INGENIEUR-FERNSTUDIUM

BRAUNSCHWEIG

HÖHERE MATHEMATIK FÜR REGELUNGS-TECHNIKER

1.1

HERAUSGEBER
INGENIEURSCHULE FÜR
FEINWERKTECHNIK JENA

1009-01.1/61

Herausgeber:

Ingenieurschule für Feinwerktechnik
Jena

Höhere Mathematik für Regelungstechniker

Lehrbrief 1.1

von

Karl Braunschweig

2. veränderte Auflage

1961

Zentralstelle für Fachschulausbildung
– Bereich Maschinenbau, Elektrotechnik, Leichtindustrie –
Dresden

III/9/278 Ag 616/ 154 /61 Bestell-Nr. 1009-01. 1/ 61

Inhaltsverzeichnis

Seite

Seite

V o r w o r t

Zum Studium der Theorie linearer Regelungsvorgänge ist die Kenntnis einiger einfacher Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen erforderlich. Normalerweise werden sie im Mathematikstudium an Ingenieurschulen nicht geboten. Es ist Aufgabe dieser Lehrbriefe, dem Fernstudenten diese Kenntnisse zu vermitteln.
Die in der Regelungstechnik auftretenden Funktionen haben im allgemeinen stetigen Verlauf, sind überall differenzierbar und haben keine Pole, Deshalb kann auf feinere Untersuchungen, Existenz- und Unitätssätze verzichtet werden. Solche Betrachtungen sind auch an Ingenieurschulen nicht angebracht. Wichtiger ist es, daß der Leser einen Überblick über dieses mathematische Gebiet erhält. Er soll den physikalisch-technischen Sachverhalt beurteilen können, welcher durch die Differentialgleichungen und ihre Lösung beschrieben wird.
Der erste Lehrbrief behandelt zunächst wiederholend die komplexen Zahlen. Zusätzlich wird das ergänzt, was später zum Verstehen des komplexen Frequenzganges und der Ortskurve notwendig ist. Nach einer Einführung in die Problematik der Differentialgleichungen wird die Differentialgleichung erster Ordnung behandelt. Für den Regelungstechniker ist es auch sehr wichtig, daß er Differentialgleichungen aufstellen kann. Dies wird an mehreren Beispielen ausführlich gezeigt, obwohl hierfür oft mehr Aufwand erforderlich ist, als zur eigentlichen Lösung der Differentialgleichung.
In den folgenden Lehrbriefen werden gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung behandelt. Dabei nehmen Schwingungsprobleme einen breiten Raum ein. Einführungen in oft gebrauchte Verfahren, wie Fourier-Integral und Laplace-Transformation werden dort ebenfalls gegeben. Natürlich kann das nur informatorisch geschehen. Auf mathematische Strenge muß verzichtet werden.
Es ist dem Leser unbedingt zu empfehlen, die Übungsaufgaben zu rechnen. Denn zum Verständnis der Differentialgleichungen

muß man sich an sie gewöhnen. Am Schluß des Lehrbriefes sind sämtliche Lösungen angegeben.

1. Die komplexe Rechnung

Während Ihres Studiums der Lehrbriefreihe "Mathematik" haben Sie im Lehrbrief 5 die komplexen Zahlen kennengelernt. Bisher hatten sich jedoch für sie keine weitergehenden Anwendungen ergeben. Bei der Behandlung der Differentialgleichungen werden diese Kenntnisse häufig gebraucht. Der weitaus größte Teil der mathematischen Behandlung regelungstechnischer Probleme beruht ebenfalls auf der Kenntnis der komplexen Zahlen. Deshalb sollen Ihre Kenntnisse auf diesem Gebiet noch einmal zusammengefaßt und erweitert werden. Lesen Sie die folgenden Kapitel aufmerksam durch.

