Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik

I/5

Komplexe Zahlen

Zentralstelle für die Fachschulausbildung
Lehrmaterial für Grundlagenfächer -

L 10 5 03 - 3-3

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik I

Arithmetik und Algebra

3. Ausgabe

LEHRBRIEF 5

Komplexe Zahlen

Herausgeber:
Zentralstelle für die Fachschulausbildung
— Lehrmaterial für Grundlagenfächer —
Dresden 1961

Ausgearbeitet von:
Otto Greuel, Dozent an der Ingenieurschule für Elektrotechnik „Fritz Selbmann“, Mittweida

Lektoriert von:
Hans Kreul, Dozent an der Ingenieurschule für Elektroenergie „Dr. Robert Mayer“, Zittau
Wilhelm Leupold, Dozent an der Ingenieurschule für Flugzeugbau, Dresden
Dipl.-Gwl. Helmut Pretzsch, Dozent an der Ingenieurschule für Eisenbahnwesen, Dresden

Bearbeitet von:
Rudolf Conrad, Dozent in der Zentralstelle für die Fachschulausbildung, Lehrmaterial für Grundlagenfächer, Dresden

Redaktionsschluß 30. September 1959

VORWORT

In den bisher von Ihnen durchgearbeiteten Lehrbriefen haben Sie u. a. verschiedene Zahlenarten (z. B. ganze, rationale, reelle Zahlen) kennengelernt. Der vorliegende Lehrbrief soll Sie mit den komplexen Zahlen vertraut machen. Sie werden Ihnen bisher im Alltag kaum begegnet sein. Dessenungeachtet sind die komplexen Zahlen nicht allein für die Mathematik von Bedeutung, sondern dienen auch der Praxis als unentbehrliches Instrument zur Lösung vieler Probleme.

Im ersten Kapitel wird in gedrängter Form unter dem besonderen Gesichtspunkt der Zahlenbereichserweiterung der Aufbau des Zahlensystems einschließlich der komplexen Zahlen behandelt. Dieses Kapitel bildet die Grundlage für ein volles Verständnis des darauf folgenden Stoffes. Überdies werden die hier behandelten Begriffe ein Ausgangspunkt für die Einführung in die höhere Mathematik sein. Studieren Sie deshalb dieses Kapitel gründlich, auch wenn Ihnen einiges schon bekannt ist. Zur erfolgreichen Durcharbeitung der weiteren Kapitel, insbesondere der Kapitel 4 bis 6, sind sichere Kenntnisse in der Trigonometrie Voraussetzung. Die Kapitel 5 und 6 sind vorwiegend für die Studierenden der Fachrichtung Elektrotechnik bestimmt.

1 Aufbau des Zahlensystems – Erweiterung von Zahlenbereichen

1.1 Der Bereich der reellen Zahlen

Bei der quadratischen Gleichung treten Fälle auf, in denen sich keine reelle Zahl angeben läßt, die die Gleichung erfüllt. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Gleichung

$$x^2 + 4 = 0.$$

Die Auflösung nach x führt auf

$$x = \pm \sqrt{-4}.$$

Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -4 ist, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist stets positiv. Die Lösung ist also unter den reellen Zahlen nicht zu finden. Andererseits ist aber $x^2 = (\sqrt{-4})^2 = -4$ und damit

$$x^2 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

Wird also $\sqrt{-4}$ als Zahl anerkannt, so hat die quadratische Gleichung eine Lösung. Es fragt sich nur, ob es sinnvoll ist, $\sqrt{-4}$ als Zahl zu erklären. In diesem Falle würde sich allerdings $\sqrt{-4}$ nicht in den Zahlbegriff, wie er bei den reellen Zahlen vorliegt, einfügen. Der Begriff der Zahl müßte einen neuen Inhalt bekommen. Um Ihnen eine klare Vorstellung von einer solchen Erweiterung des Zahlbegriffs zu verschaffen, soll zunächst die Entwicklung des Begriffs der reellen Zahl von den natürlichen Zahlen her dargestellt werden.

Durch das Zählen ergeben sich die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Sie sind Zahlen im ursprünglichen Sinne des Wortes, da man mit ihnen zählen kann. Man nennt sie deshalb **natürliche Zahlen.**

Als anschauliche Darstellung der natürlichen Zahlen ist Ihnen der Zahlenstrahl bekannt (Bild 1). Auf ihm sind die natürlichen Zahlen in gleichen Abständen aufgetragen. Das Zählen erscheint auf dem Zahlenstrahl als ein Vorwärtsschreiten mit konstanter Schrittlänge.

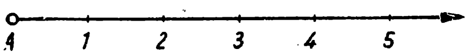

Bild 1

Das Zählen steht mit dem Rechnen in engem, wechselseitigem Zusammenhang. Faßt man mehrere Zählschritte zu einem zusammen, so gelangt man zur einfachsten Rechenoperation, der Addition. Liegen mehrere gleiche Summanden vor, so führt das Zusammenfassen dieser gleichen Summanden zur Multiplikation:

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5.$$

Die Multiplikation gleicher Faktoren führt zum Potenzieren:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4.$$

Addition, Multiplikation und Potenzieren werden als direkte Rechenoperationen bezeichnet.

Die Anwendung der direkten Rechenoperationen gibt keinerlei Veranlassung, neue Zahlen einzuführen. Denn die Addition, die Multiplikation und das Potenzieren zweier natürlicher Zahlen liefert stets wieder eine natürliche Zahl. Die Durchführung der direkten Rechenoperationen ist also innerhalb des Bereichs der natürlichen Zahlen uneingeschränkt möglich. Anders ist es bei den indirekten Rechenoperationen. Stehen nur die natürlichen Zahlen zur Verfügung, so stößt man bei der Subtraktion auf Schwierigkeiten: Die Aufgabe

$$a - b$$

ist innerhalb des Bereichs der natürlichen Zahlen nur lösbar, wenn $a > b$ ist. (Da die Null keine natürliche Zahl ist, ist auch die Aufgabe $a - a$ ausgeschlossen.) Soll die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar sein, so muß der Bereich der natürlichen Zahlen erweitert werden. Dies geschieht durch Hinzunehmen der negativen ganzen Zahlen und der Null. Man nennt den Zahlenbereich, der die positiven ganzen (natürlichen) Zahlen, die negativen ganzen Zahlen und die Null umfaßt, den Bereich der **ganzen Zahlen.** Der Bereich der ganzen Zahlen ist eine Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen, da er die natürlichen Zahlen enthält.

Die Subtraktion kann als ein Rückwärtsschreiten auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden. Das gibt Veranlassung, zur Veranschaulichung der negativen ganzen Zahlen den Zahlenstrahl über A hinaus nach links zu verlängern. An die Stelle des alten Punktes A tritt jetzt die Null. Es entsteht eine Zahlengerade. In Bild 2 ist die Aufgabe $3 - 5 = -2$ auf der Zahlengeraden dargestellt.

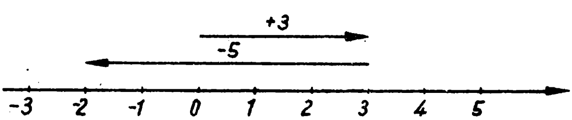

Bild 2

Die Division im Bereich der ganzen Zahlen führt auf ähnliche Schwierigkeiten, wie die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen. Die Aufgabe

$$a : b \qquad \text{mit} \qquad b \neq 0$$

hat im Bereich der ganzen Zahlen nur dann ein Ergebnis, wenn b in a enthalten ist. Die Aufgabe

$$11 : 5$$

hat im Bereich der ganzen Zahlen kein Ergebnis. Soll die Division uneingeschränkt durchführbar sein, so muß der Zahlenbereich erneut erweitert werden. Man schreibt

$$11 : 5 = \frac{11}{5}, \quad \text{allgemein } a : b = \frac{a}{b},$$

und nennt das Ergebnis $\frac{11}{5}$ bzw. $\frac{a}{b}$ der Divisionsaufgabe einen Bruch. Die Gesamtheit aller Zahlen $\frac{a}{b}$ (a, b ganze Zahl, $b \neq 0$) nennt man **rationale Zahlen.** Der Bereich der rationalen Zahlen umfaßt auch die ganzen Zahlen, denn jede ganze Zahl a läßt sich als Bruch $\frac{a}{1}$ schreiben. Die Gesetze, die sich für das Rechnen mit Brüchen ergeben, zeigen, daß auch die Division von Brüchen stets wieder einen Bruch, also eine rationale Zahl, ergibt. Die vorgenommene Erweiterung genügt demnach der Forderung, daß die Division im neuen Bereich uneingeschränkt durchführbar sein soll. Die Erweiterung ist also vollständig.

Die rationalen Zahlen lassen sich auf der Zahlengeraden eindeutig darstellen. Dabei finden Brüche mit dem Nenner $\neq 1$ ihren Platz zwischen den ganzen Zahlen (Bild 3).

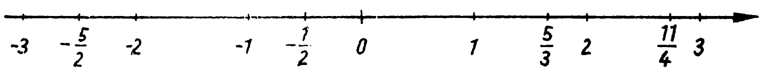

Bild 3

Auch der Bereich der rationalen Zahlen ist noch nicht umfassend genug, um sämtliche Rechenarten uneingeschränkt durchführen zu können.

Ähnlich wie die Division im Bereich der ganzen Zahlen ist das Radizieren im Bereich der rationalen Zahlen einer Einschränkung unterworfen. Die Divisionsaufgabe $a : b$ ist nur dann im Bereich der ganzen Zahlen lösbar, wenn b in a enthalten ist. Entsprechend kann die Wurzel

$$\sqrt[n]{a}$$

nur dann durch eine rationale Zahl angegeben werden, wenn sich a in n gleiche rationale Faktoren zerlegen läßt. Beispiele dafür sind

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}.$$

Aber schon $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Zunächst kann $\sqrt{2}$ keine ganze Zahl sein, denn es ist $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$. $\sqrt{2}$ ist aber auch kein Bruch, denn das Quadrat eines Bruches ist niemals eine ganze Zahl. Das Radizieren führt also auf Aufgaben, die im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar sind. Dies zwingt dazu, den Bereich der rationalen Zahlen erneut zu erweitern.

Man nennt jede Zahl, die sich nicht durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ angeben läßt, irrational (das bedeutet: nichtrational). Dazu gehören also $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{-10}$, $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ usw. und Ausdrücke wie $(1 - \sqrt{5})$ u. ä.

Es gibt auch irrationale Zahlen, die nicht als Wurzel einer rationalen Zahl geschrieben werden können. Dazu gehören der größte Teil der Logarithmen, die meisten Werte der trigonometrischen Funktionen sowie die Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ und die im Kapitel 5 auftretende Zahl $e = 2{,}71828\ldots$ Auch $0{,}1010010001\ldots$ oder $5{,}383388333888\ldots$ sind irrationale Zahlen, da diese unendlichen Dezimalbrüche keine Periode aufweisen, also nicht in Brüche umgeschrieben werden können.

Sämtliche rationalen und irrationalen Zahlen ergeben den Bereich der **reellen Zahlen.** Rationale und irrationale Zahlen lassen sich gemeinsam auf der Zahlengeraden darstellen.

1.2 Der Bereich der komplexen Zahlen

Die Erweiterung des Zahlenbereichs führte von den natürlichen Zahlen über die ganzen und die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Jede Erweiterung wurde durch den jeweils vorliegenden Zahlenbereich und die Bedürfnisse der Rechenpraxis vorgeschrieben. Bei den vorgenommenen Erweiterungen änderte sich zwangsläufig der Zahlbegriff. Er wurde umfassender und gewann an Anwendbarkeit, verlor aber bei jeder Erweiterung an Anschaulichkeit. Mit den natürlichen Zahlen kann man zählen und addieren. Die Subtraktion jedoch ist eingeschränkt. Die Einführung der negativen Zahlen behebt diesen Mangel. Eine negative Zahl läßt sich aber nicht mehr durch eine Anzahl von Dingen veranschaulichen. Auch die Brüche sind für das Zählen ungeeignet. Ihre Deutung als Teile eines Ganzen oder mehrerer Ganzer stellt neue Anforderungen an unser Vorstellungsvermögen. Dafür ist die Division im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt durchführbar, und jede Strecke läßt sich jetzt mit beliebiger Genauigkeit messen. Die irrationalen Zahlen stehen dem ursprünglichen Zahlbegriff — wie er bei den natürlichen Zahlen vorliegt — noch ferner. Während sich die Brüche als Teil einer Strecke darstellen lassen (Bild 4), ist für irrationale Zahlen diese Veranschaulichung nicht mehr möglich. Trotzdem sind die irrationalen Zahlen noch durch Strecken darstellbar. So wird $\sqrt{2}$ durch die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 dargestellt. Damit ist auch ihr Platz auf dem Zahlenstrahl eindeutig festgelegt (Bild 5). Die weitere Entfernung vom ursprünglichen Zahlbegriff schafft den Vorteil, daß dem Radizieren nicht mehr die engen Grenzen gesetzt sind wie im Bereich der rationalen Zahlen. Die Erweiterung des Zahlenbereichs zum Bereich der reellen Zahlen kann aber noch nicht voll befriedigen, denn Aufgaben wie $\sqrt{-4}$ bleiben weiterhin unlösbar. Die Forderung, auch für Wurzeln mit geradem Exponenten und negativem Radikanden eine Lösung zuzulassen, zwingt zur erneuten Erweiterung des Zahlenbereichs. Nach den bisherigen Erfahrungen wird man allerdings nicht erwarten können, daß dabei der Zahlbegriff der alte bleibt. Vielmehr wird der Zahlbegriff wiederum einen neuen Inhalt bekommen. Unter anderem wird sich zeigen, daß sich die neu einzuführenden Zahlen nicht mehr auf der Zahlengeraden darstellen lassen.

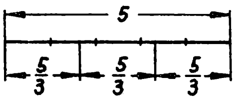

Bild 4

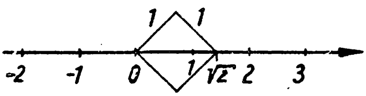

Bild 5

Wir betrachten zunächst alle im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbaren Quadratwurzeln, wie

$$\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-9}, \quad \sqrt{-\frac{3}{4}}, \quad \sqrt{-\pi}.$$

Sie haben allgemein die Form $\sqrt{-a}$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Diese im Bereich der reellen Zahlen unlösbaren Rechenaufgaben werden als neue Zahlen eingeführt. Man nennt sie **imaginäre Zahlen**. (Vergleichen Sie dieses Vorgehen mit dem, das bei der Erweiterung des Bereichs der ganzen Zahlen angewendet wurde! Dort wurden die Aufgaben $a : b = \frac{a}{b}$ als neue Zahlen eingeführt.) Es muß nun noch festgestellt werden, wie mit diesen neuen Zahlen zu rechnen ist. Zunächst läßt sich $\sqrt{-a}$ nach den Wurzelgesetzen noch umformen:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{a}$ ist uns bekannt, da a nach Voraussetzung eine positive reelle Zahl ist. Wir stellen also fest, daß $\sqrt{-a}$ ein reellzahliges Vielfaches von $\sqrt{-1}$ ist. Es ist zum Beispiel $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, also das Zweifache von $\sqrt{-1}$. Damit ist die Aufgabe $\sqrt{-a}$ auf die Aufgabe $a\sqrt{-1}$ zurückgeführt. Nach Euler[1] schreibt man i für $\sqrt{-1}$ und nennt i die **imaginäre Einheit**. Mit dieser Schreibweise ist also

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i \quad \text{und} \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{a}.$$

Nach den Wurzelgesetzen ist

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,$$

also gilt als **Definition der imaginären Einheit**

$$\boxed{i^2 = -1} \tag{1}$$

Prägen Sie sich diese Definition fest ein und rechnen Sie $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ nicht aus, indem Sie $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = 1$ rechnen, denn eine Wurzel wird nicht quadriert, indem man den Radikanden quadriert. Nach der Erklärung der Wurzel ergibt das Quadrieren einer Quadratwurzel den Radikanden. Also ist

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Bereits im 16. Jahrhundert hat der Italiener Cardano mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen wirklich gerechnet. Seit dieser Zeit ist auch die Bezeichnung *imaginäre* Zahlen verbreitet. Sie bedeutet so viel wie *eingebildete* oder *unwirkliche* Zahlen. Obwohl diese Bezeichnung völlig unzutreffend ist — denn es handelt sich ja gerade um wirkliche Zahlen, die ebenso wie die reellen Zahlen allen Grundgesetzen der Arithmetik gehorchen — hat sie sich bis heute erhalten. Die Bezeichnung „imaginär" läßt erkennen, welche unklaren Vorstellungen damals mit diesem Begriff noch verbunden waren. Die eigentliche Entwicklung der Lehre vom Imaginären beginnt erst mit dem deutschen Mathematiker Karl Friedrich Gauß (1777 bis 1855), Professor der Mathematik und Leiter der Sternwarte in Göttingen. Heute bereiten die imaginären Zahlen keinerlei Schwierigkeiten mehr. Das Rechnen mit imaginären Größen ist ein ganz unentbehrliches Hilfsmittel der Mathematik und Technik geworden.

Die Summe zweier imaginärer Zahlen ist wieder eine imaginäre Zahl, z. B.

$$2i + 3i = 5i.$$

[1] Leonhard Euler, 1707 bis 1783, Schweizer Mathematiker; leistete Hervorragendes auf allen Gebieten der Mathematik.

Dagegen ist die Summe einer imaginären und einer reellen Zahl weder reell noch imaginär. Beispiele dafür sind:

$$2 + 5i, \quad 4 - 8i, \quad a + bi.$$

Diese Summen lassen sich nicht weiter zusammenfassen. Wir müssen sie ebenfalls als Zahlen unseres neuen Bereichs ansehen, ähnlich wie auch $(m + n)$ eine Zahl ist. (Einen ähnlichen Fall stellt z. B. $(1 + \sqrt{3})$ im Bereich der reellen Zahlen dar. Nur wenn für $\sqrt{3}$ näherungsweise eine rationale Zahl, etwa 1,732, gesetzt wird, läßt sich die Summe weiter zu einer r a t i o n a l e n Zahl zusammenfassen.) Die Zahl

$$\boldsymbol{a + bi}$$

hat die Besonderheit, daß sie sich aus einem reellen und einem imaginären Summanden zusammensetzt. Sie wird ihrer zusammengesetzten Form wegen als **komplexe Zahl** bezeichnet. Dabei heißt die reelle Zahl a der **Realteil** und der reelle Faktor b der **Imaginärteil** der komplexen Zahl $a + bi$. Die Gesamtheit aller Zahlen $a + bi$ bildet den Bereich der komplexen Zahlen. In ihm sind die reellen und die imaginären Zahlen enthalten. Ist nämlich $b = 0$, so erhalten wir eine reelle Zahl, ist $a = 0$, so liegt eine imaginäre Zahl vor. Es wird sich zeigen, daß alle Rechenarten im Bereich der komplexen Zahlen uneingeschränkt durchführbar sind. Damit ist die Erweiterung des Zahlenbereichs mit der Einführung der komplexen Zahlen abgeschlossen.

Die reellen Zahlen können sämtlich umkehrbar eindeutig auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Das heißt, jeder reellen Zahl entspricht genau

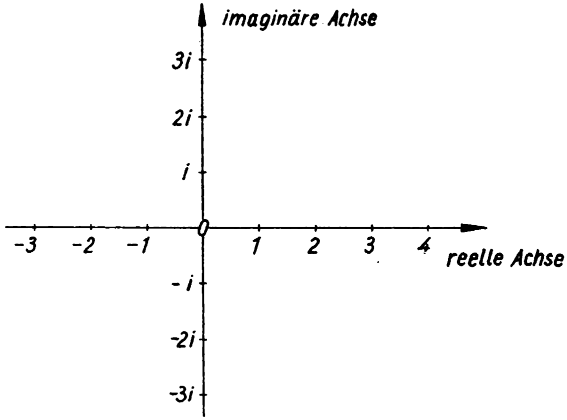

Bild 6

ein Punkt auf der Zahlengeraden, und jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.

Für die komplexen Zahlen ist die Darstellung auf der Zahlengeraden nicht mehr möglich, denn jede komplexe Zahl $a + bi$ ist durch **zwei** reelle Zahlen a und b bestimmt. Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht aber nur **eine** reelle Zahl.

Der Umstand, daß jede komplexe Zahl eindeutig durch ein Zahlenpaar $(a; b)$ bestimmt ist, gibt Veranlassung, die komplexen Zahlen in einer Zahlen**ebene** darzustellen. Sie kennen bereits die Darstellung eines Zahlenpaares $(x; y)$ in einem xy-Koordinatensystem. In der gleichen Weise lassen sich die komplexen Zahlen in einer komplexen Zahlenebene darstellen. Wir zeichnen dazu ein Achsenkreuz und bezeichnen die waagerechte Achse als **reelle Achse**, die senkrechte als **imaginäre Achse**.

Auf der reellen Achse wird die reelle Einheit 1, auf der imaginären Achse die imaginäre Einheit i abgetragen (Bild 6). Auf der reellen Achse sind also alle reellen, auf der imaginären Achse alle imaginären Zahlen veranschaulicht. Die komplexe Zahl $a + bi$ wird durch

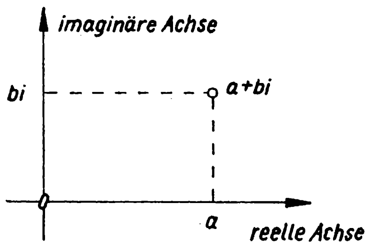

Bild 7

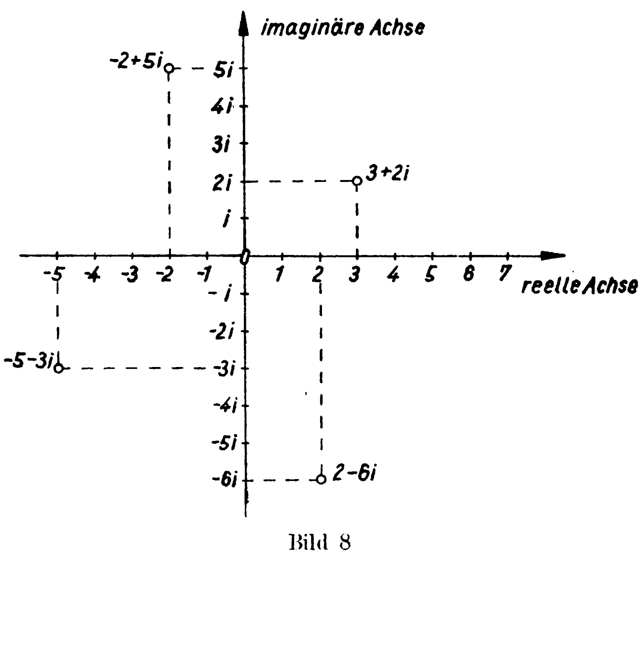

Bild 8

den Punkt dargestellt, der den Abstand a von der imaginären Achse und den Abstand b von der reellen Achse hat (Bild 7).

