INGENIEUR
FERNSTUDIUM

Balke

Grundlagen der HF-Technik 2

Herausgeber:
Ingenieurhochschule
Mittweida

200.14–02

L E H R W E R K

für das Ingenieur-Fernstudium

Dipl.-Gwl. Edgar Balcke

nach Manuskripten von
Ing. Helmut Reck

G R U N D L A G E N

D E R   H F - T E C H N I K

2

Schwingungskreise

V e r ö f f e n t l i c h t :
INSTITUT FÜR FACHSCHULWESEN DER
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
K A R L - M A R X - S T A D T

Lektoren : Hans Krause und Erhard Reichelt
Dozenten an der Ing.-Schule Mittweida

Bearbeiter : Karl Kühn, Dozent im Fernstudium der
Ing.-Schule Mittweida

Best.-Nr. 200.14-02

Inhaltsverzeichnis Seite

E i n l e i t u n g

Nachdem Sie die Eigenschaften und das Verhalten von Widerständen, Spulen und Kondensatoren kennengelernt haben, werden Sie in diesem Lehrbrief mit Schwingungskreisen vertraut gemacht. Ein Schwingungskreis besteht aus der Reihen- oder der Parallelschaltung einer Spule mit einem Kondensator. Wie der Name andeutet, entstehen in einem solchen Kreis Schwingungen, die wir im ersten Abschnitt näher untersuchen wollen.

Man unterscheidet zwischen offenen und geschlossenen Schwingkreisen. Während bei den geschlossenen Schwingkreisen die Energie im Inneren des Kreises hin und herpendelt und im wesentlichen nur innerhalb des Kreises verbraucht wird, findet bei den offenen Kreisen eine Abstrahlung der Energie in den Raum statt. Das Anwendungsgebiet der offenen Schwingungskreise erstreckt sich daher vor allem auf die Antennen. Die geschlossenen Schwingungskreise verwendet man zur Schwingungserzeugung, als Resonanz- und Siebglieder, Modulationswandler und Frequenzstabilisatoren in den Sende- und Empfangsanlagen der Funktechnik.

Der vorliegende Lehrbrief beschäftigt sich nur mit den geschlossenen Schwingungskreisen.

1 Die Eigenvorgänge im Schwingungskreis

Wird ein Schwingungskreis nach einmaliger Energiezufuhr (z.B. nach Aufladung des Kondensators durch eine Spannungsquelle) sich selbst überlassen, dann beginnt er, sogenannte "Freie Schwingungen" zu erzeugen. Die zugeführte Energie pendelt dabei zwischen dem Kondensator und der Spule hin und her. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich zunächst nur auf einen idealen, d.h. verlustlosen Schwingkreis. Um Ihnen das Verständnis für die Vorgänge zu erleichtern, haben wir in den Bildern 1 bis 5 zum Vergleich

auch die mechanischen Schwingungen einer einmalig ange-
stoßenen federnden Stahlzunge dargestellt.

Bilder 1 - 5 : Die Entstehung freier Schwingungen

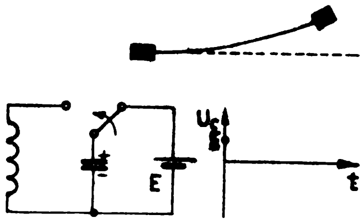


Bild 1

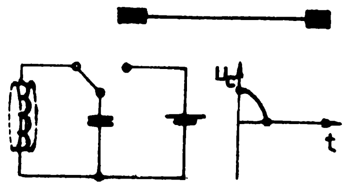


Bild 2

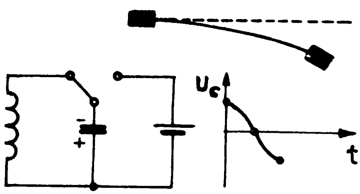


Bild 3

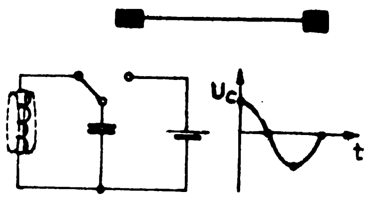


Bild 4

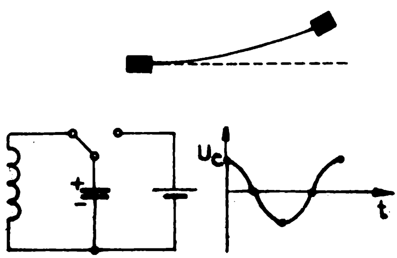


Bild 5

Wird der Kondensator eines Schwingungskreises mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, dann lädt er sich entsprechend der Spannungshöhe auf. Diesem Vorgang entspricht das Spannen der Zunge (Bild 1). In einem Liniendiagramm wird die Kondensatorspannung als Funktion der Zeit aufgetragen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat u_C den durch die Spannungsquelle bestimmten Wert E erreicht.

Durch das Umlegen des Schalters entlädt sich der Kondensator über die Spule bis zur Spannung Null. Der in den Spulenwindungen fließende Strom erzeugt ein Magnetfeld. Nachdem der Kondensator völlig entladen ist, müßte der Stromfluß aufhören. Dies geschieht aber nicht, weil das jetzt zusammenbrechende Magnetfeld in der Spule eine Spannung erzeugt, die den Strom in der gleichen Richtung weiter antreibt. Dadurch lädt sich der Kondensator entgegengesetzt auf. Die Induktivität der Spule läßt sich mit der Masse der Stahlzunge vergleichen, die infolge ihrer Trägheit über die Nullage hinausschwingt und die Zunge entgegengesetzt spannt. Wie die Bilder 1 bis 5 zeigen, entstehen sinusförmige Schwingungen mit konstanter Amplitude (ungedämpft). Die Schwingungen beruhen auf der ständigen Umwandlung von elektrischer in magnetische Energie und umgekehrt.

Da wir die Verluste vernachlässigen, muß die elektrische gleich der magnetischen Energie sein.
Aus diesen Beziehungen läßt sich die Frequenz der Schwingungen ermitteln.

$$C \frac{U_C^2}{2} = L \frac{I^2}{2}$$

Nach dem OHMschen Gesetz gilt für den Spannungsbetrag am Kondensator:

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Mit dieser Beziehung ergibt sich

$$\frac{C}{2}\, J^2 \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = L\,\frac{J^2}{2}$$

Durch Umstellen nach ω erhält man

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ ; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad (2)$$

Mit Gleichung 2 berechnet man die Eigenfrequenz eines verlustlosen Schwingungskreises.
Da bei jeder Bewegung Energie verlorengeht, kann die einmal angestoßene Stahlzunge nicht unendlich lange schwingen, sondern muß nach einigen Schwingungen wieder in der Nullage stehenbleiben. Auch im Schwingungskreis geht durch Pendelbewegung Energie verloren. Als Ursache dafür treten hier vor allem der Ohmsche Widerstand der Spule und der des Kondensators in Erscheinung. Wenn ein Strom durch einen Widerstand fließt, wandelt sich elektrische Energie in Wärmeenergie um, die in unserem Fall, dem Pendelvorgang, verlorengeht. Bei genauerer Untersuchung muß man auch die Energiebeträge berücksichtigen, die dem Kreis durch elektromagnetische Strahlung entzogen werden. Die abgestrahlte Energie ist jedoch im allgemeinen sehr gering. Nur bei sehr hohen Frequenzen, bei denen die Linearabmessungen der Schaltung nicht mehr als hinreichend klein gegenüber der betreffenden Wellenlänge angesehen werden können, darf man sie nicht mehr vernachlässigen.

Den Verlauf der gedämpften elektrischen Schwingungen zeigt Bild 6.

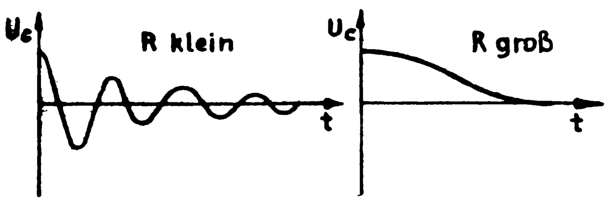


Bild 6

Die Amplituden der Schwingungen nehmen entsprechend der Dämpfung nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ab, bis der Schwingungszug auf Null abgeklungen ist. Aus Bild 6 geht ferner hervor, daß bei zu großem Verlustwiderstand die Entstehung periodischer Schwingungen verhindert wird, da sich die gesamte elektrische Energie sofort in Wärmeenergie verwandelt.

Die Frequenz der gedämpften Schwingungen kann bei nicht zu großer Dämpfung mit Gleichung (2) berechnet werden. Die genaue mathematische Untersuchung der freien, gedämpften Schwingungen wollen wir an dieser Stelle nicht vornehmen. Wir verweisen Sie auf den Lehrbrief Mathematik IV Band 3 und das Fachbuch Schröder, Elektrische Nachrichtentechnik, Band 1 .

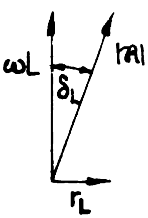
1 Der Reihenschwingungskreis

Nach den einführenden Betrachtungen über die Eigenvorgänge, beschäftigen wir uns jetzt mit dem Verhalten der Schwinggungskreise als frequenzabhängiger Widerstand.

2.1 Verlustfaktor und Kreisgüte

Sowohl in der Spule als auch im Kondensator entstehen Verluste, die mit zunehmender Frequenz ansteigen. Bei Darstellung der Verluste durch einen Reihenwiderstand gilt für

die Spule:

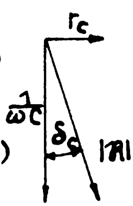


$$\tan \delta_L = \frac{r_L}{\omega L} \qquad (3)$$

$$\rho_L = \frac{\omega L}{r_L} \qquad (4)$$

a)

den Kondensator:



$$\tan \delta_C = \omega C r_C \qquad (5)$$

$$\rho_C = \frac{1}{\omega C r_C} \qquad (6)$$

b)

Bild 7

Beim Reihenschwingungskreis können die Verlustwiderstände zu einem Kreisverlustwiderstand zusammengefaßt werden.

Bild 8 : Verlustwiderstand des Reihenkreises

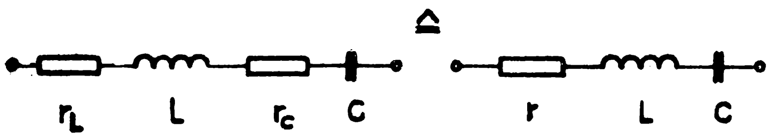


Bild8

Nach Bild 8 gilt

$$\boxed{r = r_L + r_C} \qquad (7)$$

$$r = \omega L \cdot \tan \delta_L + \frac{1}{\omega C} \cdot \tan \delta_C \qquad (8)$$

Die Blindwiderstände von Spule und Kondensator sind frequenzabhängige Größen. Bei einer bestimmten Frequenz sind die Widerstandsbeträge gleich groß. Vergleichen Sie hierzu die Ausführungen unter 2.2 !

Man erhält: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; ; \; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad (2)$$

f_0 bezeichnet man als <u>Resonanzfrequenz.</u> Sie ist indentisch mit der Eigenfrequenz eines verlustlosen Schwingungskreises.

Die Beziehung

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = K \qquad (9)$$

Da auch r_L und r_C frequenzabhängige Größen sind, wird r ebenfalls frequenzabhängig. Bei unseren weiteren Betrachtungen wollen wir jedoch für den Kreisverlustwiderstand r den Wert einsetzen, den er bei der Resonanzfrequenz besitzt und ihn als Resonanz(verlust)widerstand r_0 bezeichnen. Beachten Sie aber, daß der durch diese Näherung entstandene Fehler nur dann vernachlässigt werden darf, wenn die betrachteten Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz liegen:

$$r_0 = \omega_0 L \cdot \tan\delta_L + \frac{1}{\omega_0 C} \tan\delta_C \qquad (10)$$

Mit Gleichung 9 erhält man für den Resonanzwiderstand

$$r_0 = K\left(\tan\delta_L + \tan\delta_C\right) \qquad (11)$$

Aus dieser Beziehung läßt sich ein Kreisverlustfaktor definieren, der auch als Kreisdämpfung d bezeichnet wird.

$$\boxed{\tan\delta = \tan\delta_L + \tan\delta_C = d} \qquad (12)$$

Der Kehrwert des Verlustfaktors stellt die Kreisgüte ρ_0 dar, für die auch die Begriffe Resonanzüberhöhung und Resonanzschärfe gebräuchlich sind.

$$\boxed{\rho_0 = \frac{1}{\tan\delta}} \qquad (13)$$

Mit Gleichung 12 ergibt sich

$$\rho_0 = \frac{1}{\tan\delta_L + \tan\delta_C} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_L} + \frac{1}{\rho_C}} \qquad (14)$$

$$\boxed{\rho_0 = \frac{\rho_L \cdot \rho_C}{\rho_L + \rho_C} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_L}{\rho_C}}} \qquad (15)$$

Die Kreisgüte ρ_0 ist stets kleiner als die kleinste Einzelgüte.

Da die Verluste eines Kondensators meist viel geringer sind, als die der Spule (z.B. $\varrho_C = 2000$; $\varrho_L = 200$) gilt die Näherung $\varrho_0 \approx \varrho_L$.

Mit Gleichung (11) erhält man

$$\boxed{\varrho_0 = \frac{\omega_0 L}{r_0} = \frac{1}{\omega_0 C r_0} = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad (16)$$

Lehrbeispiel 1

Ein Reihenschwingkreis besteht aus einer Spule mit $L = 200\,\mu H$, $\tan\delta_L = 2 \cdot 10^{-2}$ und einem Kondensator $C = 5000\,pF$, $\tan\delta_C = 4 \cdot 10^{-2}$

Berechnen Sie

a) die Resonanzkreisfrequenz ω_0

b) den Kennwiderstand K

c) den Verlustfaktor des Kreises $\tan\delta$

d) die Kreisgüte ϱ und

e) den Resonanzwiderstand r_0 !

Lösung :

a) $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} = \underline{\underline{10^6 \cdot \frac{1}{s}}}$$

b) $$K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-9}}} = \underline{\underline{200\,\Omega}}$$

Prüfen Sie die Dimension Ω nach !

c) $$\tan\delta = \tan\delta_L + \tan\delta_C$$

$$\tan\delta = 20 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{20{,}4 \cdot 10^{-3}}}$$

d) $$\varrho_0 = \frac{1}{\tan\delta} = \frac{1}{20{,}4 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{49}}$$

e) $$r_0 = \frac{K}{\varrho_0} = \frac{200\,\Omega}{49} = \underline{\underline{4{,}08\,\Omega}}$$

2.2 Widerstand, Leitwert und Verstimmung

Nach Bild 8 ergibt sich für den Scheinwiderstand des Reihenkreises

$$\mathfrak{R} = r_0 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \tag{17}$$

mit dem Betrag

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{r_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{18}$$

und dem Phasenwinkel

$$\tan\varphi_r = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r_0} \tag{19}$$

Aus den Gleichungen (18) und (19) erkennen Sie, daß der Widerstandsbetrag und der Phasenwinkel von der Frequenz abhängen. Diese Frequenzabhängigkeit läßt sich anschaulich durch eine Ortskurve darstellen.

Bild 9 : Widerstandsortskurve des Reihenkreises

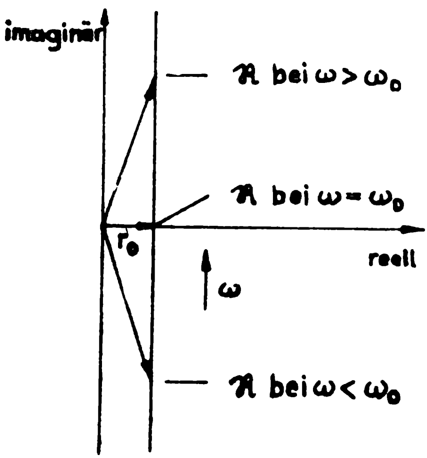


Bild 9

Bei $\omega = \omega_0$ wird $|\mathfrak{R}| = r_0$, d.h., der Widerstand des Reihenkreises besitzt hier den kleinsten Wert;
der Phasenwinkel wird Null;
der Kreis wirkt wie ein Ohmscher Widerstand.
Bei $\omega < \omega_0$ steigt $|\mathfrak{R}|$ an;
φ_r wird negativ;
der Kreis wirkt wie eine Kapazität.
Bei $\omega > \omega_0$ steigt $|\mathfrak{R}|$ ebenfalls an;
φ wird positiv;
der Kreis wirkt wie eine Induktivität.

Es ist üblich, das Frequenzverhalten von Schwingungekreisen durch sogenannte Resonanzkurven zu charakterisieren.

Bild 10 : Widerstandsresonanzkurve eines Reihenkreises

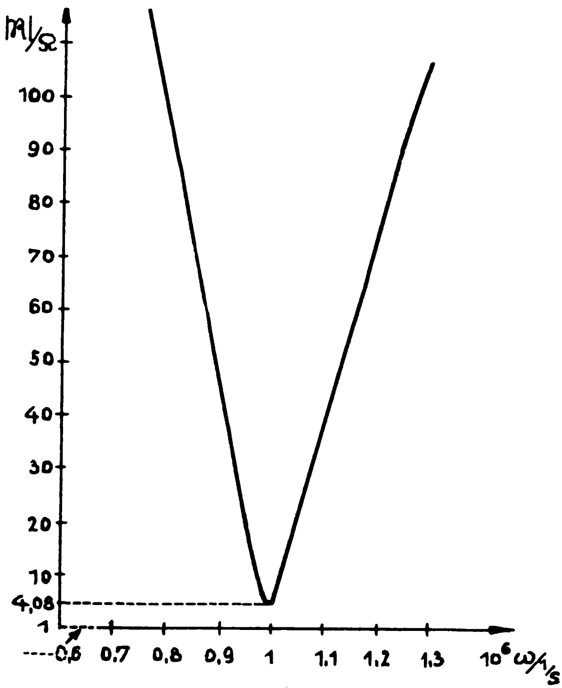


Bild 10

Lehrbeispiel 2

Für den in Lehrbeispiel 1 berechneten Schwingungskreis soll die Widerstandsresonanzkurve ermittelt werden.

Lösung :

ω	ωL	$\frac{1}{\omega C}$	r_o	$\lvert\mathfrak{R}\rvert$
$7 \cdot 10^5$	140	286	4,08	146
$8 \cdot 10^5$	160	250	"	90
$9 \cdot 10^5$	180	222	"	42,1
$1 \cdot 10^6$	200	200	"	4,08
$1,1 \cdot 10^6$	220	182	"	38,2
$1,2 \cdot 10^6$	240	166,5	"	77,6
$1,3 \cdot 10^6$	260	154	"	106

$$\lvert\mathfrak{R}\rvert = \sqrt{r_o^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Die grafische Darstellung zeigt Bild 10.
Auch die Resonanzkurve zeigt, daß der Widerstand des Reihenschwingkreises bei der Resonanzfrequenz ein Minimum wird und ansteigt, wenn man die anliegende Frequenz des Kreises gegenüber der Resonanzfrequenz "verstimmt". Sie erkennen ferner, daß die Resonanzkurve leicht unsymmetrisch zur Resonanzfrequenz liegt. Der Grund für diese Unsymmetrie ist in den verschiedenen Grenzwerten des induktiven und des kapazitiven Widerstandes zu suchen.

