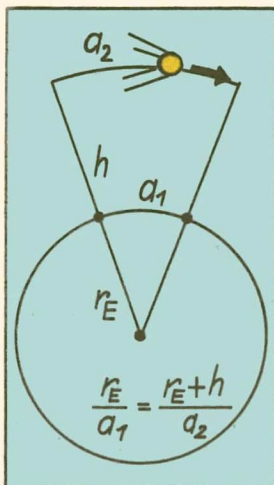
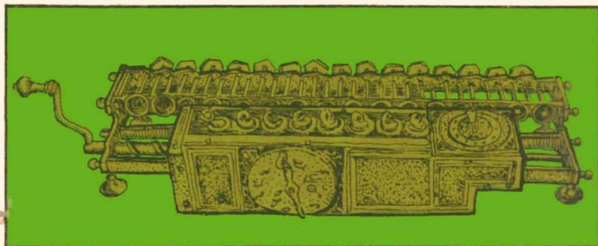


FREIZEITREIHE



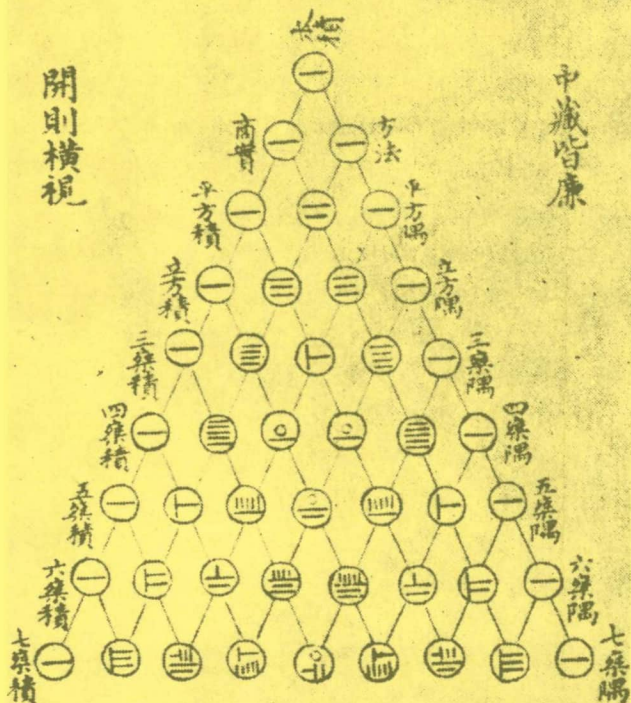
Roland Fiedler
Streifzüge durch die
Mathematik



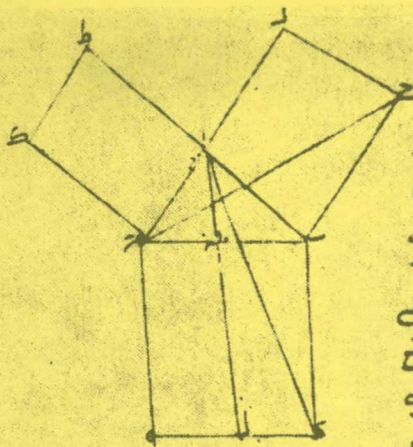
古法七藥方圖

中藏皆廉

開則橫視



一藥	二藥	三藥	四藥	五藥	六藥	七藥
----	----	----	----	----	----	----



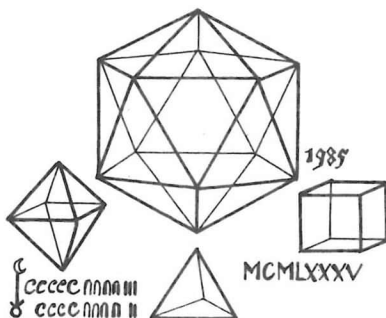
سطح
لبا وے لغتها
ویشی وک
نیشی آن سطح
لبا وے سطح
حک کا ذن مربع
لمبا وے مربع
س آ آ وک

ما اردو سا و انوک و ہذا انک کلکف با لودس و یکس ان
تخلف و مزج الموعات الثلث بحسب جہات اضلاع
الثلث و یجمعدنک و تکتیہ او جہا اذ کان لکل جہا انا و
قرب الاثنین لی الاثنین لی الاثنین تائیتہ و یجفف ایسات
من الاضلاع فنکتہ الزائیں والہا رہا لا یخرج خط ال
الموازیات و رہا لا یجمل مربع التمدین علیہا او لا یجملات
اجلاک بجل مربع علیہا او فیصلی احدهما واما اشیر اما
اکثر فکنت وان کان متوقفا الی تطول یا قوتک اذا اردنا
انما یكون مربع احدہ فیصلی الفامہ فی الجہۃ اللہ ضرب من الفتر
اعنی یكون منطقی علی الثلث و لکن الثلث و مربع و تر القابل
و خط ال الموازی لھا و المنطقی مربع اب و ہوتا
فی اما ال اب وے جہا او یكون اطل منہ او افطر البقع
تر بحسبها اما منطقی علی جہا او خارجہ علی جہا او علی
و لھا ہذا و ذان راوی اب جہا جہا یا بیات و زاویہ

Roland Fiedler

Streifzüge durch die Mathematik

Mathematikaufgaben aus 3 Jahrtausenden



Der Kinderbuchverlag Berlin

Einband innen – linke Seite: Aus einer chinesischen Handschrift (um 1300) – das später nach dem französischen Mathematiker Blaise Pascal benannte Zahlendreieck.

Einband innen – rechte Seite: Aus einer arabischen Handschrift des 14. Jahrhunderts – der Satz des Pythagoras.

Der schwarze Punkt vor einer Aufgabenstellung bezeichnet die Aufgaben, deren Lösungen im Buch angegeben sind

Einband und Illustrationen: Elke Bullert

Sachzeichnungen: Heinz Grothmann

Karten: Joachim Arfert



1. Auflage 1984

© DER KINDERBUCHVERLAG BERLIN – DDR 1984

Lizenz-Nr. 304 – 270/101/84 – (20)

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,

Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

LSV 7841

Für Leser von 11 Jahren an

Bestell-Nr. 631 726 5

00680

Wann kommt das Hochwasser?

Die Anfänge der Mathematik

Es war vor etwa 12000 Jahren, als die ersten Wohnsiedlungen der Menschen mit festen Hütten entstanden. Bisher in (kleineren) Sippen vereint, schlossen sie sich nun zu (größeren) Stämmen zusammen. Die Stammesangehörigen teilten untereinander die Arbeit auf: Die Ackerbauern bestellten die Felder und ernteten das Korn, welches sie ausgesät hatten. Die Viehzüchter hüteten die Schaf- und die Ziegenherden.

Eine wichtige Voraussetzung für diese neue Lebensweise blieb jedoch eine gute Ernte und eine erfolgreiche Tierhaltung. Die Stammesältesten mußten deshalb eine wichtige Aufgabe erfüllen: Sie bestimmten die richtigen Termine für



Abb. 1 Älteste Darstellung altägyptischer Haustiere

Aussaat und Ernte. Dazu beobachteten sie den Sternhimmel, die Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten. Obwohl unsere Vorfahren noch keine Vorstellungen von den Ursachen der Planetenbewegung besaßen, konnten sie aus der Stellung der Himmelskörper den Zeitpunkt der Bestellung der Felder ableiten.

Schon bald begannen zwischen verschiedenen Stämmen erste Handelsbeziehungen. Man tauschte beispielsweise Getreide gegen Ziegen oder Schafe. Da keiner der Handelspartner betrogen werden wollte, mußten die Stammesmitglieder zählen und messen können. Nur so ließen sich Getreidemengen und die Anzahl der Tiere richtig feststellen. Erstmalig in der menschlichen Entwicklung entstand die Notwendigkeit, sich mit einfachen mathematischen Problemen zu befassen.

Noch heute wohnen auf entlegenen Inselgruppen und in schwer zugänglichen Gebieten Stämme, deren Entwicklungsstand dem der Steinzeitmenschen gleichkommt. Forscher, die die Lebensgewohnheiten dieser Stämme studierten, lernten auch die Art und Weise des Zählens kennen. Hieraus ließen sich wichtige Schlußfolgerungen über die mathematischen Kenntnisse unserer Vorfahren ziehen. In einigen Stämmen konnten die Menschen nur bis 4 oder 6 zählen. Größere Mengen erhielten die Bezeichnung „viel“. Oftmals hing das Zahlwort auch davon ab, welche Gegenstände gezählt wurden. So bezeichnen die Bewohner der Fidschiinseln im Stillen Ozean 10 Kokosnüsse mit dem Wort „karo“, 10 Kähne dagegen mit „bole“.

Zum Zählen umfangreicherer Mengen nahmen unsere Vorfahren die Finger einer Hand oder beider Hände zu Hilfe. Mit Sicherheit führt unser Zehnersystem der Zahlen auf die Anzahl der Finger zurück. Schon vor Jahrtausenden diente die 10 als Grundzahl, mit der andere Zahlen ausgedrückt werden konnten. So läßt sich die 9 durch

$$9 = 10 - 1$$

darstellen; die 14 folgt dementsprechend zu

$$14 = 10 + 4$$

oder die 20 als Summe oder Produkt:

$$20 = 10 + 10 = 2 \cdot 10.$$

Unsere Sprache bestätigt die Zusammensetzung der Zahlen mittels der Grundzahl 10:

Vierzehn ist gleich vier – und – zehn.

Zwanzig ist eine Abkürzung von zwei – mal – zehn.

Manche Stämme rechneten und zählten in einem ähnlichen System, dem Fünfersystem. Hier bildet die 5 die Grundzahl:

$$6 = 5 + 1$$

$$9 = 5 + 4$$

$$17 = 3 \cdot 5 + 2.$$

Auch das Fünfersystem kommt in der Sprache zum Ausdruck. Bei den Bewohnern Neuguineas, einer Insel nordöstlich Australiens, heißt

$$1 = \text{tagogi}$$

$$2 = \text{ruag'a}$$

$$3 = \text{tonug'a}$$

$$4 = \text{ruag'a-ma-ruag'a} (= 2 + 2)$$

$$5 = \text{ura-i-ga}.$$

Die 6 als Summe von 5 und 1 trägt den Namen

$$6 = \text{ura-g'ela-tagogi}$$

und ist leicht als Zusammensetzung der Wörter „ura-i-ga“ und „tagogi“ zu erkennen. Die 7 ergibt sich aus 5 und 2:

$$7 = \text{ura-g'ela-ruag'a}.$$

Der Name für die 11, zum Beispiel, ist bereits recht lang,

denn er setzt sich aus „ura-ruag'a-j-ga“ = $5 \cdot 2$ und „tagogi“ = 1 zusammen:

11 = ura-ruag'a-i-ga-au-ae-tagogi.

● Welche Zahl trägt die Bezeichnung „ura-g'ela-ruag'a-ma-ruag'a“?

Die Entwicklung des Zählens und Rechnens verlief in den einzelnen besiedelten Gebieten zu verschiedenen Zeiten und oftmals vollkommen unabhängig voneinander. Seinen Ausdruck findet das unter anderem in der unterschiedlichen Zählweise. So zählen die Einwohner einer Inselgruppe in der Torresstraße, südlich von Neuguinea gelegen, im Zweiersystem:

1 = urapun

2 = okosa

3 = okosa-urapun = $2 + 1$

4 = okosa-okosa = $2 + 2$

5 = okosa-okosa-urapun = $2 + 2 + 1$

6 = okosa-okosa-okosa = $2 + 2 + 2$.

Größere Zahlen erhalten die Bezeichnung „viel“.

Auch einem südostaustralischen Stamm dient die 2 als Grundzahl:

1 = enea

2 = petcheval.

● Wie lauten 3 und 4 in dieser Sprache?

Die Mayas wiederum, ein Volk auf der mexikanischen Halbinsel Yucatán, rechneten mit der Zahl 20 als Grundzahl! Offensichtlich zählten sie nicht nur mit den Fingern, sondern auch mit den Zehen.

Im alten Ägypten

„Vorschrift zu gelangen zur Kenntniss aller dunklen Dinge ... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen.“

Wer glaubt, jetzt ein Kapitel über die Zauberei aufgeschlagen zu haben, und hofft, in die „Schwarze Kunst“ eingewiesen zu werden, irrt sich. Mit diesen Worten beginnt ein 3600 Jahre altes – Mathematikbuch.

Es gehört zu den ältesten Schriften, die uns heute vom Entwicklungsstand der Mathematik im alten Ägypten berichten. Doch bevor wir uns dem Inhalt dieses Buches zuwenden, überlegen wir, mit welchen mathematischen Problemen sich die Menschen jener Zeit wohl befaßt haben könnten.

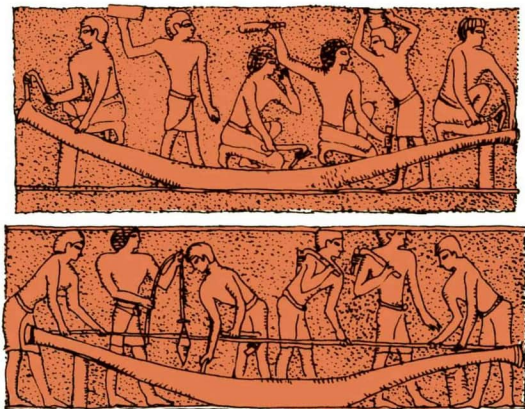


Abb. 2 Schiffbau im alten Ägypten

Im 3. Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung (wir schreiben dafür die Abkürzung v. u. Z.) erfolgte in Ägypten der Übergang von der Urgesellschaft zur ersten Klassengesellschaft.

Es bildete sich die Klasse der Ausbeuter und die der Ausgebeuteten. An den Ufern des längsten Stromes der Erde, des Nils, entstanden Dörfer und Städte. Durch die alljährliche Überschwemmung der Nilufer, bei der der Fluß Massen nährstoffreichen Bodens ablagerte, mit denen er sich auf seinem langen Weg durch Afrika beladen hatte, war fruchtbares Ackerland entstanden. Damit in den heißen Sommermonaten die Äcker nicht austrockneten, legten die Ägypter zahlreiche Bewässerungskanäle an. Schnell nahmen die Ernteerträge zu; die Bauern erzeugten mehr Nahrung, als sie verbrauchen konnten. Von diesem Mehrprodukt lebten nun andere: die Angehörigen der Ausbeuterklasse – Priester und Herrscher. Sie übten die Macht im Lande aus, besaßen Grund und Boden und herrschten über das Volk.

Da sie selbst nicht auf den Feldern arbeiteten, verfügten sie über ausreichend Zeit, die sie unter anderem zum Erwerb von Wissen und zur Beschäftigung mit der Kunst nutzten. Auch Beamte, die sogenannten Schreiber, besaßen umfangreiche Kenntnisse. Sie organisierten und leiteten die Arbeit. Von den Bauern trieben sie Steuern ein; sie beauftragten Baumeister und Zimmerleute zur Errichtung von Lagerhäusern für Getreide, von Wohnhäusern und anderen Bauwerken; nach den Überschwemmungen vermaßen sie das Land neu; sie ließen Schiffe bauen – kurzum, die Schreiber trieben das Volk zur Arbeit an und kontrollierten streng.

Das alles erforderte ein hohes Wissen. Um Land vermessen zu können, benötigten sie geometrische Kenntnisse. Die Höhe der Steuern richtete sich nach der Größe der Felder – also waren Flächenberechnungen notwendig. Das Bauwesen, aber auch die Anlage des Bewässerungssystems verlangte technische Fertigkeiten. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen.

Wenige Kilometer südwestlich von Kairo befinden sich riesige Bauwerke, die Pyramiden von Gizeh*, die Gräber ägyptischer Herrscher, die im 3. Jahrtausend v. u. Z. regier-

* Gizeh, ein kleines Dorf, liegt am Westufer des Nils.

ten. In eindrucksvoller Weise berichten diese Pyramiden von den unmenschlichen Leiden vieler Tausend Arbeitssklaven, aber auch vom Wissen und Können der Baumeister und Gelehrten.



Abb. 3 Königlicher Schreiber

Innerhalb von nur 20 Jahren schlugen Steinmetze 2300000 Gesteinsquader aus Felsen und Steinbrüchen. Alle Quader aneinandergelagt, ergäben eine Strecke von mehr als 2000 Kilometern! Kolonnen von Sklaven transportierten die tonnenschweren Brocken bis zu 700 Kilometer weit über glühend heißen Sandboden und mit Booten auf dem Nil. Es ist nicht vorstellbar, welche Mühen die Fortbewegung manchmal sogar 15 Tonnen schwerer Steine bereitete. Doch der Wille des Herrschers, des Pharao Cheops, mußte erfüllt werden. Die Peitschen der Aufseher zwangen die Sklaven, bis zur Erschöpfung zu arbeiten. Unzählige Menschen starben vor Entkräftung und unter den Schlägen.

Das fertige Bauwerk, die Cheopspyramide, erreichte schließlich eine Höhe von 146,5 Metern.

● Berechne, wieviel Gesteinsquader im Durchschnitt täglich bearbeitet wurden.

Der Sohn Cheops', Pharao Chefren, ließ ebenfalls eine Pyramide errichten, dicht neben der seines Vaters. Ihre Höhe unterschied sich nur wenig von der der Cheopspyramide: 143 Meter.

Dem Volk Ägyptens brachte der jahrzehntelange Pyramidenbau viel Armut und Leid. Die Herrscher befahlen den Männern die Arbeit an den Grabmalen. Doch wer sollte Getreide anbauen und ernten? Wer sollte Schiffe bauen? Wer die Tierherden pflegen?

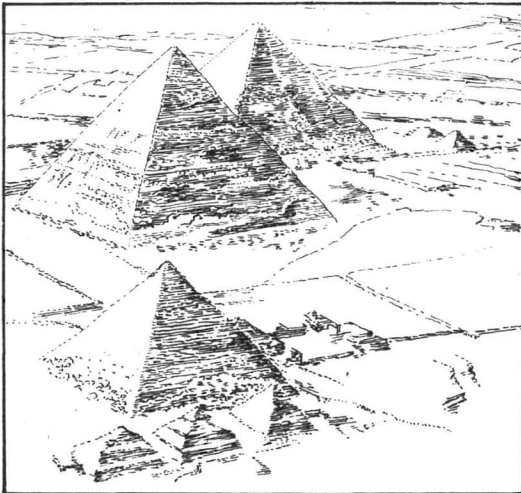
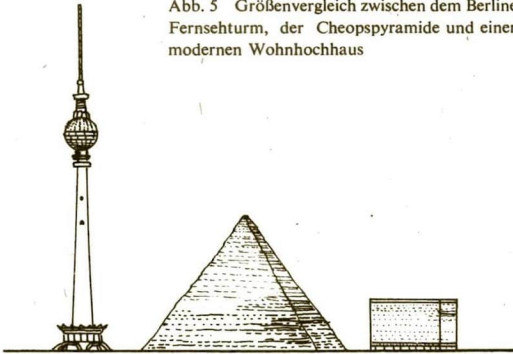


Abb. 4 Pyramiden von Gizeh

Abb. 5 Größenvergleich zwischen dem Berliner Fernsehturm, der Cheopspyramide und einem modernen Wohnhochhaus



Betrachtet man jedoch die Leistung der Baumeister, so gebührt ihnen große Achtung. Viele Pyramiden weisen eine ähnliche äußere Form auf: Die Grundflächen sind quadratisch und schließen mit den Seitenflächen einen Winkel von ungefähr 52° ein. Somit stehen die Pyramidenhöhe und die Kantenlängen von Grund- und Seitenflächen stets in einem gleichen Verhältnis.

● Beweise diese Aussage!

Der Pyramidenbau schließlich war nicht einfach damit abgetan, die reichlich zwei Millionen Quader übereinanderzuschichten. Die enorme Last der oberen Etagen könnte die unteren Steine zermalmen. Deshalb ließen die Baumeister an vorher berechneten Stellen Hohlräume anbringen, so daß eine gleichmäßige Druckverteilung erfolgte. Im Innern der Pyramiden entstanden Gänge, Kammern und Hallen! Welche Haltbarkeit dennoch erzielt wurde, zeigt das beachtliche Alter der monumentalen Grabstätten: 4500 Jahre.

Wie bereits bei den Anfängen der Mathematik standen bei deren weiterer Entwicklung alltägliche Probleme im Mittel-

punkt. Immer mehr bildete sich die Notwendigkeit heraus, Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit Zahlen, einfachen Rechenoperationen und geometrischen Berechnungen zu erwerben. Doch blieb die Beschäftigung mit der Mathematik nur einer bestimmten Schicht vorbehalten, den Angehörigen der herrschenden Klasse und den Schreibern. Das anfangs erwähnte Mathematikbuch bestätigt dies, denn es wurde von einem Schreiber namens Ahmes verfaßt.

Überprüfen wir nun, ob der Inhalt dieser Schrift unsere Vorstellungen von den mathematischen Problemen der Ägypter bekräftigt.

Das Mathematikbuch Ahmes' umfaßt eine Sammlung interessanter Rechenaufgaben, wobei zu jeder Aufgabe auch die Lösung mit dem Lösungsweg angegeben ist. So vielsagend der erste Satz begann – „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge ...“ –, so vielversprechend klingen auch verschiedene Ankündigungen in der Schrift:

„Vorschrift zu berechnen ein rundes Fruchthaus“,

„Vorschrift zu berechnen Felder“.

Tatsächlich folgen eine Reihe Aufgaben mit geometrischem Inhalt. Ahmes beschreibt die Flächenberechnung von Rechtecken, gleichschenkligen Dreiecken und von Feldern, die aus Dreiecken und Rechtecken zusammengesetzt sind. Es schließen sich die Bestimmung des Volumens von Speichern und Fruchthäusern an, um das Fassungsvermögen für eingebrachtes Getreide zu ermitteln. Sicher ist es nicht notwendig, solche Aufgaben vorzurechnen, denn jeder Schüler lernt bereits im Mathematikunterricht die Lösungsschritte kennen. Aber für die Menschen jener Zeit stellte die Bewältigung derartiger Probleme eine enorme Leistung dar! Kontrollieren wir dennoch unsere Kenntnisse an zwei Aufgaben.

● Auf einem quadratischen Feld, dessen Seiten 300 Meter lang sind, wird Weizen angebaut. Im folgenden Jahr soll auf

einer viermal größeren, ebenfalls quadratischen Fläche Weizen ausgesät werden. Welche Seitenlänge muß das neue Feld besitzen?

● Wie groß ist der Umfang eines rechteckigen Feldes, dessen Flächeninhalt 1600 m^2 beträgt und dessen Seiten im Verhältnis $1 : 4$ zueinander stehen? Unterscheidet sich der Umfang von dem eines Quadrates mit der gleich großen Fläche?

Ahmes löste weiterhin Aufgaben zur Verteilung von Broten auf eine bestimmte Menschenmenge; er berechnete den durchschnittlichen Fettertrag pro Tag, aber er löste auch Aufgaben, die nicht unmittelbar mit dem täglichen Leben zusammenhingen. In einem Teil seines Buches behandelt er gebrochene Zahlen.

Ausdruck für die Umständlichkeit der ersten Bruchrechnungen ist sein Versuch, alle Brüche in Stammbrüche zu verwandeln! So zerlegte er beispielsweise $\frac{2}{5}$ in die Summe

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

oder $\frac{2}{73}$ in die Summe von vier Stammbrüchen:

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$$

Überprüfe die Richtigkeit der Zerlegungen.

● Welchen Bruch stellte Ahmes durch $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ dar?

Im Anschluß an seine Behandlung der gebrochenen Zahlen formulierte Ahmes Aufgaben, die die Bezeichnung „Hau-Rechnung“ tragen. „Hau“ heißt dabei soviel wie Haufen oder Unbekannte. Wir bezeichnen diese mit x .

Eine der Aufgaben lautet in deutscher Übersetzung:
 Haufen, sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt 33.

In die mathematische Zeichensprache übersetzt, sieht das Problem schon verständlicher aus:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 33.$$

Zu bestimmen ist nun die Unbekannte x , doch beschreiten wir nicht den Weg der von Ahmes vorgeschlagenen Hau-Rechnung. (Die Begründung dafür folgt etwas später.)

Um x zu erhalten, klammern wir dieses aus und fassen die verbleibenden Brüche zusammen:

$$x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + 1 \right) = 33$$

$$x \left(\frac{28 + 21 + 6 + 42}{42} \right) = 33$$

$$x \frac{97}{42} = 33 \quad \left| \cdot \frac{42}{97} \right.$$

$$x = \frac{1386}{97}$$

Warum wohl sollte nicht Ahmes' Lösungsweg gezeigt werden? Ganz einfach: Er verwandelte die Brüche in Summen von Stammbrüchen und erhielt somit das viel kompliziertere Ergebnis

$$\begin{aligned} x = 14 + \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} \\ + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}. \end{aligned}$$

Wer an einem verregneten Wochenende Langeweile verspürt, fasse diesen Ausdruck zusammen und vergleiche ihn mit unserem Ergebnis.

Mit einer abschließenden Aufgabe verabschieden wir uns von dem Schreiber Ahmes:

- Haufen, sein Siebentel, sein Ganzes, es macht 19.

Wie die bisherigen Betrachtungen der Mathematik im alten Ägypten zeigten, beherrschten die Menschen die vier Grundrechenoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Dieses Wissen fand in der Behandlung praktischer Probleme seine Anwendung. Das Bewältigen vieler notwendiger Aufgaben – Flächen- und Volumenberechnung, geometrische Konstruktionen in Architektur und Bauwesen, Berechnen von Zubehöerteilen für Schiffe und vieles mehr – verlangte andererseits auch ein immer tiefergründigeres Beschäftigen mit der Mathematik.

Neben den Schreibern, Handwerkern und Baumeistern erwiesen sich die Priester als ausgezeichnete Kenner der Mathematik. Sie verstanden es sogar, die Mathematik mit einer weiteren Wissenschaft zu verknüpfen, der Astronomie.

Schon seit Jahrtausenden faszinierten die Menschen die Bewegungen der Himmelskörper, das scheinbare Wandeln der Sonne und der Planeten, die deshalb auch die Bezeichnung „Wandelsterne“ erhielten. Die Jäger, Ackerbauern und Viehzüchter verbanden mit den Gestirnen den Glauben an Götter und übernatürliche Wesen. Sie kannten ja nicht die wahren Ursachen für den Lauf der Sonne, der Planeten und des Mondes. Dennoch vermochten die Stämmesältesten die Termine für Aussaat und Ernte vorauszubestimmen.

Die Priester fuhrten fort, die Erscheinungen am Sternhimmel zu beobachten. Recht bald fanden sie heraus, daß sich gewisse Ereignisse stets nach gleichen Zeiträumen wiederholten: der Wechsel der Jahreszeiten, die Trockenperiode, aber auch die ständig wiederkehrenden Überschwemmungen des Nils. So fiel das jährlich einsetzende Hochwasser mit dem Aufgang des hellsten Sterns, des Sirius, zusammen. 365 Tage vergingen, bis der Sirius zur



Abb. 6 Beobachtung des Siriusaufganges im alten Ägypten

gleichen Stunde am Himmel sichtbar wurde – und erneut begannen die Überschwemmungen. Dies führte zu dem Gedanken, die Länge eines Jahres festzulegen. Die Geschichte berichtet, daß man ein solches Jahr in 12 Monate zu jeweils 30 Tagen einteilte. Diesen $12 \cdot 30 = 360$ Tagen fügten die Ägypter später noch fünf Tage hinzu, um die Siriusperiode richtig beschreiben zu können. Die Herkunft dieser fünf Tage „erklärt“ eine kleine Sage:

Einst spielte ein Gott namens Thot mit der Mondgöttin ein Brettspiel. Der Verlierer mußte dem Gewinner ein Geschenk überreichen. Offenbar war Thot das Glück zugetan, denn er entschied die Partie für sich. Die Mondgöttin übergab ihm daraufhin fünf Tage. Was sollte er mit diesen anfangen? Kurz entschlossen hängte er sie an die 360 Kalendertage der Menschen – und das Jahr erhielt 365 Tage.

In der Geschichte der Menschheit fanden viele verschiedene Kalenderformen Anwendung. So teilten die Mayas das Jahr in 18 Monate zu jeweils 20 Tagen ein (erinnern wir uns an die Zahl 20 als Grundzahl). Der Griechische Kalender

beruhte auf einer Wochenlänge von 10 Tagen. Als Tagesbeginn zählte der Sonnenuntergang. Noch heute findet in der Astronomie eine Zeitrechnung Anwendung, die ohne Jahresangaben auskommt: das sogenannte Julianische Datum. Hier werden lediglich die fortlaufenden Tage gezählt, wobei der erste Tag auf den 1. Januar 4713 v. u. Z. fiel. Der 1. Januar 1980 besitzt folglich das Julianische Datum 2444240 – also die Anzahl der Tage, die seit dem 1. 1. 4713 v. u. Z. vergingen. Das Julianische Datum für den 1. Januar 2000 läßt sich leicht zu 2451545 bestimmen.

- Auf welchen Tag nach unserer Kalenderrechnung fällt das Julianische Datum 2456789?

Hinweis: Beachte die Schaltjahre.

Wer sich für die Entstehung und Entwicklung des Kalenderwesens und der Zeitrechnung näher interessiert, informiere sich in weiterführender Literatur, die unter „Literaturhinweise“ und „Quellenverzeichnis“ angegeben ist. Alle dort aufgeführten Bücher sind in den Bibliotheken ausleihbar.

In Babylon und Griechenland

Auf dem Gebiet des heutigen Irak, im Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris, lebte einst das Volk der Babylonier. Wie in Ägypten begann sich auch hier ab dem 3. Jahrtausend v. u. Z. die Mathematik zu entwickeln. Die Gelehrten Babylons erreichten glanzvolle mathematische und astronomische Leistungen. Dafür bestanden – genau wie in Ägypten – dringende Bedürfnisse und Gründe. Gleich dem Nil traten alljährlich Euphrat und Tigris über die Ufer, überschwemmten das Land, lagerten jedoch gleichzeitig wertvolle Nährstoffe ab, die gute Ernten möglich machten. Aber in den Sommermonaten trocknete die hoch stehende Sonne die Äcker aus. So lag es nahe, daß man auf den Gedanken kam,

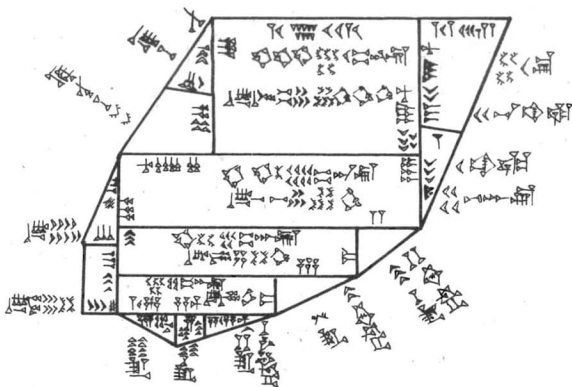


Abb. 7 Babylonischer Felderplan mit Zahlzeichen, die Flächenmaße bedeuten

ein Kanalsystem anzulegen mit Gräben für die Bewässerung und Dämmen für Regulierung des Hochwassers. Die ständig wechselnden Hochwasser- und Dürrezeiten führten somit zwangsläufig zu einer Beschäftigung mit der Mathematik: Die Dämme mußten berechnet und errichtet, die Kanäle geometrisch konstruiert und schließlich angelegt werden. Die Voraussage der Naturereignisse und der Termine für Aussaat und Ernte benötigte einen Kalender und erforderte das Betreiben der Astronomie. Viel Geschick und Können zeigten die Babylonier bei der Berechnung des Flächeninhaltes von Feldern. Alten Schriften zufolge lösten sie sogar quadratische Gleichungen. In diesen kommt die Unbekannte x in der Form $x^2 = x \cdot x$ vor. Es gelang den Gelehrten auch recht gut, den Rauminhalt von Zylindern zu berechnen.

Für eine verstärkte Entwicklung der Mathematik im Zweistromland gab es noch einen weiteren Grund. Infolge des Mangels an Holz und Erzen setzte notwendigerweise ein

ausgedehnter Handel mit den Nachbarvölkern ein. Diese Handelsbeziehungen führten zu einem gegenseitigen Kennenlernen und zum Austausch des bislang bekannten Wissens.

Der Mathematik Ägyptens und Babylons haftete jedoch ein großer Mangel an: Die Gelehrten waren stets nur bestrebt, anstehende Probleme zu lösen, ohne aber nach allgemeinen Zusammenhängen zu suchen. So gibt es viele richtige mathematische Formeln und Gleichungen; ihre Entstehung aber ist vollkommen ungeklärt. Auf welchem Wege beispielsweise kamen die Ägypter auf solch komplizierte Gleichung, nach der sich das Volumen eines Pyramidenstumpfes berechnen läßt? Wie konnten sie an die Gültigkeit dieser Gleichungen glauben, suchten sie doch nach keinem mathematischen Beweis für die Richtigkeit! Sicher läßt sich dadurch erklären, daß die Babylonier falsche Ergebnisse in der Volumenberechnung von Pyramidenstümpfen erhielten.

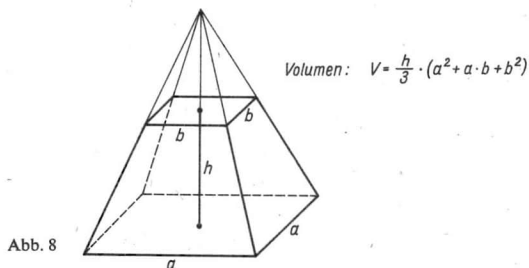


Abb. 8

Auch Ahmes' Rechenbuch bestätigt, daß man sich mit der Bewältigung eines gestellten Problems zufriedengab, nicht aber nach einem allgemeinen Lösungsweg suchte – der eben auf beliebige andere Aufgaben der gleichen Art anwendbar war. Großsprecherisch kündigte Ahmes zwar immer an: „Vorschrift zu gelangen ...“, „Vorschrift zu berechnen ...“,

doch Vorschriften sucht man vergeblich in seinem Buch.
❏ Unsere heutigen Mathematikbücher dagegen, nach denen wir im Unterricht lernen, sind so aufgebaut, daß vor den Kapiteln die Überschriften stehen könnten wie diese:

Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis der Flächenberechnung rechtwinkliger Dreiecke

oder

Vorschrift zu konstruieren beliebige Körper im Grund- und Aufriß!

Den entscheidenden Umschwung erlebte die Mathematik vor 2500 Jahren. An den Küsten des heutigen Mittelmeeres und der Adria entstanden bedeutende griechische Handelsstädte. Zu diesen gehörten Alexandria, Perge, Milet, Samos, Pergamon, Byzanz, Athen, Syrakus und viele andere. Der Handel auf dem Wasserweg nahm zu, eine neue Schicht der herrschenden Klasse bildete sich – die Kaufleute. Sie bereisten viele Länder. Dabei lernten sie die Wissenschaften und die Gelehrten jener Länder kennen. Viele mathematische Kenntnisse der Griechen stammen aus Ägypten, aber natürlich befaßten sich die Menschen Griechenlands auch selbst mit Naturwissenschaften. Gelten die Pyramiden von Gizeh als Beispiel für das bereits umfangreiche technische und mathematische Können der ägyptischen Baumeister, so gibt es auch im alten Griechenland ähnlich große Errungenschaften. Von den ungewöhnlichen Leistungen eines Baumeisters namens Eupalinus und der ihm unterstellten Sklaven zeugt der Bau einer Wasserleitung auf der Insel Samos. Im 6. Jahrhundert v. u. Z. ließ man dort eine 1000 Meter lange Leitung durch den Berg Kastro errichten. Um die Arbeiten möglichst rasch abzuschließen, begannen die Sklaven von beiden Seiten gleichzeitig mit dem Graben. Das setzte genaue Landvermessungen und Berechnungen voraus. Schließlich sollten sich ja beide Stollen in der Mitte treffen! Eindrucksvoll bestätigt das Ergebnis die Rechenkunst von Eupalinus: Die 1,75 Meter

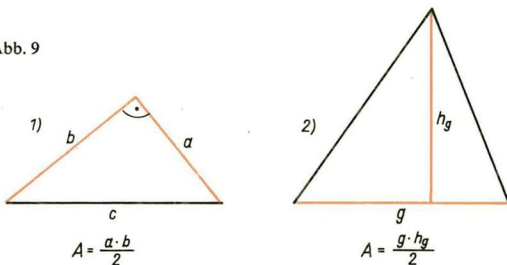
breiten und ebenso hohen Gänge verfehlten sich lediglich um zwei Meter in der Höhe und fünf Meter in der Breite.

Wodurch nun unterschied sich die griechische Mathematik und die Beschäftigung mit dieser von der Mathematik der Ägypter und Babylonier? Erstmals seit ihren Anfängen reichte dem Menschen nicht mehr die Lösung eines beliebig vorgegebenen Problems. Vielmehr tauchte immer wieder die Frage auf: Warum ist das die Lösung? Warum halbiert der Durchmesser die Kreisfläche? Warum besitzen gleichschenkelige Dreiecke gleich große Basiswinkel?

Dem ersten Anschein nach haben solche Fragestellungen gar nichts mit einer praktischen Aufgabe zu tun. Die Beantwortung reichte somit auch weit über die eigentliche Lösung der Aufgabe hinaus. Welcher Nutzen ließ sich also aus solchen zusätzlichen Überlegungen erzielen?

Die Antwort darauf fällt leicht, wenn wir uns den heutigen Mathematikunterricht in den Schulen etwas anders vorstellen. Angenommen, der Lehrer würde die Behandlung der Dreiecke mit einer „Vorschrift zu berechnen den Flächeninhalt“ beginnen. Wir wüßten nicht, daß die Summe der Innenwinkel stets 180° beträgt, daß eine Änderung der Winkel eine Änderung der Seitenlänge bewirkt, daß Seitenlängen und Flächeninhalt in ganz bestimmten Verhältnissen zueinander stehen. Wir könnten vielleicht den Rechenweg an der

Abb. 9



Tafel verstehen, doch warum errechnet sich der Flächeninhalt des Dreiecks 1 aus einer scheinbar anderen Gleichung als der des Dreiecks 2? Wären wir nach dieser Unterrichtsstunde in der Lage, an einem beliebigen Dreieck Berechnungen vorzunehmen? Sicher nicht! Deshalb erlernen wir zuerst allgemeine Definitionen und Sätze, mit denen später gearbeitet wird. Man definiert, zum Beispiel, einen rechten Winkel. Dann kann der Satz formuliert werden, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks genau halb so groß wie der eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist. Die Richtigkeit dieses Satzes kann nun unter Zuhilfenahme der Definition des rechten Winkels und der Definition eines Rechtecks bewiesen werden.

♣ Führe diesen Beweis aus!

Beherrschen wir jetzt die Anwendung der Gleichung

$$A = \frac{ab}{2}$$

für das rechtwinklige Dreieck, so fällt es nicht schwer, den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks zu berechnen. Wir zerlegen es einfach in zwei rechtwinklige Dreiecke! Rasch ist der Beweis für die Gültigkeit der Gleichung

$$A = \frac{g \cdot h_g}{2}$$

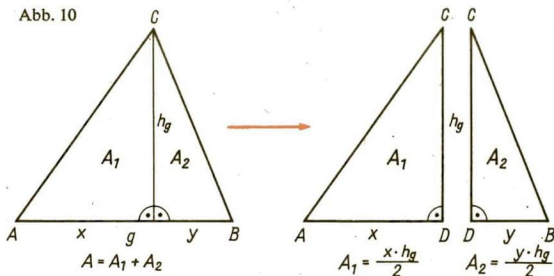
gefunden:

h_g teilt die Fläche A des Dreiecks ABC in die beiden Teilflächen A_1 und A_2 . Die Dreiecke ADC und DBC sind rechtwinklige, so daß für A_1 und A_2 folgt:

$$A_1 = \frac{x \cdot h_g}{2}$$

$$A_2 = \frac{y \cdot h_g}{2}$$

Abb. 10



A ist die Summe aus A_1 und A_2 :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{x \cdot h_g + y \cdot h_g}{2}.$$

Klammert man h_g aus, ergibt sich

$$A = \frac{h_g \cdot (x + y)}{2},$$

und wegen

$$x + y = g$$

gilt schließlich

$$A = \frac{g \cdot h_g}{2}.$$

Welcher Nutzen folgt also aus „zusätzlichen“ Überlegungen, wie sie die Griechen anstellten und die heute im Unterricht selbstverständlich sind? Diese tiefgründige Beschäftigung mit der Mathematik und das Bestreben, bis in alle Einzelheiten einzudringen, verhalf zu einem wesentlich besseren Verständnis vieler Probleme. Die Gelehrten Griechenlands begannen, „Ordnung“ in die Mathematik zu bringen. Sie führten Definitionen ein und stellten Lehrsätze

auf. Jeder Lehrsatz mußte ausdrücklich bewiesen werden, damit sich jeder von seiner Richtigkeit überzeugen konnte.

Die neue Denkweise wirkte sich vorteilhaft aus. Nicht nur bereits bekannte Beziehungen wurden untersucht, sondern neue Zusammenhänge und Erkenntnisse gefunden. Das zweite Kapitel dieses Buches berichtet über einige mathematische Leistungen der Griechen jener Zeit.

Doch nicht zu jeder Aufgabe fand man eine Lösung. Bekannt wurden drei Aufgaben des Altertums, an denen die Gelehrten einst vergeblich knobelten. Heute wissen die Mathematiker, daß diese Aufgaben unlösbar sind – die Beweise dafür stammen aus dem 19. Jahrhundert. Wir wollen uns nur kurz mit dem Inhalt der drei Probleme vertraut machen, ohne die recht komplizierten Beweise zu verfolgen.

1. Aufgabe: Einer Sage zufolge wütete einst unter den Bewohnern der Insel Delos eine todbringende Seuche. Die Götter würden angeblich zu Hilfe eilen, wenn der Tempel einen neuen würfelförmigen Altar erhielte. Dieser Altar sollte genau das doppelte Volumen des alten, ebenfalls würfelförmigen Altars besitzen. Hilfesuchend wandten sich die Bewohner der Insel an die Gelehrten. Doch vergebens, es gab keine Lösung.

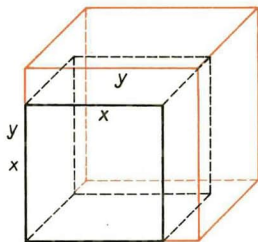


Abb. 11

$$y = \sqrt[3]{2} \cdot x \longrightarrow V = 2 \cdot v$$

Welches Problem galt es zu lösen? Der neue Würfel sollte ein Volumen V besitzen, welches genau dem Doppelten des Volumens v des anderen Würfels entspricht:

$$V = 2v.$$

Ist die Kantenlänge des kleinen Würfels x , die des größeren y , so gilt wegen

$$V = y^3 \quad \text{und}$$

$$v = x^3$$

$$y^3 = 2x^3.$$

Zieht man hieraus die dritte Wurzel, erhält man die Seitenlänge des neuen Würfels:

$$y = \sqrt[3]{2} \cdot x.$$

Als Wurzelziehen bezeichnet man die Rechenoperation, mit deren Hilfe die Potenzen $z^2, z^3, z^4, \dots, z^n$ in den Ausdruck z umgewandelt werden:

$$\sqrt[2]{z^2} = \sqrt{z^2} = z; \quad \sqrt{} \text{ heißt Quadratwurzel,}$$

$$\sqrt[3]{z^3} = z; \quad \sqrt[3]{} \text{ heißt dritte Wurzel,}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sqrt[n]{z^n} = z; \end{array} \quad \sqrt[n]{} \text{ heißt n-te Wurzel.}$$

Setzen wir $x = 1$, müßte $y = \sqrt[3]{2}$ betragen. Die eigentlichen Schwierigkeiten ergeben sich nun aus der Forderung, die Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ nur mit Zirkel und Lineal auszuführen. Wie schon gesagt: Bereits im 19. Jahrhundert wurde bewiesen, daß eine derartige Konstruktion unmöglich ist.

