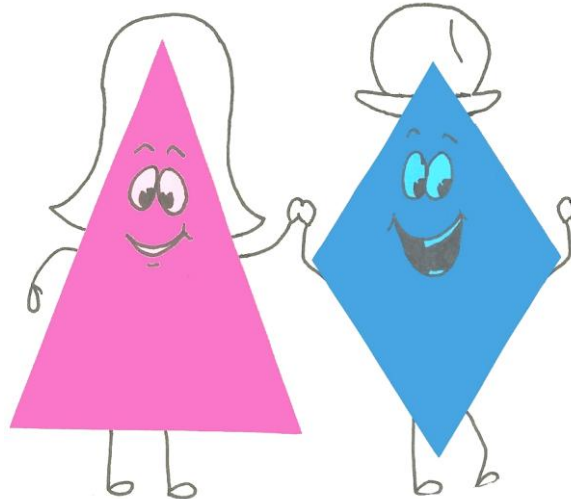


Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

**Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.**



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Für eine vollständige Lösung genügt es nicht, nur das Ergebnis anzugeben. Schreibe einen Antwortsatz, führe wenn möglich eine Probe durch und erkläre, wie du die Lösung gefunden hast, oder zeichne zur Begründung deine Lösung auf. Auf der Rückseite sind einige Hinweise für die Lösungsdarstellung einer Aufgabe angegeben.

Du kannst auch einsenden, wenn du nicht alle Aufgaben gelöst hast.

Schicke deine Lösungen bis spätestens ... (Datum des Poststempels) an folgende Adresse:

MATHE LOGO
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Du darfst auch eher einsenden!

Nach Einsendeschluss erhältst du eine Teilnahmeurkunde für diese Runde und die Aufgaben der nächsten Runde.

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule und deine Klassenstufe anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

Runde 1 – Teil A: Beobachtungen im Tierpark

Familie Geometrie besucht einen Tierpark. Gleich am Eingang hängt ein großer Lageplan des Tierparks. Herr Raute möchte gern ins Tropenhaus. Frau Dreieck freut sich auf die Anlage mit den Flamingos. Quadrato möchte unbedingt ins Streichelgehege und Kreisa interessiert sich für die Kamele.

Aufgabe 1a) Gemeinsam überlegen sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es gibt, diese vier Stationen aufzusuchen. Hilf ihnen und gib die Anzahl an! Schreibe alle Möglichkeiten auf und verwende dafür geeignet Abkürzungen.

Aufgabe 1b) Herr Raute sieht auf dem Plan, dass sich das Streichelgehege ganz in der Nähe der Anlage für Flamingos befindet. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es für den Besuch dieser vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander aufsuchen wollen?

Aufgabe 1c) Weil die Anlage für die Kamele sehr weit vom Eingang entfernt ist, schlägt Frau Dreieck vor, diese Anlage als letzte der vier Stationen zu besuchen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der vier Stationen gibt es nun, wenn sie die Kamele als letzte Station auswählen und weiterhin das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander besuchen wollen?

Lösungshinweise zur Aufgabe 1a – Antwortsatz: Es sind 24 verschiedene Reihenfolgen möglich.

Begründung: Wir kürzen die Stationen mit den Anfangsbuchstaben ab und schreiben T für Tropenhaus, F für Flamingo-Anlage, S für Streichelgehege und K für Kamel-Gehege. Wir schreiben damit alle Reihenfolgen auf:

F-K-S-T, F-K-T-S, F-S-K-T, F-S-T-K, F-T-K-S, F-T-S-K
K-F-S-T, K-F-T-S, K-S-F-T, K-S-T-F, K-T-F-S, K-T-S-F
S-F-K-T, S-F-T-K, S-K-F-T, S-K-T-F, S-T-F-K, S-T-K-F
T-F-K-S, T-F-S-K, T-K-F-S, T-K-S-F, T-S-F-K, T-S-K-F

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b – Antwortsatz: Es gibt 12 Reihenfolgen der vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander aufsuchen wollen.

Begründung: Wir streichen in der Liste der möglichen Reihenfolge nach Aufgabe 1a) alle Varianten, in denen die Flamingo-Anlage und das Streichelgehege nicht nebeneinander stehen (es verbleiben also alle unterstrichenen Varianten mit F-S oder S-F).

~~F-K-S-T~~, ~~F-K-T-S~~, F-S-K-T, F-S-T-K, ~~F-T-K-S~~, ~~F-T-S-K~~
~~K-F-S-T~~, ~~K-F-T-S~~, K-S-F-T, ~~K-S-T-F~~, K-T-F-S, K-T-S-F
S-F-K-T, S-F-T-K, ~~S-K-F-T~~, ~~S-K-T-F~~, ~~S-T-F-K~~, ~~S-T-K-F~~
~~T-F-K-S~~, T-F-S-K, T-K-F-S, T-K-S-F, T-S-F-K, ~~T-S-K-F~~

Lösungsvariante: Da sie die Flamingo-Anlage und das Streichelgehege unmittelbar nacheinander besuchen wollen, schreiben wir dies als eine Station FS oder SF. Damit können wir wieder alle Reihenfolgen aufschreiben:

FS-K-T, FS-T-K, K-FS-T, K-T-FS, T-FS-K, T-K-FS
SF-K-T, SF-T-K, K-SF-T, K-T-SF, T-SF-K, T-K-SF

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c – Antwortsatz: Es gibt 4 Reihenfolgen der vier Stationen, wenn sie das Streichelgehege und die Flamingo-Anlage unmittelbar nacheinander und das Kamel-Gehege zuletzt aufsuchen wollen.

Begründung: Wir streichen in der Liste der möglichen Reihenfolge zusätzlich alle Varianten in Aufgabe 1b), in denen am Ende nicht das Kamel-Gehege steht. Es verbleiben die 4 unterstrichenen Reihenfolgen

~~F-K-S-T~~, ~~F-K-T-S~~, ~~F-S-K-T~~, F-S-T-K, ~~F-T-K-S~~, ~~F-T-S-K~~
~~K-F-S-T~~, ~~K-F-T-S~~, ~~K-S-F-T~~, ~~K-S-T-F~~, ~~K-T-F-S~~, ~~K-T-S-F~~
~~S-F-K-T~~, ~~S-F-T-K~~, ~~S-K-F-T~~, ~~S-K-T-F~~, ~~S-T-F-K~~, ~~S-T-K-F~~
T-F-K-S, T-F-S-K, ~~T-K-F-S~~, ~~T-K-S-F~~, T-S-F-K, T-S-K-F

Lösungsvariante: Da das Kamel-Gehege erst am Ende des Rundgangs besucht werden soll, müssen wir es bei den Reihenfolgen nicht besonders beachten. Wir müssen also nur die Stationen FS und T bzw. SF und T berücksichtigen (und dann K anhängen):

FS-T-K, T-FS-K
 SF-T-K, T-SF-K

Aufgabe 2) An der Anlage für Flamingos erfahren Kreisa und Quadrato, dass die Zucht von Flamingos in Zoos oder Tierparks schwierig ist. Erstmals sind in diesem Tierpark vor 3 Jahren einige Küken geschlüpft. Im darauffolgenden Jahr waren es noch einmal genauso viele Küken. Im vorigen Jahr kamen sogar so viele Küken zu Welt, wie die beiden Jahre davor zusammen. In diesem Jahr konnte noch erfolgreicher gezüchtet werden – sogar zwei Küken mehr als im Vorjahr.

Wie viele Küken schlüpften insgesamt in diesen vier Jahren, wenn bekannt ist, dass diese Anzahl ein Vielfaches von 5 ist und es weniger als 40 Jungvögel waren? Schreibe deinen Lösungsweg auf!

Lösungshinweise zur Aufgabe 2 – Antwortsatz: Insgesamt schlüpften 20 Küken in diesen vier Jahren.

Herleitung: Eine solche Aufgabe können wir durch systematisches Probieren lösen. Für eine übersichtliche Darstellung verwenden wir eine Tabelle.

In die erste Spalte tragen wir ein, wie viele Küken vor drei Jahre geschlüpft sein könnten. Dann verwenden wir die Aussagen aus dem Aufgabentext über die folgenden Jahre und ermitteln die Anzahl der Küken dieser Jahre. Zum Schluss prüfen wir, ob sich damit alle Bedingungen erfüllen lassen.

Da vor drei Jahren „einige Küken“ geschlüpft sind, beginnen wir unsere Suche mit 2 Küken:

vor 3 Jahren	vor 2 Jahren	voriges Jahr	dieses Jahr	insgesamt	Vergleich
2	2	$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$	$2 + 2 + 4 + 6 = 14$	kein Vielfaches von 5
3	3	$3 + 3 = 6$	$6 + 2 = 8$	$3 + 3 + 6 + 8 = 20$	✓
4	4	$4 + 4 = 8$	$8 + 2 = 10$	$4 + 4 + 8 + 10 = 26$	kein Vielfaches von 5
5	5	$5 + 5 = 10$	$10 + 2 = 12$	$5 + 5 + 10 + 12 = 32$	kein Vielfaches von 5
6	6	$6 + 6 = 12$	$12 + 2 = 14$	$6 + 6 + 12 + 14 = 38$	kein Vielfaches von 5
7	7	$7 + 7 = 14$	$14 + 2 = 16$	$7 + 7 + 14 + 16 = 44$	$44 > 40$

Beginnen wir in der ersten Spalte mit einer noch größeren Anzahl, so wird die Summe noch größer. Also können wir das Probieren beenden.

Alle Bedingungen sind nur erfüllt, wenn vor 3 Jahren 3 Küken geschlüpft sind.

Lösungsvariante: Wenn du schon mit Variablen rechnen kannst, gelingt auch folgende Herleitung. Wir bezeichnen die Anzahl der Küken, die vor drei Jahren geschlüpft sind, mit der Variablen K. Dann können wir die Aussagen in folgender Form schreiben:

	Anzahl der Küken
vor drei Jahren	K
vor zwei Jahren	K
voriges Jahr	K + K
dieses Jahr	K + K + 2
insgesamt	$K + K + (K + K) + (K + K + 2) = 6 \cdot K + 2$

Da die gesamte Anzahl kleiner als 40 sein soll, wissen wir bereits, dass K höchstens 6 sein kann (weil $6 \cdot 7 + 2 = 44$ bereits größer als 40 ist).

Wir prüfen nun, für welches Zahl K die gesamte Anzahl ein Vielfaches von 5 ist.

K	1	2	3	4	5	6
$6 \cdot K + 2$	8	14	20	26	32	38

Nur für $K = 3$ ergibt sich eine Anzahl aller Küken, die ein Vielfaches von 5 ist.

Aufgabe 3) Neben dem Tropenhaus befindet sich die Außenanlage der Erdmännchen. Als sie um 12:00 Uhr dort ankommen, ist gerade Fütterungszeit. Alle Tiere rennen bei der Jagd nach dem Futter aufgeregt in der Anlage herum. Deshalb können Kreisa und Quadrato die Tiere gar nicht genau zählen. Kreisa meint: „Es sind bestimmt mehr als 15 Tiere“. Quadrato ergänzt: „Es sind aber höchstens 22 Tiere“. Die Tierpflegerin hatte diese Aussagen gehört und erklärte: „Ihr habt beide recht. Außerdem sind es viermal so viele erwachsene Tiere wie Jungtiere“.

Wie viele Erdmännchen sind in der Außenanlage? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3 – Antwortsatz: Es waren 20 Erdmännchen zu sehen.

Herleitung: Wir nennen die Anzahl der Erdmännchen E. Aus dem Aufgabentext finden wir:

Anzahl Tiere		...	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
Kreisa	$E > 15$	-	-	v	v	v	v	v	v	v	v	v
Quadrato	$E < 23$	v	v	v	v	v	v	v	v	v	-	-

Da sowohl Quadrato als auch Kreisa recht haben, sind es zwischen 16 und 22 Tiere.

Betrachten wir nun die Aussage der Tierpflegerin. Wir verwenden dafür wieder eine Tabelle:

Jungtiere	1	2	3	4	5
erwachsene Tiere	$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 4 = 16$	$5 \cdot 4 = 20$
Gesamtzahl	$1 + 4 = 5$	$2 + 8 = 10$	$3 + 12 = 15$	$4 + 16 = 20$	$5 + 20 = 25$
Vergleich	$5 < 16$	$10 < 16$	$15 < 16$	✓	$25 > 22$

Nur wenn es 20 Tiere sind, können es viermal so viele erwachsene Tiere ($16 = 4 \cdot 4$) wie Jungtiere sein.

Aufgabe 4) Im Gehege für die Kamele sehen sie Dromedare (mit einem Höcker) und Trampeltiere (mit zwei Höckern). Herr Raute stellt fest. „Die Tiere, die zurzeit im Gehege leben, haben zusammen 7 Höcker. Wenn nun noch weitere Tiere mit insgesamt 5 Höckern hinzu kämen, wären es mehr Trampeltiere als Dromedare.“

Kannst du aus dieser Angabe ermitteln, wie viele Dromedare und Trampeltiere zurzeit im Gehege leben? Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast!