Die in Bild 10 dargestellte Resonanzkurve hat den Nachteil, daß sie nur für einen ganz bestimmten Schwingkreis Gültigkeit besitzt. Um ein allgemeingültiges, d.h. für alle Reihenkreise zutreffendes Diagramm zu bekommen, muß man die normierte Darstellung wählen. Bei der normierten Darstellung werden die aufzutragenden Größen auf eine besondere charakteristische gleiche Größe bezogen. In unserem Fall wird daher nicht der Scheinwiderstand selbst, sondern das Verhältnis $\frac{\lvert\mathfrak{R}\rvert}{r_o}$ betrachtet.

Als Abszissenwerte wählen wir nicht die Kreisfrequenz ω , sondern die normierte Verstimmung. Die folgenden Ableitungen werden Ihnen Klarheit über diese Begriffe schaffen. Vergleichen Sie auch diese Ausführungen mit denen des 5. Kapitels, im Lehrbrief 13 Grundlagen der E-Technik.

Aus

$$\Re = r_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0}$$

erhält man :

$$\Re = r_0 + j\left(\frac{\omega L}{\omega_0 \sqrt{LC}} - \frac{\omega_0 \sqrt{LC}}{\omega C}\right)$$

$$\Re = r_0 \left[1 + j\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$\Re = r_0 \left(1 + j\varrho_0 V\right) = r_0 \left(1 + j\Omega\right) \tag{20}$$

Für den die Verstimmung charakterisierenden Ausdruck $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ wurde V und für $\varrho_0 V$ wurde Ω gesetzt. In der Praxis ist es üblich und zweckmäßig, die Abweichungen von der Resonanzfrequenz nicht durch Frequenzabsolutwerte, sondern durch die Verstimmung anzugeben. Für die Verstimmung gelten folgende Definitionen :

Absolut - Verstimmung	$V_{abs} = \omega - \omega_0 = \Delta\omega$	(21)
Relativ - Verstimmung	$V_{rel} = \frac{V_{abs}}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	(22)
Doppel - Verstimmung	$V = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$	(23)
Normierte Verstimmung	$\Omega = \varrho_0 V = \frac{1}{d} V$	(24)

Beachten Sie, daß bei

$\omega = \omega_0$	V_{abs},	V_{rel},	V	und	Ω	Null,
$\omega < \omega_0$	"	"	"		"	negativ,
$\omega > \omega_0$	"	"	"		"	positiv

werden.

Wir wollen Ihnen jetzt noch erläutern, warum Gleichung (23) die Doppelverstimmung angibt.

Bei kleinen Abweichungen von der Resonanzfrequenz

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, wobei $|\Delta\omega| \ll \omega_0$,

gilt :

$$V = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2 \quad ; \quad \omega - \omega_0 = \Delta\omega$$

$$\boxed{V_0 \approx 2\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2\,V_{rel}} \qquad (25)$$

Die Doppelverstimmung V ist näherungsweise gleich der doppelten Relativverstimmung $V_{rel.}$. Wie sich durch eine Fehlerrechnung beweisen läßt, begeht man beim Ersetzen von V durch V_0 einen Fehler von $\frac{1}{2} V_{rel}$, d.h. bei einer relativen Verstimmung von 1% würde ein Fehler von 0,5% auftreten. Dieser Fehler kann bei praktischen Rechnungen zugelassen werden, solange es sich um kleine Abweichungen von der Resonanzfrequenz handelt. Bei großen Verstimmungen, wie sie z.B. bei der <u>Weitabselektion</u> vorkommen, darf diese Näherung nicht angewendet werden.

Nach diesen Betrachtungen über die Verstimmung wenden wir uns wieder dem Widerstand zu. Dividiert man Gleichung (20) durch r_0, dann erhält man den Scheinwiderstand des Reihenschwingkreises in normierter Darstellung.

$$\frac{\mathfrak{R}}{r_o} = 1 + j\varrho_o V = 1 + j\Omega \tag{26}$$

$$\left|\frac{\mathfrak{R}}{r_o}\right| = \sqrt{1 + (\varrho_o V)^2} = \sqrt{1 + \Omega^2} \tag{27}$$

$$\varphi_r = \operatorname{arc}\,\tan \Omega \tag{28}$$

Ebenso wie den Widerstand, kann man auch den Leitwert in normierter Form darstellen.

$$\frac{\mathfrak{G}}{g_o} = \frac{1}{1 + j\varrho_o V} = \frac{1}{1 + j\Omega} \tag{29}$$

$$\left|\frac{\mathfrak{G}}{g_o}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varrho_o V)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \tag{30}$$

$$\varphi_g = -\operatorname{arc}\,\tan \Omega = -\varphi_r \tag{31}$$

In den Bildern 11 und 12 sind die Gleichungen (27), (28), (30), (31) grafisch dargestellt.

Bild 11 : Widerstands- und Leitwertsresonanzkurve des Reihenkreises in normierter Darstellung

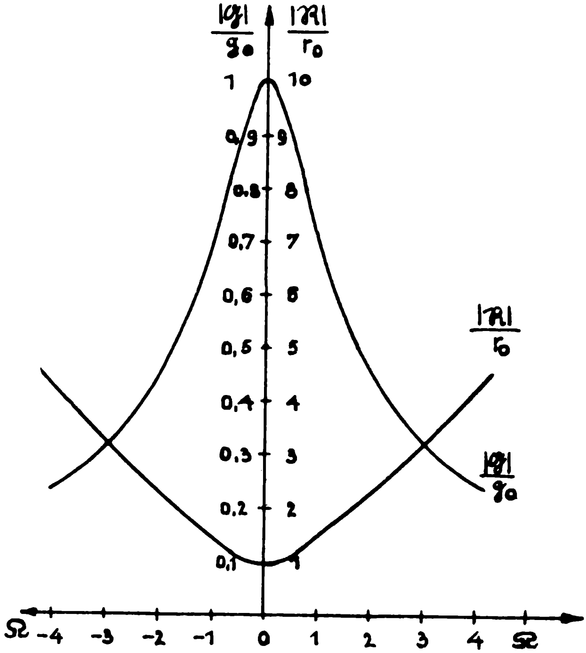


Bild 11

Bild 12 : Phasenwinkelkurven des Reihenkreises in normierter Darstellung

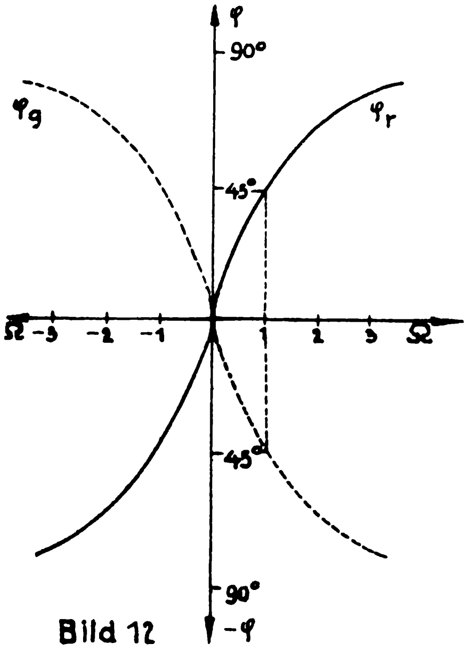


Bild 12

Wir empfehlen Ihnen, die Kurven $\frac{|\mathfrak{R}|}{r_0} = f(\Omega)$

$\frac{|\mathfrak{G}|}{g_0} = f(\Omega)$ und $\varphi_r = f(\Omega)$, $\varphi_g = f(\Omega)$

maßstäblich - z.B. auf Millimeterpapier - zu zeichnen, da Sie mit diesen Kurven noch oft zu tun haben werden.

Beachten Sie :

Bei $\Omega = 0$, d.h. bei $\omega = \omega_0$ sind der Widerstand am kleinsten und der Leitwert am größten. Die Winkel φ_r und φ_g sind Null. Mit größer werdendem Ω streben der Widerstand seinem Grenzwert Unendlich und der Leitwert dem Grenzwert Null zu, während sich die Winkel den Werten $+ 90^\circ$ bzw. $- 90^\circ$ nähern. Sie erkennen ferner, daß im Gegensatz zur Resonanzkurve in Bild 10, die normierten Resonanzkurven $\frac{|\mathfrak{R}|}{r_0}$ und $\frac{|\mathfrak{G}|}{g_0}$ symmetrisch zur Resonanzfrequenz, d.h. $\Omega = 0$ verlaufen. Durch eine Fehlerrechnung, auf die wir hier verzichten, läßt sich nachweisen, daß bei großem ϱ und damit bei allen in der HF-Technik vorkommenden Schwingungskreisen, die Unsymmetrie vernachlässigt werden kann.

2.3 Der Strom durch den Reihenschwingkreis

Bei der Berechnung des Stromes gehen wir davon aus, daß der Schwingkreis mit einem Generator zusammengeschaltet ist. Der Generator soll eine konstante und reelle Leerlaufspannung U_l und den Innenwiderstand R_i besitzen. Die Spannung am Ausgang des Generators bezeichnen wir als Klemmenspannung $\mathfrak{U}_K$.

Bild 13 : Der Reihenkreis mit Generator

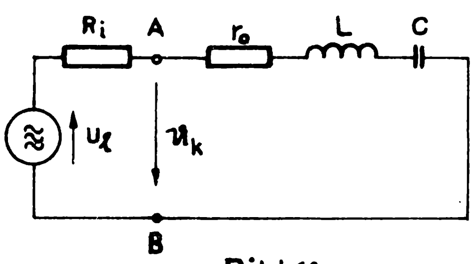


Bild 13

Zum besseren Verständnis der Vorgänge wollen wir zunächst annehmen, daß der Innenwiderstand des Generators Null ist. Bei diesem Spezialfall wird die Leerlaufspannung gleich der Klemmenspannung, und am Schwingkreis liegt eine konstante Spannung U_K.

Mit dem Ohmschen Gesetz erhält man

$$\mathfrak{I} = \frac{U_K}{\mathfrak{R}_{AB}} = \frac{U_K}{r_0\,(1+j\varrho_0\,V)} = \frac{U_K}{r_0\,(1+j\Omega)} \tag{32}$$

Im Resonanzfall, für $\Omega = 0$, wird der Strom

$$\mathfrak{I} = \frac{U_K}{r_0} = |\mathfrak{I}|_{max} = \mathfrak{I}_0 \tag{33}$$

reell und erreicht seinen Höchstwert. Wir betrachten den Resonanzstrom als Bezugsgröße für die normierte Darstellung und erhalten:

$$\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}_0} = \frac{1}{1 + j\Omega} \tag{34}$$

mit dem Betrag

$$\left|\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \tag{35}$$

und dem Winkel

$$\varphi_i = -\,\mathrm{arc}\ \tan\Omega \tag{36}$$

Mit Gleichung (35) kann der Verlauf des Stromes in Abhängigkeit von der Frequenz bzw. von der Verstimmung berechnet und als Resonanzkurve grafisch dargestellt werden. Um Ihnen zugleich den Einfluß der Verluste auf den Stromverlauf zu zeigen, sind in Bild 14 mehrere Resonanzkurven für verschiedene Kreisgüten ϱ_0 eingezeichnet.

Bild 14 : Stromresonanzkurven des Reihenkreises

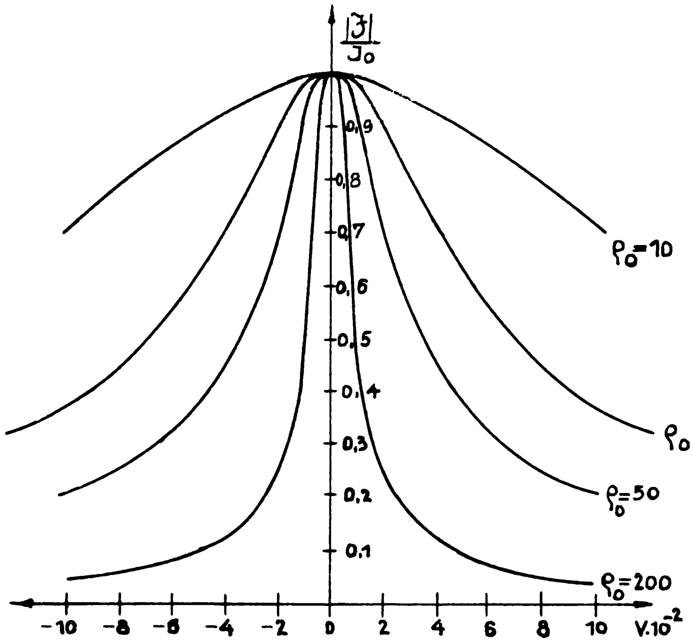


Bild 14

Da wir die normierte Darstellung wählen, müssen alle Kurven das gleiche Maximum 1 besitzen. Mit zunehmender Kreisgüte werden die Resonanzkurven immer schmaler und spitzer.

Beachten Sie, daß die normierten Stromkurven nicht über Ω, sondern, weil wir ρ_0 als Parameter wählten, als Funktion der Verstimmung V dargestellt sind.

Wie ändern sich nun die Verhältnisse, wenn der Generator einen bestimmten Innenwiderstand R_i besitzt ? Infolge des inneren Spannungsabfalles wird die Klemmenspannung des Generators nicht mehr konstant bleiben.

Nach Bild 13 ergibt sich für diesen Fall:

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}_e}{R_i + \mathfrak{R}_{AB}} = \frac{\mathfrak{U}_e}{R_i + r_o\,(1 + j\,\varrho_o\,V)}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}_e}{R_i + r_o + j\,r_o\,\varrho_o\,V}$$

Durch Ausklammern von $(R_i - r_o)$ erhält man

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}_e}{R_i + r_o} \cdot \frac{1}{1 + j\,\frac{r_o}{R_i + r_o}\,\varrho_o\,V} \qquad (37)$$

Wenn wir für

$$\boxed{R_i + r_o = r'} \qquad (38)$$

und für

$$\boxed{\frac{r_o}{R_i + r_o}\,\varrho_o = \varrho'} \qquad (39)$$

setzen, vereinfacht sich Gleichung (37) zu

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}_e}{r'\,(1 + j\,\varrho'\,V)} = \frac{\mathfrak{U}_e}{r'\,(1 + j\,\Omega')} \qquad (40)$$

Bei Resonanz gilt entsprechend

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}_e}{r'} = |\mathfrak{J}|_{max} = \mathfrak{J}_o \qquad (41)$$

Die normierte Darstellung ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_o} &= \frac{1}{1 + j\,\Omega'} && (42)\\ \frac{|\mathfrak{J}|}{\mathfrak{J}_o} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} && (43)\\ \varphi_i &= -\arctan \Omega' && (44) \end{aligned}}$$

Durch einen Vergleich mit dem zuerst behandelten Spezialfall $R_i = 0$ erkennt man, daß hier die Stromgleichungen den gleichen Bau besitzen. Wir rechnen hier jedoch nicht mit der Kreisgüte ϱ_0 und dem Verlustwiderstand r_0 des Schwingungskreises, sondern mit der "kleineren" <u>scheinbaren</u> oder <u>Pseudogüte</u> ϱ' und dem <u>scheinbaren</u> Verlustwiderstand r'. Der Innenwiderstand des Generators, der in Reihe mit dem Verlustwiderstand r_0 liegt, bewirkt eine zusätzliche Dämpfung des Kreises. Man bezeichnet sie als Pseudodämpfung, weil sich die elektrischen Vorgänge im Kreis ändern, ohne daß am Schwingungskreis selbst Veränderungen erfolgen. So verläuft z.B. die Stromresonanzkurve flacher und breiter, ohne daß sich "Kreisgüte" ϱ_0 verschlechtert. Wir berücksichtigen die Pseudodämpfung durch den Generator dadurch, daß wir ϱ_0 durch ϱ', r_0 durch r und entsprechend Ω durch Ω' ersetzen.

Als Verlustwiderstand der "Schaltung" muß mit $r' = r_0 + R_i$ gerechnet werden. Für die Güte der "Schaltung" ergibt sich

$$\varrho' = \varrho_0 \frac{r_0}{R_i + r_0}$$

und mit den Gleichungen (16) und (38) :

$$\boxed{\varrho' = \frac{1}{r'} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{r'} = \frac{1}{r' \omega_0 C}} \qquad (45)$$

2.4 Die Spannungen am Reihenschwingungskreis

2.41 Die Klemmenspannung

Nach dem Sie den Stromverlauf kennengelernt haben, wollen wir jetzt die Klemmenspannung am Reihenkreis in Abhängigkeit von der Frequenz untersuchen. Wir beziehen uns dabei wieder auf die in Bild 13 dargestellte Schaltung. Zum besseren Verständnis der Vorgänge, soll auch hier zunächst ein Spezialfall betrachtet werden. Der Innenwiderstand des Generators soll so hochohmig sein, daß der Generator einen konstanten Strom $\mathfrak{J}$ liefert.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt dann

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{J}\,\mathfrak{R}_{AB} = \mathfrak{J}\,r_o\left(1 + j\Omega\right) \qquad (46)$$

Im Resonanzfall, bei Ω 0 erreicht die Klemmenspannung ihren Kleinstwert

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{J}\,r_o = |\mathfrak{U}_K|_{min} = U_o \qquad (47)$$

Wir benutzen die Resonanzspannung U_0 als Bezugsgröße für die normierte Darstellung und erhalten

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_o} = 1 + j\Omega \qquad (48)$$

mit dem Betrag

$$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_o} = \sqrt{1 + \Omega^2} \qquad (49)$$

und dem Winkel

$$\varphi_{\mathfrak{U}_K} = \arctan \Omega \qquad (50)$$

Wir verzichten darauf, die Resonanzkurve der Spannung nochmals abzubilden, denn sie ist, wie Sie überprüfen können, mit der "Widerstandsresonanzkurve" indentisch.

Auch die Klemmenspannung wird genauso wie der Scheinwiderstand des Reihenkreises bei der Resonanzfrequenz reell und erreicht ein Minimum.

Diese Ausführungen gelten, wenn der Generator einen konstanten Strom liefert. Wie verhält sich nun die Klemmenspannung bei beliebigem Generatorinnenwiderstand ? Nach Bild 13 gilt wiederum:

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{J}\,\mathfrak{R}_{AB} = \mathfrak{J}\,r_o\left(1 + j\Omega\right) \qquad (46)$$

Da der Strom jetzt ebenfalls nicht mehr konstant bleibt, ersetzen wir $\mathfrak{I}$ durch Gleichung 42.

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{I}_0 \, r_0 \, \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} \tag{51}$$

Im Resonanzfall, bei $V = 0$ $\left(\Omega = 0 \, ; \; \Omega' = 0\right)$ wird $\mathfrak{U}_K$ reell und erreicht ihren Kleinstwert.

$$\boxed{\mathfrak{U}_K = \mathfrak{I}_0 \, r_0 = U_0} \tag{52}$$

Für die normierte Darstellung ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = \frac{1+j\Omega}{1+j\Omega'}} \tag{53}$$

mit dem Betrag

$$\boxed{\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0} = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+\Omega'^2}}} \tag{54}$$

Zur Berechnung des Phasenwinkels müssen wir Gleichung 53 in Realteil und Imaginärteil aufspalten.

