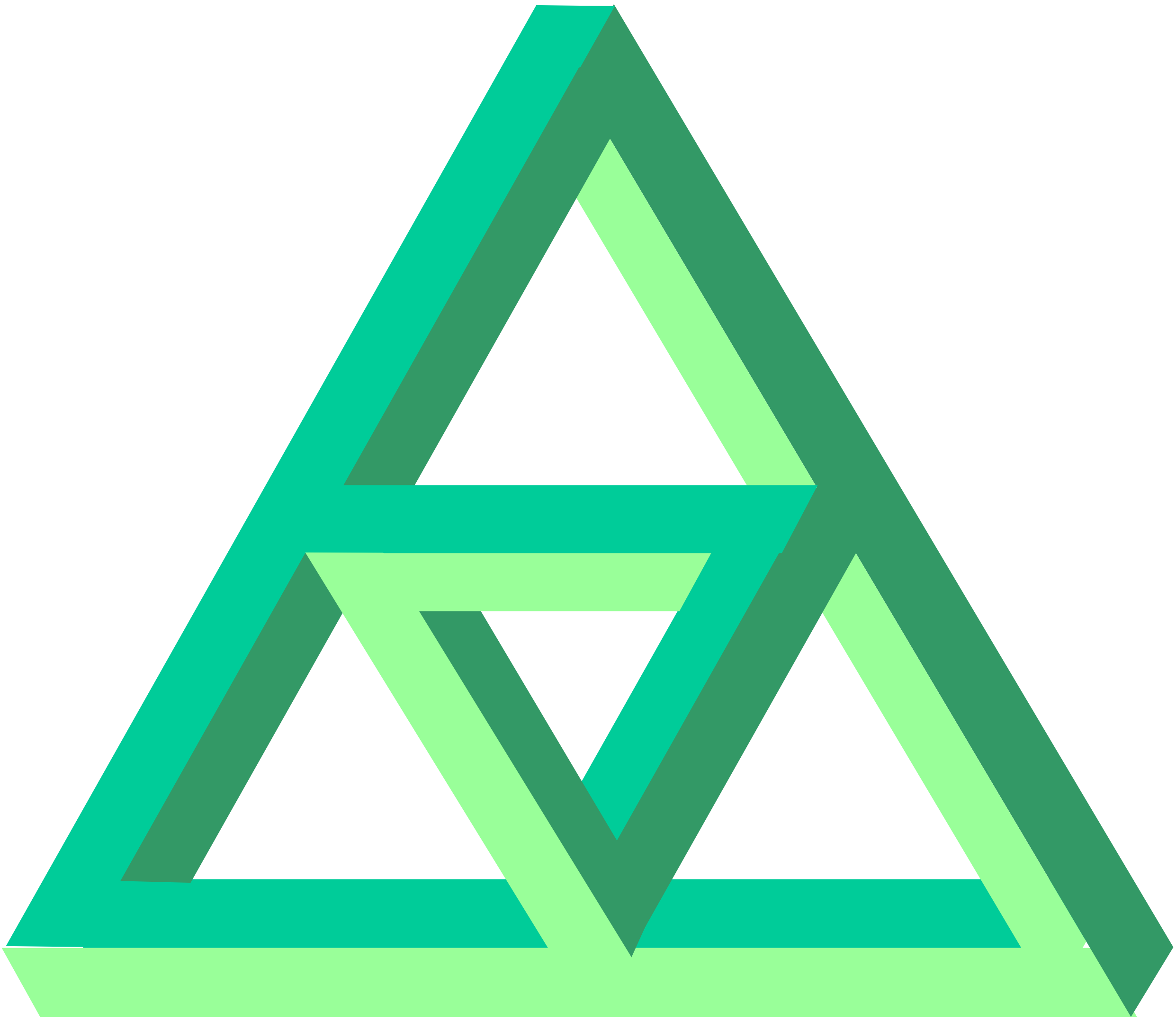
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2025 (Dezember 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir greifen die Aufgabe **MO651011** heraus, um kombinatorische Aufgaben im Zusammenhang mit Wegbeschreibungen zu diskutieren. Es ist nur ein kleiner Schritt, aus den Anzahlen von günstigen Wegen eine Aufgabe zur Wahrscheinlichkeit zu formulieren.

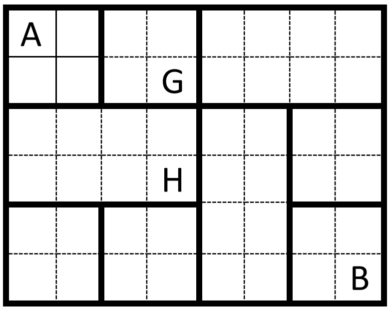
Mit dem neuen Thema „Diophantische Gleichungen ersten Grades“ stellen wir einen Aufgabenkomplex vor, der in der MO bis auf die frühen Jahre wenig Beachtung fand. Dabei hat es seinen Reiz, Lösungen nur in ganzen oder natürlichen Zahlen zu suchen. Allerdings gilt dafür der Lösungsansatz als bekannt und kann durch systematisches Probieren unterstützt werden. Im historischen Rückblick zitieren wir aus einem Lehrbuch von 1895 die Erklärungen zur Lösung solcher Aufgaben.

Am 1. Dezember startete die erste Runde des **Bundeswettbewerbs Mathematik** 2026. Im kurzen Überblick wird das Angebot, zu dem Jugendliche der Klassenstufen 9/10 ausdrücklich eingeladen werden, vorgestellt. Die statistischen Zusammenfassungen der vergangenen vier Schuljahre zeigen leider einen negativen Trend.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 24.5 – Kombinatorik[3] und klassische Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 24.25 – MO651011. In allen Aufgabenteilen betrachten wir Wegepläne, deren Wege auf den Gitterlinien eines Quadratgitters liegen und deren Zielpunkt rechts unterhalb des Startpunkts liegt. In den Grafiken sind die Gitterlinien als gepunktete und die Wege als fette Linien dargestellt. Die Wegepläne sind rechteckig, d.h. ihr äußerer Rand ist ein Rechteck, bei dem Start- und Zielpunkt einander als Eckpunkte diagonal gegenüberliegen. Die Gitterquadratseiten seien Einheitsstrecken (haben also die Länge 1). Gefragt wird jeweils nach der Anzahl der kürzesten Wege vom Start- zum Zielpunkt auf dem Wegeplan. Die Antwort kann in a) und in b) ohne Begründung angegeben werden.



a) Wie viele kürzeste Wege von A nach G und wie viele kürzeste Wege von A nach H gibt es?
b) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es?
c) Entwerfen Sie einen rechteckigen Wegeplan mit einem Startpunkt A und einem weiter rechts und weiter unten liegenden Zielpunkt B, in welchem es genau 20 kürzeste Wege von A nach B gibt. Wege zählen dabei nur als kürzeste Wege, wenn sie nur von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen werden. Hier ist nachzuweisen, dass es tatsächlich 20 Wege sind.