Lösungshinweise zur Aufgabe 4 – Antwortsatz: Zurzeit leben drei Trampeltiere und ein Dromedar im Gehege.

Herleitung: Wenn wie beschrieben noch weitere Tiere hinzu kämen, wären es $(7 + 5 =)$ 12 Höcker. Da zurzeit eine ungerade Zahl von Höcker (7) zu sehen sind, ist mindestens ein Dromedar dabei. Da auch Tiere mit ungerader Zahl von Höcker hinzu kommen, kommt mindestens ein Dromedar hinzu. Somit sind unter den Tieren mit 12 Höckern mindestens zwei Dromedare.

Wir prüfen nun die Varianten, Tiere mit insgesamt 12 Höckern auf die beiden Tierarten aufzuteilen

Anzahl Dromedare	Verbleibende Höcker	Anzahl Trampeltiere	Vergleich
2	$12 - 2 = 10$	$10 : 2 = 5$	$2 < 5$
3	$12 - 3 = 9$	nicht möglich	-
4	$12 - 4 = 8$	$8 : 2 = 4$	$4 = 4$
5	$12 - 5 = 7$	Nicht möglich	-
6	$12 - 6 = 6$	$6 : 2 = 3$	$6 > 3$
7	$12 - 7 = 5$	Nicht möglich	-
8	$12 - 8 = 4$	$4 : 2 = 2$	$8 > 2$

Wenn noch mehr Dromedare im Gehege wären, würde die Anzahl der Trampeltiere weiter sinken. Also sind unter den Tieren mit insgesamt 12 Höckern 2 Dromedare und 5 Trampeltiere.

Da zurzeit bereits ein Dromedar im Gehege lebt, leben dazu noch 3 Trampeltiere. Insgesamt haben sie tatsächlich $(1 + 3 \cdot 2 =)$ 7 Höcker.

Runde 1 – Teil B: Zahlenspiele: Immer 20!

Kreisa und Quadrato spielen mit Zahlen und wollen anlässlich des 20. LOGO-Korrespondenzzirkels mit der Zahl 20 experimentieren. Dafür haben sie sich 9 Zahlenkarten gebastelt, auf denen die Zahlen von 1 bis 9 stehen. Jede Zahl kommt also nur einmal vor.

Aufgabe 1a) Quadrato zieht drei Karten. Welche Karten könnte er gezogen haben, wenn deren Summe genau 20 beträgt? Gib alle Möglichkeiten an! (Bei der Summe spielt die Reihenfolge der Summanden natürlich keine Rolle.)

Aufgabe 1b) Kreisa zieht vier Karten. Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, so dass deren Summe genau 20 beträgt!

Aufgabe 1c) Quadrato zieht sechs Karten und wundert sich, dass es ihm nicht gelingt, die Summe 20 genau zu erreichen. Erkläre, warum es nicht möglich ist!

Aufgabe 1d) Herr Raute behauptet: „Egal wie viele Karten Kreisa zieht – wenn deren Summe genau 20 beträgt, bleiben genug Karten übrig, so dass Quadrato auch Karten mit der Summe 20 ziehen kann.“ Frau Dreieck bezweifelt es: „Kreisa kann sich Karten auswählen, so dass Quadrato nicht mehr genau 20 erreichen kann!“ Wer hat recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1a – Antwortsatz: Es gibt 4 Möglichkeiten, 3 Karten mit der Summe 20 zu ziehen.

Begründung: Wir probieren systematisch und erkennen:

Hat Quadrato zuerst die Zahlenkarte mit 1 oder mit 2 gezogen, kann er mit den verbleibenden 2 Karten nicht mehr auf Summe 20 kommen, weil höchstens $8 + 9 = 17$ möglich sind.

$$3 + 8 + 9 = 20, \quad 4 + 7 + 9 = 20, \quad 5 + 6 + 9 = 20, \quad 5 + 7 + 8 = 20.$$

Hat Quadrato nur Karten mit Werten größer als 5 gezogen, ist die Summe mindestens $6 + 7 + 8 = 21$, also zu groß.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten, mit 4 Zahlenkarten die Summe 20 zu erreichen. Es genügt aber für diese Aufgabe, 3 Möglichkeiten davon anzugeben.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 8 + 9 &= 20, & 1 + 3 + 7 + 9 &= 20, & 1 + 4 + 6 + 9 &= 20, & 1 + 4 + 7 + 8 &= 20, \\ 1 + 5 + 6 + 8 &= 20, & 2 + 3 + 6 + 9 &= 20, & 2 + 3 + 7 + 8 &= 20, & 2 + 4 + 5 + 9 &= 20, \\ 2 + 4 + 6 + 8 &= 20, & 2 + 5 + 6 + 7 &= 20, & 3 + 4 + 5 + 8 &= 20, & 3 + 4 + 6 + 7 &= 20. \end{aligned}$$

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c – Antwortsatz: Wenn Quadrato die 6 kleinsten Zahlenkarten gezogen hat, beträgt deren Summe bereits $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =)$ 21. Bei jeder anderen Auswahl wird die Summe sogar noch größer.

Quadrato kann also mit 6 Karten nicht die Summe 20 erreichen.

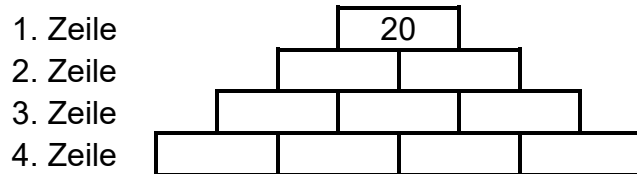
Lösungshinweise zur Aufgabe 1d – Antwortsatz: Herr Raute hat sicherlich beobachtet, dass die Summe der 9 Zahlenkarten insgesamt $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =)$ 45 beträgt. Wenn Kreisa also Zahlenkarten mit der Summe 20 gezogen hat, verbleiben noch Zahlen mit der Summe $(45 - 20 =)$ 25. Doch die Behauptung von Herrn Raute stimmt nicht.

Um zu begründen, dass Frau Dreieck recht hat, genügt es ein Beispiel anzugeben, dass die Behauptung von Herrn Raute widerlegt.

Wenn zum Beispiel Kreisa die Zahlenkarten 3, 4, 5 und 8 mit der Summe $3 + 4 + 5 + 8 = 20$ gezogen hat, verbleiben die Karten mit den Zahlen 1, 2, 6, 7 und 9. Damit kann Quadrato aber nicht die Summe 20 erreichen, denn $6 + 7 + 9 = 22$ ist bereits größer als 20. Aber wenn er eine dieser Zahlenkarten durch $1 + 2$ ersetzt, kann er höchstens die Summe 19 erreichen:

$$1 + 2 + 7 + 9 = 19, \quad 1 + 2 + 6 + 9 = 18, \quad 1 + 2 + 6 + 7 = 16.$$

Nun haben Kreisa und Quadrato Rechenmauern mit vier Zeilen gezeichnet. Sie tragen Zahlen in die untere Reihe ein. Dann schreiben sie in den nächsten Zeilen darüber auf jeden Stein jeweils die Summe der direkt darunterliegenden Steine. Sie schreiben aber auf keinen Stein die Zahl 0. Ganz oben soll immer 20 stehen.



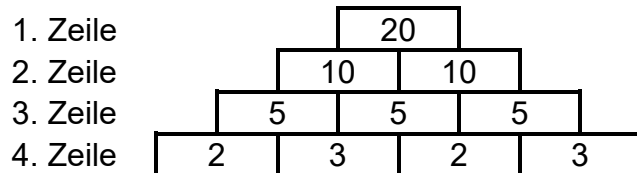
Aufgabe 2a) Welche Zahlen könnte Quadrato in die untere Zeile geschrieben haben?

Aufgabe 2b) Wenn auf dem obersten Stein 20 steht, beträgt die Summe auf der zweiten Zeile 20. Kreisa überlegt, wie groß die Summe der Zahlen in der dritten Zeile sein kann. Gib ein Beispiel mit der kleinstmöglichen Summe in der dritten Zeile an.

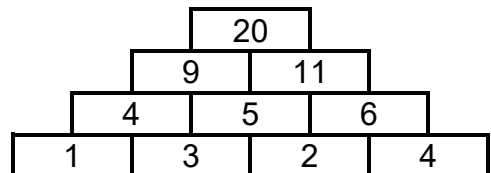
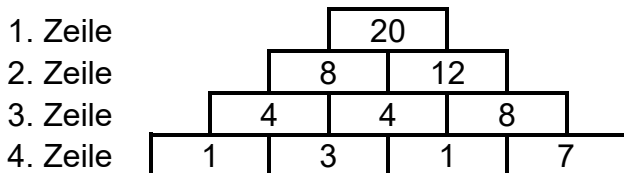
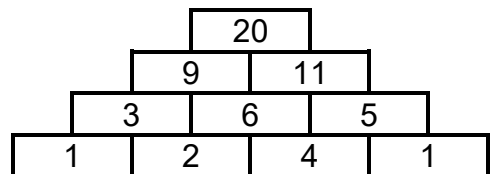
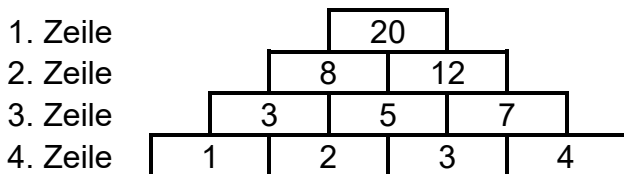
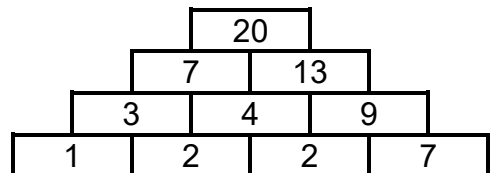
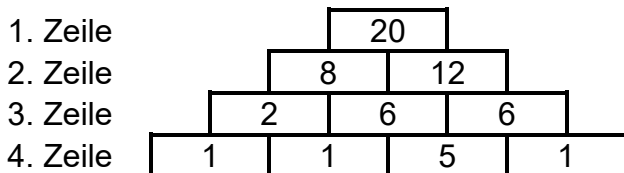
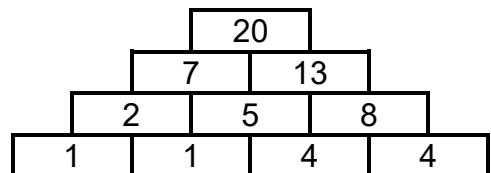
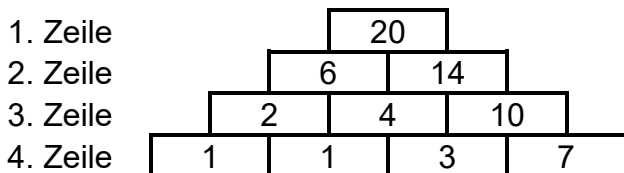
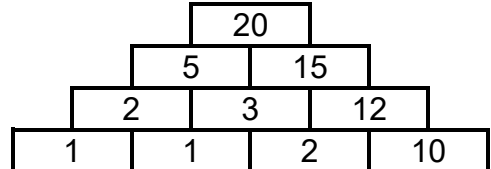
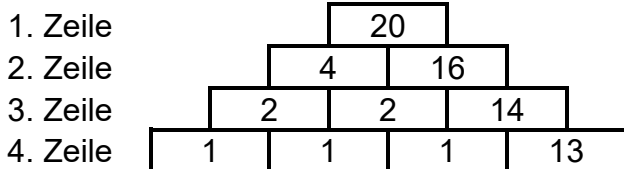
Aufgabe 2c) Gib eine richtig gerechnete Rechenmauer an, bei der keine Zahl auf den Steinen mehrfach verwendet wird.

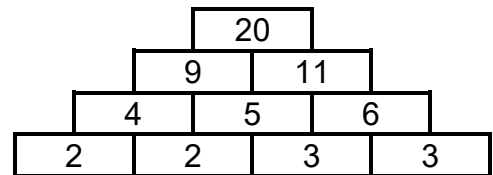
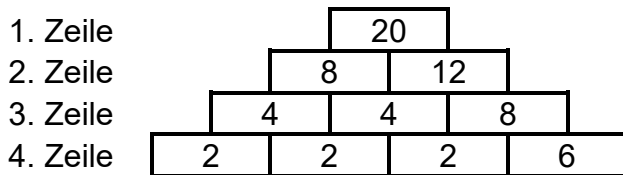
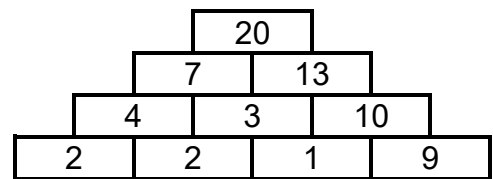
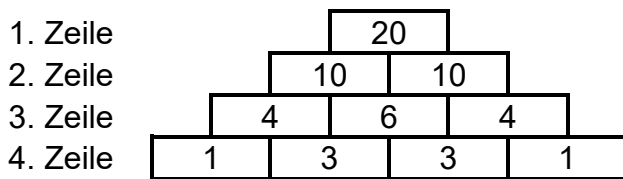
Lösungshinweise zur Aufgabe 2a – Antwortsatz: Quadrato könnte in die untere Zeile die Zahlen 2 – 3 – 2 – 3 geschrieben haben.

