

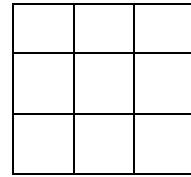
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe

Ein Quadrat aus 3×3 – Kästchen kann man in kleinere Quadrate zerlegen. Zwei Zerlegungen sollen als nicht verschieden gelten, wenn für jede Größe der Quadrate die gleiche Anzahl verwendet wird. In diesem Sinne stimmen die folgenden drei Zerlegungen mit dem Beispiel 2 überein und sind somit keine neuen Möglichkeiten.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1.

Fall 1: In der Zerlegung gibt es Quadrat der Größe 4×4 . Egal wie es angeordnet ist, es kann nur durch 9 Quadrate der Größe 1×1 ergänzt werden. In diesem Fall gibt es also nur eine Möglichkeit (Abbildung 1)

Fall 2: In der Zerlegung gibt es Quadrat der Größe 3×3 . Nun hängen Zerlegungen von der Lage dieses Quadrates ab.

Fall 2a: Das Quadrat der Größe 3×3 sei in der Mitte angeordnet. Dann kann man die Zerlegung nur durch 16 Quadrate der Größe 1×1 ergänzen (Abbildung 2).

Fall 2b: Das Quadrat der Größe 3×3 habe mit dem Ausgangsquadrat einen Eckpunkt gemeinsam. Dann kann man weitere 16 Quadrate der Größe 1×1 ergänzen – allerdings ergibt dies keine neue Zerlegung im Sinne der Aufgabe, denn die Anzahlen der verwendeten Quadrate stimmen in jeder Größe überein (Abbildung 3).

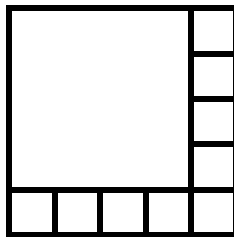


Abbildung 1

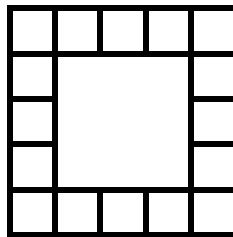


Abbildung 2

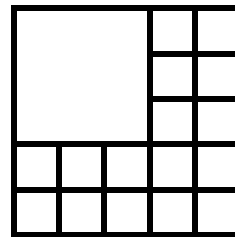


Abbildung 3

Fall 2c: Um also eine neue Möglichkeit zu finden, müssen auch Quadrate der Größe 2×2 verwendet werden, dies ist mit einem, mit zwei oder mit drei erfüllbar (Abbildung 4a bis 4c). Dabei spielt es keine Rolle, wie diese Quadrate angeordnet sind.

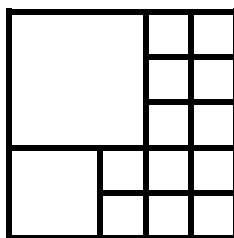


Abbildung 4a

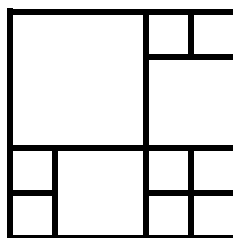


Abbildung 4b

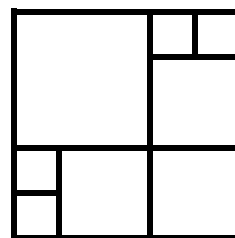


Abbildung 4c

Obwohl das Quadrat der Größe 3×3 insgesamt 9 und jedes Quadrat der Größe 2×2 jeweils 4 kleine Quadrate umfasst, und deshalb zu dem größeren Quadrat 4 der Größe 2×2 flächenmäßig passen würden ($9 + 4 \cdot 4 = 25$), gelingt es nicht dies anzuordnen: Egal wie man „unter“ dem 3×3 – Quadrat zwei 2×2 – Quadrate anordnet, es bleiben immer 2 kleine Teilquadrate übrig, die sich nicht zu einem 2×2 – Quadrat ergänzen lassen.

Fall 3: Die Zerlegung besteht nur aus Quadraten der Größe 2×2 und der Größe 1×1 . Erstaunlicherweise passen nur maximal vier solche 2×2 – Quadrate hinein, denn es gibt nur höchsten zweimal zwei zusammenhängende Zeilen oder Spalten (Abbildung 5a bis 5d)

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

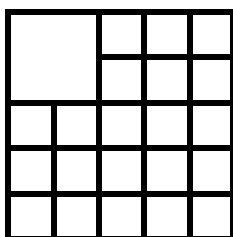


Abbildung 5a

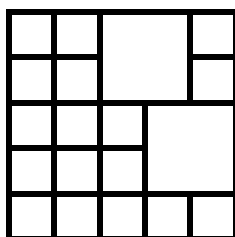


Abbildung 5b

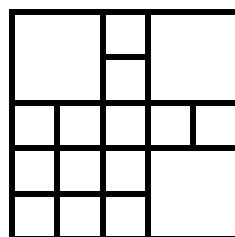


Abbildung 5c

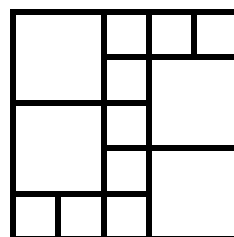


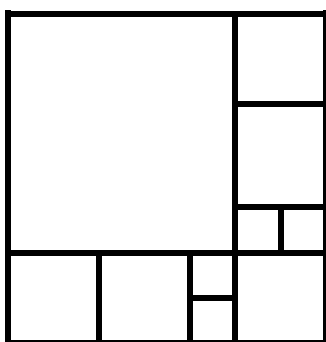
Abbildung 5d

Fall 4: Die Zerlegung nur in Teilquadrate der Größe 1×1 ist natürlich auch möglich.

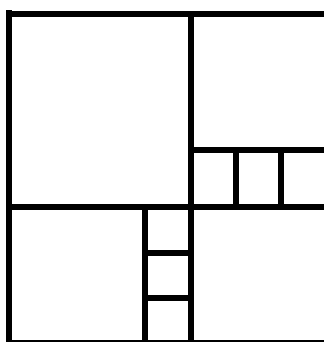
Ingesamt gibt es also nur folgende 10 Möglichkeiten der Zerlegung:

Anzahl der Quadrate der Größen:				Bemerkung
4×4	3×3	2×2	1×1	
1	0	0	9	Fall 1: Abbildung 1
0	1	0	16	Fall 2a: Abbildung 2; Fall 2b: Abbildung 3
0	1	1	12	Fall 2c: Abbildung 4a
0	1	2	8	Fall 2c: Abbildung 4b
0	1	3	4	Fall 2c: Abbildung 4c
0	0	1	21	Fall 3: Abbildung 5a
0	0	2	17	Fall 3: Abbildung 5b
0	0	3	13	Fall 3: Abbildung 5c
0	0	4	9	Fall 3: Abbildung 5d
0	0	0	25	Fall 4

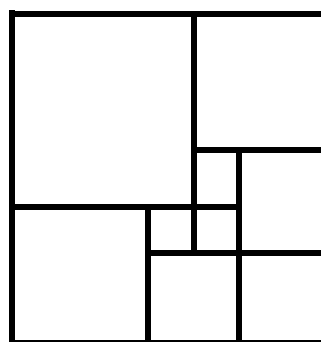
Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Es war nur gefordert, eine Zerlegung des 7×7 – Quadrates in möglichst wenige kleinere Quadrate zu finden. Wer es mit 10 solchen kleineren Quadraten schafft, ist schon gut. Es geht aber auch mit **9 kleineren Teilquadraten** – und mit wenigeren Quadraten gelingt es nicht!



10 Teilquadrate



10 Teilquadrate



9 Teilquadrate

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2013

a) Da es 18 Kinder sind und jedes von ihnen 2 Muffins essen möchte, muss Mia $18 \cdot 2 = 36$ Muffins backen.

Antwortsatz: Mia will 36 Muffins backen.

b) Für 24 Muffins braucht Mia $100\text{g} + 150\text{g} = 250\text{g}$ weiße Schokolade. Da sie aber noch 12 Muffins mehr backen möchte und 12 die Hälfte von 24 ist, braucht sie auch noch mal die Hälfte mehr an weißer Schokolade. Das sind dann $250\text{g} : 2 = 125\text{g}$. Folglich braucht sie insgesamt $250\text{g} + 125\text{g} = 375\text{g}$ weiße Schokolade.

Antwortsatz: Mia braucht 375g weiße Schokolade.

c) Mia braucht 375g weiße Schokolade. Wenn eine Tafel 100g sind, dann braucht sie 3 Tafeln und noch 75g. Da sie aber nur ganze Tafeln kaufen kann, muss sie 4 nehmen.

Antwortsatz: Mia muss 4 Tafeln kaufen, damit sie genug Schokolade hat.

d) Für 3 Tafeln muss Mia nur 2 bezahlen. Da sie aber 4 Tafeln braucht, kauft sie noch 1 weitere Tafel. Sie muss also bei 4 Tafeln nur $2 + 1 = 3$ Tafeln bezahlen.

Antwortsatz: Mia muss nur 3 Tafeln bezahlen.

e) Bei dieser Aufgabe musst du zuerst ausrechnen und begründen, wie viele Muffins in den einzelnen Gruppen sind. Erst danach kannst du die Anzahl der Smarties ausrechnen:

2 kleine Gruppen haben zusammen genau so viele Muffins wie 1 große Gruppe. Daraus folgt, dass 2 kleine und 1 große Gruppe insgesamt so viele Muffins haben wie 2 große Gruppen. Du musst also die 36 Muffins durch 2 teilen und findest, dass $36 : 2 = 18$ Muffins in der großen Gruppe sind. In den beiden kleinen Gruppen sind also jeweils $18 : 2 = 9$ Muffins. Nun weißt du, dass Mia $18 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 3 = 153$ Smarties braucht.

Antwortsatz: Mia braucht 153 Smarties.

f) Weil auf jedem Muffin 3 Smarties sind, reichen 3 Farben nicht, weil dann jedes Muffin die gleiche Farb-Belegung hätte.

Auch 4 Farben reichen nicht. Um dies zu begründen, kannst du zum Beispiel alle Möglichkeiten aufschreiben. Zur Abkürzung kannst du die Zahlen 1, 2, 3 und 4 verwenden – jede Zahl bezeichnet eine Farbe. Dann sind folgende Farb-Belegungen möglich: 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4. Mia könnte nur 4 verschiedene Farb-Belegungen finden.

Dieses Ergebnis erhältst du auch so: Da jede Farbe auf einem Muffin nur einmal verwendet werden soll, unterscheiden sich die Muffins durch die Farbe, die weggelassen wird. Es gibt bei 4 Farben genau 4 Möglichkeiten, eine Farbe wegzulassen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Mit 5 Farben sind 10 verschiedene Farb-Belegungen möglich: 1-2-3, 1-2-4, 1-2-5, 1-3-4, 1-3-5, 1-4-5, 2-3-4, 2-3-5, 2-4-5, 3-4-5.

Antwortsatz: Mit 5 Farben kann Mia die Muffins der kleinen Gruppe mit je 3 Smarties so belegen, dass auf jedem Muffin keine Farbe mehrfach verwendet wird und keine Farb-Belegung doppelt auftritt.

Fünf Farben reichen aber nicht, um die Muffins in der kleinen Gruppe mit je 4 Smarties zu verzieren. Da wir 5 Farben haben, unterscheiden sich die Muffins wieder durch die Farbe, die weggelassen wird. Es gibt bei 5 Farben genau 5 Möglichkeiten, eine Farbe wegzulassen. Alle Möglichkeiten lassen sich so aufschreiben: 1-2-3-4, 1-2-3-5, 1-2-4-5, 1-3-4-5, 2-3-4-5.

Antwortsatz: Mit 5 Farben kann Mia die Muffins der anderen kleinen Gruppe mit je 4 Smarties nicht so belegen, dass keine Farb-Belegung doppelt vorkommt.

g) Wenn auf einem Muffin auch Smarties mit gleichen Farben sein können, kann Mia mit 3 Farben 10 verschiedene Farb-Belegungen bilden. Beachte beim Aufschreiben aller Möglichkeiten, dass die Reihenfolge der Farben nicht wichtig ist. (1-2-3 und 3-2-1 sind also die gleiche Farb-Belegung.) Dann gibt es folgende Möglichkeiten: 1-1-1, 1-1-2, 1-1-3, 1-2-2, 1-2-3, 1-3-3, 2-2-2, 2-2-3, 2-3-3, 3-3-3.

Antwortsatz: Verwendet Mia auf einem Muffin auch Smarties mit der gleichen Farbe, dann reichen 3 Farben, so dass in der kleinen Gruppe mit je 3 Smarties keine Farb-Belegung doppelt vorkommt.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2014: Wie viele Zerlegungen gibt es?

So lautete die Aufgabe: Ein Quadrat aus 4×4 – Teilquadraten ist von links oben nach rechts unten in zwei Teile zu zerlegen, die in Größe und Form gleich sind. Dabei sind die Schnittlinien nur entlang der eingezeichneten Kästchenlinien oder diagonal durch die Kästchen zu ziehen.

Hinweis: Zwei Teile heißen formgleich, wenn sie durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können. (Das bedeutet: wenn du die Teile ausschneidest, kannst du sie so hin- und herdrehen oder auch umdrehen, dass sie genau übereinander passen.)

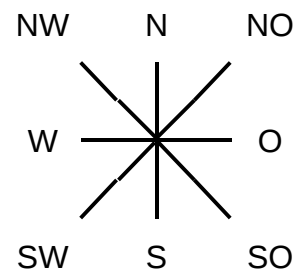
Finde möglichst viele verschiedene Zerlegungen und gib die gefundenen Zerlegungen durch Zeichnungen oder Beschreibungen genau an. (Tipp: Es gibt viel mehr als 10 verschiedene Zerlegungen.)

Wer bereits mehr als 15 Zerlegungen gefunden hat, musste sich schon eine Systematik überlegen. Da die Lösung der Aufgabe wohl nur durch systematisches Probieren zu finden war, kam es also auf eine geschickte Strategie an.

Vielleicht dient die folgende Musterlösung als Anregung, Zerlegungsmöglichkeiten aufzuspüren? Jede Zerlegung werde von oben links aus begonnen. Wegen der geforderten Formgleichheit muss die Zerlegung durch den Mittelpunkt des (4×4) -Quadrates zur gegenüberliegenden Ecke führen (versuche es zu begründen!). Es reicht aber, die Zerlegung von der Ecke bis zum Quadratmittelpunkt zu untersuchen. Die Fortsetzung vom Mittelpunkt bis zur gegenüberliegenden Ecke muss wegen der Formgleichheit symmetrisch zum ersten Teil verlaufen!

Als ein erstes Ordnungsprinzip kann die Anzahl der Einzelschnitte entlang der Kästchenlinien oder der Diagonalen auf dem Weg vom Eckpunkt zum Quadratmittelpunkt gelten.

Mit zwei Schnitten gelingt dies nur auf genau eine Weise (in der Abbildung als 2-1 bezeichnet). Zur Beschreibung der Schnitte kann man z. B. die Bezeichnung der Windrose benutzen.



Die Zerlegung 2-1 heißt dann SO-SO.

Mit drei Schnitten gibt es theoretisch maximal 6 Möglichkeiten:

S-SO-O (Zerlegung 3-1), S-O-SO (Zerlegung 3-2) und SO-S-O (Zerlegung 3-3) sowie O-SO-S, O-S-SO und SO-O-S.

Aber die letzten drei Zerlegungen sind nicht neu: Ändert man die Bezeichnung und vertauscht S und O (also S statt O und O statt S), so wird dies erkennbar!

Jede Zerlegung ist auf diese Weise eindeutig beschreibbar, z. B. 7-3: S-S-NO-SNO-O-SW. (Als Kontrollmöglichkeit zähle man die Buchstaben S, N, O und W: Es müssen stets 2 S mehr als N und 2 O mehr als W vorkommen.) Der Vorteil des ersten Ordnungsprinzips besteht darin, dass man nur innerhalb „gleichlanger“ Zerlegungen auf Gleichheit bezüglich Drehung und Spiegelung untersuchen muss.

Als zweites Ordnungsprinzip kann man sich für eine beliebige Reihenfolge der Himmelsrichtungen festlegen, z. B. W, SW, S, SO, O, NO, N, NW. Dann steht die Zerlegung

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

7-2 vor 7-3, weil in der Beschreibung für 7-2 (S-S-NO-S-S-O-N) an der 5. Position S vor NO kommt. Auf diese Weise entstand die Reihenfolge in der Abbildung.

Das Kunststück besteht darin, die Zeilen vollständig und ohne Wiederholungen zu füllen - da hilft aber wohl nur Geduld und Sorgfalt.

Insgesamt findet man auf diese Weise 50 Möglichkeiten, ein (4×4) -Quadrat in der geforderten Weise zu zerlegen!



2-1



3-1



3-2



3-3

Zerlegungs-Beispiele



4-1



4-2



4-3



4-4



4-5



4-6



4-7



4-8



4-9



4-10



4-11



5-1



5-2



5-3



5-4



5-5



5-6



5-7



5-8



5-9



5-10



5-11



5-12



5-13



5-14



5-15



5-16



6-1



6-2



6-3



6-4



6-5



6-6



6-7



6-8



6-9



6-10



6-11



6-12



6-13



6-14



7-1



7-2



7-3



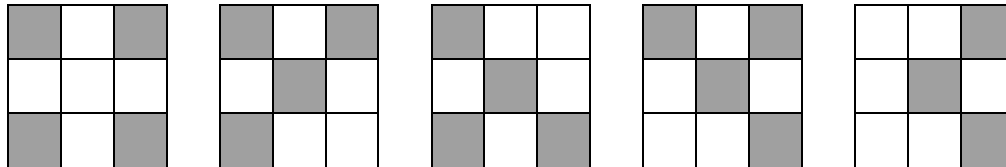
7-4



7-5

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2015

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 Das angegebene Beispiel ist die einzige Möglichkeit, vier Felder zu färben, ohne dass ein Eckfeld ausgemalt wird. Weiterhin gibt es 5 Möglichkeiten mit ausgemalten Eckfeldern.



Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Insgesamt sind es also **6 Möglichkeiten**.

Diese Lösung beruht im Wesentlichen auf der Anschauung. Es scheint zwar einsichtig, dass es keine weiteren Lösungen gibt, aber diese eigene Überzeugung ist noch kein Beweis. Man muss also nach Methoden suchen, die eine vollständige Auflistung ermöglicht. Mit Fallunterscheidung kommt man dem näher.

Variante 1: Wenn 4 Felder in einer 3 x 3 – Tafel auszumalen sind, dann müssen mindestens in einer Zeile (waagerechte Reihe der Tafel) zwei Felder ausgemalt werden. In einer Zeile gibt es nur eine Möglichkeit, zwei Felder regelgerecht auszumalen: Es werden das linke und das rechte Feld ausgemalt, das mittlere Feld bleibt weiß.

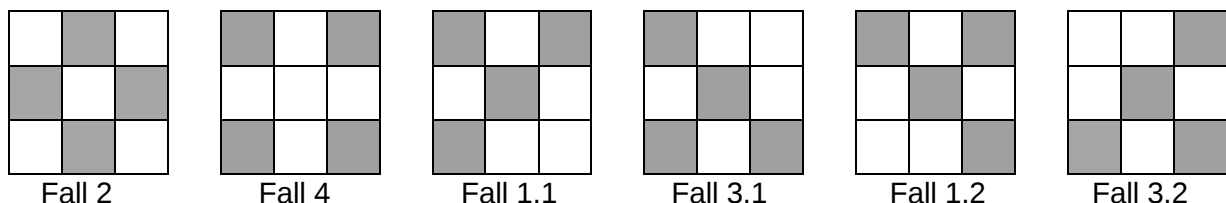
Fall 1: In der ersten (oberen) Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. In diesem Fall gibt es nur **zwei verschiedene Möglichkeiten**, denn die erste Zeile ist eindeutig bestimmt, in der zweiten (mittleren) Zeile muss das mittlere Feld ausgemalt werden. Das vierte ausgemalte Feld in der dritten (unteren) Reihe kann nun die linke oder die rechte Ecke sein.

Fall 2: In der zweiten Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. In diesem Fall gibt es nur **eine Möglichkeit**, weil sowohl in der ersten als auch in der dritten Zeile das mittlere Feld ausgemalt werden muss.

Fall 3: In der dritten Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. Dies entspricht dem Fall 1, es gibt also **zwei verschiedene Möglichkeiten**.

Fall 4: Es gibt zwei Zeilen mit je zwei ausgemalten Feldern. Da die Lage der ausgemalten Felder in einer Zeile eindeutig festgelegt ist, können die beiden Zeilen nicht benachbart sein. Also sind in der ersten und in der dritten Zeile jeweils zwei Felder ausgemalt, und zwar ist dies auf genau **eine Möglichkeit** realisierbar.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten:



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Variante 2: Wir führen die Fallunterscheidung nach dem Mittelfeld.

Fall 1: Das mittlere Feld ist ausgemalt. Dann gibt es regelgerecht vier Felder (die Eckfelder), die noch ausgemalt werden könnten. Da nur drei davon auszumalen sind, gibt es **vier verschiedene Möglichkeiten**, ein Eckfeld nicht auszumalen.

Fall 2: Das mittlere Feld sei nicht ausgemalt. Dann sind vier der acht umgebenden (Rand-) Felder auszumalen. Da immer ein Feld freigelassen werden muss, gibt es genau **zwei verschiedene Möglichkeiten**, dies zu realisieren: Entweder startend in einem Eckfeld oder nicht in einem Eckfeld.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Wir verwenden die Variante 1 aus Aufgabe 1 und betrachten eine Fallunterscheidung nach der Lage von ausgemalten Feldern auf jeder Zeile der 4 x 4 - Tafel.

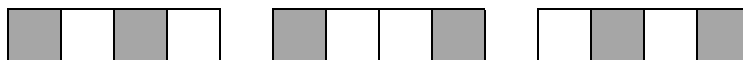
Fall 1: In jeder Zeile befindet sich ein ausgemaltes Feld.

In der ersten Zeile gibt es dafür 4 Möglichkeiten, ein Feld auszumalen (jedes Feld dieser Zeile könnte ausgemalt werden). In der zweiten (und in jeder weiteren) Zeile gibt es 3 Möglichkeiten, ein Feld auszumalen: Alle Felder bis auf das Feld, was direkt unter dem ausgemalten Feld der darüberstehenden Zeile steht, kann ausgemalt werden.

Das sind bei vier Zeilen insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ Möglichkeiten.

Fall 2: In einer Zeile sind zwei Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen ist jeweils ein Feld ausgemalt.

Um in einer Zeile 2 Felder auszumalen, gibt es genau 3 Möglichkeiten:



Fall 2.1: In der 1. Zeile sind zwei Felder ausgemalt.

Möglichkeiten:	Anzahl Möglichkeiten				
	1. Zeile	2. Zeile	3. Zeile	4. Zeile	gesamt
2. Zeile: kein Feld	3	-	4	3	$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
3. Zeile: kein Feld	3	2	-	4	$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$
4. Zeile: kein Feld	3	2	3	-	$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

Insgesamt sind es $(36 + 24 + 18 =)$ **78 Möglichkeiten**.

Fall 2.2: In der 2. Zeile sind zwei Felder ausgemalt.

	Anzahl Möglichkeiten				
	1. Zeile	2. Zeile	3. Zeile	4. Zeile	gesamt
1. Zeile: kein Feld	-	3	2	3	$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$
3. Zeile: kein Feld	2	3	-	4	$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
4. Zeile: kein Feld	2	3	2	-	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Insgesamt sind es $(18 + 24 + 12 =)$ **54 Möglichkeiten**.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Fall 2.3: Sind in der 3. Zeile 2 Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen je ein Feld, so entspricht dies dem Fall 2.2, also insgesamt **54 Möglichkeiten**.

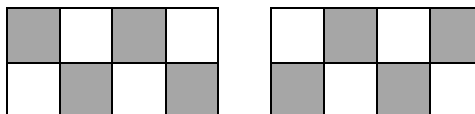
Fall 2.4: Sind in der 4. Zeile 2 Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen je ein Feld, so entspricht dies dem Fall 2.1, also insgesamt **78 Möglichkeiten**.

Also sind es bei den Fällen 2.1 bis 2.4 insgesamt $(78 + 54 + 54 + 78 =)$ **264 Möglichkeiten**.

Fall 3: In zwei Zeilen sind jeweils zwei Felder ausgemalt. Es gibt 6 Möglichkeiten, zunächst dafür zwei Zeilen auszuwählen:

1./2. Zeile, 1./3. Zeile, 1./4. Zeile, 2./3. Zeile, 2./4. Zeile, 3./4. Zeile.

Fall 3.1: Sind die Zeilen benachbart (1./2., 2./3., 3./4.), gibt es für jeder der **drei Auswahlen** jeweils **zwei Möglichkeiten**.



Sind die Reihen nicht benachbart (1./3., 1./4., 2./4.), können in jeder Zeile unabhängig voneinander 3 Möglichkeiten gewählt werden, also gibt es für jeder der **drei Auswahlen** jeweils $3 \cdot 3 =$ **9 Möglichkeiten**.

Also sind es bei den Fällen 3.1 und 3.2 insgesamt $(3 \cdot 2 + 3 \cdot 9 =)$ **33 Möglichkeiten**.

Somit gibt es in Aufgabe 2 insgesamt $(108 + 264 + 33 =)$ **405 Möglichkeiten**, vier Felder so auszumalen, dass je zwei Felder keine gemeinsame Seite haben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wir verwenden die Variante 2 aus Aufgabe 1 und betrachten eine Fallunterscheidung unter Beachtung des Mittelfeldes. Zunächst färben wir die Felder der 5 x 5 - Tafel wie ein Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß. Wir nennen das Feld mit der Nummer 13 **Mittelfeld**, die Felder mit den Nummern 7 bis 9, 12, 14 und 17 bis 19 **Ringfelder** und die übrigen Felder (1 bis 5, 6, 11, 16, 10, 15, 20 und 21 bis 25) **Randfelder**.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Wenn zwei Felder sich an einer Ecke berühren und dabei keine Seite gemeinsam haben, dann liegen die beiden Felder auf gleichfarbigen Schachbrettfeldern. Somit liegen alle 5 ausgemalten Felder auf gleichfarbigen Schachbrettfeldern.

Zunächst suchen wir im Fall 1 alle Möglichkeiten, bei denen das Mittelfeld ausgemalt wurde. Weil das Mittelfeld mit mindestens einem weiteren Feld verbunden sein muss, sind 1, 2, 3 oder 4 Ringfelder ausgemalt. Dafür gibt es nun folgende Fälle:

Fall 1.1: Alle vier Ringfelder sind ausgemalt. Dies ist nur in einer Art möglich (ausgemalte Felder sind mit X markiert).

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

	X		X	
		X		
	X		X	

Fall 1.2: Genau drei Ringfelder sind ausgemalt. Dann kann das fünfte ausgemalte Feld an einem von sieben verschiedenen Randfeldern regelgerecht platziert sein (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Da es vier Auswahlmöglichkeiten für drei Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall $4 \cdot 7 = 28$ Möglichkeiten

?		?		?
	X		X	
?		X		?
	X			
?		?		