Hinweis: Das zugrunde gelegte Quadratgitter darf von der Größe 3×4 der Beispielabbildung abweichen.

Lösungshinweise: Die kürzesten Wege in den Aufgaben a) und b) führen von einem Kreuzungspunkt entweder nach rechts (R) oder nach unten (U).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Um von A nach G auf einem kürzesten Weg zu kommen, muss zweimal nach rechts und einmal nach unten gegangen werden. Wir prüfen, an welcher Stelle im Weg nach unten gegangen werden kann: RRU, RUR und URR. Es gibt also genau 3 verschiedene kürzeste Wege von A nach G.

Um von A nach H auf einem kürzesten Weg zu kommen, kann ein Weg über G gewählt werden, wenn daran einmal nach unten angefügt wird. Es gibt also genau 3 verschiedene kürzeste Wege von A nach H über G: RRUU, RURU, URRU. Zusätzlich

[3] s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025, Teil 3: Heft 02/2025, Teil 4: Heft 11/2025

gibt es den Weg UURR. Somit gibt es genau 4 verschiedene kürzeste Wege von A nach H.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um von A nach B auf einem kürzesten Weg zu kommen, muss viermal nach rechts und dreimal nach unten gegangen werden.

- Wir finden den Weg RRRRUUU.
- Nach Teilaufgabe a) gibt es drei Wege von A nach G.
    - Von G nach B gibt es drei verschiedene Wege, ohne über H zu kommen: RRUU, RURU, RUUR. Insgesamt ergeben sich damit 3 · 3 = 9 verschiedene kürzeste Wege.
    - Von G nach B gibt es einen Weg über H: URRU. Insgesamt ergeben sich in diesem Fall 3 · 1 = 3 verschiedene kürzeste Wege
- Nach Teilaufgabe a) gibt es einen zusätzlichen Weg von A nach H (ohne über G zu kommen). Von H nach B gibt es aber nur einen kürzesten Weg: URR.
- Schließlich gibt es noch zwei zusätzliche Wege von A nach B, ohne über G oder H zu kommen: UURURRR und UUURRRR.

Insgesamt haben wir 1 + 9 + 3 + 1 + 2 = 16 kürzeste Wege.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nach den Erfahrungen aus den Teilaufgaben a) und b) genügt es, in einem vollständigen Quadratgitter die erforderlichen Anzahlen für Wegstücke nach unten und nach rechts festzulegen, so dass die Anzahl der verschiedenen Anordnungen genau 20 ergibt:

1x19-Rechteck: Wegfolge einmal R und 19-mal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, R in der Folge UUU…U voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen.

19x1-Rechteck: Wegfolge 19-mal R und einmal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, U in der Folge RRR…R voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen.

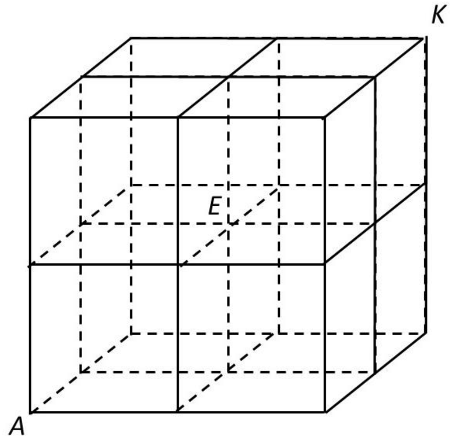
3x3-Rechteck: Wegfolge dreimal R und dreimal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, R in der Folge UUU…U voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen, nämlich 10 verschiedene kürzeste Wege, wenn wir mit R beginnen: RRRUUU, RRURUU, RRUURU, RRUUUR, RURRUU, RURURU, RURUUR, RUURRU, RUURUR, RUUURR. Entsprechend gibt es auch 10 davon verschiedene kürzeste Wege, wenn wir mit U beginnen (also R und U vertauschen).

Aufgabe 24.26 – MO430941. Die Abbildung zeigt ein aus Einheitsstrecken gebildetes kubisches Raumgitter der Kantenlänge 2. Eine Ameise bewegt sich längs der Gitterstäbe auf kürzestem Weg von A nach K. Wie viele verschiedene dieser kürzesten Wege gibt es für die Ameise, wenn sie sich

a) auf beliebigen Gitterstäben,

b) nur längs der Gitterstäbe an der Oberfläche des Würfels

bewegt?



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Ein kürzester Weg von A nach K besteht aus 6 Wegstücken – zweimal nach rechts (R), zweimal nach oben (O) und zweimal nach hinten (H). Alle möglichen Reihenfolgen dieser Wegstücke sind kürzeste Wege. Ihre Anzahl ermitteln wir wie folgt:

Zunächst suchen wir alle Möglichkeiten, zweimal R auf sechs Plätzen anzuordnen. Dies ist möglich, wenn R erstmalig auf dem

ersten Platz steht:	RRxxxx, RxRxxx, RxxRxx, RxxxRx, RxxxxR	– 5 Möglichkeiten,
zweiten Platz steht:	xRRxxx, xRxRxx, xRxxRx, xRxxxR	– 4 Möglichkeiten,
dritten Platz steht:	xxRRxx, xxRxRx, xxRxxR	– 3 Möglichkeiten,
vierten Platz steht:	xxxRRx, xxxRxR	– 2 Möglichkeiten,
fünften Platz steht:	xxxxRR	– 1 Möglichkeit.