Begründung: Wir prüfen, ob mit dieser Belegung die Rechenmauer korrekt ausgefüllt werden kann (so dass in der ersten Zeile 20 zu sehen ist).



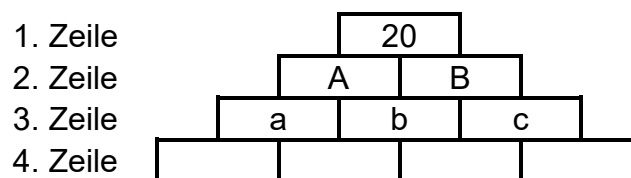
Es gibt viele andere Möglichkeiten, hier einige Beispiele:





Lösungshinweise zur Aufgabe 2b – Antwortsatz: Die kleinstmögliche Summe in der dritten Zeile beträgt 14.

Herleitung: In den Beispielen haben wir Summen von 14 bis 18 gefunden. Wir setzen zunächst Buchstaben statt Zahlen in die Felder der 2. und 3. Zeile.



Nach den Regeln für die Rechenmauer gilt

$$A + B = 20$$

$$a + b = A, b + c = B$$

Wir erkennen, dass damit $a + 2 \cdot b + c = 20$ gelten muss.

Wir probieren nun verschiedene Werte für b aus:

Fall $b = 1$ ist nicht möglich, weil in der 4. Zeile unter b eine Null erforderlich wäre

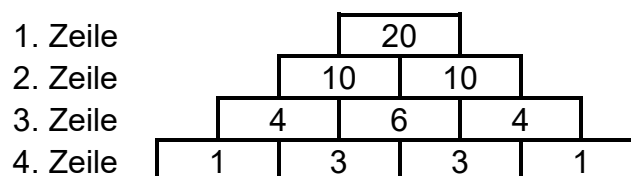
Fall $b = 2$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 2 = 16$, also $a + b + c = 18$.

Fall $b = 3$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 3 = 14$, also $a + b + c = 17$.

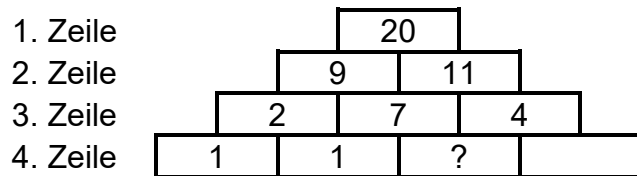
Fall $b = 4$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 4 = 12$, also $a + b + c = 16$.

Fall $b = 5$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 5 = 10$, also $a + b + c = 15$.

Fall $b = 6$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 6 = 8$, also $a + b + c = 14$. Auch damit können wir die Rechenmauer beschriften.



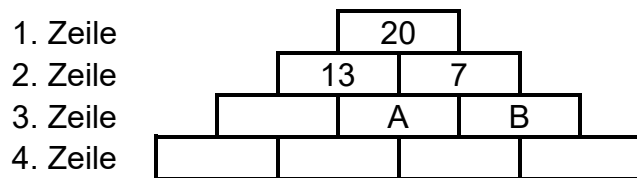
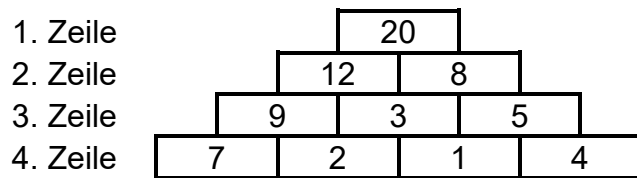
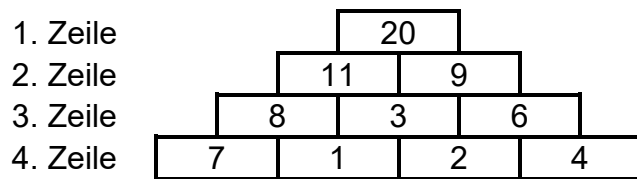
Fall $b = 7$ führt zu $a + c = 20 - 2 \cdot 7 = 6$. Da in der 3. Zeile aber keine 0 oder 1 stehen darf, verbleiben nur die Möglichkeiten $a = 2$ und $c = 4$, $a = 3$ und $c = 3$ oder $a = 4$ und $c = 2$. Doch dafür können wir die 4. Zeile nicht so ausfüllen, dass $b = 7$ als Summe der darunter stehenden Felder entsteht, zum Beispiel



Für noch größere Zahlen für b können wir die Rechenmauer ebenfalls nicht ausfüllen.

Hinweis: Wenn du als kleinstmögliche Summe 15 angegeben hast, wurde dennoch der Punkt vergeben.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2c – Antwortsatz: Es genügt, eine richtig gerechnete Rechenmauer anzugeben, bei der keine Zahl auf den Steinen mehrfach verwendet wird. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten für die 2. Zeile:



A und B müssen mindestens 3 sein, weil in der vierten Zeile $(1 + 1 =) 2$ nicht zulässig ist. Also kann nur $A = 4$ und $B = 3$ (bzw. $A = 3$ und $B = 4$) eingetragen werden. In der 4. Zeile sind aber dann $(2 + 2 =) 4$ oder $(1 + 3) = 4$ nicht zulässig.

Ist in der 2. Zeile statt 7 eine noch kleinere Zahl eingetragen, gelingt es ebenfalls nicht.

Nun schlägt Frau Dreieck folgendes Spiel vor: Mit einem regulärem Spielwürfel wird eine Startzahl gewürfelt, also 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Nun darf immer wieder entweder mit 2 multipliziert oder 2 subtrahiert werden. Ein Beispiel mit 5 Rechenschritten:

Startzahl 4 $\rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \rightarrow 8 \cdot 2 = 16 \rightarrow 16 - 2 = 14 \rightarrow 14 \cdot 2 = 28 \rightarrow 28 - 2 = 26$.

Aufgabe 3a) Kreisa behauptet, dass für jede Startzahl nicht mehr als 8 Rechenschritte erforderlich sind, um mit diesen Rechenschritten genau auf die Zahl 20 zu kommen. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3b) Quadrato ändert die Spielregeln: Er will entweder mit 3 multiplizieren oder 2 subtrahieren. Kann er auch für jede Startzahl die Zahl 20 erreichen? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a: Vorbemerkung: Mit diesen beiden Rechenschritten können wir für jede beliebige Startzahl den Wert 20 erreichen. Wir multiplizieren zunächst

wiederholt mit 2, bis der Wert größer als 20 wird. Dann subtrahieren wir wiederholt die Zahl 2, bis wir 20 erreichen. Allerdings kann die Anzahl der Rechenschritte dabei groß werden, beispielsweise

Startzahl 1 $\rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow 8 \cdot 2 = 16 \rightarrow 16 \cdot 2 = 32 \rightarrow 32 - 2 = 30 \rightarrow 30 - 2 = 28 \rightarrow 28 - 2 = 26 \rightarrow 26 - 2 = 24 \rightarrow 24 - 2 = 22 \rightarrow 22 - 2 = 20$: 11 Rechenschritte

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a - Antwortsatz: Kreisa hat recht, es sind weniger als 8 Rechenschritte erforderlich.

Begründung: Wir geben für jede Startzahl eine Reihenfolge der Rechenschritte an:

Startzahl 1 $\rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow 8 - 2 = 6 \rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 7 Rechenschritte

Startzahl 2 $\rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow 8 - 2 = 6 \rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 6 Rechenschritte

Startzahl 3 $\rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 4 Rechenschritte

Startzahl 4 $\rightarrow 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow 8 - 2 = 6 \rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 5 Rechenschritte

Startzahl 5 $\rightarrow 5 \cdot 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 2 Rechenschritte

Startzahl 6 $\rightarrow 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 \cdot 2 = 20$: 3 Rechenschritte

Lösungshinweise zur Aufgabe 3b - Antwortsatz: Quadrato kann mit den geänderten Regeln nicht für jede Startzahl die Zahl 20 erreichen.

Begründung: Startet Quadrato mit einer ungeraden Zahl, so entsteht nach jedem Rechenschritt bei Multiplikation mit 3 wieder eine ungerade Zahl. Ebenso entsteht aus einer ungeraden Zahl nach jedem Rechenschritt mit Subtraktion der Zahl 2 wieder eine ungerade Zahl. Also kann Quadrato mit ungerader Startzahl nicht auf die gerade Zahl 20 kommen.

Hinweis: Startet Quadrato mit einer geraden Zahl, ist 20 erreichbar, zum Beispiel

Startzahl 2 $\rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6 - 2 = 4 \rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 12 - 2 = 10 \rightarrow 10 - 2 = 8 \rightarrow 8 \cdot 3 = 24 \rightarrow 24 - 2 = 22 \rightarrow 22 - 2 = 20$: 8 Rechenschritte

(Die Startzahlen 4 und 6 sind in diesen Rechenschritten enthalten, für sie gelingt es also auch.)

Runde 2 – Teil A: Herbstfreuden

Aufgabe 1. Es ist herbstlich geworden. Frau Dreieck, Herr Raute und ihre Kinder Kreisa und Quadrato sammelten den ganzen Nachmittag Kastanien. Sie hatten kleine Stoffbeutel mit, die sie damit füllten. Insgesamt füllten sie 30 Beutel. Am Abend stellten sie fest:

- Quadrato hatte 4 Beutel mehr gefüllt als Kreisa.
- Quadrato und Kreisa füllten zusammen doppelt so viele Beutel wie Frau Dreieck.
- Herr Raute füllte so viele Beutel wie Quadrato und Kreisa zusammen.

Wie viele Beutel hatte jeder beim Sammeln gefüllt?

Lösungshinweise zur Aufgabe 1 – Antwortsatz: Kreisa hat 4 Beutel gefüllt, Quadrato 8 Beutel, Frau Dreieck 6 Beutel und Herr Raute 12 Beutel.

Herleitung: So eine Aufgabe kannst du mit systematischem Probieren lösen. Wenn du weißt, wie viele Beutel Kreisa gefüllt hat, kannst du ausrechnen, wie viele Beutel Quadrato, Frau Dreieck und Herr Kreisa füllten. Wenn sich dabei insgesamt 30 Beutel ergeben, ist die Aufgabe gelöst.

Trage in einer Tabelle übersichtlich ein, wie du probierst:

Anzahl der gefüllten Beutel					
Kreisa	Quadrato	Frau Dreieck	Herr Raute	Gesamt	Vergleich
1	$1 + 4 = 5$	$(5 + 1) : 2 = 3$	$5 + 1 = 6$	$1 + 5 + 3 + 6 = 15$	$15 < 30$
2	$2 + 4 = 6$	$(6 + 2) : 2 = 4$	$6 + 2 = 8$	$2 + 6 + 4 + 8 = 20$	$20 < 30$
3	$3 + 4 = 7$	$(7 + 3) : 2 = 5$	$7 + 3 = 10$	$3 + 7 + 5 + 10 = 25$	$25 < 30$
4	$4 + 4 = 8$	$(8 + 4) : 2 = 6$	$8 + 4 = 12$	$4 + 8 + 6 + 12 = 30$	$30 = 30$
5	$5 + 4 = 9$	$(9 + 5) : 2 = 7$	$9 + 5 = 14$	$5 + 9 + 7 + 14 = 36$	$35 > 30$

Wenn Kreisa 4 Beutel gefüllt hat, beträgt die Gesamtzahl aller gefüllten Beutel 30. Eine Probe ist in der Tabelle bereits enthalten, denn alle Bedingungen wurden beachtet.

Lösungsvariante: Wenn wir die Anzahl der gefüllten Beutel von Frau Dreieck als 1 Teil betrachten, dann sammelte Herr Raute 2 Teile und Kreisa und Quadrato zusammen (so viel wie Herr Raute) auch 2 Teile. Insgesamt sammelte Familie Geometrie also 5 Teile.

