 = \frac{23}{4}$, $x_6 = \frac{29}{5}$ und schließlich $x_7 = \frac{52}{9}$, wobei x_7 sich als genauer Wert erweist. Der Vorteil dieser Mittelwertbildung besteht darin, daß der Nenner nur langsam wächst, obwohl die Rechnung insgesamt gesehen recht mühselig ist. Die Wurzeln bezeichnet er mit $R^2 R^3$ usw. und bemerkt hierzu, daß man „der Ordnung halber" eine gegebene Zahl als Wurzel ersten Grades aus eben dieser Zahl auffassen und dementsprechend mit R^1 bezeichnen könne. Anstelle von Klammern wendet er Unterstreichungen an und schreibt z.B. unseren Ausdruck $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ in der Form $R^2.14.\bar{p}.R^2.180.$ Beim Ausziehen von Quadratwurzeln weist er darauf hin, daß vollständige Quadrate nicht die Endziffern 2, 3, 7 und 8 und Biquadrate nicht die Endziffern 2, 3, 4, 7, 8 und 9 haben können, während die dritten Potenzen mit einer beliebigen Ziffer enden können. Darüber hinaus gibt er für die Zahlen 1 bis 10 die Tabelle der ersten zehn Potenzen an.

Anstelle der früheren Bezeichnung chose, d.h. Ding, führt Chuquet für die Unbekannte den neuen Terminus premier, d.h. erste Zahl, ein, oder aber er bezeichnet sie, falls er die Unbekannte geometrisch deutet, als nombre linear, d.h. lineare Zahl. Analog werden die zweiten, dritten und vierten Zahlen den Potenzen der Unbekannten entsprechend eingeführt. Früher, sagt Chuquet, hätte man sie als Felder (champs), kubische Zahlen (cubics) und als Felder von Feldern bezeichnet. Zur Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten schreibt er oberhalb rechts vom Koeffizienten einen kleinen Exponenten. Unseren Bezeichnungen $12x$, $12x^2$ und $12x^3$ entsprechen bei Chuquet die Bezeichnungen 12^1, 12^2 und 12^3. Dementsprechend schreibt er das absolute Glied einer Gleichung, etwa die Zahl 12, in der Form 12^0, wobei er sagt, solche Zahlen „hätten den Namen null". Anstelle unserer Gleichung $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ schreibt er „.8^3., multipliziert mit .$7^{1.\tilde{m}}$., ergibt .$56.^{2}$", wobei er bedenkenlos nicht nur den Exponenten null, sondern auch negative Exponenten benutzt. Es ist möglich, daß Chuquet hier unter dem Einfluß der Arbeiten von Oresme gestanden hat, obwohl er dessen gebrochene Exponenten nicht benutzt. Durch diese umfangreiche Anwendung der Symbolik nähert sich Chuquet, obwohl er keine besonderen Zeichen für Multiplikation, Division, Gleichheit und Unbekannte benutzt, bereits unserer modernen algebraischen Schreibweise. Als Beispiel wollen wir eine Gleichung in der Schreibweise Chuquets wiedergeben:

$$R^2 4^2 \bar{p}\, 4^1 \bar{p}\, 2^1 \bar{p} 1 \; egaulx a\, 100$$

d.h.

$$\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1 = 100.$$

Die Gleichungen nennt Chuquet „equipolence des nombres", d. h. Gleichwertigkeit von Zahlen. Dieser Terminus hat sich aber in der französischen Sprache nicht eingebürgert. Statt dessen fand das Wort équation, Gleichung, vom lateinischen equation, Eingang, das bereits von Leonardo Fibonacci von Pisa hin und wieder benutzt worden war.

Im Vergleich zu seinen Vorgängern, bei denen Chuquet verständlicherweise viel entlehnt hat, zeichnet sich seine Lehre von den Gleichungen nicht nur durch große Klarheit aus, sondern auch dadurch, daß er von vornherein vom allgemeinen Fall ausgeht, wobei er sämtliche von ihm betrachteten Gleichungen auf vier „Kanons" (d. i. etwa: kanonische Formen) zurückführt:

$$a x^m = b x^{m+n}, \quad a x^m + b x^{m+n} = c x^{m+2n},$$
$$a x^m = b x^{m+n} + c x^{m+2n}, \quad a x^m + c x^{m+2n} = b x^{m+n}.$$

Ebenso wie Pacioli berücksichtigt er die Wurzel $x = 0$ nicht. Er erklärt explizite, daß bisher keine Regel zur Auflösung von Gleichungen anderer Kanons mit drei ungleich weit voneinander entfernten Gliedern oder gar mit vier und noch mehr Gliedern existieren, gleichgültig, ob sie gleich weit oder ungleich weit voneinander entfernt sind vgl. S. 425). „Solche (Fälle)", schrieb Chuquet, „überlassen wir denen, die sich weiter vertiefen wollen" [241, 13, S. 814].

An die „Lehre von den Zahlen in drei Teilen" schließt sich in derselben Handschrift eine umfangreiche Aufgabensammlung an, für die offenbar Chuquet ebenfalls als Verfasser verantwortlich zeichnet. Hier sind insbesondere die Aufgaben von Interesse, deren Lösungen negative Zahlen enthalten. So wird z. B. das Problem, die Zahl 20 in Teile zu zerlegen, die gewissen Bedingungen genügen, auf die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 20 - x\right)\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 10$$

mit $x = -7\frac{3}{11}$ zurückgeführt, so daß $20 - x = 27\frac{3}{11}$ ist. Über die Lösung wird gesagt, diese Berechnung, die andere für unmöglich halten, sei richtig [241, 14, S. 419]. In einer anderen Aufgabe wird eine negative Lösung als Geldschuld gedeutet.

Das Werk Chuquets ist nie gedruckt worden und hat daher auch keine große Verbreitung gefunden. Trotzdem sind manche seiner Ideen durch Vermittlung anderer Autoren bekannt geworden, insbesondere durch den früher erwähnten de la Roche. Obwohl das Werk von Chuquet nicht so umfangreich ist wie die „Summe" von Pacioli, obwohl es nicht so enzyklopädisch gehalten ist und auch wesentlich weniger Aufgaben aufweist, ist es doch seinem ideellen Gehalt nach wesentlich reichhaltiger. Pacioli war nur der Pädagoge, der die Gesamtheit der ihm zugänglichen mathematischen Kenntnisse gut beherrschte. Chuquet war ein origineller Denker und Schöpfer neuer allgemeiner Konzeptionen, die die Algebra vorangetrieben haben.

Schlußbetrachtung. Zu Beginn des 16. Jahrhunderts überschritt die Mathematik Europas bereits die Grenzen der Kenntnisse, die sie von den antiken Griechen und den Völkern des Orients übernommen hatte. Zu dieser Zeit war der Kampf zwischen den Abacisten und Algorithmikern bereits lange durch den entscheidenden Sieg des

dezimalen Stellenwertsystems entschieden. In der Arithmetik und Algebra wurde nach und nach die Schaffung einer hochentwickelten Symbolik vorbereitet, deren Fehlen früher die Entwicklung der Gleichungslehre gebremst hatte. Es wurden gebrochene und negative Koeffizienten und negative Zahlen eingeführt. Im Vordergrund stand das Problem der Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades in Radikalen, ein Problem, vor dem die Gelehrten der islamischen Länder stehengeblieben waren und dessen Lösung mit ihren äußerst wichtigen Folgen im ersten Jahrzehnt des 16. Jahrhunderts gefunden wurde. Mit Erfolg wurde die Entwicklung der Trigonometrie fortgesetzt, insbesondere die Berechnung von Tabellen. In der Hochschulmathematik keimte die Idee des funktionalen Zusammenhanges und dessen geometrische Deutung. Man ging nun gleichzeitig an die Analyse der Kegelschnitte des Apollonios und an die Erforschung der Quadraturen und Kubaturen des Archimedes. Besonders wichtig war aber die Tatsache, daß die Mathematik immer mehr zu einem mächtigen Werkzeug bei der Lösung eines immer größeren Kreises von Aufgaben wurde, die nicht nur dem Handel und der Geodäsie entsprangen, sondern auch der neuen Technik und der neuen Naturwissenschaft. Die lange Entwicklungsperiode der Mathematik der konstanten Größen näherte sich ihrem Abschluß, und es setzte die Epoche der Mathematik der veränderlichen Größen, der symbolischen Algebra, der analytischen Geometrie sowie der Differential- und Integralrechnung ein.

LITERATUR

1. K. Marx: Das Kapital. Bd. 1, Berlin 1951
2. Fr. Engels: Anti-Dühring, Berlin 1948
3. Fr. Engels: Dialektik der Natur, Berlin 1958
4. K. Marx, Fr. Engels, Die Deutsche Ideologie. In: Karl Marx — Friedrich Engels, Werke, Bd. 3, Berlin 1959, S. 9—530
5. К. Маркс и Ф. Энгелс, Об Англии, Москва 1953
6. K. Marx, Fr. Engels, Briefwechsel, Berlin, Bd. I—IV, 1949—1950
7. W. I. Lenin, Materialismus und Empiriokritizismus, Berlin 1949
8. W. I. Lenin, Aus dem philosophischen Nachlaß, Berlin 1949
9. W. I. Lenin, Werke, Bd. I ff., Berlin 1955 ff.
10. А. Н. Колмогоров, Математика. Большая Советская Энциклопедия, т. 26, изд. 2-ое, 1954
11. F. Cajori, A History of elementary Mathematics, New York 1896

11 a. Ф. Кэджори, История элементарной математики, пер. с примечаниями И. Ю. Тимченко. 2-ое изд., Одесса 1917.

12. H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Kopenhagen 1896

12 a. История естествознания. Литература, опубликованная в СССР, т. I (1917—1947), т. 2 (1948—1950), т. 3 (1951—1955), Москва-Ленниград 1949—1963

13. R. Cl. Archibald, Outline of the History of Mathematics, 6th ed., Oberlin, Ohio 1949
14. E. T. Bell, The Development of Mathematics, 2d ed., New York 1945
15. E. Bortolotti, Storia della matematica elementare. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, vol. 3, 2, Milano 1950
16. C. B. Boyer, The Concepts of the Calulus, 2d ed., New York 1949
17. C. B. Boyer, History of Analytic Geometry, New York 1956
18. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Teil 1—2, Leipzig 1900 bis 1903
19. F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. 1—2, Chicago 1928—1929
20. F. Cajori, A History of Mathematics, 2d ed., New York 1919
21. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1, 3. Aufl., Leipzig 1907 u. f. Korrekturbemerkungen hierzu: Bibliotheca mathematica, Folge 3 (Kleine Bemerkungen zur letzten Ausgabe von Cantors Vorlesungen), Bd. 1, Aufl. 4, Leipzig 1922
22. J. L. Coolidge, A History of Geometrical Methods, Oxford 1940
23. J. L. Coolidge, A History of The Conic Sections and Quadric Surfaces, Oxford 1945
24. E. Fettweis, Das Rechnen der Naturvölker, Leipzig 1927
25. S. Günther, Geschichte der Mathematik, Teil 1, Leipzig 1908
26. J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Teil 1, Berlin 1953; 2. Aufl., Berlin 1963
27. G. Loria, Guida studio della storia delle matematiche, 2a ed., Milano 1946
28. G. Loria, Storia delle matematiche dall' alba della civiltà al secolo XIX, 2a ed., Milano 1950
29. K. Menninger, Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl, Teil 1—2, Göttingen 1958
30. G. Sarton, Introduction to the History of Science, vol. 1—3, Baltimore 1927—1948
31. D. E. Smith, History of Mathematics, vol. 1—2, New ed., New York 1958
32. D. J. Struik, A Concise History of Mathematics, vol. 1—2, New York 1948. Deutsch: D. J. Struik, Abriß der Geschichte der Mathematik, Berlin 1961
33. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung, Bd. 1 bis 7, 2. Aufl., Berlin—Leipzig 1921—1924; Bd. 1—4, 3. Aufl., 1930—1940