1.1. Die imaginäre Einheit

Es gibt Gleichungen, die sich innerhalb des Bereiches der reellen Zahlen nicht lösen lassen. So hat z.B. die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

die Lösungen

$$x_1 = 2 + \sqrt{-9} \text{ und } x_2 = 2 - \sqrt{-9}$$

Die Zahl $\sqrt{-9}$ ist aber im Bereich der reellen Zahlen nicht enthalten, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -9 ist. Will man auf die Lösung der quadratischen Gleichung nicht verzichten, dann muß man eine neue Zahlenart einführen, nämlich die imaginären Zahlen. Es ist zunächst

$$\sqrt{-9} = \sqrt{+9}\ \sqrt{-1}$$

Auf die Weise läßt sich jede Wurzel mit negativem Radikanten zerlegen:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{+a}\ \sqrt{-1}$$

Als neue Zahlenart wird nun die imaginäre Zahl als Produkt einer reellen Zahl mit der "imaginären Einheit" $\sqrt{-1}$ eingeführt, wobei die Abkürzung

$$i = \sqrt{-1}$$

oder, wie in der Elektrotechnik und Regelungstechnik üblich,

$$j = \sqrt{-1}$$

eingeführt wird. Wir wollen uns im Hinblick auf das Studium der Regelungstechnik für "j" entscheiden.
Als Definition der imaginären Einheit gilt

$$j^2 = -1$$

Rechnen Sie also nicht

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = \pm 1.$$

Es ergibt sich weiter

$$j^2 = -1;\ j^3 = j^2 j = -j;\ j^4 = j^2 j^2 = +1;\ j^5 = j^4 j = j; \ldots$$

Allgemein:

$$j^{4k} = 1;\quad j^{4k+1} = j;\quad j^{4k+2} = -1;\quad j^{4k+3} = -j$$

mit $\qquad k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\ .$

1.2. Die komplexe Zahl

Als Lösung der quadratischen Gleichung in 1.1. hatte sich

$$x_1 = 2 + 3\,j \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - 3\,j$$

ergeben. Diese Lösungen erscheinen als Summe einer reellen mit einer imaginären Zahl. Das Pluszeichen hat hierbei natürlich nur symbolische Bedeutung, es bedeutet, daß hier eine reelle und eine imaginäre Zahl verknüpft sind. Eine Summe im bekannten Sinne läßt sich nicht bilden, da beide Zahlenarten voneinander verschieden sind.
Eine solche Verknüpfung von reeller und imaginärer Zahl nennt man eine "komplexe Zahl". Bezeichnen wir sie mit "z", dann ist ihre allgemeine Form

$$z = a + b\,j$$

Dabei nennt man a den Realteil, b (nicht b j !) den Imaginärteil der komplexen Zahl z.
Die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung unterscheiden sich immer - wenn die Lösungen komplex sind - durch das Vorzeichen des imaginären Teiles. Ein solches komplexes Zahlenpaar nennt man zueinander "konjugiert komplex".

$$z = a + b\,j \qquad z^{*} = a - b\,j$$

Die beiden Zahlen z und z^* sind zueinander konjugiert komplex.

1.3. Die Gaußsche Zahlenebene

Zur geometrischen Darstellung einer reellen Zahl benutzt man die Zahlengerade. Nach Wahl eines Nullpunktes und eines Maßstabes ist jedem Punkt auf dieser Geraden eine reelle Zahl zugeordnet und umgekehrt. Will man die komplexen Zahlen geometrisch darstellen, dann reicht eine Gerade nicht; denn eine komplexe Zahl ist erst durch zwei Angaben, nämlich durch den Realteil und den Imaginärteil eindeutig bestimmt. Gauß benutzte zur geometrischen Darstellung komplexer Zahlen die Ebene, die von der reellen Achse (auf der die reellen Zahlen aufgetragen werden) und von der hierzu senkrechten imaginären Achse aufgespannt wird.

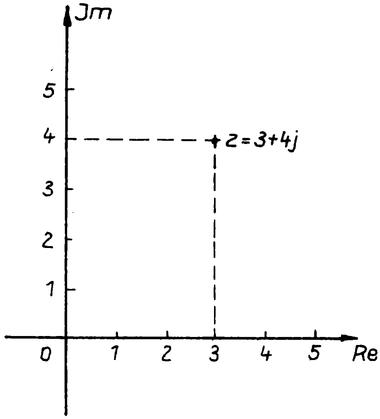


Bild 1

Die komplexe Zahl $z = 3 + 4\,j$ findet man in der auf Bild 1 angegebenen Weise.