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = \frac{(1+j\Omega)(1-j\Omega')}{1+\Omega'^2}$$

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = \frac{1+\Omega\Omega'}{1+\Omega'^2} + j\,\frac{\Omega - \Omega'}{1+\Omega'^2} \tag{55}$$

$$\varphi_{\mathfrak{U}_K} = \arctan \frac{\Omega - \Omega'}{1+\Omega\Omega'}$$

Die Abhängigkeit der Klemmenspannung von der Frequenz ist mit Gleichung (54) nicht so ohne weiteres zu übersehen. Wir wollen daher die Resonanzkurve der Spannung an Hand eines Zahlenbeispieles berechnen.

Lehrbeispiel 3

Ein Reihenkreis mit einem Verlustwiderstand $r_0 = 10\,\Omega$ wird an einen Generator mit $R_i = 0\,\Omega,\ 10\,\Omega\ ,\ 50\,\Omega$ u. $100\ k\Omega$ angeschlossen. Es sollen die entsprechenden normierten Resonanzkurven der Klemmenspannung dargestellt werden.

Lösung :

Für die Klemmenspannung gilt

$$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0} = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+\Omega'^2}}$$

Damit die Spannung berechnet werden kann, muß zunächst Ω' für die verschiedenen Innenwiderstände ermittelt werden.

$$r' = r_0 + R_i\ ;\ \varrho' = \frac{r_0}{r'}\ \varrho_0\ ;\ \Omega' = \frac{r_0}{r'}\ \Omega$$

R_i/Ω	r'/Ω	ϱ'	Ω'
0	$10 = r_0$	ϱ_0	Ω
10	20	$5 \cdot 10^{-1} \cdot \varrho_0$	$5 \cdot 10^{-1}\ \Omega$
50	60	$16{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot \varrho_0$	$16{,}6 \cdot 10^{-1}\ \Omega$
10^5	10^5	$10^4 \cdot \varrho_0$	$10^4\ \Omega$

Berechnung der Resonanzkurven :

a) $R_i = 0$

$$\left|\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0}\right| = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+\Omega^2}} = 1 = \text{konstant}$$

b) $R_i = 10\,\Omega$

$$\left|\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0}\right| = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+(5\cdot 10^{-1}\,\Omega)^2}}$$

Ω	0	1	2	3	4	5
$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0}$	1	1,265	1,58	1,76	1,85	1,895

c) $R_i = 50\,\Omega$

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+(0{,}166\,\Omega)^2}}$$

Ω	0	1	2	3	4	5
$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0}$	1	1,395	2,12	2,83	3,42	3,92

d) $R_i = 100\,k\Omega$

$$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0} = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+(10^{-4}\,\Omega)^2}} \approx \sqrt{1+\Omega^2}$$

Ω	0	1	2	3	4	5
$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0}$	1	1,41	2,24	3,16	4,12	5,1

Bild 15 : Spannungsresonanzkurven des Reihenkreises

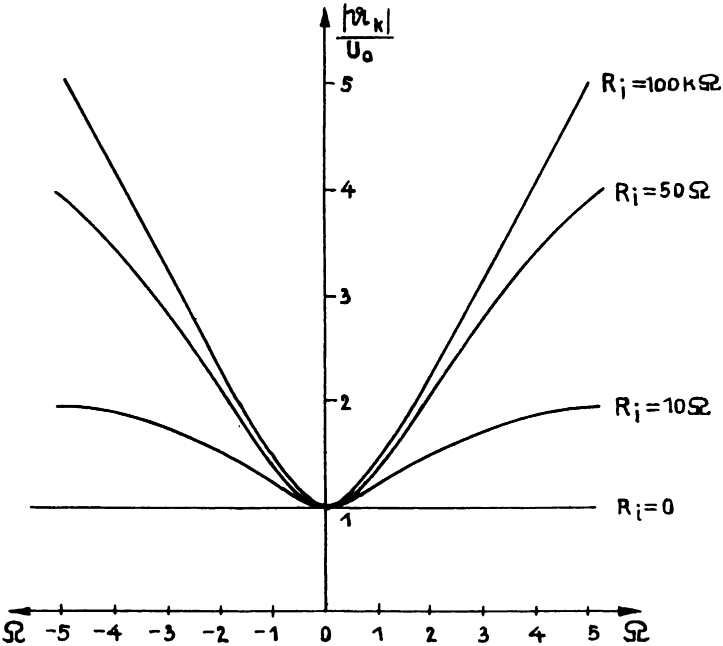


Bild 15

Bild 15 veranschaulicht deutlich den Einfluß des Generatorinnenwiderstandes. Bei $R_i = 0$ ergibt sich der bereits in Abschnitt 2.3 erwähnte Spezialfall der konstanten Klemmenspannung. Bei $R_i \gg r_0$ tritt der Spezialfall des konstanten Stromes ein, d.h. die Klemmenspannung verläuft genauso wie der Widerstand.

2.42 Die Teilspannungen

Die Spannung über dem Verlustwiderstand r_0 ergibt sich zu

$$\mathfrak{U}_R = \mathfrak{J} \cdot r_0 \tag{56}$$

Da der Resonanzwiderstand als konstant angenommen werden kann, verläuft die Spannung $\mathfrak{U}_R$ genauso wie der Strom.
Im Resonanzfall gilt :

$$\mathfrak{U}_R = \mathfrak{J}_0 \cdot r_0 = U_0 \tag{57}$$

d.h. die Spannung über dem Verlustwiderstand wird gleich der Klemmenspannung.

Für die Teilspannung $\mathfrak{U}_L$ gilt

$$\mathfrak{U}_L = \mathfrak{J} \cdot j\omega L \tag{58}$$

Da diese Gleichung zwei Veränderliche $\mathfrak{J}$ und ω enthält, eliminieren wir $\mathfrak{J}$ durch die Anwendung der Spannungsteilerregel

$$\frac{\mathfrak{U}_L}{U_e} = \frac{j\omega L}{r'\left(1+j\Omega'\right)} \tag{59}$$

Im Resonanzfall wird daraus

$$\frac{\mathfrak{U}_L}{U_e} = j\,\frac{\omega_0 L}{r'} = j\varrho' \tag{60}$$

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. Sie erkennen, daß die Teilspannung über der Spule im Resonanzfall sehr hohe Werte annehmen kann. Sie wird ϱ' mal größer als die Leerlaufspannung des Generators. Liefert der Generator z.B. eine Leerlaufspannung von 10 V, dann wird bei einer Pseudogüte von $\varrho' = 100$ die Spulenspannung :

$$|\mathfrak{U}_L| = \varrho' \cdot U_e = 1000\,\mathrm{V}$$

Man nennt diesen Vorgang Spannungsüberhöhung und die Güte daher auch Resonanzüberhöhung.

Für die Kondensatorspannung gilt sinngemäß das gleiche :

$$\mathfrak{U}_c = \mathfrak{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} \tag{61}$$

$$\frac{\mathfrak{U}_c}{U_e} = \frac{1}{j\omega C \cdot r' \left(1 + j\Omega'\right)} \tag{62}$$

Im Resonanzfall wird daraus :

$$\frac{\mathfrak{U}_c}{U_e} = -j \frac{1}{\omega_0 C r'} = -j\varrho' \tag{63}$$

$\mathfrak{U}_c$ besitzt den gleichen hohen Betrag wie $\mathfrak{U}_L$ aber ein entgegengesetztes Vorzeichen. Beide Spannungen kompensieren sich daher im Resonanzfall, so daß auch für Gleichung (57),

$$\mathfrak{U}_R\Big/_{\Omega=0} = \mathfrak{U}_K\Big/_{\Omega=0} = U_0$$

eine anschauliche Erklärung vorhanden ist.

Untersucht man durch Nullsetzen der 1. Ableitung die Beträge der Gleichungen (59) und (62) hinsichtlich ihrer Maximalwerte, dann stellt man fest, daß die Maxima nicht bei der Resonanzfrequenz, sondern bei etwas höheren bzw. tieferen Frequenzen auftreten. Die Spulenspannung hat ihr Maximum bei der gegenüber ω_0 höheren Frequenz :

$$\omega_{L_{max}} \approx \omega_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 \right] \tag{64}$$

Der Maximalwert der Kondensatorspannung liegt unterhalb von ω_0 bei

$$\omega_{c_{max}} \approx \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 \right] \tag{65}$$

Diese Abweichungen können, besonders bei hohen Kreisgüten $(\varrho > 10)$, vernachlässigt werden.

Lehrbeispiel 4

An einem Generator mit $U_e = 50\,mV$ und $R_i = 2{,}03\,\Omega$ soll ein Reihenschwingkreis angeschlossen werden. Zur Verfügung steht ein Kondensator von $500\,pF$ mit einem Verlustfaktor

$$\tan\delta_c = 2 \cdot 10^{-4}$$

Welche Güte und welche Induktivität muß die Spule besitzen, wenn die Resonanzfrequenz $f_0 = 200\,kHz$ betragen soll, und eine Kreisgüte von $\varrho_0 = 200$ gefordert wird ? Berechnen Sie ferner den Reihenverlustwiderstand des Kondensators und der Spule, sowie den Resonanzwiderstand des Kreises. Welchen Wert erreicht die Pseudogüte ? Wie groß sind der Strom, die Klemmenspannung und sämtliche Teilspannungen im Resonanzfall ?

Lösung :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{1{,}27\,mH}}$$

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_L} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho_L} + \tan\delta_c$$

$$\underline{\underline{\varrho_L}} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_0} - \tan\delta_c} = \frac{1}{\frac{1}{200} - 2 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{208}}$$

$$\varrho_L = \frac{\omega_0 L}{r_L}$$

$$r_L = \frac{\omega_0 L}{\varrho_L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-3}}{2{,}08 \cdot 10^2} = \underline{\underline{7{,}65\,\Omega}}$$

$$\tan \delta_c = \omega_0 C r_c$$

$$\underline{\underline{r_c}} = \frac{\tan \delta_c}{\omega_0 C} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{0{,}318\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{r_0}} = r_L + r_c = 7{,}65 + 0{,}318 = \underline{\underline{7{,}97\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{r_0}} = \frac{\omega_0 L}{\varrho_0} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^2} = 7{,}97$$

$$\underline{\underline{r'}} = r_0 + R_i = 7{,}97 + 2{,}03 = \underline{\underline{10\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varrho'}} = \frac{\omega_0 L}{r'} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-3}}{10} = \underline{\underline{160}}$$

$$\underline{\underline{I_0}} = \frac{U_e}{r'} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10} = \underline{\underline{5\,\text{mA}}}$$

$$\underline{\underline{U_0}} = I_0 r_0 \approx \underline{\underline{40\,\text{mV}}}$$

$$\underline{\underline{|\mathfrak{U}_L|}} = \varrho' U_e = |\mathfrak{U}_c| = 150 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{8\,\text{V}}}$$

2.5 Grenzfrequenzen und Bandbreite

Infolge der Frequenzabhängigkeit seines Widerstandes besizt ein Reihenschwingungskreis Resonanzeigenschaften. Wie Sie z.B. aus Bild 14 erkennen, reagiert der Kreis auf Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz viel stärker als auf solche, die weit von f_0 entfernt liegen.
Diese Resonanzwirkung nimmt mit steigender Kreisgüte ϱ_0 zu. Der Schwingungskreis hat somit die Eigenschaft, aus einem Frequenzgemisch ein bestimmtes Frequenzband auszusieben. Die Breite des ausgesiebten Frequenzbandes hängt von der Kreisgüte ϱ_0 ab.

Um das ausgefilterte Frequenzband rechnerisch bestimmen zu können, wurden Grenzfrequenzen festgelegt. Als solche bezeichnet man diejenigen, bei denen die Resonanzkurven gegenüber der Resonanzfrequenz auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert abgesunken sind. Der Grund für diese Festlegung liegt in der einfachen Berechnungsmöglichkeit; bei den so definierten Grenzfrequenzen ist, wie Sie noch sehen werden, der Wirkwiderstand stets gleich dem Blindwiderstand und damit der Phasenwinkel 45°. Bei Verstärkern und Rundfunkempfängern macht sich z.B. ein größerer Abfall als auf den $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$-fachen Wert für unser Ohr noch nicht bemerkbar.
Aus Gleichung (35) erhalten wir

$$\frac{|\mathfrak{I}|}{\mathfrak{I}_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es muß gelten

$$1 + \Omega^2 = 2 \; ; \; \Omega^2 = 1$$

$$\Omega = \varrho_0 V = \pm 1$$

Die Grenzfrequenzen entsprechen der normierten Verstimmung $\Omega = \pm 1$. Da bei dieser Verstimmung die Phasenwinkel gerade 45° betragen bezeichnet man die Verstimmung auch als 45°- Verstimmung und die Grenzfrequenzen als 45°- Frequenzen.

Für den Widerstand des Reihenkreises gilt bei der normierten Verstimmung von $\Omega_{45} = 1$:

$$|\mathfrak{R}|_{45} = r_o\sqrt{2} \; ; \; \varphi_r = 45^\circ \; ;$$

und für den Leitwert :

$$|\mathfrak{g}|_{45} = G_o \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; \varphi_g = -45^\circ$$

Zur Berechnung der Grenzfrequenzen benutzen wir Gleichung (66) :

$$\varrho_o \, V_{\pm 45} = \pm 1$$

$$V_{+45} = \frac{\omega_{45}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{45}} = \frac{1}{\varrho_o} \; ; \; V_{-45} = \frac{\omega_{-45}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{45}} = -\frac{1}{\varrho_o}$$

$$\omega_{45}^2 - \omega_o^2 = \frac{\omega_o \, \omega_{45}}{\varrho_o} \; ; \; \omega_{-45}^2 - \omega_o^2 = \frac{\omega_o \, \omega_{-45}}{\varrho_o}$$

$$\omega_{45}^2 - \frac{\omega_o}{\varrho_o}\omega_{45} - \omega_o^2 = 0 \; ; \; \omega_{-45}^2 + \frac{\omega_o}{\varrho_o}\omega_{-45} - \omega_o^2 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichungen erhält man

$$\omega_{+45} = \frac{\omega_o}{2\varrho_o} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2\varrho_o}\right)^2 + \omega_o^2} \qquad (67)$$

$$\omega_{-45} = -\frac{\omega_o}{2\varrho_o} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2\varrho_o}\right)^2 + \omega_o^2} \qquad (68)$$

Den Frequenzbereich zwischen den beiden Grenzfrequenzen bezeichnet man als <u>Bandbreite</u> des Schwingungskreises. Man erhält die Beziehung :

$$\boxed{B = f_{+45} - f_{-45} = 2\,\Delta f_{45}} \qquad (69)$$

Bildet man aus den Gleichungen (67) und (68) die Differenz, dann fallen die Wurzelausdrücke weg, und man erhält

$$\boxed{B = \frac{f_0}{\rho_0}} \tag{70}$$

Das durch die Gleichung (69) und (70) festgelegte Frequenzband bezeichnet man als <u>absolute</u> <u>Bandbreite</u> (vgl. Bild 16).

Bild 16 : Bandbreite eines Schwingungskreises

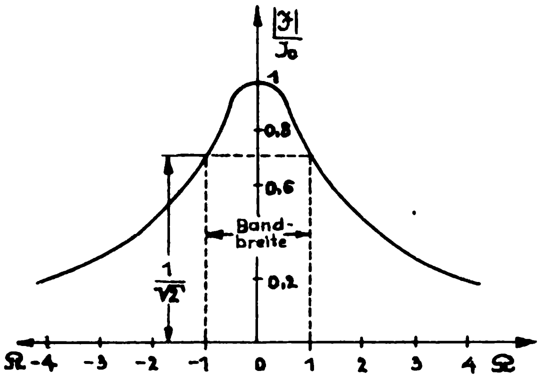


Bild 16a

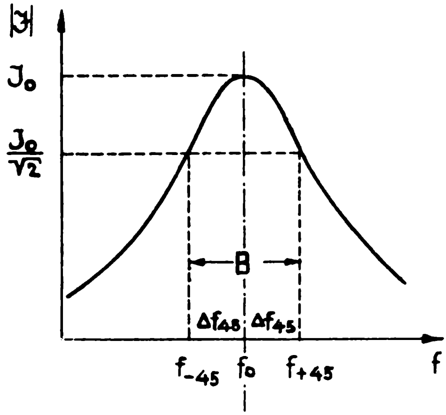


Bild 16 b

Vielfach rechnet man auch mit der relativen Bandbreite

$$\boxed{b = \frac{B}{f_0} = \frac{2\,\Delta f_{45}}{f_0}} \qquad (71)$$

oder auch mit Gleichung (70)

$$\boxed{b = \frac{1}{\varrho_0} = d} \qquad (72)$$

Lehrbeispiel 5

Es soll ein Reihenschwingungskreis entworfen werden, der bei einer Frequenz von $f_0 = 400\,\mathrm{kHz}$ eine relative Bandbreite von $b = 0{,}8\,\%$ besitzt. Die verwendete Spule hat eine Spulengüte $\varrho_L = 150$ und einen Reihenverlustwiderstand von $r_L \approx 8{,}9\,\Omega$.

a) Berechnen Sie die Induktivität und die Kapazität !

b) Wie groß werden die Kreisgüte und der Resonanzwiderstand ?

c) Ermitteln Sie die absolute Bandbreite und die Grenzfrequenzen !

d) Welchen Wert besitzt der komplexe Widerstand des Reihenkreises bei den Grenzfrequenzen ?

e) Welchen Einfluß übt ein Generator mit Innenwiderstand auf die Bandbreite aus ?

Lösung :

a)
$$\varrho_L = \frac{R_L}{\omega_o L}$$

$$\underline{L} = \frac{R_L}{\omega_o \varrho_L} = \frac{2 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^2} = \underline{\underline{530\,\mu H}}$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\underline{C} = \frac{1}{4\pi^2 f_o^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 16 \cdot 10^{10} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-4}} \approx \underline{\underline{300\,pF}}$$

b)
$$\varrho_o = \frac{1}{b} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} = \underline{125}$$

$$r_o = \frac{\omega_o L}{\varrho_o} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-4}}{1{,}25 \cdot 10^2} = \underline{\underline{10{,}65\,\Omega}}$$

c)
$$\underline{B} = \frac{f_o}{\varrho_o} = \frac{4 \cdot 10^5}{1{,}25 \cdot 10^2} = \underline{\underline{3{,}2\ kHz}}$$

Die Resonanzfrequenz liegt exakt in der geometrischen Mitte der Grenzfrequenzen. Bei größeren Kreisgüten, wie z.B. in diesem Fall, kann jedoch ohne weiteres mit der arithmetischen Mitte gerechnet werden.

$$\underline{\underline{f_{45} = 403{,}2 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{f_{-45} = 496{,}8 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{R}_{45}}} = r_o\left(1 + j\Omega_{45}\right) = r_o\sqrt{2}\, e^{j45°} = \underline{\underline{15{,}1\,\Omega\, e^{j45°}}}$$

Infolge der Dämpfung durch den Generatorinnenwiderstand verkleinert sich die Kreisgüte $\varrho_o \rightarrow \varrho'$; die Bandbreite muß daher größer werden.

$$B \longrightarrow B' = \frac{f_o}{\varrho'} \; ; \; b \longrightarrow b' = \frac{1}{\varrho'}$$

3. Der Parallelschwingungskreis

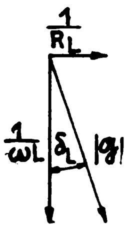
Wir wenden uns jetzt dem für die HF - Technik bedeutungsvolleren Parallelschwingungskreis zu. Bei der Ableitung der Gleichungen werden wir viele Erkenntnisse über den Reihenkreis mit verwerten. Zahlreiche Gleichungen bilden wir ohne besondere Ableitung aus den entsprechenden Gleichungen des Reihenkreises, indem wir die Ihnen schon bekannten Dualitätsbeziehungen zwischen Reihen- und Parallelschaltung benutzen.