Diese Darstellung der komplexen Zahlen wurde durch Gauß Allgemeingut der Mathematik. Die von reeller und imaginärer Achse aufgespannte Ebene wird deshalb nach ihm **Gaußsche Zahlenebene** genannt.
In Bild 8 sind die Zahlen $3 + 2i$, $-2 + 5i$, $-5 - 3i$ und $2 - 6i$ in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.

Zusammenfassung

Aus der Forderung, die Subtraktion uneingeschränkt ausführen zu können, ergibt sich die Einführung der negativen Zahlen. Die Forderung der uneingeschränkten Division führt zur Einführung der gebrochenen Zahlen. Das Radizieren verlangt die Einführung der irrationalen Zahlen. In gleicher Weise ergeben sich aus der Anwendung des Radizierens auf negative Radikanden bei geradem Wurzelexponenten die imaginären Zahlen und damit schließlich der Bereich der komplexen Zahlen. Mit der Einführung der komplexen Zahlen ist die Erweiterung des Zahlenbereichs abgeschlossen, da die Anwendung der Rechenarten auf komplexe Zahlen stets wieder komplexe Zahlen liefert. Zusammenfassend soll noch einmal eine Übersicht über die Zahlenbereiche gegeben werden.

- Komplexe Zahlen
  - reelle Zahlen
    - rationale Zahlen
      - ganze Zahlen
        - natürliche Zahlen
        - negative ganze Zahlen, Null
      - gebrochene Zahlen
    - irrationale Zahlen
  - imaginäre Zahlen

2 Das Rechnen mit imaginären Zahlen

Für das Rechnen mit komplexen Zahlen gelten die gleichen Rechengesetze wie bei den reellen Zahlen. Zu beachten ist lediglich die bei der Einführung der komplexen Zahlen angeführte Definitionsgleichung

$$i^2 = -1.$$

Im folgenden soll zunächst die Anwendung der Rechenoperationen auf die imaginären Zahlen mit Ausnahme des Radizierens gezeigt werden.

Zur Schreibweise der imaginären Zahlen sei noch gesagt, daß es an sich gleichgültig ist, ob man ai oder ia schreibt; ai ist ein Produkt, dessen Faktoren man vertauschen kann. Es ist aber üblich, i nach dem reellen Faktor zu schreiben. Um Irrtümer zu vermeiden, schreibt man bei Wurzeln allerdings besser $i\sqrt{a}$ statt $\sqrt{a}\cdot i$.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie $\sqrt{-9}+\sqrt{-25}+\sqrt{-4}$*!*

Lösung:

$$\begin{aligned}\sqrt{-9}+\sqrt{-25}+\sqrt{-4} &= \sqrt{9}\sqrt{-1}+\sqrt{25}\sqrt{-1}+\sqrt{4}\sqrt{-1}\\ &= 3i+5i+2i=\underline{10i}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie $\sqrt{-x^2}-\sqrt{-y^2}+\sqrt{-z^2}$*!*

Lösung:

$$\sqrt{-x^2}-\sqrt{-y^2}+\sqrt{-z^2}=xi-yi+zi=\underline{\underline{(x-y+z)\,i}}$$

Lehrbeispiel 3

$$\sqrt{-121}+\sqrt{-4}-\sqrt{-169}=11i+2i-13i=\underline{\underline{0}}$$

Die Lehrbeispiele zeigen:

> **Die algebraische Summe imaginärer Zahlen ist entweder imaginär oder gleich Null.**

Bevor wir zur Multiplikation imaginärer Zahlen übergehen, sollen zunächst die Potenzen von i betrachtet werden. Unter Beachtung der Definitionsgleichung $i^2=-1$ erhält man der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
i^1 &= & &= +i\\
i^2 &= & &= -1\\
i^3 &= i^2\cdot i &= -1\cdot i &= -i\\
\hline
i^4 &= i^2\cdot i^2 &= (-1)(-1) &= +1\\
i^5 &= i^4\cdot i &= +1\cdot i &= +i\\
i^6 &= i^4\cdot i^2 &= +1\cdot(-1) &= -1\\
i^7 &= i^4\cdot i^3 &= +1\cdot(-i) &= -i\\
\hline
i^8 &= i^4\cdot i^4 &= (+1)(+1) &= +1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Weiter gilt (ab i^4)

Sie stellen eine periodische Wiederholung der Werte der Potenzen von i fest.

Bei den reellen Zahlen wurde wegen

$$\frac{a^1}{a^1} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1}$$

festgesetzt: $a^0 = 1$.

Sollen die Potenzgesetze auch für imaginäre Zahlen uneingeschränkt gelten, so gelangt man ganz entsprechend wegen

$$\frac{i^1}{i^1} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{i^1}{i^1} = i^{1-1}$$

zu der Definition

$$i^0 = 1.$$

Mit dieser Definition folgt allgemein für die Potenzen von i:

$$\boxed{\begin{aligned} i^{4n} &= +1 \\ i^{4n+1} &= +i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \end{aligned}} \qquad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

Formel (2) erleichtert das Rechnen mit Potenzen von i. Aus ihr folgt: Addiert oder subtrahiert man im Exponenten ein ganzzahliges Vielfaches von 4 einer beliebigen Potenz von i, so bleibt der Wert der Potenz erhalten.

Lehrbeispiel 4

$$i^9 = i^{8+1} = i^{4\cdot 2+1} = i^1 = \underline{\underline{i}}$$

Lehrbeispiel 5

$$i^{31} = i^{28+3} = i^{4\cdot 7+3} = i^3 = \underline{\underline{-i}}$$

Welche Werte ergeben sich nun für die Potenzen von i mit negativem Exponenten? Betrachten wir $i^{-1} = \frac{1}{i}$.

Man erweitert entweder den Bruch mit i^3 und erhält

$$\frac{1}{i} = \frac{i^3}{i \cdot i^3} = \frac{i^3}{i^4} = i^3 = \underline{\underline{-i}}$$

oder multipliziert den Zähler mit i^4 (das ist erlaubt, da $i^4 = 1$ ist), und es ergibt sich

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = \underline{\underline{-i}}.$$

Auch der Satz, daß bei Potenzen von i im Exponenten ein ganzzahliges Vielfaches von 4 addiert oder subtrahiert werden kann, läßt sich anwenden. Durch Addition eines entsprechenden Vielfachen von 4 im Exponenten ergibt sich sofort ein positiver Exponent:

$$i^{-1} = i^{-1+4} = i^3 = \underline{\underline{-i}}.$$

Lehrbeispiel 6

$$i^{-10} = i^{-10+12} = i^2 = \underline{\underline{-1}}$$

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5} und i^{-6}*!*

Lösung:

Für i^{-1}, erhielten Sie $-i$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} i^{-2} &= i^{-2+4} = i^2 = -1 \\ i^{-3} &= i^{-3+4} = i^1 = +i \\ i^{-4} &= i^{-4+4} = i^0 = +1 \\ \hline i^{-5} &= i^{-5+8} = i^3 = -i \\ i^{-6} &= i^{-6+8} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Im reellen Zahlenbereich können die Faktoren eines Produktes vertauscht werden. Die Anwendung dieses Gesetzes auf Produkte imaginärer Zahlen zeigen die nächsten. Lehrbeispiele.

Lehrbeispiel 8

$$10i \cdot 8 \cdot 3i = 10 \cdot 8 \cdot 3 \cdot i^2 = \underline{\underline{-240}}$$

Lehrbeispiel 9

$$i\sqrt{-16}\sqrt{-\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{-27} = i \cdot i \cdot 4 \cdot i \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) = -4 \cdot i^3 = \underline{\underline{4i}}$$

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß Sie nicht rechnen können

$$i\sqrt{-16}\sqrt{-\frac{1}{9}}\sqrt[3]{-27} = i\sqrt{(-16)\left(-\frac{1}{9}\right)} \cdot \sqrt[3]{-27} = i\sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt[3]{-27} = -4i.$$

Lehrbeispiel 10

$$\frac{5i}{\sqrt{-25}} = \frac{5i}{5i} = \underline{\underline{1}}$$

Lehrbeispiel 11

Berechnen Sie $\frac{8i^2(3i)^5}{81i \cdot 6i^{18}}$*!*

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{8i^2(3i)^5}{81i \cdot 6i^{18}} &= \frac{8i^2 \cdot 3^5 \cdot i^5}{81 \cdot 6 \cdot i^{19}} = \frac{8 \cdot 3^5}{81 \cdot 6} i^{2+5-19} = 4i^{-12} \\ &= 4i^{-12+12} = 4i^0 = 4 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 12

Berechnen Sie $\frac{1}{i^9} - \frac{1}{i^{11}}$*!*

Lösung:

$$\frac{1}{i^9} - \frac{1}{i^{11}} = i^{-9} - i^{-11} = i^{-9+12} - i^{-11+12} = i^3 - i^1 = -i - i = \underline{\underline{-2i}}$$

Aus den Lehrbeispielen haben Sie erkannt, daß Produkte und Quotienten imaginärer Zahlen wieder imaginär oder reell sind.

Übungen

1. *a)* $3\sqrt{-100}$ *b)* $\sqrt{-a^2b^2}$ *c)* $\sqrt{81}\sqrt{-\frac{16}{9}}$
2. *a)* $\sqrt{-289} - \sqrt{-196} - \sqrt{-9}$ *b)* $\sqrt{-32} - \frac{1}{5}\sqrt{-1250} + 2\sqrt{-2}$
3. *a)* $\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}i + \frac{5}{6}i$ *b)* $\frac{3}{8}i - \frac{8}{3}i + \sqrt{-9}$
4. *Begründen Sie, warum sich der Wert für i^m nicht ändert, wenn Sie im Exponenten von i ein ganzzahliges Vielfaches von 4 addieren bzw. subtrahieren!*
5. *a)* i^{14} *b)* i^{19} *c)* i^{28} *d)* i^{33} *e)* i^{-61}
   f) $-i^{61}$ *g)* $-i^{-61}$ *h)* $(-i)^{61}$ *i)* $(-i)^{-61}$
6. *a)* $\left(-\frac{1}{3}i\right)\left(-\frac{9}{4}i\right)$ *b)* $\left(-\frac{xi}{8}\right)\left(-\frac{2yi^5}{5}\right)$ *c)* $\sqrt{-a^2}\sqrt{-b^2}$
   d) $i\sqrt{-xy}\sqrt{-xy}$ *e)* $\frac{1}{i}\sqrt{-a}\sqrt{-ab^2}$
7. *Berechnen Sie für $a > b$*
   a) $\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}$ *b)* $\sqrt{a-b}\sqrt{(b-a)^5}$ *c)* $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}$!
8. *a)* $\frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^9}$ *b)* $\frac{1}{2i^7} - \frac{1}{3}i - \frac{5}{6}i^{31} - \frac{2(9i)^2}{(3i)^5}$

Zusammenfassung

Die im Bereich der reellen Zahlen gültigen Rechengesetze gelten bei Beachtung der Definition

$$i^2 = -1$$

auch für imaginäre Zahlen.

Algebraische Summen imaginärer Zahlen sind entweder wieder imaginär oder gleich Null.

Produkte, Quotienten und Potenzen imaginärer Zahlen können imaginär oder reell sein, je nachdem, ob der Exponent von i eine ungerade oder gerade Zahl ist.

3 Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ist die Summe einer reellen und einer rein imaginären Zahl also

$$z = a + bi.$$

Der Buchstabe z soll im folgenden stets eine komplexe Zahl bedeuten. Bevor wir mit komplexen Zahlen rechnen, sei noch folgendes erklärt:

1. Unterscheiden sich zwei komplexe Zahlen nur durch das Vorzeichen des imaginären Bestandteils, so nennt man sie **konjugiert komplex.**

$$z = a + bi \qquad \text{und} \qquad \bar{z} = a - bi$$

sind konjugiert komplexe Zahlen.

2. Zwei komplexe Zahlen sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre reellen und imaginären Bestandteile einander gleich sind. $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ sind also nur dann einander gleich, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ ist.

Die zuletzt genannte Behauptung leuchtet Ihnen sofort ein, wenn Sie bedenken, daß jede komplexe Zahl nur durch einen Punkt der Gaußschen Zahlenebene dargestellt wird, der ganz bestimmte Abstände von den beiden Achsen hat.

Lehrbeispiel 13

Bilden Sie die konjugiert komplexe Zahl zu $z = 3 + 2i$!

Lösung:

$$\underline{\underline{\bar{z} = 3 - 2i}}$$

Lehrbeispiel 14

Die beiden komplexen Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = 5 - 4i$ sollen einander gleich sein. Wie groß sind a und b?

Lösung:

$$z_1 = z_2$$
$$a + bi = 5 - 4i$$

Gleichheit kann nur bestehen, wenn die Real- und Imaginärteil einander gleich sind, also ist $\underline{\underline{a = 5}}$ und $\underline{\underline{b = -4}}$.

Übungen

9. *Wie heißen die konjugiert komplexen Zahlen zu*
   a) $z = -0{,}4 + 1{,}2i$, *b)* $z = x - yi$?

10. *Bestimmen Sie a und b aus*
    a) $-3 + 2i = a + bi$, *b)* $-(8 + i) = a + bi$, *c)* $3 = a + bi$,
    d) $-i = a + bi$, *e)* $0 = a + bi$!

3.1 Addition und Subtraktion

Es sei nochmals betont, daß alle Rechengesetze, die Sie für den Bereich der reellen Zahlen kennengelernt haben, unter Berücksichtigung der Definition (1) auch im Bereich der komplexen Zahlen gelten. Für die Addition gilt das Grundgesetz der Vertauschbarkeit der Summanden. Also können in der Summe

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$$

die reellen bzw. imaginären Bestandteile jeweils zusammengefaßt werden:

$$\underline{\underline{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.}}$$

Das Ergebnis ist wieder eine komplexe Zahl mit dem Realteil $(a_1 + a_2)$ und dem Imaginärteil $(b_1 + b_2)$.

Für die Differenz zweier komplexer Zahlen folgt analog

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine komplexe Zahl mit dem Realteil $(a_1 - a_2)$ und dem Imaginärteil $(b_1 - b_2)$.

Es gilt also:

> Komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Real- bzw. Imaginärteile für sich addiert bzw. subtrahiert.

Insbesondere gilt für die Summe bzw. Differenz konjugiert komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (a - bi) &= 2a, \\ (a + bi) - (a - bi) &= 2bi. \end{aligned}$$

Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell, ihre Differenz ist imaginär.

Lehrbeispiel 15

Bilden Sie Summe und Differenz für

a) $z_1 = 5 + 2i, \quad z_2 = 2 + 3i;$

b) $z_1 = 8 - 5i, \quad z_2 = 5 - 3i;$

c) $z_1 = -3 + i, \quad z_2 = -3 - i!$

Lösung:

a) $z_1 + z_2 = (5 + 2i) + (2 + 3i) = (5 + 2) + (2 + 3)\,i = \underline{\underline{7 + 5i}}$

$z_1 - z_2 = (5 + 2i) - (2 + 3i) = (5 - 2) + (2 - 3)\,i = \underline{\underline{3 - i}}$

b) $z_1 + z_2 = (8 - 5i) + (5 - 3i) = (8 + 5) + (-5 - 3)\,i = \underline{\underline{13 - 8i}}$

$z_1 - z_2 = (8 - 5i) - (5 - 3i) = (8 - 5) + (-5 + 3)\,i = \underline{\underline{3 - 2i}}$

c) $z_1 + z_2 = (-3 + i) + (-3 - i) = (-3 - 3) + (1 - 1)\,i = \underline{\underline{-6}}$

$z_1 - z_2 = (-3 + i) - (-3 - i) = (-3 + 3) + (1 + 1)\,i = \underline{\underline{2i}}$

(z_1 und z_2 sind konjugiert komplexe Zahlen!)

Übungen

11. Berechnen Sie

a) $(-1 - i) - (1 + i)$, *b)* $(11a - 5bi) - (6a - 3bi)$,

c) $(-2a + 3i) + (-2a + 6i)$,

d) $(1 + 2i) - (-2 + 3i) + (-5 + i) - (5 + 4i) - (-1 - 9i) + (5 - 8i)$,

e) $-(2 + 3i) - (-2 + 3i)$*!*

12. Wann ist die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen

a) reell, b) imaginär?

3.2 Multiplikation und Division

3.21 Multiplikation. Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden des einen Faktors mit jedem Summanden des anderen Faktors multipliziert. Nach diesem Grundgesetz der Multiplikation liefern die komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ das Produkt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_2 b_1 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)\,i. \end{aligned}$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl.

Lehrbeispiel 16

$(4 + 5i)(3 - 2i) = 12 + 15i - 8i - 10i^2 = 12 + 7i + 10 = \underline{\underline{22 + 7i}}$

Lehrbeispiel 17

$(4 + 5i)(5 + 4i) = 20 + 25i + 16i + 20i^2 = 20 + 41i - 20 = \underline{\underline{41i}}$

Sie sehen aus Lehrbeispiel 17, daß sich bei der Multiplikation komplexer Zahlen auch imaginäre Produkte ergeben können.

Lehrbeispiel 18

Berechnen Sie $(4 + 5i)(5 + 4i)(2 - i)$*!*

Lösung:

Nach Lehrbeispiel 17 ist

$$(4 + 5i)(5 + 4i) = 41i.$$

Dies ist noch mit $(2 - i)$ zu multiplizieren. Sie erhalten

$$(2 - i) \cdot 41i = 2 \cdot 41i - 41i^2 = 82i + 41 = \underline{\underline{41 + 82i}}.$$

Lehrbeispiel 19

Berechnen Sie $(12 - 5i)(2 + 3i)(3 - 2i)$*!*

Lösung:

Das Produkt der ersten beiden Faktoren lautet

$(12 - 5i)(2 + 3i) = 24 - 10i + 36i - 15i^2 = 39 + 26i.$

Die weitere Multiplikation ergibt

$(39 + 26i)(3 - 2i) = 13(3 + 2i)(3 - 2i) = 13(9 - 4i^2) = \underline{\underline{169}}.$

In Lehrbeispiel 19 erhielten Sie für das Produkt $(3 + 2i)(3 - 2i)$, also das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen, ein reelles Ergebnis. Das gilt für jedes Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2,$$

$$\boxed{(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2} \qquad (3)$$

Das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

Die Summe der Quadrate des Realteiles und des Imaginärteiles einer komplexen Zahl wird (nach Gauß) **Norm der komplexen Zahl** genannt. Formel (3) hat insofern besondere Bedeutung, als sie Ihnen nunmehr ein Mittel in die Hand gibt, auch die Summe zweier Quadrate in ein Produkt zu zerlegen. Das war im Bereich der reellen Zahlen nicht möglich.

Lehrbeispiel 20

Die folgenden Ausdrücke sind in ein Produkt zu verwandeln!

a) $9u^2 + v^2$ *b)* $x + 1$

Lösung:

a) $9u^2 + v^2$ stellt die Norm zweier konjugiert komplexer Zahlen dar. Es gibt zwei Möglichkeiten: Sowohl $(3u + vi)$ und $(3u - vi)$ als auch $(v + 3ui)$ und $(v - 3ui)$ haben jeweils die Norm $(9u^2 + v^2)$. Es gilt damit

$$\underline{\underline{9u^2 + v^2 = (3u + vi)(3u - vi)}}$$

oder

$$\underline{\underline{9u^2 + v^2 = (v + 3ui)(v - 3ui)}}.$$

b) $x + 1$ kann als Norm der konjugiert komplexen Zahlen $(\sqrt{x} + i)$ und $(\sqrt{x} - i)$ angesehen werden; es ergibt sich also

$$x + 1 = (\sqrt{x} + i)(\sqrt{x} - i).$$

Die zweite Möglichkeit wäre die Verwandlung in

$$\underline{\underline{x + 1 = (1 + i\sqrt{x})(1 - i\sqrt{x}).}}$$

Lehrbeispiel 21

Verwandeln Sie die Zahl 5 in ein Produkt konjugiert komplexer Zahlen (Real und Imaginärteil sollen ganze Zahlen sein.)!

Lösung:

5 soll die Norm einer komplexen Zahl darstellen, d. h., die Zahl 5 ist zunächst auf die Form $a^2 + b^2$ zu bringen. Damit a und b ganze Zahlen werden, schreiben Sie

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2.$$

Damit ergibt sich nach (3)

$$\underline{\underline{5 = (2 + i)(2 - i)}}$$

oder auch

$$\underline{\underline{5 = (1 + 2i)(1 - 2i).}}$$

3.22 Division. Die Division einer komplexen Zahl durch eine reelle Zahl macht keine Schwierigkeiten. Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert. Nach diesem Grundgesetz der Division ist also z. B.

$$\frac{12 + 8i}{4} = \frac{12}{4} + \frac{8i}{4} = \underline{\underline{3 + 2i.}}$$

Die Division durch eine komplexe Zahl läßt sich stets auf diesen einfachen Fall zurückführen. Da das Produkt konjugiert komplexer Zahlen reell ist, wird der Bruch $\frac{a + bi}{c + di}$ mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert:

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.\end{aligned}$$

Merken Sie sich:

> Bei der Division komplexer Zahlen wird der Bruch mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Das Ergebnis der Division ist wieder eine komplexe Zahl. Auch die Division führt also aus dem Bereich der komplexen Zahlen nicht heraus.

