LEHRGANG
DER ELEMENTARMATHEMATIK

Lehrbücher der Mathematik

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für das Hoch- und Fachschulwesen

von Prof. Dr. K. Bögel †, H. Birnbaum, Dr.-Ing. H. Götzke, H. Kreul, W. Leupold,

Prof. Dr. P. H. Müller, Dr. F. Müller

Lehrgang der Elementarmathematik

zur Vorbereitung auf die Fachschulreife

von H. Kreul, K. Kulke, H. Pester, R. Schroedter

6. Auflage · Mit 494 Bildern und 795 Aufgaben mit Lösungen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

AUTOREN

Federführung:

Hans Kreul

Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau

Autoren:

Hans Kreul

Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau
(Arithmetik und Algebra)

Dipl.-Math. Klaus Kulke

Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau
(Aufgaben zur Arithmetik und Algebra)

Heinz Pester

Ingenieurschule für Maschinenbau und Textiltechnik, Karl-Marx-Stadt
(Stereometrie, Aufgaben zur Planimetrie und Stereometrie)

Rolf Schroedter

Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
(Planimetrie und Trigonometrie)

Die Begutachtung und Lektorierung des Manuskripts wurde durchgeführt von:
Heinz Nickel, Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden
Fritz Warnecke †, Ingenieurschule für Schwermaschinenbau, Wildau

Beratend wirkte mit
Frau Prof. Dr. Görke, Pädagogisches Institut der Humboldt-Universität, Berlin

Redaktionsschluß 15. 3. 1968
ES 20 C 2
Copyright by VEB Fachbuchverlag Leipzig 1968
Verlagslektor: Alfred Sommer
Satz: Buchdruckerei Oswald Schmidt KG, Leipzig III/18/65
Druck: (52) Nationales Druckhaus, VOB National
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/44/68
10,80

GELEITWORT

Die stürmische Entwicklung der Wissenschaft und Technik in der sozialistischen Gesellschaft stellt laufend höhere Anforderungen an den Mathematikunterricht der Fachschulen der DDR sowohl hinsichtlich des Umfanges als auch der Qualität der zu vermittelnden Kenntnisse und Fähigkeiten. Diese gesteigerten Anforderungen verlangen ein erhöhtes Anfangsniveau der Bewerber für das Fachschulstudium, das dem Abschluß einer Ausbildung an einer zehnklassigen polytechnischen Oberschule entspricht.

Um den Bewerbern für das Fachschulstudium während eines Vorbereitungslehrganges oder bei einer wiederholenden Orientierung ein für diesen Zweck zugeschnittenes Lehrbuch in die Hand geben zu können, wurde auf Veranlassung des Staatssekretariates für das Hoch- und Fachschulwesen in Verbindung mit der Zentralen Fachkommission für Mathematik ein Autorenkollektiv mit der Ausarbeitung des vorliegenden *Lehrganges der Elementarmathematik* beauftragt.

Dieser Lehrgang enthält die der obengenannten Zielsetzung entsprechenden Stoffgebiete, wobei eine Betonung einzelner Themen sowie die Zusammenstellung der Aufgaben im Hinblick auf ein hierauf aufbauendes Studium an einer Fachschule erfolgte.

Bei der Gestaltung des Manuskriptes zur 1. Auflage wurden die Autoren dieses Buches von Herrn FRITZ WARNECKE † in einer Weise unterstützt, die weit über das normale Maß einer Lektorentätigkeit hinausgeht. Ihm sei an dieser Stelle herzlichst dafür gedankt. Besonderer Dank gilt auch Frau Prof. DR. GÖRKE und Herrn HEINZ NICKEL für zahlreiche fachliche und methodische Hinweise und Ratschläge sowie dem VEB Fachbuchverlag für die sorgfältige Drucklegung.

Wir sind überzeugt, daß der *Lehrgang der Elementarmathematik* eine wertvolle Hilfe bei der Vorbereitung auf ein Fachschulstudium sein wird, und wünschen den Lesern viel Erfolg beim Studium.

Dresden, August 1962

Zentrale Fachkommission für Mathematik beim Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen

INHALTSVERZEICHNIS

1. Vorbemerkungen 11

ARITHMETIK

2. Der Zahlbegriff 13
2.1. Die natürlichen Zahlen 13
2.2. Das dekadische Zahlensystem ... 14
2.3. Bestimmte Zahlen und allgemeine Zahlensymbole 14

3. Das Rechnen mit bestimmten Zahlen 15
3.1. Bezeichnungen 15
3.2. Teilbarkeit von Zahlen 16
3.2.1. Primzahlen 16
3.2.2. Teilbarkeitsregeln 17
3.2.3. Der größte gemeinsame Teiler .. 18
3.2.4. Das kleinste gemeinsame Vielfache 19
3.3. Gewöhnliche Brüche 20
3.3.1. Begriffserklärungen 20
3.3.2. Erweitern und Kürzen von Brüchen 21
3.3.3. Addition und Subtraktion gewöhnlicher Brüche 22
3.3.4. Multiplikation von Brüchen 23
3.3.5. Der Kehrwert eines Bruches 24
3.3.6. Division von Brüchen 24
3.3.7. Doppelbrüche 25
3.4. Dezimalbrüche 26
3.4.1. Begriffserklärungen 26
3.4.2. Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen 26
3.4.3. Multiplikation von Dezimalbrüchen 27
3.4.4. Division von Dezimalbrüchen ... 27
3.4.5. Umwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt 28
3.4.6. Das Runden von Dezimalbrüchen 29
3.5. Potenzen und Wurzeln 30
3.5.1. Quadrate und Kuben 30
3.5.2. Quadrat- und Kubikwurzeln 31
3.6. Tabellenrechnen 32
3.6.1. Bedeutung der Zahlentabellen .. 32
3.6.2. Aufsuchen von Quadratzahlen .. 33
3.6.3. Aufsuchen von Quadratwurzeln . 33
3.6.4. Aufsuchen von Kubikzahlen 33
3.6.5. Aufsuchen von Kubikwurzeln ... 33
3.6.6. Aufsuchen der Kehrwerte..... 34
3.6.7. Weitere Anwendungsmöglichkeiten der Tabelle 34
3.6.8. Interpolation 35
3.7. Der Rechenstab 36
3.7.1. Die Bedeutung des Rechenstabes 36
3.7.2. Der Aufbau des Rechenstabes ... 37
3.7.3. Einstellen und Ablesen von Zahlenwerten auf dem Rechenstab 38
3.7.4. Das Rechnen mit dem Rechenstab 38
3.7.4.1. Quadrate und Kuben 38
3.7.4.2. Quadratwurzeln 39
3.7.4.3. Kubikwurzeln 40
3.7.4.4. Kehrwerte 42
3.7.4.5. Multiplikation 43
3.7.4.6. Division 44
3.7.4.7. Zusammengesetzte Multiplikationen und Divisionen 46
3.7.4.8. Multiplikation und Division mit Hilfe der Reziprokskala 46
3.7.4.9. Weitere Hinweise zum Stabrechnen 47

Aufgaben 1 bis 79 48

4. Das Rechnen mit allgemeinen Zahlensymbolen 59
4.1. Die vier Grundrechenarten 59
4.1.1. Einfache Rechenoperationen mit allgemeinen Zahlensymbolen 59
4.1.2. Die negativen Zahlen 60
4.1.3. Addition und Subtraktion 63
4.1.4. Multiplikation 65
4.1.5. Division 67
4.1.6. Die rationalen Zahlen 68

4.2. Das Rechnen mit algebraischen Summen ... 68
4.2.1. Die Bedeutung der Klammern .. 68
4.2.2. Auflösen und Setzen additiver und subtraktiver Klammern ... 69
4.2.3. Multiplikation von Klammerausdrücken ... 70
4.2.4. Binomische Formeln ... 72
4.2.5. Division von Klammerausdrücken 74
4.2.6. Ausklammern gemeinsamer Faktoren ... 76
4.2.7. Bruchrechnung ... 77
4.2.7.1. Erweitern und Kürzen ... 77
4.2.7.2. Addition und Subtraktion von Brüchen ... 78
4.2.7.3. Multiplikation und Division von Brüchen ... 80
4.2.7.4. Doppelbrüche ... 80
Aufgaben 80 bis 122 81

5. Potenzrechnung ... 91
5.1. Begriffserklärungen ... 91
5.2. Potenzgesetze ... 93
5.2.1. Addition und Subtraktion von Potenzen ... 93
5.2.2. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Hochzahlen ... 93
5.2.3. Division von Potenzen mit gleichen Hochzahlen ... 94
5.2.4. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Grundzahlen ... 95
5.2.5. Potenzieren einer Potenz ... 95
5.2.6. Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen ... 96
5.2.7. Überblick über die Potenzgesetze für Potenzen mit gleichen Grundzahlen ... 97
5.3. Erste Erweiterung des Potenzbegriffes ... 98
5.3.1. Potenzen mit ganzzahligen negativen Hochzahlen ... 98
5.3.2. Die Hochzahlen Null und Eins .. 99
5.3.3. Das Rechnen mit Potenzen mit negativen Hochzahlen ... 99
5.4. Anwendungen der Potenzen 101
5.4.1. Schreibweise rationaler Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen ... 101
5.4.2. Schreibweise von Maßeinheiten . 101
5.5. Potenzen von Binomen ... 102
Aufgaben 123 bis 147 ... 104

6. Wurzelrechnung ... 108
6.1. Radizieren als erste Umkehrung des Potenzierens ... 108
6.2. Rationale und irrationale Zahlen 111
6.3. Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Zweite Erweiterung des Potenzbegriffes) ... 113
6.4. Wurzelgesetze ... 114
6.4.1. Addition und Subtraktion von Wurzeln ... 114
6.4.2. Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten ... 115
6.4.3. Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten ... 116
6.4.4. Rationalmachen des Nenners ... 117
6.4.5. Radizieren von Potenzen ... 118
6.4.6. Radizieren von Wurzeln ... 119
6.4.7. Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten ... 120
6.4.8. Rückblick auf die Wurzelgesetze 120
Aufgaben 148 bis 179 ... 121

7. Logarithmenrechnung ... 127
7.1. Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens ... 127
7.1.1. Begriffserklärungen ... 127
7.1.2. Logarithmengesetze ... 129
7.2. Die dekadischen Logarithmen ... 131
7.2.1. Begriffserklärungen ... 131
7.2.2. Die Logarithmentafel ... 132
7.2.2.1. Die Einrichtung der Logarithmentafel ... 132
7.2.2.2. Das Aufsuchen der Logarithmen . 133
7.2.2.3. Das Aufsuchen des Numerus 134
7.2.2.4. Interpolation ... 134
7.3. Das Rechnen mit dekadischen Logarithmen ... 136
7.3.1. Logarithmische Berechnung von Produkten ... 137
7.3.2. Logarithmische Berechnung von Quotienten ... 137
7.3.3. Logarithmische Berechnung von Potenzen ... 139
7.3.4. Logarithmische Berechnung von Wurzeln ... 140
7.3.5. Logarithmische Berechnung komplizierterer Ausdrücke ... 141
7.4. Ausblick auf andere Logarithmensysteme ... 143
Aufgaben 180 bis 212 ... 143

ALGEBRA

8. Lineare Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten 149
8.1. Die verschiedenen Arten von Gleichungen 149
8.2. Das Umformen von Gleichungen 150
8.3. Numerische Lösung von linearen Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten 151
8.3.1. Der Begriff der linearen Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten 151
8.3.2. Gleichungen einfachster Form .. 152
8.3.3. Gleichungen mit Klammerausdrücken 153
8.3.4. Bruchgleichungen 154
8.3.5. Wurzelgleichungen 156
8.3.6. Das Umstellen von Formeln 159
8.3.7. Anwendungen 160
8.4. Das Rechnen mit Ungleichungen 163
Aufgaben 213 bis 224 165

9. Proportionen 170
9.1. Begriffserklärungen 170
9.2. Rechengesetze für Proportionen 171
9.3. Fortlaufende Proportionen 173
9.4. Direkte Proportionalität 174
9.5. Umgekehrte Proportionalität ... 175
9.6. Proportionen als Bestimmungsgleichungen 176
9.7. Prozentrechnung 179
9.7.1. Grundbegriffe 179
9.7.2. Berechnung des Prozentsatzes ... 179
9.7.3. Berechnung des Prozentwertes ... 180
9.7.4. Berechnung des Grundwertes ... 180
9.8. Promillerechnung 181
9.9. Zinsrechnung 182
Aufgaben 225 bis 236 183

10. Lineare Gleichungssysteme 186
10.1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten 186
10.1.1. Begriffserklärungen 186
10.1.2. Numerische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten 187
10.1.2.1. Das Einsetzverfahren 187
10.1.2.2. Das Gleichsetzverfahren 188
10.1.2.3. Das Additionsverfahren 189
10.1.2.4. Bemerkungen zu den drei Lösungsverfahren 189
10.1.3. Die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten 189
10.1.4. Schwierigere Gleichungssysteme 190
10.2. Lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten 196
10.2.1. Begriffserklärungen 196
10.2.2. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten 196
Aufgaben 237 bis 247 200

11. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 204
11.1. Begriffserklärungen 204
11.2. Numerische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen 205
11.2.1. Die reinquadratische Gleichung . 205
11.2.2. Die gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied 207
11.2.3. Die Normalform $x^2 + px + q = 0$ der quadratischen Gleichung 208
11.2.3.1. Die quadratische Ergänzung .. 208
11.2.3.2. Die Lösungsformel für gemischtquadratische Gleichungen 208
11.2.3.3. Die Lösung der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung... 211
11.3. Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung 212
11.3.1. Die Diskriminante 212
11.3.2. Der Wurzelsatz von VIETA 213
11.3.3. Produktform quadratischer Ausdrücke 214
Aufgaben 248 bis 262 216

12. Funktionen 219
12.1. Der Funktionsbegriff 219
12.1.1. Einführendes Beispiel 219
12.1.2. Funktions- und Bestimmungsgleichungen 221
12.1.3. Definitionsbereich einer Funktion 221
12.2. Das rechtwinklige Koordinatensystem 222
12.3. Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem 223
12.3.1. Darstellung empirischer Funktionen 223

12.3.2. Darstellung von Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung gegeben sind 225
12.3.3. Zusammenhang zwischen Funktion und zugehöriger Kurve 226
12.3.4. Der Schnittpunkt zweier Kurven 227
12.4. Die lineare Funktion 228
12.4.1. Begriffserklärungen 228
12.4.2. Die Funktion $y = mx$ 228
12.4.3. Die Funktion $y = mx + b$ 229
12.4.4. Grafische Darstellung einer linearen Funktion 230
12.4.5. Grafische Lösung von linearen Gleichungen sowie von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten 230
12.5. Die quadratische Funktion 232
12.5.1. Begriffserklärungen 232
12.5.2. Die Normalparabel $y = x^2$ 232
12.5.3. Die Parabel $y = x^2 + q$ 233
12.5.4. Die Parabel $y = x^2 + px + q$ .. 233
12.5.5. Grafische Lösung quadratischer Gleichungen 235
12.5.6. Die allgemeine quadratische Funktion $y = Ax^2 + Bx + C$ 236
12.6. Die Potenzfunktionen $y = x^n$ ... 237
12.6.1. $y = x^n$ für ganzzahliges positives n 237
12.6.2. $y = x^n$ für ganzzahliges negatives n 238
12.6.3. $y = x^n$ für gebrochene Werte von n 239
12.7. Die Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ 240
12.8. Die logarithmische Funktion 241
12.9. Zur Theorie des Rechenstabes ... 241
12.9.1. Funktionsleitern 241
12.9.2. Die logarithmische Teilung 242
12.9.3. Verschiebbare Leitern 242
12.9.4. Der logarithmische Rechenstab .. 243

Aufgaben 263 bis 270 244

PLANIMETRIE

13. Grundbegriffe der Geometrie 247
13.1. Punkt 247
13.2. Linie 247
13.3. Fläche 247
13.4. Raum 248
13.5. Winkel 248
14. Lagebeziehungen zwischen Geraden und Winkeln 249
14.1. Parallele Geraden 249
14.2. Nebenwinkel 249
14.3. Scheitelwinkel 250
14.4. Winkel an Parallelen 250
15. Symmetrie 251
15.1. Axiale Symmetrie 251
15.2. Zentrale Symmetrie 252
15.3. Geometrische Grundkonstruktionen 252
15.4. Geometrische Örter 253
16. Das Dreieck 255
16.1. Allgemeines Dreieck 255
16.2. Spezielle Dreiecke 256
16.3. Dreieckstransversalen und deren Schnittpunkte 257

Aufgabe 271 259
17. Das Viereck 259
17.1. Allgemeines Viereck 259
17.2. Spezielle Vierecke 260
18. Das Vieleck 263
18.1. Unregelmäßiges Vieleck 263
18.2. Regelmäßige Vielecke 263
19. Kongruenz 264
19.1. Kongruenz im allgemeinen 264
19.2. Kongruenz von Dreiecken 264
20. Ähnlichkeit 266
20.1. Ähnlichkeit im allgemeinen 266
20.2. Ähnlichkeit von Dreiecken 267
21. Strahlensätze 268
Aufgaben 272 bis 276 271
22. Sätze vom rechtwinkligen Dreieck 272

Aufgaben 277 bis 306 275
23. Strecken und Winkel am Kreis .. 278
23.1. Kreis und Gerade 278
23.2. Winkel am Kreis 280
23.3. Ähnlichkeit am Kreis 282

Aufgaben 307 bis 314 286
24. Berechnung von Flächen und Umfängen 287
24.1. Verschiedene Vierecke 287
24.2. Dreiecke 289
24.3. Unregelmäßige Vielecke 291
24.4. Regelmäßige Vielecke 291
24.5. Kreis und Kreisteile 293

Aufgaben 315 bis 512 297

TRIGONOMETRIE

25. Das Bogenmaß 315
26. Dreiecksberechnung 316
26.1. Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks 316
26.1.1. Die vier Winkelfunktionen 316
26.1.2. Kurvenbilder der Winkelfunktionen 319
26.1.3. Zahlenwerte der Winkelfunktionen 321
26.1.4. Spezielle Berechnungen 323
26.2. Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks 327
26.2.1. Erweiterung des Definitionsbereiches der Winkelfunktionen . 327
26.2.2. Der Sinussatz 329
26.2.3. Die Dreiecksfläche 332
26.2.4. Der Cosinussatz 333
Aufgaben 513 bis 543 336

STEREOMETRIE

27. Einteilung der Körper 341
27.1. Ebenflächner 341
27.2. Krummflächner 343
28. Darstellung der Körper 346
28.1. Mehrtafelprojektion 346
28.2. Axonometrische Projektion 348
28.2.1. Isometrische Projektion 348
28.2.2. Dimetrische Projektion 349
29. Körperberechnung 349
29.1. Berechnungsgrundlagen 349
29.2. Ebenflächner 350
29.2.1. Rechtkant und Würfel 350
Aufgaben 544 bis 571 352
29.2.2. Gerades Prisma 354
Aufgaben 572 bis 594 355
29.2.3. Satz des CAVALIERI 358
Aufgaben 595 bis 597 358
29.2.4. Pyramide 359
Aufgaben 598 bis 611 363
29.2.5. Pyramidenstumpf 364
Aufgaben 612 bis 625 368
29.2.6. Prismatoid 370
Aufgaben 626 bis 640 374
29.3. Krummflächner 376
29.3.1. Kreiszylinder 376
29.3.1.1. Gerader Voll- und Hohlzylinder . 376
Aufgaben 641 bis 682 378
29.3.1.2. Schiefer Voll- und Hohlzylinder . 382
Aufgaben 683 bis 685 383
29.3.1.3. Schief geschnittener gerader Zylinder 383
Aufgaben 686 bis 692 385
29.3.2. Zylinderhuf 386
Aufgaben 693 bis 700 387
29.3.3. Gerader und schiefer Kegel 388
Aufgaben 701 bis 717 390
29.3.4. Kegelstumpf 392
Aufgaben 718 bis 736 396
29.3.5. Kugel und Kugelteile 398
29.3.5.1. Volumenberechnung 398
29.3.5.2. Mantelberechnung 406
Aufgaben 737 bis 795 411
29.3.6. GULDINsche Regeln 416
Lösungen der Aufgaben 421
Anhang: Mathematische Zeichen (Auszug) 466
Allgemeine Formelzeichen nach TGL 0-1304 (Auszug) 468
Tafel der gesetzlichen Einheiten (Auszug) 468
Das griechische Alphabet 471
Sachwortverzeichnis 472

1. Vorbemerkungen

Gewisse Zahlenrechnungen bereiten den Schülern erfahrungsgemäß immer wieder große Schwierigkeiten, und zwar handelt es sich hierbei besonders um Aufgaben aus der Bruchrechnung. Aus diesem Grunde haben sich die Autoren entschlossen, dem Buch einen Abschnitt über das Rechnen mit bestimmten Zahlen voranzustellen, in dem die Bruchrechnung im Vordergrund steht. Darüber hinaus werden noch diejenigen Rechenhilfsmittel besprochen, deren Handhabung *jeder beherrschen* sollte, der das Studium an einer Fachschule aufnehmen möchte: die Zahlentafeln und der Rechenstab.

Der zweite Teil des Buches enthält die **Arithmetik**[1]) und die elementare **Algebra**[2]), wobei sich die Arithmetik mit den Rechengesetzen für bestimmte und allgemeine Zahlen befaßt, während die elementare Algebra die Gesetzmäßigkeiten untersucht, die bei der Bestimmung unbekannter Zahlen aus Gleichungen auftreten. Schließlich werden im dritten Teil die Gebiete aus der **Geometrie** dargestellt, auf denen der Mathematikunterricht an den Ingenieur- und Fachschulen aufbaut.

Um den umfangreichen Lehrstoff auf einem verhältnismäßig geringen Raum unterbringen zu können, mußte er *systematisch* angeordnet werden, wobei die *methodischen* Gesichtspunkte bei der Behandlung der einzelnen Teilgebiete keineswegs außer acht gelassen wurden. Es wird daher kaum möglich sein, den Lehrstoff im Unterricht in derselben Reihenfolge darzubieten, in der er im Lehrbuch angeordnet worden ist. Dies ist aber auch nicht erforderlich, denn das Buch soll dem Lernenden die Möglichkeit geben, den im Unterricht behandelten Stoff zu wiederholen und ihn an Hand zahlreicher Übungsaufgaben einzuprägen und zu festigen.

Für den Lernenden genügt es nicht, sich mehr oder weniger mechanisch eingeprägte mathematische Kenntnisse zu erarbeiten, das *Kennen* muß zum *Können* weiterentwikkelt werden. Mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten kann man aber nur dann erwerben, wenn man die formalen Rechengesetze der elementaren Mathematik *sicher beherrscht* und sie auoh sinnvoll und folgerichtig bei der Lösung von Aufgaben anzuwenden weiß. Es ist daher notwendig, die im Buche vorgerechneten Beispiele sorgfältig durchzuarbeiten und erst dann zum nächsten Beispiel überzugehen, wenn jeder Schritt der Rechnung erfaßt ist und der gesamte, dem Problem zugrunde liegende Gedankengang überblickt wird. Außer den durchgerechneten Beispielen enthält jeder Abschnitt eine große Anzahl von Übungsaufgaben, die es jedem Lernenden ermöglichen, seine Kenntnisse zu festigen und durch intensives Üben sichere Fertigkeiten in der Anwendung der einzelnen Rechengesetze und -verfahren zu erlangen. Es ist jedem Lernenden anzuraten, wenn auch nicht alle, so doch möglichst viele dieser Aufgaben selbständig durchzurechnen.

Die Lösungen der Aufgaben sind am Ende des Buches zusammengestellt. Man versuche jedoch, alle Aufgaben ohne Kenntnis der Lösung zu rechnen und das gefundene Ergebnis erst nach Beendigung der Rechnung mit der im Buche stehenden Lösung zu

---

[1]) arithmos (griech.) die Zahl.

[2]) Das Wort Algebra entstammt dem Arabischen.

vergleichen. Sollte das selbst erarbeitete Ergebnis ungenau oder gar falsch sein, so sind die Bemühungen so lange fortzusetzen, bis der Grund für die Ungenauigkeit bzw. der Fehler gefunden ist. Nur derjenige wird seine Sicherheit im Anwenden der verschiedenen Rechengesetze erfolgreich überprüfen können, der die Aufgaben in dieser Weise löst. Durch die hinten angegebenen Lösungen sollte man sich keinesfalls dazu verleiten lassen, die eigene Rechnung so „hinzubiegen", daß man auf die gewünschte Lösung kommt. Dieses Verfahren schadet mehr als es nützt, denn in diesem Falle hat man meist nur die Lösung im Auge, auf die man unbedingt kommen will. Man rechnet dann gedankenlos darauf zu, ohne sich dabei zu überlegen, *warum* man die einzelnen Rechenschritte unternimmt.

Es sollen auch noch einige Bemerkungen über die Durchführung von Zahlenrechnungen gemacht werden. Das Ziel einer jeden Zahlenrechnung besteht darin, aus gegebenen Zahlenwerten mit Hilfe bestimmter mathematischer Beziehungen einen neuen Zahlenwert zu ermitteln, der frei von Rechenfehlern ist. Fehlerfreies Rechnen aber verlangt einmal die Kenntnis der bei der jeweiligen Aufgabe anzuwendenden mathematischen Zusammenhänge und zum anderen auch eine gewisse Gewandtheit im Anwenden der richtigen Rechenregeln. Grundvoraussetzung ist jedoch eine peinliche Ordnung, die schon damit anfängt, daß man die gegebenen Zahlenwerte richtig aufschreibt und die nötigen Nebenrechnungen genauso sauber und übersichtlich anfertigt wie die eigentliche Rechnung. Dabei sollten die Nebenrechnungen nie auf irgendwelchen Schmierzetteln niedergeschrieben werden, sondern man sollte sie mit genau derselben Präzision ausführen wie die Hauptrechnung und sie auch mit in das eventuell vorhandene Rechenschema einordnen.

Um sich gegen Rechenfehler zu schützen, kann man verschiedene Wege einschlagen. Gegen grobe Fehler, z. B. falsche Kommastellung, schützt eine überschlägliche Rechnung, die man bei keiner Aufgabe unterlassen sollte. In manchen Fällen lassen sich Rechenfehler auch dadurch ausschalten, daß man die Rechnung noch einmal wiederholt. Dabei ist es jedoch ratsam, die beiden Rechnungen mindestens in ihrer Anordnung verschieden voneinander zu gestalten. Besser ist es, wenn man die Kontrollrechnung mit einem anderen Rechenverfahren durchzuführen versucht als die erste Rechnung.

Wer dieses Buch in der angeführten Weise bewußt und gründlich *durcharbeitet*, der wird bald feststellen können, daß es gar nicht so schwierig ist, Mathematik zu erlernen, wie es häufig hingestellt wird. Es wird sich zeigen, daß der Erfolg bei fleißiger Arbeit und bei fortwährendem Üben nicht ausbleiben wird. Ein gediegenes Können in der elementaren Mathematik wird aber nicht nur das Studium der höheren Mathematik, sondern auch das Studium fast aller anderen Unterrichtsfächer, vor allem der technischen Wissenschaften günstig beeinflussen.

2. Der Zahlbegriff

2.1. Die natürlichen Zahlen

Der Zahlbegriff entwickelte sich aus dem Bedürfnis der Menschen heraus, *gleichartige* Gegenstände, später auch Begriffe *abzählen* zu können. So entstanden zunächst die **benannten Zahlen,** bei denen nach dem eigentlichen *Zahlwort* noch eine Erläuterung folgt, aus der hervorgeht, um welche Dinge es sich bei der Zählung handelte. (Beispiele: 50 Menschen; 27 Tiere; 225 km usw.)
Sieht man von der Natur der gezählten Gegenstände ab, so führt diese *Abstraktion* auf den Begriff der **unbenannten Zahl.**
Unter **„Zahl"** schlechthin soll künftig stets eine *unbenannte Zahl* verstanden werden. Steht eine Zahl dagegen in Verbindung mit einer physikalischen Einheit oder mit einem anderen Begriff da, aus dem hervorgeht, was abgezählt worden ist, so spricht man von einer **Größe.**

Beispiele für Zahlen: 1; 127; 3520498 usw.

Beispiele für Größen: 3 Kinder; 5 kg; 20 km/h usw.

Alle Zahlen, die aus einem derartigen einfachen Zählvorgang hervorgehen, werden in dem bei uns gebräuchlichen Zahlensystem mit Hilfe bestimmter **Zahlensymbole,** den arabischen *Ziffern* 0, 1, 2, ..., 9 geschrieben:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...

Jede dieser Zahlen, von denen die folgende jeweils durch *Hinzufügen der Einheit 1* aus der vorhergehenden entsteht, heißt eine **natürliche Zahl.**
Die natürlichen Zahlen lassen sich durch Punkte auf einem Strahl *veranschaulichen.* Dazu trägt man vom Anfangspunkt *A* des Strahles aus auf diesem wiederholt eine Strecke von beliebig gewählter konstanter Länge ab und bezeichnet die entstehenden Teilpunkte der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, ... (Bild 1).

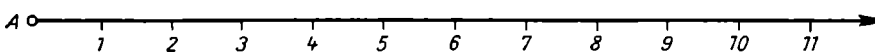


Bild 1

Diese Darstellung wird **Zahlenstrahl** genannt. Da sich der Zahlenstrahl in Richtung des Pfeiles unbegrenzt fortsetzen läßt, lassen sich auf ihm unendlich viele natürliche Zahlen unterbringen, d.h.:

Es gibt keine größte natürliche Zahl.

2.2. Das dekadische Zahlensystem[1])

Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, kann nicht jede Zahl ihr eigenes Zahlensymbol, d. h. eine eigene Ziffer, besitzen. Daher faßt unser Zahlensystem jeweils 10 Einheiten zu einer höheren Einheit zusammen:

10 Einer (E) = 1 Zehner (Z)
10 Zehner (Z) = 1 Hunderter (H)
10 Hunderter (H) = 1 Tausender (T) usw.

Aus diesem Grunde wird es **dekadisches Zahlensystem** oder **Dezimalsystem**[2]) genannt.
Im dekadischen Zahlensystem werden alle vorkommenden Zahlen mit Hilfe der zehn Ziffern 1 bis 9 und 0 geschrieben, wobei jeder Ziffer durch die Stellung, die sie innerhalb der Zahl einnimmt, ein bestimmter **Stellenwert** zugeordnet ist. So könnte man z. B. für die Zahl 7402 ausführlicher auch schreiben:

7 Tausender + 4 Hunderter + kein Zehner + 2 Einer.

Es ist zu erkennen, daß die Ziffer **Null**[3]) für das dekadische Zahlensystem unbedingt erforderlich ist, denn sie steht als Zeichen für eine an der jeweiligen Stelle fehlende Einheit.
Die Einheit 1 der natürlichen Zahlen läßt sich aber auch noch in kleinere Einheiten aufteilen. So unterteilt man

1 Einer (E) = 10 Zehntel (z)
1 Zehntel (z) = 10 Hundertstel (h)
1 Hundertstel (h) = 10 Tausendstel (t) usw.,

wobei sich diese *Feineinteilung* beliebig weit vorantreiben läßt. Auf diese Weise entstehen die **Dezimalbrüche,** bei denen die Bruchteile der Einheit von den ganzen Anteilen durch ein *Komma* abgetrennt werden. So bedeutet z. B. die Zahl 502,307:

5 Hunderter + kein Zehner + 2 Einer + 3 Zehntel + kein Hundertstel + + 7 Tausendstel.

Es gibt *unendlich viele Dezimalbrüche,* die auf dem Zahlenstrahl zwischen den natürlichen Zahlen untergebracht werden können. Eine genauere Einteilung der einzelnen Zahlenarten werden Sie im Verlaufe der folgenden Abschnitte noch kennenlernen.

2.3. Bestimmte Zahlen und allgemeine Zahlensymbole

Die in der Mathematik aufgestellten Gesetzmäßigkeiten gelten nicht nur für bestimmte einzelne Zahlenwerte, sondern sie sind ganz allgemein gültig.
So weiß jedes Kind aus dem Anfangsunterricht im Rechnen, daß die Aufgabe $3 + 8$ das gleiche Ergebnis besitzt wie die Aufgabe $8 + 3$. Es ist also

$$3 + 8 = 8 + 3.$$

[1]) deka (griech.) zehn. [2]) decem (lat.) zehn. [3]) nullum (lat.) nichts.

An Stelle der beiden bestimmten Zahlen 3 und 8 könnte in dieser Gleichung auch jede beliebige andere bestimmte Zahl stehen; so ist z. B. auch $2{,}79 + 0{,}86 = 0{,}86 + 2{,}79$ oder $705{,}36 + 1043{,}29 = 1043{,}29 + 705{,}36$ usw.
Man gelangt auf diese Weise schließlich zu dem aus der Arithmetik bekannten Satz:

> Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge man zwei Zahlen addiert. Stets erhält man das gleiche Ergebnis.

Verwendet man nun für die beiden Zahlen, die addiert werden sollen, keine **bestimmten Zahlen** (im Beispiel 3 und 8) mehr, sondern zwei **allgemeine Zahlensymbole,** etwa a und b, so läßt sich der Inhalt des obigen Satzes in Form der kurzen und für jeden verständlichen Gleichung

$$a + b = b + a$$

darstellen.
Diese Gleichung besitzt *allgemeine Gültigkeit*, d. h., sie ist stets gültig, welche bestimmten Zahlen man auch für die beiden allgemeinen Zahlensymbole a und b einsetzt.
Gewöhnlich verwendet man in Gleichungen von rein mathematischem Charakter für die allgemeinen Zahlensymbole Buchstaben, wobei man für bekannte Zahlen die ersten Buchstaben a, b, c, ... des Alphabets bevorzugt, während die letzten Buchstaben ... x, y, z meist den unbekannten Zahlen in Gleichungen vorbehalten bleiben.
Die für die allgemeinen Zahlensymbole verwendeten Buchstaben können ganze, gebrochene, benannte oder auch unbenannte Zahlen bedeuten. Wichtig ist dabei nur, daß *innerhalb derselben Aufgabe einem bestimmten Buchstaben auch immer ein und derselbe Zahlenwert* zukommt. Daher dürfen in einer Formel für verschiedene Größen niemals die gleichen allgemeinen Zahlensymbole verwendet werden.

3. Das Rechnen mit bestimmten Zahlen

3.1. Bezeichnungen

Am Beispiel der beiden allgemeinen Zahlen a und b werden zunächst die wichtigsten Bezeichnungen zusammengestellt, die bei den vier Grundrechenarten immer wieder auftreten:

Grundrechenart		a	Sprechweise für das Rechensymbol	b	Ergebnis
Addition	$a + b$	*Summand*	*plus*	*Summand*	*Summe*
Subtraktion	$a - b$	*Minuend*	*minus*	*Subtrahend*	*Differenz*
Multiplikation	$a \cdot b$	*Faktor*	*mal*	*Faktor*	*Produkt*
Division	$a : b$	*Dividend*	*durch*	*Divisor*	*Quotient*
oder	$\frac{a}{b}$	*Zähler*	*durch*	*Nenner*	*Bruch*

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren wird **Potenz** genannt. Man verwendet folgende Schreibweise:

$a \cdot a = a^2$ (gelesen: „a hoch zwei" oder „a Quadrat"),
$a \cdot a \cdot a = a^3$ (gelesen: „a hoch drei").

3.2. Teilbarkeit von Zahlen

Bei den in diesem Abschnitt dargestellten Eigenschaften von Zahlen handelt es sich nur um die Eigenschaften *ganzer* Zahlen.

3.2.1. Primzahlen

Läßt sich eine ganze Zahl durch eine andere ganze Zahl *ohne Rest* teilen, so wird der Divisor **Teiler** der gegebenen Zahl genannt.

BEISPIEL 1

Die Zahl 165 *besitzt die Teiler* 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55 *und* 165.

Da jede ganze Zahl durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist, nennt man im Beispiel 1 die Zahlen 1 und 165 ***unechte Teiler***, während alle übrigen Teiler *echte Teiler* heißen.
Alle ganzen Zahlen, die *keine echten Teiler* besitzen, heißen **Primzahlen.** Demnach gilt:

Eine Primzahl ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar.

Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw. *Die Zahl* 1 *ist keine Primzahl.*
Alle Zahlen, die echte Teiler besitzen, also z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 usw., werden **zusammengesetzte Zahlen** genannt.

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.

Die einzelnen Faktoren einer solchen Zerlegung heißen *Primfaktoren.*

BEISPIEL 2

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

3, 5 *und* 11 *sind die Primfaktoren;* $3 \cdot 5 \cdot 11$ *das Primzahlenprodukt;* $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ *die Zerlegung der Zahl* 165.

Wenn eine Zahl in ihre Primfaktoren zerlegt werden soll, empfiehlt es sich, *systematisch* vorzugehen und die Zahl der Reihe nach auf ihre Teilbarkeit durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7 usw. zu untersuchen. Dabei ist zu beachten, daß eine Primzahl auch mehrfach als Faktor in der Zerlegung auftreten kann. – Schließlich braucht man bei der Zerlegung nur diejenigen Primzahlen zu berücksichtigen, deren Quadrat kleiner oder höchstens gleich der gegebenen Zahl ist. Im Beispiel 2 braucht man also nur die Primzahlen bis zur 11 zu untersuchen, denn 13^2 ist bereits größer als die gegebene Zahl 165.

BEISPIEL 8

Die Zahl 326928 *ist in ihre Primfaktoren zu zerlegen.*

Lösung:

$$\begin{aligned} 326928 &= 2 \cdot 163464 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 81732 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 40866 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20433 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6811 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 973 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 139 \qquad \text{(139 ist Primzahl)} \\ 326928 &= 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 139 \end{aligned}$$

3.2.2. Teilbarkeitsregeln

Wenn eine ganze Zahl auf ihre Teilbarkeit hin untersucht werden soll, ist es vorteilhaft, die folgenden *Teilbarkeitsregeln* für die ganzen Zahlen von 2 bis 10 zu kennen.

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre *letzte Ziffer durch* 2 *teilbar* ist.

Eine durch 2 teilbare Zahl nennt man *gerade*; andernfalls heißt sie *ungerade*.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre *Quersumme durch* 3 *teilbar* ist.

Anmerkung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern, aus denen die Zahl zusammengesetzt ist. So ist z. B. die Quersumme der Zahl 326928 (vgl. 3.2.1., Beispiel 3): $3 + 2 + 6 + 9 + 2 + 8 = 30$. Da 30 durch 3 teilbar ist, muß auch 326928 durch 3 teilbar sein.
Bei der Bildung der Quersumme kann man von vornherein alle durch 3 teilbaren Ziffern streichen und nur noch vom verbleibenden Rest die Quersumme bilden, in unserem Beispiel also $2 + 2 + 8 = 12$. Ist die Quersumme dieses Restes durch 3 teilbar, so ist auch die ganze Zahl durch 3 teilbar.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus ihren *letzten beiden Ziffern bestehende Zahl durch* 4 *teilbar ist*.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre *letzte Ziffer eine* 5 *oder eine* 0 ist.

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie *gerade* ist und wenn sich ihre *Quersumme durch* 3 *teilen* läßt.

(Hier können bei der Quersummenbildung ähnlich wie bei der Dreierprobe von vornherein alle Sechsen gestrichen werden.)

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus ihren *letzten drei Ziffern bestehende Zahl durch* 8 *teilbar* ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre *Quersumme durch* 9 *teilbar* ist.

(Auch hier dürfen alle Neunen der Zahl vorher gestrichen werden.)

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie mit einer Null endet.

Die Teilbarkeitsregel für die 7 wurde weggelassen, weil sie so umständlich zu handhaben ist, daß die Division durch 7 schneller Klarheit über die Teilbarkeit verschafft als die Anwendung der Regel.

3.2.3. Der größte gemeinsame Teiler

Zwei oder mehrere ganze Zahlen können *gemeinsame Teiler* besitzen oder nicht. So besitzen die beiden Zahlen

$$21 = 3 \cdot 7 \quad \text{und} \quad 65 = 5 \cdot 13$$

keine gemeinsamen Teiler. Sie sind **teilerfremd** zueinander.
Dagegen besitzen die Zahlen

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{und} \quad 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

die gemeinsamen Teiler 3, 5, 9, 15 und 45. Von diesen fünf gemeinsamen Teilern ist 45 der größte. Die Zahl 45 heißt daher der **größte gemeinsame Teiler** der Zahlen 360 und 945.

Der größte gemeinsame Teiler mehrerer ganzer Zahlen ist das Produkt der höchsten Potenzen der Primfaktoren, die in *jeder* dieser Zahlen gleichzeitig enthalten sind.

BEISPIEL 1

Wie lautet der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 120, 252, 300, 672 *und* 29400?

Lösung: Man benutzt vorteilhaft folgende übersichtliche Anordnung:

$$\begin{array}{rl} 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 & \cdot 3 \quad \cdot 5 \\ 252 = 2 \cdot 2 & \cdot 3 \cdot 3 \quad \cdot 7 \\ 300 = 2 \cdot 2 & \cdot 3 \quad \cdot 5 \cdot 5 \\ 672 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & \cdot 7 \\ \underline{29400 = 2 \cdot 2 \cdot 2} & \underline{\cdot 3 \quad \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} \\ \text{g.g.T.} = 2 \cdot 2 & \cdot 3 = 12 \end{array}$$

Der größte gemeinsame Teiler wird in der Bruchrechnung *beim Kürzen von Brüchen* benötigt.
Schreibt man zwei oder mehrere ganze Zahlen, z.B. 360 und 945, als Produkte mit je 2 Faktoren, bei denen der eine Faktor der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen ist, so müssen die Ergänzungsfaktoren teilerfremd zueinander sein.

BEISPIEL 2

Der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen 360 *und* 945 *ist* 45 *(siehe oben!). Die in den Zerlegungen* $360 = 8 \cdot 45$ *und* $945 = 21 \cdot 45$ *auftretenden Ergänzungsfaktoren* 8 *und* 21 *sind teilerfremde Zahlen.*

Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen stellt der **Euklidische Algorithmus**[1]) dar: Man dividiert die größere der beiden Zahlen durch die kleinere. Aus dem Divisor und dem Rest dieser ersten Divisionsaufgabe bildet man einen zweiten Quotienten; aus dem Divisor und dem Rest der zweiten Division einen dritten Quotienten usw. Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis die Division aufgeht. Der Divisor des zuletzt gebildeten Quotienten ist dann der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen.

BEISPIEL 3

Mit Hilfe des Euklidischen *Algorithmus ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen* 360 *und* 945 *zu ermitteln.*

[1]) Euklid (– 365? bis – 300?), griechischer Mathematiker. Algorithmus = Rechenvorschrift.

Lösung: Man dividiert

$$945 : 360 = 2 \text{ Rest } 225.$$

Aus dem Divisor 360 und dem Rest 225 bildet man den Quotienten

$$360 : 225 = 1 \text{ Rest } 135,$$

dann $225 : 135 = 1$ Rest 90,

hieraus $135 : 90 = 1$ Rest 45

und schließlich

$$90 : 45 = 2.$$

Der Divisor 45 des letzten Quotienten ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen 360 und 945.

BEISPIEL 4

Desgl. für die beiden Zahlen 81 *und* 98.

Lösung: $98 : 81 = 1$ Rest 17,

$81 : 17 = 4$ Rest 13,

$17 : 13 = 1$ Rest 4,

$13 : 4 = 3$ Rest 1,

$4 : 1 = 4.$

Da der Divisor der letzten Divisionsaufgabe die Zahl 1 ist, sind die beiden Zahlen 81 und 98 teilerfremd.

3.2.4. Das kleinste gemeinsame Vielfache

Die Vielfachen einer Zahl lassen sich durch Multiplikation der Zahl mit den ganzen Zahlen leicht ermitteln.

Sind zwei oder mehrere Zahlen gegeben, so besitzen diese *gemeinsame Vielfache*. So sind z. B. 60, 120, 180, 240 usw. gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen 12 und 30. Das **kleinste gemeinsame Vielfache** von 12 und 30 ist 60.

Ein Vielfaches mehrerer Zahlen muß durch jede dieser Zahlen teilbar sein. Es muß daher jeden Primfaktor mindestens so oft enthalten, wie er am häufigsten in einer der gegebenen Zahlen auftritt.

Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, die durch alle gegebenen Zahlen teilbar ist.

Man bestimmt das kleinste gemeinsame Vielfache wieder am besten durch Zerlegung der gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren.

BEISPIEL

Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 36, 48, 60 *und* 210 *zu bestimmen.*

Lösung:

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 48 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline \text{k.g.V.} &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 5040 \end{aligned}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache wird bei der *Bestimmung des Hauptnenners* mehrerer Brüche benötigt.

Es gibt kein größtes gemeinsames Vielfaches zweier Zahlen, da sich die Folge der gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen nach oben hin unbegrenzt weit fortsetzen läßt.

3.3. Gewöhnliche Brüche

3.3.1. Begriffserklärungen

Unter einem **gewöhnlichen Bruch** oder einer **gebrochenen Zahl** versteht man einen Ausdruck der Form $\frac{a}{b}$, worin a und b ganze Zahlen sind und $b \neq 0$ ist[1]).

Die über dem Bruchstrich stehende Zahl heißt der **Zähler** des Bruches, während die darunter stehende Zahl der **Nenner** des Bruches genannt wird.

Brüche, deren Zähler 1 ist, heißen *Stammbrüche*. Demnach sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Stammbrüche.

Jede *ganze Zahl* kann als *Bruch mit dem Nenner* 1 geschrieben werden: $25 = \frac{25}{1}$, $173 = \frac{173}{1}$.

Jeder *Bruch kann als Divisionsaufgabe*, umgekehrt kann auch jede *Divisionsaufgabe als Bruch aufgefaßt werden*. Dabei entspricht der Zähler des Bruches dem Dividenden, der Nenner des Bruches dem Divisor der Divisionsaufgabe.

BEISPIEL 1

a) $\frac{5}{7} = 5:7$ b) $2:3 = \frac{2}{3}$

Man unterscheidet **echte** und **unechte Brüche.** Bei einem echten Bruch ist der Zähler *kleiner* als der Nenner. Sein Wert ist demzufolge kleiner als 1.

BEISPIEL 2

$\frac{1}{2}; \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$ *usw. sind echte Brüche.*

Bei einem unechten Bruch ist der Zähler *größer* als der Nenner. Der Wert des Bruches ist also größer als 1. Auch diejenigen Brüche, deren Zähler und Nenner gleich sind, werden unechte Brüche genannt. Sie besitzen den Wert Eins.

BEISPIEL 3

$\frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{2}{1}, \frac{23}{23}$ *usw. sind unechte Brüche.*

Eine **„gemischte Zahl"** ist die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch. Dabei darf das Pluszeichen zwischen der ganzen Zahl und dem Bruch weggelassen werden.

BEISPIEL 4

$3 + \frac{4}{7} = 3\frac{4}{7}$. *Es ist zu beachten, daß* $3 \cdot \frac{4}{7} \neq 3\frac{4}{7}$

Jeder unechte Bruch läßt sich in eine gemischte Zahl verwandeln, indem man die dem Bruch entsprechende Divisionsaufgabe durchführt.

BEISPIEL 5

$\frac{11}{5} = 11:5 = 2$ *Rest* 1. *Demnach ist* $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

[1]) Das Zeichen $\neq$ wird gelesen „ungleich" oder „verschieden von".

Die Umwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch wird erst im Abschnitt 3.3.3. behandelt.
Die Brüche liegen auf dem Zahlenstrahl zwischen den ganzen Zahlen.

3.3.2. Erweitern und Kürzen von Brüchen

Ein Bruch wird **erweitert,** indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl, der *Erweiterungszahl,* multipliziert werden. Ein Bruch wird **gekürzt,** indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl, die *Kürzungszahl,* dividiert werden. *Beim Erweitern bzw. beim Kürzen ändert sich die Form, nicht aber der Wert eines Bruches.*

BEISPIELE

1. $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$. *Der Bruch* $\frac{3}{8}$ *wurde „mit 5 erweitert".*
2. $\frac{15}{40} = \frac{15 : 5}{40 : 5} = \frac{3}{8}$. *Der Bruch* $\frac{15}{40}$ *wurde „mit 5 gekürzt".*

Das Erweitern von Brüchen wird benötigt, wenn mehrere Brüche mit verschiedenen Nennern auf einen gemeinsamen Nenner, den **Hauptnenner,** gebracht werden sollen.

Der Hauptnenner mehrerer Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelnenner.

BEISPIEL 8

Die Brüche $\frac{3}{8}, \frac{5}{24}, \frac{13}{72}, \frac{17}{108}$ *und* $\frac{49}{120}$ *sollen auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.*

Lösung: Bestimmung des Hauptnenners durch Faktorenzerlegung der Einzelnenner:

$8 = 2^3$	$3^3 \cdot 5 = 135$
$24 = 2^3 \cdot 3$	$3^3 \cdot 5 = 45$
$72 = 2^3 \cdot 3^3$	$3 \cdot 5 = 15$
$108 = 2^2 \cdot 3^3$	$2 \cdot 5 = 10$
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$3^3 = 9$
$HN = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$	

Anmerkung: Hinter jeder Faktorenzerlegung sind nach der Bestimmung des Hauptnenners gleich die Erweiterungsfaktoren für jeden Bruch notiert worden. Diese Erweiterungsfaktoren erhält man, wenn man die Ergänzungsfaktoren zum Hauptnenner miteinander multipliziert. Es ergeben sich somit folgende Brüche:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 135}{8 \cdot 135} = \frac{405}{1080} \qquad \frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 45}{24 \cdot 45} = \frac{225}{1080}$$

$$\frac{13}{72} = \frac{13 \cdot 15}{72 \cdot 15} = \frac{195}{1080} \qquad \frac{17}{108} = \frac{17 \cdot 10}{108 \cdot 10} = \frac{170}{1080} \qquad \frac{49}{120} = \frac{49 \cdot 9}{120 \cdot 9} = \frac{441}{1080}$$

Das Kürzen von Brüchen ist insofern bedeutungsvoll, als es große Zahlen in Zähler und Nenner in kleinere verwandelt, so daß dadurch das Rechnen erleichtert wird. Es gilt als Grundsatz bei vielen Aufgaben mit gewöhnlichen Brüchen:

Erst kürzen, dann rechnen!

Die größte Zahl, mit der ein Bruch gekürzt werden kann, muß alle in Zähler und Nenner gemeinsam enthaltenen Teiler als Faktoren enthalten.

Die größte Kürzungszahl für einen Bruch ist demnach der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner.

BEISPIEL 4

Der Bruch $\frac{405}{1080}$ *ist durch Kürzen zu vereinfachen.*

Lösung: Es ist $405 = 3^4 \cdot 5$ und $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Der größte gemeinsame Teiler von 405 und 1080 ist demnach $3^3 \cdot 5 = 135$; folglich ist

$$\frac{405}{1080} = \frac{405 : 135}{1080 : 135} = \frac{3}{8}.$$

3.3.3. Addition und Subtraktion gewöhnlicher Brüche

Besitzen mehrere Brüche gleiche Nenner, so heißen sie **gleichnamig**; besitzen sie verschiedene Nenner, so werden sie **ungleichnamig** genannt. Ungleichnamige Brüche lassen sich gleichnamig machen, indem sie durch Erweitern auf den *Hauptnenner* gebracht werden.
Für die Addition und Subtraktion gewöhnlicher Brüche gilt folgender *Satz:*

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.
Ungleichnamige Brüche sind vor dem Addieren (Subtrahieren) gleichnamig zu machen. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelnenner.

BEISPIELE

1. $\frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7+5}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{7}{24} - \frac{5}{24} = \frac{7-5}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

3. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$

4. $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} - \frac{7}{12} + \frac{23}{48} = ?$

Lösung: Bestimmung des Hauptnenners und der Erweiterungsfaktoren (vgl. 3.3.2., Beispiel 3).

$4 = 2^2$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$
$6 = 2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3 = 24$
$9 = 3^2$	$2^4 = 16$
$12 = 2^2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3 = 12$
$48 = 2^4 \cdot 3$	$3 = 3$

$\mathrm{HN} = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

Damit wird

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\frac{7}{12}+\frac{23}{48}=\frac{3\cdot 36-5\cdot 24+2\cdot 16-7\cdot 12+23\cdot 3}{144}=$$
$$=\frac{108-120+32-84+69}{144}=\frac{5}{144}$$

Beachtet man, daß sich jede ganze Zahl auch als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben läßt, so kann man jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln oder, wie der Fachausdruck lautet, „*einrichten*"

BEISPIEL 5

$$3\frac{7}{9}=3+\frac{7}{9}=\frac{3\cdot 9+7}{9}=\frac{34}{9}$$

Bei gemischten Zahlen ist es vorteilhaft, wenn man die ganzen Zahlen und die Brüche getrennt addiert bzw. subtrahiert.

BEISPIELE

6. $5\frac{7}{8}+3\frac{2}{5}=5+3+\frac{7}{8}+\frac{2}{5}=8+\frac{35+16}{40}=8+\frac{51}{40}=9\frac{11}{40}$

7. $5\frac{7}{8}-3\frac{2}{5}=5-3+\frac{7}{8}-\frac{2}{5}=2+\frac{35-16}{40}=2+\frac{19}{40}=2\frac{19}{40}$

3.3.4. Multiplikation von Brüchen

Da sich jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben und jede gemischte Zahl sich in einen unechten Bruch verwandeln läßt, genügt es, die folgende *Multiplikationsregel für gewöhnliche Brüche* zu kennen:

> Brüche werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

Man spart unter Umständen erheblichen Aufwand an Rechenarbeit ein, wenn man grundsätzlich jede Möglichkeit zu kürzen vor dem Multiplizieren ausnutzt.

BEISPIELE

1. $\frac{13}{14}\cdot\frac{35}{52}=\frac{\overset{1}{\cancel{13}}\cdot\overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{2}{\cancel{14}}\cdot\underset{4}{\cancel{52}}}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{5}{8}$

2. $25\cdot\frac{4}{9}=\frac{25\cdot 4}{1\cdot 9}=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$

3. $5\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{\overset{3}{\cancel{16}}\cdot\cancel{9}}{\cancel{3}\cdot\cancel{16}}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 1}=3$

4. $2\frac{7}{9}\cdot 1\frac{1}{5}=\frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cdot\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{5}}=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

5. $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{21}{35}\cdot\frac{14}{25}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}\cdot\overset{3}{\cancel{21}}\cdot\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cdot\cancel{1}\cdot\underset{2}{\cancel{12}}\cdot\underset{5}{\cancel{35}}\cdot\underset{5}{\cancel{25}}}=\frac{3}{4\cdot 2\cdot 5\cdot 5}=\frac{3}{200}$

Soll eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl multipliziert werden, so ist es rationeller, wenn man, anstatt die gemischte Zahl vorher einzurichten, wie folgt rechnet:

BEISPIEL 6

$$24\frac{5}{8} \cdot 2 = 24 \cdot 2 + \frac{5}{8} \cdot 2 = 48 + \frac{5}{4} = 49\frac{1}{4}$$

3.3.5. Der Kehrwert eines Bruches

Den **Kehrwert (reziproken Wert)** eines Bruches erhält man, indem man Zähler und Nenner des Bruches miteinander vertauscht.

Bruch und Kehrwert des Bruches sind im allgemeinen *verschieden* voneinander.

BEISPIELE

1. *Der Kehrwert von* $\frac{2}{7}$ *ist* $\frac{7}{2}$.
2. *Der Kehrwert von* $\frac{1}{9}$ *ist* $\frac{9}{1} = 9$.
3. *Der Kehrwert von* 5 *ist* $\frac{1}{5}$.
4. *Der Kehrwert von* $2\frac{3}{7}$ *ist* $\frac{7}{17}$.

Das Produkt aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist stets 1.

BEISPIEL 5

Der Kehrwert von $\frac{2}{5}$ *ist* $\frac{5}{2}$. *Das Produkt der beiden Zahlen ist* $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$.

Der Kehrwert vom Kehrwert einer Zahl ist wieder die ursprüngliche Zahl.

BEISPIEL 6

Der Kehrwert von $\frac{2}{5}$ *ist* $\frac{5}{2}$. *Der Kehrwert hiervon ist wieder die ursprüngliche Zahl* $\frac{2}{5}$.

Bevor man den Kehrwert einer Summe von Brüchen bilden kann, müssen die Brüche addiert werden (vgl. Beispiel 4).

BEISPIEL 7

Es ist der Kehrwert der Summe $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6}$ *zu bilden.*

Lösung: Es ist $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{8 + 3 - 10}{12} = \frac{1}{12}$. Folglich ist der Kehrwert der gegebenen Summe die Zahl 12.

3.3.6. Division von Brüchen

Für die *Division von Brüchen* gilt die *Regel:*

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert

BEISPIELE

1. $7 : \frac{1}{3} = 7 \cdot \frac{3}{1} = 21$

2. $\frac{2}{5} : \frac{6}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{15}$

3. $3\frac{3}{4} : 5 = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$

4. $7\frac{7}{8} : 5\frac{5}{9} = \frac{63}{8} \cdot \frac{9}{50} = \frac{567}{400} = 1\frac{167}{400}$

3.3.7. Doppelbrüche

Doppelbrüche sind Brüche, deren Zähler bzw. Nenner wiederum Brüche sind, z. B.:

1. $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{5}}$, 2. $\dfrac{\frac{5}{3}}{2}$, 3. $\dfrac{5}{\frac{3}{2}}$

Treten Doppelbrüche auf, so vereinfacht man sie, indem man die dem Doppelbruch entsprechende Divisionsaufgabe löst.

BEISPIELE

1. $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{5} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$, 2. $\dfrac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{6}$, 3. $\dfrac{5}{\frac{3}{2}} = 5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Beim Rechnen mit Doppelbrüchen ist darauf zu achten, welcher der Hauptbruchstrich ist, denn wie die Beispiele 2 und 3 zeigen, besitzen $\dfrac{\frac{5}{3}}{2}$ und $\dfrac{5}{\frac{3}{2}}$ völlig verschiedene Werte.

Es ist daher notwendig, den Hauptbruchstrich durch größere Länge hervorzuheben. Bei komplizierteren Doppelbrüchen empfiehlt es sich, zunächst Zähler und Nenner für sich zu vereinfachen und dann erst zu dividieren.

BEISPIELE

4. $\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{13}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{13}{6} : \frac{5}{6} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

5. $\dfrac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{17}{24} + \frac{3}{8} - \frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{16 + 24 - 27 + 6}{36}}{\frac{17 + 9 - 20}{24}} = \frac{19}{36} : \frac{6}{24} = \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}$

6. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{4}}} = \dfrac{1}{1 + \frac{4}{11}} = \dfrac{1}{\frac{15}{11}} = \frac{11}{15}$

3.4. Dezimalbrüche

3.4.1. Begriffserklärungen

Endliche Dezimalbrüche sind Brüche, deren Nenner Potenzen von 10 sind.

BEISPIEL 1

a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{7}{100}$, c) $\frac{7043}{1000000}$ *usw. sind endliche Dezimalbrüche.*

Sie werden jedoch selten in der im Beispiel 1 angeführten Form geschrieben, sondern meistens in der *Dezimalschreibweise* mit Hilfe eines *Kommas*. Dabei besitzt nach 2.2. jede Stelle vor und hinter dem Komma einen ganz bestimmten *Stellenwert*.

BEISPIEL 2

a) $\frac{3}{10} = 0{,}3$ b) $\frac{7}{100} = 0{,}07$ c) $\frac{7043}{1000000} = 0{,}007043$

Daraus erkennt man folgende *Regel für die Schreibweise von Dezimalbrüchen:*

Bei einem endlichen Dezimalbruch wird nur der Zähler hingeschrieben, während der Nenner durch die Kommastellung gekennzeichnet wird. Dabei werden vom Zähler so viele Stellen von rechts her durch das Komma abgetrennt, wie der Nenner Nullen besitzt.

Der Wert eines Dezimalbruches ändert sich nicht, wenn Nullen als letzte Stellen hinter dem Komma hinzugefügt bzw. weggestrichen werden, da dies nur ein Erweitern bzw. Kürzen mit einer Potenz von 10 bedeutet.

BEISPIEL 3

a) $0{,}67 = 0{,}67000$ (*erweitert mit* 1000: $\frac{67}{100} = \frac{67000}{100000}$)

b) $0{,}050 = 0{,}05$ (*gekürzt mit* 10: $\frac{50}{1000} = \frac{5}{100}$)

Neben den endlichen Dezimalbrüchen gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*. Diese können *reinperiodisch, gemischtperiodisch* und *nichtperiodisch* sein.

BEISPIEL 4

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ *und* $\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots$ *sind reinperiodische unendliche Dezimalbrüche.*

b) $\frac{7}{12} = 0{,}58333\ldots$ *ist ein gemischtperiodischer unendlicher Dezimalbruch.*

c) $\pi = 3{,}14159\ldots$ *ist ein nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch.*

3.4.2. Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche können wie ganze Zahlen addiert bzw. subtrahiert werden, wenn man sie so untereinanderschreibt, daß Komma unter Komma steht.

BEISPIEL 1

a) $35{,}0674 + 2{,}5732 = 35{,}0674$
$+\ 2{,}5732$
$37{,}6406$

b) $35{,}0674 - 2{,}5732 = 35{,}0674$
$-\ 2{,}5732$
$32{,}4942$

Besitzen die einzelnen Zahlen verschiedene Stellen hinter dem Komma, so können die am Ende fehlenden Stellen durch Nullen aufgefüllt werden.

BEISPIEL 2

$0{,}54 + 0{,}0873 + 13{,}06052 + 253{,}8703$

Lösung: Entweder

0,54000	
0,08730	
13,06052	
253,87030	
267,55812	

oder einfacher

0,54	
0,0873	
13,06052	
253,8703	
267,55812	

3.4.3. Multiplikation von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche werden zunächst ohne Rücksicht auf die Kommastellung multipliziert. Erst im Ergebnis teilt man dann von rechts her so viele Stellen durch das Komma ab, wie sämtliche Faktoren zusammen Stellen hinter den Kommata besitzen. Sollten dabei vorn Stellen fehlen, so sind diese durch Nullen aufzufüllen.

BEISPIEL 1

a) $0{,}37 \cdot 563{,}62 = ?$ Lösung: $56362 \cdot 37$

169086
394534
2085394

$0{,}37 \cdot 563{,}62 = 208{,}5394$

b) $0{,}027 \cdot 0{,}014 = ?$ $\quad 27 \cdot 14 = 378$

$0{,}027 \cdot 0{,}014 = 0{,}000\,378$

c) $0{,}02^3 = ?$ $\quad 2^3 = 8$

$0{,}02^3 = 0{,}000\,008$

Der Wert eines Produkts von Dezimalzahlen ändert sich nicht, wenn man in einem Faktor das Komma genau so viele Stellen nach rechts rückt, wie man es in einem anderen Faktor nach links verschiebt.

BEISPIEL 2

Es ist $47{,}2 \cdot 0{,}08 = 4{,}72 \cdot 0.8 = 0{,}472 \cdot 8$ *usw.*

3.4.4. Division von Dezimalbrüchen

Die Division von Dezimalbrüchen durch eine ganze Zahl wird zunächst so durchgeführt wie die Division zweier ganzer Zahlen. Wird bei der Division im Dividenden das Komma überschritten, so ist im Quotienten ein Komma zu setzen.

BEISPIEL 1

a) $1057{,}602 : 13 = 81{,}354$

17
46
70
52
–

b) $0{,}070812 : 84 = 0{,}000843$

00708
361
252
–

Ist durch einen Dezimalbruch zu dividieren, so erweitert man Dividend und Divisor derart, daß der Divisor eine ganze Zahl wird.

BEISPIEL 2

a) $2{,}601 : 0{,}17 = 260{,}1 : 17 = 15{,}3$

b) $0{,}0035112 : 0{,}042 = 3{,}5112 : 42 = 0{,}0836$

3.4.5. Umwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt

Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem man die dem Bruch entsprechende Divisionsaufgabe löst.

BEISPIEL 1

a) $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ b) $\frac{5}{160} = 5 : 160 = 0{,}03125$

Geht die Division nicht auf, so kehrt von einer gewissen Stelle an eine Ziffer bzw. eine Ziffernfolge immer wieder. Diese sich wiederholende Ziffer bzw. die kleinste immer wiederkehrende Ziffernfolge wird **Periode** des Dezimalbruches genannt.
Die Periode eines Dezimalbruches wird durch Überstreichen der sich wiederholenden Ziffer bzw. Zifferngruppe gekennzeichnet; der Bruch wird nach der ersten Periode abgebrochen.
Beginnt die Periode unmittelbar hinter dem Komma, so heißt der Bruch *reinperiodisch.*

BEISPIEL 2

a) $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots = 0{,}\bar{3}$

b) $\frac{2}{999} = 2 : 999 = 0{,}002002\ldots = 0{,}\overline{002}$

$0{,}\bar{3}$ *und* $0{,}\overline{002}$ *sind reinperiodische Dezimalbrüche.*

Gehen der Periode eines Dezimalbruches noch andere Ziffern voraus, so heißt der Dezimalbruch *gemischtperiodisch.*

BEISPIEL 3

a) $\frac{7}{12} = 7 : 12 = 0{,}58333\ldots = 0{,}58\,\bar{3}$

b) $\frac{3}{14} = 3 : 14 = 0{,}214\,285\,714\,285\,714\ldots = 0{,}2\,\overline{142857}$

$0{,}58\,\bar{3}$ *und* $0{,}2\,\overline{142857}$ *sind gemischtperiodische Dezimalbrüche.*

Jeder nichtperiodische endliche Dezimalbruch läßt sich ohne weiteres in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln.

BEISPIEL 4

a) $0{,}003 = \frac{3}{1000}$ b) $8{,}75 = \frac{875}{100} = \frac{35}{4}$ (Kürzen!)

Ein reinperiodischer Dezimalbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die Periode als Zähler und als Nenner so viele Neunen schreibt, wie die Periode Stellen besitzt.

BEISPIEL 5

$0{,}\overline{927} = \frac{927}{\overline{999}} = \frac{103}{111}$

Begründung: Das 1000fache von $0{,}\overline{927}$ ist $927{,}\overline{927}$.
Das 1fache von $0{,}\overline{927}$ ist $0{,}\overline{927}$.
Durch Subtraktion fallen alle Stellen der Periode fort.
Das 999fache von $0{,}\overline{927}$ ist 927.

Folglich ist $0{,}\overline{927} = \frac{927}{\overline{999}} = \frac{103}{111}$,
wie es behauptet worden war.

Bei gemischtperiodischen Dezimalbrüchen geht man wie folgt vor:

BEISPIEL 6

$0{,}43\overline{52}$ *soll in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden.*

Lösung: Das 10000fache von $0{,}43\overline{52}$ ist $4352{,}\overline{52}$.
Das 100fache von $0{,}43\overline{52}$ ist $43{,}\overline{52}$.
Durch Subtraktion fallen alle Stellen der Periode fort:
Das 9900fache von $0{,}43\overline{52}$ ist 4309.
Damit ist $0{,}43\overline{52} = \frac{4309}{9900}$.

3.4.6. Das Runden von Dezimalbrüchen

Da die Zahlen in der Praxis meist nur bis zu einer bestimmten Stellenzahl benötigt werden, werden sie, falls sie mehr Stellen als erforderlich besitzen, den jeweiligen Genauigkeitsansprüchen entsprechend *gerundet*. Dies geschieht nach der folgenden **Rundungsregel**:

Die letzten, nicht benötigten Stellen eines Dezimalbruches werden weggelassen, wenn die erste der weggestrichenen Ziffern eine 0, 1, 2, 3 oder 4 ist. (Der Bruch wird *abgerundet*.)

Ist die erste der weggestrichenen Ziffern eine 6, 7, 8 oder 9, so wird die letzte stehenbleibende Ziffer um 1 erhöht. (Der Bruch wird *aufgerundet*.)

Ist die erste der weggestrichenen Ziffern eine 5, so gelten folgende Anweisungen:

a) Folgen auf die fragliche 5 noch weitere *von Null verschiedene* Ziffern, so ist *aufzurunden*.

BEISPIELE

$3{,}14159 \approx 3{,}142$; $2{,}75003 \approx 2{,}8$

b) Folgen auf die fragliche 5 *keine weiteren Stellen* oder *nur noch Nullen*, so ist für das Runden die Art dieser 5 entscheidend.
Ist bekannt, daß die 5 durch *Aufrunden* entstanden ist, so wird *abgerundet*. Ist bekannt, daß die 5 durch *Abrunden* entstanden ist, so wird *aufgerundet*.
Ist von der fraglichen 5 nicht bekannt, durch welche Art von Runden sie entstanden ist, oder ist sicher, daß sie eine „genaue" 5 ist (d.h., daß sie überhaupt nicht durch Runden entstanden ist), dann wird so gerundet, daß die *letzte stehenbleibende Ziffer eine gerade Zahl wird*.

BEISPIELE

Entstand 0,1265 *aus* 0,12648, *so ist* 0,1265 ≈ 0,126. *Entstand* 0,1265 *dagegen durch Abrunden aus* 0,12654, *so wird* 0,1265 ≈ 0,127.

Ferner ist $\frac{1}{8} = 0{,}125 \approx 0{,}12$, *dagegen* $\frac{3}{4} = 0{,}75 \approx 0{,}8$, *denn hier wurden „genaue" Fünfen gerundet.*

Diese Rundungsregel wurde „für alle Zweige der Wissenschaft und Technik..., jedoch nicht für das Geldwesen..." zum Standard erklärt.

BEISPIEL 1

0,42575 *auf die erste Stelle hinter dem Komma gerundet gibt* 0,4; *auf die zweite Stelle gerundet erhält man* 0,43; *auf die dritte Stelle*: 0,426 *und auf die vierte Stelle:* 0,4258.

Die durch das Runden entstehende *Ungenauigkeit* kann damit *nie größer* werden *als* 5 *Einheiten des Stellenwertes der ersten weggelassenen Ziffer.*
Aus diesem Grunde darf eine beim Runden als letzte Ziffer entstehende Null nie weggelassen werden, da durch ihr ausdrückliches Mitschreiben angedeutet wird, daß die Dezimalzahl bis zu dieser Stelle genau ist und daß die durch das Runden entstandene Ungenauigkeit 5 Stellen der nächsten Dezimalstelle nicht übersteigt.

BEISPIEL 2

Die Zahl 0,143 *kann durch Runden aus den Zahlen von* 0,1426 *bis* 0,1434 *entstanden sein;* 0,1430 *dagegen aus den Zahlen von* 0,14295 *bis* 0,14305.

Umgekehrt dürfen bei Dezimalbrüchen, die gerundet worden sind, keine Nullen mehr angehängt werden, da diese eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen würden.

BEISPIELE

3. 0,249903 *auf* 5 *Stellen hinter dem Komma gerundet:* 0,24990
   0,249903 *auf* 4 *Stellen hinter dem Komma gerundet:* 0,2499
   0,249903 *auf* 3 *Stellen hinter dem Komma gerundet:* 0,250
   0,249903 *auf* 2 *Stellen hinter dem Komma gerundet:* 0,25
   0,249903 *auf* 1 *Stelle hinter dem Komma gerundet:* 0,2

   Anmerkung: Beim Runden auf eine bestimmte Stellenzahl ist stets von der gegebenen Zahl auszugehen, nicht etwa von einem bereits gerundeten Wert.

4. *Die Zahl* 57465 *ergibt auf Zehner gerundet* $5{,}746 \cdot 10^4$, *auf Hunderter genau* $5{,}75 \cdot 10^4$, *auf Tausender genau* $5{,}7 \cdot 10^4$ *und auf Zehntausender genau* $6 \cdot 10^4$.

Zuweilen werden die Fehlergrenzen bei gerundeten Zahlen mit angegeben. So würde man bei den Zahlen aus Beispiel 2 wie folgt schreiben: 0,143 ± 0,0005 bzw. 0,1430 ± 0,00005.

3.5. Potenzen und Wurzeln

3.5.1. Quadrate und Kuben

Für das *Produkt mehrerer gleicher Faktoren* schreibt man zur Abkürzung eine **Potenz.**

BEISPIELE

1. $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$ *(gelesen: 26 hoch 3)*
2. $8{,}3 \cdot 8{,}3 \cdot 8{,}3 \cdot 8{,}3 \cdot 8{,}3 = 8{,}3^5$ *(gelesen: 8,3 hoch 5)*

Die Potenzen, die bei Zahlenrechnungen am häufigsten auftreten, sind die zweiten und die dritten Potenzen. Man nennt sie auch *Quadrate* (oder *Quadratzahlen*) und *Kuben* (oder *Kubikzahlen*).

Die Bezeichnung Quadratzahl bzw. Kubikzahl für a^2 bzw. a^3 kommt daher, weil die Zahl a^2 den Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge a und die Zahl a^3 das Volumen eines Würfels (lat. cubus) mit der Kantenlänge a angibt.

Die Zahl, deren Potenz berechnet werden soll, heißt *Grundzahl.*

Für die Potenzen von Dezimalzahlen gelten einfache **Kommaregeln.**

Es ist
$$121^2 = 14\,641$$
$$12{,}1^2 = 146{,}41$$
$$1{,}21^2 = 1{,}4641$$
$$0{,}121^2 = 0{,}014641 \quad \text{usw.}$$

Es ist zu erkennen, daß sich bei gleichbleibender Ziffernfolge in der Grundzahl die Ziffernfolge des Quadrates nicht ändert, sondern daß nur das Komma jeweils an eine andere Stelle tritt. Man erkennt als *Kommaregel für Quadratzahlen*:

> Wird in der Grundzahl das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links (rechts) gerückt, so ist das Komma im zugehörigen Quadrat um 2, 4, 6, ... Stellen nach links (rechts) zu verschieben.

Entsprechend erkennt man aus
$$121^3 = 1\,771\,561$$
$$12{,}1^3 = 1\,771{,}561$$
$$1{,}21^3 = 1{,}771\,561$$
$$0{,}121^3 = 0{,}001\,771\,561 \quad \text{usw.}$$

die *Kommaregel für Kubikzahlen:*

> Wird in der Grundzahl das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links (rechts) gerückt, so ist das Komma in der zugehörigen Kubikzahl um 3, 6, 9, ... Stellen nach links (rechts) zu verschieben.

3.5.2. Quadrat- und Kubikwurzeln [1])

Die *Quadratwurzel* aus einer Zahl a (geschrieben: $\sqrt{a}$) ist diejenige Zahl, die a ergibt, wenn man sie quadriert.

Es ist also
$$\sqrt{a} = b, \quad \text{wenn} \quad b^2 = a.$$

Die *Kubikwurzel* aus einer Zahl a (geschrieben: $\sqrt[3]{a}$; gelesen: Kubikwurzel aus a bzw. dritte Wurzel aus a) ist diejenige Zahl, die a ergibt, wenn man sie in die dritte Potenz erhebt:
$$\sqrt[3]{a} = c, \quad \text{wenn} \quad c^3 = a.$$

Die Zahl a, aus der die Wurzel zu ziehen ist, heißt *Radikand* [2]). Die Rechenoperation, einen *Wurzelwert* zu bestimmen, wird *Radizieren* oder *Wurzelziehen* genannt.

[1]) Die hier gemachten Festsetzungen über die Quadrat- und die Kubikwurzeln gelten nur für solche Zahlen a, b und c, die $\geqq 0$ sind. (Vgl. hierzu Abschnitt 6.1.1.!)

[2]) radix (lat.) die Wurzel.

BEISPIEL 1

a) *Es ist* $\sqrt[2]{64} = 8$, *weil* $8^2 = 64$.

b) *Es ist* $\sqrt[3]{64} = 4$, *weil* $4^3 = 64$.

Da Radizieren und Potenzieren eng miteinander verwandt sind, gelten für die Wurzeln ähnliche **Kommaregeln** wie für die Potenzen.

Wird im Radikanden einer Quadratwurzel das Komma um 2, 4, 6, ... Stellen nach rechts (links) verschoben, so ist das Komma im zugehörigen Wurzelwert um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts (links) zu rücken.

BEISPIEL 2

$\sqrt{0{,}0729} = 0{,}27$ $\qquad$ $\sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ $\qquad$ $\sqrt{729} = 27$ $\qquad$ $\sqrt{72900} = 270$

Entsprechend gilt:

Wird im Radikanden einer Kubikwurzel das Komma um 3, 6, 9, ... Stellen nach rechts (links) verschoben, so ist das Komma im zugehörigen Wurzelwert um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts (links) zu rücken.

BEISPIEL 3

$\sqrt[3]{0{,}729} = 0{,}9$ $\qquad$ $\sqrt[3]{729} = 9$ $\qquad$ $\sqrt[3]{729000} = 90$ $\qquad$ $\sqrt[3]{729000000} = 900$

3.6. Tabellenrechnen

3.6.1. Bedeutung der Zahlentabellen

Jedes Tabellenwerk (auch Tabelle oder Tafel genannt) ist ein *Hilfsmittel zur Steigerung der Arbeitsproduktivität* eines Rechners. Dadurch, daß in den Tabellen die Ergebnisse häufig wiederkehrender Rechnungen zusammengefaßt sind, ersparen sie dem Rechner, der sicher mit ihnen umzugehen weiß, langwierige Rechenarbeit.

Tafel 1. Potenzen, Wurzeln, Kehrwerte, Kreisumfänge und -inhalte (455···465)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,19780	1429,4	162597
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,19298	1432,6	163313
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,18818	1435,7	164030
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,18341	1438,8	164748
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,17865	1442,0	165468
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,17391	1445,1	166190
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,16920	1448,3	166914
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,16450	1451,4	167639
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,15983	1454,6	168365
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,15517	1457,7	169093
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,15054	1460,8	169823

Voraussetzung für ein erfolgreiches und zeitsparendes Arbeiten mit einer Zahlentabelle ist, daß man es versteht, *alle* Vorteile der vorhandenen Tafeln auszunutzen. Es

wird daher jedem, der eine neue Tabelle erwirbt, dringend empfohlen, *vor deren Gebrauch* sorgfältig die Erläuterungen zu studieren, die den meisten Tafeln beigegeben sind. Aus diesen Erläuterungen ist zu erkennen, welche Zahlenwerte aus den einzelnen Tafeln entnommen werden können und in welcher Weise man dabei am vorteilhaftesten vorgeht.

Alle Betrachtungen dieses Buches über das Rechnen mit Zahlentabellen beziehen sich auf das Tafelwerk „*Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln*", bearbeitet von Dr. Fritz Müller, das im VEB Fachbuchverlag erschienen ist. Da dieses Tafelwerk im Anhang eine sehr ausführliche Anleitung zum Gebrauch der einzelnen Tabellen besitzt, reicht es aus, wenn die Anwendungsmöglichkeiten hier nur noch an einigen Beispielen demonstriert werden.

Tafel 1 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Tabellenwerk.

3.6.2. Aufsuchen von Quadratzahlen

Unter Beachtung der Kommaregeln lassen sich Quadratzahlen aufsuchen, indem man von der Spalte n zur Spalte n^2 übergeht, aber auch dadurch, daß man von der Spalte $\sqrt{n}$ zur Spalte n übergeht.

BEISPIELE

1. $4{,}58^2 = 20{,}9764$ *(Übergang von n zu n^2.)*
2. $213{,}3^2 \approx 45500$ *(Übergang von $\sqrt{n}$ zu n.)*[1]

3.6.3. Aufsuchen von Quadratwurzeln

Zur Bestimmung der Quadratwurzeln kann man von der Spalte n zur Spalte $\sqrt{n}$, aber auch von der Spalte n^2 zur Spalte n übergehen.

BEISPIELE

1. $\sqrt{4{,}56} \approx 2{,}13542$ *(Übergang von n zu $\sqrt{n}$.)*
2. $\sqrt{2106{,}81} = 45{,}9$ *(Übergang von n^2 zu n.)*

3.6.4. Aufsuchen von Kubikzahlen

Die Kuben findet man durch Übergang von n zu n^3 bzw. von $\sqrt[3]{n}$ zu n.

BEISPIELE

1. $45{,}8^3 = 96071{,}912$ *(Übergang von n zu n^3.)*
2. $0{,}7703^3 \approx 0{,}457$ *(Übergang von $\sqrt[3]{n}$ zu n.)*

3.6.5. Aufsuchen von Kubikwurzeln

Die Kubikwurzeln bestimmt man, indem man entweder von n zu $\sqrt[3]{n}$ oder von n^3 zu n übergeht.

BEISPIELE

1. $\sqrt[3]{459000} \approx 77{,}138$ *(Übergang von n zu $\sqrt[3]{n}$.)*
2. $\sqrt[3]{94{,}2} \approx 4{,}55$ *(Übergang von n^3 zu n.)*

[1]) Das Zeichen $\approx$ wird gelesen: „annähernd gleich" oder „ungefähr gleich".

3.6.6. Aufsuchen der Kehrwerte

Der Kehrwert von n ist $\frac{1}{n}$. Da dies aber für sehr große Werte von n eine sehr kleine Zahl ist, wurden in der Tabelle die Werte $\frac{1000}{n}$ angegeben.

BEISPIELE

1. $\frac{1000}{457} \approx 2{,}18818$ *(Übergang von n zu $\frac{1000}{n}$.)*

   aber: $\frac{1}{457} \approx 0{,}00218818$ *(Kommaverschiebung beachten!)*

2. $\frac{1}{2{,}1978} \approx 0{,}455$ *(Übergang von $\frac{1000}{n}$ zu n.)*

3.6.7. Weitere Anwendungsmöglichkeiten der Tabelle

Aus der Vielzahl der Anwendungsmöglichkeiten seien noch einige Beispiele herausgegriffen.

Geht man von einer Zahl x aus der Spalte für $\sqrt{n}$ zur Spalte $\sqrt[3]{n}$ über, so erhält man $\sqrt[3]{x^2}$.

BEISPIEL 1

$\sqrt[3]{21{,}4^2} \approx 7{,}71$

Lösung: Geht man von der Zahl 21,4 in der Spalte für $\sqrt{n}$ aus, so steht unter n der Wert $21{,}4^2$ und unter $\sqrt[3]{n}$ dann der gesuchte Wert $\sqrt[3]{21{,}4^2} \approx 7{,}71$.

Geht man von einer Zahl x aus der Spalte für $\sqrt[3]{n}$ zur Spalte $\sqrt{n}$ über, so erhält man $\sqrt{x^3}$. (Begründung?)

BEISPIEL 2

$\sqrt{7{,}698^3} \approx 21{,}35$

Beim Übergang von einer Zahl x aus der Spalte πn zur Spalte n ergibt sich der Wert $\frac{x}{\pi}$. (Begründung?)

BEISPIEL 3

Es ist $\frac{14{,}42}{\pi} \approx 4{,}59$. *Daraus folgt durch Übergang zu anderen Spalten weiter:*

$\left(\frac{14{,}42}{\pi}\right)^2 \approx 21{,}07$ $\quad \left(\frac{14{,}42}{\pi}\right)^3 \approx 96{,}70$ $\quad \sqrt{\frac{14{,}42}{\pi}} \approx 2{,}14$ $\quad \sqrt[3]{\frac{1{,}442}{\pi}} \approx 0{,}77$

Beim Übergang von einer Spalte in die Spalten der Quadrat- oder der Kubikwurzeln ist Vorsicht geboten, da hier die Kommastellungen genauestens zu beachten sind.
Man mache sich für das Tafelrechnen wie für jedes andere Rechnen den *Grundsatz* zu eigen:

> Bevor eine Aufgabe gelöst wird, ist der ungefähre Wert des Ergebnisses durch eine *Überschlagsrechnung* festzustellen.

Dadurch werden grobe Fehler auf alle Fälle vermieden.

3.6.8. Interpolation

Die vorliegende Tabelle gestattet es zunächst nur, die Quadrate, Kuben, Quadratwurzeln usw. von Zahlen mit drei geltenden Ziffern zu entnehmen. Durch das Verfahren der **linearen Interpolation** ist es jedoch auch möglich, den Gültigkeitsbereich der Tabellen auf vierziffrige Zahlen zu erweitern. Das Verfahren der linearen Interpolation soll an einem Beispiel ausführlich dargestellt werden.

BEISPIELE

1. *Es soll* $\sqrt[3]{456{,}3}$ *ermittelt werden.*

Lösung: Der Radikand liegt zwischen den beiden Zahlen 456 und 457. Daher muß auch $\sqrt[3]{456{,}3}$ zwischen $\sqrt[3]{456{,}0}$ und $\sqrt[3]{457{,}0}$, d.h. zwischen den beiden in der Tafel stehenden Werten 7,6970 und 7,7026 liegen.
Während der Radikand von 456,0 bis 457,0 um 10 Einheiten der letzten Stelle anwächst, wachsen die zugehörigen Wurzelwerte von 7,6970 bis 7,7026 an, d.h. um 56 Einheiten der letzten Stelle. Verteilt man diese 56 Einheiten bei den Wurzelwerten *gleichmäßig* auf die 10 Einheiten bei den Radikanden (*daher „lineare" Interpolation*), so kommen auf 1 Einheit Zuwachs bei den Radikanden 5,6 Einheiten Zunahme bei den Wurzelwerten. Der gegebene Radikand 456,3 unterscheidet sich vom Radikanden 456,0 um 3 Einheiten in der letzten Stelle. Auf diese 3 Einheiten Zuwachs beim Radikanden kommen dann $3 \cdot 5{,}6 = 16{,}8 \approx 17$ Einheiten Zuwachs bei den Wurzelwerten. Es ergibt sich demnach $\sqrt[3]{456{,}3} \approx 7{,}6970 + 0{,}0017 = 7{,}6987$.

2. *Durch lineare Interpolation soll* $45{,}87^3$ *aus der Tabelle ermittelt werden.*

Lösung: Laut Tabelle ist

$$45{,}80^3 = 2097{,}64 \quad \text{und} \quad 45{,}90^3 = 2106{,}81.$$

Die Grundzahlen 45,80 und 45,90 unterscheiden sich um 10 Einheiten der letzten Stelle voneinander, die Potenzwerte 2097,64 und 2106,81 um 917 Einheiten der letzten Stelle.
Auf 10 Einheiten bei den Grundzahlen kommen 917 Einheiten bei den Potenzen; auf 1 Einheit bei den Grundzahlen demnach 91,7 Einheiten bei den Potenzen und auf 7 Einheiten bei den Grundzahlen $7 \cdot 91{,}7 = 641{,}9 \approx 642$ Einheiten bei den Potenzen. Es ist demnach

$$\begin{aligned} 45{,}87^3 &= 2097{,}64 \\ &+ \quad 6{,}42 \\ \hline 45{,}87^3 &\approx 2104{,}06 \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß das Verfahren der linearen Interpolation nicht sorglos angewendet werden darf. Es führt nur dort zu brauchbaren Näherungswerten, wo die in der Tabelle stehenden Quadrate, Kuben, Wurzeln usw. im Rahmen der Tabellengenauigkeit annähernd gleichmäßig zunehmen.

BEISPIEL 3

Wie groß ist n, wenn $\sqrt[3]{n} = 7{,}7100$ *ist?*

Lösung: In der Tabelle findet man als „Nachbarwerte" zu 7,7100 die Zahlen 7,7082 und 7,7138. Die zugehörigen Radikanden sind 458,0 und 459,0. Zwischen diesen beiden Werten muß der gesuchte Radikand liegen.

7,7082 und 7,7138 unterscheiden sich um 56 Einheiten der letzten Stelle, die zugehörigen Radikanden um 10 Einheiten. Demnach kommen auf 56 Einheiten bei den Wurzeln 10 Einheiten bei den Radikanden, auf 1 Einheit bei den Wurzeln $\frac{10}{56}$ Einheiten bei den Radikanden. – Schließlich kommen auf 18 Einheiten Unterschied bei den Wurzelwerten (das ist der Unterschied zwischen dem gegebenen Wurzelwert und dem nächst kleineren in der Tafel stehenden Wert) $18 \cdot \frac{10}{56} \approx 3$ Einheiten Unterschied bei den Radikanden. Folglich ist $n \approx 458{,}3$.

Es gibt Beziehungen, nach denen man die Interpolation rein formelmäßig durchführen kann. Wenn man aber die der Interpolation zugrunde liegenden Gedankengänge verstanden hat, wird man durch eigenes Nachdenken genau so schnell und überdies sicherer zum Ziel gelangen als bei der gedankenlosen Anwendung irgendwelcher Rezepte.

3.7. Der Rechenstab

3.7.1. Die Bedeutung des Rechenstabes

Der Rechenstab ist eines der wichtigsten *mechanischen Hilfsmittel* zur Ausführung genäherter Rechnungen. Er besitzt den großen Vorteil, daß er sich einfach handhaben läßt und daß die erforderlichen Einstellungen für die verschiedenen Rechenoperationen leicht verständlich sind. Man kann u. a. mit dem Rechenstab multiplizieren, dividieren, potenzieren und radizieren sowie logarithmische und trigonometrische Rechnungen durchführen.

Die Genauigkeit, mit denen sich die Zahlenergebnisse mit einem Rechenstab ermitteln lassen, ist größer, als man gemeinhin annimmt. Bei sorgfältiger Einstellung ist der maximale Fehler bei nicht zu umfangreichen Rechnungen nicht größer als 0,5%, d. h., die mit dem Rechenstab gefundenen Ergebnisse werden nicht mehr als $\frac{1}{200}$ vom tatsächlichen Wert abweichen.

Aus all dem ist ersichtlich, daß der Rechenstab ein Hilfsmittel ist, das die Rechenarbeit wesentlich erleichtern kann. Das sichere Rechnen mit dem Rechenstab setzt jedoch die Kenntnis der Grundgedanken des Stabrechnens sowie fleißiges Üben in der Handhabung des Instrumentes voraus. Es ist daher unbedingt notwendig, daß man sich eingehend mit den Eigenschaften des Rechenstabes vertraut macht (zu jedem Rechenstab wird ein ausführliches Anleitungsheft mitgeliefert!) und daß man so lange übt, bis einem die Einstellungen für die verschiedenen Rechenoperationen „in Fleisch und Blut übergegangen" sind, so daß man sofort – ohne erst lange überlegen zu müssen, wie man einstellen und wo man ablesen muß – die zweckmäßigste Einstellung vornimmt.

Die beiden gebräuchlichsten Systeme für Rechenstäbe sind das „System Darmstadt" und das „System Rietz". Daneben werden für spezielle Zwecke noch zahlreiche andere Systeme hergestellt. Die Rechenstäbe des Systems Darmstadt sind universeller anwendbar als die des Systems Rietz. Demjenigen, der einen technischen Beruf anstrebt, ist daher ein Rechenstab vom System Darmstadt zu empfehlen (Skalenlänge 25 cm), während für diejenigen, die nur einfachere Rechnungen auszuführen haben, ein Rechenstab des Systems Rietz ausreicht.

Beim Rechnen mit dem Rechenstab sollte man immer daran denken, daß der Rechenstab ein *Präzisionsinstrument* ist, das eine *schonende Behandlung* erfordert.

3.7.2. Der Aufbau des Rechenstabes

Die drei Hauptteile des Rechenstabes sind der **Stabkörper,** die verschiebbare **Zunge** und der ebenfalls verschiebbare **Läufer** (Bild 2).
Auf der Vorderseite des Stabkörpers und der Zunge sind **Skalen** eingraviert, die in gegenseitiger Beziehung zueinander stehen und die zur Ermittlung der gesuchten

Bild 2

Zahlenwerte dienen. Die einzelnen Skalen besitzen verschiedene **Teilungen**, und zwar befinden sich auf dem Stabkörper die *Kubikteilung* (K), die *Quadratteilung* (A), die *Grundteilung* (D) und die *logarithmische Teilung* (L).

Die Rechenstäbe des Systems Darmstadt und die des Systems Rietz weisen auf der Vorderseite keine wesentlichen Unterschiede auf.
An Stelle der logarithmischen Teilung enthalten manche Rechenstäbe des Systems Darmstadt eine *trigonometrische Teilung*. In diesem Falle findet man dann die logarithmische Teilung auf der Rückseite des Rechenstabes.

Auf der Vorderseite der Zunge sind eine zweite *Quadratteilung* (B), die *Reziprokteilung* (CI) und eine zweite *Grundteilung* (C) aufgetragen (Bild 3). Die Teilungen A und B sowie C und D stimmen jeweils miteinander überein.

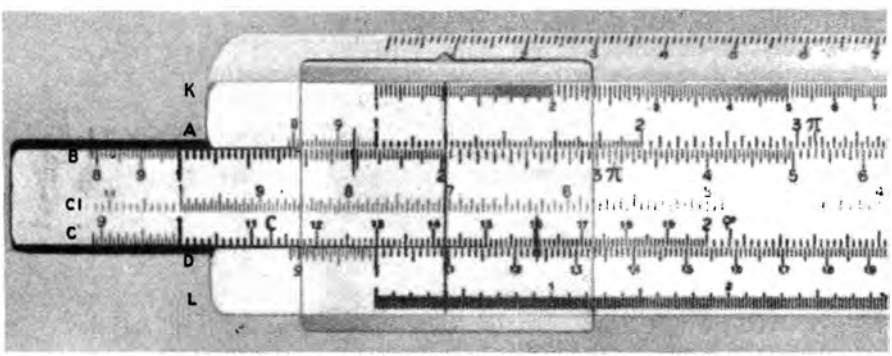


Bild 3

Die Rückseite der Zunge enthält bei Rechenstäben des Systems Rietz *trigonometrische Teilungen*, während beim System Darmstadt neben den trigonometrischen auch *Exponentialteilungen* zu finden sind.
Auf dem Läufer sind schließlich noch ein senkrechter schwarzer Strich, sowie zwei, meist kleinere, rote Striche eingeätzt, die zur besseren Einstellung der Zahlenwerte dienen.

Bei einem ordnungsgemäßen Rechenstab muß der Mittelstrich, wenn er über den Teilstrich 1 der D-Skale gestellt worden ist, auch genau über den Teilstrichen 1 der K- und der A-Skale sowie über dem Teilstrich 0 der L-Skale stehen. Ist dies nicht der Fall, so ist es ratsam, den Rechenstab bei einem Fachmann einrichten zu lassen.

8.7.3. Einstellen und Ablesen von Zahlenwerten auf dem Rechenstab

Die Teilungen A bis D, K und CI des Rechenstabes enthalten *keine Null*, und die Zahlen 10, 100 und 1000 sind dort nur der besseren Übersicht wegen angegeben. Beim Stabrechnen kann eine 10 genau so gut eine 100, eine 1 oder eine 0,1 usw. bedeuten.
Ferner lassen sich auf dem Rechenstab *nur Ziffernfolgen* ablesen. *Das Stabrechnen ist demnach eine reine Zahlenrechnung ohne Berücksichtigung der Kommastellung.* Die richtige Kommastellung wird – sofern sie nicht von vornherein klar ist – stets durch eine *Überschlagsrechnung* mit gerundeten Zahlenwerten ermittelt.

Beim Einstellen und Ablesen der Ziffernfolgen sind die *verschiedenartigen Unterteilungen* der einzelnen Bereiche zu beachten.

So bedeutet beispielsweise ein Teilstrich auf der D-Skale im Intervall von 1 bis 2 eine Einheit der letzten Stelle: 1–0–0, 1–0–1, ... 1–9–8, 1–9–9, 2–0–0. Zwischen 2 und 4 besitzt dann ein Teilstrich nur noch den Wert von zwei Einheiten der letzten Stelle: 2–0–0, 2–0–2, ... 3–9–6, 3–9–8, 4–0–0. Schließlich wird die Unterteilung immer gröber, so daß ein Teilstrich zwischen 4 und 10 jeweils nur noch eine genaue Ablesung um fünf Einheiten der letzten Stelle gestattet: 4–0–0, 4–0–5, 4–1–0, ..., 9–8–5, 9–9–0, 9–9–5, 1–0–0–0.
In ähnlicher Weise sind auch die übrigen Skalen verschiedenartig unterteilt.

Während sich das Intervall von 1 bis 10 auf den Skalen C, D und CI über den gesamten Rechenstab erstreckt, sind auf der gleichen Länge bei den Skalen A und B zwei Intervalle (von 1 bis 10 und von 10 bis 100), auf der K-Skale sogar drei Intervalle (von 1 bis 10, von 10 bis 100 und von 100 bis 1000) untergebracht. Die genauesten Einstellungen und Ablesungen lassen sich daher auf den Skalen C, D und CI vornehmen, die für sämtliche Rechnungen zu bevorzugen sind.
Auf dem Rechenstab können *drei bzw. zwei Stellen* einer Ziffernfolge *genau* abgelesen werden, während die *vierte bzw. die dritte Ziffer geschätzt* werden muß.
Es wird dringend empfohlen, das Einstellen und das Ablesen von Ziffernfolgen auf dem Rechenstab eingehend zu üben.

8.7.4. Das Rechnen mit dem Rechenstab

8.7.4.1. Quadrate und Kuben

Die Skalen K, A und D sind so aufeinander bezogen, daß *auf* A *die Quadrate*, auf K *die Kuben* der Werte aus der D-Skale abgelesen werden können.
Dazu stellt man den Läuferstrich über die Grundzahl auf D und liest das Quadrat auf A, die Kubikzahl auf K unter dem Läuferstrich ab.

BEISPIEL (Bild 4)[1])

$2{,}4^2 = 5{,}76$
$2{,}4^3 \approx 13{,}8$

[1]) In den folgenden Rechenstabbildern sind die Einstellungen stets durch unterbrochene Linien, die Ablesungen durch ausgezogene Linien gekennzeichnet.

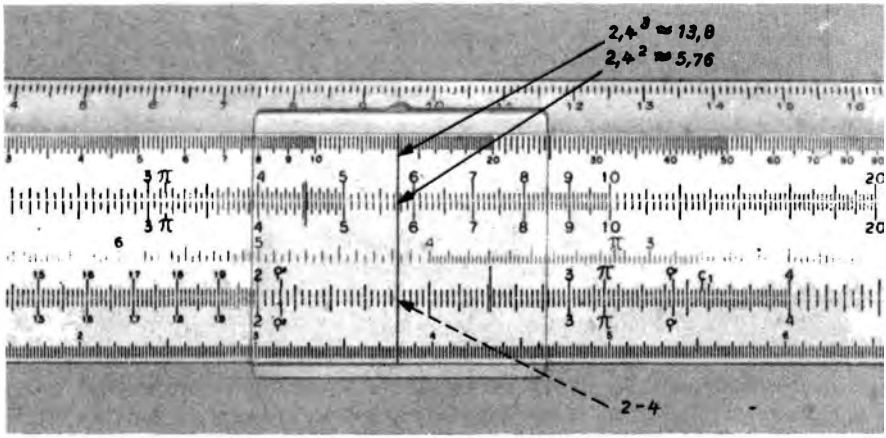


Bild 4

3.7.4.2. Quadratwurzeln

Beim Quadratwurzelziehen geht man von der Skale A zur Skale D über. (Läuferstrich benutzen!) Die Frage, von welchem der beiden Teilintervalle man auf A ausgehen muß, wird durch eine Überschlagsrechnung geklärt

BEISPIEL 1 (Bild 5)

$\sqrt{4{,}5} = ?$

Lösung: Überschlag: $\sqrt{4{,}5} > \sqrt{4} = 2$; da das Ergebnis in der Nähe von 2 liegen muß, ist in der vorderen Hälfte von A der Wert 4,5 einzustellen.

Ergebnis: $\sqrt{4{,}5} \approx 2{,}121$.

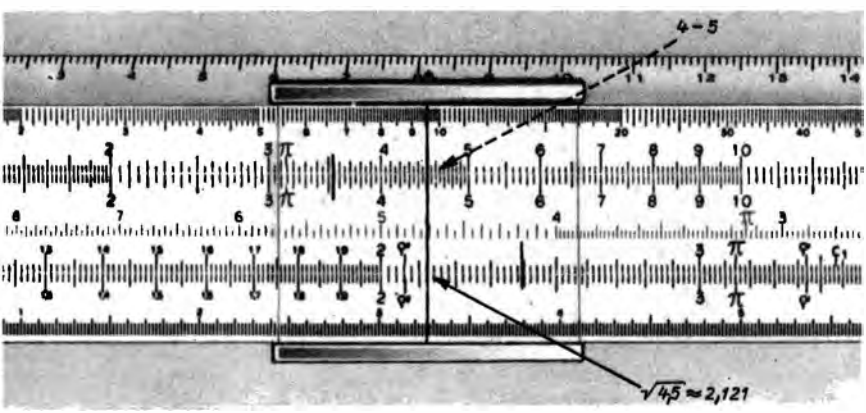


Bild 5

BEISPIEL 2 (Bild 6)

$\sqrt{0{,}45} = ?$

Lösung: Überschlag: Es ist $\sqrt{0{,}36} < \sqrt{0{,}45} < \sqrt{0{,}49}$, also $0{,}6 < \sqrt{0{,}45} < 0{,}7$. Da das Ergebnis auf D zwischen 6 und 7 zu finden sein muß, ist die Ziffernfolge 4–5 in der hinteren Hälfte von A einzustellen.

Ergebnis: $\sqrt{0{,}45} \approx 0{,}671$.

Für die Einstellung des Radikanden kann auch folgende *Merkregel* verwendet werden: Man teilt den Radikanden vom Komma aus nach links, bei echten Dezimalbrüchen nach rechts in *Zweiergruppen* ein. Enthält dann die am weitesten links stehende Zweiergruppe nur eine einziffrige

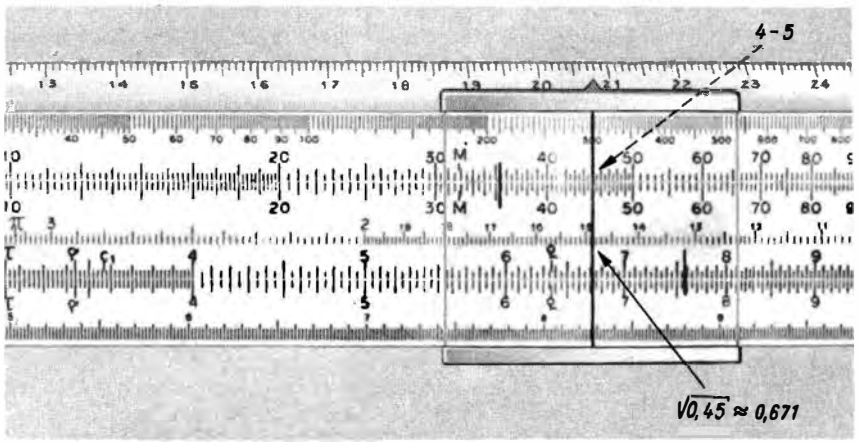


Bild 6

Zahl, so wird in der vorderen Hälfte von A eingestellt; enthält die am weitesten links stehende Zweiergruppe eine zweiziffrige Zahl, so wird der Radikand in der rechten Hälfte von A eingestellt.

BEISPIEL 3

$\sqrt{3'46{,}08}$, $\sqrt{3{,}46'08}$, $\sqrt{0{,}03'46'08}$ *usw., werden links eingestellt, dagegen werden* $\sqrt{34'60{,}80}$, $\sqrt{34{,}60'80}$, $\sqrt{0{,}34'60'80}$, $\sqrt{0{,}00'34'60'80}$ *rechts eingestellt.*

3.7.4.3. Kubikwurzeln

Wegen des in 3.7.4.1. erläuterten Zusammenhanges zwischen den Skalen D und K erhält man die Kubikwurzel aus einer Zahl, indem man von K nach D übergeht. (Läuferstrich verwenden!) Die Entscheidung, ob der Radikand im ersten, zweiten oder dritten Drittel von K einzustellen ist, wird am besten wieder durch eine Überschlagsrechnung getroffen.

BEISPIEL 1

a) $\sqrt[3]{4{,}5} = ?$

Lösung: Überschlag: Es ist $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4{,}5} < \sqrt[3]{8}$, also $1 < \sqrt[3]{4{,}5} < 2$: daher Einstellung im ersten Drittel von K.

Ergebnis: $\sqrt[3]{4{,}5} \approx 1{,}65$ (Bild 7).

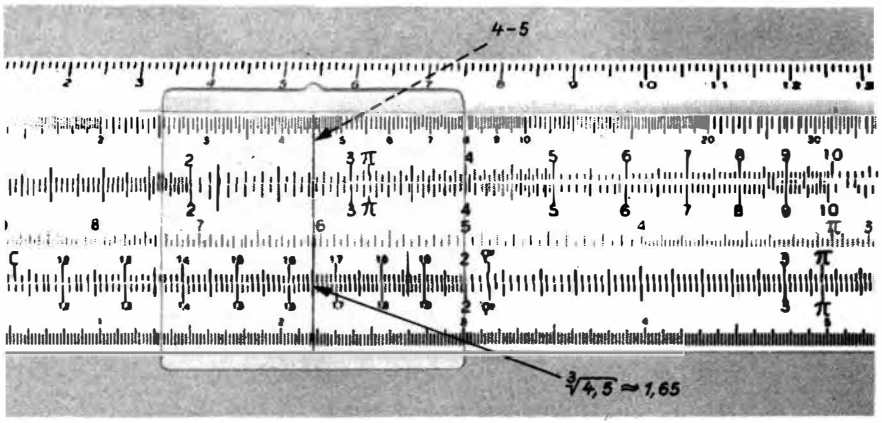


Bild 7

b) $\sqrt[3]{45} = ?$

Lösung: Überschlag: $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{45} < \sqrt[3]{64}$, also $3 < \sqrt[3]{45} < 4$; daher Einstellung von 4–5 im zweiten Drittel von K.

Ergebnis: $\sqrt[3]{45} \approx 3{,}56$ (Bild 8).

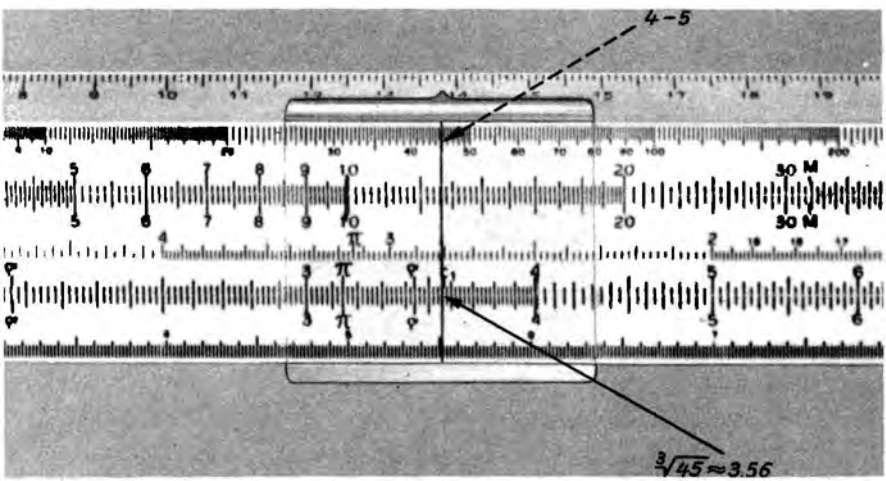


Bild 8

c) $\sqrt[3]{450} = ?$

Lösung: Überschlag: $\sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{450} < \sqrt[3]{512}$, also $7 < \sqrt[3]{450} < 8$; daher Einstellung von 4–5–0 im dritten Drittel von K.

Ergebnis: $\sqrt[3]{450} \approx 7{,}66$ (Bild 9).

Auch für die Kubikwurzeln läßt sich eine *Merkregel* für die Einstellung des Radikanden auf K angeben: Der Radikand wird vom Komma aus nach links (bzw. bei echten Dezimalbrüchen

nach rechts) in *Dreiergruppen* eingeteilt. Steht in der am weitesten links stehenden Dreiergruppe eine einziffrige Zahl, dann wird im ersten Drittel auf K eingestellt; steht dort eine zweiziffrige Zahl, so ist im zweiten Drittel einzustellen; steht dort eine dreiziffrige Zahl, so ist im dritten Drittel auf K einzustellen.

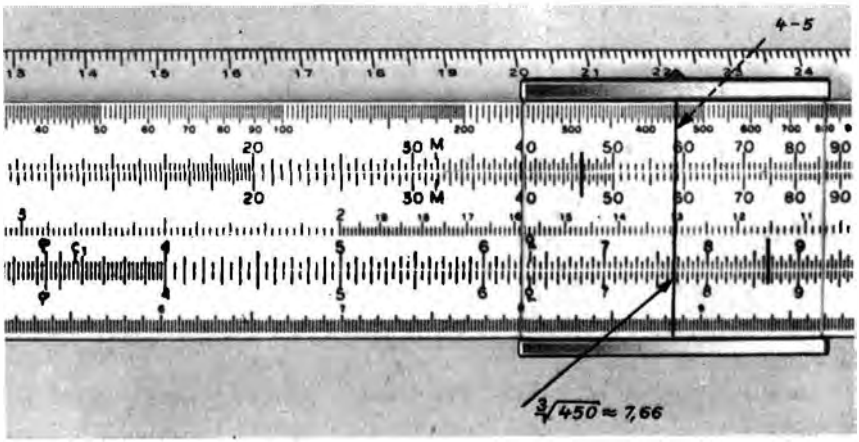


Bild 9

BEISPIEL 2

Bei den Wurzeln $\sqrt{3{\cdot}460{\cdot}000}$, $\sqrt{3{\cdot}460}$, $\sqrt{3{,}460}$, $\sqrt{0{,}003{\cdot}460}$, $\sqrt{0{,}000{\cdot}003{\cdot}460}$ *usw. ist die Ziffernfolge 3–4–6 im ersten Drittel auf K einzustellen; bei den Wurzeln* $\sqrt{34{\cdot}600}$, $\sqrt{34{,}600}$, $\sqrt{0{,}034{\cdot}600}$, $\sqrt{0{,}000{\cdot}034{\cdot}600}$ *usw. im zweiten Drittel; bei den Wurzeln* $\sqrt{346{\cdot}000}$, $\sqrt{346}$, $\sqrt{0{,}346}$, $\sqrt{0{,}000{\cdot}346}$ *usw. im letzten Drittel.*

3.7.4.4. Kehrwerte

Auf der Reziprokskale CI können die Kehrwerte der Zahlen der C-Skale abgelesen werden. Dabei ist zu beachten, daß die Einteilung der CI-*Skale gegenläufig zur Einteilung der* C-*Skale* angeordnet ist. (Grund: Mit wachsendem Nenner wird der Wert eines Bruches kleiner.)

Gegenläufige Skalen sind auf vielen Rechenstäben rot gekennzeichnet.

BEISPIEL

$\frac{1}{252} = ?$

Lösung:

Überschlag: $\frac{1}{252} \approx \frac{1}{250} = 0{,}004.$

Einstellung: Läuferstrich über 2–5–2 auf C.

Ablesung: Unter Läuferstrich auf CI (Bild 10).

Ergebnis: $\frac{1}{252} \approx 0{,}00397.$

Dasselbe Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn man den Läuferstrich über 2–5–2 auf CI eingestellt und darunter auf C abgelesen hätte.

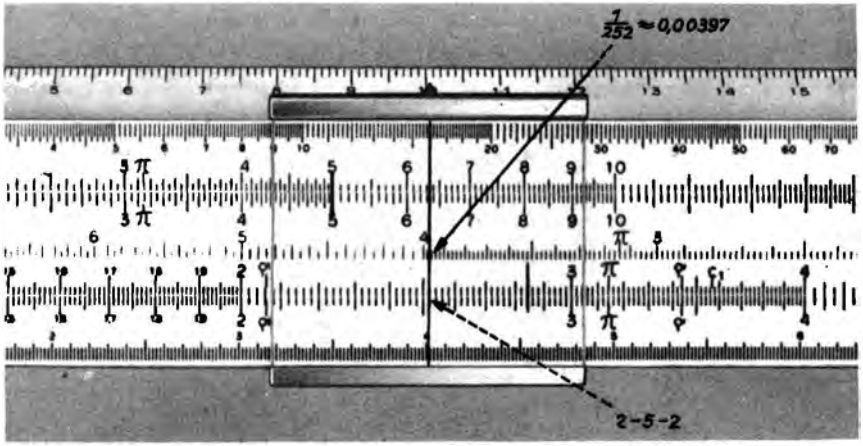


Bild 10

3.7.4.5. Multiplikation

Beim *Multiplizieren* mit dem Rechenstab werden mit Hilfe der beweglichen Zunge *Strecken aneinandergefügt*[1]). Im allgemeinen verwendet man hierzu die Skalen C und D, da dort die Einstell- und Ablesegenauigkeit am größten ist.

BEISPIEL 1

$2{,}42 \cdot 0{,}324 = ?$

Lösung:

Überschlag: $2{,}42 \cdot 0{,}324 \approx 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$.

An die der Ziffernfolge 2–4–2 entsprechende Strecke auf D wird die der Ziffernfolge 3–2–4 entsprechende Strecke der C-Skale angesetzt. Dies geschieht dadurch, daß man zunächst auf D bis 2–4–2 geht, darüber die 1 von C ansetzt und auf C bis 3–2–4 weitergeht. Unter 3–2–4 von C steht dann auf D die Ziffernfolge 7–8–4 des Ergebnisses: $2{,}42 \cdot 0{,}324 \approx 0{,}784$ (Bild 11).

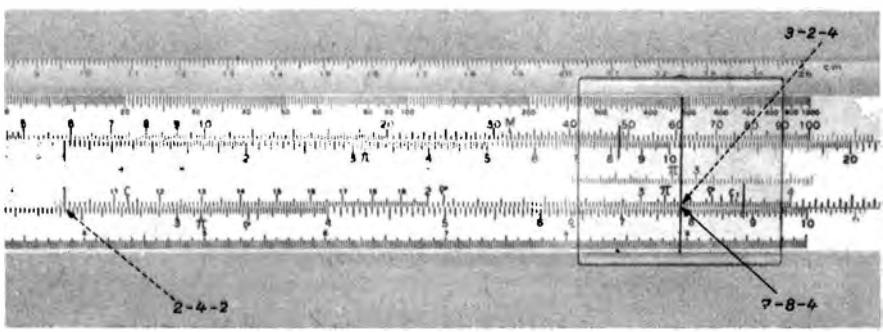


Bild 11

[1]) Eine nähere Begründung hierfür erfahren Sie im Abschnitt 12.9.

Zum Einstellen und Ablesen empfiehlt es sich, den Läuferstrich zu verwenden.

Bei der Multiplikation kann es vorkommen, daß die dem zweiten Faktor entsprechende Strecke auf C über das Ende der D-Skale hinausragt. In diesem Falle denkt man sich links an die D-Skale eine zweite Skale der gleichen Art angesetzt. Stellt man nun statt der 1 die 10 von C über die Ziffernfolge des ersten Faktors, so würde damit auch die 1 von C über derselben Ziffernfolge der gedachten Skale stehen. Die Ablesung des Ergebnisses ist jetzt auf D unter dem auf C eingestellten zweiten Faktor durchführbar.

BEISPIEL 2 Lösung:

$4{,}25 \cdot 0{,}00525 = ?$

Überschlag: $4{,}25 \cdot 0{,}00525 \approx 4 \cdot 0{,}005 = 0{,}02$.

Einstellung: 10 von C über 4–2–5 von D.

Ablesung: auf D unter 5–2–5 von C (Bild 12).

Ergebnis: Ziffernfolge 2–2–3; also ist $4{,}25 \cdot 0{,}00525 \approx 0{,}0223$.

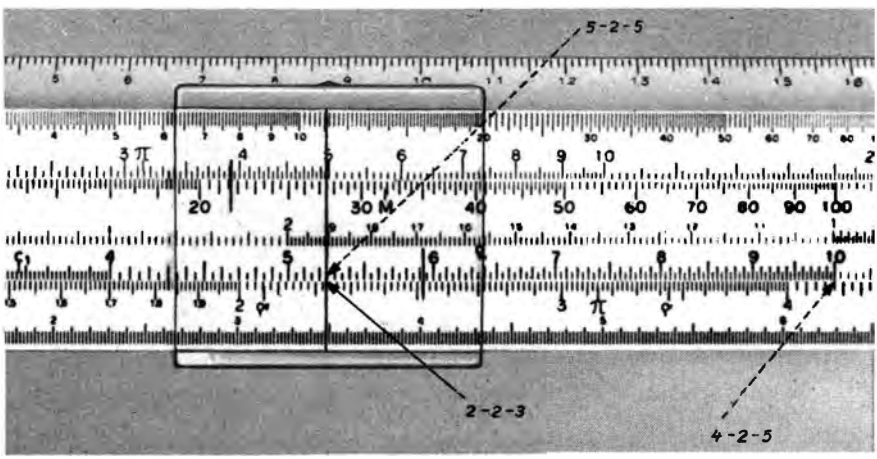


Bild 12

Bei der Multiplikation mit den Skalen A und B würde das „Durchschieben" der Zunge entfallen, jedoch wird dies mit einer Einbuße an Genauigkeit in der Einstellung und Ablesung erkauft. Sind mehr als zwei Faktoren miteinander zu multiplizieren, so sind entsprechend mehr Strecken aneinanderzufügen.

3.7.4.6. Division

Beim *Dividieren* mit dem Rechenstab wird die dem Divisor entsprechende Strecke mit Hilfe der beweglichen Zunge von der dem Dividenden entsprechenden *Strecke subtrahiert*. Auch hier werden im allgemeinen die Skalen C und D verwendet.

BEISPIEL 1 Lösung:

$6{,}73 : 0{,}425 = ?$

Überschlag: $6{,}73 : 0{,}425 = 67{,}3 : 4{,}25 \approx 68 : 4 = 17$.

Von der der Ziffernfolge 6–7–3 auf der D-Skale entsprechenden Strecke ist die der Ziffernfolge 4–2–5 entsprechende Strecke der C-Skala abzuziehen. Dies geschieht dadurch, daß man

den Läuferstrich über 6–7–3 auf D einstellt. Unter den Läuferstrich bringt man dann 4–2–5 von C und geht schließlich auf C zurück bis zur 1. Unter der 1 liest man dann das Ergebnis 1–5–8–4 auf D ab (Bild 13). Somit ist $6{,}73 : 0{,}425 \approx 15{,}84$.

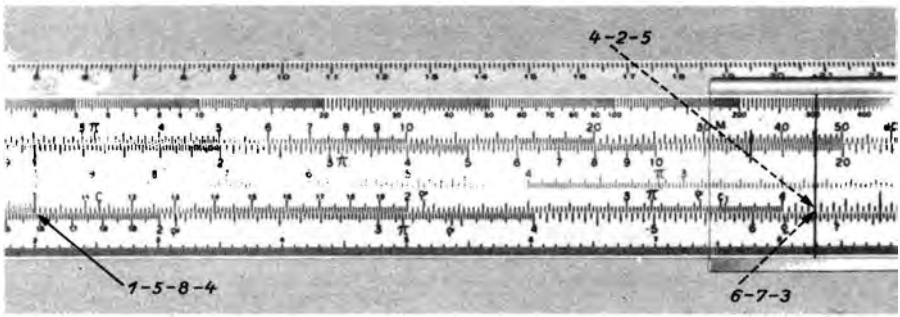


Bild 13

Bei der Division kann es vorkommen, daß die 1 von C über das linke Ende von D hinausragt. In diesem Falle findet man die Ziffernfolge des Ergebnisses unter der 10 von C. (Begründung?) Es ist demnach bei der Division ein „Durchschieben" der Zunge nie erforderlich, da man das Ergebnis immer unter dem passenden Endstrich (entweder 1 oder 10) ablesen kann.

BEISPIEL 2

$3{,}06 : 523 = ?$

Lösung:

Überschlag: $3{,}06 : 523 \approx 3 : 500 = 0{,}006$.

Einstellung: 5–2–3 von C über 3–0–6 von D.

Ablesung: unter der 10 von C (Bild 14).

Ziffernfolge des Ergebnisses 5–8–5.

Mithin ist $3{,}06 : 523 \approx 0{,}00585$.

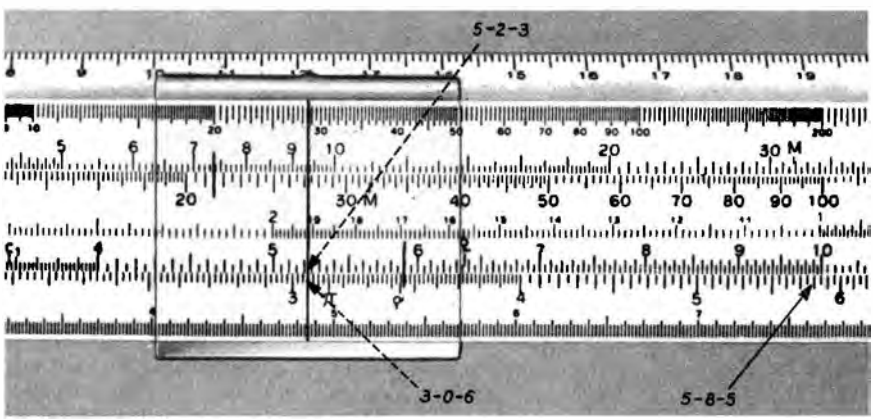


Bild 14

3.7.4.7. Zusammengesetzte Multiplikationen und Divisionen

Bei Brüchen der Form $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ oder dergleichen wäre es unpraktisch, zunächst den Zähler $a \cdot b \cdot c$, dann den Nenner $d \cdot e$ zu bestimmen und schließlich den Quotienten aus Zähler und Nenner zu bilden. Es ist viel rationeller, wenn man die Multiplikationen und Divisionen abwechselnd durchführt, d.h., wenn man zunächst $\frac{a}{d}$ bildet, daran ohne Zungenverschiebung und ohne das Zwischenergebnis $\frac{a}{d}$ abzulesen die Multiplikation mit b anschließt (Läufer benutzen!), dann mit entsprechender Zungenverschiebung durch e dividiert und schließlich wieder nur durch Läuferverschiebung $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ ermittelt.

BEISPIEL

$\frac{740 \cdot 0{,}36}{82} = ?$

Lösung:

Überschlag: $\frac{740 \cdot 0{,}36}{82} \approx \frac{70 \cdot 4}{80} = 3{,}5.$

Einstellung: 8–2–0 von C über 7–4–0 von D; Läuferstrich auf 3–6–0 von C.

Ablesung unter dem Läuferstrich auf D (Bild 15) ergibt 3–2–5.

Folglich ist $\frac{740 \cdot 0{,}36}{82} \approx 3{,}25.$

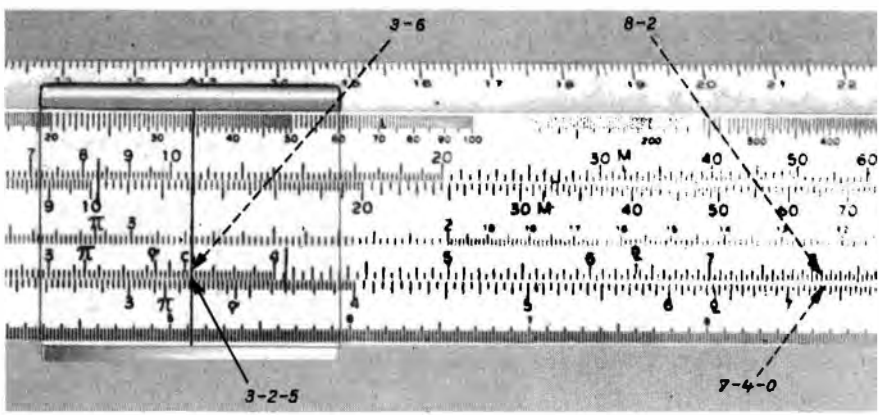


Bild 15

3.7.4.8. Multiplikation und Division mit Hilfe der Reziprokskale

Das Durchschieben der Zunge bei Multiplikationsaufgaben läßt sich vermeiden, wenn man die Reziprokskale CI zu Hilfe nimmt.

BEISPIEL 1

$3{,}62 \cdot 4{,}82 = ?$

Lösung: Überschlag: $3{,}62 \cdot 4{,}82 \approx 4 \cdot 5 = 20.$

Bei der üblichen Multiplikation (vgl. Abschnitt 3.7.4.5.) müßte bei dieser Aufgabe die Zunge nach links durchgeschoben werden.

Beachtet man aber, daß $3{,}62 \cdot 4{,}82 = 3{,}62 : \frac{1}{4{,}82}$ ist, so braucht

man nur 4–8–2 von CI über 3–6–2 von D einzustellen (Läuferstrich benutzen) und unter der 10 von CI auf D die Ziffernfolge 1–7–4–5 des Ergebnisses abzulesen (Bild 16). Demnach ist $3{,}62 \cdot 4{,}82 \approx 17{,}45$.

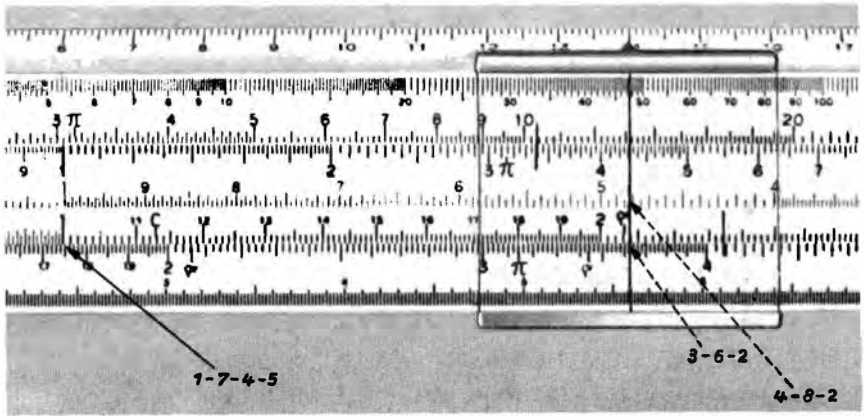


Bild 16

Während bei der Multiplikation mit Hilfe der Reziprokskale das Durchschieben der Zunge vermieden wird, kann bei der Division mit Hilfe der Reziprokskale ein Durchschieben erforderlich werden, was bei der normalen Division nach 3.7.4.6. nicht eintreten kann.

BEISPIEL 2

$4{,}82 : 0{,}302 = ?$

Lösung:

Überschlag: $4{,}82 : 0{,}302 \approx 48 : 3 = 16$.

Beachtet man, daß $4{,}82 : 0{,}302 = 4{,}82 \cdot \frac{1}{0{,}302}$ ist, so rechnet man wie folgt: 1 von CI über 4–8–2 von D einstellen (Läuferstrich!), ablesen auf D unter 3–0–2 von CI.

Ergebnis: 1–5–9–6; folglich ist $4{,}82 : 0{,}302 \approx 15{,}96$.

3.7.4.9. Weitere Hinweise zum Stabrechnen

Im Rahmen dieses Buches konnten nur die wichtigsten Fälle des Rechnens mit dem Rechenstab kurz erläutert werden. Um eine Sicherheit im Stabrechnen zu erlangen, genügt es nicht, die hier vorgeführten Beispiele nachzurechnen. Es ist vielmehr erforderlich, sich bei jedem Beispiel genau darüber klarzuwerden, *warum* die einzelnen Einstellungen so vorzunehmen sind, wie sie hier beschrieben wurden. Danach sollte man bei allen Rechenarten so lange üben, bis man bei einer beliebigen Aufgabe sofort die günstigste Einstellung findet, ohne daß man dazu erst lange Überlegungen anstellen muß.

Wer sich für weitere Anwendungsmöglichkeiten des Rechenstabes interessiert (z. B. Aufstellen von Zahlentabellen, Berechnung von Ausdrücken der Form $\sqrt{x^3}$ oder $\sqrt[3]{x^2}$ usw.), der sei auf die Spezialliteratur über das Stabrechnen[1]) hingewiesen.

[1]) LEHMANN: *Der Rechenstab und seine Verwendung*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1964.

AUFGABEN

1. Zerlege in Primfaktoren

   a) 41548 b) 115797 c) 63342 d) 98260 e) 694512

   f) 48357 g) 144875 h) 55832 i) 5986890 k) 453277

2. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von

   a) 27, 39, 57, 66, 72 und 87

   b) 504, 12780, 3132 und 180

   c) 1512, 2772, 630, 4662 und 65520

   d) 364, 1365, 91, 18018 und 3822

   e) 30030, 1232, 565, 440 und 6641

3. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus von

   a) 375 und 825 b) 748 und 484 c) 1871 und 391

   d) 16384 und 486 e) 92778 und 1034 f) 848 und 318

   g) 1001 und 858 h) 19778 und 48763 i) 434146 und 119102

   k) 66417 und 91962

4. Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von

   a) 2, 3, 4, 5, 6, 10 und 12 b) 15, 42, 60 und 105 c) 210, 378, 315 und 90

   d) 37, 61, 71 und 74 e) 48, 126, 273, 156, 56, 189 und 546

   f) 81, 225, 135, 125, 675 und 6 g) 77, 97, 221, 143, 119, 539 und 2431

   h) 19683, 729 und 6561 i) 83, 483 und 967

   k) 64, 96, 243, 1296, 24, 81, 3888 und 384

5. Verwandle die unechten Brüche in gemischte Zahlen:

   a) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{27}{4}$ c) $\frac{28}{15}$ d) $\frac{348}{87}$ e) $\frac{61}{19}$

   f) $\frac{97}{35}$ g) $\frac{199}{61}$ h) $\frac{865}{123}$ i) $\frac{503}{84}$ k) $\frac{223}{37}$

   l) $\frac{502}{317}$ m) $\frac{729}{115}$ n) $\frac{814}{99}$ o) $\frac{964}{109}$ p) $\frac{987}{467}$

6. Verwandle die gemischten Zahlen in unechte Brüche:

   a) $3\frac{4}{11}$ b) $13\frac{2}{15}$ c) $27\frac{5}{21}$ d) $38\frac{15}{41}$ e) $74\frac{74}{95}$

   f) $5\frac{2}{3}$ g) $12\frac{17}{23}$ h) $24\frac{1}{8}$ i) $41\frac{42}{43}$ k) $83\frac{5}{7}$

   l) $6\frac{7}{8}$ m) $17\frac{1}{11}$ n) $21\frac{9}{16}$ o) $52\frac{26}{31}$ p) $99\frac{1}{2}$

7.···11. Erweitere die folgenden Brüche zeilenweise mit 2, 3, 5, 7, 11, 17 und 48:

	a)	b)	c)	d)	e)
7.	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{14}{17}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{31}{35}$
8.	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{17}{40}$	$\frac{44}{57}$
9.	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{51}{60}$
10.	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{17}{29}$	$\frac{42}{65}$	$\frac{72}{83}$
11.	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{20}{71}$	$\frac{93}{97}$

12. Kürze folgende Brüche:

a) $\frac{8}{16}$ b) $\frac{240}{304}$ c) $\frac{1260}{3024}$ d) $\frac{13838}{25058}$ e) $\frac{6}{24}$

f) $\frac{189}{252}$ g) $\frac{1232}{2310}$ h) $\frac{8232}{27783}$ i) $\frac{15}{21}$ k) $\frac{103}{570}$

l) $\frac{2352}{1960}$ m) $\frac{18900}{33075}$ n) $\frac{30}{54}$ o) $\frac{111}{185}$ p) $\frac{2074}{8633}$

q) $\frac{64680}{485100}$ r) $\frac{51}{68}$ s) $\frac{126}{288}$ t) $\frac{1771}{2618}$ u) $\frac{6006}{14014}$

13. Desgl.

a) $\frac{34}{41}$ b) $\frac{146}{438}$ c) $\frac{3318}{3738}$ d) $\frac{16384}{262144}$ e) $\frac{12}{27}$

f) $\frac{112}{210}$ g) $\frac{3705}{3835}$ h) $\frac{53475}{58725}$ i) $\frac{13}{65}$ k) $\frac{390}{420}$

l) $\frac{1197}{1767}$ m) $\frac{24576}{178625}$ n) $\frac{28}{21}$ o) $\frac{270}{504}$ p) $\frac{3692}{8094}$

q) $\frac{126672}{188384}$ r) $\frac{65}{78}$ s) $\frac{144}{720}$ t) $\frac{6402}{9894}$ u) $\frac{189210}{329616}$

14. Bestimme für folgende Gruppen von Nennern den Hauptnenner:

a) 3, 5, 8, 16, 30 b) 12, 16, 24, 32, 48 c) 48, 60, 144, 180, 240

d) 45, 76, 160, 225, 285, 300 e) 6, 20, 63; 84, 90, 105, 126

f) 68, 72, 88, 102, 132, 187 g) 21, 27, 69, 161, 483

h) 2, 8, 64, 512 i) 15, 18, 30, 62, 90, 186 k) 35, 77, 85, 385, 935

15. Addiere folgende Brüche:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{7}{6}-\frac{2}{5}-\frac{5}{12}+\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}-\frac{1}{4}-\frac{7}{9}+\frac{5}{6}$

e) $\frac{7}{8}-\frac{5}{12}+\frac{17}{24}-\frac{1}{16}-\frac{2}{3}$ f) $\frac{11}{12}-\frac{5}{56}+\frac{25}{42}+\frac{79}{84}-\frac{19}{21}$

g) $\frac{12}{13}+\frac{3}{5}+\frac{7}{16}-\frac{25}{26}-\frac{17}{20}$ h) $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$

i) $\frac{14}{27}+\frac{5}{18}+\frac{7}{9}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}-\frac{71}{81}-\frac{41}{54}$ k) $\frac{37}{252}+\frac{17}{120}+\frac{45}{616}-\frac{35}{264}-\frac{34}{315}$

16. Berechne

a) $116\frac{70}{117}+23\frac{25}{78}$ b) $19\frac{5}{6}-10\frac{5}{8}+2\frac{1}{2}$

c) $5\frac{1}{3}-6\frac{3}{4}+7\frac{1}{2}+\frac{4}{5}-9\frac{5}{8}+2\frac{11}{12}$ d) $15\frac{18}{35}+23\frac{1}{70}+31\frac{19}{20}+42\frac{23}{28}$

e) $461\frac{29}{30}+141\frac{31}{45}+703\frac{17}{72}+355\frac{19}{40}+298\frac{53}{60}$

f) $2\frac{17}{24}+5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+\frac{23}{40}+9\frac{5}{9}+5\frac{61}{120}$

g) $83\frac{17}{30}+68\frac{17}{18}-47\frac{11}{14}-75\frac{4}{15}+34\frac{3}{10}-66\frac{10}{63}+2\frac{2}{5}$

h) $46\frac{51}{55}+71\frac{41}{110}+12\frac{25}{132}+1\frac{19}{220}+63\frac{23}{60}+27\frac{19}{20}$

i) $38\frac{23}{30}+72\frac{2}{5}+91\frac{7}{15}-243\frac{5}{6}+18\frac{3}{10}+25\frac{7}{10}$

k) $19\frac{4}{13}-54\frac{5}{18}-1\frac{11}{12}+36\frac{14}{39}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}-\frac{7}{24}$

17. Berechne

a) $\frac{3}{4}\cdot 12$ b) $\frac{7}{8}\cdot 8$ c) $6\cdot\frac{11}{12}$ d) $5\cdot\frac{2}{7}$ e) $16\cdot\frac{13}{24}$

f) $\frac{14}{25}\cdot 15$ g) $93\cdot\frac{53}{62}$ h) $\frac{5}{66}\cdot 51$ i) $42\cdot\frac{1}{70}$ k) $174\cdot\frac{13}{29}$

18. Desgl.

a) $\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{10}$ b) $\frac{16}{35}\cdot\frac{7}{4}$ c) $\frac{11}{21}\cdot\frac{4}{3}$ d) $\frac{25}{6}\cdot\frac{18}{5}$ e) $\frac{32}{63}\cdot\frac{77}{80}$

f) $\frac{143}{150}\cdot\frac{75}{99}$ g) $\frac{91}{102}\cdot\frac{119}{117}$ h) $\frac{64}{27}\cdot\frac{81}{128}$ i) $\frac{399}{520}\cdot\frac{286}{285}$ k) $\frac{335}{116}\cdot\frac{464}{201}$

19. Desgl.

a) $5\frac{2}{7}\cdot 4$ b) $3\cdot 7\frac{2}{3}$ c) $13\frac{1}{18}\cdot 6$ d) $10\frac{19}{24}\cdot 30$ e) $87\cdot 21\frac{21}{58}$

f) $5\frac{2}{3}\cdot 6\frac{1}{2}$ g) $7\frac{7}{8}\cdot 3\frac{5}{9}$ h) $2\frac{8}{45}\cdot 2\frac{41}{42}$ i) $4\frac{69}{94}\cdot 2\frac{10}{89}$ k) $1\frac{37}{96}\cdot 1\frac{127}{336}$

20. Berechne

a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{15}$ b) $\frac{7}{18} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{34}{44}$ c) $5 \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{37}{25} \cdot \frac{58}{111}$

d) $\frac{75}{98} \cdot 12 \cdot \frac{77}{45} \cdot \frac{28}{55}$ e) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{13}$ f) $\frac{15}{34} \cdot \frac{16}{23} \cdot 19 \cdot \frac{51}{32}$

g) $\frac{425}{252} \cdot \frac{110}{221} \cdot \frac{182}{165}$ h) $\frac{2244}{3185} \cdot 207 \cdot \frac{280}{5643} \cdot \frac{1729}{25024}$

i) $\frac{664}{7663} \cdot \frac{623}{2241} \cdot 158 \cdot \frac{873}{4984}$ k) $\frac{1024}{14175} \cdot \frac{25725}{36608} \cdot \frac{297}{8036} \cdot 533$

21. Desgl.

a) $2\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot 4\frac{3}{5}$ b) $4\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{5}{11}$ c) $3 \cdot 7\frac{1}{14} \cdot 6\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{18}$

d) $5\frac{9}{25} \cdot 1\frac{44}{51} \cdot 5\frac{5}{67} \cdot \frac{1}{38}$ e) $11\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{8} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 2\frac{5}{8}$ f) $\frac{255}{256} \cdot 3\frac{9}{25} \cdot \frac{52}{81} \cdot 1\frac{79}{221}$

g) $4\frac{1}{124} \cdot 3\frac{119}{123} \cdot 1\frac{188}{427} \cdot \frac{341}{568}$ h) $4\frac{12}{77} \cdot 10\frac{45}{56} \cdot \frac{7}{25} \cdot 10\frac{1}{44}$

i) $3\frac{6}{175} \cdot 5\frac{83}{297} \cdot 19\frac{497}{1152} \cdot 2\frac{110}{413}$ k) $2\frac{179}{455} \cdot \frac{169}{385} \cdot 2\frac{13}{165} \cdot \frac{125}{273}$

22. Bestimme den Kehrwert von

a) 8 b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) $\frac{1}{10}$

f) 1 g) $\frac{3}{11}$ h) $\frac{4}{17}$ i) $\frac{1}{13}$ k) $\frac{7}{19}$

23. Desgl.

a) $3\frac{1}{3}$ b) $4\frac{4}{9}$ c) $13\frac{1}{2}$ d) $40\frac{17}{20}$ e) $28\frac{11}{25}$

f) $6\frac{42}{71}$ g) $9\frac{1}{30}$ h) $54\frac{3}{5}$ i) $36\frac{19}{49}$ k) $5\frac{130}{217}$

24. Desgl.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ c) $1 - \frac{5}{6}$ d) $7\frac{8}{9} - 3\frac{5}{6}$

e) $14\frac{5}{12} - 14\frac{3}{8}$ f) $13\frac{5}{9} - \frac{13}{18} - 7\frac{26}{27}$ g) $18 - 5\frac{11}{13} + \frac{4}{5}$ h) $\frac{3}{5} - \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$

i) $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$ k) $5\frac{2}{21} - \frac{1}{35} - 2\frac{7}{30}$

25. Berechne

a) $\frac{8}{13} : 4$ b) $\frac{4}{9} : 2$ c) $\frac{4}{5} : 5$ d) $\frac{42}{43} : 6$ e) $\frac{15}{16} : 25$

f) $\frac{8}{9} : 16$ g) $\frac{46}{71} : 69$ h) $\frac{70}{73} : 14$ i) $\frac{94}{99} : 141$ k) $\frac{255}{728} : 102$

26. Desgl.

a) $1\frac{1}{2} : 3$ b) $5\frac{5}{7} : 5$ c) $17\frac{1}{4} : 46$ d) $4\frac{8}{9} : 8$ e) $7\frac{1}{8} : 19$

f) $320\frac{1}{4} : 42$ g) $922\frac{1}{2} : 35$ h) $28\frac{6}{11} : 4$ i) $10\frac{1}{26} : 58$ k) $17\frac{11}{29} : 63$

27. Berechne

a) $\frac{8}{11} : \frac{2}{11}$ b) $\frac{32}{52} : \frac{12}{52}$ c) $\frac{15}{17} : \frac{15}{21}$ d) $\frac{21}{65} : \frac{42}{91}$

e) $\frac{42}{91} : \frac{21}{65}$ f) $\frac{37}{75} : \frac{69}{94}$ g) $\frac{216 : 135}{539 : 308}$ h) $\frac{114}{287} : \frac{418}{2583}$

i) $\frac{1088 : 272}{1863 : 5589}$ k) $\frac{795}{25232} : \frac{3975}{6308}$

28. Desgl.

a) $5\frac{4}{9} : \frac{7}{9}$ b) $3\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$ c) $1\frac{9}{25} : \frac{9}{25}$ d) $\frac{9}{25} : 1\frac{9}{25}$

e) $4\frac{6}{7} : \frac{17}{35}$ f) $13\frac{1}{18} : \frac{47}{63}$ g) $1\frac{47}{72} : \frac{85}{96}$ h) $2\frac{310}{637} : \frac{264}{455}$

i) $3\frac{31}{1323} : \frac{400}{3087}$ k) $2\frac{3959}{6424} : \frac{1029}{4664}$

29. Desgl.

a) $13\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}$ b) $23\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$ c) $12\frac{16}{17} : 3\frac{4}{17}$ d) $2\frac{9}{14} : 13\frac{3}{14}$

e) $11\frac{13}{25} : 6\frac{6}{35}$ f) $3\frac{47}{126} : 26\frac{13}{42}$ g) $66\frac{25}{36} : 12\frac{26}{55}$ h) $2\frac{23}{176} : 2\frac{11}{32}$

i) $207\frac{27}{184} : 55\frac{55}{69}$ k) $1217\frac{209}{216} : 37\frac{103}{120}$

30. Vereinfache

a) $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{11}{7}}$ c) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{12}}$ d) $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{6}}$ e) $\frac{\frac{17}{28}}{\frac{5}{63}}$

f) $\frac{\frac{25}{36}}{\frac{15}{16}}$ g) $\frac{\frac{21}{26}}{\frac{35}{78}}$ h) $\frac{\frac{91}{360}}{\frac{13}{3240}}$ i) $\frac{\frac{28}{65}}{\frac{15}{46}}$ k) $\frac{\frac{742}{3015}}{\frac{2968}{24321}}$

31. Desgl.

a) $\frac{\frac{7}{3}}{2}$ b) $\frac{15}{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{\frac{1}{5}}{8}$ d) $\frac{1}{\frac{5}{8}}$ e) $\frac{\frac{28}{45}}{63}$

f) $\frac{\frac{28}{45}}{63}$ g) $\frac{\frac{84}{95}}{70}$ h) $\frac{\frac{76}{91}}{19}$ i) $\frac{\frac{360}{252}}{425}$ k) $\frac{\frac{729}{730}}{2187}$

32. Desgl.

a) $\dfrac{4\frac{1}{2}}{4\frac{3}{4}}$ b) $\dfrac{6\frac{5}{12}}{3\frac{1}{18}}$ c) $\dfrac{5\frac{5}{14}}{2\frac{6}{7}}$ d) $\dfrac{1\frac{7}{9}}{1\frac{5}{27}}$ e) $\dfrac{2\frac{10}{27}}{5\frac{31}{45}}$

f) $\dfrac{22\frac{13}{36}}{2\frac{67}{84}}$ g) $\dfrac{70\frac{7}{22}}{35\frac{20}{31}}$ h) $\dfrac{17\frac{31}{47}}{2\frac{50}{141}}$ i) $\dfrac{1\frac{151}{644}}{14\frac{131}{161}}$ k) $\dfrac{98\frac{43}{304}}{1\frac{539}{1216}}$

33. Vereinfache

a) $\dfrac{\frac{2}{5}+3\frac{1}{4}}{9\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{11\frac{1}{3}-7\frac{7}{12}}{\left(\frac{7}{16}-\frac{17}{48}\right)\cdot 15}$ c) $\dfrac{\dfrac{5\frac{2}{7}-3\frac{1}{2}}{2\frac{9}{14}}}{\dfrac{4\frac{3}{8}}{2\frac{1}{4}}+\frac{10}{37}}$

d) $\dfrac{\dfrac{4\frac{3}{8}}{6\frac{5}{12}}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{19}{33}}$ e) $\dfrac{1\frac{5}{12}\cdot 10\frac{1}{2}+42\frac{3}{8}:6}{66\frac{1}{4}:3\frac{3}{4}-3\frac{17}{20}\cdot 1\frac{1}{14}}$ f) $\dfrac{\dfrac{15\frac{1}{2}-11\frac{1}{6}}{12\frac{2}{3}-11\frac{5}{12}}}{\dfrac{19\frac{4}{9}:5\frac{5}{9}}{\frac{1}{4}+\frac{7}{8}:6\frac{1}{2}}}$

g) $\dfrac{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{31}{45}\cdot 7\frac{1}{7}}{\dfrac{3\frac{13}{69}\cdot 3\frac{1}{15}}{3\frac{7}{27}}}$ h) $\dfrac{\dfrac{2\frac{7}{24}}{2\frac{1}{16}}+8\cdot\dfrac{64}{117}\cdot\dfrac{13}{80}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{5\frac{19}{25}}{12\frac{12}{35}}}$

34. Vereinfache folgende Kettenbrüche

a) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}}$ b) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}}$ c) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}$

d) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6-\frac{9}{2}}}$ e) $\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\frac{1}{7}}}}$ f) $\cfrac{5}{5-\cfrac{1}{5-\frac{5}{6}}}$

35. Die folgenden Brüche sind als Dezimalbrüche (Kommaschreibweise) zu schreiben:

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{7004}{100}$ c) $\frac{12}{10000}$ d) $\frac{35728}{100000}$

e) $\frac{102}{1000000}$ f) $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$ g) $\frac{9}{10}+\frac{34}{10000}+\frac{83}{1000000}+\frac{1}{100}$

h) $\frac{31}{100}+\frac{918}{1000}$ i) $\frac{90705}{100000}+\frac{80004}{1000000}+\frac{600301}{1000000000}+\frac{2}{100000000}$

k) $\frac{6004}{10000}+\frac{973}{1000}+\frac{7}{10}+\frac{85}{10000}+\frac{604}{1000}$

36. Man addiere α) zeilenweise, β) spaltenweise; man addiere und subtrahiere abwechselnd γ) zeilenweise, δ) spaltenweise

	i)	k)	l)	m)	n)
a)	67,372	214,28853	0,327	137,45069	471,6
b)	0,9254	0,07273	0,02	0,8	0,000407
c)	81,3	13,47	0,00081	72	4,16919
d)	6,75	1,0101	0,0101	4,307	748,637663
e)	122	64,04308	0,2	0,0009	526,08789
f)	0,0072	5	0,0583	16,04	223
g)	988,6189	317,2	0,11709	681,876	83
h)	17,0405	4,00081	0,2667	87,5254	111,21901

37. Berechne

a) 33,42 kg + 5,063 kg + 742 g + 113,8 kg + 75 g + 146,9 kg

b) 17,42 km + 57 m + 417 cm − 0,93 km − 306,17 m + 21,0264 km − 38,79 m − 3261 cm

c) 94,2084 m^2 − 4715 cm^2 + 2,08774 km^2 − 39,0085 m^2 + 52716 cm^2 − 0,978 km^2
in kg, km und km^2!

38. Berechne

a) 47,39 · 10 b) 64,32 · 100 c) 83,04 · 1000 d) 0,475 · 10

e) 0,00101 · 100 f) 0,04418 · 10000 g) 4,0253 · 1000000 h) 0,0704 · 100

i) 7,72 · 1000 k) 0,00000402 · 1000000

39. Desgl.

a) 71,6 · 4 b) 724,26 · 30 c) 0,628 · 5 d) 1,4669 · 70

e) 0,00708 · 9 f) 0,77152 · 400 g) 15,27 · 24 h) 267,9 · 630

i) 54,073 · 204 k) 0,03509 · 8300

40. Desgl.

a) 7,64 · 3,2 b) 24,903 · 14,3 c) 491,6 · 0,1 d) 6,46 · 0,9

e) 835,62 · 0,67 f) 0,7504 · 0,429 g) 55427,3 · 0,0051 h) 0,027 · 0,00563

i) 0,0059 · 2207,6 k) 100,97 · 0,074

41. Desgl.

a) 17,6 : 2 b) 54,81 : 7 c) 386,722 : 14 d) 23,6095 : 23
e) 49,704 : 57 f) 0,357808 : 88 g) 67,302 : 90 h) 1,034 : 752
i) 2821,8 : 600 k) 4,660149 : 4332

42. Desgl.

a) 4,2 : 0,3 b) 18,9 : 0,7 c) 14,26 : 0,02 d) 4,88 : 0,08
e) 9,18 : 0,27 f) 0,0377 : 0,0029 g) 463,2 : 0,1 h) 44,64 : 2,79
i) 134,68 : 19,24 k) 0,5461 : 0,001

43. Desgl.

a) 173,664 : 64,32 b) 121,233 : 24,15 c) 33,258 : 72,3 d) 30,7254 : 18,735
e) 0,004189 : 0,0059 f) 59,67216 : 0,0912 g) 1,836 : 0,00425 h) 0,0325 : 0,008125
i) 48,112 : 0,91644 k) 63,4 : 0,032

44. Folgende gewöhnliche Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{13}{25}$
f) $\frac{11}{16}$ g) $\frac{37}{64}$ h) $\frac{29}{32}$ i) $\frac{71}{125}$ k) $\frac{23}{256}$

45. Desgl.

a) $\frac{19}{16}$ b) $\frac{1027}{125}$ c) $\frac{1099}{80}$ d) $\frac{27431}{500}$ e) $\frac{5037}{128}$
f) $\frac{9365}{40}$ g) $\frac{16548}{3125}$ h) $\frac{17618}{250}$ i) $\frac{2559}{512}$ k) $\frac{97619}{1250}$

46. Desgl.

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{51}{99}$ e) $\frac{8}{11}$
f) $\frac{1}{7}$ g) $\frac{9}{13}$ h) $\frac{21}{37}$ i) $\frac{71}{271}$ k) $\frac{19}{303}$

47. Desgl.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{51}{275}$ d) $\frac{35}{36}$ e) $\frac{311}{404}$
f) $\frac{79}{205}$ g) $\frac{19}{64}$ h) $\frac{15}{52}$ i) $\frac{341}{425}$ k) $\frac{425}{808}$

48. Folgende Dezimalbrüche sind in gewöhnliche Brüche umzuwandeln:

a) 0,16 b) 0,625 c) 7,82 d) 0,588 e) 0,4192
f) 23,2375 g) 0,0625 h) 0,62672 i) 115,65625 k) 0,5234375

49. Desgl.

a) $0,\overline{8}$ b) $0,\overline{27}$ c) $0,\overline{03}$ d) $0,\overline{59}$ e) $0,\overline{273}$
f) $0,\overline{90}$ g) $0,\overline{234}$ h) $0,\overline{037}$ i) $0,\overline{2211}$ k) $0,\overline{5437}$

50. Desgl.

a) $0{,}3\overline{7}$ b) $0{,}02\overline{3}$ c) $0{,}55\overline{61}$ d) $0{,}2\overline{407}$ e) $0{,}2708\overline{3}$

f) $0{,}631\overline{35}$ g) $0{,}8\overline{783}$ h) $0{,}97\overline{65853}$ i) $0{,}310\overline{6435}$ k) $0{,}7\overline{307692}$

51. Durch Rundung welcher Zahlen können die folgenden Zahlen entstanden sein?

a) 0,84 b) 7,127 c) 113,081 d) 64,0 e) 7163,29

f) 614,300 g) 0,5001 h) 347,2 i) 0,010000 k) 1,0

52. Auf die 4., 3., 2., 1. Stelle hinter dem Komma sind zu runden:

a) 0,750283 b) 0,070605 c) 0,64627 d) 0,28786 e) 3,00872

f) 17,98989 g) 5,09495 h) 9,82257 i) 7,29996 k) 3,45678

53. Die folgenden Zahlen sind auf Zehner, Hunderter und Zehntausender zu runden:

a) 26461 b) 874478 c) 6899,7 d) 7402976 e) 86004

54. Welche Genauigkeit ergibt sich aus folgenden Zahlenangaben:

a) 0,0700 km b) 0,30 p c) 4,200 kg d) 163,08 s e) 4168,0 V

f) 394,60 m g) 0,10 m h) 714,200 kg i) 4713,00 t k) 93,2000 MHz

55. Man berechne die Produkte der Aufgabe 40, indem man vor der Multiplikation jeden Faktor auf zwei Stellen hinter dem Komma rundet und vergleiche die Ergebnisse mit denen, die durch nachträgliche Rundung der Ergebnisse der ursprünglichen Aufgaben entstehen. Welche Abweichungen treten auf?

56. Man berechne bis auf die angegebenen Stellen genau:

a) $0{,}3938 \cdot 5{,}348$ (3 Stellen) b) $3677{,}02 : 4{,}07$ (1 Stelle)

c) $5{,}97604 : 0{,}0236$ (1 Stelle) d) $\dfrac{7825 \cdot 0{,}735}{16{,}187}$ (2 Stellen)

e) $\dfrac{90807{,}2}{312{,}4 \cdot 17{,}6}$ (2 Stellen) f) $\dfrac{12{,}034 \cdot 1{,}473}{42{,}34}$ (4 Stellen)

g) $\dfrac{556{,}5 \cdot 2{,}6016}{7{,}588 \cdot 101{,}76}$ (3 Stellen) h) $\dfrac{16\frac{5}{8} \cdot 15\frac{13}{21} \cdot 0{,}15}{15{,}2}$ (4 Stellen)

i) $(345{,}7 - 6{,}225 \cdot 0{,}73) : 7{,}285$ (2 Stellen)

k) $(17{,}35 : 37 + 18{,}53 : 43) \cdot 3{,}5$ (3 Stellen)

57. Welche Fehlerschranken ergeben sich, wenn man die folgenden periodischen Dezimalbrüche jeweils nach der zweiten Periode abbricht und rundet:

a) $0{,}\overline{4}$ b) $0{,}\overline{07}$ c) $0{,}\overline{643}$ d) $0{,}\overline{7529}$ e) $0{,}63\overline{7}$

f) $0{,}137\overline{23}$ g) $0{,}8\overline{99}$ h) $0{,}4\overline{5}$ i) $0{,}71\overline{54}$ k) $0{,}0329\overline{731}$

58. Mit Hilfe der Zahlentabelle[1]) bestimme man

a) 617^2 b) $6{,}17^2$ c) 6170^2 d) $0{,}617^2$ e) $0{,}00617^2$

59. Desgl.

a) 372^3 b) $3{,}72^3$ c) 3720^3 d) $0{,}372^3$ e) $0{,}0372^3$

[1]) MÜLLER: *Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln.* VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1961.

60. Desgl.

a) $\sqrt{590}$ b) $\sqrt{59}$ c) $\sqrt{5{,}9}$ d) $\sqrt{0{,}059}$ e) $\sqrt{590000}$

f) $\sqrt{0{,}000059}$ g) $\sqrt{59000}$ h) $\sqrt{0{,}0059}$ i) $\sqrt{5900}$ k) $\sqrt{0{,}0000059}$

61. Desgl.

a) $\sqrt[3]{700}$ b) $\sqrt[3]{0{,}7}$ c) $\sqrt[3]{70000}$ d) $\sqrt[3]{0{,}007}$ e) $\sqrt[3]{70}$

f) $\sqrt[3]{7}$ g) $\sqrt[3]{0{,}00007}$ h) $\sqrt[3]{700000000}$ i) $\sqrt[3]{7000}$ k) $\sqrt[3]{0{,}0007}$

62. Desgl.

a) 1150^2 b) $0{,}0879^2$ c) $64{,}6^2$ d) 7600^2 e) $0{,}313^2$

f) $0{,}000502^2$ g) $4{,}93^2$ h) 25400^2 i) $0{,}000067^2$ k) $0{,}00971^2$

63. Desgl.

a) 5600^3 b) $0{,}0702^3$ c) $8{,}69^3$ d) $0{,}798^3$ e) $35{,}2^3$

f) 4370^3 g) $0{,}0092^3$ h) $0{,}000117^3$ i) 62700^3 k) $0{,}259^3$

64. Desgl.

a) $\sqrt{8{,}74}$ b) $\sqrt{0{,}0421}$ c) $\sqrt{0{,}0059}$ d) $\sqrt{6700}$ e) $\sqrt{0{,}270}$

f) $\sqrt{7{,}38}$ g) $\sqrt{450000}$ h) $\sqrt{0{,}03380}$ i) $\sqrt{90700}$ k) $\sqrt{0{,}000841}$

65. Desgl.

a) $\sqrt[3]{0{,}07}$ b) $\sqrt[3]{6000}$ c) $\sqrt[3]{0{,}534}$ d) $\sqrt[3]{0{,}065}$ e) $\sqrt[3]{0{,}000261}$

f) $\sqrt[3]{779000}$ g) $\sqrt[3]{27000}$ h) $\sqrt[3]{0{,}931}$ i) $\sqrt[3]{0{,}004}$ k) $\sqrt[3]{0{,}000000376}$

66. Mit Hilfe der Zahlentabelle bestimme man die Kehrwerte von

a) 2,56 b) 63,4 c) 0,0478 d) 0,509 e) 0,000826

f) 361 g) 5140 h) 0,00909 i) 17,8 k) 0,727

67. Mit Hilfe der Zahlentafel sind folgende Quadratwurzeln zu bestimmen:

a) $\sqrt{49{,}61}$ b) $\sqrt{187{,}3}$ c) $\sqrt{0{,}006782}$ d) $\sqrt{0{,}0006784}$ e) $\sqrt{44353}$

f) $\sqrt{9812}$ g) $\sqrt{5{,}427}$ h) $\sqrt{0{,}07442}$ i) $\sqrt{913{,}9}$ k) $\sqrt{0{,}00003881}$

Stellen im Radikanden, die über die Tafelgenauigkeit hinausgehen, sind vor dem Aufsuchen des Wurzelwertes zu runden.

