
Lehrbriefe für das Fachschul-Fernstudium

Herausgeber: Institut für Fachschul-Fernstudium, Dresden

H. BEINHOFF

Mathematik IV

Höhere Mathematik

LEHRBRIEF 4

Integralrechnung 1

Nur für den Gebrauch im Fachschul-Fernstudium

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Seite

Teil III: Integralrechnung

1. Kapitel: Die Integration

1 Die Integration als Umkehrung der Differentiation. Das unbestimmte Integral	3
2 Das bestimmte Integral	5
3 Die Grundintegrale	12
4 Grundformeln der Integralrechnung	16
5 Flächenberechnung durch Integration	20
Zusammenfassung [1] bis [5]	33
6 Das uneigentliche Integral	33
7 Graphische Integration	39
Zusammenfassung [6] und [7]	42

2. Kapitel Die verschiedenen Integrationsmethoden

8 Einführung einer neuen Veränderlichen (Substitution) ..	43
a) Der Integrand ist die Funktion einer linearen Funktion der Veränderlichen [$f(x) = f(\varphi(ax + b))$], bzw. die Substitution erfolgt mittels einer linearen Funktion	43
b) Der Integrand besitzt die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	52
c) Der Integrand besitzt die Form $\varphi(x) \cdot \varphi'(x)$	56
d) Der Integrand ist eine irrationale Funktion	58
Zusammenfassung [8]	65
9 Partielle Integration	66
10 Integration nach Partialbruchzerlegung	76
Zusammenfassung [9] und [10]	86

3. Kapitel: Besondere Formen der Flächenberechnung

11 Flächeninhalt in Polarkoordinaten	87
12 Flächen, deren Begrenzungskurve in Parameterdarstellung gegeben ist	92
Zusammenfassung	98

Antworten und Lösungen	99
------------------------------	----

Formelzusammenstellung	107
------------------------------	-----

Mathematik IV

Höhere Mathematik

LEHRBRIEF 4

Integralrechnung 1

1. Auflage

von HORST BEINHOFF

Dozent an der Fachschule für Kraft- und Arbeitsmaschinen, Meißen

Nur für den internen Gebrauch im Fachschul-Fernstudium

A l s M a n u s k r i p t g e d r u c k t !

Nur für das Fachschul-Fernstudium bestimmt

Veröffentlicht unter der Druckgenehmigungs-Nr. Ag 156/54/DDR für das Institut für Fachschul-Fernstudium
1. Auflage • Verantwortlicher Herausgeber: Institut für Fachschul-Fernstudium, Dresden, im Auftrage
des Staatssekretariats für Hochschulwesen, HA Fachschulwesen • Satz und Druck: Gutenberg Buchdruckerei
VOB „Aufwärts“, Weimar

Teil III: Die Integralrechnung

1. Kapitel: Die Integration

[1] Die Integration als Umkehrung der Differentiation. Das unbestimmte Integral. Bisher haben Sie zu jeder Rechnungsart die entsprechende Umkehrung kennengelernt, also die Rechnungsart, durch deren Anwendung die vorhergehende wieder aufgehoben werden kann (z. B. Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division usw.). In den letzten Lehrbriefen beschäftigten Sie sich mit der Differentialrechnung — jetzt sollen Sie die dazugehörige Umkehrrechnungsart, die Integralrechnung¹ studieren.

Sie stellen sich also die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine neue Funktion $F(x)$ so zu finden, daß ihr Differentialquotient $\frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$ mit der vorgegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt. Das heißt: Sie kennen den Differentialquotienten einer Funktion und suchen nun die Funktion selbst.

Symbolisch dargestellt heißt das:

$$\begin{array}{ll} \text{gegebene Funktion:} & f(x) \\ \text{gesuchte Funktion:} & F(x) \\ \text{Zusammenhang:} & F'(x) = f(x) \end{array}$$

Betrachten Sie hierzu ein Beispiel:

Gegeben: $f(x) = x^2$

Gesucht ist die Funktion, deren Differentialquotient gleich x^2 ist. Das Ergebnis können Sie erraten, nämlich

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

Führen Sie die Probe durch (gewöhnlich Sie sich von vornherein daran, nach jeder Integrationsaufgabe die Probe durchzuführen, indem Sie das Ergebnis differenzieren)!

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ dann ist } F'(x) = x^2 = f(x)$$

Lehrbeispiel 1

Integrieren Sie die Funktion $f(x) = x^4$!

¹ lat.: *functio integra*, die unversehrte Funktion, im Gegensatz zur abgeleiteten Funktion (lat.: *functio derivata*).

Lösung:

Da sich bei der Differentiation einer Potenz der Exponent um 1 vermindert, muß sich bei der Integration der Exponent um 1 erhöhen. Sie kommen damit im Beispiel auf x^5 . Das kann aber noch nicht die Lösung sein, denn die Differentiation ergibt $5x^4$. Den störenden Faktor 5 können Sie zum Fortfall bringen, wenn Sie als Lösung schreiben:

$$F(x) = \frac{x^5}{5}$$

Probe:

$$F'(x) = x^4 = f(x)$$

Leibniz legte 1675 für diese neue Rechnungsart das Integralzeichen fest (Näheres hierüber vgl. [2]).

$$\int f(x) dx = F(x)$$

(lies: „Integral f von $x dx$ “ oder auch „Integral über f von x mal dx “. Vergessen Sie niemals hinter $f(x)$ das dx mitzuschreiben!)

Die gegebene Funktion $f(x)$ nennen Sie: *Integrand*

Die gesuchte Funktion $F(x)$ nennen Sie: *Stammfunktion*

Demnach können Sie nun für die beiden Beispiele schreiben:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{und} \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$$

Ist aber $\frac{x^3}{3}$ bzw. $\frac{x^5}{5}$ auch wirklich die einzige Lösung?

Sind nicht auch $\frac{x^3}{3} + 4$ oder $\frac{x^3}{3} - 5$ Lösungen für $\int x^2 dx$?

Führen Sie die Probe durch, differenzieren Sie die soeben gefundenen Ausdrücke, so erkennen Sie, daß sich als Differentialquotient wiederum der gegebene Integrand x^2 ergibt. Was geschieht denn mit den Konstanten $+4$ bzw. -5 bei der Differentiation? Sie fallen als additive Konstanten weg, müssen also beim Integrieren wieder hinzugefügt werden. Da Sie aber dem Integranden nicht ansehen können, welchen Wert diese Konstante besitzen muß, folgern Sie, daß die Integration nicht nur eine, sondern beliebig viele Lösungen ergibt. Alle diese Lösungsfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, die **Integrationskonstante**. Sie soll fortan mit dem Buchstaben C gekennzeichnet werden. Als allgemeine Lösung schreiben Sie deshalb

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Fassen Sie alles symbolisch zusammen:

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C \text{ für } F'(x) = f(x)} \qquad (1)$$

Die Unbestimmtheit des C (es kann ja alle möglichen Werte annehmen) gibt dem ganzen seinen Namen: **das unbestimmte Integral**.

Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ setzt sich demnach in seiner Lösung aus der Stammfunktion und der Integrationskonstanten zusammen.

Geometrisch können Sie sich die Bedeutung des C gut erklären.

Zeichnen Sie die Kurven $y = \frac{x^3}{3} + C$. Erteilen Sie dazu der Integrationskonstanten C nacheinander verschiedene Werte ($C = -1, 0, +1, +2$).

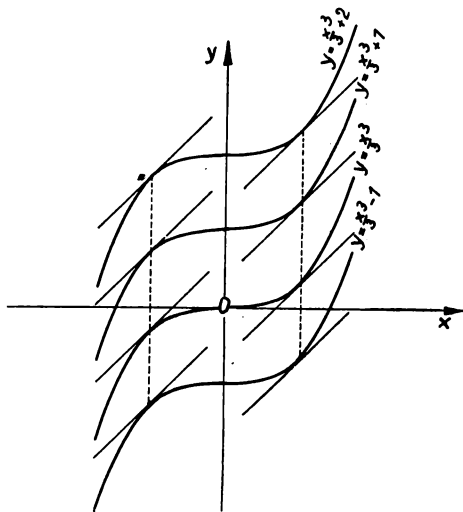


Bild 1

Wie Sie aus der analytischen Geometrie wissen, bewirken die verschiedenen C -Werte Parallelverschiebungen der Kurve $y = \frac{x^3}{3}$ längs der y -Achse (Bild 1). Selbstverständlich haben dann diese parallelen Kurven für gleiche Werte von x auch parallele Tangenten, also gleichen Anstieg. Analytisch ist aber der Tangens des Tangentenwinkels durch den Differentialquotienten gegeben, folglich haben alle diese Kurven als Kurven des Integrals $\int f(x) dx$ den gleichen Differentialquotienten $y' = x^2$.

[2] Das bestimmte Integral. Um die geometrische Bedeutung des Integrals kennenzulernen, sollen Sie jetzt einmal den Weg gehen, der zur Entwicklung der Integralrechnung führte.

Bereits die Philosophen und Mathematiker Griechenlands beschäftigten sich in der Zeit der Sklavenhalterordnung mit dem Problem, den Inhalt krummlinig begrenzter Flächen zu berechnen. Erst Leibniz und Newton (hier bei der Integralrechnung ist vor allem der erstere zu nennen) zeigten

den allgemeinen Weg, diese Flächenberechnung durchzuführen, sofern die Begrenzungskurve bekannt und als Funktion analytisch darstellbar ist.

Sie sollen den Gedankengang, der zur Integralrechnung führte, zunächst an der Berechnung einer einfachen Fläche erläutert bekommen. Es soll der Inhalt der Fläche ermittelt werden, die von der Kurve $y = x^2$, der x -Achse und der Ordinate im Punkte $x = b$ begrenzt wird (Bild 2),

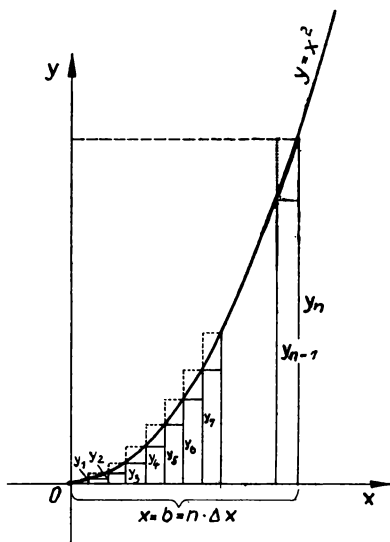


Bild 2

Sie teilen die Abszisse $x = b$ in n gleiche Teile $\Delta x = \frac{b}{n}$ und errichten in den Endpunkten dieser Teilstrecken die Senkrechten. In den Schnittpunkten der Senkrechten mit der Kurve ziehen Sie die Parallelen zur x -Achse. Sie erhalten zwei treppenförmige Züge, die die oberen Begrenzungen von jeweils n Rechtecken darstellen. Die gesuchte Fläche Φ ist kleiner als die Fläche der Summe der größeren und größer als die Fläche der Summe der kleineren Rechtecke. Es ist (wenn Sie die Ordinate für $x = 0$ mit $y_0 (=0)$ bezeichnen):

$$[y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_n \cdot \Delta x] > \Phi > [y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x]$$

$$[y_1 + y_2 + \dots + y_n] \cdot \Delta x > \Phi > [y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}] \cdot \Delta x$$

Da $y = x^2$ ist, können Sie $y_0 = x_0^2$; $y_1 = x_1^2$ usw. schreiben.

$$[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] \cdot \Delta x > \Phi > [x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2] \cdot \Delta x.$$

Es ist aber $x_0 = 0 \cdot \Delta x$, $x_1 = 1 \cdot \Delta x$, $x_2 = 2 \cdot \Delta x \dots x_n = n \cdot \Delta x$.

Damit wird

$$[(1 \cdot \Delta x)^2 + (2 \cdot \Delta x)^2 + \dots + (n \cdot \Delta x)^2] \Delta x > \Phi > [(0 \cdot \Delta x)^2 + (1 \cdot \Delta x)^2 + \dots + ((n-1) \cdot \Delta x)^2] \cdot \Delta x$$

$$[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \cdot (\Delta x)^3 > \Phi > [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2] \cdot (\Delta x)^3$$

Links steht die Summe der n ersten Quadratzahlen, rechts die der $(n-1)$ ersten Quadratzahlen. Wie Sie aber im Lehrbrief über endliche Reihen gelernt haben, ist

$$\sum_{r=1}^{r=n} r^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

und damit

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Sie können deshalb schreiben

$$\left[\frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] \cdot (\Delta x)^3 > \Phi > \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] \cdot (\Delta x)^3$$

Nun ist aber $\Delta x = \frac{b}{n}$, und damit $n = \frac{b}{\Delta x}$. Dieser Wert für n eingesetzt, ergibt

$$\frac{\frac{b}{\Delta x} \left(\frac{b}{\Delta x} + 1 \right) \left(2 \frac{b}{\Delta x} + 1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\Delta x)^3 > \Phi > \frac{\left(\frac{b}{\Delta x} - 1 \right) \frac{b}{\Delta x} \left(2 \frac{b}{\Delta x} - 1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\Delta x)^3$$

Sie multiplizieren jetzt das $(\Delta x)^3$ mit dem Zähler, indem Sie jeden der drei Faktoren des Zählers mit Δx multiplizieren.

$$\frac{b(b + \Delta x)(2b + \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} > \Phi > \frac{(b - \Delta x)b(2b - \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Bilden Sie für jeden der beiden Brüche den Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$, so wird sowohl

$$G_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{b(b + \Delta x)(2b + \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{b^3}{3}$$

als auch

$$G_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(b - \Delta x)b(2b - \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{b^3}{3}$$

Φ muß zwischen G_1 und G_2 liegen, es kann im Grenzfall höchstens gleich G_1 oder G_2 werden.

$$G_1 \geq \Phi \geq G_2$$

In unserem Beispiel ist $G_1 = G_2$, daraus folgt $\Phi = G_1 = G_2$

$$\underline{\underline{\Phi = \frac{b^3}{3}}}$$

Betrachten Sie nun nochmals Bild 2. Die Flächen der einzelnen Rechtecke waren $y_0 \cdot \Delta x$, $y_1 \cdot \Delta x$, $y_2 \cdot \Delta x$ usw., bzw. $f(x_0) \cdot \Delta x$, $f(x_1) \cdot \Delta x$, $f(x_2) \cdot \Delta x$ usw.

Für ein beliebiges Rechteck ist der Flächeninhalt $f(x_k) \cdot \Delta x$.

Die Summe der größeren Rechtecke war

$$f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x = \sum_{x_k = x_1}^{x_k = x_n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

die Summe der kleineren Rechtecke war

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = \sum_{x_k = x_0}^{x_k = x_{n-1}} f(x_k) \cdot \Delta x$$

Bilden Sie jetzt den Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$, so wird $x_{n-1} \rightarrow x_n = b$ und $x_1 \rightarrow x_0 = 0$.

Diese Grenzwerte lauten also

$$G_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_k = 0}^{x_k = b} f(x_k) \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad G_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_k = 0}^{x_k = b} f(x_k) \cdot \Delta x$$

Beide Grenzwerte sind gleich. Sie können jetzt allgemein schreiben

$$\Phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x \quad (2)$$

Für den Grenzwert dieser Summe schreibt man (nach Leibniz)

$$\Phi = \int_{x=0}^{x=b} f(x) dx$$

(das Zeichen $\int$ ist ein langgezogenes S (Summe), das hier für den Grenzwert einer Summe steht. Der vollzogene Grenzübergang wird weiterhin durch den Ersatz von Δx durch dx zum Ausdruck gebracht).

Man vereinfacht die Schreibweise noch zu

$$\Phi = \int_0^b f(x) dx \quad (3)$$

und nennt diesen Ausdruck das **bestimmte Integral**.

In unserem Beispiel wäre

$$\Phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} x^2 \cdot \Delta x = \int_0^b x^2 \cdot dx = \frac{b^3}{3}$$

Sie sehen, daß das bestimmte Integral für eine vorgegebene Funktion wie z. B. $y = x^2$ einen bestimmten Wert $\Phi = \frac{b^3}{3}$ ergibt.

Hätten Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^a x^2 \cdot dx$$

gebildet (Bild 3), so wäre der Flächeninhalt $\frac{a^3}{3}$ gewesen.

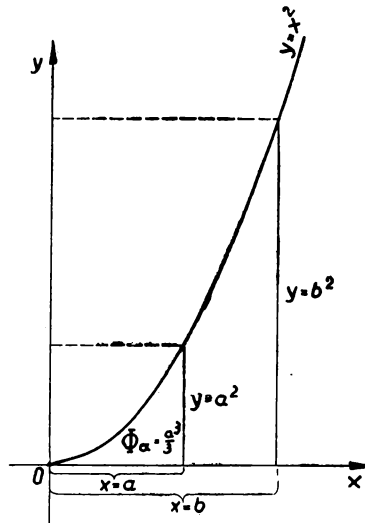


Bild 3

Für die von der Kurve, der x -Achse und den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ ($b > a$) begrenzte Fläche würden Sie jetzt schreiben

$$\int_a^b x^2 \cdot dx$$

und der Flächeninhalt wäre $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$$\int_a^b x^2 \cdot dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Den Beginn des Integrationsintervalles nennt man die **untere Grenze** (hier a) und das Intervallende (hier b) die **obere Grenze**.

(Man liest den vorstehenden Ausdruck „Integral über x^2 mal dx in den Grenzen $x = a$ und $x = b$ “).

Sie werden sich sicher schon die Frage vorgelegt haben, ob es richtig ist, den Flächeninhalt mit Hilfe des gleichen Zeichens $\int$ auszudrücken, das wir für die Umkehrrechnungsart zur Differentialrechnung verwendeten. Es muß jetzt also noch der Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral bewiesen werden.

Wir wollen nochmals eine Flächenberechnung durchführen (Bild 4a).

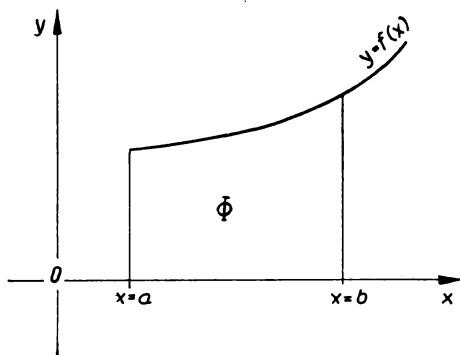


Bild 4a

Vor Ihnen steht die Aufgabe, den Inhalt der Fläche zu ermitteln, die von der Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten begrenzt wird. Der Flächeninhalt sei mit Φ bezeichnet.

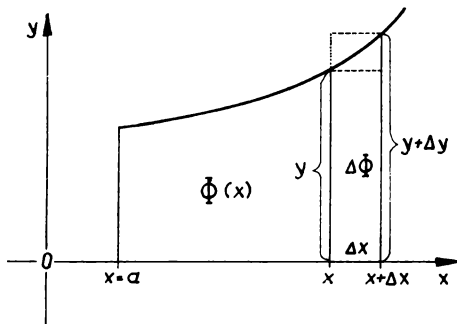


Bild 4b

Bei gegebener Begrenzungskurve $y = f(x)$ ist selbstverständlich der Flächeninhalt Φ von der Wahl der beiden seitlichen Begrenzungslinien abhängig. Diese Abhängigkeit sollen Sie untersuchen, indem Sie die rechte

Begrenzungslinie parallel verschieben. Halten Sie dazu die linke Begrenzungslinie, die *untere Grenze* a fest, während Sie die *obere Grenze* b als veränderlich ansehen. Bezeichnen Sie sie deshalb mit x , wie es im Bild 4b geschehen ist.

Damit hängt nun der Flächeninhalt von der jeweiligen Lage der oberen Grenze x ab: Der Flächeninhalt ist eine Funktion der oberen Grenze x . Kennzeichnen Sie das kurz symbolisch durch $\Phi = \Phi(x)$. Lassen Sie nun die obere Grenze x um Δx wachsen. Dabei wird dann die Ordinate y um Δy und der Flächeninhalt Φ um $\Delta \Phi$ wachsen. Wie Sie aus dem Bild 4b ablesen können, ist der Flächeninhalt des Streifens nicht kleiner als der des Rechtecks mit der Höhe y und der Breite Δx , aber nicht größer als der des Rechtecks mit der Höhe $y + \Delta y$ und der gleichen Breite Δx .

$$y \Delta x \leq \Delta \Phi \leq (y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

Dividieren Sie diese Ungleichung durch den positiven Wert Δx .

$$y \leq \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \leq y + \Delta y$$

In der Mitte der Ungleichung steht jetzt der Differenzenquotient $\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}$. Lassen Sie nun Δx gegen Null laufen, dann geht dieser Differenzenquotient in den Differentialquotient $\frac{d\Phi}{dx} = \Phi'(x)$ über, während Δy verschwindet.

Die daraus entstehende Ungleichung

$$y \leq \Phi'(x) \leq y$$

kann aber nur dann bestehen, wenn

$$\begin{aligned} y &= \Phi'(x) & \text{oder, da } y &= f(x) \\ f(x) &= \Phi'(x) \end{aligned}$$

ist.

Fassen Sie das bisherige Resultat zusammen: Der Differentialquotient der Flächenfunktion $\Phi'(x)$ wird durch die Funktion $f(x)$ der begrenzenden Kurve dargestellt.

Auf Grund dieses Zusammenhanges und der Definition des Integrals ergibt sich

$$\Phi(x) = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Kann hier das C noch die Bedeutung einer willkürlichen Integrationskonstanten haben? Das kann nicht sein, handelt es sich doch hier um den Inhalt einer wohl definierten Fläche. C muß also einen bestimmten Wert darstellen. Ihn gilt es jetzt zu ermitteln. Verschieben Sie dazu die rechte Begrenzungslinie soweit nach links, bis sie mit der linken zusammenfällt.

Die Fläche ist dann zu einer Strecke entartet und hat den Inhalt 0. Setzen Sie das in die letzte Gleichung ein, dann bekommen Sie für $x = a$

$$\Phi(a) = 0 = F(a) + C.$$

Damit ist die Konstante C bestimmt: $C = -F(a)$.

Sie erhalten

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Legen Sie nun die obere Grenze wieder fest, setzen Sie $x = b$, so wird schließlich

$$\Phi(b) = F(b) - F(a).$$

Unter Verwendung des Integralzeichens schreiben Sie

$$\Phi(b) = \left[\int_a^b f(x) dx = F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Damit ist bewiesen, daß die Ermittlung des Flächeninhaltes durch die Integralrechnung als Umkehrrechnungsart zur Differentialrechnung erfolgt.

Das Symbol $F(x) \Big|_a^b$ soll bedeuten: Setze in die gefundene Stammfunktion $F(x)$ für x den Wert der oberen Grenze ($x = b$) und dann den der unteren Grenze ($x = a$) ein und ziehe die beiden so gefundenen Werte $F(b)$ und $F(a)$ voneinander ab, so wie es in (4) ganz rechts durchgeführt wurde.

[3] Die Grundintegrale. In der Integralrechnung lassen sich (analog zur Differentialrechnung) die meisten Integranden auf eine Anzahl von Grundtypen zurückführen. Diese Grundintegrale sollen jetzt der Reihe nach aufgestellt werden.