Lehrbeispiel 22

Berechnen Sie $\frac{2+i}{3-2i}$*!*

Lösung:

Sie erweitern den vorliegenden Bruch mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl, also mit $3 + 2i$, und erhalten

$$\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+3i+4i-2}{3^2+2^2} = \frac{4+7i}{13} = \underline{\underline{\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i}}.$$

Lehrbeispiel 23

Berechnen Sie $\frac{5+i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}}$*!*

Lösung:

Nach Erweitern des Bruches mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erhalten Sie

$$\frac{(5+i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})} = \frac{15+3i\sqrt{3}+10i\sqrt{3}-6}{3^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{9+13i\sqrt{3}}{21}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{7} + \frac{13\sqrt{3}}{21}i}}.$$

Lehrbeispiel 24

Berechnen Sie $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$*!*

Lösung:

Der Hauptnenner der beiden Brüche lautet $(1+i)(1-i)$, also folgt

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{(1-i)+(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2}{1+1} = \underline{\underline{1}}.$$

Lehrbeispiel 25

Bestimmen Sie den reziproken Wert der komplexen Zahl $z = a + bi$*!*

Lösung:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \underline{\underline{\frac{a-bi}{a^2+b^2}}},$$

d. h., der reziproke Wert einer komplexen Zahl ist gleich der konjugiert komplexen Zahl, dividiert durch ihre Norm.

Übungen

13. *a)* $-4(-2+1{,}4i)$ *b)* $2i(-5+3i)$ *c)* $-i(1-i)$

14. *a)* $(5-2i)(-3+i)$ *b)* $(3+4i)(1-i)$ *c)* $(3+i\sqrt{2})(5+7i\sqrt{2})$

d) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$ *e)* $(a-2bi)(2a+bi)$

f) $(a-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$

15 a) $(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})$ b) $(\sqrt{x} + i\sqrt{y})(\sqrt{x} - i\sqrt{y})$

16 *Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke auf möglichst einfache Weise in ein Produkt konjugiert komplexer Zahlen!*

a) $4m^2 + 9n^2$ b) $x^2 + \frac{1}{4}y^2$ c) $m + n$ d) 37 e) 29

17 *Kann eine reelle Zahl eindeutig durch ein Produkt konjugiert komplexer Zahlen dargestellt werden?*

18 a) $\frac{8 + 4i}{2 + i}$ b) $\frac{1 - 4i\sqrt{5}}{6 + i\sqrt{5}}$ *(Mit Probe!)*

c) $\frac{\sqrt{35} + i}{\sqrt{7} - 3i\sqrt{5}}$ d) $\frac{5 + i\sqrt{3}}{5 - i\sqrt{3}}$

19 a) $\frac{1}{\sqrt{5} - i}$ b) $\frac{3i}{1 - i}$

3.3 Potenzieren

Im 1. Kapitel wurde schon darauf hingewiesen, daß das Potenzieren mit positiv ganzzahligem Exponenten ein Spezialfall des Multiplizierens ist. Die n-te Potenz einer komplexen Zahl ist daher stets wieder eine komplexe Zahl.

Lehrbeispiel 26

Berechnen Sie $(2 + 3i)^2$*!*

Lösung:

Unter Anwendung der binomischen Formel folgt

$$(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 - 9 + 12i = \underline{\underline{-5 + 12i}}.$$

Lehrbeispiel 27

Berechnen Sie $(2 \pm i)^2$, $(2 \pm i)^3$, $(2 \pm i)^4$ *und* $(2 \pm i)^5$*!*

Lösung:

$$(2 \pm i)^2 = 4 \pm 4i + i^2$$
$$= \underline{\underline{3 \pm 4i}}$$

Die dritte Potenz berechnen Sie am zweckmäßigsten unter Zuhilfenahme des Pascalschen Dreiecks.

$$(2 \pm i)^3 = 8 \pm 12i + 6i^2 \pm i^3 = 8 \pm 12i - 6 \mp i$$
$$= \underline{\underline{2 \pm 11i}}$$

$$(2 \pm i)^4 = (2 \pm i)^2 \cdot (2 \pm i)^2 = (3 \pm 4i)^2 = 9 \pm 24i + 16i^2$$
$$= \underline{\underline{-7 \pm 24i}}$$

$$(2 \pm i)^5 = (2 \pm i)^4 \cdot (2 \pm i)$$
$$= (-7 \pm 24i)(2 \pm i) = (-14 - 24) + (\pm 48 \mp 7)\,i$$
$$= \underline{\underline{-38 \pm 41i}}$$

Lehrbeispiel 28

Es sollen die Potenzen $(1 \pm i)^n$ *für* $n = 1; 2; \ldots; 5$ *gebildet werden.*

Lösung:

$$(1 \pm i)^1 = \underline{\underline{1 \pm i}}$$

$$(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i + i^2 = 1 \pm 2i - 1$$
$$= \underline{\underline{\pm 2i}}$$

$$(1 \pm i)^3 = 1 \pm 3i + 3i^2 \pm i^3 = 1 \pm 3i - 3 \mp i$$
$$= \underline{\underline{-2 \pm 2i}}$$

$$(1 \pm i)^4 = (1 \pm i)^2 (1 \pm i)^2 = (\pm 2i)(\pm 2i) = 4i^2$$
$$= \underline{\underline{-4}}$$

$$(1 \pm i)^5 = (1 \pm i)^4 (1 \pm i)^1 = (-4)(1 \pm i)$$
$$= \underline{\underline{-4 \mp 4i}}$$

Anmerkung: Weiteres über das Potenzieren komplexer Zahlen erfahren Sie in 4.42.

Übungen

20. *a)* $(3 + i\sqrt{2})^2$ *b)* $(u - i\sqrt{v})^2$ *c)* $(u + i\sqrt{v})^3 - (u - i\sqrt{v})^3$
d) $(1 + i\sqrt{3})^3$ *e)* $(5 + 2i)^2 + (2 - 5i)^2$

21. *a)* $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$ *b)* $\dfrac{1-i}{1+i} - \dfrac{1+i}{1-i}$

Zusammenfassung

Unter Beachtung der Definitionsgleichung $i^2 = -1$ gelten die Grundgesetze des Rechnens mit reellen Zahlen auch für die komplexen Zahlen. Bei der Division komplexer Zahlen ist der Bruch mit dem zum Nenner konjugiert komplexen Wert zu erweitern. Die Summe konjugiert komplexer Zahlen ist reell, ihre Differenz imaginär, ihr Produkt positiv reell.

Die Anwendung der Rechenarten auf komplexe Zahlen liefert stets komplexe, imaginäre oder reelle Ergebnisse, führt also aus dem Bereich der komplexen Zahlen nicht heraus.

4 Das Rechnen mit der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen

4.1 Einführung der trigonometrischen Form

Sie lernten im 1. Kapitel die Darstellung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene kennen. Dabei wurde jeder einer komplexen Zahl $a + bi$ zugeordnete Punkt P durch seine Abstände a und b von den Achsen festgelegt.

Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, einen Punkt der Zahlenebene eindeutig anzugeben. Sie verbinden zu diesem Zwecke einen solchen Punkt P mit dem Nullpunkt 0 der Achsen (Bild 9) und erkennen: Die Strecke $OP = r$ und der Winkel φ, um den OP gegenüber dem positiven Teil der reellen Achse gedreht ist, bestimmen einwandfrei die Lage des Punktes P und damit die komplexe Zahl $a + bi$. Dabei gilt die Festsetzung, daß eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn als mathematisch positive, eine Drehung im Uhrzeigersinn als mathematisch negative Drehung anzusehen ist.

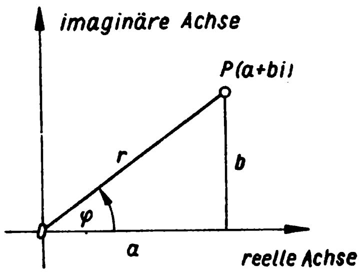

Bild 9

Nach Cauchy[1] heißt

r der **absolute Betrag** oder der **Modul**,
φ die **Phase** oder das **Argument** der komplexen Zahl.

r und φ sind die sogenannten Polarkoordinaten eines Punktes der Zahlenebene.

Die komplexe Zahl $z = a + bi$ kann jetzt auch in einer anderen Form dargestellt werden, die für viele Rechnungen günstiger ist. Aus Bild 9 läßt sich ablesen:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Also ist

$$\boxed{a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi} \tag{4}$$

[1] Cauchy (sprich kohschi), 1789 bis 1869, französischer Mathematiker.

Wird (4) in $z = a + bi$ eingesetzt, so ergibt sich

$$\boxed{z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \tag{5}$$

Man nennt $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die **trigonometrische Form** der komplexen Zahl; sie wird auch Cauchysche Form genannt. Für $z = a + bi$ ist die Bezeichnung **arithmetische Form** üblich. Beachten Sie stets, daß mit $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nur dann die trigonometrische Form vorliegt, wenn bei cos und sin das gleiche Argument und vor beiden Summanden ein $+$ steht. Die Ausdrücke $r(\cos 30° + i\sin 60°)$ und $r(\cos 20° - i\sin 20°)$ stellen zwar komplexe Zahlen dar, aber nicht in der trigonometrischen Form.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen lautet (5) vollständig

$$(a + bi) = r[\cos(\varphi + k\cdot 360°) + i\cdot\sin(\varphi + k\cdot 360°)] \tag{5a}$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist, da φ ja auch negativ sein kann. Dies ist die *umfassendste Form der komplexen Zahlen.* Weil jedoch jede Vergrößerung oder Verkleinerung des Arguments φ um 360° eine volle Umdrehung im positiven oder negativen Sinne bedeutet und immer wieder denselben, die komplexe Zahl darstellenden Punkt ergibt, hat die durch (5a) ausgedrückte Vieldeutigkeit des Arguments für uns zunächst noch keine Bedeutung.

Zur Umrechnung der arithmetischen in die trigonometrische Form sind noch zwei Beziehungen aufzustellen. Nach Bild 9 ist

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{b}{a}} \quad \text{und} \quad \boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{6), (7}$$

Beachten Sie, daß r der Abstand $\overline{OP}$, also stets positiv ist.

Um das Argument φ eindeutig zu bestimmen, ist das Vorzeichen des Real- und des Imaginärteiles zu beachten. Veranschaulichen Sie sich daher stets bei der Bestimmung von φ, in welchem Quadranten die komplexe Zahl $a + bi$ liegt. Betrachten Sie dazu die folgende Übersicht!

Realteil a	$+$	$-$	$-$	$+$
Imaginärteil b	$+$	$+$	$-$	$-$
Quadrant	I	II	III	IV
φ liegt zwischen	0° u. 90°	90° u. 180°	180° u. 270°	270° u. 360°

In einfachen Fällen kommt man auch ohne Formel (6) aus. In den folgenden Beispielen genügt es, sich die Lage der komplexen Zahl durch eine Skizze zu veranschaulichen.

Beispiele:

$z_1 = 3$	$\varphi = 0^\circ$	$z_5 = -3$	$\varphi = 180^\circ$
$z_2 = 2 + 2i$	$\varphi = 45^\circ$	$z_6 = -3 - 3i$	$\varphi = 225^\circ$
$z_3 = 4i$	$\varphi = 90^\circ$	$z_7 = -2i$	$\varphi = 270^\circ$
$z_4 = -1 + i$	$\varphi = 135^\circ$	$z_8 = 3 - 3i$	$\varphi = 315^\circ$

Vergleichen Sie dazu Bild 10.

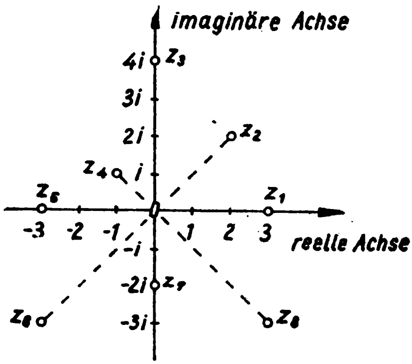

Bild 10

Lehrbeispiel 29

Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = 4 - 3i$ in der trigonometrischen Form!

Lösung:

Um z in die trigonometrische Form zu bringen, haben Sie r und φ zu bestimmen. Nach (7) ist

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Aus (6) folgt

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{-3}{4} = -0{,}75.$$

Da $a = 4$ und $b = -3$ ist, muß sich für φ ein Winkel im IV. Quadranten ergeben:

$$\varphi = 360^\circ - 36^\circ 52' = 323^\circ 8'.$$

Die gewonnenen Werte für r und φ setzen Sie in (5) ein und erhalten

$$\underline{\underline{z = 4 - 3i = 5\,(\cos 323°8' + i \sin 323°8').}}$$

Lehrbeispiel 30

Die Zahl 5 ist in der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen darzustellen.

Lösung:

5 liegt auf der reellen Achse. Also ist $r = 5$, $\varphi = 0°$. Sie können schreiben

$$\underline{\underline{5 = 5\,(\cos 0° + i \sin 0°).}}$$

Reelle Zahlen, als Sonderfälle der komplexen Zahlen, können somit auch in der trigonometrischen Form dargestellt werden. Dasselbe trifft für die rein imaginären Zahlen zu.

Lehrbeispiel 31

Die in der trigonometrischen Form gegebene komplexe Zahl

$$z = 4\,(\cos 135° + i \sin 135°)$$

soll in die arithmetische Form umgewandelt werden.

Lösung:

Nach (4) ist

$$a = r \cos \varphi = 4 \cdot \cos 135° = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$b = r \sin \varphi = 4 \cdot \sin 135° = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Es gilt also

$$\underline{\underline{4\,(\cos 135° + i \sin 135°) = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.}}$$

Lehrbeispiel 32

Die komplexe Zahl $z = \cos 60° + i \sin 30°$ *soll in der arithmetischen und trigonometrischen Form dargestellt werden.*

Lösung:

Es ist zu beachten, daß z in diesem Fall nicht die trigonometrische Form darstellt, da die Argumente der cos- und sin-Funktion nicht gleich sind. Setzen Sie $\cos 60° = 0{,}5$ und $\sin 30° = 0{,}5$ in z ein, so ergibt sich

$$\underline{\underline{z = 0{,}5 + 0{,}5\,i.}}$$

Daraus folgt $r = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

φ liegt im I. Quadranten. Wegen $a = b$ ist daher $\varphi = 45°$.

$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \cdot \sin 45°)}}$$

Lehrbeispiel 33

Welche Beziehungen bestehen zwischen den Beträgen bzw. Phasenwinkeln der konjugiert komplexen Zahlen $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$?

Lösung:

Die Beträge sind gleich, denn es ergibt sich sowohl für z als auch für $\bar{z}$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Für die Phasenwinkel folgt:

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}; \qquad \tan \bar{\varphi} = \frac{-b}{a}.$$

$\tan \varphi$ und $\tan \bar{\varphi}$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Daher ist

$$\bar{\varphi} = 360^\circ - \varphi \qquad \text{oder} \qquad \bar{\varphi} = -\varphi.$$

Die Phasenwinkel konjugiert komplexer Zahlen liegen also symmetrisch zur reellen Achse (vgl. Bild 11).

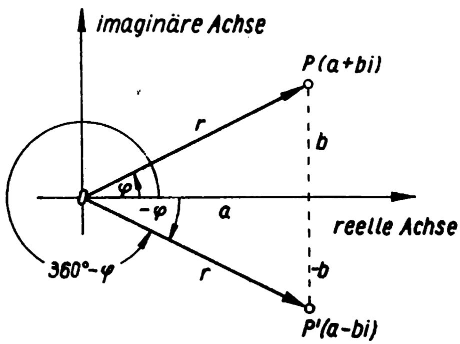

Bild 11

Übungen

22. *Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die trigonometrische Form!*

a) $6 + 8i$ *b)* $-5 + 12i$ *c)* $-1 - i$ *d)* $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$

e) i *f)* -9

23. *Verwandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die arithmetische Form $a + bi$!*

a) $\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$ *b)* $\frac{1}{2}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

c) $9(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ *d)* $6(\cos 750^\circ + i \sin 750^\circ)$

e) $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

4.2 Graphische Addition und Subtraktion

Bei der Anwendung und der graphischen Darstellung der komplexen Zahlen ist es häufig zweckmäßig, die komplexen Zahlen nicht durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, sondern durch gerichtete Strecken darzustellen. Zu diesem Zweck wird der Nullpunkt der Zahlenebene mit dem einer komplexen Zahl entsprechenden Punkt verbunden und der Endpunkt dieser Strecke mit einer Spitze versehen. Derartig gerichtete Strecken in der komplexen Zahlenebene nennt man **Zeiger** (vgl. Bild 12).

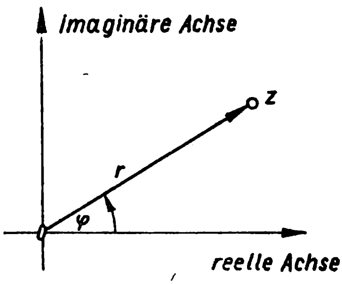

Bild 12

Ein Zeiger ist durch die Angabe der Richtung, d. h. des Winkels φ, und der Länge r des Zeigers eindeutig bestimmt. Dabei stellt φ den Phasenwinkel oder die Phase und r den absoluten Betrag oder Modul der komplexen Zahl dar. Zeiger in der komplexen Zahlenebene werden häufig auch als Vektoren bezeichnet. Das ist nicht exakt, da Vektoren teilweise anderen Rechengesetzen unterliegen als die hier betrachteten Zeiger. Lediglich bei Addition und Subtraktion gelten für Vektoren und Zeiger gleiche Rechengesetze.

4.21 Addition. Bei der Konstruktion der Resultierenden zweier Kräfte mittels des Kräfteparallelogramms haben Sie bereits die Addition zweier Vektoren kennengelernt. Die Addition zweier Zeiger verläuft in der gleichen Weise. In Bild 13 ist die Addition der beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

durchgeführt.

Die komplexen Zahlen z_1 und z_2 werden durch die Zeiger OP_1 und OP_2 dargestellt. Die Parallelen zu den Zeigern durch P_2 bzw. P_1 ergeben mit ihrem Schnittpunkt P den darstellenden Punkt P und mit OP den darstellenden Zeiger der Summe

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i.$$

Zum Beweis fällen Sie von P_1, P_2 und P die Lote $\overline{P_1A_1}$, $\overline{P_2A_2}$ und $\overline{PA}$ auf die reelle Achse und ziehen $\overline{P_1B} \parallel \overline{OA}$. Unter Benutzung der Kongruenz der Dreiecke OA_2P_2 und P_1BP lesen Sie dann ab:

$$\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{A_1A} = \overline{OA_1} + \overline{P_1B} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = a_1 + a_2,$$
$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{A_1P_1} + \overline{A_2P_2} = b_1 + b_2.$$

Man erhält also den Zeiger der *Summe zweier komplexer Zahlen* als *Diagonale eines Parallelogramms*, dessen *Seiten die Zeiger der beiden Summanden* sind. Aus Bild 13 ist klar ersichtlich, daß Sie zu demselben Ergebnis kommen,

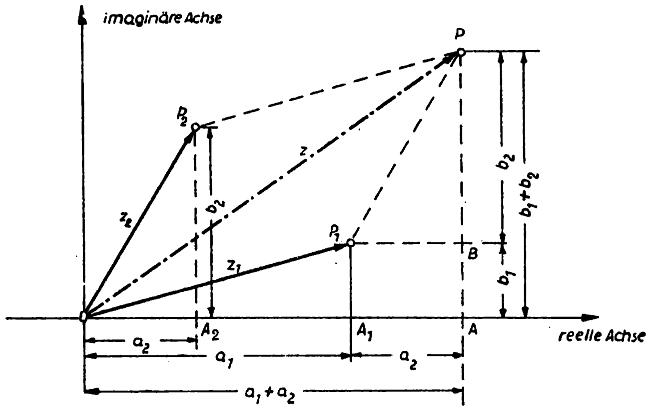

Bild 13

wenn Sie entweder OP_2 oder $\overline{OP_1}$ parallel zu sich selbst in die Lage $\overline{P_1P}$ bzw. $\overline{P_2P}$ verschieben. Merken Sie sich:

Zwei komplexe Zahlen werden graphisch addiert, indem man die sie darstellenden Zeiger so aneinandersetzt, daß der Anfangspunkt des einen mit dem Endpunkt des anderen zusammenfällt.

Damit ist gleichzeitig das kommutative Gesetz der Addition auch für komplexe Zahlen geometrisch bestätigt:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

d. h., die Reihenfolge der Summanden hat keinen Einfluß auf deren Summe. Hat man drei oder mehr komplexe Zahlen graphisch zu addieren, so verfährt man ganz entsprechend. *Man fügt die Zeiger in beliebiger Reihenfolge so aneinander, daß immer der Anfang des einen mit dem Ende des vorhergehenden zusammenfällt.*

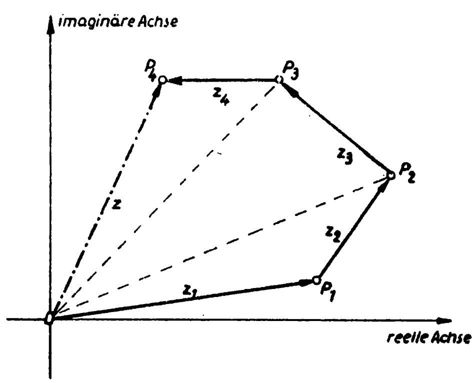

Bild 14

In Bild 14 ist

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4.$$

Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ist leicht zu erbringen, wenn Sie $\overline{OP_2}$ und $\overline{OP_3}$ mit einzeichnen. Es ist

$$\begin{aligned} \overline{OP_2} &= z_1 + z_2, \\ \overline{OP_3} &= \overline{OP_2} + z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \\ \overline{OP_4} &= \overline{OP_3} + z_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z. \end{aligned}$$

Der Zeiger z ergänzt den Streckenzug $OP_1 \ldots P_4$ zu einem Polygon.