Insgesamt sind es (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15, oder $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$ Möglichkeiten.

Nun suchen wir alle Möglichkeiten, zweimal O auf den verbleibenden vier freien Plätzen anzuordnen. Dies ist möglich, wenn O erstmalig auf deren

ersten Platz steht:	OOxx, OxOx, OxxO	– 3 Möglichkeiten,
zweiten Platz steht:	xOOx, xOxO	– 2 Möglichkeiten,
dritten Platz steht:	xxOO	– 1 Möglichkeit.

Insgesamt sind es (3 + 2 + 1 =) 6, oder $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ Möglichkeiten.

Um abschließend zweimal H auf den verbleibenden zwei freien Plätzen anzuordnen, gibt es genau 1 Möglichkeit.

In Kombination dieser Untersuchungen ergeben sich 15 · 6 · 1 = 90 verschiedene kürzeste Wege von A nach K.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um auf kürzesten Weg von A nach K über E zu gelangen, muss auch von A nach E ein kürzester Weg genommen werden. Ein solcher Weg besteht aus drei Wegstücken R, O und H in beliebiger Reihenfolge. Es gibt sechs Möglichkeiten einer solchen Anordnung:

ROH, RHO, ORH, OHR, HRO, HOR

bzw. 3 · 2 · 1 = 6 Möglichkeiten. Mit gleicher Argumentation gibt es auch sechs kürzeste Wege von E nach K, insgesamt also 6 · 6 = 36 kürzeste Wege von A nach K über E und entsprechend (nach Teilaufgabe a) 90 – 36 = 54 kürzeste Wege von A nach K ohne über E zu kommen. ❑

Die Hintereinanderausführung von Wegstrecken begegnet uns auch in

Aufgabe 24.27 – MO470944. In einem Wandergebiet liegen drei Rastplätze A, B und C. Ein Weg zwischen zweien dieser Rastplätze gilt als günstig, wenn er sie direkt verbindet oder auf zwei Direktverbindungen über den dritten führt.

Auf diese beiden Arten zusammen gibt es 10 günstige Wege von A nach B, 14 von B nach C und weniger als 12 von C zurück nach A. Wie viele Direktverbindungen von zweien der drei Rastplätze kann es insgesamt im Wegenetz zwischen A, B und C geben?

Lösungshinweise: Es seien x, y und z die Anzahl der Direktverbindungen von A nach B, von B nach C bzw. von C nach A. Die Zahl der günstigen Wege zwischen A und B über C ergibt sich dann als $x \cdot y$ und analog für die anderen Verbindungen. Für die Anzahlen der günstigen Wege erhalten wir also

$x + y \cdot z = 10$ Wanderwege zwischen A und B (1)
$y + z \cdot x = 14$ Wanderwege zwischen B und C (2)
$z + x \cdot y < 12$ Wanderwege zwischen A und C (3)

Aus (1) und (2) folgt durch Addition bzw. Subtraktion das äquivalente System

$$x + y + x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot (1 + z) = 24 \tag{4}$$
$$y - x + x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot (z - 1) = 4 \tag{5}$$

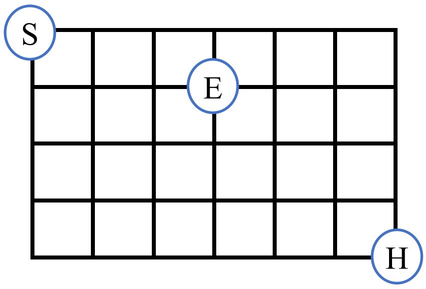
Daher muss insbesondere $z - 1$ ein Teiler von 4 sein. Es kommt nur $z \in \{2; 3; 5\}$ in Frage, und die zugehörigen Werte für x und y ergeben sich aus (4) und (5)

$z = 2$: $x + y = 8$; $x - y = 4$ $x = 6$; $y = 2$
$z = 3$: $x + y = 6$; $x - y = 2$ $x = 4$; $y = 2$
$z = 5$: $x + y = 4$; $x - y = 1$ keine Lösung

Die Lösung $z = 2$ scheidet allerdings aus wegen $z + x \cdot y = 14 > 12$ aus; die Lösung $z = 3$ erfüllt dagegen $z + x \cdot y = 11 < 12$.

Die einzige Lösung, welche alle Bedingungen erfüllt, ist also $x = 4, y = 2, z = 3$. Es gibt also $2 + 3 + 4 = 9$ Wanderwege, die zwei der drei Rastplätze direkt verbinden.
❑

Wir erinnern an **Aufgabe 24.15 – MO321045**[4]**.** In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.



Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

a) Er erklärt dazu: ”Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H fuhren über die Ecke E.” Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: ”Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn – durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen.” Trifft das zu?

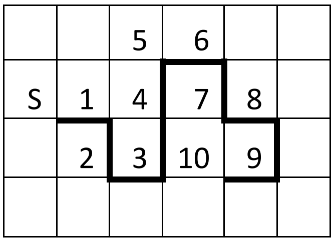
Diese Verknüpfung von Wegbeschreibungen und klassischer Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde in der 56. MO wieder aufgegriffen, wenn auch mit eigenartiger textlastigen Umschreibung des Problems:

Aufgabe 24.28 – MO560922/MO561022. Ein Metallsieb für Komposterde besteht aus einem quadratischen Gitter aus senkrecht und waagerecht gespannten Drähten. Die Gitterlinien bilden dabei quadratische Kästchen wie in der Abbildung dargestellt. Forscher haben untersucht, wie sich Ameisen verhalten, wenn man sie auf diesem Gitter aussetzt. Dazu haben sie folgendes Experiment mehrfach wiederholt:

Eine Ameise wird an einem inneren Gitterpunkt, dem Startpunkt S, weit genug vom Rand des Metallsiebs entfernt ausgesetzt. Die Ameise kann nur entlang der Gitterlinien laufen. In jedem Gitterpunkt entscheidet sich die Ameise neu, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzt. Die Forscher interessieren sich, welche Art von Wegen die Ameisen dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen.

Ein möglicher Weg einer Ameise vom Startpunkt S über 9 weitere Gitterpunkte bis zum Ende im Gitterpunkt 10 ist in der Abbildung dargestellt.