Fall 1.3: Genau zwei benachbarte Ringfelder sind ausgemalt. Dann gibt es nur fünf Randfelder, auf denen die übrigen zwei ausgemalte Felder liegen müssen (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Das ist mit zehn verschiedenen Varianten möglich. Da es vier Auswahlmöglichkeiten für zwei ausgemalte benachbarte Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall $4 \cdot 10 = 40$ Möglichkeiten.

?		?		?
	X		X	
?		X		?

Fall 1.4: Genau zwei gegenüberliegende Ringfelder sind ausgemalt.. Dann gibt es nur sechs Felder, auf denen die übrigen zwei ausgemalten Felder liegen müssen (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Das ist mit 15 verschiedenen Varianten möglich. Da es zwei Auswahlmöglichkeiten für zwei ausgemalte gegenüberliegende Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall $2 \cdot 15 = 30$ Möglichkeiten.

		?		?
			X	
?		X		?
	X			
?		?		

Fall 1.5: Schließlich befindet sich nur an einem Eckpunkt des Mittelfeldes ein ausgemaltes Feld. Dann gibt es nur eine Möglichkeit, die restlichen 3 ausgemalten Felder anzuordnen Da es vier Auswahlmöglichkeiten für ein ausgemaltes Ringfeld gibt, sind es in diesem Fall **4 Möglichkeiten**.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

?		?		
	X			
?		X		

Insgesamt gibt es also $(1 + 28 + 40 + 30 + 4 =)$ **103 verschiedene Anordnungen**, bei denen das Mittelfeld zu den ausgemalten Feldern gehört.

Nun betrachten wir alle Möglichkeiten bei denen das Mittelfeld nicht ausgemalt wurde. Wir müssen dabei die schwarz- (Fall 2) und weißfarbigen (Fall 3) Varianten gesondert untersuchen

Fall 2.1: Alle vier schwarzen Ringfelder sind ausgemalt - doch dies ist nicht möglich, weil dann nicht alle Ringfelder an einem Eckpunkt mit einem anderen Feld verbunden sein können.

Fall 2.2: Genau drei Ringfelder sind ausgemalt. Hierfür gibt es nur **1 Möglichkeit**, zwei weitere Felder auszumalen (mit # markiert), damit jedes ausgemalte Ringfeld einen Echnachbar hat.

		#		
	X		X	
#				
	X			

Fall 2.3: Genau zwei benachbare Ringfelder sind ausgemalt. Dann muss das verbindende Randfeld ausgemalt werden. Die verbleibenden zwei Randfelder können auf 4 Feldern verteilt sein. Insgesamt sind es $4 \cdot 6 =$ **24 Möglichkeiten**.

?		#		?
	X		X	
?				?

Fall 2.4: Sind genau zwei gegenüberliegenden Ringfelder ausgemalt, kann die Bedingung der Aufgabe nicht erfüllt werden.

Fall 2.5: Ist genau ein Ringfeld ausgemalt, kann die Bedingung der Aufgabe ebenfalls nicht erfüllt werden.

Fall 2.6: Ist kein Ringfeld ausgemalt, gibt es auch keine Möglichkeit, die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen.

Insgesamt gibt es also im zweiten Fall $0 + 4 + 24 + 0 + 0 + 0 =$ **28 Möglichkeiten**.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Nun untersuchen wir noch die Möglichkeiten, wenn die ausgemalten Felder auf weißen Feldern liegen.

Fall 3.1: Alle vier weißen Ringfelder sind ausgemalt - dann kann das 5. ausgemalte Feld auf einem der 8 weißen Feldern platziert sein. Es gibt also **8 Möglichkeiten**.

	?		?	
?		X		?
	X		X	
?		X		?
	?		?	

Fall 3.2: Es sind drei Ringfelder ausgemalt - die verbleibenden 2 auszumalenden Felder können auf 6 möglichen Felder beliebig platziert werden (mit ? markiert). Dafür gibt es 15 Möglichkeiten. Zusätzlich sind die beiden Randmuster (mit # markiert) möglich. Da es vier Auswahlen von drei ausgemalten Ringfeldern gibt, sind es insgesamt $4 \cdot 17 = 68$ **Möglichkeiten**.

i

	?		?	
?		X		
	X			
?		X		
	?		?	

			#	
		X		#
	X			
		X		

		X		
	X			
		X		#
			#	

Fall 3.3 Es sind genau zwei benachbarte Ringfelder ausgemalt. Dafür sind

- 3 auszumalende Felder auf 4 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.1),
- 1 auszumalendes Feld auf 3 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.2) oder
- 1 auszumalendes Feld auf 3 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.3).

also $(4 + 3 + 3) = 10$ verschiedene Möglichkeiten. Da es 4 Auswahlen von zwei benachbarten Ringfeldern gibt, sind es insgesamt $4 \cdot 10 = 40$ **Möglichkeiten**.

	?		?	
?		X		
	X			
?				

Fall 3.3.1

	?		#	
?		X		#
	X			
?				

Fall 3.3.2

	?		?	
?		X		
	X			
#				
	#			

Fall 3.3.3

Fall 3.4: Es sind genau zwei gegenüberliegenden Ringfelder ausgemalt - dann gibt es keine Möglichkeiten, weil mindestens ein weiteres Ringfeld ausgemalt werden müsste, um die ausgemalten Felder zu verbinden.

Fall 3.5: Es ist höchstens 1 Ringfeld ausgemalt - auch dann gibt es keine regelgerechte Möglichkeit.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Insgesamt gibt es auf den weißen Schachbrettfeldern $8 + 68 + 40 + 0 + 0 = \mathbf{116}$ **Möglichkeiten**.

Insgesamt sind es $103 + 28 + 116 = \mathbf{147}$ **verschiedene Möglichkeiten**, fünf Felder auf einer 5×5 – Tafel regelgerecht auszumalen.

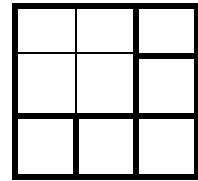
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2016

Ein Quadrat aus 3×3 – Kästchen kann man in kleinere Quadrate zerlegen. Zwei Zerlegungen sollen als nicht verschieden gelten, wenn für jede Größe der Quadrate die gleiche Anzahl verwendet wird. So gibt es 4 Anordnungen mit einem 2×2 -Quadrat und fünf 1×1 -Quadraten, die aber in diesem Sinn die gleiche Zerlegung darstellen.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1.

Fall 1: In der Zerlegung gibt es ein Quadrat der Größe 4×4 . Egal wie es angeordnet ist (d.h., in welcher Ecke des Ausgangsquares es anliegt), es kann nur durch 9 Quadrate der Größe 1×1 ergänzt werden. In diesem Fall gibt es also nur eine Möglichkeit (Abbildung 1)

Fall 2: In der Zerlegung gibt es ein Quadrat der Größe 3×3 . Nun hängen die Zerlegungen von der Lage dieses Quadrates ab.

Fall 2a: Das Quadrat der Größe 3×3 sei in der Mitte angeordnet. Dann kann man die Zerlegung nur ringsherum durch 16 Quadrate der Größe 1×1 ergänzen (Abbildung 2).

Fall 2b: Das Quadrat der Größe 3×3 habe mit dem Ausgangsquat einen Eckpunkt gemeinsam. Dann kann man weitere 16 Quadrate der Größe 1×1 ergänzen – allerdings ergibt dies keine neue Zerlegung im Sinne der Aufgabe, denn die Anzahlen der verwendeten Quadrate stimmen in jeder Größe überein (Abbildung 3).

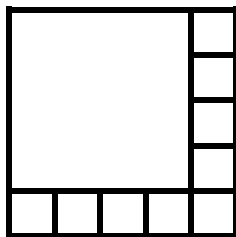


Abbildung 1

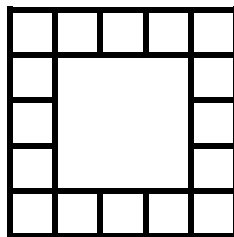


Abbildung 2

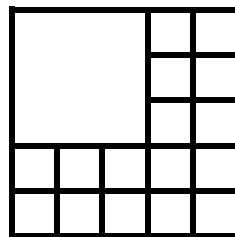


Abbildung 3

Fall 2c: Um also eine neue Möglichkeit zu finden, müssen auch Quadrate der Größe 2×2 verwendet werden. Dies ist mit einem, mit zwei oder mit drei erfüllbar (Abbildung 4a bis 4c). Dabei spielt es keine Rolle, wie diese Quadrate angeordnet sind – die restliche Fläche wird durch 1×1 -Quadrate ausgefüllt.

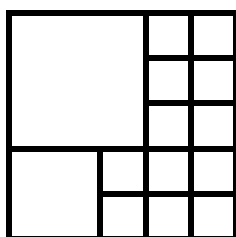


Abbildung 4a

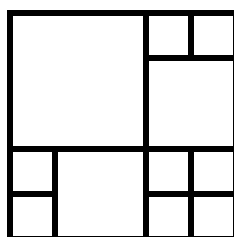


Abbildung 4b

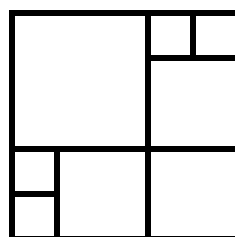


Abbildung 4c

Obwohl das Quadrat der Größe 3×3 insgesamt 9 und jedes Quadrat der Größe 2×2 jeweils 4 kleine Quadrate umfasst, und deshalb zu dem größeren Quadrat vier Quadrate der Größe 2×2 flächenmäßig passen würden ($9 + 4 \cdot 4 = 25$), gelingt eine solche Anordnung nicht: Egal wie man „unter“ dem 3×3 – Quadrat zwei 2×2 – Quadrate anordnet, es bleiben immer vier kleine Teilquadrate übrig, die sich nicht zu einem 2×2 – Quadrat ergänzen lassen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Fall 3: Die Zerlegung besteht nur aus Quadraten der Größe 2×2 und der Größe 1×1 . Es passen nur maximal vier solche 2×2 – Quadrate hinein, denn es gibt nur höchstens zweimal zwei zusammenhängende Zeilen oder Spalten (Abbildung 5a bis 5d)

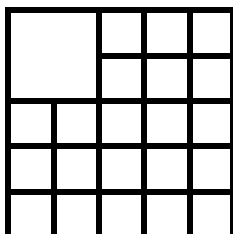


Abbildung 5a

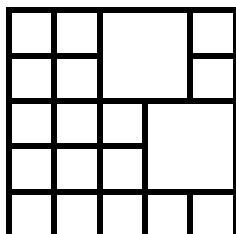


Abbildung 5b

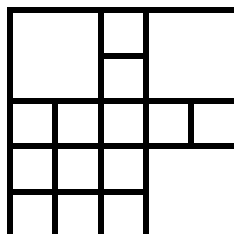


Abbildung 5c

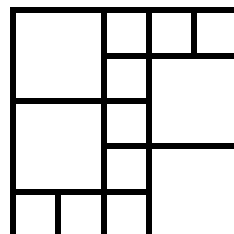


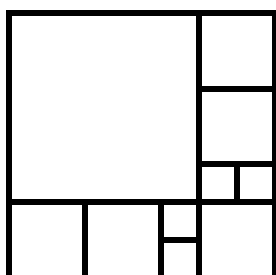
Abbildung 5d

Fall 4: Die Zerlegung nur in Teilquadrate der Größe 1×1 ist natürlich auch möglich.

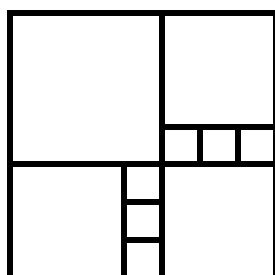
Ingesamt gibt es also nur folgende 10 Möglichkeiten der Zerlegung:

Anzahl der Quadrate der Größen:				Bemerkung	Probe (25 Teilquadrate)
4×4 (16)	3×3 (9)	2×2 (4)	1×1 (1)		
1	0	0	9	Fall 1: Abb. 1	$1 \cdot 16 + 9 \cdot 1 = 25$
0	1	0	16	Fall 2a: Abb. 2; Fall 2b: Abb. 3	$1 \cdot 9 + 16 \cdot 1 = 25$
0	1	1	12	Fall 2c: Abb. 4a	$1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 25$
0	1	2	8	Fall 2c: Abb. 4b	$1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 25$
0	1	3	4	Fall 2c: Abb. 4c	$1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 25$
0	0	1	21	Fall 3: Abb. 5a	$1 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 25$
0	0	2	17	Fall 3: Abb. 5b	$2 \cdot 4 + 17 \cdot 1 = 25$
0	0	3	13	Fall 3: Abb. 5c	$3 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 25$
0	0	4	9	Fall 3: Abb. 5d	$4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 25$
0	0	0	25	Fall 4	$25 \cdot 1 = 25$

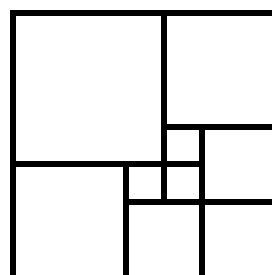
Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Es war nur gefordert, eine Zerlegung des 7×7 – Quadrates in möglichst wenige kleinere Quadrate zu finden. Wer es mit 10 solchen kleineren Quadraten schafft, ist schon gut. Es geht aber auch mit **9 kleineren Teilquadraten** – und mit weniger Quadraten gelingt es nicht!



10 Teilquadrate



10 Teilquadrate



9 Teilquadrate

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

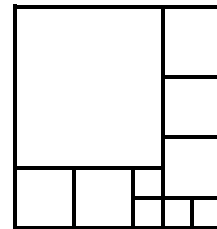
Noch mehr zu Zerlegungen von Quadraten in Quadrate

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Das Finden aller Zerlegungsmöglichkeiten eines 7x7-Quadrates in kleinere Quadrate erfordert ein fleißiges und systematisches Probieren. Eine Tabelle hilft, die Übersicht zu behalten. In jeder Zeile werden die Anzahlen der verwendeten Quadrate mit mehr als einem Einer-Quadrat angegeben. Unter „gesamt“ berechnen wir die Anzahl der Einer-Quadrate, die durch diese Teilquadrate bedeckt werden. Dann können wir den Rest, der bis $7 \cdot 7 = 49$ fehlt, durch Einer-Quadrate auffüllen.

Beginnend mit einem 6x6-Quadrat bleibt keine andere Möglichkeit, als die freibleibende Fläche mit Einer-Quadraten aufzufüllen.

Beginnend mit einem 5x5-Quadrat passen theoretisch sechs 2x2-Quadrate in die Fläche, weil $5 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 25 + 24 = 49$. Aber beim Ausprobieren merkst du schnell – wie du die 2x2-Quadrate auch legst, am Ende passt kein sechstes 2x2-Quadrat mehr komplett auf die Fläche. Andererseits – jedes 2x2-Quadrat kann natürlich durch vier Einer-Quadrate ersetzt werden.

6x6	5x5	4x4	3x3	2x2	gesamt	1x1
1	-	-	-	-	$6 \cdot 6 = 36$	13
-	1	-	-	5	$5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 45$	4
-	1	-	-	4	$5 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 41$	8
-	1	-	-	3	$5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 37$	12
-	1	-	-	2	$5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 33$	16
-	1	-	-	1	$5 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 29$	20
-	1	-	-	-	$5 \cdot 5 = 25$	24

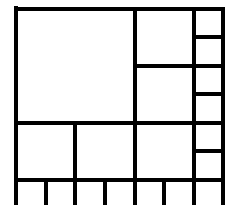
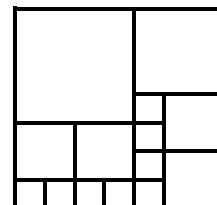
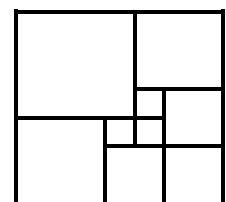
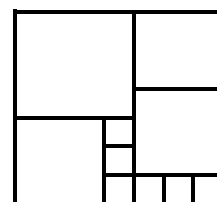


Ist das größte Teilquadrat ein 4x4-Quadrat, dann passen höchstens drei 3x3-Quadrate dazu. Wieder kannst du jedes 3x3-Quadrat durch Einer-Quadrate ersetzen.

Allerdings kannst du auch die 3x3-Quadrat durch 2x2-Quadrate ersetzen.

Ohne 3x3-Quadrate passen maximal fünf 2x2-Quadrate hinzu.

4x4	3x3	2x2	gesamt	1x1
1	3	-	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 43$	6
1	2	-	$4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 34$	15
1	1	-	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 = 25$	24
1	-	-	$4 \cdot 4 = 16$	33
1	2	3	$4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 45$	3
1	2	2	$4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 42$	7
1	2	1	$4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 38$	11
1	1	4	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 41$	8
1	1	3	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 37$	12
1	1	2	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 33$	16
1	1	1	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 29$	20
1	-	5	$4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 36$	13
1	-	4	$4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	17
1	-	3	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 28$	21
1	-	2	$4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$	25
1	-	1	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 20$	29



Setzen wir nun mit 2x2-Quadrate als größte Quadrate fort – es passen höchstens neun in das 7x7-Quadrat. Jedes der 2x2-Quadrate kann durch jeweils vier Einer-Quadrate ersetzt werden.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

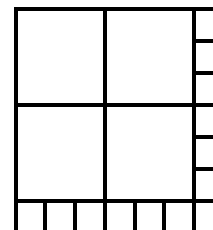
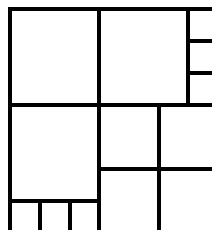
2x2	gesamt	1x1
9	$9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$	13
8	$8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	17
7	$7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$	21
6	$6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$	25
5	$5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$	29

2x2	gesamt	1x1
4	$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	33
3	$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$	37
2	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	41
1	$2 \cdot 2 = 4$	45
-	0	49

Nun bleiben nur noch die Fälle, bei denen das größte Quadrat ein 3x3-Quadrat ist. Es können maximal vier solche Quadrate verwendet werden. Dann passen nur noch Einer-Quadrate.

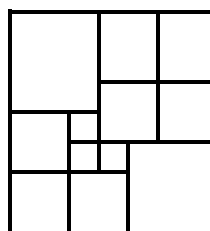
Nimmst du nur drei 3x3-Quadrate, findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten

3x3	2x2	gesamt	1x1
4	-	$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$	13
3	4	$3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 43$	6
3	3	$3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 39$	10
3	2	$3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 35$	14
3	1	$3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 31$	18
3	-	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	22



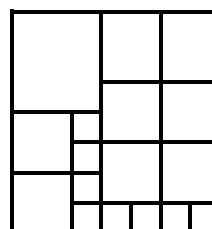
Nimmst du nur zwei 3x3-Quadrate, passen maximal sieben 2x2-Quadrate dazu. Also findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten, wenn du nacheinander jeweils ein 2x2-Quadrat durch vier Einer-Quadrate ersetzt.

3x3	2x2	gesamt	1x1
2	7	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 2 = 46$	3
2	6	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 42$	7
2	5	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 38$	11
2	4	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 34$	15
2	3	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 30$	19
2	2	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 26$	23
2	1	$2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 22$	27
2	-	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	31



Nun bleibt nur noch die Möglichkeit, ein 3x3-Quadrat als größtes Teilquadrat zu verwenden. Dann, passen maximal acht 2x2-Quadrate dazu. Also findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten

3x3	2x2	gesamt	1x1
1	8	$3 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 2 = 41$	8
1	7	$3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 2 = 37$	12
1	6	$3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 33$	16
1	5	$3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 29$	20
1	4	$3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25$	24
1	3	$3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 21$	28
1	2	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 17$	32
1	1	$3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 13$	36
1	-	$3 \cdot 3 = 9$	40



Jede Zeile ergibt eine andere Möglichkeit – insgesamt **55 Möglichkeiten!**

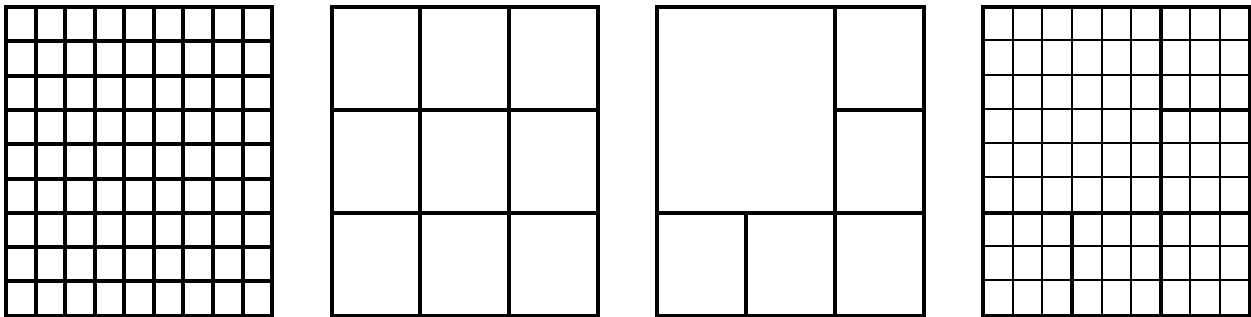
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Da die Zahl 9 durch 3 teilbar ist, kannst du eine Zerlegung in neun 3x3-Quadrate finden. Wenn wir dabei aber die Zwischenlinien weglassen, sieht es aus, als hätten wir ein 3x3-Quadrat zu zerlegen. Es macht ja nichts, dass die Teilquadrate etwas größer aussehen. Nun wissen wir aber schon, dass wir für die Zerlegung eines 3x3-Quadrates mindestens sechs kleinere Quadrate benötigen. Wenn wir jetzt die Zwischenlinien wieder einzeichnen, sehen wir die Lösung für das 9x9-Quadrat:

Wir benötigen sechs Teilquadrate, nämlich ein 6x6-Quadrat und fünf 3x3-Quadrate:



Weil 3 ein Teiler der Zahl 111 ist ($3 \cdot 37 = 111$), gelingt die gleiche Zerlegung wie eben:

Ein 111x111-Quadrat lässt sich in sechs kleinere Quadrate zerlegen, nämlich in ein 74x74-Quadrat und in fünf 37x37-Quadrate.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Jedes Quadrat mit einer geraden Anzahl von Einheits-Quadraten je Seite lässt sich in der Mitte in vier Teil-Quadrate zerlegen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2017

Lösungshinweise zu Aufgabe 1. Wenn im Startmuster nur die 4 Eckkästchen des 4x4-Feldes grau gefärbt sind, kann keine Umfärbung erfolgen. In jedem Kästchen steht nach dem Zählen der grauen Nachbarfelder entweder eine 0 oder eine 1. Nach den Spielregeln kann also kein Feld umgefärbt werden.

Es gibt sehr viele Startmuster mit 4 grauen Feldern, bei denen keine Umfärbung möglich ist, hier einige Beispiele. Es sind die Zählergebnisse eingetragen:

0	1	1	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	1	0

1	1	1	1
1	2	2	1
1	2	2	1
1	1	1	1

2	1	2	1
1	2	2	0
2	2	2	1
1	0	1	0

1	1	1	0
2	2	1	0
0	1	2	2
0	1	1	1

1	2	1	1
0	2	0	1
2	4	2	2
0	2	0	1

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Gesucht war ein Startmuster mit 4 grau gefärbten Kästchen, das nach zwei weiteren Mustern abbricht. Um Lösungen zu finden, muss man probiere, probieren,

Es gibt wieder viele verschiedene solche Startmuster – hier einige Beispiele. Prüfe sie!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Ein Startmuster mit vier grau gefärbten Kästchen zu finden, bei dem das Spiel mindestens 5 oder mehr Muster erzeugt, erfordert Geduld und Konzentration. Wieder gibt es verschiedenen Möglichkeiten – hier einige Beispiele. Prüfe sie:

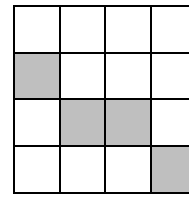
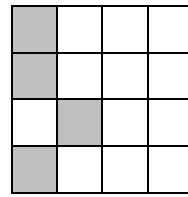
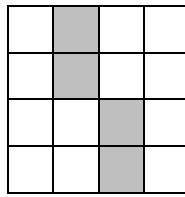
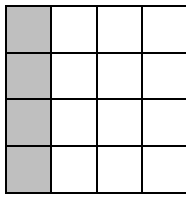
Lösungshinweise zu Aufgabe 4. Wenn es ein Startmuster gibt, bei dem das Spiel nie abbricht, dann muss sich irgendwann eine bestimmte Musterfolge immer wiederholen. Begründung: Es gibt nur eine endliche Anzahl von möglichen verschiedenen Mustern (das sind aber so viele, sodass du sie nicht alle aufzeichnen kannst). Wenn das Spiel also lange genug läuft, erscheint ein Muster, welches schon einmal auftrat. Aber dann geht ab diesem Muster wieder von vorn los und es wiederholt sich die Folge der nachfolgenden Muster.

Beim Suchen nach einer Lösung zu Aufgabe 3 kannst du Glück gehabt haben und hast bereits so eine wiederkehrende Musterfolge gefunden. Hier einige Beispiele, bei denen das Muster im zweiten Schritt wiedererscheint:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2017

Wir erinnern uns an folgende Spielregeln: Wir umranden ein Feld mit 4x4-Kästchen. Wir bilden ein Startmuster: Einige Kästchen färben wir grau, die anderen bleiben weiß. Im Beispiel sollen die mit a, b und c bezeichneten Kästchen grau sein, alle anderen Kästchen sind weiß

	a		b
			c

Zwei Kästchen sind benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben. Das Kästchen a hat also 8 Nachbarn, das Kästchen b hat 5 Nachbarn und das Kästchen c hat nur 3 Nachbarn.

Wir zählen für jedes Kästchen, wie viele benachbarte Kästchen grau sind, und schreiben diese Zahlen in die Kästchen.

1	1	2	1
1	0	2	0
1	1	3	2
0	0	1	0

Nun färben wir die Kästchen nach folgenden Regeln um:

- Alle grauen Kästchen, in denen die Zahl 2 oder 3 steht, werden weiß. Alle anderen grauen Kästchen bleiben grau.
- Alle weißen Kästchen, in denen die Zahl 3 steht, werden grau. Alle anderen weißen Kästchen bleiben weiß.

Nun sieht unser neues Muster so aus:

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es gelingt sicher, mehr als 10 Kombinationen von 4 grauen Feldern zu finden, die sich regelgerecht nicht umfärben lässt. Wir tragen dafür in jeder gefundenen Lösung in die Felder ein, wie viele Nachbarfelder grau sind. Dann prüfen wir, ob in einem weißen Feld eine 3 steht (dann könnten wir dieses weiße Feld umfärben) oder ob in einem grauen Feld eine 2 oder 3 steht (dann könnten wir dieses graue Feld umfärben). Hier einige Beispiele, die die Aufgabenstellungen erfüllen – es gibt viel mehr:

0	1	1	0
1	1	1	1
1	1	1	1
0	1	1	0

1	2	2	0
2	1	2	1
2	2	1	0
0	1	0	0

1	1	1	0
2	2	1	0
0	1	2	2
0	1	1	1

1	1	2	0
2	2	2	1
0	0	1	1
0	0	1	0

1	2	0	0
1	2	1	1
1	2	2	1
0	1	1	2

Um aber mehr als 100 solcher Belegungen zu finden, genügt einfaches Probieren nicht – wir müssen systematisch probieren.

Fall 1: Wir probieren, in eine Reihe 4 Felder nebeneinander grau zu färben. Egal welche Reihe wir nehmen, es gibt immer mindestens ein weißes Feld, das 3 graue Nachbar hat.