Wegen $30 : 5 = 6$ besteht ein Teil aus 6 Beutel. Damit finden wir leicht heraus, wie viele Beutel jeder sammelte. Wir müssen aber noch eine vollständige Probe durchführen und untersuchen, ob alle Bedingungen erfüllt sind.

$$8 = 4 + 4, (8 + 4) : 2 = 6, 8 + 4 = 12, 8 + 4 + 6 + 12 = 30$$

Lösungsvariante: Wir bezeichnen die Anzahl der gefüllten Beutel jeweils mit den Anfangsbuchstaben K (für Kreisa), Q (für Quadrato), D (für Frau Dreieck) und R (für Herrn Raute). Dann können wir die drei Aussagen im Aufgabentext durch Gleichungen aufschreiben:

Q hatte 4 Beutel mehr gefüllt als K:	$Q = K + 4$
Q und K füllten zusammen doppelt so viele Beutel wie D:	$2 \cdot D = Q + K$
R füllte so viele Beutel wie Q und K zusammen:	$R = Q + K$
Insgesamt füllten sie 30 Beutel:	$K + Q + D + R = 30$

Wir setzen für Q die erste Aussage ein:	$Q = K + 4$
Aufgrund der zweiten Aussage wissen wir:	$Q + K = (K + 4) + K = 2 \cdot K + 4 = 2 \cdot D$
Damit gilt:	$D = (2 \cdot K + 4) : 2 = K + 2.$
Wir setzen nun für R die erste Aussage ein:	$R = Q + K = (K + 4) + K = 2 \cdot K + 4$
Wir können also die Anzahl der gefüllten Beutel für alle unter Verwendung von K berechnen.	$30 = K + Q + D + R =$ $= K + (K + 4) + (K + 2) + (2 \cdot K + 4) =$ $= 5 \cdot K + 10$

Aus der letzten Gleichung ermitteln wir $K = 4$. Damit finden wir

$$Q = 4 + 4 = 8,$$

$$D = (4 + 8) : 2 = 6 \text{ und}$$

$$R = 4 + 8 = 12.$$

Die Summe der vier Zahlen beträgt wie gefordert $4 + 8 + 6 + 12 = 30$.

Aufgabe 2. Ein paar Tage später gingen Kreisa und Quadrato noch einmal Kastanien sammeln. Sie haben aber diesmal nur wenige gefunden, beide gleich viele. Trotzdem gab Quadrato an: „Wenn du mir nur 10 Kastanien von deinen gibst, dann habe ich dreimal so viele wie du dann hast.“

Wie viele Kastanien hatte Quadrato diesmal gesammelt?

Lösungshinweise zur Aufgabe 2 – Antwortsatz. Quadrato hatte diesmal 20 Kastanien gesammelt.

Herleitung: Auch diese Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Da Kreisa 10 Kastanien abgeben soll, beginnen wir mit mehr als 10 Kastanien:

Anzahl Kastanien		Anzahl Kastanien nach Tausch		Vergleich
Kreisa	Quadrato	Quadrato + 10	Kreisa – 10	
11	11	$11 + 10 = 21$	$11 - 10 = 1$	$21 > 3 \cdot 1 = 3$
12	12	$12 + 10 = 22$	$12 - 10 = 2$	$22 > 3 \cdot 2 = 6$
13	13	$13 + 10 = 23$	$13 - 10 = 3$	$23 > 3 \cdot 3 = 9$

Wir erkennen, dass der Vergleich noch sehr weit auseinanderliegt. Wir probieren deshalb mit größeren Anzahlen für Kreisa:

Anzahl Kastanien		Anzahl Kastanien nach Tausch		Vergleich
Kreisa	Quadrato	Quadrato + 10	Kreisa – 10	
18	18	$18 + 10 = 28$	$18 - 10 = 8$	$28 > 3 \cdot 8 = 24$
19	19	$19 + 10 = 29$	$19 - 10 = 9$	$29 > 3 \cdot 9 = 27$
20	20	$20 + 10 = 30$	$20 - 10 = 10$	$30 = 3 \cdot 10 = 30$
21	21	$21 + 10 = 31$	$21 - 10 = 11$	$31 < 3 \cdot 11 = 32$

Die Aussage von Quadrato ist erfüllt, wenn beide jeweils 20 Kastanien sammelten. Die Probe ist in der Tabelle vollständig enthalten.

Lösungsvariante: Wir nehmen an, Kreisa und Quadrato haben jeweils X Kastanien gesammelt. Nach Aussage von Quadrato gilt:

$$X + 10 = 3 \cdot (X - 10), \text{ also } X + 10 = 3 \cdot X - 30.$$

Aus dieser Gleichung finden wir, dass nur der Wert $X = 20$ richtig sein kann.

Aufgabe 3a. Kreisa brachte buntes Herbstlaub mit nach Hause, und zwar 2 Kastanienblätter, 2 Eichenblätter und 1 Ahornblatt. Sie wollte diese fünf Blätter in einer Reihe aufhängen, aber so, dass zwei gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es dafür? Schreibe alle auf!

Aufgabe 3b. Quadrato gab Kreisa nun zusätzlich ein drittes Kastanienblatt.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es nun, wenn Kreisa weiterhin zwei gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen will? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zur Aufgabe 3 – allgemeiner Hinweis: Um alle Reihenfolgen einfach aufschreiben zu können, kürzen wir die Blattarten mit ihren Anfangsbuchstaben ab, also K (für Kastanienblatt), E (für Eichenblatt) und A (für Ahornblatt). Es genügt, jeweils die Liste der Reihenfolgen aufzuschreiben. Folgende Erklärungen werden nicht erwartet.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a – Antwortsatz. Es es 12 verschiedene Reihenfolgen.

Begründung: Insgesamt wollte Kreisa 5 Blätter an 5 Positionen (1 bis 5) aufhängen.

?	?	?	?	?
1	2	3	4	5

Kreisa will A an Position 1 aufzuhängen. Wenn sie an zweiter Stelle ein K oder E aufhängt, ist die weitere Reihenfolge bereits festgelegt (weil gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen sollen). Es gibt also nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 1. Damit wissen wir aber bereits, dass es auch nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 5 gibt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können):

A	K	E	K	E
A	E	K	E	K

E	K	E	K	A
K	E	K	E	A

Nun will Kreis A an Position 2 hängen. Auch in diesem Fall gibt es nur 2 Möglichkeiten, die Bedingungen zu erfüllen. Damit wissen wir bereits, dass es auch nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 4 gibt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können):

E	A	K	E	K
K	A	E	K	E

K	E	K	A	E
E	K	E	A	K

Nun hat Kreisa noch die Möglichkeit, A in der Mitte an Position 3 aufzuhängen. Damit gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen, müssen links und rechts jeweils ein Blatt der beiden Arten hängen. Sie findet 4 verschiedene Möglichkeiten:

E	K	A	E	K
E	K	A	K	E

K	E	A	E	K
K	E	A	K	E

Insgesamt gibt es also $(2 + 2 + 2 + 2 + 4 =)$ 12 verschiedene Reihenfolgen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 3b – Antwortsatz: Es gibt 10 verschiedene Reihenfolgen.

Begründung: Wie schon in Aufgabe 3a) legen wir in der Kette

?	?	?	?	?	?
1	2	3	4	5	6

die Position A fest und untersuchen, wie viele Möglichkeiten es dann gibt, 3 K und 2 E aufzuhängen.

Sie will A an Position 1 aufzuhängen. Dann kann sie an Position 2 kein E aufhängen, weil in diesem Fall auf den restlichen vier Stellen 3 K und 1 E hängen müssten. Es gibt also nur 1 Möglichkeit. Dann gibt es auch nur 1 Möglichkeit, wenn A auf Position 6 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

A	K	E	K	E	K
---	---	---	---	---	---

K	E	K	E	K	A
---	---	---	---	---	---

Nun will Kreisa A an Position 2 hängen. In diesem Fall gibt es nur 2 Möglichkeiten: Sie muss links von A ein K hängen und rechts können die verbleibenden 4 Blätter abwechselnd hängen. Dann gibt es aber auch nur 2 Möglichkeiten, wenn A auf Position 5 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

K	A	E	K	E	K
K	A	K	E	K	E

K	E	K	E	A	K
E	K	E	K	A	K

Hängt Kreisa A an Position 3, muss links davon 1 K und 1 E hängen. Rechts ist dann die Reihenfolge bereits festgelegt. Somit hat Kreisa 2 Möglichkeiten. Dann gibt es auch nur 2 Möglichkeiten, wenn A auf Position 4 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

K	E	A	K	E	K	K	E	K	A	E	K
E	K	A	K	E	K	K	E	K	A	K	E

Insgesamt sind es also (2 + 4 + 4 =) 10 Möglichkeiten.

Aufgabe 4. Kreisa hatte sich für eine Reihenfolge entschieden und die Blätterkette Frau Dreieck geschenkt. Doch am nächsten Morgen war sie zerrissen. Frau Dreieck war überrascht und wollte wissen, wem das Missgeschick passierte.

Frau Dreieck sagte: „Ich denke, Quadrato war es“.
 Kreisa verteidigte ihren Bruder: „Nein, Quadrato war es nicht“.
 Auch Quadrato behauptete: „Ich war es nicht“.
 Herr Raute meinte: „Kreisa war es“.

Frau Dreieck merkte aber, dass nicht alle Antworten wahrheitsgemäß waren.

Was ist Frau Dreieck aufgefallen? Findest du heraus, wem das Missgeschick passierte, wenn nur genau eine Antwort falsch war? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zur Aufgabe 4 – Antwortsatz: Frau Dreieck hat sicherlich bemerkt, dass ihre Antwort und die Antwort von Kreisa nicht beide richtig sein können. Wenn nur eine Antwort richtig ist, ist Kreisa das Missgeschick passiert.

Begründung: Da Frau Dreieck das Gegenteil von Kreisa (und auch das Gegenteil von Quadrato) aussagt, können nicht alle Aussagen richtig sein.

Es könnten also die zwei Aussagen von Kreisa und Quadrato falsch sein. Das ist bei nur einer falschen Aussage aber nicht möglich. Deshalb muss die Aussage von Frau Dreieck falsch sein. Da es nur eine falsche Aussage gibt, ist die Aussage von Herrn Raute richtig. Also war es Kreisa.

Lösungsvariante: Jedem könnte das Missgeschick passiert sein – wir untersuchen, welche Aussagen in jedem dieser Fälle richtig sind:

	Sind in diesem Fall die Aussagen richtig oder falsch?				
Wem passierte es?	Frau Dreieck	Kreisa	Quadrato	Herr Raute	Anzahl der falsche Aussagen
Frau Dreieck	Falsch	Richtig	Richtig	Falsch	2
Kreisa	Falsch	Richtig	Richtig	Richtig	1
Quadrato	Richtig	Falsch	Falsch	Falsch	3
Herr Raute	Falsch	Richtig	Richtig	Falsch	2

Nur wenn es Kreisa war, ist genau eine der 4 Aussagen falsch.

Runde 2 – Teil B: Zahlenspiele: Noch einmal immer 20!

Kreisa und Quadrato wollen wieder mit der Zahl 20 experimentieren. Dafür haben sie sich 9 Zahlenkarten gebastelt, auf denen die Zahlen von 1 bis 9 stehen. Jede Zahl kommt also nur einmal vor.

Aufgabe 1a) Kreisa behauptet, aus den Zahlenkarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 jeweils solche Karten auswählen zu können, dass sie die Summe 20 erreicht. Prüfe die Aussage von Kreisa und begründe deine Antwort.

Aufgabe 1b) Quadrato behauptet, ihm genügen die Zahlenkarten 1, 2, 3, 8 und 9, so dass er jeweils solche Karten auswählen kann, dass er die Summe 20 erreicht. Kreisa widerspricht: „Einige der Zahlen zwischen 1 und 20 kannst du damit nicht als Summe erreichen!“ Welche Summen hat Kreisa wohl entdeckt?

Aufgabe 1c) Herr Raute behauptet, er könne sich 5 Zahlenkarten von den 9 Zahlenkarten auswählen, so dass er aus dieser Auswahl jeweils solche Karten ziehen kann, dass er die Summe 20 erreicht. Hat Herr Raute recht? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zur Aufgabe 1a) Es ist nicht schwierig, Karten wie gefordert auszuwählen. Es gibt viele Möglichkeiten. Es genügt aber bei dieser Aufgabenstellung, nur ein korrektes Beispiel anzugeben:

$$\begin{array}{cccc}
 1 + 2 + 8 + 9, & 1 + 3 + 7 + 9, & 1 + 4 + 6 + 9, & 1 + 4 + 7 + 8, \\
 1 + 5 + 6 + 8, & 2 + 3 + 6 + 9, & 2 + 3 + 7 + 8, & 2 + 4 + 5 + 9, \\
 2 + 4 + 6 + 8, & 2 + 5 + 6 + 7, & 3 + 4 + 5 + 8, & 3 + 4 + 6 + 7, \\
 3 + 8 + 9, & 4 + 7 + 9, & 5 + 6 + 9, & 5 + 7 + 8.
 \end{array}$$

Lösungshinweise zur Aufgabe 1b) Quadrato hat natürlich recht, denn das erste Beispiel aus Aufgabe 1a) kann er aus seinen Zahlen auswählen.