[4] Siehe Lösungsdiskussion im Heft 02/2025.



Die Forscher haben auf Grund umfangreicher Untersuchungen folgendes Modell für das Verhalten der Ameisen aufgestellt:

- Alle Ameisen verhalten sich gleich.
- Eine Ameise läuft in einer Sekunde eine Kästchenlänge ab.
- An einem Gitterpunkt laufen die Ameisen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ weiter geradeaus.
- Biegen Ameisen an einem Gitterpunkt ab, so erfolgt das mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts.
- Es kommt nicht vor, dass eine Ameise an einem Gitterpunkt umkehrt und auf dem Gitterstück weiterläuft, von dem sie gerade hergekommen ist.

Ermitteln Sie auf der Basis dieses Modells die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine Ameise geht dreimal hintereinander geradeaus.
b) (Klassenstufe 9) Eine Ameise läuft in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).
(Klassenstufe 10) Eine Ameise läuft in 8 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Produktformel zu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Ameisen nach rechts bzw. links abbiegen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Da die Ameisen entweder geradeaus laufen oder abbiegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Abbiegen $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für das Abbiegen nach rechts und das Abbiegen nach links jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Der Weg einer Ameise wird durch deren Entscheidungen auf den durchlaufenen Gitterknoten eindeutig bestimmt. Wir protokollieren l, r bzw. g, wenn sich die Ameise dabei nach links bzw. rechts wendet oder aber geradeaus weitergeht, und geben einen Weg im Ereignisraum durch die Folge der Entscheidungen der Ameise an. Alle weiteren zahlenmäßigen Längenangaben beziehen sich auf die Einheit „Kästchenlänge“.

In den folgenden Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten werden die Ereignisräume der möglichen Pfade untersucht, die eine Ameise von S aus durchlaufen kann. Dabei wird mehrfach die erste und die zweite Pfadregel (Additions- bzw. Multiplikationssatz) verwendet.

Es ist für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich, ob sich die Ameise von S aus zuerst nach oben, unten, rechts oder links bewegt, denn die jeweiligen Ereignisteilräume kann man durch Drehen des Gitters auf den Ereignisteilraum abbilden, in dem die Ameise zunächst nach rechts geht. In allen vier Ereignisteilräumen ist deshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 6 Sekunden wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, gleich. Wir können unsere Untersuchungen also auf den Ereignisteilraum beschränken, in dem die Ameise von S aus zunächst eine Einheit nach rechts läuft, und nur die Entscheidungen der Ameise in den Sekunden zwei bis sechs betrachten.

(für Klassenstufe 9) Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 6. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 2. Umläuft die Ameise ein solches (1×2)-Rechteck, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 1) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde die folgenden vier Wege lgllg, rgrrg, gllgl oder grrgr zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Alle vier Wege enthalten zwei Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^5}{5^5}$$

Fall 2: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt der Startpunkt auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 2. In diesem Fall führen folgende Wege llgll oder rrgrr nach der ersten Sekunde zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Diese zwei Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten beide eine Geradeaus-Entscheidung g der Ameise und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Falles 2 ist demnach

$$2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^5}{5^5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat und zum Ausgangspunkt S zurückgekehrt ist, beträgt also

$$\frac{2^5}{5^5}+\frac{2^5}{5^5}=\frac{2^6}{5^5}=\frac{2^{6+5}}{10^5}=\frac{2048}{10000}=0.02048$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 6 durchläuft also eine Ameise in knapp über 2% aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 6 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

❑

(für Klassenstufe 10) Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 8. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 3 oder es handelt sich bei dem zu umlaufenden Rechteck um ein Quadrat mit der Seitenlänge 2.

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise ein Quadrat der Seitenlänge 2 umläuft. Dabei kann S entweder ein Eckpunkt des Quadrates (Fall 1) oder der Mittelpunkt einer Quadratseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Quadrates, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege glglglg oder grgrgrg zu einem Quadrat und zu S zurück. Alle zwei Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen.

$$2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^4}{5^7}$$

Fall 2: Ist S der Mittelpunkt einer Quadratseite, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege lglglgl oder rgrgrgr zu einem Quadrat und zu S zurück. Alle zwei Wege enthalten drei Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen.

$$2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{2^5}{5^7}$$

Die Ameise umläuft also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2^4}{5^7}+\frac{2^5}{5^7}=\frac{2^4+2^5}{5^7}=\frac{48}{5^7}$ ein Quadrat mit dem Umfang 8 und kehrt zu S zurück.

Umläuft die Ameise ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 3) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 4) sein.

Fall 3: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde nur die vier Wege lggllgg, rggrrgg, ggllggl oder ggrrggr zu einem Rechteck und zurück zu S. Alle vier Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des dritten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^5}{5^7}$$

Fall 4: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt S auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 3. In diesem Fall führen nach der ersten Sekunde nur die Wege gllggll, llggllg, grrggrr oder rrggrrg zu einem Rechteck und zu S zurück. Diese vier Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten alle drei Geradeaus-Entscheidungen g und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des vierten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^6}{5^7}$$

Die Ameise umläuft somit ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2^5}{5^7} + \frac{2^6}{5^7} = \frac{2^5+2^6}{5^7} = \frac{96}{5^7}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden erstmals wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, beträgt demnach

$$\frac{48}{5^7} + \frac{96}{5^7} = \frac{144}{5^7} = 0.0018432$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 8 durchläuft also eine Ameise in knapp 0.2% aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 8 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

❑

Thema 35 – DIOPHANTische Gleichungen

DIOPHANTische[5] Gleichungen sind Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden. Wir betrachten im Folgenden lineare (d.h. die Variablen treten nur in erster Potenz auf) diophantische Gleichungssysteme mit zwei oder mehr Variablen, bei denen weniger Gleichungen als Variablen angegeben werden. Diese Systeme sind also unbestimmt. Im einfachsten Fall ist es eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Solche Aufgaben finden wir vor allem in den Anfangsjahren der MO-Geschichte.

Aufgabe 35.01 – MO041041. Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden. Es stehen drei verschiedene

[5] Diese Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (um 250) benannt.

Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.

Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Lösungshinweise: Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt 600 M – 30 M – 24 M – 18 M = 528 M.