33a. Eukleides von Alexandria: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen herausgegeben von Clemens Thaer: I. Teil (Buch I—III). Ostwalds Klassiker Nr. 235. Leipzig 1933 — II. Teil (Buch IV—VI). Ostwalds Klassiker Nr. 236. Leipzig 1933 — III. Teil (Buch VII—IX). Ostwalds Klassiker Nr. 240. Leipzig 1935 — IV. Teil (Buch X). Ostwalds Klassiker Nr. 241. Leipzig 1936 — V. Teil (Buch XI—XIII). Ostwalds Klassiker Nr. 243. Leipzig 1937
34. Y. Mikami, The Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig und Berlin 1913
35. Jan Bo-jong, Über die Quellen der Mathematik in China, 1935 (chinesisch)
36. Li Yan, Geschichte der Mathematik in China. Schanghai, 1937, 2. Aufl. 1955 (chinesisch)
37. Li Yan, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in China, Bd. 1—5, Peking 1954—1955 (chinesisch)
38. Li Yan, Die Entwicklung der Mathematik in China, Shusin tungbao, Nr. 10, 1959 (chinesisch)
39. Ужу Кэ-чжэн, Вклад китайских ученных в астрономию в древние и средние века, Природа, № 10, 1953
40. J. Needham (with the collaboration of Wang Ling), Science and Civilisation in China, vol. 3 (Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth), Cambridge 1959
41. Э. И. Березкина, Арифметические вопросы в древнекитайском трактате „Математика в девяти книгах", в кн.: Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 1, Москва 1960
42. Математика в девяти книгах, перев. с примечаниями Э. И. Березкиной, в кн.: Историко математические исследования, вып. 10, Москва 1957
43. Э. И. Березкина, О „Математике в девяти книгах", в кн.: Историко-математические исследования, вып. 10, Москва 1957
43a. М. Я. Выгодский, Происхождение „правила двух ложных положений", Историко-математические исследования, вып. 13, Москва 1960
43b. Э. И. Березкина, О Математическом трактате Сунь-Цзы, Историко-математические исследования, вып. 13, Москва 1960
43c. Сунь-Цзы, Математический трактат. Перевод и примечания Э. И. Березкиной. Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 3, Москва 1963
43d. Э. И. Березкина, О математическом труде Сунь-Цзы. Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 3, Москва 1963
44. L. Wang and J. Needham, Horner's Method in Chinese Mathematics: its Origins in the Root-Extraction Procedures of the Han Dynasty, Toung pao, vol. 43, Nr. 5, 1955
45. Xui Chun-fan, Die Mathematiker des antiken China und deren Leistungen; der Satz von Shang Gao und Chen-zi von der Gleichheit der Summe der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrats, Kexue dazhung, Nr. 9, 1953 (chinesisch)
46. L. van Hée, Le classique de l'île maritime, ouvrage chinois du IIIe siècle, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Studien, 2, 1933
47. Du Shi-zhan, Der Grenzwertbegriff bei dem antiken Mathematiker Liu Hui, Shusiu tungbao Nr. 2, 1954 (chinesisch)
47a. А. Е. Райк, О вычислении некоторых объемов в древнекитайском трактате „Математика в девяти книгах", Историко-математические исследования, вып. 14, Москва 1961
47b. L. van Hée, Li Yeh, mathématicien chinois du IIIe siècle, T'oung Pao, vol. 14, 1913
47c. L. van Hée, Le précieux miroir des quatre éléments, Asia Major, vol. 7, 1932
48. А. П. Юшкевич, Об одной задаче теории чисел в русских математических рукописях XVII в. Труды института истории естествознания и техники, т. 17, Москва 1957
48a. O. Neugebauer, The Exact Sciences in Antiquity, 2d ed., Providence 1957
48b. O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. 1. Band. Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934
48c. О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук. Том I, Догреческая математика. (Пер. с нем.) Москва-Ленинград 1937

49. Xhu Chung-fang, Altchinesische Methoden der Reihensummation, Kexue dazhung, Nr. 6, 1956 (chinesisch)
50. А. П. Юшкевич, О достижениях китайских ученных в области математики; в кн.: Из истории науки и техники Китая, Москва 1955
51. Xu Chung-fang, Die Mathematiker des alten China und deren Errungenschaften. Der talentierte Mathematiker Shen Gua, Kexue dazhung, Nr. 11, 1953 (chinesisch)
52. Li Yan, The Interpolation Formulae of Early Chinese Mathematicans; in: Actes du VIIIe Congrès International d'Histoire des Sciences, Florence, 3—9 Septembre, 1956
53. L. Gauchet, Note sur la trigonométrie sphérique de Kouo Cheou-King, Toung Pao, vol. 18, 1917
54. B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu Mathematics, vol. 1—2, Lahore 1935—1938 (1. Numerical notation and arithmetic; 2. Algebra)
55. G. R. Kaye, Indian Mathematics, Calcutta-Simla, 1915
56. G. R. Kaye, Indian Mathematics, Isis, 12, 1929
57. S. Gāuglui, Notes on Indian Mathematics. A. criticism of G. R. Kaye's interpretation, Isis, 12, 1929
58. The Śulvasûtra of Baūdhâyana, ed. by G. Thibaut, Journal of the Asiatic Society of Bengal, v. 9—10, 1874—1876; New Series, 1, 1876/77; Das Āpastamba — Śulbasūtra, hrsg. von A. Bürk, Zeitschr. d. Deutsch. Morgenländ. Gesellschaft, 55, 1901; Kâtyâyanas Sulvaparisîshta, ed. by G. Thibaut, Journal of the Asiatic Society of Bengal, New Series, 4, 1882
59. E. Burgess and others, The Sūrya-Siddhānta, ... Journal of the American Oriental Society, 6, 1859—1860
60. Pañca-siddhântikâ of Varaha-Mihira, ed. by G. Thibaut and S. Dvivedi, Benares 1889, 2d ed., Lahore 1930
61. W. E. Clark, The Aryabhatiya of Aryabhata, An Ancient Indien Work on Mathematics and Astronomy. Transl. with notes, Chicago 1930
62. Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara, transl. by H. T. Collebrooke, London 1817. Reprinted with Sanskrit text by Haran Chandra Banerji, Calcutta 1927
63. M. Rangacharya, The Ganita, Sara-Sangraha of Mahāviracarya, With English transl. and notes, Madras 1912
64. The Bakshali Manuscript, ed. by Hoernle, Indian Antiquary 17, Bombay 1888

64a. G. R. Kaye, The Bakshālī Manuscript. A Study in Medieval Mathematics, Calcutta 1927 bis 1933

65. N. Ramanujacharia and G. R. Kaye, The Triśatikā of Śrīdharacarya, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 13, 1912—1913

65a. The Pâtîganita of Śridharâcârya with an Ancient Sanskrit Commentary. Ed. with Introduction, English Translation and Notes by Kripa Shankar Shukla, Lucknow 1959

66. В. В. Бобынин, Древнеиндусская математика и отношение к ней древней Греции. Известия физ.-мат. общества при Казанском университете, 1916
67. C. Müller, Die Mathematik der Śulvasûtra, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 7, 1930
68. B. Datta, The Science of the Śulba. A Study in Early Hindu Geometry, Calcutta 1932
69. D. E. Smith and L. Ch.Karpinski, The Hindu-Arabic numerals, Boston 1911
70. И. Г. Башмакова и А. П. Юшкевич, Происхождение систем счисления. В кн.: Энциклопедия элементарной математики, под. ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина, кн. I, Москва-Лениниград 1951

70a. B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Basel und Stuttgart 1956

70b. Б. Л. ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Пер. и замечания И. Н. Веселовского, Москва 1951

71. F. Nau, Notes d'astronomie syrienne, Journal asiatique, Sér. 10, T. 16, 1910
72. G. Coedès, A propos de l'origine des chiffres arabes, Bulletin of the London School of Oriental Studies, 6, 1931

73. R. Venkachalam Iyer, The Hindu Abacus; Scripta mathematica, vol. 20, Nr. 1—2, 1954
73a. B. L. van der Waerden, Diophantische Gleichungen und Planetenperioden in der indischen Astronomie. — Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. — Jahrg. 100, Heft 3, 1955
74. S. Ganguli, India's Contribution to the Theory of Indeterminate Equations of the first Degree, Journal of Indian Mathematical Society, 19, 1931
75. A. N. Singh, On the Use of Series in Hindu Mathematics, Osiris, vol. 1, 1936
75a. M. Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. 2e éd., Paris 1875
75b. U. C. Bardhan. Values of π obtained and calculated by ancient Indians. — Science and Culture, vol. 22, n° 12, 1957
76. Alberuni's India, An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about A. D. 1030; ed. with notes and indices by E. Sachau. 2e ed. London, 1910
77. K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal, On the Hindu Quadrature of the Circle; K. Balangadharan, Appendix, Journal of Bombay Branch of the Royal Asiatic Society, 20, 1944 (Sanskrittexte in englischer Übersetzung)
78. C. T. Rajagopol and T. V. Vedamurti Aiyar, A neglected Chapter of Hindu Mathematics, Scripta mathematica, 15, 1949
79. G. T. Rajagopal and T. V. Vedamurti Aiyar, On the Hindu Proof of Gregory's series, Scripta mathematica, 17, 1951
80. C. T. Rajagopal and T. V. Vedamurti Aiyar, A Hindu Approximation to π, Scripta mathematica, 18, 1952
81. J. E. Hofmann, Über eine altindische Berechnung von π und ihre allgemeine Bedeutung, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Bd. 3, H. 3/4, Hamburg 1953
81a. Э. Я. Бахмутская, Бесконечные ряды в работах математиков Южной Индии в XV—XVIII вв. Из истории науки и техники в странах Востока, вып. II, Москва 1961
81b. Э. Я. Бахмутская, Степенные ряды для $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в работах южноиндийских математиков XV—XVIII веков. Историко-математические исследования, вып. 13, 1960
81c. C. T. Rajagopal and A. Venkataraman, The sine and cosine power series in Hindu mathematics. Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal Science, vol. XV, n° I, 1949
82. Абу Рейхан Бируни, Избранные произведения, т. 1, Памятники минувших поколений, пер. М. А. Салье, Ташкент 1957
83. F. Woepcke, Sur le mot kardaga et sur une méthode indienne pour calculer le sinus, Nouvelles annales de mathématiques, 13, 1854
84. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig 1900 bis 1902, mit Ergänzungen von H. P. J. Renaud, Isis, 18, 1932
85. C. Brockelmann, Geschichte der arabischen Literatur, Bd. 1. 2, Suppl. Bd. 1—3, Weimar, Berlin und Leiden 1898—1942
86. A. Mieli, La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial, Leiden 1938
86a. Г. П. Матвиевская, К истории математики Средней Азии IX—XV веков. Ташкент, 1962
87. P. Luckey, Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters, Forschungen und Fortschritte, Bd. 24, H. 17—18, 1948
88. H. J. J. Winter, Formative Influences in Islamic Sciences, Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 6, 1953
89. А. П. Юшкевич, О математике народов Средней Азии в IX-XV веках, Историко-математические исследования, вып. 4, Москва 1951
90. A. P. Yuschkévitch, Sur certaines paticularités du développement des mathématiques arabes; in: Actes du VIIIe Congrès International d'Histoire des Sciences, Florence, 3—9 Septembre 1956
91. Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич, Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века, Советское востоковедение, № 3 и 6, 1958. Deutsch: A. P. Juschkewitsch

und B. A. Rosenfeld, Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter. — Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft. Hrsg. von G. Harig. Berlin 1960

