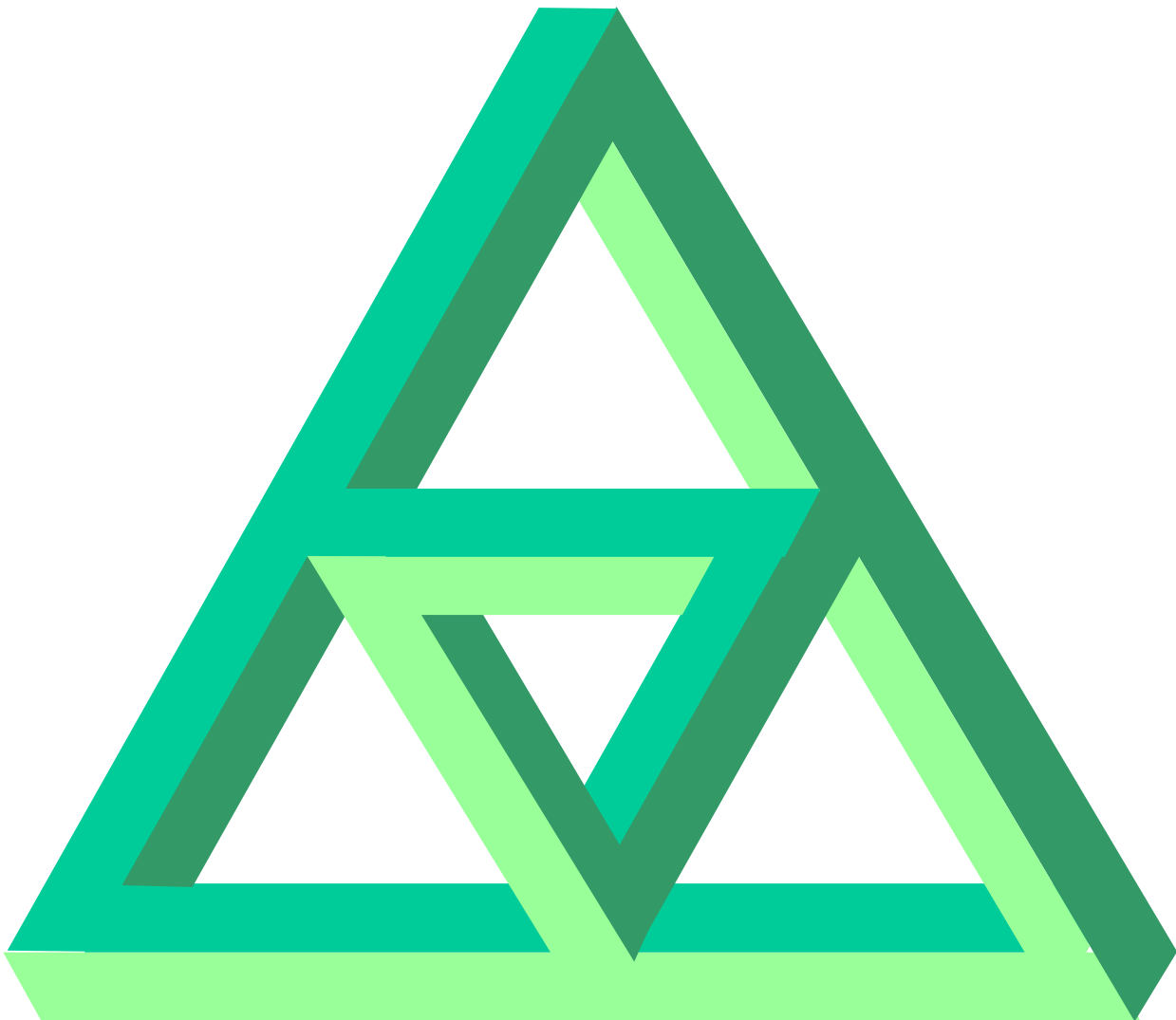


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Auch die 65. Auflage der Mathematik-Olympiade bietet in der Runde 1 (Schulrunde) die Aufgaben **MO651015** und **MO651016** mit Bezug zu Lösungsstrategien im Koordinatensystem. Damit lassen sich die Themen Abstand zweier Punkte, Parallelität von Geraden und Rechtwinkligkeit zur Übung wiederholen und festigen.

Auch mit Aufgabe **MO651014** wird Bekanntes aufgegriffen – Die kombinatorischen Grundlagen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von zusammengesetzten Ereignissen wurde letztmalig in der 2. Runde der 64. MO gefordert (**MO640923/MO641023**). Passend dazu nutzen wir einen Blick in ein Mathematik-Buch von 1895, um Aufgaben dieses Themenbereiches zu üben.

Mit Bezug zur Aufgabe 2-4 des diesjährigen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die konstruktive Flächenhalbierung eines Trapezes mit Zirkel und Lineal.

Wir berichten von den online-Seminaren „Mathe-Spotlights“ der Begabung & Bildung gGmbH im September 2025.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 31.5 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem³

Aufgabe 31.23 – MO651015. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-1, 0)$, $B(b, 3)$, $C(1, 6)$ und $D(-3, 2)$ gegeben. Dabei ist b eine reelle Zahl größer als -2 .

Bestimmen Sie jeweils alle Werte von b , für die

- a) die vier Punkte ein bei C rechtwinkliges Viereck $ABCD$ bilden,
- b) die vier Punkte ein Trapez $ABCD$ bilden,
- c) die vier Punkte ein Sehnenviereck $ABCD$ bilden,
- d) die vier Punkte ein Viereck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 bilden.

Lösungshinweise (Vorbemerkung): Wir zeichnen die drei fest vorgegebenen Punkte A, C und D in ein Koordinatensystem ein. Mit der Bedingung $b > -2$ liegt der Punkt B auf der zur x-Achse parallelen Gerade mit der Gleichung $y = 3$ rechts der Seite $\overline{CD}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Winkel $\sphericalangle BCD$ beträgt nach Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS 90° , falls die Gleichung $|\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2 = |\overline{BD}|^2$ erfüllt ist. Wir erhalten mit Hilfe der Koordinaten der Punkte B, C und D :

$$\begin{aligned} ((b-1)^2 + (3-6)^2) + ((1+3)^2 + (6-2)^2) &= (b+3)^2 + (3-2)^2 \\ (b-1)^2 + 9 + 16 + 16 &= (b+3)^2 + 1 \\ b^2 - 2 \cdot b + 42 &= b^2 + 6 \cdot b + 10 \\ 8 \cdot b &= 32 \quad \Rightarrow \quad b = 4 \end{aligned}$$

Somit erfüllt der Punkt $B(4; 3)$ die Bedingung der Aufgabe.