2. Aufgabe: Ohne Schwierigkeiten ist die Teilung eines beliebigen Winkels α in zwei Winkel der Größe β mit $\alpha = 2 \cdot \beta$ mit Zirkel und Lineal möglich.

● Führe diese Konstruktion aus!

Verschiedene Winkel wie $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 180^\circ$ lassen sich geometrisch auch in drei gleichgroße Winkel γ mit $\alpha = 3 \cdot \gamma$ zerlegen. Unerfüllbar dagegen ist die Forderung, einen beliebigen Winkel α unter alleiniger Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal in drei gleich große Winkel zu teilen!

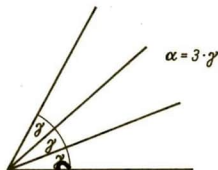


Abb. 12

3. Aufgabe: Von besonderem Interesse war die Überlegung, ob zu einem vorgegebenen Kreis ein Quadrat konstruiert werden könnte, welches den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis besitzt. Das Problem trägt deshalb auch die Bezeichnung „Quadratur des Kreises“. Bekanntlich lautet die Gleichung für die Kreisfläche

$$A = \pi r^2,$$

wobei r der Kreisradius ist. Wählt man $r = 1$, so folgt

$$A = \pi.$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates der Seitenlänge a beträgt

$$A = a^2.$$

Sollen beide Flächen gleich groß sein, entsteht die Forderung

$$\pi = a^2 \quad | \sqrt{\quad}, \text{ also}$$

$$a = \sqrt{\pi}.$$

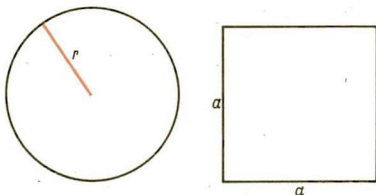
Dies verlangt, mit Zirkel und Lineal eine Strecke der

Länge $\sqrt{\pi}$ zu konstruieren. Auch diese Aufgabe bleibt unlösbar, da π eine Zahl mit besonderen Eigenschaften ist.

Alle drei Aufgaben enthalten eine strenge Forderung: Die geometrische Konstruktion ist nur unter Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal auszuführen!

Der große Gelehrte Archimedes, den wir später näher kennenlernen werden, schlug ein Konstruktionsverfahren vor, für welches er zusätzliche Hilfsmittel nutzte. Seine Lösung ist mathematisch richtig. Wer die Konstruktionsbeschreibung auf den Seiten 56/57 aufmerksam verfolgt, findet selbst den Beweis dafür! Auch die Quadratur des Kreises kann auf eine Art gelöst werden, bei der von der strengen Forderung abgegangen wird.

Offensichtlich stellt die Einschränkung, nur mit Zirkel und Lineal geometrisch arbeiten zu dürfen, ein gewisses Hindernis dar. Woher stammt diese Forderung? Sie geht auf einen Gelehrten namens Platon und eine von ihm geleitete Schule zurück, die er 387 v. u. Z. nahe bei Athen gründete. Platon verlangte, ausschließlich „vollkommene“ Kurven bei geometrischen Konstruktionen zu verwenden. Solche vollkommenen Kurven konnten nach seiner Lehre nur die Gerade und der Kreisbogen sein. Alle anderen „krummen“ Kurven ließen sich aus diesen zusammensetzen. Gleichzeitig diente die Forderung dem Zweck, Aufgaben exakt zu lösen – also keine Näherungen zuzulassen. Eine Näherungslösung stellt



$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$a = r \cdot \sqrt{4\pi}$$

Abb. 13

Archimedes' Winkeldreiteilung dar; für das Problem der Würfelverdopplung wäre beispielsweise die Annahme

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25$$

anstelle des genaueren Wertes

$$\sqrt[3]{2} = 1.259921$$

eine Näherung. Der 0,25te Teil des Ganzen ist aber genau ein Viertel, so daß folgende Aufgabe lösbar wird:

● **Konstruiere** das 1,25fache einer beliebig vorgegebenen Strecke $\overline{AB}$. Verdopple mit Zirkel und Lineal das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $x = 7,5 \text{ cm}$ und der Näherung $\sqrt[3]{2} \approx 1,25$!

Heute ist es bei einem Großteil der mathematischen und physikalischen Aufgaben nicht mehr möglich, ohne Näherungslösungen auszukommen. Beispiele und Begründungen dafür sind im abschließenden fünften Kapitel enthalten.

$$\begin{array}{c} \text{ccc} \\ \text{cc} \end{array} \text{ III} = \begin{array}{c} \text{vvv} \\ \text{vvv} \\ \text{vv} \end{array} \lll \text{vvv} = \overline{p'q} = 513$$

Woher kennen wir eigentlich die Probleme, mit denen sich die Menschen vor Jahrhunderten und Jahrtausenden befaßten, wie sie rechneten und welches Wissen sie besaßen?

Das Rechenbuch des Schreibers Ahmes berichtete über die ägyptische Mathematik des 2. Jahrtausends v. u. Z. So liegt natürlich die Vermutung nahe, aus weiteren alten Schriften ausführliche Informationen zu erhalten. Die Gelehrten des Altertums notierten sorgfältig das erworbene Wissen und richteten Bibliotheken ein. Die Beamten, die

dort arbeiteten, trugen den Titel „Verwalter des Bücherhauses“. Zu ihren Aufgaben gehörte es, für Ordnung zu sorgen, beschädigte Buchrollen auszubessern und abzuschreiben.

Die größte Bibliothek der damaligen Zeit entstand im 3. Jahrhundert v. u. Z. in Alexandria*. Der wohl bekannteste Verwalter des Bücherhauses Alexandrias war der Gelehrte Eratosthenes. Ihm werden wir noch begegnen.

Im Verlaufe von nahezu 300 Jahren sammelten sich in dieser Bibliothek 700000 Buchrollen an. Doch im Jahre 47 v. u. Z. zerstörten römische Krieger die wissenschaftlichen Einrichtungen von Alexandria und vernichteten sämtliche Schriftstücke.

Kriege und Plünderungen führten oftmals zum Verlust wertvoller Errungenschaften der Gelehrten. Auch mächtige Herrscher, die die Beschäftigung mit wissenschaftlichen Problemen für unnütz hielten, ließen die Lehrwerke im ganzen Land beseitigen. Beispielsweise veranlaßte ein chinesischer Kaiser 221 v. u. Z. die Vernichtung aller Bücher.

Doch nicht nur Kriege und Launen irgendwelcher Herrscher sind die Ursache dafür, daß sehr wenige schriftliche Überlieferungen aus dem Altertum erhalten geblieben sind. So überstand viel Material, auf welches man einstmals schrieb, die Aufbewahrung über mehrere Jahrtausende nicht. Immerhin wurden erste Schriften auf Palmenblättern niedergeschrieben.

Die Ägypter stellten ihr Schreibmaterial aus einer Pflanze her, welche in großen Mengen am Nil wuchs. Eine daraus gefertigte Buchrolle heißt Papyrus.

Die Bewohner des Zweistromlandes drückten Zahlen und Buchstaben in feuchte Tontäfelchen und brannten diese anschließend im Feuer. Mehrere Tausend solcher Tontäfelchen sind erhalten geblieben, und sie geben heute einen guten

* Alexandria heißt heute Al-Iskandarija, eine Hafenstadt an der ägyptischen Mittelmeerküste.

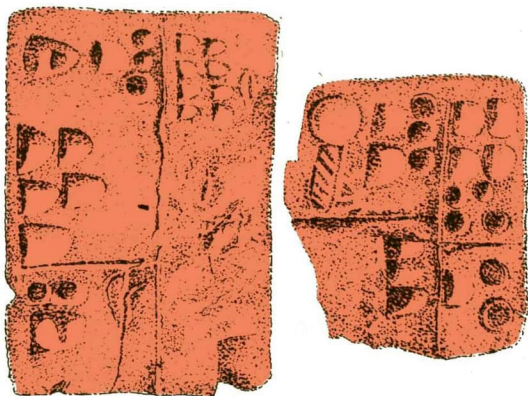


Abb. 14 Babylonische Tontäfelchen

Überblick über den damaligen Entwicklungsstand der Mathematik.

Wieder anderes Schreibmaterial nutzten die Römer. Sie erfanden das Pergament, was nichts anderes als bearbeitete Tierhaut ist.

Papier verwendeten zum ersten Male Chinesen. Die ältesten Überlieferungen auf Papier stammen aus dem 2. Jahrhundert v. u. Z.

Für die Geschichtsforscher ergaben sich bei der Übersetzung der entdeckten Schriften große Schwierigkeiten. Viele konnten bisher noch nicht in eine heutige Sprache übertragen werden. Doch gut bekannt sind inzwischen die Zahlenschreibweisen einiger Völker des Altertums. Betrachten wir die ägyptische, babylonische und griechische Zahlendarstellung.

Die Zahlenschreibweise der Ägypter ähnelt ihrer Schrift, die man als Bilderschrift bezeichnet. Die Abbildung zeigt uns einen alten ägyptischen Text. Jedes einzelne Bildzeichen –

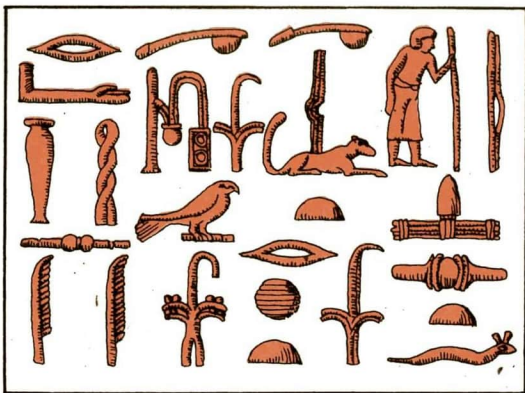


Abb. 15

auch Hieroglyphe genannt – stellt ein ganz bestimmtes Wort dar. Für die Zahlen verwendeten die Ägypter sieben Hieroglyphen:

$$\begin{array}{lll}
 1 = | & 10 = \cap & 100 = \text{C} \\
 1000 = \text{hook with arrow} & 10000 = \text{long vertical line} & 100000 = \text{frog} \\
 & 1000000 = \text{god Anubis}
 \end{array}$$

So wird die Zahl 100000 durch einen kleinen Frosch ausgedrückt; der ägyptische Gott des Luftraumes stellt die große Zahl 1000000 dar.

Durch einfaches Aneinanderreihen dieser wenigen Zeichen läßt sich jede beliebige Zahl schreiben. Betrachten wir einige Beispiele:

$$20 = 2 \cdot 10 = \text{nn}$$

$$248 = 200 + 40 + 8$$

$$= 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

$$= \text{cc} \text{nn} \text{||||}$$

$$102110 = 100000 + 2 \cdot 1000 + 100 + 10$$

$$= \text{h} \text{|||} \text{cc}$$

- Welche Zahlen bedeuten

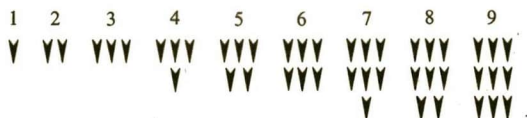
$$\text{h} \text{h} \text{cc} \text{nn} \text{||}, \text{h} \text{|||} \text{cc} \text{||||}$$

- Stelle 5314, 19875 und 3248327 mit ägyptischen Hieroglyphen dar!

Komplizierter erscheint dagegen die Schreibweise der Babylonier, denn sie gebrauchten lediglich zwei verschiedene Zeichen, einen senkrechten Keil ∇ und einen sogenannten Winkelhaken $\angle$.

Infolge der Ähnlichkeit mit Keilen bezeichnet man die Schrift als Keilschrift. Versuchen wir, diese für die Zahlen von 1 bis 600 zu erlernen.

Die Einer erhält man durch Aneinanderreihen des senkrechten Keiles:



Ein Winkelhaken stellt die 10 dar; für 20, 30, 40 und 50 stehen jeweils 2, 3, 4 und 5 Haken:



Die ersten Schwierigkeiten ergeben sich bei der Zahl 60, denn sie erhält das gleiche Symbol wie die 1, den senkrechten Keil:

$$60 = \text{▼}$$

Nun kann es leicht zu Verwechslungen kommen, denn ▼▼ kann sowohl 2 als auch $60 + 1 = 61$ bedeuten.

Die

$$62 = \text{▼▼▼}$$

kann für

$$3 = \text{▼▼▼}$$

gehalten werden, aber zwischen 63 und 4 gibt es bereits einen Unterschied:

$$4 = \begin{array}{c} \text{▼▼▼} \\ \text{▼} \end{array} \qquad 63 = \text{▼} \text{▼▼▼}$$

Die Babylonier schrieben nämlich nie mehr als drei Zeichen, die eine Zahl darstellen sollten, nebeneinander. Die beiden

Tabellen der Einer und Zehner verdeutlichen dies. Zwar stehen bei 63 vier Keile in einer Reihe, doch drückt der erste die 60 aus, die weiteren bedeuten 3. Den Babyloniern fiel die Unterscheidung sicher nicht schwer. Meist verbanden sich mit den Zahlen bestimmte Aufgaben, die die tatsächliche Größe der Keilschriftsymbole festlegten.

Die eigentlichen Probleme folgen nun aus der Tatsache, daß die Keilschrift die 60 als Grundzahl verwendet. Die Zahlen von 1 bis 59 ergeben sich aus einer entsprechenden Aneinanderreihung der Einer und Zehner, also

$$28 = 2 \cdot 10 + 8 = \ll \begin{array}{c} \vee \vee \vee \\ \vee \vee \vee \\ \vee \vee \end{array}$$

$$43 = 4 \cdot 10 + 3 = \lll \begin{array}{c} \vee \vee \vee \\ \vee \end{array}$$

$$59 = 5 \cdot 10 + 9 = \lll \begin{array}{c} \vee \vee \vee \\ \vee \vee \vee \\ \vee \vee \vee \end{array}$$

Wie die Beispiele für 61, 62 und 63 bereits zeigten, ist nun nicht mehr die Zerlegung

$$61 = 6 \cdot 10 + 1 \quad \text{oder}$$

$$63 = 6 \cdot 10 + 3$$

zu wählen. Alle Zahlen, die größer als 60 sind, werden aus der Grundzahl und den Zahlen von 1 bis 59 zusammengesetzt, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 84 &= 60 + 24 \\ &= 60 + 2 \cdot 10 + 4 = \vee \lll \begin{array}{c} \vee \vee \vee \\ \vee \vee \vee \\ \vee \end{array} \end{aligned}$$

$$93 = 60 + 33$$

$$= 60 + 3 \cdot 10 + 3 = \text{V} \lll \text{VVV}$$

$$118 = 60 + 58$$

$$= 60 + 5 \cdot 10 + 8 = \text{V} \lll \text{VVV}$$

$$\quad \quad \quad \ll \text{VV}$$

Eine Verwechslung zwischen

$$70 = \text{V} \ll \quad \text{und} \quad 11 = \ll \text{V}$$

ist nicht möglich. Die Anordnung des senkrechten Keiles vor dem Winkelhaken heißt grundsätzlich

$$\text{V} = 60.$$

- Übertrage 32, 78 und 101 in die babylonische Keilschrift!

Die 120 folgt nun aus

$$120 = 60 + 60 = 2 \cdot 60$$

und wird mittels zweier Keile ausgedrückt:

$$120 = \text{VV}.$$

Daß VV auch 2 und 61 bedeuten können, wissen wir bereits.

Die weiteren Vielfachen von 60 ergeben sich aus einer entsprechenden Anzahl senkrechter Keile, also

$$3 \cdot 60 = 180 = \text{VVV}$$

$$4 \cdot 60 = 240 = \text{VVV}$$

$$\quad \quad \quad \text{V}$$

⋮

$$9 \cdot 60 = 540 = \text{VVV}$$

$$\quad \quad \quad \text{VVV}$$

$$\quad \quad \quad \text{VVV}$$



Abb. 16 Keilschrifttafel mit Flächeninhaltsberechnung (Ausschnitt)

Alle zwischenliegenden Zahlen erhalten wir, indem wir diese in eine Summe der Vielfachen von 60 und der verbleibenden Größe zerlegen:

$$173 = 2 \cdot 60 + 53 = \text{VV} \begin{matrix} \lll \\ \lll \end{matrix} \text{VVV}$$

$$254 = 4 \cdot 60 + 14 = \begin{matrix} \text{VVV} \\ \text{V} \end{matrix} \begin{matrix} \ll \\ \ll \end{matrix} \begin{matrix} \text{VVV} \\ \text{V} \end{matrix}$$

Der verbleibende Summand muß stets kleiner als 60 sein!

● Zerlege nach dieser Vorschrift die Zahlen 361, 538 und 555 und übertrage sie anschließend in die babylonische Keilschrift.

Die größte Zahl, die wir mit unseren jetzigen Kenntnissen schreiben können, lautet

$$9 \cdot 60 + 59 = 599 = \begin{array}{ccc} \text{VVV} & & \text{VVV} \\ \text{VVV} & \lll & \text{VVV} \\ \text{VVV} & \ll & \text{VVV} \end{array} .$$

Die 600 als darauffolgende Zahl setzt sich aus

$$600 = 10 \cdot 60$$

zusammen. Für dieses Produkt findet der bereits bekannte Winkelhaken Verwendung:

$$600 = \angle .$$

Ob nun 10 oder 600 gemeint ist, hängt wieder von der Stellung des Zeichens – von seiner Position – ab. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

$$\lll \begin{array}{c} \text{VVV} \\ \text{VVV} \\ \text{VV} \end{array} \angle \begin{array}{c} \text{VVV} \\ \text{VVV} \\ \text{VVV} \end{array}$$

$$2 \cdot (10 \cdot 60) + 5 \cdot 60 + 1 \cdot 10 + 9 = 1519 .$$

Wir wollten jedoch nur die Schreibweise der Zahlen bis 600 im babylonischen Positionssystem erlernen. Üben wir an einer abschließenden Aufgabe:

- Ordne die folgenden Zahlen nach ihrer Größe:

$$\text{VV} \lll \begin{array}{c} \text{VVV} \\ \text{VVV} \\ \text{VV} \end{array} ; \quad \text{VVV} \text{V} ; \quad \text{V} \angle \text{V} ;$$



Weitaus einfacher läßt sich die griechische Zahlenschreibweise verstehen. So stellte jeder Buchstabe des griechischen Alphabetes auch gleichzeitig eine bestimmte Zahl dar. Die folgende Tabelle enthält das Alphabet und die dazugehörigen Zahlen:

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$\digamma$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Da das griechische Alphabet nur aus 24 Buchstaben besteht, fügte man für 6, 90 und 900 drei zusätzliche Zeichen an:

ς – vau

ρ – koppa

$\digamma$ – sampi.

Informiere dich in deiner Zahlentafel über die Aussprache der griechischen Buchstaben!

Um für die Tausender keine weiteren Symbole einführen zu müssen, setzten die Griechen vor den entsprechenden

Buchstaben der Einer ein Komma, zum Beispiel

$$4000 = 4 \cdot 1000 = ,\delta$$

$$8000 = 8 \cdot 1000 = ,\eta.$$

Zur Darstellung der Zehntausender fanden verschiedene Schreibweisen Anwendung. Eine Möglichkeit bestand in der Kennzeichnung mittels zweier Punkte über dem Buchstaben, der die Anzahl der Zehntausender ausdrückte, also

$$10000 = 1 \cdot 10000 = \ddot{\alpha}$$

$$70000 = 7 \cdot 10000 = \ddot{\zeta}.$$

Zum anderen schrieben die Griechen ein großes M und über dieses die Anzahl der Zehntausender:

$$10000 = M^{\alpha}$$

$$70000 = M^{\zeta}$$

$$450000 = 45 \cdot 10000 = M^{\mu\epsilon}.$$

Um nun schließlich den Unterschied zwischen Buchstaben und Zahlen kenntlich zu machen, wurde über eine abgeschlossene Zahlengruppe ein Strich gezogen:

$$49 = \overline{\mu\vartheta}$$

$$3718 = \overline{,\gamma\psi\iota\eta}$$

$$122560 = M_{,\beta\varphi\xi}^{\iota\beta} = \overline{\iota\beta_{,\beta\varphi\xi}}.$$

Sicher bereitet es keine Schwierigkeiten, Zahlen in die ehemalige griechische Schreibweise zu übertragen oder griechische Zahlen zu übersetzen.

- Versuche es bei den folgenden: 19, 941, 7808, 214009 und

$$\overline{\rho\iota\alpha}; \quad M_{\pi\beta}^{\epsilon}; \quad \overline{\omega_{,\zeta\omicron\gamma}}; \quad \overline{,\epsilon\chi\omicron\eta}.$$

Natürlich gab es noch sehr viele andere Formen von Zahlenzeichen, viele Völker entwickelten eine eigene Sprache und Schrift. Die Chinesen, Inder und Römer, aber auch die Mayas, schrieben die Zahlen mit Hilfe von Punkten und Strichen. Bis in das 15. Jahrhundert war das römische System gebräuchlich – nur sehr umständlich ließ sich damit rechnen. Das dritte Kapitel wird darüber und über die Entstehung unserer heutigen Zahlenschreibweise berichten.

Bisher verfolgten wir einige Etappen der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und mit ihr der Mathematik in Griechenland, Ägypten und im Zweistromland. Ähnlich vollzog sich dieser Prozeß auch in anderen Gebieten der Welt. Alte Schriften und Überlieferungen aus Indien, China und Amerika zeigen, welche mathematischen Kenntnisse die Gelehrten jener Länder besaßen – doch soll hier nicht weiter davon berichtet werden. Besuchen wir statt dessen einige der bekanntesten und berühmtesten griechischen Gelehrten des Altertums.

Heureka! Heureka!

Thales von Milet

Am 28. Mai 585 v. u. Z. standen sich am Halys, dem Grenzfluß zwischen Lydien und Medien*, die Heere der beiden Länder gegenüber und erwarteten das Signal zum Beginn der Schlacht.

Seit mehr als sechs Jahren hielt der Krieg bereits an, ohne daß eine Seite den entscheidenden Sieg erringen konnte. Immer mehr Tote und Verwundete gab es zu beklagen, Lydien und Medien begannen zu verarmen. Nun sollte ein erneuter Kampf stattfinden, vor dessen Beginn aber erst die Götter um ihren Beistand angerufen werden mußten.

Die Vorstellung, solche Wesen könnten existieren und über das Leben der Menschen wachen, steckte in allen Köpfen. Es galt als heilige Pflicht, die Götter mit Gebeten, Opfer- und Dankesgaben wohlzustimmen, aber auch um Rat zu fragen.

Eigens dazu war aus Milet** der bekannte Kaufmann und Politiker Thales herbeigeeilt. Ehrfurchtsvoll knieten die Truppen nieder, als der weise Thales die Hände zum Himmel hob und mit dem Blick zur Sonne rief:

„Ihr allmächtigen Götter! Zum Kampfe angetreten sind die Söhne Lydiens und Mediens. Heißet Ihr die Schlacht für gut, so sollen die Schwerter aufeinandertreffen. Seid Ihr aber der Meinung, die Menschen sollten in Frieden nebeneinander leben, wendet Euch zum Zeichen dafür von uns ab!“

* Lydien und Medien grenzten auf dem Gebiet der heutigen Türkei aneinander. Der damalige Grenzfluß Halys trägt jetzt den Namen Kizilirmak.

** Milet war eine griechische Stadt, sie lag am Ufer des Mittelmeeres auf dem Gebiet der heutigen Türkei. Sie ist nur noch eine Ruinenstätte.

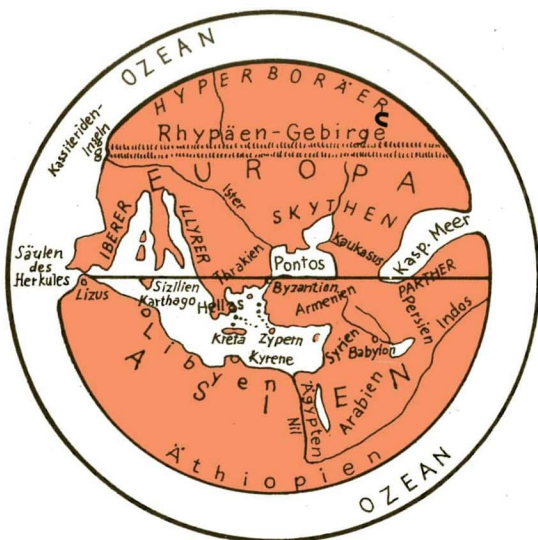


Abb. 17 Erdbild der Antike (6. Jahrhundert v. u. Z.)

Kaum waren diese Worte verklungen, breitete sich plötzlich tiefe Dunkelheit aus, die Sonne verschwand, und nächtlicher Sternhimmel überdeckte das Schlachtfeld. Lähmendes Entsetzen packte die Krieger und Heerführer. Als nach minutenlanger Finsternis ebenso überraschend die Sonne erschien, wie sie „untergegangen“ war, brachen die Truppen voller Hast zum Rückzug auf. Erschüttert von der Ungunst der Götter schlossen die Völker endgültig Frieden.

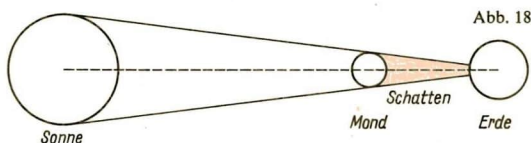
Ob es sich damals genau so zugetragen hat, ist nicht bekannt. Eines aber ist gewiß: Natürlich wandten sich nicht die Götter ab, denn diese gab es nur in den Vorstellungen der Menschen, die sich viele Naturereignisse nicht erklären

konnten. Was aber war die wahre Ursache für das Verschwinden der Sonne am hellen Tag?

Thales – er lebte zwischen 624 und 546 v. u. Z. in der bedeutenden Handelsstadt Milet – betätigte sich nicht nur als Kaufmann, sondern auch als Mathematiker, Astronom und Politiker. Bei der Auswertung eines umfangreichen astronomischen Beobachtungsmaterials entdeckte Thales, daß die Sonne immer nach bestimmten Zeitabständen tagsüber für wenige Minuten „verschwand“. Daraus ermittelte er das nächste derartige Ereignis. Seinen Berechnungen zufolge mußte diese vorausbestimmte Sonnenfinsternis – denn um eine solche Naturerscheinung handelte es sich – 585 v. u. Z. stattfinden.

Viele Menschen des Altertums stellten sich die Erde als flache und von Wasser umgebene Scheibe vor. Sie konnten sich deshalb auch nicht die Ursache solcher Finsternisse erklären. Mit unseren heutigen Astronomiekenntnissen ist es ein leichtes, die Entstehung einer Sonnenfinsternis zu beschreiben.

Bei der Bewegung des Mondes um die Erde kann das seltene Ereignis eintreten, daß Sonne, Mond und Erde derart auf einer Geraden liegen, wie es die Abbildung zeigt. Dabei



verdeckt der Mond die grell leuchtende Sonnenscheibe, und sein Schatten trifft die Erdoberfläche. Für die Bewohner der Gebiete, die vom Schatten getroffen werden, geht dann die Sonne „unter“.

Je nachdem, ob der Mond einen Teil der Sonnenscheibe oder die Sonne vollständig verdeckt, unterscheidet man zwi-

schen teilweiser und totaler Sonnenfinsternis. Nur im Verlaufe einer totalen Finsternis wird es dunkel wie in der Nacht. Die Bewohner unserer Republik können ein solches Ereignis allerdings erst wieder am 7. Oktober 2135 beobachten.

Wie wir bereits erfuhren, wirkte Thales auch als Politiker. Deshalb bemühte er sich um eine Beendigung des Krieges zwischen den Medern und den Lydern. So nutzte er den Glauben der Menschen an die Götter aus, indem er die Sonnenfinsternis als ihre Mahnung erklärte. Wie die Geschichte zu berichten weiß, endete daraufhin der bereits sechs Jahre andauernde Krieg.

Große Verdienste erwarb sich der Gelehrte als Mathematiker. Bereits im Altertum galt Thales als der „Vater der Geometrie“, obwohl nicht genau erwiesen ist, welche wissenschaftlichen Entdeckungen er selbst machte. Als Kaufmann bereiste er viele Länder und lernte dabei die ägyptische Mathematik kennen. Einer Anekdote zufolge besichtigte Thales bei einer seiner Reisen auch die Cheopspyramide. Die ihn begleitenden Ägypter forderten Thales auf, die Höhe dieses riesigen Grabmales zu bestimmen. Allerdings durfte er dazu nicht etwa zur Spitze emporklettern, um die Pyramide auszumessen. Solche Mühen wollte Thales auch gar nicht auf sich nehmen. Er wußte, daß die Länge des Schattens, den die Pyramide warf, mit deren Höhe zusammenhängt. Steckte er nämlich einen Holzstock in den Sand, entstand ein wesentlich kürzerer Schatten. Ohne weiteres konnte er die Stab- und Schattenlängen ausmessen.

- Welche Überlegungen mußte Thales anstellen, um die gesuchte Höhe zu ermitteln?

Thales beschäftigte sich mit vielen bereits bekannten Problemen und versuchte, deren Richtigkeit zu beweisen. Damit beschritt er in der Mathematik einen neuen Weg. Gaben sich die Gelehrten bisher mit der Kenntnis einer Gleichung oder einer Konstruktionsvorschrift zufrieden, bemühte sich Tha-

les, eine exakte Erklärung dafür zu finden. So bewies er beispielsweise, daß die Kreisfläche vom Durchmesser halbiert wird, die Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke dieselbe Größe haben und die Scheitelwinkel einander schneidender Geraden gleich sind. Ein Kennzeichen dieser neuen Richtung in der Mathematik ist der Versuch von Thales, strenge Sätze zu formulieren. 200 Jahre später verfaßte Euklid – ihm begegnen wir im nächsten Abschnitt – ein dreizehnbändiges Werk, welches dementsprechend gestaltet worden ist.

Zwei der Sätze Thales' sind gut bekannt und von großer Bedeutung. Dies ist zum einen ein Kongruenzsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Der zweite Satz erhielt Thales zu Ehren den Namen „Satz des Thales“ und lautet:

Alle Peripheriewinkel über einem Halbkreis sind rechte Winkel.

Als Peripheriewinkel wird der Winkel bezeichnet, dessen Scheitelpunkt S auf der Kreislinie liegt und dessen Schenkel den Kreis in den Punkten A und B schneiden. Der „Satz des Thales“ sagt nun nichts anderes aus, als daß dieser Winkel genau dann 90° beträgt, wenn die Strecke $\overline{AB}$ gleich dem Durchmesser des Kreises ist.

Der Satz gibt die Möglichkeit, rechtwinklige Dreiecke nur unter Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Wie erfolgt diese Konstruktion?

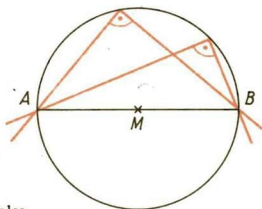


Abb. 19 Satz des Thales

Allerdings reicht die Aussage des Satzes von Thales noch nicht, um Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck vorzunehmen und Zusammenhänge zwischen den Seiten zu finden. Dies gestattet erst der nach Pythagoras benannte mathematische Satz:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse c gleich der Summe der Quadrate über den Katheten a und b ,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Die Katheten a und b sind die Seiten des Dreiecks, die den rechten Winkel einschließen.

Pythagoras, der Sohn eines Schneiders aus Samos, gründete in Italien einen geheimen Bund – den Orden der Pythagoreer. Dieser Bund erklärte die Zahlen für heilig und schrieb ihnen göttliche Gewalt zu. Einen Großteil der mathematischen Beschäftigung der Pythagoreer kann man deshalb getrost „Zahlenspielerei“ nennen.

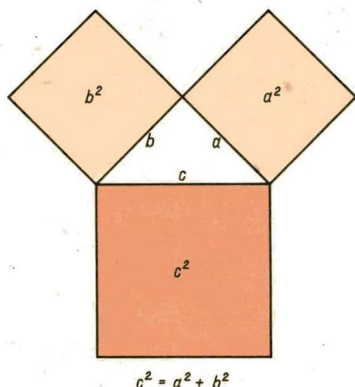


Abb. 20 Satz des Pythagoras

Anerkennung gebührt dem Bund aber für den Beweis des wichtigen mathematischen Zusammenhanges zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Ob der Beweis von Pythagoras selbst stammt, ist heute nicht genau bekannt. Eines ist jedoch sicher: Die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$ kannten die Babylonier bereits tausend Jahre vor Pythagoras' Lebenszeit. Ägyptische Baumeister verwendeten Schnüre mit

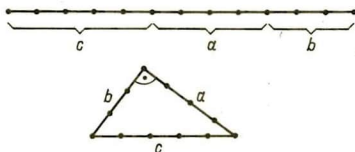


Abb. 21

13 in gleichem Abstand voneinander gebundenen Knoten, um rechte Winkel zu konstruieren. Dazu legten sie ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Tatsächlich bestätigt der Satz des Pythagoras, daß dabei ein rechter Winkel entstehen muß, denn es gilt

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Übrigens erfüllen noch weitere natürliche Zahlen die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$, wie zwei Beispiele zeigen:

$$\begin{aligned} 61^2 &= 11^2 + 60^2 \\ 205^2 &= 133^2 + 156^2. \end{aligned}$$

Überprüfe die Richtigkeit dieser Angaben!

Euklid von Alexandria

Die Gelehrten Alexandrias – einem der bedeutendsten Zentren von Wissenschaft und Kultur der Antike – bemühten sich um eine Weiterentwicklung der Mathematik. So wie Thales, der

„Vater der Geometrie“, versuchten sie stets, die Probleme bis in alle Einzelheiten zu klären, und errangen damit hervorragende Leistungen. Besondere Verdienste erwarb sich dabei Euklid. Er lebte vermutlich zwischen 367 und 300 v. u. Z., wobei seine Herkunft und sein Geburtsort unbekannt sind. Am Hofe seines Königs genoß Euklid große Achtung. Deshalb durfte er dem Herrscher auch ungestraft eine abweisende Antwort auf eine Frage geben. Die folgende kleine Anekdote berichtet davon:

Der Herrscher trug sich mit der Absicht, in die „Geheimnisse“ der Geometrie einzudringen. Jedoch widerstrebte es ihm, sich durch mühsames Lernen die nötigen Kenntnisse anzueignen. Deshalb ließ er Euklid rufen und fragte den Gelehrten, ob es denn für ihn, den großen König, nicht einen einfacheren Weg gäbe – eben ohne lernen zu müssen. Da nun aber für jeden Menschen, gleich, ob Sklave oder König, das Lernen die einzige Möglichkeit zum Erwerb von Wissen ist, antwortete ihm Euklid daraufhin: Es gibt keinen Königsweg der Geometrie!

Euklid gehörte zu den einflußreichsten Mathematikern in Alexandria. Neben seinen Forschungen hielt er Vorlesungen und verfaßte viele Schriften. Sein umfangreichstes und wichtigstes Werk sind die „Elemente“. Diese Arbeit umfaßt 13 Bücher, in denen Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit niederschrieb. Über 2000 Jahre dienten die „Elemente“ als Lehrbücher im Unterricht und als Vorbild für alle Mathematiker. Was war der Grund dafür?

Bereits vor Euklid gab es Versuche, die bisherigen Kenntnisse zusammenzutragen und schriftlich festzuhalten. Euklid verstand es als erster, dieses Wissen zu ordnen – man sagt auch zu systematisieren – und im Sinne von Thales zu formulieren. Das bedeutete, Definitionen einzuführen, strenge Sätze aufzustellen und sie mit Hilfe der Definitionen zu beweisen. Der Gelehrte entwickelte dabei eine meisterhafte Form, so daß die „Elemente“ über zwei Jahrtausende hin-

weg als musterhaftes Beispiel für ein gutes Lehrbuch galten. Immerhin lehrte man in England bis ins 20. Jahrhundert die Geometrie nach diesem Werk.

Neben Problemen der Geometrie, Flächen- und Volumenberechnung befaßte sich Euklid mit Primzahlen und versuchte zu klären, ob es beliebig große solcher Zahlen gibt. Als Primzahl wird jede natürliche Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die Tabelle enthält alle Primzahlen unter 100:

2	13	31	53	73
3	17	37	59	79
5	19	41	61	83
7	23	43	67	89
11	29	47	71	97

In der gleichen Art, wie der Gelehrte jene Aufgabe löste, sind die Elemente gestaltet. Deshalb wollen wir nur dieses eine Beispiel näher betrachten.

Euklid stellte die Behauptung auf: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.“

Sind x , y und z die vorgelegten Primzahlen, kann

$$P = x \cdot y \cdot z + 1$$

entweder eine neue Primzahl darstellen oder eine teilbare Zahl sein. Im ersten Fall wäre die Annahme bereits bewiesen, denn P wäre eine von x , y und z verschiedene Primzahl. Der andere Fall erfordert eine weitere Untersuchung.

P stellt jetzt eine teilbare Zahl dar, läßt sich also in ein Produkt von mindestens zwei Faktoren zerlegen. Diese Faktoren heißen Primfaktoren, wenn sie selbst nicht mehr teilbar sind; zum Beispiel sei

$$x = 3$$

$$y = 5$$

$$z = 7.$$

Dann ergibt sich

$$P = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$$
$$106 = 2 \cdot 53.$$

Die Tabelle bestätigt, daß es sich bei 2 und 53 um Primzahlen, also Primfaktoren von 106 handelt.

Allgemein können wir also sagen, daß P wenigstens durch eine Primzahl p teilbar ist. Euklid behauptete:

Diese Primzahl p stimmt mit keiner der gegebenen Primzahlen x, y, z überein:

$$p \neq x$$
$$p \neq y$$
$$p \neq z.$$

Läßt sich das beweisen, wäre die oben gestellte Aufgabe gelöst. Dazu wendet Euklid die Methode des indirekten Beweises an. Dabei wird genau das Gegenteil der Behauptung angenommen und nachgewiesen, daß dies zu einem Widerspruch führt.

Das Gegenteil der Behauptung lautet: p sei entweder gleich x oder gleich y oder gleich z .

Wäre diese Aussage richtig, müßte das Produkt

$$x \cdot y \cdot z$$

durch p teilbar sein! Andererseits stellt p auch einen Faktor von $P = x \cdot y \cdot z + 1$ dar, so daß

$$x \cdot y \cdot z + 1$$

ebenfalls durch p teilbar sein müßte. Das führt aber zu einem deutlichen Widerspruch: Ist p nämlich nach Voraussetzung ein Faktor von P , kann es keiner von $x \cdot y \cdot z$ sein! Folglich stimmt p mit keiner der vorgelegten Primzahlen überein und ist damit selbst eine Primzahl.

In unserem letzten Beispiel sind die vorgelegten Primzahlen die 3, 5 und 7 – die neue Primzahl wäre $p = 53$.

Sind andererseits 2, 3, 5 und 7 die gegebenen Primzahlen, folgt für P:

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211.$$

- Untersuche, ob 211 Primzahl ist oder sich in Primfaktoren zerlegen läßt.
- Es sei $x = 7$, $y = 11$. Welche Aussage läßt sich über $P = x \cdot y + 1$ machen?

Es erweist sich teilweise als recht kompliziert, mehrstellige Zahlen dahingehend zu untersuchen, ob sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind oder nicht. Die größte bis 1973 berechnete Primzahl lautet

$$p = 2^{19\,937} - 1.$$

Ausgeschrieben würde sie $3\frac{1}{2}$ Buchseiten füllen!

Wie schon der Beweis andeutet, sind die „Elemente“ nicht für Leser geschrieben worden, die keine Kenntnisse in der Mathematik besitzen. Euklid setzte zum Teil sehr umfangreiches Grundwissen voraus. Wir wollen deshalb nicht weiter in den „Elementen“ blättern, sondern unsere Besuche bei bekannten und berühmten Mathematikern des Altertums fortsetzen.

Archimedes von Syrakus

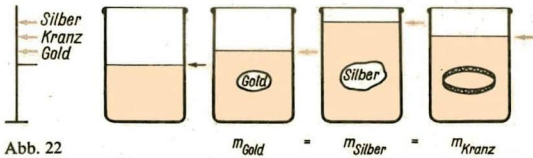
Im 3. Jahrhundert v. u. Z. bestieg in der griechischen Stadt Syrakus* Hieron II. den Königsthron. Zum Dank an die Götter ließ er einen wertvollen Kranz aus purem Gold an-

* Syrakus war eine griechische Stadt am Ufer des Mittelmeeres auf dem Gebiet des heutigen Italiens (Ostküste Siziliens). Syrakus heißt heute Siracusa.

fertigen. Mit dieser Aufgabe betraute der König den erfahrensten und geschicktesten Goldschmied der Stadt. Pünktlich legte der Schmiedemeister das Prunkstück vor, dessen Gewicht mit dem des Goldes übereinstimmte, welches er vom König erhalten hatte. Jedoch hinterbrachte man dem Herrscher, der Meister habe einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt und sich das übriggebliebene edle Metall selbst angeeignet. Hieron wußte aber nicht, wie er dies nachweisen sollte. Kurz entschlossen beauftragte er einen jungen Gelehrten namens Archimedes, den Kranz zu untersuchen, ohne ihn aber zu beschädigen.

Das Problem beschäftigte Archimedes lange Zeit. Eine Anekdote berichtet, daß Archimedes, wenn er sich mit schwierigen Aufgaben befaßte, alles um sich herum vergaß. Ja, er versäumte sogar die Mahlzeiten und wusch sich nicht mehr. Ging er dann doch einmal ins Bad, habe er noch auf seinem gesalbten Körper geometrische Zeichnungen angefertigt! Tief in Gedanken versunken, beschäftigt mit der Aufgabe, die Hieron II. ihm gestellt hatte, bemerkte er eines Tages beim Einsteigen in die bis zum Rand gefüllte Wanne, daß genau so viel Wasser auslief, wie er mit seinem Körper verdrängte. Das war die Lösung! Vor Freude darüber sprang Archimedes aus der Wanne und lief nackt durch die Straßen von Syrakus mit dem Ruf „Heureka!“, was soviel heißt wie „Ich habe es gefunden!“ Schon am nächsten Morgen übergab er König Hieron den Kranz und bestätigte den Betrug des Goldschmiedes. Ein einfaches Experiment diente Archimedes als Beweis:

Er tauchte ein Stück reines Gold vom Gewicht des Kranzes in ein wassergefülltes Gefäß und markierte die Höhe des Flüssigkeitsstandes. Anschließend wiederholte er den Versuch mit einem gleich schweren Silberklumpen. Dieser verdrängte natürlich ein größeres Wasservolumen, denn die Dichte von Silber beträgt nur $10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, die des Goldes dagegen $19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.