92. F. Vera, Historia de la matemática en España, I. Tiempos primitivos hasta el siglo XIII, Madrid 1929
93. M. Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden, Bibliotheca mathematica. Neue Folge 7 bis 13, 1893—1899
94. M. Steinschneider, Die arabische Literatur der Juden, Frankfurt a. M. 1902
95. М. Салье, Мухаммед аль-Хорезми, великий узбекский ученный, Ташкент 1954
96. Trattati d'aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni, I. Algoritmi de numero indorum. II. Ioanni Hispalensis liber algorismi de pratica aritmettice, Roma 1957

96a. Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Hrsg. von K. Vogel, Aalen 1963

96b. K. Vogel, Beiträge zur griechischen Logistik, Teil 1, München 1936

97. J. Ruska, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, Phil.-hist. Kl. 1917
98. А. П. Юшкевич, Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми, Труды Института истории естествознания и техники, т. I, Москва 1954

98a. A. P. Juschkewitsch, Über ein Werk des Abū, 'Abdallah Muhammad ibn Mūsā al-Huwarīzmī al Maǧusī zur Arithmetik der Inder, Schriftenreihe für Geschichte der Naturw., Technik u. Medizin (NTM), Beiheft zum 60. Geburtstag von Gerh. Harig, Leipzig 1964

99. H. Suter, Über das Rechenbuch des Alī ben Aḥmed el-Nasawī, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 7, 1906—1907

99a. Абу-л-Хасан Али ибн Ахмад ан-Насави. Достаточное об индийской арифметике. Пер. М. И. Медового, примечания М. И. Медового при участии Б. А. Розенфельда. Историко-математические исследования, вып. 15, 1963

100. S. Gandz, Did the Arabs know the Abacus? American Mathematical Monthly, 24, 1927
101. Нури Юсупов, Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке, Казань, 1933
102. М. И. Медовой, Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960
103. H. Suter, Das Rechenbuch des Abu Zakariya el-Hassar, Bibliotheca mathematica, 2, 3. Folge, 1901

103a. Rida A. K. Irani, Arabic Numeral Forms, Centaurus 4 (I), 1955

104. The Algebra of Mohammed ben Musā, ed. and transl. by F. Rosen, London 1831
105. Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala . . .; in: G. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, vol. 1, Paris 1838, 253—299
106. L. Ch. Karpinski, Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi, New York 1915; 2. Aufl.: L. Ch. Karpinski and J. G. Winter, Contributions to the History of Science, Ann Arbor 1930
107. W. Wieleitner, Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwarazmi, Zeitschrift f. mathem. u. naturwiss. Unterricht, 53, 1922
108. H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874
109. S. Gandz, The Sources of al-Khowārizmīs Algebra, Osiris, 1, 1936
110. S. Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra, Osiris, 3, 1937

110a. A. Sayili, Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Hamîd ibn Turk and the Algebra of his Time. Ankara 1962

110b. Абу-р-Райхан Мухаммад ибн Ахмад ал-Бируни, Книга об индийских рашиках. Пер. и примечания Б. А. Розенфельда. В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока, вып. III, Москва 1963

111. Liber augmenti et diminutionis . . .; in: G. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, vol. 1, Paris 1838

112. H. Suter, Über die im „Liber augmenti et diminutionis" vorkommenden Autoren, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 3, 1902
113. H. Suter, Die Abhandlung Qostā ben Lūqās und zwei andere Anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 9 1909
114. A. Marre, Le Talkhys d'Ibn Albanna. Atti dell' Accad. Pontif. de Nuovi Lincei, 17, 1865
115. S. Gandz, The Mishnat ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 C. E. and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi the first Arabic Geometry (C. 820), Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A, 2, 1932
116. Muhamed al Khwārizmī, Istihrāğ ta'rāh al-yahūd, in: Rasail muffari, Hyderabad 1940
117. Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Mūsā al Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Aḥmed al-Madjrītī und der lateinischen Übersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Bjornbo und R. Besthorn, hrsg. und kommentiert von H. Suter, Mémoires de l'Acad. des Sciences de Danemark, section des lettres, 7. Ser. 3, Copenhague 1914
117a. O. Neugebauer, The Astronomical Tables of al-Khwārizmī. Translation with Commentaries. København 1962
118. L. Ch. Karpinski, The Algebra of Abū Kāmil Šojā ben Aslam, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 12, 1912
119. J. Weinberg, Die Algebra des Abū Kāmil Šoja ben Aslam, München 1935
120. H. Suter, Die Abhandlung des Abū Kāmil Šoja b. Aslam über das Fünfeck und Zehneck, Bibliotheca mathematica, 10, 3. Folge 1910
121. A. Hochheim, Al Kāfi fîl Hisāb des Abu Bekr Muhammed ben Alhuscin Alkarkhī, 1—3, Halle (Saale) 1877—1880
121a. F. Woepcke, Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par ... Alkarkhī, Paris 1853
122. H. Suter, Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil el-Misrī, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 11, 1911
123. F. Woepcke, Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, III. Traduction ... d'une traité ... par ... Alhoçain, Atti del' Accad. Pont. de Nuovi Lincei, 14, 1861
124. F. Woepcke, Notice sur une théorie ajoutée par Thābit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs, Journal asiatique, Sér. 4, 20, 1852
125. P. Luckey, Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Mas'ūdī al Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens, Wiesbaden 1950
126. Джемшид Гиясэддин ал-Каши, Ключ арифметики. Трактат об окружности, пер. Б. А. Розенфельда, ред. Р. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, Коммент. А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, Москва 1956
126a. E. S. Kennedy, The Planetary Equatorium of Jamshīd Ghī yath al-Diyn al-Kashi, Princeton 1960
126b. H. Hunger und K. Vogel, Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. Text, Übersetzung und Kommentar. Wien 1963
127. P. Luckey, Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik, Mathematische Annalen, 120, 1948
127a. Насир ад-Дин ат-Туси, Сборник по арифметике с помощью доски и пыли, II раздел. Об определении других основных степеней. Пер. С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда, примечания С. А. Ахмедова. Историко-математические исследования, вып. 15, 1963
128. Комментарии Абу Насра ал-Фараби к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида, пер. М. Ф. Бокштейна, введ. и примеч. Б. А. Розенфельда, Проблемы востоковедения, 4, 1959
129. H. Suter, Über den Kommentar des Muhammed ben 'Abdelbāqī zum zehnten Buche des Euklides, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 7, 1906

130. E. B. Plooij, Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators, Rotterdam 1950
131. Discussion of Difficulties of Euclid by Omar Khayyam, ed. by Erani, Teheran 1936
132. Омар Хайям, Математические трактаты, пер. Б. А. Розенфельда, примеч. Б. А. Бозенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 6, 1953
132a. Омар Хайям, Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда. Вступительная статья и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Москва 1961
133. O. Becker, Eudoxos — Studien. I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid; II. Warum haben die Griechen die Existenz der 4. Proportionale angenommen? Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, II, 1933
134. М. И. Медовой, Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафы, Историко-математические исследования, вып. 11, Москва 1958
135. И. Г. Башмакова, Лекции по истории математики в древней Греции, Историко-математические исследования, вып. II, Москва 1958
136. M. Baker, Alhazen's Problem, Its Bibliography and An Extension of It; American Mathematical Monthly, 4, 1881
137. L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke, Paris 1851
138. А. П. Юшкевич, Омар Хайям и его „Алгебра", Труды Института истории естествознания и техники, 2, 1948
139. С. Б. Морочник, Б. А. Розенфельд, Омар Хайям — поет, мыслитель, ученный, Сталинабад 1957
139a. G. H. Mossaheb. Hakim Omar Khayyam as an algebraist. Teheran 1960
139b. Омар Хайям, Первый алгебраический трактат, пер. и примечения С. А. Красновой и Б. А. Розенфельда, Историко-математические исследования, вып. 15, 1963
140. F. Woepcke, Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali ben Mohammed Alkalçadi, Atti. dell'Accad. Pontif. de Nouvi Lincei, 12, 1859
140a. M. Curtze, Der Liber trium fratrum de geometria, Nova Acta d. Leopold.-Carol. Dt. Akad. d. Naturforscher 49, 1887
141. H. Suter, Über die Geometrie der Söhne des Musa b. Schakir, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 3, 1902
142. H. Suter, Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l Wefa, Abhandl. zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, 1922
143. F. Woepcke, Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ, Journal asiatique, Sér. 5, 5, 1855
144. Л. С. Бретаницкий и Б. А. Розенфельд, Архитектурная глава трактата „Ключ арифметики" Гияс-ад-Дина Каши, Искуство Азербайджана, Баку, 5, 1956
144a. Насир ад-Дин ат-Туси, Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллелных линий. Пер. с арабского Б. А. Розенфельда, примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960
144b. Г. Б. Петросян и Б. А. Розенфельд, Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида, Известия Академии Наук Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, XIII, 1960
145. Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis Narizii. Arabice et latine ediderunt... R. O. Besthorn et J. L. Heiberg, 1—3, Hauniae 1893 bis 1905
146. Anariții in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii, ed. M. Curtze, Leipzig 1899
147. Proklus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen". Besorgt und eingeleitet von M. Steck, Halle (Saale) 1945
148. В. Ф. Каган, Основания геометрии. Учение об основании геометрии в ходе его исторического развития, ч. 1, Москва-Ленинград 1949

148a. Сабит ибн Корра ал-Харрани, Книга о доказательстве известного постулата Евклида. — Шамс ад-Дин Мухаммад Ашраф ал-Хусайни ас-Самарканди, Основные предложения (отрывок). Пер. Б. А. Розенфельда, вступительная статья и примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. Историко-математические исследования, вып. 14, 1961

148b. Сабит ибн Корра ал-Харрани, Книга о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся. Пер. и примечания Б. А. Розенфельда, Историко-математические исследования, вып. 15, 1963

149. Б. А. Розенфельд, Доказательство пятого постулата средневековых математиков Хасана ал-Хайсама и Льва Герсонида, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958

150. Хасан ибн ал-Хайсам, Книга комментариев к введениям книги Евклида „Начала", Историко-математические исследования, вып. 11, 1958

151. Б. А. Розенфельд, О математических работах Насирэддина Туси, Историко-математические исследования, вып. 4, 1951

152. Р. М. Султанов, Насирэддин о постулате параллельности, Известия А. Н. Азерб. ССР, № 10, 1951

153. Б. А. Розенфельд, Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии, в кн.: В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. 2, Москва 1956

153a. Г. Д. Мамедбейли, Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений, Баку 1959

154. Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nassireddini Tusini nunc primum arabice impressi, Romae 1594

155. Euclidis Elementorum libri tredecim studio Nasseredini, Roma 1657

155a. H. Dilgan ‚Démonstration du V^e Postulat d'Euclide par Schams-ed-Din Samarkandi'. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 13 (3), 1960

156. J. L. Heiberg und E. Wiedemann, Ibn al-Haitams Schrift über parabolische Hohlspiegel, Bibliotheca mathematica, 13. Folge, 10, 1910

156a. F. Woepcke, Trois traités arabes sur le compas parfait. Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale, t. 22, p. 1, 1874

156b. M. Clagett, The Impact of Archimedes on medieval Science, Isis, 50, Nr. 162, 1959

156c. H. Suter, Die Kreisquadratur des Ibn al-Haitam, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Hist.-liter. Abt., 44, 1899

157. H. Suter, Über die Ausmessung der Parabel von Thābit b. Kurra al-Hārrāni, Sitzungsber. d. physik.-mediz. Sozietät in Erlangen, 48, 1918

157a. A. P. Juschkewitsch, Note sur les déterminations infinitésimales chez Thābit ibn Qurra (im Druck)

158. H. Suter, Die Abhandlungen Thābit ben Kurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloide, Sitzungsber. d. physik.-mediz. Sozietät in Erlangen, 48, 1918

159. H. Suter, Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm ben Sinān ben Thābit, Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, 63, 1918

160. H. Suter, Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von Ibn al-Haitham, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Nr. 12, 1912

160a. E. Bessel-Hagen und O. Spies, Das Buch über die Ausmessung der Kreisringe des Ahmad ibn 'Omar al-Karābīsī. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Bd. I, 1931

160b. М. Маймонид, Путеводитель колеблющихся, гл. 72—76. Пер. А. И. Рубина; в кн.: С. Н. Григорян, Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—VIII вв., Москва 1960

160c. А. Кубесов, Комментарии Насир ад-Дина ат-Туси к трактату Архимеда „О шаре и цилиндре" (im Druck)

160d. H. Michel, Traité de l'astrolabe. Paris 1947

161. C. Schoy, Beiträge zur arabischen Trigonometrie, Isis, 5, 1923

162. C. Schoy, Über den Gnomonschatten und die Schattentafeln, Hannover 1923

163. Al-Battānī sive Albatanii, Opus astronomicum, Arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino, 1—3, Milano 1899—1907
164. Carra de Vaux, L'Almageste d'Abu'lwéfa al-Būzdjāni, Journal asiatique, 8me Sér. 19, 1892
165. Х. У. Садыков, Бирунн и его работы по астрономии и математической географни, Москва 1963
165a. Б. А. Розенфельд, С. А. Краснова и М. М. Рожанская, О математических работах Абу-р-Райхана ал-Бируни. Из истории науки и техники в странах Востока, вып. III, Москва 1963
166. Abu Rayḥan Muḥammad b. Aḥmad al-Bīrūnī, Al-Qanunu'l-Mas'udi (Canon Masudicus), 1—3, Hyderabad, 1954—1956
167. C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu l'-Raihān Muḥammed ibn Aḥmad al-Bīrūnī, dargestellt nach al-Qānūn al Mas'udi. Nach dem Tode des Verfassers hrsg. von J. Ruska und H. Wielietner, Hannover 1927
167a. Абу-р-Райхан Мухаммад ибн-Ахмад ал-Бируни, Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него. Пер. С. А. Красновой и Л. А. Карповой, примечания Б. А. Розенфельда и С. А. Красновой. Из истории науки и техники в странах Востока, вып. III, Москва 1963
167b. H. Suter, Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abū'l Raiḥān Muh. el-Bīrūnī. Bibliotheca mathematica, 3. Folge 11, 1910—1911
168. Г. Д. Мамедбейли, Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насирэддин Туси, Баку 1961
169. Мухаммед Насирэддин Туси, Трактат о полном четырехстороннике (Шаклул Гита), пер. под. ред. Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфельда, Баку 1952
170. A. v. Braunmühl, Nassīr Eddīn und Regiomontan, Nova Acta, Abhandl. d. Leopold. Carol. Dt. Akad. d. Naturforscher, 71, 1897
171. E. S. Kennedy, A Survey of Islamic Astronomical Tables, Transactions of the American Philosophical Society, 46, 1956
172. Б. А. Розенфельд, Попытка квадратичного нитерполирования у Абу-р-Райхана ал-Бируни, Историко-математические исследования, вып. 12, 1959
172a. E. S. Kennedy, Mathematical Reviews, vol. 23, N 5 A, 1962, S. 583
173. P. Luckey, Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Ǧamšid b. Mas'ūd al-Kāšī, Abhandl. d. Dt. Akad. d. Wiss., Kl. f. Math., Jg. 1950 Nr. 6, 1953
174. Т. Н. Кары-Ниязов, Астрономическая школа Улугбека, Москва—Ленинград 1950
175. L. A. Sédillot, De l'algèbre chez les Arabes, Journal asiatique, 5me Sér., 2, 1953
175a. Кази-заде ар-Руми, Трактат об определении синуса одного градуса, пер. с арабского Б. А. Розенфельда, статья и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математические исследования, вып. 13, 1960
176. E. S. Kennedy and W. R. Transue, A Medieval Iterative Algorism, American Mathematical Monthly, V. 63, Nr. 2, 1956
177. Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst, hrsg. von G. H. F. Nesselmann, Berlin 1843
177a. K. Vogel, Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und Weiterbildung der griechischen Mathematik. Miscellanea Mediaevalia, Bd. I, 1962
177b. K. Vogel, Buchstabenrechnung und indische Zahlen in Byzanz. Akten des XI. Internationalen Byzantinisten-Kongresses 1958. München 1960
178. P. Tannery, Moschopoulus et Rhabadas. In: Mémoires scientifiques, 4, Paris, 1920
179. Г. Б. Петросян, Математика в Армении в древних и средних веках, Ереван 1955 (Armenisch, mit Zusammenfassungen in russischer und englischer Sprache)
180. Вопросы и решения вардапета Анании Ширакца, армянского математика VII века, Издал и перевел И. А. Орбели, Петербург 1918
180a. S. Kokian, Des Anania von Schirak arithmetische Aufgaben, Zeitschr. f. d. österreichischen Gymnasien, 69, 1920
181. Г. Т. Туманян, „Начала" Евклида по древнеармянским источникам, Историко-математические исследования, вып. 6, 1953

182. Д. Г. Цхакая, История математических наук в Грузии с древних времен до XX века, Тбилиси 1959
183. И. Петрици, Рассмотрение платоновской философии и Прокла Диадоха, перев. и исследование И. Д. Паицхава, Тбилиси 1942
184. Bedae Venerabilis Opera omnia 1—12, ed. J. A. Liles, London 1843/1844
185. Alcuini Opera omnia, 2, ed. J. P. Migne, Paris 1851
186. Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica, ed. N. Bubnov, Berlin 1899
187. M. Steinschneider, Die europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts, Graz 1956
187a. Ch. H. Haskins, Studies in the Historie of Mediaeval Science, New York 1960
188. M. Curtze, Der Liber embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli, Abh. Gesch. Math. Wissensch., 12, 1902
189. J. M. Guttmann, Chiber ha Meschicha Tischbereth, Lehrbuch der Geometrie des Abraham bar Chija, Berlin 1913
190. A. Nagl, Der arithmetische Tractat des Radulph von Laon, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, 34, Suppl. 1890
191. F. Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Journal asiatique, 1, 1863, p 69/70, 514—529
192. И. М. Бубнов, Арифметическая самостоятельность европейской культуры, т. 1—2, Киев 1908. Deutsch: N. Bubnow, Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur, Berlin 1914
193. В. В. Бобынин, Отзыв о сочинениях Н. М. Бубнова . . ., Санкт Петербург 1911
194. A. Nagl, Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendlande, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Hist.-liter. Abt., 34, 1889
195. M. Curtze, Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, 42, Suppl. 1898
196. M. Cantor, Über einen Codex des Klosters Salem, Zeitschr. f. Mathematik und Physik, 10, 1865
197. Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius, una cum algorismo ipso edidit et praefatus est M. Curtze, Havniae 1897
198. G. Eneström, Über die Demonstratio Jordani de algoritmo, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 7, 1906
198a. G. Eneström, Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 8, 1908
198b. G. Eneström, Das Bruchrechnen des Nemorarius, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 14, 1914
199. G. Eneström, Der Algorismus de integris des Meisters Gernaidus, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 13, 1913; Der Algorismus de minutiis, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 14, 1914
200. L. Ch. Karpinski, The Italian Arithmetic and Algebra of Master Jacob of Florence, Archeion, 11, 1929
200a. G. Beaujouan, L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'Université de Paris aux XIIIe et XIVe siècles. Homenaje a Millas-Vallicrosa, vol. I. Barcelona 1954
201. B. Boncompagni, Atti dell'Accad. Pontif. de Nouvi Lincei, 16, 1862/63
202. Кирик Новгородец, Учение им же ведати человеку числа всех лет, примечания В. П. Зубова, Историко-математические исследования, вып. 6. 1953
203. В. В. Бобынин, Очерки развития физико-математических знаний в России, вып. 1—2, Москва 1886—1893
204. И. Ф. Копиевский, Краткое и полезное руководение во аритметику, или в обучение и познание всякого счету в сочетании всех вещей, Амстердам 1699
205. Л. Ф. Магницкий, Арифметика сиреч наука числительная, Москва 1703
206. J. Mundi, John of Gmunden, Isis, 34, 1942

207. S. Gandz, The Invention of the Decimal Fractions and the Application of the Exponential Calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon, Isis, 25, 1936
208. The Principal Works of Simon Stevin, vol. 2, Mathematics, edit. by D. J. Struik, Amsterdam, 1958
209. G. Sarton, The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585) . . ., Isis, 23, 1935
210. В. Беллюстин, Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики, под. ред. А. П. Юшкевича, Москва 1940
211. И. Г. Спасский, Происхождение и история русских счетов, Историко-математические исследования, вып. 5, 1952
212. Scritti di Leonardo Pisano, . . . publicati da B. Boncompagni, 1—2, Roma, 1857—1862
213. Памятники древней письменности, Саикт Петербург, 1878/79
214. K. Vogel, Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Deutsche Mathematik, 5, 1940
215. Leonardo Pisano, Capitulum quiatum decimum de regulis geometriae pertinentibus et de quaestionibus algebrae et almuchabile . . .; in: G. Libri: Histoire des sciences mathématiques en Italie, vol. 2, Paris 1838
216. G. Eneström, Über die Arithmetica des Jordanus Nemorarius, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 9, 1909
216a. M. Curtze, Commentar zu dem Tractatus de numeris datis des Jordanus Nemorarius, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Hist.-liter. Abt., 36, 1891
217. Иордан Неморарий, О данных числах, пер. С. Н. Шрейдера под ред. И. Н. Веселовского, Историко-математические исследования, вып. 12, 1959
218. M. Curtze, Jordani Nemorarii Geometria vel de Triangulis Libri IV, Mitteil. des Coppernicus-Vereins, Thorn, 6, 1887
218a. J. E. Murdoch, The Medieval Language of Proportions, Scientific Change, ed. by A. C. Crombie, London 1963
219. Лев Герсонид, Комментарии к введениям книги Евклида, пер. И. Г. Польского, примеч. Б. А. Розенфельда, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958
219a. A. C. Crombie, Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science, Oxford 1953
220. В. П. Зубов, Из истории средневековой атомистики, Труды Института истории естествознания, 1, 1947
221. В. П. Зубов, Калориметрическая формула Рихмана и ее предистория, Труды Института истории естествознания и техники, т. 5, 1955
222. J. E. Hofmann, Zum Gedenken an Thomas Bradwardine, Centaurus, 1, 1951
223. Thomas Bradwardine, His Tractatus de proportionibus, Its Significance for the Development of Mathematical Physics. Ed. and transl. by H. Lamar Crosby, jr. The University of Wisconsin Press, Madison 1955
223a. M. Clagett. The Science of Mechanics in the Middle Ages. Madison 1959
223b. В. П. Зуобвв, У истоков механики; в ки.: А. Т. Григорян, В. П. Зубов, Очерки развития основных понятий механики, Москва 1962
224. В. П. Зубов, Трактат Брадвардина „О континууме", Историко-математические исследования, вып. 13, Москва 1960
225. M. Curtze, Der Algorismus proportionum des Nicolaus Oresme, Berlin 1868
225a. A. D. Maier, Zwei Grundprobleme der scholastischen Naturphilosophie, 2. Aufl., Rom 1951
226. Николай Орем, Трактат о конфигурации качеств, пер. и примеч. В. П. Зубова, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958
227. В. П. Зубов, Трактат Николая Орема „О конифигурации качеств", Историко-математические исследования, вып. 11, 1958
228. H. Wieleitner, Der „Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 13, 1913
228a. H. Wieleitner, Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme, Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, 14, 1914