Beachten Sie, daß diese komplexe Zahlenebene nichts mit der Ihnen aus der analytischen Geometrie bekannten x-y-Ebene zu tun hat. Es handelt sich hier um die Darstellung einer komplexen Zahl! Offenbar ist die komplexe Zahl $z - 3 + 4\,j$ auch durch den von 0 zum Punkt z laufenden Vektor oder Zeiger eindeutig bestimmt. Geometrisch kann also eine komplexe Zahl durch einen Vektor veranschaulicht werden.

1.4. Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

1.41. Addition

$$z_1 = a_1 + b_1\,j;\; z_2 = a_2 + b_2\,j;\; z_1 + z_2 = a_1 + a_2\,(b_1 + b_2)j$$

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden addiert, indem man ihre Realteile und ihre Imaginärteile für sich addiert.
In der Gaußschen Zahlenebene findet man die Summe $z_1 + z_2$, indem man an den Vektor z_1 (oder z_2) ähnlich wie beim Kräftedreieck in der Mechanik den Vektor z_2 (oder z_1) anhängt. Der so gefundene Punkt stellt dann die Zahl $z_1 + z_2$ dar. Auch dieser Punkt kann durch einen Vektor gekennzeichnet werden. In Bild 2 ist diese Konstruktion am Beispiel der Zahlen $z_1 = 3 + 6\,j$ und $z_2 = 4 + 2\,j$ gezeigt. Bild 3

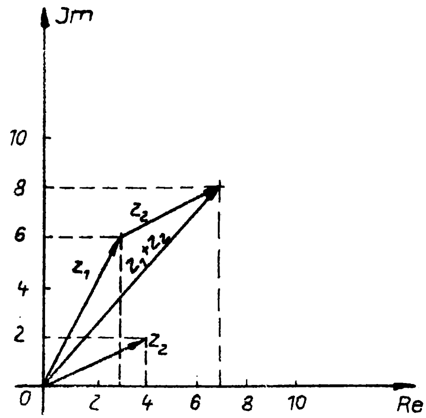


Bild 2

zeigt die Konstruktion für drei Zahlen.

1.42. Subtraktion

$z_1 = a_1 + b_1 j$; $z_2 = a_2 + b_2 j$; $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)j$

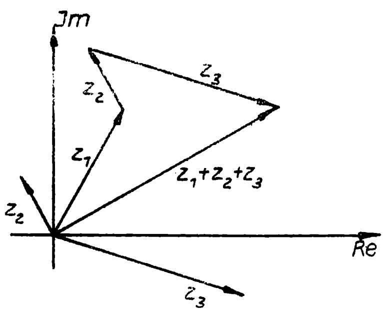


Bild 3

In Worten: Zwei komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man ihre Realteile und ihre Imaginärteile für sich subtrahiert. In der Gaußschen Zahlenebene findet man die Differenz $z_1 - z_2$, indem man zu z_1 den negativen Vektor $- z_2$ addiert.
In Bild 4 ist diese Konstruktion für das

Beispiel $z_1 = 6 + 4\,j$ und $z_2 = 4 + 7\,j$ mit $z_1 - z_2 = 2 - 3\,j$ gezeigt.