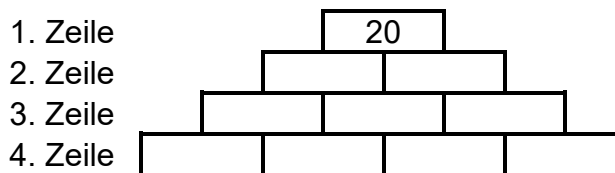
Kreisa stellt fest, dass Quadrato die Summen 1, 2, 3, 8 und 9 bereits mit einer Karte und zudem die folgenden Summen erreichen kann:

$$\begin{array}{lll}
 4 = 1 + 3, & 5 = 2 + 3, & 6 = 1 + 2 + 3, \\
 10 = 1 + 9 = 2 + 8, & 11 = 2 + 9 = 3 + 8, & 12 = 1 + 2 + 9 = 1 + 3 + 8, \\
 13 = 1 + 3 + 9 = 2 + 3 + 8, & 14 = 2 + 3 + 9 = 1 + 2 + 3 + 8, & \\
 15 = 1 + 2 + 3 + 9, & 17 = 8 + 9, & 18 = 1 + 8 + 9, \\
 19 = 2 + 8 + 9, & 20 = 1 + 2 + 8 + 9 &
 \end{array}$$

Nur die Summen 7 und 16 lassen sich nicht berechnen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1c) Herr Raute hat recht. In Aufgabe 1a sehen wir, dass bereits in verschiedenen Varianten 4 Karten genügen, um die Summe 20 zu erreichen.

Kreisa und Quadrato spielen mit vierzeiligen Rechenmauern. In den Feldern stehen die Summen der direkt darunterliegenden Steine. Sie schreiben aber auf keinen Stein die Zahl 0. Ganz oben soll immer 20 stehen.



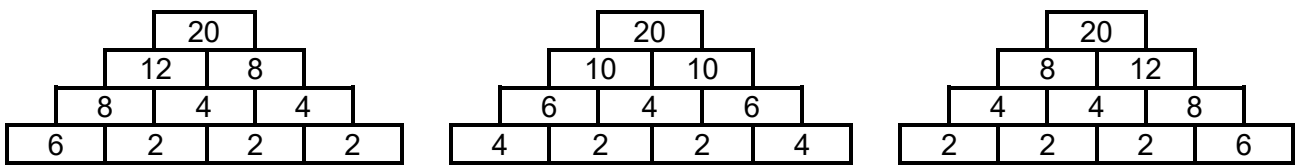
Aufgabe 2a) Quadrato überlegt: „Gibt es solche Rechenmauern, auf denen nur gerade Zahlen zu sehen sind?“ Was meinst du? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2b) Kreisa vermutet: „Wenn es solche Rechenmauern gibt, auf denen nicht nur gerade Zahlen stehen, dann sind mindestens 4 ungerade Zahlen zu sehen.“ Überprüfe diese Aussage und begründe deine Antwort!

Aufgabe 2c) Wie viele verschiedene solche Rechenmauern gibt es, bei denen die Summe der Zahlen in der 4. Zeile 8 ergibt? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2d) Warum kann Quadrato keine solche Rechenmauer finden, bei der die Summe der Zahlen in der 4. Zeile 9 ergibt?

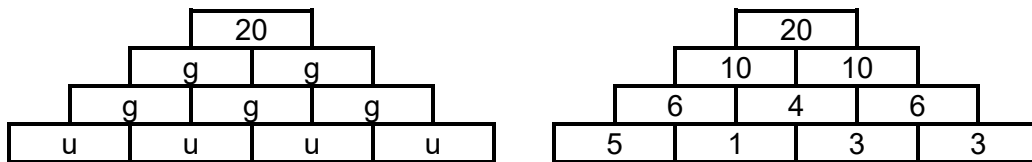
Lösungshinweise zur Aufgabe 2a) Quadrato hat recht. Stehen nämlich auf der 4. Zeile nur gerade Zahlen, so sind alle darüberstehenden Zahl ebenfalls gerade. Quadrato muss aber prüfen, ob auf diese Weise in der 1. Zeile 20 stehen kann. Er findet drei Beispiele (es genügt, ein Beispiel anzugeben):



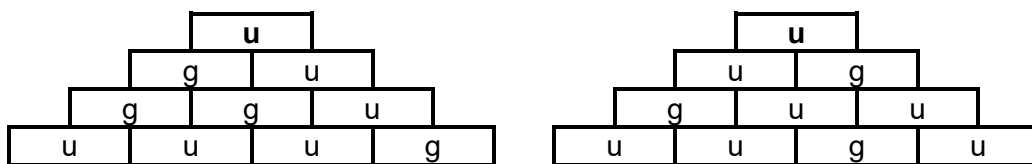
Lösungshinweise zur Aufgabe 2b) Kreisa hat recht. Um es zu begründen, können wir alle Möglichkeiten ausprobieren, auf der 4. Zeile ungerade Zahlen zu platzieren. Wir wissen:

- ungerade Zahl + ungerade Zahl ergibt eine gerade Zahl (g)
- gerade Zahl + ungerade Zahl ergibt eine ungerade Zahl (u)
- gerade Zahl + gerade Zahl ergibt eine gerade Zahl (g)

Fall 1: Auf der 4. Zeile stehen 4 ungerade Zahlen – dann ist die Behauptung von Kreisa bereits erfüllt. Es gibt Rechenmauern dieser Art, zum Beispiel:

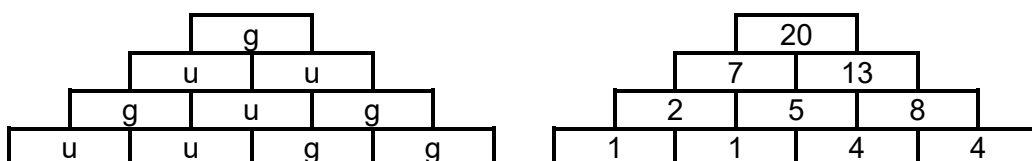


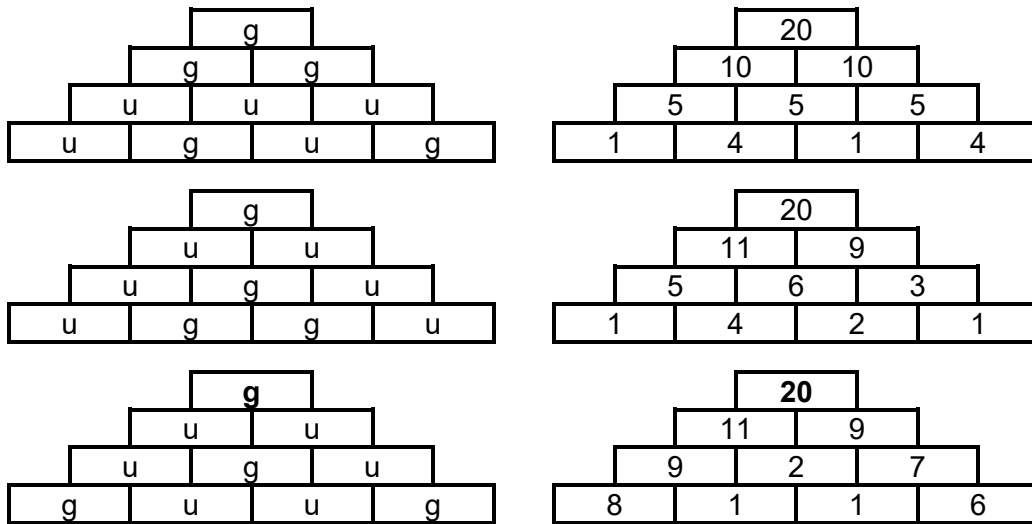
Fall 2: Auf der 4. Zeile stehen 3 ungerade Zahlen – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) zwei Möglichkeiten der Anordnung:



Zwar finden wir ebenfalls jeweils mehr als 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern, aber in der 1. Zeile steht auch eine ungerade Zahl – es gibt also keine Rechenmauern mit 20 in der 1. Zeile.

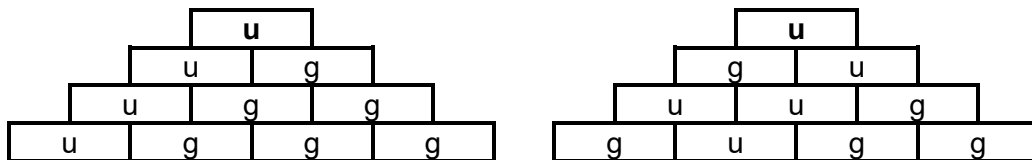
Fall 3: Auf der 4. Zeile stehen 2 ungerade Zahlen – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) vier Möglichkeiten der Anordnung:





Wir zählen jeweils mindestens 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern.

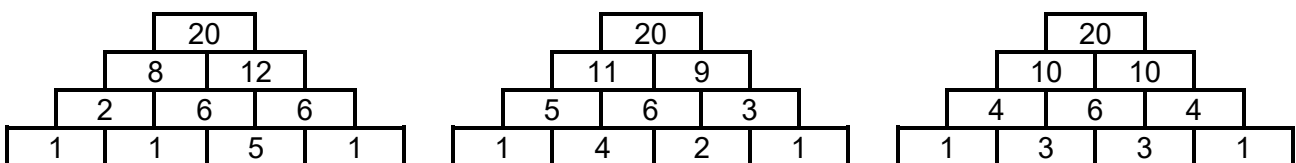
Fall 4: Auf der 4. Zeile steht 1 ungerade Zahl – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) zwei Möglichkeiten der Anordnung:



Zwar finden wir ebenfalls jeweils mindestens 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern, aber in der 1. Zeile steht auch eine ungerade Zahl – es gibt also keine Rechenmauern mit 20 in der 1. Zeile.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2c) – Antwortsatz: Es gibt 5 verschiedene Rechenmauern, bei denen die Summe der Zahlen in der 4. Zeile 8 ergibt.

Wir finden 5 Möglichkeiten, so dass 4 Zahlen die Summe 8 ergeben: $1 + 1 + 1 + 5$, $1 + 1 + 2 + 4$, $1 + 1 + 3 + 3$, $1 + 2 + 2 + 3$, $2 + 2 + 2 + 2$. Nur die ersten drei Möglichkeiten lassen sich so anordnen, dass in der 1. Zeile die 20 steht.



Auch die Spiegelbilder der linken und der mittleren Rechenmauer erfüllen die Bedingung, so dass es 5 Rechenmauern mit der geforderten Eigenschaft gibt.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2d) Wenn die Summe der vier Zahlen eine ungerade Zahl ergibt, müssen entweder eine ungerade Zahl oder drei ungerade Zahlen in der 4. Zeile stehen. Wir haben aber in Aufgabe 2b) gesehen, dass in diesen Fällen das Ergebnis in der 1. Zeile ungerade ist, also nicht 20 ergeben kann.

Quadrato hat sich eine Zahl gemerkt, die er immer wieder entweder mit einem Faktor multipliziert oder um einen Summanden erhöht. Beispiel: Quadrato merkte sich die Zahl 3 und rechnete mit dem Faktor 2 und dem Summand 5, um auf 49 zu kommen.

$$3 \cdot 2 = 6, 6 \cdot 2 = 12, 12 + 5 = 17, 17 + 5 = 22, 22 \cdot 2 = 44, 44 + 5 = 49.$$

Aufgabe 3a) Welche einstellige Zahlen könnte sich Quadrato gemerkt haben, wenn er mit Faktor 3 und Summand 4 auf 50 kam?

Aufgabe 3b) Welchen Faktor könnte Quadrato verwendet haben, wenn er sich 5 merkte, den Summand 6 nutzte und auf 39 kam?

Lösungshinweise zur Aufgabe 3a) Quadrato könnte sich die Zahlen 2 oder 6 gemerkt haben, um mit Faktor 3 und Summand 4 auf 50 zu kommen.

Begründung: Hat sich Quadrato eine ungerade Zahl gemerkt, so bleiben die Zwischenergebnisse nach Multiplikation mit 3 und nach Addition mit 4 ebenfalls ungerade. Er kann also 50 nicht erreichen.

Hat sich Quadrato die Zahl 4 oder die Zahl 8 gemerkt (also ein Vielfaches von 4), so bleiben die Zwischenergebnisse nach Multiplikation und nach Addition mit ebenfalls ein Vielfaches von 4. Er kann also 50 nicht erreichen.