229. H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte der Räume von mehr als drei Dimensionen, Isis, 7, 1925
230. N. Oresme, Questiones super Geometriam Euclidis, Ed. by H. L. L. Busard, Leiden 1961
230a. H. Wieleitner, Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter, Bibliotheca mathematica, 3. Folge, 14, 1914
230b. W. Hartner and M. Schramm, Al-Bīrūnī and the Theory of the Solar Apogee: an example of originality in Arabic Science, Scientific Change, ed. by A. C. Crombie, London 1963
230c. G. Beaujouan, L'interdépendance entre la science scolastique et les techniques utilitaires (XII^{e}, XIII^{e} et XIV^{e} siècles). Université de Paris 1957
231. K. Vogel, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis, München 1954
232. H. Mendthal, Geometria culmensis, Leipzig 1886
233. Г. Феттер, Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы, Историко-математические исследования, вып. 11, 1958
234. Nicolaus von Cues, Die mathematischen Schriften, übers. von Josepha Hofmann mit einer Einführung und Anmerkungen versehen v. J. E. Hofmann, Hamburg 1952
235. Ioannis de Regio Monte, De triangulis omnimodis libri quinque, Norimbergae 1533
236. M. C. Zeller, The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. Ann Arbor, Univ. of Michigan, 1946
237. M. Curtze, Der Briefwechsel Regiomontan's mit G. Bianchini, J. von Speier und Chr. Roder, Abh. Gesch. Math., 12, 1902
238. L. Olschki, Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur, Bd. 1. Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften vom Mittelalter bis zur Renaissance; Bd. 2. Bildung und Wissenschaft im Zeitalter der Renaissance in Italien, Leipzig 1922
239. Леонардо да Винчи, Избранные естественнонаучные произведения, ред. пер., статья и коммент. В. П. Зубова, Москва 1955
239a. В. П. Зубов, Леонардо да Винчи, Москва-Ленинград 1961
240. D. I. Ricci, Luca Pacioli, l'uomo e lo scienzato, con documenti inediti, Sansepolcro 1940
241. A. Marre, Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien, Bulletino di bibliografia e storia delle scienze mathematiche e fisiche di Boncompagni, 13, 1880; Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolaus Chuquet, ebenda, 14, 1881

Ab'd ar-Raḥmān III. (912—961) 184
Abraham bar Hiya (oder Hiyya) (Savasorda) (etwa 1070 bis 1136) 327, 342, 343, 352
Abū Barza (gest. 910) 213
Abū Ğa'far Muḥammad ibn Mūsā ibn Šakir (gest. 872) 270
Abū-l-Ğūd Muḥammad ibn Lait (11. Jh.) 258, 259, 265
Abū-l-Wafā Muḥammad ibn Muḥammad al-Buzğānī (940—997/8) 21, 181, 186, 193, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 209, 212, 219, 228, 232, 236, 239, 242, 255, 256, 270, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 288, 298, 303, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 320, 354, 422
Abū Kāmil Šuğa ibn Aslam ibn Muḥammad al-Ḥāsib al Miṣrī (etwa 850—930) 75, 184, 186, 213, 214, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 248, 256, 259, 325, 343, 344
Abū-Naṣr siehe ibn 'Iraq
Achmedov, S. A. 440
Adelard (oder Adelhard) of Bath (11.—12. Jh.) 187, 220, 252, 297, 341, 343, 349, 355
Adelbold von Utrecht (10. Jh.) 339
Aganis (5.—6. Jh.) 278, 279, 280
Aḥmad siehe banū-Mūsā
al-Aš'arī (Abū-l-Ḥasan 'Alī ibn Ismā'īl al-Aš'arī, 873/4—935/6) 294
al-Baghdādī (Muḥammad ibn 'Abd al-Bāqī al-Baghdādī, gest. etwa 1100) 249
al-Baqilānī (Abū Bakr Aḥmad ibn 'Alī al-Baqilānī, gest. 1013) 294
Albategnius siehe al-Battānī
al-Battānī (Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Ğabīr al-Battānī, etwa 850—929) 164, 181, 297, 298, 302, 303, 306, 325
Alberti, Leon Battista (1404—1472) 421
al-Birğandī ('Abd al-'Alī ibn Muḥammad al-Birğandī, 15. Jh.) 320
al-Bīrūnī (Abū-r-Raiḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī, 973—1048) 86, 93, 157, 160, 162, 177, 183, 186, 194, 214, 229, 242, 250, 258, 294, 298, 299, 300, 301, 302, 306, 307, 310, 311, 312, 313, 318, 320, 409, 443
Alcuin (auch Alh-win, 735—804), 75, 215, 337
Aleksandrow, P. S. (geb. 1896), 437
Alexander der Große (356—323 v. u. Z.) 90
Alexandre de Villedieu (gest. etwa 1240) 354
al-Fārābī (Abū Naṣr Muḥammad ibn Muḥammad al-Fārābī (870?—950/1) 248, 249, 343
al-Fāzārī (Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Ibrāhīm al-Fāzārī, gest. etwa 800) 179, 295
al-Fāzārī (Abū Iṣḥāq Ibrāhīm al-Fāzārī, gest. etwa 777) 179
al-Ferghānī (Aḥmad ibn Muḥammad al-Ferghānī, 9. Jh.) 414
Alfons X. (Alfonso X. el Sabio, 1226—1284) 340
al-Ğauharī (al-'Abbās ibn Sai'īd al-Ğauharī, 9. Jh.) 181, 249, 277, 278, 279, 285
al-Ğayyānī (Abū Abdallah Muḥammad ibn Yusuf al-Ğayyānī, 11. Jh.) 254
al-Ğulfarī (Mas'ūd ibn Muḥammad al-Ğulfarī, 13. Jh.) 232
al-Ḥabaš (Aḥmad ibn 'Abdallah al-Marwazī al-Ḥabaš al-Ḥāsib, etwa 770—870) 164, 181, 296, 297, 308, 323, 324
al-Ḥağğağ ibn Yūsuf ibn Maṭār (8.—9. Jh.) 181, 295
al-Ḥakam II. (regierte 961—976) 184
al-Ḥakim (regierte 996—1020) 310
al-Ḥassār (Abū Zakāriyā Muḥammad ibn 'Abdallah al-Ḥassār, 12. Jh.) 117, 203, 246, 366
al-Ḫayyām (Abū-l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrahim al-Ḫayyām, 1048—1131) 73, 183, 185, 186, 205, 242, 247, 249, 251, 252, 253, 254, 255, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 280, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 294, 305, 308, 323, 325, 393
Alhazen siehe Abū 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan al-Haitham
al-Ḫazīn (Abū Ğa'far al-Ḫazīn, 10. Jh.) 257
al-Ḫāzinī (Abū-l-Fatḥ 'Abd ar-Raḥmān al-Ḫāzinī al-Marwazī, 12. Jh.) 308
al-Huğandī (Abū Muḥammad Ḥamīd ibn al-Ḥidr al-Huğandī, (gest. etwa 1000) 183, 235, 303
al-Ḫuwarizmī (Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫuwarizmī al-Magūsī, etwa 780—850) 4, 57, 138, 164, 181, 185, 186, 187, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 198, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 224, 228, 229, 231, 232, 239, 242, 248, 256, 259, 262, 269, 270, 272, 277, 296, 297, 308, 324, 341, 342, 343, 344, 352, 360, 362, 365, 366, 367, 418
al-Idrisi (1099 oder 1100—1166) 184
al-Iṣfahāni (Abū-l-Fatḥ Mahmūd ibn Muḥammad ibn Qāsim Faḍl al-Iṣfahāni, 10. Jh.) 288
al-Karabīsī (Aḥmad ibn 'Umar al-Karabīsī, etwa 970) 293