1.43. Multiplikation

Hierbei ist zu beachten, daß $j^2 = -1$; $j^3 = -j$ usw. ist.

$$z_1\,z_2 = (a_1 + b_1 j)\,(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,j$$

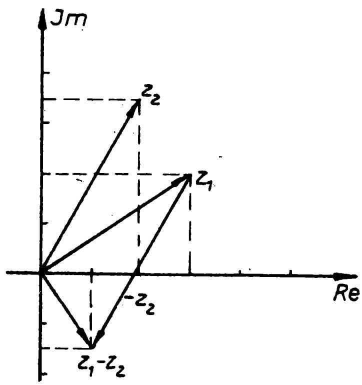


Bild 4

Zwei komplexe Zahlen werden nach den bekannten Regeln für das Multiplizieren zweier Summen multipliziert.
Die graphische Multiplikation wird mit Hilfe der Eulerschen Gleichung erklärt. Dies soll später geschehen.
Wichtig ist: Das Produkt zweier zueinander konjugiert komplexer Zahlen ist reell:

$$(a + b\,j)\,(a - b\,j) = a^2 + b^2 \quad \text{(Rechnen Sie nach!)}$$

1.44. Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\,j}{a_2 + b_2\,j} = \frac{(a_1 + b_1\,j)\,(a_2 - b_2\,j)}{(a_2 + b_2\,j)\,(a_2 - b_2\,j)} =$$

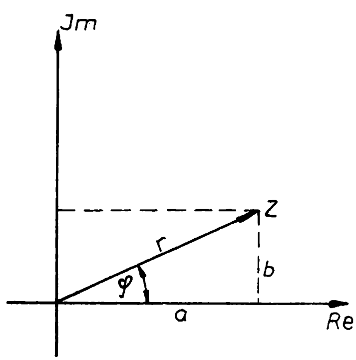
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (a_2b_1 - a_1b_2)\,j}{a_2^2 + b_2^2}$$

Der wesentliche Schritt zur Berechnung des Quotienten war die Erweiterung des Bruches mit der zu dem Nenner konjugiert komplexen Zahl $z^* = a_2 - b_2 j$, wodurch der Nenner reell wurde. Der Quotient ist wieder eine komplexe Zahl der Form $A + B\,j$, wobei

$$A = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{ist.}$$

Auch hier wird die graphische Ausführung im Zusammenhang mit der Eulerschen Gleichung besprochen.

1.5. Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten



Zur Festlegung einer komplexen Zahl sind zwei Größen notwendig. In der Darstellung $z = a + b\,j$ waren es die beiden Zahlen a und b, Realteil und Imaginärteil. Man kann nach Bild 5 offenbar auch durch den Winkel φ des Vektors z zur reellen Achse und durch die Länge dieses Vektors die

Zahl z eindeutig angeben. Den Winkel φ und die Länge r nennt man die "Polarkoordinaten" der komplexen Zahl z. Es ist

$$a = r \cos\varphi \ , \ b = r \sin\varphi \ .$$

Damit erhält man für $z = a + b\,j$ die Polarkoordinatendarstellung

$$z = r\,(\cos\varphi + j \sin\varphi) \qquad (1)$$

In dieser Darstellung heißt

r der Modul oder der absolute Betrag,
φ das Argument oder die Phase der komplexen Zahl z.

Nach Bild 5 ist

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

1.6. Die Eulersche Gleichung

Unter Verwendung der Reihendarstellung für $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und e^x ergibt sich die Gleichung

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi \qquad (2)$$

Die Ableitung dieser Formel finden Sie im Lehrbrief Mathematik IV Bd. 3 auf den Seiten 13/14. Sie soll hier nicht wiederholt werden. Es ist aber ratsam, wenn Sie sie noch einmal durchdenken.

Setzt man (2) in (1) ein, dann erhält man eine weitere Form der komplexen Zahl z, die für unsere spätere Behandlung der Differentialgleichungen, ebenso auch für die mathematische Behandlung der Regelungstechnik außerordentlich wichtig ist:

$$z = r\,e^{j\varphi} \qquad (3)$$

Mit dieser Darstellung ist eine graphische Deutung der Multiplikation und Division komplexer Zahlen in einfacher Weise möglich.

Multiplikation: $z_1\, z_2 = r_1\, e^{j\varphi_1}\, r_2\, e^{j\varphi_2} = r_1\, r_2\, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Das bedeutet: Die absoluten Beträge multiplizieren sich, die Argumente addieren sich.