68. Zu folgenden Quadratwurzelwerten ist der Radikand gesucht:

a) 8,0808 b) 0,26633 c) 41,738 d) 0,011388 e) 3,14246

f) 13,6858 g) 0,0079183 h) 0,299583 i) 2,52053 k) 0,077061

69. Zu folgenden Radikanden ist mit Hilfe der Zahlentafel die dritte Wurzel zu ermitteln:

a) 65,3 b) 5710 c) 0,4678 d) 7,31 e) 932,6

f) 0,01673 g) 63918 h) 0,0003472 i) 8,796 k) 0,00004138

70. Zu folgenden Kubikwurzelwerten ist der Radikand gesucht (Tabellenwerte):

a) 3,484 b) 0,77166 c) 0,0098935 d) 14,874 e) 0,056785

f) 0,4376 g) 8,2387 h) 625,39 i) 0,0704 k) 0,002888

71. Mit Hilfe des Rechenstabes ist zu ermitteln:
a) $2{,}6^2$ b) $19{,}7^2$ c) $0{,}628^2$ d) 323^2 e) $0{,}01465^2$
f) $8{,}06^2$ g) $0{,}413^2$ h) $21{,}5^2$ i) π^2 k) $10{,}05^2$

72. Desgl.
a) $3{,}6^3$ b) $0{,}704^3$ c) $12{,}725^3$ d) π^3 e) $0{,}0944^3$
f) $2{,}04^3$ g) $0{,}312^3$ h) $0{,}0604^3$ i) $100{,}6^3$ k) $0{,}00812^3$

73. Desgl.
a) $\sqrt{54}$ b) $\sqrt{8{,}32}$ c) $\sqrt{0{,}832}$ d) $\sqrt{60500}$ e) $\sqrt{0{,}013}$
f) $\sqrt{0{,}000243}$ g) $\sqrt{4060}$ h) $\sqrt{18{,}3}$ i) $\sqrt{0{,}00681}$ k) $\sqrt{775}$

74. Desgl.
a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[3]{8{,}45}$ c) $\sqrt[3]{0{,}766}$ d) $\sqrt[3]{0{,}0142}$ e) $\sqrt[3]{695}$
f) $\sqrt[3]{0{,}00445}$ g) $\sqrt[3]{820000000}$ h) $\sqrt[3]{5350000}$ i) $\sqrt[3]{0{,}805}$ k) $\sqrt[3]{0{,}0000385}$

75. Bestimme mit Hilfe des Rechenstabes die Kehrwerte von
a) 3,24 b) 43,2 c) 0,73 d) π e) 102,6
f) 0,0173 g) $\sqrt{18{,}2}$ h) 0,001695 i) $\sqrt[3]{0{,}285}$ k) $12{,}9^2$

76. Mit Hilfe des Rechenstabes ist zu berechnen:
a) $1{,}24 \cdot 6{,}35$ b) $2{,}02 \cdot 0{,}442$ c) $54{,}6 \cdot 103{,}5$ d) $0{,}0292 \cdot \pi$
e) $14{,}45 \cdot 0{,}000716$ f) $0{,}243 \cdot 474$ g) $0{,}08275 \cdot 0{,}0773$ h) $33{,}9 \cdot 0{,}00095$
i) $0{,}409 \cdot 0{,}6575$ k) $72{,}4 \cdot 81{,}2$

77. Desgl.
a) $5{,}3 : 2{,}7$ b) $0{,}903 : 0{,}46$ c) $31{,}2 : 0{,}663$ d) $0{,}0905 : 2{,}32$
e) $24{,}7 : \pi$ f) $0{,}4275 : 0{,}000262$ g) $0{,}0713 : 9{,}08$ h) $\pi : 180$
i) $1{,}142 : 94{,}8$ k) $0{,}0098 : 1{,}04$

78. Desgl.
a) $203 \cdot 10{,}45 \cdot 0{,}0433$ b) $0{,}147 \cdot 22{,}1 \cdot 0{,}0359$ c) $11{,}3 \cdot 0{,}726 \cdot 5{,}28$
d) $511 \cdot 0{,}0845 \cdot 1{,}93$ e) $0{,}274 \cdot 0{,}6425 \cdot 0{,}971$ f) $0{,}0529 \cdot 14{,}24 \cdot 272$
g) $0{,}1262 \cdot 0{,}1378 \cdot 0{,}2262$ h) $\sqrt{423{,}9} \cdot 0{,}777 \cdot 0{,}692$ i) $0{,}538 \cdot \sqrt[3]{0{,}284} \cdot \pi$
k) $0{,}0416 \cdot 3080 \cdot \sqrt{0{,}0769}$

79. Desgl.
a) $\dfrac{3{,}71 \cdot 0{,}0525}{0{,}202}$ b) $\dfrac{27{,}3}{614 \cdot 0{,}744}$
c) $\dfrac{0{,}472 \cdot 14{,}15}{587{,}5 \cdot 0{,}000314}$ d) $\dfrac{793 \cdot 8{,}55 \cdot 0{,}0171}{0{,}213 \cdot 59{,}2}$
e) $\dfrac{1{,}414 \cdot 27{,}6}{39{,}7 \cdot 0{,}445 \cdot 102{,}5 \cdot 71{,}4}$ f) $\dfrac{\sqrt{0{,}495} \cdot 173{,}4 \cdot 0{,}0207}{0{,}936 \cdot \sqrt[3]{24{,}6} \cdot 606 \cdot 0{,}1235}$
g) $7{,}26^2 + 12{,}42^2 - 2 \cdot 7{,}26 \cdot 12{,}42 \cdot 0{,}788$
h) $\dfrac{\sqrt{24{,}3^2 - 9{,}85^2}}{9{,}85}$ i) $\sqrt{\dfrac{2{,}16 \cdot 0{,}0575}{31{,}2 \cdot 707{,}5}}$ k) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{167{,}3} \cdot 0{,}0288}{13{,}6^2 - 8{,}04^2}}$

4. Das Rechnen mit allgemeinen Zahlensymbolen

4.1. Die vier Grundrechenarten

4.1.1. Einfache Rechenoperationen mit allgemeinen Zahlensymbolen

Soll eine Rechenvorschrift angegeben werden, die für alle Einzelfälle gültig ist, so verwendet man hierzu allgemeine Zahlensymbole. Dabei bevorzugt man für *gegebene Zahlen* die Anfangsbuchstaben $a, b, c, \ldots$ des Alphabets, während die Endbuchstaben $\ldots u, v, w, x, y, z$ meist den *gesuchten* oder den *veränderlichen Zahlen* vorbehalten bleiben.
Die verwendeten Buchstaben können sowohl ganze als auch gebrochene, benannte als auch unbenannte Zahlen bedeuten.
Soll ein Einzelfall berechnet werden, so sind an Stelle der allgemeinen Zahlensymbole die für diesen Einzelfall vorgesehenen speziellen Zahlenwerte **einzusetzen,** wobei *zu beachten* ist, *daß innerhalb einer Aufgabe ein und demselben Zahlensymbol auch immer ein und derselbe spezielle Zahlenwert entspricht.*
Ferner gilt die Regel, daß die *Rechenoperationen der dritten Stufe* (Potenzieren und Radizieren) *denen der zweiten Stufe* (Multiplizieren und Dividieren) *und diese wiederum denen der ersten Stufe* (Addieren und Subtrahieren) **übergeordnet** sind, das bedeutet, daß diese Operationen vorrangig auszuführen sind. *Soll von dieser Regel abgewichen werden, so ist dies im Rechenausdruck durch eine* **Klammer** *zu kennzeichnen.*

BEISPIEL 1

Welchen speziellen Zahlenwert nehmen die folgenden allgemeinen Ausdrücke für $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$ und $m = 3$ an:

a) $a + b \cdot a - b$ b) $(a + b) \cdot a - b$ c) $a + b \cdot (a - b)$

d) $(a + b) \cdot (a - b)$ e) $\frac{a}{c} + b \cdot a - b$ f) $\frac{a + b}{c} \cdot a - b$

g) $\frac{a + b}{c} \cdot (a - b)$ h) $\frac{a \cdot b^m}{c}$ i) $\frac{(a \cdot b)^m}{c}$ k) $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m$

Lösung:

a) $a + b \cdot a - b = 5 + 2 \cdot 5 - 2 = 5 + 10 - 2 = 13$

b) $(a + b) \cdot a - b = (5 + 2) \cdot 5 - 2 = 7 \cdot 5 - 2 = 35 - 2 = 33$

c) $a + b \cdot (a - b) = 5 + 2 \cdot (5 - 2) = 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$

d) $(a + b)(a - b) = (5 + 2)(5 - 2) = 7 \cdot 3 = 21$

e) $\frac{a}{c} + b \cdot a - b = \frac{5}{4} + 2 \cdot 5 - 2 = 1{,}25 + 10 - 2 = 9{,}25$

f) $\frac{a + b}{c} \cdot a - b = \frac{5 + 2}{4} \cdot 5 - 2 = \frac{7}{4} \cdot 5 - 2 = \frac{35}{4} - 2 = 6{,}75$

g) $\frac{a + b}{c} \cdot (a - b) = \frac{5 + 2}{4} \cdot (5 - 2) = \frac{7}{4} \cdot 3 = \frac{21}{4} = 5{,}25$

h) $\frac{a \cdot b^m}{c} = \frac{5 \cdot 2^3}{4} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$

i) $\frac{(a \cdot b)^m}{c} = \frac{(5 \cdot 2)^3}{4} = \frac{10^3}{4} = \frac{1000}{4} = 250$

k) $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m = \left(\frac{5 \cdot 2}{4}\right)^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$

Wenn zum Ausdruck gebracht werden soll, daß unter einem allgemeinen Zahlensymbol eine *ganze Zahl* verstanden werden soll, so verwendet man meistens den Buchstaben n bzw. die griechischen Buchstaben ν (sprich „nü") bzw. λ (sprich „lambda").
Ist n eine beliebige ganze Zahl, so lautet die vorhergehende Zahl $n - 1$ (die um 1 kleinere Zahl), während die auf n folgende Zahl $n + 1$ (die um 1 größere Zahl) ist.
Das Doppelte einer ganzen Zahl n, also die Zahl $2n$, ist stets eine gerade Zahl.
Vermehrt bzw. vermindert man eine gerade Zahl um 1, so ergibt sich stets eine ungerade Zahl. Folglich sind $2n + 1$ bzw. $2n - 1$ stets ungerade Zahlen.

BEISPIEL 2

Ist m irgendeine Zahl, so bedeutet

$m + 5$	*die um 5 größere Zahl als m,*
$m - 3$	*die um 3 kleinere Zahl als m,*
$4m$	*das Vierfache von m,*
$\frac{m}{7}$	*den siebenten Teil von m,*
m^3	*die dritte Potenz von m,*
$\sqrt[4]{m}$	*die vierte Wurzel aus m usw.*

Häufig werden *gleichartige* Größen durch ein und dasselbe allgemeine Symbol gekennzeichnet, wobei durch *Indizes*[1]) angedeutet wird, daß diese Symbole verschiedene Zahlenwerte besitzen können.

BEISPIEL 3

Werden vier Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 hintereinandergeschaltet, so berechnet sich der Gesamtwiderstand R_R a :s

$$R_R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

Schaltet man sie dagegen parallel zueinander, so gilt für den Gesamtwiderstand R_P die Beziehung

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

4.1.2. Die negativen Zahlen

Die *Addition* zweier Zahlen kann man mit Hilfe eines festen und eines beweglichen Zahlenstrahles sehr anschaulich darstellen, wenn man nach folgender *Vorschrift* verfährt:

Sollen die beiden Zahlen a und b addiert werden. so bringt man den Anfangspunkt A des beweglichen Zahlenstrahles unter die Zahl a des festen Zahlenstrahles. Die Summe $a + b$ wird dann über der Zahl b des beweglichen Strahles auf dem festen Zahlenstrahl abgelesen.

[1]) index (lat.) Anzeiger; Mehrzahl: Indizes.

Im Bild 17 ist die Aufgabe 2,5 + 4,5 = 7 auf diese Weise gelöst worden.
Es ist zu erkennen, daß sich mit den uns bis jetzt bekannten Zahlen *jede* Additionsaufgabe lösen läßt.
In ähnlicher Weise läßt sich auch die *Subtraktion* veranschaulichen. Man geht hier wie folgt vor:

> Ist die Differenz $a - b$ zu bilden, so stellt man mit Hilfe des beweglichen Zahlenstrahles den Subtrahenden b unter dem Minuenden a auf dem festen Zahlenstrahl ein. Die Differenz $a - b$ wird dann über dem Anfangspunkt A des beweglichen Zahlenstrahls auf dem festen Zahlenstrahl abgelesen.

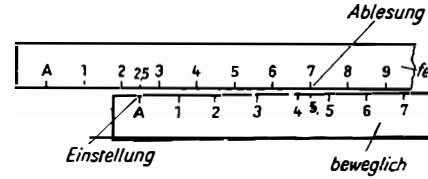


Bild 17

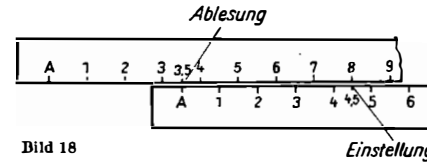


Bild 18

Bild 18 stellt die Lösung der Aufgabe 8 − 4,5 = 3,5 dar.
Es ist leicht einzusehen, daß sich *nicht mehr jede* Subtraktionsaufgabe mit den bis jetzt verfügbaren Zahlen lösen läßt. Die Subtraktion läßt sich durchführen, solange der Subtrahend kleiner ist als der Minuend, denn in diesem Falle liegt der Anfangspunkt A des beweglichen Zahlenstrahles stets unter einer bestimmten Zahl des festen Strahles.
Ist jedoch der Subtrahend gleich dem Minuenden oder gar größer als dieser, so liegt der Anfangspunkt des beweglichen Strahles unter dem Anfangspunkt des festen Strahles bzw. links davon.
Um nun auch derartige Aufgaben noch lösen zu können, erweitert man den Zahlenstrahl nach links über den Anfangspunkt A hinaus und bezeichnet die bei den Subtraktionsaufgaben 3 − 3, 3 − 4, 3 − 5, 3 − 6 usw. entstehenden Endpunkte mit 0, − 1, − 2, − 3 usw. (Bild 19), so entsteht die **Zahlengerade.** Auf ihr sind die bisher bekannten Zahlen, die **positiven Zahlen** (und zwar die *positiven ganzen Zahlen* und die *positiven Brüche*), vom Nullpunkt aus nach rechts abgetragen, während die neu eingeführten Zahlen, die **Null** und die **negativen Zahlen** (die sich ebenfalls untergliedern in *negative ganze Zahlen* und *negative Brüche*), vom Nullpunkt aus nach links abgetragen werden.

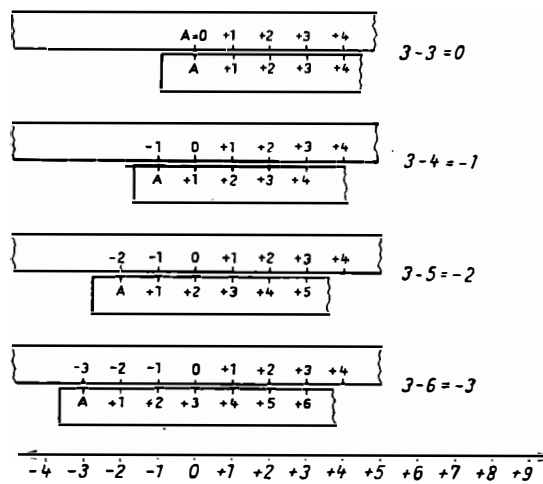


Bild 19

Diese Darstellung der positiven und der negativen Zahlen ist jedem vom Thermometer her bereits bekannt.

Um die positiven von den negativen Zahlen unterscheiden zu können, versieht man sie mit einem **Vorzeichen,** und zwar schreibt man vor die *positiven* Zahlen ein *Pluszeichen,* während die *negativen* Zahlen mit einem *Minuszeichen* versehen werden.

Wenn Irrtümer ausgeschlossen sind, darf das Pluszeichen vor einer positiven Zahl weggelassen werden: $+3 = 3$. Dagegen muß das Minuszeichen vor einer negativen Zahl stets mitgeschrieben werden.

Von zwei Zahlen liegt die größere von beiden auf dem Zahlenstrahl stets rechts von der kleineren.

Es ist also $-3 > -7$[1]), $0 > -1$, $+2 > -3$;
dagegen $+3 < +7$, $0 < +1$, $-2 < +3$.

Unter dem **Betrag** einer Zahl versteht man den Wert dieser Zahl ohne Rücksicht auf deren Vorzeichen. Der Betrag einer Zahl wird gekennzeichnet durch senkrechte Striche vor und hinter der Zahl.

So ist z. B.: $|-3| = |+3| = 3$.

Die allgemeine Definition für den **Betrag einer Zahl** lautet

$$|a| = \begin{cases} +a, & \text{wenn } a > 0 \\ 0, & \text{,,} \quad a = 0 \\ -a, & \text{,,} \quad a < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Es ist demnach

$$|-8| + |+3| - |-2| = 8 + 3 - 2 = 9.$$

Der Betrag $|a|$ einer Zahl a kann geometrisch gedeutet werden als *Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden.*

Zwei Zahlen mit gleichem Betrag, aber verschiedenen Vorzeichen werden *entgegengesetzte Zahlen* genannt. So sind z. B. $+3$ und -3 oder $-0{,}27$ und $+0{,}27$ entgegengesetzte Zahlen.

Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß die beiden Zeichen + (plus) und − (minus) mit zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet werden. Sie werden einmal verwendet als **Rechenzeichen** oder **Operationszeichen** und *geben* dabei *an,* welche *Rechenoperation* (Addition bzw. Subtraktion) *durchgeführt werden soll.*

BEISPIEL 1

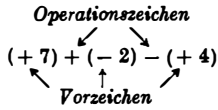
In der Aufgabe $8 + 5$ *ist das Zeichen* $+$ *ein Operationszeichen. Es ist die Kurzform der Aufforderung: Addiere* 5 *zu* 8! *Entsprechend ist in* $8 - 5$ *das Zeichen* $-$ *ebenfalls ein Operationszeichen, das die Aufforderung enthält: Subtrahiere* 5 *von* 8!

Zum anderen werden dieselben Zeichen auch als **Vorzeichen** der Zahlen verwendet. In dieser Eigenschaft *geben* sie *an, ob die Zahl positiv oder negativ ist.*

Operations- und Vorzeichen müssen stets deutlich voneinander unterschieden werden. Sind Verwechslungen möglich, so schließt man das Vorzeichen und die zugehörige Zahl in Klammern ein.

[1]) Das Zeichen $>$ wird gelesen „größer als"; entsprechend bedeutet das Zeichen $<$ „kleiner als". Das Zeichen $\geqq$ wird gelesen „größer oder gleich"; entsprechend bedeutet $\leqq$ „kleiner oder gleich".

BEISPIEL 2



Die Aufgabe bedeutet: Addiere zur Zahl + 7 die Zahl − 2 und subtrahiere davon die Zahl + 4!

4.1.3. Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion sind die *Rechenarten erster Stufe.*

In jeder Additionsaufgabe dürfen die Summanden vertauscht werden. Der Wert der Summe ändert sich dabei nicht.

Es gilt somit das **Kommutativgesetz**[1]) **(Vertauschungsgesetz) der Addition:**

$$\boxed{a + b = b + a} \quad . \tag{2}$$

Die Addition positiver und negativer Zahlen geschieht nach folgender *Festsetzung*:

Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen der Summanden gibt. Sollen Zahlen mit ungleichen Vorzeichen addiert werden, so subtrahiert man den kleineren Betrag vom größeren und gibt der Differenz das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.

Demnach gilt für $a, b \gtrless 0$:

$$(+ a) + (+ b) = + (a + b),$$
$$(- a) + (- b) = - (a + b),$$
$$(+ a) + (- b) = + (a - b), \quad \text{wenn} \quad a \geqq b,$$
$$(- a) + (+ b) = - (a - b), \quad \text{wenn} \quad a \geqq b.$$

BEISPIEL 1

a) $(+ 3) + (+ 5) = + (3 + 5) = + 8$
b) $(- 3) + (- 5) = - (3 + 5) = - 8$
c) $(+ 3) + (- 5) = - (5 - 3) = - 2$
d) $(- 3) + (+ 5) = + (5 - 3) = + 2$

Der Leser bestätige die Ergebnisse aus Beispiel 1 mit Hilfe zweier gegeneinander verschiebbarer Zahlengeraden! (Vgl. Abschnitt 4.1.2.)

Aus der Regel für die Addition zweier Zahlen geht hervor, daß die *Summe zweier entgegengesetzter Zahlen Null* ist:

$$(+ a) + (- a) = 0.$$

Die *Subtraktion ist die Umkehrung der Addition*; d.h., die Additionsaufgabe

$$a + b = c$$

[1]) commutare (lat.) vertauschen.

sagt dasselbe aus wie die beiden Subtraktionsaufgaben

$$c - a = b \quad \text{oder} \quad c - b = a.$$

Aus diesem Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion folgt, daß

$$a + b - b = a \quad \text{und} \quad a - b + b = a$$

ist. Addition und Subtraktion, mit denselben Zahlen nacheinander ausgeführt, heben sich also gegenseitig auf, d.h.

Addition und Subtraktion sind entgegengesetzte Rechenarten.

Diese Eigenschaft wird bei der Probe für Subtraktionsaufgaben benutzt.

Wie man mit Hilfe der im Abschnitt 4.1.2. beschriebenen gegeneinander verschiebbaren Zahlengeraden nachprüfen kann, ist

$$(+8) - (+5) = (+3),$$

$$(+8) - (-5) = (+13),$$

$$(-8) - (+5) = (-13)$$

und $$(-8) - (-5) = (-3).$$

Diesen vier Subtraktionsaufgaben lassen sich vier Additionsaufgaben mit den Zahlen (+ 8) bzw. (− 8) und (+ 5) bzw. (− 5) gegenüberstellen, die die *gleichen Ergebnisse* wie oben besitzen:

$$(+8) - (+5) = (+3) \quad \text{entspricht} \quad (+8) + (-5) = (+3),$$

$$(+8) - (-5) = (+13) \quad \text{,,} \quad (+8) + (+5) = (+13),$$

$$(-8) - (+5) = (-13) \quad \text{,,} \quad (-8) + (-5) = (-13)$$

und $$(-8) - (-5) = (-3) \quad \text{,,} \quad (-8) + (+5) = (-3).$$

Daraus erkennt man: Eine positive oder negative Zahl kann auch dadurch subtrahiert werden, daß man die ihr entgegengesetzte Zahl addiert.
Diese Erkenntnis läßt sich verallgemeinern zu folgender *Regel für die Subtraktion* positiver und negativer Zahlen:

Eine Zahl kann man subtrahieren, indem man die ihr entgegengesetzte Zahl addiert.

Die beiden Regeln für die Addition und Subtraktion lassen sich auch anwenden, wenn mehr als zwei Glieder zu addieren bzw. zu subtrahieren sind.

Da sich jede Subtraktion auf eine Addition der entgegengesetzten Zahl zurückführen läßt, werden Ausdrücke, in denen die einzelnen Glieder nur durch *Additions- bzw. Subtraktionszeichen* miteinander verbunden sind, **algebraische Summen** genannt.

BEISPIEL 2

(+ 3) + (− 4) − (− 2) − (+ 1) ist eine algebraische Summe. Zu ihrer Berechnung beseitigt man zunächst die Subtraktionszeichen und faßt dann zusammen:

$$(+3) + (-4) - (-2) - (+1) = (+3) + (-4) + (+2) + (-1) = 3 - 4 + 2 - 1 = 0.$$

Auf diese Weise läßt sich jede algebraische Summe von bestimmten Zahlen ermitteln. Enthält eine algebraische Summe benannte Zahlen, so lassen sich nur die *Maßzahlen gleichartiger Größen* zusammenfassen. (Gegebenenfalls sind vorher die Einheiten umzuformen.)

BEISPIEL 3

a) $3{,}6\ \mathrm{m/s} + 6{,}5\ \mathrm{m/s} = 10{,}1\ \mathrm{m/s}$

b) $0{,}5\ \mathrm{m^3} - 1350\ \mathrm{cm^3} = 6000\ \mathrm{cm^3} - 1350\ \mathrm{cm^3} = 3650\ \mathrm{cm^3}$

Beim Rechnen mit allgemeinen Zahlensymbolen unterscheidet man *gleichartige und ungleichartige Glieder*. So sind die beiden Glieder $4a$ und $7a$ gleichartig, da sie dasselbe allgemeine Zahlensymbol a enthalten und sich nur in der *Vorzahl* (auch *Zahlenfaktor* oder *Koeffizient* genannt) unterscheiden. $3a$ und $3b$ oder $5x^2y$ und $5xy^2$ sind dagegen ungleichartige Glieder.

Es gilt die *Regel:*

> In algebraischen Summen lassen sich stets nur gleichartige Glieder durch Addition und Subtraktion zusammenfassen. Dabei werden nur die Koeffizienten der Glieder addiert bzw. subtrahiert.

Ungleichartige Glieder lassen sich nur dann zusammenfassen, wenn für die einzelnen allgemeinen Zahlensymbole bestimmte Zahlenwerte vorgeschrieben sind. (Vgl. 4.1.1., Beispiel 1!)
Sind in einer Aufgabe mehrere Additionen und Subtraktionen auszuführen, so darf die Reihenfolge der Rechenoperationen nach dem Kommutativgesetz vertauscht werden.

BEISPIEL 4

$$3a + 2b - 4c + 2a - 7b + 2c - a + b - 5c =$$
$$= 3a + 2a - a + 2b - 7b + b - 4c + 2c - 5c = 4a - 4b - 7c$$

4.1.4. Multiplikation

Soll eine Zahl a b-mal als Summand gesetzt werden, so schreibt man dafür auch kurz ein **Produkt**:

$$\boxed{\underbrace{a \cdot b = a + a + a + \cdots + a}_{b\ \text{Summanden}}}, \tag{3}$$

wobei b *zunächst* eine positive ganze Zahl sein muß.
Auch für die Multiplikation gilt das **Kommutativgesetz**:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}, \tag{4}$$

d. h.:

> Die Faktoren eines Produkts dürfen miteinander vertauscht werden.

Sind mehr als zwei Faktoren miteinander zu multiplizieren, so dürfen sie nach dem **Assoziativgesetz**[1]) **der Multiplikation** in beliebiger Reihenfolge zu Teilprodukten zu-

[1]) Assoziation (lat.) Verbindung.

sammengefaßt werden:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b \quad . \tag{5}$$

BEISPIEL 1

$3z \cdot 5x \cdot 4y = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z \cdot x \cdot y = 60 \cdot x \cdot y \cdot z$

(Es ist üblich, die allgemeinen Zahlensymbole im Ergebnis alphabetisch anzuordnen.)

Zwischen allgemeinen Zahlenfaktoren sowie zwischen allgemeinen Zahlensymbolen und bestimmten Zahlen darf das Multiplikationszeichen · weggelassen werden, so daß das Ergebnis aus Beispiel 1 auch in der Form $60 \cdot xyz$ oder $60\,xyz$ geschrieben werden kann. Mehrere gleiche Faktoren dürfen als *Potenz* geschrieben werden.

BEISPIEL 2

$2a \cdot 3b \cdot 6a \cdot 5b \cdot 4a \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c = 720a^3b^2c$

Auf Grund der Definition (3) für das Produkt ist

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \tag{6}$$

Ein Produkt ist dann gleich Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist.

Außerdem gilt der für die Gleichungslehre wichtige *Satz*:

Wenn ein Produkt Null sein soll, dann muß mindestens einer der Faktoren Null sein.

Sind a und b beliebige, aber positive Zahlen, so gelten folgende *Vorzeichenregeln für die Multiplikation:*

$$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b \qquad (+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$$
$$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b \qquad (-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$$

Man multipliziert zwei Zahlen, indem man das Produkt ihrer Beträge bildet. Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren gleiche Vorzeichen besitzen; andernfalls ist es negativ.

Die ersten beiden Regeln lassen sich dadurch leicht nachprüfen, daß man die Multiplikationsaufgabe in die entsprechende Addition umformt. Die Vorzeichen in den beiden anderen Fällen wurden so festgelegt, daß alle bisher aufgestellten Rechengesetze auch weiterhin gültig bleiben.

Das Vorzeichen eines Produkts aus mehreren Faktoren ist davon abhängig, wieviele negative Faktoren darin auftreten.

Ist die Anzahl der negativen Faktoren in einem Produkt *gerade*, so ist das Produkt *positiv*; ist sie *ungerade*, so ist das Produkt *negativ*.

Es ist stets ratsam, zunächst das Vorzeichen eines Produkts zu bestimmen, und danach erst die reine Zahlenrechnung durchzuführen.

BEISPIELE

3. $(-2a)(+3b)(+4a)(-5b)(-3a) = -2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b = -360a^3b^2$

4. $(-0{,}5x)(-3y)(-0{,}25z)(-6u) = +2{,}25uxyz = 2{,}25uxyz$

5. $(-2u)(+3v)+(-5u)(-4v) = (-6uv)+(+20uv) = +14uv = 14uv$
(Erst die Produkte berechnen, dann addieren!)

6. $(-2u)(+3v)-(-5u)(-4v) = (-6uv)-(+20uv) = -26uv$

4.1.5. Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Die Multiplikationsaufgabe $a\cdot b = c$ sagt demnach dasselbe aus wie die beiden Divisionsaufgaben $c:b = a$ oder $c:a = b$. Da die Faktoren eines Produkts vertauschbar sind, besitzt die Multiplikation nur *eine* Umkehrung.
Aus dem Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division folgt, daß

$$(a\cdot b):b = a \quad \text{und} \quad (a:b)\cdot b = a$$

gilt, d.h., daß sich Multiplikation und Division, mit denselben Zahlen ausgeführt, gegeneinander aufheben. (Anwendung bei der Probe für eine Divisionsaufgabe!)

Multiplikation und Division sind entgegengesetzte Rechenarten.

Aus den entsprechenden Vorzeichenregeln für die Multiplikation erhält man die Regeln für die Division:

$$(+a):(+b) = +a:b \qquad (+a):(-b) = -a:b$$
$$(-a):(+b) = -a:b \qquad (-a):(-b) = +a:b$$

Man dividiert zwei Zahlen durcheinander, indem man den Quotienten ihrer Beträge bildet. Der Quotient ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen besitzen; andernfalls ist er negativ.

BEISPIELE

1. $(+36xy):(-8y) = -4{,}5x$ Probe: $(-4{,}5x)(-8y) = +36xy$

2. $(-45u^3):(-25u^2) = +1{,}8u$ Probe: $(+1{,}8u)(-25u^2) = -45u^3$

3. a) $(+36z):(+1) = +36z$ b) $(+36z):(-1) = -36z$
   c) $(-36z):(+1) = -36z$ d) $(-36z):(-1) = +36z$

4. a) $(+37{,}25s):(+37{,}25s) = +1$ b) $(-37{,}25s):(+37{,}25s) = -1$
   c) $(+37{,}25s):(-37{,}25s) = -1$ d) $(-37{,}25s):(-37{,}25s) = +1$

5. $48u^3v^3:[(-4u)(+3v)]-4u\cdot[(-8uv):(-2u)] = (+48u^3v^3):(-12uv)-4u\cdot(+4v) =$
$= -4uv-16uv = -20uv$

Man beachte die Reihenfolge der einzelnen Rechenoperationen!

Bei der Division nimmt die Zahl *Null* eine Sonderstellung ein. Es ist

$$0:a = 0 \quad \text{für} \quad a \neq 0,$$

weil $0\cdot a = 0$ ist.

Dagegen ist die Aufgabe $a : 0$ ***nicht lösbar***, weil es keine Zahl gibt, die mit Null multipliziert den Wert a ergibt.
Schließlich besitzt die Aufgabe $0 : 0$ ***kein bestimmtes Ergebnis***; denn *jede* Zahl ergibt, wenn man sie mit Null multipliziert, den Wert Null.
Aus all dem folgt:

Die Division durch Null ist sinnlos und darf nicht ausgeführt werden.

4.1.6. Die rationalen Zahlen

Geht man von den **natürlichen Zahlen** 1, 2, 3, ... aus, so läßt sich innerhalb dieses Zahlenbereiches jede Additions- und auch jede Multiplikationsaufgabe lösen. Die Addition bzw. die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt stets wieder eine natürliche Zahl.
Es ist jedoch schon nicht mehr möglich, *jede* Subtraktionsaufgabe innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen zu lösen. Um jede Subtraktionsaufgabe lösen zu können (z. B. $3 - 5$), muß man einen umfassenderen Zahlbegriff verwenden, nämlich den der **ganzen Zahlen**. Der Zahlbereich der ganzen Zahlen umfaßt die positiven und die negativen ganzen Zahlen sowie die Zahl Null.
Der Bereich der ganzen Zahlen ist aber immer noch nicht umfassend genug, um beispielsweise auch *jede* Divisionsaufgabe lösen zu können. So besitzt z. B. die Aufgabe $(+ 3) : (- 5)$ keine Lösung innerhalb des Bereiches der ganzen Zahlen. Damit nun auch *jede* Divisionsaufgabe gelöst werden kann, muß man erneut zu einem umfassenderen Zahlbegriff übergehen, nämlich zum **Bereich der rationalen[1]) Zahlen.**

Jede Zahl, die sich als Quotient zweier ganzer (positiver oder negativer) Zahlen darstellen läßt, heißt eine rationale Zahl.

Die rationalen Zahlen umfassen demnach alle positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen sowie die Zahl Null.

4.2. Das Rechnen mit algebraischen Summen

4.2.1. Die Bedeutung der Klammern

Durch die Vorschrift, daß die Rechenarten der höheren Stufe vor den Rechenarten der niedrigeren Stufe durchzuführen sind, ist für jede Aufgabe eine eindeutige Aufeinanderfolge der Rechnungen festgelegt. So ist z. B. in $2 + 3 \cdot 4$ zunächst das Produkt $3 \cdot 4$ zu bestimmen und dann dazu die Zahl 2 zu addieren:

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14.$$

Sollen dagegen zuerst die beiden Zahlen 2 und 3 addiert und deren Summe mit 4 multipliziert werden, so muß dies dadurch gekennzeichnet werden, daß man die Summe in eine *Klammer* einschließt:

$$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Der Wert einer Klammer ist demnach stets *zuerst* auszurechnen. Beim Rechnen mit bestimmten Zahlen bereiten die Klammern keine Schwierigkeiten, da sich der Inhalt

[1]) ratio (lat.) Verstand; Verhältnis.

der Klammern zahlenmäßig ermitteln läßt. Treten dagegen in den Klammern allgemeine Zahlensymbole auf, so läßt sich der Inhalt der Klammer häufig nicht ohne weiteres zusammenfassen, da in ihr meist verschiedenartige Glieder auftreten. In solchen Fällen benötigt man die Regeln für das Rechnen mit Klammerausdrücken.

4.2.2. Auflösen und Setzen additiver und subtraktiver Klammern

Soll die Summe $5 + 7$ zur Zahl 8 addiert werden, so schreibt man

$$8 + (5 + 7) = 8 + 12 = 20.$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man die beiden Summanden 5 und 7 einzeln addiert:

$$8 + 5 + 7 = 20.$$

Es ist demnach

$$8 + (5 + 7) = 8 + 5 + 7,$$

oder allgemein

$$\boxed{a + (b + c) = a + b + c} \tag{7a}$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit der Beziehungen

$$\boxed{a + (b - c) = a + b - c} \tag{7b}$$

$$\boxed{a - (b + c) = a - b - c} \tag{7c}$$

$$\boxed{a - (b - c) = a - b + c} \tag{7d}$$

in Worten:

> Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht, können ohne weiteres weggelassen werden. Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, dürfen nur dann weggelassen werden, wenn gleichzeitig die Zeichen innerhalb der Klammer umgekehrt werden.

Diese Rechenregel gilt auch für drei- und mehrgliedrige Klammerausdrücke.

Steht vor dem ersten Glied in einer Klammer kein Vorzeichen, so ist an dieser Stelle stets ein Pluszeichen zu denken. Pluszeichen dürfen am Anfang einer algebraischen Summe weggelassen werden; Minuszeichen müssen dagegen immer geschrieben werden.

BEISPIELE

1. $3a + (4b - 2c) = 3a + 4b - 2c$
2. $(2x + 3y) + (2x - 3y) = 2x + 3y + 2x - 3y = 4x$
3. $(0{,}5u - 0{,}3v) - (0{,}2u + 0{,}1v) = 0{,}5u - 0{,}3v - 0{,}2u - 0{,}1v = 0{,}3u - 0{,}4v$
4. $(16r + 21s) - (15r - 12s) = 16r + 21s - 15r + 12s = r + 33s$

Bei verschiedenen Aufgaben kann es vorkommen, daß innerhalb einer Klammer noch weitere Klammern auftreten. Zur besseren Übersicht verwendet man dann verschiedene Klammerformen (runde, eckige, geschweifte usw.). Es ist ratsam, die Klammern stets *von innen nach außen* aufzulösen.

BEISPIELE

5. $3a + [4b - (2a + 3b)] = 3a + [4b - 2a - 3b] =$ *zusammenfassen!*
$= 3a + [b - 2a] = 3a + b - 2a = a + b$

6. $(5x + 3y) - \{(2x - 3y) - [(3x - 2y) - (2x - 5y)]\} =$
$= 5x + 3y - \{2x - 3y - [3x - 2y - 2x + 5y]\} =$
$= 5x + 3y - \{2x - 3y - [x + 3y]\} =$
$= 5x + 3y - \{2x - 3y - x - 3y\} = 5x + 3y - \{x - 6y\} =$
$= 4x + 9y$

Die *Umkehrung der Regel für das Auflösen von Klammern* lautet:

Die Glieder einer algebraischen Summe dürfen in eine Klammer eingeschlossen werden, wenn vor diese Klammer ein Pluszeichen geschrieben wird. Wird dagegen vor die eingeführte Klammer ein Minuszeichen gesetzt, so sind die Rechenzeichen der eingeklammerten Glieder umzukehren.

Es ist demnach

$$a + b + c = a + (b + c)$$
$$a + b - c = a + (b - c)$$
$$a - b + c = a - (b - c)$$
$$a - b - c = a - (b + c)$$

BEISPIEL 7

$3u - 2v + w - 2u - 4v - 3w + 5u - 3v + 6w - u + 5v - 2w =$
$= (3u - 2u + 5u - u) - (2v + 4v + 3v - 5v) + (w - 3w + 6w - 2w) =$
$= 5u - 4v + 2w$

4.2.3. Multiplikation von Klammerausdrücken

Für die Multiplikation einer algebraischen Summe mit einer Zahl gilt das **Verteilungs- oder Distributivgesetz**:

$$\boxed{a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c} \qquad (8)$$

Eine algebraische Summe kann man mit einer Zahl multiplizieren, indem man die einzelnen Glieder der Summe mit dieser Zahl multipliziert. Die Vorzeichen ergeben sich dabei aus den Vorzeichenregeln für die Multiplikation.

Im Bild 20 ist das Distributivgesetz für den Fall $a \cdot (b + c)$ veranschaulicht für den Fall, daß a, b und c positive Zahlen sind.
Das Umformen eines Ausdrucks der Form $a \cdot (b \pm c)$ in eine algebraische Summe nennt man *Ausmultiplizieren*.
Das Distributivgesetz gilt entsprechend, wenn die algebraische Summe aus mehr als zwei Gliedern besteht.

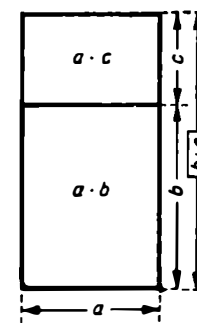


Bild 20

BEISPIELE

1. $258 \cdot 37 = (200 + 50 + 8) \cdot 37 = 200 \cdot 37 + 50 \cdot 37 + 8 \cdot 37 = 7400 + 1850 + 296 = 9546$
(Rechenvorteile beim Kopfrechnen.)

2. $(6m + 8n - 3p) \cdot 2{,}5q = 15\,mq + 20nq - 7{,}5pq$

3. $2(x - y) + 3(x + y) - 4(y - x) - 5(y + x) =$
$= 2x - 2y + 3x + 3y - 4y + 4x - 5y - 5x = 4x - 8y$

Nach dem Distributivgesetz ist

$$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m.$$

Setzt man hierin auf beiden Seiten $m = c + d$, so ergibt sich

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d),$$

woraus nach weiterem Ausmultiplizieren der rechten Seite

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd} \tag{9a}$$

folgt.
Entsprechend erhält man

$$\boxed{(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd} \tag{9b}$$

$$\boxed{(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd} \tag{9c}$$

$$\boxed{(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd} \tag{9d}$$

Zwei algebraische Summen kann man miteinander multiplizieren, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die sich ergebenden Teilprodukte addiert.

Eine geometrische Veranschaulichung der Formel (9a) für positive Zahlen a, b, c und d liefert das Bild 21. In ähnlicher Weise lassen sich auch die übrigen drei Formeln darstellen.

Der Satz für die Multiplikation algebraischer Summen gilt auch dann, wenn die Summen aus mehr als zwei Gliedern bestehen.
Sind mehr als zwei Summen miteinander zu multiplizieren, so bildet man nach dem Assoziativgesetz zunächst das Produkt zweier Summen, multipliziert diese mit der dritten usw.

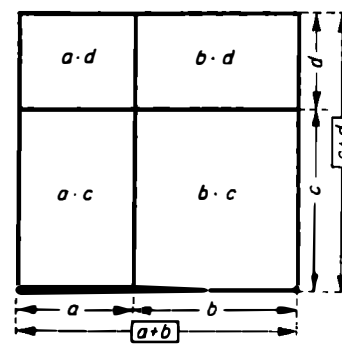


Bild 21

Um beim Ausmultiplizieren alle Glieder zu erfassen, ist es ratsam, zunächst das erste Glied der ersten Klammer der Reihe nach mit allen Gliedern der zweiten Klammer zu multiplizieren, dann das zweite Glied der ersten Klammer mit allen Gliedern der zweiten Klammer usw., bis alle möglichen Teilprodukte gebildet sind. Die Anzahl der Teilprodukte, die sich bei einer Aufgabe ergeben, läßt sich leicht feststellen:

$(a + b)(c + d)$	ergibt	$2 \cdot 2 = 4$ Teilprodukte,
$(a + b)(c + d - e)$	„	$2 \cdot 3 = 6$ Teilprodukte,
$(a + b - c)(d - e + f)$	„	$3 \cdot 3 = 9$ Teilprodukte,
$(a + b)(c + d - e)(f - g + h)$	„	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ Teilprodukte usw.

BEISPIELE

4. $(12 + 3)(14 - 6) = 15 \cdot 8 = 120$

   Anmerkung: Derartig einfache Summen wird man zweckmäßig *nicht* gliedweise ausmultiplizieren, sondern *vor* der Multiplikation *zusammenfassen*!

5. $(2a + 3)(3a - 2) = 6a^2 - 4a + 9a - 6 = 6a^2 + 5a - 6$

6. $(3x - 2y + 5z)(2x - 4y - 3z)$

$$\begin{array}{rrr} 6x^2 & - 12xy & - 9xz \\ - 4xy & + 8y^2 & + 6yz \\ + 10xz & - 20yz & - 15z^2 \\ \hline 6x^2 & - 16xy + xz + 8y^2 & - 14yz - 15z^2 \end{array}$$

   Man beachte die übersichtliche Anordnung der Rechnung!

7. $(3u - 2v)(6u + 3v)(2v - 5u) =$

$= (18u^2 + 9uv - 12uv - 6v^2)(2v - 5u) =$ *zusammenfassen!*

$= (18u^2 - 3uv - 6v^2)(2v - 5u) =$

$= 36u^2v - 90u^3 - 6uv^2 + 15u^2v - 12v^3 + 30uv^2 =$

$= -90u^3 + 51u^2v + 24uv^2 - 12v^3$

8. $(2r - 3s)(4r - 2s) - (3r - 4s)(s + 3r) =$

$= 8r^2 - 16rs + 6s^2 - (9r^2 - 9rs - 4s^2) =$

   Anmerkung: Reihenfolge der Rechenoperationen beachten! Da vor dem zweiten Produkt ein Minuszeichen steht, wird der beim Ausmultiplizieren entstehende Ausdruck zunächst in Klammern eingeschlossen. Die weitere Vereinfachung ergibt dann:

$= 10s^2 - 7rs - r^2$

9. $(u + v) \cdot [u^2 - (3u - v)(2u + 3v) - (3u + v)(3u - 2v) + v^2] =$

$= (u + v) \cdot [u^2 - (6u^2 + 7uv - 3v^2) - (9u^2 - 3uv - 2v^2) + v^2] =$

$= (u + v) \cdot [6v^2 - 4uv - 14u^2] =$

$= 6v^3 + 2uv^2 - 18u^2v - 14u^3$

4.2.4. Binomische Formeln

Unter einem **Binom**[1]) versteht man eine zweigliedrige algebraische Summe, also z. B. $a + b$ oder $a - b$ oder $2x - 3y$ usw.
Bei den Potenzen der Binome treten Gesetzmäßigkeiten auf, die es gestatten, die Potenzwerte ohne große Rechnung niederschreiben zu können.
Schreibt man

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b),$$

so erhält man, indem man die rechte Seite ausmultipliziert, die Formel

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}. \qquad (10a)$$

[1]) bi (lat.) doppelt; nomos (griech.) Gesetz, Gefüge, Glied.

Entsprechend ergibt sich

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}. \tag{10b}$$

Diese beiden Beziehungen werden *erste und zweite binomische Formel* genannt.
Das Quadrat eines Binoms setzt sich demnach zusammen aus der Summe der Quadrate der beiden Einzelglieder sowie aus dem doppelten Produkt dieser Glieder.
Multipliziert man die Summe $a + b$ mit der Differenz $a - b$ zweier Zahlen a und b, so erhält man die *dritte binomische Formel*

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}. \tag{10c}$$

BEISPIELE

1. $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

2. $(u - 4v)^2 = u^2 - 2 \cdot u \cdot 4v + (4v)^2 = u^2 - 8uv + 16v^2$

   Anmerkung: Nach einigem Üben muß man in der Lage sein, das Ergebnis sofort angeben zu können ohne dabei die hier noch angeführte Zwischenrechnung hinschreiben zu müssen.

3. $(4a + 5b)(4a - 5b) = (4a)^2 - (5b)^2 = 16a^2 - 25b^2$

4. $$\left(\frac{1}{3}u + 9v\right)^2 - \left(\frac{1}{3}u - 9v\right)^2 - \left(\frac{1}{3}u + 9v\right) \cdot \left(\frac{1}{3}u - 9v\right) =$$
   $$= \frac{1}{9}u^2 + 6uv + 81v^2 - \left(\frac{1}{9}u^2 - 6uv + 81v^2\right) - \left(\frac{1}{9}u^2 - 81v^2\right) =$$
   $$= 81v^2 + 12uv - \frac{1}{9}u^2$$

Die binomischen Formeln können auch oft bei gewöhnlichen Zahlenrechnungen vorteilhaft angewendet werden.

BEISPIELE

5. $47^2 = (40 + 7)^2 = 1600 + 560 + 49 = 2209$

6. $2{,}3 \cdot 3{,}7 = (3 - 0{,}7)(3 + 0{,}7) = 9 - 0{,}49 = 8{,}51$

Stehen in der Grundzahl mehr als zwei Glieder, so wird auch das Quadrat eine entsprechend mehrgliedrige Summe. So ist z. B.

$$(a - b + c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd.$$

Das Quadrat einer algebraischen Summe setzt sich demnach zusammen aus der Summe der Quadrate sämtlicher Einzelglieder sowie aus allen möglichen doppelten Produkten, wobei sich die Vorzeichen der doppelten Produkte aus den Vorzeichen der daran beteiligten Glieder ergeben.
Für die dritte Potenz von $(a + b)$ erhält man

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) =$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Diese beiden Formeln unterscheiden sich nur in den Vorzeichen der Glieder mit ungeraden Potenzen von b, so daß beide Formeln wie folgt zusammengefaßt werden können:

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} \quad . \tag{11}$$

Es sei an dieser Stelle besonders auf den Unterschied zwischen $(a \pm b)^2$ und $a^2 \pm b^2$ sowie zwischen $(a \pm b)^3$ und $a^3 \pm b^3$ hingewiesen.
Während $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ ist, läßt sich $a^2 + b^2$ *nicht* in Faktoren zerlegen, die aus rationalen Zahlen bestehen.
Ferner ist

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad \text{dagegen } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad \text{,,} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \qquad \text{,,} \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Die Richtigkeit der drei rechts angegebenen Formeln läßt sich leicht durch Ausmultiplizieren nachprüfen.

4.2.5. Division von Klammerausdrücken

Statt eine algebraische Summe durch eine Zahl zu dividieren, kann man auch jedes Glied der Summe durch diese Zahl teilen. Dabei ist die Vorzeichenregel für die Division zu beachten.

Es ist also z. B.

$$\boxed{(a + b - c) : n = a : n + b : n - c : n} \quad . \tag{12}$$

Probe: $(a : n + b : n - c : n) \cdot n = (a : n) \cdot n + (b : n) \cdot n - (c : n) \cdot n = a + b - c$

BEISPIELE

1. $(45a - 54b) : 9 = 45a : 9 - 54b : 9 = 5a - 6b$
   Probe: $(5a - 6b) \cdot 9 = 45a - 54b$
2. $(3x^2 - 6xy + 9xz) : (-3x) = -x + 2y - 3z$ *(Probe!)*

Sind mehrgliedrige Ausdrücke durcheinander zu dividieren, so benutzt man vorteilhaft das Verfahren der **Partialdivision.**
Es handelt sich dabei um das gleiche Verfahren, das bereits von der Division gewöhnlicher Zahlen her bekannt ist.
Man ordnet zunächst Dividend und Divisor nach gleichen Gesichtspunkten, wobei man die einzelnen Glieder zumeist in alphabetischer Reihenfolge und außerdem nach fallenden Potenzen anordnet. Dann dividiert man das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors. Der entstehende Quotient wird dann mit dem ganzen Divisor multipliziert und dieses Produkt vom Dividenden subtrahiert. Mit dem Rest wird dann in derselben Weise weitergerechnet bis entweder die Division aufgeht oder

ein nicht mehr teilbarer Rest übrigbleibt. Während der Durchführung der Division darf man dabei keinesfalls vom ersten Glied des Divisors auf ein anderes Glied des Divisors überwechseln.

BEISPIELE

3. $(x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3) : (x - y) = x^2 + 2xy - y^2$

$-(x^3 - x^2y)$

$2x^2y - 3xy^2$

$-(2x^2y - 2xy^2)$

$-xy^2 + y^3$

$-(-xy^2 + y^3)$

$-$

Probe:

$(x^2 + 2xy - y^2)(x - y) =$

$= x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3$

4. $(49a^2 - 25x^2 - 9b^2 - 30bx) : (5x + 7a + 3b) =$ *ordnen!*

$= (49a^2 - 9b^2 - 30bx - 25x^2) : (7a + 3b + 5x) = \underline{\underline{7a - 3b - 5x}}$

$-(49a^2 + 21ab + 35ax)$

$-9b^2 - 30bx - 25x^2 - 21ab - 35ax$ *ordnen!*

$-21ab - 35ax - 9b^2 - 30bx - 25x^2$

$-(-21ab - 9b^2 - 15bx)$

$-35ax - 15bx - 25x^2$

$-(-35ax - 15bx - 25x^2)$

$-$

Probe: $(7a - 3b - 5x)(7a + 3b + 5x) = 49a^2 - 9b^2 - 30bx - 25x^2$

5. $(u^3 - v^3) : (u - v) = \underline{\underline{u^2 + uv + v^2}}$

$-(u^3 - u^2v)$

$-v^3 + u^2v$ *ordnen!*

$+u^2v - v^3$

$-(+u^2v - uv^2)$

$-v^3 + uv^2$ *ordnen!*

$+uv^2 - v^3$

$-(+uv^2 - v^3)$

$-$

Probe: $(u^2 + uv + v^2)(u - v) = u^3 - v^3$

Anmerkung: Vergleiche dieses Ergebnis mit der letzten Formel der Gegenüberstellung am Ende von 4.2.4.!

6. $(x^3 - 4x^2 + 6x - 5) : (x - 2) = x^2 - 2x + 2$ Rest -1

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -2x^2 + 6x \\ -(-2x^2 + 4x) \\ \hline +2x - 5 \\ -(+2x - 4) \\ \hline -1 \end{array}$$

Anmerkung: Wenn die Division wie hier nicht aufgeht, schreibt man das Ergebnis entweder in der oben angegebenen Form $x^2 - 2x + 2$ Rest -1 oder ähnlich wie bei den nicht aufgehenden Divisionsaufgaben mit gewöhnlichen Zahlen in der Form

$$x^2 - 2x + 2 + \frac{-1}{x-2} = x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{x-2}.$$

Probe: $\left(x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{x-2}\right) \cdot (x-2) = (x^2 - 2x + 2)(x-2) - \frac{1}{x-2} \cdot (x-2) =$

$$= x^3 - 4x^2 + 6x - 4 - 1 = x^3 - 4x^2 + 6x - 5$$

4.2.6. Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Faktoren, die in allen Gliedern einer algebraischen Summe enthalten sind, lassen sich **ausklammern**:

$$an + bn - cn = n \cdot (a + b - c).$$

Das Ausklammern ist die Umkehrung des Ausmultiplizierens. (Verwendung bei der Probe!)
Da beim Ausklammern eines gemeinsamen Faktors eine algebraische Summe in ein Produkt umgewandelt wird, nennt man diesen Vorgang auch *Produktzerlegung* oder *Faktorenzerlegung.*

BEISPIEL 1

$(24x^3 - 36xy + 12xz) = 12x \cdot (2x - 3y + z)$

Probe durch Ausmultiplizieren des Ergebnisses!

Gegebenenfalls läßt sich das Ausklammern mehrfach nacheinander wiederholen, wenn man geeignete Summanden zusammenfaßt.

BEISPIELE

2. $u^2 + 3u - uv - 3v = u(u+3) - v(u+3) = (u+3)(u-v)$ *(Probe!)*

3. $6ab - 3b - 2a + 1 = 3b(2a-1) - 1 \cdot (2a-1) = (2a-1)(3b-1)$ *(Probe!)*

4. $\frac{1}{3} g h^2 + \frac{1}{3} g^2 h = \frac{1}{3} gh \cdot (h + g^2)$ *(Probe!)*

5. $4m(3a - 2b) + 8n(2b - 3a) = 4m(3a - 2b) - 8n(3a - 2b) =$

$= 4 \cdot (3a - 2b)(m - 2n)$ *(Probe!)*

6. $64Q^2 - 36R^2 = (8Q + 6R)(8Q - 6R)$ *(Probe!)*

(Anwendung der dritten binomischen Formel.)

7. $16p^2 + 40pq + 25q^2 - r^2 + 6rs - 9s^2 =$
$= (16p^2 + 40pq + 25q^2) - (r^2 - 6rs + 9s^2) =$
$= (4p + 5q)^2 - (r - 3s)^2 =$ *(Binomische Formeln!)*
$= [(4p + 5q) + (r - 3s)] \cdot [(4p + 5q) - (r - 3s)] =$
$= (4p + 5q + r - 3s)(4p + 5q - r + 3s)$ *(Probe!)*

4.2.7. Bruchrechnung

Die Rechenregeln, die im Abschnitt 3.3. für das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen angegeben wurden, gelten auch dann, wenn in den Brüchen allgemeine Zahlensymbole auftreten.

4.2.7.1. Erweitern und Kürzen

Es ist für $m, n \neq 0$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a : n}{b : n}} \tag{13}$$

BEISPIELE

1. *Der Bruch* $\frac{x + y}{x - y}$ *ist mit* $x + y$ *zu erweitern.*

Lösung:

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{(x + y)(x + y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(x + y)^2}{x^2 - y^2}.$$

2. *Der Bruch* $\frac{0{,}25xy - 0{,}5z}{0{,}125xy + z}$ *ist mit* $8z$ *zu erweitern.*

Lösung:

$$\frac{0{,}25xy - 0{,}5z}{0{,}125xy + z} = \frac{(0{,}25xy - 0{,}5z) \cdot 8z}{(0{,}125xy + z) \cdot 8z} = \frac{2xyz - 4z^2}{xyz + 8z^2}$$

3. *Es ist* $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$. *(Erweitert mit bzw. gekürzt durch* -1*.)*

4. *Die Brüche*

a) $\frac{0{,}2uv^2}{0{,}6u^2v}$ b) $\frac{m^2 - n^2}{(m - n)^2}$ c) $\frac{6ax - 9ay}{3by - 2bx}$ d) $\frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{16b^2 - 9a^2}$

sind zu kürzen.

Lösungen:

a) $\frac{0{,}2uv^2}{0{,}6u^2v} = \frac{v}{3u}$ b) $\frac{m^2 - n^2}{(m - n)^2} = \frac{(m + n)(m - n)}{(m - n)^2} = \frac{m + n}{m - n}$

c) $\frac{6ax - 9ay}{3by - 2bx} = \frac{3a(2x - 3y)}{b(3y - 2x)} = \frac{3a(2x - 3y)}{-b(2x - 3y)} = \frac{3a}{-b} = -\frac{3a}{b}$

d) $$\frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{16b^2 - 9a^2} = \frac{(3a - 4b)^2}{(4b + 3a)(4b - 3a)} = \frac{(4b - 3a)^2}{(4b + 3a)(4b - 3a)} =$$

$$= \frac{4b - 3a}{4b + 3a}.$$

Keine Summanden „kürzen", sondern in Faktoren zerlegen!

5. *Die Brüche* $\frac{r - s}{r \cdot s}$, $\frac{p + q}{p - q}$, $\frac{25a - 36b}{5a - 6b}$, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *lassen sich nicht kürzen, da Zähler und Nenner keine gemeinsamen Faktoren enthalten.*

4.2.7.2. Addition und Subtraktion von Brüchen

Für gleichnamige Brüche gilt

$$\boxed{\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a + b - c}{n}} \tag{14}$$

Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren (Subtrahieren) gleichnamig gemacht werden. Die Bestimmung des Hauptnenners geschieht dabei in der gleichen Weise wie beim Rechnen mit bestimmten Zahlen:

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

Die auf einem Bruchstrich stehenden Glieder einer Summe gehören genauso zusammen, als wären sie durch eine Klammer eingeschlossen.

BEISPIELE

1. $$\frac{a^2}{xy} - \frac{2ab}{xy} + \frac{b^2}{xy} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{xy} = \frac{(a - b)^2}{xy}$$

2. $$\frac{8u - 3v}{u^2 - v^2} - \frac{4u - 7v}{u^2 - v^2} = \frac{8u - 3v - (4u - 7v)}{u^2 - v^2} =$$ *(Klammer beachten!)*

$$= \frac{4u + 4v}{u^2 - v^2} = \frac{4 \cdot (u + v)}{(u + v) \cdot (u - v)} = \frac{4}{u - v}$$

3. $$\frac{9a + 8b - 3c}{2ab} + \frac{3b - 4a - 12c}{3ac} - \frac{27c - 7a - 8b}{6bc} = ?$$

Lösung: Hauptnenner: $6abc$

Erweiterungsfaktoren: $3c$, $2b$ und a.

$$= \frac{(9a + 8b - 3c) \cdot 3c + (3b - 4a - 12c) \cdot 2b - (27c - 7a - 8b) \cdot a}{6abc} =$$

$$= \frac{27ac + 24bc - 9c^2 + 6b^2 - 8ab - 24bc - 27ac + 7a^2 + 8ab}{6abc} =$$

$$= \frac{7a^2 + 6b^2 - 9c^2}{6abc}$$

4. $$\frac{2c - 5b}{6ab - 10b^2} - \frac{5 \cdot (2c - 3a)}{18a^2 - 30ab} = ?$$

Lösung: Hauptnenner (HN) und Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rl|l} 6ab - 10b^2 &= 2b(3a - 5b) & 3a \\ 18a^2 - 30ab &= 6a(3a - 5b) & b \end{array}$$

$$\text{HN} = 6ab(3a - 5b)$$

$$\frac{2c - 5b}{6ab - 10b^2} \quad \frac{5\cdot(2c - 3a)}{18a^2 - 30ab} = \frac{(2c - 5b)\cdot 3a - 5\cdot(2c - 3a)\cdot b}{6ab(3a - 5b)} =$$

$$= \frac{6ac - 15ab - 10bc + 15ab}{6ab(3a - 5b)} =$$

$$= \frac{6ac - 10bc}{6ab(3a - 5b)} = \frac{2c(3a - 5b)}{6ab(3a - 5b)} =$$

$$= \frac{c}{3ab}$$

Anmerkung: Es ist ratsam, die Faktoren im Nenner erst dann auszumultiplizieren, wenn feststeht, daß nicht mehr gekürzt werden kann.

5. $\dfrac{3m}{9m^2 - 24mn + 16n^2} - \dfrac{3m}{9m^2 - 16n^2} + \dfrac{1}{3m + 4n} = ?$

Lösung: Hauptnenner:

$$\begin{array}{rl|l} 9m^2 - 24mn + 16n^2 &= (3m - 4n)^2 & 3m + 4n \\ 9m^2 - 16n^2 &= (3m + 4n)(3m - 4n) & 3m - 4n \\ 3m + 4n &= 3m + 4n & (3m - 4n)^2 \end{array}$$

$$\text{HN} = (3m - 4n)^2\cdot(3m + 4n)$$

$$\frac{3m}{9m^2 - 24mn + 16n^2} - \frac{3m}{9m^2 - 16n^2} + \frac{1}{3m + 4n} =$$

$$= \frac{3m(3m + 4n) - 3m(3m - 4n) + (3m - 4n)^2}{(3m - 4n)^2(3m + 4n)} = \frac{9m^2 + 16n^2}{(3m - 4n)^2(3m + 4n)}$$

6. $\dfrac{3}{x + 4} - \dfrac{4}{x + 3} + \dfrac{5}{x - 1} - 3 = ?$

Lösung: Hauptnenner: $(x + 4)(x + 3)(x - 1)$

Erweiterungsfaktoren:

$$(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$$
$$(x + 4)(x - 1) = x^2 + 3x - 4$$
$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 7x + 12$$
$$(x + 4)(x + 3)(x - 1) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

$$\frac{3}{x + 4} - \frac{4}{x + 3} + \frac{5}{x - 1} - 3 =$$

$$= \frac{3(x^2 + 2x - 3) - 4(x^2 + 3x - 4) + 5(x^2 + 7x + 12) - 3(x^3 + 6x^2 + 5x - 12)}{(x + 4)(x + 3)(x - 1)} =$$

$$= \frac{103 + 14x - 14x^2 - 3x^3}{(x + 4)(x + 3)(x - 1)}$$

7. $\dfrac{a}{a - b} - \dfrac{b}{b - a} = ?$

Lösung: Wegen

$$-\frac{-b}{b-a}=\frac{b}{-(b-a)}=\frac{b}{a-b}$$ (vgl. Beispiel 3 des Abschnittes 4.2.7.1.) ergibt sich

$$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}.$$

4.2.7.3. Multiplikation und Division von Brüchen

Für die Multiplikation und Division von Brüchen gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}} \tag{15 a, b}$$

Da sich jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben läßt, sind hierin auch die Regeln für die Multiplikation und Division eines Bruches mit einer ganzen Zahl enthalten.
Bei der Multiplikation und Division von Brüchen ist es nicht empfehlenswert, die entstehenden Zähler und Nenner sofort auszumultiplizieren. Es ist ratsamer, gemeinsame Faktoren auszuklammern, da man dann besser übersehen kann, ob sich etwas kürzen läßt. (Vgl. hierzu besonders das folgende Beispiel 5!)

BEISPIELE

1. $\left(-\frac{u}{v}\right)\left(\frac{u\,w^2}{v}\right)\left(-\frac{v}{u\,w}\right)=+\frac{u\cdot u\,w^2\cdot v}{v\cdot v\cdot u\,w}=\frac{u\,w}{v}$

2. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{x}{x\,y}-\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x\,y}=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}$

anderer Lösungsweg:

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2-y^2}{x\,y}\cdot\frac{y-x}{x\,y}=\frac{x^2y-x^3-y^3+x\,y^2}{x^2y^2}$$

Der Leser prüfe nach, daß die beiden Ergebnisse übereinstimmen!

3. $m:\frac{m}{n}=\frac{m}{1}:\frac{m}{n}=\frac{m\cdot n}{1\cdot m}=n$

4. $\frac{m}{n}:m=\frac{m\cdot 1}{n\cdot m}=\frac{1}{n}$

5. $\frac{6x^2+18y}{2xy-10}\cdot\frac{5x^2y-25x}{3y-6x}:\frac{5x^2+15y}{4xy-8x^2}=\frac{6(x^2+3y)\cdot 5x(xy-5)\cdot 4x(y-2x)}{2(xy-5)\cdot 3(y-2x)\cdot 5(x^2+3y)}=4x^2$

4.2.7.4. Doppelbrüche

Doppelbrüche lassen sich stets auf einfache Brüche zurückführen.

BEISPIELE

1. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}$

2. $$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x^2+y^2}{xy}}=\frac{x^2-y^2}{xy}:\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

3. $$\frac{\frac{u+v}{u-v}-\frac{u-v}{u+v}}{\frac{u+v}{u-v}\quad\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}}=\frac{\frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{(u+v)(u-v)}}{\frac{(u+v)^2-(u^2+v^2)}{(u+v)(u-v)}}=\frac{4uv}{u^2-v^2}:\frac{2uv}{u^2-v^2}=2$$

4. $$1-\frac{1}{1-\frac{a}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a}{a-b}}=1-\frac{a-b}{-b}=1+\frac{a-b}{b}=\frac{b+a-b}{b}=\frac{a}{b}$$

5 *Für den Gesamtwiderstand R zweier parallelgeschalteter Einzelwiderstände R_1 und R_2 gilt die Beziehung*

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Man berechne R.

Lösung: R ist der Kehrwert von $\frac{1}{R}$. Es ist demnach

$$R=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{1}{\frac{R_2+R_1}{R_1\cdot R_2}}$$

$$R=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$$

AUFGABEN

80. Unter welchen Bedingungen ergeben sich für die folgenden Ausdrücke α) gerade und β) ungerade Zahlen?

a) $3n$ b) $n-1$ c) $2n+5$ d) $7n-3$ e) $4n+6$

81. Man berechne die allgemeinen Ausdrücke

a) $(a-b)\cdot c$ b) $a-b\cdot c$ c) $\frac{a-b}{c}$ d) $a-\frac{b}{c}$

e) $\frac{a}{c}-b$ f) $(a:c-b)\cdot d$ g) $(a-b\cdot c):d$ h) $a:d-b\cdot c$

i) $a:d-b\cdot c:d$ k) $(2a-b)(3c+d)$,

wenn folgende bestimmte Zahlenwerte gegeben sind:

α) $a=7$;	$b=5$;	$c=3$;	$d=2$
β) $a=2$;	$b=9$;	$c=6$;	$d=7$
γ) $a=-14$;	$b=11$;	$c=-5$;	$d=9$
δ) $a=-21$;	$b=-5$;	$c=-6$;	$d=-10$
ε) $a=5{,}5$;	$b=-\frac{2}{3}$;	$c=2\frac{5}{6}$;	$d=0{,}25$

82. Welches der drei Zeichen $>$, $<$ oder $=$ kann zwischen die folgenden Zahlen gesetzt werden:

a) -13 und $+13$ b) $+5$ und -12 c) $|+5|$ und $|-12|$

d) -3 und -1 e) -16 und $+2$ f) $|-16|$ und $|+2|$

g) $+21$ und $+35$ h) -11 und -27 i) $+7$ und -7

k) $|+7|$ und $|-7|$

83. Berechne

a) $(+35)+(+15)$ b) $(+35)+(-15)$ c) $(+35)-(+15)$

d) $(+35)-(-15)$ e) $(-35)+(+15)$ f) $(-35)+(-15)$

g) $(-35)-(+15)$ h) $(-35)-(-15)$

84. Bilde entsprechende Kombinationen wie in Aufgabe 83 mit den folgenden Zahlen:

α) 6 und 7 β) 11 und 22 γ) 46 und 14 δ) 16 und 16

85. Berechne

a) $(-3)+(+2)-(+5)-(-11)+(-6)$

b) $(-4)+|-3|-|-5|+(-8)-(-12)+|-4|$

c) $418-(69-83)+(116-327)$

d) $(+89{,}7)-(-24{,}3)+(37{,}2-52{,}6)-(+44{,}1)$

e) $|+4|+|-19|-|-31|+|-10|-|+2|$

f) $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-4\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{9}{4}\right)+\left(-2\frac{2}{3}\right)+\left(5\frac{1}{6}\right)$

g) $172{,}6-(+37{,}2)+|-89{,}7|+(-54{,}4)-|-91{,}9|$

h) $(+4)+|-4|-|+4|-(-4)-(+4)-|-4|+(-4)+|+4|$

i) $(16-108)-(73-147)-(89+13)+(186-41)$

k) $\left(3\frac{1}{8}-7\frac{1}{3}\right)+\left|4\frac{1}{3}-5\frac{3}{4}\right|-\left(\frac{55}{12}-2\frac{5}{6}\right)-\left|7\frac{1}{2}-13\frac{7}{8}\right|$

86. Desgl.

a) $17a-23b+35c-9a-41c+30b$

b) $37m-15l-64n+13l+100n-38m$

c) $81y-59x+15z+99x-75z-31y$

d) $5p-3q-7r+9q+13s-17t-3p+19r-6s$

e) $34u-69w+51v+27w-16u-22v-18u$

f) $3{,}13a-7{,}25b+9{,}08c-2{,}02b-6{,}52a+4{,}02c$

g) $\frac{2}{3}d+\frac{1}{5}e-\frac{4}{7}f-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}f-\frac{5}{6}e-\frac{4}{9}d$

h) $1081{,}27x-495{,}3+726{,}88y-693{,}04z-375{,}42y+484{,}14z-92{,}3x$

i) $4\frac{1}{5}R_1-9\frac{2}{7}R_3+21\frac{1}{2}R_4-15R_3+5\frac{2}{3}R_2-19\frac{3}{4}R_4+12\frac{5}{6}R_1+3\frac{13}{21}R_2$

k) $17\frac{2}{5}u-69{,}258+31\frac{3}{4}v-44{,}327w+12{,}6u+59\frac{5}{16}w+24\frac{1}{8}-87{,}63v$

87. Desgl.

a) $4a \cdot 2c \cdot 5b \cdot 3c \cdot 2a$

b) $x \cdot 3y \cdot 2z \cdot 5xz \cdot 3xy$

c) $2rt \cdot 5ts \cdot 7rs \cdot 6t \cdot 3$

d) $\frac{2}{3}u \cdot \frac{1}{4}vw \cdot \frac{3}{8}w \cdot 6v \cdot \frac{7}{9}uv \cdot \frac{3}{14}v$

e) $0{,}4pq \cdot 2{,}72q \cdot 0{,}625s \cdot 1{,}6pt \cdot 2{,}5rs \cdot 6{,}25$

f) $(+2rx) \cdot (-6sy) \cdot (+3tz)$

g) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)\left(+\frac{8}{3}bc\right)\left(-\frac{3}{4}ac\right)$

h) $(+3x)(-2y) - (-5x)(-4y) + (-y)(+6x) - (+4x)(-9y)$

i) $(-3u)(6vw) + (+2u)(-3w)(-v) - (+4uvw)(-5) + (-vw) \cdot 8u$

k) $2s \cdot \left(-\frac{2}{3}at\right) \cdot \left(+8\frac{1}{5}b\right) - \frac{2}{3}b \cdot \left(-3\frac{1}{8}as\right)\left(+\frac{11}{5}t\right) + \frac{5}{16}t\left(+\frac{17}{81}a\right)\left(-\frac{0}{15}bs\right)$

88. Berechne

a) $(+132x) : (-11)$

b) $(+15ab) : (-3b)$

c) $(-96uv) : (-12u)$

d) $(+3r) : (-3r)$

e) $(-102y^3) : (17y)$

f) $(-7a^2b) : (-21ab^2)$

g) $(-56u^3vw) : (72uv^3w)$

h) $\left(+\frac{3}{7}x\right) : (-x)$

i) $32{,}66ab : (-7{,}1rs)$

k) $\left(-\frac{21}{25}xy^2z^3\right) : \left(-\frac{14}{15}x^2yz^2\right)$

89. Desgl.

a) $\frac{+48x}{6}$

b) $\frac{-133u}{19}$

c) $\frac{403}{-31c}$

d) $\frac{-209xz}{-38yz}$

e) $-\frac{-6{,}29ax}{4{,}81abx}$

f) $+\frac{+rstx}{-stx}$

g) $-\frac{-0{,}4a^2b}{-1{,}2ab}$

h) $-\frac{\frac{3}{4}ab^2x}{-\frac{5}{8}a^2bx}$

i) $-\frac{8{,}69xy}{79xy}$

k) $+\frac{-5ast}{+9stx}$

90. Berechne

a) $34a^3b^3 : [(+2a)(-b)] - 54a^4b^3 : [(-a^2)(9b^3)]$

b) $u^2v^3w : [(-uv^3)(+uw)] + (-u^3v^3w^3) : [(+u^2vw)(-uvw)]$

c) $(-17{,}49x^3yz) : [(+1{,}1x)(-5{,}3y)] + [13{,}34x^4y^2z^2 : (-2{,}9x^3y^2)] : (+2{,}3xz)$

d) $[(-63rs^3t) : (+3r^3s^3t^2)] \cdot (-2rs) - (+29rs^3t) : [(+7r^3s^5t^4) : (-14r^2st^2)]$

e) $[(-a^2b) : (+5a^2b^2)] \cdot 7ab - 14a^3b^2 : [(-3ab) \cdot (7a^2b)]$

91. Vereinfache

a) $(x - 6y) - (4x - 9y)$

b) $(3q - 5r) - (4q + 8r) + (2q + 6r) - (q - 9r)$

c) $(5n - 7p - 8m) - (2p - m - 3n) + (9m - 8n + 7p)$

d) $3{,}5r - 7{,}2s - (5{,}4r + 3{,}6s) + (2{,}7r + 11{,}8s)$

e) $\left(\frac{2}{3}u - \frac{3}{4}v - \frac{1}{2}w\right) + \left(\frac{1}{2}u + \frac{2}{3}v + \frac{1}{4}w\right) - \left(\frac{1}{6}u - \frac{1}{12}v + \frac{3}{4}w\right)$

f) $6x - [2y - [4z + (3x - 2y) + 2x] - 5z]$

g) $2\frac{1}{2}a - \left(0{,}75b - \frac{1}{3}c\right) + \left[\frac{4}{5}a - \left(0{,}6b + \frac{1}{6}c\right)\right]$

h) $(3u - v) - \{[3v - (2u - v)] - [(5u + 4v) + w]\}$

i) $5x - 7y - \{3z + 3y + [-4x + 11z - (10y - z) - (-3x + 8z)]\}$

k) $(5a + 3b) + [(12a - 6b) - \{(10a - 2b) - (3a - 4b)\} - 5b]$

92. Desgl.

a) $15a - \{13b + [9c + 15d - (14a + 36d)]\} + 14b - 29c$

b) $200m - \{30n + 75p + (15n - 90m) + [7p + n - (3p + 2q) - 47q] + 15n\} + 25p$

c) $45d - \{38c + [50k - (29l + 12d)] - 65c\} -$
$- \{77d - [53d + 16l - (124k + 98l)] - 51c + k\} - 43c + 87k$

d) $26\frac{5}{6}x^2yz - \left\{37\frac{7}{9}xy^2z - 75\frac{4}{5}x^2y^2z + \left[27\frac{3}{4}xy^2z + 46\frac{7}{8}x^2yz - \right.\right.$
$- \left(69\frac{5}{12}x^2y^2z + 28\frac{17}{24}x^2y^2z - 45\frac{9}{16}x^2yz\right) - 68\frac{3}{4}x^2y^2z -$
$\left.\left. - 99\frac{2}{3}x^2yz + 78\frac{1}{2}xy^2z\right] - 15x^2yz\right\} - 107x^2y^2z$

e) $4a^2b - (2ab^2 - 4ab + 4a - 5b - 4) + (-4a^2b + ab^2 - 2ab + 3a - 3b - 3) -$
$- (-a - ab^2 - 2ab + 2b + 1)$

f) $17 + 5 - \left\{18 - \left[9 - \left(3 + 2\frac{1}{2}\right) - 17\right] + 25\right\}$

g) $18a^2 - \{24a^2 + [-36b^3 - (-18a^2 + 4b^2) + 48b^2] - 20a^2\}$

h) $\frac{3}{4} - \left\{\frac{1}{6} - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\right] + \frac{13}{15}\right\}$

i) $(9{,}7x - 5{,}08y) - \left\{13{,}642x + 18{,}612y - \left(39{,}7y - 12\frac{5}{6}x\right) -\right.$
$\left. - \left[3\frac{5}{9}x - \left(7{,}39y + 16\frac{9}{22}x\right)\right] - 14{,}8x\right\}$

k) $49\frac{5}{22}a^2bc^2 - \left\{60{,}07a^2bc^2 + \left[103{,}372a^2bc - 0{,}46a^2bc^2 + \right.\right.$
$\left.\left. + \left(13\frac{4}{5}a^3bc + 45{,}062a^2b^2c\right)\right]\right\} - 18\frac{2}{3}a^3bc - \left(16\frac{5}{6}a^2bc + a^2b^2c\right)$

93. Die letzten beiden Glieder sind in eine Klammer, vor der ein Pluszeichen stehen soll, einzuschließen:

a) $x + a - b$ b) $u - v + w$ c) $\frac{q}{2} - \frac{2}{3}v + \frac{1}{4}s$

d) $1 + a - b + c$ e) $2x - 3y + 4z - 5$

94. Die letzten beiden Glieder sind in eine Klammer, vor der ein Minuszeichen stehen soll, einzuschließen:

a) $x - 2y + 4z$ b) $\frac{1}{4}e + \frac{2}{7}f - \frac{3}{8}g$ c) $0{,}25q - 0{,}49r - 0{,}52s + 2{,}12t$

d) $37{,}2a - 42{,}5b + 41{,}6c - 0{,}62d$ e) $\frac{3}{5}u - \frac{7}{9}v - \frac{9}{11}w - \frac{5}{7}x$

95. Die letzten drei Glieder sind in eine Klammer, vor der das Vorzeichen des drittletzten Gliedes stehen soll, einzuschließen:

a) $a - 3b + 2c - 4d$

b) $x - 0{,}2y + 0{,}3y - 4{,}2z + 6{,}3u$

c) $3p - 6q - 2r - 4s + 5t$

d) $\frac{1}{3}u - \frac{2}{5}v + \frac{4}{7}w - \frac{5}{9}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}z$

e) $0{,}3k + 3{,}2l - 4{,}5m - 2{,}7n - 1{,}6p$

96. Berechne

a) $3 \cdot (5r - 2s + t)$

b) $(x - 2y - 6z) \cdot (-4a)$

c) $\left(\frac{2}{3}u - \frac{4}{5}v + \frac{1}{2}w\right)\left(-\frac{3}{4}v\right)$

d) $-5{,}2 \cdot (3{,}1a - 2{,}3b + 4{,}7c - 7{,}6d)$

e) $\left(\frac{a}{x} - \frac{3b}{x^2} + c\right) \cdot x^3$

f) $\frac{9p^2}{20uv}\left(\frac{5u^2}{3p^2} + \frac{7v^2}{3p} - \frac{10u^2v}{9p^2}\right)$

g) $3(x + y + z) - 5(x + y - z) - 2(y - x - z)$

h) $2(4b - a) - 6(2a - b) - 7(-2a + 2b)$

i) $\left(3\frac{1}{2}a^4 - 2\frac{1}{4}a^3 + 1\frac{3}{8}a^2 - \frac{3}{4}a + 4\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-1\frac{3}{5}a\right)$

k) $2[18 - 3(7w - 5)] - 3[5w + 2(9 - 4w)] + 4[2w - 5(2w - 3)]$

97. Desgl.

a) $(2x + 3y)(5x + 2y)$

b) $(5a + 7b)(3a - 4b)$

c) $(2m - n)(9m + 4n)$

d) $(9u - 2z)(7u - 3z)$

e) $(11v + 9w)(11v - 9w)$

f) $(-13x - 11y)(9x - 14y)$

g) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{4}{5}a - \frac{9}{8}b\right)$

h) $(0{,}7u - 0{,}3v)(-0{,}3v + 0{,}7u)$

i) $\left(2\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{3}b\right)\left(2\frac{2}{3}m + 5\frac{1}{4}n\right)$

k) $(2ax + 3by)\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)$

98. Desgl.

a) $(x + y - z)(x - y - z)$

b) $(2a + 3b + 4c)(a - 2b - 3c)$

c) $(13u - 27v - 18w)(5v - 9u - 6w)$

d) $\left(\frac{1}{2}p - \frac{2}{3}q + \frac{1}{4}r\right)\left(\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q - \frac{1}{4}r\right)$

e) $(-0{,}3k - 0{,}7l - 2{,}1m)(1{,}4m + 0{,}6l - 0{,}5k)$

f) $(2x - 1)(3x + 5)(x + 1)$

g) $(3u + 5)(2u - 3)(u - 1)$

h) $(3x + 2y)(4x - 3y)(5x - 7y)$

i) $(4a - 2b)(5a - 3b)(6a + 4b)$

k) $(k - 2l)(3m - n)(2p + 3q)$

99. Desgl.

a) $(a + b)(2a - 3b) - (3a + 2b)(a - b)$

b) $5m(3m^3 - 4m)(7m^3 - 2m^2 + 5m + 1)$

c) $(x + y) \cdot [(x + y)(x - 2y) - (x + 2y)(x - y)]$

d) $[(u - v) \cdot [(2u - 3v)(3u - 2v) - (2u + 3v)(3u + 2v)] + u^3 - v^3] \cdot (u + v)$

e) $(k + 9)(k + 7) - (k + 4)^2 - (k + 1)(k - 1) + (k - 2)^2$

100. Berechne

a) $(u - v)^2$ b) $(m + 1)^2$ c) $(1 + x)(1 - x)$ d) $(1 - y)^2$

e) $(2a - b)^2$ f) $(x + 3y)^2$ g) $(3p - 2q)^2$ h) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{1}{4}n\right)^2$

i) $(3{,}1s - 5{,}7t)(3{,}1s + 5{,}7t)$ k) $(-0{,}7u + 1{,}2v)^2$

101. Desgl.

a) $(-1 + x)^2 - (1 - x)^2$ b) $\left(3a - \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(3a + \frac{1}{2}b\right)^2$

c) $(4x^2 + 3y^2)(4x^2 - 3y^2)$ d) $(-5x - 3y)^2 + (-5x + 3y)^2$

e) $(3x^2 - 1)^2 + (2 - 5x)^2$ f) $(5 - 9a^2)(5 + 9a^2)$

g) $(1{,}3m - 1{,}7n)^2 - (0{,}9n + 1{,}9m)^2$

h) $\left(\frac{7}{9}u - \frac{4}{7}v\right)^2 - \left(\frac{7}{9}u + \frac{4}{7}v\right)\left(\frac{7}{9}u - \frac{4}{7}v\right)$

i) $(4m + 3n)^2 - (2m - 4n)(2m + 4n) - (3m - 5n)^2 - 3m^2$

k) $(3k + 4l)^2 - (2l - 5k)^2 + (4k - 3l)(3l + 4k) - 2l^2$

102. Desgl.

a) $(x + y - z)^2$ b) $(u - v + w)^2$ c) $(2a - 3b - 4c)^2$

d) $(k + l + m + n)^2$ e) $\left(2p - \frac{1}{2}q + \frac{3}{4}r - s\right)^2$

103. Berechne unter Verwendung der binomischen Formeln

a) 41^2 b) 87^2 c) $38 \cdot 42$ d) $69^2 - 31^2$ e) $383 \cdot 417$

f) 1010^2 g) $145^2 - 55^2$ h) $304 \cdot 296$ i) 997^2 k) $675^2 - 25^2$

104. Berechne

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(2a - 1)^2$ c) $(-4u - 5v)^2$ d) $\left(-2 + \frac{1}{2}y\right)^2$

e) $(9a^2 + 6ab + 4b^2)(3a - 2b)$

105. Berechne die allgemeinen Zahlenausdrücke

a) $(a + b)^2$ b) $a^2 + b^2$ c) $(a - b)^2$ d) $a^2 - b^2$

e) $(a + b)^3$ f) $a^3 + b^3$ g) $(a - b)^3$ h) $a^3 - b^3$

für folgende Zahlenwerte

α) $a = 5;\ b = 3$ β) $a = 2;\ b = 7$ γ) $a = 8;\ b = -6$

δ) $a = -4;\ b = 9$ ε) $a = 10;\ b = 10$ ζ) $a = 10{,}1;\ b = 9{,}9$

106. Berechne

a) $(21x - 14y) : 7$ b) $(10a - 2ab + 16ac) : 2a$

c) $(12uvw - 2uvz + 6uvwz) : 9uv$ d) $(15kmq + 6lnpq - kn) : 3knq$

e) $(-64x^3y + 18x^5y^2 - 36x^4y^3 + 10x^3y^4 - 2x^2y^5) : \left(-\frac{2}{3}x^2y\right)$

107. Desgl.

a) $(2{,}7x - 2{,}7y) : (x - y)$

b) $(28m + 21n) : (4m + 3n)$

c) $(38u^2 - 57uv) : (2u - 3v)$

d) $(27a^4b + 36a^2b^4) : \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}b^2\right)$

e) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$

f) $(9x^2 + 6x + 1) : (3x + 1)$

g) $(u^2 - 10u + 25) : (u - 5)$

h) $(x^2 - y^2) : (x - y)$

i) $(196m^2 - 169) : (14m - 13)$

k) $(x^3 + y^3) : (x + y)$

108. Desgl.

a) $(3x^2 + 5xy + 2y^2) : (x + y)$

b) $(21a^2 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$

c) $(9x^3 - 7xy^2 + 3y^3) : (3x - 2y)$

d) $(23s + 24s^3 + 58s^2 - 15) : (5 + 4s)$

e) $(10a^3b^3 - 4ab^4 - 7a^2b^3 + 2a^5 - 4a^4b + b^5) : (a^2 + b^2 - 2ab)$

f) $\left(a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{9}b^2\right) : \left(2a + \frac{1}{3}b\right)$

g) $(375a^3 + 1536b^3) : (25a^2 - 40ab + 64b^2)$

h) $(41u^5 - 10u^4v + 51u^3v^2 - 21u^2v^3 + 20uv^4) : (u^2 - uv + v^2)$

i) $(144x^4 - 81y^2) : (36x^2 + 27y)$

k) $(104p^3q^4 - 59p^2q^5 + 60p^7q^2 - 99p^6q^3 + 18p^4q^6 + 18p^3q^7) : (5p^2 - 7p^2q + 9pq^3)$

109. Bei den folgenden Ausdrücken sind gemeinsame Faktoren auszuklammern

a) $ab + ac - b - c$

b) $15rs - 1 - 5r + 3s$

c) $p_o - p_o \cdot \alpha \cdot t$

d) $a^2b^2 - x^2y^2$

e) $9x^2 - 15x^2z + 6xz^2 - 6x^2y + 10xyz - 4yz^2$

f) $100x^4 - y^4$

g) $4p^2 + 20pq + 25q^2 - 16r^2$

h) $9x^2 - 6xy + y^2 - 16u^2 + 8u - 1$

i) $3ax - 3bx - 2ay + 2by + 4ax - 4bx + 7ay - 7by$

k) $18r^2 - 45rs + 14r^2s - 35s^2$

110. Die folgenden Brüche sind soweit wie möglich zu kürzen:

a) $\frac{ab - b}{ab + b}$

b) $\frac{ax - ay}{5x - 5y}$

c) $\frac{a^2b - ab^2}{a^2c - ac^2}$

d) $\frac{3a - 6b}{8b - 4a}$

e) $\frac{4x - 4}{9 - 9x}$

f) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$

g) $\frac{(u - v)^2}{u^2 - v^2}$

h) $\frac{m^4 - n^4}{m^2 + n^2}$

i) $\frac{k^3 + k}{k^3 - 1}$

k) $\frac{u - v}{v - u}$

111. Desgl.

a) $\frac{16 - 49m^2}{16 - 28m}$

b) $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

c) $\frac{a^2 + 4a + 4}{a + 2}$

d) $\frac{10ax + 15bx - 10ay - 15by}{8ax - 8ay + 12by - 12bx}$

e) $\frac{a - bc}{a \cdot bc}$

f) $\frac{mt + ms - nt - ns}{mt - ms - nt + ns}$

g) $\frac{9a^2 + 6a + 1}{1 + 3a}$

h) $\frac{5t - 2s}{4s^2 - 20st + 25t^2}$

i) $\frac{uv \cdot xy}{ux + vy}$

k) $\frac{52mx - 117nx + 63ny - 28my}{13x - 7y}$

112. Man bringe den Bruch $\frac{1}{a}$ auf die Nenner

a) a^2 b) ab c) b d) a^2b e) $3a$ f) $ax - 2ay$

113. Man bringe den Bruch $\frac{1}{x-y}$ auf die Nenner

a) $y - x$ b) $x^2 - 2xy + y^2$ c) $x^2 - y^2$

d) $x \cdot y$ e) $x^3 - y^3$ f) $ax - x + y - ay$

114. Man bringe den Bruch $\frac{m-1}{m+1}$ auf die Nenner

a) $m - 1$ b) $m^2 + m$ c) $m^2 + 2m + 1$

d) $m^2 - 1$ e) $m^3 + 1$ f) $m^3 - 2m - 3$

115. Man bringe den Bruch $\frac{2s-t}{4s-7t}$ auf die Nenner

a) $21t - 12s$ b) $5s - 8t$ c) $49t^2 - 16s^2$

d) $16s^2 - 56st + 49t^2$ e) $343t^3 - 64s^3$ f) $12as - 21at - 4bs + 7bt$

116. Berechne

a) $\frac{3a-b}{2} - \frac{3a+b}{2}$ b) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$

c) $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$ d) $\frac{u+3}{3} + \frac{u+4}{3} - \frac{2u-5}{3}$

e) $\frac{15a+11b}{48} - \frac{6a-13b}{48} + \frac{7a-24b}{48}$ f) $\frac{x-2y}{2} + \frac{x+3y}{3}$

g) $\frac{4u-5v+7w}{3} - \frac{3u-7v+6w}{4} - \frac{u-v-5w}{6}$

h) $\frac{x-2}{6} - \frac{3(x-1)}{8} - \frac{2(3x-4)}{9} + \frac{5(2x-1)}{12} + \frac{x-9}{18}$

i) $\frac{9a+8b-3c}{2ab} + \frac{3b-4a-12c}{3ac} - \frac{27c-7a-8b}{6bc}$

k) $\frac{u^3+3u}{18} - \frac{8u-15}{30} + \frac{3u^2+7u-12}{72} + \frac{7u+5-2u^2}{40}$

117. Desgl.

a) $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{(5a-2b)^2}{12} - \frac{(5a+2b)^2}{12} + \frac{(5a-2b)(5a+2b)}{12}$

c) $\frac{7x-8y+9z}{24} - \frac{9x+8y+12z}{32} + \frac{16y+3x}{48}$

d) $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{6} + \frac{(a+3b)^2}{9} - \frac{(4a-b)^2}{24}$

e) $\frac{a}{4} - \frac{4a-3b}{3} + b - \frac{a-5b}{6}$

f) $\frac{9x+7}{12x^3} - \frac{5x-3x^3-4}{8x^2} + \frac{9x^3-5x^2+2x-8}{108x^4}$

g) $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{3(x-2)}{4} + \frac{4(x-3)}{5} - \frac{5(x-4)}{6} - \frac{3(6-x)}{10}$

h) $\frac{5a-2x}{10ax} - \frac{3b-4x}{12bx} + \frac{4a^2-5b}{20a^2b} - \frac{a^2-x}{4a^2x} - \frac{a-b}{5ab} + \frac{2}{3b}$

i) $\frac{a(3x^2-2b)}{12bx^2} - \frac{b(5x^3-3a)}{15ax^2} + \frac{5a-6b}{30x^3} - \frac{a}{4b} + \frac{b}{3a}$

k) $\frac{(3b-2c)a}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$

118. Desgl.

a) $\frac{5}{a+b} - \frac{4}{a-b} + \frac{9b-a}{a^2-b^2}$

b) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} - 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{u+1}{u-1} - \frac{u+2}{u-2} + \frac{u-1}{u+1} - \frac{u-2}{u+2}$

d) $\frac{2a-3b}{5a+b} - 2 - \frac{7a-4b}{5a+2b}$

e) $\frac{ax-by}{2x^2y-2xy^2} - \frac{ax+by}{2x^2y+2xy^2}$

f) $\frac{2a+3}{2a-2} - \frac{3a-2}{3a+3} - \frac{5}{6a^2-6}$

g) $\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4-a^2b^2}$

h) $\frac{q+1}{q^2-q} - \frac{q-1}{q^2+q} + \frac{1}{q} - \frac{4}{q^2-1}$

i) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3}$

k) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x-2}$

119. Berechne

a) $3x \cdot \frac{7a}{12bx}$

b) $\frac{uw}{16v} \cdot 4vw$

c) $\frac{7rs}{9ab^2c} \cdot 3a^2b^2c$

d) $\frac{8ut}{17x^2y^3z} \cdot 51xy^2z^2$

e) $(2a-b)\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b}\right)$

f) $\left(\frac{x}{3y} + \frac{3y}{x}\right) \cdot 3xy$

g) $\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{4}{x} + \frac{5}{y}\right)$

h) $\left(\frac{2z}{3xy} + \frac{5x}{6yz} - \frac{6y}{7xz}\right) \cdot 42xyz$

i) $\left(a - \frac{2}{a}\right)\left(2a + \frac{3}{a}\right)\left(3a - \frac{4}{a}\right)$

k) $\frac{5m^2n+7n}{3m-2n} \cdot \frac{4n^2-9m^2}{15n^2m+10n^3}$

120. Berechne

a) $\frac{56abx}{39cdy} : \frac{7b}{13y}$

b) $\frac{u-v}{12u} : \frac{v-u}{24u}$

c) $\frac{3(1-2a)}{c(b-1)} : \frac{4(2a-1)}{(1+b)c}$

d) $\left(\frac{x^3-10x+25}{3a-1} - \frac{x-5}{9a^2-1}\right) : \frac{x^2-25}{1-3a}$

e) $\left(\frac{3uvw}{2abc} - \frac{4u}{5a} - \frac{3v}{4b}\right) : \frac{-9uv}{10ab}$ f) $\left(\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{y}\right)$

g) $\frac{9ab - 3b^2}{4ab - 3a} \cdot \frac{4a^2 + 10ab}{18a - 6b} : \frac{4ab + 10b^2}{8ab - 6a}$

h) $\frac{36x^6 - 48x^5 + 16x^4}{3(3x-2)^3} : \frac{24x^7 + 8x^6}{81x^4 - 36x^5}$ i) $\frac{8a+6}{5ab - a^2} \cdot \frac{25ab - 5a^2}{6ab} : \frac{20ab + 15b}{9a^3b^2}$

k) $\frac{2(7u - v)^2}{84au - 105u^2 - 12av + 15uv} : \left(\frac{28u^2 - 4uv}{48a^2u^2 - 75u^4} : \frac{2a^2}{49u^2 - v^2}\right)$

121. Vereinfache folgende Doppelbrüche:

a) $\dfrac{\frac{2}{a} + \frac{a}{2}}{\frac{2}{a} - \frac{a}{2}}$ b) $\dfrac{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1}}{\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+1}}$ c) $\dfrac{m - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$

d) $\dfrac{\frac{u-v}{u+v} - \frac{u+v}{u-v}}{1 + \frac{v^2}{u^2 - v^2}}$ e) $\dfrac{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - 1}$ f) $\dfrac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}}$

g) $\dfrac{\frac{9}{4a^2} - 25}{\frac{15}{a} + 25 + \frac{9}{4a^2}}$ h) $\dfrac{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}{\frac{a}{x} + \frac{x}{a} - 2}$ i) $\dfrac{\frac{r^2+s}{s} - \frac{r+s^2}{r}}{\frac{r^2 + rs + s^2}{rs}}$

k) $\dfrac{\frac{4}{a^2} + \frac{4}{ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{2b} + \frac{1}{a}} + \dfrac{\frac{4}{a^2} - \frac{4}{ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{2b}}$

122. Desgl.

a) $\dfrac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$ b) $\dfrac{u}{1 - \frac{1}{u}} - \dfrac{1}{u-1}$ c) $\dfrac{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}$

d) $\dfrac{\frac{m}{n} - \frac{m-n}{m+n}}{1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{m+n}}$ e) $\dfrac{\frac{bh}{2} \cdot \frac{2h}{3} + \frac{ah}{2} \cdot \frac{2h}{3}}{\frac{(a+b) \cdot h}{2}}$ f) $1 - \dfrac{x}{1 - \frac{x}{x+1}}$

g) $\dfrac{a}{a - \frac{4}{a - \frac{3a}{3-a}}}$ h) $3x + \dfrac{56}{7 + \frac{21x}{8 - 3x}}$

i) $\dfrac{1}{x + \frac{1}{2x - \frac{2x^2}{1+x}}}$ k) $1 - \dfrac{a}{1 - \frac{1}{1+a}}$

5. Potenzrechnung

5.1. Begriffserklärungen

Durch die Addition gleicher Summanden wurde eine neue Rechenart definiert: die Multiplikation.

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot a$$

Multipliziert man mehrere *gleiche Faktoren* miteinander, so hat man auch hierbei das Bedürfnis, eine Abkürzung einzuführen. Man definiert daher eine weitere neue Rechenart, die **Potenzrechnung.**

Unter der Potenz a^n versteht man das Produkt von n gleichen Faktoren a.

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} = a^n = b} \tag{16}$$

Man nennt hierbei

a die **Grundzahl** oder die **Basis,**
n die **Hochzahl** oder den **Exponenten** und
b die **Potenz** oder den **Potenzwert.**

Der Rechenvorgang wird **Potenzieren** genannt. Die Potenzrechnung gehört **zu den** *Rechenarten dritter Stufe.* Die *Grundzahl* a darf *jeden beliebigen Wert* annehmen. Dagegen muß die *Hochzahl* n auf Grund der Definition (16) der Potenz zunächst immer eine *natürliche Zahl* > 1 sein. Um jedoch alle natürlichen Zahlen als Hochzahlen verwenden zu können, führt man eine *Erweiterung des Potenzbegriffes* durch, indem man *festsetzt*, daß

$$\boxed{a^1 = a} \tag{17}$$

sein soll. Es wird sich beim Rechnen mit Potenzen erweisen, daß diese Erweiterung des Potenzbegriffes sinnvoll ist.
Für alle zulässigen Werte der Hochzahl n gilt

$$\boxed{0^n = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{1^n = 1} \tag{18a, b}$$

Für die Potenzen negativer Grundzahlen gelten folgende *Regeln:*

Alle geraden Potenzen von negativen Zahlen sind positiv; alle ungeraden Potenzen negativer Zahlen sind negativ.

Es ist also

$$\boxed{(-a)^{2n} = +a^{2n}} \quad \text{und} \quad \boxed{(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}}, \tag{19a, b}$$

denn bei der Berechnung von $(-a)^{2n}$ wird eine gerade Anzahl negativer Faktoren miteinander multipliziert, so daß ein positives Ergebnis entsteht, während bei $(-a)^{2n+1}$ eine ungerade Anzahl negativer Faktoren zu multiplizieren ist, woraus sich ein negativer Wert ergibt.

Man beachte den Unterschied zwischen $(-a)^n$ und $-a^n$! Bei $(-a)^n$ ist die negative Zahl $-a$ in die n-te Potenz zu erheben, während bei $-a^n$ zunächst die Zahl a mit n potenziert und dann das gefundene Ergebnis mit einem negativen Vorzeichen versehen werden soll. (Die höhere Rechenoperation geht der niedrigeren voran!)

Aus (19a, b) folgt für $a = 1$

$$\boxed{(-1)^{2n} = +1} \quad \text{und} \quad \boxed{(-1)^{2n+1} = -1} \tag{20a, b}$$

d.h., die Potenzen von -1 ergeben $+1$, wenn die Hochzahl gerade ist, sie ergeben dagegen -1, wenn die Hochzahl ungerade ist.
Während bei der Addition die Summanden und bei der Multiplikation die Faktoren vertauscht werden konnten, gilt hier der Satz:

Grund- und Hochzahl einer Potenz sind im allgemeinen nicht miteinander vertauschbar:

$$\boxed{a^n \neq n^a} \tag{21}$$

Für die Potenzrechnung gilt demnach *nicht* das Kommutativgesetz.

BEISPIELE

1. *Es ist* $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, *dagegen* $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
2. *Es ist* $(-2)^8 = +256$; *dagegen* $-2^8 = -256$.
3. *Es ist* $(-2)^5 = -32$ *und auch* $-2^5 = -32$.
4. $(+3)^5 + (-5)^3 = (+243) + (-125) = 118$
5. *Die Abhängigkeit des Potenzwertes b von der Grundzahl a wird für eine ungerade Hochzahl n durch folgende Übersicht veranschaulicht:*

Es ist	$5^3 = 125$,	*allgemein: für*	$a > 1$	*ist* $b > a$;
	$1^3 = 1$		$a = 1$	$b = a$;
	$0{,}5^3 = 0{,}125$		$0 < a < 1$	$b < a$;
	$0^3 = 0$		$a = 0$	$b = a$;
	$(-0{,}5)^3 = -0{,}125$		$-1 < a < 0$	$b > a$;
	$(-1)^3 = -1$		$a = -1$	$b = a$;
	$(-5)^3 = -125$		$a < -1$	$b < a$.

Der Leser stelle sich selbst eine ähnliche Übersicht für eine gerade Hochzahl auf!

5.2. Potenzgesetze

5.2.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

Da sich nur *gleichartige* Glieder durch Addition (Subtraktion) zusammenfassen lassen, gilt die ***Regel***

Potenzen lassen sich nur dann addieren (subtrahieren), wenn sie sowohl in ihren Grundzahlen als auch in ihren Hochzahlen übereinstimmen.

Allgemeine Ausdrücke wie $a^m \pm a^n$ oder $a^m \pm b^m$, die entweder nur in ihren Grundzahlen oder nur in ihren Hochzahlen übereinstimmen, lassen sich demnach nicht weiter vereinfachen, es sei denn, es sind für die allgemeinen Zahlensymbole bestimmte Zahlenwerte vorgeschrieben.

BEISPIELE

1. $9a^3 + 5b^3 - 2a^3 - 4b^3 + 7a^3 - 3b^3 = 14a^3 - 2b^3 = 2(7a^3 - b^3)$
2. $\frac{2}{3}u^7 - \frac{3}{4}u^7 = -\frac{u^7}{12}$
3. $5^4 - 5^3 = 625 - 25 = 600$
4. $3^4 + 2^4 = 81 + 16 = 97$; *dagegen ist* $(3 + 2)^4 = 5^4 = 625$.
5. $a x^m + b x^m - c x^m = (a + b - c) \cdot x^m$
6. $q^{10} - (-q)^{10} + (-r)^5 + r^5 = q^{10} - (+q^{10}) + (-r^5) + r^5 = q^{10} - q^{10} - r^5 + r^5 = 0$

5.2.2. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Hochzahlen

Es ist $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b}$.

Nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation dürfen rechts die Faktoren wie folgt umgestellt werden:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot b)\,(a \cdot b)\,(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } a \cdot b}$$

Daraus folgt

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \qquad (22)$$

Potenzen mit gleichen Hochzahlen können dadurch multipliziert werden, daß man das Produkt der Grundzahlen mit der Hochzahl potenziert.

Umgekehrt gilt auch:

Ein Produkt kann man potenzieren, indem man jeden Faktor einzeln potenziert und die entstehenden Potenzen multipliziert.

BEISPIELE

1. $0{,}125^9 \cdot 8^9 = (0{,}125 \cdot 8)^9 = 1^9 = 1$ *(Rechenvorteil!)*
2. $(a - b)^3 \cdot (a + b)^3 = [(a - b)(a + b)]^3 = (a^2 - b^2)^3$

3. $(-2x)^5 \cdot (-3y)^5 = [(-2x)(-3y)]^5 = (6xy)^5 = 7776x^5y^5$

4. *Man beachte die Reihenfolge der Rechenoperationen:*

Es ist $-(5a^2) = -5a^2$,

dagegen $-(5a)^2 = -5^2 \cdot a^2 = -25a^2$,

dagegen $(-5a)^2 = +25a^2$.

5.2.3. Division von Potenzen mit gleichen Hochzahlen

Es sei $b \neq 0$. Dann ist

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b},$$

wobei im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren stehen. Nach den Regeln der Bruchrechnung kann der rechte Ausdruck in Einzelbrüche zerlegt werden:

$$\frac{a^n}{b^n} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}}.$$

Es ist demnach

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{für } b \neq 0}. \tag{23}$$

Potenzen mit gleichen Hochzahlen können durcheinander dividiert werden, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit der gemeinsamen Hochzahl potenziert.

Umgekehrt gilt auch:

Einen Bruch kann man potenzieren, indem man Zähler und Nenner für sich potenziert und die entstehenden Potenzen durcheinander dividiert.

BEISPIELE

1. $\left(4\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \left(\frac{14}{3} : \frac{7}{9}\right)^3 = 6^3 = 216$

2. $\frac{24^5}{16^3} = ?$

Lösung: Da verschiedene Hochzahlen vorhanden sind, darf vor dem Potenzieren nicht gekürzt werden; die höhere Rechenart hat den Vorzug. Es kann wie folgt gerechnet werden:

$$\frac{24^5}{16^3} = \frac{24^2 \cdot 24^3}{16^3} = 24^2 \cdot \left(\frac{24}{16}\right)^3 = 24^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{576 \cdot 27}{8} = 72 \cdot 27 = 1944.$$

3. *Man beachte den Unterschied zwischen* $\frac{a^n}{b}$ *und* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$! *(Reihenfolge der Rechenoperationen beachten!)*

4. $\left(\frac{5u - 2v}{4}\right)^3 : \left(-\frac{25u^2 - 4v^2}{8}\right)^3 = \left(\frac{5u - 2v}{4} : \frac{25u^2 - 4v^2}{8}\right)^3 = \left(\frac{(5u - 2v) \cdot 8}{4 \cdot (5u - 2v)(5u + 2v)}\right)^3 =$

$$= \left(\frac{2}{5u + 2v}\right)^3 = \frac{8}{(5u + 2v)^3}$$

5.2.4. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Grundzahlen

Es ist $$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ Faktoren } a}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}. \tag{24}$$

Potenzen mit gleichen Grundzahlen können dadurch multipliziert werden, daß man die gemeinsame Grundzahl mit der Summe der Hochzahlen potenziert.

Umgekehrt gilt auch:

Jede Potenz läßt sich in ein Produkt von Potenzen mit der gleichen Grundzahl aufspalten.

BEISPIELE

1. $5u^3 \cdot 2u^4 \cdot 4u^6 = 40u^{13}$
2. $0{,}15a^5x^n \cdot 0{,}8a^{4n}b^m x^3 \cdot 2a^4b^3x^5 = 0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 2 \cdot a^{5+4n+4} \cdot b^{m+3} \cdot x^{n+3+5} = 0{,}24a^{4n+9}b^{m+3}x^{n+7}$
3. $(x-y)^{5-n} \cdot (x-y)^{5+n} = (x-y)^{10}$
4. *v^9 kann zerlegt werden in $v \cdot v^8$ oder $v^3 \cdot v^7$ oder $v^3 \cdot v^6$ oder $v^3 \cdot v^3 \cdot v^4$ usw.*
5. $y^{u+v+w} = y^u \cdot y^v \cdot y^w$
6. $5r^3 - 7r^5 + 2r^6 = r^3(5 - 7r^2 + 2r^3)$
7. $s^{n+1} - s^{n-1} = s^{n-1}(s^2 - 1)$

5.2.5. Potenzieren einer Potenz

Aus dem Multiplikationsgesetz für Potenzen mit gleichen Grundzahlen folgt für die Potenz $(a^m)^n$

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m)\,(a^m)\,(a^m) \cdot \ldots \cdot (a^m)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a^{m+m+m+\cdots+m}}_{n \text{ Summanden}}$$

Es ist demnach

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}. \tag{25}$$

Eine Potenz kann man potenzieren, indem man die Grundzahl mit dem Produkt der Hochzahlen potenziert.

Daraus folgt auch, daß man jede Potenz, deren Hochzahl sich in Faktoren zerlegen läßt, durch mehrmaliges Potenzieren berechnen kann.

Wendet man (25) auf die Potenz $(a^n)^m$ an, so erhält man

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}.$$

Durch Vergleich mit (25) folgt daraus

$$\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}}. \tag{26}$$

Beim Potenzieren einer Potenz dürfen die Hochzahlen miteinander vertauscht werden.

BEISPIELE

1. $(-3s^2)^3 = -3^3 \cdot s^6 = -27s^6$
2. $(a^5)^7 \cdot (a^3)^4 = a^{35} \cdot a^{12} = a^{47}$
3. $2^{12} = (2^4)^3 = 16^3 = 4096$
4. $(-a)^{10} - (-a^5)^2 + [(-a)^2]^5 - [(-a)^5]^2 = a^{10} - (+a^{10}) + (+a^{10}) - (+a^{10}) = 0$

Schließlich unterscheide man $(a^m)^n$ von $a^{(m^n)}$, wobei im zweiten Falle die Klammer nicht gesetzt zu werden braucht.

BEISPIEL 5

Es ist $(3^2)^4 = 9^4 = 6561$;

dagegen $3^{(2^4)} = 3^{2^4} = 3^{16} = 43046721$.

5.2.6. Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen

Es sei $a \neq 0$. Dann ist

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \;\; a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \;\; \begin{matrix} (m \text{ Faktoren}) \\ (n \text{ Faktoren}) \end{matrix}.$$

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $m > n$.

Im Zähler stehen mehr Faktoren als im Nenner. Folglich können sämtliche n Faktoren des Nenners gegen n Faktoren des Zählers gekürzt werden, wodurch im Zähler noch $m - n$ Faktoren übrigbleiben:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{für } m > n} \,. \tag{27 a}$$

2. Fall: $m = n$.

Im Zähler stehen genauso viele Faktoren wie im Nenner. Folglich lassen sich alle Faktoren des Zählers gegen alle Faktoren des Nenners kürzen, und es verbleibt:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad \text{für } m = n} \,. \tag{27 b}$$

3. Fall: $m < n$.

Im Nenner stehen mehr Faktoren als im Zähler. Folglich lassen sich alle m Faktoren des Zählers gegen m Faktoren des Nenners kürzen, so daß im Nenner noch $n - m$ Faktoren übrigbleiben:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{für } m < n} \,. \tag{27 c}$$

BEISPIELE

1. $(-v)^{11}:(-v)^5=(-v)^{11-5}=(-v)^6=v^6$

2. a) $a^{m+2}:a^{m-2}=a^{(m+2)-(m-2)}=a^4$ *(Hinweis: Es ist $m+2>m-2$.)*

   b) $a^{m-2}:a^{m+2}=\frac{1}{a^{(m+2)-(m-2)}}=\frac{1}{a^4}$ *(Es ist $m-2<m+2$!)*

3. $x^{3a-2b}:x^{2a-3b}=x^{(3a-2b)-(2a-3b)}=x^{a+b}$

4. $\frac{(9xy^2)^3}{(12x^2y)^4}:\frac{(6x^3y^3)^3}{(8x^4y)^5}=\frac{(3^2)^3x^3y^3\cdot(2^3)^5x^{20}y^5}{(2^3)^4\cdot3^4x^8y^4\cdot2^3\cdot3^3x^{15}y^3}=\frac{3^6\cdot2^{15}x^{23}y^{14}}{3^7\cdot2^{11}x^{23}y^{13}}=\frac{2^4y}{3}=\frac{16y}{3}$

5. $\frac{4}{r^{12}}-\frac{12}{r^8s^4}+\frac{9}{s^8}=\,?$

   Lösung: Hauptnenner: $r^{12}s^8$. Damit wird

   $$\frac{4}{r^{12}}-\frac{12}{r^8s^4}+\frac{9}{s^8}=\frac{4s^8-12r^8s^4+9r^{12}}{r^{12}s^8}=\frac{(2s^4-3r^6)^2}{r^{12}s^8}=\left(\frac{2s^4-3r^6}{r^6s^4}\right)^2$$

6. $\frac{x^7}{(x+y)^7}-\frac{2x^6}{(x+y)^6}+\frac{x^5}{(x+y)^5}-\frac{x^5y^2}{(x+y)^7}=\,?$

   Lösung: Hauptnenner: $(x+y)^7$.

   $$=\frac{x^7-2x^6(x+y)+x^5(x+y)^2-x^5y^2}{(x+y)^7}=\frac{x^7-2x^7-2x^6y+x^7+2x^6y+x^5y^2-x^5y^2}{(x+y)^7}=0$$

7. $\frac{1}{q^{n-2}}-\frac{q^2-1}{q^{n+1}}-\frac{q^2-1}{q^{n-1}}=\,?$

   Lösung: Hauptnenner: q^{n+1} ($n+1$ ist der größte der drei Exponenten $n+1$, $n-1$ und $n-3$.)

   Erweiterungsfaktoren: q^4, 1 und q^2. Damit wird

   $$\frac{1}{q^{n-2}}-\frac{q^2-1}{q^{n+1}}-\frac{q^2-1}{q^{n-1}}=\frac{q^4-(q^2-1)-(q^2-1)q^2}{q^{n+1}}=\frac{1}{q^{n+1}}.$$

5.2.7. Überblick über die Potenzgesetze für Potenzen mit gleichen Grundzahlen

Betrachtet man die Potenzgesetze für das Multiplizieren (24), Dividieren (27) und Potenzieren (25) von Potenzen mit gleichen Grundzahlen (wobei für das Divisionsgesetz hier zunächst nur der Fall $m>n$ ins Auge gefaßt werden soll), so stellt man fest, daß durch diese Gesetze die Multiplikation zweier Potenzen übergeführt wird in die Addition der Hochzahlen, die Division in die Subtraktion der Hochzahlen und das Potenzieren in die Multiplikation zweier Hochzahlen. *Die Rechengesetze für Potenzen mit gleichen Grundzahlen führen also das Rechnen mit Potenzen auf die Rechnungsart der nächstniedrigen Stufe mit den jeweiligen Hochzahlen zurück.*

Damit ist auch erklärlich, daß es für die Addition und Subtraktion von Potenzen keine vereinfachenden Potenzgesetze gibt.

5.3. Erste Erweiterung des Potenzbegriffes

5.3.1. Potenzen mit ganzzahligen negativen Hochzahlen

Die ursprüngliche Definition des Potenzbegriffes (vgl. Abschnitt 5.1.) läßt nur die natürlichen Zahlen als Hochzahlen zu. Die Folge davon ist, daß man bei der Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen (Abschnitt 5.2.6.) die drei Fälle $m > n$, $m = n$ und $m < n$ voneinander unterscheiden muß.
Will man erreichen, daß *für alle Divisionen das gleiche Divisionsgesetz* gilt:

Potenzen mit gleichen Grundzahlen können dividiert werden, indem man die Grundzahl mit der Differenz aus der Hochzahl des Dividenden (Zählers) und der des Divisors (Nenners) potenziert

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{für alle } m \text{ und } n}, \tag{27}$$

so ergeben sich im Falle $m < n$ *negative Hochzahlen* und im Falle $m = n$ die *Hochzahl Null*. Man ist daher gezwungen, den Potenzbegriff zu *erweitern*.
Rechnet man $a^4 : a^7$ nach der bisherigen Divisionsregel (27 c), so ergibt sich

$$a^4 : a^7 = \frac{1}{a^3}.$$

Rechnet man dieselbe Aufgabe dagegen nach der erweiterten Divisionsregel (27), so erhält man

$$a^4 : a^7 = a^{4-7} = a^{-3}.$$

Aus dem Vergleich der beiden Ergebnisse erkennt man, daß es sinnvoll ist,

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

zu definieren.
Allgemein kommt man auf ähnliche Weise zur *Definition*

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{für alle } a \neq 0}. \tag{28}$$

Die negative Hochzahl ist nur eine andere Schreibweise für den Kehrwert der Potenz mit positiver Hochzahl.

Die Bedingung $a \neq 0$ ist notwendig, da nicht durch Null dividiert werden darf.

BEISPIELE

1. $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

2. $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

3. $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

4. $5 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot \frac{1}{10^5} = 5 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00005$

5. $\frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}} = x^n$

6. *Die Brüche* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{r^s}$, $\frac{a}{b^n}$ *können ohne Bruchstrich mit Hilfe von negativen Exponenten wie folgt geschrieben werden:* 10^{-1}, a^{-1}, b^{-2}, r^{-s}, $a \cdot b^{-n}$.

5.3.2. Die Hochzahlen Null und Eins

Wendet man die Verallgemeinerung (27) der Divisionsregel auch auf den Fall gleicher Hochzahlen an, so erhält man

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 .$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (21 D):

$$a^m : a^m = 1 ,$$

so gelangt man zu der weiteren *Festsetzung*

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \text{für alle } a \neq 0} . \tag{29}$$

Die nullte Potenz jeder (von Null verschiedenen) Zahl besitzt den Wert Eins.

Im Abschnitt 5.1. (Formel 17) wurde schließlich noch

$$a^1 = a$$

definiert. Man überzeuge sich selbst von der Zweckmäßigkeit dieser Festsetzung.

5.3.3. Das Rechnen mit Potenzen mit negativen Hochzahlen

Die in 5.3.1. und 5.3.2. eingeführten Erweiterungen des Potenzbegriffes können natürlich nur dann sinnvoll sein, wenn man beim Rechnen mit Potenzen mit negativen Hochzahlen *die bisher geltenden Rechengesetze* anwenden kann, ohne dabei auf Widersprüche zu stoßen.
Daß dies der Fall ist, soll an einigen Beispielen gezeigt werden. Nach den Potenzgesetzen ist

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)} .$$

Beseitigt man dagegen die negativen Hochzahlen, so ergibt sich

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} .$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein.

In ähnlicher Weise ergibt sich für $(a^{-m})^n$ nach den Potenzgesetzen a^{-mn}, während man nach Beseitigung der negativen Hochzahlen $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}}$ erhält. Auch hier stimmen beide Ergebnisse überein.
Man überzeuge sich selbst davon, daß auch die übrigen Potenzgesetze für Potenzen mit negativen Hochzahlen Gültigkeit besitzen. Es gilt somit der *Satz:*

Für Potenzen mit negativen Hochzahlen gelten die gleichen Rechengesetze wie für die Potenzen mit positiven Hochzahlen.

Insbesondere ist, wenn a und $b \neq 0$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n},$$

woraus

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n} \tag{30}$$

folgt.

Statt einen Bruch mit einer negativen Hochzahl zu potenzieren, kann man auch den Kehrwert des Bruches mit der entsprechenden positiven Hochzahl potenzieren.

BEISPIELE

1. $(x\,y)^{-2} : (x\,y)^{-5} = (x\,y)^{(-2)-(-5)} = (x\,y)^3$

2. *Im Ausdruck* $\frac{a^{-3}b^3c^4}{x^2y^{-5}}$ *sind die negativen Hochzahlen zu beseitigen.*

   Lösung:

$$\frac{a^{-3}b^3c^4}{x^2y^{-5}} = \frac{\frac{1}{a^3} \cdot b^3c^4}{x^2 \cdot \frac{1}{y^5}} = \frac{b^3c^4y^5}{x^2a^3}$$

   Faktoren, die mit negativem Exponenten im Zähler (Nenner) eines Bruches stehen, können demzufolge mit dem entsprechenden positiven Exponenten in den Nenner (Zähler) gebracht werden.

3. *Im Bruch* $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}$ *sind die negativen Hochzahlen zu beseitigen.*

   Lösung:

$$\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} = \frac{\frac{y^2+x^2}{x^2 \cdot y^2}}{\frac{y^2-x^2}{x^2 \cdot y^2}} = \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$$

4. $[(3x-4y)^{-2}]^0 = 1$

5. $\frac{24a^3b^{-5}}{7c^3} : \frac{8b^{-4}c^{-4}}{21a^{-3}b^{-5}}$ *soll so umgeformt werden, daß im Ergebnis keine Brüche auftreten.*

   Lösung:

$$\frac{24a^3b^{-5}}{7c^3} : \frac{8b^{-4}c^{-4}}{21a^{-3}b^{-5}} = \frac{24a^3}{7c^3b^5} : \frac{8a^3b^5}{21b^4c^4} = \frac{9c}{b^6} = 9b^{-6}c$$

5.4. Anwendungen der Potenzen

5.4.1. Schreibweise rationaler Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen

Sehr große und sehr kleine Zahlen lassen sich mit Hilfe der Potenzschreibweise als Zehnerpotenzen recht übersichtlich darstellen. So ist z. B.

$$\begin{aligned} 0{,}00001 &= 10^{-5} & 100000 &= 10^{5} \\ 0{,}0001 &= 10^{-4} & 10000 &= 10^{4} \\ 0{,}001 &= 10^{-3} & 1000 &= 10^{3} \\ 0{,}01 &= 10^{-2} & 100 &= 10^{2} \\ 0{,}1 &= 10^{-1} & 10 &= 10^{1} \end{aligned}$$

$$1 = 10^{0}.$$

Allgemein gilt:

Ist n eine positive ganze Zahl, so ist 10^n diejenige Zahl, die aus einer Eins und n nachfolgenden Nullen besteht. Dagegen ist 10^{-n} derjenige echte Dezimalbruch, bei dem in der n-ten Stelle nach dem Komma als erste von Null verschiedene Ziffer eine Eins folgt.

Auch alle anderen Zahlen lassen sich mit Hilfe von Zehnerpotenzen darstellen. So ist beispielsweise

$$300000 = 3 \cdot 100000 = 3 \cdot 10^{5}$$

und $$0{,}000125 = 125 \cdot 10^{-6} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}.$$

Man richtet es bei dieser Darstellungsweise der Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen meist so ein, daß der auftretende Faktor vor der Zehnerpotenz eine Zahl zwischen 1 und 10 ist.

BEISPIELE

1. *Die Lichtgeschwindigkeit beträgt* $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s. *(Ausführlich geschrieben würde diese Zahl* 30000000000 cm/s *lauten.)*
2. *Die* Avogadrosche *Zahl gibt an, daß in einem Mol eines Stoffes etwa* $6{,}02 \cdot 10^{23}$ *Moleküle enthalten sind, das sind* 602000000000000000000000 *Moleküle.*
3. *Der Elastizitätsmodul des Eisens beträgt* $2{,}16 \cdot 10^{6}$ kp/cm², *das sind* 2160000 kp/cm².
4. *Der Durchmesser eines Atomkernes beträgt rund* 10^{-12} cm, *das sind* 0,000000000001 cm.
5. *Die Masse eines Protons beträgt* $1{,}637 \cdot 10^{-24}$ g, *das sind* 0,000000000000000000000001637 g.

Diese wenigen Beispiele dürften die Schreibweise großer und kleiner Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen hinreichend rechtfertigen.

5.4.2. Schreibweise von Maßeinheiten

Bei Maßeinheiten verwendet man häufig Potenzen mit negativen Hochzahlen, um Brüche zu vermeiden.

BEISPIELE

1. *Einheit der Geschwindigkeit:* $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
   Einheit der Beschleunigung: $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
   Einheit der Dichte: $\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$
   Einheit des Heizwertes: $\mathrm{kcal} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$
2. 1 nm (gelesen: Nanometer) $= 10^{-9}\,\mathrm{m} = 10^{-6}\,\mathrm{mm}$
   1 pF (gelesen: Picofarad) $= 10^{-12}\,\mathrm{F}$
   1 dyn $= 10^{-5}\,\mathrm{N}$.

5.5. Potenzen von Binomen

Im Abschnitt 4.2.4. wurden die Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

und $$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

für die Quadrate und Kuben von Binomen hergeleitet.
Für die vierten Potenzen von $a + b$ bzw. $a - b$ erhält man

$$(a + b)^4 = (a + b)^2 \cdot (a + b)^2 =$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

und entsprechend

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Es ist somit

$$(a \pm b)^0 = 1$$
$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \quad \text{usw.}$$

Vergleicht man die rechten Seiten dieser Zusammenstellung miteinander, so kann man folgende Gesetzmäßigkeiten feststellen:

1. *Die Anzahl der Glieder ist stets um* 1 *größer als die Hochzahl des Binoms.*
2. *Jede Entwicklung beginnt mit einer Potenz von a und endet mit einer Potenz von b, deren Hochzahl mit der Hochzahl des Binoms übereinstimmt.*
3. *Während die Hochzahlen von a von Glied zu Glied jeweils um* 1 *abnehmen, wachsen die Hochzahlen von b im gleichen Maße an.*
4. *In jedem Glied einer Entwicklung ist die Summe der Hochzahlen von a und b gleich der Hochzahl des Binoms.*
5. *Zu jedem Glied jeder Entwicklung gehört ein bestimmter Zahlenfaktor, ein sogenannter* **Binomialkoeffizient.**

6. *Die Binomialkoeffizienten sind innerhalb einer Entwicklung symmetrisch angeordnet; der erste und der letzte Koeffizient ist stets* 1, *der zweite bzw. der vorletzte Koeffizient stimmt mit der Hochzahl des Binoms überein.*

7. *Bei* $(a + b)^n$ *treten nur positive Glieder auf (warum?), während bei* $(a - b)^n$ *die Vorzeichen von Glied zu Glied wechseln. Das Vorzeichen des ersten Gliedes ist stets positiv.*

Zur Ermittlung der *Binomialkoeffizienten* dient folgende Zahlenanordnung, die nach dem französischen Mathematiker BLAISE PASCAL (1623 bis 1662) PASCALsches *Dreieck* genannt wird:

$n = 0$						1						
$n = 1$					1		1					
$n = 2$				1		2		1				
$n = 3$			1		3		3		1			
$n = 4$		1		4		6		4		1		
$n = 5$	1		5		10		10		5		1	
$n = 6$		1		6		15		20		15		6		1
$n = 7$	1		7		21		35		35		21		7		1
$n = 8$		1		8		28		56		70		56		28		8		1
$n = 9$	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1
$n = 10$	1	10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

usw.

Das PASCALsche Dreieck ist symmetrisch aufgebaut. Jede Zeile beginnt und endet mit einer 1. Jede Zahl der Anordnung ist gleich der Summe der beiden schräg darüberstehenden Zahlen.

(In der obigen Anordnung ist dies an einigen Stellen durch Klammern angedeutet: die beiden nebeneinanderstehenden Zahlen 1 und 1 ergeben als Summe die darunterstehende Zahl 2; entsprechend ist z. B. $1 + 2 = 3$; $2 + 1 = 3$; $21 + 35 = 56$; $56 + 28 = 84$; $84 + 36 = 120$ usw.)

Mit Hilfe der erwähnten Gesetzmäßigkeiten ist es möglich, Potenzen beliebiger Binome ohne langwieriges Ausmultiplizieren zu ermitteln.

Eine ausführliche Begründung für die Allgemeingültigkeit der festgestellten Gesetzmäßigkeiten bei der Bildung der Potenzen von Polynomen kann nicht gegeben werden. Sie führt weit über den Rahmen dieses Buches hinaus.

BEISPIELE

1. $(r - s)^6 = r^6 - 6r^5s + 15r^4s^2 - 20r^3s^3 + 15r^2s^4 - 6rs^5 + s^6$

2. $(2a - 3b)^4 = (2a)^4 - 4 \cdot (2a)^3 \cdot 3b + 6 \cdot (2a)^2 \cdot (3b)^2 - 4 \cdot 2a \cdot (3b)^3 + (3b)^4 =$
$= 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

In $(a + b)^n$ dürfen die beiden Zahlen a und b ohne weiteres miteinander vertauscht werden:

$$(a + b)^n = (b + a)^n.$$

Vertauscht man dagegen in $(a-b)^n$ die beiden Zahlen a und b miteinander, so ist zu beachten, daß sich bei ungeraden Hochzahlen das Vorzeichen ändert, denn es ist

$$(a-b)^n = [(-1)\cdot(b-a)]^n$$

$$\boxed{(a-b)^n = (-1)^n \cdot (b-a)^n} \quad . \tag{31}$$

BEISPIELE

3. *Es ist* $(a-b)^3 = (b-a)^3$; *dagegen ist* $(a-b)^2 = -(b-a)^2$.

4. $\dfrac{(x-y)^3}{(y-x)^2} = \dfrac{(x-y)^3}{(x-y)^2} = x-y$

5. $\dfrac{(2x-4y)^3}{(2y-x)^4} \quad \dfrac{[2\cdot(x-2y)]^3}{(x-2y)^4} = \dfrac{2^3(x-2y)^3}{(x-2y)^4} = \dfrac{8}{x-2y}$

6. $\dfrac{(8u+8v)^2(3u-3v)^3}{(24u^2-24v^2)^2} = \dfrac{8^2\cdot(u+v)^2\cdot 3^3\cdot(u-v)^3}{24^2\cdot(u+v)^2(u-v)^2} = 3(u-v)$

AUFGABEN

123. Die Übereinstimmung der folgenden Ausdrücke ist zu überprüfen:

a) $(-3)^4 \overset{?}{=} +81$ b) $(-2)^7 \overset{?}{=} 128$ c) $(-5)^3 \overset{?}{=} -3^5$

d) $(-2)^4 \overset{?}{=} +4^2$ e) $3^7 \overset{?}{=} 7^3$ f) $(-12)^{11} \overset{?}{=} -12^{11}$

g) $(x-1)^{14} \overset{?}{=} (1-x)^{14}$ h) $(-4)^3 \overset{?}{=} (+3)^4$ i) $2^4 \overset{?}{=} 4^2$

k) $(-5)^9\cdot(-9)^5 \overset{?}{=} 5^9\cdot 9^5$

124. Folgende Potenzwerte sind zu berechnen:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ b) $0{,}01^7$ c) $0{,}0004^3$ d) $6{,}3^2$ e) $26+3{,}7^2$

f) $3+2\cdot 7^2$ g) $(3+2)\cdot 7^2$ h) $3+(2\cdot 7)^2$ i) $(3+2\cdot 7)^2$ k) $(-a)^{32-5}$

125. Die Übereinstimmung der folgenden Ausdrücke ist zu überprüfen:

a) $2^2+3^2 \overset{?}{=} 5^2$ b) $3^2+4^2 \overset{?}{=} 5^2$ c) $6^2-3^2 \overset{?}{=} 3^3$

d) $6^3-5^3-4^3 \overset{?}{=} 3^3$ e) $11^3+12^3+13^3+14^3 \overset{?}{=} 20^3$

126. Berechne

a) 5^2+7^2 b) $(5+7)^2$ c) 14^2-3^2 d) $(14-3)^2$

e) $(-9)^2+(+6)^2$ f) $(-9+6)^2$ g) $5^3-3^3-2^3$ h) $(5-3-2)^3$

i) $(-2)^3+(-5)^3+(-7)^3$ k) $[(-2)+(-5)+(-7)]^3$

127. Folgende Ausdrücke sind zusammenzufassen:

a) $7a^3-2a^3+4a^3+11a^3-15a^3$ b) $4u^7-11u^7-14u^7+6u^7$

c) $21x^2-16y^2-37x^2+9y^2$ d) $\frac{2}{3}uv^2-\frac{8}{11}u^2v+\frac{5}{6}uv^2+\frac{1}{2}u^2v$

e) $7\frac{1}{2}ay^3+6\frac{2}{3}ay^3-5\frac{1}{6}ay^3+2\frac{5}{12}ay^3-4\frac{1}{3}by$

f) $2ax^3-3b^2x^3+7c^3x^3-5d^4x^3$

g) $\frac{1}{2}a^5b - \frac{5}{7}a^4b^2 + \frac{3}{8}a^3b^3 - 2a^2b^4 + \frac{1}{6}ab^5 - 14b^6 + 2a$

h) $14\frac{5}{9}u^3v^3 - 27\frac{4}{5}u^2v^3 - 9\frac{2}{3}u^3v^2 + 17{,}2u^2v^3$

i) $211a^3 - 89b^3 + 75c^3 - 62d^3$ k) $14x^7 - 9x^6 + 12x^5 - 5x^4$

128. Berechne

a) $x^n \cdot x^4$ b) $a^n \cdot a$ c) $u^{2n} \cdot u^3$ d) $b^n \cdot b^{3n} \cdot b^3$ e) $p^m \cdot p^{m-1}$

f) $y^{n-3} \cdot y^{n+4}$ g) $z^{5-n} \cdot z^{n-4}$ h) $m^3 \cdot m^7$ i) $m^{3n} \cdot m^7$ k) $t^n \cdot t^7 \cdot t^{2-n}$

129. Desgl.

a) $4x^2y^3 \cdot \frac{1}{2}x^3y^3 \cdot 0{,}5x^3y^3$ b) $\frac{5}{9}a^3b^2x \cdot \frac{6}{7}a^2by^3 \cdot \frac{4}{5}a^nb^2x^m \cdot y^n$

c) $x^{2n-2} \cdot 2x^{m-4n+7} \cdot 5x^{2n+m}$ d) $\frac{5}{6}m^6n^2t^5 \cdot \frac{7}{8}mn^2t^3 \cdot \frac{6}{7}m^3nt^2$

e) $ab^{m-2n} \cdot a^2b^{3-m} \cdot 4a^3b^{2-2n+5m}$ f) $3x^2(y-z)^3 \cdot 5^2x^7(y-z)^4 \cdot 2^3x^3(z-y)^4$

g) $(-a)^7 \cdot (-a)^{2n} \cdot (-a)^{4-n}$ h) $\frac{2}{3}(-x)^5 \cdot \frac{5}{8}(-x)^{10} \cdot \frac{3}{4}x^6 \cdot \frac{4}{5}x^{13}$

i) $(7a^4 - 3a^3 + 5a^2)(3a^3 - 2a^2 + 1)$

k) $(5x^{n-1} - 3x^{2n+1}y^{n+2} + 4x^{3n-2}y^{3n-1})(3x^{n+1} - x^{n-3}y^{2n+3})$

130. Die folgenden Potenzen sind als Produkte zu schreiben:

a) a^{m+n} b) a^{28} c) b^{2n+1} d) c^{a+b} e) $x^{a+2b+3c}$

f) 3^5 g) 12^4 h) $(a-b)^{1+n}$ i) $3x^{m+2}$ k) $(-a)^{2n+1}$

131. Berechne

a) $16^3 \cdot 25^3$ b) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5$ c) $0{,}92^4 : 0{,}23^4$

d) $0{,}375^4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^4$ e) $\left(16\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(2\frac{2}{9}\right)^3 : 6^3$ f) $\left[\left(3\frac{3}{7}\right)^4 : \left(\frac{16}{5}\right)^4\right] \cdot \left(4\frac{2}{3}\right)^4$

g) $\frac{15^3 \cdot 28^3 \cdot 35^3}{147^3}$ h) $(-a)^4 \cdot (-a^4)$ i) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^8$ k) $177^4 : 59^4$

132. Desgl.

a) $\frac{(6abx)^3 \cdot (10aby)^4}{(4ab)^4 \cdot (3ax)^3 \cdot (25by)^2}$ b) $\frac{(3ab)^2 \cdot (4ac)^3 \cdot (5bc)^4}{(25abc)^2 \cdot (6abc)^3}$

c) $\left(\frac{u^3v^5}{x^4y^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{u^2v^3}{x^3y^5}\right)^6 : \left(\frac{x^4y^7}{u^5y^{10}}\right)^6$ d) $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-x^2}\right)^2 : \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3$

e) $\left(\frac{(m+n)^{2n-4}}{m^{n-1}n} : \frac{n^{2n-5}}{m^{4n-3}(m+n)^{3-2n}}\right) \cdot \frac{m^{4-3n}n^{3n-6}}{(m+n)^{n-2}}$

f) $\left(\frac{3b^3y}{2ax^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5x^3y^2}{3a^2b^2}\right)^3 : \left(\frac{5b^2y^6}{4a^4}\right)^2$

g) $\frac{1-r^2}{r^6} + \frac{1+r}{r^6} - \frac{2r^3}{r^5}$ h) $\frac{3^4 \cdot a^{7-n} \cdot b^{3n} \cdot 24^5}{5^3 \cdot a^{2-3n} \cdot 2^{10} \cdot b^{2n+1} \cdot 6^5}$

i) $\frac{18}{(a-3)^9} + \frac{2a}{(a-3)^8} - \frac{1}{(a-3)^7}$ k) $\frac{a}{x^{n+1}} + \frac{b}{x^{n-1}} + \frac{c}{x^2} - \frac{d}{x^{n-4}} + \frac{e}{x} - f$

133. Desgl.

a) $\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}}$

b) $\left(\frac{x^7 y^3}{z^5}\right)^4 : \left(\frac{x^4 y^2}{z^3}\right)^7$

c) $\frac{(135\,u\,x^3)^4}{(27\,x^4 y^3)^3} : \frac{(70\,v^3 y^3)^5}{(28\,u^5 v^2)^3}$

d) $\frac{1}{x^3} - \frac{x^2-1}{x^5}$

e) $\frac{(21\,r^4 s^3 t)^3}{(6\,r^4 s^5 t)^3} : \frac{(7\,r^3 s^2 t^3)^5}{(14\,r^5 s^6 t^4)^2}$

f) $\frac{x^4}{(1-x)^4} + \frac{2x^5 - x^4}{(1-x)^5} + \frac{x^6 - x^5 + x^4}{(1-x)^6}$

g) $\left[\left(\frac{6a^3 x^2}{5y^4}\right)^4 : \left(\frac{4x^2}{15\,a\,y^3}\right)^5\right] : \left(\frac{27\,a^6 x}{8\,y}\right)^3$

h) $\frac{v^m \cdot (u\,v)^{m+n} \cdot w^n}{(u\,w)^{m+n} \cdot [(u\,v)^m]^2}$

i) $\left(\frac{a^2 \cdot b^{n+1}}{27\,c^{1-2n}}\right)^3 : \left(\frac{a^3 \cdot b^{2-n}}{45\,c^{3-2n}}\right)^3$

k) $-\left(\frac{6u^2 v^5}{25\,x^4 y^3}\right)^5 : \frac{\left(-\frac{27\,x^4 y}{50\,u^2 v^{11}}\right)^3}{\left(\frac{15\,v^3 x^3 y}{4\,u^4}\right)^4}$

134. Desgl.

a) $(9a^4 - 58a^2 b^3 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$

b) $(y^{3n} + z^{3n}) : (y^n + z^n)$

c) $(a^{n+4} - a^n) : (a^3 + a)$

d) $(x^5 - 3x^4 y^3 + 3x^3 y^6 - y^9) : (x^4 - x^3 y - x y^3 + y^4)$

e) $(p^{q+3} - p^{q+1} + p^q - p^{q-1} + p^{q-3})(p^{3-q} + p^{7-q})$

135. Berechne folgende Potenzen:

a) $(2^3)^3$ b) $2^{(3^2)}$ c) $(-b^5)^4$ d) $(x^3)^n$

e) $(-y^4)^3$ f) $(b^{2m})^6$ g) $(b^6)^{3m}$ h) $(x^{m+1})^2$

i) $[(-y)^{2n-1}]^{2n+1}$ k) $(z^{a+2b})^{2a-b}$

136. Desgl.

a) $(a^2 b^3)^4$ b) $(x^4 y)^7$ c) $(u^n v^3)^3$ d) $(2m^3 n^5)^5$

e) $(-3x^2 y^n z^{m-1})^3$ f) $\left(\frac{-3a^3}{5b^5}\right)^4$ g) $\left(\frac{m^5 n^2}{x^7 y^6}\right)^6$ h) $\frac{(u^3 v^5)^4}{(u\,v)^{12}}$

i) $\frac{(-6a^3 b^4)^3}{(-4a^4 b^2)^5}$ k) $\frac{(x\,y)^{22}}{(x^7)^3 \cdot (y^5)^4}$

137. Bei den folgenden Ausdrücken sind die negativen Hochzahlen zu beseitigen:

a) 2^{-3} b) 3^{-2} c) $0{,}2^{-4}$ d) $2 \cdot 5^{-3}$ e) $5 \cdot 2^{-5}$

f) $(-4)^{-3}$ g) -4^{-3} h) $(-4)^{-4}$ i) -4^{-4} k) $0{,}1^{-1}$

138. Desgl.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$ c) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$ e) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-3}$

f) $\left(7\frac{5}{6}\right)^{-2}$ g) $\left(247\frac{17}{34}\right)^{-0}$ h) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ i) $\frac{4^{-3}}{7}$ k) $\left(\frac{a}{x}\right)^{-m}$

139. Bei den folgenden Ausdrücken sind die Brüche zu beseitigen (Umformung in Potenzen mit negativen Hochzahlen):

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{a^3}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{c}{ab}$ e) $\frac{1}{a-b}$

f) $\frac{x+y}{x-y}$ g) $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$ h) $\frac{u^3}{v^5}$ i) $\frac{1}{\frac{n}{a^{-2}}}$ k) $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{x^2-1}{y^3+2}}$

140. Die folgenden Ausdrücke sind so zu schreiben, daß nur negative Hochzahlen auftreten:

a) $\frac{1}{5}$ b) 5 c) m^4 d) $\frac{a^3}{b^2}$ e) $\frac{3}{x^2}$

f) $\frac{m}{n^x}$ g) $\left(\frac{m}{n}\right)^x$ h) $\frac{m^n}{n}$ i) $\frac{1}{m\,n^n}$ k) $\frac{1}{(m\,n)^x}$

141. Schreibe als Bruch:

a) x^{m-1} b) $3a^{2m-5}$ c) b^{3-m} d) $a^{n-3}b^{-2n}$

e) $a^{-x}\cdot(bc)^{3-x}\cdot d^{x-2}$ f) $(a-b)^{m-n}$

g) $x^{-3m}+x^{-2m}+x^{-m+1}$ h) $2a^{-4n}+5a^{2-m}-3a^{m-n}$

i) $(2a)^{-4n}+(5a)^{-1+m}-(3a)^{n-m}$ k) $x^{-2}+y^{-2}$

142. Forme so um, daß keine negativen Hochzahlen mehr auftreten:

a) $3a^{-3}\cdot 5a^7\cdot 2a^{-2}$ b) $\frac{5}{8}a^2b^{-3}c\cdot\frac{9}{25}a^{-3}b^{-1}c^6\cdot\frac{20}{21}a^4b^2c^{-7}$

c) $35x^6y^{-4}z^2 : 14x^{-3}y^{-3}z^4$ d) $\frac{\frac{2}{5}m^{x-1}n^{x+2}t^4}{\frac{4}{15}m^{1-x}n^{2x+5}t^4}$

e) $\frac{3a^{-2}b^{-4}}{4x^{-3}y^{-5}}\cdot\frac{6a^3x^{-1}}{5b^{-3}y^2}$ f) $\frac{12m^3n^{-2}}{25a^{-7}b^3}\cdot\frac{15m^{-4}b^2}{16a^3n}$

g) $\frac{a^{-4}b^5c^{-3}}{x^{-1}y^{-3}z^{-3}} : \frac{x^2y^3z^4}{a^4b^{-4}c^4}$ h) $\frac{m^{2x-1}n^{3-x}}{s^{m+1}t^{3m}} : \frac{m^{3-x}n^{-x+3}}{s^{1-2m}t^2}$

i) $\left(\frac{x^{-4}y^{-5}}{a^{-1}b^3}\right)^2\cdot\left(\frac{b^{-2}y^{-3}}{x^{-1}a^2}\right)^{-3}$ k) $\left(\frac{v^{-4}x^{+2}}{u^{-6}y^{-4}}\right)^4 : \left(\frac{x^{-1}y^{-3}}{u^4v^{-3}}\right)^{-6}$

143. Desgl.

a) $(x^{-2})^3$ b) $(2x^2)^{-3}$ c) $(-5x^{-3})^{-2}$ d) $[(23x^{-3})^6]^0$

e) $[a\cdot(b^{-2})^3]^{-4}$ f) $(-2^{-3})^4$ g) $(-2^{-3})^{-4}$ h) $(-2^{-4})^{-3}$

i) $\left[\left(\frac{1}{r^{-3}}\right)^{-3}\right]^{-2}$ k) $\left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-4}}\right)^5\right]^{-3}$

144. Berechne

a) $(6x^{-5}y^{-3}-2x^{-4}y^{-3}+7x^{-3}y^{-4})\cdot 5x^{-1}y^{-3}$

b) $\left(\frac{2}{3}a^{n-2}b^{3-n}-\frac{5}{6}a^{2n}b^{-2n}+\frac{4}{9}a^{1-n}b^{n+3}\right)\cdot\frac{9}{20}a^{-n}b^{2n}$

c) $(3x^{-3}+2x^{-4}-x^{-5}) : x^{-6}$

d) $(8m^{-7}n^3-15m^{-6}n+7m^{-5}-2m^{-4}n^{-1}) : 12m^{-4}n^{-3}$

e) $(5y^{3n-1}-3y^{-n+2}+6y^{-4n-5}) : 15y^{-n+1}$

145. Entwickle folgende Binome

a) $(x+y)^7$ b) $(x-1)^8$ c) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^4$

d) $(3x-2y)^5$ e) $\left(1-\frac{1}{2}b\right)^6$

146. Vereinfache

a) $\frac{(9a+3b)^2}{9b^2-81a^2}$ b) $\frac{(qx-pqy)^3}{(x-py)^3}$ c) $\frac{(6u+3v)^2(12u-6v)^3}{(24u^2-6v^2)^2}$

d) $\frac{(ax+ay)^n}{(abx-aby)^{n-1}}$ e) $\frac{(au+av)^m\cdot(bu-bv)^n}{(cu^2-cv^2)^{m+n}}$

147. Desgl.

a) $(a-x)^3+(x-a)^3$ b) $(a-x)^3-(x-a)^3$

c) $(a-x)^3\cdot(x-a)^3\cdot(a-x)^6$ d) $(a+x)^5\cdot(x+a)^5$

e) $\frac{u-v}{(s-r)^2}:\frac{u^2-v^2}{r-s}$ f) $2(x-y)^{n-3}\cdot\frac{1}{3}a\cdot(x-y)^{n+1}\cdot 1\frac{1}{2}(y-x)^2$

g) $1\frac{2}{3}(p-q)^x\cdot 4\frac{1}{2}(q-p)^3\cdot 4\frac{4}{5}(p-q)^{x-2}$

h) $5(a-b)^{2k-2}\cdot 1\frac{4}{5}(b-a)^{7-2k}\cdot\frac{2}{3}(b-a)^{2k-5}$

i) $(15a-27b)^6+(27b-15a)^6$ k) $(200x-600y)^5+(600y-200x)^5$

6. Wurzelrechnung

6.1. Radizieren als erste Umkehrung des Potenzierens

Für die beiden direkten Rechenarten erster und zweiter Stufe, die Addition und die Multiplikation, gilt das *Kommutativgesetz*

$$a+b=b+a \quad \text{und} \quad a\cdot b=b\cdot a.$$

Aus diesem Grunde besitzt jede dieser beiden Rechenarten *nur eine* Umkehrung. Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion, die Umkehrung der Multiplikation ist die Division.
Das Kommutativgesetz gilt aber nicht für die Potenzrechnung, die direkte Rechenart dritter Stufe, denn es ist

$$a^n \neq n^a.$$

Aus diesem Grunde muß die Potenzrechnung *zwei Umkehrungen* besitzen.
Ist aus der Potenzgleichung

$$a^n=b$$

bei bekanntem n und $b \geqq 0$ die Grundzahl a zu bestimmen, so nennt man die zugehörige Rechenart **Wurzelrechnung** oder **Radizieren**[1]) und schreibt

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b}} \qquad \text{mit } a \text{ und } b \geqq 0 \tag{32}$$

(gelesen: a ist die n-te Wurzel aus b).
Für nicht negative Werte von a und b drücken demnach die beiden Gleichungen

$$a^n = b \quad \text{und} \quad a = \sqrt[n]{b}$$

denselben Sachverhalt aus; sie sind nur nach verschiedenen Zahlen aufgelöst.
Es gilt somit folgende **Definition der Wurzel:**

Die n-te Wurzel aus $b \geqq 0$ ist diejenige nicht negative Zahl a, deren n-te Potenz b ergibt.

In $a = \sqrt[n]{b}$ nennt man

b den **Radikanden,**
n den **Wurzelexponenten** und
a die **Wurzel** oder den **Wurzelwert.**

Die hier verwendete Definition des Wurzelbegriffes erlaubt es nicht, Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen, denn es wird in (32) gefordert, daß $b \geqq 0$ sein soll. Desgleichen gibt es auch keine negativen Wurzelwerte, da verlangt wird, daß man unter der n-ten Wurzel aus b diejenige *nicht negative* Zahl a verstehen soll, deren n-te Potenz b ergibt.

Die Beschränkung auf positive Wurzelwerte wurde eingeführt, um das Wurzelsymbol zu einem eindeutigen Rechenzeichen zu machen. Würde man nämlich diese Einschränkung nicht einführen, so könnte man beispielsweise dem Zeichen $\sqrt[2]{4}$ zwei Werte zuschreiben, nämlich $+2$ und -2, denn es ist sowohl $(+2)^2 = 4$ als auch $(-2)^2 = 4$. Für Aufgaben der Art $\sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{9} - \sqrt[2]{16} = ?$ würde es dann eine ganze Reihe verschiedener Lösungsmöglichkeiten geben.
Dagegen besitzt die vorliegende Aufgabe auf Grund der Beschränkung auf positive Wurzelwerte die eindeutige Lösung

$$\sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{9} - \sqrt[2]{16} = 2 + 3 - 4 = 1\,.$$

Eine Begründung dafür, daß man auch als Radikanden nur positive Zahlen bzw. die Zahl Null zuläßt, wird im Abschnitt 6.4.5. gegeben.

Aus der Definition der Wurzel folgt für $b \geqq 0$

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{b^n} = b}\,, \tag{33}$$

wobei man im Falle $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ die Klammern auch weglassen darf.

[1]) radix (lat.) die Wurzel.

Bei nicht negativem Radikanden heben sich demnach Potenzieren und Radizieren mit dem gleichen Exponenten gegenseitig auf, d.h.

das Radizieren ist die erste Umkehrung des Potenzierens.

Hiervon wird bei der Probe für die Richtigkeit einer Aufgabe der Wurzelrechnung Gebrauch gemacht.

Die zweite Umkehrung der Potenzrechnung, die Logarithmenrechnung, wird im Abschnitt 7. behandelt.

BEISPIELE

1. $\sqrt[3]{0{,}0121} = 0{,}11$; *denn es ist* $0{,}11^3 = 0{,}0121$.

   $\sqrt[4]{-125}$ *gibt es nicht, denn der Radikand darf laut Definition nicht negativ sein.*

   $\sqrt[4]{256} = 4$; *denn es ist* $4^4 = 256$.

2. *Für* $a \geqq 0$ *gilt*

   $\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n$; *denn es ist* $(a^n)^3 = a^{3n}$.

   $\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3$; „ $(a^3)^n = a^{3n}$.

3. *Die Gleichung* $\sqrt[2]{a^{-2}} = a$ *ist nur für* $a \geqq 0$ *richtig, weil nur positive Radikanden zugelassen sind. Dagegen gilt die Gleichung* $\sqrt[2]{a^2} = |a|$ *für* $-\infty < a < +\infty$. *Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der Betrag von a zu schreiben, da als Wurzelwerte nur nicht negative Zahlen in Frage kommen, a aber in diesem Falle ohne weiteres negativ sein darf.*

Als Verallgemeinerung des Beispiels 3 kann man schreiben

$$\begin{array}{lll} \sqrt[2n]{a^{-2n}} = a & \text{gilt für} & a \geqq 0; \quad \text{dagegen} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| & \text{„} \quad \text{„} & -\infty < a < +\infty. \end{array} \tag{34}$$

Man darf also nicht leichtfertig gleiche Wurzel- und Potenzexponenten gegeneinander „kürzen"!
Bei der zweiten Wurzel läßt man gewöhnlich den Wurzelexponenten 2 weg:

$$\sqrt[2]{A} = \sqrt{A}.$$

Man nennt die zweite Wurzel auch *Quadratwurzel*, da sie die Länge der Quadratseite bei gegebenem Flächeninhalt A angibt.

Entsprechend liefert die dritte Wurzel, die *Kubikwurzel* $\sqrt[3]{V}$, die Kantenlänge desjenigen Würfels, dessen Volumen V beträgt.

Sonderfälle:

1. Es ist stets

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = 1}, \tag{35}$$

denn es gilt für alle n $1^n = 1$.

2. Für alle $n > 0$ gilt

$$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}, \tag{36}$$

denn unter der genannten Voraussetzung ist $0^n = 0$.

3. Ferner ist für $b \geqq 0$

$$\boxed{\sqrt[1]{b} = b}, \tag{37}$$

denn es ist $b^1 = b$.

6.2. Rationale und irrationale Zahlen

Im Abschnitt 4.1.6. wurde gezeigt, daß es sich erforderlich macht, immer umfassendere Zahlbegriffe zu verwenden, wenn man *jede* Aufgabe lösen will.
Ausgehend vom *Bereich der natürlichen Zahlen*, in dem sich jede Additions-, Multiplikations- und Potenzrechnungsaufgabe uneingeschränkt lösen läßt, mußte man zum *Bereich der ganzen Zahlen* übergehen, wenn man *jede* Subtraktionsaufgabe lösen wollte.
Um *jede* Divisionsaufgabe durchführen zu können, muß man zum *Bereich der rationalen Zahlen* übergehen.

Jede rationale Zahl läßt sich stets als endliche oder als unendliche periodische Dezimalzahl schreiben.

Jeder rationalen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden. Man sagt: Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden „in sich dicht"; d.h. zwischen zwei rationalen Zahlen, und mögen sie noch so dicht beieinanderliegen. gibt es stets mindestens noch eine weitere rationale Zahl. (So liegt z.B. zwischen den beiden rationalen Zahlen a und b als weitere rationale Zahl u.a. die Zahl $\frac{a+b}{2}$.)
Man könnte nun annehmen, daß mit den rationalen Zahlen bereits alle Zahlen erfaßt sein müßten. Dies ist aber nicht der Fall, denn es lassen sich nicht alle Aufgaben der Wurzelrechnung im Bereich der rationalen Zahlen lösen. So läßt sich zeigen, daß beispielsweise schon $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann.

Wäre nämlich $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so müßte man sie als Quotient zweier ganzer Zahlen

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

schreiben können, wobei a und b teilerfremd und $\neq 1$ vorauszusetzen sind. Dann ist

$$a = \sqrt{2} \cdot b,$$

woraus

(*) $$a^2 = 2b^2$$

folgt. Das bedeutet aber, daß a^2 eine gerade Zahl sein muß. Da jedoch das Quadrat einer geraden Zahl stets gerade, das Quadrat einer ungeraden Zahl stets ungerade ist, so folgt daraus, daß auch a gerade sein muß, d. h., die Zahl a muß sich als Produkt aus der Zahl 2 und einer anderen Zahl a_1 darstellen lassen:

$$a = 2 \cdot a_1 .$$

Setzt man dies in (*) ein, so ergibt sich

$$4a_1^2 = 2b^2$$

oder

$$b^2 = 2a_1^2.$$

Dies würde jedoch bedeuten, daß b^2 und damit auch b gerade sein müssen. Es würde also nicht nur a, sondern auch b den Faktor 2 enthalten. Dies widerspricht unseren oben gemachten Voraussetzungen über a und b, die teilerfremd sein sollten. Daraus folgt, daß sich $\sqrt{2}$ nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen läßt und somit auch keine rationale Zahl sein kann.

Man nennt $\sqrt{2}$ eine **Irrationalzahl,** und man definiert ganz allgemein:

> Alle Zahlen, die sich nicht als Quotienten zweier ganzer Zahlen schreiben lassen, werden irrationale Zahlen genannt.

Zu den irrationalen Zahlen gehören neben $\sqrt{2}$ alle „nicht aufgehenden" Wurzeln, wie z. B. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$ usw. sowie solche Zahlen wie π und andere mehr.

Der Wert einer Irrationalzahl läßt sich nur angenähert als Dezimalzahl angeben, d. h., er läßt sich beliebig eng zwischen zwei rationale Zahlen einschließen. So ist z. B.

$1 < \sqrt{2} < 2,$	denn	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$	„	$1{,}4^2 = 1{,}96$	$1{,}5^2 = 2{,}25$
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$	„	$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$1{,}42^2 = 2{,}0164$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415,$	„	$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$1{,}415^2 = 2{,}002225$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$	„	$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$	$1{,}4143^2 = 2{,}00024449$

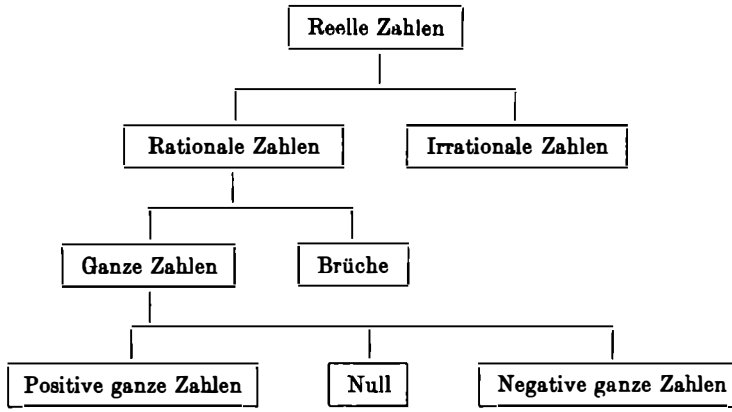
usw.

In der höheren Mathematik wird bewiesen, daß sich alle irrationalen Zahlen als *unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche* darstellen lassen.
Für das praktische Rechnen werden *Näherungswerte* verwendet:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \quad \text{oder} \quad \sqrt{3} = 1{,}7321 \text{ usw.}$$

Erst wenn man alle rationalen und irrationalen Zahlen auf der Zahlengeraden untergebracht hat, entspricht *jedem Punkt* der Zahlengeraden auch *genau eine Zahl.*

Die Gesamtheit der rationalen und der irrationalen Zahlen wird die **Menge der reellen Zahlen** genannt.
Ein umfassenderer Zahlenbereich als der der reellen Zahlen wird in diesem Buche nicht benötigt. Es ergibt sich damit zunächst folgender *Aufbau des Zahlenreiches*:



6.3. Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten

(Zweite Erweiterung des Potenzbegriffes)

Im Abschnitt 5.3. wurde der Potenzbegriff, der ursprünglich nur Sinn hatte, wenn die Hochzahl eine natürliche Zahl > 1 war, dadurch erweitert, daß auch Potenzen mit negativen Hochzahlen sowie Potenzen mit den Hochzahlen Null bzw. Eins definiert wurden. Es zeigte sich, daß die bisher geltenden Potenzgesetze auch für den erweiterten Potenzbegriff angewendet werden durften.
Es soll nun untersucht werden, ob es sinnvoll ist, auch mit **Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen** zu rechnen. Solche Potenzen wären beispielsweise $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{3}{4}}$, $36^{0,5}$, $a^{\frac{m}{n}}$, $5^{-\frac{2}{7}}$ usw.
Wenn diese vorläufig noch recht undurchsichtigen Potenzen einen Sinn haben sollen, dann müssen für sie auch die Potenzgesetze gelten. Es muß also beispielsweise

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$$

sein.
Nun ist aber andererseits auch

$$\sqrt{3}^2 = 3,$$

so daß es nahe liegt,

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

zu setzen.

In ähnlicher Weise führt der Vergleich von $\left(27^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 27^{\frac{3}{4}\cdot 4} = 27^3$ und $\left(\sqrt[4]{27^3}\right)^4 = 27^3$ auf die Beziehung

$$27^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27^3}.$$

Verallgemeinert man diese beiden Beispiele, so kommt man zu einer *zweiten Erweiterung des Potenzbegriffes*, indem man für $a \geqq 0$ *definiert*:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \tag{38}$$

Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen sind Wurzeln.
Dabei stimmt der Zähler der Hochzahl mit der Hochzahl des Radikanden, der Nenner der Hochzahl mit dem Wurzelexponenten überein.
Umgekehrt läßt sich auch jede Wurzel als Potenz mit einem gebrochenen Exponenten schreiben.

Es läßt sich zeigen, daß alle Potenzgesetze auch für diesen erweiterten Potenzbegriff gültig bleiben, so daß die durch die Definition (38) getroffene Erweiterung des Potenzbegriffs sinnvoll ist.

BEISPIELE

1. *Verwandlung von Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen in Wurzelausdrücke:*

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ c) $243^{0,2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

d) $q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}$ e) $x^{-0,75} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ f) $u^{5,9} = u^5 \cdot u^{0,9} = u^5 \cdot \sqrt[10]{u^9}$

2. *Verwandlung von Wurzeln in Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen:*

a) $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ b) $\sqrt[5]{x^{-2}} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 = x^{\frac{2}{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{u^4}} = u^{-\frac{4}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[n]{z^m}} = z^{-\frac{m}{n}}$ e) $\sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

Da jede irrationale Zahl beliebig genau durch eine rationale Zahl angenähert werden kann, lassen sich auch Potenzen wie $a^{\sqrt{2}}$ oder $x^{-\pi}$ usw. mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen.

6.4. Wurzelgesetze

Für die Wurzelrechnung sind *keine neuen Rechengesetze* erforderlich, weil sich jede Wurzel als Potenz mit einer gebrochenen Hochzahl schreiben läßt. *Jede Aufgabe der Wurzelrechnung läßt sich mit Hilfe der Potenzgesetze lösen.*

Da sich jedoch viele Aufgaben der Wurzelrechnung in der Wurzelschreibweise bequemer darstellen lassen als durch Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen, wird im folgenden auch die Wurzelschreibweise der einzelnen Rechengesetze angegeben.

6.4.1. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Gemäß Abschnitt 5.2.1. gilt für Wurzeln:

Wurzeln lassen sich nur dann addieren bzw. subtrahieren, wenn sie sowohl in ihren Radikanden als auch in ihren Wurzelexponenten übereinstimmen.

Allgemeine Ausdrücke wie z. B. $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ oder $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ und anderes mehr lassen sich demnach *nicht* weiter vereinfachen, es sei denn, daß für die allgemeinen Zahlensymbole bestimmte Zahlenwerte gegeben sind.

BEISPIELE

1. $5 \cdot \sqrt[4]{d} + 8 \cdot \sqrt[4]{d} - 11 \cdot \sqrt[4]{d} = 2 \cdot \sqrt[4]{d}$
2. $4 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
3. $a \cdot \sqrt[5]{q} - b \cdot \sqrt[5]{q} + c \cdot \sqrt[5]{q} = (a - b + c) \cdot \sqrt[5]{q}$
4. *Beachte, daß im allgemeinen* $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$ *und* $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$. *Für welche Werte von a und b gilt das Gleichheitszeichen?*
5. $\sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216} = 6$
6. $\sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$

6.4.2. Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Nach den Potenzgesetzen gilt für a und $b \geqq 0$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}.$$

In Wurzelschreibweise lautet dieses Gesetz

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}. \tag{39}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten können dadurch multipliziert werden, daß man das Produkt der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Es gilt auch die *Umkehrung dieses Satzes:*

Die Wurzel aus einem Produkt läßt sich auch dadurch ziehen, daß man die Wurzel aus jedem Faktor zieht und die entstehenden Wurzelwerte miteinander multipliziert.