1	2	2	1
2	3	3	2
0	0	0	0
0	0	0	0

2	3	3	2
1	2	2	1
2	3	3	2
0	0	0	0

0	2	1	2
0	3	2	3
0	3	2	3
0	2	1	2

Fall 2: Wir probieren, in die oberste Reihe 3 Felder grau zu färben. Liegen sie nicht alle direkt nebeneinander, finden wir dafür 2 verschiedene Möglichkeiten. Wir können bei jeder dieser Möglichkeiten eines der vier Felder der untersten Reihe grau färben (ein Beispiel ist links gezeigt). Das ergibt $(2 \cdot 4 =)$ 8 Möglichkeiten für Muster mit 4 grauen Feldern, die sich nicht umfärben lassen. Zudem können wir jede dieser Möglichkeiten um die Ecke kippen und erhalten insgesamt 4 Varianten dieses Musters (die vier rechten Muster zeigen es in einem

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Beispiel). Insgesamt können wir auf diese Weise ($8 \cdot 4 =$) **32 verschiedene Muster** erklären, die mindestens in einer Reihe 3 graue Felder haben und sich nicht umfärben lassen.

1 1 2 0	0 2 1 1	1 1 1 0	0 1 0 1	1 2 0 0
2 2 2 1	1 2 2 2	0 1 2 2	0 1 1 1	1 2 1 1
1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 2 1	2 2 2 1	2 2 1 0
0 1 0 0	1 0 1 1	0 0 2 1	1 1 2 0	0 1 1 1

Fall 3: Wir wollen nun in der oberen Reihe 2 Felder grau färben (es werden einige Beispiele gezeigt). Dafür finden wir 6 verschiedene Möglichkeiten. Zusätzlich können wir auch auf der untersten Reihe in 6 verschiedenen Möglichkeiten 2 Felder grau färben. Die zwei verwendeten Reihen sind so weit auseinander, dass sich die Nachbarschaften der grauen Felder nicht beeinflussen. Insgesamt gibt es also ($6 \cdot 6 =$) 36 verschiedene Muster. Zudem können wir jede dieser Möglichkeiten um die Ecke kippen und erhalten insgesamt 2 Varianten dieses Musters (die zwei rechten Muster zeigen es in einem Beispiel). Allerdings führt das linke Muster beim Kippen nicht zu einem neuen Muster. Insgesamt können wir auf diese Weise also ($36 \cdot 2 - 1 =$) **71 verschiedene Muster** erklären, in zwei Reihen 2 graue Felder haben und sich nicht umfärben lassen.

0 1 1 0	0 2 0 1	1 1 1 0	1 0 1 0	0 1 1 1
1 1 1 1	1 2 1 1	2 2 1 0	1 1 2 1	2 2 1 0
1 1 1 1	1 1 2 1	1 2 2 1	1 2 1 1	0 1 2 2
0 1 1 0	1 0 2 0	1 1 1 1	0 2 0 1	1 1 1 0

Insgesamt haben wir mit diesen drei Fällen bereits ($0 + 32 + 71 =$) 103 Möglichkeiten erklärt. Es gibt also über 100 Muster der geforderten Art. Dabei stellen wir fest, dass es sogar noch weitere Möglichkeiten gibt, die wir noch nicht erfasst haben, zum Beispiel:

1 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0
2 2 2 1	1 1 2 2	1 2 2 2
0 0 2 1	0 1 2 1	1 2 0 1
0 0 2 1	0 1 1 2	0 2 1 1

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Es genügt, geeignete Beispiele anzugeben. Wir finden Muster mit 5 grauen Feldern und sogar Muster mit 6 grauen Feldern, die sich nach den Regeln nicht umfärben lassen. Dabei können wir uns an die Untersuchungen in den Fällen 2 und 3 von Aufgabe 1 halten und erweiterte Muster finden, zum Beispiel:

0 1 1 0	→	0 1 1 0	1 1 2 0	→	1 1 2 0
1 1 1 1		1 2 2 2	2 2 2 1		2 2 2 1
1 1 1 1		1 2 1 2	1 1 1 0		2 2 2 1
0 1 1 0		0 2 2 1	1 0 1 0		1 1 2 0
		5 graue Felder			6 graue Felder

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Bestimmt hast du das Spiel in deiner Familie oder mit deinen Freundinnen oder Freunden gespielt. Dabei ist dir sicher nach wenigen Versuchen aufgefallen, wer immer gewinnen kann. So ausführlich wie im Folgenden musst du natürlich deine Beobachtungen nicht aufschreiben – aber stimmst du diesen Erklärungen zu?

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Teil 1) Für den Spielverlauf nach den ersten Regeln färbt Anna ein Feld, was kein Randfeld ist. Tragen wir für jedes Feld die Anzahlen der benachbarten grauen Felder ein, so stehen nur 0 und 1 auf allen Feldern.

Färbt Bert ein beliebiges Feld mit der Zahl 0 grau, so findet Anna immer ein 3x3-Quadrat, in dem sich zwei graue Felder befinden, aber dessen Mittelfeld weiß ist (Beispiele a oder b). Färbt Anna nun ein weiteres Feld auf dem Rand dieses 3x3-Quadrates, trägt das weiße Mittelfeld dieses 3x3-Quadrates die 3 – es kann umgefärbt werden.

Färbt Bert dagegen ein beliebiges Feld mit der Zahl 1 grau, so findet Anna immer ein 2x2-Quadrat, in dem sich zwei graue Felder befinden (Beispiele c oder d). Färbt Anna nun ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrates, trägt das letzte weiße Feld dieses 2x2-Quadrates die 3 – es kann umgefärbt werden.

1	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Annas Zug

1	1	1	0
1	0	2	1
1	1	2	0
0	0	1	1

Berts Zug a)

1	1	1	0
1	0	1	0
2	2	1	0
0	1	0	0

Berts Zug b)

1	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Berts Zug c)

1	1	1	0
2	1	2	0
2	1	2	0
1	1	1	0

Berts Zug d)

Teil 2) Für den Spielverlauf nach den geänderten Regeln färbt Anna ein Eckfeld. Tragen wir für jedes Feld die Anzahlen der benachbarten grauen Felder ein, so stehen nur 0 und 1 auf allen Feldern.

Färbt Bert ein beliebiges Feld mit der Zahl 0 grau (Beispiele e oder f), so denkt sich Anna ein 3x3-Quadrat, das ihr grau gefärbtes Eckfeld enthält. Färbt sie nun ein beliebiges Feld außerhalb dieses 3x3-Quadrates, so hat kein weißes Feld mehr als zwei graue Nachbarn und kein graues Feld mehr als einen grauen Nachbarn – es kann nicht umgefärbt werden.

Färbt Bert dagegen ein beliebiges Feld mit der Zahl 1 grau (Beispiele g oder h), so färbt Anna das gegenüberliegende Eckfeld grau. Kein weißes Feld hat mehr als zwei graue Nachbarn und kein graues Feld hat mehr als einen grauen Nachbarn – es kann nicht umgefärbt werden.

0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Annas Zug

0	2	1	1
1	2	0	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Berts Zug e)

0	1	0	0
1	2	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

Berts Zug f)

1	1	1	0
2	2	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Berts Zug g)

1	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Berts Zug h)

Teil 3) Wenn Bert noch einen weiteren Zug ausführen darf, kann Bert immer gewinnen. Färbt nämlich Anna ein beliebiges Feld, so kann Bert ein 2x2-Quadrat um dieses Feld legen, das auch ein Eckfeld enthält und färbt ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrat (Beispiel i).

Färbt Anna ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrat (Beispiel j), erhält das verbleibende weiße Feld die Zahl 3. Färbt abschließend Bert ein Feld grau, das noch die 0 trägt, bleibt die 3 erhalten und es kann umgefärbt werden.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Färbt Anna jedoch ein weiteres weißes Feld außerhalb dieses 2x2-Quadrats (Beispiel k), dann färbt Bert abschließend ein weißes Feld im 2x2-Quadrat und erzeugt damit eine 3 und es kann umgefärbt werden.

0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

Annas Zug

0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	2
0	1	2	1

Berts Zug i)

0	0	0	0
0	1	1	1
0	2	2	3
0	2	2	2

Annas Zug j)

1	1	1	0
1	1	2	1
0	2	2	2
0	1	2	2

Annas Zug k)

Lösungshinweise zu Aufgabe 4) Es genügt wieder, geeignete Muster anzugeben und durch Eintragen der Anzahlen benachbarter grauer Felder zu bestätigen, dass diese Muster die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Nach Umfärben entstehen nur weiße Felder:

1	2	2	1
2	3	3	2
2	3	3	2
1	2	2	1

→

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

2	2	2	2
2	4	4	2
2	4	4	2
2	2	2	2

→

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Hinweis: Sind nach dem Umfärben lauter weiße Felder entstanden, bricht das Umfärben ab, da für das Umfärben nur die Anzahl der grauen Nachbarfelder wichtig sind.

Nach Umfärben entstehen nur graue Felder:

3	4	4	3
4	7	7	4
4	7	7	4
3	4	4	3

→

3	5	5	3
5	8	8	5
5	8	8	5
3	5	5	3

1	3	3	1
3	4	4	3
3	4	4	3
1	3	3	1

→

3	5	5	3
5	8	8	5
5	8	8	5
3	5	5	3

Hinweis: Sind nach dem Umfärben lauter graue Felder entstanden, kann das Umfärben in den Eckfeldern fortgesetzt werden und wir erhalten wieder das linke Muster mit den vier weißen Eckfeldern.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

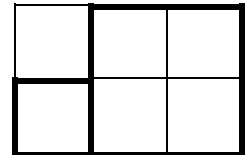
Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2018

Wir wollen mit Quadraten experimentieren. Wenn wir kariertes Papier verwenden, bei dem die Kästchen wie Quadrate aussehen, können wir verschieden große Quadrate ausmalen oder ausschneiden. So gibt es beispielsweise

- das 1x1-Quadrat, das nur aus einem Kästchen besteht,
- das 2x2-Quadrat, das aus vier Kästchen besteht,
- das 3x3-Quadrat, das aus neun Kästchen besteht und so weiter.

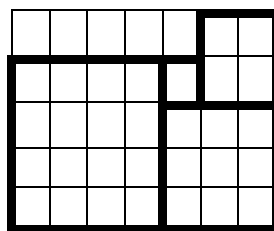
Es ist nicht schwer, das kleinste Rechteck zu finden, in das gleichzeitig ein 1x1-Quadrat und ein 2x2-Quadrat hineinpassen, ohne dass sich die beiden Quadrate überlappen. „Klein“ soll dabei bedeuten: Das Rechteck soll möglichst wenige Kästchen enthalten. Folgende Überlegungen führen zum Ziel:

- Insgesamt sind mindestens $1 + 4 = 5$ Kästchen erforderlich.
- Mit einem 5x1-Rechteck (mit 5 Kästchen) ist es nicht möglich, weil das 2x2-Quadrat zwei Zeilen erfordert.
- Wie in der Abbildung erkennbar, ist es mit einem 3x2-Rechteck mit 6 Kästchen möglich. Ein Kästchen bleibt frei.



Aufgabe 1. Wie viele Kästchen bleiben im kleinsten Rechteck frei, in das ein 1x1-Quadrat, ein 2x2-Quadrat, ein 3x3-Quadrat und ein 4x4-Quadrat gleichzeitig hineinpassen, ohne sich gegenseitig zu überlappen? Zeichne eine Möglichkeit, die vier Quadrate anzuordnen. Begründe, warum es kein kleineres Rechteck als in deiner Zeichnung geben kann.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren finden wir ein Rechteck mit 5x7-Kästchen (also insgesamt 35 Kästchen), in das die vier Quadrate hineinpassen. Als Beweis dafür zeichnen wir eine Möglichkeit (es gibt natürlich weitere Anordnungsmöglichkeiten):



Wir wollen nun begründen, warum es kein kleineres Rechteck mit dieser Eigenschaft geben kann. Dabei genügt es nicht darauf zu verweisen, dass beim Probieren keine Anordnung in einem kleineren Rechteck gelungen ist. Natürlich könnten wir alle Versuche durch Zeichnungen dokumentieren – erwischen wir dabei wirklich alle Möglichkeiten? Versuchen wir es also mit einer Analyse.

Wir wissen, dass die 4 Quadrate zusammen $1 + 4 + 9 + 16 = 30$ Kästchen umfassen. Wenn es ein kleineres Rechteck gäbe, kann es nur aus insgesamt 30, 31, 32, 33 und 34 Kästchen bestehen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir wissen auch, dass jede Seite des Rechtecks mindestens 4 Kästchen lang sein muss, denn es soll ja das 4x4-Quadrat hineinpassen. Deshalb kann es für die Rechtecke mit $1 \cdot 31 = 31$ Kästchen, $3 \cdot 11 = 33$ Kästchen und $2 \cdot 17 = 34$ Kästchen keine Lösung geben.

Beim Probieren haben wir bemerkt, dass das 3x3-Quadrat vollständig neben dem 4x4-Quadrat liegen muss. Also ist eine Seite des Rechtecks mindestens $(4 + 3 =) 7$ Kästchen lang. Damit kann auch das Rechteck mit $5 \cdot 6 = 30$ Kästchen keine Lösung sein.

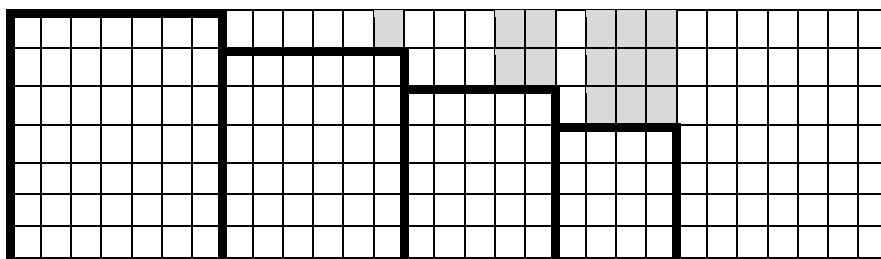
Untersuchen wir nun das 4x8-Rechteck. Wir zeichnen einen Streifen mit 4 Kästchen Höhe, in den das 4x4-Quadrat hineinpasst. Nun erkennen wir: Auch die 3x3- und 2x2-Rechtecke müssen daneben angeordnet werden. Damit muss das Rechteck mindestens $(4 + 3 + 2 =) 9$ Kästchen lang sein. Also kann auch das 4x8-Rechteck keine Lösung sein.

Damit haben wir bewiesen, dass das 5x7-Rechteck tatsächlich das kleinste Rechteck ist, in das die 4 Quadrate hineinpassen,

Aufgabe 2. Finde das kleinste Rechteck, in das ein 1x1-Quadrat, ein 2x2-Quadrat, ein 3x3-Quadrat, ein 4x4-Quadrat, ein 5x5-Quadrat, ein 6x6-Quadrat und ein 7x7-Quadrat gleichzeitig hineinpassen, ohne sich gegenseitig zu überlappen! Zeichne eine Möglichkeit, die sieben Quadrate in diesem Rechteck anzuordnen.

Lösungshinweise: Natürlich könnten wir wieder probieren. Am besten schneiden wir uns dafür die sieben Quadrate aus und puzzeln sie solange zusammen, bis wir ein möglichst kleinstes Rechteck gefunden haben. Doch das Probieren können wir etwas einschränken:

Die 7 Quadrate haben insgesamt $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$ Kästchen. Da eine Seite mindestens 7 Kästchen lang sein muss, zeichnen wir einen Streifen, der 7 Kästchen hoch ist. Da passt das 7x7-Quadrat hinein.



Wir erkennen, dass die 4x4-, 5x5- und 6x6-Quadrate nur nebeneinander und nicht übereinander in den Streifen gelegt werden können, ohne herauszuragen. Insgesamt wird das zugehörige passende Rechteck $(7 + 6 + 5 + 4 =) 22$ Kästchen lang sein und insgesamt $7 \cdot 22 = 154$ Kästchen umfassen. Gibt es ein kleineres Rechteck?

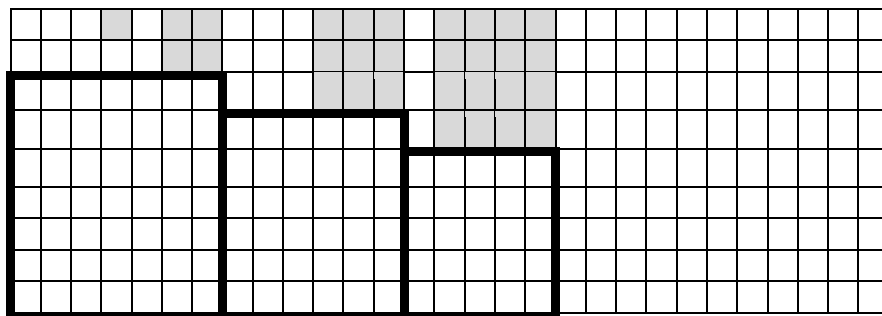
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

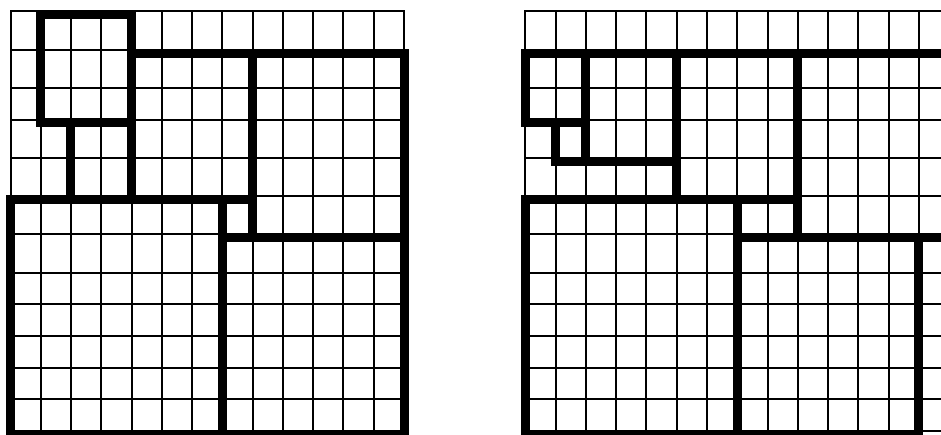
Versuchen wir es mit einem Streifen, der 8 Kästchen hoch ist. Hier ändert sich an der Argumentation aber nichts. Wieder muss die andere Seite 22 Kästchen lang sein und das Rechteck umfasst $8 \cdot 22 = 192$ Kästchen, ist also viel größer.

Mit einem Streifen mit der Höhe von 9 Kästchen entsteht eine neue Situation. Jetzt müssen nur die drei größten Quadrate nebeneinanderliegen, die anderen passen in die darüberliegenden Kästchen. Damit umfasst das zugehörige passende Rechteck $9 \cdot 18 = 162$ Kästchen – dies ist ebenfalls größer als das zuerst gefundene!



Wir erkennen, dass ein kleineres Rechteck nur entstehen kann, wenn nur das 7x7- und das 6x6-Rechteck nebeneinander liegen. Tatsächlich passen in ein 13x12-Rechteck alle 7 Quadrate. Mit $13 \cdot 12 = 156$ Kästchen ist es aber immer noch größer als das bereits gefundene Rechteck.

Wir können aber auch nach rechts verbreitern: Wie die Zeichnung beweist, passen auch in ein 14x11-Rechteck alle sieben Quadrate. Wir erhalten $14 \cdot 11 = 154$ Kästchen, also so groß wie das schon gefundene kleinste Rechteck.



Weiter müssen wir nun nicht suchen. Denn wenn wir ein schmaleres Rechteck untersuchen, können wir es um 90° drehen und wir haben wieder die Situationen wie zu Beginn.

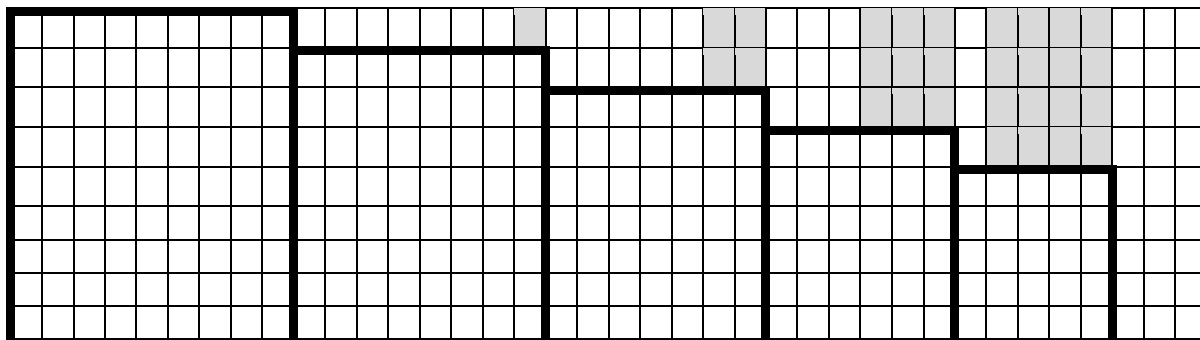
Aufgabe 3. Finde ein Rechteck mit weniger als 350 Kästchen, in das neun unterschiedlich große Quadrate hineinpassen, ohne dass sie sich gegenseitig überlappen. Zeichne eine solche Möglichkeit.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

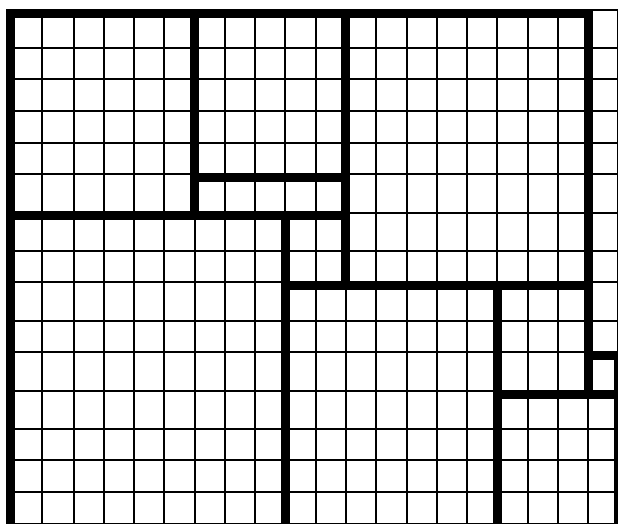
Lösungshinweise: Wir verwenden natürlich die 9 kleinsten Quadrate. Wenn wir zunächst einen Streifen mit einer Höhe von 9 Kästchen zeichnen, können wir so viele Quadrate nebeneinanderlegen, bis eine Breite von 38 Kästchen erreicht wird (es gilt: $9 \cdot 38 = 342 < 350$). Die Quadrate mit 9×9 , 8×8 , 7×7 , 6×6 und 5×5 Kästchen erreichen eine Breite von $(9 + 8 + 7 + 6 + 5 =)$ 35 Kästchen. Wir haben Glück: Es passen die restlichen Quadrate hinein, so dass ein Rechteck mit $9 \times 35 = 315$ Kästchen existiert.



Aufgabe 4. Untersuche, ob es ein Rechteck mit genau 300 Kästchen gibt, in das neun unterschiedlich große Quadrate hineinpassen, ohne dass sie sich gegenseitig überlappen. Wenn du ein solches gefunden hast, zeichne die Lösung. Andernfalls begründe, warum es ein solches Rechteck nicht geben kann.

Lösungshinweise: Wir wollen es wieder mit den 9 kleinsten Quadraten versuchen. Damit ist jede Seite des gesuchten Rechtecks mindestens 9 Kästchen lang. Es gibt nur drei Möglichkeiten, die Zahl 300 als Produkt zweier Zahlen darzustellen, bei dem beide Faktoren mindestens 9 betragen: $10 \cdot 30$, $12 \cdot 25$ und $15 \cdot 20$.

Wir verwenden wieder unsere Streifenmethode und erkennen, dass es keine Lösung für Streifen der Höhe 10 oder 12 geben kann. Wenn es eine Lösung gibt, so muss eine Seite dieses Rechtecks genau 15 Kästchen lang sein. Es könnte also das 9×9 - und das 6×6 -Quadrat nebeneinander liegen. Und tatsächlich, nach einigem Probieren haben wir es gefunden – alle 9 Quadrate passen in dieses Rechteck mit genau 300 Kästchen:



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2018

Lösungshinweis Aufgabe 1: Wenn das 3x3-Quadrat auf dem 4x4-Quadrat liegt, ist nicht genug Platz für das 2x2-Quadrat, neben dem 3x3-Quadrat zu liegen. Also müssen gibt es mindestens ein Feld, bei dem 3 Quadratfelder übereinander liegen. Das 1x1-Quadrat passt noch dazu, ohne diese maximale Anzahl erhöhen zu müssen.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

4x4-Quadrat

2	2	2	1
2	2	2	1
2	2	2	1
1	1	1	1

... dazu das
3x3-Quadrat

2	2	2	1
2	2	2	1
2	2	3	2
1	1	2	2

... dazu das
2x2-Quadrat

2	2	2	1
2	2	2	1
2	2	3	2
1	1	2	3

... dazu das
1x1-Quadrat

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Es genügt laut Aufgabenstellung zwei Belegungen anzugeben, beispielsweise

5	4	3	2	1
4	4	3	2	1
3	3	3	2	1
2	2	2	2	1
1	1	1	1	1

3	3	3	2	1
3	3	3	2	1
3	3	3	2	1
2	2	2	3	2
1	1	1	2	3

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Das Berechnen der Summe aller Anzahlen bereitet keine Probleme

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 5 + 12 + 15 + 15 + 9 = 55$$

$$11 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 33 + 16 + 6 = 55$$

Die Summen stimmen überein, denn sie entsprechen der Anzahl aller Quadratfelder, die aufgelegt werden sollen, also

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wie schon beim 5x5-Quadrat der Aufgabe 3 bemerkt, können auch beim 7x7-Quadrat die nächst kleineren nur so aufgelegt werden, dass Quadratfelder übereinander liegen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

- Neben das 6x6-Quadrat passt natürlich kein 5x5-Quadrat, es liegen also an manchen Stellen 3 Quadratfelder übereinander.
- Neben das 5x5-Quadrat passt natürlich kein 4x4-Quadrat, es liegen also an manchen Stellen 4 Quadratfelder übereinander.

Wenn jedoch diese Quadrate liegen, ist genug Platz, um die 3x3-, 2x2- und 1x1-Quadrate zu legen, ohne die maximale Anzahl weiter zu erhöhen.

4	4	4	4	3	2	1
4	4	4	4	3	2	1
4	4	4	4	3	2	1
4	4	4	4	3	2	1
3	3	3	3	4	3	2
2	2	3	3	3	3	2
1	2	2	2	2	2	2

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2019

Aufgabe 1 - Antwortsatz: Es gibt 21 verschiedene Farbkombinationen.