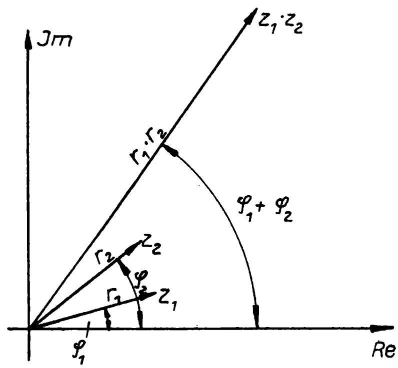


Bild 6

Der Vektor z_1 (oder z_2) wird um den Winkel φ_2 (oder φ_1) gedreht, während seine Länge r_2-mal (oder r_1-mal) vergrößert wird. Man spricht von einer "Drehstreckung".
Mit Hilfe der Gleichung (2) folgt auch

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1\, r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Man braucht dort nur für $r = r_1\, r_2$, für $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ zu setzen (siehe Bild 6).
Entsprechend folgt für die Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

(Die rechte Seite folgt wieder mit (2))

Potenzieren:

$$z^n = (r e^{j\varphi})^n = r^n e^{jn\varphi} = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

Radizieren:
Vorher eine Bemerkung:

Es ist $\cos\varphi + j\sin\varphi = \cos(\varphi + 2\pi k) + j\sin(\varphi + 2\pi k)$
deshalb ist auch

$$z = r e^{j\varphi} = r e^{j(\varphi + 2\pi k)},$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet. Der rechte Teil der Gleichung wäre dann die allgemeinste Darstellung der komplexen Zahl. Beim Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren tritt diese Form nicht in Erscheinung, da immer nur ganzzahlige Vielfache von 2π auftreten. Beim Radizieren aber folgt:

$$\sqrt[n]{z} = (r e^{j(\varphi + 2\pi k)})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{(\varphi + 2\pi k)}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}} e^{j(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

Diese Formeln haben Sie unter der Bezeichnung "Moivrescher Lehrsatz" kennengelernt.
Wir wollen noch einige Beziehungen angeben:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = 0 + j\,1 = j$$

Hiernach gilt also

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad (4)$$

Mit diesem Ergebnis folgt

$$j\,z = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot r\,e^{j\varphi} = r\,e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

Das bedeutet: Der Vektor einer komplexen Zahl z wird durch Multiplikation dieser komplexen Zahl mit der imaginären Einheit j um 9o° in positiver Richtung gedreht. Dabei bleibt der absolute Betrag r von z erhalten. Denn $|z| = r$ hat sich nicht geändert.
Entsprechend gilt: Multipliziert man die komplexe Zahl z mit $\frac{1}{j}$, dann wird der Vektor um 9o° im negativen Sinne gedreht. (Beweisen Sie diese Aussage und beachten Sie hierbei die Beziehung $-j = \frac{1}{j}$!)
Weiterhin gilt noch

$$e^{2\pi j} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = 1 + j\,0 = 1$$

Bis hierhin haben Sie das gelesen, was Sie aus dem Studium des Lehrbriefes 5 über komplexe Zahlen wissen sollten. Haben Sie beim Lesen dieser Seiten Lücken festgestellt, dann werden Sie gut daran tun, diese Lücken durch wiederholendes Studium der entsprechenden Kapitel des 5. Lehrbriefes zu beseitigen. Die folgenden Kapitel über komplexe Zahlen gehen über den im 5. Lehrbrief behandelten Stoff hinaus. Sie sind aber besonders für die Regelungstechnik außerordentlich wichtig.

1.7. Abhängigkeit einer komplexen Zahl von einem Parameter

1.71. Ortskurven

In der komplexen Zahl $z = a + b\,j$ können Realteil a und Imaginärteil b Funktionen einer reellen Veränderlichen - wir wollen sie x nennen - sein.

$$a = a(x);\; b = b(x) \text{ und hiermit } z = a(x) + b(x)\,j$$

läßt man nun x die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, dann ergeben sich hierzu die entsprechenden z - Werte, die man in der komplexen Ebene aufsuchen kann. Verbindet man alle diese Punkte, dann erhält man in der komplexen Ebene eine Kurve. Wir nennen sie Ortskurve.

