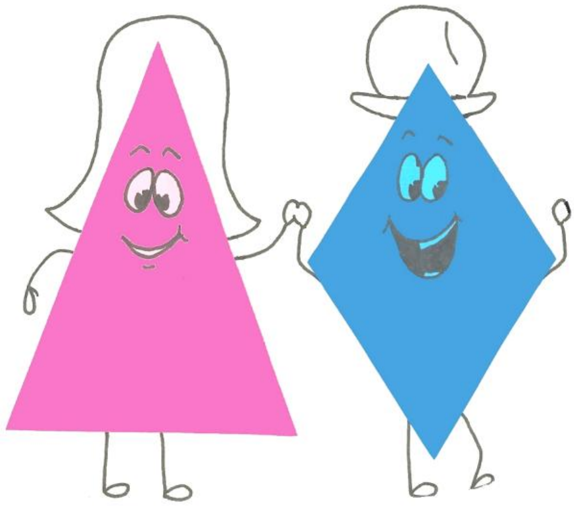
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler, die Freude an Mathematik haben.



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Für eine vollständige Lösung genügt es nicht, nur das Ergebnis anzugeben. Schreibe einen Antwortsatz, führe wenn möglich eine Probe durch und erkläre, wie du die Lösung gefunden hast, oder zeichne zur Begründung deine Lösung auf. Auf der Rückseite sind einige Hinweise für die Lösungsdarstellung einer Aufgabe angegeben.

Du kannst auch einsenden, wenn du nicht alle Aufgaben gelöst hast.

Schicke deine Lösungen bis spätestens **…** (Datum des Poststempels) an folgende Adresse:

MATHE LOGO
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Du darfst auch eher einsenden! Wenn du sogar schon bis … einsendest, schicken wir dir weitere Aufgaben zu.

Nach Einsendeschluss erhältst du im November eine Teilnahmeurkunde für diese Runde und die Aufgaben der nächsten Runde.

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule und deine Klassenstufe anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

Teil A: Beobachtungen im Tierpark

Familie Geometrie besucht einen Tierpark. Gleich am Eingang hängt ein großer Lageplan des Tierparks. Herr Raute möchte gern ins Tropenhaus. Frau Dreieck freut sich auf die Anlage mit den Flamingos. Quadrato möchte unbedingt ins Streichelgehege und Kreisa interessiert sich für die Kamele.

Aufgabe 1a) Gemeinsam überlegen sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es gibt, diese vier Stationen aufzusuchen. Hilf ihnen und gib die Anzahl an! Schreibe alle Möglichkeiten auf und verwende dafür geeignet Abkürzungen.

Aufgabe 1b) Herr Raute sieht auf dem Plan, dass sich das Streichelgehege ganz in der Nähe der Anlage für Flamingos befindet. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es für den Besuch dieser vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander aufsuchen wollen?

Aufgabe 1c) Weil die Anlage für die Kamele sehr weit vom Eingang entfernt ist, schlägt Frau Dreieck vor, diese Anlage als letzte der vier Stationen zu besuchen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der vier Stationen gibt es nun, wenn sie die Kamele als letzte Station auswählen und weiterhin das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander besuchen wollen?

Lösungshinweise zur Aufgabe 1a – Antwortsatz: Es sind 24 verschiedene Reihenfolgen möglich.

Begründung: Wir kürzen die Stationen mit den Anfangsbuchstaben ab und schreiben T für **T**ropenhaus, F für **F**lamingo-Anlage, S für **S**treichelgehege und **K** für Kamel-Gehege. Wir schreiben damit alle Reihenfolgen auf:

F-K-S-T, F-K-T-S, F-S-K-T, F-S-T-K, F-T-K-S, F-T-S-K
K-F-S-T, K-F-T-S, K-S-F-T, K-S-T-F, K-T-F-S, K-T-S-F
S-F-K-T, S-F-T-K, S-K-F-T, S-K-T-F, S-T-F-K, S-T-K-F
T-F-K-S, T-F-S-K, T-K-F-S, T-K-S-F, T-S-F-K, T-S-K-F

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b – Antwortsatz: Es gibt 12 Reihenfolgen der vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander aufsuchen wollen.

Begründung: Wir streichen in der Liste der möglichen Reihenfolge nach Aufgabe 1a) alle Varianten, in denen die Flamingo-Anlage und das Streichelgehege nicht nebeneinander stehen (es verbleiben also alle unterstrichenen Varianten mit F-S oder S-F).