Alternativ ermitteln wir den Anstieg m_{CD} der Geraden durch die Punkte C und D :

$$m_{CD} = \frac{1+3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

Der Winkel $\sphericalangle DCB$ beträgt 90° , wenn der Punkt B auf der Geraden durch C mit Anstieg $m_{BC} = -\frac{1}{m_{CD}} = -1$ liegt. Aus den Koordinaten der Punkte B und C erhalten wir

$$m_{BC} = \frac{3-6}{b-1} = \frac{-3}{b-1}$$

Nur im Fall von $b = 4$ gilt $m_{BC} = -1$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir stellen zunächst fest, dass auch der Winkel $\sphericalangle CDA$ ein rechter Winkel ist. Sowohl nach Satz des PYTHAGORAS mit

$$\begin{aligned} |\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}|^2 &= ((-1+3)^2 + (0-2)^2) + ((1+3)^2 + (6-2)^2) = \\ &= 4 + 4 + 16 + 16 = 40 = 4 + 36 = (-1-1)^2 + (0-6)^2 = |\overline{AC}|^2 \end{aligned}$$

als auch mittels Vergleichs der Anstiege m_{CD} und m_{AD} wegen

³ Siehe 31.1 (Heft 03/2025), 31.2 (Heft 04/2025), 31.3 (Heft 05/2025), 31.4 (Heft 08/2025)

$$m_{AD} = \frac{0 - 2}{-1 + 3} = \frac{-2}{2} = -1 = -\frac{1}{m_{CD}}$$

können wir die Rechtwinkligkeit des Winkels $\sphericalangle CDA$ nachweisen.

Nach Teilaufgabe a) wissen wir deshalb, dass mit $b = 4$ die Geraden AD und BC parallel sind, also das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.

Das Viereck $ABCD$ ist aber auch dann ein Trapez, wenn die Geraden AB und CD parallel sind. Dies ist der Fall, wenn deren Anstiege $m_{AB} = m_{CD} = 1$ gleich groß sind. Es gilt

$$m_{AB} = \frac{0 - 3}{-1 - b} = \frac{3}{b + 1}$$

Es gilt in diesem Fall $m_{AB} = 1$ genau dann, wenn $b = 2$ gilt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck, wenn alle vier Punkte auf einer Kreislinie liegen. Ein solcher Kreis ist aber bereits durch 3 Punkte festgelegt. Im rechtwinkligen Dreieck $\sphericalangle ACD$ mit rechtem Winkel bei D liegt dessen Umkreismittelpunkt im Mittelpunkt M der Hypotenuse $\overline{AC}$. Dieser Mittelpunkt hat die Koordinaten $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = M(0; 3)$. Der Radius r dieses Kreises beträgt folglich

$$r = |\overline{MA}| = \sqrt{(-1 + 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{10}.$$

Damit liegt der Punkt $B(\sqrt{10}; 3)$ auf dieser Kreislinie wegen

$$|\overline{BM}| = \sqrt{(\sqrt{10} - 0)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{10} = r$$

Das Viereck $ABCD$ ist aber auch genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen. Wegen $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ$ müssen wir den Punkt B so wählen, dass auch $|\sphericalangle CBA| = 90^\circ$ gilt. Dafür können wir nach Satz des PYTHAGORAS im Dreieck $\triangle ABC$ den Wert für b ermitteln:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 &= |\overline{AC}|^2 \\ ((-1 - b)^2 + (0 - 3)^2) + ((b - 1)^2 + (3 - 6)^2) &= (-1 - 1)^2 + (0 - 6)^2 \\ (b^2 + 2b + 1 + 9) + (b^2 - 2b + 1 + 9) &= 40 \\ 2 \cdot b^2 + 20 &= 40 \quad \Rightarrow \quad b_{1,2} = \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

Wegen $b > -2$ entfällt wegen $\sqrt{10} > 3$ die negative Wurzel und wir finden den geeigneten Punkt $B(\sqrt{10}; 3)$.

Wir können aber für den Nachweis der Rechtwinkligkeit im Punkt B die Anstiege m_{AB} und m_{BC} der Geraden durch A und B bzw. durch B und C auswerten:

$$m_{AB} = \frac{0-3}{-1-b} = \frac{3}{b+1} \quad ; \quad m_{BC} = \frac{3-6}{b-1} = \frac{-3}{b-1}$$

Wir suchen nun Werte für b mit

$$-1 = m_{AB} \cdot m_{BC} = -\frac{9}{b^2-1} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 10$$

womit wir erneut wie oben den Punkt $B(\sqrt{10}; 3)$ als Lösung finden,

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Wir wissen, dass der Punkt $B'(-2; 3)$ auf der Geraden CD liegt, denn der Anstieg $m_{B'D} = \frac{3-2}{-2+3} = 1$ stimmt mit dem Anstieg m_{CD} überein. Wir fügen einen weiteren Punkt $B''(-4; 3)$ ein. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta B'B''D$ beträgt $A_{\Delta B'B''D} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$. Damit können wir den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ wie folgt berechnen:

$$A_{ABCD} = A_{\Delta B'B_dC} + A_{\Delta B''B_dC} - A_{\Delta B'B''D} = \frac{(b+2) \cdot 3}{2} + \frac{(b+4) \cdot 3}{2} - 1$$

Der Flächeninhalt hat die Größe 5, falls

$$\frac{(b+2) \cdot 3}{2} + \frac{(b+4) \cdot 3}{2} - 1 = 3 \cdot b + 9 - 1 = 5$$

erfüllt ist, also $b = -1$ gilt. □

Aufgabe 31.24 – MO651016. Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0, 18)$, $B(0, 12)$, $C(8, 12)$, $D(0, 0)$ und $E(24, 0)$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden CD und BE . Der Punkt F sei der Schnittpunkt der Gerade AS mit der x -Achse.

- Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks ΔDFS und des Dreiecks ΔFES .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔCSE .

Lösungshinweise: Wir ermitteln vorab die Koordinaten der Punkte S und F . Dafür berechnen wir für den Punkt S den Schnittpunkt der Geraden CD und BE über die zugehörigen Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} CD: \quad y &= m_{CD} \cdot (x - x_C) + y_C = \frac{12-0}{8-0} \cdot (x-8) + 12 = \frac{3}{2} \cdot x \\ BE: \quad y &= m_{BE} \cdot (x - x_B) + y_B = \frac{12-0}{0-24} \cdot (x-0) + 12 = -\frac{1}{2} \cdot x + 12 \end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden gilt also

$$\frac{3}{2} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot x + 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

und somit

$$y = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \quad \Rightarrow \quad S(6; 9).$$

In Analogie berechnen wir nun für den Punkt F den Schnittpunkt der Geraden AS und der x -Achse. Mit der Geradengleichung

$$AS: y = m_{AS} \cdot (x - x_A) + y_A = \frac{18 - 9}{0 - 6} \cdot (x - 0) + 18 = -\frac{3}{2} \cdot x + 18$$

finden wir den Schnittpunkt mit der x -Achse als Nullstelle x_0 dieser Geraden, also

$$0 = -\frac{3}{2} \cdot x_0 + 18 \Rightarrow x_0 = 12 \Rightarrow F(0; 12).$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Für die Dreiecke $\triangle DFS$ und $\triangle FES$ sind die Längen der Grundseiten und die (gemeinsame) Höhe auf diesen Grundseiten als y -Koordinate des Punktes S bekannt. Damit finden wir

$$A_{\triangle DFS} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DF}| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54,$$

$$A_{\triangle FES} = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{DE}| - |\overline{DF}|) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (24 - 12) \cdot 9 = 54.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir berechnen den gesuchten Flächeninhalt als Differenz bekannter bzw. leicht ermittelbarer Flächeninhalte.

$$A_{\triangle CSE} = A_{\triangle CDE} - (A_{\triangle DFS} + A_{\triangle FES}) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 - 108 = 36.$$

□

Es ist jedoch nicht erforderlich, die Lösung mittels Erkenntnisse aus dem Koordinatensystem darzustellen. Wir können die Angaben der Koordinaten auch nutzen, um den geometrischen Sachverhalt zu beschreiben.

Lösungsvariante mit Anwendung des Strahlensatzes: Wir ergänzen die Punkte A und D so durch zwei Punkte A' und D' , dass das Viereck $DD'A'A$ ein Rechteck mit der Diagonalen $\overline{A'D}$ (und damit auch der Diagonalen $\overline{AD'}$) ergibt, also $A'(12; 18)$ und $D'(12; 0)$. Wir nennen den Schnittpunkt der Diagonalen S' und ermitteln dessen Koordinaten aus den Mittelpunkten der Diagonalen, also $S'(\frac{0+12}{2}; \frac{18+0}{2}) = S'(6; 9)$. Der Fußpunkt S'' des Lotes aus S' auf die x -Achse hat die Koordinaten $S''(6; 0)$ und damit beträgt die Länge des Lotes 9. Betrachten wir die Verhältnisgleichung

$$|\overline{BD}| : |\overline{DE}| = 12 : 24 = 9 : 18 = |\overline{S'S''}| : |\overline{S''E}| = |\overline{S'S''}| : (|\overline{DE}| - |\overline{DS'}|)$$

Nach Umkehrung des Strahlensatzes fällt S' mit S zusammen. Damit können wir die gesuchten Flächeninhalte wie oben ermitteln.

Alternative geometrische Lösungshinweise: Wir erkennen, dass das Viereck $DECB$ ein Trapez mit den parallelen Geraden DE und BC ist. Zeichnen wir die Diagonalen des Trapezes ein, finden wir den Schnittpunkt S . Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle DES$ und $\triangle BSC$ mit den Höhen h_{DE} bzw. h_{BC} finden wir die Verhältnisgleichung

$$h_{DE} : |\overline{DE}| = h_{BC} : |\overline{BC}|.$$

Mit der Kenntnis der Koordinaten finden wir $h_{DE} + h_{BC} = 12$. Somit erhalten wir

$$\frac{h_{DE}}{24} = \frac{12 - h_{DE}}{8} = \frac{3}{2} - \frac{h_{DE}}{8} \Rightarrow h_{DE} = 9 ; h_{BC} = 3.$$

Mit den Erfahrungen im Umgang mit Punkten im Koordinatensystem lassen sich nun auch Aufgaben bearbeiten, bei denen die Lösungshinweise der Aufgabenkommission auf elementar-geometrische Herleitungen orientierten. Oft sind jedoch die Darstellungen auf der Basis geometrischer Sachverhalte kürzer und angemessener. Somit sind beide Lösungsvarianten nützliche Übungen!

Aufgabe 31.25 – MO351046. Ein Schüler zeichnet eine Strecke $\overline{AB}$ und wählt auf ihr zwei beliebige Punkte X und Y . Dann konstruiert er die vier Quadrate $AXPQ$, $XBRS$, $AYTU$ und $YBVW$, so angeordnet, wie in der Abbildung angegeben. Weiter konstruiert er die Mittelpunkte K , L , M bzw. N dieser Quadrate.

Er vermutet anhand seiner Zeichnung: Die Strecken $\overline{KN}$ und $\overline{LM}$ sind einander gleichlang und stehen aufeinander senkrecht.

Ist diese Vermutung bei jeder Wahl von X und Y auf AB wahr?

Lösungshinweise: Wir legen die gezeichnete Figur in ein Koordinatensystem, so dass wir die Koordinaten $A(0; 0)$ und $B(1; 0)$ erhalten. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte X und Y mit $X(x; 0)$ und $Y(y; 0)$ mit $0 < x < y < 1$, so können wir die Koordinaten der vier Mittelpunkte angeben:

$$K\left(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\right), M\left(\frac{y}{2}; -\frac{y}{2}\right), L\left(x + \frac{1-x}{2}; \frac{1-x}{2}\right), N\left(y + \frac{1-y}{2}; -\frac{1-y}{2}\right)$$

Nun können wir die Streckenlängen KN und LM berechnen

$$\begin{aligned} |\overline{KN}|^2 &= \left(\frac{x}{2} - y - \frac{1-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{1-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y}{4} + \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{4} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x-y)^2 \\ |\overline{LM}|^2 &= \left(x + \frac{1-x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x+y+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{4} + \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y}{4} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x-y)^2 \end{aligned}$$

Also gilt die Streckengleichheit $|\overline{KN}| = |\overline{LM}|$ für jede Lage der Punkte X und Y .

