



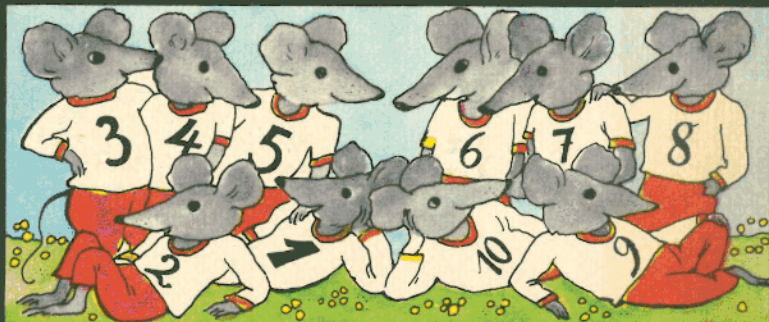
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



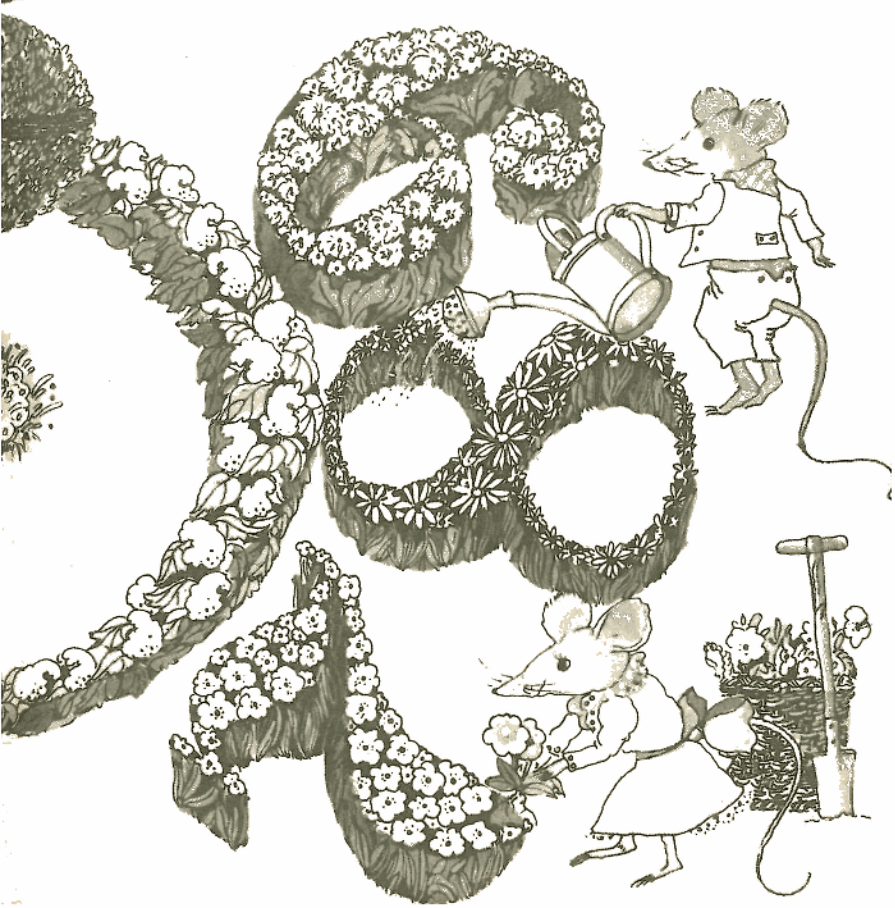
2	9	4
7	5	3
6	1	8

Manfred Scholtyssek

HEXEN. EINMALEINS







FREIZEITREIHE



Illustrationen
von Gisela Wongel

Manfred Scholtyssek

HEXEN- EINMALEINS



Der Kinderbuchverlag Berlin



2. Auflage 1982

© DER KINDERBUCHVERLAG BERLIN – DDR 1979

Lizenz-Nr. 304-270/343/82-(35)

Lichtsatz: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Druck und buchbinderische Verarbeitung: LVZ-Druckerei „Hermann
Duncker“, Leipzig

LSV 7841

Für Leser von 11 Jahren an

Bestell-Nr. 630 659 0

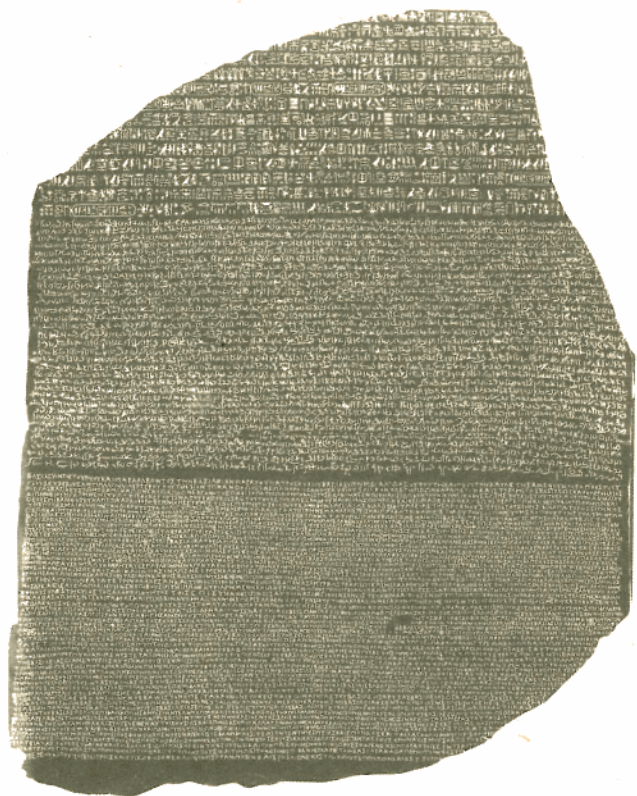
DDR 6,80 M

SCHARLATANE – RECHENMEISTER – RECHENKÜNSTLER

Auf den Spuren der Menschheitsgeschichte

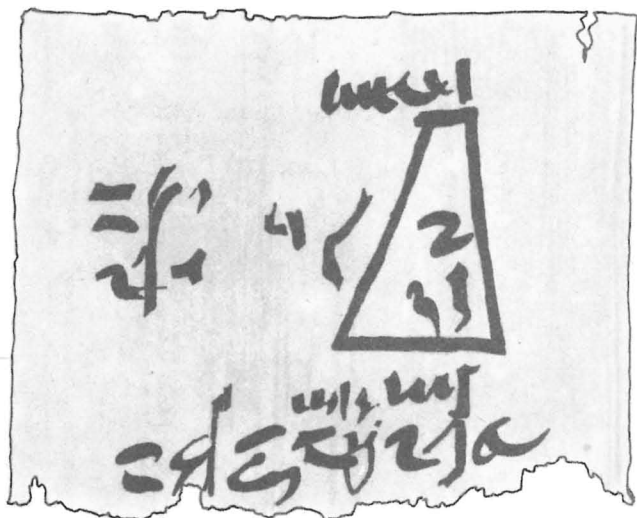
Niemals hätte Napoleon I. daran gedacht, daß mit seinem Namen auch eine der bedeutendsten Entdeckungen für den Fortgang der mathematischen Geschichtsforschung verbunden sein könnte. Als junger General unternahm er 1798/99 eine Militär-expedition nach Ägypten, die mit einem Mißerfolg endete, aber dennoch in einer ganz anderen Hinsicht von großem Erfolg war. Seine Soldaten fanden nämlich beim Graben von Verteidigungsanlagen in der Nähe der im Niltal gelegenen Stadt Rosette eine schwarze Steintafel, welche neben einem griechischen Text auch unbekannte Schriftzeichen enthielt, die den Wissenschaftlern große Rätsel aufgaben. Zwar gelang es dem englischen Physiker Thomas Young, die griechische Inschrift zu deuten, doch entzifferte erst 1822 der französische Ägyptologe Jean François Champollion die um vieles älteren ägyptischen Hieroglyphen auf dieser Tafel und schuf damit eine wesentliche Voraussetzung, durch weitere Forschungen in die Geheimnisse der ägyptischen Kultur einzudringen und auch Klarheit in das Dunkel frühgeschichtlicher Mathematik zu bringen.

Genau sechs Jahrzehnte nach der Ausgrabung der Tafel von Rosette trugen neue Entdeckungen dazu bei, diese Forschungen zu beschleunigen. In der Landschaft des ägyptischen Theben, dem heutigen



Steintafel von Rosette

Luxor, fand 1858 der Engländer Rhind Teile von Papyrusrollen, die durch weitere Ausgrabungen ergänzt und in mühsamer Arbeit entziffert wurden. Dieses außergewöhnlich wertvolle Dokument enthält viele aufschlußreiche Informationen über die ägyptische Mathematik vor etwa 4000 Jahren und stellt ein vollständiges Werk der ältesten existierenden Rechenaufgaben überhaupt dar, nämlich das als Kopie einer Vorlage aus noch früherer Zeit nach seinem Schreiber benannte „Rechenbuch des Ahmes“. In diesem sind 80 verschiedene arithmetische, algebraische und geometrische Rechenaufgaben aus dem praktischen Leben enthalten. Sie spiegeln wider, daß im alten Ägypten mathematische Kenntnisse zur Befriedigung gesellschaftlicher Bedürfnisse verwendet wurden:



*Aus einem altägyptischen Papyrus –
Berechnung eines Pyramidenstumpfes*

zur Regulierung des Nilwassers, für die Feldvermessung, zur Bestimmung der Größe von Vorratsbehältern, zur Projektierung von Bauwerken, für die Berechnung der Abgaben usw.

Aber die Geschichte der Mathematik ist unvergleichlich älter und reicht bis in die Anfänge der menschlichen Entwicklung zurück. Es gehört schon viel Phantasie dazu, wollen wir auch nur ahnen, wie unvorstellbar lang dieser Weg gewesen sein mag. Einen Zeitraum von Hunderttausenden von Jahren müssen wir dabei schon zugrunde legen. Noch manches Rätsel gibt es auf diesem Weg; denn es vergingen Tausende von Generationen, ehe die Menschen schriftliche Aufzeichnungen anfertigen konnten. Jedenfalls mußten sie am Anfang ihrer Entwicklung ohne die Kenntnis der Zahl und des Rechnens auskommen. Sie hatten auch vollauf damit zu tun, ihr ständig von Gefahren bedrohtes Leben zu erhalten, die notwendigste Nahrung zu finden und jederzeit zu Angriff oder Flucht bereit zu sein.

Im täglichen Kampf gegen die Naturgewalten aber entwickelten die Menschen ihre Fähigkeiten. Ihre Aufgaben wurden größer, verlangten Geschicklichkeit und Erfindungsgabe, und jeder einzelne trug auch eine größere Verantwortung. Die Mitglieder der Gruppen, in denen die Menschen zusammenlebten, waren aufeinander angewiesen. Die Männer gingen zur Jagd, die Frauen und die größeren Kinder sammelten Kräuter und Samen. Alle bauten gemeinsam ihre Laubhütten zum Schutz gegen die Unbilden und Gefahren der Natur.

Hier wohl, an dieser Stelle der Entwicklungsgeschichte, werden wir die Anfänge des Zählens und



Statue eines Schreibers aus dem alten Ägypten



Handlungen, sondern studierte die Geheimnisse des täglichen Lebens, lernte die Erscheinungen des Jahresablaufs und des Wetters deuten, verstand es, Feuer und Wasser zu beherrschen. Hier liegt unter Umständen auch der Schlüssel für die als magisch geltende Zahl 4. Sie war möglicherweise kultisches Symbol der den Menschen umgebenden Naturelemente Erde, Luft, Feuer und Wasser.

Dem Stammeszauberer wurde auf Grund seines höheren Wissens um die Geheimnisse der Natur auch die Fähigkeit zugeschrieben, aus den Sternen die Zukunft deuten zu können. Wir stehen damit an der Wiege der Astronomie, die mathematische Erkenntnisse über den Lauf der Gestirne voraussetzt und später von den babylonischen und ägyptischen Priestermagiern, aus vielen richtigen astronomischen

Beobachtungen hergeleitet, ausschließlich für rein magische Zwecke genutzt und vervollkommenet wurde.

Vom Aberglauben zum Wunderglauben

Von der Entwicklungsstufe der Jäger und Sammler bis hin zum Ägypten der Pharaonen ist es natürlich ein gewaltiger Sprung. Dennoch wollen wir ihn machen, weil sich hier, unter den klimatisch günstigen Bedingungen am Nil, der Lebensader Ägyptens, und auch an den Flüssen Euphrat und Tigris, der alten Heimat der Assyrier und Babylonier, vor etwa 5000 Jahren große Veränderungen vollzogen.

Die Landwirtschaft stand in hoher Blüte und lieferte infolge von Flußregulierungen, Kanal- und Deichbauten reichlichen Nahrungsvorrat. Verschiedene Handwerke standen in hoher Blüte. Die unermesslich reichen Könige ließen große Städte, imposante Tempelbauten und Straßen errichten. Dies alles erforderte genaue Berechnungen und die Bewältigung komplizierter Tätigkeiten, führte zu einer sprunghaften Entwicklung einiger Zweige der Wissenschaft, vor allem der Mathematik, und ließ Priester, Mathematiker, Astronomen, Architekten, Ärzte und Verwaltungsangestellte hervorgehen.

Diese ganze gewaltige Schaustellung der Macht einer sich üppig entwickelnden, blühenden Gesellschaft lastete auf den völlig rechtlosen Sklaven, die durch ihre Arbeit diese Entwicklung überhaupt erst ermöglicht hatten und die zu Tausenden von den Herrschenden geopfert wurden, wenn diese ihre

Bedürfnisse befriedigen wollten. Die Sklavenhaltergesellschaft stützte sich auf eine von strengen Glaubenssätzen gekennzeichnete Staatsreligion. Hatten bis dahin Magie und Mystizismus das Weltbild des Menschen beherrscht, so stand über ihnen nun der Pharao, der als König mit dem Gott auf gleicher Stufe stand und dem ein jeder uneingeschränkt zu dienen hatte. Das unwissende und ungebildete Volk lehrte man, das Geschick des Menschen hänge einzig vom Willen der Götter ab und verlieh zu diesem Zwecke den Tempelpriestern das Recht des Beschützers der Menschen gegen böse Schicksalskräfte.

Die Tempelpriester waren die eigentlichen Träger der Macht, aber auch des Wissens. Sie bauten ihre Stellung aus, nutzten ihre Kenntnisse über kultische und magische Geheimnisse dazu, die hilflosen und unwissenden Menschen völlig in ihre Abhängigkeit zu bringen und übten entsprechenden Einfluß auch auf die Wissenschaften aus.

Ihnen allein kam auch die Aufgabe zu, aus der Stellung der Sterne zum Zeitpunkt der Geburt des Menschen dessen Zukunft vorauszubestimmen und aus Veränderungen am Himmelsgewölbe, aus Sonnen- und Mondfinsternis und der Bewegung der Kometen große Ereignisse, Kriege, Hungersnöte und Naturkatastrophen vorauszusagen. Vor allem bei den Babylonern stand die Beobachtung des Sternhimmels in hoher Blüte. Sie ließen hohe Türme bauen, um die Bewegung der Gestirne besser erfassen zu können und ihren Sternengöttern möglichst nahe zu sein. Der magischen Zahl 7 entsprechend bezeichneten sie auch sieben Planeten, nämlich Merkur, Ve-



*Turm von
Babylon*



(Rekonstruktion)

nus, Sonne, Mond, Mars, Jupiter und Saturn. Noch bis zur Zeit des Copernicus wurden Sonne und Mond als Planeten angesehen und die Erde als Zentrum des Weltalls.

Nun wäre es falsch, diese astrologischen Auffassungen der Menschen jener Zeit einfach zu verurteilen. Die Astronomen Ägyptens und Babylons haben Gewaltiges geleistet und auf der Grundlage erstaunlicher mathematischer Berechnungen vor allem der Navigation große Hilfe erwiesen, und sie haben auch zuverlässige und präzise Kalenderrechnungen vorgenommen.

Die Entwicklung des mathematischen Denkens und die schrittweise Lösung der mit der gesellschaftlichen Praxis zusammenhängenden mathematischen Probleme vollzog sich bei vielen Völkern fast gleichzeitig und unter ähnlichen klimatischen und gesellschaftlichen Verhältnissen unabhängig voneinander.

Fast 5000 Jahre alt ist die aus China bekannte erste wissenschaftlich beschriebene Sonnenfinsternis, und noch älter sind die von dort überlieferten astronomischen Beobachtungen. Vor etwa 3000 Jahren entstand ein für Weissagungszwecke verwendetes Handbuch der Kombinatorik, das „Buch der Wandlungen“, welches unter dem Titel „Yi King“ bekannt und noch 1724 in Frankfurt am Main verlegt wurde. Aber noch früher begann die Tradition der magischen Quadrate, denen im vorliegenden Buch ein besonderer Abschnitt gewidmet ist.

Auch die Inder, die erstaunliche Rechenleistungen vollbrachten, waren bereits vor 3000 Jahren in der Lage, mit Zahlen im Bereich 10^5 zu operieren und lösten vor 2000 Jahren die berühmte Weizenkornaufgabe, deren Ergebnis $2^{64} - 1$ eine zwanzigstellige

Zahl ergibt. Das ungebildete Volk jedoch warnten die Priester davor, über 12 hinaus zu zählen, weil sonst großes Unglück hereinbrechen würde.

In dieser Warnung finden wir die Erklärung für den Aberglauben an die noch heute in manchen Köpfen als „Unglückszahl“ herumspukende 13; denn wer bis 13 zu zählen wagte, überschritt die Grenze des Erlaubten, wofür also die Priester schlimme Folgen androhten.

Nun muß man wissen, daß die 12 zur damaligen Zeit tatsächlich besondere mathematische Bedeutung hatte. Auf ihr baute sich das lange Zeit für die Darstellung von Zahlen gebräuchliche Zwölfersystem auf. Wollten wir auch heute Zahlen im Zwölfersystem aufschreiben, müßten wir für 10 und 11 zusätzliche Ziffern einführen (unser Zehnersystem kennt ja nur die zehn Ziffern 0 bis 9) und beachten, daß im Zwölfersystem die 12 die gleiche Rolle spielt wie die 10 im



Zehnersystem. Die dazu notwendigen aufwendigen und ungewöhnlichen Umrechnungen wollen wir uns jedoch ersparen, weil es heutzutage niemandem mehr einfallen wird, auf diese Weise Zahlen aufzuschreiben. Aber wissen sollten wir, daß sich aus dem Zwölfersystem in Verbindung mit der Astronomie unsere heutigen Zeitmaße entwickelt haben. So hat das Jahr 12 Monate, Tag und Nacht werden allgemein in je 12 Stunden eingeteilt. Auch im Handel gibt es Überbleibsel des Zwölfersystems, denn man zählt manche Dinge (Knöpfe, Eier) auch heute noch nach Dutzend (12 Stück) und Gros (12 Dutzend).

Doch kehren wir zu den Tempelpriestern im alten Ägypten zurück. Sie nahmen auch Heilbehandlungen vor und sprachen dazu Zauberformeln, die, ähnlich den magischen Quadraten, der mathematischen Zahlenmystik entstammten, aus einer rhythmischen Folge von Vokalen und Konsonanten bestanden und durch ihre eigenartige Vokalakustik von suggestiver Wirkung sein sollten. Solche Zauberformeln sind unter strenger Geheimhaltung überliefert und noch zum Beginn unseres Jahrhunderts benutzt worden.

Das Zauberwort ABRAKADABRA ist ursächlich eine solche Heilformel und zugleich eine mathematische Kuriosität ersten Ranges. Sie gehört zur Kategorie der sogenannten Schwindformeln, die bei solchen Krankheiten aufgeschrieben und dem Kranken übergeben wurden, bei denen die Krankheit nicht plötzlich, sondern nach und nach schwinden sollte. Das Schriftbild entsprach jeweils dem angenommenen Krankheitsbild, und es wurde als Wort so untereinander geschrieben, daß jedesmal der letzte Buchstabe wegfiel. Das sah dann so aus:



Mathematisch interessant ist diese Zauberformel deswegen, weil sie in horizontaler und diagonaler Richtung, als Winkel, Dreieck und so weiter 1 024mal auf verschiedene Weise gelesen werden kann. Aber das ist gar nicht so leicht.

Wir sollten solche mathematisch-mystischen Auswüchse nicht einfach belächeln. Sie wurden unter entsprechenden gesellschaftlichen Bedingungen mindestens ebenso ernsthaft betrieben wie die rituellen Handlungen der Pythagoreer. So nannte man einen Geheimbund, den der griechische Mathematiker Pythagoras vor 2 500 Jahren gründete. Dieser „Bund der Pythagoreer“ trug alle mystischen Merkmale einer



religiösen Sekte. Besondere Kulthandlungen, strikte Geheimhaltungspflicht der vorgeschriebenen Bräuche, eine spezielle Lehre zur sogenannten Seelenwanderung mit den dazugehörenden Bestattungszereemonien, strenge Anweisungen über die Kleidung und vegetarische Kost prägten das Leben der Mitglieder des Bundes. Äußeres Ordenszeichen war das reguläre Sternfünfeck, das Pentagramm, welches bis ins späte Mittelalter gewichtige mystische Bedeutung hatte und sogar noch heute in der bürgerlichen Gesellschaft bei abergläubischen Menschen eine Rolle spielt.

Die Pythagoreer strebten als erklärtes Ziel ihres mystischen Tuns „die Vereinigung mit dem Göttlichen über die Mathematik, durch Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt“ an, und daran läßt sich auch der Einfluß der babylonischen Mathematik erkennen, die, wie bereits erwähnt, gleiches über das Studium der Gestirne anstrebte.

Die pythagoreische Schule verlagerte z.B. die Zahlen 1 und 3 in übersinnliche Bereiche und maß ihnen göttliche Fähigkeiten zu. Erst über die Beschäftigung mit den Zahlen sollte auf mystische Weise der Mensch zu höherer Erkenntnis gelangen.

Diese Grundhaltung führte zu mannigfaltigen Zahlenspielereien und -spekulationen: Die heilige Zehnerzahl stelle „die Quelle und Wurzel der ewigen Natur“ dar, „die Wirksamkeit und das Wesen der Zahl muß man nach der Kraft beurteilen, die in der Zehnerzahl liegt. Denn sie ist groß, alles vollendend, alles bewirkend und von Anfang an Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens“, so schrieb man es damals. Den Zahlen bis 10 wurden gegensätzliche Eigenschaften wie Liebe und Haß, Feuer und Wasser, weiblich und männlich zugeordnet, und aus den Zahlen 1, 2, 3 und 4 bildete man die Zehnzahl (TETRAKTYS), welche auch als Amulett Verwendung fand.



So hat die weltanschauliche Grundhaltung der Pythagoreer, wonach das Wesen der Welt in der Harmonie der Zahlen bestehe und das Weltbild von der göttlichen Ordnung der Zahlen getragen sei, über einen langen Entwicklungszeitraum hinweg das mathematische Gedankengut nachhaltig beeinflußt und mit Hilfe ausgeklügelter Zahlenmystik zur Ablehnung einer auf die gesellschaftliche Praxis bezogene Mathematik beigetragen.

Zum Zeitpunkt der beginnenden Zersetzung und Auflösung der historisch überlebten alten Sklavenhalterordnung bedeutete dies einen Rückgang in der ökonomischen Entwicklung. In einer solchen Gesellschaftsordnung kam die produktive Arbeit den Sklaven und Unfreien zu, und die Mathematik wurde zum Vorrecht der Freien; denn von ihrer Zweckbestimmung her gehörte die Mathematik nach den Auffassungen Platons zum Ausbildungsplan für die Führer des Staates sowie für Philosophen und war allenfalls gut für Feldherren zum Aufstellen der Schlachtordnung, alles andere sei nur vom Übel.

Trotzdem haben die damals verbreiteten Auffassungen der Pythagoreer gewisse Fortschritte der Naturwissenschaft und Technik nicht aufzuhalten vermocht. Unter dem Einfluß des Thales von Milet (624 bis 546 vor unserer Zeitrechnung) gab es beachtliche Bemühungen, die Vorgänge in der Natur ohne jede Beimengung von Mystik zu erklären. Viele derjenigen, die sich mit Philosophie, Naturwissenschaft und Mathematik befaßten — so auch Thales —, standen bald nicht mehr im Dienste eines Herrschers oder eines Tempels. Sie gehörten dem selbstbewußten Stande der reichen Kaufleute oder Besitzer größerer

Werkstätten an und wurden zu politischen Gegnern der herrschenden Klasse. Deshalb sind Fortschritte in Naturwissenschaft und Technik, so die Entstehung der ersten Weltkarten, Anfänge einer Abstammungslehre, die Erhöhung der Eisengewinnung, der Bau von Hafendämmen, Riesentempeln usw., Ausdruck für die vorwärtsdrängende gesellschaftliche Praxis.

Mathematik und Teufelsglaube

Zu Beginn unserer neuen Zeitrechnung entstand das Christentum. Als Religion der Armen und Unterdrückten breitete es sich trotz grausamer Verfolgung seiner Anhänger rasch aus. Die herrschende Klasse erkannte jedoch bald die für sie aus den festgefügtten Glaubenssätzen der Kirche entstehenden Vorteile.

Das Christentum wurde nach dem Mailänder Edikt von 313 unserer Zeit zur Staatsreligion erklärt, und die bisherigen Glaubenslehren mit ihren Göttern, Geistern und Dämonen mußten der Kirchenlehre von nur einem Gott und seinem Widersacher, dem Teufel, weichen. Was dem entgegenstand, wurde als Sünde, Blendwerk des Teufels oder Ketzerei verurteilt. Aber dieser Widerspruch der Kirche war nur ein scheinbarer; denn im Grunde wurde nur bekämpft, was der Christianisierung Europas entgegenstand und die Bekehrung der Nichtchristen erschwerte: der heidnische Aberglaube.