Als Beispiel wählen wir $a = x$; $b = x^2$, also $z = x + x^2\,j$

Wir erhalten folgende Wertetabelle:

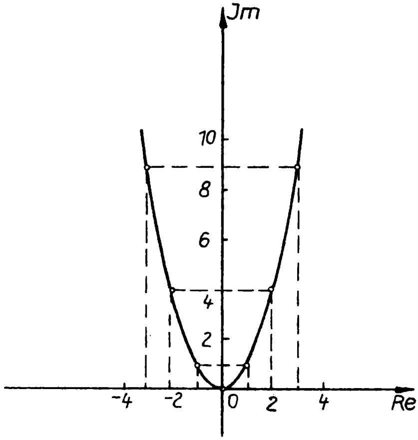


Bild 7

x	x^2	z
-3	9	$-3+9j$
-2	4	$-2+4j$
-1	1	$-1+1j$
0	0	0
$+1$	1	$+1+1j$
$+2$	4	$+2+4j$
$+3$	9	$+3+9j$

Bild 7 zeigt den Verlauf der Kurve.

Die Ortskurven haben natürlich nichts mit den Ihnen aus der analytischen Geometrie bekannten Funktionen $y = f(x)$ zu tun, wenn auch manchmal ähnliche Kurven wie in unserem Beispiel, wo die Kurve die Form einer Parabel hat, entstehen. Wir haben es hier mit komplexen Zahlen zu tun, die Funktionen einer reellen Veränderlichen sind!
Will man eine solche komplexe Funktion in Polarkoordinaten r und φ darstellen, dann werden entsprechend r und φ Funktionen der reellen Veränderlichen x.

$$r = r(x); \quad \varphi = \varphi(x) \quad \text{und} \quad z(x) = r(x)\, e^{j\varphi(x)}$$

Beispiel:

$$r = 0{,}5\,x \qquad \varphi = 0{,}2\,x$$

$$z(x) = 0{,}5\,x\, e^{j\,0{,}2\,x}$$

Bei der Aufstellung der Wertetabelle für diese Funktion rechnet man zweckmäßig den Winkel $\varphi = 0{,}2\,x$ in Grad um:

$$\varphi^o = \frac{180}{\pi}\,\widehat{\varphi} \qquad = 57{,}3\,\widehat{\varphi}$$

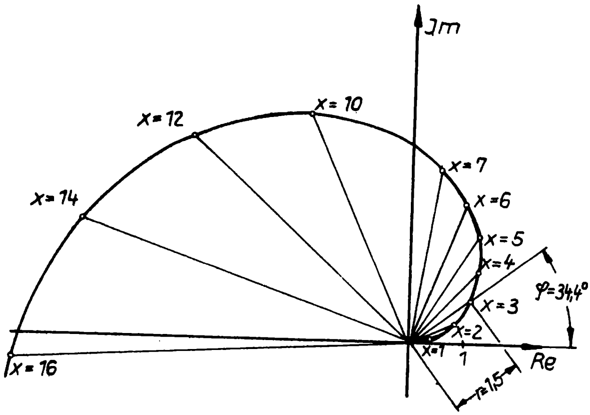


Bild 8

Danach ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	r	φ
1	o,5	11,5
2	1,o	22,9
3	1,5	34,4
4	2,o	45,8
5	2,5	57,3
6	3,o	68,8
7	3,5	8o,2
1o	5,o	114,6
12	6,o	137,5
14	7,o	16o,5
16	8,o	183,5

In Bild 8 ist diese Ortskurve gezeichnet. Die Winkel der Strahlen zur reellen Achse entsprechen den in der Wertetabelle angegebenen, desgl. auch die Längen. Die reelle

Veränderliche x erscheint nicht als irgendein Maß in der Darstellung der Ortskurve. Deshalb schreibt man an die entsprechenden Punkte der Kurve die zugehörigen x-Werte heran. x wird auch "Kurvenparameter" genannt.