~~F-K-S-T~~, ~~F-K-T-S~~, F-S-K-T, F-S-T-K, ~~F-T-K-S~~, ~~F-T-S-K~~
K-F-S-T, ~~K-F-T-S~~, K-S-F-T, ~~K-S-T-F~~, K-T-F-S, K-T-S-F
S-F-K-T, S-F-T-K, ~~S-K-F-T~~, ~~S-K-T-F~~, ~~S-T-F-K~~, ~~S-T-K-F~~
~~T-F-K-S~~, T-F-S-K, T-K-F-S, T-K-S-F, T-S-F-K, ~~T-S-K-F~~

Lösungsvariante: Da sie die Flamingo-Anlage und das Streichelgehege unmittelbar nacheinander besuchen wollen, schreiben wir dies als eine Station FS oder SF. Damit können wir wieder alle Reihenfolgen aufschreiben:

FS-K-T, FS-T-K, K-FS-T, K-T-FS, T-FS-K, T-K-FS
SF-K-T, SF-T-K, K-SF-T, K-T-SF, T-SF-K, T-K-SF

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c – Antwortsatz: Es gibt 4 Reihenfolgen der vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander und das Kamel-Gehege zuletzt aufsuchen wollen.

Begründung: Wir streichen in der Liste der möglichen Reihenfolge zusätzlich alle Varianten in Aufgabe 1b), in denen am Ende nicht das Kamel-Gehege steht. Es verbleiben die 4 unterstrichenen Reihenfolgen

~~F-K-S-T~~, ~~F-K-T-S~~, ~~**F-S-K-T**~~, <u>F-S-T-K</u>, ~~F-T-K-S~~, ~~F-T-S-K~~
~~**K-F-S-T**~~, ~~K-F-T-S~~, ~~**K-S-F-T**~~, ~~K-S-T-F~~, ~~**K-T-F-S**~~, ~~**K-T-S-F**~~
~~**S-F-K-T**~~, <u>S-F-T-K</u>, ~~S-K-F-T~~, ~~S-K-T-F~~, ~~S-T-F-K~~, ~~S-T-K-F~~
~~T-F-K-S~~, <u>T-F-S-K</u>, ~~**T-K-F-S**~~, ~~**T-K-S-F**~~, <u>T-S-F-K</u>, ~~T-S-K-F~~

Lösungsvariante: Da das Kamel-Gehege erst am Ende des Rundgangs besucht werden soll, müssen wir es bei den Reihenfolgen nicht besonders beachten. Wir müssen also nur die Stationen FS und T bzw. SF und T berücksichtigen (und dann K anhängen):

FS-T-K, T-FS-K
SF-T-K, T-SF-K

****

Aufgabe 2) An der Anlage für Flamingos erfahren Kreisa und Quadrato, dass die Zucht von Flamingos in Zoos oder Tierparks schwierig ist. Erstmalig sind in diesem Tierpark vor 3 Jahren einige Kücken geschlüpft. Im darauffolgenden Jahr waren es noch einmal genauso viele Kücken. Im vorigen Jahr kamen sogar so viele Kücken zu Welt, wie die beiden Jahre davor zusammen. In diesem Jahr konnte noch erfolgreicher gezüchtet werden – sogar zwei Kücken mehr als im Vorjahr.

Wie viele Kücken schlüpften insgesamt in diesen vier Jahren, wenn bekannt ist, dass diese Anzahl ein Vielfaches von 5 ist und es weniger als 40 Jungvögel waren? Schreibe deinen Lösungsweg auf!

Lösungshinweise zur Aufgabe 2 – Antwortsatz: Insgesamt schlüpften 20 Küken in diesen vier Jahren.

Herleitung: Eine solche Aufgabe können wir durch systematisches Probieren lösen. Für eine übersichtliche Darstellung verwenden wir eine Tabelle.

In die erste Spalte tragen wir ein, wie viele Küken vor drei Jahre geschlüpft sein könnten. Dann verwenden wir die Aussagen aus dem Aufgabentext über die folgenden Jahre und ermitteln die Anzahl der Küken dieser Jahre. Zum Schluss prüfen wir, ob sich damit alle Bedingungen erfüllen lassen.