Wie Sie ohne weiteres erkennen, ergibt sich

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ denn für } F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ ist } F'(x) = x^n$$

Ist das aber für alle Werte von n gültig? Eine Ausnahme muß gemacht werden. Denken Sie daran, daß Sie niemals durch Null dividieren dürfen! Der Ausnahmefall ergibt sich also für $n + 1 = 0$ oder $n = -1$, denn damit würde der Nenner der Stammfunktion den Wert 0 annehmen. In diesem Fall ist $f(x) = \frac{1}{x}$ und $F(x) = \ln |x|$.

Sie müssen hierbei stets mit dem absoluten Betrag von x rechnen, da sich die Logarithmen negativer Zahlen nicht durch reelle Zahlen ausdrücken lassen.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Fassen Sie die beiden wichtigen Grundformeln (Grundintegrale) zusammen:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1} \quad (5)$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C} \quad (6)$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^5} dx$!

Lösung:
$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx$$

Sie wenden Formel (5) an. Hier ist $n = -5$
 $n + 1 = -4$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int x^{-5} dx &= \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C \\ \int \frac{1}{x^5} dx &= -\frac{1}{4x^4} + C \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{x^{-4}}{4} + C \\ F'(x) &= x^{-5} = \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3

Berechnen Sie $\int dx$!

Lösung:

Als Integrand müssen Sie hier $f(x) = 1 = x^0$ ansetzen.

$$\int dx = \int x^0 dx \quad \text{Hier ist } n = 0, n + 1 = 1$$

$$\int x^0 dx = \frac{x^1}{1} + C$$

$$\int dx = x + C$$

Führen Sie die Probe durch!

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie $\int \sqrt{x} \, dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx && \text{Hier ist } n = \frac{1}{2}, \, n + 1 = \frac{3}{2} \\ \int x^{\frac{1}{2}} \, dx &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \\ \underline{\underline{\int \sqrt{x} \, dx &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C}}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 5

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= \int x^{-\frac{2}{3}} \, dx && \text{Hier ist } n = -\frac{2}{3}, \, n + 1 = \frac{1}{3} \\ \int x^{-\frac{2}{3}} \, dx &= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \sqrt[3]{x} + C \\ \underline{\underline{\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= 3 \sqrt[3]{x} + C}}\end{aligned}$$

Nehmen Sie jetzt eine Zusammenstellung der Differentialquotienten der verschiedenen Funktionen zur Hand! Lesen Sie diese Formeln in ihrer Umkehrung!

So bekommen Sie beispielsweise aus

$$y = -\cos x \qquad y' = +\sin x$$

durch Umkehrung

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad (7)$$

Verfahren Sie in der gleichen Weise weiter, dann erhalten Sie die weiteren Grundintegrale.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin x + C \\ -\operatorname{arc} \cos x + C \end{cases} \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \\ -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C \end{cases} \quad (12)$$

$$\int \operatorname{Sin} x \, dx = \operatorname{Cos} x + C \quad (13)$$

$$\int \operatorname{Cos} x \, dx = \operatorname{Sin} x + C \quad (14)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x + C \quad (15)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{Tg} x + C \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) + C \quad (17)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x + C = \ln \left(x \pm \sqrt{x^2-1} \right) + C \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (19)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{für } |x| > 1 \quad (20)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad (21)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (22)$$

Bei den Grundintegralen (11) und (12) hat es den Anschein, als würden sich zwei voneinander verschiedene Lösungen ergeben. Wie Sie aber aus Lehrbrief IV/2 wissen, besteht die Beziehung

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\operatorname{arc} \sin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos x$$

Ersetzen Sie im Grundintegral (11) die erste Lösung ($\arcsin x$) durch die rechte Seite, und ziehen Sie dann $\frac{\pi}{2}$ mit in die Integrationskonstante hinein (dadurch ändern Sie an der Willkürlichkeit von C nichts!), so ergibt sich die 2. Lösungsform.

Analog ist bei Formel (12) zu verfahren, denn hier gilt

$$\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

Die Aufschlüsselung der Grundintegrale (19) und (20) ist nötig, da die Funktion $\operatorname{Ar} \mathfrak{L} g x$ nur im Intervall $-1 < x < +1$, also für $|x| < 1$ gültig ist, während sich der Gültigkeitsbereich von $\operatorname{Ar} \mathfrak{L} t g x$ von $-\infty$ bis -1 und von $+1$ bis $+\infty$ erstreckt, d. h., für diese Funktion muß $|x| > 1$ sein.

Übungen

Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

- | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| 1. a) $\int x^3 dx$ | b) $\int x^7 dx$ | c) $\int x^5 dx$ | d) $\int x^8 dx$ |
| 2. a) $\int \frac{dx}{x^4}$ | b) $\int \frac{dx}{x^2}$ | c) $\int \frac{dx}{x^7}$ | d) $\int \frac{x^2}{x^3} dx$ |
| 3. a) $\int \sqrt[3]{x} dx$ | b) $\int \sqrt[5]{x^2} dx$ | c) $\int \sqrt{x^3} dx$ | d) $\int x^2 \sqrt[3]{x^2} dx$ |
| 4. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ | b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ | c) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ | d) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x^3} dx$ |

[4] Grundformeln der Integralrechnung

a) Konstanter Faktor

Ist der Integrand mit einem konstanten Faktor multipliziert, so kann der Faktor vor das Integral gesetzt werden.

$$\boxed{\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx} \quad (23)$$

Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des entsprechenden Lehrsatzes der Differentialrechnung!

Sie setzen

$$\int a \cdot f(x) dx = F(x) \quad \text{also} \quad F'(x) = a \cdot f(x)$$

und

$$\int f(x) dx = G(x) \quad \text{also} \quad G'(x) = f(x).$$

Damit können Sie für (23) schreiben

$$F(x) = a G(x)$$

Differenzieren Sie nun beide Seiten (beachten Sie dabei die Regel der Differentialrechnung: Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten):

$$F'(x) = a G'(x)$$

oder

$$a f(x) = a f(x)$$

Damit ist bewiesen, daß die Differentialquotienten der linken und der rechten Seite von (23) gleich sind. Aus der Definition der Integralrechnung folgt dann aber die Gleichheit der beiden Seiten von (23) selbst (bis auf eine additive Konstante).

Zu Anfang des Lehrbriefes wurde die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung definiert. Selbstverständlich ist dann auch die Differentialrechnung die Umkehrrechnungsart zur Integralrechnung, wie auch beispielsweise Multiplikation und Division jeweils die Umkehrung zueinander darstellen.

Folgerung: Differenzieren Sie ein unbestimmtes Integral, so heben sich Differentiation und Integration gegenseitig auf, und Sie erhalten als Ergebnis den Integrand:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

Das ist keine neue Formel! Sie können ohne weiteres erkennen, daß das nichts anderes als die Formel (1) ist.

Damit können Sie den vorhergehenden Beweis für (23) kürzer führen: Differenzieren Sie beide Seiten von (23)

$$\text{linke Seite: } \frac{d}{dx} \int a f(x) dx = a f(x)$$

$$\text{rechte Seite: } \frac{d}{dx} a \int f(x) dx = a \frac{d}{dx} \int f(x) dx = a f(x)$$

Damit haben Sie wieder die Gleichheit beider Seiten nachgewiesen.

Lehrbeispiel 6

Berechnen Sie $\int 4 x^5 dx$!

Lösung:

$$\int 4 x^5 dx = 4 \int x^5 dx = 4 \frac{x^6}{6} + C$$

$$\underline{\underline{\int 4 x^5 dx = \frac{2}{3} x^6 + C}}$$

Führen Sie die Probe durch.

b) Integral einer Summe (Differenz)

Eine Summe wird integriert, indem man jeden Summanden einzeln integriert.

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx} \quad (24)$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Regel für die Differentiation einer Summe. Sie führen den Beweis, indem Sie beide Seiten differenzieren:

$$\text{linke Seite: } \frac{d}{dx} \int [f(x) + g(x)] dx = f(x) + g(x)$$

$$\begin{aligned} \text{rechte Seite: } \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx + \int g(x) dx \right] &= \frac{d}{dx} \int f(x) dx + \frac{d}{dx} \int g(x) dx \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der Differentialquotienten der beiden Seiten von (24) können Sie nun wieder auf die Richtigkeit von (24) schließen.

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie $\int (x^3 + x^2) dx$!

Lösung:

$$\int (x^3 + x^2) dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C}}$$

Es ist üblich, nur eine Integrationskonstante anzuhängen, da ja ursprünglich von einem Integral ausgegangen wurde. Sie können sich das auch folgendermaßen erklären: Die beiden Integrale der rechten Seite ergeben die Integrationskonstanten C_1 und C_2 , die Sie aber zu einer gemeinsamen Konstanten C zusammenfassen können.

$$\begin{aligned} \int (x^3 + x^2) dx &= \int x^3 dx + \int x^2 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + C_1 + \frac{x^3}{3} + C_2 & C_1 + C_2 &= C \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Bei einer Differenz ist entsprechend zu verfahren.

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie $\int (x^2 + x - \frac{1}{x}) dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 + x - \frac{1}{x} \right) dx &= \int x^2 dx + \int x dx - \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln |x| + C\end{aligned}$$

Verknüpfen Sie die unter a) und b) gebrachten Regeln im folgenden Beispiel.

Lehrbeispiel 9

Berechnen Sie $\int (8x^3 + 4x - 3) dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (8x^3 + 4x - 3) dx &= \int 8x^3 dx + \int 4x dx - \int 3 dx \\ &= 8 \int x^3 dx + 4 \int x dx - 3 \int dx \\ &= 8 \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^2}{2} - 3x + C \\ &= \underline{\underline{2x^4 + 2x^2 - 3x + C}}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 10

Berechnen Sie $\int (3 \cos x - 4 \sin x) dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (3 \cos x - 4 \sin x) dx &= \int 3 \cos x dx - \int 4 \sin x dx \\ &= 3 \int \cos x dx - 4 \int \sin x dx \\ &= \underline{\underline{3 \sin x + 4 \cos x + C}}\end{aligned}$$

Übungen

$$5. \quad a) \int (5x^4 - 3x^2 - 2x + 3) dx \quad b) \int (2x^5 - 6x^3 - 5x - 2) dx$$

$$6. \quad a) \int \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx \quad b) \int \left(2x + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$7. \quad a) \int \left(1 + 2\sqrt[3]{x^2} \right) dx \quad b) \int \left(4\sqrt{x^3} - 5\sqrt{x} \right) dx$$

$$8. \quad a) \int \left(\frac{7x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x^2}} \right) dx \quad b) \int \left(\frac{1}{3x\sqrt{x}} - \frac{5x}{2x^3\sqrt{x}} \right) dx$$

$$9. \quad a) \int (x^2 - 3)^2 dx \quad b) \int \left(x^3 - \frac{2}{x} \right)^2 \cdot x dx$$

Anleitung: Bilden Sie zuerst die Quadrate.

$$10. \quad a) \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx \quad b) \int \left(\frac{5}{7 \cos^2 x} - \frac{4}{3 \sin^2 x} \right) dx$$

[5] **Flächenberechnung durch Integration.** In [2] wurde gezeigt, daß der Inhalt Φ einer Fläche, die von einer Kurve $y = f(x)$, der Abszissenachse und den Ordinaten zu $x = a$ (untere Grenze) und $x = b$ (obere Grenze) begrenzt wird, als bestimmtes Integral berechnet werden kann:

$$\Phi = \int_a^b f(x) dx$$

Der Gang der Rechnung ist folgender:

Sie berechnen zunächst das unbestimmte Integral $\int f(x) dx = F(x) + C$, setzen erst für x den Wert der oberen Grenze b und dann den der unteren Grenze a ein und subtrahieren den Wert $F(a)$ von $F(b)$

$$\Phi = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Wie Sie aus dieser Schreibweise erkennen, ist es nicht notwendig (und auch nicht üblich), das unbestimmte Integral $F(x)$ mit der Integrationskonstanten C zu schreiben. Die Angabe der Grenzen $\Big|_a^b$ besagt ja, daß es sich letztlich um ein bestimmtes Integral handelt.

Rein formal würde die Integrationskonstante beim Einsetzen der Grenze wegfallen. Man könnte nämlich schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = (F(x) + C) \Big|_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

An den folgenden Beispielen sollen Sie die neue Rechnungsart üben und dabei die gewonnenen Erkenntnisse vertiefen.

Lehrbeispiel 11

Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche, die durch die Gerade $y = x$, die x -Achse und die Parallele zur y -Achse im Abstand 4 gebildet wird!

Kurz: Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Geraden $y = x$ zwischen den Grenzen $a = 0$ und $b = 4$ (Bild 5)!

Lösung:

In diesem Beispiel ist also $f(x) = x$. Der Flächeninhalt ergibt sich aus dem bestimmten Integral

$$\begin{aligned} \int_{a=0}^{b=4} x dx &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8 - 0 \\ \int_0^4 x dx &= 8 \end{aligned}$$

Haben Sie auf den Achsen cm aufgetragen, sowie a und b in cm angegeben, so hat die Fläche den Inhalt 8 cm^2 .

Prüfen Sie das Resultat mit Hilfe der Elementar-Mathematik nach!

Lehrbeispiel 12

Berechnen Sie den Trapezinhalt unter der Geraden $y = 4x + 3$ zwischen $a = 1$ und $b = 3$!

Lösung:

$$\int_1^3 (4x + 3) dx = \int_1^3 4x dx + \int_1^3 3 dx$$

$$= 4 \int_1^3 x dx + 3 \int_1^3 1 dx$$

$$= 4 \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^3 + 3x \Big|_1^3$$

$$= 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1$$

$$= 2(9 - 1) + 3(3 - 1)$$

$$\int_1^3 (4x + 3) dx = \underline{\underline{22}}$$

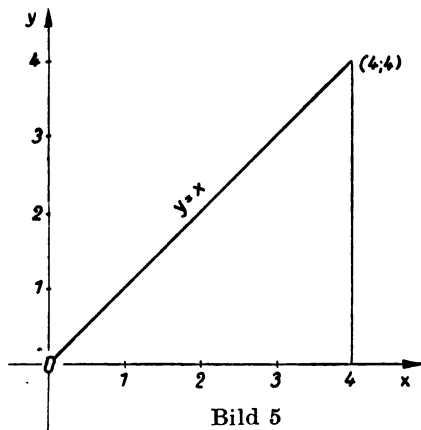


Bild 5

Sie können auch schreiben: $= \left(4 \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3$

$$= (2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3) - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1)$$

$$= 22$$

Zeichnen Sie die Fläche und prüfen Sie das Ergebnis mit den Formeln der Planimetrie nach!

Lehrbeispiel 13

Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Parabel $y = 2x^2$ zwischen $a = 0$ und $b = 4$ (Bild 6a)!

Lösung:

$$\int_0^4 2x^2 dx = 2 \int_0^4 x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^4$$

$$= \frac{2}{3} 4^3 - \frac{2}{3} 0^3$$

$$\int_0^4 2x^2 dx = \underline{\underline{\frac{128}{3}}}$$

Wie groß ist der Inhalt des umschriebenen Rechtecks $OQPP'$?

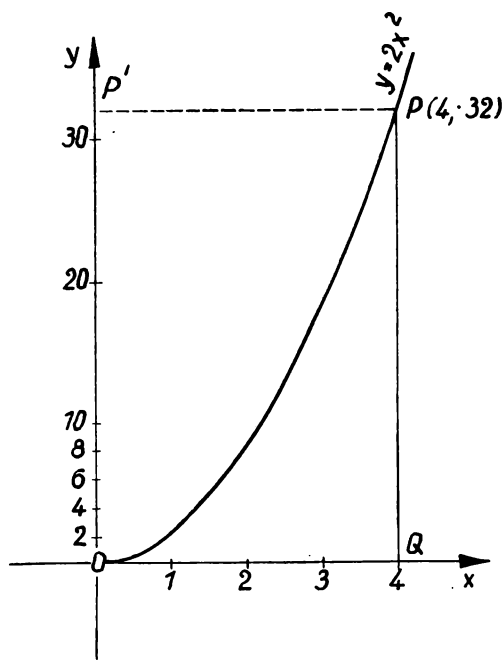


Bild 6a

Während die Grundlinie gleich 4 ist, berechnet sich die Höhe aus $y = 2x^2$ zu $2 \cdot 4^2 = 32$. Die Rechtecksfläche hat den Inhalt 128. Die Fläche unter der Parabel ist demnach gleich dem dritten Teil der Rechtecksfläche. Gleich werden Sie die Frage erheben, ob das nur speziell für die Parabel $y = 2x^2$ gilt oder ob das für alle Parabeln Gültigkeit hat.

Prüfen Sie die Gültigkeit an der Parabel $y = cx^2$ mit der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze x_1 nach (Bild 6b)!

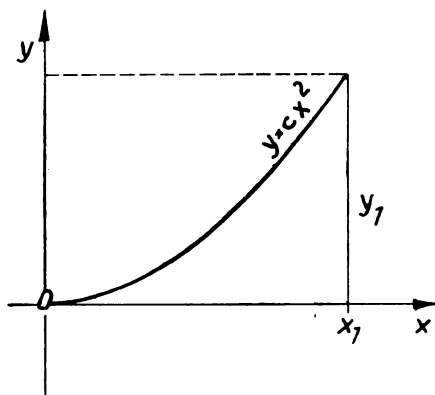


Bild 6b

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_1} c x^2 dx &= c \int_0^{x_1} x^2 dx \\
 &= \frac{c}{3} x^3 \Big|_0^{x_1} \\
 &= \frac{c x_1^3}{3}
 \end{aligned}$$

Eliminieren Sie daraus c , indem Sie berücksichtigen, daß

$y_1 = c x_1^2$ oder $c = \frac{y_1}{x_1^2}$ ist.

$$\begin{aligned}
 \text{Flächeninhalt} &= \frac{y_1 x_1^3}{3 x_1^2} \\
 &= \frac{1}{3} x_1 y_1
 \end{aligned}$$

Damit haben Sie gefunden: Der Flächeninhalt unter der Parabel ist $\frac{1}{3}$ des Inhaltes des umschließenden Rechtecks, oder: Die Parabel teilt die Rechtecksfläche $x_1 y_1$ im Verhältnis 1:2

Lehrbeispiel 14

Berechnen Sie die Fläche unter der Sinuskurve zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkten mit der x -Achse (Bild 7)!

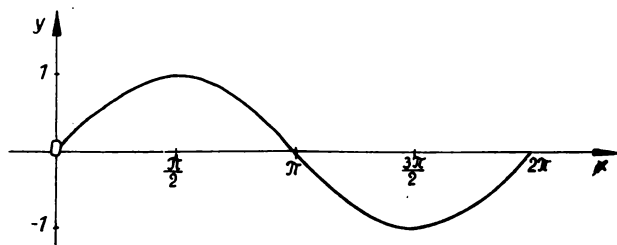


Bild 7

Lösung:

Wählen Sie dazu $a = 0$ und $b = \pi$. Sie hätten auch ohne weiteres $a = 2\pi$ und $b = 3\pi$ nehmen können.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^{\pi} \\
 &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\
 &= -(-1) - (-1) \\
 \int_0^{\pi} \sin x dx &= \underline{\underline{2}}
 \end{aligned}$$

Achten Sie auf die Vorzeichen!

Bei der Auswertung des bestimmten Integrals können Sie auch so verfahren, daß Sie das Minuszeichen und auch eventuelle Faktoren ausklammern:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

Dieser 2. Weg ist sicherer.

Beachten Sie den Umstand, daß der Flächeninhalt durch eine einfache rationale Zahl angegeben wird, obwohl die Begrenzung durch eine Kurve erfolgt, die durch eine transzendente Funktion gegeben ist. Später werden Sie auf den umgekehrten Fall treffen.

Lehrbeispiel 15

Wie groß ist die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen $a = -3$ und $b = +3$ (Bild 8)?

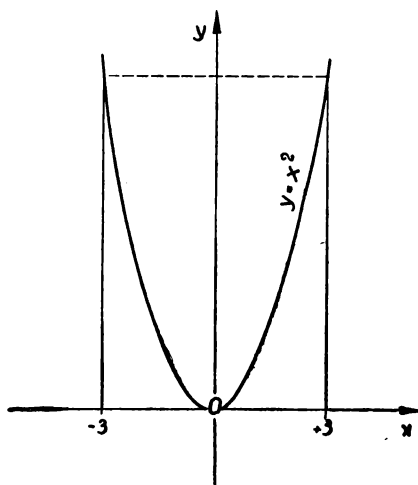


Bild 8

Lösung:

Auffallend hierbei ist die Beziehung zwischen den Grenzen: $a = -b$. Obere und untere Grenze sind bis auf das Vorzeichen gleich.

Schon das Bild 8 sagt Ihnen, daß die Fläche von der y -Achse halbiert wird, denn die Kurvenäste liegen links und rechts symmetrisch zur y -Achse. Linke und rechte Begrenzung sind gleichweit davon entfernt. Demnach können Sie rechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{+3} x^2 dx &= 2 \int_0^3 x^2 dx \\
2 \int_0^3 x^2 dx &= \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (3^3 - 0^3) \\
\int_{-3}^{+3} x^2 dx &= 18
\end{aligned}$$

Prüfen Sie das Ergebnis nach, indem Sie das linke Integral ohne die Vereinfachung berechnen. Achten Sie dabei auf die Vorzeichen beim Einsetzen der unteren Grenze!

Allgemein können Sie bei allen symmetrischen Funktionen so verfahren, wenn das Integrationsintervall durch den Koordinatenursprung halbiert wird, wenn also $a = -b$ ist.

Das Kennzeichen für symmetrische Funktionen ist (vgl. Lbf. IV/1, [5] b):

$$f(-x) \stackrel{!}{=} f(x)$$

Diese Bedingung ist in dem letzten Lehrbeispiel erfüllt, denn die Funktion $y = x^2$ ist symmetrisch:

$$(-x)^2 = x^2$$

Ist der Integrand eine symmetrische Funktion, d. h. erfüllt er die Bedingung $f(-x) = f(x)$, so gilt

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx} \quad (25)$$

Lehrbeispiel 16

Berechnen Sie $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

Lösung:

Es gilt: $\cos(-x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = 2 (1 - 0) \\
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx &= 2
\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 17

Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen den Grenzen $a = -1$ und $b = +1$ (Bild 9)!

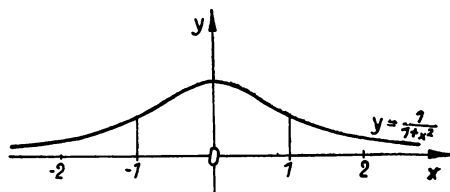


Bild 9

Lösung:

Der Integrand ist eine symmetrische Funktion, denn es ist

$$\frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Da die Grenzen ebenfalls symmetrisch zur y -Achse liegen, gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} &= 2 \int_0^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Big|_0^1 \\ &= 2 (\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0) = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - 0 \\ \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} &= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

Hier liegt der Fall vor, daß der Flächeninhalt unter einer Kurve, die durch eine rationale Funktion dargestellt wird, eine transzendente Zahl ist.