Herleitung: Natürlich kannst du alle möglichen Farbkombinationen aufschreiben. Wenn du darauf achtest, dass die Regel für verschiedene Farbkombinationen stets eingehalten wird, tritt keine Farbkombination mehrmals auf. Ob du aber wirklich alle Möglichkeiten bedacht hast, ist mit einer Liste nicht immer erkennbar. Dafür ist jedoch folgende Systematik hilfreich:

Fall 1: Alle 5 Murmeln haben die gleiche Farbe: Es gibt 3 Möglichkeiten

BBBBB, RRRRR, GGGGG

Fall 2: Es haben 4 Murmeln die gleiche Farbe, die fünfte Murmel hat eine andere Farbe: Es gibt 6 Möglichkeiten,

BBBBr, BBBBg, RRRRb, RRRRg, GGGGb, GGGGr

Fall 3: Es haben 3 Murmeln die gleiche Farbe, die vierte und fünfte Murmel haben nicht diese Farbe: Es gibt 9 Möglichkeiten,

BBBRg, BBBRr, BBBGr, BBBRr, RRRBg, RRRBb, RRRGg, RRRGb, GGGBr, GGGBb, GGGRr

Fall 4: Es haben 2 Murmeln die gleiche Farbe und die anderen 3 Murmeln haben nicht diese Farbe. Da die Fälle mit drei gleichfarbigen Murmeln schon berücksichtigt sind, gibt es weitere zwei gleichfarbige Murmeln. Damit sind es 3 Möglichkeiten,

BBRRg, BBRRr, RRGGB

Insgesamt gibt es also $(3 + 6 + 9 + 3 =)$ 21 verschiedene Farbkombinationen.

Lösungsvariante: Auch folgende Systematik führt zum Ziel:

Fall 1: Es gibt in der Farbkombination nur eine Farbe. Dies ist in drei Fällen möglich:

BBBBB, GGGGG, RRRRR.

Fall 2: Es gibt in der Farbkombination genau zwei Farben. Nehmen wir an, es wäre kein Gelb dabei. Dann gibt es 4 Möglichkeiten,

BBRRR, BBRRr, BBBRR, BBBBr

Ebenso gibt es natürlich auch jeweils vier Möglichkeiten, wenn kein Blau oder kein Rot dabei ist.

Fall 3: In der Farbkombination kommen alle drei Farben vor. Dafür gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten:

BGRRr, BGRRR, BGGRR, BBGRR, BBGGr, BBBGr.

Insgesamt sind es $(3 + 3 \cdot 4 + 6 =)$ 21 Farbkombinationen.

Aufgabe 2 - Antwortsatz: Nach einer Tauschaktion können aus der Startkombination BBGRr drei verschiedene Farbkombinationen entstehen.

Herleitung: Eine Tauschaktion ist nur möglich, wenn man zwei verschiedenfarbige Murmeln verfügbar hat. Es gibt deshalb nur drei Varianten für eine Tauschaktion:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

- (1) BBRRG → BBRBB = BBBBR
(2) BBRRG → BRRRR = BRRRR
(3) BBRRG → BGGRG = BRGGG

Aufgabe 3 - Antwortsatz: Es gibt keine zwei Tauschaktionen, die die Bedingungen erfüllen.

Begründung: Wenn eine Farbkombination aus einer Tauschaktion folgt, müssen von einer Farbe mindestens zwei Murmeln vorliegen. Ist also BBRRG nach einer Tauschaktion entstanden, wurde entweder

RG → BB getauscht oder BG → RR getauscht.

Folglich wäre die Farbkombination vor der Tauschaktion **RGRRG** oder **BBBGG**. Vorher wären also zwei Murmeln gelb – eine solche Kombination gibt es aber nach der ersten Tauschaktion laut Lösung zur Aufgabe 2 nicht.

Lösungsvariante: Die Antwort zu Aufgabe 3 kannst du natürlich auch finden, wenn die zunächst Aufgabe 4 löst und dann überprüfst, ob unter allen Möglichkeiten nach zwei Tauschaktionen die Farbkombination BBGRR vorkommt.

Aufgabe 4 - Antwortsatz: Nach zwei Tauschaktionen können aus der Farbkombination BBGRR insgesamt drei verschiedene Farbkombinationen entstehen.

Herleitung: Verwende das Ergebnis aus Aufgabe 2 und setze die Tauschaktionen fort.

Farbkombination Aufgabe 2 (1) BBBBR	Farbkombination Aufgabe 2 (2) BRRRR	Farbkombination Aufgabe 2 (3) BRGGG
BBBBR → BBBGG	BRRRR → RRRGG	BRGGG → BBGGB (= 1. Spalte)
		BRGGG → GGGGG
		BRGGG → RRRGG (= 2. Spalte)

Aufgabe 5 - Antwortsatz: Es ist nicht möglich, aus der Farbkombination BBGRR durch geschickt gewählte Tauschaktionen die Farbkombination BBBBB zu erreichen.

Begründung: Zunächst mag das Ergebnis überraschen, denn wie in der Aufgabe 4 gefunden, kann die Farbkombination GGGGG entstehen. Warum gelingt es mit BBBBB nicht? Es genügt für die Lösungen aus Aufgabe 4 die Tauschaktionen fortzusetzen. Für die Farbkombinationen aus der ersten und zweiten Spalte gibt es nur jeweils eine Tauschmöglichkeit

BBBGG → BBRRG (entspricht der Ausgangsfarbkombination)
RRRGG → RRBBG = BBRRG (entspricht der Ausgangsfarbkombination)

Für GGGGG (3. Spalte) ist keine Tauschaktion mehr möglich.

Egal wie oft du probierst – nach drei Tauschaktionen hast du entweder die Ausgangssituation wieder erreicht und das Spiel beginnt von vorn oder das Spiel endet mit GGGGG – deshalb ist die Farbkombination BBBBB nicht erreichbar.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2019

Aufgabe 1. Antwortsatz: Alle Startkombinationen mit 4 Murmeln sind STOPP-Kombinationen.

Begründung: Wir untersuchen alle möglichen Fälle für die Farbe mit den meisten Murmeln.

Fall 1: Sind alle 4 Murmeln gleichfarbig, ist bereits eine Stopp-Kombination gegeben.

Fall 2: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die vierte Murmel von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBBR, so kann im ersten Schritt BR → GG getauscht werden. Die neue Situation BBGG lässt sich nun aber mit zwei Tauschaktionen BG → RR in RRRR tauschen.

Fall 3.1: Sind 2 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel verschiedenfarbig von den anderen Farben, zum Beispiel BBRG, so lässt sich diese Kombination mit einer Tauschaktionen RG → BB in BBBB tauschen.

Fall 3.2: Sind 2 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel gleichfarbig von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBRR, so lässt sich diese Kombination mit zwei Tauschaktionen BR → GG in GGGG tauschen.

Weitere Fälle gibt es nicht.

Aufgabe 2. Antwortsatz: Alle Startkombinationen mit 5 Murmeln sind STOPP-Kombinationen.

Begründung: Wir verwenden die gleiche Systematik wie in Aufgabe 1.

Fall 1: Sind alle 5 Murmeln gleichfarbig, ist bereits eine Stopp-Kombination gegeben.

Fall 2: Sind 4 Murmeln von einer Farbe und die fünfte Murmel von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBBBR, so kann im ersten Schritt BR → GG getauscht werden. Die neue Situation BBBGG lässt sich nun aber mit der Tauschaktionen BG → RR in BBRRG tauschen. Diese lässt sich mit zwei Tauschaktionen BR → GG in GGGGG tauschen.

Fall 3.1: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel verschiedenfarbig von den anderen Farben, zum Beispiel BBBRG, so lässt sich diese Kombination mit einer Tauschaktionen RG → BB in BBBBB tauschen.

Fall 3.2: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel gleichfarbig von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBRRR, so lässt sich diese mit

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

der Tauschaktionen $BR \rightarrow GG$ in BBGGR tauschen. Diese lässt sich jedoch mit zwei Tauschaktionen $BG \rightarrow RR$ in RRRRR tauschen.

Fall 4: Sind je zwei Murmeln gleichfarbig und die dritte Murmel hat die dritte Farbe, zum Beispiel BBRRG, so lässt sich diese mit zwei Tauschaktionen $BR \rightarrow GG$ in GGGGG tauschen.

Weitere Fälle gibt es nicht.

Aufgabe 3. Antwortsatz: Die Aussage ist für Kombinationen richtig, in der zwei Murmeln unterschiedliche Farbe haben und es eine dritte Murmel in einer dieser Farbe gibt.

Begründung: Eine Tauschaktion ist nur dann möglich, wenn zwei Murmeln verschiedene Farben haben, zum Beispiel BR. Gibt es nun eine weitere blaue Murmel B, so sind folgende Tauschaktionen möglich (dabei spielen weitere Murmeln in der Ausgangskombination keine Rolle):

$BBR \rightarrow (BR \rightarrow GG): BGG \rightarrow (BG \rightarrow RR): RRG \rightarrow (RG \rightarrow BB): RBB.$

Die Ausgangssituation ist wieder erreicht.

Hinweis: Für BRG gilt die Aussage nicht, denn nach der Durchführung einer Tauschaktion entsteht stets eine STOPP-Kombination. Für Kombinationen mit mindestens 4 Murmel ist die Aussage aber immer richtig, weil es dann mindestens 2 Murmeln in gleicher Farbe gibt.

Aufgabe 4. Antwortsatz: In allen Fällen a) bis e) gibt es Kombinationen, die STOPP-Kombinationen sind. Jedoch gibt es keine Kombination zu f), die STOPP-Kombination ist.

Begründung: Wir suchen für jede Anforderung eine geeignete Kombination.

a) Am Anfang ist keine Murmel blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

RRRGGG: drei Tauschaktionen $RG \rightarrow BB$.

b) Am Anfang ist genau eine Murmel blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BRRRRG: Zunächst wird $BR \rightarrow GG$ getauscht zu RRRGGG. Dies ist nach a) eine STOPP-Kombination.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

c) Am Anfang sind genau zwei Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBRRGG: zwei Tauschaktionen $RG \rightarrow BB$.

d) Am Anfang sind genau drei Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBBGGG: zwei Tauschaktionen $BG \rightarrow RR$ führen zur Kombination BRRRRG, die nach b) eine STOPP-Kombination ist.

e) Am Anfang sind genau vier Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBBBGR: eine Tauschaktionen $GR \rightarrow BB$.

f) Am Anfang sind genau fünf Murmeln blau.

Es gibt keine solche Startkombination, die STOPP-Kombination ist. Wir untersuchen, welche Kombinationen durch Tauschaktionen möglich sind. Wir beginnen mit der Kombination (0):

(0) BBBBRR: Es ist nur die Tauschaktion $BR \rightarrow GG$ möglich. Sie führt zu (1).

(1) BBBBGG: Es ist nur die Tauschaktion $BG \rightarrow RR$ möglich. Sie führt zu (2).

(2) BBBRRG: Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten zu tauschen.

(2.1) Jedoch führt $RG \rightarrow BB$ zu BBBBRR, also zur Kombination (0).

(2.2) Deshalb ist die Tauschaktion $BR \rightarrow GG$ durchzuführen. Sie führt zu (3).

(3) BBRGGG: Jetzt gibt es drei Möglichkeiten zu tauschen.

(3.1) Es führt $RG \rightarrow BB$ zu BBBBGG, also zur Kombination (1).

(3.2) Es führt $BR \rightarrow GG$ zu BGGGGG, also zu einer Kombination wie (0), nur mit anderen Farben.

(3.3) Es führt $BG \rightarrow RR$ zu BRRRGG, also zu einer Kombination wie (2), nur mit anderen Farben.

Das Beispiel zeigt, dass diese Tauschaktionen stets zu vorherigen Kombinationen führen. Damit ist keine STOPP-Kombination möglich.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2020

Wir verwenden zur Beschreibung von Rechtecken die Abkürzung „m x n-Rechteck“, wobei m die Kästchenanzahl in der Breite und n die Kästchenanzahl in der Höhe angeben. So können wir für das Rechteck in der Abbildung 5x3-Rechteck schreiben.

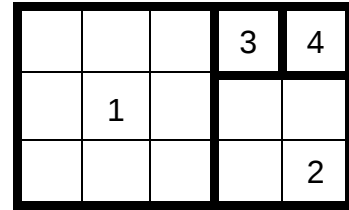


Abb. 1

Quadrate sind natürlich auch Rechtecke, sodass wir zum Beispiel 3x3-Rechteck und 3x3-Quadrat gleichermaßen verwenden dürfen. Jedes Kästchen ist ein 1x1-Quadrat.

Bevor wir die Aufgabe 1 lösen, probieren wir uns an einfacheren Beispielen:

- a) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 2 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz: Es gibt nur ein Rechteck: das 2x1-Rechteck (Abbildung 2).



Abb. 2

- b) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 3 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz: Es gibt nur zwei solche Rechtecke: das 3x1-Rechteck und das 3x2-Rechteck (Abbildung 3).

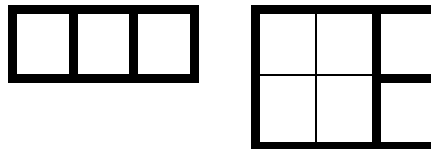


Abb. 3

- c) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 4 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz. Es gibt vier Rechtecke: das 4x1-Rechteck, das 4x3-Rechteck, das 5x2-Rechteck (Abbildung 4) und das 5x3-Rechteck (Abbildung 1).

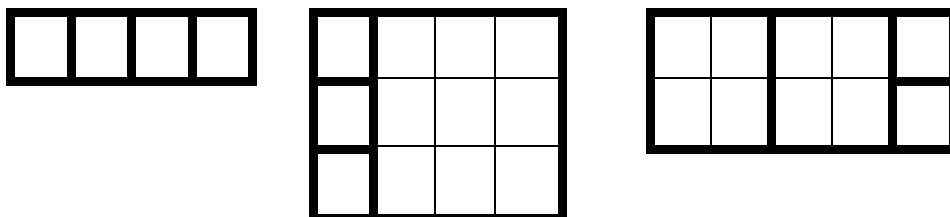


Abb. 4

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir überlegen uns, wie wir die Möglichkeiten in einer Tabelle übersichtlich angeben können. Dazu tragen wir in jeder Spalte ein, wie viele Quadrate der angegebenen Größe in der Zerlegung vorkommen:

Möglichkeit	1x1-Rechtecke	2x2-Rechtecke	3x3-Rechtecke	Gesamtrechteck
1	4	0	0	4x1
2	3	0	1	4x3
3	2	2	0	5x2
4	2	1	1	5x3

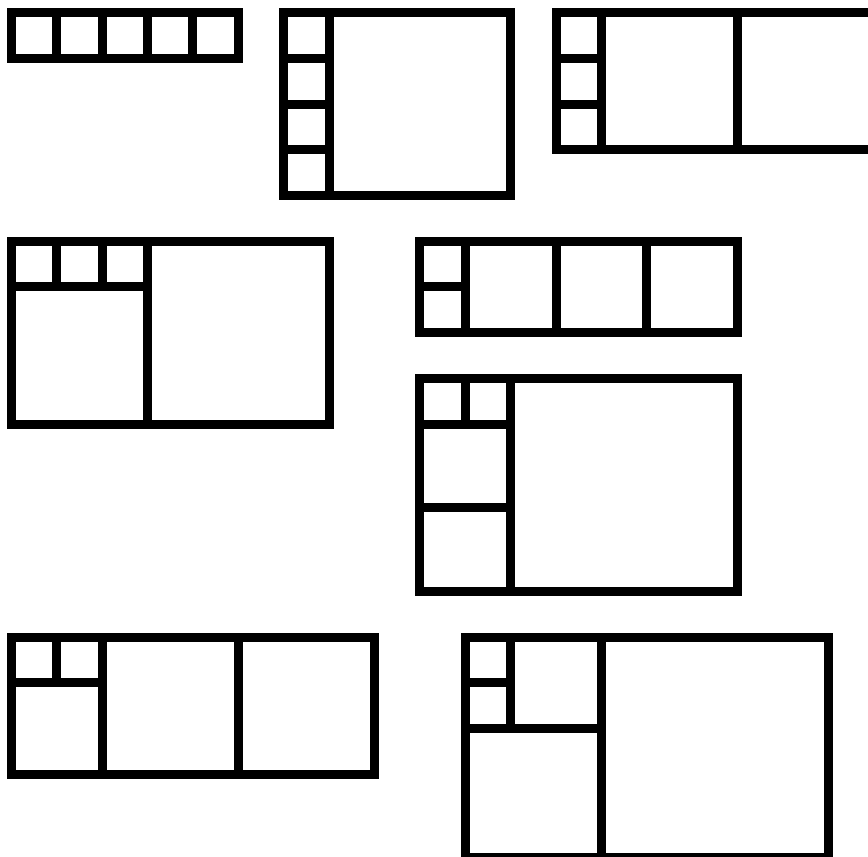
Weitere Möglichkeiten kann es nicht geben, insbesondere kann nicht nur ein 1x1-Rechteck vorkommen.

Nun können wir uns an die Lösung von Aufgabe 1 wagen.

Aufgabe 1. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 5 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz. Es gibt 8 verschiedene Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in 5 Quadrate zerlegen kann.

Zeichnerische Lösung:



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Tabellarische Lösung:

Nr.	1x1-R.	2x2-R.	3x3-R.	4x4-R.	5x5-R.	Gesamt-R.
1	5	0	0	0	0	5x1
2	4	0	0	1	0	5x4
3	3	0	2	0	0	7x3
4	3	0	1	1	0	7x4
5	2	3	0	0	0	7x2
6	2	2	0	0	1	7x5
7	2	1	2	0	0	8x3
8	2	1	1	0	1	8x5

Aufgabe 2. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz. Es gibt 16 verschiedene Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann.

Tabellarische Lösung:

Nr.	1x1-R.	2x2-R.	3x3-R.	4x4-R.	5x5-R.	6x6-R.	7x7-R.	8x8-R.	Rechteck gesamt
1	6	0	0	0	0	0	0	0	6x1
2	5	0	0	0	1	0	0	0	6x5
3	4	0	0	2	0	0	0	0	9x4
4	4	0	0	1	1	0	0	0	9x5
5	3	0	3	0	0	0	0	0	10x3
6	3	0	2	0	0	0	1	0	10x7
7	3	0	1	2	0	0	0	0	11x4
8	3	0	1	1	0	0	1	0	11x7
9	2	4	0	0	0	0	0	0	9x2
10	2	3	0	0	0	0	1	0	9x7
11	2	2	0	0	2	0	0	0	12x5
12	2	2	0	0	1	0	1	0	12x7
13	2	1	3	0	0	0	0	0	11x3
14	2	1	2	0	0	0	0	1	11x8
15	2	1	1	0	2	0	0	0	13x5
16	2	1	1	0	1	0	0	1	12x8

Auch wenn wir eine Systematik in der Tabelle erkannt haben – es muss nachgewiesen werden, dass es für jede Zeile eine entsprechende Zerlegung gibt (zum Beispiel durch eine Skizze der Zerlegung).

Aufgabe 3. Gibt es Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in mehr als 8 Quadrate zerlegen kann, wobei jedes dieser Quadrate eine ungerade Anzahl von Kästchen enthält? Begründe deine Antwort.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Antwortsatz. Es gibt solche Rechtecke. Zum Beispiel lässt sich das 9×1 -Rechteck in 9 Quadrate mit ungerader Kästchenzahl (1×1 -Quadrate) zerlegen. Aber es gibt mehrere Möglichkeiten. So lässt sich auch das 41×17 -Rechteck in 9 Quadrate mit jeweils ungerader Kästchenanzahl zerlegen.

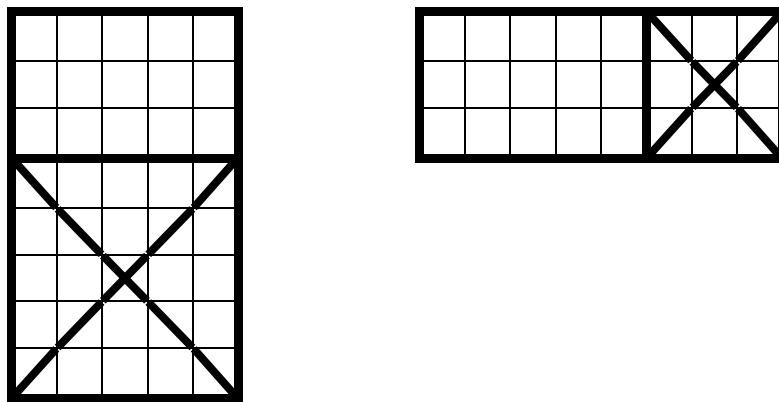
Begründung: Bei dieser Aufgabenstellung genügt es, ein Beispiel anzugeben, das die Bedingungen erfüllt. Als einfachster Fall ist das 9×1 -Rechteck geeignet, denn es lässt sich in neun 1×1 -Quadrate zerlegen.

Wir wollen ein größeres Rechteck mit dieser Eigenschaft finden. Dafür untersuchen wir die Zerlegung rückwärts: Wenn nach dem Abschneiden eines Quadrats ein $m \times n$ -Rechteck übrigbleibt, so war vorher entweder

- an der langen Seite ein $m \times m$ -Quadrat oder
- an der kurzen Seite ein $n \times n$ -Quadrat.

Vor dem Abschneiden war das Rechteck also entweder ein $m \times (m+n)$ -Rechteck oder ein $(m+n) \times n$ -Rechteck.

Beispiel: Ein 5×3 -Rechteck kann nur entstehen, wenn von einem 5×8 -Rechteck ein 5×5 -Quadrat abgeschnitten wurde oder wenn von einem 8×3 -Rechteck ein 3×3 -Quadrat abgeschnitten wurde.



Diesen Zusammenhang wenden wir nun an:

Wenn ein 1×1 -Quadrat übrigbleibt, wurde vorher ein 1×1 -Quadrat von einem 2×1 -Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 2×1 -Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 2×2 -Quadrat abgeschnitten, weil alle abgeschnittenen Quadrate eine ungerade Anzahl von Kästchen haben sollen. Deshalb wurde vorher ein weiteres 1×1 -Quadrat von einem 3×1 -Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 3×1 -Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 3×3 -Quadrat von einem 4×3 -Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 1×1 -Quadrat von einem 4×1 -Rechteck abgeschnitten wurde.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wenn ein 4x3-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 4x4-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 3x3-Quadrat von einem 7x3-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 7x3-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 7x7-Quadrat von einem 10x7-Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 3x3-Quadrat von einem 7x6-Rechteck abgeschnitten wurde.

Wenn ein 10x7-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 10x10-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 7x7-Quadrat von einem 17x7-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 17x7-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 17x17-Quadrat von einem 24x17-Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 7x7-Quadrat von einem 17x14-Rechteck abgeschnitten wurde.

Wenn ein 24x17-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 24x24-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 17x17-Quadrat von einem 41x17-Rechteck abgeschnitten.

Rechteck	Vorher abgeschnittenes Quadrat	Vorher vorliegendes Rechteck	Vorher abgeschnittenes Quadrat	Vorher vorliegendes Rechteck
	1. Möglichkeit		2. Möglichkeit	
1x1	1x1	2x1	entfällt	
2x1	1x1	3x1	2x2 – entfällt	
3x1	3x3	4x3	1x1	4x1
4x3	3x3	7x3	4x4 – entfällt	
7x3	7x7	10x7	3x3	7x6
10x7	7x7	17x7	10x10 – entfällt	
17x7	17x17	24x17	7x7	17x14
24x17	17x17	41x17	24x24 - entfällt	

Nun sind die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Wir können aus der Tabelle ablesen: Wir können ein 41x17-Rechteck durch Abschneiden in drei 1x1-Quadrate und je zwei 3x3-, 7x7- und 17x17-Quadrate zerlegen, insgesamt in 9 Quadrate.

Immer wenn ein Rechteck zwei unterschiedliche Seiten mit ungerader Anzahl von Kästchen besitzt, gibt es zwei Möglichkeiten für das nächste abgeschnittene Quadrat. Insgesamt gibt es deshalb 8 Rechtecke, das man in 9 Quadrate mit jeweils ungerader Kästchenanzahl zerlegen kann:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Nr.	1x1-Q	3x3-Q	5x5-Q	7x7-Q	11x11-Q	13x13-Q	17x17-Q	Gesamt
1	3	6						19x3
2	3	4				2		29x13
3	3	2		4				31x7
4	3	2		2			2	41x17
5	5		4					21x5
6	5		2		2			27x11
7	7			2				15x7
8	9							9x1

Aufgabe 4. Wenn Quadrato ein Rechteck gefunden hat, das er durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann, fällt es ihm nicht schwer, ein Rechteck zu finden, das er durch Abschneiden in 7 Quadrate zerlegen kann. Erkläre, wie es ihm gelingen kann!

Antwortsatz. Wir können die Aussagen aus Aufgabe 3 verwenden: Wenn Quadrato ein Rechteck gefunden hat, dass durch Abschneiden in Quadrate zerlegt werden kann, fügt er diesem Rechteck an eine seiner Seiten ein Quadrat hinzu, dessen Seitenlänge so groß wie diese Seitenlänge des Rechtecks ist. Dieses größere Rechteck kann Quadrato in 7 Quadrate zerlegen.

Aufgabe 5. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 7 Quadrate zerlegen kann? Nutze für die Lösung die Idee aus Aufgabe 4 – finde also eine Möglichkeit, aus der Anzahl von Aufgabe 2 und der Idee aus Aufgabe 4 die gesuchte Anzahl zu ermitteln.

Antwortsatz. Es gibt 32 verschiedene Rechtecke, die Quadrato in 7 Quadrate zerlegen kann.

Begründung. Jedes Rechteck, das sich in 6 Quadrate zerlegen lässt, kann mit der Idee aus der Lösung zu Aufgabe 4 zu zwei verschiedenen Rechtecken erweitert werden:

- durch Hinzufügen eines Quadrates an der längeren Rechteckseite und
- durch Hinzufügen eines Quadrates an der kürzeren Rechteckseite.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Nr.	Rechteck (6 Quadrate) $m \times n$	Hinzufügen eines Quadrates		
		an kurze Seite $(m+n) \times n$	an lange Seite $m \times (m+n)$	Rechteck gedreht
1	6×1	7×1	6×7	7×6
2	6×5	11×5	6×11	11×6
3	9×2	11×2	9×11	11×9
4	9×4	13×4	9×13	13×9
5	9×5	14×5	9×14	14×9
6	9×7	16×7	9×16	16×9
7	10×3	13×3	10×13	13×10
8	10×7	17×7	10×17	17×10
9	11×3	14×3	11×14	14×11
10	11×4	15×4	11×15	15×11
11	11×7	17×7	11×18	18×11
12	11×8	19×8	11×19	19×11
13	12×5	17×5	12×17	17×12
14	12×7	19×7	12×19	19×12
15	12×8	20×8	12×20	20×12
16	13×5	18×5	13×18	18×13

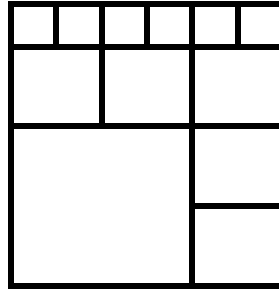
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2020

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Quadrato könnte das 7x6-Rechteck in ein 6x6-Quadrat und in ein 7x1-Rechteck zerlegen. Das 7x1-Rechteck kann er in sieben 1x1-Quadrate zerlegen. Nun sind es aber nur zwei Größen der Quadrate. Er kann aber das 6x6-Quadrat in ein 4x4-Quadrat und fünf 2x2-Quadrate zerlegen. Damit hat er die Aufgabe erfüllt.