Wir nehmen an, Quadrato hat sich die Zahl 2 gemerkt. Dann erreicht er so 50:

$$2 \cdot 3 = 6, 6 \cdot 3 = 18, \underbrace{18 + 4 = 22, \dots, 46 + 4 = 50}_{\text{immer Addition von 4}}$$

$2 + 4 = 6$ und weiter wie eben

$$2 + 4 = 6, 6 + 4 = 10, 10 \cdot 3 = 30, \underbrace{30 + 4 = 34, \dots, 46 + 4 = 50}_{\text{immer Addition von 4}}$$

$$2 + 4 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 4 = 14, 14 \cdot 3 = 42, 42 + 4 = 46, 46 + 4 = 50$$

Da in diesen Rechenschritten die Zahl 6 als Zwischenergebnis erscheint, kann sich Quadrato auch die Zahl 6 gemerkt haben.

Lösungsvariante: Es ist günstig, rückwärts zu rechnen.

- Da 50 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: $46 + 4 = 50$.
- Da 46 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: $42 + 4 = 46$.
- Da 42 durch 3 teilbar ist, könnte vorher mit 3 multipliziert sein: $14 \cdot 3 = 42$.
- Da 14 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: $10 + 4 = 14$.
- Da 10 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: $6 + 4 = 10$.

Er könnte sich also die Zahl 6 gemerkt haben. Wegen $2 + 4 = 6$ und $2 \cdot 3 = 6$ könnte er sich auch die Zahl 2 gemerkt haben.

Es genügte, eine mögliche Startzahl zu finden. Ergänzend können wir untersuchen, ob auch andere Startzahlen möglich sind. Würden wir oben 42 nicht durch 3 teilen, sondern vorher 4 addieren, kommen wir nach einigen Rechenschritten auf 30. Hier könnten wir wieder sowohl durch 3 teilen als auch vorher 4 addieren. So kommen wir nach einigen Rechenschritten auf 18 oder 10 – jedesmal erreichen wir auf diesen Wegen die Startzahl 6 (oder 2).

Lösungshinweise zur Aufgabe 3b) Wie wir in Aufgabe 3a) bereits gesehen haben, muss der Faktor eine ungerade Zahl gewesen sein, damit das Ergebnis eine ungerade Zahl wird. Wenn der Faktor 3 ist, finden wie folgende Rechenschritte

$$5 \cdot 3 = 15, 15 + 6 = 21, 21 + 6 = 27, 27 + 6 = 33, 33 + 6 = 39$$

oder $5 + 6 = 11$, $11 \cdot 3 = 33$, $33 + 6 = 39$

Ist der Faktor 5, kann zuerst nicht die 6 addiert werden ($5 + 6 = 11$), weil $11 \cdot 5 = 55$ bereits größer als 39 ist und der Rest ($39 - 11 =$) 28 nicht durch wiederholte Addition mit 6 ausgefüllt werden kann.

Ist der Faktor 5, kann zuerst nicht mit 5 multipliziert werden, weil von $5 \cdot 5 = 25$ der Rest ($39 - 25 =$) 14 nicht durch wiederholte Addition mit 6 ausgefüllt werden kann.

Ist der Faktor größer als 5, kann die Multiplikation nicht zuerst auftreten, weil bereits $7 \cdot 5 = 35$ zu nahe an 39 liegt. Ohne Multiplikation kann 39 wegen ($39 - 5 =$) 34 nicht durch wiederholte Addition mit 6 erreicht werden.

Lösungsvariante: Auch bei dieser Aufgabe können wir rückwärts rechnen:

- Da 39 durch 3 teilbar ist, könnte davor mit 3 multipliziert sein: $13 \cdot 3 = 39$.
- Da 13 kein Vielfaches von 3 ist, wurde davor 6 addiert: $7 + 6 = 13$. Von 7 kommen wir jedoch nicht auf die Startzahl 5.
- Da 39 durch 13 teilbar ist, könnte davor mit 13 multipliziert sein: $3 \cdot 13 = 39$. Doch ist 3 bereits kleiner als die Startzahl 5.
- Im letzten Schritt wurde also 6 addiert: $33 + 6 = 39$.
- Da 33 durch 3 teilbar ist, könnte davor mit 3 multipliziert sein: $11 \cdot 3 = 33$. Auf 11 kommen wir mit $5 + 6 = 11$. **Also könnte der Faktor 3 sein.**

Es genügt, einen möglichen Faktor zu finden. Ergänzend können wir untersuchen, ob auch andere Faktoren möglich sind.

Ausgehend von 33 könnten wir den Faktor 11 probieren, doch damit erreichen wir nicht die Startzahl 5.

- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 27. Wir könnten den Faktor 9 probieren – doch damit kommen wir nicht auf die Startzahl 5.
- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 21. Wir könnten den Faktor 7 probieren – doch damit kommen wir nicht auf die Startzahl 5.
- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 15. Wir könnten den Faktor 5 probieren – doch damit kommen wir nicht auch auf die Startzahl 5.

Runde 3 – Teil A: Fußball-Weltmeisterschaft

Im Sommer findet die Fußball-Weltmeisterschaft 2026 mit 48 Mannschaften statt. Sie spielen zunächst in Gruppen jeder gegen jeden einmal. Bei jedem Spiel erhalten die siegreiche Mannschaft 3 Punkte und der Verlierer 0 Punkte. Bei Unentschieden erhält jede Mannschaft 1 Punkt. Das Ergebnis eines Spieles wird durch die Anzahl der geschossenen Tore angezeigt: $2 : 1$ bedeutet, dass die Siegermannschaft (3 Punkte) 2 Tore und die Verlierermannschaft (0 Punkte) 1 Tor schoss.

Familie Geometrie – Quadrato, Kreisa, Frau Dreieck und Herr Raute – diskutieren über mögliche Ergebnisse in einer Gruppe mit drei Mannschaften.

Aufgabe 1. In einer Gruppe mit drei Mannschaften A, B und C finden 3 Spiele statt: A gegen B, A gegen C und B gegen C. Es ist bekannt, dass in allen diesen Spielen insgesamt 11 Tore geschossen wurden. In den Spielberichten können wir lesen:

- (1) Mannschaft C schoss in ihren zwei Spielen insgesamt 2 Tore.
- (2) Die Mannschaften B und C trennten sich unentschieden (schossen also in diesem Spiel gleich viele Tore).
- (3) Mannschaft A verlor gegen Mannschaft B, die doppelt so viele Tore wie A schoss.
- (4) Im Spiel Mannschaft A gegen Mannschaft C wurden 3 Tore geschossen.

Kannst du aus diesen Angaben ermitteln, wie das Spiel A gegen B endete? Gib das Ergebnis an und beschreibe, wie du es gefunden hast!

Hinweis: Die Ergebnisse der Gruppenspiele können wir in einer Tabelle aufschreiben. Beispielsweise erkennen wir in der folgenden Tabelle, dass Mannschaft A im Spiel gegen Mannschaft B siegte und 3 Tore schoss, während Mannschaft B nur 1 Tor schoss (geschrieben als A : B = 3 : 1, Mannschaft A erhält dafür 3 Punkte). Natürlich endete dann das Spiel B : A mit 1 : 3 und Mannschaft B erhält 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten beide Mannschaften je 1 Punkt. In die Spalte „Tore“ tragen wir nur die geschossenen Tore der Mannschaft in der betreffenden Zeile ein

	Mannschaft A	Mannschaft B	Mannschaft C	Punkte	Tore
Mannschaft A	 	3 : 1	1 : 0	6	4
Mannschaft B	1 : 3	 	2 : 2	1	3
Mannschaft C	0 : 1	2 : 2	 	1	2

Wenn die Anzahl der geschossenen Tore für die Aufgabe nicht wichtig ist, können wir die Ergebnisse auch so schreiben:

	Mannschaft A	Mannschaft B	Mannschaft C	Punkte
Mannschaft A	 	Gewonnen	Gewonnen	6
Mannschaft B	Verloren	 	Unentschieden	1
Mannschaft C	Verloren	Unentschieden	 	1

Kürzen wir die Spielergebnisse mit den Anfangsbuchstaben ab und lassen die Worte „Mannschaft“ weg, werden die Tabellen kurz:

	A	B	C	Punkte
A	 	G	G	6
B	V	 	U	1
C	V	U	 	1

Lösungshinweise Aufgabe 1 – Antwortsatz: Im Spiel A gegen B gewann B mit 4 Toren, während A nur 2 Tote schoss. A : B = 2 : 4

Herleitung: Wir schreiben die Ergebnisse aller Spiele durch Angabe der geschossenen Tore.

Möglichkeit 1: Mannschaft C schoss im Spiel gegen Mannschaft B 2 Tore. Nach Aussage (2) endete dieses Spiel mit B : C = 2 : 2. Da nach Aussage (1) Mannschaft C insgesamt nur 2 Tore schoss, gelang ihr im Spiel gegen Mannschaft A kein Tor. Wegen Aussage (4) endete das Spiel A : C mit 3 : 0. Diese Ergebnisse tragen wir in eine Tabelle ein:

	A	B	C	Punkte	Tore
A	 	?	3 : 0	3	3
B	?	 	2 : 2	4	2
C	0 : 3	2 : 2	 	1	2

Bei den bereits eingetragenen Spielen wurden insgesamt $(3 + 2 + 2 =) 7$ Tore geschossen. Da insgesamt 11 Tore geschossen wurden, gab es im Spiel A : B $(11 - 7 =) 4$ Tore. Doch es ist nicht möglich, dass bei 4 Toren die Mannschaft B doppelt so viele Tore schoss wie Mannschaft A, wie in Aussage (3) gefordert. Also kann das Spiel B : C nicht 2 : 2 geendet haben

Möglichkeit 2: Mannschaft C schoss im Spiel gegen Mannschaft B 1 Tor. Nach Aussage (2) endete dieses Spiel mit B : C = 1 : 1. Da nach Aussage (1) Mannschaft C insgesamt nur 2 Tore schoss, gelang ihr im Spiel gegen Mannschaft A noch 1 Tor. Wegen Aussage (4) endete das Spiel A : C mit 2 : 1. Diese Ergebnisse tragen wir in eine Tabelle ein:

	A	B	C	Punkte	Tore
A	 	?	2 : 1	3	2
B	?	 	1 : 1	1	1
C	1 : 2	1 : 1	 	1	2

Bei den bereits eingetragenen Spielen wurden insgesamt $(2 + 1 + 2 =) 5$ Tore geschossen. Da insgesamt 11 Tore geschossen wurden, gab es im Spiel A : B $(11 - 5 =) 6$ Tore. Nur wenn Mannschaft B 4 Tore und Mannschaft A 2 Tore schossen, schaffte Mannschaft B doppelt so viele Tore wie Mannschaft A, wie in Aussage (3) gefordert. Also ist es möglich, dass das Spiel A : B mit **2 : 4** endete.

Möglichkeit 3: Mannschaft C schoss im Spiel gegen Mannschaft B kein Tor. Nach Aussage (2) endete dieses Spiel mit B : C = 0 : 0. Da nach Aussage (1) Mannschaft C insgesamt 2 Tore schoss, gelangen ihr im Spiel gegen Mannschaft A diese 2 Tore. Wegen Aussage (4) endete das Spiel A : C mit 1 : 2. Diese Ergebnisse tragen wir in eine Tabelle ein:

	A	B	C	Punkte	Tore
A	 	?	1 : 2	0	1
B	?	 	0 : 0	1	0
C	2 : 1	0 : 0	 	2	2

Bei den bereits eingetragenen Spielen wurden insgesamt $(1 + 0 + 2 =) 3$ Tore geschossen. Da insgesamt 11 Tore geschossen wurden, gab es im Spiel A : B $(11 - 3 =) 8$ Tore. Doch es ist nicht möglich, dass bei 8 Toren die Mannschaft B doppelt so viele Tore schoss wie Mannschaft A, wie in Aussage (3) gefordert. Also endete das Spiel B – C nicht 0 : 0.

Es gibt deshalb nur einen möglichen Endstand für diese Gruppenspiele wie in der 2. Möglichkeit hergeleitet:

	A	B	C	Punkte	Tore
A	 	2 : 4	2 : 1	3	4
B	4 : 2	 	1 : 1	3	5
C	1 : 2	1 : 1	 	1	2

Lösungsvariante: Möglichkeit 1: Mannschaft A schoss im Spiel gegen Mannschaft B kein Tor. Das ist nicht möglich, weil dann Mannschaft B nicht doppelt so viele Tore geschossen haben kann.

Möglichkeit 2: Mannschaft A schoss im Spiel gegen Mannschaft B 1 Tor. Dann schoss Mannschaft B in diesem Spiel $(2 \cdot 1 =) 2$ Tore. Nach Aussage (4) wurden im Spiel A gegen C weitere 3 Tore geschossen. Es verbleiben für das Spiel B gegen C $(11 - 3 - 3 =) 5$ Tore. Doch dann ist es nicht möglich, dass das Spiel B gegen C unentschieden endete.