BEISPIELE

1. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12$
2. $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 9} \cdot \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 9} = \sqrt[3]{(6 \cdot \sqrt{3} + 9)(6 \cdot \sqrt{3} - 9)} = \sqrt[3]{(6 \cdot \sqrt{3})^2 - 9^2} = \sqrt[3]{36 \cdot 3 - 81} = \sqrt[3]{27} = 3$
3. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a - 2 \cdot \sqrt{ab} + b$
4. $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v}) = u - v$

5. $3\cdot\sqrt{125}-2\cdot\sqrt{20}-3\cdot\sqrt{180}+6\cdot\sqrt{45}=\,?$

Lösung: In jedem Radikanden ist eine Quadratzahl als Faktor enthalten. Dadurch lassen sich die Wurzeln wie folgt vereinfachen:

$$=3\cdot\sqrt{25\cdot5}-2\cdot\sqrt{4\cdot5}-3\cdot\sqrt{36\cdot5}+6\cdot\sqrt{9\cdot5}=$$

$$=3\cdot5\cdot\sqrt{5}-2\cdot2\cdot\sqrt{5}-3\cdot6\cdot\sqrt{5}+6\cdot3\cdot\sqrt{5}=11\cdot\sqrt{5}\approx24{,}5971$$

6. $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^3}=a+\sqrt[3]{(ab)^2}-\sqrt[3]{ab}-b$

7. $\sqrt[n]{a^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{a^{n+3}}=\sqrt[n]{a^{n-2}\cdot a^{n+3}}=\sqrt[n]{a^{2n+1}}=\sqrt[n]{a^{2n}\cdot a}=a^2\cdot\sqrt[n]{a}$

8. *Ist ein Faktor mit unter ein Wurzelzeichen zu bringen, so rechnet man wie im folgenden Beispiel.*

$$x\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}=\sqrt{x^2-y^2}$$

9. *Unter dem geometrischen Mittel der n Zahlen* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ *versteht man den Ausdruck*

$$m=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

So ist das geometrische Mittel der Zahlen 6 *und* 24 *die Zahl* $\sqrt{6\cdot24}=\sqrt{144}=12$; *das geometrische Mittel von* 12, 45 *und* 50 *die Zahl* $\sqrt[3]{12\cdot45\cdot50}=\sqrt[3]{2^2\cdot3\cdot3^2\cdot5\cdot5^2\cdot2}=\sqrt[3]{(2\cdot3\cdot5)^3}=30$.

6.4.3. Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

In ähnlicher Weise wie bei der Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten läßt sich herleiten, daß für a und $b\geqq0$

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \tag{40}$$

ist.

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten können durcheinander dividiert werden, indem man den Quotienten der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Oder umgekehrt:

Einen Bruch kann man radizieren, indem man Zähler und Nenner für sich radiziert und die entstehenden Wurzelwerte durcheinander dividiert.

BEISPIELE

1. $\sqrt{72}:\sqrt{8}=\sqrt{72:8}=\sqrt{9}=3$
2. $\sqrt[3]{81a^5b^7}:\sqrt[3]{3ab}=\sqrt[3]{(81a^5b^7):(3ab)}=\sqrt[3]{27a^4b^6}=3ab^2\cdot\sqrt[3]{a}$
3. $\sqrt{0{,}84}=\sqrt{\frac{84}{100}}=\frac{\sqrt{84}}{10}\approx\frac{9{,}1652}{10}=0{,}91652$
4. $\sqrt[3]{0{,}21}=\sqrt[3]{\frac{210}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{210}}{10}\approx\frac{5{,}9439}{10}=0{,}59439$

Anmerkung: Die Beispiele 3 und 4 zeigen, wie man Wurzeln, deren Wurzelwerte nicht in der Tabelle stehen, durch geeignetes Umformen doch noch aus der Tabelle entnehmen kann. (Vgl. hierzu auch Abschnitt 3.6.1)

5. $(u\cdot\sqrt{u}+v\cdot\sqrt{v}):(\sqrt{u}+\sqrt{v})=u-\sqrt{uv}+v$

$$\begin{array}{r} -(u\cdot\sqrt{u}+u\cdot\sqrt{v}) \\ \hline -u\cdot\sqrt{v}+v\cdot\sqrt{v} \\ -(-u\cdot\sqrt{v}-v\cdot\sqrt{u}) \\ \hline +v\cdot\sqrt{u}+v\cdot\sqrt{v} \\ -(+v\cdot\sqrt{u}+v\cdot\sqrt{v}) \\ \hline --- \end{array}$$

6.4.4. Rationalmachen des Nenners

Um einen Näherungswert für den Bruch $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu erhalten, müßte man die Zahl 1 durch den Näherungswert 1,41421 dividieren. Man gelangt jedoch wesentlich schneller zum Ziel, wenn man den Nenner so erweitert, daß man nur noch durch eine ganze Zahl zu dividieren braucht:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx\frac{1}{2}\cdot 1{,}41421=0{,}70711$$

Man nennt dieses Verfahren **Rationalmachen des Nenners.**
Steht im Nenner eines Bruches eine n-te Wurzel, so läßt sich dadurch eine Vereinfachung erreichen, daß man den Bruch so erweitert, daß der Radikand im Nenner die n-te Potenz einer Zahl wird. Daraus läßt sich dann die Wurzel ohne weiteres ziehen.

Ganz allgemein ist für das Zahlenrechnen eine irrationale Zahl im Zähler eines Bruches weniger unbequem als eine irrationale Zahl im Nenner. Man wird daher stets versuchen, den Nenner rational zu machen.

BEISPIELE

1. $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6}{3}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$

2. $\frac{5}{3\cdot\sqrt{15}}=\frac{5\cdot\sqrt{15}}{3\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{5\cdot\sqrt{15}}{3\cdot 15}=\frac{1}{9}\cdot\sqrt{15}$

3. $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{3}$

4. $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$

5. $\frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}=\frac{x\cdot\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^3}\cdot\sqrt[7]{x^4}}=\frac{x\cdot\sqrt[7]{x^4}}{x}=\sqrt[7]{x^4}$

Steht im Nenner eine Summe, in der Quadratwurzeln auftreten, so läßt sich der Nenner mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

rational machen.

BEISPIELE

6. $$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{15}+3$$

7. $$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2\cdot\sqrt{15}+3}{20-3} = \frac{2\cdot\sqrt{15}+3}{17}$$

8. $$\frac{a}{a-\sqrt{b}} = \frac{a(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})\cdot(a+\sqrt{b})} = \frac{a(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

9. $$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{10})}{[(\sqrt{2}+\sqrt{6})-\sqrt{10}]\cdot[(\sqrt{2}+\sqrt{6})+\sqrt{10}]} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{36}+\sqrt{60}-\sqrt{4}-\sqrt{12}-\sqrt{20}}{2+2\cdot\sqrt{12}+6-10} \quad \frac{6+2\cdot\sqrt{15}-2-2\cdot\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{3}-2} \quad \frac{(2+\sqrt{15}-\sqrt{5})\cdot 2}{4\cdot\sqrt{3}-2} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{15}-\sqrt{5})(2\cdot\sqrt{3}+1)}{(2\cdot\sqrt{3}-1)(2\cdot\sqrt{3}+1)} \quad \frac{4\cdot\sqrt{3}+2+2\cdot\sqrt{45}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{15}-\sqrt{5}}{4\cdot 3-1} =$$

$$= \frac{4\cdot\sqrt{3}+2+6\cdot\sqrt{5}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{15}-\sqrt{5}}{11} \quad \frac{2+4\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{5}-\sqrt{15}}{11}.$$

6.4.5. Radizieren von Potenzen

Nach Formel (25) ist für $a \geqq 0$

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Demnach ist auch für $a \geqq 0$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m}. \tag{41}$$

Es ist gleichgültig, ob man eine nicht negative Zahl zuerst potenziert und dann radiziert oder ob man in der umgekehrten Reihenfolge vorgeht.

Bei der Anwendung dieses Gesetzes kommt es auf die gegebenen Zahlenwerte an, in welcher Reihenfolge man am besten rechnet.

BEISPIELE

1. $\sqrt[5]{243^3} = \sqrt[5]{243}^3 = 3^3 = 27$

2. $\sqrt{(9x^2-12xy+4y^2)^5} = \sqrt{(3x-2y)^{10}} = |3x-2y|^5$

Anmerkung: Der Radikand $(3x - 2y)^2$ der zweiten Wurzel ist als Quadrat auf alle Fälle positiv, so daß die Wurzel ohne weiteres gezogen werden darf. Da aber der Ausdruck $3x - 2y$ sowohl positiv als auch negativ sein kann, ist der Wurzelwert der Quadratwurzel in Absolutstriche zu setzen. (Vgl. hierzu auch Formel (34) im Abschnitt 6.1.!)

3. $\sqrt[3]{5}^2$ läßt sich als Quadrat einer vielstelligen Dezimalzahl nur sehr unbequem ermitteln. Beachtet man dagegen (41), so wird die Rechnung sehr einfach:

$$\sqrt[3]{5}^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}9240 \quad \text{(lt. Tabelle).}$$

Für $a \geqq 0$ folgt schließlich aus der Potenzschreibweise

$$a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$$

die Beziehung

$$\boxed{\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}}\,. \tag{42}$$

Wurzel- und Potenzexponent dürfen mit der gleichen Zahl multipliziert bzw. durch die gleiche Zahl dividiert werden.

Man nennt diesen Vorgang in Analogie zur Bruchrechnung Erweitern bzw. Kürzen von Wurzeln.

BEISPIELE

4. $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2361$

5. $\sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27c^3d^{15}}} = \sqrt[9]{\left(\frac{2a^2b^4}{3cd^5}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{2a^2b^4}{3cd^5}} = \frac{b}{d} \cdot \sqrt[3]{\frac{2a^2b}{3cd^2}}$

6. $\sqrt[4]{u^3}$ *ist als zwölfte Wurzel zu schreiben.*

Lösung: $\sqrt[4]{u^3} = \sqrt[12]{u^9}$

An dieser Stelle soll noch eine Begründung dafür gegeben werden, warum bei der Definition des Wurzelbegriffes die Einschränkung auf nicht negative Radikanden gemacht wurde.
Würde man nämlich diese Einschränkung fallen lassen, so könnte man beispielsweise als Wert von $\sqrt[3]{-64}$ die Zahl -4 angeben, denn es ist $(-4)^3 = -64$. Damit wäre dann auch die folgende, offensichtlich zu falschen Ergebnissen führende Rechnung möglich:

$$-4 = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{64^2} = \sqrt[3]{64} = +4\,.$$

Derartige Trugschlüsse können nicht auftreten, wenn man sich konsequent an die Bedingung hält, daß nur Wurzeln aus nicht negativen Zahlen gezogen werden dürfen.

6.4.6. Radizieren von Wurzeln

Aus $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ mit $a \geqq 0$

folgt $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$. (43)

Beim Radizieren einer Wurzel darf die Reihenfolge, in der radiziert werden soll, vertauscht werden.
Jede mehrfache Wurzel kann auch als eine einfache Wurzel geschrieben werden mit einem Wurzelexponenten, der gleich dem Produkt der gegebenen Wurzelexponenten ist.

BEISPIELE

1. $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$
2. $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422$
3. $\sqrt[4]{\sqrt[7]{u^3}} = \sqrt[28]{u^3}$
4. $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[9]{3^5}$

6.4.7. Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten

Beim Rechnen mit Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten ist es meistens am vorteilhaftesten, wenn man die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreibt und dann die Potenzgesetze anwendet.

BEISPIELE

1. $\sqrt[n]{a^x} \cdot \sqrt[m]{a^y} = a^{\frac{x}{n}} \cdot a^{\frac{y}{m}} = a^{\frac{x}{n} + \frac{y}{m}} = a^{\frac{mx + ny}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mx+ny}}$
2. $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} = \left\{3 \cdot \left[3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{3 \cdot \left[3^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{3^{\frac{5}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{3^5}$

   Vgl. Abschnitt 6.4.6., *Aufg.* 4!

3. $\left(4 \cdot \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xy^2} + 3 \cdot \sqrt[4]{xy^3}\right)\left(\sqrt[12]{xy^4} - 2 \cdot \sqrt{xy}\right) =$

$$= \left(4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 4x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{5}{6}} - 8xy + x^{\frac{5}{12}}y - 2x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{13}{12}} - 6x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{5}{4}} =$$

$$= 4 \cdot \sqrt[12]{x^7y^{10}} - 8xy + y \cdot \sqrt[12]{x^5} - 2y \cdot \sqrt[6]{x^5y} + 3y \cdot \sqrt[12]{x^4y} - 6y\sqrt[4]{x^3y}$$

6.4.8. Rückblick auf die Wurzelgesetze

Da jede Wurzel als Potenz mit einer gebrochenen Hochzahl geschrieben werden kann, ließen sich sämtliche Wurzelgesetze aus den ihnen entsprechenden Potenzgesetzen gewinnen. Um mit Wurzeln rechnen zu können, würde es daher genügen, wenn man die Potenzgesetze genau kennt.
Man verwendet jedoch beim Rechnen mit Wurzeln sowohl die Schreibweise als Potenz mit gebrochener Hochzahl als auch die Wurzelform, wobei es ganz von der Aufgabe und von den ge-

gebenen Zahlenwerten abhängt, welche der beiden Formen zweckmäßiger ist. Wer Aufgaben der Wurzelrechnung schnell und sicher lösen will, der muß mit der einen Schreibweise genau so sicher umzugehen wissen wie mit der anderen. Es wird daher empfohlen, beim Üben eine Anzahl der Aufgaben sowohl mit Hilfe der Wurzelschreibweise als auch mit Hilfe der Potenzschreibweise zu lösen und die Ergebnisse auf ihre Übereinstimmung hin zu überprüfen.

AUFGABEN

148. Es ist anzugeben, für welche x-Werte die folgenden Wurzeln existieren:

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x^3}$ c) $\sqrt{x^3}$ d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt[3]{x^2}$ f) $\sqrt[3]{x^2}$ g) $\sqrt{1-x}$ h) $\sqrt[3]{(x-y)^2}$

i) $\sqrt[3]{x-y^2}$ k) $\sqrt{a^2-x^2}$

149. Es ist nachzuprüfen, ob die folgenden Wurzelwerte stimmen:

a) $\sqrt{50176} \stackrel{?}{=} +224$ b) $\sqrt{0{,}121} \stackrel{?}{=} +0{,}11$ c) $\sqrt[3]{0{,}001} \stackrel{?}{=} +0{,}1$

d) $\sqrt[4]{20736} \stackrel{?}{=} +12$ e) $\sqrt[6]{-4096} \stackrel{?}{=} +4$ f) $\sqrt[6]{6562} \stackrel{?}{=} +3$

g) $\sqrt{(a+b)^4} \stackrel{?}{=} +(a+b)^2$ h) $\sqrt{66{,}2596} \stackrel{?}{=} +8{,}14$ i) $\sqrt[3]{132651} \stackrel{?}{=} \pm 51$

k) $\sqrt[3]{-0{,}08} \stackrel{?}{=} -0{,}2$

150. Desgl.

a) $\sqrt[3]{-161051} \stackrel{?}{=} -11$ b) $\sqrt[7]{-78125} \stackrel{?}{=} +5$ c) $\sqrt[x]{a^{3x}} \stackrel{?}{=} a^3$

d) $\sqrt{a^2-b^2} \stackrel{?}{=} a-b$ e) $\sqrt{220900} \stackrel{?}{=} +470$ f) $\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} 3+4=7$

g) $\sqrt[3]{65} \stackrel{?}{=} -0{,}40207$ h) $\sqrt{0{,}0016\,x^{12}} \stackrel{?}{=} +0{,}2\,x^3$

i) $\sqrt{100-36} \stackrel{?}{=} +(10-6)=+4$ k) $\sqrt[3]{x^3+y^3} \stackrel{?}{=} +(x+y)$

151. Die folgenden Wurzeln sind soweit wie möglich zu vereinfachen:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[7]{-1}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{27^3}$ e) $\sqrt[6]{64}$

f) $\sqrt{(uv)^2}$ g) $\sqrt{a+b^4}$ h) $\sqrt[3]{125\,x^6}$ i) $\sqrt{1-x^2}$ k) $\sqrt[3]{(8a^3b^6)^3}$

152. Desgl.

a) $\sqrt[4]{a^4b^{12}c^8}$ b) $\sqrt{(1-x)^2}$ c) $\sqrt[3]{(u-8)^3}$ d) $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$

e) $(7\cdot\sqrt{a-b})^2+(5\cdot\sqrt{b-c})^2+(4\cdot\sqrt{c-a})^2-(3\cdot\sqrt{b-c})^2$

f) $5\cdot\sqrt{36}-8\cdot\sqrt[3]{64}+7\cdot\sqrt{121}-9\cdot\sqrt{64}$

g) $5\cdot\sqrt[4]{16}-10\cdot\sqrt[4]{81}-9\cdot\sqrt[3]{64}+8\cdot\sqrt[6]{243}$

h) $(2\cdot\sqrt{10})^2-(10\cdot\sqrt{2})^2+(4\cdot\sqrt{10})^2$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt[4]{\frac{1}{256}}+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\sqrt[10]{1}$

153. Folgende Wurzeln sind als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen zu schreiben:

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{7}$ d) $\sqrt[5]{a}$ e) $\sqrt[5]{x}$

f) $\sqrt[4]{b^3}$ g) $\sqrt[7]{x^4}$ h) $\sqrt[4]{x^7}$ i) $\sqrt{a+b}$ k) $\sqrt[3]{x^3-y^3}$

154. Desgl.

a) $\sqrt[3]{p^9}$ b) $\sqrt[15]{u^{20}}$ c) $\sqrt[4]{(x+y)^3}$ d) $m \cdot \sqrt[k]{p^2}$

e) $\sqrt[n-1]{x^{n+1}}$ f) $\sqrt[a-2]{(m-3n)^{3a-6}}$ g) $\sqrt{m^2+n^2}$ h) $6 \cdot \sqrt[3]{4a^2b^3c^4}$

i) $\sqrt[5]{p^3(q-r)^4}$ k) $\sqrt[6]{x^5y^6z^8u^{12}v^{14}w^{15}}$

155. Desgl.

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{x-y}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

f) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ g) $\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$ h) $\frac{a^m}{\sqrt[n]{b^n}}$ i) $\frac{\sqrt[4]{u^5}}{\sqrt[6]{v^4}}$ k) $\frac{3}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}}$

156. Die folgenden Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen sollen als Wurzeln geschrieben werden:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{\frac{2}{5}}$ c) $a^{-\frac{1}{2}}$ d) $b \cdot c^{-\frac{2}{7}}$ e) $(bc)^{-\frac{2}{7}}$

f) $y^{-\frac{2}{3}}$ g) $z^{3\frac{1}{2}}$ h) $(m-n)^{-\frac{1}{x}}$ i) $a^{-0,5}$ k) $a \cdot b^{2,6}$

157. Desgl.

a) $a^{\frac{5}{6}}$ b) $b^{-\frac{4}{7}}$ c) $c^{\frac{11}{8}}$ d) $d^{-2\frac{2}{3}}$ e) $e^{0,64}$

f) $x^{2,5}$ g) $y^{-2,1}$ h) $z^{1,4}$ i) $u^{-0,75}$ k) $v^{-0,4n}$

158. Berechne die folgenden Zahlenwerte:

a) $2^{0,5}$ b) $16^{0,75}$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$ d) $0{,}343^{\frac{1}{3}}$ e) $256^{0,125}$

f) $1024^{-0,1}$ g) $1296^{-0,25}$ h) $274{,}625^{\frac{2}{3}}$ i) $7{,}84^{2,5}$ k) $0{,}561001^{1,5}$

159. Vereinfache

a) $7 \cdot \sqrt{2} - 13 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} + 12 \cdot \sqrt{2}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{a} - \frac{5}{6} \cdot \sqrt[4]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a} - \frac{7}{12} \sqrt[4]{a}$

c) $0{,}7 \cdot \sqrt[5]{5b} + 3{,}1 \cdot \sqrt[5]{5b} - 0{,}4 \cdot \sqrt[5]{5b} + 6{,}2 \cdot \sqrt[5]{ab} - 2{,}3 \cdot \sqrt[5]{5b}$

d) $4 \cdot \sqrt[3]{2} - 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{8} + 4 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{+8}$

e) $3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{5} - 3 - 4 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$ g) $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$ h) $\sqrt{\frac{64}{225} + 1}$

i) $\sqrt[3]{12^3 - 10^3 - 8^3}$ k) $\sqrt[7]{x^2} + 2a \cdot \sqrt[7]{x^2} - 4b \cdot \sqrt[7]{x^2} + c \cdot \sqrt[7]{x^2}$

160. Desgl.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{36}$ c) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{125}$

d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$ e) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$ f) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2x}$

g) $\sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{18a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{3a}$ h) $\sqrt{8yz} \cdot \sqrt{6xy} \cdot \sqrt{3x}$

i) $\sqrt{96uv^2w} \cdot \sqrt{576u^3vw^2} \cdot \sqrt{12v^3w}$ k) $\sqrt[7]{a^{n+2}} \cdot \sqrt[7]{a^{n+5}}$

161. Desgl.

a) $3 \cdot \sqrt{125} - 2 \cdot \sqrt{20} - 3 \cdot \sqrt{180} + 6 \cdot \sqrt{45}$

b) $\sqrt{720} - 2 \cdot \sqrt{242} + \sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{320} + 5 \cdot \sqrt{72} + 3 \cdot \sqrt{162} - 4 \cdot \sqrt{605}$

c) $(6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{18} + 5 \cdot \sqrt{50} - 2 \cdot \sqrt{98}) \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$

d) $(\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3})(3\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

f) $(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{6}) \cdot 3\sqrt{6}$

g) $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{5})^2$

h) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

i) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686}$

k) $15 \cdot \sqrt[3]{1029} - 8\sqrt{147} - 11 \cdot \sqrt[3]{648} + 5\sqrt{363} + 4 \cdot \sqrt[3]{192} - 2\sqrt{1875}$

102. Berechne

a) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

b) $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}\right)^2$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{23} + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{23} - \sqrt{7}} + \sqrt[4]{5\sqrt{2} + 7} \cdot \sqrt[4]{5\sqrt{2} - 7}$

d) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + 3\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{0{,}5}}\right) \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt{4a^2 - 4b^2} + \sqrt{(a+b)^2} - 5\sqrt{(a+b)(a-b)} + \sqrt{9(a^2 - b^2)} - \sqrt{(a-b)^2}$

f) $\sqrt[6]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}$

g) $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2$

h) $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

i) $(\sqrt[3]{16} - 2 \cdot \sqrt[3]{6})(2 \cdot \sqrt[3]{2} - 3 \cdot \sqrt[3]{4})$

k) $(\sqrt{7} + \sqrt{11} + \sqrt{13})(\sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{13})(\sqrt{7} - \sqrt{11} + \sqrt{13})(\sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{7})$

163. Bei den folgenden Aufgaben ist der vor der Wurzel stehende Faktor mit unter die Wurzel zu bringen:

a) $x \cdot \sqrt{y}$ b) $4 \cdot \sqrt{3}$ c) $3a \cdot \sqrt[3]{x}$ d) $xy \cdot \sqrt{z}$ e) $2m \cdot \sqrt{m}$

f) $x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$ g) $\frac{2}{y} \cdot \sqrt[3]{5y}$ h) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

i) $(\sqrt{11} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{\sqrt{11} - 2 \cdot \sqrt{2}}$ k) $\frac{u+v}{u} \cdot \sqrt[3]{\frac{u^4 - u^3 v}{u^2 + 2uv + v^2}}$

164. Berechne

a) $\sqrt{147} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt{272} : \sqrt{17}$ c) $\sqrt{90} : \sqrt{18}$ d) $\sqrt{120} : \sqrt{5}$

e) $\sqrt{\frac{5}{8}} : \sqrt{\frac{5}{32}}$ f) $\sqrt{17\frac{1}{3}} : \sqrt{4\frac{1}{3}}$ g) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$

h) $\sqrt[3]{x^3} : \sqrt[3]{x^5}$ i) $\sqrt[n]{a^{n+5}} : \sqrt[n]{a^{n-5}}$ k) $9\sqrt{\frac{1}{45}} : \frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$

165. Desgl.

a) $(10\sqrt{48} - 6\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$ b) $(15\sqrt{50} + 5\sqrt{200} - 3\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

e) $(\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}) : \sqrt{xy}$ f) $(\sqrt{ab} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) : \sqrt{a}$

g) $(\sqrt{a^5b^3} - \sqrt{a^3b^5}) : \sqrt{a^3b^3}$ h) $(xy^3 - y) : \sqrt{y}$

i) $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - 0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}$

k) $\left(\frac{a}{2}\sqrt[3]{a^2b} + \frac{b}{3a^3}\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}} - \frac{4a}{5b}\sqrt[3]{\frac{b}{2a^3}}\right) : \frac{2a^3}{15b^2}\sqrt[3]{\frac{5a^2}{2b}}$

166. Berechne

a) $\dfrac{\sqrt[3]{210a^5b} \cdot \sqrt[3]{450a^2b^7} \cdot \sqrt[3]{24ab}}{\sqrt[3]{84a^2b^6}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{144u^2v} \cdot \sqrt[4]{8u} \cdot \sqrt{450v^3}}{\sqrt[4]{18uv} \cdot \sqrt[4]{30u^3v} \cdot \sqrt[4]{60u^3v^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}} \cdot \sqrt{a^2+x^2}$ d) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}}$

e) $(m-n) : (\sqrt{m} - \sqrt{n})$ f) $(4-a) : (2 + \sqrt{a})$

g) $\left(\sqrt[4]{36x^3} - \sqrt[4]{9y^3}\right) : \left(\sqrt[4]{6x} - \sqrt[4]{3y}\right)$

h) $(a+b) : \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$ i) $(4m - 7n) : \left(\sqrt[3]{4m} - \sqrt[3]{7n}\right)$

k) $(12x^3 - 9x\sqrt{xy} + 20y\sqrt{xy} - 8x\sqrt{y} + 6y\sqrt{x} - 15y^2) : (4\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$

167. Bei den folgenden Brüchen ist der Nenner rational zu machen:

a) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

f) $\frac{15}{\sqrt{15}}$ g) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ h) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ i) $20 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$ k) $\frac{5}{6} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$

168. Desgl.

a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$ c) $\frac{3x^2}{\sqrt[7]{x^2}}$ d) $\frac{4m^3}{\sqrt[5]{m^2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[n]{y^{n-4}}}$ f) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ g) $\frac{8-12\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$

h) $\frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$ i) $\frac{4a^2-25b^2}{\sqrt{2a+5b}}$ k) $\frac{7m-3n}{\sqrt{7m+3n}}$

169. Desgl.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ c) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}$ d) $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}$ f) $\frac{14}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

h) $\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{15}}{7\sqrt{3}+3\sqrt{10}}$ i) $\frac{4\sqrt{14}-7\sqrt{3}}{4\sqrt{6}-3\sqrt{7}}$ k) $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

170. Desgl.

a) $\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{1\frac{1}{2}}}$ b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ c) $\frac{x}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}$

d) $\frac{4+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ e) $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

g) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{12}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$

i) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ k) $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$

171. Berechne

a) $(\sqrt{5})^3$ b) $(\sqrt[6]{a^2})^3$ c) $(\sqrt[3]{b})^2$ d) $(\sqrt[6]{y})^6$ e) $\sqrt[4]{x^3y^3}$

f) $\sqrt[7]{m^2ny^3}^{-1}$ g) $\sqrt[6]{a^4b^3c^2}^3$ h) $\sqrt{x}^{-4}$ i) $\sqrt[12]{r^4s^5t^6}^3$ k) $\sqrt{abc}^{-4}$

172. Der Wurzelexponent ist soweit wie möglich zu erniedrigen:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[6]{16}$ c) $\sqrt[8]{16}$ d) $\sqrt[12]{81}$ e) $\sqrt[10]{64}$

f) $\sqrt[4]{25}$ g) $\sqrt[6]{729}$ h) $\sqrt[8]{1296}$ i) $\sqrt[16]{6561}$ k) $\sqrt[18]{15625}$

173. Desgl.

a) $\sqrt[8]{256^3}$ b) $\sqrt[4]{4096^5}$ c) $\sqrt[3]{216^2}$ d) $\sqrt{100^3}$ e) $\sqrt[6]{49^3}$

f) $\sqrt[6]{125^2}$ g) $\sqrt[8]{1{,}44^4}$ h) $\sqrt[4]{0{,}01^6}$ i) $\sqrt[14]{128^3}$ k) $\sqrt[20]{59049^7}$

174. Desgl.

a) $\sqrt[6]{a^4}$ b) $\sqrt[15]{x^{20}}$ c) $\sqrt[2n]{a^{3n}}$ d) $\sqrt[4]{25x^2y^6}$

e) $\sqrt[8]{16m^{12}n^4}$ f) $\sqrt[21]{p^{21k}q^{7n}}$ g) $\sqrt[3n]{v^n}$ h) $\sqrt[m+2]{u^{5m+10}}$

i) $\sqrt[p]{u^{kp-p}v^{kp+p}}$ k) $\sqrt[12]{64a^{24}b^{18}c^{15}d^{12}e^{10}x^9y^8z^6u^4v^3w^2}$

175. Erweitere den Wurzelexponenten auf die Zahl, die neben der Aufgabe in Klammern steht:

a) $\sqrt{u}$ (6) b) $\sqrt[3]{v^2}$ (12) c) $\sqrt[4]{x^3 y}$ (8) d) $\sqrt[7]{a^5 b^2 c^6}$ (21)

e) $\sqrt[5]{a+b}$ (20) f) $\sqrt[3]{k^2}$ (4) g) $\sqrt[6]{a^2 b^3 - c}$ (18)

h) $\sqrt{x-y}$ (4) i) $\sqrt[4]{m n^3}$ (13) k) $\sqrt[6]{a^2 - b^3}$ (18)

176. Beseitige die Doppelwurzeln:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$ c) $\sqrt[6]{\sqrt{-32}}$ d) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{u^3 - 3u^2 v + 3uv^2 - v^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{p^{10} q^5}}$ g) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{m^3 n^6}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6 b^3 c^9}}$ i) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ k) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^3 y^{10} z^{15}}}$

177. Berechne

a) $\sqrt[16]{6561}$ b) $\sqrt[18]{262144}$ c) $\sqrt[4]{1296}$

d) $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}}}$ e) $\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{x}}}}$ f) $\sqrt{\frac{u}{v} \cdot \sqrt{\frac{v^2}{u} \cdot \sqrt{\frac{1}{u^2}}}}$

g) $\sqrt[3]{m^2 \sqrt{m \sqrt[6]{m^3 \sqrt[4]{m^3}}}}$ h) $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}} : \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a}}}$

i) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{u}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{u^4}} \cdot \sqrt[18]{u^7} \cdot \sqrt[9]{u^3}$ k) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^7}}}{\sqrt[3]{x^7 \cdot \sqrt{x}}}$

178. Desgl.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt[5]{16} : \sqrt{2}$ g) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[6]{32} : \sqrt[3]{2}$ i) $\sqrt[6]{6} : \sqrt[6]{5}$ k) $\sqrt[7]{\frac{64}{15}} : \sqrt[4]{\frac{8}{5}}$

179. Desgl.

a) $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x}$ b) $\sqrt[3]{u^2 v} \cdot \sqrt[3]{uv^4} \cdot \sqrt[10]{uv^2}$ c) $\sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt{m^2 n^3} \cdot \sqrt[4]{n^3}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}}$ e) $\left(3\sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{25}\right) \cdot \sqrt{2}$ f) $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}\right)$

g) $\left(4\sqrt{8} + 6 \cdot \sqrt[3]{2}\right) : \sqrt{2}$ h) $\left(2\sqrt{12} + 4 \cdot \sqrt[3]{4} - 6 \cdot \sqrt[4]{32}\right) : 2 \cdot \sqrt{2}$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[12]{2}}$ k) $\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$

7. Logarithmenrechnung

7.1. Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens

7.1.1. Begriffserklärungen

Ist aus der Potenzgleichung

$$a^n = b$$

bei bekannter Grundzahl a und bekanntem Potenzwert b die Hochzahl n zu bestimmen, so nennt man die zugehörige Rechenart **Logarithmenrechnung**[1]) oder **Logarithmieren** und schreibt

$$\boxed{n = \log_a b}\ ^{2}) \tag{44}$$

(gelesen: n ist der Logarithmus von b zur Basis a).

Folgerung:

Der Logarithmus ist eine Hochzahl.

In $n = \log_a b$ nennt man

a die **Grundzahl** oder die **Basis** des Logarithmus,
b den **Numerus**[3]) und
n den **Logarithmus.**

Das Zeichen log ist das *Rechensymbol*, das angibt, welche Rechenart ausgeführt werden soll. Es ist beispielsweise vergleichbar mit dem Wurzelzeichen der Wurzelrechnung. Mit diesen neuen Begriffen kann die **Definition des Logarithmus** genauer formuliert werden:

Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a ist diejenige Hochzahl, mit der die Basis a zu potenzieren ist, wenn man den Numerus b erhalten will.

Die beiden Gleichungen

$$a^n = b \quad \text{und} \quad n = \log_a b$$

drücken demnach denselben Sachverhalt aus; sie sind nur nach verschiedenen Zahlen aufgelöst.

---

[1]) logos (griech.) Vernunft, richtige Beziehung; arithmos (griech.) Zahl. Der Logarithmus ist demnach die Zahl, die zwischen Basis und Potenzwert die richtige Beziehung herstellt.

[2]) In der älteren Literatur findet man für den Logarithmus von b zur Basis a meist das Zeichen $^a\log b$. Inzwischen wurde die den internationalen Gepflogenheiten entsprechende Schreibweise $\log_a b$ durch TGL 0-1302 für verbindlich erklärt.

[3]) Eigentlich: „numerus logarithmandus" (lat.), die zu logarithmierende Zahl.

Aus diesem Zusammenhang zwischen Potenz- und Logarithmenrechnung folgen die beiden wichtigen Beziehungen

$$\boxed{a^{\log_a b} = \log_a (a^b) = b} \,. \tag{45}$$

Logarithmieren und Potenzieren mit den gleichen Grundzahlen heben sich gegenseitig auf, d. h.,

das Logarithmieren ist die zweite Umkehrung des Potenzierens.

Hiervon wird Gebrauch gemacht, wenn die Richtigkeit eines ermittelten Logarithmus überprüft werden soll.

BEISPIELE

1. $\log_5 625 = 4$, *denn* $5^4 = 625$.
2. $\log_8 0{,}5 = -\frac{1}{3}$, „ $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
3. $\log_{0{,}2} 5 = -1$, „ $0{,}2^{-1} = \frac{1}{0{,}2} = 5$.
4. $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$, „ $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$.
5. $\log_k (k^2) = 2$, „ $k^2 = k^2$.
6. $\log_{\frac{1}{k}} (k^2) = -2$, „ $\left(\frac{1}{k}\right)^{-2} = k^2$.

Sonderfälle:

Aus $a^1 = a$ folgt

$$\boxed{\log_a a = 1} \,. \tag{46}$$

▌ Der Logarithmus der Basis ist stets Eins.

Aus $a^0 = 1$ folgt

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \,. \tag{47}$$

▌ Der Logarithmus von Eins ist bei jeder Basis gleich Null.

Da es im Endlichen keine Hochzahl n gibt, für die $a^n = 0$ ist, ist $\log_a 0$ *nicht erklärt.*

Anmerkung: Als Basis eines Logarithmus ist jede von Null und Eins verschiedene *positive* Zahl geeignet.
Da jede Potenz einer positiven Grundzahl wieder positiv ist, gibt es keine Logarithmen von negativen Zahlen.
Aber beachte: Es gibt negative Logarithmen. (Vgl. Beispiele 2, 3 und 6!)

Es sei noch einmal der Zusammenhang zwischen den drei Rechenarten dritter Stufe herausgestellt:

Sind a und b nicht negative Zahlen, so besagen die drei Gleichungen

$$\boxed{a^n = b}$$

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b}} \leftrightarrow \boxed{n = \log_a b}$$

alle dasselbe; sie sind nur jeweils nach einer anderen der drei Größen a, b und n aufgelöst.

7.1.2. Logarithmengesetze

Es seien x und y zwei beliebige positive Zahlen. Dann lassen sich zu einer gegebenen Grundzahl a stets zwei Hochzahlen u und v so finden, daß

$$x = a^u \quad \text{und} \quad y = a^v$$

wird, woraus

$$u = \log_a x \quad \text{und} \quad v = \log_a y$$

folgt.
Es ist dann

$$x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Löst man diese Gleichung nach der Hochzahl $u + v$ auf, so erhält man

$$\log_a(x \cdot y) = u + v,$$

woraus wegen $u = \log_a x$ und $v = \log_a y$ folgt

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}. \tag{48}$$

Der Logarithmus eines Produkts stimmt mit der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren überein.

Was hier für zwei Faktoren gezeigt wurde, läßt sich auf beliebig viele Faktoren erweitern:

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \\ + \cdots + \log_a x_n}. \tag{49}$$

Bildet man statt des Produktes $x \cdot y$ den Quotienten $\frac{x}{y}$, so erhält man nach einer ähnlichen Rechnung wie oben

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}. \tag{50}$$

Der Logarithmus eines Bruches stimmt mit der Differenz der Logarithmen des Zählers und des Nenners überein.

Setzt man in (49) $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x$, so ergibt sich

$$\log_a(x^n) = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \log_a x + \cdots + \log_a x}_{n \text{ Summanden}}.$$

$$\boxed{\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x} \quad . \tag{51}$$

Um den Logarithmus einer Potenz zu bestimmen, kann man den Logarithmus der Grundzahl mit der Hochzahl multiplizieren.

Wegen $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ folgt daraus schließlich für den Logarithmus einer Wurzel:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x} \quad . \tag{52}$$

Um den Logarithmus einer Wurzel zu bestimmen, kann man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten teilen.

BEISPIELE

1. *Mit Hilfe der Logarithmen* $\log_3 4 = 2$, $\log_3 16 = 4$ *und* $\log_2 64 = 6$ *soll für jedes Logarithmengesetz ein Beispiel gebildet werden.*

   a) $\log_3(4 \cdot 16) = \log_3 4 + \log_3 16 = 2 + 4 = 6 = \log_3 64$

   b) $\log_3(64 : 2) = \log_3 64 - \log_3 2 = 6 - 1 = 5 = \log_3 32$

   c) $\log_3(4^3) = 3 \cdot \log_3 4 = 3 \cdot 2 = 6 = \log_3 64$

   d) $\log_3 \sqrt{16} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 16 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 = \log_3 4$

2. $\log_a(xy^3z^5) = \log_a x + \log_a(y^3) + \log_a(z^5) =$ *[nach (49)]*

   $= \log_a x + 2 \cdot \log_a y + 5 \cdot \log_a z$ *[nach (51)]*

3. $\log_p \frac{p^5q^3}{r\,s^4} = \log_p(p^5q^3) - \log_p(rs^4) =$ *[nach (50)]*

   $= 2 \cdot \log_p p + 3 \cdot \log_p q - (\log_p r + 4 \cdot \log_p s)$ *[nach (49) und (51)]*

   Wegen $\log_p p = 1$ *folgt daraus schließlich:*

   $= 2 + 3 \cdot \log_p q - \log_p r - 4 \cdot \log_p s$

4. $\log_c \frac{1}{k} = \log_c 1 - \log_c k = -\log_c k$ *(denn* $\log_c 1 = 0$*)*

5. $\log_r \sqrt[3]{\frac{a^2 b \cdot \sqrt{c}}{d^3 \cdot \sqrt[4]{e^3}}} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \log_r a + \log_r b + \frac{1}{2} \cdot \log_r c - 3 \cdot \log_r d - \frac{3}{4} \cdot \log_r e\right)$

6. $\log_a x + \log_a y - \log_a z$ *läßt sich zusammenfassen zu* $\log_a \frac{xy}{z}$.

7. $s \cdot \log_x a + \frac{1}{3} \cdot \log_x b - r \cdot \log_x c - \frac{3}{2} \cdot \log_x d = \log_x \frac{a^s \cdot \sqrt[3]{b}}{c^r \cdot \sqrt{d^3}}$

8. $\log_a(x^2 + y^2)$ *läßt sich nicht in einzelne Logarithmen aufspalten, da es kein Logarithmengesetz für den Logarithmus einer Summe gibt.*

9. $\log_a x + \log_b x$ *kann zunächst nicht zusammengefaßt werden, da sich die beiden Logarithmen auf verschiedene Basen beziehen.*

7.2. Die dekadischen Logarithmen

7.2.1. Begriffserklärungen

Die Gesamtheit aller Logarithmen zur Basis a nennt man das *Logarithmensystem zur Basis a*. Als Basis für ein Logarithmensystem ist jede Zahl $a > 0$ außer $a = 1$ geeignet. Für logarithmische Berechnungen eignet sich vor allem das **dekadische Logarithmensystem** (auch *dekadische, Zehner- oder* Briggssche *Logarithmen* genannt), dessen Basis die Zahl 10 ist.
Für die dekadischen Logarithmen schreibt man nach TGL 0–1302 statt $\log_{10} x$ kurz $\lg x$:

$$\boxed{\log_{10} x = \lg x}\,. \tag{53}$$

Es ist dann

$\lg 1 = \lg 10^0 = 0$		$\lg 0{,}1 = \lg (10^{-1}) = -1$		
$\lg 10 = \lg 10^1 = 1$		$\lg 0{,}01 = \lg (10^{-2}) = -2$		
$\lg 100 = \lg 10^2 = 2$		$\lg 0{,}001 = \lg (10^{-3}) = -3$		
$\lg 10000 = \lg 10^4 = 4$	usw.	$\lg 0{,}0001 = \lg (10^{-4}) = -4$		usw.

Aus dieser kurzen Zusammenstellung spezieller dekadischer Logarithmen erkennt man:

Die dekadischen Logarithmen der Zehnerpotenzen sind ganze Zahlen. Die dekadischen Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 liegen zwischen Null und Eins. Die dekadischen Logarithmen der echten Dezimalbrüche sind negativ. Die dekadischen Logarithmen der in der obigen Zusammenstellung nicht aufgeführten Numeri zwischen 0,0001 und 10000 müssen zwischen den Werten -4 und $+4$ liegen.

Die meisten dekadischen Logarithmen sind *irrationale Zahlen*, die man im allgemeinen als gerundete Dezimalzahlen schreibt.
Die besondere Bedeutung der dekadischen Logarithmen beruht auf folgenden Eigenschaften:
Kennt man die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10, so lassen sich daraus die Logarithmen aller anderen Zahlen leicht ermitteln. So folgt beispielsweise aus

$$\sqrt[6]{10} = 10^{\frac{1}{6}} \approx 10^{0{,}\overline{16}} \approx 2{,}1544\,,$$

daß

$$\lg 2{,}1544 = 0{,}\overline{16}$$

ist.
Nach den Logarithmengesetzen ergibt sich daraus

$$\lg 21{,}544 = \lg (10 \cdot 2{,}1544) = \lg 10 + \lg 2{,}1544 = 1 + 0{,}\overline{16} = 1{,}\overline{16}$$

$$\lg 215{,}44 = \lg (100 \cdot 2{,}1544) = \lg 100 + \lg 2{,}1544 = 2 + 0{,}\overline{16} = 2{,}\overline{16}$$

$$\lg 2154{,}4 = \lg (1000 \cdot 2{,}1544) = \lg 1000 + \lg 2{,}1544 = 3 + 0{,}\overline{16} = 3{,}\overline{16} \quad \text{usw.}$$

Entsprechend erhält man

$$\lg 0{,}21544 = \lg \frac{2{,}1544}{10} = \lg 2{,}1544 - \lg 10 = 0{,}33333 - 1$$

$$\lg 0{,}021544 = \lg \frac{2{,}1544}{100} = \lg 2{,}1544 - \lg 100 = 0{,}33333 - 2$$

$$\lg 0{,}0021544 = \lg \frac{2{,}1544}{1000} = \lg 2{,}1544 - \lg 1000 = 0{,}33333 - 3 \quad \text{usw.}$$

In den letzten drei Beispielen hätte man die Differenzen $0{,}33333 - 1$, $0{,}33333 - 2$ und $0{,}33333 - 3$ noch umrechnen können in $-0{,}66667$, $-1{,}66667$ und $-2{,}66667$. Das wäre jedoch sehr unvorteilhaft, denn es ist aus den angeführten Beispielen zu erkennen, daß für die gleiche Ziffernfolge 2–1–5–4–4 im Numerus unabhängig von der Kommastellung immer wieder die Ziffernfolge 3–3–3–3–3 im Logarithmus erscheint.
Es läßt sich allgemein zeigen, daß der dekadische Logarithmus folgende Eigenschaften besitzt:

1. *Jeder dekadische Logarithmus besteht aus zwei Teilen: einer positiven oder negativen ganzen Zahl, der* **Kennziffer,** *sowie einem aus einer Irrationalzahl durch Runden entstandenen echten Dezimalbruch, der* **Mantisse**[1]).
2. *Numeri mit der gleichen Ziffernfolge besitzen unabhängig von der Kommastellung dieselbe Mantisse.*
3. *Ist der Numerus* $\geqq 1$, *so ist die zugehörige Kennziffer eine positive ganze Zahl oder Null.*
4. *Ist der Numerus ein echter Dezimalbruch, so ist die zugehörige Kennziffer eine negative ganze Zahl.*

Für die *Bestimmung der Kennziffer* gilt folgende einfache *Regel:*

Die Kennziffer eines dekadischen Logarithmus stimmt mit der Hochzahl des Stellenwertes der ersten von Null verschiedenen Ziffer des Numerus überein.

BEISPIELE

1. lg 7259 *hat die Kennziffer* 3, *da die erste geltende Ziffer, die* 7, *den Stellenwert* 10^3 *besitzt.*
   $(7259 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0)$
2. lg 46203405 *hat die Kennziffer* 7, *da die* 4 *den Stellenwert* 10^7 *besitzt.*
3. lg 0,024315 *hat die Kennziffer* -2, *da die erste von Null verschiedene Ziffer, die* 2, *den Stellenwert* 10^{-2} *besitzt.*
4. lg 0,000007251 *hat die Kennziffer* -6,
   lg 7 352026869 *hat die Kennziffer* 9,
   lg 2,000004061 *hat die Kennziffer* 0.

7.2.2. Die Logarithmentafel

7.2.2.1. Die Einrichtung der Logarithmentafel

Da sich die Kennziffern der dekadischen Logarithmen leicht ermitteln lassen, enthalten die „Logarithmentafeln" im allgemeinen keine Logarithmen, sondern nur die Mantissen.

[1]) mantissa (lat.) das Bleibende.

Den folgenden Beispielen wurde das Tafelwerk „*Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln*", bearbeitet von Dr. FRITZ MÜLLER, erschienen im VEB Fachbuchverlag, zugrunde gelegt.

Die fünfstelligen Tafeln enthalten die Mantissen aller vierziffrigen Numeri auf fünf Stellen genau. Die ersten drei Ziffern des Numerus findet man in der äußersten linken und der äußersten rechten Spalte, während die vierte Ziffer des Numerus in der obersten bzw. untersten Zeile jeder Seite aufzusuchen ist. Von der Mantisse sind im allgemeinen nur die letzten drei Ziffern aufgeführt. Da die ersten beiden Ziffern der Mantisse für mehrere Zeilen gleich lauten, sind sie der besseren Übersicht wegen nur einmal am Anfang der Zeile gedruckt, in der sie erstmalig auftreten.
Ein Stern (*) vor den letzten drei Ziffern einer Mantisse deutet darauf hin, daß als erste und zweite Ziffer der Mantisse nicht mehr diejenigen Ziffern niederzuschreiben sind, die noch für den Anfang der Zeile galten, sondern bereits die beiden Ziffern, die am Anfang der nächsten Zeile stehen.

BEISPIELE

1. *Ziffernfolge des Numerus*	*Mantisse*	2. *Mantisse*	*Ziffernfolge des Numerus*
5–9–3–7	77357	84466	6–9–9–3
1–0–0–8	00346	93435	8–5–9–7
4–3–0–2	63367	46240	2–9–0–0
5–0–1–1	69992	64777	4–4–4–4
5–0–1–2	70001	56003	3–6–3–1
6–1–6–6	79000	35005	2–2–3–9

(In den letzten Beispielen jeder Aufgabe sind die Sterne vor den Mantissen zu beachten!)

Es sei noch auf die *Tafel der natürlichen Werte und der Logarithmen häufig gebrauchter Zahlen* (Seite 1 bis 2) hingewiesen, mit deren Hilfe sich manche Rechnung abkürzen läßt.

7.2.2.2. Das Aufsuchen der Logarithmen

Wenn der Logarithmus einer Zahl bestimmt werden soll, schreibt man zweckmäßigerweise *erst die Kennziffer* nieder und setzt dann die Ziffernfolge der dem Numerus entsprechenden Mantisse dazu.

BEISPIELE

1. $\lg 27{,}35 = ?$ *Kennziffer:* 1 *Mantisse:* 43696
   $\lg 27{,}35 = 1{,}43696$
2. $\lg 0{,}5847 = ?$ *Kennziffer:* -1 *Mantisse:* 76693
   $\lg 0{,}5847 = 0{,}76693 - 1$
3. $\lg 7945000 = 6{,}90009$ *(Stern beachten!)*
4. $\lg 65170 = 4{,}81405$
5. $\lg 0{,}000012 = 0{,}07918 - 5$
6. $\lg 1{,}446 = 0{,}16017$
7. $\lg 0{,}001518 = 0{,}18127 - 3$

7.2.2.3. Das Aufsuchen des Numerus

Wenn zu einem gegebenen Logarithmus der zugehörige Numerus bestimmt werden soll, ermittelt man aus der Mantisse zunächst die *Ziffernfolge des Numerus* und legt dann die Kommastellung mit Hilfe der Kennziffer fest.

BEISPIELE

1. *Welchen Wert besitzt x, wenn* $\lg x = 3{,}19645$ *ist?*

   Lösung: Zur Mantisse 19645 gehört die Ziffernfolge 1–5–7–2 für den Numerus. Die Kennziffer ist 3, folglich ist $x = 1572$.

2. *Desgl. für* $\lg x = 0{,}64028 - 4$.

   Lösung: Zur Mantisse 64028 gehört die Ziffernfolge 4–3–6–8 für den Numerus (Stern beachten!). Die Kennziffer ist -4, folglich ist $x = 0{,}0004368$.

3. $\lg x = 5{,}80003$ $\quad x = 631000$

4. $\lg x = 0{,}81003$ $\quad x = 6{,}457$ *(Stern beachten!)*

5. $\lg x = 0{,}99078 - 1$ $\quad x = 0{,}9790$

6. $\lg x = 25{,}89020$ $\quad x = 7{,}766 \cdot 10^{25}$

7. $\lg x = 0{,}70001 - 12$ $\quad x = 5{,}012 \cdot 10^{-12}$

7.2.2.4. Interpolation

Die fünfstelligen Logarithmentafeln sind so fein unterteilt, daß auch die *Logarithmen von fünfziffrigen Numeri* mit guter Genauigkeit *durch lineare Interpolation* gefunden werden können.
Besitzt jedoch ein Numerus mehr als fünf geltende Ziffern, so ist er *vor* der Bestimmung des Logarithmus *auf fünf geltende Ziffern zu runden.*
Das Verfahren der linearen Interpolation, das bereits im Abschnitt 3.6.8. erwähnt wurde, soll an einigen Beispielen vorgeführt werden.

BEISPIEL 1

$\lg 356{,}27 = ?$

Lösung: Die Kennziffer ist 2.

In der Logarithmentafel findet man als Nachbarwerte

$$\lg 356{,}20 = 2{,}55169 \quad \text{und} \quad \lg 356{,}30 = 2{,}55182.$$

Die „Tafeldifferenz" (Mantissendifferenz) ist demnach $D = 13$ Einheiten der letzten Stelle. Die zugehörigen Numeri wachsen von 356,20 auf 356,30 um 10 Einheiten der letzten Stelle an.
Auf 10 Numerus-Einheiten kommen demnach 13 Mantissen-Einheiten;
auf 1 Numerus-Einheit kommen demnach 1,3 Mantissen-Einheiten;
auf 7 Numerus-Einheiten kommen demnach $7 \cdot 1{,}3 = 9{,}1 \approx 9$ Mantissen-Einheiten.
(7 Einheiten deshalb, weil sich der gegebene Numerus 356,27 um 7 Einheiten vom in der Tabelle stehenden Numerus 356,20 unterscheidet.) Es ist somit

$$\begin{aligned} \lg 356{,}27 &= 2{,}55169 \\ &+ \quad\;\; 9 \\ \lg 356{,}27 &= 2{,}55178. \end{aligned}$$

Ist D die Tafeldifferenz (Mantissendifferenz), d der gesuchte Mantissenzuwachs und n die fünfte Ziffer des Numerus, so erhält man nach einer entsprechenden Überlegung die Proportion

$$d : D = n : 10,$$

aus der sich

$$d = \frac{D}{10} \cdot n$$

ergibt.

Diese Umrechnung kann man sich jedoch ersparen, indem man die „*Proportionaltäfelchen*" benutzt, die am Rande jeder Seite stehen. In diesen Proportionaltafeln sind für die auf der betreffenden Seite auftretenden Tafeldifferenzen für alle n von 1 bis 9 die zugehörigen d-Werte ausgerechnet. So steht z. B. in der Proportionaltafel für $D = 13$ neben der 7 der im Beispiel 1 berechnete Wert 9,1.

BEISPIEL 2

$\lg 0{,}309028914 = ?$

Lösung: Der Numerus wird zunächst auf fünf geltende Ziffern gerundet:

$$\lg 0{,}309028914 \approx \lg 0{,}30903$$

Kennziffer: -1

Benachbarte Logarithmen:

$$\begin{aligned} \lg 0{,}30900 &= 0{,}48996 - 1 \\ \lg 0{,}30910 &= 0{,}49010 - 1 \\ \text{Tafeldifferenz} \quad D &= \quad 14 \end{aligned}$$

Aus der Proportionaltafel für $D = 14$ entnimmt man den zur fünften Ziffer $n = 3$ gehörenden Mantissenzuwachs $d = 4{,}2 \approx 4$, so daß

$$\begin{aligned} \lg 0{,}30903 &= 0{,}48996 - 1 \\ &+ \quad\quad 4 \\ \lg 0{,}30903 &= 0{,}49000 - 1 \end{aligned}$$

wird.

Die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Logarithmus den zugehörigen Numerus auf fünf Ziffern genau zu bestimmen, löst man entsprechend.

BEISPIEL 3

Welchen Wert besitzt x, wenn $\lg x = 3{,}81500$?

Lösung: In der Tabelle findet man die der gegebenen Mantisse 81500 benachbarten Werte 81498 und 81505, zu denen folgende Ziffernfolgen für die Numeri gehören: 6–5–3–1–0 und 6–5–3–2–0.

Tafeldifferenz: $D = 7$ (Differenz zwischen 81498 und 81505)

Mantissenzuwachs: $d = 2$ (Differenz zwischen 81498 und 81500)

In der Proportionaltafel für $D = 7$ findet man links neben dem dem Mantissenzuwachs $d = 2$ am nächsten liegenden Wert 2,1 die fünfte Ziffer $n = 3$ des Numerus. Somit ist die zur Mantisse 81500 gehörende Ziffernfolge für den Numerus 6–5–3–1–3.
Festlegung des Kommas (Kennziffer ist 3) ergibt

$$x = 6531{,}3.$$

Der Leser bestimme x zur Übung auch ohne Benutzung der Proportionaltafeln!

BEISPIEL 4

Man bestimme x aus $\lg x = 0{,}40000 - 8$!

Lösung: Benachbarte Werte sind:

Mantisse:	39985	Numerus: 2–5–1–1–0
	40002	2–5–1–2–0

Tafeldifferenz: $D = 17$ (Differenz zwischen 39985 und 40002)
Mantissendifferenz: $d = 15$ (Differenz zwischen 39985 und 40000).

Daraus folgt $n = 9$. (Die 15 liegt näher an 15,3 als an 13,6.)

$$x = 2{,}5119 \cdot 10^{-8}$$

7.3. Das Rechnen mit dekadischen Logarithmen

Da durch die Logarithmengesetze jede Rechenart *auf die nächst niedrigere Stufe zurückgeführt* wird, eignen sich die Logarithmen besonders dazu, umfangreiche Zahlenrechnungen zu erleichtern und zu verkürzen.
Bevor die Anwendung der Logarithmen bei den Grundrechenarten erläutert wird, soll an einem Beispiel das *Prinzip aller logarithmischen Berechnungen* ausführlich erläutert werden.

BEISPIEL

Es soll das Produkt $x = 3{,}1479 \cdot 12{,}3165 \cdot 9{,}43$ *berechnet werden.*

Lösung: Überschlag: $x \approx 3 \cdot 12 \cdot 10 = 360$

Statt des Produkts x ermittelt man zunächst den Logarithmus des Produkts. (Statt zu multiplizieren, braucht man nur zu addieren.)

$$\lg x = \lg (3{,}1479 \cdot 12{,}3165 \cdot 9{,}43) =$$
$$= \lg 3{,}1479 + \lg 12{,}3165 + \lg 9{,}43 =$$
$$= 0{,}49802 + 1{,}09047 + 0{,}97451$$
$$\lg x = 2{,}56300$$

Durch den Übergang zum zugehörigen Numerus erhält man das Ergebnis x der gestellten Multiplikationsaufgabe:

$$x = 365{,}59$$

Das Ergebnis stimmt in der Größenordnung gut mit dem Überschlag überein.

Es empfiehlt sich, den Rechengang in folgenden Schritten durchzuführen:

1. Schritt: Überschlag.
2. Schritt: Aufstellen eines *Rechenschemas für die logarithmische Berechnung.* In dieses Schema werden sofort die Numeri und die zugehörigen Kennziffern eingetragen sowie die vorzunehmenden Rechenoperationen vermerkt.

Num	Log	
3,1479	0,	+
12,316	1,	+
9,43	0,	+
x		

3. Schritt: Eintragen der Mantissen und Ausführen der vorgesehenen Rechenoperationen:

Num	Log	
3,1479	0,49802	+
12,316	1,09047	+
9,43	0,97451	+
$x =$	2,56300	

4. Schritt: Bestimmung des Numerus $x = 365{,}59$.
Dieser Wert wird in das Schema eingetragen.

5. Schritt: Vergleich mit der Überschlagsrechnung.

Voraussetzung für ein erfolgreiches Rechnen mit Logarithmen ist die sichere Beherrschung sämtlicher Logarithmengesetze sowie eine peinliche Sauberkeit und Ordnung beim Aufstellen und Ausfüllen der Rechenschemata.

7.3.1. Logarithmische Berechnung von Produkten

BEISPIEL

Man berechne das Produkt

$x = 45{,}3 \cdot 72{,}65 \cdot 0{,}0469 \cdot 0{,}00328 \cdot 27{,}384$!

Lösung: Überschlag: $x \approx 4 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10$

$$x \approx 1400 \cdot 10^{-3} = 14$$

Logarithmische Berechnung:

Num	Log	
45,3	1,65610	+
72,65	1,86124	+
0,0469	0,67117 − 2	+
0,00328	0,51587 − 3	+
27,384	1,43749	+
$x = 13{,}864$	6,14187 − 5 = 1,14187	

Das Ergebnis stimmt gut mit dem Überschlag überein.

Anmerkungen:

1. Auch die negativen Kennziffern sind mit zu addieren!
2. Der Logarithmus des Ergebnisses 6,14187 − 5 wird umgeformt in 1,14187.

7.3.2. Logarithmische Berechnung von Quotienten

BEISPIEL 1

Man berechne den Quotienten $x = \dfrac{378{,}46}{16{,}764}$!

Lösung: Überschlag: $x \approx 400 : 20 = 20$

Logarithmische Berechnung:

Num	Log	
378,46	2,57802	+
16,754	1,22411	−
$x = 22{,}589$	1,35391	

Gute Übereinstimmung mit Überschlag.

BEISPIEL 2

Man bestimme den Quotienten $x = \frac{16{,}754}{378{,}46}$!

Lösung: Überschlag: $x \approx 20 : 400 = 0{,}05$

Logarithmische Berechnung:

Num	Log	
	3 − 2	
16,754	1,22411	+
378,46	2,57802	−
$x = 0{,}044268$	0,64609 − 2	

Anmerkung: Wenn der Nenner größer ist als der Zähler, läßt sich die Subtraktion der Logarithmen nicht ohne weiteres ausführen. Um negative Mantissen zu vermeiden, vergrößert man die Kennziffer des Zählers um so viel, daß sich die Subtraktion durchführen läßt und zieht den vorn hinzugefügten Betrag in Form einer negativen Kennziffer wieder ab. (Vgl. Beispiel 2!)

BEISPIEL 3

Man berechne den Quotienten $x = \frac{0{,}036901}{0{,}00075482}$!

Lösung: Überschlag: $x \approx \frac{350}{7} = 50$ (Kommaverschiebung!)

Logarithmische Berechnung:

Num	Log	
	1 − 3	
0,036901	2,56704 − 2	+
0,00075482	0,87784 − 4	−
$x = 50{,}027$	0,68920 + 1 = 1,68920	

Gute Übereinstimmung mit dem Überschlag.

Anmerkung: Man beachte die Subtraktion der negativen Kennziffern!

Durch geschickte Anordnung des Rechenschemas lassen sich auch zusammengesetzte Ausdrücke, in denen Produkte und Quotienten auftreten, leicht logarithmisch berechnen.

BEISPIEL 4

Man berechne $x = \dfrac{74{,}36 \cdot 0{,}3105 \cdot 93{,}57}{5{,}279 \cdot 0{,}824 \cdot 12{,}62}$!

Lösung: Überschlag: $x \approx \dfrac{7 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{3}}{5 \cdot 1 \cdot 10} = 42$

Logarithmische Berechnung:

Num	Log		
74,36	1,87134	+	
0,3105	0,49206 − 1	+	
93,57	1,97114	+	
Z	3,33454[1])		+
5,279	0,72255	+	
0,824	0,91593 − 1	+	
12,62	1,10106	+	
N	1,73954[1])		−
$x = 39{,}355$	1,59500		

Gute Übereinstimmung mit dem Überschlag.

7.8.8. Logarithmische Berechnung von Potenzen

BEISPIELE

1. *Man berechne* $x = 64{,}25^{5}$!

Lösung:

Num	Log	
64,25	1,80787	· 5
$x = 1{,}0948 \cdot 10^{9}$	9,03935	

2. *Man berechne* $x = 0{,}03725^{4}$!

Lösung:

Num	Log	
0,03725	0,57113 − 2	· 4
$x = 1{,}9254 \cdot 10^{-6}$	2,28452 − 8 = 0,28452 − 6	

3. *Man berechne* $x = \left(\dfrac{37{,}155 \cdot 482{,}39 \cdot 0{,}04692}{485{,}36 \cdot 0{,}5273 \cdot 3{,}36471}\right)^{6}$!

[1]) Da die Zahlenwerte des Zählers und des Nenners nicht interessieren, wurde im Rechenschema der Zähler durch *Z*, der Nenner durch *N* angedeutet.

Lösung:

Num	Log			
37,155	1,57002	+		
482,39	2,68340	+		
0,04692	0,67136 − 2	+		
Z	4,92478 − 2			+
485,36	2,68606	+		
0,5273	0,72206 − 1	+		
3,3647	0,52695	+		
N	3,93507 − 1			−
Br	0,98971 − 1	· 6		
$x =$ 0,86748	5,93826 − 6 = 0,93826 − 1			

7.3.4. Logarithmische Berechnung von Wurzeln

BEISPIELE

1. *Man bestimme* $x = \sqrt[3]{267{,}45}$!

Lösung:

Num	Log	
267,45	2,42724	: 3
$x =$ 6,4429	0,80908	

2. *Man bestimme* $x = \sqrt[7]{1{,}3652 \cdot 10^{-11}}$!

Lösung:

Num	Log	
$1{,}3652 \cdot 10^{-11}$	$\begin{matrix} 3 & -14 \\ \not{6},13519 & -\not{1}\not{1} \end{matrix}$	: 7
$x = 0{,}028047$	0,44788 − 2	

Anmerkung: Da die negative Kennziffer ihrer Bedeutung nach nur eine ganze Zahl sein kann, ist sie gegebenenfalls vor der Division durch den Wurzelexponenten so umzuformen, daß die Division ganzzahlig aufgeht (vgl. Beispiel 2!).

BEISPIEL 3

Man berechne $x = \sqrt[3]{\left(\frac{7{,}35 \cdot 13{,}68 \cdot \sqrt{864{,}3}}{24{,}59 \cdot 93{,}35 \cdot 7082{,}6}\right)^2}$!

Lösung:

Num	Log	
7,35	0,86629	+
13,68	1,13609	+
864,3	2,93666	+
Z	7 − 3 4,93904	+
24,59	1,39076	+
93,35	1,97011	+
7082,6	3,85020	+
N	7,21107	−
Br	0,72797 − 3	· 2
$(Br)^2$	1,45594 − 6	: 3
$x = 0{,}030571$	0,48531 − 2	

7.3.5. Logarithmische Berechnung komplizierterer Ausdrücke

Bei technischen Problemen, vor allem in der Wärmelehre, treten häufig Potenzen auf, deren Hochzahlen Dezimalbrüche sind.

BEISPIELE

1. *Man bestimme* $x = \left(\frac{35{,}24}{24{,}75}\right)^{1{,}4}$!

Lösung:

Num	Log	
35,24	1,54704	+
24,75	1,39358	−
Br	0,15346	· 1,4
$x = 1{,}6400$	0,21484	

2. *Man berechne* $x = \left(\frac{0{,}00372}{0{,}01764}\right)^{1{,}147}$!

Lösung:

Num	Log	
0,00372	0,57054 − 3	+
0,01764	0,24650 − 2	−
Br	0,32404 − 1	· 1,147
$(Br)^{1{,}147}$	0,37167 − 1,147	
	− 0,147 + 0,147	
$x = 0{,}16775$	0,22467 − 1	

Nebenrechnung zur Ermittlung des Produkts (Pr) $0{,}32404 \cdot 1{,}147$:

Num	Log	
0,32404	0,51060 − 1	+
1,147	0,05956	+
Pr: 0,37167	0,57016 − 1	

Anmerkung: Da durch die Multiplikation der negativen Kennziffer mit der gebrochenen Hochzahl ein Dezimalbruch entstand, mußte der Logarithmus des Ergebnisses erst noch so umgeformt werden, daß sich eine ganzzahlige negative Kennziffer ergab. (Vor- und drittletzte Zeile des Rechenschemas der Hauptrechnung.)

BEISPIEL 3

Man berechne $x = \sqrt[2]{\dfrac{16{,}24^3 \cdot \sqrt{276{,}4} \cdot 23{,}4^3}{472{,}5^3 \cdot 23{,}7^4 \cdot \sqrt[3]{982{,}3}}}$!

Lösung:

Num	Log			
$16{,}24^3$	1,21059 · 2	2,42118	+	
$\sqrt{276{,}4}$	2,44154 : 4	0,61039	+	
$23{,}4^3$	1,36922 · 3	4,10766	+	
Z		12 − 5 $\not{1}$,13923		+
$472{,}5^3$	2,67440 · 2	5,34880	+	
$23{,}7^4$	1,37475 · 4	5,49900	+	
$\sqrt[3]{982{,}3}$	2,99224 : 3	0,99741	+	
N		11,84521		−
Br		1 6 $\not{0}$,29402 − $\not{1}$		: 3
$x = 0{,}026999$		0,43134 − 2		

Wenn in einer Aufgabe Summen oder Differenzen auftreten, die sich nicht in ein Produkt umformen lassen, muß die logarithmische Berechnung der Summanden einzeln erfolgen.

BEISPIEL 4

Man berechne $x = \dfrac{\sqrt[3]{0{,}09325} - \sqrt{0{,}004701}}{\sqrt[3]{0{,}000973}}$!

Lösung:

Num	Log			
0,09325	1,96965 − 3	: 3		
$\sqrt[3]{0,09325} = 0,45347$	0,65655 − 1			
0,004701	1,67219 − 4	: 2		
$\sqrt{0,004701} = 0,06857$	0,83610 − 2			
$Z = 0,38490$			0,58535 − 1	+
$\sqrt[5]{0,000973}$	1,98811 − 5	: 5	0,39762 − 1	−
$x = 1,5407$			0,18773	

Anmerkung: Die logarithmische Berechnung der Quadratwurzel ergibt genauer den Wert 0,068566. Da aber die dritte Wurzel nur bis zur fünften Stelle hinter dem Komma genau angegeben werden kann, muß auch die Quadratwurzel auf diese Stellenzahl gerundet werden.

7.4. Ausblick auf andere Logarithmensysteme

Alle bisherigen Aufgaben wurden mit Logarithmen zur Basis 10, mit den dekadischen Logarithmen, gelöst. Dieses Logarithmensystem ist für das praktische Zahlenrechnen deshalb besonders geeignet, weil man für alle Zahlen mit der gleichen Ziffernfolge – unabhängig von der Kommastellung – denselben Zahlenwert aus der Logarithmentafel entnehmen kann und man dazu dann nur noch die zugehörige Kennziffer festlegen muß.
Logarithmensysteme mit einer von 10 verschiedenen Basis besitzen diese vorteilhafte Eigenschaft nicht.
Es sei aber darauf hingewiesen, daß sich jede positive Zahl $\neq 1$ als Basis für ein Logarithmensystem eignet, mit dem man dann nach den gleichen Logarithmengesetzen rechnen kann. Es ist nur zu beachten, daß innerhalb einer Rechnung nicht mit Logarithmen aus verschiedenen Logarithmensystemen gerechnet werden darf. Auf die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Logarithmensystemen soll im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden.

AUFGABEN

180. Die folgenden Potenzgleichungen sind in Logarithmengleichungen umzuwandeln:

a) $2^4 = 16$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ c) $0{,}2^{-3} = 25$ d) $(-5)^3 = 25$

e) $6^{-2} = \frac{1}{36}$ f) $a^{-7} = x$ g) $8^3 = 512$ h) $x^0 = 1$

i) $0{,}01^4 = 0{,}00000001$ k) $(-3)^{-5} = -y$

181. Es ist nachzuprüfen, ob die folgenden Logarithmen stimmen:

a) $\log_4 64 \overset{?}{=} 3$ b) $\log_{10} 100 \overset{?}{=} 2$ c) $\log_{50} 50 \overset{?}{=} 1$ d) $\log_{0,5} 0{,}25 \overset{?}{=} 2$

e) $\log_{0,2} 5 \overset{?}{=} 1$ f) $\log_{0,5} 8 \overset{?}{=} -4$ g) $\log_{10} 0{,}0000001 \overset{?}{=} -7$

h) $\log_{\frac{1}{k}} k^2 \overset{?}{=} -2$ i) $\log_{625} 5 \overset{?}{=} 0{,}25$ k) $\log_2 0{,}7071 \overset{?}{=} -\frac{1}{2}$

182. Die Wurzelgleichungen sind in Logarithmengleichungen umzuwandeln:

a) $\sqrt{64} = 8$ b) $\sqrt[3]{243} = 3$ c) $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ d) $\sqrt[5]{390625} = 5$

e) $\sqrt[c]{k} = q$ f) $\sqrt[3]{a^2} = b$

g) $\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = y$ h) $\sqrt[n]{p^q} = r$ i) $\sqrt[k]{\frac{1}{m}} = n$ k) $\sqrt[r]{\frac{1}{s^3}} = t$

183. Bestimme den Wert folgender Logarithmen:

a) $\log_3 81$ b) $\log_{0.5} \frac{1}{64}$ c) $\log_{10} 0{,}0001$ d) $\log_{0.07} 0{,}0049$ e) $\log_9 6561$

f) $\log_6 6$ g) $\log_4 \frac{1}{4}$ h) $\log_4 0{,}0625$ i) $\log_a \frac{1}{a}$ k) $\log_q \frac{1}{q^n}$

184. Desgl.

a) $\log_4 2$ b) $\log_{81} 3$ c) $\log_{64} 0{,}5$ d) $\log_{100} 0{,}1$ e) $\log_{729} 1$

f) $\log_5 0{,}008$ g) $\log_9 (-81)$ h) $\log_{27} 3$ i) $\log_{70} 8{,}3666$

k) $\log_{3{,}42} \frac{1}{40{,}001688}$

185. Bestimme x aus folgenden Gleichungen:

a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_3 x = 6$ c) $\log_{64} x = \frac{1}{3}$ d) $\log_x 25 = 2$

e) $\log_x 0{,}5 = -1$ f) $\log_3 x = -2$ g) $\log_{\frac{1}{4}} x = -0$ h) $\log_{\frac{1}{9}} x = -0{,}5$

i) $\log_x 0{,}000001 = -6$ k) $\log_x a = 1$

186. Desgl.

a) $\log_9 x = 1$ b) $\log_{0.5} x = 4$ c) $\log_{2401} x = -\frac{1}{4}$ d) $\log_x 2197 = 3$

e) $\log_x \frac{1}{a} = -1$ f) $\log_m m^3 = x$ g) $x = \log_r \sqrt[n]{r}$ h) $\log_2 x = 4$

i) $\log_x 243 = 5$ k) $x = \log_c \frac{1}{c} + \log_{\frac{1}{c}} c$

187. Desgl.

a) $x = \log_p \frac{1}{p^4}$ b) $\log_4 x = 0{,}5$ c) $\log_x 4096 = 6$

d) $x = \log_a \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ e) $\log_3 x = -1$ f) $\log_{64} x = -\frac{1}{3}$

g) $\log_x 19683 = 9$ h) $x = \log_k \frac{1}{k^m}$ i) $\log_x 1 = 0$

k) $x = \log_5 0{,}0016$

188. Für die Basis 2 sind die Logarithmen folgender Zahlen zu bestimmen:

a) 16 b) 64 c) 2 d) 0,5 e) $\frac{1}{32}$

f) 1,4142 g) 0,25 h) -32 i) 1024 k) 1,2599

189. Für die Basis 0,5 sind die Logarithmen folgender Zahlen zu bestimmen:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $\sqrt[5]{2^7}$ e) 16

f) 0,125 g) $\sqrt{2^{10}}$ h) 256 i) 0,5 k) 0,7071

190. Folgende Ausdrücke sind soweit wie möglich aufzuspalten:

a) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{z^3 \cdot \sqrt[4]{u}}$ b) $\log_m \dfrac{3u^2}{4\sqrt{v}}$ c) $\log_p \sqrt{\dfrac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 q^7}}$

d) $\log_{10} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e) $\log_q (x + y)$ f) $\log_x \dfrac{5}{x^2 \cdot y^3}$

g) $\log_y \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{c^2}$ h) $\log_r \left(x \cdot \sqrt[3]{x + y}\right)$ i) $\log_5 (3a)^5$

k) $\log_y \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5 y^3}}$

191. Zu einem einzigen Logarithmus ist zusammenzufassen:

a) $\log_b a + \log_b b - \log_b c - \log_b d$ b) $2 \cdot \log_a x + 3 \cdot \log_a y - \log_a u - 4 \cdot \log_a v$

c) $\frac{1}{2} \cdot \log_z u + \frac{1}{3} \cdot \log_z v$ d) $\frac{1}{2} \cdot (\log_z u + \frac{1}{3} \cdot \log_z v)$

e) $\frac{1}{3} \cdot \log_m a - \frac{1}{4} \cdot \log_m b + \frac{2}{3} \cdot \log_m c - \frac{3}{4} \cdot \log_m d$

f) $p \cdot \log_a q - q \cdot \log_a p$ g) $-k \cdot \log_r x - \frac{1}{k} \cdot \log_r y$

h) $n \cdot \log_r a + (n - 1) \cdot \log_r b + (n - 2) \cdot \log_r c$

i) $\frac{p}{q} \cdot \log_s r - \frac{q}{p} \cdot \log_s s$ k) $\frac{b}{a} \cdot \log_a c + \frac{b}{c} \cdot \log_a a - \frac{c}{a} \cdot \log_a b - 3$

192. Mit Hilfe von $\lg 4{,}036 = 0{,}60595$ sind folgende Logarithmen zu ermitteln:

a) lg 403,6 b) lg 403600 c) lg 0,4036 d) lg 4036

e) lg 0,004036 f) lg 40,36 g) $\lg 0{,}04036^2$ h) $\lg \sqrt{40360}$

i) $\lg 0{,}0004036^3$ k) $\lg \sqrt[3]{4{,}036}$

193. Welche Kennziffern gehören zu den Logarithmen folgender Zahlen:

a) 72,5 b) 0,000004 c) 1,00000063 d) 37120,6

e) 200,75 f) 0,001000000084 g) 0,04736 h) 18003259

i) 9 k) 0,000100054

194. Welche Stellenzahl besitzt der Numerus, wenn die Kennziffer des dekadischen Logarithmus folgenden Wert besitzt:

a) 4 b) 0 c) 17 d) 2 e) -1

f) -3 g) 1 h) n i) -2 k) $-k$

195. Bestimme folgende Logarithmen:

a) lg 60,05 b) lg 947000 c) lg 120400000 d) lg 725,6
e) lg 9333 f) lg 7,766 g) lg 45720 h) lg 10,01
i) lg 0,2239 k) lg 0,005784

196. Desgl.

a) lg 0,001234 b) $\lg(2{,}345 \cdot 10^{-8})$ c) lg 0,9999
d) lg 0,008319 e) lg 0,000045700 f) lg 23
g) lg 1,2 h) lg 0,005 i) lg 0,07009
k) lg 0,000000000000000000000004579

197. Desgl.

a) lg 1956 b) lg 0,2456 c) lg 91200 d) lg 735400
e) $\lg(4 \cdot 10^{6})$ f) lg 0,000000087 g) lg 17,18 h) lg 229,8
i) lg 8,319 k) lg 0,09333

198. Bestimme die Numeri zu folgenden Logarithmen:

a) 4,91286 b) 0,62066 c) 2,51746 d) 0,99978 − 4
e) 0,90956 − 7 f) 12,66001 g) 0,00043 − 5 h) 0,60065 − 1
i) 3,92101 k) 0,68833 − 2

199. Desgl.

a) 0,44654 − 3 b) 1,81358 c) 0,72477 − 10 d) 0,59373 − 8
e) 18,00000 f) 0,01030 − 8 g) 0,20003 − 2 h) 7,77779
i) 0,99991 − 1 k) 2,26269

200. Desgl.

a) 0,92210 b) 0,33304 − 2 c) 0,96459 − 4 d) 5,69399
e) 3,76035 f) 0,55558 − 7 g) 1,93982 h) 0,49248 − 5
i) 0,01072 − 10 k) 0,99961 − 1

201. Bestimme folgende Logarithmen (Berücksichtigung der letzten Stelle durch Interpolation)

a) lg 13574 b) lg 648,72 c) lg 9746500 d) lg 72547
e) lg 813070 f) lg 60,002 g) lg 851174 h) lg 4,0047
i) lg 61659000 k) lg 72,448

202. Desgl.

a) lg 0,0032894 b) lg 0,072648 c) $\lg(2{,}6304 \cdot 10^{-6})$ d) lg 0,12006
e) lg 853,08 f) lg 630,02 g) lg 0,579268431 h) lg 12884
i) lg 0,00000074652 k) lg 0,000001584927403

203. Bestimme die Numeri folgender Logarithmen:

a) 3,81375 b) 5,93780 c) 1,96999 d) 0,50000 e) 2,75000
f) 0,91010 − 3 g) 4,80225 h) 0,79004 i) 0,36250 − 2 k) 0,15000

204. Desgl.

a) 0,10000 b) 4,47648 c) 0,66667 d) 1,71595 e) 3,81950
f) 0,01000 − 4 g) 0,57973 − 4 h) 0,25000 i) 0,99999 − 1 k) 0,33333 − 3

205. Berechne logarithmisch und führe eine Kontrollrechnung mit dem Rechenstab durch:

a) $463{,}27 \cdot 12{,}753$ b) $0{,}1746 \cdot 0{,}563 \cdot 0{,}00387$ c) $28{,}64 \cdot 0{,}0253 \cdot 0{,}187$

d) $933{,}28 \cdot 0{,}00369 \cdot 0{,}02758 \cdot 0{,}18624 \cdot 35{,}271 \cdot 285{,}09$

e) $638{,}45 \cdot 2946{,}4 \cdot 12{,}402 \cdot 0{,}00036 \cdot 0{,}75243$

f) $1765 \cdot 698{,}23 \cdot 3{,}4165 \cdot 0{,}94124 \cdot 0{,}0061447$

g) $0{,}2468 \cdot 13{,}579 \cdot 0{,}8423 \cdot 0{,}00096543$ h) $0{,}00356 \cdot 0{,}0007214 \cdot 98{,}325 \cdot 124{,}25$

206. Desgl.

a) $\dfrac{1247{,}4}{936{,}26}$ b) $\dfrac{1{,}6745}{82946}$ c) $\dfrac{357{,}24}{0{,}005367}$

d) $\dfrac{0{,}004670}{0{,}000579}$ e) $\dfrac{0{,}000013050}{0{,}007004}$ f) $\dfrac{1}{0{,}00823}$

g) $\dfrac{0{,}002746 \cdot 0{,}0003914 \cdot 0{,}9375 \cdot 0{,}00007526}{0{,}0007483 \cdot 0{,}001846 \cdot 0{,}002549 \cdot 0{,}01957}$ h) $\dfrac{36{,}72 \cdot 1746 \cdot 0{,}836}{0{,}2548 \cdot 100{,}35 \cdot 8{,}004}$

i) $\dfrac{1745 \cdot 9472 \cdot 24{,}73 \cdot 1408 \cdot 3724}{9752 \cdot 3784 \cdot 2{,}467 \cdot 358{,}2 \cdot 973{,}5}$ k) $\dfrac{3{,}0006 \cdot 0{,}0072003 \cdot 26{,}007}{34{,}06 \cdot 29{,}031}$

207. Desgl.

a) $0{,}0003862^{3}$ b) $1{,}256^{10}$ c) $0{,}8947^{21}$ d) $1{,}0001^{10\,000}$

e) $\left(\dfrac{0{,}003752 \cdot 738{,}1 \cdot 0{,}4673}{31{,}25 \cdot 0{,}008124 \cdot 0{,}03625}\right)^{2}$ f) $\left(\dfrac{376{,}8 \cdot 4903 \cdot 8006 \cdot 0{,}3645}{20{,}48 \cdot 45004 \cdot 60325 \cdot 0{,}00412}\right)^{4}$

g) $\left(\dfrac{7{,}25 \cdot 3{,}126 \cdot 0{,}172}{0{,}063 : 34{,}62 \cdot 5{,}12}\right)^{8}$ h) $\left(\dfrac{7{,}285 \cdot 24{,}036}{3{,}628}\right)^{3}$

i) $\left(\dfrac{0{,}0837}{0{,}0432 \cdot 6{,}513}\right)^{4}$ k) $\left(\dfrac{0{,}4325 \cdot 7{,}316}{24{,}51 \cdot 0{,}9863}\right)^{5}$

208. Desgl.

a) $\sqrt[3]{186{,}43}$ b) $\sqrt[4]{1957{,}8}$ c) $\sqrt[12]{2}$ d) $\sqrt[4]{12{,}645}$

e) $\sqrt{0{,}000826}$ f) $\sqrt[3]{0{,}000009723}$ g) $\sqrt[6]{0{,}000001642}$ h) $\sqrt{0{,}000000197423}$

i) $\sqrt[10]{0{,}1}$ k) $\sqrt[6]{0{,}0005}$

209. Desgl.

a) $\sqrt{42{,}6 \cdot 97{,}3 \cdot 62{,}1 \cdot 50{,}08}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{17{,}42 \cdot 9{,}235 \cdot 482{,}3}{0{,}00316 \cdot 0{,}0001004}}$

c) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{0{,}382 \cdot 6{,}415 \cdot 106{,}4 \cdot 0{,}8102}{0{,}008573 \cdot 19{,}37 \cdot 72{,}08 \cdot 4{,}03}\right)^{4}}$ d) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{403{,}2 \cdot 186{,}37 \cdot 92{,}14 \cdot 0{,}6245}{641{,}8 \cdot 203{,}5 \cdot 1592 \cdot 0{,}0052}\right)^{5}}$

e) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1{,}293 \cdot 0{,}7602 \cdot 0{,}00349}{36{,}07 \cdot 8{,}603 \cdot 0{,}01007}\right)^{3}}$ f) $\sqrt[8]{\dfrac{1}{79{,}25}}$

g) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{0{,}00736^{3}}}$ h) $\sqrt{\dfrac{62{,}36 \cdot 0{,}725}{1986 \cdot 432{,}3}}$

i) $\sqrt[9]{\left(\dfrac{1926 \cdot 63{,}24 \cdot 0{,}8204}{615 \cdot 8{,}925 \cdot 0{,}00124}\right)^{5}}$ k) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{0{,}608 \cdot 0{,}3007 \cdot 0{,}01264 \cdot 0{,}0073}{14{,}86 \cdot 9{,}072 \cdot 0.8001 \cdot 0{,}006009}\right)^{3}}$

210. Desgl.

a) $\left(\frac{184{,}2}{275{,}9}\right)^{0{,}736}$ b) $\left(\pi \cdot \frac{0{,}7263}{0{,}0625}\right)^{1{,}2}$ c) $\left(\frac{0{,}124 \cdot 0{,}873}{0{,}075 \cdot 0{,}436}\right)^{0{,}641}$ d) $\left(\frac{12{,}53}{84{,}06}\right)^{0{,}448}$

e) $\left(\frac{0{,}001206}{0{,}07924}\right)^{4{,}128}$ f) $0{,}0072^{-0{,}631}$ g) $\left(\frac{3{,}716 \cdot 1{,}419}{6{,}028 \cdot 2{,}513}\right)^{0{,}41}$ h) $\left(\frac{271{,}26}{398{,}04}\right)^{0{,}6372}$

211. Desgl.

a) $\sqrt[3]{\frac{62{,}05^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}0314} \cdot 120{,}04^3}{147{,}2^3 \cdot 40{,}57^4 \cdot \sqrt{25{,}64}}}$ b) $\left(\frac{23{,}5^3 \cdot 17{,}24^2}{79{,}8^3 \cdot 8{,}07^3}\right)^2$

c) $\left(\frac{\sqrt{1{,}076} \cdot \sqrt[3]{0{,}034}}{\sqrt[4]{0{,}6807} \cdot \sqrt[6]{0{,}00082}}\right)^3$ d) $\sqrt[4]{\frac{0{,}06701 \cdot 6{,}304^3}{12{,}635^2 \cdot 1{,}006^4}}$

e) $\sqrt[5]{\left(\frac{31{,}06^2 \cdot 753{,}4^3 \cdot \sqrt[4]{7905} \cdot \sqrt[3]{0{,}0162}}{9{,}658^3 \cdot \sqrt[5]{972{,}3} \cdot \sqrt{0{,}002024} \cdot 86{,}03^4}\right)^4}$

212. Desgl.

a) $\frac{\sqrt[3]{102{,}4} - \sqrt{10{,}24}}{1{,}024^4}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{0{,}074^2 \cdot 6{,}285^3}{0{,}602^3 \cdot \sqrt{596{,}2}} + \frac{1{,}001^5 \cdot 0{,}0072^2}{0{,}095^4 \cdot \sqrt[3]{3{,}001}}\right)^2}$

c) $\left(\frac{7{,}125^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}012}}{2{,}416^3 \cdot \sqrt{0{,}65}} + \sqrt{\frac{36{,}52^3 \cdot 4{,}619^2}{109{,}4^2 \cdot 45{,}07^3}}\right)^4$ d) $\sqrt[3]{\frac{4{,}36^2 \cdot 72{,}53^3}{\sqrt[3]{75{,}6} \cdot 604^2}} + \sqrt{\frac{0{,}076^3 \cdot \sqrt{0{,}00129}}{0{,}0024^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}0426}}}$

e) $\sqrt[3]{\left(\frac{26{,}48^3 \cdot \sqrt{782{,}4} \cdot 0{,}1845^4}{8{,}47^4 \cdot \sqrt[3]{1574} \cdot 0{,}0756^2}\right)^3 + \left(\frac{176{,}4^2 \cdot \sqrt[3]{67{,}23} \cdot 24{,}75^4}{25{,}76^3 \cdot \sqrt{30{,}27} \cdot 603{,}2^2}\right)^2}$

8. Lineare Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten

8.1. Die verschiedenen Arten von Gleichungen

Unter einer **Gleichung** versteht man in der Mathematik die Aussage, daß zwei Ausdrücke *gleich sind*, bzw. die Forderung, daß diese Ausdrücke einander *gleich sein sollen*. Das mathematische Zeichen für eine derartige Gleichheit ist das *Gleichheitszeichen* $=$.
Die Gleichungen werden eingeteilt in *identische Gleichungen*, *Funktionsgleichungen* und *Bestimmungsgleichungen*.

Identische Gleichungen (auch **Identitäten** genannt) sagen *allgemeine mathematische Wahrheiten* aus. So sind z. B.

$$5 + 3 = 3 + 5$$

oder $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

identische Gleichungen.
Treten in einer identischen Gleichung allgemeine Zahlensymbole auf, so gilt die Gleichung *für jeden speziellen Wert* dieser Zahlensymbole.
Zuweilen wird bei Identitäten an Stelle des Gleichheitszeichens $=$ das *Identitätszeichen* $\equiv$ verwendet. ($\equiv$ wird gelesen: „identisch" oder „identisch gleich".)

Funktionsgleichungen stellen eine *eindeutige Zuordnung von veränderlichen Größen* dar. So sind z. B.

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(Fallgesetz)},$$

$$n_1 : n_2 = r_2 : r_1 \qquad \text{(Übersetzungsverhältnis bei Zahnrädern)},$$

$$u = 2(a + b) \qquad \text{(Umfang eines Rechtecks)},$$

$$y = mx + n \qquad \text{(lineare Funktion)}$$

Funktionsgleichungen.
Treten in einer Funktionsgleichung n Veränderliche auf, so darf man für $n - 1$ Veränderliche innerhalb gewisser, durch die Funktionsgleichung bestimmter Grenzen beliebige Zahlenwerte einsetzen. Die n-te Veränderliche kann dann nicht mehr willkürlich gewählt werden, ihr Wert ist durch die Werte der übrigen Veränderlichen und durch die Funktionsgleichung festgelegt.

BEISPIELE

1. *Wählt man im Fallgesetz* $s = \frac{1}{2} g t^2$ *für die veränderliche Größe* t *den Wert* $t = 4\,\mathrm{s}$, *so ist damit der in 4 s zurückgelegte Weg durch*

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot (4\,\mathrm{s})^2 = 78{,}48\ \mathrm{m}$$

eindeutig bestimmt.

2. *Für ein Rechteck mit den Seitenlängen* $a = 23{,}8$ cm *und* $b = 43{,}6$ cm *ist der Umfang durch*

$$u = 2(a + b) = 2 \cdot (23{,}8 + 43{,}6)\text{ cm} = 134{,}8\text{ cm}$$

eindeutig festgelegt.

Bestimmungsgleichungen enthalten neben bekannten Größen auch eine oder mehrere *Unbekannte*. So sind z. B.

$$x + 3 = 4 \quad \text{oder} \quad z^2 + 2z - 8 = 0$$

Bestimmungsgleichungen.
Eine Bestimmungsgleichung *lösen* heißt, diejenigen Zahlen zu suchen, die für die Unbekannte eingesetzt werden können, so daß die Gleichung zu einer Identität wird. Ein spezieller Wert der Unbekannten, für den die Gleichung erfüllt ist, heißt **Lösung** oder **Wurzel** der Gleichung.

BEISPIELE

3. $x + 3 = 4$ *ist eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannte* x. *Setzt man in diese Gleichung für* x *einen willkürlichen Wert ein, so ergibt sich im allgemeinen ein Widerspruch. So erhält man z. B. für* $x = 3$ *die Ungleichung* $3 + 3 \neq 4$. *Dagegen ist für* $x = 1$ *die gegebene Gleichung erfüllt:* $3 + 1 = 4$. $x = 1$ *ist damit die Lösung der Gleichung.*

4. $z^2 + 2z - 8 = 0$ *ist eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannte* z. *Sie besitzt zwei Lösungen:* $z_1 = -4$ *und* $z_2 = 2$; *denn es ist*

$$(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 0$$

und auch $\qquad 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 0.$

Aus einer Bestimmungsgleichung wird eine identische Gleichung, wenn man für die Unbekannte die Lösung der Gleichung einsetzt. Davon wird bei der *Probe* Gebrauch gemacht.

8.2. Das Umformen von Gleichungen

Bezeichnet man die links bzw. rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke als linke bzw. rechte Seite der Gleichung, so kann man die beiden für das Auflösen von Gleichungen nützlichen Sätze formulieren:

1. Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn man die beiden Seiten der Gleichung mit einander vertauscht.
2. Die Lösung einer Bestimmungsgleichung bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Rechenoperation durchgeführt wird.

Satz 1 liefert die einleuchtende Feststellung, daß die Gleichung $a = b$ gleichbedeutend ist mit der Gleichung $b = a$.
Die Gültigkeit des zweiten Satzes soll für die Rechenoperationen erster und zweiter Stufe an einem Beispiel nachgeprüft werden.
Die Gleichung

(a) $\qquad 3x - 5 = 7$

besitzt die Lösung $x = 4$. (Probe!)

Aus dieser Gleichung (a) lassen sich u. a. folgende neue Gleichungen bilden:

durch beiderseitige Addition von 3 die Gleichung

(b) $3x - 2 = 10$,

durch beiderseitige Subtraktion von 3 die Gleichung

(c) $3x - 8 = 4$,

durch beiderseitige Multiplikation mit 3 die Gleichung

(d) $9x - 15 = 21$

und durch beiderseitige Division durch 3 die Gleichung

(e) $x - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$.

(An Stelle der Zahl 3 hätte auch jede andere Zahl zur Addition, Subtraktion usw. verwendet werden können.)

Alle diese aus der Gleichung (a) durch *Umformung* hervorgegangenen Gleichungen (b) bis (e) besitzen dieselbe Lösung $x = 4$ wie die Ausgangsgleichung (a).

Inwieweit der zweite Satz auch auf die Rechenarten dritter Stufe angewendet werden darf, ist noch besonders zu untersuchen.
Auch für die Division muß noch eine Einschränkung gemacht werden. Da die *Division durch Null* nicht erlaubt ist (vgl. Abschnitt 4.1.5.), darf eine Bestimmungsgleichung nicht ohne weiteres durch die Unbekannte oder durch einen Ausdruck, der die Unbekannte enthält, dividiert werden, denn man weiß ja noch nicht, ob dieser Ausdruck für die vorliegende Gleichung vielleicht den Wert Null annimmt. Man darf erst dann durch einen Ausdruck dividieren, der die Unbekannte enthält, nachdem man sich durch die Probe oder durch andere Überlegungen davon überzeugt hat, daß dieser Ausdruck von Null verschieden ist.

8.3. Numerische Lösung von linearen Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten

8.3.1. Begriff der linearen Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten

Jede lineare Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten x läßt sich auf die *allgemeine Form*

$$A x + B = 0 \quad (A \neq 0)$$

bringen. Sie enthält die Unbekannte x *nur in der ersten*, keinesfalls in einer höheren Potenz.
Lineare Gleichungen werden auch als **Gleichungen ersten Grades** bezeichnet, da die Unbekannte in diesen Gleichungen nur in der ersten Potenz auftritt.
Das Glied $A x$, das die Unbekannte enthält, wird *das lineare Glied* der Gleichung genannt, während das von x freie Glied B *das Absolutglied* heißt.

Da die linearen Gleichungen nur in den seltensten Fällen unmittelbar in der allgemeinen Form $Ax + B = 0$ gegeben sind, führt man die gegebene Gleichung mit Hilfe der beiden Sätze aus Abschnitt 8.2. auf immer einfachere Gleichungen mit derselben Lösung zurück, bis man schließlich auf die leicht zu lösende Form $Ax + B = 0$ kommt.

8.3.2. Gleichungen einfachster Form

Enthält eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten auf beiden Seiten sowohl lineare als auch absolute Glieder, so wird die Gleichung zunächst *geordnet*, indem man durch geeignete Additionen und Subtraktionen gleicher Zahlen dafür sorgt, daß die Glieder mit der Unbekannten allein auf der einen Seite, die absoluten Glieder allein auf der anderen Seite der Gleichung stehen. Schließlich wird der nach dem Zusammenfassen bei der Unbekannten verbleibende Zahlenfaktor durch Division beseitigt. Der Rechenvorgang, bei dem die Glieder, die die Unbekannte enthalten, auf eine Seite der Gleichung gebracht werden, wird auch *Isolieren der Unbekannten* genannt.

BEISPIEL 1

$8x + 2 = 24 - 3x$

Lösung: Ordnen der Gleichung durch beiderseitige Addition von $3x - 2$:

$$8x + 2 + 3x - 2 = 24 - 3x + 3x - 2$$

Zusammenfassen: $11x = 22$

Division durch 11: $\underline{\underline{x = 2}}$

Probe:

$$\begin{array}{r|l} 8 \cdot 2 + 2 & 24 - 3 \cdot 2 \\ 16 + 2 & 24 - 6 \\ 18 = 18 & \end{array}$$

Die Gleichung ist richtig gelöst.

Die Rechnung sollte beim Lösen einer Gleichung stets so angeordnet werden, daß Gleichheitszeichen unter Gleichheitszeichen steht. Dadurch wird die Rechnung übersichtlicher.

Beim Lösen einer Gleichung geht man von der *Annahme* aus, *daß die gegebene Gleichung eine Lösung* besitzt und führt an der Gleichung mehrere Umformungen durch, bis man schließlich zu einem Ergebnis kommt. Ob dieses Ergebnis auch tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist, das zeigt die *Probe*, die bei keiner Gleichung unterlassen werden sollte.

Dabei ist es unbedingt erforderlich, die *Probe an der Ausgangsgleichung* durchzuführen und nicht an einem besonders einfachen Zwischenglied der Rechnung, da sonst Rechenfehler, die sich im Verlaufe des Rechenganges eingeschlichen haben, möglicherweise nicht entdeckt werden können. Außerdem ist es ratsam, *jede Seite* der Gleichung bei der Probe *für sich* zu vereinfachen, und zwar so lange, bis die Übereinstimmung beider Seiten zu erkennen ist.

Da am Anfang der Probe die Übereinstimmung beider Seiten in den seltensten Fällen überblickt werden kann, wurde an Stelle des Gleichheitszeichens ein senkrechter Strich gezeichnet, der so lange fortgesetzt wird, bis beide Seiten der Proberechnung offensichtlich gleich oder verschieden voneinander sind.

BEISPIELE

2. $ax + b = bx + a$

Lösung: Ordnen (beiderseitige Subtraktion von b und bx): $ax - bx = a - b$

x ausklammern: $x \cdot (a - b) = a - b$

Division durch $(a - b)$: $x = \frac{a - b}{a - b}$

$\underline{\underline{x = 1}}$

Probe: $a \cdot 1 + b \mid b \cdot 1 + a$

$a + b = b + a$

Die Gleichung ist richtig gelöst.

3. *Die Gleichung $ax + b = bx + a$ ist nach a aufzulösen.*

Lösung: Ordnen (Glieder mit der Unbekannten a auf die linke Seite):

$ax - a = bx - b$

a ausklammern: $a \cdot (x - 1) = b \cdot (x - 1)$

Division durch $x - 1$: $\underline{\underline{a = b}}$

Probe: $bx + b = bx + b$ Probe stimmt.

4. *Die Gleichung*

$s - 6a - 7as + 1 = 7b - 7a - 8as + bs - 6b$

ist nach s aufzulösen.

Lösung: Ordnen (Glieder mit der Unbekannten s auf die linke Seite):

$s - 7as + 8as - bs = 7b - 7a - 6b + 6a - 1$

Zusammenfassen: $s + as - bs = b - a - 1$

s ausklammern: $s(1 + a - b) = b - a - 1$

Division: $s = \frac{b - a - 1}{1 + a - b} = \frac{(-1) \cdot (1 + a - b)}{1 + a - b}$

$\underline{\underline{s = -1}}$

Probe: $-1 - 6a + 7a + 1 \mid 7b - 7a + 8a - b - 6b$

$a = a$ Probe stimmt.

8.3.3. Gleichungen mit Klammerausdrücken

Bevor geordnet werden kann, sind die Klammern aufzulösen.

BEISPIELE

1. $x - (7x - 69) = 2x - (x - 8) - (6x + 50)$

Lösung: Klammern auflösen: $x - 7x + 69 = 2x - x + 8 - 6x - 50$

Ordnen: $x - 7x - 2x + x + 6x = 8 - 50 - 69$

Zusammenfassen: $-x = -111$

Division durch -1: $\underline{\underline{x = 111}}$

Probe: $111 - (777 - 69) \mid 222 - (111 - 8) - (666 + 50)$

$111 - 708 \mid 222 - 103 - 716$

$-597 = -597$

2. $2 \cdot [4 \cdot [6 \cdot (7x - 8) - 5] - 3] - 1 = 241$

Lösung: Innere Klammer auflösen; beiderseits 1 addieren:

$2 \cdot [4 \cdot [42x - 48 - 5] - 3] = 242$

Innere Klammer zusammenfassen; Division durch 2:

$4 \cdot [42x - 53] - 3 = 121$

Beiderseits 3 addieren: $4 \cdot (42x - 53) = 124$

Division durch 4: $42x - 53 = 31$

Beiderseits 53 addieren: $42x = 84$

Division durch 42: $\underline{\underline{x = 2}}$

Probe: $2 \cdot [4 \cdot [6 \cdot (7 \cdot 2 - 8) - 5] - 3] - 1 \mid 241$

$2 \cdot [4 \cdot [6 \cdot 6 - 5] - 3] - 1 \mid 241$

$2 \cdot [4 \cdot 31 - 3] - 1 \mid 241$

$2 \cdot 121 - 1 \mid 241$

$241 = 241$

3. $(a - x)(x - b) = (ab - x)(x - 1)$

Lösung: Klammern ausmultiplizieren:

$ax - ab - x^2 + bx = abx - ab - x^2 + x$

Ordnen: $ax + bx - abx - x = 0$

Ausklammern: $x(a + b - ab - 1) = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

[Bei der Lösung wurde Formel (6) angewendet.]

Probe: $(a - 0)(0 - b) \mid (ab - 0)(0 - 1)$

$a \cdot (-b) \mid ab \cdot (-1)$

$-ab = -ab$ Probe stimmt.

8.3.4. Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen lassen sich die Brüche sofort beseitigen, wenn man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

BEISPIELE

1. $\dfrac{2x + 9}{4} - \dfrac{12x - 3}{44} = \dfrac{4x + 4}{5} - \dfrac{5x - 4}{55}$

Lösung: Hauptnenner: 220. Multiplikation der Gleichung mit 220 ergibt:

$55(2x + 9) - 5(12x - 3) = 44(4x + 4) - 4(5x - 4)$

Beseitigung der Klammern:

$110x + 495 - 60x + 15 = 176x + 176 - 20x + 16$

Ordnen: $110x - 60x - 176x + 20x = 176 + 16 - 495 - 15$

Zusammenfassen: $-106x = -318$

Division durch -106: $\underline{\underline{x = 3}}$

Probe:

$$\frac{15}{4} - \frac{33}{44} \;\Big|\; \frac{16}{5} - \frac{11}{55}$$

$$\frac{15}{4} - \frac{3}{4} \;\Big|\; \frac{16}{5} - \frac{1}{5}$$

$3 = 3$ Probe stimmt.

2. $\dfrac{x+4}{x-4} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Lösung: Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-4)(x+1)$:

$$(x+4)(x+1) = (x-1)(x-4)$$

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

$$10x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

Probe:

$$\frac{+4}{-4} \;\Big|\; \frac{-1}{+1}$$

$-1 = -1$ Probe stimmt.

3. $\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{31}{1-x^2}$

Lösung: Multiplikation mit dem Hauptnenner $(1+x)(1-x)$:

$$3(1+x) - 2(1-x) = 31$$

$$3 + 3x - 2 + 2x = 31$$

$$5x = 30$$

$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Probe:

$$\frac{3}{-5} - \frac{2}{7} \;\Big|\; \frac{31}{-35}$$

$$-\frac{21}{35} - \frac{10}{35} \;\Big|\; -\frac{31}{35}$$

$-\dfrac{31}{35} = -\dfrac{31}{35}$ Probe stimmt.

4. $\dfrac{b+x}{a^2+2ab+b^2} + \dfrac{2x}{a} = \dfrac{x-b}{a^2-b^2} + \dfrac{x+b}{a+b} + \dfrac{x-b}{a-b}$

Lösung: Hauptnenner:

$$(a+b)^2 \cdot (a-b) \cdot a$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$(b+x)\cdot a\cdot(a-b)+2x(a+b)^2(a-b) = \begin{cases} (x-b)\cdot a\cdot(a+b) + (x+b)\cdot a\cdot \\ \cdot(a-b)\cdot(a+b) + (x-b)\cdot(a+b)^2\cdot a \end{cases}$$

Ausmultiplizieren:

$$\left.\begin{array}{l} a^3b+a^3x-ab^2-abx+2a^3x+ \\ +2a^2bx-2ab^2x-2b^3x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^3x+abx-a^2b-ab^2+a^3x-ab^2x+a^2b-ab^2+ \\ +a^3x+2a^2bx+ab^2x-a^2b-2a^2b^2-ab^2 \end{array}\right.$$

Zusammenfassen und ordnen:

$$2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^2 = 2abx + 2ab^2x + 2b^2x$$

Ausklammern: $2ab(a + ab + b^2) = 2bx(a + ab + b^2)$

Division durch $2b(a + ab + b^2)$: $\underline{\underline{x = a}}$

Probe:

$$\frac{b+a}{(a+b)^2} + \frac{2a}{a} \;\Big|\; \frac{a-b}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a+b} + \frac{a-b}{a-b}$$

$$\frac{1}{a+b} + 2 = \frac{1}{a+b} + 1 + 1 \qquad \text{Probe stimmt.}$$

8.3.5. Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen die Unbekannte im Radikanden einer oder mehrerer Wurzeln auftritt.
Um die Glieder, die die Unbekannte enthalten, zusammenfassen zu können, müssen die Wurzeln beseitigt werden. Dies geschieht dadurch, daß beide Seiten der Gleichung eventuell mehrmals) mit der gleichen Hochzahl potenziert werden.

BEISPIELE

1. $\sqrt{2x+5} - 5 = 0$

Lösung: Wenn man beide Seiten der Gleichung sofort quadriert, erhält man:

$$(\sqrt{2x+5} - 5)^2 = 0$$

$$2x + 5 - 10 \cdot \sqrt{2x+5} + 25 = 0 \quad \text{(Binomische Formel beachten!)}$$

Durch das doppelte Produkt tritt die Wurzel, die beseitigt werden sollte, auch noch nach dem Quadrieren auf.
Man stellt daher vor dem Quadrieren die Gleichung so um, daß die Wurzel zunächst allein auf einer Seite der Gleichung bleibt:

$$\sqrt{2x+5} = 5$$

Quadrieren: $2x + 5 = 25$

Auflösen nach x: $\underline{\underline{x = 10}}$

Probe:

$$\sqrt{2 \cdot 10 + 5} - 5 \;\Big|\; 0$$

$$\sqrt{25} - 5 \;\Big|\; 0$$

$5 - 5 = 0$ Probe stimmt.

2. $\sqrt{2x+5} + 5 = 0$

Lösung: Isolieren der Wurzel: $\sqrt{2x+5} = -5$

Quadrieren: $2x + 5 = 25$

Auflösen nach x: $\underline{\underline{x = 10}}$

Probe: $\sqrt{25} + 5 \mid 0$

$5 + 5 \neq 0$

Die Probe stimmt nicht; $x = 10$ ist demnach *keine Lösung* der Gleichung.

Trotz des anscheinend einwandfreien Rechenganges erfüllt das Ergebnis $x = 10$ des zweiten Beispieles nicht die gegebene Gleichung. Die Probe zeigt also in diesem Falle, daß die Ausgangsgleichung keine Lösung besitzt.
Die beiden Gleichungen aus Beispiel 1 und 2 unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen vor der Zahl 5. Durch das Quadrieren aber fällt dieser Vorzeichenunterschied weg, denn es ist ja $(-5)^2 = (+5)^2 = 25$. *Man darf daher aus der Gleichheit zweier Quadrate nicht schließen, daß auch die zugehörigen Grundzahlen gleich sein müssen.* (Das gleiche gilt auch für alle anderen Potenzen mit geradzahligen Hochzahlen.)
Es kann also durchaus wie im Beispiel 2 der Fall eintreten, daß die Gleichung, die durch das Quadrieren entstand, durch das gefundene Ergebnis erfüllt wird, die Ausgangsgleichung dagegen nicht.

Aus diesem Grund gilt der *Satz:*

> Wird während des Auflösens einer Gleichung mit einer geraden Hochzahl potenziert, so ***muß stets*** durch die Probe an der Ausgangsgleichung nachgeprüft werden, ob das gefundene Ergebnis auch die Ausgangsgleichung erfüllt, d. h. Lösung ist.

BEISPIELE

3. $9 \cdot \sqrt{5x + 1} = 20 + 4 \cdot \sqrt{5x + 1}$

Lösung: Zusammenfassen der gleichen Wurzelglieder: $5 \cdot \sqrt{5x + 1} = 20$

Division durch 5: $\sqrt{5x + 1} = 4$

Quadrieren: $5x + 1 = 16$

Auflösen nach x: $\underline{\underline{x = 3}}$

Probe: $9 \cdot \sqrt{16} \mid 20 + 4 \cdot \sqrt{16}$

$9 \cdot 4 \mid 20 + 4 \cdot 4$

$36 = 20 + 16$

Die Probe stimmt. $x = 3$ ist demnach eine Lösung der Ausgangsgleichung.

4. $9 \cdot \sqrt{x - 21} + 7 \cdot \sqrt{x + 11} = 0$

Lösung: Man bringt auf jede Seite der Gleichung eine Wurzel und quadriert dann:

$$9 \cdot \sqrt{x - 21} = -7 \cdot \sqrt{x + 11}$$

$$81 \cdot (x - 21) = 49 \cdot (x + 11)$$

$$\underline{\underline{[x = 70]}}$$

Probe: $9 \cdot \sqrt{49} + 7 \cdot \sqrt{81} \mid 0$

$9 \cdot 7 + 7 \cdot 9 \neq 0$

$x = 70$ ist demnach keine Lösung der gegebenen Gleichung.
(Aus diesem Grunde wurde das Ergebnis $x = 70$ in Klammern eingeschlossen.)

5. $\sqrt{9x - 17} - 3 \cdot \sqrt{x - 4} = 1$

Lösung: Man verteilt die Wurzeln gleichmäßig auf beide Seiten der Gleichung (warum?):

$$\sqrt{9x-17} = 1 + 3\cdot\sqrt{x-4}$$

und quadriert dann (Binomische Formel beachten!):

$$9x - 17 = 1 + 6\cdot\sqrt{x-4} + 9(x-4).$$

Damit durch das erneute Quadrieren auch die letzte Wurzel wegfällt, muß sie vorher isoliert werden:

$$18 = 6\cdot\sqrt{x-4}$$

Kürzen: $3 = \sqrt{x-4}$

Quadrieren: $9 = x - 4$

$$\underline{\underline{x = 13}}$$

Probe: $\sqrt{117-17} - 3\cdot\sqrt{13-4} \mid 1$

$\sqrt{100} - 3\cdot\sqrt{9} \mid 1$

$10 - 9 = 1$

$x = 13$ ist Lösung der Gleichung.

6. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x-7} - \sqrt{x+14} = 0$

Lösung: Gleichmäßige Verteilung der Wurzeln auf beide Seiten:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5} = \sqrt{x-7} + \sqrt{x+14}$$

Quadrieren: $x - 2 + 2\cdot\sqrt{(x-2)(x+5)} + x + 5 = x - 7 + 2\cdot\sqrt{(x-7)(x+14)} + x + 14$

Ordnen: $2\cdot\sqrt{x^2+3x-10} - 4 = 2\cdot\sqrt{x^2+7x-98}$

Kürzen: $\sqrt{x^2+3x-10} - 2 = \sqrt{x^2+7x-98}$

Quadrieren:

$$x^2 + 3x - 10 - 4\cdot\sqrt{x^2+3x-10} + 4 = x^2 + 7x - 98$$

Ordnen: $92 - 4x = 4\cdot\sqrt{x^2+3x-10}$

Kürzen: $23 - x = \sqrt{x^2+3x-10}$

Quadrieren: $529 - 46x + x^2 = x^2 + 3x - 10$

$$\underline{\underline{x = 11}}$$

Probe: $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{4} - \sqrt{25} \mid 0$

$3 + 4 - 2 - 5 = 0$ $\quad x = 11$ ist Lösung.

7. $b\cdot\sqrt[5]{\frac{x}{a} - b} = a\cdot\sqrt[5]{a - \frac{x}{b}}$

Lösung: Damit die Wurzeln wegfallen, wird die Gleichung beiderseits in die fünfte Potenz erhoben:

$$b^5\cdot\left(\frac{x}{a} - b\right) = a^5\cdot\left(a - \frac{x}{b}\right)$$

$$\frac{b^5 x}{a} - b^6 = a^6 - \frac{a^5 x}{b}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ab:

$$b^6x - ab^7 = a^7b - a^6x$$

Ordnen: $a^6x + b^6x = a^7b + ab^7$

Ausklammern:

$$x \cdot (a^6 + b^6) = ab(a^6 + b^6)$$

$$\underline{\underline{x = ab}}$$

Probe: $b \cdot \sqrt[6]{b - b} \mid a \cdot \sqrt[6]{a - a}$

$0 = 0$ $x = ab$ ist Lösung.

8.3.6. Das Umstellen von Formeln

Kennt man von einem Stromkreis die Spannung U und den Widerstand R, so kann mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes

(a) $$U = R \cdot I$$

die Stromstärke I bestimmt werden. Dazu muß die Formel (a) *nach I „umgestellt"* werden:

(b) $$I = \frac{U}{R}$$

Entsprechend würde man bei bekanntem U und I den unbekannten Widerstand R zu

(c) $$R = \frac{U}{I}$$

ermitteln können.
Das *„Formelumstellen"* ist mithin nichts anderes, als eine gegebene Gleichung (die Formel) nach einer unbekannten Größe aufzulösen.

BEISPIELE

1. *Die Formel $Vp = V_0p_0(1 + \alpha t)$ ist nach α umzustellen.*

Lösung: $V_0p_0(1 + \alpha t) = Vp$

Ausmultiplizieren: $V_0p_0 + V_0p_0\alpha t = Vp$

Ordnen: $V_0p_0\alpha t = Vp - V_0p_0$

Auflösen nach α: $$\underline{\underline{\alpha = \frac{Vp - V_0p_0}{V_0p_0t}}}$$

2. *Die Formel $I = \frac{nU}{nR_i + R_a}$ ist nach n umzustellen.*

Lösung: $$I = \frac{nU}{nR_i + R_a}$$

Nenner beseitigen: $I(nR_i + R_a) = nU$

Ausmultiplizieren: $InR_i + IR_a = nU$

Ordnen: $IR_a = nU - nIR_i$

n ausklammern: $IR_a = n(U - IR_i)$

Auflösen nach n: $$\underline{\underline{n = \frac{IR_a}{U - IR_i}}}$$

3. *Die Formel* $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ *ist nach* h_2 *aufzulösen.*

Lösung: $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

Quadrieren: $v^2 = 2gh_1 - 2gh_2$

Ordnen: $2gh_2 = 2gh_1 - v^2$

Auflösen nach h_2: $h_2 = \frac{2gh_1 - v^2}{2g}$

8.3.7. Anwendungen

Viele Anwendungsaufgaben lassen sich mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen lösen. Zur Lösung einer Anwendungsaufgabe (Textgleichung) empfiehlt es sich, folgenden Weg einzuschlagen:

a) Feststellung, welche Größe gesucht ist;

b) wenn möglich: Überschlag, in welcher Größenordnung das gesuchte Ergebnis sein muß;

c) Festlegung einer Benennung der gesuchten Größe;

d) Umformung der in der Aufgabenstellung gemachten Angaben über die Beziehungen zwischen den bekannten und den unbekannten Größen in eine mathematische Gleichung (Lösungsansatz);

e) Lösung der aufgestellten Bestimmungsgleichung; (dabei werden häufig die auftretenden Maßeinheiten, die vorher in Übereinstimmung zu bringen sind, weggelassen, d.h., es wird nur mit reinen Zahlenwerten gerechnet);

f) Zusammenfassen des gefundenen Ergebnisses in einem Antwortsatz und

g) Überprüfen der Lösung an Hand der Aufgabenstellung.

Allgemeingültige Regeln für das Aufstellen des Lösungsansatzes lassen sich nicht angeben. Eine Sicherheit im Ansetzen der Gleichungen läßt sich nur durch gründliches Üben erreichen.

BEISPIELE

1. *Die Summe dreier Zahlen, von denen die folgende jeweils um 3 größer ist als die vorhergehende, ist 63. Wie heißen die drei Zahlen?*

Lösung: Die erste der drei Zahlen sei x. Da die beiden anderen jeweils um 3 größer sein sollen, muß die zweite $x + 3$ und die dritte $x + 6$ sein. – Die Summe der drei Zahlen soll 63 ergeben, folglich ergibt sich die Gleichung

$$x + (x + 3) + (x + 6) = 63,$$

woraus $x = 18$ folgt.

Die drei gesuchten Zahlen sind demnach 18, 21 und 24.

Probe: Jede folgende Zahl ist um 3 größer als die vorhergehende, die Summe der drei Zahlen ist $18 + 21 + 24 = 63$. Die in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen sind demnach alle erfüllt.

2. *Unter drei Personen* A, B *und* C *sollen* 1000 MDN *so verteilt werden, daß* A *doppelt soviel wie* B *und* B *dreimal so viel wie* C *erhält. Wieviel erhält jede Person?*

Lösung: C erhält x MDN. Dann erhält B $3x$ MDN (dreimal so viel wie C) und A $2 \cdot 3x = 6x$ MDN (doppelt so viel wie B).
Die drei Anteile müssen zusammen 1000 MDN ergeben:

$$6x + 3x + x = 1000$$

$$x = 100$$

Ergebnis: C erhält 100 MDN, B 300 MDN und A 600 MDN.

Die Probe, ob das gefundene Ergebnis mit den Forderungen der Aufgabe übereinstimmt, sei dem Leser überlassen.

3. 10 kg *einer Legierung aus Silber und Zinn besitzen eine Dichte* $\varrho = 9\ \mathrm{kg/dm^3}$. *Wieviel Silber und wieviel Zinn enthält die Legierung?* ($\varrho_{Ag} = 10{,}2\ \mathrm{kg/dm^3}$; $\varrho_{Sn} = 7{,}3\ \mathrm{kg/dm^3}$)

Lösung: Die Legierung enthält x kg Silber, damit verbleiben dann für das Zinn $(10 - x)$ kg.

x kg Silber besitzen das Volumen $\quad V_{Ag} = \dfrac{x\,\mathrm{kg}}{\varrho_{Ag}}$.

$(10 - x)$ kg Zinn besitzen das Volumen $\quad V_{Sn} = \dfrac{(10 - x)\,\mathrm{kg}}{\varrho_{Sn}}$.

10 kg der Legierung besitzen das Volumen $V = \dfrac{10\,\mathrm{kg}}{\varrho}$.

Das Volumen des Silbers und das des Zinns ergeben zusammen das Volumen der Legierung. Also muß gelten

$$\frac{x\,\mathrm{kg}}{\varrho_{Ag}} + \frac{(10 - x)\,\mathrm{kg}}{\varrho_{Sn}} = \frac{10\,\mathrm{kg}}{\varrho}.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man

$$\frac{x}{10{,}2} + \frac{10 - x}{7{,}3} = \frac{10}{9},$$

woraus $\quad x = 6{,}644 \quad$ folgt.

Ergebnis: Die Legierung enthält 6,644 kg Silber und 3,356 kg Zinn. Probe!

4. *Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste allein in* 3, *durch die zweite allein in* 4 *und durch die dritte allein in* 6 *Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn alle drei Röhren gleichzeitig laufen?*

Lösung: Wenn alle drei Röhren gleichzeitig laufen, dauert die Füllung x Stunden.

Die erste Röhre füllt in 1 Stunde $\frac{1}{3}$ des Behälters,

die zweite Röhre füllt in 1 Stunde $\frac{1}{4}$ des Behälters und

die dritte Röhre füllt in 1 Stunde $\frac{1}{6}$ des Behälters.

Laufen alle drei Röhren gemeinsam, so füllen sie in 1 Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters. Da die Summe der Teilfüllungen von A, B und C innerhalb einer Stunde mit der Gesamtfüllung während der gleichen Zeit übereinstimmen muß, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x},$$

woraus $$x = \frac{4}{3}$$ folgt.

Ergebnis: Wenn alle drei Röhren gemeinsam laufen, dann ist der Behälter in $\frac{4}{3}$ Stunden (= 1 Stunde, 20 Minuten) gefüllt. Probe!

5. *Um 7 Uhr fährt ein LKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit* $v_1 = 40$ km/h *nach dem* $e = 225$ km *entfernten Ort B ab. Ihm fährt von B aus um* 8.30 *Uhr ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit* $v_2 = 70$ km/h *entgegen. Wann und wo begegnen sich die beiden Fahrzeuge?*

Lösung: Die Fahrzeuge begegnen sich nach einer gewissen Zeit t nach Abfahrt des LKW. In dieser Zeit t legt der LKW eine Strecke

$$s_1 = v_1 \cdot t$$

zurück. – Der PKW fährt $1\frac{1}{2}$ Stunden später ab als der LKW, also ist er bis zur Begegnung nur $t - 1{,}5$ Stunden unterwegs. Während dieser Zeit legt er die Strecke

$$s_2 = v_2 \cdot (t - 1{,}5\ \text{h})$$

zurück. Da die beiden Fahrzeuge einander entgegenfahren, muß die Summe der Teilstrecken $s_1 + s_2$ gleich der Entfernung e der beiden Orte A und B sein, also

$$s_1 + s_2 = e$$

oder $$v_1 \cdot t + v_2 \cdot (t - 1{,}5\ \text{h}) = e.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich daraus

$$40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot (t - 1{,}5\ \text{h}) = 225\ \text{km},$$

woraus $$t = 3\ \text{h}$$

folgt.

Ergebnis: Die beiden Fahrzeuge treffen sich 3 Stunden nach der Abfahrt des LKW, also um 10.00 Uhr. Der Treffpunkt liegt 120 km von A entfernt. Probe!

6. *In einem Stromkreis mit* 24 V *Spannung besitzt ein Zweig* AB *einen Widerstand* $R_1 = 6\,\Omega$. *Schaltet man zwischen* A *und* B *einen weiteren Widerstand* $R_2 = 2\,\Omega$ *parallel, so steigt die Stromstärke auf* 4 A *an. Wie groß ist der Widerstand des Stromkreises ohne den des Zweiges* AB*?*

Lösung: Nach dem Ohmschen Gesetz ist

$$U = R \cdot I.$$

Dabei setzt sich der Widerstand R zusammen aus dem Widerstand R_p der Parallelschaltung von R_1 und R_2 sowie aus dem noch unbekannten Widerstand R_3 des restlichen Stromkreises.

Der Widerstand R_p der Parallelschaltung ergibt sich aus

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\Omega}$$

zu $$R_p = \frac{3}{2}\,\Omega\,.$$

Der Gesamtwiderstand des Stromkreises ist demnach

$$R = R_p + R_3 = \frac{3}{2}\,\Omega + R_3.$$

Setzt man diesen Widerstand für R in das OHMsche Gesetz ein, so ergibt sich mit $U = 24\,\mathrm{V}$ und $I = 4\,\mathrm{A}$ die Gleichung

$$24\,\mathrm{V} = \left(\frac{3}{2}\,\Omega + R_3\right) \cdot 4\,\mathrm{A},$$

aus der sich

$$R_3 = \frac{9}{2}\,\Omega = 4{,}5\,\Omega$$

ergibt.

Ergebnis: Der gesuchte Widerstand beträgt $4{,}5\,\Omega$. Probe!

8.4. Das Rechnen mit Ungleichungen

Sind a und b zwei beliebige reelle Zahlen, so bedeutet das Zeichen

$$a < b,$$

daß die Zahl a kleiner ist als die Zahl b.

Das Zeichen $a < b$ wird gelesen: „a kleiner als b". Entsprechend bedeuten:

$a \leqq b$ „a kleiner oder gleich b",

$a \geqq b$ „a größer oder gleich b",

$a > b$ „a größer als b" und

$a \neq b$ „a verschieden von b".

Wird die Zahlengerade in der üblichen Lage gezeichnet, so liegt die kleinere von zwei Zahlen stets links von der größeren. Es ist also beispielsweise

$$3 < 7, \qquad -10 < -2, \qquad -3 > -7, \qquad +10 > -12.$$

Beim Rechnen mit Ungleichungen ist stets äußerste Vorsicht am Platze. Es gelten die folgenden *Regeln*:

Regel 1:

Werden die beiden Seiten einer Ungleichung vertauscht, so ist das Ungleichheitszeichen umzukehren.

Aus $a < b$ folgt demnach $b > a$ und umgekehrt.
Die Regel ist ohne weiteres einzusehen.

BEISPIEL 1

Es ist $-3 < +2$ *und* $+2 > -3$.

Regel 2:

Eine Ungleichung bleibt bestehen, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert bzw. subtrahiert.

Mit $a < b$ ist demnach auch $a \pm c < b \pm c$.

BEISPIEL 2

Es ist $-2 < +1$. *Daraus folgen u.a.*

$-2+3 < +1+3$ *oder* $-2-3 < +1-3$

$1 < 4$ $\qquad\qquad$ $-5 < -2$

Regel 3:

Eine Ungleichung bleibt erhalten, wenn man beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert bzw. durch die gleiche positive Zahl dividiert. Multipliziert man (dividiert man) beide Seiten durch die gleiche negative Zahl, so ist das Ungleichheitszeichen umzukehren.

Es ist also mit $a < b$ auch $ac < bc$, wenn $c > 0$, dagegen

$$ac > bc, \text{ wenn } c < 0.$$

BEISPIEL 3

Es ist $-4 < +3$.

Multiplikation mit $+2$: $-8 < +6$; *Ungleichheitszeichen bleibt.*

Division durch $+2$: $-2 < +1{,}5$; „ „

Multiplikation mit -2: $+8 > -6$; *Ungleichheitszeichen ändert sich.*

Division durch -2: $+2 > -1{,}5$; „ „ „

Regel 4:

Besitzen beide Seiten einer Ungleichung dasselbe Vorzeichen, so ist das Ungleichheitszeichen umzukehren, wenn man beiderseits den Kehrwert bildet.

Mit $0 < a < b$ bzw. $a < b < 0$ ist demnach $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

BEISPIEL 4

a) *Es ist* $3 < 5$, *aber* $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

b) *Es ist* $-3 > -5$, *aber* $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{5}$.

Für den Fall, daß die beiden Seiten einer Ungleichung verschiedene Vorzeichen besitzen, bleibt das Ungleichheitszeichen bei der Kehrwertbildung erhalten.

Regel 5:

Zwei Ungleichungen mit gleichartigen Ungleichheitszeichen dürfen addiert, nicht aber subtrahiert werden.

Aus $a < b$ und $c < d$ folgt demnach auch $a + c < b + d$, aber nicht unbedingt $a - c < b - d$.

BEISPIEL 5

Es ist $-2 < +3$ *und* $-8 < -2$.
Addiert man die beiden Seiten der Ungleichungen, so ergibt sich

$$(-2) + (-8) < (+3) + (-2)$$
$$-10 < +1;$$

das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten.
Subtrahiert man dagegen beide Seiten der Ungleichungen voneinander, so erhielte man links $+6$ *und rechts* $+5$. *Es ist aber* $+6 > +5$. *Das Ungleichheitszeichen ist in diesem Falle also umzukehren.*

Regel 6:

Mit $a < b$ und $c < d$ ist auch $ac < bd$, wobei a oder c negativ sein kann, während die anderen Zahlen alle positiv sein müssen.

BEISPIELE

6. *Es ist* $-2 < +5$ *und* $+3 < +4$.
Multipliziert man die beiden Seiten der Ungleichungen miteinander, so ergibt sich

$$-6 < +20.$$

Das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten.

7. *Für welche Werte von* x *gilt die Ungleichung*

$5x - 2 < 2x + 10$?

Lösung: Man subtrahiert auf beiden Seiten der Ungleichung $2x - 2$ (Regel 2), damit die Glieder mit der Unbekannten x allein auf einer Seite der Ungleichung stehen:

$$(5x - 2) - (2x - 2) < (2x + 10) - (2x - 2)$$
$$3x < 12$$

Division durch $+3$ ergibt (Regel 3)

$$x < 4.$$

Wenn es also x-Werte gibt, für die die Ungleichung erfüllt ist, dann muß $x < 4$ sein. Die *Probe* muß schließlich noch sichern, daß dies auch tatsächlich der Fall ist. (Der Leser führe die Probe selbst durch!)

AUFGABEN

213. a) $x + 17 = 21$ b) $64 + x = 89$ c) $x + 35 = 17$

d) $14 + 2x = 11 - 7x$ e) $5 - x = 2$ f) $4x - 13 = 3x$

g) $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{3}{4}x - 6$ h) $ax + b = c - dx$ i) $\frac{5}{7}x + 4\frac{1}{9} = \frac{37}{9}$

k) $9ax - 5a = 6ax + 7a$

214. a) $13 - (5x + 2) + (x - 7) = 8x - 20$

b) $5(2u - 3) + (4 - u)3 - 2(u + 7) = (2u - 4) + 2(6 - u)$

c) $2[18 - 3(7x - 5)] = 3[5x + 2(9 - 4x)]$

d) $51a - 2\{3x + 5[2a - 3(2x - 7a) + 4x] - 3[(5x - 2a) - 2(3x + a)]\} = 72a - 3x$

e) $0{,}3(4 - 5x) - 0{,}5(6 - 7x) + 0{,}7(8 - 9x) = 1{,}1 - 4x$

f) $3(5y - 7a) + 5(3b - 7y) = 7(5b - 3a)$

g) $a - (a + b)x = (b - a)x - (c + bx)$

h) $9[3x - 2(4x + 3) + 7] - 2[5(x + 9) - 6x + 1] = (5 - 8x)3 + 2x$

i) $17(2 - 3t) - 8(1 - 7t) = 5(t + 12)$

k) $7(2z - 1) - 6(11 - z) = 3(z + 4)$

215. a) $(x - 5)(x - 7) = (x + 4)(x - 9) - 13$

b) $(3x - 2)(x + 7) - (4x - 1)(1 + x) = (x - 2)(5 - x)$

c) $(x + 4b)(x + 3a + 6b) - 3b(x + 10b) = (x + 6b)(3a + x - 5b) + 4b(a + x + 3b)$

d) $(x - a)^2 + (x - b)^2 - (x - a)(x - b) = x^2 + a^2 + b^2$

e) $(4t + 3)^2 + (7t - 3)^2 = (8t - 7)^2 + (t + 7)^2$

f) $(a + x)(b - x) = (a - x)(b + x)$

g) $5u(x + 2v) - 4v(2x - 3u) - 3u(2x - u) + 4v(3x - 10u - 10v) = -64v^2$

h) $(3y - 10)(10 + 3y) - (2y + 3)^2 = 5y^2 - 157$

i) $(1{,}2x + 0{,}56)(0{,}6x - 0{,}22) = (0{,}9x + 0{,}92)(0{,}8x - 0{,}46)$

k) $(3z - 5a)(8z - a) - (4z - 3a)(5z - 7a) - (2z - 5a)(2z + a) = 5a^2$

216. a) $\dfrac{x + 1}{15} + \dfrac{2x - 10}{5} = 3 - \dfrac{3x - 16}{3}$

b) $1 - \dfrac{3}{5}(2x + 11) = \dfrac{4x - 3}{20} - \dfrac{1}{12}(4x - 5)$

c) $\dfrac{5x - 6}{10} - \dfrac{9 - 10x}{14} = \dfrac{3x - 4}{5} - \dfrac{3 - 4x}{7}$

d) $\dfrac{7x - 2}{3} - \dfrac{4}{5}(x + 3) + 6 = \dfrac{3(x + 2)}{2}$

e) $\dfrac{ax - b^2}{b} + \dfrac{bx - a^2}{a} = \dfrac{a - ab}{b} + \dfrac{b - ab}{a}$

f) $\dfrac{a}{x} + b = \dfrac{b}{x} + a$

g) $\dfrac{10 + x}{24x} - \dfrac{x + 4}{12x} = 1 - \dfrac{x + 3}{8x}$

h) $\dfrac{7}{2x} - \dfrac{8}{3x} + \dfrac{9}{4x} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{31 - 7x}{6x}$

i) $\dfrac{3a - 5b}{15ab} + \dfrac{a + 7x}{12ax} + \dfrac{5b + 4x}{20bx} + \dfrac{3}{4a} + \dfrac{3}{5b} - \dfrac{4}{3x} = 0$

k) $\dfrac{1 + x}{1 - x} = \dfrac{a}{b}$

217. a) $\frac{x+4}{7x+1} = \frac{x+6}{7x+6}$

b) $\frac{a-bx}{ax+b} = \frac{a}{b}$

c) $\frac{5x-1}{2x-1} - \frac{5x+2}{4x-2} - \frac{4x+1}{6x-3} + \frac{7x-2}{8x-4} = 1$

d) $\frac{5x+3}{7x-9} - \frac{4x+9}{9-7x} = 2$

e) $\frac{7x-1}{x-2} - \frac{6x-3}{3x-6} + \frac{8x-5}{5x-10} - \frac{9x-7}{7x-14} = 0$

f) $\frac{x+3}{x+1} - \frac{2x+5}{x+2} - \frac{x-5}{3x+3} + \frac{4x-3}{3x+6} = 0$

g) $\frac{ax}{a+b} + \frac{bx}{a-b} = a^2 + b^2$

h) $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{2x+4}{1-x} + \frac{2x-9}{x^2-1} = \frac{4-8x}{1-x^2}$

i) $\frac{1}{8-4x} - \frac{1}{8} - \frac{x+5}{16-4x^2} + \frac{x}{16+8x} = 0$

k) $\frac{3x-5}{x+2} + \frac{7x-10}{x+1} + \frac{x+99}{x^2+3x+2} = 10$

218. Stelle die Formeln um:

a) $p(1+q) = m$ nach q

b) $l_t = l_0(1+\alpha t)$ nach α

c) $Q = Gc(t_1 - t_2)$ nach t_2

d) $g = a + (n-1)d$ nach n

e) $s = \frac{g}{2}(2t-1)$ nach t

f) $\frac{1+m}{1-m} = \frac{a}{b}$ nach m

g) $\frac{r+f}{r_1+a+f} = \frac{r}{r_1}$ nach f

h) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ nach y

i) $r^2 = s^2 + (r-p)^2$ nach r

k) $\frac{a-b(a-c)}{a+d} = 1$ nach a

219. a) $\sqrt{x} = 13$

b) $3\sqrt{4x} - 7 = 0$

c) $\frac{4}{5}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{5} = 1$

d) $4\sqrt[3]{6x-1} + 5 = 0$

e) $\sqrt[3]{x-2} = a + 2$

f) $\sqrt[4]{7x+4} + 3 = 0$

g) $\sqrt{19 + \sqrt{3x+15}} = 5$

h) $6\sqrt{4-x} - 9 = 7 + 2\sqrt{4-x}$

i) $\sqrt{85 - 4\sqrt{19x+5}} = 3\sqrt{5}$

k) $5\sqrt{2x+7} = \sqrt{50x+175}$

220. a) $4\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x+10} = 0$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

c) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5} - 2 = 0$

d) $\sqrt{x-3} - 1 = \sqrt{x-10}$

e) $\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x-3} = 17$

f) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+9} = 0$

g) $3\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-13} = 5\sqrt{x-10}$

h) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-18} - \sqrt{x-25}$

i) $\sqrt{5x+1} + 2\sqrt{6x-5} - \sqrt{6x-5} - 1 = 0$

k) $\frac{1}{4}\sqrt{3x-5} + \sqrt{5x+2-3\sqrt{3x-5}} = 6$

221. a) Welche Zahl muß man zu 87,3 addieren, damit man 102,4 erhält?

b) Welche Zahl muß man von $53\frac{2}{3}$ subtrahieren, damit man $17\frac{1}{6}$ erhält?

c) Welche Zahl muß man um $\frac{7}{27}$ vermindern, damit man $\frac{5}{6}$ erhält?

d) Welche Zahl muß mit 9,7 multipliziert werden, damit man 652,325 erhält?

e) Mit welcher Zahl muß man $5\frac{1}{3}$ multiplizieren, damit man $\frac{1}{2}$ erhält?

f) Welche Zahl muß man durch 17,29 teilen, damit man 1,3 erhält?

g) Durch welche Zahl muß man 31,4 dividieren, damit man $-\frac{5}{6}$ erhält?

h) Welche Zahl liegt in der Mitte zwischen 527,2 und $916\frac{3}{4}$?

i) Addiert man zu $33\frac{5}{8}$ eine Zahl, so erhält man dasselbe wie bei der Subtraktion der gleichen Zahl von $55\frac{7}{8}$. Wie heißt diese Zahl?

k) Um welche Zahl muß man 427,96 vermindern, damit man das Dreifache der gesuchten Zahl erhält?

222. a) Die vierfache Summe des Doppelten und des Dreifachen einer Zahl ist gleich der Differenz des Siebenfachen dieser Zahl und 39. Wie heißt die Zahl?

b) Welche Zahl ergibt versechsfacht $2\frac{3}{4}$ mehr, als wenn man sie halbiert?

c) Die Faktoren der Produkte $236{,}6 \cdot 72{,}38$ und $137{,}9 \cdot 111{,}86$ sollen alle so um den gleichen Betrag vermindert werden, daß die neuen Produkte gleich sind.

d) Hängt man an eine bestimmte Zahl eine 5 an, subtrahiert dann 9, hängt danach eine 3 an, addiert dazu 37 und dividiert die ganze bis jetzt erhaltene Zahl durch 52, so erhält man 1 weniger als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Wie heißt diese Zahl?

e) Multipliziert man eine Zahl mit 7, addiert eine 9 und hängt an diese Summe eine Null an, subtrahiert dann 17, hängt an das Ergebnis noch eine Null an, subtrahiert davon 30 und dividiert diese Differenz durch 7, so erhält man 200. Wie heißt die Zahl?

f) Die erste Ziffer einer vierstelligen Zahl ist eine 5. Streicht man sie links weg und setzt sie rechts an, so verringert sich der Wert der Zahl um 4410. Wie heißt die Zahl?

g) Die letzte Ziffer einer dreistelligen Zahl ist eine 7. Streicht man sie rechts weg und setzt sie links an, so ergibt sich eine Zahl, die um 2 größer ist als das Doppelte der gesuchten Zahl. Wie heißt diese Zahl?

h) Die Summe des 3. und 5. Teiles einer Zahl ist gleich der Differenz aus dem Doppelten der gesuchten Zahl und 11. Wie heißt die Zahl?

i) Addiert man zum Zähler des Bruches $\frac{21}{40}$ eine Zahl und subtrahiert die Hälfte dieser gesuchten Zahl vom Nenner, so erhält man $\frac{33}{34}$. Wie heißt die Zahl?

k) Der Zähler eines Bruches ist um 12 kleiner als der Nenner. Vergrößert man den Zähler um 54, den Nenner um 6, so erhält man den reziproken Wert des gesuchten Bruches. Wie heißt der Bruch?

223. a) Ein Kollektiv hat sich verpflichtet, in einem Jahr eine Anzahl Aufbaustunden im Nationalen Aufbauwerk zu leisten. Wenn jedes Kollektivmitglied 30 Stunden arbeitet, so wird die Verpflichtung mit 70 Stunden übererfüllt; hat jedes Mitglied aber nur 25 Stunden geleistet, so fehlen noch 25 Stunden zur Erfüllung der Verpflichtung. Wieviel Mitglieder hat das Kollektiv und zu wieviel Aufbaustunden hat es sich verpflichtet?

b) Aus einem Motorradtank, von dessen Inhalt $\frac{1}{5}$ verbraucht war, wurden noch 2,4 l Benzin abgelassen. Im Tank blieb ein Rest von $\frac{2}{3}$ des gesamten Inhaltes. Wieviel Liter Benzin enthielt der Tank?

c) In einem Stromkreis fließt bei einer Spannung von 120 V ein Strom von 6 A. Welcher Widerstand muß zugeschaltet werden, damit der Strom auf 2,4 A sinkt?

d) Wieviel kg Kupfer ($\varrho_{Cu} = 9\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$) und Zink ($\varrho_{Zn} = 7\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$) benötigt man zu einer Messinglegierung von 2 kg mit einer Dichte $\varrho = 8{,}5\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$?

e) Ein Facharbeiter benötigt zur Endmontage einer Apparatur $5\frac{1}{2}$ Tage, ein anderer für die gleiche Arbeit 7 Tage. Wieviel Tage brauchen beide zusammen, wenn der erste Arbeiter erst 2 Tage später als der zweite mitarbeitet?

f) Welchen Strom verbraucht eine 75-W-Glühbirne bei einer Spannung von 220 V?

g) Zum Entleeren eines Beckens benötigt eine Pumpe 4 h 30 min, eine andere 6 h 45 min. In welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Pumpen gleichzeitig arbeiten?

h) Der zwischen den einzelnen Eisenbahnschienen vorhandene Schienenstoß verursacht ein im fahrenden Zug wahrnehmbares taktmäßiges Aufschlagen der Räder. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Zuges in $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, wenn die Strecke 30-m-Schienen hat und 35 Stöße in 30 s gezählt wurden?

i) Ein Radrennfahrer habe eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $42\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Sein Verfolger, der im Zeitfahren 1 min später gestartet ist, hat ihn nach 28 min eingeholt. Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit des Verfolgers!

k) Wieviel Liter 20prozentigen und 78prozentigen Alkohol braucht man zur Herstellung von 5 l 35prozentigem Alkohol?

224. Für welche Werte von x gelten die Ungleichungen:

a) $4x < 3$

b) $3x - 5 > 4$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x < \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$

d) $4x + 1 > 5x + 3$

e) $6(5x - 7) > 18x - 42$

f) $\frac{4}{3}x - 18\frac{13}{15} < \frac{2}{5}x + 6\frac{1}{3}$

g) $\frac{2x - 1}{3} < \frac{x + 6}{2}$

h) $2 + \frac{3(x + 1)}{8} < 3 - \frac{x - 1}{4}$

i) $(x + 3)^2 < (x - 3)^2$

k) $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13 - x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6}$

9. Proportionen

9.1. Begriffserklärungen

Um zwei Größen a und b miteinander vergleichen zu können, bildet man häufig deren Quotienten $a:b$ $\left(\text{oder in anderer Schreibweise: } \frac{a}{b}\right)$ und nennt diesen Quotienten das **Verhältnis von a zu b.**
Die beiden Größen a und b heißen die *Glieder* des Verhältnisses.
Sind a und b in gleichen Maßeinheiten angegeben, so ist das Verhältnis $a:b$ eine unbenannte Zahl.

Da jedes Verhältnis durch einen Bruch dargestellt wird, gelten für die Verhältnisse die gleichen Rechenregeln wie für die Brüche.

So dürfen z. B. die Glieder eines Verhältnisses mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert werden, ohne daß sich dadurch der Wert des Verhältnisses ändert. (Beispiel: $6:8 = 12:16 = 3:4$ usw.) Es ist jedoch üblich, Verhältnisse durch möglichst *kleine ganze Zahlen* auszudrücken.

BEISPIEL 1

Die Geschwindigkeit des Sputnik II betrug etwa 8000 m/s, *während die TU* 104 *eine Geschwindigkeit von etwa* 900 km/h *erreicht. In welchem Verhältnis stehen die beiden Geschwindigkeiten zueinander?*

Lösung: Um die beiden Geschwindigkeiten miteinander vergleichen zu können, werden sie zunächst auf gleiche Maßeinheiten gebracht.

Es sind $900\ \text{km/h} = \dfrac{900\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1000\ \frac{\text{m}}{\text{km}}}{3600\ \frac{\text{s}}{\text{h}}} = 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten ist damit

$$v_{\text{Sp}} : v_{\text{TU}} = 8000 : 250$$

(gelesen: v_{Sp} verhält sich zu v_{TU} wie 8000 zu 250).
Kürzt man dieses Verhältnis mit 250, um auf möglichst kleine ganze Zahlen zu kommen, so ergibt sich

$$v_{\text{Sp}} : v_{\text{TU}} = 32 : 1.$$

Sputnik II war demnach 32mal so schnell wie die TU 104.

Werden zwei *gleiche Verhältnisse* zu einer Gleichung zusammengefaßt, so entsteht eine **Verhältnisgleichung** oder **Proportion**[1]). So läßt sich z. B. aus den beiden gleichen Ver-

[1]) proportio (lat.) Gleichmaß, Ebenmaß.

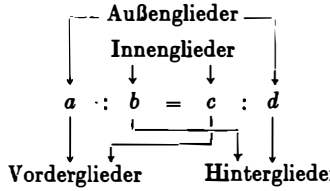
hältnissen 1 : 32 und 250 : 8000 aus Beispiel 1 die Proportion

$$1 : 32 = 250 : 8000$$

(gelesen: 1 zu 32 wie 250 zu 8000) aufstellen.
In allgemeiner Form schreibt man eine Proportion

$$\boxed{a : b = c : d} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}. \tag{54}$$

Dabei werden die einzelnen Glieder nach ihrer Anordnung innerhalb der Proportion wie folgt benannt:



9.2. Rechengesetze für Proportionen

Da jede Proportion eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen ist, lassen sich alle Proportionen nach den Gesetzen der Gleichungslehre umformen, ohne daß dabei die Gleichheit der beiden Seiten verlorengeht.

Multipliziert man die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit dem Hauptnenner $b\,d$, so tritt an die Stelle der Proportion (59) deren **Produktgleichung**

$$\boxed{a \cdot d = b \cdot c}. \tag{55}$$

In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

Proportion und zugehörige Produktgleichung sind einander vollkommen *gleichwertig*. Mit Hilfe der Produktgleichung läßt sich die Richtigkeit einer Proportion nachprüfen.

BEISPIEL 1

Zur Proportion 1 : 32 = 250 : 8000 (vgl. Abschnitt 9.1.) *gehört die Produktgleichung*

$$1 \cdot 8000 = 250 \cdot 32$$

$$8000 = 8000.$$

Da die Produktgleichung stimmt, muß auch die Proportion richtig sein und umgekehrt.

Aus jeder Proportion lassen sich stets neue Proportionen herleiten, die untereinander völlig *gleichwertig* sind. Es gilt nämlich der *Satz:*

In jeder Proportion darf man

a) die Seiten miteinander vertauschen,
b) die Innenglieder untereinander vertauschen,
c) die Außenglieder untereinander vertauschen,
d) die Innenglieder gegen die Außenglieder vertauschen.

Aus der Proportion $a:b=c:d$ folgt also durch Vertauschung der Innenglieder: $a:c=b:d$; durch Vertauschung der Außenglieder: $d:b=c:a$ und durch Vertauschung der Innenglieder gegen die Außenglieder: $b:a=d:c$.
Da alle diese Proportionen dieselbe Produktgleichung $ad=bc$ besitzen, sind sie einander gleichwertig.

Daß die beiden Seiten einer Proportion miteinander vertauscht werden dürfen, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Schließlich bestätigt man noch durch die Bildung der Produktgleichung, daß mit der Proportion

$$a:b=c:d$$

auch

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \tag{56}$$

gelten.
Die hier angeführten Formeln (56) heißen die *Gesetze der korrespondierenden*[1]) *Addition und Subtraktion.*

BEISPIELE

2. *Für die Papierformate gelten folgende Standards:*

Klasse	*Reihe* A	*Reihe* B	*Reihe* C	*Reihe* D
0	841 · 1189	1000 · 1414	917 · 1297	771 · 1090
1	594 · 841	707 · 1000	648 · 917	545 · 771
2	420 · 594	500 · 707	458 · 648	385 · 545
3	297 · 420	353 · 500	324 · 458	272 · 385
4	210 · 297	250 · 353	229 · 324	192 · 272
5	148 · 210	176 · 250	162 · 229	136 · 192
6	105 · 248	125 · 176	114 · 162	96 · 136
7	74 · 105	88 · 125	81 · 114	68 · 96
8	52 · 74	62 · 88	57 · 81	48 · 68

Für alle diese Papierformate gilt für die Breite b und Höhe h das Verhältnis $b:h\approx 1:\sqrt{2}$.

3. *Aus der Produktgleichung* $3\cdot 8=4\cdot 6$ *lassen sich u.a. folgende Proportionen bilden:*

$3:4=6:8$ $\quad 3:6=4:8$
$8:4=6:3$ $\quad 8:6=4:3$ *usw.*

[1]) correspondere (lat.) entsprechen.

4. *Die Proportion* $\frac{2u+3v}{2u-3v}=\frac{3m+4n}{3m-4n}$ *läßt sich mit Hilfe des Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion wie folgt vereinfachen:*

$$\frac{2u+3v}{2u-3v}=\frac{3m+4n}{3m-4n}$$

$$\frac{(2u+3v)+(2u-3v)}{(2u+3v)-(2u-3v)}=\frac{(3m+4n)+(3m-4n)}{(3m+4n)-(3m-4n)}$$

$$\frac{4u}{6v}=\frac{6m}{8n}$$

$$\frac{2u}{3v}=\frac{3m}{4n}.$$

9.3. Fortlaufende Proportionen

Mehrere *gleiche* Verhältnisse, z.B. 2 : 3, 4 : 6, 6 : 9, 8 : 12 usw., können in einer **fortlaufenden Proportion** zusammengefaßt werden:

$$2:3=4:6=6:9=8:12 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}.$$

Jede fortlaufende Proportion läßt sich in eine Anzahl einfacher Proportionen aufspalten, indem man jeweils zwei Verhältnisse aus der fortlaufenden Proportion herausgreift und diese einander gleichsetzt. So lassen sich aus der obigen fortlaufenden Proportion u.a. folgende einfache Proportionen bilden:

$$2:3=4:6 \qquad 2:3=6:9 \qquad 2:3=8:12 \qquad 4:6=6:9$$
$$4:6=8:12 \qquad 6:9=8:12$$

Für fortlaufende Proportionen hat sich noch eine andere Schreibweise eingebürgert, und zwar schreibt man die obige fortlaufende Proportion auch in der Form

$$2:4:6:8=3:6:9:12.$$

Dabei werden auf der einen Seite die Vorderglieder, auf der anderen Seite die Hinterglieder der Proportionen in der gleichen Reihenfolge niedergeschrieben. Es ist zu beachten, daß diese letzte Form *eine auf einer Übereinkunft beruhende vereinfachende Schreibweise* der fortlaufenden Proportion ist, und daß diese Schreibweise nicht etwa bedeutet, 2 durch 4 zu dividieren, den Quotienten dann durch 6 usw.

BEISPIELE

1. *Die beiden Proportionen* $a:b=4:5$ *und* $b:c=5:6$ *kann man zu der fortlaufenden Proportion*

   $a:b:c=4:5:6$

   zusammenfassen.

2. *Aus der fortlaufenden Proportion* $x:y:z=3:5:7$ *lassen sich u.a. folgende einfache Proportionen bilden:*

   $x:y=3:5 \qquad x:z=3:7 \qquad y:z=5:7.$

3. *Um die Proportionen* $u : v = 2 : 3$, $v : w = 5 : 6$ *und* $w : x = 8 : 11$ *als fortlaufende Proportion schreiben zu können, müssen die rechten Seiten der einzelnen Proportionen erst so erweitert werden, daß sie sich aneinander anschließen:*

$u : v = 10 : 15$ $\qquad$ $u : v = 40 : 60$

$v : w = 15 : 18$ $\qquad$ $v : w = 60 : 72$ $\qquad$ $v : w = 60 : 72$

$w : x = 72 : 99$ $\qquad$ $w : x = 72 : 99$

$u : v : w : x = 40 : 60 : 72 : 99$.

9.4. Direkte Proportionalität

Fährt ein PKW mit der konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h auf der Autobahn entlang, so besteht zwischen dem zurückgelegten Weg s und der Zeit t ein Zusammenhang, der in der folgenden Tafel zusammengestellt worden ist.

Tafel 2

t in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s in m	27,78	55,55	83,33	111,11	138,89	166,67	194,44	222,22	250,00	277,78

Zwei zusammengehörige Werte von t und s stehen hier immer *im gleichen Verhältnis zueinander:*

$$27{,}78 \text{ m} : 1 \text{ s} = 55{,}55 \text{ m} : 2 \text{ s} = 83{,}33 \text{ m} : 3 \text{ s} = \ldots$$

Allgemein gilt im vorliegenden Falle

$$s : t = c = 27{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Man sagt: Bei konstanter Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg s **direkt proportional** zur Fahrzeit t.

Besteht zwischen zwei Größen ein sachlicher Zusammenhang, so spricht man dann von direkter Proportionalität, wenn sich das Verhältnis von jeweils zwei zueinandergehörenden Werten nicht ändert.

Die direkte Proportionalität zweier Größen wird durch das Zeichen $\sim$ (lies: proportional) ausgedrückt.
Im einführenden Beispiel ist $s \sim t$, da für zwei beliebige zusammengehörige Werte von s und t immer gilt

$$s : t = c \quad \text{oder} \quad s = c \cdot t .$$

Der Faktor c heißt **Proportionalitätsfaktor.** (Im Beispiel ist der Proportionalitätsfaktor c die Geschwindigkeit $v = 27{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.)
Mit $s = c \cdot t$ gilt für zwei zusammengehörige Wertepaare $s_1 ; t_1$ und $s_2 ; t_2$ auch $s_1 = c \cdot t_1$ und $s_2 = c \cdot t_2$, woraus durch Division der beiden Gleichungen

$$s_1 : s_2 = t_1 : t_2$$

folgt. Die direkte Proportionalität der beiden Größen s und t läßt sich demnach auch in dieser Form ausdrücken.

Das einfachste Kennzeichen der direkten Proportionalität ist, daß sich die eine Größe verdoppelt, verdreifacht, ..., wenn man die andere Größe verdoppelt, verdreifacht, ...

BEISPIELE

für direkte Proportionalität:

1. *Der Bruttoarbeitslohn L ist direkt proportional der Anzahl n der Arbeitsstunden. Der Proportionalitätsfaktor c ist dabei der Stundenlohn in* MDN/h: $L = c \cdot n$

2. *Die Ausdehnung einer Feder Δs ist der Belastungszunahme Δp direkt proportional:*

   $\Delta s = c \cdot \Delta p$ (HOOKEsches *Gesetz*)

   Anmerkung: Der Proportionalitätsfaktor c ist hierbei in gewissen Grenzen abhängig vom Material und von den Abmessungen der Feder.

3. *Die Saatgutmenge M_s ist direkt proportional der Größe F des zu bestellenden Feldes: $M_s = c \cdot F$. Proportionalitätsfaktor c: benötigte Saatgutmenge in* $\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$.

4. *Der Fahrpreis K bei der Eisenbahn ist direkt proportional der Fahrstrecke: $K = c \cdot s$, wobei* $c = 0{,}08\ \frac{\text{MDN}}{\text{km}}$ *(bei Benutzung der zweiten Klasse Personenzug) ist.*

5. *Die Masse m eines homogenen Körpers ist direkt proportional seinem Volumen: $m = \varrho \cdot V$, wobei der Proportionalitätsfaktor ϱ die Dichte in* $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ *ist.*

9.5. Umgekehrte Proportionalität

In der folgenden Tafel sind die Zeiten t in s zusammengestellt, die man benötigt, um eine Strecke $s = 100$ m bei bestimmten Geschwindigkeiten zu durchfahren.

Tafel 3

v in km/h	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
t in s	36,0	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	3,3	3,0

Da hier die t-Werte mit wachsender Geschwindigkeit v immer kleiner werden, kann keine direkte Proportionalität vorliegen.
Dagegen ist in jedem Falle das *Produkt* aus je zwei zusammengehörenden v- und t-Werten *konstant*:

$$10\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 36{,}0\ \text{s} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 18{,}0\ \text{s} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 12{,}0\ \text{s} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 9{,}0\ \text{s} = \cdots$$

Es gilt demnach allgemein

$$v \cdot t = c\,.$$

Man sagt: Die Fahrzeit t, die für eine bestimmte Strecke s benötigt wird, ist **umgekehrt proportional** der Geschwindigkeit v und schreibt dafür

$$t \sim \frac{1}{v}\,.$$

Besteht zwischen zwei Größen ein sachlicher Zusammenhang, so spricht man dann von umgekehrter (oder indirekter) Proportionalität, wenn das Produkt von jeweils zwei zueinander gehörenden Werten sich nicht ändert.

Sind t_1; v_1 und t_2; v_2 zwei zueinander gehörende Wertepaare der obigen Bewegung, so gilt

$$v_1 \cdot t_1 = c \quad \text{und} \quad v_2 \cdot t_2 = c,$$

woraus durch Gleichsetzen

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

folgt. Demnach läßt sich die umgekehrte Proportionalität im obigen Beispiel auch wie folgt schreiben:

$$v_1 : v_2 = t_2 : t_1$$

Das einfachste Kennzeichen der umgekehrten Proportionalität ist, daß sich die eine Größe verdoppelt, verdreifacht usw., wenn man von der anderen Größe die Hälfte, ein Drittel usw. nimmt.

BEISPIELE

für die umgekehrte Proportionalität:

1. *Die Zeit T, die für die Fertigstellung einer bestimmten Arbeit benötigt wird, ist (innerhalb bestimmter Grenzen) umgekehrt proportional der Anzahl n der Arbeitskräfte:* $T \sim \frac{1}{n}$ *oder* $T \cdot n = \text{const.}$
2. *Bei konstanter Spannung U ist die Stromstärke I dem Widerstand R umgekehrt proportional:* $I \cdot R = U = \text{const.}$ (Ohmsches Gesetz)
3. *Bei konstanter Temperatur ist das Volumen V eines eingeschlossenen Gases dem Druck p umgekehrt proportional:* $V \cdot p = \text{const.}$

9.6. Proportionen als Bestimmungsgleichungen

Sind drei Glieder einer Proportion bekannt, so kann man die Proportion als Bestimmungsgleichung für das fehlende vierte Glied auffassen. Dabei kann die unbekannte Größe auch an mehreren Stellen der Proportion auftreten.

BEISPIELE

1. *Bestimme x aus* $3 : x = 5 : 8$!

   Lösung: Produktgleichung $5x = 24$

   $$\underline{\underline{x = 4{,}8}} \qquad \text{Probe!}$$

2. *Bestimme u aus* $(u + 5) : u = 3 : 2$.

   Lösung: Auch hier führt der Weg über die Produktgleichung zum Ziel. Eleganter ist jedoch die Anwendung des Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion:

   $$\frac{u + 5}{u} = \frac{3}{2}$$

   $$\frac{u + 5 - u}{u} = \frac{3 - 2}{2}$$

   $$\frac{5}{u} = \frac{1}{2}$$

   $$\underline{\underline{u = 10}} \qquad \text{Probe!}$$

Proportionen, bei denen die Innenglieder gleich sind, heißen *stetige Proportionen*. Das gemeinsame Innenglied wird *mittlere Proportionale* genannt.

BEISPIEL 3

Wie lautet die mittlere Proportionale m der beiden Zahlen a und b?

Lösung: Die mittlere Proportionale m ist definiert durch die Proportion

$$a : m = m : b,$$

aus der $m^2 = ab$

$$m = \pm \sqrt{ab}$$

folgt.

Die mittlere Proportionale zweier Zahlen a und b wird auch *geometrisches Mittel* dieser beiden Zahlen genannt.

Die Feststellung, daß zwischen verschiedenen Größen einer Aufgabe direkte bzw. umgekehrte Proportionalität herrscht, kann die Lösung der Aufgabe wesentlich erleichtern. Dies zeigt

BEISPIELE

4. *Welche Masse besitzt* 1 km *eines Drahtes von* 120 mm² *Querschnitt, wenn* 300 m *eines Drahtes aus dem gleichen Material, jedoch mit* 50 mm² *Querschnitt die Masse* 30,2 kg *besitzen.*

Lösung: Überschlag: Da der Draht, dessen Masse gesucht ist, ungefähr die dreifache Länge und den doppelten Querschnitt des Vergleichsdrahtes besitzt, muß etwa die sechsfache Masse herauskommen, also rund 200 kg.