4.22 Subtraktion. Die Subtraktion komplexer Zahlen läßt sich auf die Addition zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i). \end{aligned}$$

Für $-a_2 - b_2 i$ schreiben wir $-z_2$. Es gilt also (wie bei den reellen Zahlen)

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Die Differenz zweier Zeiger $z_1 - z_2$ wird gebildet, indem man zu dem Zeiger z_1 den Zeiger $-z_2$ addiert.

Wie aus Bild 15 zu ersehen ist, hat der Zeiger $-z$ die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung wie der Zeiger z. Er ist also einfach zu konstruieren. Die Bildung der Differenz $z_1 - z_2$ zeigt Bild 16.

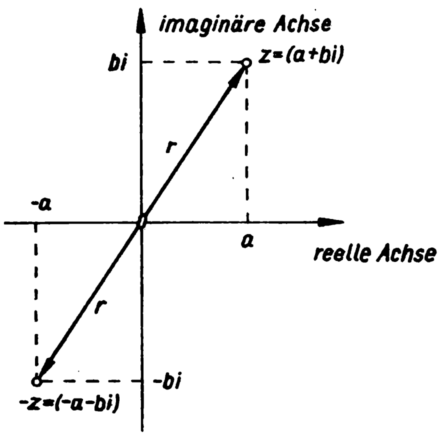

Bild 15

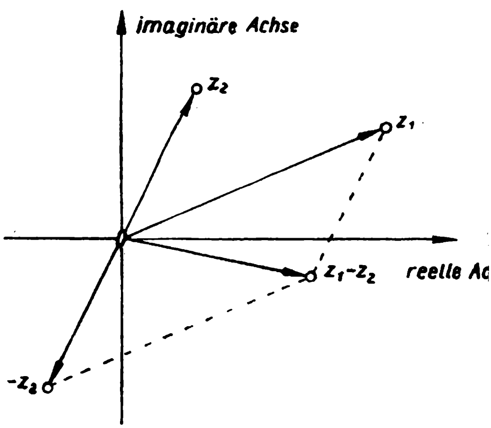

Bild 16

Übungen

21. *Addieren und subtrahieren Sie graphisch*
    a) *die konjugiert komplexen Zahlen* $(a + bi)$ *und* $(a - bi)$,
    b) *die komplexen Zahlen* $(1 + 2i)$ *und* $(3 - i)$!

4.3 Multiplikation und Division

4.31 Multiplikation. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen lassen sich mühelos ausführen, wenn die komplexen Zahlen in der arithmetischen Form gegeben sind. Dagegen sind Multiplikation und Division leichter ausführbar, wenn die komplexen Zahlen in der trigonometrischen Form vorliegen.

Es sei

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Dann ist

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$
$$= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2).$$

Wegen $i^2 = -1$ folgt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)].$$

Nach den Additionstheoremen gilt:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Mithin ergibt sich für das **Produkt zweier komplexer Zahlen**

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]} \qquad (8)$$

Sie merken sich:

> Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Moduln multipliziert und ihre Argumente addiert.

Auf diesem Ergebnis beruht die graphische Multiplikation zweier komplexer Zahlen.

Das Produkt $z = z_1 \cdot z_2$ stellt eine komplexe Zahl mit dem Betrag $r = r_1 \cdot r_2$ und dem Argument $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ dar. Der Betrag r kann mittels des

Strahlensatzes aus r_1 und r_2 konstruiert werden. Dazu schreiben wir die Gleichung $r = r_1 \cdot r_2$ in der Form

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r_2}{1}.$$

Es seien $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ die Zeiger der beiden Faktoren z_1 und z_2. Die Konstruktion von $(\varphi_1 + \varphi_2)$, d. h. die Festlegung der Richtung des Produktzeigers z, bietet keine Schwierigkeiten. Es ist praktisch ein Antragen von φ_1 an $\overline{OP_2}$ in O.

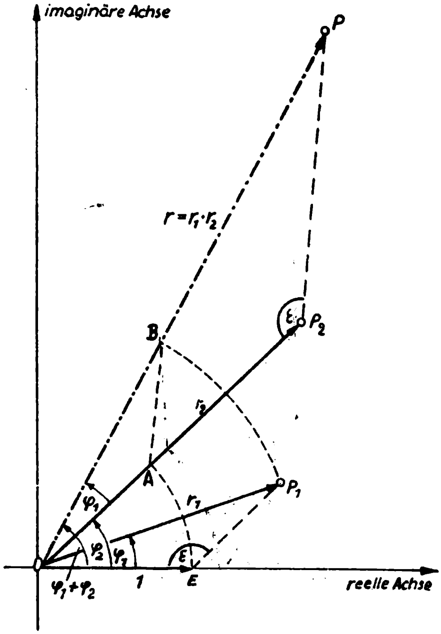

Bild 17

Zur Ermittlung des Betrages $r = r_1 \cdot r_2$ wird auf der reellen Achse der Zeiger $OE = 1$ abgetragen, E mit P_1 verbunden und über OP_2 das dem Dreieck OEP_1 ähnliche Dreieck OP_2P gezeichnet. Dazu ist der Winkel $OEP_1 = \varepsilon$ an $\overline{OP_2}$ in P_2 anzutragen und der freie Schenkel mit der Richtungslinie des Produktzeigers zum Schnitt zu bringen. Dann gilt nach dem Strahlensatz:

$$\overline{OP} : \overline{OP_2} = \overline{OB} : \overline{OA},$$

also $\overline{OP} : \overline{OP_2} = \overline{OP_1} : \overline{OE}$.

Daraus folgt

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2}}{\overline{OE}} = r_1 \cdot r_2.$$

$\overline{OP}$ stellt den Zeiger des gesuchten Produktes $z_1 \cdot z_2$ dar (vgl. Bild 17). Man kann sich auch das Antragen des Winkels ε durch folgende *einfache Produktkonstruktion* ersparen:

Das Dreieck OEP_1 wird um φ_2 in die Lage OAB gedreht, so daß $\overline{OA} = \overline{OE}$ in $\overline{OP_2}$ liegt. Durch P_2 wird die Parallele zu $\overline{AB}$ bis zum Schnitt mit der Verlängerung von $\overline{OB}$ im gesuchten Punkt P gezogen.

Lehrbeispiel 34

Ermitteln Sie graphisch das Produkt der beiden komplexen Zahlen $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 1 + 3i$!

Lösung:

Zunächst zeichnen Sie von 0 aus einen Strahl, der mit der reellen Achse den Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ bildet. Dann wird das Dreieck $\overline{OEP_1}$ um den Winkel φ_2 gedreht, so daß E in A und P_1 in B übergeht. Zeichnen Sie jetzt eine Parallele durch P_2 zu $\overline{AB}$, dann ergibt deren Schnittpunkt mit dem durch O unter dem Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ gezeichneten Strahl den gesuchten Punkt P. Sie können ablesen:

$$(2 + i)(1 + 3i) = -1 + 7i.$$

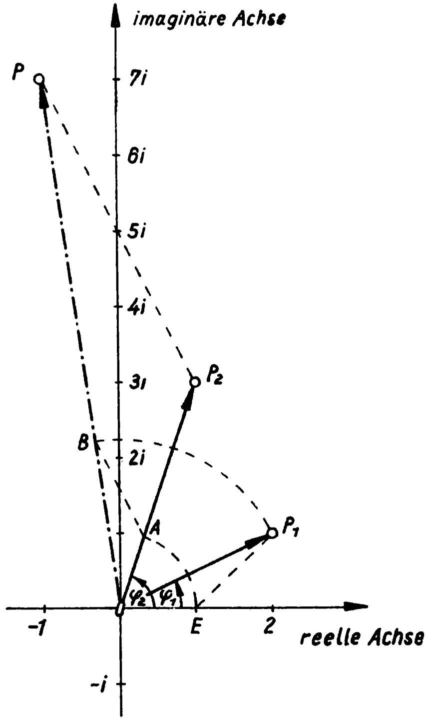

Bild 18

Lehrbeispiel 35

Das Produkt $(-3 + 2i)(2 - i)$ *ist graphisch zu ermitteln!*

Lösung:

In diesem Falle ist $\varphi_1 + \varphi_2 > 360°$. Aus 4.1 wissen Sie, daß Sie auch den Winkel $(\varphi_1 + \varphi_2) - 360°$ als Argument des Produktzeigers ansehen dürfen. Zu diesem Argument gelangen Sie unmittelbar, wenn Sie bei der Addition statt φ_2 das im negativen Drehsinn gemessene Argument $-\varphi_2'$ von $\overline{OP_2}$ verwenden und an $\overline{OP_1}$ in O antragen. Es ist $\varphi_2' = 360° - \varphi_2$ (Bild 19). Also ist das Argument des Produktzeigers

$$\varphi_1 + (-\varphi_2') = \varphi_1 + [-(360° - \varphi_2)] = \varphi_1 + (\varphi_2 - 360°) = (\varphi_1 + \varphi_2) - 360°.$$

Nachdem Sie den Zeiger $\overline{OP}$ des gesuchten Produktes durch die Ihnen beschriebene Konstruktion mittels ähnlicher Dreiecke erhalten haben, können Sie sofort ablesen:

$$(-3 + 2i)(2 - i) = -4 + 7i.$$

Die Verwendung des im negativen Drehsinn gemessenen Argumentes von $\overline{OP_2}$ zum Antragen an $\overline{OP_1}$ ist besonders empfehlenswert, wenn keines der beiden gegebenen Argumente im I. oder II. Quadranten liegt. In diesem Falle können Sie an Stelle der gegebenen Zeiger auch die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Zeiger zur Produktbildung benutzen, da ja

$$z_1 z_2 = (-z_1)(-z_2).$$

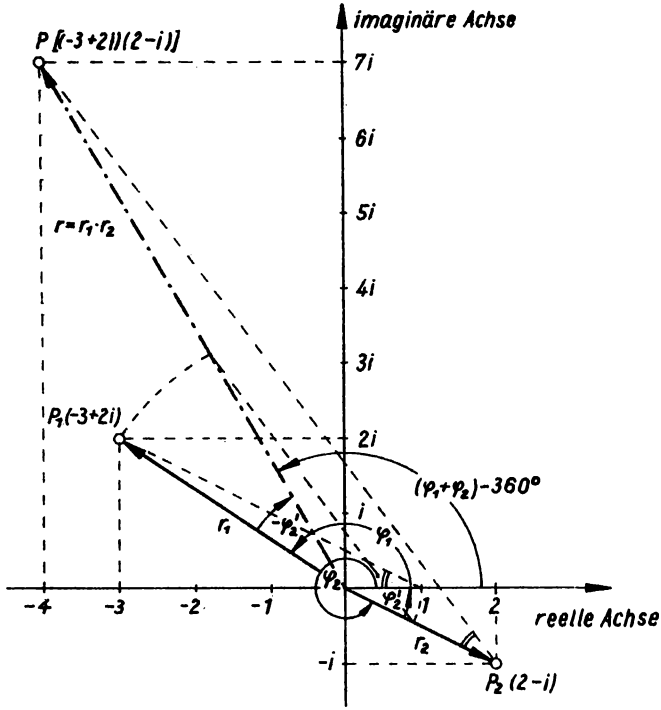

Bild 19

Zur Durchführung der graphischen Multiplikation ist man nicht unbedingt auf das Dreieck OEP_1 angewiesen. Wählt man auf der reellen Achse an Stelle von $\overline{OE} = 1$ eine beliebige Strecke $\overline{OE_m} = m$ und führt die Konstruktion mit dem Dreieck OE_mP_1 in der früher beschriebenen Weise durch (vgl. Bild 20), so erhält man einen Zeiger r'. Nach Bild 20 ist

$$\frac{r'}{r_1} = \frac{r_2'}{m},$$

also gilt

$$r' = \frac{r_1 \cdot r_2}{m}$$

und wegen $r_1 \cdot r_2 = r$,

$$r' = \frac{r}{m}.$$

Die Wahl von $\overline{OE_m} = m$ bedeutet also eine Konstruktion des Produktzeigers im Maßstab

$$r' : r = 1 : m.$$

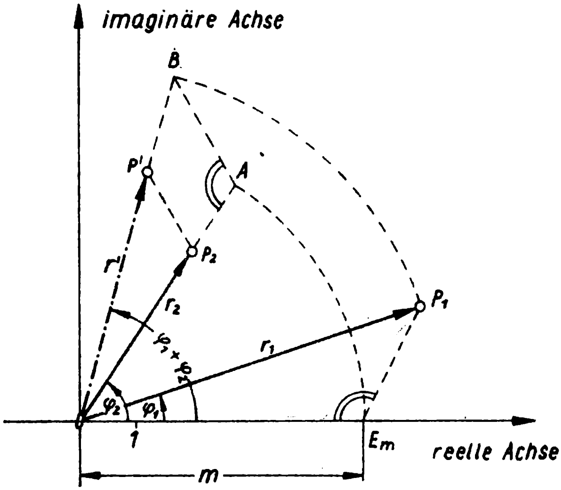

Bild 20

Man erhält die gesuchten Werte, indem man die aus der Zeichnung entnommenen Werte mit m multipliziert. Aus dem Punkt $P'(a' + b'i)$ folgt damit als Ergebnis der Multiplikation

$$ma' + mb'i = a + bi.$$

Lehrbeispiel 36

Ermitteln Sie graphisch das Produkt $(10 - 4i)(-5 - 7i)$!

Lösung:

Sie zeichnen zunächst wieder von 0 aus den Strahl, der mit der reellen Achse den Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ einschließt. Da φ_1 im IV., φ_2 im III. Quadranten liegt, addieren Sie die Winkel, indem Sie $\varphi_1' = 360^\circ - \varphi_1$ von φ_2 subtrahieren. Dann ist $\varphi_2 - \varphi_1' = \varphi_2 - (360^\circ - \varphi_1) = \varphi_2 + \varphi_1 - 360^\circ \triangleq \varphi_2 + \varphi_1$ (vgl. Bild 21).

Für die Konstruktion des Produktzeigers r ist das Dreieck OEP_1 mit $\overline{OE} = 1$ ungeeignet, da der Produktzeiger r sehr lang wird. Wegen einer möglichst einfachen und genauen Konstruktion und in Rücksicht auf eine einfache Umrechnung wählen Sie $\overline{OE_m} = m = 10$. Dreieck OE_mP_1 wird damit rechtwinklig. Den Produktzeiger OP' konstruieren Sie nun in der gleichen Weise, wie es in den Lehrbeispielen 34 und 35 für den Produktzeiger $\overline{OP}$ geschehen ist. Sie lesen ab (Bild 21):

$$a' = -7{,}8 \qquad \text{und} \qquad b' = -5.$$

Mit $m = 10$ erhalten Sie daraus

$$a = 10a' = -78 \quad \text{und} \quad b = 10b' = -50.$$

Die Lösung lautet damit

$$\underline{\underline{(10 - 4i)(-5 - 7i) = -78 - 50i.}}$$

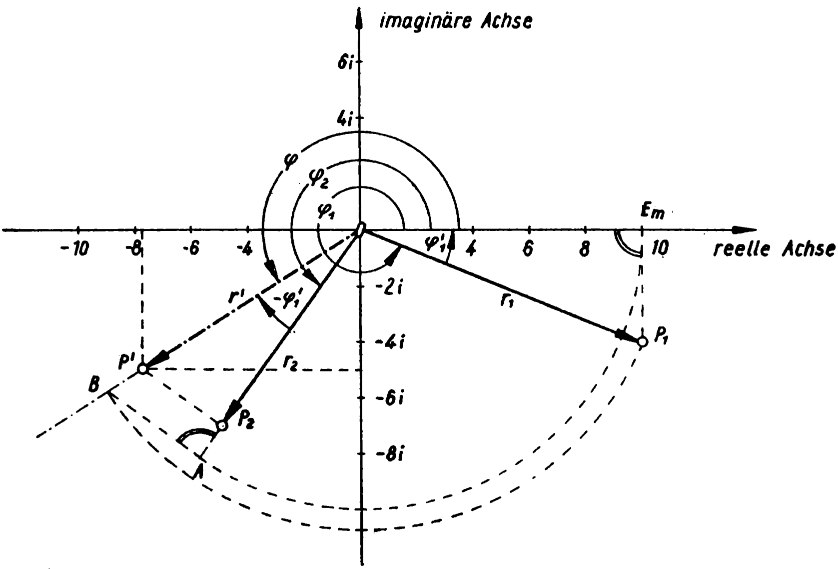

Bild 21

Bei der graphischen Multiplikation einer komplexen Zahl z_1 mit einer anderen z_2 wird der Zeiger $\overline{OP_1}$ von z_1 um den Winkel φ_2 in die Lage $\overline{OB}$ *gedreht* und seine Länge r_1 auf den Wert $\overline{OP} = r_1 r_2$ *gestreckt* (bzw. verkürzt, wenn $r_2 < 1$ ist). Es findet eine sogenannte **Drehstreckung**[1] statt.

Lehrbeispiel 37

Erläutern Sie das Ergebnis der Multiplikation einer komplexen Zahl $z_1 = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *mit der imaginären Einheit* $z_2 = i$, *und führen Sie die Lösung graphisch durch!*

Lösung:

Es ist $z_2 = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$. Für das Produkt folgt dann nach (8)

$$z_1 z_2 = r \cdot 1 \, [\cos(\varphi + 90^\circ) + i \sin(\varphi + 90^\circ)].$$

[1] Eine Verkürzung (Stauchung) wird als negative Streckung aufgefaßt.

Der Zeiger $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wird durch die Multiplikation mit i um $90°$ im mathematisch positiven Sinne gedreht. Eine Streckung findet nicht statt (Bild 22).

Eine Multiplikation mit i bedeutet eine Drehung des Zeigers um $90°$ im mathematisch positiven Sinne.

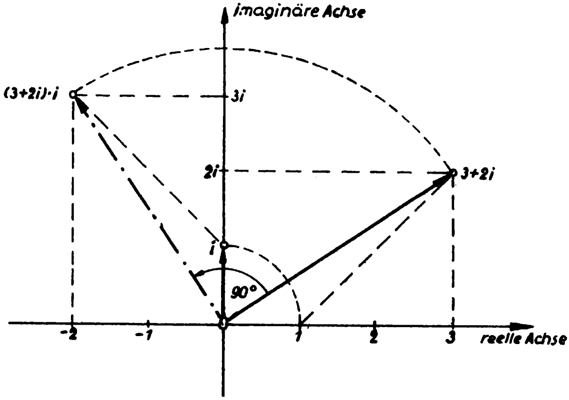

Bild 22

4.32 Division. Auch die Division zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 in trigonometrischer Form führt zu einem einfachen Ergebnis.

Es ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}.$$

Durch Erweitern mit $(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$ erhält man

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)}.$$

Wird berücksichtigt, daß

$$i^2 = -1, \qquad \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 = 1,$$

so ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2).$$

Das Produkt der beiden Klammern ist

$$(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2).$$

Nach den Additionstheoremen gilt:

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Mithin ist der **Quotient zweier komplexer Zahlen**

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]} \tag{9}$$

Sie merken sich:

Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Moduln dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

Die graphische Division komplexer Zahlen soll nicht durchgeführt werden.

Lehrbeispiel 38

Bilden Sie $\frac{z_1}{z_2}$, *wenn gegeben ist:*

$z_1 = 3(\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ)$, $\quad z_2 = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$!

Das Ergebnis ist auch in der arithmetischen Form anzugeben!

Lösung:

Nach (9) folgt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left[\cos(85^\circ - 25^\circ) + i \sin(85^\circ - 25^\circ)\right],$$

$$\underline{\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).}}$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, folgt für die arithmetische Form

$$\underline{\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} i \sqrt{3}.}}$$

Lehrbeispiel 39

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 5(\cos 173^\circ + i \sin 173^\circ)$ *und* $z_2 = 10(\cos 333^\circ + i \sin 333^\circ)$. *Bilden Sie a)* $z_1 \cdot z_2$, *b)* $\frac{z_1}{z_2}$ *und geben Sie die Ergebnisse in der trigonometrischen Form an!*

Lösung:

a) Nach (8) erhalten Sie

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 5 \cdot 10\left[\cos(173^\circ + 333^\circ) + i \sin(173^\circ + 333^\circ)\right] \\ &= 50(\cos 506^\circ + i \sin 506^\circ) \\ &= \underline{\underline{50(\cos 146^\circ + i \sin 146^\circ).}} \end{aligned}$$

b) Unter Anwendung der Formel (9) wird

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5}{10}\left[\cos(173^\circ - 333^\circ) + i \sin(173^\circ - 333^\circ)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(-160^\circ) + i \sin(-160^\circ)\right]. \end{aligned}$$

Um ein positives Argument zu erhalten, addieren Sie zu $-160°$ den Winkel $360°$. Das Ergebnis lautet dann:

$$\underline{\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(\cos 200° + i \sin 200°).}}$$

Übungen

25. *Berechnen Sie* $z_1 \cdot z_2$ *von*

a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$;

b) $z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = 4(\cos 50° + i \sin 50°)$*!*

Die Ergebnisse sind in der trigonometrischen Form anzugeben!

26. *Lösen Sie graphisch* $(1 + 2i)(3 - 2i)$*!*

27. *Berechnen Sie*

a) $2(\cos 112° + i \sin 112°) : (\cos 70° + i \sin 70°)$,

b) $(3 + 4i) : (\cos 30° + i \sin 30°)$,

c) $2i : (\cos 320° + i \sin 320°)$,

d) $-4 : (-\cos 120° - i \sin 120°)$*!*

Geben Sie die Ergebnisse in der trigonometrischen Form an!