3.1 Verlustfaktor und Kreisgüte

Wir gehen bei den nun folgenden Betrachtungen von den Parallelersatzschaltungen der realen Schaltelemente L und C aus. Sie werden sich erinnern, daß man die Verluste sowohl durch einen Reihen- als auch durch einen Parallelwiderstand im Ersatzschaltbild darstellen kann. Parallel- und Reihenschaltung sind dann in bezug auf Gesamtstrom, Gesamtspannung, Verlustfaktor und Gütefaktor völlig gleichwertig. Mit Hilfe der Dualitätsbeziehungen läßt sich eine Schaltung in die andere umrechnen.

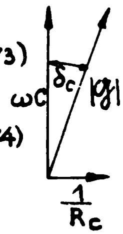
Bei Darstellung der Verluste durch einen Parallelwiderstand gilt für

die Spule : den Kondensator :



$$\tan \delta_L = \frac{\omega L}{R_L} \quad (73)$$

$$\rho_L = \frac{R_L}{\omega L} \quad (74)$$



$$\tan \delta_c = \frac{1}{\omega C R_c} \quad (75)$$

$$\rho_c = \omega C R_c \quad (76)$$

Bild 17a Bild 17b

Bild 17 : Verluste an Spule und Kondensator

Bei einem Parallelkreis können die Verlust<u>leitwerte</u> zu einem Kreisverlustleitwert zusammengefaßt werden.

Bild 18 : Verlustleitwert des Parallelkreises

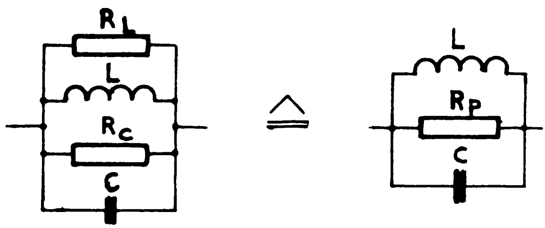


Bild 18

Nach Bild 18 gilt

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = G_p = G_L + G_c} \quad (77)$$

$$G_p = \frac{1}{\omega L} \cdot \tan \delta_L + \omega C \cdot \tan \delta_c \quad (78)$$

Ebenso wie beim Reihenkreis die Verlustwiderstände frequenzabhängig waren, sind es hier in gleicher Weise die Verlustleitwerte. Man darf jedoch hier wie dort in der Nähe der Resonanzfrequenz G_p durch den Wert ersetzen, den er bei der Resonanzfrequenz besitzt. Wir bezeichnen

$$G_o = \frac{1}{\omega_o L} \tan\delta_L + \omega_o C \cdot \tan\delta_c = \frac{1}{R_o} \qquad (79)$$

als <u>Verlust</u>- oder <u>Resonanzleitwert</u> des Kreises. Bei der Resonanzfrequenz (vgl. hierzu S. 32) gilt

$$\frac{1}{\omega_o L} = \omega_o C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{K} \qquad (80)$$

Gleichung 80 heißt <u>Kennleitwert</u> des Schwingungskreises (vgl. Gleichung (9)).
Mit Gleichung 80 erhält man für den Resonanzleitwert

$$G_o = \frac{1}{K} \cdot \left(\tan\delta_L - \tan\delta_C\right) = \delta \qquad (81)$$

Hierau', ergibt sich wieder der Kreisverlustfaktor zu

$$\boxed{\tan\delta = \tan\delta_L + \tan\delta_c = d} \qquad (12)$$

Der Kreisverlustfaktor oder die Kreisdämpfung sind die gleichen Begriffe wie beim Reihenkreis. Die Gleichung.(12) und (15) gelten auch hier beim Parallelkreis. Beachten Sie jedoch, daß die Gleichung (16) für den Parallelschwingungskreis keine Gültigkeit besitzt, denn die Herleitung von ρ_0 erfolgte hier von einer anderen Ersatzschaltung. Mit Gleichung (81) gilt für die Kreigüte

$$\boxed{\rho_o = \frac{R_o}{\omega_o L} = \omega_o C R_o = R_o\sqrt{\frac{C}{L}}} \qquad (82)$$

Der <u>Resonanzverlustwiderstand</u> R_o wird gebildet aus der Parallelschaltung der beiden Verlustwiderstände R_L und R_C

$$\boxed{R_o = \frac{R_L \cdot R_c}{R_L + R_c}} \qquad (83)$$

Während wir im Abschnitt 2 bei den Ableitungen von den Reihenersatzschaltungen ausgingen, benutzen wir hier die Parallelersatzschaltungen. Wie Sie aus Lehrbrief 1, Grundlagen der HF - Technik, erfahren haben, kann man eine Reihen- in eine Parallelschaltung umrechnen. Für den Verlustwiderstand gilt dabei die Beziehung :

$$R_o = \left(1 + \varrho_o^2\right) r_o \qquad (84)$$

$$R_o \approx r_o \varrho_o^2 \qquad (85)$$

Wir wollen jetzt noch eine Näherungsformel ableiten, die in der Literatur häufig benutzt wird: Ersetzt man in Gleichung (82)

$$R_o = \varrho_o \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{bzw.} \quad R_o^2 = \varrho_o^2 \frac{L}{C}$$

ϱ_o^2 durch Gleichung (85), dann gilt :

$$R_o^2 = \frac{R_o}{r_o} \cdot \frac{L}{C}$$

$$R_o = \frac{L}{C r_o}$$

Bei $\varrho_c \gg \varrho_L$ wird in der Reihenschaltung $r_c \ll r_L$ Es gilt dann $r_o \approx r_L$

$$\boxed{R_o = \frac{L}{C r_L}} \qquad (86)$$

r_L stellt näherungsweise den Reihenverlustwiderstand der Spule dar.

Lehrbeispiel 6

Ein Parallelschwingkreis besteht aus einer Spule mit $L = 200 \mu H$, $\tan \delta_L = 2 \cdot 10^{-2}$ und einem Kondensator mit $C = 5000 pF$, $\tan \delta_c = 4 \cdot 10^{-4}$. Berechnen Sie für $\omega_o = 10^6 \cdot \frac{1}{s}$

a) den Kennwiderstand

b) die Verlustwiderstände R_L und R_c ,

c) den Resonanzwiderstand

d) den Verlustfaktor und die Kreisgüte !

Lösung :

a)
$$\underline{\underline{K}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \underline{\underline{200\ \Omega}}$$

b)
$$\underline{\underline{R_L}} = \frac{\omega_0 L}{\tan \delta_L} = \frac{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{10\ k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_c}} = \frac{1}{\omega_0 C \cdot \tan \delta_c} = \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{500\ k\Omega}}$$

c)
$$\underline{\underline{R_0}} = \frac{R_L \cdot R_c}{R_L + R_c} = \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^5}{5{,}1 \cdot 10^5} = \underline{\underline{9{,}8\ k\Omega}}$$

d)
$$\underline{\underline{\tan \delta}} = \tan \delta_L + \tan \delta_c = 20{,}4 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\rho_0}} = \frac{1}{\tan \delta} = \underline{\underline{49}}$$

Probe :

$$R_0 = \omega_0 L \cdot \rho_0 = \frac{\rho_0}{\omega_0 C} = \rho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 9{,}8\ k\Omega$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des Lehrbeispiels 1

3.2 Leitwert, Widerstand, Verstimmung und Bandbreite

Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem Leitwert, da es sich um eine Parallelschaltung handelt. Nach Bild 18 gilt für den Leitwert

$$\mathfrak{Y} = G_0 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (87)$$

Für den Widerstand erhält man

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{G_0 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \qquad (88)$$

Die Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes und des Phasenwinkels läßt sich durch eine Ortskurve veranschaulichen.

Bild 19 : Widerstandsortskurve des Parallelkreises

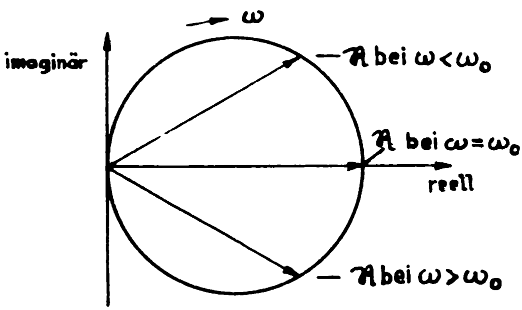


Bild 19

Bei $\omega = \omega_0$ wird $|\mathfrak{R}| = R_0$ d.h. der Widerstand des Parallelkreises erreicht hier den größten Wert;
der Phasenwinkel wird Null ;

der Kreis wirkt wie ein Ohmscher Widerstand.
Bei $\omega < \omega_o$ sinkt $|\mathfrak{R}|$ ab ;
φ_r wird positiv ;
der Kreis wirkt wie eine Induktivität.
Bei $\omega > \omega_o$ sinkt $|\mathfrak{R}|$ ebenfalls ab ;
φ wird negativ ;
der Kreis wirkt wie eine Kapazität.

Aus den bereits beim Reihenkreis erläuterten Gründen, wollen wir wieder die normierte Darstellung einführen.

Aus $\mathfrak{Y} = G_o + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\frac{\omega_o}{\omega_o}$ erhält man

$$\mathfrak{Y} = G_o + \left[1 + j\frac{1}{G_o}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]$$

$$\mathfrak{Y} = G_o\left(1 + j\varrho_o V\right) = G_o\left(1 + j\Omega\right) \qquad (89)$$

Die Gleichung 89 zeigt den gleichen Bau wie Gleichung 20, nur daß Widerstand und Leitwert vertauscht wurden; beide Gleichungen sind, ebenso wie die Schaltungen, zueinander dual. Sie erkennen ferner, daß nach Gleichung (89) die gleichen Verstimmungen V und Ω wie beim Reihenkreis auftreten. Die als Gleichung (21) - (24) definierten Verstimmungen gelten sowohl für den Reihen- als auch für den Parallelkreis.

Bei Verwendung der Gleichungen des Reihenschwingungskreises zur Bildung der entsprechenden dualen Beziehungen des Parallelschwingungskreises müssen folgende Größen wechselseitig vertauscht werden :

Reihenschaltung $\rightleftarrows$ Parallelschaltung
Widerstand $\rightleftarrows$ Leitwert
Induktivität $\rightleftarrows$ Kapazität
Strom $\rightleftarrows$ Spannung

Es bestehen somit folgende duale Beziehungen :

Reihenschwingkreis	Parallelschwingkreis	
$\frac{\mathfrak{R}}{r_o} = 1 + j\Omega$	$\frac{\mathfrak{G}}{G_o} = 1 + j\Omega$	(90)
$\frac{\lvert\mathfrak{R}\rvert}{r_o} = \sqrt{1 + \Omega^2}$	$\frac{\lvert\mathfrak{G}\rvert}{G_o} = \sqrt{1 + \Omega^2}$	(91)
$\tan \varphi_r = \Omega$	$\tan \varphi_g = \Omega$	(92)
$\frac{\mathfrak{G}}{g_o} = \frac{1}{1 + j\Omega}$	$\frac{\mathfrak{R}}{R_o} = \frac{1}{1 + j\Omega}$	(93)
$\frac{\mathfrak{G}}{g_o} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$	$\frac{\lvert\mathfrak{R}\rvert}{R_o} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$	(94)
$\tan \varphi_g = -\Omega$	$\tan \varphi_r = -\Omega$	(95)

Vertauschen Sie in den Bildern 11 und 12 Widerstand und Leitwert miteinander, dann erkennen Sie, daß die dort skizzierten Kurven auch den Verlauf der Gleichung (91), (92), (94) und (95) darstellen.

Bei der Resonanzfrequenz, d.h. wenn $\Omega = 0$, gilt :

$$\boxed{\lvert\mathfrak{G}\rvert = \lvert\mathfrak{G}\rvert_{min} = G_o} \qquad (96)$$

$$\boxed{\lvert\mathfrak{R}\rvert = \lvert\mathfrak{R}\rvert_{max} = R_o} \qquad (97)$$

Der Leitwert ist reell und besitzt ein Minimum.
Der Widerstand ist reell und besitzt ein Maximum.

Bei den Grenzfrequenzen, d.h. bei $\Omega = \pm 1$, gilt :

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{G_0} = \sqrt{2} \quad ; \quad \varphi_g = \pm 45^\circ$$

$$\frac{|\mathfrak{R}|}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \varphi_r \quad \mp 45^\circ$$

Für die 45° Verstimmung gilt ebenso wie beim Reihenkreis

$$V_{45} = \frac{1}{\rho_0} \; ; \; \Omega_{45} = \pm 1$$

Zur Berechnung der Grenzfrequenzen und der Bandbreite dienen beim Parallelkreis die gleichen Beziehungen wie beim Reihenkreis.

$$B = f_{+45} - f_{-45} = \frac{f_0}{\rho_0} \qquad (69/70)$$

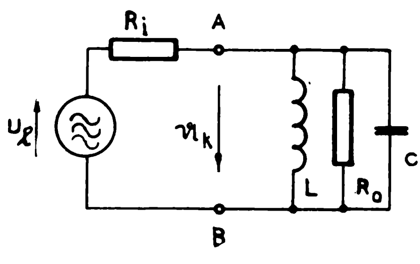
$$b = \frac{B}{f_0} = \frac{1}{\rho_0} \qquad (71/72)$$

3.3 Die Spannung am Parallelschwingkreis

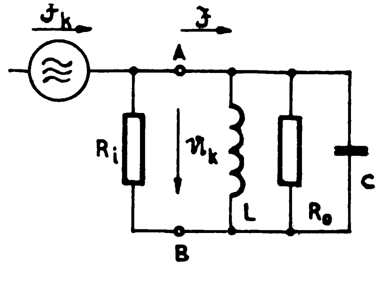
Ebenso wie beim Reihenkreis soll auch hier der Parallelkreis von einem Generator gespeist werden, dessen Leerlaufspannung U_e und Innenwiderstand R_i reell und konstant ist. Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zum Reihenkreis zu schaffen und die Rechnung zu vereinfachen, ersetzen wir den Generator jedoch nicht durch eine Spannungsquellen- sondern durch eine Stromquellenersatzschaltung.

Bild 20 : Der Parallelkreis mit Generator

a. Spannungsquellen-
ersatzschaltbild



b. Stromquellen-
ersatzschaltbild



Wie Sie sich selbst an Hand eines einfachen Grundstromkreises überlegen können, sind die beiden Ersatzschaltungen durch die Beziehungen

$$\mathfrak{I}_K = \frac{U_e}{R_i} = U_e \cdot G_i \;, \quad G_i = \frac{1}{R_i} \qquad (98)$$

miteinander verknüpft. Beachten Sie bei der Spannung, daß der Index K die Klemmenspannung bedeutet, und bei dem Strom der Kurzschlußstrom gemeint ist.

Entsprechend der Stromgleichung Gleichung (37) erhalten wir für die Klemmenspannung

$$\mathfrak{U}_K = \frac{\mathfrak{I}_K}{G_i + \mathfrak{Y}_{AB}} = \frac{\mathfrak{I}_K}{G_i + G_o\,(1 + j\rho_o\, V)}$$

$$\mathfrak{U}_K = \frac{\mathfrak{I}_K}{G_i + G_e + j\,G_o\,\rho_o\, V}$$

Durch Ausklammern von $(G_i + G_o)$ erhält man

$$\mathfrak{U}_K = \frac{\mathfrak{I}_K}{G_o + G_i} \cdot \frac{1}{1 + j\,\frac{G_o}{G_i + G_o}\,\rho_o V} \qquad (99)$$

Wenn wir für

$$G_i + G_o = G' \qquad (100)$$

und für

$$\frac{G_o}{G_i + G_o} \cdot \rho_o = \rho' \qquad (101)$$

setzen, ergibt sich

$$\mathfrak{U}_K = \frac{\mathfrak{I}_K}{G'\,(1 + j\rho' V)} = \frac{\mathfrak{I}_K}{G'\,(1 + j\Omega')} \qquad (102)$$

Bei Resonanz wird $\Omega' = 0$

$$\boxed{\mathfrak{U}_K = \frac{\mathfrak{I}_K}{G'} = \mathfrak{I}_K \cdot R' = |\mathfrak{U}_K|_{max} = U_o} \qquad (103)$$

Die Klemmenspannung wird reell und erreicht ihren Maximalwert. Mit U_0 als Bezugswert für die normierte Darstellung gilt

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = \frac{1}{1+j\Omega'} \qquad (104)$$

$$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega'^2}} \qquad (105)$$

$$\varphi_{\mathfrak{U}_K} = -\arctan \Omega' \qquad (106)$$

Sie erkennen aus den obigen Beziehungen, daß auch hier der Innenwiderstand des Generators den Schwingkreis "dämpft". Da sich der "innere Leitwert" G_i dem Kreisverlustleitwert G_0 parallelschaltet, wird das Verhalten der Schaltung durch den vergrößerten Verlustleitwert

$$G' = G_i + G_0 \qquad (100)$$

bzw. durch den verkleinerten Verlustwiderstand

$$R' = \frac{R_0 \cdot R_i}{R_0 + R_i} \qquad (107)$$

bestimmt. Die dann wirksame <u>scheinbare</u> oder <u>Pseudogüte</u> ϱ' wird berechnet aus

$$\varrho' = \frac{G_0}{G_0 + G_i}\varrho_0 = \frac{G_0}{G'}\varrho_0 \qquad (101)$$

Mit den Widerständen erhält man entsprechend

$$\varrho' = \frac{R'}{R_0}\varrho_0 = \frac{R_i}{R_0 + R_i}\varrho_0 \qquad (108)$$

Mit Gleichung (82) ergibt sich ferner

$$\varrho' = \frac{R'}{\omega_0 L} = \omega_0 C R' = R'\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (109)$$

Die bisher gegebenen Erklärungen über das Rechnen mit "Strichgrößen" zur Berücksichtigung der Pseudodämpfung gelten auch hier beim Parallelkreis.

3.4 Die Ströme durch den Parallelkreis

3.41 Der Gesamtstrom

Zur Berechnung des Gesamtstromes beziehen wir uns wieder auf die Stromquellenersatzschaltung.