Quadrato hat aber viele Möglichkeiten, die Aufgabe zu erfüllen. Er trägt die Varianten in einer Tabelle zusammen. Dabei wissen wir bereits, dass in der Zerlegung kein 6x6-Quadrat vorkommen kann.

Beachte: Es genügt nicht der Nachweis, dass das 7x6-Rechteck in $(7 \cdot 6 =) 42$ Teilquadrate zerlegt wurde. Es muss durch eine Zeichnung gezeigt werden, dass diese Zerlegung wirklich möglich ist! (Es genügt die Angabe einer Möglichkeit.)

5x5	4x4	3x3	2x2	1x1	Anzahl Teilquadrate
	1		5	7	$1 \cdot 16 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 42$
	1		4	11	$1 \cdot 16 + 4 \cdot 4 + 11 \cdot 1 = 42$
	1		3	15	$1 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 15 \cdot 1 = 42$
	1		2	19	$1 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 19 \cdot 1 = 42$
	1		1	23	$1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 23 \cdot 1 = 42$
1			3	5	$1 \cdot 25 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 42$
1			2	9	$1 \cdot 25 + 2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 42$
1			1	13	$1 \cdot 25 + 1 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 42$
	1	2	2		$1 \cdot 16 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 42$
	1	2		8	$1 \cdot 16 + 2 \cdot 9 + 8 \cdot 1 = 42$
		3	2	7	$3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 42$
		3	1	11	$3 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 11 \cdot 1 = 42$
		2	3	12	$2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 42$
		2	2	16	$2 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 16 \cdot 1 = 42$
		2	1	20	$2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 20 \cdot 1 = 42$
		1	7	5	$1 \cdot 9 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 42$
		1	6	9	$1 \cdot 9 + 6 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 42$
		1	5	13	$1 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 42$
		1	4	17	$1 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 17 \cdot 1 = 42$
		1	3	21	$1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 42$
		1	2	25	$1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 25 \cdot 1 = 42$
		1	1	29	$1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 29 \cdot 1 = 42$

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

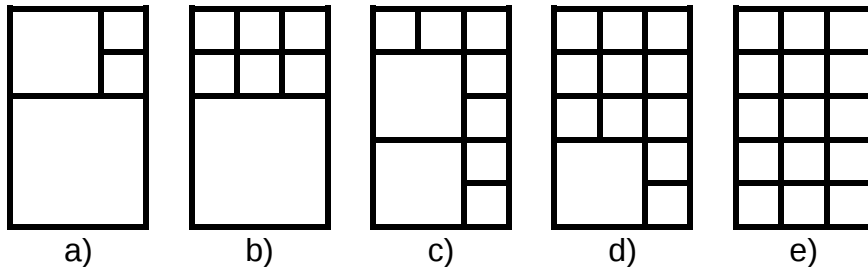
Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Bei dieser Aufgabenstellung ist die Anzahl der verschiedenen Größen nicht eingeschränkt. Wir geben alle Möglichkeiten wieder mit einer Tabelle an. Wir prüfen, ob mit der Zerlegung alle Teilquadrate erfasst werden. Wir müssen aber auch prüfen, ob die angegebene Zerlegung möglich ist. So könnten wir das 5x3-Rechteck möglicherweise in drei 2x2-Quadrate und drei 1x1-Quadrate zerlegen, weil $3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 15$ passen könnte – aber es gelingt nicht, eine solche Zerlegung durchzuführen.

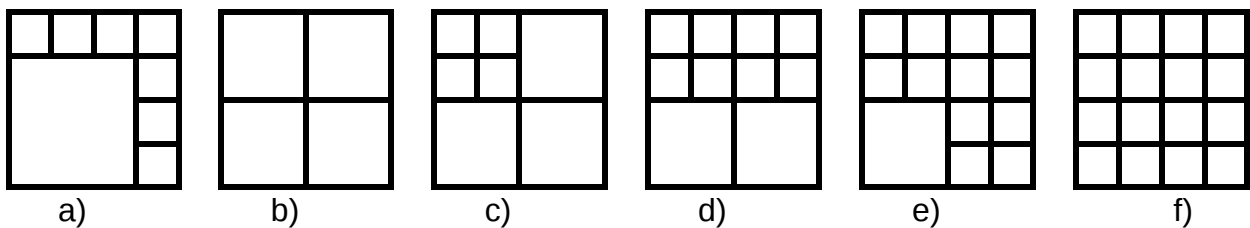
zu Aufgabe 2a)

	3x3	2x2	1x1	Anzahl Teilquadrate
a)	1	1	2	$1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 15$
b)	1	0	6	$1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 = 15$
c)	0	2	7	$2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 15$
d)	0	1	11	$1 \cdot 4 + 11 \cdot 1 = 15$
e)	0	0	15	$15 \cdot 1 = 15$

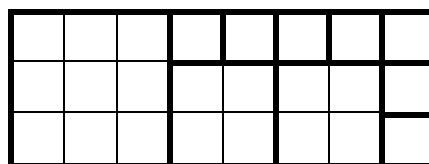


zu Aufgabe 2b)

	3x3	2x2	1x1	Anzahl Teilquadrate	Anzahl Schnitte
a)	1	0	7	$1 \cdot 9 + 7 \cdot 1 = 16$	6
b)	0	4	0	$4 \cdot 4 = 16$	3
c)	0	3	4	$3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 16$	6
d)	0	2	8	$2 \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 16$	9
e)	0	1	12	$1 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 16$	12
f)	0	0	16	$16 \cdot 1 = 16$	15



Lösungshinweise Aufgabe 3a) Quadrato könnte einen 3x8-Papierstreifen zerlegt haben:



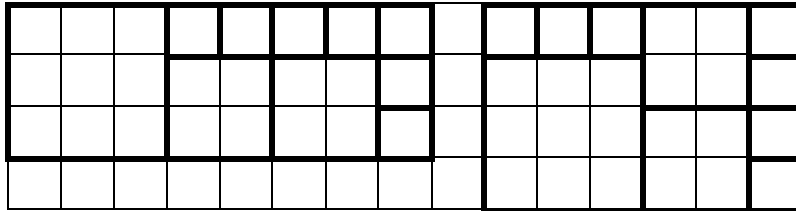
Lösungshinweise Aufgabe 3b) Der Papierstreifen müsste $(1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 =) 24$ Teilquadrate umfassen. Die Zahl 24 lässt sich in folgender Weise als Produkt zweier

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

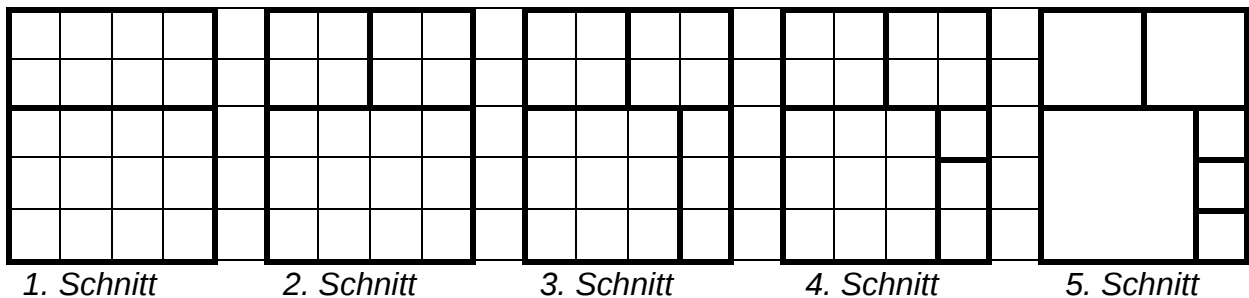
Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

ganzer Zahlen schreiben: $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Da Quadrato auch ein 3×3 -Quadrat erhalten soll, können nur die 3×8 - oder 4×6 -Rechtecke als Lösung möglich sein. Wir sehen aber, dass in beiden Fällen nur maximal zwei 2×2 -Quadrate platziert werden können.



Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) Nach 5 Schnitten könnte Quadrato ein 3×3 -Quadrat, zwei 2×2 -Quadrate und drei 1×1 -Quadrate erhalten. Dazu schneidet er mit dem ersten Schnitt ein 2×4 -Rechteck ab, das er mit seinem zweiten Schnitt in zwei 2×2 -Quadrate zerlegt. Nun schneidet er mit dem dritten Schnitt vom 3×4 -Rechteck ein 3×3 -Quadrat ab. Vom verbleibenden 1×3 -Rechteck schneidet er mit dem vierten Schnitt ein 1×1 -Quadrat und mit dem fünften Schnitt ein weiteres 1×1 -Quadrat ab. Es verbleibt ein 1×1 -Quadrat.



Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) Nein, Quadrato kann es nicht.

In Aufgabe 2b) können wir alle Schnitte zählen und stellen fest, dass in keinem Fall 5 Schnitte erforderlich sind.

Wir können aber auch folgendes überlegen: Das 4×4 -Quadrat umfasst ($4 \cdot 4 =$) 16 Teilquadrate. Nach dem ersten Schnitt hat Quadrato 2 Teile, nach dem zweiten Schnitt 3 Teile, nach dem dritten Schnitt 4 Teile, nach dem vierten Schnitt 5 Teile und nach dem fünften Schnitt 6 Teile.

- Ist eines der sechs Teile ein 3×3 -Quadrat, müssen die anderen fünf Teile insgesamt ($16 - 9 =$) 7 Teilquadrate umfassen. Das ist mit 2×2 - und 1×1 -Quadraten nicht möglich.
- Ist eines der sechs Teile ein 2×2 -Quadrat, müssen die anderen fünf Teile insgesamt ($16 - 4 =$) 12 Teilquadrate umfassen. Das ist mit 2×2 - und 1×1 -Quadraten nicht möglich.
- Sind zwei der sechs Teile 2×2 -Quadrate, müssen die anderen vier Teile insgesamt ($16 - 8 =$) 8 Teilquadrate umfassen. Das ist mit 2×2 - und 1×1 -Quadraten nicht möglich.
- Sind drei der sechs Teile 2×2 -Quadrate, müssen die anderen drei Teile insgesamt ($16 - 12 =$) 4 Teilquadrate umfassen. Das ist mit 2×2 - und 1×1 -Quadraten nicht möglich.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2021

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Angenommen, Quadrato hat zwei Domino-Steine gefunden, mit denen er das 2x2-Feld bedecken möchte. Wenn Zeilen- und Spaltensumme übereinstimmen, muss $A + B = A + C$, also $B = C$ gelten. Es muss aber auch $A + B = B + D$, also $A = D$ gelten.

A	B
C	D

Seine Bedeckung sieht also wie abgebildet aus. Das geht aber nur mit zwei gleichen Domino-Steinen A-B, doch die gibt es im Domino-Spiel nicht.

A	B
B	A

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Bei der Bedeckung eines 3x3-Feldes sind $3 \cdot 3 = 9$ Felder zu bedecken. Da aber jeder Domino-Stein jeweils 2 Felder bedeckt, kann insgesamt nur eine gerade Anzahl von Feldern vollständig bedeckt werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a: Es genügt, korrekte Beispiele anzugeben. Achte darauf, dass keine Augen-Kombination doppelt vorkommt, da es in einem Domino-Spiel keine zwei Steine mit der gleichen Kombination gibt. Prüfe deshalb deine Vorschläge am besten durch Auflegen von Domino-Steinen: Es gibt sehr viele Möglichkeiten, zum Beispiel

3	2	0	0
0	1	1	3
2	1	2	0
0	1	2	2

Summe 5

6	2	0	0
0	4	1	3
2	1	5	0
0	1	2	5

Summe 8

3	2	0	5
0	1	6	3
2	6	2	0
5	1	2	2

Summe 12

4	2	6	3
4	5	3	3
4	6	1	4
3	2	5	5

Summe 15

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b: Für die Bedeckung eines 4x4-Feldes benötigt Quadrato insgesamt acht Domino-Steine. Wählt er dafür die Domino-Steine mit den kleinsten Augensummen aus, so sind dies 0-0, 0-1, 1-1, 0-2, 1-2, 2-2, 0-3, 1-3. Die Summe aller dieser Augenzahlen beträgt 19. Damit aber alle vier Zeilensummen gleich groß sind, muss die Gesamtsumme ein Vielfaches von 4 sein. Wir könnten zum Beispiel den Stein 1-3 durch den Stein 2-3 ersetzen und erhalten als Gesamtsumme 20. Wir versuchen nun, eine Bedeckung zu finden, deren Zeilen- und Spaltensummen genau $(20 : 4 =) 5$ betragen. In der Zeile (oder in der Spalte), die den Stein 2-3 enthält, können die verbleibenden zwei Felder nur mit 0 bedeckt sein. Wir finden tatsächlich korrekte Bedeckungen (Abbildung 3.1). Wenn wir dafür Domino-Steine eines Domino-Spiels verwenden, können wir sicher sein, dass kein Stein doppelt verwendet wird (weil es ja für jede Augen-Kombination nur genau einen Stein gibt).

Wenn wir für die maximal mögliche Zeilensumme die acht Domino-Steine mit den größten Augensummen wählen, sind es 6-6, 6-5, 6-4, 6-3, 5-5, 5-4, 5-3, 4-4. Die Gesamtsumme beträgt 77. Wenn die vier Zeilensummen gleich groß sein sollen, muss die Gesamtsumme ein Vielfaches von 4 sein. Wir tauschen deshalb den Stein 5-3 in 4-3 um, erhalten als Gesamtsumme 76 und suchen damit eine korrekte Bedeckung mit der Zeilensumme $(76 : 4 =) 19$. Wir finden ein Beispiel (Abbildung 3.2):

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

3	2	0	0
0	1	1	3
2	1	2	0
0	1	2	2

Abb. 3.1

3	4	6	6
6	5	5	3
4	5	4	6
6	5	4	4

Abb. 3.2

Hinweis: Wenn wir in der Abbildung 3.1 jeden Domino-Stein A-B durch einen Domino-Stein (6 – A)-(6 – B) umkehren (also zum Beispiel links oben statt 3-2 den Stein (6 – 3)-(6 – 2), also 3-4 wählen), erhalten wir das Ergebnis aus Abbildung 3.2.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c: Wir suchen nach einem Zusammenhang der Felder, die wir mit A, B und C markiert haben. Wenn die Zeilensummen und Spaltensummen alle gleich groß sind, gilt insbesondere auch

$$A + B + 1 + 2 = C + 6 + A + 4,$$

also $A + B + 3 = A + C + 10$

C			
6	5		
A	B	2	1
4	3		

Wir können diese Gleichung umformen zu

$$B = C + 7.$$

Es gibt aber keine Augenzahl B einer Domino-Hälfte, die um 7 größer ist als eine Augenzahl C einer anderen Domino-Hälfte. Quadrato kann also sein Bedeckung nicht erfolgreich ergänzen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wenn alle Zeilen- und Spaltensummen gleich groß sein sollen, muss die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten sein. Denn bezeichnen wir mit S die Summe und haben wir X Zeilen und Y Spalten, so muss $X \cdot S = Y \cdot S$ gelten, weil die Gesamtsumme aller aufgelegten Augen gleich ist. Also muss $X = Y$ gelten. Quadrato kann deshalb nur quadratische Felder bedecken.

Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass mit Domino-Steinen nur Felder mit einer geraden Anzahl von Teilquadraten bedeckt werden können.

Das Domino-Spiel umfasst 28 Domino-Steine. Damit kann ein Feld von maximal 56 Quadraten bedeckt werden. Da das Feld quadratisch sein soll und eine gerade Anzahl von Quadraten beinhalten muss, ist das 6x6-Feld das größtmögliche. Ob es wirklich eine solche Bedeckung gibt, kann nur durch Angabe eines korrekten Beispiels bestätigt werden. Da wir 18 Domino-Steine verwenden müssen, können wir wie bei Aufgabe 3b) die kleinste und die größte Zeilen- bzw. Spaltensumme ermitteln. Zuerst ermitteln wir die Gesamtaugenzahl aller 28 Dominosteine:

Steine mit 0:	$0+0+0+1+0+2+0+3+0+4+0+5+0+6 = 21$
Steine mit 1, aber ohne 0:	$1+1+1+2+1+3+1+4+1+5+1+6 = 27$
Steine mit 2, aber ohne 0, 1:	$2+2+2+3+2+4+2+5+2+6 = 30$
Steine mit 3, aber ohne 0, 1, 2:	$3+3+3+4+3+5+3+6 = 30$
Steine mit 4, aber ohne 0, 1, 2, 3:	$4+4+4+5+4+6 = 27$
Steine mit 5, aber ohne 0, 2, 2, 3, 4:	$5+5+5+6=21$
Steine nur mit 6:	$6+6 = 12$

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Die Gesamtsumme beträgt also $(21+27+30+30+27+21+12=)$ 168.

Lassen wir wie in Aufgabe 3b) die 8 Domino-Steine mit den größten Augenzahlen sowie 4-3 und 3-3 weg, wird die Gesamtsumme um 90 kleiner. Es verbleibt $(168 - 90 =)$ 78. Da es 6 Zeilen sind, muss die Zeilensumme mindestens 13 betragen (wegen $6 \cdot 13 = 78$).

Lassen wir wie in Aufgabe 3b) die 8 Domino-Steine mit den kleinsten Augenzahlen sowie 2-3 und 1-4 weg, wird die Gesamtsumme um 29 kleiner. Es verbleibt $(168 - 29 =)$ 129. Da es 6 Zeilen sind, muss die Zeilensumme höchstens 21 betragen (wegen $6 \cdot 21 = 126 < 129$).

Da heißt es nun mit viel Geduld probieren, probieren, probieren, ... Hier ein Beispiel mit der Zeilen- und Spaltensumme 13:

2	6	2	2	1	0
3	1	2	3	0	4
4	1	4	2	2	0
0	0	3	3	6	1
1	5	1	1	0	5
3	0	1	2	4	3

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2021

Vor Quadrato liegt ein komplettes Domino-Spiel auf dem Tisch. Du weißt ja: So ein Spiel besteht aus 28 Spielsteinen. Jeder Domino-Stein besteht aus zwei aneinander gefügten Quadraten, auf denen alle möglichen Zweierkombinationen der Zahlen 0 bis 6 stehen, also von 0-0 bis 6-6, aber jede Kombination nur genau einmal.

Quadrato hat sich ein neues Spiel ausgedacht: Er baut Domino-Türme, indem er Domino-Steine übereinanderlegt, sodass die zwei Quadrate eines Domino-Steines vollständig auf darunter liegenden Quadraten von Domino-Steinen liegen (also keine „Löcher“ bleiben).

Quadrato will nun nur noch ganz besondere Domino-Türme bauen. Er legt folgende Regel fest: Die Zahlen, die auf seinen Türmen von oben betrachtet zu sehen sind, geben an, wie viele Quadrate an dieser Stelle übereinander liegen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es genügt aufgrund der Aufgabenstellung einen korrekten Bauplan anzugeben. Es gibt sehr viele Möglichkeiten. Prüfe deine Lösung am besten, indem du einen Turm mit Domino-Steinen baust.

1. Schicht	3. Schicht	5. Schicht	Ansicht von oben																																																																								
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	5	6	1		4	3			1	1						<table><tr><td></td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6	5			2	2			3	3						<table><tr><td></td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5	5														<table><tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2	6	6	2		4	4			3	3													
1	5	6	1																																																																								
	4	3																																																																									
	1	1																																																																									
	6	5																																																																									
	2	2																																																																									
	3	3																																																																									
	5	5																																																																									
2	6	6	2																																																																								
	4	4																																																																									
	3	3																																																																									
2. Schicht	4. Schicht	6. Schicht																																																																									
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table>	2	3	4	2		2	3			1	1		<table><tr><td></td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6	5			4	4						<table><tr><td></td><td>6</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6	6																																														
2	3	4	2																																																																								
	2	3																																																																									
	1	1																																																																									
	6	5																																																																									
	4	4																																																																									
	6	6																																																																									

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Der Turm 1 kann nicht regelgerecht gebaut sein. Um die Einsen in den grau markierten Feldern zu legen, sind Domino-Steine mit 1-1 erforderlich. Aber es gibt nur einen solchen Stein!

Auch Turm 2 kann nicht regelgerecht gebaut sein. Da in verdeckten Stellen keine „Löcher“ zugelassen sind, müsste die unterste Schicht insgesamt 13 Quadrate bedecken – das ist aber mit Domino-Steinen nicht möglich, weil jeder Domino-Stein 2 Quadrate bedeckt und somit eine gerade Anzahl von Quadraten bedeckt wäre.

Turm 1

1	3	3	1
1	2	2	1
1	1	1	1

Turm 2

1	3	4	4
1	3	2	1
	2	2	1
	1	1	

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Weil jeder Domino-Stein genau zwei Quadrate bedeckt, kann die oberste Schicht nur aus einem oder zwei Domino-Steinen bestehen. Da es die Domino-Steine 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 und 6-6 jeweils nur einmal gibt, besteht die oberste Schicht nur aus einem Domino-Stein, der zudem ein Doppel-Stein (also mit zwei gleichen Augenzahlen) sein muss. Auf einem 2x2-Feld kann man von oben alle Kombinationen von zwei Doppelzahlen sehen. Insgesamt können es $(5 + 4 + 3 + 2 + 1 =)$ 15 Domino-Türme sein. Wir prüfen unser Ergebnis noch durch die Baupläne aller Möglichkeiten:

Schichten im Bauplan						Sicht von oben																						
1	2	3	4	5	6																							
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	2	2					<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	1	2	1	2												
1	3																											
1	4																											
2																												
2																												
1	2																											
1	2																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	2	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3				<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	1	3	1	3										
1	3																											
1	4																											
2																												
2																												
3																												
3																												
1	3																											
1	3																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	2	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4			<table><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	1	4	1	4								
1	3																											
1	4																											
2																												
2																												
3																												
3																												
4																												
4																												
1	4																											
1	4																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	2	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5		<table><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	1	5	1	5						
1	3																											
1	4																											
2																												
2																												
3																												
3																												
4																												
4																												
5																												
5																												
1	5																											
1	5																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	2	2	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	<table><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	1	6	1	6				
1	3																											
1	4																											
2																												
2																												
3																												
3																												
4																												
4																												
5																												
5																												
6																												
6																												
1	6																											
1	6																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3				<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	2	3	2	3								
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3																												
3																												
2	3																											
2	3																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4			<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	2	4	2	4						
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3																												
3																												
4																												
4																												
2	4																											
2	4																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5		<table><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	2	5	2	5				
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3																												
3																												
4																												
4																												
5																												
5																												
2	5																											
2	5																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	3	3	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	<table><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	2	6	2	6		
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3																												
3																												
4																												
4																												
5																												
5																												
6																												
6																												
2	6																											
2	6																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4			<table><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	3	4	3	4				
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3	1																											
3	6																											
4																												
4																												
3	4																											
3	4																											
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5		<table><tr><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	3	5	3	5		
1	3																											
1	4																											
2	4																											
2	5																											
3	1																											
3	6																											
4																												
4																												
5																												
5																												
3	5																											
3	5																											

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	4	4	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr></table>			3	6	3	6			4	5	4	5					4	6	4	6					5	6	5	6
1	3																																																			
1	4																																																			
2	4																																																			
2	5																																																			
3	1																																																			
3	6																																																			
4																																																				
4																																																				
5																																																				
5																																																				
6																																																				
6																																																				
3	6																																																			
3	6																																																			
4	5																																																			
4	5																																																			
4	6																																																			
4	6																																																			
5	6																																																			
5	6																																																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	5	4	6	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5		<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr></table>			4	5	4	5					4	6	4	6					5	6	5	6						
1	3																																																			
1	4																																																			
2	4																																																			
2	5																																																			
3	1																																																			
3	6																																																			
4	5																																																			
4	6																																																			
5																																																				
5																																																				
4	5																																																			
4	5																																																			
4	6																																																			
4	6																																																			
5	6																																																			
5	6																																																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	5	4	6	<table><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	5	5	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr></table>			4	6	4	6					5	6	5	6												
1	3																																																			
1	4																																																			
2	4																																																			
2	5																																																			
3	1																																																			
3	6																																																			
4	5																																																			
4	6																																																			
5																																																				
5																																																				
6																																																				
6																																																				
4	6																																																			
4	6																																																			
5	6																																																			
5	6																																																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	3	1	4	<table><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	4	2	5	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table>	3	1	3	6	<table><tr><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	5	4	6	<table><tr><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td></tr></table>	5	1	5	4	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td></tr></table>			5	6	5	6																		
1	3																																																			
1	4																																																			
2	4																																																			
2	5																																																			
3	1																																																			
3	6																																																			
4	5																																																			
4	6																																																			
5	1																																																			
5	4																																																			
6																																																				
6																																																				
5	6																																																			
5	6																																																			

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wir schreiben alle möglichen Türme durch die Sicht von oben auf. Beim Probieren mit richtigen Domino-Steinen stellen wir fest, dass jede Zahl in der obersten Schicht nur zweimal zu sehen ist, in darunter liegenden Schichten aber zwei- oder viermal. Wir finden 55 verschiedene Türme, wenn die sichtbaren Augenzahlen von links nach rechts gleich bleiben oder größer werden.