Allerdings unterscheidet sich in historischer Hinsicht die Zeit, da das Christentum aufstrebte und die Kirche nach weltlicher Macht griff, in einer Beziehung ganz erheblich von der früherer Epochen: Die Men-

NICOLAUS
COPERNICUS



schen befanden sich im Aufbruch. Sklavenaufstände erschütterten die ökonomische und weltanschauliche Ordnung und bereiteten den Untergang der Sklavhaltergesellschaft vor. Fortschritt und Aufklärung aber standen im Gegensatz zu den festgefügtten Glaubenssätzen der Kirche, und wissenschaftliche Erkenntnisse akzeptierte die herrschende Klasse nur in dem Maße, wie sie den Glaubenssätzen des Christentums entsprachen.

Dies konnte nicht ohne entsprechende Rückwirkungen auf die Wissenschaften, so auch auf die Mathematik, bleiben. Gegen sie sprach sich zum Beispiel der einflußreiche Bischof und Kirchenlehrer Augustinus im 4. Jahrhundert unserer Zeit aus: „Der gute Christ soll sich hüten vor den Mathematikern und allen denen, die leere Vorhersagen zu machen pflegen, schon gar dann, wenn diese Vorhersagungen zutreffen. Es besteht nämlich die Gefahr, daß die Mathematiker mit dem Teufel im Bunde den Geist trüben und den Menschen in die Bande der Hölle verstricken.“

Ganz klar, daß der materielle Ursprung mathematischer Begriffe der Kirche nicht angenehm war, und der Inquisition, dem Kirchengengericht, das über die Einhaltung der Glaubenssätze zu wachen hatte, fielen deshalb viele Menschen, insbesondere auch Forscher und Gelehrte, zum Opfer. Giordano Bruno (1548–1600) wurde 1600 von der Inquisition auf dem Scheiterhaufen verbrannt, weil er nachwies, daß es keine über oder außerhalb der Materie wirkende Kraft gibt. Galileo Galilei (1564–1642) wurde von der Inquisition 1633 zum Widerruf seiner Lehre gezwungen, und man hielt ihn bis an sein Lebensende gefangen. Er hatte

das heliozentrische Weltbild des Copernicus verteidigt. Nicolaus Copernicus (1473–1543) hatte nachgewiesen, daß das bestehende Weltbild, wonach die Erde der Mittelpunkt der Welt sein sollte, falsch ist, daß in Wirklichkeit die Erde sich mit den anderen Planeten um den Mittelpunkt Sonne bewegt. Auch Copernicus wurde von der Kirche verfolgt und verdammt, sein Werk als ketzerisch verboten. Erst 1835 wurde es freigegeben. Der berühmte französische Mathematiker, Physiker und Philosoph René Descartes (1596–1650) konnte einige seiner Bücher nur anonym erscheinen lassen und wurde als Gottverleugner gebrandmarkt.

Seit 1264 loderten über viele Jahrhunderte hinweg die Scheiterhaufen der Hexenverbrennungen in Europa, und in den Folterkammern der Inquisition wurden auf grausame Weise Teufelsaustreibungen und die Bannung von bösen Geistern und Dämonen betrieben.

Thomas von Aquino, der mit seiner theoretischen Begründung der neuen Hexenlehre diesen Prozeß eingeleitet hatte, zerstörte im 13. Jahrhundert das Lebenswerk seines Lehrers Albertus Magnus, den in der Form einer weiblichen Gestalt konstruierten Automaten und wohl auch ersten Vorläufer unserer heutigen Computer.

Es verwundert uns keineswegs, wenn in dieser Zeit in den stillen Studierstuben der Aberglaube blühte und der Wunsch genährt wurde, den „Stein der Weisen“ zu finden und dem „Ursprung aller Dinge“ auf die Spur zu kommen. Der bedeutende Arithmetiker Michael Stifel (1487–1567) zum Beispiel begab sich auf den Weg mystischer Zahlenspielereien und prophezeite

auf Grund seiner metaphysischen Meditationen sogar auf den Tag genau den Weltuntergang.

Der venezianische Mathematiker Geronimo Cardano nahm sich 1576 als Fünfundsiebzigjähriger bei bester Gesundheit das Leben, weil das von ihm in jüngeren Jahren selbst verfaßte persönliche Horoskop dieses Jahr als sein Sterbedatum auswies.

Die Entwicklungsgeschichte der Mathematik ist angefüllt von Wechselfällen, eigenartigen Zwischenspielen, Episoden und verwunderlichen Irrwegen. Widersprüchlichkeiten und Realitäten haben ihre Spuren hinterlassen und kennzeichnen gleichermaßen die Kulturgeschichte der Mathematik als Entwicklungsgeschichte der menschlichen Gesellschaft in der sie umgebenden realen Wirklichkeit. Friedrich Engels schrieb dazu:

„Wie alle anderen Wissenschaften ist die Mathematik aus dem Bedürfnis der Menschen hervorgegangen: aus der Messung von Land und Gefäßinhalt, aus Zeitrechnung und Mechanik... Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hervorgegangen als aus der wirklichen Welt.“

Kuriositäten

Unser kurzer Streifzug durch einige kulturgeschichtliche Tatsachen aus der bewegten Entwicklung des Zählens und Rechnens soll unterstreichen, daß die Mathematik mit der Arbeit des Menschen entstand und im historischen Prozeß seiner ständigen Auseinandersetzung mit der Natur und der Gesellschaft immer mit praktischer Tätigkeit verbunden war und ist.

Trotz Zahlenzauber, Priestermagie, Hexenwahn und religiösem Dogmatismus war die Mathematik niemals eine okkulte Geheimwissenschaft. Dies gilt nur für ihre abartigen magisch-mystischen Auswüchse, deren wirres Wurzelwerk jedoch zu jeder Zeit kräftig Unkraut trieb und nicht nur die Unwissenden beeindruckte.

Allerdings dürfen wir in diesem Entwicklungsprozeß nicht übersehen, daß die Mathematik immer im Dienst der herrschenden Klasse stand. Den unfreien Sklaven, Fronbauern und ausgebeuteten Tagelöhnern und Arbeitern wurde sie in dem Maße vorenthalten, wie es nötig war, sie als möglichst unwissendes und willfähiges Werkzeug für den Reichtum ihrer Herrscher und das Wohlleben von deren Vasallen schuften zu lassen.

Erst vor etwa 100 Jahren zum Beispiel wurde die Mathematik in den Schulen des Deutschen Kaiserreichs reguläres Unterrichtsfach. Das heißt, eigentlich lernten die Kinder in den sogenannten Volksschulen Rechnen, denn vor 1945 gab es in diesen Schulen keinen richtigen Mathematikunterricht. Von Ungleichungen, Relationen, Mengen und exakten Beweisen haben diese Schüler in ihrer Schulzeit nichts erfahren.

Wem heute die Mathematik manchmal eine harte Nuß zu knacken gibt, der denke daran, wie viele Schülergenerationen nicht das Glück hatten, eine gute Schulbildung zu erfahren. Die Mathematik fördert ja das Denkvermögen, und das Denken kommt dem Menschen bei allen Gelegenheiten zugute, auch wenn man die Ursachen einer Erscheinung, eines Problems ergründen will. Und daran waren die Herrschenden früherer Zeiten nicht interessiert.

Nun ist das mit dem Denkenlernen so eine Sache. Nicht jeder bewältigt die Schwierigkeiten einer mathematischen Aufgabe mit Leichtigkeit und beim ersten Versuch. Das gelingt aber beim Sport meist ebensowenig wie in anderen Unterrichtsfächern oder gar beim Beherrschen eines Musikinstrumentes. Übung und Training gehören nun einmal dazu, wenn man ein gestecktes Ziel erreichen will.

Wer erst einmal versucht hat, sich das Reich der Zahlen, mathematischen Figuren, Gebilde und Symbole zu erschließen, wird mit ihnen manch interessantes Abenteuer finden und mit der Freude am Erfolg auch das Erlebnis des bisher Unbekannten.

Viele Schüler besuchen Mathematikzirkel nicht allein deswegen, weil sie gute Mathematiker sind oder werden möchten. Nein, für sie ist dies gleichzeitig auch sinnvolle Freizeitgestaltung, Unterhaltung und Entspannung. Karl Marx hat sich immer wieder eingehend mit der Mathematik befaßt und bedeutende Arbeiten auf diesem Gebiet geschrieben. Und er fühlte sich auch immer dann zur Mathematik hingezogen, wenn er Trost suchte. In einem Brief an seinen Freund Friedrich Engels schrieb er: „Die einzige Beschäftigung, womit ich den nötigen seelischen Gleichmut aufrechterhalten kann, ist Mathematik.“

Karl Marx nutzte die Mathematik aber auch zur Entspannung nach den geistigen Anstrengungen seiner philosophischen und ökonomischen Studien.

Mathematik als Unterhaltung und Entspannung? — Nun ja, so neu ist die Sache nicht. Bereits vor vielen tausend Jahren gab es das. In den aufgefundenen Papyri und anderen Zeugen früher Mathematik finden

wir Beispiele der Unterhaltungsmathematik. Im alten Griechenland stand sie in hoher Blüte. Auch heute noch wird mit solchen Aufgaben Kurzweil betrieben.

Da ist zum Beispiel die berühmte indische Schachaufgabe mit den Weizenkörnern. Sie ist über Jahrtausende überliefert und soll sich der Legende nach etwa folgendermaßen zugetragen haben:

Ein indischer König ließ den Erfinder des Schachspiels zu sich rufen. „Dein Spiel ist wahrhaft ein königliches Spiel und also auch eine königliche Belohnung wert!“ sagte der Herrscher und forderte den Erfinder auf, einen beliebigen Wunsch zu äußern, welchen er ihm erfüllen wollte. Dieser machte ein harmloses Gesicht und sagte: „Großer König, mein Wunsch ist recht bescheiden. Ich will in Weizenkörnern belohnt sein. Mir mögen so viele Weizenkörner zukommen, als sich auf den Feldern des Schachbretts ergeben, wenn man auf das erste Feld 1 Weizenkorn, auf das zweite Feld 2 Weizenkörner, auf das dritte Feld 4 Weizenkörner, auf das vierte Feld 8 Weizenkörner und so fort tut. Die Zahl der Körner soll also auf jedem Feld verdoppelt werden.“ Der König lachte und meinte, dieser Wunsch sei zu bescheiden. Obwohl der Erfinder ihn darauf aufmerksam machte, daß er seinen Wunsch wohl kaum werde erfüllen können, sicherte ihm der König Gewährung zu.

Wie hoch wird die Anzahl der Weizenkörner wohl gewesen sein? Konnte der König diesen Wunsch überhaupt erfüllen? Wem die Lösung nicht bereits aus der Literatur bekannt ist, wird sich todsicher verschätzen; denn das Ergebnis ist kaum vorstellbar. Ich



will darum versuchen, die Lösung und die Menge der Weizenkörner, die der König hätte geben müssen, verständlich zu machen.

Entsprechend der gestellten Aufgabe ist die Anzahl der Weizenkörner auf jedem Feld des Schachbrettes zu verdoppeln. Das ergibt die folgende Anordnung:

- Auf das 1. Feld 1 Korn.
- Auf das 2. Feld 2 Körner (d. h. 2^1).
- Auf das 3. Feld 4 Körner (d. h. 2^2).
- Auf das 4. Feld 8 Körner (d. h. 2^3).
- Auf das 5. Feld 16 Körner (d. h. 2^4).
- Auf das 6. Feld 32 Körner (d. h. 2^5).
- Auf das 7. Feld 64 Körner (d. h. 2^6).
- Auf das 8. Feld 128 Körner (d. h. 2^7) usw.

Zum besseren Verständnis der zwischen den Feldern und den darauf liegenden Weizenkörnern entstehenden Beziehungen dient auch die nachfolgende Übersicht:

Nr.	Zahl	Für die fortlaufende Addition der
des	der dort	auf den Feldern liegenden Körner
Feldes	liegenden	gelten die folgenden Beziehungen:
	Körner	

1	1	$1 = 1$
2	$2 = 2^1$	$1 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1$
3	$4 = 2^2$	$1 + 2^1 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$
4	$8 = 2^3$	$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15 = 2^4 - 1$
5	$16 = 2^4$	$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 = 2^5 - 1$
6	$32 = 2^5$	$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63 = 2^6 - 1$
7	$64 = 2^6$	$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 127 = 2^7 - 1$
8	$128 = 2^7$	$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 255 = 2^8 - 1$

Demnach liegen z. B. auf dem 15. Feld genau 2^{14} , auf dem 27. Feld 2^{26} und schließlich auf dem 64. Feld 2^{63} Körner.

Wir sehen also, daß die Zahl der Weizenkörner auf dem n-ten Feld durch eine Potenz mit der Basis 2 und dem Exponenten $n - 1$ dargestellt wird. Wir erkennen ferner an der Zahl (Summe), die das Ergebnis der jeweiligen Addition angibt, eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Folge: Sie ist nämlich immer um 1 kleiner als die nächst höhere n-te Potenz. Es ergibt z. B.

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 \text{ genau} \\ 2^7 - 1 = 127.$$

Demnach entsteht für das Beispiel unserer Schach-Weizenkorn-Aufgabe ein Endergebnis von $2^{64} - 1$, also eine Zahl, die um 1 kleiner ist als die Potenz mit der Basis 2 und dem Exponenten 64.

Die Gesamtsumme der Weizenkörner beträgt auf das Korn genau

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Das sind: 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen 551 Tausend 615.

Der König ließ sich, den damaligen Vorstellungen entsprechend, diese Menge in Kamelladungen umrechnen. Wenn man jedem Kamel 140 kg Weizen auflädt und annimmt, es beanspruche in einer Marschkolonne 5 Meter Platz, dann benötigt man für den Transport dieser Weizenmenge 2 303 539 469 744 Kamele. Die Kamelkarawane würde 11 517 697 384 720 Meter, also über $11\frac{1}{2}$ Milliarden Kilometer lang sein. Diese Karawanenlänge bedeutet aber etwa die achtfache Entfernung des Saturn oder die fünfzigfache Entfernung des Mars von der Sonne.

4500 Jahre alt ist ein chinesisches Lehrbuch der Algebra, „Kintschang“ genannt, in dem die folgende Aufgabe enthalten ist:

Im Mittelpunkt eines quadratischen Brunnens von 5 Meter Seitenlänge wächst ein Schilfhalm empor, welcher sich 0,5 Meter über die Wasserfläche erhebt. Zieht man jedoch diesen Schilfhalm nach der Mitte einer Brunnenseite, so erreicht er diesen Punkt gerade mit seiner Spitze. Wie tief ist der Brunnen?

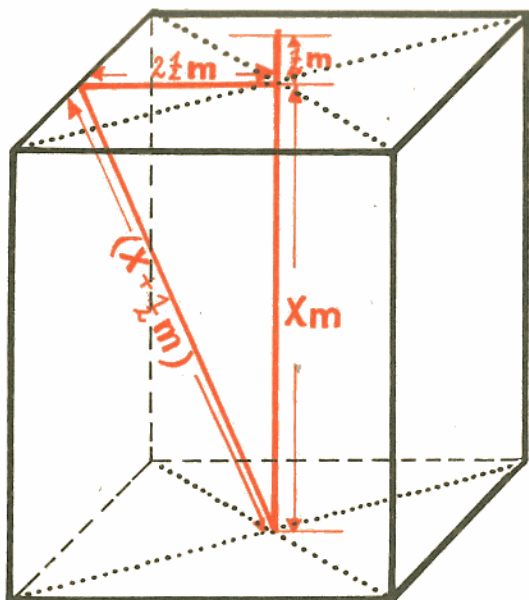
Die Lösung finden wir am besten durch die aus dem pythagoreischen Lehrsatz abgeleitete folgende Gleichung:

$$(x + 1/2)^2 = x^2 + (2 1/2)^2$$

Wenn du diese Gleichung ausrechnest, ergibt sich für die Brunnentiefe 6 Meter.

Ob die Chinesen die Aufgabe auf diese Weise gelöst haben, wissen wir nicht. Fest steht jedoch, daß der dem Pythagoras zugeschriebene Lehrsatz, der da lautet: Die Flächen der Quadrate, die über den Katheten errichtet werden können, sind zusammen so groß wie die Fläche des Quadrats, das man über der Hypotenuse errichten kann, bereits 1000 Jahre vor Pythagoras in Keilschrifttexten angeführt wird.

In dem schon erwähnten ägyptischen „Rechenbuch des Ahmes“ ist vor etwa 4000 Jahren die folgende Rechenaufgabe aufgezeichnet worden, welche oben drein mit der magischen Zahl 7 verbunden ist und bereits zur Unterhaltungsmathematik zählen kann: 7 Menschen besitzen je 7 Katzen, jede Katze frißt 7 Mäuse, jede Maus frißt 7 Ähren Gerste; aus jeder



Ähre können 7 Maß Getreide wachsen. Wieviel Maß Getreide sind das insgesamt?

Die gesuchte Zahl ist die Potenz 7^5 , und jeder kann sie schnell ausrechnen.

Über Archimedes gibt es nur sehr wenige zuverlässige Lebensaufzeichnungen. Das hatte eine Flut von unbewiesenen Legenden zur Folge. So erzählt man auch die Anekdote, wonach er, als er beim Baden entdeckte, wie er feststellen könne, ob die Krone des Königs Hiero aus reinem Gold bestünde, „Heureka“, was soviel heißt wie „Ich hab's gefunden!“, rufend, splitternackt durch die Straßen nach Hause gelaufen sein soll. Oder auch die, daß er, immer mit seiner geliebten Geometrie beschäftigt, sogar beim Baden auf seinen mit Ölen und Salben bedeckten Körper geometrische Figuren zeichnete.

Tatsache jedoch dürfte sein, daß Archimedes nur schwer zu bewegen war, die von ihm ausgesprochenen Lehrsätze auch mathematisch zu beweisen. Das überließ er den anderen und erlaubte sich recht gern mit den eingebildeten „Hofgelehrten“ Alexandriens listige Scherze. Mit voller Absicht streute er in seine Sätze auch Falsches ein, damit, wie er selbst formuliert, „diejenigen, die für sich beanspruchen, alles selbst entdeckt zu haben, aber keine Beweise davon liefern, auch einmal hineinfallen, indem sie behaupten, Unmögliches entdeckt zu haben“.

Diophantos von Alexandria, von dem wir aber nun wirklich wissen, daß er vor etwa 2 000 Jahren Formen der Unterhaltungsmathematik entwickelt hat, hinterließ uns unter anderem auch die einer Mode seiner



Zeit entsprechende Grabinschrift, welche Angaben über seine sonst recht unklaren Lebensdaten zuläßt.

„Hier dies Grabmal deckt Diophantos.
Schaut das Wunder!

Durch des Entschlafenen Kunst
lehret sein Alter der Stein.

Knabe zu sein gewährte ihm Gott
ein Sechstel seines Lebens;

Noch ein Zwölftel dazu, sproßt'
auf der Wange der Bart;

Dazu ein Siebentel noch,
da schloß er das Bündnis der Ehe,

Nach fünf Jahren
entsprang aus der Verbindung ein Sohn.

Wehe, das Kind, das vielgeliebte,
die Hälfte der Jahre

Hatt' es des Vaters erreicht,
als es dem Schicksal erlag.

Drauf vier Jahre hindurch
durch der Größen Betrachtung den Kummer

Von sich scheuchend,
auch er kam an das irdische Ziel.“

Wenn wir die arithmetischen Fußangeln dieses Gedichts überwinden, dann kommen wir auf folgende Angaben: Diophantos hat das Alter von 84 Jahren erreicht, seine Kindheit dauerte bis zu seinem 14. Lebensjahr, als Mann fühlte er sich mit 21 Jahren, mit 33 Jahren heiratete er, sein Sohn wurde ihm im Alter von 38 Jahren geboren, und 80 Jahre zählte sein Leben, als der Sohn im 42. Lebensjahr starb.

Als Vertreter einer Schicht von Technikern, Ingenieuren und Kunsthandwerkern dürfte es Heron von Alexandria, er lebte etwa um das Jahr 100 unserer Zeit, am besten verstanden haben, seine Fähigkeiten und weit älteres Wissensgut für solche technischen Spielereien zu nutzen, die uns unmittelbar an die Trickapparate von Zauberkünstlern erinnern.

Er hat ein umfangreiches Schriftwerk hinterlassen und berichtet selbst in seiner „Pneumatika“ und im „Automatentheater“ über vielerlei derartige Kuriositäten: von sich selbst öffnenden Tempeltüren, zwitschernden Vögeln, schmetternden Trompeten und einer Reihe mechanischer Wunderapparate, mit denen er sich bei Hofe besondere Gunst verschaffte.

Mathematik zur Unterhaltung, als arglistiger Scherz oder als Mittel für die Konstruktion mechanischer Wunder- und Zauberapparate? – Das gab es also vor Jahrtausenden schon. Und gewiß haben damals bereits Rechenkünstler mit ihrem Können ihre Zeitgenossen überrascht und in Erstaunen versetzt.

Den Rechenkünstlern auf die Finger geschaut

Im Jahre 1973 konnte man in den Zeitungen lesen, daß der in Mexiko lebende einundachtzigjährige Herbert Grote im Beisein mehrerer Wissenschaftler vom mexikanischen Institut für Kernenergie innerhalb einer knappen halben Stunde ohne jedes Hilfsmittel die 19. Wurzel aus einer 133stelligen Zahl im Kopf berechnet habe. „Eine beispiellose Meisterleistung“, schrieben die Presseleute. Aber so beispiellos ist die Sache nun wieder nicht, wie wir gleich sehen werden.

Denn mit 70 Jahren machte bereits 1789 Thomas Fuller aus Virginia, ein schwarzer Amerikaner, mit seinen rechnerischen Fähigkeiten von sich reden. Man stellte ihm die Frage, wieviel Sekunden den Zeitraum von anderthalb Jahren ausmachten; Fuller antwortete nach knapp zwei Minuten exakt: 47 304 000. Dann wollte man von ihm wissen, wieviel Sekunden ein Mensch gelebt habe, der 70 Jahre, 17 Tage und 12 Stunden alt sei. Nach anderthalb Minuten kam Fullers Antwort: 2 210 500 800. Vorher hatten die Fragesteller diese Rechnung schriftlich ausgeführt und ein nicht ganz so großes Ergebnis ermittelt. Auf ihren Einwand erwiderte Fuller augenblicklich: „Ich glaube, meine Herren, daß Sie die Schaltjahre vergessen haben.“ Der alte Neger hatte recht.

Bereits mit 13 Jahren bewies Zerah Colburn (1804 bis 1840), der Sohn eines Farmers, ähnliche Fähigkeiten. Auf die Frage nach der 16. Potenz der Zahl 8 ermittelte er innerhalb von drei Minuten 281 474 976 710 656. Eine solche Berechnung nimmt man normalerweise

mit Hilfe der Logarithmentafel vor, und gute Rechner benötigen dann immer noch etwa zehn Minuten.

Über Johann Martin Dase (1824–1861), der ein berühmter Rechenkünstler war, liegen exakte Mitteilungen der Mathematiker Gauß und Schumacher vor. Dase arbeitete auch für Gauß und berechnete unter anderem die Primzahlen zwischen 6 000 000 und 8 000 000. Aber die höhere Mathematik war ihm fremd. Trotzdem war er in der Lage, zum Beispiel folgende Kopfrechenaufgaben auszuführen: die 52. Wurzel aus einer 97stelligen Zahl errechnen, beliebige hundertstellige Zahlen multiplizieren, Zahlen mit sehr vielen Stellen zu addieren, zu subtrahieren usw.

Eine ähnliche Begabung bewies auch Dr. Rückle (1879–1929). Als Vierundzwanzigjähriger löste er auf einem Weltkongreß der Rechenkünstler in Paris eine äußerst schwierige Aufgabe in einer knappen halben Stunde. Der zweite Preisträger benötigte dazu fast 35 Stunden. Rückle bestand auch 1924 den von der Berliner Universität angesetzten Wettkampf gegen elektrische Rechenmaschinen als Sieger und löste Multiplikationen und Divisionen vierstelliger Zahlen, Potenzen dritten und vierten Grades, Wurzeln usw. im Kopf schneller als die von geschulten Mathematikern bedienten Maschinen.

Viele echte Rechenkünstler brachten – wenn sie nicht mit Trick arbeiteten – auch erstaunliche Gedächtnisleistungen zuwege. Der Franzose Inaudi (1867–1951) lernte eine Folge von 100 Ziffern in 12 Minuten. Und Dr. Brauns (1885–1953) war sogar in der Lage, 540 Ziffern, die man beliebig ausgewählt und auf einem großen Papierbogen in 30 waagerechten

und 18 senkrechten Reihen aufgeschrieben hatte, in $12\frac{1}{2}$ Minuten auswendig zu lernen und noch nach Stunden jede beliebige waagerechte Reihe richtig herzusagen. Bedenken wir dabei, daß allein für das Aussprechen der 540stelligen Zahl $5\frac{1}{2}$ Minuten benötigt wurden, dann wird diese Leistung noch imponierender. Während einer seiner Vorstellungen in Dresden wurde Brauns einmal nach der Quadratwurzel der Zahl 8 503 052 944 befragt. Er antwortete sofort „92 212“ und bemerkte dazu, daß ihm eigenartigerweise in Hamburg zwei Jahre vorher die gleiche Aufgabe gestellt worden sei. Das stimmte tatsächlich, wie sich herausstellte; denn der äußerst überraschte Fragesteller bekannte, daß er derjenige gewesen wäre und den Zettel von damals zufällig noch in seiner Brieftasche gehabt hätte.

Natürlich interessiert es uns, wie es diese Rechenkünstler fertigbringen, solche wirklich bewundernswerten Leistungen zu erreichen, und welche Methoden sie dabei anwenden.