- Nimmt man an, der Kranz wog ein Kilogramm, läßt sich das von Gold und Silber verdrängte Flüssigkeitsvolumen berechnen.

Schließlich senkte der Gelehrte den Kranz in das Gefäß. Würde jener tatsächlich nur aus Gold bestehen, müßte der Wasserstand genau die zuerst ermittelte Markierung erreichen. Doch siehe da: Archimedes fand eine dritte Marke, die zwischen den beiden Vergleichsständen lag. Diese drei Messungen genügten zur Berechnung der Menge des dem Kranz beigemischten Silbers!

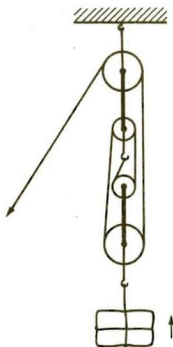
- Wieviel Gold ersetzte der Schmied durch Silber, wenn der Kranz ein Volumen von $60,5 \text{ cm}^3$ verdrängte?

Hieron ließ daraufhin den betrügerischen Goldschmied bestrafen und für die Götter einen neuen Kranz anfertigen.

Diese und andere Anekdoten aus dem Leben eines der bedeutendsten Mathematiker des Altertums sind von Geschichtsschreibern überliefert worden. Weitaus weniger bekannt sind jedoch genaue Angaben zum Leben des Archimedes. Als Sohn eines Astronomen 287 v. u. Z. geboren, studierte er einige Jahre in Alexandria. Später lebte er am Hofe von Hieron II. als dessen persönlicher Ratgeber.

Eigentlich ist es nicht richtig, Archimedes als Mathematiker zu bezeichnen. Mit der gleichen Berechtigung könnte man ihn auch einen großen Physiker und Ingenieur nennen. So fand er zum Beispiel das Hebelgesetz und untersuchte die Wirkungsweise eines Flaschenzuges. Voller Begeisterung

Abb. 23 Flaschenzug



darüber schrieb er Hieron, er sei in der Lage, mit kleinstem Kraftaufwand große Lasten zu bewegen. Interessiert forderte der König von Archimedes einen Beweis seiner Behauptung.

Wenig später führte der Gelehrte einer neugierigen Menschenmenge ein Schauspiel vor, welches gewaltiges Staunen auslöste. So wie heute kleine Bugsierboote die Schiffe in die Häfen manövrieren, zogen einst kräftige Männer die anlegenden Handels- und Kriegsschiffe zum Ufer. Viel Schweiß und Mühe kostete diese schwere Arbeit. Wie groß war da die Überraschung, als Archimedes ganz allein mit einem Seil einen vollbeladenen Dreimaster der königlichen Flotte ans Ufer zog!

Archimedes ersetzte die Männer durch einen Flaschenzug. Damit gelang es ihm, seine Muskelkraft ohne Schwierigkeiten zu vervielfachen und folglich enorme Lasten zu bewegen.

Bedeutende Verdienste erwarb sich Archimedes als Mathematiker. Es ist hier gar nicht möglich, alle Ergebnisse seiner Arbeiten und Forschungen aufzuführen. Zu den wichtigsten Beiträgen zählen Vorschriften und Sätze zur Flächen- und Volumenberechnung. Archimedes selbst war so stolz auf eine

Volumenbestimmung, daß er sich auf seinen Grabstein eine Kugel und einen Zylinder wünschte. Der Gelehrte hatte nämlich gefunden, daß der Rauminhalt eines Zylinders zu dem einer Kugel im Verhältnis 3 zu 2 steht, wenn Zylinderdurchmesser und -höhe gleich dem Kugeldurchmesser sind.

● Beweise diese Aussage, indem du das Volumen des Zylinders und das Volumen der Kugel berechnest!

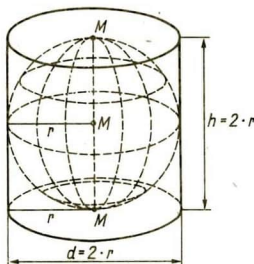


Abb. 24

$$\frac{3}{2} \cdot V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Zylinder}}$$

Zwei Untersuchungen des Archimedes wollen wir hier etwas näher betrachten. Es sind bei weitem nicht die wichtigsten, aber dennoch sehr interessante.

Seit den Anfängen der Geometrie wußten die Mathematiker, daß Kreisumfang und Kreisdurchmesser in einem bestimmten und immer gleichen Verhältnis zueinander stehen. Diese Verhältniszahl erhielt wegen ihrer Bedeutung im 16. Jahrhundert die Bezeichnung π (sprich: pi). Für das Rechnen mit dieser Verhältniszahl suchte man nach Näherungswerten und nach Möglichkeiten, π mit einer bestimmten Genauigkeit zu ermitteln.

Ahmes rechnete mit

$$\pi = \left(\frac{16}{9} \right)^2;$$

Archimedes fand die Beziehung

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70};$$

Claudius Ptolemäus gab

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60 \cdot 60}$$

an; 700 Jahre später berechnete der Chinese Tsu Chhung-Chih

$$\pi = \frac{355}{113}.$$

● Welcher der angegebenen Werte kommt $\pi = 3,141592$ am nächsten?

Wie so oft bei der Lösung von Problemen beschritt Archimedes einen verblüffend einfachen Weg, um die Verhältniszahl mit guter Genauigkeit zu errechnen. Er überlegte sich, daß der Kreisumfang größer als der Umfang eines dem Kreis eingeschriebenen und kleiner als der Umfang eines dem Kreis umschriebenen regulären Sechsecks sein muß. Regulär heißt, jede Seite besitzt die gleiche Länge, und die Innenwinkel unterscheiden sich nicht voneinander. Die Abbildung zeigt die weitere Überlegung von Archimedes. Indem er aus den 6-Ecks 12-Ecks konstruierte, näherte er sich dem Kreis weiter an. Diesen Weg beschritt er bis zum 96-Eck!

Konstruiere, ausgehend von Kreis und eingeschriebenem regulärem 6-Eck, ein 24-Eck. Wähle dazu den Kreisradius möglichst groß.

Zur näherungsweisen Berechnung von π benötigt man jetzt nur den Satz des Pythagoras. Zuvor vereinbaren wir aber noch eine allgemeine Schreibweise für 6-, 12-, ... Eck und nennen diese einfach n-Ecke. Wird zum Beispiel $n = 48$ gesetzt, handelt es sich also um ein 48-Eck.

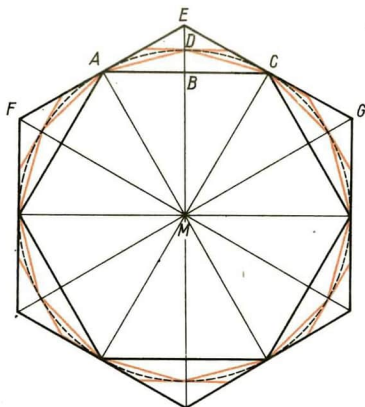


Abb. 25

Gesucht sind nun die Umfänge der n -Ecke, die sich ja für wachsendes n dem Kreisumfang immer weiter annähern. Um nicht jedes n -Eck einzeln berechnen zu müssen, betrachten wir einen Ausschnitt aus der letzten Abbildung. Besteht zwischen der Seite s_n eines einbeschriebenen n -Ecks und der Seite s_{2n} eines $2n$ -Ecks ein Zusammenhang? Gelingt es, eine

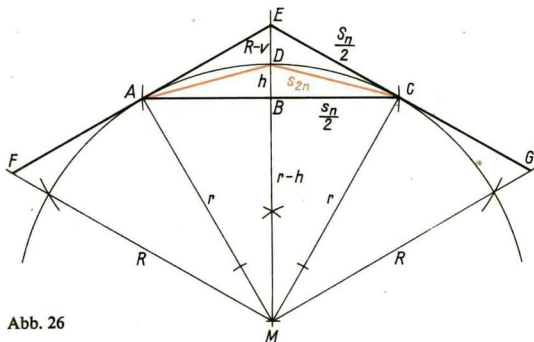


Abb. 26

Beziehung zwischen s_n und s_{2n} zu finden, wäre ein Teil der Aufgabe gelöst. Ist nämlich s_6 bekannt, könnte sofort die Seitenlänge s_{12} angegeben werden. Aus s_{12} folgt aber s_{24} , daraus s_{48} und schließlich s_{96} ! Interessieren uns andererseits die Umfänge der regulären 4-, 8-, 16-, ... Ecke, braucht man nur von s_4 auszugehen. Die Einführung der allgemeinen Bezeichnung „n-Eck“ erweist sich damit als sehr vorteilhaft!

Wie läßt sich aber der gesuchte Zusammenhang finden? Da die Dreiecke BCM und BCD jeweils einen rechten Winkel besitzen, bestehen nach dem Satz des Pythagoras einfache Beziehungen zwischen den Dreiecksseiten.

1. Dreieck BCM

$$\text{Hypotenuse: } \overline{MC} = r$$

$$\text{Katheten: } \overline{MB} = (r - h)$$

$$\overline{BC} = \frac{s_n}{2}$$

$$\text{Satz des Pythagoras: } r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \quad \text{I}$$

2. Dreieck BCD

$$\text{Hypotenuse: } \overline{CD} = s_{2n}$$

$$\text{Katheten: } \overline{BD} = h$$

$$\overline{BC} = \frac{s_n}{2}$$

$$\text{Satz des Pythagoras: } (s_{2n})^2 = h^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \quad \text{II}$$

Gleichung II drückt bereits einen Zusammenhang zwischen s_n und s_{2n} aus, doch stört die Unbekannte h . Da aber auch die Gleichung I h enthält, versuchen wir, beide Gleichungen so miteinander zu verbinden, daß h „verschwindet“.

Um diese Aufgabe zu lösen, stellen wir I nach $(r - h)^2$ um:

$$(r - h)^2 = r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel:

$$r - h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}.$$

Jetzt bereitet die Auflösung nach h keine Schwierigkeiten mehr.

$$h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}.$$

Ersetzen wir nun die Unbekannte in II mittels unseres eben gefundenen Ausdruckes, so folgt

$$(s_{2n})^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

Bevor wir $(s_{2n})^2$ in s_{2n} umformen, überlegen wir, ob sich die rechte Gleichungsseite vereinfachen läßt. Multiplizieren wir aus diesem Grund

$$\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$$

aus:

$$\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$= r^2 - 2 \cdot r \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}^2$$

$$= r^2 - 2 \cdot r \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$$

$$= 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

Tatsächlich ergibt sich eine Vereinfachung:

$$(s_{2n})^2 = 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$$

$$(s_{2n})^2 = 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}.$$

Der letzte Lösungsschritt besteht im Ziehen der Quadratwurzel, um s_{2n} zu erhalten:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}.$$

● Zeige, daß dafür auch

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - s_n^2}} \quad \text{III}$$

geschrieben werden kann!

Gleichung III läßt sich sogar noch vereinfachen. Da π für jeden beliebigen Kreisradius r immer den gleichen Wert besitzt, wählen wir ein r und setzen es in III ein! Um die gewünschte Vereinfachung zu erreichen, sei $r = 1$. Damit folgt die endgültige Lösung

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}. \quad \text{IV}$$

Beachten wir bei allen weiteren Rechnungen, daß IV nur unter der Voraussetzung $r = 1$ gilt!

Gleichung IV nutzt uns nur dann, wenn wir die Seitenlänge s_n kennen. Archimedes ging vom 6-Eck aus – ermitteln wir also s_6 .

Betrachten wir noch einmal die Abbildungen auf der Seite 57.

● Wie groß ist die Innenwinkelsumme eines 6-Ecks? Beweise, daß jeder Innenwinkel im regulären 6-Eck eine Größe von 120° besitzt.

Werden gegenüberliegende Eckpunkte so miteinander verbunden, wie es die Abbildung 25 zeigt, halbieren diese Diagonalen die Innenwinkel. Gleichzeitig entsteht das Dreieck ACM (Abbildung 26). Da $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, beträgt in diesem Dreieck folglich jeder Winkel 60° . Da nur gleichseitige Dreiecke gleich große Innenwinkel besitzen, gilt

$$\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{AC} = r.$$

Wegen $\overline{AC} = s_6$ ist die Seitenlänge eines regulären 6-Ecks gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises. Der Umfang folgt schließlich zu

$$u_6 = 6 \cdot s_6 = 6 \cdot r.$$

Da wir aber zur Vereinfachung $r = 1$ gesetzt hatten, wird

$$s_6 = 1 \quad \text{und} \quad u_6 = 6.$$

Wir können sofort s_{12} und u_{12} berechnen:

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$u_{12} = 12 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Daraus folgen s_{24} , u_{24} und alle weiteren Werte.

Haben wir uns bisher von „innen“ dem Kreisumfang genähert, müssen sich auch die umbeschriebenen n-Ecke für wachsende n immer weniger vom Kreis unterscheiden. Gibt es auch hier einen Zusammenhang zwischen s_n und der Seite S_n des umbeschriebenen n-Ecks? Die Herleitung dieser Beziehung erfolgt auf ähnlichem Weg wie die vorangegangene Berechnung. Deshalb soll gleich das Ergebnis genannt werden:

$$S_n = \frac{2 \cdot s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}. \quad V$$

Die Tabelle auf Seite 63 enthält die mittels Gleichung IV und Gleichung V bestimmten s- und S-Werte sowie die dazugehörigen Umfänge u und U.

Wer die Möglichkeit hat, überprüfe mit einem elektronischen Taschenrechner die Werte, die sich bei der Berechnung der Wurzelausdrücke ergeben.

Archimedes mußte große Mühen aufwenden, um die Quadratwurzeln zu ermitteln. Bisher konnte noch nicht geklärt werden, auf welche Weise er das Problem zu lösen vermochte.

Archimedes' Überlegungen zufolge liegt der Kreisumfang

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot \pi \quad (\text{wegen } r = 1)$$

zwischen u_{96} und U_{96} :

$$u_{96} < u < U_{96}.$$

Mit Hilfe unserer Tabelle finden wir

$$6,282 < 2 \cdot \pi < 6,285 \quad |: 2$$

$$3,141 < \pi < 3,142$$

Wegen $3,141 \approx 3\frac{10}{71}$ und $3,142 \approx 3\frac{10}{70}$ erhalten wir tatsächlich die von Archimedes angegebene Begrenzung für das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

● Bestimme π näherungsweise ausgehend vom ein- und umbeschriebenen Quadrat bis zum 128-Eck!

Im 16. Jahrhundert setzte der Franzose Vieta die Berechnungsmethode von Archimedes fort, indem er die Betrachtung bis zum 393216-Eck ausdehnte und π auf neun Stellen nach dem Komma angab.

	s	u	S	U
6-Eck	1	$6 \cdot s_6 = 6,0$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$6 \cdot S_6 = 6,928$
12-Eck	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$12 \cdot s_{12} = 6,211$	$\frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$12 \cdot S_{12} = 6,430$
24-Eck	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$24 \cdot s_{24} = 6,265$	$\frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$	$24 \cdot S_{24} = 6,319$
48-Eck	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$	$48 \cdot s_{48} = 6,278$	$\frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$	$48 \cdot S_{48} = 6,292$
96-Eck	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$	$96 \cdot s_{96} = 6,282$	$\frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$	$96 \cdot S_{96} = 6,285$

Heute helfen modernste Rechenmaschinen, π beliebig genau zu bestimmen. Gegenwärtig sind mehr als 100000 Dezimalstellen bekannt. Allerdings nutzt man für diese Berechnungen nicht mehr Archimedes' Verfahren. So läßt sich π beispielsweise mit Hilfe der Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \dots$$

ermitteln. Jeder vermag die Reihe fortzusetzen: In den Nennern stehen fortlaufend die ungeraden Zahlen, die Vorzeichen der Brüche wechseln ständig. Je mehr Glieder der Reihe wir berücksichtigen, desto genauer erhalten wir π . Die ersten 100 Dezimalstellen lauten

$$\begin{aligned} \pi = & 3,1415926535 \ 8979323846 \ 2643383279 \ 5028841971 \\ & 6939937510 \ 5820974944 \ 5923078164 \ 0628620899 \\ & 8628034825 \ 3421170679 \end{aligned}$$

Wegen der strengen Forderung, geometrische Konstruktionen nur mit Zirkel und Lineal auszuführen, ergaben sich einige unlösbare Probleme. Wie wir bereits wissen, gehört die Dreiteilung eines beliebig vorgegebenen Winkels zu diesen Aufgaben. Archimedes schlug deshalb eine Konstruktion

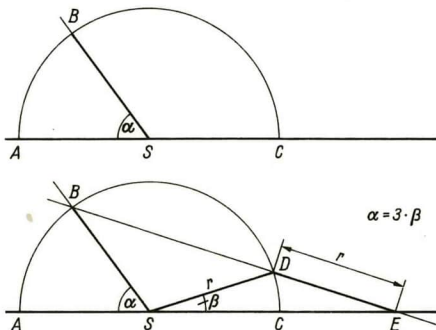


Abb. 27



Abb. 28 Archimedes – dargestellt auf einer alten Münze

vor, für die ein sogenanntes „Einschiebelineal“ nötig ist. Auf einem solchen Lineal kann eine bestimmte Strecke abgetragen werden, indem man deren Anfangs- und Endpunkt mit Markierungen „einschiebt“. Der Gelehrte beschritt folgenden Lösungsweg, den wir als zweites Beispiel verfolgen:

Um den Scheitelpunkt S eines gegebenen Winkels wird ein Kreisbogen mit beliebigem Radius r geschlagen. Dieser Kreisbogen schneidet die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B . Verlängert man die Gerade AS , entsteht der Schnittpunkt C . Jetzt schiebt man auf dem Lineal die Strecke $\overline{AS} = r$ ein. Anschließend wird das Einschiebelineal so an die Zeichnung gelegt, daß es

- den Kreisbogen in den Punkten B und D und
- die über C hinaus verlängerte Gerade AS im Punkt E

schneidet. Eine Verschiebung des Lineals erfolgt jetzt so lange, bis die Strecke $\overline{DE}$ gleich der Einschiebung (also gleich r) ist.

● Beweise, daß der Winkel ESD , der nach der Verbindung der Punkte S und D entsteht, den gesuchten dritten Teil des Winkels ASB darstellt!

Archimedes beschäftigte sich bis ins hohe Alter mit mathematischen und physikalischen Problemen, aber auch mit ingenieurtechnischen Aufgaben. Schon während seiner Studienzeit erfand er die nach ihm benannte Wasserschraube, mit deren Hilfe Wasser aus Brunnen gehoben werden konnte. Von dem Bau eines Flaschenzuges und der Anwendung des Hebelgesetzes haben wir bereits gelesen. Als Siebzjähriger erhielt Archimedes von König Hieron den Auftrag, Kriegsgesetze zu entwickeln und bauen zu lassen. Wenig später fanden die Geräte ihre Verwendung bei der Verteidigung von Syrakus vor den angreifenden Römern. Diese trugen sich mit der Absicht, Syrakus kurzerhand zu stürmen und zu besetzen. Wie groß war aber ihr Entsetzen, als sie sich mit ihren Kriegsschiffen dem Hafen näherten und plötzlich riesige Kranarme über die Stadtmauer schwenkten, die die angreifenden Schiffe aus dem Wasser hoben und gegen Felsen schleuderten, bis sie zerbrachen! Daraufhin ließ Marcellus, der römische Heerführer, mehrere Schiffe zusammenbinden und darauf einen großen Belagerungsturm errichten. Doch noch während sich die schwimmende Festung dem Land näherte, trafen gewaltige Steinbrocken den Holzturm und zerschmetterten ihn. Wurfgeschütze, in der Stadt aufgestellt, hatten diesen Steinhagel gesandt.

Zwei Jahre wehrten sich die Bürger von Syrakus erfolgreich mit den von Archimedes konstruierten Waffen. Erst ein überraschender Angriff führte die römischen Krieger zum Sieg. Ausdrücklich hatte Marcellus zuvor verlangt, das Leben des berühmten Archimedes zu schonen. Doch in der allgemeinen Aufregung und dem Tumult in der Stadt fand der große Gelehrte den Tod. Angeblich saß Archimedes, in eine Berechnung vertieft, vor einem mit feinstem Sand bedeckten Tisch und zeichnete geometrische Figuren. Ein leichter Stoß an den Rand des Rechentisches hätte bereits genügt, um den Sand wieder zu glätten. Besorgt um seine Zeichnungen, wies der Gelehrte deshalb einen nahenden Römer zurück

und rief: „Störet meine Kreise nicht!“ Der erzürnte Krieger – nicht ahnend, wer vor ihm stand – erschlug daraufhin Archimedes.

Apollonios von Perge

Bisher erwies sich die Mathematik fast immer als notwendiges Hilfsmittel zur Lösung praktischer Aufgaben. Der entstehende Handel zwischen den Stämmen hatte zur Entwicklung des Zählens und der Handhabung einfacher Rechenoperationen geführt; Architektur und Bauwesen verlangten von den Baumeistern gute mathematische Kenntnisse; Überschwemmungen erforderten ein Neuvermessen des Landes und förderten das Entstehen des Kalenderwesens; die Konstruktion technischer Geräte wäre ohne physikalisches und mathematisches Wissen undenkbar gewesen.

In besonders enger Verbindung standen seit ihren Anfängen die Astronomie und die Mathematik. Seit Jahrtausenden beobachteten die Menschen Vorgänge am Himmel: die Bewegung der Sonne und des Mondes, der Planeten und der Sterne. Durch die Auswertung dieses astronomischen Materials konnte Thales eine Sonnenfinsternis vorherbestimmen; die Verfolgung der Aufgangszeiten des Sirius ermöglichte die Voraussage der nächsten Nilüberschwemmung. In dem Zusammenhang entstand die Frage, wie wohl die Bewegung der Himmelskörper erklärt werden könnte. Dem Beobachter auf der Erde erschien es, als kreisen diese um unseren Planeten.

Folglich müßte sich die Erde im Mittelpunkt des Weltalls befinden und ruhen!

Die Gelehrten des Altertums stellten nun die Frage, ob sich vielleicht ein mathematisches Modell finden läßt, welches die scheinbar so komplizierten Bewegungen der Planeten und der Sonne beschreibt. Eine beachtenswerte Über-

legung entwickelte Apollonios von Perge*, der vermutlich zwischen 262 und 190 v. u. Z. lebte. Apollonios studierte in Alexandria Mathematik und wandte sich anschließend nach Pergamon**. Dort lehrte er viele Jahre und verfaßte zahlreiche wissenschaftliche Schriften. Besonderes Interesse fand der Gelehrte an der Astronomie. Er schuf ein Modell, welches 1800 Jahre anerkannt wurde, die sogenannte Epizykeltheorie. Nach dieser Theorie sollten sich die Planeten auf Kreisbahnen bewegen. Doch wie mußten diese Bahnen angeordnet sein? Die Astronomen beobachteten nämlich, daß der Lauf der Planeten am Sternhimmel nicht gleichförmig ist. Jährlich zu bestimmten Zeiten beginnen sie plötzlich in entgegengesetzter Richtung zu wandern! Heute lernen wir im Astronomieunterricht die Erklärung dafür kennen: Die Erde und alle anderen Planeten bewegen sich um die Sonne. Je größer die Entfernung zur Sonne, desto geringer ist die Bahngeschwindigkeit. Die Erde umläuft die Sonne in einem Jahr, während beispielsweise der Mars 1,9 Jahre, der Pluto gar 250 Jahre benötigt. Dabei überholt unser Heimatplanet seine Nachbarn, die dann mit einem Male scheinbar rückwärts wandern.

Apollonios dagegen setzte voraus, daß die Erde der Mittelpunkt des Weltalls sei. Um die zeitweilig rückläufige Bewegung dennoch erklären zu können, sollten sich die Planeten nicht nur auf *einer* (kleineren) kreisförmigen Bahn um einen gedachten Mittelpunkt, sondern auch noch auf *einer weiteren* (größeren) Kreisbahn um die Erde drehen! Betrachten wir die Abbildung 30: Befindet sich P innerhalb des Kreises K_2 , erfolgt die Rückwärtsbewegung des Planeten.

Angenähert konnten die astronomischen Beobachtungen damit bestätigt werden. Eine Verbesserung des Modells

* Perge liegt im Süden der heutigen Türkei und ist nur noch eine Ruinenstätte.

** Pergamon, ebenfalls nur noch eine Ruinenstätte, befindet sich 200 km nördlich von Milet auf dem Gebiet der heutigen Türkei.

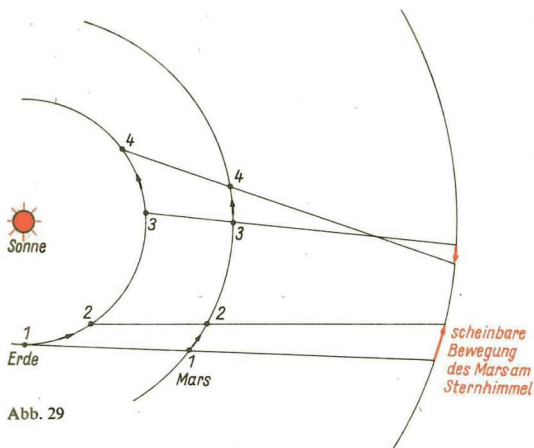


Abb. 29

erreichte Claudius Ptolemäus 300 Jahre später. In seinem Werk „Almagest“ beschreibt er das Planetensystem einschließlich der Bewegungsvorgänge. Die Vorstellung des Ptolemäus wird als geozentrisches Weltbild bezeichnet. Der Begriff „geozentrisch“ beschreibt die Erde (geo...) als Zentrum (... zentrisch).

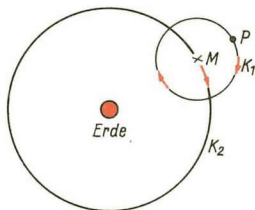


Abb. 30 Epizykelbewegung

Der herrschenden Klasse diente das ptolemäische Weltbild bis ins 17. Jahrhundert als Weltanschauung. Wer wagte, gegen das geozentrische System aufzutreten, mußte mit harten Strafen rechnen. Die Angst vor solchen Strafen hinderte viele Naturwissenschaftler des Mittelalters, tiefgründig zu forschen. Erst Nicolaus Copernicus stellte im 16. Jahrhundert die Vermutung auf, daß die Rotation der Erde um ihre Achse Ursache für die Bewegung des Sternhimmels sei. Für ihn gab es keinen Unterschied zwischen den Planeten und der Erde, die sich alle um das Zentrum des Planetensystems, die Sonne, bewegen. Mit aller ihr zu Gebote stehenden Macht kämpfte die Kirche gegen dieses heliozentrische Weltbild des Copernicus (helio = Sonnen...), das die Richtigkeit der christlichen Weltanschauung in Frage stellte. Andererseits ließ das kopernikanische Weltbild noch wissenschaftliche Fra-

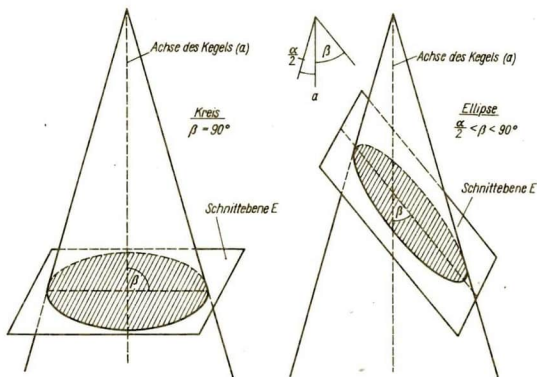
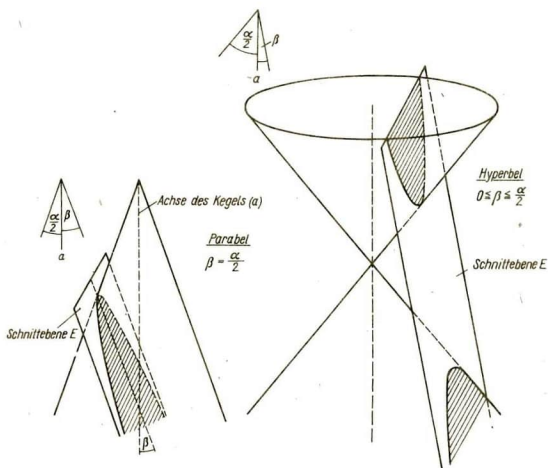


Abb. 31 Die Kegelschnitte

Eine Menge von Punkten, die einer Ebene E und einem geraden Kreiskegel zugleich angehören. Von der Beziehung zwischen der Größe α des Öffnungswinkels des Kegels und der Größe β des Neigungswinkels der Schnittebene E gegen die Achse a des Kegels hängt die Art des Kegelschnitts (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) ab.

gen offen, so daß es bei vielen Astronomen auch auf Ablehnung stieß. Doch die Entwicklung der neuen Weltanschauung ließ sich nicht mehr aufhalten. Astronomische Beobachtungen führten bald zu der Erkenntnis, daß die wahren Planetenbahnen eine elliptische Form besitzen. Wiederum bildete eine Arbeit des Gelehrten Apollonios die mathematische Grundlage zu deren Beschreibung. Apollonios verfaßte acht Lehrbücher, die den Titel „Conica“ tragen, was soviel wie „Kegelschnitte“ heißt. Hinter dem Wort „Kegelschnitte“ verbirgt sich nichts anderes als die Bezeichnung für Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Die untenstehenden Abbildungen zeigen die vier Möglichkeiten, einen Kegel aufzuschneiden. Es ergeben sich daraus die vier genannten Schnittflächen. In den acht Bänden der „Conica“ untersucht Apollonios ausführlich Konstruktion und Eigenschaften der



geometrischen Figuren. Einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen seiner bedeutenden Arbeit und der Bahnform der Planeten konnte der Mathematiker nicht erkennen: Für ihn stand die Erde im Mittelpunkt des Weltalls.

Während der Glaube an die besondere Stellung der Erde im Weltraum über zwei Jahrtausende erhalten blieb, nahmen die Gelehrten schon frühzeitig an, daß die Erde Kugelgestalt besitzt. Die vermutlich erste Vermessung des Erdumfanges erfolgte bereits im 3. Jahrhundert v. u. Z. Eratosthenes, der Leiter der Bibliothek von Alexandria, bemerkte, daß die Sonne zur Mittagszeit in Syene* senkrecht am Himmel stand. Infolgedessen wirft hier ein in den Boden gesteckter Stab keinen Schatten. Andererseits erreicht die Sonne in Alexandria am Mittag eine geringere Höhe. Mit Hilfe eines Schattenstabes bestimmte Eratosthenes den Sonnenstand zu 82,8°. Die Differenz zu 90° beträgt genau 7,2°.

Die Abbildung 32 zeigt, daß sich die Entfernung zwischen Alexandria und Syene zum Winkel von 7,2° wie der Erdumfang u zum Winkel von 360° verhält:

$$\frac{\overline{AS}}{7,2^\circ} = \frac{u}{360^\circ} \quad | \cdot 360^\circ$$

$$u = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} \cdot \overline{AS}.$$

Eratosthenes brauchte lediglich die Strecke Alexandria – Syene zu vermessen, um den gesuchten Umfang berechnen zu können. Mit

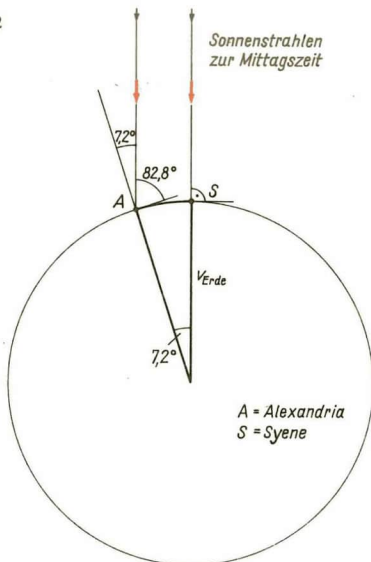
$$\overline{AS} = 794 \text{ km}$$

folgt

$$u = 39\,700 \text{ km}.$$

* Syene ist das heutige Assuan (Ägypten).

Abb. 32



Verglichen mit dem gegenwärtig bekannten Wert von

$$u = 40009 \text{ km}$$

stellt Eratosthenes' Ergebnis eine erstaunlich gute Näherung dar. Erst 2000 Jahre später erhielten Erdvermesser genauere Resultate.

Diophantos von Alexandria

Schließen wir unsere Begegnungen mit einigen der bedeutendsten Mathematiker des Altertums mit einem Besuch bei Diophantos ab.

Aus dem Leben dieses Gelehrten ist sehr wenig bekannt, ja, man weiß nicht einmal genau, in welcher Zeit er lebte. In alten Schriften und Überlieferungen finden sich Hinweise, daß Diophantos vermutlich zwischen 150 und 350 u. Z. in Alexandria wirkte. Aber dennoch kennt man Einzelheiten aus seinem Leben. Es läßt sich feststellen, wie alt der Mathematiker wurde, wann er heiratete und wann sein Sohn zur Welt kam. Wir wissen sogar, wann Diophantos' Bart zu wachsen begann.

Alle diese Angaben verdanken wir einer „Mode“-Erscheinung der damaligen Zeit. Um die Mathematik interessant zu machen, wurden Aufgaben in Verse gekleidet. Ein Beispiel dafür ist die Inschrift auf dem Grabe Diophantos'. In deutscher Übersetzung lautet sie etwa so:

„Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das
Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter
der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel
des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange
der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis
der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung
ein Sohn.
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte
der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal
erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung
den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische
Ziel.“

Schwierig zu lesen, nicht wahr? Aber nicht die mehr oder weniger kunstvolle Form der Verse interessiert uns, sondern vielmehr ihr Inhalt. Tatsächlich vermitteln sie einige Informationen über Diophantos. Um sie zu entschlüsseln, bedarf es jedoch einiger Rechnungen.

Überlegen wir vorerst, womit wir eigentlich beginnen wollen. Erscheint es sinnvoll, sofort Diophantos' Heiratsalter zu bestimmen? Oder das Alter des Sohnes? Oder – wann der Bart des Gelehrten zu sprießen begann? Ist das überhaupt als erstes möglich?

Alle Verse jedoch beziehen sich auf Diophantos' Lebensalter. Deshalb ist es zweckmäßig, zunächst sein Alter zu ermitteln. Bezeichnen wir diese unbekannte Zahl mit x . Wie sich x zusammensetzt schildert der Text:

$$\begin{array}{rcl}
 & x = & \\
 \text{Knabe zu sein gewährte ihm Gott} & & \frac{x}{6} \\
 \text{ein Sechstel des Lebens; ...} & & \\
 \dots \text{ noch ein Zwölftel dazu ...} & + & \frac{x}{12} \\
 \dots \text{ dazu ein Siebentel noch ...} & + & \frac{x}{7} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Die Vervollständigung bereitet jetzt keine Schwierigkeiten mehr. Das gesamte Gedicht liefert schließlich den Ansatz

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Aus dieser Gleichung gewinnen wir rasch die Lösung, Diophantos' Lebensalter.

Die Brüche auf der rechten Gleichungsseite werden durch einen gemeinsamen Hauptnenner zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} \\ = \frac{14x + 7x + 12x + 42x}{84} = \frac{75}{84}x. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich der Ansatz zu

$$x = \frac{75}{84}x + 9.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet schließlich

$$x = 84.$$

Überprüfe diese Angabe.

Demnach erreichte Diophantos von Alexandria das recht beachtliche Alter von 84 Jahren.

● Die weiteren Daten aus dem Leben des Mathematikers sind jetzt ohne Schwierigkeiten zu bestimmen.

Halt! Werfen wir noch einmal einen Blick auf das Gedicht! Haben wir die Inschrift wirklich richtig gedeutet? Wie übersetzten wir den 7. und 8. Vers in die mathematische Zeichensprache? „... die Hälfte der Jahre hatt' es des Vaters erreicht ...“ bedeutete $\frac{x}{2}$. Mit anderen Worten ausgedrückt:

Der Sohn wurde genau halb so alt wie der Vater. Doch könnte man die beiden Verse auch anders deuten: Gerade als der Sohn starb, war der Vater doppelt so alt wie dieser.

Nun wird die Berechnung etwas schwieriger. Die alte Gleichung lautete

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

wobei $\frac{x}{2}$ das Alter des Sohnes ausdrückte. Bei unserer neuen

Überlegung ist die Größe aber auch unbekannt, bezeichnen wir sie deshalb mit y . Die neue Gleichung heißt nunmehr:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 9 + y.$$

Mit zwei nicht bekannten Größen in einer Gleichung können wir nichts anfangen. Eine der Unbekannten muß „verschwinden“. Vielleicht gelingt es, das y durch das x zu ersetzen. Ein derartiges „Verschwindenlassen“ einer Größe mit Hilfe einer anderen bezeichnet der Mathematiker als eliminieren. Dafür benötigt man allerdings eine Vorschrift, denn es darf natürlich nicht anstelle des y einfach das x geschrieben werden! Bei der näherungsweisen Berechnung von π eliminierten wir die Unbekannte h (siehe Seite 59) in II und I, indem wir beide Gleichungen geschickt miteinander verbanden. Es bleibt jetzt also nichts anderes übrig, als nach einem weiteren Zusammenhang zwischen x und y zu suchen. Tatsächlich liefert ihn der 9. Vers mit dem 7. und 8. Gerade als der Sohn starb, war der Vater doppelt so alt wie dieser (Vers 7 und 8) – und das ereignete sich genau vier Jahre vor dem Tod des Vaters, wie der 9. Vers zu berichten weiß. Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$x - 4 = 2y \quad \text{beziehungsweise} \quad y = \frac{x}{2} - 2.$$

- Jetzt können wir y in der Ausgangsgleichung durch $\frac{x}{2} - 2$ eliminieren und die zweite Lösung bestimmen.

Die Frage bleibt: Wie alt wurde Diophantos? 84 Jahre?

Oder $65\frac{1}{3}$ Jahre? Das Gedicht gibt keine exakte Antwort.

So gut die Verse gemeint waren, ein wenig Unterhaltung in die Mathematik zu bringen – sie ersetzen nicht immer eine genaue mathematische Zeichensprache.

Allerdings deuten sie an, welche Bedeutung Diophantos zukommt. Er ist einer der ersten Gelehrten des Altertums, für die nicht mehr unmittelbar der praktische Nutzen mathematischer Überlegungen im Vordergrund stand. Vorrangig befaßte er sich mit Gleichungen und der Suche nach Auflösungen dieser Gleichungen. Wir sagen, er untersuchte theoretische Probleme. Die Ergebnisse der Arbeiten schrieb der Gelehrte in seinem Hauptwerk, der „Arithmetik“, nieder. Da die Mathematiker damals wenig Interesse an theoretischen Aufgabenstellungen zeigten, wurde die „Arithmetik“ erst nach mehr als tausend Jahren nach der Fertigstellung in Europa studiert.

Leider sind uns von den dreizehn Bänden nur sechs überliefert worden. Jedoch glauben Historiker, vor wenigen Jahren in einer alten Bibliothek weitere Bände gefunden zu haben – aber das bedarf genauer Prüfungen.

In seiner „Arithmetik“ führte Diophantos zur Erleichterung des Rechnens feste Symbole und Abkürzungen ein. So benannte er die Potenzen x^1 , x^2 , ..., x^6 :

x^1 = Zahl

x^2 = Quadratzahl

x^3 = Kubikzahl oder Kubus

x^4 = Biquadrat

x^5 = Quadratokubus (als Zusammensetzung einer Quadratzahl und einer Kubikzahl: $x^5 = x^2 \cdot x^3$)

x^6 = Kubokubus.

Für jede der Potenzen verwendete Diophantos eine bestimmte Abkürzung. Auch für das Minuszeichen und das Gleichheitszeichen gab er feste Symbole vor:

„A“ für das Minus- und „t“ für das Gleichheitszeichen.

Erinnern wir uns an die Schreibweisen vor Diophantos, leuchtet der Vorteil bestimmter Abkürzungen sofort ein.

Daß seine Gleichungen trotzdem kompliziert erscheinen, liegt daran, daß die alten Griechen Zahlen mit Hilfe von Buchstaben ausdrückten. Die Gleichung

$$202x^2 + 13 - 10x = 13$$

sah bei Diophantos so aus:

$$\Delta^{\circ} \overline{\delta\beta} \overset{\circ}{M} \overline{\iota\gamma} \overline{\Lambda} \zeta \overline{\iota} \overline{\sigma} \overset{\circ}{M} \overline{\iota\gamma}.$$

Nachdem der Gelehrte in der „Arithmetik“ ausführlich das Vorgehen zur Berechnung der Unbekannten in einer vorgegebenen Zahlengleichung geschildert hat, wendet er sich einer Reihe von Aufgaben zu. Sehen wir uns eine davon an:

„Es sei aufgegeben, die Zahl 100 so in zwei Zahlen zu zerlegen, daß ein Viertel der ersteren um 20 größer sei als ein Sechstel der zweiten.“

Versuche, die Aufgabe selbständig zu lösen!

Diophantos bearbeitete die Aufgabe in einer ganz bestimmten Reihenfolge:

1. Aufschreiben der Gleichung aus der Aufgabenstellung
100 ist in zwei Zahlen zu zerlegen, die vorläufig noch unbekannt sind. Sie werden mit A und B bezeichnet.
Es folgt die Gleichung:

$$100 = A + B.$$

2. Suche einer zweiten Gleichung mit den beiden Unbekannten

„... ein Viertel der ersteren ...“, also $\frac{A}{4}$, sei „... um 20 größer ... als ein Sechstel der zweiten.“, also

$$\frac{A}{4} = 20 + \frac{B}{6}.$$

3. Einführen der Unbekannten x

Diophantos setzt nun in der zweiten Gleichung $\frac{B}{6} = x$

und vereinfacht somit den Ausdruck zu

$$\frac{A}{4} = 20 + x \quad \text{beziehungsweise} \quad A = 80 + 4x.$$

4. Umformen der ersten Gleichung

In der ersten Gleichung wird A durch $A = 80 + 4x$ und B durch $B = 6x$ ersetzt:

$$100 = 80 + 4x + 6x = 80 + 10x.$$

5. Lösen der Gleichung

$$\begin{array}{rcl} 100 & = & 80 + 10x \quad | - 80 \\ 20 & = & 10x \quad \quad | : 10 \\ x & = & 2 \end{array}$$

6. Bestimmung von A und B

$$\begin{array}{lcl} A = 80 + 4x = 80 + 4 \cdot 2 & B = 6x = 6 \cdot 2 \\ A = 88 & B = 12. \end{array}$$

Die Probe $12 + 88 = 100$ bestätigt die Richtigkeit der gefundenen Ergebnisse.

● Natürlich läßt sich ein kürzerer Lösungsweg finden, der nicht so „umständlich“ ist. Wir eliminieren einfach die Unbekannte A mit Hilfe der zweiten Größe B!

Wendet man allerdings Diophantos' Methode an, läßt sich das Rechnen mit Brüchen geschickt vermeiden. Dieser Ansatz führt bei jeder Aufgabe zum Erfolg. Überzeugen wir uns davon bei folgender Aufgabe:

● Die Hälfte des Lebensalters des Sohnes ist um drei Jahre größer als ein Drittel des Lebensalters der Tochter. Beide zusammen sind genau halb so alt wie ihr Vater. Wie groß ist der Altersunterschied der Geschwister, deren Vater 32 Jahre alt ist?