4.4 Potenzieren und Radizieren

4.41 Lehrsatz von Moivre — Potenzieren. Das Quadrat der komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

ist nach Formel (8)

$$z^2 = r \cdot r[\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)],$$
$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

z^2 stellt also eine komplexe Zahl mit dem absoluten Betrag r^2 und dem Argument 2φ dar. Für die dritte Potenz von $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ergibt sich nach Formel (8):

$$z^3 = r^2 \cdot r[\cos(2\varphi + \varphi) + i \sin(2\varphi + \varphi)],$$
$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Aus dem Vorangegangenen werden Sie schließen, daß für jeden positiven ganzen Exponenten gilt:

$$\text{(I)} \quad z^n = [r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Unter der Voraussetzung, daß diese Beziehung für alle $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ richtig ist, wird

$$z^{n+1} = r^n \cdot r[\cos(n\varphi + \varphi) + i \sin(n\varphi + \varphi)],$$
$$\text{(II)} \quad z^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi].$$

Vergleichen Sie Gleichung (I) und (II) miteinander, so erkennen Sie, daß (II) aus (I) hervorgeht, wenn in (I) n durch $(n + 1)$ ersetzt wird. Das bedeutet: Ist Gleichung (I) für n richtig, dann gilt sie auch für $(n + 1)$. Da Gleichung (I) für $n = 3$ ausführlich hergeleitet wurde, gilt sie demnach ebenso für $n = 3 + 1$, d. h. $n = 4$, mithin auch für $n = 4 + 1$, d. h. $n = 5$, allgemein also *für alle positiven ganzzahligen Exponenten.*

Das eben angewandte Beweisverfahren, das in der Mathematik eine große Bedeutung hat, heißt der *Schluß von n auf* $(n + 1)$ oder das **Beweisverfahren der vollständigen Induktion.**

Gleichung (I)

$$\boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} \tag{10}$$

nimmt für $r = 1$ die Form an

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi} \tag{11}$$

und heißt dann **der Moivresche Lehrsatz**[1], obwohl diese Formulierung des Satzes erst von Euler (1748) eingeführt worden ist.

Jetzt soll gezeigt werden, daß Formel (10) auch für alle *negativen* ganzzahligen Exponenten gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} z^{-n} &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} \\ &= \frac{1}{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n} \\ &= \frac{1}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}. \end{aligned}$$

Durch Erweitern ergibt sich

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)} \\ &= \frac{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}{r^n(\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi)}. \end{aligned}$$

Wegen $\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = 1$ ist

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

---

[1] Moivre (sprich: moawr), franz. Mathematiker in London (1667 bis 1754).

Berücksichtigt man schließlich

$$\cos n\varphi = \cos(-n\varphi) \qquad -\sin n\varphi = \sin(-n\varphi),$$

so folgt:

$$\underline{\underline{z^{-n} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)].}}$$

Damit ist bewiesen, daß die *Potenzformel (10) für positive und negative ganze Exponenten Gültigkeit* hat. In 4.42 werden Sie die Erweiterung auf gebrochene Exponenten kennenlernen.

Lehrbeispiel 40

Bestimmen Sie $(3 + i\sqrt{3})^4$*!*

Lösung:

Sie wenden zur Berechnung die trigonometrische Form der gegebenen komplexen Zahl an. Es ist

$$r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

Also gilt $\quad 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

und nach (10) $\quad (3 + i\sqrt{3})^4 = [2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)]^4,$

$$(3 + i\sqrt{3})^4 = (2\sqrt{3})^4[\cos(4\cdot 30^\circ) + i\sin(4\cdot 30^\circ)],$$

$$\underline{\underline{(3 + i\sqrt{3})^4 = 144(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ).}}$$

Daraus folgt:

$$(3 + i\sqrt{3})^4 = 144\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{-72 + 72i\sqrt{3}.}}$$

Lehrbeispiel 41

Berechnen Sie $(-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^6$*! Das Ergebnis ist in der arithmetischen Form anzugeben!*

Lösung:

Die gegebene komplexe Zahl liegt nicht in der Normalform vor, da die Vorzeichen bei $\cos 30^\circ$ und $i\sin 30^\circ$ verschieden sind. Sie haben deshalb erst die Normalform dieser komplexen Zahl zu bestimmen. Es ist

$$-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i.$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1, \qquad \tan\varphi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \qquad \varphi = 150^\circ.$$

Für die trigonometrische Form der komplexen Zahl folgt somit:

$$-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = 1(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ).$$

Für die Potenz ergibt sich

$$\begin{aligned}(-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^6 &= (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)^6 \\ &= \cos (6 \cdot 150^\circ) + i \sin (6 \cdot 150^\circ) \\ &= \cos 900^\circ + i \sin 900^\circ \\ &= \underline{\underline{\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ}}.\end{aligned}$$

Setzen Sie für cos 180° und sin 180° die entsprechenden Werte ein, dann folgt:

$$(-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^6 = -1 + i \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}$$

Übungen

28. Berechnen Sie

a) $(3 + 2i)^6$, *b)* $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$, *c)* $(-\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)^9$*!*

Die Ergebnisse sind in der arithmetischen Form anzugeben!

4.42 Radizieren. Formel (10) gilt für positive und negative ganzzahlige Exponenten. Gelingt es, die Gültigkeit der Potenzformel (10) für gebrochene Exponenten nachzuweisen, so ist die Möglichkeit gegeben, jede beliebige Wurzel aus einer komplexen Zahl zu ziehen.

Gegeben sei die komplexe Zahl $r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right)$. Die q-te Potenz ist nach (10):

$$\left[r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right)\right]^q = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Man kann also — mit vertauschten Seiten — schreiben:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \left[r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right)\right]^q.$$

Wird auf beiden Seiten die q-te Wurzel gezogen, dann erhält man

$$\sqrt[q]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \left[r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right)\right]^{\frac{q}{q}},$$

$$\sqrt[q]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right)$$

oder $$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{\varphi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q}\right).$$

Potenziert man nun auf beiden Seiten mit p, so ergibt sich

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{p}{q}} = \left[r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\varphi}{q} + i\sin\frac{\varphi}{q}\right)\right]^p,$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\varphi + i\sin\frac{p}{q}\varphi\right).$$

Das ist aber genau die Potenzformel (10) für gebrochene Exponenten, also für $n = \frac{p}{q}$. Sie ist nunmehr für alle rationalen Exponenten bewiesen und kann durch folgenden Satz ausgedrückt werden:

Eine komplexe Zahl wird mit einer rationalen Zahl potenziert, indem man ihren Betrag mit dem Exponenten potenziert und ihr Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Da $r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\varphi + i\sin\frac{p}{q}\varphi\right)$ wieder eine komplexe Zahl ist, liefert das Potenzieren mit rationalem Exponenten stets wieder eine komplexe Zahl. Gleichzeitig folgt, daß auch das Radizieren nicht aus dem Bereich der komplexen Zahlen herausführt, denn jede Wurzel läßt sich als Bruchpotenz schreiben:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

und nach der Potenzformel (10) berechnen. Es gilt der Satz:

Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man ihren Betrag radiziert und ihr Argument durch den Wurzelexponenten dividiert.

Nach (5a) sind einer komplexen Zahl $a + bi$ unendlich viele Argumente zugeordnet, die sich jeweils um 360° voneinander unterscheiden. Diese Tatsache war bei den bisher behandelten Rechenoperationen ohne Einfluß auf das Ergebnis. Es ist z. B. gleichgültig, ob

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder $$r[\cos(\varphi + k\cdot 360^\circ) + i\sin(\varphi + k\cdot 360^\circ)]$$

in die n-te Potenz erhoben wird, wenn n und k ganze Zahlen sind. Die Argumente beider Potenzen unterscheiden sich um $n\cdot k\cdot 360^\circ$, liefern also die gleichen trigonometrischen Funktionswerte.

Beim Radizieren einer komplexen Zahl muß dagegen die Periodizität der Winkelfunktionen berücksichtigt werden.

Es ist

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r\,[\cos(\varphi + k \cdot 360^\circ) + i \sin(\varphi + k \cdot 360^\circ)]}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right),$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{360^\circ}{n}\right)\right]} \qquad (12)$$

Werden in (12) für k der Reihe nach die n-Werte $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ eingesetzt, so ergeben sich n verschiedene Wurzelwerte, und zwar komplexe Zahlen, deren Argumente sich jeweils um $\frac{360^\circ}{n}$ unterscheiden. Für $k = n$ aber ergibt sich der gleiche Wurzelwert wie für $k = 0$, für $k = n + 1$ der gleiche Wurzelwert wie für $k = 1$ usw.[1]

Die Wurzel **für $k = 0$** nennt man, falls $0 \leqq \varphi \leqq 360^\circ$, den **Hauptwert der Wurzel.**

Die n-te Wurzel aus jeder komplexen Zahl (daher auch aus jeder reellen oder rein imaginären Zahl) hat n verschiedene Werte.

Jeder der n-Wurzelwerte einer komplexen Zahl hat denselben Modul $\sqrt[n]{r}$, kann also durch einen Punkt des Kreises mit dem Radius $r' = \sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Zahlenebene bzw. durch den entsprechenden Zeiger dargestellt werden.[2] Dabei hat der Hauptwert der Wurzel das Argument $\frac{\varphi}{n}$. Die anderen Wurzelwerte ergeben sich durch Drehung des Hauptwertzeigers im positiven oder negativen Sinne um jeweils $\frac{360^\circ}{n}$.

Anders ausgedrückt (vgl. dazu Bild 23):

Die n-Werte der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl können durch die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks dargestellt werden, das dem Kreis mit dem Radius $r' = \sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt einbeschrieben ist, wobei der Hauptwert der Wurzel das Argument $\frac{\varphi}{n}$ besitzt.

---

[1] Für negative k ergeben sich die gleichen Wurzelwerte wie für positive k, nur in anderer Reihenfolge.

[2] Als Modul kommt nur der positive reelle Wert von $\sqrt[n]{r}$ in Frage! Näheres über die n-te Wurzel aus einer reellen Zahl erfahren Sie in Lehrbeispiel 46.

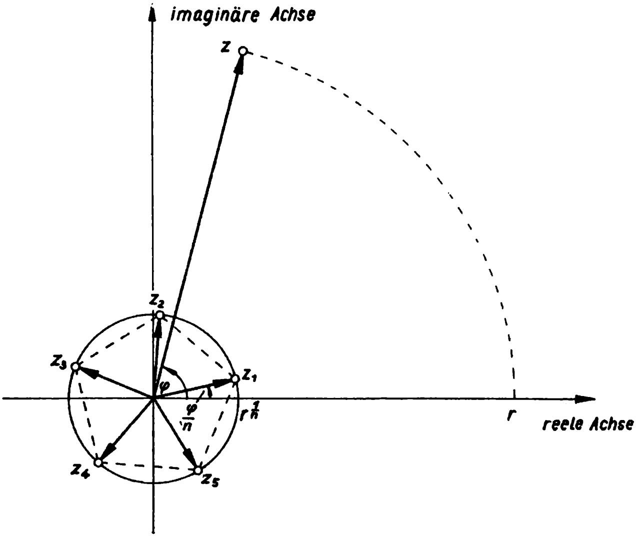

Bild 23

Lehrbeispiel 42

Die dritte Wurzel aus $-6 + 2i\sqrt{7}$ ist rechnerisch zu ermitteln.

Lösung:

Sie bringen die komplexe Zahl zunächst auf die trigonometrische Form:

$$r = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{64} = 8; \quad \tan\varphi = \frac{2\sqrt{7}}{-6} = -0{,}88192, \quad \varphi = 138°35{,}4'.$$

Damit ist

$$-6 + 2i\sqrt{7} = 8\,[\cos(138°35{,}4' + k\cdot 360°) + i\sin(138°35{,}4' + k\cdot 360°)].$$

Nach (12) folgt:

$$\sqrt[3]{-6 + 2i\sqrt{7}} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{138°35{,}4'}{3} + k\,\frac{360°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{138°35{,}4'}{3} + k\,\frac{360°}{3}\right)\right]$$
$$= 2\,[\cos(46°11{,}8' + k\cdot 120°) + i\sin(46°11{,}8' + k\cdot 120°)].$$

Für $k = 0$ ergibt sich

$$z_1 = 2\,(\cos 46°11{,}8' + i\sin 46°11{,}8')$$
$$= \underline{\underline{1{,}3844 + 1{,}4434\,i.}}$$

Für $k = 1$ erhalten Sie

$$z_2 = 2\,(\cos 166°11{,}8' + i\sin 166°11{,}8')$$
$$= 2\,(-\cos 13°48{,}2' + i\sin 13°48{,}2')$$
$$= \underline{\underline{-1{,}9422 + 0{,}47718\,i.}}$$

$k = 2$ liefert

$$\begin{aligned} z_3 &= 2\,(\cos 286^\circ 11{,}8' + i \sin 286^\circ 11{,}8') \\ &= 2\,(\cos 73^\circ 48{,}2' - i \sin 73^\circ 48{,}2') \\ &= \underline{0{,}55786 - 1{,}9206\, i}. \end{aligned}$$

Für $k = 3$ würde folgen:

$$\begin{aligned} z_4 &= 2\,(\cos 406^\circ 11{,}8' + i \sin 406^\circ 11{,}8') \\ &= 2\,(\cos 46^\circ 11{,}8' + i \sin 46^\circ 11{,}8'). \end{aligned}$$

Es ist also $z_4 = z_1$. Man erhält für $k > 2$ keine weiteren Wurzeln. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Bild 24!

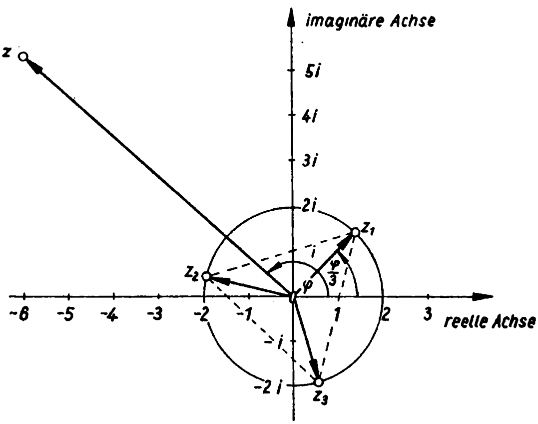

Bild 24

Lehrbeispiel 43

Bestimmen Sie rechnerisch alle Werte von $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}$ *und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar!*

Lösung:

$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ist auf die trigonometrische Form zu bringen;

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1; \qquad \tan\varphi = -\sqrt{3}, \quad \varphi = 120^\circ.$$

Für z ergibt sich dann

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = 1\,[\cos(120^\circ + k\cdot 360^\circ) + i \sin(120^\circ + k \cdot 360^\circ)].$$

Nach (12) ist

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{120^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + i\sin\frac{120^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right)$$
$$= \cos(30^\circ + k\cdot 90^\circ) + i\sin(30^\circ + k\cdot 90^\circ).$$

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$z_1 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i}}.$$

Für $k = 1$ folgt:

$$z_2 = \cos(30^\circ + 90^\circ) + i\sin(30^\circ + 90^\circ)$$
$$= \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}}.$$

Für $k = 2$ erhalten Sie:

$$z_3 = \cos(30^\circ + 180^\circ) + i\sin(30^\circ + 180^\circ)$$
$$= \cos 210^\circ + i\sin 210^\circ = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i}}.$$

Schließlich erhalten Sie für $k = 3$:

$$z_4 = \cos(30^\circ + 270^\circ) + i\sin(30^\circ + 270^\circ)$$
$$= \cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}}}.$$

Graphische Darstellung:

Wie Sie erfahren haben, liegen die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl alle auf einem Kreis um den Nullpunkt der Zahlenebene mit dem Radius $r' = \sqrt[n]{r}$, in unserem Fall $r' = \sqrt[4]{1}$. Wegen $r = r' = 1$ liegen sowohl z als auch die Wurzeln z_1, z_2, z_3 und z_4 alle auf dem Einheitskreis und stellen die Eckpunkte eines Quadrates dar. Der Hauptwert z_1 der Wurzel hat in unserem Fall das Argument von 30° und kann somit leicht gezeichnet werden, indem Sie vom Nullpunkt der Zahlenebene aus einen Strahl unter einem Winkel von 30° zeichnen. Sein Schnittpunkt mit dem Einheitskreis ist dann der gesuchte Punkt. Die Wurzelwerte z_2, z_3 und z_4 ergeben sich durch Drehung des Hauptzeigers um jeweils 90° (Bild 25).

Lehrbeispiel 37 zeigte, daß eine Drehung des Zeigers um 90° eine Multiplikation mit i bedeutet. Es muß sich also z. B. z_2 aus z_1 durch Multiplikation mit i ergeben, d. h. $z_2 = i \cdot z_1$.

Weiter muß gelten:

$$z_3 = i \cdot z_2 \qquad z_4 = i \cdot z_3.$$

Prüfen Sie das nach!

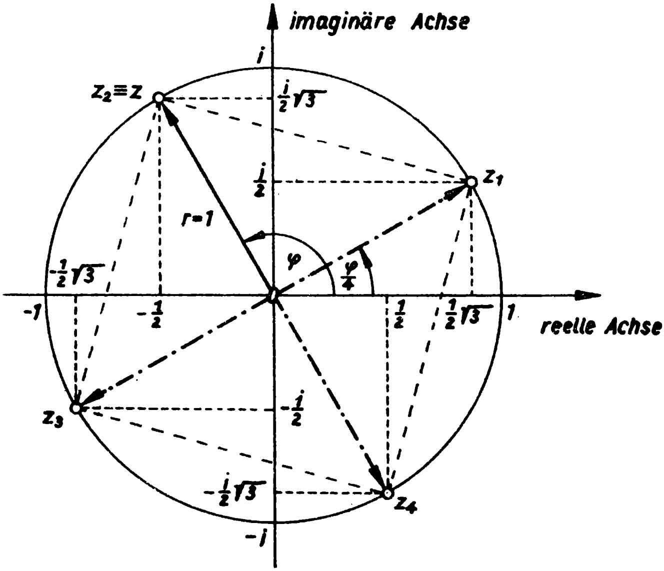

Bild 25

Lehrbeispiel 44

Die fünf Werte von $\sqrt[5]{11-3i}$ sind rechnerisch zu ermitteln! Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar!

Lösung:

Es ist

$$r = \sqrt{121+9} = \sqrt{130} \approx 1{,}627; \quad \tan\varphi = \frac{-3}{11} = -0{,}27, \qquad \varphi = 344^\circ 45'.$$

Die Werte für r und φ setzen Sie in (12) ein und erhalten:

$$\sqrt[5]{11-3i} = \sqrt[5]{\sqrt{130}}\left[\cos\frac{344^\circ 45' + k\cdot 360^\circ}{5} + i\sin\frac{344^\circ 45' + k\cdot 360^\circ}{5}\right]$$

$$= \sqrt[10]{130}\,[\cos(68^\circ 57' + k\cdot 72^\circ) + i\sin(68^\circ 57' + k\cdot 72^\circ)].$$

Das ergibt für

$k = 0$:

$$z_1 = \sqrt[10]{130}\,(\cos 68^\circ 57' + i\sin 68^\circ 57').$$

$$\underline{\underline{z_1 \approx 0{,}584 + 1{,}518i}};$$

$k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[10]{130}\,(\cos 140^\circ 57' + i\sin 140^\circ 57'),$$

$$= \sqrt[10]{130}\,(-\cos 39^\circ 03' + i\sin 39^\circ 03'),$$

$$\underline{\underline{z_2 \approx -1{,}264 + 1{,}025\,i}};$$

2:

$$z_3 = \sqrt[10]{130}\,(\cos 212^\circ 57' + i \sin 212^\circ 57').$$
$$= \sqrt[10]{130}\,(-\cos 32^\circ 57' - i \sin 32^\circ 57').$$
$$\underline{\underline{z_3 \approx -1{,}365 - 0{,}885\, i}};$$

3:

$$z_4 = \sqrt[10]{130}\,(\cos 284^\circ 57' + i \sin 284^\circ 57'),$$
$$= \sqrt[10]{130}\,(\cos 75^\circ 03' - i \sin 75^\circ 03'),$$
$$\underline{\underline{z_4 \approx 0{,}420 - 1{,}572\, i}};$$

4:

$$z_5 = \sqrt[10]{130}\,(\cos 356^\circ 57' + i \sin 356^\circ 57'),$$
$$= \sqrt[10]{130}\,(\cos 3^\circ 03' - i \sin 3^\circ 03'),$$
$$\underline{\underline{z_5 \approx 1{,}625 - 0{,}087\, i}}.$$

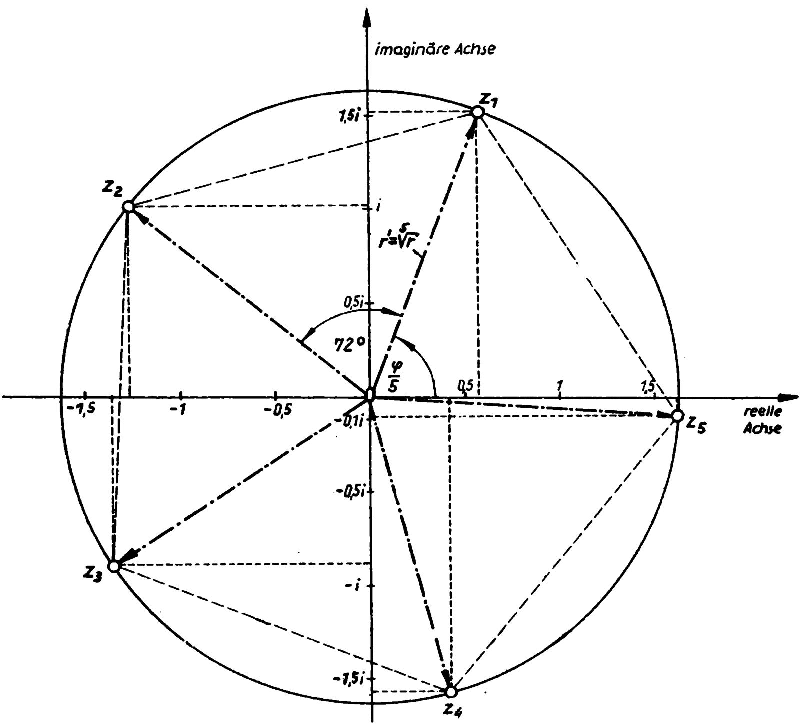

Bild 26

Graphische Darstellung:

Die Wurzeln liegen auf dem Kreis mit dem Radius

$$r' = \sqrt[5]{r} = \sqrt[10]{130} = 1{,}627.$$

z_1 liegt auf dem Zeiger, der mit der reellen Achse den Winkel $\frac{\varphi}{5} \approx 69°$ einschließt. Die weiteren Wurzeln erhalten Sie durch Drehung des Zeigers von z_1 um jeweils 72°. In Bild 26 konnte z wegen der großen Entfernung vom Ursprung nicht mit eingezeichnet werden.