Der Franzose Inaudi erläuterte dies einmal an der Multiplikation von 70 846 mal 88 875. Zunächst zerlegte er die Faktoren in runde Zahlen und führte im Kopf die Multiplikationen von 80 000 mit 50 000 und 20 000, von 8 000 mit 50 000 und 20 000 und von 900 mit 50 000 und 20 000 durch. Auf diese Weise hatte er zunächst die Multiplikation 88 900 mal 70 000 vollzogen und kam durch Addition der einzelnen Produkte zur Zahl 6 223 000 000. Die eine Zahl lautete aber ursprünglich 88 875, und deshalb mußte Inaudi noch das Produkt von 25 mal 70 000 subtrahieren und erhielt 6 221 250 000. Als zweite Zahl wurde ihm 70 846 genannt, folglich mußte er 88 875 noch mit

846 multiplizieren, was wieder so geschah, daß er 80 000 mit 800 und 46 und 8 000 mit 800 und 46 multiplizierte, ferner 900 mit 800, 40 und 6. Schließlich errechnete Inaudi, was er zuviel erhalten hatte — nämlich 25 mal 846 —, subtrahierte dieses Produkt von der Summe der Produkte seiner Multiplikationen, addierte den Rest zu 6 221 250 000 und gelangte so zum Endergebnis von 6 296 438 250. Inaudi benötigte mit dieser doch recht kompliziert erscheinenden Methode ganze 55 Sekunden und rechnete im Kopf.

Etwas einleuchtender und überschaubarer mag die Darstellung der Methode sein, derer sich Brauns bediente. Zunächst besaß er die außerordentlich entwickelte Fähigkeit, sich das Zahlenbild zu merken und auch den Klangrhythmus der Zahlenungetüme mit Hilfe seines Gehörgedächtnisses für seine Arbeit zu nutzen. Danach veränderte er die Zahlen derart, daß er sie entweder in ihre Primfaktoren zerlegte oder als die Summe von Quadratzahlen darstellte. So gliederte er nach dem zweiten Verfahren z. B. die Zahl 149 in 100 und 49, das ist 10^2 und 7^2 , zerlegte 100 nochmals in zwei Quadratzahlen, nämlich 64 und 36, das ist 8^2 und 6^2 , und erhielt so: $149 = 6^2 + 7^2 + 8^2$.

Das alles sieht zwar recht einfach aus. Es nachzumachen dürfte uns schwerfallen, denn in Wirklichkeit hat Braun ja solche Zahlenzwerge nicht verwendet. Und zur Bewältigung der von den Rechenkünstlern beherrschten Zahlenungetüme gehört ein übernormal ausgeprägtes Zahlengedächtnis.

Dennoch sind solche Beispiele nicht uninteressant und können uns durchaus in die Lage versetzen, manche Rechenoperation zu vereinfachen. Rechen-

künstler wollen wir ja nicht werden, aber aus dem weiten Feld interessanter Zahlenbeziehungen und allgemein unbekannter Rechenverfahren werden uns sicher die folgenden interessieren.

Beginnen wir damit, wie wir uns beim großen Einmaleins das Kopfrechnen erleichtern können.

Im Bereich von 11 bis 19 addieren wir zunächst zur ersten Zahl die Einer der zweiten Zahl, fügen dem Ergebnis eine Null hinzu, multiplizieren noch die Einer beider Zahlen und addieren die so erhaltenen beiden Ergebnisse. Am Beispiel $13 \cdot 14$ sieht das dann so aus:

$13 + 4 = 17$; eine Null anhängen ergibt 170

$3 \cdot 4 = 12$; addiert zu 170 ergibt 182

$$13 \cdot 14 = 182$$

Zum besseren Verständnis noch eine solche Aufgabe im Kurzverfahren des Kopfrechnens:

$$17 \cdot 18$$

$17 + 8 = 25$; Null anhängen ergibt 250

$7 \cdot 8 = 56$; addiert zu 250 ergibt 306

$$17 \cdot 18 = 306$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch andere zweistellige Zahlen mit gleichem Zehner multiplizieren, also Aufgaben wie $23 \cdot 24$, $33 \cdot 39$, $42 \cdot 49$ usw. lösen. In solchen Fällen, wo sich die Faktoren im gleichen Zehnerbereich befinden, muß man aber vor dem Anhängen der Null die Summe noch mit der an der Zehnerstelle stehenden Zahl multiplizieren. An Beispielen wird das verständlicher.

$$23 \cdot 24$$

$23 + 4 = 27$, mal 2 (20er Bereich) ergibt 54

Null anhängen ergibt 540, plus 3 mal 4 (12) ergibt 552

$$23 \cdot 24 = 552.$$

$$33 \cdot 39$$

$33 + 9 = 42$, mal 3 ergibt 126; Null anhängen ergibt 1 260
plus 3 mal 9 ergibt 1 287

$$33 \cdot 39 = 1\,287.$$

Natürlich sind wir damit auch gleich in der Lage, die
Quadratzahlen blitzschnell und sogar im Kopf aus-
zurechnen. Bitte sehr:

$$44^2$$

$44 + 4 = 48$, mal 4 ergibt 192, Null anhängen ergibt
1 920 plus 4 mal 4 ergibt 1 936

$$44^2 = 1\,936$$

Noch einfacher wird die Sache bei Zahlen, deren
letzte Ziffer 5 ist, z. B. $35 \cdot 35$ oder 35^2 . Hier multipli-
zieren wir die Zehnerstelle (3) nur mit der nächst-
höheren Zahl (4) und hängen 25 an.

$$35^2$$

$3 \cdot 4 = 12$; 25 anhängen ergibt 1 225

$$35^2 = 1\,225$$

Diese Methode läßt sich für die Multiplikation von
zwei zweistelligen Zahlen aus verschiedenen Zehner-
bereichen (also zum Beispiel $17 \cdot 24$) leider nicht
benutzen. Aber hier hat uns der Mathematiker Ferrol
einen anderen Weg gewiesen, der ebenso rasch zum
Ziel führt.

$22 \cdot 13$ ergeben auf einen Blick 286 (2 Hunderter,
8 Zehner, 6 Einer). Die Einer finden wir durch Multi-
plikation der Einer ($2 \cdot 3$); die Hunderter durch
Multiplikation der Zehner ($2 \cdot 1$); die Zehner erhalten
wir aus der Addition der Produkte der beiden äußeren
und der beiden inneren Glieder (also $2 \cdot 3$ plus
 $2 \cdot 1 = 8$).

Wenn sich jedoch bei der Ermittlung der Einer oder
Zehner zweiziffrige Zahlen ergeben, so übertragen

wir die ersten Ziffern (die Zehner) dieser Zahlen jeweils auf die nächste Stufe, also von den Einern auf die Zehner und entsprechend von den Zehnern auf die Hunderter usw. Dazu ein Beispiel:

$$27 \cdot 36$$

Zuerst die Einer: $7 \cdot 6 = 42$; also 2, die 4 Zehner werden auf die Zehner übertragen. Jetzt die Zehner: $(2 \cdot 6) + (7 \cdot 3) = 33$, plus 4 (Übertrag) ergibt 37; also 7, die 3 Zehner werden auf die Hunderter übertragen. Nun die Hunderter: $(2 \cdot 3) + 3$ (Übertrag) = 9. Somit erhalten wir als Resultat 972.

Diese Art, vorteilhaft zu rechnen, ist auch als „Multiplikation über Kreuz“ bekannt und läßt überdies eine vereinfachte Darstellung des oben beschriebenen Verfahrens zur Multiplikation zweistelliger Zahlen aus verschiedenen Zehnerbereichen zu. Hier gilt der folgende Weg:

- Die *Einer* des Produktes ergeben sich durch Multiplikation der Einer der beiden Faktoren.
- Die *Zehner* des Produktes erhält man aus dem Überschuß plus Einer mal Zehner plus Zehner mal Einer.
- Die *Hunderter* des Produktes ergeben sich aus dem Zehnerüberschuß plus Zehner mal Zehner.

Machen wir uns das an einem Beispiel klar:

$$36 \cdot 57 =$$

Rechengang:

Einer: $6 \cdot 7 = 42$

Zehner: $4 + (6 \cdot 5) + (3 \cdot 7) = 55$

Hunderter: $5 + (3 \cdot 5) = 20$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 57 \\ \hline 2052 \end{array}$$

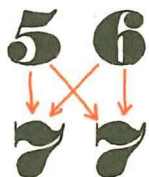
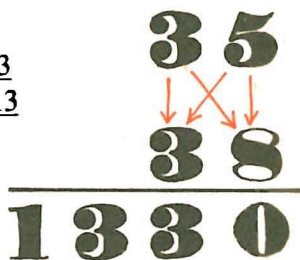
(Angeschrieben werden nur die unterstrichenen Ziffern.)

Man kann das Verfahren noch vereinfachen, wenn in einer Spalte oder Zeile des „Über-Kreuz-Schemas“ zwei gleiche Ziffern stehen.

$$\text{Einer: } 5 \cdot 8 = 40$$

$$\text{Zehner: } 4 + 3(5 + 8) = 43$$

$$\text{Hunderter: } 4 + (3 \cdot 3) = 13$$



$$\text{Einer: } 6 \cdot 7 = 42$$

$$\text{Zehner: } 4 + 7(6 + 5) = 81$$

$$\text{Hunderter: } 8 + (5 \cdot 7) = 43$$

4 3 1 2

Das alles sieht zunächst recht kompliziert aus. Aber mit ein wenig Übung beherrschen wir die Sache spielend und werden bald merken, daß uns solche Rechenkniffe von großem Vorteil sind.

Betrachten wir nun Merkwürdigkeiten beim Potenzieren. Zu diesem Zweck wollen wir zunächst die Quadratzahlen von 11 bis 30 etwas genauer unter die Lupe nehmen. Sieh sie dir in aller Ruhe an, rauf, runter, links, rechts usw. Fällt dir dabei etwas auf?

$11 \cdot 11 = 121$	$21 \cdot 21 = 441$
$12 \cdot 12 = 144$	$22 \cdot 22 = 484$
$13 \cdot 13 = 169$	$23 \cdot 23 = 529$
$14 \cdot 14 = 196$	$24 \cdot 24 = 576$
$15 \cdot 15 = 225$	$25 \cdot 25 = 625$
$16 \cdot 16 = 256$	$26 \cdot 26 = 676$
$17 \cdot 17 = 289$	$27 \cdot 27 = 729$
$18 \cdot 18 = 324$	$28 \cdot 28 = 784$
$19 \cdot 19 = 361$	$29 \cdot 29 = 841$
$20 \cdot 20 = 400$	$30 \cdot 30 = 900$

Hier beginnt nun die Zahlenromantik mit ihren merkwürdigen Verwobenheiten, an denen man gewöhnlich achtlos vorübergeht.

Konzentrieren wir uns auf die Reihe 11 bis 20 und suchen Zahlenpaare heraus, die sich zu 30 ergänzen (z. B. 11 und 19, 13 und 17 usw.). Vergleicht man diese Zahlenpaare mit den dazugehörenden Ergebnissen, so wird man feststellen, daß die Ergebnisse der sich zu 30 ergänzenden Zahlenpaare auch gleiche Einerstellen haben.

$12 \cdot 12 = 144$	$14 \cdot 14 = 196$
$18 \cdot 18 = 324$	$16 \cdot 16 = 256 \text{ usw.}$

In der Reihe der Quadratzahlen von 21 bis 30 wird es noch kurioser. Die sich hier zu 50 ergänzenden Paare besitzen sogar gleiche Einer und gleiche Zehner.

$22 \cdot 22 = 484$	$23 \cdot 23 = 529$
$28 \cdot 28 = 784$	$27 \cdot 27 = 729$

Und nun betrachten wir einmal die Einerstellen der Ergebnisse beider Reihen. Auf den ersten Blick stellen wir Übereinstimmung fest. Beide Reihen sehen gleich aus und haben folgendes Bild:

1
4
9
6
5
6
9
4
1
0

Man kann dieses Spiel mit den Einerstellen der 3. und 4. Potenz weiterführen. Wer Lust dazu verspürt, bitte, der wird auch dort überraschende Vergleiche aufspüren. Uns soll es jedoch zunächst genügen. Man kann durch solche übereinstimmenden Zusammenhänge das Merken der Potenzen enorm vereinfachen.

Nutzen wir also unser Wissen über solche Merkwürdigkeiten, um gleich noch einen Meistertrick der Rechenkünstler kennenzulernen. Man kann aus den Kuben der Zahlen 1 bis 100 die dritte Wurzel leicht im Kopf ausrechnen, man muß dazu nur ein paar notwendige einfache Kniffe kennen. Vorerst das notwendige Handwerkszeug dazu.



I. Tafel zur Ermittlung der Zehnerstelle

$1^3 = 1$	oder $\sqrt[3]{1}$	Merkzahl 1
$2^3 = 8$	„ $\sqrt[3]{8}$	„ 2
$3^3 = 27$	„ $\sqrt[3]{27}$	„ 3
$4^3 = 64$	„ $\sqrt[3]{64}$	„ 4
$5^3 = 125$	„ $\sqrt[3]{125}$	„ 5
$6^3 = 216$	„ $\sqrt[3]{216}$	„ 6
$7^3 = 343$	„ $\sqrt[3]{343}$	„ 7
$8^3 = 512$	„ $\sqrt[3]{512}$	„ 8
$9^3 = 729$	„ $\sqrt[3]{729}$	„ 9

II. Tafel zur Ermittlung der Einerstelle

Endet die Kubikzahl

mit 1, so endet die Wurzel mit 1

„ 2, „ „ „ „ „ 8
„ 3, „ „ „ „ „ 7
„ 4, „ „ „ „ „ 4
„ 5, „ „ „ „ „ 5
„ 6, „ „ „ „ „ 6
„ 7, „ „ „ „ „ 3
„ 8, „ „ „ „ „ 2
„ 9, „ „ „ „ „ 9
„ 0, „ „ „ „ „ 0

Merke:

1. Übereinstimmung der Paare 1, 4, 5, 6, 9 und 0.
2. Ergänzung zu 10 bei den Paaren 2, 3, 7 und 8.

III. Tafel der Kubikzahlen von 1 bis 100

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{1331} = 11$
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{1728} = 12$

$\sqrt[3]{2\,197} = 13$	$\sqrt[3]{79\,507} = 43$	$\sqrt[3]{389\,017} = 73$
$\sqrt[3]{2\,744} = 14$	$\sqrt[3]{85\,184} = 44$	$\sqrt[3]{405\,224} = 74$
$\sqrt[3]{3\,375} = 15$	$\sqrt[3]{91\,125} = 45$	$\sqrt[3]{421\,875} = 75$
$\sqrt[3]{4\,096} = 16$	$\sqrt[3]{97\,336} = 46$	$\sqrt[3]{438\,976} = 76$
$\sqrt[3]{4\,913} = 17$	$\sqrt[3]{103\,823} = 47$	$\sqrt[3]{456\,533} = 77$
$\sqrt[3]{5\,832} = 18$	$\sqrt[3]{110\,592} = 48$	$\sqrt[3]{474\,552} = 78$
$\sqrt[3]{6\,859} = 19$	$\sqrt[3]{117\,649} = 49$	$\sqrt[3]{493\,039} = 79$
$\sqrt[3]{8\,000} = 20$	$\sqrt[3]{125\,000} = 50$	$\sqrt[3]{512\,000} = 80$
$\sqrt[3]{9\,261} = 21$	$\sqrt[3]{132\,651} = 51$	$\sqrt[3]{531\,441} = 81$
$\sqrt[3]{10\,648} = 22$	$\sqrt[3]{140\,608} = 52$	$\sqrt[3]{551\,368} = 82$
$\sqrt[3]{12\,167} = 23$	$\sqrt[3]{148\,877} = 53$	$\sqrt[3]{571\,787} = 83$
$\sqrt[3]{13\,824} = 24$	$\sqrt[3]{157\,464} = 54$	$\sqrt[3]{592\,707} = 84$
$\sqrt[3]{15\,625} = 25$	$\sqrt[3]{166\,375} = 55$	$\sqrt[3]{614\,125} = 85$
$\sqrt[3]{17\,576} = 26$	$\sqrt[3]{175\,616} = 56$	$\sqrt[3]{636\,056} = 86$
$\sqrt[3]{19\,683} = 27$	$\sqrt[3]{185\,193} = 57$	$\sqrt[3]{658\,503} = 87$
$\sqrt[3]{21\,952} = 28$	$\sqrt[3]{195\,112} = 58$	$\sqrt[3]{681\,472} = 88$
$\sqrt[3]{24\,389} = 29$	$\sqrt[3]{205\,379} = 59$	$\sqrt[3]{704\,969} = 89$
$\sqrt[3]{27\,000} = 30$	$\sqrt[3]{216\,000} = 60$	$\sqrt[3]{729\,000} = 90$
$\sqrt[3]{29\,791} = 31$	$\sqrt[3]{226\,981} = 61$	$\sqrt[3]{753\,571} = 91$
$\sqrt[3]{32\,768} = 32$	$\sqrt[3]{238\,328} = 62$	$\sqrt[3]{778\,688} = 92$
$\sqrt[3]{35\,937} = 33$	$\sqrt[3]{250\,047} = 63$	$\sqrt[3]{804\,357} = 93$
$\sqrt[3]{39\,304} = 34$	$\sqrt[3]{262\,144} = 64$	$\sqrt[3]{830\,584} = 94$
$\sqrt[3]{42\,875} = 35$	$\sqrt[3]{274\,625} = 65$	$\sqrt[3]{857\,375} = 95$
$\sqrt[3]{46\,656} = 36$	$\sqrt[3]{287\,496} = 66$	$\sqrt[3]{884\,736} = 96$
$\sqrt[3]{50\,653} = 37$	$\sqrt[3]{300\,763} = 67$	$\sqrt[3]{912\,673} = 97$
$\sqrt[3]{54\,872} = 38$	$\sqrt[3]{314\,432} = 68$	$\sqrt[3]{941\,192} = 98$
$\sqrt[3]{59\,319} = 39$	$\sqrt[3]{328\,509} = 69$	$\sqrt[3]{970\,299} = 99$
$\sqrt[3]{64\,000} = 40$	$\sqrt[3]{343\,000} = 70$	$\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$
$\sqrt[3]{68\,921} = 41$	$\sqrt[3]{357\,911} = 71$	
$\sqrt[3]{74\,088} = 42$	$\sqrt[3]{373\,248} = 72$	

Für die Lösung im Kopfrechenverfahren merken wir:

1. Die Kubikzahl von rechts nach links in Dreiergruppen einteilen:

$$54\,872 - 54.872$$

$$287\,625 - 287.625$$

$$1\,331 - 1.331$$

2. Die *Zehnerstellen* nach Tabelle I ermitteln. Da aber die Kubikzahlen meistens zwischen zwei ihrer Merzkahlen liegen, müssen wir immer die niedrigste Merzkahl verwenden.

$$\underline{5}.832$$

Die Fünf liegt zwischen 1 und 8.

Wir merken als Zehnerstelle die zur $\sqrt[3]{1}$ gehörende Merzkahl 1.

$$\underline{74}.088$$

74 liegt zwischen 64 und 125.

Zur $\sqrt[3]{64}$ gehört die Merzkahl 4.

$$\underline{804}.357$$

804 gehört zur $\sqrt[3]{729}$, somit Merzkahl 9.

3. Die *Einerstelle* finden wir nach Tabelle II jeweils aus der letzten Stelle der rechten Dreiergruppe.

$$5.83\underline{2}$$

2 gehört nach Tabelle II zur Merzkahl 8.

$$74.08\underline{8}$$

8 gehört zur Merzkahl 2.

$$804.35\underline{7}$$

7 gehört zur Merzkahl 3.

Und nun die Sache vollständig:
Gesucht wird $\sqrt[3]{5832}$

1. Kubikzahl von rechts nach links in Dreiergruppen einteilen:

5.832

2. Zehnerstelle ermitteln:

5.832

Fünf liegt zwischen 1 und 8
und gehört zur Zehnermerkzahl 1.



3. Einerstelle feststellen:

5.832

Die letzte Stelle ist eine 2
und gehört zur Einermerkzahl 8.



4. Mithin ist $\sqrt[3]{5832} = 18$.



Gesucht wird $\sqrt[3]{74088}$

1. Dreiergruppeneinteilung: 74.088

2. Zehnerstelle aus 74 gehört zur Merkzahl $\sqrt[3]{64}$ und ist 4

3. Einerstelle aus letzter Stelle der Kubikzahl (8) ergibt Merkzahl 2

4. $\sqrt[3]{74088} = 42$

Finde weitere Lösungen nun selbst!

Das Ganze ist verblüffend einfach. Die Kubikzahlen von 1 bis 9 hat man ohnehin im Kopf (Tabelle I), und Tabelle II ist für die Ermittlung der Einerwerte ebenfalls leicht zu behalten. Nun üben wir nach der Tabelle III mit den Kubikzahlen. Wenn wir die Sache beherrschen – und das wird nicht lange dauern –, lassen wir uns einfach Kubikzahlen zurufen, ordnen diese im Kopf in Dreierstellen, ermitteln die Zehnerstelle mit der linken Dreiergruppe und der dazugehörigen Merzkzahl (der niedrigeren Kubikzahl) und finden die noch fehlende Einerstelle aus der letzten Ziffer der Kubikzahl entsprechend Tabelle II.

Mit dieser Leistung sieht man uns fast als Rechengenie an. Und dabei gehört nur ein ganz kleiner Kniff dazu.

Damit wir aus dem bisher Erläuterten bereits ein kleines Programm zusammenstellen können, soll am Schluß dieses Abschnitts auch noch eine Möglichkeit gezeigt werden, wie man sich Riesenzahlenbandwürmer merken kann, also hochgradig ungewöhnliche Gedächtnisleistungen vollbringt. – Scheinbar, denn zu echten Gedächtnisleistungen, wie wir sie am Beginn dieses Abschnitts von bekannten Rechenkünstlern kennengelernt haben, benötigt man außer einer wirklich überdurchschnittlichen Fähigkeit auch noch ein enormes Trainingspensum. Machen wir es also diesmal mit Trick.

Stell dir vor, du schreibst irgendeine Riesenzahl mit 15, 24, 38 oder meinetwegen 64 Ziffern an die Tafel, prägst sie dir (scheinbar) ein, läßt den Zahlenriesen fortwischen und bist sofort in der Lage, diesen Zahlenkoloß fehlerfrei aus dem Gedächtnis herzusa-

gen, von vorn nach hinten und, wenn es verlangt wird, auch umgekehrt. Noch nach Stunden, ja Tagen und Wochen kannst du deine Zahl fehlerfrei produzieren.

Wie das geht? Ganz einfach. Und sei nicht zu sehr enttäuscht, wenn ich dir das Geheimnis verrate. Es ist eben nur Trick und Spaß. Aber man muß darauf kommen.

Also: Reihe aus dir bekannten Zahlen (Nummer des Personalausweises, Telefonnummer, Fahrradnummer, Alter, Geburtstag, Monat, Geschwisterzahl usw.) eine Riesenzahl scheinbar willkürlich aneinander (die genaue Folge mußst du dir natürlich fest eingeprägt haben), und schon kann es losgehen.

Und das ist meine Riesenzahl:

1 2 8 9 2 7 0 8 3 7 6 4 5 5 1 9 2 7 1 2 1 0 2 7 1 4 9 2 7 2 2 5
8 2 9 9 5 4 8 1 2 1 4 8 0 5 1

1 2 8 9 2 7 0 8	3 7 6 4 5 5	1 9 2 7	1 2 1 0 2 7
Personalausweis-Nr.	Telefon-Nr.	Geburtsjahr	Geburtsdatum

1 4 9 2	7 2 2 5	8 2 9 9 5 4 8 1 2	1 4	8 0 5 1
Entdeckung Amerikas	Auto-Nr.	Kontonummer	Haus-Nr.	Postleitzahl

Das ist eine 47stellige Zahl, die nach Belieben noch erweitert werden kann.

ZAHLENWUNDER – ZAUBERZAHLEN

Phönixzahlen und Zahlenspiegeleien

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) bewies schon als Kind beachtliche Rechenfertigkeiten. Überliefert ist die folgende Geschichte.

Carl besuchte die Katharinenschule in Braunschweig und saß mit etwa hundert anderen Mädchen und Jungen verschiedenen Alters in einer Klasse. Das war damals keine Seltenheit, und der Lehrer hatte alle Mühe, diese große Schar zu beschäftigen. Deshalb stellte er auch einmal die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren und meinte, daß seine Schüler für die nächste halbe Stunde vollauf damit zu tun hätten.

Der Lehrer hatte kaum seine Anweisung gegeben, da kam der kleine Gauß schon nach vorn und legte seine Schreibtafel auf das Lehrerpult. Der Lehrer dachte zunächst, ein wenig rühmliches Produkt von Dummheit und Faulheit vorzufinden, staunte jedoch, als auf der Tafel des kleinen Carl tatsächlich das richtige Ergebnis stand, nämlich die Zahl 5050. Noch überraschter war der Lehrer, als Gauß ihm seine Überlegungen erläuterte, mit denen er nach wenigen Sekunden ans Ziel gelangt war.

Er rechnete $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, $4 + 97$ usw. und kam sofort zur Erkenntnis, daß ein solches Paar immer 101 ergibt. Da aber 50 solcher Paare vorhanden waren, lag doch auf der Hand, daß die Rech-

nung $50 \cdot 101 = 5050$ auch zum Ergebnis führen mußte.

Das ist gewiß erstaunlich, und uns wird es deshalb nicht schwerfallen, das Resultat der Addition der geraden und danach der ungeraden Zahlen von 1 bis 300 oder die Addition der ungeraden Zahlen von 1001 bis 1999 auszuführen. Bei der letzteren Aufgabe kommt man zu 250 Paaren, und jedes Paar hat die Summe...; also ist das Ergebnis...

Wer Spaß daran hat, errechnet auch gleich noch die Anzahl der geraden Zahlen von 1500 bis 1800.

Für den Mathematikzirkel sei zum Schluß dieser Gaußschen Zahlenüberlegung noch eine Aufgabe zur Berechnung der Quersumme aller Zahlen von 1 bis zu einer Milliarde gestellt. Ich will den Gang der einzelnen Denkopoperationen verraten. Überlege, 999 999 999 hat die Quersumme 81; die gleiche Quersumme ergibt sich aus $999\,999\,998 + 1$, $999\,999\,997 + 2$ usw., also immer 81. Man muß also 500 000 000 Zahlenpaare erhalten und dazu noch das von einer Milliarde. Jetzt bereitet die Rechnung keine Schwierigkeiten mehr $(500\,000\,000 \cdot 81) + 1 = 40\,500\,000\,001$.