Mit dem Ohmschen Gesetz gilt

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{U}_K \cdot \mathfrak{Y}_{AB} = \mathfrak{U}_K \cdot G_0 \left(1 + j\Omega\right) \qquad (110)$$

Da infolge des Generatorinnenwiderstandes auch die Klemmenspannung frequenzabhängig ist, ersetzen wir $\mathfrak{U}_K$ durch Gleichung (104)

$$\mathfrak{I} = U_0 G_0 \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} = \frac{U_0}{R_0} \cdot \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} \qquad (111)$$

Im Resonanzfall wird der Strom reell und erreicht seinen Kleinstwert

$$\boxed{\mathfrak{I} = \frac{U_0}{R_0} = \left|\mathfrak{I}\right|_{min} = I_0} \qquad (112)$$

Für die normierte Darstellung ergibt sich

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} \tag{113}$$

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} \tag{114}$$

$$\varphi_i = \arctan \frac{\Omega - \Omega'}{1 + \Omega\Omega'} \tag{115}$$

Vergleichen Sie den Phasenwinkel des Stromes mit dem der Spannung beim Reihenkreis Gleichung 55 !

Lehrbeispiel 7

Ein Parallelschwingungskreis wird an einen Generator angeschlossen.

a) $R_i = 0$ b) $R_i = \infty$ c) $R_i = R_0$

Berechnen und zeichnen Sie die normierten Resonanzkurven der Klemmenspannung und des Gesamtstromes !

Lösung :

$$R' = \frac{R_0 \cdot R_i}{R_0 + R_i} = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_i}}$$

$$\varrho' = \varrho_0 \frac{R'}{R_0} \quad ; \quad \Omega' = \Omega \cdot \frac{R'}{R_0}$$

R_i	R'	Ω'
0	0	0
R_o	$\frac{R_o}{2}$	$\frac{\Omega}{2}$
∞	R_o	Ω

a) $R_i = 0$

$$\frac{|U_K|}{U_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} = 1$$

$$\frac{|J|}{J_o} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} = \sqrt{1 + \Omega^2}$$

Wenn der Innenwiderstand Null ist, bleibt die Klemmenspannung konstant, und der Strom verläuft genauso wie der Leitwert.

b) $R_i = \infty$

$$\frac{|J|}{J_o} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} = 1$$

$$\frac{|U_K|}{U_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}$$

Wenn der Innenwiderstand Unendlich ist, bleibt der Strom konstant, und die Klemmenspannung verläuft wie der Widerstand. (Bei unendlich großem Innenwiderstand kann genaugenommen gar kein Strom fließen, da in diesem Fall der Stromkreis geöffnet ist. Der Fall b) trifft daher für Innenwiderstände zu die gegenüber R_o sehr groß sind.

c)

$$R_i = R_o$$

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{4}}}$$

$$\frac{|\mathfrak{J}|}{\mathfrak{J}_o} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \frac{\Omega^2}{4}}}$$

Bei $R_i = R_o$ sinkt die wirksame Güte auf die Hälfte, die Kurven verlaufen flacher und breiter.

Bild 21 : Strom- und Spannungsresonanzkurven des Parallelkreises

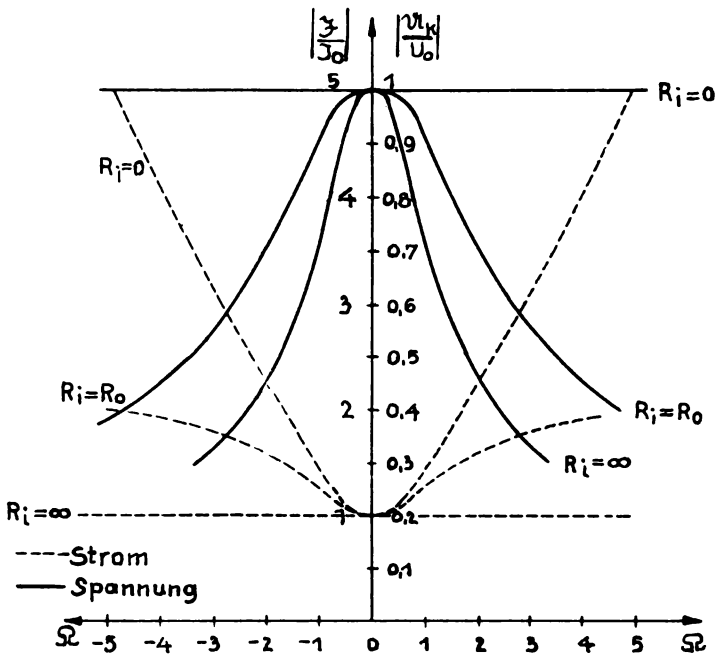


Bild 21

3.42 Die Teilströme

Der Strom durch den Verlustwiderstand R_0 ergibt sich zu

$$\mathfrak{I}_R = \frac{\mathfrak{U}_K}{R_0} \qquad (116)$$

Da der Verlustwiderstand konstant ist, verläuft der Strom genauso wie die Klemmenspannung.

Im Resonanzfall gilt

$$\mathfrak{I}_R = \frac{U_0}{R_0} = \mathfrak{I}_0 \qquad (117)$$

d.h. der Strom durch den Verlustwiderstand wird gleich dem Gesamtstrom.

Für den Teilstrom $\mathfrak{I}_L$ gilt

$$\mathfrak{I}_L = \frac{\mathfrak{U}_K}{j\omega L} \qquad (118)$$

wir wenden die Stromteilerregel an und erhalten

$$\frac{\mathfrak{I}_L}{\mathfrak{I}_K} = \frac{R'}{j\omega L\,(1 + j\Omega')} \qquad (119)$$

Im Resonanzfall ergibt sich :

$$\frac{\mathfrak{I}_L}{\mathfrak{I}_K} = -j\,\frac{R'}{\omega_0 L} = -j\varrho' \qquad (120)$$

Genauso wie die Teilspannungen $\mathfrak{U}_L$ und $\mathfrak{U}_C$ beim Reihenkreis, nehmen die Teilströme $\mathfrak{I}_L$ und $\mathfrak{I}_C$ im Resonanzfall sehr hohe Werte an. Sie werden ϱ' mal größer, als der eingespeiste Kurzschlußstrom $\mathfrak{I}_K$.

Für den Kondensatorenstrom gilt entsprechend

$$\mathfrak{I}_C = \mathfrak{U}_K \cdot j\omega C \tag{121}$$

$$\frac{\mathfrak{I}_C}{\mathfrak{I}_K} = \frac{j\omega C R'}{1 + j\Omega'} \tag{122}$$

und im Resonanzfall

$$\frac{\mathfrak{I}_C}{\mathfrak{I}_K} = j\omega_0\, C R' = j\varrho' \tag{123}$$

Da sich die beiden Teilströme $\mathfrak{I}_L$ und $\mathfrak{I}_C$ bei Resonanz kompensieren, muß der Gesamtstrom gleich dem Strom $\mathfrak{I}_R$ werden.

Die bei den Blindspannungen am Reihenkreis erwähnten Maximaverschiebungen gegenüber der Resonanzfrequenz treten auch bei den Blindströmen des Kondensators auf. Wie Sie selbst nachprüfen können, gilt hier

$$\omega_{L_{max}} \approx \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2\right] \tag{124}$$

$$\omega_{C_{max}} \approx \omega_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2\right] \tag{125}$$

Lehrbeispiel 8

Ein auf 500 kHz abgestimmter Parallelschwingkreis wird an einen Generator mit $R_i = 200\,k\Omega$ und $U_C = 2\,V$ angeschlossen. Die Güte der Spule beträgt $\varrho_L = 186{,}5$, die des Kondensators $\varrho_C = 1000$. Der Kreis hat einen Kennwiderstand von $K = 1275\,\Omega$.

Berechnen Sie

a) die Induktivität und die Kapazität des Kreises,

b) die Kreisgüte ϱ_0 und den Verlustwiderstand R_0 ,

c) die Pseudogüte ϱ' und den wirksamen Verlustwiderstand R' ,

d) die absolute und relative Bandbreite des Kreises und der Schaltung

e) die Klemmenspannung und den Gesamtstrom bei Resonanz !

f) Wie groß sind die Klemmenspannung und der Gesamtstrom, wenn der Generator eine Frequenz von 550 kHz abgibt ?

Lösung :

a)
$$K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{\omega_0} K = \frac{1275}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^5} = \underline{\underline{0{,}406\ mH}}$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{\omega_0 K} = \frac{1}{\pi \cdot 10^6 \cdot 1{,}275 \cdot 10^3} = \underline{\underline{250\,pF}}$$

b)
$$\underline{\underline{\varrho_0}} = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_c}{\varrho_L + \varrho_c} = \frac{186{,}5 \cdot 10^3}{1{,}1865 \cdot 10^3} = \underline{\underline{157}}$$

$$\underline{\underline{R_0}} = \varrho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 157 \cdot 1{,}275 \cdot 10^3 = \underline{\underline{200\ k\Omega}}$$

c)
$$\underline{\underline{R'}} = \frac{R_0 \cdot R_i}{R_0 + R_i} = \frac{R_0}{2} = \underline{\underline{100\ k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varrho'}} = \frac{R'}{\omega_0 L} = \frac{R_0}{2\,\omega_0 L} = \frac{\varrho_0}{2} = \underline{\underline{78{,}5}}$$

d)

$$\underline{\underline{B}} = \frac{f_o}{\varrho_o} = \frac{5 \cdot 10^5}{1{,}57 \cdot 10^2} = \underline{\underline{3{,}18\ \text{kHz}}}$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{f_o}{\varrho'} = \frac{2\, f_o}{\varrho_o} = \underline{\underline{6{,}38\ \text{kHz}}}$$

$$\underline{\underline{b}} = \frac{1}{\varrho_o} = \underline{\underline{0{,}64\,\%}}$$

$$\underline{\underline{b'}} = \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{\varrho_o} = \underline{\underline{1{,}28\ \%}}$$

e)

$$\mathfrak{u}_K/_{\Omega=0} = U_o = \mathfrak{I}_K \cdot R' \quad \frac{U_e}{R_i} \cdot R' = \frac{U_e}{R_i} \cdot \frac{R_o}{2}$$

$$U_o = \frac{U_e}{2} = \underline{\underline{1\,\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{I}/_{\Omega=0} = \mathfrak{I}_o}} = \frac{U_e}{R} = \frac{2}{2 \cdot 10^5} = \underline{\underline{10\ \mu\text{A}}}$$

f)

$$|\mathfrak{u}_K| = \frac{U_o}{\sqrt{1 + \Omega'^2}}$$

$$\Omega' = \varrho' \cdot V$$

$$\underline{\underline{V}} = \frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f} = \frac{550}{500} - \frac{500}{550} = 1{,}1 - 0{,}91 = \underline{\underline{0{,}19}}$$

$$\underline{\underline{\Omega'}} = 78{,}5 \cdot 0{,}19 = \underline{\underline{14{,}9}}$$

$$\underline{\underline{|\mathfrak{u}_K|}} = \frac{1\,\text{V}}{\sqrt{1 + 14{,}9^2}} = \underline{\underline{67\ \text{mV}}}$$

$$\tan \varphi_{\mathfrak{u}_K} = -\Omega' = -14{,}9$$

$$\underline{\underline{\varphi_{\mathfrak{u}_K} = -86{,}4^\circ}}$$

g) $$|\mathfrak{I}| = \mathfrak{I}_0 \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+\Omega'^2}}$$

$$\Omega' = 14{,}9$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \rho_0 V = 157 \cdot 0{,}19 = \underline{\underline{29{,}8}}$$

$$\underline{|\mathfrak{I}|} = 10 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{1+29{,}8^2}{1+14{,}9^2}} = \underline{\underline{20\,\mu A}}$$

$$\tan \varphi_i = \frac{\Omega - \Omega'}{1+\Omega\Omega'} = \frac{29{,}8 - 14{,}9}{1+29{,}8 \cdot 14{,}9} = 0{,}0335$$

$$\underline{\underline{\varphi_i = 1{,}9^\circ}}$$

4 Anwendung des Parallelschwingkreises im Resonanzverstärker

4.1 Die Verstärkung

Als Anwendungsbeispiel zum Parallelkreis wollen wir jetzt einen Röhrenverstärker untersuchen, der als Anodenwiderstand einen Parallelschwingkreis besitzt.

Bild 22 : Schaltung eines Resonanzverstärkers

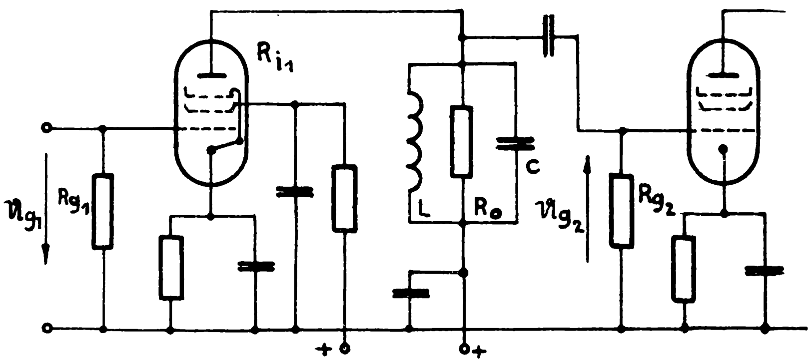


Bild 22

Die genaue Berechnung aller Schaltelemente des Verstärkers erfolgt im Unterrichtsfach "Verstärkertechnik". Da uns hier nur die Wechselstromvorgänge interessieren, lassen wir die durch die Gleichstromversorgung bedingten Schaltelemente weg, ersetzen die Röhre durch ihre Stromquellenersatzschaltung und erhalten die in Bild 23 dargestellte Schaltung.

Bild 23 : Stromquellenersatzschaltung eines Resonanzverstärkers

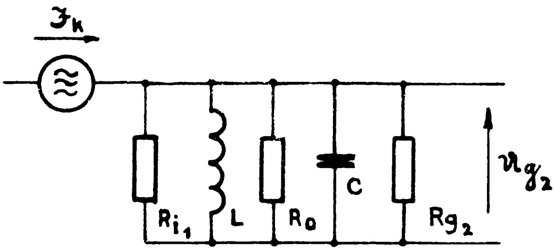


Bild 23

Fassen wir nun noch den Gitterableitwiderstand R_{g_2} und den Röhreninnenwiderstand R_{i_1} zu einem "Ersatzinnenwiderstand" zusammen, d.h. rechnen wir R_{g_2} mit in den Generator hinein, dann erhalten wir die schon vom letzten Abschnitt her bekannte Ersatzschaltung nach Bild 24.

Bild 24 : Der Parallelkreis mit Röhrengenerator

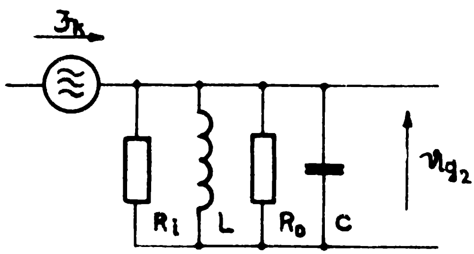


Bild 24

Der <u>Pseudoverlustleitwert</u> G' wird hier nicht nur, wie bisher, durch $G_0 + G_i$ gebildet, sondern durch $G_{i_1} + G_{g_2} + G_0$. Mit diesem neuen Verlustleitwert

$$G' = \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{i_1}} + \frac{1}{R_{g_2}} + \frac{1}{R_0} \quad (126)$$

berechnen wir nun in gleicher Weise wie bisher die weiteren Pseudogrößen ϱ' ; Ω' usw.

Es soll jetzt die Verstärkung der einstufigen Verstärkerschaltung berechnet werden. Der Generator besitzt den inneren Leitwert

$$G_i = G_{i_1} + G_{g_2} \tag{127}$$

bzw. den inneren Widerstand

$$R_i = \frac{R_{i_1} \cdot R_{g_2}}{R_{i_1} + R_{g_2}} \tag{128}$$

Für den Kurzschlußstrom erhält man (vgl. Lehrbrief Elektronenröhren) :

$$\mathfrak{J}_K = S\,\mathfrak{U}_{g_1} \tag{129}$$

Die Spannung $\mathfrak{U}_{g_2}$ (verstärkte Anodenwechselspannung der Röhrenstufe) ist indentisch mit der bisher als Klemmenspannung bezeichneten Größe. Für $\mathfrak{U}_{g_2}$ gilt

$$\mathfrak{U}_{g_2} = \frac{-\mathfrak{J}_K}{G_i + \mathfrak{Y}_{AB}} = -\frac{S\mathfrak{U}_{g_1}}{G'(1+j\varrho' V)}$$

$$\mathfrak{U}_{g_2} = -S\mathfrak{U}_{g_1} \frac{R'}{1+j\Omega'} \tag{130}$$

Das Minuszeichen charakterisiert die durch die Röhre verursachte Phasenverschiebung von 180° zwischen Gitter- und Anodenwechselspannung.

Für die Verstärkung, die als Verhältnis von Anoden- zu Gitterwechselspannung definiert ist, ergibt sich aus Gleichung (130)

$$\mathfrak{V} = -\frac{\mathfrak{U}_{g_2}}{\mathfrak{U}_{g_1}} = -S\frac{R'}{1+j\Omega'} \tag{131}$$

Im Resonanzfall, bei $\Omega = 0$ wird $\mathfrak{v}$ reell und erreicht ihren Höchstwert.

$$\boxed{\mathfrak{v}_o = |\mathfrak{v}|_{max} = S R' = S \, \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i}} \qquad (132)$$

Vielfach berechnet man die Verstärkung bei Resonanz auch nach einer anderen Beziehung. Ersetzt man in Gleichung (132) R' durch

$$R' = \frac{\varrho'}{\omega_o C}$$

dann erhält man

$$\mathfrak{v}_o = \frac{S}{C \, 2\pi} \cdot \frac{\varrho'}{f_o}$$

$$\boxed{\mathfrak{v}_o = \frac{S}{C} \cdot \frac{1}{2 \pi B'}} \qquad (133)$$

Die erzielbare Verstärkung hängt von dem Verhältnis $\frac{S}{C}$ und der geforderten Bandbreite ab. Die Bedeutung dieser Erkenntnis werden Sie später noch kennenlernen.

Benutzt man die Resonanzverstärkung als Bezugsgröße, dann ergibt sich für die normierte Verstärkung

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_o} = \frac{1}{1 + j\Omega'} \qquad (134)$$

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} \qquad (135)$$

$$\varphi_{\mathfrak{v}} = - \arctan \Omega' \qquad (136)$$

Alle bisher gegebenen Erklärungen über die Verstimmung, Grenzfrequenzen, Bandbreite usw. gelten sinngemäß auch für die Verstärkung. Da ein Verstärker mit einem Parallelkreis als Arbeitswiderstand nur ein bestimmtes Frequenzband verstärkt, bezeichnet man diese Schaltung auch als Resonanz- oder Selektivverstärker.

Lehrbeispiel 9

Mit einem Selektivverstärker soll eine Spannung $|\mathfrak{U}_{g_1}| = 2{,}7\,\mathrm{mV}$ mit der Frequenz $f_0 = 500\,\mathrm{kHz}$ auf $|\mathfrak{U}_{g_2}| = 1\,\mathrm{V}$ verstärkt werden. Es wird eine Bandbreite $B' = 5\,\mathrm{kHz}$ gefordert. Zur Verfügung steht eine Röhre mit $S = 3{,}6\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{V}}$ und $R_i = 900\,\mathrm{k\Omega}$.

Berechnen Sie

a) die Resonanzverstärkung $\mathfrak{V}_0$

b) den Verlustwiderstand R' und die Pseudogüte ϱ',

c) die Induktivität und Kapazität,

d) den Resonanzwiderstand R_0 und die Kreisgüte ϱ_0 !