27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch 528 M – 486 M = 42 M übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen. Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht
b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.
c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M
d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M
e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Lösungsvariante: Es seien x, y und z die Anzahl der Bücher, die für 30 M, 24 M bzw. 18 M angeschafft werden. Dann soll gelten:

$$x + y + z = 30\,, 30 \cdot x + 24 \cdot y + 18 \cdot z = 600$$

Das ist äquivalent zu

$$x + y + z = 30\,, 5 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot z = 100$$

Subtrahieren wir dreimal die linke Gleichung von der rechten, ergibt sich $2x + y = 10$. Daraus können wir nun die Lösungen für x und y unmittelbar und nachfolgend für z ablesen, nämlich:

(1) $x = 4$ und $y = 2$ und $z = 24$ oder
(2) $x = 3$ und $y = 4$ und $z = 23$ oder

(3) $x = 2$ und $y = 6$ und $z = 22$ oder
(4) $x = 1$ und $y = 8$ und $z = 21$.

(Wir müssen beachten, dass $x > 0$ und $y > 0$ gelten soll.)

Mit den zugehörigen Proben bestätigen wir, dass alle vier Möglichkeiten Lösungen sind. ❑

Hinweise: Die Lösungen der Gleichung $2x + y = 10$ in ganzen Zahlen lassen sich durch einfaches Probieren finden. Wollen wir jedoch Lösungen mit einer verallgemeinerungsfähigen Methode finden, so lösen wir die gegebene Gleichung nach x auf, führen die Division so weit wie möglich aus und erhalten

$$x = \frac{10 - y}{2} = 5 - \frac{y}{2}.$$

Jetzt sind die Lösungen offensichtlich: Wegen $x > 0$ muss $y < 10$ gelten und unser Suchbereich ist eingeschränkt. Dabei müssen wir die Ganzzahligkeit des Ausdrucks $\frac{y}{2}$ beachten. Setzen wir dafür $g = \frac{y}{2}$, gleichbedeutend mit $2g = y$, so sind können nur alle geradzahligen Werte von $y < 10$ unter den gesuchten Lösungen sein.

Aufgabe 35.02 - MO111011. Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Lösungshinweise: Bezeichnen wir die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z, so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgaben, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32$$
$$40 \cdot x + 60 \cdot y + 75 \cdot z = 1800$$

sind. Angenommen x, y, z seien drei solche natürlichen Zahlen. Dann folgt aus beiden Gleichungen

$$4 \cdot y + 7 \cdot z = 104 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{104 - 7 \cdot z}{4} = 26 - z - \frac{3 \cdot z}{4}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl g mit $4 \cdot g = 3 \cdot z$. Also ist z durch 4 teilbar und wir können für $z = 4 \cdot z'$ die Gleichung als $z' = \frac{g}{3}$ schreiben. Weiter wissen wir, dass wegen $7 \cdot z \leq 104$ die Abschätzung $z < 15$ gilt und damit die Ungleichungen $0 \leq z' < \frac{15}{4} < 4$ folgen. Damit können wir vollständig probieren

z'	z	g	y	x	$x + y + z$	$40 \cdot x + 60 \cdot y + 75 \cdot z$
0	0	0	26	4	32	1800

1	4	3	19	9	32	1800
2	8	6	12	12	32	1800
3	12	9	5	15	32	1800

In den zwei Spalten rechts haben wir mittels Probe die Ergebnisse bestätigt. ❑

Aufgabe 35.03 – MO051024. Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt. Wieviel Autobusse jeder Art sind zu bestellen?

Lösungshinweise: Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt. Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die $a + b + c = n$ (mit ganzzahligem $n \leq 26$) und

$$41a + 29b + 13c = 1007$$

gilt. Aus beiden Gleichungen erhalten wir $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007$ (#). Wir untersuchen nun drei Fälle.

Fall 1: Für $n = 26$ vereinfacht sich die Gleichung (#) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Fall 2: Für $n \leq 24$ ergibt sich aus der Gleichung (#) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.

Fall 3: Für $n = 25$ ergibt sich aus der Gleichung (#) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre. Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.

In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt. Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmögliche Anzahl an Bussen. ❑

Hinweise: Die vorgeschlagene Lösung basiert auf der Angabe einer möglichen Lösung. Dabei bleibt unbeantwortet, wie schwierig diese spezielle Lösung durch Probieren zu finden ist. Betrachten wir deshalb die Gleichung $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007$ zunächst ohne Beschränkung für ganze Zahl n. Wir lösen nach c auf und erhalten

$$b = \frac{41 \cdot n - 1007 - 28c}{12} = 3 \cdot n - 83 - 2 \cdot c + \frac{5 \cdot n - 11 - 4c}{12}$$

Also gibt es eine ganze Zahl g mit

$$12 \cdot g + 4 \cdot c = 5 \cdot n - 11$$

Da die linke Seite durch 4 teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 4 teilbar sein. Damit haben wir eine Variante gefunden, eine möglichst kleine Zahl n zu finden. Doch wir wollen den obigen Schritt noch einmal anwenden und erhalten

$$c = \frac{5 \cdot n - 11 - 12g}{4} = n - 3 - 3g + \frac{n+1}{4}$$

Setzen wir $n = 4n‘ - 1$, so erhalten wir

$$c = -3 \cdot g + 5 \cdot n' - 4 \quad \Longrightarrow c + 3 \cdot g = 5 \cdot n' - 4$$
$$b = 12 \cdot n' - 86 - 2 \cdot c + g$$

Jetzt haben wir den Aufwand für ein systematisches Probieren weitgehend reduziert und verwenden eine Tabelle zum Auffinden der kleinstmöglichen Anzahl der Busse. Wir beachten $c \geq 0$.

$n‘$	$c + 3 \cdot g$	c	g	$b = 12 \cdot n' - 86 - 2 \cdot c + g$
1	1	1[6]	0	< 0
2	6	0	2	< 0
3	11	2	3	< 0
4	16	1	5	< 0
5	21	0	7	< 0
6	26	2	6	< 0
7	31	1	10	84 – 86 – 2 + 10 = 6

Damit könnte $n = 4 \cdot 7 - 1 = 27$ die kleinstmögliche Anzahl der Busse sein, wobei $b = 6$ und $c = 1$ gelten würde. Mit $a = \frac{1007-6\cdot 29-1\cdot 13}{41} = 20$ bestätigt sich, dass $n = 27$ die Lösung darstellt, da es keine kleinere Anzahl von Bussen geben kann.