1.72. Darstellung einer Schwingung in komplexer Schreibweise

Es soll nun eine ganz spezielle komplexe Funktion von einer reellen Veränderlichen betrachtet werden. Die reelle Veränderliche sei jetzt die Zeit t, und es sei nur der Winkel φ von ihr abhängig, während r konstant bleiben soll. Für φ gelte die lineare Beziehung

$$\varphi = \omega \cdot t \text{ oder auch } \varphi = \omega t + \varphi_0$$

Damit lautet die Funktion

$$z = r\, e^{j\omega \cdot t} \text{ oder } z = r\, e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

ω ist hierbei eine Konstante. Da r nicht von der Zeit abhängt und somit eine Konstante ist, φ aber mit der Zeit linear anwächst, so wird der Zeiger z also ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Zeiger konstanter Länge sein. Alle zu dieser Funktion gehörenden Punkte in der Zahlenebene liegen auf einem Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt.

Die zu der gegebenen Funktion gehörende Ortskurve ist ein Kreis um den Nullpunkt.

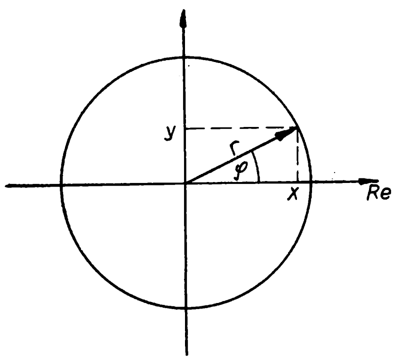


Bild 9

Betrachten wir nun Realteil und Imaginärteil dieser Funktion. Nach Bild 9 ist

$$x = r \cos\varphi = r \cos\omega t; \quad y = r \sin\varphi = r \sin\omega t$$

Sie sehen:

Der Realteil der Funktion $z = r\,e^{j\omega t}$ ist eine cos-Schwingung, während ihr Imaginärteil eine sin-Schwingung darstellt.

Sie werden später bei der Behandlung von Differentialgleichungen sehen, daß man diese Eigenschaft bei Schwingungsproblemen mit Vorteil verwendet.

Zu dem Winkel φ_0 muß noch etwas gesagt werden:

Betrachten wir die beiden Vektoren

$$z_1 = r_1\,e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\,e^{j\omega t}$$

Beide laufen mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um. Sie haben aber verschiedene Längen. z_1 beschreibt einen Kreis mit dem Radius r_1, z_2 entsprechend mit dem Radius r_2. Hierzu Bild 1o. Betrachten wir beide Vektoren

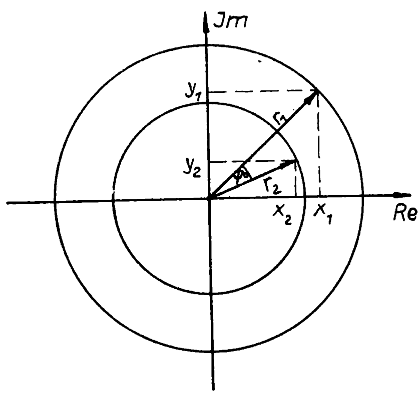


Bild 1o

zunächst in der Anfangslage zur Zeit t = o. Dann ist

$$z_1 = r_1 \; e^{j\varphi_0} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2 \; e^{0} = r_2$$

Der Vektor z_2 liegt demnach zur Zeit t = 0 auf der reellen Achse, während z_1 um den Winkel φ_0 gedreht erscheint. Betrachtet man nun beide Vektoren zur Zeit t, dann eilt z_1 um den Winkel φ_0 dem Vektor z_2 voraus.
Die zugehörigen sin- und cos-Schwingungen lauten dann

für z_1: $x_1 = r_1 \cos(\omega t + \varphi_0)$; $y_1 = r_1 \sin(\omega t + \varphi_0)$

für z_2: $x_2 = r_2 \cos \omega t$; $y_2 = r_2 \sin \omega t$

Die zu z_1 gehörenden Schwingungen eilen demnach den zu z_2 gehörenden Schwingungen um den Winkel φ_0 voraus. Wie Ihnen bekannt ist, nennt man φ_0 die Phasenverschiebung der Schwingung Ganz ähnlich liegen die Dinge, wenn z_1 die Form

$$z_1 = r_1 \; e^{j(\omega t - \varphi_0)}$$

hat. In diesem Falle eilt z_1 dem Vektor z_2 nach.