Für die Berechnung von Flächeninhalten durch Integration sind noch einige Besonderheiten zu beachten, auf die Sie in den folgenden Merk-sätzen dieses Abschnittes aufmerksam gemacht werden.

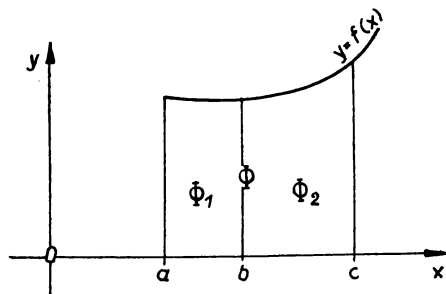


Bild 10

In Bild 10 sei mit Φ der Flächeninhalt der Gesamtfläche bezeichnet, während Φ_1 und Φ_2 die beiden Teilflächen kennzeichnen sollen. Dann gilt

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Drücken Sie die Flächeninhalte durch die ihnen entsprechenden bestimmten Integrale aus, so erhalten Sie

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (26)$$

Das Integrationsintervall kann in Teile zerlegt und dann über die Teile einzeln integriert werden.

In Formel (4) stand als Definition des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Vertauschen Sie die Grenzen des bestimmten Integrals, so wird

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)]$$

Vergleichen Sie die rechten Seiten der letzten zwei Gleichungen, so erkennen Sie den Merksatz:

Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so muß das Vorzeichen des Integrals geändert werden.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (27)$$

In Lehrbeispiel 14 haben Sie als Integral über die Funktion $f(x) = \sin x$ in den Grenzen von 0 bis π den Wert 2 erhalten. Erstrecken Sie jetzt das Integral über die ganze Periode der Sinusfunktion, so erhalten Sie

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) \\ &= -(1 - 1) \\ \int_0^{2\pi} \sin x dx &= 0 \end{aligned}$$

Was können Sie aus diesem Ergebnis folgern? Wenn das Integral über die volle Periode den Wert 0 ergibt, während es für das Intervall von 0 bis π (für die erste Halbperiode) den Wert 2 liefert, muß

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2$$

sein.

Wir wollen diese Folgerung nachprüfen.

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) \\ &= -[+1 - (-1)] \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx &= -2 \end{aligned}$$

Der Fläche „unter“ der Sinuskurve zwischen π und 2π kommt demnach ein negativer Flächeninhalt zu. Allgemein gilt der Satz:

Ist im Intervall $a \leq x \leq b$ der Integrand negativ, so ist auch $\int_a^b f(x) \, dx$ negativ.

Soll dieser Satz speziell für die Flächenbestimmung ausgesprochen werden, so lautet er:

Ergibt sich bei der Flächenberechnung durch Integration ein negativer Wert für den Flächeninhalt, so liegt die Fläche unterhalb der x -Achse, sofern die Grenzen a und b in positivem Fortschreitungsinn der x -Richtung aufeinander folgen.

Wollen Sie nun aber den absoluten Wert des Flächeninhaltes unterhalb einer Kurve in einem bestimmten Intervall mit den Grenzen a und b berechnen, so müssen Sie die absoluten Werte der Teilflächen einzeln berechnen und dann addieren. Die Fläche zwischen der Kurve $y = \sin x$ und der x -Achse in den Grenzen von 0 bis 2π ist demnach in zwei Teilen zu berechnen. Die obere Grenze des ersten und gleichzeitig untere Grenze des zweiten Intervalls ist die Nullstelle bei $x = \pi$.

Allgemein gilt:

Soll der absolute Wert einer Fläche unter einer Kurve $f(x)$ in den Grenzen von a bis b berechnet werden und besitzt die Kurve in diesem Intervall eine Nullstelle x_N , so ist der Flächeninhalt die Summe der absoluten Werte von

$$\int_a^{x_N} f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_N}^b f(x) \, dx$$

Lehrbeispiel 18

Berechnen Sie den absoluten Wert des Flächeninhalts unter der Kurve $y = x^2 - 8x + 15$ in den Grenzen $a = 4$ und $b = 6$ (Bild 11)!

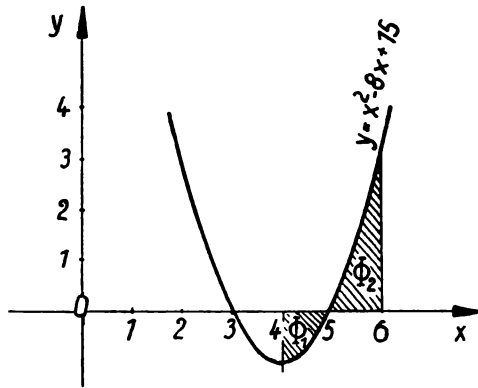


Bild 11

Lösung:

Sie müssen zunächst feststellen, ob innerhalb der gegebenen Grenzen Nullstellen der Funktion liegen. Die Bedingung für die Nullstellen ist $y = 0$, d. h.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_{N1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

$$x_{N1} = 5$$

$$x_{N2} = 3$$

Die Nullstelle x_{N1} liegt innerhalb der Integrationsgrenzen.

Sie berechnen deshalb die Teilflächen Φ_1 und Φ_2 mit den Grenzen a und x_N , bzw. x_N und b getrennt.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{a=4}^{x_N=5} (x^2 - 8x + 15) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right) \Big|_4^5 \\ &= \left(\frac{125}{3} - 100 + 75 \right) - \left(\frac{64}{3} - 64 + 60 \right) \\ &= \frac{61}{3} - 25 + 4 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{|\Phi_1| = \frac{2}{3}}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int_{x_N=5}^{b=6} (x^2 - 8x + 15) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right) \Big|_5^6 \\ &= (72 - 144 + 90) - \left(\frac{125}{3} - 100 + 75 \right) \end{aligned}$$

$$= 18 - \frac{125}{3} + 25 = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{|\Phi_2| = \frac{4}{3}}}$$

$$|\Phi| = |\Phi_1| + |\Phi_2| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{2}}$$

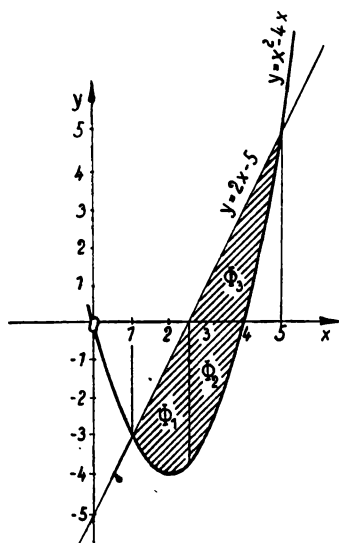


Bild 12

Noch langwieriger wird der Rechnungsgang, wenn Sie den (absoluten) Flächeninhalt einer von zwei Kurven begrenzten Fläche berechnen sollen.

Lehrbeispiel 19

Berechnen Sie die von den Kurven $y = 2x - 5$ und $y = x^2 - 4x$ eingeschlossene Fläche (Bild 12)!

Lösung:

Die Schnittpunkte der beiden Kurven liefern die Integrationsgrenzen. Sie berechnen diese als Lösungen des Gleichungssystems

$$y = 2x - 5$$

$$y = x^2 - 4x$$

$$\underline{\underline{x_1 = 5}}$$

$$\underline{\underline{y_1 = 5}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$\underline{\underline{y_2 = -3}}$$

Die Schnittpunkte sind (1; -3) und (5; 5), die Integrationsgrenzen sind $a = 1$ und $b = 5$.

Nun sind noch die zwischen den Integrationsgrenzen a und b liegenden Nullstellen der Funktionen zu bestimmen.

$$y = 2x - 5 = 0$$

$$\text{liefert } \underline{\underline{x_{N_1} = \frac{5}{2}}}$$

$$\text{Aus } y = x^2 - 4x$$

$$\text{folgt } \underline{\underline{x_{N_2} = 4}} \quad \underline{\underline{x_{N_3} = 0}}$$

x_{N_1} und x_{N_2} liegen im vorgegebenen Integrationsintervall.

Wie Sie aus Bild 12 entnehmen können, ist die Gesamtfläche zwischen den beiden Kurven als Summe der Absolutwerte dreier Teilflächen zu berechnen:

Φ_1 Fläche zwischen den beiden Kurven im Intervall von a bis x_{N_1}

Φ_2 Fläche unter der Parabel im Intervall von x_{N_1} bis x_{N_2}

Φ_3 Fläche zwischen den beiden Kurven (oberhalb der x -Achse) im Intervall von x_{N_1} bis b

$$\Phi_1 = \int_{a=1}^{x_{N_1}=\frac{5}{2}} (x^2 - 4x) dx - \int_{a=1}^{x_{N_1}=\frac{5}{2}} (2x - 5) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \bigg|_1^{\frac{5}{2}} - (x^2 - 5x) \bigg|_1^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left(\frac{125}{24} - \frac{25}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left[\left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2} \right) - (1 - 5) \right]$$

$$= -\frac{45}{8} - \left(-\frac{25}{4} + 4 \right) = -\frac{27}{8}$$

$$\Phi_2 = \int_{x_{N_1}=\frac{5}{2}}^{x_{N_2}=4} (x^2 - 4x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \bigg|_{\frac{5}{2}}^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 \right) - \left(\frac{125}{24} - \frac{25}{2} \right)$$

$$= -\frac{27}{8}$$

$$\Phi_3 = \int_{x_{N_1}=\frac{5}{2}}^{b=5} (2x - 5) dx - \int_{x_{N_2}=4}^{b=5} (x^2 - 4x)$$

$$= (x^2 - 5x) \bigg|_{\frac{5}{2}}^5 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \bigg|_4^5$$

$$= (25 - 25) - \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2} \right) - \left[\left(\frac{125}{3} - 50 \right) - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) \right]$$

$$= \frac{25}{4} - \left(\frac{61}{3} - 18 \right) = \frac{47}{12}$$

$$|\Phi| = |\Phi_1| + |\Phi_2| + |\Phi_3| = \frac{27}{8} + \frac{27}{8} + \frac{47}{12} = \frac{32}{3}$$

Dieser sehr umständliche, langwierige Rechnungsgang kann wesentlich vereinfacht und auf die unmittelbare Berechnung einer einzigen Fläche zurückgeführt werden, wenn Sie eine Koordinatentransformation durchführen. Durch diese wird am Flächeninhalt nichts geändert. Die Fläche erfährt nur eine Verschiebung im Koordinatensystem derart, daß sie nur ober- oder nur unterhalb der x -Achse liegt.

Führen Sie selbst eine solche Berechnung nach Koordinatentransformation (z. B. am letzten Lehrbeispiel) durch!

Eine wesentliche Vereinfachung bei der Berechnung von Flächen, die durch Kurven begrenzt sind, erfolgt durch die Anwendung von Doppelintegralen (Lbf. IV/5).

Übungen

11. Prüfen Sie Formel (27) an den Integralen

$$J_1 = \int_1^3 4x^2 dx \quad \text{bzw.} \quad J_2 = \int_2^1 4x^2 dx$$

nach!

12. Lösen Sie die bestimmten Integrale:

$$a) \int_2^4 (x^3 + 3x^2 + x - 3) dx$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$c) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d) \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$e) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

13. Wie groß ist die Fläche unter der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ zwischen den Grenzen $a = 1$ und $b = 3$? Zeichnen Sie die Fläche!

14. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve $y = e^x$, den Achsen und der Parallelen zur y -Achse im Abstand b begrenzt wird ($b > 0$)!

15. Vergleichen Sie den Flächeninhalt der unter der nach rechts geöffneten Parabel $y^2 = 2px$ ($p > 0$) zwischen $a = 0$ und $b = x_1$ gelegenen Fläche mit dem des umschließenden Rechtecks.

Anleitung: Verfahren Sie analog Lehrbeispiel 13.

16. Ein Werkstück von der im Bild 13 angegebenen Form hat die Länge l cm, die Dicke d cm und die Wichte γ g/cm³. Die gekrümmte Seite hat dabei die Form einer Parabel. Wie schwer ist das Werkstück?

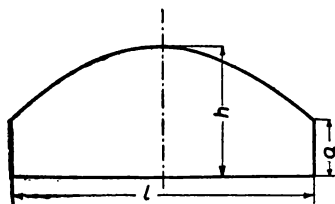


Bild 13

17. Wie groß ist die Fläche, die die Kurve $y = 3 - 2x - x^2$ und die x -Achse einschließen?

18. Beweisen Sie Formel (26) mit Hilfe von Formel (4)!

19. Wie können Sie das unbestimmte Integral als bestimmtes Integral darstellen?

20. Untersuchen Sie die bestimmten Integrale mit der unteren Grenze $-a$ und der oberen Grenze $+a$, bei denen der Integrand die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt (ungerade Funktionen).

Nehmen Sie als Beispiel die Funktionen

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \sin x$$

Zusammenfassung [1] bis [5]

Die Integralrechnung stellt die Umkehrung der Differentialrechnung dar.

Unbestimmtes Integral: $\int f(x) dx = F(x) + C$

Dabei ist der Integrand $f(x)$ gegeben, während die Stammfunktion $F(x)$ so gesucht ist, daß $F'(x) = f(x)$ ist.

C ist die willkürliche Integrationskonstante.

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Zur Lösung des bestimmten Integrals ist zunächst wie beim unbestimmten Integral die Stammfunktion aufzusuchen, in die zunächst für x der Wert b (obere Grenze) und dann der Wert a (untere Grenze) eingesetzt werden. Die beiden so gefundenen Funktionswerte von $F(x)$ sind voneinander abzuziehen. Mit dem bestimmten Integral können Sie krummlinig begrenzte Flächen berechnen.

Das bestimmte Integral kann auch als Grenzwert einer Summe definiert werden. Diese Definition wird besonders für physikalische und technische Anwendungen gebraucht.

Für die Durchführung der Integration gelten die Sätze:

Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gesetzt werden. Das Integral einer Summe (Differenz) ist gleich der Summe (Differenz) der Integrale der einzelnen Summanden.

Teilen Sie das Integrationsintervall in mehrere Teile, so können Sie über die Teilintervalle integrieren.

Vertauschen Sie die Grenzen eines bestimmten Integrals, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

[6] Das uneigentliche Integral. Während Sie bisher stillschweigend nur stetige Funktionen integriert bzw. Unstetigkeiten umgangen haben, soll in diesem Abschnitt speziell auf Funktionen mit Unstetigkeiten einge-

gangen werden. Weiterhin sollen Integrale mit unendlichem Integrationsintervall behandelt werden. Alle diese Integrale werden als uneigentliche Integrale bezeichnet.

a) Funktionen mit endlichen Sprungstellen

Die zu integrierende Funktion $y = f(x)$ habe für $x = b$ eine Sprungstelle (Bild 14).

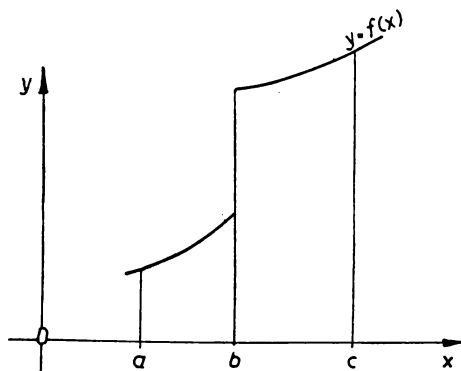


Bild 14

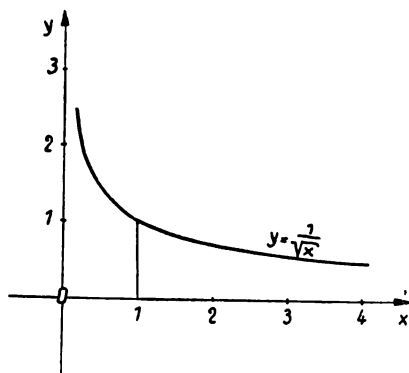


Bild 15

Sollen Sie nun von a bis c integrieren, so bilden Sie einfach die Summe der Integrale über die Bereiche von a bis b und von b bis c .

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

Sie integrieren also einzeln über die Teilbereiche, in denen der Integrand stetig ist, nachdem Sie das Intervall an der Sprungstelle aufgetrennt haben.

b) Funktionen mit Unendlichkeitsstellen

Der Integrand soll an einer der Grenzen eine Unendlichkeitsstelle (Pol) haben.

Betrachten Sie zum Beispiel das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Der Integrand $\frac{1}{\sqrt{x}}$ wird für $x \rightarrow 0$ unendlich (Bild 15).

Sie dürfen daher das Integral nicht direkt von der unteren Grenze 0 an erstrecken. Helfen Sie sich dadurch, daß Sie das Integral mit der unteren Grenze ε beginnen.

Verstehen Sie unter ε eine sehr kleine, aber von 0 verschiedene, positive Zahl. Damit erhalten Sie

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \left. x^{+\frac{1}{2}} \right|_{\varepsilon}^1 \\ &= 2 \left. \sqrt{x} \right|_{\varepsilon}^1 \\ &= 2 (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon})\end{aligned}$$

Lassen Sie nun ε gegen 0 laufen, dann wird, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Zusammenfassend können Sie schreiben:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) \\ &= 2\end{aligned}$$

Obwohl sich diese „Fläche“ bis ins Unendliche erstreckt, kommt ihr doch ein endlicher Flächeninhalt zu.

Aber nicht immer erhalten Sie bei uneigentlichen Integralen endliche Werte.
Betrachten Sie dazu folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{-1}{x} \right|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Es ist } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

$$\text{Damit wird } \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \underline{\underline{\infty}}$$

Lehrbeispiel 20

$$\text{Berechnen Sie } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}!$$

Lösung:

Im Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wird der Integrand für $x \rightarrow 1$ (obere Grenze) unendlich.

Zur Auflösung dürfen Sie das Integral zunächst nur bis dicht an 1, bis $1 - \varepsilon$ erstrecken.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \arcsin x \right|_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Liegt die Unendlichkeitsstelle innerhalb des Integrationsintervalls, so verfahren Sie zunächst wie bei a), teilen also das Intervall an der Unendlichkeitsstelle auf.

Lehrbeispiel 21

$$\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ ist zu berechnen.}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} && \text{Pol für } x=0 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3 \sqrt[3]{x} \Big|_{-2}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3 \sqrt[3]{x} \Big|_{\varepsilon}^3 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3 \left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3 \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\varepsilon} \right) \\ &= 3 \left(0 - \sqrt[3]{-2} \right) + 3 \left(\sqrt[3]{3} - 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Es ist } \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

$$\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \underline{\underline{3 \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \right)}}$$

Sie würden zum gleichen Ergebnis kommen, wenn Sie die Auftrennung an der Unstetigkeitsstelle nicht vornehmen. Das aber dürfen Sie keinesfalls, denn bei anderen Aufgaben kann diese Unterlassungssünde zu einem völlig falschen Ergebnis führen.

c) Unendliches Integrationsintervall

Bisher war immer Voraussetzung, daß die Grenzen a und b endliche Werte haben. Jetzt aber soll eine Integrationsgrenze ins Unendliche verlegt

werden. In einigen Fällen nehmen auch dann die Integrale noch endliche Werte an.

Verfahren Sie wie bei *b)*, indem Sie die unendliche Grenze zunächst durch einen endlichen Wert ersetzen, den Sie dann nach beendeter Integration unendlich groß werden lassen.

Lehrbeispiel 22

Es soll das Integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ berechnet werden.

Lösung:

Ersetzen Sie die obere Grenze durch den endlichen Wert B .

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B x^{-3} dx \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^B \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[-\left(\frac{1}{2B^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= -\left(0 - \frac{1}{2} \right) \\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 23

Erstrecken Sie das Integral des Lehrbeispiels 17 $\int \frac{dx}{1+x^2}$ über das unendliche Integrationsintervall $-\infty$ bis $+\infty$ (Bild 9)!

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$y = \frac{1}{1+x^2}$ ist eine symmetrische Funktion

$$\begin{aligned} &= 2 \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 2 \lim_{B \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^B \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{B \rightarrow \infty} (\arctan B - \arctan 0) \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \arctan B = \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Übungen

21. Untersuchen Sie, ob das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ einen endlichen Wert besitzt!

22. Untersuchen Sie, für welche Werte von n das Integral $\int_0^b \frac{dx}{x^n}$

a) endlich

b) unendlich wird ($b > 0$)!

23. Untersuchen Sie, für welche Werte von n das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$$

a) endlich

b) unendlich wird!

24. a) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

[7] Graphische Integration. In Lehrbrief IV/2 [12] haben Sie die graphische Differentiation kennengelernt. Es ist ratsam, daß Sie vor Durcharbeiten des folgenden Abschnittes die Methode der graphischen Differentiation wiederholen.

Genau wie bei der Differentiation besteht auch für die Integration die Notwendigkeit, zeichnerische Verfahren zu entwickeln. Denken Sie an die Forderungen aus der Praxis, Funktionen integrieren zu müssen, deren analytische Ausdrücke nicht bekannt sind. Sie werden weiterhin richtig vermuten, daß die graphische Integration die Umkehrung der graphischen Differentiation ist. Wir stellen uns nun folgende Aufgabe:

Für die als Kurve gegebene Funktion $y = f(x)$ (Bild 16) ist zeichnerisch das bestimmte Integral

$$J(x) = \int_a^b f(x) dx$$

zu ermitteln.

Die Lösung erfolgt in zwei Schritten:

Sie bestimmen zunächst zur gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Kurve des unbestimmten Integrals $Y(x) = \int f(x) dx = J(x) + C$, die Integralkurve. Aus dieser Kurve können dann $Y(a) = J(a) + C$ und $Y(b) = J(b) + C$ abgelesen werden.

Durch Differenzbildung (im Bild als Ordinatendifferenz) erhalten Sie

$$Y(b) - Y(a) = J(b) + C - (J(a) + C) = J(b) - J(a) = \int_a^b f(x) dx = J(x)$$

Das Verfahren der graphischen Integration soll an Hand des Bildes 16 erläutert werden.