<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	1	2	3	1	1	2	3	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	1	2	4	1	1	2	4	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	1	1	2	5	1	1	2	5	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	1	1	2	6	1	1	2	6	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	1	3	4	1	1	3	4
1	1	2	3																																									
1	1	2	3																																									
1	1	2	4																																									
1	1	2	4																																									
1	1	2	5																																									
1	1	2	5																																									
1	1	2	6																																									
1	1	2	6																																									
1	1	3	4																																									
1	1	3	4																																									
<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	1	3	5	1	1	3	5	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	1	1	3	6	1	1	3	6	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	1	4	5	1	1	4	5	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	1	4	6	1	1	4	6	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	1	5	6	1	1	5	6
1	1	3	5																																									
1	1	3	5																																									
1	1	3	6																																									
1	1	3	6																																									
1	1	4	5																																									
1	1	4	5																																									
1	1	4	6																																									
1	1	4	6																																									
1	1	5	6																																									
1	1	5	6																																									
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	2	2	3	1	2	2	3	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	2	2	4	1	2	2	4	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	1	2	2	5	1	2	2	5	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	1	2	2	6	1	2	2	6	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	2	3																																									
1	2	2	3																																									
1	2	2	4																																									
1	2	2	4																																									
1	2	2	5																																									
1	2	2	5																																									
1	2	2	6																																									
1	2	2	6																																									
1	2	3	4																																									
1	2	3	4																																									
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	2	3	5	1	2	3	5	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	1	2	3	6	1	2	3	6	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	2	4	5	1	2	4	5	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	2	4	6	1	2	4	6	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	2	5	6	1	2	5	6
1	2	3	5																																									
1	2	3	5																																									
1	2	3	6																																									
1	2	3	6																																									
1	2	4	5																																									
1	2	4	5																																									
1	2	4	6																																									
1	2	4	6																																									
1	2	5	6																																									
1	2	5	6																																									
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	3	3	4	1	3	3	4	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	3	3	5	1	3	3	5	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	1	3	3	6	1	3	3	6	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	3	4	5	1	3	4	5	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	3	4	6	1	3	4	6
1	3	3	4																																									
1	3	3	4																																									
1	3	3	5																																									
1	3	3	5																																									
1	3	3	6																																									
1	3	3	6																																									
1	3	4	5																																									
1	3	4	5																																									
1	3	4	6																																									
1	3	4	6																																									
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	3	5	6	1	3	5	6	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	4	4	5	1	4	4	5	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	4	4	6	1	4	4	6	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	4	5	6	1	4	5	6	<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	5	5	6	1	5	5	6
1	3	5	6																																									
1	3	5	6																																									
1	4	4	5																																									
1	4	4	5																																									
1	4	4	6																																									
1	4	4	6																																									
1	4	5	6																																									
1	4	5	6																																									
1	5	5	6																																									
1	5	5	6																																									
<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	2	2	3	4	2	2	3	4	<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	2	2	3	5	2	2	3	5	<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	2	2	3	6	2	2	3	6	<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	2	2	4	5	2	2	4	5	<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	2	2	4	6	2	2	4	6
2	2	3	4																																									
2	2	3	4																																									
2	2	3	5																																									
2	2	3	5																																									
2	2	3	6																																									
2	2	3	6																																									
2	2	4	5																																									
2	2	4	5																																									
2	2	4	6																																									
2	2	4	6																																									
<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	2	2	5	6	2	2	5	6	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	2	3	3	4	2	3	3	4	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	2	3	3	5	2	3	3	5	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	2	3	3	6	2	3	3	6	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	2	3	4	5	2	3	4	5
2	2	5	6																																									
2	2	5	6																																									
2	3	3	4																																									
2	3	3	4																																									
2	3	3	5																																									
2	3	3	5																																									
2	3	3	6																																									
2	3	3	6																																									
2	3	4	5																																									
2	3	4	5																																									

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	2	3	4	6	2	3	4	6	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	2	3	5	6	2	3	5	6	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	2	4	4	5	2	4	4	5	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	2	4	4	6	2	4	4	6	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	2	4	5	6	2	4	5	6
2	3	4	6																																									
2	3	4	6																																									
2	3	5	6																																									
2	3	5	6																																									
2	4	4	5																																									
2	4	4	5																																									
2	4	4	6																																									
2	4	4	6																																									
2	4	5	6																																									
2	4	5	6																																									
<table><tr><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	2	5	5	6	2	5	5	6	<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	3	3	4	5	3	3	4	5	<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	3	3	4	6	3	3	4	6	<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	3	3	5	6	3	3	5	6	<table><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	3	4	4	5	3	4	4	5
2	5	5	6																																									
2	5	5	6																																									
3	3	4	5																																									
3	3	4	5																																									
3	3	4	6																																									
3	3	4	6																																									
3	3	5	6																																									
3	3	5	6																																									
3	4	4	5																																									
3	4	4	5																																									
<table><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	3	4	4	6	3	4	4	6	<table><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	3	4	5	6	3	4	5	6	<table><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	3	5	5	6	3	5	5	6	<table><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	4	4	5	6	4	4	5	6	<table><tr><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	4	5	5	6	4	5	5	6
3	4	4	6																																									
3	4	4	6																																									
3	4	5	6																																									
3	4	5	6																																									
3	5	5	6																																									
3	5	5	6																																									
4	4	5	6																																									
4	4	5	6																																									
4	5	5	6																																									
4	5	5	6																																									

Lösungshinweise zu Aufgabe 5: Die Lösung der Aufgabe 5 ist sehr schwierig. Wir müssten alle Möglichkeiten für verschieden lange Streifen ermitteln. Dabei finden wir heraus, dass auf dem 2x5-Streifen mit 71 Möglichkeiten die meisten verschiedene Türme gebaut werden. Wird der Streifen länger, nimmt die Anzahl der Möglichkeiten wieder ab.

Aber eine vollständige Lösung konnte nicht erwartet werden – bitte beachte die Hinweise auf deiner Einsendung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6: Wir betrachten verschieden breite Streifen und zählen, wie viele Domino-Steine wir maximal verbauen können. Dazu schreiben wir die Ansicht von oben auf.

Beim 2x2-Streifen können wir $(5 + 6 =)$ 11 Domino-Steine verbauen.

Beim 2x3-Streifen können wir $(5 + 5 + 6 =)$ 16 Domino-Steine verbauen.

Beim 2x4-Streifen können wir $(4 + 5 + 5 + 6 =)$ 20 Domino-Steine verbauen.

Beim 2x5-Streifen können wir $(4 + 4 + 5 + 5 + 6 =)$ 24 Domino-Steine verbauen.

Beim 2x6-Streifen können wir $(3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 =)$ 27 Domino-Steine verbauen.

5	6
5	6

5	5	6
5	5	6

4	5	5	6
4	5	5	6

4	4	5	5	6
4	4	5	5	6

3	4	4	5	5	6
3	4	4	5	5	6

Bei diesen Streifen können also nicht alle Domino-Steine eines Domino-Spieles verbaut werden.

Verwenden wir einen Streifen mit 7 Spalten, so können wir darauf einen Turm mit $(1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 =)$ 28 Domino-Steine.

1	3	4	4	5	5	6
1	3	4	4	5	5	6

Verwenden wir einen Streifen mit 8 Spalten, so können wir darauf einen Turm mit $(1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 =)$ 28 Domino-Steine.

1	1	2	4	4	5	5	6
1	1	2	4	4	5	5	6

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Verwenden wir einen Streifen mit 9 Spalten, so können wir darauf einen Turm mit $(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 6 =)$ 28 Domino-Steine.

1	1	2	2	3	3	5	5	6
1	1	2	2	3	3	5	5	6

Lösungshinweis zu Aufgabe 7: Wie in Aufgabe 4 stellen wir fest, dass die oberste Schicht nur aus einem Domino-Stein bestehen kann, in jeder darunter liegenden Schicht je Augenzahl maximal viermal zu sehen ist. Der längste Streifen könnte also 11 Spalten breit sein.

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Dafür sind $(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 =)$ 36 Domino-Steine erforderlich. Da es nicht so viele Domino-Steine gibt, kann der Streifen nicht 11 Spalten lang sein.

Wir untersuchen nun einen Streifen mit 10 Spalten, wir könnten ihn wie folgt bauen:

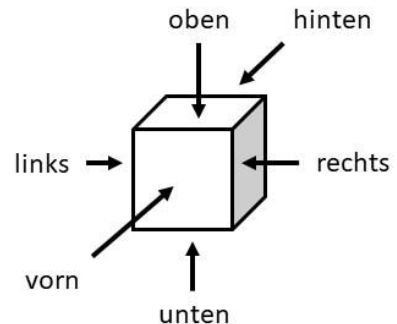
1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
1	1	2	2	3	3	4	4	5	6

Dafür sind $(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 =)$ 31 Domino-Steine erforderlich. Da es nicht so viele Domino-Steine gibt, kann der Streifen nicht 10 Spalten lang sein.

Für einen Streifen mit 9 Spalten haben wir in Aufgabe 6 einen Turm gesehen. Der längste Streifen ist also 9 Spalten lang.

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2022

Zur Beschreibung von Würfelkörpern und deren Punktverteilungen verwenden wir die Richtungsangaben so wie in der neben stehenden Abbildung. Sichtbar sind alle Seitenflächen, die wir von vorn oder hinten, von rechts oder links sowie von oben sehen können. Wir wissen, dass die Summe gegenüber liegender Punktzahlen beim Würfel stets 7 ist.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz. Quadrato hat insgesamt 4 Möglichkeiten, aus 3 Würfeln verschiedene Würfelkörper zu bauen.

Begründung: Um alle möglichen Würfelkörper zu finden, die Quadrato aus drei Würfeln auf einem Tisch bauen könnte, unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen nur ein Würfel den Tisch berührt: Dies ist nur möglich, wenn die beiden anderen Würfeln übereinandergestapelt werden. Es gibt in diesem Fall also nur **1 Möglichkeit!**

Fall 2: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen zwei Würfel den Tisch berühren: Diese beiden Würfel müssen an eine Würfelseite aneinanderstoßen. Den dritten Würfel setzen wir einem der Würfel obendrauf. Dabei ist es egal, auf welchen Würfel wir den dritten Würfel setzen, denn wir können jeden dieser Würfelkörper so drehen, dass wir auf dem Tisch zwei Würfel sehen und auf dem linken Würfel der dritte Würfel zu sehen ist. Es gibt also auch in diesem Fall nur **1 Möglichkeit!**

Fall 3: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen drei Würfel den Tisch berühren: Wir erkennen nun **2 Möglichkeiten!**

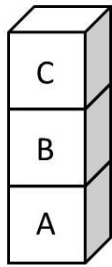
- (a) Die drei Würfel liegen in einer Reihe nebeneinander.
- (b) Die drei Würfel liegen in einem Winkel. (Dabei können wir diesen Würfelkörper immer so drehen, dass vorn zwei Würfel in einer Reihe zu sehen sind und der dritte Würfel hinter dem linken Würfel liegt.)

Insgesamt kann Quadrato ($1 + 1 + 2 =$) 4 verschiedene Würfelkörper aus drei Würfeln bauen. Wir bezeichnen für weitere Erklärungen die Würfel mit A, B und C, wie in der Abbildung ersichtlich.

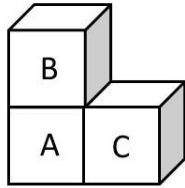
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

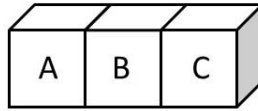
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



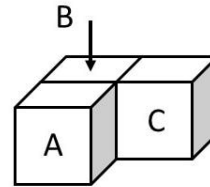
Fall 1



Fall 2



Fall 3a



Fall 3b

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir für jeden der vier möglichen Würfelkörper eine Punktverteilung angeben, bei der wir auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt die Punktsumme 46 sehen.

Fall 1: Vom Würfel A sehen wir die Punkte von vorn und hinten (mit Summe 7) sowie von rechts und links (mit Summe ebenfalls 7). Vom Würfel A sehen wir also insgesamt immer 14 Punkte. Auch vom Würfel B sehen wir insgesamt immer 14 Punkte. Vom Würfel C sehen wir ebenfalls 14 Punkte (vorn/hinten, rechts/links) und zusätzlich die Punkte auf der Würfelseite oben. Sehen wir oben eine 4, so sind es insgesamt $(14 + 14 + 14 + 4 =)$ 46 Punkte.

Fall 2: Von allen drei Würfeln sehen wir die Punkte von vorn und hinten, also insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ Punkte. Vom Würfel B sehen wir die Punkte von rechts und links (mit Summe 7). Weil die Würfel A und C mit der gleichen Punktzahl aneinanderstoßen, sehen wir am Würfel A links die gleiche Punktzahl wie am Würfel C von rechts. Wir können die Würfel so legen, dass wir dabei 6 sehen. Insgesamt sehen wir nun schon $3 \cdot 7 + 7 + 2 \cdot 6 = 40$ Punkte. Nun sehen wir zusätzlich die Punkte am Würfel B oben und am Würfel C oben. Wenn wir beide Würfel so drehen, dass oben jeweils 3 zu sehen ist, erreichen wir insgesamt $40 + 2 \cdot 3 = 46$ Punkte.

Fall 3a: Von den Würfeln A, B und C sehen wir jeweils die Punkte von vorn und hinten, also insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ Punkte. Da die Würfel A und B und die Würfel B und C mit der gleichen Punktzahl aneinanderstoßen, ergibt die Punktzahl am Würfel A links und die Punktzahl am Würfel C rechts die Summe 7, so dass wir schon $3 \cdot 7 + 7 = 28$ Punkte sehen. Drehen wir alle drei Würfel so, dass oben jeweils 6 zu sehen ist, erreichen wir $28 + 3 \cdot 6 = 46$ Punkte.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

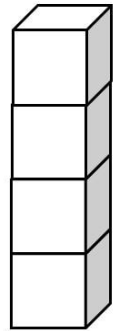
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Fall 3b: Drehen wir den Würfel B so, dass hinten 6 und links 5 zu sehen sind, so sehen wir vom Würfel C rechts ebenfalls 5 und vom Würfel A vorn ebenfalls 6. Außerdem sehen wir vom Würfel A links/rechts die Punktsumme 7 und vom Würfel C vorn/hinten die Punktsumme 7. Das sind schon $2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 36$ Punkte. Sehen wir vom Würfel B oben 4, drehen wir die Würfel A und C so, dass oben jeweils 3 zu sehen sind. Sehen wir vom Würfel B oben eine 3, drehen wir den Würfel A so, dass oben 3 zu sehen ist, und den Würfel C so, dass oben 4 zu sehen ist. In jedem Fall erreichen wir $36 + 4 + 3 + 3 = 46$ Punkte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 - Antwortsatz. Kreisa kann 15 verschiedene Würfelkörper bauen.

Begründung: Wir gliedern unsere Suche wieder so wie bei Aufgabe 1.

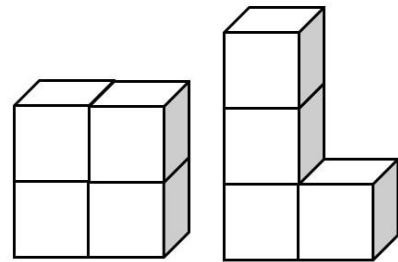
Fall 1: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen nur ein Würfel den Tisch berührt: Dies ist nur möglich, wenn die drei anderen Würfel übereinandergestapelt werden. Es gibt in diesem Fall also nur **1 Möglichkeit!**



Fall 2: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen zwei Würfel den Tisch berühren: Es gibt jetzt **2 Möglichkeiten!**

(a) Wir legen die beiden anderen Würfel nebeneinander obendrauf.

(b) Wir stapeln die beiden anderen Würfel über dem linken Würfel.



Fall 3: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen drei Würfel den Tisch berühren. Wir wissen aus Aufgabe 1, dass es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, drei Würfel auf den Tisch zu legen.

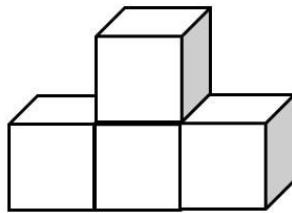
Untersuchen wir zunächst die Variante, dass die drei Würfel nebeneinander liegen. Dafür gibt es **2 Möglichkeiten**, den vierten Würfel obendrauf zu legen: Entweder auf den mittleren Würfel dieser Reihe (Fall 3a) oder auf den linken Würfel dieser Reihe (Fall 3b). Liegt der Würfel auf dem rechten Würfel dieser Reihe, können wir den Würfelpörper so drehen, dass er nach der Drehung auf dem linken Würfel dieser Reihe erscheint, ergibt also keine neue Möglichkeit.

Untersuchen wir nun die Variante, dass die drei Würfel im Winkel liegen. Dafür gibt es **3 Möglichkeiten**. Wir können nämlich den vierten Würfel auf jeden der drei anderen Würfel obendrauf legen (Fälle (3c, 3d und 3e).

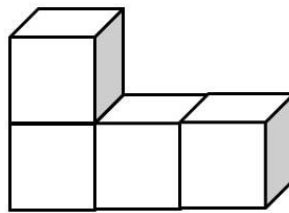
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

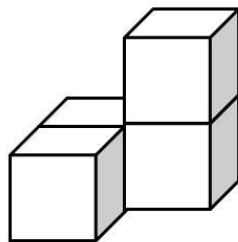
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



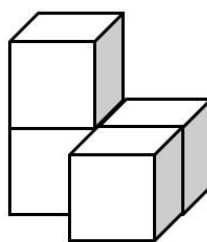
Fall 3a



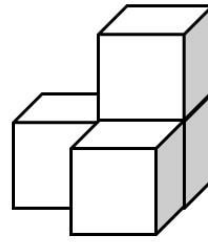
Fall 3b



Fall 3c



Fall 3d



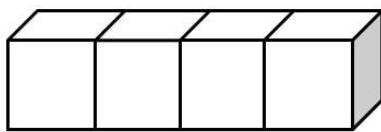
Fall 3e

Fall 4: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen alle vier Würfel den Tisch berühren. Dafür gibt es **7 Möglichkeiten**:

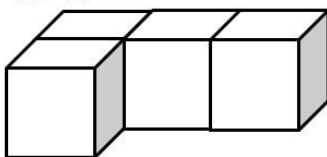
Wir können die vier Würfel nebeneinanderlegen (Fall 4a).

Wir können aber auch drei Würfel nebeneinanderlegen und den vierten Würfel vorn an den linken, mittleren oder rechten Würfel dieser Reihe anlegen (Fälle 4b, 4c und 4d). Wenn wir den vierten Würfel hinten anlegen, können wir den Würfelkörper so drehen, dass es wie vorn angelegt aussieht. Das wären also keine weiteren Möglichkeiten.

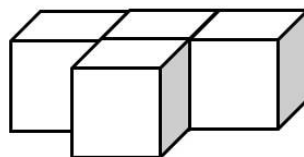
Wir können aber auch zwei Würfel in eine Reihe legen und dann die beiden anderen Würfel vorn anlegen, oder einen Würfel vorn und den anderen diagonal davon hinten anlegen (Fälle 4e, 4f und 4g).



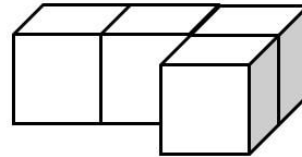
Fall 4a



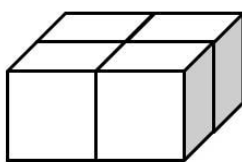
Fall 4b



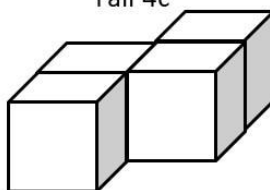
Fall 4c



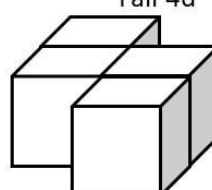
Fall 4d



Fall 4e



Fall 4f



Fall 4g

Insgesamt kann Kreisa $1 + 2 + 5 + 7 = 15$ Würfelkörper aus 4 Würfeln bauen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 4. Zur Beantwortung genügt es, für jede geforderte Anzahl der sichtbaren Seitenflächen ein Beispiel anzugeben. Zur Vervollständigung der Lösung erinnern wir uns auch an die Ergebnisse aus der Runde 3.

Wir haben schon für verschiedene Anzahlen Beispiele für Würfelkörper abgebildet, die wir jetzt noch einmal übersichtlich in der Tabelle aufschreiben.

Beispiel	Abbildung	Anzahl sichtbare Seitenflächen					
		vorn	oben	hinten	links	rechts	gesamt
W11	Fall 3a Aufgabe 1	3	3	3	1	1	11
W12	Fall 4e Aufgabe 3	2	4	2	2	2	12
W13	Fall 1 Aufgabe 3	3	1	3	3	3	13
W14	Fall 4a Aufgabe 3	4	4	4	1	1	14
W15	Fall 3e Aufgabe 3	3	3	3	3	3	15
W16	Fall 2b Aufgabe 3	4	2	4	3	3	16
W17	Fall 1 Aufgabe 3	4	1	4	4	4	17
W18	Abbildung 4a	5	4	5	2	2	18
W19	Abbildung 4b	4	3	4	4	4	19

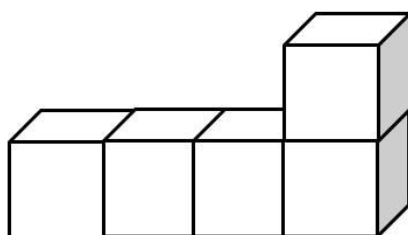


Abbildung 4a

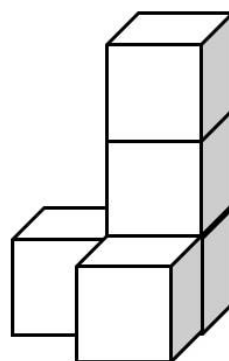


Abbildung 4b

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 5. Wenn Kreisa bereits einen Würfelkörper gebaut hat, dann kann sie einen weiteren Würfel so obendrauf legen, dass er an den bestehenden Würfelkörper mit einer Seitenfläche anstößt. Dann steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen um 4. Es könnten nämlich 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 2 Seitenflächen werden durch das Aufeinandersetzen unsichtbar.

- Beginnt sie mit Würfelkörper W16, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 20 sichtbaren Seitenflächen bauen (W20).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W17, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 21 sichtbaren Seitenflächen bauen (W21).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W18, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 22 sichtbaren Seitenflächen bauen (W22).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W19, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 23 sichtbaren Seitenflächen bauen (W23).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W20, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 24 sichtbaren Seitenflächen bauen (W24). Das ist aber das Gleiche, als würde sie mit dem Würfelkörper W16 beginnen und zwei weitere Würfel als Turm obendrauf legen, $16 + 4 + 4 = 24$ Seitenflächen.

Um für eine beliebige Zahl N einen Würfelkörper mit N sichtbaren Seitenflächen zu bauen, prüft Kreisa, welche der Zahl $N - 16$, $N - 17$, $N - 18$ oder $N - 19$ durch 4 teilbar ist. Wenn sie die Differenz gefunden hat, die durch 4 teilbar ist, beginnt sie mit dem entsprechenden Würfelkörper und legt die erforderliche Anzahl Würfel obendrauf.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Beispiel: Kreis will einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen bauen. Sie erkennt, dass $33 - 17 = 16$ durch 4 teilbar ist. Deshalb beginnt sie mit dem Würfelkörper W17 und stapelt 4 weitere Würfel als Turm obendrauf. Es sind dann wirklich $17 + 4 \cdot 4 = 33$ Seitenflächen sichtbar.



Andere Variante: Wenn Kreisa bereits einen Würfelkörper gebaut hat, dann kann sie einen weiteren Würfel aber auch so anlegen, dass er an den bestehenden Würfelkörper mit einer Seitenfläche anstößt und den Tisch berührt. Dann steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen um 3. Es könnten nämlich 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 3 Seitenflächen werden durch das Aufeinandersetzen unsichtbar.

- Beginnt sie mit Würfelkörper W17, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 20 sichtbaren Seitenflächen bauen (W20).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W18, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 21 sichtbaren Seitenflächen bauen (W21).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W19, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 22 sichtbaren Seitenflächen bauen (W22).
- Beginnt sie mit Würfelkörper W20, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 23 sichtbaren Seitenflächen bauen (W23). Das ist aber das Gleiche, als würde sie mit dem Würfelkörper W17 beginnen und zwei weitere Würfel anlegen, $17 + 3 + 3 = 23$ Seitenflächen.

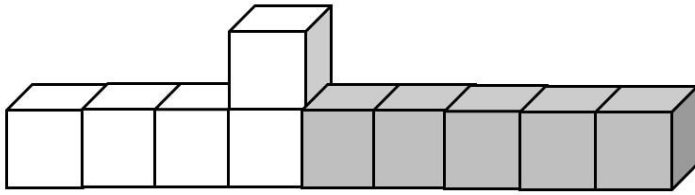
Um für eine beliebige Zahl N einen Würfelkörper mit N sichtbaren Seitenflächen zu bauen, prüft Kreisa, welche der Zahl $N - 17$, $N - 18$ oder $N - 19$ durch 3 teilbar ist. Wenn sie die Differenz gefunden hat, die durch 3 teilbar ist, beginnt sie mit dem entsprechenden Würfelkörper und legt die erforderliche Anzahl Würfel an.

Beispiel: Kreis will einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen bauen. Sie erkennt, dass $33 - 18 = 15$ durch 3 teilbar ist. Deshalb beginnt sie mit dem Würfelkörper W18 und legt 5 weitere Würfel an. Es sind dann wirklich $18 + 5 \cdot 3 = 33$ Seitenflächen sichtbar.

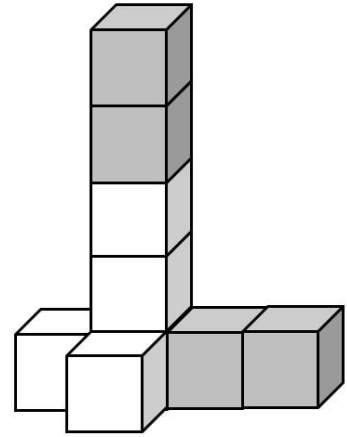
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



Natürlich kann Kreisa auch Würfel obendrauf legen und andere Würfel in der Tischebene anlegen, um eine gewünschte Zahl von sichtbaren Seitenflächen zu erhalten. Beginnt sie mit dem Würfelkörper W19, erhält sie auch einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen, wenn sie zwei Würfel obendrauf legt und zwei Würfel auf Tischebene anlegt, insgesamt $19 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 33$ sichtbare Seitenflächen.



Lösungshinweise zu Aufgabe 6 - Antwortsatz. Es ist nicht möglich, einen Würfelkörper mit 10 sichtbaren Seitenflächen zu bauen.

Begründung:

- Bei einem Würfel sind 5 Seitenflächen sichtbar.
- Bei zwei nebeneinander liegenden Würfeln sind 8 Seitenflächen sichtbar. Bei zwei übereinander liegenden Würfeln sind 9 Seitenflächen sichtbar.
- Verwenden wir 3 Würfel, so haben alle möglichen Würfelkörper mindestens 11 sichtbare Seitenflächen, wie wir an den 4 Möglichkeiten der Aufgabe 1 erkennen.
- Nehmen wir weitere Würfel dazu, steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen.

Es kann also keine Würfelkörper mit 10 sichtbaren Seitenflächen geben.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag der Sommeraufgabe 2022

Lösungshinweise zu Aufgabe 1. Wir bezeichnen die Felder der Kippfläche mit Buchstaben, um die Kippwege beschreiben zu können.

S	A	B	C	X
	D	E	F	G

Um alle Möglichkeiten zu finden, benötigen wir eine geeignete Systematik. Wir unterscheiden die Kippwege nach der Länge des Kippweges, den wir in der oberen Reihe wählen.

Zuerst viermal hintereinander nach rechts kippen: Wenn wir in S starten und immer nach rechts kippen, erhalten wir den Kippweg, den Quadrato schon gefunden hat. Da das Feld X erreicht ist, endet der Kippweg:

1. S-A-B-C-X

Zuerst dreimal hintereinander nach rechts kippen: Wenn wir von S nach A, dann nach B und dann nach C kippen, können wir von C auf F kippen. Von F dürfen wir aber nicht auf E kippen, weil wir dann X nicht mehr erreichen können, ohne schon berührte Felder erneut zu berühren. Deshalb gibt es nur eine Möglichkeit, den Kippweg fortzusetzen:

2. S-A-B-C-F-G-X

Zuerst zweimal hintereinander nach rechts kippen: Wenn wir von S nach A und dann nach B kippen, können wir von B auf E kippen. Von E dürfen wir aber nicht auf D kippen, weil wir dann X nicht mehr erreichen können (denn dazu müssten wir Felder erneut berühren). Deshalb setzen wir den Kippweg nach F fort.