Wir haben in den Lösungshinweisen intuitiv das EULERsche Reduktionsverfahren zur Lösung DIOPHANTischer Gleichungen verwendet. Es besteht darin, für eine gegebene Gleichung schrittweise die Koeffizienten zu verkleinern, bis eine Lösung offensichtlich

[6] Wir verwenden die kleinstmögliche Zahl $c \geq 0$. Wäre nämlich c größer, wäre g kleiner und die Ungleichung in der rechten Spalte gilt erst recht.

wird. Gehen wir von $ax + by = c$ aus und suchen Lösungen in ganzen Zahlen x und y, so lösen wir diese Gleichung nach der Variablen mit dem kleineren Koeffizienten auf, z.B. für $a < b$

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Wegen $a < b$ existieren ganze Zahlen n und b' mit $b = na + b'$ (wobei wir $0 \leq b' < a$ wählen). Damit können wir die Umformung fortsetzen

$$x = n + \frac{c - b' \cdot y}{a}$$

Damit x ganzzahlig ist, gibt es eine ganze Zahl g mit $a \cdot g + b' \cdot y = c$. Wegen $b' < a$ haben wir nun eine neue diophantische Gleichung mit kleineren Koeffizienten erhalten. Das Verfahren können wir nun schrittweise fortsetzen, bis ein Koeffozient den Wert 1 annimmt.

Beispiel: Man löse die DIOPHANTische Gleichung $23 \cdot x + 17 \cdot y = 41$.

Schritt 1:

$$y = \frac{41 - 23 \cdot x}{17} = 2 - x + \frac{7 - 6 \cdot x}{17}$$
$$17 \cdot g_1 + 6 \cdot x = 7$$

Schritt 2:

$$x = \frac{7 - 17 \cdot g_1}{6} = 1 - 2 \cdot g_1 + \frac{1 - 5 \cdot g_1}{6}$$
$$6 \cdot g_2 + 5 \cdot g_1 = 1$$

Schritt 3:

$$g_1 = \frac{1 - 6 \cdot g_2}{5} = -g_2 + \frac{1 - g_2}{5}$$
$$5 \cdot g_3 + g_2 = 1$$

Wählen wir nun $g = g_3$ als eine beliebige ganze Zahl, so ist $g_2 = 1 - 5 \cdot g$ nach Konstruktion ganzzahlig. Dann ist aber auch

$$g_1 = -g_2 + \frac{1 - g_2}{5} = -1 + 5 \cdot g + \frac{1 - (1 - 5 \cdot g)}{5} = -1 + 6 \cdot g$$

ganzzahlig, ebenso wie

$$x = 1 - 2 \cdot g_1 + \frac{1 - 5 \cdot g_1}{6} = 1 - 2 \cdot (-1 + 6 \cdot g) + \frac{1 - 5 \cdot (-1 + 6 \cdot g)}{6} =$$
$$= 3 - 12 \cdot g_3 + \frac{6 - 30 \cdot g}{6} = 4 - 17 \cdot g$$

und auch

$$y = \frac{41 - 23 \cdot x}{17} = \frac{41 - 23 \cdot (4 - 17 \cdot g)}{17} = -3 + 23 \cdot g.$$

Damit haben wir für jede ganze Zahl g mit $(4 - 17 \cdot g; -3 + 23 \cdot g)$ ein Lösungspaar der DIOPHANTischen Gleichung gefunden, denn es gilt für alle g:

$$23 \cdot (4 - 17 \cdot g) + 17 \cdot (-3 + 23 \cdot g) = 92 - 23 \cdot 17 \cdot g - 51 + 17 \cdot 23 \cdot g = 41$$

Setzen wir $g = 0$, so erhalten wir das Lösungspaar $(4; -3)$. Diese Lösung könnten wir sicherlich auch durch systematisches Probieren finden, indem wir für x kleine Werte einsetzen und prüfen, ob es dann für y ebenfalls eine ganze Zahl gibt, die diese Gleichung erfüllt. Haben wir aber eine spezielle Lösung $(x_0; y_0)$ gefunden, dann ist auch jedes Zahlenpaar mit $(x_0 - 17 \cdot g; y_0 + 23 \cdot g)$ Lösung der DIOPHANTischen Gleichung, weil die Gleichung

$$23 \cdot (-17 \cdot g) + 17 \cdot (23 \cdot g) = 0$$

stets erfüllt ist. Es genügt also, für $ax + by = c$ eine spezielle Lösung $(x_0; y_0)$ mit $ax_0 + by_0 = c$ (beispielsweise durch systematisches Probieren) zu finden, um mit $(x_0 - b \cdot g; y_0 + a \cdot g)$ für alle ganzen Zahlen g weitere Lösungen anzugeben.

Wir bemerken ergänzend, dass damit auch tatsächlich alle Lösungen gefunden wurde. Nehmen wir nämlich an, es gäbe eine weitere Lösung $(x_1; y_1)$ mit $ax_1 + by_1 = c$, dann folgt durch Subtraktion beider Gleichungen

$$a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot (y_1 - y_0) = 0$$

Wir erkennen, dass die Differenz $(y_1 - y_0)$ ein Vielfaches von a sein muss, es also eine ganze Zahl g mit $(y_1 - y_0) = a \cdot g$ gibt. Es gilt also $y_1 = y_0 + a \cdot g$. Daraus folgt unmittelbar $a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot a \cdot g = 0$, d.h. nach Division durch $a \neq 0$ gilt auch $x_1 = x_0 - b \cdot g$. Doch ein solches Zahlenpaar haben wir bereits in der bisherigen Darstellung erfasst.

Schließlich sei ergänzt, dass die Gleichung $ax + by = c$ genau dann in ganzen Zahlen lösbar ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b auch Teiler von c ist.