al-Karaǧī (Abū Bakr Muḥammad ibn al-Ḥassan al-Karaǧī, auch al-Kaṯḥī, gest. zwischen 1019 und 1029) 73, 181, 186, 196, 203, 215, 228, 229, 230, 231, 232, 234, 237, 248, 250, 256, 273, 277
al-Kāšānī siehe al-Kāšī
al-Kāšī (Ǧamšid Ghiyāth ad-Dīn al-Kāšī, gest. etwa 1429) 59, 69, 73, 75, 112, 169, 184, 186, 193, 198, 199, 203, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 268, 269, 277, 292, 299, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 325, 367
al-Kindi (Abū Yūsuf Ya'qūb ibn Iṣḥāq al-Kindi, gest. etwa 873) 178, 179
al-Kūhī (Abū-s-Sahl Waiǧān ibn Rustam al-Kūhī, 10.Jh.) 181, 184, 258, 259, 264, 288, 292
al-Kuščī ('Ala ad-Dīn 'Alī ibn Muḥammad al-Kuščī, gest. etwa 1575) 241, 320
al-Maǧritī (Abū-l-Qāsim Maslama ibn Aḥmad al-Maǧritī, gest. etwa 1007) 220, 341
al-Māhānī (Abū 'Abdallah Muḥammad ibn 'Isā al-Māhānī, gest. etwa 880) 249, 250 251, 257, 267
al-Ma'mūn (786—833) 178, 181, 186, 217, 249, 270, 300, 302
al-Ma'mūn II (um 1000) 300
al-Manṣūr (745—775) 176, 178, 179
al-Mas'ūdī (Šaraf ad-Dīn al-Mas'ūdī, 12. bis 13.Jh.) 268
al-Mīšrī (Abū Ǧa'far Aḥmad ibn Yūsuf al-Mīšrī, gest. etwa 912) 374
al-Mulk (Faḫr al-Mulk) 229
al-Mu'tavaqūīl (847—861) 178
al-Mu'tazīm (833—843) 178
al-Qalasādi (Abū-l-Ḥasan 'Alī ibn Muḥammad al-Qalasādi, gest. 1486) 185, 203, 269, 270
al-Qifti (Abū-l-Ḥasan al-Qifti, 1172—1248) 179
al-Zarqālī (Abū Iṣḥāq Ibrāhīm ibn Yaḥyā an-Naqqās al-Zarqālī, etwa 1030—1009) 341
Ammonios (gest. 515) 329
Anania Schirakazi (7.Jh.) 332, 333, 334
Andronikos II. (1269—1332) 330
Andronikos III. (1296—1341) 336
Apastamba (7.—5. Jh. v.u.Z.?) 92, 96, 113
Apianus, Petrus (Bienewitz, 1495—1552) 74, 246
Apollonios (etwa 260—170 v.u.Z.) 180, 256, 261, 288, 289, 343, 344, 395, 409, 415, 430
Archibald, R. Cl. 435
Archimedes, (287—212 v.u.Z.) 59, 83, 103, 147, 151, 155, 157, 180, 181, 256, 257, 258, 259, 264, 265, 269, 271, 276, 280, 289, 291, 292, 294, 301, 313, 315, 343, 344, 393, 395, 396, 397, 409, 412, 415, 420, 427, 430
Archytas von Tarent (428—365) 271
Argyros, Isaak (14.Jh.) 336
Aristophanes (etwa 452—380 v.u.Z.) 334
Aristoteles (384—322 v.u.Z.) 178, 179, 248, 249, 252, 253, 284, 294, 343, 344, 394, 395, 396, 397, 398, 401, 402, 403, 412, 416
Artabasdos (Nikolaus Rabdas Artabasdos, 14.Jh.) 215, 334, 335, 336
Araybhaṭa I. (geb. 476) 91, 93, 103, 105, 115, 116, 118, 120, 124, 125, 130, 132, 134, 135, 139, 141, 146, 150, 151, 153, 154, 159
Aryabhaṭa II. (10.Jh.) 83, 91, 109, 112, 117, 141, 144, 145, 154, 155, 159, 160, 165, 166, 171
as-Samarkandi (Šams-ad-Dīn as-Samarkandi, Ende 13. Jh.) 280
Aśoka (273—232 v.u.Z.) 90, 104
at-Šīrāzī (Quṭb ad-Dīn at-Šīrāzī, 1236—1311)
Augustinus (354—430) 327 [313
Averroës (Ibn Rušd) (1126—1198) 184, 396,
Avicenna (Ibn Sīnā) (980—1037) 183 [397

Bachmutskaja, E. J. 438
Bacon, Roger (etwa 1214—1292) 327, 346, 394, 395, 397
Baker, M. 441
banū Mūsā (Muḥammad, al-Ḥasan, Aḥmad banū Mūsā ibn Šākir, 9.Jh.) 270, 271, 272, 280, 288, 289, 330
Bardhan, U.C. 438
Barrow, Isaac (1630—1677) 257
Bašmakova, J.G. (geb. 1921) 437, 441
Baudhâyana (7.—5.Jh. v. u. Z.?) 92, 96, 97
Beaujouan, G. 444, 446
Becker, O. 441
Beda Venerabilis (etwa 673—735) 336, 337
Behā ad-Dīn al-'Amūlī (1547—1622) 273, 324
Beldomandi, Prosdocimo de (1380—1428) 366
Bell, E.T. 435
Benedetti, Giambattista (1530—1590) 274
Bereskina, E. VI, 436
Bernelius (11.Jh.) 346, 348, 349
Bernoulli, Jacob (1655—1705) 409
Bernoulli, Johann (1667—1748) 409
Bessel-Hagen, E. 442
Besthorn, R.O. 440, 441
Bhâskara I. (6.Jh.) 94, 105, 109, 120, 141, 142, 145, 146, 159, 235
Bhâskara II. (1114—1185?) 62, 75, 91, 94, 95, 99, 110, 112, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 147,

148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 171, 215, 218, 249
Biagio von Parma (Pelacani, 1350?—1416) 406
Bianchini, Giovanni (gest. 1466) 416
Bjornbo, A. 440
Bobynin, W.W. 437, 444
Boethius, Anicius Manilius Severinus (etwa 480—524) 337, 339, 395, 415
Bokstein, M.F. 440
Boncompagni, B. (1821—1894), 439, 444, 445
Bonfils, Immanuel ben Jakob (14. Jh.) 241, 363
Borghi, Piero (15. Jh.) 351
Bortolotti, E. 435
Boyer, C.B. 435
Bradwardinus, Thomas (etwa 1290—1349) 310, 346, 371, 395, 396, 397, 398, 399, 401, 445
Brahe, Tycho (1546—1601) 300
Brahmagupts (geb. 598) 21, 57, 91, 94, 95, 99, 105, 118, 119, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 133, 135, 136, 137, 141, 146, 147, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 179, 212
Braunmühl, A.v. 435, 443
Bretanickij, L.S. 441
Brockelmann, C. 438
Brudziewski, Albert Blar (1445—1597) 411
Bubnow, N. 447
Buddha Gautama (6.—5. Jh. v.u.Z.) 91, 103
Burgess, E. 437

Cajori, Florian (1859—1930) 435
Campano, Giovanni, siehe Johannes Campanus von Novara
Čandragupta (322—298) 90
Caṇgadeva (Anfang 13. Jh.) 95
Cantor, M. (1829—1920) 435, 444
Cardano, Geronimo (etwa 1508—1576) 35, 266
Carra de Vaux, B. (1867—1952), 443
Cassiodorus, Flavius Magnus Aurelius Senator (etwa 490—580) 329
Catton, Walter (gest. 1342) 397
Cavalieri, Bonaventura (1591?—1647) 174, 399, 407, 408
Chasles, M. 438
Chatschick, Georg (14. Jh.) 334
Chelebi (Maḥmud ibn Muḥammad Mariām Chelebi, gest. etwa 1525) 320, 321, 323
Chen-zi (6. Jh. v.u.Z.) 51
Chinčin, A.Ja. (1894—1959) 437
Chingiz-Khān (etwa 1155—1227) 182
Chuquet, Nicolas (gest. um 1500) 39, 118, 238, 351, 360, 402, 427, 428, 429
Clagett, W. (geb. 1916) 442, 445
Clairaut, Alexis Claude (1713—1765) 135
Clark, W.E. 437
Clavius, Christoph (1537—1612) 365, 367, 393
Coedès, G. 437
Collebrooke, H.T. 437
Coolidge, J.L. 435
Cramer, Gabriel (1704—1752) 36
Crombie, A.C. 445
Crosby, H. Lamar 445
Curtze, M. 441, 444, 445, 446
Cusanus siehe Nikolaus v. Cues

Dante, Alighieri (1265—1321) 327
Dareios Hystaspes (6.—5. Jh. v.u.Z.) 89
Datta, B. 437
David, der Baumeister (gest. 1125) 334
Demokrit (etwa 460 bis etwa 380) 397
Descartes, Renè (1596—1650) 69, 129, 223, 236, 255, 261, 268, 407, 408, 420
Diokles (2. Jh. v.u.Z.) 256, 257
Dionysodoros (3.—2. Jh. v.u.Z.) 256
Diophantos (3. Jh.) 37, 63, 125, 135, 141, 180, 212, 221, 229, 230, 231, 232, 234, 235, 272, 330, 415
Domingo Gonsalez (Dominicus Gundissalinus, 12. Jh.) 341
Dominicus de Clavasio (14. Jh.) 410, 412
Dumbleton, John (erste Hälfte 14. Jh.)
Dürer, Albrecht (1471—1528) 421
Du Shi-zhan 436
Dvivedi, S. 437

Eneström, G. 444, 445
Engels, Friedrich (1820—1895) 3, 175, 327, 328, 413, 435
Erani, T. (1902—1940) 441
Erlendson, Gaukr (etwa 1264—1334) 354
Estienne de la Roche (16. Jh.) 361
Eudoxos (etwa 408—355 v.u.Z.) 181, 224, 250, 294
Eukleides (4.—3. Jh. v.u.Z.) 63, 98, 99, 128, 154, 158, 179, 180, 181, 199, 212, 214, 217, 221, 222, 248, 250, 251, 252, 253, 257, 261, 270, 272, 275, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 284, 299, 320, 333, 336, 339, 341, 342, 343, 344, 372, 374, 393, 395, 414, 415, 420, 427, 436
Euler, Leonhard (1707—1783) 77, 150, 158, 164, 173, 174, 236, 310, 408
Eutokios von Askalon (geb. etwa 480) 256, 271, 330, 415

Fa Sian (4.—5. Jh.) 10, 90
Ferdousi (etwa 940—1020) 183
Fermat, Pièrre (1601—1665) 147, 150, 174, 236, 407
Ferro, Scipione del (1465—1526) 262

Fetter, G. (1881—1960) 446
Fettweis, E. 435
Fibonacci siehe Leonardo Fibonacci von Pisa
Figar (Vyagramukha) 179
Fine, Oronce (oder Fineus) (1494—1555) 362
Fink, Thomas (1561—1656) 297
Fourier, Joseph (1768—1830) 112
Franceschi siehe Piero de'Franceschi
Friedrich II. (1194—1250) 344, 375
Friedrich II. (1712—1786) 369
Fuß, N.I. (1755—1826) 158

Ǧābir ibn Aflā' (Abū Muḥammad Ǧābir ibn Aflā', 11. Jh.) 184, 298, 303, 324, 343
Galâyuda (10. Jh.) 153
Galenos (129 bis etwa 200) 177
Galilei, Galileo (1564—1642) 394, 396, 406, 407, 408
Ǧamāl ad-Dīn Malikšāh siehe Malikšāh
Gandz, S. 439, 440, 445
Gaṇeśa (16. Jh.) 95, 158, 160, 161, 162
Ganguli, S. 437, 438
Gauchet, L. 437
Gauß, Carl Friedrich (1777—1855) 77, 111
Gautama Siddharta (auch Qiutan Xida) (8. Jh.) 14, 91, 107
Geng Shou-chang (1. Jh. v. u. Z.) 23
Georgios von Trapezunt (1393—1486) 177, 344, 416, 420
Gerbert (etwa 940—1003) 339, 346, 349, 353, 372
Gerhard von Cremona (1114—2287) 164, 204, 209, 271, 278, 343, 344, 374
Gersonides, Leo (Levi ben Geršon, 1288—1344) 392, 393, 412
Giacobo aus Florenz (13.—14. Jh.) 354
Giacobo von Cremona (etwa 1452) 412, 420
Goldbach, Christian (1690—1764) 174
Gregorius a Sancto Vincentio (1584—1667) 255
Gregory, James (1638—1675) 84, 173
Grigor Magister (etwa 990—1058) 333
Gunter, Edmund (1581—1626) 164, 297
Günther, S. (1848—1923) 435
Guo Shou-jing (1231—1316) 11, 84, 86
Gutenberg, Johannes (1400?—1468) 357
Guttmann, J.M. 444

ha-Ḥazzan (Isaac ha-Ḥazzan, 13. Jh.) 341
ha-Kohen (Jehuda ben Moses ha-Kohen, 13. Jh.) 341
Han-Dynastie 9, 10, 49
Hankel, H. (1839—1873) 323, 439
Harclay, Henry (gest. 1317) 397
Harriot, Thomas (1560—1621) 69
Hartner, W. 446
Harūn ar-Rašīd (786—809) 178, 217
Haskins, S. 444
Hée, L. van 436
Heiberg, J.L. (1854—1928) 441, 442
Hermann, der Krüppel (Hermannus Contractus, 1013—1054) 349
Hermann von Dalmatien (12. Jh.) 341
Heron von Alexandria (etwa 1. Jh.) 56, 63, 154, 155, 159, 180, 217, 218, 219, 330, 334, 336, 338, 344
Heytesbury, William (etwa 1313—1372)
Hieronimus de Angest (gest. 1538) 402
Hilbert, David (1862—1943) 283
Hippokrates (etwa 440 v. u. Z.) 177
Hochheim, A. 440
Hoernle 437
Hofmann, J.E. (geb. 1900) 435, 438, 445
Horner, William George (1768—1837) 69, 116, 242, 243
Hosrov Anuschīrwana (531—579) 177
Hublai-khān (1216—1294) 182
Hugo aus Paris (Hugues de St. Victor, gest. 1141) 410
Hūlāgū-ḫān (1217—1265) 84, 182, 183, 304
Hunger, H. 440
Huygens, Christian (1629—1695) 257, 413
Hypsikles von Alexandria (2. Jh. v. u. Z.) 415