Von F aus gibt es zwei Möglichkeiten, das Feld X zu erreichen:

3. S-A-B-E-F-C-X
4. S-A-B-E-F-G-X

Zuerst einmal nach rechts kippen: Wir haben schließlich die Möglichkeit, von S nach A und dann auf D zu kippen. Dann müssen wir den Weg fortsetzen und nach E kippen.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

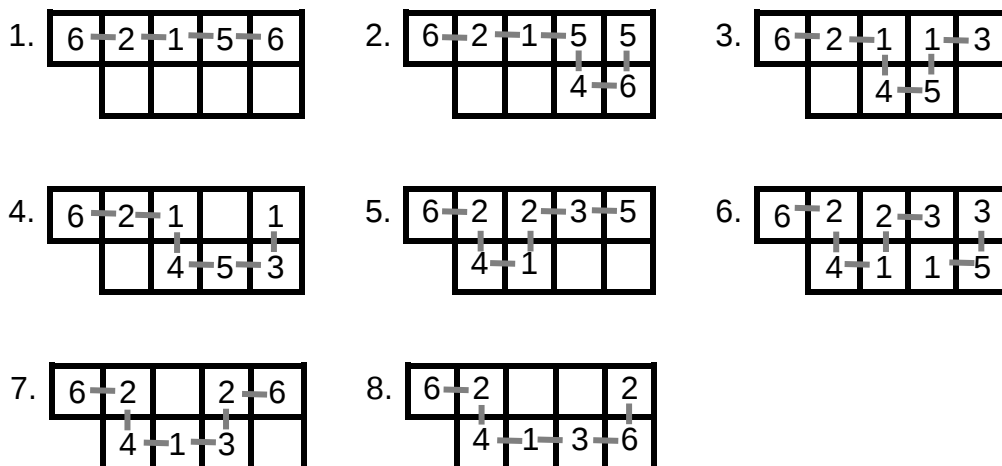
Von E aus können wir nach oben auf B kippen und müssen wir dann weiter auf C kippen. Nun haben wir zwei Möglichkeiten fortzusetzen, die wir schon mit (1) und (2) kennen:

5. S-A-D-E-B-C-X
6. S-A-D-E-B-C-F-G-X

Kippen wir dagegen von E weiter nach F, haben wir auch zwei Möglichkeiten fortzusetzen, die wir schon mit (3) und (4) kennen:

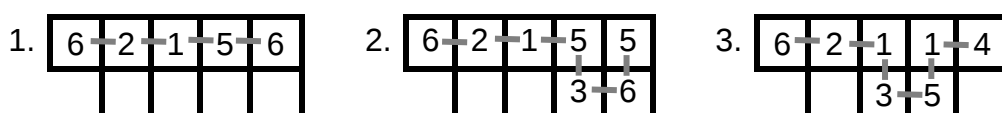
7. S-A-D-E-F-C-X
8. S-A-D-E-F-G-X

Andere Möglichkeiten finden wir nicht, Es gibt also insgesamt 8 verschiedene Kippwege. Um die Zahl zu finden, die wir auf X oben sehen, schreiben wir die Kippwege komplett auf:



Hinweis: Wenn auf dem Startfeld S oben 6 und rechts 5 zu sehen ist, gibt es Würfel, bei denen wir vorn 3 sehen. Mit einem solchen Würfel wurden die Kippbilder erzeugt.

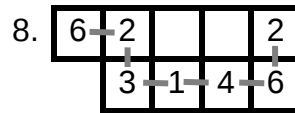
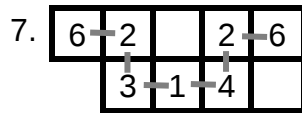
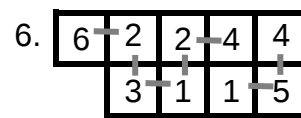
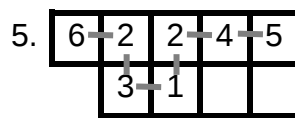
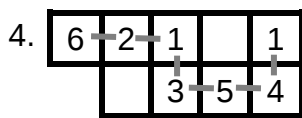
Es gibt aber auch Würfel, bei denen ist vorn 4 zu sehen. In diesem Fall steht in den Kippbildern anstelle 3 stets 4 und anstelle 4 stets 3. Die Kippwege sehen bei einem solchen Würfel so aus:



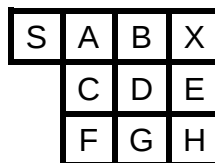
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Wenn wir alle Felder berühren wollen, dürfen wir nicht dreimal nach rechts kippen, weil wir dann bereits X erreicht haben und der Kippweg endet. Also müssen wir auch nach unten kippen.



Fall 1. Wir kippen von A nach C.

Wir dürfen jetzt aber nicht nach D kippen, weil wir dann auf dem Kippweg nach X das Feld F nur erreichen können, wenn wir Felder mehrfach berühren. Also kippen wir nach F und anschließend nach G.

Wir dürfen nun aber auch nicht nach D kippen, weil wir dann auf dem Kippweg nach X das Feld H nur erreichen können, wenn wir Felder mehrfach berühren. Also kippen wir nach H.

Der restliche Kippweg ist eindeutig, wenn wir alle Felder erreichen wollen und der Kippweg auf X endet:

1. S-A-C-F-G-H-E-D-B-X

Fall 2. Wir finden eine andere Möglichkeit, wenn wir von S nach A, dann nach B und von hier nach D kippen. Wir dürfen jetzt aber nicht nach G kippen, weil wir dann auf dem Kippweg nach X das Feld C nur erreichen können, wenn wir Felder mehrfach berühren. Nun ist der restliche Kippweg bereits eindeutig, wenn wir alle Felder erreichen wollen und der Kippweg auf X endet:

2. S-A-B-D-C-F-G-H-E-X

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Start:
oben 6,
rechts 5,
vorn 3

1.

6	2	5	4
	4	1	4
	5	1	2

2.

6	2	1	6
	2	4	2
	6	4	1

Start:
oben 6,
rechts 5,
vorn 4

1.

6	2	5	3
	3	1	3
	5	1	2

2.

6	2	1	6
	2	3	2
	6	3	1

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wenn auf dem Feld X wieder 6 zu sehen ist und wir rechts 3×3 -Felder anfügen, dann ist das Feld X für diese neuen Spalten wie das Feld S für die ersten Spalten. Quadrato hat recht, denn wir können immer wieder 3×3 -Fläche anfügen und das Kippen fortsetzen.

Es ist also möglich, Kippwege der geforderten Art zu finden, wenn wir folgende Fläche haben: $1 + 3 \times 3$ -Flächen, $1 + 3 \times 6$ -Flächen, $1 + 3 \times 9$ -Flächen und so weiter, allgemein $1 + 3 \times m$ -Flächen, wenn m eine durch 3 teilbare Zahl ist.

6	2	1	6	2	1	6
	2	4	2	2	4	2
	6	4	1	6	4	1

Lösungshinweise zu Aufgabe 4. Wie schon bei Aufgabe 3 können wir nicht nur nach rechts kippen, weil wir dann X erreichen, bevor wir alle Felder einmal berührt haben.

S	A	B	X
	C	D	E

Kippen wir von S nach A und dann nach C, müssen wir den Weg nach D fortsetzen. Würden wir nun nach E kippen, gelangen wir nach dem nächsten Kippen auf X. Der Kippweg endet, ohne B berührt zu haben. Würden wir aber nach B kippen, gelangen wir nach dem nächsten Kippen auf X. Der Kippweg endet, ohne E berührt zu haben.

Kippen wir dagegen von S nach A, dann nach B und von hier nach D, können wir C auf dem Kippweg nach X nur erreichen, wenn wir Felder mehrmals berühren.

Andere Kippwege gibt es nicht. Also können wir X nicht erreichen, wenn wir alle Felder der $1 + 2 \times 3$ -Fläche genau einmal berühren wollen.

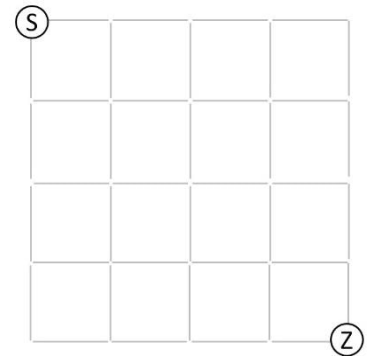
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

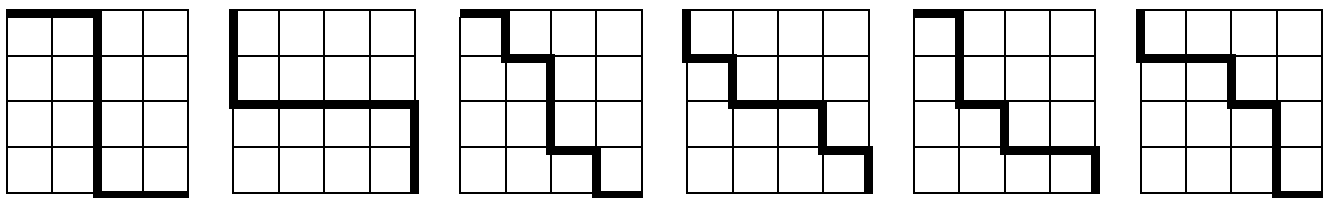
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu den Sommeraufgaben 2023

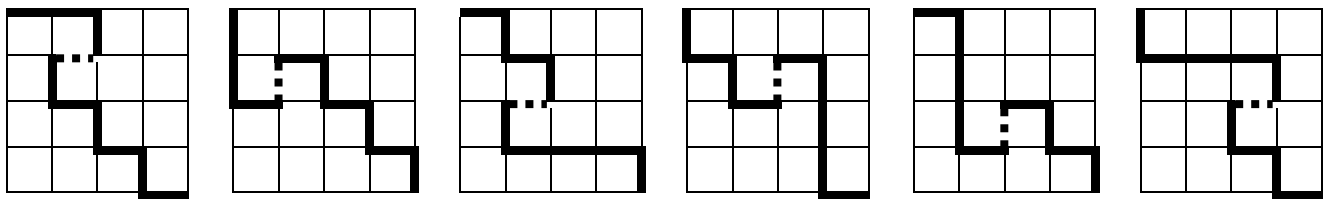
Kreisa und Quadrato spielen gern mit Legestäbchen. Sie wollen mit den Legestäbchen Wege legen, und zwar von links oben (Gitterpunkt **Start**) nach rechts unten (Gitterpunkt **Ziel**). Dabei sollen die Legestäbchen genau auf den Gitterlinien zwischen zwei Gitterpunkten liegen, jedoch nie zwei oder mehr Legestäbchen übereinander. Der Weg soll sich nirgends kreuzen. Wir merken uns die Position von S und Z und geben diese in den folgenden Abbildungen nicht mehr an.



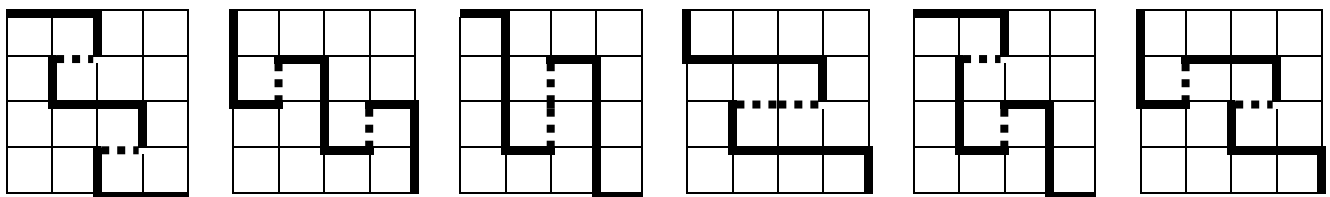
Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Wenn diese Wege das Gitternetz mit 16 Quadraten jeweils in zwei Teile zerlegen, die gleich viele Quadrate enthalten, so müssen in jedem Teil genau 8 Quadrate sein. Für einen Weg benötigst du mindestens 8 Legestäbchen, denn der Weg führt mindestens viermal nach rechts und viermal nach unten. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Weg mit 8 Legestäbchen zu legen. Es genügt laut Aufgabenstellung, eine Möglichkeit anzugeben. Hier findest du einige Beispiele:



Es sind aber auch Wege möglich, für die 10 Legestäbchen benötigt werden. Dies ist möglich, wenn du auf dem Weg ein Legestäbchen nach links (oder nach oben) legst (gestrichelt gezeichnet). Dann muss ja an einer anderen Stelle ein zusätzliches Legestäbchen nach rechts (oder nach unten) gelegt werden. Es genügt laut Aufgabenstellung, eine Möglichkeit anzugeben. Hier findest du einige Beispiele:



Es sind aber auch Wege möglich, für die 12 Legestäbchen benötigt werden. Dies ist möglich, wenn du auf dem Weg zwei Legestäbchen nach links (oder nach oben) legst (gestrichelt gezeichnet). Dann muss ja an einer anderen Stelle zwei zusätzliches Legestäbchen nach rechts (oder nach unten) gelegt werden. Hier findest du einige Beispiele:

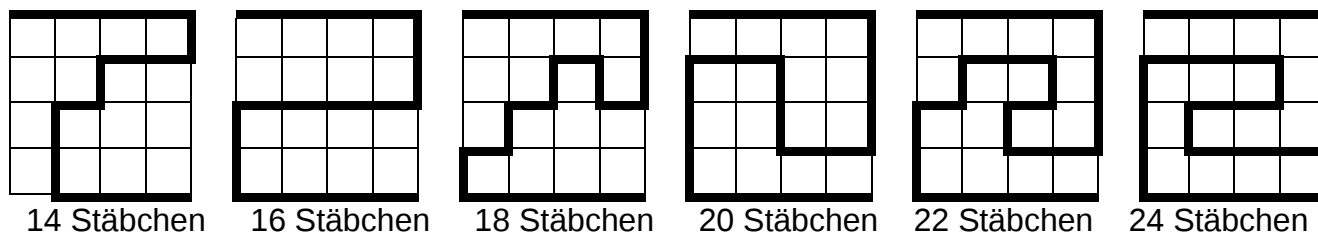


Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Es geht aber auch mit noch mehr Legestäbchen. Es sind 14, 16, 18, 20, 22 und 24 Legestäbchen möglich:



Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Es gibt keinen Weg, der das Gitternetz so zerlegt, dass der eine Teil doppelt so viele Quadrate enthält wie der andere Teil.

Begründung: Du kannst versuchen, die Aufteilung mit Hilfe einer Tabelle zu finden. Legst du eine Anzahl für den kleineren Teil fest, kennst du die erforderliche Anzahl für den größeren Teil (der doppelt so viele Quadrate wie der kleinere Teil enthält). Eine Teilung wie gefordert ist nur möglich, wenn die Gesamtanzahl aller Quadrate 16 ergibt.

Anzahl der Quadrate im Teil 1	Anzahl der Quadrate im Teil 2	Gesamtanzahl der Quadrate	Vergleich
1	$2 \cdot 1 = 2$	$1 + 2 = 3$	$3 < 16$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 + 4 = 6$	$6 < 16$
3	$2 \cdot 3 = 6$	$3 + 6 = 9$	$9 < 16$
4	$2 \cdot 4 = 8$	$4 + 8 = 12$	$12 < 16$
5	$2 \cdot 5 = 10$	$5 + 10 = 15$	$15 < 16$
6	$2 \cdot 6 = 12$	$6 + 12 = 18$	$18 > 16$

Setzt du die linke Spalte fort, werden es immer mehr Quadrate. In keinem Fall findest du insgesamt 16 Quadrate.

Lösungsvariante: Sicher hast du es auch bemerkt – in der Spalte „Gesamtanzahl der Quadrate“ stehen nur Zahlen, die ein Vielfaches von 3 sind. Diese Beobachtung kannst du auch ohne Tabelle finden. Bezeichne mit X die Anzahl der Quadrate im Teil 1, dann müssen im Teil 2 doppelt so viele Quadrate sein, also $2 \cdot X$. Die Gesamtanzahl der Quadrate beträgt damit

$$X + 2 \cdot X = 3 \cdot X$$

Da aber 16 nicht durch 3 teilbar ist, kann es keine Lösung der Aufgabe geben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Ermittle zuerst, wie viele Quadrate im kleineren Teil sein müssen, damit die Aufgabe gelöst werden kann. Du kannst wie in Aufgabe 2 wieder versuchen, die Aufteilung mit Hilfe einer Tabelle zu finden. Legst du eine Anzahl für den kleineren Teil fest, kennst du die erforderliche Anzahl für den größeren Teil (der dreimal so viele Quadrate wie der kleinere Teil enthält). Eine Teilung wie gefordert ist nur möglich, wenn die Gesamtanzahl aller Quadrate 16 ergibt.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Anzahl der Quadrate im Teil 1	Anzahl der Quadrate im Teil 2	Gesamtanzahl der Quadrate	Vergleich
1	$3 \cdot 1 = 3$	$1 + 3 = 4$	$4 < 16$
2	$3 \cdot 2 = 6$	$2 + 6 = 8$	$8 < 16$
3	$3 \cdot 3 = 9$	$3 + 9 = 12$	$12 < 16$
4	$3 \cdot 4 = 12$	$4 + 12 = 16$	$16 = 16$
5	$3 \cdot 5 = 15$	$5 + 15 = 20$	$20 > 16$

Setzt du die linke Spalte fort, werden es immer mehr Quadrate. Nur die Aufteilung mit 4 Quadraten und 12 Quadraten kann die Aufgabenstellung erfüllen.

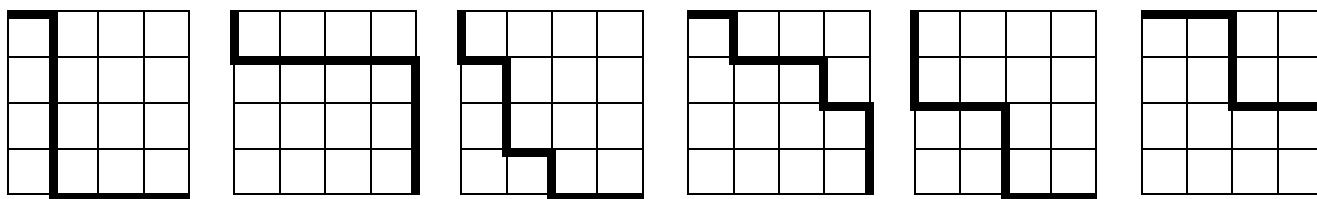
Lösungsvariante: Sicher hast du es auch bemerkt – in der Spalte „Gesamtanzahl der Quadrate“ stehen nur Zahlen, die ein Vielfaches von 4 sind. Diese Beobachtung kannst du auch ohne Tabelle finden. Bezeichne mit X die Anzahl der Quadrate im Teil 1, dann müssen im Teil 2 dreimal so viele Quadrate sein, also $3 \cdot X$. Die Gesamtanzahl der Quadrate beträgt damit

$$X + 3 \cdot X = 4 \cdot X$$

Da aber die Gesamtanzahl 16 beträgt, muss der kleinere Teil ($16 : 4 =$) 4 Quadrate umfassen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Der kürzeste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 8 Legestäbchen lang.

Herleitung: Um von S zu Z zu gelangen, sind mindestens 8 Legestäbchen erforderlich, denn es werden mindestens 4 Legestäbchen nach unten und mindestens 4 Legestäbchen nach rechts benötigt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Aufgabe mit 8 Legestäbchen zu erfüllen, zum Beispiel:



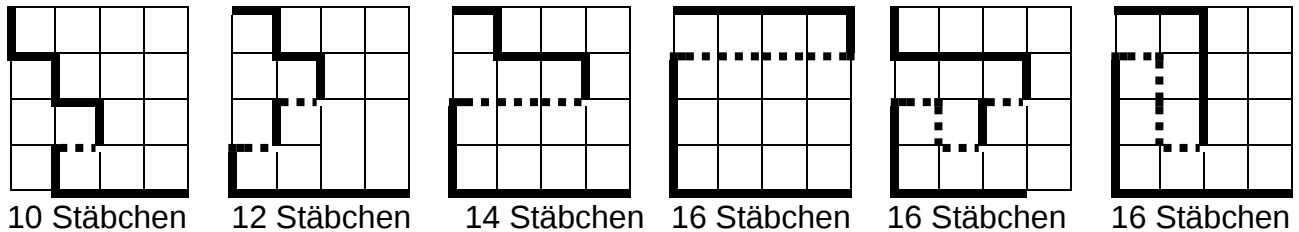
Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Der längste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 16 Legestäbchen lang.

Herleitung: Um von S zu Z zu gelangen, kannst du mehr als 8 Legestäbchen verwenden, wenn du auf einem Weg mit 8 Legestäbchen zusätzlich

- ein Legestäbchen nach links legst (10 Legestäbchen),
- oder zwei Legestäbchen nach links legst (12 Legestäbchen),
- oder drei Legestäbchen nach links legst (14 Legestäbchen),
- oder vier Legestäbchen nach links legst (16 Legestäbchen),
- oder drei Legestäbchen nach links und ein Legestäbchen nach oben legst (16 Legestäbchen),

- oder zwei Legestäbchen nach links und zwei Legestäbchen nach oben legt (16 Legestäbchen).

Der längste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 16 Legestäbchen lang.



Lösungshinweise zu Aufgabe 4: In Aufgabe 1 haben wir schon 24 verschiedene Wege gezeigt, die das Gitternetz in zwei Teile zerlegt, die beide 8 Quadrate umfassen.

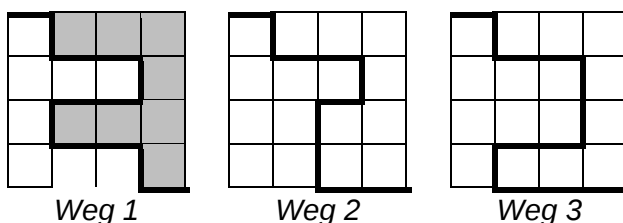
Wenn du **über 20** verschiedene Wege gefunden hast, ist das ein **sehr gutes Ergebnis!**

Eine Herleitung für die gefundenen Wege ist nicht erforderlich. Um aber noch mehr Beispiele zu finden, ist eine übersichtliche Systematik hilfreich, um möglichst keine Möglichkeiten zu übersehen. Die folgenden Erklärungen sind für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig – sie dienen nur als eine Ergänzung zu diesem Thema.

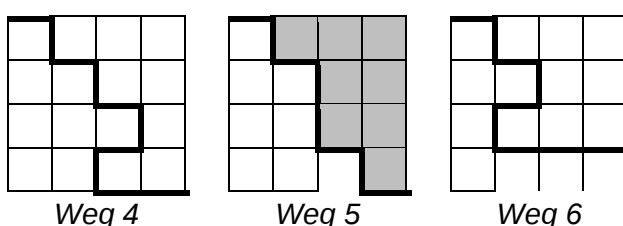
Wir bezeichnen die Richtung der Legestäbchen entsprechend der Wegrichtung von S nach Z mit rechts, links, unten und oben und kürzen die Richtungen mit **r**, **l**, **u** und **o** ab. Auf diese Weise können wir den Weg 1 so beschreiben: r-u-r-r-u-l-l-u-r-r-u-r.

Wir beginnen unsere Systematik mit **r-u-r** (wie beim Weg 1). Wir können nicht mit o fortsetzen (weil dann ein Teil aus einem Quadrat entsteht).

- Wir können aber mit r fortsetzen und müssen dann u anschließen (weil sonst ein Teil mit drei Quadraten entsteht). Nun finden wir 3 Wege (Weg 1, Weg 2, Weg 3) , so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 3 Wege (Weg 4, Weg 5, Weg 6),



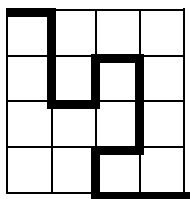
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

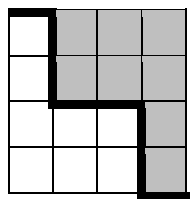
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir setzen unsere Systematik mit **r-u-u** fort (wie beim Weg 7). Wir können nicht mit **l** fortsetzen (weil dann ein Teil aus zwei Quadraten entsteht).

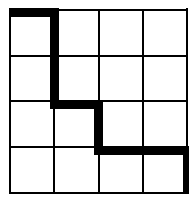
- Wir können aber mit **r** fortsetzen und dann **o** anschließen. Nun finden wir 1 Weg (Weg 7), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.
- Wir können aber auch mit **r** fortsetzen. Dafür finden wir 2 Wege (Weg 8, Weg 9), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.
- Wir können schließlich auch mit **u** fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 2 Wege (Weg 10, Weg 11), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



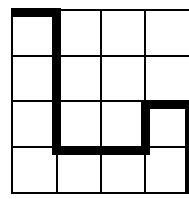
Weg 7



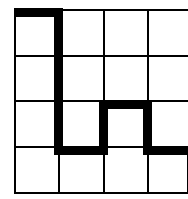
Weg 8



Weg 9



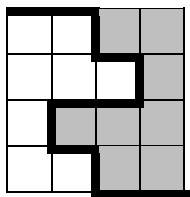
Weg 10



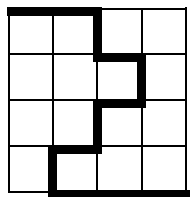
Weg 11

Wir setzen unsere Systematik mit **r-r-u** fort (wie beim Weg 12).

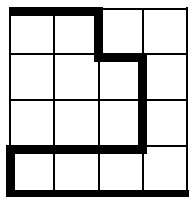
- Wir können mit **r** fortsetzen und dann **u** anschließen. Nun finden wir 3 Wege (Weg 12, Weg 13, Weg 14), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



Weg 12

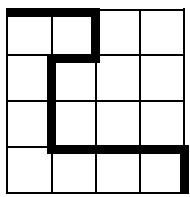


Weg 13

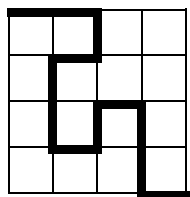


Weg 14

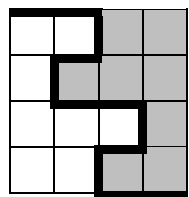
- Wir können aber auch mit **l** fortsetzen. Dafür finden wir sogar 4 Wege (Weg 15, Weg 16, Weg 17, Weg 18), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



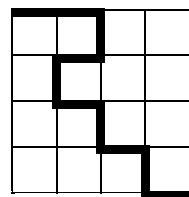
Weg 15



Weg 16

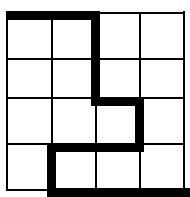


Weg 17

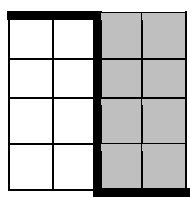


Weg 18

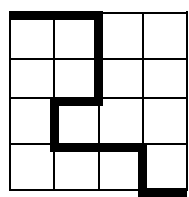
- Schließlich können aber auch mit **u** fortsetzen. Dafür finden wir 3 Wege (Weg 19, Weg 20, Weg 21), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



Weg 19



Weg 20



Weg 21

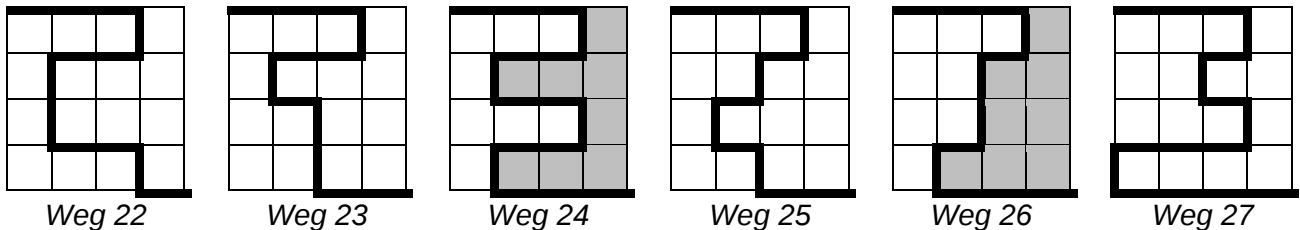
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

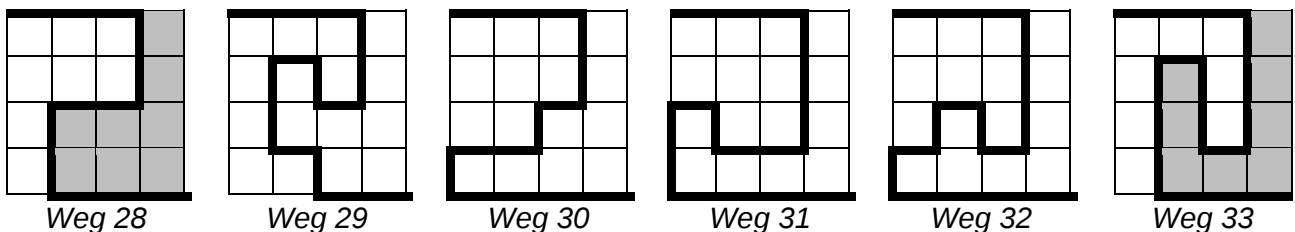
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir setzen unsere Systematik mit **r-r-r-u** fort (wie beim Weg 22).