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband, eine Gemeinschaftsinitiative von Unternehmen und Stiftungen, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband. Die Angebote von Bildung & Begabung profitieren von einem starken Netzwerk aus staatlichen Institutionen, Stiftungen, Unternehmen und weiteren privaten Förderern. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Wenn du dich für mathematische Herausforderungen und deren Hintergründe interessiert, bist du richtig beim Bundeswettbewerb Mathematik. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben mathematischem Schulwissen musst du zur Teilnahme Interesse, Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Auch Gruppenarbeiten mit bis zu drei Teilnahmeberechtigten sind in Runde 1 zugelassen.
Wurden mindesten drei der vier Aufgaben der ersten Runde richtig gelöst, wird ein Preis vergeben. Die Einsendung mit einer richtig gelösten Aufgabe wird mit einer Anerkennungsurkunde gewürdigt.

Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Wir eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erhält jedes Gruppenmitglied die Startberechtigung für die 2. Runde. Die 2. Runde ist ein Einzelwettbewerb. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.“

Der Bundeswettbewerb Mathematik ist kein Konkurrenzwettbewerb. Die Einsendungen werden unabhängig voneinander bewertet und mit Preisen, deren Anzahl nicht eingeschränkt ist, ausgezeichnet.

Die Teilnehmerzahlen[7] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Schuljahr 2021/22).

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)
2023/24	1189	378 (31.8%)	62 (5.2%)	28 (45.1%)
2024/25	142	429 (30.2%)	63 (4.4%)	18 (28.6%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

[7] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2024/25 in Sachsen erstmalig unter dem Bundes-Durchschnitt!

Unter den 63 sächsischen Teilnehmern wurden 4 erste, 10 zweite und 18 dritte Preise vergeben – über die Hälfte der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (50.8%, bundesweit 47.3%). Dazu kamen noch 19 Anerkennungsurkunden (30.2%). Somit wurden in Sachsen 81.0% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 84.2%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 32 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)
2023/24	289	110 (38.1%)	14 (4.8%)	7 (50.0%)
2024/25	341	105 (30.8%)	13 (3.8%)	5 (38.5%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl

** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2024/25 wurden insgesamt 187 Preise vergeben (54.8% aller Teilnehmer), darunter 3 zweite und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (53.8% aller sächsischen Teilnehmer, darunter zwei Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden/finden die regionalen Auszeichnungs-veranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen werden am 9. Dezember bei der CARL-ZEISS-AG in Jena empfangen. Staatssekretär Dr. BERND UWE ALTHAUS aus dem Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur begrüßt die Anwesenden. Nach dem gemeinsamen Mittagsessen wird eine Diskussionsrunde mit Vertretern des Bundeswettbewerbs Mathematik geführt: Prof. Dr. ILKA AGRICOLA (Vorsitzende Beirat Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe), KARL FEGERT (Vorsitzender Korrekturkommission), Dr. EMESE VARGYAS (Mitglied Aufgabenausschuss) und HANNS-HEINRICH LANGMANN (Geschäftsstelle).

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2026 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 2. März 2026 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten
Professor Dr. Th. Spieker
Verlag von August Stein, Potsdam 1895[8].

Vierter Kursus
Abschnitt XXI. – Von den Diophantischen Aufgaben.
§ 297.

Sind zur Bestimmung von mehreren Unbekannten weniger unabhängige Gleichungen gegeben, als Unbekannte vorhanden, so genügen diese Gleichungen im allgemeinen unendlich viele zusammengehörige Werte der Unbekannten; die Aufgabe ist daher eine unbestimmte. Stellt man aber die Bedingung, daß den Unbekannten nur gewisse Arten von Werten, wie rationale, oder ganze, oder ganze positive Zahlen zukommen sollen, so ist die Anzahl der zusammengehörigen Wurzeln oft eine beschränkte. Die Aufgaben, ein unbestimmtes Gleichungssystem unter der Bedingung zu lösen, daß die zusammengehörigen Wurzeln nur ganze positive Zahlen sind, nennt man ein Diophantisches Problem.
Die Lösung Diophantischer Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen führen, ist sowohl nach dem Grade, als auch nach der Zahl der Gleichungen zu trennen. Ist nur eine Gleichung weniger vorhanden, als Unbekannte, so ist die Aufgabe einfach unbestimmt, sind weniger gegeben, so ist sie mehrfach unbestimmt.

a. Diophantische Aufgaben 1ten Grades
§298.

Die allgemeine Form, auf welche die Gleichung jeder Diophantischen Aufgabe 1ten Grades zwischen zwei Unbekannten durch die Operationen des Ordnens gebracht werden kann, ist:

$$ax + by = c$$

worin die Coeffizienten a, b, c ganze positive oder negative Zahlen bedeuten.
Die unbestimmte Gleichung

$$ax + by = c$$

ist aber in ganzen Zahlen unlösbar, wenn a und b einen gemeinschaftlichen Teiler haben, der nicht zugleich in c aufgeht.

[8] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

Denn vorausgesetzt, m wäre ein Teiler von a und b, aber nicht von c, so erhält man durch Division:

$$\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y = \frac{c}{m},$$

eine Gleichung, in welcher $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, $\frac{c}{m}$ aber gebrochen ist. Es giebt daher für x und y keine zusammengehörigen ganzzahligen Werte, welcher dieser Gleichung genügen.

§ 299.

Lösung unbestimmter Gleichungen 1ten Grades zwischen zwei Unbekannten durch die Methode der Reduktion in ganzen absoluten Zahlen.