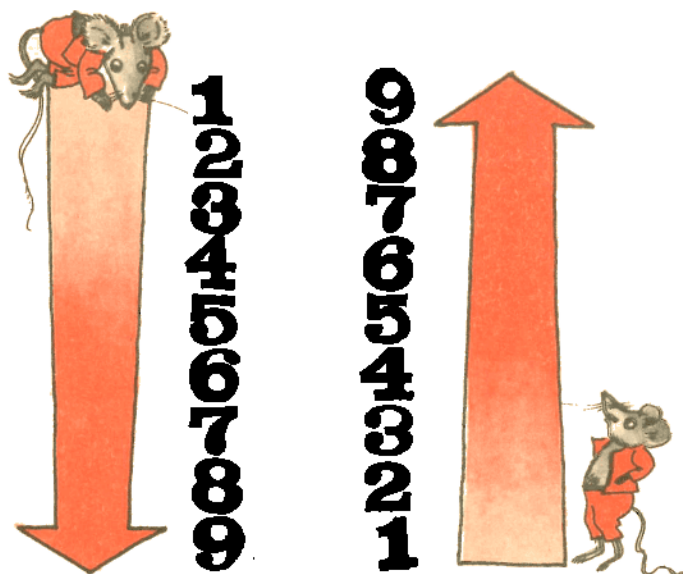
Die folgende kleine Geschichte kann man erzählen, um damit ein lustiges Rechenverfahren zu zeigen.

Klaus stand mit dem Einmaleins auf Kriegsfuß. Besonders bei der Reihe mit der 9 bekam er Schwierigkeiten. Deshalb übergab ihm sein Vater einmal einen Aufgabenzettel zur Übung:

		1	·	9	=				
		2	·	9	=				
		3	·	9	=				
		4	·	9	=				
		5	·	9	=				
		6	·	9	=				
		7	·	9	=				
		8	·	9	=				
		9	·	9	=				
		10	·	9	=				

Zwar machte Klaus sich mit Feuereifer an die Arbeit, doch das Ergebnis war nicht gerade umwerfend. Nun, wieviel $1 \cdot 9$ war, das wußte er schon. Aber dann kam er von Aufgabe zu Aufgabe in immer größere Not, fand erst bei $10 \cdot 9$ wieder eine Lösung und schrieb das Ergebnis auf. Immerhin sah sein Übungszettel jetzt bereits so aus:

PENG									
		1	·	9	=	9			
		2	·	9	=				
		3	·	9	=				
		4	·	9	=				
		5	·	9	=				
		6	·	9	=				
		7	·	9	=				
		8	·	9	=				
		9	·	9	=				
		10	·	9	=	90			



Zu einem ähnlichen kuriosen Ergebnis gelangen wir auch bei der Multiplikation der Zahlenreihe 1 bis 9 mit 91. Hier werden die Reihen der Einer und Hunderter fortlaufend größer, und die Reihe der Zehner wird kleiner.

$$1 \cdot 91 = 091$$

$$2 \cdot 91 = 182$$

$$3 \cdot 91 = 273$$

$$4 \cdot 91 = 364$$

$$5 \cdot 91 = 455$$

$$6 \cdot 91 = 546$$

$$7 \cdot 91 = 637$$

$$8 \cdot 91 = 728$$

$$9 \cdot 91 = 819$$

$$35 \cdot 91 = 3185$$

$$36 \cdot 91 = 3276$$

$$37 \cdot 91 = 3367$$

$$38 \cdot 91 = 3458$$

$$39 \cdot 91 = 3549$$

Nicht wahr, das ist eine merkwürdige Sache. Aber auch im nächsten Beispiel begegnet uns die Zahlenreihe von 1 bis 9.

$$33 \cdot 3367 = 111111$$

$$66 \cdot 3367 = 222222$$

$$99 \cdot 3367 = 333333$$

$$132 \cdot 3367 = 444444$$

$$165 \cdot 3367 = 555555$$

$$198 \cdot 3367 = 666666$$

$$231 \cdot 3367 = 777777$$

$$264 \cdot 3367 = 888888$$

$$297 \cdot 3367 = 999999$$

Natürlich haben wir längst festgestellt, daß die 9 als letzte Ziffer unseres Zahlensystems eine Sonderstellung einnimmt. Deshalb wollen wir auch bei den folgenden Spielereien mit der Zahlenreihe 1 bis 9 auf die Ziffer 9 besonders achten.

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$

$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$

$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$

$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$

$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$



$$\begin{aligned}
0 \cdot 9 + 8 &= 8 \\
9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\
98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\
987 \cdot 9 + 5 &= 8888 \\
9876 \cdot 9 + 4 &= 88888 \\
98765 \cdot 9 + 3 &= 888888 \\
987654 \cdot 9 + 2 &= 8888888 \\
9876543 \cdot 9 + 1 &= 88888888 \\
98765432 \cdot 9 + 0 &= 888888888 \\
987654321 \cdot 9 + 1 &= 8888888888
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 111111111 \\
2 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 222222222 \\
3 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 333333333 \\
4 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 444444444 \\
5 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 555555555 \\
6 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 666666666 \\
7 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 777777777 \\
8 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 888888888 \\
9 \cdot 9 \cdot 12345679 &= 999999999
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Im 3. Faktor ist
die Ziffer 8
nicht enthalten

In den beiden letzten Beispielen spielt die Neun nun nicht mehr eine besondere Rolle.

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 \\
11 \cdot 11 &= 121 \\
111 \cdot 111 &= 12321 \\
1111 \cdot 1111 &= 1234321 \\
11111 \cdot 11111 &= 123454321 \\
111111 \cdot 111111 &= 12345654321 \\
1111111 \cdot 1111111 &= 1234567654321 \\
11111111 \cdot 11111111 &= 123456787654321 \\
111111111 \cdot 111111111 &= 12345678987654321
\end{aligned}$$

Wer es nicht glaubt, der rechne nach. Beide Zahlen-
gruppen ergeben nämlich die gleiche Summe:
1 083 676 269. Und warum?

„Wie weiland Phönix“, würden die alten Ägypter ent-
sprechend der Sagengestalt ihres Wundervogels
ausrufen, wenn sie die folgenden Zahlen betrachteten.
Und ein Kind des Phönix ist auch die Zahl 142 857.
Entsprechend der Phönixsage verbrennt der viele
hundert Jahre alte Wundervogel mit seinem Nest.
Aus der Asche aber entsteht dann der neue Phönix.
In Anlehnung an die Sage vom Wundervogel Phönix
wollen wir uns nun solchen Zahlen zuwenden, die
sich als sogenannte periodische Zahlen immer wieder
erneuern. Nennen wir sie deshalb auch „Phönix-
zahlen“.



Zunächst wollen wir dem Geheimnis dieser „Phönixzahl“ ein wenig nachspüren.

Dividiert man 1 durch 7, gelangt man zu folgendem Ergebnis:

0,142 857 142 857 142 857 usw.

Und schon wird die Sache mit der Phönixzahl einleuchtend. Es entsteht eine immer wiederkehrende (periodische) Folge gleicher Zahlengruppen, eine Kreiszahl. Und damit wird die ganze Angelegenheit für unsere Zwecke interessant. Probieren wir also weiter.

Die Multiplikation in aufsteigender Folge führt uns zu nachstehendem Bild.

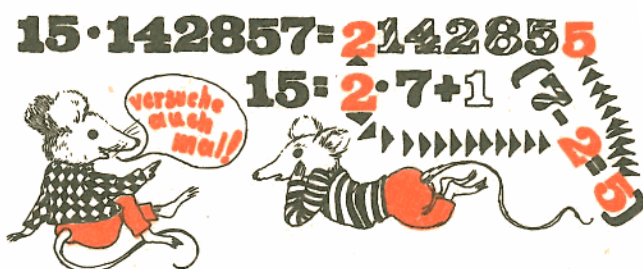
$$\begin{array}{l} 1 \cdot 142\,857 = 142\,857 \\ 2 \cdot 142\,857 = 285\,714 \\ 3 \cdot 142\,857 = 428\,571 \\ 4 \cdot 142\,857 = 571\,428 \\ 5 \cdot 142\,857 = 714\,285 \\ 6 \cdot 142\,857 = 857\,142 \\ 7 \cdot 142\,857 = 999\,999 \end{array}$$

Mit gutem Grund sind einige Zahlen besonders hervorgehoben. Sehen wir nämlich genauer hin, erkennen wir die einzelnen rot geschriebenen Ergebnisse als versetzte Zifferngruppen der Ausgangszahl 142 857 wieder und gelangen damit zu einer Gesetzmäßigkeit, die das sofortige Finden der Multiplikationsergebnisse zuläßt und das Merken erleichtert. Dabei helfen uns die folgenden einfachen Merksätze:
– Bei der Multiplikation mit 1 gibt es überhaupt nichts zu merken.

- Multiplizieren wir mit 2, beginnt das Ergebnis mit der zweitniedrigsten Ziffer der Phönixzahl.
- Multiplizieren wir mit 3, dann fängt das Ergebnis mit der drittniedrigsten Ziffer der Phönixzahl an.
- So geht es weiter bis zur Multiplikation mit der 6. Die rot hervorgehobenen Ziffern machen deutlich, wie das gemeint ist.
- Die Multiplikation mit 7 ist ganz einfach, da das Ergebnis aus lauter Neunen besteht.

Natürlich können wir als ersten Faktor auch solche Zahlen verwenden, die über den Wert 7 hinausgehen. Dazu müssen wir feststellen, wie oft die Sieben darin enthalten ist und welcher Rest bleibt: 15 ist z. B. $2 \cdot 7 + 1$ (deshalb beginnt das Ergebnis auch mit der zusätzlichen 2!). Die Restzahl wiederum gibt uns an, wie die Zahl dann weitergeht, nämlich wie bei der Multiplikation mit 1. Und schließlich müssen wir noch die vorn zusätzlich hingeschriebene Zahl hinten wieder abziehen.

Zum besseren Verständnis noch einmal die ganze Aufgabe.



Machen wir uns das noch an einem weiteren Beispiel klar.

$$24 \cdot 142857 = 3428568$$



$$24 = 3 \cdot 7 + 3$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ - 3 \\ \hline 68 \end{array}$$



Im Grunde genommen genügen uns jedoch die „Phönixzahl“ selbst oder ihre einfachen Multiplikationen im Bereich 2 bis 6. Damit lassen sich verblüffende Rechenkunststücke ausführen, für die hier einige Anregungen gegeben werden sollen.

1. Schreibe die Phönixzahl 142 857 derart an die Tafel, als sei sie eine solche mit ganz willkürlich gewählten Ziffern (den Zuschauern ist ja die „Phönixzahl“ nicht bekannt). Nun fordere jemanden auf, mit einem Würfel eine zufällige Augenzahl im Bereich 2 bis 6 zu ermitteln und sie dir zuzurufen. Sofort bist du in der Lage, das Ergebnis der Multiplikation an die Tafel zu schreiben.

Beherrscht du die Sache über den Bereich 2 bis 7 hinaus, kannst du sogar die Zahlen mit zwei und drei Würfeln ermitteln lassen und dadurch die Handlung noch überzeugender gestalten.

2. Jederzeit bist du auch in der Lage, die Quersumme aller Ergebnisse sofort zu nennen. Sie beträgt nämlich immer 27 (mit Ausnahme aller Multiplikationen mit 7 oder einem Vielfachen davon). Und mit dieser Tatsache lassen sich z. B. folgende Zauberkunststücke bewerkstelligen:

– Du hast die Multiplikation mit der gewürfelten Zahl (2 bis 6) ausgeführt, das Ergebnis steht an der Tafel.

Ein Zuschauer soll nun daraus die Quersumme bilden, und du kannst ihm sofort sagen, welche die 27. Karte eines bis dahin nicht benutzten Kartenspiels ist (diese kennst du natürlich schon vorher).

— Es ist auch möglich, den Inhalt auf Seite 27 eines Buches sinngemäß anzugeben. (Auch hier weißt du natürlich schon vorher Bescheid.)

— Und schließlich bist du auch in der Lage, dem Mitspieler zu sagen, was er am 27. des Monats getan hat, wenn du es vorher in Erfahrung gebracht hast. Noch eine Methode, die es dir besonders einfach macht, mit der „Phönixzahl“ 142857 einen wirkungsvollen Trick auszuführen.

Dazu schreibst du jede Ziffer dieser Zahl auf ein Kärtchen und ordnest die beschrifteten Kärtchen in der Ziffernfolge so an, daß unten die 1 und oben die 7 liegt. Jetzt forderst du deinen Mitspieler auf, entweder mit einem Spielwürfel eine Zahl zu ermitteln oder eine solche von 2 bis 6 frei zu wählen und diese mit 142857 zu multiplizieren. Er wird dazu ein Weilchen benötigen, während du sofort in der Lage bist, das Ergebnis mit deinen Zahlenkärtchen darzustellen, und das ohne jede Mühe.

Dazu mußt du die vom Mitspieler gewählte oder durch Würfeln ermittelte Zahl (z. B. 4) mit 7 multiplizieren (z. B. $4 \cdot 7 = 28$). Die letzte Ziffer (8) gibt dir an, auf welche Ziffer das Produkt aus 142857 endet, nämlich auf 8. Nun fächerst du deine Kärtchen ein wenig auf, bis du die 8 erblickst und legst alle darüber liegenden Karten nach unten. Jetzt legst du die Kärtchen der Reihe nach auf den Tisch, und alle sehen als Reihenfolge 571428. Wenn dein Mitspieler richtig gerechnet hat, wird er dasselbe herausbekommen.

Dieser Trick kann sofort wiederholt werden, wenn du bei deinen Zahlenkärtchen wieder die ursprüngliche Folge 142 857 herstellst.

Damit wollen wir die Sache mit den „Phönixzahlen“ abschließen. Wem das jedoch immer noch zu einfach ist, der mag sich an folgender Aufgabe versuchen und dazu entsprechende Zauberkunststücke selbst erfinden.

Zu multiplizieren ist die Zahl 052 631 578 947 368 421 mit irgendeiner Zahl zwischen 2 und 18 (Spielwürfel benutzen, weil dadurch der Zahlenbereich ganz unauffällig eingegrenzt wird). Und auch diese Phönixzahl wird sich im Ergebnis immer erneuern, z. B.:

052 631 578 947 368 421 · 15 = 789 473 684 210 526 315

Im Produkt finden wir also den ersten Faktor in anderer Gruppierung wieder.

Ein Tip dazu: Schreib diese Phönixzahl auf einen Papierstreifen und klebe diesen zu einem Ring. Laß nun durch Würfeln den zweiten Faktor für die Multiplikation bestimmen. Und wenn du mit dem Geheimnis der Phönixzahl vertraut bist, genügt ein Schnitt mit der Schere. Schon zeigt der getrennte Ring akkurat das Ergebnis der Multiplikation.

Zu den Kreiszahlen gesellen sich als weitere „Phönixzahlen“ die Spiegelzahlen hinzu. Wie du leicht selbst erkennst, handelt es sich dabei um solche Zahlen, deren Ziffernfolge von vorn und hinten gleich ist: 44, 3773, 59995 usw.

Merkwürdigerweise kann man jede Zahl zur Bildung solcher Spiegelzahlen verwenden (ausgenommen die 10 und ihre Mehrfachen).



Man muß sie nur so oft als Summanden setzen, bis sie in der Additionsreihe eher oder später zur Spiegelzahl wird. Am Beispiel der 12 erfährst du, daß wir sie einundzwanzigmal als Summand verwenden müssen, um so zur Spiegelzahl 252 zu gelangen:

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 252.$$

Im Bereich 1 bis 9 stellen alle Spiegelzahlen das Elffache ihrer Grundzahlen dar. Alle anderen Zahlen scheinen einer Regel nicht zu unterliegen. Manche erscheinen nach wenigen Schritten als Spiegelzahl, andere hingegen erst nach langer Addition.

Tabelle einiger Spiegelzahlen

Grundzahl	Setzzahl	Spiegelzahl
12	21	252
15	35	525
26	19	494
32	66	2112
42	6	252
48	44	2112
54	518	27972
57	3	171
64	33	2112
72	88	6336
76	392	29792
81	12345679	999999999
84	3	252
86	337	28982
92	9	828
95	55	5225
97	55	5335

Mancherlei so nebenbei

Zur Abwechslung nun eine bunte Mischung mathematischer Merkwürdigkeiten für lustige Knocheleien oder gemeinsame Unterhaltung.

Zunächst sollst du die folgende Aufgabe lösen: Aus der Ziffernfolge 1 bis 9 sind drei dreistellige Zahlen zu bilden, von denen zwei addiert die dritte ergeben. Dabei soll jede der Ziffern von 1 bis 9 genau einmal auftreten. Das ist gar nicht so einfach und auf Anhieb auch nicht ohne weiteres zu bewältigen. Aber knochele

ruhig ein Weilchen, denn die Aufgabe ist tatsächlich mit ein wenig Geduld zu lösen. Und damit du nicht gleich nach dem Ergebnis siehst, findest du es hier auf dem Kopf stehend gedruckt.



Bleiben wir gleich bei der Addition mit dreistelligen Zahlen. Schreibe eine beliebige dreistellige Zahl auf (Nullen und gleiche Ziffern nicht verwenden, außerdem muß bei der Ausgangszahl die Ziffer an der Einerstelle um mindestens 2 kleiner oder größer sein als an der Hunderterstelle) und drehe nun diese Zahl so um, daß die Hunderter mit den Einern vertauscht werden. Schreibe die kleinere unter die größere Zahl und subtrahiere.

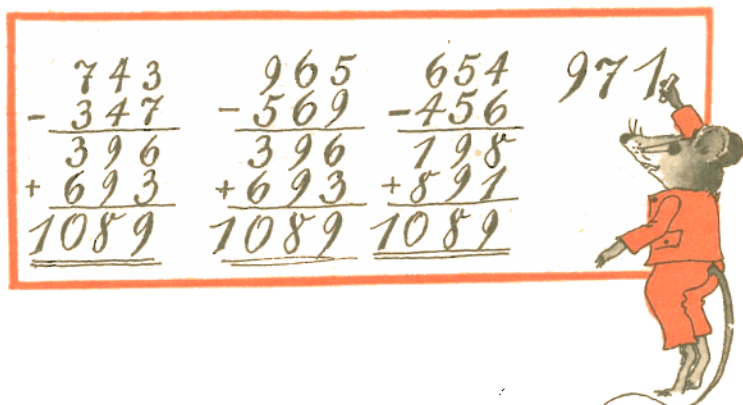
Die errechnete Differenz drehe ebenfalls durch Vertauschen der Hunderter und Einer um und addiere beide Zahlen.

Hast du alles genau befolgt? Dann lies und staune. Ich habe das Ergebnis schon vorher gewußt. Es lautet 1089.

Das Geheimnis findest du sofort, wenn du die Sache

genau nach Anweisung mit anderen Werten probierst. Deshalb darfst du diesen netten Zahlentrick auch nicht wiederholen.

Einige Beispiel für das Rechnen:



Nun wird dir auch verständlich, warum die anfangs gegebenen Einschränkungen notwendig sind. Das Verfahren läßt sich sonst nicht anwenden. Man erhält z. B. bei der Ausgangszahl 354 durch Vertauschen 453 und kommt auf die Differenz 99. Das sind nun keine Hunderter mehr, und man sollte diese Tatsache auch nicht umgehen, indem man etwa 099 als Zahl gelten läßt.

Du kommst bei diesem Rechentrick also immer auf die gleiche Summe. Und diese Tatsache kannst du für das folgende Kunststück verwenden, welches allen große Rätsel aufgeben wird.

Besorge dir zu diesem Zweck ein dickes Telefonbuch, suche den 9. Teilnehmer auf der Seite 108 heraus, und merke dir genau alle Angaben, die dort über den Inhaber des Telefonanschlusses stehen. Mit diesem

Wissen ausgerüstet, läßt du nun die Rechnung nach obigem Verfahren durchführen und bist danach in der Lage, durch die „zufällig“ gefundene Zahl 1089 den 9. Teilnehmer auf der Seite 108 des Telefonbuches zu nennen, dazu die Telefonnummer, die Straße, den Beruf usw. Mache die Sache recht spannend und laß die anderen ruhig staunen. Wer unbedingt das Geheimnis wissen möchte, der soll das nächste Mal zum Mathezirkel kommen. Dort erfährt er, wie es gemacht wird und noch viele andere interessante Dinge mehr.

Machen wir weiter.

Schreibe eine Zahl mit beliebig vielen Ziffern auf. Jetzt darfst du die einzelnen Ziffern wahllos und ohne jede Einschränkung vertauschen und daraus eine neue Zahl bilden. Nunmehr setze die kleinere Zahl unter die größere und subtrahiere. Schließlich streiche vom Ergebnis irgendeine Zahl außer 0 weg und nenne langsam die verbleibenden Ziffern in ihrer Reihenfolge. Ich kann sofort angeben, welche Zahl gestrichen worden ist, obwohl ich diese weder gesehen noch gehört habe. Es ist die „8“!



Das ganze Geheimnis beruht auf dem Quersummenprinzip mit der Zahl 9. Danach ist die Quersumme des Ergebnisses immer ein Vielfaches von 9, wenn ich von einer beliebigen Zahl die anders geordneten Ziffern subtrahiere. Im Zahlenbild sieht das so aus:

Die gewählte Zahl heißt z. B.	6934821
Beispiel für die Vertauschung	– 3496812
	<u>3438009</u>
Eine beliebige Zahl streichen	8
Nenne die Ziffern	343 009
Bilde im Kopf die Quersumme	19
Bilde die Differenz bis zum nächsten Vielfachen von 9 (27)	<u>8</u>

Das aber ist genau
die gestrichene Zahl!



Mit diesem Wissen darfst du nun erfolgreich weiterprobieren. Übrigens kommen wir auf das Quersummenprinzip noch im nächsten Kapitel bei den Zaubertricks mit Spielkarten zurück.

Bleiben wir bei der Addition, und versuchen wir einmal das folgende ganz erstaunliche Kunststück.

Am besten gelingt es, wenn daran mehrere Personen beteiligt sind. Der erste Mitspieler schreibt auf einen Zettel eine frei gewählte Zahl hin; sie kann ein-, zwei- oder dreistellig sein. Darunter setzt eine andere

Person eine zweite und größere Zahl, unter diese schreibt ein weiterer Zuschauer eine dritte, wiederum größere, eine vierte Person ebenfalls eine größere Zahl und so weiter, bis genügend Zahlen untereinander stehen (etwa 5 bis 7).

Diesen Zettel reichst du nun einem guten Rechner mit der Bitte, er möge feststellen, um wieviel die zweite Zahl größer sei als die erste, die dritte größer als die zweite, die vierte größer als die dritte usw. Die entstehenden Differenzen soll er schließlich addieren.

Das dauert ein Weilchen. In dieser Zeit schreibst du etwas auf einen Zettel, faltest diesen zusammen und gibst ihn einem Unbeteiligten zur Aufbewahrung.

Wenn am Ende das Rechenergebnis mit der Zahl deines Zettels verglichen wird, stimmen diese überein.

Du warst also lange vorher in der Lage, das Ergebnis ohne jede Rechnung anzugeben.



Das ist schon eine ganz respektable Angelegenheit, und wie funktioniert sie? Nun, durch Probieren kommt man hier nicht so leicht zum Ziel. Dazu bedienst du dich eines einfachen kleinen Tricks: Wenn du den Zettel nach beendetem Aufschreiben der Zahlen dem letzten Zuschauer zum Ausrechnen übergibst, wirfst du schnell und unauffällig einen Blick darauf und merkst dir die erste und die letzte aufgeschriebene Zahl. Die erste Zahl ziehst du von der letzten ab und hast das Ergebnis lange vor dem Rechner parat.

Verfolgen wir einmal den mathematischen Verlauf. Dazu bezeichnen wir die vom Mitspieler gewählten Zahlen mit a , b , c und d , wobei $b > a$, $c > b$ und $d > c$ ist. Der Mitspieler bildet nun die Differenzen $b - a$, $c - b$ und $d - c$ und addiert diese Ergebnisse. Wir sind in der Lage, ohne Kenntnis der Zahlen mitzurechnen und erhalten $b - a + c - b + d - c$. Dabei erkennen wir, daß sich $b - b$ und $c - c$ aufheben und am Ende $d - a$ stehen bleibt. Und genau das ist die Differenz aus der letzten und ersten Zahl und die Lösung für unseren „Trick“.

Probieren soll man es selbst, und deshalb kann ich mir Beispiele sparen.

Zwischendurch darfst du einmal schätzen lassen, wie viele Minuten seit dem Beginn unserer Zeitrechnung bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts vergangen sind. Wer dem tatsächlichen Ergebnis am nächsten kommt, erfährt von dir das Geheimnis des eben vorgeführten Zahlenkunststückes.

Die genaue Berechnung hat der Mathematiker H. Schubert angestellt und ermittelt, daß seit dem Jahre eins bis zum 29. April 1902 um 10 Uhr 40 Minuten genau eine Milliarde Minuten verflossen sind.

Diesen Abschnitt wollen wir mit einer Ziffernhäkelei abschließen. Dazu schreiben wir wahllos eine zweistellige Zahl hin, addieren die beiden Ziffern, schreiben das Ergebnis als dritte Zahl, addieren die zweite Ziffer zur dritten, erhalten so die vierte, addieren wiederum die dritte mit der vierten, schreiben das Ergebnis als fünfte Ziffer und so fort. Beachten müssen wir jedoch, daß wir bei Ergebnissen von 10 und darüber nur die letzte Ziffer, also die Einer, verwenden.



Probieren wir es gleich einmal mit der Zahl 21. Als dritte Ziffer ergibt sich 3 ($2 + 1$). Auf dem Papier steht nun 213. Die vierte Ziffer erhalten wir aus der Addition der zweiten und dritten ($1 + 3 = 4$). Unsere Zahl hat jetzt schon vier Stellen: 2134. Weiter geht es mit der Addition der dritten und vierten Ziffer, und wir erhalten so 21347. Ich denke, du hast nun die Häkelanweisung begriffen und kannst jetzt allein weiterhäkeln. Zum Spaß wollen wir das Beispiel noch ein wenig erweitern

21347189763921347...