Da vor drei Jahren „einige Küken“ geschlüpft sind, beginnen wir unsere Suche mit 2 Küken:

vor 3 Jahren	vor 2 Jahren	voriges Jahr	dieses Jahr	insgesamt	Vergleich
2	2	2 + 2 = 4	4 + 2 = 6	2 + 2 + 4 + 6 = 14	kein Vielfaches von 5
3	**3**	**3 + 3 = 6**	**6 + 2 = 8**	**3 + 3 + 6 + 8 = 20**	✓
4	4	4 + 4 = 8	8 + 2 = 10	4 + 4 + 8 + 10 = 26	kein Vielfaches von 5
5	5	5 + 5 = 10	10 + 2 = 12	5 + 5 + 10 + 12 = 32	kein Vielfaches von 5
6	6	6 + 6 = 12	12 + 2 = 14	6 + 6 + 12 + 14 = 38	kein Vielfaches von 5
7	7	7 + 7 = 14	14 + 2 = 16	7 + 7 + 14 + 16 = 44	44 > 40

Beginnen wir in der ersten Spalte mit einer noch größeren Anzahl, so wird die Summe noch größer. Also können wir das Probieren beenden.

Alle Bedingungen sind nur erfüllt, wenn vor 3 Jahren 3 Küken geschlüpft sind.

Lösungsvariante: Wenn du schon mit Variablen rechnen kannst, gelingt auch folgende Herleitung. Wir bezeichnen die Anzahl der Küken, die vor drei Jahren geschlüpft sind, mit der Variablen K. Dann können wir die Aussagen in folgender Form schreiben:

	Anzahl der Küken
vor drei Jahren	K
vor zwei Jahren	K
voriges Jahr	K + K
dieses Jahr	K + K + 2
insgesamt	$K + K + (K + K) + (K + K + 2) = 6 \cdot K + 2$

Da die gesamte Anzahl kleiner als 40 sein soll, wissen wir bereits, dass K höchstens 6 sein kann (weil $6 \cdot 7 + 2 = 44$ bereits größer als 40 ist).

Wir prüfen nun, für welches Zahl K die gesamte Anzahl ein Vielfaches von 5 ist.

K	1	2	**3**	4	5	6
$6 \cdot K + 2$	8	14	**20**	26	32	38

Nur für K = 3 ergibt sich eine Anzahl aller Küken, die ein Vielfaches von 5 ist.

****

Aufgabe 3) Neben dem Tropenhaus befindet sich die Außenanlage der Erdmännchen. Als sie um 12:00 Uhr dort ankommen, ist gerade Fütterungszeit. Alle Tiere rennen bei der Jagd nach dem Futter aufgeregt in der Anlage herum. Deshalb können Kreisa und Quadrato die Tiere gar nicht genau zählen. Kreisa meint: „Es sind bestimmt mehr als 15 Tiere“. Quadrato ergänzt: „Es sind aber höchstens 22 Tiere“. Die Tierpflegerin hatte diese Aussagen gehört und erklärte: „Ihr habt beide recht. Außerdem sind es viermal so viele erwachsene Tiere wie Jungtiere“.

Wie viele Erdmännchen sind in der Außenanlage? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3 – Antwortsatz: Es waren 20 Erdmännchen zu sehen.

Herleitung: Wir nennen die Anzahl der Erdmännchen E. Aus dem Aufgabentext finden wir:

Anzahl Tiere		…	15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	23	…
Kreisa	E > 15	-	-	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	v	v
Quadrato	E < 23	v	v	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	-	-

Da sowohl Quadrato als auch Kreisa recht haben, sind es zwischen 16 und 22 Tiere.

Betrachten wir nun die Aussage der Tierpflegerin. Wir verwenden dafür wieder eine Tabelle:

Jungtiere	1	2	3	**4**	5
erwachsene Tiere	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	**$4 \cdot 4 = 16$**	$5 \cdot 4 = 20$
Gesamtzahl	$1+ 4 = 5$	$2 + 8 = 10$	$3 + 12 = 15$	**$4 + 16 = 20$**	$5 + 20 = 25$
Vergleich	$5 < 16$	$10 < 16$	$15 < 16$	✓	$25 > 22$

Nur wenn es 20 Tiere sind, können es viermal so viele erwachsene Tiere ($16 = 4 \cdot 4$) wie Jungtiere sein.