- Wir können nicht mit r fortsetzen (weil dann ein Teil aus einem Quadrat entsteht).
- Wir können aber mit l fortsetzen. Dafür finden wir 6 Wege (Weg 22 bis Weg 27), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

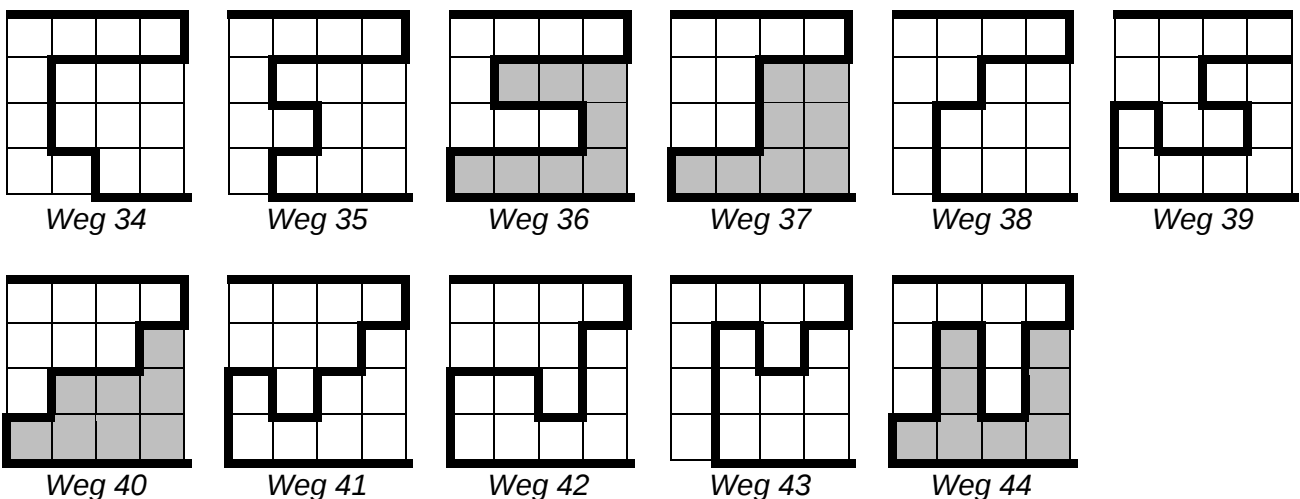


- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Auf diese Weise finden wir ebenfalls 6 Wege (Weg 28 bis Weg 33), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



Wir schließen unsere Systematik mit **r-r-r-r-u** ab (wie beim Weg 34).

- Wir können mit l fortsetzen und finden 11 Wege (Weg 34 bis Weg 44), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

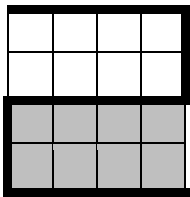


Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

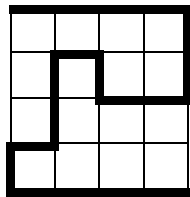
Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

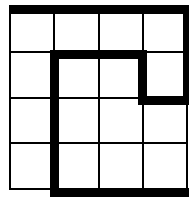
- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 11 Wege (Weg 45 bis weg 55), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.



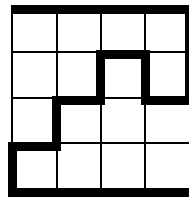
Weg 45



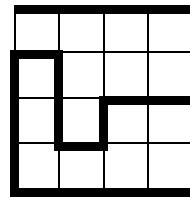
Weg 46



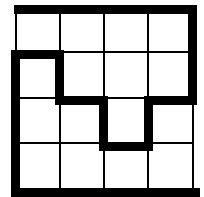
Weg 47



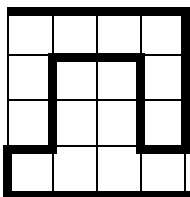
Weg 48



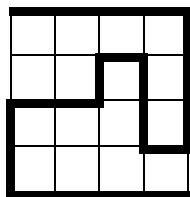
Weg 49



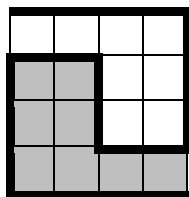
Weg 50



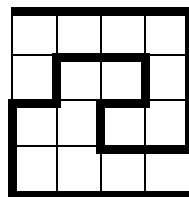
Weg 51



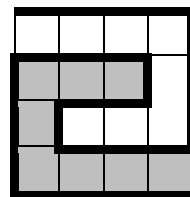
Weg 52



Weg 53



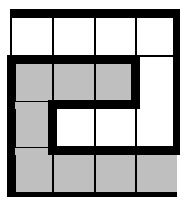
Weg 54



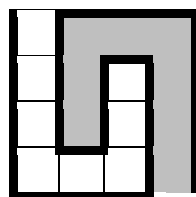
Weg 55

Wir haben also bereits 55 verschiedene Wege gefunden. Aber alle unsere Wege beginnen mit r. Wenn wir Wege jedoch mit u beginnen lassen, finden wir noch einmal so viele verschiedene Wege.

Diese erhalten wir, wenn wir die Wege 1 bis 55 an der Diagonalen S-Z kippen, zum Beispiel



Weg 55



Weg 55
(gekippt)

Lösungshinweise zu Aufgabe 5: Bei den Wegen in Aufgabe 4 kannst du alle Teile markieren, die deckungsgleich zum zweiten Teil sind. In der Darstellung hier sind das 17 Wege.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

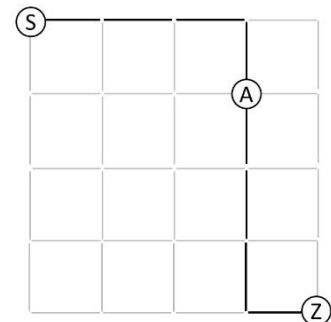
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2023

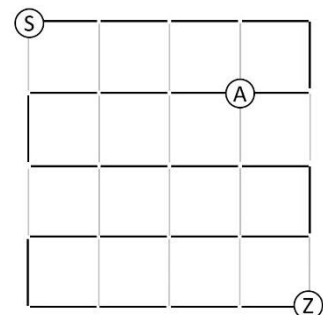
Kreisa und Quadrato haben in den Sommerferien auf einem 4x4-Gitternetz Legestäbchen gelegt und sich für die Größe der entstandenen zwei Teile interessiert. Dabei sollten die Legestäbchen genau auf den Gitterlinien zwischen zwei Gitterpunkten liegen, jedoch nie zwei oder mehr Legestäbchen übereinander. Der Weg sollte sich nirgends kreuzen.

Sie wollen wieder mit den Legestäbchen Wege legen, und zwar von links oben (Gitterpunkt **Start**) nach rechts unten (Gitterpunkt **Ziel**). Sie interessieren sich nun für die Anzahl der verwendeten Legestäben. Die Anzahl bezeichnen wir als Weglänge.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1. Der kürzeste Weg von S nach Z ist mindestens 8 Legestäbchen lang, denn er geht mindestens viermal nach rechts und mindestens viermal nach unten. Wie in der Abbildung zu sehen, gelingt ein Weg mit dieser Länge.



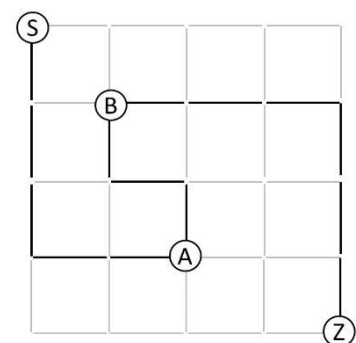
Der längste Weg benötigt 24 Legestäbchen und kann ebenfalls über A geführt werden.



Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Unabhängig von der Lage des Punktes A beträgt der kürzeste Weg 8 Legestäbchen. Der in Aufgabe 1 gezeigte Weg kann zunächst in der oberen Zeile geführt werden. In der Spalte, in der der Punkt A liegt, biegt der Weg nach unten, bis er die untere Zeile erreicht hat, um dann weiter nach rechts geführt zu werden.

Unabhängig von der Lage des Punktes A beträgt der längste Weg 24 Legestäbchen. Der in Aufgabe 1 gezeigte Weg berührt alle möglichen Punkte des Gitternetzes.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Von S nach A sind mindestens 5 Legestäbchen erforderlich (2 nach rechts und 3 nach unten). Von A nach B sind mindestens 3 Legestäbchen erforderlich (1 nach links und 2 nach oben). Schließlich sind von B nach Z mindestens 6 Legestäbchen erforderlich (3 nach rechts und 3 nach unten). Der kürzeste Weg $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Z$ muss also mindestens $(5 + 3 + 6 =) 14$ Legestäbchen betragen.



Kreisa findet tatsächlich einen Weg, der mit 14 Legestäbchen auskommt, wie die Abbildung zeigt.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

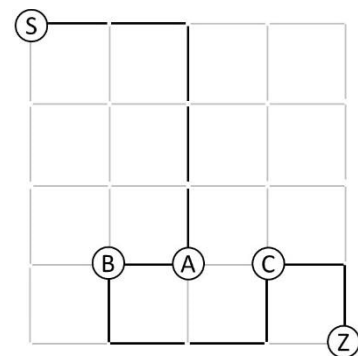
Lösungshinweise zu Aufgabe 4. Wir haben beobachtet, dass jeder Weg eine gerade Anzahl von Legestäbchen benötigt:

- Der kürzeste Weg von S nach Z benötigt 8 Legestäbchen (4 nach rechts und 4 nach unten).
- Für jedes Wegstück nach links müssen genauso viele Legestäbchen zusätzlich nach rechts gelegt werden.
- Für jedes Wegstück nach oben müssen genauso viele Legestäbchen zusätzlich nach unten gelegt werden.

Es kommen also immer eine gerade Anzahl von Legestäbchen hinzu.

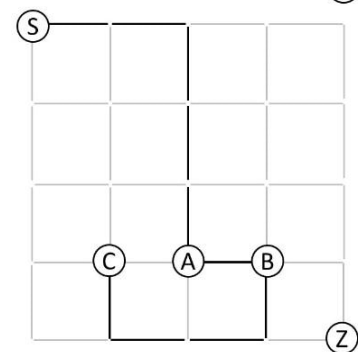
Lösungshinweise zu Aufgabe 5.

Für die erste Verteilung der Punkte A, B und C finden wir einen Weg, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt (siehe Abbildung).



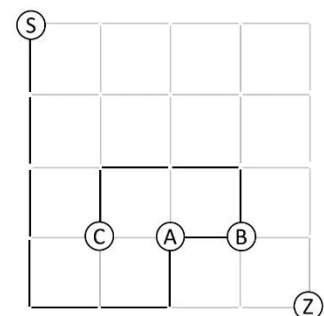
Für die zweite Verteilung gibt es keinen geeigneten Weg.

Verbinden wir S und A auf dem kürzesten Weg, so kann C von B nur wie angegeben erreicht werden. Dann würden alle Wege von C nach Z den bisherigen Weg kreuzen – dies entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe.



Wir können von S aus den Punkt A über einen Weg weiter nach rechts nur erreichen, wenn wir zuerst B oder Z berühren – dies entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe.

Verbinden wir S und A auf einem Weg um C herum, kann C mit B nur auf dem angegebenen Weg (oder auf einem größeren Umweg) verbunden werden. Dann würden alle Wege von C nach Z auf den bisherigen Weg stoßen – dies entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe.



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu den Sommeraufgaben 2024

Aufgabe 1) Kann Quadrato – wenn er mit 8 Spiel-Steinen in der Startaufstellung begann – im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten? Begründe deine Antwort.

Antwortsatz: Es ist nicht möglich, dass Quadrato die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhält.

Begründung: Wir wissen, dass aufgrund der Spielregeln im Verlaufe einer Türme-Wanderung in keiner Aufstellung Lücken vorkommen. Wir verteilen ja von links nach rechts die Spiel-Steine des linken Turms, so dass die Anzahl der Spiel-Steine auf jedem Feld

- größer wird (wenn dort ein Stein abgelegt wird)
- oder gleichbleibt (wenn das Feld beim Verteilen gar nicht erreicht wird).

Da in der Startaufstellung keine Lücken zulässig sind, können also im Verlauf auch keine Lücken entstehen.

Wir versuchen, die Aufstellung nach dem 4. Zug zu finden, indem wir rückwärts spielen.

Möglichkeit 1	4. Zug			1	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
Möglichkeit 2	4. Zug			2	4	0	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
entfällt wegen der Lücke									
Möglichkeit 3	4. Zug			3	4	0	0	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
entfällt wegen der Lücken									
Möglichkeit 4	4. Zug			4	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	

Betrachten wir zunächst die Möglichkeit 1. Um im 4. Zug an der 3. Stelle eine 1 zu erhalten, muss im 3. Zug eine Lücke gewesen sein – also ist auch Möglichkeit 1 nicht möglich.

Möglichkeit 1	3. Zug		?	0	?	?	?	?	
	4. Zug			1	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	

Zwischenergebnis: Wenn Quadrato im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten hat, war nach dem 4. Zug die Aufstellung 4 – 4. Nun untersuchen wir, mit welcher Aufstellung nach dem 3. Zug dies möglich sein könnte. Weil im 4. Zug zwei Türme zu sehen sind, haben wir dafür nur zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1	3. Zug		1	3	4				
	4. Zug			4	4				
	5. Zug				5	1	1	1	

Wir erkennen wie schon beim 4. Zug, dass eine 1 ganz links nur dann entstehen kann, wenn dort im 2. Zug eine Lücke ist – damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 2	3. Zug		2	3	3				
	4. Zug			4	4				
	5. Zug				5	1	1	1	

Zwischenergebnis: Wenn Quadrato im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten hat, war nach dem 3. Zug die Aufstellung 2 – 3 – 3. Nun untersuchen wir, mit welcher Aufstellung nach dem 2. Zug dies möglich sein könnte. Weil im 3. Zug drei Türme zu sehen sind, haben wir dafür drei Möglichkeiten:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Möglichkeit 1	2. Zug			1	1	3	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen bereits, dass eine 1 ganz links nur dann entstehen kann, wenn dort im 1. Zug eine Lücke ist – damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 2	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Nur wenn im 1. Zug ganz links eine 1 zu sehen ist, können wir diese Aufstellung im 2. Zug erhalten, ohne dass vorher Lücken zu sehen sind.

	1. Zug		1	1	1	2	3				
	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen aber, dass dann in der Startaufstellung bereits an 2. Stelle eine Lücke gewesen sein muss. Somit ist auch Möglichkeit 2 kein korrekter Spielverlauf. Damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 3	2. Zug			3	1	2	2				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Nur wenn im 1. Zug ganz links eine 1 zu sehen ist, können wir die Aufstellung im 2. Zug erhalten, ohne dass vorher Lücken zu sehen sind.

	1. Zug		1	1	1	2	3				
	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen aber, dass dann in der Startaufstellung bereits an 2. Stelle eine Lücke gewesen sein muss. Somit ist auch Möglichkeit 3 kein korrekter Spielverlauf. damit entfällt auch diese Möglichkeit.

Zusammenfassung: Weil wir alle Möglichkeiten rückwärts verfolgt haben, erkennen wir, dass die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 nicht im 5. Zug entstanden sein kann!

Hinweis: Es gibt Startaufstellungen, bei denen die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 in einem anderen Zug auftreten kann:

Im 1. Zug	Start	4	4				
	1. Zug		5	1	1	1	

Im 2. Zug	Start	2	3	3			
	1. Zug		4	4			
	2. Zug			5	1	1	1

Im 3. Zug	Start	3	1	2	2			
	1. Zug		2	3	3			
	2. Zug			4	4			
	3. Zug				5	1	1	1

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Im 4. Zug	Start	1	1	1	2	3				
	1. Zug		2	1	2	3				
	2. Zug			2	3	3				
	3. Zug				4	4				
	4. Zug					5	1	1	1	

Aufgabe 2) Quadrato spielt mit 3 Türmen in der Startaufstellung. Ein Turm besteht aus 3 Spiel-Steinen, ein Turm aus 2 Spiel-Steinen und ein Turm aus nur 1 Spiel-Stein. Er wundert sich: Egal wie er die Türme in der Startaufstellung anordnet, jedes Mal gibt es im Verlauf eine Gemeinsamkeit. Was hat Quadrato beobachtet? Prüfe seine Beobachtung für alle möglichen Startaufstellungen.

Antwortsatz: Bei jeder Startaufstellung der drei Türme erhält Quadrato irgendwann die Aufstellung 3 – 2 – 1, die sich dann im weiteren Spielverlauf unverändert wiederholt.

Begründung: Es gibt insgesamt 6 Möglichkeiten, die Reihenfolge der drei Türme festzulegen (ohne Lücken dazwischen).

A: 1 – 2 – 3, B: 1 – 3 – 2, C: 2 – 1 – 3, D: 2 – 3 – 1, E: 3 – 1 – 2, F: 3 – 2 – 1.

Wir führen das Spiel für jede dieser Startaufstellungen aus:

Variante A

Start	1	2	3				
1. Zug		3	3				
2. Zug			4	1	1		
3. Zug				2	2	1	1
4. Zug					3	2	1

Variante B

Start	1	3	2						
1. Zug		4	2						
2. Zug			3	1	1	1			
3. Zug				2	2	2			
4. Zug					3	3			
5. Zug						4	1	1	
6. Zug							2	2	1
7. Zug								3	2

Variante C

Start	2	1	3				
1. Zug		2	4				
2. Zug			5	1			
3. Zug				2	1	1	1
4. Zug					2	2	1
5. Zug						3	2

Variante D

Start	2	3	1						
1. Zug		4	2						
2. Zug			3	1	1	1			
3. Zug				2	2	2			
4. Zug					3	3			
5. Zug						4	1	1	
6. Zug							2	2	1
7. Zug								3	2

Variante E

Start	3	1	2						
1. Zug		2	3	1					
2. Zug			4	2					
3. Zug				3	1	1	1		
4. Zug					2	2	2		
5. Zug						3	3		
6. Zug							4	1	1
7. Zug								2	2
8. Zug									3

Variante F

Start	3	2	1		
1. Zug		3	2	1	
2. Zug			3	2	1

Bei allen sechs Varianten erscheint spätestens nach dem 8. Zug stets die Aufstellung 3 – 2 – 1, die sich im weiteren Spielverlauf nicht mehr ändert.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Aufgabe 3) Kreisas Startaufstellung besteht aus ganz vielen Türmen, beginnend mit 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - ... und nach rechts immer um einen Spiel-Stein höher. Sie schreibt über dem Spielverlauf auf, wie viele Spiel-Steine nach jedem Zug im ganz linken Turm verwendet werden.

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 2 nach 1. Zug		3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 3 nach 2. Zug			4	5	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 4 nach 3. Zug				6	7	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Wie hoch ist der linke Turm in der 6. Aufstellung?

Antwortsatz: Der linke Turm ist in der 6. Aufstellung 9 Spiel-Steine hoch.

Begründung: Wir setzen den Spiel-Verlauf fort.

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	8	9	?	?	?	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1 zum Start (0. Zug)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 5 nach 4. Zug					8	8	9	9	10	11	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 6 nach 5. Zug						9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	...

Aufgabe 4) Kreisa hat eine Formel erkannt, wie sie die Höhe des linken Turms in der 9. Aufstellung berechnen könnte. Hast du es auch erkannt? Gib diese Formel an und berechne die Höhe des linken Turms in der 14. Aufstellung.

Antwortsatz: Kreisa hat folgende Formel gefunden: Ist in einer Aufstellung mit der Nummer X der linke Turm Y Spiel-Steine hoch, dann ist in der Aufstellung Y der linke Turm $X + Y - 1$ Spielsteine hoch. Der linke Turm in der Aufstellung 14 ist 22 Spiel-Steine hoch.

Herleitung: Wir ergänzen die Übersicht über die Turm-Höhen:

- In der Aufstellung 2 ist der linke Turm 3 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 3 ist der linke Turm 4 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 4 ist der linke Turm 6 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 6 ist der linke Turm 9 Spiel-Steine hoch.

Wir erkennen aus der 1. Zeile: In der Aufstellung 3 ist der linke Turm $2 + 3 - 1 = 4$ Steine hoch.

Wir erkennen aus der 2. Zeile: In der Aufstellung 4 ist der linke Turm $3 + 4 - 1 = 6$ Steine hoch.

Wir erkennen aus der 3. Zeile: In der Aufstellung 6 ist der linke Turm $4 + 6 - 1 = 9$ Steine hoch.

Wir vermuten aus der 4. Zeile: In der Aufstellung 9 ist der linke Turm $6 + 9 - 1 = 14$ Steine hoch.

Wir prüfen diese Vermutung, indem wir die Türme-Wanderung fortsetzen:

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	8	9	11	12	14	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 2 nach 1. Zug		3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
...																...
Aufstellung 6 nach 5. Zug						9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	...
Aufstellung 7 nach 6. Zug							11	11	12	13	13	14	15	15	16	...
Aufstellung 8 nach 7. Zug								12	13	14	14	15	16	16	17	...
Aufstellung 9 nach 8. Zug									14	15	15	16	17	17	18	...

Wir können also die Vermutung bestätigen. Wir kennen die Höhe des linken Turms in der Aufstellung $X = 9$ (der Turm ist $Y = 14$ Spiel-Steine hoch). Also ist der linke Turm in der Aufstellung 14 insgesamt $9 + 14 - 1 = 22$ Spiel-Steine hoch.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2024

Aufgabe 1) Lösungshinweise – Antwortsatz: Nein, Quadrato kann die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 nicht erhalten.

Begründung: Wenn im 5. Zug ganz rechts ein Turm mit nur einem Spielstein zu sehen ist, kann im 4. Zug nur ein Turm vorhanden sein. Da aber insgesamt 4 Türme zu sehen sind, kann die Aufstellung nicht mit den neuen Regeln entstanden sein.

4. Zug					?								
5. Zug			5	1	1	1							

Aufgabe 2) Lösungshinweise – Antwortsatz: Unabhängig von der Anordnung der drei genannten Türme in der Startaufstellung erscheint die Aufstellung 1 – 2 – 3, die sich im Weiteren nicht mehr verändert.

Herleitung: Wir probieren alle sechs Möglichkeiten aus, die Türme mit der Höhe 1, 2 und 3 nebeneinander anzuordnen. Wir erkennen, dass sich spätestens nach dem 3. Zug die Aufstellung 1 – 2 – 3 zeigt, die sich bei Fortsetzung des Spiels nicht mehr verändert.

Start	1	2	3						1	3	2		
1. Zug		1	2	3						2	1	3	
2. Zug										1	0	2	3
3. Zug												1	2
												3	
Start	2	1	3						2	3	1		
1. Zug	1	0	2	3					1	2	0	3	
2. Zug			1	2	3					1	0	2	3
3. Zug												1	2
												3	
Start	3	1	2						3	2	1		
1. Zug	2	0	1	3					2	1	0	3	
2. Zug	1	0	0	2	3				1	0	0	2	3
3. Zug				1	2	3						1	2
												3	

Aufgabe 3) Lösungshinweise – Antwortsatz: Nach wenigen Spielzügen hat sich die Startaufstellung umgekehrt und bleibt im weiteren Verlauf unverändert.

Begründung: Wir führen beide Spiele aus und notieren die entstehenden Aufstellungen.

Start	1	2	3					
1. Zug		3	3					
2. Zug			4	1	1			
3. Zug				2	2	1	1	
4. Zug					3	2	1	
5. Zug						3	2	1

Start	1	2	3	4					
1. Zug		3	3	4					
2. Zug			4	5	1				
3. Zug				6	2	1	1		
4. Zug					3	2	2	1	1
5. Zug						3	3	2	1
6. Zug							4	3	2
7. Zug								4	3

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Aufgabe 4) Lösungshinweise – Antwortsatz: Die umgekehrte Startaufstellung von 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 wird nach dem 9. Zug zu sehen sein.

Begründung: Wir schreiben die bisherigen Beobachtungen in einer Tabelle auf.

Anzahl Türme	n	1	2	3	4
Anzahl der Züge	m	1	3	4	6

Die Folge 1 – 3 – 4 – 6 haben wir auch schon bei Aufgabe 3 der Sommeraufgabe gesehen. Wir wollen deshalb vermuten, dass sich für $n = 6$ die Anzahl $m = 4 + 6 - 1 = 9$ und ebenso für $n = 9$ die Anzahl $m = 6 + 9 - 1 = 14$ ergeben könnte. Wir prüfen es:

Start	1	2	3	4	5	6								
1. Zug		3	3	4	5	6								
2. Zug			4	5	6	6								
3. Zug				6	7	7	1							
4. Zug					8	8	2	1	1	1				
5. Zug						9	3	2	2	2	1	1	1	
6. Zug							4	3	3	3	2	2	2	1
7. Zug								4	4	4	3	2	2	1
8. Zug									5	5	4	3	2	1
9. Zug										6	5	4	3	2

Start	1	2	3	4	5	6	7	8	9										
1. Zug		3	3	4	5	6	7	8	9										
2. Zug			4	5	6	6	7	8	9										
3. Zug				6	7	7	8	8	9										
4. Zug					8	8	9	9	10	1									
5. Zug						9	10	10	11	2	1	1	1						
6. Zug							11	11	12	3	2	2	2	1	1				
7. Zug								12	13	4	3	3	3	2	2	1	1	1	
8. Zug									14	5	4	4	4	3	3	2	2	2	1
9. Zug										6	5	5	5	4	4	3	3	3	2
10. Zug											6	6	6	5	5	4	3	3	2
11. Zug												7	7	6	6	5	4	3	2
12. Zug													8	7	7	6	5	4	3
13. Zug														8	8	7	6	5	4
14. Zug															9	8	7	6	5

Wir setzen also unsere Tabelle mit der Formel bis $n = 9$ fort. Für die nächsten Spalten dieser Tabelle vermuten wir weitere Züge-Zahl, auch wenn wir es (noch) nicht geprüft haben.

Anzahl Türme	n	1	2	3	4	6	9	14	22	35
Anzahl der Züge	m	1	3	4	6	9	14	22?	35?	56?

Es erscheint nun spannend, ob wir beweisen können (ohne aber das Spiel so lange zu spielen), ob wir die Fragezeichen weglassen dürfen. Außerdem wäre es sicherlich interessant, auch für die noch fehlenden Türme-Anzahlen $n = 5, 7, 8, 10, \dots$ die Anzahl der benötigten Züge bis zur Umkehrung der Startaufstellung ermitteln zu können.