Hallo! Wir gelangen auf diese Weise tatsächlich zu einer echten Kreiszahl, über die wir weiter vorn gesprochen haben.

Wenn wir dies mit anderen Zahlen probieren, werden wir bald feststellen, daß mehr oder weniger Schritte gegangen werden müssen, ehe wir an den Ausgangspunkt der Kreiszahl gelangen. Bei der Zahl 22 sind es 20 Ziffern, die Ausgangszahl 69 führt über 60 Additionsschritte zum Schließen des Kreises. Insgesamt gibt es 60 Reihen mit 60 Ziffern, 20 Reihen mit 20, 12 Reihen mit 12, 4 Reihen mit 4 und drei Reihen mit 3 Ziffern.

Nun dürfte es nicht ganz ohne Reiz sein, die Regel aufzuspüren, nach welcher wir auf Anhieb bestimmen können, mit welchen Ziffern wir beginnen müssen, um eine solche Häkelreihe mit 60, 20, 12, 4 oder 3 Maschen zu erhalten. Wenn wir dies durch Probieren ermitteln, kommen wir entweder durch Zufall darauf, oder wir müssen endlose Zahlenfolgen errechnen und vergleichen. Deshalb gebe ich hier einen Tip: Setze die erste Ziffer einer kompletten Häkelreihe an die letzte Stelle, und schon hast du die nächste Reihe. Das gilt für jede Reihe mit gleicher Größenordnung. Dazu mußt du je eine 60er-, 20er-, 4er- und 3er-Reihe schon selbst finden. Diese kleine Mühe will ich dir nicht abnehmen, sonst macht die ganze Sache nur halb soviel Freude.



Beispiel
für die vier 4er-Reihen

Wer nun genügend Häkelreihen gebildet hat und die Addition aufeinanderfolgender Ziffern im Schlaf beherrscht, kann sich noch mit dem folgenden erstklassigen Kunststück beschäftigen. Es bereitet viel Freude und zeichnet den Vortragenden als Gedächtniskünstler aus.

Vertiefe dich dazu zunächst in folgende Tabelle und überlege, wieviel Zeit du benötigst, um diese auswendig zu lernen. Das nämlich wäre die Voraussetzung, bevor du nach Zuruf der Merkszahlen (Zahlen im Kreis) durch deine Mitspieler die dazugehörige Ziffernfolge fehlerfrei aufzusagen in der Lage bist.

24 5381909	13 4268426	34 5493257	5 6178538	53 4606628	48 3549325	25 6392134
81 2910112	3 4156178	14 5279651	27 8314594	8 9101123	61 2796516	17 8202246
6 7189763	28 9325729	1 2134718	21 2358314	18 9213471	43 4594370	12 3257291
65 6730336	20 1347189	38 9437077	42 3583145	7 8190998	26 7303369	51 2684268
31 2460662	15 6280886	52 3695493	68 9763921	47 8538190	75 6842684	23 4370774
2 3145943	41 2572910	63 4718976	16 7291011	56 7639213	54 5617853	67 8752796
71 2808864	37 8426842	74 5831459	4 5167303	45 6516730	86 7965167	32 3471897



Mit Trick und deiner Kenntnis von der Ziffernhäkelei geht es natürlich furchtbar einfach, wenn man weiß wie.

Damit nicht jeder sofort auf die Lösung kommt, ist diese Tafel ein wenig verschlüsselt. Jedoch mußst du nach Zuruf der jeweiligen Merkhzahl im Kreis zu dieser nur 11 addieren, das Ergebnis umdrehen und die so ermittelten Ziffern nun wie bei der Ziffernhäkelei nacheinander aufreihen. Damit es auch wirklich klappt, sei noch ein Beispiel angeführt.

Zugerufene Merkhzahl
eines Kreises z. B.

43

dazu 11 addieren

54

Ergebnis umdrehen

45

Jetzt fortlaufend addieren

4594370...

Das Rätsel der magischen Quadrate

Die Geschichte der magischen Quadrate ist uralt. So finden sich in den frühesten Dokumenten mathematischer Geschichte auch solche über magische Quadrate. In einem etwa 6 500 Jahre alten chinesischen Rechenbuch ist ein 9-Felder-Quadrat mit der folgenden Anordnung der Ziffern 1 bis 9 enthalten:

1	9	2
3	5	7
8	4	6

Dieses wohl älteste magische Quadrat ergibt horizontal, vertikal und diagonal gelesen immer die Feldersumme 15.

Aus Indien überliefert ist uns ein 2 000 Jahre altes Quadrat mit 16 Feldern.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Dieses indische Quadrat besitzt bereits vollkommene Eigenschaften; denn nicht nur die horizontal und diagonal gelesenen Feldersummen ergeben die Zahl 34, sondern auch die vier Eckenquadrate

$$\begin{aligned}
 1+14+7+12 &= 34 \\
 8+11+2+13 &= 34 \\
 15+4+9+6 &= 34 \\
 10+5+16+3 &= 34 \\
 7+6+10+11 &= 34
 \end{aligned}$$

und das Mittelquadrat führen zur Feldersumme 34.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

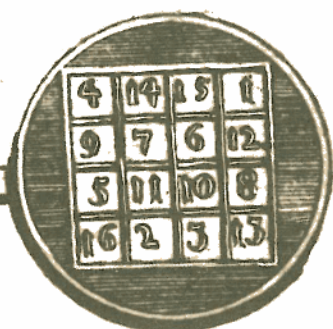
Zu jeder Zeit ihrer Entwicklung sind die magischen Quadrate der mystischen Gedankenwelt fest verwurzelt. In die Dämonenlehre der Araber waren sie eingebettet und begegnen uns in verstärktem Maße auch im europäischen Raum über das ganze Mittelalter hindurch.

Aus der wechsellvollen Geschichte der magischen Quadrate erzählen uns die nachfolgenden Episoden. Lange vor unserer Zeitrechnung gab es im fernen China einen Tempel der Erleuchtung, Ming Tang genannt. Seine Räume waren nach dem Prinzip des ältesten chinesischen Quadrates angeordnet. Mit Ausnahme des Zentrums (5) befanden sich in den Räumen mit geraden (weiblichen) Zahlen 2 Throne und in denen mit ungeraden männlichen Zahlen 1 Thron. So ergaben sich insgesamt 12 Throne, den 12 Monaten entsprechend. In diesem Tempel wurden notwendige Regulierungen des damals noch nicht ganz genauen Kalenders vorgenommen und Gesetze verkündet.

Die chinesischen Alchimisten verwendeten das magische Quadrat auch als Talisman, wenn sie die Transmutation der Elemente, das heißt das Goldmachen, versuchten. Die zentrale Zahl 5 wiederum spielte in der Philosophie der Chinesen eine erhebliche Rolle; denn sie unterschieden damals 5 Elemente (Erde, Holz, Feuer, Metall, Wasser), 5 Farben (gelb, blau, rot, weiß, schwarz), 5 Himmelsrichtungen (Zentrum, Osten, Süden, Westen, Norden), 5 Planeten (Saturn, Jupiter, Venus, Mars, Merkur) und 5 Metalle (Gold, Blei, Kupfer, Silber, Eisen).

Auch der arabische Alchimist Jabir, Geber genannt, setzte sich viele Jahrhunderte später mit den mysti-





*Planetensiegel mit Darstellungen
magischer Quadrate*

schen Eigenschaften der magischen Quadrate auseinander und schrieb ein Buch darüber. Unter anderem sonderte er aus dem 9-Felder-Quadrat die Zahlen 1, 3, 5 und 8 ab und kam aus der Summe der verbleibenden Felderzahlen 2, 4, 6, 7 und 9 auf 28, und diese Zahl entsprach der Anzahl der Buchstaben des arabischen Alphabets. Damit glaubte Jabir den Schlüssel zum Goldmachen gefunden zu haben, indem er entsprechende Zahlen- und Buchstabenkombinationen zusammenstellte. Aber – Gold hat auch Jabir nicht herstellen können.

Die Zahlenanordnung des chinesischen Urquadrates bildete auch die Grundlage für die vielen mit dem Volksaberglauben tief verwurzelten Versuche, den magischen Quadraten vor allem astrologische Wundereigenschaften zuzuschreiben.

Agrippa von Nettersheim (1496–1535) hat den Versuch unternommen, die bestehenden magischen Geheimwissenschaften in seinem Buch „De occulta philosophia“ zusammenzufassen. Die magischen Quadrate spielen dabei eine ganz besondere Rolle und sind Bestandteil eines im Mittelalter verbreiteten Systems jüdischer Zahlenmystik.

Jedem der dem damaligen geozentrischen Weltbild entsprechenden 7 Planeten ordnete Agrippa ein bestimmtes magisches Quadrat zu und versah diese „Planetensiegel“ oder „Mensulea Planetarum“, wie Agrippa sie nannte, mit dem Bildnis des entsprechenden Planetengottes.

Solche „Planetensiegel“ oder aus dem Jüdischen stammenden „Siegel Salomos“ wurden auf Platten von Gold, Silber und anderem Metall gezeichnet, als Talismane getragen und sollten dem Menschen an-

geblich Schutz vor überirdischen Gefahren, Krankheiten usw. bieten. Die eine Seite der Talismane war mit dem für die Person auf der Grundlage astrologischer Zahlenmystik berechneten magischen Quadrat versehen und die andere Seite mit dem Bildnis des entsprechenden Planetengottes.

Selbst der große Humanist und geniale Mediziner Theophrastus Bombastus von Hohenheim, genannt Paracelsus (1493–1541), billigte die okkulten Lehren Agrippas und empfahl die magischen Quadrate als medizinische Mittel gegen bestimmte Krankheiten. So sollte z. B. ein nach seiner Anweisung aus Villacher Blei gefertigtes Saturnquadrat (magisches 9-Felder-Quadrat) mit dem Bilde des Gottes Saturn auf der Rückseite bei schwieriger Geburt recht vorteilhaft wirken und einen Reiter davor behüten, Schaden von seinem Pferd zu erleiden. Und das sagte derselbe Paracelsus, der ansonsten den zu seiner Zeit in hoher Blüte stehenden Unfug medizinischer Geheimmittel mit scharfen Worten unbarmherzig anprangerte.

Das erste vollkommene magische Quadrat finden wir in Europa auf Albrecht Dürers berühmtem Kupferstich „Melancholie“. Alle Auslegungen, wonach es eine Reihe persönlicher Daten aus dem Leben des bedeutenden mittelalterlichen Malers, Holzschneiders und Kupferstechers zeigt, halten ernsthaften Untersuchungen und Vergleichen nicht stand; denn wir erkennen in diesem Quadrat das zur Zeit Dürers bereits 1 500 Jahre alte indische Quadrat wieder, allerdings um seine Vertikalachse gedreht und in umgekehrter Reihenfolge geschrieben (von unten nach oben).



*Kupferstich von Albrecht Dürer
„Melancholie“*

16	3	2	13		1	14	15	4
5	10	11	8		12	7	6	9
9	6	7	12		8	11	10	5
4	15	14	1		13	2	3	16

Es kann vermutet werden, daß auch Albrecht Dürer dieses Quadrat bekannt und nicht gleichgültig war. Vielleicht wurde es als Familienamulett benutzt und im Entstehungsjahr der „Melancholie“ (1514) allegorisch (sinnbildlich) verwendet. Die Jahreszahl 1514 wird durch die zwei mittleren Felderquadrate der unteren Reihe gebildet.

Weitere wichtige Lebensdaten in dieses magische Quadrat hineinzudeuten (Geburtsdatum, Anzahl der Geschwister, Todesjahr usw.) ist reine Spekulation; denn aus den Ziffern 1 bis 16 kann man jede gewünschte zufällige Zahlenkombination ohne weiteres herstellen (z. B. $10 + 11 = 21$ – Geburtstag Dürers).

Zu ähnlichen ernsthaft betriebenen Ausdeutungen im Sinne eines magischen Quadrates hat auch das Goethesche „Hexeneinmaleins“ geführt.

Im ersten Teil des „Faust“ läßt Goethe eine gespenstisch aufgetakelte Alte die folgenden Worte sprechen:

Du mußt verstehn!
 Aus Eins mach' Zehn
 Und Zwei laß gehn,

Und Drei mach gleich.
So bist du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexeneinmaleins.

Diese eigenartig anmutenden Verse des „Hexeneinmaleins“ erlangten Berühmtheit, regten tiefsinnige Faust-Ausdeuter zu mystischen Betrachtungen an und veranlaßten sogar ernsthafte Mathematiker zu Untersuchungen nach der richtigen Lösungsformel.

Faust selbst findet die Sache nicht sehr glaubwürdig und flüstert Mephisto ins Ohr: „Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber.“ Dem scheint auch Mephisto beizupflichten, wenn er meint: „Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, es müsse sich dabei doch auch was denken lassen.“

Sind die Verse des „Hexeneinmaleins“ nun ein Scherz oder ein mathematisches Rätsel? Goethe jedenfalls hat noch als Sechsendsechzigjähriger bei einem Jenaer Professor Mathematikunterricht genommen und mit heißem Bemühen die Anfangsgründe der Algebra erlernt. Da er sich auch eingehend mit magischen Dingen befaßte, ist es wohl nicht sehr abwegig, anzunehmen, daß er all dies für seine Studien zum Faust nutzte und über die Mathematik schließlich auch auf die magischen Quadrate gestoßen sein könnte.



Vielleicht liegt hier der Schlüssel für die Lösung dieser Goetheschen Denksportaufgabe; denn mehr als ein Scherz ist das „Hexeneinmaleins“ nicht. In einem Brief an Zelter vom 4. 12. 1827 bezeichnet Goethe die Sache als absichtlichen Unsinn.

Mathematiker sind dieser zum Spaß aufgezeigten Spur gefolgt und haben tatsächlich das „Hexeneinmaleins“ als Anweisung zur Herstellung magischer Quadrate benutzt.

Hier eine Kostprobe davon:

„Aus Eins mach Zehn“ – setze in das erste Feld eines 9-Felder-Quadrates statt 1 die 10.

„Und Zwei laß gehn“ – in das zweite Feld kommt also eine 2.

„Und Drei mach gleich“ – setze eine 3 in das dritte Feld.

„So bist du reich“ – reich an Wissen; denn jetzt ist dir bereits die Feldersumme „15“ des Quadrates bekannt.

„Verlier die Vier“ – die 4 ist fort, also eine 0 ins vierte Feld.

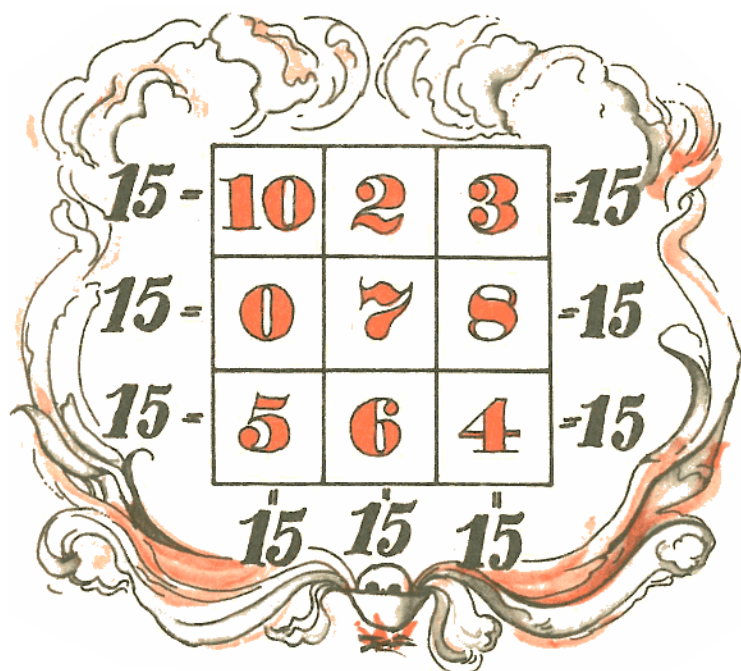
„Aus Fünf und Sechs, so sagt die Hex, mach Sieben und Acht“ – jetzt wird es etwas komplizierter: Ins fünfte Feld setze eine 7 und ins sechste eine 8, dafür kommt ins siebente Feld eine 5 und ins achte eine 6.

„So ist's vollbracht“ – damit ist das magische Quadrat bereits gelöst. Die nun noch fehlende Zahl ergibt sich ganz einfach aus der Feldersumme: Es ist die „verlorene“ 4. Wir finden sie also zum Schluß doch noch wieder, denn nicht ohne Grund steht hinter dem Wort „vollbracht“ ein Doppelpunkt.

Was nun in den Versen folgt ist nur noch sinngemäß aufzufassen:

„Und Neun ist Eins“ – das 9-Felder-Quadrat stellt eine Einheit dar: Alle Waagerechten und Senkrechten ergeben die Zahl 15.

„Und Zehn ist keins“ – ein 10-Felder-Quadrat gibt es nicht.



Zugegeben, hier und da ist die Sache ein wenig holprig. Aber auf diese Weise erhalten wir auch ein Neunfelderquadrat, welches, wie das Urquadrat der Chinesen, die Feldersumme 15 aufweist.

Bei der Bildung magischer Quadrate geht es jedesmal um die recht einfach klingende Aufgabe, die einzelnen Felder eines quadratischen Schemas so auszufüllen, daß jede der vorgegebenen Zahlen genau ein-

mal verwendet wird und daß die Summen der Zahlen in der gleichen Zeile, der gleichen Spalte und den Diagonalen stets gleich sind.

Versuche einmal, die Ziffern von 1 bis 9 in die Felder eines neunfeldrigen Quadrats so einzutragen, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Es ist gar nicht so einfach, wenn man sich ohne Überlegungen ans Probieren macht. Wie so oft ist es deshalb besser, zunächst nachzudenken:

Die Summe der 9 Zahlen ist 45. Da drei Zeilen vorliegen, müssen also die drei dort eingetragenen Zahlen 15 ergeben. Wer das beim Probieren nicht berücksichtigt hat, konnte nicht zum Ziel kommen.

Überlegen wir weiter:

Die einzelnen Felder werden ja bei der Bildung der Summen sowohl in horizontaler (abc, def, ghi) als auch in vertikaler (adg, beh, cfi) und diagonaler (aei, ceg) Richtung verschieden oft herangezogen; die Felder

b, d, f, h

a, c, g, i

an den Seitenmitten zweimal, die Eckenfelder dreimal und das Mittelfeld  viermal.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Demnach ergeben sich aus den Zahlen 1 bis 9 für die Bildung der „magischen Konstanten“ 15 aus je drei Feldern genau 8 Möglichkeiten

ab**c**,**d**e**f**,g**h**i,**a**d**g**,
b**e**h,**c**f**i**,**a**e**i**,**c**e**g**.

Wie man sieht, kommt das Feld e am häufigsten vor, ja infolge seiner Stellung in der Mitte des Feldes wird es mit jeder der anderen 8 Zahlen einmal verbunden. Versuchen wir also dieses Feld als erstes zu besetzen. Sobald wir dort eine Zahl über 5 einschreiben, können wir die 9 nicht mehr unterbringen, denn $6 + 9$ ergibt schon 15.

Sobald wir eine Zahl unter 5 dort einfügen, wissen wir nicht mehr, wohin wir die 1 schreiben sollen, denn $4 + 1 = 5$, und um die Summe 15 zu erreichen, ist die 9 nicht groß genug.

Im Mittelfeld muß die 5 stehen, und jeder Probierversuch, bei dem das nicht so ist, führt nicht zum Ziel.

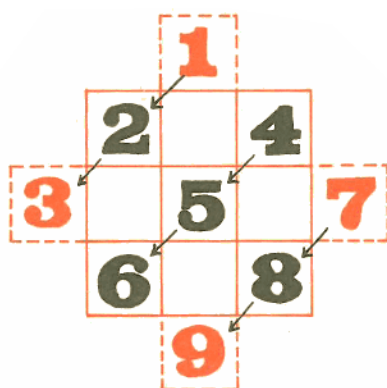
Die nachfolgende Abbildung zeigt eine mögliche Lösung, von der noch sieben weitere abgeleitet werden können (durch Spiegelung und durch Drehung).



Für magische Quadrate mit $4^2 = 16$ Feldern hat der französische Rechenmeister Frénicle de Bessy bereits im 17. Jahrhundert 880 verschiedene mögliche Lösungen berechnet. Obwohl die Richtigkeit seiner Angaben wiederholt angezweifelt wurde, konnte dies bis heute nicht bewiesen werden. Ebenso ist das Bemühen um eine Methode zur Bestimmung sämtlicher möglicher Anordnungen für magische Quadrate mit beliebig großer Felderzahl über 16 ein bis in unsere Tage ungelöstes mathematisches Problem. Auch Leonhard Euler (1707–1783) fühlte sich zu den magischen Quadraten hingezogen, weil ihn das Auffinden allgemeiner Regeln zur Herstellung solcher Gebilde als mathematisches Problem reizte.

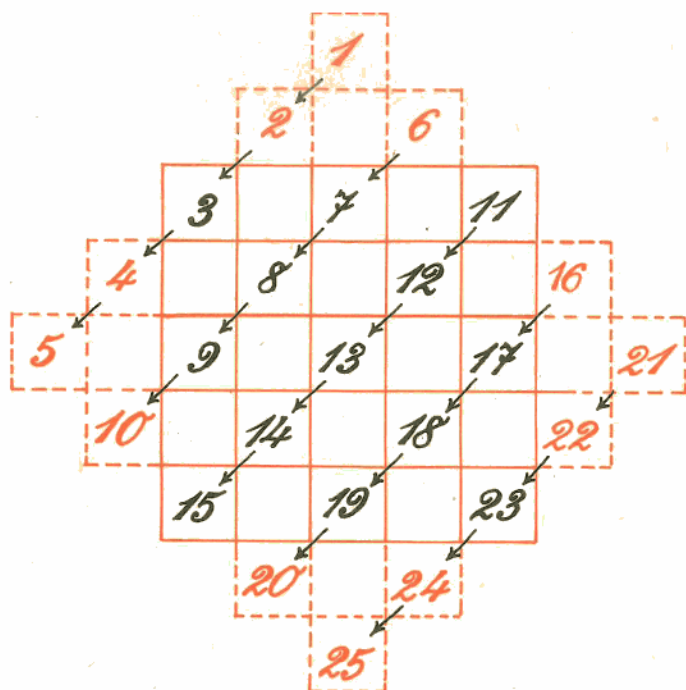
Zwar gibt es bis heute kein gültiges Verfahren zur Bestimmung aller möglichen Anordnungen für magische Quadrate mit beliebiger Felderzahl, doch haben diese Bemühungen über Jahrhunderte hinweg zu sehr vielen Einzellösungen geführt, die bei magischen Quadraten höherer Ordnung (Quadrate mit 16, 25, 36, 49 Feldern) sogar noch weiter kompliziert wurden. Wie bereits beim Dürerquadrat gezeigt, können auch die Eckenquadrate in die Feldersumme einbezogen werden; bei noch größeren Quadraten kommt evtl. noch das Mittelquadrat hinzu. Dann könnte man auch Quadrate so bilden, daß ausgetauschte Teilquadrate die Feldersumme nicht verändern usw. Das ist aber recht kompliziert und würde den Rahmen dieser Betrachtungen überschreiten. Deshalb wollen wir uns von den vielen möglichen Verfahren auf zwei beschränken, die jedoch unseren Ansprüchen für die Bildung größerer magischer Quadrate vollauf genügen.

Für Quadrate mit ungerader Felderzahl (9, 25, 49 usw.) kann man von Hilfsfeldern außerhalb des eigentlichen Quadrates Gebrauch machen, beginnt in einem der Hilfsfelder mit der kleinsten Zahl und setzt in Pfeil-Diagonal-Richtung die nächsten Zahlen ein. Ist man bei der höchsten Zahl angelangt (z. B. beim 9-Felder-Quadrat die Zahl 9), so setzt man die außerhalb des eigentlichen Quadrates stehenden Zahlen in die in senkrechter oder waagerechter Richtung am entferntesten liegenden noch freien Felder ein.

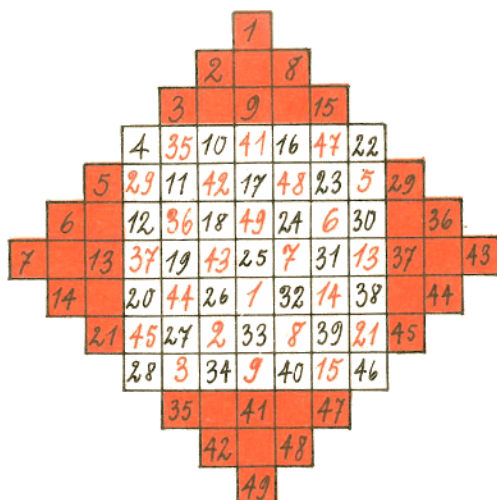


2	9	4
7	5	3
6	1	8

Die Konstruktion größerer Quadrate erfordert mehrere Hilfsfelder. Beim Einsetzen der Zahlen aus den Hilfsfeldern beginnen wir jedoch hier mit den der Grundfigur am nächsten liegenden.



3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23



Natürlich können wir auch mit jeder anderen Zahl beginnen und auch ohne Hilfsfelder arbeiten. Abgeleitet aus dem Grundverfahren macht man das so: Die 1 schreibt man in das mittelste Feld der obersten Reihe, danach die 2 als unterste Zahl der rechts von der 1 befindlichen Kolonne und hierauf in diagonalen Richtung nach oben fortfahrend 3, 4... Damit erreicht man den rechten Rand. Danach fährt man am linken Rand der darüber liegenden Reihe fort 5, 6, 7. Kommt man an ein schon besetztes Feld, so setzt man die nächste Zahl in das freie Feld direkt unter die zuletzt geschriebene Zahl, in diesem Falle also unter die 7, und fährt dann in der Weise wie schon oben beschrieben fort.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Für Quadrate mit gerader Felderzahl kann man diese Methode nicht verwenden. Dafür verfährt man nach folgenden einfachen Regeln, die ich am Beispiel des Sechzehnfelderquadrates erläutere.