Möglichkeit 3: Mannschaft A schoss im Spiel gegen Mannschaft B 2 Tore. Dann schoss Mannschaft B in diesem Spiel ($2 \cdot 2 =$) 4 Tore. Nach Aussage (4) wurden im Spiel A gegen C weitere 3 Tore geschossen. Es verbleiben für das Spiel B gegen C ($11 - 6 - 3 =$) 2 Tore. Also endete nach Aussage (2) das Spiel B gegen C = 1 : 1. Da Mannschaft C insgesamt 2 Tore schoss, gewann A gegen C mit 2 : 1. Diese Ergebnisse tragen wir in eine Tabelle ein:

	A	B	C	Punkte	Tore
A	 	2 : 4	2 : 1	2	4
B	4 : 2	 	1 : 1	3	5
C	1 : 2	1 : 1	 	1	2

Möglichkeit 4: Mannschaft A schoss im Spiel gegen Mannschaft B 3 Tore (oder mehr). Dann schoss Mannschaft B in diesem Spiel ($2 \cdot 3 =$) 6 Tore (oder mehr). Nach Aussage (4) wurden im Spiel A gegen C weitere 3 Tore geschossen. Dann fielen in diesen beiden Spielen mit $9 + 3 = 12$ Toren (oder mehr) bereits über 11 Tore.

Aufgabe 2. In einer anderen Gruppe spielten die Mannschaften D, E und F jeder gegen jeden einmal. Mannschaft D gewann beide Spiele. Mannschaft F gewann eines ihrer Spiele. Insgesamt wurden in den drei Spielen 5 Tore geschossen.

Schreibe alle Möglichkeiten auf, wie viele Tore unter diesen Bedingungen im Spiel D gegen E geschossen wurden!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Es sind folgende Spielausgänge möglich

$$D : E = 1 : 0 ; D : E = 2 : 0 ; D : E = 2 : 1 \text{ oder } D : E = 3 : 0.$$

Herleitung: Da Mannschaft D beide Spiele gewann, muss Mannschaft D

- gegen Mannschaft E mindestens 1 Tor mehr als Mannschaft E geschossen haben,
- gegen Mannschaft F mindestens 1 Tor mehr als Mannschaft F geschossen haben.

Da Mannschaft D das Spiel gegen Mannschaft F gewann, aber Mannschaft F auch ein Spiel gewann, muss Mannschaft F

- gegen Mannschaft E mindestens 1 Tor mehr als Mannschaft E geschossen haben.

Wären alle drei Spiele ganz knapp ausgegangen, erhalten wir

$$D : E = 1 : 0 ; D : F = 1 : 0 ; F : E = 1 : 0.$$

Bei diesen Ergebnissen sind es insgesamt 3 Tore. Die verbleibenden ($5 - 3 =$) 2 Tore können wir nun noch so verteilen, dass die Siegmannschaften erhalten bleiben. Allerdings müssen diese beiden Tore nicht alle beim Spiel D – E geschossen sein. Somit finden wir die Möglichkeiten wie in der linken Spalte (die vollständige Angabe der Möglichkeiten für die beiden anderen Spiele war nicht gefordert!).

D – E	1 : 0			2 : 0		2 : 1	3 : 0
D – F	1 : 0	2 : 0	2 : 1	1 : 0	2 : 0	1 : 0	1 : 0
F – E	3 : 0	2 : 1	2 : 0	1 : 0	2 : 0	1 : 0	1 : 0

Aufgabe 3. In einer anderen Gruppe spielten die Mannschaften K, L und M jeder gegen jeden einmal. Mannschaft K gewann beide Spiele. Mannschaft L gewann eines ihrer Spiele. Insgesamt wurden in den drei Spielen 13 Tore geschossen.

- Quadrato sagt: „Es ist möglich, dass Mannschaft K mehr Tore schoss als Mannschaft L und Mannschaft L mehr Tore schoss als Mannschaft M.“ Hat Quadrato recht? Wie könnten die Spielergebnisse gewesen sein, damit seine Aussage richtig ist?
- Frau Dreieck fragt: „Ist es möglich, dass alle Mannschaften gleich viele Tore geschossen haben?“ Beantworte diese Frage und begründe deine Antwort!
- Herr Raute behauptet: „Es ist sogar möglich, dass Mannschaft M insgesamt mehr Tore schoss als Mannschaft K und auch mehr Tore schoss als Mannschaft L.“ Hat Herr Raute recht? Wie könnten die Spielergebnisse gewesen sein, damit seine Aussage richtig ist?

Lösungshinweis zu Aufgabe 3 - Antwortsatz. Während die Aussagen von Quadrato und Herrn Raute möglich sind, ist die Aussage von Frau Dreieck falsch!

- *Begründung:* Es genügt für die Aussage von Quadrato ein Beispiel anzugeben, bei dem alle Aussagen erfüllt sind (es gibt mehrere Möglichkeiten).

	K	L	M	Punkte	Tore
K	 	4 : 0	6 : 0	6	10
L	0 : 4	 	3 : 0	3	3
M	0 : 6	0 : 3	 	0	0

- Für die Aussage von Frau Dreieck stellen wir fest: Hätten alle drei Mannschaften gleich viele Tore geschossen, so müsste die Gesamtzahl aller Tore durch 3 teilbar sein. Da aber 13 nicht durch 3 teilbar ist, kann die Aussage von Frau Dreieck nicht stimmen.
- Es genügt für die Aussage von Herrn Raute ein richtiges Beispiel anzugeben, bei dem alle Aussagen erfüllt sind.

	K	L	M	Punkte	Tore
K	 	1 : 0	3 : 2	6	4
L	0 : 1	 	4 : 3	3	4
M	2 : 3	3 : 4	 	0	5

Aufgabe 4. In der Gruppe spielten die vier Mannschaften W, X, Y und Z.

- Wie viele Spiele sind erforderlich, damit jede gegen jeden einmal spielen kann?
- Wie viele Punkte kann der Gruppensieger dabei höchstens erreichen?
- Wenn Mannschaft W Gruppensieger wurde, vier Punkte Vorsprung vor Mannschaft X hatte und die Mannschaften Y und Z gleich viele Punkte schafften - wie viele Punkte hat dann Mannschaft W erreicht? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsätze. Es sind in dieser Gruppe 6 Spiele erforderlich. Die maximale Punktschere des Gruppensiegers beträgt 9 Punkte. Unter den gegebenen Informationen erreichte Mannschaft W 7 Punkte oder 6 Punkte.

Begründungen: Damit jeder gegen jeden spielen kann, sind folgende 6 Spiele erforderlich.

W : X, W : Y, W : Z, X : Y, X : Z und Y : Z.

20. LOGO – Korrespondenzzirkel ° Schuljahr 2025/26 ° Runden 1-3

Da jede Mannschaft 3 Spiele bestreiten muss, kann der Gruppensieger maximal 9 Punkte erreichen – nämlich dann, wenn alle drei Spiele gewonnen wurden, ($3 \cdot 3 =$) 9 Punkte.

Wir stellen fest, dass mit 3 Spielen für eine Mannschaft insgesamt jede Punktzahl zwischen 0 und 9 Punkten möglich ist – jedoch mit Ausnahme von 8 Punkten.

	Anzahl Spiele									
Gewonnen	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
Unentschieden	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
Verloren	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
Gesamtpunktzahl	9	7	6	5	4	3	3	2	1	0

Möglichkeit 1: Mannschaft W schaffte 9 Punkte (gewann also alle ihre drei Spiele). Dann erreichte Mannschaft X ($9 - 4 =$) 5 Punkte. Um 5 Punkte in 3 Spielen zu erreichen, muss Mannschaft X einmal gewonnen und zweimal unentschieden gespielt haben. Das ist aber nicht möglich, wenn Mannschaft W alle Spiele gewann. **Es ist nicht möglich, dass Mannschaft W 9 Punkte schaffte.**

Möglichkeit 2: Mannschaft W schaffte **7 Punkte**. Das ist nur möglich, wenn Mannschaft W 2 Spiele gewann und 1 Spiel unentschieden ausging. Dann erreichte Mannschaft X ($7 - 4 =$) 3 Punkte. Wir finden eine Möglichkeit, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt:

	W	X	Y	Z	Punkte
W	W	U	G	G	7
X	U	X	U	U	3
Y	V	U	Y	U	2
Z	V	U	U	Z	2

Möglichkeit 3: Mannschaft W schaffte **6 Punkte**. Das ist nur möglich, wenn Mannschaft W 2 Spiele gewann und 1 Spiel verlor. Dann erreichte Mannschaft X ($6 - 4 =$) 2 Punkte. Also hat Mannschaft B in 2 Spielen unentschieden gespielt. Auch dafür finden wir eine Möglichkeit, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt:

	W	X	Y	Z	Punkte
W	W	G	G	V	6
X	V	X	U	U	2
Y	V	U	Y	G	4
Z	G	U	V	Z	4

Möglichkeit 4: Mannschaft W schaffte 5 Punkte. Das ist nur möglich, wenn Mannschaft W 1 Spiel gewann und 2 Spiele unentschieden beendeten. Dann erreichte Mannschaft X ($5 - 4 =$) 1 Punkt. Also hat Mannschaft X nur in 1 Spiel unentschieden erreicht, die anderen Spiele aber verloren.

Wir probieren zunächst den Fall, dass die Mannschaft W gegen Mannschaft X gewonnen hat und das Spiel X : Y unentschieden endete. Dann hat auch Mannschaft Z gegen Mannschaft X gewonnen. Wir erhalten folgenden Zwischenstand der Tabelle:

	W	X	Y	Z	Punkte
W	W	G	U	U	5
X	V	X	U	V	1
Y	U	U	Y	?	2
Z	U	G	?	Z	4

Im letzten Spiel Y : Z ist es nun aber nicht möglich, dass beide Mannschaften Y und Z am Ende gleich viele Punkte erreichen.

Wir probieren deshalb den Fall, dass die Mannschaft W gegen Mannschaft X unentschieden spielte und Mannschaft W gegen Mannschaft Y gewann. Dann hat Mannschaft W gegen Mannschaft Z unentschieden gespielt. Wir erhalten folgenden Zwischenstand der Tabelle:

	W	X	Y	Z	Punkte
W	U	U	G	U	5
X	U	U	V	V	1
Y	V	G	U	?	3
Z	U	G	?	U	4

Im letzten Spiel Y : Z ist es nun aber nicht möglich, dass beide Mannschaften Y und Z am Ende gleich viele Punkte erreichen.

Aus beiden Fällen folgt, dass **5 Punkte für Mannschaft W nicht möglich sind**.

Möglichkeit 5: Mannschaft W schaffte 4 Punkte. Das ist nur möglich, wenn Mannschaft W 1 Spiel gewann, 1 Spiel unentschieden beendete und 1 Spiel verlor. Dann erreichte Mannschaft X ($4 - 4 = 0$) 0 Punkt. Also hat Mannschaft X alle ihre Spiele verloren. Wenn zum Beispiel Mannschaft W unentschieden gegen Mannschaft Y gewann (und deshalb gegen Mannschaft Z verlor), erhalten wir folgenden Zwischenstand der Tabelle:

	W	X	Y	Z	Punkte
W	U	G	U	V	4
X	V	U	V	V	0
Y	U	G	U	?	4
Z	G	G	?	U	6

Somit hat Mannschaft Z vor ihrem letzten Spiel bereits 6 Punkte und wäre besser als der Gruppensieger W. **Deshalb sind 4 Punkte für Mannschaft W nicht möglich**.

Weniger als 4 Punkte konnte Mannschaft W nicht erreichen, weil dann die Aussage zu Mannschaft X nicht erfüllbar ist.

Runde 3 – Teil B: Zahlenspiele: Und noch einmal immer 20!

Kreisa und Quadrato wollen wieder mit der Zahl 20 experimentieren.

Aufgabe 1a). Dafür hat Quadrato dieses Mal die Zahlen von 1 bis 20 ohne Lücken hintereinander geschrieben, also 1234567891011... und so weiter bis 20.

- Wie viele Ziffern stehen in dieser Ziffernreihe?
- Berechne die Summe aller dieser Ziffern!

Aufgabe 1b). Kreisa denkt sich die Zahlen von 1 bis 200 ohne Lücken hintereinander geschrieben, also 1234567891011... und so weiter bis 200.

- Wie viele Ziffern stehen in dieser Ziffernreihe?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) Wir schreiben die Zahlen auf und zählen:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 0 1 1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7 1 8 1 9 2 0

Es sind 31 Ziffern. Wir können die Anzahl aber auch berechnen:

20. LOGO – Korrespondenzzirkel ° Schuljahr 2025/26 ° Runden 1-3

- Von 1 bis 9 sind es 9 einstellige Zahlen mit insgesamt 9 Ziffern.
- Von 10 bis 20 sind es 11 zweistellige Zahlen mit insgesamt ($2 \cdot 11 =$) 22 Ziffern.

Zusammen sind es ($9 + 22 =$) 31 Ziffern.