Lehrbeispiel 45

Berechnen Sie $\sqrt[3]{8i}$*!*

Lösung:

$8i$ liegt auf der positiven imaginären Achse. Also ist (Skizze!):

$$r = 8, \qquad \varphi = 90°.$$

Setzen Sie diese Werte in (12) ein, dann folgt:

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{90° + k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{90° + k\cdot 360°}{3}\right)$$

$$= 2\,[\cos(30° + k\cdot 120°) + i\sin(30° + k\cdot 120°)];$$

$k = 0$:

$$z_1 = 2\,(\cos 30° + i\sin 30°) = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}};$$

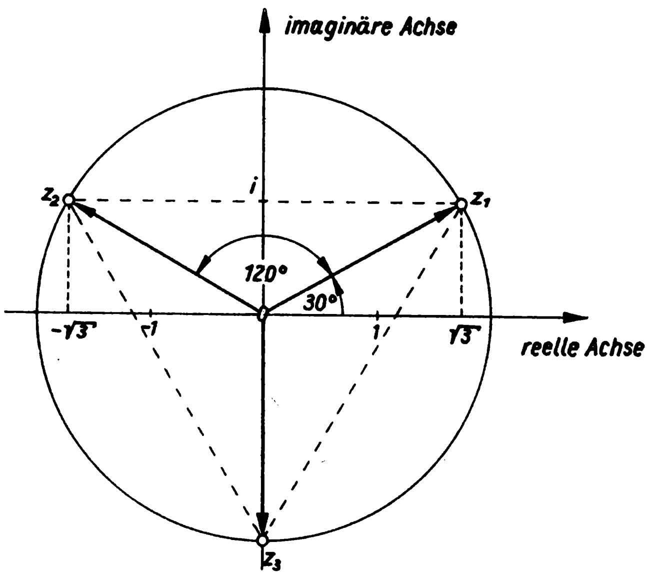

Bild 27

$k = 1$:

$$z_2 = 2\,[\cos(30^\circ + 120^\circ) + i \sin(30^\circ + 120^\circ)]$$
$$= 2\,(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = 2\,(-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$
$$\underline{\underline{z_2 = -\sqrt{3} + i}};$$

$k = 2$:

$$z_3 = 2\,[\cos(30^\circ + 240^\circ) + i \sin(30^\circ + 240^\circ)]$$
$$= 2\,(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 2\,(\cos 90^\circ - i \sin 90^\circ)$$
$$\underline{\underline{z_3 = -2i}}.$$

Die Ergebnisse sind in Bild 27 dargestellt.

Lehrbeispiel 46

Für $\sqrt[3]{1}$ sind sämtliche Wurzeln zu bestimmen (mit Probe)!

Lösung:

Die Zahl 1 liegt auf der reellen Achse. Also gilt

$$r = 1 \qquad \varphi = 0^\circ.$$

Die trigonometrische Form lautet damit

$$1 = 1\,[\cos(0^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \sin(0^\circ + k \cdot 360^\circ)].$$

Nach (12) finden Sie

$$\sqrt[3]{1} = 1\left(\cos\frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin\frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right).$$

$k = 0$: $\quad z_1 = 1\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = \underline{\underline{1}}$

$k = 1$: $\quad z_2 = 1\,(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}}$

$k = 2$: $\quad z_3 = 1\,(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$

Bild 28 zeigt die graphische Darstellung der 3. Einheitswurzeln. Sie liegen auf dem Einheitskreis und gehen durch Drehen des Hauptwertzeigers um jeweils 120° aus dem Hauptwert hervor.

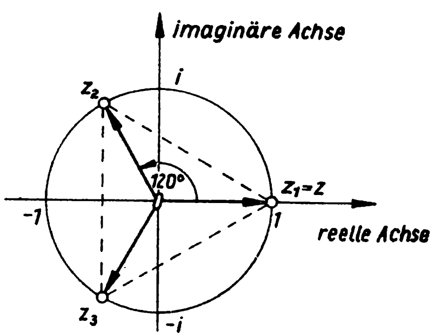

Bild 28

Probe:

$$z_1^3 = 1^3 = 1$$
$$z_2^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$$

$$z_2^3 = -\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{i}{2}\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{3i}{8}\sqrt{3} + \frac{9}{8} - \frac{3i}{8}\sqrt{3}$$
$$= 1$$
$$z_3^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$$
$$= -\left[\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{i}{2}\sqrt{3} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3\right]$$
$$= -\left(\frac{1}{8} + \frac{3i}{8}\sqrt{3} - \frac{9}{8} - \frac{3i}{8}\sqrt{3}\right)$$
$$= 1$$

Übungen

29. *Berechnen Sie*

a) $\sqrt[5]{8-6i}$, *b)* $\sqrt{-i}$, *c)* $\sqrt[3]{-1-i}$, *d)* $\sqrt[4]{\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ}$,
e) $\sqrt[4]{1}$, *f)* $\sqrt[5]{243}$*!*

Geben Sie die Lösungen auch in der arithmetischen Form an und stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar!

Zusammenfassung

Jede komplexe Zahl von der Form $a + bi$ läßt sich auf die trigonometrische Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bringen. r und φ ergeben sich aus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. Aus den Vorzeichen von b und a erkennt man, in welchem Quadranten φ liegt. r heißt der absolute Betrag oder Modul, φ das Argument der komplexen Zahl.

Die trigonometrische Form ermöglicht die Darstellung der komplexen Zahlen durch Zeiger und damit eine einfache graphische Durchführung der Rechenoperationen.

Die graphische Addition komplexer Zahlen wird ausgeführt, indem man die den komplexen Zahlen entsprechenden Zeiger so aneinanderfügt, daß stets der Anfang des einen mit dem Ende des vorhergehenden zusammenfällt. Der Ergänzungszeiger im Polygonzug ist die gesuchte Summe.

Die graphische Subtraktion wird auf die Addition zurückgeführt, indem der Richtungssinn des Subtrahendenzeigers geändert wird.

Die graphische Multiplikation zweier komplexer Zahlen stützt sich auf das rechnerische Ergebnis (8) und bedeutet eine Drehstreckung, bei welcher der eine Zeiger mit dem Argument φ_1 um das Argument φ_2 des anderen Zeigers gedreht und sein absoluter Betrag r_1 auf den Wert $r_1 \cdot r_2$ gestreckt wird.

Nach (10) hat die n-te Potenz einer komplexen Zahl $r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ den Betrag r^n und das Argument $n\varphi$. Das gilt für alle rationalen Exponenten. Für $r = 1$ geht (10) in den Satz von Moivre (11) über.

Aus der Gültigkeit der Formeln (10) und (11) auch für gebrochene Exponenten ergibt sich unter Berücksichtigung der Periodizität der Winkelfunktionen Formel (12) für das Radizieren komplexer Zahlen. Jede n-te Wurzel hat n verschiedene Werte. Der Wurzelwert mit dem Argument $\frac{\varphi}{n}$ heißt der Hauptwert der Wurzel (wenn $0 \leqq \varphi \leqq 360°$ ist).

Bei der graphischen Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene ergeben sich die n-Wurzelwerte als Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, das dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Zahlenebene einbeschrieben ist, wobei der Zeiger des Wurzelhauptwertes das Argument $\frac{\varphi}{n}$ hat. Um sämtliche n-ten Wurzeln aus einer reellen Zahl zu erhalten, ist die reelle Zahl zunächst in die trigonometrische Form umzuwandeln. Die Wurzeln sind dann nach (12) zu bestimmen.

5 Die Exponentialform der komplexen Zahlen

Neben der Darstellung in der allgemeinen und der trigonometrischen Form besteht die Möglichkeit, komplexe Zahlen in einer weiteren Form anzugeben, was besonders für die Anwendung der komplexen Zahlen von Bedeutung ist. Diese Form der komplexen Zahlen sollen Sie in diesem Kapitel kennenlernen, wobei besonders darauf hingewiesen sein soll, daß die dazu erforderlichen Ableitungen hier nicht in allen Fällen gegeben werden können. Dies ist erst nach Behandlung der Lehre von den unendlichen Potenzreihen möglich. Da die Exponentialform der komplexen Zahlen vorwiegend in der Elektrotechnik Anwendung findet, ist es zweckmäßig, ein anderes Zeichen für die imaginäre Einheit einzuführen. Damit soll vermieden werden, daß Verwechslungen zwischen der imaginären Einheit und dem Momentanwert des Stromes, der ebenfalls mit i bezeichnet wird, auftreten. Im folgenden wird deshalb die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

5.1 Die Eulersche Gleichung

Aus der Funktionslehre wissen Sie, daß eine Funktion, deren Exponent veränderlich ist (Beispiel: $y = a^x$), Exponentialfunktion heißt. Die Exponentialfunktion lernten Sie dabei als Umkehrfunktion der logarithmischen Funktion kennen. Gehen Sie insbesondere von der logarithmischen Funktion mit der Basis e aus, d. h. von $y = \ln x$, so ergibt sich als Umkehrfunktion $y = e^x$. Es ist nun gerade die Exponentialfunktion mit der Basis e und einem imaginären bzw. komplexen Exponenten, die uns die Möglichkeit gibt, eine komplexe Zahl darzustellen. Wie Sie später bei der Behandlung der unendlichen Potenzreihen sehen werden, gilt die Beziehung

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi} \tag{13}$$

Diese Beziehung wurde von Euler aufgestellt und heißt **Eulersche Gleichung.**

Multiplizieren Sie die Eulersche Gleichung mit r, so erhalten Sie

$$r\,e^{j\varphi} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Eine komplexe Zahl kann somit auch in der Form

$$z = r\,e^{j\varphi}$$

geschrieben werden. Dabei stellt r wieder den Betrag der komplexen Zahl dar, und $e^{j\varphi}$ wird **Winkelfaktor** genannt.

Damit ergibt sich jetzt die Möglichkeit, jede komplexe Zahl in dreifacher Form zu schreiben:

$$\boxed{z = a + bj = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\,e^{j\varphi}} \tag{14}$$

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen gilt

(I) $\cos\varphi + j\sin\varphi = \cos(\varphi + k\cdot 360^\circ) + j\sin(\varphi + k\cdot 360^\circ),$
$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

Nach Formel (13) ist

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$$

und $\cos(\varphi + k\cdot 360^\circ) + j\sin(\varphi + k\cdot 360^\circ) = e^{j(\varphi + k\cdot 360^\circ)}$

Setzt man das in (I) ein, so folgt

$$\boxed{e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + k\cdot 360^\circ)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)} \tag{15}$$

Das bedeutet: Die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten hat die Periode $360° \triangleq 2\pi$.

Das gleiche gilt auch bei komplexem Exponenten. Es ist nach (15)

$$r\,e^{j\varphi} = r\,e^{j(\varphi + k\cdot 360°)}.$$

Mit $r = e^{\ln r}$ wird daraus

$$e^{\ln r}\,e^{j\varphi} = e^{\ln r}\,e^{j(\varphi + k\cdot 360°)},$$

$$e^{\ln r + j\varphi} = e^{\ln r + j(\varphi + k\cdot 360°)}. \tag{15a}$$

Ist $r = 1$, so ergibt sich wieder (15).

Die Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten wiederholt ihre Werte, wenn der Imaginärteil des Exponenten sich um $k \cdot 360° \triangleq 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ändert.

$z = r\,e^{j\varphi}$ kann wieder als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden, wobei r die Länge des Zeigers und φ den Winkel des Zeigers mit der positiven reellen Achse bedeutet.

Für $e^{j\varphi}$ wird in der Praxis häufig eine verkürzte Schreibweise angewendet. Man schreibt

$$e^{j\varphi} = \underline{/\varphi} \qquad \text{und} \qquad e^{-j\varphi} = \underline{/-\varphi}.$$

$\underline{/\varphi}$ wird gelesen „Versor φ". Im folgenden werden die Ergebnisse teilweise auch in der Versorschreibweise angegeben. Die Versorsymbole werden nach Kenelly Kenellysche Formen genannt.

Lehrbeispiel 47

Die komplexe Zahl $z = 1 - j$ soll in der Exponentialform geschrieben werden

Lösung:

Wie bei der Umrechnung von der allgemeinen in die trigonometrische Form einer komplexen Zahl haben Sie auch hier zunächst r und φ zu bestimmen:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi = 315°.$$

Setzen Sie die Werte für r und φ in (14) ein[1], so ergibt sich

$$z = 1 - j = \sqrt{2}\,e^{j\cdot 315°} = \underline{\sqrt{2}\,/315°}.$$

Geben Sie den Winkel im Bogenmaß an, d. h. in unserem Beispiel $\varphi = \frac{7}{4}\pi$, so lautet die Lösung (in mathematisch einwandfreier Schreibweise):

$$\underline{\underline{z = \sqrt{2}\,e^{j\cdot\frac{7}{4}\pi}}}.$$

[1] Es ist eigentlich nicht richtig, 315° in den Exponenten einzusetzen, da der Exponent einer Potenz nur eine unbenannte Zahl sein kann. Im Schrifttum hat sich aber diese Schreibweise eingeführt. Denken Sie stets daran, daß die Angabe des Argumentes im Gradmaß zwar üblich, aber mathematisch falsch ist.

Lehrbeispiel 48

Geben Sie $z = 2\,e^{-j\cdot 30^\circ}$ in der Form $a + bj$ an!

Lösung:

Das negative Vorzeichen gehört zum Argument. Es ist also $\varphi = -30^\circ$. Sie formen nun nach (14) in die trigonometrische Form um:

$$z = 2\,(\cos -30^\circ + j \sin -30^\circ).$$

Nach Einsetzen der Werte für die vorliegenden trigonometrischen Funktionen erhalten Sie

$$z \approx 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - j \cdot 0{,}5\right),$$

$$\underline{\underline{z \approx \sqrt{3} - j.}}$$

5.2 Das Rechnen mit der Exponentialform der komplexen Zahl

Mit der exponentiellen Schreibweise der komplexen Zahlen erhalten Sie die Gesetze des Multiplizierens, Dividierens, Potenzierens und Radizierens komplexer Zahlen in besonders anschaulicher Form, da das allgemeine Potenzgesetz $a^{m+n} = a^m a^n$ auch für imaginäre bzw. komplexe Exponenten Gültigkeit hat:

Produkt $\quad z_1 z_2 = r_1\,e^{j\varphi_1}\,r_2\,e^{j\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)},$

Quotient $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\,e^{j(\varphi_1-\varphi_2)},$

Potenz $\quad z^n = (r\,e^{j\varphi})^n = r^n\,e^{jn\varphi},$

Wurzel $\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,e^{j(\varphi + k\cdot 360^\circ)}} = \sqrt[n]{r}\;e^{j\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n}}$

Die hier aufgeführten Regeln können natürlich auch mit dem Versorsymbol geschrieben werden:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \,\underline{/\varphi_1 + \varphi_2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\underline{/\varphi_1 - \varphi_2},$$

$$z^n = r^n \,\underline{/n\varphi}, \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\;\underline{\bigg/\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n}}\,.$$

Für das Logarithmieren zur Basis e würde sich ergeben

$$\ln z = \ln(r\,e^{j\varphi}) = \ln r + \ln e^{j\varphi} = \ln r + j\varphi,$$

d. h., der Logarithmus einer komplexen Zahl z ist wiederum eine komplexe Zahl. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

Es wird Ihnen nun keine Schwierigkeiten bereiten, die Rechenoperationen auf die komplexen Zahlen in der Exponentialform anzuwenden. Sie werden im folgenden sehen, daß sich dadurch, daß in der Exponentialform einer komplexen Zahl der Betrag r und das Argument φ in getrennten, eingliedrigen Faktoren enthalten sind, das Rechnen zum Teil beträchtlich vereinfacht.

Lehrbeispiel 49

Es ist $z_1 = -1 + 2i$ mit $z_2 = e^{-j \cdot 24°}$ zu multiplizieren!

Lösung:

Sie verwandeln zunächst z_1 in die Exponentialform:

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \tan\varphi = \frac{2}{-1} = -2, \qquad \varphi \approx 116°34',$$

also $$z_1 = \sqrt{5}\, e^{j \cdot 116°34'}.$$

Jetzt lautet die Multiplikation

$$z_1 z_2 \approx \sqrt{5}\, e^{j \cdot 116°34'}\, e^{-j \cdot 24°} = \underline{\underline{\sqrt{5}\, e^{j \cdot 92°34'} = \sqrt{5}\, /92°34'}}$$

Lehrbeispiel 50

Es ist $e^{0,2 \pm 1,2j}$ in die trigonometrische und in die arithmetische Form überzuführen.

Lösung:

Nach dem allgemeinen Potenzgesetz gilt

$$e^{0,2 \pm 1,2j} = e^{0,2}\, e^{\pm 1,2j}.$$

Nach (14) folgt damit

$$e^{0,2 \pm 1,2j} = e^{0,2} (\cos \pm 1,2 + j \sin \pm 1,2)$$
$$= e^{0,2} (\cos 1,2 \pm j \sin 1,2).$$

Aus der Müller-Tafel (Tafel 9a, S. 75 bis 83) entnehmen Sie

$$e^{0,2} = 1,221, \qquad 1,2 = \text{arc } 68°45'.$$

Also ist

$$e^{0,2 \pm 1,2j} = \underline{\underline{1,221 (\cos 68°45' \pm j \sin 68°45').}}$$

Mit

$$\cos 1,2 = 0,3624 \qquad \text{und} \qquad \sin 1,2 = 0,9320$$

erhalten Sie schließlich

$$e^{0,2 \pm 1,2j} = 1,221 (0,3624 \pm 0,9320)$$
$$= 0,443 \pm 1,138j \qquad \text{(Rechenstab).}$$

In Bild 29 sind die beiden komplexen Zahlen graphisch dargestellt.

Es sollen nun der Reihe nach in (13) für φ die Winkel 0°, 90°, 180°, 270° und 360° eingesetzt werden. Sie erhalten:

Winkel φ Gradmaß	Bogenmaß	Winkelfaktor
0°	0	$e^{0j} = \cos 0 + j \sin 0 = +1 \quad (= e^0)$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$e^{\frac{\pi}{2}j} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j$
180°	π	$e^{\pi j} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	$e^{\frac{3}{2}\pi j} = \cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi = -j = e^{-\frac{\pi}{2}j}$
360°	2π	$e^{2\pi j} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = +1 = e^{0j}$

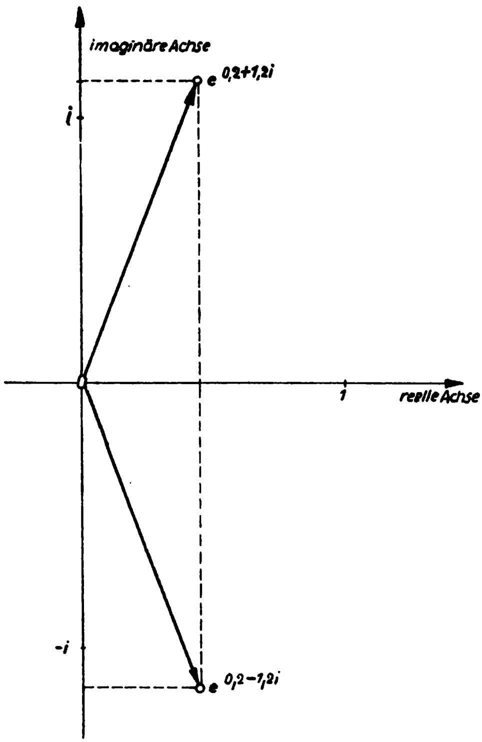

Bild 29

Demnach können Sie die in (2) bereits entwickelten Potenzen von i auch so schreiben:

$$j^1 = +j = e^{\frac{\pi}{2}j}$$
$$j^2 = -1 = e^{\pi j}$$
$$j^3 = -j = e^{\frac{3}{2}\pi j}$$
$$j^4 = +1 = e^{2\pi j}$$

Wegen der Periodizität des Winkelfaktors (vgl. Formel (15)) gilt zum Beispiel auch:

$$j^2 = -1 = e^{(2n+1)\pi j},$$
$$j^4 = +1 = e^{2n\pi j}.$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Im Kapitel 4.31, Lehrbeispiel 37, zeigte sich, daß einer Multiplikation mit j eine Drehung des Zeigers um 90° im positiven Sinne entspricht. Da $j = e^{j \cdot 90°}$ ist, bedeutet somit eine Multiplikation mit $e^{j \cdot 90°}$ eine Drehung des vorgegebenen Zeigers um 90° im positiven Sinne. Stellen Sie ähnliche Überlegungen für die Multiplikation einer komplexen Zahl mit $e^{j \cdot 180°}$, $e^{j \cdot 270°}$ und $e^{j \cdot 360°}$ an!

Allgemein kann gesagt werden:

Eine Multiplikation mit $e^{j\varphi}$ bedeutet geometrisch eine Drenung des gegebenen Zeigers um den Winkel φ. Der Betrag bleibt dabei erhalten.

Bild 30 zeigt die Multiplikation der komplexen Zahl $z = re^{j\varphi}$ mit j, -1 und $-j$.