Lösung :

a

$$\underline{\underline{\mathfrak{V}_0}} = \frac{|\mathfrak{U}_{g_2}|}{|\mathfrak{U}_{g_1}|} = \frac{1}{2{,}7 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{370}}$$

b

$$\underline{\underline{R'}} = \frac{\mathfrak{V}_0}{S} = \frac{370}{3{,}6 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{102{,}5\ \mathrm{k\Omega}}}$$

$$\underline{\underline{\varrho'}} = \frac{f_0}{B'} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = \underline{\underline{100}}$$

c $$R' = \frac{1}{2\pi\, C B'}$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2\pi R' B'} = \frac{1}{2\pi\; 1{,}025\cdot 10^5 \cdot 5\cdot 10^3} = \underline{\underline{310\,pF}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{\omega_0^2\; C} = \frac{1}{4\cdot 9{,}86\cdot 25\cdot 10^{10}\cdot 3{,}1\cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{327\,\mu H}}$$

d $$\underline{\underline{R_0}} = \frac{R_i\;\cdot R'}{R_i\; - R'} = \frac{9\cdot 10^5\cdot 1{,}025\cdot 10^5}{7{,}975\;\cdot\; 10^5} = \underline{\underline{128{,}5\;k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varrho_0}} = \varrho' \;\frac{R_0}{R'} = 10^2\;\frac{128{,}5\cdot 10^3}{102{,}5\cdot 10^3} = \underline{\underline{125}}$$

Übung 1

Bei einem Resonanzverstärker besteht der Schwingungskreis aus einer Spule mit $L = 385\,\mu H$ und $\varrho_L = 222$ und einem Kondensator mit $C = 300\,pF$ und $\tan\delta_c = 5\cdot 10^{-4}$ Die Verstärkerröhre soll eine Steilheit von $S = 4\,\frac{mA}{V}$ und einen Innenwiderstand $R_i = 200\,k\Omega$ besitzen.

Berechnen Sie

a) die Resonanzfrequenz

b) die Kreisgüte ϱ_o und den Resonanzwiderstand R_0

c) die Pseudogüte ϱ' und den wirksamen Verlustwiderstand R',

d) die Resonanzverstärkung

e) die Bandbreite B des Kreises und B' der Schaltung !

f) Wie ändern sich Verstärkung und Bandbreite, wenn dem Kreis noch ein Belastungswiderstand von $R_2 = 50\,k\Omega$ parellelgeschaltet wird ?

4.2 Die Trennschärfe

Rundfunkempfänger verstärken das Frequenzband des eingestellten Senders und unterdrücken den Nachbarsender. Es interessiert daher auch die Verstärkung in einem ganz bestimmten Abstand von der Resonanzfrequenz. Man hat dafür den Begriff der Trennschärfe eingeführt. Unter Trennschärfe versteht man allgemein das Verhältnis der Verstärkung bei Resonanz zur Verstärkung bei einer Nachbarfrequenz.

$$T = \frac{|v_o|}{|v|} \tag{137}$$

Beim AM Rundfunk für Kurz-, Mittel- und Langwelle bezieht man die Resonanzverstärkung auf die Verstärkung bei der um 9 kHz gegenüber f_o verstimmten Frequenz.

$$\boxed{T_g = \frac{|v_o|}{|v_g|}} \tag{138}$$

Mit Gleichung 132 und 134 gilt

$$T_g = \sqrt{1 + \Omega_g^{2}} \tag{139}$$

Bei hinreichend großem ϱ', das bei allen HF - Verstärkern für amplitudenmodulierte Schwingungen angenommen werden darf, gilt folgende Ableitung

$$\Omega'_g = \varrho' \, v_g \approx \varrho' \, 2 \, v_{rel_q} = \varrho' \cdot 2 \frac{\Delta f_q}{f_o}$$

Mit $B' = \frac{f_o}{\varrho'}$ wird daraus $\Omega'_g = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^3}{B'}$ (140)

$$T_g = \sqrt{1 + 4 \left(\frac{9 \cdot 10^3}{B'}\right)^2}$$

Gleichung (140) zeigt, daß die Trennschärfe bei hohen Kreisgüten ($\varrho' > 10$) nur noch von der Bandbreite abhängt. Große Bandbreite und Trennschärfe sind daher zwei Forderungen, die in Widerspruch zueinander stehen.

Lehrbeispiel 10

Berechnen Sie die Trennschärfe des in Lehrbeispiel 9 untersuchten Resonanzverstärkers ! Auf welche Werte ändert sich die Trennschärfe, wenn die Bandbreite auf das Doppelte ansteigt bzw. auf die Hälfte absinkt ?

Lösung :

$$T_q = \frac{|W_o|}{|W_q|}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{B'}\right)^2} = \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3}\right)^2} = \underline{\underline{3{,}73}}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{B'}\right)^2} = \sqrt{4{,}24} = \underline{\underline{2{,}06}}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 10^3}\right)^2} = \sqrt{52{,}8} = \underline{\underline{7{,}25}}$$

5 Änderungen der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises

5.1 Geringe Frequenzabweichungen

Wir wollen nun noch ausrechnen, um welchen Betrag sich die Resonanzfrequenz eines Schwingungskreises ändert, wenn sich im Kreis z.B. eine kleine Kapazität parallelschaltet.

Durch Differenzieren der THOMSONschen Formel Gleichung (2) ergibt sich :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (LC)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{1}{2}(LC)^{-\frac{3}{2}} L = -\frac{L}{2\sqrt{(LC)^3}}$$

$$\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{L}{2LC\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2C}$$

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2}\frac{dC}{C}$$

Ersetzt man die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten, dann erhält man

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C}} \qquad (141)$$

Ebenso gilt bei Induktivitätsänderungen

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L}} \qquad (142)$$

Die Gleichung. 141 und 142 sind Näherungsformeln, da wir die Differentiale durch Differenzen ersetzt haben. Bei größeren relativen Frequenzabweichungen als $V_{rel} = 2\,\%$ wird die Rechnung mit diesen Beziehungen ungenau. Zur

Berechnung der Frequenzabweichung bei großen Kapazitäts- oder Induktivitätsänderungen muß die THOMSONsche Formel benutzt werden.
Das Minuszeichen in den Gleichungen (141) und (142) besagt, daß die Frequenz abnimmt, wenn Kapazität oder Induktivität zunehmen.

Lehrbeispiel 11

Für die Frequenz von $f_0 = 400\,kHz$ soll ein Schwingungskreis so aufgebaut werden, daß sich die Resonanzfrequenz bei einer Kapazitätsänderung von $\Delta C = \pm 0{,}5\,pF$ höchstens um $400\,Hz$ verschiebt. (So kleine Kapazitätsänderungen treten beispielsweise bei Röhrenwechsel auf. Ist die Kreiskapazität genügend groß, dann wird kein neuer Abgleich notwendig. Die Schaltung arbeitet noch befriedigend.)
Wie groß werden die Induktivität und die Kapazität, der Resonanzwiderstand und die Bandbreite, wenn die Spulengüte $\rho_L = 191$ und der Verlustfaktor des Kondensators $\tan\delta_C = 10^{-3}$ betragen ?

Lösung :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = (-)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta C}{C}$$

$$\underline{C'} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta C f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot 10^{-13}\cdot 400\cdot 10^{3}}{400} = \underline{\underline{250\,pF}}$$

$$\underline{L} = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2\cdot 16\cdot 10^{10}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{634\,\mu H}}$$

$$\rho_c = \frac{1}{\tan\delta_c} = 1000$$

$$\underline{\underline{\varrho_0}} = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C} = \frac{191 \cdot 10^3}{1{,}191 \cdot 10^3} = \underline{\underline{160}}$$

$$\underline{\underline{R_0}} = \varrho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 160 \sqrt{\frac{634 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-12}}} = \underline{\underline{255\ k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{f_0}{\varrho_0} = \frac{400 \cdot 10^3}{160} = \underline{\underline{2{,}5\ kHz}}$$

Übung 2

In einem Selektivverstärker für die Frequenz $f_0 = 1\ MHz$ mit einer Bandbreite von $B' = 9\ kHz$ soll bei Kapazitätsänderungen die relative Verstimmung höchstens $V_{rel} = 0{,}05\ \%$ betragen. Die Schaltung hat eine Resonanzverstärkung von $|V_0| = 177$ Die Röhre besitzt einen Innenwiderstand von $R_i = 2{,}5\ M\Omega$ und eine Steilheit von $S = 2\ \frac{mA}{V}$.

Berechnen Sie die erforderliche Kapazität und Induktivität, den Resonanzwiderstand R_0 und die Kreisgüte ϱ_0
Um welchen Wert darf sich die Kapazität höchstens ändern, und welche absolute Frequenzabweichung tritt dann ein ?

5.2 Die Frequenzvariation

In Rundfunkempfängern verwendet man z.B. Parallelschwingkreise als "Eingangskreise" die aus einem von der Antenne gelieferten Gemisch von Spannungen mit verschiedenen Frequenzen eine gewünschte Spannung heraussieben. Bei diesen "Abstimmkreisen" kann zur Überstreichung des gegebenen Frequenzbereiches entweder die Spule oder der Kondensator regelbar ausgeführt sein, d.h. die Resonanzfrequenz des Kreises kann in einem bestimmten Bereich verändert werden.

Das Verhältnis

$$\boxed{V = \frac{f_{max}}{f_{min}}} \qquad (143)$$

bezeichnet man als Frequenzvariation. Bei konstanter Kreisinduktivität erhält man

$$V = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{2\pi\sqrt{LC_{max}}}{2\pi\sqrt{LC_{min}}}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}}} \qquad (144)$$

Bei konstantem C gilt entsprechend

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{L_{max}}{L_{min}}}} \qquad (145)$$

Lehrbeispiel 12

Mit einem Abstimmkreis soll der Mittelwellenfrequenzbereich von 500 kHz bis 1500 kHz überstrichen werden. Der vorhandene Drehkondensator hat folgende Werte $C_A = 20 pF$; $C_E = 500 pF$

Wie groß ist die erforderliche Kreisinduktivität bei einer Schaltkapazität von $C_{Sch} = 30 pF$

Lösung :
$$\frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{1500 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^3} = \frac{3}{1}$$

Das erforderliche Kapazitätsverhältnis beträgt

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)^2 = \frac{9}{1}$$

Vorhanden ist ein Kapazitätsverhältnis von

$$\frac{C_E}{C_A} = \frac{500 \cdot 10^{-12}}{20 \cdot 10^{-12}} = \frac{25}{1}$$

Unter Berücksichtigung der Schaltkapazität, die parallel zum Kreis liegt, ergibt sich

$$\frac{C_E'}{C_A'} = \frac{C_E + C_{Sch}}{C_A + C_{Sch}} = \frac{530 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-12}} = \frac{10,6}{1}$$

Durch einen <u>Paralleltrimmer</u> läßt sich das geforderte Kapazitätsverhältnis erreichen.

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{C_E' + C_T}{C_A' + C_T} = 9$$

$$C_E' + C_T = 9 \cdot C_A' + C_T$$

$$\underline{\underline{C_T}} = \frac{C_E' - 9\,C_A'}{9 - 1} = \underline{\underline{10\,pF}}$$

Probe :

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{540 \cdot 10^{-12}}{60 \cdot 10^{-12}} = \frac{9}{1}$$

Die Induktivität errechnet man zweckmäßig aus der Kreisendkapazität und der niedrigsten Frequenz

$$L = \frac{1}{(2\,\pi f_{min})^2\, C_{max}} = \frac{1}{4\,\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{0{,}188\,mH}}$$

Lehrbeispiel 13

Ein abstimmbarer Oszillatorschwingkreis soll den Frequenzbereich von 968 kHz bis 1968 kHz erfassen. Der verwendete Drehkondensator hat folgende Werte : $C_A = 20\,pF$; $C_E = 500\,pF$ Wie groß muß ein zusätzlicher Serienkondensator sein, wenn die Schaltkapazität $C_{Sch} = 30\,pF$ beträgt ? Beachten Sie Bild 25

Lösung :

Die Frequenzvariation beträgt

$$V = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{1968 \cdot 10^3}{968 \cdot 10^3} = \frac{2{,}04}{1}$$

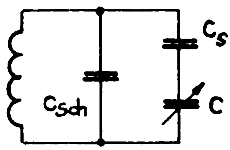


Bild 25

Oszillatorschwingkreis

Es muß eine Kapazitätsvariation von

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = v^2 = 4{,}15$$

erreicht werden. Die gegebene Kapazitätsvariation beträgt mit Berücksichtigung der Schaltkapazität

$$\frac{C_E'}{C_A'} = \frac{530 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-12}} = 10{,}6$$

Für den Serienkondensator (<u>Padding</u>) ergibt sich

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{\dfrac{C_E' \cdot C_S}{C_E' + C_S}}{\dfrac{C_A' \cdot C_S}{C_A' + C_S}} = 4{,}15$$

$$\frac{C_E'(C_A' + C_S)}{C_A'(C_E' + C_S)} = 4{,}15$$

$$\underline{\underline{C_S = 260 \text{ pF}}}$$

Übung 3

Für den Langwellenbereich von 750 m bis 2070 m soll ein veränderlicher Schwingungskreis aufgebaut werden. Es steht ein Drehkondensator mit $C_A = 30$ pF und $C_E = 530$ pF zur Verfügung. Welchen Wert muß der notwendige Trimmer besitzen, und wie groß wird die Induktivität ?

Genauso wie bei den OHMschen Widerständen ändern sich auch bei Spulen und Kondensatoren die Eigenschaften in Abhängigkeit von der Temperatur. Die Induktivitäts- bzw. Kapazitätsänderungen mit der Temperatur beruhen vor allem auf der Wärmeausdehnung. Beim Kondensator ändert sich außerdem die Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur.
Man ordnet deshalb jeder Spule und jedem Kondensator einen Temperaturkoeffizienten zu, der angibt, um welchen Betrag sich die Induktivität oder die Kapazität, bezogen auf den ursprünglichen Wert, ändert, wenn die Temperaturänderung von 1° C steigt bzw. fällt.

Bei einem Schwingungskreis wird aus den oben genannten Gründen bei Temperaturänderungen auch die Resonanzfrequenz eine andere.

Da ω_0 von zwei Veränderlichen abhängt, gehen wir vom totalen Differential (vgl. Mathematik IV Band 2) aus :

$$d\omega_0 = \frac{d\omega_0}{\partial L}\, dL + \frac{\partial \omega_0}{\partial C}\, dC$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial L} = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega_0}{L} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial C} = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega_0}{C}$$

Werden auch hier die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten ersetzt, dann gilt :

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega_0}{L}\,\Delta L - \frac{1}{2}\,\frac{\omega_0}{C}\,\Delta C$$

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{L} \quad \frac{\Delta L}{C}\right) \tag{146}$$

Dividiert man Gleichung (146) durch die Temperaturänderung $\Delta\vartheta$, dann erhält man die Temperaturkoeffizienten

$$\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{\Delta\vartheta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\Delta L}{L}}{\Delta\vartheta} + \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\Delta\vartheta}\right)$$

$$\boxed{T_{K_f} = -\frac{1}{2}\left(T_{K_L} + T_{K_C}\right)} \qquad (147)$$

Temperaturkoeffizient der

$T_{K_f} = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0\,\Delta\vartheta}$	(148)	Frequenz
$T_{K_L} = \dfrac{\Delta L}{L\,\Delta\vartheta}$	(149)	Induktivität
$T_{K_C} = \dfrac{\Delta C}{C\,\Delta\vartheta}$	(150)	Kapazität

In der Hochfrequenztechnik, z.B. für Steuersender, Oszillatoren, Frequenzmesser usw., benötigt man oft Schwingungskreise mit denen eine konstante Frequenz erzeugt wird oder die auf eine konstante Frequenz abstimmbar sind. Die Verwendung von "Schwingquarzen" für diese Zwecke ist oft wirtschaftlich nicht tragbar; dort, wo eine Frequenzregelung gefordert wird, sind Quarze ebenfalls nicht anwendbar. In diesen Fällen führt man eine Temperaturkompensation durch, mit der sich bei nicht zu großen Temperaturschwankungen eine große Frequenzgenauigkeit erzielen läßt.

Als Bedingung für die Kompensation gilt :

$$T_{K_f} = 0 \longrightarrow T_{K_L} = -T_{K_C}$$

Die Temperaturkompensation wird mit Hilfe von Kondensatoren vorgenommen. Die Ermittlung dieser Kondensatoren kann wie folgt geschehen :

Man ersetzt alle Serien- und Parallelkondensatoren des gegebenen Schwingungskreises durch solche mit bekanntem T_{K_C} Nach Erreichen der Betriebstemperatur werden Temperatur und Frequenz gemessen. Die Temperatur wird dann z.B. um 20° C erhöht. Haben alle frequenzbestimmenden Schaltelemente die neue Temperatur angenommen, erfolgt nochmals eine Frequenzmessung. Aus der Temperatur- und der Frequenzänderung lassen sich dann T_{K_f}, T_{K_L} und damit auch der erforderliche T_{K_C} ermitteln.

In den Fällen, wo kein Kondensator mit der erforderlichen Kapazität <u>und</u> dem gewünschten Temperaturkoeffizienten zur Verfügung steht, kann der T_{K_C} durch eine Reihen- oder eine Parallelschaltung von Kondensatoren eingestellt werden.

Für die Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit verschiedenen Temperaturkoeffizienten gilt

$$C_{ges} = C_1 + C_2$$

Da C_{ges} von zwei Veränderlichen abhängt, gehen wir auch hier vom totalen Differential aus.

$$d\,C_{ges} = \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1}\, d\,C_1 + \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2}\, dC_2$$

mit $\frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1} = 1$ und $\frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2} = 1$

$$d\,C_{ges} = dC_1 + d\,C_2$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $C_{ges} = C_1 + C_2$ und erhalten

$$\frac{d\,C_{ges}}{C_{ges}} = \frac{d\,C_1}{C_1 + C_2} + \frac{d\,C_2}{C_1 + C_2}$$

Multipliziert man den ersten Summanden mit $\frac{C_1}{C_1}$ und den zweiten mit $\frac{C_2}{C_2}$, dann ergibt sich :

$$\frac{dC_{ges}}{C_{ges}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d\,C_1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d\,C_2}{C_2}$$

Wir ersetzen die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten und teilen die Gleichung durch die Temperaturänderung $\Delta\vartheta$:

$$\frac{\Delta C_{ges}}{C_{ges}\Delta\vartheta} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Delta C_1}{C_1\Delta\vartheta} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Delta C_2}{C_2\Delta\vartheta}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 150 wird daraus

$$T_{K_{ges}} = \frac{C_1 T_{K_1} + C_2 T_{K_2}}{C_1 + C_2}$$

Für die Reihenschaltung von zwei Kondensatoren mit verschiedenen Temperaturkoeffizienten läßt sich eine ähnliche Ableitung vornehmen. Ausgehend von

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

und dem totalen Differential

$$dC_{ges} = \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1} dC_1 + \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2} dC_2$$

mit

$$\frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1} = \frac{(C_1 + C_2) C_2 - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

und

$$\frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2} = \frac{(C_1 + C_2) C_1 + C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

(partiell differenziert mit Quotientenregel)

erhält man für den Temperaturkoeffizienten

$$T_{K_{ges}} = \frac{C_2 T_{K_1} + C_1 T_{K_2}}{C_1 + C_2}$$

Lehrbeispiel 14

Bei einem Parallelschwingungskreis mit der Resonanzfrequenz $f_o = 1\,\mathrm{MHz}$ soll die infolge von Temperaturänderungen auftretende Frequenzverwerfung kompensiert werden. Der Temperaturkoeffizient der Spule ist nicht bekannt. Der Kondensator mit $C = 150\,\mathrm{pF}$ besitzt einen $T_{K_C} = -220 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{°C}$. Die Messung ergab

$$\vartheta_1 = 20°\,C\,;\quad f_{o_1} = 1\,\mathrm{MHz}$$

$$\vartheta_2 = 40°\,C\,;\quad f_{o_2} = 998{,}6\,\mathrm{kHz}$$

Lösung :

$$\underline{\underline{T_{K_f}}} = \frac{\Delta f}{f_o\,\Delta\,\vartheta} = \frac{f_{o_1} - f_{o_2}}{f_o\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{1400}{10^6 \cdot 20} = \underline{\underline{70 \cdot 10^{-6}\;\frac{1}{°C}}}$$

$$T_{K_f} = -\frac{1}{2}\,T_{K_L} - \frac{1}{2}\,T_{K_C}$$

$$\underline{\underline{T_{K_L}}} = -\,2T_{K_f} - T_{K_C} = -\,140 \cdot 10^{-6} - (-220 \cdot 10^{-6}) = \underline{\underline{80 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{°C}}}$$

Es muß, bei vollständiger Kompensation, ein Kondensator mit $T_{K_C} = -\,80 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{°C}$ verwendet werden.