Ibn al-Bannā (Abū-l-'Abbās Aḥmed ibn Muḥammad ibn al-Bannā al-Marraquši, 13. und 14. Jh.) 184, 216, 270
Ibn al-Haitham (Abū 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haitham, etwa 965—1039) 184, 235, 251, 257, 266, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 287, 288, 291, 292, 293, 300, 301, 312, 343, 344, 393, 395, 442
Ibn al-Ḥusain (Abū Ǧa'far Muḥammad ibn al-Ḥusain, 11. Jh.) 234, 235, 288
Ibn' Alī (Abū-t-Taǧīb Sanad ibn 'Alī, 9. Jh.) 249
Ibn Ezra (Abraham ben Meyir ibn Ezra, etwa 1090—1167) 214
Ibn Ḫaldūn (Abū Zāid 'Abd ar-Raḥmān ibn Muḥammad ibn Ḫaldūn, 1332—1406) 213, 268, 270
Ibn Ḥāmid (Muḥammad ibn Ḥāmid, 9. bis 10. Jh.) 179
Ibn 'Irāq (Abū Nasr Manṣūr ibn 'Alī ibn 'Irāq, 10.—11. Jh.) 183, 267, 298, 300, 301, 303
Ibn Qurra (Abū-l-Ḥasan Thābit ibn Qurra aṣ-Ṣābī al-Ḥarrānī (etwa 830—901) 235
Ibn Qurra (Abū Isḥāq Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra, 908—946), 249, 251, 259,

270, 276, 279, 280, 288, 289, 290, 291, 292, 297, 300, 302, 343
Ibn Rušd siehe Averroës
Ibn Sīnā siehe Avicenna
Ibn Turk ('Abd al-Ḥāmid ibn Wasi ibn Turk, 9.Jh.) 213
Ibn Yūnis (Abū-l-Hasan 'Ali ibn abī Sa'īd 'Abd ar-Raḥmān ibn Aḥmad ibn Yūnis, 950—1009), 184, 299, 303, 310
Isidoros von Miletos (6.Jh.) 330, 333

Jakob von Cremona (gest. etwa 1452) 415
Jan Bo-jung 436
Jean de Meurs (14.Jh.) 363
Jia Xian (12.Jh.) 65, 67, 73
Johannes Campanus von Novara (Giovanni Campano, 13.Jh.) 252, 343, 396, 401, 420, 427
Johannes (John) Duns Scotus (etwa 1265—1308) 402
Johannes von Gmunden (etwa 1380—1442) 345, 353, 362, 411, 412
Johannes (Giovanni) von Palermo (13.Jh.) 344
Johannes von Sacrobosco (John of Halifax or Holywood, 1200?—1265?) 190, 353, 354
Johannes von Sevilla (gest. etwa 1153) 190, 192, 193, 194, 197, 341, 342, 352, 362, 365
John of Halifax (oder Holywood) siehe Johannes von Sacrobosco
Jordanus Nemorarius (12.—13.Jh.) 354, 362, 367, 371, 415, 417
Juschkewitsch, A.P. (geb. 1906) 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 445
Justinianus I. (483—565) 177
Jusupov, N. 439

Kagan, V.F. (1869—1953) 441
Kâlidâsa (4.—5.Jh.) 91
Kanishka (78—123) 90
Karl der Große (742—814) 337
Karl Martell (etwa 688—741) 176
Karpinski, L.Ch. (1878—1956) 437, 439, 440,
Kary-Nijazov T.N. 443 [444
Kâtyâyana (7.—5.Jh. v.u.Z.?) 92, 96, 97, 100
Kaye, G.R. 437
Kepler, Johannes (1571—1630) 276, 324, 407
Kennedy, E.S. 440, 443
Kirik von Nowgorod (geb. 1110) 358, 361
Kogan-Bernštejn, F.A. ...
Kokian, S. 443
Kolman, E.J. (geb. 1892) V
Kolmogorov, A.N. (geb. 1903) V, 435
Kopernikus, Nicolaus (1473—1543) 346, 401, 411
Kopiewski (auch Kopiewitsch) I.F. (17. bis 18.Jh.) 359, 444
Krasnova, S.A. 441
Kṛishṇa (15.—16.Jh.) 95, 112, 128, 129
Krist'an aus Prachatiz (etwa 1366—1439) 411
Krol, Martin (15.Jh.) 411
Krylow, A.N. (1863—1945) 111
Kubesov, A. 442
Kublai-Ḫan (1260—1294) 84
Kummer, E. (1810—1893) 158
Kušyār ibn Labbān al-Ǧīlī (etwa 971—1024), 198, 236, 237

Lagrange, Joseph Louis (1736—1813) 150
Lampert, Johann Heinrich (1728—1777) 281, 314, 318
Legendre, Adrien Marie (1752—1833) 60, 278
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716) 36, 173, 174, 394, 403
Lenin, Vladimir Il'ič (1870—1924) 435
Leonardo da Vinci (1452—1519) 274, 421, 422, 423, 427, 446
Leonardo Fibonacci von Pisa (1170?—1250?) 21, 35, 39, 47, 53, 77, 99, 117, 118, 152, 190, 215, 234, 235, 325, 337, 342, 351, 352, 353, 366, 367, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 417, 426, 429
Levi ben Geršon siehe Gersonides
L'Hospital, Guillaume François de (1661 bis 1704) 36
Libri, G. (1802—1869) 439, 445
Li Chun-feng (605—673) 10, 63, 75, 84
Li Rui (18.Jh.) 54
Liu Hui (3.Jh.) 10, 23, 37, 48, 52, 54, 57, 58, 59, 62, 65
Liu Yi (um 1080) 51, 63, 65
Liu Zhuo (544—610) 10, 11, 84
Li Yan (gest. 1963) 436, 437
Li Ye (1178—1265) 11, 22, 37, 65, 66, 67, 69, 71, 73
Loria, Gino (1862—1954) 65, 435
Luckey, Paul (gest. 1949) 242, 438, 440, 443
Lull Ramon (etwa 1235—1315) 393
Lurje, S.J. (geb. 1890) 82
Lyer, R. Venchakalan 438

Maclaurin Colin (1698—1751) 404
Mağd ad-Daula (gest. 1029 od. 1030) 189
Magini, Giovanni Antonio (1555—1617) 365
Magister Gernardus (Nemorarius) 354
Magnizki, L.F. (1669—1739) 351, 360, 361, 365, 366, 444
Mahâvîra (9.Jh.) 56, 83, 91, 92, 94, 99, 103,

120, 127, 132, 133, 135, 137, 139, 141, 151, 153, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 218
Maḥmūd (998—1030) 182, 300
Maier, A. (geb. 1905) 445
Maliksāh (Ǧamāl ad-Dīn Maliksāh, gest. 1092)
Marar, K. Mukunda 438 [260
Markuschewitsch, A.I. (geb. 1908) 437
Marre, A. 440, 446
Martianus Capella (5. Jh.) 329
Martin aus Lenczice (etwa 1405—1463) 411
Marx, Karl (1818—1883) 3, 175, 326, 435
Mascheroni, Lorenzo (1750—1800) 274
Mas'ūd ibn Maḥmūd (gest. 1040) 300
Matthias Corvinus (1443—1490) 416
Medovoj, M.I. (gest. 1963) 439, 441
Mendthal, H. 446
Menelaos (1.—2.Jh.) 271, 295, 343, 374, 415
Mengoli, Pietro (1625—1686) 409
Meng-xi siehe Shen Gua
Menninger, K. 350, 435
Mercator, Nicolaus (1620—1687) 174
Mesrop Maschthoz (361—440) 331
Michel, H. 442
Mieli, Aldo (1879—1950) 438
Mikami, Y. (1875—1950) 436
Moduit, John (14.Jh.) 412
Moerbeke siehe Wilhelm von Moerbeke
Mohammed (der Prophet) siehe Muḥammad
Moivre, Abraham de (1667—1754) 375
Molière, J.B. (1622—1673) 369
Morduchai Finzi (15. Jh.) 220
Moročnik, S.B. 441
Moschopulos, Manuel (13.—14.Jh.) 331, 334
Moses ben Maimon (auch Moses Maimonides 1135—1204), 184, 294, 318
Mossaheb, G.H. 441
Muḥammad (der Prophet, etwa 570—632) 175
Müller, C. 437
Müller, Johannes aus Königsberg siehe Regiomontanus
Murdoch, J.E. 445
Mūsā ibn Šākir (9.Jh.) 178, 270
Mu'tadīd (892—903) 278

Nagl, A. 444
an-Nairīzī (Abū-l-'Abbās al-Faḍl ibn Ḥātim an-Nairīzī, gest. etwa 922) 249, 251, 276, 278, 279, 280, 285, 303, 343
Nallino, C.A. 443
Nan Gong-yue (8.Jh.) 11
an-Nasawī (Abū-l-Ḥasan 'Ali ibn Aḥmad an-Nasawī, gest. etwa 1030) 189, 192, 193, 194, 196, 198, 242, 246, 271
Nanu, F. 437
Nârâyaṇa (14.Jh.) 83, 91, 118, 123, 124, 129, 133, 141, 151, 152, 155, 173
Naudé, Philipp (1684—1747) 158
Needham, Joseph (geb. 1900) 13, 436
Neper, John (1550—1617) 365
Nesselmann, G.H.F. (1811—1881) 443
Neugebauer, Otto (geb. 1899) 6, 436, 440
Newton, Isaac (1643—1727) 74, 84, 174, 255, 268, 403, 413
Nicolaus V. (1397—1455) 415
Nicolaus von Cues (Cusanus) (1401—1464) 412, 413, 416, 446
Nikitin, Afanassi (15.Jh.) 91
Nikomachos (1.—2.Jh.) 333
Nîlakaṇṭa (15.—16.Jh.) 91, 94, 96, 160, 167, 168, 169, 173, 174
Niẓām al-Mulk (gest. 1092) 260