Ein tieferes Eindringen in die „Arithmetik“ des Diophantos ist uns jetzt noch nicht möglich – dafür müßten wir uns erst noch ein wenig mehr mit Mathematik beschäftigen. Den Gelehrten des 16. und 17. Jahrhunderts diene Diophantos' Hauptwerk als Anregung zur Beschäftigung mit weiteren theoretischen Problemen.

Beenden wir den Besuch bei Diophantos von Alexandria mit einem Zitat aus dem Vorwort der „Arithmetik“:

„Vielleicht erscheint der Stoff etwas schwierig, da er dir noch nicht vertraut ist und da es dem Anfänger manchmal an Selbstvertrauen fehlt. Aber diese Wissenschaft wird dir dennoch infolge deiner Lernbegierde ... wohl verständlich werden, denn Lerneifer begreift schnell.“

$\frac{I}{III}$ Diese figur ist von bedeüt ain fiertel ...

Die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und der Mathematik – ein untrennbarer Zusammenhang

Die Geschichte des Altertums zeigte, daß zwischen der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und der Herausbildung der Mathematik ein untrennbarer Zusammenhang besteht. Erfordernisse des täglichen Lebens ließen die Gelehrten großartige Leistungen vollbringen. Denken wir nur an Archimedes.

Auch die Zeit des Mittelalters bestätigt die Abhängigkeit mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschungen vom gesellschaftlichen Leben. Betrachtet man die Geschichte, läßt sich die Begründung dafür finden, daß das Niveau der Mathematik in Europa erst im 16. Jahrhundert dem der alten Griechen gleichkam. Die weltliche und die kirchliche Macht verhinderten über ein Jahrtausend hinweg nahezu jeglichen wissenschaftlichen Fortschritt. Im Verlaufe von 300 Jahren ließ die Inquisition, das oberste Kirchengengericht, mehr als 30000 Menschen grauenvoll umbringen: Es waren die „Ketzer“, die wissenschaftlichen Forschungen nachgingen, aber auch Menschen, die man einfach der Hexerei bezichtigte! So griff beispielsweise Giordano Bruno Copernicus' Ideen auf und verbreitete sie unter dem Volk. Wer es aber wagte, gegen das geozentrische Weltsystem aufzutreten, mußte mit dem Tod rechnen. So wurde Giordano Bruno am 17. Februar 1600 in Rom auf dem Scheiterhaufen verbrannt.

Die Furcht vor der Verfolgung durch die Inquisition hemmte die Entwicklung aller Wissenschaften. Deshalb verbreiteten sich auch mathematische Kenntnisse sehr langsam. Verfolgen wir diesen Prozeß auf einigen wesentlichen Etappen.

Das frühe Mittelalter

Im 5. Jahrhundert u. Z. zerfiel der einstmals mächtigste Sklavenhalterstaat des Altertums, das Römische Reich. In weiten Teilen Europas erfolgte der Übergang von der Sklavenhaltergesellschaft in die neue Ordnung des Feudalismus. Doch war auch diese eine Ausbeutergesellschaft. Es entstand die Klasse der Feudalherren, die sich aus Adligen und geistlichen Würdenträgern zusammensetzte. Sie verfügten über ausgedehnte Ländereien und herrschten über die Klasse der leibeigenen Bauern.

Die Feudalherren waren nicht im geringsten daran interessiert, daß die Bauern Wissen erwarben. Wer viel weiß, könnte über sein schlechtes Leben nachdenken und erkennen, daß man sich der Herren erwehren müßte! Das lag natürlich nicht im Interesse der Obrigkeit. Die Leibeigenen hatten auf den Feldern zu arbeiten, um den Reichtum der Herren zu mehren.

So wird es verständlich, daß diese Menschen kaum über mathematische Kenntnisse verfügten. Der Bauer vermochte wohl noch zu zählen, besaß aber sicher nicht die Fähigkeit, zum Beispiel die Größe des von ihm bestellten Feldes zu berechnen. Wozu auch? Das Land gehörte ihm ja nicht!

In den Klosterschulen, die allerdings von den Kindern der Bauern nicht besucht werden durften, lehrte man das Fingerrechnen. Der Mönch Beda – er lebte von 673 bis 735 – schrieb die wichtigsten Regeln der Fingerrechnung auf, von denen er aus alten Handschriften der Römer erfahren hatte. Verschiedene Stellungen der Finger und Hände bedeuteten jeweils bestimmte Einer, Zehner, Hunderter oder Tausender. Unter Zuhilfenahme der Arme gelang es, bis zu einer Million zu zählen. (Siehe Abbildung 33)

Doch auch die adligen Feudalherren erwiesen sich als recht ungebildet. Karl der Große zum Beispiel, 800 zum Kaiser gekrönt, der über ein riesiges Reich gebot, das er in blutigen

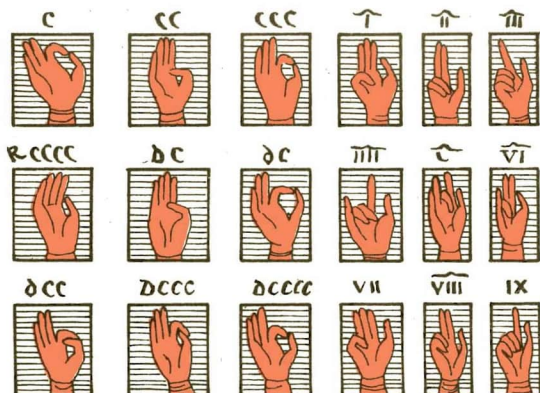


Abb. 33 Zahlendarstellung mit Hilfe der Finger und Hände

Kriegen erobert hatte, konnte weder lesen noch schreiben. Ein etwas umfangreicheres mathematisches und astronomisches Wissen besaßen lediglich einige Geistliche. Deren Interesse galt jedoch hauptsächlich der Vorausberechnung kirchlicher Feiertage, wie beispielsweise des Osterfestes.

Um aber dieses große Land richtig verwalten, aus ihm möglichst großen Gewinn ziehen zu können und seine Macht zu festigen, brauchte Karl der Große Leute, die sich im Rechnen, Schreiben und Lesen auskannten. Er beorderte deshalb den gelehrten Mönch Alcuin an seinen Hof, der unter seinen Gefolgsleuten Wissen verbreitete. Den Bemühungen dieses Mönchs ist die Gründung von Schulen in Frankreich und Deutschland zu verdanken. Auch diese Schulen durften selbstverständlich die Kinder der leibeigenen Bauern nicht besuchen.

Um möglichst großes Interesse an der Mathematik zu wecken, formulierte Alcuin eine Reihe von Rätselaufgaben. Eine Aufgabe war die folgende:

- Ein Hund jagt einen Hasen, dessen Vorsprung 150 Fuß* beträgt. Bei jedem Sprung legt der Hase 7 Fuß, der Hund dagegen 9 Fuß zurück. Nach wieviel Sprüngen ist der Hase eingeholt?

Während die Lösung dieser Aufgabe uns nicht schwerfallen wird, stellt die folgende uns sicher vor Schwierigkeiten:

Auf dem Markt kauften 2 Männer für 100 Münzen eine Herde Schweine, wobei sie für 2 Münzen 5 Schweine erhielten. Anschließend teilten sie die Herde und verkauften wieder jeweils 5 Tiere für 2 Münzen. Dennoch tätigten sie den Verkauf so, daß sie einen Gewinn erzielten. Wie war das möglich?

Ohne Betrug wird das sicher nicht abgegangen sein, werden wir vielleicht als erstes sagen. Doch betrachten wir die Aufteilung der Herde.

- Berechne deren Größe!

Nach der Aufteilung besaß jeder der Männer 125 Tiere. In die eine Herde sortierten sie die fetten Schweine und in die andere die mageren! Nun zahlt ein Käufer für ein mageres Schwein natürlich weniger als für ein wohlgenährtes, so daß die Männer folgende Preise festlegten:

2 Schweine der fetten Sorte kosten 1 Münze.

3 Schweine der mageren Sorte kosten ebenfalls 1 Münze. Tatsächlich brachten 5 Schweine wieder 2 Münzen ein.

Jetzt verkaufte jeder der Männer 120 Tiere. Berechnen wir den Erlös: Der eine kassierte

$$120 : 2 = 60; \quad 60 \text{ mal } 1 \text{ Münze,}$$

er erhielt somit 60 Münzen; der zweite erhielt für jeweils 3 magere Schweine 1 Münze, er bekam folglich

$$120 : 3 = 40; \quad 40 \text{ mal } 1 \text{ Münze.}$$

* Das Fuß ist ein altes Längenmaß; 1 Fuß $\approx$ 30 Zentimeter.

Zusammen ergibt das 100 Münzen, also genau die Kaufsumme.

Jeder behielt aber noch 5 Tiere übrig, deren Verkauf schließlich den Gewinn der beiden Gauner ausmachte.

● Wie dieser Gewinn mathematisch zustande kommt, überlege jeder selbst. Vergleiche dazu den ursprünglichen Preis für ein einzelnes Schwein mit der geforderten Summe beim anschließenden Verkauf!

Eine weitere Aufgabe Alcuins, die bereits im Altertum gestellt wurde, ist ohne jeden Trick lösbar:

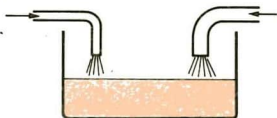


Abb. 34

● Ein Wasserbehälter mit einem Volumen von 12 Raumeinheiten erhält durch zwei Zuführungen Wasser. Die eine Zuführung liefert pro Stunde eine Raumeinheit Wasser, die zweite dagegen vier. Wie lange dauert die Füllung des Behälters, wenn beide Zuführungen gleichzeitig Wasser liefern?

Eid statt Prüfung!

In der Zeit vom 11. bis 15. Jahrhundert wuchsen in Europa viele Städte empor, deren bedeutendste an den Ufern der Meere und den Kreuzungspunkten wichtiger Handelsstraßen lagen: Florenz, Genua, Venedig, Mailand und Pisa.

Informiere dich auf der Landkarte über die Lage der Städte!

Von hier aus unternahmen die Kaufleute ausgedehnte Handelsreisen besonders in den Orient, nach Indien und China. Dabei lernten sie das Leben und den Stand der Wissenschaften jener Völker kennen und brachten viele

Neuigkeiten nach Europa. So verdanken wir die Kenntnis von der Papierherstellung den Chinesen; Seide, Porzellan und Kompaß stammen ebenfalls aus China. Aus Indien kam das Schachspiel nach Europa, über dessen Erfindung eine Anekdote berichtet:

Sessa Ebn Daher durfte sich vom Herrscher Indiens eine Belohnung für die Erfindung des Schachspiels wünschen. Daraufhin nahm Daher ein Schachbrett und forderte, auf das erste der insgesamt 64 Felder ein Weizenkorn, auf das zweite Feld 2 Weizenkörner, auf das dritte Feld 4 Körner, auf das vierte Feld 8 Körner usw. usw. zu legen. Auf jedem Feld sollte also genau die doppelte Menge Weizen liegen wie auf dem vorhergehenden Feld. Diese Zahlen lassen sich vereinfacht in der Potenzschreibweise darstellen:

- 1. Feld $1 = 2^0$ Korn
- 2. Feld $2 = 2^1$ Körner
- 3. Feld $4 = 2^2$ Körner
- 4. Feld $8 = 2^3$ Körner
- ⋮

Auf dem 64. Feld des Schachbrettes sollten demnach 2^{63} Körner liegen. Die Gesamtzahl erhalten wir durch Aufsummieren:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{61} + 2^{62} + 2^{63}.$$

Die Summierung wird recht langwierig, doch läßt sich das Ergebnis nach kurzer Überlegung sofort angeben. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 &= 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1 \\ 1 + 2^1 + 2^2 &= 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1 \\ 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 &= 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1. \end{aligned}$$

⋮

Das Ergebnis lautet demzufolge

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{61} + 2^{62} + 2^{63} \\ = 2^{64} - 1. \end{aligned}$$

Von dieser „kleinen“ Zahl war der Herrscher sehr überrascht. So eine Kleinigkeit erschien ihm viel zu gering als Belohnung. Doch die Hofgelehrten änderten rasch seine Meinung, indem sie $2^{64} - 1$ berechneten:

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

● Im Jahre 1980 wurden von den Anbauflächen der DDR ungefähr 3 Millionen Tonnen Weizen geerntet. Eine Tonne Weizen enthält schätzungsweise 28,8 Millionen Körner. – Vergleiche die vom Erfinder des Schachspieles geforderte Belohnung mit dem Ertrag der 1980er DDR-Ernte!

Auch in Europa schritt die gesellschaftliche Entwicklung voran. Viele Erfindungen wie die der Windmühle und der Wassermühle im 10. Jahrhundert und die Verbesserung landwirtschaftlicher Arbeitsgeräte führten zu einer Erleichterung der Arbeit. Die Urbarmachung der Wälder für neue Ackerflächen und der Übergang in vielen Gebieten zur Dreifelderwirtschaft erbrachten reichere Ernten und ließen das Mehrprodukt wachsen. In den Städten begann der Bau monumentaler Kirchen. Noch heute können wir die sogenannte gotische Baukunst bewundern, zum Beispiel am Dom in Meissen, am Magdeburger Domchor, an der Kathedrale von Reims. Das Errichten solcher Bauwerke erforderte umfangreiche mathematische und ingenieurtechnische Berechnungen und die Anfertigung genauer, detaillierter Baupläne.

In den Städten entwickelte sich verstärkt das Handwerk. Ausgerüstet mit den Erfahrungen der Metallbearbeiter des Altertums entstand das Schmiedehandwerk, die Kunst der Waffen- und Goldschmiede vervollkommnete sich. Bedeutung erlangten das Textilhandwerk, der Schiffsbau, das Zimmermannshandwerk. Die feudale Gesellschaftsordnung brachte Ärzte, Lehrer, Künstler, Architekten, Juristen und Rechenmeister hervor. Die Rechenmeister lehrten zählenden

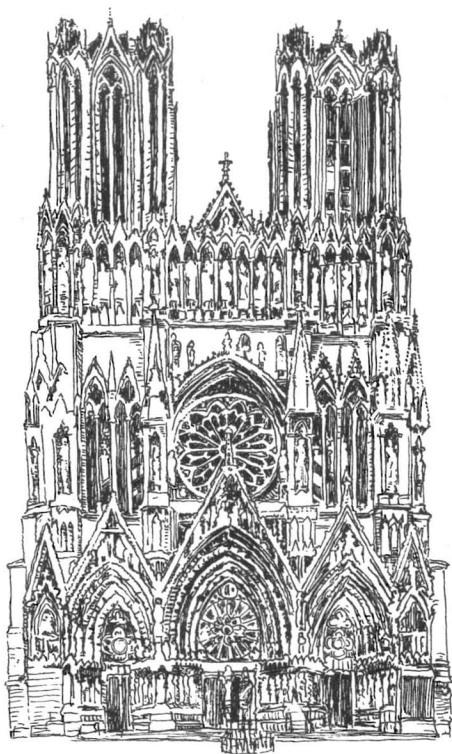


Abb. 35 Kathedrale von Reims

Schülern das Zählen und Rechnen. Sie selbst berechneten Geldgeschäfte, führten Abrechnungsbücher der Kaufleute, ermittelten Zinsen – kurzum, sie lösten mathematische Probleme, die das tägliche Leben stellte. Viele der Meister schrieben kleine Bücher, in denen sie die Ausführung ein-



Abb. 36

facher Rechenoperationen schilderten und dem Lernenden Aufgaben zur Lösung vorlegten. Eine der Aufgaben aus einem in Nürnberg erschienenen Büchlein lautet etwa folgendermaßen:

- Ein Mann trinkt in 21 Tagen einen Eimer Bier. Hilft ihm dabei seine Frau, leeren sie ihn gemeinsam in nur 14 Tagen. Nach welcher Zeit würde die Frau den Eimer allein geleert haben?

Zur Ausbildung der Ärzte, Rechenmeister und der anderen Angehörigen dieser Schicht dienten erhalten gebliebene Lehrbücher aus dem Altertum. Im 12. und 13. Jahrhundert gründete man Übersetzerschulen, in denen solche Lehrbücher in

die lateinische Sprache, aber auch in die Muttersprachen übertragen wurden. Das große Wissen der Gelehrten Ägyptens und Griechenlands stand nun den „Lerneifrigen“ und „Lernbegierigen“ – mit den Worten Diophantos' gesprochen – zur Verfügung. Doch bedauerlicherweise griffen nur sehr wenige Menschen zu mathematischen Schriften.

Auch die Gründung der ersten Universitäten in Europa förderte kaum die Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Die ältesten Universitäten unserer Republik wurden im 15. Jahrhundert eröffnet: in Leipzig im Jahre 1409, in Rostock zehn Jahre später und 1456 in Greifswald. Zu den Hauptfächern gehörten Medizin, Theologie, Recht und die Künste. Im Lehrfach „Künste“ unterrichtete man neben Grammatik und Musik und anderem auch Astronomie, Geometrie und Arithmetik. Ein richtiges Fach Mathematik gab es allerdings nicht. Die Studenten besaßen folglich nur eine unbedeutende mathematische Bildung. Selbst angehende Magister – diese Bezeichnung trugen Lehrer an Universitäten – benötigten keine Mathematikprüfung, um die Lehrerberechtigung zu erhalten. Anstelle einer Prüfung genügte es, zu bezeugen, daß man Vorlesungen über Euklids „Elemente“ gehört hatte!

Als erster setzte sich der Magister Johannes von Gmunden für die Erteilung des Faches Mathematik an der Universität Wien (gegründet 1365) ein. Das führte dazu, daß sich diese Universität im 15. Jahrhundert zu einer bedeutenden Schule der Mathematik und Astronomie entwickelte. Der Anfang einer tiefgründigen Beschäftigung mit den Naturwissenschaften an den höchsten Bildungseinrichtungen war damit gemacht.

Brachten die Kaufleute und Seefahrer von ihren Handelsreisen eine Reihe neuer Erfindungen ferner Völker nach Europa, so belebten sie auch gleichzeitig die weitere Entwicklung der Mathematik. Interessiert eignete man sich die Kenntnisse der Wissenschaftler jener Völker an. Einer der

Reisenden, Leonardo Fibonacci von Pisa, erwarb auf diese Art ein umfangreiches mathematisches Wissen, welches er im Jahre 1202 in seinem Werk „Buch vom Abakus“ niederschrieb. Mit dem Inhalt dieses Buches wollen wir uns etwas näher vertraut machen.

Das „Buch vom Abakus“ – der Originaltitel lautet „Liber abaci“ – enthält in einem großen Abschnitt kaufmännische Rechnungen. In einigen dieser Rechnungen wird der Geldbesitz von Handelsleuten ermittelt:

● Erhält der erste Mann vom zweiten 7 Dinare, so verfügt er über fünfmal so viele wie der zweite. Erhält der zweite Mann vom ersten 5 Dinare, so besitzt er siebenmal so viel wie der erste. Wie groß ist das Vermögen der Männer?

Eine weitere, ebenfalls von Fibonacci gestellte Aufgabe, lösen wir gemeinsam:

Der Preis für 30 lebende Vögel beträgt 30 Münzen. Ein einzelnes Rebhuhn kostet 3 Münzen, eine Taube kostet 2 Münzen, und für zwei Sperlinge ist eine Münze zu zahlen. Wieviel Vögel jeder Art wurden gekauft?

Bezeichnen wir mit x die vorläufig unbekannte Anzahl der Rebhühner, mit y die Anzahl der Tauben und schließlich mit z die Anzahl der Sperlinge, so liefert die Aufgabenstellung bereits eine Gleichung:

Die Gesamtzahl der Vögel beträgt 30, demnach gilt

$$x + y + z = 30. \quad I$$

Erforderte die Bestimmung zweier Unbekannter zwei Lösungsgleichungen, verlangen drei Unbekannte drei Gleichungen. Die zweite resultiert aus dem Kaufpreis: x Rebhühner kosten $x \cdot 3$ Münzen, y Tauben kosten $y \cdot 2$ Münzen, und z Sperlinge kosten $z \cdot \frac{1}{2}$ Münzen.

Begründe den Ansatz für den Preis der z Sperlinge!

Insgesamt gab der Käufer 30 Münzen aus:

$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30. \quad \text{II}$$

Doch jetzt entsteht ein großes Problem. Der Aufgabenstellung läßt sich keine dritte Gleichung entnehmen. Alle Angaben sind bereits in die mathematische Zeichensprache übersetzt. Oder enthält der Aufgabentext noch einen versteckten Hinweis? Überlegen wir: Welche Forderung kann man an die Unbekannten x , y , z stellen? Wird es sich um natürliche Zahlen, gebrochene oder gar negative Zahlen handeln?

Da wir mit x , y und z die Anzahl der Vögel bezeichneten, entfällt eine gebrochene oder eine negative Zahl als Lösung.

Oder könnte man etwa $2\frac{1}{8}$ lebende Sperlinge oder -3 Tauben kaufen?

Weiterhin setzen wir voraus, daß der Käufer von allen drei Vogelarten Tiere erwarb, so daß x , y und z größer als Null sein müssen. Vielleicht helfen uns diese Überlegungen weiter.

Vorerst aber eliminieren wir eine der drei Unbekannten aus Gleichung II unter Zuhilfenahme von Gleichung I.

Eliminiere z in II!

Die neue Gleichung besitzt die Gestalt

$$\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 15. \quad \text{III}$$

Stellen wir III nach x um, läßt sich eine eindeutige Lösung finden:

$$\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 15 \quad | \cdot 2$$

$$5x + 3y = 30 \quad | - 3y;$$

$$5x = 3 \cdot (10 - y) \quad | : 5$$

$$x = 3 \cdot \frac{(10 - y)}{5}.$$

Da x Element der natürlichen Zahlen ist, wie wir oben feststellten, muß der Ausdruck $(10 - y)$ ohne Rest durch 5 teilbar sein, da die 3 nicht durch 5 teilbar ist. Einfaches Probieren bestätigt, daß diese Forderung nur für

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 = 5 \text{ und}$$

$$y_3 = 10$$

erfüllt ist.

Führe die Probe durch!

Da nach Voraussetzung von jeder Sorte Vögel gekauft wurden, entfällt sofort $y_1 = 0$. Auch $y_3 = 10$ können wir ausschließen, da aus III für diesen Fall $x = 0$ folgt.

Somit erhalten wir eine eindeutige Lösung für y , hieraus eine für x und schließlich aus Gleichung I oder II auch für z :

$$x = 3$$

$$y = 5$$

$$z = 22.$$

Für die 30 Münzen wurden demnach 3 Rebhühner, 5 Tauben und 22 Sperlinge gekauft.

● Löse I und II unter der Annahme, daß nicht von jeder Sorte Vögel gekauft wurden. Existiert ein sinnvolles Ergebnis für $z = 0$?

Liber abaci

In den ersten Kapiteln seines Buches erläutert Leonardo Fibonacci eine neue Zahlenschreibweise, die er während seiner Reisen nach Arabien kennenlernte. Bereits im 10. Jahr-

hundert drangen diese arabischen Ziffern nach Europa ein, doch fanden sie kaum Beachtung. Dabei sollten sie vor allem den Kaufleuten und Rechenmeistern gegenüber der bisherigen römischen Schreibweise Erleichterung beim Rechnen bringen!

Bevor wir die Verbreitung der arabischen Ziffern in Europa verfolgen, betrachten wir kurz die römische Zahlenschreibweise.

Nur sieben verschiedene Zeichen genügen, um Zahlen bis zu einer Million darzustellen:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

An der Wahl spezieller Zeichen für 1, 10, 100 und 1000, aber auch für 5, 50 und 500 wird deutlich, daß sowohl die 5 wie auch die 10 Grundzahlen bilden. Wie bereits im Griechischen, Babylonischen und Ägyptischen resultiert eine beliebige Zahl durch Aneinanderreihung der entsprechenden Symbole. Die 4, beispielsweise, würde wie folgt aussehen:

$$4 = \text{IIII}.$$

Hier wählt man jedoch eine Abkürzung:

$$4 = 5 - 1 = \text{IV}.$$

Diese Besonderheit, von einer größeren eine kleinere Zahl abziehen zu dürfen, trägt deshalb auch die Bezeichnung „subtraktive“ Zahlenschreibweise.

Der Vorteil der subtraktiven Darstellung besteht darin, Zahlenausdrücke in kurzer Form schreiben zu können. Allerdings ergeben sich daraus auch Möglichkeiten, daß eine größere Zahl aus weniger Ziffern besteht als eine kleinere Zahl! Überzeugen wir uns:

$$3 = \text{III}$$

$$4 = \text{IV}$$

oder

$$88 = 50 + 3 \cdot 10 + 5 + 3 = LXXXVIII$$

$$492 = 490 + 2 = (500 - 10) + 2 = XDII$$

oder

$$998 = 900 + 90 + 8 = (1000 - 100)$$

$$+ (100 - 10) + 5 + 3$$

$$= CMXCVIII$$

$$999 = 1000 - 1 = IM.$$

Zu beachten bleibt allerdings, daß höchstens *eine* kleinere Zahl vor die größere gesetzt werden darf,

$$48 = 50 - 2 = IIL$$

zu schreiben ist falsch!

Ein waagerechter Strich über einem Zeichen bedeutet das Tausendfache, also

$$\overline{X} = 1000 \cdot 10 = 10000,$$

$$\overline{M} = 1000 \cdot 1000 = 1000000 \quad \text{oder}$$

$$\overline{CX} = 1000 \cdot 110 = 110000.$$

■ Übertrage: IX, XI, $\overline{XI}$, LXVII, XXIX, MCDLXXXVI, $\overline{CCMMXX}$!

■ Schreibe in römischen Ziffern: 324, 498, 499, 2949, 50000!

Die Darstellung von Brüchen erfolgte natürlich ebenfalls mit römischen Zahlzeichen. In einem Rechenbüchlein von 1514 findet sich dazu eine Beschreibung:

$\frac{I}{III}$ Diese figur ist von bedeut ain fiertel von ainez
„ $\frac{I}{III}$ “
ganzen / also mag man auch ain fünfftail / ain sechstail /

ain sybentail oder zwai sechstail und alle ander brüch
 beschreiben / als $\frac{I}{V} / \frac{I}{VI} / \frac{I}{VII} / \frac{II}{VI}$.“

Der Nachteil der römischen Zahlenschreibweise besteht in der Unübersichtlichkeit der Ausdrücke und der Unmöglichkeit, schriftliche Rechnungen auszuführen. Wie sollte man auch zwei Zahlen miteinander multiplizieren?

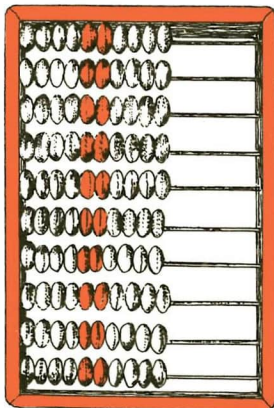


Abb. 37 Russisches Stschoty

Dennoch führten einige Kaufleute ihre Bücher bis ins 16. Jahrhundert nach der scheinbar äußerst umständlichen römischen Methode. Wie erledigten sie ihre umfangreichen Abrechnungen?

Die Abbildung auf Seite 90, welche eine mittelalterliche Rechenstube zeigt, gibt eine Antwort. Auf dem Tisch liegt ein sogenannter Abakus, ein leicht zu handhabendes Recheninstrument. Der Abakus bestand aus einem rechteckigen Brett mit mehreren eingezeichneten parallelen Linien. Die

Spalten bedeuteten, von links nach rechts gelesen, Tausender, Hunderter, Zehner und Einer. Eine bestimmte Anzahl Steinchen oder Kugeln auf einer der Linien entsprach der Anzahl der Tausender, Hunderter usw. Durch Verschieben der Steinchen ließen sich einfache Rechenoperationen mühelos und in kurzer Zeit ausführen!

Noch heute finden in einigen Ländern an den Abakus erinnernde Geräte Verwendung, beispielsweise in der Sowjetunion das Stschoty. (Siehe Abbildung 37)

Von ihrem ersten Auftreten in Spanien mußten 600 Jahre vergehen, bis eine neue, die arabische Ziffernschreibweise, in Europa Anerkennung und Verbreitung fand. Vollkommen richtig ist die Bezeichnung der Zahlen eigentlich nicht, denn ihre Erfindung führt bis nach Indien. Hier verwendete man neun Ziffern und erstmalig ein besonderes Zeichen, die Null:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	•
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0.

Handelsreisende brachten die Kenntnis von den indischen Zahlen nach Arabien, wo sie bereits einige Veränderungen erfuhren. In der westarabischen Darstellung ließ man einfach die Null verschwinden:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Demgegenüber erhielt die Null in der ostarabischen Form einen kleinen Punkt und hieß „sifr“:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	•
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0.

Unser heutiges Wort „Ziffer“, womit wir allgemein die Zahlzeichen benennen, erinnert noch an „sifr“.

Über Arabien gelangten die Ziffern schließlich nach Europa. Im 15. Jahrhundert schrieb man

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Große Verdienste bei der Verbreitung der indisch-arabischen Zahlen erwarb sich Leonardo Fibonacci. In seinem „Buch vom Abakus“ schildert er ausführlich deren große Vorteile. Allerdings erweckt der Buchtitel falsche Vorstellungen, denn „vom Abakus“ berichtet der Mathematiker nicht. Er erläutert in mehreren Kapiteln die Handhabung der neuen Zahlen und beschreibt die Ausführung verschiedener Rechenoperationen: Von den vier Grundrechenarten bis hin zum Wurzelziehen und dem Lösen von Gleichungen.

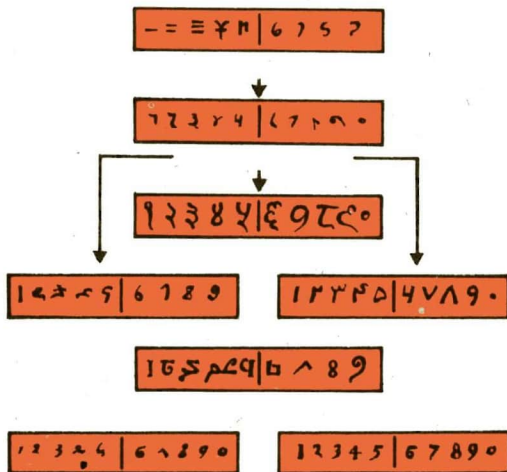


Abb. 38 Vorläufer der heutigen Ziffern

Nach dem Erscheinen des Werkes „Liber abaci“ tauchten in Kaufmannsbüchern häufiger arabische Ziffern auf. Doch mangelte es auch nicht an Gegnern. So entbrannte zwischen den Anhängern der neuen Schreibweise, den sogenannten Algorithmikern, und den Anhängern des Abakusrechnens, den Abakisten, ein heftiger Streit. Vor allem aber fehlte das Verständnis für die seltsame Null. Man brachte dieser „sifr“ größtes Mißtrauen entgegen. Kam man bisher ohne Null aus, weshalb sollte es mit einem Male eine Zahl geben, die nicht einmal etwas ausdrückte – ein besonderes Zeichen für das „Nichts“ konnte nur Unsinn sein! Andererseits fiel der umstrittenen Null eine besondere Bedeutung zu: An eine beliebige Zahl angehängt, verzehnfachte, verhundertfachte ... sie deren Wert! Auch hing die Größe einer Zahl von der Anordnung jenes Zeichens ab: 378 ist der zehnte Teil von 3780; diese Zahl wiederum ist größer als 3078 oder 3708, aber kleiner als 37008!

Schließlich erging im Jahre 1299 in Florenz der Erlaß, daß kein Kaufmann mehr die arabischen Ziffern verwenden dürfe. Die offizielle Begründung dafür klingt recht fadenscheinig: Betrüger könnten mühelos Abrechnungen fälschen, indem sie mit einem kleinen Strich die 0 in eine 6 oder 9 verwandeln würden.

Die Obrigkeit empfahl sogar, die Zahlen künftig nur noch in Worten auszudrücken!

Verabschieden wir uns von Leonardo Fibonacci mit einer von ihm gestellten Aufgabe, deren Lösung einige Überlegung erfordert:

- Ein Kaninchenpaar bringt jeden Monat ein neues Kaninchenpaar auf die Welt. Jeweils zwei Monate später erzeugen auch die neuen Paare pro Monat ein weiteres Paar. Diese haben wiederum nach der gleichen Zeit monatlich ein Nachkommenpaar usw. Wieviel Kaninchenpaare werden innerhalb eines Jahres insgesamt geboren?

Im späten Mittelalter

Den endgültigen Siegeszug der indisch-arabischen Zahlenschreibweise ermöglichte eine Erfindung des Mainzer Goldschmiedes Johannes Gensfleisch zum Gutenberg um 1440: der Buchdruck. Mußten bisher mühsam handschriftliche Kopien vorhandener Bücher angefertigt werden, um sie im Land verbreiten zu können, stand nun ein wertvolles Hilfsmittel zur Verfügung – die Druckmaschine. Schriften erschienen in großer Anzahl, und bald nach Gutenbergs Erfindung tauchten die ersten gedruckten Mathematikbücher auf.

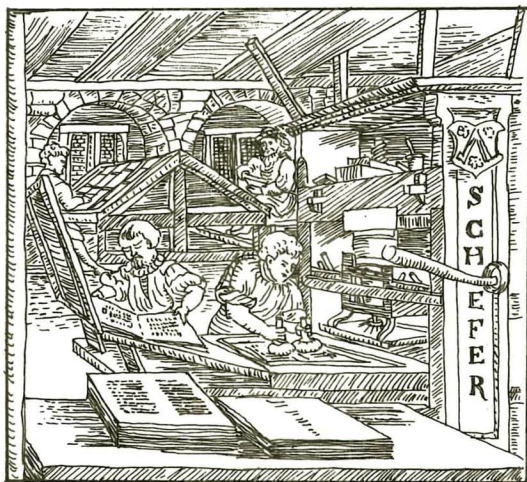


Abb. 39 Buchdruckerei um 1586

Viele namhafte Gelehrte des 15. und 16. Jahrhunderts trugen zur Entwicklung der Naturwissenschaften, besonders der Mathematik, Physik und Astronomie bei.

Und diese Entwicklung ließ sich auch nicht aufhalten. Es war die Zeit, da sich das Bürgertum durchsetzte, dessen sich entwickelnde Produktivkräfte wissenschaftlich fundierte Kenntnisse brauchten. Das folgende Kapitel berichtet darüber.

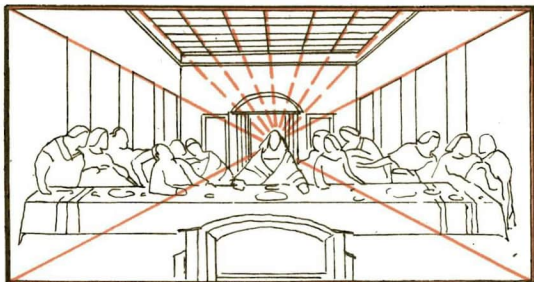


Abb. 40

An den Universitäten Europas erhielten naturwissenschaftliche Fächer einen festen Platz. Die fortschreitende Architektur, das Kriegswesen, die Hochseeschifffahrt, aber auch die heranwachsenden Produktionsbetriebe machten eine breite mathematische Bildung erforderlich.

Zum Beispiel benötigten die Baumeister und Handwerker zur Errichtung von Kirchen, Brücken, ja im Städtebau überhaupt, genaue Baupläne. Um aber ein räumliches Gebilde auf dem Papier darstellen zu können, bedurfte es einer besonderen Zeichenkunst: der Perspektive.

● Stelle die Cheopspyramide in Kavalierperspektive sowie in Grund- und Aufriß dar. Wähle einen geeigneten Maßstab! (Höhe der Pyramide = 147 m, Kantenlänge der quadratischen Grundfläche = 230 m)

Nicht nur Architekten erkannten die Bedeutung der perspektivischen Darstellung. Auch Maler nutzten die Kunst

der räumlichen Zeichnung. Ein künstlerisch besonders wertvolles Gemälde dieser Art stammt von Leonardo da Vinci, dem großen Gelehrten und Maler des 15. und 16. Jahrhunderts: Das Abendmahl (siehe Abb. 40). Ein anderer Künstler, der deutsche Maler Albrecht Dürer, schrieb ein Lehrbuch, in welchem er auch Probleme der Perspektive abhandelte. Dieses Werk trägt den Titel „Underweysung der Messung mit dem zirckel und richtscheyt“*.

Albrecht Dürer schrieb übrigens die arabischen Ziffern auf die folgende Art:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Die Ähnlichkeit mit unserer heutigen Schreibweise ist bereits unverkennbar. Auf einem seiner Gemälde („Melancholie“) findet sich ein sogenanntes magisches Quadrat, in welchem gleichfalls die arabischen Ziffern dargestellt sind.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abb. 41

Wir wollen uns noch kurz ansehen, was ein magisches Quadrat ist. Seine Besonderheit besteht darin, daß die Summe der Zahlen einer jeden Spalte, einer jeden Reihe und der beiden Diagonalen stets gleich ist. Dürers Quadrat liefert in allen Fällen die Summe 34. Die beiden in der untersten Zeile stehenden Zahlen 15 und 14 geben an, in welchem Jahr Dürer das Bild anfertigte: 1514.

● Verteile die Zahlen von 1 bis 9 so auf neun Felder, daß ein magisches Quadrat entsteht!

* Ein richtscheyt ist ein Lineal.

Wie schon erwähnt trug auch das Kriegswesen zur Entwicklung der Mathematik bei. Die Konstruktion neuer Waf-

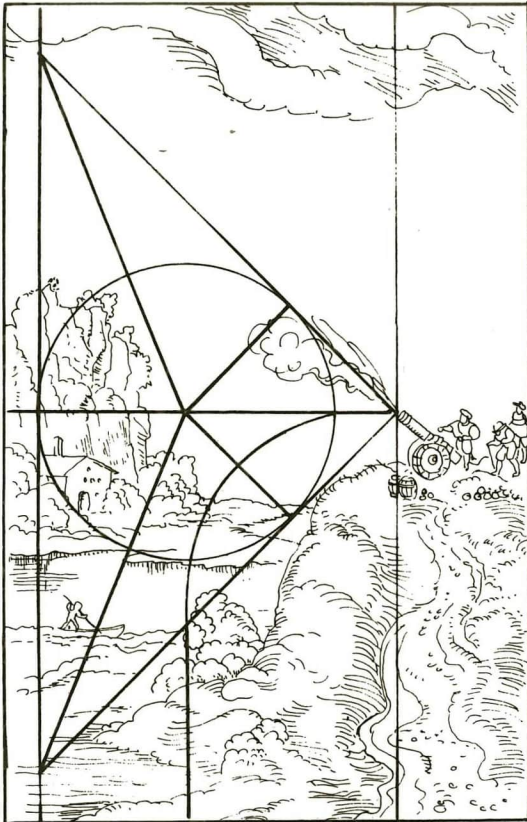


Abb. 42 Richten eines Geschützes

fen erforderte mathematische Kenntnisse, ihre Bedienung ebenfalls. Die Abbildung 42 deutet an, mit welchen Schwierigkeiten die Berechnung der Flugbahn eines Geschosses verbunden war. Schließlich sollte der Schuß ja auch treffen.

Als weitere Triebkraft für die Entwicklung der Mathematik erwies sich die Schifffahrt. Die Suche nach neuen Handelsrouten auf dem Seeweg führte zum Beispiel zur Entdeckung des Seewegs nach Indien und zur Entdeckung Amerikas durch Kolumbus im Jahre 1492. Die Eroberung von Kolonien auf dem amerikanischen Kontinent setzte ein, und damit und auch mit dem zunehmenden Handel mit Indien nahm der Schiffsverkehr über das Meer einen großen Aufschwung. Dies förderte den Schiffbau und die Konstruktion sogenannter Navigationsinstrumente, die der genauen Positionsbestimmung der Schiffe auf dem Meer dienten.

Welche Bedeutung kommt denn nun aber der Mathematik beim Befahren der Weltmeere zu?

Unsere bisherigen geometrischen Überlegungen beschränkten sich stets auf Flächen oder Kurven, die sich in einer Ebene befinden. Hier besitzen beispielsweise Dreiecke gerade Seiten, und die Innenwinkelsumme beträgt 180° . Das ist doch selbstverständlich. Aber halt! Nehmen wir einen Ball, markieren auf diesem drei Punkte und verbinden diese. Es entsteht ein Dreieck. Besitzt jenes Dreieck – würden wir es ausschneiden und auf den Tisch legen – noch gerade Seiten? Und wie verhält es sich mit den Winkeln? Deren Summe beträgt nicht mehr 180° .

Den Beweis finden wir, indem wir einen Globus betrachten. Auf diesem ist das Gradnetz eingezeichnet, welches aus Meridianen und Breitenkreisen besteht. Meridiane und Breitenkreise schneiden einander unter einem Winkel von 90° . Da die Meridiane am Nord- und Südpol zusammenlaufen, bilden zwei beliebige Meridiane und ein beliebiger Breitenkreis stets ein Dreieck. Die Abbildung 43 zeigt die vom Nullmeridian, dem Äquator und dem 90° -Meridian (östlicher Länge) er-

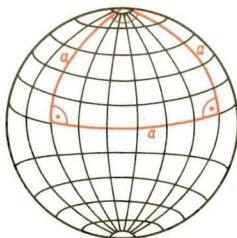


Abb. 43

zeugte Fläche. Die Innenwinkelsumme beträgt demzufolge

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks auf der Kugel unterscheidet sich von dem Flächeninhalt des Dreiecks der Ebene, wenn die Seiten die gleichen Längen besitzen.

● Berechne den Flächeninhalt des in der Abbildung 43 dargestellten Dreiecks. Gehe dabei von der Gesamtoberfläche der Erdoberfläche [Umfang (u) ≈ 40000 km] aus und ermittle daraus die gesuchte Größe. Vergleiche den Flächeninhalt mit dem eines Dreiecks gleicher Seitenlängen in der Ebene.

Wie wir sehen, gibt es auf der Kugel eine Reihe von Besonderheiten, die mathematisch anders beschrieben werden müssen als in der Ebene. Von besonderem Interesse für die Wahl von Schifffahrtswegen, aber auch für die Festlegung von Verkehrsrouten von Flugzeugen ist die Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier Punkte auf der Kugeloberfläche. Eure Kenntnisse reichen noch nicht aus, um entsprechende Berechnungen auszuführen. Deshalb soll ein Beispiel genügen: Die kürzeste Verbindung zwischen Berlin und der Stadt Petropawlowsk auf der sowjetischen Halbinsel Kamtschatka ist nicht etwa Strecke I, die entlang des Breitenkreises $52,5^\circ$ nördlicher Breite führt, sondern Strecke II.

Während die Länge von I nahezu 9800 Kilometer beträgt, ist II nur 7880 Kilometer lang – ein Unterschied von fast 2000 Kilometern. (Abbildungen 44 u. 45)

Kehren wir nun in die Zeit des Mittelalters zurück. Die zunehmenden Anforderungen an die Mathematik ließen neue Aufgaben entstehen. Neben der intensiven Beschäftigung mit der Mathematik wurde eine einheitliche mathematische „Sprache“ dringend notwendig. Erste Anfänge bestanden in der Einführung der arabischen Zahlenschreibweise.