Außerdem können wir die Anstiege der Geraden KN und LM berechnen:

$$m_{KN} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1-y}{2}}{\frac{x}{2} - y - \frac{1-y}{2}} = \frac{x-y+1}{x-y-1}; \quad m_{LM} = \frac{\frac{1-x}{2} + \frac{y}{2}}{x + \frac{1-x}{2} - \frac{y}{2}} = \frac{-x+y+1}{x-y+1}$$

Wegen $m_{KN} = \frac{x-y+1}{x-y-1} = \frac{1}{\frac{x-y-1}{x-y+1}} = \frac{1}{\frac{-(-x+y+1)}{x-y+1}} = -\frac{1}{\frac{-x+y+1}{x-y+1}} = -\frac{1}{m_{LM}}$ stehen beide Geraden für jede Lage der Punkte X und Y senkrecht aufeinander. $\square$

Ergänzung: Man überprüfe, ob sich die Aussagen auch auf Lagen X links von A (also $x < 0$) oder Y rechts von B (also $y > 1$) verallgemeinern lassen.

Aufgabe 31.26 – MO490943. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit M bzw. N . Beweisen Sie:

- Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann sind $DM \parallel BN$ und $NC \parallel AM$.
- Wenn $DM \parallel BN$ und $NC \parallel AM$ sind, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösungshinweise: Wir legen das Viereck $ABCD$ so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass die Punkte $A(0; 0)$ im Koordinatenursprung und $B(b_x; 0)$ auf der x -Achse liegen. Weiter setzen wir $D(d_x; d_y)$ mit reellen Koordinaten. Zudem existieren reelle Zahlen x, y mit $C(b_x + d_x + x; d_y + y)$. Damit ist das Viereck $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn $x = y = 0$ gilt. Aus den Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D können wir die Koordinaten der Punkte M und N angeben:

$$M\left(\frac{b_x + d_x + x}{2}; \frac{d_y + y}{2}\right) \quad ; \quad N\left(\frac{d_x}{2}; \frac{d_y}{2}\right)$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir ermitteln die Anstiege m der Geraden AM, NC, BN und MD :

$$m_{AM} = \frac{0 - \frac{d_y + y}{2}}{0 - \left(b_x + \frac{d_x + x}{2}\right)} = \frac{d_y + y}{2 \cdot b_x + d_x + x}$$

$$m_{NC} = \frac{\frac{d_y}{2} - (d_y + y)}{\frac{d_x}{2} - (b_x + d_x + x)} = \frac{d_y + 2 \cdot y}{2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x}$$

Daraus folgt: Wenn $x = y = 0$, dann gilt $m_{AM} = m_{NC}$. Dies ist gleichbedeutend mit $AM \parallel NC$.

$$m_{BN} = \frac{0 - \frac{d_y}{2}}{b_x - \frac{d_x}{2}} = \frac{-d_y}{2 \cdot b_x - d_x}$$

$$m_{MD} = \frac{\frac{d_y + y}{2} - d_y}{b_x + \frac{d_x + x}{2} - d_x} = \frac{-d_y + y}{2 \cdot b_x - d_x + x}$$

Daraus folgt: Wenn $x = y = 0$, dann gilt $m_{BN} = m_{MD}$. Dies ist gleichbedeutend mit $BN \parallel MD$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Gehen wir von

$$m_{AM} = \frac{d_y + y}{2 \cdot b_x + d_x + x} = \frac{d_y + 2 \cdot y}{2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x} = m_{NC}$$

aus, so können wir den mittleren Teil äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} (d_y + y) \cdot (2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x) &= (d_y + 2 \cdot y) \cdot (2 \cdot b_x + d_x + x) \\ 2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + 2 \cdot d_y x + 2 \cdot b_x y + d_x y + 2 \cdot xy &= \\ &= 2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + d_y x + 2 \cdot b_x y + 2 \cdot d_x y + 2 \cdot xy \end{aligned}$$

Damit finden wir $d_y x - d_x y = 0$. Gehen wir von

$$m_{BN} = \frac{-d_y}{2 \cdot b_x - d_x} = \frac{-d_y + y}{2 \cdot b_x - d_x + x} = m_{MD}$$

aus, so können wir den mittleren Teil äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} -d_y \cdot (2 \cdot b_x - d_x + x) &= (-d_y + y) \cdot (2 \cdot b_x - d_x) \\ -2 \cdot b_x d_y + d_x d_y - d_y x &= -2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + 2 \cdot b_x y - d_x y \end{aligned}$$

Damit finden wir $d_x y - d_y x = 2 \cdot b_x y$.

Da wir für linke Seite dieser Gleichung bereits den Wert 0 kennen, folgt unmittelbar (wegen $b_x \neq 0$) $y = 0$ und damit auch $x = 0$. $\square$

Die entsprechende Aufgabe aus der Olympiadeklasse 10 eignet sich nun zur Übung.

Aufgabe 31.27 – MO491043. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit K , L , M bzw. N . Beweisen Sie:

- Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann gilt $BN \parallel LD$ und $AM \parallel KC$.
- Wenn $BN \parallel LD$ und $AM \parallel KC$, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Thema 24.4 – Klassische Wahrscheinlichkeit⁴

Die Frage nach einer Wahrscheinlichkeit kann beantwortet werden, indem die Anzahl der für das gesuchte Ereignis günstigen Fälle und die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ins Verhältnis gesetzt wird. Damit reduzieren sich solche Aufgaben auf

⁴ Siehe 24.1 (Heft 08/2023), 24.2 (Heft 01/2025) und 24.3 (Heft 02/2025)

kombinatorische Probleme. Deshalb basiert die Lösungsidee der diesjährigen Aufgabe auf MO640923/MO641023 (s. Heft 01/2025).

Aufgabe 24.22 – MO651014. In dieser Aufgabe sollen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dabei werden zufällig zwei bzw. drei Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) aus der Menge der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\{2025, 2026, 2027, \dots, 2039, 2040\}$ gezogen.

- Es werden genau zwei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die positive Differenz der beiden Zahlen durch 6 teilbar?
- Es werden genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens 6116?

Hinweis: Zufälliges Ziehen soll bedeuten, dass alle Möglichkeiten des Ziehens von zwei bzw. drei Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da die Menge 16 verschiedene Zahlen enthält, gibt es $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$ verschiedene Paare von zwei Zahlen.

Unter den gegebenen 16 Zahlen

- sind 3 Zahlen durch 6 teilbar $\{2028, 2034, 2040\}$,
- lassen 2 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 1 $\{2029, 2035\}$,
- lassen 2 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 2 $\{2030, 2036\}$,
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 3 $\{2025, 2031, 2037\}$,
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 4 $\{2026, 2032, 2038\}$,
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 5 $\{2027, 2033, 2039\}$.