300 m Draht von 50 mm² Querschnitt besitzen 30,2 kg Masse.

1 m „ „ 50 mm² „ besitzt $\frac{30{,}2}{300}$ kg „

(Direkte Proportionalität zwischen Länge und Masse bei gleichbleibendem Querschnitt.)

1 m Draht von 1 mm² Querschnitt besitzt $\frac{30{,}2}{300 \cdot 50}$ kg Masse.

(Direkte Proportionalität zwischen Querschnitt und Masse bei gleichbleibender Länge.)

1 m Draht von 120 mm² Querschnitt besitzt $\frac{30{,}2 \cdot 120}{300 \cdot 50}$ kg Masse.

1 km „ „ 120 mm² „ „ $\frac{30{,}2 \cdot 120 \cdot 1000}{300 \cdot 50}$ kg „ :

$$m = \frac{30{,}2 \cdot 120 \cdot 1000}{300 \cdot 50}\,\text{kg} = 241{,}6\,\text{kg}$$

Die Masse von 1 km Draht mit dem Querschnitt 120 mm² beträgt also 241,6 kg.
Bei einiger Übung läßt sich der Lösungsansatz für derartige Aufgaben sofort in der endgültigen Form

$$m = \frac{30{,}2\,\text{kg} \cdot 120\,\text{mm}^2 \cdot 1000\,\text{m}}{300\,\text{m} \cdot 50\,\text{mm}^2}$$

niederschreiben.

5. *Ein Riementrieb besitzt zwei Riemenscheiben mit den Durchmessern d_1 und d_2, von denen die eine Scheibe die Umdrehungszahl n_1 besitzt. Wie groß ist die Umdrehungszahl n_2 der zweiten Scheibe? Welche Beziehung besteht zwischen den Umdrehungszahlen und den Durchmessern der Scheiben?*

Zahlenbeispiel: $d_1 = 120\ \text{cm}$, $d_2 = 50\ \text{cm}$, $n_1 = 150\ \text{min}^{-1}$

Lösung: Der Umfang des ersten Rades ist $u_1 = \pi \cdot d_1$. Da dieses Rad die Umdrehungszahl n_1 besitzt, hat es eine Umfangsgeschwindigkeit $v_1 = \pi \cdot d_1 \cdot n_1$. Entsprechend erhält man für die Umfangsgeschwindigkeit des zweiten Rades $v_2 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$.
Da beide Riemenscheiben durch den Treibriemen miteinander verbunden sind, müssen beide Umfangsgeschwindigkeiten gleich sein:

$$v_1 = v_2$$
$$\pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 .$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch in Form einer Proportion schreiben:

$$n_1 : n_2 = d_2 : d_1 ,$$

d.h., *die Umdrehungszahlen sind umgekehrt proportional zu den Durchmessern der Riemenscheiben.*
Aus dieser Proportion läßt sich die noch unbekannte Umdrehungszahl der zweiten Scheibe ermitteln:

$$n_2 = \frac{d_1}{d_2} \cdot n_1 .$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich eine Umdrehungszahl

$$n_2 = \frac{120\ \text{cm}}{50\ \text{cm}} \cdot 150\ \text{min}^{-1} = 360\ \text{min}^{-1} .$$

6. *Bei einem Zahnradgetriebe greifen zwei Räder mit den Radien r_1 und r_2 ineinander, von denen das erste z_1, das zweite z_2 Zähne besitzt. Welche Beziehung läßt sich zwischen den vier Größen r_1, r_2, z_1 und z_2 aufstellen?*

Lösung: Die Umfänge der beiden Zahnräder sind

$$u_1 = 2\pi r_1 \quad \text{und} \quad u_2 = 2\pi r_2 .$$

Teilt man jeden Umfang durch die zugehörige Zähnezahl, so erhält man die Teilkreisteilungen t_1 und t_2 der beiden Zahnräder:

$$t_1 = \frac{2\pi r_1}{z_1} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{2\pi r_2}{z_2} .$$

Bei ineinandergreifenden Zahnrädern müssen die Teilungen gleich sein (warum?); folglich gilt

$$\frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{z_2} ,$$

woraus $r_1 : r_2 = z_1 : z_2$

folgt, d.h.:

bei ineinandergreifenden Zahnrädern verhalten sich die Zähnezahlen direkt proportional zu den Radien.

Ähnlich wie im Beispiel 5 läßt sich nachweisen, daß zwischen den Radien (und damit auch den Zähnezahlen) und den Drehzahlen umgekehrte Proportionalität herrscht:

$$r_1 : r_2 = n_2 : n_1 \quad \text{und} \quad z_1 : z_2 = n_2 : n_1 .$$

9.7. Prozentrechnung[1])

9.7.1. Grundbegriffe

Erklärung:

Ein Prozent (1%) einer Größe G ist der hundertste Teil von G. p Prozent (p%) einer Größe G sind p Hundertstel von G.

Die Größe G wird dabei als **Grundwert** bezeichnet. Der **Prozentwert** P ist ein Teil des Grundwertes. Der **Prozentsatz** p gibt an, wieviel Hundertstel des Grundwertes dem Prozentwert entsprechen. Aus der Erklärung des Prozentsatzes folgt *die für die gesamte Prozentrechnung grundlegende Proportion*

$$\boxed{p : 100 = P : G} \tag{57}$$

Mit Hilfe dieser Proportion lassen sich alle Prozentrechnungsaufgaben lösen.

9.7.2. Berechnung des Prozentsatzes

BEISPIELE

1. *Wieviel Prozent von* 1250 *sind* 148*?*

   Lösung: Überschlag mit gerundeten Größen:

   $$150 : 1200 \approx 0{,}12 ; \quad \text{also muß } p \approx 12 \text{ sein.}$$

   Genauer Wert von p:

   $$p : 100 = P : G$$

   $$p = \frac{100 \cdot P}{G} = \frac{100 \cdot 148}{1250}$$

   $$\underline{\underline{p = 11{,}84}} \qquad \text{(Vgl. Überschlag!)}$$

   148 sind demnach 11,84% von 1250.

2. *Während von* 1200 *Werkstücken, die der Arbeiter* A *anfertigte,* 36 *als Ausschuß gewertet wurden, galten von* 1400 *Werkstücken, die der Arbeiter* B *anfertigte,* 49 *als Ausschuß. Welche Leistung ist die bessere?*

   Lösung: Um die beiden Leistungen miteinander vergleichen zu können, berechnet man, wieviel Prozent Ausschuß jeder der beiden Arbeiter fabriziert hat:

   $$p_A : 100 = 36 : 1200 \qquad p_B : 100 = 49 : 1400$$

   $$p_A = \frac{3600}{1200} = 3 \qquad p_B = \frac{4900}{1400} = 3{,}5$$

   Die Leistung des Arbeiters A ist die bessere, denn er fertigt nur 3% Ausschuß, während B 3,5% Ausschuß fabriziert.

[1]) pro centum (lat.) für (vom) Hundert.

9.7.8. Berechnung des Prozentwertes

BEISPIELE

1. *Wieviel sind* 4% *von* 7248 MDN?

   Lösung: $P: 7248 = 4: 100$

   $$P = \frac{4 \cdot 7248}{100} = 289{,}92$$

   4% von 7248 MDN sind demnach 289,92 MDN.

2. *Rohbaumwolle wird in Ballen zu etwa* 180 kg *geliefert. Wieviel* kg *Garn kann man aus einem solchen Ballen produzieren, wenn mit* 6% *Abfall gerechnet werden muß?*

   Lösung: Da mit 6% Abfall zu rechnen ist, verbleiben für das Garn noch 94% von den 180 kg eines Ballens.

   $$94 : 100 = P : 180$$

   $$P = \frac{94 \cdot 180}{100} = 169{,}2$$

   Aus dem Ballen können mithin 169,2 kg Garn gesponnen werden.

Für bestimmte Prozentsätze lassen sich die zugehörigen Prozentwerte sofort angeben:

100% ≙ Grundwert	10% ist ein Zehntel	des Grundwertes	
50% ≙ Hälfte des Grundwertes	5% „ „	Zwanzigstel	„ „
25% ist ein Viertel des Grundwertes	33,3% „ „	Drittel	„ „
20% „ „ Fünftel „ „	12,5% „ „	Achtel	„ „

9.7.4. Berechnung des Grundwertes

BEISPIELE

1. *Im Jahre* 1957 *studierten an den Hochschulen und Universitäten der DDR* 20550 *Studentinnen. Das sind* 31% *aller Studierenden. Wie groß war die Anzahl der Studierenden in diesem Jahre?*

   Lösung: Überschlag durch gerundete Werte: 31% entspricht rund einem Drittel; also müßten etwa 60000 Studierende an den Hochschulen und Universitäten immatrikuliert gewesen sein.

   Rechnung:

   $$31 : 100 = 20550 : G$$

   $$G = \frac{20550 \cdot 100}{31} = 66300$$

   Im Jahre 1957 waren demnach 66300 Studierende an den Hochschulen und Universitäten der DDR immatrikuliert.

2. *In einer Produktionsplanung wird einem Industriezweig die Auflage erteilt, im Jahr* 108000 *Stück einer Ware herzustellen. Dies bedeutet eine Steigerung um* 181% *gegenüber der Jahresproduktion von* 1958. *Wieviel Stück wurden* 1958 *hergestellt?*

   Lösung: Überschlag mit gerundeten Werten: Da es sich um eine Erhöhung *um* 181% handelt, entspricht die mit 108000 angegebene Stückzahl 281% der Jahresproduktion von 1958, das ist rund das Dreifache. 1958 müssen demnach etwa 35000 Stück hergestellt worden sein.

Rechnung:

$$281 : 100 = 108000 : G$$

$$G = \frac{108000 \cdot 100}{281} \approx 38400$$

Im Jahre 1958 wurden rund 38400 Stück produziert.

3. *Die Verpackung einer Warensendung wird mit* 12% *des Bruttogewichtes veranschlagt. Wie groß ist das Bruttogewicht, wenn das Nettogewicht* 66 kp *beträgt?*

Lösung: Der Überschlag sei dem Leser überlassen.
Da vom Gesamtgewicht 12% für die Verpackung abgehen, verbleiben für das Nettogewicht noch 88% des Grundwertes; folglich gilt

$$88 : 100 = 66 \text{ kp} : G$$

$$G = 75 \text{ kp}.$$

Das Bruttogewicht beträgt demnach 75 kp.

9.8. Promillerechnung

Erklärung:

Ein Promille ($1^0/_{00}$) einer Größe G ist der tausendste Teil von G. p^* Promille einer Größe G sind p^* Tausendstel von G.

Auf Grund dieser Erklärung gilt für die Promillerechnung eine ganz ähnliche *grundlegende Proportion* wie bei der Prozentrechnung, und zwar ist

$$\boxed{p^* : 1000 = P : G} \tag{58}$$

Die Promillerechnung wird meist da angewandt, wo es sich um sehr kleine Prozentsätze handelt.
Jeder Prozentsatz kann in Promille umgerechnet werden und umgekehrt:

$$1\% = 10^0/_{00} \qquad 1^0/_{00} = 0{,}1\%$$

BEISPIEL

Bei einer zwei Stunden nach einem Verkehrsunfall durchgeführten Blutprobe wurden bei einem Kraftfahrer in 120 g *Blut* 95 mg *Alkohol festgestellt. Welche Alkoholkonzentration lag zur Zeit des Unfalls vor, wenn der Körper je Stunde* $0{,}12^0/_{00}$ *Alkohol ausscheidet?*

Lösung: $p^* : 1000 = 0{,}095 \text{ g} : 120 \text{ g}$

$$p^* = 0{,}79$$

Zur Zeit der Untersuchung betrug die Alkoholkonzentration demnach $0{,}79^0/_{00}$. Hinzu kommen weitere $0{,}24^0/_{00}$, die in der Zeit zwischen Unfall und Untersuchung bereits ausgeschieden worden sind, so daß der Fahrer zur Zeit des Unfalls mit $1{,}03^0/_{00}$ unter erheblicher Alkoholeinwirkung stand.

9.9. Zinsrechnung

Zinsen sind ein prozentualer Anteil, den die Sparkassen jedem Sparguthaben nach einer gewissen Zeit gutschreiben. Der Prozentsatz p, der bei der Berechnung der Zinsen Z angewendet wird, heißt **Zinsfuß.** Die Sparsumme, die verzinst wird, heißt **Grundbetrag** G.
Da die Zinsrechnung im Prinzip eine Aufgabe der Prozentrechnung ist, werden die *Jahreszinsen* wie in 9.7.1. aus der grundlegenden Proportion

$$\boxed{p : 100 = Z : G} \tag{59}$$

ermittelt.
Zinsen für Bruchteile eines Jahres werden als entsprechende Bruchteile der Jahreszinsen berechnet, wobei unabhängig von der wirklichen Länge des Monats 1 Monat = 30 Tage und 1 Jahr = 360 Tage zu setzen sind.
Die Zinsen für mehrere Jahre werden aus den Zinsen für ein Jahr durch Multiplikation mit der Anzahl t der Jahre ermittelt, so daß die Zinsen Z bei einem bestimmten Prozentsatz (Zinsfuß) p proportional zum Grundbetrag G und zur Anzahl t der Jahre sind:

$$\boxed{Z = \frac{G \cdot p \cdot t}{100}} \tag{60}$$

Dabei ist nicht berücksichtigt, daß die nach Ablauf eines Jahres gutgeschriebenen Zinsen ebenfalls wieder verzinst werden. Die dadurch entstehenden tatsächlichen Zinsbeträge können hier nicht berechnet werden. Dies ist eine Aufgabe der Zinseszinsrechnung.

BEISPIELE

1. *Wieviel betragen die jährlichen Zinsen für* 1500 MDN *bei* 3% *Verzinsung?*

   Lösung: $p : 100 = Z : G$

   $$Z = \frac{p \cdot G}{100} = \frac{3 \cdot 1500\ \text{MDN}}{100} = 45\ \text{MDN}$$

   1500 MDN bringen bei 3% Verzinsung im Jahre 45 MDN Zinsen.

2. *Ein Darlehen von* 8000 MDN *wurde nach* 80 *Tagen zurückgezahlt. Wieviel Zinsen sind zu zahlen, wenn es mit* 5% *verzinst wurde?*

   Lösung: Für die Jahreszinsen ergibt sich

   $$5 : 100 = Z : 8000\ \text{MDN}$$

   $$Z = 400\ \text{MDN}.$$

   Die Jahreszinsen betragen 400,– MDN. Da das Darlehen nur 80 Tage in Anspruch genommen wurde, sind nur $\frac{80}{360}$ dieses Betrages zu zahlen; das sind 88,89 MDN.

3. *Zu welchem Zinsfuß wurde ein Darlehen von* 3600 MDN *verzinst, wenn nach* 8 *Monaten* 3720 MDN *zurückzuzahlen waren?*

Lösung: Da es sich bei den 120 MDN Zinsen nicht um Jahreszinsen handelt, empfiehlt es sich, von der Zinsformel (60) auszugehen:

$$Z = \frac{G \cdot p \cdot t}{100}$$

$$p = \frac{100 \cdot Z}{G \cdot t} = \frac{100 \cdot 120}{3600 \cdot \frac{8}{12}} = 5\,.$$

Das Darlehen wurde mit 5% verzinst.

4. *Wie lange wurde ein Darlehen von* 7500 MDN *mit* 4% *verzinst, wenn* 7625 MDN *zu zahlen waren?*

Lösung: Aus der Zinsformel (60) folgt

$$t = \frac{100 \cdot Z}{G \cdot p} = \frac{100 \cdot 125}{7500 \cdot 4} \qquad \text{(Bruch kürzen!)}$$

$$t = \frac{5}{12}\,.$$

Das Darlehen wurde 5 Monate ausgeliehen.

AUFGABEN

225. Gib folgende Verhältnisse in kleinsten ganzen unbenannten Zahlen an:

a) 54 : 81 b) 57 : 38 c) 1196 l : 299 l d) 3,36 m : 1,4 m

e) 10 min 38 s : 11 min 7 s f) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ g) $8\frac{1}{4} : 5\frac{1}{2}$

h) 4,13 ms^{-1} : 4,72 ms^{-1} i) 3,87 hl : 473 l k) 2,64 kg : 2970 g

226. Bilde aus jeder der folgenden Gleichungen 8 Proportionen:

a) $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$ b) $3 \cdot 81 = 9 \cdot 27$

c) $3a = 5b$ d) $0{,}3x = 0{,}7y$

e) $12m \cdot 7n = 21m \cdot 4n$ f) $ab = xy$

g) $v_1 \sqrt{h_2} = v_2 \sqrt{h_1}$ h) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

i) $I_1 R_1 = I_2 R_2$ k) $s_1 t_2^2 = s_2 t_1^2$

227. Vereinfache folgende Proportionen durch Kürzen:

a) $v_1 : v_2 = 32 : 48$ b) $l_1 : l_2 = 2{,}66$ km : 1520 m

c) $i_1 : i_2 = 102$ mA : 0,255 A d) $r_1 : r_2 = 3806$ mm : 311,4 cm

e) $n_1 : n_2 = 693 : 847$ f) $t_1 : t_2 = 22{,}2$ s : 59,2 s

g) $R_1 : R_2 = 0{,}4\,M\Omega : 76\,k\Omega$ h) $A_1 : A_2 = 4032$ ha : 52,92 km^2

i) $m_1 : m_2 = 4{,}41$ dt : 63 kg k) $U_1 : U_2 = 220$ V : 220 kV

228 Prüfe die Richtigkeit der folgenden Proportionen:

a) 8 : 15 = 48 : 90 b) 23 : 16 = 254 : 176

c) 33,8 : 11,7 = 5,2 : 1,8 d) $\frac{4}{7} : \frac{3}{8} = 32 : 21$

e) 15,8 : 4,9 = 0,79 : 0,24 f) 555,6 : 231,5 = 93,73 : 36,05

g) $\frac{208}{7} : 32 = 34 : \frac{221}{7}$

h) $\frac{25}{3} : 5 = 5 : 3$

i) $657{,}4 : 207{,}6 = 12{,}291 : 4{,}338$

k) $\frac{88}{7} : 8 = 8 : \frac{56}{11}$

229. Berechne die 4. Proportionale:

a) $9 : 8 = 27 : x$

b) $36 : 5x = 9 : 35$

c) $0{,}8x : 4{,}9 = 7{,}2 : 3{,}5$

d) $92{,}4 : 13{,}2 = 0{,}75x : 4{,}5$

e) $\frac{5a^2b^2}{2c^2d^2} : \frac{10ab}{c} = \frac{4a}{7cd} : \frac{x}{14}$

f) $\frac{3}{4}a^2 : x = \frac{5b}{6a} : \frac{2b^2}{3}$

g) $\frac{12u^2}{7vw} : \frac{9uw}{14v^3} = \frac{2v}{3u^3w^2} : \frac{x}{u^2}$

h) $\frac{27m^3}{10n^2} : \frac{3x}{m} = \frac{18m^4}{5n^4} : \frac{2m^2}{n}$

i) $12{,}25 : x = x : 4$

k) $\frac{2{,}5a^2}{3b} : x = x : \frac{6b^5}{6a^4}$

230. Berechne x unter Verwendung der korrespondierenden Addition und Subtraktion:

a) $24 : x = 17 : (x - 5)$

b) $(15 + x) : 8 = x : 5$

c) $(x - 27) : 2 = x : 5$

d) $(13 + x) : (13 - x) = 5 : 3$

e) $(24 - x) : 48 = x : 24$

f) $12 : x = 18 : (x + 4)$

g) $(15 + x) : (15 - x) = 3 : 2$

h) $(26 - x) : 5 = (26 + x) : 8$

i) $(3x + 4) : (3x - 4) = 2 : 1$

k) $(2x - 7) : 13 = (2x + 7) : 26$

231. Wieviel Prozent von

a) 120 sind 30?

b) 6400 MDN sind 704 MDN?

c) 70 t sind 6,3 t?

d) 37,5 kg sind 1500 g?

e) 5 kΩ sind 400 Ω?

f) 3 A sind 72 mA?

g) 220 kV sind 176 V?

h) 580 m sind 6,50 m?

i) 930 hl sind 6000 l?

k) 495 °C sind 14,3 °C?

232. a) Von 29 Studierenden einer Ingenieurschulklasse stammen 19 von Arbeitern und Bauern, 6 von Angestellten und 4 von Selbständigen. Wie ist die prozentuale Verteilung?

b) Im Rahmen der Durchsetzung des „Grünen Planes" wurden in Westdeutschland bisher 363960 Bauernwirtschaften aufgegeben, und zwar

137000 von den 604000 Betrieben zwischen 0,5 und 2 ha,
166200 „ „ 725000 „ „ 2 „ 5 ha und
60750 „ „ 405000 „ „ 5 „ 10 ha.

Bestimme den Prozentsatz der ruinierten Wirtschaften der einzelnen Gruppen!

c) Zwei Arbeiter erhalten je 688,– MDN monatlichen Bruttolohn. Als Lohnsteuer werden dem älteren, der verheiratet ist und zwei Kinder hat, 67,40 MDN, dem jüngeren, der ledig ist, 115,10 MDN abgezogen. Bestimme den Prozentsatz der Lohnsteuer für beide Arbeiter!

d) Wieviel Prozent Alkohol besitzt eine Mischung von 165 cm³ Alkohol und 782 cm³ Wasser?

e) Ein Arbeiter erhält einen monatlichen Nettolohn von 582,– MDN und spart davon 64,– MDN; ein anderer Arbeiter spart von seinem 755,– MDN betragenden Nettolohn monatlich 71,– MDN. Bestimme den Prozentsatz der beiden Sparbeträge!

f) Wieviel Prozent Kristallwasser enthält kristalline Pottasche, wenn 39,120 g einen Glührückstand von 31,044 g ergeben?

g) Die Gesamtzahl der Besucher und die Anzahl der Vorstellungen in den Theatern der DDR wuchs von 13957800 in 25851 Vorstellungen in der Spielzeit 1950/51 auf 16020908 Besucher in 30621 Vorstellungen in der Spielzeit 1959/60. Bestimme den Prozentsatz der Steigerung der Besucherzahl und den der Anzahl der Vorstellungen!

h) Eine Kohle enthält 9,75% Feuchtigkeit. Wie groß ist der Aschegehalt der Kohle, bezogen auf die Trockensubstanz, wenn 53,4 mg feuchter Kohle einen Veraschungsrückstand von 2,95 mg ergeben?

i) Bestimme die prozentuale Zusammensetzung des Kohlendioxids CO_2 (Atomgewicht von C: 12,01; von O: 16)!

k) Welche Konzentration erhält man, wenn man 7 kg 60prozentige und 33 kg 10prozentige Salzsäure mischt?

233. Bestimmung des Prozentwertes. Berechne:

a) 53% von 678 MDN
b) 122% von 1456 kg
c) 11,5% von 34200 t
d) 41,4% von 6362 ha
e) 26,4% von 374 m
f) 17,75% von 484 Stück
g) 8,7% von 912 MDN
h) 2,4% von 57,2 hl
i) 0,3% von 156 MW
k) 181% von 873000

234. a) Eine Prüfungsarbeit werde bei richtiger Lösung mit 60 Punkten bewertet. Die Noten werden nach folgender Skale festgelegt:

0 ··· 39,9%	der Gesamtpunktzahl:	Note	5
40 ··· 54,9%	„	„	4
55 ··· 74,9%	„	„	3
75 ··· 93,9%	„	„	2
94 ···100 %	„	„	1

Berechne die zugehörige Punkteskale (gerundet)!

b) Drei Landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften haben sich zu einer LPG mit 4163 ha Gesamtfläche zusammengeschlossen; davon sind 47% Ackerland, 28% Wiesen und Weiden, 19% Wald, der Rest Wege, Baugelände und Sumpf. Wie groß sind die einzelnen Anteile?

c) An den Fachschulen der DDR studierten 1958 110073 Studenten. 1960 ist ihre Zahl auf 155,64% angewachsen. Wieviele studierten 1960?

d) Der Anteil der weiblichen Studierenden von den 66027 im Jahre 1959 an den Hochschulen und Universitäten der DDR im Direktstudium immatrikulierten Studenten betrug 32,62%. Wieviel Frauen und Mädchen studierten 1959?

e) Vier Siemens-Martin-Öfen benötigen eine tägliche Erzmenge von 9200 t, woraus 20% Roheisen gewonnen wird. Wie groß wird die tägliche Produktionsleistung, wenn noch zwei weitere Öfen in Betrieb genommen werden?

235. Berechne den Grundwert:

a) 885 Stück ≙ 121%
b) 140,42 MDN ≙ 17%
c) 690 m ≙ 149%
d) 8117,5 kg ≙ 324,7%
e) 294,528 ha ≙ 38,4%
f) 169,6 MDN ≙ 212%
g) 226,8 MW ≙ 189%
h) 75,69 g ≙ 87%
i) 183642 Einwohner ≙ 254%
k) 58,11 hl ≙ 103,4%

236. Berechne die Zinsen von:

a) 763500 MDN zu 4,5% in 1 Jahr
b) 8953,50 MDN „ 12% „ 1 „
c) 56,80 MDN „ 4,2% „ $\frac{3}{4}$ „
d) 7165,50 MDN „ $7\frac{1}{3}$ % „ $2\frac{1}{5}$ „
e) 69547 MDN „ 14% „ 4 Monaten
f) 80 MDN „ 5% „ 6 „
g) 250 MDN „ 4% „ 2 „ 12 Tagen
h) 240 MDN „ 2,5% „ 1 „ 18 „
i) 16200 MDN „ 3,5% „ 2 Jahren 3 Monaten 22 Tagen
k) 24 MDN „ 5% „ 3 „ 6 „

10. Lineare Gleichungssysteme

10.1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

10.1.1. Begriffserklärungen

Eine *lineare Gleichung mit zwei Unbekannten* läßt sich stets in der Form

$$\boxed{ax + by = c} \tag{61}$$

schreiben. Dabei bedeuten a, b und c ***beliebige, aber feste Zahlen***, während x und y die beiden *Unbekannten* darstellen, die bestimmt werden sollen. Da die Gleichung linear sein soll, dürfen die beiden Unbekannten x und y nur einzeln und nur in der ersten Potenz auftreten.

Ein Zahlenpaar x; y, das die Gleichung (61) erfüllt, heißt **Lösung** dieser Gleichung.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten besitzt unendlich viele Lösungen, denn man kann für die eine Unbekannte einen ganz beliebigen Zahlenwert annehmen und die andere Unbekannte dann so bestimmen, daß die Gleichung erfüllt ist.

BEISPIEL

Die Gleichung $3x + y = 15$ *besitzt u.a. die folgenden Lösungen:*

$x = 0,\ y = 15$ $\quad x = 1,\ y = 12$ $\quad x = 2,\ y = 9$ $\quad x = 3,\ y = 6$
$x = 4,\ y = 3$ $\quad x = 5,\ y = 0$ $\quad x = 6,\ y = -3$ $\quad x = -22{,}5,\ y = 82{,}5$

und noch unendlich viele andere Lösungen.

Um die beiden Unbekannten x und y der Gleichung $3x + y = 15$ *eindeutig* bestimmen zu können, muß noch eine zweite Gleichung vorhanden sein.
Besteht beispielsweise neben der Gleichung $3x + y = 15$ noch die zweite Gleichung

$$5x - 6y = 2,$$

so gibt es auch für diese zweite Gleichung unendlich viele Lösungen, von denen einige in der nachfolgenden Wertetabelle zusammengestellt sind:

x	0	1	2	3	4	5	6	
y	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{6}$	3	$\frac{23}{6}$	$\frac{14}{3}$	usw.

Die Lösungen dieser zweiten Gleichung sind im allgemeinen von denen der ersten Gleichung verschieden bis auf *ein* einziges ***Wertepaar***, nämlich $x = 4$; $y = 3$, das ***beide Gleichungen gleichzeitig*** erfüllt.

Dieses Wertepaar heißt **Lösung des linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten**

$$\left| \begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{array} \right| .$$

Die beiden senkrechten Striche, in die das Gleichungssystem eingeschlossen wurde, sollen andeuten, daß diese beiden Gleichungen als zusammengehörig betrachtet werden sollen und daß die gemeinsame Lösung dieser beiden Gleichungen zu bestimmen ist.

Aus diesen Überlegungen geht hervor, daß *zur eindeutigen Bestimmung zweier Unbekannter* stets *zwei Gleichungen* erforderlich sind, die zu einem *Gleichungssystem* zusammengefaßt werden.

Das Auflösen eines linearen Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right| \tag{62}$$

läuft darauf hinaus, eine der beiden Unbekannten zu beseitigen (zu *eliminieren*), so daß nur noch *eine Gleichung mit einer Unbekannten* übrigbleibt.

10.1.2. Numerische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

10.1.2.1. Das Einsetzverfahren

Beim ***Einsetzverfahren*** wird eine der beiden Gleichungen nach einer Unbekannten aufgelöst. Der entstehende Ausdruck ist dann an Stelle dieser Unbekannten in die andere Gleichung einzusetzen. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, die nur noch eine Unbekannte enthält.

BEISPIEL

Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{array} \right|$$

ist mit Hilfe des Einsetzverfahrens zu lösen.

Lösung: Man löst hier vorteilhaft die erste Gleichung nach y auf:

(a) $y = 15 - 3x$

und setzt diesen Wert in die zweite Gleichung ein:

$$5x - 6 \cdot (15 - 3x) = 2.$$

Daraus folgt $\underline{\underline{x = 4.}}$

Den zugehörigen Wert der anderen Unbekannten erhält man, indem man den gefundenen Wert $x = 4$ in eine der beiden gegebenen Gleichungen oder zweckmäßiger in (a) einsetzt:

$$y = 15 - 3 \cdot 4$$
$$\underline{\underline{y = 3.}}$$

Probe: $3 \cdot 4 + 3 \mid 15 \qquad 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 \mid 2$

$12 + 3 = 15 \qquad 20 - 18 = 2$

Das Zahlenpaar $x = 4$; $y = 3$ erfüllt beide Gleichungen. Demnach ist $x = 4$; $y = 3$ die Lösung des Gleichungssystems.

Bei einem Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten ist die Probe stets an *allen* Ausgangsgleichungen durchzuführen. (Warum?)
Das Einsetzverfahren eignet sich vor allem dann, wenn sich eine der beiden Gleichungen auf einfache Weise nach einer Unbekannten auflösen läßt.
Das Einsetzverfahren wird gelegentlich auch *Substitutionsverfahren*[1]) genannt.

10.1.2.2. Das Gleichsetzverfahren

Das *Gleichsetzverfahren* ist eine Abart des Einsetzverfahrens. Man löst *beide* Gleichungen nach *derselben* Unbekannten auf und setzt die so entstehenden Ausdrücke einander gleich.

BEISPIEL

Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{array}\right|$$

ist nach dem Gleichsetzverfahren zu lösen.

Lösung: Auflösen der ersten Gleichung nach y: $y = 15 - 3x$;

Auflösen der zweiten Gleichung nach y: $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$.

Die beiden Ausdrücke für y müssen miteinander übereinstimmen:

$$15 - 3x = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$$
$$\underline{\underline{x = 4.}}$$

Die zweite Unbekannte ermittelt man am besten aus einer der beiden nach y umgestellten Gleichungen:

$$y = 15 - 3 \cdot 4$$
$$\underline{\underline{y = 3.}}$$

Probe siehe Beispiel aus 10.1.2.1.!

[1]) substituere (lat.) einsetzen.

Das Gleichsetzverfahren eignet sich vor allem dann, wenn sich beide Gleichungen möglichst einfach nach ein und derselben Unbekannten auflösen lassen.

10.1.2.3. Das Additionsverfahren

Beim *Additionsverfahren* multipliziert man die beiden Gleichungen mit geeigneten Faktoren, so daß eine der beiden Unbekannten herausfällt, wenn man die neuen Gleichungen addiert.

BEISPIEL

Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{array}\right|$$

ist mit Hilfe des Additionsverfahrens zu lösen.

Lösung: Multipliziert man die erste Gleichung mit 6, so werden die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen entgegengesetzt gleich. Es entsteht so das neue Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} 18x + 6y = 90 \\ 5x - 6y = 2 \end{array}\right| .$$

Addiert man die Seiten der beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 23x &= 92 \\ \underline{x &= 4}\,. \end{aligned}$$

Mit $x = 4$ erhält man schließlich y aus einer der beiden Ausgangsgleichungen.

Das Additionsverfahren eignet sich besonders dann, wenn eine der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen bereits den gleichen Koeffizienten besitzt, oder wenn es sich durch eine einfache Multiplikation einrichten läßt, daß eine Unbekannte in beiden Gleichungen den gleichen Koeffizienten erhält.

10.1.2.4. Bemerkungen zu den drei Lösungsverfahren

Bei jedem Lösungsverfahren wurde angegeben, welche Gleichungssysteme sich damit vorteilhaft lösen lassen. Ein allgemeingültiges „Rezept", in welchem Falle dieses oder jenes Lösungsverfahren am günstigsten anzuwenden ist, kann nicht gegeben werden.
Nur wer eine große Anzahl von Aufgaben systematisch durchgerechnet hat (dabei möglichst zunächst einmal jede Aufgabe mit jedem der drei Verfahren), wird auf Grund seiner Erfahrungen bei einem gegebenen Gleichungssystem sehr schnell den dafür am besten geeigneten Lösungsweg finden. Grundsätzlich sei jedoch betont, daß jedes der drei Verfahren zum Ziele führt.

10.1.3. Die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten

Soll ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gelöst werden, so können drei Fälle auftreten.

1. Fall: $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right|$

Das Gleichungssystem ist *eindeutig lösbar* und hat die Lösung

$$x = 3; \quad y = 2.$$

2. Fall:
$$\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 24 \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem besteht nur formal aus zwei Gleichungen, denn die *zweite Gleichung sagt dasselbe aus wie die erste.* (Sie geht aus der ersten durch Multiplikation beider Seiten mit 2 hervor.)
Man nennt zwei derartige Gleichungen **linear abhängig** voneinander.
Da in diesem Falle im Grunde genommen nur *eine* Gleichung mit zwei Unbekannten vorhanden ist, muß das Gleichungssystem *unendlich viele Lösungen* besitzen, so u. a.

$$x = 3;\ y = 2 \qquad x = 0;\ y = 4 \qquad x = 6;\ y = 0$$

usw.

Der Versuch, ein lineares Gleichungssystem mit zwei voneinander abhängigen Gleichungen mit Hilfe eines der drei Lösungsverfahren zu lösen, führt immer auf eine identische Gleichung, in der die Unbekannten nicht mehr auftreten. So führt z. B. das Additionsverfahren (Multiplikation der ersten Gleichung mit -2) auf die Identität

$$0 \equiv 0.$$

3. Fall:
$$\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 30 \end{array} \right|$$

In diesem Falle sind zwar zwei voneinander unabhängige Gleichungen gegeben, die beiden *Gleichungen widersprechen* jedoch *einander.* Während nämlich nach der ersten Gleichung $2x + 3y = 12$ sein soll, müßte nach der zweiten Gleichung $2x + 3y = 15$ sein. Das ist aber nicht möglich.
Ein derartiges Gleichungssystem, bei dem die beiden Gleichungen einander widersprechen, kann *keine Lösung* besitzen.

Der Versuch, ein solches Gleichungssystem zu lösen, führt stets auf eine Ungleichung. So liefert z. B. das Additionsverfahren (erste Gleichung mit -2 multipliziert) die Ungleichung

$$0 \neq 6.$$

Damit gilt:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten liefert im allgemeinen eine eindeutige Lösung.
Sind die beiden Gleichungen des Systems linear abhängig voneinander, so existiert keine eindeutige Lösung. In diesem Falle gibt es unendlich viele Lösungen.
Stehen die beiden Gleichungen im Widerspruch zueinander, so gibt es keine Lösung.

10.1.4. Schwierigere Gleichungssysteme

Ist ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten nicht von vornherein in der „*Normalform*"

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right|$$

gegeben, so bringt man es meist zunächst auf diese Form und löst es dann mit einem der drei Lösungsverfahren.

BEISPIELE

1. $\left|\begin{array}{l}(x+2)(y-1)=(x+5)(y-2)\\(x-4)(y+7)=(x-3)(y+4)\end{array}\right|$

Lösung: Durch Ausmultiplizieren und Ordnen wird zunächst die Normalform hergestellt:

$$\left|\begin{array}{rcr}x-3y&=&-8\\3x-y&=&16\end{array}\right|,$$

woraus

$$\underline{\underline{x=7}} \qquad \underline{\underline{y=5}}$$

folgt.

Probe: $9\cdot 4 \mid 12\cdot 3 \qquad 3\cdot 12 \mid 4\cdot 9$

$36=36 \qquad 36=36$ Beide Proben stimmen.

2. $\left|\begin{array}{l}5(x-2)-3(y-1)=0\\2(x-2)+7(y-1)=0\end{array}\right|$

Lösung: Durch Ausmultiplizieren könnte man das Gleichungssystem zunächst wieder auf die Normalform bringen. Da aber die Unbekannten in beiden Gleichungen in denselben Verbindungen $x-2$ bzw. $y-1$ auftreten, kann man auch sofort das Additionsverfahren anwenden und dadurch eine Unbekannte eliminieren:

$$\left|\begin{array}{rcl}5(x-2)-3(y-1)&=&0\\2(x-2)+7(y-1)&=&0\end{array}\right| \begin{array}{l}\cdot 7\\\cdot 3\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcl}35(x-2)-21(y-1)&=&0\\6(x-2)+21(y-1)&=&0\end{array}\right| \begin{array}{l}+\\+\end{array}$$

$$41(x-2)=0 \qquad \text{[vgl. Formel (6) auf Seite 66!]}$$

$$x-2=0$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$

y wird am besten aus einer der Ausgangsgleichungen berechnet:

$$5(2-2)-3(y-1)=0$$

$$-3(y-1)=0$$

$$y-1=0$$

$$\underline{\underline{y=1}} \qquad \text{Probe!}$$

3. $(u+v):(u+1):(9-v)=3:2:1$

Lösung: Zerlegung der fortlaufenden Proportion in zwei Einzelproportionen:

$$\left|\begin{array}{l}(u+v):(u+1)=3:2\\(u+1):(9-v)=2:1\end{array}\right|$$

Produktgleichungen:

$$\left|\begin{array}{rcl}2(u+v)&=&3(u+1)\\u+1&=&2(9-v)\end{array}\right|$$

Ausmultiplizieren und ordnen:

$$\left|\begin{array}{rl} -u+2v= & 3 \\ u+2v= & 17 \end{array}\right|$$

Addition: $4v = 20$

$$\underline{\underline{v = 5}} \qquad \underline{\underline{u = 7}}$$

Probe: $12:8:4 = 3:2:1$ Probe stimmt.

4. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{3x-2}{x-4} - \dfrac{y+8}{y-2} = 2 \\[2ex] \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{y-7}{y+1} = 2 \end{array}\right|$$

Lösung: Beseitigung der Brüche durch Multiplikation mit den Hauptnennern:

$$\left|\begin{array}{l} (3x-2)(y-2) - (y+8)(x-4) = 2\cdot(x-4)(y-2) \\ (x+1)(y+1) + (y-7)(x-3) = 2\cdot(x-3)(y+1) \end{array}\right|$$

Ausmultiplizieren der Klammern und ordnen:

$$\left|\begin{array}{rl} -10x+10y= & -20 \\ -8x+4y= & -28 \end{array}\right| \begin{array}{l} :10 \\ :(-4) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rl} -x+y= & -2 \\ 2x-y= & 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\underline{\underline{x = 5}} \qquad \underline{\underline{y = 3}} \qquad \text{Probe!}$$

5. $$\left|\begin{array}{l} ax+by = a^2+2ab-b^2 \\ bx-ay = b^2+2ab-a^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot a \\ \cdot b \end{array}$$

Lösung: Additionsverfahren (die Erweiterungsfaktoren stehen bereits neben dem Gleichungssystem):

$$\left|\begin{array}{l} a^2x+aby = a^3+2a^2b-ab^2 \\ b^2x-aby = b^3+2ab^2-a^2b \end{array}\right|$$

$$a^2x+b^2x = a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$x(a^2+b^2) = a^3+a^2b+ab^2+b^2$$

$$x = \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+b^2}$$

Durch partielle Division läßt sich dieses Ergebnis noch weiter vereinfachen zu

$$\underline{\underline{x = a+b.}}$$

Setzt man diesen Wert für x in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$a^2+ab+by = a^2+2ab-b^2$$

$$by = ab-b^2 = b(a-b)$$

$$\underline{\underline{y = a-b.}}$$

Probe: $a(a+b)+b(a-b) \mid a^2+2ab-b^2 \qquad b(a+b)-a(a-b) \mid b^2+2ab-a^2$

$a^2+ab+ab-b^2 \mid a^2+2ab-b^2 \qquad ab+b^2-a^2+ab \mid b^2+2ab-a^2$

$a^2+2ab-b^2 = a^2+2ab-b^2 \qquad b^2+2ab-a^2 = b^2+2ab-a^2$

Die Probe stimmt.

6. $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m}{x+m}+\dfrac{n}{y+n}=1 \\ \dfrac{n}{x+m}-\dfrac{m}{y+n}=2 \end{array}\right|$$

Lösung: In diesem Beispiel würde die Multiplikation mit dem Hauptnenner auf sehr umständliche Gleichungen führen. Da die Unbekannten hier wieder nur in ganz bestimmten Verbindungen, nämlich $\dfrac{1}{x+m}$ und $\dfrac{1}{x+n}$ auftreten, kann sofort das Additionsverfahren angewendet werden (vgl. Beispiel 21).

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m}{x+m}+\dfrac{n}{y+n}=1 \\ \dfrac{n}{x+m}-\dfrac{m}{y+n}=2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot m \\ \cdot n \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m^2}{x+m}+\dfrac{mn}{y+n}=m \\ \dfrac{n^2}{x+m}-\dfrac{mn}{y+n}=2n \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\frac{m^2+n^2}{x+m}=m+2n$$

$$x+m=\frac{m^2+n^2}{m+2n}$$

$$x=\frac{m^2+n^2}{m+2n}-m=\frac{m^2+n^2-m^2-2mn}{m+2n}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{n(n-2m)}{m+2n}}}$$

Statt y dadurch zu berechnen, daß man den gefundenen Wert für x in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzt, wird es einfacher, wenn man das Additionsverfahren ein zweites Mal anwendet, um x zu eliminieren (Multiplikation der ersten Gleichung mit n, der zweiten Gleichung mit $-m$):

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{mn}{x+m}+\dfrac{n^2}{y+n}=n \\ -\dfrac{mn}{x+m}+\dfrac{m^2}{y+n}=-2m \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$\frac{m^2+n^2}{y+n}=n-2m$$

$$y+n=\frac{m^2+n^2}{n-2m}$$

$$y=\frac{m^2+n^2}{n-2m}-n=\frac{m^2+n^2-n^2+2mn}{n-2m}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{m(m+2n)}{n-2m}}}$$

Probe für die erste Gleichung:

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{\dfrac{m}{n(n-2m)}}{\dfrac{m+2n}{n(n-2m)}+m} + \dfrac{\dfrac{n}{m(m+2n)}}{\dfrac{n-2m}{m(m+2n)}+n} & 1 \\[2ex]
\dfrac{m(m+2n)}{n(n-2m)+m(m+2n)} + \dfrac{n(n-2m)}{m(m+2n)+n(n-2m)} & 1 \\[2ex]
\dfrac{m^2+2mn}{m^2+n^2} + \dfrac{n^2-2mn}{m^2+n^2} & 1 \\[2ex]
\dfrac{m^2+n^2}{m^2+n^2} = 1 &
\end{array}$$

Die Probe für die zweite Gleichung sei dem Leser überlassen.

7. *Eine zweiziffrige Zahl, bei der die erste Ziffer doppelt so groß ist wie die zweite, besitzt die Quersumme 12. Wie heißt die Zahl?*

Lösung: Die erste Ziffer der Zahl sei x, die zweite Ziffer y. Da die erste Ziffer doppelt so groß sein soll wie die zweite, muß

$$x = 2y$$

sein. Da die Quersumme der Zahl 12 ergeben soll, muß

$$x + y = 12$$

sein.
Aus dem Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{r} x = 2y \\ x + y = 12 \end{array}\right|$$

folgt

$$\underline{\underline{x = 8}} \qquad \underline{\underline{y = 4}}.$$

Die gesuchte Zahl ist demnach die Zahl 84. Probe!

8. *Vergrößert man die Spannung in einem Stromkreis um 5 V und vermindert man den Widerstand um 2 Ω, so wird die Stromstärke 4,5 A. Vermindert man dagegen die Spannung um 4 V bei gleichzeitiger Vergrößerung des Widerstandes um 6 Ω, so sinkt die Stromstärke auf 2 A ab. Wie groß sind die ursprüngliche Stromstärke, die Spannung und der Widerstand?*

Lösung: Die ursprünglichen Größen von Spannung und Widerstand seien U und R. Dann folgt aus dem Aufgabentext auf Grund des Ohmschen Gesetzes:

$$U + 5\,\mathrm{V} = (R - 2\,\Omega) \cdot 4{,}5\,\mathrm{A}$$

und $$U - 4\,\mathrm{V} = (R + 6\,\Omega) \cdot 2\,\mathrm{A}.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert

$$U = 40\,\mathrm{V} \quad \text{und} \quad R = 12\,\Omega.$$

Folglich betrug die ursprüngliche Spannung im Stromkreis $U = 40$ V, der ursprüngliche Widerstand $R = 12\,\Omega$ und die ursprüngliche Stromstärke $I = \dfrac{U}{R} = 3{,}33$ A.

9. *Es stehen zwei Sorten Alkohol zur Verfügung: 72prozentiger und 96prozentiger. Wieviel muß man von jeder Sorte nehmen, wenn man 50 l 80prozentigen Alkohol benötigt?*

Lösung: Man muß x l des 72prozentigen und y l des 96prozentigen Alkohols nehmen. Da 50 l benötigt werden, muß

$$x + y = 50$$

sein.
Da 1 l des 72prozentigen Alkohols 0,72 l reinen Alkohol enthält, enthalten x l des 72prozentigen Alkohols $0{,}72 \cdot x$ l reinen Alkohol. Entsprechend sind in y l des 96prozentigen Alkohols $0{,}96 \cdot y$ l und in 50 l des 80prozentigen Alkohols $0{,}80 \cdot 50$ l reiner Alkohol enthalten. Der Vergleich der vorhandenen Mengen an reinem Alkohol ergibt

$$0{,}72 \cdot x + 0{,}96 \cdot y = 0{,}80 \cdot 50.$$

Aus den beiden so gefundenen Gleichungen

$$\left| \begin{array}{rcl} 0{,}72 \cdot x + 0{,}96 \cdot y & = & 0{,}80 \cdot 50 \\ x + y & = & 50 \end{array} \right|$$

folgt $x = 33\frac{1}{3}$ und $y = 16\frac{2}{3}$.

Es müssen demnach $33\frac{1}{3}$ l des 72prozentigen und $16\frac{2}{3}$ l des 96prozentigen Alkohols gemischt werden, wenn man 50 l 80prozentigen Alkohol benötigt.

10. *Eine Platte aus Messingblech hat die Masse* 9,405 kg *und die Abmessungen* $500 \times 500 \times 4{,}4$ (*Maße in* mm). *Wieviel Kupfer und wieviel Zink sind in der Legierung enthalten?* ($\varrho_{Cu} = 8{,}9\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$; $\varrho_{Zn} = 7{,}14\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$)

Lösung: Die Platte enthält x kg Cu und y kg Zn. Beide Massen ergeben zusammen die Masse der Platte:

$$x\ \mathrm{kg} + y\ \mathrm{kg} = 9{,}405\ \mathrm{kg}$$

x kg Cu besitzen ein Volumen

$$V_{Cu} = \frac{M_{Cu}}{\varrho_{Cu}} = \frac{x\ \mathrm{kg}}{8{,}0\ \mathrm{kg/dm^3}} = \frac{x}{8{,}9}\ \mathrm{dm^3},$$

y kg Zn besitzen ein Volumen

$$V_{Zn} = \frac{M_{Zn}}{\varrho_{Zn}} = \frac{y\ \mathrm{kg}}{7{,}14\ \mathrm{kg/dm^3}} = \frac{y}{7{,}14}\ \mathrm{dm^3}.$$

Die beiden Volumen ergeben zusammen das Volumen der Platte

$$V_{Cu} + V_{Zn} = V_{Platte} = 5 \cdot 5 \cdot 0{,}044\ \mathrm{dm^3},$$

also $\frac{x}{8{,}9}\ \mathrm{dm^3} + \frac{y}{7{,}14}\ \mathrm{dm^3} = 1{,}1\ \mathrm{dm^3}$.

Aus dem Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} x + y & = & 9{,}405 \\ \frac{x}{8{,}9} + \frac{y}{7{,}14} & = & 1{,}1 \end{array} \right|$$

ergibt sich

$$x = 7{,}843 \quad \text{und} \quad y = 1{,}562.$$

Die Legierung enthält also 7,843 kg Cu und 1,562 kg Zn.

10.2. Lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten

10.2.1. Begriffserklärungen

Eine lineare Gleichung mit n Unbekannten x_1, x_2, x_3, ..., x_N läßt sich stets in der Form

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n = b} \tag{63}$$

schreiben, wobei die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, ..., a_n und b beliebige, aber feste Zahlenwerte bedeuten.
Eine Wertezusammenstellung x_1, x_2, x_3, ..., x_n, die diese Gleichung erfüllt, heißt *Lösung* der linearen Gleichung (63) mit n Unbekannten.
Ähnlich wie bei den linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten gilt auch hier:

Zur eindeutigen Bestimmung der n *Unbekannten* x_1, x_2, ..., x_n sind n *linear unabhängige Gleichungen* erforderlich. Sind alle diese n Bestimmungsgleichungen linear, so nennt man die Gesamtheit aller n Gleichungen ein lineares *Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten.*
Ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten besitzt im allgemeinen *eine eindeutige* Lösung. Sind mindestens zwei der n Gleichungen *linear* voneinander *abhängig*, so gibt es *unendlich viele Lösungen.* Besteht zwischen mindestens zwei der n Gleichungen des Systems ein *Widerspruch*, so gibt es *keine Lösung.*

Besitzt ein Gleichungssystem mit n Unbekannten *weniger als n* voneinander unabhängige Gleichungen, so nennt man es *unterbestimmt.* Es besitzt dann *unendlich viele Lösungen*, sofern die Gleichungen einander nicht widersprechen. Besitzt ein Gleichungssystem mit n Unbekannten *mehr als n* voneinander unabhängige Gleichungen, so nennt man es *überbestimmt.* Ein überbestimmtes Gleichungssystem besitzt *keine Lösung.*

10.2.2. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten

Das Grundprinzip für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten ist das gleiche wie das für Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten. Man eliminiert aus den n Gleichungen eine Unbekannte und verschafft sich so $n-1$ neue, voneinander unabhängige Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten. Aus diesen eliminiert man erneut eine der verbliebenen Unbekannten, so daß ein neues Gleichungssystem von $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Unbekannten entsteht. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis zum Schluß nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrigbleibt. Diese Gleichung wird gelöst und mit Hilfe der gefundenen Lösung werden dann die übrigen Unbekannten schrittweise aus den während des Eliminationsprozesses entstandenen Gleichungen bestimmt.

BEISPIELE

1. $$\left|\begin{array}{l} 4x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 16 \\ 5x - y + 3z = 12 \end{array}\right|$$

Lösung: Zur Elimination eignet sich in diesem Gleichungssystem besonders die Unbekannte y. Addiert man nämlich die erste und die dritte Gleichung, so ergibt sich

$$9x + z = 12.$$

Multipliziert man die dritte Gleichung mit 2 und addiert dazu dann die zweite Gleichung, so erhält man

$$13x + 9z = 40.$$

Um die langatmige Beschreibung des Rechenganges zu vermeiden, notiert man die Erweiterungsfaktoren der einzelnen Gleichungen am Rande des Gleichungssystems, so daß die Rechnung wie folgt aussieht:

$$\left|\begin{array}{rrrl|l|l} 4x + & y - & 2z & = 0 & +1 & \\ 3x + & 2y + & 3z & = 16 & & +1 \\ 5x - & y + & 3z & = 12 & +1 & +2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rrrl|l} 9x & & + z & = 12 & +9 \\ 13x & & + 9z & = 40 & -1 \end{array}\right.$$

$$68x \qquad = 68$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Mit diesem Wert $x = 1$ bestimmt man nun die Unbekannte z aus einer der beiden Gleichungen des Gleichungssystems mit zwei Unbekannten:

$$9 \cdot 1 + z = 12$$

$$\underline{\underline{z = 3}}$$

Schließlich erhält man die letzte Unbekannte y aus einer der gegebenen Gleichungen des Gleichungssystems mit drei Unbekannten:

$$4 \cdot 1 + y - 2 \cdot 3 = 0$$

$$\underline{\underline{y = 2}}$$

Die **Probe** ist an sämtlichen Ausgangsgleichungen durchzuführen:

$$4 + 2 - 6 = 0 \qquad 3 + 4 + 9 = 16 \qquad 5 - 2 + 9 = 12$$

Alle drei Proben stimmen.

2. $$\left|\begin{array}{rrrl} x - & 2y + & 3z & = 8 \\ x - & y & & = 2 \\ x & & - z & = 4 \end{array}\right|$$

Lösung: Mit Hilfe der zweiten und dritten Gleichung lassen sich hier sowohl y als auch z allein durch x ausdrücken:

(a) $\qquad y = x - 2$

(b) $\qquad z = x - 4$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich eine Gleichung mit der einen Unbekannten x:

$$x - 2(x - 2) + 3(x - 4) = 8,$$

woraus

$$\underline{\underline{x = 8}}$$

folgt.

Aus (a) und (b) erhält man mit diesem Wert

$$\underline{\underline{y = 6}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{z = 4}}. \qquad \text{Probe!}$$

3. *Drei Arbeiter* A, B *und* C *haben eine Arbeit auszuführen. Arbeiten* A *und* B *gemeinsam, so dauert die Arbeit* 12 *Tage;* A *und* C *benötigen zusammen* 15 *Tage und bei* B *und* C *würde es* 20 *Tage dauern, bis die Arbeit fertig ist. Wie lange würde jeder Arbeiter brauchen, wenn er die Arbeit allein ausführen müßte? Wie lange würde es dauern, wenn alle drei gemeinsam arbeiteten?*

Lösung: A benötigt x Tage, B y Tage und C z Tage zur Bewältigung der Arbeit. Dann schafft A an einem Tage $\frac{1}{x}$, B an einem Tage $\frac{1}{y}$ und C an einem Tage $\frac{1}{z}$ der Arbeit.

Da A und B zusammen 12 Tage brauchen, schaffen sie zusammen an einem Tage $\frac{1}{12}$ der Arbeit. Folglich gilt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$$

Entsprechend erhält man

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$$

und

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}.$$

Löst man dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens zunächst nach $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{z}$ auf, so ergibt sich

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{20} \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{60},$$

woraus $x = 20$ $y = 30$ $z = 60$

folgt.

Demnach würde A allein 20 Tage, B allein 30 Tage und C allein 60 Tage zur Bewältigung der Arbeit benötigen.

Arbeiten sie alle drei gemeinsam, so schaffen sie an einem Tage

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$$

der Arbeit. Folglich würden sie 10 Tage benötigen, wenn sie gemeinsam arbeiteten.

4.

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5$	$+1$	$+1$	$+1$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -3$		$+1$	-2
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 4$	$+1$		
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 4x_5 = -1$		-1	
$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 10$			

Lösung: Da die letzte Gleichung die Unbekannte x_4 nicht enthält, kann diese Gleichung in ein neues Gleichungssystem mit vier Unbekannten übernommen werden. Es sind dazu noch

drei weitere Gleichungen ohne x_4 aufzustellen. (Die Erweiterungsfaktoren hierfür wurden bereits am Rande des Gleichungssystems notiert.) Es entsteht:

(a)	$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 10$			$+1$
(b)	$5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 9$		$+1$	$+5$
(c)	$6x_1 + 5x_3 - x_5 = 3$	$+1$		
(d)	$-5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + x_5 = 11$		$+1$	

Elimination von x_5 (warum?):

(c)	$6x_1 + 5x_2 - x_5 = 3$		-5
(e)	$-5x_2 + 15x_3 = 20$	$:5$	
(f)	$30x_1 + 6x_2 + 28x_3 = 55$		$+1$

Elimination von x_1:

(g)	$-x_2 + 3x_3 = 4$	$+11$
(h)	$-19x_2 + 33x_3 = 40$	-1

Elimination von x_2:

$$8x_2 = 4$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{1}{2}}}$$

x_3 aus (g):

$$-\frac{1}{2} + 3x_3 = 4$$

$$\underline{\underline{x_3 = \frac{3}{2}}}$$

x_1 aus (c):

$$6x_1 + 5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{3}}}$$

x_5 aus (b):

$$5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{2} - x_5 = 9$$

$$\underline{\underline{x_5 = \frac{2}{3}}}$$

x_4 aus der zweiten Gleichung des Gleichungssystems:

$$4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} - 2x_4 + \frac{2}{3} = -3$$

$$\underline{\underline{x_4 = \frac{3}{4}}}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet demnach

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{3}{2} \quad x_4 = \frac{3}{4} \quad x_5 = \frac{2}{3}.$$

Probe!

AUFGABEN

Löse die folgenden Gleichungssysteme mit allen drei Lösungsverfahren und entscheide, welches das günstigste ist!

237. a) $\left|\begin{array}{l} 3x + y = 14 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = -14 \\ x + 2y = -8 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 9x - 8y = 14 \\ 5x - 4y = 10 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 5x + 8y = 28 \\ \frac{3x}{4y} = \frac{2}{3} \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} 6x - 5y = 1 \\ 9x - 7y = 8 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} 3x + y = -5 \\ 2y + x = 5 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} 2{,}4x - 4{,}5y = 1{,}5 \\ 10{,}5y - 3{,}6x = 1{,}5 \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} 3x - y = 8 \\ 0{,}4x + 0{,}06y = 3 \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 2\frac{5}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3 \end{array}\right|$

k) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = -4 \\ \frac{2x}{3} + \frac{5y}{6} = -11 \end{array}\right|$

238. a) $\left|\begin{array}{l} ax + y = 2a + b \\ ax - y = -b \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 0{,}6x + 3{,}5y = 22{,}3 \\ 1{,}4y - 0{,}9x = 1{,}15 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 28x - 57y = 55 \\ 49x + 4y = 200 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 15x + 23y + 10 = 0 \\ 9x + 12y + 6 = 0 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} 15x - 10y = 25 \\ 10x + 15y = 60 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} 21x - 9y + 3 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} x = 3y - 2 \\ x = 5y - 12 \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} 0{,}80x - 0{,}25y = 0{,}60 \\ 0{,}64x + 1{,}25y = 6{,}28 \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 9 \\ \frac{x}{9} - \frac{y}{10} = -\frac{2}{5} \end{array}\right|$

k) $\left|\begin{array}{l} 4x - 9y = 1 \\ \frac{x - y}{x + y} = \frac{2}{3} \end{array}\right|$

239. a) $\left|\begin{array}{l} 10x - 9y = 12 \\ 25x - 12y = 51 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 4x - y = 1 \\ 12x = 3(y + 1) \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x + 3y = 20 \\ x - 5y = 12 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 1{,}2x + 3{,}5y = 0{,}827 \\ 2{,}8x + 1{,}5y = 1{,}063 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} x + 2y = 6(x - 3y) \\ 7(x - 3y) = \frac{x}{4} + 6 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} 8x + 5y = 63 \\ 7x - 5y = 27 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} 10(3x + 5) = 2(16 - 3y) \\ 6(1 - 7x) = 5(4y - 10) \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \\ 2x + 3y = 43 \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4 \\ 3(x+y)=10 \end{array}\right|$

k) $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+3}{9}-\frac{y+9}{8}=0 \\ \frac{5x-12}{8}-\frac{3y-10}{7}=1 \end{array}\right|$

240. a) $\left|\begin{array}{l} \frac{5}{2x}-\frac{2}{3y}=\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2x}+\frac{5}{3y}=2 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{5x}{6}+\frac{7y}{4}=12 \\ \frac{2}{3}x+\frac{5}{4}y=9 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{7}{x}-\frac{3}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+15}=\frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x}=\frac{y-4}{y-1} \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} 15x-(7y+x)=7 \\ 13x-2(7y-x)=1 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} bx+ay=a+b \\ b^2x-a^2y=0 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} x+3y=a^2+3ab+b^2 \\ 3x-y=a^2-ab+b^2 \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} (a-b)x+(a+b)y=2a \\ (a-b)x-(a+b)y=2b \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} (x-6)(y-3)=(x-4)(y-4) \\ (x-10)(y-1)=(x-9)(y-3) \end{array}\right|$

k) $\left|\begin{array}{l} (2x+3y-2):(5x-2y+9)=2:3 \\ (x+4y-1):(5x+4y-7)=1:2 \end{array}\right|$

241. a) $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+1}{x-4}-\frac{y+2}{y-1}=1 \\ \frac{3x-1}{x-3}-\frac{2y+8}{y+1}=1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=a-b \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} (3x+4):(3y+5)=2 \\ (4x+3):(3y+2)=3 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} (2x-7)(3y-16)=2(3x-13)(y-5) \\ (3x-17)(4y-17)=(4x-29)(3y-8) \end{array}\right|$

e) $(3x-7):(y+7):(x-y)=6:3:1$

f) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2a-b}-\frac{y}{2a+b}=\frac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \frac{x}{2a-b}+\frac{y}{2a+b}=\frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+y+1}{x-y+1}=\frac{a+1}{a-1} \\ \frac{x+y+1}{x-y-1}=\frac{1+b}{1-b} \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{5x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{3} \\ \frac{7}{10x}-\frac{5}{6y}=\frac{1}{15} \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} \frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13 \\ \frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1 \end{array}\right|$

k) $(x+2y-7):(2y-x+15):(2x+y+19)=1:2:3$

242. a) $\left|\begin{array}{l} 4x-6y+5z=27 \\ 2x+3y-10z=-69 \\ 10x+9y+15z=210 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 2x+y-3z=9 \\ 3x+2y-z=24 \\ 4x-3y+3z=1 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 6x+10y-15z=73 \\ 9x-15y+20z=32 \\ 8x+25y-35z=129 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 4x-7y=4 \\ 5y-3z=26 \\ 2z+x=4 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} 0{,}4x+0{,}3y-0{,}2z=4 \\ 0{,}6x-0{,}5y+0{,}3z=5 \\ 0{,}3x+0{,}2y+0{,}5z=22 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ 3x-z=6 \\ 2y-z=10 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=36\frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=27 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}+\frac{z}{7}=18 \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+3}{y+z}=2 \\ \frac{y+3}{x+z}=1 \\ \frac{z+3}{x+y}=\frac{1}{2} \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} 5x+4y+3z=46 \\ 3x+2y-5z=-8 \\ x-y+4z=19 \end{array}\right|$

k) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=182 \\ x:y:z=7:5:2 \end{array}\right|$

243. a) $\left|\begin{array}{l} ax+by-cz=b-c \\ cx-ay-bz=-a-b \\ bx-cy+az=a-c \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ ax+by=2a \\ (a-b)x+(a+b)y=(a+b)z \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{5}{12} \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{4}{z}=\frac{5}{6} \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{2}{z}=2\frac{3}{4} \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} \frac{12}{2x+3y}-\frac{7{,}5}{3x+4z}=1 \\ \frac{30}{3x+4z}+\frac{37}{5y+9z}=3 \\ \frac{222}{5y+9z}-\frac{8}{2x+3y}=5 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{l} \frac{6}{x+y}+\frac{5}{y+3z}=2 \\ \frac{15}{x+y}-\frac{4}{x-2z}=\frac{1}{2} \\ \frac{10}{y+3z}-\frac{7}{x-2z}=-\frac{3}{2} \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=3a^2+b^2 \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a \\ \frac{x+z}{x-z}=\frac{a}{b} \end{array}\right|$

h) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{4}{z}=-5 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{12}{z}=18 \\ \frac{1}{z}-\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=-4 \end{array}\right|$

i) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{7}{2x-3y}-\dfrac{2}{10z-3y}+\dfrac{3}{3y-8z}=8 \\ \dfrac{2}{2x-3y}-\dfrac{3}{10z-3y}+\dfrac{1}{3y-8z}=0 \\ \dfrac{5}{2x-3y}-\dfrac{4}{10z-3y}+\dfrac{7}{3y-8z}=8 \end{array}\right|$$

k) $$\left|\begin{array}{l} 4x-3y=13 \\ 3x-4z=13 \\ 5y-6z=13 \end{array}\right|$$

244. a) $$\left|\begin{array}{l} 2x+3y-2z+3u=16 \\ 3x+3y-2z-3u=19 \\ 3x-3y+3z-2u=0 \\ 2x+2y-3z-2u=11 \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{l} x+2y=5 \\ y+2z=8 \\ z+2u=11 \\ u+2x=6 \end{array}\right|$$

c) $$\left|\begin{array}{l} x+y+z+u+v=15 \\ 4y+6z+9u=71 \\ 2x+7z+11v=7 \\ 5y+8z+12v=21 \\ 3x+10u+13v=9 \end{array}\right|$$

d) $$\left|\begin{array}{l} 3x-5z=a+5b \\ 2y-x=4a-2b \\ 2z-3u=2a-8b \\ 3v+2y=3a+7b \\ u+2v=8b-2a \end{array}\right|$$

e) $$\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2+4x_3+8x_4+16x_5=57 \\ x_1+3x_2+9x_3+27x_4+81x_5=179 \\ x_1+4x_2+16x_3+64x_4+256x_5=453 \\ x_1+5x_2+25x_3+125x_4+625x_5=975 \\ x_1+6x_2+36x_3+216x_4+1296x_5=1865 \end{array}\right|$$

f) $$\left|\begin{array}{l} x+y+z+u+v+w=31 \\ x+y+z+u-v-w=3 \\ x+y-z-u+v+w=21 \\ -x-y-z+u+v+w=1 \\ x-y+z-u+v-w=5 \\ x-y+z+u-v+w=-3 \end{array}\right|$$

g) $$\left|\begin{array}{l} x-y=3 \\ y-z=2 \\ z-u=1 \\ u-v=0 \\ v+x=20 \end{array}\right|$$

h) $$\left|\begin{array}{l} x+y+z+u=60 \\ x+2y+3z+4u=100 \\ x+3y+6z+10u=150 \\ x+4y+10z+20u=210 \end{array}\right|$$

i) $$\left|\begin{array}{l} x+y+2z=19 \\ y+z+2u=15 \\ z+u+2v=11 \\ u+v+2w=7 \\ v+w+2x=15 \\ w+x+2y=17 \end{array}\right|$$

k) $$\left|\begin{array}{l} x_1-2x_2+3x_3-x_4=5 \\ x_2-2x_3+3x_4-x_1=0 \\ x_3-2x_4+3x_1-x_2=0 \\ x_4-2x_1+3x_2-x_3=5 \end{array}\right|$$

245. a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 518, ihre Differenz 204. Wie heißen die beiden Zahlen?

b) Die Summe zweier Zahlen, die sich wie 3 : 11 verhalten, ergibt 238. Wie heißen die Zahlen?

c) Addiert man zur ersten von zwei gesuchten Zahlen 3, so verhält sich diese Summe zur zweiten Zahl wie 5 : 7. Addiert man zur zweiten gesuchten Zahl 9, so verhält sich diese Summe zur ersten Zahl wie 2 : 1. Wie heißen die beiden Zahlen?

d) Ein Bruch erhält den Wert $\frac{8}{9}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vergrößert; er nimmt den Wert $\frac{7}{8}$ an, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermindert. Wie heißt der Bruch?

246. a) In einem Rechteck ist die eine Seite 3 cm kürzer als die andere. Der Umfang beträgt 38 cm. Wie lang sind die beiden Seiten?

b) An einem zweiarmigen Hebel hängen zwei Gewichte, die zusammen 50 kp betragen. Die Hebelarme verhalten sich wie 2 : 3. Wie schwer ist jedes der Gewichte?

c) Verlängert man eine Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so erhält man ein Quadrat. Der Umfang des Quadrates ist 4 cm größer als der des Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

d) In einem Zugseil herrscht eine Spannung von 150 $kp \cdot cm^{-2}$. Beansprucht man ein Zugseil, dessen Querschnitt doppelt so groß ist wie der des ersten, mit einer um 100 kp größeren Zugkraft, so tritt eine Spannung von 100 $kp \cdot cm^{-2}$ auf. Wie groß sind Querschnitt und Zugkraft beim ersten Seil?

247. a) Ein Vater sagt zu seinem Sohn: „In 4 Jahren werde ich dreimal so alt sein wie du, und vor 4 Jahren war ich fünfmal so alt wie du!“ Wie alt sind Vater und Sohn?

b) Ein Wasserbehälter faßt 1000 m^3 Wasser. Er wird durch zwei Röhren gefüllt. Laufen beide Röhren gleichzeitig, so wird der Behälter in 20 min gefüllt. Läuft die eine nur 10 min, so muß die andere insgesamt 35 min laufen, damit der Behälter vollständig gefüllt wird. Wieviel m^3/min Wasser liefert jede Röhre?

c) Erhöht man die Anzahl der Elemente einer Batterie von 4 auf 7, so steigt in einem Stromkreis der Strom von 3 A auf 4 A an, während gleichzeitig der Gesamtwiderstand um 0,5 Ω zunimmt. Berechne die Spannung eines Elementes und den Widerstand des ursprünglichen Kreises.

d) In einem Stromkreis steigt bei Verminderung des Widerstandes um 4 Ω der Strom auf 9 A an. Beim Zuschalten von 3 Ω sinkt der Strom auf 2 A ab. Berechne Spannung und Widerstand des Kreises!

11. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten

11.1. Begriffserklärungen

Unter einer **quadratischen Gleichung** versteht man eine Bestimmungsgleichung, in der die Unbekannte bis zur *zweiten*, nicht aber in einer höheren Potenz auftritt. Daher werden die quadratischen Gleichungen auch *algebraische Gleichungen zweiten Grades* genannt.

Die *allgemeine Form* einer quadratischen Gleichung ist

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0} \,. \tag{64}$$

Dabei nennt man

Ax^2 das **quadratische Glied,**
Bx das **lineare Glied** und
C das **Absolutglied** der Gleichung.

A, B und C können beliebige Zahlen sein, jedoch muß $A \neq 0$ sein (warum?).
Da $A \neq 0$ vorausgesetzt wird, kann die Gleichung (64) durch A dividiert werden:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

Setzt man hierin zur Abkürzung $\frac{B}{A} = p$ und $\frac{C}{A} = q$, so erhält man die **Normalform der quadratischen Gleichung**

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \,. \tag{65}$$

Ein Wert x, der die gegebene Gleichung erfüllt, heißt **Lösung** oder auch **Wurzel** der Gleichung.

11.2. Numerische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

11.2.1. Die reinquadratische Gleichung

Quadratische Gleichungen der Form

$$\boxed{Ax^2 + C = 0}\,, \qquad \text{mit } \frac{C}{A} \leqq 0 \tag{66}$$

bei denen das lineare Glied fehlt, heißen *reinquadratische Gleichungen.*
Reinquadratische Gleichungen lassen sich durch einfaches Wurzelziehen lösen.

BEISPIEL 1

$4x^2 - 25 = 0$

Lösung: Ordnen: $4x^2 = 25$

$$x^2 = \frac{25}{4} \,.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung stehen positive Zahlen. Es darf daher beiderseits die Quadratwurzel gezogen werden:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \,.$$

Unter Beachtung des Beispiels 3 aus Abschnitt 6.1. folgt hieraus

$$|x| = \frac{5}{2} \,,$$

wobei x sowohl positiv als auch negativ sein kann.

Nach der Definition (1) des Betrages einer Zahl folgt daraus

$$\text{für } x > 0: \quad +x = \frac{5}{2}$$

$$\text{und für } x < 0: \quad -x = \frac{5}{2},$$

d.h., die Gleichung $4x^2 - 25 = 0$ besitzt zwei Lösungen, die wir mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen:

$$\underline{\underline{x_1 = +\frac{5}{2}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_2 = -\frac{5}{2}}}.$$

Probe:

$$\text{für } x_1: \quad 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 25 \;\Big|\; 0 \qquad \text{für } x_2: \quad 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 25 \;\Big|\; 0$$

$$4 \cdot \frac{25}{4} - 25 \;\Big|\; 0 \qquad\qquad 4 \cdot \frac{25}{4} - 25 \;\Big|\; 0$$

$$25 - 25 = 0 \qquad\qquad 25 - 25 = 0$$

Beide Ergebnisse erfüllen die gegebene Gleichung, also ist sowohl $x_1 = +\frac{5}{2}$ als auch $x_2 = -\frac{5}{2}$ eine Lösung der Gleichung.

Bei der Auflösung einer quadratischen Gleichung erhält man im allgemeinen *zwei verschiedene Lösungen*. Beide Lösungen sind mathematisch vollkommen gleichberechtigt, da die Ausgangsgleichung durch beide Werte erfüllt wird. Bei Anwendungsaufgaben kann es jedoch vorkommen, daß einer der beiden Lösungen keine praktische Bedeutung zukommt.

BEISPIEL 2

$x^2 + 16 = 0$

Lösung: $x^2 = -16$

Im Bereich der bis jetzt behandelten Zahlen gibt es keine Zahl x, deren Quadrat einen negativen Wert besitzt. Die Aufgabe $x^2 + 16 = 0$ ist demnach in dem uns zur Verfügung stehenden Zahlenbereich *nicht lösbar*.

Allgemein gilt:

Die reinquadratische Gleichung der Form $Ax^2 + C = 0$ mit $\frac{C}{A} \leqq 0$ besitzt zwei Lösungen:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen voneinander.

BEISPIEL 3

$(2x - 3)^2 = 49$

Lösung: Die Gleichung ist *nicht* reinquadratisch, da beim Ausmultiplizieren der linken Seite ein lineares Glied auftritt. Trotzdem läßt sie sich auf die gleiche Weise lösen wie eine reinquadratische Gleichung. (Es wäre sogar verfehlt, die linke Seite erst auszumultiplizieren!)

Auf beiden Seiten der Gleichung stehen positive Zahlen. Folglich darf beiderseits radiziert werden. Man erhält (vgl. Beispiel 1!)

$$|2x - 3| = 7,$$

wobei die innerhalb der Absolutstriche stehende Zahl $2x - 3$ sowohl positiv als auch negativ sein kann.

Man erhält für $2x - 3 > 0$ für $2x - 3 < 0$

$+(2x - 3) = 7$ $-(2x - 3) = 7$

woraus $\underline{\underline{x_1 = 5}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -2}}$

folgt.

Probe:

für x_1: $(10 - 3)^2 \mid 49$ für x_2: $(-4 - 3)^2 \mid 49$

$7^2 = 49$ $(-7)^2 = 49$

Beide Lösungen sind richtig.

11.2.2. Die gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied

Quadratische Gleichungen, in denen neben dem quadratischen Glied auch ein lineares Glied auftritt, heißen **gemischtquadratische Gleichungen.**
Der Fall, daß eine gemischtquadratische Gleichung kein Absolutglied enthält, läßt sich besonders einfach lösen.

BEISPIEL

$Ax^2 + Bx = 0$

Lösung: Links kann x ausgeklammert werden:

$$x(Ax + B) = 0$$

Da ein Produkt nur dann Null werden kann, wenn einer der beiden Faktoren Null ist (vgl. Abschnitt 4.1.4.), so ergeben sich daraus zwei Möglichkeiten:

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad Ax + B = 0,$$

woraus die beiden Lösungen

$$\underline{\underline{x_1 = 0}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_2 = -\frac{B}{A}}}$$

folgen. Probe!

Es ist hier zu beachten, daß Gleichungen, die kein Absolutglied besitzen, nicht durch die Unbekannte dividiert werden dürfen (vgl. Abschnitt 4.1.5. und 8.2.), da durch diesen unzulässigen Schritt die eine Lösung $x_1 = 0$ verlorengehen würde.

Somit gilt:

Jede gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied besitzt stets zwei Lösungen, von denen eine Null ist.

11.2.3. Die Normalform $x^2 + px + q = 0$ der quadratischen Gleichung

11.2.3.1. Die quadratische Ergänzung

Ein dreigliedriger Ausdruck der Form

$$x^2 \pm 2ax + a^2$$

wird ein *vollständiges Quadrat* genannt, da er nach den binomischen Formeln auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2.$$

Jede zweigliedrige algebraische Summe der Form $x^2 \pm 2ax$ läßt sich durch Hinzufügen eines geeigneten Gliedes, der *quadratischen Ergänzung*, in ein vollständiges Quadrat überführen.

BEISPIELE

1. *Die quadratische Ergänzung zu* $x^2 - 12x$ *ist die Zahl* 6^2. *Das vollständige Quadrat lautet dann* $x^2 - 12x + 6^2 = (x - 6)^2$.

2. *In der folgenden Aufstellung sind zu einigen Ausdrücken die zugehörigen quadratischen Ergänzungen und die vollständigen Quadrate angegeben:*

Ausdruck	quadr. Erg.	vollständiges Quadrat
$u^2 - 7u$	$\left(\frac{7}{2}\right)^2$	$u^2 - 7u + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(u - \frac{7}{2}\right)^2$
$m^2 - \frac{3}{2}mn$	$\left(\frac{3}{4}n\right)^2$	$m^2 - \frac{3}{2}mn + \left(\frac{3}{4}n\right)^2 = \left(m - \frac{3}{4}n\right)^2$
$x^2 + px$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$	$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

11.2.3.2. Die Lösungsformel für gemischtquadratische Gleichungen

Die Lösung einer gemischtquadratischen Gleichung soll an einem Beispiel vorgeführt werden.

BEISPIEL 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Lösung: Man bringt das Absolutglied auf die rechte Seite

$$x^2 - 5x = -6$$

und fügt auf beiden Seiten die quadratische Ergänzung des links stehenden Ausdrucks hinzu:

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Zieht man beiderseits die Quadratwurzel (man beachte dabei wiederum Abschnitt 6.1., Beispiel 3!), so ergibt sich

$$\left| x - \frac{5}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt für $x - \frac{5}{2} > 0$:

$$+\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 3}}$$

und für $x - \frac{5}{2} < 0$:

$$-\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$-x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 2.}}$$

Probe

für x_1: $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 \mid 0$ $\qquad$ für x_2: $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \mid 0$

$9 - 15 + 6 = 0$ $\qquad$ $4 - 10 + 6 = 0$

Beide Ergebnisse stimmen.

Der hier beschrittene Weg kann bei der Lösung *jeder* gemischtquadratischen Gleichung eingeschlagen werden. Löst man beispielsweise in ähnlicher Weise die gemischtquadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

so erhält man

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$x + \frac{p}{2} > 0$: $+\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\qquad$ $x + \frac{p}{2} < 0$: $-\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.}}$$

Dieses Ergebnis kann als *Lösungsformel* für jede quadratische Gleichung, die in der Normalform gegeben ist, verwendet werden.

Die Lösungen x_1 und x_2 der in der Normalform gegebenen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lauten

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{67}$$

Zuweilen schreibt man diese Lösungsformel auch in der Form

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{67a}$$

BEISPIELE

Es wird dem Leser empfohlen, die folgenden Beispiele, die mit Hilfe der Lösungsformel gelöst werden, zur Übung auch auf dem umständlicheren Weg über die quadratische Ergänzung zu lösen.

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

Lösung: In diesem Beispiel ist $p = 8$ und $q = 12$. Die Anwendung der Lösungsformel ergibt:

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12} = -4 \pm 2$$

$$\underline{\underline{x_1 = -6}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -2}} \qquad \text{Probe!}$$

3. $x^2 - 0{,}7x - 4{,}5 = 0$

Lösung: $p = -0{,}7 \qquad q = -4{,}5$

$$x_{1,2} = +0{,}35 \pm \sqrt{0{,}35^2 + 4{,}5} = 0{,}35 \pm \sqrt{0{,}1225 + 4{,}5}$$
$$= 0{,}35 \pm 2{,}15$$

$$\underline{\underline{x_1 = 2{,}5}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -1{,}8}} \qquad \text{Probe!}$$

4. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0 \quad$ *mit* $b > 0$

Lösung: $x_{1,2} = +a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} = a \pm \sqrt{b^2}$

$$x_{1,2} = a \pm b$$

$$\underline{\underline{x_1 = a + b}} \qquad \underline{\underline{x_2 = a - b}} \qquad \text{Probe!}$$

5. $x^2 - 14x + 49 = 0$

Lösung: $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 49} = 7 \pm 0$

$$\underline{\underline{x_1 = x_2 = 7}} \qquad \text{Probe!}$$

Hier haben beide Lösungen der quadratischen Gleichung denselben Wert. Man spricht in einem solchen Falle von einer *Doppellösung* bzw. einer *Doppelwurzel* der Gleichung.

BEISPIELE

6. $x^2 - 6x + 4 = 0$

Lösung: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}2361 \qquad x_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}7639$$

Probe: Es wäre verfehlt, die Probe für diese Gleichung mit den beiden Näherungswerten 5,2361 bzw. 0,7639 durchzuführen, da der dabei entstehende Arbeitsaufwand wesentlich größer ist als der, der beim Rechnen mit den genauen Werten entsteht.

Probe für x_1:

$$\begin{array}{l|l} (3 + \sqrt{5})^2 - 6 \cdot (3 + \sqrt{5}) + 4 & 0 \\ 9 + 6 \cdot \sqrt{5} + 5 - 18 - 6 \cdot \sqrt{5} + 4 & 0 \\ 0 = 0 & \end{array}$$

Die Probe für x_2 sei dem Leser überlassen.
Beide Ergebnisse stimmen.

7. *Für welche Werte von x gilt $x^2 - 6x - 40 < 0$?*

Lösung: Man löst die Ungleichung am besten mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, wobei die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen (Abschnitt 8.4.) zu beachten sind.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 40 &< 0 \\ x^2 - 6x &< 40 \\ x^2 - 6x + 3^2 &< 40 + 3^2 = 49 \\ (x - 3)^2 &< 49 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für

$$|x - 3| < 7,$$

d.h., es muß

$$+(x - 3) < 7 \qquad \text{oder} \qquad -(x - 3) < 7$$

sein. Daraus folgt, daß

$$x < 10 \qquad \text{und} \qquad x > -4$$

sein muß.
Die Ungleichung $x^2 - 6x - 40 < 0$ ist demnach erfüllt für alle x-Werte mit $-4 < x < 10$.
Probe!

11.2.3.3. Die Lösung der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung

Da in der allgemeinen Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ der quadratischen Gleichung $A \neq 0$ vorausgesetzt werden muß, kann jede in der allgemeinen Form gegebene quadratische Gleichung durch A dividiert und somit *auf die Normalform zurückgeführt* werden.

BEISPIELE

1. $120x^2 - 949x + 1173 = 0$

Lösung: Division durch 120:

$$x^2 - \frac{949}{120}x + \frac{1173}{120} = 0$$

Anwendung der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = +\frac{949}{240} \pm \sqrt{\left(\frac{949}{240}\right)^2 - \frac{1173}{120}} =$$

$$= \frac{949}{240} \pm \sqrt{\frac{900601 - 1173 \cdot 2 \cdot 240}{240^2}} =$$

$$= \frac{949}{240} \pm \sqrt{\frac{337561}{240^2}} = \frac{949}{240} \pm \frac{581}{240}$$

$$x_1 = \frac{1530}{240} \qquad x_2 = \frac{368}{240}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{51}{8}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{23}{15}}} \qquad \text{Probe!}$$

2. $\frac{a}{x} - b = \frac{a}{b} - x \quad mit\ 0 < b^2 < a$

Lösung: Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner bx:

$$ab - b^2x = ax - bx^2$$

Ordnen: $bx^2 - (a + b^2)x + ab = 0$

Division durch b:

$$x^2 - \frac{a + b^2}{b} \cdot x + a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a + b^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b^2}{2b}\right)^2 - a} =$$

$$= \frac{a + b^2}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2ab^2 + b^4 - 4ab^2}{4b^2}} =$$

$$= \frac{a + b^2}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab^2 + b^4}{4b^2}} =$$

$$= \frac{a + b^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a - b^2}{2b}\right)^2} = \frac{a + b^2}{2b} \pm \frac{a - b^2}{2b}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{a}{b}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = b}} \qquad \text{Probe!}$$

11.3. Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung

11.3.1. Die Diskriminante

Die bisherigen Beispiele haben gezeigt, daß die quadratischen Gleichungen im allgemeinen *zwei Lösungen* besitzen.
Maßgebend für die Art der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

ist der in der Lösungsformel (67) auftretende Radikand

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

der **Diskriminante**[1]) der quadratischen Gleichung genannt wird.

Es ist leicht einzusehen, daß folgende Fälle auftreten können:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$. Die quadratische Gleichung besitzt *zwei* voneinander verschiedene *Lösungen*.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$. Beide Lösungen besitzen denselben Wert. Man sagt, die Gleichung besitzt *eine Doppelwurzel*.

3. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. Da es in dem uns zur Verfügung stehenden Zahlenbereich nicht möglich ist, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen, kann die quadratische Gleichung in diesem Falle zunächst nicht gelöst werden.

11.3.2. Der Wurzelsatz von VIETA[2])

Addiert man die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

so erhält man

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Multipliziert man die beiden Wurzeln miteinander, so ergibt sich

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Ergebnis: Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gelten die Beziehungen

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q} \tag{68}$$

[1]) discriminare (lat.) unterscheiden.

[2]) FRANCOIS VIETA (1540 bis 1603); franz. Mathematiker.

In Worten:

Die Summe der Lösungen einer quadratischen Gleichung stimmt bis auf das Vorzeichen mit dem Koeffizienten des linearen Gliedes überein. Das Produkt der Lösungen ist gleich dem absoluten Gliede.

Diese Eigenschaft der Lösungen einer quadratischen Gleichung wird **Wurzelsatz von Vieta** genannt.
Der Wurzelsatz von Vieta eignet sich besonders für die Probe bei quadratischen Gleichungen sowie für das Erraten der Lösungen einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten.

BEISPIELE

1. *Die Gleichung* $x^2 - 11x + 24 = 0$ *besitzt die beiden Lösungen* $x_1 = 3$ *und* $x_2 = 8$. *Diese beiden Lösungen kann man leicht durch Raten finden, wenn man das Absolutglied* 24 *so in zwei Faktoren aufspaltet, daß deren Summe den entgegengesetzten Wert des Koeffizienten* -11 *des Lineargliedes ergibt:* $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 8 = 24$, $x_1 + x_2 = 3 + 8 = +11$.

2. *Die Gleichung* $x^2 - 8x - 316 = 0$ *besitzt die beiden Lösungen* $x_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{83}$ *und* $x_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{83}$.
Die Probe mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta *liefert:* $x_1 + x_2 = (4 + 2 \cdot \sqrt{83}) + (4 - 2 \cdot \sqrt{83}) = +8$; *Übereinstimmung mit dem entgegengesetzten Wert des Koeffizienten des Lineargliedes ist vorhanden.*
$x_1 \cdot x_2 = (4 + 2 \cdot \sqrt{83})(4 - 2 \cdot \sqrt{83}) = 16 - 4 \cdot 83 = 16 - 332 = -316$; *Übereinstimmung mit dem Absolutglied.*
Die beiden Werte $x_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{83}$ und $x_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{83}$ *sind demnach Lösungen der gegebenen Gleichung.*

3. *Die Gleichung* $x^2 - 8x + 16 = 0$ *besitzt die Doppellösung* $x_1 = x_2 = 4$.
Hier ist $x_1 + x_2 = +8$ *(in der Gleichung steht* -8*),* $x_1 \cdot x_2 = 16$ *(Absolutglied).*
Damit ist die Richtigkeit des Ergebnisses $x_1 = x_2 = 4$ *gesichert.*

11.3.3. Produktform quadratischer Ausdrücke

Sind x_1 und x_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

so gilt nach dem Wurzelsatz von Vieta

$$p = -(x_1 + x_2)$$

und

$$q = x_1 \cdot x_2.$$

Setzt man diese Werte für p und q in die quadratische Gleichung ein, so ergibt sich

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = 0$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Ergebnis:

Besitzt die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

die beiden Lösungen x_1 und x_2, so läßt sich deren linke Seite als Produkt der beiden Linearfaktoren $x - x_1$ und $x - x_2$ darstellen:

$$\boxed{x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0} \tag{69}$$

Folgerung:

Ist x_1 eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

so läßt sich der quadratische Ausdruck

$$x^2 + px + q$$

ohne Rest durch $x - x_1$ dividieren:

$$(x^2 + px + q) : (x - x_1) = x - x_2.$$

Diese beiden Sätze werden vor allem bei der Faktorenzerlegung quadratischer Ausdrücke und in der Theorie der Gleichungen höheren Grades benötigt.

BEISPIELE

1. *Der Ausdruck $x^2 - 5x - 6$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.*

   Lösung: Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x - 6 = 0$ besitzt die beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 6$. Folglich ist

   $$x^2 - 5x - 6 = [x - (-1)] \cdot [x - 6]$$
   $$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6).$$ Nachprüfen.

2. *Der Ausdruck $16u^2 + 56u + 49$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.*

   Lösung: $16u^2 + 56u + 49 = 16\left(u^2 + \frac{7}{2}u + \frac{49}{16}\right)$

   Die quadratische Gleichung

   $$u^2 + \frac{7}{2}u + \frac{49}{16} = 0$$

   besitzt die Doppellösung

   $$u_1 = u_2 = -\frac{7}{4}.$$

   Folglich ist

   $$u^2 + \frac{7}{2}u + \frac{49}{16} = \left[u - \left(-\frac{7}{4}\right)\right] \cdot \left[u - \left(-\frac{7}{4}\right)\right] = \left(u + \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{4u + 7}{4}\right)^2$$
   $$u^2 + \frac{7}{2}u + \frac{49}{16} = \frac{(4u + 7)^2}{16}.$$

   Daraus folgt

   $$16u^2 + 56u + 49 = (4u + 7)^2.$$ Nachprüfen!

3. *Der Ausdruck* $ab x^2 - (a^2 + b^2)x + ab$ *soll in Linearfaktoren zerlegt werden.*

Lösung: Es ist

$$ab x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = ab \cdot \left(x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab} \cdot x + 1\right).$$

Die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab} \cdot x + 1 = 0$$

besitzt die Lösungen

$$x_1 = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{b}{a},$$

so daß

$$x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab} \cdot x + 1 = \left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right)$$

ist. Daraus folgt

$$ab x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = ab\left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right) =$$

$$= b \cdot \left(x - \frac{a}{b}\right) \cdot a\left(x - \frac{b}{a}\right)$$

$$ab x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = (bx - a)(ax - b).$$ Nachprüfen!

AUFGABEN

248. a) $x^2 - 876{,}16 = 0$
b) $9x^2 - 16 = 0$
c) $3 - 4x^2 = 5 - 6x^2$
d) $ax^2 + 5x^2 = 2x^2 - bx^2$
e) $49x^2 + 16 = 0$
f) $(7x - 2)(7x + 2) = 60$
g) $9(x^2 + 7) = 7(x^2 + 9)$
h) $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) = 40$
i) $2\sqrt{5 + x} + \sqrt{9 - 3x} = \sqrt{41 - 3x}$
k) $\sqrt{x + 15} - \sqrt{5x - 77} = \frac{16}{\sqrt{x + 15}}$

249. a) $\frac{7x + 5}{7 + 5x} = \frac{9x - 8}{9 - 8x}$
b) $\frac{x^2 - 5x + 11}{x^2 - 7x + 83} = \frac{5}{7}$
c) $(4 + x)(3 - x)(2 - x) - (x + 2)(3 + x)(x - 4) = 30$
d) $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4} = \frac{x + 1}{\sqrt{x + 4}}$
e) $\sqrt{5 + x} - \sqrt{25 - 3x} = 2\sqrt{5 - x}$
f) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = 2\sqrt{a}$
g) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{2a}$
h) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = 3\frac{1}{3}$
i) $(x - 3)^2 = 16$
k) $(x - a)^2 = b^2$

250. a) $7x^2 + 3x = 0$
b) $ux^2 - vx = 0$
c) $13x = 8x^2$
d) $3(x + 2)^2 = 5x^2 + 12$
e) $(a + x)(a - x) = a^2 - bx$
f) $7x^2 - \frac{5}{3}x = 0$
g) $\frac{a}{b}x^2 + \frac{b}{a}x = 0$
h) $14x^2 - \frac{7}{4}x = 0$
i) $x^2 + 2px = 0$
k) $\frac{4}{5}x^2 = -\frac{4}{5}x$

251. Bilde die quadratische Ergänzung und schreibe als vollständiges Quadrat:

a) $x^2 - 4x$ b) $x^2 + \frac{2}{7}x$ c) $a^2 - \frac{4}{3}a$ d) $m^2 - 0{,}6m$

e) $x^2 + 15x$ f) $b^2 - 5bc$ g) $p^2q^2 - 8pqr$ h) $4x^2 + 12x$

i) $c^2 + 6{,}7cd$ k) $9a^2 - 24ab$

252. Löse mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

a) $x^2 + 6x - 55 = 0$ b) $x^2 - 4x - 21 = 0$

c) $x^2 + 22x + 112 = 0$ d) $x^2 - 33x + 272 = 0$

e) $x^2 - 3{,}6x + 1{,}28 = 0$ f) $x^2 + 1{,}8x + 0{,}81 = 0$

g) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{2}{15} = 0$ h) $14 = 9x^2 - 15x$

i) $30x^2 - 41x = -13$ k) $x^2 - \frac{1}{5}x = 2{,}55$

253. Löse mit Hilfe der Lösungsformel:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + 5x - 14 = 0$

c) $x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 - 4x - 5 = 0$ f) $x^2 - x - 90 = 0$

g) $x^2 + 6x + 5 = 0$ h) $x^2 - 28x + 195 = 0$

i) $x^2 + 16x - 161 = 0$ k) $x^2 + 20x + 19 = 0$

254. a) $2x^2 - 19x + 9 = 0$ b) $16x^2 + 120x + 221 = 0$

c) $5x^2 + 87x - 506 = 0$ d) $24x^2 + 11x - 105 = 0$

e) $5x^2 + 34x + 55{,}35 = 0$ f) $16x^2 - 97x + 85 = 0$

g) $2x^2 - 6bx + 5cx - 15bc = 0$ h) $12x^2 - x - 6 = 0$

i) $5x^2 - 27ax + 10a^2 = 0$ k) $17x^2 - 152x + 336 = 0$

255. a) $0{,}3x^2 - 3x + 6 = 0$ b) $\frac{4}{3}x^2 - 8x + 11 = 0$

c) $3x^2 - 10bx + 3b^2 = 0$ d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$

e) $2{,}5x^2 - 46x + 192{,}5 = 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{19}{3} = 0$

g) $\sqrt{15}x^2 - 5\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}x - 15 = 0$ h) $\frac{4}{3}\sqrt{5}x^2 + \frac{4}{3}\sqrt{5}x = 5x + 5$

256. a) $(x-4)^2 + (x-7)^2 = 29$

b) $(x+4)^2 - (x-5)^2 - (x-1)^2 = 14x - 1$

c) $2(x-3)^2 - 3(x-5)^2 - 4(x-7)^2 - (3x-5) = 0$

d) $x^2 - 2bx - a^2 + b^2 = 0$

e) $x^2 - 4ax - 4bx + 3a^2 + 10ab + 3b^2 = 0$

f) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + (x-4)^2 - \left(\frac{3}{5}x + 1\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}x - 1\right)^2 = 0$

g) $\frac{1}{a}x^2 - \frac{\sqrt{a}}{a}x + x - \sqrt{a} = 0$ h) $(5x-2)(2-5x) - (x-4)(3x+2) = 4 + 5x$

i) $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = (-2x-1)^2 - 9$

k) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(2x + \frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}03$

257. a) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3x-4}{x+1} = \frac{3x+3}{x^2-1}$

c) $1 + \frac{8}{x-4} - \frac{16}{x^2-16} = 0$ d) $\frac{5}{6x} - \frac{2x-3}{6x-4} - \frac{3x^2-1}{9x^2-6x} = \frac{1}{6}$

e) $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{1-x}{x} - \frac{3(x-2)}{x-1} = 0$

f) $\frac{x-a}{x} + \frac{3a^2}{x(a+x)} - \frac{x^2}{x^2+ax} - \frac{3a-x}{x+a} = 0$

g) $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{11}{8x} - \frac{3x-12}{4x+12} = 1$

h) $\frac{x-8a}{8x-48a} - \frac{2ax+5a^2}{x^2-36a^2} + \frac{72a+13x}{24x+144a} = \frac{5}{12}$

i) $\frac{x-2a}{2x-8a} = \frac{x}{x-6a}$ k) $\frac{x-3}{2x+7} - \frac{3x+1}{x-5} = 0$

258. a) $1 - \frac{8}{x-4} = \frac{5}{3-x} - \frac{8-x}{x+2}$ b) $\frac{x+1}{4x} - \frac{5x-1}{2x-4} = \frac{8-x}{3x^2-6x} - \frac{x-5}{x-2}$

c) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$

d) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$ e) $\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-7}$

f) $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$

g) $\frac{8a^2}{x^2-a^2} + \frac{2a}{x+a} = -\frac{x}{a-x}$ h) $\frac{x}{a} - \frac{1}{bx-ax} + \frac{b}{a^2x-abx} = \frac{2}{a-b}$

i) $a^2 - \frac{a^2-b^2}{2x-x^2} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}$

k) $\frac{1}{a-c} + \frac{1}{cx^2-ax} = \frac{d-dx}{a^2-acx-ac+c^2x}$

259. Löse mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes:

a) $x^2 - 4x - 21 = 0$ b) $x^2 - 7x - 8 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$ d) $x^2 + x - 72 = 0$

e) $x^2 + 9x + 14 = 0$ f) $x^2 + 9x - 112 = 0$

g) $3x^2 + 6x + 3 = 0$ h) $x^2 - 34x + 288 = 0$

i) $4x^2 + 40x + 96 = 0$ k) $x^2 - (a-b)x - ab = 0$

260. Prüfe die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes auf ihre Richtigkeit:

a) $x^2 + 13x - 30 = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = -15$
b) $x^2 - 29x - 210 = 0$	$x_1 = -6$	$x_2 = 35$
c) $-x^2 + 10x - 21 = 0$	$x_1 = -3$	$x_2 = -7$
d) $x^2 - 4x + 1 = 0$	$x_1 = 2 + \sqrt{3}$	$x_2 = 2 - \sqrt{3}$
e) $5x^2 - 25x + 24 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 24$
f) $12x^2 + 19x - 18 = 0$	$x_1 = \frac{2}{3}$	$x_2 = -2\frac{1}{4}$
g) $x^2 - 6x + 3 = 0$	$x_1 = 3 + \sqrt{7}$	$x_2 = 3 - \sqrt{7}$
h) $-0{,}5x^2 - 3{,}45x + 11{,}16 = 0$	$x_1 = 1{,}8$	$x_2 = 6{,}2$

261. Gib die quadratischen Gleichungen an, die die folgenden Lösungen besitzen:

a) $x_1 = 2$	$x_2 = 5$	b) $x_1 = -3$	$x_2 = 7$
c) $x_1 = -14$	$x_2 = -11$	d) $x_1 = -129$	$x_2 = 3$
e) $x_1 = 4\frac{1}{3}$	$x_2 = -\frac{5}{6}$	f) $x_1 = 7 + \sqrt{2}$	$x_2 = 7 - \sqrt{2}$
g) $x_1 = -7{,}2$	$x_2 = 0{,}8$	h) $x_1 = 2a$	$x_2 = -\frac{1}{3}a$

262. Zerlege die folgenden quadratischen Ausdrücke in Linearfaktoren:

a) $x^2 - 11x + 24$
b) $2x^2 + 4x - 70$
c) $x^2 + x - 12$
d) $6x^2 + x - 40$
e) $\sqrt{2}x^2 - 4x - 30\sqrt{2}$
f) $25x^2 - 378x + 45$
g) $bx^2 + (1 - ab)x - a$
h) $15x^2 + 17xy - 18y^2$
i) $x^2 + ax + bx - 2a^2 - 2b^2 + 5ab$
k) $120x^2 - 100ux + 6\sqrt{3}vx - 120u^2 + 199\sqrt{3}uv - 216v^2$

12. Funktionen

12.1. Der Funktionsbegriff

12.1.1. Einführendes Beispiel

Beim Haushaltstarif für elektrische Energie setzt sich der Strompreis P zusammen aus dem Arbeitspreis $A = 0{,}08$ MDN/kWh und einem Grundpreis G, der sich nach der Anzahl der beleuchteten Räume richtet. Bei einem Haushalt mit sechs beleuchteten Zimmern beträgt dieser Grundpreis $G = 3{,}00$ MDN, so daß der Strompreis in diesem Falle für die verbrauchte Energie n

$$P = (n \cdot A + G)$$

beträgt.

Aus der folgenden Tabelle kann für bestimmte Werte von n der zu zahlende Strompreis entnommen werden.

Tafel 4

n in kWh	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
P in MDN	3,00	3,40	3,80	4,20	4,60	5,00	5,40	5,80	6,20	6,60	7,00

Während die beiden Größen A und G in diesem Beispiel *feste Werte* besitzen, man bezeichnet sie daher als **Konstante**[1]), nehmen die beiden Größen n und P je nach dem monatlichen Stromverbrauch *verschiedene Werte* an.

Größen, die keinen festen Wert besitzen, sondern verschiedene Werte annehmen können, heißen **Veränderliche** oder **Variable**[2]).

In unserem Beispiel besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Veränderlichen n und P: zu jedem bestimmten Wert von n (verbrauchte Energie) gehört ein durch n festgelegter Wert von P (Strompreis). *Es ist also jedem Wert von n ein ganz bestimmter Strompreis P eindeutig zugeordnet.*

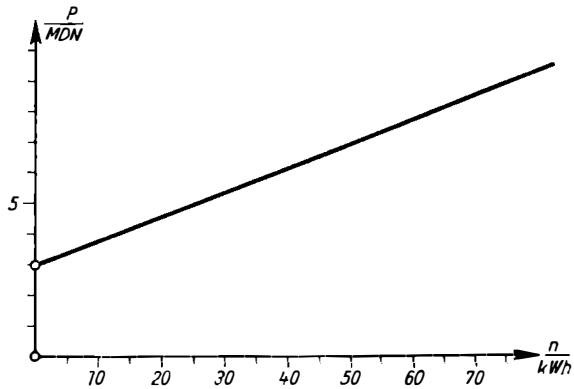


Bild 22

Eine derartige Zuordnung zweier veränderlicher Größen zueinander nennt man eine **Funktion**[3]).

Größen, die innerhalb gewisser Grenzen willkürlich verändert werden können (im Beispiel ist n nur für positive Werte sinnvoll), werden **unabhängige Veränderliche** genannt. Die der unabhängigen Veränderlichen zugeordnete Größe (im Beispiel P) heißt die **abhängige Veränderliche.**

Damit ergibt sich folgende *Begriffserklärung für die Funktion:*

Jede Funktion stellt eine eindeutige Zuordnung zwischen mehreren veränderlichen Größen dar.

Diese Zuordnung kann u.a.

a) *tabellarisch* in Form einer **Tabelle** (auch *Wertetabelle* genannt),

b) *grafisch* in Form eines **Schaubildes** (vgl. Bild 22) oder

c) *analytisch*[4]) in Form einer **Funktionsgleichung** geschehen.

[1]) constans (lat.) unveränderlich, fest.
[2]) variabilis (lat.) veränderlich.
[3]) functio (lat.) die Verrichtung.
[4]) analysis (griech.) die Auflösung.

Die Funktionsgleichung würde in unserem Falle

$$P = G + n \cdot A$$

lauten.

Funktionen, bei denen die gegenseitige Zuordnung der veränderlichen Größen durch Messungen, Beobachtungen usw. ermittelt wurde, heißen *empirische*[1]) *Funktionen.* (Beispiele: Temperaturverlauf im Laufe eines Jahres, Abhängigkeit der durchschnittlichen Körpergröße vom Lebensalter eines Menschen usw.) Läßt sich wie im einführenden Beispiel eine *Rechenvorschrift* angeben, durch die die beiden Veränderlichen einander zugeordnet sind, so nennt man diese Rechenvorschrift die Funktionsgleichung. Will man andeuten, daß jedem Wert einer veränderlichen Größe x innerhalb eines bestimmten Bereiches durch irgendeine Vorschrift eindeutig ein bestimmter Wert einer anderen Veränderlichen y zugeordnet ist, so verwendet man häufig das Zeichen $y = f(x)$, das „f von x" gelesen wird.

12.1.2. Funktions- und Bestimmungsgleichungen

Zu den bereits behandelten Arten von Gleichungen, den identischen Gleichungen und den Bestimmungsgleichungen (vgl. Abschnitt 8.1.ff.), tritt nunmehr eine weitere Art hinzu: die *Funktionsgleichung.*

Durch eine Funktionsgleichung wird einem innerhalb bestimmter Grenzen willkürlich wählbaren Wert einer Veränderlichen ein ganz bestimmter Wert einer anderen Veränderlichen zugeordnet.

So wird beispielsweise durch die Funktionsgleichung $y = 2x + 3$ dem willkürlich gewählten Wert $x = 1$ der Wert $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ zugeordnet, während die Funktionsgleichung $y = \sqrt{1 - x^2}$ dem gleichen Wert $x = 1$ den Wert $y = 0$ zuordnet.

Eine Funktionsgleichung wird zu einer Bestimmungsgleichung, wenn man zu einem bestimmten Wert der einen Veränderlichen den dazugehörigen Wert der anderen Veränderlichen ermitteln will.

BEISPIEL

Für welchen Wert nimmt die Funktion $y = x^2 - 5x + 10$ *den Wert* $y = 4$ *an?*

Lösung: Der gesuchte Wert sei x_0. Dann muß

$$4 = x_0^2 - 5x_0 + 10$$

$$x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0$$

$$x_{01} = 2 \qquad x_{02} = 3$$

sein.

Die Funktion $y = x^2 - 5x + 10$ nimmt demnach sowohl für $x = 2$ als auch für $x = 3$ den Wert $y = 4$ an.

12.1.3. Definitionsbereich einer Funktion

Bei den Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = x^2 - 5x + 10$ unterliegt die unabhängige Veränderliche x keinerlei Einschränkungen. Durch die beiden Funktionsgleichungen ist *jedem* endlichen Wert von x ein ganz bestimmter y-Wert zugeordnet. Man sagt, der **Definitionsbereich** der Funktionen gehe von $-\infty$ bis $+\infty$, oder anders geschrieben: Der Definitionsbereich der beiden Funktionen ist $-\infty < x < +\infty$.

[1]) empeiria (griech.) die Erfahrung.

Der Definitionsbereich einer Funktion umfaßt die Gesamtheit aller Werte, die die unabhängige Veränderliche annehmen darf.

BEISPIELE

1. *Der Definitionsbereich der Funktion* $y = \sqrt{x}$ *ist* $0 \leqq x < \infty$, *da* y *für negative* x-Werte *nicht berechnet werden kann.*

2. *Der Definitionsbereich der Funktion* $y = \sqrt{1 - x^2}$ *ist* $-1 \leqq x \leqq +1$. *(Für alle übrigen* x-*Werte kann* y *nicht berechnet werden.)*

3. *Der Definitionsbereich der Funktion* $P = G + n \cdot A$ *ist* $0 \leqq n < \infty$, *da die Funktion für negative Werte von* n *keine praktische Bedeutung besitzt.*

4. *Die monatliche Produktion eines Betriebes, während eines Jahres zusammengestellt, ist eine empirische Funktion. Ihr Definitionsbereich ist auf einzelne Werte beschränkt, nämlich auf die einzelnen Monate.*

12.2. Das rechtwinklige Koordinatensystem

Um einen Punkt in einer Ebene eindeutig und auf möglichst einfache Weise festlegen zu können, bedient man sich eines Koordinatensystems.

Beim **rechtwinkligen Koordinatensystem**[1]) schneiden sich zwei senkrecht aufeinanderstehende Zahlengeraden in einem gemeinsamen Nullpunkt. Die waagerecht liegende Achse wird **Abszissenachse**[2]), die dazu senkrechte Achse wird **Ordinatenachse**[3]) genannt. Häufig bezeichnet man die Abszissenachse auch als *x-Achse*, die Ordinatenachse als *y-Achse*.

Es ist üblich, die *positive Zählrichtung* auf der Abszissenachse *nach rechts*, auf der Ordinatenachse *nach oben* anzutragen. Durch das *Achsenkreuz* wird die Ebene in vier Felder, die vier **Quadranten**, aufgeteilt, die im Bild 23 mit I, II, III und IV bezeichnet sind. Die Zählrichtung der vier Quadranten erfolgt stets *im mathematisch positiven Sinne* (im Gegenzeigersinn).

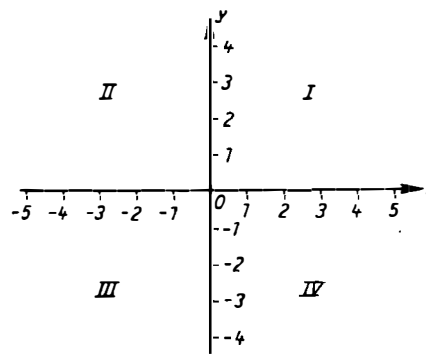


Bild 23

Ein Punkt P ist im x, y-Koordinatensystem durch seine *Abstände von den Koordinatenachsen* bestimmt. Der Abstand des Punktes von der Ordinatenachse ist die **Abszisse** x, der Abstand von der Abszissenachse ist die **Ordinate** y des Punktes. Man nennt diese beiden Zahlen x und y, die die Lage eines Punktes P im Koordinatensystem eindeutig bestimmen, die **Koordinaten des Punktes** P und schreibt dafür kurz $P(x; y)$ (gelesen: P mit den Koordinaten x und y). *Dabei ist die Reihenfolge der Koordinatenangaben genau zu beachten: an erster Stelle steht die Abszisse, an zweiter Stelle die Ordinate.*

[1]) coordinare (lat.) gegenseitig zuordnen.
[2]) abscindere (lat.) abschneiden; Abszisse: Abschnitt.
[3]) ordinare (lat.) zuordnen; Ordinate: zugeordneter Abschnitt.

In welchem Quadranten des Koordinatensystems ein Punkt liegt, ist aus den Vorzeichen der Koordinaten dieses Punktes zu erkennen. Im Bild 24 sind die Punkte $P_1(3;4)$, $P_2(-2;5)$, $P_3(-4;-4)$, $P_4(1;-3)$, $P_5(0;1{,}5)$ und $P_6(-2{,}5;0)$ eingetragen.

Jedem Punkt in der Ebene sind eindeutig zwei Zahlenangaben, seine Koordinaten, zugeordnet. Umgekehrt wird durch ein Zahlenpaar, die Koordinaten eines Punktes, der zugehörige Punkt in der Ebene genau und eindeutig festgelegt.

Die Zuordnung eines Punktes zu seinen Koordinaten ist demnach eindeutig und eindeutig umkehrbar.
Das rechtwinklige Koordinatensystem wird häufig auch nach dem französischen Mathematiker RENÉ DESCARTES (latinisierte Form: CARTESIUS; 1596 bis 1650) als *Kartesisches Koordinatensystem* bezeichnet.

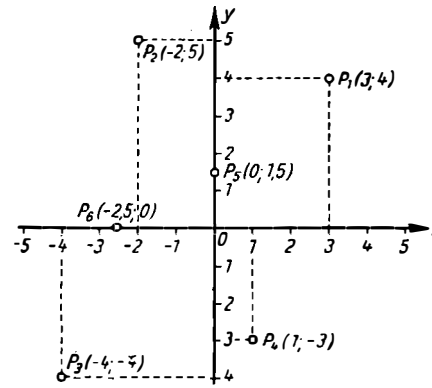


Bild 24

12.3. Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem

12.3.1. Darstellung empirischer Funktionen

Da die grafische Darstellung von Meßreihen als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen hier nur zwei Beispiele vorgeführt werden.

BEISPIELE

1. *Bei einem Turbinenversuch, durch den der Dampfverbrauch S in* kg/h *in Abhängigkeit von der Nutzleistung N in* kW *des mit der Turbine gekoppelten Wechselstromgenerators ermittelt werden sollte, ergaben sich folgende Meßwerte:*

Tafel 5

Belastung	Nutzleistung N in kW	Dampfverbrauch S in kg/h
Leerlauf	0	920
Viertellast	250	1880
Halblast	500	2890
Dreiviertellast	750	3770
Vollast	1000	4540
Überbelastung	1200	5240

Lösung: Aus dieser Zusammenstellung ist erkennbar, daß der Dampfverbrauch S eine Funktion der erzielten Nutzleistung N ist. Um sich ein anschauliches Bild dieses Zusammenhanges zwischen N und S zu verschaffen, trägt man die zusammengehörigen Meßwerte von N und S als Punkte in ein N,S-Koordinatensystem ein (Bild 25).
Der zur Verfügung stehende Platz wird dabei gut ausgenutzt, wenn man auf den Achsen folgende Maßstäbe benutzt: Abszissenachse (N-Achse) 1 cm ≙ 200 kW; Ordinatenachse (S-Achse) 1 cm ≙ 1000 kg/h.

Da sich natürlich auch außer den gemessenen Werten auch jede andere Nutzleistung zwischen 0 und 1200 kW erreichen läßt, verbindet man die gefundenen Punkte durch einzelne Strekkenzüge. Dabei stellen allerdings diese Streckenzüge eine mehr oder weniger gute *Annäherung* des Funktionsverlaufes zwischen den durch die Meßwerte (bis auf etwaige Meßungenauigkeiten) gesicherten Punkten dar. Die zwischen den Meßwerten liegenden Funktionswerte einer empirischen Funktion lassen sich demnach aus dem Schaubild nur angenähert ermitteln.

Der geübte Betrachter derartiger Kurven wird aus dieser Darstellung leicht erkennen, daß der Dampfverbrauch in gleichem Maße ansteigt, wie die Nutzleistung der Turbine erhöht wird, daß der Dampfverbrauch linear von der Nutzleistung abhängig ist. Die geringfügigen Abweichungen vom geradlinigen Verlauf der Meßkurve sind durch Meßungenauigkeiten zu erklären.

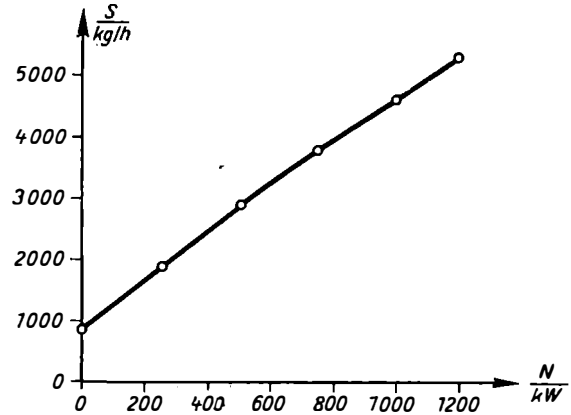


Bild 25

2. *Tafel 6 gibt an, bei welcher Temperatur t (in °C) der Siedepunkt des Wassers bei verschiedenen Luftdruckwerten p (in* Torr*) liegt.*

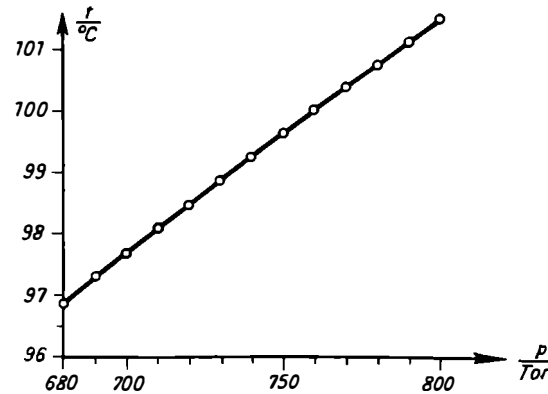


Bild 26

Lösung: Um den Zusammenhang zwischen t und p grafisch darstellen zu können, wäre es unvorteilhaft, auf der t- und auf der p-Achse jeweils mit 0 zu beginnen. (Warum?) Es ist sinnvoller, auf beiden Achsen nur diejenigen Abschnitte herauszugreifen, die in der Tabelle erfaßt sind (Bild 26).

Zweckmäßige Wahl der Einheiten auf den Achsen: p-Achse: 1 cm ≙ 20 Torr; t-Achse: 1 cm ≙ 1 °C.

Tafel 6

p in Torr	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800
t in °C	96,91	97,31	97,71	98,10	98,49	98,87	99,25	99,63	100,00	100,37	100,73	101,09	101,44

Die grafische Darstellung einer Funktion wird **Kurve**[1]) der Funktion (oder kurz *Kurve* bzw. *Funktionskurve*) genannt.
Man spricht auch in dem Falle noch von einer Kurve, wenn die Funktion durch eine Gerade dargestellt wird.

12.3.2. Darstellung von Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung gegeben sind

Um eine durch eine Funktionsgleichung gegebene Funktion zeichnen zu können, ist es oft zunächst erforderlich, eine Wertetabelle für diese Funktion aufzustellen. Allerdings läßt sich durch eine derartige Wertetabelle, und damit auch durch den Kurvenverlauf, selten die gesamte Funktion erfassen. In den meisten Fällen kann man nur einen *Ausschnitt aus dem Gesamtkurvenverlauf* herausgreifen.

BEISPIELE

1. $y = 2x + 3$

Lösung: Zur Aufstellung der Wertetabelle wählt man für die unabhängige Veränderliche x eine Anzahl von Werten aus und errechnet mit Hilfe der Funktionsgleichung die zugehörigen y-Werte. Da x vollkommen willkürlich gewählt werden darf, verwendet man für die Wertetabelle solche x-Werte, bei denen möglichst wenig Rechenarbeit bei der Berechnung von y erforderlich ist.

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
y	-5	-3	-1	$+1$	$+3$	$+5$	$+7$	$+9$	$+11$	$+13$

Die zusammengehörigen Zahlenpaare der Wertetabelle werden als Punkte in das Koordinatensystem übertragen (Bild 27). Man erhält so einzelne Punkte der Kurve $y = 2x + 3$.
Durch fortgesetzte Verfeinerung der Einteilung der Wertetabelle würden die entstehenden Punkte der Kurve im Koordinatensystem immer enger aneinanderrücken. Alle diese Punkte liegen auf einer Geraden. Daher ist die im Bild 27 dargestellte Gerade das Bild der Funktion $y = 2x + 3$.

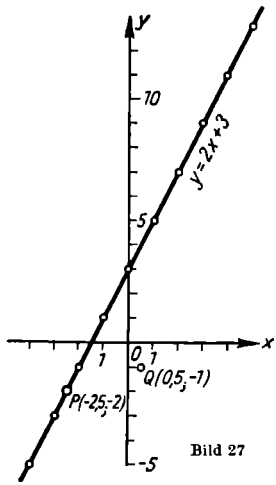


Bild 27

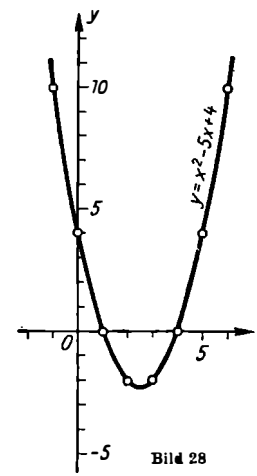


Bild 28

[1]) linea curva (lat.) die gekrümmte Linie.

2. $y = x^3 - 5x + 4$

Lösung: Zunächst wird eine Wertetabelle für ganzzahlige x-Werte aufgestellt (Wertetabelle a).

Tabelle a

x	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
y	$+10$	$+4$	0	-2	-2	0	$+4$	$+10$

Es zeigt sich, daß die so entstehenden Punkte nicht mehr in einer geraden Linie liegen. Daher wäre es verfehlt, die gefundenen Punkte durch Streckenzüge miteinander zu verbinden. Eine Verfeinerung der Wertetabelle (Wertetabelle b) zeigt nämlich, daß die Punkte sich in einer gekrümmten Linie aneinanderfügen (Bild 28). Das Bild der Funktion $y = x^3 - 5x + 4$ ist die im Bild 28 dargestellte Parabel.

Tabelle b

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
y	$-2,00$	$-2,09$	$-2,16$	$-2,21$	$-2,24$	$-2,25$	$-2,24$	$-2,21$	$-2,16$	$-2,09$	$-2,00$

12.3.3. Zusammenhang zwischen Funktion und zugehöriger Kurve

Aus der Art und Weise, wie das zu einer Funktion gehörende Kurvenbild mit Hilfe einer Wertetabelle gezeichnet wurde, folgt:

Erfüllt ein Wertepaar x; y die Funktionsgleichung, so liegt der Punkt $P(x; y)$ auf der zugehörigen Kurve; erfüllt ein Wertepaar x; y die Funktionsgleichung nicht, so kann der Punkt $P(x; y)$ auch nicht auf der Kurve liegen.

Man sagt dafür auch:

Die Kurve ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Koordinaten die Kurvengleichung erfüllen.

Umgekehrt gilt auch:

Liegt ein Punkt $P(x; y)$ auf einer Kurve, so muß das Wertepaar x; y (die Koordinaten des Punktes) auch die zur Kurve gehörende Funktionsgleichung erfüllen; liegt ein Punkt $P(x; y)$ außerhalb einer Kurve, so erfüllen die Koordinaten x; y die zur Kurve gehörende Funktionsgleichung nicht.

Dieser Zusammenhang zwischen Kurve und Funktionsgleichung ist für die gesamte höhere Mathematik von besonderer Bedeutung.

BEISPIELE

1. *Der Punkt* $P(-2,5; -2)$ *liegt auf der Geraden* $y = 2x + 3$, *denn durch* $x = -2,5$ *und* $y = -2$ *wird die Funktionsgleichung erfüllt:*

$-2 = 2 \cdot (-2,5) + 3$

Dagegen liegt der Punkt $Q(0,5; -1)$ *außerhalb der Geraden* $y = 2x + 3$, *denn es ist*

$-1 \neq 2 \cdot (+0,5) + 3$.

(Vgl. Bild 27!)

2. *Um nachzuprüfen, ob die Kurve* $y = 0{,}5x - 2{,}5$ *durch die Punkte* $P(3; -1)$, $Q(-5; -4)$ *und* $R(-1; -3)$ *hindurchgeht, ist es nicht notwendig, die Kurve zu zeichnen. Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte in die Funktionsgleichung* $y = 0{,}5x - 2{,}5$ *ergibt sich*

für $P(3; -1)$: $\quad -1 = 0{,}5 \cdot 3 - 2{,}5,$

für $Q(-5; -4)$: $\quad -4 \neq 0{,}5 \cdot (-5) - 2{,}5$ *und*

für $R(-1; -3)$: $\quad -3 = 0{,}5 \cdot (-1) - 2{,}5.$

P und R liegen demnach auf der Kurve, da die Koordinaten dieser Punkte die Funktionsgleichung erfüllen. Die Koordinaten von Q erfüllen die Funktionsgleichung nicht, folglich kann Q nicht auf der Kurve liegen.

12.3.4. Der Schnittpunkt zweier Kurven

Der Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ zweier Kurven liegt auf jeder der beiden Kurven. Nach 12.3.3. müssen demnach die Koordinaten x_s und y_s des Schnittpunktes auch *beide Funktionsgleichungen* erfüllen. Auf diese Weise ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen für x_s und y_s, aus denen sich die Schnittpunktskoordinaten berechnen lassen.

BEISPIELE

1. *Wo schneiden sich die beiden Geraden* $y = 2x + 3$ *und* $y = -0{,}5x + 0{,}5$?

Lösung: Der Schnittpunkt der beiden Geraden sei $S(x_s; y_s)$. Da S auf der Geraden $y = 2x + 3$ liegt, muß

$$y_s = 2x_s + 3$$

sein. Da S gleichzeitig auch auf der Geraden $y = -0{,}5x + 0{,}5$ liegt, muß auch

$$y_s = -0{,}5x_s + 0{,}5$$

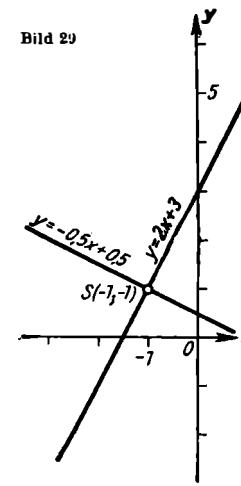
gelten.
Aus dem Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} y_s = 2x_s + 3 \\ y_s = -0{,}5x_s + 0{,}5 \end{array} \right|$$

folgt $\quad x_s = -1 \qquad y_s = +1.$

Die beiden Geraden schneiden sich demnach im Punkt $S(-1; +1)$. Dem Leser wird empfohlen, die beiden Geraden selbst zu zeichnen und so das Ergebnis zeichnerisch nachzuprüfen (Bild 29).

Bild 29



2. *Wo schneidet die Kurve* $y = x^2 - 5x + 4$ *die x-Achse?*

Lösung: Im Schnittpunkt einer Kurve mit der x-Achse ist der zugehörige y-Wert Null. Daraus folgt für die Abszisse x_s des Schnittpunktes die Bestimmungsgleichung

$$0 = x_s^2 - 5x_s + 4,$$

woraus $\quad x_{s_1} = 1 \qquad x_{s_2} = 4$

folgt. Demnach wird die x-Achse von der Kurve $y = x^2 - 5x + 4$ in den beiden Punkten mit der Abszisse 1 bzw. der Abszisse 4 geschnitten. (Siehe Bild 28!)

Anmerkung: Bei derartigen Berechnungen ist es üblich, den Index s bei x_s und y_s fortzulassen. Man mache sich jedoch bei jeder Aufgabe den Zusammenhang klar, anstatt nach irgendeinem Rezept zu rechnen.

12.4. Die lineare Funktion

12.4.1. Begriffserklärungen

Funktionen, bei denen die Veränderlichen in *keiner höheren als der ersten Potenz* auftreten, heißen **Funktionen ersten Grades.**
So sind z. B.

$$y = 2x + 3, \qquad y = -0{,}37x + 4{,}62, \qquad 0{,}5x - 0{,}2y + 1{,}4 = 0$$

Funktionen ersten Grades.

Für die Funktionen ersten Grades gilt der Satz:

Das Bild jeder Funktion ersten Grades ist eine Gerade.

Aus diesem Grunde werden die Funktionen ersten Grades auch **lineare Funktionen** genannt.
Da eine Gerade stets durch zwei Punkte bestimmt ist, genügen stets zwei Punkte, um eine lineare Funktion grafisch darstellen zu können.

Als *Normalform* der linearen Funktion bezeichnet man die nach der abhängigen Veränderlichen y aufgelöste Form

$$\boxed{y = mx + b}, \tag{70}$$

worin die Größen m und b beliebige konstante Werte annehmen dürfen.

Jede lineare Funktion der Form $Ax + By + C = 0$ mit $B \neq 0$ läßt sich in die Normalform umformen. So erhält man z. B. aus $0{,}5x - 0{,}2y + 1{,}4 = 0$ durch Auflösen nach y die Normalform $y = 2{,}5x + 7$.

12.4.2. Die Funktion $y = mx$

Im Bild 30 sind die Funktionen

$$y = \frac{1}{4}x, \qquad y = \frac{1}{2}x,$$
$$y = \frac{3}{4}x, \qquad y = x,$$
$$y = 2x, \qquad y = 4x,$$
$$y = -4x, \qquad y = -2x,$$
$$y = -x, \qquad y = -\frac{3}{4}x,$$
$$y = -\frac{1}{2}x \text{ und } y = -\frac{1}{4}x$$

dargestellt.

Der Leser prüfe die einzelnen Geraden nach, indem er jeweils zwei Punkte jeder Geraden berechnet.

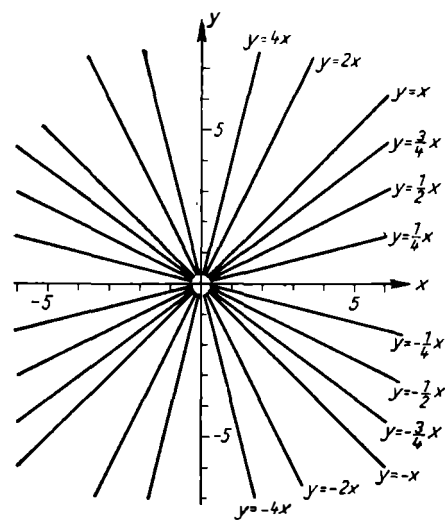


Bild 30

Alle Geraden gehen *durch den Nullpunkt* des Koordinatensystems hindurch.
Für positive Werte von m steigt die Gerade (Blickrichtung in positiver Richtung der x-Achse); für negative m fällt die Gerade.
Je größer m ist, um so steiler verläuft die Gerade.
Aus diesen Gründen nennt man m den **Anstieg** der Geraden.

Aus den beiden Wertetabellen für die Funktionen $y = 2x$ und $y = mx$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$y = mx$	$-4m$	$-3m$	$-2m$	$-m$	0	m	$2m$	$3m$	$4m$

erkennt man, daß sich y jeweils um 2 bzw. um m Einheiten verändert, wenn man x um eine Einheit vergrößert.
Damit gilt:

Die Funktion $y = mx$ wird dargestellt durch eine Gerade durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, die den Anstieg m besitzt. Der Anstieg m ist dabei der Wert, um den sich y ändert, wenn x um eine Einheit vergrößert wird.

Greift man irgendeinen Punkt $P(x; y)$ der Geraden $y = mx$ heraus, so kommt man nach Bild 31 auf folgende bessere Erklärung des Anstiegs einer Geraden: Aus Bild 31 ist zu erkennen, daß

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{mx}{x} = m$$

ist. Demnach gilt:

Der Anstieg m einer Geraden $y = mx$ stimmt mit dem Tangens des Winkels überein, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

$$\tan\alpha = m \qquad (71)$$

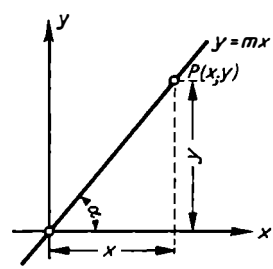


Bild 31

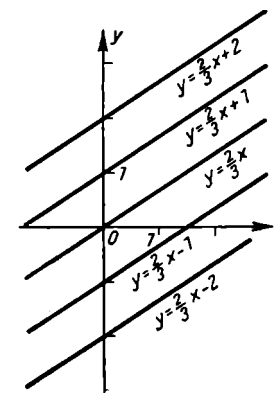


Bild 32

12.4.3. Die Funktion $y = mx + b$

Im Bild 32 sind die Funktionen

$$y = \frac{2}{3}x - 2, \qquad y = \frac{2}{3}x - 1, \qquad y = \frac{2}{3}x,$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{2}{3}x + 2$$

dargestellt.

Alle Geraden verlaufen *parallel* zur Geraden $y = \frac{2}{3}x$.

Die Absolutglieder der Funktionen stimmen mit der Ordinate des Punktes überein, in dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Allgemein gilt:

Die Funktion $y = mx + b$ wird dargestellt durch eine Gerade mit dem Anstieg m, die die y-Achse im Punkte $P(0; b)$ schneidet.

12.4.4. Grafische Darstellung einer linearen Funktion

Um eine lineare Funktion $y = mx + b$ grafisch darzustellen, ist keine Wertetabelle mehr erforderlich. Da man weiß, daß jede lineare Funktion eine Gerade ergibt, genügt es, zwei Punkte dieser Geraden auf möglichst einfache Weise zu bestimmen.

Der erste dieser beiden Punkte ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse, den man aus dem Absolutglied b der Funktionsgleichung ablesen kann. Einen zweiten Punkt erhält man, indem man vom Schnittpunkt $P(0; b)$ mit der y-Achse um eine Einheit in Richtung der positiven x-Achse und von da aus um m Einheiten in Richtung der y-Achse weitergeht (dabei ist das Vorzeichen von m zu beachten) bis zum Punkte Q (Bild 33). Die Verbindungsgerade PQ ist dann das gesuchte Bild der Funktion $y = mx + b$.

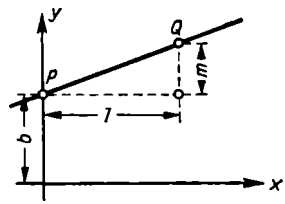


Bild 33

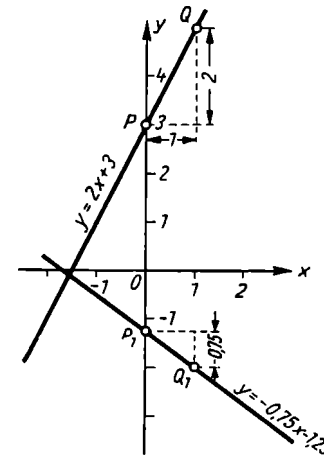


Bild 34

Im Bild 34 sind die beiden Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = -0{,}75x - 1{,}25$ auf diese Weise gezeichnet worden.

12.4.5. Grafische Lösung von linearen Gleichungen sowie von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten

Mit Hilfe der grafischen Darstellung linearer Funktionen können lineare Gleichungen sowie lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten grafisch gelöst werden.

BEISPIEL 1

Die Gleichung $2x + 3 = 0$ ist grafisch zu lösen.

Lösung: An Stelle der *Bestimmungsgleichung* $2x + 3 = 0$ betrachtet man die *Funktionsgleichung* $y = 2x + 3$. Die zugehörige Gerade schneidet die x-Achse im Punkt mit der Abszisse $x = -1{,}5$ (Bild 35). Dieser Wert ist die Lösung der gegebenen Bestimmungsgleichung, denn für $x = -1{,}5$ nimmt die Funktion $y = 2x + 3$ den Wert $y = 0$ an, wie es die Bestimmungsgleichung verlangt.

Bezeichnet man den Schnittpunkt einer Kurve mit der x-Achse als **Nullstelle** der zugehörigen Funktion, so gilt:

Die Lösung einer Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten stimmt mit der Nullstelle der zugehörigen Funktion überein.

Für die Lösung einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten bringt dieses grafische Verfahren keinerlei Vorteile. Es gewinnt jedoch an Bedeutung bei Gleichungen höheren Grades, bei denen man in vielen Fällen erst durch grafische Verfahren zur Lösung gelangt.

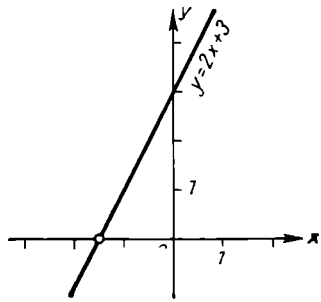


Bild 35

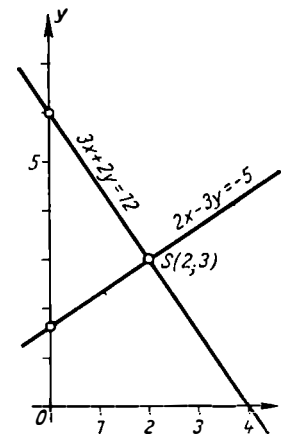


Bild 36

BEISPIEL 2

Das Gleichungssystem $\left|\begin{array}{rcl} 3x+2y= & & 12 \\ 2x-3y= & - & 5 \end{array}\right|$ *ist grafisch zu lösen.*

Lösung: An Stelle der beiden *Bestimmungsgleichungen* $3x+2y=12$ und $2x-3y=-5$ betrachtet man die *Funktionsgleichungen*

$$3x+2y=12 \qquad \text{und} \qquad 2x-3y=-5,$$

oder auf die Normalform gebracht

$$y=-\frac{3}{2}x+6 \qquad \text{und} \qquad y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

Die beiden zugehörigen Geraden schneiden sich im Punkte $S(2;3)$. Die Koordinaten $x_s=2$ und $y_s=3$ des Schnittpunktes dieser beiden Geraden (Bild 36) stimmen mit der Lösung des gegebenen Gleichungssystems überein.

Begründung: Da der Schnittpunkt der beiden Geraden auf jeder der beiden Geraden liegt, müssen seine Koordinaten nach 12.3.3. beide zugehörigen Funktionsgleichungen erfüllen. Da aber die Funktionsgleichungen formal mit den gegebenen Bestimmungsgleichungen übereinstimmen, müssen sie damit auch die Bestimmungsgleichungen erfüllen. Damit sind x_s und y_s die Lösungen des Gleichungssystems.

Auch dieses Lösungsverfahren läßt sich ohne weiteres auf kompliziertere Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten übertragen. Für Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten ist es *nicht* anwendbar.

12.5. Die quadratische Funktion

12.5.1. Begriffserklärungen

Eine Funktion der Form

$$y = Ax^2 + Bx + C, \tag{72}$$

bei der A, B und C beliebige konstante Werte bedeuten ($A \neq 0$), wird eine **quadratische Funktion** genannt. Wie bei den quadratischen Gleichungen heißen

Ax^2 *quadratisches Glied*,
Bx *lineares Glied* und
C *Absolutglied*

der Funktion.
Die zu einer quadratischen Funktion gehörende Kurve ist eine **quadratische Parabel** (auch Parabel zweiter Ordnung genannt).

12.5.2. Die Normalparabel $y = x^2$

Die zur einfachsten quadratischen Funktion $y = x^2$ gehörende Kurve[1]) verläuft symmetrisch zur y-Achse und ist nach oben geöffnet (Bild 37). Ihr tiefster Punkt, der *Scheitel* der Parabel, liegt im Koordinatenursprung. Im Scheitel besitzt die Parabel ihre größte Krümmung.

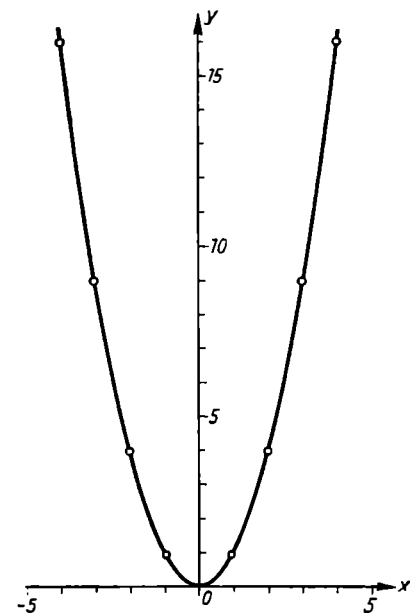


Bild 37

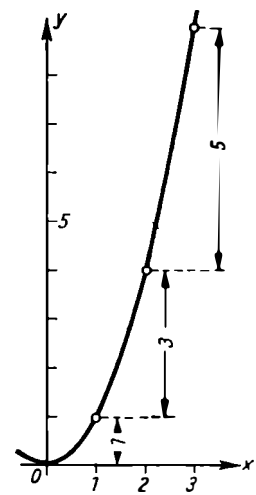


Bild 38

[1]) Dem Leser wird dringend empfohlen, für alle Funktionen, deren Wertetabellen im Buche nicht aufgeführt sind, die fehlenden Wertetafeln selbst aufzustellen und die gefundenen Werte mit den Kurvenpunkten zu vergleichen.

Die Kurve $y = x^2$ wird auch *quadratische Normalparabel* genannt.

Um einige Kurvenpunkte einer quadratischen Normalparabel schnell zeichnen zu können, beachte man folgenden Hinweis: Vergrößert man x, vom Scheitel ausgehend, schrittweise jeweils um eine Einheit, so wachsen die zugehörigen y-Werte zunächst um eine, dann um drei, um fünf, um sieben usw. Einheiten an (Bild 38).

12.5.3. Die Parabel $y = x^2 + q$

Die Funktionsgleichung der Parabel $y = x^2 + q$ unterscheidet sich von der der Normalparabel $y = x^2$ durch das Absolutglied q.

Jeder y-Wert der Parabel $y = x^2 + q$ ist demnach um q größer (wenn $q > 0$) bzw. um $|q|$ kleiner (wenn $q < 0$) als der zur gleichen Abszisse gehörende y-Wert der Normalparabel. Daraus folgt, daß das Absolutglied q lediglich eine *Verschiebung* der Normalparabel *in Richtung der y-Achse* bewirkt, so daß der Scheitel der Parabel $y = x^2 + q$ im Punkte $S(0; q)$ liegt.

Diese Verschiebung der Normalparabel in Richtung der y-Achse wird im Bild 39 an den Parabeln

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 3 \quad \text{und} \quad y = x^2 - 2$$

veranschaulicht.

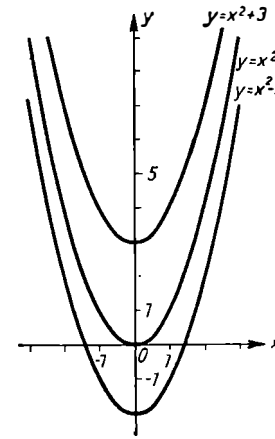


Bild 39

12.5.4. Die Parabel $y = x^2 + px + q$

Im Bild 40 sind die drei Parabeln

$$y = x^2, \quad y = (x-2)^2 \quad \text{und} \quad y = (x-2)^2 + 4$$

nebeneinander dargestellt.

Die drei Kurven sind einander trotz der verschiedenartigen Funktionsgleichungen kongruent, d.h., sie besitzen alle die gleiche Gestalt. Alle drei Kurven sind *Normal-*

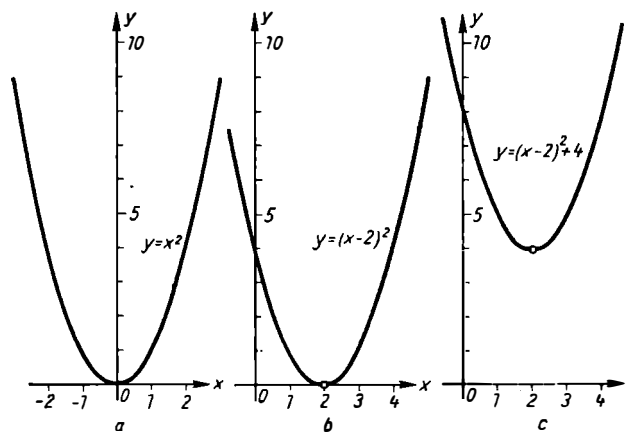


Bild 40

parabeln. Sie unterscheiden sich voneinander lediglich durch ihre Lage im Koordinatensystem:

Die Parabel $y = x^2$ hat ihren Scheitel im Koordinatenursprung. Die Parabel $y = (x-2)^2$ hat ihren Scheitel im Punkte $S(2; 0)$; sie ist im Vergleich zur Parabel $y = x^2$ lediglich in Richtung der x-Achse verschoben. Der Scheitel der Parabel $y = (x-2)^2 + 4$ liegt im Punkte $S(2; 4)$; die Parabel ist im Vergleich zur Parabel $y = x^2$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung verschoben.

Allgemein gilt:

Die zur quadratischen Funktion

$$y = (x - x_s)^2 + y_s$$

gehörende Kurve ist eine quadratische Normalparabel, deren Scheitel im Punkte $S(x_s; y_s)$ liegt und deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft.

Durch eine geeignete Umformung (quadratische Ergänzung) läßt sich jede quadratische Funktion der Form

$$y = x^2 + px + q$$

auf die obige Form

$$y = (x - x_s)^2 + y_s$$

bringen, so daß auch jede Funktion $y = x^2 + px + q$ durch eine quadratische Normalparabel dargestellt wird.

BEISPIELE

1. *Die Funktion* $y = x^2 - 4x + 5$ *ist zu zeichnen.*

   Lösung: Umformung der Funktionsgleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

   $$y = x^2 - 4x + 4 + 1$$
   $$y = (x - 2)^2 + 1.$$

   Daraus liest man ab:

   $$x_s = 2; \quad y_s = 1.$$

   Die Parabel hat demnach ihren Scheitelpunkt im Punkte $S(2; 1)$. Sie ist im Bild 41 dargestellt.

2. *Die Funktion* $y = x^2 + 5x - 1$ *ist zu zeichnen.*

   Lösung: Es ist

   $$y = x^2 + 5x - 1 =$$
   $$= x^2 + 5x + 2{,}5^2 - 7{,}25$$
   $$y = (x + 2{,}5)^2 - 7{,}25.$$

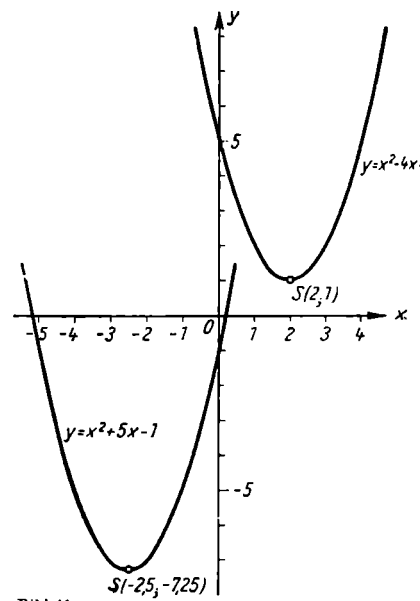


Bild 41

Scheitelpunktskoordinaten:

$$S(-2{,}5\,;\ -7{,}5)$$

Die Parabel ist ebenfalls im Bild 41 dargestellt.

12.5.5. Grafische Lösung quadratischer Gleichungen

Zur grafischen Lösung quadratischer Gleichungen gibt es zwei Verfahren, die am Beispiel der Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0$$

vorgeführt werden sollen.

1. Verfahren: An Stelle der *Bestimmungsgleichung* $x^2 + x - 2 = 0$ betrachtet man die *Funktionsgleichung*

$$y = x^2 + x - 2$$

und bestimmt zeichnerisch deren Nullstellen (vgl. Abschnitt 12.4.5. Beispiel 1!):
Der Scheitelpunkt der Parabel $y = x^2 + x - 2$ liegt im Punkte $S(-0{,}5;\ -2{,}25)$. Aus der Kurve liest man die Nullstellen

$$x_1 = -2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = +1$$

ab (Bild 42).

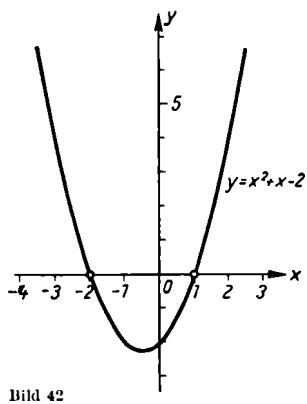


Bild 42

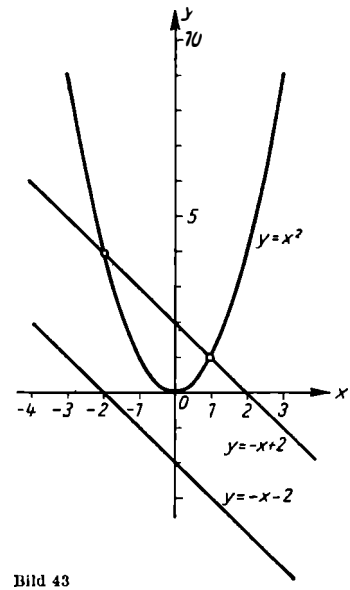


Bild 43

Dieses Verfahren ist wegen der umfangreichen Rechenarbeit bei der Bestimmung des Scheitelpunktes nicht sehr vorteilhaft.

2. Verfahren: Man bringt in der quadratischen Gleichung das quadratische Glied allein auf eine Seite

$$x^2 = -x + 2$$

und betrachtet an Stelle dieser *Bestimmungsgleichung* die *beiden Funktionsgleichungen*

$$y_1 = x^2 \qquad \text{und} \qquad y_2 = -x + 2.$$

Die zu diesen beiden Funktionsgleichungen gehörenden Kurven lassen sich leicht zeichnen. (Es ist günstig, wenn man sich für derartige Aufgaben eine Schablone für die Normalparabel $y = x^2$ anfertigt.) Die Maßzahlen der Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven (Bild 43) sind die Lösungen der gegebenen Bestimmungsgleichung.
In den Schnittpunkten stimmen nämlich die y-Werte der beiden Funktionen überein, so daß aus

$$y_1 = y_2$$

die Beziehung $\quad x^2 = -x + 2$

oder $\quad x^2 + x - 2 = 0$

folgt, was ja nach der Aufgabenstellung gefordert war.
Quadratische Gleichungen, die rechnerisch mit den uns zur Verfügung stehenden Zahlen nicht gelöst werden können, lassen sich natürlich auch grafisch nicht lösen.
So ist z. B. die Gleichung

$$x^2 + x + 2 = 0$$

für uns zunächst nicht lösbar.
Bei der grafischen Lösung der Gleichung mit Hilfe des zweiten Verfahrens wären die Schnittpunkte der Normalparabel $y = x^2$ mit der Geraden $y = -x - 2$ zu ermitteln. Diese Gerade läuft jedoch links unten an der Normalparabel vorbei (Bild 43).

12.5.6. Die allgemeine quadratische Funktion $y = Ax^2 + Bx + C$

Steht bei dem quadratischen Glied einer quadratischen Funktion ein von Null und Eins verschiedener Faktor A, so tritt eine *Formänderung* der Parabel auf. Dies soll an den Beispielen

$$y = x^2 \qquad y = 2x^2 \qquad y = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = -x^2 \qquad y = -2x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$$

gezeigt werden (Bilder 44 und 45).
Die Parabeln $y = Ax^2$ sind im Vergleich zur Normalparabel $y = x^2$ gestreckt bzw. gestaucht, je nachdem ob $|A| > 1$ oder ob $0 < |A| < 1$ ist.
Ist A *positiv*, so ist die zugehörige Parabel *nach oben* geöffnet. Bei *negativem* A ist sie *nach unten* offen. Die Symmetrieachse ist in jedem Falle die y-Achse.
Die zur allgemeinen quadratischen Funktion

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

gehörende Kurve ist zur Parabel $y = Ax^2$ kongruent. Durch das

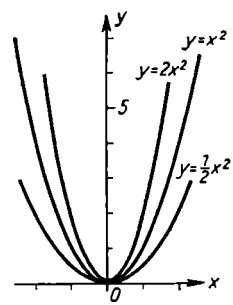


Bild 44

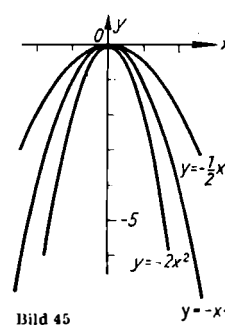


Bild 45

lineare Glied Bx und das Absolutglied C tritt lediglich eine Verschiebung der Parabel ein.

BEISPIEL

Die Funktion $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ *ist grafisch darzustellen.*

Lösung: Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$
y	-13	$-7{,}5$	-3	$+0{,}5$	$+3$	$+4{,}5$	$+5$	$+4{,}5$	$+3$	$+0{,}5$	-3	$-7{,}5$	-13

Es entsteht eine nach unten geöffnete, gestauchte Parabel, die der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ kongruent ist (Bild 46).
Der Scheitel dieser Parabel läßt sich nach einer einfachen Umrechnung unmittelbar aus der Funktionsgleichung ablesen:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 5$$

(quadratische Ergänzung)

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 5$$

Hieraus liest man die Scheitelpunktskoordinaten $x_s = 2$, $y_s = 5$ ab.

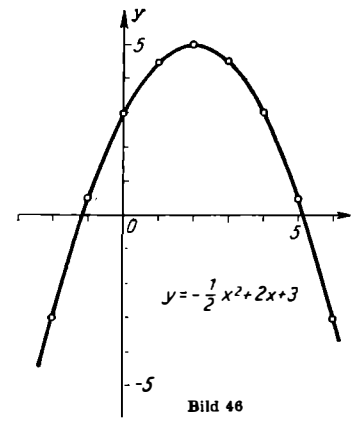


Bild 46

12.6. Die Potenzfunktionen $y = x^n$

12.6.1. $y = x^n$ für ganzzahliges positives n

Die Kurven der Potenzfunktionen $y = x^n$ heißen **Parabeln n-ter Ordnung,** wenn n eine ganze positive Zahl ist.

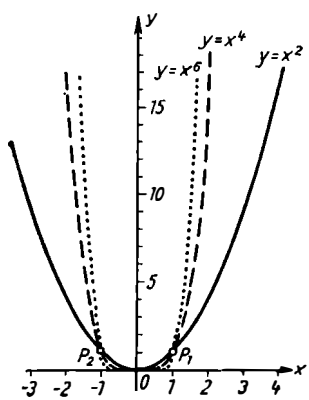


Bild 47

Jede Parabel für sich ist eine *zusammenhängende Kurve*, d. h., sie besitzt keinerlei Unterbrechungen.
Bei *geradzahligem* n verlaufen die Kurven im ersten und zweiten Quadranten und liegen *symmetrisch zur y-Achse.* Der Scheitel jeder Kurve liegt im Koordinatenursprung. Außerdem gehen alle diese Kurven durch die beiden Punkte $P_1(1;1)$ und $P_2(-1;1)$ und durch den Nullpunkt hindurch (Bild 47).
Ist n eine *ungerade* ganze positive Zahl, so haben die Kurven einen anderen charakteristischen Verlauf. Sie liegen im ersten und im dritten Quadranten und sind *zentralsymmetrisch zum Nullpunkt.* Jede Kurve geht durch die drei Punkte $P_1(1;1)$, $S(0;0)$ und $P_3(-1;-1)$ hindurch (Bild 48).
Für $x > 1$ steigen die Parabeln *um so schneller* an,

je größer die Hochzahl n ist. Der Kurvenverlauf im Intervall $-1 < x < +1$ ist im Bild 49 gesondert dargestellt.

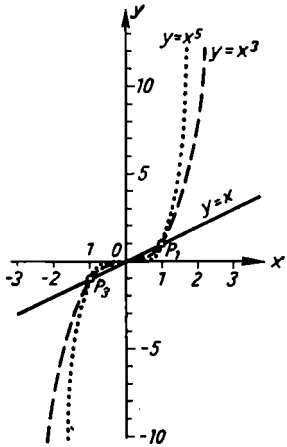


Bild 48

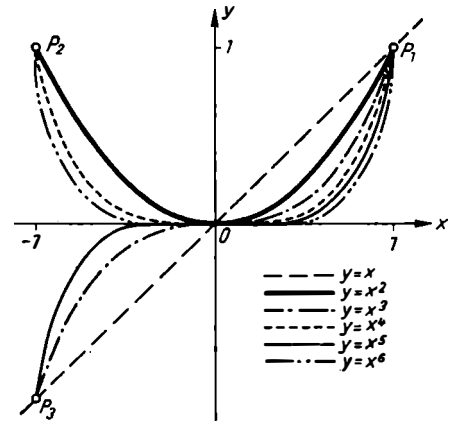


Bild 49

12.6.2. $y = x^n$ für ganzzahliges negatives n

Die Kurven der Potenzfunktionen $y = x^n$ heißen **Hyperbeln n-ter Ordnung,** wenn n eine negative ganze Zahl ist.

Mit wachsenden Werten von x werden die y-Werte immer kleiner, so daß sich die Kurven immer mehr der x-Achse nähern, ohne sie jedoch im Endlichen zu erreichen. Man nennt die x-Achse eine **Asymptote** der Hyperbeln.

Läßt man dagegen x immer mehr an den Wert Null herangehen, so wachsen die y-Werte immer mehr an. Damit wird auch die y-Achse zu einer Asymptote der Hyperbeln. Die Hyperbeln sind *keine zusammenhängenden Kurven.* Sie sind bei $x = 0$ *unstetig.* Man nennt die Stelle $x = 0$ eine *Unstetigkeitsstelle* (oder hier speziell einen Pol) der Funktion.

Bei *geradzahliger Hochzahl n* bestehen die Kurven aus zwei kongruenten „Ästen", die im ersten und zweiten Quadranten verlaufen und *symmetrisch zur y-Achse* liegen. Alle diese Hyperbeln gehen durch die beiden Punkte $P_1(1;1)$ und $P_2(-1;1)$ hindurch (Bild 50).

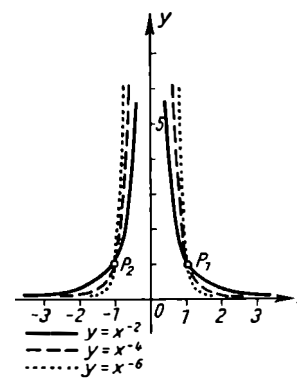


Bild 50

Bei *ungerader Hochzahl n* bestehen die Hyperbeln ebenfalls aus zwei kongruenten Ästen, die jedoch im ersten und dritten Quadranten liegen und *zentralsymmetrisch zum Nullpunkt* sind. Jede dieser Kurven geht durch die beiden Punkte $P_1(1;1)$ und $P_2(-1;-1)$ hindurch (Bild 51).

Alle Hyperbeln verlaufen in der Nähe des Nullpunktes um so steiler und nähern sich für große Werte von $|x|$ um so schneller der x-Achse, je größer der Exponent n ist.

Die Funktion $y = x^0$ hat für jeden von Null verschiedenen Wert von x den Wert 1. Für $x = 0$ führt die Funktion auf die sinnlose Form 0^0. Sie ist an dieser Stelle *nicht erklärt.*

Das Bild der Funktion $y = x^0$ ist demnach eine ***Parallele zur x-Achse*** im Abstand 1 (Bild 52) mit einer „Lücke" bei $x = 0$.

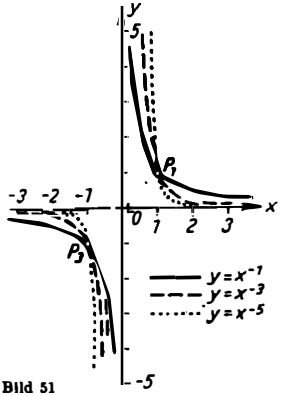


Bild 51

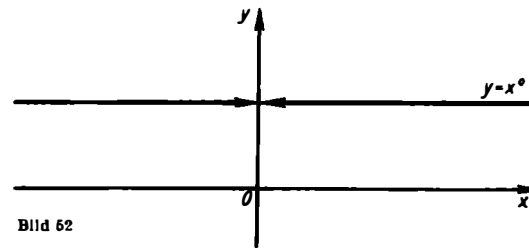


Bild 52

12.6.3. $y = x^n$ für gebrochene Werte von n

Von den Funktionen $y = x^n$ für gebrochene Exponenten n sollen hier nur diejenigen besprochen werden, bei denen n ein positiver Stammbruch ist, also die Wurzelfunktionen

$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (n \text{ ganzzahlig, positiv}).$$

Nach der im Abschnitt 6.1. verwendeten Definition des Wurzelbegriffes existieren diese Wurzelfunktionen nur für nichtnegative Werte von x. Ihr Definitionsbereich ist demnach

$$0 \leqq x < \infty.$$

Für alle Funktionen $y = \sqrt[n]{x}$ erhält man monoton ansteigende Kurven, die für große x-Werte um so steiler ansteigen, je kleiner der Wurzelexponent n ist.

Im Bild 53 wurden neben den beiden Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[4]{x}$ auch die sich von diesen nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Funktionen $y = -\sqrt{x}$ und $y = -\sqrt[4]{x}$ eingezeichnet. Die beiden Kurven $y = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$ gehen im Nullpunkt des Koordinatensystems ineinander über und bilden eine Parabel, die bei einer

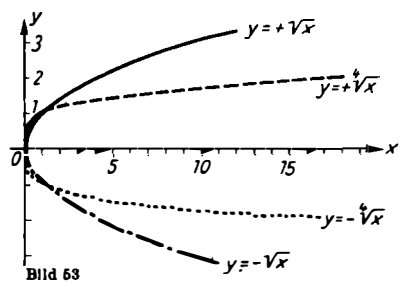


Bild 53

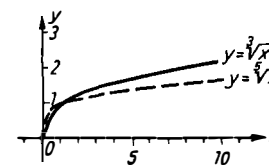


Bild 54

Drehung um 90° in die quadratische Normalparabel übergehen würde. – Ähnliche Verhältnisse liegen auch bei $y = \sqrt[4]{x}$ und $y = -\sqrt[4]{x}$ vor.

12.7. Die Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$

Funktionen, bei denen die unabhängige Veränderliche als Hochzahl einer konstanten Grundzahl auftritt, werden **Exponentialfunktionen** genannt. So sind z. B.

$$y = 2^x, \quad y = 10^x, \quad y = a^x \quad \text{und} \quad y = 3^{-x}$$

Exponentialfunktionen.

Ist $a \geqq 1$, so ist die Exponentialfunktion $y = a^x$ für alle x-Werte erklärt. Ihr Definitionsbereich ist demnach $-\infty < x < +\infty$.

Für sehr große negative Werte von x wird, $a > 1$ vorausgesetzt, y sehr klein. Die Kurve *nähert* sich daher immer mehr *an die negative x-Achse an.*

Für $x = 0$ ist $y = a^0 = 1$, d. h., jede Exponentialfunktion $y = a^x$ schneidet die y-Achse im Punkte $P(0; 1)$.

Mit wachsendem x werden die y-Werte sehr schnell groß, so daß die Kurve für positive Werte von x sehr steil ansteigt (Bild 55).