Zuerst teilt man die 16 Zahlen in 4 Gruppen.

a. 1-2-3-4

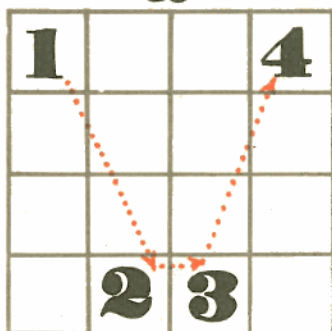
b. 5-6-7-8

c. 9-10-11-12

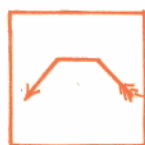
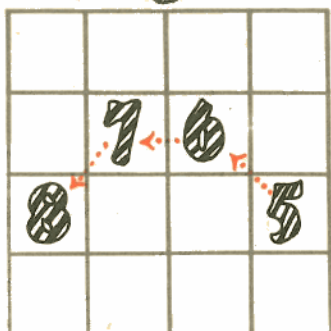
d. 13-14-15-16

Dann setzt man diese 4 Gruppen nacheinander ein, für jede Gruppe dem entsprechenden Pfeil folgend.

a



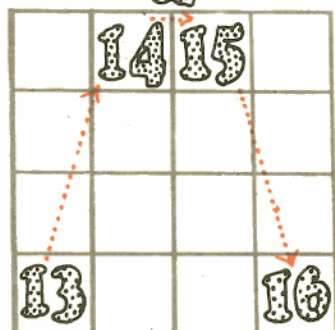
b



c



d



1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Das aber ist haargenau das magische Quadrat, welches bereits die Inder vor 2000 Jahren kannten und das wir in veränderter Form in Dürers Kupferstich „Melancholie“ wiederfinden. Es ist also ein vollkommenes magisches „Quadrat“, in welchem auch die Eckquadrate der Felderzahl 34 entsprechen und sogar diagonal vertauscht werden können. Auch das Mittelquadrat hat die Feldersumme 34.

Das soll zunächst genügen, und das Schema ist nach einiger Übung leicht zu merken. Hier sei auch noch einmal betont, daß die Voraussetzungen für die Bildung eines solchen magischen Quadrates immer dann gegeben sind, wenn wir aufeinanderfolgende natürliche Zahlen verwenden. Und wir müssen deshalb auch durchaus nicht mit der Eins beginnen.

Magische Quadrate sind herrliche Knocheleien. Aber man kann mit ihnen auch phantastische Gedächtnis- und Zauberkunststücke vollbringen, wenn man die einfachen Regeln beherrscht. Dazu einige Anregungen.

Zeichne das magische Urquadrat der Chinesen auf, lasse aber das Zentrum frei (5), und erzähle die vorher beschriebene Geschichte vom Tempel Ming Tang. Nun schreibst du, für die Anwesenden nicht sichtbar, etwas auf einen Zettel und übergibst ihn einem Zuschauer, der ihn ungesehen in seine Tasche stecken soll.

Jetzt darf ein Mitspieler irgendeine Zahl des Quadrates frei auswählen und zur Kontrolle in das freie Mittelfeld schreiben. Danach verdoppelt er diese gewählte Zahl und streicht die dem Ergebnis der Doppelung entsprechende Zahl im Zauberquadrat (bei Ergebnissen über 10 werden nur die Einer verwendet). Die gestrichene Zahl wird wieder verdoppelt und die dem Ergebnis entsprechende Zahl im Quadrat wieder gestrichen. Nun diese wieder verdoppeln, Ergebnis streichen; dieses wieder verdoppeln, streichen und so fort, bis es nicht mehr geht. Zum Schluß werden die noch verbleibenden ungestrichenen Zahlen addiert, wobei die in das Mittelfeld nachträglich eingesetzte Zahl nicht mitgezählt wird. Die Summe ergibt 20! Aber das wußtest du schon vorher; denn beim Vorzeigen des Zettels enthält dieser akkurat die Zahl 20.

Diesen Trick bitte nicht wiederholen. Warum? Probiere es selbst, dann wirst du merken, daß nämlich immer genau alle geraden Zahlen ausgesondert werden und die Summe der ungeraden immer 20 beträgt.

Du läßt dir irgendeine möglichst zweistellige Anfangszahl für die Bildung eines magischen Quadrates zurufen und die Frage beantworten, ob es sich um ein Quadrat mit 9, 16, 25 oder 49 Feldern handeln soll. Sofort bist du in der Lage, die genaue Feldersumme zu nennen. Noch mehr, du schreibst augenblicklich

dieses mit der genannten Zahl beginnende Quadrat ohne einen einzigen Fehler auf.

Für die Berechnung der Feldersumme merkst du dir die folgenden Regeln:

3 · 3 ein 9-Felder-Quadrat: Multipliziere die genannte Zahl mit 3 und addiere zum Ergebnis 12.

4 · 4 ein 16-Felder-Quadrat: Multipliziere die genannte Zahl mit 4 und addiere zum Ergebnis 30.

5 · 5 ein 25-Felder-Quadrat: Multipliziere die genannte Zahl mit 5 und addiere zum Ergebnis 60.

7 · 7 ein 49-Felder-Quadrat: Multipliziere die genannte Zahl mit 7 und addiere zum Ergebnis 168.

Das Eintragen des Quadrates erfolgt dann nach einer der beiden dir bekannten Regeln.

Am Beispiel der zugerufenen Zahl 27 und einem gewünschten 25-Felder-Quadrat sieht das dann so aus:

$$27 \cdot 5 = 135$$

$$135 + 60 = 195 \text{ (Feldersumme)}$$

Das Quadrat, beginnend mit 27:



43	50	27	34	41	-195
49	31	33	40	42	-195
30	32	39	46	48	-195
36	38	45	47	29	-195
37	44	51	28	35	-195
-195	-195	-195	-195	-195	-195

Am besten ist es, sich zunächst auf Quadrate mit 16 Feldern zu beschränken. Sie genügen für unsere Zwecke vollauf und machen das Rechnen leichter.

Wir wollen das mit der gleichen Aufgabe einmal probieren. Hier machst du es dann vielleicht so, daß du dir das Geburtsjahr nennen läßt, sofort die Feldersumme sagen und am 16-Felder-Quadrat beweisen kannst. (Beachten: Beim 16-Felder-Quadrat die zweite Einsetzformel für gradzahlige Quadrate verwenden!)

Genanntes Geburtsjahr 1959.

– Die beiden letzten Jahreszahlen in das erste Feld der obersten Reihe eintragen (59).

– Feldersumme errechnen.

$$59 \cdot 4 = 236$$

$$236 + 30 = 266$$

– Magisches Quadrat entsprechend Regel 2 (gradzahlige Quadrate) ausfüllen.

59	72	73	62	=266
70	65	64	67	=266
66	69	68	63	=266
71	60	61	74	=266
=266	=266	=266	=266	=266



Wir erhalten auf diese Weise ein magisches „Superquadrat“, welches den höchsten Ansprüchen genügt.

Du kannst natürlich, ähnlich wie beim Dürerquadrat, auch die ganze Jahreszahl verwenden und als Ausgangszahlen für ein magisches Quadrat nutzen. Diese Form der Ausfüllung eines magischen Quadrates ist besonders reizvoll, verlangt jedoch die Beachtung der folgenden Kniffe (am Beispiel der Jahreszahl 1976 erläutert):

Wir gehen dabei von der Grundform des 16-Felder-Quadrates aus. Die rot eingetragenen Felder sind besonders zu beachten.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

- Zunächst die gewünschte Jahreszahl in die beiden Mittelfelder der obersten Reihe setzen.

	19	76	

- Da anstelle der ursprünglichen 14 des Dürerquadrates durch die Jahreszahl 1976 eine 19 erscheint, mußt du alle anderen Felderzahlen (außer den rot gekennzeichneten) um 5 erhöhen.

6	19	76	9
	12	11	14
13		15	10
18	7	8	

	19	76	
73			
	72		
			77

- Nun hat sich durch die Jahreszahl 1976 auch die ursprüngliche 15 in 76 verändert (Differenz 61). Folglich mußt du auch die Felderzahlen der roten Felder um 61 erhöhen.

Am Ende erhalten wir wieder ein vollkommenes magisches Quadrat und werden damit alle Anwesenden in Erstaunen setzen.

6	19	76	9	=110
73	12	11	14	=110
13	72	15	10	=110
18	7	8	77	=110
=110	=110	=110	=110	=110

Als letztes Beispiel für die Herstellung magischer „Superquadrate“ sei noch eine recht interessante Methode erwähnt, die es dir als Steigerung sogar gestattet, mit vier zugerufenen Zahlen im Bereich von 1 bis 100 zu arbeiten. Und damit stehst du dann bereits auf einer recht hohen Sprosse der Stufenleiter des Rechenkünstlers.



An der Tafel steht die vorbereitete Einteilung für ein 16-Felder-Quadrat. Du läßt dir vier Zahlen zurufen (z. B. 34, 19, 57, 81) und trägst sie in der zugerufenen Folge in die erste senkrechte Reihe ein.

34			
19			
57			
81			

Jetzt füllst du die restlichen Felder reihenweise wie folgt:

Die zweite Senkrechtreihe:

Die beiden oberen Zahlen entwickelst du aus der dritten und vierten Zahl der ersten Reihe durch Austausch der Ziffern.

57 wird 87
81 wird 51

Genau so verfährt du mit den beiden unteren Zahlen.

34 wird 14
19 wird 39

34	87		
19	51		
57	14		
81	39		

Die dritte Senkrechtreihe entwickelst du aus der zweiten.

Das erste und letzte Feld gewinnst du durch Ziffern-
austausch der beiden mittleren Felder.

51 wird 11

14 wird 54

Die mittleren Felder entstehen aus der 1. und 4. Fel-
derzahl

87 wird 37

39 wird 89

34	87	11	
19	51	37	
57	14	89	
81	39	54	

Schließlich wird die letzte Reihe genau so entwickelt,
wie die zweite aus der ersten.

Durch Zahlenvertauschung der dritten und vierten Zahl gewinnst du die erste und zweite.

89 wird 59

54 wird 84

Die beiden unteren Zahlen ergeben sich entsprechend aus den beiden oberen.

11 wird 31

37 wird 17

34	87	11	59
19	51	37	84
57	14	89	31
81	39	54	17

Auch in diesem Fall wirst du dich an einem magischen „Superquadrat“ erfreuen können (Feldersumme 191).

IN DIE KARTEN GESCHAUT

Merkwürdige Zufälle

Die Geschichte der Spielkarten gibt uns manches Rätsel auf. Erstmalig sind sie in den abenteuerlichen Reiseberichten des italienischen Kaufmanns Marco Polo erwähnt. 1273 kam er nach Peking und berichtet uns, daß bereits zur damaligen Zeit die Chinesen Spielkarten kannten. Wann die Spielkarten zum ersten Mal in Europa auftauchten, weiß man nicht genau. Überliefert ist die Legende, wonach ein Höfling seinem dem Wahnsinn verfallenen König, Karl VI., die ersten Spielkarten zur Erheiterung anfertigen und darauf die Bilder der Würdenträger des Hofes darstellen ließ. Bis zur Erfindung des Buchdrucks waren die von Künstlern meist als wertvolle Einzelstücke gefertigten Kartenspiele zur Unterhaltung der Reichen bestimmt. Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß den Spielkarten, durch Wunderglauben und Unwissenheit begünstigt, besondere Zauberkräfte zugesprochen wurden. Das unbeschreiblich niedrige allgemeine Bildungsniveau der Menschen im Mittelalter und der Aberglaube waren der beste Nährboden und eine Blütezeit für das dunkle Gewerbe der Wahrsager, Kartenleger und Zukunftsdeuter. Überdies erkannten Scharlatane und gerissene Gauner schnell die Spielkarten als besonders geeignete Behelfe für ihre betrügerischen Manipulationen. Das Falschspielen mit gezinkten Karten, nach ausgeklügel-



Blätter eines alten Kartenspiels

ten geheimen Methoden besonders gelegte Spiele und mit artistischer Perfektion gehandhabte Kartengriffe ließen das Kartenspielen bald in Verruf geraten und brachten den Spielkarten im Volksmund die Bezeichnung „Gebetbuch des Teufels“ ein.

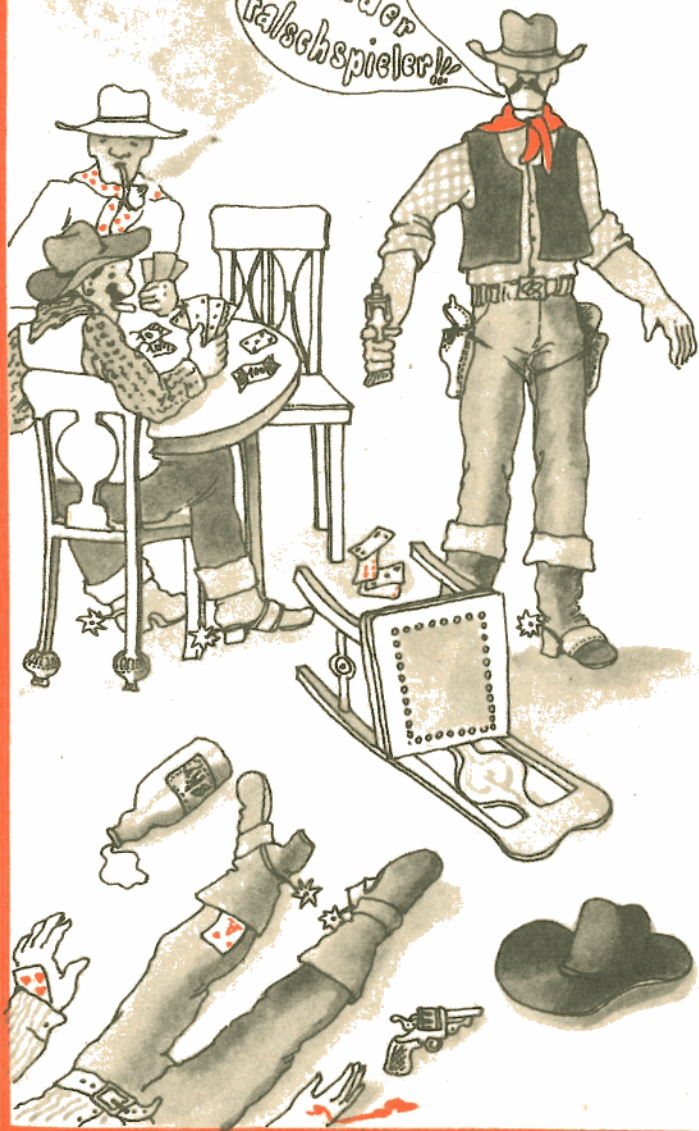
Zugegeben, von den buntbedruckten kleinen Stücken Karton geht ein besonderer Reiz aus. Aber haftet den Spielkarten wirklich Mystisches und Dämonisches an? Keineswegs! Wie sollten diese bunten Bilder Schicksal spielen, Gewesenes beschwören und Zukünftiges voraussagen können? Gewiß, Spielkarten richteten genug Unheil an. Aber in altersgrauer Zeit, als es noch keine Spielkarten gab, sah es beim Glücksspiel mit Würfeln nicht anders aus. Und wenn wir im Nachfolgenden mancher Merkwürdigkeit begegnen, dann läßt uns das ahnen, welche Macht Aberglauben und Wunderglauben über unwissende und halbwissende Menschen hatten.

Es mutet tatsächlich wie mittelalterliche Zahlenmystik an, wenn wir die anschließenden Betrachtungen mit einem Kartenspiel von 52 Karten anstellen. Lassen wir uns also von diesen Merkwürdigkeiten berichten.

Zunächst fällt auf, daß unser Kartenspiel und die Anzahl der Wochen eines Jahres die Zahl 52 gemeinsam haben. Und die 4 Kartenfarben Kreuz, Pik, Herz und Karo entsprechen den 4 Jahreszeiten; ja, beim sogenannten doppeldeutschen Spiel tragen die 4 Asse sogar entsprechende Bilder.

Zu einer Kartenfarbenserie gehören 13 Werte, andererseits hat das Jahr 13 Mondphasen. Addiert man alle 52 Werte eines Spieles ($\text{As} \triangleq 1$, $\text{Bube} \triangleq 11$, $\text{Dame} \triangleq 12$, $\text{König} \triangleq 13$), so erhält man die erstaunliche Summe

Elender
Falschspieler!?



von 364. Nun muß uns diese Zahl nicht unbedingt verdutzen, weil doch ein Jahr 365 Tage hat. Aber 52 Wochen mal 7 Tage ergeben eben das Resultat 364. Bilden wir nun die Quersumme von 364, erhalten wir wieder 13. Addieren wir die 13 Werte von nur einer Farbenserie, erhalten wir 91, was durch 7 dividiert wieder 13 ergibt.

Merkwürdig? Ich habe es ja gleich gesagt. Aber was soll man meinen, wenn wir aus der Quersumme der Zahl 52 wieder auf die Zahl der 7 Wochentage stoßen? Und eine weitere Zahlenbeziehung: Skatspiele beginnen ausgerechnet mit dem Wert 7, einer Zahl also, der einstmals geheimnisvolle Kraft zugeschrieben wurde! Wie leicht kann aus solchen Zufällen der Aberglaube gefördert werden.

Ganz verrückt wird es jedoch, wenn wir die in Buchstaben geschriebenen 13 Werte eines Spieles zusammenzählen (ch = 1 Buchstabe).

★ As ★	Zwei ★	Drei ★	Vier ★
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.			
★ Fünf ★	Sechs ★	Sieben ★	
15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28.			
★ Acht ★	Neun ★	Zehn ★	
29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39.			
★ Bube ★	Dame ★	König ★	
40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52.			

Wir gelangen wieder zur Zahl 52!

Versuchen wir es doch einmal mit den französischen Buchstabenbezeichnungen:

★ As ★ Deux ★ Trois ★
 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 .
 ★ Quatre ★ Cinq ★ Six ★
 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 .
 ★ Sept ★ Huit ★ Neuf ★ Dix ★
 . 25 . 26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 .
 ★ Valet ★ Reine ★ Roi ★
 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49 . 50 . 51 . 52 .

Auch hier ergibt die Buchstabensumme 52!

Und wie sieht es bei den Kartennamen im Englischen aus?

★ Ace ★ Two ★ Three ★ Four ★
 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 .
 ★ Five ★ Six ★ Seven ★
 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26 . 27 .
 ★ Eight ★ Nine ★ Ten ★
 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 .
 ★ Jack ★ Queen ★ King ★
 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49 . 50 . 51 . 52 .

Jetzt schlägt's doch wirklich 13! Schon wieder gelangen wir zur 52.



Probieren wir dieses Spielchen nun noch mit einem 32er Skatblatt.

★ Sieben ★ Acht ★ Neun ★ Zehn ★
• 1 • 2 • 3 • 4 • 5 • 6 • 7 • 8 • 9 • 10 • 11 • 12 • 13 • 14 • 15 • 16 • 17 •
★ Bube ★ Dame ★ König ★ As ★
• 18 • 19 • 20 • 21 • 22 • 23 • 24 • 25 • 26 • 27 • 28 • 29 • 30 • 31 • 32 •

Die Summe aus der Anzahl der Buchstaben ergibt tatsächlich auch hier 32!

Nun reicht es uns. Aber ist dies alles wirklich nur Zufall, oder schuf der Erfinder der Spielkarten mit ihnen ein mathematisches Kuriosum ersten Ranges?

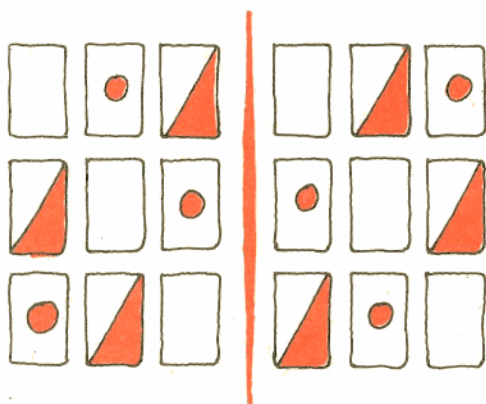
Der Wunsch, die Gesetzmäßigkeiten der Gewinnchancen beim Spiel zu entdecken und berechnen zu können, ist nicht neu. Wir nutzen heute solche mathematisch bestimmten Systeme beim Zahlenlotto und beim Fußballtoto. Es verwundert uns also keineswegs, wenn wir hören, daß bekannte Mathematiker bereits im Mittelalter die gesetzmäßige Häufigkeit vorher festgelegter Gewinnzahlen in Spielserien unter verschiedenen Bedingungen ermittelten und damit das Rätsel des Zustandekommens von Glückstreffern exakt zu lösen versuchten. So beauftragte ein der Spielleidenschaft verfallener französischer Adliger die beiden bekannten Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662) und Pierre de Fermat (1601–1665) mit einer solchen Aufgabe am Exempel des Würfelspiels und trug damit ungewollt zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei. Aber bereits etwa 100 Jahre vor ihnen befaßte sich der Italiener Geronimo Cardano, von eigener Spielleidenschaft getrieben, mit gleichen Problemen.

Habt ihr euch schon einmal die Frage vorgelegt, wie viele verschiedene Reihenfolgen beim Auslegen eines Kartenspiels möglich sind? Wir wollen dies an einem Skatspiel mit 32 Karten untersuchen. Ihr werdet schon herausbekommen, warum ich solche Betrachtungen nicht mit einem Romméspiel von 52 Karten anstelle. Das überlasse ich getrost dem Leser, falls er nach den folgenden Darlegungen noch Lust dazu verspüren sollte. Und weil ihr es mir ganz einfach nicht glauben würdet, wenn ich das Ergebnis so gänzlich unvermittelt nenne, sei die Sache in entsprechenden Portionen serviert. Versuchen wir es also zunächst mit den 8 Karten einer Farbe.

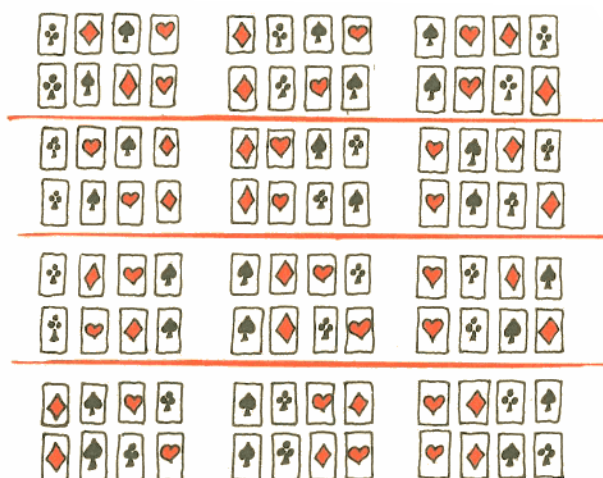
– Bei zwei Karten gibt es auch 2 Möglichkeiten:



– Bei drei Karten sieht es schon anders aus. Immerhin kommen wir bereits auf 6 Möglichkeiten:



- Und vier Karten ergeben sogar 24 verschiedene mögliche Anordnungen:



- Rechnen wir auf diese Weise weiter, gelangen wir zu folgenden Sortierungen:

5 Karten ergeben 120 Möglichkeiten

$$(120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$$

6 Karten ergeben 720 Möglichkeiten

$$(720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$$

7 Karten ergeben 5 040 Möglichkeiten

$$(5\,040 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)$$

8 Karten ergeben 40 320 Möglichkeiten

$$(40\,320 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)$$

Unglaublich?! Hättet ihr das gedacht? Aber wir wollen ja wissen, wie viele Möglichkeiten es bei 32 Karten gibt. Diese Zahl fängt mit 263 an und hat 36 Stellen. Und fragt mich bitte nicht, wie man sie liest.

263 130 854 592 673 365 047 218 012 160 000 000

Wer es mir nicht glaubt, mag getrost nachrechnen. Aber ich rate, dafür einige Stunden einzuplanen. Und lassen wir uns ja nicht dazu verleiten, die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten gar für ein Spiel mit 52 Karten auszurechnen.



Bleiben wir also beim Spiel mit 32 Karten, und bereiten wir den erwachsenen Skatspielern eine Freude, ihnen zu sagen, wie viele Zusammenstellungen möglich sind, wenn jeder Spieler, wie bekannt, 10 Karten erhält. Zwar ist das Resultat, gemessen an obiger 36stelliger Zahl, sehr niedrig, aber immerhin gibt es 64 512 240 verschiedene Möglichkeiten.

Genügt das? Und ist nun klar, warum immer wieder neue Kartenkunststücke erfunden werden? Oder reicht deine Vorstellungskraft auch noch für folgende Tatsachen:

— Nehmen wir für jede der durch die unaussprechliche Riesenzahl mit einem 32er Spiel mögliche Legart 1 cm an, was ungefähr der Höhe eines Skatspiels entspricht, dann kommen wir auf die Länge von ... Kilometern. Halt! So geht das nicht. Das kann kein Mensch

mehr überblicken, weil wir damit in astronomische Größenordnungen gelangen. Versuchen wir also, das Ergebnis in Lichtjahren auszudrücken.

Wenn ein Lichtjahr 9 460 000 000 000 Kilometer hat (9 Billionen 460 Milliarden Kilometer), müssen wir unsere Riesenzahl durch die 9 460 000 000 000 Kilometer eines Lichtjahres dividieren und erhalten das Ergebnis: 278 167 901 260 754 085,6 Lichtjahre (278 167 Billionen, 901 Milliarden, 260 Millionen, 754 Tausend 085 Komma 6 Lichtjahre). Weißt du damit etwas anzufangen?

– Da der Durchmesser des Weltalls nach Albert Einstein „nur“ 11,6 Milliarden Lichtjahre beträgt, benötigt man 23 979 991 „Weltalle“, um eine solche Strecke überhaupt darstellen zu können, die man beim Stapeln eines Skatspiels entsprechend der Anzahl der Möglichkeiten seiner Legarten erhält.

Dem Leser, der den Mut aufgebracht hat, mir bis zu dieser Stelle zu folgen, dürfte jetzt gewiß der Kopf rauchen. Deshalb sei ihm zur Belohnung für den Exkurs in das Reich des Unfaßbaren nunmehr eine leichtere Kost serviert.