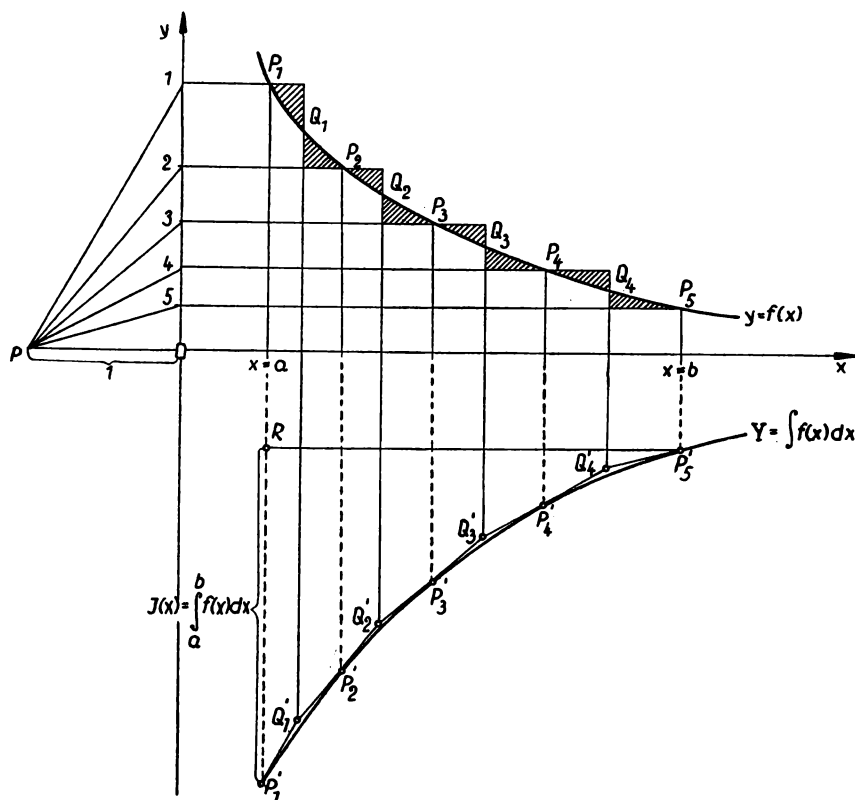


Bild 16

Sie ersetzen zunächst die zu integrierende Kurve $y = f(x)$ durch eine „Stufenkurve“. Zu diesem Zweck teilen Sie das Integrationsintervall $a \dots b$ durch Geraden, die parallel zur y -Achse verlaufen, in n Teile, die nicht unbedingt gleich groß sein müssen (in Bild 16 sind es 4 Teile). Die

Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Kurve $y = f(x)$ benennen Sie mit $P_1 \dots P_{n+1}$ (bei uns $P_1 \dots P_6$). Zwischen diesen Parallelen zeichnen Sie weitere Parallele ($Q_1 \dots Q_4$) derart, daß die nach Einzeichnung der Waagerechten (durch $P_1 \dots P_6$) entstehenden schraffierten Dreiecke links und rechts von jedem Punkt Q einander flächengleich werden.

Dieses Vorgehen werden Sie vielleicht als ungenau oder gar unexakt verurteilen. Dies ist aber nicht der Fall, denn unser Auge ist besonders empfindlich für Unterschiede von Flächeninhalten. Sie brauchen aus dem gleichen Grunde die Intervallteile nicht allzu klein zu wählen.

Die Waagerechten durch $P_1 \dots P_6$ schneiden die y -Achse in den Punkten $1 \dots 5$. Die Punkte $1 \dots 5$ verbinden Sie mit dem von Ihnen gewählten Pol P , den Sie vorher entweder im Abstand 1 oder p vom Nullpunkt entfernt auf den negativem Teil der x -Achse festgelegt haben.

Nun beginnt die eigentliche Konstruktion der Integralkurve. Sie legen einen beliebigen Punkt P_1' senkrecht unter (oder über) P_1 fest, durch den die Integralkurve gehen soll.

Dies dürfen Sie jederzeit tun, denn wie Ihnen aus [1] und aus Bild 1 bekannt ist, gibt es zu einem Integranden $y = f(x)$ unzählig viele Stammfunktionen $F(x)$, die sich alle nur in der Integrationskonstanten C unterscheiden. In der graphischen Darstellung existieren also zu einer Kurve $y = f(x)$ unzählig viele Integralkurven, die zwar für jeden Wert x den gleichen Anstieg besitzen, in y -Richtung aber beliebig (je nach dem Wert von C) verschoben werden können.

Durch P_1' ziehen Sie die Parallele zum Polstrahl $\overline{P1}$ bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_1 . Der Schnittpunkt sei Q_1' . Durch Q_1' ziehen Sie die Parallele zum Polstrahl $\overline{P2}$ bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_2 , der Schnittpunkt sei Q_2' . Der Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{P2}$ durch Q_1' mit der Senkrechten durch P_2 sei P_2' . Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten Sie einen Streckenzug mit $Q_1', Q_2' \dots$ als Eckpunkten und den Punkten $P_1', P_2' \dots$ auf den einzelnen Teilstrecken. Die Teilstrecken des Streckenzuges stellen Tangenten der Integralkurve dar, die Punkte $P_1', P_2' \dots$ Kurvenpunkte selbst. Sie können jetzt die Integralkurve zeichnen, indem Sie eine Kurve derart in den Streckenzug legen, daß Teilstrecken und Kurve sich in den Punkten $P_1' \dots P_6'$ berühren.

Damit haben Sie die Funktion $Y(x) = \int f(x) dx = J(x) + C$ graphisch ermittelt. An der Stelle $x = a$ besitzt die Funktion den Wert $Y(a) = J(a) + C$, an der Stelle $x = b$ den Wert $Y(b) = J(b) + C$. Die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a) = J(b) - J(a) = \overline{P_1' R}$ stellt den Wert des gesuchten Integrals $J(x) = \int_a^b f(x) dx$ dar.

Sie erkennen jetzt, daß es völlig gleichgültig war, wohin der Punkt P_1' gelegt wird, die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a)$ wird ihrem Wert nach dadurch nicht verändert.

Zur Wahl des Maßstabes (und damit verbunden ist die Festlegung des Polabstandes p) ist noch folgendes zu ergänzen, was Sie, ohne daß dafür der Beweis geführt wird, zur Kenntnis nehmen möchten:

Durch geeignete Wahl des Polabstandes p kann man die Einheitslänge E_Y der Integralkurve zweckmäßig festlegen. Es gilt die Beziehung

$$p = \frac{E_x \cdot E_y}{E_Y} \quad \text{bzw.} \quad E_Y = \frac{E_x \cdot E_y}{p}$$

Hierin bedeuten: p Polabstand

$$\left. \begin{array}{l} E_x \text{ Einheit auf der } x\text{-Achse} \\ E_y \text{ Einheit auf der } y\text{-Achse} \end{array} \right\} \text{ der Funktion } y = f(x)$$

$$E_Y \text{ Einheit auf der } Y\text{-Achse der Funktion } Y = \int f(x) dx$$

Übungen

25. Integrieren Sie graphisch die Funktionen

$$a) \quad y = 2 \quad \text{Bestimmen Sie } \int_1^3 y \cdot dx$$

$$b) \quad y = \frac{x}{2} + 1 \quad \text{Bestimmen Sie } \int_{-1}^2 y \cdot dx$$

$$c) \quad y = \cos x \quad \text{Bestimmen Sie } \int_0^{\frac{3}{2}\pi} y \cdot dx$$

Zusammenfassung [6] und [7]

Integrale, deren Integranden an den Grenzen bzw. im Inneren des Integrationsintervalls Unstetigkeiten aufweisen, und Integrale mit unendlichem Integrationsintervall heißen uneigentliche Integrale. Liegt die Unstetigkeitsstelle im Innern des Intervalls, so trennen Sie das Integrationsintervall an dieser Stelle auf. Liegt die Unstetigkeit bei einer der Grenzen, so erstrecken Sie das Integral zunächst nur bis dicht an diese Stelle heran. Nach erfolgter Integration gehen Sie durch Grenzwertbildung wieder zur ursprünglichen Grenze über.

Ist eine Funktion $y = f(x)$ nicht analytisch, sondern tabellenmäßig oder graphisch gegeben, so wird die Integralkurve sowie der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$ durch graphische Integration bestimmt.

2. Kapitel: Die verschiedenen Integrationsmethoden

Bisher haben Sie sich bei der Integration nur auf die in [3] zusammengestellten Grundintegrale beschränkt. In der Praxis ergeben sich aber meist zusammengesetzte Integranden. In diesem Kapitel sollen Sie nun lernen, wie diese schwierigeren Integrale auf die Grundintegrale zurückgeführt werden können. Immer gelingt das leider nicht, da bleibt dann nichts anderes übrig, als durch Näherungsmethoden zur Lösung zu kommen.

Lernen Sie keinesfalls die vielen Formen auswendig, sondern versuchen Sie, zu einem tieferen Verständnis der Methoden zu kommen. Legen Sie sich stets Rechenschaft über den eingeschlagenen Weg ab und versuchen Sie nicht, durch „sinnloses Probieren“ zum Ziel zu kommen. Beachten Sie das oberste Gebot für die Beherrschung der Integralrechnung: Üben und nochmals üben!

[8] Einführung einer neuen Veränderlichen (Substitution). Die Methode der Einführung einer neuen Veränderlichen entspricht der Kettenregel der Differentialrechnung. Wie schon oben erwähnt, sollen Sie dabei die vorliegenden Integrale auf die Grundtypen zurückführen. Der hierbei zu beschreitende Weg richtet sich nach der Form des Integranden.

a) Der Integrand ist die Funktion einer linearen Funktion der Veränderlichen $[f(x) = f(\varphi(ax + b))]$, bzw. die Substitution erfolgt mittels einer linearen Funktion

An einem einfachen Beispiel soll dieses Verfahren besprochen werden. Zu lösen sei das Integral

$$\int \cos 2x \, dx$$

Stünde nicht der Faktor 2 im Argument der Kosinusfunktion, würde Grundintegral (8) vorliegen. Führen Sie nun wie bei der Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung für $2x$ eine neue Veränderliche u ein:

$$u = 2x \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2}u$$

Damit nimmt der Integrand die Form $\cos u$ an. Nun ist aber auch noch dx umzuwandeln. Durch Differentiation von $u = 2x$ erhalten Sie

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 2 \\ du &= 2 \, dx \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{2} \\ dx &= \frac{1}{2} \, du \end{aligned}$$

Sie setzen $u = 2x$ und $\frac{1}{2} \, du = dx$ in das Integral ein:

$$\int \cos 2x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} \, du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \cos u \, du \\
&= \frac{1}{2} \sin u + C
\end{aligned}$$

Nach beendeter Integration führen Sie wieder die ursprüngliche Veränderliche x ein.

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Probe:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} \sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2} \sin u + C & u &= 2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \cos u & \frac{du}{dx} &= 2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2} \cos u \cdot 2 = \cos u \\
&= \cos 2x
\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 24

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x-3}$!

Lösung:

Vermutlich läßt sich dieses Integral auf Grundintegral (6) zurückführen (allerdings mit der neuen Veränderlichen u).

Sie setzen dazu

$$\begin{aligned}
u &= x - 3 & \text{bzw.} & & x &= u + 3 \\
\frac{du}{dx} &= 1 & & & \frac{dx}{du} &= 1 \\
du &= dx
\end{aligned}$$

Sie sehen, daß es zunächst gleichgültig ist, ob Sie $\frac{du}{dx}$ oder $\frac{dx}{du}$ bilden. Bei den später folgenden, schwierigeren Beispielen werden Sie erkennen, daß sich teils der eine und teils der andere Differentialquotient als zweckmäßiger erweist.

Mit der neuen Veränderlichen u bekommen Sie

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-3} &= \int \frac{du}{u} \\
&= \ln |u| + C \\
&= \ln |x-3| + C
\end{aligned}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Lehrbeispiel 25

$$\int (6x + 5)^5 dx = ?$$

Lösung:

Der Integrand ist hier die Potenz eines linearen Ausdrucks. Sie führen das Integral auf Grundintegral (5) zurück, indem Sie den linearen Ausdruck gleich u setzen.

$$\begin{aligned} u &= 6x + 5 & \frac{du}{dx} &= 6 & dx &= \frac{1}{6} du \\ \int (6x + 5)^5 dx &= \int u^5 \frac{1}{6} du \\ &= \frac{1}{6} \int u^5 du \\ &= \frac{1}{6} \frac{u^6}{6} + C \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{36} (6x + 5)^6 + C}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 26

$$\int \sqrt{2x + 3} dx = ?$$

Lösung:

Sie versuchen auch hier, auf Grundintegral (5) zurückzukommen. Sie führen wieder für den linearen Ausdruck $2x + 3$ die neue Veränderliche u ein.

$$\begin{aligned} u &= 2x + 3 & \frac{du}{dx} &= 2 & dx &= \frac{1}{2} du \\ \int \sqrt{2x + 3} dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + C \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3} \sqrt{(2x + 3)^3} + C}} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Lehrbeispiele können Sie in einer Formel verallgemeinern. Dabei sei n eine von -1 verschiedene, beliebige Zahl (ganz, gebrochen, positiv oder negativ). Der Integrand soll dann die n -te Potenz eines in x linearen Ausdrucks sein.

$$\begin{aligned}\int (a x + b)^n d x &= \frac{1}{a} \int u^n d u & u &= a x + b \\ &= \frac{1}{a} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & \frac{d u}{d x} &= a & d x &= \frac{1}{a} d u \\ &= \frac{1}{a(n+1)} (a x + b)^{n+1} + C\end{aligned}$$

Im Fall $n = -1$ haben Sie mit derselben Substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{d x}{a x + b} &= \frac{1}{a} \int \frac{d u}{u} \\ &= \frac{1}{a} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{a} \ln |a x + b| + C\end{aligned}$$

Ist der Integrand eine trigonometrische oder hyperbolische Funktion eines linearen Ausdrucks:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(a x + b), & f(x) &= \cos(a x + b), \dots \\ f(x) &= \mathfrak{S}in(a x + b), & f(x) &= \mathfrak{C}of(a x + b), \dots\end{aligned}$$

so führen Sie ebenfalls u in der Form $u = a x + b$ ein.

Wie sieht die Substitutionsmethode nun formelmäßig aus?

Sie wollen das Integral $\int f(x) d x$ berechnen, indem Sie für x eine neue Veränderliche u einführen.

Es sei $x = \varphi(u)$ oder $u = \psi(x)$

Die Funktion $x = \varphi(u)$ muß dabei eindeutig in die Funktion $u = \psi(x)$ umkehrbar und differenzierbar sein. Durch Differentiation erhalten Sie

$$\frac{d x}{d u} = \varphi'(u) \quad d x = \varphi'(u) d u$$

Setzen Sie dies in das zu lösende Integral ein, dann bekommen Sie die Formel für die Substitutionsmethode:

$$\boxed{\int f(x) d x = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) d u} \quad (28)$$

Nachdem Sie die Integration des rechts stehenden Integrals durchgeführt haben, führen Sie durch $u = \psi(x)$ wieder die ursprüngliche Veränderliche x ein.

Oft liegen die Integranden zwar nicht in der Form irgendeines Grundintegrals vor, durch eine kleine Umformung und eine lineare Substitution kann aber der Integrand auf den eines Grundintegrals zurückgeführt werden.

Die Integrale $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ und $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ können mittels der Grundintegrale (12) und (19) bzw. (20) gelöst werden. Bei beiden Integralen besteht die Umformung in einem Ausklammern von a^2 im Nenner, die Substitution lautet $u = \frac{x}{a}$.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$u = \frac{x}{a}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}, \quad dx = a \cdot du$$

$$= \frac{a}{a^2} \int \frac{du}{1 + u^2}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u + C \quad (= -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} u + C)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (= -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$u = \frac{x}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 - u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}, \quad dx = a \cdot du$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} u + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{1+u}{1-u} & \text{für } |u| < 1 \\ \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} u + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{u+1}{u-1} & \text{für } |u| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{für } |x| < a \\ \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

Sie werden jetzt sicher die Frage aufwerfen: Woher soll ich denn wissen, wann x größer und wann x kleiner als a ist. Darauf können Ihnen nur die Grenzen des bestimmten Integrals Auskunft geben. Darum sollen Sie sich jetzt zunächst mit der Anwendung der Substitutionsmethode auf bestimmte Integrale beschäftigen. Sie können zwei Wege beschreiten, die sich jedoch in ihrem Kern nicht voneinander unterscheiden. Beide Wege verwenden wiederum die Substitutionsmethode.

1. Weg:

Sie lösen das vorliegende bestimmte Integral zunächst als unbestimmtes Integral, lassen also vorerst die Integrationsgrenzen außer Betracht. Erst nachdem Sie wieder die ursprüngliche Veränderliche eingesetzt haben, führen Sie die Grenzen wieder ein.

Lehrbeispiel 27

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = ?$$

Lösung:

Berechnen des unbestimmten Integrals:

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \cos u \, du \\ &= \frac{1}{3} \sin u \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= 3x \\ \frac{du}{dx} &= 3 & dx &= \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

Übergang zum bestimmten Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{3} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) \\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Veranschaulichen Sie sich das Ergebnis, indem Sie die Kurven $y = \cos x$ und $y = \cos 3x$ zeichnen und die Flächeninhalte unter den Kurven vergleichen.

2. Weg:

Die ursprünglichen Grenzen geben an, zwischen welchen Werten sich die ursprüngliche Integrationsveränderliche bewegen soll. Führen Sie nun eine neue Veränderliche ein, so müssen Sie entsprechend der Substitution die Grenzen umrechnen.

Betrachten Sie dazu das vorhergehende Lehrbeispiel 27! Die Grenzen besagten hier, daß x von 0 bis $\frac{\pi}{6}$ laufen soll. Setzen Sie nun $u = 3x$, so

muß die neue Veränderliche u von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ laufen. Diese Werte erhalten Sie, wenn Sie in der Substitutionsformel nacheinander $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{6}$ einsetzen.

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad dx = \frac{1}{3} du$$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze $x = 0$ ergibt

$$u = 3 \cdot 0 = 0$$

obere Grenze $x = \frac{\pi}{6}$ ergibt

$$u = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{3} \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}$$

Sie sehen, daß beim zweiten Weg das Zurückgehen auf die ursprüngliche Veränderliche fortfällt. Das getrennte Umrechnen der Grenzen ist lediglich eine Vorwegnahme der reinen Rechenoperationen, die Sie beim ersten Weg bei der Einführung der alten Grenzen, d. h. bei der Berechnung von $F(b)$ und $F(a)$ auch durchführen mußten.

Lehrbeispiel 28

$$\int_0^2 \frac{dx}{9 - x^2} = ?$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{9 - x^2} &= \frac{1}{9} \int_0^2 \frac{dx}{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{du}{1 - u^2} \end{aligned}$$

$$\text{Substitution: } u = \frac{x}{3}$$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze $x = 0 \rightarrow u = 0$

obere Grenze $x = 2 \rightarrow u = \frac{2}{3}$

Die Grenzen geben an, daß sich x zwischen 0 und 2 bzw. u zwischen 0 und $\frac{2}{3}$ bewegen soll. Damit ist $|x| < 3$ bzw. $|u| < 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{du}{1-u^2} &= \frac{1}{3} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} u \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{2}{3} - \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} 0 \right) = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} - \ln \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \ln 5 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2} = \underline{\underline{0,26824}}$$

Würden die Grenzen beispielsweise 4 und 7 sein, dann hätten Sie, da ja dann $|x| > 3$ ist, die andere Lösung des Integrals nehmen müssen. Aber auch durch Anwenden goniometrischer Beziehungen können Integrale nach der Substitutionsmethode oft ausgewertet werden, so z. B. die sehr wichtigen Integrale $\int \cos^2 x \, dx$ und $\int \sin^2 x \, dx$.

$$\int \cos^2 x \, dx$$

Aus der Goniometrie kennen Sie die Umrechnungsformel

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

Damit schreiben Sie

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx + \frac{1}{2} \int \cos u \, du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin u \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C \\ \int \cos^2 x \, dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C}} \end{aligned}$$

Im 2. Integral substituieren Sie

$$\begin{aligned} u &= 2x \\ \frac{du}{dx} &= 2 \\ dx &= \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Hier könnten Sie analog verfahren. Wenn Sie aber bedenken, daß $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ist, können Sie die Lösung auf das vorhergehende Integral zurückführen.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \int dx - \int \cos^2 x \, dx \\ &= x - \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C}}$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx$$

Sie sollen jetzt noch das sehr gebräuchliche Integral

$$\int \sin mx \sin nx \, dx$$

kennenlernen. Hierin seien m und n ganzzahlige, positive Werte. Auch hier nehmen Sie zunächst eine goniometrische Umformung vor. Ersetzen Sie in der bekannten Formel

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder
$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \cos \alpha)$$

die Argumente $\frac{\alpha + \beta}{2}$ durch mx und $\frac{\alpha - \beta}{2}$ durch nx . Zur Bestimmung von α und β erhalten Sie dann die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2mx \\ \alpha - \beta &= 2nx \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem finden Sie leicht

$$\alpha = (m + n)x \quad \text{und} \quad \beta = (m - n)x$$

und damit

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n)x - \cos (m + n)x]$$

Das Integral selbst gestaltet sich so einfacher zu

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \left[\int \cos (m - n)x \, dx - \int \cos (m + n)x \, dx \right]$$

Sie substituieren:

$$\begin{aligned} u &= (m - n)x \quad \text{bzw.} \quad v = (m + n)x \\ \frac{du}{dx} &= m - n & \frac{dv}{dx} &= m + n \\ dx &= \frac{1}{m - n} du & dx &= \frac{1}{m + n} dv \end{aligned}$$

(Beachten Sie dabei, daß $m \neq n$ sein muß!)

$$\begin{aligned}\int \sin m x \sin n x \, dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-n} \int \cos u \, du - \frac{1}{m+n} \int \cos v \, dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-n} \sin u - \frac{1}{m+n} \sin v \right) + C \\ \int \sin m x \sin n x \, dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(\frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right) + C}}\end{aligned}$$

Übungen

26. a) $\int (4x - 7)^3 \, dx$ b) $\int \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right)^2 \, dx$ c) $\int (4 - 3x)^4 \, dx$
 27. a) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$ b) $\int \frac{dx}{5-3x}$ c) $\int \frac{dx}{(4-x)^3}$
 28. a) $\int \sqrt{(5x-1)^3} \, dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)}}$
 29. a) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-1)}$ b) $\int \sin(ax+b) \, dx$ c) $\int \frac{dx}{\sin^2(2-x)}$
 30. $\int \sin^2 x \, dx$ 31. $\int \cos^2 x \, dx$
 32. $\int \sin^2(2x+3) \, dx$ 33. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2} - 3\right) \, dx$

Anleitung zu Übung 32 und 33:

Führen Sie diese Integrale durch Einführung einer neuen Veränderlichen u auf die Integrale $\int \sin^2 x \, dx$ bzw. $\int \cos^2 x \, dx$ zurück.

34. Berechnen Sie $\int \sin m x \sin n x \, dx$ für den Fall $m = n$!

35. Berechnen Sie für $m \neq n$ und $m = n$ die Integrale:

a) $\int \sin m x \cos n x \, dx$ b) $\int \cos m x \cos n x \, dx$

b) Der Integrand besitzt die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$

Hat der Integrand die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, so führen Sie die neue Veränderliche in der Form $u = \varphi(x)$ ein.

$$u = \varphi(x) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi'(x) \qquad du = \varphi'(x) \, dx$$

Dann wird

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx = \int \frac{1}{\varphi(x)} \varphi'(x) \, dx = \int \frac{1}{u} \, du$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u} du &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\varphi(x)| + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + C} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

Steht bei gebrochenem Integranden die Ableitung des Nenners im Zähler, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Absolutwertes des Nenners.

Lehrbeispiel 29

Berechnen Sie $\int \operatorname{ctg} x \, dx$!

Lösung:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

In diesem Beispiel ist der Nenner $\varphi(x) = \sin x$.

Setzen Sie also

$$u = \sin x$$

so wird $\frac{du}{dx} = \cos x$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ \int \operatorname{ctg} x \, dx &= \underline{\underline{\ln |\sin x| + C}}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 30

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$!