Im Jahre 1489 erschienen erstmalig in einem Buch die Zeichen „+“ für die Addition und „-“ für die Subtraktion! Widemann, ein Magister der Leipziger Universität, verfaßte dieses Buch mit dem Titel „Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft“.

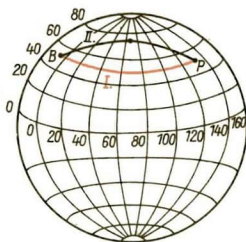


Abb. 44

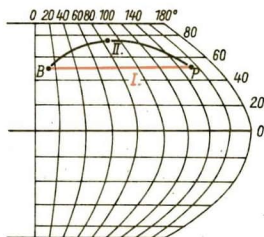


Abb. 45

I. 9800 km II. 7880 km

Zwar nutzten wir schon bei der Lösung von Rechenaufgaben, die Ahmes stellte, die Zeichen „+“ und „-“. Doch Ahmes selbst schrieb nach rechts und links laufende Füßchen als Kennzeichnung für die Rechenoperationen: die erste Variante für die Addition, die zweite für die Subtraktion.

Einen bedeutenden Beitrag zur Entstehung einer einheitlichen Mathematiksprache leistete der Pariser Jurist François Vieta. Er führte zur Lösung und Behandlung mathematischer Probleme allgemeine Bezeichnungen ein: Buchstaben. Das Ziel sollte darin bestehen, nicht jede Aufgabe einzeln lösen zu müssen, sondern einen einheitlichen Weg für eine bestimmte Aufgabenart zu entwickeln. Ein Beispiel bestätigt den Vorteil dieses Verfahrens:

Gesucht wird die Lösung der quadratischen Gleichung

$$0 = x^2 - 6x + 8. \quad \text{I}$$

Ein wichtiger mathematischer Satz besagt, daß eine quadratische Gleichung zwei Lösungen, eine Gleichung dritten Grades, wie zum Beispiel

$$0 = x^3 + 2x^2 - x + 1,$$

drei Lösungen, eine Gleichung vierten Grades vier Lösungen usw. besitzt. Wir müssen also diejenigen x_1 und x_2 bestimmen, die I erfüllen. Dies bereitet allerdings einige Schwierigkeiten. Lineare Gleichungen ließen sich nach der Unbekannten auflösen – das ist jetzt nicht möglich, denn diese kommt ja in den Formen x und x^2 vor! Beschreiten wir einen „unmathematischen“ Weg und erraten die Lösungen. Mit einem bißchen Glück stoßen wir vielleicht auf $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$. Doch ein solches Verfahren stellt uns nicht zufrieden. Mit Sicherheit führt es nur in den wenigsten Fällen zum Erfolg! Bei

$$0 = x^2 + \frac{1}{6}x - 2 \quad \text{II}$$

könnte lange und vor allem ergebnislos geraten werden! Wir benötigen also eine Lösungsvorschrift. Diese Vorschrift soll auf alle quadratischen Gleichungen zutreffen. Deshalb führen wir, wie Vieta, eine allgemeine Schreibweise ein. Der Vorfaktor von x erhält den Buchstaben p , der letzte Ausdruck den Buchstaben q . Damit folgt die sogenannte Normalform einer quadratischen Gleichung:

$$0 = x^2 + px + q. \quad \text{III}$$

In I beträgt $p = -6$ und $q = 8$; für II gilt $p = \frac{1}{6}$ und $q = -2$.

Wie finden wir nun aber die allgemeine Lösung von III? Die Auflösung nach der Unbekannten x gelingt nur bei einer bestimmten Art quadratischer Gleichungen:

$$0 = x^2 - r. \quad \text{IV}$$

Hier fehlt das lineare Glied px . Ohne Schwierigkeiten folgen die zugehörigen x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - r & | +r \\ x^2 &= r & | \sqrt{} \\ x &= \sqrt{r} \\ x_1 &= -\sqrt{r} & x_2 = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses:

$$\begin{aligned} x_1^2 - r &= (-\sqrt{r}) \cdot (-\sqrt{r}) - r \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{r} - r \\ &= r - r = 0 \end{aligned}$$

$$x_2^2 - r = \sqrt{r} \cdot \sqrt{r} - r = r - r = 0.$$

Gibt es vielleicht eine Möglichkeit, Gleichung III in Gleichung IV umzuwandeln? Natürlich dürfen wir nicht einfach px weglassen, denn das führt zu einer falschen Lösung.

Bisher gelang das „Beseitigen“ einer unerwünschten Größe stets unter Zuhilfenahme einer zweiten Gleichung. Eine solche steht uns aber nicht zur Verfügung. Der Mathematiker unternimmt deshalb einen Versuch, indem er sich einfach eine zweite Gleichung „ausdenkt“! Wir wählen

$$x = X + y. \quad V$$

Begehen wir mit diesem Ansatz einen Fehler? Da sich jede beliebige Zahl als Summe zweier entsprechend gewählter Zahlen darstellen läßt – zum Beispiel $7,1 = 2,813 + 4,287$ –, können wir die Lösung unserer quadratischen Gleichung III auch als Summe ausdrücken. Der Ansatz $x = X + y$ ist also vollkommen richtig – doch welche Hilfe bringt er? Er gestattet, einen der beiden Summanden X oder y beliebig festzulegen. Bleiben wir bei $x = 7,1$ und setzen $y = 1$. Wir begehen genau dann keinen Fehler, wenn wir nun $X = 6,1$ setzen. Allgemein können wir also feststellen, daß der Ansatz gewählt werden darf und man sich sogar einen der Summanden vorgeben kann. Den Nutzen dieser Überlegung zeigt der folgende Rechengang: Ersetzen wir in Gleichung III die Unbekannte x beziehungsweise x^2 mittels V. Dieses Verfahren trägt die mathematische Bezeichnung „substituieren“.

$$0 = x^2 + px + q$$

$$0 = (X + y)^2 + p(X + y) + q$$

$$0 = X^2 + 2yX + y^2 + pX + py + q$$

$$0 = X^2 + (2y + p)X + y^2 + py + q.$$

Unsere neue Gleichung enthält X und y . Wählen wir nun y so, daß

$$2y + p = 0$$

gilt! Als Ergebnis erhalten wir

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Überprüfe diese Angabe!

Setzen wir $y = -\frac{p}{2}$ in unsere Gleichung ein, vereinfacht sie sich:

$$0 = X^2 + 0 \cdot X + \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p \left(-\frac{p}{2}\right) + q$$

$$0 = X^2 - \frac{p^2}{4} + q. \quad \text{VI}$$

Diese Form gleicht IV, also $0 = x^2 - r$! Die Lösung folgt demnach zu

$$X^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad | \sqrt{}$$

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ersetzen wir schließlich in

$$x = X + y$$

die Werte X und y , erhalten wir

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die somit gewonnene allgemeine Lösungsvorschrift nutzen wir zur Berechnung der Gleichungen I und II:

$$\text{I} \quad p = -6, \quad q = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - 8} = 3 \pm \sqrt{1}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 4.$$

● Führe die Probe durch und löse II!

Eine Vielzahl mathematischer Probleme führt auf die Lösung quadratischer Gleichungen. Bei der näherungsweisen Berechnung von π durch ein- und umbeschriebene 4-, 8-, 16-, ... Ecke traten Wurzelausdrücke wie

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \quad \dots$$

auf. Wer nicht über einen Taschenrechner verfügt, wird in erhebliche Schwierigkeiten geraten sein, diese Wurzeln in Dezimalbrüche umzuwandeln. Mit Hilfe einer quadratischen Gleichung können wir

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

ohne wesentlichen Aufwand genau bestimmen! Um das Problem wieder allgemein zu lösen, versuchen wir

$$\sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \dots}}} \quad \text{I}$$

zu bestimmen, wobei uns nur beliebige Zahlen z mit

$$z > 0$$

interessieren. Der Ausdruck I läßt sich in der Form

$$x = \sqrt{z + x} \quad \text{II}$$

darstellen. Davon können wir uns sofort überzeugen, indem wir für das x unter der Wurzel $x = \sqrt{z + x}$ schreiben:

$$x = \sqrt{z + (\sqrt{z + x})} = \sqrt{z + \sqrt{z + x}}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, erhalten wir im nächsten Schritt

$$x = \sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + x}}}.$$

Durch ständig wiederholtes Ersetzen von x finden wir den ursprünglichen Wurzelausdruck I:

$$x = \sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \dots}}}}$$

Um I zu berechnen, muß also II gelöst werden:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{z + x} & | \quad ()^2 \\ x^2 &= z + x & | \quad - z - x \\ 0 &= x^2 - x - z. & \text{III} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir tatsächlich eine quadratische Gleichung!

Löse III!

Ohne Beweis leuchtet uns ein, daß $\sqrt{z + \sqrt{z + \dots}}$ für ein fest gewähltes z einen ganz bestimmten Wert darstellt. Folglich sind nicht die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + z}$$

und

$$x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + z}$$

möglich. Vielmehr müssen wir überlegen, welche auszuschließen ist. Da wir voraussetzten, daß

$$z > 0,$$

muß auch

$$x = \sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \dots}}} > 0$$

gelten. Berücksichtigen wir diese Forderung, so finden wir, daß x_1 für alle z größer als Null ist, demnach eine Lösung darstellt. Setzen wir in x_2

$$z = 0,$$

erhalten wir

$$x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Da aber $z > 0$, wird $\sqrt{\frac{1}{4} + z}$ stets größer als $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

sein. Zieht man aber von $\frac{1}{2}$ den Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{4} + z} > \sqrt{\frac{1}{4}}$

ab, so folgt für $\frac{1}{2} - \sqrt{z + \frac{1}{4}}$ immer eine Zahl kleiner als Null. Die Lösung x_2 entfällt also. Als endgültiges Resultat finden wir schließlich

$$\sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \sqrt{z + \dots}}}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + z}.$$

Mit Hilfe der Zahlentafel läßt sich $\sqrt{\frac{1}{4} + z}$ für entsprechend vorgegebenes z mühelos in einen Dezimalbruch verwandeln.

● Berechne $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$, $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \dots}}}, \sqrt{\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{1}{5} + \dots}}}$$

auf drei Dezimalstellen genau!

Zahl oder Wappen?

Und sie bewegt sich doch!

1609

Fast 1500 Jahre nach der mathematischen Formulierung des ptolemäischen Weltbildes erschien unter dem Titel „Astronomia nova“ („Neue Astronomie“) ein Werk des kaiserlichen Hofmathematikers Johannes Kepler. Dieses Buch enthält die Ergebnisse einer langjährigen Forschungsarbeit, die „Keplerschen Gesetze“.

Bei der Auswertung eines umfangreichen astronomischen Beobachtungsmaterials entdeckte der Mathematiker, daß sich die Planeten auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen. (Das ist der Inhalt des ersten Keplerschen Gesetzes.)

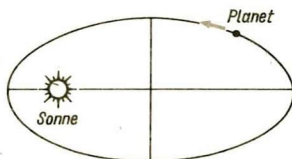


Abb. 46 Erstes Keplersches Gesetz

Weiterhin fand Kepler heraus, daß die Geschwindigkeit eines Planeten auf seiner Bahn vom Abstand zur Sonne abhängt! Diese Erkenntnis beschreibt das zweite Keplersche Gesetz: Der Strahl Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachten wir die Abbildung 47. Bewegt sich der Planet in einer bestimmten Zeit t von 1 nach 2, überstreicht die Verbindungslinie – man sagt auch Fahrstrahl – die Fläche A_1 . In der gleichen Zeit legt der Planet in größerer Sonnenferne die Strecke von 3 nach 4 zurück, und der Fahrstrahl

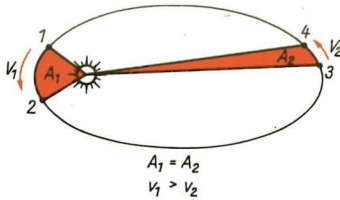


Abb. 47 Zweites Keplersches Gesetz

überstreicht die Fläche A_2 . Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz besitzen A_1 und A_2 den gleichen Flächeninhalt. Die Forderung kann nur dann erfüllt sein, wenn der in Sonnennähe zurückgelegte Weg länger ist als der in Sonnenferne. Daraus folgt aber, daß sich die Bahngeschwindigkeiten voneinander unterscheiden:

$$v_1 > v_2.$$

Je weiter sich ein Planet auf seiner Bahn von der Sonne entfernt, desto geringer wird seine Geschwindigkeit.

1618 erkannte Kepler eine dritte Gesetzmäßigkeit: Der mittlere Abstand a eines Planeten steht in einem bestimmten

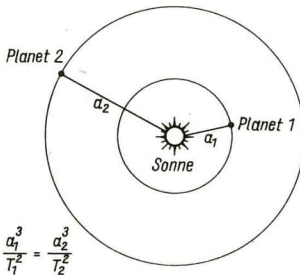


Abb. 48 Drittes Keplersches Gesetz

Verhältnis zur Umlaufzeit T um die Sonne. Der Quotient

$$\frac{a^3}{T^2}$$

besitzt stets die gleiche Größe.

Dieses Gesetz gilt für jeden beliebigen Planeten. Beschreiben die Werte a_1 und T_1 die Bewegung eines Planeten, a_2 und T_2 die eines anderen, können wir deshalb auch schreiben:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

Welche Hilfe diese mathematische Formulierung den Astronomen bringt, beweist ein Beispiel. Beobachtungen ergaben, daß die mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne

$$a_1 = 150\,000\,000 \text{ km} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

(Lies diese Zahl!)

beträgt und ein Umlauf

$$T_1 = 1 \text{ Jahr}$$

dauert. Der Planet Jupiter umkreist die Sonne in

$$T_2 = 11,86 \text{ Jahren.}$$

Wie groß ist dessen mittlerer Abstand zur Sonne?

Das dritte Keplersche Gesetz liefert eine Gleichung für a_2 :

$$a_2 = a_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 150 \cdot 10^6 \cdot \sqrt[3]{\frac{(11,86)^2}{1^2}} \text{ km.}$$

Überprüfe die Richtigkeit dieser Angabe.

Als Ergebnis erhalten wir

$$a_2 = 780 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Jupiter umkreist die Sonne demnach in einer mittleren Entfernung von 780 Millionen Kilometern.

● Der mittlere Abstand des sonnenfernsten Planeten, Pluto, beträgt $5950 \cdot 10^6$ km. Welche Zeit benötigt er für einen vollständigen Umlauf um die Sonne? Vergleiche die Bahngeschwindigkeiten von Erde, Jupiter und Pluto miteinander!

Gegenüber der komplizierten Epizykeltheorie des Ptolemäus beschreiben die Keplerschen Gesetze die Bahnen und die Bewegung der Planeten in einer einfachen und richtigen Form. Sollte damit das heliozentrische Weltbild endlich gesiegt haben?

Rom, 22. Juni 1633

„... Dich aber verurteilen wir zum förmlichen Kerker ...“

So lautete das Urteil des Inquisitionsgerichtes über den fast 70jährigen Galileo Galilei. Nur knapp war dieser am qualvollen Tod auf dem Scheiterhaufen vorbeigekommen. Welche Schuld hatte er auf sich geladen?

Galileo Galilei, geboren am 15. Februar 1564 in Pisa (Italien), begann sich nach einem abgebrochenen Medizinstudium für die Mathematik zu interessieren. Begeistert las er überlieferte Werke von Archimedes. An der Universität von Padua lehrte er viele Jahre Mathematik. Nebenbei untersuchte der Gelehrte physikalische Probleme. So erkannte er beispielsweise, daß im luftleeren Raum alle Körper – unabhängig von ihrer Masse – gleich schnell fallen. Das daraufhin von Galilei formulierte Gesetz beschreibt die Bewegung eines frei fallenden Gegenstandes. Zwischen dem zurückgelegten Weg s , der Geschwindigkeit v und der Zeit t bestehen die Zusammenhänge

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \text{I}$$

$$v = g \cdot t. \quad \text{II}$$

Der Faktor g – man bezeichnet diesen auch als Proportio-

nalitätsfaktor – drückt aus, welcher Beschleunigung ein Gegenstand ausgesetzt ist. Auf der Erdoberfläche beträgt

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Interessiert uns nun vielleicht, nach welcher Zeit ein Blumentopf den Erdboden erreicht, wenn er von einem Fensterbrett aus fünf Meter Höhe herabfällt, liefert das Fallgesetz I die Lösung. Wir stellen es nach t um.

Führe diese Rechnung aus!

Die Gleichung lautet

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

und gibt die gesuchte Fallzeit an. Mit $s = 5 \text{ m}$ und $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ resultiert schließlich

$$t \approx 1 \text{ s}.$$

● Welche Geschwindigkeit erreicht der Blumentopf? Gib die Lösung in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

● Ein Fahrzeug prallt mit einer Geschwindigkeit von $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ an einen Baum. Dieser Aufprall gleicht dem Sturz aus einer bestimmten Höhe. Berechne diese Höhe! Beweise, daß sich die Höhe bei doppelter Geschwindigkeit vervierfacht!

Ein besonderes Interesse Galileis galt auch der Astronomie. Die Begeisterung dafür rührt von der Erfindung des Fernrohres her. Galilei baute ein solches Gerät nach und begann als erster, damit den Sternhimmel zu beobachten.

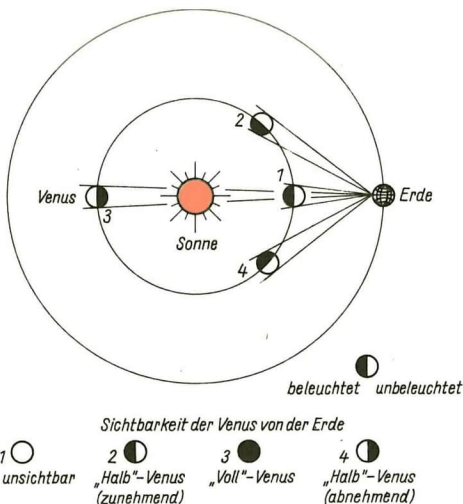


Abb. 49 Entstehung der Venusphasen

Innerhalb kurzer Zeit gelangen Galilei eine Reihe bedeutender Entdeckungen: Er sah Gebirge auf der Mondoberfläche und beobachtete vier Monde des Planeten Jupiter. Er bemerkte auch, daß die Venus in den gleichen Phasen wie der Mond erschien. Die richtige Erklärung dafür ließ sich nur mit Hilfe des heliozentrischen Weltbildes finden.

In den Veröffentlichungen seiner astronomischen Beobachtungen bekannte sich Galilei immer wieder zum Weltbild des Copernicus. In Schriften und Lehrwerken trat er für dessen Verbreitung ein. Schließlich standen ihm ja auch viele Beweise zur Verfügung.

Doch die Macht der Kirche war noch groß. So erfolgte im Jahre 1633 durch die Inquisition die Anklage gegen Galilei

wegen Ketzerei! Für den hervorragenden Naturforscher gab es nur eine einzige Möglichkeit, sein Leben zu retten. Er mußte vor dem Gericht schwören, daß all seine Lehren falsch und ketzerisch seien und er sich für immer von diesen abwende.

Angeblich bemerkte Galilei nach dem Prozeß – überzeugt von der Richtigkeit der Annahme, daß die Erde nicht still im Weltall ruht – „Und sie bewegt sich doch!“ Sicherlich ist diese Anekdote nicht wahr. Tatsächlich aber gab Galilei seine Ideen niemals auf. Trotz strenger Kontrolle verfaßte er ein umfangreiches Lehrwerk, die „Discorsi“. Hier behandelt er physikalische Probleme, beispielsweise die Bewegung eines Pendels oder die Vorgänge beim Wurf.

Die „Discorsi“ stellten die letzte große Arbeit des Gelehrten dar. Erblindet, starb Galileo Galilei am 8. Januar 1642 in Arcetri bei Florenz.

1687

Während die drei Keplerschen Gesetze die Bahnform und den Lauf der Planeten beschreiben, vermochte Kepler nicht zu erklären, *warum* sich die Planeten derart bewegen. Er vermutete, daß von der Sonne eine unsichtbare Kraft ausgeht, die die Himmelskörper auf ihrer Bahn festhält.

Im Jahr 1687 veröffentlichte der englische Naturforscher Isaac Newton das allgemeine Gravitationsgesetz. Dieses Gesetz nun machte die Kräfte, die zwischen Massen wirken, also auch zwischen den Himmelskörpern, berechenbar.

Das Wort Gravitation heißt auch Anziehung und drückt die Ursache vieler physikalischer Erscheinungen aus: Der Apfel fällt vom Baum, da die Erde ihn infolge ihrer großen Masse anzieht. Im Ergebnis der Gravitationswirkung von Sonne und Mond entstehen auf der Erde die Gezeiten, Ebbe und Flut, das Wasser der Meere wird bewegt. Schließlich hält die Anziehungskraft der Sonne die Planeten auf ihren Bahnen.

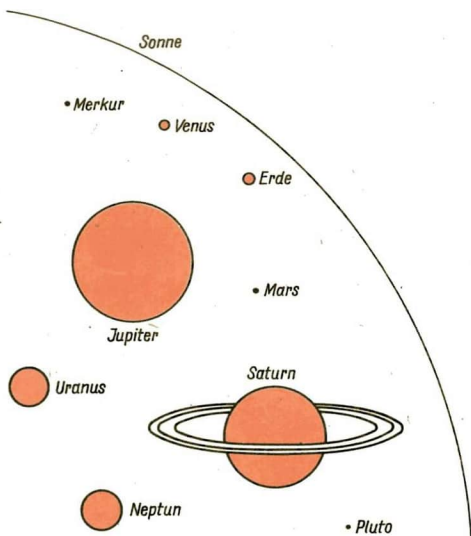


Abb. 50 Größenvergleich der Planeten (maßstabgerecht)

Newton erkannte, daß zwischen zwei Körpern stets eine Kraft wirkt. Es seien m_1 , m_2 die Massen dieser Körper, die wirkende Kraft bezeichnen wir mit dem Buchstaben F . Die Größe der Kraft hängt vom Abstand der beiden Körper ab: Obwohl die Sonne eine 333000mal größere Masse als die Erde besitzt, zieht die Erde den Apfel stärker an als die Sonne. Die Begründung dafür liefert das Newtonsche Gravitationsgesetz:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

r ist gleich dem Abstand der beiden sich anziehenden Massen, γ stellt einen Proportionalitätsfaktor dar.

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Kraft bei abnehmen dem Abstand zunimmt. Ohne ein Beispiel rechnen zu wollen, reichen unsere mathematischen Kenntnisse aus, die Kraft F etwas näher zu untersuchen. Diese hängt von m_1 , m_2 und r ab.

- Welchen Einfluß übt eine Vergrößerung beziehungsweise Verkleinerung von m_1 , m_2 oder r auf F aus?

Für die Durchsetzung des heliozentrischen Weltbildes besitzt das Gravitationsgesetz eine grundlegende Bedeutung, denn es lassen sich daraus die Keplerschen Gesetze mathematisch ableiten! Des weiteren ergibt sich die physikalische Notwendigkeit, daß die Sonne den Mittelpunkt des Planetensystems darstellt: Sie besitzt die größte Masse und zwingt deshalb die masseärmeren Planeten auf Ellipsenbahnen.

1846

Eine endgültige Bestätigung für die Richtigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes stellt die Entdeckung des Planeten Neptun dar.

In der Bewegung des Uranus beobachteten Astronomen Unregelmäßigkeiten. Fanden sie anfangs keine Erklärung dafür, tauchte später der Gedanke auf, daß ein noch unbekannter Körper den Lauf des Uranus stören könnte. Dem Newtonschen Gesetz zufolge ziehen sich zwei Massen gegenseitig an. Wirkt zum einen die Sonne auf den Planeten, so beeinflußt die Gravitationskraft des anderen Körpers gleichfalls den Uranus. Dieser „taumelt“ folglich auf seiner Bahn. Im Jahre 1846 gelang dem Franzosen Leverrier die Berechnung des Standortes jenes unbekannten Planeten. Jetzt bedurfte es nur noch der Entdeckung! Tatsächlich erblickte der deutsche Astronom Galle den Neptun bereits im gleichen Jahr in einem starken Fernrohr.

Fand das System des Copernicus bislang „nur“ Unterstützung durch verschiedene naturwissenschaftliche Gesetze,

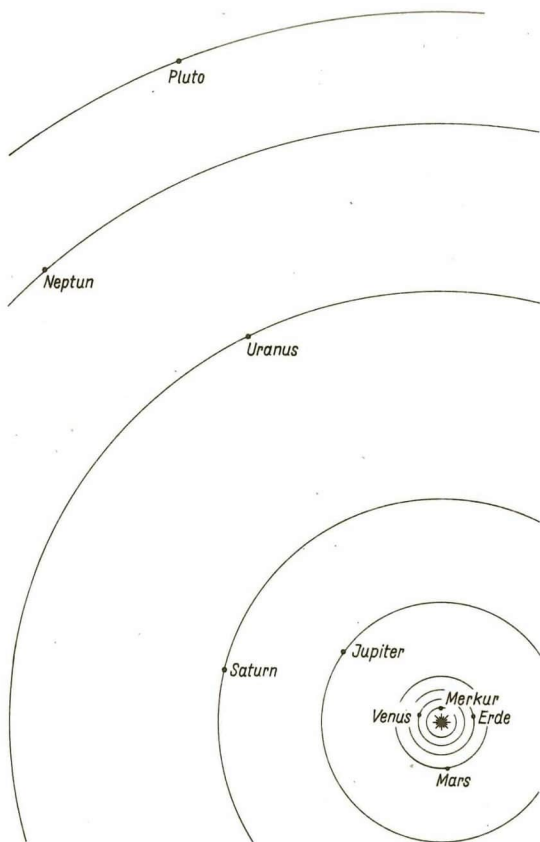


Abb. 51 Planetensystem (nicht maßstabgerecht)

so stellte die Entdeckung des Neptuns den unwiderlegbaren Beweis für dessen Richtigkeit dar. Der mehr als dreihundert Jahre andauernde Kampf um die Durchsetzung des fortschrittlichen heliozentrischen Weltbildes fand engültig sein Ende.

Quader oder Zylinder?

Ende des 18. Jahrhunderts begann, zunächst in England, die maschinelle Produktion die bis dahin vorwiegend auf Handwerksarbeit beruhende Produktion in den kapitalistischen Manufakturen abzulösen. Diese „industrielle Revolution“ wurde hervorgerufen durch die Erfindung von Maschinen, zum Beispiel der Spinnmaschine und dem mechanischen Webstuhl. Ihre Antriebsmaschine wurde die Dampfmaschine, die James Watt erfand und die die Kraft vieler Arbeiter ersetzte. 1804 fuhr die erste Dampflokomotive, 1807 nahm der erste Schaufelraddampfer seinen Betrieb auf.

Hand in Hand mit der Entwicklung der Produktivkräfte entwickelten sich auch die Naturwissenschaften. Die neue kapitalistische Gesellschaftsordnung bedurfte einer leistungsfähigen Wissenschaft, die durch Erfindungen und Entdeckungen zur Erhöhung der Produktion beitrug. Viele bedeutende Arbeiten von Chemikern, Biologen, Physikern und Mathematikern entstanden in der Zeit vom 17. bis zum 20. Jahrhundert. Dmitri Iwanowitsch Mendelejew, beispielsweise, führte das Periodensystem der Elemente ein und konnte auf dessen Grundlage noch unbekannte Elemente vorausbestimmen. Charles Darwin schuf die Lehre von der Abstammung der Organismen. Er begründete damit wissenschaftlich, daß sich der Mensch in einem viele Millionen Jahre andauernden Prozeß aus dem Tierreich entwickelte.

Beachtliche Erfolge hatten auch die Mathematiker zu verzeichnen. Sie nutzten seit dem 17. Jahrhundert einfache

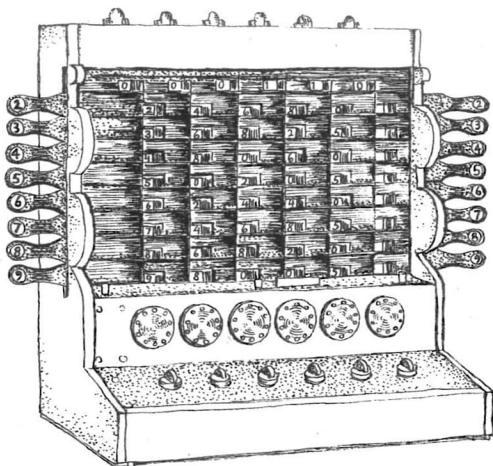


Abb. 52 Rekonstruktion der Rechenmaschine von Schickard

Rechenmaschinen. Die erste baute 1623 der Tübinger Mathematikprofessor Wilhelm Schickard. Mit deren Hilfe sollte Kepler die Auswertung seiner astronomischen Berechnungen erleichtert werden. Unglücklicherweise fiel das Werk einem Brand zum Opfer.

1641 konstruierte Blaise Pascal eine „Pascaline“, wie er seine Additions- und Subtraktionsmaschine nannte. Eine der „Pascalinen“ stellt der Mathematisch-Physikalische Salon im Dresdner Zwinger aus.

Zu den bedeutendsten Forschungsergebnissen des 17. Jahrhunderts gehört die Entwicklung eines neuen Zweiges in der Mathematik. Leibniz und Newton begründeten die Differential- und Integralrechnung. Unsere heutige moderne Naturwissenschaft wäre ohne dieses mathematische Verfahren undenkbar! Die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung an dieser Stelle zu vermitteln ist nicht mög-

lich, das übersteigt unsere bisher gewonnenen Kenntnisse. Zwei Beispiele sollen andeuten, welche vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten bestehen:

Welches Rechteck besitzt bei vorgegebenem Umfang den größten Flächeninhalt? Die Frage könnte auch so gestellt werden: 100 Meter Maschendraht umzäunen ein rechteckiges Feld. Wie lang müssen die Seiten sein, um die größtmögliche Fläche einzuschließen?

Die Aufgabenstellung mag verwunderlich klingen, denn 100 Meter bleiben schließlich 100 Meter – wie soll sich da die eingeschlossene Fläche ändern? Wählen wir zwei Rechtecke mit den folgenden Seitenlängen:

1. Rechteck

$$a = 40 \text{ m}$$

$$b = 10 \text{ m}$$

$$u = (2 \cdot 40 + 2 \cdot 10) \text{ m}$$

$$= 100 \text{ m}$$

2. Rechteck

$$a = 30 \text{ m}$$

$$b = 20 \text{ m}$$

$$u = (2 \cdot 30 + 2 \cdot 20) \text{ m}$$

$$= 100 \text{ m.}$$

● Der Umfang u beträgt jeweils 100 m. Berechne die Flächeninhalte!

Versuchen wir nun, die zuvor gestellte Aufgabe zu lösen. Ein Rechteck mit den Seiten a und b besitzt den Umfang

$$u = 2a + 2b$$

und den Flächeninhalt

$$A = a \cdot b.$$



Abb. 53 Von Leibniz konstruierte Rechenmaschine

Der Umfang soll stets der gleiche bleiben, nur die Seiten a und b dürfen verändert werden. Untersuchen wir a und b, können wir zwei allgemeine Fälle unterscheiden:

1. Fall

Die Rechteckseiten besitzen die gleiche Länge, also

$$a = b = x.$$

Der Umfang folgt zu

$$u = 2x + 2x = 4x.$$

2. Fall

Die Rechteckseiten sind unterschiedlich lang. Da u unverändert bleibt, gilt die Aussage: Verlängert man die Seite b um die Strecke c, muß die Rechteckseite a um c verkürzt werden. Wählen wir entsprechend Abbildung 54 den Ansatz

$$a = x - c \quad \text{und} \quad b = x + c.$$

Die Richtigkeit überprüfen wir, indem wir u bestimmen:

$$\begin{aligned} u &= 2 \cdot (x - c) + 2 \cdot (x + c) \\ &= 2x - 2c + 2x + 2c = 4x. \end{aligned}$$

Dies ist aber – wie gefordert – der gleiche Umfang wie der des Quadrates!

Berechnen wir für beide Fälle die Flächeninhalte:

1. Fall

$$A = a \cdot b = x \cdot x = x^2.$$

2. Fall

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b = (x - c) \cdot (x + c) \\ &= x^2 + cx - cx - c^2 \\ A &= x^2 - c^2. \end{aligned}$$

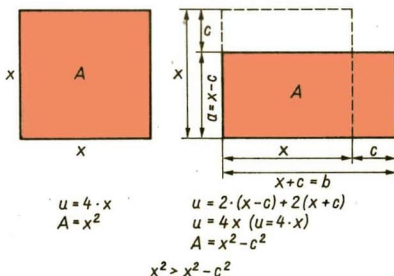


Abb. 54

Beträgt der Flächeninhalt im ersten Fall x^2 , wird bei unterschiedlichen Seitenlängen von diesem noch der Betrag c^2 abgezogen. Es gilt also

$$x^2 > x^2 - c^2.$$

Somit folgt, daß der Flächeninhalt des Quadrates (1. Fall) größer als der eines beliebigen Rechteckes mit dem gleichen Umfang ist (2. Fall).

Der Mathematiker, der über Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung verfügt, löst die oben gestellte Aufgabe auf wesentlich kürzerem Weg. Er würde in $A = a \cdot b$ eine Unbekannte, beispielsweise b , durch $u = 2a + 2b$ eliminieren. Daraufhin erhält er

$$A = \frac{1}{2} u a - a^2.$$

● Überprüfe diese Angabe!

Die Differentialrechnung liefert nun bereits im nächsten Schritt das gesuchte Ergebnis:

$$a = \frac{1}{4} u.$$

Diese Lösung stimmt natürlich mit unserer überein, denn

$$a = \frac{1}{4}u \text{ entspricht der Aussage } a = b.$$

● Beweise dies!

Es gibt noch eine andere geometrische Fläche, deren Inhalt den des Quadrates bei gegebenem Umfang übertrifft.

● Um welche Figur könnte es sich handeln? Ermittle zuerst die Fläche des Quadrates mit einem Umfang von 100 m. Vergleiche diese mit der Fläche eines Kreises mit dem Umfang $u = 100$ m!

Das zweite Beispiel bestätigt den praktischen Nutzen der Anwendung der Differential- und Integralrechnung. Mit deren Hilfe kann unter anderem die Form eines Verpackungsbehälters bestimmt werden, der aus möglichst wenig Material besteht – aber ein bestimmtes Volumen einschließt.

Nehmen wir eine Büchse. Der Radius vom kreisförmigen Boden und Deckel sei $r = 6,8$ cm, die Büchsenhöhe mißt $h = 13,8$ cm. Das gesamte Volumen erhalten wir als Produkt von Grundfläche und Höhe: $V = A \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Setzen wir die gegebenen Werte ein, folgt

$$V = 2005 \text{ cm}^3 \approx 2 \text{ l.}$$

Die Büchse faßt also 2 Liter. Ihre Oberfläche, die ja der Menge des verwendeten Büchsenmaterials entspricht, setzt sich aus der Mantelfläche $A_1 = 2\pi r \cdot h$ sowie Boden- und Deckelfläche $A_2 = A_3 = \pi r^2$ zusammen:

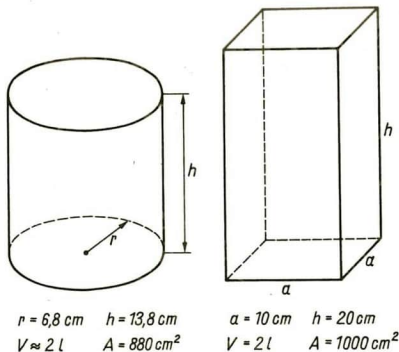
$$A_{\text{Büchse}} = A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$A_{\text{Büchse}} = 880 \text{ cm}^2.$$

Jetzt wählen wir ein quaderförmiges Gefäß der Höhe $h = 20$ cm, welches eine quadratische Grundfläche der

Abb. 55



Seitenlänge $a = 10 \text{ cm}$ besitzt. Das Volumen beträgt

$$V = 2000 \text{ cm}^3 = 2 \text{ l},$$

die Gesamtoberfläche umfaßt

$$A_{\text{Quader}} = 1000 \text{ cm}^2.$$

- Wie lautet der vollständige Lösungsweg?

Vergleichen wir nun die Oberflächen von Büchse und Quader! Der Nutzen wird sofort deutlich: 120 cm^2 geringere Büchsenoberfläche bedeuten 12% Materialeinsparung gegenüber der quaderförmigen Verpackung!

Unsere mathematischen Kenntnisse reichten zwar zur Berechnung von Oberflächen und Volumen der gegebenen Körper, aber erst mit Hilfe der Differentialrechnung kann die geometrische Gestalt des Körpers mit geringster Oberfläche ermittelt werden, und das ist nicht die Büchse, sondern die Kugel!

- Berechne die Oberfläche einer Kugel vom Volumen

$$V = 2000 \text{ cm}^3. \text{ Hinweis: } V = \frac{4}{3} \pi r^3, A = 4 \pi r^2.$$

Schließen wir unsere erste Begegnung mit der Differential- und Integralrechnung mit einer kleinen Anekdote ab, die über Isaac Newton erzählt wird:

Der große Gelehrte besaß einst eine Katze. Diese schlüpfte gewöhnlich durch ein Loch in der Tür ins Freie. Eines Tages tauchte die Katze mit drei kleinen Kätzchen auf – sie hatte Junge bekommen. Newton, der oftmals recht zerstreut war, ließ daraufhin seinen Hausdiener drei kleine Löcher neben dem großen Loch in die Tür sägen. Schließlich sollten ja alle Katzen ungehindert ein- und ausgehen können!

Kennzeichnend für die Mathematik zu Lebzeiten Newtons und der darauffolgenden Jahrhunderte war die immer engere Verflechtung mit den anderen Naturwissenschaften: Physik, Astronomie, Chemie, Geodäsie (die Lehre von der Bestimmung der Gestalt der Erde und der Erdvermessung). Dies schlägt sich auch in den Werken der Gelehrten nieder. So verfaßte Leonhard Euler, ein bedeutender Mathematiker des 18. Jahrhunderts, 886 Bücher und Schriften, in denen er sich mit Problemen der Astronomie und des Schiffbaus beschäftigte; er untersuchte den Strahlenverlauf des Lichtes in Linsen und erforschte die Gesetze ruhender und bewegter Flüssigkeiten. Hauptsächlich war Euler aber Mathematiker. Er löste beispielsweise eine Frage, die die Bewohner des ehemaligen Königsberg – heute Kaliningrad – interessierte:

Sieben Brücken verbinden die Ufer des Flusses Pregel so, wie es die Abbildung zeigt. Ist es für einen Spaziergänger möglich, über jede Brücke genau einmal zu gehen, ohne eine auszulassen oder mehrmals zu überqueren?

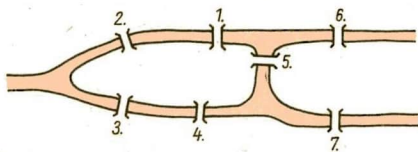


Abb. 56

Euler erkannte, daß für einen solchen Spaziergang keine Möglichkeit besteht, und fand auch einen mathematischen Beweis.

● Zeichne an beliebiger Stelle eine achte Brücke ein und suche nach einem Weg, der die obige Aufgabenstellung erfüllt. Fallen Anfangs- und Endpunkt des möglichen Rundganges zusammen? Hinweis: Es gibt genau vier verschiedene Möglichkeiten, eine achte Brücke zu legen.

Wie Euler befaßte sich auch Carl Friedrich Gauß, ein namhafter Gelehrter des 19. Jahrhunderts, nicht nur mit mathematischen Problemen. Er berechnete unter anderem die Bahnen mehrerer Planetoiden. Dies sind im Vergleich zu Planeten sehr kleine Himmelskörper, von denen schätzungsweise 50000 bis 100000 die Sonne umkreisen. Der größte Planetoid besitzt einen Durchmesser von 770 Kilometern und heißt Ceres.

Auf physikalischem Gebiet untersuchte Gauß magnetische und elektrische Erscheinungen. Doch die bedeutendsten Leistungen vollbrachte er als Mathematiker. Das Interesse für diese Wissenschaft reicht bis in seine früheste Kindheit zurück. Als kleiner Schuljunge erhielt Gauß, gemeinsam mit den anderen hundert Schülern der Klasse, die folgende Aufgabe:

Addiere die Zahlen von 1 bis 100!

Lehrer Büttner nahm ganz berechtigt an, seine Schützlinge würden geraume Zeit zur Lösung der Aufgabe benötigen. Doch bereits nach wenigen Augenblicken legte Gauß seine Rechentafel mit dem richtigen Ergebnis vor.

Wie gelang es dem jungen Carl Friedrich Gauß, die mühsame Rechenarbeit in so kurzer Zeit zu beenden? Er bemerkte, daß

$$\begin{aligned} 1 + 100 &= 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 49 + 52 \\ &= 50 + 51 = 101. \end{aligned}$$

Statt wie seine Mitschüler die Addition

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

auszuführen, ordnete er die Zahlenreihe um:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 &= (1 + 100) \\ &+ (2 + 99) + \dots + (50 + 51). \end{aligned}$$

Da es genau 50 solcher Zahlenpaare gibt, deren Summe gleich 101 ist, lautet das gesuchte Ergebnis

$$50 \cdot 101 = 5050.$$

- Addiere alle ungeraden Zahlen von 1 bis 999!

Die Zeit des 17. bis 19. Jahrhunderts brachte viele bedeutende Naturwissenschaftler hervor. Sie können hier nicht alle genannt und vorgestellt werden. Unmöglich ist es auch, die große Zahl der mathematischen Forschungsergebnisse zu betrachten. Wenden wir uns statt dessen einem ausgewählten Kapitel der Mathematik zu, das mehr und mehr an Bedeutung gewinnt: der Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Ein Fünfer – kein Problem!

Mensch ärgere dich nicht! So spotten die Mitspieler, wenn man anstelle der 6 zum dritten Male hintereinander eine 4 gewürfelt hat. Das kann doch nicht mit rechten Dingen zugehen. Müßte nicht jede der sechs Zahlen mit derselben Häufigkeit erscheinen? Schließlich besitzt der Würfel sechs vollkommen gleiche Flächen. Aber nein, hier liegt die dritte 4 – das Glück ist heute nicht auf unserer Seite.

Vielleicht veranlaßte eine Pechsträhne den Chevalier de Méré, mit dem Mathematiker Blaise Pascal über den Ausgang sogenannter Glücksspiele zu diskutieren. Im Jahre 1654 trat Pascal mit dem Juristen Fermat in einen Briefwechsel. (Sie

gelten als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung.) Beide begannen sich mit dem Problem zu befassen, ob man den Verlauf eines Glücksspiels mathematisch beschreiben könnte.

Wäre das möglich, ließe sich dann bestimmen, welche Zahl beim Würfeln als nächste erscheint? Oder ob bei einem Münzwurf Zahl oder Wappen oben liegen wird? Kennt der Mathematiker folglich auch ein Verfahren, die Lottozahlen vom Wochenende bereits im voraus zu ermitteln?