****

Aufgabe 4) Im Gehege für die Kamele sehen sie Dromedare (mit einem Höcker) und Trampeltiere (mit zwei Höckern). Herr Raute stellt fest. „Die Tiere, die zurzeit im Gehege leben, haben zusammen 7 Höcker. Wenn nun noch weitere Tiere mit insgesamt 5 Höckern hinzu kämen, wären es mehr Trampeltiere als Dromedare.“

Kannst du aus dieser Angabe ermitteln, wie viele Dromedare und Trampeltiere zurzeit im Gehege leben? Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast!

Lösungshinweise zur Aufgabe 4 – Antwortsatz: Zurzeit leben drei Trampeltiere und ein Dromedar im Gehege.

Herleitung: Wenn wie beschrieben noch weitere Tiere hinzu kämen, wären es ($7 + 5 =$) 12 Höcker. Da zurzeit eine ungerade Zahl von Höcker (7) zu sehen sind, ist mindestens ein Dromedar dabei. Da auch Tiere mit ungerader Zahl von Höcker hinzu kommen, kommt mindestens ein Dromedar hinzu. Somit sind unter den Tieren mit 12 Höckern mindestens zwei Dromedare.

Wir prüfen nun die Varianten, Tiere mit insgesamt 12 Höckern auf die beiden Tierarten aufzuteilen

Anzahl Dromedare	Verbleibende Höcker	Anzahl Trampeltiere	Vergleich
2	**12 – 2 = 10**	**10 : 2 = 5**	**2 < 5**
3	12 – 3 = 9	nicht möglich	-
4	12 – 4 = 8	8 : 2 = 4	4 = 4
5	12 – 5 = 7	Nicht möglich	-
6	12 – 6 = 6	6 : 2 = 3	6 > 3
7	12 – 7 = 5	Nicht möglich	-
8	12 – 8 = 4	4 : 2 = 2	8 > 2

Wenn noch mehr Dromedare im Gehege wären, würde die Anzahl der Trampeltiere weiter sinken. Also sind unter den Tieren mit insgesamt 12 Hökern 2 Dromedare und 5 Trampeltiere.

Da zurzeit bereits ein Dromedar im Gehege lebt, leben dazu noch 3 Trampeltiere. Insgesamt haben sie tatsächlich (1 + 3 · 2 =) 7 Höcker.

****

Teil B: Zahlenspiele: Immer 20!

Kreisa und Quadrato spielen mit Zahlen und wollen anlässlich des 20. LOGO-Korrespondenzzirkels mit der Zahl 20 experimentieren. Dafür haben sie sich 9 Zahlenkarten gebastelt, auf denen die Zahlen von 1 bis 9 stehen. Jede Zahl kommt also nur einmal vor.
Aufgabe 1a) Quadrato zieht drei Karten. Welche Karten könnte er gezogen haben, wenn deren Summe genau 20 beträgt? Gib alle Möglichkeiten an! (Bei der Summe spielt die Reihenfolge der Summanden natürlich keine Rolle.)

Aufgabe 1b) Kreisa zieht vier Karten. Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, so dass deren Summe genau 20 beträgt!

Aufgabe 1c) Quadrato zieht sechs Karten und wundert sich, dass es ihm nicht gelingt, die Summe 20 genau zu erreichen. Erkläre, warum es nicht möglich ist!

Aufgabe 1d) Herr Raute behauptet: „Egal wie viele Karten Kreisa zieht – wenn deren Summe genau 20 beträgt, bleiben genug Karten übrig, so dass Quadrato auch Karten mit der Summe 20 ziehen kann.“ Frau Dreieck bezweifelt es: „Kreisa kann sich Karten auswählen, so dass Quadrato nicht mehr genau 20 erreichen kann!“ Wer hat recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1a – Antwortsatz: Es gibt 4 Möglichkeiten, 3 Karten mit der Summe 20 zu ziehen.