Lösung:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x} dx}{\ln x}$$

Substitution:

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} &= \underline{\underline{\ln |\ln x| + C}}\end{aligned}$$

Zuweilen können Sie erst nach vorheriger Umformung des Integranden auf die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$ kommen.

Lehrbeispiel 31

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sin 2x}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin 2x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x}} dx & \text{Substitution:} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} & u &= \operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C & \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ & & du &= \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \int \frac{dx}{\sin 2x} &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C}}\end{aligned}$$

Das Integral $\int \frac{dx}{\sin x}$ läßt sich auf das vorherige Beispiel zurückführen, wenn Sie $x = 2u$ setzen.

$$x = 2u \qquad \frac{dx}{du} = 2 \qquad dx = 2 du$$

Damit erhalten Sie

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2 du}{\sin 2u} = 2 \int \frac{du}{\sin 2u}$$

Analog der Lösung des Lehrbeispiels 31 erhalten Sie

$$2 \int \frac{du}{\sin 2u} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} u| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Ersetzen Sie jetzt x durch $x + \frac{\pi}{2}$ und bedenken Sie, daß $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$ ist, so können Sie auf dem gleichen Wege $\int \frac{dx}{\cos x}$ berechnen.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}$$

Substitution:

$$u = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$= \int \frac{du}{\sin u}$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

Lehrbeispiel 32

Berechnen Sie $\int \frac{\cos x \, dx}{a + b \sin x}$!

Lösung:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u}$$

Substitution:

$$u = a + b \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = b \cos x$$

$$\frac{1}{b} du = \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{b} \ln |u| + C$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{b} \ln |a + b \sin x| + C$$

Übungen

$$36. \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$$

$$37. \int \frac{4x^3 - 18x}{x^4 - 9x^2 + 1} dx$$

$$38. \int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 2} dx$$

$$39. \int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctan x} dx$$

$$40. \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) dx$$

$$41. a) \int \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$b) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$42. \int (\operatorname{I}g x + \operatorname{U}g x) dx$$

c) Der Integrand besitzt die Form $\varphi(x) \cdot \varphi'(x)$

In diesem Falle führen Sie die neue Veränderliche in der Form $u = \varphi(x)$ ein.

$$u = \varphi(x) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi'(x) \qquad du = \varphi'(x) dx$$

Damit erhalten Sie

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 + C} \quad (30)$$

Lehrbeispiel 33

Berechnen Sie $\int \sin x \cos x dx$!

Lösung:

Setzen Sie $u = \sin x$

dann wird $\frac{du}{dx} = \cos x \qquad du = \cos x dx$

Das Integral lautet dann

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int u du = \frac{u^2}{2} + C \\ \int \sin x \cos x dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin^2 x + C}} \end{aligned}$$

Hätten Sie $u = \cos x$ gesetzt, dann wäre der Rechengang der folgende gewesen:

$$u = \cos x \quad \frac{du}{dx} = -\sin x \quad du = -\sin x \, dx$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = \int -u \, du = -\frac{u^2}{2} + C$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

Lehrbeispiel 34

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx$!

Lösung:

$$u = \ln x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

Lehrbeispiel 35

Berechnen Sie $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$!

Lösung:

$$u = \arcsin x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C$$

Übungen

43. Untersuchen Sie den Zusammenhang der beiden verschiedenen Lösungsformen des Lehrbeispiels 33!

Berechnen Sie die Integrale 44 bis 48!

44. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

45. $\int \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x \, dx$

46. $\int \frac{\operatorname{Tg} x}{\operatorname{Sin}^2 x} \, dx$

47. $\int \frac{\arcsin x}{1+x^2} \, dx$

48. $\int \frac{\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

d) Der Integrand ist eine irrationale Funktion

Unterscheiden Sie hier die folgenden drei Fälle:

Fall α) Der Integrand enthält $\sqrt{a^2 - x^2}$

Fall β) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 + a^2}$

Fall γ) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 - a^2}$

Der Fall $\sqrt{-x^2 - a^2}$ scheidet aus unseren Betrachtungen aus, da für jeden reellen Wert von x die Wurzel imaginär werden würde.

Irrationale Integranden, in denen nur x und nicht x^2 auftritt, haben Sie bereits im Unterabschnitt α) kennengelernt.

α) Der Integrand enthält $\sqrt{a^2 - x^2}$

In diesem Fall führt die Substitution $x = a \sin u$ oder (völlig gleichwertig) $x = a \cos u$ unter Anwendung des trigonometrischen Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) zum Ziel.

Sie setzen $x = a \sin u$

Dann ist $\frac{dx}{du} = a \cos u$

oder $dx = a \cos u \, du$

Zur Zurückführung auf die ursprüngliche Veränderliche x brauchen Sie die Werte

$$\sin u = \frac{x}{a}$$

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$u = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \int \frac{\cos u}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}} du$$

$$= \frac{a}{a} \int \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} du$$

$$1 - \sin^2 u = \cos^2 u$$

$$= \int du$$

$$= u + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underline{\underline{\arcsin \frac{x}{a} + C}}$$

Mit der Substitution $x = a \cos u$ hätten Sie als Lösung: $-\arccos \frac{x}{a} + C$ gefunden. Die Übereinstimmung dieser beiden Lösungen haben Sie bereits kennengelernt (vgl. [3]).

Bei dem soeben behandelten Integral hätten Sie auch auf direktem Weg zum Ziel kommen können, indem Sie es durch Umformung auf das Grundintegral (11) zurückführen. Der Übersichtlichkeit halber sollen Sie sich auf einige wenige, möglichst vielseitig anwendbare Wege beschränken, wenn auch manchmal einzelne Integrale auf elegantere Art lösbar sind. Lediglich das zuletzt angeführte Integral soll noch einmal nach der angedeuteten Weise gelöst werden.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\ &= \frac{a}{a} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \arcsin u + C\end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}u &= \frac{x}{a} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{a} \\ dx &= a du\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underline{\underline{\arcsin \frac{x}{a} + C}} \left(= -\arccos \frac{x}{a} + C \right)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Auch in diesem Integral ist im Integrand der irrationale Ausdruck $\sqrt{a^2 - x^2}$ zu finden. Sie verwenden deshalb dieselbe Substitution.

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a^2 \sin u \cos u du}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}} \\ &= a \int \frac{\sin u \cos u du}{\cos u} \\ &= a \int \sin u du \\ &= -a \cos u + C \\ \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \underline{\underline{-\sqrt{a^2 - x^2} + C}}\end{aligned}$$

Der direkte Weg führt hier über die Substitution $u = a^2 - x^2$ oder $u = \sqrt{a^2 - x^2}$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} a \cos u du$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u \, du \\
&= a^2 \int \cos^2 u \, du
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist Ihnen im Unterabschnitt a) begegnet. Übertragen Sie die Lösung und ersetzen Sie dabei x durch u !

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C \\
&= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \\
\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \underline{\underline{\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C}}
\end{aligned}$$

β) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 + a^2}$

Die Irrationalität können Sie in diesem Fall durch Einführung einer hyperbolischen Funktion beseitigen. Die zum trigonometrischen Pythagoras analoge Beziehung lautet $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$. Multiplizieren Sie mit a^2 , so erhalten Sie

$$a^2 \cosh^2 u - a^2 \sinh^2 u = a^2$$

oder

$$a^2 \sinh^2 u + a^2 = a^2 \cosh^2 u$$

Setzen Sie in $\sqrt{x^2 + a^2}$ die Substitution $x = a \sinh u$ ein, dann können Sie die Wurzel zum Fortfall bringen.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 \sinh^2 u + a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u} \\
&= a \cosh u
\end{aligned}$$

Für die Substitution $x = a \sinh u$ ist $\frac{dx}{du} = a \cosh u$

$$dx = a \cosh u \, du$$

und umgekehrt $u = \operatorname{Ar} \sinh \frac{x}{a} = \ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$

$$\sinh u = \frac{x}{a}$$

$$\cosh u = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \cosh u \, du}{a \cosh u} \\
&= \int du = u + C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Ar} \sin \frac{x}{a} + C = \ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \ln a + C$$

Fassen Sie die Konstanten $-\ln a$ und C zu einer Konstanten C_1 zusammen, so lautet das Ergebnis

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \underline{\underline{\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C_1}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sin u \cos u du}{a \cos u}$$

$$= a \int \sin u du = a \cos u + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \underline{\underline{\sqrt{x^2 + a^2} + C}}$$

Auch hier kämen Sie durch die Substitution $u = \sqrt{x^2 + a^2}$ oder $u = \sqrt{x^2 + a^2}$ direkt zum Ziel.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \cos^2 u du$$

Die Lösung des rechts stehenden Integrals kennen Sie aus der Übung 31. Ersetzen Sie darin wieder x durch u , dann bekommen Sie

$$a^2 \int \cos^2 u du = \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{Ar} \sin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \underline{\underline{\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \sin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C \\ \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C_1 \end{array} \right\}}}$$

Auch hier wurde $-\ln a$ mit der Integrationskonstanten C zu einer Konstanten C_1 zusammengezogen.

γ) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 - a^2}$

Hier führt die Einführung der $\cos$ -Funktion zur Aufhebung des Wurzelzeichens.

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u &= a^2 \\ a^2 \cos^2 u - a^2 &= a^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

Setzen Sie in $\sqrt{x^2 - a^2}$ $x = a \cos u$, so wird

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \cos^2 u - a^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 u} \\ &= a \sin u \end{aligned}$$

Die weitere Berechnung verläuft analog der unter β).

Sie substituieren $x = a \cos u$

Damit wird $\frac{dx}{du} = -a \sin u$ $dx = -a \sin u du$

Weiterhin ist $u = \arccos \frac{x}{a} = \arccos \frac{1}{a} (x \pm \sqrt{x^2 - a^2})$

$$\cos u = \frac{x}{a}$$

$$\sin u = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{-a \sin u du}{-a \sin u} \\ &= \int du = u + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \arccos \frac{x}{a} + C = \arccos \frac{1}{a} (x \pm \sqrt{x^2 - a^2}) + C \\ &= \arccos (x \pm \sqrt{x^2 - a^2}) - \arccos a + C \end{aligned}$$

Fassen Sie wiederum $-\arccos a$ und C zu einer Konstanten C_1 zusammen, so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \underline{\underline{\arccos (x \pm \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{-a \sin u du \cdot a \cos u}{-a \sin u} \\ &= \int a \cos u du = a \sin u + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \underline{\underline{\sqrt{x^2 - a^2} + C}}$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = a^2 \int \sin^2 u \, du$$

In Übung 30 berechneten Sie $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x - x) + C$.

Ersetzen Sie hierin x durch u , so erhalten Sie

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \frac{a^2}{2} (\sin u \cos u - u) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \operatorname{Ar} \cos \frac{x}{a} \right) + C \\ \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \begin{cases} \frac{\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \cos \frac{x}{a} + C}{\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C_1} \end{cases} \end{aligned}$$

Auch hier wurde $-\ln a$ mit der Integrationskonstanten C zu einer Konstanten C_1 zusammengezogen.

Oft ist jedoch der Radikand nicht in der reinquadratischen Form gegeben. Sie können ihn aber leicht durch Einführung der quadratischen Ergänzung auf die Form der unter a), β) und γ) behandelten Integrale zurückführen.

Lehrbeispiel 36

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}} && \text{Substitution:} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 9}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 3^2}} && u = x - 2 \\ &= \operatorname{Ar} \sin \frac{u}{3} + C = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C_1 && \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} &= \operatorname{Ar} \sin \frac{x-2}{3} + C = \ln \left(x-2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13} \right) + C_1 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 37

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}} \\ &= \arcsin \frac{u}{3} + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \underline{\underline{\arcsin \frac{x-2}{3} + C}}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}u &= x - 2 \\ \frac{du}{dx} &= 1, \quad du = dx\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 38

Berechnen Sie $\int_2^5 \sqrt{x^2 - 4x + 20} \, dx$!

Lösung:

$$\int_2^5 \sqrt{x^2 - 4x + 20} \, dx = \int_2^5 \sqrt{(x-2)^2 + 16} \, dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{u^2 + 16} \, du$$

$$= \left[\frac{16}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + 16}) + \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 16} \right] \Big|_0^3$$

$$= 8 \ln 8 + \frac{3}{2} \cdot 5 - 8 \ln 4 - 0$$

$$= 8 \ln \frac{8}{4} + \frac{15}{2} = 8 \ln 2 + \frac{15}{2}$$

$$= 8 \cdot 0,6931 + 7,5 \approx 13,045$$

$$\int_2^5 \sqrt{x^2 - 4x + 20} \, dx = \underline{\underline{13,045}}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}u &= x - 2 \\ \frac{du}{dx} &= 1, \quad du = dx\end{aligned}$$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze

$$x = 2 \rightarrow u = 2 - 2 = 0$$

obere Grenze

$$x = 5 \rightarrow u = 5 - 2 = 3$$

Lehrbeispiel 39

Berechnen Sie $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}$!

Lösung:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(x+3)^2 + 4}}$$

Substitution:

$$u = x + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx$$

Im Zähler ergibt sich

$$x = u - 3$$

$$= \int \frac{(u-3) \, du}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale.

$$= \int \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 + 4}} - 3 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$= \sqrt{u^2 + 4} - 3 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{u}{2} + C$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 3 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x+3}{2} + C \\ \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 3 \ln(x+3 + \sqrt{x^2 + 6x + 13}) + C_1 \end{array} \right.$$

Übungen

Lösen Sie die Integrale:

49. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$

c) $\int \sqrt{6-2x-x^2} \, dx$

50. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+5}}$

c) $\int \sqrt{x^2+6x+15} \, dx$

51. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$

c) $\int \sqrt{x^2-10x+16} \, dx$

52. a) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{6-2x-x^2}}$

b) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+8x+32}}$

c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

53. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+18}}$

54. $\int_1^6 \sqrt{24+2x-x^2} \, dx$

55. $\int \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$

Zusammenfassung [8]

Durch die Einführung einer neuen Veränderlichen lassen sich schwierigere Integrale auf die Grundintegrale zurückführen. Bei der Substitution ist nicht nur x sondern auch dx umzurechnen.

Auf folgende Formen des Integranden können Sie die Substitutionsmethode anwenden:

Der Integrand ist die Funktion einer linearen Funktion der Veränderlichen:

$$f(x) = f[\varphi(ax + b)]$$

Substitution:

$$u = ax + b \quad dx = \frac{1}{a} du$$

Der Integrand enthält neben der Funktion auch noch die Ableitung dieser Funktion:

$$1. \quad f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Substitution:

$$u = \varphi(x) \quad du = \varphi'(x) dx$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + C$$

$$2. \quad f(x) = \varphi(x) \cdot \varphi'(x)$$

Substitution:

$$u = \varphi(x) \quad du = \varphi'(x) dx$$

$$\int \varphi(x) \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 + C$$

Der Integrand ist eine irrationale Funktion:

$$1. \text{ Der Integrand enthält } \sqrt{a^2 - x^2}$$

Substitution:

$$x = a \sin u \quad dx = a \cos u du$$

bzw.

$$x = a \cos u \quad dx = -a \sin u du$$

$$2. \text{ Der Integrand enthält } \sqrt{x^2 + a^2}$$

Substitution:

$$x = a \operatorname{Sin} u \quad dx = a \operatorname{Cos} u du$$

$$3. \text{ Der Integrand enthält } \sqrt{x^2 - a^2}$$

Substitution:

$$x = a \operatorname{Cos} u \quad dx = a \operatorname{Sin} u du$$

Zum Lösen von bestimmten Integralen mit Hilfe der Substitutionsmethode können zwei Wege beschritten werden:

1. Es wird zunächst das unbestimmte Integral gelöst. Die Grenzen werden erst wieder nach Einführen der ursprünglichen Veränderlichen berücksichtigt.
2. Die Grenzen werden mit Hilfe der Substitution umgerechnet und das bestimmte Integral für die neue Veränderliche und für die neuen Grenzen berechnet.

[9] Partielle Integration. Aus der Differentialrechnung kennen Sie den Differentialquotienten eines Produktes:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Integrieren Sie beide Seiten, so erhalten Sie

$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Das Integral auf der linken Seite können Sie sofort auswerten, denn der Integrand ist ein Differentialquotient. Sie wissen aber, daß sich Integrieren und Differenzieren gegenseitig aufheben.

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Durch Umformung bekommen Sie

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx} \quad (31)$$

oder kurz

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Das ist die Formel für die partielle Integration (Teil- oder Produktintegration).

Wie Sie in den folgenden Lehrbeispielen erkennen werden, wird die Integration durch diese Formel auf zwei Teilintegrationen zurückgeführt. Daher rührt auch der Name für dieses Verfahren.

Für das bestimmte Integral lautet die Formel entsprechend:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx &= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 40

Berechnen Sie $\int x \cdot \sin x dx$!

Lösung:

Ansatz: $f' = \sin x$ $g = x$

$$\begin{aligned} f &= \int \sin x dx & g' &= 1 \\ &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Lehrbeispiel 41

Berechnen Sie $\int x e^x dx$!

Lösung:

Setzen Sie in diesem Beispiel

$$f' = e^x$$

dann ist

$$f = \int e^x dx = e^x \text{ (1. Teilintegration)}$$

Weiter setzen Sie

$$g = x$$

Durch Differenzieren erhalten Sie

$$g' = 1$$

Nach Formel (31) wird

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x 1 dx$$

Die Integrationskonstante setzen Sie erst nach der Beendigung der letzten Integration ein. Die zweite Teilintegration liefert

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C = \underline{\underline{e^x(x - 1) + C}}$$

In den letzten beiden Beispielen haben Sie erkannt, daß Sie für f' jeweils die transzendente Funktion e^x bzw. $\sin x$ ansetzen mußten, weil sowohl f als zugehörige Integralfunktion als auch $\int f dx$ besonders einfach zu bilden sind, während Sie die lineare Funktion gleich g setzen. Damit wird g' gleich einer Konstanten (bei uns gleich 1) und das Integral $\int f g' dx$ kann gelöst werden, indem Sie das Integral von f bestimmen.

Würden Sie umgekehrt verfahren, also $f' = x$ setzen, dann wäre $f = \frac{1}{2} x^2$. Das auf der rechten Seite stehende Integral $\int f g' dx$ wäre komplizierter als das ursprüngliche geworden.

Lehrbeispiel 42

Berechnen Sie $\int x^n \ln x dx$

Voraussetzung: $n \neq -1$

Lösung:

Ansatz: $f' = x^n$

$$g = \ln x$$

$$f = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$g' = \frac{1}{x}$$

Hier wählen Sie deshalb $f' = x^n$ und $g = \ln x$, weil die Ableitung der logarithmischen Funktion eine rationale Funktion wie der andere Faktor f des Integranden $f g'$ auch ist, beide somit zu einer rationalen Funktion zusammengefaßt werden können, die leicht integrierbar ist.

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x} dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln x - 1] + C$$

Für $n = 0$ erhalten Sie:

$$\int \ln x \, dx = x (\ln x - 1) + C$$

Der Ausnahmefall $n = -1$ wurde bereits im Lehrbeispiel 34 des Abschnitts [8] durch Einführung einer neuen Veränderlichen gelöst. Sie können dieses Integral aber auch mit Hilfe der partiellen Integration behandeln, wie Ihnen nachstehend gezeigt wird.

Lehrbeispiel 43

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx$!

Lösung:

Ansatz: $f' = \frac{1}{x}$ $g = \ln x$

$f = \ln x$ $g' = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \ln x \, dx$$

Auf der rechten Seite erhalten Sie wieder das Ausgangsintegral. Bringen Sie es auf die linke Seite.

$$2 \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = (\ln x)^2$$

Dividieren Sie durch 2, und hängen Sie C an!

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Lehrbeispiel 34!

Fehlt ein zweiter Faktor im Integrand, so können Sie oft zum Ziel kommen, wenn Sie $f' = 1$ setzen, wie z. B. in Lehrbeispiel 44 und 45.

Lehrbeispiel 44

Berechnen Sie $\int \arcsin x \, dx$!

Lösung:

$$\text{Ansatz: } f' = 1 \qquad g = \arcsin x$$

$$f = x \qquad g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Das rechts stehende Integral haben Sie bereits gelöst [vgl. [8], d), α].

$$\int \arcsin x \, dx = \underline{\underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}}$$

Lehrbeispiel 45

Berechnen Sie $\int \arctg x \, dx$!

Lösung:

$$\text{Ansatz: } f' = 1 \qquad g = \arctg x$$

$$f = x \qquad g' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

Würde im Zähler des rechts stehenden Integrals noch der Faktor 2 vorhanden sein, so könnten Sie Formel (29) anwenden. Das aber läßt sich leicht erreichen, indem Sie den Faktor 2 im Zähler einfügen und zum Ausgleich das Integral mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren.

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{1+x^2}$$

$$\int \arctg x \, dx = \underline{\underline{x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}}$$

Bei verschiedenen anderen Integralen müssen Sie die partielle Integration mehrmals hintereinander durchführen, so z. B. im folgenden Lehrbeispiel 46.

Lehrbeispiel 46

Berechnen Sie $\int e^x x^3 \, dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Durchgang: } f' &= e^x & g &= x^3 \\ f &= e^x & g' &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\int e^x x^3 \, dx = e^x x^3 - 3 \int e^x x^2 \, dx$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Durchgang: } f' &= e^x & g &= x^2 \\ f &= e^x & g' &= 2x \end{aligned}$$

$$\int e^x x^3 dx = e^x x^3 - 3 \left(e^x x^2 - 2 \int e^x x dx \right)$$

Für das ganz rechts stehende Integral kennen Sie bereits die Lösung aus Lehrbeispiel 41.

$$\int e^x x^3 dx = e^x x^3 - 3 e^x x^2 + 6 e^x (x - 1) + C$$

$$\int e^x x^3 dx = \underline{\underline{e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C}}$$

Lehrbeispiel 47

Berechnen Sie $\int e^x \sin x dx$!

Lösung:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Durchgang: } f' &= e^x & g &= \sin x \\ f &= e^x & g' &= \cos x \end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Durchgang: } f' &= e^x & g &= \cos x \\ f &= e^x & g' &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

Wie Sie sehen, kommen Sie nach dem 2. Durchgang auf das Ausgangsintegral zurück. Die Lösung erhalten Sie, indem Sie die beiden Integrale auf der linken Seite vereinigen und durch den links auftretenden Zahlenfaktor dividieren.

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x \\ \int e^x \sin x dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}} \end{aligned}$$

Rekursionsformeln

Mitunter können Sie Integrale, deren Integrand durch die n -te Potenz einer Funktion gebildet wird, dadurch lösen, daß Sie durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration den Grad n schrittweise vermindern. Dieses Verfahren wird *Rekursion* genannt. Sie haben dieses Verfahren bereits in Lehrbeispiel 46 für den Integranden $e^x x^3$ kennengelernt. Vorausgesetzt wird, daß n eine positive ganze Zahl ist.