Wenn die positive Differenz der beiden gezogenen Zahlen durch 6 teilbar sein soll, müssen beide Zahlen bei Division durch 6 den gleichen Rest lassen, d.h. sie müssen jeweils beide gleichzeitig in einer der genannten Teilmengen enthalten sein.

- Für eine zweielementige Teilmenge gibt es jeweils nur $\binom{2}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$ Möglichkeit, ein Paar verschiedener Zahlen auszuwählen.
- Für eine dreielementige Teilmenge gibt es jeweils $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ Möglichkeiten, ein Paar verschiedener Zahlen auszuwählen.

Somit erfüllen entsprechend der sechs Teilmengen $3 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 14$ Ziehungsergebnisse die geforderte Eigenschaft. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt deshalb $\frac{14}{120} = \frac{7}{60} \approx 11.7\%$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da die Menge 16 verschiedene Zahlen enthält, gibt es $\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$ verschiedene Auswahlen von drei Zahlen. Da die größtmögliche Summe dreier Zahlen $2038 + 2039 + 2040 = 6117$ beträgt, gibt es

nur noch eine weitere Auswahl von drei Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $2037 + 2039 + 2040 = 6116$. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{560} = \frac{1}{280} \approx 0.4\%$. $\square$

Wir können den (Kopf-) Rechenaufwand reduzieren, wenn wir die Aufgabenstellung gleichwertig umformulieren: Gegeben sei die Zahlenmenge $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$. Es werden daraus genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens $(6116 - 3 \cdot 2025 =) 41$? Da unter diesen Bedingungen die größtmögliche Summe dreier Zahlen $13 + 14 + 15 = 42$ beträgt, ist die Lösung in gleicher Weise zu finden.

In Vorbereitung der Aufgabe MO361041 (s. Heft 02/2025) wurde in der vorangehenden Runde das Kartenspiel bereits untersucht.

Aufgabe 24.23 - MO360931. Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ Kreuz, Pik, Herz, Karo je zwei von jedem der „Bilder“ As, König, Dame, Bube, Zehn.

Jemand stellt fest, dass die ersten sechs Karten, die er beim Geben bekommen hat, sechs Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von sechs Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, dass bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils voneinander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

Lösungshinweise: Um alle Möglichkeiten für die Farben der Damen zu erfassen, führen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Drei der 4 Farben sind mit der Anzahl 2 vertreten. Um diese Farben zu bekommen, können wir je eine Farbe weglassen. Also gibt es für diesen Fall genau 4 Möglichkeiten, oder kurz⁵ $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4}{1} = 4$.

Fall 2: Zwei der 4 Farben sind jede mit der Anzahl 2 vertreten, die beiden anderen Farben jede mit der Anzahl 1. Für die Auswahl von 2 Farben (aus 4) gibt es genau 6 Möglichkeiten: Wir erhalten jede der zwei Farben nämlich genau zweimal, wenn wir erst eine beliebige der 4 Farben wählen und zu dieser dann eine beliebige der jeweils 3 verbliebenen Farben, also $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ oder kurz $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

⁵ Die Darstellungsform mittels Binomialkoeffizienten ist nur zur Information angefügt und wird in der MO nicht erwartet.

Insgesamt finden wir also $4 + 6 = 10$ verschiedene Möglichkeiten. □

Aufgabe 24.24 - MO361031. Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ Kreuz, Pik, Herz, Karo je zwei von jedem der „Bilder“ As, König, Dame, Bube, Zehn.

Jemand stellt fest, dass die ersten vier Karten, die er beim Geben bekommen hat, vier Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von vier Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, dass bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils voneinander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

Lösungshinweise: Um alle Möglichkeiten für die Farben der Damen zu erfassen, führen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Jede der 4 Farben ist mit der Anzahl 1 vertreten. Dafür gibt es genau 1 Möglichkeit, kurz $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$.

Fall 2: Eine der 4 Farben ist mit der Anzahl 2 vertreten, zwei andere Farben jeweils mit der Anzahl 1. Für die Auswahl der Farbe mit Anzahl 2 haben wir genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten können wir, um zwei Farben aus 3 auszuwählen, eine Farbe weglassen. Wir haben also dafür jeweils 3 Möglichkeiten, gesamt also $4 \cdot 3 = 12$ oder kurz $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} = 12$.

Fall 3: Zwei der 4 Farben sind jeweils mit der Anzahl 2 vertreten. Für die Auswahl dieser zwei Farben gibt es genau 6 Möglichkeiten: Wir erhalten jede Farbe zweimal, wenn wir erst eine beliebige der 4 Farben auswählen und dann zur ausgewählten eine der 3 verbliebenen Farben hinzunehmen, also $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ oder kurz $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Insgesamt finden wir also $1 + 12 + 6 = 19$ verschiedene Möglichkeiten. □

Flächenhalbierung

In Anlehnung an **Aufgabe 2-4** des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik⁶ der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die Flächenhalbierung eines Trapezes $ABCD$ ⁷, wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt A verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes X (der Schnittpunkt der Flächenhalbierenden durch A mit der gegenüberliegenden Trapezseite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$) sind mehrere Lösungsvarianten möglich:

(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks ABX zu ermitteln, können wir unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe h und die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = b$ die Gleichung über die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H \right)$$

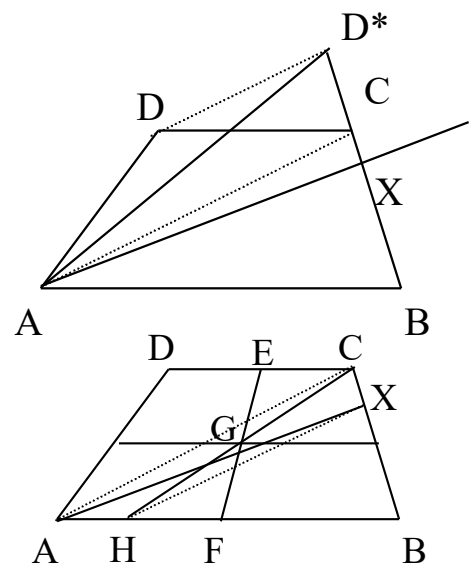
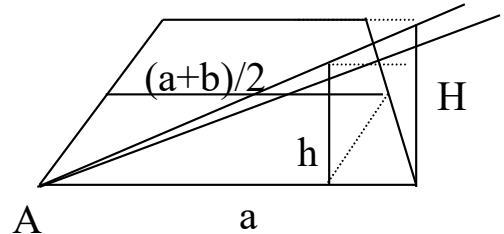
umformen zu

$$h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

Diese Verhältnisgleichung können wir unmittelbar in der Trapezfigur wiederfinden. Dazu projizieren wir die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichnen die Höhe H im Punkt B ein und erhalten h .