Wir können die 31 Ziffern nacheinander (im Kopf) addieren und erhalten als Ergebnis die Summe 102. Wir können die Summe aber auch berechnen:

- Wir addieren die einstelligen Zahlen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Diese Zahlen treten in der Folge zweimal auf.
- Dazu kommen 10-mal die Zehnerziffern von 10 bis 19 und
- einmal die Zehnerziffer 2 von 20.

Insgesamt beträgt die Summe ($2 \cdot 45 + 10 \cdot 1 + 1 \cdot 2 =$) 102.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b): Wir könnten natürlich auch die Zahlen aufschreiben:

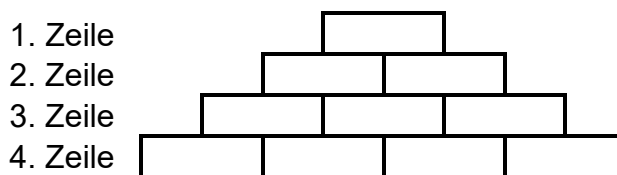
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 99 100 101...199 200

Aber das Zählen der Ziffern wird nicht anerkannt, denn es sind ja so viele!
Deshalb berechnen wir die Anzahl:

- Von 1 bis 9 sind es 9 einstellige Zahlen mit insgesamt 9 Ziffern.
- Von 10 bis 99 sind es 90 zweistellige Zahlen mit insgesamt ($2 \cdot 90 =$) 180 Ziffern.
- Von 100 bis 199 sind es 100 dreistelligen Zahlen mit insgesamt ($3 \cdot 100 =$) 300 Ziffern.
- Schließlich hat die Zahl 200 noch 3 Ziffern.

Zusammen sind es ($9 + 180 + 300 + 3 =$) 492 Ziffern.

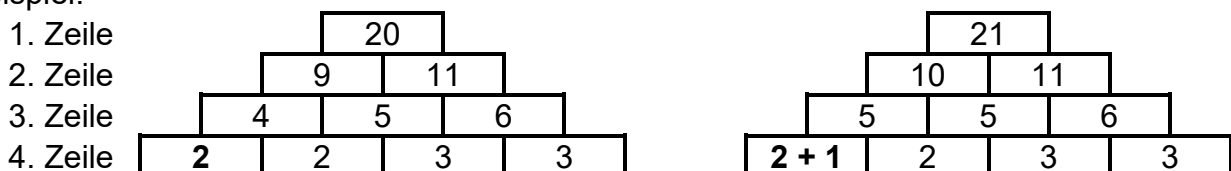
Kreisa und Quadrato spielen auch wieder mit vierzeiligen Rechenmauern. In den Feldern stehen die Summen der direkt darunterliegenden Steine. Sie schreiben aber auf keinen Stein die Zahl 0. Sie haben schon viele Rechenmauern gefunden, bei denen in der 1. Zeile 20 steht.



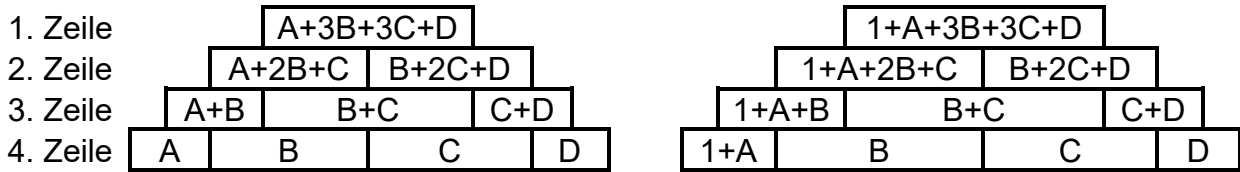
Aufgabe 2a). Quadrato stellt fest: „Wenn ich eine Rechenmauer gefunden habe, bei der in der 1. Zeile 20 steht, dann ist es nicht schwer, daraus eine Rechenmauer zu bilden, bei der in der 1. Zeile 21 steht.“ Was könnte Quadrato entdeckt haben? Erkläre, wie er die neue Rechenmauer finden kann.

Aufgabe 2b). Kreisa behauptet, sie könne aus Rechenmauern mit 20 in der 1. Zeile Rechenmauern mit 21, 22, ..., 28 in der 1. Zeile erzeugen, indem sie jede der Zahlen in der 4. Zeile um höchstens 1 verändert. Zeige an einem Beispiel, dass sie recht hat.

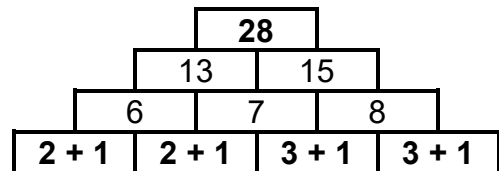
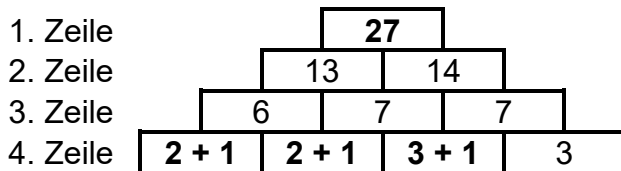
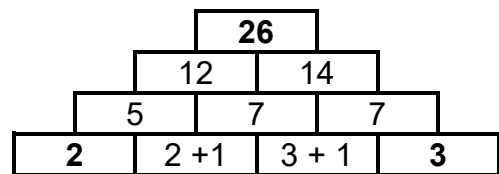
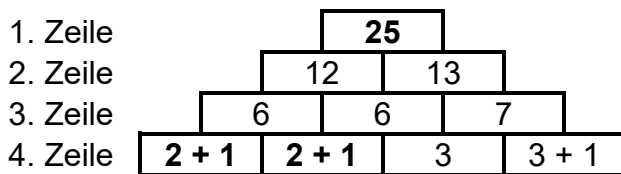
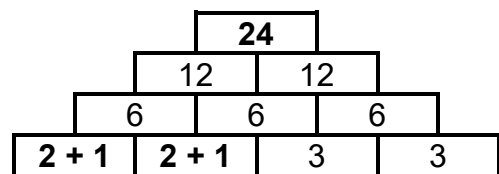
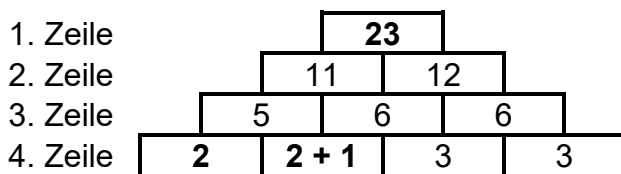
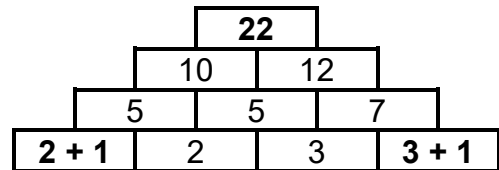
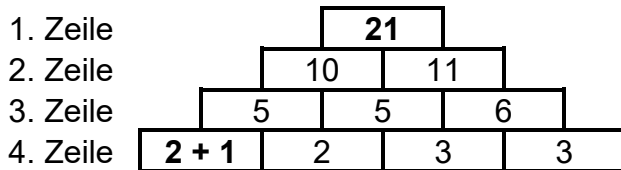
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a). Quadrato könnte entdeckt haben, das linke Feld in der 4. Zeile (oder das rechte Feld) um 1 zu erhöhen, um die Zahl in der 1. Zeile um 1 zu erhöhen.
Beispiel:



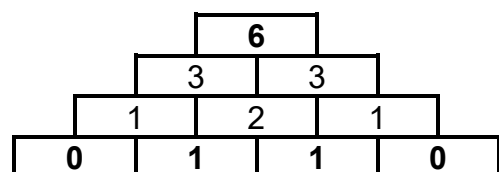
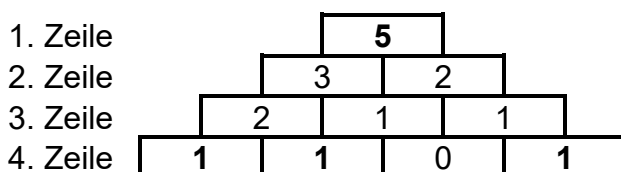
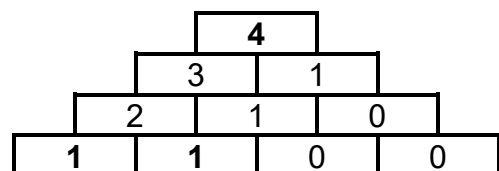
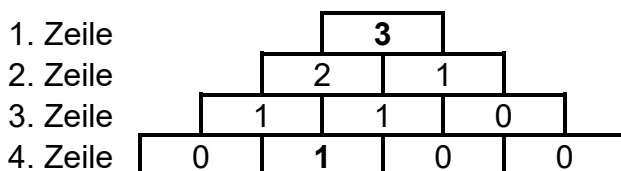
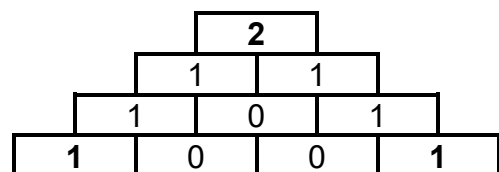
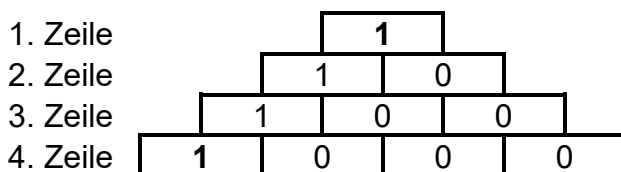
Wenn wir mit Buchstaben rechnen, erkennen wir, dass diese Methode für alle Rechenmauern richtig ist:

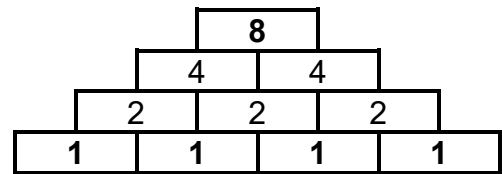
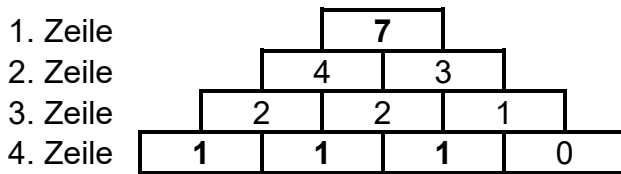


Lösungshinweise zu Aufgabe 2b). Kreisa hat recht. Erhöhen wir eine oder mehrere Felder in der 4. Zeile um jeweils 1, lassen sich die Summen 21 bis 28 in der 1. Zeile erzeugen. Wir zeigen es dem obigen Beispiel der Rechenmauer mit 20 in der 1. Zeile:



Um die Beobachtung zu erklären, betrachten wir Rechenmauern, die in der 4. Zeile nur 0 oder 1 stehen haben. Damit sind alle Ergebnisse von 1 bis 8 in der 1. Zeile möglich!





Quadrato hat viele gleich lange Legestäbchen. Mit diesen Stäbchen legt er Figuren (linke Abbildung: 8 Stäbchen für 2 Quadrate). Er kann die Stäbchen auch so legen, dass die Figuren zusammenhängen (rechte Abbildung: 7 Stäbchen für 2 Quadrate).



Aufgabe 3a). Wie viele Quadrate kann Quadrato mit 20 Legestäbchen legen? Es ist natürlich einfach 5 Quadrate zu legen. Doch können es auch mehr Quadrate werden? Finde möglichst viele Anzahlen, die er legen kann, wenn er nur gleichgroße Quadrate zählt. Zeichne zu jeder möglichen Anzahl, wie Quadrato seine Stäbchen gelegt haben könnte!

Aufgabe 3b). Frau Dreieck bittet nun Quadrato, mit seinen 20 Legestäbchen Dreiecke zu legen. Finde möglichst viele Anzahlen, die er legen kann, wenn er nur gleichgroße Dreiecke zählt! Zeichne zu jeder möglichen Anzahl, wie Quadrato seine Stäbchen gelegt haben könnte!

Hinweis: Quadrato wollte eigentlich Quadrate und Dreieck legen, deren Seiten jeweils ein Stäbchen lang sind. Außerdem wollte er stets alle 20 Stäbchen verwenden, aber so, dass keine unvollständigen Quadrate oder Dreiecke zu sehen sind. *Da dies aber in der Aufgabe leider nicht formuliert war,* wurden alle Ideen und Zeichnungen als richtig gewertet!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a). Quadrato kann mit 20 Stäbchen 5 Quadrate, 6 Quadrate oder 7 Quadrate legen. Es genügt, entsprechende Beispiele anzugeben.



Lösungshinweise zu Aufgabe 3b). Quadrato kann mit 20 Stäbchen 7 Dreiecke, 8 Dreiecke, 9 Dreiecke oder 10 Dreiecke legen. Es genügt wieder, entsprechende Beispiele anzugeben.