Die Exponentialfunktionen $y = a^{-x}$ sind, wenn $a \geqq 1$, ebenfalls für alle x-Werte erklärt, so daß auch ihr Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$ ist.

Mit wachsendem x werden die y-Werte immer kleiner; die Kurve $y = a^{-x}$ *nähert sich* demnach immer mehr *der positiven x-Achse,* ohne sie jedoch im Endlichen zu erreichen.

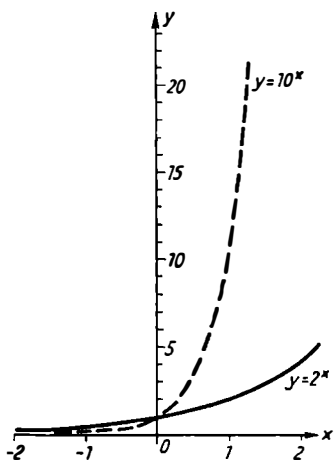


Bild 55

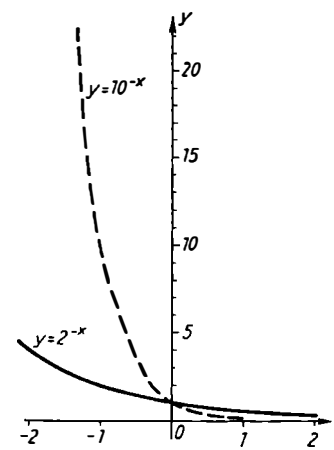


Bild 56

Für $x = 0$ wird $y = a^{-0} = 1$, d. h., jede Exponentialfunktion $y = a^{-x}$ schneidet die y-Achse im Punkte $P(0; 1)$.

Für große negative x-Werte werden die zugehörigen y-Werte sehr groß, so daß die Kurve sehr steil von oben herabkommt (Bild 56).

Die beiden Kurven $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ verlaufen symmetrisch zur y-Achse (Bild 57). Ist $a > 1$, so ist $y = a^x$ *eine monoton steigende Funktion*, während $y = a^{-x}$ *eine monoton fallende Funktion* ist. Beide Funktionen besitzen *keine negativen Funktionswerte*. Sie verlaufen demnach vollkommen oberhalb der x-Achse.

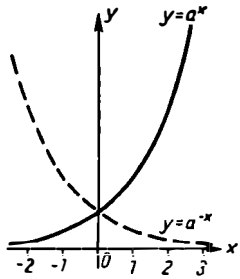


Bild 57

Ist $a = 1$, so erhält man als Bild der Funktion $y = 1^x$ die Parallele zur x-Achse im Abstand 1.

Ist $0 < a < 1$, so läßt sich die zugehörige Exponentialfunktion auf einen der bereits behandelten Fälle zurückführen, wenn man beachtet, daß

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \qquad \text{und} \qquad a^x = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

ist.

Für negative Grundzahlen a hat die Exponentialfunktion $y = a^x$ bzw. $y = a^{-x}$ keinen Sinn.

12.8. Die logarithmische Funktion

Die logarithmische Funktion

$$y = \log_a x$$

ist nur für $a > 0$ und $\neq 1$ sowie *nur für positive x-Werte* erklärt, da es keine Logarithmensysteme mit negativen Basen sowie keine Logarithmen von negativen Numeri gibt. Der Definitionsbereich der Funktion $y = \log_a x$ ist demnach $0 < x < \infty$ (Bild 58).

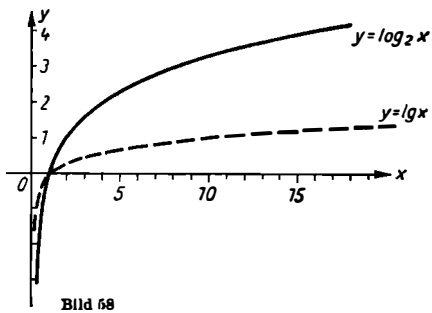


Bild 58

Die logarithmischen Funktionen $y = \log_a x$ verlaufen *nur im ersten und im vierten Quadranten*. Sie schneiden alle die x-Achse im Punkte $P(1; 0)$. Ist die Basis $a > 1$, so steigt die zugehörige logarithmische Funktion monoton an. Ist dagegen $a < 1$, so fällt die zugehörige logarithmische Funktion monoton.

12.9. Zur Theorie des Rechenstabes

12.9.1. Funktionsleitern

Trägt man auf einer Geraden Teilpunkte ab, die von einem Anfangspunkt A die Entfernungen

$$\boxed{e_x = m \cdot f(x)} \tag{73}$$

besitzen, und bezeichnet man die Teilpunkte mit dem jeweils zugehörigen Argumentwert x, so entsteht eine **Funktionsleiter (Funktionsskale**[1]**)** für die Funktion $f(x)$. Die

[1]) **scala** (lat.) die Leiter.

Gesamtheit der Teilpunkte wird **Teilung** der Leiter genannt. Die Größe m ist ein *Maßstabsfaktor*.

Speziell nennt man die durch $e_x = m \cdot x$ hervorgegangene Teilung einer Leiter die *lineare Teilung*; $e_x = m \cdot x^2$ liefert die *quadratische Teilung*; $e_x = m \cdot \frac{1}{x}$ die *reziproke Teilung*, $e_x = m \cdot \log_a x$ die *logarithmische Teilung* usw.

Das Kennzeichen der linearen Teilung einer Leiter ist der *gleichmäßige Abstand* aller Teilpunkte. Bei allen übrigen Teilungen sind die Abstände der Teilpunkte untereinander *verschieden*.

Im Bild 59 sind verschiedene Leitern dargestellt. Der Maßstabsfaktor m beträgt in allen Fällen $m = 6{,}6$ cm.

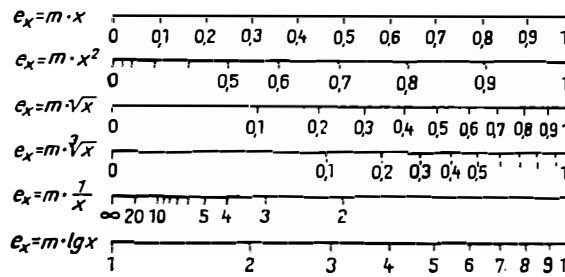


Bild 59

12.9.2. Die logarithmische Teilung

Neben der linearen Teilung einer Leiter (gleiche Abstände zwischen den Teilpunkten) ist die logarithmische Teilung für die Anwendungen besonders wichtig. Aus diesem Grunde wurde im Bild 60 die Entstehung des Abschnittes $1 \leqq x \leqq 10$ einer logarithmischen Teilung noch einmal dargestellt.

Da sich die Mantissen der dekadischen Logarithmen von Zehnerpotenz zu Zehnerpotenz wiederholen, ist die Teilung einer logarithmischen Leiter im Intervall $1 \leqq x \leqq 10$ die gleiche wie in den Intervallen $0{,}1 \leqq x \leqq 1$ oder $10 \leqq x \leqq 100$ usw.

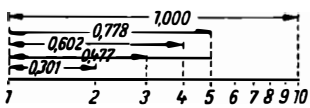


Bild 60

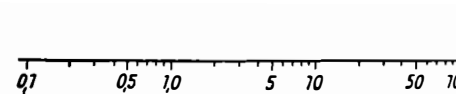


Bild 61

Eine logarithmische Leiter, deren Bereich sich über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, besteht demnach aus mehreren kongruenten Teilstücken, die sich nur in der Bezeichnung der Teilpunkte voneinander unterscheiden. Man kann also die Teilung für das Intervall $1 \leqq x \leqq 10$ auch für jedes andere Intervall $10^n \leqq x \leqq 10^{n+1}$ verwenden (Bild 61).

12.9.3. Verschiebbare Leitern

Setzt man an eine Strecke der Länge a eine zweite Strecke der Länge b an, so erhält man eine Gesamtstrecke der Länge $c = a + b$.

Liegen nun zwei mit dem gleichen Maßstab m linear geteilte Leitern nebeneinander, so entspricht diesem Aneinanderreihen zweier Strecken a und b wegen $a = m \cdot x$, $b = m \cdot y$ und $c = m \cdot z$ die Aufgabe

$$m \cdot z = m \cdot x + m \cdot y$$

oder

$$z = x + y.$$

Mit Hilfe zweier gegeneinander verschiebbarer, kongruenter, *linear* geteilter Leitern läßt sich demnach jede *Additionsaufgabe* (und damit auch jede Subtraktionsaufgabe) lösen. Im Bild 62 wurde auf diese Weise die Aufgabe $4 + 5 = 9$ gelöst.
Verwendet man nun an Stelle der linearen Teilung auf beiden Leitern eine *logarithmische Teilung*, so daß

$$a = m \cdot \lg x \qquad b = m \cdot \lg y \qquad c = m \cdot \lg z$$

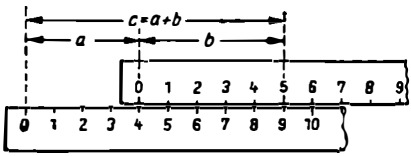


Bild 62

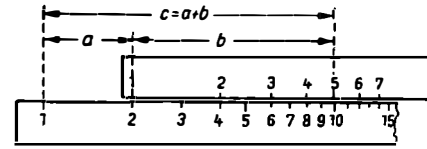


Bild 63

ist, so entspricht dem Aneinanderfügen der beiden Strecken a und b die Aufgabe

$$m \cdot \lg z = m \cdot \lg x + m \cdot \lg y$$
$$\lg z = \lg x + \lg y,$$

woraus $z = x \cdot y$
folgt.
Mit Hilfe zweier gegeneinander verschiebbarer, kongruenter, logarithmisch geteilter Leitern läßt sich demnach jede *Multiplikationsaufgabe* (und damit auch jede Divisionsaufgabe) lösen. (Im Bild 63 ist die Lösung der Aufgabe $2 \cdot 5 = 10$ dargestellt.)
Dabei besitzt die logarithmische Teilung einen großen Vorteil. Da die Teilung von 1 bis 10 genau dieselbe Gestalt besitzt wie die Teilung von 10 bis 100 usw., ist es hinsichtlich der Ziffernfolge gleichgültig, ob man $2 \cdot 5$ oder $20 \cdot 0{,}5$ oder $0{,}02 \cdot 0{,}005$ oder dergleichen zu rechnen hat. Die Ziffernfolge stimmt bei allen drei Ergebnissen überein; es braucht lediglich die Kommastellung durch eine Überschlagsrechnung festgestellt zu werden.

12.9.4. Der logarithmische Rechenstab

Der logarithmische Rechenstab ist nichts anderes als eine Einrichtung, mit deren Hilfe logarithmische Leitern gegeneinander verschoben werden können. Auf dieser Verschiebbarkeit logarithmischer Leitern beruht seine Anwendung bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben.
Darüber hinaus sind auf jedem Rechenstab mehrere logarithmische Teilungen mit verschiedenen Maßstäben eingraviert. Die *Leitergleichungen* für die einzelnen Skalen lauten beim handelsüblichen Rechenstab mit 25 cm Skalenlänge

$e_x = 25 \text{ cm} \cdot \lg x$ für die C- und D-Skale,
$e_x = 12{,}5 \text{ cm} \cdot \lg x$ für die A- und B-Skale,
$e_x = 8{,}\overline{3} \text{ cm} \cdot \lg x$ für die K-Skale,
$e_x = 25 \text{ cm} \cdot (1 - \lg x)$ für die CI-Skale und
$e_x = 25 \text{ cm} \cdot x$ für die L-Skale.

Aus den verschiedenen Maßstäben der einzelnen Skalen ist es zu erklären, daß genau senkrecht über einem Wert der D-Skale in der A-Skale das zugehörige Quadrat, in

der K-Skale die zugehörige Kubikzahl usw. zu finden ist. Denn die Zahl x besitzt auf der D-Skale die Entfernung

$$e_x = 25\text{ cm} \cdot \lg x$$

vom Anfangspunkt, während die Zahl y auf der A-Skale die Entfernung

$$e_y = 12{,}5\text{ cm} \cdot \lg y$$

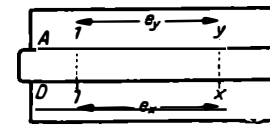


Bild 64

vom Anfangspunkt besitzt. Wenn die beiden Zahlen x und y genau senkrecht übereinanderstehen (Bild 64), muß

$$e_y = e_x$$

sein, d.h., es muß

$$12{,}5\text{ cm} \cdot \lg y = 25\text{ cm} \cdot \lg x$$

$$\lg y = 2 \cdot \lg x = \lg(x^2)$$

gelten, woraus

$$y = x^2$$

folgt.

In ähnlicher Weise lassen sich auch alle anderen bereits bekannten Zusammenhänge zwischen den einzelnen Skalen des Rechenstabes erklären.

AUFGABEN

263. Untersuche, welche von den gegebenen Punkten auf den Kurven liegen, die durch nachstehende Funktionsgleichungen bestimmt sind:

a) $y = 3x + 2$

$P_1\,(0\,;\,-2)$ $\quad P_2\,(-1\,;\,-1)$ $\quad P_3\left(-\frac{2}{3}\,;\,0\right)$

b) $3x - 4y + 7 = 0$

$P_1\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{17}{8}\right)$ $\quad P_2\,(-4\,;\,3)$ $\quad P_3\,(-3{,}2\,;\,4{,}6)$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$

$P_1\left(\frac{4}{7}\,;\,5\right)$ $\quad P_2\,(-6\,;\,5)$ $\quad P_3\left(\frac{26}{5}\,;\,-\frac{133}{60}\right)$

d) $y = \frac{7}{4}x^2 + x - 3$

$P_1\,(4{,}71\,;\,-2{,}36)$ $\quad P_2\left(\frac{2}{7}\,;\,-2\frac{4}{7}\right)$ $\quad P_3\,(-14\,;\,-95)$

e) $4x^2 - 3y^2 = 16$

$P_1\,(-2\,;\,0)$ $\quad P_2\left(\frac{5}{2}\,;\,\sqrt{3}\right)$ $\quad P_3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{19}\,;\,1\right)$

264. Berechne für die gegebenen Ordinaten die Abszissen der Punkte, die die folgenden Funktionsgleichungen erfüllen:

a) $y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{3}$ für $y_1 = 4$ $y_2 = -1$ $y_3 = \frac{2}{15}$

b) $y = -6x + 2$ für $y_1 = 2$ $y_2 = 0$ $y_3 = -4$

c) $7x - 9y - 3 = 0$ für $y_1 = -\frac{2}{3}$ $y_2 = 5\frac{3}{4}$ $y_3 = 1\frac{2}{9}$

d) $y = 4x^2 - 9$ für $y_1 = -1$ $y_2 = 8{,}64$ $y_3 = 27$

e) $y = 15x^2 + x - 6$ für $y_1 = 0$ $y_2 = 73\frac{1}{3}$ $y_3 = -4$

265. In welchen Punkten schneiden die Kurven, die durch folgende Funktionen gegeben sind, die Koordinatenachsen?

a) $y = x - 2$

b) $y = 3x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$

d) $5x - 6y - 10 = 0$

e) $14x - 9y + 21 = 0$

f) $y = x^2 - 3x$

g) $y = -4x^2 - 6x + 4$

h) $6y = -36x^2 - 252x - 491$

i) $x^2 + y^2 = 6{,}76$

k) $4x^2 + 9y^2 = 100$

266. Berechne die Schnittpunkte der folgenden Kurven:

a) $y = 4x + 3$ und $y = \frac{3}{2}x - 2$

b) $y = 0{,}8x - 2{,}3$ und $2x + 30y - 35 = 0$

c) $y = 5x - 8$ und $y = -\frac{4}{3}x + 11$

d) $y = \frac{3}{2}x - 3$ und $y = -6x - 18$

e) $x + y - 2 = 0$ und $-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = 1$

f) $y = -3x - 1$ und $y = -7$

g) $y = -3x^2 + 5$ und $y = x^2 + 1$

h) $y = \frac{10}{7}x^2 + 4$ und $y = 2x^2 - 3$

i) $y = -5x^2 - 20x - 23$ und $y = \frac{3}{4}x^2 + 3x$

k) $y = -\frac{7}{2}x^2 - 14x - 9$ und $y = 3 + 2x + \frac{1}{2}x^2$

267. Löse grafisch:

a) $\frac{4}{3}x + 2 = 0$

b) $-0{,}5x + 3{,}2 = 0$

c) $3x - 2y + 1 = 0$
$x + 3y - 18 = 0$

d) $4x + 2y = 1$
$3x - 6y = 7$

e) $3x - y - 4 = 0$
$x + 3y + 2 = 0$

f) $3x - 2y = 11$
$2x + 3y = 16$

g) $3x + 2y = 12$
$5x - 2y = 4$

h) $x + 2y = 3$
$-x + 6y = 3$

i) $3x - 2y - 2 = 0$
$x + 2y - 4 = 0$

k) $x + 2y = 4$
$2x + 4y + 5 = 0$

l) $x + y + 1 = 0$
$-2x + y = 6$

m) $y = 3x + 5$
$6x - 2y + 10 = 0$

n) $3x + 2y = 2$
$3x - 4y = -1$

o) $3x + y = 4$
$y + 3x - 2 = 0$

268. Bestimme Öffnungsrichtung, Öffnungsstärke und Lage des Scheitels der folgenden Parabeln und gib an, wo die y-Achse und wie oft die x-Achse geschnitten werden!

a) $y = -2x^2 - 4x$

b) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 7$

c) $y = 0{,}3x^2 - 2{,}7$

d) $y = -3x^2 + 6x - 1$

e) $7y = 8x^2 + 16x - 6$

f) $y = -x^2 + 2x - 3$

g) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$

h) $y = 4x^2 + 2x - 6$

i) $y = -x^2 - 1{,}6x + 2{,}12$

k) $-4y = x^2 - 6x + 8$

269. Löse grafisch (auf Millimeterpapier):

a) $x^2 + 0{,}3x - 1{,}3 = 0$

b) $x^2 - 1{,}5x - 4{,}5 = 0$

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

d) $x^2 - 3{,}4x = 0$

e) $x^2 + 0{,}3x - 7 = 0$

f) $y^2 - 1{,}4y + 0{,}49 = 0$

g) $x^2 + 2{,}8x + 2 = 0$

h) $4z^2 + 4z - 3 = 0$

i) $5x^2 + 18x + 16{,}2 = 0$

k) $5y^2 + 10y - 2{,}2 = 0$

270. a) Welche Kurvenform ergibt sich, wenn das Ohmsche Gesetz $U = R \cdot I$ grafisch dargestellt wird:

α) U als Funktion von I bei konstantem R
β) U „ „ „ R „ „ I
γ) I „ „ „ R „ „ U
δ) I „ „ „ U „ „ R
ε) R „ „ „ I „ „ U
ζ) R „ „ „ U „ „ I

b) In Abhängigkeit vom Radius r sind darzustellen:

α) der Umfang eines Kreises,
β) die Fläche eines Kreises,
γ) die Oberfläche einer Kugel,
δ) das Volumen einer Kugel.

Welche Kurven ergeben sich?

13. Grundbegriffe der Geometrie

Die *Planimetrie* ist die Lehre von den Formen und Beziehungen von *Figuren* in der *Ebene*. Entsprechend den Zahlen in der Arithmetik werden demzufolge in der Planimetrie die Punkte, Geraden, Winkel usw. als Grundelemente verwendet.
Unter der *Stereometrie* versteht man die Lehre von den Formen und Beziehungen von *Körpern* im *Raume*.

13.1. Punkt

Definition:

Der **Punkt** ist das einfachste geometrische Gebilde, er ist eine gedachte Stelle im Raum und besitzt *keine* Ausdehnung (**Dimension**).

Die Bezeichnung erfolgt durch große lateinische Buchstaben.

13.2. Linie

Definition:

Eine **Linie** entsteht durch die Bewegung eines Punktes. Sie besitzt *eine* Ausdehnung, die Längenausdehnung. Ändert der Punkt dabei seine Bewegungsrichtung nicht, so entsteht eine **Gerade.**

Definition:

Eine *einseitig* begrenzte Gerade heißt **Strahl.**
Eine *zweiseitig* begrenzte Gerade heißt **Strecke.**

Eine Strecke kann auch erklärt werden als die kürzeste Verbindung zweier Punkte.
Als Längenmaß sind das **Meter** sowie dessen Bruchteile und Vielfache festgelegt. (Vgl. Anhang!)
Linien werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.
Bei Strecken dient der Buchstabe zugleich als Ersatz für die Größe, z. B. bei Berechnungen. Ferner bezeichnet man Strecken noch durch Angabe ihrer Endpunkte.

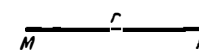


Bild 65

Zum Beispiel:

r = Strecke $MP = \overline{MP}$ (Bild 65).

13.3. Fläche

Definition:

Eine **Fläche** entsteht durch die Bewegung einer Linie, sofern diese nicht in sich selbst verschoben wird. Die Fläche besitzt *zwei* Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite, sie ist zweidimensional.

Definition:

Verschiebt man eine Gerade ohne sie zu drehen längs einer anderen Geraden, so entsteht eine **Ebene.**

Ein bestimmtes Flächenstück wird durch Linien begrenzt.
Als Flächenmaß sind der Inhalt eines Quadrates von 1 m Seitenlänge sowie dessen Bruchteile und Vielfache festgelegt. (Vgl. Anhang!)

13.4. Raum

Definition:

Der **Raum** entsteht durch die Bewegung einer Fläche, sofern diese nicht in sich selbst verschoben wird. Der Raum besitzt *drei* Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Höhe. Er ist dreidimensional.

Ein bestimmter Körper wird durch Flächen begrenzt.
Als Maß für seinen Rauminhalt, das **Volumen,** sind das Volumen eines Würfels von 1 m Kantenlänge sowie dessen Bruchteile und Vielfache festgelegt. (Vgl. Anhang!)

13.5. Winkel

Definition:

Der **Winkel** ist der Richtungsunterschied zweier Strahlen, der **Schenkel** des Winkels. Der gemeinsame Endpunkt beider Strahlen ist der **Scheitelpunkt** des Winkels.

Winkel werden durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet unter Verwendung der Schenkel oder unter Zuhilfenahme dreier Punkte, von denen der mittlere der Scheitelpunkt ist, während die anderen beiden je auf einem Schenkel liegen.

Zum Beispiel:

$$\gamma = \sphericalangle ASB = \sphericalangle (a, b) = \text{Winkel } ASB \qquad \text{(Bild 66).}$$

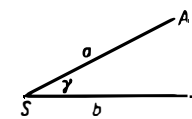


Bild 66

Als Winkelmaß sind das **Grad** und dessen Bruchteile festgelegt. Ein Grad ist der Richtungsunterschied zweier benachbarter Strahlen, wenn man den Kreis vom Mittelpunkt aus in 360 gleiche Teile zerlegt. (Vgl. Anhang!)

Über die Winkelmessung im Bogenmaß vgl. Abschnitt 25.

Nach der Größe der Winkel trifft man folgende Einteilung:

$0° < \alpha < 90°$	*Spitzer* Winkel,
$\alpha = 90° = 1\llcorner$	*Rechter* Winkel,
$90° < \alpha < 180°$	*Stumpfer* Winkel,
$\alpha = 180° = 2\llcorner$	*Gestreckter* Winkel und
$180° < \alpha$	*Überstumpfer* Winkel.

Das Zeichen für „rechtwinklig" ist $\perp$. Rechte Winkel kann man durch einen in den Winkel gesetzten Punkt kennzeichnen.

Definition:

Komplementwinkel sind solche, die einander zu 90° ergänzen.
Supplementwinkel sind solche, die einander zu 180° ergänzen.

14. Lagebeziehungen zwischen Geraden und Winkeln

14.1. Parallele Geraden

Definition:

Parallele Geraden sind solche, die überall gleichen, rechtwinklig zu messenden Abstand haben.

Diese Definition ist gleichwertig mit der Aussage, daß parallele Geraden einander *nicht* schneiden.
Das Zeichen für parallel ist $||$.

In der darstellenden Geometrie verwendet man auch folgende Definition:

Definition:

Parallele Geraden schneiden einander im *Unendlichen*.

Diese Definition scheint im Widerspruch zu der vorher gemachten Aussage zu stehen. Das ist nicht der Fall, wenn man berücksichtigt, daß

„...schneiden einander *im Unendlichen*"

gleichbedeutend ist mit

„...schneiden einander *nicht im Endlichen*".

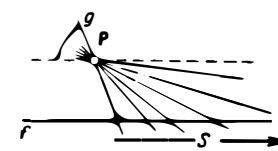


Bild 67

Diesen Sachverhalt kann man sich an Bild 67 veranschaulichen.
Die Gerade f liegt fest. Sie wird von der Geraden g in S geschnitten. Je weiter sich g um den Drehpunkt in die Grenzlage als Parallele dreht, desto weiter wandert der Schnittpunkt weg; im Grenzfall ist seine Entfernung vom Drehpunkt „unendlich groß" geworden.

14.2. Nebenwinkel

Definition:

Zwei Winkel sind **Nebenwinkel,** wenn sie *einen* Schenkel gemeinsam haben und die beiden anderen Schenkel einen *gestreckten* Winkel bilden.

Daraus ergibt sich unmittelbar der

Satz 1:

Zwei Nebenwinkel ergänzen einander zu 180°.

Daraus folgt weiter der

Satz 2:

Sind zwei Nebenwinkel gleich, so ist jeder ein rechter Winkel.

Während Nebenwinkel stets Supplementwinkel sind, sind Supplementwinkel nur dann Nebenwinkel, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben.

14.3. Scheitelwinkel

Satz:

Beim Schnitt zweier Geraden ergeben sich zwei Paare gleicher Winkel.

Beweis: Nach Bild 68 ist β_1 Supplementwinkel sowohl zu α_1 als auch zu α_2. Also gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.
Entsprechend beweist man die Gleichheit von β_1 und β_2.

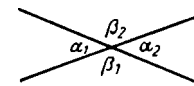


Bild 68

Definition:

Gleiche Winkel an sich schneidenden Geraden heißen **Scheitelwinkel.**

14.4. Winkel an Parallelen

Definition:

Zwei parallele Geraden werden von einer dritten Geraden geschnitten. Bei Verschiebung einer der Parallelen bis zur Deokung mit der anderen sind **Stufenwinkel** solche, die sich decken, **gegenüberliegende Winkel** solche, die zu Nebenwinkeln auf ein und derselben Seite der schneidenden Geraden und **Wechselwinkel** solche, die zu Scheitelwinkeln werden.

Nach Bild 69 sind Paare von

Stufenwinkeln	*gegenüberliegenden Winkeln*	*Wechselwinkeln*
α und α'	α und δ'	α und γ'
β „ β'	β „ γ'	β „ δ'
γ „ γ'	γ „ β'	γ „ α'
δ „ δ'	δ „ α'	δ „ β'

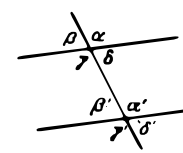


Bild 69

Bisweilen spricht man auch von Stufen-, gegenüberliegenden und Wechselwinkeln an *nicht* parallelen Geraden. Dann müßte man die verschiedenen Winkelpaare mit Hilfe der letztgenannten Lagebeziehungen erklären.

Satz:

Stufenwinkel an Parallelen sind gleich;
gegenüberliegende Winkel an Parallelen sind Supplementwinkel;
Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.

Der Beweis ergibt sich aus der in der Definition genannten Parallelverschiebung.
Von diesen Sätzen gilt auch die Umkehrung.

Unter der Umkehrung eines Satzes versteht man in der Mathematik die Vertauschung von *Voraussetzung* und *Folgerung*. Das sei an Hand des Satzes von den Stufenwinkeln erläutert:

Ursprüngliche Form:

Wenn die geschnittenen Geraden parallel laufen, dann sind die Stufenwinkel gleich.

Umkehrung:

Wenn die Stufenwinkel gleich sind, dann laufen die geschnittenen Geraden parallel.

Nicht alle geometrischen Aussagen sind umkehrbar, wie beispielsweise aus der Bemerkung am Ende des Abschnittes 14.2. hervorgeht.
Im folgenden werden die Umkehrungen von Sätzen, sofern sie gelten und von Bedeutung sind, mit genannt.

Auf der Umkehrung des Satzes von den Stufenwinkeln beruht beispielsweise die zeichnerische Konstruktion paralleler Geraden durch Verschiebung des Zeichendreiecks längs eines Lineales.

Sämtliche Betrachtungen des Abschnittes 14.4. lassen sich erweitern auf eine Schar von Geraden bzw. Parallelen.

15. Symmetrie

15.1. Axiale Symmetrie

Definition:

Zwei Figuren heißen *gleichsinnig* oder *entgegengesetzt orientiert*, je nachdem, ob ihre Randpunkte bei gleichem Umlaufsinn in *gleicher* oder *umgekehrter Reihenfolge* berührt werden.

BEISPIEL

In Bild 70 erhält man, wenn man beide Hälften im Uhrzeigersinn umläuft, links die Reihenfolge $A'B'C'D'$, rechts aber $ADCB$. Die Figuren sind demnach entgegengesetzt orientiert.

Definition:

Zwei Punkte liegen **symmetrisch** zu einer Geraden, der **Symmetrieachse,** wenn sie von ihr *gleichen Abstand* haben und ihre Verbindungsgerade *senkrecht* zur Symmetrieachse steht.

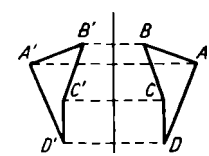


Bild 70

Wird diese Bedingung zugleich von mehreren Punktepaaren erfüllt, so entsteht eine axialsymmetrische Figur, deren Hälften *deckungsgleich*, aber *entgegengesetzt orientiert* sind. Eine Hälfte könnte aus der anderen durch Spiegelung an der Symmetrieachse hervorgegangen sein (Bild 70).

15.2. Zentrale Symmetrie

Definition:

Zwei Punkte liegen **zentralsymmetrisch** zu einem Punkt, dem **Symmetriezentrum,** wenn sie von ihm *gleichen Abstand* haben und wenn ihre Verbindungsgerade durch diesen Punkt hindurchgeht.

Wird diese Bedingung zugleich von mehreren Punktepaaren erfüllt, so entsteht eine zentralsymmetrische Figur. Die beiden Hälften einer solchen Figur sind *deckungsgleich* und *gleichsinnig orientiert* (Bild 71).

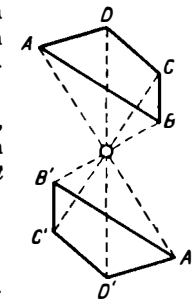


Bild 71

15.3. Geometrische Grundkonstruktionen

Allen hier genannten Beispielen liegt *axiale* Symmetrie zugrunde. Alle Konstruktionen sind nur mit Zirkel und Lineal auszuführen.

BEISPIELE

1. *Die Strecke A B soll halbiert werden.*

   Erster Lösungsweg: Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden einander in S_1 und S_2. Deren Verbindungsgerade schneidet $\overline{AB}$ im gesuchten Mittelpunkt M (Bild 72a).

   Zweiter Lösungsweg: Je zwei Kreisbögen mit verschiedenen Radien um A und B ergeben als Schnitte jeweils zweier Kreisbögen mit gleichem Radius S_1 und S_2. Deren Verbindungsgerade schneidet $\overline{AB}$ im gesuchten Punkt M (Bild 72b).

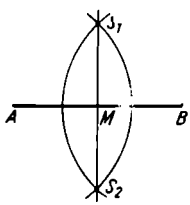


Bild 72a

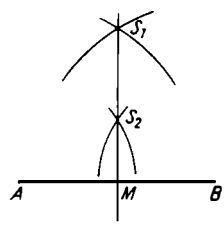


Bild 72b

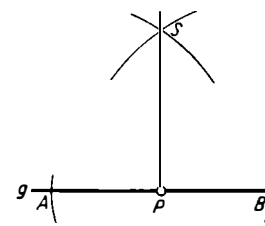


Bild 73

2. *Auf der Strecke A B soll die Mittelsenkrechte errichtet werden.*
   Die Konstruktion erfolgt wie in Beispiel 1.

3. *Im Punkt P der Geraden g soll die Senkrechte errichtet werden.*

   Lösung: Ein beliebiger Kreisbogen um P schneidet g in A und B. Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden einander in S. S mit P verbunden ergibt die gesuchte Senkrechte (Bild 73).

4. *Vom Punkt P soll auf die Gerade g das Lot gefällt werden.*

Lösung · Ein beliebiger Kreis um P schneidet g in A und B. Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden einander in C. C mit P verbunden ergibt das gesuchte Lot (Bild 74).

5. *Ein Winkel soll halbiert werden.*

Lösung: Ein beliebiger Kreisbogen um den Scheitel S schneidet beide Schenkel in A und B. Zwei Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden einander in C. Die Verbindungsgerade SC ist die gesuchte Winkelhalbierende (Bild 75).

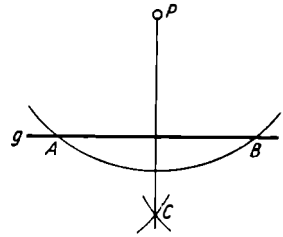


Bild 74

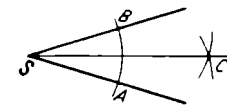


Bild 75

Anmerkung: Bei allen fünf Konstruktionen ist zu beachten, daß der Radius der Kreisbögen genügend groß gewählt wird, da sich sonst *„schleifende"* oder gar keine Schnitte ergeben. (Als schleifenden Schnitt bezeichnet man einen solchen, bei dem der Winkel zwischen den sich schneidenden Linien sehr spitz ist, so daß der Schnittpunkt nur ungenau zu bestimmen ist.)

Der Vollständigkeit halber seien noch zwei Grundkonstruktionen erwähnt, die allerdings mit der Symmetrie in keinem Zusammenhang stehen:

BEISPIELE

6. *Zur Geraden g soll eine Parallele im Abstand d gezeichnet werden.*

Lösung: An beliebiger Stelle von g errichtet man die Senkrechte. Auf ihr trägt man d ab und erhält P. Jetzt hat man durch P die Parallele zu g zu bestimmen. Durch Errichten eines zweiten Lotes von der Länge d ergibt sich P'. Die Verbindungsgerade PP' ist die gesuchte Parallele. Praktisch konstruiert man die Parallele durch P zu g mittels Parallelverschiebung des Zeichendreiecks.

7. *Im Punkt A der Geraden g soll ein gegebener Winkel α angetragen werden.*

Lösung: Um den Scheitel S des Winkels α schlägt man einen beliebigen Kreisbogen. Er schneidet die Schenkel in P und T. $\overline{SP}$ wird auf g von A aus abgetragen, es ergibt sich Schnittpunkt B. Kreisbögen mit $\overline{SP}$ um A und mit $\overline{PT}$ um B ergeben C als Punkt des gesuchten Schenkels (Bild 76).

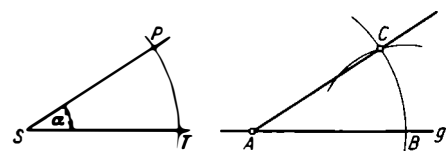


Bild 76

15.4. Geometrische Örter

Definition:

Unter einem **geometrischen Ort** versteht man die *Menge aller Punkte*, die einer geforderten Bedingung genügen.

Die Gesamtheit dieser Punkte ergibt in der Ebene im allgemeinen eine Linie.

BEISPIELE

1. *Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M den Abstand r haben, ist der Kreis um M als Mittelpunkt mit der Strecke r als Radius (Halbmesser) (Bild 77).*

2. *Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einer festen Geraden g den Abstand d haben, besteht aus zwei Parallelen im Abstand d (Bild 78).*

3. *Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von zwei festen Punkten A und B gleich weit entfernt liegen, ist die Mittelsenkrechte der Strecke A B (Bild 79).*

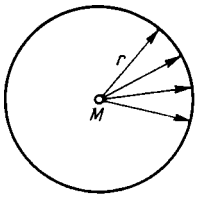


Bild 77

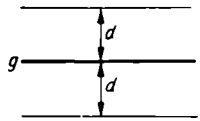


Bild 78

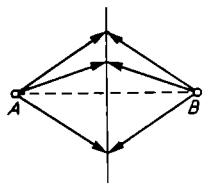


Bild 79

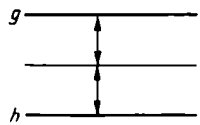


Bild 80

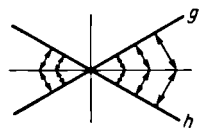


Bild 81

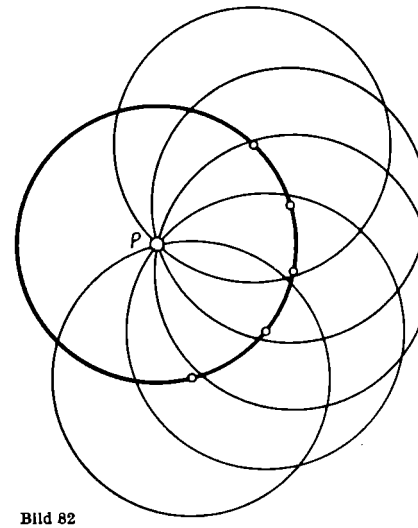


Bild 82

4. *Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von den festen Geraden g und h gleich weit entfernt liegen, ist deren Mittelparallele, sofern g und h parallel liegen. Schneiden sich jedoch g und h, dann ergeben sich die (aufeinander senkrecht stehenden) Winkelhalbierenden der beiden Paare von Scheitelwinkeln (Bilder 80 und 81).*

Alle geometrisch und technisch interessanten Kurven lassen sich, oft sogar auf verschiedene Weise, als geometrische Örter erklären. Dazu noch zwei Beispiele:

BEISPIELE

5. *Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit dem Radius r, die durch den festen Punkt P gehen, ist der Kreis mit dem Radius r um P als Mittelpunkt (Bild 82).*

6. *Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch den festen Punkt P gehen und die Gerade g berühren, ist eine Parabel (Bild 83).*

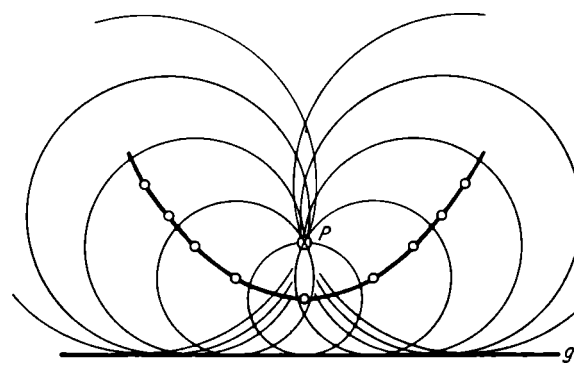


Bild 83

16. Das Dreieck

16.1. Allgemeines Dreieck

Definition:

Ein **Dreieck** ist ein von drei Strecken, seinen **Seiten,** begrenztes Stück einer Ebene.

Am Dreieck sind folgende Bezeichnungen üblich: (Bild 84)

Der Seite $\begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$ liegen gegenüber der Winkel $\begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ und der Eckpunkt $\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$

Strecken und Winkel bezeichnet man als **Stücke** des Dreiecks.

Satz 1:

Die *Winkelsumme* im Dreieck beträgt 180°.

Beweis: In Bild 85 zieht man die Hilfslinie g parallel zu $\overline{AB}$ durch C.

Es gilt: $\alpha = \alpha'$ und

$\beta = \beta'$ als Wechselwinkel.

Da ferner $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$,

gilt auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, w. z. b. w.[1])

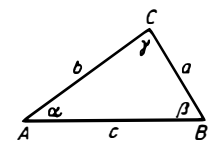


Bild 84

Definition:

Außenwinkel nennt man einen solchen Winkel, der von einer Seite des Dreiecks und der verlängerten anschließenden Seite eingeschlossen wird.

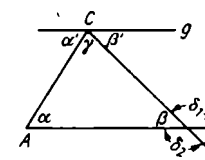


Bild 85

Man findet also an jeder Ecke des Dreiecks *zwei* Außenwinkel. In Bild 85 sind diese beispielsweise in Punkt B δ_1 und δ_2. Beide möglichen Außenwinkel sind aber als Scheitelwinkel gleich, so daß man *vom Außenwinkel* in A, B oder C *schlechthin* sprechen darf, sofern nur die Größe und nicht die Lage des Winkels interessiert.

Satz 2:

Jeder Außenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.

Beweis: In Bild 85 ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

und $\beta + \delta_1 = 180°$.

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich

$\alpha + \gamma = \delta_1$, w. z. b. w.

[1]) w. z. b. w. ist die Abkürzung für „was zu beweisen war".

Satz 3:

Die Summe der Außenwinkel am Dreieck beträgt 360°.

Beweis: Nach Satz 2 gilt:

$$\begin{array}{lll} \text{Außenwinkel in } A = & & \beta + \gamma \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad B = & \alpha & + \gamma \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad C = & \alpha + \beta & \end{array}$$

Summe der Außenwinkel $= 2(\alpha + \beta + \gamma) = 360°$ w. z. b. w.

Dreiecks-Ungleichung:

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad c + a > b$$

oder in Worten:

Die Summe zweier Seiten im Dreieck ist stets größer als die dritte.

Dieser Sachverhalt ist anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß der direkte Weg von einer Ecke zur anderen stets kürzer ist als der Umweg über die dritte Ecke.
Nach den Gesetzen über das Rechnen mit Ungleichungen kann man die Dreiecksungleichung z. B. auch folgendermaßen schreiben:

$$c - b < a$$

oder in Worten:

Die Differenz zweier Seiten im Dreieck ist stets kleiner als die dritte.

Nach dem *größten* im Dreieck vorkommenden Winkel unterscheidet man

spitzwinklige Dreiecke,
rechtwinklige Dreiecke und
stumpfwinklige Dreiecke.

Die beiden übrigen Winkel sind in jedem Fall spitze Winkel, wie sich unmittelbar aus der Winkelsumme ergibt.
Nach der Länge der Seiten unterscheidet man

ungleichseitige Dreiecke (alle Seiten sind verschieden lang),
gleichschenklige Dreiecke (zwei Seiten sind gleich lang) und
gleichseitige Dreiecke (alle Seiten sind gleich lang).

16.2. Spezielle Dreiecke

Definitionen:

Die zwei Seiten eines *rechtwinkligen* Dreiecks, die den rechten Winkel einschließen, heißen **Katheten.** Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse.**
Die zwei gleich langen Seiten eines *gleichschenkligen* Dreiecks heißen dessen **Schenkel.** Die dritte Seite, die der **Spitze** gegenüberliegt, heißt **Basis (Grundlinie).**

Durch Umklappung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten erhält man als Gesamtfigur ein gleichschenkliges Dreieck mit der genannten Kathete als Symmetrieachse (Bild 86). Aus der Deckungsgleichheit beider Teildreiecke ergeben sich für das gleichschenklige Dreieck die

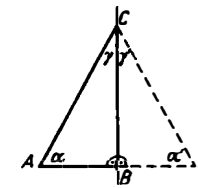


Bild 86

Sätze:

1. Die beiden Winkel an der Basis sind gleich.
2. Die Mittelsenkrechte der Basis halbiert den Winkel an der Spitze.

Ist die Länge der Schenkel gleich der der Basis, erhält man ein *gleichseitiges* Dreieck.

Satz 3:

Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich 60°.

Beweis: Da man jede Seite als Basis auffassen kann, sind alle Winkel paarweise gleich. Daraus folgt die Gleichheit aller Winkel, denn aus dem Satz von der Winkelsumme folgt:

$$3\alpha = 180°$$
$$\alpha = 60° \qquad \text{w. z. b. w.}$$

16.3. Dreieckstransversalen und deren Schnittpunkte

Definition:

Dreieckstransversalen sind Geraden, die ein Dreieck schneiden. Im engeren Sinne versteht man darunter

die **Seitenhalbierenden,** das sind Geraden, die den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbinden, bezeichnet mit s_a, s_b und s_c;

die **Mittelsenkrechten** der drei Seiten, bezeichnet mit m_a, m_b und m_c;

die **Höhen,** das sind die Lote, die von den Eckpunkten auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten bzw. deren Verlängerungen gefällt werden, bezeichnet mit h_a, h_b und h_c und

die **Winkelhalbierenden,** bezeichnet mit w_α, w_β und w_γ.

Die drei Transversalen jeder Gruppe schneiden sich in je *einem* Punkt, den sogenannten *merkwürdigen Punkten* des Dreiecks. Das Merkwürdige dieser Punkte besteht darin, daß sie sich als Schnittpunkte *dreier* Geraden ergeben, während ein Punkt im allgemeinen durch den Schnitt *zweier* Geraden bestimmt ist. Bei der Konstruktion dieser Punkte ist es aber aus Gründen der Zeichenkontrolle vorteilhaft, alle drei Bestimmungsgeraden zu verwenden.

Definition:

Der **Umkreis** ist der Kreis, auf dem alle Eckpunkte eines Dreiecks liegen.
Der **Inkreis** berührt alle Seiten des Dreiecks.

Satz 1:

Die Mittelsenkrechten des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Mittelpunkt des Umkreises.*

Beweis: In Bild 87 schneiden sich m_b und m_c in M. Infolge der Ortseigenschaft der Mittelsenkrechten gilt:

$$\overline{MA} = \overline{MB}; \quad \text{ferner} \quad \overline{MB} = \overline{MC},$$

also $$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}.$$

Also muß M auch auf m_a liegen. Außerdem gilt:

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r = \text{Radius des Umkreises.}$$

Satz 2:

Die Höhen des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Beweis: In Bild 88 werden drei Hilfslinien gezogen, so daß gilt:

$$\overline{RS} \parallel \overline{AB}, \quad \overline{TR} \parallel \overline{AC}$$

und $$\overline{ST} \parallel \overline{BC}$$

Jetzt gilt beispielsweise:

$$\overline{CR} = \overline{AB} \quad \text{und}$$

$$\overline{SC} = \overline{AB}$$

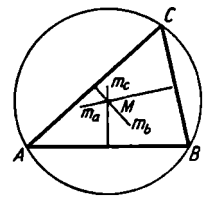


Bild 87

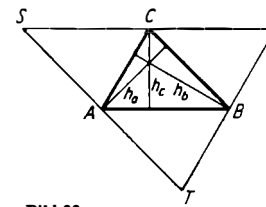


Bild 88

als Gegenseiten im Parallelogramm. (Vgl. 17.2.)
Dadurch wird die Höhe h_c der Seite AB des inneren Dreiecks zur Mittelsenkrechten der Seite RS des äußeren Dreiecks. Entsprechend verfährt man mit h_a und h_b und führt den Schnitt der Höhen eines Dreiecks zurück auf den Schnitt der Mittelsenkrechten eines anderen Dreiecks. Damit ist der Satz bewiesen.
Der Höhenschnittpunkt hat keine weitere Bedeutung.

Satz 3:

Die Seitenhalbierenden oder Schwerlinien des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Schwerpunkt des Dreiecks*. Sie teilen einander dabei im Verhältnis 1 : 2.

Beweis: Siehe Abschnitt 21. Beispiel 4. Die Bezeichnung *Schwerlinie* für die Seitenhalbierende kann man folgendermaßen begründen: Bild 89 deutet die Zerlegung eines

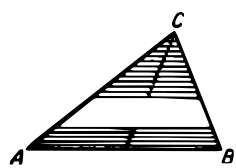


Bild 89

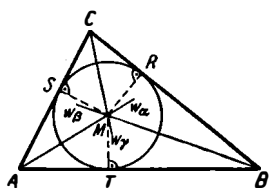


Bild 90

Dreiecks in viele sehr schmale Streifen an. Deren Mittelpunkte kann man bei genügend feiner Unterteilung als deren Schwerpunkte auffassen. Der geometrische Ort aller dieser Mittelpunkte ist die Schwerlinie.

Satz 4:

Die Winkelhalbierenden des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Mittelpunkt des Inkreises.*

Beweis: In Bild 90 schneiden sich w_α und w_β in M. Infolge der Ortseigenschaft der Winkelhalbierenden gilt:

$$\overline{MR} = \overline{MS}; \quad \text{ferner} \quad \overline{MS} = \overline{MT},$$

also $$\overline{MR} = \overline{MS} = \overline{MT}.$$

Also muß M auch auf w_γ liegen. Außerdem gilt:

$$\overline{MR} = \overline{MS} = \overline{MT} = \varrho = \text{Radius des Inkreises.}$$

AUFGABE

271. Konstruiere die vier charakteristischen Punkte des Dreiecks an verschiedenen, insbesondere auch an rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecken!
Welche Punkte liegen stets innerhalb des Dreiecks?
Welche Punkte können auf dem Umfang des Dreiecks liegen?
Welche Punkte können außerhalb des Dreiecks liegen?
Was für Dreiecke müssen in den beiden letzten Fällen vorliegen?

17. Das Viereck

17.1. Allgemeines Viereck

Definition:

Ein **Viereck** ist ein von vier Strecken, seinen **Seiten**, begrenztes Stück einer Ebene.

Vierecke, bei denen sich zwei Seiten kreuzen, sogenannte *verschränkte* Vierecke werden aus diesen Betrachtungen ausgeschlossen.

Definition:

Die Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte heißt **Diagonale.**

Satz:

Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.

Beweis: Das Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Aus deren Winkelsumme ergibt sich die des Vierecks. In Bild 91 ergibt sich

$$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180° \quad \text{und} \quad \gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°.$$

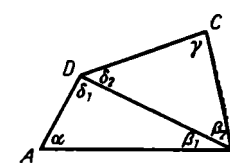


Bild 91

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° \quad \text{mit} \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta \quad \text{und} \quad \delta_1 + \delta_2 = \delta.$$

17.2. Spezielle Vierecke

Definition:

Ein Viereck mit *einem* Paar paralleler Seiten heißt **Trapez.** Die Mittelparallele dieser Seiten heißt *Mittellinie* und der Abstand der parallelen Seiten *Höhe* des Trapezes.

Satz 1:

Ein rechtwinkliges Trapez enthält stets zwei rechte Winkel.

Beweis: In Bild 92 ist

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = 180°$$ (gegenüberliegende Winkel an Parallelen)

Aus $\sphericalangle BAD = 90°$ folgt: $\sphericalangle CDA = 90°$ w. z. b. w.

Durch Umklappung eines rechtwinkligen Trapezes um die Seite, der beide rechte Winkel anliegen, erhält man als Gesamtfigur ein *gleichschenkliges* Trapez.

Satz 2:

Im gleichschenkligen Trapez sind beide Winkel an jeder der Parallelen gleich und beide Schenkel gleichlang.

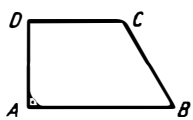


Bild 92

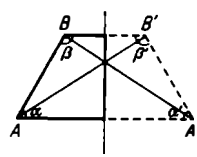


Bild 93

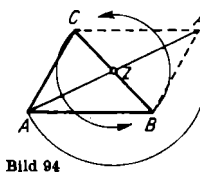


Bild 94

Beweis: Ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften der Figur in Bild 93.

Definition:

Ein Viereck mit *zwei* Paaren paralleler Seiten heißt **Parallelogramm.** Als *Höhen* des Parallelogrammes bezeichnet man die Abstände der parallelen Seiten.

Satz 3:

Dreht man ein Dreieck um die Mitte einer Seite als Symmetriezentrum um 180°, so erhält man ein Parallelogramm.

Beweis: In Bild 94 ist

$$\overline{CZ} = \overline{ZB}$$

und $$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BCA'$$

laut Voraussetzung.
Faßt man beide Winkel als Wechselwinkel auf, folgt aus der Umkehrung des Satzes von den Wechselwinkeln:

$$\overline{CA'} \parallel \overline{AB}$$

Analog beweist man die Parallelität von $\overline{CA}$ und $\overline{A'B}$.

Aus der zentralen Symmetrie des Parallelogrammes $ABA'C$ bezüglich Z in Bild 94 ergeben sich unmittelbar folgende

Sätze:

4. Gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm sind gleich.
5. Gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm sind gleich lang.
6. Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

Satz 5 ist zugleich die Umkehrung der Definition des Parallelogrammes. Auch von den Sätzen 4 und 6 sind die umgekehrten Formulierungen möglich:

Sätze:

4a) Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

6a) Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm.

Definition:

Ein Viereck mit *vier gleichlangen Seiten* heißt **Rhombus.**

Auf Grund der Definition des Parallelogrammes ist jeder Rhombus also gleichzeitig ein Parallelogramm. Daher behalten die Sätze, die für letzteres gelten, beim Rhombus ihre Gültigkeit. Darüber hinaus gilt:

Satz 7:

Die Diagonalen des Rhombus stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: Entsprechend der Definition des Rhombus müßte in Bild 94 gelten:

$$\overline{AB} = \overline{AC}.$$

Damit wäre das Dreieck BAC gleichschenklig mit $\overline{BC}$ als Basis und $\overline{AZ}$ als Symmetrieachse. Daraus folgt aber

$$\sphericalangle AZB = 90°, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 8:

Beide Diagonalen des Rhombus sind Symmetrieachsen.

Beweis: Klappt man ein gleichschenkliges Dreieck um seine Basis, so entsteht als Gesamtfigur ein Rhombus. Aus der Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks folgt die doppelte Symmetrie des Rhombus.
Eine Umkehrung des Satzes 7 ist nicht möglich, da ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen, auch ein Drachenviereck sein kann (siehe unten). Satz 8 hingegen läßt sich umkehren:

Satz 8a:

Jedes Viereck, dessen Diagonalen Symmetrieachsen sind, ist ein Rhombus.

Beweis: Aus der doppelten Symmetrie folgt, daß die vier Seiten gleichlang sein müssen.

Definition:

Ein Viereck mit vier gleichen Winkeln heißt **Rechteck.**

Nach dieser Definition sind erst recht gegenüberliegende Winkel gleich, so daß infolge des Satzes 4a jedes Rechteck gleichzeitig ein Parallelogramm ist und die dort genannten Sätze ihre Gültigkeit behalten. Ferner gilt

Satz 9:

Jeder Winkel des Rechtecks beträgt 90°.

Beweis: Er ergibt sich aus dem Satz von der Winkelsumme im Viereck und der Definition des Rechtecks.

Satz 10:

Die Mittelparallelen des Rechtecks sind Symmetrieachsen.

Beweis: In Bild 95 sind A' und D' symmetrische Bilder von A und D bezüglich m entsprechend der Ortseigenschaft der Mittelparallelen. Entsprechendes gilt für die Mittelparallele n.

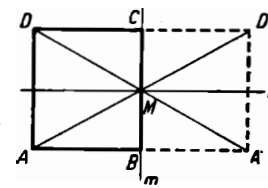


Bild 95

Satz 11:

Die Diagonalen des Rechtecks sind gleichlang.

Beweis: In Bild 95 ist $\overline{A'M}$ das symmetrische Bild von $\overline{AM}$, d.h.:

$$\overline{A'M} = \overline{AM}$$

Ebenso gilt $\overline{DM} = \overline{D'M}$.
Durch Addition beider Gleichungen erhält man:

$$\overline{A'D} = \overline{AD'} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Definition:

Ein Rechteck mit vier gleichen Seiten heißt **Quadrat.**

Folgende Definition des Quadrates würde das gleiche besagen:

Ein Rhombus mit vier gleichen Winkeln heißt Quadrat.

Alle Sätze, die für Rhombus und Rechteck gelten, behalten Gültigkeit.

Definition:

Ein Viereck, in dem *nur eine* Diagonale Symmetrieachse ist, heißt **Drachenviereck.**

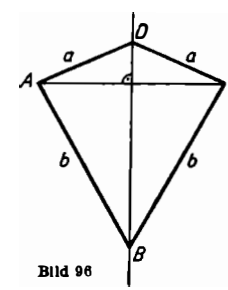


Bild 96

Satz 12:

Die Diagonale des Drachenvierecks, die nicht Symmetrieachse ist, wird durch letztere halbiert und steht auf ihr senkrecht. Das Drachenviereck wird durch zwei verschiedene Paare gleicher Seiten begrenzt (Bild 96).

Beweis: Er ergibt sich unmittelbar aus der in der Definition genannten Symmetrie.

18. Das Vieleck

18.1. Unregelmäßiges Vieleck

Definition:

Ein **n-Eck** ist ein von n Strecken, seinen **Seiten**, begrenztes Stück einer Ebene. Dabei gilt $n \geqq 3$, ganzzahlig.

Satz:

Die Winkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180°$.

Beweis: Er ergibt sich durch Zerlegung in Dreiecke, soll aber wegen der zahlreichen Fallunterscheidungen, die je nach Gestalt des n-Ecks erforderlich wären, nicht durchgeführt werden. (Vgl. 18.2.)

18.2. Regelmäßige Vielecke

Definition:

Ein regelmäßiges **n-Eck** ist ein von n *gleichen Strecken*, seinen Seiten, begrenztes Stück einer Ebene, wobei alle Eckpunkte auf einem Kreis, dem **Umkreis** des regelmäßigen n-Ecks, liegen. Wiederum gilt $n \geqq 3$, ganzzahlig.

Verbindet man den Mittelpunkt des Umkreises mit allen Eckpunkten des regelmäßigen n-Ecks, so wird dieses in n gleichschenklige Dreiecke zerlegt, die sogenannten *Bestimmungsdreiecke*. Deren Spitzen liegen im Mittelpunkt des Umkreises, ihre Schenkel sind gleich dessen Radius r und ihre Basen gleich der Seite s_n des regelmäßigen n-Ecks (Bild 97).
Aus dieser Zerlegung und der Winkelsumme im Dreieck folgen die

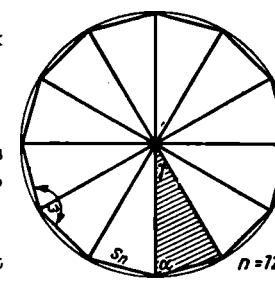


Bild 97

Sätze:

1. Im Bestimmungsdreieck des regelmäßigen n-Ecks beträgt der Winkel an der Spitze $\gamma = \frac{1}{n} \cdot 360°$ und der Basiswinkel $\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 90°$.
2. Jeder Winkel im regelmäßigen n-Eck beträgt $\omega = 2\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180°$.

Aus dem letzten Satz ergibt sich ein Beweis für den Satz von der Winkelsumme im regelmäßigen n-Eck:

$$\text{Winkelsumme} = n \cdot \omega = (n-2) \cdot 180°.$$

19. Kongruenz

19.1. Kongruenz im allgemeinen

Definition:

Zwei Figuren heißen kongruent, wenn sie vollständig zur Deckung gebracht werden können. Strecken oder Winkel, die dabei zur Deckung kommen, heißen **homologe Stücke.**
Das Zeichen $\cong$ bedeutet: „ist kongruent".

Die kongruente Abbildung ist die einfachste geometrische Verwandtschaft; sie läßt *Form* und *Größe*, genauer gesagt Winkel, Strecken und Flächeninhalt einer Figur unverändert. Insbesondere werden symmetrische Figuren durch die Symmetrieachse in zwei kongruente Teile zerlegt. Die entgegengesetzte Orientierung dieser Teile steht nicht im Widerspruch zur Definition der Kongruenz, da nichts darüber ausgesagt ist, ob die Deckung durch Drehung, Parallelverschiebung oder Umklappung zustande kommen soll.

Durch Umkehrung der Definition läßt sich folgender Satz formulieren:

Satz:

Sind zwei Figuren kongruent, dann stimmen sie in allen homologen Stücken überein.

19.2. Kongruenz von Dreiecken

Für Dreiecke genügt zur Kongruenz bereits Übereinstimmung in *drei unabhängigen* Stücken, wie aus den folgenden Sätzen hervorgeht. Diese stellen also *Mindestforderungen* dar.
Ebenso bedeutungsvoll sind die Umkehrungen dieser Sätze. Das heißt, man stellt Übereinstimmung in drei unabhängigen Stücken fest und folgert daraus die Kongruenz der Dreiecke.

(Abhängige Stücke des Dreiecks sind beispielsweise seine drei Winkel, da aus zwei gegebenen der dritte mit Hilfe der Winkelsumme zu berechnen ist.)

Kongruenzsätze:

Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in

1. drei Seiten oder
2. zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
3. a) einer Seite und zwei anliegenden Winkeln oder
   b) einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel oder
4. zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.

Eine Bestätigung dieser Sätze ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Dreieckskonstruktion, wenn man die oben genannten Stücke zugrunde legt. Das wird in den folgenden Beispielen gezeigt.

BEISPIELE

Der erste Kongruenzsatz wurde bereits bei der Lösung der 7. Grundkonstruktion im Abschnitt 15.3. angewendet. (Antragen eines Winkels an eine Gerade in einem Punkt.) Darauf wird in den folgenden Beispielen gelegentlich zurückgegriffen.

Aus den gegebenen Stücken ist ein Dreieck zu konstruieren!

1. *Gegeben sind die Seiten a, b und c.*

   Lösung: Um die Endpunkte einer Strecke, in Bild 98 der Strecke c, schlägt man Kreisbögen mit a und b als Radius. Deren Schnitt ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks.
   Die Länge der Dreieckseiten darf nicht willkürlich gegeben werden. Ist die Summe zweier Seiten kleiner als die dritte, schneiden sich die erforderlichen Kreisbögen nicht, mit welcher

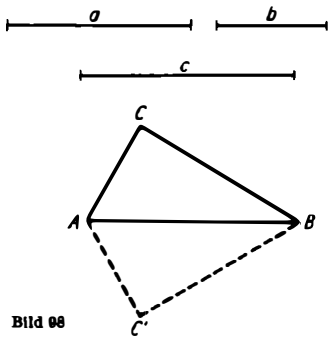


Bild 98

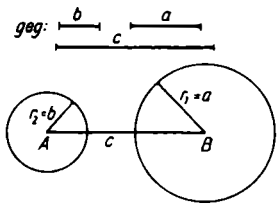


Bild 99

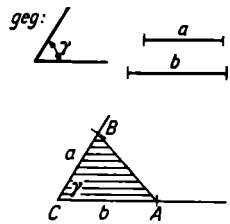


Bild 100

Seite man auch die Konstruktion beginnen mag (Bild 99). So kann man sich zeichnerisch von der Gültigkeit der Dreiecks-Ungleichung überzeugen. (Vgl. 16.1.)

2. *Gegeben die Seiten a und b und der Winkel γ.*

   Lösung: Auf den Schenkeln des Winkels γ trägt man vom Scheitelpunkt aus a und b ab. Die dadurch erhaltenen Punkte sind die fehlenden Eckpunkte des Dreiecks (Bild 100).

3. a) *Gegeben die Seite c und die Winkel α und β.*

   Lösung: In den Endpunkten A und B der Strecke c trägt man die Winkel α und β an. Der Schnittpunkt ihrer freien Schenkel ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks (Bild 101).

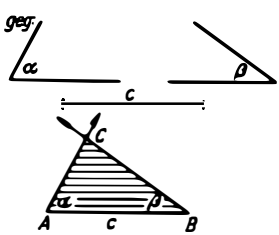


Bild 101

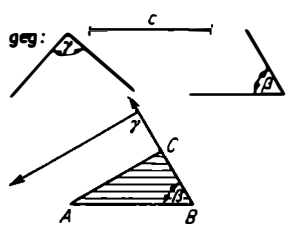


Bild 102

b) *Gegeben die Seite c und die Winkel β und γ.*

Lösung: Dieser Fall läßt sich auf den Fall 3a zurückführen, da sich der zweite der Seite c anliegende Winkel aus der Winkelsumme berechnen oder zeichnerisch ermitteln läßt. Für die ursprüngliche Aufgabenstellung jedoch ergibt sich folgende Lösung:

Im Endpunkt B der Strecke $a = \overline{AB}$ wird der Winkel β und in einem beliebigen Punkt seines freien Schenkels der Winkel γ angetragen. Die Parallele zum freien Schenkel des Winkels γ durch A vervollständigt das Dreieck (Bild 102).

4. *Gegeben die Seiten a und c und der Winkel α.*

Lösung: Die Konstruktion beginnt mit der dem gegebenen Winkel anliegenden Seite $c = \overline{AB}$. In A trägt man α an c an. Der Kreisbogen um B mit a schneidet den freien Schenkel von α in C, dem dritten Punkt des Dreiecks (Bild 103).

Dabei sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden (Bild 104):

a) $a > c$ *Eindeutige Lösung*, da der freie Schenkel durch den Kreisbogen nur einmal geschnitten wird.

b) $a = c$ Lösung *kann* noch *als eindeutig gelten*, da der zweite Schnittpunkt zwischen Kreisbogen und freiem Schenkel mit dem Scheitel des Winkels zusammenfällt und kein Dreieck hervorbringt.

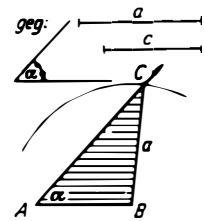


Bild 103

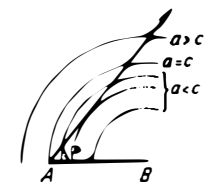


Bild 104

c) $a < c$ c_1) *Zwei Lösungen* infolge zweier Schnittpunkte zwischen Kreisbogen und freiem Schenkel.

c_2) *Doppellösung*, da der Kreisbogen den freien Schenkel berührt.

c_3) *Keine Lösung*, da der Kreisbogen den freien Schenkel meidet.

Eine genaue Festlegung, von welchen Voraussetzungen es abhängt, welcher der drei unter c) aufgeführten Fälle c_1), c_3) oder c_3) eintritt, ist nur mit Hilfsmitteln der Trigonometrie möglich, da hierbei auch die Größe des Winkels α eine Rolle spielt.

Die Fälle c_1) und c_3) rechtfertigen den Zusatz im vierten Kongruenzsatz: ... dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.

20. Ähnlichkeit

20.1. Ähnlichkeit im allgemeinen

Definition:

Zwei Figuren sind **ähnlich,** wenn sie in entsprechenden Winkeln übereinstimmen und wenn entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis stehen.
Das Zeichen $\sim$ bedeutet: „ähnlich".

Das „gleiche Verhältnis entsprechender Seiten" kann auf zweierlei Art geschrieben werden:

Entweder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \cdots$$

(Den Wert dieses Quotienten bezeichnet man als *Ähnlichkeitsverhältnis.*)

oder $a_1 : b_1 : c_1 : \ldots = a_2 : b_2 : c_2 : \ldots,$

wenn man mit $a_1, b_1, c_1, \ldots$ die Strecken der *einen* und mit $a_2, b_2, c_2, \ldots$ die Strecken der *anderen* Figur bezeichnet. Die Gleichwertigkeit beider Schreibarten folgt aus den Gesetzen über die Auflösung fortlaufender Proportionen.

Die Ähnlichkeit ist eine *allgemeinere geometrische Verwandtschaft* als die Kongruenz. Bei einer ähnlichen Abbildung bleibt die *Gestalt* unverändert, aber *nicht die Größe* bzw. der *Flächeninhalt.* Ähnliche Figuren können durch Vergrößern oder Verkleinern auseinander hervorgegangen sein. Dabei gibt das oben erwähnte Ähnlichkeitsverhältnis den Maßstab an.

Figuren, die untereinander grundsätzlich ähnlich sind, sind alle Kreise, alle gleichseitigen Dreiecke, alle Quadrate, überhaupt alle regelmäßigen Vielecke mit gleicher Seitenzahl.

20.2. Ähnlichkeit von Dreiecken

Für die Ähnlichkeit von Dreiecken gelten Gesetze, die denen über Kongruenz völlig entsprechen. Auch sie stellen *Mindestforderungen* dar.

Ähnlichkeitssätze:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in

1. dem Verhältnis dreier Seiten oder
2. dem Verhältnis zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder
3. zwei Winkeln oder
4. dem Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.

Auch von diesen Sätzen gelten die Umkehrungen. Für den Nachweis der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ist die Umkehrung des dritten Ähnlichkeitssatzes besonders wichtig. Sie lautet folgendermaßen:

Satz:

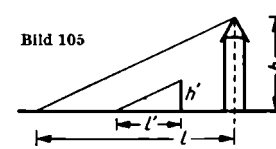
Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich.

Beweis: Er ergibt sich aus dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck und der in der Definition der Ähnlichkeit genannten Übereinstimmung zweier Figuren in entsprechenden Winkeln.

BEISPIELE

1. *Aus der Schattenlänge l eines Turmes soll dessen Höhe h bestimmt werden. Eine senkrecht danebenstehende Stange der Höhe h' wirft einen Schatten der Länge l' (Bild 105).*

Bild 105



Lösung: Aus der Ähnlichkeit beider Dreiecke folgt

$$\frac{h}{l} = \frac{h'}{l'} \qquad \text{bzw.} \qquad h = \frac{l \cdot h'}{l'}.$$

2. *Die Papierformate der Reihe* DIN A *sind so bemessen, daß jedes Format aus dem vorhergehenden durch Halbieren entsteht und diesem zugleich ähnlich ist. Man berechne das Verhältnis der langen zur kurzen Seite dieser Rechtecke!* (Vgl. Abschnitt 9.2.; Beispiel 21)

Lösung: Die lange Seite sei a.

$$a : b = b : \frac{a}{2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$\underline{\underline{a : b = \sqrt{2} : 1}}$$

3. *Mit einer Kamera der Brennweite f wird aus der Höhe h ein Luftbild aufgenommen. Die Fotoplatte hat die Länge a und die Breite b. Wie lang sind die Seiten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ des aufgenommenen Flächenstückes und wie groß ist der Abbildungsmaßstab?*
(Die Fotoplatte liegt parallel zur eben anzunehmenden Erdoberfläche.)

Lösung: Aus Bild 106 ergibt sich:

Maßstab: $a : \bar{a} = b : \bar{b} = f : h$

Maße des Flächenstückes:

$$\underline{\underline{\bar{a} = a \frac{h}{f}}}$$

$$\underline{\underline{\bar{b} = b \frac{h}{f}}}$$

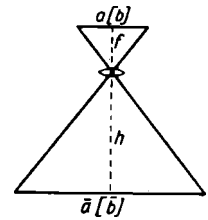


Bild 106

21. Strahlensätze

Beim Schnitt eines Strahlenbüschels mit einer Schar paralleler Geraden ergeben sich, wie man mit Hilfe der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke leicht nachprüfen kann, folgende Sätze:

Satz 1:

Entsprechende Abschnitte auf den Strahlen stehen im gleichen Verhältnis.

So ist z. B. in Bild 107

$$\overline{SA} : \overline{SB} : \overline{SC} = \overline{SA_1} : \overline{SB_1} : \overline{SC_1} = \overline{SA_2} : \overline{SB_2} : \overline{SC_2}$$

und auch beispielsweise

$$\overline{SA_1} : \overline{SB_1} = \overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2}.$$

Satz 2:

Entsprechende Abschnitte auf den Parallelen stehen im gleichen Verhältnis wie die zugehörigen, vom Scheitel aus zu messenden Abschnitte auf den Strahlen.

So ist z. B.

$$\overline{CB} : \overline{C_1B_1} : \overline{C_2B_2} = \overline{SC} : \overline{SC_1} : \overline{SC_2} = \overline{SB} : \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

oder $$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA} : \overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB} : \overline{SB_1} : \overline{SB_2}.$$

Zu beachten ist, daß beim zweiten Strahlensatz die Abschnitte auf den Strahlen *stets vom Scheitelpunkt aus* zu rechnen sind!

Satz 3:

Entsprechende Abschnitte auf den Parallelen stehen im gleichen Verhältnis.

So ist $$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2}.$$

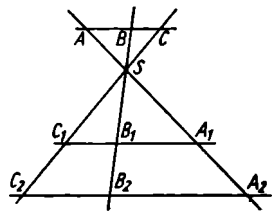


Bild 107

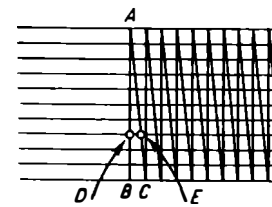


Bild 108

Vom ersten Satz gilt auch die Umkehrung. Dabei folgert man aus den gleichen Verhältnissen entsprechender Abschnitte die Parallelität innerhalb der Geradenschar.

BEISPIELE

1. *Der Transversalmaßstab gestattet, Bruchteile einer vorgegebenen Einheit, in Bild 108 Zehntel, abzulesen.*

   Lösung: $\overline{AB} = 10$ Einheiten
   $\overline{BC} = 1$ Einheit

   Die Länge der parallelen Strecken zwischen den Strahlen AB und AC betragen von A aus begonnen der Reihe nach

   $$\frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10} \cdots \frac{9}{10},\ \frac{10}{10}$$ der Einheit.

   Nach dem zweiten Strahlensatz gilt beispielsweise

   $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$ in Zahlen: $\frac{1}{10} = \frac{x}{7}$, woraus sich

   $$\underline{\underline{x = \frac{7}{10}}}$$ ergibt.

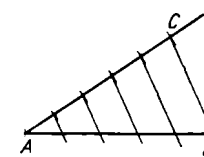


Bild 109

2. *Grundkonstruktion: Eine Strecke AB ist in gleiche Teile zu teilen! (In Bild 109 ist $n = 5$.)*

   Lösung: Vom Endpunkt A der Strecke AB aus zieht man einen beliebigen Strahl und trägt auf ihm von A aus n gleiche Teile ab. Der Endpunkt des letzten Teiles ist C. Parallelen zu $\overline{BC}$ durch die übrigen Teilungspunkte des Strahles ergeben auf $\overline{AB}$ die geforderte Teilung.

3. *Zu den Größen a, b und c ist die vierte Proportionale zu konstruieren.*

Lösung: Die Konstruktion erfolgt nach dem ersten Strahlensatz. Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels werden vom Scheitelpunkt S aus die Strecken a, b und c nach Bild 110 abgetragen, daß sich deren Endpunkte A, B und C ergeben. Eine Parallele zu $\overline{AC}$ durch B ergibt X. $\overline{SX}$ stellt die gesuchte Größe dar.

$$\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SX}$$

4. *Der Satz aus Abschnitt 16.3. soll bewiesen werden! (Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und teilen einander dabei im Verhältnis 1 : 2.)*

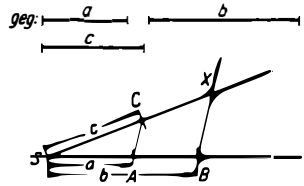


Bild 110

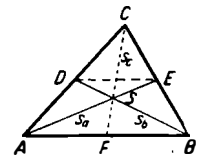


Bild 111

Beweis: In Bild 111 halbieren die Punkte D, E und F die zugehörigen Dreieckseiten. Daraus folgt:

$$\overline{DE} \parallel \overline{AB} \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}; \quad \triangle ABS \sim \triangle EDS$$

$$\overline{AB} : \overline{ED} = 2 : 1 = \overline{BS} : \overline{DS} = \overline{AS} : \overline{ES}.$$

Damit ist der Satz für $s_a = \overline{AE}$ und für $s_b = \overline{BD}$ bewiesen. Der Beweis für die Kombination s_a mit $s_c = \overline{CF}$ oder s_b mit s_c würde ganz analog verlaufen. Dann erst ist der Beweis vollständig erbracht.

Definition:

Zwei Figuren befinden sich in **Ähnlichkeitslage,** wenn sie einander ähnlich sind und wenn entsprechende Strecken beider Figuren parallel liegen.

Satz 4:

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Figuren, die sich in Ähnlichkeitslage befinden, schneiden einander in einem Punkt, dem **Ähnlichkeitspunkt** beider Figuren.

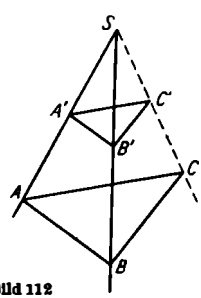


Bild 112

Beweis: Die Verbindungsgeraden AA' und BB' in Bild 112 schneiden einander in S. Es gilt nach dem zweiten Strahlensatz

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BS} : \overline{B'S}$$

und infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

Aus der Parallelität von $\overline{BC}$ und $\overline{B'C'}$, aus der Verhältnisgleichheit von $\overline{BC} : \overline{B'C'}$ und $\overline{BS} : \overline{B'S}$ und aus der Umkehrung des zweiten Strahlensatzes folgt, daß von S aus ein weiterer Strahl durch C und C' gelegt werden kann.

BEISPIEL

5. Bild 113 zeigt das Schema eines *Pantographen* oder *Storchschnabels*. Das Gerät besteht aus den vier starren Stäben $\overline{FB}$, $\overline{BS}$, $\overline{AZ}$ und $\overline{ZC}$, die gelenkig miteinander verbunden sind. Es dient zum Verkleinern oder Vergrößern von Zeichnungen.
Bild und Original befinden sich dabei in Ähnlichkeitslage.
$\overline{FB}$ und $\overline{BS}$ werden durch A bzw. C im gleichen Verhältnis geteilt, so daß gilt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{BS}} = \frac{m}{n} \qquad \left(\text{im Bild } \frac{4}{5}\right).$$

Z ergänzt das Dreieck ABC zum Parallelogramm. Es ergibt sich:

$\triangle SZC \sim \triangle ZFA \sim \triangle SFB$.

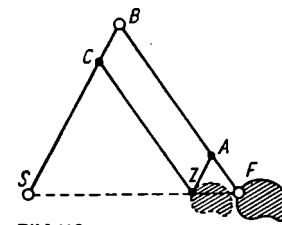


Bild 113

Demnach muß Z auf der Strecke $\overline{FS}$ liegen und sie so teilen, daß auch hier das gleiche Teilverhältnis gilt wie oben:

$$\frac{\overline{ZS}}{\overline{FS}} = \frac{m}{n}$$

Wirkungsweise: Punkt S (als Ähnlichkeitspunkt) bleibt fest. Fährt man mit F längs des Originales, beschreibt Z ein verkleinertes Bild, dessen Strecken sich zu denen des Originales wie $m : n = 4 : 5$ verhalten.
Vertauscht man Z und F, so entsteht ein vergrößertes Bild.

AUFGABEN

272. Aus der Proportion $a : b = b : x$ ist x für $a = 55$ mm und $b = 32$ mm zeichnerisch zu ermitteln.

273. Die Steigung eines Schienenstranges ist auf einer Länge von 1,45 km mit 1 : 36 angegeben. Wieviel Meter höher liegt der Endpunkt dieser Strecke gegenüber ihrem Anfangspunkt? Nenne die Höhendifferenz h.

274. Der im Bild 114 dargestellte Taster dient zur Dickenmessung dünner Werkstücke. Wie lang muß sein Schenkel a gemacht werden, damit bei einer Meßschenkellänge von $b = 3$ cm die Strecke $h = 6$ cm wird? Die Entfernung der Meßspitzen soll dann $d = 6$ mm betragen.

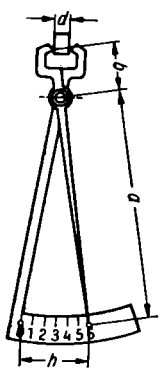


Bild 114

275. Berechne die Strecken b und c des im Bild 115 dargestellten Dachbinders für $h = 3{,}5$ m und $a = 2{,}8$ m.

276. Die durch einen Fluß nicht direkt meßbare Strecke AC (Bild 116) ist zu ermitteln. Zu diesem Zweck wird das Dreieck AB_1C_1 mit den bekannten Seiten $AB_1 = 15$ m und $AC_1 = 9$ m abgesteckt und die Strecke $AB = 148$ m gemessen.

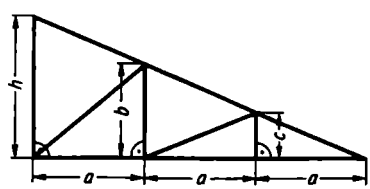


Bild 115

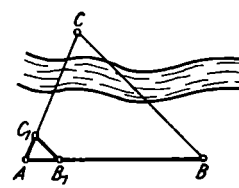


Bild 116

22. Sätze vom rechtwinkligen Dreieck

Definition:

Unter der „**Höhe** des rechtwinkligen Dreiecks" versteht man die auf die Hypotenuse bezogene Höhe. Sie teilt die Hypotenuse in die beiden **Hypotenusenabschnitte.**

Kathetensatz: (I. Satz des EUKLID)[1])

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt, gebildet aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Beweis: Aus der Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke mit dem Gesamtdreieck in Bild 117 folgt

$$q : b = b : c \quad \text{und} \quad p : a = a : c,$$

$$\boxed{b^2 = cq} \qquad \boxed{a^2 = cp} \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{74}$$

Höhensatz: (II. Satz des EUKLID)

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

Beweis: In Bild 117 sind alle vorkommenden Dreiecke ähnlich, da sie in jeweils zwei Winkeln übereinstimmen.

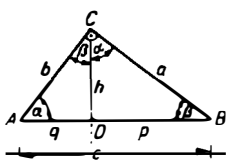


Bild 117

Aus der Ähnlichkeit beider Teildreiecke folgt

$$h : p = q : h,$$

$$\boxed{h^2 = pq} \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{75}$$

Satz des PYTHAGORAS:[2])

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

[1]) EUKLID (365 bis 300 v. u. Z.) griechischer Mathematiker.
[2]) PYTHAGORAS (um 500 v. u. Z.) griechischer Mathematiker.

Beweis: Durch Addition der beiden Gleichungen (74) erhält man

$$a^2 + b^2 = cp + cq\,,$$

$$a^2 + b^2 = c(p + q)\,,$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}\,. \tag{76}$$

Das Produkt zweier Strecken kann auch als Fläche des von ihnen bestimmten Rechtecks aufgefaßt werden, bzw. das Quadrat einer Seite als Fläche des von ihr bestimmten Quadrates.

BEISPIELE

1. *Die Diagonale eines Rechteckes mit den Seiten a und b ist zu berechnen!*

Lösung: (Bild 118)

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$\underline{\underline{d = \sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Ist $a = b$, so daß ein Quadrat vorliegt, ergibt sich:

$$\underline{\underline{d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}}}$$

2. *Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist zu berechnen!*

Lösung: (Bild 119)

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\underline{\underline{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}}$$

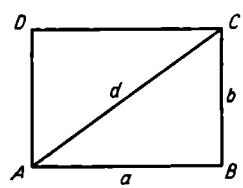


Bild 118

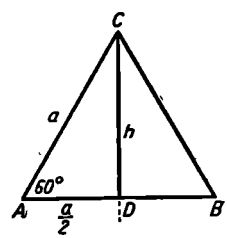


Bild 119

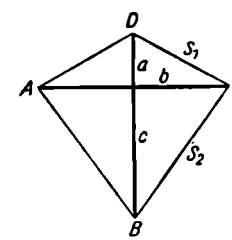


Bild 120

3. *Der Umfang des in Bild 120 dargestellten Drachenvierecks ist zu berechnen!*

Lösung: $U = 2s_1 + 2s_2$

$$s_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad s_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$U = 2\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\right)$$

Zahlenbeispiel:

$$a = 6\,\text{m}, \qquad b = 8\,\text{m}, \qquad c = 15\,\text{m}$$

$$U = 2\,(\sqrt{36\,\text{m}^2 + 64\,\text{m}^2} + \sqrt{64\,\text{m}^2 + 225\,\text{m}^2}) =$$

$$= 2(\ 10\,\text{m} \qquad + \ 17\,\text{m} \qquad) = \underline{\underline{54\,\text{m}}}$$

4. *Eine Leiter der Länge l wird in der Entfernung d von einer senkrechten Wand aufgestellt. In welcher Höhe h berührt die Leiter die Wand? (Bild 121)*

Lösung: $h^2 = l^2 - d^2$

Ausdrücke dieser Art lassen sich nach der dritten binomischen Formel sehr zweckmäßig in Produktgestalt umformen, so daß sie sich bequem logarithmisch oder mittels Rechenstabs berechnen lassen.

$$h^2 = (l + d)(l - d)$$

$$h = \sqrt{(l + d)(l - d)}$$

Zahlenbeispiel:

$$l = 6\,\text{m}, \quad d = 1{,}3\,\text{m}$$

$$h = \sqrt{7{,}3\,\text{m} \cdot 4{,}7\,\text{m}}$$

$$\approx \sqrt{34{,}3\,\text{m}^2} \approx \underline{\underline{5{,}9\,\text{m}}}$$

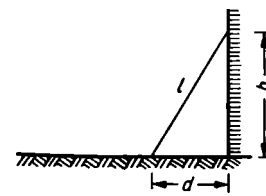


Bild 121

5. *Einem Quadrat mit der Seite a ist ein gleichseitiges Dreieck nach der in Bild 122 angegebenen Weise einbeschrieben. Man berechne die Seite b des Dreiecks in Abhängigkeit von a!*

Lösung: Im Dreieck CDE gilt mit $\overline{CD} = \overline{DE} = x$:

$$2x^2 = b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

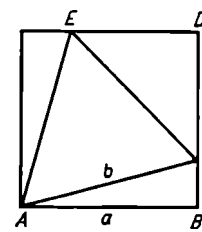


Bild 122

Im Dreieck ABC gilt:

$$a^2 + (a - x)^2 = b^2$$

und nach Ersetzen von x:

$$2a^2 - ab\sqrt{2} = \frac{1}{2}b^2$$

$$b^2 + 2\sqrt{2}ab - 4a^2 = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung in b lauten

$$b_1 = a(-\sqrt{2} + \sqrt{6}) \qquad \text{und} \qquad b_2 = a(-\sqrt{2} - \sqrt{6}).$$

Die zweite Lösung ist negativ und scheidet aus, da sie in diesem Zusammenhang (als Länge einer Strecke) gegenstandslos ist. Somit verbleibt als Ergebnis:

$$\underline{\underline{b = a\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 1{,}035a.}}$$

6. *Man berechne die in dem gotischen Spitzbogen in Bild 123 vorkommenden Kreisradien in Abhängigkeit von der Basislänge b!*

Lösung: $\underline{\underline{r_1 = b}}$ und $\underline{\underline{r_2 = \frac{1}{4} b}}$

liest man sofort aus der Zeichnung ab.

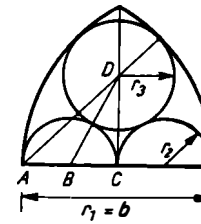


Bild 123

Im Dreieck ACD gilt:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2.$$

Im Dreieck BCD gilt:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2.$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten erhält man:

$$\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2$$

$$(b - r_3)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{4} + r_3\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2$$

$$b^2 - 2br_3 - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2} br_3$$

$$\underline{\underline{r_3 = \frac{3}{10} b}}.$$

AUFGABEN

277. Wie groß ist die eine Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die andere Kathete b und die Hypotenuse c folgende Abmessungen haben:

a) $b = 11$ cm, $c = 12{,}4$ cm b) $b = 7{,}8$ cm, $c = 9{,}8$ cm

c) $b = 4{,}53$ dm, $c = 6{,}78$ dm d) $b = 46{,}3$ m, $c = 58{,}1$ m

e) $b = 0{,}832$ km, $c = 0{,}986$ km f) $b = 45{,}79$ mm, $c = 74{,}35$ mm

278. Wie groß ist die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die beiden Katheten a und b folgende Abmessungen haben:

a) $a = 7{,}3$ cm, $b = 2{,}1$ cm b) $a = 85{,}3$ mm, $b = 112{,}2$ mm

c) $a = 0{,}85$ m, $b = 0{,}32$ m d) $a = 4{,}321$ km, $b = 7{,}845$ km

e) $a = 24{,}1$ dm, $b = 12{,}4$ dm f) $a = 0{,}85$ m, $b = 0{,}76$ m

279. Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck (Bild 124) ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite b einbeschrieben. Drücke b durch die Katheten a des rechtwinkligen Dreiecks aus.

280. Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a (Bild 125) ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite b einbeschrieben. Drücke b durch a aus.

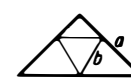


Bild 124

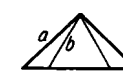


Bild 125

281. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen im Verhältnis $a : b = m : n = 3 : 4$. Wie groß sind seine Katheten a und b und sein Flächeninhalt A, wenn für die Hypotenuse $c = 8$ cm angegeben ist?

282. In welchem Verhältnis stehen die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks, das einem gleichseitigen Dreieck flächengleich ist? Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks sei $c = 8$ cm und die Seite des gleichseitigen Dreiecks $d = 6$ cm.

283. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypotenusenabschnitte $q = 4$ cm und $p = 5$ cm bekannt. Berechne die Katheten a und b und den Flächeninhalt A.

284. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Höhe $h = 5$ cm und der Hypotenusenabschnitt $q = 3$ cm gegeben. Wie groß sind die Seiten a, b und c des Dreiecks und sein Flächeninhalt A?

285. Wie groß sind der Inkreisradius r_i und der Ankreisradius r_a eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a = 6$ cm und $b = 8$ cm?

286. Berechne die Seite x des einem rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Quadrates (Bild 126). Drücke x

a) durch die Katheten a und b,

b) durch die Hypotenusenabschnitte u und v aus.

287. Drücke r_2 im Bild 127 durch r_1 aus.

288. Drücke die Stücke h_1, h_2 und r_2 im Bild 128 durch r_1 aus.

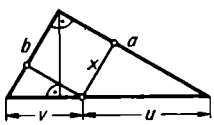


Bild 126

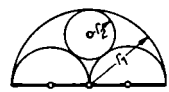


Bild 127

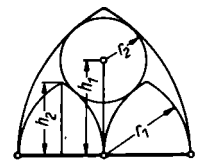


Bild 128

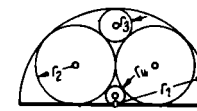


Bild 129

289. Drücke r_2, r_3 und r_4 im Bild 129 durch r_1 aus.

290. Drücke r_2 und r_3 im Bild 130 durch r_1 aus.

291. Von dem im Bild 131 dargestellten Gefäß ist die Höhe h zu bestimmen. Bekannt sind $g_1 = 6$ dm, $g_2 = 8$ dm und $a = 5$ dm.

292. Wie groß ist die Höhe h der im Bild 132 gezeigten Leiter, wenn die Entfernung zwischen ihren Fußpunkten $s = 1{,}5$ m und ihre Schenkellänge $l = 5$ m beträgt?

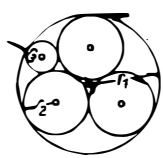


Bild 130

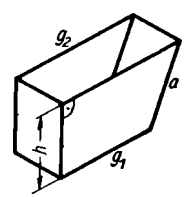


Bild 131

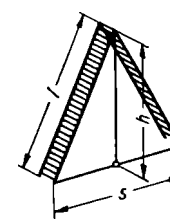


Bild 132

293. Berechne die Stücke b, c und d des im Bild 133 gezeigten Dachbinders aus den Stücken $a = 12$ m und $h = 4$ m.

294. Die Kräfte $F_1 = 5{,}34$ kp und $F_2 = 3{,}81$ kp haben gemeinsamen Angriffspunkt und schließen einen Rechten ein. Berechne ihre Resultierende R.

295. Berechne die Kantenlänge k einer Sechskantschraube mit der Schlüsselweite $s = 17$ mm.

296. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre nach Bild 134 angefertigt werden. Berechne h für die dort eingetragenen Maße.

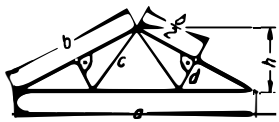


Bild 133

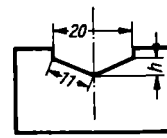


Bild 134

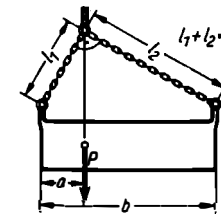


Bild 135

297. Ein Kasten mit einseitiger Schwerpunktlage hängt an einer gespreizten Kette (Bild 135). Welche Länge l hat die einen Rechten einschließende Kette, wenn die Kastenlänge (Hakenabstand) $b = 2{,}68$ m und der Schwerpunktabstand $a = 0{,}76$ m betragen?

298. Von dem im Bild 136 dargestellten Drehkran sind die Längen der Träger mit $a = 4{,}8$ m, $b = 4{,}1$ m, $g = 5{,}9$ m und $h = 2{,}4$ m gemessen worden. Berechne die Längen der Träger c, d, e, f, i.

299. Von dem im Bild 137 gezeigten Kegelradpaar sind der Radius $r_1 = 68$ mm und die Kegelerzeugende $MC = 76$ mm bekannt. Berechne r_2 und die Radien e_1 und e_2 der Ergänzungskegel.

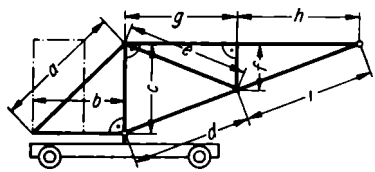


Bild 136

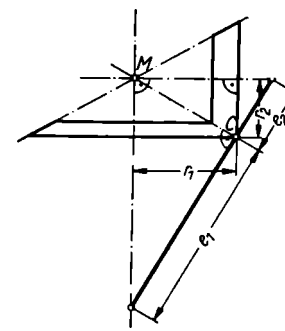


Bild 137

300. In einer Blechrinne, deren Querschnitt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck von der Höhe $h = 64$ cm ist, fließt Wasser mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}2$ m/s. Welche Wassermenge Q liefert die Rinne stündlich bei einem Wasserstand von $^2/_3\,h$?

301. Berechne den Anschnitt a des im Bild 138 dargestellten Scheibenfräsers nach den dort eingetragenen Maßen.

302. Berechne die Normalkräfte F_1, mit denen ein Keilriemen auf die Flanken der Rillen einer Keilriemenscheibe drückt (Bild 139).

303. Wie groß ist die Eindruckstiefe h einer Kugel, die nach Bild 140 den Eindruckkreis $d_1 = 132$ mm erzeugt und selbst den Durchmesser $d = 154$ mm hat?

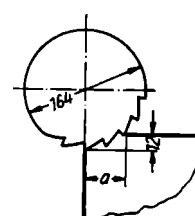


Bild 138

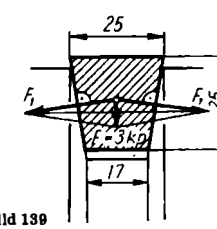


Bild 139

304. Von einem schiefwinkligen Dreieck sind die Seiten a, b und c bekannt. Drücke die durch h_c auf c gebildeten Abschnitte q und p durch die gegebenen Stücke aus.

305. Drücke die Seite b eines schiefwinklig-spitzwinkligen Dreiecks durch die beiden anderen Seiten a und c und die Projektion q der Seite b auf die Seite c aus.

306. Ein Blech, dessen Abmessungen aus Bild 141 hervorgehen, soll beiderseits gestrichen werden. Berechne die Farbmenge m, wenn erfahrungsgemäß mit einem Verbrauch von 0,175 kg/m² gerechnet wird.

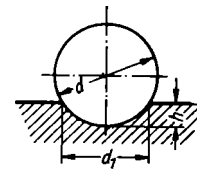


Bild 140

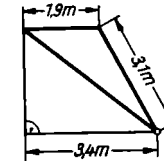


Bild 141

23. Strecken und Winkel am Kreis

23.1. Kreis und Gerade

Kreis und Gerade können *drei* verschiedene Lagen zueinander haben: (Bild 142)

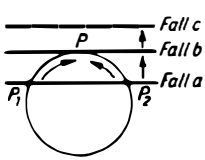


Bild 142

Fall a): Die Gerade *schneidet* den Kreis, Gerade und Kreis haben *zwei* Punkte, P_1 und P_2, gemeinsam.

Durch Parallelverschiebung der Geraden wandern P_1 und P_2 aufeinander zu, bis sie sich im Grenzfall zu Punkt P vereinigen. Diese Grenzlage der Geraden bildet Fall b).

Fall b): Die Gerade *berührt* den Kreis, Kreis und Gerade haben nur noch *einen* Punkt, nämlich P, gemeinsam.

Durch weitere Parallelverschiebung der Geraden erhält man Fall c).

Fall c): Die Gerade *meidet* den Kreis, beide haben *keinen* Punkt mehr gemeinsam.

Definition:

Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heißt **Sekante.**
Die Strecke auf einer Sekante, die durch die beiden Schnittpunkte mit dem Kreis begrenzt wird, heißt **Sehne.**
Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, heißt **Zentrale.**
Eine Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises ist dessen **Durchmesser.**
Eine Gerade, die den Kreis berührt, heißt **Tangente.**
Die Strecke, die den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Berührungspunkt einer Tangente verbindet, heißt deren **Berührungsradius.**

Satz 1:

Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten einer jeden Sehne.

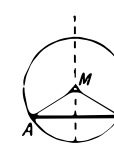


Bild 143

Beweis: Das Dreieck ABM in Bild 143 ist gleichschenklig, da

$$\overline{AM} = \overline{BM} = r .$$

Aus den Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks folgt der Satz.

Satz 2:

Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf der Senkrechten, die man auf jeder Tangente in ihrem Berührungspunkt errichten kann.

Oder in anderer Formulierung:

Tangente und Berührungsradius stehen aufeinander senkrecht.

Beweis: Man verlängert die Sehne AB zur Sekante und verschiebt diese parallel bis zur Grenzlage als Tangente (Bild 144).

Von einem Punkt S außerhalb des Kreises kann man zwei Tangenten an den Kreis legen. Diese berühren den Kreis je in einem Punkt, T_1 und T_2. Die Entfernungen ST_1 und ST_2 nennt man die Länge der beiden Tangenten.

Satz 3:

Die beiden, von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten sind gleich lang. Der Kreismittelpunkt liegt auf einer der beiden Winkelhalbierenden der Tangenten.

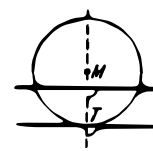


Bild 144

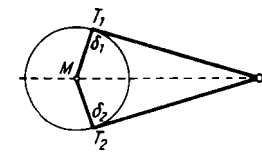


Bild 145

Beweis: (Bild 145). Die beiden Dreiecke SMT_1 und SMT_2 sind kongruent, da sie in $\overline{SM}$ übereinstimmen. Ferner gilt:

$$\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r \quad \text{und} \quad \delta_1 = \delta_2 = 90°.$$

Aus der somit bewiesenen Kongruenz ergeben sich beide Behauptungen des Satzes.

BEISPIEL

Der Mittelpunkt eines Kreises soll rekonstruiert werden!

Lösung: (Bild 146). Man zeichne in den Kreis zwei verschiedene, nicht parallele Sehnen und errichte auf ihnen die Mittelsenkrechten. Deren Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt. (Die Sehnen möchten zweckmäßig einen Winkel von etwa 90° bilden, damit sich ein günstiger Schnitt ergibt.)

Praktische Methode: In der Praxis bedient man sich zur Bestimmung des Mittelpunktes von Kreisscheiben und ähnlichem eines *Zentriergerätes* (Bild 147). Es besteht aus zwei Anlegekanten, die nicht unbedingt einen rechten Winkel zu bilden brauchen, und einer Schablone, die die Winkelhalbierende bildet. Längs dieser Kante reißt man zweimal an, wobei die Kreisscheibe verschieden eingelegt werden muß. Als Schnitt beider Geraden ergibt sich der gesuchte Punkt.

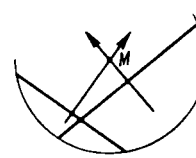


Bild 146

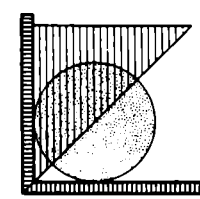


Bild 147

Zeichnerisch läßt sich dieses Verfahren nicht realisieren, da man zur geometrisch einwandfreien Konstruktion der Tangenten eben den Mittelpunkt des Kreises braucht. (Vgl. Abschnitt 23.2., Nachsatz zu Beispiel 3.)

23.2. Winkel am Kreis

Definition:

Verbindet man die Endpunkte A und B eines Kreisbogens mit dem Mittelpunkt M des zugehörigen Kreises, dann bilden $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ die Schenkel des zum Bogen AB gehörigen **Zentriwinkels.**
Verbindet man die Punkte A und B mit einem beliebigen Punkt P auf dem Kreis, so ergibt sich in P der zum Bogen AB gehörige **Peripheriewinkel.**

Wenn man beachtet, daß M und P auf *ein und derselben Seite* der Sehne liegen, gilt der folgende Satz 1.

Satz 1:

Der Zentriwinkel über einem Bogen ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

Beweis: Aus Bild 148 ergibt sich:

$\alpha_1 = \gamma_1$ und $\gamma_2 = \beta_1$ als Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken;

$\varepsilon_1 = 2\gamma_1$ und $\varepsilon_2 = 2\gamma_2$ als Außenwinkel an Dreiecken.

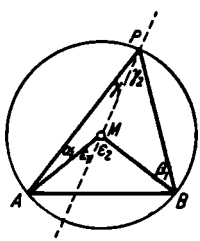


Bild 148

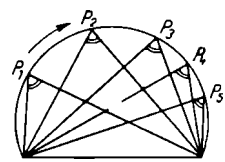


Bild 149

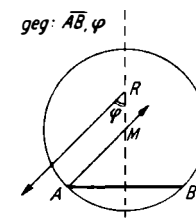


Bild 150

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen folgt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2(\gamma_1 + \gamma_2) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es läßt sich zeigen, daß die Gültigkeit des letzten Satzes unabhängig ist von der Lage des Punktes P auf dem Kreis. (Vgl. dazu Aufgabe 307!) Deshalb ändert sich bei Verschiebung von P längs des Kreises der Peripheriewinkel nicht. Daraus folgt der Satz 2.

Satz 2:

Der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller gleichen Winkel über einer Strecke ist der Kreisbogen, der die Strecke zur Sehne hat und den Winkel als Peripheriewinkel faßt (Bild 149).

BEISPIELE

1. ***Man konstruiere den Kreisbogen, den sogenannten Ortskreis, der zu einer gegebenen Sehne AB gehört und den gegebenen Winkel φ als Peripheriewinkel enthält!***

   Lösung: Zur Sehne AB konstruiert man die Mittelsenkrechte. In einem beliebigen Punkt R trägt man φ an und zieht zu seinem freien Schenkel durch A eine Parallele. Deren Schnittpunkt M mit der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises (Bild 150).

2. *Folgendes Problem bezeichnet man in der Vermessungstechnik als Rückwärtseinschneiden:* Von einem festzulegenden Punkt P wird der Winkel α gemessen, unter dem eine der Größe und der Lage nach auf der Karte bekannte Strecke $\overline{AB}$ erscheint. Da P jetzt überall auf dem Ortskreis liegen kann, ist der Punkt dadurch noch nicht bestimmt. Man muß also noch eine zweite, der Lage nach bekannte Strecke BC anvisieren (Blickwinkel β) und erhält den gesuchten Punkt als Schnittpunkt der beiden sich ergebenden Ortskreise (Bild 151).

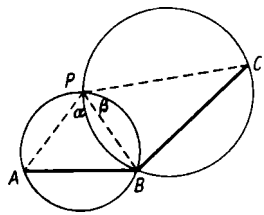


Bild 151

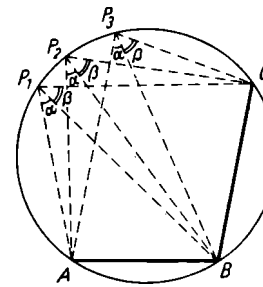


Bild 152

Das Verfahren versagt allerdings, wenn der dritte Punkt C bereits auf dem zuerst erhaltenen Ortskreis liegt, d.h., dann decken sich beide Ortskreise. Diesen Kreis, auf dem A, B, C und P liegen, nennt man *„gefährlichen Kreis"* (Bild 152).

Satz des THALES[1]):

Der Peripheriewinkel im Halbkreis beträgt 90°.

Beweis: Der Zentriwinkel im Halbkreis beträgt 180° (Bild 153). Der Satz ergibt sich somit als Sonderfall des Satzes vom Peripherie- und Zentriwinkel.

BEISPIEL 8

Vom Punkt P außerhalb des Kreises sind die Tangenten an den Kreis zu legen!

Lösung: (Bild 154). Da Tangente und Berührungsradius senkrecht aufeinanderstehen, müssen beide Berührungspunkte T_1 und T_2 und die Punkte M und P auf dem Thaleskreis liegen. Dessen Mittelpunkt N ist der Halbierungspunkt der Strecke MP. Der Thaleskreis durch M und P schneidet den gegebenen Kreis in T_1 und T_2. $\overline{PT_1}$ und $\overline{PT_2}$ sind die gesuchten Tangenten.

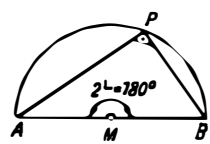


Bild 153

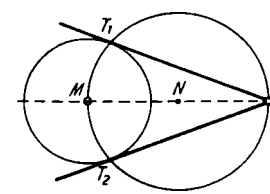


Bild 154

Das bloße „Dranlegen" der Tangenten ist aus zweierlei Gründen ungenau: Erstens erhält man die Berührungspunkte ungenau, so daß die Länge der Tangenten nicht sicher bestimmt werden kann. Zweitens konstruiert man eine Gerade exakt als Verbindung zweier Punkte oder mit Hilfe eines Punktes und vorgegebener Richtung.

[1]) THALES von Milet (um 624 bis 547 v. u. Z.); griechischer Mathematiker.

23.3. Ähnlichkeit am Kreis

Sehnen- und Sekantensatz:

Schneiden sich zwei Sehnen oder Sekanten eines Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte auf der einen gleich dem Produkt der Abschnitte auf der anderen. Dabei sind sämtliche Abschnitte vom Schnittpunkt der Sehnen bzw. dem der Sekanten aus zu messen.

Beweis: In Bild 155 bzw. 156 gilt:

Da $\beta = \gamma$ als Peripheriewinkel über dem Bogen AD und $\sphericalangle CSA = \sphericalangle BSD$, teils als Scheitelwinkel, ist $\triangle SAC \sim \triangle SDB$.
Daraus folgt

$$\overline{AS} : \overline{DS} = \overline{SC} : \overline{SB}$$

oder $\overline{AS} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{DS}$ w. z. b. w.

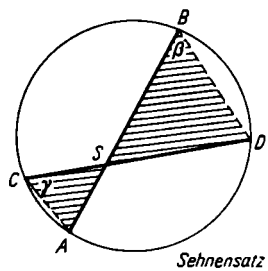


Bild 155

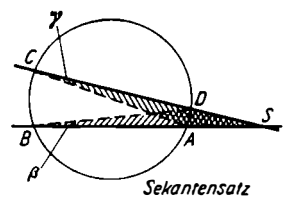


Bild 156

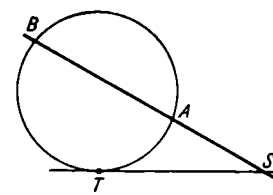


Bild 157

Sekanten-Tangenten-Satz:

Schneiden sich Sekante und Tangente an einem Kreis, so ist die Tangente mittlere Proportionale der beiden Sekantenabschnitte, die wiederum vom Schnittpunkt aus zu messen sind.

Beweis: Der Satz ist ein Sonderfall des Sekantensatzes, sofern man die Tangente als Sonderfall der Sekante betrachtet. Aus Bild 157 ergibt sich unmittelbar:

$$\overline{SA} : \overline{ST} = \overline{ST} : \overline{SB}$$

oder $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ w. z. b. w.

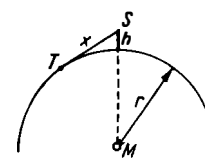


Bild 158

BEISPIELE

1. *Man berechne die Sichtweite x von einem Punkt (Turm, Flugzeug oder Bergspitze), der in der Höhe h über der als Kugelfläche gedachten Erdoberfläche liegt (Bild 158).*

Lösung: Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ergibt sich sofort:

$$x^2 = h(2r + h)$$

oder $x = \sqrt{2rh + h^2}$

Da h gegenüber r sehr klein ist, kann man den Summanden h^2 vernachlässigen und erhält noch genügend genau:

$$x \approx \sqrt{2rh}.$$

Zahlenbeispiel:

$$r = 6367\text{ km}, \qquad h = 400\text{ m}$$

$$x \approx \sqrt{12734000\text{ m} \cdot 400\text{ m}} \approx 100900\text{ m}$$

Die Sichtweite beträgt also etwa $\underline{\underline{100\text{ km}}}$.

2. *Man bestimme zeichnerisch mit Hilfe des Sekanten-Tangenten-Satzes die mittlere Proportionale der Größen a und b!*

Lösung: (Bild 159). Auf der Strecke $SB = b$ trägt man $\overline{SA} = a$ ab. Um M, den Halbierungspunkt von $\overline{AB}$, schlägt man den Kreis mit Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Der Thaleskreis über $\overline{MS}$ schneidet letzteren in Punkt T. $\overline{ST}$ ist die gesuchte Größe.

3. *Man löse die Gleichung $b^2 = ax$ zeichnerisch!*

Lösung: Im Endpunkt T der Strecke $TS = b$ errichtet man die Senkrechte und wählt darauf beliebig M. Ein Kreis um M mit $\overline{MT}$ und ein Kreis um S mit a schneiden sich in A bzw. A_1. (Damit überhaupt ein Schnitt zustande kommt, muß $\overline{MT}$ genügend groß gewählt

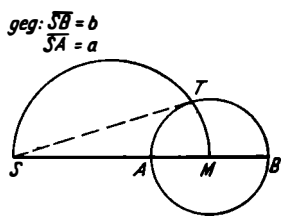


Bild 159

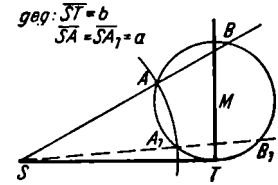


Bild 160

werden!) Die Verbindungsgeraden SA bzw. SA_1 schneiden den Kreis um M in B bzw. B_1. $\overline{SB}$ und $\overline{SB_1}$ sind aus Symmetriegründen gleich und stellen die gesuchte Größe x dar (Bild 160).

Goldener Schnitt oder **Stetige Teilung:**

Eine Strecke heißt nach dem *Goldenen Schnitt* oder *stetig geteilt*, wenn ihr großer Abschnitt mittlere Proportionale der Gesamtstrecke und des kleinen Abschnittes ist.

Oder mit anderen Worten:

Die Gesamtstrecke verhält sich zum großen Abschnitt wie dieser zum kleinen.

4. *Die Strecke ST ist nach dem Goldenen Schnitt zu teilen!*

Lösung: Im Endpunkt T der Strecke $ST = 2a$ wird die Senkrechte mit der Länge $TM = a$ errichtet. Um M schlägt man einen Kreis mit dem Radius a. Die Verbindungsgerade SM

schneidet diesen Kreis in den Punkten A und B. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt:

$$\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB} \qquad \text{und da} \qquad \overline{ST} = \overline{AB} \qquad \text{ist}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}\,(\overline{SA} + \overline{AB}),$$

d.h., die Strecke SB wird durch A stetig geteilt. Überträgt man $\overline{SA}$ mittels Kreisbogens auf $\overline{ST}$ ergibt sich Punkt C. Die letzte Gleichung schreibt man nun zweckmäßig in der Gestalt:

$$\overline{ST}^2 = \overline{SC}\,(\overline{SC} + \overline{ST})$$

und erhält durch Umformung:

$$\overline{ST}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{SC} \cdot \overline{ST}$$

$$\overline{SC}^2 = \overline{ST}\,(\overline{ST} - \overline{SC})$$

$$\underline{\underline{\overline{ST} : \overline{SC} = \overline{SC} : (\overline{ST} - \overline{SC})}},$$

womit gezeigt ist, daß die Strecke $\overline{ST}$ durch C im Goldenen Schnitt geteilt ist (Bild 161).

Der Begriff „stetige" Teilung erklärt sich aus folgendem Sachverhalt: Trägt man den kleineren Abschnitt b einer nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke $(a + b)$ auf

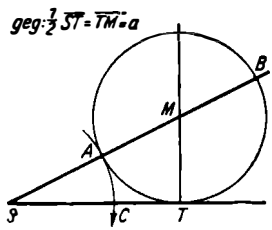


Bild 161

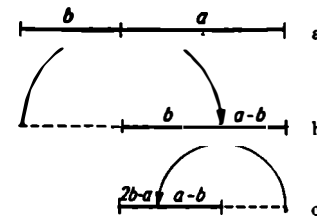


Bild 162

der größeren Strecke a ab, so wird diese wiederum nach dem Goldenen Schnitt geteilt. Dieses Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen, wie im folgenden angedeutet ist: Bild 162a. Diese Strecke sei nach dem Goldenen Schnitt geteilt.

Dann ergibt sich:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

und als Bestimmungsgleichung des Goldenen Schnittes:

$$\underline{\underline{a^2 - ab - b^2 = 0}}.$$

Bild 162b. Wenn diese Strecke wiederum nach dem Goldenen Schnitt geteilt sein soll, muß gelten:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Durch Umformung erhält man wiederum obige Bestimmungsgleichung, wodurch die Annahme bestätigt wird.

Bild 162c. Und nochmals:

Annahme: $\dfrac{b}{a-b} = \dfrac{a-b}{2b-a}$

$$2b^2 - ab = a^2 - 2ab + b^2$$

und $\underline{\underline{a^2 - ab - b^2 = 0}}$

gilt wieder usw.

Satz 1:

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem großen Abschnitt des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius.

Beweis: Das Bestimmungsdreieck besitzt die in Bild 163 angegebenen Winkel. Trägt man die Winkelhalbierende eines Basiswinkels ein, ergibt sich ein neues Dreieck, das

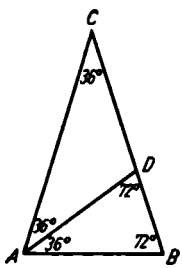


Bild 163

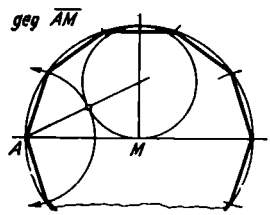


Bild 164

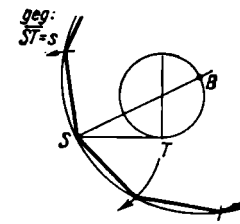


Bild 165

dem ursprünglichen ähnlich ist (Winkelvergleich). Außerdem gilt:

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$$

mit $\overline{AB}$ als Zehneckseite und $\overline{AC}$ als Umkreisradius. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BDA folgt:

$$\overline{CB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{DB} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks läßt sich also nach dem Goldenen Schnitt aus dem Umkreisradius konstruieren (Bild 164). Durch Überspringen jeder zweiten Ecke entsteht ein regelmäßiges Fünfeck.

BEISPIEL

5. *Ein regelmäßiges Zehneck ist aus seiner Seite s zu konstruieren!*

Lösung: Man bestimmt mit Hilfe des Goldenen Schnittes aus der gegebenen Seite ST den Umkreisradius SB und erhält durch Abtragen der Strecke s als Sehne das Zehneck (Bild 165).

Zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks sind folgende Vorbetrachtungen nötig: (Bild 166).

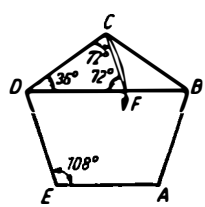


Bild 166

Alle Diagonalen sind gleich lang.
Die angegebenen Winkel lassen sich leicht nachrechnen.
Trägt man im Teildreieck BCD von D aus nach B die Seitenlänge s ab, wodurch Punkt F entsteht, erkennt man:

Satz 2:

Die Seite des regelmäßigen Fünfecks ist gleich dem größeren Abschnitt der nach dem Goldenen Schnitt geteilten Diagonale.

Daraus läßt sich das regelmäßige Fünfeck konstruieren. (Vgl. Aufgabe 314!)

AUFGABEN

307. Beweise den Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel für die in Bild 167 angegebenen Lagen des Punktes P!

308. Konstruiere einen Kreis, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine gegebene Gerade g berührt! ($\overline{AB}$ soll nicht parallel zu g verlaufen!)

Anleitung: Verlängere $\overline{AB}$ bis zum Schnitt mit g und konstruiere den Berührungspunkt durch Anwendung des Sekanten-Tangenten-Satzes!

309. Konstruiere den Punkt D mittels Rückwärtseinschneidens zeichnerisch, wenn die Koordinaten der Punkte A, B und C bekannt sind und von D aus die Winkel ADB und BDC gemessen wurden! (Bild 168)

a) A (1,4)
B (6,1)
C (11,3)
$\sphericalangle ADB = 54°$
$\sphericalangle BDC = 50°$

b) A (2,4)
B (6,2)
C (11,7)
$\sphericalangle ADB = 26°30'$
$\sphericalangle BDC = 45°$

310. Zeige an Hand des Bildes 169, daß der Höhensatz ein Sonderfall des Sehnensatzes ist!

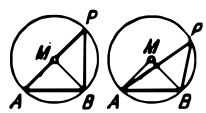


Bild 167

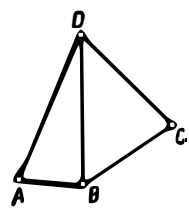


Bild 168

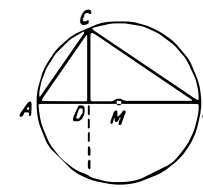


Bild 169

311. Eine Strecke von 15 cm ist stetig zu teilen. Nenne die gesuchten Teilstrecken a und b.

312. Die internationale Postkarte hat das Format 148 mm × 105 mm. Untersuche, ob diese Abmessungen aus einer stetigen Teilung hervorgegangen sind.

313. Der Umfang eines Bilderrahmens soll 126 cm betragen. Wie groß sind seine Höhe h und seine Breite b zu machen, wenn der halbe Umfang stetig geteilt werden soll?

314. Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck

a) aus der Seite $s = 6$ cm,

b) aus der Diagonale $d = 6$ cm.

24. Berechnung von Flächen und Umfängen

24.1. Verschiedene Vierecke

Satz 1:

Die *Fläche des Rechteckes* ist gleich dem Produkt zweier benachbarter Seiten.

$$\boxed{A = a \cdot b} \tag{77}$$

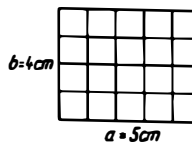


Bild 170

Beweis: (Bild 170). Die Rechteckseiten a und b seien ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit. Dann läßt sich das Rechteck in a Streifen zu je b Flächeneinheiten zerlegen. Damit ist $a \cdot b$ die Anzahl der Flächeneinheiten, wie man abzählen kann.

Auf die Fallunterscheidungen, die nötig werden, wenn a und b nicht ganze Zahlen, sondern Brüche oder irrationale Zahlen sind, soll hier nicht näher eingegangen werden.

Der *Umfang* ist zusammengesetzt aus

$$\boxed{u = 2a + 2b = 2(a + b)} \tag{78}$$

Satz 2:

Die *Fläche des Quadrates* ist gleich dem Quadrat einer Seite.

$$\boxed{A = a^2} \tag{79}$$

Umfang des Quadrates:

$$\boxed{U = 4a} \tag{80}$$

Beweis: Man setzt in den entsprechenden Formeln für das Rechteck $a = b$ ein!

Satz 3:

Die *Fläche des Parallelogrammes* ist gleich dem Produkt aus einer Seite, Grundlinie genannt, und der zugehörigen Höhe.

$$\boxed{A = g \cdot h} \tag{81}$$

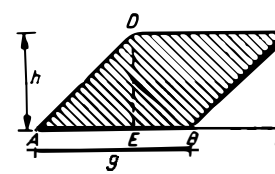


Bild 171

Beweis: In Bild 171 ist das Rechteck $EFCD$ flächengleich dem Parallelogramm $ABCD$, da $\triangle AED \cong \triangle BFC$.

Also gilt: $\overline{EF} \cdot \overline{ED} = \overline{AB} \cdot \overline{ED}$ w. z. b. w.

Satz 4:

Die *Fläche des Trapezes* ist gleich dem Produkt aus Mittellinie und Höhe.

$$\boxed{A = m \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h} \tag{82}$$

Beweis: In Bild 172 ist

$$\overline{AH} = \overline{DH}, \quad \overline{BG} = \overline{CG}, \quad \text{und Hilfslinie} \quad \overline{EF} \parallel \overline{AD}.$$

Daraus ergibt sich das Parallelogramm $AFED$ mit

$$\overline{AF} = \overline{HG} = \overline{DE} = m.$$

Aus der Gleichheit von

$$\sphericalangle FBG = \sphericalangle ECG \quad \text{als Wechselwinkel}$$

und $\sphericalangle FGB = \sphericalangle EGC$ als Scheitelwinkel

ergibt sich, daß

$$\triangle FBG \cong \triangle ECG.$$

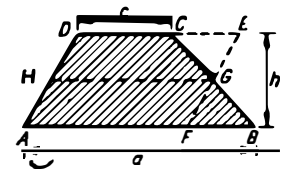


Bild 172

Daraus folgt die Flächengleichheit des Parallelogrammes $AFED$ und des Trapezes $ABCD$:

$$A = \overline{AF} \cdot h = m \cdot h.$$

Mit $\overline{AE} = a$, $\overline{CD} = c$ und $\overline{FB} = \overline{CE} = x$ ergibt sich weiter:

$$m = \overline{AF} = a - x,$$

$$m = \overline{DE} = c + x,$$

und durch Addition beider Gleichungen

$$2m = a + c \quad \text{oder} \quad m = \frac{a + c}{2},$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

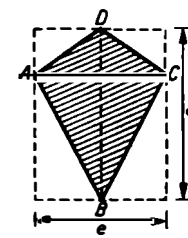


Bild 173

Satz 5:

Die *Fläche des Rhombus* und des *Drachenvierecks* ist gleich dem halben Produkt beider Diagonalen.

$$\boxed{A = \frac{1}{2} ef} \tag{83}$$

Beweis: Jedes Teilrechteck des umbeschriebenen Rechtecks in Bild 173 wird durch die Seiten des Drachenvierecks halbiert. Daraus ergibt sich unmittelbar die Formel. Durch Parallelverschiebung der kurzen Diagonale ändert sich an diesen Beziehungen nichts. Daher gilt die Formel auch für den Spezialfall, den Rhombus.

24.2. Dreiecke

Satz 1:

Die *Fläche des Dreiecks* ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite, Grundlinie genannt, und der zugehörigen Höhe.

$$\boxed{A = \frac{1}{2} g \cdot h} \tag{84}$$

Beweis: In Bild 174 zerlegt die Diagonale BD das Parallelogramm $ABCD$ in zwei kongruente Dreiecke. Die Dreiecksfläche ist also gleich der halben Parallelogrammfläche.

Satz 2:

Die *Fläche des rechtwinkligen Dreiecks* ist gleich dem halben Produkt beider Katheten.

$$\boxed{A = \frac{1}{2} a \cdot b} \tag{85}$$

Beweis: Er ergibt sich, wenn man im letzten Beweis das Parallelogramm durch ein Rechteck ersetzt.

Satz 3:

Fläche des gleichseitigen Dreiecks:

$$\boxed{A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}} \tag{86}$$

Beweis: Durch Einsetzen der Formel für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks. (Vgl. Abschnitt 22., Beispiel 21) in die Flächenformel des allgemeinen Dreiecks ergibt sich:

$$A = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

w.z.b.w.

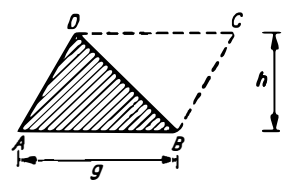


Bild 174

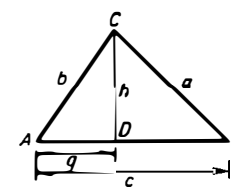


Bild 175

Heronische[1]) *Formel für die Dreiecksfläche:*

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{U}{2}} \tag{87}$$

Beweis: (Bild 175). Aus dem linken Teildreieck erhält man:

$$q^2 = b^2 - h^2 \tag{I}$$

bzw. $h^2 = b^2 - q^2 \qquad h = \sqrt{b^2 - q^2} = \sqrt{(b+q)(b-q)}$ (II)

[1]) Heron, um 100 u. Z.

und aus dem rechten Teildreieck:

$$a^2 = h^2 + (c - q)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cq + q^2.$$

Gleichung (I) einsetzen:

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cq + b^2 - h^2.$$

Für q erhält man daraus:

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Dieser Wert wird in Gleichung (II) eingesetzt:

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}.$$

Umformung durch Anwendung der binomischen Formeln:

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{([b + c]^2 - a^2)(a^2 - [b - c]^2)}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Aus $2s = a + b + c$ folgt: $2(s - a) = b + c - a$

$2(s - b) = a - b + c$

$2(s - c) = a + b - c$

Damit erhält man weiterhin:

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

$$\frac{h \cdot c}{2} = A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

BEISPIEL

Wie groß ist die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten $a = 10$ cm, $b = 8$ cm *und* $c = 14$ cm?

Lösung: $s = 16$ cm

$s - a = 6$ cm

$s - b = 8$ cm

$s - c = 2$ cm

$$A = \sqrt{16\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}} = 10\sqrt{6}\text{ cm}^2 \approx \underline{39{,}2\text{ cm}^2}$$

24.3. Unregelmäßige Vielecke

Eine allgemeine Formel läßt sich im Rahmen dieses Buches nicht angeben. Zeichnerisch kann man dieses Problem lösen

durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke (Bild 176)

oder

durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke und rechtwinklige Trapeze (Bild 177).

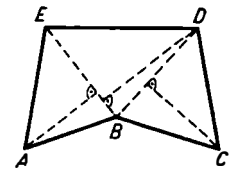


Bild 176

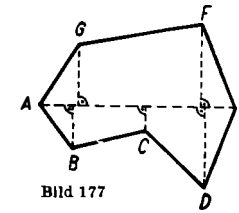


Bild 177

Die Maße der Teilflächen entnimmt man der Zeichnung. Dabei erweist sich das zweite Verfahren für Vielecke mit mehr als fünf Ecken als rationeller, da man weniger Messungen benötigt.

24.4. Regelmäßige Vielecke

Definition:

Ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seiten *Sehnen* eines Kreises, seines *Umkreises*, sind, heißt **Sehnenvieleck.**
Ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seiten *Tangenten* eines Kreises, seines *Inkreises*, sind, heißt **Tangentenvieleck.**

Satz 1:

Die *Fläche des regelmäßigen Sehnenvielecks* ist

$$\boxed{A_s = \frac{n}{4}\, s \sqrt{4r^2 - s^2}} \qquad (88)$$

s Seitenlänge,
r Radius des Umkreises,
n Zahl der Ecken.

Beweis: (Bild 178). Für die Fläche A_b des Bestimmungsdreiecks gilt:

$$A_b = \frac{1}{2}\, s h$$

$$\text{mit} \qquad h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

$$A_s = n A_b = \frac{1}{4}\, n s \sqrt{4r^2 - s^2} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

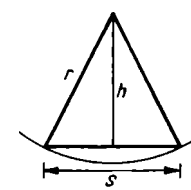


Bild 178

Satz 2:

Die *Fläche des regelmäßigen Tangentenvielecks* ist

$$\boxed{A_t = \frac{1}{2}\, s n \varrho} \qquad (89)$$

s Seitenlänge,
ϱ Radius des Inkreises,
n Zahl der Ecken.

Beweis: (Bild 179). Für die Fläche A_b des Bestimmungsdreiecks gilt:

$$A_b = \frac{1}{2} s \varrho$$

$$A_t = n A_b = \frac{1}{2} s n \varrho \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Beide Formeln sind *überbestimmt*, d. h., die Größen s, n und r bzw. s, n und ϱ dürfen nicht willkürlich gewählt werden, da sie voneinander abhängig sind. Da diese Abhängigkeit durch den Winkel an der Spitze der Bestimmungsdreiecke vermittelt wird, kann eine allgemeine Formel in beiden Fällen nur mit Hilfe der Sätze der Trigonometrie angegeben werden. Das gilt ebenfalls für allgemeine Formeln zur Berechnung der Seitenlängen von Sehnen- und Tangentenvielecken. (Vgl. dazu Abschnitt 26.4., Beispiel 9!)

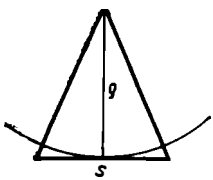


Bild 179

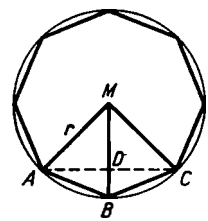


Bild 180

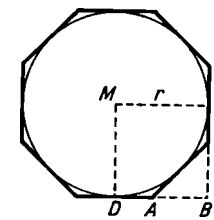


Bild 181

Für bestimmte Werte von n kommt man ohne die Hilfsmittel der Trigonometrie zum Ziel.

BEISPIELE

Man berechne Seitenlänge und Fläche regelmäßiger Achtecke in Abhängigkeit von Umkreis- bzw. Inkreisradius!

1. Lösung für das Sehnenachteck: (Bild 180)

$$\overline{AC}^2 = 2r^2 \qquad \overline{AD} = \overline{DM} \quad \text{da} \quad \sphericalangle DAM = \sphericalangle DMA = 45°$$

$$\overline{AC} = r\sqrt{2} \qquad \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + (r - \overline{DM}^2) =$$

$$= \frac{r^2}{2} + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{r^2}{2} + r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2}{2} = r^2(2 - \sqrt{2})$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} = s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}}$$

$$A_8 = 2r\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{4r^2 - (2 - \sqrt{2})r^2} =$$

$$= 2r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \qquad \underline{\underline{A_8 = 2r^2\sqrt{2}}}$$

2. Lösung für das Tangentenachteck: (Bild 181)

$$\overline{AC}^2 = s^2 = 2\,\overline{AB}^2$$

$$\overline{AB} = \frac{s}{2}\sqrt{2}, \qquad \overline{DB} = \varrho = \frac{s}{2} + \overline{AB}$$

$$\overline{DB} = \varrho = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{2}$$

ergibt $\underline{\underline{s_8 = \frac{2\varrho}{1+\sqrt{2}}}}$ und nach Rationalmachen des Nenners $\underline{\underline{2\varrho\left(\sqrt{2}-1\right)}}$

$$\underline{\underline{A_8 = 4 \cdot 2\varrho^2\left(\sqrt{2}-1\right) = 8\varrho^2\left(\sqrt{2}-1\right)}}.$$

24.5. Kreis und Kreisteile

Legt man in einen Kreis ein regelmäßiges Sehnenvieleck und um den Kreis ein regelmäßiges Tangentenvieleck mit gleicher Eckenzahl, so erhält man folgende Beziehung für deren Umfänge:

$$U_e < U_{\text{Kreis}} < U_i .$$

Durch Erhöhung der Eckenzahl nähern sich die Umfänge beider Vielecke immer mehr dem dazwischenliegenden Umfang des Kreises. Dieses Verfahren geht zurück auf ARCHIMEDES. Durch zahlenmäßige Berechnung erhält man

Satz 1:

Der Umfang des Kreises beträgt

$$\boxed{U = 2\pi r}, \qquad \pi \approx 3{,}14159\ldots \tag{90}$$

Der Faktor π ist eine *irrationale Zahl*, läßt sich also nicht genau durch eine endliche oder periodische Dezimalzahl ausdrücken. Für die meisten Berechnungen genügt als Näherungswert $\pi \approx 3{,}14$.

Satz 2:

Die *Fläche des Kreises* ist

$$\boxed{A = \pi r^2}. \tag{91}$$

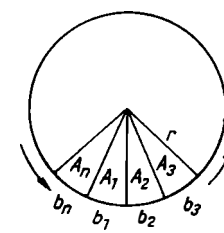


Bild 182

Beweis: Bild 182 zeigt die Zerlegung des Kreises in Kreisausschnitte, die bei genügend feiner Unterteilung als Dreiecke mit $b_1, b_2, \ldots, b_n$ als Grundlinie und r als Höhe aufgefaßt werden können. Für deren Flächen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt:

$$A_1 = \frac{1}{2} b_1 r$$

$$A_2 = \frac{1}{2} b_2 r$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{1}{2} b_n r$$

Durch Addition ergibt sich:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\,r =$$

$$= \frac{1}{2} U \cdot r = \pi r^2 \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Definition:

Ein **Kreisausschnitt (Kreissektor)** wird durch zwei Radien aus dem Kreis herausgeschnitten.
Ein **Kreisabschnitt (Kreissegment)** wird durch eine Sehne vom Kreis abgeschnitten.

Satz 3:

Die *Länge des Kreisbogens* beim Mittelpunktwinkel φ ist

$$\boxed{b = \pi r \frac{\varphi}{180°}}. \tag{92}$$

Beweis: Aus der Proportionalität von Bogenlänge und Mittelpunktwinkel folgt:

$$b : U = \varphi : 360°$$

$$b = U \frac{\varphi}{360°} = 2\pi r \frac{\varphi}{360°} = \pi r \frac{\varphi}{180°} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 4:

Die *Fläche des Kreisausschnittes* mit dem Bogen b bzw. dem Mittelpunktwinkel φ ist

$$\boxed{A = \frac{1}{2} b r = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°}} \tag{93}$$

Beweis: Es gilt folgende Proportion, wenn man die Fläche des Kreisausschnittes mit A bezeichnet:

$$A : \text{Kreisfläche} = \text{Bogenlänge} : \text{Kreisumfang}$$

$$A : \pi r^2 \qquad = \pi r \frac{\varphi}{180°} \qquad : 2\pi r$$

Durch Auflösen nach A erhält man Formel (93).

Satz 5:

Die *Fläche des Kreisabschnittes* ist

$$\boxed{A = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2} s (r - h) = \frac{r}{2}(b - s) + \frac{1}{2} s h} \tag{94}$$

mit s Sehnenlänge und
h Pfeilhöhe = Höhe des Kreisabschnittes.

Beweis: Die Fläche ergibt sich als Differenz zwischen der Fläche des Kreisausschnittes und der des zugehörigen Dreiecks (Bild 183). Die letzte Formel ist wiederum *über-*

bestimmt, da die Größen r, φ, b, h und s voneinander abhängig sind. Zur Bestimmung all dieser Größen benutzt man Tabellen, denen stets der *Einheitskreis*[1]) zugrunde gelegt ist. Dort kann man in Abhängigkeit vom Mittelpunktwinkel φ alle übrigen Werte ablesen.

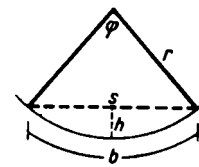


Bild 183

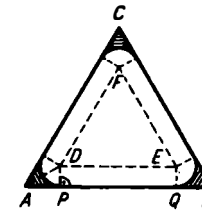


Bild 184

BEISPIELE

1. *Ein Stück Blech hat die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a. Die Ecken werden durch Kreise mit dem Radius r abgerundet. Wieviel Prozent Verlust treten dadurch auf?*

Gegeben sind: $a = 10$ cm, $r = 1$ cm.

Lösung: In Bild 184 beträgt der Winkel PAD 30°. Daraus ergibt sich, daß das Dreieck APD die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit $\overline{PD} = r$ als halber Seite und $\overline{AP}$ als Höhe ist. Daraus folgt:

$$\overline{AP} = \overline{PD}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

Ferner gilt:

$$\overline{DE} = \overline{PQ} = a - 2\overline{AP} = a - 2r\sqrt{3}$$

Die Fläche A_B des verbleibenden Blechstückes setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$A_B = A_{DEF} + 3A_{PQED} + 3 \cdot \frac{1}{3} A_{\text{Kreis}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\overline{DE}^2 + 3r \cdot \overline{DE} + \pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3}(a - 2r\sqrt{3})^2 + 3r(a - 2r\sqrt{3}) + \pi r^2$$

Zahlenbeispiel:

$$A_B = \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}(10 - 2\sqrt{3})^2 + 3(10 - 2\sqrt{3}) + \pi\right) \text{cm}^2$$

$$\underline{A_B \approx 41{,}15 \text{ cm}^2}$$

Die Fläche A_{ABC} des gesamten Dreiecks beträgt:

$$\underline{A_{ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 43{,}30 \text{ cm}^2}$$

Die Fläche A_A des Abfalles ergibt sich als Differenz zwischen der Fläche des gesamten Dreiecks und der des restlichen Bleches:

$$A_A = A_{ABC} - A_B$$

Der prozentuale Abfall, d.h. der Verlust V, ergibt sich folgendermaßen:

$$V = \frac{A_A}{A_{ABC}} \cdot 100\,\% = \left(\frac{A_{ABC} - A_B}{A_{ABC}}\right) \cdot 100\,\%$$

$$V = \left(1 - \frac{A_B}{A_{ABC}}\right) \cdot 100\,\% \approx \left(1 - \frac{41{,}15}{43{,}30}\right) \cdot 100\,\%$$

$$\underline{\underline{V \approx 5\,\%}}$$

[1]) Der Einheitskreis ist ein Kreis, dessen Radius die Länge der Einheit hat.

2. *Man berechne die Länge des in Bild 185 dargestellten Korbbogens sowie die von ihm und der Strecke AD eingeschlossene Fläche! Der Korbbogen besteht aus drei Kreisbögen, deren Mittelpunkte nacheinander in B, M und C liegen und die an den Stellen, wo ein Kreisbogen in den anderen übergeht, also in G und E, gemeinsame Tangenten besitzen.*

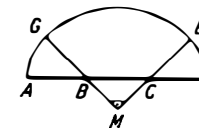


Bild 185

Gegeben sind: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$, $\sphericalangle\, BMC = 90°$.

Lösung: Aus der Konstruktion folgt:

$$\overline{BG} = \overline{CE} = a\,.$$

Aus $\sphericalangle\, BMC = 90°$ folgt:

$$\sphericalangle\, ABG = \sphericalangle\, DCE = \frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°$$

$$\underline{\widehat{AG} = \widehat{ED} = \frac{1}{4}\pi a\,.}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BMC ergibt sich:

$$\overline{MB}^2 = \frac{1}{2}\overline{BC}^2 = \frac{1}{2}a^2$$

und daraus:

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\,.$$

Es ist $$\overline{MG} = \overline{MB} + a = a\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$\underline{\widehat{GE} = \frac{1}{2}\overline{MG}\,\pi = \frac{1}{2}\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).}$$

Länge b des Gesamtbogens:

$$b = \widehat{AG} + \widehat{GE} + \widehat{ED} = \frac{1}{2}\pi a\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$\underline{\underline{b \approx 4{,}24\,a\,.}}$$

Die Fläche A setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$A = A_{ABG} + A_{ECD} + A_{MEG} - A_{BMC} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{4}\overline{MG}^2\pi - \frac{1}{2}\overline{MB}^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^2\left(\frac{5}{2} + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{4}a^2$$

und daraus

$$\underline{\underline{A \approx 2{,}82\,a^2.}}$$

3. *Welche Fläche bedeckt das in Bild 186 dargestellte Bogendreieck? Die Eckpunkte des Dreiecks sind Mittelpunkte der Kreisbögen. Gegeben ist die Dreiecksseite a.*

Lösung: Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Daher gilt:

$$\sphericalangle BAC = 60°.$$

Die Fläche A_1 des schraffierten Kreisabschnittes beträgt

$$A_1 = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = a^2\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

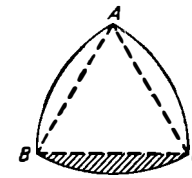


Bild 186

Die Gesamtfläche F setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$A = 3A_1 + A_{\text{Dreieck }ABC} =$$

$$= 3a^2\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2(\pi - \sqrt{3})$$

$$\underline{\underline{A \approx 0{,}71\,a^2}}.$$

AUFGABEN

315. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Kathete $a = 3$ cm und die Hypotenuse $c = 6$ cm gegeben. Berechne den Flächeninhalt A.

316. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Schenkeln a soll einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite b flächengleich sein. Drücke b durch a aus.

317. Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe $h = 3$ cm hat den Flächeninhalt $A = 12$ cm². Berechne seine Seiten a, b und c.

318. Berechne den Flächeninhalt A eines schiefwinkligen Dreiecks aus den Seiten $a = 3$ cm, $b = 5$ cm und $c = 4$ cm.

319. Von einem schiefwinkligen Dreieck sind die Seiten $a = 5$ cm, $b = 3$ cm und der Flächeninhalt $A = 5$ cm² gegeben. Berechne die Seite c.

320. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Höne h gleich der Basis c. Welchen Flächeninhalt A hat dieses Dreieck, und wie groß sind seine Schenkel a? Drücke A und a durch c aus.

321. Von einem gleichsohenkligen Dreieck sind die Höhe $h_c = 5$ cm und die Schenkel $a = 8$ cm gegeben. Berechne seinen Flächeninhalt A.

322. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind der Flächeninhalt $A = 10$ cm² und die Basis $c = 4$ cm bekannt. Wie groß sind die Schenkel a und die Höhe h_c?

323. Die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks stehen im Verhältnis $a : c = m : n = 2 : 1$. Sein Flächeninhalt sei $A = 6$ cm². Berechne die Höhe h_c, die Schenkel a und die Basis c.

324. Wie groß ist der Inkreisradius r_i eines gleichschenkligen Dreiecks, von dem der Flächeninhalt $A = 8$ cm² und die Schenkel $a = 5$ cm gegeben sind?

325. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind der Umfang $U = 16$ cm und die Höhe $h_c = 4$ cm bekannt. Wie groß sind seine Schenkel a und die Basis c? Berechne außerdem den Flächeninhalt A.

326. Drücke die Schenkel a eines gleichschenkligen Dreiecks und das Lot f vom Fußpunkt der Höhe h_a auf den Schenkel a durch $h_a = 5$ cm und $c = 4$ cm aus.

327. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $c = 4$ cm und dem Umfang $U = 24$ cm soll in ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit gleichem Umfang verwandelt werden. In welchem Verhältnis $A_1 : A_2$ stehen die Flächeninhalte beider Dreiecke zueinander?

328. Drücke die Höhe h_c eines gleichschenkligen Dreiecks durch den Schenkel a und die Basis c aus.

329. In welchem Verhältnis $A_1 : A_2$ teilt die Seitenhalbierende s_a eines gleichschenkligen Dreiecks den Flächeninhalt?

330. Berechne die Seitenhalbierende s_a eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Basis $c = 4{,}5$ cm und dem Schenkel $a = 8{,}3$ cm.

331. Berechne die Gurtlängen b und c des im Bild 187 dargestellten Dachbinders.

332. Berechne den Querschnitt A der im Bild 188 dargestellten Schiene.

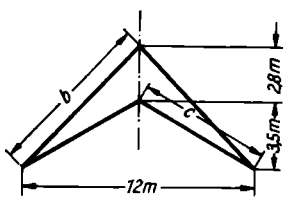


Bild 187

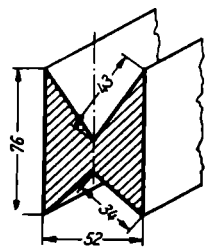


Bild 188

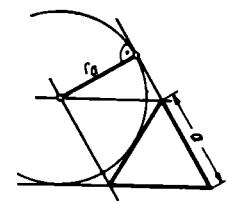


Bild 189

333. Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Seite $a = 3$ cm gegeben. Berechne den Inkreisradius r und den Umkreisradius r_u.

334. Drücke den Ankreisradius r_a eines gleichseitigen Dreiecks durch die Dreieckseite a aus (Bild 189).

335. Die Seiten a und b zweier gleichseitiger Dreiecke verhalten sich wie $a : b = m : n = 2 : 3$. Berechne das Verhältnis $A_a : A_b$ ihrer Flächeninhalte.

336. Drücke den Flächeninhalt A und die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a durch den Umfang U aus.

337. Der Querschnitt A einer Stahlschiene ist ein gleichseitiges Dreieck. Berechne A für den Umfang $U = 26{,}4$ cm.

338. Die Schlüsselweite einer Sechskantschraube beträgt $s = 21$ mm. Wie groß ist das Eckenmaß e des Schraubenkopfes?

339. Der Achsenabstand $a = 345$ mm zweier Zahnräder und ihre Teilkreisdurchmesser $d_{o_1} = d_{o_2} = 124$ mm sind bekannt. Wie groß muß der Teilkreisdurchmesser d_{o_3} eines dritten Rades gemacht werden, damit es mit den gegebenen kämmt und von diesen gleichen Achsenabstand a hat?

340. Eine Schraube mit metrischem Spitzgewinde hat $d_1 = 41{,}504$ mm Kerndurchmesser. Die Steigung ist nach Standard mit $h = 5$ mm vorgeschrieben. Wie groß ist der Nenndurchmesser d dieser Schraube? Beachte, daß die Gewindetiefe $t_1 = \frac{3}{4}\,t$ mit $t = \frac{h}{2}\sqrt{3}$ ist.

341. Ein Mast ist in der Höhe $h = 23{,}4$ m durch drei Seile verspannt, von denen jedes die Länge $l = 30$ m hat. Die Fußpunkte der Seile bilden die Endpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Welchen Abstand haben die Fußpunkte untereinander?

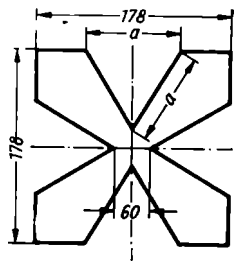


Bild 190

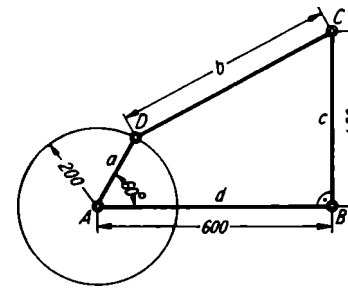


Bild 191

342. In die vier Seiten einer quadratischen Platte (Bild 190) sind Einschnitte eingearbeitet, die die Form gleichseitiger Dreiecke haben. Berechne deren Seite a unter Berücksichtigung der eingetragenen Maße.

343. In eine Bohrung vom Durchmesser $d = 14{,}2$ mm ist ein Dreikantstahl mit den Seiten a einzupassen. Berechne a.

344. a) Zeichne das im Bild 191 dargestellte Schubkurbelgetriebe.

b) Berechne die Koppellänge b für die eingetragenen Maße.

c) Konstruiere die beiden Totlagen (Endstellungen) der Schwinge c.

Hinweis: Unter den Totlagen der Schwinge versteht man die Stellungen des Getriebes, bei denen die Koppel b und die Kurbel a in eine Linie zusammenfallen.

d) Berechne den Gelenkpunktabstand DB für die im Bild dargestellte Kurbelstellung.

e) Berechne ebenso den Gelenkpunktabstand AC.

345. Wie groß ist der Flächeninhalt A des im Bild 192 dargestellten Vierecks, das einem Kreis vom Radius $r = 5$ cm einbeschrieben ist und dessen untere Eckpunkte den Abstand $s = 7$cm haben? Wie groß sind außerdem die Seiten a und b?

346. Von einem Rechteck sind die Diagonale $d = 8$ cm und die Seite $a = 3$ cm bekannt. Berechne die andere Seite b und den Flächeninhalt A.

347. Wie groß sind die Diagonale d und die Seite b eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt $A = 8$ cm² und der Seite $a = 2$ cm?

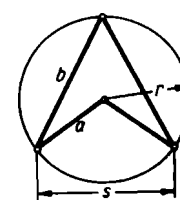


Bild 192

348. Die Seiten eines Rechtecks sollen sich wie $b : c = m : n = 2 : 3$ verhalten. Außerdem soll das Rechteck einem Quadrat mit der Seite $a = 4$ cm flächengleich sein. Bestimme die Seiten b und c und die Diagonale d des Rechtecks.

349. Ein Rechteck mit den Seiten b und c ist einem Quadrat mit der Seite $a = 4$ cm flächengleich. Die Diagonale e des Rechtecks und die Diagonale d des Quadrates sollen im Verhältnis $d : e = m : n = 2 : 3$ stehen. Berechne die Seiten b und c des Rechtecks.

350. Von einem Rhomboid sind die Seiten $a = 4$ cm, $b = 8$ cm und der Flächeninhalt $A = 12$ cm² bekannt. Wie groß sind seine Höhe h_a und die größere Diagonale d?

351. Wie groß ist die Seite a eines Quadrates, das einem Rechteck mit den Seiten $b = 5$ cm und $c = 3$ cm flächengleich ist?

352. Wie groß ist der Flächeninhalt A des schraffierten Quadrates im Bild 193, und wie groß ist außerdem die Diagonale d? Drücke A und d durch $a = 3$ cm und $b = 5$ cm aus.

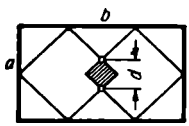


Bild 193

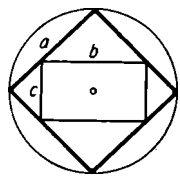


Bild 194

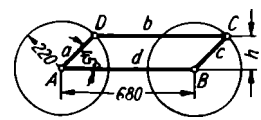


Bild 195

353. Einem Quadrat ist ein Rechteck mit den Seiten b und c einbeschrieben (Bild 194). Berechne b und c, wenn die Seite des Quadrates $a = 8$ cm beträgt und die Flächeninhalte beider Figuren im Verhältnis $A_Q : A_R = m : n = 3 : 1$ stehen.

354. Die Diagonalen eines Rhombus sind $e = 4$ cm und $f = 6$ cm. Wie groß sind seine Seiten a und der Flächeninhalt A, ausgedrückt durch e und f?

355. Wie groß ist die Höhe h eines Rhombus, wenn seine Seiten $a = 8$ cm und die Diagonale $e = 3$ cm bekannt sind?

356. Drücke die Höhe h eines Rhombus durch den Flächeninhalt $A = 16$ cm² und die Seite $a = 6$ cm aus.

357. Die Diagonalen eines rechteckigen Platzes sind 43 m lang und schließen die Winkel 60° bzw. 120° miteinander ein. Berechne die Seiten a und b des Platzes.

358. Von dem im Bild 195 gezeigten Gelenkparallelogramm sind der Abstand h zwischen Steg d und Koppel b sowie die beiden Gelenkpunktabstände AC und BD für die eingetragenen Maße zu berechnen.

359. Wie groß ist der Querschnitt A des im Bild 196 dargestellten Profils?

360. Berechne den Querschnitt A eines Kastenträgers, dessen Abmessungen aus Bild 197 hervorgehen.

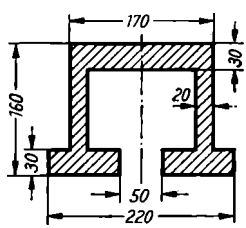


Bild 196

361. 30 Stück Bleche der aus Bild 198 erkennbaren Form sind einseitig zu verchromen. Welcher Preis T ergibt sich dafür, wenn je Quadratmeter 8,20 MDN gezahlt werden müssen?

362. Aus einem Baumstamm ist ein Balken mit rechteckigem Querschnitt herzustellen. Welchen Durchmesser d muß der Stamm mindestens haben, wenn für den Balkenquerschnitt $b = 5$ cm und $h = 12$ cm gefordert werden?

363. Berechne den Inkreisradius r_i eines Rhombus mit den Diagonalen $e = 52$ mm und $f = 88$ mm.

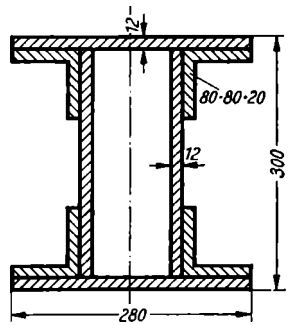


Bild 197

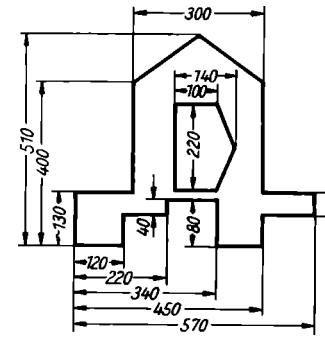


Bild 198

364. Wie groß ist die schraffierte Schnittfläche A der im Bild 199 dargestellten Riemenscheibe?

365. Die im Bild 200 gezeigte Stahlplatte ist mit 8 Bohrungen versehen, deren Mitten durch die Buchstaben $A, B, \ldots, H$ bezeichnet sind. Zur Kontrolle sollen Lehren der neben der Platte erkennbaren Form hergestellt werden. Wie groß müßten die Stichmaße s zur Kontrolle der Abstände a) AD, b) AE, c) CE, d) AG, e) CH sein?

366. Aus einem dünnen Draht ist ein Rechteck zu biegen, dessen eine Seite 6 cm größer ist als die andere. Gib die Rechteckseiten a und b für eine Drahtlänge von 58 cm an.

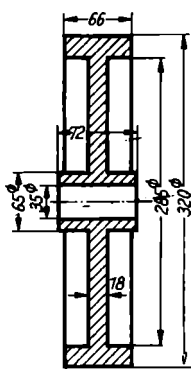


Bild 199

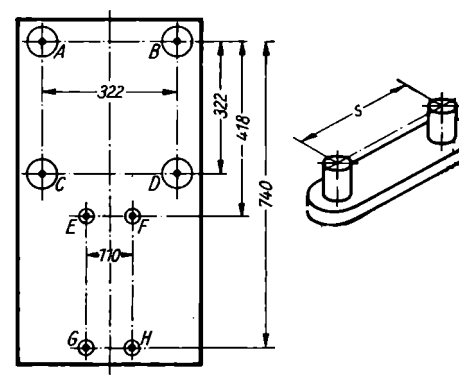


Bild 200

367. Ein rechteckiger Platz von 6000 m² Flächeninhalt soll umzäunt werden. Welche Holzmenge G wird dafür benötigt, wenn die Diagonale des Platzes 115 m mißt und für den laufenden Meter 0,25 m³ Holz gebraucht werden? Gib außerdem die Seiten a und b des Platzes an.

368. Die im Bild 201 dargestellten Meßblenden eines Photometers können in der durch die Pfeile gekennzeichneten Richtung verschoben werden, wodurch sich die Blendenöffnung verkleinert. Wie groß muß a gemacht werden, damit A

a) auf die Hälfte, b) auf ein Drittel,
c) auf ein Viertel, d) auf ein Sechstel

seiner angegebenen Größe verringert wird?

369. Von einem Rechteck sind die Seite $a = 44$ cm und der Flächeninhalt $A = 484$ cm² bekannt. Ermittle die andere Seite b, die Diagonale d, die Länge l des Lotes von einem Eckpunkt auf die Diagonale und die beiden Abschnitte u und v, in die die Diagonale durch das Lot zerlegt wird.

370. Gib an, um welchen Betrag l_1 sich das im Bild 202 dargestellte Gelenksystem verlängert, wenn die Entfernung a der Punkte A und B auf ein Drittel verkürzt wird.

371. Zwei Kräfte $F_1 = 12$ kp und $F_2 = 7{,}5$ kp schließen den Winkel

a) $\alpha = 45°$, b) $\alpha = 60°$

miteinander ein. Konstruiere das Kräfteparallelogramm und ermittle zeichnerisch die Resultierende R.

372. Zur Resultierenden $R = 8{,}4$ kp und zur Kraft $F_1 = 2{,}8$ kp, die beide den Winkel

a) $\alpha = 72°$, b) $\alpha = 30°$

einschließen, ist durch Konstruktion des Kräfteparallelogramms die Kraft F_2 zu bestimmen.

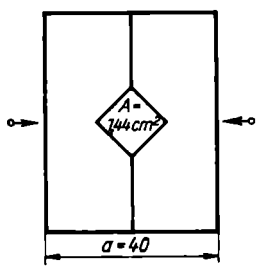


Bild 201

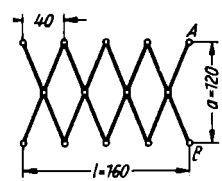


Bild 202

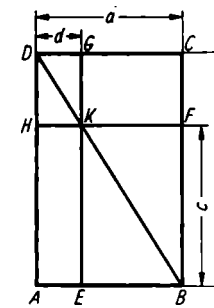


Bild 203

373. Ein straffgespanntes Seil bildet auf einer Rolle einen Umschlingungswinkel von 145°. Welchen Winkel α schließen die beiden Seile miteinander ein?

374. Von einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis $c = 6$ cm und den Schenkeln $a = 8$ cm wird ein Streifen von 1 cm Breite parallel zu einem Schenkel abgeschnitten. Gib den Flächeninhalt A_1 des ursprünglichen und den Flächeninhalt A_2 des verkleinerten Dreiecks an.

375. Ein rechteckiger Bilderrahmen mit den äußeren Abmessungen $a = 64$ cm und $b = 92$ cm ist aus einfachen Holzleisten zusammengesetzt. Die Länge des unter 45° geführten Gehrungsschnittes beträgt 3,54 cm. Wie groß ist die innerhalb des Rahmens liegende Fläche A, und welche Breite d haben die Leisten?

376. Stelle eine Beziehung für die im Bild 203 eingetragenen Strecken a, b, c und d auf.

377. Von einer rechteckigen Platte mit der Breite $b = 16$ cm und der Höhe $h = 5$ cm sind an zwei aneinanderstoßenden Seiten Streifen gleicher Breite a abzuschneiden, so daß sich der Flächeninhalt der Platte um den dritten Teil verringert. Berechne a.

378. Aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge $a = 6$ cm soll ein Rhombus ausgeschnitten werden, dessen eine Diagonale mit der des Bleches übereinstimmt und dessen andere Diagonale halb so lang ist wie diese. Berechne den Schnittverlust A und die Seite b des Rhombus.

379. Stelle eine Formel für den Flächeninhalt A eines gleichschenkligen Trapezes auf, in der die Diagonale d und die Höhe h als bekannte Stücke auftreten.

380. Wie groß ist die Höhe h_1 des gleichschenkligen Trapezes im Bild 204 zu machen, damit das über dem Trapez liegende gleichschenklige Dreieck diesem flächengleich ist? Wähle $h = 8$ cm für die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks.

381. Wie lautet die für h_1 in Aufgabe 380 erhaltene Beziehung, wenn die Fläche des Trapezes zur darüberliegenden Dreiecksfläche im Verhältnis $A_T : A_D = n : m$ steht?

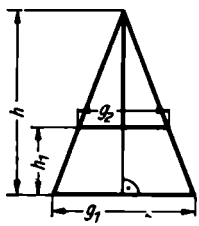


Bild 204

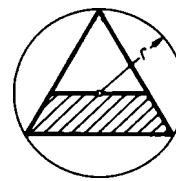


Bild 205

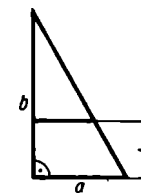


Bild 206

382. Wie groß ist der Flächeninhalt A des im Bild 205 schraffiert gezeichneten gleichschenkligen Trapezes, dessen Grundlinie die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist und dessen andere Grundlinie durch den Mittelpunkt des Dreiecksumkreises geht? Drücke A durch den Radius $r = 6$ cm des Umkreises aus.

383. Von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a und b soll durch eine Parallele zu a ein Trapez abgetrennt werden (Bild 206), so daß dessen Fläche sich zum darüberliegenden Dreieck wie $A_T : A_D = m : n = 3 : 2$ verhält. Wie groß muß die Höhe h des Trapezes für diesen Fall gemacht werden? Wähle für $b = 8$ cm.

384. Von einem gleichschenkligen Trapez sind der Umfang U, der Flächeninhalt A und die Schenkel a bekannt. Drücke seine Höhe h und seine beiden Grundlinien g_1 und g_2 durch diese Größen aus.

385. Von einem gleichschenkligen Trapez sind die Mittellinie $m = 6$ cm, der Flächeninhalt $A = 12$ cm² und die Schenkel $a = 3$ cm bekannt. Berechne die Grundlinien g_1 und g_2.

386. Wie groß sind die Höhe h, die Diagonale d und der Schenkel a eines gleichschenkligen Trapezes, wenn $g_1 = 4$ cm, $g_2 = 2$ cm und $A = 8$ cm² bekannt sind?

387. Ein Trapez mit der Mittellinie $m = 6$ cm und der Höhe $h_T = 4$ cm soll einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a flächengleich sein. Wie groß ist a für diesen Fall zu machen, und in welchem Verhältnis stehen die Höhen h_T und h_D beider Figuren?

388. Ein Trapez habe einen senkrecht zu seinen Grundlinien stehenden Schenkel a und einen zu diesen geneigten Schenkel b. Berechne die Grundlinie g_1 ($g_2 < g_1$) und die Seite b, wenn die Mittellinie $m = 4$ cm, die Grundlinie $g_1 = 3$ cm und die Höhe $h = 4$ cm gegeben sind.

389. Gib den Querschnitt A der im Bild 207 gezeigten Schwalbenschwanzführung an.

390. Das im Bild 208 dargestellte Blech wird aus vorgeschnittenen Stücken von 38 mm Breite und 46 mm Höhe hergestellt. Berechne den auftretenden Schnittverlust A für 100 Bleche.

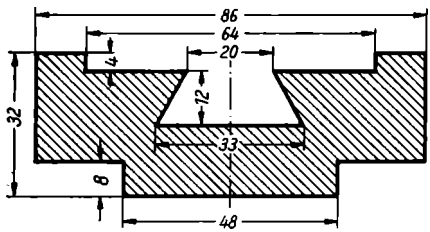


Bild 207

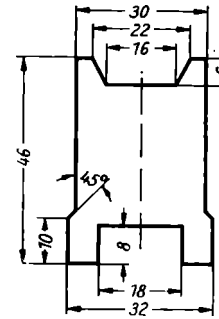


Bild 208

391. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h = 12$ cm wird durch drei parallel zur Basis verlaufende Strichmarken in zwei gleichschenklige Trapeze und ein gleichschenkliges Dreieck geteilt. Berechne die auf die Basis bezogenen Abstände h_1 und h_2 dieser Marken für den Fall, daß die Teilflächen gleich groß werden.