Es soll zunächst das Integral berechnet werden.

$$\int \cos^n x \, dx$$

Spalten Sie einen Faktor $\cos x$ ab, so erhalten Sie

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos x \cos^{n-1} x \, dx$$

$$f' = \cos x \quad g = \cos^{n-1} x$$

$$f = \sin x \quad g' = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x$$

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx$$

Auf Grund des trigonometrischen Pythagoras ist $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Setzen Sie das in den Integranden des rechten Integrals ein:

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

Multiplizieren Sie den Integranden aus, und zerlegen Sie das Integral in 2 Teilintegrale:

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

Das ganz rechts stehende Integral ist wieder gleich dem Ausgangsintegral auf der linken Seite. Bringen Sie es auf die linke Seite, so erhalten Sie, da $(n-1) + 1 = n$ ist,

$$n \int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

oder $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$ (32)

Das rechts verbleibende Integral hat im Integrand einen um 2 verminderten Exponenten. Wenden Sie die Rekursionsformel mehrfach hintereinander an, so können Sie den Exponenten immer auf 1 oder 0 reduzieren.

In ähnlicher Weise kann hergeleitet werden (auf den Beweis wird hier verzichtet):

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad (33)$$

Lehrbeispiel 48

$\int \cos^5 x \, dx$ ist zu berechnen.

Lösung:

Die 1. Anwendung der Rekursionsformel (32) führt auf $\cos^3 x \, dx$

$$n = 5 \quad n - 1 = 4 \quad n - 2 = 3$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x \, dx$$

Nochmaliges Anwenden von Formel (32) auf das rechts stehende Integral:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc} n = 3 & n - 1 = 2 & n - 2 = 1 \end{array} \\
 \int \cos^5 x \, dx &= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{15} \sin x \cos^2 x + \frac{8}{15} \sin x + C \\
 &= \frac{1}{15} \sin x (3 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 8) + C
 \end{aligned}$$

Sie können den gesamten Ausdruck auf eine trigonometrische Funktion, die Sinusfunktion, zurückführen, wenn Sie

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x$$

und $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

einsetzen.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x \, dx &= \frac{1}{15} \sin x (3 - 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x + 4 - 4 \sin^2 x + 8) + C \\
 &= \frac{1}{15} \sin x (15 - 10 \sin^2 x + 3 \sin^4 x) + C \\
 \int \cos^5 x \, dx &= \underline{\underline{\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C}}
 \end{aligned}$$

Kommen im Integranden die Potenzen $\sin^m x$ und $\cos^n x$ gleichzeitig vor, so haben Sie zwei Fälle zu unterscheiden.

- a) mindestens ein Exponent ist ungerade, und
- b) beide Exponenten sind gerade.

Die Behandlung dieser beiden Möglichkeiten lernen Sie in den folgenden Lehrbeispielen kennen.

Lehrbeispiel 49

Berechnen Sie $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$!

Lösung:

Der Exponent von $\sin x$ ist ungerade. Spalten Sie von $\sin^3 x$ einen Faktor $\sin x$ ab, so daß Sie erhalten

$$\begin{aligned}
 \sin^3 x &= \sin^2 x \sin x \\
 &= (1 - \cos^2 x) \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x \, dx \\
 &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

Substitution: $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$-du = \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx &= -\int (u^4 - u^6) \, du \\ &= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C\end{aligned}$$

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

Es kommt hier also darauf an, den Integranden so umzuformen, daß neben den Potenzen einer der beiden trigonometrischen Funktionen (hier der Kosinusfunktion), die andere (hier die Sinusfunktion) nur in der ersten Potenz als Faktor auftritt.

Lehrbeispiel 50

Berechnen Sie $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$!

Lösung:

In diesem Beispiel liegt der Fall *b* vor, beide Exponenten sind gerade. Drücken Sie hier mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras die eine der beiden trigonometrischen Funktionen restlos durch die andere aus. Selbstverständlich werden Sie die Funktion umwandeln, die den kleinsten Exponenten hat.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \, dx \\ &= \int \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \, dx\end{aligned}$$

Diese beiden Integrale können Sie nun aber unter Verwendung der Formel (32) lösen. Reduzieren Sie zunächst das rechts stehende Integral

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x \, dx$$

Damit erhalten Sie

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \cos^4 x \, dx - \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{5}{6} \int \cos^4 x \, dx \\ &= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{6} \int \cos^4 x \, dx \\ &= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx \right)\end{aligned}$$

Aus [8]a wissen Sie, daß $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$ ist. Dies eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} (x + \sin x \cos x) \right] + C \\ &= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{24} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{48} \sin x \cos x \\ &\quad + \frac{3}{48} x + C \\ \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{48} \sin x (-8 \cos^5 x + 2 \cos^3 x + 3 \cos x) + \frac{1}{16} x + C\end{aligned}$$

Hätte im Integranden $\sin^4 x$ gestanden, so müßten Sie dafür $(1 - \cos^2 x)^2$ setzen.

Versuchen Sie mit Hilfe der Formel (32) das Integral $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ ($n = -5$) zu berechnen, so erkennen Sie, daß das auf der rechten Seite stehende Integral die Form $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$ annimmt. Dieses Integral ist aber schwieriger als das Ausgangsintegral, denn der neue Exponent hat sich ja dabei „vergrößert“. Durchlaufen Sie jetzt die Formel rückwärts, setzen Sie rechts für $n - 2$ den Wert -5 ein, so kommen Sie links auf den günstigeren Exponenten -3 . Dieser Weg muß zur Lösung führen. Lösen Sie dazu Formel (32) nach dem rechts stehenden Integral auf.

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx &= -\frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \int \cos^n x \, dx \\ \int \cos^{n-2} x \, dx &= -\frac{1}{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n}{n-1} \int \cos^n x \, dx\end{aligned}$$

Jetzt soll der Exponent $n - 2$ aber eine negative Zahl sein. Setzen Sie darum $n - 2 = -m$ (m positiv) und dementsprechend

$$n = -m + 2$$

$$\text{und } n - 1 = -m + 1$$

Sie erhalten dann

$$\begin{aligned}\int \cos^{-m} x \, dx &= -\frac{1}{-m+1} \sin x \cos^{-m+1} x + \frac{-m+2}{-m+1} \int \cos^{-m+2} x \, dx \\ \boxed{\int \frac{dx}{\cos^m x} &= \frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}}\end{aligned}\quad (32a)$$

Aus (33) erhalten Sie durch entsprechende Umformung:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}}\quad (33a)$$

Lehrbeispiel 51

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$!

Lösung:

Sie wenden Formel (32a) an. Hier ist $m = 4$.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Das Integral $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ können Sie ebenfalls nach Formel (32a) berechnen.

Sie finden aber unter Grundintegral (10) bereits die Lösung $\operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C \\ &= \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

Beachten Sie, daß $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ist, so wird

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \underline{\underline{\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C}}$$

Übungen

Lösen Sie die Integrale:

56. $\int \arccos x \, dx$

57. $\int x^4 \ln x \, dx$

58. $\int_0^1 x^4 e^x \, dx$

59. $\int \sin^5 x \, dx$

60. $\int \cos^4 x \, dx$

61. a) $\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx$

b) $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

62. a) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

b) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$

[10] Integration nach Partialbruchzerlegung. Die letzte der allgemeinen Integrationsmethoden verwenden Sie, wenn der Integrand durch eine gebrochene rationale Funktion dargestellt wird, also die Form

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}$$

hat.

Nehmen Sie dabei den Grad n des Nenners größer als den des Zählers an, d. h., es soll $m < n$ sein. Wäre umgekehrt $m \geq n$ (unecht gebrochen), so können Sie durch Division $f(x)$ in einen ganzen rationalen Teil und einen (echt) gebrochenen rationalen Teil zerlegen (vgl. Lbf. IV/1, [3]). Den ersten Teil, die ganze rationale Funktion, können Sie aber integrieren, so daß auch diese Aufgabe auf die Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion zurückgeführt wird.

Die Integration der echt gebrochenen rationalen Funktion läßt sich erst dann durchführen, wenn der Integrand in eine Summe von einzelnen, einfacheren Brüchen (Teil- oder Partialbrüche) zerlegt worden ist.

Aus der Algebra wissen Sie (siehe auch Lehrbrief IV/1, [6]), daß sich jede ganze rationale Funktion in Linearfaktoren zerlegen läßt. So existiert die Identität

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = b_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln (Lösungen) der Gleichung

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = 0$$

sind.

a) Die Wurzeln x_1 bis x_n seien alle reell und voneinander verschieden

In diesem Fall läßt sich der Integrand immer in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)} \\ &= \frac{1}{b_n} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{N}{x - x_n} \right) \end{aligned}$$

wobei $A, B, \dots, N$ noch unbekannte Konstante sein sollen.

Den Faktor b_n des Nenners können Sie, wie im Absatz rechts geschehen, als $\frac{1}{b_n}$ vor die Teilbrüche setzen. Meist wird man ihn jedoch in einen der Teilbrüche mit einbeziehen, so daß die rechte Seite beispielsweise die Form

$$\frac{A}{b_n (x - x_1)} + \frac{B}{x - x_2} + \dots$$

annimmt.

Sie erkennen sofort, daß die rechts stehenden Teilbrüche das Produkt $b_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$ als Hauptnenner haben.

Nachdem die Konstanten $A, B, \dots, N$ bestimmt sind, bietet die Integration dann für Sie keine Schwierigkeiten mehr.

Lernen Sie gleich an einem Beispiel, wie Sie bei der Bestimmung von $A, B, \dots$ zu verfahren haben.

Lehrbeispiel 52

Berechnen Sie $\int \frac{3x^2 - 34x - 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} dx$

Lösung:

1. Sie stellen die Wurzeln der Gleichung 3. Grades fest.

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

Durch Probieren finden Sie $x_1 = 1$ als Wurzel. Die Division durch $(x - x_1) = (x - 1)$ führt zu der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln x_2 und x_3 sind.

$$\begin{array}{r}
 - \left| \begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 - 13x + 15) : (x - 1) = x^2 - 2x - 15 \\ x^3 - x^2 \end{array} \right. \\
 \hline
 - \left| \begin{array}{l} -2x^2 - 13x \\ -2x^2 + 2x \end{array} \right. \\
 \hline
 - \left| \begin{array}{l} -15x + 15 \\ -15x + 15 \end{array} \right. \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$
ergibt die Wurzeln

$$\underline{\underline{x_2 = 5}}$$

$$\underline{\underline{x_3 = -3}}$$

Mit diesen Werten erhalten Sie die Produktdarstellung

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x - 5)(x + 3)$$

2. Sie setzen die Partialbrüche an.

$$\frac{3x^2 - 34x - 1}{(x - 1)(x - 5)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 5} + \frac{C}{x + 3}$$

Sie multiplizieren mit dem Hauptnenner $(x - 1)(x - 5)(x + 3)$.

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 34x - 1 &= A(x - 5)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x - 5) \\
 &= Ax^2 - 2Ax - 15A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 - 6Cx + 5C
 \end{aligned}$$

Ordnen Sie jetzt auf der rechten Seite nach den einzelnen Potenzen von x .

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 34x - 1 &= (A + B + C)x^2 + (-2A + 2B - 6C)x \\
 &\quad + (-15A - 3B + 5C)
 \end{aligned}$$

Ein Satz der Algebra lehrt nun, daß diese Gleichheit für jeden beliebigen x -Wert nur bestehen kann, wenn die Koeffizienten der einzelnen Potenzen auf beiden Seiten jeweils gleich sind. Im vorliegenden Beispiel muß also

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= 3 \\
 -2A + 2B - 6C &= -34 \\
 -15A - 3B + 5C &= -1 \quad \text{sein.}
 \end{aligned}$$

Durch diesen *Koeffizientenvergleich* haben Sie 3 Bestimmungsgleichungen für die 3 unbekannten Werte A , B und C bekommen. Lösen Sie dieses Gleichungssystem auf, dann erhalten Sie

$$\underline{\underline{A = 2}} \quad \underline{\underline{B = -3}} \quad \underline{\underline{C = 4}}$$

und damit

$$\frac{3x^2 - 34x - 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} = \frac{2}{x - 1} - \frac{3}{x - 5} + \frac{4}{x + 3}$$

bzw.

$$\int \frac{3x^2 - 34x - 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} - 3 \int \frac{dx}{x-5} + 4 \int \frac{dx}{x+3}$$

$$= 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x-5| + 4 \ln|x+3| + C$$

Sie können in dem hier erläuterten Fall noch schneller zur Kenntnis der Zahlen A , B und C kommen. Setzen Sie im letzten Lehrbeispiel in dem Ausdruck

$$3x^2 - 34x - 1 = A(x-5)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-5)$$

nacheinander für x die Werte der berechneten Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ und $x_3 = -3$ ein, dann verschwinden jeweils zwei der Summanden der rechten Seite. Sie erhalten

$$\begin{aligned} 3 - 34 - 1 &= A(1-5)(1+3) \\ 75 - 170 - 1 &= B(5-1)(5+3) \\ 27 + 102 - 1 &= C(-3-1)(-3-5) \end{aligned}$$

Hieraus können Sie sehr leicht und schnell A , B und C berechnen.

$$\begin{aligned} -32 &= -16A \\ -96 &= 32B \\ 128 &= 32C \\ A &= 2 \\ B &= -3 \\ C &= 4 \end{aligned}$$

In den folgenden Beispielen und Übungen wenden Sie lieber das etwas längere aber dafür allgemeinere Verfahren an, denn es soll hier nicht darauf ankommen, möglichst „elegant“ zu arbeiten, sondern wenige und dafür vielseitig anwendbare Verfahren herauszuarbeiten.

Lehrbeispiel 53

Berechnen Sie $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx$

Lösung:

Zerlegung des Nenners:

$$\begin{aligned} x^3 - x &= x(x^2 - 1) \\ &= x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2 + 1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

Beachten Sie, daß das Glied mit x auf der linken Seite fehlt, also den Koeffizienten 0 hat. Der Koeffizient des quadratischen Gliedes ist 1.

$$\begin{array}{rcl} A + B + C & = & 1 \\ -B + C & = & 0 \\ -A & = & 1 \\ \hline A = -1 & B = 1 & C = 1 \end{array}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \\ \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\ln |x| + \ln |x+1| + \ln |x-1| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x} \right| + C \\ \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx &= \underline{\underline{\ln \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| + C}} \end{aligned}$$

b) Die Wurzeln $x_1, x_2, \dots$ seien reell, aber nicht alle voneinander verschieden

Lernen Sie den Ansatz zunächst bei einem quadratischen Nenner kennen.

$$\int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = ?$$

Zerlegung des Nenners:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ \underline{\underline{x_{1;2} &= 2}} \end{aligned}$$

also $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Es liegt eine Doppelwurzel vor. Wie Ihnen eine Probe beweist, führt die Partialbruchzerlegung in der Art, wie Sie sie im Fall a) vorgenommen haben, nicht zum Ziel.

In diesem Fall gilt der Ansatz:

$$\frac{4x - 5}{(x - 2)^2} = \frac{A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2}$$

Sie müssen hier neben der höchsten auftretenden Potenz des Faktors $(x - 2)$ auch noch alle ganzzahligen niedrigeren Potenzen ansetzen, denn $(x - 2)^2$ ist ja der Hauptnenner von $(x - 2)^2$ und von $(x - 2)$.

In unserer Aufgabe stimmt also der Hauptnenner der Teilbrüche der rechten Seite wieder mit dem Nenner der linken Seite überein.

Zur Bestimmung von A und B verfahren Sie wieder wie bei a), indem Sie mit dem Hauptnenner multiplizieren.

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= A + B(x - 2) \\ &= Bx + (A - 2B) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} + B &= 4 \\ A - 2B &= -5 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\underline{\underline{A = 3}} \quad \underline{\underline{B = 4}}$$

$$\frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{4}{x - 2}$$

$$\int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2} + 4 \int \frac{dx}{x - 2}$$

Substitution: $u = x - 2$

$$du = dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx &= 3 \int \frac{du}{u^2} + 4 \ln |x - 2| \\ &= -\frac{3}{u} + 4 \ln |x - 2| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = \underline{\underline{-\frac{3}{x - 2} + 4 \ln |x - 2| + C}}$$

Lehrbeispiel 54

Berechnen Sie $\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x + 3)^3} dx$!

Lösung:

Der Nenner liegt hier bereits in der Faktorenform vor.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 + 11x + 19}{(x + 3)^3} = \frac{A}{(x + 3)^3} + \frac{B}{(x + 3)^2} + \frac{C}{x + 3}$$

$x_1; 2; 3 = -3$ ist hier dreifache Wurzel, demnach müssen drei Teilbrüche (entsprechend der Vielfachheit) angesetzt werden. Dabei werden die Exponenten im Nenner jeweils um 1 vermindert.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 11x + 19 &= A + B(x + 3) + C(x + 3)^2 \\ &= Cx^2 + (B + 6C)x + (A + 3B + 9C) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} C &= 2 \\ B + 6C &= 11 \end{aligned}$$

$$A + 3B + 9C = 19$$

$$\underline{\underline{A = 4}} \quad \underline{\underline{B = -1}} \quad \underline{\underline{C = 2}}$$

$$\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3} dx = 4 \int \frac{dx}{(x+3)^3} - \int \frac{dx}{(x+3)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+3}$$

Substitution: $u = x + 3$

$$du = dx$$

$$\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3} dx = -\frac{2}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3} + 2 \ln |x+3| + C$$

Lehrbeispiel 55

Berechnen Sie $\int \frac{3x^2 + 3x + 32}{(3x+4)(x-2)^2} dx$!

Lösung:

In diesem Lehrbeispiel sind der Fall a) und Fall b) vereinigt.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 + 3x + 32}{(3x+4)(x-2)^2} = \frac{A}{3x+4} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 32 &= A(x-2)^2 + B(3x+4) + C(3x+4)(x-2) \\ &= Ax^2 - 4Ax + 4A \\ &\quad + 3Bx + 4B \\ &\quad + 3Cx^2 - 2Cx - 8C \end{aligned}$$

$$3x^2 + 3x + 32 = (A+3C)x^2 + (-4A+3B-2C)x + (4A+4B-8C)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A + \quad \quad + 3C &= 3 \\ -4A + 3B - 2C &= 3 \\ 4A + 4B - 8C &= 32 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{A = 3}} \quad \underline{\underline{B = 5}} \quad \underline{\underline{C = 0}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 3x + 32}{(3x+4)(x-2)^2} dx &= \int \frac{3dx}{3x+4} + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \ln |3x+4| - \frac{5}{x-2} + C \end{aligned}$$

Merken Sie sich: Tritt eine Wurzel x_1 in der Vielfachheit α auf, so müssen Sie α Teilbrüche ansetzen, deren Nenner durch die einzelnen Potenzen von $(x - x_1)$ gebildet werden. Dabei hat der erste Teilbruch den höchsten Exponenten α , während die folgenden einen jeweils um 1 verminderten Exponenten aufweisen.

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta} = \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-x_1)} \\ + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-x_2)}$$

Treten Fall a) und b) gemeinsam auf, so sind die Ansätze entsprechend nebeneinander durchzuführen (z. B. in Lehrbeispiel 55). Hat der Nenner den Grad n , so müssen in diesen beiden Fällen immer n Teilbrüche angesetzt werden.

c) Die Wurzeln $x_1, x_2, \dots$ seien komplex

Aus der Algebra wissen Sie, daß zu jeder komplexen Wurzel auch die konjugiert-komplexe Zahl Wurzel ist.

Ist also $x_1 = a + b i$ Wurzel, so ist es auch $x_2 = a - b i$. Beide Wurzeln erfüllen eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten. Um das Rechnen mit komplexen Zahlen zu vermeiden, trennen Sie in diesem Fall die quadratischen Faktoren

$$(x-x_1)(x-x_2) = (x-a-bi)(x-a+bi) = x^2 + p x + q$$

nicht weiter auf.

Das Verfahren soll wiederum an einem Beispiel gezeigt werden.

$$\int \frac{5x+4}{x^2-6x+13} dx = ?$$

Untersuchung des Nenners:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13}$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = 3 \pm 2i}}$$

Der Nenner ist hier nicht in lineare Faktoren zu zerlegen! Es muß nun Ihre Aufgabe sein, das Integral auf andere Weise zu zerlegen. Würde im Zähler $2x-6$ stehen (Ableitung des Nenners), so könnte das Integral sofort nach Formel (29) gelöst werden. Das aber läßt sich durch folgende Zerlegung erreichen:

$$\frac{5x+4}{x^2-6x+13} = \frac{5}{2} \frac{2x-6}{x^2-6x+13} + \frac{19}{x^2-6x+13}$$

Den Faktor vor dem ersten Bruch müssen Sie so wählen, daß das x -Glieder des Zählers mit dem des Nenners der linken Seite übereinstimmt, ohne daß Sie dabei zunächst Rücksicht auf das absolute Glied nehmen.

Mit dem Faktor $\frac{5}{2}$ hat der Zähler des 1. Bruches auf der rechten Seite den Wert

$$\frac{5}{2} (2x-6) = 5x-15$$

Die linke Seite schreibt aber den Zähler $5x + 4$ vor. Aus diesem Grund müssen Sie noch mit einem Teilbruch ausgleichen, dessen Zähler den Wert 19 hat. Fassen Sie zur Probe die beiden Teilbrüche wieder zusammen, so erhalten Sie im Zähler

$$\frac{5}{2}(2x - 6) + 19 = 5x + 4$$

Wenn Sie noch für den quadratischen Nenner des ganz rechts stehenden Teilbruches die quadratische Ergänzung bilden

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4$$

erhalten Sie

$$\int \frac{5x + 4}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 19 \int \frac{dx}{4 + (x-3)^2}$$

Nachdem Sie im Nenner des rechten Integrals den Faktor 4 ausgeklammert haben und die Substitution $u = \frac{x-3}{2}$, $dx = 2 du$, durchgeführt haben, können Sie Grundintegral (12) anwenden.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 4}{x^2 - 6x + 13} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + \frac{19}{4} \int \frac{2 du}{1 + u^2} \\ &= \frac{5}{2} \ln |x^2 - 6x + 13| + \frac{19}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} + C \\ \int \frac{5x + 4}{x^2 - 6x + 13} dx &= \frac{5}{2} \ln |x^2 - 6x + 13| + \frac{19}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 56

Berechnen Sie $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 10} dx$!

Lösung:

Auch in diesem Fall ergibt die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + 10 = 0$ zwei konjugiert-komplexe Wurzeln. Verfahren Sie wie im vorigen Beispiel, indem Sie den Integranden so in zwei Teilbrüche zerlegen, daß der erste im Zähler die Ableitung des Nenners aufweist, während in zweiten der bezüglich des absoluten Gliedes gemachte Fehler wieder ausgeglichen wird. Führen Sie dazu noch im zweiten Bruch die quadratische Ergänzung ein.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 2x + 10} &= \frac{1}{2} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 10} - \frac{1}{9 + (x+1)^2} \\ \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 10} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 10} - \int \frac{dx}{9 + (x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 10} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2} \end{aligned}$$

Substitution:

$$u = \frac{x+1}{3} \quad dx = 3 du$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 10} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 10| - \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+1}{3} + C$$

Lehrbeispiel 57

Berechnen Sie $\int \frac{10}{x^3 - 5x^2 + 17x - 13} dx$!