Hier ist sie und hoffentlich nicht weniger interessant.

Den Geheimnissen auf der Spur

Wissen wir eigentlich, wie viele Kartenkunststücke es gibt?

Ein Kartenkunststück-Fanatiker hat versucht, auf diese Frage eine Antwort zu finden, und sich der recht kostspieligen Mühe unterzogen, alle ihm zugänglichen Kartenkunststücke zusammenzutragen. Und

Der Taschen-Spieler.

Es mans fühlt wird eins aus der Tasch gespielt.



Ein Gast-Maus muß hier Schloßer fragen,
120 Bistfall das schlaue Hocus-Spiel
Nur Augen, keine Häuser wil:
Und wil mans mit der Welt List wagen,
So brauchet man soll der wandel säugen,
verschloßnen Mund u: hundert Augen.

was meint ihr, auf welche Zahl er es im Laufe der Jahre wohl brachte? 11000 Experimente betrug schließlich seine Sammlung. Aber ganz sicher ist auch, daß diese Zahl noch weit erhöht werden könnte, weil wohl niemand heute in der Lage wäre, Auskunft über die vorhin gestellte Frage zu geben. Auch dann nicht, wenn man alle jenen Kunststücke mit Spielkarten berücksichtigt, für die irgendwelche Behelfe, Vorbereitungen, besonders präparierte Kartenspiele usw. notwendig sind. Und außerdem gelangen viele der besten Kartenkunststücke allein deswegen nicht zur allgemeinen Kenntnis, weil sie sorgsam behütetes Geheimnis ihrer Erfinder oder nur weniger Zauberkünstler sind und bleiben.

Zweifelsohne sind Zauberkunststücke mit Spielkarten ein beliebtes Mittel der Unterhaltung. Viele von ihnen besitzen ein respektables Alter und sind uns aus alten Zauberbüchern überliefert. Doch vermögen die nach den Kenntnissen der damaligen Zeit erfundenen bekannten Auslege- und Abzählaufgaben heutzutage wohl niemanden mehr so recht zu begeistern, weil sie auf zu leicht durchschaubaren Rechenkniffen beruhen und den Geist wirklich nicht sonderlich beanspruchen.

Nicht ohne Interesse ist es für uns, daß bereits vor Jahrhunderten viele Kunststücke mit launigen Vorträgen gewürzt waren und von dem Bemühen um kurzweilige Unterhaltung zeugen. Als Beispiel für die damalige Zeit sei ein Kunststück erwähnt, welches in vielen Varianten auch heute noch in Zauber- und Unterhaltungsbüchern zu finden ist und das wir am zweckmäßigsten sogleich unter Zuhilfenahme der entsprechenden Spielkarten ausprobieren.

Die Wirthin und die drey Gäste

Zur Vorbereitung sortierst du die 4 Buben und eine Dame aus dem Kartenspiel heraus. Danach gibst du heimlich einen Buben oben auf das verdeckt liegende Spiel und legst die verbleibenden 3 Buben und die eine Damekarte neben das Spiel auf den Tisch.

In Anlehnung an den Originaltext aus einem Zauberbuch des Jahres 1784 erzählst du nun folgende Geschichte: Diese 3 Buben sind arbeitsscheue Landstreicher, die danach trachten, auf Kosten ihrer gutgläubigen Mitmenschen ohne Geld ein leichtes Leben zu führen. Nach einer ansehnlichen Zeche sind sie gerade bemüht, die mißtrauisch gewordene Wirtin hinters Licht zu führen, und erbitten mit Unschuldsmiene eine letzte Flasche Wein aus ihrem Keller. Kaum ist sie von der Bildfläche verschwunden, nehmen die 3 Gesellen eiligst Reißaus: der eine hierhin, der andere dahin, der dritte dorthin (einen Buben auf das Kartenspiel legen, den anderen in die Mitte und den dritten unter das Spiel). Nach ihrer Rückkehr entdeckt die Wirtin den Betrug, stürzt zur offenen Tür und kann eben noch erspähen, wie einer der Gauner eiligst um die Dorfecke verschwindet. Diesem eilt sie nach (die Dame wird auf den auf dem Paket liegenden Buben gelegt) und gelangt dadurch auch zu den beiden anderen Betrügern (Spiel abheben), die am Dorfausgang lachend auf ihren Kumpanen warten. Aber diesmal hatten sie die Rechnung ohne die Wirtin gemacht; denn wenn wir genau hinsehen, hat die Dame in der Mitte des Spieles alle 3 Landstreicher eingefangen.



Eines der ältesten Kunststücke überhaupt, welches auch heute noch die Kartenkünstler zu immer neuen Varianten anregt, trägt den eigenartigen Titel

MUTUS, NOMEN, DEDIT, CÖCIS

und beruht auf den paarweisen Zusammenhängen der in dieser „Zauberformel“ enthaltenen Doppelbuchstaben. Ein einfallsreicher Grübler hat dies vor Jahrhunderten erdacht und zudem den lateinischen Bezeichnungen einen geheimnisvollen Sinn gegeben; denn man kann übersetzen (Cöcis für Caecus): Der Stumme gab dem Blinden einen Namen.

Zu diesem Kunststück müssen wir Spielkarten paarweise mit der Bildseite nach oben auslegen (am besten zweimal fünf Doppelpaare) und danach einen Mitspieler auffordern, sich die zwei Karten eines Paares aus einem der Päckchen zu merken, uns jedoch nicht zu verraten, um welches Päckchen und um welche Karten es sich handelt. Ohne die Ordnung zu stören, nimmt der Vorführende nunmehr die Kartenpaare auf und legt danach die Karten einzeln, den Buchstabenpaaren entsprechend, auf den Tisch. Dabei spricht er die vier Zauberworte:

MUTUS, NOMEN, DEDIT, CÖCIS

Beim Auslegen kommt also nach der Anordnung der vorhandenen Doppelbuchstaben die erste Karte auf 1, die zweite auf 8 (die beiden M); die dritte Karte legen wir auf 2, die vierte auf 4 (die beiden U); die fünfte Karte gelangt auf 3, die sechste auf 15 (die beiden T) usw. Beim Auslegen verfahren wir also derart, daß immer zwei gleiche Buchstaben herangezogen werden. Am besten ist es, wenn wir anfangs einen Papierbogen als Unterlage verwenden, auf wel-



chem die 4 Zauberwörter bezeichnet sind. Dabei gelte Ö als O.

Nun läßt man sich die Reihen nennen, in welchen sich die beiden heimlich gemerkten Karten befinden. Gibt unser Mitspieler z. B. lediglich die Reihe 2 an, dann kann es sich nur um die beiden N-Karten handeln; nennt er die Reihen 1 und 4, dann kommen nur die zwei S-Karten in Frage.

Dieses Kunststück geht „von allein“ und gelingt immer, wenn wir nach der Anweisung verfahren.

Nun werden wir mit diesen beiden wenig anspruchsvollen Beispielen aus vergangener Zeit heutzutage unsere Mitmenschen schwerlich begeistern können. Das Publikum verlangt anspruchsvollere Kost, will geistvoller „hinters Licht“ geführt sein und zwingender zu der Frage angeregt werden: Wie hat er das nur gemacht? Im Sinne der niveauvollen Unterhaltung ist es daher notwendig, tiefer in die Sache einzudringen und höhere Ansprüche zu stellen.

Im Grunde genommen lassen sich alle Kartenkunststücke in drei Hauptgruppen einordnen:

1. Kartenkunststücke, die unter Verwendung spezieller Griffe und Methoden auf der außerordentlichen Geschicklichkeit des Vorführenden beruhen
2. Kartenkunststücke, denen mathematische Prinzipien zugrunde liegen, und
3. solche, für die besonders präparierte Kartenspiele, Einzelkarten, Spielkartensätze oder zusätzliche Hilfsmittel verwendet werden.

Natürlich ergeben sich auch Kombinationen im Rahmen dieser drei Hauptgruppen. Der Thematik dieses Buches entsprechend, wollen wir uns nur mit solchen Kartenkunststücken befassen, für welche mehr oder weniger anspruchsvolle mathematische Prinzipien die Grundlage bilden. Uns interessiert also die geistige Kost der Kartenzauberei, und diese finden wir in großer Zahl vorzugsweise im Bereich der mathematischen Kartentricks.

Zur Ehre unserer Zauberkünstler sei jedoch betont, daß alle guten Kartenkunststücke, ganz gleich ob mit präparierten oder unpräparierten Karten ausgeführt und evtl. durch besonders erdachte Hilfsmittel und Apparate unterstützt, immer hohe Qualität ausdrücken



und besonders dann auf bestem Niveau stehen, wenn mit einfachsten Mitteln gute künstlerische Unterhaltung erzielt wird. Und wir bewundern mit Hochachtung auch die sogenannten Manipulatoren unter den Kartenkünstlern. Jahrelange Übung und systematisches Training sind notwendig, um Spielkarten anscheinend so spielend leicht aus der Luft zu greifen, ganze Kartenfächer aus dem Nichts hervorzuzaubern, verschwinden zu lassen, zu vergrößern oder zu verkleinern, sie zu vertauschen, wiederherzustellen usw.

Die Zahl der bisher erfundenen Kartenkunststücke ist sehr hoch, und es werden immer wieder neue und bessere Tricks hinzukommen, nicht zuletzt dank der unerschöpflichen mathematischen Prinzipien, für die nunmehr einige anspruchsvollere Beispiele beschrieben sein sollen.

Kartentricks mit Pfiff

Fast jeder kennt ein paar Kartentricks. Zumeist sind sie nicht sehr anspruchsvoll und leicht durchschaubar. Die nachfolgend beschriebenen Kunststücke sind ganz anderer Art. Sie sind in der Praxis erprobt, fesseln den Vorführenden und beeindrucken das Publikum. Allerdings vermag auch der allerbeste Meistertrick keinen größeren Eindruck zu hinterlassen, wenn er lieblos, mechanisch dargeboten wird. Übung, Liebe zur Sache und ein eindrucksvoller Vortrag sind unabdingbare Voraussetzung für das anerkennende und dankbare Staunen des Publikums. Und lasse sich ja niemand dazu verleiten, seine Ge-



heimnisse allen und jedem preiszugeben. Das wäre das unfreiwillige Ende der Rolle des Kartenkünstlers. Wer es ihm gleichtun möchte, wird die Gelegenheit dazu schon finden, wenn er es ernst mit seinem Vorhaben meint.

Nicht das komplizierte mathematische System ergibt den Wert eines Kartentricks, vielmehr wird dieser vom bewirkten Überraschungsmoment des vorher nicht erwarteten und für möglich gehaltenen Effekts bestimmt. Überhaupt sollte das Trickprinzip als Nebensache aufgefaßt werden, gewissermaßen als logische Konsequenz für einen unterhaltenden Vortrag, in den wir unsere Vorführung einkleiden; denn wir wollen ja nicht mit unserem Können prahlen, sondern die Zuschauer geistvoll unterhalten. Aus diesem Grunde ist das eine oder andere Kunststück mit einer Vortragsskizze versehen, gewissermaßen als Anregung für einen auf die eigene Persönlichkeit zugeschnittenen Text.

Die den Kunststücken zugrunde liegenden mathematischen Prinzipien gehen aus den Trickbeschreibungen hervor. Die einzelnen Karten werden zumeist durch verschiedene Methoden des Abzählens und Umzählens sowie durch Umlegen und Umwenden der Kartenpäckchen an eine bestimmte Stelle im Kartenspiel gebracht, die nur der Vorführende kennt. Dort bringt er „die“ Karte dann auf seine Weise auch zum Vorschein.

Wenn deine Zuschauer annehmen, daß hinter diesen erstklassigen mathematischen Kunststücken auch schwierige mathematische Gesetzmäßigkeiten stecken müßten, dann enttäusche sie nicht und behalte das Geheimnis für dich; denn wie in der gesamten Zauberkunst gilt auch hier der Satz: Es kommt auf den Effekt an und nicht auf die Methode!

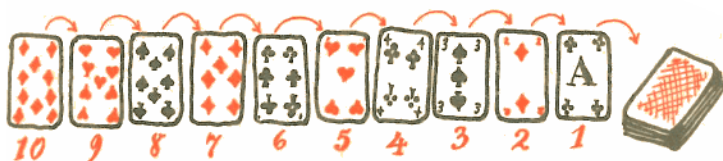
Doch nun soll es losgehen. Und du bist gut beraten, wenn du die nachfolgenden Beschreibungen, mit einem Kartenspiel in der Hand, gleich beim Lesen des Textes ausprobierst.

Volle Aufmerksamkeit jetzt für einen kleinen Scherz mit Spielkarten.

Materialisation des Gedankens

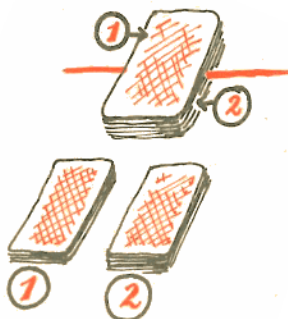
„Das tägliche Leben hat wiederholt Beispiele dafür geliefert, daß Menschen zu gleicher Zeit analoge Denkprozesse vollzogen. Auf diese Weise sind z. B. wissenschaftliche Entdeckungen völlig unabhängig voneinander zweimal gemacht worden. Unser nachfolgendes Experiment soll diesem Phänomen menschlichen Denkens nachspüren. Ich benötige dazu einen Mitspieler, der den festen Willen hat, seine Gedanken auf mich zu übertragen.“

So etwa könntest du das Kunststück einleiten, für welches du ein Romméspiel mit 52 Karten benötigst (ohne Joker), das du wie folgt vorbereitest: Du hast dem Spiel vorher ein beliebiges As entnommen, legst es mit der Bildseite nach unten auf den Tisch, gibst auf das As eine beliebige 2, tust darauf eine 3, darauf eine 4 und setzt dies bis zur 10 fort. Die Reihenfolge der Farben ist ohne Bedeutung, sollte jedoch recht bunt und unauffällig angeordnet sein. Für die Be-



wertung der Karten merkst du dir folgenden einfachen Schlüssel: $A \triangleq 1$, $2 \triangleq 2$, $3 \triangleq 3$, $4 \triangleq 4$ und so fort bis zur 10. Die so vorbereiteten Karten legst du schließlich auf den Rücken des ganzen Spielpaketes und fährst in deinem Vortrag etwa so fort:

„Mein Mitspieler muß sich jetzt auf folgende Anweisungen konzentrieren und diese exakt ausführen. Zunächst muß das Kartenpaket durch Abheben in zwei ungefähr gleiche Päckchen geteilt werden. Um alle Verwechslungen auszuschließen, bezeichnen wir eines der abgehobenen Päckchen symbolisch mit 1



(auf diesem befinden sich die vorbereiteten zehn Karten) und das andere mit 2. Ich wende mich jetzt so ab, daß ich das Folgende nicht sehen kann. Mein Mitspieler legt in dieser Zeit einige Karten (bis zu zehn), deren Zahl er sich merken soll, von Päckchen 2 auf Päckchen 1. — Ist dies erfolgt? — Dann kann



ich mich wieder dem Geschehen zuwenden und vereinige das Kartenpäckchen 1 (die vorbereiteten zehn Karten und die vom Mitspieler hinzugefügten befinden sich darauf) mit dem Päckchen 2. Dadurch ist



wohl jede evtl. vorhandene Spur restlos beseitigt. Wenn jetzt mein Mitspieler seine Gedanken auf die Zahl der von ihm gewählten Karten konzentriert, will ich versuchen, diese Zahl durch Ablegen von Karten zu ermitteln.“

Es ist ganz gleichgültig, welche Anzahl von Karten der Mitspieler von Päckchen 2 auf Päckchen 1 gelegt hat; immer wird die elfte Karte vom Spielrücken aus die richtige Anzahl nennen. Hat dein Assistent z. B. sieben



Karten von Päckchen 2 auf Päckchen 1 gelegt, dann wird die elfte Karte stets eine Sieben sein.

Nun mußt du dir genau merken, wohin die elfte Karte gelegt wird, und danach das Abheben bis zu etwa zwanzig Karten fortsetzen. Die Karten liegen anscheinend wahllos auf dem Tisch verstreut. Unvermittelt beendest du nun das Abheben, ergreifst eine Hand des Mitspielers, führst diese suchend über die abgelegten Karten und gelangst nach einigem Zögern bis zu der gemerkten elften Karte. Jetzt fragst du ihn nach der Anzahl der auf Päckchen 1 hinübergelegten Karten und wendest, sobald diese Zahl genannt wird, diese Karte um. Ihr Wert entspricht zum Erstaunen aller Anwesenden genau der genannten Zahl.

Dieses Kunststück läßt sich herrlich ausspielen. Die Vortragsskizze ist lediglich ein möglicher Anhaltspunkt dazu. Mit ein wenig unbefangener Schauspielerlei kann man damit allergrößte Überraschung auslösen. Vergiß nur nicht, zum Schluß zu erwähnen, daß es sich natürlich um einen kleinen Scherz handelt; denn an Gedankenübertragung glaubt doch kein Mensch.

Für die nachfolgenden Beschreibungen gebe ich nur die kurzgefaßte Effektbeschreibung. Den Vortrag dazu soll jeder selbst finden:

Ein unlösbares Geheimnis

Dieses Kunststück ist für den Zuschauer undurchschaubar. Sein Erfinder hat auf der Grundlage eines ganz einfachen mathematischen Prinzips wirklich Erstaunliches geschaffen.

Du kündigst dieses Experiment als einen besonders schwierigen Versuch an, das Handeln eines Mitspielers so zu beeinflussen, daß dieser schließlich tut, was du von ihm erwartest. Um alle Zweifel an den absolut einwandfreien Vorführungsbedingungen von vornherein auszuschalten, benutzt du diesmal nicht dein eigenes Spiel, sondern erbittest ein solches von einem der Zuschauer und betonst ausdrücklich, daß du das Spiel weder berühren noch irgendwie den Mitspieler in seinen Handlungen beeinflussen würdest. Dieser soll zunächst das geliehene Kartenspiel auf seine Vollständigkeit prüfen, es danach gründlich mischen und schließlich in zwei ungleich umfangreiche Päckchen mit der Bildseite nach unten vor sich auf den Tisch legen. Nun forderst du ihn auf, das kleinere Päckchen (Stapel A) aufzunehmen, jede Karte einzeln auf den Tisch zu legen, und zwar so, daß drei Päckchen entstehen. Der bisher nicht benutzte zweite Stapel B wird dann unterhalb dieser drei Päckchen auf den Tisch gelegt.

Du hast bisher nur zugesehen und gänzlich unverdächtige Anweisungen gegeben, die niemandem ein Anhaltspunkt für den überraschenden Abschluß sein können. Konzentriere dich einen Augenblick, und

man muß dir die Anstrengung anmerken, wenn du jetzt sagst: „In dem unteren Päckchen befinden sich fünf *schwarze* Karten mehr, als in den drei oberen Päckchen insgesamt *rote* enthalten sind!“ (Natürlich kannst du auch umgekehrt angeben, daß in den drei oberen Päckchen fünf rote Karten weniger als schwarze im unteren Päckchen enthalten sind.) Deine Behauptung wird von den Zuschauern nachgeprüft und muß zum Erstaunen aller schließlich wohl oder übel bestätigt werden.

Erklärung: Wie bereits gesagt, geht diese wunderbare Sache ganz einfach, wenn du entsprechend dem dargestellten Beispiel wie folgt verfährtst:

Nimmt dein Mitspieler nach dem Abheben des Kartenspiels, deinen Anweisungen folgend, den kleineren Stapel A in die Hand, und legt er danach die Karten dieses Stapels einzeln mit der Bildseite nach unten so aus, daß drei Päckchen gebildet werden, zählst du heimlich mit und erfährst auf diese Weise beim Auslegen, wie viele Karten es sind, in unserem Fall sollen es 21 sein. Diese Zahl ziehst du von 52 ab (Gesamtzahl der Spielkarten) und weißt nun die Anzahl der Karten im Päckchen B, nämlich 31. Davon subtrahierst du 26 (das ist die Hälfte von der Gesamtzahl der 52 Spielkarten) und erhältst die Zahl 5, welche unsere „Schlüsselzahl“ für deine Vorhersage ist.

Wenn du mit Variablen umgehen kannst, ist es für dich leicht zu durchschauen, warum man so vorgehen muß.

Nehmen wir an, in dem (größeren) Stapel B befinden sich b Karten (b ist dann sicherlich größer als 26). Dann müssen im (kleineren) Stapel A genau $52 - b$

Karten liegen. Wie groß b ist, erfährst du beim Aufzählen, und nur dazu ist die Verteilung auf drei kleinere Päckchen überhaupt gedacht. Wir werden im folgenden A als einen Stapel ansehen.

Wir nehmen weiter an, daß unter diesen b Karten r rote sind. Dann muß dieser Stapel zwangsläufig $b-r$ schwarze Karten enthalten. Da aber insgesamt 26 rote Karten im Spiel sind, müssen im Stapel A $26-r$ rote Karten sein.

Vergleicht man nun diese beiden Angaben, so sieht man: Stapel B enthält $b-r$ schwarze Karten.

Stapel A enthält $26-r$ rote Karten.

Da b größer als 26 ist, ist auch $b-r$ größer als $26-r$, und zwar um genau so viel, wie der Unterschied von b und 26 beträgt, in unserem Beispiel $31 - 26 = 5$.

Probiere dieses Kunststück am besten gleich praktisch aus. Es ist weniger schwierig, als es den Anschein hat. Vom Ergebnis wirst du überrascht sein. Du kannst ein Spiel mit 52 und auch ein solches mit 32 Karten benutzen (hier muß dann 16 von 32 subtrahiert werden). Wenn du daran Gefallen findest – und das glaube ich bestimmt –, wirst du die folgenden beiden Tips zur Verfeinerung der Vorführung und zur Verschlüsselung des Trickgeheimnisses sicherlich gut brauchen können.

Laß vor deiner Schlußbehauptung den Zuschauer eine beliebige Karte der Päckchen umdrehen. Schon weißt du, was du zu sagen hast. Ist es beispielsweise eine rote Karte, lautet deine Behauptung: „Im großen Paket befinden sich 5 rote Karten mehr als schwarze in den drei anderen Päckchen!“ Auf diese Weise hast du deine Vorhersage geschickt getarnt, und der Zuschauer ist davon überzeugt, daß er ganz allein sogar

die Farbe bestimmt hat. Ein wahres Wunder also. Bei einer zumeist immer geforderten Wiederholung des Experiments zeigst du dieses statt mit Farben mit Bild- und Pointkarten. Für den Zuschauer ergibt sich daraus anscheinend eine ganz andere Situation. Tatsächlich jedoch ändert sich am Ablauf nichts. Zu diesem Meistertrick gibt es noch eine ganz einfache Variante. Hier ist sie:

Die rätselhaften Kartenpäckchen

Du legst einen verschlossenen Briefumschlag auf den Tisch und sagst, daß dieser eine Vorhersage enthält. Außerdem übergibst du einen Zettel mit einer schriftlichen Anweisung und bittest, daß ein Zuschauer danach verfährt. Auf dem Zettel steht folgendes:

Bilde mit der von dir ganz beliebig gewählten Menge Karten eines Spiels drei Päckchen, die aber alle *die gleiche (aber mehr als drei)* Kartenanzahl enthalten sollen! Lege danach von den beiden äußeren Päckchen je drei Karten auf das mittlere! Zähle jetzt die Anzahl der Karten des linken Päckchens und nimm aus dem mittleren so viele weg, wie nötig wäre, das linke Päckchen auf die doppelte Anzahl zu bringen! Die fortgenommenen Karten verberge in der Tasche!

Du hast dich vorher vom Geschehen abgewandt oder, noch besser, den Raum verlassen. Wenn du wieder erscheinst, nennst du bei „konzentriertem“ Nachdenken sofort die Anzahl der Karten, die das Mittelpäckchen enthält: Es sind 9. Aber das hast du bereits gewußt, bevor das Experiment begann, denn wenn die Zuschauer den Briefumschlag öffnen, steht auf dem darin verwahrten Zettel ebenfalls die Zahl 9.

Erklärung: Dazu bezeichnen wir die drei Päckchen

mit A B C und drücken in Zahlen aus, was der Text angibt.

1. Beispiel: In jedem Päckchen befinden sich 7 Karten.

A	B	C
7	7	7

Von den beiden äußeren Päckchen werden je 3 Karten auf das mittlere Päckchen gezählt!

A	B	C
$(7 - 3)$	$(3 + 7 + 3)$	$(7 - 3)$
(4)	(13)	(4)

Vom mittleren Päckchen werden so viele Karten fortgenommen wie nötig wäre, das linke Päckchen auf die doppelte Zahl zu bringen. Die fortgenommenen Karten werden in der Tasche verborgen.

$$\begin{array}{c} B \\ (13 - 4 = 9) \end{array}$$

Du bist also sofort in der Lage, die Zahl der im Mittelpäckchen B verbleibenden Karten mit 9 anzugeben, obwohl du das Geschehen nicht beobachten konntest.

Daß das kein Zufall ist, zeigt sich, wenn wir statt der Zahlen Variable benutzen:

A	B	C
a	a	a
$a - 3$	$a + 6$	$a - 3$

$$\begin{aligned} & a + 6 - (a - 3) \\ &= a + 6 - a + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$



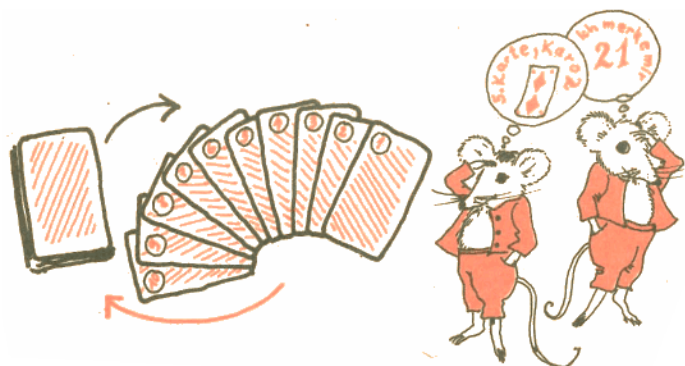
Ich möchte noch den Hinweis geben, dieses Kunststück ja nicht zu wiederholen; denn immer wird das Ergebnis 9 sein, und das Geheimnis wollen wir ja für uns behalten.