392. Berechne den Flächeninhalt A des im Bild 209 gezeigten Bleches.

393. Wie groß sind der Flächeninhalt A und der Umfang U des im Bild 210 gezeigten Bleches?

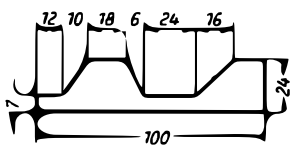


Bild 209

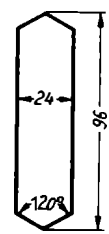


Bild 210

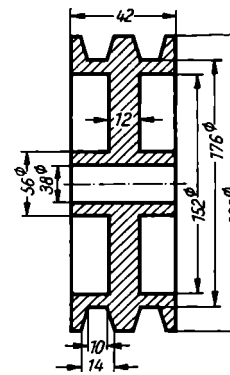


Bild 211

394. Berechne die Schnittfläche A der im Bild 211 gezeigten Keilriemenscheibe.

395. Berechne die Länge a der Kurbeln des im Bild 212 dargestellten Doppelkurbelgetriebes.

396. Ein Wasserkanal hat den Querschnitt eines gleichschenkligen Trapezes. Die beiden Uferränder sind 27 m voneinander entfernt, und die Kanalsohle hat eine Breite von 12 m. Die Tiefe des Kanals beträgt, von der Uferoberkante aus gerechnet, bis zur Sohle 4,8 m.

a) Berechne den Querschnitt A des Kanalbettes.

b) Wie groß ist das Böschungsstück a, das nicht von Wasser überspült wird, wenn der Kanal einen Wasserstand von 2,6 m aufweist?

397. Berechne die Fläche A des im Bild 213 wiedergegebenen Flurstückes.

398. Im Bild 214 ist ein Knotenblech dargestellt, das zur Verbindung von Stahlträgern dient. Berechne die fehlende Seite a und gib den Blechbedarf A an.

399. Bild 215 zeigt die Seitenansicht eines Geradsichtprismas, das aus Kron- und Flintglasprismen zusammengesetzt ist. Berechne die Strecken a und b.

400. Eine rechteckige Platte mit den Abmessungen $a = 4$ cm und $b = 13$ cm ist durch einen Schnitt so in zwei Trapeze zu zerlegen, daß deren Grundlinien a und $b - a$ werden. Berechne die Länge l des Schnittes.

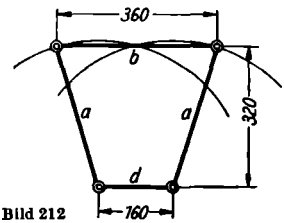


Bild 212

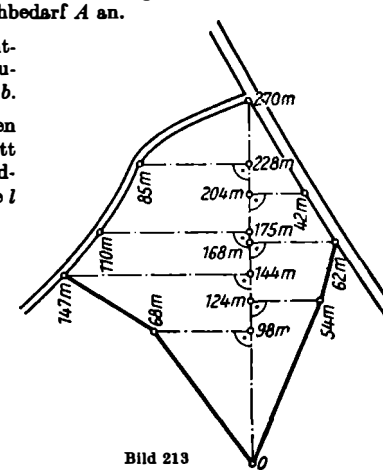


Bild 213

401. Berechne den Querschnitt A einer gemauerten Rinne, deren Abmessungen aus Bild 216 hervorgehen.

402. Berechne den Querschnitt A des im Bild 217 dargestellten Winkeleisens.

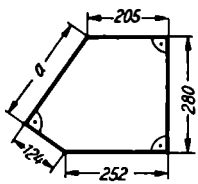


Bild 214

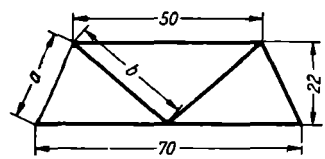


Bild 215

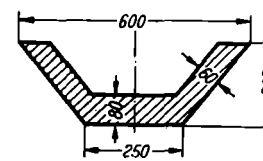


Bild 216

403. Ein Paßstück, das den Querschnitt eines gleichschenkligen Trapezes hat, sitzt in einer entsprechend ausgebildeten Nut (Bild 218). Berechne die Maße a und b und gib außerdem den zwischen Nut und Paßstück frei bleibenden Querschnitt A an.

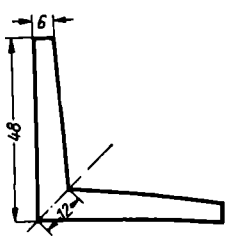


Bild 217

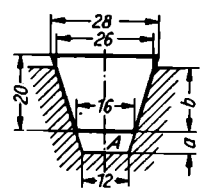


Bild 218

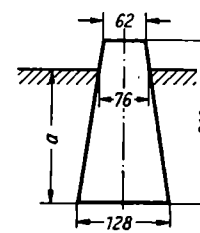


Bild 219

404. Berechne die Eintauchtiefe a des im Bild 219 wiedergegebenen Schwimmers.

405. Von einem gleichschenkligen Trapez soll die eine Grundlinie zweimal und die andere dreimal so groß sein wie einer der Schenkel $a = 3$ cm. Gib den Umfang U und den Flächeninhalt A dieses Trapezes an.

406. Welchen Winkel α schließen zwei aufeinanderfolgende Seiten
a) eines regelmäßigen Zwölfecks,
b) eines regelmäßigen Vierzehnecks,
c) eines regelmäßigen Fünfzehnecks,
d) eines regelmäßigen Achtzehnecks
ein?
Berechne außerdem die Spitzenwinkel γ der Bestimmungsdreiecke dieser Vielecke.

407. Wie groß sind die Winkel α und β des im Bild 220 dargestellten Pentagonsternes? Stelle außerdem die Formeln für die Strecken b und c und den Flächeninhalt A des Sternes auf. Nimm die Seite a des regelmäßigen Fünfecks als bekannt an.

408. Einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm ist ein regelmäßiges Achteck einbeschrieben. Berechne die Seite s, den Flächeninhalt A und den Radius r_1 des einbeschriebenen Kreises.

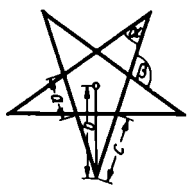


Bild 220

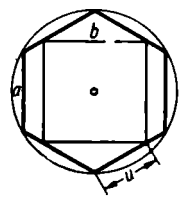


Bild 221

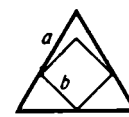


Bild 222

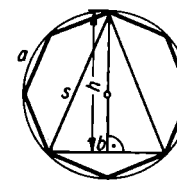


Bild 223

409. Einem Kreis ist ein regelmäßiges Dreieck mit der Seite $s = 4$ cm einbeschrieben. Wie groß ist die Seite s_6 des dem gleichen Kreis einbeschriebenen Sechsecks?

410. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck sollen flächengleich sein. Wie groß ist für diesen Fall die Seite b des Sechsecks zu machen, wenn die Quadratseite $a = 10$ cm gegeben ist?

411. Drücke den Flächeninhalt A eines regelmäßigen

a) Fünfecks, b) Sechsecks, c) Achtecks, d) Zehnecks

durch den Umfang U aus.

412. Einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite $a = 8$ cm ist ein Quadrat mit der Seite b einbeschrieben. Drücke b durch a aus und gib eine Konstruktion für b an (Bild 221).

413. Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 3$ cm ist ein Quadrat mit der Seite b einbeschrieben. Drücke b durch a aus (Bild 222).

414. Einem regelmäßigen Achteck mit der Seite a ist ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben. Drücke die Stücke b, s, h und den Flächeninhalt A des Dreiecks durch $a = 6$ cm aus (Bild 223).

415. Ein regelmäßiges Sechseck und ein regelmäßiges Achteck sollen gleichen Umfang haben. Berechne die Achteckseite b und die Flächeninhalte A_6 und A_8 des Sechs- und Achtecks für diesen Fall. Die Sechseckseite sei $a = 2$ cm.

416. Einem Kreis mit dem Radius r sind ein regelmäßiges Fünf- und Zehneck einbeschrieben. Bestimme die Verhältnisse ihrer Flächeninhalte, Umfänge und Seiten.

417. Zwei nach Bild 224 in ein Quadrat einbeschriebene gleichseitige Dreiecke begrenzen das schraffiert gezeichnete unregelmäßige Sechseck. Drücke dessen Flächeninhalt A durch die Quadratseite $a = 5$ cm aus.

418. Von einem regelmäßigen Fünfeck ist der Umfang $U_5 = 15$ cm gegeben. Wie groß sind seine Seite s_5, sein Umkreisradius r_5 und sein Flächeninhalt A_5?

419. Die Grundfläche eines alten Brunnens, der die Form eines regelmäßigen Achtecks hat, beträgt 15,4 m². Wie groß ist seine Seite s?

420. Der Querschnitt einer Säule ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $s = 32$ cm. Sie ruht auf einem zylindrischen Sockel. Berechne dessen Durchmesser d für den Fall, daß er beiderseits um je 6 cm über die größte Diagonale des Säulenquerschnitts übersteht.

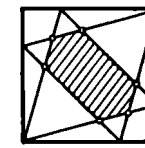


Bild 224

421. Der Boden eines aus Blech gefertigten Ziergefäßes bildet ein regelmäßiges Fünfeck mit dem Umfang $U = 20$ cm. Er soll durch einen solchen von der Form eines regelmäßigen Zehnecks mit gleichem Umfang ersetzt werden. Berechne den Umkreisradius r des neuen Bodens.

422. Einem Kreis vom Radius $r = 6$ cm ist ein Hexagramm (zwei entgegengesetzt parallele regelmäßige Dreiecke) einbeschrieben. Zeichne es und berechne seinen Flächeninhalt A.

423. Ein Abdeckblech hat die Form eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seite $s = 3{,}2$ cm. Es ist zu groß und wird deshalb beschnitten. Die Schnitte werden allseits parallel zu den Seiten in 5 mm Abstand vom Rand geführt. Welchen Flächeninhalt A und welche Seite s_1 hat das bearbeitete Blech?

424. Der Querschnitt eines Dreikantstahles beträgt $A = 8$ cm². Er soll durch einseitiges Abfräsen auf 5 cm² verringert werden. Welche Anstelltiefe a des Fräsers muß gewählt werden, wenn die Form des regelmäßigen Dreiecks erhalten bleiben soll?

425. Ein Pavillon besteht aus drei Etagen, deren Grundrisse regelmäßige Sechsecke bilden. Die Seite der untersten Etage ist $s = 3$ m. Wie groß sind die Seiten s_1 und s_2 der beiden nächsten Etagen, wenn jede von ihnen gleichmäßig um 0,5 m von der vorhergehenden zurücksteht?

426. Mit einem Faden von 45 m Länge soll ein regelmäßiges Zehneck abgesteckt werden. Wie groß wird dessen Flächeninhalt A?

427. Mit einem Draht von 15 cm Länge werden nacheinander ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck gebildet. Berechne die Flächeninhalte dieser Figuren.

428. Das Seitenfenster einer Wartehalle bildet ein regelmäßiges Sechseck. Es ist aus Leisten von 5 cm Breite gezimmert. Sein äußerer Umfang beträgt 3 m. Welche Fläche A steht für den Lichteinfall zur Verfügung, wenn die Verkittung unberücksichtigt bleibt?

429. Ein quadratisches Blech mit 16 cm Seitenlänge wird an seinen Ecken so beschnitten, daß ein regelmäßiges Achteck entsteht. Wie groß ist dessen Fläche A?

430. 12 Stück Bleche von der Form eines regelmäßigen Sechsecks werden so bearbeitet, daß 12 regelmäßige Dreieckbleche mit größtmöglicher Seite entstehen. Berechne den Schnittverlust A, wenn die Sechseckseite 14,5 cm beträgt.

431. Die Irisblende einer Kamera besteht aus zehn Lamellen, so daß eine Blendenöffnung von der Form eines regelmäßigen Zehnecks entsteht. Bei der Blendenstellung 3,5 ist die Seite dieses Zehnecks 8 mm lang. Wie groß wird diese Seite s für die nächste Blendenstellung 4, bei der die Blendenöffnung bekanntlich um die Hälfte von der bei Stellung 3,5 reduziert wird?

432. Für Straßenleuchten sollen Steinsäulen hergestellt werden, deren Querschnitt ein regelmäßiges Zehneck ist. Wie groß muß eine Seite s dieses Zehnecks sein, wenn für den Abstand zweier paralleler Seiten 45 cm vorgeschrieben sind?

433. Eine Kachel von der Form eines regelmäßigen Achtecks hat einen Flächeninhalt $A = 250\,\text{cm}^2$. Berechne eine Seite s der Kachel.

434. Aus einem runden Stamm von 56 cm Durchmesser soll ein Balken hergestellt werden, dessen Querschnitt die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Berechne den Umfang U des Querschnitts für den Fall, daß die Schnittverluste möglichst klein gehalten werden.

435. Die acht einzelnen Spiegel eines achteckigen Drehspiegels werden aus 3 mm dickem Glas geschnitten und so auf einer Walze montiert, daß sie ein regelmäßiges Achteck bilden. Berechne den Walzendurchmesser d. Berücksichtige, daß die Spiegelrückseiten die Walze berühren, zwischen den aneinanderstoßenden Spiegelkanten kein Zwischenraum bleibt und der Abstand von Kante zu Kante 3,5 cm beträgt.

436. Einem Kreis vom Radius $r = 8$ cm ist ein Sehnenviereck einbeschrieben. Berechne den Flächeninhalt A, den Umfang U und die Diagonale e des Vierecks für $n = r/2$ (Bild 225).

437. Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks im Bild 225 sei $A = 36\,\text{cm}^2$. Wie groß ist sein Umkreisradius r, wenn seine Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen und die Diagonale e die Diagonale f im Verhältnis $e : f = m : n = 4 : 3$ teilt?

438. Welchen Durchmesser d hat ein Kreis mit dem Flächeninhalt $A = 30\,\text{cm}^2$?

439. Drücke den Umfang U eines Kreises durch den Flächeninhalt $A = 8\,\text{cm}^2$ aus.

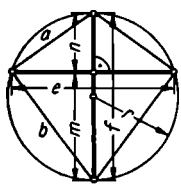


Bild 225

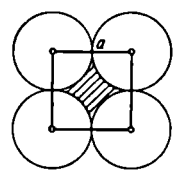


Bild 226

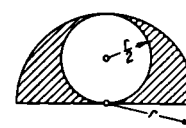


Bild 227

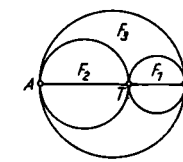


Bild 228

440. Um die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seite a sind vier Kreise mit dem Radius $r = a/2$ geschlagen. Gib eine Formel für den Inhalt der schraffierten Fläche A an (Bild 226).

441. Einem Halbkreis mit dem Radius r ist ein Kreis einbeschrieben. Gib eine Formel für den Inhalt der schraffierten Fläche A an (Bild 227).

442. Von einem Kreis sind die Sehne $s = 4$ cm und die Höhe $h = 1$ cm des zu dieser Sehne gehörigen Bogens bekannt. Berechne den Radius r des Kreises.

443. Drücke die Sehne s eines Kreises durch die Höhe h des zur Sehne gehörigen Bogens und durch den Kreisumfang U aus.

444. Die Strecke $AB = 2r_3$ ist durch den Teilpunkt T stetig geteilt. In welchem Verhältnis stehen die Flächen A_1, A_2 und A_3 der über den drei Strecken geschlagenen Kreise (Bild 228).

445. Von einem Kreisring sind der innere Radius $r_2 = 5$ cm und der Flächeninhalt $A = 12\,\text{cm}^2$ gegeben. Berechne den äußeren Radius r_1.

446. Zwei Kreise mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 sollen einem Kreisring flächengleich sein. r_2 ist der größere, r_4 der kleinere Radius des Ringes. Drücke r_2 und r_4 durch A_1 und A_2 für folgende Fälle aus:

a) r_4 ist das arithmetische Mittel,

b) r_4 ist das geometrische Mittel,

c) r_4 ist das harmonische Mittel

der Radien r_1 und r_2 der gegebenen Kreise.

447. Die Summe der Radien eines Kreisringes sei $a = r_1 + r_2 = 20$ cm. Berechne r_1 und r_2, wenn außerdem der Flächeninhalt $A = 40$ cm² des Ringes bekannt ist.

448. Stelle den Flächeninhalt A eines Kreisringes als Fläche eines Trapezes mit der Höhe $h = 2\pi \cdot (r_1 - r_2)$ dar.

449. Welche Beziehung besteht zwischen den Radien r_1 und r_2 eines Kreisringes, wenn die Fläche des Ringes dem inneren Kreis mit dem Radius r_2 flächengleich ist?

450. Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich dem inneren Radius r_2 eines Kreisringes. Die Seite a des Dreiecks ist gleich dem äußeren Radius r_1 des Ringes. In welchem Verhältnis steht für diesen Fall die Fläche A_1 des Ringes zur Fläche A_2 des inneren Kreises?

451. Ein Kupferdraht von 2 mm² Querschnitt soll durch einen Aluminiumdraht von dreifachem Querschnitt ersetzt werden. Welchen Durchmesser d muß der Aluminiumdraht erhalten?

452. Das prall mit Luft gefüllte Rad eines Autos muß 400 Umdrehungen ausführen, um einen Kilometer zurückzulegen. Welchen Durchmesser d hat es demzufolge?

453. Der Außendurchmesser eines Autoreifens beträgt 92 cm. Wieviel mehr Umdrehungen u muß dieser je Kilometer machen, wenn er nach dem Entweichen von Luft nur noch einen wirksamen Außendurchmesser von 88 cm hat?

454. Aus einem Blech von 35 cm Breite soll ein Rohr gebogen werden, dessen lichte Weite 10 cm beträgt. Berechne den für den Falz übrigbleibenden Rest a.

455. In einem Rohr sollen stündlich 500 m³ Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0,11 m/s gefördert werden. Welchen Innendurchmesser d muß das Rohr haben?

456. Wie groß ist der Blechbedarf A für das im Bild 229 gezeigte Werkstück?

457. Gib die in einer Minute ausgeführten Umdrehungen n eines Rades von 78 cm Durchmesser an, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von 42 km/h fortbewegt.

458. Gib die Durchmesser d_1, d_2 und d_3 einer Stufenscheibe an, deren Drehzahl 50 min^{-1} beträgt und deren einzelne Stufen die Umfangsgeschwindigkeiten 100 m/min, 72 m/min und 60 m/min haben sollen.

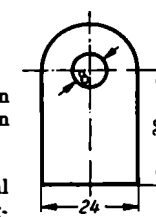


Bild 229

459. Die Teilkreisumfänge zweier Stirnzahnräder mit Evolventenverzahnung sind $U_{01} = 328$ mm und $U_{02} = 142$ mm. Berechne den Achsenabstand a der Räder.

460. An der wirksamen Fläche des Tellers eines Sicherheitsventiles tritt bei einem Druck von 16 kp/cm² eine Druckkraft von 156 kp auf. Welchen Durchmesser d hat diese Fläche?

461. Berechne die Bruchlast σ_b eines Werkstoffes, von dem ein kreisrunder Stab mit 1,4 cm Durchmesser bei einer Belastung von 600 kp zerreißt.

462. Um eine Scheibe vom Durchmesser d wird eine Schnur im gleichmäßigen Abstand b gelegt. Um welchen Betrag a ist die Schnur gegenüber dem Scheibenumfang länger zu machen?

463. Bild 230 zeigt den Querschnitt durch den Anodenzylinder einer Senderöhre, der eine Höhe von 65 mm hat. Berechne den Blechbedarf A unter Vernachlässigung der Blechdicke.

464. Welchen Durchmesser d muß ein Kupferdraht haben, der bei einer Länge von 40 m einen Widerstand von 24 Ω aufweisen soll? ($\varrho = 0{,}017\ \Omega\ \mathrm{mm^2/m}$)

465. Eine rechteckige Schiene mit der Breite 15 mm und der Höhe 24 mm soll durch eine kreisrunde Stange von gleichem Querschnitt ersetzt werden. Welchen Durchmesser d muß diese haben?

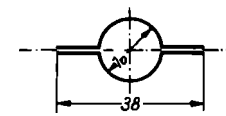


Bild 230

466. Zwei kleine Kanalisationsrohre mit den lichten Weiten 24 cm und 38 cm sollen durch ein einziges Rohr mit gleichem Querschnitt ersetzt werden. Berechne dessen Durchmesser d.

467. An einem Wagen beträgt der Durchmesser der Vorderräder 32 cm und der der Hinterräder 38 cm. Berechne die Zahl n der Umdrehungen, die die Vorderräder mehr ausführen müssen, wenn der Wagen eine Strecke von 8,4 km zurücklegt.

468. Der Achsenabstand zweier Reibräder beträgt 47 cm. Berechne den Durchmesser d des einen Rades, wenn der Umfang des anderen 60 cm beträgt.

469. Von einer Welle mit dem Umfang $U = 21$ cm wird eine 0,5 cm dicke Schicht abgedreht. Um welchen Betrag A verringert sich der Querschnitt der Welle, und wie groß ist der neue Umfang U_1?

470. Berechne den entstehenden Schnittverlust A, wenn das im Bild 231 dargestellte Blech aus vorgeschnittenen Rechteckplatten von 48 mm Breite und 64 mm Höhe herausgearbeitet wird.

471. Berechne die Grundfläche A des im Bild 232 dargestellten Brückenpfeilers.

472. Gib den Querschnitt A des im Bild 233 gezeigten Profilstahles an.

473. Die Teilkreisdurchmesser zweier Zahnräder mit Evolventenverzahnung betragen 7,2 cm und 9,6 cm. Ihr Achsenabstand wurde mit 13 cm gemessen. Welchen Teilkreisumfang U müßte ein Zwischenrad haben, das mit beiden Rädern im Eingriff steht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, die durch die Mittelpunkte der gegebenen Räder bestimmt ist?

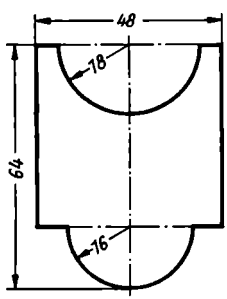


Bild 231

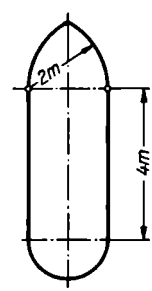


Bild 232

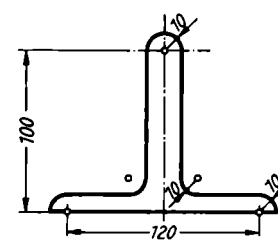


Bild 233

474. Eine Stahlwelle von 32 mm Durchmesser soll eine quadratische Aussparung erhalten, so daß sich der Wellenquerschnitt um die Hälfte verringert. Gib die Quadratseite a an.

475. Ein nahtlos gewalztes Rohr hat eine Wanddicke von 14 mm und einen lichten Durchmesser von 75 mm. Gib den Materialquerschnitt A an.

476. Ein Brunnen mit kreisringförmigem Querschnitt hat einen äußeren Umfang von 9,5 m und einen inneren Umfang von 7,2 m. Berechne die Wanddicke a und den Querschnitt A des Mauerwerkes.

477. Eine Bremstrommel von 42 cm Umfang wird mit Bremsbelag von 6 mm Dicke belegt. Welchen Umfang U und welchen Durchmesser d erhält dadurch die Trommel?

478. Eine Stahlwelle von 84 mm Durchmesser soll so ausgebohrt werden, daß der ursprüngliche Querschnitt auf die Hälfte reduziert wird. Berechne den Bohrungsdurchmesser d.

479. Über ein Vierkanteisen mit quadratischem Querschnitt und der Seitenlänge $a = 31$ mm soll eine zylindrische Hülse von 150 mm äußerem Umfang geschoben werden. Berechne die Wanddicke a der Hülse und gib ihre inneren und äußeren Durchmesser d_1 und d_2 an.

480. Ein Teleskopstativ ist aus drei ineinander verschiebbaren Rohren von 0,8 mm Wanddicke zusammengesetzt. Gib die Querschnitte A_1, A_2 und A_3 der Rohre an, wenn der Innendurchmesser des kleinsten Rohres $d_3 = 7$ mm mißt.

481. Aus einem Blechstreifen von 1,5 m Länge und 3 cm Breite sollen Ringe von 24 mm Außendurchmesser und 12 mm Innendurchmesser ausgestanzt werden. Wie groß ist der Abfall A, wenn zwischen je zwei Ringen und vom Anfang und Ende des Streifens ein Abstand von 3 mm eingehalten werden muß?

482. Die Schleifringe eines Drehstromgenerators sollen eine Dicke von 4 mm und einen inneren Umfang von 118 mm haben. Berechne ihre Umfangsgeschwindigkeit v am äußeren Umfang bei einer Drehzahl von $n = 1500\ \mathrm{min}^{-1}$.

483. Gib den Querschnitt A der im Bild 234 dargestellten Schelle an. Fasse die Laschen als Rechtecke auf.

484. Von einem Kreis sind der Bogen $b = 6$ cm und der Radius $r = 4$ cm bekannt. Wie groß ist der zum Bogen gehörige Mittelpunktswinkel α, und wie groß ist der Flächeninhalt A des entsprechenden Sektors?

485. Wie groß ist der Flächeninhalt A der drei Segmente, die entstehen, wenn einem Kreis mit dem Radius $r = 8$ cm ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben wird?

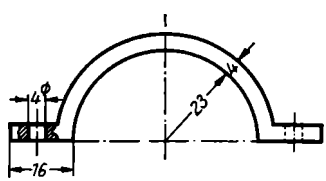


Bild 234

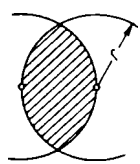


Bild 235

486. Der Bogen b eines Sektors mit dem Radius $r = 4$ cm sei ebenfalls r. Wie groß sind der Flächeninhalt A des Sektors und der Radius r_1 eines Kreises, der dem Sektor flächengleich ist?

487. Wie groß ist das schraffiert gezeichnete Flächenstück A im Bild 235, wenn $r = 6$ cm gegeben ist?

488. Die Flächeninhalte eines Sektors und eines Segmentes, die beide zu dem gleichen Kreis gehören, sollen flächengleich sein. Wie groß ist der Bogen b_1 des Sektors für diesen Fall zu machen, wenn vom Segment der Bogen $b_2 = 5$ cm, die Bogenhöhe $h = 1$ cm und die Sehne $s = 4$ cm gegeben sind?

489. Wie groß ist die im Bild 236 schraffiert gezeichnete Fläche A, wenn $r = 6$ cm gegeben ist?

490. Welche Beziehung besteht zwischen dem Flächeninhalt A_1 der im Bild 237 schraffiert gezeichneten Fläche und dem Flächeninhalt A_2 des rechtwinkligen Dreiecks ABC?

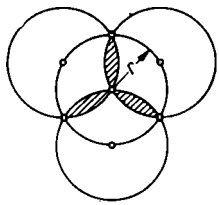


Bild 236

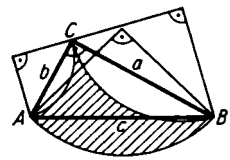


Bild 237

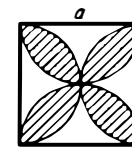


Bild 238

Bild 239

491. Berechne den Flächeninhalt A der im Bild 238 schraffiert gezeichneten Fläche. Die Seite des Quadrates sei $a = 3$ cm.

492. Wie groß ist der Flächeninhalt A der im Bild 239 schraffiert gezeichneten Fläche, wenn die Seite $a = 8$ cm des gleichseitigen Dreiecks bekannt ist?

493. Berechne die gestreckte Länge l des im Bild 240 dargestellten Rohrbogenausgleichers.

494. Wie groß ist der Flächeninhalt A des im Bild 241 dargestellten Bleches?

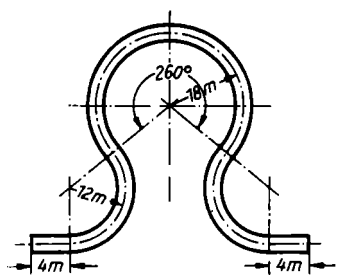


Bild 240

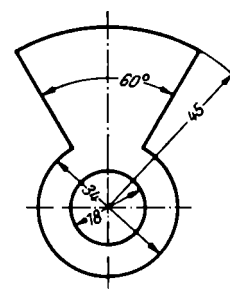


Bild 241

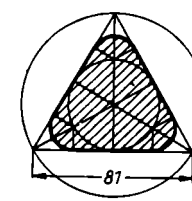


Bild 242

495. Berechne den schraffierten Querschnitt A einer Welle, dessen Abmessungen aus Bild 242 hervorgehen.

496. Welchen Umfang U hat das im Bild 243 dargestellte Werkstück?

497. Bestimme den Durchflußquerschnitt A des im Bild 244 dargestellten Kanalisationsrohres.

498. Berechne das fehlende Maß s im Bild 245 und gib den Querschnitt A des Doppel-T-Ankers an.

499. Ergänze α, b_1 und b_2 im Bild 246.

500. Wie groß ist der Schnitt A einer plankonvexen Linse, deren Abmessungen aus Bild 247 hervorgehen?

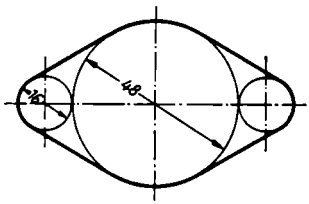


Bild 243

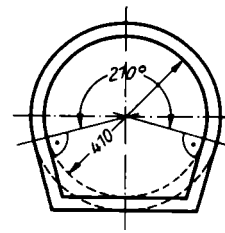


Bild 244

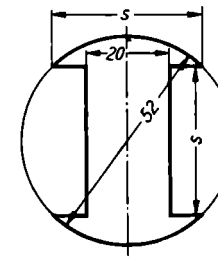


Bild 245

501. Berechne den Materialbedarf A der im Bild 248 dargestellten Kondensatorplatte.

502. Im Bild 249 ist die Platte eines Schmetterlingskreises dargestellt, der in der Dezimeterwellentechnik zur Kapazitäts- und Induktivitätsänderung von Schwingkreisen benutzt wird. Berechne den Materialbedarf A für 80 solcher Platten.

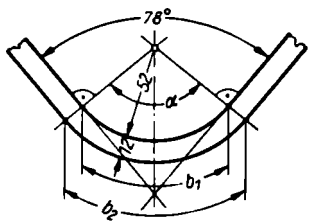


Bild 246

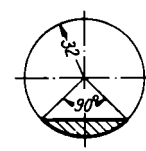


Bild 247

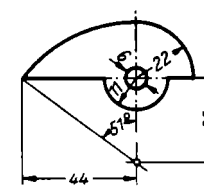


Bild 248

503. Ermittle den Umfang U und den Blechbedarf A des im Bild 250 gezeigten Werkstückes.

504. Aus einem Blech von 24 mm Durchmesser soll ein gleichseitiges Dreieck herausgeschnitten werden, dessen Ecken auf dem Kreisumfang liegen. Berechne den Flächeninhalt A eines der drei entstehenden Segmente.

505. Gib den Materialbedarf A der vier im Bild 251 dargestellten Lamellen eines Stromwenders an.

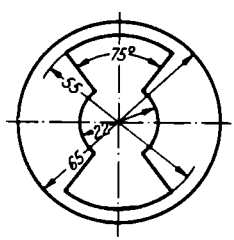


Bild 249

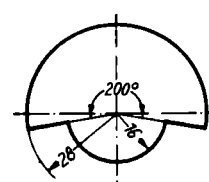


Bild 250

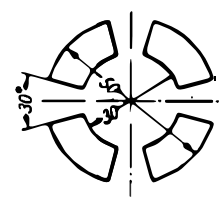


Bild 251

506. Berechne die fehlenden Maße a und b des im Bild 252 dargestellten Bremsklotzes.

507. Der Durchmesser einer Bremstrommel beträgt 250 mm. Ein auf der Trommel liegendes Bremsband berührt ihren Umfang auf einer Länge von 540 mm. Berechne den Umschlingungswinkel α des Bandes.

508. Eine waagerecht liegende Tonne von 340 mm Durchmesser ist bis zu zwei Drittel ihres Durchmessers mit Wasser gefüllt. Die Wasseroberfläche unterteilt den zur Achse senkrechten Schnitt durch die Tonne demnach in zwei Segmente. Berechne deren gemeinsame Sehne s und den Wasserstand h.

509. An der Oberfläche einer Welle von 40 mm Durchmesser ist parallel zur Achse eine Fläche anzufräsen, die in dem zur Achse senkrechten Schnitt eine Breite von 20 mm haben soll. Wie groß muß die Anstelltiefe h des Fräsers gewählt werden?

510. Ein Zahnrad mit dem Teilkreisdurchmesser $d_0 = 288$ mm hat 36 Zähne. Berechne Modul m und Teilung t.

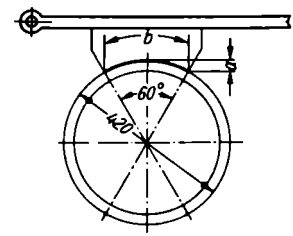


Bild 252

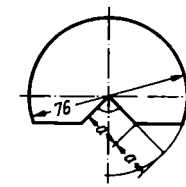


Bild 253

511. Aus einer Scheibe von 67 mm Durchmesser soll ein Sektor derart herausgeschnitten werden, daß der Scheibenumfang auf einer Bogenlänge von 51 mm unterbrochen wird. Welchen Mittelpunktswinkel α muß der Sektor demzufolge haben?

512. Berechne den Blechabfall A, der entsteht, wenn die im Bild 253 dargestellte Lehre aus einer kreisförmigen Platte von 76 mm Durchmesser herausgearbeitet wird.

25. Das Bogenmaß

Definition:

Das **Bogenmaß** $\widehat{\alpha}$[1]) oder arc α[2]) ist das Verhältnis der Bogenlänge zum Radius am Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel α.

$$\boxed{\widehat{\alpha} = \operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{r}} \tag{95}$$

Das Bogenmaß ist als Quotient zweier Strecken *dimensionslos*. Da alle Kreisausschnitte mit gleichem Mittelpunktswinkel ähnlich sind (Bild 254) und da der Bogen dem zugehörigen Mittelpunktswinkel proportional ist, läßt sich das Bogenmaß als Maß für den Winkel verwenden.

Satz:

Berechnung des Bogenmaßes:

$$\boxed{\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \alpha \cdot 0{,}01745\ \text{Grad}^{-1}} \tag{96}$$

Beweis: Man setzt in der laut Definition angegebenen Gleichung $b = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ ein.

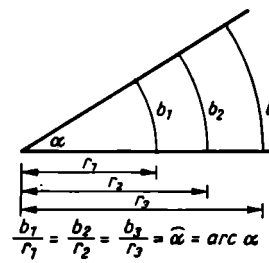


Bild 254

Für einige ausgewählte Winkel ergeben sich folgende Werte:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6} \approx$	$\frac{\pi}{4} \approx$	$\frac{\pi}{3} \approx$	$\frac{\pi}{2} \approx$	$\pi \approx$	$\frac{3}{2}\pi \approx$	$2\pi \approx$
	0,0000	0,5236	0,7854	1,0472	1,5708	3,1416	4,7124	6,2832

BEISPIEL

Welcher Winkel hat das Bogenmaß 1? Oder anders formuliert: Bei welchem Winkel ist die Bogenlänge gleich dem Radius?

Lösung:

$$b = \pi r \frac{x}{180^\circ} = r$$

ergibt $x = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \underline{\underline{57^\circ 17' 43''}}$.

[1]) Lies: alpha Bogen.
[2]) Lies: arcus alpha.

Definition:

Der Winkel, dessen Bogenmaß gleich 1 ist, heißt **Radiant,** bezeichnet mit 1 rad. (Vgl. Anhang!)

Praktisch bestimmt man das Bogenmaß mit Hilfe der Tabelle für die Bogenlänge. Da ihr der Einheitskreis zugrunde liegt, ist dort die Maßzahl der Bogenlänge gleich dem Bogenmaß.
Auf fast jedem Rechenstab ist eine Marke ϱ eingraviert. Sie dient zur Umrechnung von Bogen- in Gradmaß und umgekehrt. Es ist nämlich

$$\varrho = \frac{180°}{\pi},$$

so daß für die Umrechnung folgende einfache Beziehungen gelten:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\alpha}{\varrho} \quad \text{und} \quad \alpha = \varrho \cdot \widehat{\alpha}.$$

26. Dreiecksberechnung

26.1. Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

26.1.1. Die vier Winkelfunktionen

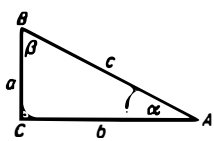


Bild 255

Die vier **trigonometrischen Funktionen,** auch **Winkelfunktionen** genannt, werden zunächst am rechtwinkligen Dreieck definiert. Dabei bezeichnet man eine Kathete als *Ankathete* oder *Gegenkathete,* je nachdem, ob sie dem betrachteten Winkel anliegt oder gegenüberliegt. Die verwendeten Bezeichnungen sind aus Bild 255 ersichtlich.

Definition:

Der **Sinus** eines Winkels α, bezeichnet mit $\sin\alpha$ [1]), ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \tag{97}$$

Der **Cosinus** eines Winkels α, bezeichnet mit $\cos\alpha$ [2]), ist das Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \tag{98}$$

[1]) Lies: Sinus alpha.
[2]) Lies: Cosinus alpha.

Der **Tangens** eines Winkels α, bezeichnet mit $\tan\alpha$ [1]), ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \tag{99}$$

Der **Cotangens** eines Winkels α, bezeichnet mit $\cot\alpha$ [2]), ist das Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete.

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} \tag{100}$$

Durch jeden dieser Quotienten wird jedem Winkel ein bestimmter Zahlenwert zugeordnet. Damit sind diese Quotienten *Funktionen* des Winkels.
Die Funktionswerte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ sind als Verhältnisse zweier Strecken reine Zahlen, also *dimensionslos*. Ferner sind sie unabhängig von der Größe des betrachteten Dreiecks, da alle rechtwinkligen Dreiecke, die den Winkel α enthalten, ähnlich sind. In Bild 256 gilt beispielsweise:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \sin\alpha\,.$$

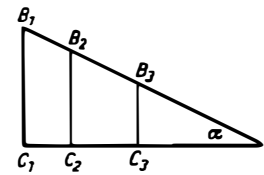


Bild 256

Satz:

Der Funktionswert eines Winkels ist gleich dem Funktionswert der Co-Funktion des Komplementwinkels.

Beweis: Entsprechend den Definitionen kann man aus Bild 255 ablesen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta = \cot(90° - \alpha)$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta = \tan(90° - \alpha) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Diese Beziehungen werden bei der Einrichtung der Tabellen der Winkelfunktionen ausgenützt.

Zwischen den Winkelfunktionen bestehen folgende weitere Beziehungen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad [3]), \tag{101}$$

[1]) Lies: Tangens alpha.
[2]) Lies: Cotangens alpha.
[3]) Statt $\sin\alpha \cdot \sin\alpha = (\sin\alpha)^2$ schreibt man nach Vereinbarung $\sin^2\alpha$ (gelesen: sinus Quadrat α).

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha}, \tag{102}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}. \tag{103}$$

Beweis: In Bild 255 ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Durch Quadrieren und anschließende Addition beider Werte erhält man:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Damit ist Formel (101) bewiesen. Für Formel (102) gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha.$$

Formel (103) folgt unmittelbar aus den Definitionen für $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$.
Diese Beziehungen gestatten es, eine Winkelfunktion durch die andere auszudrücken. Beispielsweise folgt aus Formel (101):

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (\sin\alpha \text{ durch } \cos\alpha \text{ ausgedrückt}).$$

Setzt man diesen Wert in Formel (102) ein, kann man $\tan\alpha$ durch $\sin\alpha$ ausdrücken:

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Löst man diese Formel nach $\cos\alpha$ auf, kann man $\cos\alpha$ durch $\tan\alpha$ ausdrücken usw. In der folgenden Zusammenstellung sind alle möglichen Fälle verzeichnet, deren Herleitung dem Leser überlassen bleibe.

gesucht \ gegeben	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

Solange man nur mit spitzen Winkeln arbeitet, gelten die positiven Vorzeichen der Wurzeln.

BEISPIEL

Gegeben ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, *gesucht ist* $\cot\alpha$.

Lösung:

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}$$

26.1.2. Kurvenbilder der Winkelfunktionen

Im *Einheitskreis* lassen sich die Maßzahlen der Winkelfunktionen durch Strecken darstellen, sofern man nur beachtet, daß der Nenner der Quotienten mit der Strecke zusammenfällt, die als Länge die Einheit hat, nämlich den Radius.
In Bild 257 ergibt sich für die vier Winkelfunktionen:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AC}}{r}; \qquad \sin\alpha \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AM}}{r}; \qquad \cos\alpha \mathrel{\widehat{=}} \overline{AM}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BD}}{r}; \qquad \tan\alpha \mathrel{\widehat{=}} \overline{BD}.$$

$$\cot\alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{EF}}{r}; \qquad \cot\alpha \mathrel{\widehat{=}} \overline{EF}.$$

Auf diese Weise könnte man die Zahlenwerte der einzelnen Funktionen für jeden beliebigen Winkel ermitteln. (Tatsächlich bedient man sich dazu jedoch der Mittel der

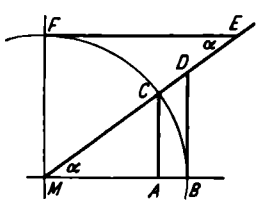


Bild 257

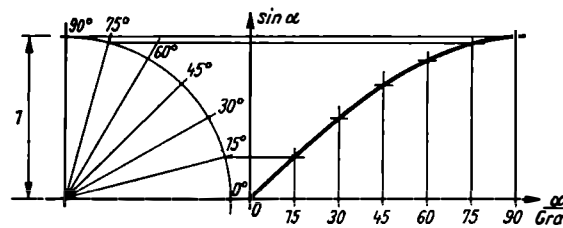


Bild 258

Höheren Mathematik.) Weiterhin kann man mit Hilfe dieser Darstellung die Kurvenbilder der Winkelfunktionen konstruieren (Bilder 258 bis 261). Bei Konstruktion der Cosinus- und Cotangenskurve dreht man den Einheitskreis aus praktischen Gründen um 90° im mathematisch positiven Sinne.
An den Kurvenbildern erkennt man folgende Besonderheiten:
Die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ liegen zwischen 0 und 1.
Der Wert von $\tan\alpha$ wird bei Annäherung an den Winkel $\alpha = 90°$ immer größer, bis er im Grenzfall unendlich groß geworden ist, $\tan 90° = \infty$. Das gleiche gilt für $\cot\alpha$ bei Annäherung an den Winkel $\alpha = 0°$. Es gilt: $\cot 0° = \infty$.
Die Kurvenbilder einer Funktion und ihrer Co-Funktion zeigen, bedingt durch die Konstruktion, *gleichen* Verlauf, sofern man bei der Co-Funktion die Werte für α *ent-*

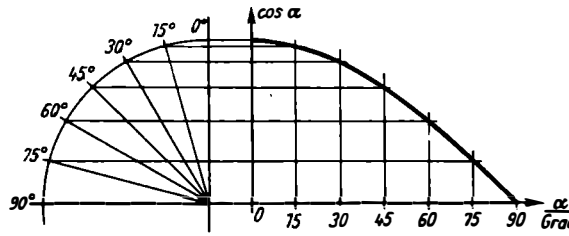


Bild 259

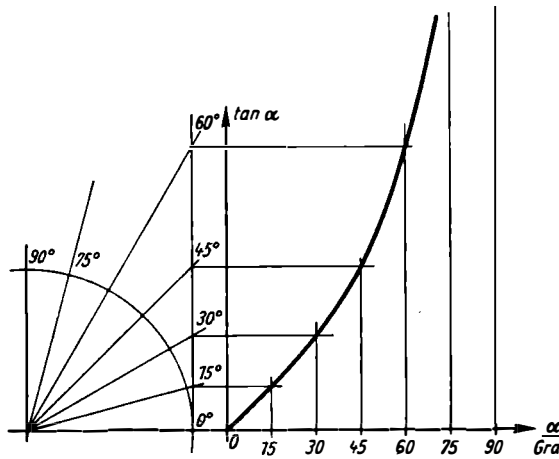


Bild 260

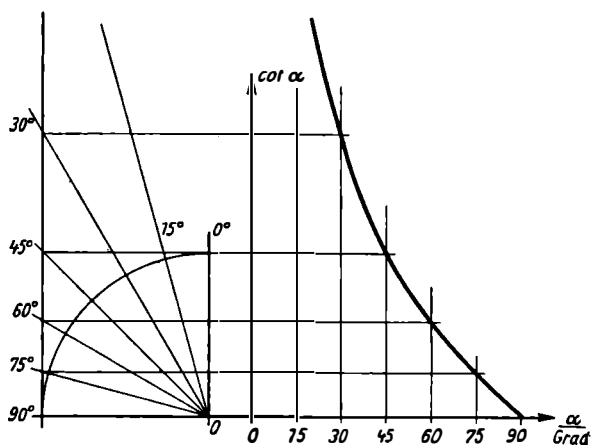


Bild 261

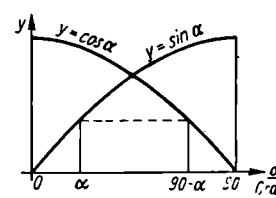


Bild 262

gegengesetzt durchläuft. Daraus ergibt sich eine Veranschaulichung des Satzes aus 26.1., in Bild 262 gezeigt am Beispiel der Sinus- und Cosinusfunktion. Beide Kurvenbilder sind übereinandergezeichnet. Man erkennt:

$$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha).$$

26.1.3. Zahlenwerte der Winkelfunktionen

Für einige besondere Winkel lassen sich die Zahlenwerte der vier Winkelfunktionen auf elementarem Wege berechnen, und zwar aus dem Quadrat bzw. aus dem gleichseitigen Dreieck.

Beispielsweise ergibt sich aus Bild 263:

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Oder aus Bild 264 folgt:

$$\tan 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

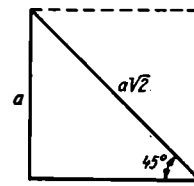


Bild 263

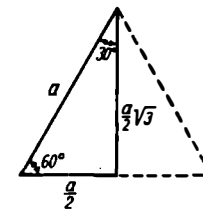


Bild 264

Alle aus diesen beiden Figuren abzuleitenden Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Berechnung dieser Werte bleibe dem Leser überlassen. Die Werte für 0° und 90° liest man aus den Kurvenbildern ab.

Funkt. \ α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Im allgemeinen entnimmt man die Zahlenwerte der Winkelfunktionen einer Tabelle, der Tafel der *natürlichen Werte* der Winkelfunktionen.

Diese Tafel ist folgendermaßen eingerichtet:

In der linken Spalte stehen, von oben nach unten zählend, die Winkel von 0° bis 45°, rechts davon die vier Funktionswerte. Die Spalten „D" enthalten die Tafeldifferenzen, die zur Interpolation gebraucht werden.

Wegen der Komplementbeziehung der Winkelfunktionen (Satz in 26.1.) erübrigt es sich, die Funktionswerte der Winkel von 45° bis 90° gesondert aufzuführen.

Es gilt beispielsweise:

$$\sin 78°20' = \cos 11°40' = 0{,}97934.$$

Um die dafür nötige Umrechnung zu sparen, sind die Winkel von 90° bis 45°, also die Komplementwinkel der Winkel von 0° bis 45°, in der rechten Spalte, von unten nach

oben zählend, angegeben. Die zu ihnen gehörenden Funktionsbezeichnungen stehen in der untersten Zeile der Tabelle.
Über die Interpolation siehe Abschnitte 3.6.8. und 7.2.2.4. Im übrigen geben die den Tabellen angefügten Erläuterungen zusätzliche Hinweise.

BEISPIELE

Man bestimme die fehlenden Seiten und Winkel der durch folgende Stücke gegebenen Dreiecke:

1. $c = 10\,\text{cm}, \quad \alpha = 90°, \quad \beta = 25°40'$

Lösung: (Bild 265)

$$\gamma = 90° - \beta = \underline{\underline{64°20'}}$$

$$\frac{b}{c} = \tan\beta \quad \text{ergibt} \quad b = c \cdot \tan\beta = 10\,\text{cm} \cdot 0{,}48055$$

$$\underline{\underline{b = 4{,}8\,\text{cm}}}$$

$$\frac{c}{a} = \cos\beta \quad \text{ergibt} \quad a = \frac{c}{\cos\beta} = \frac{10\,\text{cm}}{0{,}90133}$$

$$\underline{\underline{a = 11{,}1\,\text{cm}}}$$

2. $b = 5\,\text{cm}, \quad c = 12\,\text{cm}, \quad \alpha = 90°$

Lösung: (Bild 265)

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{169\,\text{cm}^2} = \underline{\underline{13\,\text{cm}}}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{c} = \frac{5\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = 0{,}41667$$

ergibt $\underline{\underline{\beta = 22°40'}}$

$$\gamma = 90° - \beta, \quad \underline{\underline{\gamma = 67°20'}}$$

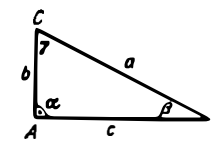


Bild 265

Die *Tabelle der Logarithmen der Winkelfunktionen* ist prinzipiell ebenso eingerichtet wie die der natürlichen Werte. Sie ist lediglich feiner unterteilt, da man mit ihr häufiger arbeitet als mit der Tabelle der natürlichen Werte. Zu den Logarithmen selbst ist folgendes zu bemerken:
Die meisten Werte der Winkelfunktionen sind *kleiner als* 1, ihre Logarithmen müßten also *negative Kennziffern* erhalten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist zu allen Logarithmen 10 *addiert*. Diesen Betrag muß man bei Berechnungen selbstverständlich wieder abziehen. Beispielsweise gilt:

$$\tan 38° = 0{,}78129$$
$$\lg \tan 38° = \lg 0{,}78129 = 0{,}89281 - 1,$$

nach Addition von 10 laut Tabelle:

$$\lg \tan 38° = 9{,}89281 - 10.$$

BEISPIELE

Man bestimme die fehlenden Seiten und Winkel der durch folgende Stücke gegebenen Dreiecke:

3. $a = 24{,}32\,\text{cm}, \ \alpha = 90°, \ \gamma = 38°17'$

Lösung: (Bild 265)

$$\beta = 90° - \gamma = \underline{\underline{51°43'}}$$

$$\frac{b}{a} = \cos\gamma \qquad \frac{c}{a} = \cos\beta$$

$$b = a\cos\gamma \qquad c = a\cos\beta$$

Num	Log			[1]
$a \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	1,38596	+	+	
$\cos\gamma$	9,89485 −10	+		
$\cos\beta$	9,79208 −10		+	
$b \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	1,28081			
$c \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	1,17804			

$b = 19{,}09\ \mathrm{cm}$

$c = 15{,}07\ \mathrm{cm}$

4. $a = 19{,}23\ \mathrm{cm}$, $b = 8{,}09\ \mathrm{cm}$, $\alpha = 90°$

Lösung: (Bild 265)

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)\cdot(a-b)} = \sqrt{27{,}32\ \mathrm{cm} \cdot 11{,}14\ \mathrm{cm}}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{8{,}09\ \mathrm{cm}}{19{,}23\ \mathrm{cm}} \qquad \gamma = 90° - \beta$$

Num	Log	
$(a+b)\ \mathrm{cm}^{-1}$	1,43648	+
$(a-b)\ \mathrm{cm}^{-1}$	1,04689	+
	2,48337	: 2
$c \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	1,24169	

Num	Log	
$b \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	0,90795	+
$a \cdot \mathrm{cm}^{-1}$	1,28398	−
	0,62397	− 1
$\sin\beta$	9,62397	− 10

$c = 17{,}45\ \mathrm{cm}$ $\qquad \beta = 24°\,53'$ $\qquad \gamma = 65°\,07'$

26.1.4. Spezielle Berechnungen

BEISPIELE

1. *Ein Mast wirft bei einem Sonnenstand von $\alpha = 54°$ einen Schatten der Länge $l = 24{,}8$ m. Wie hoch ist der Mast?*

Lösung: (Bild 266)

$$h = l \cdot \tan\alpha = 24{,}8\ \mathrm{m} \cdot \tan 54° \approx 24{,}8\ \mathrm{m} \cdot 1{,}38 \approx 34{,}1\ \mathrm{m}$$

Die Höhe beträgt 34,1 m.

2. *Zwischen zwei Gebäuden, die $d = 38{,}2$ m entfernt stehen, wird ein Drahtseil von $l = 39{,}8$ m Länge gespannt. In der Mitte wird eine Lampe von $G = 4{,}5$ kp Gewicht aufgehängt. Unter welchem Winkel γ stellen sich beide Seilstränge gegen die Horizontale ein und wie groß ist in jedem der Seilstränge die Zugkraft F? (Das Gewicht des Seiles wird nicht berücksichtigt.)*

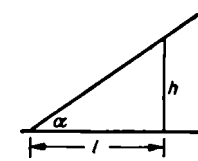


Bild 266

[1]) In der Num-Spalte dieses Schemas und aller folgenden werden sämtliche vorkommenden Größen durch ihre Dimension geteilt. Das hat folgenden Grund:
Der Logarithmus ist nur für reine Zahlen erklärt, nicht aber für Größen, die ja bekanntlich das Produkt einer Zahl mit einer Einheit darstellen.

Aus Gründen der Platzersparnis wird statt $\frac{h}{\mathrm{cm}}$ geschrieben $a \cdot \mathrm{cm}^{-1}$.

Lösung: (Bild 267)

$$\cos\gamma = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{d}{l}$$

$\frac{G}{2} : F = \sin\gamma$ ergibt

$$F = \frac{G}{2\sin\gamma}$$

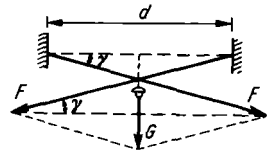


Bild 267

$\gamma = 16°\,18'$ $\quad F = 8{,}02\,\text{kp}$

Num	Log		
$d \cdot \text{m}^{-1}$	1,58206	+	
$l \cdot \text{m}^{-1}$	1,59988	−	
	0,98218 − 1		(+10)
$\cos\gamma$	9,98218 −10		
$\frac{1}{2}G \cdot \text{kp}^{-1}$	0,35218	+	
$\sin\gamma$	9,44819 −10	−	
$F \cdot \text{kp}^{-1}$	0,90399		

3. *Ein Körper mit dem Gewicht $G = 78{,}5$ kp liegt auf einer schiefen Ebene, die gegen die Horizontale um den Winkel $\alpha = 5°30'$ geneigt ist. Wie groß sind Hangabtriebskraft F_H und Normalkraft F_N?*

Lösung: (Bild 268)

$F_H = G \cdot \sin\alpha$

$F_N = G \cdot \cos\alpha$

Hangabtriebskraft $F_H = 7{,}52$ kp

Normalkraft $F_N = 78{,}14$ kp

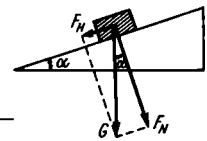


Bild 268

Num	Log		
$G \cdot \text{kp}^{-1}$	1,89487	+	+
$\sin\alpha$	8,98157 −10	+	
$\cos\alpha$	9,99800 −10		+
$F_H \cdot \text{kp}^{-1}$	0,87644		
$F_N \cdot \text{kp}^{-1}$	1,89287		

4. *Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante $a = 15$ cm und die Höhe $h = 20$ cm. Unter welchem Winkel α sind die Seitenflächen, unter welchem Winkel β die Seitenkanten gegen die Grundfläche geneigt? Wie groß ist der Winkel γ an der Spitze eines der gleichschenkligen Dreiecke, die die Mantelfläche bilden?*

Lösung: (Bild 269)

$$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$$

$$\tan\beta = \frac{h}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}$$

$$H = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{H} = \frac{a}{\sqrt{4h^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

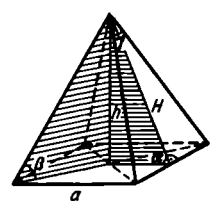


Bild 269

$\alpha = 69°\,27'$

$\beta = 62°\,04'$

$\gamma = 38°\,42'$

Num	Log		
$h \cdot \text{cm}^{-1}$	1,30103	+	
$a \cdot \text{cm}^{-1}$	1,17609	−	
	0,12494	+	+
2	0,30103	+	
$\sqrt{2}$	0,15052		+
$\tan\alpha$	0,42597		
$\tan\beta$	0,27546		
$x \cdot \text{cm}^{-2}$	3,26126		
$\sqrt{x} \cdot \text{cm}^{-1}$	1,63063	−	
$a \cdot \text{cm}^{-1}$	1,17609	+	
$\tan\frac{\gamma}{2}$	9,54546 −10		

5. *Um zwei Riemenscheiben mit den Radien* $R = 365\,\text{mm}$ *und* $r = 215\,\text{mm}$ *und dem Achsenabstand* $d = 1850\,\text{mm}$ *ist ein Treibriemen gelegt. Wie lang ist er?*

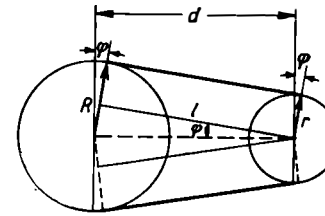


Bild 270

Lösung: (Bild 270)

Umschlungenes Stück des großen Rades B
Umschlungenes Stück des kleinen Rades b
Tangentenlänge l

Gesamtlänge $L = 2l + B + b$

$$l = \sqrt{d^2 - (R-r)^2} = \sqrt{[d + (R-r)]\,[d - (R-r)]}$$

$$\tan\varphi = \frac{R-r}{l}$$

Umschlingungswinkel am großen Rad $\alpha = 180° + 2\varphi$
Umschlingungswinkel am kleinen Rad $\beta = 180° - 2\varphi$

Num	Log		
$[d + (R-r)]\,\text{mm}^{-1}$	3,30103	+	
$[d - (R-r)]\,\text{mm}^{-1}$	3,23045	+	
	6,53148	:2	
$l \cdot \text{mm}^{-1}$	3,26574	−	
$(R-r)\,\text{mm}^{-1}$	2,17609	+	
	0,91035 − 2		(+10)
$\tan\varphi$	8,91035 −10		
$\pi/180$	0,24188 − 2	+	+
$R \cdot \text{mm}^{-1}$	2,56229	+	
$\alpha \cdot \text{Grad}^{-1}$	2,27715	+	
$B \cdot \text{mm}^{-1}$	3,08132		
$r \cdot \text{mm}^{-1}$	2,33244		+
$\beta \cdot \text{Grad}^{-1}$	2,23223		+
$b \cdot \text{mm}^{-1}$	2,80655		

$B = \dfrac{R\pi\alpha}{180°}$

$b = \dfrac{r\pi\beta}{180°}$

$l = 1844\,\text{mm}$

$\varphi = 4°39' = 4{,}65°$

$\alpha = 189°18' = 189{,}30°$

$\beta = 170°42' = 170{,}70°$

$B = 1206\,\text{mm}$

$b = 641\,\text{mm}$

Gesamtlänge $L = 5535\,\text{mm}$

6. *Ein Ballon, Durchmesser* $d = 2r = 4{,}2\,\text{m}$, *wird beobachtet. Sein scheinbarer oberer bzw. unterer Rand werden unter dem Winkel* $\alpha = 18°34'$ bzw. $\beta = 16°28'$ *anvisiert. Man berechne Schrägentfernung* e *und Höhe* h *des Ballons, bezogen auf seinen Mittelpunkt!*

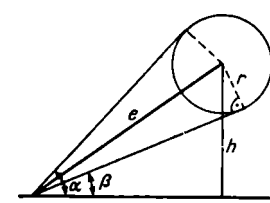


Bild 271

Lösung: (Bild 271)

$$\frac{r}{e} = \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{ ergibt: } e = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\frac{h}{e} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ ergibt: } h = e\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 1°03' = \delta$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 17°31' = \varepsilon$$

Schrägentfernung $e = 114{,}6$ m

Höhe $h = 34{,}5$ m

Num	Log	
$r \cdot m^{-1}$	0,32222	+
$\sin\delta$	8,26304 −10	−
$e \cdot m^{-1}$	2,05918	+
$\sin\varepsilon$	9,47854 −10	+
$h \cdot m^{-1}$	1,53772	

7. *Die Spitze eines Turmes erscheint vom Punkt A aus unter dem Winkel $\alpha = 22°50'$ und von B aus unter dem Winkel $\beta = 31°10'$. Der Fußpunkt F des Turmes liegt in der Verlängerung der Strecke $AB = d = 38{,}35$ m. Wie hoch ist der Turm?*

Lösung: (Bild 272)

$$\frac{FB}{h} = \cot\beta$$

$$\cot\alpha = \frac{\overline{AF}}{h} = \frac{\overline{AB}}{h} + \frac{\overline{BF}}{h} = \frac{d}{h} + \cot\beta$$

ergibt $h = \dfrac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$

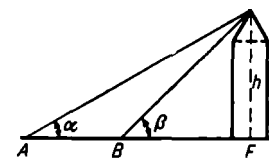


Bild 272

$\cot\alpha = 2{,}37504$ +

$\cot\beta = 1{,}65337$ −

Nenner = 0,72167

Turmhöhe $h = 53{,}14$ m

Num	Log	
$d \cdot m^{-1}$	1,58377	+
Nenner	0,85834 −1	−
$h \cdot m^{-1}$	1,72543	

8. *Man berechne Flächeninhalt A und Basislänge g eines gleichschenkligen Dreiecks, von dem bekannt sind*

a) *die Höhe h und der Winkel γ an der Spitze*

b) *die Schenkellänge s und der Winkel γ an der Spitze.*

Lösung: (Bild 273)

a) Es gilt: $A = \frac{1}{2} g h$ und $\frac{g}{2} : h = \tan\frac{\gamma}{2}$.

Durch Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$g = 2h\tan\frac{\gamma}{2}.$$

Setzt man das in die erste Gleichung ein, erhält man:

$$A = h^2\tan\frac{\gamma}{2}.$$

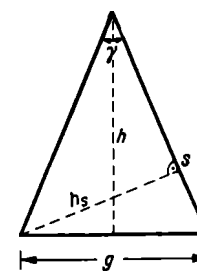


Bild 273

b) Es gilt: $A = \frac{1}{2} s h_s$ und $\frac{h_s}{s} = \sin\gamma$ bzw. $h_s = s\sin\gamma$

Ersetzt man h_s im ersten Ausdruck, ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} s^2 \sin\gamma.$$

Aus $\frac{g}{2} : s = \sin\frac{\gamma}{2}$

folgt schließlich noch

$$g = 2s\sin\frac{\gamma}{2}.$$

9. *Mit Hilfe der in Beispiel 8 gefundenen Beziehungen leite man allgemeine Formeln ab für Flächeninhalt und Seitenlänge*

a) *des regelmäßigen Tangentenvielecks*

b) *des regelmäßigen Sehnenvielecks. (Vgl. Abschnitt 24.4.)*

Lösung:

a) Tangentenvieleck:

$$A = \varrho^2 \tan\frac{180°}{n} \qquad s_n = 2\varrho\tan\frac{180°}{n}$$

b) Sehnenvieleck:

$$A = \frac{1}{2}r^2\sin\frac{360°}{n} \qquad s_n = 2r\sin\frac{180°}{n}$$

26.2. Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks

26.2.1. Erweiterung des Definitionsbereiches der Winkelfunktionen

Um die vier Winkelfunktionen zur Berechnung beliebiger, also auch schiefwinkliger Dreiecke verwenden zu können, macht es sich erforderlich, ihren Definitionsbereich auf Winkel von 90° bis 180° zu erweitern, da jeder Winkel, für den

$$0° < \alpha < 180° \quad \text{gilt,}$$

in einem Dreieck vorkommen kann.
Selbstverständlich müssen diese neuen Definitionen so getroffen werden, daß die früher festgelegten Beziehungen in den allgemeineren Definitionen enthalten sind[1]).

Definitionen:

Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Supplementwinkels

$$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha} \tag{104}$$

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem negativen Cosinus des Supplementwinkels

$$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha} \tag{105}$$

[1]) Dieses dialektische Prinzip des Aufhebens im doppelten Sinne, nämlich des gleichzeitigen Erübrigens und Bewahrens, ist eines der wichtigsten Arbeitsprinzipien der Mathematik. Man bezeichnet es als Permanenzprinzip.

Die entsprechenden Erweiterungen für die Tangens- und Cotangensfunktion ergeben sich, wenn man entsprechend dem in der Fußnote genannten *Permanenzprinzip* die Beziehungen (102) und (103) zugrunde legt:

Satz:

Der Tangens (Cotangens) eines Winkels ist gleich dem negativen Tangens (Cotangens) des Supplementwinkels.

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha \tag{106}$$

$$\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha \tag{107}$$

Beweis: $\tan(180° - \alpha) = \dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{(\sin 180° - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha.$

Es lassen sich also die Funktionswerte aller Winkel zwischen 90° und 180° auf solche zwischen 0° und 90° zurückführen, z. B.:

$\sin 138° = \sin(180° - 42°) = \sin 42° = 0{,}6691$ oder

$\tan 109° = \tan(180° - 71°) = -\tan 71° = -2{,}904.$

Für manche Zwecke, insbesondere zur bequemeren zeichnerischen Darstellung des weiteren Kurvenverlaufes, kann man die Erweiterungen des Definitionsbereiches der Winkelfunktionen auch folgendermaßen erklären:

$$\begin{aligned}
\sin(90° + \beta) &= \sin(90° - \beta),\\
\cos(90° + \beta) &= -\cos(90° - \beta),\\
\tan(90° + \beta) &= -\tan(90° - \beta),\\
\cot(90° + \beta) &= -\cot(90° - \beta).
\end{aligned}$$

Beweis: Alle vier Beziehungen ergeben sich sofort, wenn man in (104) bis (107) an Stelle des Winkels α den Winkel $90° - \beta$ einsetzt, gezeigt am Beispiel der Cosinusfunktion:

$$\cos[180° - (90° - \beta)] = -\cos(90° - \beta)$$

$$\cos(90° + \beta) = -\cos(90° - \beta) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Diese letzten Beziehungen sagen folgendes aus:

Die Sinuskurve verläuft im Bereich von $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ symmetrisch zur Stelle $\alpha = 90°$. Die Funktionswerte aller übrigen Kurven ändern an dieser Stelle ihr Vorzeichen, stimmen aber in ihren Beträgen an den Stellen $90° + \beta$ und $90° - \beta$ überein. Daraus ergeben sich folgende Kurvenbilder:

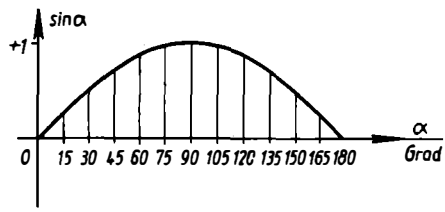


Bild 274

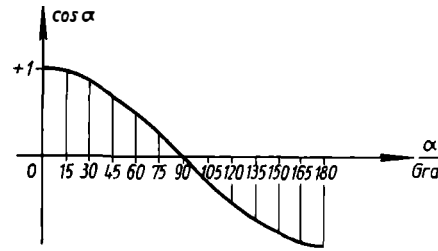


Bild 275

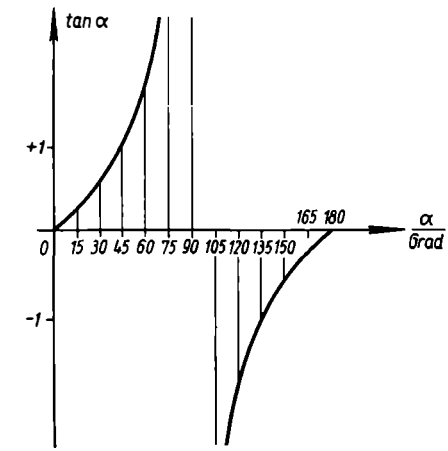


Bild 276

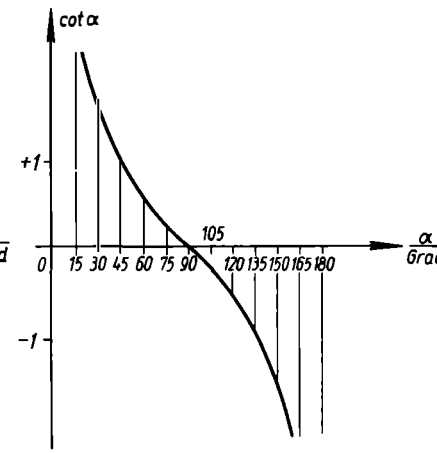


Bild 277

Im Falle der Sinusfunktion ergibt sich eine Besonderheit, wenn aus dem Funktionswert $\sin\alpha$ der zugehörige Winkel α bestimmt werden soll, da die Beziehung $y = \sin\alpha$ im Bereich von 0° bis 180° nicht umkehrbar eindeutig ist, mit Ausnahme des Wertes $\sin\alpha = 1$.
Das bedeutet: Zu ein und demselben Wert von $\sin\alpha$, beispielsweise 0,5, gehören zwei verschiedene Winkel, nämlich $\alpha_1 = 30°$ und $\alpha_2 = 150°$. Die Entscheidung, ob beide Winkel gültig sind oder welcher für ungültig zu erklären ist, muß von Fall zu Fall für jedes Problem untersucht werden. Dafür läßt sich keine allgemeingültige Richtlinie aufstellen.

26.2.2. Der Sinussatz

Satz:

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \tag{108}$$

Oder in anderer Formulierung:

Das Verhältnis einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist innerhalb ein und desselben Dreiecks konstant.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{109}$$

Beweis: Die Gleichwertigkeit beider Formulierungen ergibt sich aus den Rechengesetzen für fortlaufende Proportionen. In einem spitzwinkligen Dreieck (Bild 278) gilt

für das linke Teildreieck $h_c = b \cdot \sin\alpha$

und für das rechte Teildreieck $h_c = a \cdot \sin\beta$.

Die Elimination von h_c liefert $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

bzw. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Benutzt man die Seite a oder b als Basis, läßt sich der Beweis auf dem gleichen Wege unter Verwendung der Höhen h_a bzw. h_b vollenden, was dem Leser überlassen bleiben möge.

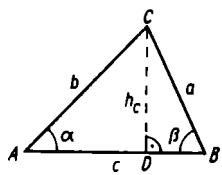


Bild 278

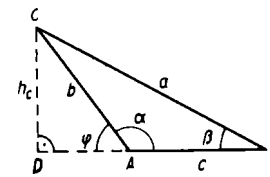


Bild 279

In einem stumpfwinkligen Dreieck (Dreieck ABC in Bild 279) gilt

für das Dreieck ACD $h_c = b \cdot \sin\varphi$

und für das Dreieck DBC $h_c = a \cdot \sin\beta$.

Da der Winkel φ aber Supplementwinkel zum Winkel α ist, gilt $\sin\varphi = \sin\alpha$ und es ergibt sich die gleiche Beziehung wie oben. Damit ist der Sinussatz vollständig bewiesen.

BEISPIELE

1. *Von den Endpunkten A und B einer Strecke* $c = 183$ m *erscheint ein dritter Punkt C unter den Winkeln* $\alpha = 34°45'$ *und* $\beta = 76°22'$. *Wie weit liegt der Punkt C von A und B entfernt?*

   Lösung: Der dritte Winkel ergibt sich aus der Winkelsumme mit $\gamma = 68°53'$.

Mit den Bezeichnungen $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$ (Bild 280) ergibt sich aus dem Sinussatz

$$b = \sin\beta \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{und}$$

$$a = \sin\alpha \frac{c}{\sin\gamma}.$$

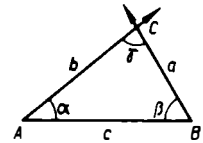


Bild 280

Die Entfernungen betragen

$$\overline{AC} = 190{,}6 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 111{,}8 \text{ m}.$$

Num	Log		
$c \cdot m^{-1}$	2,26245	+	
$\sin\gamma$	9,96981 −10	−	
	2,29264	+	+
$\sin\beta$	9,98759 −10	+	
$b \cdot m^{-1}$	2,28023		
$\sin\alpha$	9,75587 −10		+
$a \cdot m^{-1}$	2,04851		

Dieses Problem bezeichnet man in der Vermessungstechnik als **Vorwärtseinschneiden.**

2. Wendet man den Sinussatz auf ein rechtwinkliges Dreieck an, indem man etwa $\gamma = 90°$ setzt (dann gilt: $\sin\gamma = 1$), so vereinfacht sich der Sinussatz zu der in 26.1.1. definierten Sinusfunktion für rechtwinklige Dreiecke (Bild 281).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{1} \quad \text{ergibt} \quad \sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} \quad \text{ergibt} \quad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

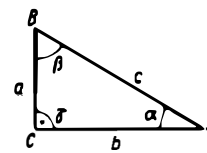


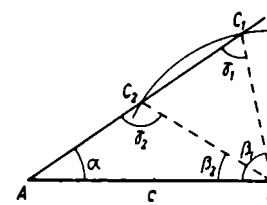
Bild 281

3. *Von einem Dreieck sind folgende Stücke bekannt: (Bild 282)* $a = 6$ cm, $c = 13$ cm, $\alpha = 23°$. *Man berechne die fehlenden Stücke!*

Lösung: Zunächst läßt sich nur der Winkel γ berechnen.

$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$$

Num	Log	
$\sin\alpha$	9,59188 −10	+
$c \cdot cm^{-1}$	1,11394	+
	0,70582	+
$a \cdot cm^{-1}$	0,77815	−
$\sin\gamma$	9,92767 −10	



$\overline{BC_1} = \overline{BC_2} = a$

$\overline{AC_1} = b_1$, $\overline{AC_2} = b_2$

Bild 282

Zu diesem Wert von lg $\sin\gamma$ sind entsprechend der Überlegung am Ende von 26.2.1. zwei Winkel möglich, nämlich

$$\gamma_1 = 57°50' \text{ und } \gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 122°10'.$$

Diese Doppeldeutigkeit war bereits in 19.2. Beispiel 4, Fall c_1 aufgetreten. Die dort angedeutete Unterscheidung der Fälle c_1 bis c_3 läßt sich nunmehr genauer formulieren: Für die rechte Seite der obigen Gleichung gibt es drei Möglichkeiten:

$$\frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \begin{cases} < 1 & \text{zwei Lösungen mit zwei verschiedenen Winkeln } \gamma_1 \text{ und } \gamma_2. \\ = 1 & \text{Doppellösung, } \gamma = 90°. \\ > 1 & \text{keine Lösung, da } \sin\gamma \text{ nicht größer als 1 sein kann.} \end{cases}$$

Im hier vorliegenden Fall muß man mit beiden Winkeln weiterarbeiten und erhält zwei mögliche Dreiecke, nämlich ABC_1 und ABC_2.

$$\gamma_1 = 57°50' \qquad \gamma_2 = 122°10'$$

$$\beta_1 = 99°10' \qquad \beta_2 = 34°50'$$

$$b_1 = \frac{a \cdot \sin \beta_1}{\sin \alpha} \qquad b_2 = \frac{a \cdot \sin \beta_2}{\sin \alpha}$$

Die logarithmische Berechnung soll hier nicht im einzelnen durchgeführt werden. Man erhält:

$$\underline{b_1 = 15{,}2 \text{ cm}} \quad \text{und} \quad \underline{b_2 = 8{,}8 \text{ cm}}.$$

4. *Von einem Beobachtungspunkt P, der $h = 14{,}22$ m über einer Wasserfläche liegt, erscheint eine Bergspitze B unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 12°34'$ und ihr Spiegelbild S im Wasser unter dem Senkungswinkel $\beta = 14°58'$. Wie hoch liegt die Bergspitze über dem See?*

Lösung: (Bild 283) Zunächst ermittelt man den Winkel in B für das Dreieck SBP, er beträgt $\beta - \alpha = 2°24'$. Der Leser überlege, auf Grund welcher geometrischer und physikalischer Gesetze der Winkel β an den im Bild bezeichneten Stellen vorkommt!

Übertragung des Winkels β von P nach S: Wechselwinkel,
„ „ „ β in S: Reflexionsgesetz der Optik,
„ „ „ β von S nach B: Stufenwinkel,
„ „ „ α von P nach B: Stufenwinkel.

Infolge der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke (Winkelvergleich!) ergibt sich:

$$x : \overline{SB} = h : \overline{PS} \quad \text{und daraus} \quad x = h \frac{\overline{SB}}{\overline{PS}}.$$

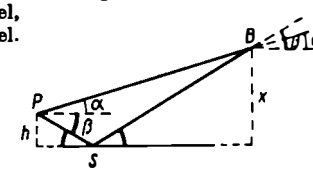


Bild 283

Das zuletzt vorkommende Streckenverhältnis läßt sich aber durch Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck PSB folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{PS}} = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Somit ergibt sich für die gesuchte Höhe x:

$$x = h \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Die Bergspitze liegt $x = 156{,}98$ m über dem See.

Num	Log		
$h \cdot \text{m}^{-1}$	1,15290		+
$\sin(\beta + \alpha)$	9,66489	-10	+
	0,81779		+
$\sin(\beta - \alpha)$	8,62196	-10	−
$x \cdot \text{m}^{-1}$	2,19583		

26.2.8. Die Dreiecksfläche

Satz:

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten, multipliziert mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$\boxed{A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma} \tag{110}$$

Beweis: Zunächst für ein spitzwinkliges Dreieck (Bild 284). Ersetzt man in der Flächenformel für das Dreieck

$$A = \frac{1}{2} b h_b \quad \text{die Höhe durch} \quad h_b = a \sin \gamma ,$$

so erhält man die obige Formel.

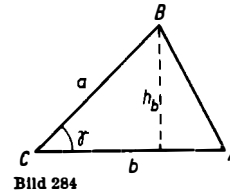


Bild 284

Im stumpfwinkligen Dreieck (Bild 285) verläuft der Beweis ebenso mit

$$h_b = a \sin \varphi = a \sin \gamma .$$

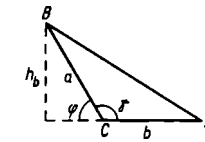


Bild 285

In der hier bewiesenen Formel ist das Ergebnis von Beispiel 8b aus 26.1.4. als Sonderfall enthalten.

BEISPIEL

Zwei Straßen treffen unter einem Winkel von $\varphi = 55°$ aufeinander. In diesem Winkel soll ein Gartengrundstück von 4800 m² Fläche so abgegrenzt werden, daß eine Straßenfront $l = 80$ m lang ist.

Wie lang wird die andere Straßenfront x?

Lösung: $A = \frac{1}{2} l x \sin \varphi$

$$x = \frac{2A}{l \sin \varphi} = \frac{9600 \text{ m}^2}{80 \text{ m} \sin 55°} = \frac{120 \text{ m}}{\sin 55°}$$

Num	Log	
120	2,07918	+
sin 55°	9,91336 − 10	−
$x \cdot \text{m}^{-1}$	2,16582	

Die andere Straßenfront wird $x = 146{,}50$ m lang.

Die Formel für die Dreiecksfläche läßt sich leicht auf die zwei weiteren möglichen Fälle anwenden, wenn man beachtet, wie auch im Satz zum Ausdruck gebracht, daß man stets zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel betrachtet:

$$A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha , \qquad A = \frac{1}{2} c a \sin \beta .$$

Zu diesen Ergebnissen gelangt man auch durch zyklische Vertauschung. Darunter versteht man, daß jedes Element (Seite oder Winkel) durch sein rechts oder links gelegenes benachbartes Element ersetzt wird. In Bild 286 kennzeichnet der Pfeil, in welcher Richtung die Vertauschung im vorliegenden Falle vorgenommen wurde.

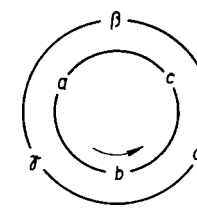


Bild 286

26.2.4. Der Cosinussatz

Satz:

Das Quadrat einer Seite im Dreieck ist gleich der Summe der Quadrate der anderen Seiten, vermindert um deren doppeltes Produkt, das mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels zu multiplizieren ist.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \tag{111}$$

Beweis: Er wird zunächst für das spitzwinklige Dreieck geführt. In Bild 287 gilt für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke:

$$h_c^2 = a^2 - (c - q)^2 \quad \text{und} \quad h_c^2 = b^2 - q^2.$$

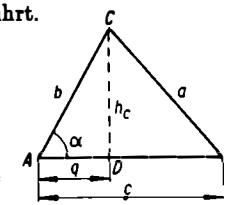


Bild 287

Elimination von h_c liefert:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2qc.$$

Setzt man darin $q = b \cos \alpha$, so erhält man die zu beweisende Formel.

Für das stumpfwinklige Dreieck ergibt sich (Bild 288):

$$h_c^2 = a^2 - (c + q)^2 \quad \text{und} \quad h_c^2 = b^2 - q^2$$

bzw. $$a^2 = b^2 + c^2 + 2qc.$$

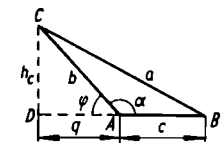


Bild 288

In diesem Fall ergibt sich für q

$$q = b \cos \varphi = -b \cos \alpha \text{ unter Anwendung von (105).}$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, ist der Cosinussatz vollständig bewiesen.

Durch zyklische Vertauschung erhält man die übrigen Formulierungen des Cosinussatzes, die selbstverständlich wieder auf die übliche Bezeichnungsweise im Dreieck zugeschnitten ist:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad \text{und}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Löst man (111) nach $\cos \alpha$ auf, so läßt sich der Winkel α daraus, im Gegensatz zum Sinussatz, eindeutig bestimmen, da die Cosinusfunktionen im Intervall $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ umkehrbar eindeutig ist. Das heißt: Zu jedem Wert von $\cos \alpha$ gehört nur ein Winkel α (vgl. Beispiel 2).

BEISPIELE:

1. *Von einem Dreieck sind bekannt:* $a = 14{,}6$ cm, $b = 23{,}8$ cm *und* $\gamma = 42°35'$. *Wie lang ist die Seite* c?

Lösung: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$

Die im Zusammenhang mit dem Cosinussatz vorkommenden Berechnungen führt man zweckmäßig unter Mitverwendung einer Quadrattafel durch. Das folgende Schema soll zeigen, wie man die Berechnung auf ausschließlich logarithmischem Wege noch einigermaßen rationell durchführen kann.

Num	Log	Log	Num
$a \cdot \text{cm}^{-1}$	1,16435	$\cdot 2$ 2,32870 →	$213{,}16 = a^2 \cdot \text{cm}^{-2}$ +
$b \cdot \text{cm}^{-1}$	1,37659	$\cdot 2$ 2,75316 →	$566{,}45 = b^2 \cdot \text{cm}^{-2}$ +
2	0,30103		$779{,}61 = (a^2 + b^2)\,\text{cm}^{-2}$
$\cos \gamma$	9,86705 − 10		
	2,70901	→ →	$511{,}69 = 2ab \cos \gamma \cdot \text{cm}^{-2}$ −
$c \cdot \text{cm}^{-1}$	1,21400	$:2$ 2,42800 ←	$267{,}92$ = Zahlenwert des Radikanden

Seite $c = 16{,}37$ cm

Sollten jetzt weitere Winkel gesucht sein, könnte man mit dem Sinussatz weiterrechnen.

2. *Von einem Dreieck sind die drei Seiten* $a = 5$ cm, $b = 6$ cm *und* $c = 10$ cm *gegeben. Man berechne den Winkel* γ*!*

Lösung: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\dfrac{39\ \text{cm}^2}{60\ \text{cm}^2} = -0{,}6500$

Zu dem positiven Zahlenwert würde ein Winkel von 49°30′ gehören. Wegen des negativen Vorzeichens bildet man entsprechend (105) den Supplementwinkel:

$$\underline{\underline{\text{Winkel } \gamma = 130°30'.}}$$

3. *Aus dem Cosinussatz lassen sich zwei Sonderfälle ableiten: Setzt man in (111)* $\alpha = 90°$*, so ergibt sich der Satz des Pythagoras, da* $\cos 90° = 0$ *den letzten Summanden zum Verschwinden bringt:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Wendet man (111) auf ein rechtwinkliges Dreieck an und wählt $\alpha = 90°$ (Bild 289), so erhält man die Cosinusfunktion für das rechtwinklige Dreieck, wie sie in 26.1.1. definiert wurde: Setzt man die pythagoreische Beziehung entsprechend Bild 289, nämlich

$$b^2 = c^2 + a^2$$

in Gleichung (111) ein, vereinfacht sich diese zu

$$2c^2 = 2bc\cos\alpha.$$

Daraus folgt: $\cos\alpha = \dfrac{c}{b}$ w.z.b.w.

4. *Die Kräfte* $F_1 = 24$ kp *und* $F_2 = 38$ kp *greifen an einem gemeinsamen Punkt an und schließen einen Winkel von* $\varphi = 48°$ *ein.*
Wie groß ist die Resultierende F_R *und welchen Winkel bildet sie mit* F_2*?*

Lösung (Bild 290):

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma =$$
$$= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi \qquad (\gamma \text{ und } \varphi \text{ sind Supplementwinkel!})$$
$$\underline{\underline{F_R = 48{,}4\ \text{kp}}}$$

Der Winkel ε ergibt sich durch Anwendung des Sinussatzes:

$$\sin\varepsilon = F_1\frac{\sin\gamma}{F_R} = F_1\frac{\sin\varphi}{F_R}$$
$$\underline{\underline{\varepsilon = 21°40'}}$$

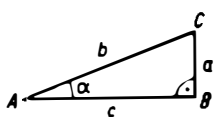


Bild 289

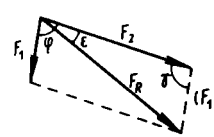


Bild 290

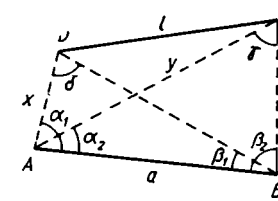


Bild 291

5. *Die Länge der unzugänglichen Strecke* l *soll bestimmt werden. Von den Endpunkten* A *und* B *der Standlinie* $a = 112{,}68$ m *wurden nach den Endpunkten* C *und* D *der Strecke* l *folgende Winkel gemessen: (Bild* 291*)*

$\alpha_1 = 98°44'$ $\beta_1 = 34°17'$
$\alpha_2 = 43°06'$ $\beta_2 = 82°55'$

Lösung: Die Strecke l wird aus dem Dreieck ACD berechnet. (Das Dreieck BCD wäre auch geeignet.) Dazu sind die Strecken $AD = x$ und $AC = y$ erforderlich, die ihrerseits aus den Dreiecken ABD und ABC berechnet werden.

Aus der Winkelsumme der Teildreiecke ergibt sich:

$$\delta = 46°59' \quad \text{und} \quad \gamma = 54°19';$$

x und y nach dem Sinussatz:

$$x = a\,\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta}\,,$$

$$y = a\,\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma}\,.$$

l nach dem Cosinussatz:

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Da nach den Strecken x und y nicht besonders gefragt ist, kann sofort mit den Logarithmen ihrer Maßzahlen weitergearbeitet werden.

Num	Log	
$a \cdot m^{-1}$	2,05184	+
$\sin\beta_1$	9,75073 −10	+
	1,80757	+
$\sin\delta$	9,86401 −10	−
$x \cdot m^{-1}$	1,93856	
$a \cdot m^{-1}$	2,05184	+
$\sin\beta_2$	9,99635 −10	+
	2,04819	+
$\sin\gamma$	9,90969 −10	−
$y \cdot m^{-1}$	2,13850	

Num	Log	Log	Num
$x \cdot m^{-1}$	1,93856	$\cdot 2 = 3{,}87712$	8535,7
$y \cdot m^{-1}$	2,13850	$\cdot 2 = 4{,}27700$	18923,5
2	0,30103		
$\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$	9,75165 −10		27459,2
	4,12974		13481,5
$l \cdot m^{-1}$	2,07272	4,14544	13977,7

Strecke $l = 118{,}23$ m

AUFGABEN

513. Rechne folgende Winkel in Gradmaß bzw. Bogenmaß um:

a) 0,03624 b) 0,27110 c) 1,55003 d) 2,94325
e) 38°24'30" f) 42°00'45" g) 164°35'18" h) 115°32'06"

514. Bestimme mittels Tabelle die fehlenden Stücke der folgenden, durch 2 Stücke bestimmten Kreisabschnitte:

(Längen in cm, Flächen in cm²)

	Mittelpunktswinkel	Bogenlänge	Pfeilhöhe	Sehnenlänge	Fläche	Radius
a)				14,22		8,00
b)			2,05			12,00
c)		2,96				1,50
d)					210,14	35,00
e)	42°30'					2,50
f)	20°00'			6,95		
g)	14°80'		0,12			
h)	70°00'	13,44				
i)	45°00'				35,71	

515. Bestimme die natürlichen Werte folgender Winkelfunktionen:

a) sin 14°20′ e) sin 83°12′
b) cos 18°33′ f) cos 62°28′
c) tan 33°07′ g) tan 50°40′
d) cot 8°25′ h) cot 77°43′

516. Bestimme die Logarithmen folgender Winkelfunktionen:

a) sin 14°20′30″ e) sin 83°12′45″
b) cos 18°33′42″ f) cos 62°28′05″
c) tan 33°07′54″ g) tan 50°40′30″
d) cot 8°25′43″ h) cot 77°43′55″

517. Bestimme die zu folgenden Funktionswerten gehörenden Winkel:

a) $\sin \alpha = 0{,}11260$ e) $\sin \alpha = 0{,}88274$
b) $\cos \alpha = 0{,}90084$ f) $\cos \alpha = 0{,}42653$
c) $\tan \alpha = 0{,}64892$ g) $\tan \alpha = 1{,}55423$
d) $\cot \alpha = 2{,}60912$ h) $\cot \alpha = 0{,}87523$

518. Bestimme die zu den Logarithmen folgender Winkelfunktionen gehörenden Winkel:

a) $\lg \sin \alpha = 9{,}03426$ e) $\lg \sin \alpha = 9{,}83526$
b) $\lg \cos \alpha = 9{,}77352$ f) $\lg \cos \alpha = 8{,}90731$
c) $\lg \tan \alpha = 9{,}90677$ g) $\lg \tan \alpha = 0{,}33796$
d) $\lg \cot \alpha = 0{,}65432$ h) $\lg \cot \alpha = 8{,}96112$

519. Bestimme aus dem gegebenen die übrigen Funktionswerte:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\tan \alpha = 2$ d) $\cot \alpha = \frac{5}{12}$

520. Berechne die fehlenden Stücke folgender rechtwinkliger Dreiecke! Alle Dreiecke sind so orientiert, daß c die Hypotenuse und damit $\gamma = 90°$ ist.

a) $a = 3$ cm, $b = 4{,}6$ cm b) $a = 11$ cm, $c = 61$ cm
c) $a = 10$ cm, $\beta = 34°18′$ d) $c = 25{,}2$ cm, $\alpha = 72°15′36″$

521. Berechne Höhe, Fläche und Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis b und dem Basiswinkel β.

$b = 18{,}2$ cm, $\beta = 34°24′$

522. Berechne die Fläche eines Parallelogrammes aus seinen beiden Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel φ.

$a = 14$ cm, $b = 36$ cm, $\varphi = 51°42′$

523. Berechne die Länge der Diagonalen eines Rhombus, wenn seine Seite a und einer seiner Winkel φ gegeben sind.

$a = 64{,}3$ cm, $\varphi = 48°06′27″$

524. Von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sind die Grundkante a und die Höhe h bekannt. Berechne den Neigungswinkel α der Seitenflächen, den Neigungswinkel β der Seitenkanten gegenüber der Grundfläche sowie den Winkel γ an der Spitze eines der Dreiecke, die die Mantelfläche bilden.

$a = 14$ cm, $h = 24$ cm

525. Berechne am regelmäßigen Tetraeder die Neigungswinkel der Seitenfläche und der Seitenkante gegenüber der Grundfläche.

526. Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt eines Kreises den Abstand d. Der Kreis hat den Durchmesser $2r$. Welchen Winkel schließen die von P an den Kreis gelegten Tangenten ein?

$d = 264$ mm, $\quad 2r = 367$ mm

527. Zwei Riemenscheiben mit den Durchmessern d_1 und d_2 haben den Achsabstand e. Sie sind durch einen gekreuzten Riementrieb miteinander verbunden. Wie lang muß der Treibriemen sein?

$d_1 = 425$ mm, $\quad d_2 = 675$ mm, $\quad e = 1200$ mm

528. Ein gerader Kreiskegel hat die Höhe h und den Grundkreisdurchmesser d. Berechne den Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes, der sich bei der Abwicklung des Kegelmantels ergibt.

$d = 18$ cm, $\quad h = 55$ cm

529. Berechne das Verhältnis $\frac{\text{Grundkreisradius}}{\text{Höhe}}$ bei einem geraden Kreiskegel, dessen abgewikkelter Mantel einen Halbkreis ergibt.

530. Ein Turm erscheint aus der Entfernung e unter dem Erhebungswinkel α. Berechne seine Höhe unter Berücksichtigung der Instrumentenhöhe h. (Bild 292)

$e = 314{,}5$ m, $\quad \alpha = 7°30'$, $\quad h = 1{,}45$ m

531. Der Mittelpunkt des Zifferblattes einer Turmuhr befindet sich in $h = 60$ m Höhe und erscheint von einem Punkt aus unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 42°10'$, sein unterer Rand erscheint unter dem Erhebungswinkel $\beta = 41°10'$. Berechne den Durchmesser des Zifferblattes. (Bild 293)
Anleitung: Verwende als Zwischengröße die Entfernung e.

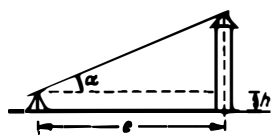


Bild 292

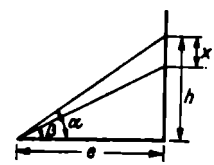


Bild 293

532. Bestimme die natürlichen Werte folgender Winkelfunktionen:

a) sin 138°30′ $\quad$ c) tan 94°10′

b) cos 166°43′ $\quad$ d) cot 123°21′

533. Bestimme die Logarithmen folgender Winkelfunktionen:

a) lg sin 124°33′ $\quad$ c) lg |tan 133°07′| [1])

b) lg |cos 98°16′| $\quad$ d) lg |cot 175°53′|

534. Bestimme die zu folgenden Funktionswerten gehörenden Winkel:

a) $\sin\beta = 0{,}48481$ $\quad$ c) $\tan\beta = -2{,}11233$

b) $\cos\beta = -0{,}08716$ $\quad$ d) $\cot\beta = -1{,}59002$

535. Bestimme die zu den Logarithmen folgender Funktionswerte gehörenden Winkel:

a) $\lg\sin\beta = 9{,}81636$ $\quad$ c) $\lg|\tan\beta| = 10{,}97960$

b) $\lg|\cos\beta| = 8{,}98157$ $\quad$ d) $\lg|\cot\beta| = 9{,}66304$

[1]) Die Betragszeichen sind erforderlich, weil der Logarithmus für negative Zahlen nicht erklärt ist.

536. Berechne aus den im folgenden Schema gegebenen Stücken allgemeiner Dreiecke die gesuchten Größen:

$\frac{a}{\text{cm}}$	$\frac{b}{\text{cm}}$	$\frac{c}{\text{cm}}$	$\frac{A}{\text{cm}^2}$	α	β	γ
38,0	44,5				38°15′	
		62,3		108°		34°
10		18	45			
14,5	30					50°12′
29,2	45,4	57,6				
		6,50	18,40	72°		

537. Drei Kreise mit den Durchmessern $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 12$ cm und $d_3 = 14$ cm berühren einander. Welche Winkel bilden die drei Zentralen miteinander?

538. Eine Kraft von $F = 400$ kp soll in zwei Teilkräfte F_1 und F_2 zerlegt werden, die mit der Richtung von F die Winkel $\alpha_1 = 45°$ und $\alpha_2 = 60°$ einschließen. Wie groß sind die Teilkräfte?

539. Berechne die resultierende Kraft der drei Kräfte F_1, F_2 und F_3. Welchen Winkel bildet diese mit F_1? (Bild 294)

$F_1 = 20$ kp, $F_2 = 40$ kp, $F_3 = 50$ kp, $\delta = 30°$, $\varepsilon = 60°$.

Anleitung: Man fasse erst zwei Kräfte zu einer Resultierenden und dann diese mit der dritten Kraft zusammen!

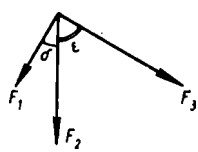


Bild 294

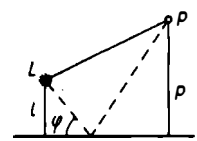


Bild 295

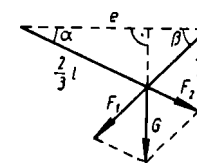


Bild 296

540. Eine Lichtquelle L befindet sich $l = 2{,}85$ m vor einem Spiegel. Damit ein Lichtstrahl den Punkt P trifft, der $p = 12{,}20$ m vor dem Spiegel liegt, muß der Lichtstrahl unter einem Winkel von $\varphi = 34°$ auf den Spiegel treffen. Wie groß ist die direkte Entfernung LP? (Bild 295)

541. Zwischen zwei gleich hoch liegenden Punkten, deren Entfernung $e = 25$ m beträgt, wird ein Seil von $l = 30$ m Länge gespannt. In $^1/_3$ der Seillänge hängt eine Last von $G = 20$ kp. Unter welchen Winkeln gegen die Horizontale stellen sich beide Seilstränge ein und welche Kraft wirkt in jedem von ihnen (Bild 296)?

542. Von einem Punkt P, der 512,20 m über dem Meeresspiegel liegt, werden zwei Bergspitzen A und B anvisiert. Deren Horizontalentfernung beträgt $\overline{A'B'} = 3068{,}30$ m. A liegt 1020,34 m hoch. Ferner wurden folgende Winkel gemessen (Bild 297):

Horizontalwinkel $\gamma = 58°45'$,
Erhebungswinkel $\alpha = 8°51'$,
Erhebungswinkel $\beta = 10°12'$.

Wie hoch ist der Berg B?

Anleitung: Man reduziere alle Höhen auf die Höhe des Punktes P. Mit Hilfe der Strecke PA' berechne man die Winkel des Horizontaldreiecks und über die Strecke PB' die Höhe x!

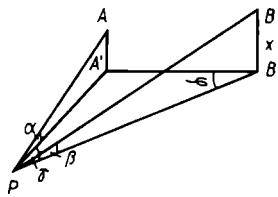


Bild 297

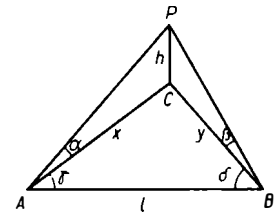


Bild 298

543. Von den Endpunkten A und B einer waagerecht liegenden Standlinie $AB = l = 108{,}20$ m wird gleichzeitig ein Ballon P angepeilt. Wie groß ist seine Horizontalentfernung von A bzw. von B und wie hoch befindet er sich über der Bezugsebene (Bild 298)?
Folgende Winkel wurden gemessen:

Horizontalwinkel $= 85°24'$ Erhebungswinkel $= 24°18'$
„ $= 71°37'$ „ $= 23°17'$

Anleitung: Die gesuchte Höhe $h = \overline{PC}$ ergibt sich, nachdem die Horizontalentfernungen $AC = x$ und $BC = y$ berechnet wurden, einmal aus dem Dreieck ACP und zum anderen aus dem Dreieck BCP. Als Ergebnis gibt man den Mittelwert beider an.

27. Einteilung der Körper

Ein vollständig begrenztes Stück des Raumes heißt **mathematischer Körper.** Die gesamte äußere Begrenzungsfläche ist seine **Oberfläche.** Die Oberfläche schließt das **Volumen** des Körpers ein. Ebene Begrenzungsflächen bedingen **Ebenflächner** oder **Polyeder,** krumme oder teilweise krumme und ebene Begrenzungsflächen bedingen **Krummflächner.**

27.1. Ebenflächner

Die Begrenzungsflächen der Ebenflächner schneiden sich in den **Kanten.** Der Schnittpunkt von mindestens drei Kanten ergibt eine **Ecke.** Für die Zahl der Begrenzungsflächen f, die Kantenzahl k und die Eckenzahl e eines Ebenflächners ohne einspringende Ecken und Hohlräume gilt nach EULER[1]) die Beziehung

$$\boxed{e + f = k + 2}. \tag{112}$$

Die Standfläche des Ebenflächners wird allgemein als **Grundfläche** bezeichnet. Liegt ihr gegenüber eine weitere Fläche, so nennt man diese **Deckfläche.** Die restlichen Begrenzungsflächen bilden den **Mantel.** Werden die Deckfläche und der Mantel in die Ebene der Grundfläche gelegt, ohne daß der Zusammenhang zwischen den einzelnen Flächen verlorengeht, erhält man das **Netz** des Ebenflächners.
Die wichtigsten Ebenflächner lassen sich in drei Gruppen, die *Prismen*, die *Pyramiden* und *Pyramidenstümpfe* und die *Prismatoide* einteilen.

Prismen haben zwei kongruente und zueinander parallele n-Ecke als Grund- und Deckfläche und n Parallelogramme als Seitenflächen.
Regelmäßige bzw. unregelmäßige n-Ecke als Grund- und Deckflächen ergeben *regelmäßige* bzw. *unregelmäßige Prismen.* Ist der Neigungswinkel zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche ein Rechter, spricht man von *geraden Prismen*, andernfalls nennt man sie *schief.*
Wichtige Prismen sind der **Würfel** mit 6 *gleichen Quadraten* als Begrenzungsflächen und das **Rechtkant** mit 6 *Rechtecken* als Begrenzungsflächen, von denen je zwei einander gegenüberliegende kongruent und parallel sind (Bild 299).

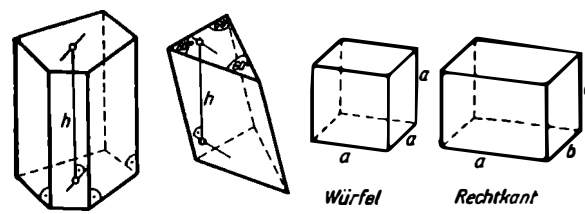


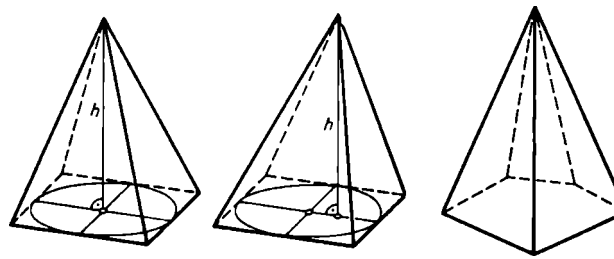
Bild 299

[1]) LEONHARD EULER (1707 bis 1783).

Pyramiden werden von einem n-Eck als Grundfläche und n Dreiecken als Seitenflächen begrenzt.

Grundfläche und Seitenflächen stoßen in n Grundkanten zusammen. Die Seitenflächen bilden n Seitenkanten, deren Schnittpunkt die **Pyramidenspitze** ist. Der Abstand der Spitze zur Grundfläche heißt **Höhe** der Pyramide.

Regelmäßige bzw. unregelmäßige n-Ecke als Grundflächen ergeben *regelmäßige* bzw. *unregelmäßige* Pyramiden. Regelmäßige Pyramiden sind *gerade*, wenn die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Um- und Inkreises der Grundfläche steht, andernfalls heißen sie *schief* (Bild 300).



Regelmäßige gerade Pyramide | *Regelmäßige schiefe Pyramide* | *Unregelmäßige Pyramide*

Bild 300

Pyramidenstumpfe besitzen zwei ähnliche und zueinander parallele n-Ecke als Grund- und Deckfläche und n Trapeze als Seitenflächen. Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die Höhe des Stumpfes.

Stümpfe entstehen durch den ebenen Schnitt einer Pyramide zwischen der Spitze und der Grundfläche, und zwar parallel zur Grundfläche. Die Spitze der dabei abgetrennten *Ergänzungspyramide* ist gleichzeitig Schnittpunkt der Verlängerungen der Seitenkanten des Stumpfes (Bild 301).

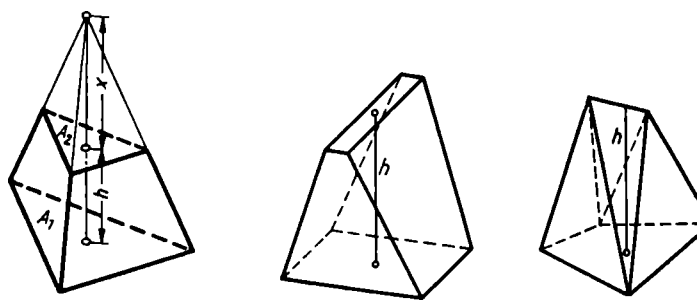


Bild 301 Bild 302

Prismatoide haben zwei beliebige und zueinander parallele n-Ecke als Grund- und Deckfläche und Dreiecke oder Trapeze als Seitenflächen. Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die *Höhe* des Prismatoids.

Der in halber Höhe parallel zur Grundfläche geführte ebene Schnitt heißt *Mittelschnitt*. Im Grenzfall kann die Deckfläche des Prismatoids Null sein, d. h. als **Kante** oder Spitze erscheinen. Folglich stellen neben den allgemeinen Prismatoiden (Bild 302) die Prismen, Pyramiden und Pyramidenstümpfe *Sonderfälle der Prismatoide* dar.

27.2. Krummflächner

Die bekanntesten Krummflächner sind der *Kreiszylinder*, der *Kreiskegel*, der *Kreiskegelstumpf* und die *Kugel*. Kreiszylinder, Kreiskegel und Kreiskegelstümpfe entstehen aus regelmäßigen Prismen, Pyramiden und Pyramidenstümpfen, wenn die Eckenzahl n der Grund- und Deckflächen dieser Ebenflächner unbeschränkt größer wird. Dabei gehen ihre n ebenen Seitenflächen in eine einzige gekrümmte Seitenfläche, den Mantel des Krummflächners, über. Aus den als n-Ecke auftretenden Grund- und Deckflächen werden Kreisflächen.

Die technisch wichtigsten Krummflächner sind **Rotationskörper.** Sie entstehen durch Rotation einer entsprechenden Fläche um eine **Achse.** Da diese Achsen immer senkrecht auf den Grund- und Deckflächen stehen, bezeichnet man sie als *gerade* Rotationskörper.

Volle gerade Kreiszylinder (Zylinder) entstehen durch Rotation einer Rechteckfläche um eine Rechteckseite (Bild 303).

Diese Seite $M_1 M_2$ ist gleich der Zylinderhöhe h und die ihr parallele den Mantel beschreibende Seite AB ist gleichzeitig eine **Mantellinie.** Grundfläche, Deckfläche

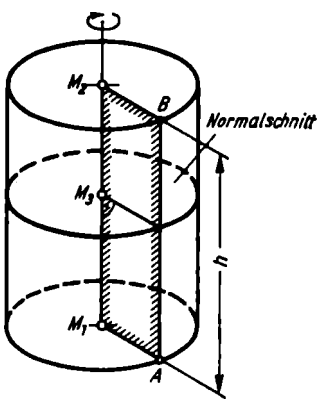


Bild 303

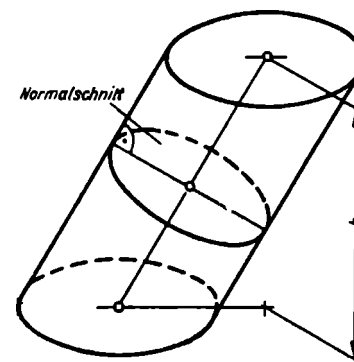


Bild 304

und Normalschnitt des geraden Zylinders sind kongruente zueinander parallele und konzentrische Kreisflächen, deren Mittelpunkte die Zylinderachse bestimmen. Liegen die Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche nicht genau senkrecht übereinander, so erhält man *schiefe* Zylinder mit Ellipsen als Normalschnitt (Bild 304). Ihre Höhe ist gleich dem Abstand von Grund- und Deckfläche.

Gerade Hohlzylinder ergeben sich durch Rotation einer Rechteckfläche um eine außerhalb und parallel zu einer Rechteckseite liegenden Achse (Bild 305).
Ihre Grund- und Deckflächen sind kongruente zueinander parallele und konzentrische Kreisringe, die beim *schiefen* Hohlzylinder nicht genau senkrecht übereinander liegen (Bild 306).

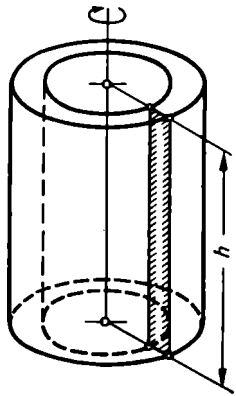


Bild 305

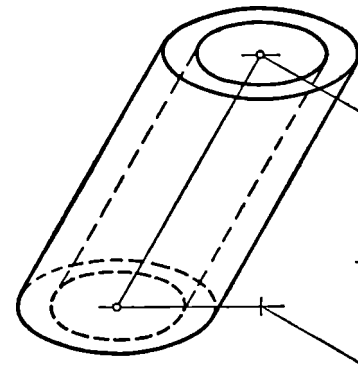


Bild 306

Schief geschnittene Zylinder entstehen aus geraden, wenn man diese durch schräg zur Achse geführte ebene Schnitte zerlegt (Bild 307). Die Schnittflächen sind Ellipsen. Durch die Achsenschnittpunkte der Ellipsen und senkrecht zu den Zylinderachsen gelegte ebene Schnitte trennen vom schief geschnittenen Zylinder **Zylinderhufe** ab (Bild 308).

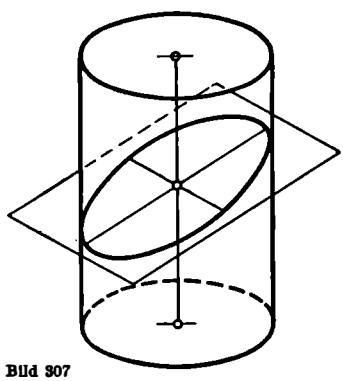


Bild 307

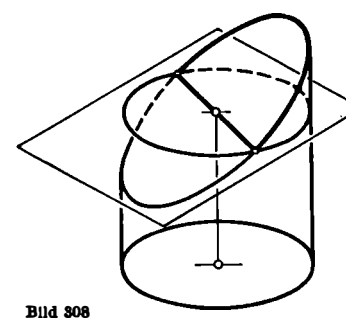


Bild 308

Gerade Kreiskegel (Kegel) werden durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten erzeugt (Bild 309). Die Länge MS dieser Kathete entspricht der Kegelhöhe h, die Länge MA der anderen Kathete dem Radius r der Grund-

fläche. Die Hypotenuse SA beschreibt den *Kegelmantel*, $\overline{SA}$ selbst ist eine Mantellinie. Alle Mantellinien schneiden sich in der *Kegelspitze* S, die senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundfläche liegt. Durch M und S ist ferner die *Kegelachse* bestimmt. Bei *schiefen* Kegeln (Bild 310) liegt S nicht senkrecht über M. Der Abstand der Spitze S von der Grundfläche ist die Höhe des schiefen Kegels.

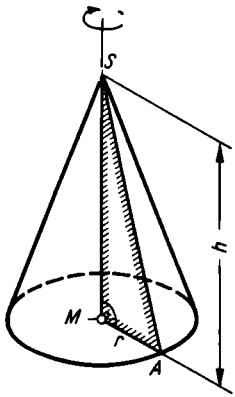


Bild 309

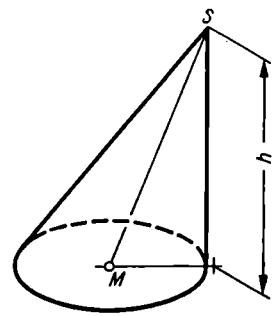


Bild 310

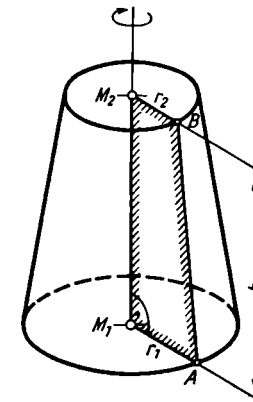


Bild 311

Gerade Kreiskegelstümpfe entstehen durch Rotation eines rechtwinkligen Trapezes um diejenige Trapezseite, die senkrecht auf den beiden Grundlinien des Trapezes steht (Bild 311).

Diese Seite M_1M_2 entspricht der *Stumpfhöhe* h. Die andere Seite beschreibt den Mantel und ist gleichzeitig Mantellinie. Die Grundlinien M_1A und M_2B stellen die Radien r_1 und r_2 der Grund- und Deckfläche dar. M_1 und M_2 legen die Achse des Stumpfes fest. Der Schnittpunkt der Verlängerungen aller Mantellinien des Stumpfes ist gleichzeitig die Spitze des Ergänzungskegels, der den Stumpf zum vollständigen Kegel ergänzt.

Kugeln entstehen durch Rotation einer Halbkreisfläche um ihren Durchmesser (Bild 312).

Der Abstand jedes Oberflächenpunktes vom Kugelmittelpunkt M ist gleich und heißt **Kugelradius** r. Durch ihren Radius ist die Kugel eindeutig bestimmt.

Ebene Schnitte durch die Kugel erzeugen Kreise als Schnittfiguren und zerlegen sie in zwei **Kugelsegmente** (Bild 313). Schnitte durch den Mittelpunkt erzeugen **Großkreise** und teilen die Kugel in zwei *Halbkugeln* als Sonderfall des Segmentes. Die gekrümmte Begrenzungsfläche des Segmentes nennt man **Kugelkappe** oder **Kalotte**.

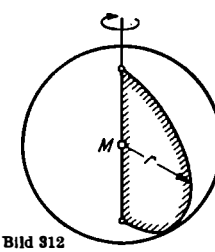


Bild 312

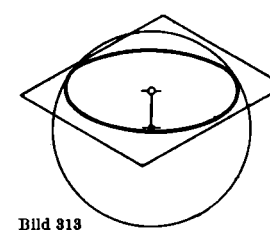


Bild 313

Zwei parallele ebene Kugelschnitte schließen eine **Kugelschicht** ein, deren gekrümmte Oberfläche **Kugelzone** heißt (Bild 314).
Verbindungsstrecken zwischen allen Punkten des Kalottengrundkreises und dem Kugelmittelpunkt hüllen mit der Kalotte den **Kugelsektor** ein (Bild 315).

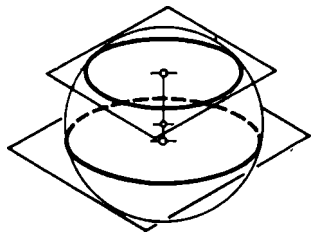


Bild 314

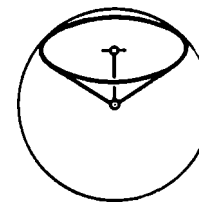


Bild 315

Segment, Halbkugel, Schicht und Sektor lassen sich ebenfalls durch Rotation einer entsprechenden Fläche um eine Achse erzeugen (Bild 316).

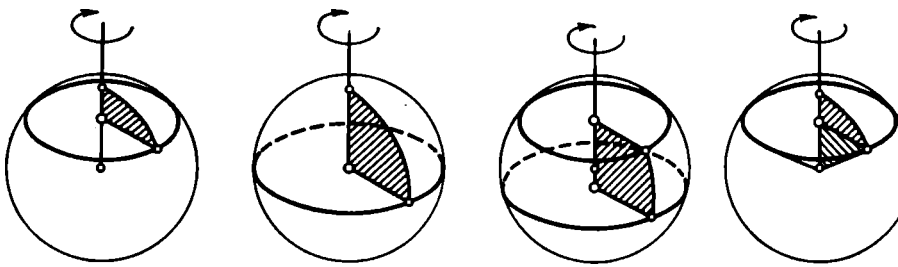


Bild 316

28. Darstellung der Körper

28.1. Mehrtafelprojektion

Zur technisch richtigen Darstellung von Körpern wird die Methode der **Orthogonalprojektion** (Senkrechtprojektion) benutzt. Sie kann entweder als *Mehrtafelprojektion* oder als *axonometrische Projektion* (auf Achsen bezogene Projektion) ausgeführt werden.
Die Mehrtafelprojektion (vorzugsweise die Dreitafelprojektion) dient zur Herstellung von Werkzeichnungen, die in der Produktion zur Anfertigung von Werkstücken gebraucht werden. Das Lesen der Werkzeichnungen setzt Fachkenntnisse voraus, denn die nach der Methode der Mehrtafelprojektion erzeugten Bilder sind nicht sofort anschaulich. Deshalb wird im Standard außerdem die axonometrische Projektion zum Darstellen von Körpern erlaubt und definiert, nach der perspektivische und damit sofort anschauliche Zeichnungen von Körpern erhalten werden können.
Steht beispielsweise ein Rechtkant so in einer Raumecke, daß entsprechende Seiten mit Abstand parallel zu den senkrecht aneinanderstoßenden Ebenen E_1, E_2 und E_3 der Ecke liegen (Bild 317), so lassen sich seine vordere Seitenfläche als **Vorderansicht** A_1, seine linke Seitenfläche als **Seitenansicht** A_2 und seine Deckfläche als **Draufsicht** A_3 senkrecht und unverkürzt auf die Ebenen projizieren. Werden anschließend E_2 und E_1

in die Ebene von E_1 geklappt (Bild 318), so ergibt sich die Orthogonalprojektion oder üblicher, die **technische Zeichnung** des Rechtkantes (Bild 319).

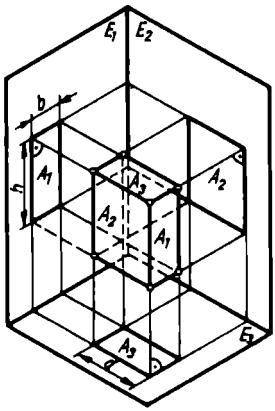


Bild 317

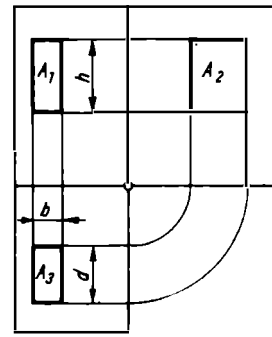


Bild 318

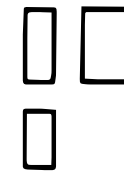


Bild 319

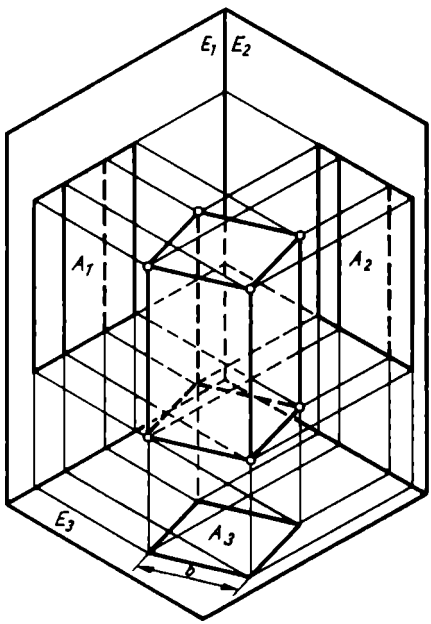


Bild 320

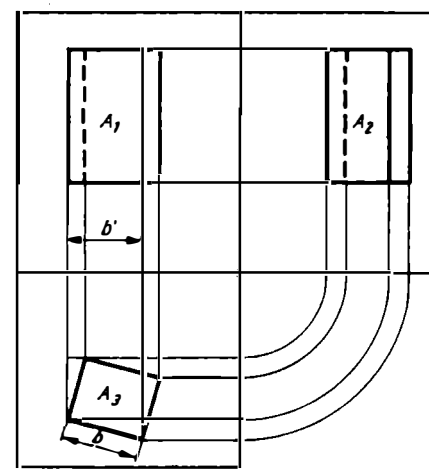


Bild 321

Der Zusammenhang der drei ein und demselben Körper gehörenden Ansichten ist durch die eingezeichneten Hilfslinien sofort klar:

Die linke Seitenfläche des Körpers erscheint rechts neben der Vorderansicht A_1 als Seitenansicht A_2 und hat mit ihr gleiche Höhe h.
Die Deckfläche steht senkrecht unter der Vorderansicht als Draufsicht A_3 und hat mit ihr gleiche Breite b.
Die Dicke d (Tiefe) des Körpers ist in der Seitenansicht und in der Draufsicht zu erkennen.

Folglich kann der Körper durch seine drei Ansichten sowohl eindeutig dargestellt als auch übersichtlich mit Maßen versehen werden.
Liegt beispielsweise nur die Deckfläche des Rechtkants parallel zur Ebene E_3 der Raumecke (Bild 320), so zeigt die Vorderansicht A_1 der technischen Zeichnung nicht die wahre Breite b des Körpers, d.h., b erscheint verkürzt als b' (Bild 321). In der Draufsicht A_3 ist b dagegen in wahrer Größe zu erkennen und kann dort richtig bemaßt werden.

28.2. Axonometrische Projektion

Die axonometrische Projektion oder Parallelperspektive verlangt mit Rücksicht auf möglichst leichte Ausführbarkeit und verständliche Bemaßung der Zeichnung, daß alle *parallelen Kanten* des darzustellenden Körpers *auch in der Zeichnung parallel* verlaufen. Sie läßt zwei Ausführungsformen zu. Der **isometrischen** [(griech.) gleiches Maß habend] **Projektion** bedient man sich, wenn *drei* Ansichten eines Körpers in einer Darstellung zugleich deutlich gezeigt werden sollen. Die **dimetrische** [(griech.) zweifaches Maß habend] **Projektion** betont dagegen nur *eine Ansicht*, wird also verwendet, wenn wichtige Einzelheiten *einer* Körperansicht hervorgehoben werden sollen. Der Nachteil jeder axonometrischen Projektion besteht in der Unmöglichkeit, bei komplizierten Körpern alle für die Herstellung des Körpers notwendigen Maße übersichtlich eintragen zu können und in der Verzerrung von Winkeln und Strecken. Diese Nachteile werden bei der Orthogonalprojektion vermieden.

28.2.1. Isometrische Projektion

Die in isometrischer Projektion ausgeführte Zeichnung eines Würfels (Bild 322) läßt die wichtigsten Merkmale dieser Darstellungsmethode erkennen.
Das *Kantenverhältnis* ist mit

$$a : b : c = 1 : 1 : 1$$

und das *Achsenverhältnis* der untereinander gleichen in die Würfelflächen einbeschriebenen Ellipsen, etwa für Ellipse E_3, mit

$$\overline{FG} : \overline{HE} = \sqrt{3} : 1$$

festgelegt. Folglich müssen die beiden Grundkanten a und b des Würfels mit der Horizontalen die Winkel

$$\alpha = \beta = 30°$$

einschließen, denn dann ist das Dreieck DAB gleichschenklig und somit gilt

$$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{FG} : \overline{HE} = \sqrt{3} : 1 .$$

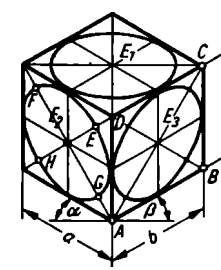


Bild 322

Ferner ist zu erkennen, daß die große Achse der Ellipse E_1 parallel, die der Ellipsen E_2 und E_3 unter 60° geneigt zur Horizontalen liegen.

Daraus ergeben sich für die praktische Anwendung der isometrischen Projektion nachstehende Schlußfolgerungen:

Alle senkrecht aufeinanderstoßenden Kanten eines Körpers, die in den Richtungen der Würfelkanten verlaufen, werden unverkürzt gezeichnet. Kreise, die in horizontalen Ebenen liegen, werden durch Ellipsen dargestellt, deren große Achsen gleichfalls horizontal liegen. Kreise, die in vertikalen Ebenen liegen, werden durch Ellipsen dargestellt, deren große Achsen unter 60° zur Horizontalen geneigt sind.

28.2.2. Dimetrische Projektion

Beim dimetrisch projizierten Würfel (Bild 323) betragen das *Kantenverhältnis*

$$a : b : c = 1 : 1 : \frac{1}{2}$$

und die *Achsenverhältnisse* der Flächenellipsen für E_1 und E_3

$$\overline{EF} : \overline{GH} = \overline{KL} : \overline{MN} = 1 : 3$$

und für E_2

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 9 : 10.$$

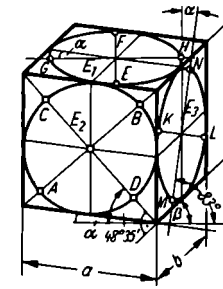


Bild 323

Die Grundkanten a und b des Würfels schließen demnach mit der Horizontalen die Winkel

$$\alpha = 7°10' \quad \text{und} \quad \beta = 41°25$$

ein, was hier nicht bewiesen werden kann.

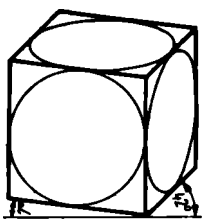


Bild 324

Außerdem ist zu beachten, daß die große Achse der Ellipse E_1 parallel, die der Ellipse E_2 unter 48°35′ und die der Ellipse E_3 unter 83° zur Horizontalen geneigt liegt.

Für die praktische Anwendung der dimetrischen Projektion schreibt die Normung zwei *Vereinfachungen* vor:

Die Neigungswinkel der beiden Würfelgrundkanten werden mit $\alpha = 7°$ und $\beta = 42°$ festgelegt.

Das Achsenverhältnis der Ellipse E_2 beträgt $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 1$, d. h., E_2 wird als Kreis dargestellt (Bild 324).

Beim Zeichnen sind folgende Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

Alle senkrecht aufeinanderstoßenden Kanten, die in der Richtung der Würfelkanten a und c verlaufen, werden unverkürzt gezeichnet, solche, die in Richtung von b verlaufen, werden um die Hälfte verkürzt dargestellt. Kreise, die in horizontalen Ebenen liegen, erscheinen als Ellipsen mit horizontal liegenden großen Achsen. Kreise in den verkürzten vertikalen Seitenflächen werden zu Ellipsen, deren große Achsen unter 83° zur Horizontalen geneigt sind. Kreise in den unverkürzten vertikalen Vorderflächen bleiben Kreise.

29. Körperberechnung

29.1. Berechnungsgrundlagen

Die Hauptaufgabe der Stereometrie besteht in der *Berechnung der Oberfläche und des Volumens* der Körper. Dazu sind vergleichende Betrachtungen mit den üblichen Raum- und Flächeneinheiten durchzuführen.

Das *Maß für die Flächeneinheit* ist das *Einheitsquadrat* mit 1 m oder 1 dm oder 1 cm oder 1 mm Seitenlänge. Es gilt

$$1\ \mathrm{m}^2 = 10^2\ \mathrm{dm}^2 = 10^4\ \mathrm{cm}^2 = 10^6\ \mathrm{mm}^2.$$

Das *Maß für die Raumeinheit* ist der *Einheitswürfel* mit 1 m oder 1 dm oder 1 cm oder 1 mm Kantenlänge. Es gilt

$$1\ \mathrm{m}^3 = 10^3\ \mathrm{dm}^3 = 10^6\ \mathrm{cm}^3 = 10^9\ \mathrm{mm}^3.$$

Meist läßt die Form der zu berechnenden Körper das direkte Ausmessen mit diesen Einheitsgrößen nicht zu. Deshalb läuft die Lösung der Hauptaufgabe der Stereometrie darauf hinaus, durch geometrische Überlegungen Formeln zu finden, die für einen bestimmten Körper *allgemeingültige Aussagen* über sein Volumen und seine Oberfläche bei verschiedenen Abmessungen zulassen.
Die Formeln für die Körperoberflächen können mit den Mitteln der Planimetrie ohne weiteres abgeleitet werden. Die Formeln für die Körpervolumen werden in zwei Schritten ermittelt:

Erstens ermittelt man die Volumenformel für das gerade Prisma.
Zweitens untersucht man den Zusammenhang zwischen den Volumen grundflächen- und höhengleicher Körper beliebiger Form und leitet aus diesem Zusammenhang die Volumenformeln für die anderen Körper ab.

Der erste Schritt bildet den Inhalt der beiden nächsten Abschnitte.
Der zweite Schritt führt zum Satz des CAVALIERI, (CAVALIERI, 1598 bis 1647, Mathematiker in Bologna, Schüler des GALILEI) der in 29.2.3. behandelt wird.

29.2. Ebenflächner

29.2.1. Rechtkant und Würfel

Volumen des Rechtkantes:

$$\boxed{V = abc} \tag{113}$$

a, b und c sind die Kanten des Rechtkantes.

Beweis: Die drei senkrecht in der Ecke A zusammenstoßenden Kanten a, b und c des Rechtkantes (Bild 325) sollen beispielsweise mit dem gemeinsamen Maß cm meßbar sein. Dann können längs der Kante $a = 5$ cm $5 \cdot 1\ \mathrm{cm}^3$ gelegt werden. Die Grundfläche $a \cdot b = 15\ \mathrm{cm}^2$ bedecken $5 \cdot 3 \cdot 1\ \mathrm{cm}^3$ und das Volumen $a \cdot b \cdot c = 60\ \mathrm{cm}^3$ füllen $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1\ \mathrm{cm}^3$ restlos aus. Folglich ist das Volumen des Rechtkantes $V = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1\ \mathrm{cm}^3$ oder allgemein und damit unabhängig vom gewählten gemeinsamen Maß

$$V = abc.$$

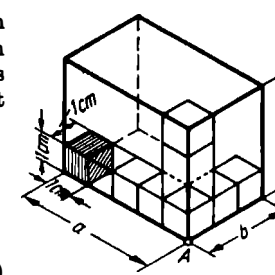


Bild 325

Oberfläche des Rechtkantes:

$$\boxed{O = 2(ab + ac + bc)} \tag{114}$$

Beweis: Alle Seitenflächen sind Rechteckflächen, folglich gilt

$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

oder $$O = 2(ab + ac + bc).$$

Raumdiagonale des Rechtkantes:

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{115}$$

Beweis: Nach dem Satz des PYTHAGORAS (Bild 326) ergeben sich

$$d^2 = f^2 + c^2$$

und $$f^2 = a^2 + b^2.$$

Also ist $$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Für den Würfel als Sonderfall des Rechtkantes ist $a = b = c$ (Bild 327). Damit erhält man aus (113)

Volumen des Würfels:

$$\boxed{V = a^3}, \tag{116}$$

aus (114)

Oberfläche des Würfels:

$$\boxed{O = 6a^2} \tag{117}$$

und aus (115)

Raumdiagonale des Würfels:

$$\boxed{d = a\sqrt{3}} \tag{118}$$

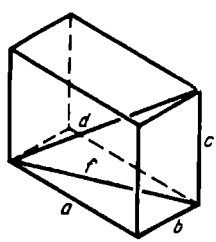


Bild 326

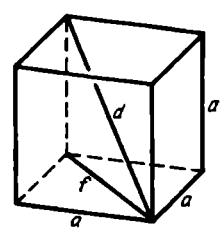


Bild 327

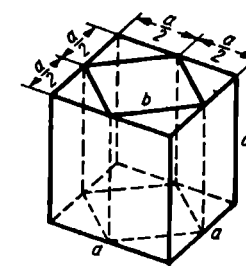


Bild 328

BEISPIELE

1. *Berechne das Volumen V der vier prismatischen Restkörper, die entstehen, wenn aus einem Würfel ein Rechtkant derart herausgearbeitet wird, daß die Ecken des Rechtkantes mit den Mitten der Würfelkanten zusammenfallen (Bild 328).*

Lösung: $V = V_W - V_B$

Für V_W folgt: $V_W = a^3$.

Für V_B folgt: $V_B = a\,b^2$ oder mit $b^2 = \frac{a^2}{2}$

$$V_B = \frac{a^3}{2}.$$

Somit wird $V = a^3 - \frac{a^3}{2}$

$$\underline{\underline{V = \frac{a^3}{2}}}.$$

2. *Von einem Rechtkant sind die Raumdiagonale d und die Kanten a der quadratischen Seitenflächen bekannt (Bild 329). Drücke sein Volumen V durch d und a aus.*

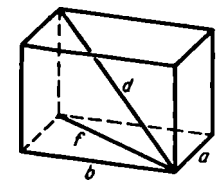


Bild 329

Lösung: $V = abc$ und mit $c = a$

$$V = a^2 b.$$

Für b folgt $b^2 = f^2 - a^2$ und mit $f^2 = d^2 - a^2$

$$b^2 = d^2 - 2a^2.$$

Somit wird $\underline{\underline{V = a^2\sqrt{d^2 - 2a^2}}}.$

AUFGABEN

544. Drücke das Volumen V eines Würfels durch seine Oberfläche O aus.

545. Drücke die Oberfläche O und das Volumen V eines Würfels durch seine Raumdiagonale d aus.

546. Die Kanten eines Rechtkantes stehen im Verhältnis $a : b : c = x : y : z = 1 : 3 : 5$. Berechne Volumen V und Oberfläche O, wenn $a = 6$ cm gegeben ist.

547. Die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge $k = 5$ cm soll der eines Rechtkantes mit den Kanten $a = 5$ cm und $b = 2$ cm gleich sein. Berechne die dritte Kante c des Rechtkantes.

548. Die dritte Kante c eines Rechtkantes soll die mittlere Proportionale zu den beiden anderen a und b sein. Wie groß ist das Volumen V des Rechtkantes, wenn $a = 4$ cm und $b = 9$ cm gegeben sind?

549. Die Raumdiagonale d eines Rechtkantes soll $m = 3$mal so groß sein wie die entsprechende Flächendiagonale f (Bild 330). Berechne die Kanten b und c für $a = 3$ cm und $f = 4$ cm.

550. Von einem Rechtkant sind der Umfang U des schraffierten Diagonalschnittes und die Diagonale $d = 10$ cm dieses Schnittes gegeben (Bild 331). Berechne die Kanten a und b für $U = 28$ cm.

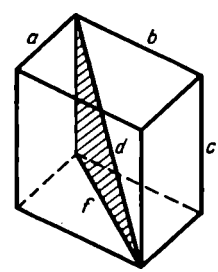


Bild 330

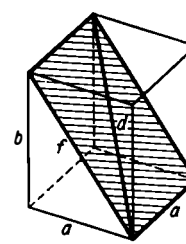


Bild 331

551. Ein Rechtkant mit den Kanten a und b soll einem Würfel mit der Kante k volumengleich sein. Berechne die Kante c des Rechtkantes für $a = 2$ cm, $b = 3$ cm und $k = 6$.

552. Wie lang ist die Kante k eines Stahlwürfels mit der Masse 655 g? ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$)

553. Berechne die Masse m eines aus Grauguß gefertigten Werkstückes mit $\varrho = 7{,}1\ \mathrm{g/cm^3}$ (Bild 332).

554. Aus einer Baugrube mit senkrecht aufeinanderstehenden Wänden und rechteckigem Grundriß von 4 m Breite und 8,5 m Länge sind bisher 96 m³ Erdreich ausgeschachtet worden. Berechne die augenblickliche Tiefe h_1 der Grube. Welches Volumen V ist noch auszuheben, damit die Grube ihre endgültige Tiefe $h = 4{,}3$ m erhält?

555. Das Mauerwerk eines Transformatorenhauses hat die Form eines Rechtkantes von 3,8 m Breite, 4,2 m Länge und 8 m Höhe einschließlich des Fundamentes von 80 cm Höhe. Für die Tür wird eine Aussparung von 1,3 m Breite und 2,1 m Höhe vorgesehen. Berechne das Volumen V des Mauerwerkes für eine Wanddicke von 25 cm.

556. Aus einem Stück Rundstahl von 18 cm Länge und 7 cm Durchmesser soll ein größtmögliches Vierkant mit quadratischem Querschnitt herausgefräst werden. Berechne die Anstelltiefe a des Fräsers und das Volumen V des entstehenden Werkstückes.

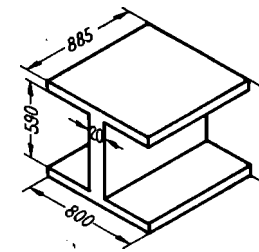


Bild 332

557. Welche lichte Höhe h muß ein Wasserbehälter mit quadratischem Boden haben, wenn er 3,6 m³ fassen soll, die Außenkanten des Bodens 80 cm lang sind und zu seiner Herstellung Blech von 8 mm Dicke verwendet wird?

558. In eine rechteckige Stahlplatte von 12 cm Breite, 8 cm Länge und 5 cm Höhe wird eine Längsnut eingefräst, die die Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenusenlänge 2,5 cm hat. Berechne die Masse m der fertigen Platte. ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$)

559. Berechne das Volumen V und die Oberfläche O eines mehrfach ausgesparten Werkstückes (Bild 333).

560. Ein rechteckiger Blechkasten, dessen Boden eine Breite von 65 cm und eine Länge von 38 cm hat, schwimmt auf dem Wasser. Berechne seine Eintauchtiefe h bei einer Wasserverdrängung von 12 Litern.

561. Eine Stahlschiene mit rechteckigem Querschnitt ist 3,1 cm breit, 2,6 cm hoch und 1,28 m lang. Sie wird mit einer Motorsäge in 8 Einzelteile zerschnitten. Berechne deren Gesamtmasse m bei einer Sägeblattbreite von 1,8 mm. ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$)

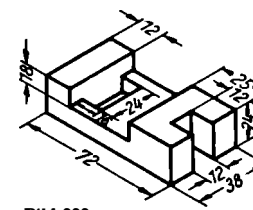


Bild 333

562. Ein rechteckiger Holzkasten hat außen eine Breite von 72 cm, eine Länge von 68 cm und eine Höhe von 86 cm. Die Wanddicke soll 26 mm betragen. Berechne den Holzbedarf V für 30 solcher allseits geschlossenen Kästen, wenn mit einem Schnittverlust von 12% gerechnet wird.

563. Ein 60 Liter fassendes Gefäß von der Form eines Würfels soll durch ein rechteckiges Gefäß ersetzt werden, dessen Boden 50 cm breit und 60 cm lang ist. Berechne seine Höhe h bei gleichem Fassungsvermögen und unter Vernachlässigung der Blechdicke.

564. Aus einem Festmeter sollen Bretter von rechteckigem Querschnitt mit 18 mm Dicke und 22 cm Breite geschnitten werden. Wieviel laufende Meter l erhält man daraus bei einem Schnittverlust von 15%?

565. In eine rechteckige Küvette, die innen 26 cm breit, 28 cm lang und 18 cm hoch ist, soll ein senkrecht auf den Seitenwänden und dem Boden stehendes Diaphragma (poröse Trennwand) von 8 mm Dicke so eingesetzt werden, daß die beiden dadurch gebildeten Räume im Verhältnis 2 : 3 stehen. Berechne die Volumen V_1 und V_2 dieser Räume.

566. Eine quadratische Stahlschiene ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³) mit der Kantenlänge 14 mm und der Oberfläche 892 cm² soll künftig durch eine Aluminiumschiene ($\varrho = 2{,}7$ g/cm³) mit doppeltem und quadratischem Querschnitt und gleicher Länge ersetzt werden. Welche Masseneinsparung m ergibt sich dadurch?

567. In ein würfelförmiges Gefäß, das innen die Kantenlänge 50 cm hat, werden 18 Liter Flüssigkeit gefüllt. Berechne den Flüssigkeitsstand h.

568. Zu Anschauungszwecken sollen drei Würfel mit der gleichen Masse $m = 100$ g aus Stahl ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³), Kupfer ($\varrho = 8{,}9$ g/cm³) und Aluminium ($\varrho = 2{,}7$ g/cm³) gefertigt werden. Berechne die Kantenlängen a_{St}, a_{Cu} und a_{Al}.

569. Ein quadratischer Holzbalken von 6 m Länge hat die Masse 38 kg. Berechne seine Breite b. ($\varrho = 0{,}65$ g/cm³)

570. Eine rechteckige Stahlplatte von 28 mm Breite, 24 mm Höhe und 140 mm Länge soll in einen Quadratstahl gleicher Länge umgeschmiedet werden. Berechne die Quadratseite a ohne Berücksichtigung des Abbrandes.

571. Ein quadratischer Bleiriegel mit der Kantenlänge 36 cm und der Länge 62 cm soll in einen gleich langen Riegel mit rechteckigem Querschnitt umgegossen werden. Wie ist die Höhe h des neuen Riegels zu wählen, wenn eine Breite von 5,5 cm gefordert wird?

29.2.2. Gerades Prisma

Volumen des geraden Prismas:

$$\boxed{V = Ah} \tag{119}$$

A ist die Grundfläche, h die Höhe des geraden Prismas.

Beweis: Jedes gerade Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche kann durch ein zweites Prisma gleicher Form und gleicher Abmessungen zu einem Rechtkant ergänzt werden (Bild 334). Sind V_R und V die Volumen vom Rechtkant und vom geraden Prisma und A_R und A ihre Grundflächen, dann gilt

$$V = \frac{V_R}{2}. \tag{I}$$

Für V_R folgt nach (118)

$$V_R = A_R h,$$

und wegen $A_R = 2A$

auch $V_R = 2Ah$

und mit (I) $V = Ah$.

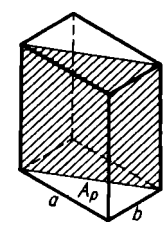


Bild 334

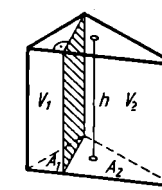


Bild 335

Diese Formel ist für jedes gerade Prisma mit beliebiger Grundfläche gültig. Zum Beweis zeigt man, daß sie auch für ein Prisma mit einem schiefwinkligen Dreieck als Grundfläche stimmt, denn jedes gerade Prisma mit einem beliebigen Vieleck als Grundfläche läßt sich in solche zerlegen und damit berechnen.

Ein gerades Prisma (Bild 335) wird durch einen Schnitt derart zerlegt, daß zwei Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen entstehen. Da beiden die Höhe h gemeinsam ist, gilt

$$V = V_1 + V_2 = A_1 h + A_2 h = (A_1 + A_2) h$$

oder mit $A_1 + A_2 = A$

wieder $V = A h$.

Oberfläche des geraden Prismas:

$$\boxed{O = 2A + M} \tag{120}$$

$2A$ ist die Summe der Grund- und Deckfläche, M der Mantel des geraden Prismas.

BEISPIELE

1. *Bestimme die Höhe h eines regelmäßigen dreiseitigen geraden Prismas mit der Grundkante a und dem Volumen* $V = a^3\sqrt{3}$.

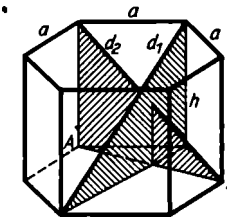


Bild 336

Lösung: Mit

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

folgt aus $V = A h$

$$a^3\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,h$$

und hieraus $\underline{\underline{h = 4a}}$.

2. *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O eines regelmäßigen sechsseitigen geraden Prismas mit der Grundkante a und der Höhe $h = 4a$.*

Lösung:

Mit $A = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

folgt aus $V = A h$

$$V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\cdot 4a$$

$$\underline{\underline{V = 6a^3\sqrt{3}}}.$$

Für $2A$ folgt $2A = 3a^2\sqrt{3}$.

Für M folgt $M = 6ah$

und mit $h = 4a$

ergibt sich $M = 24a^2$.

Damit wird $\underline{\underline{O = 3a^2(8 + \sqrt{3})}}$.

3. *Die Raumdiagonalen d_1 und d_2 eines regelmäßigen sechsseitigen geraden Prismas mit der Höhe h und der Grundkante a sind zu bestimmen (Bild 336).*

Lösung: Für d_1 folgt

$$d_1^2 = (2a)^2 + h^2$$

$$\underline{\underline{d_1 = \sqrt{4a^2 + h^2}}}.$$

Für d_2 folgt $d_2^2 = \overline{AB}^2 + h^2$

und mit $\overline{AB} = a\sqrt{3}$

ergibt sich $\underline{\underline{d_2 = \sqrt{3a^2 + h^2}}}$.

AUFGABEN

572. Von einem regelmäßigen vierseitigen geraden Prisma sind das Volumen $V = 20\ \text{cm}^3$ und die Höhe $h = 5$ cm bekannt. Berechne die Grundkante a.

573. Wie groß ist die Höhe h eines regelmäßigen dreiseitigen geraden Prismas mit der Oberfläche $O = 20\ \text{cm}^2$ und der Grundkante $a = 2\ \text{cm}$?

574. Der Umfang des schraffiert gezeichneten Diagonalschnittes (Bild 337) eines regelmäßigen sechsseitigen geraden Prismas sei $U = 20\ \text{cm}$, die Diagonale des Schnittes $d = 8\ \text{cm}$. Wie groß sind die Höhe h des Prismas und der Radius r des Umkreises der Grundfläche?

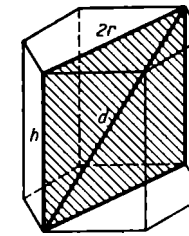


Bild 337

575. Wie groß ist die Masse m der Schneide einer Balkenwaage, deren Profil ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis 6 mm und den Schenkeln 14 mm ist? Die Schneidenlänge beträgt 20 mm. ($\varrho = 7,85\ \text{g/cm}^3$)

576. Ein regelmäßiger sechseckiger Profilstahl ist 3 m lang. Die Kantenlänge des Sechsecks beträgt 2 cm. Berechne das Volumen V des Stahles.

577. Der Querschnitt einer 1,5 m langen Schiene ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien 4 cm und 5 cm. Berechne die Höhe h der Schiene bei einem Volumen von $3,5\ \text{dm}^3$.

578. In eine Stahlplatte von 45 mm Breite, 250 mm Länge und 30 mm Höhe ist in der Längsrichtung eine schwalbenschwanzförmige Nut von 10 mm Tiefe eingefräst. Der Nutquerschnitt ist ein gleichschenkliges Trapez mit der kleineren Grundlinie 20 mm. Die beiden Trapezschenkel schließen mit der größeren Grundlinie einen Winkel von 60° ein. Berechne Volumen V und Oberfläche O der Platte.

579. Zur Herstellung von 100 Spachteln (Bild 338) wird Blech von 1,6 mm Dicke verwendet. Berechne ihre Masse m. ($\varrho = 7,85\ \text{g/cm}^3$)

580. Gib die Volumen V_1, V_2 und V_3 der Balken 1, 2 und 3 an (Bild 339). Nimm an, daß alle drei Balken eine Breite von 100 mm haben.

581. Wieviel laufende Meter Holzleisten (Bild 340) ergeben einen Festmeter?

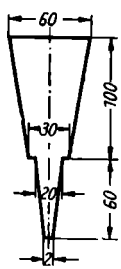


Bild 338

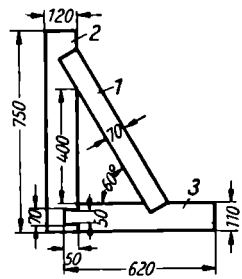


Bild 339

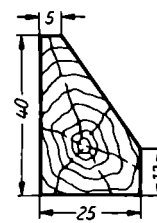


Bild 340

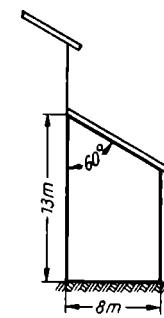


Bild 341

582. Der Giebel eines Anbaues (Bild 341) soll mit 1,5 cm dickem Putz versehen werden. Der Mörtel wird aus Kalk und Sand im Verhältnis 1 : 4 gemischt. Berechne die Mindestmengen V_K und V_S für beide Materialien.

583. Ein Dreikantstahl hat als Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck. Die Kantenlänge des Querschnittes beträgt 4 cm, das Volumen des Stahles 700 cm³. Durch Auswalzen soll die Seitenlänge des Querschnittes auf 2,8 cm verringert werden. Berechne die Längen l_1 und l_2 des Stahles vor und nach der Bearbeitung.

584. Berechne die Masse m des aus zwei Kronglasprismen Kr und einem Flintglasprisma Fl zusammengesetzten Geradsichtprismas (Bild 342). ($\varrho_{Kr} = 2{,}8\ g/cm^3$, $\varrho_{Fl} = 3{,}5\ g/cm^3$)

585. Für eine Gleisanlage muß ein Damm von 3,4 km Länge aufgeschüttet werden, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist. Die Dammkrone soll 3,5 m breit werden und 4 m über der Dammsohle liegen. Die Böschungen schließen mit der Sohle den Böschungswinkel 30° ein. Berechne die Erdmenge V, die zum Aufschütten des Dammes bewegt werden muß.

586. Ein Vierkantstahl (Bild 343) soll durch einen 3 mm breiten Schnitt in zwei Teile zerlegt werden. Berechne deren Volumen V_1 und V_2.

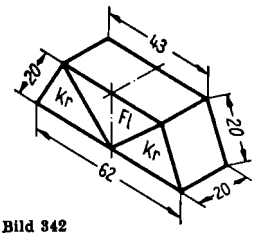


Bild 342

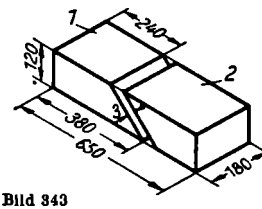


Bild 343

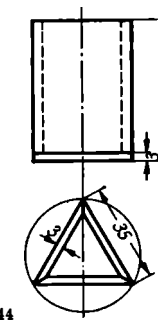


Bild 344

587. Ein Gußstück von 65 cm Länge hat quadratischen Querschnitt. Die Seite des Quadrates mißt 8 cm. Durch Bearbeitung der Längskanten erhält es regelmäßigen achteckigen Querschnitt. Welche Massenverringerung m ergibt sich dadurch? ($\varrho = 7{,}2\ g/cm^3$)

588. Aus einem sehr dünnen Blech von 42 cm Breite und 54 cm Länge soll die Wand eines regelmäßigen sechseckigen Gefäßes gebogen werden. An der Nahtstelle ist eine Überlappung von 0,4 cm vorgesehen. Welche Volumen V_1 und V_2 schließt das Blech ein, wenn es einmal nach den schmalen und einmal nach den breiten Seiten zusammengebogen wird? Die Blechdicke bleibt unberücksichtigt.

589. Berechne das Fassungsvermögen eines Flüssigkeitsprismas (Bild 344).

590. Der Querschnitt einer 1,2 m langen Schiene ist ein Parallelogramm, dessen große Seite 47 mm mißt und die mit der kleinen Seite einen Winkel von 60° einschließt. Die Länge der kleinen Seite beträgt 25 mm. Berechne die Masse m der aus Stahl gefertigten Schiene. ($\varrho = 7{,}85\ g/cm^3$)

591. Wie groß ist die Masse m von 50 Stück gußeisernen Roststäben, die rhombischen Querschnitt und eine Länge von je 32 cm haben? Die Diagonalen des Rhombus sind 14 mm und 22 mm lang. ($\varrho = 7{,}2\ g/cm^3$)

592. Berechne das Volumen V eines Profilstahles von 178 mm Länge (Bild 345).

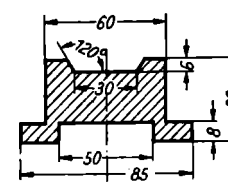


Bild 345

593. Ein Färbebottich, dessen sich parallel gegenüberstehenden Wände die Form eines gleichschenkligen Trapezes mit dem Abstand 2 m haben, ist mit 2 m³ Wasser gefüllt. Der Boden des Bottichs ist 1,5 m und die Flüssigkeitsoberfläche zwischen den schrägen Wänden 1,75 m breit. Ermittle den Wasserstand h.

594. Aus 350 cm³ Kunststoff soll ein regelmäßiges sechseckiges Formstück von 6 cm Höhe gepreßt werden. Berechne die Seite a des Sechsecks.

29.2.3. Satz des CAVALIERI

Satz des CAVALIERI:

Körper mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind volumengleich, wenn alle in gleichen Höhen parallel zur Grundfläche geführten Schnitte inhaltsgleich sind.

Dieser Satz gilt für alle Körper. Er soll hier jedoch nur am Beispiel des geraden und schiefen Prismas bewiesen werden.

Die inhaltsgleichen Grundflächen A_1 und A_2 eines geraden und eines schiefen Prismas I und II mit der gemeinsamen Höhe h liegen in der Ebene E_1 (Bild 346). Die zu E_1 parallele Ebene E_2 schneidet beide Prismen in A_1' und A_2', die wiederum inhaltsgleich sind. Die von E_2 um Δh entfernte und zu ihr parallele Hilfsebene E_3 schließt zwischen sich und E_2 die dünnen Körperschichten ΔV_1 und ΔV_2 ein, für die um so genauer $\Delta V_1 = \Delta V_2$ gilt, je kleiner Δh gemacht wird.

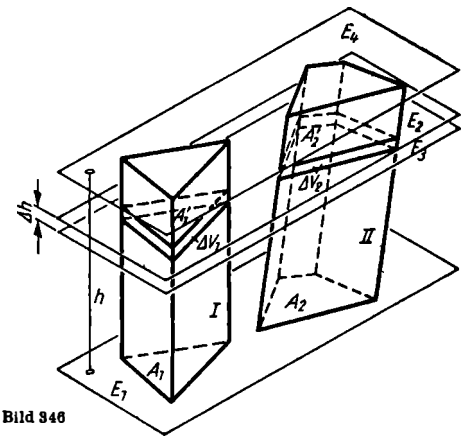


Bild 346

Durch Einfügen weiterer solcher Hilfsebenen zwischen E_1 und E_2 können die von E_1 und E_2 und natürlich auch von E_1 und E_4 begrenzten Prismen in eine beliebige Anzahl volumengleicher Schichten zerlegt werden, so daß die Summe der Schichten des geraden Prismas I gleich der Summe der Schichten des schiefen Prismas II ist.

Da Prismen mit inhaltsgleichen Grundflächen durch beliebige zu ihren Grundflächen parallele Ebenen immer in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden, ist die Anwendbarkeit des Satzes von CAVALIERI auf Prismen bewiesen. Man findet also:

Prismen mit gleichen Höhen und inhaltsgleichen Grundflächen sind volumengleich.

Demnach ist auch das Volumen des schiefen Prismas mit Formel (119),

$$V = Ah,$$

zu berechnen.

AUFGABEN

595. In eine Mauer ist ein Rutschschacht eingearbeitet, der bei A und B quadratische Öffnungen hat (Bild 347).

a) Berechne den Abstand b zwischen der Rutschfläche und der Schachtdecke.

b) Wie groß ist die Mauerdicke d?

c) Welches Volumen V umschließt der Schacht?

596. Ein schiefes Prisma mit quadratischer Grundfläche (Bild 348) wurde durch einen von C nach $\overline{AB}$ geführten ebenen Schnitt in zwei Körper zerlegt. Die Schnittebene steht senkrecht auf der Prismengrundfläche.

a) Berechne die Größe der Schnittfläche A für $a = 9{,}5$ cm und $h = 17{,}2$ cm.

b) Welches Volumen V hat das Prisma mit den unter a) genannten Maßen?

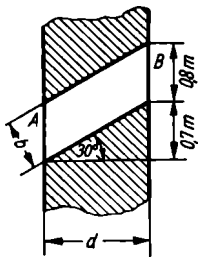


Bild 347

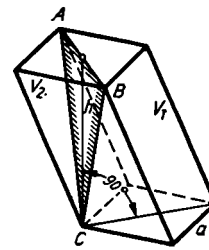


Bild 348

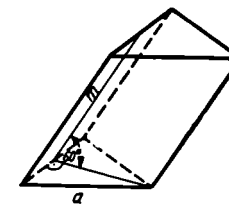


Bild 349

597. Drücke das Volumen V eines schiefen Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche durch a und m aus (Bild 349).

29.2.4. Pyramide

Volumen jeder beliebigen Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} A h \tag{121}$$

A ist die Grundfläche, h die Höhe der Pyramide.

Beweis: Zwei Pyramiden mit der gemeinsamen Höhe h und den inhaltsgleichen Grundflächen A_1 und A_2 stehen auf der Ebene E_1 (Bild 350). Sie werden durch die zu E_1 parallele Ebene E_2 in den ebenfalls inhaltsgleichen Flächen A_1' und A_2' geschnitten. Auf Grund der Ähnlichkeit der Schnittflächen gilt

$$\frac{A_1}{A_1'} = \frac{h^2}{h_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{A_2'} = \frac{h^2}{h_1^2}$$

und wegen $A_1 = A_2$

auch $A_1' = A_2'$.

Nach dem Satz des CAVALIERI sind also beide Pyramiden und alle anderen, die mit ihnen inhaltsgleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, volumengleich. Somit ist das Pyramiden-

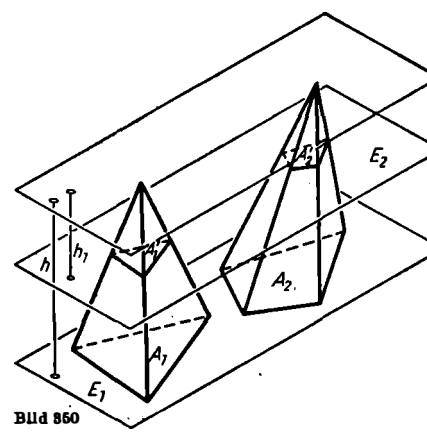


Bild 350

volumen V von der Grundfläche A und der Höhe h abhängig. Zur Berechnung des Volumens zerlegt man ein unregelmäßiges dreiseitiges gerades Prisma mit zwei durch die Eckpunkte ABF und ADF bestimmte Schnittebenen in drei Pyramiden mit den Volumen V_1, V_2 und V_3 (Bild 351).
Die Pyramiden 2 und 3 stimmen in den Dreiecken ABC und GDF als Grundflächen und in den Kanten CF und AG als Höhen überein, folglich

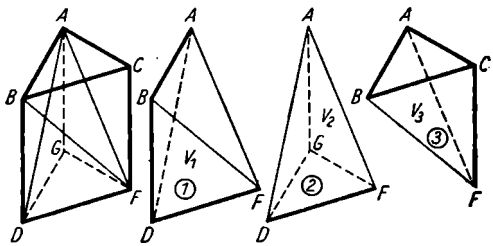


Bild 351

$$V_2 = V_3.$$

Die Pyramiden 1 und 2 stimmen in den Dreiecken ABD und AGD als Grundflächen überein. Außerdem haben sie in den vom Eckpunkt F auf diese Grundflächen gefällten Loten gleiche Höhen, folglich

$$V_1 = V_2$$

und somit auch

$$V_1 = V_2 = V_3 = V.$$

Mit dem Prismenvolumen V_{Pr} ergibt sich also

$$V_{Pr} = 3V$$

und wegen $V_{Pr} = Ah$

durch Gleichsetzen

$$V = \frac{1}{3} Ah.$$

Diese Formel gilt für jede beliebige n-seitige Pyramide, denn diese ist nach dem Satz des CAVALIERI auch einer dreiseitigen Pyramide volumengleich, wenn sie nur mit ihr die Höhe und die Grundfläche gemeinsam hat.

Oberfläche jeder beliebigen Pyramide:

$$\boxed{O = A + M} \tag{122}$$

A ist die Grundfläche, M der Mantel der Pyramide.

BEISPIELE

1. *Volumen V, Oberfläche O, Kantenlänge k und Seitenflächenhöhe m einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe $h = 2a$ sind zu berechnen (Bild 352).*

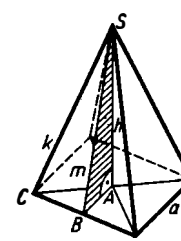


Bild 352

Lösung: Mit $A = a^2$ und $h = 2a$

folgt aus $V = \frac{1}{3} Ah$

$$V = \frac{2}{3} a^3.$$

Mit $\overline{AB} = \frac{a}{2}$

erhält man aus dem schraffierten Dreieck BAS

$$m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2$$

oder $$\underline{\underline{m = \frac{a}{2}\sqrt{17}}}.$$

Aus Dreieck SBC ergibt sich

$$k^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{k = \frac{3}{2}a\sqrt{2}}}.$$

Ist A_1 eine der vier kongruenten Seitenflächen, so folgt

mit $$A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{17}$$

aus $$O = A + M = A + 4A_1$$

$$O = a^2 + 4\frac{a^2}{4}\sqrt{17}$$

oder $$\underline{\underline{O = a^2(1 + \sqrt{17})}}.$$

2. *Eine regelmäßige vierseitige und eine regelmäßige sechsseitige Pyramide besitzen gleiche Grundflächen $A = a^2$ und gleiche Höhen $h = a$. Wie groß ist die Grundkante b der sechsseitigen Pyramide, wenn die der vierseitigen a ist? Zeige außerdem, daß sich die Volumen beider Pyramiden mit dem für b gefundenen Wert als gleich groß erweisen.*

Lösung: Aus $A_6 = 6\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$ und $A_4 = a^2$ folgt wegen $A_6 = A_4$

$$6\frac{b^2}{4}\sqrt{3} = a^2 \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{b = \frac{a}{3}\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}}.$$

Mit $A = a^2$ und $h = a$ folgt aus $V = \frac{1}{3}Ah$

$$V_4 = \frac{1}{3}a^2 a \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{V_4 = \frac{1}{3}a^3}}.$$

Mit $$A_6 = \frac{3}{2}b^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{9}2 \cdot 3 = a^2$$ folgt aus $V = \frac{1}{3}Ah$

auch $$\underline{\underline{V_6 = \frac{1}{3}a^2 a = \frac{1}{3}a^3}}.$$

3. *Die Seitenflächenhöhe m, die Grundkante k, die Höhe h und das Volumen V einer regelmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $A = a^2\sqrt{3}$ und der Oberfläche $O = 6A$ sind zu bestimmen (Bild 353).*

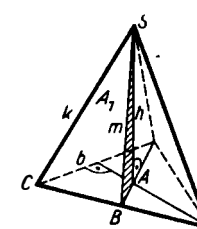


Bild 353

Lösung: Aus der Grundfläche ergibt sich

$$A = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

und hieraus $b = 2a$.