Lösung:

Zur Zerlegung des Nenners in Faktoren haben Sie die Gleichung 3. Grades $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ zu lösen. Durch Probieren finden Sie leicht die Wurzel $x_1 = 1$.

Dividieren Sie die kubische Gleichung durch $(x - 1)$, so erhalten Sie die Zerlegung:

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x - 1)(x^2 - 4x + 13)$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$ ergibt für x_2 und x_3 zwei konjugiert-komplexe Wurzeln. Demnach können Sie für den zweiten Faktor keine weitere Zerlegung in reelle lineare Faktoren vornehmen.

In diesem Lehrbeispiel sind also der Fall a) und c) vereinigt. Für die Partialbruchzerlegung haben Sie anzusetzen:

$$\frac{10}{(x-1)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+13}$$

Sie werden jetzt fragen, warum der Zähler des zweiten Teilbruches als linearer Ausdruck angesetzt werden muß. Die Antwort auf diese Frage können Sie sich selbst geben, wenn Sie die nächsten Schritte bereits einmal vorausschauend überblicken. Um die Werte von A , B und C zu bestimmen, müssen die beiden Teilbrüche wieder vereinigt werden. Dabei wird A mit dem Nenner des 2. Teilbruches und der Zähler des 2. Teilbruches mit dem Nenner des 1. Teilbruches multipliziert. Bei der Multiplikation von A mit $x^2 - 4x + 13$ entsteht aber ein quadratisches Glied, das nur dann wegfallen kann, wenn bei der Multiplikation des Zählers vom 2. Teilbruch mit $x - 1$ ebenfalls ein quadratisches Glied entsteht. Deshalb muß der Zähler des 2. Teilbruches als linearer Ausdruck $Bx + C$ angesetzt werden.

$$\begin{aligned} 10 &= A(x^2 - 4x + 13) + (Bx + C)(x - 1) \\ &= Ax^2 - 4Ax + 13A \\ &\quad + Bx^2 - Bx \\ &\quad + Cx - C \\ 10 &= (A + B)x^2 + (-4A - B + C)x + (13A - C) \end{aligned}$$

Als Koeffizienten für die auf der linken Seite fehlenden Potenzen von x müssen Sie den Wert 0 ansetzen.

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -4A - B + C &= 0 \\ 13A - C &= 10 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{A = 1}} \quad \underline{\underline{B = -1}} \quad \underline{\underline{C = 3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{10}{(x-1)(x^2-4x+13)} &= \frac{1}{x-1} + \frac{-x+3}{x^2-4x+13} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-4x+13} \end{aligned}$$

Auf den 2. Teilbruch wenden Sie die Zerlegung für den eben behandelten Fall c) an.

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{2x-4}{x^2-4x+13} + \frac{1}{x^2-4x+13}$$

Quadratische Ergänzung: $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$

$$\begin{aligned} \int \frac{10 dx}{(x-1)(x^2-4x+13)} &= \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + \int \frac{dx}{9+(x-2)^2} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+13| + \frac{1}{3} \arctg \frac{x-2}{3} + C \end{aligned}$$

Vollkommen analog haben Sie bei der Vereinigung der Fälle b) und c) bzw. a), b) und c) zu verfahren.

Übungen

$$63. \int \frac{2x-61}{x^2+5x-24} dx$$

$$64. \int \frac{3x^2+10x-17}{2x^3-14x-12} dx$$

$$65. \int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

$$66. \int \frac{4x-7}{x^2-6x+9} dx$$

$$67. \int \frac{2x+10}{x^2+10x+25} dx$$

$$68. \int \frac{3x+5}{x^2+2x+2} dx$$

$$69. \int \frac{4x-7}{x^2-10x+30} dx$$

$$70. \int \frac{7x^3-7x^2+17x+9}{(x^2-2x+1)(4x^2+4x+5)} dx$$

$$71. \int \frac{x+1}{x^2-4x+20} dx$$

Zusammenfassung [9] und [10]

Die Methode der partiellen Integration ist auf der Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung aufgebaut. Wie der Name sagt, wird die Integration eines Produktes auf zwei Teilintegrationen zurückgeführt.

Fehlt ein zweiter Faktor, so kann man sich an seiner Stelle $1 = x^0$ als Faktor denken.

Weist der Integrand Potenzen von Funktionen auf, so können durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration bzw. durch Aufstellung von Rekursionsformeln die Exponenten schrittweise vermindert werden.

Ist der Integrand eine gebrochene rationale Funktion, so wird er vor dem Integrieren in einfachere Teilbrüche zerlegt. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sich der Nenner in

- voneinander verschiedene, reelle Faktoren,
- in reelle, aber nicht voneinander verschiedene Faktoren und
- in komplexe Faktoren zerlegen läßt.

Im Fall c) findet, zur Vermeidung komplexer Werte, nur eine Zerlegung in quadratische Formen statt. Diese Teilbrüche mit quadratischem Nenner werden dann so in zwei Teile zerlegt, daß das erste Teilintegral im Zähler die Ableitung des Nenners aufweist, wobei durch Einschalten eines Zahl-faktors dafür gesorgt werden muß, daß das lineare Glied den gleichen Koeffizienten hat wie im unzerlegten Integral. Im 2. Teilintegral findet dann die Korrektur des absoluten Gliedes statt. Treten alle drei Fälle gleichzeitig auf, so sind für die jeweiligen Faktoren entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu a), b) oder c) die Teilbrüche anzusetzen.

3. Kapitel: Besondere Formen der Flächenberechnung

[11] Flächeninhalt in Polarkoordinaten. In den Lehrbriefen über analytische Geometrie und Differentialrechnung haben Sie gelernt, daß eine Kurve auch durch eine Funktion $r = r(\varphi)$ zwischen den Polarkoordinaten φ und r gegeben werden kann. Sie sollen nun den Inhalt der vom Radiusvektor r zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 (im Bogenmaß gemessen) überstrichenen Fläche F ermitteln.

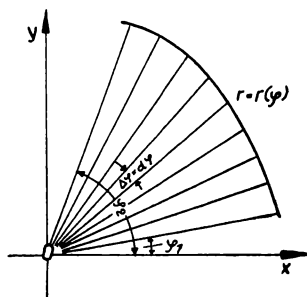


Bild 17

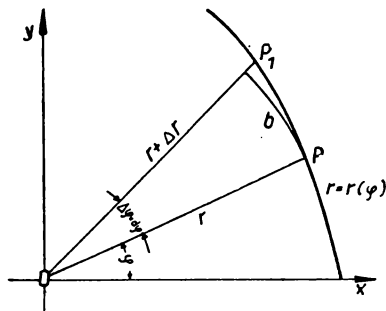


Bild 18

Teilen Sie dazu die Fläche in keilförmige Streifen mit dem Öffnungswinkel $\Delta \varphi = d\varphi$ (Bild 17).

Bild 18 stellt die Vergrößerung eines solchen Keiles dar. Wählen Sie $d\varphi$ genügend klein, so können Sie den Inhalt ΔF des Flächenelementes durch den Inhalt dF des Kreissektors mit dem Radius r und dem Bogen $b = r d\varphi$ ersetzen.

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} b \cdot r \\ &= \frac{1}{2} r^2 d\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi} \quad (34)$$

Lehrbeispiel 58

Berechnen Sie den Inhalt des Kreises mit dem Radius $r = a$!

Lösung:

Die Polargleichung des Kreises lautet: $r = \text{konst.} = a$

$$F = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \varphi \bigg|_0^{2\pi} = \underline{\underline{a^2 \pi}}$$

Lehrbeispiel 59

Berechnen Sie für den Kreis mit dem Mittelpunkt $(a; 0)$ und dem Radius a die vom Radiusvektor überstrichene Fläche, wenn φ von φ_1 bis φ_2 läuft (Bild 19).

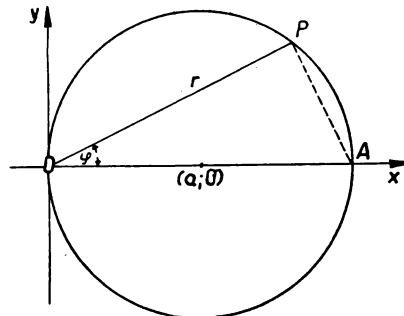


Bild 19

Lösung:

Im rechtwinkligen Dreieck OAP gilt: $\cos \varphi = \frac{r}{2a}$. Damit erhalten Sie die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten.

$$r = 2a \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt: } F &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi \\ &= 2 a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi\end{aligned}$$

Die Lösung des Integrals $\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + C$ erfolgte bereits in [8] a.

$$\begin{aligned}F &= a^2 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ &= a^2 (\varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1)\end{aligned}$$

Für $\varphi_1 = -\varphi_2$ folgt daraus speziell

$$F = 2 a^2 \int_{-\varphi_2}^{+\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \quad (\text{symmetrisch!})$$

$$F = 4 a^2 \int_0^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$F = 2 a^2 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \Big|_0^{\varphi_2}$$

$$F = 2 a^2 (\varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)$$

Zum gleichen Ergebnis kommen Sie, wenn Sie im vorherigen Ergebnis $\varphi_1 = -\varphi_2$ setzen und dabei bedenken, daß

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

ist.

Besonders wichtig ist diese Art der Flächenberechnung für Kurven höheren Grades, deren Gleichung sich in Polarkoordinaten sehr einfach darstellen läßt.

Archimedische Spirale

Eine Archimedische Spirale (Bild 20) erhalten Sie beispielsweise als Bewegungskurve der Laufkatze eines Drehkranes.

Zerlegen Sie die Bewegung in zwei Teilbewegungen:

a) Drehbewegung des Kranes.

Dreht sich der Arm des Kranes mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so hat er nach t Sekunden den Winkel $\varphi = \omega t$ überstrichen ($\omega = \text{konstant}$).

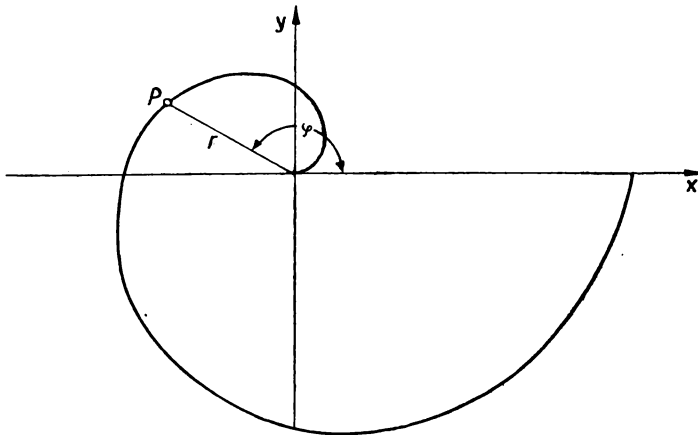


Bild 20

b) Geradlinige Bewegung der Laufkatze.

Bezüglich des Dreharmes bewegt sich die Laufkatze geradlinig mit der Geschwindigkeit c und legt so innerhalb von t Sekunden den Weg $r = c \cdot t$ Meter zurück ($c = \text{konstant}$).

$$\text{a) } \varphi = \omega t \qquad \text{b) } r = c \cdot t$$

Setzen Sie beide Bewegungen zusammen, indem Sie a) nach t auflösen und in b) einsetzen.

$$r = \frac{c}{\omega} \varphi$$

Allgemein lautet die **Gleichung für die Archimedische Spirale**

$$r = k \varphi \quad (k = \text{konstant})$$

Berechnen Sie die überstrichene Fläche, wenn der Kranarm die Anfangsstellung φ_1 und die Endstellung φ_2 hat.

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\varphi^3}{3} \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{c^2}{6 \omega^2} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3) \end{aligned}$$

Bei einer vollen Umdrehung ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$) wird die Fläche

$$F = \frac{c^2}{6 \omega^2} (8\pi^3 - 0)$$

$$F = \frac{4 c^2 \pi^3}{3 \omega^2}$$

überstrichen.

Lemniskate

Definition der Lemniskate: Die Lemniskate (Bild 21) ist der geometrische Ort aller Punkte, für die das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von den beiden festen Punkten $F_1(-a; 0)$ und $F_2(+a; 0)$ den konstanten Wert a^2 besitzt.

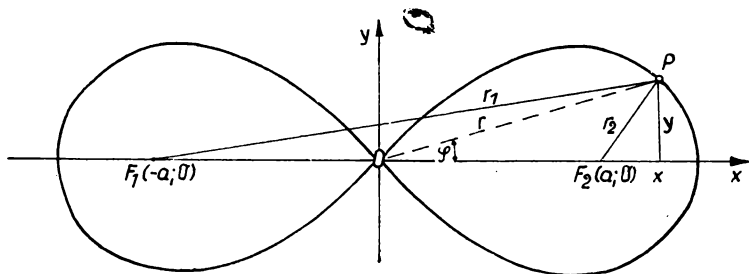


Bild 21

Wenden Sie auf die Dreiecke F_1OP und OF_2P (Bild 21) den Kosinussatz an, so erhalten Sie

$$\triangle F_1OP: \quad r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\pi - \varphi)$$

Da $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ ist, wird

$$r_1^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi$$

$$\triangle OF_2P: \quad r_2^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi$$

Die Definition der Lemniskate besagt: $r_1 r_2 = a^2$ oder $r_1^2 r_2^2 = a^4$

$$r_1^2 r_2^2 = (a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi)(a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi) = a^4$$

Multiplizieren Sie aus:

$$(a^2 + r^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \varphi = a^4$$

$$a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 - 4a^2 r^2 \cos^2 \varphi = a^4$$

$$r^4 - 2a^2 r^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) = 0$$

$$(2 \cos^2 \varphi - 1 = \cos 2 \varphi)$$

$$r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2 \varphi = 0$$

$$(\text{durch } r^2 \text{ dividieren})$$

Sie erhalten als **Gleichung der Lemniskate**

$$r^2 = 2a^2 \cos 2 \varphi$$

$$\text{Für } \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ ist } r = 0$$

$$\text{für } \varphi = 0 \text{ ist } r = a\sqrt{2}$$

$$\text{für } \varphi = +\frac{\pi}{4} \text{ ist } r = 0$$

Wenn also φ den Winkelraum zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ durchläuft, überstreicht demnach der Radiusvektor die rechte Lemniskatenschleife. Die

linke Schleife wird für $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$ überstrichen. Für alle anderen Werte von φ erhalten Sie keine reellen Werte für r , denn dafür ist $\cos 2\varphi$ negativ.

Bestimmen Sie nun den Flächeninhalt einer Lemniskatenschleife

$$F = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi$$

Substitution: $u = 2\varphi$

$$\frac{du}{d\varphi} = 2 \qquad d\varphi = \frac{1}{2} du$$

Umrechnung der Grenzen:

$$\text{Untere Grenze: } \varphi = 0 \rightarrow u = 0$$

$$\text{obere Grenze: } \varphi = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$F = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = a^2 \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{\underline{F = a^2}}$$

Übungen

72. Berechnen Sie für den Kreis mit dem Mittelpunkt $(6; 0)$ und dem Radius $r = 6$ die vom Radiusvektor überstrichene Fläche, wenn φ von $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$ bis $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ läuft!

73. Berechnen Sie den Inhalt der Kardioiden (Herzkurve) (vgl. Lehrbrief IV/2, [8] b)

$$r = 2a(1 - \cos \varphi)$$

[12] Flächen, deren Begrenzungskurve in Parameterdarstellung gegeben ist. Bei den technisch wichtigen Kurven (Zykloide, Evoluten usw.) ist die Parameterdarstellung wesentlich einfacher als die explizite Darstellung. Insbesondere erleichtert sich dabei erheblich die Differentiation und Integration.

Wie ist nun der von einer Kurve eingeschlossene Flächeninhalt zu berechnen, die in der Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben ist.

(Statt der Funktionssymbole $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ schreiben Sie in üblicher Weise $x(t)$ und $y(t)$.)

Für den Flächeninhalt der vom Radiusvektor überstrichenen Fläche gilt (34)

$$F = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$$

Zwischen den kartesischen Koordinaten x , y und den Polarkoordinaten besteht die Beziehung

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Sind nun x und y als Funktionen von t gegeben, so hängt infolge der Beziehung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ auch φ bzw. $\operatorname{tg} \varphi$ von t ab. Demnach können Sie beide Seiten von $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ nach t differenzieren und erhalten, wenn Sie für $\frac{d y}{d t}$ und $\frac{d x}{d t}$ kurz $\dot{y}$ bzw. $\dot{x}$ schreiben:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d \varphi}{d t} = \frac{\dot{y} x - y \dot{x}}{x^2}$$

Setzen Sie in den Nenner $x = r \cos \varphi$ ein:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d \varphi}{d t} = \frac{\dot{y} x - y \dot{x}}{r^2 \cos^2 \varphi}$$

Nach der Multiplikation mit $r^2 \cos^2 \varphi$ bekommen Sie

$$r^2 \cdot \frac{d \varphi}{d t} = \dot{y} x - y \dot{x}$$

oder

$$r^2 \cdot d \varphi = (\dot{y} x - y \dot{x}) d t$$

Setzen Sie diesen Wert in (34) für $r^2 d \varphi$ ein, so ergibt sich als Flächeninhalt einer vom Radiusvektor überstrichenen Fläche, deren Begrenzungskurve in der Parameterdarstellung gegeben ist:

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y} x - y \dot{x}) d t \quad (34a)$$

Stellt $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine geschlossene Kurve dar, ist also $x(t_2) = x(t_1)$ und $y(t_2) = y(t_1)$, so gibt (34a) den Flächeninhalt innerhalb der Kurve. Durchläuft nämlich t den Bereich von t_1 bis t_2 , so wird die im Bild 22 doppelt schraffierte Fläche vom Radiusvektor zweifach, und zwar jeweils in verschiedener Richtung, überstrichen. Der Flächeninhalt erscheint dabei einmal positiv und einmal negativ, hebt sich also auf.

Wollen Sie die Fläche unter einer Kurve berechnen, so kann dies sowohl für die zwischen Kurve und x -Achse als auch für die zwischen Kurve und y -Achse liegende Fläche erfolgen.

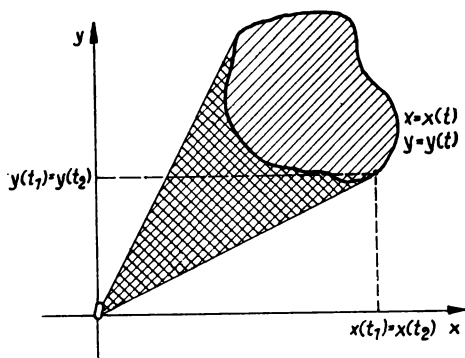


Bild 22

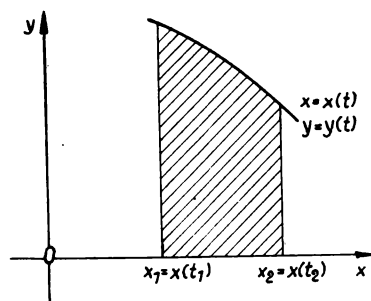


Bild 23

Das Integral $\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$ stellt, wie Sie wissen, die Fläche zwischen der Kurve $y = y(x)$ [statt $f(x)$ wurde hier $y(x)$ geschrieben] und der x -Achse dar (Bild 23).

Führen Sie hier $x = x(t)$ im Sinne einer Substitution ein, so wird, wenn für $y[x(t)]$ kurz $y(t)$ geschrieben wird

$$F = - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt$$

oder mit $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

$$F = - \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt \quad (35a)$$

Das Minuszeichen vor dem Integral macht sich erforderlich, damit beim mathematisch positiven Durchlaufen der Begrenzungskurve auch der Flächeninhalt positiv erscheint.

Entsprechend stellt das Integral $\int_{y_1}^{y_2} x(y) dy$ den Flächeninhalt zwischen Kurve und der y -Achse dar (Bild 24). Die Substitution $y = y(t)$ ergibt dann analog Formel (35a)

$$F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} dt \quad (35b)$$

Ist die Begrenzungskurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ wiederum eine geschlossene Kurve, dann ergeben (35a) und (35b) ein und denselben von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt (vgl. Bild 25 und 26).

Es ist also nach (35b) $F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} dt$

und nach (35a) $F = - \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt$

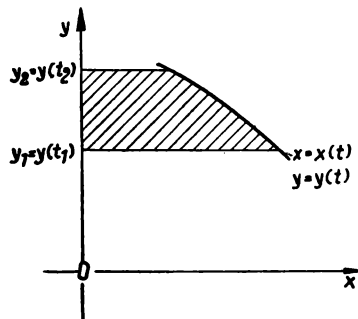


Bild 24

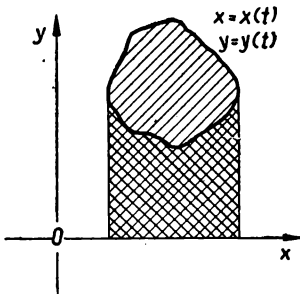


Bild 25

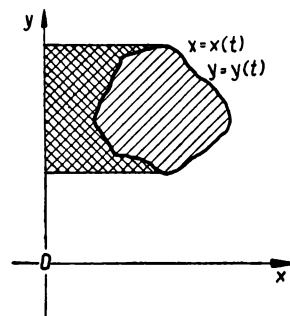


Bild 26

Addieren Sie beide Formeln, so erhalten Sie

$$2 F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} dt - \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt$$

oder

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y} x - y \dot{x}) dt$$

Das aber ist die Ihnen schon bekannte Formel (34a) für die von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fläche, bzw. für die vom Radiusvektor überstrichene Fläche.

Lehrbeispiel 60

Berechnen Sie den Sektor OSP_0 der gleichseitigen Hyperbel, die in der Parameterdarstellung

$$x = a \operatorname{Cof} t, \quad y = a \operatorname{Sin} t$$

gegeben ist (Bild 27)!

Lösung:

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{Sin} t & y &= a \operatorname{Cof} t \\ \dot{x} &= a \operatorname{Cof} t & \dot{y} &= a \operatorname{Sin} t \\ \dot{y} x - y \dot{x} &= a^2 (\operatorname{Cof}^2 t - \operatorname{Sin}^2 t) & (\operatorname{Cof}^2 t - \operatorname{Sin}^2 t &= 1) \\ &= a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} (\dot{y} x - y \dot{x}) dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{t_0} dt \\ \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{\frac{a^2}{2} t_0}} \end{aligned}$$

Für $a = 1$ wird $F = \frac{1}{2} t_0$ oder $t_0 = 2 F$

Damit ist t_0 gleich dem doppelten Flächeninhalt des Hyperbelsektors OSP_0 . (Das wurde bereits im Lehrbrief IV/2, [10]a, behauptet, konnte aber seinerzeit noch nicht bewiesen werden.)