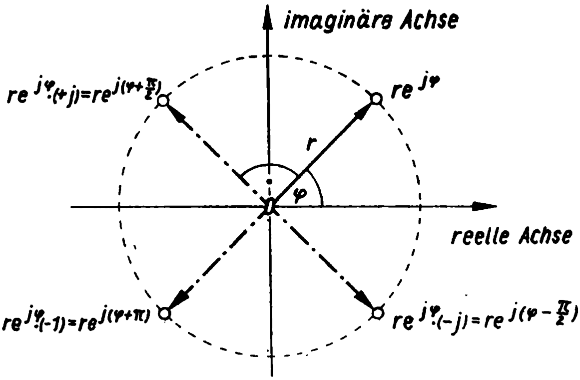

Bild 30

Übungen

30. *Formen Sie folgende komplexe Zahlen in die Exponentialform um:*
    a) $z = 3 - 2j$, *b)* $z = \sqrt{3} + j \cdot \sqrt{3}$*!*
31. *Bringen Sie auf die arithmetische Form:*
    a) $83e^{j\cdot 63°30'}$, *b)* $0{,}5e^{-j\cdot 16°}$, *c)* $3{,}8e^{-j\cdot 316°30'}$*!*
32. *Bestimmen Sie*
    a) $(1 + 3j)^{11}$, *b)* $\sqrt[6]{3 - j\sqrt{3}}$,
    indem Sie erst in die Exponentialform umwandeln!
33. *Berechnen Sie* $z = \dfrac{(8 - 10j)^4(-j)}{(1{,}2 - 0{,}9j)^5}$ *mit Hilfe der Exponentialform!*

Zusammenfassung

Jede komplexe Zahl $a + bj$ kann in die Exponentialform $r \cdot e^{j\varphi}$ übergeführt werden. Die Rechenarten der höheren Stufen werden für komplexe Zahlen in Exponentialform wesentlich vereinfacht.

Eine Multiplikation mit $e^{j\varphi}$ bedeutet geometrisch eine Drehung des gegebenen Zeigers um den Winkel φ.

Die Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten wiederholt ihre Werte, wenn der Imaginärteil des Exponenten um $k \cdot 360°$ wächst.

6 Anwendungen der komplexen Zahlen

Die Anwendungen der komplexen Zahlen in Physik und Technik sind so vielseitig, daß in diesem Rahmen nur auf einige Beispiele, die vor allem für den Elektrotechniker wichtig sind, eingegangen werden kann. Weiteres erfahren Sie in den Lehrbriefen der einzelnen Fachwissenschaften, z. B. in der Lehrbriefreihe „Grundlagen der Elektrotechnik“.

6.1 Symbolische Darstellung periodischer Vorgänge

Aus der Physik (Lbf. 3) wissen Sie, daß man unter einer harmonischen Schwingung die senkrechte Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie versteht. Denkt man sich einen Kreis vom Radius r, auf dem sich der Punkt P mit der Winkelgeschwindigkeit ω entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn bewegt, wobei $\overline{OP}$ mit der x-Achse zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Winkel φ einschließt, so ergeben sich für die Horizontal- und die Vertikalprojektion der Strecke $\overline{OP}$ (vgl. Bild 31)

$$x = r\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{und} \qquad y = r\sin(\omega t + \varphi).$$

x und y stellen dabei harmonische Schwingungsvorgänge dar.

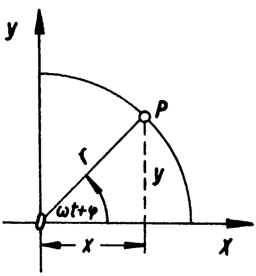

Bild 31

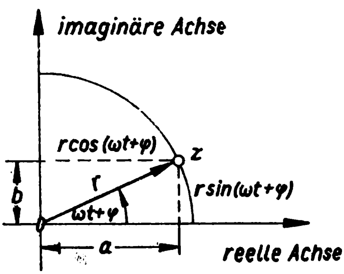

Bild 32

Für einen Zeiger in der komplexen Zahlenebene, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung rotiert und zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der reellen Achse einen Winkel φ einschließt, ergibt sich (vgl. Bild 32)

$$z = r\,[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$

oder

$$z = r\,e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form $z = a + bj$ folgt:

$$a = r\cos(\omega t + \varphi)$$
$$b = r\sin(\omega t + \varphi).$$

Realteil a und Imaginärteil b des rotierenden Zeigers können also als periodische Schwingungsvorgänge gedeutet werden. Es ist auch umgekehrt möglich, periodische Schwingungsvorgänge mittels Zeiger zu veranschaulichen.

Beispiel:
Der Momentanwert eines Wechselstromes wird durch die Beziehung

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

wiedergegeben, wobei I_m den Effektivwert, ω die Kreisfrequenz und φ den Phasenwinkel darstellt.

Wird zum obigen Momentanwert der imaginäre Anteil $j I_m \sin(\omega t + \varphi)$ hinzugefügt, dann kann der Momentanwert des Wechselstromes als symbolische Größe dargestellt werden.

$$\mathfrak{i} = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Beachten Sie dabei, daß i eine reale, physikalische Größe und $\mathfrak{i}$ eine *symbolische komplexe Größe*[1] darstellt. Durch diesen Schritt ergeben sich wesentliche Vereinfachungen in der geometrischen Darstellung und bei Berechnungen, da es jetzt möglich ist, die entsprechende Größe auch in der Exponentialform darzustellen:

$$\mathfrak{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

Die erforderliche Rechnung kann nun mit der symbolischen Größe durchgeführt und die reale, physikalische Größe aus dem Ergebnis der komplexen Rechnung zurückgewonnen werden. Die Rückgewinnung der physikalischen Größe als Realteil des komplexen Ergebnisses — der Realteil unserer komplexen Größe stellte ja die physikalische Größe dar — ist nur bei Summen und Differenzen möglich. Bei Produkten und Quotienten kann das Ergebnis nur in besonderen Fällen (vgl. Lehrbeispiel 51) aus dem Realteil entnommen werden. Näheres dazu erfahren Sie bei Behandlung des entsprechenden Stoffes in der Elektrotechnik. Die Vorteile dieser symbolischen Darstellungsweise liegen vor allem darin, daß die drei charakteristischen Größen (Amplitudenfaktor I_m, Phasenfaktor $e^{j\varphi}$ und Zeitfaktor $e^{j\omega t}$) in der exponentiellen Schreibweise in getrennten Faktoren enthalten sind — womit sich wesentlich besser arbeiten läßt — und daß sich Berechnungen analog denen der Gleichstromtechnik durchführen lassen. Es sind lediglich für die Ohmschen Widerstände bzw. Leitwerte komplexe Ausdrücke einzusetzen.

In den nächsten beiden Abschnitten soll die symbolische Methode an einfachen Beispielen angewandt werden.

---

[1] In den Anwendungen werden komplexe Zahlen durch Frakturbuchstaben ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{i}$, ...) gekennzeichnet, ihre Beträge durch $|\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{R}|$, $|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{i}|$, ... oder durch $|\mathfrak{a}| = a$, $|\mathfrak{b}| = b$, $|\mathfrak{R}| = R$, $|\mathfrak{G}| = G$, $|\mathfrak{i}| = i$, ...

6.2 Der Widerstands- und Leitwertoperator

Der Widerstand einer von Wechselstrom durchflossenen Spule soll bestimmt werden. Liegt an der Spule die Wechselspannung

$$\mathfrak{U} = |\mathfrak{U}|\, e^{j(\omega t + \alpha)},$$

so fließt ein Strom

$$\mathfrak{J} = |\mathfrak{J}|\, e^{j(\omega t + \beta)}.$$

Der Widerstand ergibt sich dann aus $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}}$ zu

$$\mathfrak{R} = \frac{|\mathfrak{U}|\, e^{j(\omega t + \alpha)}}{|\mathfrak{J}|\, e^{j(\omega t + \beta)}} = \frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{J}|}\, e^{j(\alpha - \beta)}.$$

Man nennt

$$\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}|\, e^{j\varphi}$$

mit $|\mathfrak{R}| = \frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{J}|}$ und $\varphi = \alpha - \beta$ den **komplexen Widerstand** oder **Widerstandsoperator.**

Die allgemeine Form des komplexen Widerstandes ist

$$\mathfrak{R} = R_1 + j R_2.$$

R_1 nennt man **Wirkwiderstand** und R_2 **Blindwiderstand.**

Der Betrag $|\mathfrak{R}| = \frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{J}|} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ stellt den **Scheinwiderstand** dar.

Der Winkel φ wird nach (6) bestimmt:

$$\tan \varphi = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\text{Blindwiderstand}}{\text{Scheinwiderstand}}.$$

φ ist der Phasenunterschied zwischen Spannung und Strom (vgl. auch Bild 33).

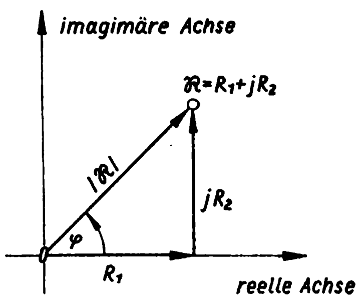

Bild 33

Lehrbeispiel 51

Die beiden komplexen Widerstände $\mathfrak{R}_1 = (100 + 200j)\,\Omega$ *und* $\mathfrak{R}_2 = (200 + 200j)\,\Omega$ *seien parallel geschaltet. Bestimmen Sie Wirkwiderstand, Blindwiderstand, Widerstandsoperator, Scheinwiderstand und Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung!*

Lösung:

Für parallel geschaltete Widerstände gilt

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} = \frac{(100 + 200j)(200 + 200j)}{(100 + 200j) + (200 + 200j)}\,\Omega = \frac{(100 + 200j)(200 + 200j)}{300 + 400j}\,\Omega.$$

Wegen der glatten Zahlenwerte ist es hier zweckmäßig, zunächst mit der arithmetischen Form weiterzurechnen. Es wird

$$\mathfrak{R} = \frac{10^4(1+2j)(2+2j)}{10^2(3+4j)}\,\Omega = 10^2\,\frac{-2+6j}{3+4j}\,\Omega$$

$$= 10^2\,\frac{18+26j}{25}\,\Omega = \underline{\underline{(72+104j)\,\Omega}}.$$

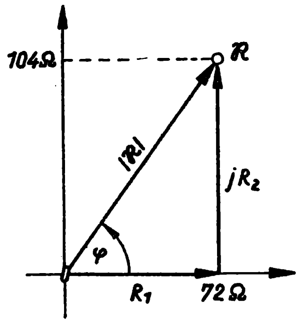

Bild 34

Diesem Ergebnis entnehmen Sie den Wirkwiderstand mit 72 Ω, den Blindwiderstand mit 104 Ω (Bild 34).

Zur Ermittlung von Scheinwiderstand und Phasenwinkel rechnen Sie $\mathfrak{R} = 8\,(9+13j)\,\Omega$ in die Exponentialform um. Es ist

$$r = 8\sqrt{9^2+13^2} = 40\sqrt{10} \approx 126{,}5; \qquad \tan\varphi = \frac{13}{9}, \qquad \varphi = 55°18{,}3'.$$

Der Widerstandsoperator lautet damit

$$\underline{\underline{\mathfrak{R} = 126{,}5\,e^{j\cdot 55°18{,}3'}\Omega.}}$$

Der Scheinwiderstand beträgt 126,5 Ω, der Phasenwinkel 55°18,3′.

Bildet man den Kehrwert des komplexen Widerstandes, so ergibt sich der **komplexe Leitwert** oder **Leitwertoperator** $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{|\mathfrak{R}|}\,e^{-j\varphi} = |\mathfrak{G}|e^{-j\varphi} = G_1 + jG_2.$$

G_1 stellt dabei den **Wirkleitwert** und G_2 den **Blindleitwert** dar.

Für den Betrag des komplexen Leitwertes gilt:

$$|\mathfrak{G}| = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}.$$

Lehrbeispiel 52

Bestimmen Sie den komplexen Gesamtwiderstand, Scheinwiderstand und Phasenwinkel für die in Bild 35 dargestellte Schaltung mit den komplexen Widerständen:

$$\mathfrak{R}_1 = 5\,e^{j\cdot 60°}\,\Omega, \quad \mathfrak{R}_2 = 10\,e^{j\cdot 30°}\Omega,$$
$$\mathfrak{R}_3 = 10\,e^{j\cdot 50°}\,\Omega!$$

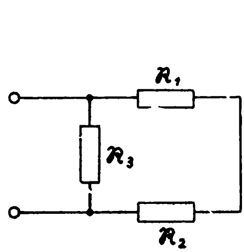

Bild 35

Lösung:

Da $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ in Reihe und $(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)$ zu $\mathfrak{R}_3$ parallel liegen, gilt für den gesamten komplexen Widerstand:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)\,\mathfrak{R}_3}{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) + \mathfrak{R}_3}$$

$$= \frac{(5\,e^{j\cdot 60^\circ} + 10\,e^{j\cdot 30^\circ})\,10\,e^{j\cdot 50^\circ}}{5\,e^{j\cdot 60^\circ} + 10\,e^{j\cdot 30^\circ} + 10\,e^{j\cdot 50^\circ}}\,\Omega.$$

Die komplexen Größen können nur in der arithmetischen Form addiert werden. Sie formen daher um:

$$\mathfrak{R}_1 = 5\,(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)\,\Omega = (2{,}50 + 4{,}33\,j)\,\Omega,$$
$$\mathfrak{R}_2 = 10\,(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)\,\Omega = (8{,}66 + 5j)\,\Omega,$$
$$\mathfrak{R}_3 = 10\,(\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ)\,\Omega = (6{,}43 + 7{,}66j)\,\Omega.$$

Sie berechnen nun

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = (11{,}16 + 9{,}33j)\,\Omega,$$
$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 = (17{,}59 + 16{,}99j)\,\Omega.$$

Also wird

$$\mathfrak{R} = \frac{(11{,}16 + 9{,}33j)\,10\,e^{j\cdot 50^\circ}}{17{,}59 + 16{,}99j}\,\Omega.$$

Für die weitere Rechnung formen Sie in die Exponentialform um:

$$r_{1/2} = \sqrt{11{,}16^2 + 9{,}33^2} = 14{,}55; \qquad \tan\varphi_{1/2} = \frac{9{,}33}{11{,}16}, \qquad \varphi_{1/2} = 39^\circ 54';$$

$$r_{1/2/3} = \sqrt{17{,}59^2 + 16{,}99^2} = 24{,}46 \qquad \tan\varphi_{1/2/3} = \frac{16{,}99}{17{,}59}, \qquad \varphi_{1/2/3} = 44^\circ 00'.$$

Es folgt:

$$\mathfrak{R} = \frac{14{,}55\,e^{j\cdot 39^\circ 54'} \cdot 10\,e^{j\cdot 50^\circ}}{24{,}46\,e^{j\cdot 44^\circ}}\,\Omega = \underline{\underline{5{,}95\,e^{j\cdot 45^\circ 54'}\,\Omega}}.$$

Der Scheinwiderstand beträgt $|\mathfrak{R}| = 5{,}95\,\Omega$. Für den Phasenwinkel erhalten Sie $\varphi = 45^\circ 54'$.

6.3 Ortskurven

Ist eine Größe des komplexen Widerstandes $\mathfrak{R} = R + j\omega L$ veränderlich, so führt der Zeiger mit der Veränderung dieser Größe eine Bewegung aus. Sind zum Beispiel R und L konstant und ist ω variabel, so liegen die Spitzen der Zeiger, die sich für verschiedene Werte von ω ergeben, alle auf einer Geraden, die parallel zur imaginären Achse liegt und von ihr den Abstand R hat (vgl. Bild 36). Die Gerade, auf der die Zeigerspitzen liegen, wird als **Ortskurve**, in diesem Fall als Ortsgerade bezeichnet. Allgemein erhält man Ortskurven, wenn für eine Reihe komplexer Zahlen, die sich z. B. durch Änderung der Frequenz f, des Widerstandes R oder der Induktivität L ergeben, die Zeiger gezeichnet und ihre Spitzen durch

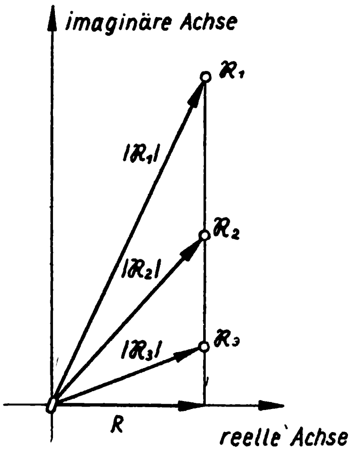

Bild 36

einen Linienzug verbunden werden. Der so gefundene Linienzug wird als Ortskurve bezeichnet. Eine Ortskurve gibt also den geometrischen Ort der Spitze eines Zeigers an, der eine komplexe Größe mit veränderlichem Real- oder veränderlichem Imaginärteil darstellt.

Lehrbeispiel 53

Zeichnen Sie die Ortskurve für $\mathfrak{R} = (R + 100j)\,\Omega$ *im Bereich* $0 \leqq \frac{R}{\Omega} \leqq 200$*!*

Lösung:

Da der Imaginärteil des komplexen Ausdruckes konstant ist, liegen die Zeigerspitzen alle auf einer Parallelen zur reellen Achse (Bild 37).

Übung

34. *Die Widerstände* $\mathfrak{R}_1 = (100 + 100j)\,\Omega$ *und* $\mathfrak{R}_2 = 50j\,\Omega$ *sind parallel geschaltet. Bestimmen Sie Widerstandsoperator, Scheinwiderstand und Phasenwinkel der Schaltung!*

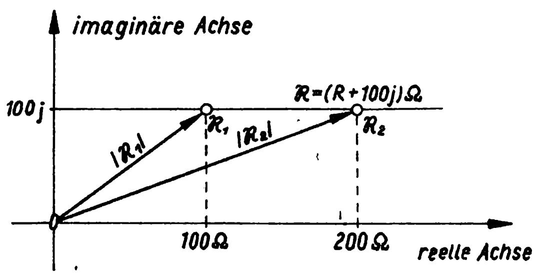

Bild 37

Zusammenfassung

Periodische Schwingungsvorgänge können durch komplexe Ausdrücke symbolisch dargestellt werden. In der Wechselstromtechnik lassen sich dadurch Berechnungen analog denen in der Gleichstromtechnik durchführen.

Unter Ortskurven versteht man diejenige Kurve, die die Spitze eines variablen Zeigers beschreibt.

1. a) $30i$ b) abi c) $12i$
2. a) 0 b) $i\sqrt{2}$
3. a) i b) $\frac{17}{24}i$
4. Das Addieren bzw. Subtrahieren eines ganzzahligen Vielfachen von 4, z. B. $4n$, im Exponenten von i^m bedeutet eine Multiplikation bzw. Division mit i^{4n}. Da $i^{4n} = 1$ ist, folgt:

   $i^m = i^m \cdot i^{4n} = i^{m+4n}$ bzw. $i^m = i^m : i^{4n} = i^{m-4n}$
5. a) -1 b) $-i$ c) 1 d) i e) $-i$ f) $-i$ g) i h) $-i$ i) i
6. a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{xy}{20}$ c) $-ab$ d) $-xyi$ e) abi
7. a) $(a-b)i$ b) $(a-b)^3 i$ c) $-i$
8. a) 0 b) $\frac{1}{3}i$
9. a) $\bar{z} = -0{,}4 - 1{,}2i$ b) $\bar{z} = x + yi$
10. a) $a = -3;\ b = 2$ b) $a = -8;\ b = -1$ c) $a = 3;\ b = 0$
    d) $a = 0;\ b = -1$ e) $a = 0;\ b = 0$
11. a) $-2(1+i)$ b) $5a - 2bi$ c) $-4a + 9i$ d) $-1 - 3i$ e) $-6i$
12. Die Summe zweier komplexer Zahlen ist reell (imaginär), wenn die Imaginärteile (Realteile) dem Betrage nach gleich sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben. Ein Sonderfall hierfür sind konjugiert komplexe Zahlen.
13. a) $8 - 5{,}6i$ b) $-6 - 10i$ c) $-1 - i$
14. a) $-13 + 11i$ b) $7 + i$ c) $1 + 26i\sqrt{2}$
    d) $5i$ e) $2(a^2 + b^2) - 3abi$ f) $a^2 + 2b + ai\sqrt{b}$
15. a) 12 b) $x + y$
16. a) $(2m + 3ni)(2m - 3ni)$ oder $(3n + 2mi)(3n - 2mi)$
    b) $\left(x + \frac{1}{2}yi\right)\left(x - \frac{1}{2}yi\right)$ oder $\left(\frac{1}{2}y + ix\right)\left(\frac{1}{2}y - ix\right)$
    c) $(\sqrt{m} + i\sqrt{n})(\sqrt{m} - i\sqrt{n})$ oder $(\sqrt{n} + i\sqrt{m})(\sqrt{n} - i\sqrt{m})$
    d) $(6 + i)(6 - i)$ oder $(1 + 6i)(1 - 6i)$
    e) $(5 + 2i)(5 - 2i)$ oder $(2 + 5i)(2 - 5i)$
17. Eine reelle Zahl kann nicht eindeutig durch ein Produkt konjugiert komplexer Zahlen dargestellt werden, da Sie z. B. schreiben können

$37 = 36 + \ 1 = (6 + i)(6 - i) = (1 + 6i)(1 - 6i)$

$37 = 25 + 12 = (5 + 2i\sqrt{3})(5 - 2i\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} + 5i)(2\sqrt{3} - 5i)$

18. a) $2 + i$ b) $-\frac{14}{41} - \frac{25}{41} i\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{13} + \frac{4}{13} i\sqrt{7}$ d) $\frac{11}{14} + \frac{5}{14} i\sqrt{3}$

19. a) $\frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{1}{6} i$ b) $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i = \frac{3}{2}(-1 + i)$

20. a) $7 + 6i\sqrt{2}$ b) $u^2 - v - 2ui\sqrt{v}$ c) $(6u^2 - 2v)\, i\sqrt{v}$ d) -8 e) 0

21. a) 0 b) $-2i$

22. a) $6 + 8i = 10(\cos 53°8' + i \sin 53°8')$
    b) $-5 + 12i = 13(\cos 112°37' + i \sin 112°37')$
    c) $-1 - i = \sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$
    d) $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \cos 300° + i \sin 300°$
    e) $i = \cos 90° + i \sin 90°$
    f) $-9 = 9(\cos 180° + i \sin 180°)$

23. a) $\cos 150° + i \sin 150° = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} i$ b) $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\sqrt{3}$
    c) $\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9i}{2}$ d) $3\sqrt{3} + 3i$ e) $-1 + i\sqrt{3}$