(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ACD . Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck ABD^* (mit C auf BD^*) flächengleich zum Trapez $ABCD$ wird, so ist X offensichtlich die Seitenhalbierende von BD^* .

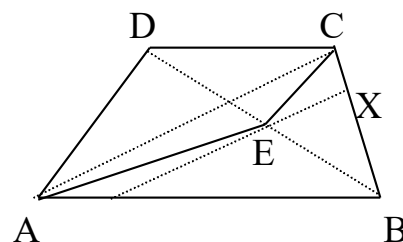
(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in G . Drehen wir die Gerade EF um G , so sind die Dreiecke HEG und CFG inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt die Gerade HC die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks AHC bzgl. $\overline{AC}$ in das (inhaltsgleiche) Dreieck AXC ist der gesuchte Punkt gefunden.



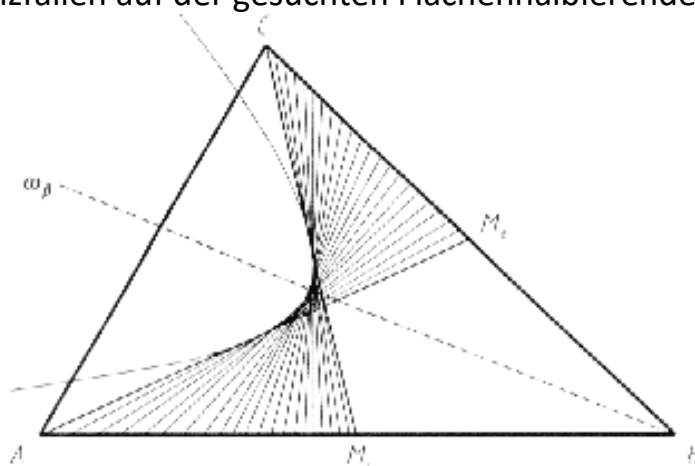
⁶ Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-4, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

⁷ nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$, dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ABD und BCD jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks AEC bzgl. $\overline{AC}$ zum Dreieck AXE finden wir den gesuchten Punkt.



Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in der KZM-Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Wir erkennen beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Rückblick auf die online-Seminare „Spotlight Mathe“⁸

Das Online-Seminar „**Spotlight Mathe - Einblicke in den Bundeswettbewerb Mathematik**“ am 17. September 2025 vermittelte mathematische Grundlagen und Problemlösestrategien, die sowohl im Unterricht als auch vor allem bei der Wettbewerbsteilnahme unterstützen und motivieren können. PATRICK BAUERMANN (Projektleiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe, Bildung & Begabung gGmbH Bonn) hatte dazu StD i.R. KARL FEGERT (Vorsitzender der Korrekturkommission) und MAIKE KONANG (Teilnehmerin der 2. Runde) ins Studio eingeladen. Anhand der Aufgaben der ersten Runde 2025 teilten sie ihre Perspektiven auf die Genese einer Lösung (Was sind geeignete Aufgaben?), die mathematischen Hintergründe (Vielfalt der Lösungsmethoden?) sowie die Korrektur („Brillante Gedanken sind besser als perfekte Formulierungen“!). Eine Besonderheit bilden dabei geometrische Problemstellungen, die im Mathematik-Unterricht in dieser Form leider zu kurz kommen: Sie bieten eine „Spielwiese“ für Interessierte, lassen sich oft anschaulich

⁸ Die online-Seminare wurden vom sächsischen Landesamt für Schule und Bildung als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

visualisieren, können über Spezialfälle zum Lösungsansatz führen und fördern das logische Schließen beim Zusammenführen einfacher geometrischer Sachverhalte. Deshalb diskutierte man insbesondere die Aufgabe 3, wobei MAIKE KONANG ihre „Entdeckungsreise“ bei der Bearbeitung schilderte und KARL FEGERT auf die Lösbarkeit mit Schulmitteln einging.

Zum Abschluss war Dr. JOHANN BEURICH in die Diskussionsrunde zugeschaltet. Er hat an der TU Dresden Mathematik studiert, dort am Institut für Analysis 2024 promoviert und ist unter DORFUCHS⁹ als Mathematik-YouTuber bekannt. Seit einigen Jahren arbeitet er mit der Bildung & Begabung gGmbH zusammen und wählt stets eine Aufgabe aus dem Jahrgang heraus, die er als Song erläutert. Für ihn ist es die Herausforderung, schwierige Fragen spielerisch zu erklären – was ihm offenbar bestens gelingt!

Mit zwischenzeitlich 160 Zuschauer fand das Seminar erneut bundesweit große Resonanz. Das nächste Seminar ist im März 2026 vorgesehen.

Das Online-Seminar „**Spotlight Mathe - Einblicke in die Mathematik-Olympiade**“ am 18. September 2025 schloss sich an. Hier war die Diskussionsrunde besonders groß: Patrick Bauermann begrüßte KERRIN BIELSER (Mitglied Aufgabenausschuss), VIOLA JÁRY (Landesbeauftragte MO in Niedersachsen, Mitglied Aufgabenausschuss), Dr. PHILIPP LAMPE (stellv. Vorsitzender im Aufgabenausschuss), Prof. Dr. UWE LECK (1. Vorsitzender des Vereins Mathematik-Olympiade e.V.), Dr. THORALF RÄSCH (Universität Bonn) und JUSSI MARTTINEN (ehemals Bundesfinalist der MO). Jeder berichtete aus seiner persönlichen Sicht über die Faszination, die von den Mathematik-Olympiaden ausgeht.

Das vierstufige Wettbewerbssystem (von der 1. Runde/Schulrunde, die in unterschiedlichster Weise an den Heimatschulen organisiert werden darf und ca. 200.000 Mädchen und Jungen von Klassenstufen 3 bis 12/13 erreicht, bis zur 4. Runde/Bundesrunde, die als zweitägige Klausur für knapp 200 Teilnehmenden durchgeführt wird) bildet eine Klammer um Breiten- und Spitzenförderung. So standen zunächst organisatorische Fragen beim Ablauf der MO im Mittelpunkt der Diskussion, die auch auf die spontanen Fragen im Chat einging. Doch auch die Anliegen der Aufgabenkultur wurde analysiert, um die Möglichkeiten von Üben und Trainieren zu thematisieren.