7 Transformation an Schwingungskreisen

Bei der Behandlung des Parallelkreises hatten wir festgestellt, daß der Schwingungskreis sowohl durch den Generatorinnenwiderstand als auch durch einen Belastungswiderstand (beim Selektivverstärker $\mathfrak{R}_{a2}$) gedämpft wird. Durch diese Dämpfung verringerten sich der Resonanzwiderstand und die Kreisgüte. Wir wollen jetzt noch eine Methode erläutern, die es ermöglicht, den Dämpfungseinfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis zu vermindern.

Bild 26 : Parallelkreis mit Anzapfung

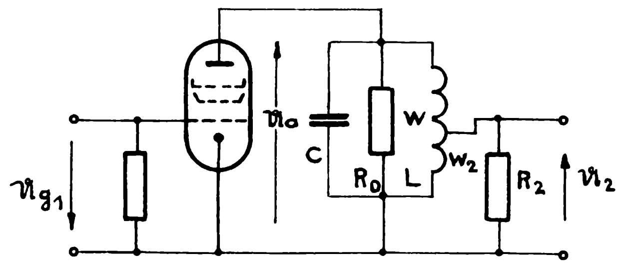


Bild 26

Bild 26 zeigt das Wechselstromschaltbild eines Resonanzverstärkers, bei dem der Belastungswiderstand $\mathfrak{R}_2$ über eine <u>Spulenanzapfung</u> an den Parallelkreis angeschlossen ist. Durch diese Maßnahme soll erreicht werden, daß $\mathfrak{R}_2$ den Kreis nicht so stark dämpft, als wenn der Widerstand direkt parallel zum Kreis läge. Die angezapfte Spule wirkt wie ein Spartransformator.

Wir definieren als Übersetzungsverhältnis :

$$\ddot{u}_2 = \frac{w_2}{w} \qquad (153)$$

und erhalten damit folgende Übersetzungsverhältnisse

$$u_2 = \frac{|\mathfrak{U}_2|}{|\mathfrak{U}_a|} \quad (154) \qquad \ddot{u}_2^{\,2} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_2^*} = \frac{G_2^*}{G_2} \quad (155)$$

Diese Verhältnisse gelten nur dann, wenn ein Kopplungsfaktor $K = 1$ angenommen werden darf. Bei Luftspulen z.B., wo der Kopplungsfaktor kleiner wird, muß mit dem fiktiven Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u}_0 = K\ddot{u}_2 \qquad (156)$$

gerechnet werden.

Durch die Anzapfung transformiert sich der Belastungswiderstand R_2 mit $\frac{1}{\ddot{u}_2^2}$ auf die Primärseite des (Spar) Transformators. Da $\ddot{u}_2^2 < 1$, wird $R_2^* > R_2$ d.h., der dämpfende Einfluß verringert sich.

$$R_2^* = \frac{R_2}{\ddot{u}_2^2} \qquad (155)$$

Bild 27 a) und b) : Stromquellenersatzschaltbild des Resonanzverstärkers

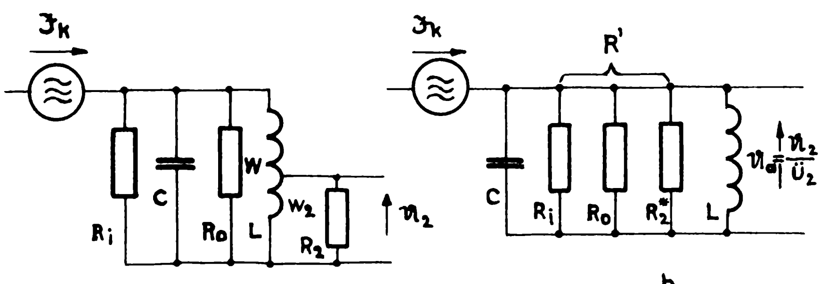


Bild 27

Das Stromquellenersatzschaltbild in Bild 27 a kann demzufolge durch die in Bild 27 b dargestellte Schaltung ersetzt werden. Aus den Bildern 26 und 27 a ist ersichtlich, daß nicht die volle Spannung $\mathfrak{U}_a$, sondern nur ein Teil davon, nähmlich

$$\mathfrak{U}_2 = \ddot{u}\,\mathfrak{U}_a \qquad (154)$$

abgegriffen wird. Die Gesamtverstärkung

$$\mathfrak{V} = -\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_{g_1}} = -\frac{\ddot{u}_2\,\mathfrak{U}_a}{\mathfrak{U}_{g_1}} \qquad (156)$$

wird daher scheinbar kleiner. Der durch die Dämpfungsverminderung erzielte Verstärkungsgewinn geht zum Teil dadurch wieder verloren, daß nur ein Teil der verstärkten Spannung verwendet wird.

Es ergibt sich eine Verstärkung von :

$$\mathfrak{V} = -\frac{\mathfrak{U}_a\,\ddot{u}_2}{\mathfrak{U}_{g_1}} = \frac{\ddot{u}_2\,\mathfrak{I}_K \cdot \mathfrak{R}}{\mathfrak{U}_{g_1}}$$

$$\mathfrak{V} = -\frac{\ddot{u}_2\,S\,\mathfrak{U}_{g_1}}{\mathfrak{U}_{g_1}} \cdot \frac{R'}{1+j\Omega'}$$

$$\mathfrak{V} = -S\ddot{u}_2 \cdot \frac{R'}{1+j\Omega'} \qquad (157)$$

mit

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2^*} = G_i + G_o + G_2^* = G' \quad (158)$$

und

$$G_2^* = \ddot{u}_2^{\,2}\,G_2 \qquad (159)$$

Im Resonanzfall gilt :

$$\boxed{|\mathfrak{V}_o| = \ddot{u}_2\,S R' = \frac{\ddot{u}_2\,S}{G'}} \qquad (160)$$

Es soll nun untersucht werden, wie groß das Windungszahlverhältnis $ü_2$ gewählt werden muß, damit die Verstärkung den maximal möglichen Wert erreicht.

$$|\mathfrak{V}_o| = \frac{ü_2 S}{G_i + G_o + ü_2^2 G_2} = \frac{S}{\frac{G_i}{ü_2} + \frac{G_o}{ü_2} + ü_2 G_2}$$

Soll die Verstärkung ein Maximum besitzen, dann muß der Nenner von $|\mathfrak{V}_o|$ ein Minimum sein. Wir ermitteln $ü_{2\,opt}$ durch eine Extremwertbestimmung.

$$\frac{d\left[\frac{G_i}{ü_2} + \frac{G_o}{ü_2} + ü_2 G_2\right]}{d\,ü_2} = -\frac{G_i}{ü_2^2} - \frac{G_o}{ü_2^2} + G_2 = 0$$

$$\boxed{ü_{2\,opt} = \sqrt{\frac{G_i + G_o}{G_2}}} \qquad (161)$$

Lehrbeispiel 15

Bei dem in Übung 1 berechneten Resonanzverstärker soll der Belastungswiderstand R_2 über eine Spulenanzapfung so angeschlossen werden, daß sich die maximale Verstärkung ergibt. Berechnen Sie die Resonanzverstärkung, die Bandbreite und die Trennschärfe der Schaltung !

Lösung :

$$|\mathfrak{V}_o| = ü_{2\,opt}\, S \cdot R' = \frac{ü_{2\,opt} \cdot S}{G'}$$

$$|\mathfrak{V}_o| = \frac{ü_{2\,opt} \cdot S}{G_o + G_i + ü_{2\,opt}^{2} \cdot G_2} = \frac{ü_{2\,opt} \cdot S}{G_o + G_i + \left(\frac{G_o + G_i}{G_2}\right) \cdot G_2}$$

$$\boxed{|w_o| = \frac{ü_{2_{opt}} \cdot S}{2\,(G_o + G_i)}} \qquad (162)$$

$$ü_{2_{opt}} = \sqrt{\frac{G_o + G_i}{G_2}} = \sqrt{\frac{9{,}4 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}685$$

$R_2 = 50\ k\Omega \quad ; \quad G_2 = 20\ \mu S$

$R_o = 227\ k\Omega \quad ; \quad G_o = 4{,}4\ \mu S$

$R_i = 200\ k\Omega \quad ; \quad G_i = 5\ \mu S$

$$\underline{\underline{|w_o|}} = \frac{0{,}685 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{146}}$$

$$B' = \frac{f_o}{\varrho'} - \frac{f_o\, G'}{\varrho_o\, G_o} = \frac{f_o \left(G_i + G_o + ü_{2_{opt}}\, G_2\right)}{\varrho_o\, G_o}$$

$$\boxed{B' = \frac{f_o\, 2\,(G_o + G_i)}{\varrho_o\, G_o}} \qquad (163)$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{4{,}68 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{10\ kHz}}$$

$$\underline{\underline{T_q}} = \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{B'}\right)^2} = \sqrt{1 + 4\left(\frac{9 \cdot 10^3}{B'}\right)^2} = \underline{\underline{2{,}06}}$$

Wie die Lösung der Aufgabe zeigt, hat sich die Verstärkung gegenüber dem Fall ohne Anzapfung erhöht, und die Bandbreite ist wesentlich geringer geworden.

Es soll hier noch betont werden, daß $\ddot{u}_{2\,opt}$ für die maximale Verstärkung gilt. Durch die Wahl eines anderen Windungszahlverhältnisses können nach Bedarf auch die Bandbreite und die Trennschärfe optimal bemessen werden.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich darauf, die Dämpfung des Schwingungskreises durch den Belastungswiderstand mittels Spulenanzapfung zu vermindern. Ebenso läßt sich auch der Einfluß des Generatorinnenwiderstandes auf den Schwingungskreis herabsetzen. Man kann die durch R_i bewirkte Pseudodämpfung verringern, wenn der Generator an einen Teil der Schwingkreisspule angekoppelt wird.

Bild 28 : Parallelkreis mit Anzapfung

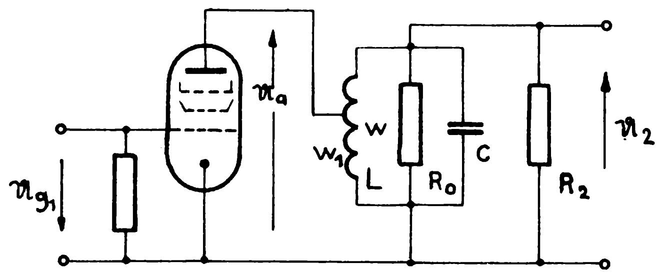


Bild 28

Mit dem Windungszahlverhältnis

$$\ddot{u}_1 = \frac{w_1}{w} \tag{164}$$

erhält man

$$\ddot{u}_1 = \frac{|\mathfrak{U}_a|}{|\mathfrak{U}_2|} \qquad (165) \qquad \ddot{u}_1^{\,2} = \frac{R_i}{R_i^*} = \frac{G_i^*}{G_i} \qquad (166)$$

Durch die Anzapfung transformiert sich jetzt der Generatorinnenwiderstand mit $\frac{1}{\ddot{u}_1^{\,2}}$ auf die Sekundärseite des "Spartransformators". Da $\ddot{u}_1 < 1$, wird $R_i^* > R_i$, d.h., der dämpfende Einfluß verringert sich.

$$R_i^* = \frac{R_i}{\ddot{u}_1^{\,2}} \qquad (166)$$

Bild 29 a) und b) : Stromquellenersatzschaltbild des Resonanzverstärkers

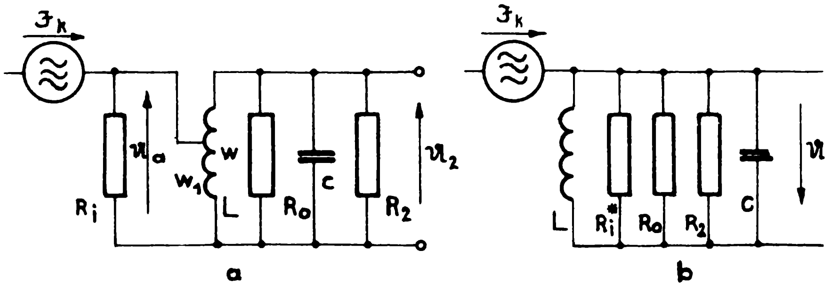


Bild 29 a u.b

Das Stromquellenersatzschaltbild Bild 29 a kann demzufolge durch die in Bild 29 b dargestellte Schaltung ersetzt werden.

Für die Resonanzverstärkung gilt

$$|\mathfrak{v}_o| = \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_{g_1}} = \frac{\mathfrak{U}_a}{\ddot{u}_1\,\mathfrak{U}_{g_1}} = \frac{\mathfrak{J}_K\;R'^*}{\ddot{u}_1\;\mathfrak{U}_{g_1}}$$

Da der Kurzschlußstrom über eine Anzapfung eingespeist wird, ist für die Verstärkung nicht der Verlustwiderstand des Kreises R', sondern der "kleinere" Widerstand R'^* wirksam. Mit den Leitwerten ergibt sich

$$|\mathfrak{w}_o| = \frac{\mathfrak{I}_K}{\ddot{u}_1 \mathfrak{U}_{g_1} G'^*} = \frac{S\, \mathfrak{U}_{g_1}\, \ddot{u}_1^2}{\ddot{u}_1\, \mathfrak{U}_{g_1}\, G'}$$

$$\boxed{|\mathfrak{w}_o| = \frac{\ddot{u}_1 S}{G'} = \ddot{u}_1 S R'} \qquad (169)$$

$$G' = G_o + G_2 + G_i^* = G_o + G_2 + \ddot{u}_1^2 \cdot G_i \qquad (170)$$

Auch hier soll untersucht werden, wie groß das Windungszahlverhältnis $\ddot{u}_1$ gewählt werden muß, um die maximale Verstärkung zu erzielen.

$$|\mathfrak{w}_o| = \frac{S}{\frac{G_o}{\ddot{u}_1} + \frac{G_2}{\ddot{u}_1} + \ddot{u}_1 G_i}$$

Die Extremwertbestimmung liefert

$$\frac{d\left[\frac{G_o}{\ddot{u}_1} + \frac{G_2}{\ddot{u}_1} + \ddot{u}_1 G_i\right]}{d\ddot{u}_1} = -\frac{G_o}{\ddot{u}_1^2} - \frac{G_2}{\ddot{u}_1^2} + G_i = 0$$

$$\boxed{\ddot{u}_{1opt} = \sqrt{\frac{G_o + G_2}{G_i}}} \qquad (171)$$

Vergleichen Sie diese Beziehung mit Gleichung 161

Lehrbeispiel 16

Bei dem in Übung 1 berechneten Resonanzverstärker soll der Schwingungskreis über eine Anzapfung so an die Röhre angekoppelt werden, daß sich die maximale Verstärkung einstellt. Berechnen Sie die Resonanzverstärkung, die Bandbreite und die Trennschärfe der Schaltung.

Lösung :

$$|\mathfrak{W}_o| = \frac{ü_{1\,opt}\, S}{G'} = \frac{ü_{1\,opt} \cdot S}{G_o + G_2 + ü_{1\,opt}^{2}\, G_i}$$

$$|\mathfrak{W}_o| = \frac{ü_{1\,opt}\, S}{G_o + G_2 + \left(\frac{G_o + G_2}{G_i}\right) G_i}$$

$$\boxed{|\mathfrak{W}_o| = \frac{ü_{1\,opt} \cdot S}{2 \cdot (G_o + G_2)}} \qquad (172)$$

$$ü_{1\,opt} = \sqrt{\frac{24{,}4 \cdot 10^{-6}}{5}} = 2{,}21$$

Da $ü_{1\,opt}$ größer als 1 wird, weil $G_i < G_o - G_2$, so wollen wir den Belastungswiderstand R_2 bei unserer Rechnung unberücksichtigt lassen. Für diesen Fall gilt

$$ü_{1\,opt} = \frac{G_o}{G_i} = \sqrt{\frac{4{,}4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}94$$

$$\underline{\underline{|\mathfrak{W}_o|}} = \frac{ü_{1\,opt}\, S}{2\, G_o} = \frac{0{,}94 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{426}}$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{f_o}{\rho'} = \frac{f_o\, G'}{\rho_o\, G_o} = \frac{f_o \left(G_o + G_i\, ü_{1\,opt}^{2}\right)}{\rho_o\, G_o}$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{f_o\, 2\, G_o}{\rho_o\, G_o} = \frac{f_o^{\,2}}{\rho_o} = \underline{\underline{4{,}68\ \text{kHz}}}$$

Wenn Sie diese Ergebnisse mit denen der Übung 1 (ohne Belastungswiderstand R_2) vergleichen, erkennen Sie, daß auch hier durch die Anzapfung eine Vergrößerung der Verstärkung und eine Verringerung der Bandbreite erzielt wird.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt sollten Ihnen einen kleinen Überblick über die Möglichkeiten der Transformation an Schwingungskreisen vermitteln. Eine ausführliche Behandlung kann im Rahmen dieses Lehrbriefes nicht erfolgen. Wir verzichten auch darauf, zu untersuchen, welche Verhältnisse sich einstellen, wenn der Generator und der Belastungswiderstand gleichzeitig an eine Anzapfung gelegt werden. Versuchen Sie die noch offenstehenden Probleme selbst zu lösen !

Zusammenfassung

Ein Schwingungskreis besteht aus der Zusammenschaltung einer Spule mit einem Kondensator. Wird ein solcher Kreis nach einmaliger Energiezufuhr sich selbst überlassen, dann treten im Kreis "freie sinusförmige Schwingungen" mit einer von L und C abhängigen Eigenfrequenz auf. Infolge der Spulen- und Kondensatorverluste verlaufen die Schwingungen gedämpft, d.h., ihre Amplituden nehmen nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ab.