Ist M der Mantel und A_1 eine Seitenfläche, so wird

$$M = O - A = 6A - A = 5A = 5a^2\sqrt{3}$$

und $$A_1 = \frac{M}{3} = \frac{5}{3}a^2\sqrt{3}.$$

Da ferner $$A_1 = \frac{bm}{2} = am,$$

ergibt sich durch Gleichsetzen

$$m = \frac{5}{3}a\sqrt{3}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck SBC erhält man

$$k^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m^2 = a^2 + \frac{25}{3}a^2 = \frac{28}{3}a^2$$

$$k = \frac{2}{3}a\sqrt{21}$$

und aus Dreieck SAB

$$h^2 = m^2 - \overline{AB}^2$$

und wegen

$$\overline{AB} = \frac{1}{3}\,\frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\,\frac{2a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

auch $$h^2 = 8a^2$$

oder $$h = 2a\sqrt{2}.$$

Damit wird das Volumen

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3}\cdot 2a\sqrt{2}$$

$$V = \frac{2}{3}a^3\sqrt{6}.$$

4. *Gesucht sind die Höhe h und der Flächeninhalt A der Grundfläche ABC einer Pyramide, die entsteht, wenn durch die Eckpunkte A, B und C eines Würfels mit der Kantenlänge a ein Schnitt geführt wird (Bild 354).*

Berechne außerdem das Volumen V_R des Restkörpers.

Lösung: Die Grundkanten der Pyramide sind Diagonalen der Würfelseiten, folglich ist Dreieck ABC gleichseitig. Setzt man $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = b$, so ergibt sich

$$A = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}$$

und mit $$b^2 = 2a^2$$

$$A = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}.$$

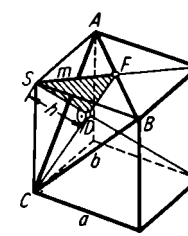


Bild 354

Da ferner $\overline{DF} = \frac{1}{3}\,\frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$

und $m = \frac{b}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$,

wird $h^2 = m^2 - \overline{DF}^2 = \frac{a^2}{3}$

und $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Mit $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

wird das Volumen V_P der Pyramide

$$V_P = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a^3}{6}$$

und das Volumen des Restkörpers

$$V_R = V_W - V_P = a^3 - \frac{a^3}{6}$$

$$V_R = \frac{5}{6}a^3.$$

Faßt man etwa die Seitenfläche ABS der Pyramide als Grundfläche und die Kante SC als Höhe auf, dann ergibt sich wegen

$$A_{\triangle ABS} = \frac{a^2}{2} \quad \text{und} \quad \overline{SC} = a$$

aus $V = \frac{1}{3}Ah$

sofort $V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle ABS}\cdot\overline{SC} = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{2}a = \frac{a^3}{6}$.

AUFGABEN

598. Durch eine regelmäßige vierseitige und eine regelmäßige sechsseitige Pyramide sind derart Schnitte gelegt, daß diese die Symmetrieachsen und die Diagonalen einschließen. Die Schnittfiguren sind gleichseitige Dreiecke mit der Höhe $h = 6$ cm. Wie groß sind die Grundkanten a, die Volumen V und die Oberflächen O beider Körper?

599. In welchem Abstand x von der Spitze einer Pyramide muß eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, damit das Volumen der über dem Schnitt liegenden Restpyramide zum Volumen der ganzen Pyramide im Verhältnis $m : n$ steht? Nenne die Pyramidenhöhe h.

600. Durch die zur Grundfläche parallele Ebene wird das Volumen einer Pyramide halbiert. Drücke die entstehende Schnittfläche A_2 durch die Pyramidengrundfläche A_1 aus.

601. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien $g_1 = 5$ cm und $g_2 = 3$ cm. Berechne ihr Volumen, wenn außerdem die Schenkel $g_2/2$ des Trapezes und die Höhe $h = g_1$ der Pyramide gegeben sind.

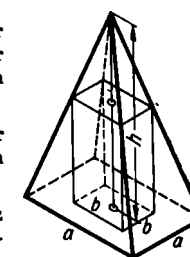


Bild 355

602. Einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante $a = 6$ cm und der Höhe $h = 10$ cm ist ein regelmäßiges vierseitiges Prisma mit der Grundkante b einbeschrieben (Bild 355). Drücke das Volumen V des Prismas durch a und h für den Fall aus, daß $a : b = m : n = 3 : 2$.

603. Die Grundflächen zweier Pyramiden sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm. Die Höhe $h = 5$ cm der Pyramide steht
a) senkrecht auf dem Scheitel des Rechten der Grundfläche,
b) senkrecht auf der Mitte der Hypotenuse der Grundfläche.
Berechne
a) die dritte Grundkante c, die beiden anderen Seitenflächenkanten e und d und das Volumen V,
b) die dritte Grundkante c, die drei Seitenflächenkanten e, d und f und das Volumen V.

604. Eine Pyramide wird durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt derart geteilt, daß sich die Abschnitte der Höhe h, von der Spitze aus gerechnet, wie $m : n$ verhalten. In welchem Verhältnis stehen dann das Volumen V_P der ganzen Pyramide zum Volumen V_R der über der Schnittfläche gelegenen Restpyramide?

605. Der Turm eines alten Gebäudes hat die Form einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide mit der Höhe $h = 4$ m und der Grundkante $a = 0{,}8$ m. Er soll neu mit Dachpappe belegt werden. Berechne den Materialbedarf A bei einem Verschnitt von 15%.

606. Aus einem Rechtkantstahl von 4 cm Breite, 12 cm Länge und 5 cm Höhe soll ein Werkstück von der Form einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide geschmiedet werden. Welche Höhe h bekommt diese, wenn sie eine Grundkante von 3 cm haben soll?

607. Ein Bleiwürfel von 5 cm Kantenlänge soll in eine regelmäßige vierseitige Pyramide von 8 cm Höhe umgegossen werden. Berechne deren Grundkante a.

608. Aus drei dünnen Blechen, die die Form gleichschenkliger Dreiecke mit der Basis 4 cm und der Höhe 12 cm haben, ist eine regelmäßige Pyramide zusammenzusetzen. Berechne deren Höhe h.

609. Zwei gleiche Rhomben mit den Diagonalen $e = 4$ cm und $f = 7$ cm werden längs der Diagonalen e zerschnitten und zum Mantel einer vierseitigen Pyramide zusammengesetzt. Welches Volumen V schließen sie ein?

610. Ein Vierkantstahl wird an einer Stirnseite abgeflacht (Bild 356). Berechne den Materialverlust V.

611. Aus einem Würfel mit 8 cm Kantenlänge soll eine Pyramide herausgearbeitet werden, deren Grundfläche mit der Grundfläche des Würfels übereinstimmt und deren Seitenflächen mit der Grundfläche je einen Winkel von 60° einschließen. Um welchen Betrag V verringert sich das Würfelvolumen?

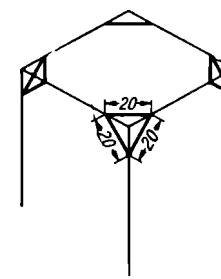


Bild 356

29.2.5. Pyramidenstumpf

Volumen jedes beliebigen Pyramidenstumpfes:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2\right) \tag{123}$$

A_1 und A_2 sind die Grund- und Deckfläche, h die Höhe des Stumpfes.

Beweis: Für die Grundfläche A_1 und die Deckfläche A_2 des Pyramidenstumpfes (Bild 357) gelten

$$2A_1 = a_1 h_1$$
$$2A_2 = a_2 h_2.$$

Durch Division ergibt sich

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}. \tag{I}$$

Aus den Strahlensätzen folgt weiter

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h+x}{x}.$$

Damit erhält man aus (I) sofort

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}.$$

und hieraus als Höhe x der Ergänzungspyramide

$$x = \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}}. \tag{II}$$

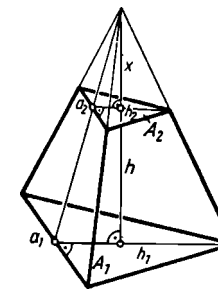


Bild 357

Das Volumen V des Stumpfes ist

$$V = \frac{1}{3} A_1 (x+h) - \frac{1}{3} A_2 x$$

und mit (II)

$$V = \frac{1}{3}\left(A_1 \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} + A_1 h - A_2 \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}}\right)$$

oder $$V = \frac{h}{3}\left[A_1 + \sqrt{A_2}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)\right]$$

und schließlich

$$V = \frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2\right).$$

Oberfläche jedes beliebigen Pyramidenstumpfes:

$$\boxed{O = A_1 + A_2 + M} \tag{124}$$

A_1 und A_2 sind die Grund- und Deckfläche, M der Mantel des Stumpfes.

BEISPIELE

1. *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O eines geraden Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen zwei gleichseitige Dreiecke mit den Seiten a und b sind und dessen Seitenkanten mit k bezeichnet werden (Bild 358).*

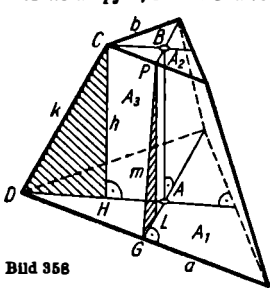


Bild 358

Lösung: Aus dem rechtwinkligen Dreieck CDH folgt

$$h^2 = k^2 - \overline{DH}^2$$

und wegen

$$\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{BC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{3}(a-b)\sqrt{3}$$

ergibt sich $h^2 = k^2 - \left(\frac{1}{3}(a-b)\sqrt{3}\right)^2$

oder $h = \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}$.

Für das Volumen erhält man somit aus

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)$$

mit $A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $A_2 = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}$ und $\sqrt{A_1 A_2} = \frac{ab}{4}\sqrt{3}$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{ab}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + ab + b^2)\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}.$$

Für die Oberfläche O folgt

$$O = A_1 + A_2 + 3A_3.$$

Die Seitenfläche A_3 ist ein gleichschenkliges Trapez mit der Höhe m. Für m erhält man

$$m^2 = h^2 + \overline{GL}^2$$

und wegen

$$\overline{GL} = \overline{AG} - \overline{BP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}(a-b)\sqrt{3}$$

auch $m^2 = k^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2 + \frac{1}{12}(a-b)^2$

und $m = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - (a-b)^2}$.

Damit wird die Seitenfläche

$$A_3 = \frac{a+b}{2}m = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - (a-b)^2}$$

$$A_3 = \frac{a+b}{4}\sqrt{4k^2 - (a-b)^2}$$

und die Oberfläche

$$O = \frac{1}{4}\left[(a^2+b^2)\sqrt{3} + 3(a+b)\sqrt{4k^2 - (a-b)^2}\right].$$

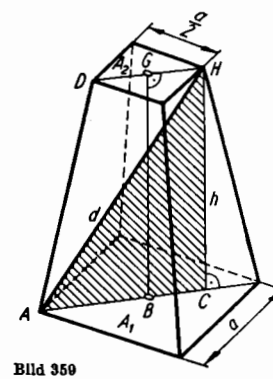


Bild 359

2. *Berechne die Raumdiagonale d eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen $A_1 = a^2$ und $A_2 = \frac{a^2}{4}$ und dessen Volumen mit $V = a^3$ gegeben sind (Bild 359).*

Lösung: Aus

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)$$

ergibt sich für h

$$h = \frac{3V}{A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}$$

und mit $\sqrt{A_1 A_2} = \frac{a^2}{2}$ und den gegebenen Werten

$$h = \frac{3a^2}{a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}}$$

$$h = \frac{12}{7} a .$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACH folgt für die Raumdiagonale d

$$d^2 = h^2 + \overline{AC}^2$$

und mit $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{GH} = \frac{a}{2}\sqrt{2} + \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4} a \sqrt{2}$

ergibt sich $d^2 = \left(\frac{12}{7} a\right)^2 + \left(\frac{3}{4} a \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1593}{392} a^2$

$$d = \frac{3}{28} a \sqrt{354} .$$

Näherungsformel für das Volumen des Pyramidenstumpfes:

$$\boxed{V \approx \frac{A_1 + A_2}{2} h} \qquad (123a)$$

Formel (123) ist für den praktischen Gebrauch unbequem. Formel (123a) läßt erkennen, daß der Stumpf näherungsweise durch ein Prisma ersetzt wird, dessen Grundfläche A gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{A_1 + A_2}{2}$ der Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes ist.

Formel (123a) liefert um so genauere Ergebnisse, je weniger der Stumpf vom Prisma abweicht, d.h., je weniger A_1 und A_2 voneinander verschieden sind. Im Falle $A_1 = A_2$ gilt die Formel genau.

Je mehr dagegen A_2 gegen Null geht, um so mehr nähert sich der Stumpf einer Pyramide. Für den Grenzfall mit $A_2 = 0$ gilt:

$$\frac{A_1 + A_2}{2} h = \frac{A_1}{2} h ,$$

so daß gegenüber dem genauen Wert $\frac{A_1}{3} h$ ein um 50% größeres Ergebnis herauskommt.

Folglich darf Formel (123a) nur angewendet werden, wenn A_1 und A_2 nur wenig voneinander abweichen. Das Ergebnis ist aber auf jeden Fall immer größer als das genaue nach (123) berechnete, wie auch nachstehende Beispiele zeigen:

BEISPIELE

3. *Berechne das Volumen V eines Pyramidenstumpfes mit der Höhe $h = 3$ cm und den Grundflächen $A_1 = 3$ cm² und $A_2 = 1$ cm². Geforderte Genauigkeit* 1%.

Lösung nach (123a):

$$V \approx \frac{A_1 + A_2}{2} h$$

$$V \approx \frac{3\,\text{cm}^2 + 1\,\text{cm}^2}{2} \cdot 3\,\text{cm}$$

$$V \approx 6\,\text{cm}^3$$

Lösung nach (123):

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)$$

$$V = \frac{3\,\text{cm}}{3}(3\,\text{cm}^2 + \sqrt{3\,\text{cm}^2 \cdot 1\,\text{cm}^2} + 1\,\text{cm}^2)$$

$$\underline{\underline{V = 5{,}732\,\text{cm}^3}}$$

Die Abweichung vom genauen Ergebnis beträgt etwa 5%. Formel (123a) kann also nicht angewendet werden.

4. *Berechne das Volumen V eines Pyramidenstumpfes mit der Höhe $h = 3$ cm und den Grundflächen $A_1 = 3$ cm² und $A_2 = 2$ cm². Geforderte Genauigkeit* 1%.

Lösung nach (123a):

$$V \approx \frac{A_1 + A_2}{2} h$$

$$V \approx \frac{3\,\text{cm}^2 + 2\,\text{cm}^2}{2} \cdot 3\,\text{cm}$$

$$\underline{\underline{V \approx 7{,}5\,\text{cm}^3}}$$

Lösung nach (123):

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)$$

$$V = \frac{3\,\text{cm}}{3}(3\,\text{cm}^2 + \sqrt{3\,\text{cm}^2 \cdot 2\,\text{cm}^2} + 2\,\text{cm}^2)$$

$$\underline{\underline{V = 7{,}449\,\text{cm}^3}}$$

Die Abweichung vom genauen Ergebnis beträgt etwa 0,7%. Formel (123a) kann ohne weiteres angewendet werden.

AUFGABEN

612. Ein regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf mit den Grundkanten $a = 4$ cm und $b = 3$ cm ist höhen- und volumengleich einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Wie groß ist deren Grundkante c?

613. Von einem regelmäßigen vierseitigen geraden Pyramidenstumpf sind die Grundkante $a = 4$ cm und die Seitenkante $k = 6$ cm bekannt (Bild 360). Berechne die Höhe h, die Grundkante b und das Volumen V für $\overline{AP} = \frac{d}{5}$.

614. Aus dem Achsenschnitt eines regelmäßigen vierseitigen geraden Pyramidenstumpfes (Bild 361), der durch die Mitten einander gegenüberliegender Grundkanten geführt ist, ist das Volumen V zu berechnen. Der Radius der dem Stumpf einbeschriebenen Kugel ist $r = 10$ cm und die obere Deckkante ist $b = r$ gemacht.

615. Drücke den Mittelschnitt A_m eines Pyramidenstumpfes (Bild 362) durch die Grundfläche A_1 und die Deckfläche A_2 aus.

616. Berechne die Masse m des aus Stahl gefertigten Einsatzambosses (Bild 363). ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

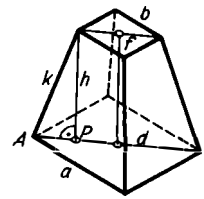


Bild 360

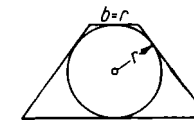


Bild 361

617. Berechne das Fassungsvermögen V und den Materialbedarf A eines aus Stahlblech hergestellten oben offenen Kohlenbunkers (Bild 364). Die Blechdicke bleibt unberücksichtigt.

618. Gib die Masse m der gußeisernen Platte (Bild 365) an. ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³)

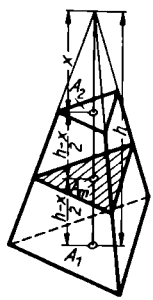


Bild 362

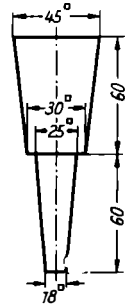


Bild 363

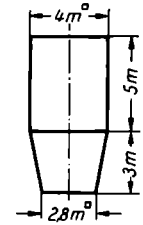


Bild 364

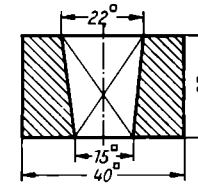


Bild 365

619. Aus 10 m³ Beton werden drei Fundamente gegossen, die die Form regelmäßiger vierseitiger gerader Pyramidenstümpfe haben! Berechne die Höhe h eines dieser Fundamente, dessen Grundkante 0,8 m und dessen Deckkante 0,5 m mißt.

620. Ein Werkstück (Bild 366) soll an seinem verjüngten Ende so weit abgeschliffen werden, daß es die durch Strichlinien gekennzeichnete Form erhält. Berechne den entstehenden Materialverlust V.

621. Bei Ausgrabungen wurde eine regelmäßige achtseitige Pyramide gefunden, deren Spitze jedoch abgeschlagen war. Berechne ihre ursprüngliche Höhe h, wenn für die Höhe des erhalten gebliebenen Stumpfes 1,2 m, für seine Grundkante 30 cm und für seine Deckkante 10 cm gemessen werden.

622. Ein Auffülltrichter (Bild 367) soll außen gespritzt werden. Gib die dafür erforderliche Farbmasse m an, wenn erfahrungsgemäß 150 g Farbe je m² benötigt werden.

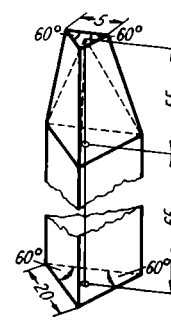


Bild 366

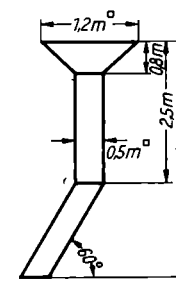


Bild 367

623. Ein Kunststoffpreßling hat die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpfes mit der Grundkante $a = 4$ cm, der Deckkante $b = 3$ cm und der Höhe $h = 5$ cm. Er soll in einen gleich hohen Stumpf mit der Grundkante $a_1 = 5$ cm umgepreßt werden. Berechne dessen Deckkante b_1.

624. Durch einen regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf ist ein achsenparalleler Schnitt durch zwei sich gegenüberliegende Seitenkanten geführt. Der Schnitt stellt ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien $g_1 = 4{,}8$ cm und $g_2 = 2{,}4$ cm dar. Die Schenkel sind $c = 6{,}5$ cm lang. Berechne das Volumen V und die Oberfläche O des Stumpfes.

625. Berechne die Schnittfläche A und die Volumen V_1 und V_2 des regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes (Bild 368). Setze für $a = 6{,}1$ cm, $b = 2{,}7$ cm und $h = 3{,}8$ cm.

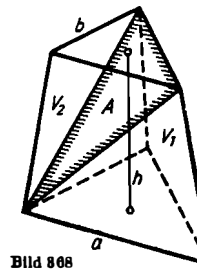


Bild 368

29.2.6. Prismatoid

Volumen des Prismatoides:

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2) \tag{125}$$

A_1 und A_2 sind die Grund- und Deckfläche, A_m der Mittelschnitt und h die Höhe des Prismatoides.

Beweis: Auf dem Mittelschnitt A_m eines Prismatoides (Bild 369) wird ein Punkt M gewählt und mit den Eckpunkten A, B, C, D, F, G, H, K und L verbunden. Dadurch werden die Pyramiden $\dot{M}ABC$ und $\dot{M}DFGH$ mit den Volumen

$$V_{\dot{M}ABC} = \frac{1}{3}A_2 \cdot \frac{h}{2} = A_2 \cdot \frac{h}{6} \tag{I}$$

und

$$V_{\dot{M}DFGH} = \frac{1}{3}A_1 \cdot \frac{h}{2} = A_1 \cdot \frac{h}{6} \tag{II}$$

bestimmt. (Die markierten Punkte sind jeweils die Spitzen der Teilpyramiden.)

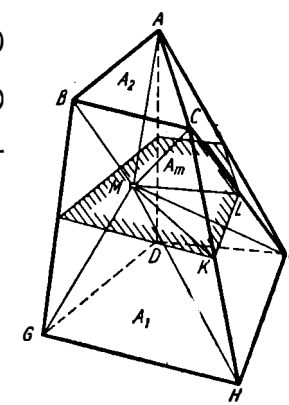


Bild 369

Das Volumen der Pyramide $\dot{C}MKL$ ergibt sich aus

$$V_{\dot{C}MKL} = \frac{1}{3}A_{MKL} \cdot \frac{h}{2} = A_{MKL} \cdot \frac{h}{6}.$$

Da aber einerseits nach dem zweiten Strahlensatz

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{HF}$$

und somit

$$\frac{A_{CKL}}{A_{CHF}} = \frac{1}{4}$$

und andererseits die Pyramiden $\dot{M}CKL$ und $\dot{M}CHF$ die gleiche auf A_{CHF} senkrecht stehende und durch die gemeinsame Spitze M gehende Höhe haben, folgt weiterhin

$$V_{\dot{M}CKL} = \frac{1}{4}V_{\dot{M}CHF}$$

und wegen $V_{\dot{M}CKL} = V_{\dot{C}MKL}$

auch $V_{\dot{M}CHF} = 4\,V_{\dot{C}MKL} = \frac{2}{3} A_{MKL} \cdot h$.

Das ist aber das Volumen einer der Pyramiden, von denen sich noch weitere in den Raum zwischen die Pyramiden $\dot{M}ABC$ und $\dot{M}DFGH$ einfügen lassen. Ihre Grundflächen stellen in jedem Falle einen Teil des Mittelschnittes A_m dar und sind von der Art wie A_{MKL}. Deshalb kann ihr Gesamtvolumen durch

$$V_{Am} = \frac{2}{3} A_m \cdot h \tag{III}$$

ausgedrückt werden.
Somit ergibt sich das Volumen des Prismatoides durch Addition von (I), (II) und (III) und wird

$$V = V_{\dot{M}ABC} + V_{\dot{M}DFGH} + V_{Am}$$

$$V = A_1 \cdot \frac{h}{6} + A_2 \cdot \frac{h}{6} + \frac{2}{3} A_m \cdot h$$

$$V = \frac{h}{6} (A_1 + 4A_m + A_2).$$

BEISPIELE

1. *Es ist das Volumen V des Pontons (Bild 370) zu berechnen.*

Lösung: Aus

$$V = \frac{h}{6} (A_1 + 4A_m + A_2)$$

folgt mit $A_1 = ab$, $A_2 = cd$ und $A_m = xy = \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2}$

$$V = \frac{h}{6} \left(ab + 4 \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2} + cd \right)$$

$$V = \frac{h}{6} [2(ab + cd) + ad + bc].$$

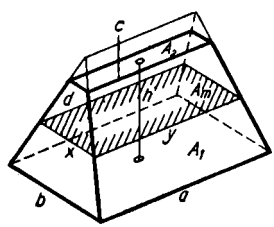


Bild 370

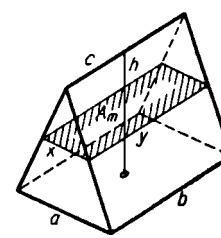


Bild 371

2. *Es ist das Volumen V des Keiles (Bild 371) zu berechnen.*

Lösung: Aus

$$V = \frac{h}{6} (A_1 + 4A_m + A_2)$$

folgt mit $A_1 = ab$, $A_2 = 0$ und $A_m = xy = \frac{a}{2} \cdot \frac{b+c}{2}$

$$V = \frac{h}{6}\left(ab + 4\,\frac{a}{2} \cdot \frac{b+c}{2}\right)$$

$$V = \frac{ah}{6}(2b + c).$$

Für $b = c$

ergibt sich

$$V = \frac{h}{2}\,ab.$$

3. *Bestimme das Volumen V eines Prismatoides mit der Höhe h, dessen Grundfläche ein Rhombus mit den Diagonalen a und b ist (Bild 372). Die Schneide c ($A_2 = 0$) ist der Diagonalen a parallel, und die Streckenhalbierungspunkte von a und c liegen senkrecht übereinander.*

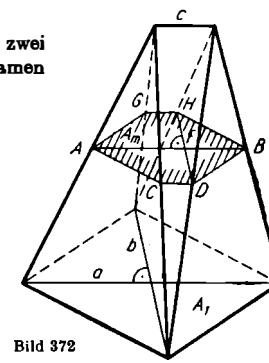


Bild 372

Lösung: Die Strecke AB zerlegt den Mittelschnitt A_m in zwei kongruente Trapeze $ABDC$ und $ABHG$ mit den gemeinsamen Grundlinien

$$\overline{AB} = \frac{a+c}{2} \quad \text{und} \quad \overline{CD} = \frac{c}{2}$$

und der Höhe

$$\overline{FD} = \frac{b}{4}.$$

Somit ergibt sich für den Mittelschnitt A_m:

$$A_m = 2\,\frac{\frac{a+c}{2} + \frac{c}{2}}{2}\,\frac{b}{4} = \frac{b}{8}(a + 2c)$$

und weiterhin in Verbindung mit $A_1 = \frac{ab}{2}$ und $A_2 = 0$ aus

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

$$V = \frac{h}{6}\left[\frac{ab}{2} + 4\,\frac{b}{8}(a + 2c)\right]$$

$$V = \frac{bh}{6}(a + c).$$

4. *Es soll das Volumen V eines Prismatoides mit der Höhe h bestimmt werden, dessen Grund- und Deckfläche von zwei kongruenten und um 45° zueinander versetzten Quadraten gebildet werden (Bild 373). Die Schnittpunkte der Diagonalen der Grundflächen stehen senkrecht übereinander, ihre Seite ist a.*

Lösung: Die Strecken DA und FG zerlegen den Mittelschnitt A_m in zwei kongruente Trapeze $ABCD$ und $FKLG$ und in ein Rechteck $ADFG$. Für den Flächeninhalt A_T des Trapezes gilt:

$$A_T = \frac{\overline{DA} + \overline{CB}}{2} \cdot \overline{BH} = \frac{\frac{a + a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{2}).$$

Für den Flächeninhalt A_R des Rechteckes gilt:

$$A_R = \overline{GA} \cdot \overline{DA} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2}).$$

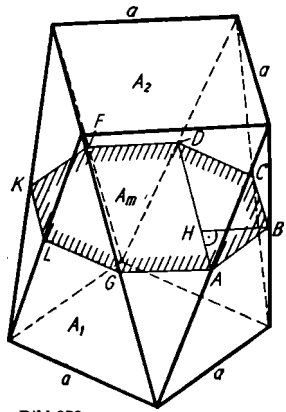


Bild 373

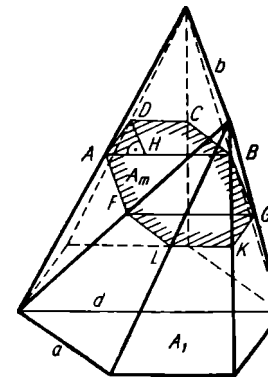


Bild 374

Damit folgt für den Mittelschnitt A_m:

$$A_m = 2A_T + A_R = 2\frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{2}) + \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2})$$

$$A_m = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Schließlich erhält man wegen $A_1 = A_2 = a^2$ aus

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

$$V = \frac{h}{6}\left(a^2 + 4\frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2}) + a^2\right)$$

$$\underline{\underline{V = \frac{h}{3}a^2(2 + \sqrt{2}).}}$$

5. *Berechne das Volumen V eines Prismatoides mit der Höhe h, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a und der großen Diagonale d ist. Die Schneide b ($A_2 = 0$) steht senkrecht zu d, die Streckenhalbierungspunkte von b und d liegen senkrecht übereinander (Bild 374).*

Lösung: Durch die Strecken AB und FG wird der Mittelschnitt A_m in zwei kongruente Trapeze $ABCD$ und $FGKL$ und in ein Rechteck $ABGF$ zerlegt.
Für den Flächeninhalt A_T des Trapezes gilt:

$$A_T = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{16}a^2\sqrt{3}.$$

Für den Flächeninhalt A_R des Rechteckes gilt:

$$A_R = \overline{AB} \cdot \overline{BG} = a\frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Damit folgt für den Mittelschnitt A_m:

$$A_m = 2A_T + A_B = 2 \cdot \frac{3}{16} a^2 \sqrt{3} + \frac{ab}{2} = \frac{a}{8}(3a\sqrt{3} + 4b).$$

Weiterhin erhält man wegen $A_1 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$ und $A_2 = 0$

aus $$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

$$V = \frac{h}{6}\left(\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} + 4 \cdot \frac{a}{8}(3a\sqrt{3} + 4b)\right)$$

$$V = \frac{ah}{6}(3a\sqrt{3} + 2b).$$

AUFGABEN

626. Wie groß ist das Volumen V eines Prismatoides, dessen Grund und Deckfläche zwei kongruente, um 60° zueinander verdrehte gleichseitige Dreiecke mit den Seiten $a = 6$ cm sind (Bild 375)? Die Höhe des Prismatoides sei $h = 10$ cm.

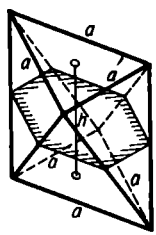


Bild 375

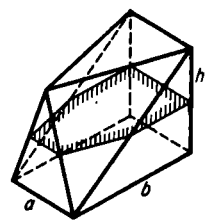


Bild 376

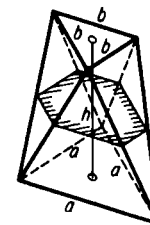


Bild 377

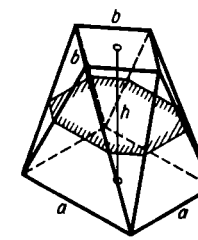


Bild 378

627. Wie groß ist das Volumen V eines Prismatoides (Bild 376), wenn $a = 6$ cm, $b = 10$ cm und $h = 20$ cm gegeben sind?

628. Ein Prismatoid mit der Höhe $h = 8$ cm hat als Grund- und Deckfläche zwei um 60° zueinander verdrehte gleichseitige Dreiecke mit den Seiten $a = 5$ cm und $b = 3$ cm (Bild 377). Berechne sein Volumen V.

629. Ein Prismatoid von der Höhe $h = 4$ cm (Bild 378) hat zwei um 45° zueinander verdrehte Quadrate mit den Seiten $a = 5$ cm und $b = 3$ cm als Grund- und Deckfläche. Gib sein Volumen V an.

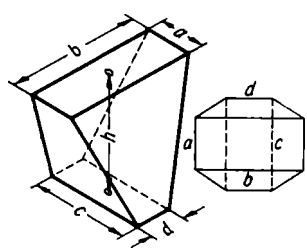


Bild 379

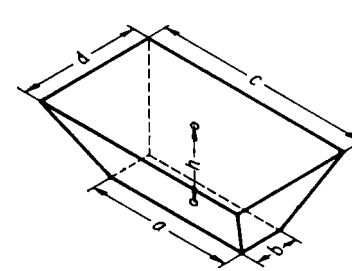


Bild 380

630. Gib eine Formel für das Volumen V des Pontons (Bild 379) an.

631. Berechne das Volumen V des Pontons (Bild 380) für $a = 3\text{ m}, b = 0{,}6\text{ m}, c = 5\text{ m}, d = 0{,}9\text{ m}$ und $h = 2\text{ m}$.

632. Aus der Draufsicht eines Prismatoides (Bild 381) mit der Höhe h ist eine Formel für sein Volumen V zu entwickeln.

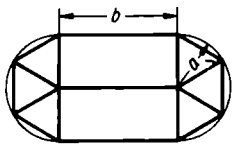


Bild 381

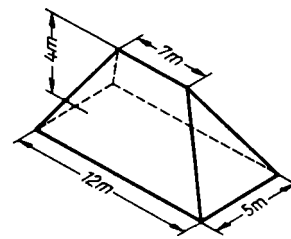


Bild 382

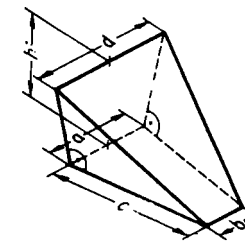


Bild 383

633. Welches Volumen V schließt das Walmdach (Bild 382) ein?

634. Gib eine Formel für das Volumen V des Keiles (Bild 383) an.

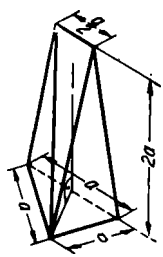


Bild 384

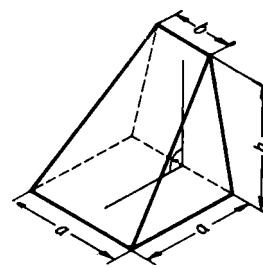


Bild 385

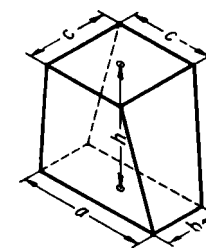


Bild 386

635. Berechne das Volumen V eines Prismatoides mit $a = 4\text{ cm}$ (Bild 384).

636. Wie groß ist das Volumen V eines Keiles (Bild 385)?

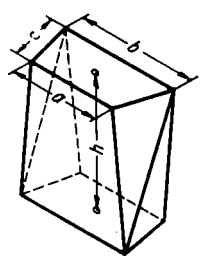


Bild 387

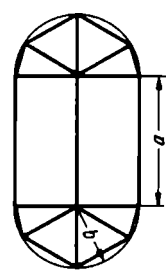


Bild 388

637. Wie lautet die Formel für das Volumen V eines Prismatoides mit rechteckiger Grund- und quadratischer Deckfläche (Bild 386)?

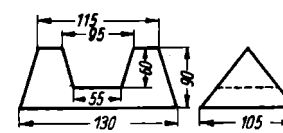


Bild 389

638. Grund- und Deckfläche eines Prismatoides (Bild 387) sind zwei gleichschenklige Trapeze mit den Grundlinien a und b und den Seiten c. Die Grundlinien beider Trapeze liegen parallel zueinander. Gib eine Formel für das Volumen dieses Körpers an.

639. Aus der Draufsicht eines Prismatoides (Bild 388) mit der Höhe h ist eine Formel für sein Volumen V zu entwickeln.

640. Berechne das Volumen V eines Formstückes (Bild 389).

29.3. Krummflächner

29.3.1. Kreiszylinder

29.3.1.1. Gerader Voll- und Hohlzylinder

Volumen des geraden Vollzylinders:

$$\boxed{V = \pi r^2 h} \tag{126}$$

r ist der Radius der Grund- bzw. Deckfläche, h die Höhe des Zylinders.

Beweis: Aus der Volumenformel (119) für das Prisma

$$V = Ah$$

erhält man wegen

$$A = \pi r^2$$

sofort $V = \pi r^2 h$.

Mantel des geraden Vollzylinders:

$$\boxed{M = 2\pi r h} \tag{127}$$

Beweis: Der an der Mantellinie s aufgeschnittene und in die Ebene abgewickelte Zylindermantel ist eine Rechteckfläche mit den Seiten $s = h$ und $U = 2\pi r$ (Bild 390). Deshalb gilt $M = Us = 2\pi r h$.

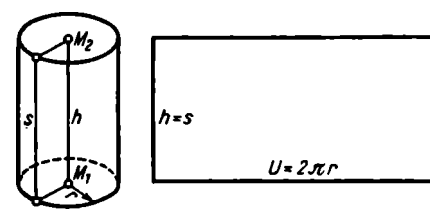


Bild 390

Oberfläche des geraden Vollzylinders:

$$\boxed{O = 2\pi r(r + h)} \tag{128}$$

Beweis: Mit der Grund- und Deckfläche $2A = 2\pi r^2$ und dem Mantel $M = 2\pi r h$ wird aus

$$O = 2A + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

oder $O = 2\pi r(r + h)$
erhalten.

Volumen des geraden Hohlzylinders:

$$\boxed{V = \pi h (r_1^2 - r_2^2)} \tag{129}$$

Beweis: Sind r_1 und r_2 die beiden Radien und ist h die Höhe des Hohlzylinders, so wird mit $r_1 > r_2$ (Bild 391)

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

oder $$V = \pi h (r_1^2 - r_2^2).$$

Entsprechend verfährt man bei der Ableitung der Formeln für den Mantel und die Oberfläche.

Mantel des geraden Hohlzylinders:

$$\boxed{M = 2\pi h (r_1 + r_2)} \tag{130}$$

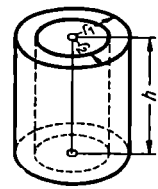


Bild 391

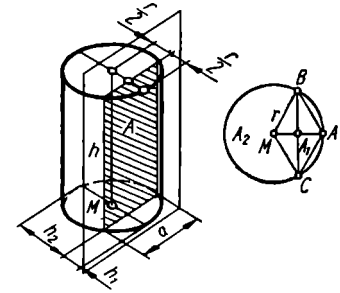


Bild 392

Oberfläche des geraden Hohlzylinders:

$$\boxed{O = 2\pi [(r_1^2 - r_2^2) + h (r_1 + r_2)] = 2\pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2 + h)} \tag{131}$$

BEISPIELE

1. *Berechne die Schnittfläche A, die entsteht, wenn ein gerader Kreiszylinder durch eine Ebene derart geschnitten wird, daß diese einen willkürlich gewählten Radius der Grundfläche halbiert und senkrecht zu ihm und der Grundfläche steht (Bild 392). Gib außerdem die Volumen V_1 und V_2 der beiden Zylinderteile an. Rechne mit $h = 2r$.*

   Lösung: Ist a die in der Grundfläche liegende Seite der Schnittfläche, dann ergibt sich aus dem gleichseitigen Dreieck ABM mit der Seitenlänge r:

   $$\frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{3} \quad \text{und damit} \quad a = r\sqrt{3}.$$

   Hieraus folgt die Schnittfläche zu

   $$A = ah = r\sqrt{3} \cdot 2r$$

   $$\underline{\underline{A = 2r^2\sqrt{3}}}.$$

   Der geführte Schnitt zerlegt die Grund- und Deckfläche in zwei kongruente Segmente mit den Höhen h_1 und h_2. Die Flächeninhalte und Bögen dieser Segmente seien A_1 und A_2 bzw. b_1 und b_2. Für A_1 gilt:

   $$A_1 = \frac{1}{2}(b_1 r - sr + sh_1)$$

   und wegen

   $$s = a = r\sqrt{3}, \quad h_1 = \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{120° \pi r}{180°} = \frac{2}{3}\pi r$$

   $$A_1 = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Damit ergibt sich das Volumen V_1 aus $V_1 = A_1 \cdot h$ zu

$$V_1 = \frac{r^3}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Für A_2 gilt:

$$A_2 = \frac{1}{2}(b_2 r - s r + s h_2)$$

und wegen

$$s = r\sqrt{3}, \quad h_2 = \frac{3}{2} r \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{240° \pi r}{180°} = \frac{4}{3}\pi r$$

$$A_2 = \frac{r^2}{12}(8\pi + 3\sqrt{3}).$$

Damit ergibt sich das Volumen V_2 aus $V_2 = A_2 h$ zu

$$V_2 = \frac{r^3}{6}(8\pi + 3\sqrt{3}).$$

2. *Ein Zylinder mit der Höhe $h = r$ soll einem Hohlzylinder volumen- und höhengleich sein. Außerdem soll $r_1 > r_2$ und $r_2 = r$ für die Radien des Hohlzylinders gelten. Berechne r_1.*

Lösung: Für den Vollzylinder gilt:

$$V = \pi r^2 h \quad \text{und mit} \quad h = r$$

$$V = \pi r^3. \tag{I}$$

Für den Hohlzylinder gilt:

$$V = \pi h(r_1^2 - r_2^2) \quad \text{und mit} \quad h = r \quad \text{und} \quad r_2 = r$$

$$V = \pi r(r_1^2 - r^2). \tag{II}$$

Durch Gleichsetzen von (I) und (II) ergibt sich

$$\pi r^3 = \pi r(r_1^2 - r^2)$$

$$r_1^2 = 2r^2$$

und $$r_1 = r\sqrt{2}.$$

AUFGABEN

641. Das Volumen eines Zylinders sei $V = 100\ \text{cm}^3$, seine Höhe $h = 5$ cm. Berechne seinen Durchmesser d.

642. Ein Zylinder hat einen quadratischen Achsenschnitt. Die Seiten der Schnittfläche sind $a = 4$ cm. Berechne sein Volumen V und seine Oberfläche O.

643. Drücke das Volumen V eines Zylinders durch seinen Mantel $M = 100\ \text{cm}^2$ und seine Höhe $h = 10$ cm aus. Berechne außerdem sein Volumen V.

644. Berechne das Volumen V und den Mantel M eines Zylinders für den Fall, daß $r : h = m : n = 3 : 5$ und der Radius des Grundkreises $r = 2$ cm gegeben sind.

645. Ein Zylinder mit dem Radius $r_1 = 5$ cm und der Höhe $h_1 = 8$ cm soll einem Zylinder volumengleich sein, von dem $r_2 : h_2 = m : n = 3 : 5$ bekannt sind. Berechne r_2 und h_2.

646. Das Volumen eines Hohlzylinders soll gleich dem Volumen des inneren Hohlraumes sein. In welchem Verhältnis stehen für diesen Fall die Radien r_1 und r_2 des Hohlzylinders?

647. Wie verhalten sich die Mäntel M_1 und M_2 von Hohlzylinder und innerem Hohlraum für den Fall der Aufgabe 646?

648. Von einem Hohlzylinder sind das Volumen $V = 20\ \text{cm}^3$, der Mantel $M = 40\ \text{cm}^2$ und die Höhe $h = 4$ cm bekannt. Berechne die beiden Radien r_1 und r_2.

649. Ein Vollzylinder soll einem Hohlzylinder volumen- und höhengleich sein. Wie groß ist der Radius r des Vollzylinders zu machen, wenn die Radien $r_1 = 3$ cm und $r_2 = 2$ cm des Hohlzylinders gegeben sind?

650. Die Radien eines Hohlzylinders stehen im Verhältnis $r_1 : r_2 = m : n = 4 : 3$. Berechne sein Volumen V und seinen Mantel M für $r_1 = 4$ cm und $h = 6$ cm.

651. Aus einem 20 cm breiten, 30 cm hohen und 1 m langen Stahlblock soll 30 mm dicker Rundstahl gewalzt werden. Wieviel laufende Meter ergeben sich unter der Annahme, daß keiner lei Abfall entsteht?

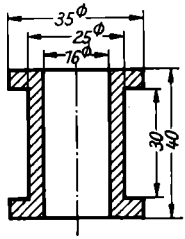


Bild 393

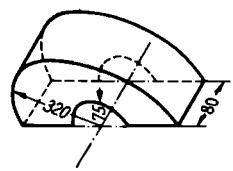


Bild 394

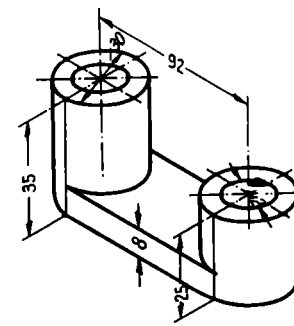


Bild 395

652. Berechne die Masse m für 100 Stück aus Messing hergestellte Lagerbüchsen (Bild 393). ($\varrho = 8{,}5\ \text{g/cm}^3$)

653. Wie groß ist der Materialbedarf A für eine Schutzhaube (Bild 394)? Berechne außerdem den von ihr eingeschlossenen Raum V.

654. Berechne die Masse m eines aus Grauguß gegossenen Hebels (Bild 395). ($\varrho = 7{,}2\ \text{g/cm}^3$)

655. Wie groß ist der Materialbedarf V eines aus Beton gegossenen Kappengewölbes von 30 cm Dicke und 180 m Länge (Bild 396)?

656. Aus Sechskantstahl von 17 mm Schlüsselweite und 60 mm Länge soll ein Schraubenrohling mit 10 mm Nenndurchmesser herausgedreht werden. Der Schraubenkopf soll 8 mm hoch sein. Berechne den Materialabfall V.

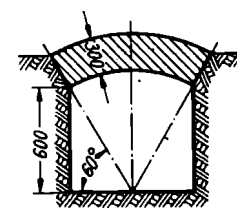


Bild 396

657. Ein quadratisches Blech von 25 cm Seitenlänge und 4 mm Dicke wird nach entsprechender Abschrägung zweier gegenüberliegender Kanten so zu einem Hohlzylinder zusammengebogen und stumpf geschweißt, daß der Umfang 25 cm beträgt. Wie groß sind sein Außendurchmesser d_1, sein Innendurchmesser d_2 und der von ihm eingeschlossene Raum V?

658. Aus einer Aluminiumplatine von 35 mm Durchmesser und 15 mm Höhe soll durch Kaltspritzen (Fließpressen) ein Becher von 34 mm Innendurchmesser und 1 mm dickem Boden hergestellt werden. Berechne seine Gesamthöhe h.

659. 180 kg Grauguß ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³) werden im Schleudergußverfahren zu einem Rohr von 10 mm Wanddicke und 120 mm lichter Weite verarbeitet. Berechne die Rohrlänge l.

660. Zwei Bleiwalzen von 34 mm Durchmesser und 48 mm Höhe werden in einen Würfel umgeschmolzen. Gib dessen Kantenlänge a an.

661. Ein zylindrisches Standgefäß von 30 mm lichter Weite soll mit Teilstrichen für je 1 cm³ Fassungsvermögen versehen werden. In welchen Abständen a voneinander müssen diese angebracht werden?

662. Eine zylindrische Büchse faßt 1 dm³ Flüssigkeit. Ihr Innendurchmesser d ist doppelt so groß wie ihre Höhe h. Berechne d und h.

663. Wieviel laufende Meter l einer Abflußrinne (Bild 397) können aus 1 m³ Beton hergestellt werden?

664. 20 cm³ Wasser werden in ein zylindrisches Gefäß von 24 mm lichtem Durchmesser gegossen. Berechne den Wasserstand h.

665. Das Standgefäß einer Mohrschen Waage zur Bestimmung der Dichten von Flüssigkeiten hat 40 mm lichten Durchmesser. Wenn der Senkkörper vollständig eintaucht, hebt sich die Flüssigkeitsoberfläche um 3,5 mm. Berechne das Volumen V des Schwimmers.

666. Aus einem 28 mm langen Rundstab von 8 mm Durchmesser wird durch fortgesetztes Ziehen ein Draht von 0,3 mm Durchmesser gewonnen. Gib dessen Länge l unter der Voraussetzung an, daß keine Materialverluste auftreten.

667. Ein 8 m tiefer Brunnen wird aus einer 25 cm dicken ringförmigen Mauer hochgezogen. Berechne den Ziegelbedarf V für einen lichten Durchmesser von 1,2 m.

668. In einem Transformator sind 8,4 kg Kupferdraht von 3 mm Durchmesser verarbeitet worden. Berechne die Länge l des Drahtes. ($\varrho = 8{,}9$ g/cm³)

669. In einem Rundsockel von 60 cm Höhe sind 1,4 m³ Beton verarbeitet worden. Gib seinen Durchmesser d an.

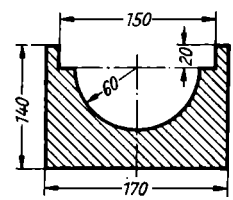


Bild 397

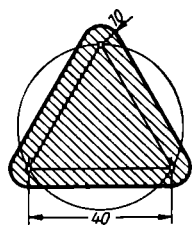


Bild 398

670. Ein Bleiring von 15 mm Höhe, 38 mm Innen- und 62 mm Außendurchmesser soll bei gleichbleibender Höhe auf 45 mm Innendurchmesser ausgewalzt werden. Berechne den neuen Außendurchmesser d.

671. In einem einseitig durch einen Kolben abgeschlossenen Gefäß dehnt sich Gas bei konstantem Druck um 210 cm³ aus. Berechne den dadurch verursachten Kolbenhub h bei einem Durchmesser des Zylinderraumes von 75 mm.

672. Berechne die Masse m einer 80 cm langen Achse (Bild 398). ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

673. Eine 720 mm lange Achse aus Vierkantstahl mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge $a = 3$ cm) wird beiderseits abgedreht, so daß zylindrische Zapfen von 18 mm Durchmesser und 58 mm Länge entstehen. Berechne die Masse m von 100 Stück fertig bearbeiteten Achsen und den dabei auftretenden Materialverlust m_v. ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

674. Zwei durch Kolben abgeschlossene Zylinder sind durch eine Rohrleitung verbunden.
a) Um welchen Betrag h_1 hebt sich der große Kolben mit dem Durchmesser $d_1 = 26{,}0$ cm, wenn mit dem kleinen Kolben vom Durchmesser $d_2 = 4{,}2$ cm bei einem Hub $h_2 = 7{,}5$ cm Flüssigkeit in den großen Zylinder gedrückt wird?
b) Wieviel Hübe z müssen mit dem kleinen Kolben ausgeführt werden, damit sich der große Kolben um $h_3 = 64$ cm hebt?

675. Das größte Volumen, das von einem Kolben in einem Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt eingeschlossen wird, beträgt $V_1 = 1{,}5$ dm³, das kleinste $V_2 = 0{,}11$ dm³. Berechne den Kolbenhub h für den Kolbendurchmesser $d = 65$ mm.

676. Berechne die Masse m eines Stahldrahthakens. (Bild 399) ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³)

677. Stelle eine Formel für das Volumen V eines Nockens auf. (Bild 400)

678. Welche Masse m hat ein gußeiserner Reiter (Bild 401). ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³)

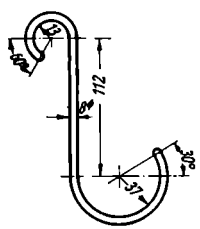


Bild 399

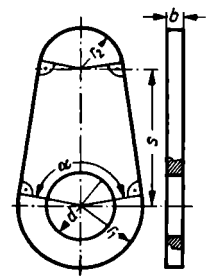


Bild 400

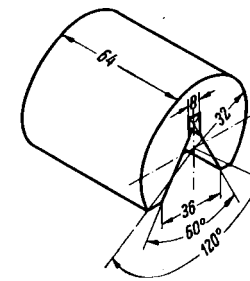


Bild 401

679. Ein zylindrisches Führungsstück aus Stahl ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³) hat die Länge $l = 150$ mm (Bild 402). Berechne seine Masse m für $d_1 = 80$ mm, $d_2 = 40$ mm und $a = 30$ mm.

680. Berechne die Masse m eines Kupplungsteiles (Bild 403). ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³)

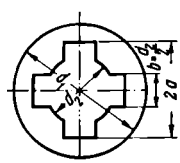


Bild 402

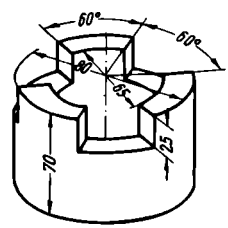


Bild 403

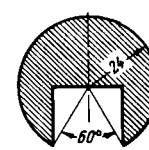


Bild 404

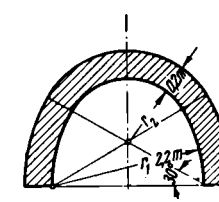


Bild 405

681. Aus dem Normalschnitt durch einen Rundstab (Bild 404) von der Länge $l = 540$ mm ist die Masse des Stabes zu berechnen. ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

682. Ein Kanalgewölbe (Bild 405) ist 45 m lang.
a) Welche Betonmenge V muß dafür hergestellt werden?
b) Wie groß ist der Holzbedarf A für die Verschalung der gekrümmten Gewölbeflächen?

29.8.1.2. Schiefer Voll- und Hohlzylinder

Nach dem Satz des CAVALIERI gelten für das Volumen des schiefen Voll- und Hohlzylinders die Formeln für das Volumen des geraden Voll- und Hohlzylinders.
Der Mantel und die Oberfläche des schiefen Voll- und Hohlzylinders lassen sich nicht durch einfache Formeln ausdrücken.

BEISPIELE

1. *Berechne das Volumen V eines schiefen Vollzylinders, dessen Grund- und Deckfläche so gegeneinander versetzt sind, daß ihre Projektionen einander gerade berühren (Bild 406). Die Mantellinie ist mit $s = 4r$ gegeben.*

   Lösung: Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist h die Kathete und ergibt sich demzufolge aus

   $$h^2 = s^2 - (2r)^2 = (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2$$

   $$h = 2r\sqrt{3}.$$

   Damit wird das gesuchte Volumen

   $$V = \pi r^2 h$$

   $$V = \pi r^2 2r\sqrt{3}$$

   $$\underline{\underline{V = 2\pi r^3\sqrt{3}.}}$$

2. *Ermittle den halben Durchmesser b der Schnittellipse E, die durch den Normalschnitt an einem schiefen Kreiszylinder entsteht (Bild 406).*

   Lösung: $\triangle ABC \sim \triangle FDB$

   somit $$b \cdot \frac{h}{2} = 2r : s$$

   $$\underline{\underline{b = \frac{hr}{s}}}$$

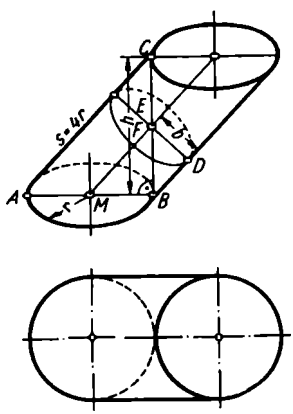


Bild 406

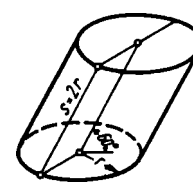


Bild 407

Setzt man für h und s die im Beispiel 1 angegebenen Werte ein, so folgt

$$\underline{\underline{b = \frac{r}{2}\sqrt{3}.}}$$

AUFGABEN

683. Berechne das Volumen V eines schiefen Zylinders, dessen Achse mit der Grundfläche den Winkel von 60° einschließt (Bild 407).

684. Drücke das Volumen V eines schiefen Zylinders durch die gegebenen Stücke aus (Bild 408).

685. Berechne das Volumen V eines schiefen Zylinders, dessen Normalschnitt mit der Grundfläche den Winkel 45° einschließt (Bild 409).

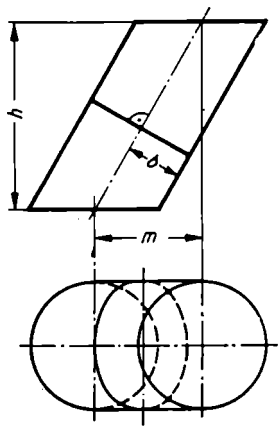


Bild 408

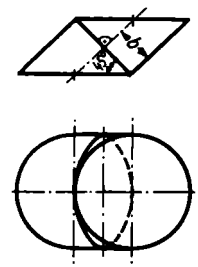


Bild 409

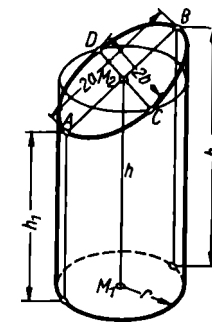


Bild 410

29.3.1.3. Schief geschnittener gerader Zylinder

Volumen des schief geschnittenen Zylinders:

$$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2} \tag{132}$$

r ist der Radius der kreisförmigen Grundfläche, h_1 und h_2 sind die kürzeste und längste Mantellinie des Zylinders.

Beweis: Trennt man durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur kreisförmigen Grundfläche und durch den Ellipsendurchmesser $2b$ der Deckfläche geführt wird, den Zylinderhuf CDB ab (Bild 410), so läßt sich der verbleibende Restkörper durch den Huf zu einem Zylinder mit zwei parallelen kreisförmigen Flächen als Grund- und Deckfläche ergänzen. Dessen Höhe h ist das arithmetische Mittel aus den Höhen h_1 und h_2 der durch die Endpunkte A und B des großen Ellipsendurchmessers $2a$ bestimmten kürzesten und längsten Mantellinien. Damit folgt aus

$$V = \pi r^2 h \qquad \text{sofort} \qquad V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Mantel des schief geschnittenen Zylinders:

$$M = \pi r (h_1 + h_2) \tag{133}$$

Beweis: Aus

$$M = 2\pi r h \qquad \text{wird mit} \qquad h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$M = \pi r (h_1 + h_2).$$

Oberfläche des schief geschnittenen Zylinders:

$$O = \pi r \left(r + h_1 + h_2 + \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (h_2 - h_1)^2} \right) \tag{134}$$

Beweis: Die Integralrechnung liefert für die Fläche A der Ellipse (Bild 410)

$$A = \pi a b$$

oder mit $b = r$ und $a = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (h_2 - h_1)^2}$

auch $A = \frac{\pi}{2} r \sqrt{4r^2 + (h_2 - h_1)^2}$

Damit ergibt sich

$$O = \pi r^2 + A + M$$

$$O = \pi r \left(r + h_1 + h_2 + \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + (h_2 - h_1)^2} \right).$$

BEISPIELE

1. *Wie groß sind das Volumen V, der Mantel M und die Oberfläche O eines doppelseitig schief geschnittenen geraden Kreiszylinders (Bild 411).*

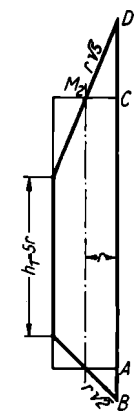


Bild 411

Lösung: Für h_1 gilt laut Zeichnung:

$$h_1 = 5r.$$

Für h_2 ergibt sich

$$h_2 = h_1 + 2(\overline{AB} + \overline{CD})$$

$$h_2 = 5r + 2\left(\sqrt{(r\sqrt{2})^2 - r^2} + \sqrt{(r\sqrt{5})^2 - r^2} \right)$$

$$h_2 = 11r.$$

Damit folgt für das Volumen

$$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi r^2 \frac{5r + 11r}{2}$$

$$\underline{\underline{V = 8\pi r^3.}}$$

Aus $M = \pi r (h_1 + h_2)$

ergibt sich die Mantelfläche zu

$$M = \pi r (5r + 11r)$$

$$\underline{\underline{M = 16\pi r^2.}}$$

Damit wird die Oberfläche nach (134)

$$O = \pi r\left(r + 5r + 11r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (11r - 5r)^2}\right)$$

$$O = \pi r^2 (17 + \sqrt{10}).$$

2. *Berechne die Höhen h, h_1 und h_2 eines schief geschnittenen geraden Kreiszylinders mit dem Volumen $V = 8\pi r^3$ (Bild 412).*

Lösung: Durch Gleichsetzen von

$$V = 8\pi r^3 \quad \text{und} \quad V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$$

ergibt sich

$$h_2 + h_1 = 16r$$

und mit $x = 2r$ auch

$$h_2 - h_1 = 2r$$

und somit

$$h_1 = 7r, \quad h_2 = 9r, \quad h = 8r.$$

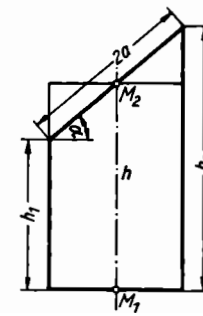


Bild 412

AUFGABEN

686. Die Höhen h_1 und h_2 eines einseitig schief geschnittenen Zylinders stehen im Verhältnis $h_1 : h_2 = m : n = 3 : 1$. Berechne h_1 und h_2 für den Fall, daß das Volumen $V = 40\ \text{cm}^3$ und der Radius $r = 2$ cm gegeben sind.

687. Ein Zylinder mit der Höhe $h_1 = 16$ cm und dem Radius $r = 2$ cm soll derart einseitig schief geschnitten werden, daß seine Höhe h_1 erhalten bleibt und daß er volumengleich wird einem Zylinder mit der Höhe $h_3 = 3$ cm und dem Radius $r_3 = 4$ cm. Berechne die andere Höhe h_2 des schief geschnittenen Zylinders.

688. Berechne die Masse m des Kreuzstückes eines Kardangelenkes (Bild 413). ($\varrho = 7{,}2\ \text{g/cm}^3$)

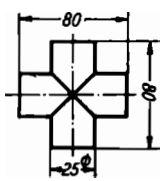


Bild 413

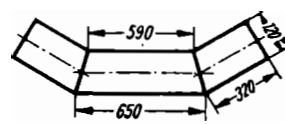


Bild 414

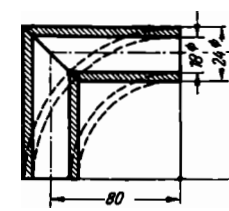


Bild 415

689. Berechne das Volumen V eines aus dünnem Blech gefertigten Rohres ohne Berücksichtigung der Blechdicke (Bild 414).

690. Zwei 80 cm lange Bleirohre wurden bisher an je einer Stirnseite unter dem Winkel 45° abgeschrägt und dann zusammengelötet (Bild 415). Neuerdings werden sie durch einen Rohrkrümmer ersetzt (Strichlinien im Bild 415).
a) Berechne die Materialeinsparung m. ($\varrho = 11{,}34\ \text{g/cm}^3$)
b) Um welche Länge l könnte der Krümmer durch diese Einsparung beiderseits geradlinig verlängert werden?

691. Eine schräg aufgestellte zylindrische Tonne (Bild 416) ist mit Wasser gefüllt. Berechne das Wasservolumen V und gib außerdem h an.

692. Ein auf einer Seite schief geschnittener Zylinder hat die Abmessungen $r = 11$ cm, $h_1 = 27$cm und $h_2 = 32$ cm. Er soll durch einen Normalschnitt in zwei volumengleiche Teile zerlegt werden. In welchem Abstand h vom Grundkreis ist dieser Schnitt zu führen?

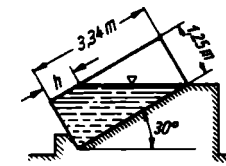


Bild 416

20.3.2. Zylinderhuf

Volumen des Zylinderhufes:

$$V = \frac{2}{3} r^2 h \tag{135}$$

r ist der Radius der halbkreisförmigen Grundfläche, h die Höhe des Hufes.

Beweis: Formel (125) ist, wie hier nicht gezeigt werden kann, auch auf Krummflächner anwendbar. Stellt man die Grundkante AB des Hufes senkrecht (Bild 417), so lassen sich A und B als Grundfläche $A_1 = 0$ und Deckfläche $A_2 = 0$ auffassen. Mit dem Mittelschnitt $A_m = \frac{r h}{2}$ und $h = \overline{AB} = 2r$ folgt dann aus (125)

$$V = \frac{2r}{6}\left(0 + 4\,\frac{r h}{2} + 0\right) = \frac{2}{3} r^2 h.$$

Mantel des Zylinderhufes:

$$M = 2rh \tag{136}$$

Beweis: Legt man durch den Halbierungspunkt F der Grundkante möglichst viele, beispielsweise n Schnitte senkrecht zur Grundfläche (Bild 418), so entstehen bei großem n Körper, die als Pyramiden mit der Höhe $h = r$ angesehen werden können und deren Spitzen sämtlich in F liegen.
Dann gelten für den Mantel des Hufes

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

und für sein Volumen

$$V = \frac{r}{3}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) =$$

$$= \frac{r}{3} M.$$

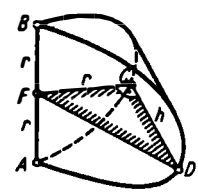


Bild 417

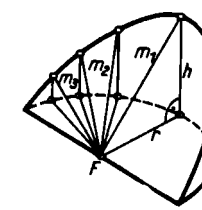


Bild 418

Damit folgt unter Berücksichtigung von (135)

$$V = \frac{2}{3} r^2 h = \frac{r}{3} M$$

oder $M = 2rh$.

BEISPIELE

1. *Wie groß sind das Volumen V und der Mantel M eines Zylinderhufes, wenn der Neigungswinkel α der Schnittebene (Bild 419)*
a) 45°, b) 60° *beträgt?*

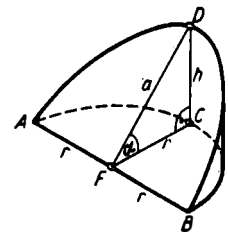


Bild 419

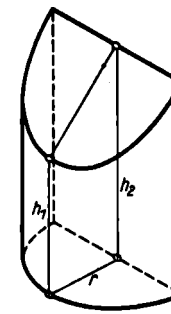


Bild 420

Lösung:

a) Mit $h = r$ folgt aus $V = \frac{2}{3} r^2 h$

$$V = \frac{2}{3} r^3.$$

Aus $M = 2rh$ folgt $M = 2r^2$.

b) Mit $h = r\sqrt{3}$ folgt aus $V = \frac{2}{3} r^2 h$

$$V = \frac{2}{3} r^3 \sqrt{3}.$$

Aus $M = 2rh$ folgt $M = 2r^2\sqrt{3}$.

2. *Ermittle die Höhe h_2 eines Körpers mit dem Volumen $V = \pi r^2 h_1$* (Bild 420).

Lösung: Betrachtet man den Körper als Halbzylinder mit der Höhe h_2, von dem ein Zylinderhuf mit der Höhe $(h_2 - h_1)$ abgetrennt wurde, dann gelten sowohl

$$V = \pi r^2 h_1 \quad \text{als auch} \quad V = \frac{\pi r^2 h_2}{2} - \frac{2}{3} r^3 (h_2 - h_1).$$

Durch Gleichsetzen findet man

$$h_2 = h_1 \frac{6\pi - 4}{3\pi - 4}.$$

AUFGABEN

693. Drücke das Volumen V eines Zylinderhufes durch seinen Mantel M und seine Höhe h aus.

694. Von einem Zylinderhuf sind der Radius $r = 5$ cm und der Mantel $M = 20$ cm² bekannt. Berechne seine Höhe h und sein Volumen V.

695. Der Symmetrieschnitt eines Zylinderhufes ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten q und p (Bild 421). Berechne das Volumen V und den Mantel des Hufes für $q : p = m : n = 4 : 3$ und $c = q + p = 3$ cm.

696. Ein Zylinderhuf mit dem Radius $r = 4$ cm soll einem Würfel mit der Kante $a = 8$ cm volumengleich sein. Wie groß ist die Höhe h des Hufes für diesen Fall zu machen?

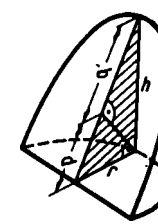


Bild 421

697. In einer Parkanlage wird an einem unter 30° geneigten Steilhang ein halbkreisförmiger Platz mit horizontalem Boden und 1,8 m Radius ausgehoben. Die gekrümmte Rückwand steht vertikal. Berechne die Menge V der zu entfernenden Erde.

698. Berechne die Masse m eines Stahlbolzens (Bild 422). ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

699. Ermittle das Volumen V und den Mantel M eines Körpers mit dem Radius $r = 46$ mm und $a = 18$ mm (Bild 423).

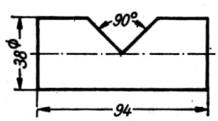


Bild 422

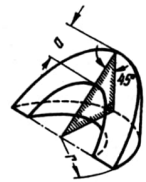


Bild 423

Bild 424

700. Welchen Raum V schließt ein hufförmiges Dachfenster ein und wie groß ist seine gekrümmte Fläche A (Bild 424)?

29.3.3. Gerader und schiefer Kegel

Volumen des geraden und schiefen Kegels:

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} r^2 h} \tag{137}$$

r ist der Radius der Grundfläche, h die Höhe des Kegels.

Beweis: Aus Formel (121) folgt mit $A = \pi r^2$ sofort

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Mantel des geraden Kegels:

$$\boxed{M = \pi r s} \tag{138}$$

s ist die Mantellinie des Kegels.

Beweis: Der längs einer Mantellinie s aufgeschnittene und in die Ebene gelegte Mantel des Kegels ergibt einen Kreisausschnitt mit dem Radius $r_1 = s$ und dem Bogen $b = 2\pi r$ (Bild 425), dessen Fläche mit $M = \frac{b r_1}{2}$

$$M = \frac{2\pi r s}{2} = \pi r s$$

ist.

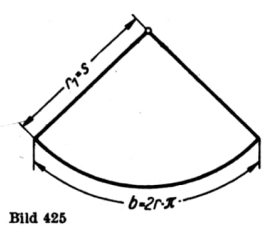


Bild 425

Oberfläche des geraden Kegels:

$$\boxed{O = \pi r (r + s)} \tag{139}$$

Beweis: Mit der Grundfläche $A = \pi r^2$ wird

$$O = A + M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s)$$

erhalten.

Mantel und Oberfläche des schiefen Kegels lassen sich nicht durch einfache algebraische Formeln ausdrücken.

Höhe des geraden Kegels:

$$\boxed{h = \sqrt{s^2 - r^2}} \tag{140}$$

Beweis: Nach dem Satz des PYTHAGORAS ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AMS (Bild 426) sofort $h = \sqrt{s^2 - r^2}$.

Mit (140) nimmt (137) die Form

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$$

an und aus (138) und (139) werden wegen

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$M = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

und $$O = \pi r\left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right).$$

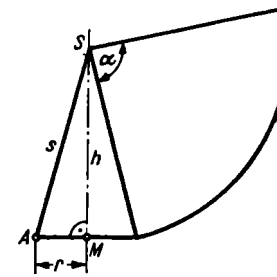


Bild 426

Ferner gilt $\frac{r}{s} = \frac{A}{M} = \frac{\alpha}{360°}$,

worin α den Mantelöffnungswinkel darstellt (Bild 426).

Beweis: Nach (138) ist $M = \pi r s$ der Kegelmantel.

Nach Seite 294 ist $M = \frac{\pi s^2 \alpha}{360°}$ die Fläche des Kreisausschnittes

Durch Gleichsetzen folgt $\frac{r}{s} = \frac{\alpha}{360°}$.

Mit $A = \pi r^2$ als Grundfläche

und nach (138) mit $M = \pi r s$ als Kegelmantel

folgt durch Division auch $\frac{r}{s} = \frac{A}{M}$.

BEISPIELE

1. *Berechne das Volumen V, den Mantel M und die Oberfläche O eines geraden Kegels, dessen Grundfläche den Radius r hat und der von einer Symmetrieebene in einem gleichseitigen Dreieck geschnitten wird.*

Lösung: Die Höhe des Kegels ist Höhe in einem gleichseitigen Dreieck und mithin

$$h = \frac{1}{2} \cdot 2r\sqrt{3} = r\sqrt{3}.$$

Aus $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

folgt damit

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 r\sqrt{3}$$

oder $V = \frac{\pi}{3} r^3 \sqrt{3}$.

Mit $s = 2r$ folgt aus $M = \pi r s$

$$M = 2\pi r^2.$$

Aus $O = \pi r(r + s)$

erhält man außerdem

$$O = \pi r(2r + r)$$

$$O = 3\pi r^2.$$

2. *Wie groß ist das Volumen V eines schiefen Kegels, dessen Grundfläche den Radius r hat und der durch seine Symmetrieebene in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck geschnitten wird (Bild 427)?*

Lösung: Wegen $h = 2r$ folgt aus $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

3. *Berechne das Volumen V des geraden Kegels, dem ein Würfel mit dem Volumen $V_W = \frac{r^3}{27}$ derart einbeschrieben ist, daß eine seiner Seitenflächen mit der Kegelgrundfläche und die vier dieser Seitenfläche gegenüberliegenden Ecken mit dem Mantel des Kegels zusammenfallen (Bild 428). Der Radius der Kegelgrundfläche sei r.*

Lösung: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DFC folgt

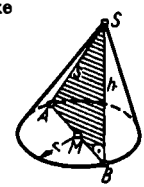


Bild 427

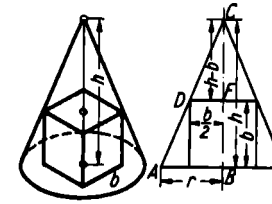


Bild 428

$$r : \frac{b}{2}\sqrt{2} = h : (h - b)$$

und hieraus $h = \frac{2br}{2r - \sqrt{2}b}$.

Aus $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

folgt damit $V = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{2br}{2r - \sqrt{2}b} = \frac{2\pi r^3 b}{3(2r - \sqrt{2}b)}$

und mit $b = \sqrt[3]{V_W} = \sqrt[3]{\frac{r^3}{27}} = \frac{r}{3}$

$$V = \pi \frac{6 + \sqrt{2}}{51} r^3$$

$$V = \frac{\pi}{51}(6 + \sqrt{2}) r^3.$$

AUFGABEN

701. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h = 3$ cm und der Schenkellänge $a = 5$ cm. Berechne das Volumen V und den Mantel M des Kegels.

702. Berechne die Höhe h_1 eines Zylinders, der einem geraden Kegel mit der Höhe $h = 6$ cm volumen- und grundflächengleich ist.

703. Ein Hohlzylinder mit den Radien $r_1 = 3$ cm und $r_2 = 1$ cm und der Höhe $h_1 = 5$ cm soll einem geraden Kegel volumengleich sein, dessen Radius r
a) das arithmetische Mittel,
b) das geometrische Mittel
der Radien des Hohlzylinders ist. Berechne die Höhen h des Kegels für beide Fälle.

704. Welche Oberfläche O hat ein gerader Kegel, von dem der Mantel $M = 20$ cm² und die Mantellinie $s = 5$ cm bekannt sind? Berechne ferner sein Volumen V.

705. Das Volumen eines geraden Kegels wird durch eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene halbiert. Drücke den Radius r_2 der Schnittfläche durch den Radius r_1 der Grundfläche aus.

706. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m erreicht. Gib die Abraummenge V an.

707. Aus einem dünnen, kreisförmigen Blech von 75 cm Durchmesser wird ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 60° herausgeschnitten. Aus dem verbleibenden Blechstück wird ein Kegel gebogen. Gib dessen Höhe h, den Radius r der Grundfläche und das Volumen V an.

708. Die aus Blech gefertigte Haube eines Entlüftungsrohres hat die Form eines Kegels. Der Durchmesser des Grundkreises beträgt 35 cm und die Höhe ist 12 cm. Wie groß ist der Blechbedarf A, und welchen Radius r muß das kreisförmige Blechstück haben, aus dem diese Haube geformt ist?

709 Der Innenraum eines kegelförmigen Meßgefäßes hat als Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit 10 cm Seitenlänge. Im Inneren sollen drei Teilstriche angebracht werden, die eine Füllung von 30 cm³, 60 cm³ und 90 cm³ angeben. Gib die Abstände a, b und c dieser Marken, von der Kegelspitze aus gerechnet, an.

710. Aus einem halbkreisförmigen Blech von 16 cm Radius wird ein Kegel gebogen. Welches Volumen V schließt er ein?

711. Eine kegelförmige Abdeckung (Bild 429) soll aus Beton gegossen werden. Berechne ihre Masse m. ($\varrho = 2{,}2$ g/cm³)

712. Aus einem Holzzylinder, dessen Masse 290 g beträgt, soll der denkbar größte Kegel gedreht werden. Wie groß ist dessen Masse m?

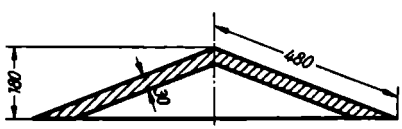


Bild 429

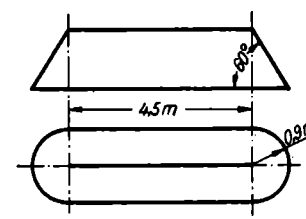


Bild 430

713. Berechne die Oberfläche eines Daches (Bild 430). Die Grundfläche ist mit zu berücksichtigen.

714. Aus einem Zylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat von 4,5 cm Seitenlänge ist, wird der größtmögliche Kegel gedreht. Berechne das Kegelvolumen V.

715. Ein gerader Kegel mit dem Radius $r = 4{,}9$ cm seiner Grundfläche und der Höhe $h = 13{,}2$ cm wird so bearbeitet, daß eine regelmäßige vierseitige Pyramide gleicher Höhe und größtmöglicher Grundfläche entsteht. Welche Volumenverminderung V ergibt sich dadurch?

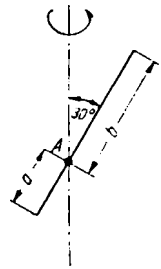


Bild 431

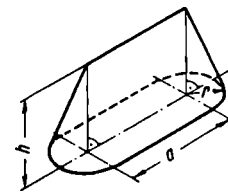


Bild 432

716. Ein Stab, der in A an einer Achse befestigt ist (Bild 431), rotiert um diese Achse. Gib das Volumen V des dadurch entstehenden Doppelkegels für $a + b = 12$ cm und $a : b = b : (a+b)$ an.

717. Gib eine Formel für das Volumen des keilförmigen Körpers (Bild 432) an.

29.3.4. Kegelstumpf

Volumen des geraden und schiefen Kegelstumpfes:

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \tag{141}$$

r_1 und r_2 sind die Radien der Grund- und Deckfläche, h ist die Höhe des Stumpfes.

Beweis (Bild 433): Aus Formel (123) erhält man mit

$$A_1 = \pi r_1^2 \quad \text{und} \quad A_2 = \pi r_2^2$$

und $$\sqrt{A_1 A_2} = \pi r_1 r_2$$

direkt $$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Mantel des geraden Kegelstumpfes:

$$M = \pi s (r_1 + r_2) \tag{142}$$

s ist die Mantellinie des Stumpfes.

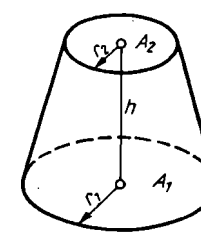


Bild 433

Beweis: Der in die Ebene gelegte Mantel des Stumpfes (Bild 434) ist die Differenz zweier Kreisausschnitte. Deshalb gilt zunächst

$$M = \pi r_1 (s + s_e) - \pi r_2 s_e \tag{I}$$

und wegen $\frac{s_e}{s + s_e} = \frac{r_2}{r_1}$

oder $s_e = \frac{s r_2}{r_1 - r_2}$

erhält man durch Einsetzen in (I) und Umformung

$$M = \pi s (r_1 + r_2).$$

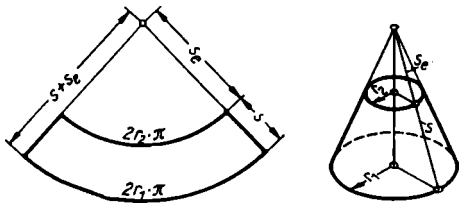


Bild 434

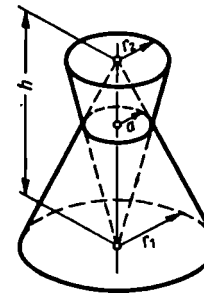


Bild 435

Oberfläche des geraden Kegelstumpfes:

$$O = \pi [r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)] \tag{143}$$

Beweis: Mit $A_1 = \pi r_1^2$, $A_2 = \pi r_2^2$ und $M = \pi s (r_1 + r_2)$

wird $O = A_1 + A_2 + M = \pi [r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$

erhalten.

Mantel und Oberfläche des schiefen Kegelstumpfes lassen sich nicht durch einfache algebraische Formeln ausdrücken.

BEISPIELE

1. a) *Wie groß ist der Radius a des Durchdringungskreises zweier Kegel mit den Radien r_1 und r_2 und der gemeinsamen Höhe h (Bild 435)?*

   b) *Berechne das Volumen V von einem der beiden entstehenden Kegelstümpfe für $r_1 = r_2 = r$.*

   Lösung:

   zu a) Die Aufgabe läßt sich in der Ebene lösen (Bild 436):

   $\triangle CDE \sim \triangle ABE$, folglich $a : r_1 = h_2 : (h_1 + h_2)$ (I)

   $\triangle CDB \sim \triangle FEB$, folglich $a : r_2 = h_1 : (h_1 + h_2)$ (II)

   Durch Addieren von (I) und (II) ergibt sich

$$\frac{a}{r_1} + \frac{a}{r_2} = 1$$

$$a \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = 1$$

$$a = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

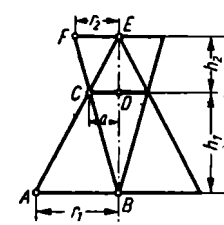


Bild 436

Zu b) Für $r_1 = r_2 = r$ wird $a = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2}$ und für die Höhe des Stumpfes gilt $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$.
Damit folgt aus

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{h}{2} \left[r^2 + r \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right]$$

$$V = \frac{27}{4} \pi r^2 h.$$

2. *Berechne die Radien r_1 und r_2 sowie die Höhe h eines geraden Kegelstumpfes, dem ein Kegel derart einbeschrieben ist, daß er mit dem Stumpf die größere Grundfläche gemeinsam hat und seine Spitze in der Kante der anderen Grundfläche liegt. Die beiden Mantellinien s_1 und s_2 sind bekannt und bilden bei C einen Rechten (Bild 437).*

Lösung: Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC folgt sofort

$$(2r_1)^2 = s_1^2 + s_2^2$$

und hieraus $$r_1 = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{2}. \qquad (I)$$

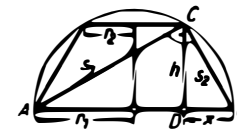


Bild 437

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD,$$

folglich $$h : s_2 = s_1 : 2r_1$$

und hieraus $$h = \frac{s_1 s_2}{2r_1}$$

oder mit (I) $$h = \frac{s_1 s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

Außerdem ist

$$x : s_2 = s_2 : 2r_1$$

und somit $$x = \frac{s_2^2}{2r_1} = \frac{s_2^2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

Wegen $$r_2 = r_1 - x$$

folgt $$r_2 = \frac{s_1^2 - s_2^2}{2\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

1. Näherungsformel für das Volumen des Kegelstumpfes:

$$V \approx \frac{\pi}{2} h (r_1^2 + r_2^2) \qquad (141\,a)$$

Beweis: Setzt man in die Näherungsformel (123a) für das Volumen eines Pyramidenstumpfes $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$ ein, so ergibt sich ohne weiteres (141a).
Die nach (141a) gewonnenen Ergebnisse sind folglich ebenso wie die nach Formel (123a) für den Pyramidenstumpf berechneten immer größer als die genauen, aber um so genauer, je weniger r_1 und r_2 voneinander abweichen.

2. Näherungsformel für das Volumen des Kegelstumpfes:

$$\boxed{V \approx \frac{\pi}{4} h (r_1 + r_2)^2} \tag{141 b}$$

Beweis: Faßt man den Stumpf als Zylinder mit dem Radius $\frac{r_1 + r_2}{2}$ auf, so erhält man aus (126)

$$V \approx \frac{\pi}{4} h (r_1 + r_2)^2.$$

Für $r_1 = r_2 = r$ ergibt sich aus (126)

$$V = \pi r^2 h,$$

d.h., der Kegelstumpf geht in einen Zylinder über und Formel (141 b) liefert dann für diesen Fall fehlerfreie Ergebnisse.
Für $r_1 = r$ und $r_2 = 0$ erhält man aus (141 b)

$$V = \frac{\pi}{4} r^2 h,$$

d.h., der Kegelstumpf wird zum Kegel und Formel (141 b) liefert dann gegenüber dem genauen Wert $\frac{\pi}{3} r^2 h$ ein um 25% kleineres Ergebnis. Demzufolge werden mit (141 b) immer zu kleine Ergebnisse erhalten, die aber mit den nach (141) berechneten um so besser übereinstimmen, je weniger r_1 und r_2 voneinander abweichen.

BEISPIEL 8

Berechne das Volumen V eines Kegelstumpfes mit $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm *und* $h = 6$ cm.

Lösung nach (141): Aus

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

folgt $$V = \frac{\pi}{3} \cdot 6\,\text{cm}\,[(3\,\text{cm})^2 + 3\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} + (2\,\text{cm})^2]$$

$$\underline{\underline{V = 119{,}4\,\text{cm}^3}}.$$

Lösung nach (141 a): Aus

$$V \approx \frac{\pi}{2} h (r_1^2 + r_2^2)$$

folgt $$V \approx \frac{\pi}{2} 6\,\text{cm} \cdot [(3\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2]$$

$$\underline{\underline{V \approx 122{,}5\,\text{cm}^3}}.$$

Lösung nach (141 b): Aus

$$V \approx \frac{\pi}{4} h (r_1 + r_2)^2$$

folgt $$V \approx \frac{\pi}{4} \cdot 6\,\text{cm}\,(3\,\text{cm} + 2\,\text{cm})^2$$

$$\underline{\underline{V \approx 117{,}8\,\text{cm}^3}}.$$

In beiden Fällen ist der Fehler gegenüber dem genauen Ergebnis nicht größer als 2,5%

AUFGABEN

718. Berechne den Mittelschnitt A_m eines Kegelstumpfes aus den Radien r_1 und r_2 der Grund- und Deckfläche.

719. Ein gerader Kegel wird durch eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, daß seine Höhe h, von der Spitze aus gerechnet, im Verhältnis $m : n$ geteilt wird. In welchem Verhältnis stehen dann die Radien r_1 und r_2 des Stumpfes und des Ergänzungskegels?

720. Ein gerader Kegel und ein Zylinder durchdringen einander (Bild 438). Wie groß ist
a) x, wenn r_1, r_2 und h bekannt sind,
b) r_2, wenn x, r_1 und h bekannt sind,
c) x, wenn $r_1 : r_2$ und h bekannt sind,
d) x, wenn die schraffierte Kreisringfläche der Grundfläche des Zylinders gleich ist,
e) x, wenn der unter der Durchdringungsfläche liegende Zylinder dem darüberliegenden Kegel volumengleich ist,
f) x, wenn der über der Durchdringungsfläche liegende Kegel dem unter dieser Fläche liegenden Restkörper aus Kegelstumpf und Zylinder volumengleich ist?

721. Berechne das Volumen V des Aufnahmekegels für eine Drehmaschine (Bild 439).

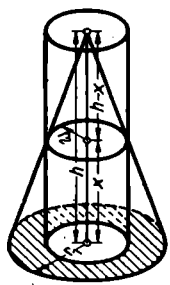


Bild 438

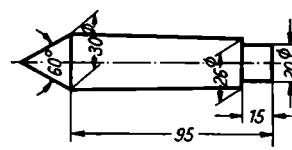


Bild 439

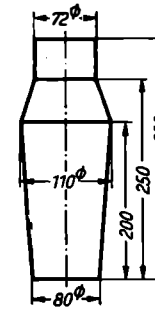


Bild 440

722. Berechne den Blechbedarf für einen Krug (Bild 440). Nimm an, daß für die Nahtstellen insgesamt 5% Zuschlag gebraucht werden.

723. Das Kunstharz für den Preßling (Bild 441) muß einer Maschine in Form zylindrischer Tabletten von 50 mm Durchmesser vorgelegt werden. Welche Höhe h muß eine solche Tablette für einen Preßling haben?

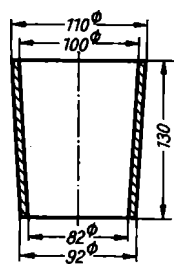


Bild 441

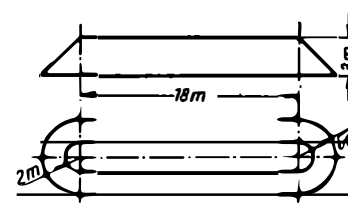


Bild 442

724. Ein zylindrischer Bolzen von 280 mm Länge und 40 mm Durchmesser soll beiderseits auf 80 mm Länge konisch abgedreht werden. Berechne den Materialabfall V bei einer vorgeschriebenen Neigung 1 : 10.

725. Wie groß ist das Volumen V eines Eimers, dessen großer Durchmesser und Höhe 28 cm und dessen kleiner Durchmesser 19 cm betragen?

726. In einem Park soll eine Erhebung aufgeschüttet werden (Bild 442). Berechne den erforderlichen Bedarf V an Erdreich.

727. Berechne die Masse m einer konischen Büchse (Bild 443). ($\varrho = 8{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$)

728. Wie groß ist die Masse m von 100 Stück Aluminiumnieten (Bild 444)? ($\varrho = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$)

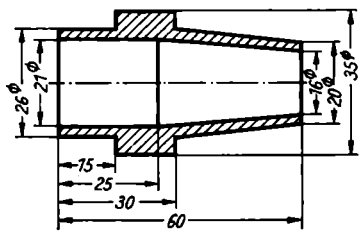


Bild 443

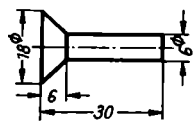


Bild 444

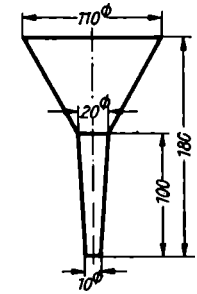


Bild 445

729. Bestimme den Blechbedarf A für einen Trichter (Bild 445). Berücksichtige für die Nahtstellen eine Materialzugabe von insgesamt 5%.

730. Aus einem Bleikegel von 5,5 cm Höhe und 1,5 cm Radius der Grundfläche soll ein Kegelstumpf von gleicher Grundfläche gegossen werden, dessen Radius der Deckfläche 0,5 cm beträgt. Berechne die Höhe h des Stumpfes.

731. Aus Rundstahl von 25 mm Durchmesser soll ein Werkstück (Bild 446) geschmiedet werden. Berechne die Länge l des Rundstahles und nimm an, daß eine Längenzugabe von 3% für den Abbrand erforderlich ist.

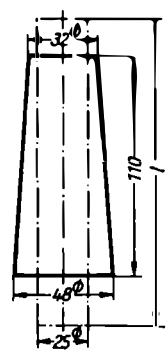


Bild 446

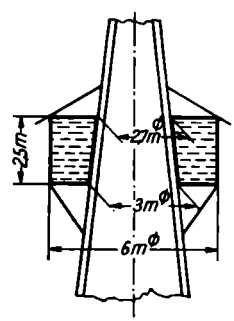


Bild 447

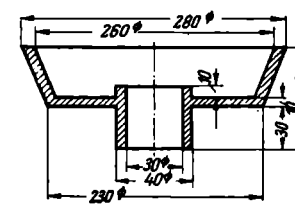


Bild 448

732. Gib das Fassungsvermögen V eines an einem Schornstein befestigten Wasserbehälters an (Bild 447).

733. Berechne die Masse m des Kupplungsteiles einer Reibungskupplung (Bild 448). ($\varrho = 7{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$)

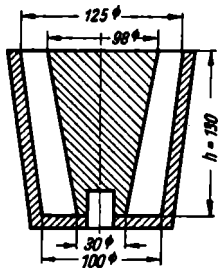


Bild 449

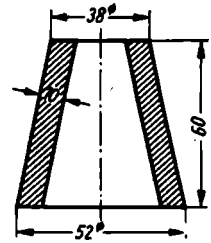


Bild 450

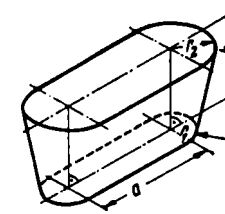


Bild 451

734. Eine Form (Bild 449) soll mit Blei ausgegossen werden. Das Blei soll nach dem Erstarren die Form bis zu 2/3 h füllen. Welcher Bedarf V an flüssigem Blei ergibt sich?
($\varrho_{\text{fest}} = 11{,}34\ \mathrm{g/cm^3}$, $\varrho_{\text{flüssig}} = 10{,}64\ \mathrm{g/cm^3}$)

735. Berechne das Volumen V einer Lagerbüchse (Bild 450).

736. Bestimme das Volumen V eines Gefäßes (Bild 451) für $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 21$ cm, $h = 25$ cm und $a = 29$ cm.

29.3.5. Kugel und Kugelteile

29.3.5.1. Volumenberechnung

Volumen der Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{144}$$

r ist der Radius der Kugel.

Beweis: Wird aus einem Zylinder mit der Höhe r und dem Grundflächenradius r ein Kegel mit der Höhe r und dem Grundflächenradius r herausgeschnitten, so entsteht ein Restkörper, der einer Halbkugel mit dem Radius r volumengleich ist (Bild 452).

Ein in beliebiger Höhe x durch beide Körper parallel zu ihrer Grundfläche geführter Schnitt ergibt nämlich

für die Halbkugel die Kreisfläche

$$A_K = \pi r_2^2 \tag{I}$$

und für den Restkörper den Kreisring

$$A_R = \pi(r^2 - r_1^2). \tag{II}$$

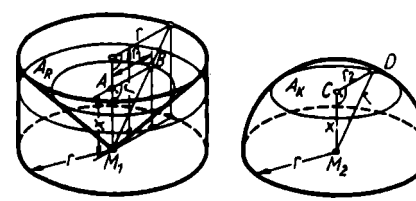


Bild 452

Da $r_2^2 = r^2 - x^2$ (Dreieck M_2CD ist rechtwinklig)

und $x = r_1$, (Dreieck M_1AB ist gleichschenklig)

erhält man $r_2^2 = r^2 - r_1^2$

und durch Einsetzen in (I)

$$A_K = A_R.$$

Somit gilt nach dem Satz des CAVALIERI

$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Restkörper}}$$

oder $V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$

und $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$

Volumen der Kugelschicht:

$$V = \frac{\pi}{6} h (3 r_1^2 + 3 r_2^2 + h^2) \tag{145}$$

r_1 und r_2 sind die Radien der Grund- und Deckfläche, h ist die Höhe der Schicht.

Beweis: Aus den Achsenschnitten der Halbkugel und des Restkörpers (Bild 453) erkennt man den Querschnitt der Schicht mit den Volumen V und dem trapezförmigen Querschnitt des ihr entsprechenden Ringkörpers mit dem Volumen V_R.

Beide Körper sind nach dem Satz des CAVALIERI volumengleich. Es gilt also

$$V = V_R,$$

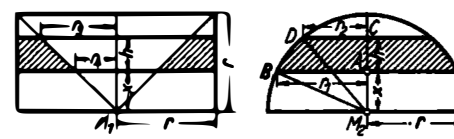


Bild 453

denn da die in der beliebigen Höhe x geführten Schnitte flächengleich sind – wie eben bei der Herleitung des Kugelvolumens bewiesen wurde – müssen auch die in der beiden Körpern gemeinsamen Höhe $x + h$ geführten Schnitte (Bild 453) flächengleich sein. V_R ergibt sich als Differenz eines Zylinders V_Z und eines Kegelstumpfes V_S mit der gemeinsamen Höhe h, dem Grundflächenradius r für den Zylinder und den Radien $r_3 = x + h$ und $r_4 = x$ für die Grund- und Deckfläche des Stumpfes. Es ist also

$$V = V_Z - V_S = V_R$$

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} h [(x + h)^2 + (x + h) x + x^2]$$

oder $$V = \pi h \left(r^2 - x^2 - x h - \frac{1}{3} h^2 \right). \tag{I}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken M_2AB und M_2CD des Halbkugelschnittes (Bild 453) erhält man zunächst

$$r_1^2 = r^2 - x^2$$

und $$r_2^2 = r^2 - (x + h)^2$$

und daraus durch Addition und Umformung

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 - x^2 + r^2 - (x + h^2)$$

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 + h^2}{2} = r^2 - x^2 - xh$$

$$\frac{3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2}{6} = r^2 - x^2 - xh - \frac{1}{3}h^2. \qquad \text{(II)}$$

(I) und (II) ergeben schließlich

$$V = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Volumen des Kugelsegmentes:

$$\boxed{V = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + h^2)} \qquad (146)$$

oder

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)} \qquad (147)$$

h ist die Höhe, r_1 der Grundflächenradius des Segmentes und r der Radius der dem Segment zugeordneten Kugel.

Beweis für (146): Für $r_2 = 0$ geht die Schicht in das Segment über, und damit folgt aus (145) sofort

$$V = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + h^2).$$

Beweis für (147): $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (Bild 454).

Deshalb ist $\frac{2r - h}{r_1} = \frac{r_1}{h}$

oder $r_1^2 = h(2r - h)$

und in (146) eingesetzt

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h).$$

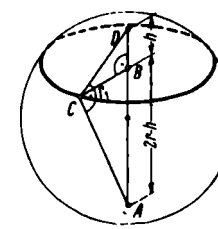


Bild 454

Volumen des Kugelsektors:

$$\boxed{V = \frac{2}{3} \pi r^2 h} \qquad (148)$$

h ist die Höhe des zum Sektor gehörenden Segmentes, r der Radius der dem Sektor zugeordneten Kugel.

Beweis: Der Sektor setzt sich aus einem Segment mit der Höhe h und einem Kegel mit der Höhe $r - h$ zusammen, der mit dem Segment gleiche Grundfläche hat (Bild 455). Somit ist nach (137) und (146)

$$V = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + h^2) + \frac{\pi}{3} r_1^2 (r - h)$$

und wieder mit

$$r_1^2 = h(2r - h)$$

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h) + \frac{\pi}{3}h(r - h)(2r - h)$$

oder $$V = \frac{2}{3}\pi r^3 h\,.$$

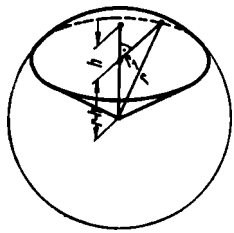


Bild 455

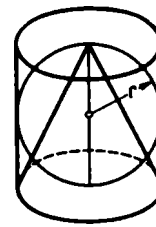


Bild 456

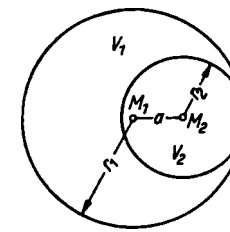


Bild 457

BEISPIELE

1. *Einem Zylinder mit der Höhe $2r$ und dem Grundflächenradius r sind eine Kugel und ein Kegel einbeschrieben (Bild 456). Ermittle das Verhältnis* $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}}$.

Lösung: $V_{\text{Zylinder}} = 2\pi r^3$,

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1^1)$$

2. *Berechne die Radien r_1 und r_2 zweier Kugeln, von denen die kleinere die größere innen berührt (Bild 457). Ihr Mittelpunktsabstand sei a und ihre Volumendifferenz V.*

Lösung: Aus $V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)$

folgt $$r_1^3 - r_2^3 = (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{3V}{4\pi}$$

und mit $$r_1 - r_2 = a \qquad \text{(I)}$$

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = \frac{3V}{4\pi a}. \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) erhält man ferner durch Quadrieren

$$r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 = a^2 \qquad \text{(III)}$$

und damit durch Subtraktion von (II) und (III)

$$3r_1 r_2 = \frac{3V}{4\pi a} - a^2 = \frac{3V - 4\pi a^3}{4\pi a}$$

[1]) Diese Lösung wird Satz des ARCHIMEDES genannt.

oder $$4r_1r_2 = \frac{3V - 4\pi a^3}{3\pi a}. \qquad \text{(IV)}$$

Addiert man zu (III) beiderseits $4r_1r_2$, so folgt

$$r_1 + 2r_1r_2 + r_2 = a^2 + 4r_1r_2$$
$$(r_1 + r_2)^2 = a^2 + 4r_1r_2$$

und $$r_1 + r_2 = \sqrt{a^2 + 4r_1r_2}. \qquad \text{(V)}$$

Aus (I) und (V) und unter Berücksichtigung von (IV) ergibt sich schließlich

$$r_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4r_1r_2} + a)$$

$$\underline{\underline{r_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + \frac{3V - 4\pi a^3}{3\pi a}} + a\right)}}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4r_1r_2} - a)$$

$$\underline{\underline{r_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + \frac{3V - 4\pi a^3}{3\pi a}} - a\right)}}$$

3. *Wie groß ist das Volumen V (Bild 458), das einerseits von einem Zylinder mit der Höhe r und dem Radius r und andererseits von der der Zylinderhöhe entsprechenden Kugelschicht einer Kugel mit dem Radius r eingeschlossen wird? Die Kugel berühre den Zylinder in der Höhe r/2.*

Lösung: Das gesuchte Volumen ergibt sich aus

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Schicht}}.$$

Für V_z folgt mit $h = r$ aus

$$V = \pi r^2 h$$

$$\underline{V_z = \pi r^3}.$$

Für V_s folgt mit $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ und $h = r$ (Dreieck MBA ist gleichseitig und r_1 seine Höhe) aus (145)

$$\underline{V_s = \frac{11}{12} \cdot \pi r^3}.$$

Damit ergibt sich das Volumen zu

$$\underline{\underline{V = \frac{\pi}{12} r^3}}.$$

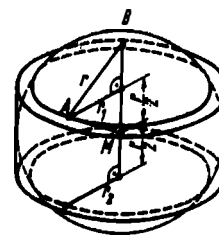


Bild 458

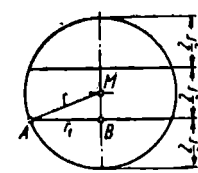


Bild 459

4. *Eine Kugel vom Radius r wird durch zwei parallele Schnitte in drei höhengleiche Körper, und zwar zwei Segmente und eine Schicht, zerlegt. Berechne V_{Segment} und V_{Schicht} (Bild 459).*

Lösung: Aus

$$V_{\text{Segment}} = \frac{\pi}{3} h^2(3r - h) \quad \text{folgt mit} \quad h = \frac{2}{3} r$$

$$\underline{\underline{V_{\text{Segment}} = \frac{28}{81} \pi r^3}}.$$

Aus $V_{\text{Schicht}} = \frac{\pi}{6} h (3 r_1^2 + 3 r_2^2 + h^2)$

folgt wegen $r_1^2 = r_2^2 = r^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2$ (Dreieck ABM ist rechtwinklig)

$$r_1^2 = \frac{8}{9} r^2$$

und mit $h = \frac{2}{3} r$

$$V_{\text{Schicht}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{3} r \left(6 \cdot \frac{8}{9} r^2 + \frac{4}{9} r^2\right)$$

$$V_{\text{Schicht}} = \frac{52}{81} \pi r^3 .$$

Aus $V_{\text{Kugel}} = 2 V_{\text{Segment}} + V_{\text{Schicht}}$

$$V_{\text{Kugel}} = 2 \cdot \frac{28}{81} \pi r^3 + \frac{52}{81} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ergibt sich die Richtigkeit der Rechnung.

5. *Ermittle den Radius r_1 des Berührkreises, das Volumen V_{Sg} des durch den Berührkreis bestimmten Segmentes mit der Höhe h und das Volumen V_{Sk} des entsprechenden Sektors, wenn von einem außerhalb der Kugel gelegenen Punkt P der Berührkegel an die Kugel gelegt wird (Bild 460). P sei vom Kugelmittelpunkt um den Betrag a entfernt. a und der Kugelradius r seien bekannt.*

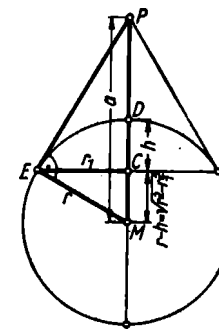


Bild 460

Lösung: $\triangle EMC \sim \triangle PME$, folglich

$$r : \sqrt{r^2 - r_1^2} = a : r$$

und hieraus $r_1 = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$.

Aus der gleichen Ähnlichkeit folgt

$$r : (r - h) = a : r$$

und hieraus $h = \frac{r(a - r)}{a}$.

Aus $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$

und mit dem für h errechneten Wert ergibt sich für das Volumen des Segmentes

$$V_{Sg} = \frac{\pi r^3}{3 a^3} (2 a^3 - 3 a^2 r + r^3) .$$

Aus $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$

folgt außerdem für das Volumen des Sektors

$$V_{Sk} = \frac{2 \pi r^3}{3 a} (a - r) .$$

6. *Aus einer Kugel vom Radius r werden zwei einander symmetrisch gegenüberliegende gleich große Sektoren herausgenommen, so daß ein Restkörper mit der Höhe r entsteht (Bild 461). In welchem Verhältnis steht dessen Volumen V zum Volumen V_{Sch} der ihm entsprechenden Schicht?*

Lösung: Mit dem Kugelvolumen V_K und dem Volumen V_{Se} eines Sektors folgt aus

$$V = V_K - 2V_{Se} = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

wegen $h = \frac{r}{2}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\underline{V = \frac{2}{3}\pi r^3.}$$

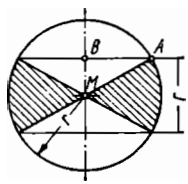
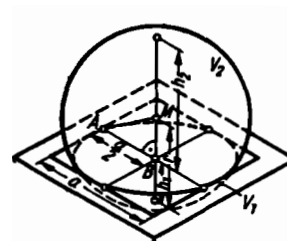


Bild 461



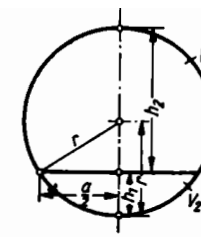


Bild 462

Für die Schicht folgt aus

$$V_{Sch} = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

mit $h = r$ und wegen

$$r_1^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad \text{(Dreieck } ABM \text{ ist rechtwinklig)}$$

$$r_1^2 = \frac{3}{4} r^2$$

$$V_{Sch} = \frac{\pi}{6} r \left(\frac{9}{4} r^2 + \frac{9}{4} r^2 + r^2\right)$$

$$\underline{V_{Sch} = \frac{11}{12}\pi r^3.}$$

Das gesuchte Verhältnis wird demnach

$$\underline{\underline{\frac{V}{V_{Sch}} = \frac{8}{11}.}}$$

7. *In die quadratische Öffnung eines Bleches wird eine Kugel mit dem Radius r gelegt (Bild 462), so daß sie durch die Ebene des Bleches in zwei Segmente unterteilt wird. Drücke deren Volumen V_1 und V_2 durch die Seitenlänge a der Öffnung und durch den Kugelradius r aus.*

Lösung: Aus dem rechtwinkligen Dreieck AMB folgt mit $\overline{MB} = r - h_1$

$$(r - h_1)^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

und hieraus $h_1 = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Damit ergibt sich aus

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$

für $$V_1 = \frac{\pi}{3}\left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}\right)^2 \left(3r - r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}\right)$$

oder $$V_1 = \frac{\pi}{24}(16r^3 - 8r^2\sqrt{4r^2 - a^2} - a^2\sqrt{4r^2 - a^2}).$$

Mit $h_2 = 2r - h_1$

oder $h_2 = r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$

erhält man aus $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$

für $$V_2 = \frac{\pi}{3}\left(r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}\right)^2 \left(3r - r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}\right)$$

oder $$V_2 = \frac{\pi}{24}(16r^3 + 8r^2\sqrt{4r^2 - a^2} + a^2\sqrt{4r^2 - a^2}).$$

8. *Ein Kegel mit der Höhe $2r_1$ und dem Grundflächenradius r_1 wird durch Abdrehen seiner Grundfläche in den größtmöglichen Kugelsektor verwandelt. Drücke dessen Volumen V durch r_1 aus.*

Lösung: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (Bild 463),

folglich $r_1 : \overline{AC} = r_2 : 2r_1$

und hieraus wegen

$$\overline{AC} = \sqrt{r_1^2 + (2r_1)^2} = r_1\sqrt{5}$$

$$r_2 = \frac{2}{5} r_1 \sqrt{5}.$$

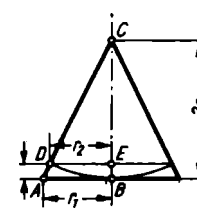


Bild 463

Für h folgt $h = 2r_1 - \overline{EC}$

und wegen $\overline{EC} = \sqrt{(2r_1)^2 - r_2^2}$

$$\overline{EC} = \frac{4}{5} r_1 \sqrt{5}$$

ergibt sich $h = 2r_1 - \frac{4}{5} r_1 \sqrt{5}$

oder $$h = 2r_1 \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}.$$

Damit und mit $r = 2r_1$ erhält man aus $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ das gesuchte Volumen zu

$$V = \frac{2}{3}\pi(2r_1)^2 \cdot 2r_1 \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$$

oder $$V = \frac{16}{15}\pi r_1^3(5 - 2\sqrt{5}).$$

29.3.5.2. Mantelberechnung

Oberfläche der Kugel:

$$\boxed{O = 4\pi r^2} \tag{149}$$

Beweis: Man zerlegt die Kugel in eine Anzahl kleiner Körper, die näherungsweise als Pyramiden mit den Spitzen im Kugelmittelpunkt angesehen werden können. Im Grenzfall, also bei sehr großer Anzahl solcher Pyramiden, nähern sich ihre Höhen dem Kugelradius r und die Summe ihrer Grundflächen der Kugeloberfläche O unbegrenzt. Somit ergibt sich nach den Formeln (144) und (121)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}Or$$

und hieraus sofort

$$O = 4\pi r^2.$$

Fläche der Kugelkappe, (Mantel des Segmentes):

$$\boxed{M = 2\pi rh} \tag{150}$$

h ist die Höhe der Kappe, r der Radius der ihr zugeordneten Kugel.

Beweis: Durch die Kappe wird ein Sektor bestimmt, den man sich wiederum in eine Anzahl kleiner Körper zerlegt denken kann, die näherungsweise Pyramiden mit der Spitzen im Kugelmittelpunkt ergeben. Auch hier werden im Grenzfall die Höhen dieser Pyramiden gleich dem Kugelradius r und die Summe ihrer Grundflächen wird gleich der Kappenfläche M. Somit gilt nach Formel (148)

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}Mr$$

oder $$M = 2\pi rh.$$

Fläche der Kugelzone, (Mantel der Kugelschicht):

$$\boxed{M = 2\pi rh} \tag{151}$$

h ist die Höhe der Zone, r der Radius der ihr zugeordneten Kugel.

Beweis: Die Zone ist die Differenz zweier Kappen mit den Höhen $h + x$ und x (Bild 464). Aus (150) folgt deshalb

$$M = 2\pi r(h + x) - 2\pi r x$$

oder

$$M = 2\pi r h.$$

Mantel (Oberfläche) des Kugelsektors:

$$\boxed{M = \pi r(r_1 + 2h)} \tag{152}$$

h ist die Höhe der den Sektor begrenzenden Kappe, r_1 der Radius ihres Grundkreises und r der Radius der dem Sektor zugeordneten Kugel.

Beweis: $M_{\text{Sektor}} = M_{\text{Kegel}} + M_{\text{Kappe}}$

Nach (138) gilt

$$M_{\text{Kegel}} = \pi r s$$

und mit $r = r_1$ und $s = r$

auch $M_{\text{Kegel}} = \pi r_1 r.$

Nach (150) gilt

$$M_{\text{Kappe}} = 2\pi r h.$$

Damit wird

$$M_{\text{Sektor}} = \pi r_1 r + 2\pi r h = \pi r(r_1 + 2h).$$

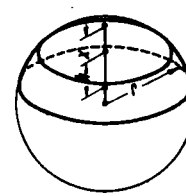


Bild 464

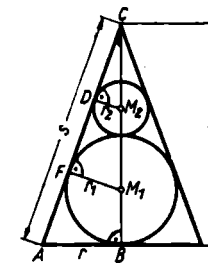


Bild 465

BEISPIELE

1. *Berechne den Radius r einer Kugel, deren Oberfläche O gleich der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius r_1 und der Höhe $h = 4r_1$ ist.*

   Lösung: Es soll

   $$O_{\text{Kugel}} = O_{\text{Zylinder}}$$

   sein, folglich

   $$4\pi r^2 = 2\pi r_1^2 + 2\pi r_1 4r_1 = 10\pi r_1^2$$

   und somit $r = \frac{r_1}{2}\sqrt{10}.$

2. *Bestimme das Verhältnis $O_1 : O_2$ der Oberflächen zweier Kugeln, die einem Kegel mit der Mantellinie s und dem Grundflächenradius r einbeschrieben sind (Bild 465).*

   Lösung: Mit $\overline{M_1C} = h - r_1$ und $\overline{M_2C} = h - (r_2 + 2r_1)$ folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC, M_1FC und M_2DC:

   $$r_1 : (h - r_1) = r : s, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{rh}{s + r},$$

   $$r_2 : (h - r_2 - 2r_1) = r : s, \quad \text{also} \quad r_2 = \frac{rh(s - r)}{(s + r)^2}.$$

Damit ergeben sich die Oberflächen aus (149) zu

$$O_1 = \frac{4\pi r^2 h^2}{(s+r)^2}$$

und $$O_2 = \frac{4\pi r^2 h^2 (s-r)^2}{(s+r)^4}$$

Folglich $$\frac{O_1}{O_2} = \frac{(s+r)^2}{(s-r)^2}.$$

3. *Ermittle das Volumen V und die Oberfläche O des Restkörpers, der entsteht, wenn eine Kugel mit dem Radius r von einem Zylinder mit dem Radius r_1 derart durchdrungen wird, daß die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht (Bild 466).*

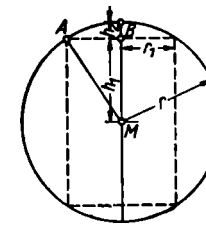


Bild 466

Lösung: Aus dem rechtwinkligen Dreieck AMB folgen

$$h_1 = \sqrt{r^2 - r_1^2}$$

und $$h_2 = r - h_1 = r - \sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

Zylindervolumen V_Z:

$$V_Z = \pi r_1^2 \cdot 2h_1$$

$$V_Z = 2\pi r_1^2 \sqrt{r^2 - r_1^2}$$

Volumen V_S der beiden zugeordneten Segmente:

$$2V_S = \frac{2}{3}\pi h_2^2 (3r - h_2)$$

$$2V_S = \frac{2}{3}\pi (2r^3 - 2r^2\sqrt{r^2 - r_1^2} - r_1^2\sqrt{r^2 - r_1^2})$$

Volumen V_D des zylindrischen Durchdringungskörpers:

$$V_D = V_Z + 2V_S$$

$$V_D = \frac{4}{3}\pi (r^3 + r_1^2\sqrt{r^2 - r_1^2} - r^2\sqrt{r^2 - r_1^2})$$

Volumen V des gesuchten Körpers:

$$V = V_{\text{Kugel}} - V_D$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (r^2 - r_1^2)\sqrt{r^2 - r_1^2}$$

Mit der Schreibweise

$$V = \frac{4}{3}\pi \sqrt{(r^2 - r_1^2)^3} = \frac{4}{3}\pi h_1^3$$

ergibt sich die Deutung: Das Volumen des Restkörpers ist gleich dem Volumen einer Kugel mit dem Radius h_1.

Aus $$O = 2\pi r \cdot 2h_1 + 2\pi r_1 \cdot 2h_1$$

ergibt sich die Oberfläche des gesuchten Körpers zu

$$O = 4\pi (r + r_1)\sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

4. *Eine Kugel vom Radius r soll durch zwei parallele und zu ihrem Mittelpunkt symmetrisch gelegene Ebenen derart in zwei Segmente und eine Schicht zerlegt werden, daß sich*

$$O_{\text{Segment}} = O_{\text{Zone}} = \frac{1}{3} O_{\text{Kugel}}$$

ergibt. Berechne h_S und h_Z von Segment und Zone für diesen Fall.

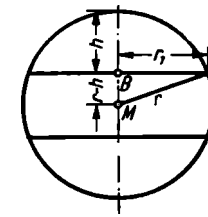


Bild 467

Lösung: Für die Grundfläche A beider Körper folgt wegen

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \qquad \text{(Bild 467)}$$

oder

$$r_1^2 = 2rh - h^2$$

$$A = \pi r_1^2 = \pi(2rh - h^2).$$

Damit ergibt sich für das Segment

$$O_S = M_S + A = 2\pi r h_S + \pi(2rh_S - h_S^2)$$

$$O_S = 4\pi r h_S - \pi h_S^2$$

und somit nach Aufgabe

$$O_S = \frac{1}{3} O_K$$

$$4\pi r h_S - \pi h_S^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2$$

$$h_S^2 - 4rh_S + \frac{4}{3} r^2 = 0$$

$$h_S = 2r \pm \frac{2}{3} r\sqrt{6}.$$

Hiervon ist nur

$$\underline{\underline{h_S = 2r - \frac{2}{3} r\sqrt{6}}}$$

sinnvoll und somit das Ergebnis.

Für die Zone erhält man

$$O_Z = M_Z + 2A = 2\pi r h_Z + 2\pi(2rh_Z - h_Z^2)$$

oder

$$O_Z = 6\pi r h_Z - 2\pi h_Z^2$$

und hiermit nach Aufgabe

$$O_Z = \frac{1}{3} O_K$$

$$6\pi r h_Z - 2\pi h_Z^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2$$

$$h_Z^2 - 3rh_Z + \frac{2}{3} r^2 = 0$$

$$h_Z = \frac{3}{2} r \pm \frac{r}{6}\sqrt{57}.$$

Hiervon ist nur

$$\underline{\underline{h_Z = \frac{3}{2} r - \frac{r}{6}\sqrt{57}}}$$

sinnvoll und mithin das Ergebnis.

5. *Ermittle das Volumen V einer Kugelschicht, deren zugehörige Zone gleich der Summe der Flächen ihrer Begrenzungskreise A_1 und A_2 mit den Radien r_1 und r_2 ist.*

Lösung: Es soll sein

$$M = A_1 + A_2.$$

Mit $M = 2\pi r h, \quad A_1 = \pi r_1^2 \quad$ und $\quad A_2 = \pi r_2^2$

folgt $$2\pi r h = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

und hieraus $$h = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r}.$$

Das Volumen der Schicht berechnet sich somit nach (145)

$$V = \frac{\pi}{48} \frac{(r_1^2 + r_2^2)^2}{r^3} (12r^2 + r_1^2 + r_2^2).$$

6. *Wie groß ist die Fläche M der Kugelzone, die entsteht, wenn eine Halbkugel mit dem Radius r von einem Kegel mit der Höhe $h = 2r$ durchdrungen wird (Bild 468)? Grundfläche der Halbkugel und Grundfläche des Kegels fallen zusammen.*

Lösung: Im rechtwinkligen Dreieck AFD ist nach dem Höhensatz

$$x^2 = (r - r_1)(r + r_1) = r^2 - r_1^2 \qquad \text{(I)}$$

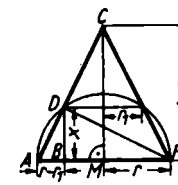


Bild 468

$\triangle ABD \sim \triangle AMC$, folglich

$$x : (r - r_1) = 2r : r$$

$$x = 2(r - r_1)$$

$$x^2 = 4(r - r_1)^2. \qquad \text{(II)}$$

Durch Gleichsetzen von (I) und (II) ergibt sich

$$(r - r_1)(r + r_1) = 4(r - r_1)^2$$

$$r_1 = \frac{3}{5} r,$$

damit aus (I) $$x^2 = r^2 - \left(\frac{3}{5} r\right)^2 = \frac{16}{25} r^2$$

$$x = \frac{4}{5} r$$

und aus $M = 2\pi r h$ $$M = 2\pi r x = 2\pi r \frac{4}{5} r$$

$$M = \frac{8}{5} \pi r^2.$$

7. *Der Kegelmantel M_{K_e} eines Kugelsektors soll gleich der zugehörigen Kappenfläche M_{K_a} sein. Berechne die Höhe h der Kappe für diesen Fall. Der Kugelradius sei r.*

Lösung: Nach Aufgabe soll sein

$$M_{K_a} = M_{K_e}$$

oder mit $$M_{K_a} = 2\pi r h$$

und $$M_{K_e} = \pi r s = \pi r_1 r$$

$$2\pi r h = \pi r_1 r$$

$$2h = r_1.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABM (Bild 467) folgt für

$$r_1 = \sqrt{r^2 - (r-h)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{2rh - h^2}$$

und somit $$2h = \sqrt{2rh - h^2}$$

$$5h^2 - 2rh = 0$$

$$\underline{\underline{h = \frac{2}{5}r.}}$$

8. *In welchem Verhältnis stehen die Kappenfläche M_{Ka} und die Kegel-Mantelfläche M_{Ke} eines Kugelsektors für $h = \frac{r}{2}$. Der Kugelradius sei r.*

Lösung: Für M_{Ka} gilt

$$M_{Ka} = 2\pi rh$$

oder $$M_{Ka} = 2\pi r \frac{r}{2} = \pi r^2. \qquad \text{(I)}$$

Für M_{Ke} gilt

$$M_{Ke} = \pi r s$$

oder mit $r = r_1 = \sqrt{2rh - h^2}$ (Vergleiche Beispiel 7!)

$$r_1 = \sqrt{2r \cdot \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$r_1 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

und $$s = r$$

$$M_{Ke} = \pi \frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot r = \frac{\pi}{2} r^2 \sqrt{3}. \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) und (II) erhält man das gesuchte Verhältnis zu

$$\underline{\underline{\frac{M_{Ka}}{M_{Ke}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.}}$$

AUFGABEN

737. Welchen Radius r hat eine Kugel vom Volumen $V = 1\ \text{m}^3$?

738. Welchen Radius r hat eine Kugel mit der Oberfläche $O = 1\ \text{m}^2$?

739. In welchem Verhältnis stehen die Volumen V_1 und V_2 und die Oberflächen O_1 und O_2 zweier Kugeln, deren Radien sich wie $r_1 : r_2 = m : n = 1 : 3$ verhalten?

740. Die Radien zweier Kugeln stehen im Verhältnis $r_1 : r_2 = m : n = 1 : 2$. Welches Volumen V und welche Oberfläche O hat eine dritte Kugel, deren Radius r das arithmetische Mittel der gegebenen Radien ist? Setze $r_2 = 4$ cm.

741. In welchem Verhältnis stehen die Volumen dreier Kugeln, von denen die erste die Seitenflächen, die zweite die Seitenkanten eines Würfels mit der Seite $a = 3$ cm berührt, während die dritte die Eckpunkte des Würfels in ihrer Oberfläche faßt?

742. Eine Kugel mit dem Radius r_1 und ein Zylinder, dessen quadratischer Achsenschnitt die Seitenlänge $a = 2r_2$ hat, haben die gleiche Oberfläche. In welchem Verhältnis stehen dann ihre Radien r_1 und r_2?

743. Von einer Hohlkugel sind das Volumen $V = 40\ \text{cm}^3$ und die Wanddicke $s = r_1 - r_2 = 1\ \text{cm}$ bekannt. Berechne die Radien r_1 und r_2.

744. Die Radien einer Hohlkugel stehen im Verhältnis $r_1 : r_2 = m : n$.
a) In welchem Verhältnis stehen das Volumen V_H der Hohlkugel zum Volumen V des inneren Hohlraumes?
b) Bestimme $r_1 : r_2$ für $V_H = V$.

745. Berechne die Massendifferenz m von 1000 Stück Stahlkugeln, deren Durchmesser 1 mm beträgt, und einem Stahlwürfel mit der Kantenlänge 1 cm. ($\varrho = 7{,}85\ \text{g/cm}^3$)

746. Wie groß ist die Masse m einer Korkkugel von 1 m Durchmesser? ($\varrho = 0{,}24\ \text{g/cm}^3$)

747. Für kleinere Ventile werden 100 Stück halbkugelförmige Dichtungskörper von 7 mm Radius benötigt, die auf der ebenen Fläche eine Aussenkung von 4 mm Durchmesser und 3 mm Tiefe haben. Berechne den Materialbedarf V.

748. Welchen Durchmesser d hat eine massive Messingkugel, deren Masse 1,6 kg beträgt? ($\varrho = 8{,}85\ \text{g/cm}^3$)

749. Ein massiver kugelförmiger Körper taucht zur Hälfte in Wasser ein. Berechne die Dichte ϱ des Materials, aus dem der Körper gefertigt wurde.

750. 10 Stück Bleikugeln von 3 cm Durchmesser werden zu einer Kugel zusammengeschmolzen. Berechne deren Durchmesser d.

751. Ein zylinderförmiger Schwimmer von 88 cm Länge und 16 cm Durchmesser ist an seinen beiden Enden durch halbkugelförmige Böden abgeschlossen. Wie groß ist die Oberfläche O des Schwimmers, und welches Volumen V schließt er ein? Die Blechdicke bleibt unberücksichtigt.

752. 64 Stück Stahlkugeln von je 5 cm Durchmesser sollen gleichmäßig mit einer Schicht Chrom von 0,2 mm Dicke überzogen werden. Berechne die dafür erforderliche Chrommenge m. ($\varrho = 6{,}8\ \text{g/cm}^3$)

753. Die Oberfläche einer Kugel, deren Radius 8,4 cm beträgt, soll durch gleichmäßiges Abschleifen um den dritten Teil verringert werden. Gib den Durchmesser d der bearbeiteten Kugel an.

754. Eine aus 3 mm dickem Material geformte Hohlkugel soll ein Fassungsvermögen von 1 Liter haben. Welchen äußeren Durchmesser d muß sie erhalten?

755. Der kugelförmige Knauf eines Turmes hat einen Durchmesser von 30 cm und soll mit 10 g einer Goldlegierung überzogen werden. Ermittle die Dicke s des überall gleichmäßigen Überzuges. ($\varrho = 17\ \text{g/cm}^3$)

756. Zur Herstellung eines kugelförmigen Ballons werden 12,5 m² Stoff verbraucht. Welchen Durchmesser d hat dieser Ballon, wenn man annimmt, daß in der angegebenen Stoffmenge 10% Abfall und Verluste für die Nahtstellen enthalten sind?

757. Ein zylindrischer Bottich, dessen lichter Durchmesser 0,9 m und dessen innere Höhe 1,2 m betragen, soll durch ein halbkugelförmiges Gefäß gleichen Volumens ersetzt werden. Gib dessen lichten Durchmesser d an.

758. In einer kugelförmigen Gummiblase von 0,4 mm Wanddicke ist 1 Liter Gas eingeschlossen. Durch Erwärmung dehnt es sich auf 1,8 Liter aus. Gib die neue Wanddicke s unter der Annahme an, daß sich die Blase überall gleichmäßig ausdehnt.

759. Eine massive Halbkugel von 34 cm Durchmesser soll halbkugelförmig so weit ausgedreht werden, daß sich ihre Masse um die Hälfte verringert. Berechne den Durchmesser s der Aussparung.

760. Acht Kugeln vom Radius r berühren sich gegenseitig und sind so angeordnet, daß ihre Mittelpunkte die Eckpunkte eines Würfels bilden.
a) Wie groß darf das Volumen V_1 jener sechs Kugeln sein, deren Mittelpunkte mit den Schnittpunkten der Flächendiagonalen des Würfels zusammenfallen?
b) Welches Volumen V_2 hat die Kugel, deren Mittelpunkt zugleich Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist und die die großen Kugeln berührt?
Drücke V_1 und V_2 durch r aus und setze dann $r = 5{,}3$ cm.

761. Die Volumen V_1 und V_2 zweier sich berührender Kugeln stehen im Verhältnis $V_1 : V_2 = 4 : 3$. Der Abstand ihrer Mittelpunkte beträgt $a = 12$ cm.
a) Welche Durchmesser d_1 und d_2 haben die Kugeln?
b) Wie groß sind ihre Volumen V_1 und V_2?

762. Eine Kugel mit dem Volumen $V = 2{,}4\ \text{dm}^3$ schrumpft gleichmäßig zusammen. Gib den neuen Durchmesser d für 10% Schrumpfung des Volumens an.

763. Eine Halbkugel wird von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten.
a) Wie groß muß der Abstand x der Schnittfläche, von der Grundfläche aus gerechnet, sein, damit die Kugelkappe zur Kugelzone im Verhältnis $m : n$ steht. Drücke x durch den Radius r der Halbkugel aus.
b) Wie groß muß x sein, damit Kappe und Zone gleich groß sind?

764. Der senkrecht zu einer Schnittfläche stehende Durchmesser $AB = 2r$ einer Kugel wird durch die Schnittfläche in die Stücke x und y geteilt (Bild 469). Wie groß sind die beiden durch die Schnittfläche bestimmten Kugelsegmente und ihre dazugehörenden Kappen, wenn $x : y = m : n$ gegeben ist?

765. Wie groß ist ein Kugelsegment V, dessen dazugehörige Kappe $M = 40\ \text{cm}^2$ die Höhe $h = 1$ cm hat? Welchen Radius r hat ferner die zum Segment gehörige Kugel?

766. Von einer Kugelzone, deren großer Durchmesser gleich dem Durchmesser der dazugehörigen Kugel ist, sind die Höhe $h = 2$ cm und die Fläche $M = 30\ \text{cm}^2$ bekannt. Wie groß ist das Volumen V der der Zone entsprechenden Schicht?

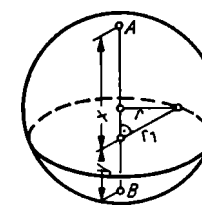


Bild 469

767. Von einem Kugelsektor sind das Volumen $V = 20\ \text{cm}^3$ und die Fläche $M = 10\ \text{cm}^2$ der dazugehörigen Kappe bekannt. Wie groß sind die Höhe h der Kappe und der Radius r der Kugel?

768. Von einer Kugel sind die Kappe $M = 25\ \text{cm}^2$ und deren Höhe $h = 2$ cm bekannt. Berechne das Volumen V der dazugehörigen Kugel.

769. Ein Kugelsektor soll der n-te Teil der ihm zugehörigen Kugel mit dem Radius $r = 5$ cm sein. Welche Höhe h muß er für $n = 4$ haben?

770. Wie groß muß die Höhe h eines Kugelsektors sein, damit die dem Sektor zugehörige Kappe M flächengleich ist dem zum Sektor gehörigen Kegelmantel M_1? Berechne h aus dem Kugelradius $r = 15$ cm.

771. Ermittle die Masse m einer Bikonvexlinse (Bild 470). ($\varrho = 3{,}1$ g/cm³)

772. Wie groß ist die polierte (gekrümmte) Fläche A einer Bikonkavlinse, wenn die Krümmung beiderseits gleich ist (Bild 471).

773. Eine steinerne Zierkugel von 80 cm Durchmesser ist so abgeflacht, daß die Auflagefläche einen Durchmesser von 25 cm hat. Berechne ihr Volumen V.

774. Das gußeiserne kugelförmige Schiebegewicht einer Dezimalwaage gleitet auf einer Stange von 8 mm Durchmesser. Es ist deshalb mit einer zentrischen Bohrung von gleichem Durchmesser versehen. Berechne seine Masse m bei einem Durchmesser von 4 cm. ($\varrho = 7{,}2$ g/cm³)

Bild 470

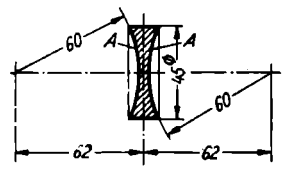


Bild 471

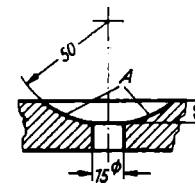


Bild 472

775. Berechne die tragende Fläche A der Kugelpfanne, die in die Stützplatte für ein Kugelgelenk eingearbeitet ist (Bild 472).

776. Eine Stahlkugel wird durch einen Körper in eine Bleiplatte eingedrückt und hinterläßt darin einen 0,40 cm tiefen und 4,50 cm² großen Eindruck. Berechne den Durchmesser d der Kugel.

777. Eine aus dünnem Blech gefertigte Halbkugel soll bei einem Radius von 22 cm aus einer Kappe und einer Zone zusammengesetzt werden. Welche Höhen h_1 und h_2 müssen Kappe und Zone haben, wenn für beide gleich viel Blech verbraucht werden soll?

778. Eine aus Stein hergestellte Halbkugel von 70 cm Durchmesser soll aus einer Schicht und einem Segment zusammengesetzt werden, die beide gleiche Höhe haben. Berechne die Volumen V_1 und V_2 der Schicht und des Segmentes.

779. Eine Holzkugel von 8 cm Durchmesser wird auf ein kegelförmig zugespitztes Rundholz geleimt. Deshalb muß es mit einer Aussparung versehen werden, die die Form eines Sektors mit dem Kegelöffnungswinkel 60° hat. Gib den Materialabfall V an.

780. Ein Bleideckel hat die Form eines Kugelsegmentes mit dem Radius $r = 16$ cm und der Höhe $h = 2$ cm. Er soll zu einem Segment mit der Höhe $h_1 = 4$ cm umgegossen werden. Berechne den Radius r_1 der dazu anzufertigenden Form.

781. Berechne die Masse m eines Kugelgelenkbolzens (Bild 473). ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

782. An einen zylinderförmigen Kessel von 3,80 m Länge und 1,50 m Außendurchmesser sind Böden angeschweißt, die die Form einer Kugelkappe haben und 25 cm hoch sind. Berechne die Oberfläche O des Kessels.

783. Berechne die Masse m von 50 Stück Stahlbolzen (Bild 474). ($\varrho = 7{,}85$ g/cm³)

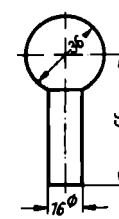


Bild 473

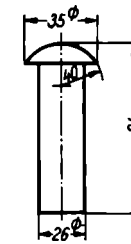


Bild 474

784. Der Innendurchmesser einer Kugelvase beträgt 16 cm. Innerer Boden und obere Öffnung sind gleich groß und haben einen Durchmesser von 9 cm. Gib das Fassungsvermögen V der Vase an.

785. Der halbkugelförmige Zelluloidfuß eines Stehaufmännchens hat einen Durchmesser von 25 mm. Er soll mit einem Bleistück, das die Form eines entsprechenden und 8 mm hohen Kugelsegmentes hat, ausgelegt werden. Berechne den Materialbedarf V.

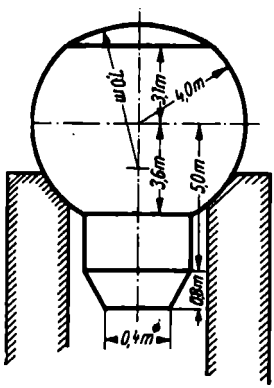


Bild 475

786. Welchen Raum V umschließt ein kugelförmiger Tank (Bild 475)? Zylinder- und Kegelansatz sind mitzurechnen, während die Blechdicke unberücksichtigt bleibt. Welche Oberfläche O hat außerdem der Tank?

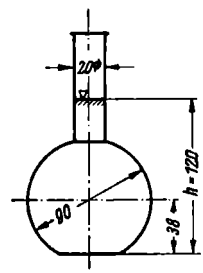


Bild 476

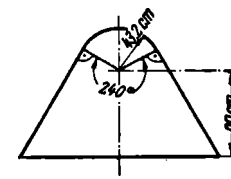


Bild 477

787. Ein Windkessel besteht aus einem $l = 2{,}4$ m langen zylindrischen Rohr mit der lichten Weite $d = 80$ cm. Er ist beiderseits durch Kugelkappen abgeschlossen, deren gemeinsamer Mittelpunkt im Schwerpunkt des Rohres liegt. Gib das Fassungsvermögen V und die Oberfläche O des Kessels an.

788. Eine Kochflasche (Bild 476) ist bis zur Höhe h mit Wasser von 4 °C gefüllt. Wie groß ist ihre Füllung V?

789. Gib das Volumen V und die Oberfläche O eines Ziersteines (Bild 477) an. Berechne außerdem die Fläche A seines Achsenschnittes.

790. Zwei Kugeln mit den Radien $r_1 = 27$ mm und $r_2 = 15$ mm werden an einer Stelle so weit plangeschliffen, daß sie eine gemeinsame Berührungsfläche vom Durchmesser $d = 23$ mm erhalten. Berechne die Volumen V_1 und V_2 der abgeschliffenen Segmente.

791. Drücke das Volumen V des Restkörpers durch r aus, wenn eine Kugel zentrisch mit einer konischen Bohrung versehen wird (Bild 478).

792. Berechne das Volumen V des Restkörpers, der aus einer beiderseits konisch ausgedrehten Kugel erhalten wird (Bild 479).

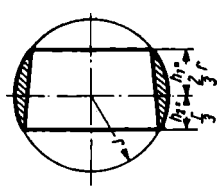


Bild 478

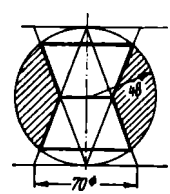


Bild 479

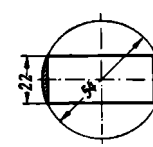


Bild 480

793. Berechne die Masse m eines aus Platin hergestellten Ringes (Bild 480). ($\varrho = 21{,}4\ \mathrm{g/cm^3}$)

794. Berechne die Masse m eines gußeisernen Deckels (Bild 481). Setze $a = 21{,}0$ cm, $b = 0{,}8$ cm und $\varrho = 7{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$.

795. Gib eine Formel für das Volumen V eines Kugelkeiles (Kugelzweieck) an (Bild 482). Drücke V durch r und α aus.

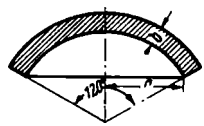


Bild 481

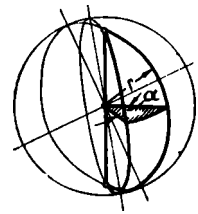


Bild 482

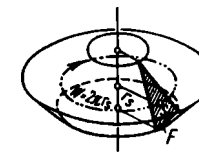


Bild 483

29.3.6. Guldinsche[1]) Regeln

Die Volumen und Mäntel beliebig geformter Rotationskörper lassen sich recht bequem nach den beiden **Guldinschen Regeln** berechnen. Insbesondere erhält man die Formeln für das Volumen und den Mantel vom geraden Voll- und Hohlzylinder, geraden Kegel, geraden Kegelstumpf und von der Kugel auf sehr einfache Weise, wie nachstehend gezeigt wird.

1. Guldinsche Regel

Das Volumen V eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt A der den Körper erzeugenden Fläche und dem Weg $w = 2\pi r_s$, den ihr Schwerpunkt S bei einer Umdrehung um die Rotationsachse zurücklegt (Bild 483):

$$\boxed{V = A\,w = A \cdot 2\pi r_s} \tag{153}$$

2. Guldinsche Regel

Der Mantel M eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge l der den Körper erzeugenden Kurve und dem Weg $w = 2\pi r_s$, den ihr Schwerpunkt S bei einer Umdrehung um die Rotationsachse zurücklegt (Bild 484):

$$\boxed{M = l\,w = l \cdot 2\pi r_s} \tag{154}$$

Sowohl der Beweis für die Richtigkeit der beiden Regeln als auch die Bestimmung der Schwerpunktlagen von Flächen und Strecken sind Aufgabe der Integralrechnung und müssen deshalb hier übergangen werden. Für die folgenden Beispiele werden die Schwerpunktlagen als bekannt vorausgesetzt.

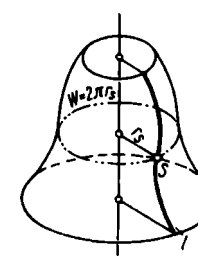


Bild 484

BEISPIELE

1. *Vollzylinder*
   Volumen (Bild 485):

[1]) Paul Guldin (1577 bis 1643) belgischer Mathematiker.

Erzeugende Fläche: $A = rh$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = \frac{r}{2}$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi \frac{r}{2} = \pi r$

Folglich: $V = Aw = rh \cdot \pi r$

$$\underline{\underline{V = \pi r^2 h}}$$

Mantel (Bild 486):

Erzeugende Strecke: $l = h$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = r$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi r$

Folglich: $M = lw = h \cdot 2\pi r$

$$\underline{\underline{M = 2\pi r h}}$$

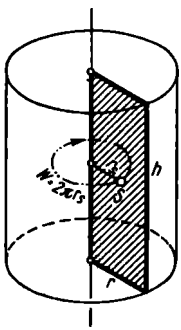


Bild 485

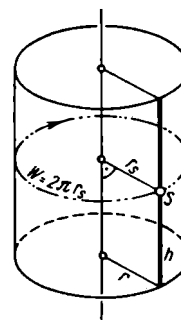


Bild 486

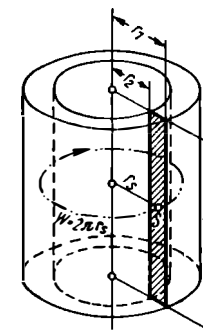


Bild 487

2. *Hohlzylinder*

Volumen (Bild 487):

Erzeugende Fläche: $A = (r_1 - r_2)h$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = \frac{r_1 + r_2}{2}$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} = \pi(r_1 + r_2)$

Folglich: $V = Aw$

$V = (r_1 - r_2)h \cdot \pi(r_1 + r_2)$

$$\underline{\underline{V = \pi h(r_1^2 - r_2^2)}}$$

Mantel (Bild 488):

Erzeugende Strecken: $l_1 = h$

$l_2 = h$

Schwerpunktabstände von der Achse: $r_{s_1} = r_1$

$r_{s_2} = r_2$

Schwerpunktwege: $w_1 = 2\pi r_1$

$w_2 = 2\pi r_2$

Folglich: $M = l_1 w_1 + l_2 w_2 = h \cdot 2\pi r_1 + h \cdot 2\pi r_2$

$$\underline{\underline{M = 2\pi h(r_1 + r_2)}}$$

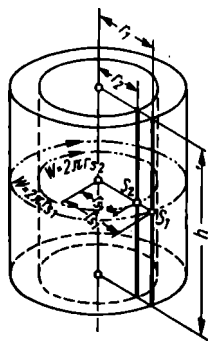


Bild 488

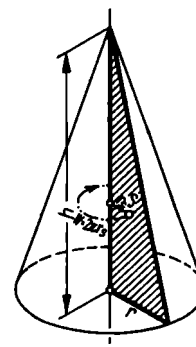


Bild 489

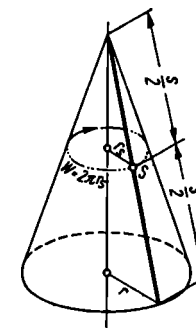


Bild 490

3. *Kegel*

Volumen (Bild 489):

Erzeugende Fläche: $A = \dfrac{r h}{2}$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = \dfrac{r}{3}$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi \dfrac{r}{3}$

Folglich: $V = A w = \dfrac{r h}{2} \cdot 2\pi \dfrac{r}{3}$

$$\underline{\underline{V = \frac{\pi}{3} r^2 h}}$$

Mantel (Bild 490):

Erzeugende Strecke: $l = s$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = \dfrac{r}{2}$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi \dfrac{r}{2} = \pi r$

Folglich: $M = l w = s \cdot \pi r$

$$\underline{\underline{M = \pi r s}}$$

4. *Kegelstumpf*

Volumen (Bild 491):

Erzeugende Flächen: $A_1 = r_2 h$

$$A_2 = \frac{r_1 - r_2}{2} h$$

Schwerpunktabstände von der Achse: $r_{s_1} = \frac{r_2}{2}$

$$r_{s_2} = \frac{r_1 + 2r_2}{3}$$

Schwerpunktwege: $w_1 = 2\pi \frac{r_2}{2} = \pi r_2$

$$w_2 = 2\pi \frac{r_1 + 2r_2}{3}$$

Folglich: $V = A_1 w_1 + A_2 w_2$

$$V = r_2 h \cdot \pi r_2 + \frac{r_1 - r_2}{2} h \cdot 2\pi \frac{r_1 + 2r_2}{3}$$

$$\underline{\underline{V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}}$$

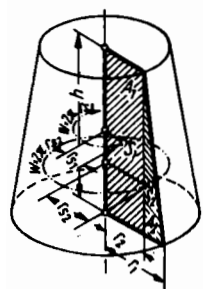


Bild 491

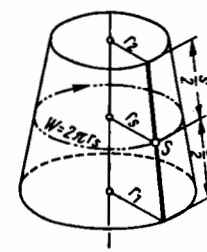


Bild 492

Mantel (Bild 492):

Erzeugende Strecke: $l = s$

Schwerpunktabstand von der Achse: $r_s = \frac{r_1 + r_2}{2}$

Schwerpunktweg: $w = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}$

Folglich: $M = l w = s \cdot 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}$

$$\underline{\underline{M = \pi s (r_1 + r_2)}}$$

5. *Schwerpunkt der Halbkreisfläche*

Durch Rotation einer Halbkreisfläche entsteht eine Kugel (Bild 493).

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Halbkreisfläche: $A = \frac{\pi r^2}{2}$

$$V = A \cdot 2\pi \cdot r_s$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi r_s$$

$$\underline{\underline{r_s = \frac{4r}{3\pi}}}$$

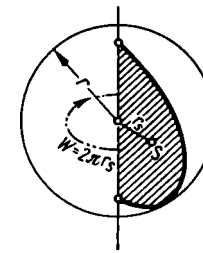


Bild 493

6. *Schwerpunkt der Halbkreislinie*

Durch Rotation einer Halbkreislinie entsteht die Oberfläche einer Kugel (Bild 494).

Kugeloberfläche: $M = 4\pi r^2$

Länge der Halbkreislinie: $l = \pi r$

$$M = l \cdot 2\pi r_s$$

$$4\pi r^2 = \pi r \cdot 2\pi r_s$$

$$\underline{\underline{r_s = \frac{2r}{\pi}}}$$

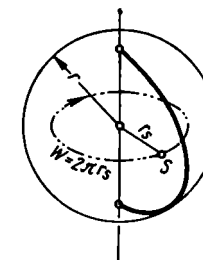


Bild 494

Lösungen

1. a) $2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 47$ b) $3 \cdot 11^3 \cdot 29$ c) $2 \cdot 3^4 \cdot 17 \cdot 23$ d) $2^2 \cdot 5 \cdot 17^3$
   e) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 53$ f) $3^5 \cdot 199$ g) $5^3 \cdot 19 \cdot 61$ h) $2^3 \cdot 7 \cdot 997$
   i) $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 43$ k) $11 \cdot 89 \cdot 463$

2. a) 3 b) 36 c) 126 d) 91
   e) 1 (teilerfremd)

3. a) 75 b) 44 c) 1 d) 2
   e) 94 f) 106 g) 143 h) 341
   i) 3842 k) 5109

4. a) 60 b) 420 c) 1890 d) 320494
   e) 39312 f) 20250 g) 11554543 h) 19683
   i) 38766063 k) 31104

5. a) $2\frac{1}{6}$ b) $6\frac{3}{4}$ c) $1\frac{13}{15}$ d) 4 e) $3\frac{4}{19}$ f) $2\frac{27}{35}$ g) $3\frac{16}{61}$ h) $7\frac{4}{123}$
   i) $5\frac{63}{64}$ k) $6\frac{1}{37}$ l) $1\frac{185}{317}$ m) $6\frac{39}{115}$ n) $8\frac{2}{9}$ o) $8\frac{92}{109}$ p) $2\frac{53}{467}$

6. a) $\frac{37}{11}$ b) $\frac{197}{15}$ c) $\frac{572}{21}$ d) $\frac{1573}{41}$ e) $\frac{7104}{95}$ f) $\frac{17}{3}$ g) $\frac{293}{23}$ h) $\frac{193}{8}$
   i) $\frac{1805}{43}$ k) $\frac{586}{7}$ l) $\frac{55}{8}$ m) $\frac{188}{11}$ n) $\frac{345}{16}$ o) $\frac{1638}{31}$ p) $\frac{199}{2}$

7. bis 11.

Erweiterung mit 2:

$\frac{2}{4}$	$\frac{10}{26}$	$\frac{28}{34}$	$\frac{46}{48}$	$\frac{62}{70}$
$\frac{6}{8}$	$\frac{8}{34}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{34}{80}$	$\frac{88}{114}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{12}{38}$	$\frac{30}{76}$	$\frac{24}{70}$	$\frac{102}{120}$
$\frac{12}{14}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{34}{58}$	$\frac{84}{130}$	$\frac{144}{166}$
$\frac{4}{18}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{36}{74}$	$\frac{40}{142}$	$\frac{186}{194}$

Erweiterung mit 3:

$\frac{3}{6}$	$\frac{15}{39}$	$\frac{42}{51}$	$\frac{69}{72}$	$\frac{93}{105}$
$\frac{9}{12}$	$\frac{12}{51}$	$\frac{33}{75}$	$\frac{51}{120}$	$\frac{132}{171}$
$\frac{6}{15}$	$\frac{18}{57}$	$\frac{45}{114}$	$\frac{36}{105}$	$\frac{153}{180}$
$\frac{18}{21}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{51}{87}$	$\frac{126}{195}$	$\frac{216}{249}$
$\frac{6}{27}$	$\frac{21}{54}$	$\frac{54}{111}$	$\frac{60}{213}$	$\frac{279}{291}$

Erweiterung mit 5:

$\frac{5}{10}$	$\frac{25}{65}$	$\frac{70}{85}$	$\frac{115}{120}$	$\frac{155}{175}$
$\frac{15}{20}$	$\frac{20}{85}$	$\frac{55}{125}$	$\frac{85}{200}$	$\frac{220}{285}$
$\frac{10}{25}$	$\frac{30}{95}$	$\frac{75}{190}$	$\frac{60}{175}$	$\frac{255}{300}$
$\frac{30}{35}$	$\frac{40}{75}$	$\frac{85}{145}$	$\frac{210}{325}$	$\frac{360}{415}$
$\frac{10}{45}$	$\frac{35}{90}$	$\frac{90}{185}$	$\frac{100}{355}$	$\frac{465}{485}$

Erweiterung mit 7:

$\frac{7}{14}$	$\frac{35}{91}$	$\frac{98}{119}$	$\frac{161}{168}$	$\frac{217}{245}$
$\frac{21}{28}$	$\frac{28}{119}$	$\frac{77}{175}$	$\frac{119}{280}$	$\frac{308}{399}$
$\frac{14}{35}$	$\frac{42}{133}$	$\frac{105}{266}$	$\frac{84}{245}$	$\frac{357}{420}$
$\frac{42}{49}$	$\frac{56}{105}$	$\frac{119}{203}$	$\frac{294}{455}$	$\frac{504}{581}$
$\frac{14}{63}$	$\frac{49}{126}$	$\frac{126}{259}$	$\frac{140}{497}$	$\frac{651}{679}$

Erweiterung mit 11:

$\frac{11}{22}$	$\frac{55}{143}$	$\frac{154}{187}$	$\frac{253}{264}$	$\frac{341}{385}$
$\frac{33}{44}$	$\frac{44}{187}$	$\frac{121}{275}$	$\frac{187}{440}$	$\frac{484}{627}$
$\frac{22}{55}$	$\frac{66}{209}$	$\frac{165}{418}$	$\frac{132}{385}$	$\frac{561}{660}$
$\frac{66}{77}$	$\frac{88}{165}$	$\frac{187}{319}$	$\frac{462}{715}$	$\frac{792}{913}$
$\frac{22}{99}$	$\frac{77}{198}$	$\frac{198}{407}$	$\frac{220}{781}$	$\frac{1023}{1067}$

Erweiterung mit 17:

$\frac{17}{34}; \frac{85}{221}; \frac{238}{289}; \frac{391}{408}; \frac{527}{595}$

$\frac{51}{68}; \frac{68}{289}; \frac{187}{425}; \frac{289}{680}; \frac{748}{969}$

$\frac{34}{85}; \frac{102}{323}; \frac{255}{646}; \frac{204}{595}; \frac{867}{1020}$

$\frac{102}{119}; \frac{136}{255}; \frac{289}{493}; \frac{714}{1105}; \frac{1224}{1411}$

$\frac{34}{153}; \frac{119}{306}; \frac{306}{629}; \frac{340}{1207}; \frac{1581}{1649}$

Erweiterung mit 48:

$\frac{48}{96}; \frac{240}{624}; \frac{672}{816}; \frac{1104}{1152}; \frac{1488}{1680}$

$\frac{144}{192}; \frac{192}{816}; \frac{528}{1200}; \frac{816}{1920}; \frac{2112}{2736}$

$\frac{96}{240}; \frac{288}{912}; \frac{720}{1824}; \frac{576}{1680}; \frac{2448}{2880}$

$\frac{288}{336}; \frac{384}{720}; \frac{816}{1392}; \frac{2016}{3120}; \frac{3456}{3984}$

$\frac{96}{432}; \frac{336}{864}; \frac{864}{1776}; \frac{960}{3408}; \frac{4464}{4656}$

12. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{15}{19}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{37}{67}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{8}{15}$ h) $\frac{8}{27}$ i) $\frac{5}{7}$ k) $\frac{103}{570}$
l) $\frac{6}{5}$ m) $\frac{4}{7}$ n) $\frac{5}{9}$ o) $\frac{3}{5}$ p) $\frac{2074}{8633}$ q) $\frac{2}{15}$ r) $\frac{3}{4}$ s) $\frac{7}{16}$ t) $\frac{23}{34}$ u) $\frac{3}{7}$

13. a) $\frac{34}{41}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{79}{89}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{8}{15}$ g) $\frac{57}{59}$ h) $\frac{713}{783}$ i) $\frac{1}{5}$ k) $\frac{13}{14}$
l) $\frac{21}{31}$ m) $\frac{24576}{178625}$ n) $\frac{4}{3}$ o) $\frac{15}{28}$ p) $\frac{26}{57}$ q) $\frac{39}{58}$ r) $\frac{5}{6}$ s) $\frac{1}{5}$ t) $\frac{11}{17}$ u) $\frac{4505}{7848}$

14. a) 240 b) 96 c) 720 d) 136800 e) 1260
f) 13464 g) 4347 h) 512 i) 2790 k) 6545

15. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{41}{60}$ c) $\frac{37}{72}$ d) $\frac{11}{252}$ e) $\frac{7}{16}$
f) $1\frac{11}{24}$ g) $\frac{31}{208}$ h) $\frac{2556}{5005}$ i) $\frac{71}{162}$ k) $\frac{61}{504}$

16. a) $139\frac{215}{234}$ b) $11\frac{17}{24}$ c) $\frac{7}{40}$ d) $113\frac{3}{10}$ e) $1961\frac{1}{4}$
f) $25\frac{1}{2}$ g) 0 h) $222\frac{10}{11}$ i) $2\frac{4}{5}$ k) $12\frac{3}{4}$

17. a) 9 b) 7 c) $5\frac{1}{2}$ d) $1\frac{3}{7}$ e) $8\frac{2}{3}$
f) $8\frac{2}{5}$ g) $79\frac{1}{2}$ h) $3\frac{3}{4}$ i) $\frac{3}{5}$ k) 78

18. a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{44}{63}$ d) 15 e) $\frac{22}{45}$
f) $\frac{13}{18}$ g) $\frac{49}{54}$ h) $1\frac{1}{2}$ i) $\frac{77}{100}$ k) $6\frac{2}{3}$

19. a) $21\frac{1}{7}$ b) 23 c) $78\frac{1}{3}$ d) $323\frac{3}{4}$ e) $1858\frac{1}{2}$
f) $36\frac{5}{6}$ g) 28 h) $6\frac{13}{27}$ i) 10 k) $1\frac{4189}{4608}$

20. a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $2\frac{2}{5}$ d) 8 e) $\frac{385}{5616}$
f) $9\frac{27}{92}$ g) $\frac{25}{27}$ h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{2}{3}$ k) 1

21. a) $7\frac{2}{3}$ b) 8 c) $38\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{3}$ e) 450
f) $2\frac{11}{12}$ g) $13\frac{3}{4}$ h) 126 i) $705\frac{7}{15}$ k) 1

22. a) $\frac{1}{8}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) 10
f) 1 g) $3\frac{2}{3}$ h) $4\frac{1}{4}$ i) 13 k) $2\frac{5}{7}$

23. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{9}{40}$ c) $\frac{2}{27}$ d) $\frac{20}{817}$ e) $\frac{25}{711}$
f) $\frac{71}{468}$ g) $\frac{30}{271}$ h) $\frac{5}{273}$ i) $\frac{49}{1783}$ k) $\frac{217}{1215}$

24. a) $\frac{6}{5}$ b) $1\frac{5}{7}$ c) 6 d) $\frac{18}{73}$ e) 24
f) $\frac{54}{263}$ g) $\frac{65}{842}$ h) $1\frac{106}{209}$ i) 24 k) $\frac{119}{42}$

25. a) $\frac{2}{13}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{4}{25}$ d) $\frac{7}{43}$ e) $\frac{3}{80}$
f) $\frac{1}{18}$ g) $\frac{2}{213}$ h) $\frac{5}{73}$ i) $\frac{2}{297}$ k) $\frac{5}{1456}$

26. a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{7}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{11}{18}$ e) $\frac{3}{8}$
f) $7\frac{5}{8}$ g) $26\frac{5}{14}$ h) $7\frac{3}{22}$ i) $\frac{9}{62}$ k) $\frac{8}{29}$

27. a) 4 b) $2\frac{2}{3}$ c) $1\frac{4}{17}$ d) $\frac{7}{10}$ e) $1\frac{3}{7}$
f) $\frac{3478}{5175}$ g) $\frac{32}{35}$ h) $2\frac{5}{11}$ i) 12 k) $\frac{1}{20}$

28. a) 7 b) $5\frac{1}{5}$ c) $3\frac{7}{9}$ d) $\frac{9}{34}$ e) 10
f) $17\frac{1}{2}$ g) $1\frac{13}{15}$ h) $4\frac{2}{7}$ i) $23\frac{1}{3}$ k) $11\frac{188}{219}$

29. a) 3 b) $3\frac{1}{3}$ c) 4 d) $\frac{1}{5}$ e) $1\frac{13}{15}$
f) $\frac{5}{39}$ g) $5\frac{25}{72}$ h) $\frac{10}{11}$ i) $3\frac{57}{80}$ k) $32\frac{17}{99}$

30. a) $1\frac{2}{7}$ b) $\frac{49}{121}$ c) 10 d) $\frac{1}{10}$ e) $7\frac{13}{20}$
f) $\frac{20}{27}$ g) $1\frac{4}{5}$ h) 63 i) $1\frac{313}{975}$ k) $2\frac{1}{60}$

31. a) $4\frac{2}{3}$ b) 45 c) $\frac{1}{40}$ d) $1\frac{3}{5}$ e) $\frac{4}{405}$
f) $39\frac{1}{5}$ g) $\frac{6}{475}$ h) $\frac{4}{91}$ i) $607\frac{1}{7}$ k) $\frac{1}{2190}$

32. a) $\frac{18}{19}$ b) $2\frac{1}{10}$ c) $1\frac{7}{8}$ d) $1\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{12}$
f) $7\frac{140}{141}$ g) $1\frac{107}{110}$ h) $7\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{12}$ k) 68

33. a) $\frac{219}{290}$ b) 3 c) $\frac{18}{59}$ d) $1\frac{1}{2}$ e) $1\frac{31}{50}$ f) $\frac{8}{21}$ g) $13\frac{4}{7}$ h) $3\frac{3}{4}$

34. a) $\frac{30}{43}$ b) $\frac{33}{109}$ c) $\frac{68}{157}$ d) $\frac{3}{11}$ e) $\frac{69}{181}$ f) $1\frac{6}{119}$

35. a) 0,3 b) 70,04 c) 0,0012 d) 0,35728
e) 0,000102 f) 0,75 g) 0,913483 h) 1,228
i) 0,987654321 k) 2,8859

36. α) a) 891,03822 b) 1,818537 c) 170,94 d) 760,714863
e) 712,33187 f) 244,1055 g) 2070,81199 h) 220,05242
β) i) 1284,014 k) 619,08525 l) 1 m) 999,99999
n) 2167,71416
γ) a) 187,55978 b) 0,073077 c) 0 d) 750,080663
e) 584,24391 f) 202,0255 g) 72,65999 h) 37
δ) i) 1234,5678 k) 598,91797 l) 0,2898 m) 782,65519
n) 2

37. a) 300 kg b) 37,2 km c) 1,1098 km³

38. a) 473,9 b) 6432 c) 83040 d) 4,75 e) 0,101
f) 441,8 g) 4025300 h) 7,04 i) 7720 k) 4,02

39. a) 286,4 b) 21727,8 c) 3,14 d) 102,683 e) 0,06372
f) 308,608 g) 366,48 h) 168777 i) 11030,892 k) 291,247

40. a) 24,448 b) 356,1129 c) 49,16 d) 5,814
e) 559,8654 f) 0,3219216 g) 282,67923 h) 0,00015201
i) 13,02484 k) 7,47178

41. a) 8,8 b) 7,83 c) 27,623 d) 1,0265
e) 0,872 f) 0,004066 g) 0,7478 h) 0,001375
i) 4,703 k) 0,00107575

42. a) 14 b) 27 c) 713 d) 61 e) 34
f) 13 g) 4632 h) 16 i) 7 k) 546,1

43. a) 2,7 b) 5,02 c) 0,46 d) 1,64 e) 0,71
f) 654,3 g) 432 h) 4 i) 52,5 k) 1981,25

44. a) 0,75 b) 0,875 c) 0,4 d) 0,35 e) 0,52
f) 0,6875 g) 0,578125 h) 0,90625 i) 0,568 k) 0,08984375

45. a) 1,1875 b) 8,216 c) 13,7375 d) 54,862 e) 39,3515625
f) 234,125 g) 5,29536 h) 70,472 i) 4,998046875 k) 78,0952

46. a) $0,\dot{7}$ b) $0,\overline{6}$ c) $0,\overline{09}$ d) $0,\overline{51}$ e) $0,\overline{72}$
f) $0,\overline{142857}$ g) $0,\overline{692307}$ h) $0,\overline{567}$ i) $0,\overline{26199}$ k) $0,\overline{0627}$

47. a) $0,1\overline{6}$ b) $0,2\overline{7}$ c) $0,18\overline{54}$ d) $0,972\overline{}$ e) $0,769\overline{801}$
f) $0,3\overline{85365}$ g) $0,3\overline{518}$ h) $0,28\overline{846153}$ i) $0,80235294\overline{1176470588}$
k) $0,5259\overline{9900}$

48. a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $7\frac{41}{50}$ d) $\frac{147}{250}$ e) $\frac{262}{625}$
f) $23\frac{19}{80}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $\frac{3917}{6250}$ i) $115\frac{21}{32}$ k) $\frac{67}{128}$

49. a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{3}{11}$ c) $\frac{1}{33}$ d) $\frac{59}{99}$ e) $\frac{91}{333}$
f) $\frac{10}{111}$ g) $\frac{26}{111}$ h) $\frac{1}{27}$ i) $\frac{67}{303}$ k) $\frac{5437}{9999}$

50. a) $\frac{17}{45}$ b) $\frac{7}{300}$ c) $\frac{2753}{4950}$ d) $\frac{13}{54}$ e) $\frac{13}{48}$
f) $\frac{7813}{12375}$ g) $\frac{65}{74}$ h) $\frac{1001}{1025}$ i) $\frac{251}{808}$ k) $\frac{19}{26}$

51. a) 0,835... bis 0,845...
b) 7,1266... bis 7,1274...
c) 113,0806... „ 113,0814...
d) 63,95... „ 64,05...
e) 7163,286... „ 7163,294...
f) 614,295... „ 614,305...
g) 0,50006... „ 0,50014...
h) 347,15... „ 347,25...
i) 0,0099995... „ 0,0100005...
k) 0,95... „ 1,05...