Begründung: Wir probieren systematisch und erkennen:

Hat Quadrato zuerst die Zahlenkarte mit 1 oder mit 2 gezogen, kann er mit den verbleibenden 2 Karten nicht mehr auf Summe 20 kommen, weil höchsten 8 + 9 = 17 möglich sind.

$$3 + 8 + 9 = 20, \quad 4 + 7 + 9 = 20, \quad 5 + 6 + 9 = 20, \quad 5 + 7 + 8 = 20.$$

Hat Quadrato nur Karten mit Werten größer als 5 gezogen, ist die Summe mindestens 6 + 7 + 8 = 21, also zu groß.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten, mit 4 Zahlenkarten die Summe 20 zu erreichen. Es genügte aber für diese Aufgabe, 3 Möglichkeiten davon anzugeben.

$$1 + 2 + 8 + 9 = 20, \quad 1 + 3 + 7 + 9 = 20, \quad 1 + 4 + 6 + 9 = 20, \quad 1 + 4 + 7 + 8 = 20,$$
$$1 + 5 + 6 + 8 = 20, \quad 2 + 3 + 6 + 9 = 20, \quad 2 + 3 + 7 + 8 = 20, \quad 2 + 4 + 5 + 9 = 20,$$
$$2 + 4 + 6 + 8 = 20, \quad 2 + 5 + 6 + 7 = 20, \quad 3 + 4 + 5 + 8 = 20, \quad 3 + 4 + 6 + 7 = 20.$$

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c – Antwortsatz: Wenn Quadrato die 6 kleinsten Zahlenkarten gezogen hat, beträgt deren Summe bereits (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =) 21. Bei jeder anderen Auswahl wird die Summe sogar noch größer.

Quadrato kann also mit 6 Karten nicht die Summe 20 erreichen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1d – Antwortsatz: Herr Raute hat sicherlich beobachtet, dass die Summe der 9 Zahlenkarten insgesamt (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =) 45 beträgt. Wenn Kreisa also Zahlenkarten mit der Summe 20 gezogen hat, verbleiben noch Zahlen mit der Summe (45 – 20 =) 25. Doch die Behauptung von Herrn Raute stimmt nicht.

Um zu begründen, dass Frau Dreieck recht hat, genügt es ein Beispiel anzugeben, dass die Behauptung von Herrn Raute widerlegt.

Wenn zum Beispiel Kreisa die Zahlenkarten 3, 4, 5 und 8 mit der Summe 3 + 4 + 5 + 8 = 20 gezogen hat, verbleiben die Karten mit den Zahlen 1, 2, 6, 7 und 9. Damit kann Quadrato aber nicht die Summe 20 erreichen, denn 6 + 7 + 9 = 22 ist bereits größer als 20. Aber wenn er eine dieser Zahlenkarten durch 1 + 2 ersetzt, kann er höchstens die Summe 19 erreichen:

1 + 2 + 7 + 9 = 19, 1 + 2 + 6 + 9 = 18, 1 + 2 + 6 + 7 = 16.

****

Nun haben Kreisa und Quadrato Rechenmauern mit vier Zeilen gezeichnet. Sie tragen Zahlen in die untere Reihe ein. Dann schreiben sie in den nächsten Zeilen darüber auf jeden Stein jeweils die Summe der direkt darunterliegenden Steine. Sie schreiben aber auf keinen Stein die Zahl 0. Ganz oben soll immer 20 stehen.

1. Zeile	20			
2. Zeile				
3. Zeile				
4. Zeile				

Aufgabe 2a) Welche Zahlen könnte Quadrato in die untere Zeile geschrieben haben?

Aufgabe 2b) Wenn auf dem obersten Stein 20 steht, beträgt die Summe auf der zweiten Zeile 20. Kreisa überlegt, wie groß die Summe der Zahlen in der dritten Zeile sein kann. Gib ein Beispiel mit der kleinstmöglichen Summe in der dritten Zeile an.

Aufgabe 2c) Gib eine richtig gerechnete Rechenmauer an, bei der keine Zahl auf den Steinen mehrfach verwendet wird.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2a – Antwortsatz: Quadrato könnte in die untere Zeile die Zahlen 2 – 3 – 2 – 3 geschrieben haben.

Begründung: Wir prüfen, ob mit dieser Belegung die Rechenmauer korrekt ausgefüllt werden kann (so dass in der ersten Zeile 20 zu sehen ist).