Beim Reihenschwingungskreis addieren sich die Verlustwiderstände von Spule und Kondensator zum Verlust- oder Resonanzwiderstand. Bei der Resonanzfrequenz heben sich der induktive und der kapazitive Blindwiderstand des Kreises auf, so daß nur der (möglichst) kleine, reelle Resonanzwiderstand r_0 wirksam wird.

Beim Parallelschwingungskreis addieren sich die Verlustleitwerte von Spule und Kondensator zum Verlust- oder Resonanzleitwert. Bei der Resonanzfrequenz heben sich der induktive und der kapazitive Blindleitwert auf. Wirksam wird dann nur der (möglichst) große, reelle Resonanzwiderstand R_0 .

Die grafische Darstellung der Frequenzabhängigkeit von Widerstand, Spannung oder Strom bezeichnet man als

Resonanzkurve. Die Resonanzkurven verlaufen umso schmaler und spitzer, je geringer die Verluste des Kreises sind. Als Maß für die Verluste gelten der Verlustfaktor und die Kreisgüte. Durch Zusammenschalten des Schwingungskreises mit einem Generator tritt eine Verschlechterung der wirksamen Güte auf, weil der Generatorinnenwiderstand eine zusätzliche Dämpfung des Kreises bewirkt. Beim Reihenkreis rechnet man in diesem Fall mit dem größeren Resonanzwiderstand r' und beim Parallelkreis mit dem kleineren Resonanzwiderstand R'.
Wird an einen Schwingungskreis ein Belastungswiderstand angeschlossen, dann verschlechtert sich infolge der Dämpfung ebenfalls die Kreisgüte. Den Einfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis kann man dadurch vermindern, daß die äußeren Widerstände über eine Spulenanzapfung an den Kreis angeschlossen werden.

Die Übertragungs- oder Siebeigenschaften eines Schwingungskreises werden durch die Bandbreite charakterisiert. Sie umfaßt den Frequenzbereich zwischen den Grenzfrequenzen, bei denen die Resonanzkurven auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fachen Wert des Maximums abgesunken oder auf den $\sqrt{2}$-fachen Wert des Minimums angestiegen sind.

Reihenschwingungskreise dienen meist zur Unterdrückung unerwünschter Frequenzbänder und werden daher auch als Kurzschluß- oder Saugkreise bezeichnet. Parallelschwingungskreise dienen vielfach dazu, aus einem Frequenzgemisch ein bestimmtes Frequenzband herauszusieben.

Übungen

1. Was verstehen Sie unter dem Begriff Absolutverstimmung ?
2. Warum bezeichnet man V als Doppelverstimmung ?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Resonanzüberhöhung und der Kreisgüte ?

4. Warum bezeichnet man die Kreisgüte auch als Resonanzschärfe ?
5. Was verstehen Sie unter dem Begriff Trennschärfe ?
6. In welchem Verhältnis steht die Kreisgüte zu den Einzelgüten ϱ_L und ϱ_C ?
7. Kontrollieren Sie die Behauptung, daß sich beim Parallelkreis die Güten genauso wie die Verlustwiderstände und beim Reihenkreis wie die Verlustleitwerte verhalten !
8. Warum bezeichnet man die Grenzfrequenzen auch als 45^{o} Frequenzen ?
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kreisgüte und der Bandbreite ?
10. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Resonanzwiderstand und Bandbreite bei konstantem $\frac{L}{C}$ - Verhältnis ?
11. Welchen Einfluß übt ein Generator auf die Bandbreite eines Schwingungskreises aus ?
12. Warum soll der Verlustwiderstand R_o des Parallelkreises möglichst groß sein, obwohl doch kleine Verluste angestrebt werden ?
13. Wie kann man den Einfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis vermindern ?
14. Wann wirkt ein Parallelkreis kapazitiv ? Begründung !
15. Wie verhalten sich Strom und Spannung am Reihenkreis, wenn der Kreis an einen Generator mit $R_i = 0$ angeschlossen wird ?
16. Beantworten Sie die gleiche Frage für den Parallelkreis !
17. Bilden Sie aus den Gleichungen für Strom und Klemmenspannung des Reihenkreises die dualen Beziehungen für den Parallelkreis !
18. Unterscheiden Sie die Spannungen U_K U_o und U_e !
19. Erläutern Sie den Zweck der Temperaturkompensation von Schwingungskreisen !
20. Begründen Sie, warum die Gleichung (141) und (142) Näherungsformeln sind !

Lösungen zu den Übungsaufgaben 1, 2 und 3

1. a) $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3{,}85\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^{-10}}} = \underline{\underline{468\ \text{kHz}}}$$

b) $$\underline{\underline{\varrho_0}} = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_c}{\varrho_L + \varrho_c} = \frac{222\cdot 2\cdot 10^3}{2{,}222\cdot 10^3} = \underline{\underline{200}}$$

$$\underline{\underline{\varrho_c}} = \frac{1}{\tan\delta_c} = \frac{1}{5\cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{2000}}$$

$$\underline{\underline{R_0}} = \varrho_0\omega_0 L = 2\cdot 10^2\cdot 2\pi\cdot 4{,}68\cdot 10^5\cdot 3{,}85\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{227\ \text{k}\Omega}}$$

c) $$\underline{\underline{R'}} = \frac{R_0\cdot R_i}{R_0+R_i} = \frac{2{,}27\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^5}{4{,}27\cdot 10^5} = \underline{\underline{106\ \text{k}\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varrho'}} = \varrho_0\frac{R'}{R_0} = 2\cdot 10^2\ \frac{106\cdot 10^3}{227\cdot 10^3} = \underline{\underline{93{,}4}}$$

d) $$\underline{\underline{|V_0|}} = SR' = 4\cdot 10^{-3}\cdot 106\cdot 10^3 = \underline{\underline{416}}$$

e) $$\underline{\underline{B}} = \frac{f_0}{\varrho_0} = \frac{4{,}68\cdot 10^5}{2\cdot 10^2} = \underline{\underline{2{,}34\ \text{kHz}}}$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{f_0}{\varrho'} = \frac{4{,}68\cdot 10^5}{93{,}4} \approx \underline{\underline{5\ \text{kHz}}}$$

f) $$\underline{\underline{R''}} = \frac{R'\cdot R_2}{R'+R_2} = \frac{106\cdot 10^3\cdot 50\cdot 10^3}{156\cdot 10^3} = \underline{\underline{34\ \text{k}\Omega}}$$

$$\underline{\underline{|V_0|}} = SR'' = 4\cdot 10^{-3}\cdot 34\cdot 10^3 = \underline{\underline{136}}$$

$$\underline{\underline{B''}} = \frac{f_o}{\varrho''} = \frac{4{,}68 \cdot 10^5}{30} = \underline{\underline{15{,}6\ \text{kHz}}}$$

$$\underline{\underline{\varrho''}} = \varrho' \frac{R''}{R'} = 93{,}4 \frac{34 \cdot 10^3}{106 \cdot 10^3} = \underline{\underline{30}}$$

Die Aufgabe zeigt, daß der Schwingungskreis

a) durch den Innenwiderstand der Röhre und

b) durch den Belastungswiderstand gedämpft wird.

Der wirksame Resonanzwiderstand und die Verstärkung werden kleiner, die Bandbreite nimmt zu. Diese Dämpfung macht sich vor allem dann stark bemerkbar, wenn die äußeren Widerstände R_i und R_2 in der Größenordnung des Resonanzwiderstandes liegen.

2. $|v_o| = SR'$

$$\underline{\underline{R'}} = \frac{|v_o|}{S} = \frac{177}{2 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{88{,}5\ k\Omega}}$$

$$\underline{R'} = \frac{1}{2\pi\, C\, B'}$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2\pi\, R' \cdot B'} = \frac{1}{2\pi \cdot 88{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \underline{\underline{200\,pF}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{\omega_o{}^2\, C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{126{,}5\ \mu H}}$$

$$\underline{\underline{R_o}} = \frac{R_i \cdot R'}{R_i - R'} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 88{,}5 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 10^6 - 88{,}5 \cdot 10^3} = \underline{\underline{92\ k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\varrho_o}} = R_o \omega_o C = 9{,}2 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \underline{\underline{115{,}5}}$$

$$V_{rel} = \frac{\Delta f}{f_o} = \frac{1}{2} \quad \frac{\Delta C}{C}$$

$$\underline{\underline{\Delta C}} = 2\, V_{rel} \cdot C = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \underline{\underline{0{,}2\ pF}}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = V_{rel} \cdot f_o = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = \underline{\underline{500\ Hz}}$$

3.

$$\underline{\underline{f_{max}}} = \frac{300\,000\ \frac{Km}{s}}{750\ m} = \underline{\underline{400\ kHz}}$$

$$\underline{\underline{f_{min}}} = \frac{300\,000\ \frac{Km}{s}}{2070} = \underline{\underline{145\ \ kHz}}$$

$$\underline{\underline{V}} = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{400}{145} = \underline{\underline{2{,}76}}$$

$$\frac{C_E}{C_A} = \frac{530}{30} = 17{,}65$$

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{C_E + C_T}{C_A + C_T} = 7{,}6 = V^2$$

$$\underline{\underline{C_F}} = \frac{C_E - 7{,}6\ C_A}{6{,}6} \approx \underline{\underline{46\ pF}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{4\pi^2 f^2_{min} \cdot C^2_{max}} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 5{,}76 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{2{,}1\,mH}}$$

Antworten :

1. Die Absolutverstimmung ist die vorzeichenbehaftete Frequenzabweichung gegenüber der Resonanzfrequenz.
2. Weil V bei kleinen Frequenzabweichungen gleich der doppelten relativen Verstimmung ist.
3. Die Resonanzüberhöhung gibt an, um wievielmal größer bei Resonanz die Blindspannungen des Reihenkreises gegenüber der Leerlaufspannung und die Blindströme des Parallelkreises gegenüber dem Kurzschlußstrom sind. Resonanzüberhöhung und Kreisgüte sind indentisch.
4. Weil mit zunehmender Kreisgüte die Resonanzkurven schmaler verlaufen, d.h., weil die Trennschärfe größer wird.
5. Die Trennschärfe ist das Verhältnis der Verstärkung (oder Spannung) bei Resonanz zur Verstärkung (oder Spannung) bei einer Nachbarfrequenz. Sie stellt daher ein Maß für die Selektivität des Schwingkreises dar.
6. Die Kreisgüte ist stets kleiner als die kleinste Einzelgüte.
7. Beim Reihenkreis :

$$\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{r_0}{r'}$$

Beim Parallelkreis :

$$\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{R'}{R_0}$$

8. Bei den Grenzfrequenzen sind Wirk- und Blindwiderstand des Reihenkreises bzw. Wirk- und Blindleitwert des Parallelkreises groß. Der Phasenwinkel des Widerstandes bzw. des Leitwertes beträgt daher bei diesen Frequenzen 45°.
9. Die Bandbreite wird geringer, wenn die Kreisgüte zunimmt.

$$B = \frac{f_0}{\varrho_0}$$

10. $R_o = \frac{1}{2\pi C B}$

11. Der Innenwiderstand des Generators bewirkt eine Dämpfung des Kreises, d.h., die Bandbreite nimmt zu.
12. Die Verluste eines Schwingkreises werden vor allem durch die Spule bestimmt. Während die Spulenverluste als Reihenwiderstand in Erscheinung treten, stellt R_o einen Parallelwiderstand dar. Den Zusammenhang zwischen Reihen- und Parallelschaltung charakterisiert Gleichung (86). Je kleiner r_L, desto größer R_o .
13. Durch Ankopplung der äußeren Widerstände über eine Anzapfung. Die Spule wirkt dabei wie ein Transformator und übersetzt die äußeren Widerstände mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses.
14. Wenn er oberhalb seiner Resonanzfrequenz betrieben wird. Bei hohen Frequenzen wird $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. Der größere Strom fließt dann durch den kapazitiven Widerstand.
15. Die Klemmenspannung bleibt konstant, und der Strom erreicht ein Maximum.
16. Die Klemmenspannung bleibt ebenfalls konstant, der Strom zeigt jedoch ein Minimum.
17. Reihenkreis

$$\mathfrak{I} = \frac{I_o}{1 + j\Omega'}$$

$$\mathfrak{U}_K = U_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'}$$

Parallelkreis

$$\mathfrak{U}_K = \frac{U_o}{1 + j\Omega'}$$

$$\mathfrak{I} = I_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'}$$

18. $\mathfrak{U}_K$ = Klemmenspannung des Schwingkreises ;
U_o = Klemmenspannung im Resonanzfall ;
U_l = reelle und konstante Leerlaufspannung des Generators.

19. Bei Temperaturschwankungen ändern sowohl die Induktivität als auch die Kapazität ihre Werte; als Folge dieser Erscheinung ändert sich auch die Resonanzfrequenz des Schwingungskreises. Soll f_0 konstant bleiben, dann müssen Spule und Kondensator gleich große, aber einander entgegengerichtete Temperaturkoeffizienten aufweisen.

20. Die Gleichungen sind Näherungen, weil die Differentiale durch Diffenrenzen ersetzt wurden.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

Für Reihen und Parallelschwingkreis gültige Formeln

$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	Resonanzfrequenz
$\tan\delta = \tan\delta_L + \tan\delta_C$	Verlustfaktor
$\varrho_o = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C}$	Kreisgüte
$\varrho_o = \frac{1}{\tan\delta}$	Kreisgüte und Verlustfaktor
$V_{abs} = \omega - \omega_o = \Delta\omega$	absolute Verstimmung
$V_{rel} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o}$	relative Verstimmung
$V = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$	Doppelverstimmung
$\Omega = \varrho_o V$	normierte Verstimmung
$V_o \approx 2\,V_{rel}$	Doppelverstimmung in Resonanznähe
$\Omega_{45} = \varrho_o V_{45} = 1$	normierte Grenzverstimmung

$$B = f_{45} - f_{-45} = 2\Delta f_{45}$$ absolute Bandbreite

$$B^{\bullet} = \frac{f_o}{\varrho_o}$$

$$b = \frac{2\Delta f_{45}}{f_o}$$ relative Bandbreite

$$b = \frac{1}{\varrho_o}$$

$$\frac{\Delta f}{f_o} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C}$$

$$\frac{\Delta f}{f_o} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Relative Frequenzänderung bei kleinen Induktivität- oder Kapazitätsänderungen

$$V = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}} = \sqrt{\frac{L_{max}}{L_{min}}}$$ Frequenzvariation

$$T_{K_f} = -\frac{1}{2}\left(T_{K_L} + T_{K_C}\right)$$ Temperaturkoeffizient der :

$$T_{K_f} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o \, \Delta\vartheta}$$ Frequenz

$$T_{K_L} = \frac{\Delta L}{L \, \Delta\vartheta}$$ Induktivität

$$T_{K_C} = \frac{\Delta C}{C \, \Delta\vartheta}$$ Kapazität

Folgende Formeln gelten für

den Reihenkreis :

$$\varrho_L = \frac{\omega L}{r_L}$$

$$\varrho_C = \frac{1}{\omega C r_C}$$

den Parallelkreis :

$$\varrho_L = \frac{R_L}{\omega L}$$

$$\varrho_C = \omega C R_C$$

Güte von Spule und Kondensator

$$r_0 = r_L + r_C \qquad\qquad R_0 = \frac{R_L \cdot R_C}{R_L + R_C} \approx \frac{L}{C\, r_L}$$

Resonanzwiderstand

$$\varrho_0 = \frac{\omega_0 L}{r_0} = \frac{1}{\omega_0 C r_0} = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad\qquad \varrho_0 = \frac{R_0}{\omega_0 L} = \omega_0 C R_C = R_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Kreisgüte

$$\mathfrak{R} = r_0\left(1 + j\Omega\right) \qquad\qquad \mathfrak{R} = \frac{R_0}{1 + j\Omega}$$

Widerstand

$$\tan\varphi_r = \Omega \qquad\qquad \tan\varphi_r = -\Omega$$

Phasenwinkel

$$r' = r_0 + R_i \qquad\qquad R' = \frac{R_0 \cdot R_i}{R_0 + R_i}$$

Pseudoverlustwiderstand

$$\varrho' = \varrho_0\,\frac{r_0}{r'} \qquad\qquad \varrho' = \varrho_0\,\frac{R'}{R_0}$$

Pseudogüte

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{I}_0}{1 + j\Omega'} \qquad\qquad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0\,\frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'}$$

Gesamtstrom

$$I_o = \frac{U_e}{r'} \qquad I_o = \frac{U_o}{R_o}$$

Resonanzstrom

$$\mathfrak{U}_K = U_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega} \qquad \mathfrak{U}_K = \frac{U_o}{1 + j\Omega'}$$

Klemmenspannung

$$U_o = I_o r_o \qquad U_o = I_K \cdot R'$$

Resonanzspannung

Folgende Formeln gelten nur für den Parallelkreis

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{V}_o}{1 + j\Omega'}$$ nomierte Verstärkung

$$|\mathfrak{V}_o| = S \cdot R' = S \cdot \frac{1}{C 2\pi B'}$$ Resonanzverstärkung

$$\ddot{u}_1 = \frac{w_1}{w} \qquad \ddot{u}_2 = \frac{w_2}{w}$$

Ubersetzungsverhältnisse bei Spulenanzapfung

$$|\mathfrak{V}_o| = \ddot{u}_1 S R' \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} + \frac{\ddot{u}_1^2}{R_i}$$

$$|\mathfrak{V}_o| = \ddot{u}_2 S R' \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} + \frac{\ddot{u}_2^2}{R_2}$$

Resonanzverstärkung bei angezapftem Schwingkreis

$$\ddot{u}_{1\,opt} = \sqrt{\frac{G_o + G_2}{G_i}} \qquad \ddot{u}_{2\,opt} = \sqrt{\frac{G_o + G_i}{G_2}}$$

Ubersetzungsverhältnis für maximale Verstärkung

$$|w_0| = \frac{\ddot{u}_{1\,opt} \cdot S}{2\,(G_0 + G_2)} \qquad |w_0| = \frac{\ddot{u}_{2\,opt} \cdot S}{2\,(G_0 + G_i)}$$

Resonanzverstärkung bei Anzapfung mit optimalem Windungszahlübersetzungsverhältnis

$$B' = \frac{f_0\, 2\,(G_0 + G_2)}{\rho_0\, G_0} \qquad B' = \frac{f_0\, 2\,(G_0 + G_i)}{\rho_0\, G_0}$$

Bandbreite bei Anzapfung mit optimalem Übersetzungsverhältnis

Literaturverzeichnis

1. Schröder, Elektrische Nachrichtentechnik, Band I,
Verlag für Radio-,Foto-,Kinotechnik
Berlin Borsigwalde 1959

2. Limann, Funktechnik ohne Ballast,
Franzis Verlag München 1958

Als Manuskript gedruckt

Ag 613/38/73/600 (116) 1. Ausgabe 3. Auflage
Druck:

ZENTRALSTELLE FÜR LEHR- UND ORGANISATIONSMITTEL DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN, ZWICKAU

Katalog-Nr.: 200.14–02 Vorzugsschutzgebühr: 3,50 M