52. a) 0,7503; 0,750; 0,75; 0,8
b) 0,0706; 0,071; 0,07; 0,1
c) 0,6463; 0,646; 0,65; 0,6
d) 0,2879; 0,288; 0,29; 0,3
e) 3,0087; 3,009; 3,01; 3,0
f) 17,9899; 17,990; 17,99; 18,0
g) 5,0950; 5,095; 5,09; 5,1
h) 9,8226; 9,823; 9,82; 9,8
i) 7,3000; 7,300; 7,30; 7,3
k) 3,4568; 3,457; 3,46; 3,5

53. a) 26460; 26500; 30000
b) 874480; 874500; 870000
c) 6900; 6900; 10000
d) 7402980; 7403000; 7400000
e) 86000; 86000; 90000

54. a) $\pm$ 5 cm b) $\pm$ 5 mp c) $\pm$ 0,5 g d) $\pm$ 0,005 s e) $\pm$ 0,05 V
f) $\pm$ 5 mm g) $\pm$ 5 mm h) $\pm$ 0,5 g i) $\pm$ 5 kg k) $\pm$ 50 Hz

55. a) $\pm$ 0 b) $-$ 0,043 c) $\pm$ 0 d) $\pm$ 0 e) $\pm$ 0
f) + 0,0006 g) + 271,594 (Folgerung?) h) + 0,0002 i) + 9,051
k) $-$ 0,0039

56. a) 2,106 b) 903,4 c) 253,2 d) 355,31 e) 16,52
f) 0,4189 g) 1,879 h) 2,5625 i) 46,83 k) 31,495

57. a) 0,44 $\pm$ 0,005 b) 0,0707 $\pm$ 0,00005
c) 0,643644 $\pm$ 0,0000005 d) 0,75297530 $\pm$ 0,000000005
e) 0,6378 $\pm$ 0,00005 f) 0,1372323 $\pm$ 0,00000005
g) 0,899900 $\pm$ 0,0000005 h) 0,456 $\pm$ 0,0005
i) 0,715454 $\pm$ 0,0000005 k) 0,0329731732 $\pm$ 0,00000000005

58. a) 380689 b) 38,0689 c) 38068900
d) 0,380689 e) 0,0000380689

59. a) 51478848 b) 51,478848 c) 51478848000
d) 0,051478848 e) 0,000051478848

60. a) 24,2899 b) 7,6811 c) 2,42899 d) 0,242899
e) 768,11 f) 0,076811 g) 242,899 h) 0,076811
i) 76,811 k) 0,00242899

61. a) 8,8790 b) 0,88790 c) 41,213 d) 0,19129
e) 4,1213 f) 1,9129 g) 0,041213 h) 887,90
i) 19,129 k) 0,088790

62. a) 1322500 b) 0,00772641 c) 4173,16
d) 57760000 e) 0,097969 f) 0,000000252004
g) 24,3049 h) 645160000 i) 0,000000004489
k) 0,0000942841

63. a) 175616000000 b) 0,000345948408
c) 656,234909 d) 0,508169592
e) 43614,208 f) 83453453000
g) 0,000000778688 h) 0,000000000001601613
i) 2464918830000000 k) 0,017373979

64. a) 2,95635 b) 0,205183 c) 0,076811 d) 81,854
e) 0,51962 f) 2,71662 g) 670,82 h) 0,183848
i) 301,164 k) 0,029

65. a) 0,41213 b) 18,171 c) 0,8113 d) 0,40207
e) 0,063907 f) 92,012 g) 30 h) 0,97645
i) 0,15874 k) 0,0072177

66. a) 0,390625 b) 0,0157729 c) 20,9205 d) 1,96464
e) 1210,65 f) 0,00277008 g) 0,000194553 h) 110,011
i) 0,0561798 k) 1,37552

67. a) 7,0427 b) 13,6858 c) 0,08234 d) 0,00260461 e) 210,595
f) 99,045 g) 2,3296 h) 0,2728 i) 30,2308 k) 0,0062289

68. a) 65,3 b) 0,07093 c) 1740 d) 0,0001297 e) 9,875
f) 187,3 g) 0,0000627 h) 0,08975 i) 6,353 k) 0,00594

69. a) 4,0269 b) 17,85 c) 0,77628 d) 1,938 e) 9,7701
f) 0,25558 g) 39,979 h) 0,070284 i) 20,641 k) 0,0034593

70. a) 42,3 b) 0,4595 c) 0,000096 84 d) 3300 e) 0,0001831
f) 0,0838 g) 559,2 h) 244600000 i) 0,0003489 k) 0,0000000241

71. a) 6,76 b) 388 c) 0,395 d) 104300 e) 0,000215
f) 65 g) 0,1705 h) 462,3 i) 9,87 k) 101

72. a) 46,7 b) 0,349 c) 2060 d) 31 e) 0,00084
f) 8.49 g) 0,0304 h) 0,00022 i) 1020000 k) 0,000000535

73. a) 7,35 b) 2,884 c) 0,912 d) 246 e) 0,114
f) 0,01559 g) 63,7 h) 4,28 i) 0,0825 k) 27,84

74. a) 3,8 b) 2,038 c) 0,915 d) 0,2422 e) 8,86
f) 0,1644 g) 936 h) 175 i) 0,93 k) 0,03378

75. a) 0,3085 b) 0,02315 c) 1,37 d) 0,3182 e) 0,00975
f) 57,8 g) 0,2345 h) 590 i) 1,52 k) 0,006

76. a) 7,87 b) 0,892 c) 5650 d) 0,0917 e) 0,01035
f) 115,2 g) 0,0064 h) 0,0322 i) 0,269 k) 5870

77. a) 1,964 b) 1,964 c) 47 d) 0,039 e) 7,87
f) 1630 g) 0,00785 h) 0,01745 i) 0,01205 k) 0,00942

78. a) 92 b) 0,1167 c) 43,4 d) 83,3 e) 0,172
f) 205,2 g) 0,003 h) 11,08 i) 1,112 k) 35,5

79. a) 0,965 b) 0,05975 c) 36,2 d) 9,2 e) 0,000302
f) 0,01241 g) 64,9 h) 2,255 i) 0,00237 k) 0,0556

80. a) gerade, wenn n gerade; ungerade, wenn n ungerade
b) gerade, wenn n ungerade; ungerade, wenn n gerade
c) stets ungerade für alle n
d) gerade, wenn n ungerade; ungerade, wenn n gerade
e) stets gerade

81.

	α)	β)	γ)	δ)	ε)
a)	6	-42	125	96	$17\frac{17}{36}$
b)	-8	-52	41	-51	$7\frac{7}{18}$
c)	$\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{6}$	5	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{17}$
d)	$+5\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-11\frac{4}{5}$	$-21\frac{5}{6}$	$5\frac{25}{34}$
e)	$-2\frac{2}{3}$	$-8\frac{2}{3}$	$-8\frac{1}{5}$	$8\frac{1}{2}$	$2\frac{31}{51}$
f)	$-5\frac{1}{3}$	$-60\frac{2}{3}$	$-73\frac{4}{5}$	-85	$\frac{133}{204}$
g)	-4	$-7\frac{3}{7}$	$4\frac{5}{9}$	$+5{,}1$	$29\frac{5}{9}$
h)	$-11\frac{1}{2}$	$-53\frac{5}{7}$	$53\frac{4}{9}$	$-27{,}9$	$23\frac{8}{9}$
i)	-4	$-7\frac{3}{7}$	$4\frac{5}{9}$	$5{,}1$	$29\frac{5}{9}$
k)	99	-125	234	1036	$102\frac{1}{12}$

82. a) $<$ b) $>$ c) $<$ d) $<$ e) $<$ f) $>$ g) $<$ h) $>$ i) $>$ k) $=$

83. a) $+50$ b) $+20$ c) $+20$ d) $+50$ e) -20
f) -50 g) -50 h) -20

84.

	α)	β)	γ)	δ)
a)	$+13$	$+33$	$+60$	$+32$
b)	-1	-11	$+32$	0
c)	-1	-11	$+32$	0
d)	$+13$	$+33$	$+60$	$+32$
e)	$+1$	$+11$	-32	0
f)	-13	-33	-60	-32
g)	-13	-33	-60	-32
h)	$+1$	$+11$	-32	0

85. a) -1 b) 2 c) 221 d) 54,5 e) 0
f) $5\frac{5}{12}$ g) 78,8 h) 0 i) 25 k) $-10\frac{11}{12}$

86. a) $8a + 7b - 6c$
b) $-2l - m + 36n$
c) $40x + 50y - 60z$
d) $2p + 6q + 12r + 7s - 17t$
e) $29v - 42w$
f) $-3{,}39a - 9{,}27b + 13{,}1c$
g) $\frac{2}{9}d - \frac{19}{30}e - \frac{1}{14}f - \frac{1}{3}$
h) $988{,}97x + 351{,}46y - 208{,}9z - 495{,}3$
i) $17\frac{1}{30}R_1 - 15R_3 + 1\frac{3}{4}R_4$
k) $30u - 55{,}88v + 14{,}9855w - 45{,}133$

87. a) $240a^2bc^3$ b) $90x^3y^2z^3$ c) $1260r^2s^2t^3$ d) $\frac{1}{16}u^2v^4w^3$ e) $17p^2q^2rs^2t$

f) $-36rstxyz$ g) $a^2b^2c^3$ h) $4xy$ i) 0 k) $-6\frac{7}{20}abst$

88. a) $-12x$ b) $-5a$ c) $8v$ d) -1 e) $-6y$

f) $\frac{a}{3b}$ g) $-\frac{7u}{9v}$ h) $-\frac{3}{7}$ i) $-4{,}6\frac{ab}{rs}$ k) $0{,}9\frac{yz}{x}$

89. a) $8x$ b) $-7u$ c) $-\frac{13}{c}$ d) $\frac{11x}{2y}$ e) $\frac{17}{13b}$

f) $-r$ g) $-\frac{1}{3}a$ h) $\frac{6b}{5a}$ i) $-0{,}11$ k) $-\frac{5a}{9x}$

90. a) $-11a^2b$ b) 0 c) xz d) $\frac{100}{t}$ e) $-\frac{11}{15}$

91. a) $3y-3x$ b) $2r$ c) $2m-2p$ d) $0{,}8r+s$

e) $u-w$ f) $11x-4y+9z$ g) $3\frac{3}{10}a-1\frac{7}{20}b+\frac{1}{6}c$

h) $10u-v+w$ i) $6x-7z$ k) $10a-10b$

92. a) $29a+b-38c+21d$ b) $290m-61n-54p+49q$ c) $35c+33d-88k-53l$

d) $49\frac{1}{16}x^2yz-144\frac{1}{36}xy^2z+135\frac{27}{40}x^2y^2z$ e) $4ab$

f) $-34\frac{1}{2}$ g) $-4a^2-8b^2$ h) 0

i) $8{,}618y-14{,}828x$ k) $-120{,}205a^2bc-32{,}467a^3bc-46{,}062a^2b^2c-10{,}383a^2bc^2$

93. a) $x+(a-b)$ b) $u+(w-v)$ c) $\frac{q}{2}+\left(-\frac{2}{3}v+\frac{1}{4}s\right)$

d) $1+a+(-b+c)$ e) $2x-3y+(4z-5)$

94. a) $x-(2y-4z)$ b) $\frac{1}{4}e-\left(-\frac{2}{7}f+\frac{3}{8}g\right)$

c) $0{,}25q-0{,}49r-(0{,}52s-2{,}12t)$ d) $37{,}2a-42{,}5b-(-41{,}6c+0{,}62d)$

e) $\frac{3}{5}u-\frac{7}{9}v-\left(\frac{9}{11}w+\frac{5}{7}x\right)$

95. a) $a-(3b-2c+4d)$ b) $x+(0{,}1y-4{,}2z+6{,}3u)$

c) $3p-6q-(2r+4s-5t)$ d) $\frac{1}{3}u-\frac{2}{5}v+\frac{4}{7}w-\left(\frac{5}{9}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{4}z\right)$

e) $0{,}3k-3{,}2l-(4{,}5m+2{,}7n+1{,}6p)$

96. a) $15r-6s+3t$ b) $-4ax+8ay+24az$ c) $-\frac{1}{2}uv+\frac{3}{5}v^2-\frac{3}{8}vw$

d) $-16{,}12a+11{,}96b-24{,}44c+39{,}52d$ e) cx^3+ax^2-3bx

f) $\frac{3u}{4v}+\frac{21pv}{20u}-\frac{u}{2}$ g) $-4y+10z$ h) 0

i) $-5\frac{3}{5}a^5+3\frac{3}{5}a^4-2\frac{1}{5}a^3+1\frac{1}{5}a^2-6\frac{4}{5}a$ k) $72-65w$

97. a) $10x^2 + 19xy + 6y^2$ b) $15a^2 + ab - 28b^2$ c) $18m^2 - mn - 4n^2$
d) $63u^2 - 41uz + 6z^2$ e) $121v^2 - 81w^2$ f) $-117x^2 + 83xy + 154y^2$
g) $-\frac{3}{5}a^2 - 1\frac{181}{480}ab - \frac{3}{4}b^2$ h) $0{,}49u^2 - 0{,}42uv + 0{,}09v^2$
i) $6\frac{2}{3}am - 3\frac{5}{9}bm + 13\frac{1}{8}an - 7bn$ k) $a^2x + \frac{3}{2}aby - \frac{4}{3}abx - 2b^2y$

98. a) $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz$ b) $2a^2 - 6b^2 - 12c^2 - ab - 2ac - 17bc$
c) $-117u^2 - 135v^2 + 108w^2 + 308uv + 84uw + 72vw$
d) $\frac{1}{4}p^2 - \frac{4}{9}q^2 - \frac{1}{16}r^2 + \frac{1}{3}qr$
e) $0{,}15k^2 - 0{,}42l^2 - 2{,}94m^2 + 0{,}17kl + 0{,}63km - 2{,}24lm$
f) $6x^3 + 13x^2 + 2x - 5$ g) $6u^3 - 5u^2 - 16u + 15$
h) $60x^3 - 89x^2y - 23xy^2 + 42y^3$ i) $120a^3 - 52a^2b - 52ab^2 + 24b^3$
k) $6kmp - 12lmp - 2knp + 4lnp + 9kmq - 18lmq - 3knq + 6lnq$

99. a) $-a^2 - b^2$ b) $105m^6 - 170m^5 + 115m^4 - 85m^3 - 20m^2$
c) $-2x^2y - 2xy^2$ d) $u^4 - 25u^3v + 25uv^3 - v^4$
e) $4k + 52$

100. a) $u^2 - 2uv + v^2$ b) $m^2 + 2m + 1$ c) $1 - x^2$
d) $1 - 2y + y^2$ e) $4a^2 - 4ab + b^2$ f) $x^2 + 6xy + 9y^2$
g) $9p^2 - 12pq + 4q^2$ h) $\frac{4}{9}m^2 + \frac{1}{3}mn + \frac{1}{16}n^2$
i) $9{,}61s^2 - 32{,}49t^2$ k) $0{,}49u^2 - 1{,}68uv + 1{,}44v^2$

101. a) 0 b) $-6ab$ c) $16x^4 - 9y^4$
d) $50x^2 + 18y^2$ e) $9x^4 + 19x^2 - 20x + 5$ f) $25 - 81a^6$
g) $-1{,}92m^2 - 7{,}84mn + 2{,}08n^2$ h) $\frac{32}{49}v^2 - \frac{8}{9}uv$
i) $54mn$ k) $l^2 + 44kl$

102. a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$
b) $u^2 + v^2 + w^2 - 2uv + 2uw - 2vw$
c) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 12ab - 16ac + 24bc$
d) $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 + 2kl + 2km + 2kn + 2lm + 2ln + 2mn$
e) $4p^2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{9}{16}r^2 + s^2 - 2pq + 3pr - 4ps - \frac{3}{4}qr + qs - \frac{3}{2}rs$

103. a) 1681 b) 7569 c) 1596 d) 3800 e) 159711
f) 1020100 g) 18000 h) 89984 i) 994009 k) 455000

104. a) $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ b) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
c) $-64u^3 - 240u^2v - 300uv^2 - 125v^3$
d) $-8 + 6y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{8}y^3$ e) $27a^3 - 8b^3$

105.

	α)	β)	γ)	δ)	ε)	ζ)
a)	64	81	4	25	400	400
b)	34	53	100	97	200	200,02
c)	4	25	196	169	0	0,04
d)	16	− 45	28	− 65	0	4
e)	512	729	8	125	8000	8000
f)	152	351	296	665	2000	2000,6
g)	8	− 125	2744	− 2197	0	0,008
h)	98	− 335	728	− 793	0	60,002

106. a) $3x - 2y$ b) $5 - b + 8c$ c) $\frac{4}{3}w - \frac{2}{9}z + \frac{2}{3}wz$

d) $\frac{5m}{n} + \frac{2lp}{k} - \frac{1}{3q}$ e) $96x^4 - 27x^3y + 54x^2y^3 - 15xy^3 + 3y^4$

107. a) 2,7 b) 7 c) $19u$ d) $54a^2b$ e) $a + b$

f) $3x + 1$ g) $u - 5$ h) $x + y$ i) $14m + 13$ k) $x^2 - xy + y^2$

108. a) $3x + 2y$ b) $3a^2 - 7ab + 5b^2$ c) $3x^2 + 2xy - y^2 + \frac{y^3}{3x - 2y}$

d) $6s^2 + 7s - 3$ e) $2a^3 - 9ab^2 - 8b^3 + \frac{9b^5 - 11ab^4}{a^2 - 2ab + b^2}$

f) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$ g) $15a + 24b$

h) $41u^3 + 31u^2v + 41uv^2 - 11v^3 + \frac{11v^5 - 32uv^4}{u^2 - uv + v^2}$

i) $4x^2 - 3y$ k) $12p^4q^3 - 3p^3q^3 - 5p^2q^4 + 2pq^5$

109. a) $(a - 1)(b + c)$ b) $(3s - 1)(5r + 1)$

c) $p_0(1 - \alpha t)$ d) $(ab + xy)(ab - xy)$

e) $(3x^2 - 5xz + 2z^2)(3x - 2y)$ f) $(10x^2 - y^3)(10x^2 + y^3)$

g) $(2p + 5q + 4r)(2p + 5q - 4r)$ h) $(3x - y + 4u - 1)(3x - y - 4u + 1)$

i) $(a - b)(7x + 5y)$ k) $(2r^2 - 5s)(9r + 7s)$

110. a) $\frac{a - 1}{a + 1}$ b) $\frac{a}{5}$ c) $\frac{ab - b^2}{ac - c^2}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{9}$

f) $\frac{a + b}{a}$ g) $\frac{u - v}{u + v}$ h) $m^2 - n^2$ i) $\frac{k}{k - 1}$ k) -1

111. a) $\frac{4 + 7m}{4}$ b) $\frac{x + 2y}{x - 2y}$ c) $a + 2$ d) $\frac{5(2a + 3b)}{4(2a - 3b)}$

e) läßt sich nicht kürzen f) $\frac{t + s}{t - s}$ g) $3a + 1$

h) $\frac{1}{5t - 2s}$ i) läßt sich nicht kürzen k) $4m - 9n$

112. a) $\frac{a}{a^2}$ b) $\frac{b}{ab}$ c) nicht möglich d) $\frac{ab}{a^2b}$ e) $\frac{3}{3a}$ f) $\frac{x - 2y}{ax - 2ay}$

113. a) $\frac{-1}{y-x}$ b) $\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$ c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

d) nicht möglich e) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$ f) $\frac{a-1}{ax-x+y-ay}$

114. a) nicht möglich b) $\frac{m^2-m}{m^2+m}$ c) $\frac{m^2-1}{m^2+2m+1}$

d) $\frac{m^2-2m+1}{m^2-1}$ e) $\frac{m^3-2m^2+2m-1}{m^3+1}$ f) $\frac{m^2-4m+3}{m^2-2m-3}$

115. a) $\frac{3t-6s}{21t-12s}$ b) nicht möglich c) $\frac{7t^2-10st-8s^2}{49t^2-16s^2}$

d) $\frac{8s^2-18st+7t^2}{16s^2-56st+49t^2}$ e) $\frac{49t^3-70t^2s-40ts^2-32s^3}{343t^3-64s^3}$

f) $\frac{6as-3at-2bs+bt}{12as-21at-4bs+7bt}$

116. a) $-b$ b) $+a$ c) ab d) 4 e) $\frac{a}{3}$ f) $\frac{5}{6}x$

g) $\frac{5u+3v+20w}{12}$ h) $\frac{x+1}{72}$

i) $\frac{7a^2+6b^2-9c^2}{6abc}$ k) $\frac{20u^3-3u^2+62u+165}{360}$

117. a) 1 b) $\frac{25a^2-40ab-4b^2}{12}$ c) $\frac{7x-24y}{96}$

d) $\frac{75b^2+132ab-34a^2}{72}$ e) $\frac{34b-15a}{12}$

f) $\frac{261x^3-19x^2+112x-16}{216x^4}$ g) $\frac{11x-2}{60}$

h) $\frac{1}{b}$ i) 0 k) $\frac{a^2+b^2}{ab}$

118. a) 0 b) 0 c) $\frac{-12u^2}{(u^2-1)(u^2-4)}$ d) $-\frac{75a^2+28ab+6b^2}{(5a+b)(5a+2b)}$

e) $\frac{a-b}{x^2-y^2}$ f) $\frac{25a}{6a^2-6}$ g) $\frac{1}{(a+b)^2}$

h) $\frac{1}{q}$ i) $\frac{18-8x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ k) $\frac{1}{x^2-5x+6}$

119. a) $\frac{7a}{4b}$ b) $\frac{1}{4}uw^2$ c) $\frac{7}{3}ars$ d) $\frac{24zuv}{xy}$

e) $\frac{4a^2-b^2}{2ab}$ f) x^2+9y^2 g) $\frac{25x^2-16y^2}{20xy}$ h) $35x^3-36y^2+28z^3$

i) $\frac{6a^6-11a^4-14a^2+24}{a^3}$ k) $-\frac{5m^2+7}{5n}$

120. a) $\frac{8ax}{3cd}$ b) $-\frac{2v}{u}$ c) $\frac{3(1+b)}{4(1-b)}$ d) $\frac{6+15a-x-3ax}{5+15a+x+3ax}$

e) $\frac{15acv+16bcu-30uvw}{18cuv}$ f) $-\frac{1}{4}(x^2+xy+y^2)$

g) a h) $\frac{6+9x}{2+6x}$ i) $3a^2$ k) $\frac{a^2u(4a+5u)}{7u+v}$

121. a) $\frac{4+a^2}{4-a^2}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $m-1$ d) $-4\frac{v}{u}$

e) $\frac{3-x}{3+x}$ f) $-\frac{1}{x}$ g) $\frac{3-10a}{3+10a}$

h) $\frac{a+x}{a-x}$ i) $r-s$ k) $\frac{8}{a}$

122. a) $\frac{a}{b}$ b) $u+1$ c) 1 d) 1 e) $\frac{2}{3}h$ f) $1-x-x^2$

g) $\frac{a^3}{a^3-4a+12}$ h) 8 i) $\frac{2x}{1+x+2x^2}$ k) $-a$

123. a) richtig b) falsch: $(-2)^7=-128$ c) falsch: $-125\neq-243$

d) richtig e) falsch: $2187\neq343$ f) richtig

g) richtig h) falsch: $-64\neq+81$ i) richtig k) richtig

124. a) $\frac{1}{81}$ b) 0,000000000000001 c) 0,00000016

d) 39,69 e) 39,69 f) 101

g) 245 h) 199 i) 289 k) $-a^{2k-5}$

125. a) falsch: $13\neq25$ b) richtig c) falsch: $27\neq9$

d) richtig e) richtig

126. a) 74 b) 144 c) 187 d) 121 e) 117

f) 9 g) 90 h) 0 i) -476 k) -2744

127. a) $5a^3$ b) $-15u^7$ c) $-16x^2-7y^2$

d) $1\frac{1}{2}uv^2-\frac{5}{22}u^2v$ e) $11\frac{5}{12}ay^3-4\frac{1}{3}by$ f) $x^2(2a-3b^2+7c^3-5d^4)$

g) keine Zusammenfassung möglich h) $u^2v^2\left(4\frac{8}{9}u-10\frac{3}{5}v\right)$

i) keine Zusammenfassung möglich k) $x^4(14x^3-9x^2+12x-5)$

128. a) x^{n+4} b) a^{n+1} c) u^{2n+3} d) b^{3n+2} e) p^{2m-1}

f) y^{2n+1} g) z h) m^{16} i) m^{9n+7} k) t^9

129. a) x^8y^8 b) $\frac{8}{21}a^{n+5}b^5x^{m+1}y^{n+3}$ c) $10x^{n+2m+5}$

d) $\frac{5}{8}m^{x+4}n^{y+3}t^{z+6}$ e) $4a^6b^{5m-5n+5}$ f) $600x^{12}(y-z)^{13}$

g) $(-a)^{n+11}$ h) $\frac{1}{4}x^{38}$ i) $21a^7-23a^6+21a^5-3a^4-3a^3+5a^2$

k) $15x^{2n}-9x^{3n+2}y^{n+2}+12x^{4n-1}y^{2n-1}-5x^{2n-4}y^{2n+3}+3x^{3n-2}y^{3n+5}-4x^{4n-5}y^{4n+2}$

130. a) $a^m \cdot a^n$ b) z. B.: $a^4 \cdot a^{24}$ oder $a^{19} \cdot a^9$ usw.
c) $b^{2n} \cdot b$ d) $c^n \cdot c^5$ e) $x^n \cdot x^{2b} \cdot x^{3c}$
f) $3^3 \cdot 3^2$ g) $12^2 \cdot 12^2$ h) $(a-b)(a-b)^n$
i) $3 \cdot x^m \cdot x^2$ k) $(-a)^{2n} \cdot (-a) = -a^{2n} \cdot a$

Anmerkung: Außer den hier angeführten Zerlegungen sind auch zahlreiche andere möglich.

131. a) $6{,}4 \cdot 10^7$ b) 32 c) 256 d) 1 e) 216
f) 625 g) 10^6 h) $-a^6$ i) $\frac{5}{3}$ k) 81

132. a) $\frac{1}{2} b y^2$ b) $\frac{8}{3} b c^2$ c) $\left(\frac{u}{x}\right)^{99} \cdot \left(\frac{v}{y}\right)^{72}$ d) $\left(\frac{x+y}{x+b}\right)^2 \cdot \frac{b-x}{x-y}$
e) $m^2 \cdot n^{x-2} \cdot (m+n)$ f) $\frac{10}{a b y^3}$ g) $\frac{1+r^3-2r^6}{r^3}$ h) $\frac{81}{125} a^{2x+5} b^{n-1}$
i) $\frac{a^2+9}{(a-3)^5}$ k) $\frac{a+b x^2-d x^5+c x^{n-1}+e x^n-f x^{n+1}}{x^{n+1}}$

133. a) $\frac{a^3-1}{a^{m+3}}$ b) $\frac{z}{y^2}$ c) $\frac{54 u^{18}}{245 v^9 \cdot y^{49}}$ d) $\frac{1}{x^5}$
e) $\frac{1}{2 r^5 s^4 t^2}$ f) $\frac{x^4}{(1-x)^5}$ g) $135 a y$
h) $\frac{v^9}{u^{2x-y+9} \cdot w^x}$ i) $\frac{25}{243} b^{5n-1} c^{2n+3}$ k) $\frac{v^{24}}{y^{44}}$

134. a) $3a^2+4ab-7b^2$ b) $y^{2n}-y^n z^n+z^{2n}$ c) $a^{n+1}-a^{n-1}$
d) $x^5+x^4 y+x^3 y^2-x^2 y^3-x y^4-y^5$ e) $p^{10}+p^5$

135. a) 64 b) 512 c) b^{20} d) x^{3n} e) $-y^{12}$
f) b^{12m} g) b^{12m} h) x^{2m+2} i) $-y^{4n^2-1}$ k) $z^{2c^2+3cb-2b^2}$

136. a) $a^8 b^{12}$ b) $x^{28} y^7$ c) $u^{3n} v^9$ d) $32 m^{10} n^{15}$
e) $-27 x^6 y^{3n} z^{3m-3}$ f) $\frac{81 a^{12}}{625 b^{20}}$ g) $\frac{m^{60} n^{16}}{x^{56} y^{48}}$
h) v^8 i) $\frac{27 b^3}{128 a^{11}}$ k) $x y^3$

137. a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{0{,}2^2} = 625$ d) $2 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{2}{25}$
e) $5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$ f) $\frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$ g) $-\frac{1}{4^3} = -\frac{1}{64}$
h) $\frac{1}{(-4)^4} = \frac{1}{256}$ i) $-\frac{1}{4^4} = -\frac{1}{256}$ k) $\frac{1}{0{,}1^1} = 10$

138. a) 64 b) 81 c) $1\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $-\frac{27}{343}$
f) $\frac{36}{2209}$ g) 1 h) $5\frac{23}{64}$ i) $\frac{1}{448}$ k) $\frac{x^m}{a^m}$

139. a) 3^{-1} b) a^{-3} c) $5 \cdot 7^{-1}$ oder $(1{,}4)^{-1}$ d) $c(ab)^{-1}$

e) $(a-b)^{-1}$ f) $(x+y)(x-y)^{-1}$ g) $3x^{-3} - 2x^{-1} + 1$

h) $u^3 v^{-5}$ i) $n^{-1} a^{-2}$ k) $m n^{-1} (y^3 + 2)(x^2 - 1)^{-1}$

140. a) 5^{-1} b) $\frac{1}{5^{-1}}$ c) $\frac{1}{m^{-n}}$ d) $a^3 b^{-2}$ oder $\frac{b^{-2}}{a^{-3}}$

e) $3 \cdot x^{-2}$ oder $\frac{x^{-2}}{3^{-1}}$ f) $m n^{-n}$ oder $\frac{n^{-n}}{m^{-1}}$ g) $m^n n^{-n}$ oder $\frac{n^{-n}}{m^{-n}}$

h) $m^n n^{-1}$ oder $\frac{n^{-1}}{m^{-n}}$ i) $m^{-1} n^{-n}$ k) $m^{-n} n^{-n}$

141. a) $\frac{x^m}{x}$ b) $\frac{3a^{2m}}{a^5}$ c) $\frac{b^2}{b^m}$ d) $\frac{a^n}{a^2 b^{2n}}$

e) $\frac{(bc)^2}{d^2} \cdot \left(\frac{d}{abc}\right)^x$ f) $\frac{(a-b)^m}{(a-b)^n}$ g) $\frac{1}{x^{3m}} + \frac{1}{x^{2m}} + \frac{x}{x^m}$

h) $\frac{2}{a^{4n}} + \frac{5a^2}{a^{2n}} - \frac{3a^n}{a^n}$ i) $\frac{1}{(2a)^{4n}} + \frac{(5a)^n}{5a} - \frac{(3a)^n}{(3a)^m}$ k) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

142. a) $30a^2$ b) $\frac{3}{14} \cdot \frac{a^3}{b^4}$ c) $\frac{5x^3}{2yz^2}$ d) $\frac{3m^{2s}}{2m^2 n^{s+2}}$ e) $\frac{9axy^3}{10b}$

f) $\frac{9a^3}{20mn^3}$ g) $\frac{bc^2}{xyz}$ h) $\frac{m^{3s} \cdot t^2}{m^4 s^{3m} t^{3m}}$ i) $\frac{a^3}{a^{11} y}$ k) $v^2 x^2 y^4$

143. a) $\frac{1}{x^4}$ b) $\frac{1}{8x^3}$ c) $\frac{x^6}{25}$ d) 1 e) $\frac{b^{24}}{a^4}$

f) $\frac{1}{4096}$ g) 4096 h) -4096 i) r^{12} k) $\left(\frac{x^3 y^2}{z^4}\right)^{15}$

144. a) $30x^{-6}y^{-5} - 10x^{-5}y^{-6} + 35x^{-4}y^{-7}$ b) $\frac{3}{10}a^{-2}b^{n+2} - \frac{3}{8}a^n + \frac{1}{5}a^{1-2n}b^{3n+3}$

c) $3x^3 + 2x^2 - x$ d $\frac{2}{3}m^{-3}n^5 - \frac{5}{4}m^{-2}n^4 + \frac{7}{12}m^{-1}n^3 - \frac{1}{6}n^2$

e) $\frac{1}{3}y^{3n-2} - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}y^{-3n-6}$

145. a) $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

b) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$

c) $16a^4 - 16a^3 + 6a^2 - a + \frac{1}{16}$

d) $243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$

e) $1 - 3b + \frac{15}{4}b^2 - \frac{5}{2}b^3 + \frac{15}{16}b^4 - \frac{3}{16}b^5 + \frac{1}{64}b^6$

146. a) $\frac{b+3a}{b-3a}$ b) $q^5(x^2 - 2pxy + p^2y^2)$ c) $54(2u - v)$

d) $\frac{a(x+y)^n}{b^{n-1}(x-y)^{n-1}}$ e) $\frac{a^m b^n}{c^{m+n}(u+v)^n(u-v)^m}$

147. a) 0 b) $2(a-x)^3$ oder $-2(x-a)^3$
c) $-(a-x)^{12}$ oder $-(x-a)^{12}$ d) $(x+a)^{10}$
e) $\frac{1}{(r-s)(u+v)}$ f) $a(x-y)^{2n}$ g) $36(p-q)^{2a}$
h) $6(a-b)^{2z}$ i) $1458(5a-9b)^6$ k) 0

148. a) $0 \leqq x < \infty$ b) $0 \leqq x < \infty$ c) $0 \leqq x < \infty$
d) $0 \leqq x < \infty$ e) $-\infty < x < \infty$ f) $0 \leqq x < \infty$
g) $-\infty < x \leqq 1$ h) $-\infty < x < \infty$ i) $y \leqq x < \infty$
k) $-a \leqq x \leqq +a$

149. a) richtig b) Zahlenwert falsch c) richtig
d) richtig e) falsch f) falsch g) richtig
h) richtig i) negatives Vorzeichen falsch k) falsch (negativer Radikand!)

150. a) falsch b) falsch c) richtig d) falsch
e) richtig f) falsch g) Zahlenwert und Vorzeichen falsch
h) richtig i) falsch k) falsch

151. a) 8 b) gibt es nicht c) 4 d) 27 e) 2
f) $|uv|$ g) $a+b$ h) $5x^2$ i) $\sqrt{1-x^2}$ k) $(2ab^2)^2$

152. a) ab^3c^2 b) $|1-x|$ c) $u-8$ mit $u \geqq 8$ d) $2ab^2c^3 \cdot \sqrt[4]{c}$
e) $33(a-b)$ f) 3 g) -32 h) 0 i) 2

153. a) $5^{\frac{1}{3}}$ b) $2^{\frac{1}{2}}$ c) $7^{\frac{1}{4}}$ d) $a^{\frac{1}{4}}$ e) $x^{\frac{1}{9}}$
f) $b^{\frac{3}{4}}$ g) $x^{\frac{4}{7}}$ h) $x^{\frac{7}{4}}$ i) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ k) $(x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}$

154. a) p^3 b) $u^{\frac{4}{3}}$ c) $(x+y)^{\frac{3}{4}}$ d) $m \cdot p^{\frac{2}{k}}$
e) $x^{\frac{n+1}{n-1}}$ f) $(m-3n)^3$ g) $(m^2+n^2)^{\frac{1}{4}}$
h) $6 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b \cdot c^{\frac{4}{3}}$ i) $p^{\frac{2}{5}} \cdot (q-r)^{\frac{4}{5}}$ k) $x^{\frac{\kappa}{6}} y z^{\frac{4}{3}} u^2 v^{\frac{7}{3}} w^{\frac{5}{2}}$

155. a) $a^{-\frac{1}{2}}$ b) $x^{-\frac{1}{3}}$ c) $y^{-\frac{3}{4}}$ d) $(x-y)^{-\frac{1}{2}}$
e) $(1-x)^{-\frac{2}{3}}$ f) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}$ g) $x^{\frac{3}{5}} \cdot y^{-\frac{3}{5}}$
h) $a^m \cdot b^{-\frac{x}{n}}$ i) $u^{\frac{5}{4}} \cdot v^{-\frac{4}{5}}$ k) $3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$

156. a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ d) $\frac{b}{\sqrt[7]{c^2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[7]{b\,c^3}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{y^3}}$ g) $x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^3 \cdot \sqrt{x}$

h) $\frac{1}{\sqrt[n]{m-n}}$ i) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ k) $a \cdot b^3 \cdot b^{0,6} = a\,b^2 \cdot \sqrt[5]{b^3}$

157. a) $\sqrt[4]{a^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[7]{b^4}}$ c) $\sqrt[6]{c^{11}} = c \cdot \sqrt[6]{c^5}$

d) $\frac{1}{d^3 \cdot \sqrt[4]{d^2}}$ e) $\sqrt[25]{e^{16}}$ f) $x^2 \cdot \sqrt{x}$ g) $\frac{1}{y^2 \cdot \sqrt[10]{y}}$

h) $z \cdot \sqrt[6]{z^2}$ i) $\frac{1}{\sqrt{u^3}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[6]{v^{2n}}}$

158. a) 1,4142... b) 8 c) 2 d) 0,7 e) 2

f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{6}$ h) 42,25 i) 172,10368 k) 0,420 189 749

159. a) $7 \cdot \sqrt{2}$ b) $-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{a}$ c) $1{,}1 \cdot \sqrt[3]{5\,b} + 6{,}2 \cdot \sqrt[3]{a\,b}$ d) $3 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$

e) $\sqrt{5}$ f) keine Vereinfachung möglich g) keine Vereinfachung möglich

h) $\frac{17}{15}$ i) 6 k) $(1 + 2a - 4b + c) \cdot \sqrt[7]{x^2}$

160. a) 6 b) 12 c) $25 \cdot \sqrt{3}$ d) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ e) $7\sqrt{10}$

f) $x \cdot \sqrt{2}$ g) $6ab \cdot \sqrt[4]{a^2}$ h) $12xy \cdot \sqrt{z}$ i) $24uvw \cdot \sqrt[3]{2v}$ k) $a \cdot \sqrt[7]{a^{2n}}$

161. a) $11 \cdot \sqrt{5}$ b) $37 \cdot \sqrt{2} - 56 \cdot \sqrt{5}$ c) 44 d) $42 + 13 \cdot \sqrt{6}$

e) $a - b$ f) $12 \cdot \sqrt{3} - 27 \cdot \sqrt{2} + 90$ g) $74 - 12 \cdot \sqrt{30}$

h) 1 i) $-2 \cdot \sqrt[3]{2}$ k) $55 \cdot \sqrt[3]{3} - 51 \cdot \sqrt{3}$

162. a) 16 b) 32 c) 3 d) $14 - \sqrt{6}$ e) $2b$

f) 4 g) $8 \cdot \sqrt{3}$ h) 1 i) $16 - 6 \cdot \sqrt[3]{2} - 4 \cdot \sqrt[3]{16}$ k) 283

163. a) $\sqrt{x^2 y}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt[3]{27\,a^3 x}$ d) $\sqrt{x^2 y^2 z}$ e) $\sqrt[4]{16\,m^5}$

f) $\sqrt{x}$ g) $\sqrt[3]{\frac{40}{y^2}}$ h) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ i) $\sqrt{5 \cdot \sqrt{11} - 4 \cdot \sqrt{2}}$ k) $\sqrt[4]{u^2 - v^2}$

164. a) 7 b) 4 c) $\sqrt{5}$ d) $2 \cdot \sqrt{6}$ e) 2

f) 2 g) $\frac{3}{4}$ h) x i) a^2 k) $\frac{1}{10} \cdot \sqrt{30}$

165. a) 30 b) $16 \cdot \sqrt{5}$ c) $\frac{15}{8} - \frac{45}{8} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$ d) $\frac{9}{4} - \sqrt{9}$

e) $x + y$ f) $b + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$ g) $(a - b) \cdot \sqrt{a}$ h) $(xy - 1) \cdot \sqrt{y}$

i) $\frac{45x^2}{8y} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2y} + \frac{5x}{4} \sqrt{\frac{1}{3}}$

k) $\frac{15b^2}{4a^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2b^2}{5}} + \frac{5b^3}{2a^5} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{ab}} - \frac{6b}{a^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{5a}}$

166. a) $30a^2b$ b) $\frac{2}{u}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a - x}}$ d) a^3

e) $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ f) $2 - \sqrt{a}$ g) $\sqrt[3]{6x} + \sqrt[3]{3y}$ h) $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

i) $\sqrt[3]{16m^2} + \sqrt[3]{28mn} + \sqrt[3]{49n^2}$ k) $3x\sqrt{x} - 2\sqrt{xy} + 5y\sqrt{y}$

167. a) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{5}{12} \cdot \sqrt{12}$ d) $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ e) $\frac{1}{5} \sqrt{5}$

f) $\sqrt{15}$ g) $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{6}$ h) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{15}$ i) $4 \cdot \sqrt{10}$ k) $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{30}$

168. a) $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$ b) $\sqrt[3]{a}$ c) $3x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ d) $4m^2 \cdot \sqrt[3]{m^2}$

e) $\frac{1}{y} \cdot \sqrt[n]{y^4}$ f) $2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}$ g) $4 \cdot \sqrt[3]{2} - 6 \cdot \sqrt[3]{10}$

h) $\frac{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{54}}{3}$ i) $(2a - 5b) \cdot \sqrt{2a + 5b}$ k) $\frac{(7m - 3n) \cdot \sqrt{7m + 3n}}{7m + 3n}$

169. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ c) $3(2 \cdot \sqrt{3} + 3)$ d) $3(7 + 3 \cdot \sqrt{5})$

e) $2(\sqrt{8} - \sqrt{5})$ f) $2(\sqrt{10} + \sqrt{3})$ g) $4 + \sqrt{15}$ h) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6}$

i) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{21}$ k) $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$

170. a) $\frac{2}{75} \cdot \sqrt{15}$ b) $\frac{1}{7}(3 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2} + 2)$ c) $\sqrt{x + y} + \sqrt{y}$

d) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$ e) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ f) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ g) $\frac{1}{11}(3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5})$

h) $\frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{14} + \sqrt{15} - \sqrt{21})$ i) $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2$ k) $1 + \sqrt{2}$

171. a) 5 b) a c) $\sqrt[3]{b^3}$ d) y^3 e) $xy^2 \cdot \sqrt[3]{x^3y}$

f) $\frac{1}{\sqrt[7]{m^2ny^3}}$ g) $ab \cdot \sqrt[3]{ac^2}$ h) $\frac{1}{x}$ i) $rst^2 \cdot \sqrt{s}$ k) $\frac{1}{(abc)^2}$

172. a) 2 b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[3]{8}$

f) $\sqrt{5}$ g) 3 h) $\sqrt{6}$ i) $\sqrt{3}$ k) $\sqrt[3]{5}$

173. a) 8 b) 1024 c) 36 d) 1000 e) 7
f) 5 g) 1,2 h) 0,0001 i) $2 \cdot \sqrt{2}$ k) $27 \cdot \sqrt{3}$

174. a) $\sqrt[3]{a^2}$ b) $x \cdot \sqrt[3]{x}$ c) $a \cdot \sqrt{a}$ d) $y \cdot \sqrt{5xy}$
e) $m \cdot \sqrt{2mn}$ f) $p^3 \cdot \sqrt[5]{q^3}$ g) $\sqrt[3]{v}$ h) u^5
i) $u^{2k-1} v^{2k+1}$ k) $a^2 b c d \cdot \sqrt{2bz} \cdot \sqrt[3]{y^2 u} \cdot \sqrt[6]{c x^3 v} \cdot \sqrt[6]{e^5 w}$

175. a) $\sqrt[4]{u^3}$ b) $\sqrt[12]{v^5}$ c) $\sqrt[6]{x^3 y^2}$ d) $\sqrt[21]{a^{15} b^6 c^{18}}$
e) $\sqrt[20]{(a+b)^6}$ f) nicht möglich g) $\sqrt[18]{(a^2 b^3 - c)^3}$ h) $\sqrt[4]{(x-y)^2}$
i) nicht möglich k) $\sqrt[15]{(a^2 - b^2)^2}$

176. a) $\sqrt[5]{x^2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $-\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{a}$ e) $\sqrt[5]{u-v}$
f) $\sqrt[5]{p^3 q}$ g) $\sqrt[5]{m n^3}$ h) $\sqrt[6]{a^2 b c^3}$ i) $\sqrt[6]{a}$ k) $z \cdot \sqrt[3]{x y^2}$

177. a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) 6 d) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{x^4}{y^3}}$
f) 1 g) $m \cdot \sqrt[3]{m}$ h) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$ i) u k) $\frac{1}{x}$

178. a) 2 b) $\sqrt[4]{200}$ c) $\sqrt[12]{648}$ d) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt[12]{\frac{4}{5}}$
f) $\sqrt[10]{8}$ g) $\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$ h) $\sqrt{2}$ i) $\sqrt[20]{\frac{6^5}{5^4}}$ k) $\sqrt[28]{\frac{1000}{81}}$

179. a) $\sqrt[21]{x^{16}}$ b) $v \cdot \sqrt[30]{u^{25} v^{22}}$ c) $m n^3 \cdot \sqrt[12]{m^5 n^9}$ d) $\sqrt[12]{\frac{27}{2}}$
e) $3 \cdot \sqrt{200} - 2 \cdot \sqrt[11]{2048} + \sqrt[4]{50}$ f) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[5]{243} - \sqrt{6} + \sqrt[3]{6}$
g) $8 + 3 \cdot \sqrt[5]{32}$ h) $\sqrt{72} + 2 \cdot \sqrt[11]{32} - 6$ i) 4 k) 1

180. a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_{0,2} 25 = -2$ d) $\log_{-5} 25 = 2$
e) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$ f) $\log_a x = -7$ g) $\log_8 512 = 3$ h) $\log_x 1 = 0$
i) $\log_{0,01} 10^{-6} = 4$ k) $\log_{-3}(-y) = -x$

181. e) und f) sind falsch; alle anderen richtig.
Richtig wäre: e) $\log_{0,2} 5 = -1$; f) $\log_{0,5} 8 = -3$

182. a) $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$ b) $\log_{243} 3 = \frac{1}{5}$ c) $\log_{0,001} 0{,}1 = \frac{1}{3}$ d) $\log_{390\,625} 5 = \frac{1}{8}$
e) $\log_q q = \frac{1}{p}$ f) $\log_{a^2} b = \frac{1}{3}$ g) $\log_{\frac{1}{x}} y = \frac{1}{4}$ h) $\log_{p^n} r = \frac{1}{n}$
i) $\log_{\frac{1}{m}} n = \frac{1}{k}$ k) $\log_{\frac{1}{s^3}} t = \frac{1}{r}$

183. a) 4 b) 6 c) -4 d) 2 e) 4 f) 1 g) -1
h) -2 i) -1 k) $-n$

184. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 0 f) -3
g) gibt es nicht h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{2}$ k) -3

185. a) 32 b) 46656 c) 4 d) 5 e) 2 f) $\frac{1}{9}$ g) 1024
h) 3 i) 10 k) a

186. a) 9 b) 0,0081 c) $\frac{1}{7}$ d) 13 e) a f) 3 g) $\frac{1}{n}$
h) 16 i) 3 k) -2

187. a) -4 b) 2 c) 4 d) $-\frac{m}{n}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$ g) 3
h) $-n$ i) jede beliebige Zahl $\neq 0$ k) -4

188. a) 4 b) 6 c) 1 d) -1 e) -5 f) $\frac{1}{2}$ g) -2
h) existiert nicht i) 10 k) $\frac{1}{3}$

189. a) 0 b) $-0{,}5$ c) -1 d) $-1{,}4$ e) -4 f) 3 g) -5
h) -8 i) 1 k) 0,5

190. a) $2 \cdot \log_a x + \frac{1}{2} \cdot \log_a y - 3 \cdot \log_a z - \frac{1}{4} \cdot \log_a u$

b) $\log_m 3 + 2 \cdot \log_m u - \log_m 4 - \frac{1}{2} \cdot \log_m v$

c) $\frac{1}{2}\left(\log_p 4 + 3 \cdot \log_p a + \frac{1}{2} - 5 \cdot \log_p b - 7 \cdot \log_p q\right)$

d) $\log_{10}(x+y) + \log_{10}(x-y) - \log_{10}(x^2+y^2)$

e) keine weitere Vereinfachung möglich

f) $\log_x 5 - 2 - 3 \cdot \log_x y$

g) $\log_y a + \frac{1}{2} \cdot \log_y b - 2 \cdot \log_y c$

h) $\log_r x + \frac{1}{8} \cdot \log_r (x+y)$

i) $5 \cdot (\log_5 3 + \log_5 a)$

k) $-\frac{5}{4} \cdot \log_y x - \frac{3}{4}$

191. a) $\log_t \frac{ab}{cd}$ b) $\log_a \frac{x^2 y^3}{u \cdot v^4}$ c) $\log_x\left(\sqrt{u} \cdot \sqrt[3]{v}\right)$ d) $\log_z \sqrt{u \cdot \sqrt[3]{v}}$

e) $\log_m \frac{\sqrt[3]{a c^2}}{\sqrt[4]{b d^3}}$ f) $\log_a \frac{q^p}{p^q}$ g) $\log_s \frac{1}{x^k \cdot \sqrt[k]{y}}$ h) $\log_r (a^n b^{n-1} c^{n-2})$

i) $\log_s \frac{\sqrt[t]{r^p}}{\sqrt[s]{s^q}}$ k) $\log_d \frac{\sqrt[e]{c^b} \cdot \sqrt[e]{a^b}}{\sqrt{b^e} \cdot d^3}$

192. a) 2,60595 b) 5,60595 c) 0,60595 − 1 d) 3,60595
e) 0,60595 − 3 f) 1,60595 g) 0,21190 − 3 h) 2,30298
i) 0,81785 − 11 k) 0,20198

193. a) 1 b) − 6 c) 0 d) 4 e) 2
f) − 3 g) − 2 h) 7 i) 0 k) − 4

194. a) 5 b) 1 c) 18 d) 3
e) 1. Stelle nach dem Komma f) 3. Stelle nach dem Komma
g) 2 h) $n + 1$ i) 2. Stelle nach dem Komma
k) k-te Stelle nach dem Komma

195. a) 1,77851 b) 5,97635 c) 8,08063 d) 2,86070
e) 3,97003 f) 0,89020 g) 4,66011 h) 1,00043
i) 0,35005 − 1 k) 0,76223 − 3

196. a) 0,09132 − 3 b) 0,37014 − 8 c) 0,99996 − 1 d) 0,92007 − 3
e) 0,65992 − 5 f) 1,36173 g) 0,07918 h) 0,69897 − 3
i) 0,84566 − 2 k) 0,66077 − 24

197. a) 3,29137 b) 0,39023 − 1 c) 4,95999 d) 5,86652
e) 0,60206 − 6 f) 0,93952 − 8 g) 1,23502 h) 2,36135
i) 0,92007 k) 0,97002 − 2

198. a) 81820 b) 4,175 c) 329,2 d) 0,0009995
e) 0,00000008120 f) $4{,}571 \cdot 10^{12}$ g) 0,000010010 h) 0,3987
i) 8337 k) 0,04879

199. a) 0,002796 b) 65,10 c) $5{,}306 \cdot 10^{-10}$ d) $3{,}924 \cdot 10^{-8}$
e) 10^{18} f) $1{,}024 \cdot 10^{-8}$ g) 0,01585 h) 59950000
i) 0,9998 k) 183,1

200 a) 8,358 b) 0,02153 c) 0,0009217 d) 494300
e) 5759 f) 0,00000003594 g) 87,06 h) 0,00003108
i) $1{,}025 \cdot 10^{-10}$ k) 0,9991

201. a) 4,13271 b) 2,81205 c) 6,98885 d) 4,86062
e) 5,91013 f) 1,77816 g) 5,93002 h) 0,60257
i) 7,78999 k) 1,86003

202. a) 0,51712 − 3 b) 0,86123 − 2 c) 0,42002 − 6 d) 0,07940 − 1
e) 2,93099 f) 2,79935 g) 0,76288 − 1 h) 4,11005
i) 0,87304 − 6 k) 0,20000 − 6

203. a) 6512,6 b) 866560 c) 93,324 d) 3,1623
e) 562,34 f) 0,0081302 g) 63423 h) 6,1666
i) 0,023041 k) 1,4125

204. a) 1,2589 b) 29956 c) 4,6416 d) 51 994
e) 6599,3 f) 0,00010233 g) 0,00037995 h) 1,7783
i) 0,99997 oder 0,99998 k) 0,0021544

205. a) 5908 b) 0,00038042 c) 0,13550 d) 177,87
e) 6319,4 f) 24351 g) 0,0027252 h) 0,031376

206. a) 1,3323 b) 0,000020188 c) 66563 d) 8,0657
e) 0,0018632 f) 121,51 g) 1,1005 h) 261,89
i) 67,513 k) 0,00056825

207. a) $5{,}7601 \cdot 10^{-11}$ b) $\approx 9{,}771$ c) 0,096668 d) $\approx 2{,}718$
e) 19774 f) 306790 g) 0,00022047 h) 2329,4
i) 0,0078322 k) $3{,}8419 \cdot 10^{-5}$

208. a) 5,7127 b) 6,6518 c) 1,0595 d) 1,5263
e) 0,028740 f) 0,021344 g) 0,069637 h) 0,00044432
i) 0,79433 k) 0,28173

209. a) 59,920 b) 6253,6 c) 2,3255 d) 1,7817
e) 0,053908 f) 0,23281 g) 39,796 h) 0,0072567
i) 402,00 k) 0,042134

210. a) 0,74278 b) 74,967 c) 2,7367 d) 0,42625
e) $3{,}1404 \cdot 10^{-6}$ f) 22,492 g) 0,64879 h) 0,7254

211. a) 0,036347 b) 1,3285 c) 3,5992
d) 0,56606 e) 6,9301

212. a) 1,3445 b) 0,78735 c) 1.2294
d) 8,1060 e) 1,9458

213. a) 4 b) 25 c) -18 d) $-\frac{1}{3}$ e) 3 f) 13 g) 131
h) $\frac{c-b}{a+d}$ i) 0 k) 4

214. a) 2 b) 5 c) $\frac{4}{11}$ d) $25a$ e) 9 f) $-b$ g) $\frac{a+c}{b}$
h) $-4\frac{2}{3}$ i) Widerspruch: keine Lösung! k) 5

215. a) 12 b) $\frac{1}{3}$ c) $5a - 6b$ d) $-\frac{ab}{a+b}$ e) 1
f) 0 g) $3(u - 2v)$ h) 4 i) 1,2 k) $2a$

216. a) 7 b) $-5\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 2 e) 1 f) 1 g) $\frac{1}{2}$
h) 2,5 i) $\frac{ab}{a+b}$ k) $\frac{a-b}{a+b}$

217. a) 2 b) 0 c) 2 d) 6 e) 0 f) 5
g) $a^2 - b^2$ h) $-\frac{8}{9}$ i) 5 k) 2

218. a) $q = \frac{m}{p} - 1$ b) $\alpha = \frac{l_1 - l_0}{l_0 t}$ c) $t_2 = t_1 - \frac{Q}{\Theta c}$ d) $n = \frac{g - a + d}{d}$

e) $t = \frac{s}{g} + \frac{1}{2}$ f) $m = \frac{a - b}{a + b}$ g) $f = \frac{a r}{r_1 - r}$

h) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ i) $r = \frac{p^2 + s^2}{2p}$ k) $a = c - \frac{d}{b}$

219. a) 169 b) $1\frac{13}{36}$ c) 0 d) $-\frac{61}{384}$ (Scheinlösung, da $\sqrt[4]{6x - 1} \geqq 0$ sein muß.) e) $a^3 + 6a^2 + 12a + 10$

f) 11 (Scheinlösung! Vgl. Bemerkung zu 219. d!) g) 7 h) -12 i) 5 k) Die Gleichung ist für alle $x \geqq -\frac{7}{2}$ erfüllt.

220. a) 6 b) 17 c) 9 d) 19 e) 19 f) 4 g) 14

h) 34 i) 5 k) 7

221. a) 15,1 b) $36\frac{1}{2}$ c) $1\frac{5}{54}$ d) 67,25 e) $\frac{3}{32}$ f) 22,477

g) $-37{,}68$ h) 721,975 i) $11\frac{1}{8}$ k) 106,99

222. a) -3 b) $\frac{1}{2}$ c) 28,7 d) 13 e) 1 f) 5065 g) 367

h) 7,5 i) 12 k) $\frac{9}{21}$

223. a) 19 Mitglieder, 500 h b) 18 l c) 30 Ω d) 1.59 kg Cu und 0,41 kg Zn

e) $4\frac{1}{5}$ Tage f) $\frac{15}{44}$ A = 0,341 A g) 2 h 42 min

h) 126 km · h^{-1} i) 43,5 km · h^{-1}

k) 1,293 l 78prozentigen C_2H_5OH und 3,707 l 20prozentigen C_2H_5OH

224. a) $x < \frac{3}{4}$ b) $x > 3$ c) $x > \frac{7}{5}$ d) $x < -2$ e) $x > 0$

f) $x < 27$ g) $x < 20$ h) $x < 1\frac{2}{5}$ i) $x < 0$ k) $x > 2$

225. a) 2 : 3 b) 3 : 2 c) 4 : 1 d) 12 : 5 e) 22 : 23

f) 5 : 6 g) 3 : 2 h) 7 : 8 i) 9 : 11 k) 8 : 9

226. a) $2 : 6 = 3 : 9$
$9 : 6 = 3 : 2$
$2 : 3 = 6 : 9$
$9 : 3 = 6 : 2$
$6 : 2 = 9 : 3$
$3 : 2 = 9 : 6$
$6 : 9 = 2 : 3$
$3 : 9 = 2 : 6$

f) $a : x = y : b$
$b : x = y : a$
$a : y = x : b$
$b : y = x : a$
$x : a = b : y$
$y : a = b : x$
$x : b = a : y$
$y : b = a : x$

i) $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$
$R_1 : I_2 = R_2 : I_1$
$I_1 : R_2 = I_2 : R_1$
$R_1 : R_2 = I_2 : I_1$
$I_2 : I_1 = R_1 : R_2$
$R_2 : I_1 = R_1 : I_2$
$I_2 : R_1 = I_1 : R_2$
$R_2 : R_1 = I_1 : I_2$

Die übrigen Aufgaben sind entsprechend zu lösen.

227. a) 2 : 3 b) 7 : 4 c) 2 : 5 d) 11 : 9 e) 9 : 11
f) 3 : 8 g) 100 : 19 h) 16 : 21 i) 7 : 1 k) 1 : 1000

228. a) richtig b) falsch c) richtig d) richtig e) falsch
f) falsch g) falsch h) richtig i) falsch k) richtig

229. a) 24 b) 28 c) 12,6 d) 42
e) $32\,(d/b) = 32\,\frac{d}{b}$ f) $\frac{3}{5}\,a^3\,b$ g) $\frac{1}{4\,u^2\,v}$ h) $\frac{1}{2}\,m\,n$
i) 7 k) $\frac{5\,b^2}{6\,a}$.

230. a) $17\frac{1}{7}$ b) 25 c) 45 d) 3,25 e) 8
f) 8 g) 3 h) 6 i) 4 k) 10,5

231. a) 25% b) 11% c) 9% d) 4% e) 8%
f) 2,4% g) 0,08% h) 1,12% i) 6,45% k) 2,89%

232. a) 65,5%; 20,7%; 13,8% b) 22,7%; 22,9%; 15%
c) 9,8%; 16,7% d) 17,42% e) 11%; 9,4% f) 20,64%
g) 14,8%; 18,4% h) 6,12% i) 27,3%; 72,7% k) 18,75%

233. a) 359,34 MDN b) 1776,32 kg c) 3933 t d) 2633,808 ha
e) 98,736 m f) 86 Stück g) 79,34 MDN h) 137,28 l
i) 468 kW k) 1580130

234. a) 0 – 23 : 5; 24 – 32 : 4; 33 – 44 : 3; 45 – 55 : 2; 56 – 60 : 1
b) 1956,61 ha; 1165,64 ha; 790,97 ha; 249,78 ha
c) 171318 d) 21538 e) 2760 t

235. a) 731 Stück b) 826,– MDN c) 463 m d) 2,5 t
e) 767 ha f) 80,– MDN g) 120 MW h) 87 g
i) 72300 E. k) 56,2 hl

236. a) 34357,50 MDN b) 1074,42 MDN c) 1,79 MDN d) 1156,03 MDN
e) 3245,53 MDN f) 2,– MDN g) 2,– MDN h) 0,80 MDN
i) 1310,20 MDN k) 4,20 MDN

237. a) 3; 5 b) – 4; – 2 c) 6; 5 d) $2; \frac{9}{4}$
e) 11; 13 f) – 3; 4 g) $\frac{5}{2}$; 1 h) 6; 10
i) 3; 8 k) – 9; – 6

238. a) 1; $a + b$ b) 6,816; 5,204 c) 4 : 1
d) $-\frac{2}{3}$; 0 e) 3; 2 f) 2; 5 g) 13; 5
h) 2; 4 i) 18; 24 k) 5/11; 1/11

239. a) 3; 2 b) keine eindeutige Lösung (abhängig) c) 17; 1
d) 0,31; 0,13 e) 4; 1 f) 6; 3 g) -2; 7
h) 8; 9 i) keine Lösung (Widerspruch) k) 12; 15

240. a) 3; 2 b) 6; 4 c) 1; 1 d) 9; 10
e) 1; 1 f) $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$ g) $\frac{2}{5}(a^2+b^2); \frac{1}{5}(a^2+5ab+b^2)$
h) $\frac{a+b}{a-b}; \frac{a-b}{a+b}$ i) 12; 7 k) 7; 4

241. a) 7; 2 b) $a(a+b); b(a-b)$ c) 12; 5
d) 11; 8 e) 9; 5 f) $2a+b; 2a-b$
g) $\frac{a+1}{ab-1}; \frac{b+1}{ab-1}$ h) 3; 5 i) 5; 3 k) 5; 7

242. a) 3; 5; 9 b) 4; 7; 2 c) 8; 4; 1 d) 8; 4; -2
e) 10; 20; 30 f) 12; 20; 30 g) 30; 12; 70 h) 5; 3; 1
i) 3; 4; 5 k) 91; 65; 26

243. a) 0; 1; 1 b) $\frac{a+b}{a}; \frac{a-b}{b}; \frac{a^2-b^2}{ab}$ c) 4; 3; -6
d) $\frac{2}{a+b-c}; \frac{2}{c+a-b}; \frac{2}{b+c-a}$ e) 1; 2; 3 f) 4; 2; 1
g) $(a+b)^2; (a-b)^2; a^2-b^2$ h) $\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; 1$ i) 5; 3; 1
k) 7; 5; 2

244. a) 3; 4; 1; 0 b) 1; 2; 3; 4 c) 6; 5; 4; 3; -3
d) $2a; 3a-b; a-b; 2b; 3b-a;$ e) 5; 4; 3; 2; 1 f) 5; 7; 3; 2; 10; 4
g) 13; 10; 8; 7; 7 h) 30; 20; 10; 0 i) 6; 5; 4; 3; 2; 1 k) 1; 3; 4; 2

245. a) 361; 157 b) 51; 187 c) 22; 35 d) $\frac{15}{17}$

246. a) 8 cm; 11 cm b) $F_1 = 20$ kp; $F_2 = 30$ kp
c) keine eindeutige Lösung (2. Gl. von der 1. Gl. abhängig!) d) 300 kp; 2 cm²

247. a) 44; 12 b) 30 m³/min; 20 m³/min c) 1,2 V; 1,6 Ω
d) 18 V; 6 Ω

248. a) $\pm 29{,}6$ b) $\pm \frac{4}{3}$ c) ± 1 d) ± 0 e) keine Lösung
f) $\pm \frac{8}{7}$ g) ± 0 h) ± 4 i) ± 3
k) $+17$; (-17 ist Scheinlösung!)

249. a) ± 1 b) ± 13 c) ± 3 d) $+5$; (-5 ist Scheinlösung!)
e) $+5$; (-5 Scheinlösung) f) 0 g) $\pm a$ h) ± 2
i) 7; -1 k) $a+b; a-b$

250. a) $0; -\frac{3}{7}$ b) $0; \frac{v}{u}$ c) $0; \frac{13}{8}$ d) $0; 6$ e) $0; b$

f) $0; \frac{5}{21}$ g) $0; -\frac{b^2}{a^2}$ h) $0; \frac{1}{8}$ i) $0; -2p$ k) $0; -1$

251. a) $(x-2)^2$ b) $\left(x+\frac{1}{7}\right)^2$ c) $\left(a-\frac{2}{3}\right)^2$ d) $(m-0{,}3)^2$ e) $\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$

f) $\left(b-\frac{5}{2}c\right)^2$ g) $(pq-4r)^2$ h) $(2x+3)^2$ i) $(c+3{,}35d)^2$ k) $(3a-4b)^2$

252. a) $5; -11$ b) $-3; 7$ c) $-8; -14$ d) $16; 17$ e) $3{,}2; 0{,}4$

f) $-0{,}9; -0{,}9$ g) $\frac{2}{3}; \frac{8}{15}$ h) $\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}$ i) $+\frac{1}{2}; +\frac{13}{15}$ k) $1{,}7; -1{,}5$

253. a) $5; 1$ b) $2; -7$ c) $-5; 1$ d) $1; -1$ e) $5; -1$

f) $-9; 10$ g) $-5; -1$ h) $13; 15$ i) $7; -23$ k) $-19; -1$

254. a) $9; \frac{1}{2}$ b) $-4\frac{1}{4}; -3\frac{1}{4}$ c) $4{,}6; -22$ d) $1\frac{7}{8}; -2\frac{1}{3}$ e) $-2{,}7; -4{,}1$

f) $5; 1\frac{1}{16}$ g) $3b; -\frac{5}{2}c$ h) $\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}$ i) $5a; \frac{2a}{5}$ k) $4; 4\frac{16}{17}$

255. a) $5 \pm \sqrt{5}$ b) $3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $3b; \frac{b}{3}$ d) $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$ e) $9{,}2 \pm \sqrt{7{,}64}$

f) $-\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ g) $\sqrt{5}; -\sqrt{3}$ h) $-1; \frac{3}{4}\sqrt{5}$

256. a) $2; 9$ b) $3; 3$ c) $8; \frac{31}{5}$ d) $b+a; b-a$

e) $3a+b; a+3b$ f) $10; \frac{46}{21}$ g) $\sqrt{a}; -a$ h) $0; \frac{25}{28}$

i) $2; -1$ k) $-1; \frac{2}{35}$

257. a) $2; \frac{45}{38}$ b) $1; 6$ (1 ist Scheinlösung) c) $0; -8$ d) $\frac{4}{3}; \frac{2}{5}$

e) $3; -\frac{1}{5}$ f) $a; 2a$ g) $11; -\frac{3}{2}$ h) $14a; -4a$ i) $\pm 2a\sqrt{3}$

k) $-3{,}1 \pm \sqrt{11{,}21}$

258. a) $8; 2\frac{2}{7}$ b) $-1; 2\frac{8}{15}$ c) $-2; -8\frac{1}{2}$ d) 3 e) $10; 5\frac{1}{5}$

f) $3; 1\frac{2}{5}$ g) $3a; -2a$ h) $\frac{a+b}{a-b}; 1$ i) $\frac{a+b}{a-b}; \frac{a-b}{a+b}$

k) $\frac{a-c}{c-d}; 1$

259. a) $-3; 7$ b) $-1; 8$ c) $3; 3$ d) $8; -9$ e) $-2; -7$

f) $7; -16$ g) $-1; -1$ h) $16; 18$ i) $-4; -6$ k) $a; -b$

260. a) richtig b) richtig c) falsch d) richtig e) falsch
f) richtig g) falsch h) falsch

261. a) $x^3 - 7x + 10 = 0$ b) $x^3 - 4x - 21 = 0$
c) $x^3 + 25x + 154 = 0$ d) $x^3 + 126x - 387 = 0$
e) $18x^3 - 63x - 65 = 0$ f) $x^3 - 14x + 47 = 0$
g) $x^3 + 6{,}4x - 5{,}76 = 0$ h) $3x^3 - 5ax - 2a^3 = 0$

262. a) $(x-3)(x-8)$ b) $2(x-5)(x+7)$
c) $(x-3)(x+4)$ d) $(3x+8)(2x-5)$
e) $(\sqrt{2x}+6)(x-5\sqrt{2})$ f) $(x-15)(25x-3)$
g) $(x-a)(bx+1)$ h) $(3x-2y)(5x+9y)$
i) $(x-a+2b)(x+2a-b)$ k) $(10x-15u+8\sqrt{3v})(12x+8u-9\sqrt{3v})$

263. a) P_2 und P_3 liegen auf der Geraden, P_1 nicht.
b) P_1 liegt auf der Geraden, P_2 und P_3 nicht.
c) P_3 „ „ „ „ , P_1 „ P_3 „
d) P_3 „ „ „ Kurve, P_1 „ P_3 „
e) Alle drei Punkte liegen auf der Kurve.

264. a) $x_1 = 5\frac{5}{6}$; $x_2 = -\frac{5}{12}$; $x_3 = 1$

b) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = 1$

c) $x_1 = -\frac{3}{7}$; $x_2 = 7\frac{23}{28}$; $x_3 = 2$

d) $x_{11} = +\sqrt{2}$; $x_{21} = 2{,}1$; $x_{31} = 3$
$x_{12} = -\sqrt{2}$; $x_{22} = -2{,}1$; $x_{32} = -3$

e) $x_{11} = \frac{3}{5}$; $x_{21} = 2\frac{4}{15}$; $x_{31} = \frac{1}{3}$
$x_{12} = -\frac{2}{3}$; $x_{22} = -2\frac{1}{3}$; $x_{32} = -\frac{2}{5}$

265. a) $P_1\,(0;\,-2)$ $P_2\,(2;\,0)$ b) $P_1\,(0;\,5)$ $P_2\left(-\frac{5}{3};\,0\right)$
c) $P_1\left(0;\,-\frac{4}{7}\right)$ $P_2\left(-\frac{6}{7};\,0\right)$ d) $P_1\left(0;\,-\frac{5}{3}\right)$ $P_2\,(2;\,0)$
e) $P_1\left(0;\,\frac{7}{3}\right)$ $P_2\left(-\frac{3}{2};\,0\right)$ f) $P_1\,(0;\,0)$ $P_2\,(3;\,0)$
g) $P_1\,(0;\,4)$ $P_2\left(\frac{1}{2};\,0\right)$ $P_3\,(-2;\,0)$ h) $P_1\left(0;\,-\frac{491}{6}\right)$ x-Achse wird nicht geschnitten!
i) $P_1\,(0;\,2{,}6)$ $P_2\,(0;\,-2{,}6)$ $P_3\,(+2{,}6;\,0)$ $P_4\,(-2{,}6;\,0)$ (Kreis)
k) $P_1\left(0;\,+3\frac{1}{3}\right)$ $P_2\left(0;\,-3\frac{1}{3}\right)$ $P_3\,(+5;\,0)$ $P_4\,(-5;\,0)$ (Ellipse)

266. a) $P_s(-2;-5)$ b) $P_s(4;0{,}9)$ c) $P_s(3;7)$ d) $P_s(-2;-6)$

e) $P_s(-1;+3)$ f) $P_s(2;-7)$ g) $P_{s1}(1;2)$ $P_{s2}(-1;2)$

h) $P_{s1}(3{,}5;21{,}5)$ $P_{s2}(-3{,}5;21{,}5)$ i) $P_s(-2;-3)$

k) $P_{s1}\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ $P_{s2}\left(-3;\frac{3}{2}\right)$

267. a) $-3/2$ b) 6,4 c) 3; 5 d) 0,67; − 0,83

e) 1; − 1 f) 5; 2 g) 2; 3 h) 1,5; 0,75

i) 1,5; 1,25

k) Kein Schnitt, da die Geraden parallel laufen! Die Gleichungen widersprechen sich; es gibt keine Lösung!

l) − 2,33; 1,33.

m) Beide Geraden liegen aufeinander. Die beiden Gleichungen sind voneinander abhängig, Es gibt keine eindeutige Lösung!

n) 0,33; 0,5 o) Widerspruch! (Vgl. Aufgabe k!)

268. a) $S(-1;2)$, Parabel ist nach unten geöffnet, gestreckt, schneidet die y-Achse bei $y_0 = 0$ schneidet die x-Achse zweimal.

b) $S(2;-1)$, P. ist nach unten geöffnet, gestreckt, schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$, schneidet die x-Achse nicht.

c) $S(0;-2{,}7)$, P. ist nach oben geöffnet, gestaucht, schneidet die y-Achse bei $y_0 = -2{,}7$ schneidet die x-Achse zweimal.

d) $S(1;2)$, P. ist nach unten geöffnet, gestreckt, schneidet die y-Achse bei $y_0 = -1$, schneidet die x-Achse zweimal.

e) $S(-1;-2)$, P. ist nach oben geöffnet, gestreckt, schneidet die y-Achse bei $y_0 = -6/7$, schneidet die x-Achse zweimal.

f) $S(1;-2)$, P. ist eine nach unten geöffnete Normalparabel, sie schneidet die y-Achse bei $y_0 = -3$, die x-Achse wird nicht geschnitten.

g) $S(3;-3)$, P. ist nach oben geöffnet, gestaucht, schneidet die y-Achse bei $y_0 = 0$, schneidet die x-Achse zweimal.

h) $S(-0{,}25;-6{,}25)$, P. ist eine nach oben geöffnete, gestreckte Parabel. Sie schneidet die x-Achse zweimal, die y-Achse wird bei $y_0 = -6$ geschnitten.

i) $S(-0{,}8;2{,}76)$; es liegt eine nach unten geöffnete Normalparabel vor, die die x-Achse zweimal und die y-Achse bei $y_0 = 2{,}12$ schneidet.

k) $S(3;0{,}25)$, P. ist nach unten geöffnet, gestaucht, schneidet die y-Achse bei $y_0 = -2$, schneidet die x-Achse zweimal.

269. a) 1; − 1,3 b) 3; − 1,5 c) keine Lösungen d) 0; 3,4

e) 2,5; − 2,8 f) Doppellösung 0,7 g) keine Lösungen

h) 0,5; − 1,5 i) Doppellösung − 1,8 k) 0,2; − 2,2

270. a) α) Gerade durch den Nullpunkt; Anstieg $m = R$
β) Gerade durch den Nullpunkt; Anstieg $m = I$
γ) Hyperbel $I = U/R$
δ) Gerade durch den Nullpunkt; Anstieg $m = 1/R$
ε) Hyperbel $R = U/I$
ζ) Gerade durch den Nullpunkt; Anstieg $m = 1/I$

b) α) Gerade durch den Nullpunkt; Anstieg $m = 2\pi$
β) Quadratische Parabel $F = \pi r^2$
γ) Quadratische Parabel $O = 4\pi r^2$
δ) Kubische Parabel $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

271. Schwerpunkt und Mittelpunkt des Inkreises liegen stets innerhalb des Dreiecks. Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt des Umkreises liegen auf dem Umfang des Dreiecks oder außerhalb des Dreiecks, je nachdem ob dieses rechtwinklig oder stumpfwinklig ist.

272. Die Konstruktion ergibt $x \approx 18{,}5\,\text{mm}$

273. $h = 40{,}3\ \text{m}$

274. $a = h \cdot \frac{b}{d} = 30\,\text{cm}$

275. $b = \frac{2}{3} h = 2{,}33\,\text{m}$; $\quad c = \frac{h}{3} = 1{,}17\,\text{m}$

276. $\overline{AC} = \overline{AC_1} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = 88{,}9\,\text{m}$

277. a) $a = 5{,}7\,\text{cm}$ b) $a = 6\,\text{cm}$ c) $a = 5{,}05\,\text{dm}$
d) $a = 35{,}09\,\text{m}$ e) $a = 0{,}529\,\text{km}$ f) $a = 58{,}6\,\text{mm}$

278. a) $c = 7{,}6\,\text{cm}$ b) $c = 140{,}9\,\text{mm}$ c) $c = 0{,}91\,\text{m}$
d) $c = 8{,}956\,\text{km}$ e) $c = 21{,}7\,\text{dm}$ f) $c = 1{,}1\,\text{m}$

279. $b = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

280. $b = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$

281. $A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{mn}{m^2 + n^2} = 15{,}36\,\text{cm}^2$; $\quad a = \frac{mc}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 4{,}8\,\text{cm}$; $\quad b = \frac{nc}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 6{,}4\,\text{cm}$

282. $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 - 3d^4}}}{\sqrt{c^2 - \sqrt{c^4 - 3d^4}}} \approx \frac{89}{70}$

283. $a = \sqrt{p(p+q)} = 6{,}7\,\text{cm}$; $\quad b = \sqrt{q(p+q)} = 6\,\text{cm}$; $\quad A = \frac{p+q}{2}\sqrt{pq} = 20{,}1\,\text{cm}^2$

284. $c = \frac{q^2 + h^2}{q} = 11{,}3\,\text{cm}$; $\quad a = \frac{h}{q}\sqrt{q^2 + h^2} = 9{,}7\,\text{cm}$;
$b = \sqrt{q^2 + h^2} = 5{,}8\,\text{cm}$; $\quad A = \frac{h}{2q}(q^2 + h^2) = 28{,}3\,\text{cm}^2$

285. $r_1 = \frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = 2\,\text{cm}$; $\quad r_2 = \frac{ab}{-a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = 4\,\text{cm}$

286. a) $x = \dfrac{ab}{a+b}$ b) $x = \dfrac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}$ 287. $r_2 = \dfrac{1}{3} r_1$

288. $r_2 = \dfrac{1}{2} r_1$; $h_1 = \dfrac{1}{2} r_1 \sqrt{5}$; $h_2 = \dfrac{1}{2} r_1 \sqrt{3}$

289. $r_2 = r_1(\sqrt{2}-1)$; $r_3 = r_1(3-2\sqrt{2})$; $r_4 = \dfrac{1}{4} r_1(\sqrt{2}-1)$

290. $r_2 = r_1(2\sqrt{3}-3)$; $r_3 = \dfrac{1}{11} r_1(2\sqrt{3}-1)$

291. $h = \sqrt{a^2-(g_2-g_1)^2} = 4{,}58\text{ dm}$ 292. $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{4l^2-s^2} = 4{,}94\text{ m}$

293. $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2} = 7{,}2\text{ m}$; $d = \dfrac{h}{2a}\sqrt{a^2+4h^2} = 2{,}4\text{ m}$ $c = \dfrac{a^2+4h^2}{4a} = 4{,}3\text{ m}$

294. $R = \sqrt{F_1^2+F_2^2} = 6{,}56\text{ kp}$ 295. $k = \dfrac{1}{3} w\sqrt{3} = 9{,}81\text{ mm}$

296. $h = 4{,}58\text{ mm}$ 297. $l = \sqrt{ab} + \sqrt{b(b-a)} = 3{,}7\text{ m}$

298. $c = \sqrt{a^2-b^2} = 2{,}5\text{ m}$; $f = \dfrac{hc}{g+h} = 0{,}7\text{ m}$; $e = \sqrt{g^2+f^2} = 5{,}9\text{ m}$

$i = \sqrt{h^2+f^2} = 2{,}5\text{ m}$; $d = i \cdot \dfrac{g}{h} = 6{,}1\text{ m}$

299. $r^2 = \sqrt{\overline{MC}^2 - r_1^2} = 33{,}9\text{ mm}$; $e_2 = \overline{MC} \cdot \dfrac{r_2}{r_1} = 37{,}9\text{ mm}$; $e_1 = \dfrac{\overline{MC}}{e_2} = 152{,}3\text{ mm}$;

300. $Q = A \cdot v \cdot t = 131{,}07\text{ m}^3/\text{h}$ 301. $a = 42{,}7\text{ mm}$

302. $F_1 = 9{,}5\text{ kp}$ 303. $h = 37{,}35\text{ mm}$

304. $q = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$; $p = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}$

305. $b = \sqrt{a^2-c^2+2cq}$ 306. $m = 0{,}900\text{ kg}$

307. Die Beweisführung für 23.2. läßt sich unter Verwendung der gleichen Bezeichnungen übertragen. Im Fall a) ergeben sich $\alpha_1 = \varepsilon_1 = \gamma_1 = 0°$. Im Fall b) bildet man zuletzt die Differenz beider Gleichungen.

308. Die Konstruktion entspricht zunächst der aus Beispiel 3 in 23.3., wobei S der Schnittpunkt der Verlängerung von $\overline{AB}$ mit g ist. $\overline{ST}$ von S aus auf g übertragen gibt den Berührungspunkt C des Kreises mit g. Der Umkreis des Dreiecks ABC ist der gesuchte Kreis.

309. Zur Kontrolle werden die Koordinaten von D angegeben:
a) $D(6{,}5;\ 7{,}3)$
b) Die drei Punkte liegen auf dem „gefährlichen Kreis". Für seinen Mittelpunkt ergibt sich $M(6;\ 5)$.

310. $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

311. Die Konstruktion ergibt $a \approx 9{,}3\text{ cm}$; $b \approx 5{,}7\text{ cm}$.

312. Die Nachprüfung ergibt, daß die Seiten nicht aus einer stetigen Teilung hervorgegangen sind.

313. $h = 24{,}1\text{ cm}$; $b = 38{,}9\text{ cm}$.

314. Konstruktion entsprechend der des Goldenen Schnittes in 23.3. Zur Kontrolle seien folgende Maße gegeben:

a) Diagonale $d \approx 9{,}7$ cm b) Seite $s \approx 3{,}7$ cm

315. $A = \dfrac{a \cdot \sqrt{c^2 - a^2}}{2} = 7{,}79\ \text{cm}^2$ 316. $b = a \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{3}$

317. $c = \dfrac{2A}{h} = 8\ \text{cm}$ $b = \dfrac{2Ah}{\sqrt{2A^2 - 2A \cdot \sqrt{A^2 - h^4}}}$ $a = \dfrac{1}{h} \cdot \sqrt{2A^2 - 2A \cdot \sqrt{A^2 - h^4}}$

318. $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 6\ \text{cm}^2$

319. $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4A^2}} = 7{,}5\ \text{cm}$; $c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4A^2}} = 3{,}4\ \text{cm}$

320. $A = \dfrac{c^2}{2}$; $a = \dfrac{c}{2} \cdot \sqrt{5}$ 321. $A = h_c \cdot \sqrt{a^2 - h_c^2} = 31{,}2\ \text{cm}^2$

322. $h_c = \dfrac{2A}{c} = 5\ \text{cm}$; $a = \dfrac{1}{2c}\sqrt{16A^2 + c^4} = 5{,}39\ \text{cm}$

323. $h_c = \dfrac{2A}{\sqrt{\dfrac{4n \cdot A}{\sqrt{4m^2 - n^2}}}} = 4{,}84\ \text{cm}$; $c = \sqrt{\dfrac{4n \cdot A}{\sqrt{4m^2 - n^2}}} = 2{,}48\ \text{cm}$;

$a = m\sqrt{\dfrac{4A}{n\sqrt{4m^2 - n^2}}} = 4{,}96\ \text{cm}$

324. $r_{i_1} = \dfrac{2A}{2a + \sqrt{2a^2 - 2\sqrt{a^4 - 4A^2}}} = 1{,}2\ \text{cm}$; $r_{i_2} = \dfrac{2A}{2a + \sqrt{2a^2 + 2\sqrt{a^4 - 4A^2}}} = 0{,}8\ \text{cm}$

325. $c = \dfrac{U^2 - 4h^2}{2U} = 6\ \text{cm}$; $a = \dfrac{U^2 + 4h^2}{4U} = 5\ \text{cm}$; $A = \dfrac{h}{4U}(U^2 - 4h^2) = 12\ \text{cm}^2$

326. $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{4h_c^2 + c^2} = 5{,}4\ \text{cm}$; $f = \dfrac{c\,h_c}{\sqrt{4h_c^2 + c^2}} = 1{,}9\ \text{cm}$

327. $\dfrac{A_1}{A_2} \approx \dfrac{4}{5}$ 328. $h_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$ 329. $\dfrac{A_1}{A_2} = 1$

330. $s_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2c^2} = 5{,}25\ \text{cm}$ 331. $c = 6{,}9\ \text{m}$; $b = 8{,}7\ \text{m}$

332. $A = 2493{,}4\ \text{mm}^2$ 333. $r_1 = \dfrac{a}{6}\sqrt{3} = 0{,}87\ \text{cm}$; $r_u = \dfrac{a}{3}\sqrt{3} = 1{,}73\ \text{cm}$

334. $r_u = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$ 335. $\dfrac{A_a}{A_b} = \dfrac{m^2}{n^2} = \dfrac{4}{9}$ 336. $A = \dfrac{U^2}{36}\sqrt{3}$; $h = \dfrac{U}{6}\sqrt{3}$

337. $A = \dfrac{U^2}{36}\sqrt{3} = 33{,}5\ \text{cm}^2$ 338. $e = \dfrac{2}{3}w\sqrt{3} = 24{,}25\ \text{mm}$

339. $d_{02} = 2a - d_{01} = 566\ \text{mm}$ 340. $d = d_1 + 2 \cdot \dfrac{3}{4}t = d_1 + 2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{h}{2}\sqrt{3} = 48\ \text{mm}$

341. $a = \sqrt{3(l^2 - h^2)} = 32{,}5$ m 342. $a = 68{,}1$ mm 343. $a = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 12{,}3$ mm

344. b) $b = 571$ mm d) $\overline{DB} = 529$ mm e) $\overline{AC} = 760$ mm

345. $A = \frac{sr}{2} = 17{,}5$ cm²; $a = r = 5$ cm; $b = \sqrt{r(2r + \sqrt{4r^2 - s^2})} = 9{,}3$ cm

346. $b = \sqrt{d^2 - a^2} = 7{,}4$ cm; $A = a\sqrt{d^2 - a^2} = 22{,}25$ cm²

347. $b = \frac{A}{a} = 4$ cm; $d = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + A^2} = 4{,}47$ cm

348. $b = a\sqrt{\frac{m}{n}} = 3{,}26$ cm; $c = a\sqrt{\frac{n}{m}} = 4{,}88$ cm; $d = a\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{mn}} = 5{,}89$ cm

349. $b = \frac{a}{m}\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 - m^4}} = 8{,}26$ cm; $c = \frac{a}{m}\sqrt{n^2 - \sqrt{n^4 - m^4}} = 1{,}94$ cm

350. $h = \frac{A}{a} = 3$ cm; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - A^2}} = 11{,}8$ cm

351. $a = \sqrt{bc} = 3{,}87$ cm 352. $A = \frac{1}{2}(2a - b)^2 = 0{,}5$ cm²; $d = 2a - b = 1$ cm

353. $b = \frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{\frac{m - 2n}{2m}} = 8{,}9$ cm; $c = \frac{a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{\frac{m - 2n}{2m}} = 2{,}4$ cm

354. $a = \frac{1}{2}\sqrt{e^2 + f^2} = 3{,}6$ cm; $A = \frac{ef}{2} = 12$ cm²

355. $h = \frac{e}{2a}\sqrt{4a^2 - e^2} = 2{,}95$ cm 356. $h = \frac{A}{a} = 2{,}67$ cm

357. $a = 21{,}5$ m; $b = 37{,}2$ m

358. $h = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 156$ mm; $\overline{AC} = 850$ mm; $\overline{BD} = 547$ mm

359. $A = 142$ cm² 360. $A = 245{,}44$ cm²

361. $T = 32{,}01$ MDN 362. $d = \sqrt{b^2 + h^2} = 13$ cm

363. $r_1 = \frac{ef}{2\sqrt{e^2 + f^2}} = 22{,}43$ mm 364. $A = 84{,}30$ cm²

365. a) $\overline{AD} = 455{,}3$ mm b) $\overline{AE} = 431{,}2$ mm c) $\overline{CE} = 143$ mm
d) $\overline{AG} = 747{,}5$ mm e) $\overline{CH} = 470{,}5$ mm

366. $a = 11{,}5$ cm; $b = 17{,}5$ cm

367. $G = 79{,}4$ m³; $a = 96{,}9$ m; $b = 61{,}9$ m

368. a) $a = 35{,}03$ mm b) $a = 32{,}82$ mm c) $a = 31{,}52$ mm d) $a = 29{,}96$ mm

369. $b = \frac{A}{a} = 11$ cm; $d = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + A^2} = 45{,}3$ cm; $u = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2{,}7$ cm;
$v = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 42{,}7$ cm; $l = \sqrt{uv} = 10{,}6$ cm

370. $l_1 = 3l - l = 320\,\text{mm}$ 371. a) $R \approx 18\,\text{kp}$ b) $R \approx 17\,\text{kp}$

372. a) $F_2 \approx 8\,\text{kp}$ b) $F_2 \approx 6{,}15\,\text{kp}$ 373. $\alpha = 35°$

374. $A_1 = 22{,}2\,\text{cm}^2$; $A_2 = \dfrac{4a^2(c^2+b^2) - c^4 - 4abc\sqrt{4a^2-c^2}}{4c\sqrt{4a^2-c^2}} = 14{,}9\,\text{cm}^2$

375. $A = 5133\,\text{cm}^2$; $d = 2{,}5\,\text{cm}$

376. Wegen $A_{AEKH} = A_{KFCG}$ gilt $c \cdot d = (a-d)(b-c)$.

377. $a = \dfrac{b+h}{2} - \dfrac{1}{6}\sqrt{9(b+h)^2 - 12bh} = 1{,}36\,\text{cm}$

378. $A = \dfrac{a^2}{2} = 18\,\text{cm}^2$; $b = \dfrac{a}{4}\sqrt{10} = 4{,}7\,\text{cm}$ 379. $A = h\sqrt{d^2-h^2}$

380. $h_1 = h - \dfrac{h}{2}\sqrt{2} = 2{,}34\,\text{cm}$ 381. $h_1 = h - h\sqrt{\dfrac{m}{m+n}}$

382. $A = \dfrac{5}{12}r^2\sqrt{3} = 26\,\text{cm}^2$ 383. $h = b - b\sqrt{\dfrac{n}{m+n}} = 2{,}94\,\text{cm}$

384. $h = \dfrac{2A}{U-2a}$; $g_1 = \dfrac{U-2a}{2} + \sqrt{a^2 - \dfrac{A^2}{(U-2a)^2}}$; $g_2 = \dfrac{U-2a}{2} - \sqrt{a^2 - \dfrac{A^2}{(U-2a)^2}}$

385. $g_1 = \dfrac{1}{2m}(2m^2 + \sqrt{m^2a^2 - A^2}) = 7{,}12\,\text{cm}$; $h = \dfrac{A}{m} = 2\,\text{cm}$;

$g_2 = \dfrac{1}{2m}(2m^2 - \sqrt{m^2a^2 - A^2}) = 4{,}88\,\text{cm}$

386. $d = \dfrac{1}{2(g_1+g_2)}\sqrt{16A^2 + (g_1+g_2)^4} = 4\,\text{cm}$; $h = \dfrac{2A}{g_1+g_2} = 2{,}7\,\text{cm}$;

$a = \dfrac{1}{2(g_1+g_2)}\sqrt{16A^2 + (g_1^2-g_2^2)^2} = 2{,}8\,\text{cm}$

387. $a = 2\sqrt{\dfrac{mh_T}{3}\sqrt{3}} = 7{,}4\,\text{cm}$; $\dfrac{h_T}{h_D} \approx \dfrac{5}{8}$

388. $g_1 = 2m - g_2 = 5\,\text{cm}$; $b = \sqrt{h^2 + 4(m-g_2)^2} = 4{,}47\,\text{cm}$

389. $A = 18{,}74\,\text{cm}^2$ 390. $A = 329\,\text{cm}^2$

391. $h_1 = h - \dfrac{h}{3}\sqrt{6} = 2{,}2\,\text{cm}$; $h_2 = h - \dfrac{h}{3}\sqrt{3} = 5{,}1\,\text{cm}$

392. $A = 15{,}16\,\text{cm}^2$ 393. $U = 219{,}7\,\text{mm}$; $A = 21{,}38\,\text{cm}^2$

394. $A = 35{,}88\,\text{cm}^2$ 395. $a = 335\,\text{mm}$

396. a) $A = 93{,}6\,\text{m}^2$ b) $a = 4{,}09\,\text{m}$ 397. $A = 28371\,\text{m}^2$

398. $a = 255{,}4\,\text{mm}$; $A = 798{,}15\,\text{cm}^2$

399. $a = 24{,}2\,\text{mm}$; $b = 33{,}3\,\text{mm}$ 400. $l = \sqrt{b^2 - 4ab + 5a^2} = 6{,}4\,\text{cm}$

401. $A = 436{,}37\,\text{cm}^2$ 402. $A = 6{,}44\,\text{cm}^2$

403. $a = 6{,}7\,\text{mm}$; $b = 16{,}7\,\text{mm}$; $A = 0{,}93\,\text{cm}^2$ 404. $a = 165{,}5\,\text{mm}$

405. $U = 7a = 21\text{ cm}$; $A = \frac{5}{4}a^2\sqrt{3} = 19{,}49\text{ cm}^2$

406. a) $\alpha = 150°$; $\gamma = 30°$ b) $\alpha = 154°17'08''$; $\gamma = 25°42'52''$
c) $\alpha = 156°$, $\gamma = 24°$ d) $\alpha = 160°$; $\gamma = 20°$

407. $\alpha = 36°$; $\beta = 108°$; $b = \frac{a}{10}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$;
$c = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$; $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$

408. $s = 9{,}2\text{ cm}$; $A = 407{,}23\text{ cm}^2$; $r_1 = 11{,}1\text{ cm}$

409. $s_6 = 2{,}31\text{ cm}$ 410. $b = \frac{a}{3}\sqrt{2\sqrt{3}} = 6{,}2\text{ cm}$

411. a) $A_5 = \frac{U_5^2}{100}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$ b) $A_6 = \frac{U_6^2}{24}\sqrt{3}$
c) $A_8 = \frac{U_8^2}{32}(\sqrt{2} + 1)$ d) $A_{10} = \frac{U_{10}^2}{40}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

412. $b = a(3 - \sqrt{3}) = 10{,}14\text{ cm}$ 413. $b = \frac{a}{4}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 1{,}34\text{ cm}$

414. $b = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 11{,}1\text{ cm}$; $s = a\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 14{,}5\text{ cm}$
$h = \frac{a}{2}\sqrt{10 + 7\sqrt{2}} = 13{,}4\text{ cm}$; $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{2(17 + 12\sqrt{2})} = 74{,}21\text{ cm}^2$

415. $b = \frac{3}{4}a = 1{,}5\text{ cm}$; $A_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = 10{,}39\text{ cm}^2$;
$A_8 = \frac{9}{8}a^2(\sqrt{2} + 1) = 10{,}86\text{ cm}^2$

416. $\frac{A_5}{A_{10}} = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{U_5}{U_{10}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{s_5}{s_{10}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$

417. $A = a^2\left(4\sqrt{2(2 - \sqrt{3})} + 6 - 5\sqrt{3}\right) = 6{,}7\text{ cm}^2$

418. $s_5 = \frac{U_5}{5} = 3\text{ cm}$; $r = \frac{U_5}{50}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})} = 2{,}6\text{ cm}$;
$A_5 = \frac{U_5^2}{100}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} = 15{,}48\text{ cm}^2$

419. $s = 1{,}78\text{ m}$ 420. $d = 76\text{ cm}$

421. $r_u = 3{,}24\text{ cm}$ 422. $A = r^2\sqrt{3} = 62{,}35\text{ cm}^2$

423. $A = 10{,}45\text{ cm}^2$; $s_1 = 2{,}47\text{ cm}$ 424. $a = 0{,}7\text{ cm}$

425. $s_1 = 2{,}42\text{ m}$; $s_2 = 1{,}84\text{ m}$ 426. $A = 155{,}7\text{ cm}^2$

427. $A_3 = 10{,}83\text{ cm}^2$; $A_4 = 14{,}1\text{ cm}^2$; $A_5 = 15{,}5\text{ cm}^2$; $A_6 = 16{,}2\text{ cm}^2$

428. $A = 0{,}51\text{ m}^2$ 429. $A = 212{,}1\text{ cm}^2$

430. $A = 3277{,}4\text{ cm}^2$ 431. $s = 5{,}7\text{ mm}$

432. $s = 14{,}62\text{ cm}$ 433. $s = 7{,}2\text{ cm}$

434. $U = 6r = 168$ cm

435. $d = 7{,}85$ cm

436. $s = r\sqrt{3} = 13{,}86$ cm; $U = 2r(1 + \sqrt{3}) = 43{,}71$ cm; $A = r^2\sqrt{3} \doteq 110{,}85$ cm²

437. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{6}A\sqrt{3}} = 4{,}26$ cm; $a = \frac{1}{2}\sqrt{2A\sqrt{3}} = 5{,}58$ cm; $b = \sqrt{\frac{2}{3}A\sqrt{3}} = 6{,}44$ cm

438. $d = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 6{,}18$ cm

439. $U = 2\sqrt{A\pi} = 10$ cm

440. $A = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$

441. $A = \frac{r^2\pi}{4}$

442. $r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} = 2{,}5$ cm

443. $s = 2\sqrt{h\left(\frac{U}{\pi} - h\right)}$

444. $A_1 : A_2 : A_3 = (7 - 3\sqrt{5}) : (3 - \sqrt{5}) : 2$

445. $r_1 = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_2^2} = 5{,}37$ cm

446. a) $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5A_1 + 5A_2 + 2\sqrt{A_1A_2}}{\pi}}$; $r_4 = \frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2\sqrt{\pi}}$

b) $r_3 = \sqrt{\frac{A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2}{\pi}}$; $r_4 = \frac{\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{\pi}}$

c) $r_3 = \frac{1}{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}\sqrt{\frac{(A_1 + A_2)^2 + 4A_1A_2 + 2(A_1 + A_2)\sqrt{A_1A_2}}{\pi}}$; $r_4 = \frac{2\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})}$

447. $r_1 = \frac{a^2\pi + A}{2a\pi} = 10{,}32$ cm; $r_2 = \frac{a^2\pi - A}{2a\pi} = 9{,}68$ cm

448. $A = \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot h$, worin $h = 2\pi(r_1 - r_2)$

449. $r_1 = r_2\sqrt{2}$

450. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{3}$

451. $d = 2{,}8$ mm

452. $d = 0{,}80$ m

453. $n = 15{,}9$ Umdrehungen

454. $a = 3{,}6$ cm

455. $d = 1{,}27$ m

456. $A = 8{,}96$ cm²

457. $n = 285{,}7\ \frac{1}{\text{min}}$

458. $d_1 = 0{,}64$ m; $d_2 = 0{,}46$ m; $d_3 = 0{,}38$ m

459. $a = 74{,}7$ mm

460. $d = 3{,}6$ cm

461. $\sigma_b = 389{,}8$ kp/cm²

462. $a = 2\pi b$

463. $A = 61{,}26$ cm²

464. $d = 0{,}2$ mm

465. $d = 21{,}4$ mm

466. $d = 44{,}9$ cm

467. $n = 1321$ Umdrehungen

468. $d = 74{,}9$ cm

469. $A = 10{,}5$ cm²; $U_1 = 17{,}86$ cm

470. $A = 8{,}75$ cm²

471. $A = 12{,}03$ m²

472. $A = 33{,}57$ cm²

473. $U = 14{,}44$ cm

474. $a = 20{,}1$ mm

475. $A = 39{,}14$ cm²

476. $a = 0{,}37$ m; $A = 3{,}00$ m²

477. $U = 45{,}77$ cm; $d = 14{,}57$ cm 478. $d = 59{,}4$ mm

479. $d_1 = 43{,}8$ mm; $d_2 = 47{,}7$ mm; $a = 1{,}9$ mm

480. $A_1 = 27{,}63$ mm²; $A_2 = 23{,}61$ mm²; $A_3 = 19{,}59$ mm²

481. $A = 263{,}4$ cm² 482. $v = 214{,}7$ m/min 483. $A = 3{,}78$ cm²

484. $\alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi r} = 85°58'$; $A = \frac{br}{2} = 12$ cm² 485. $A = \frac{r^2}{4}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 117{,}82$ cm²

486. $A = \frac{r^2}{2} = 8$ cm²; $r_1 = \frac{r}{\sqrt{2\pi}} = 1{,}6$ cm 487. $A = \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 44{,}2$ cm²

488. $b_1 = b_2 - s\frac{s^2 - 4h^2}{s^2 + 4h^2} = 2{,}6$ cm; $r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} = 2{,}5$ cm

489. $A = \frac{r^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3}) = 19{,}55$ cm² 490. $A_1 = A_2$

491. $A = \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = 5{,}13$ cm² 492. $A = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi) = 2{,}58$ cm²

493. $l = 144{,}11$ m 494. $A = 15{,}62$ cm²

495. $= 25{,}59$ cm² 496. $U = 194{,}61$ mm

497. $A = 1414{,}9$ cm² 498. $s = 36{,}76$ mm; $A = 11{,}21$ cm²

499. $\alpha = 102°$; $b_1 = 92{,}56$ mm; $b_2 = 113{,}9$ mm

500. $A = 40{,}2$ mm² 501. $A = 12{,}18$ cm²

502. $A = 1688$ cm² 503. $U = 166{,}4$ mm; $A = 17{,}25$ cm²

504. $A = 0{,}883$ cm² 505. $A = 8{,}37$ cm²

506. $b = 219$ mm; $a = 28{,}1$ mm 507. $\alpha = 247°16'$

508. $s = 326{,}6$ mm; $h = 226{,}7$ mm 509. $h = 2{,}7$ mm

510. $m = 8$ mm; $t = 25{,}12$ mm 511. $\alpha = 87°08'$ 512. $A = 14{,}5$ cm²

513. a) 2°04′36″ b) 15°31′57″ c) 88°48′38″ d) 168°38′11″
e) 0,67036 f) 0,73326 g) 2,87261 h) 2,01647

514.

	Mittelpunktswinkel	Bogenlänge	Pfeilhöhe	Sehnenlänge	Fläche	Radius
a)	125°30′	17,52	4,34		44,04	
b)	68°	14,24		13,42	18,69	
c)	113°		0,67	2,50	1,18	
d)	75°	45,82	7,23	42,61		
e)		1,86	0,17	1,81	0,21	
f)		6,98	0,30		1,41	20,00
g)		3,67		3,66	0,28	14,50
h)			1,98	12,62	17,06	11,00
i)		23,72	2,30	23,12		30,20

515. a) 0,24756 b) 0,94804 c) 0,65231 d) 6,75905
e) 0,99297 f) 0,46227 g) 1,22031 h) 0,21778

516. a) 9,39394 b) 9,97680 c) 9,81470 d) 0,82922
e) 9,99694 f) 9,66487 g) 0,08660 h) 9,33736

517. a) 6°28′ b) 25°44′ c) 32°59′ d) 20°58′
e) 61°58′ f) 64°45′ g) 57°15′ h) 48°48′

518. a) 6°12′43″ b) 53°35′04″ c) 38°53′50″ d) 12°29′52″
e) 43°10′56″ f) 85°22′00″ g) 65°20′00″ h) 84°46′33″

519. a) $\cos\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{21}$; $\tan\alpha = \frac{2}{21}\sqrt{21}$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{21}$

b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\tan\alpha = \frac{4}{3}$; $\cot\alpha = \frac{3}{4}$

c) $\sin\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $\cos\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$

d) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\tan\alpha = \frac{12}{5}$

520. a) $c = 5{,}49$ cm $\alpha = 33°06'40''$ $\beta = 56°53'20''$
b) $b = 60$ cm $\alpha = 79°36'46''$ $\beta = 10°23'14''$
c) $b = 6{,}82$ cm $c = 12{,}11$ cm $\alpha = 55°42'00''$
d) $a = 24{,}00$ cm $b = 7{,}68$ cm $\beta = 17°44'24''$

521. $h = 6{,}23$ cm; $A = 56{,}70$ cm^2; $U = 40{,}26$ cm

522. $A = a \cdot b \cdot \sin\varphi = 395{,}5$ cm^2

523. $d_1 = 2a \sin\frac{\varphi}{2} = 52{,}41$ cm; $d_2 = 2a \cos\frac{\varphi}{2} = 117{,}43$ cm

524. $\tan\alpha = h : \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $\alpha = 63°12'$; $\tan\beta = h : a$, $\beta = 59°45'$;

$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2} : m$, $\gamma = 29°11'$, $m = \sqrt{h^2 + a^2}$

525. Neigungswinkel der Seitenfläche sei α, Neigungswinkel der Seitenkante sei β.

$\cos\alpha = \frac{a}{6}\sqrt{3} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}$, $\alpha = 70°32'$

$\cos\beta = \frac{a}{3}\sqrt{3} : a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\beta = 54°44'$

526. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d}$, $\varphi = 88°04'$

527. Tangentenlänge $t = \sqrt{e^2 - \frac{1}{4}(d_1 + d_2)^2} = 1066{,}5$ mm

Umschlingungswinkel $\varphi = 360° - 2\alpha$; $\cos\alpha = \frac{r_1 + r_2}{e}$, $\alpha = 62{,}72°$

Umschlingungsbogen $b_{1,2} = d_{1,2}\,\pi\,\frac{\varphi}{360°}$; $b_1 = 870$ mm, $b_2 = 1381$ mm

Gesamtlänge $l = 2t + b_1 + b_2 = 4384$ mm

528. Mantellinie $m = \sqrt{r^2 + h^2}$; Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{d}{m} 180° = 58°08'$

529. Formel siehe voriges Beispiel!
$\alpha = 180°$ ergibt $d = m$, $2r = \sqrt{r^2 + h^2}$, $r : h = 1 : \sqrt{3}$

530. $x = 42{,}85$ m

531. $h : e = \tan\alpha$, $(h - x) : e = \tan\beta$,
$e = h \cot\alpha = (h - x)\cot\beta$, Durchmesser $d = 2x = 2h\left(1 - \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}\right) = 4{,}15$ m

532. a) 0,66262 b) $-0{,}97314$ c) $-13{,}72674$ d) $-0{,}65813$

533. a) $9{,}91573 - 10$ b) $9{,}15770 - 10$ c) 0,02857 d) 1,14283

534. a) zwei Lösungen: $\beta_1 = 29°$, $\beta_2 = 151°$
b) $\beta = 95°$ c) $\beta = 115°20'$ d) $\beta = 147°50'$

535. Alle Aufgaben liefern zwei Lösungen:
a) $\beta_1 = 40°56'$ $\beta_2 = 139°04'$ b) $\beta_1 = 5°30'$ $\beta_2 = 174°30'$
c) $\beta_1 = 84°01'$ $\beta_2 = 95°59'$ d) $\beta_1 = 65°17'$ $\beta_2 = 114°43'$

536.

$\frac{a}{\text{cm}}$	$\frac{b}{\text{cm}}$	$\frac{c}{\text{cm}}$	$\frac{A}{\text{cm}^2}$	α	β	γ
		67,6	795,3	31°55′		109°50′
106,0	68,6		2032,0		38°	
	10,6			28°10′	30°	121°50′
		23,5	167,1	78°42′	51°06′	
			655,1	30°04′	51°10′	98°46′
7,33	5,95				50°31′	57°29

537. Den Mittelpunkt-Abständen
$a = 11$ cm, $b = 12$ cm und $c = 13$ cm liegen die Winkel
$\alpha = 52°$, $\beta = 59°20'$ und $\gamma = 68°40'$ gegenüber.

538. $F_1 = 358{,}6$ kp und $F_2 = 292{,}8$ kp

539. Resultierende Kraft: 88,8 kp
Winkel gegen F_1: 52°

540. $\overline{LP} = 24{,}19$ m

541. $\alpha = 22°20'$, $\beta = 49°30'$
$F_1 = 19{,}5$ kp $F_2 = 13{,}7$ kp

542. Als Zwischenkontrolle: $\varphi = 65°24'$,

$x = \overline{BB'} = 534{,}43$ m, Höhe des Berges: 1046,63 m

543. $x = 262{,}96$ m $\quad y = 276{,}22$ m

$h_{(\text{über } x)} = 118{,}73$ m $\quad h_{(\text{über } y)} = 118{,}86$ m $\quad h_{(\text{im Mittel})} = 118{,}80$ m

544. $V = \sqrt{\left(\frac{O}{6}\right)^3}$

545. $O = 2d^2$; $\quad V = \frac{d^3}{9}\sqrt{3}$

546. $V = a^3\frac{yz}{x^2} = 15a^3 = 3240\ \text{cm}^3$;

$O = \frac{2a^2}{x}(y + yz + z) = 46a^2 = 1656\ \text{cm}^2$

$b = a\frac{y}{x} = 3a = 18$ cm;

$c = a\frac{z}{x} = 5a = 30$ cm

547. $c = \frac{3k^2 - ab}{a + b} = 9{,}3$ cm

548. $V = ab\sqrt{ab} = 216\ \text{cm}^3$

549. $b = \sqrt{f^2 - a^2} = 2{,}65$ cm;

$c = f\sqrt{m^2 - l^2} = 11{,}31$ cm

550. $a = \frac{U}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{8d^2 - U^2} = 6$ cm;

$b = \frac{1}{2}\sqrt{U\sqrt{8d^2 - U^2}} = 5{,}3$ cm

551. $c = \frac{k^2}{ab} = 36$ cm

552. $a = 4{,}37$ cm

553. $m = 32{,}55$ kg

554. $h_1 = 2{,}8$ m; $\quad V = 50{,}2\ \text{m}^3$

555. $V = 39{,}09\ \text{m}^3$

556. $a = 1{,}02$ cm; $\quad V = 441\ \text{cm}^3$

557. $h = 5{,}85$ m

558. $m = 3{,}67$ kg

559. $V = 35{,}964\ \text{cm}^3$; $\quad O = 108{,}60\ \text{cm}^2$

560. $h = 4{,}85$ cm

561. $m = 8{,}019$ kg

562. $V = 2{,}799\ \text{m}^3$

563. $h = 20$ cm

564. $l = 214{,}6$ m

565. $V_1 = 5091{,}84\ \text{cm}^3$; $\quad V_2 = 7637{,}76\ \text{cm}^3$

566. $m = 0{,}762$ kg

567. $h = 7{,}2$ cm

568. $a_{\text{St}} = 2{,}33$ cm; $\quad a_{\text{Cu}} = 2{,}24$ cm; $\quad a_{\text{Al}} = 3{,}33$ cm

569. $b = 9{,}87$ cm

570. $a = 25{,}9$ mm

571. $h = 235{,}6$ cm

572. $a = \sqrt{\frac{V}{h}} = 2$ cm

573. $h = \frac{2 \cdot O - a^2\sqrt{3}}{6a} = 2{,}76$ cm

574. $h_1 = \frac{U}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{8d^2 - U^2} = 7{,}65$ cm;

$h_2 = \frac{U}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{8d^2 - U^2} = 2{,}35$ cm

$r_1 = \frac{U}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{8d^2 - U^2} = 1{,}18$ cm;

$r_2 = \frac{U}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{8d^2 - U^2} = 3{,}83$ cm

575. $m = 6{,}45$ g

576. $V = 3117{,}6$ cm³

577. $h = 5{,}19$ cm

578. $V = 273{,}065$ cm³; $O = 483{,}46$ cm²

579. $m = 6{,}48$ kg

580. $V_1 = 4365{,}3$ cm³; $V_2 = 8275{,}8$ cm³; $V_3 = 6428{,}6$ cm³

581. $l = 1388{,}8$ m

582. $V_K = 0{,}26$ m³; $V_S = 1{,}03$ m³

583. $l_1 = 101$ cm; $l_2 = 206{,}2$ cm

584. $m = 57$ g

585. $V = 141900$ m³

586. $V_1 = 6696$ cm³; $V_2 = 7245$ cm³

587. $m = 5{,}138$ kg

588. $V_1 = 6{,}614$ dm³; $V_2 = 8{,}371$ dm³

589. $V = 12{,}3$ cm³

590. $m = 9{,}585$ kg

591. $m = 17{,}740$ kg

592. $V = 142{,}2$ cm³

593. $h = 0{,}62$ m

594. $a = 4{,}7$ cm

595. a) $b = 0{,}69$ m b) $d = 1{,}21$ m c) $V = 0{,}776$ m³

596. a) $A = 115{,}2$ cm² b) $V = 1{,}55$ dm³

597. $V = \frac{3}{8} \cdot a^2 \cdot m$

598. $a_4 = \frac{h}{3}\sqrt{6} = 4{,}90$ cm; $a_6 = \frac{h}{3}\sqrt{3} = 3{,}46$ cm;

$V_4 = \frac{2}{9}h^3 = 48$ cm³; $V_6 = \frac{h^3}{6}\sqrt{3} = 62{,}35$ cm³;

$O_4 = \frac{2}{3}h^2(1+\sqrt{7}) = 87{,}50$ cm²; $O_6 = \frac{h^2}{2}\sqrt{3}(1+\sqrt{5}) = 100{,}89$ cm²

599. $x = h\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$

600. $A_2 = \frac{A_1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{A_1}{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

601. $V = \frac{g_1}{12}(g_1+g_2)\sqrt{g_1(2g_2-g_1)} = 7{,}46$ cm³

602. $V = a^2 h \frac{n^2}{m^3}(m-n) = 53{,}33$ cm³

603. a) $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$ cm; $e = \sqrt{b^2+h^2} = 6{,}4$ cm;

$d = \sqrt{a^2+h^2} = 5{,}83$ cm; $V = \frac{abh}{6} = 10$ cm³

b) $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$ cm; $e = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2+b^2} = 5{,}6$ cm

$d = e = 5{,}6$ cm; $f = e = 5{,}6$ cm; $V = \frac{abh}{6} = 10$ cm³

604. $\frac{V_P}{V_E} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^3$

605. $A = 15{,}14$ m²

606. $h = 184{,}7$ cm

607. $a = 6{,}84$ cm

608. $h = 11{,}9\text{ cm}$

609. $V = 15{,}307\text{ cm}^3$

610. $V = 1{,}887\text{ cm}^3$

611. $V = 364{,}18\text{ cm}^3$

612. $c = \sqrt{a^2 + ab + b^2} = 6{,}1\text{ cm}$

613. $h = \frac{1}{5}\sqrt{25k^2 - 2a^2} = 5{,}89\text{ cm}$; $\quad b = \frac{3}{5}a = 2{,}4\text{ cm}$

$V = \frac{49}{375}a^2\sqrt{25k^2 - 2a^2} = 61{,}57\text{ cm}^3$

614. $V = 14r^3 = 14000\text{ cm}^3$

615. $A_m = \frac{1}{4}(A_1 + 2\sqrt{A_1 A_2} + A_2)$

616. $m = 0{,}891\text{ kg}$

617. $V = 115{,}04\text{ m}^3$; $\quad A = 129{,}44\text{ m}^2$

618. $m = 0{,}226\text{ kg}$

619. $h = 7{,}752\text{ m}$

620. $V = 0{,}99\text{ cm}^3$

621. $h = 180\text{ cm}$

622. $m = 1{,}44\text{ kg}$

623. $b = 1{,}77\text{ cm}$

624. $V = \frac{1}{6}\sqrt{4c^2 - (g_1 - g_2)^2}\,(g_1^2 + g_1 g_2 + g_2^2) = 43{,}0\text{ cm}^3$;

$O = \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2) + (g_1 + g_2)\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{16c^2 - 2(g_1 - g_2)^2} = 79{,}2\text{ cm}^2$

625. $A = 24{,}2\text{ cm}^2$; $\quad V_1 = 20{,}3\text{ cm}^3$; $\quad V_2 = 4{,}2\text{ cm}^3$

626. $V = \frac{h}{3}a^2\sqrt{3} = 207{,}84\text{ cm}^3$

627. $V = \frac{5}{6}abh = 1000\text{ cm}^3$. Für $a = b$ folgt $V = \frac{5}{6}a^2 h$.

628. $V = \frac{h}{12}\sqrt{3}(a + b)^2 = 73{,}9\text{ cm}^3$. Für $a = b$ folgt als Ergebnis: 614.

629. $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab\sqrt{2} + b^2) = 73{,}6\text{ cm}^3$

630. $V = \frac{h}{6}(2cd + 2ab + ad + bc)$

631. $V = \frac{h}{6}(2ab + 2cd + bc + ad) = 6{,}1\text{ m}^3$

632. $V = \frac{ah}{2}(2b + a\sqrt{3})$

633. $V = 103{,}3\text{ m}^3$

634. $V = \frac{ch}{6}(a + b + d)$

635. $V = \frac{a^3}{4}\sqrt{3} = 27{,}7\text{ cm}^3$

636. $V = \frac{ah}{6}(2a + b)$

637. $V = \frac{h}{6}(2ab + 2c^2 + ac + bc)$

638. $V = \frac{h}{6}(a + 2b)\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}$

639. $V = \frac{bh}{3}(3a + b\sqrt{3} + b)$

640. $V = 447{,}1\ \text{cm}^3$

641. $d = 2\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} = 5{,}05\ \text{cm}$

642. $V = \dfrac{\pi}{4} a^3 = 50{,}25\ \text{cm}^3$; $O = \dfrac{3}{2}\pi a^2 = 75{,}38\ \text{cm}^2$

643. $V = \dfrac{M^2}{4\pi h} = 79{,}58\ \text{cm}^3$

644. $V = \pi r^3 \dfrac{n}{m} = 41{,}88\ \text{cm}^3$; $M = 2\pi r^2 \dfrac{n}{m} = 41{,}88\ \text{cm}^2$

645. $r_2 = \sqrt[3]{r_1^3 h_1 \dfrac{m}{n}} = 4{,}93\ \text{cm}$; $h_2 = \sqrt[3]{r_1^3 h_1 \left(\dfrac{n}{m}\right)^3} = 8{,}23\ \text{cm}$

646. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{1}$ 647. $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{1}$

648. $r_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{2\pi h} + \dfrac{2V}{M}\right) = 1{,}28\ \text{cm}$; $r_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{2\pi h} - \dfrac{2V}{M}\right) = 0{,}28\ \text{cm}$

649. $r = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = 2{,}24\ \text{cm}$

650. $V = \pi r_1^2 h \dfrac{m^2 - n^2}{m^2} = 131{,}92\ \text{cm}^3$; $M = 2\pi r_1 h \dfrac{m+n}{m} = 263{,}84\ \text{cm}^2$

651. $l = 84{,}9\ \text{m}$ 652. $m = 13{,}86\ \text{kg}$

653. $V = 24{,}31\ \text{dm}^3$; $A = 0{,}384\ \text{m}^3$ 654. $m = 0{,}375\ \text{kg}$

655. $V = 47{,}65\ \text{m}^3$ 656. $V = 8{,}92\ \text{cm}^3$

657. $d_1 = 7{,}96\ \text{cm}$; $d_2 = 7{,}16\ \text{cm}$; $V = 1006\ \text{cm}^3$

658. $h = 24{,}95\ \text{cm}$ 659. $l = 612\ \text{m}$

660. $a = 4{,}43\ \text{cm}$ 661. $a = 1{,}4\ \text{mm}$

662. $h = 6{,}83\ \text{cm}$; $d = 13{,}66\ \text{cm}$ 663. $l = 66{,}03\ \text{m}$

664. $h = 4{,}42\ \text{cm}$ 665. $V = 4{,}4\ \text{cm}^3$

666. $l = 19{,}91\ \text{m}$ 667. $V = 9{,}11\ \text{m}^3$

668. $l = 133{,}52\ \text{m}$ 669. $d = 2{,}971\ \text{m}$

670. $d = 66{,}5\ \text{mm}$ 671. $h = 4{,}75\ \text{cm}$

672. $m = 13{,}86\ \text{kg}$ 673. $m = 449{,}89\ \text{kg}$; $m_1 = 58{,}79\ \text{kg}$

674. a) $h_1 = 0{,}19\ \text{cm}$ b) $z = 333{,}3$

675. $h = 42{,}2\ \text{cm}$ 676. $m = 127{,}28\ \text{g}$

677. $V = b(2{,}528r_1^2 + 1{,}047r_2^2 + 0{,}576r_2 s - 0{,}216r_1 s - 0{,}78d^2)$

678. $m = 895{,}32\ \mathrm{g}$

679. $m = 4{,}18\ \mathrm{kg}$

680. $m = 360\ \mathrm{g}$

681. $m = 5{,}333\ \mathrm{kg}$

682. a) $V = 40{,}41\ \mathrm{m^3}$ b) $A = 160{,}52\ \mathrm{m^2}$

683. $V = \pi r^3 \sqrt{3}$

684. $V = \pi \frac{b^2}{h}(h^2 + m^2)$

685. $V = 2\pi b^3 \sqrt{2}$

686. $h_1 = \frac{2V}{\pi r^2} \frac{m}{m+n} = 4{,}77\ \mathrm{cm}$;

$h_2 = \frac{2V}{\pi r^2} \frac{n}{m+n} = 1{,}59\ \mathrm{cm}$

687. $h_2 = 2h_3 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - h_1 = 8\ \mathrm{cm}$

688. $m = 0{,}491\ \mathrm{kg}$

689. $V = 13{,}9\ \mathrm{dm^3}$

690. a) $m = 77{,}1\ \mathrm{g}$ b) $l = 1{,}7\ \mathrm{cm}$

691. $V = 2{,}77\ \mathrm{m^3}$; $h = 1{,}18\ \mathrm{m}$

692. $h = 14{,}75\ \mathrm{cm}$

693. $V = \frac{M^2}{6h}$

694. $h = \frac{M}{2r} = 2\ \mathrm{cm}$; $V = \frac{Mr}{3} = 33{,}33\ \mathrm{cm^3}$

695. $V = \frac{2}{3} c^3 \frac{n}{m+n} \sqrt{\frac{m}{m+n}} = 5{,}831\ \mathrm{cm^3}$;

$M = \frac{2c^3}{m+n} \sqrt{mn} = 8{,}9\ \mathrm{cm^3}$

696. $h = \frac{3}{2} \frac{a^3}{r^3} = 48\ \mathrm{cm}$

697. $V = 2{,}24\ \mathrm{m^3}$

698. $m = 0{,}765\ \mathrm{kg}$

699. $V = 53{,}17\ \mathrm{cm^3}$; $M = 55{,}84\ \mathrm{cm^2}$

700. $V = 0{,}136\ \mathrm{m^3}$; $A = 0{,}408\ \mathrm{m^2}$

701. $V = \frac{\pi h}{3}(a^2 - h^2) = 50{,}25\ \mathrm{cm^3}$;

$M = \pi a \sqrt{a^2 - h^2} = 62{,}82\ \mathrm{cm^2}$

702. $h_1 = \frac{h}{3} = 2\ \mathrm{cm}$

703. a) $h = 12h_1 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = 30\ \mathrm{cm}$; b) $h = 3h_1 \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} = 40\ \mathrm{cm}$

704. $O = M + \frac{M^2}{\pi s^2} = 25{,}1\ \mathrm{cm^2}$;

$V = \frac{M^2}{3\pi^2 s^3} \sqrt{\pi^2 s^4 - M^2} = 8{,}21\ \mathrm{cm^3}$

705. $r_2 = \frac{r_1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{r_1}{2} \sqrt[3]{4}$

706. $V = 12741\ \mathrm{m^3}$

707. $r = 31{,}25\ \mathrm{cm}$; $h = 20{,}7\ \mathrm{cm}$; $V = 21{,}16\ \mathrm{dm^3}$

708. $A = 1166{,}04\ \mathrm{cm^2}$; $r = 21{,}2\ \mathrm{cm}$

709. $a = 5{,}10\ \mathrm{cm}$; $b = 6{,}42\ \mathrm{cm}$; $c = 7{,}35\ \mathrm{cm}$

710. $V = 852{,}47\ \mathrm{cm^3}$

711. $m = 36{,}83\ \mathrm{kg}$

712. $m = 0{,}967\ \mathrm{kg}$

713. $O = 31{,}9\ \mathrm{m^2}$

714. $V = 23{,}86\ \mathrm{cm^3}$

715. $V = 120{,}43\ \mathrm{cm^3}$

716. $V = \frac{\pi}{24} \sqrt{3}\,(a^3 + b^3) = 72{,}44\ \mathrm{cm^3}$

717. $V = \frac{rh}{3}(\pi r + 3a)$; $O = (\pi r + 2a)(r + \sqrt{r^2 + h^2})$

718. $A_M = \frac{\pi}{4}(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2)$ 719. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m+n}{m}$

720. a) $x = \frac{h(r_1 - r_2)}{r_1}$ b) $r_2 = r_1\frac{h-x}{h}$ c) $x = h\frac{m-n}{m}$

d) $x = \frac{h}{2}(2 - \sqrt{2})$ e) $x = \frac{h}{4}$ f) $x = \frac{hr_2^2}{r_1^2 + r_1r_2 - r_2^2}$

721. $V = 60{,}17\ \text{cm}^3$ 722. $A = 960{,}27\ \text{cm}^2$

723. $h = 9{,}984\ \text{cm} \approx 10{,}0\ \text{cm}$ 724. $V = 69{,}83\ \text{cm}^3$

725. $V = 12{,}28\ \text{dm}^3$ 726. $V = 595{,}3\ \text{m}^3$

727. $m = 0{,}14\ \text{kg}$ 728. $m = 0{,}382\ \text{kg}$

729. $A = 246{,}7\ \text{cm}^2$ 730. $h = 3{,}8\ \text{cm}$

731. $l = 28{,}5\ \text{cm}$ 732. $V = 54{,}69\ \text{m}^3$

733. $m = 4{,}605\ \text{kg}$ 734. $V = 644{,}29\ \text{cm}^3$

735. $V = 66{,}38\ \text{cm}^3$ 736. $V = 45{,}83\ \text{l}$

737. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}62\ \text{m}$ 738. $r = \frac{1}{2}\frac{O}{\pi} = 0{,}28\ \text{m}$

739. $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{1}{27}$; $\frac{O_1}{O_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{1}{9}$

740. $V = \frac{\pi r_2^3}{6}\left(\frac{m+n}{n}\right)^3 = 113{,}1\ \text{cm}^3$; $O = \pi r_2^2\left(\frac{m+n}{n}\right)^2 = 113{,}1\ \text{cm}^2$

741. $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2\sqrt{2} : 3\sqrt{3}$ 742. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

743. $r_1 = \sqrt{\frac{3V - \pi s^3}{12\pi s}} + \frac{s}{2} = 2{,}26\ \text{cm}$; $r_2 = \sqrt{\frac{3V - \pi s^3}{12\pi s}} - \frac{s}{2} = 1{,}26\ \text{cm}$

744. a) $\frac{V_H}{V} = \frac{m^3 - n^3}{n^3}$ b) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1}$

745. $m = 3{,}74\ \text{g}$ 746. $m = 125{,}64\ \text{kg}$

747. $V = 68\ \text{cm}^3$ 748. $d = 7{,}01\ \text{cm}$

749. $\varrho = 0{,}4905\ \text{g/cm}^3$ 750. $d = 6{,}46\ \text{cm}$

751. $O = 4422{,}5\ \text{cm}^2$; $V = 16617{,}98\ \text{cm}^3$;

752. $m = 0{,}689\ \text{kg}$ 753. $d = 13{,}72\ \text{cm}$

754. $d = 13\ \text{cm}$ 755. $s \approx 0{,}002\ \text{mm}$

756. $d = 1{,}90$ m

757. $d = 1{,}43$ m

758. $s \approx 0{,}3$ mm

759. $d = 26{,}98$ cm

760. a) $V_1 = 8\pi r^3(\sqrt{2}-1)^3 = 265{,}53$ cm³ b) $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3(\sqrt{3}-1)^3 = 243{,}1$ cm³

761. a) $d_1 = 12{,}56$ cm; $d_2 = 11{,}44$ cm

b) $V_1 = 1{,}03$ dm³; $V_2 = 0{,}77$ dm³

762. $d = 16{,}04$ cm

763. a) $x = r\frac{n}{m+n}$ b) $x = \frac{r}{2}$

764. $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3\frac{m^2(3n+m)}{(m+n)^3}$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3\frac{n^2(3m+n)}{(m+n)^3}$;

$M_1 = 4\pi r^2\frac{m}{m+n}$; $M_2 = 4\pi r^2\frac{n}{m+n}$

765. $V = \frac{h}{6}(3M - 2\pi h^2) = 18{,}95$ cm³; $r = \frac{M}{2\pi h} = 6{,}36$ cm

766. $V = \frac{3M^2 - 4\pi^2 h^4}{12\pi h} = 27{,}4$ cm³

767. $r = \frac{3V}{M} = 6$ cm; $h = \frac{M^2}{6\pi V} = 0{,}27$ cm

768. $V = \frac{M^3}{6\pi^2 h^3} = 32{,}98$ cm³

769. $h = \frac{2r}{n} = 2{,}5$ cm

770. $h = \frac{2}{5}r = 6$ cm

771. $m = 24{,}55$ g

772. $A = 33{,}06$ cm²

773. $V = 267{,}59$ dm³

774. $m = 0{,}227$ kg

775. $A = 31{,}4$ cm²

776. $d = 3{,}58$ cm

777. $h_1 = h_2 = 11$ cm

778. $V_1 = 61{,}72$ dm³; $V_2 = 28{,}06$ dm³

779. $V = 17{,}95$ cm³

780. $r_1 = 5{,}17$ cm

781. $m = 0{,}268$ kg

782. $O = 19{,}86$ m²

783. $m = 17{,}395$ kg

784. $V = 2052{,}18$ cm³

785. $V = 1{,}97$ cm³

786. $V = 278{,}02$ m³; $O = 208{,}81$ m²

787. $V = 1{,}23$ m³; $O = 6{,}56$ m²

788. $V = 384{,}06$ cm³

789. $V = 1{,}521$ m³; $O = 7{,}957$ m²; $A = 1{,}709$ m²

790. $V_1 = 552$ mm³; $V_2 = 1433$ mm³

791. $V = 0{,}86r^3$

792. $V = 126{,}9$ cm³

793. $m = 112{,}79$ g

794. $m = 11{,}007$ kg

795. $V = \frac{2}{3}r^3 \arccos\alpha$

Anhang Mathematische Zeichen nach TGL 0-1302 (Auszug)

Nr.	Zeichen	Sprechweise	Erläuterungen
1. Ordnungszeichen			
1.1	1.	erstens	
1.2	( )		Benummerung von Formeln
1.3	,	Komma	Dezimalzeichen. Zum Trennen von Gruppen bei größeren Zahlen sind weder Komma noch Punkt, sondern Zwischenräume zu verwenden.
1.4	...	und so weiter bis	Drei Punkte in gleicher Höhe wie die Zeichen 3.1 und 3.2 oder auf der Zeile. Die Grenzen gelten als eingeschlossen (vgl. hierzu auch die Zeichen 6.2 und 6.3). Beispiele: $k = 1, 2, \ldots, n$ $p = 1 \cdot 2 \ldots n$
		und so weiter unbegrenzt	wenn auf ... kein Zeichen folgt Beispiele: $n = 1, 2, \ldots$ $\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots$ $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$
1.5	$a_1, a_2, \ldots, a_n$	a eins, a zwei, ..., a n	Unterscheidung durch Indizes
1.6	$a', a'', \ldots, a^{(n)}$	a Strich, a zwei Strich, ..., a n Strich	Unterscheidung durch hochgestellte Striche
2. Gleichheit und Ungleichheit			
2.01	$=$	gleich	
2.02	$\equiv$	identisch gleich	Z. B. bedeutet $f(x) \equiv 0$, daß die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle den Wert Null hat.
2.03	$\neq$	nicht gleich, ungleich	
2.04	$\not\equiv$	nicht identisch gleich	
2.05	$\sim$	proportional	Beispiel: $l \sim r$ Der Umfang l eines Kreises ist proportional dem Radius r des Kreises.
2.06	$\approx$	angenähert, nahezu gleich, (rund, etwa)	Beispiel: $\pi \approx 3{,}14$
2.07	$\triangleq$	entspricht	Beispiel: 1 cm $\triangleq$ 5 m/s bedeutet: 1 cm (z. B. einer Zeichnung) entspricht 5 m/s.

Mathematische Zeichen nach TGL 0-1302 (Fortsetzung)

Nr.	Zeichen	Sprechweise	Erläuterungen
2.08	$<$	kleiner als	
2.09	$>$	größer als	
2.10	$\leqq$	kleiner oder gleich, höchstens gleich	
2.11	$\geqq$	größer oder gleich, mindestens gleich	
2.12	$\ll$	klein gegen	von anderer Größenordnung
2.13	$\gg$	groß gegen	von anderer Größenordnung
3. Elementare Rechenoperationen			
3.1	$+$	plus	
3.2	$-$	minus	
3.3	$\cdot$ $\times$	mal	Der Punkt steht in gleicher Höhe wie die Zeichen 3.1. und 3.2. Das Multiplikationszeichen darf beim Rechnen mit Buchstaben weggelassen werden.
3.4	$-$ $/$ $:$	durch, geteilt durch, zu	In Formeln ist im allgemeinen für die Division der waagerechte Strich zu benutzen; die Zeichen / und : nur zur Platzersparnis. Bei dem Zeichen / wird auch die Sprechweise „je" benutzt, z. B. 5 m/s wird „5 Meter je Sekunde" gesprochen.
3.5	%	Prozent, vom Hundert	$1\,\% = 10^{-2}$
3.6	‰	Promille, vom Tausend	$1‰ = 10^{-3}$
3.7	() [] {} ⟨⟩	Runde, eckige, geschweifte, spitze Klammer auf und zu	
4. Geometrische Zeichen			
4.01	$\parallel$	parallel	
4.02.	$\nparallel$	nicht parallel	
4.03	$\uparrow\uparrow$	gleichsinnig parallel	
4.04	$\uparrow\downarrow$	gegensinnig parallel	
4.05	$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf	
4.06	$\triangle$	Dreieck	
4.07	$\cong$	kongruent	
4.08	$\sim$	ähnlich	
4.09	$\sphericalangle$	Winkel	$\sphericalangle\, ABC$ = Winkel zwischen $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$
4.10	$\overline{AB}$	Strecke AB	
4.11	$\overset{\frown}{AB}$	Bogen AB	

Allgemeine Formelzeichen nach TGL 0-1304 (Auszug)

Nr.	Benennung	Zeichen	Nr.	Benennung	Zeichen
1. Länge und Winkel			2. Masse		
1.1.	Länge	l, L	2.1.	Masse	m
1.2.	Höhe	h, H	2.2.	Dichte (m/V)	ϱ, d
1.3.	Breite	b, B	3. Zeit		
1.4.	Halbmesser, Radius	r, R	3.1.	Zeit (Zeitpunkt od. Zeitspanne)	t, τ, z
1.5.	Durchmesser	d, D	3.9.	Geschwindigkeit	v, u, w
1.9.	Fläche (auch Querschnitt, Grenzfläche, Oberfläche)	A, S, F	3.10	Beschleunigung	a, b
1.10.	Rauminhalt, Volumen	V, τ	3.11	Fallbeschleunigung	g
1.11.	ebene Winkel	α, β, γ	4. Kraft und Druck		
1.12.	Raumwinkel	ω, Ω	4.1.	Kraft	F, P, K

Tafel der gesetzlichen Einheiten (Auszug)

Vorbemerkungen

1. Die Grundeinheiten und die abgeleiteten Einheiten sind in Spalte 1 laufend durchnumeriert. Nummern von Einheiten für die gleiche Größe stimmen in der vor dem Punkt stehenden Zahl überein. Die Grundeinheiten und die kohärent gebildeten Einheiten sind im Druck hervorgehoben worden, und zwar

   Grundeinheiten: halbfette große Type unterstrichen,
   kohärent gebildete Einheiten: halbfette kleinere Type.

2. Dezimale Vielfache und Teile, die von Grundeinheiten und von abgeleiteten Einheiten mit selbständigem Namen gebildet werden, dürfen durch Anfügen eines der folgenden gesetzlichen Vorsätze (Einh. V.O. § 6[1])) bezeichnet werden, sofern sie hiervon nicht in Spalte 6 ausdrücklich ausgenommen sind (Einh.VO. § 9).

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung		
Tera	T	1000000000000	(10^{12})	Einheiten
Giga	G	1000000000	(10^{9})	Einheiten
Mega	M	1000000	(10^{6})	Einheiten
Kilo	k	1000	(10^{3})	Einheiten
Hekto	h	100	(10^{2})	Einheiten
Deka	da	10	(10^{1})	Einheiten
Dezi	d	0,1	(10^{-1})	Einheiten
Zenti	c	0,01	(10^{-2})	Einheiten
Milli	m	0,001	(10^{-3})	Einheiten
Mikro	μ	0,000001	(10^{-6})	Einheiten
Nano	n	0,000000001	(10^{-9})	Einheiten
Pico	p	0,000000000001	(10^{-12})	Einheiten

3. Soweit dezimale Vielfache und Teile, die von abgeleiteten Einheiten ohne selbständige Namen gebildet werden, durch Vorsätze nach Nr. 2 gebildet werden dürfen (Einh.VO. § 9), ist dies in Spalte 6 angegeben.

[1]) Bezüge auf die Verordnung vom 14. 8. 1958 über die physikalisch-technischen Einheiten sind innerhalb der Tafel durch den Hinweis „Einh.VO." bezeichnet.

Lfd. Nr.	Name der Einheit	Kurzzeichen	Definition der Einheit
1	2	3	4
			1. Länge
1.1	**Meter**	**m**	**Das Meter ist der Abstand der Mittelstriche der auf dem Internationalen Meterprototyp angebrachten Strichgruppen bei der Gleichgewichtstemperatur zwischen Eis und reinem, luftgesättigtem Wasser unter dem Druck einer physikalischen Atmosphäre.**
1.2	Seemeile	sm	Die Seemeile ist gleich 1852 Meter.
			2. Fläche
2.1	**Quadratmeter**	**m^2**	**Das Quadratmeter ist die Fläche eines Quadrates von der Seitenlänge 1 m.**
2.2	Ar	a	Das Ar ist gleich 100 Quadratmeter.
2.3	Hektar	ha	Das Hektar ist gleich 100 Ar.
			3. Volumen
3.1	**Kubikmeter**	**m^3**	**Das Kubikmeter ist das Volumen eines Würfels von der Kantenlänge 1 m.**
3.2	Liter	l	Das Liter ist das Volumen von 1 kg reinen, luftfreien Wassers bei seiner maximalen Dichte unter dem Druck einer physikalischen Atmosphäre.
			4. Ebener Winkel
4.1	**Radiant**	**rad**	**Der Radiant ist der ebene Winkel, für den das Verhältnis der Längen des zugehörigen Kreisbogens zu seinem Halbmesser gleich 1 ist.**
4.2	rechter Winkel Rechter	∟	Der rechte Winkel oder Rechte ist jeder der vier ebenen Winkel, die zwei sich unter gleichen Nebenwinkeln schneidende Geraden bilden.
4.3	Grad	°	Der Grad ist der 90ste Teil des rechten Winkels oder Rechten.
4.4	Minute	′	Die Minute ist der 60ste Teil des Grades.
4.5	Sekunde	″	Die Sekunde ist der 60ste Teil der Minute.
4.6	Neugrad, Gon	g	Der Neugrad oder das Gon ist der 100ste Teil des rechten Winkels oder Rechten.

Beziehung der Einheit zu den Grundeinheiten	Besondere Bestimmungen
5	6
1 sm = 1852 m	Die Seemeile ist nur für die Angabe von Entfernungen oder Wegstrecken in der Luft- und in der Seefahrt zulässig. Vielfache und Teile der Seemeile dürfen nicht durch einen Vorsatz nach Einh.VO. § 6 bezeichnet werden.
$1\ m^2 = 1\ m \cdot 1\ m$ $1\ a = 10^2\ m^2$ $1\ ha = 100\ a = 10^4\ m^2$	**Als Einheiten der Fläche sind auch alle Einheiten zulässig, die als Quadrat aus einer zulässigen Längeneinheit gebildet werden.** Vielfache und Teile des Ars und des Hektars dürfen nicht durch einen Vorsatz nach Einh.VO. § 6 gebildet werden.
$1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m$ $1\ l = 1{,}000028 \cdot 10^{-3}\ m^3$	**Als Einheiten des Volumens sind auch alle Einheiten zulässig, die als Kubus aus einer zulässigen Längeneinheit gebildet werden.**
$1^L = \frac{\pi}{2}\ rad$ $1^\circ = \frac{1^L}{90}$ $1' = \frac{1^\circ}{60}$ $1'' = \frac{1'}{60}$ $1^g = 10^{-2}{}^L$	Vielfache und Teile der Winkeleinheiten rechter Winkel oder Rechter, Grad, Minute, Sekunde und Neugrad dürfen nicht durch einen Vorsatz nach Einh.VO. § 6 bezeichnet werden. Der 100ste Teil des Neugrads darf als Neuminute (Kurzzeichen^c), der 100ste Teil der Neuminute als Neusekunde (Kurzzeichen ^{cc}) bezeichnet werden.

Das griechische Alphabet

A	*α*	Alpha	*I*	*ι*	Iota	*P*	*ϱ*	Rho
B	*β*	Beta	*K*	*κ*	Kappa	*Σ*	*σ*	Sigma
Γ	*γ*	Gamma	*Λ*	*λ*	Lambda	*T*	*τ*	Tau
Δ	*δ*	Delta	*M*	*μ*	My	*Y*	*υ*	Ypsilon
E	*ε*	Epsilon	*N*	*ν*	Ny	*Φ*	*φ*	Phi
Z	*ζ*	Zeta	*Ξ*	*ξ*	Xi	*X*	*χ*	Chi
H	*η*	Eta	*O*	*o*	Omikron	*Ψ*	*ψ*	Psi
Θ	*ϑ*	Theta	*Π*	*π*	Pi	*Ω*	*ω*	Omega

Absolutglied 151, 205, 232
Abstraktion 13
Abszisse 222
Achse 222, 343
Achsenverhältnis 348, 349
Achteck 292
Addition 15, 60, 63, 243
–, Kommutativgesetz der 63
–, korrespondierende 172
– von Brüchen 22, 26, 78
– von Potenzen 93
– von Wurzeln 115
Additionsverfahren 189
Ähnlichkeit 266, 282
Ähnlichkeitslage 270
Ähnlichkeitspunkt 270
Ähnlichkeitssätze 267
Algebra 11, 149
Algebraische Summe 64
Algorithmus 18
Allgemeines Zahlensymbol 15, 59
Ankathete 316
Anstieg einer Geraden 229
arc 315
Archimedes 293, 401
Arithmetik 11, 13
Assoziativgesetz der Multiplikation 65
Asymptote 238
Auflösen von Klammern 68
Ausdehnung 247
Ausklammern 76
Außenglied 171
Außenwinkel 255
Axialsymmetrie 251
Axonometrie 346, 348
Axonometrische Projektion 346, 348

Basis 91, 127, 256
Bestimmungsdreieck 263
Bestimmungsgleichung 150, 221, 231
Betrag 62
Binom 72, 102
Binomialkoeffizient 102
Binomische Formeln 72, 102
Bogen 294
Bogenmaß 315

Briggsscher Logarithmus 131
Bruch 15, 77
–, echter 20
–, gewöhnlicher 20
–, unechter 20
Bruchgleichung 154
Brüche 15, 77
–, Addition 22, 78
–, Division 24, 80
–, Erweitern 21, 77
–, gleichnamige 22, 78
–, Hauptnenner 21, 78
–, Kürzen 21, 77
–, Multiplikation 23, 80
–, Potenzieren 93, 96
–, Radizieren 116
–, Subtraktion 22, 78
–, ungleichnamige 22, 78

Cartesius 223
Cavalieri 358
Cofunktion 317
Cosinus 316
Cosinusfunktion 319
Cosinussatz 333
Cotangens 317
Cotangensfunktion 319

Darstellung, grafische 223
–, von Körpern 346
Deckfläche 341
Deckungsgleichheit 264
Definitionsbereich 221
Dekadischer Logarithmus 131
Dekadisches Zahlensystem 14
Descartes 223
Dezimalbruch 14, 26
–, Addition 26
–, Division 27
–, Multiplikation 27
–, Subtraktion 26
–, Umwandlung in einen gewöhnlichen Bruch 28
Dezimalsystem 14
Dezimalzahl 14
Diagonale 259

Differenz 15
Dimension 247, 323
Dimetrische Projektion 349
Direkte Proportionalität 174
Diskriminante 213
Distributivgesetz 70
Dividend 15
Division 15, 44, 67
– durch Null 67
– von Brüchen 24, 80
– von Potenzen 93, 96
– von Summen 74
– von Wurzeln 116
Divisor 15
Doppelbruch 25, 80
Doppellösung 210, 213
Doppelwurzel 210, 213
Drachenviereck 262, 288
Draufsicht 346
Dreieck 255, 289
–, gleichschenkliges 256
–, gleichseitiges 256, 289
–, Pascalsches 103
–, rechtwinkliges 256, 289
Dreieckskonstruktionen 265
Dreieckstransversalen 257
Dreiecksungleichung 256
Durchmesser 278, 468

Ebene 247, 248
Ebenflächner 341
Ecke 255, 341
Eckpunkt 255
Einheit 13, 468
Einheitskreis 295, 319
Einrichten eines Bruches 23
Einsetzverfahren 187
Eliminieren 187
Ellipse 343
Empirische Funktion 223
Entgegengesetzte Zahlen 62
Ergänzung 208
–, quadratische 208, 234
Ergänzungskegel 345
Ergänzungspyramide 342
Erweitern 21, 78
Euklid 18, 272
Euklidischer Algorithmus 18
Euler 341
–, Polyedersatz von 341
Exponent 91
Exponentialfunktion 240
Exponentialteilung 37

Faktor 15
Faktorenzerlegung 16, 215
Fläche 247, 287, 468, 469
Flächenberechnung 287 ff.
Formel 159
–, binomische 72
Fortlaufende Proportion 173
Fünfeck 285
Funktion 219
–, Darstellung einer 223
–, Definitionsbereich einer 221
–, empirische 223
–, Exponential- 240
–, lineare 228
–, logarithmische 241
–, quadratische 231
–, Potenz- 237, 238
–, Wurzel- 239
Funktionsgleichung 149, 221, 231
Funktionsleiter 241

Ganze Zahl 60, 68
Gegenkathete 316
Gemischtperiodischer Bruch 26, 28
Gemischtquadratische Gleichung 208
Geometrie 11
Geometrischer Ort 226, 253
Geometrisches Mittel 116, 177
Gerade 228, 247
Geradengleichung 228
Gewöhnlicher Bruch 20
Gleichartige Größen 65
Gleichheit 149
Gleichnamige Brüche 22, 78
Gleichsetzverfahren 188
Gleichung, Begriff der 149
–, Bestimmungs- 150
–, Funktions- 149
–, Geraden- 228
–, identische 149
–, lineare 151, 186
–, quadratische 204
Gleichungssystem 186
Goldener Schnitt 283
Gon 469
Grad 248, 469
Grafische Darstellung 223
– – empirischer Funktionen 223
– – der Exponentialfunktion 240
– – der linearen Funktion 230
– – der logarithmischen Funktion 241
– – der Potenzfunktion 237, 238
– – der quadratischen Funktion 232

Grafische Darstellung der Wurzelfunktion 239
– Lösung von Gleichungen 230, 235
Größe 13, 220, 323
–, konstante 220
–, veränderliche 220
Großkreis 345
Größter gemeinsamer Teiler 18
Grundfläche 341
Grundlinie 256
Grundrechenarten mit allgemeinen Zahlensymbolen 59
Grundteilung 37
Grundwert 179
Grundzahl 31, 91, 127
Guldinsche Regel 416

Halbieren einer Strecke 252
– eines Winkels 253
Hauptnenner 19, 78
Heronische Flächenformel 289
Hochzahl 91
Höhe 257, 272, 468
Höhensatz 272
Hohlzylinder 344
Homologe Stücke 264
Hyperbel 238
Hypotenuse 256, 316
Hypotenusenabschnitt 272

Identität 149
Index 60
Inkreis 257, 259
Innenglied 171
Innenwinkel 255
Interpolation 35, 135
Irrationalzahl 112
Isometrische Projektion 348

Kalotte 345
Kante 341
Kantenverhältnis 348, 349
Kartesische Koordinaten 223
Kathete 256
Kathetensatz 272
Kegel 344, 388
–, gerader 344, 388
–, Kreis- 344
–, schiefer 345, 388
Kegelstumpf 345, 392
Kehrwert 24, 34, 42
Kennziffer 132, 322
Klammern, Auflösen von 69
–, Bedeutung der 68
–, Setzen von 69
Kleinstes gemeinsames Vielfaches 19
Koeffizient 65
Kommaregel für Potenzen 31
– für Wurzeln 32
Kommutativgesetz der Addition 63
– der Multiplikation 65
Komplementwinkel 249
Kongruenz 264
Kongruenzsätze 264
Konstante 220
Koordinaten 222
Körper 247, 341
Körperberechnung 349
Korrespondierende Addition und Subtraktion 172
Kreis 278, 293
Kreisabschnitt 294
Kreisausschnitt 294
Kreisbogen 294
Kreissegment 294
Kreissektor 294
Kreiszylinder 343, 376
Krummflächner 341, 343
Kubikwurzel 31, 33, 40, 110
Kubikzahl 31, 33, 38
Kubische Teilung 37, 242
Kugel 345, 398, 406
Kugelkappe 345, 406
Kugelradius 345
Kugelschicht 346, 399
Kugelsegment 345, 400
Kugelsektor 346, 407
Kugelzone 346, 406
Kurve einer Funktion 225
Kürzen 21, 78

Länge 247, 468, 469
Läufer des Rechenstabes 37
Läuferstrich 37
Leiter 241
–, Teilung einer 242
Lineare Abhängigkeit 190
Lineare Funktion 228
Lineare Gleichung mit einer Unbekannten 151
Lineares Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten 186
Lineares Glied 151, 205, 232
Linearfaktor 215
Linear unabhängige Gleichungen 190
Linie 247
Logarithmen 127
–, Begriff der 127
–, Briggssche 131

Logarithmen, dekadische 131
–, Gesetze 129
–, Rechenschemata 136
Logarithmensystem 131, 143
Logarithmentafel 33, 132
Logarithmische Funktion 241
Logarithmischer Rechenstab 36, 242
Logarithmische Teilung 37, 242
Lösung einer Gleichung 150, 205, 208
– eines Gleichungssystems 187, 189
Lösungsformel für quadratische Gleichungen 210
Lot 253

Mantel 341
Mantellinie 343
Mantisse 132
Maßeinheit 101, 323
Mehrtafelprojektion 346
Meter 247, 469
Minuend 15
Minute 469
Mittellinie 260, 288
Mittelpunkt des Inkreises 259
– des Umkreises 257
Mittelsenkrechte 252, 257
Mittlere Proportionale 177
Multiplikation 15, 43, 65, 243
–, Assoziativgesetz der 65
–, Distributivgesetz der 70
–, Kommutativgesetz der 65
– von Brüchen 23, 80
– von Klammerausdrücken 70
– von Potenzen 93, 95
– von Summen 70
– von Wurzeln 115

Nebenwinkel 249
n-Eck 263
Negative Zahl 60
Nenner 15, 20
–, Rationalmachen des 117
Netz 341
Normalform der linearen Gleichung 151
– der linearen Funktion 228
– der quadratischen Gleichung 208
Normalparabel 232
Null 14, 61
Nullstelle einer Funktion 231
Numerische Lösung von Gleichungen 151, 204
– – von Gleichungssystemen 187
Numerus 127

Oberfläche 341, 349
Oberflächenberechnung 349 ff.
Ordinate 222
Orientierung 251
Orthogonalprojektion 346, 348

Pantograph 271
Parabel 232, 237
Parallele Gerade 249
Parallelogramm 260, 287
Parallelperspektive 346
Partialdivision 74
Pascal 103
Pascalsches Dreieck 103
Periode 28
Periodischer Dezimalbruch 26
Peripheriewinkel 280
Permanenzprinzip 327
Perspektive 346
Planimetrie 247
Polyeder 341
Positive Zahl 61
Potenz 16, 30, 91
–, Addition 93
–, Begriff der 91, 98
– eines Binoms 72, 102
–, Division 93, 96
–, Multiplikation 93, 95
–, Potenzieren einer 95
–, Radizieren einer 118
–, Subtraktion 93
– von Potenzen 95
– von Wurzeln 119
Potenzfunktion 236
Potenzieren von Brüchen 93, 96
Potenzwert 91
Primfaktor 16
Primzahl 16
Primprodukt 16
Prisma 341
–, gerades 341, 354
–, regelmäßiges 341
–, schiefes 341
–, unregelmäßiges 341
Prismatoid 341, 342, 370
Probe 64, 67, 109, 128, 152
Produkt 15, 65
Produktform einer Gleichung 215
Produktgleichung einer Proportion 171
Produktzerlegung 16, 215
Projektion 346
Promille 181
Proportion 170
–, Begriff der 170
–, fortlaufende 173
–, Produktgleichung 171
–, Rechengesetze 171

Proportionalität 174
–, direkte 174
–, umgekehrte 175
Proportionalitätsfaktor 174
Prozent 179
Prozentsatz 179
Prozentwert 179
Punkt 247
Pyramide 341, 342, 359
Pyramidenstumpf 341, 342, 364
Pythagoras 272
–, Satz des 272

Quader 341, 350
Quadrant 222
Quadrat 31, 262, 287
Quadratwurzel 31, 33, 39, 110
Quadratzahl 31, 33, 38
Quadratische Ergänzung 208
– Gleichung 204
– Funktion 232
Quadratisches Glied 205, 232
Quadratische Teilung 37, 242
Quersumme 17
Quotient 15

Radiant 316, 469
Radikand 31, 109
Radius 278
Radizieren von Brüchen 116
– von Potenzen 118
– von Wurzeln 119
Rationale Zahl 68, 111
Rationalmachen des Nenners 117
Raum 247, 248
Rechenoperation 1., 2., 3. Stufe 59, 91
Rechenschema 136
Rechenstab 36, 243
Rechenzeichen 62
Rechteck 262, 287
Rechtkant 341, 350
Reinperiodischer Dezimalbruch 26, 28
Reinquadratische Gleichung 205
Reziproker Wert 24, 34
Reziprokteilung 37, 242
Rhombus 261, 288
Rotationskörper 343, 416
Rückwärtseinschneiden 281
Rundungsregeln 29

Scheitel 232, 248
Scheitelwinkel 250
Schenkel 248, 256
Schnittpunkt 227, 257
– von Kurven 227
Schwerelinie 258
Schwerpunkt 258, 416
Segment 294
Sehne 278
Sehnen-Sekanten-Satz 282
Sehnen-Tangenten-Satz 282
Sehnenvieleck 291
Seite 255
Seitenansicht 346
Seitenhalbierende 257
Sekante 278
Sekanten-Tangenten-Satz 282
Sektor 294
Sekunde 469
Senkrechte errichten 252
Setzen von Klammern 68
Sinus 316
Sinusfunktion 319
Sinussatz 329
Skale 37, 241
–, Teilung einer 37, 242
Spitze 256
Spitzer Winkel 248
Stabkörper 37
Stabrechnen 38
Stammbruch 20
Stellenwert 14, 132
Stetige Teilung 283
Stereometrie 247
Storchschnabel 271
Strahl 247
Strahlensätze 268
Strecke 247
Stufenwinkel 250
Substitution 188
Subtrahend 15
Subtraktion 15, 61, 63
–, korrespondierende 172
– von Brüchen 22, 26, 78
– von Potenzen 93
– von Wurzeln 114
Summand 15
Summe 15, 64
–, algebraische 64
Supplementwinkel 249
Symmetrie 251
Symmetrie, axiale 251
–, zentrale 236, 252
Symmetrieachse 251
Symmetriezentrum 252

Tabelle 32, 219
Tafel 33
Tangens 317

Tangensfunktion 319
Tangente 278
Tangentenvieleck 291
Teilbarkeit 16
Teilbarkeitsregeln 17
Teiler 16
–, echter 16
–, größter gemeinsamer 18
–, unechter 16
Teilerfremd 18
Teilung einer Leiter 37, 242
– einer Strecke 269
–, kubische 37, 242
–, lineare 37, 242
–, logarithmische 37, 242
–, reziproke 37, 242
–, quadratische 37, 242
–, trigonometrische 37
Thales 281
–, Satz des 281
Transversalmaßstab 269
Trapez 260, 288
Trigonometrie 316
Trigonometrische Funktionen 316

Überschlagsrechnung 12, 34, 38, 136, 160
Umfang 287
Umgekehrte Proportionalität 175
Umkreis 257, 263
Umstellen von Formeln 159
Unbekannte 150, 186
Ungleichnamige Brüche 22, 78
Ungleichung 163
Unstetigkeitsstelle 238

Variable 220
Veränderliche 149, 220
–, abhängige 220
–, unabhängige 220
Verbindungsstrecke 259
Verhältnis 170
Verhältnisgleichung 170
Vieleck 263, 291
Vielfaches 19
–, kleinstes gemeinsames 19
Viereck 259, 287
Vieta 213
–, Wurzelsatz von 213
Vollständiges Quadrat 208
Volumen 248, 341, 349, 468, 469
Vorderansicht 346
Vorwärtseinschneiden 331
Vorzeichen 62
Vorzeichenregeln 66, 67

Wechselwinkel 259
Winkel 248, 278, 468, 469
Winkelfunktion 316
Winkelhalbierende 257
Winkelsumme 255, 259, 263
Würfel 341, 351
Wurzel 109, 150, 205
–, Addition 115
–, Begriff der 108
–, Division 116
–, Multiplikation 115
–, Potenzieren 118
–, Radizieren 119
–, Subtraktion 114
Wurzelexponent 109
Wurzelfunktion 239
Wurzelgleichung 156
Wurzelsatz von Vieta 213

Zahl 13
–, allgemeine 15, 59
–, benannte 13
–, bestimmte 15
–, ganze 60, 68, 111
–, irrationale 112
–, natürliche 13, 68, 111
–, negative 60
–, positive 60
–, rationale 68, 111
–, reelle 113
–, unbenannte 13
Zahlengerade 61, 111
Zahlenstrahl 13
Zahlensymbol 13, 15
Zahlensystem 14
Zähler 15, 20
Zehneck 285
Zentrale 278
Zentralsymmetrie 236, 252
Zentriwinkel 280
Ziffer 13
Ziffernfolge 31, 38, 132
Zins 182
Zinsfuß 182
Zinsrechnung 182
Zunge des Rechenstabes 37
Zyklische Vertauschung 333
Zylinder 343
–, gerader 343, 376, 383
–, Hohl- 344, 377, 382
–, Kreis- 376
–, schiefer 382
Zylinderhuf 344, 386