Mit zwischenzeitlich bis zu 200 Zuschauern fand das Seminar bundesweit eine große Resonanz.

⁹ <https://de.wikipedia.org/wiki/DorFuchs> (am 07.11.2025)

In alten Mathe-Büchern geblättert – was man früher schon konnte und heute noch können sollte

Im

Lehrbuch¹⁰ der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895.

Zweiter Kursus

Abchnitt XVII – Die Combinationslehre

Abchnitt XVII – Die mathematische Wahrscheinlichkeit

folgen nach den allgemeinen Ausführungen¹¹ 27 Übungsaufgaben zur Bestimmung der Anzahlen von Kombinationen und Variationen und 22 Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, darunter:

13. Wie viel 5 ziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 schreiben, a) wenn jede nur einmal, b) wenn jede Ziffer beliebig oft vorkommen darf?

14. Wie viel 6 ziffrige Zahlen lassen sich mit den 4 Ziffern 0, 1, 2, 3 schreiben, welche nicht mit 0 anfangen?

19. Jemand zieht aus einem Spiel mit 32 Karten 5. Auf wie viel Weisen können dies verschieden sein?

20. Von 20 Mann soll eine Wache von 15 Mann besetzt werden. Wie oft kann diese Wache in verschiedener Weise zusammengesetzt werden?

21. Wie viel Diagonalen kann man in einem Zwanzigeck ziehen?

22. Wie viel (einfache und zusammengesetzte) Teiler hat die Zahl 210?

23. Desgl. die Zahl 2310?

...

1. In einer Urne liegen 7 weiße und 10 schwarze Kugeln. Man zieht 6 Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit ist, daß es a) 3 weiße und 3 schwarze, b) 2 weiße und 4 schwarze, c) daß es nur schwarze; d) daß es nur weiße sind?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zu werfen a) 8 Augen, b) bis 8 Augen, c) über 8 Augen.

13. Wenn beim Spiel mit 3 Würfeln 1 Mark auf jeden Wurf über 15 gesetzt wird, wie groß muß der Gewinn sein?

¹⁰ Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

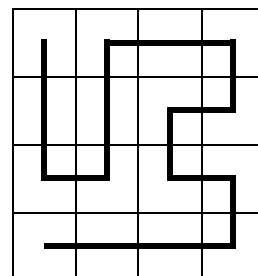
¹¹ S. Heft 01/2025 bzw. Heft 03/2022

17. Auf einer Urne, in welcher 3 weiße, 5 schwarze und 7 rote Kugeln liegen, werden 5 Kugeln gezogen. Welche Wahrscheinlichkeit ist, daß darunter entweder keine weiße, oder nur eine weiße ist?

20. Von einer Compagnie von 120 Mann kommt jeden dritten Tag ein Zug von 30 Mann auf Wache, welche 10 Posten mit 2 stündiger Ablösung zu besetzen haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mein Freund, der bei dieser Compagnie steht, auf einem bestimmten Posten Wache steht.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2025

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb, 19. MeMO, 2025, Chemnitz, Deutschland). Eine *Schlange* in einem $n \times n$ -Quadratgitter ist ein Pfad, der aus Strecken zwischen Mittelpunkten benachbarter Felder zusammengesetzt ist, durch die Mittelpunkte aller n^2 Felder verläuft und jedes Feld genau einmal betritt. Dabei heißen zwei Felder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Man beachte, dass alle Stücke der Schlange parallel zu Gitterachsen sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer Schlange in einem 4×4 -Quadratgitter. Diese Schlange hat neun 90° -Winkel.



Man betrachte nun für eine selbst gewählte Zahl $n \geq 4$ eine Schlange durch die n^2 Felder eines $n \times n$ -Quadratgitters. Was ist die größtmögliche Anzahl an 90° -Winkeln, die eine solche Schlange haben kann?

Lösungshinweise: Mit „selbst gewählt“ sollte darauf hingewiesen werden, dass die Wettbewerbsaufgabe sicherlich nicht entscheidend von der Jahreszahl 2025 abhängig ist. Wir versuchen deshalb mit kleineren Zahlen n verallgemeinerungsfähige Lösungsideen zu finden. Weil 2025 eine ungerade Zahl ist, wollen wir uns hier ebenfalls auf ungerade Zahlen n beschränken und beginnen sogar schon bei $n = 3$.

Wir färben das Feld wie ein Schachbrett. Wenn unten links ein weißes Feld liegt, gibt es $\frac{1}{2} \cdot (n^2 + 1)$ weiße und $\frac{1}{2} \cdot (n^2 - 1)$ schwarze Felder. Um auf dem Weg alle Felder genau einmal zu durchlaufen, muss der Weg auf einem weißen Feld beginnen und auf einem schwarzen Feld enden. Wir beschränken uns hier auf einen Weg, der in einem (weißen) Eckfeld beginnt und o.B.d.A. zunächst waagerecht verläuft (da wir andernfalls durch Drehung oder Spiegelung des Feldes diese Situation erzeugen können).

Wir nennen einen Winkel „Zeilenwechsel“, wenn durch ihn der Weg von waagerecht kommend zu senkrecht wechselt (also in eine neue Zeile wechselt). Entsprechend nennen wir einen Winkel „Spaltenwechsel“, wenn durch ihn der Weg von senkrecht kommend zu waagerecht wechselt (also in eine neue Spalte wechselt).

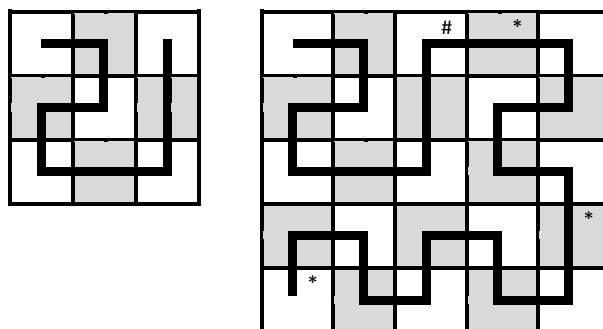
Außerdem erkennen wir, dass nach einem Zeilenwechsel der nächste Zeilenwechsel erst erfolgen kann, wenn zunächst ein Spaltenwechsel stattfand (und umgekehrt).

Damit wechseln sich Zeilenwechsel und Spaltenwechsel stets ab. Da wir den Weg waagerecht beginnen, tritt als erstes ein Zeilenwechsel ein.