Auf diese Frage gibt es nur eine Antwort: Wären solche „Berechnungen“ tatsächlich durchführbar, würden sich bestimmt sehr viele Menschen eifrig mit der Mathematik befassen. Der Gewinn bei einem Fünfer entschädigt doch für alle Mühen der Rechnerei. – Dennoch wollen wir untersuchen, wie wir mit Sicherheit einen Fünfer erzielen können.

Vermeiden wir künftig das „unmathematische“ Wörtchen „Glücksspiel“ und führen dafür den Ausdruck „Versuch“ ein. Für unsere folgenden Überlegungen dienen uns drei Versuche:

Versuch 1 Würfeln

Versuch 2 Werfen einer Münze

Versuch 3 Tele-Lotto-Spiel.

Jeder Versuch endet mit einem „Ereignis“:

Versuch 1 Das Würfeln der 1 ist das Ereignis A; das Würfeln der 2 stellt das Ereignis B dar; ...

Offensichtlich können sechs voneinander verschiedene Versuchsausgänge eintreten. Das stimmt aber nicht immer. Interessiert uns beispielsweise, wie oft gerade Zahlen erscheinen, gibt es genau zwei verschiedene Ereignisse: Entweder ist die gewürfelte Zahl ungerade – also 1, 3, 5 – oder gerade – also 2, 4, 6. Dabei ist es vollkommen gleichgültig, ob die geworfene Zahl die 2 oder die 4 oder die 6 ist, denn für den Versuchsausgang interessiert nur, ob sie gerade oder ungerade ist.

Die Anzahl *möglicher* Ereignisse hängt demnach von den Forderungen ab, die wir an den Versuch stellen.

- Welche Ereignisse sind bei Versuch 2 möglich?

Eine breite Vielfalt von Versuchsausgängen finden wir bei Versuch 3, beim Tele-Lotto-Spiel. Dreier, Vierer und Fünfer gehören zu den begehrtesten Ereignissen; vergessen wir aber nicht die Fälle mit keiner, einer oder zwei Richtigen. Versuch 3 kann allerdings nie mit sechs Treffern enden – schließlich werden nur fünf Zahlen gezogen. Wir bezeichnen deshalb einen nicht möglichen Versuchsausgang als *unmögliches* Ereignis.

- Stellt das dreimalige Würfeln einer 4 hintereinander ein unmögliches Ereignis dar?

Im Gegensatz zu den unmöglichen Ereignissen gibt es die sogenannten *sicheren* Ereignisse. Diese treten bei jeder neuen Versuchsdurchführung wieder ein:

Versuch 3 Das Ziehen einer Zahl zwischen 1 und 35 ist ein sicheres Ereignis.

Alle anderen Versuchsausgänge, die eintreten können, aber nicht eintreten müssen, heißen *zufällige* Ereignisse:

Versuch 2 Als zufälliges Ereignis bezeichnen wir das Erscheinen des Wappens.

- Welche der folgenden Versuchsausgänge sind sichere, zufällige und unmögliche Ereignisse?

- Würfeln einer geraden Zahl.
- Die Summe der Augenzahl bei zweimaligem Würfeln beträgt 14.
- Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln ist kleiner als 19.
- Bei sechs Münzwürfen lag nur einmal das Wappen oben.

- Die Treffer im Tele-Lotto-Spiel sind fünf aufeinanderfolgende Zahlen, zum Beispiel 1, 2, 3, 4, 5 oder 29, 30, 31, 32, 33.

Wiederholt man einen Versuch mehrere Male, treten verschiedene Ereignisse mit unterschiedlicher Häufigkeit ein:

Versuch 1 Ereignis A Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 5.

 Ereignis B Die gewürfelte Augenzahl ist kleiner als 5.

Nur eine einzige Zahl, nämlich die 6, erfüllt A, während der Versuch mit B endet, wenn die gewürfelte Zahl 1, 2, 3, 4 beträgt. Mit Sicherheit wird bei wiederholtem Werfen des Würfels Ereignis B häufiger als A eintreten!

- Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, bei der die Summe der Augenzahlen nach zweimaligem Würfeln 7 beträgt.

Versuch 2 Ereignis A Das Wappen liegt oben.

 Ereignis B Die Zahl liegt oben.

Wirf eine Münze 100mal und notiere sorgfältig die Häufigkeit der Ereignisse A und B.

Es kann durchaus geschehen, daß nur 42mal das Wappen, 58mal hingegen die Zahl obenauf lag. Bei größerer Wurfzahl nähern sich die Häufigkeiten aber ständig an. So trat bei 24000 Münzwürfen 11988mal Ereignis A und 12012mal Ereignis B ein. Wir können demnach vermuten, daß A und B mit gleicher Häufigkeit stattfinden.

Versuch 3 Ereignis A Fünfer

 Ereignis B Vierer

 Ereignis C Dreier.

Ohne mathematische Überlegungen wissen wir bereits, daß sich C häufiger als B und B häufiger als A ereignet. Da wir aber berechnen wollten, wie wir mit Sicherheit einen Fünfer erzielen können, betrachten wir Versuch 3 näher.

Nehmen wir an, die fünf gezogenen Zahlen seien 4, 17, 18, 23 und 31. Dann existiert genau eine Möglichkeit für einen Fünfer: Auf dem Tipschein müssen gerade diese Zahlen angekreuzt sein. Doch wieviel verschiedene Vierer können auftreten? Durch Probieren findet man folgende fünf Kombinationen:

4, 17, 18, 23
 4, 17, 18, 31
 4, 17, 23, 31
 4, 18, 23, 31
 17, 18, 23, 31.

Ziehen wir daraus aber nicht den voreiligen Schluß, daß nur fünf Möglichkeiten für einen Vierer vorkommen. Die verbleibende fünfte Zahl gehört ja auch zum Tip! Sie ist eine der 30 nichtgezogenen Zahlen. Jeder einzelne Vierer kann also – entsprechend dem letzten Tip – in 30 verschiedenen Varianten auftreten. Demzufolge gibt es im günstigsten Falle $30 \cdot 5 = 150$ verschiedene Vierer!

Für Ereignis C, die Dreier, finden wir eine noch größere Vielfalt. Die zehn Kombinationen von drei Treffern sind

4, 17, 18	4, 18, 23	17, 18, 23	18, 23, 31.
4, 17, 23	4, 18, 31	17, 18, 31	
4, 17, 31	4, 23, 31	17, 23, 31	

Überlegung erfordert allerdings die Aufteilung der verbleibenden zwei Zahlen auf die 30 nichtgezogenen. Eine davon ist schnell untergebracht. Für diese gibt es 30 Möglichkeiten. Entfallen dann auf jede dieser 30 Varianten 29 Fälle, den noch vorhandenen Tip anzuordnen? Dann gäbe es $30 \cdot 29$ Möglichkeiten, zwei Zahlen auf 30 zu verteilen. Hier müssen wir aber aufpassen, um keinen Fehler zu begehen. Ein Beispiel verdeutlicht dessen Ursache:

Die erste Zahl könnte 1, die zweite 35 sein. Die $30 \cdot 29$ Anordnungen enthalten aber auch den Fall, daß die erste

Zahl die 35 und die zweite die 1 ist! Da es vollkommen gleichgültig bleibt, welches die erste und welches die zweite Zahl ist, besteht zwischen den Reihenfolgen 1, 35 und 35, 1 kein Unterschied. Jede Zahlenkombination tritt doppelt auf. Als mögliche Anzahl für Dreier, also die Häufigkeit des Ereignisses C, erhalten wir schließlich $\frac{30 \cdot 29}{2}$ multipliziert mit 10: $\frac{30 \cdot 29}{2} \cdot 10 = 4350$.

● Wieviel verschiedene Zweier sind möglich?

Verfahre bei der Lösung genau wie bei der Ermittlung der Dreier. Bei der Vielfalt der möglichen Verteilungen der drei nichtgezogenen Zahlen auf die 30 verbleibenden tritt jede Zahlenkombination mehrmals auf. Bestimme diese Anzahl, indem du drei beliebige Zahlen wählst und auf die drei Tips verteilst: Die Zahlen seien beispielsweise 1, 2, 3:

	1. Tip	2. Tip	3. Tip
1. Kombination	1	2	3
2. Kombination	1	3	2
⋮		⋮	

Die Anzahl der verschiedenen Kombinationen gibt an, wie oft jede Zahlengruppe vorkommt.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei Versuch 3. Die voneinander verschiedenen Möglichkeiten für Fünfer, Vierer und Dreier verhalten sich wie 1 : 150 : 4350. Auf einen Fünfer können demzufolge 150 verschiedene Vierer und 4350 unterschiedliche Dreier entfallen. Die *Wahrscheinlichkeit*, einen Dreier zu gewinnen, ist folglich wesentlich größer als die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer. Der Mathematiker sagt dazu: Ereignis C (Dreier) tritt mit höherer Wahrscheinlichkeit ein als Ereignis A (Fünfer).

Der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ drückt also aus, mit welcher Sicherheit ein Ereignis eintritt. Um dies mathema-

tisch zu kennzeichnen, wählen wir für die Wahrscheinlichkeit den Buchstaben P und definieren:

$$P(R) = \frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Ereignisse}}{\text{Anzahl der } \textit{möglichen} \text{ Ereignisse}} = \frac{m}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Versuchsausganges R ist gleich einem bestimmten Quotienten.

Welche Ereignisse werden als „mögliche“ und welche als „günstige“ bezeichnet?

Die möglichen Ereignisse untersuchten wir bereits auf Seite 136. Sie sind gleich der Anzahl der voneinander verschiedenen Versuchsausgänge, die eintreten könnten.

Versuch 2 Wir werfen einmal die Münze.

Ereignis A Das Wappen liegt oben.

Ereignis B Die Zahl liegt oben.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(A)$ tritt Ereignis* A ein? Zwei verschiedene Versuchsausgänge sind denkbar. Diese sind die möglichen Ereignisse: $n = 2$. Uns interessiert jedoch nur der Fall, daß das Wappen oben liegt; für die Anzahl der günstigen Ereignisse finden wir $m = 1$. Damit

folgt: $P(A) = \frac{1}{2}$.

● Bestimme $P(B)$!

Die günstigen Ereignisse sind diejenigen, welche wir „erwarten“.

Erinnern wir uns noch einmal an das sichere und das unmögliche Ereignis. Wie groß wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des unmöglichen Ereignisses sein?

* Mathematisch korrekt müßte es heißen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Eintreten des Ereignisses A. Wir wollen im folgenden aber die hier bereits verwendete Kurzform gebrauchen.

Versuch 1 (unmögliches) Ereignis A Beim Werfen eines Würfels erscheint eine 7.

Da der Versuch in keinem Fall so enden kann, haben wir auch kein günstiges Ereignis zu erwarten. Es gilt: $m = 0$. Hieraus erhalten wir

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein unmögliches Ereignis ist gleich 0!

Versuch 1 Ereignis A Beim Werfen eines Würfels erscheint eine Zahl, die kleiner als 7 ist.

Wir erkennen, daß es genau sechs günstige Ereignisse gibt: $m = 6$. Da der Würfel sechs Seiten besitzt, sind sechs verschiedene Versuchsausgänge möglich: $n = 6$. Daraus folgt $P(A) = \frac{6}{6} = 1$. Da beim Würfeln in jedem Fall eine

Zahl kleiner als 7 erscheinen muß, stellt A ein sicheres Ereignis dar. Dessen Wahrscheinlichkeit ermitteln wir zu 1.

Allgemein können wir feststellen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines zufälligen Ereignisses mit einer Zahl zwischen 0 und 1 ausgedrückt werden kann. Mathematisch schreibt man

$$0 < P(R) < 1$$

Je weniger sich $P(R)$ von 1 unterscheidet, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses.

Beim Münzwurf fanden wir $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{1}{2}$.

Das heißt aber, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Wap-

pen obenauf liegt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß nach dem Münzwurf die Zahl obenauf liegt.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel, bevor wir uns wieder dem Tele-Lotto-Spiel zuwenden.

Versuch 1 Wir werfen einmal den Würfel.

Ereignis A Würfeln einer 4

Ereignis B Würfeln einer 6

Ereignis C Würfeln einer geraden Zahl.

Für Ereignis A beträgt $m = 1$, ebenso für Ereignis B. In allen drei Fällen ist die Anzahl der möglichen Ereignisse $n = 6$:

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{1}{6}.$$

Wieviel günstige Versuchsausgänge für C gibt es? Da 2, 4 und 6 gerade Zahlen sind, folgt $m = 3$:

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Es gilt also $P(C) > P(A) = P(B)$. Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln, beträgt $\frac{1}{2}$ – ist also größer,

als eine ganz bestimmte gerade Zahl, etwa die 4 oder die 6, zu werfen. Zum anderen konnten wir nachweisen, daß beim einmaligen Würfeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder die 4 oder die 6 erscheint. Weshalb aber würfeln wir anfangs dreimal nacheinander eine 4? Diese Frage werden wir bald klären können.

● Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die Summe der Augenzahlen beträgt:

Ereignis A 7,

Ereignis B 1,

Ereignis C 9,

Ereignis D 5,

Ereignis E Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 13.

Berechne $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ und $P(E)$!

Lösen wir nun endlich das Problem unseres Tele-Lotto-Fünfers.

Versuch 3 Ereignis A Fünfer

Um $P(A)$ zu ermitteln, müssen wir zuerst m und n bestimmen. Da es bei fünf gezogenen Zahlen nur eine einzige Möglichkeit gibt, den Fünfer zu treffen, gilt $m = 1$. Zur Festlegung von n haben wir zu berechnen, wieviel Varianten dafür bestehen, fünf Zahlen auf 35 zu verteilen (denn: Tele-Lotto = 5 aus 35). Wer aufmerksam die Verteilung von zwei beziehungsweise drei Zahlen auf 30 verfolgte, wird ohne größere Schwierigkeiten n finden. Für zwei Zahlen erhielten wir

$$n_2 = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2},$$

für drei Zahlen galt

$$n_3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Offensichtlich kann die Reihe fortgesetzt werden. Beachten wir, daß die fünf Tips auf 35 Zahlen (und nicht auf 30) zu verteilen sind, resultiert

$$n = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 324632.$$

Daraus folgt schließlich

$$P(A) = \frac{1}{324632} = 0,000003.$$

$P(A)$ ist also erheblich kleiner als 1, doch immerhin nicht Null. Einen Fünfer zu erzielen stellt ein zufälliges Ereignis mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit dar – aber eine kleine mathematische Überlegung läßt daraus ein sicheres Ereignis werden. $P(A)$ kann nur dann vergrößert werden, wenn m verändert wird. Geben wir ganz einfach nicht nur einen Tip, sondern 324632 voneinander verschiedene Tips ab! Die Wahrscheinlichkeit würde dann

$$P(A) = \frac{324632}{324632} = 1$$

betragen. Verbunden mit dem garantiert sicheren Fünfer sind 150 Vierer und 4350 Dreier. Lohnt sich das nicht? ...

- Ermittle $P(B)$ und $P(C)$ für Versuch 3. Berücksichtige, daß die Zahl n der möglichen Ereignisse gleich der Zahl der Varianten ist, fünf Tips auf 35 Zahlen zu verteilen!

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(R)$ führt nicht in jedem Falle auf die einfache Beziehung $P(R) = \frac{m}{n}$.

So fanden wir bisher noch keine Antwort auf die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei dreimaligem Würfeln jeweils eine 4 erscheint!

Dieses Ergebnis – bezeichnen wir es mit dem Buchstaben A – setzt sich aus den drei Ereignissen A_1 , A_2 und A_3 zusammen:

- A_1 Beim ersten Wurf erscheint eine 4.
- A_2 Beim zweiten Wurf erscheint eine 4.
- A_3 Beim dritten Wurf erscheint eine 4.

A findet nur dann statt, wenn sowohl A_1 als auch A_2 als auch A_3 eintreten. Wir schreiben dafür abkürzend

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Zur Bestimmung der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit for-

multiert der Mathematiker den Satz: Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ voneinander *unabhängig*, gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Es reicht demnach, $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ zu ermitteln, um die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten der n Ereignisse zu finden. Die „Einzel“-Wahrscheinlichkeiten brauchen lediglich multipliziert zu werden! Doch beachten wir eine wichtige Voraussetzung in dem Satz: $A_1, A_2, \dots, A_n$ müssen voneinander *unabhängig* sein!

Welche Bedeutung besitzt diese Forderung?

Versuch 2 Ereignis A Das Wappen liegt oben.
 Ereignis B Die Zahl liegt oben.

Beim Münzwurf können A und B nicht gleichzeitig eintreten. Liegt das Wappen oben (A), wird Ereignis B unmöglich. Deshalb sind A und B voneinander *abhängig*.

Versuch 1 Wir würfeln zweimal nacheinander.
 Ereignis A_1 Es erscheint eine 1.
 Ereignis A_2 Es erscheint eine 6.

(Die Ziffern an den Buchstaben drücken aus, bei welchem Wurf das Ereignis erwartet wird.)

In diesem Falle beeinflussen sich A_1 und A_2 nicht gegenseitig. Für das Ereignis A_2 ist es ohne Bedeutung, ob beim ersten Wurf eine 1 erscheint oder nicht. A_1 und A_2 sind voneinander *unabhängig*.

Wenden wir nun auf beide Versuche die obige Formel an!

$$\text{Versuch 1} \quad P(A_1) = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \frac{1}{6}.$$

Da A_1 unabhängig von A_2 ist, liefert

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von A_1 und A_2^* :

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

$$\text{Versuch 2} \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

Berücksichtigt man nicht, daß A und B voneinander abhängen, resultiert für $P(A \cap B)$ das falsche Ergebnis

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Da $A \cap B$ ein unmögliches Ereignis darstellt, lautet die richtige Lösung $P(A \cap B) = 0$.

Bevor wir also die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Stattfinden mehrerer Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ berechnen, müssen wir uns davon überzeugen, daß diese auch tatsächlich unabhängig voneinander sind.

● Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint bei dreimaligem Würfeln jeweils eine 4? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim vierten Wurf gleichfalls eine 4 zu erhalten?

Natürlich dient die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur zur mathematischen Beschreibung von Glücksspielen. Sie findet in der Praxis eine breite Anwendung.

● Ein Kunde wählt eine 40-Watt- und eine 60-Watt-Glühlampe aus. Von dem angebotenen Sortiment sind schätzungsweise 3% der 40-Watt- und 5% der 60-Watt-Lampen defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwirbt der Käufer

A eine funktionstüchtige 60-Watt- und eine defekte 40-Watt-Glühlampe;

* Dem zweimaligen Würfeln entspricht ein einmaliges Würfeln mit zwei Würfeln. Die Versuchsausgänge sind jeweils voneinander unabhängig, und man sagt, A_1 und A_2 können gleichzeitig eintreten.

- B eine funktionstüchtige 40-Watt- und eine defekte 60-Watt-Glühlampe;
- C zwei defekte Glühlampen;
- D zwei ordnungsgemäße Glühlampen?

Da dem Kunden in jedem Lampengeschäft ein Prüfgerät zur Verfügung steht, erhält er mit Sicherheit zwei qualitätsgerechte Lampen. Doch weiß er damit noch nicht, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese eine bestimmte Lebensdauer erreichen. Immerhin kann eine Glühlampe bereits beim ersten Einschalten oder nach 600 Betriebsstunden ausfallen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich experimentell ermitteln. Dazu unternimmt man folgenden Versuch: 1000 Glühlampen werden über eine gewisse Zeit ununterbrochen getestet. Nach diesem Test leuchten nur noch 950 Stück. Die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt demnach

$\frac{50}{1000} = 0,05$. Andererseits überdauert eine beliebig ausgewählte Lampe mit $\frac{950}{1000} = 0,95$ die angegebene Test-

zeit, die wir als Lebensdauer bezeichnen. Der Kunde kann also fast sicher sein, nicht bereits am nächsten Tag eine neue Lampe kaufen zu müssen.

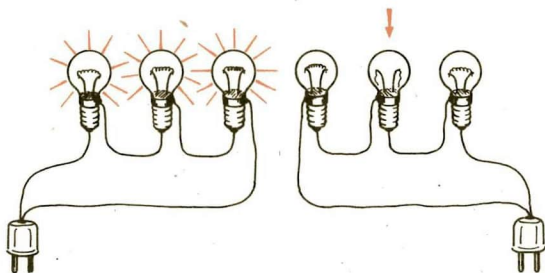


Abb. 57 Fällt in der Reihenschaltung eine beliebige Glühlampe aus, brennen auch die anderen Glühlampen nicht mehr.

Die Zahlenangabe 0,95 besitzt aber noch eine weitere Bedeutung. Schalten wir drei Glühlampen, die mit einer Wahrscheinlichkeit $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 0,95$ eine bestimmte Zeit leuchten werden, in Reihe. Fällt nur eine Lampe aus, wird der gesamte Stromkreis unterbrochen. Wie zuverlässig ist unsere Schaltung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sie sich nach dieser Testzeit noch in funktionstüchtigem Zustand?

Offensichtlich handelt es sich um das Ereignis $B_1 \cap B_2 \cap B_3$, wobei B_1 , B_2 und B_3 die einzelnen Ereignisse darstellen, daß die entsprechenden Lampen die gesamte Zeit leuchten.

Begründe, daß B_1 , B_2 und B_3 voneinander unabhängig sind!

Für $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ erhalten wir demzufolge

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \\ &= 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 0,86. \end{aligned}$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Schaltung innerhalb der vorgegebenen Betriebsdauer aus?
- Eine elektrische Weihnachtsbaumbeleuchtung bestehe aus 18 in Reihe geschalteten Lämpchen. Die angegebene Lebensdauer erreichen sie mit $P = 0,99$. Ermittle die Wahrscheinlichkeit für die Funktionstüchtigkeit der Anlage nach dieser Zeit! Vergleiche das Ergebnis mit einem angenommenen Wert von $P = 0,95$. Verwende zur Berechnung einen Taschenrechner!

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit findet die Wahrscheinlichkeitstheorie beispielsweise bei der Qualitätsprüfung produzierter Erzeugnisse: In einer Abteilung werden kreisrunde Bleche mit einem Durchmesser von 10 Zentimetern hergestellt. Diese Bleche sind nur dann zur Weiterverwendung brauchbar, wenn ihr Durchmesser nicht mehr als 0,5 Millimeter von den geforderten 10 Zentimetern abweicht. Um

abschätzen zu können, wieviel Prozent der Werkstücke die Norm erfüllen, entnimmt der Meister einer Tagesproduktion eine Stichprobe von 20 Stück. Er bestimmt die 20 Durchmesser und vermag mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Aussage über die Qualität der gesamten Tagesproduktion zu gewinnen! Wer interessiert ist, das Rechenverfahren näher kennenzulernen, informiere sich bei den Literaturhinweisen über entsprechende Nachschlagewerke.

Auch in der Naturwissenschaft besitzt die von Pascal und Fermat begründete Theorie Bedeutung. Untersuchen wir ein Beispiel:

Eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung der Pflanzen- und Tierwelt und somit auch des menschlichen Lebens auf der Erde ist die Existenz einer Lufthülle, der Atmosphäre. Obwohl wir die Luft nicht sehen oder „anfassen“ können, besteht sie doch aus einer unvorstellbaren Anzahl winziger Teilchen, aus Atomen und Molekülen. Ein „Luftwürfel“ mit einer Kantenlänge von nur einem Millimeter enthält schätzungsweise

$$27000000000000000 = 27 \cdot 10^{15} \text{ Atome.}$$

● Der Durchmesser eines Atoms beträgt ungefähr $0,0000001 \text{ mm} = 10^{-7} \text{ mm}$. Welches Volumen nehmen die $27 \cdot 10^{15}$ Atome des Luftwürfels ein?

Jedes Atom der Lufthülle bewegt sich vollkommen unregelmäßig. Wir können deshalb annehmen, daß nicht zu jedem Zeitpunkt genau $27 \cdot 10^{15}$ Teilchen pro Kubikmillimeter enthalten sind. Ist aber auch das Ereignis denkbar, daß sich in einem kleinen Raum kein einziges Atom befindet? Gibt es innerhalb unserer Atmosphäre vielleicht luftleere Löcher?

Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür!

Geben wir uns ein Volumen von $V = 1 \text{ dm}^3 (= 1 \text{ l})$

vor und markieren in diesem ein Teilvolumen von $V_{\text{Teil}} = 8 \text{ mm}^3$. Dieses Volumen entspricht dem eines Stecknadelköpfchens mit einem Durchmesser von 2,5 mm.

Überprüfe die Umrechnung $1 \text{ dm}^3 = 1000000 \text{ mm}^3 = 10^6 \text{ mm}^3$!

Die 8 mm^3 enthalten $8 \cdot 27 \cdot 10^{15} = 216 \cdot 10^{15}$ Atome. Mit welcher Wahrscheinlichkeit halten sich diese Atome nicht in V_{Teil} auf? Die gesuchte Größe gleicht der Wahrscheinlichkeit, mit der sich die $216 \cdot 10^{15}$ Atome im Volumen $V - V_{\text{Teil}} = 10^6 \text{ mm}^3 - 8 \text{ mm}^3 = 999992 \text{ mm}^3$ befinden.

Stellen wir unsere Überlegungen vorerst für ein einzelnes Atom an. Als günstiges Ereignis betrachten wir den Fall, daß sich dieses Atom im Volumen $V - V_{\text{Teil}}$ aufhält; der gesamte mögliche Aufenthaltsraum ist gleich V . Als Aufenthaltswahrscheinlichkeit finden wir

$$P_1 = \frac{V - V_{\text{Teil}}}{V} = \frac{999992}{1000000} = 0,999992.$$

Für zwei Atome ergibt sich

$$P_2 = P_1 \cdot P_1 = \left(\frac{999992}{1000000} \right)^2,$$

denn beide Atome bewegen sich unabhängig voneinander. Betrachten wir schließlich alle $216 \cdot 10^{15}$ Atome, resultiert eine Wahrscheinlichkeit von

$$P = \left(\frac{999992}{1000000} \right)^{216 \cdot 10^{15}} = (0,999992)^{216 \cdot 10^{15}},$$

im Teilvolumen $V_{\text{Teil}} = 8 \text{ mm}^3$ kein einziges Luftatom anzutreffen.

Versuchen wir, diese Zahl etwas zu verdeutlichen. Auf den ersten Blick wird mancher sagen, 0,999992 sei fast 1, also wird auch $P \approx 1$ folgen. Doch wer so denkt, irrt sich gewaltig. Beginnen wir deshalb, P schrittweise auszurechnen:

$$\begin{aligned}
(0,999992)^2 &= 0,999984 \\
(0,999992)^3 &= 0,999976 \\
&\vdots \\
(0,999992)^{100} &= (0,999992)^{10^2} = 0,999200 \\
&\vdots \\
(0,999992)^{100000} &= (0,999992)^{10^5} = 0,449330. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir erkennen deutlich, daß $(0,999992)^n$ mit wachsendem n immer kleiner wird! Setzt man diese Berechnung bis $n = 216 \cdot 10^{15}$ fort, ergibt sich

$$P = (0,999992)^{216 \cdot 10^{15}} \approx 10^{-7,5 \cdot 10^{11}}.$$

Verwandelt man 10^{-m} in einen Dezimalbruch, erscheinen nach dem Komma ($m - 1$) Nullen; an m -ter Stelle steht eine 1:

$$m = 3: 10^{-3} = 0,001.$$

Schreiben wir $10^{-7,5 \cdot 10^{11}}$ als Dezimalbruch, steht die 1 an 750milliardster Stelle nach dem Komma.

Würde diese Zahl gedruckt auf einer Seite zum Beispiel unseres Buches Platz finden? Nein, gewiß nicht. Auf eine Seite kann man etwa 1800 Buchstaben bzw. Ziffern drucken. Ein Buch vom Format unseres Buches mit einem Umfang von 200 Seiten enthält demnach etwa 360000 Ziffern. Um unseren Dezimalbruch ausgeschrieben darzustellen, benötigen wir folglich $\frac{7,5 \cdot 10^{11}}{360000} \approx 2083334$ Bücher. Stapeln wir

alle Bände übereinander und ist jedes Buch 1,5 Zentimeter dick, ergibt sich eine Reihe von $2083334 \cdot 1,5 \text{ cm} \approx 31$ Kilometer und 250 Meter Länge!

Kehren wir von diesen „Zahlenriesen“ zu unserer eigentlichen Frage zurück. Gibt es in unserer Atmosphäre luftleere Löcher? Mit gutem Recht können wir behaupten, daß die Wahrscheinlichkeit dafür nicht vorhanden ist.

Im zweiten Kapitel lernten wir Archimedes' Rechengang zur näherungsweisen Bestimmung von π kennen. Mit Hilfe unserer bisherigen Kenntnisse über die Wahrscheinlichkeitstheorie sind wir in der Lage, diese Zahl experimentell zu ermitteln. Führen wir dazu folgenden Versuch durch:

Wir konstruieren auf einem rechteckigen Blatt (die Seitenlängen seien a und b) einen Kreis mit dem Radius $r = 10$ Zentimeter.

Werfen wir auf dieses Blatt ein Pfennigstück, wird dieses entweder innerhalb oder außerhalb der Kreisfläche liegen. Da die Kreislinie aber auch geschnitten werden kann, legen wir auf der Ober- und Unterseite des Pfennigs – genau in dessen Mittelpunkt – je eine Markierung fest. Ein Bleistiftpunkt genügt. Die Lage des Punktes auf dem Blatt läßt sich exakt bestimmen.

Wir werfen nun mindestens 100mal das Geldstück auf das Papier und notieren in einer Tabelle sorgfältig m und n :

n = Gesamtzahl der Würfe;

m = Anzahl der Würfe, bei denen der Punkt innerhalb der Kreisfläche lag.

Fällt der Pfennig neben das Papier, wird der Wurf nicht gezählt, sondern wiederholt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Punkt P_1 bei einem einmaligen Münzwurf innerhalb der Kreisfläche liegen?

Diese Wahrscheinlichkeit hängt sicherlich von der Größe der zu treffenden „günstigen“ Kreisfläche ab. Würden wir anstelle des Kreises mit dem Radius $r = 10$ cm einen Kreis mit $r = 1$ cm auf das Blatt zeichnen, verringert sich die Wahrscheinlichkeit P_1 . Erinnern wir uns an die vorangegangene Aufgabe. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Luftatom im Volumen $V - V_{\text{Teil}}$ betrug $P_1 = \frac{V - V_{\text{Teil}}}{V}$, wobei V das Gesamtvolumen darstellte.

Auf die gleiche Art gewinnen wir eine Gleichung für P_1 . Wir setzen die Kreisfläche und die Gesamtfläche in ein Ver-

hältnis:

$$P_1 = \frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Gesamt}}}.$$

Die Gesamtfläche beträgt $A_{\text{Gesamt}} = a \cdot b$; die Kreisfläche folgt aus $A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$. Wir treffen den Kreis also mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b}.$$

Da m genau die Anzahl der Würfe ist, bei denen der Punkt innerhalb der Kreisfläche lag, wird der Quotient $\frac{m}{n}$ der Wahrscheinlichkeit P_1 entsprechen. Je größer die Gesamtzahl n der Würfe ist, desto genauer stimmt $\frac{m}{n}$ mit P_1 überein.

Solch eine Annäherung des experimentellen Ergebnisses an das theoretische fanden wir bereits bei Versuch 2:

Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, daß nach einmaligem Münzwurf das Wappen oben liegt, beträgt $P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$ (siehe Seite 140). Nach 100 Würfeln sollte folglich das Wappen 50mal obenauf gelegen haben, denn $\frac{50}{100} = 0,5 = P(A)$.

Experimentell fanden wir nur 42 günstige Versuchsausgänge; bei 24000 Münzwürfen ergaben sich schon 11988 günstige Ereignisse (siehe Seite 137). Die Quotienten betragen $\frac{42}{100} = 0,42$ und $\frac{11988}{24000} = 0,4995$ und sind nur *ungefähr* gleich $P(A)$.

Kehren wir zu unserer Aufgabe zurück und vergleichen jetzt $\frac{m}{n}$ mit P_1 , so dürfen wir schreiben

$$P_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \approx \frac{m}{n}.$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_{11} liegt der Punkt außerhalb der Kreisfläche?

Mit Hilfe dieser Gleichung sind wir in der Lage, π experimentell zu ermitteln. a , b und r kennen wir: Es sind die Seitenlängen des Rechtecks und der Kreisradius. m und n stellen die Werte dar, die wir im Versuch bestimmen. Die einzige Unbekannte ist π . Löst man die Gleichung nach π auf, resultiert

$$\pi \approx \frac{m \cdot a \cdot b}{n \cdot r^2}.$$

Berechne mit den im eigenen Experiment gefundenen Werten m und n die Zahl π !

Zeichneten wir den Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm auf ein Blatt vom Format A 4, beträgt $a = 29,6$ cm und $b = 21$ cm.

Betrachten wir die Ergebnisse dreier Versuche:

	n	m	$\pi \approx \frac{m \cdot a \cdot b}{n \cdot r^2}$
1. Versuch	100	60	3,73
2. Versuch	200	115	3,57
3. Versuch	1000	515	3,20

Allgemein können wir feststellen, daß die experimentelle Bestimmung von π um so genauer wird, je größer die Anzahl der Würfe ist. Wir sparen uns zwar den mühsamen Rechenweg des Gelehrten Archimedes, doch benötigen wir für die Versuchsdurchführung viel Zeit.

- Handelt es sich um ein zufälliges Ereignis, bei $n = 20$ Würfeln $m = 10$ mal die Kreisfläche zu treffen? Immerhin folgt daraus der Wert $\pi \approx 3,108$, der sich nur geringfügig von $\pi \approx 3,14$ unterscheidet. Weshalb muß n möglichst groß gewählt werden?

Beenden wir unseren Ausflug auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie mit einer letzten Aufgabe:

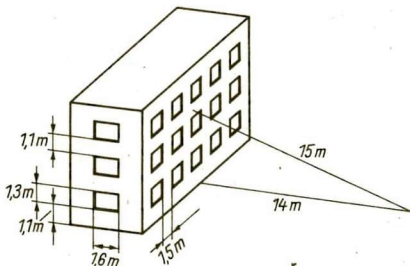


Abb. 58

● Wir beobachten im Winter, wie ein Junge Schneebälle an ein Haus wirft. Er steht ungefähr 14 Meter von der Hausfront entfernt und vermag den Schneeball höchstens 15 Meter weit zu werfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Junge eine Fensterscheibe? Die zur Lösung notwendigen Angaben entnimm der obenstehenden Abbildung.

Hinweis: Befindet sich nur ein Teil einer Fensterscheibe im Treffergebiet, ist dennoch die gesamte Fläche der Scheibe zu berücksichtigen.

Ein Blick in die Gegenwart

Drei, zwei, eins – Start!

Ein jahrtausendalter Traum der Menschheit wurde Wirklichkeit

**Sowjetischer Erdtrabant kreist seit Freitag
um den Erdball!**

Diese Schlagzeilen auf der Titelseite des „Neuen Deutschland“ vom 6. Oktober 1957 kündeten vom Beginn eines neuen Abschnitts in der Weltraumforschung. Der sowjetische Satellit „Sputnik 1“ umkreiste seit 2 Tagen die Erde in einer Höhe zwischen 227 und 946 Kilometern. Rundfunkstationen in allen Ländern der Welt empfangen die Funksignale des ersten künstlichen Himmelskörpers aus dem Kosmos; die Wissenschaft feierte einen großen Triumph.

Dreieinhalb Jahre später ging erneut eine sensationelle Nachricht um die Erde: Am 12. April 1961 startete das Raumschiff „Wostok 1“. An Bord befand sich der erste Kosmonaut, Juri Gagarin.

Heute ist es schon fast eine Selbstverständlichkeit, daß sowjetische Kosmonauten auch in Gemeinschaft mit Kosmonauten aus anderen Ländern im Weltall arbeiten. Häufig findet sich in der Tagespresse eine kurze Notiz über den Start eines Satelliten der „Kosmos“-Serie. Nachrichtensatelliten vom Typ „Molnija“ übertragen z. B. einwandfrei Fernsehsendungen; zuverlässige Wettervorhersagen werden möglich durch die Untersuchungsergebnisse moderner Wettersatelliten. Mars- und Venussonden erkundeten die Nachbarplaneten der Erde; auch Merkur, Jupiter und Saturn

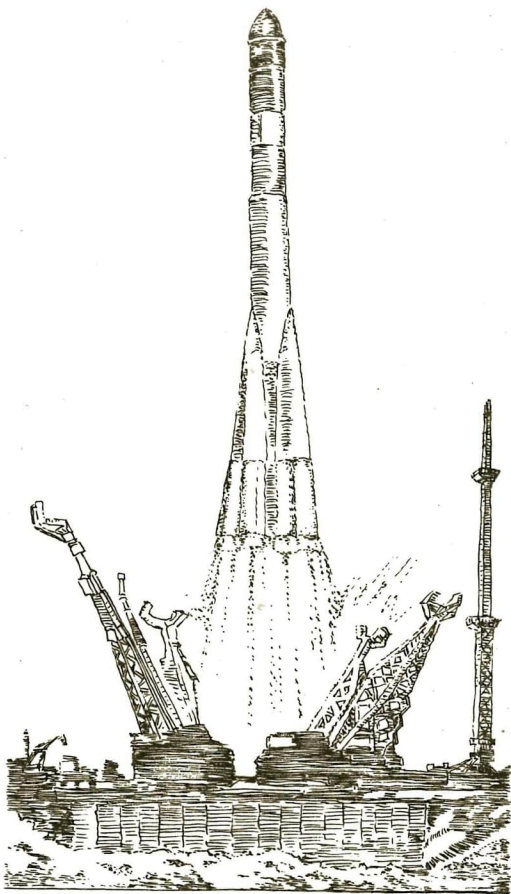


Abb. 59 Start einer Trägerrakete

erhielten bereits Besuch. Auf dem Mond arbeiteten die ferngesteuerten Fahrzeuge „Lunochod 1“ und „Lunochod 2“; 1969 betrat der amerikanische Astronaut Neil Armstrong als erster Mensch die Mondoberfläche.

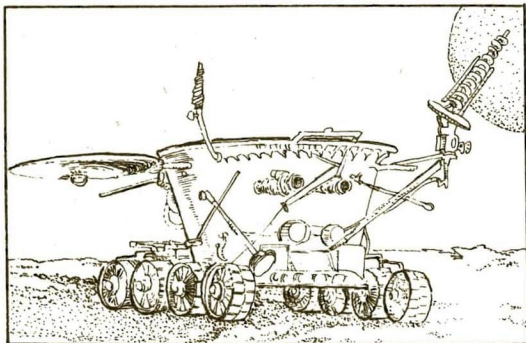


Abb. 60 Lunochod 1 auf dem Mond

Die Konstruktion eines Raumschiffes erfordert die angestrengte Arbeit von Ingenieuren, Physikern, Chemikern und Mathematikern, aber auch von Biologen und Medizinern. Viele Faktoren mußten bedacht werden, bevor ein Mensch in den Kosmos fliegen konnte, schließlich sollte allen Gefahren weitestgehend begegnet werden! Man wußte zum Beispiel, daß in 500 Kilometer Höhe die Temperaturen auf über 1000 °C steigen! Im Innern eines bemannten Raumschiffes dürfen jedoch die Temperaturen 25 °C möglichst nicht überschreiten. Man mußte also ein sehr widerstandsfähiges, hitzebeständiges Material verwenden und eine aufwendige Klimaanlage einbauen, um den Kosmonauten ausreichend Schutz zu bieten. Eine weitere Gefahrenquelle stellt die Atmosphäre dar. Verdeutlichen wir uns die Ursache:

Welche Geschwindigkeit erreichen Regentropfen, die aus 500 Meter Höhe aus einer Wolke zur Erde fallen? – Entsprechend dem Fallgesetz, welches wir im 4. Kapitel kennenlernten, finden wir

$$v = 99 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 356 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

- Führe die Berechnung durch!

Experimentell bestimmte man jedoch die Geschwindigkeit von Regentropfen in der Nähe der Erdoberfläche zu

$$v \approx 8 \dots 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29 \dots 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Wie läßt sich dieser große Unterschied zum theoretisch berechneten Wert erklären? Die Ursache für die zu „niedrige“ Geschwindigkeit besteht in der Reibung, die zwischen den fallenden Tropfen und den Atomen der Atmosphäre auftritt. Jeder Regentropfen wird gebremst! Da die Reibung im Fallgesetz nicht berücksichtigt wird, erhielten wir ein „falsches“ Ergebnis.

Mit wachsender Entfernung von der Erde nimmt die Dichte der Atmosphäre ab. Während sie in der Nähe der Erdoberfläche ungefähr $27\,000\,000\,000\,000\,000 \frac{\text{Atome}}{\text{mm}^3}$ be-

trägt, enthält in 500 Kilometern Höhe ein Kubikmillimeter nur 10000 Atome. Dennoch tritt zwischen den Luftatomen und dem Raumflugkörper Reibung auf, denn die Satelliten bewegen sich mit einer hohen Geschwindigkeit. Die Auswirkungen der Reibung können wir uns sicher vorstellen: Die Flugbahn ändert sich. Taucht das Raumschiff gar in die dichteren Schichten der Atmosphäre ein, erwärmt es sich und kann verglühen.

- Am 30. 09. 1981 und am 15. 10. 1981 wurden die Raumflugkörper „Kosmos 1312“ und „Kosmos 1316“ gestartet.

Bestimme die mittleren Bahngeschwindigkeiten! Folgende Angaben sind bekannt:

	maximale Erdferne	minimale Erdferne	Umlaufzeit
Kosmos 1312	1 531 km	1 495 km	116 min
Kosmos 1316	407 km	215 km	90,5 min
Erdradius	$r_E = 6371 \text{ km}$		

Hinweis: Bilde aus maximaler und minimaler Erdferne den Mittelwert und ermittle daraus die gesuchte Geschwindigkeit!

Die Bewegung der Raumschiffe folgt physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die wir bereits kennenlernten – den Keplerschen Gesetzen und dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Von der Richtigkeit dieser Behauptung können wir uns sofort überzeugen:

● Berechne unter Zuhilfenahme des dritten Keplerschen Gesetzes und der Bahnangaben von „Kosmos 1312“ und „Kosmos 1316“ die Umlaufzeit T_M des Mondes um die Erde. Vergleiche die Ergebnisse mit dem tatsächlichen Wert $T_M = 27,32 \text{ d}$ ($1 \text{ d} = 1 \text{ Tag}$)! Die mittlere Entfernung zwischen Mond- und Erdmittelpunkt beträgt $384\,400 \text{ km}$.