Die gegebene Gleichung sei:

$$ax + by = c$$

in der a und b als relative Primzahlen und a < b vorausgesetzt werden. Man löse die Gleichung für diejenige Unbekannte, welche den kleineren Coeffizienten hat:

$$x = \frac{c - by}{a},$$

verwandle den Wert in eine gemischte Zahl, indem man mit a in den Zähler dividiert, und so viele Ganze als möglich herausstellt:

$$x = Q - qy + \frac{R - ry}{a}.$$

Da x eine ganze Zahl sein soll, so muß der Restbruch ebenfalls einen ganzzahligen Wert haben; derselbe sei $= \alpha$:

$$\frac{R - ry}{a} = \alpha .$$

Löst man darauf diese Gleichung für y, also:

$$y = \frac{R - a\alpha}{r},$$

und verwandelt wie oben in eine gemischte Zahl:

$$y = Q_1 - q_1\alpha + \frac{R_1 - r_1\alpha}{r},$$

so ist der Restbruch wieder eine ganze Zahl $= \beta$:

$$\frac{R_1 - r_1\alpha}{r} = \beta .$$

Aus dieser Gleichung entwickelt man den Wert für α wieder in Gestalt einer gemischten Zahl, und fährt in der obigen Weise fort bis der Nenner $= 1$ geworden ist, der Ausdruck einer der Hilfsgrößen α, β, γ also eine ganzzahlige Form erhalten hat. In dieser letzten Hilfsgröße drückt man darauf x und y, und erhält daher für dieselben Ausdrücke von ungebrochener Form. Setzt man endlich in diese Ausdrücke für die darin enthaltene Hilfsgröße nach und nach alle ganzen Zahlen ein, so erhält man alle zusammengehörigen ganzzahligen Wurzel dieser Gleichung, mithin auch die verlangten positiven.

…

Übungen[9] zum Abſchnitt XXI.

1. $5x+3y=78$ 2. $12x+35y=156$

5. $7x-9y=20$ 8. $17x+21y=1001$

13. $\begin{cases} 13x - y = 88 \\ 17x - 3y = 20 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 5x - 3y + z = 21 \\ x + 3y - 5z = 23 \end{cases}$

24. Man hat 122 Mark zu bezahlen und beſitzt nur Zehn- und Drei-Mark-Stücke. Wie iſt dies möglich?

27. Die Zahl 159 in zwei Teile zu teilen, von denen der eine durch 8 und der andere durch 13 teilbar iſt.

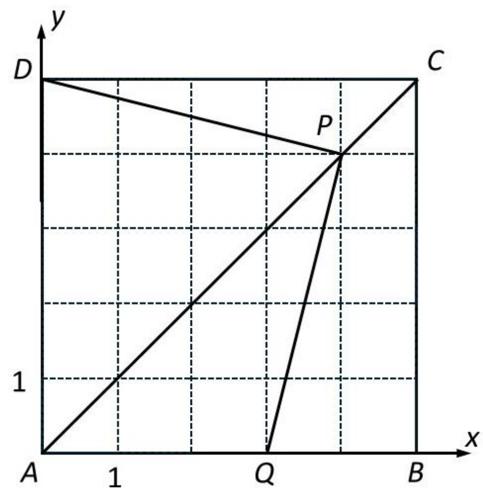
Monatsaufgabe 12/2025[10]

Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke $\overline{CD}$, einen inneren Punkt Q der Strecke $\overline{BC}$ und einen inneren Punkt R der Strecke $\overline{CD}$ zeichnen.

Dabei stellt sich Ulrike die Aufgabe zu erreichen, dass für die Flächeninhalte $F_1(\Delta ABP)$ und $F_2(\Delta AQR)$ die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt. Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare bzw. unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2025



Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke $\overline{AC}$ innen im Verhältnis 4 : 1, so dass $|\overline{AP}| : |\overline{PC}| = 4 : 1$ gilt, und der Punkt Q auf $\overline{AB}$ teile die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 3 : 2, so dass $|\overline{AQ}| : |\overline{QB}| = 3 : 2$ gilt.

Beweisen Sie, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist.

Lösungshinweise: Wir legen das Quadrat ABCD so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so dass der Punkt A mit dem Koordinatenursprung $(0\,;0)$ und der Punkt C mit dem Punkt $(5\,;5)$ zusammenfällt. Damit haben wir auch die Koordinaten $\mathrm{B}(5\,;0)$ und $\mathrm{D}(0\,;5)$.

Da die Länge der Strecke $\overline{AC}$ als Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 5 die Länge $5 \cdot \sqrt{2}$ besitzt, lauten die Koordinaten des Punktes $P\ (4\,;4)$, denn dafür gilt

---

[9] Insgesamt 39 Aufgaben zum Abschnitt XXI.a

[10] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.01.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

$$\overline{AP}:\overline{PC} = 4 \cdot \sqrt{2} : \sqrt{2} = 4 : 1.$$

Dafür benutzen wir entweder den bekannten Zusammenhang zwischen den Längen von Quadratseite und -diagonale, oder wir berechnen die Längen über den EUKLIDischen Abstand der Punkte im Koordinatensystem. Für den Punkt Q finden wir die Koordinaten $(3\,;0)$, denn dafür gilt wie gefordert $\overline{AQ}:\overline{QB} = 3 : 2$.

Nun erkennen wir bereits ohne weitere Analysen, dass die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PD}$ jeweils die Diagonalen in einem Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 4 sind, die durch Drehung um 90° ineinander übergehen. Sie sind somit gleichlang und schließen einen rechten Winkel ein, d.h., das Dreieck ΔPQD ist gleichschenklige-rechtwinklig.

Rechnerisch beweisen wir die Behauptung, indem wir die Anstiege der Geraden PQ und PD ermitteln und die Längen der Strecken $\overline{PD}$ und $\overline{PQ}$ bestimmen.

$$m_{PQ} = \frac{4-0}{4-3} = 4\,;\; m_{PD} = \frac{5-4}{0-4} = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad m_{PQ} = -\frac{1}{m_{PD}}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(4-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}\,;\; |\overline{PD}| = \sqrt{(0-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17}$$
$$\Longrightarrow \quad |\overline{PQ}| = |\overline{PD}|$$

Damit haben wir auch auf diesem Weg nachgewiesen, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist. ❑

Termine

Bundeswettbewerbs Mathematik, 1. Runde 2026 – Start am 1. Dezember 2025 – Einsendeschluss 02. März 2026

Digitale Mathe-Kalender von „Mathe im Leben“, DMV und MATH+ https://www.mathekalender.de/ : „Mathe im Advent“ für die Klassenstufen 7-9 können allein oder im Klassenverband gelöst werden. Weitere Informationen und den Anmeldelink auf https://www.mathe-im-advent.de/de/info/. Der „MATH+ Adventskalender“ ab Klasse 10 bietet knifflige Aufgaben und Einblicke in aktuelle Mathematikforschung. Links zu den Spielregeln und zur Anmeldung unter https://www.mathekalender.de/wp/de/40545-2/ .

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
12/2025	Thema 35	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.