24. a) Sie lesen ab (Bild 38): $(a + bi) + (a - bi) = 2a;$
$(a + bi) - (a - bi) = 2bi.$

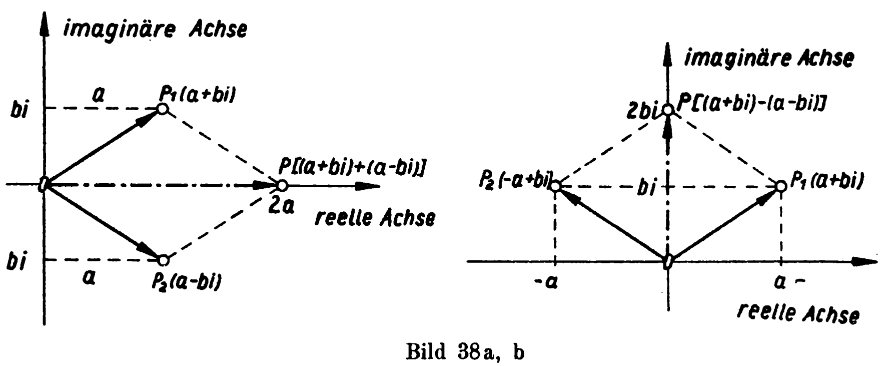

Bild 38a, b

b) Sie lesen ab (Bild 39): $(1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i;$
$(1 + 2i) - (3 - i) = -2 + 3i.$

25. a) $z_1 z_2 = 6(\cos 90° + i \sin 90°)$
    b) $z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$
    $z_1 z_2 = 8\sqrt{2}(\cos 365° + i \sin 365°) = 8\sqrt{2}(\cos 5° + i \sin 5°)$

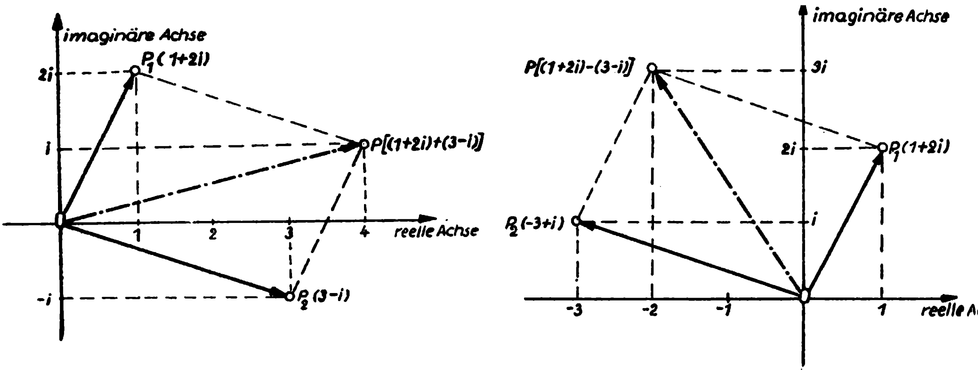

Bild 39 a, b

26. Sie lesen ab (Bild 40): $(1 + 2i)(3 - 2i) = 7 + 4i$

27. a) $2(\cos 42^\circ + i \sin 42^\circ)$

b) $3 + 4i = 5(\cos 53^\circ 8' + i \sin 53^\circ 8')$

$\frac{z_1}{z_2} = 5(\cos 23^\circ 8' + i \sin 23^\circ 8')$

c) $2i = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$, $\frac{z_1}{z_2} = 2[\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ]$

d) $-4 : (-\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ) = 4 : (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$,

$4 = 4(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$, $\frac{z_1}{z_2} = 4(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$.

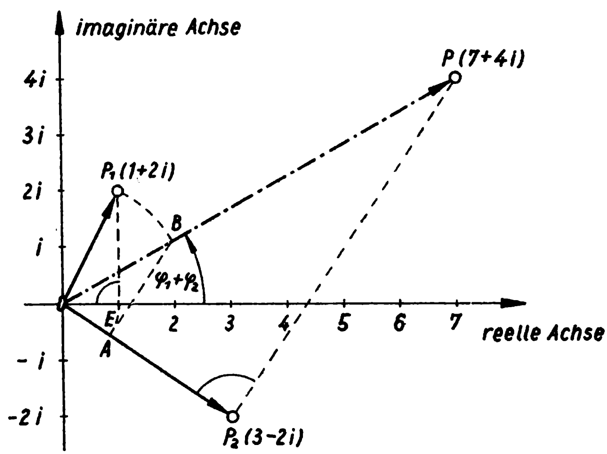

Bild 40

28. a) $r = \sqrt{13}$, $\tan\varphi = 0{,}6$, $\varphi = 33°41{,}4'$; $(3 + 2i)^6 = -2035 - 828\,i$

b) $r = 1$, $\tan\varphi = -\sqrt{3}$, $\varphi = 120°$; $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3 = 1$

c) $$(-\cos 40° - i\sin 40°)^9 = (-1)^9(\cos 40° + i\sin 40°)^9$$
$$= -(\cos 360° + i\sin 360°) = -1$$

29. a) $r = 10$, $\tan\varphi = -0{,}75$, $\varphi = 323°8'$

$$\sqrt[5]{8 - 6i} = \sqrt[5]{10}\,[\cos(64°37{,}6' + k \cdot 72°) + i\sin(64°37{,}6' + k \cdot 72°)[$$

$k = 0$: $z_1 = \sqrt[5]{10}\,(\cos 64°37{,}6' + i\sin 64°37{,}6')$
$\approx 0{,}679 + 1{,}432\,i$

$k = 1$: $z_2 = \sqrt[5]{10}\,(\cos 136°37{,}6' + i\sin 136°37{,}6')$
$\approx -1{,}152 + 1{,}088\,i$

$k = 2$: $z_3 = \sqrt[5]{10}\,(\cos 208°37{,}6' + i\sin 208°37{,}6')$
$\approx -1{,}391 - 0{,}759i$

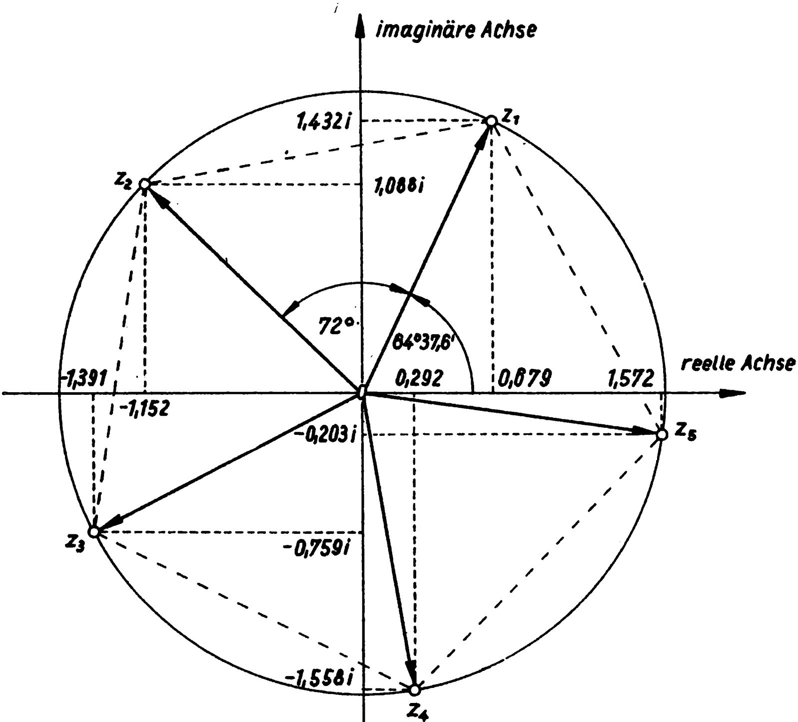

Bild 41

$k = 3\colon \qquad z_4 = \sqrt[5]{10}\,(\cos 280°37{,}6' + i \sin 280°37{,}6')$
$\qquad\qquad\qquad \approx 0{,}292 - 1{,}558\,i$
$k = 4\colon \qquad z_5 = \sqrt[5]{10}\,(\cos 352°37{,}6' + i \sin 352°37{,}6')$
$\qquad\qquad\qquad \approx 1{,}572 - 0{,}203\,i$

Vgl. Bild 41.

b) $r = 1, \qquad \varphi = 270°$

$\sqrt{-i} = \sqrt{1}\,[\cos(135° + k \cdot 180°) + i \sin(135° + k \cdot 180°)]$

$k = 0\colon \qquad z_1 = 1\,(\cos 135° + i \sin 135°)$

$$z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

$k = 1\colon \qquad z_2 = 1\,(\cos 315° + i \sin 315°)$

$$z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

Vgl. Bild 42.

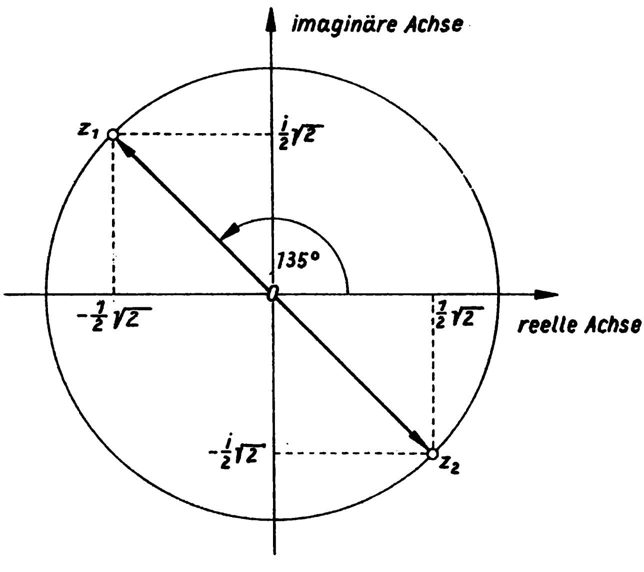

Bild 42

c) $r = \sqrt{2}, \qquad \tan\varphi = 1, \qquad \varphi = 225°$

$\sqrt[3]{-1 - i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,[\cos(75° + k \cdot 120°) + i \sin(75° + k \cdot 120°)]$

$k = 0\colon \qquad z_1 = \sqrt[6]{2}\,(\cos 75° + i \sin 75°) \approx 0{,}291 + 1{,}085\,i$

$k = 1\colon \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\,(\cos 195° + i \sin 195°) \approx -1{,}085 - 0{,}291\,i$

$k = 2$: $\quad z_3 = \sqrt[6]{2}\,(\cos 315° + i \sin 315°) \approx 0{,}793 - 0{,}793\, i$
Vgl. Bild 43.

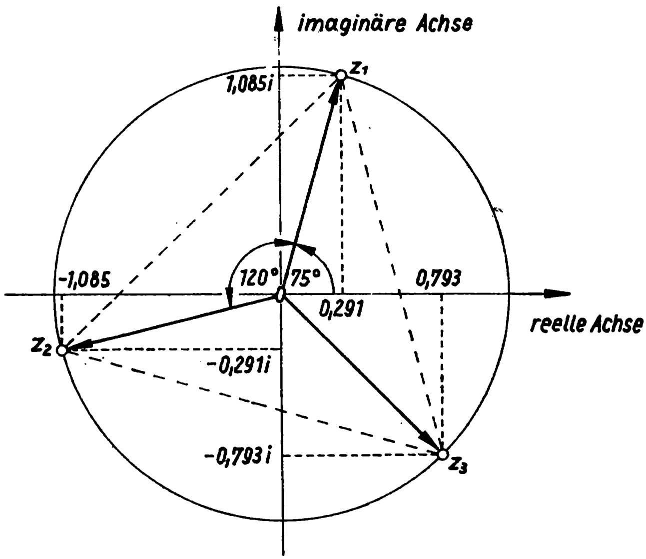

Bild 43

d) $(\cos 30° - i \sin 30°)$ ist zunächst auf die trigonometrische Form zu bringen:

$z = \cos 30° - i \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} i; \quad r = 1, \quad \tan\varphi = \frac{-1}{3}\sqrt{3},$
$\varphi = 330°;$
$z = 1\,(\cos 330° + i \sin 330°)$
$\sqrt[4]{\cos 330° + i \sin 330°} = \sqrt[4]{1}\,[\cos(82°30' + k \cdot 90°) + i \sin(82°30' + k \cdot 90°)]$
$k = 0$: $\quad z_1 = (\cos 82°30' + i \sin 82°30') \approx 0{,}131 + 0{,}991\, i$
$k = 1$: $\quad z_2 = (\cos 172°30' + i \sin 172°30') \approx -0{,}991 + 0{,}131\, i$
$k = 2$: $\quad z_3 = (\cos 262°30' + i \sin 262°30') \approx -0{,}131 - 0{,}991\, i$
$k = 3$: $\quad z_4 = (\cos 352°30' + i \sin 352°30') \approx 0{,}991 - 0{,}131\, i$
Vgl. Bild 44.

e) $r = 1, \quad \varphi = 0°$
$\sqrt[4]{1} = 1\,[\cos(0° + k \cdot 90°) + i \sin(0° + k \cdot 90°)]$
$k = 0$: $\quad z_1 = \cos 0° + i \sin 0° = 1$
$k = 1$: $\quad z_2 = \cos 90° + i \sin 90° = i$

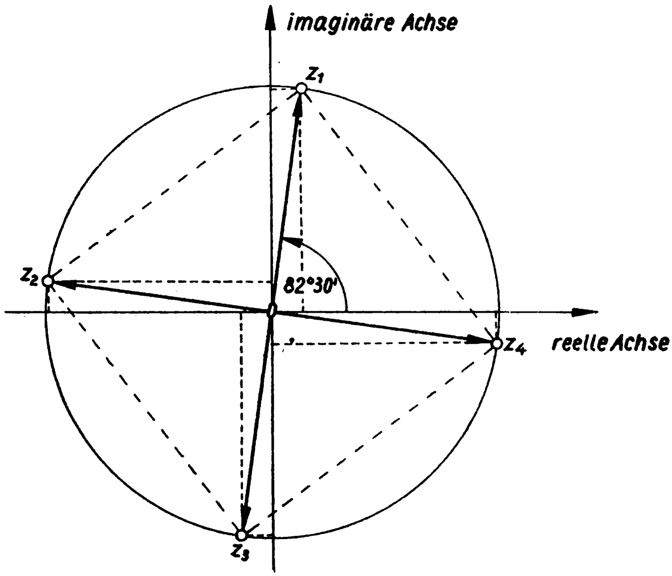

Bild 44

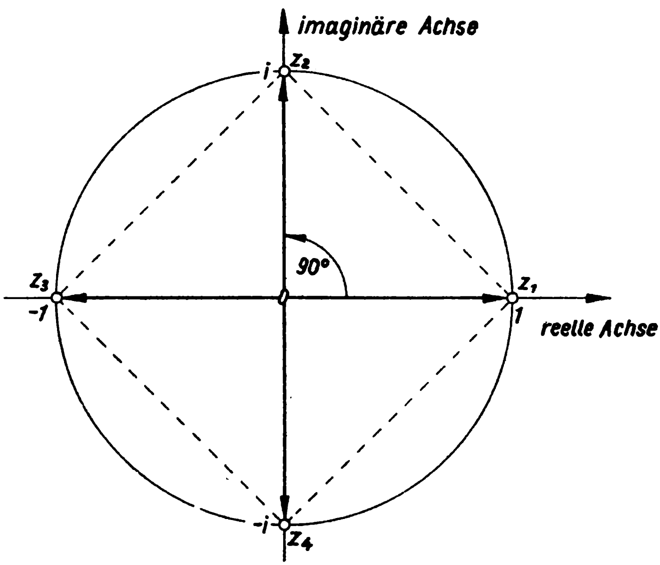

Bild 45

$k = 2: \qquad z_3 = \cos 180° + i \sin 180° = -1$
$k = 3: \qquad z_4 = \cos 270° + i \sin 270° = -i$
Vgl. Bild 45.

f) $r = 243, \qquad \tan \varphi = 0, \qquad \varphi = 0°$

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{243}\,[\cos(0° + k \cdot 72°) + i \sin(0° + k \cdot 72°)]$$
$$= 3\,(\cos k \cdot 72° + i \sin k \cdot 72°)$$

$k = 0: \qquad z_1 = 3\,(\cos 0° + i \sin 0°) = 3$
$k = 1: \qquad z_2 = 3\,(\cos 72° + i \sin 72°) \approx 0{,}927 + 2{,}853\,i$
$k = 2: \qquad z_3 = 3\,(\cos 144° + i \sin 144°) \approx -2{,}427 + 1{,}763\,i$
$k = 3: \qquad z_4 = 3\,(\cos 216° + i \sin 216°) \approx -2{,}427 - 1{,}763\,i$
$k = 4: \qquad z_5 = 3\,(\cos 288° + i \sin 288°) \approx 0{,}927 - 2{,}853\,i$
Vgl. Bild 46.

30. a) $z = 3{,}61\,e^{j \cdot 326°19'} = 3{,}61\,e^{-j \cdot 33°41}$
b) $z = 2{,}45\,e^{j \cdot 45°}$

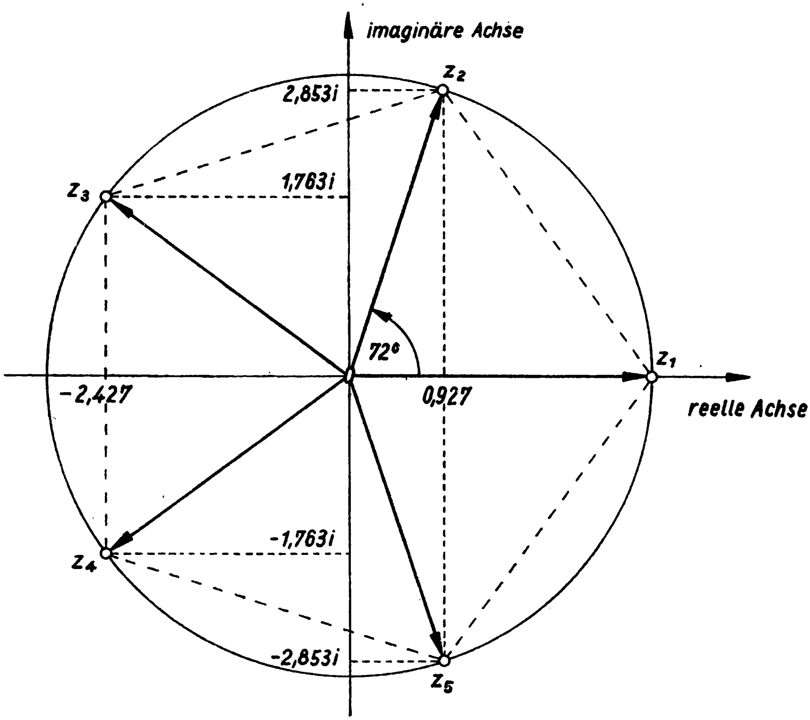

Bild 46

31. a) $37{,}0 + 74{,}3j$ b) $0{,}481 - 0{,}138j$ c) $2{,}76 + 2{,}62j$

32. a) $10^5 \cdot \sqrt{10}\, e^{j \cdot 67^\circ 12{,}9'}$

b) $\sqrt[6]{3 - j\sqrt{3}} = \sqrt[12]{12}\, e^{j(55^\circ + k \cdot 60^\circ)}$

$z_1 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 55^\circ}$ $z_2 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 115^\circ}$

$z_3 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 175^\circ}$ $z_4 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 235^\circ}$

$z_5 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 295^\circ}$ $z_6 = \sqrt[12]{12}\, e^{j \cdot 355^\circ}$

33. $$z = \frac{26896\, e^{j \cdot 154^\circ 38{,}4'} \cdot e^{j \cdot 270^\circ}}{7{,}594\, e^{j \cdot 175^\circ 39{,}0'}} \approx 3540\, e^{j \cdot 248^\circ 59{,}4'}$$

34. $$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} = \frac{(100 + j \cdot 100)(50j)}{(100 + 100j) + 50j}\, \Omega = \frac{-5000 + 5000j}{100 + 150j}\, \Omega$$

Zähler und Nenner sind in der Exponentialform darzustellen:

$$\mathfrak{R} = \frac{5000\sqrt{2}\, e^{j \cdot 135^\circ}}{180\, e^{j \cdot 56^\circ 18{,}6'}}\, \Omega = 39{,}2\, e^{j \cdot 78^\circ 41{,}4'}\, \Omega$$ (Widerstandsoperator).

Phasenwinkel: $\varphi = 78^\circ 41{,}4'$

Scheinwiderstand: $|\mathfrak{R}| = 39{,}2\, \Omega$.

Imaginäre Zahlen

Imaginäre Einheit	$i = \sqrt{-1}$
Definition	$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
Potenzen von i	$i^{4n} = 1 \quad i^{4n+2} = -1$ $i^{4n+1} = i \quad i^{4n+3} = -i \qquad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$

Komplexe Zahlen

Formen	$z = a + bi$ arithmetische Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrische Form $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ Exponentialform
Umrechnung	$a = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $b = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$ (a = Realteil; b = Imaginärteil; r = Betrag, Modul; φ = Argument, Phase)
konjugiert komplexe Zahlen	$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
Eulersche Gleichung	$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
Periodizität	$\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos(\varphi + k\cdot 360°) + i\sin(\varphi + k\cdot 360°)$ $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ $\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\varphi + 2k\pi)} \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, \mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ $z^n = r^n \mathrm{e}^{in\varphi}$
Radizieren	$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 360°}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 360°}{n}\right)\right]$ $k = 0; 1; 2; \ldots; (n - 1)$ $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\, \mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 360°}{n}\right)}$ $k = 0; 1; 2; \ldots; (n - 1)$

INHALTSVERZEICHNIS

Als Manuskript gedruckt!

Veröffentlicht unter Ag 604/53/61 — 3. Ausgabe — 3. Auflage
Satz und Druck: Druckerei „Magnus Poser“ Jena
Offsetnachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza

L 10 5 03 · 3-3
Preis DM 1,50