1. Zeile	20			
2. Zeile	10	10		
3. Zeile	5	5	5	
4. Zeile	2	3	2	3

Es gibt viele andere Möglichkeiten, hier einige Beispiele:

1. Zeile	20			
2. Zeile	4	16		
3. Zeile	2	2	14	
4. Zeile	1	1	1	13

1. Zeile	20			
2. Zeile	5	15		
3. Zeile	2	3	12	
4. Zeile	1	1	2	10

1. Zeile	20			
2. Zeile	6	14		
3. Zeile	2	4	10	
4. Zeile	1	1	3	7

1. Zeile	20			
2. Zeile	7	13		
3. Zeile	2	5	8	
4. Zeile	1	1	4	4

1. Zeile	20			
2. Zeile	8	12		
3. Zeile	2	6	6	
4. Zeile	1	1	5	1

1. Zeile	20			
2. Zeile	7	13		
3. Zeile	3	4	9	
4. Zeile	1	2	2	7

1. Zeile	20			
2. Zeile	8	12		
3. Zeile	3	5	7	
4. Zeile	1	2	3	4

1. Zeile	20			
2. Zeile	9	11		
3. Zeile	3	6	5	
4. Zeile	1	2	4	1

1. Zeile	20			
2. Zeile	8	12		
3. Zeile	4	4	8	
4. Zeile	1	3	1	7

1. Zeile	20			
2. Zeile	9	11		
3. Zeile	4	5	6	
4. Zeile	1	3	2	4

1. Zeile	20			
2. Zeile	10	10		
3. Zeile	4	6	4	
4. Zeile	1	3	3	1

1. Zeile	20			
2. Zeile	7	13		
3. Zeile	4	3	10	
4. Zeile	2	2	1	9

1. Zeile	20			
2. Zeile	8	12		
3. Zeile	4	4	8	
4. Zeile	2	2	2	6

1. Zeile	20			
2. Zeile	9	11		
3. Zeile	4	5	6	
4. Zeile	2	2	3	3

Lösungshinweise zur Aufgabe 2b – Antwortsatz: Die kleinstmögliche Summe in der dritten Zeile beträgt 14.

Herleitung: In den Beispielen haben wir Summen von 14 bis 18 gefunden. Wir setzen zunächst Buchstaben statt Zahlen in die Felder der 2. und 3. Zeile.

1. Zeile	20			
2. Zeile	A	B		
3. Zeile	a	b	c	
4. Zeile				

Nach den Regeln für die Rechenmauer gilt

$$A + B = 20$$
$$a + b = A,\ b + c = B$$

Wir erkennen, dass damit $a + 2 \cdot b + c = 20$ gelten muss. Wir probieren nun verschiedene Werte für b aus:

Fall $b = 1$ ist nicht möglich, weil in der 4. Zeile unter b eine Null erforderlich wäre

Fall $b = 2$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 2 = 16$, also $a + b + c = 18$.
Fall $b = 3$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 3 = 14$, also $a + b + c = 17$.
Fall $b = 4$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 4 = 12$, also $a + b + c = 16$.
Fall $b = 5$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 5 = 10$, also $a + b + c = 15$.

Fall $b = 6$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 6 = 8$, also $a + b + c = 14$. Auch damit können wir die Rechenmauer beschriften.

1. Zeile		20		
2. Zeile		10	10	
3. Zeile	4	6	4	
4. Zeile	1	3	3	1

Fall $b = 7$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 7 = 6$. Da in der 3. Zeile aber keine 0 oder 1 stehen darf, verbleiben nur die Möglichkeiten $a = 2$ und $c = 4$, $a = 3$ und $c = 3$ oder $a = 4$ und $c = 2$. Doch dafür können wir die 4. Zeile nicht so ausfüllen, dass $b = 7$ als Summe der darunter stehenden Felder entsteht, zum Beispiel

1. Zeile		20		
2. Zeile		9	11	
3. Zeile	2	7	4	
4. Zeile	1	1	?	

Für noch größere Zahlen für b können wir die Rechenmauer ebenfalls nicht ausfüllen.

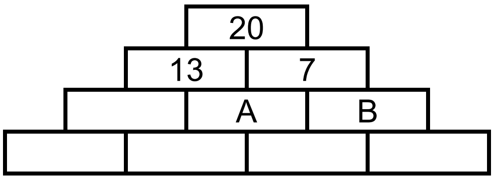
Hinweis: Wenn du als kleinstmögliche Summe 15 angegeben hast, wurde dennoch der Punkt vergeben.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2c – Antwortsatz: Es genügt**,** eine richtig gerechnete Rechenmauer anzugeben, bei der keine Zahl auf den Steinen mehrfach verwendet wird. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten für die 2. Zeile:

1. Zeile		20		
2. Zeile		11	9	
3. Zeile	8	3	6	
4. Zeile	7	1	2	4

1. Zeile		20		
2. Zeile		12	8	
3. Zeile	9	3	5	
4. Zeile	7	2	1	4

1. Zeile
2. Zeile
3. Zeile
4. Zeile



A und B müssen mindestens 3 sein, weil in der vierten Zeile (1 + 1 =) 2 nicht zulässig ist. Also kann nur A = 4 und B = 3 (bzw. A = 3 und B = 4) eingetragen werden. In der 4. Zeile sind aber dann (2 + 2 =) 4 oder (1 + 3) = 4 nicht zulässig.