Ocreatus (Nicolaus Ocreatus, etwa 12.Jh.) 355
Olschki, L. 446
Omar (Kalif Omar, 634—644) 176
Orbeli, I.A. 443
Oresme, Nicole (etwa 1323—1382) 238, 346, 371, 397, 399, 401, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 445, 446
Oswin (König Oswin, 7.Jh.) 336
Otho, Valentin (etwa 1550—1605) 59
Owannes Sarkawag (etwa 1045—1129) 333

Paciolí, Luca (etwa 1445 bis etwa 1514) 118, 366, 420, 421, 423, 424, 425, 426, 427, 429
Padmanabha 138
Pappos (3.Jh.) 276
Pascal, Blaise (1623—1662) 74, 174
Pasch, Moritz 283
Paulos Alexandrinos (oder Puliśa, 4.Jh.) 93
Pediasimos, Johannes (14.Jh.) 336
Pélerin, Jean (1445?—1523?) 421
Peletier, Jacques (1515—1582) 361, 392
Pell, John (1610—1685) 150
Peter I. (1672—1725) 360
Petrizi, Ioane (etwa 1055—1130) 334
Petrosjan, G.B. (geb. 1902) 441, 443
Petrus Ingvarssön (Petrus aus Dänemark, 13. Jh.) 353, 362
Peurbach, Georg von (1423—1461) 164, 363, 411, 414
Piero de' Franceschi (1410?—1492) 421
Pitiscus, Bartholomaeus (1561—1613) 295
Planudes, Maximos von Nikomedia (etwa 1260—1310) 330, 331, 334, 351
Platon (429—348 v.u.Z.) 271, 397, 415, 416
Plato von Tivoli (12. Jh.) 164, 342
Plooij, E.B. 441

Polo, Marco (1254—1323) 360, 371
Pol'skij, I.G. 445
Poseidonios von Rhodos (etwa 100 v.u.Z.) 154, 278, 280
Pragensis, Johannes, siehe Šindel, Jan
Proklos Diadochos (410—485) 278, 334, 344
Pṛtûdakaswâmî (9. Jh.) 94, 125, 127, 129, 131, 137, 146
Psellos, Michael (geb. 1018, gest. nach 1078) 330
Ptolemaios (2. Jh.) 47, 59, 84, 106, 155, 180, 181, 272, 278, 295, 302, 305, 308, 310, 320, 341, 343, 363, 374, 395, 412
Puschkin, A.S. (1799—1837) 328
Pythagoras (6. Jh. v.u.Z.) 95, 96, 153, 155, 397, 415

Qâdi zâda ar-Rûmî (Ṣalâh ad-Dîn Mûsâ ibn Muḥammad Qâḍî-zâda ar-Rûmî, 14. bis 15. Jh.) 184, 320, 323
Qin Jiu-shao (13. Jh.) 11, 15, 22, 57, 65, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 76, 77, 83
Qusṭa ibn Lûqâ al-Ba'labakkî (gest. 912) 212, 215
Qutaiba 177

Radulph von Laon (gest. 1131) 349
Raik, A.E. 436
Rajagopal, C.T. 438
Râmânujâcârya, N. 437
Rangâcârya, M. 437
Ratdolf, Erhart (etwa 1443—1528) 420
Raymond I. (1126—1151) 340
Regiomontanus, Johannes (Müller) (1436 bis 1476) 157, 164, 298, 303, 307, 325, 346, 363, 393, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 446
Reinaud, J. 352
Ricci, D.I. 446
Richard de Fournival (etwa 1200—1250) 426
Richard Swineshead (14. Jh.) 402, 403, 406
Richard von Wallingford (etwa 1292—1335) 412
Richer von Reims (10. Jh.) 347
Richmann, Georg Wilhelm (1711—1753) 395
Rida, A.K. Irani 439
Riemann, Bernhard (1826—1866) 281
Robert Grosseteste (auch Robert von Lincoln, 1168—1253) 346, 394, 395, 397
Robert of Chester (12. Jh.) 164, 187, 204, 341
Roberval, Giles Persone de (1602—1675) 174
Roger II. (12. Jh.) 357
Rosen, F. 439
Rosenfeld, B.A. (geb. 1917) 438, 439, 440, 441, 442, 443, 445
Rublew, Andrei (etwa 1360—1430) 327
Rudolff, Christoph (1500?—1545?) 364, 418, 420, 424
Ruffini, Paolo (1765—1822) 69, 242, 243
Ruska, Julius (1867—1949) 439

Saccheri, Girolamo (1667—1733) 280, 283, 287, 288
Sachau, E. 438
Sadykov, Ch.U. 443
Šâhruh (14.—15. Jh.) 319
Sal'e, M.A. 438, 439
aš-Šanni (Abû 'Abdallah aš-Šanni, 10. und 11. Jh.) 157
Sarton, George (1884—1956) 435, 445
Savasorda siehe Abraham bar Hiya
Sayili 439
Schoy, Carl (gest. 1925) 442, 443
Schramm, M. 409, 446
Sedillot, L.A. 443
Segal, V.S. 440
Seki Shinsuke Kova (1642?—1708) 35, 88
Seleukos I. Nikator (365—281 v.u.Z.) 90
Severus Sebocht (7. Jh.) 107, 177
Shakespeare, William (1564—1616) 352, 369
Shang Gao (11.—12. Jh. v.u.Z.) 51
Shankar-Shukla, K. 437
Shen Gua (auch Meng-xi, 1030—1094) 11, 15, 57, 74, 80, 84
as-Siğzî (Abs Sa'îd Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Ğalîl as-Siğzî, etwa 951—1024) 272, 288, 320
Simplikios (gest. 549) 177, 278
Simson, Robert (18. Jh.) 286
Šindel, Jan (auch Johannes Pragensis) (1375 bis 1453) 411
Singh, A.N. 437, 438
Smith, D.E. 435, 437
Snellius, Willebrord (1581—1626) 157, 299, 307, 413
Spasski, I.G. 360, 445
Spies, O. 442
Šrejder, S.N. (1878—1948) 445
Srîdhara (9.—10. Jh.) 91, 94, 95, 103, 109, 112, 113, 114, 115, 118, 119, 120 131, 134, 139, 151, 153, 155, 157, 159, 160
Šrîpati (11. Jh.) 91, 125, 126, 127, 141, 142, 147, 148, 158
Steck, M. 441
Steiner, Jacob (1796—1863) 274
Steinschneider, Moritz 439, 444

Stevin, Simon (1548—1620) 23, 255, 276, 364, 365
Stifel, Michael (etwa 1486—1567) 21, 39, 74, 136, 238, 246, 367
Stirling, James (1692—1770) 84, 85
Struik, D. J. 435, 445
Sung-Dynastie (960—1279) 11, 37
Sun-zi (3. Jh.) 10, 14, 76, 145, 436
Suter, H. 438, 439, 440, 441, 442, 443

aṭ-Ṭabarī (Sahl aṭ-Ṭabarī, 9. Jh.) 295
Tacquet, André (1612—1660) 255
Tai-zun (627—649) 11
Tang-Dynastie (618—907) 10, 11, 23
Tannery, Paul (1843—1904) 443
Tarek ben Said (7.—8. Jh.) 175 [367
Tartaglia, Niccolò (1500—1557) 262, 274, 344,
Theodoros aus Klazomene (12.—13. Jh.) 334,
Theodosios (1. Jh. v. u. Z.) 343, 396, 415 [375
Theon von Alexandria (4. Jh.) 47, 253, 309, 420
Theon von Smyrna (2. Jh.) 78, 147, 375
Thibaut, G. 437
Thomas, Alvarus (15.—16. Jh.) 402, 407
Thomas von Aquino (1225/6—1274) 402
Timčenko, I. Ju. (1863—1939) 435
Timur (1336—1405) 91, 182, 319
Togrul-bek (1038—1063) 182
Tropfke, J. (1866—1939) 435
Tumanjan, G. T. 443
aṭ-Ṭūsī (Abū Ga'far Muḥammad ibn Muḥammad Nasīr ad-Din aṭ-Ṭūsī, 1201—1274) 87, 88, 183, 186, 247, 255, 268, 271, 272, 278, 280, 283, 285, 286, 287, 288, 294, 304, 305, 306, 307, 308, 319, 325, 374, 393, 415
Tychikos von Trapezunt (7. Jh.) 332

Ulugbāk (1394—1449) 88, 183, 237, 308, 319, 320, 324
'Umar II. (8. Jh.) 178
Uzhou Ke-zheng 436

Valla, Georgius (1430—1499) 422
Vantzel, P. L. (1814—1848) 261
Varâhamihira (5.—6. Jh.) 91, 93, 107, 154, 164, 166
Vedamurti Aiyar T. V. 438
Venkachalam Iyer, R. 438
Venkataraman, A. 438
Vera, F. 439
Veselovskij, I. N. 445
Viète, François (1540—1603) 53, 68, 69, 126, 298, 299, 321, 363, 413
Vitrivius Pollio (1. Jh. v. u. Z.) 427
Vogel, Kurt (geb. 1888) 220, 357, 439, 440, 443, 445, 446
Vygodskij, M. Ja. (geb. 1898) 436

van der Waerden, B. L. 437
Wallis, John (1616—1703) 99, 288
Walther, Bernhard (1430—1504) 416
Wang Fan (gest. 267) 57
Wang, L. 436
Wang Xiao-tong (7. Jh.) 11, 60, 64, 65
Weinberg, J. 440
Wenzel II (13. Jh.) 410
Widmann, Johann (15. Jh.) 366, 411, 417, 418
Wiedemann, E. 442
Wieleitner, H. (1874—1931) 439, 445, 446
Wilhelm von Moerbeke (oder Willem de Merbecke) (1215—1286) 344, 395
Winter, H. J. J. 438
Witelo (etwa 1225—1280) 344, 395
Woepcke, Franz (1820—1860) 242, 438, 440, 441, 442, 444
Wu Jing (15. Jh.) 70
Wußing, H. (geb. 1927) V

Xiahou Yang (5.—6. Jh.) 19
Xie Cha-wei (11. Jh.) 75
Xuan-di (73—49 v. u. Z.) 23
Xu Chun-fang 82
Xui Chun-fan 436
Xu Yue (2.—3. Jh.) 15, 18, 74

Yang Hui (13. Jh.) 11, 22, 48, 49, 51, 63, 65, 66, 73, 78, 80, 81, 82
Ya'qūb an-Nadim (gest. 995) 189
Ya'qūb ibn Tārik (gest. etwa 796) 179
Yi Xing (7. Jh.) 10, 11, 74, 76, 77, 85
Yuan Hao-wen (13. Jh.) 65

Zamberti, Bartolomo (15. Jh.) 344, 427
Zeller, M. C. 446
Zenodoros (etwa 180 v. u. Z.) 395, 396
Zeuthen, H. G. (1839—1920) 435
Zha-ma-lu-ding (Ǧamāl ad-Dīn) 86
Zhang Cang (gest. 152 v. u. Z.) 23
Zhang Heng (78—139) 10, 57
Zhang Qiu-jian (5. Jh.) 75, 79
Zhang Sui siehe Yi Xing
Zhao Jun-qing (2. oder 3. Jh.) 62
Zhen Luan (6. Jh.) 74, 75
Zhou-Dynastie (1027—249 v. u. Z.) 11
Zhu Shi-jie (13. Jh.) 11, 22, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 82
Ziegler, V. (geb. 1922) V
Zubov, V. P. (1899—1963) 444, 445, 446
Zu Chong-zhi (5. Jh.) 10, 22, 58, 64, 160