Die Lösung dieser Aufgabe zeigt, daß eine geringfügige Abweichung vom erwarteten Wert auftritt: Wir berechneten $T_M = 27,42 \text{ d}$. Der Grund dafür besteht in unserer näherungsweisen Annahme, daß sich sowohl der Mond als auch die Satelliten auf Kreisbahnen bewegen. Wollten wir die Berechnung vollkommen exakt durchführen, würden unsere einfachen mathematischen und physikalischen Kenntnisse nicht genügen. Selbst für Wissenschaftler erweist sich die Vorausbestimmung des Bahnverlaufes eines Raumschiffes als kompliziertes Problem. Hier darf man sich nicht mit Näherungslösungen, wie wir sie fanden, zufriedengeben. Stellen wir uns vor, ein Transportraumschiff soll an die Station

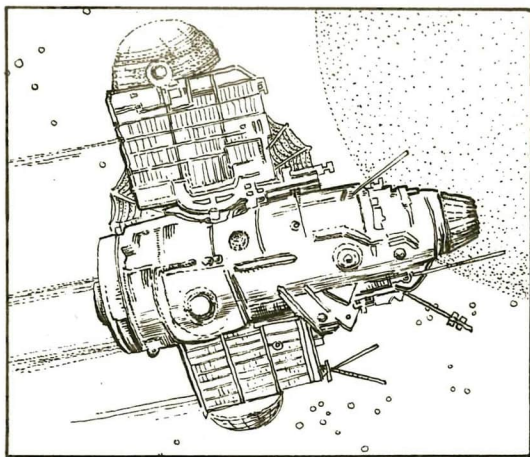


Abb. 61

„Salut“ ankoppeln, welche die Erde mit einer Geschwindigkeit von 8 Kilometern je Sekunde umkreist. Verzögert sich der vorausberechnete Starttermin um eine einzige Sekunde, verfehlt der Transporter die Station um acht Kilometer.

Je länger der geplante Flug eines Satelliten ist, desto umfangreicher werden die erforderlichen Berechnungen. Nur mit Hilfe moderner Rechenanlagen können derartige Aufgaben schnell und genau gelöst werden. – Die Abbildung 61 zeigt die Planetensonde „Mars 1“, die nach einer achtmonatigen Reise den Mars erreichte.

● Eine Raumsonde befindet sich auf dem Flug zum Mond. In welcher Entfernung vom Erdmittelpunkt ist die Anziehungskraft des Mondes auf die Sonde gleich der Anziehungskraft der Erde auf die Sonde? Hängt dieser Abstand von der Masse des Raumschiffes ab?

Hinweis: Mondmasse und Erdmasse stehen im Verhältnis 1:81,3.

Von der Erde aus erfolgt eine ständige Beobachtung der Satelliten. Selbst mit bloßem Auge läßt sich die Bewegung eines Raumflugkörpers verfolgen, der sich in einer Erdumlaufbahn befindet: Er erscheint als schwach leuchtendes Pünktchen, nicht größer als ein Stern.

● Zwei Satellitenbeobachtungsstationen, die 205 Kilometer voneinander entfernt sind, verfolgen den Flug eines Raumschiffes. Um 20.35 Uhr und 16 Sekunden befindet sich der Satellit genau 90° über der ersten Station, um 20.35 Uhr und 45 Sekunden überfliegt er die zweite Station. In welcher Höhe und mit welcher Geschwindigkeit umkreist das Raumschiff die Erde? Verwende die Lösungen der Aufgaben von den Seiten 159/160 und berücksichtige die Kugelgestalt der Erde!

Ein Streifzug durch den Alltag

Auf der Suche nach Anwendungsmöglichkeiten für die Mathematik in unserer heutigen Zeit ist es nicht notwendig, mit der Weltraumfahrt zu beginnen. Jeder weiß, daß die Eroberung des Kosmos eine hochentwickelte Naturwissenschaft voraussetzt. Doch auch im täglichen Leben begegnen wir der Mathematik. Betrachten wir nur einmal das Verkehrswesen.

An einer ampelgeregelten Kreuzung bildet sich eine 100 Meter lange Fahrzeugkolonne. Nach dem Umschalten auf „Grün“ fährt das erste Fahrzeug an, das letzte erreicht die Ampel beim Signal „Grün-Gelb“. Die nächste, gleichfalls ampelgeregelte Kreuzung ist $S = 2$ km entfernt. Um einen zügigen Verkehrsablauf zu gewährleisten, sind die Ampeln beider Kreuzungen in einer sogenannten Grünen

Welle geschaltet. Das ermöglicht der Fahrzeugkolonne beim Erreichen des zweiten Kreuzungsbereiches freie Fahrt. Die Verkehrspolizei muß deshalb ermitteln, nach welcher Zeit t das erste Fahrzeug die Ampel erreicht und wann der letzte Wagen der Kolonne über die Kreuzung fährt. Versuchen wir gemeinsam, diese Grüne Welle zu berechnen. Die gesuchte Zeit t setzt sich aus der Zeit t_1 , die das Fahrzeug bis zum Erreichen der zulässigen Höchstgeschwindigkeit v benötigt, und der Zeit t_2 zusammen, während der sich das Auto mit der Geschwindigkeit v bewegt.

$$t = t_1 + t_2$$

Die während t_1 und t_2 zurückgelegte Strecke beträgt:

$$s_1 + s_2 = S.$$

Zur richtigen Lösung der Aufgabe müssen wir beachten, daß das Fahrzeug während der Zeit t_1 eine beschleunigte, während der Zeit t_2 eine gleichförmige Bewegung ausführt. Für den zweiten Fall finden wir sofort

$$v = \frac{s_2}{t_2} \quad \text{und gewinnen daraus} \quad t_2 = \frac{s_2}{v}.$$

Unsere Ausgangsgleichung besitzt jetzt die Gestalt

$$t = t_1 + \frac{s_2}{v},$$

wofür wir auch

$$t = t_1 + \frac{S - s_1}{v}$$

schreiben können. Da der zurückgelegte Weg s_1 von der Zeit t_1 abhängt, benötigen wir noch eine zweite Gleichung. Für die beschleunigte Bewegung gelten die von Galilei gefundenen Gesetze

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v = g \cdot t.$$

Wir untersuchen jedoch nicht den freien Fall, dürfen also g nicht gleich $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ setzen. Eliminieren wir diese Größe in beiden Gleichungen. Es resultiert

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t.$$

Nun ersetzen wir s durch s_1 und t durch t_1 und erhalten

$$s_1 = \frac{1}{2} v \cdot t_1$$

und als Lösung für t :

$$t = t_1 + \frac{S - \frac{1}{2} v \cdot t_1}{v}.$$

● Zeige, daß daraus die endgültige Lösung folgt:

$$t = \frac{1}{2} t_1 + \frac{S}{v}.$$

● Das Fahrzeug beschleunigt in $t_1 = 17$ Sekunden auf die zulässige Höchstgeschwindigkeit $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach welcher Zeit muß die zweite Ampel auf „Grün“ schalten? ($S = 2 \text{ km}$)

Das Problem der Grünen Welle ist mit der gefundenen Beziehung für t noch nicht gelöst. Schließlich soll dem letzten Fahrzeug der Kolonne gleichfalls freie Fahrt gewährt werden. – Wann erreicht dieses die Kreuzung? Als Ausgangsgleichung formulieren wir

$$t' = t'_1 + t'_2 + t_3.$$

t'_1 stellt die Beschleunigungszeit des letzten Wagens dar, die sich von t_1 unterscheiden kann; während der Zeit t'_2 bewegt sich das Fahrzeug mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Da beim Aufleuchten des Signals „Grün“ nicht alle Autos gleichzeitig anfahren, tritt für den letzten Fahrer der Kolonne eine Verzögerung t_3 ein. Für t' ergibt sich schließlich die Lösung

$$t' = \frac{1}{2} t'_1 + \frac{2,1 \text{ km}}{v} + t_3.$$

- Erkläre die Streckenangabe von 2,1 Kilometern!

Die zweite Ampel muß nach dem Umschalten auf „Grün“ während der Zeit $t' - t$ die Vorfahrt gewähren:

$$t' - t = \frac{1}{2} t'_1 + \frac{2,1 \text{ km}}{v} + t_3 - \frac{1}{2} t_1 - \frac{2 \text{ km}}{v}$$

$$t' - t = \frac{1}{2} (t'_1 - t_1) + \frac{0,1 \text{ km}}{v} + t_3.$$

Setzen wir voraus, daß das erste und das letzte Fahrzeug mit der gleichen Beschleunigung anfahren, erreichen sie nach der gleichen Beschleunigungszeit die zulässige Höchstgeschwindigkeit. Es gilt $t'_1 = t_1$, und wir finden

$$t' - t = \frac{0,1 \text{ km}}{v} + t_3.$$

Dieser Zusammenhang läßt eine wichtige Schlußfolgerung zu: Bei einer vorgegebenen Höchstgeschwindigkeit v hängt die Differenz $t' - t$ nur von der Verzögerungszeit t_3 ab. Bummelt ein Kraftfahrer, erreichen nicht alle Fahrzeuge rechtzeitig die zweite Ampel. Eine hohe Aufmerksamkeit und rücksichtsvolles Fahren eines jeden Verkehrsteilnehmers sind also eine wichtige Voraussetzung für den zügigen und sicheren Verkehrsablauf.

● 1,4 Kilometer von der zweiten Kreuzung entfernt befindet sich die nächste Ampel. Auch diese ist in die Grüne Welle einbezogen. Bestimme die Zeit, nach der die Ampel auf „Grün“ schalten muß. Wann erreicht das letzte Fahrzeug der Kolonne die Kreuzung?

Selbstverständlich beschränkt sich die Anwendung der Mathematik im Verkehrswesen nicht nur auf die Berechnung Grüner Wellen. Schon allein die Zusammenstellung eines Fahrplans erfordert einen erheblichen Rechenaufwand! Um während der Hauptverkehrszeit – also vor Schichtbeginn und nach Arbeitsende – die zügige Heimreise der Werktätigen zu gewährleisten, werden die Wartezeiten an den Haltestellen öffentlicher Verkehrsmittel verkürzt. Statt im Abstand von 15 Minuten fahren die Kraftomnibusse, zum Beispiel, im Abstand von 10 Minuten.

● Wieviel Fahrzeuge sind von den Verkehrsbetrieben zusätzlich bereitzustellen, um diese Verringerung der Wartezeit zu erreichen?

Wenden wir uns einem anderen Alltagsproblem zu: Ein Milchhof beliefert die Kaufhallen des Kreises mit Frischmilch. Jedes Versorgungsfahrzeug läuft drei Verkaufsstellen an. Wie wir uns anhand einer Skizze veranschaulichen können, gibt es verschiedene Fahrrouten. Aus wirtschaftlichen Gründen wird natürlich die Strecke gesucht, welche die kürzeste ist.

● Ermittle aus der Abbildung 62 diese günstigste Fahrroute!

Hinweis: Die Fahrt endet auf dem Milchhof.

Sicher bereitet es keine Schwierigkeiten, anhand weiterer Beispiele die praktische Anwendung der Mathematik im täg-

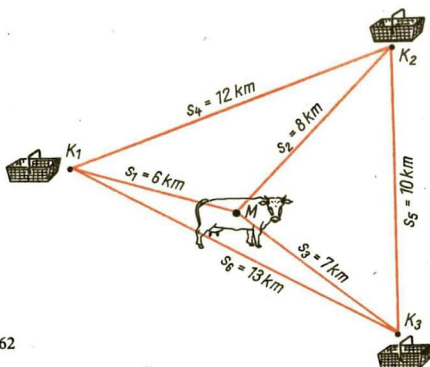


Abb. 62

lichen Leben zu beweisen. Der interessierte Leser findet im Anhang Buchempfehlungen, in denen ausführlich die Alltagsmathematik besprochen wird. Ein Besuch der Bibliothek würde sich lohnen!

Computer – unentbehrliche Helfer

In den letzten Kapiteln untersuchten wir einige Probleme, deren Behandlung mit einfachen mathematischen Grundkenntnissen möglich war, aber der zur Lösung notwendige Rechenaufwand erforderte viel Zeit. Erinnern wir uns beispielsweise an die Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit der Weihnachtsbaumbeleuchtung (Aufgabe auf Seite 148). Die Lösungsgleichung lautete $P = 0,99^{18}$. Wer diesen Ausdruck schriftlich in einen Dezimalbruch umgerechnet hat, benötigte dafür sicherlich mehr als 40 Minuten! Mit Hilfe eines Taschenrechners für die vier Grundrechenarten verringert sich die Rechenzeit schon auf eine knappe Minute. Besitzt der Taschenrechner eine Funktionstaste zur Potenzrechnung, schrumpft die Zeit auf weniger als zehn Sekunden

zusammen. Ein Nutzen unseres elektronischen Hilfsmittels besteht demnach sicher in einer erheblichen Verkürzung der Rechenzeit.

Vor etwa vierzig Jahren setzte die rasche Entwicklung von Großrechenanlagen ein. Die sich herausbildende moderne Industrie erforderte den Einsatz solcher Geräte: Es galt, umfangreiches Informationsmaterial möglichst schnell zu bearbeiten und auszuwerten. Andererseits ersetzten und erleichterten diese Anlagen die Arbeit vieler Menschen. 1955 nahm der erste Großrechner in der DDR seinen Betrieb auf.

Die ersten Computer wiesen noch eine beachtliche Größe auf. Die amerikanische Anlage „MARK I“ beispielsweise hatte eine Länge von 16 Metern und 2,5 Meter Höhe.

Die Geräte waren sehr störanfällig, die Reparaturen beanspruchten viel Zeit.

Heute finden auf einer Fläche von einem Quadratmillimeter mehrere tausend Bauelemente Platz. Neue Technologien wurden entwickelt, um „miniaturisierte“ Schaltungen, die Chips, herzustellen. Der Erfolg blieb nicht aus. Wir brauchen nur die Taschenrechner zu betrachten: Den mei-



Abb. 63 Elektronische Rechenmaschine

sten Platz beanspruchen das Gehäuse, die Ziffernanzeige, die Batterien. Das eigentliche „Gehirn“ im Innern ist nicht größer als eine Streichholzkuppe. Die Störanfälligkeit ist sehr gering.

Mit der Miniaturisierung erhöhte sich die Rechengeschwindigkeit. Die modernsten Großanlagen führen in einer Sekunde bis zu 300 Millionen Rechenoperationen aus. Ein Beispiel verdeutlicht diese Geschwindigkeit: Im 17. Jahrhundert berechnete ein gewisser Napier im Verlaufe von dreißig Jahren eine umfangreiche Zahlentafel. Ein Großrechner würde diese Arbeit in dreißig Sekunden bewältigen.

Wo finden die Computer Anwendung? Eine Möglichkeit läßt sich sofort angeben: Als Taschenrechner erleichtert er uns manche aufwendige Berechnung. Bleiben wir dabei aber stets vorsichtig – Fehler in unserem Lösungsweg bemerkt das Gerät natürlich nicht. Und vom Erlernen der Mathematik befreit es uns auch nicht.

Der Industrie stehen moderne Großrechner zur Verfügung: Mit deren Hilfe werden unter anderem zuverlässig Produktionsprozesse gesteuert. Die Überwachung des Fluges von Satelliten erfolgt von der Erde aus über Rechenanlagen. An Bord eines jeden Schiffes und Flugzeuges befindet sich eine solche moderne Anlage. Wissenschaftliche Forschungseinrichtungen besitzen Rechner, in der Medizin finden sie Verwendung ...

Durch den Einsatz von Computern gelang den Mathematikern die Bearbeitung und Lösung einer Reihe von Aufgaben, die große praktische Bedeutung besitzen. Eine dieser Aufgaben stellt das sogenannte Rundfahrtproblem dar. Wir lernten es bereits kennen: Ein Milchhof beliefert eine bestimmte Anzahl Kaufhallen mit Frischmilch. Welche der möglichen Fahrtrouten ist die kürzeste? Bei nur 3 Verkaufsstellen erwies sich die Lösung als unproblematisch – die 6 Strecken ließen sich in kurzer Zeit miteinander vergleichen. Aufwendiger wird die Rechnung schon bei 4 Kaufhallen,

denn nun stehen 24 unterschiedliche Routen zur Auswahl. Auf 120 erhöht sich diese Zahl bereits bei 5 Verkaufsstellen! Der Einsatz leistungsfähiger Großanlagen gestattet es heute, bis zu 60 Orte in eine Rundreise einzugliedern. Das erscheint als wenig, doch täuschen wir uns nicht: Es gibt ungefähr $832 \cdot 10^{80}$ mögliche und voneinander verschiedene Fahrstrecken – eine unvorstellbare Anzahl!

Ähnliche Schwierigkeiten bereitet dem Mathematiker das „Rucksackproblem“. Folgende Aufgabe gilt es dabei allgemein zu lösen: In einen Rucksack soll eine bestimmte Anzahl von Gegenständen gepackt werden, wobei diese jeweils ein unterschiedliches Gewicht besitzen können. Außerdem lassen sich die Gegenstände nach ihrem Gebrauchswert einteilen – einige sind unbedingt notwendig, andere können entbehrlich werden. Da der Rucksack nur über eine begrenzte Tragkraft verfügt, darf ein gewisses Gesamtgewicht nicht überschritten werden. Demnach muß eine genaue Auswahl von Gegenständen erfolgen, die insgesamt den größten Gebrauchswert besitzen und gleichzeitig der Tragkraft des Rucksackes entsprechen!

In der Praxis findet die Lösung vielfältige Anwendung – natürlich nicht gerade beim Packen eines Rucksackes oder einer Reisetasche. Kehren wir noch einmal zum Anfang des Kapitels zurück, zur Weltraumfahrt. Um ein Raumschiff mit einer Masse von 10 Tonnen in eine Erdumlaufbahn zu transportieren, benötigt man gegenwärtig 100 bis 140 Tonnen Treibstoff! Beim Zusammenstellen der Ausrüstung berücksichtigt man deshalb auch die vorgegebene Tragfähigkeit des Satelliten.

Immerhin würde das Überschreiten der zulässigen Masse um nur 100 Kilogramm eine zusätzliche Treibstoffmenge von 1 Tonne erfordern!

Beiden Problemen – dem Rundfahrt- und dem Rucksackproblem – ist gemeinsam, daß eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten bekannt sind. Die eigentliche Aufgabe besteht

Abb. 64 Karte der DDR



jedoch darin, die beste Lösung zu finden. Diese bezeichnet man auch als optimale Variante.

Untersuchen wir gemeinsam eine weitere Aufgabe. Die Abbildung 64 zeigt das Gebiet unserer Republik mit ihren 14 Bezirken (ohne Berlin). Zur übersichtlichen Gestaltung der Karte wollen wir diese färben. Dabei sollen benachbarte Bezirke unterschiedliche Farben besitzen. Wieviel verschie-

dene Farben benötigen wir, um die gewünschte Lösung zu gewinnen? Die Frage läßt sich sofort beantworten: 14 Farben sind notwendig. Doch ist diese Variante optimal? Überprüfen wir das, indem wir mit der Färbung der Karte beginnen. Zur besseren Übersicht bietet sich eine Vereinfachung an: Wir verbinden benachbarte Bezirksstädte untereinander und erhalten somit die untenstehende Abbildung. Statt den Flächen braucht nun lediglich den Punkten eine Farbe zugeordnet zu werden. Um die obige Forderung zu erfüllen, dürfen zwei verbundene Punkte nicht die gleiche Färbung erhalten. Gehen wir jetzt von Rostock aus und kennzeichnen den dazugehörigen Punkt (= Bezirk) mit 1. Schwerin erhält 2, Neubrandenburg 3. Aus unserer schematischen Darstellung folgt, daß Potsdam wieder mit 1 gefärbt werden kann. Demnach läßt sich Magdeburg 3 und Frankfurt 2 darstellen. Dieses schrittweise Verfahren setzen wir fort: Halle erhält die Farbe 2, Erfurt 1, Gera 3, Suhl 2, Leipzig 1,

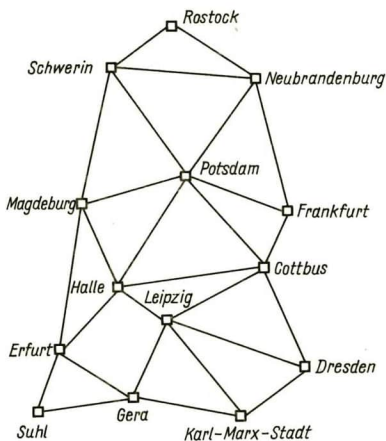


Abb. 65



Abb. 66 Karte von Südamerika

Cottbus 3 und Karl-Marx-Stadt schließlich 2. Übrig bleibt der Bezirk Dresden. Für diesen läßt sich keine der drei bisher benutzten Farben verwenden, wir benötigen eine vierte. Damit ist aber unsere gewünschte Landkartenfärbung beendet. Die optimale Anzahl voneinander verschiedener

Farben beträgt folglich nur vier und unterscheidet sich wesentlich von der ersten Lösung.

● Färbe den Kontinent Südamerika in einer optimalen Variante!

Zur Lösung dieser Aufgabe genügen wiederum vier Farben. Im vergangenen Jahrhundert stellte man die Vermutung auf, daß jede Landkarte vierfarbig gestaltet werden kann, ohne daß benachbarte Länder oder Gebiete die gleiche Färbung besitzen. Dabei ist es gleichgültig, ob eine echte oder eine beliebig ausgedachte Karte vorliegt. Dieses sogenannte „Vierfarbenproblem“ wäre genau dann widerlegt, wenn sich eine Landkarte konstruieren ließe, zu deren Kennzeichnung mindestens fünf Farben notwendig sind. Trotz umfangreicher Computerrechnungen konnte man bisher eine solche Karte nicht finden.

Im letzten Kapitel lernten wir einige Anwendungsmöglichkeiten der modernen Rechentechnik kennen. Diese stellt in der Industrie, in Wissenschaft und Forschung sowie Bereichen des täglichen Lebens eine unentbehrliche Hilfe für den Menschen dar. Gern benutzen wir die Taschenrechner, denn sie ersparen uns viel Zeit. Doch vergessen wir nicht: Sowohl Rechenanlagen als auch Taschenrechner sind nur Maschinen. Sie arbeiten nach festen Programmen und Befehlen – können aber niemals selbständig denken oder gar lernen!

Aufgabenlösungen

Seite 6

$$\begin{aligned}\text{ura-g'ela-ruag'a-ma-ruag'a} &= \text{ura-g'ela-ruag'a} + \text{ruag'a} \\ &= 7 + 2 = 9\end{aligned}$$

Seite 6

$$\begin{aligned}3 &= 2 + 1 = \text{petcheval-eneal}; \\ 4 &= 2 + 2 = \text{petcheval-petcheval}\end{aligned}$$

Seite 10

2300000 Gesteinsquader wurden in 20 Jahren = $20 \cdot 365$ Tagen bearbeitet. Die Arbeitsleistung betrug

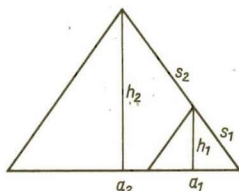
$$\frac{2300000}{20 \cdot 365} \approx 315 \text{ Quader pro Tag.}$$

Seite 11

Da der von Grund- und Seitenflächen eingeschlossene Winkel unverändert bleibt, folgt aus der Abbildung

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Abb. 67



Seite 12

$$a = 300 \text{ m}, A_1 = a^2 = 90000 \text{ m}^2$$

Flächeninhalt des neuen Quadrates:

$$A_2 = 4 A_1 = 360000 \text{ m}^2$$

$$A_2 = b^2 = 360000 \text{ m}^2 \rightarrow b = 600 \text{ m}.$$

Die Seitenlänge des neuen Quadrates beträgt 600 m.

Seite 13

$$A = a \cdot b = 1600 \text{ m}^2, b = 4 a$$

Eliminiert man b in A , so folgt

$$A = a \cdot 4 a = 4 a^2 = 1600 \text{ m}^2.$$

$$a^2 = 400 \text{ m}^2 \quad b = 4 a$$

$$a = 20 \text{ m} \quad b = 80 \text{ m}$$

$$u = 2 a + 2 b = 40 \text{ m} + 160 \text{ m} = 200 \text{ m}$$

$$\text{Quadrat: } A = c^2 = 1600 \text{ m}^2 \rightarrow c = 40 \text{ m}$$

$$u = 4 c = 160 \text{ m}$$

Der Umfang des Quadrates ist um 40 Meter kürzer als der des flächengleichen Rechteckes.

Seite 13

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{7 + 1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Seite 15

$$\frac{x}{7} + x = 19$$

$$x \left(\frac{1}{7} + 1 \right) = x \cdot \frac{8}{7} = 19 \rightarrow x = \frac{7 \cdot 19}{8}$$

$$x = \frac{133}{8}$$

Seite 17

12. Mai 2014

Seite 22

Rechteck ABCD

Voraussetzung: Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = a$

$\overline{BC} = \overline{DA} = b$

Diagonale $\overline{AC} = c$

Nach der Definition für das Rechteck gilt für die Winkel

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$

Flächeninhalt des Rechteckes $A = ab$.

Behauptung: Die Diagonale teilt das Rechteck in zwei flächengleiche rechtwinklige Dreiecke ABC und ACD.

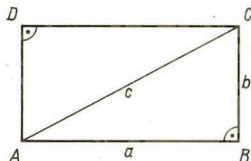
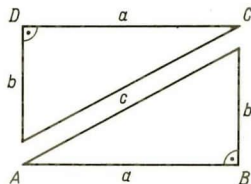


Abb. 68



Beweis: Die Dreiecke sind flächengleich, da der folgende Kongruenzsatz erfüllt ist: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC = 90^\circ \text{ (Definition des Rechteckes)}$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a,$$

$$\overline{BC} = \overline{DA} = b \text{ (gilt nach Voraussetzung)}$$

Die Forderungen des Satzes sind erfüllt, die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert die Rechteckfläche, so daß gilt

$$A_{ABC} = A_{ACD} = \frac{1}{2} ab.$$

Seite 26

Schlägt man um S einen Kreisbogen, entstehen die Schnittpunkte A und B. Um diese werden Kreisbögen der gleichen Zirkelspanne geschlagen. Der Strahl SC halbiert den Winkel ASB.

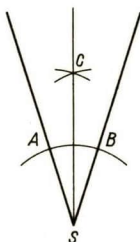


Abb. 69

$$1,25 = 1 + 0,25 = 1 + \frac{1}{4}:$$

Zu konstruieren bleibt ein
Viertel der Strecke $\overline{AB}$.



Abb. 70.1

Auf dem Strahl werden
vier gleiche Strecken
abgetragen:

$$\overline{AC} = \overline{CD}$$

$$\overline{DE} = \overline{EF}.$$

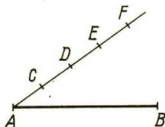


Abb. 70.2

Verbinde B und F,
verschiebe BF
parallel durch E,
D und C.

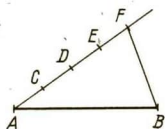


Abb. 70.3

$$\begin{aligned}\overline{AC'} &= \overline{C'D'} = \overline{D'E'} \\ &= \overline{E'B} = \frac{1}{4} \overline{AB}\end{aligned}$$

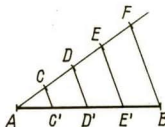


Abb. 70.4

$$1,25 \overline{AB} = \overline{AB} + \frac{1}{4} \overline{AB}$$

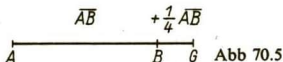
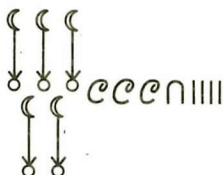


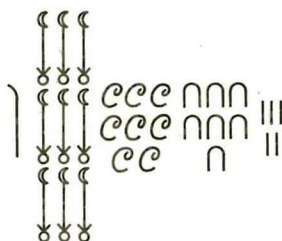
Abb 70.5

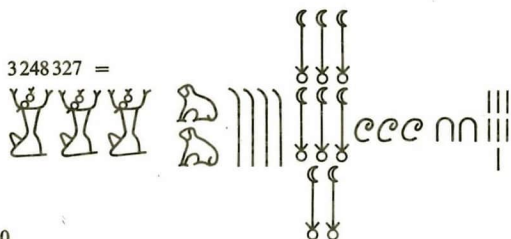
Zur Würfelverdopplung: $\overline{AB} = 7,5$ cm, Konstruktion von
 $1,25 \cdot 7,5$ cm wie oben, anschließend: Konstruktion der
Würfel in Kavalierperspektive.

1.  | = 2000421

 = 213104

2. 5314 = 

19875 = 

3248327 = 

Seite 35

$$32 = \lll \vee \vee \quad 78 = \vee \lll \vee \vee \vee \quad 101 = \vee \lll \vee$$

Seite 36

$$361 = 6 \cdot 60 + 1 = \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee$$

$$538 = 8 \cdot 60 + 58 = \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \lll \vee \vee \vee \vee \vee \vee$$

$$555 = 9 \cdot 60 + 15 = \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee$$

Seite 37

$$\begin{array}{lll} \vee \vee \vee \lll > & \vee \vee \vee \vee > & \vee \vee \lll \vee \vee \vee \vee > \\ \vee \vee \lll & \vee & \vee \vee \lll \vee \vee \vee \vee \\ = 5 \cdot 60 + 50 & = 4 \cdot 60 + 1 & = 2 \cdot 60 + 59 \\ = 350 & = 241 & = 179 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vee \vee \lll \vee \vee \vee > & \vee \lll > & \vee \vee \vee \vee > \\ = 2 \cdot 60 + 23 & = 60 + 11 & = 60 + 4 \\ = 143 & = 71 & = 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \vee \vee \vee & \lll \vee \vee \\ \lll \vee \vee \vee > & = 12 \\ \vee & \\ = 17 & \end{array}$$

Seite 39

$$19 = \overline{\iota\vartheta}; \quad 941 = \overline{\gamma\mu\alpha}; \quad 7808 = \overline{\zeta\omega\eta};$$

$$214009 = \overline{\kappa\alpha, \delta\vartheta};$$

$$\overline{\varrho\iota\alpha} = 111; \quad \overline{M\pi\beta} = 50082; \quad \overline{\omega, \varsigma\omicron\gamma} = 8006073;$$

$$\overline{\epsilon\chi\omicron\eta} = 5678.$$

Seite 44

Aus der Abbildung folgt:

$$\frac{h_{\text{Pyramide}}}{h_{\text{Stab}}} = \frac{s_{\text{Pyramide}}}{s_{\text{Stab}}} \rightarrow h_p = h_s \cdot \frac{s_p}{s_s}$$

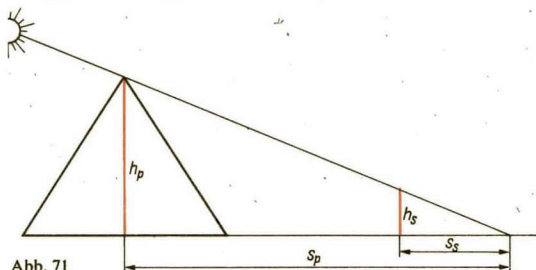


Abb. 71

Seite 51

1. 211 ist Primzahl.

$$\begin{aligned} 2. P &= x \cdot y + 1 = 7 \cdot 11 + 1 = 78 = 2 \cdot 39 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

2, 3, 13 sind Primfaktoren und verschieden von 7 und 11.

$$1. m_{\text{Gold}} = m_{\text{Silber}} = m = 1000 \text{ g}$$

$$\rho_{\text{Gold}} = 19,3 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_{\text{Silber}} = 10,5 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad V = \frac{m}{\rho}$$

$$V_{\text{Gold}} = \frac{1000}{19,3} \text{ cm}^3 = 51,8 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Silber}} = \frac{1000}{10,5} \text{ cm}^3 = 95,2 \text{ cm}^3$$

$$2. V = 60,5 \text{ cm}^3$$

Das Kranzvolumen setzt sich aus dem des Goldes und dem des Silbers zusammen. Der Schmied verwendete die noch unbekannten Massen m_{Gold} und m_{Silber} , deren Gesamtgewicht $m_{\text{Gold}} + m_{\text{Silber}} = 1000 \text{ g}$ beträgt. Für das zusammengesetzte Volumen finden wir:

$$V = 60,5 \text{ cm}^3 = \frac{m_{\text{Gold}}}{\rho_{\text{Gold}}} + \frac{m_{\text{Silber}}}{\rho_{\text{Silber}}}$$

Uns stehen zwei Gleichungen zur Verfügung, und wir eliminieren durch $m_{\text{Gold}} = 1000 \text{ g} - m_{\text{Silber}}$ eine Unbekannte in der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} 60,5 \text{ cm}^3 &= \frac{1000 \text{ g} - m_{\text{Silber}}}{19,3 \text{ g/cm}^3} + \frac{m_{\text{Silber}}}{10,5 \text{ g/cm}^3} \\ &= \frac{1000 \text{ g}}{19,3 \text{ g}} \text{ cm}^3 + m_{\text{Silber}} \left(\frac{1}{10,5 \text{ g/cm}^3} - \frac{1}{19,3 \text{ g/cm}^3} \right) \\ &= 51,8 \text{ cm}^3 + m_{\text{Silber}} \cdot 0,043 \text{ cm}^3/\text{g} \end{aligned}$$

$$m_{\text{Silber}} = 202 \text{ g}$$

Der Schmied verwendete demnach rund 200 Gramm Silber und 800 Gramm Gold!

Seite 55

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 \cdot h, \quad h = 2r \rightarrow V_{\text{Zylinder}} = 2\pi r^3$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{3}{2} = 3 : 2$$

Seite 56

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,141592$$

kommt dem angegebenen Wert am nächsten.

Seite 60

$$1. \quad s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$$

Wir bringen $r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$ auf einen Hauptnenner:

$$\frac{4r^2 - s_n^2}{4}.$$

$$\text{Da } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ folgt}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s_n^2}}.$$

Kürzt man $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, erhalten wir die angegebene Gleichung III.

2. Bestimmen wir zuerst die Summe der Innenwinkel. Dazu zeichnen wir die Diagonale $\overline{CF}$, die das reguläre Sechseck in zwei Vierecke teilt. Deren Innenwinkelsumme beträgt 360° . Somit folgt die Summe aller Innenwinkel des Sechsecks zu $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$. Sechs gleichgroße Innenwinkel besitzt das Sechseck; ein jeder ist demnach $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$ groß.

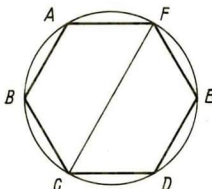


Abb. 72

Seite 62

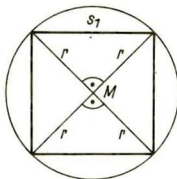


Abb. 73

Aus der Abbildung 73 gewinnen wir

$$s_1^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$s_1 = r \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (wegen } r = 1\text{!)}$$

$$\text{Gleichung V liefert } S_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Daraus berechnen wir s_2 und S_2 :

$$s_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad S_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Ersetzt man in der Tabelle auf Seite 63 bei 12-, 24-, 48- und 96-Eck jede 3 durch eine 2, erhält man die s_8 -, s_{16} -, s_{32} -, s_{64} - und die dazugehörigen S_{4n} -Werte. Für $u_{128} = 128 \cdot s_{128}$ folgt $u_{128} = 6,2825$, für U_{128} ergibt sich $U_{128} = 6,2844$ und damit die Abschätzung $3,1412 < \pi < 3,142$.

Seite 65

$$\star \text{ ASB} + \star \text{ DSB} + \star \text{ ESD} = 180^\circ$$

Suchen wir nach einer Gleichung für den unbekannten Winkel $\star \text{ DSB}$:

$$\begin{aligned} \star \text{ DSB} &= 180^\circ - \star \text{ SBD} - \star \text{ BDS} \\ &= 180^\circ - 2 \cdot \star \text{ SBD} \quad \text{I} \end{aligned}$$

$$\star \text{ SBD} = 180^\circ - \star \text{ SDE} \quad \text{II}$$

$$\star \text{ SDE} = 180^\circ - 2 \cdot \star \text{ ESD}. \quad \text{III}$$

III setzen wir in II ein:

$$\star \text{ SBD} = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \star \text{ ESD}) = 2 \cdot \star \text{ ESD}.$$

Ersetzt man schließlich $\star \text{ SBD}$ in I, erhalten wir

$$\star \text{ DSB} = 180^\circ - 2 \cdot (2 \cdot \star \text{ ESD}) = 180^\circ - 4 \cdot \star \text{ ESD}.$$

Jetzt können wir $\star \text{ DSB}$ in der Ausgangsgleichung eliminieren:

$$\star \text{ ASB} + (180^\circ - 4 \cdot \star \text{ ESD}) + \star \text{ ESD} = 180^\circ$$

$$\star \text{ ASB} - 3 \cdot \star \text{ ESD} + 180^\circ = 180^\circ$$

$$| - 180^\circ + 3 \cdot \star \text{ ESD}$$

$$\star \text{ ASB} = 3 \cdot \star \text{ ESD}.$$

Winkel ASB ist folglich dreimal so groß wie Winkel ESD.

Seite 76

$x = 84$ Jahre = Alter des Diophantos

„Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel ...“

$\left(\frac{84}{6}\right)$ 14 Jahre.

Mit $\left(14 + \frac{84}{12}\right)$ 21 Jahren „sproßt“ auf der Wange der Bart“.

Mit $\left(21 + \frac{84}{7}\right)$ 33 Jahren „schloß er das Bündnis der Ehe“.

Mit 38 Jahren – nämlich genau 5 Jahre nach der Eheschließung – wurde er Vater.

„Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre hatt’ es des Vaters erreicht“: $\left(\frac{84}{2}\right)$ 42 Jahre wurde der Sohn alt.

Zu diesem Zeitpunkt zählte Diophantos bereits 80 Jahre.

Seite 77

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 9 + y; \quad y = \frac{x}{2} - 2$$

Eliminieren wir y , erhält die Gleichung die Gestalt

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 9 + \frac{x}{2} - 2.$$

Die Lösung lautet: $x = 65\frac{1}{3}$.

Seite 80

1. $100 = A + B$ I

$$\frac{A}{4} = 20 + \frac{B}{6} \quad \text{bzw.} \quad A = 80 + \frac{4}{6}B \quad \text{II}$$

A wird mit II in Gleichung I eliminiert:

$$100 = 80 + \frac{4}{6}B + B = 80 + \frac{10}{6}B \rightarrow B = 12.$$

Aus I folgt für die zweite Unbekannte

$$A = 100 - B = 88.$$

2. Sohn: x Jahre alt; Tochter: y Jahre alt

$$2 \cdot (x + y) = 32 \quad \text{I}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} + 3 \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{2}{3}y + 6 \quad \text{II}$$

Wir eliminieren x in I:

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}y + 6 + y \right) = 32 \quad \text{und finden} \quad y = 6.$$

Wegen $x = \frac{2}{3}y + 6$ ergibt sich $x = 10$. Der Sohn

ist also zehn, die Tochter sechs Jahre alt. Der Altersunterschied beträgt vier Jahre.

Seite 85

1. $9 \text{ Fuß} - 7 \text{ Fuß} = 2 \text{ Fuß}; \quad \frac{150 \text{ Fuß}}{2 \text{ Fuß}} = 75.$

Der Hund benötigt 75 Sprünge, um den Hasen einzuholen.

2. Die Männer kauften 5 Schweine für 2 Münzen, erhielten demnach für 100 ($50 \cdot 2$) Münzen ($50 \cdot 5$) 250 Schweine.

Seite 86

1. Mathematisch läßt sich der Gewinn wie folgt berechnen:

Die Männer kauften jeweils 5 Schweine für 2 Münzen, ein Schwein kostete demnach $\frac{2}{5}$ Münzen.

Verkauft der eine nun für 1 Münze 2 Schweine, beträgt der Preis pro Schwein $\frac{1}{2}$ Münze.

Der Gewinn pro Schwein beträgt $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \frac{1}{10}$ Münze.

Der andere verkauft für 1 Münze 3 Schweine, eins für $\frac{1}{3}$ Münze.

Dieser Mann erhält pro Tier weniger, als er selbst ausgegeben hatte, denn $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$.

Sein Verlust beträgt $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{15}$ Münze pro Schwein.

Da wiederum $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$, ist der Gewinn des einen größer als der Verlust des anderen.

Der erste Mann kann genau 62mal 2 Schweine verkaufen, sein Gewinn beträgt $\left(124 \cdot \frac{1}{10}\right) 12 \frac{2}{5}$ Münzen,

wobei er zusätzlich 1 Schwein behält; der Verlust des zweiten Mannes beträgt insgesamt $\left(123 \cdot \frac{1}{15}\right) 8 \frac{1}{5}$

Münzen, denn er konnte 41mal 3 Schweine verkaufen und behält 2 Schweine übrig.

Der Gesamtgewinn der beiden Männer ergibt sich deshalb zu $\left(12\frac{2}{5} - 8\frac{1}{5}\right) 4\frac{1}{5}$ Münzen und 3 Schweinen!

2. In einer Stunde werden 5 Raumeinheiten Wasser geliefert. In welcher Zeit t sind 12 Raumeinheiten in den Behälter geflossen?

$$\frac{5 \text{ Raumeinheiten}}{1 \text{ Stunde}} = \frac{12 \text{ Raumeinheiten}}{t}$$

$$t = \frac{12 \text{ Raumeinheiten} \cdot 1 \text{ Stunde}}{5 \text{ Raumeinheiten}}$$

$$t = \frac{12}{5} \text{ Stunden} = 2,4 \text{ Stunden} = 144 \text{ Minuten.}$$

Seite 88

$$\frac{28800000 \text{ Körner}}{1 \text{ Tonne}} = \frac{18446744073709551615 \text{ Körner}}{x}$$

$$x = \frac{18446744073709551615}{28800000} \text{ Tonnen} \approx 6,4 \cdot 10^{11} \text{ Tonnen}$$

beträgt die Belohnung. Dies entspricht

$$\frac{6,4 \cdot 10^{11} \text{ Tonnen}}{3 \cdot 10^6 \text{ Tonnen}} \approx 2,1 \cdot 10^5; \text{ also } 210000 \text{ Ernten vom Ertrag der 1980er DDR-Ernte.}$$

Seite 90

Der Mann trinkt täglich $\frac{1}{21}$ Eimer, in 14 Tagen also $\frac{14}{21}$ Eimer. Da dieser ausgetrunken wird, leerte die Frau $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ des Eimers. Für 1 Eimer würde die Frau allein $3 \cdot 14$ Tage = 42 Tage benötigen.

Seite 92

1. Mann	2. Mann
x Dinare	y Dinare

Der erste erhält vom
zweiten 7 Dinare:

$$x + 7 \quad y - 7$$

Laut Aufgabenstellung gilt: $x + 7 = 5(y - 7)$ I

Der zweite erhält vom
ersten 5 Dinare:

$$x - 5 \quad y + 5$$

Laut Aufgabenstellung gilt: $7(x - 5) = y + 5$ II

Wir stellen I nach x um und eliminieren dieses in Gleichung II:

$$7 \cdot ((5y - 35 - 7) - 5) = y + 5$$

$$35y - 329 = y + 5.$$

Hieraus folgt als Lösung $y = \frac{334}{34} = 9\frac{14}{17}$.

Aus I erhalten wir für x: $x = 5y - 42 = 7\frac{2}{17}$.

Die beiden Männer besitzen $7\frac{2}{17}$ und $9\frac{14}{17}$ Dinare.

Es sind drei Möglichkeiten zu untersuchen:

$$x = 0; y = 0; z = 0.$$

1. $x = 0$ Wie wir bereits berechnet, gehört dazu der Wert $y = 10$. Aus Gleichung I (Seite 92) folgt $z = 30 - y = 20$.