Wir zeichnen in das 3×3 -Feld einen Weg ein und können durch systematisches Probieren nachweisen, dass maximal 5 Winkel möglich sind. Wir vermuten, dass es für jedes ungerade n insgesamt $n^2 - n - 1$ solche Winkel geben kann, im Beispiel also $3^2 - 3 - 1 = 5$ Winkel).

Wir zeigen zunächst, dass diese Vermutung einer unteren Schranke für die gesuchte Maximalzahl für alle ungeraden Zahlen richtig ist.

Haben wir die Vermutung für eine ungerade Zahl n gezeigt (wobei der Weg auf einem Eckfeld endet, das an der Feldseite des Startfeldes liegt), dann erweitern wir das Feld um 2 Spalten und 2 Zeilen, d.h. um insgesamt $2 \cdot (2 \cdot n) + 4$ Felder. Diesen Streifen können wir mit mindestens $4 \cdot n + 2$ Winkeln durchlaufen (hier also $4 \cdot 3 + 2 = 14$), weil auf dem mit # markiertem Feld und auf allen nicht mit * markierten Feldern des Streifen Winkel möglich sind.



Wegen $n^2 - n - 1 + 4n + 2 = (n + 2)^2 - (n + 2) - 1$ ist also im Sinne der Methode der vollständigen Induktion¹² für alle ungeraden Zahlen n der Wert $n^2 - n - 1$ eine untere Schranke für die maximal mögliche Anzahl. Für $n = 45$ gibt es somit mindestens $45^2 - 45 - 1 = 1979$ Winkel.

Wir betrachten nun einen Weg mit maximaler Anzahl von Winkeln. Da im ersten Schritt der Weg waagerecht verläuft, stellen wir fest, dass sich in jeder Zeile nur $n - 1$ Winkel befinden können.

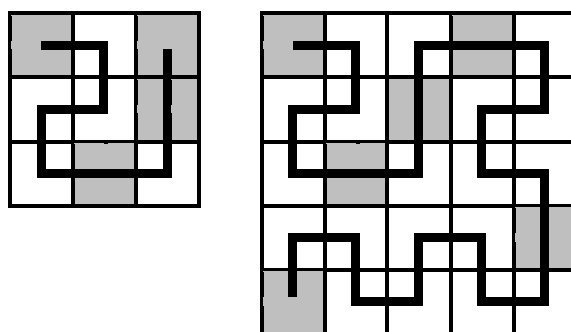
- In der obersten Zeile ist diese Aussage offensichtlich, da sich auf dem Startfeld kein Winkel befindet.
- Für eine Zeile unter der obersten Zeile nehmen wir an, es befinden sich auf allen Felder dieser Zeile Winkel. Wir erreichen diese Zeile nur durch einen Zeilenwechsel aus einer benachbarten (darüber oder darunter liegenden) Zeile. Wenn sich auf allen Feldern ein Winkel befindet, muss sich unmittelbar ein Spaltenwechsel anfügen. Da danach mit einem Zeilenwechsel diese Zeile wieder verlassen wird, treten die Felder mit Winkel immer paarweise (Zeilen-

¹² In den Mathematik-Olympiaden wird eine vollständige formale Anwendung dieser Methode nicht verlangt. Es genügt, auf das Prinzip „von n auf $n + 1$ “ hinzuweisen und den Nachweis dafür zu führen.

und Spaltenwechsel) auf. Bei einer ungeraden Anzahl von Feldern je Zeile wird das letzte noch nicht berührte Feld durch einen Zeilenwechsel erreicht. Da aber kein weiteres unberührtes Feld in der Zeile existiert, muss diese Zeile durch die Fortsetzung des Weges ohne Winkel verlassen werden. Es können sich also nur $n - 1$ Winkel in einer Zeile befinden.

- In der obersten Zeile können sich sogar nur $n - 2$ Winkel befinden. Starten wir nämlich den Weg mit einem waagerechten Schritt, muss anschließend ein Zeilenwechsel erfolgen. Dann verbleibt eine „Restzeile“ mit $n - 2$ Feldern, also einer ungeraden Anzahl von Feldern. Für diese „Restzeile“ gilt wie eben, dass sich auf ihr höchstens $n - 3$ Winkel befinden können.

Wir markieren zur Illustration (nicht als Beweis!) die Felder ohne Winkel in obigen Wegen:



Zusammenfassend kann es also nur maximal

$$(n - 1) \cdot (n - 1) + (n - 2) = n^2 - n - 1$$

Winkel geben. Da diese Anzahl tatsächlich für jedes ungerade n erreicht werden kann, ist die maximale Anzahl damit gefunden. $\square$

Monatsaufgabe 11/2025¹³

Es wird nach folgender Vorschrift einer Ziffernfolge $\{a_1, a_2, \dots\}$ gebildet:

Die erste Ziffer sei $a_1 = 2$, und die zweite Ziffer sei $a_2 = 3$. Aus dem Produkt $a_1 \cdot a_2 = 6$ folgt als dritte Ziffer $a_3 = 6$. Da $a_2 \cdot a_3 = 18$ ist, seien die vierte Ziffer $a_4 = 1$ und die fünfte Ziffer $a_5 = 8$. Nun wird wegen $a_3 \cdot a_4 = 6$ und $a_4 \cdot a_5 = 8$ werden $a_6 = 6$ und $a_7 = 8$ festgelegt. Bislang lautet die Folge also

2 3 6 1 8 6 8

Die geschweiften Klammern deuten an, welche Produkte bereits ausgeführt wurden. Nun wäre das Produkt $8 \cdot 6 = 48$ zu bilden und die Folge mit den Ziffern 4 und 8 fortzusetzen. Diese Vorschrift lässt sich beliebig fortsetzen.

Man untersuche, ob in dieser Folge die Ziffer 5 auftritt!

¹³ Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.11.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalausscheid) am 12. November 2025

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Anmeldeschluss am 30. November 2025,
<https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular>

Bundeswettbewerb Mathematik, Runde 1, Ausschreibung und Aufgaben am
 01. Dezember 2025

(ab diesem Zeitpunkt unter <https://www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Thema 31.5 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem	3
Thema 24.4 – Klassische Wahrscheinlichkeit	9
Flächenhalbierung.....	13
Rückblick auf die online-Seminare „Spotlight Mathe“	14
In alten Mathe-Büchern geblättert – was man früher schon konnte und heute noch können sollte	16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2025	17
Monatsaufgabe 11/2025	19
Termine	20

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe ¹⁴	Nr.	Thema	Aufgabe
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinaten-system	MO651015 MO651016
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät
 für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

¹⁴ Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder
 unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.