Ist in der 2. Zeile statt 7 eine noch kleinere Zahl eingetragen, gelingt es ebenfalls nicht.

****

Nun schlägt Frau Dreieck folgendes Spiel vor: Mit einem regulärem Spielwürfel wird eine Startzahl gewürfelt, also 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Nun darf immer wieder entweder mit 2 multipliziert oder 2 subtrahiert werden. Ein Beispiel mit 5 Rechenschritten:

Startzahl 4 → 4 · 2 = 8 → 8 · 2 = 16 → 16 – 2 = 14 → 14 · 2 = 28 → 28 – 2 = 26.

Aufgabe 3a) Kreisa behauptet, dass für jede Startzahl nicht mehr als 8 Rechenschritte erforderlich sind, um mit diesen Rechenschritten genau auf die Zahl 20 zu kommen. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3b) Quadrato ändert die Spielregeln: Er will entweder mit 3 multiplizieren oder 2 subtrahieren. Kann er auch für jede Startzahl die Zahl 20 erreichen? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a: Vorbemerkung: Mit diesen beiden Rechenschritten können wir für jede beliebige Startzahl den Wert 20 erreichen. Wir multiplizieren zunächst wiederholt mit 2, bis der Wert größer als 20 wird. Dann subtrahieren wir wiederholt die Zahl 2, bis wir 20 erreichen. Allerdings kann die Anzahl der Rechenschritte dabei groß werden, beispielsweise

Startzahl 1 → 1 · 2 = 2 → 2 · 2 = 4 → 2 · 4 = 8 → 8 · 2 = 16 → 16 · 2 = 32 → 32 – 2 = 30 → 30 – 2 = 28 → 28 – 2 = 26 → 26 – 2 = 24 → 24 – 2 = 22 → 22 – 2 = 20: 11 Rechenschritte

Antwortsatz zur Aufgabe 3a: Kreisa hat recht, es sind weniger als 8 Rechenschritte erforderlich.

Begründung: Wir geben für jede Startzahl eine Reihenfolge der Rechenschritte an:

Startzahl 1 → 1 · 2 = 2 → 2 · 2 = 4 → 2 · 4 = 8 → 8 – 2 = 6 → 6 · 2 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 7 Rechenschritte

Startzahl 2 → 2 · 2 = 4 → 2 · 4 = 8 → 8 – 2 = 6 → 6 · 2 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 6 Rechenschritte

Startzahl 3 → 2 · 3 = 6 → 6 · 2 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 4 Rechenschritte

Startzahl 4 → 2 · 4 = 8 → 8 – 2 = 6 → 6 · 2 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 5 Rechenschritte

Startzahl 5 → 5 · 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 2 Rechenschritte

Startzahl 6 → 6 · 2 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 · 2 = 20: 3 Rechenschritte

Antwortsatz zur Aufgabe 3b: Quadrato kann mit den geänderten Regeln nicht für jede Startzahl die Zahl 20 erreichen.

Begründung: Startet Quadrato mit einer ungeraden Zahl, so entsteht nach jedem Rechenschritt bei Multiplikation mit 3 wieder eine ungerade Zahl. Ebenso entsteht aus einer ungeraden Zahl nach jedem Rechenschritt mit Subtraktion der Zahl 2 wieder eine ungerade Zahl. Also kann Quadrato mit ungerader Startzahl nicht auf die gerade Zahl 20 kommen.

Hinweis: Startet Quadrato mit einer geraden Zahl, ist 20 erreichbar, zum Beispiel

Startzahl 2 → 2 · 3 = 6 → 6 – 2 = 4 → 4 · 3 = 12 → 12 – 2 = 10 → 10 – 2 = 8 → 8 · 3 = 24 → 24 – 2 = 22 → 22 – 2 = 20: 8 Rechenschritte

(Die Startzahlen 4 und 6 sind in diesen Rechenschritten enthalten, für sie gelingt es also auch.)