2. $y = 0$ Nach Gleichung III gehört dazu $x = 3 \cdot \frac{10 - 0}{5} = 6$. Aus I erhalten wir $z = 30 - x = 24$.

3. $z = 0$ Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$x + y = 30 \quad \text{I}$$

und

$$3x + 2y = 30. \quad \text{II.}$$

Wir eliminieren x in II und finden

$$3 \cdot (30 - y) + 2y = 30.$$

Die Lösung lautet $y = 60$. Demnach wurden 60 Tauben gekauft. Das steht aber im Widerspruch zur Aufgabenstellung, denn insgesamt wurden nur 30 Vögel gekauft.

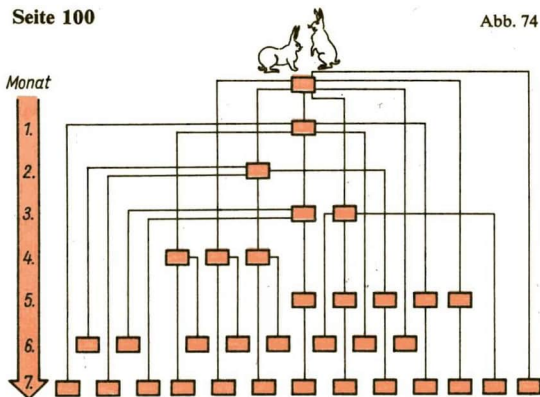
Lösungen existieren folglich nur für $x = 0$ oder $y = 0$; für $z = 0$ gibt es keine sinnvolle Lösung, die die Aufgabenstellung befriedigt.

Seite 96

1. $IX = 9$; $XI = 11$; $\overline{XI} = 10001$; $LXVII = 67$;
 $XXIX = 29$;
 $MCDLXXXVI = 1000 + (500 - 100) + 86 = 1486$;
 $\overline{CCMMXX} = 202020$.
2. $324 = CCCXXIV$; $498 = CDXCVIII$; $499 = ID$;
 $2949 = MMCMXLIX$; $50000 = \overline{L}$.

Seite 100

Abb. 74



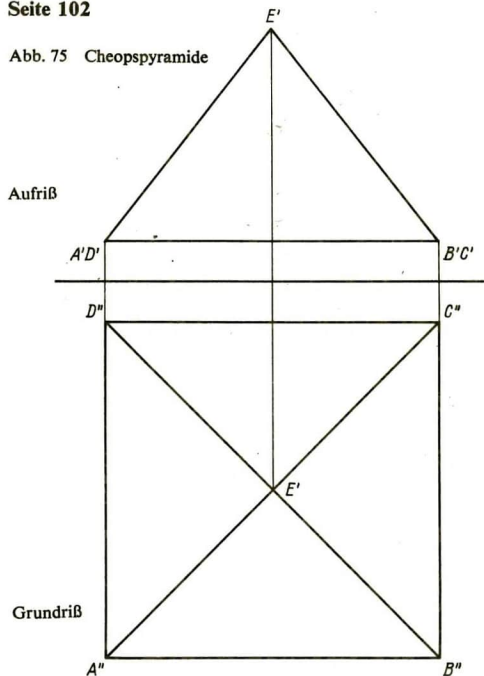
Jedes Kästchen in der Abbildung stellt ein Kaninchenpaar dar. Für die Anzahl der in den ersten 7 Monaten erzeugten Paare finden wir:

1. Monat	2. Monat	3. Monat	4. Monat	5. Monat
1	1	2	3	5
6. Monat	7. Monat			
8	13.			

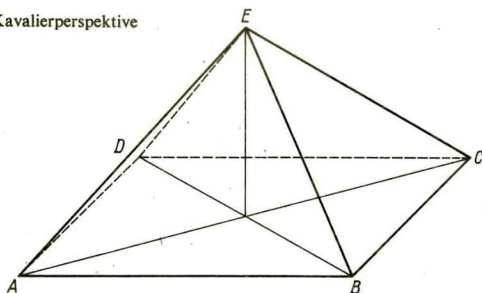
Die weitere zeichnerische Lösung bereitet viel Aufwand. Untersuchen wir aber dennoch die Zahlenfolge näher. Die Anzahl der Kaninchenpaare in einem beliebigen Monat ist gleich der Summe der Paare der beiden vorangegangenen Monate, also $3 = 2 + 1$; $13 = 8 + 5$; usw. Die vollständige Folge lautet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Die Gesamtsumme $1 + 1 + 2 + \dots + 144 = 376$ ergibt die in einem Jahr geborenen Kaninchenpaare.

Seite 102

Abb. 75 Cheopspyramide



Kavalierperspektive



Geeigneter Maßstab: 1 : 2000. Mit diesem Maßstab resultiert eine Pyramidenhöhe von 7,4 cm und eine Seitenlänge der Grundfläche von 11,5 cm.

Seite 103

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Seite 106

Die Fläche des in der Abbildung 43 dargestellten Dreiecks ist gleich dem achten Teil der Kugeloberfläche.

$$\text{Somit erhalten wir } A_{\text{Kugel}} = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Wegen $u = 2 \pi r = 40000 \text{ km}$ folgt

$$r = \frac{40000}{2 \cdot \pi} \text{ km.}$$

Eliminieren wir damit r^2 in A_{Kugel} :

$$\begin{aligned} A_{\text{Kugel}} &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{40000}{2\pi} \right)^2 \text{ km}^2 = \frac{20000^2}{2\pi} \text{ km}^2 \\ &\approx 6,3 \cdot 10^7 \text{ km}^2 \\ &= 63000000 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Die Seiten des „Kugel“-Dreiecks besitzen eine Länge von $\frac{u}{4}$, wie aus der Abbildung ersichtlich ist. Für das gleichseitige Dreieck in der Ebene gilt $A_{\text{Ebene}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$, wobei a die

Dreieckseite ist, für die wir $a = \frac{u}{4} = 10000 \text{ km}$ fanden.

Hieraus ergibt sich $A_{\text{Ebene}} = 4,3 \cdot 10^7 \text{ km}^2 = 43000000 \text{ km}^2$.

Die Fläche des gegebenen „Kugel“-Dreiecks ist demnach 20000000 km^2 größer als die des ebenen Dreiecks mit gleicher Seitenlänge. Diese Fläche entspricht nahezu der der Sowjetunion (22402000 km^2).

Seite 111

$$p = \frac{1}{6}, q = -2, \text{ daraus folgt } x_{1,2} = -\frac{1}{12} \pm \frac{17}{12};$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Seite 114

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 2$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \approx 2,303$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \dots}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 1,207$$

$$\sqrt{\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{1}{5} + \dots}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 0,5 + \frac{1,342}{2} = 1,171.$$

Seite 118

$a_1 = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $a_2 = 5950 \cdot 10^6 \text{ km}$, $T_1 = 1 \text{ Jahr}$
Das dritte Keplersche Gesetz liefert die Lösungsgleichung für T_2 :

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{a_2^3}{a_1^3}} = 1 \text{ Jahr} \cdot \sqrt{\frac{(150 \cdot 10^6 \text{ km})^3}{(5950 \cdot 10^6 \text{ km})^3}}$$

$$= 250 \text{ Jahre.}$$

Pluto benötigt für einen vollständigen Umlauf nahezu 250 Jahre.

Um die Bahngeschwindigkeiten der Planeten zu berechnen, benötigen wir den während der Umlaufzeit zurückgelegten Weg. Nähern wir die Planetenbahnen Kreisen an, gilt: $s = 2\pi a$. Hieraus ergibt sich die Bahngeschwindigkeit zu $v = \frac{2\pi a}{T}$.

$$v_{\text{Erde}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10^6}{1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 29,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{Jupiter}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 780 \cdot 10^6}{11,86 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 13,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{Pluto}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5950 \cdot 10^6}{250 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Mit zunehmender Entfernung von der Sonne nimmt die Bahngeschwindigkeit ab.

Seite 119

1. Gegeben: $t = 1 \text{ s}$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lösung: $v = g \cdot t = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der Topf erreicht eine Geschwindigkeit von

$$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 35,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

2. Den Weg erhalten wir aus Gleichung I (Seite 118), die aber noch die unbekannte Zeit t^2 enthält. Diese gewinnen wir aus II, da die Geschwindigkeit v gegeben ist: $t = \frac{v}{g}$.

Gleichung I nimmt dann die Gestalt $s = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v}{g}\right)^2$ an.

Mit $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 11,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ finden wir

$$s = \frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{11,11}{9,81}\right)^2 \text{ m} = 6,3 \text{ m}.$$

Der Aufprall entspricht einem Sturz aus reichlich 6 Meter Höhe.

Verdoppelt man die Geschwindigkeit v , muß gemäß II auch t verdoppelt werden: $2 \cdot v = g \cdot (2t)$. Der

in der Zeit $2t$ zurückgelegte Weg S berechnet sich zu

$$\begin{aligned} S &= \frac{g}{2} \cdot (2t)^2 = \frac{g}{2} \cdot 4 \cdot t^2 = 4 \cdot \left(\frac{g}{2} \cdot t^2 \right) \\ &= 4 \cdot s. \end{aligned}$$

Der bei doppelter Geschwindigkeit zurückgelegte Weg vervierfacht sich.

Seite 123

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Ein Bruch $\frac{x}{y}$ wird größer, wenn man den Zähler, also x , vergrößert oder den Nenner, also y , verkleinert. Demzufolge wächst die Gravitationskraft bei größeren Massen oder bei abnehmender Entfernung.

Der Bruch $\frac{x}{y}$ wird kleiner, wenn man den Zähler verkleinert oder den Nenner vergrößert. Also nimmt die Gravitationskraft bei kleiner werdenden Massen oder wachsendem Abstand ab.

Seite 127

1. Rechteck: $A = 40 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 400 \text{ m}^2$

2. Rechteck: $A = 30 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$

Der Unterschied ist beachtlich: 200 m^2 .

Seite 129

Stellen wir $u = 2a + 2b$ nach b um, folgt:

$$b = \frac{1}{2}u - a.$$

Setzen wir diese Gleichung in $A = a \cdot b$ ein, resultiert

$$A = a \cdot \left(\frac{u}{2} - a \right).$$

Nach dem Ausmultiplizieren finden wir $A = \frac{1}{2}ua - a^2$.

Seite 130

1. $a = \frac{1}{4}u$ entspricht $4a = u = 2a + 2b$.

Subtrahieren wir auf beiden Gleichungsseiten $2a$, ergibt sich $2a = 2b$ bzw. $a = b$.

2. Die Seitenlänge des Quadrates beträgt $\frac{100}{4} = 25$ Meter,

der Flächeninhalt $A = 25 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} = 625 \text{ m}^2$.

Die Kreisfläche berechnet sich nach $A_{\text{Kreis}} = \pi r^2$, wobei wir r aus dem gegebenen Umfang

$$u = 2\pi r = 100 \text{ m} \text{ gewinnen: } r = \frac{100}{2\pi} \text{ m}.$$

Damit folgt die Kreisfläche zu

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot \left(\frac{100}{2\pi} \text{ m} \right)^2 = \frac{2500}{\pi} \text{ m}^2 = 795,8 \text{ m}^2.$$

Bei gegebenem Umfang übertrifft die Kreisfläche die Fläche des Quadrates.

1. Das Volumen ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe:

$$V = a^2 \cdot h = 100 \text{ cm}^2 \cdot 20 \text{ cm} = 2000 \text{ cm}^3.$$

Die Gesamtoberfläche setzt sich aus Grund- und Bodenfläche $A_1 = A_2 = a^2$ sowie den vier Seitenflächen $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = a \cdot h$ zusammen:

$$A_{\text{Quader}} = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h = (200 + 800) \text{ cm}^2 = 1000 \text{ cm}^2.$$

$$2. A = 4 \pi r^2 \quad \text{I}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{II}$$

Lösen wir II nach r^3 auf und ziehen die dritte Wurzel,

$$\text{folgt } r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{6000}{4 \pi}} \text{ cm} = 7,8 \text{ cm}.$$

Mit diesem Radius gehen wir in I ein und bestimmen die Kugeloberfläche:

$$A_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot (7,8 \text{ cm})^2 = 765 \text{ cm}^2.$$

Bei gegebenem Volumen ist die Kugel der Körper mit der geringsten Oberfläche!

Die vier Abbildungen zeigen die vier voneinander verschiedenen Möglichkeiten, eine achte Brücke zu legen. Bei keinem der eingezeichneten Spazierwege fallen Anfangs- und End-

punkt zusammen. Um zum Startpunkt zurückzukehren, müßte in jedem Fall eine Brücke ein zweites Mal überschritten werden.

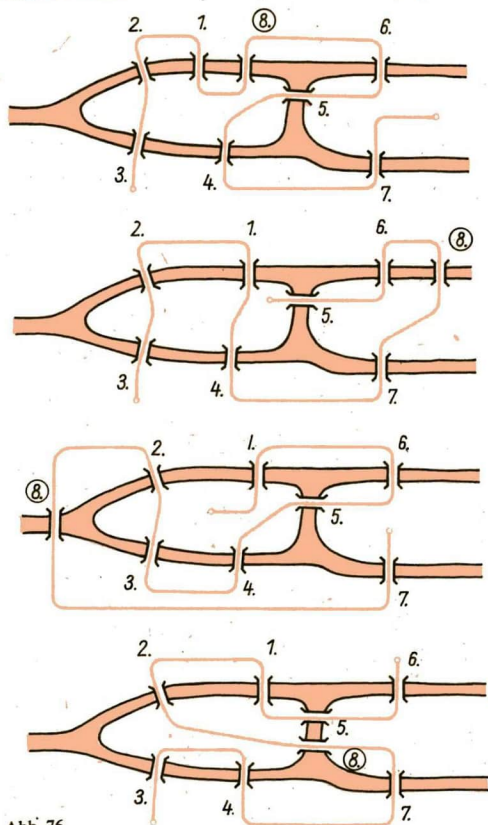


Abb. 76

Seite 134

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + \dots + 499 + 501 + \dots + 997 + 999 \\ &= (1 + 999) + (3 + 997) + \dots + (499 + 501) \\ &= 250 \cdot 1000 = 250000 \end{aligned}$$

Seite 136

1. Ereignis A: Das Wappen liegt oben.
Ereignis B: Die Zahl liegt oben.
2. Das dreimalige Würfeln einer 4 nacheinander stellt ein zufälliges Ereignis dar.
3. Zufällige Ereignisse sind
 - das Würfeln einer geraden Zahl;
 - bei sechs Münzwürfen lag nur einmal das Wappen oben;
 - die Treffer im Tele-Lotto-Spiel sind fünf aufeinanderfolgende Zahlen.

Während die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln mit Sicherheit kleiner als 19 ist (denn $3 \cdot 6 = 18 < 19$), ist eine Summe von 14 bei zweimaligem Würfeln nicht möglich.

Seite 137

Durch Probieren finden wir, daß folgende Kombinationen denkbar sind:

1. Wurf	Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
2. Wurf	Augenzahl:	6	5	4	3	2	1
Gesamtaugenzahl:		7	7	7	7	7	7

Es gibt sechs Möglichkeiten, die Summe 7 zu erhalten.

Seite 139

Die möglichen Fälle von zwei Treffern sind die folgenden zehn:

4, 17; 4, 23; 17, 18; 17, 31; 18, 31

4, 18; 4, 31; 17, 23; 18, 23; 23, 31

Für die Verteilung der verbleibenden drei Zahlen auf die nichtgezogenen 30 gibt es $30 \cdot 29 \cdot 28$ Möglichkeiten, wobei aber jede Kombination mehrmals auftritt.

Diese Vielfalt bestimmen wir anhand des bereits begonnenen Beispiels:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	Komb.	Komb.	Komb.	Komb.	Komb.	Komb.
1. Tip	1	1	2	2	3	3
2. Tip	2	3	1	3	1	2
3. Tip	3	2	3	1	2	1

Da 6 Kombinationen existieren, gibt es $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6}$ Mög-

lichkeiten zur Verteilung der Zahlen. Multipliziert man diesen Ausdruck noch mit 10 (= Anzahl der zwei Richtigen),

folgen insgesamt $10 \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 40\,600$ verschiedene Zweier.

Seite 140

$$n = 2, \quad m = 1 \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

Seite 142

Bei zweimaligem Würfeln liegt die Summe der Augenzahlen zwischen 2 (= 1 + 1) und 12 (= 6 + 6).

Die Tabelle enthält alle Möglichkeiten, wie sich die einzelnen Summen bilden lassen:

Summe 1. Wurf + 2. Wurf

2	1 + 1
3	1 + 2; 2 + 1
4	1 + 3; 3 + 1; 2 + 2
5	1 + 4; 4 + 1; 2 + 3; 3 + 2
6	1 + 5; 5 + 1; 2 + 4; 4 + 2; 3 + 3
7	1 + 6; 6 + 1; 2 + 5; 5 + 2; 3 + 4; 4 + 3
8	2 + 6; 6 + 2; 3 + 5; 5 + 3; 4 + 4
9	3 + 6; 6 + 3; 4 + 5; 5 + 4
10	4 + 6; 6 + 4; 5 + 5
11	5 + 6; 6 + 5
12	6 + 6

Demzufolge gibt es $n = 36$ verschiedene mögliche Versuchsausgänge, und wir finden

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = P(D)$$

E stellt ein sicheres Ereignis dar: $P(E) = 1$.

B stellt ein unmögliches Ereignis dar: $P(B) = 0$.

Seite 144

B: $m = 150$; $n = 324632$

$$P(B) = \frac{150}{324632} = 0,00046$$

C: $m = 4350$; $n = 324632$

$$P(C) = 0,013$$

1. Wahrscheinlichkeit, dreimal nacheinander eine 4 zu würfeln:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0,0046.$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim vierten Wurf gleichfalls eine 4 zu werfen, beträgt $\frac{1}{6}$, denn dieser Wurf ist wiederum unabhängig von den vorherigen Würfeln.

2. 3% der 40-Watt-Lampen sind defekt, das bedeutet, 3 von 100 Lampen leuchten nicht.

Ereignis E_1 Der Käufer erwirbt eine defekte 40-Watt-Lampe.

Ereignis E_2 Der Käufer wählt eine funktionstüchtige 40-Watt-Lampe.

Die „Einzel“-Wahrscheinlichkeiten betragen:

$$P(E_1) = \frac{3}{100}; \quad P(E_2) = \frac{100 - 3}{100} = \frac{97}{100}.$$

Auf die gleiche Art finden wir

$$P(F_1) = \frac{5}{100}; \quad P(F_2) = \frac{95}{100},$$

wobei F_1 dem Kauf einer defekten und F_2 dem Erwerb einer funktionstüchtigen 60-Watt-Glühlampe entspricht.

Die Ereignisse E_1, E_2 sind unabhängig von F_1, F_2 .

Somit folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap F_2) = P(E_1) \cdot P(F_2) \\ &= \frac{3}{100} \cdot \frac{95}{100} = 0,0285 \end{aligned}$$

$$P(B) = P(E_2 \cap F_1) = P(E_2) \cdot P(F_1)$$

$$= \frac{97}{100} \cdot \frac{5}{100} = 0,0485$$

$$P(C) = P(E_1 \cap F_1) = P(E_1) \cdot P(F_1)$$

$$= \frac{3}{100} \cdot \frac{5}{100} = 0,0015$$

$$P(D) = P(E_2 \cap F_2) = P(E_2) \cdot P(F_2)$$

$$= \frac{97}{100} \cdot \frac{95}{100} = 0,9215$$

Seite 148

1. Die Schaltung fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,14 aus.
2. Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Gesamt})$ für das Erreichen der Lebensdauer beträgt

$$P(\text{Gesamt}) = P^{18} = 0,99^{18} = 0,83.$$

$$\text{Mit } P = 0,95 \text{ ergibt sich } P'(\text{Gesamt}) = 0,95^{18} = 0,4.$$

Seite 149

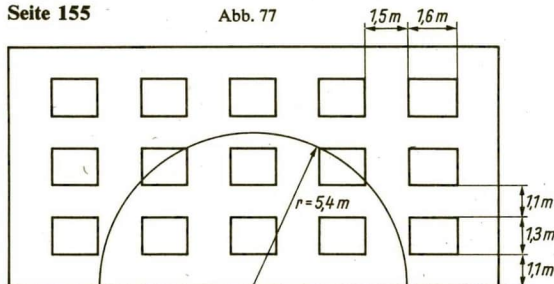
Denkt man sich die Atome als kleine Kugeln, besitzt ein jedes das Volumen $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, wobei $r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \text{ mm}$ ist.

Multipliziert man V mit der Anzahl der Atome ($= 27 \cdot 10^{15}$), erhält man das gesamte Volumen, welches die Atome des einen Kubikmillimeters einnehmen:

$$\begin{aligned} V_{\text{Gesamt}} &= 27 \cdot 10^{15} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \right)^3 \text{ mm}^3 \\ &= 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^3 = 0,0000045 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

1. Bei n Würfeln liegt der Punkt m -mal innerhalb und $(n - m)$ -mal außerhalb der Kreisfläche. Der Punkt liegt folglich mit der Wahrscheinlichkeit $P \approx \frac{n - m}{n}$ außerhalb des Kreises.
2. Es handelt sich um ein zufälliges Ereignis!

Abb. 77



Aus der Abbildung ist zu entnehmen, daß das Treffergebiet eine halbkreisförmige Fläche darstellt. Der Radius ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$15^2 \text{ m}^2 = 14^2 \text{ m}^2 + r^2 \rightarrow r^2 = 29 \text{ m}^2; \quad r = 5,4 \text{ m}.$$

Die „mögliche“ Trefferfläche beträgt

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = 45,5 \text{ m}^2.$$

Die Anzahl n der Fenster innerhalb dieser Fläche bestimmen wir geometrisch, wir erhalten $n = 6$ (siehe Abbildung).

Die gesamte Fensterfläche beträgt

$$A_n = 6 \cdot 1,3 \cdot 1,6 \text{ m}^2 = 12,5 \text{ m}^2.$$

Als Trefferwahrscheinlichkeit finden wir schließlich:

$$P = \frac{A_n}{A} = \frac{12,5}{45,5} \approx 0,27 \approx \frac{1}{4}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist größer, als bei einmaligem Würfeln eine 6 zu erhalten.

Seite 159

1. Aus dem Fallgesetz $s = \frac{g}{2} t^2$ und $v = g \cdot t$ ergibt sich

nach dem Eliminieren von t in $v = g \cdot t$ die Gleichung
 $v = \sqrt{2 g \cdot s}.$

Setzen wir die gegebenen Größen $s = 500 \text{ m}$ und
 $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ein, folgt die Lösung $v = 99 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

2. Die mittlere Erdferne r ist gleich dem Mittelwert aus maximaler und minimaler Erdferne:

$$r = \frac{\text{max. Erdferne} + \text{min. Erdferne}}{2}.$$

Die Satelliten bewegen sich mit dieser Näherung auf Kreisbahnen vom Radius $R = r + r_E$, der dazugehörige Kreisumfang beträgt $u = 2\pi R = 2\pi(r + r_E).$

Die mittlere Bahngeschwindigkeit eines Satelliten berechnet sich nach der Gleichung $v = \frac{u}{t}$, wobei t die Umlaufzeit ist.

Kosmos 1312:

$$v = \frac{2\pi \left[\left(\frac{1531 + 1495}{2} \right) + 6371 \right]}{116} \frac{\text{km}}{\text{min}}$$
$$= 427 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 7,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Kosmos 1316:

$$v = \frac{2\pi \left[\left(\frac{407 + 215}{2} \right) + 6371 \right]}{90,5} \frac{\text{km}}{\text{min}}$$
$$= 464 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 7,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Seite 160

Gegeben: $a_{\text{Mond}} = 384400 \text{ km}$

$$a_1 = 1513 \text{ km} + 6371 \text{ km} = 7884 \text{ km}$$

$$T_1 = 116 \text{ min}$$

Kosmos 1312

$$a_2 = 311 \text{ km} + 6371 \text{ km} = 6682 \text{ km}$$

$$T_2 = 90,5 \text{ min}$$

Kosmos 1316

Gesucht: T_M

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt:

$$\frac{a_M^3}{a_1^3} = \frac{T_M^2}{T_1^2}; \quad \frac{a_M^3}{a_2^3} = \frac{T_M^2}{T_2^2}$$
$$T_M = T_1 \cdot \sqrt{\frac{a_M^3}{a_1^3}}; \quad T_M = T_2 \cdot \sqrt{\frac{a_M^3}{a_2^3}}$$

Mit den gegebenen Werten bestimmen wir die Mondumlaufzeit zu

$$T_M = 39492 \text{ min}; \quad T_M = 39487 \text{ min}$$

Zur Umrechnung der Minuten in Stunden teilen wir das Ergebnis durch 60; zur Umrechnung in Tage dividieren wir anschließend noch durch 24:

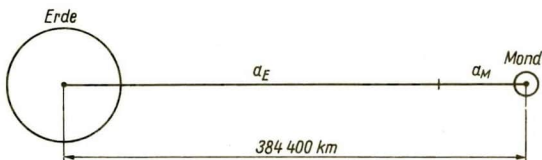
$$T_M = 27,42 \text{ d}; \quad T_M = 27,42 \text{ d}$$

Der Mond umläuft die Erde entsprechend diesen beiden Lösungen in 27,42 d. Dieser Wert weicht nur geringfügig von $T = 27,32 \text{ d}$ ab:

$$27,42 \text{ d} - 27,32 \text{ d} = 0,1 \text{ d} \approx 145 \text{ min.}$$

Seite 161

Abb. 78



Entsprechend der Abbildung 78 gilt

$a_E + a_M = 384400 \text{ km}$, wobei a_E gleich dem gesuchten Abstand ist. In dieser Entfernung muß die Newtonsche Gravitationskraft der Erde auf das Raumschiff

$F_E = \gamma \frac{m_E \cdot m_R}{a_E^2}$ gleich der Anziehungskraft des Mondes auf die Sonde sein: $F_M = \gamma \frac{m_M \cdot m_R}{a_M^2}$.

m_E = Erdmasse; m_M = Mondmasse;
 m_R = Masse des Raumschiffes

$$F_E = F_M$$

$$\gamma \frac{m_E \cdot m_R}{a_E^2} = \gamma \frac{m_M \cdot m_R}{a_M^2}$$

Wir kürzen auf beiden Gleichungsseiten $\gamma \cdot m_R$, ersetzen a_M durch $a_M = 384400 \text{ km} - a_E$, sowie m_M durch

$$m_M = \frac{1}{81,3} m_E \text{ und erhalten:}$$

$$\frac{m_E}{a_E^2} = \frac{1}{81,3} \cdot \frac{m_E}{(384400 \text{ km} - a_E)^2}.$$

Hieraus folgt:

$$a_E^2 = 81,3 \cdot (384400 \text{ km} - a_E)^2.$$

Nach dem Ziehen der Quadratwurzel und Auflösen nach a_E resultiert der gesuchte Abstand:

$$a_E = \frac{\sqrt{81,3} \cdot 384400}{1 + \sqrt{81,3}} \text{ km} = 346024 \text{ km}.$$

Diese Lösung hängt nicht von der Masse des Raumschiffes ab!

Seite 162

Aus Abbildung 79 gewinnen wir den Ansatz

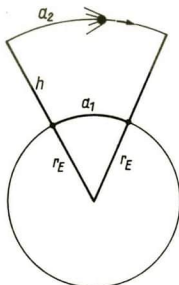
$$\frac{r_E}{a_1} = \frac{r_E + h}{a_2} \quad \text{I,}$$

wobei h und a_2 unbekannt sind.

Eine zweite Gleichung für die Unbekannten finden wir unter Verwendung des dritten Keplerschen Gesetzes:

$$\frac{(r_E + h)^3}{T_s^2} = \frac{a^3}{T^2}. \quad \text{II}$$

Abb. 79



T_s bedeutet die Umlaufzeit des Satelliten um die Erde. Bekannt ist jedoch nur die Zeit t , die von den Stationen registriert wurde:

$$t = 20.35 \text{ Uhr } 45 \text{ s} - 20.35 \text{ Uhr } 16 \text{ s} = 29 \text{ s}$$

t und T_s stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie a_2 zum Kreisumfang $2\pi(r_E + h)$:

$$\frac{T_s}{t} = \frac{2\pi(r_E + h)}{a_2} \rightarrow T_s = t \cdot \frac{2\pi(r_E + h)}{a_2}$$

Eliminieren wir T_s im dritten Keplerschen Gesetz:

$$\begin{aligned} \frac{(r_E + h)^3}{t^2 \left[\frac{2\pi(r_E + h)}{a_2} \right]^2} &= \frac{a^3}{T^2} \\ \rightarrow \frac{(r_E + h) \cdot a_2^2}{4\pi^2 \cdot t^2} &= \frac{a^3}{T^2} \end{aligned} \quad \text{II}$$

Da $\frac{a^3}{T^2}$ stets unverändert bleibt, ersetzen wir a und T zum Ende der Berechnung durch

$$a = (1513 \text{ km} + 6371 \text{ km}) \text{ und } T = 116 \text{ min},$$

also durch die Bahnparameter von Kosmos 1312. Natürlich erhalten wir auch dann eine richtige Lösung, wenn wir die Bahnwerte des Mondes oder eines anderen Satelliten wählen würden.

Mit Hilfe von Gleichung I eliminieren wir in II die Unbekannte a_2^2 :

$$\frac{(r_E + h) \cdot \frac{a_1}{r_E} (r_E + h)^2}{4 \pi^2 t^2} = \frac{a^3}{T^2}$$

$$\rightarrow \frac{(r_E + h)^3 \cdot a_1^2}{4 \pi^2 t^2 \cdot r_E^2} = \frac{a^3}{T^2}.$$

Stellen wir diesen Ausdruck nach $(r_E + h)^3$ um,

$$(r_E + h)^3 = \frac{4 \pi^2 t^2 \cdot r_E^2 \cdot a^3}{a_1^2 \cdot T^2},$$

ziehen die dritte Wurzel und subtrahieren r_E , so ergibt sich schließlich die Flughöhe des Satelliten:

$$h = a \cdot \sqrt[3]{\frac{4 \pi^2 t^2 \cdot r_E^2}{a_1^2 \cdot T^2}} - r_E.$$

Jetzt setzen wir ein $r_E = 6371$ km, $a_1 = 205$ km, $t = 29$ s, $T = 116 \cdot 60$ s (!), $a = 7884$ km und erhalten:

$$h = 500 \text{ km.}$$

Die Bahngeschwindigkeit gewinnen wir aus der Gleichung

$$v = \frac{a_2}{t}, \text{ wobei wir } a_2 \text{ wiederum mittels I eliminieren:}$$

$$v = \frac{a_1 \cdot (r_E + h)}{r_E \cdot t} = \frac{205 \cdot (6371 + 500)}{6371 \cdot 29} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v = 7,62 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Der beobachtete Satellit fliegt in einer Höhe von 500 Kilometern mit einer Geschwindigkeit von $7,62 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Seite 164

$$\begin{aligned} 1. \quad t &= t_1 + \frac{2 \text{ km}}{v} - \frac{1}{2} \frac{v \cdot t_1}{v} \\ &= t_1 + \frac{2 \text{ km}}{v} - \frac{1}{2} t_1 \\ &= \frac{1}{2} t_1 + \frac{2 \text{ km}}{v} \end{aligned}$$

$$2. \quad t = 8,5 \text{ s} + \frac{2 \text{ km} \cdot h}{60 \text{ km}}$$

Da $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, folgt:

$$\begin{aligned} t &= 8,5 \text{ s} + \frac{2 \cdot 3600 \text{ km} \cdot \text{s}}{60 \text{ km}} = 8,5 \text{ s} + 120 \text{ s} \\ &= 128,5 \text{ s} \end{aligned}$$

Nach ungefähr 2 Minuten und 8 Sekunden muß die Ampel auf „Grün“ schalten.

Seite 165

Die Länge der an der ersten Ampel wartenden Kolonne beträgt 100 Meter. Das letzte Fahrzeug durchfährt bis zur zweiten Kreuzung demnach $2 \text{ km} + 100 \text{ m} = 2,1 \text{ km}$.

1. Die Fahrzeuge bewegen sich mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit v und legen in der Zeit t'' die Strecke $s = 1,4 \text{ km}$ zurück:

$$v = \frac{1,4 \text{ km}}{t''}.$$

$$\text{Daraus gewinnen wir } t'' = \frac{1,4 \text{ km}}{v}.$$

$$\text{Mit } v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ (Aufgabe Seite 164) folgt } t'' = 84 \text{ s.}$$

Die dritte Ampel muß demnach 84 Sekunden nach der zweiten auf „Grün“ schalten.

Das letzte Fahrzeug erreicht die Kreuzung genau um die Zeitdifferenz $t' - t = \frac{0,1 \text{ km}}{v} + t_3$ später, denn es fährt mit unverminderter Geschwindigkeit.

2. Beim Einsatz von k Omnibussen entsteht eine Wartezeit von 15 Minuten; erhöht man die Zahl der Busse auf m , verringert sich die Wartezeit auf 10 Minuten. Wir finden folglich die Beziehung $\frac{k}{m} = \frac{10 \text{ min}}{15 \text{ min}}.$

Stellen wir die Gleichung nach der Unbekannten um:

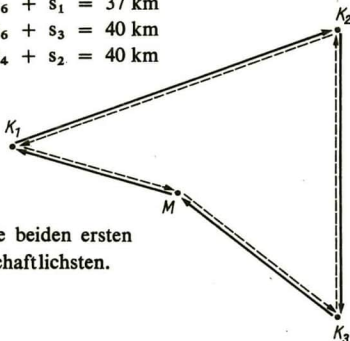
$$m = \frac{15}{10} \cdot k = \frac{3}{2} k.$$

Da $\frac{3}{2} k = k + \frac{1}{2} k = m$, müssen die Verkehrsbetriebe genau $\frac{1}{2} k$ Fahrzeuge zusätzlich stellen; die Zahl der Kraftomnibusse muß also um die Hälfte erhöht werden.

3. Die möglichen sechs Fahrrouten sind:

1. $s_1 + s_4 + s_5 + s_3 = 35 \text{ km}$
2. $s_3 + s_5 + s_4 + s_1 = 35 \text{ km}$
3. $s_1 + s_6 + s_5 + s_2 = 37 \text{ km}$
4. $s_2 + s_5 + s_6 + s_1 = 37 \text{ km}$
5. $s_2 + s_4 + s_6 + s_3 = 40 \text{ km}$
6. $s_3 + s_6 + s_4 + s_2 = 40 \text{ km}$

Abb. 80



Demnach sind die beiden ersten Routen die wirtschaftlichsten.

Seite 174

Die untenstehende schematische Darstellung zeigt eine der möglichen Varianten, die Landkarte zu färben. Die optimale Zahl unterschiedlicher Farben beträgt vier.

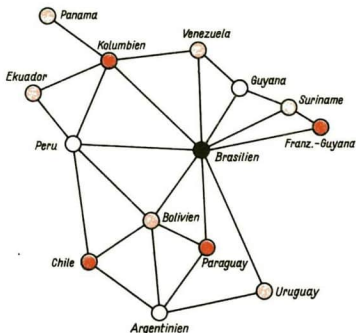


Abb. 81

Namenverzeichnis

Die in halbfetten Buchstaben gedruckten Namen kennzeichnen Persönlichkeiten, die in der Tabelle unten mit ihren bedeutendsten Leistungen vorgestellt werden.

Ahmes 12ff., 19, 20, 28, 55, 108	Gmunden 91
Alcuin 83, 84, 86	Gutenberg 101
Apollonios 67ff.	Hieron 51ff.
Archimedes 27, 28, 51ff., 152	Karl der Große 83ff.
Armstrong 158	Kepler 115ff., 126
Beda 83	Kolumbus 105
Bruno 82	Leibniz 126
Chefren 10	Leonardo da Vinci 103
Cheops 9	Leverrier 123
Copernicus 70	Marcellus 66
Daher 87	Mendeleejew 125
Darwin 125	Méré 134
Diophantos 73ff.	Napier 169
Dürer 103	Newton 121ff., 132
Eratosthenes 29, 72	Pascal 126, 134, 149
Euklid 45, 47ff.	Platon 27
Euler 132	Ptolemäus 56, 69ff.
Eupalinus 20	Pythagoras 46
Fermat 134, 149	Schickard 126
Fibonacci 92, 99, 100	Thales 41ff., 67
Gagarin 156	Vieta 62, 108
Galilei 118ff.	Watt 125
Galle 123	Widemann 107
Gauß 133ff.	

Name	Lebenszeit	bedeutendste Leistungen
Thales von Milet	um 624–546 v. u. Z.	„Vater der Geometrie“; Begründer der wissenschaftlichen Mathematik
Pythagoras	um 560–480 v. u. Z.	gründete Orden der Pythagoreer; trieb Zahlenspielererei

Name	Lebenszeit	bedeutendste Leistungen
Euklid von Alexandria	um 365–300 v. u. Z.	Verfasser der dreizehnbändigen „Elemente“
Archimedes von Syrakus	um 287–212 v. u. Z.	berechnete unter anderem π näherungsweise; konstruierte technische Geräte
Eratosthenes	um 276–195 v. u. Z.	bestimmte mit hoher Genauigkeit den Erdumfang
Apollonios von Perge	um 262–190 v. u. Z.	schuf die Kegelschnittlehre und die Epizykeltheorie zur Beschreibung der Planetenbewegung; Verfasser der „Conica“
Ptolemäus, Claudius	um 83–161 u. Z.	vervollkommnete die Epizykeltheorie; ptolemäisches Weltbild = geozentrisches Weltbild
Diophantos von Alexandria	um 250	beschäftigte sich mit der Zahlentheorie; Verfasser der „Arithmetik“
Fibonacci, Leonardo	um 1180–1250	trug wesentlich zur Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern in Europa bei; verfaßte das „Buch vom Abakus“
Copernicus, Nicolaus	1473–1543	begründete das heliozentrische Weltbild
Vieta, François	1540–1603	entwickelte das Buchstabenrechnen
Galilei, Galileo	1564–1642	beobachtete als erster mit dem Fernrohr den Sternhimmel; entdeckte u. a. Mondgebirge, Jupitermonde, Venusphasen, Sonnenflecke; verfaßte die „Discorsi“

Name	Lebenszeit	bedeutendste Leistungen
Kepler, Johannes	1571–1630	entdeckte die drei nach ihm benannten Gesetze, welche die Bewegung der Planeten beschreiben
Schickard, Wilhelm	1592–1635	konstruierte die erste Rechenmaschine
Fermat, Pierre	1601–1665	begründete mit Pascal die Wahrscheinlichkeitstheorie
Pascal, Blaise	1623–1662	konstruierte eine Rechenmaschine; Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitstheorie
Newton, Isaac	1643–1727	entdeckte das Gravitationsgesetz; entwickelte die Differential- und Integralrechnung
Leibniz, Gottfried Wilhelm	1646–1716	Mitbegründer der Differential- und Integralrechnung; konstruierte eine Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten
Euler, Leonhard	1707–1783	wandte die Mathematik auf astronomische, physikalische und geodätische Probleme an
Gauß, Carl Friedrich	1777–1855	befaßte sich mit Physik, Astronomie und Geodäsie; bestimmte u. a. die Bahn von Planetoiden; schuf wichtige zahlentheoretische Arbeiten

Literaturhinweise

Sicherlich wird der Leser auf eine Reihe von Problemen gestoßen sein, mit denen er sich näher befassen möchte. In den Bibliotheken stehen unter anderem die folgenden Bücher des Kinderbuchverlags zur Auswahl:

Mathematik im Alltag, Aufgaben

Autorenkollektiv	Rund um die Mathematik
Heermann, Christian	Das Einmaleins genügt nicht mehr
Perelmann, J. I.	Heitere Mathematik

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik

Heermann, Christian	Von der Zahl zum Gesetz
---------------------	-------------------------

Kuriositäten aus der Zahlenwelt

Scholtyssek, Manfred	Hexeneinmaleins
----------------------	-----------------

Elektronik, Kybernetik, Rechentechnik

Conrad, Walter	Roboter in unserer Hand
Hülm, Christa/ Pietzsch, Sieghart	Vom Kerbholz zur Rechenanlage
Pekelis, Viktor	Kleine Enzyklopädie von der großen Kybernetik
Pszczołowski, Tadeusz	Schlüssel zum Ziel

Erfinder und Erfindungen

Autorenkollektiv	Schicksale großer Erfinder
Rezac, Karl	Rund um die großen Erfindungen
	Abenteuer mit Archimedes

Physik, Geschichte der Physik

Backe, Hans	Rund um die Physik
	Halt dich senkrecht!

Astronomie, Raumfahrt

Kaden, Friedrich	Rund um die Astronomie
	Wieviele Sterne hat der Große Bär?

Quellenverzeichnis

- Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 1, Leipzig 1907.
- Glade, H., und Manteuffel, K.: Am Anfang stand der Abakus. Leipzig, Jena, Berlin 1973.
- Juschewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964.
- Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig 1968.
- Lehmann, J.: Unterhaltsames Mathe ABC. Leipzig 1980.
- Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1975.
- Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1972.
- Wußing, H.: Mathematik in der Antike. Leipzig 1962.
- Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979.

Inhaltsverzeichnis

Wann kommt das Hochwasser?

Die Anfänge der Mathematik	3
Im alten Ägypten	7
In Babylon und Griechenland	17
$\begin{array}{c} \text{ccc} \\ \text{cc} \end{array} \cap \text{III} = \begin{array}{c} \text{yyy} \\ \text{yy} \end{array} < < < \text{yyy} = \overline{y^t y} = 513$	28

Heureka! Heureka!

Thales von Milet	41
Euklid von Alexandria	47
Archimedes von Syrakus	51
Apollonios von Perge	67
Diophantos von Alexandria	73

I Diesse figur ist von bedeüt ... III

Die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und der Mathematik – ein untrennbarer Zusammenhang	82
Das frühe Mittelalter	83
Eid statt Prüfung	86
Liber abaci	94
Im späten Mittelalter	101

Zahl oder Wappen?

Und sie bewegt sich doch!	115
Quader oder Zylinder?	125
Ein Fünfer – kein Problem!	134

Ein Blick in die Gegenwart

Drei, zwei, eins – Start!	156
Ein Streifzug durch den Alltag	162
Computer – unentbehrliche Helfer	167
Aufgabenlösungen	175
Namenverzeichnis	218
Literaturhinweise	221
Quellenverzeichnis	222



FREIZEITREIHE

Wer Spaß hat am Knobeln und Denken, dem bietet dieses Buch ein reiches Betätigungsfeld. Mathematikaufgaben aus 4 Jahrtausenden harren ihrer Lösung. Sie ergeben sich bei Streifzügen, die der Leser durch die Mathematikgeschichte unternimmt. Er erfährt dabei von historischen Problemen der Mathematik, und er kann Lösungswege verfolgen, die berühmte Mathematiker beschritten haben, z. B. der Schreiber Ahmes bei den Hau-Rechnungen, Archimedes von Syrakus bei seinen Überlegungen zum Erhalten der Zahl π , Johannes Kepler bei der Berechnung der Planetenbewegungen. Er wird mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mit weiteren modernen Rechenmethoden bekannt gemacht.

Der Kinderbuchverlag Berlin