Ein schwieriges Experiment

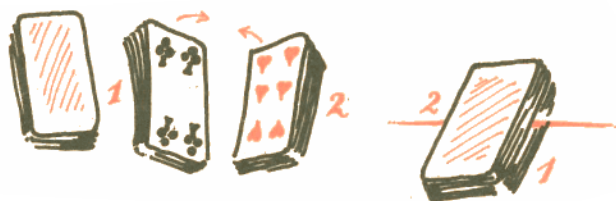
Du bittest einen Mitspieler darum, ein Kartenspiel mit 52 Blatt gut zu mischen und sich zu vergewissern, daß dieses in jeder Beziehung einwandfrei ist. Danach zeigst du, laut zählend, zehn Karten vor und forderst dabei den Mitspieler auf, sich davon irgendeine Karte heimlich zu merken und auch die Zahl, auf welche diese Karte fällt. Jetzt wird ein zweiter Zuschauer um seine Mitarbeit ersucht. Er soll eine Zahl zwischen 15 und 30 laut nennen, die du deutlich wiederholst, und zwar mit dem Befehl, daß an dieser Stelle des Spiels die vom ersten Mitspieler gedachte und nur ihm allein bekannte Karte erscheinen möge. Das Nachzählen bestätigt den Erfolg dieses Experiments.

Erklärung: Du übernimmst das vom Zuschauer gemischte und geprüfte Spiel und zählst die zehn Karten auf folgende Weise vor: Deine linke Hand hält das Spiel mit der Bildseite nach unten. Die rechte Hand zieht vom Rücken des Spiels einzeln zehn Karten ab, aber so, daß deren ursprüngliche Lage nicht verändert wird; die zweite Karte kommt wieder vor die erste, die dritte vor die zweite und so fort. Die rechte Hand erfaßt also das Päckchen mit den abgezogenen Karten derart, daß beim Abzählen jede Karte umgewendet und dem Mitspieler deutlich gezeigt wird, damit dieser sich eine Karte und die darauf fallende Zahl merken kann.

Wenn die zehn Karten abgezählt sind, legst du sie wieder auf das Paket zurück und forderst einen zweiten Mitspieler auf, eine Zahl zwischen 15 und 30 zu denken. Danach nimmst du das Spiel hinter den Rücken und bittest die beiden Mitspieler darum, sich einige Zeit stark auf ihre Zahlen zu konzentrieren.



Dabei siehst du sie scharf an und hast jetzt Gelegenheit, die Karten hinter deinem Rücken in zwei etwa gleich große Päckchen zu teilen, diese *Bildseite gegen Bildseite* zu legen und das Paket umzuwenden. Wenn die linke Hand das geschlossene Paket nach vorn bringt, liegt das vorher obere Päckchen jetzt unten.



Du faßt das bisher Geschehene noch einmal kurz zusammen und betonst dabei, daß die beiden Mitspieler ihre Zahlen nur gedacht haben. Niemand kann also den Namen der Karte und die gedachten Zahlen wissen.

Du wendest dich an den ersten Mitspieler und fragst: „Welche Zahl hattest du gewählt?“ (Als Beispiel nehmen wir an, er nennt die Zahl 5). „5?“ sprichst du, „ich habe es gewußt und deiner Karte den Befehl gegeben, diesen Platz im Spiel zu verlassen!“ Zur De-



monstration zählst du vier Karten auf den Tisch und wendest die fünfte um; es ist tatsächlich eine ganz andere.

Jetzt fragst du den zweiten Mitspieler nach seiner gedachten Zahl. (Wir nehmen an, er nennt 21). „21? Das habe ich schon vorher gewußt. Wir wollen also nachsehen, ob die vom ersten Mitspieler gemerkte Karte an dieser Stelle im Spiel angekommen ist.“



Vorher ziehst du sofort, wenn dir die zweite Zahl genannt wird, von dieser blitzschnell im Gedächtnis die Zahl des ersten Mitspielers ab und weißt so,

welche Anzahl Karten noch auf den Tisch gezählt werden müssen, ehe du das Paket unbemerkt umdrehen mußt.

In unserem Beispiel ist die Rechnung 21—5; demnach müssen insgesamt sechzehn Karten vor dem Umdrehen abgelegt sein. Du setzt also das Abzählen zu den bereits auf dem Tisch liegenden fünf Karten fort: 6, 7, 8... bis 15. Die 16. Karte behältst du in der Hand und erzählst: „Die Sechzehn ist eine Unglückszahl. Ist dies etwa zufällig deine gedachte Karte?“ Du wendest diese um und legst sie, da der Zuschauer verneint, offen zu den bereits abgelegten Karten.

Dieses kleine Zwischenspiel ist unbedingt notwendig, um das nun erforderliche Umdrehen des restlichen Kartenpaketes unbemerkt vornehmen zu können. Das geht folgendermaßen. Wenn du die auf die „Unglückszahl Sechzehn“ fallende Karte vorzeigst und ablegst, verweist du auf die Schwierigkeit des gesamten Experiments. Dabei hast du deine linke Hand zur Seite herabgenommen und zugleich den Handrücken nach vorn gedreht. Dadurch wird das in der linken Hand gehaltene Spiel unauffällig umgewendet.



Nach diesem Ablenkungsmanöver zählst du also weiter: ... 17, 18, 19, 20. Die „einundzwanzigste“ Karte legst du abseits von den anderen mit der Bildseite



nach oben auf den Tisch; es ist die vom ersten Zuschauer gedachte.

Das Kunststück wirkt ganz überraschend und beeindruckt die Zuschauer außerordentlich. Vielleicht liest es sich in der Beschreibung ein wenig kompliziert. Aber schon beim ersten Probieren wirst du herausfinden, daß dies alles tatsächlich ganz einfach und ohne jede Schwierigkeit abläuft. Und den kleinen Trick mit dem Umwenden des Paketes beherrscht du nach ein wenig Übung garantiert auch bald.

Es ist zu empfehlen, dieses schöne Kunststück am Ende des Programms zu bringen und danach die Karten in die Tasche zu stecken, damit niemand bemerkt, daß ein paar Karten verkehrtherum liegen.

Mathematisch gesehen ist dieser schöne Kartentrick ein reines Abzählkunststück. Aber niemand sieht darin ein solches, denn jedermann konzentriert sich auf die Tatsache, daß du eine dir unbekannte gewählte Karte genau an der Stelle des Spieles aufdeckst, die ein Zuschauer durch eine von ihm unbeeinflußt genannte Zahl bestimmt hat. Durch heimliches Gegenüberlegen der beiden Spielhälften und Umwenden des Päckchens kommt diese schöne Kombination von

Trick und Abzählen zustande. Und niemand kann dieses Kunststück nachmachen, wenn er den Trick nicht kennt.

Wie geht denn das?

Das kann doch nicht mit rechten Dingen zugegangen sein. So etwas gibt es nicht. — Die Zuschauer haben alles genau verfolgen können, der Mitspieler führte jeden Schritt der Handlung selbst aus, und der Kartenkünstler konnte nichts, aber auch rein gar nichts sehen. Durch verwirrendes Umzählen wurde jeder Ansatz einer Spur verwischt. Trotzdem findet der Mitspieler zum Schluß gerade diejenige Karte in seiner Hand, die er anfangs unbeeinflußt auswählte. Eine absolut rätselhafte Angelegenheit.

Erklärung: Bei diesem Kunststück sollst du deinen Tischgästen sogar den Rücken zukehren. Du tust dies mit dem ausdrücklichen Hinweis, daß ein Mitspieler die folgende Handlung absolut unbeeinflußt und völlig selbständig ausführen wird. Meinetwegen kannst du dir sogar die Augen verbinden lassen.

„Ich will überzeugend beweisen, daß ich zu diesem schwierigen Experiment weder Fingerfertigkeit noch undurchschaubare Manipulationen anwende“, betonst du und forderst deinen Mitspieler auf, das Folgende langsam und ohne Hast auszuführen:

„Mische bitte das Kartenspiel und hebe es mehrmals ab! Wähle dir aus dem Spiel fünf Karten ganz nach Belieben aus und lege das Restspiel auf den Tisch; wir benötigen es nicht mehr. Mische diese fünf Karten mit der Bildseite nach unten gut durch! Wenn du damit fertig bist, dann sieh dir die ganz zufällig auf

das Fünferpäckchen geratene oberste Karte an, zeige sie den anderen Gästen, merke sie genau und lege sie wieder verdeckt auf die anderen vier.

Alle Anwesenden werden mir sicher bestätigen, daß ich das bisher Geschehene weder verfolgen noch irgendwie beeinflussen konnte. Auch die nächsten beiden Handlungen sollen unter diesen absolut einwandfreien Versuchsbedingungen vollzogen werden. Ich kann also weder sehen noch beeinflussen, was weiter geschieht.“

Du wendest dich wieder an den Mitspieler und bittest ihn: „Denke jetzt eine Zahl zwischen 1 und 52! Zähle nunmehr die gedachte Zahl still für dich mit den fünf Karten ab, und zwar so, daß du für jede Zahl eine Karte von der Oberseite des Fünferpäckchens abnimmst und unter das Päckchen legst.“ Damit es an dieser Stelle keine Schwierigkeiten gibt, ist es ratsam, diese Anweisung vor der Ausführung zur Kontrolle zu wiederholen.

Hat der Mitspieler das Umlegen der Karten bewältigt, drehst du dich wieder um, läßt dir die fünf Karten überreichen und stellst fest, daß mit dem Umlegen jede Spur beseitigt sein dürfte. Oder etwa nicht??!! Jedenfalls wendest du das Fünferpäckchen mit der Bildseite zu dir hin, siehst dir Karte für Karte nachdenklich an. Dabei schiebst du sie einzeln von der linken in die rechte Hand. Das ist sehr wichtig, denn dadurch wird die ursprüngliche Reihenfolge der Karten für die Zuschauer unbemerkt verändert; anscheinend hast du dir die fünf Karten eben nur einmal kurz angesehen.

Unschlüssig gibst du das Kartenpäckchen wieder dem Mitspieler zurück und bittest ihn, das eben von ihm

vollzogene Abzählen noch einmal zu wiederholen. Er soll also entsprechend seiner gedachten Zahl wieder Karten von oben einzeln abnehmen und unter das Päckchen legen. Wenn er damit fertig ist, muß er *noch eine* Karte von oben nach unten tun. Er soll glauben, daß es auf eine Karte mehr oder weniger nicht ankäme. Tatsächlich aber hat er seine gedachte Zahl plus 1 ($x + 1$) abgezählt, was für das Gelingen des Experiments unbedingt notwendig ist.

Durch dieses wiederholte Umzählen ist die vom Mitspieler gemerkte Karte ganz automatisch zur vierten des Fünferpäckchens geworden. Nunmehr kannst du sorglos zum Schluß des Experiments kommen.

Dazu laß den Mitspieler die oberste Karte abnehmen und wieder unter die vier anderen legen. Mit der nächsten Karte tut er dasselbe. Die jetzt folgende Karte muß er auf den Tisch tun. Diese Handlung wird wiederholt (2 Karten von oben einzeln abnehmen und unter die anderen legen, die nächste auf den Tisch usw.). Zum Schluß tut dies der Mitspieler nur noch mit zwei verbliebenen Karten, von denen schließlich eine einzige in seiner Hand bleibt.



Jetzt laß den Mitspieler seine gemerkte Karte nennen. Wenn er die in seiner Hand befindliche letzte Karte umdreht, ist es die gemerkte.

Niemand wird in der Lage sein, hinter das Geheimnis zu kommen.

Zahl – Karten

Du hast dem von Kartenkunststück zu Kartenkunststück gespannter werdenden Publikum erklärt, daß der nun folgende Trick in deiner Abwesenheit vorbereitet wird. Nach den notwendigen Instruktionen wirst du den Raum verlassen, und wenn man es wünscht, kann dich eine dazu ausgewählte Kontrollperson sogar im Nebenraum beaufsichtigen.

In dieser Zeit muß folgendes geschehen: Das Kartenspiel ist zu mischen und danach abzuheben. Ein Zuschauer soll die Karten eines der beiden abgehobenen Päckchen – es sollen auf jeden Fall mehr als neun sein – zählen (z. B. 25) und dann diese Zahl durch Karten dieses Päckchens darstellen: in unserem Fall zwei Karten links und fünf Karten rechts verdeckt (mit der Bildseite nach unten) auf den Tisch legen, für jede Ziffer also die entsprechende Anzahl Karten. Diese werden dann mit einem Tuch oder einer Zeitung abgedeckt. Schließlich soll der mitwirkende Zuschauer noch eine Anzahl Karten zwischen eins bis neun von demselben abgehobenen Päckchen nehmen und in seine Tasche stecken.

Wenn man dich wieder ruft, sind alle für eine mögliche Lösung notwendigen Anhaltspunkte beseitigt. Du läßt dir daher das Restpäckchen geben, welches in den Augen der Zuschauer nie der Schlüssel zum Geheimnis sein kann, blätterst dieses durch, studierst an-

scheinend die Kartenbilder und nennst danach die Anzahl Karten, die der Mitspieler in seine Tasche gesteckt hat.



Erklärung: Hinter diesem Kunststück wird man nicht ohne weiteres ein mathematisches Prinzip vermuten. Dennoch ist die Sache ganz leicht, wenn man weiß, daß sich jede natürliche Zahl aus der Anzahl a ihrer Zehner und der Anzahl b ihrer Einer als $10a + b$ darstellen läßt.

So ist zum Beispiel für 25

$a = 2$ (2 Zehner) und

$b = 5$ (5 Einer)

$$10a + b = 25$$

Beim „Darstellen“ dieser Zahl werden nun zuerst a , dann b Karten aus dem Päckchen entnommen. Das sieht also so aus

$$10a + b - a - b = 9a.$$

Wie man sieht, kommt immer ein Vielfaches von 9 heraus. Und da schließlich weniger als 9 Karten weggenommen werden, muß nur bis zum nächstgrößeren Vielfachen von 9 ergänzt werden.

Dich interessiert also überhaupt nicht, wie viele Karten der Zuschauer abgehoben hat. Entsprechend deiner Anordnung hat er für jede Ziffer des ausgezählten Päckchens (in unserem Beispiel 25) die entsprechende Anzahl Karten auf den Tisch gelegt. Dadurch bleibt in jedem Falle ein Rest übrig, welcher durch 9 teilbar ist. Außerdem hat er noch einige Karten (weniger als 9) in seine Tasche gesteckt. Damit ist die Lösung für dich vorbereitet; denn wenn du den Raum wieder betrittst und das Restpäckchen studierst, zählst du die Restkarten und kannst so ganz leicht feststellen, welche Anzahl an Karten bis zum nächsten Vielfachen von 9 fehlt. Das ist die Zahl der Karten, welche der Zuschauer in seiner Tasche hat.

Das Studieren der Kartenbilder ist nur eine Ablenkung; denn niemand soll merken, daß du statt dessen die Restkarten zählst.

Nun kennst du das Trickgeheimnis. Es ist so einfach und einleuchtend. Eben in dieser Einfachheit liegt die Genialität guter Kartenkunststücke.

$$4 - 1 = 4$$

Eine ganz unmögliche Gleichung, wirst du sofort sagen. Streng mathematisch gesehen hast du natürlich recht, und die Mathematik irrt auch nicht, es sei denn, daß Rechenfehler zu einem falschen Ergebnis führen. Und doch wirst du gleich beweisen können, daß $4 - 1 = 4$ ist.

Du hast die Gleichung $4 - 1 = 4$ an die Tafel geschrieben, behauptest allen Ernstes, daß diese Rechnung auch stimmt, und bietest mit dem Grundton tiefster Überzeugung den Beweis an. Wie kann dies bei so kleinen Zahlen überzeugender geschehen als mit

greifbaren Gegenständen. Du verwendest dazu also Spielkarten.

Vier Karten werden deutlich vorgezählt. Davon legst du eine auf den Tisch oder übergibst sie einem Zuschauer. Man wird dir beipflichten, daß jetzt nur noch drei Karten in deiner Hand sein können. Du zählst vor: Es sind immer noch vier. $4 - 1 = 4!$? Zweifelt da noch jemand? Natürlich bist du in der Lage, diesen Beweis zu wiederholen, und übergibst nochmals eine Karte dem Zuschauer – er besitzt jetzt bereits zwei. Wieder zählst du vor und hast immer noch vier Karten. Und für die ganz Kritischen zeigst du die Sache noch ein letztes Mal. Am Ende sind und bleiben es vier Karten.

$4 - 1 = 4!$ – aber nur mit Trick.

Erklärung: Für diesen kleinen mathematischen Scherz benötigst du sieben beliebige Spielkarten, die vorher wie folgt zu legen sind: Zuunterst kommt eine Karte mit der Bildseite nach oben, darauf legst du zwei Karten mit der Bildseite nach unten und darauf noch vier Karten wieder mit der Bildseite nach oben. Die Zeichnung macht das deutlich.



Das Päckchen nimmst du in die linke Hand und erfaßt es an den Schmalseiten. Mit der Rechten ziehst du Karte für Karte deutlich ab, wendest sie dabei um (Spielrücken nach oben) und legst sie mit dem Rücken hinter das Päckchen in deiner linken Hand. Wenn du das viermal getan hast, erscheint wieder eine Karte mit dem Spielrücken nach vorn. Die Zuschauer glauben, es wäre die erste abgezählte und dabei umgedrehte Karte; in Wirklichkeit ist es die fünfte Karte des Päckchens, die ja bereits von Anfang an verkehrtherum liegt. Diese als erste umgedreht erscheinende Karte ziehst du ab und legst sie auf den Tisch oder übergibst sie einem Zuschauer. Es erscheint eine weitere verkehrtherum liegende Karte (die sechste des gelegten Päckchens), und damit ist die Täuschung vollkommen.

Beim Probieren wirst du es merken und selbst überrascht sein.

Jetzt drehst du das Paket wieder herum (mit der Bildseite nach vorn), beginnst erneut zu zählen und legst dabei abermals Karte für Karte von vorn verkehrt hinter das Päckchen, bis wieder ein Spielkartenrücken erscheint. Du hast nochmals vier Karten vorgezählt, obwohl es eigentlich nur noch drei sein dürften.

Du lieferst also den Beweis, daß $4 - 1 = 4$ ist, zum zweiten Mal. Jetzt mußst du das Päckchen wieder wenden, aber diesmal eine Karte *nach dem Umdrehen unter dem Paket hervorziehen* und auf den Tisch legen. Wieder zählst du vor — es bleiben immer noch vier Karten übrig.

Ein weiteres Mal demonstrierst du die Sache (jetzt eine Karte von der Oberseite abziehen — wie bei der

ersten Tour) und hast immer noch vier Karten in der Hand, die du nun einzeln auf den Tisch zählst.

Das Kunststück ist im Grunde ganz einfach, wenn auch die Beschreibung ein wenig kompliziert erscheint. Verkenne diesen hübschen Trick nicht. Viele Zauberkünstler führen ihn vor. Er ist von guter Wirkung und beruht allein auf der besonderen Legart, die durch Umzählen den Gang der Handlung ermöglicht.

Karten würfeln

Du kommst nunmehr zum Abschluß deiner Vorführung verblüffender Kartenkunststücke, nimmst ein Spiel mit 52 Karten zur Hand und holst noch drei Spielwürfel aus der Tasche. Beides legst du auf den Tisch, bittest einen Zuschauer um sein Mitwirken, drehst dich um und gibst die folgenden Anweisungen:

Zunächst das Kartenspiel gut mischen. Danach einen der drei Spielwürfel auswählen und mit diesem einen Wurf ausführen. Die zufällig gewürfelte Augenzahl merken (evtl. aufschreiben). Jetzt das Kartenspiel in die Hand nehmen, soviel Karten abzählen, wie die



geworfene Augenzahl anzeigt, und die letzte abgezählte Karte ansehen und gut merken. Die Lage der Karte darf jedoch nicht verändert werden.

Bis hierher hast du vom Geschehen nichts sehen können und bittest darum, daß man dir das Kartenspiel in die auf dem Rücken gehaltenen Hände legen möge. Wenn das erfolgt ist, gibst du die weiteren Anweisungen:

Mit den beiden anderen Würfeln ebenfalls einen Wurf ausführen. Danach alle drei Würfel so *nebeneinander* legen, daß die gewürfelten Augenzahlen oben liegen, aber so, daß nicht zu erkennen ist, in welcher Reihenfolge die Würfe ausgeführt wurden.

Ist dies geschehen, drehst du dich um, legst das Kartenspiel neben die drei Spielwürfel, läßt dir den Würfel geben, der für den ersten Wurf benutzt wurde, steckst ihn in die Tasche, wendest dich wieder an deinen Mitspieler und sagst: „Du wirst doch zugeben müssen, daß ich unmöglich wissen kann, wieviel Augen beim zweiten Mal gewürfelt wurden. Bitte addiere die Augen der beiden noch auf dem Tisch liegenden Würfel, und schaue dir die an der Stelle der errechneten Zahl im Spiel liegende Karte an; es ist die von dir gemerkte Karte!“

Erklärung: Zunächst geht alles so vor sich, wie es beschrieben ist. Das Kartenspiel liegt auf dem Tisch und wird von einem Zuschauer gemischt. Du nimmst drei Spielwürfel, legst diese neben das Kartenspiel, drehst dich um, läßt deinen Mitspieler mit einem Würfel würfeln und sich anschließend die entsprechende Karte ansehen. Hat er z. B. eine 5 gewürfelt, so sieht er sich die fünfte Karte von oben im Spiel an, ohne ihre Lage zu verändern.

Jetzt übernimmst du das Kartenspiel wie geschildert, gibst dem Mitspieler die Anweisung, auch noch mit den beiden anderen Würfeln einen Wurf zu tun und danach alle drei Würfel *nebeneinander* auf den Tisch zu legen. Während diese Handlung ausgeführt wird, zählst du schnell elf Karten vom Spiel ab, und zwar so, daß die oberste Karte des Spielpaketes zur untersten des abgezählten Päckchens wird, die zweite des Spielpaketes zur zweituntersten usw. Diesen Vorgang nennt man Umzählen. Das Päckchen mit den umge-



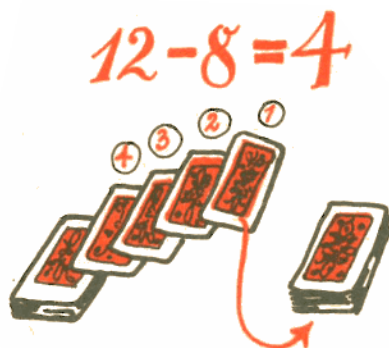
zählten elf Karten legst du dann wieder auf das Spiel zurück, drehst dich um und zählst rasch die Augenzahl der drei Würfel zusammen.

$$1 + 2 + 5 = 8$$

Was jetzt kommt, muß zügig gehen.

Ausgangspunkt für alle weiteren Handlungen deinerseits ist die Schlüsselzahl 12! Du vergleichst die er-

rechnete Augenzahl der drei Würfel mit dieser Schlüsselzahl. Ergibt die Addition eine niedrigere Summe als 12, bildest du schnell die Differenz zwischen der Würfelzahl und der 12 und zählst die dieser Differenz entsprechende Anzahl Karten *von oben nach unten* vom Spiel ab. Ist z. B. die Summe der drei Würfel 8, dann zählst du hinter deinem Rücken vier Karten ab, $12 - 8 = 4$, und zwar von oben nach unten. Ergibt die Addition der Augenzahl der Spielwürfel eine größere Summe als die Schlüsselzahl 12, so mußt du die der



Differenz entsprechende Anzahl Spielkarten *von unten nach oben* bringen. Ergibt jedoch die Summe der Spielwürfel zufällig 12, dann kannst du das Kartenspiel sofort neben die drei Würfel legen. Hier ist dann ein Umlegen von Karten nicht mehr erforderlich.

Alles das geschieht in dem Augenblick, da du dich kurz dem Spielgeschehen zuwendest und fragst, mit welchem Würfel zuerst geworfen wurde. Die Kartenanzahl, die umgelegt werden muß, ist meistens nicht sehr hoch, so daß es schnell geht.

Zum Schluß legst du das Spiel neben die Würfel, steckst den angegebenen Würfel in die Tasche und läßt den Mitspieler seine Karte im Spiel finden.

INHALTSVERZEICHNIS



SCHARLATANE – RECHENMEISTER – RECHENKÜNSTLER

Auf den Spuren der Menschheitsgeschichte	5
Vom Aberglauben zum Wunderglauben	13
Mathematik und Teufelsglaube	23
Kuriositäten	27
Den Rechenkünstlern auf die Finger geschaut	40

ZAHLIEWUNDER – ZAUBERZAHLEN

Phönixzahlen und Zahlenspiegeleien	56
Mancherlei so nebenbei	71
Das Rätsel der magischen Quadrate	82

IN DIE KARTEN GESCHAUT

Merkwürdige Zufälle	113
Den Geheimnissen auf der Spur	123
Kartentricks mit Pfiff	132







FREIZEITREIHE

Im Reich der Zahlen und Gleichungen geht es zwar logisch und nach strengen Gesetzmäßigkeiten zu, aber – auch diese Welt hat ihre Romantik. Das Buch vermittelt dem, der in ihr „Zahlenlabyrinth“ eindringt, interessante Begegnungen und Entdeckungen – die Zahlenmagie eröffnet sich ihm. Aber nicht nur zum Knobeln und Forschen wird der Leser angeregt, er wird auch auf anspruchsvolle Weise unterhalten: Er schließt Bekanntschaft mit den Phönixzahlen und ihren erstaunlichen Zahlenbeziehungen, erfährt wie man zu Kreiszahlen kommt, dringt in die Geheimnisse magischer Quadrate ein und lernt Tricks mit Spielkarten kennen, solche selbstverständlich, die auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten beruhen.

Der Kinderbuchverlag Berlin