Wollen Sie also den Flächeninhalt bestimmen, so brauchen Sie bei gegebenem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ nur aus $x = a \operatorname{Cof} t$ oder $y = a \operatorname{Sin} t$ den Wert t_0 berechnen:

$$t_0 = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{x_0}{a} \quad \text{oder} \quad t_0 = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{y_0}{a}$$

Wollen Sie dieselbe Aufgabe mit Polarkoordinaten lösen, so müssen Sie zunächst die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ in Polarkoordinaten umschreiben.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \\ r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi &= a^2 \\ r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) &= a^2 & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi &= \cos 2 \varphi \\ r^2 &= \frac{a^2}{\cos 2 \varphi} \end{aligned}$$

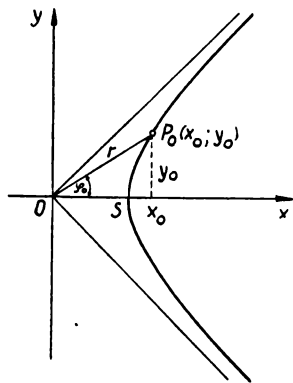


Bild 27

Anwendung der Formel (34):

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}$$

Dieses Integral können Sie auf das in [8]b berechnete Integral $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$ zurückführen, indem Sie $u = 2\varphi$ setzen.

$$\frac{du}{d\varphi} = 2 \quad d\varphi = \frac{1}{2} du$$

Untere Grenze $\varphi = 0 \quad u = 2 \cdot 0 = 0$

Obere Grenze $\varphi = \varphi_0 \quad u = 2\varphi_0$

$$\begin{aligned} F &= \frac{a^2}{4} \int_0^{2\varphi_0} \frac{du}{\cos u} \\ &= \frac{a^2}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| \Big|_0^{2\varphi_0} \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0 \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| \right) \quad \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 0 \\ F &= \frac{a^2}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0 \right) \right| \end{aligned}$$

Der zum Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gehörige Winkel φ_0 läßt sich aus der Beziehung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ berechnen:

$$\varphi_0 = \arctg \frac{y_0}{x_0}$$

Lehrbeispiel 61

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Astroide, wenn die Gleichung der Astroide in Parameterform

$$x = \varrho \cos^3 t \quad y = \varrho \sin^3 t$$

lautet!

Lösung:

Sie bilden $\dot{x} = -3 \varrho \cos^2 t \sin t$

$$\dot{y} = 3 \varrho \sin^2 t \cos t$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{y} x - y \dot{x} &= 3 \varrho^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) \\ &= 3 \varrho^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3 \varrho^2 \sin^2 t \cos^2 t \end{aligned}$$

Nun ist aber $2 \sin t \cos t = \sin 2 t$ oder $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2 t$ und demnach

$$\dot{y} x - y \dot{x} = \frac{3}{4} \varrho^2 \sin^2 2 t$$

Jetzt haben Sie den Integrand soweit umgeformt, daß Sie ihn integrieren können. Eine volle Astroide wird beschrieben, wenn der Winkel $t (= \varphi)$ die Werte von 0 bis 2π durchläuft:

$$\text{für } t = 0 \quad \text{ist} \quad x = \varrho \quad \text{und} \quad y = 0$$

$$\text{für } t = 2 \pi \text{ ist ebenfalls } x = \varrho \quad \text{und} \quad y = 0$$

Damit ist aber die Bedingung $x(t_1) = x(t_2)$ und $y(t_1) = y(t_2)$ d. h. hier $x(0) = x(2 \pi)$ und $y(0) = y(2 \pi)$ erfüllt.

$$F = \frac{3}{8} \varrho^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2 t \, dt$$

$$= \frac{3}{16} \varrho^2 \int_0^{4\pi} \sin^2 u \, du$$

$$= \frac{3 \varrho^2}{32} (u - \sin u \cos u) \Big|_0^{4\pi}$$

$$= \frac{3 \varrho^2}{32} 4 \pi$$

$$\underline{\underline{F = \frac{3 \varrho^2 \pi}{8}}}$$

Substitution:

$$u = 2 t$$

$$\frac{du}{dt} = 2 \quad dt = \frac{1}{2} du$$

$$\text{untere Grenze } t = 0 \quad u = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{obere Grenze } t = 2 \pi \quad u = 2 \cdot 2 \pi = 4 \pi$$

Zusammenfassung:

Die Flächenberechnung durch Integration kann auch erfolgen, wenn die Begrenzungskurve in Polarkoordinaten oder in Parameterform gegeben ist.

Für Polarkoordinaten gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi$$

Für die Darstellung in Parameterform gilt:

a) Für die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse

$$F = - \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} \, dt$$

b) Für die Fläche zwischen der Kurve und der y -Achse

$$F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} dt$$

c) Für die von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fläche

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y} x - y \dot{x}) dt$$

In diesem Lehrbrief haben Sie nun die Integralrechnung zunächst rein „handwerksmäßig“ kennengelernt. Als Anwendung fanden Sie dabei lediglich die Bestimmung von Flächeninhalten. Der nächste Lehrbrief wird Ihnen das Tor zu den vielseitigen anderen Anwendungen öffnen.

Fast überall hat die Integralrechnung ihren Einzug gehalten, wie in der Mechanik und Festigkeitslehre, in der Elektrotechnik, im Maschinenbau usw. Der Schlüssel für dieses Tor ist aber die gründliche Beherrschung dieser mathematischen Disziplin. Die Integralrechnung erscheint dem Anfänger zunächst fast unergründlich in der Vielgestaltigkeit ihrer Ansätze. Aber durch die Erfahrung, erworben durch unermüdliches Üben, werden Sie sich einen Überblick über dieses gewaltige Gebiet verschaffen. Hüten Sie sich davor, nur schematisch zu arbeiten! Legen Sie vor sich selbst über jeden Schritt Rechenschaft ab. Durchdenken Sie vorher jeden Schritt. Ergreifen Sie jede Möglichkeit zur Übung. Leider lassen sich nicht alle Integrale exakt lösen. Durch Näherungsverfahren, die Sie u. a. im nächsten Lehrbrief kennenlernen werden, können solche Integrale mit jeder gewünschten Genauigkeit angenähert werden.

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

Für das zu lösende Integral wird im folgenden stets J geschrieben, die Integrationskonstante ist überall fortgelassen worden.

1. a) $J = \frac{x^4}{4}$ b) $J = \frac{x^8}{8}$ c) $J = \frac{x^6}{6}$ d) $J = \frac{x^9}{9}$
2. a) $J = -\frac{1}{3x^3}$ b) $J = -\frac{1}{x}$ c) $J = -\frac{1}{6x^6}$ d) $J = \ln |x|$
3. a) $J = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$ b) $J = \frac{5}{7} x \sqrt[5]{x^2}$ c) $J = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$ d) $J = \frac{3}{11} x^3 \sqrt[3]{x^2}$
4. a) $J = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$ b) $J = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ c) $J = \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x}$ d) $J = -\frac{2}{\sqrt{x}}$
5. a) $J = x^5 - x^3 - x^2 + 3x$ b) $J = \frac{x^6}{3} - \frac{3}{2} x^4 - \frac{5}{2} x^2 - 2x$
6. a) $J = 2x + 3 \ln |x| + \frac{4}{x}$ b) $J = x^2 + 4 \ln |x| + \frac{1}{x^2}$

$$7. \text{ a) } J = x + \frac{6}{5} x \sqrt[3]{x^2} \quad \text{b) } J = \frac{8}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \sqrt{x}$$

$$8. \text{ a) } J = \frac{21}{5} x \sqrt[3]{x^2} - 6 \sqrt[3]{x} \quad \text{b) } J = + \frac{13}{3 \sqrt{x}}$$

$$9. \text{ a) } J = \frac{x^5}{5} - 2 x^3 + 9 x \quad \text{b) } J = \frac{x^8}{8} - x^4 + 4 \ln |x|$$

$$10. \text{ a) } J = -2 \operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{tg} x \quad \text{b) } J = \frac{5}{7} \operatorname{Zg} x + \frac{4}{3} \operatorname{Utg} x$$

$$11. \quad J_1 = \frac{104}{3} \text{ bzw. } J_2 = -\frac{104}{3}, \text{ d. h. } J_1 = -J_2$$

$$12. \text{ a) } J = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \bigg|_2^4 = 116 \quad \text{b) } J = \operatorname{tg} x \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{c) } J = (-\operatorname{ctg} x) \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{d) } J = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \bigg|_0^{\frac{3}{4}} = \ln 2 = 0,6931$$

$$\text{e) } J = \arcsin x \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} = 0,52360$$

$$13. \quad J = \ln x \bigg|_1^3 = \ln 3 = 1,0986$$

$$14. \quad J = e^b - 1$$

$$15. \quad J = \frac{2}{3} x_1 y_1 \left(\frac{2}{3} \text{ des umschließenden Rechtecks} \right)$$

16. Die Gleichung der oberen Begrenzungskurve ist (Nullpunkt in die linke untere Ecke gelegt):

$$y = a + \frac{4(h-a)}{l} x - \frac{4(h-a)}{l^2} x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Querschnittsfläche } F &= \left(a x + \frac{2(h-a)}{l} x^2 - \frac{4(h-a)}{3 l^2} x^3 \right) \bigg|_0^l \\ &= \frac{l}{3} (2h + a) \end{aligned}$$

$$\text{Gewicht} \quad G = \frac{l \cdot d \cdot \gamma}{3} (2h + a)$$

17. Die Schnittpunkte der Parabel mit der x -Achse sind

$$x_1 = a = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = b = +1$$

Flächeninhalt $F = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^1 = \frac{32}{3}$

$$18. \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ = F(c) - F(a) \\ = \int_a^c f(x) dx$$

$$19. \int_{\text{bel.}}^x f(x) dx = F(x) - F(\text{bel.}) \quad -F(\text{bel.}) = C \\ = F(x) + C$$

20. Alle drei Integrale ergeben den Wert 0.

Beachten Sie dabei: $\cos(-a) = \cos a$

$$\cos(-a) = \cos a$$

21. Das Integral besitzt keinen endlichen Wert, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = -\infty$

22. Das Integral besitzt für

a) $-n+1 > 0$ bzw. $n < +1$ einen endlichen Wert

b) $-n+1 < 0$ bzw. $n \geq +1$ einen unendlichen Wert

23. Das Integral besitzt für

a) $-n+1 < 0$ bzw. $n > +1$ einen endlichen Wert

b) $-n+1 \geq 0$ bzw. $n \leq +1$ einen unendlichen Wert

24. a) $J = 1$ b) $J = 2$ c) $J = \infty$

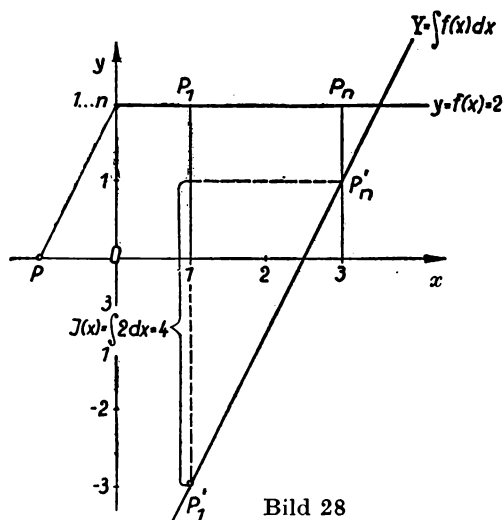


Bild 28

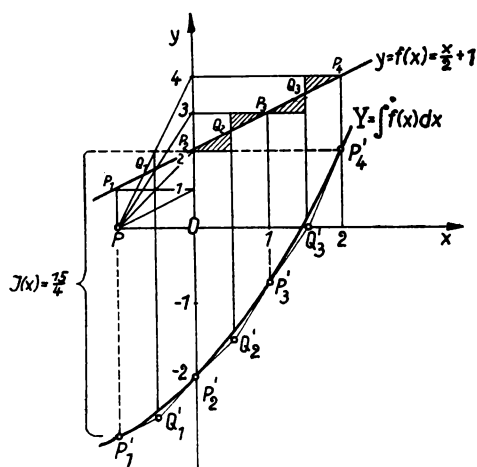


Bild 29

25. a) Bild 28 $\int_1^3 2 dx = 4$

b) Bild 29 $\int_{-1}^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right) dx = \frac{15}{4}$

c) Bild 30 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = -1$

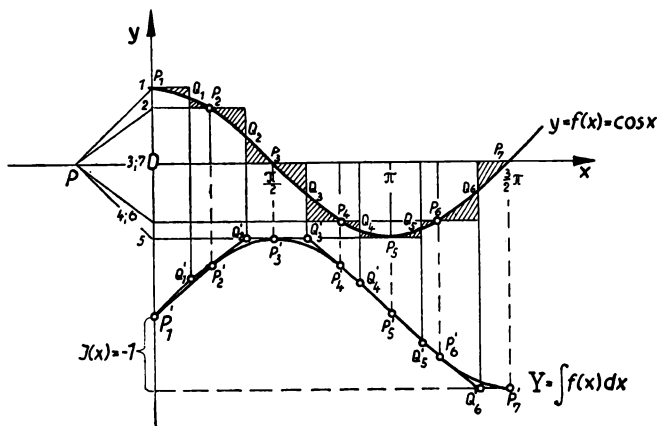


Bild 30

26. a) $J = \frac{1}{16} (4x - 7)^4$

b) $J = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right)$

c) $J = -\frac{1}{15} (4 - 3x)^5$

27. a) $J = -\frac{1}{4(2x + 3)^2}$

b) $J = -\frac{1}{3} \ln |5 - 3x|$

c) $J = \frac{1}{4 - x}$

28. a) $J = \frac{2}{25} \sqrt{(5x - 1)^5} = \frac{2}{25} (5x - 1)^2 \sqrt{5x - 1}$

b) $J = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2x + 1}$

c) $J = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(3 - x)^2}$

29. a) $J = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x - 1)$

b) $J = \frac{1}{a} \operatorname{Cot}(ax + b)$

c) $J = \operatorname{Cot}(2 - x)$

30. $J = \frac{1}{2} (\operatorname{Sin} x \operatorname{Cot} x - x)$

$$31. \quad J = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)$$

$$32. \quad J = \frac{1}{4} [2x + 3 - \sin(2x + 3) \cos(2x + 3)]$$

$$33. \quad J = \frac{1}{2} x - 3 + \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) \cos\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

$$34. \quad J = \int \sin^2 m \cdot x \, dx = \frac{1}{2m} (mx - \sin mx \cos mx)$$

$$35. \text{ a) } J = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) \quad \text{für } m \neq n$$

$$J = -\frac{1}{4m} \cos 2mx \quad \text{für } m = n$$

$$\text{b) } J = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) \quad \text{für } m \neq n$$

$$J = \frac{1}{2m} (mx + \sin mx \cos mx) \quad \text{für } m = n$$

$$36. \quad J = \ln |e^x + x|$$

$$37. \quad J = \ln |x^4 - 9x^2 + 1|$$

$$38. \quad J = \ln |x^2 - 5x + 2|$$

$$39. \quad J = \ln |\arctg x|$$

$$40. \quad J = -\ln |\cos x| + \ln |\sin x| = \ln |\tg x|$$

$$41. \text{ a) } J = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{Im} x| \quad \text{b) } J = \ln \left| \operatorname{Im} \frac{x}{2} \right|$$

$$42. \quad J = \ln \cos x + \ln |\sin x| = \ln |\sin x \cos x|$$

$$= \ln \frac{1}{2} |\sin 2x|$$

$$= \ln |\sin 2x| - \ln 2 + C$$

$\ln 2$ mit in die Integrationskonstante einbeziehen!

$$J = \ln |\sin 2x| + C_1$$

43. Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, denn es ist

$$\frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2}$$

Die additive Konstante ist also $\frac{1}{2}$.

Beide Ergebnisse können Sie auch in ein Ergebnis zusammenfassen:

$$\left. \begin{aligned} \int \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \sin^2 x + C \\ \int \sin x \cos x \, dx &= -\frac{1}{2} \cos^2 x + C \end{aligned} \right| +$$

$$2 \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} (\sin^2 x - \cos^2 x) + C$$

$$\text{oder} \quad \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{4} (\sin^2 x - \cos^2 x) + C$$

$$44. \quad J = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$$

$$45. \quad J = \frac{1}{2} \operatorname{Sin}^2 x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \operatorname{Cos}^2 x \quad (\text{Vergleichen Sie dazu die Überlegungen zu Übung 43!})$$

$$46. \quad J = -\frac{1}{2} \operatorname{Ctg}^2 x$$

$$47. \quad J = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$$

$$48. \quad J = \frac{1}{2} (\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x)^2$$

$$49. \text{ a) } J = \operatorname{arc} \sin \frac{x+3}{4} \qquad \text{b) } J = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{c) } J = \frac{7}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + \frac{x+1}{2} \sqrt{6-2x-x^2}$$

$$50. \text{ a) } J = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} (x-1) = \ln (x-1 + \sqrt{x^2-2x+2})$$

$$\text{b) } J = \frac{1}{3} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{3x+1}{2} = \frac{1}{3} \ln (3x+1 + \sqrt{9x^2+6x+5})$$

$$\text{c) } J = 3 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x+3}{\sqrt{6}} + \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2+6x+15}$$

(oder in der entsprechenden logarithmischen Form)

$$51. \text{ a) } J = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x-3}{3} = \ln (x-3 \pm \sqrt{x^2-6x})$$

$$\text{b) } J = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{2x+1}{2} = \frac{1}{2} \ln (2x+1 \pm \sqrt{4x^2+4x-3})$$

$$\text{c) } J = \frac{9}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x-5}{3} + \frac{x-5}{2} \sqrt{x^2-10x+16}$$

$$52. \text{ a) } J = -\sqrt{6-2x-x^2} - \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{7}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } J &= \sqrt{x^2+8x+32} - 4 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x+4}{4} \\ &= \sqrt{x^2+8x+32} - 4 \ln (x+4 + \sqrt{x^2+8x+32}) \end{aligned}$$

$$c) J = \sqrt{x^2 - 4x} + 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Co} \left| \frac{x-2}{2} \right| = \sqrt{x^2 - 4x} + 2 \ln (x-2) \pm \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$53. J = \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 3^2}} \quad \text{Substitution: } x-3 = u \quad \frac{dx}{du} = 1$$

$$J = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \left| \frac{x-3}{3} \right|_3^7 = \ln (x-3 + \sqrt{x^2 - 6x + 18}) \Big|_3^7 = \ln 9 - \ln 3$$

$$54. J = \int_1^6 \sqrt{5^2 - (x-1)^2} dx \quad \text{Substitution: } x-1 = u \quad \frac{dx}{du} = 1$$

$$J = \left(\frac{25}{2} \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{x-1}{2} \sqrt{24 + 2x - x^2} \right) \Big|_1^6$$

$$= \frac{25}{2} \arcsin 1 = \frac{25\pi}{4}$$

$$55. \text{ Substitution: } x = a \sin u \quad dx = a \cos u du$$

$$\text{Benutzen Sie zur Umrechnung } \sin u = \frac{x}{a}$$

$$\cos u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$J = x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$56. J = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$$

$$57. J = \frac{x^5}{25} (5 \ln x - 1)$$

$$58. J = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \Big|_0^1 = 9e - 24$$

$$59. J = \frac{1}{15} \cos x (-3 \sin^4 x - 4 \sin^2 x - 8)$$

$$60. J = \frac{1}{48} \sin x (8 \cos^5 x + 10 \cos^3 x + 15 \cos x) + \frac{5}{16} x$$

$$61. a) J = -\frac{1}{2} \cos^6 x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{5} \cos^4 x \right) + C$$

$$b) J = \sin^5 x \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{1}{9} \sin^4 x \right) + C$$

$$62. a) J = -\frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$b) J = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$63. J = 7 \ln |x+8| - 5 \ln |x-3|$$

64. Zerlegung des Nenners: $2x^3 - 14x - 12 = 2(x+1)(x+2)(x-3)$

$$\frac{3x^2 + 10x - 17}{2(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{x+1} - \frac{5}{x+2} + \frac{2}{x-3} \right)$$

$$= \frac{3}{x+1} - \frac{5}{2(x+2)} + \frac{1}{x-3}$$

Integral $J = 3 \ln |x+1| - \frac{5}{2} \ln |x+2| + \ln |x-3|$

65. $J = \frac{1}{2a} \ln |x-a| - \frac{1}{2a} \ln |x+a| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$

66. $J = -\frac{5}{x-3} + 4 \ln |x-3|$

67. $J = 2 \ln |x+5|$

Der Integrand kann durch $(x+5)$ gekürzt werden!

68. $J = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + 2 \arctg(x+1)$

69. $J = 2 \ln |x^2 - 10x + 30| + \frac{13}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x-5}{\sqrt{5}}$

70. Nenner: $(x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4x + 5) = (x-1)^2(4x^2 + 4x + 5)$

Integral $J = 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{7x-1}{4x^2+4x+5} dx$

$$= -\frac{2}{x-1} + \frac{7}{8} \ln |4x^2 + 4x + 5| - \frac{9}{8} \arctg \frac{2x+1}{2}$$

71. $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 20| + \frac{3}{4} \arctg \frac{x-2}{4} \Big|_2^6 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{16}$

72. Bild 31

$$F = 6(4\pi + 3\sqrt{3})$$

73. $F = 8a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi$

$$= 16a^2 \left(-\frac{1}{4} \sin^3 u \cos u \right.$$

$$\left. - \frac{3}{8} \sin u \cos u + \frac{3}{8} u \right) \Big|_0^\pi$$

$$= 16a^2 \cdot \frac{3}{8} \pi$$

$$F = 6a^2 \pi$$

$$u = \frac{\varphi}{2}$$

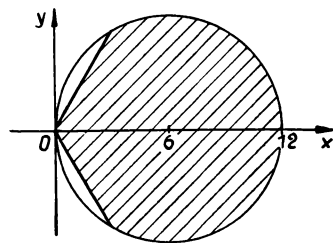


Bild 31

Formelzusammenstellung

Formel Nr.	Formel	Seite
1	$\int f(x) dx = F(x) + C \quad [\text{für } F'(x) = f(x)]$	4
2	$\Phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x$	8
3	$\Phi = \int_0^b f(x) dx$	8
4	$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$	12
5	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$	13
6	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	13
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	14
8	$\int \cos x dx = \sin x + C$	15
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + C$	15
10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$	15
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin x + C \\ -\operatorname{arc} \cos x + C \end{cases}$	15
12	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \\ -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C \end{cases}$	15
13	$\int \operatorname{Sin} x dx = \operatorname{Cos} x + C$	15
14	$\int \operatorname{Cos} x dx = \operatorname{Sin} x + C$	15
15	$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x + C$	15
16	$\int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{Tg} x + C$	15
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$	15
18	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$	15
19	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{für } x < 1$	15

Formel Nr.	Formel	Seite
20	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{A}r \mathfrak{C}tg x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{für } x > 1$	15
21	$\int e^x dx = e^x + C$	15
22	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15
23	$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$	16
24	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$	18
25	$\int_{-\frac{a}{c}}^{\frac{a}{c}} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{wenn } f(-x) = f(x)$	25
26	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$	27
27	$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$	27
28	$\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$	46
29	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln \varphi(x) + C$	53
30	$\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 + C$	56
31	$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$	67
32	$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$	72
32a	$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}$	75
33	$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$	72
33a	$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$	75
34	$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 d\varphi$	88
34a	$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}x - y\dot{x}) dt$	93
35a	$F = - \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt$	94
35b	$F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} dt$	94