1.73. Differentiation und Integration

Wir wollen uns nun überlegen, welche Bedeutung das Differenzieren und Integrieren für die Funktion

$$z = r \; e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

hat.
Es sei daran erinnert, daß die Ortskurve zu dieser Funktion ein Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt ist.
Sie wissen aus der reellen Analysis, daß der Differentialquotient zweierlei Bedeutung hat, die, wie Sie gesehen haben, letzten Endes dasselbe sind: Der Differentialquotient war

erklärt als Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{an der Stelle } x$$

Hierbei war $y = f(x)$ eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen. So lautete die eine Definition des Differentialquotienten. Die andere hiermit gleichbedeutende Erklärung des Differentialquotienten war

y' ist die Steigung der Tangente an der Funktion $y = f(x)$ im Punkte x_0,

Als Differentialquotienten der Funktion $z = r\,e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ wollen wir den entsprechenden Ausdruck

$$\frac{dz}{dt} = z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad \text{zur Zeit } t$$

definieren und wollen uns überlegen, was diese Rechenvorschrift bedeutet. Betrachten wir Bild 11. z sei die Lage des Zeigers zur Zeit t. Dabei ist t der Zeitpunkt, für den der Differentialquotient gebildet werden soll. $z + \Delta z$ sei die Lage des Zeigers zur Zeit

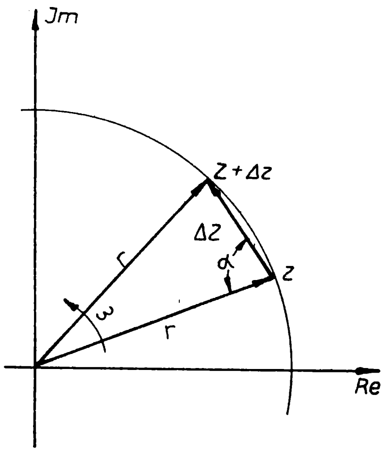


Bild 11

$t + \Delta t$. Aus Bild 11 sehen Sie, daß der Zeiger $z + \Delta z$ aus z durch Addition des Zeigers Δz hervorgeht.

Wir vermerken noch, daß der Zeiger z mit Δ z den Winkel α bildet. Nun soll $\Delta t \to 0$ gehen. Das bedeutet, daß der Zeiger z + Δ z sich immer mehr der Lage des Zeigers z nähert, die er schließlich im Grenzwert erreicht. Der Vektor Δ z geht bei diesem Grenzprozeß gegen Null. Wenn Sie diesen Grenzübergang anhand des Bildes 11 verfolgen, dann erkennen Sie, daß der Winkel α gegen 90° geht.

Was ist nach diesen Überlegungen nun der Grenzwert

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad ?$$

Zähler und Nenner gehen gleichzeitig gegen Null. Es ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$. Sie wissen, daß dieser Ausdruck in den meisten Fällen einen endlichen Wert besitzt. Wir werden ihn noch ausrechnen.
Da nun Δ z ein komplexer Zeiger ist, so muß $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ ein komplexer Zeiger sein, denn nach unserer Voraussetzung ist Δ t eine reelle Zahl und der Quotient einer komplexen und einer reellen Zahl ist komplex. Nach unseren Überlegungen steht dieser komplexe Zeiger auf dem Zeiger z senkrecht. Wenn Sie sich Δ z zunächst in dieselbe Richtung wie z zeigend denken, dann erhalten Sie die neue Lage von $\frac{dz}{dt}$, indem Sie $\frac{dz}{dt}$ um 90° im positiven Sinne drehen.
Wir können also feststellen:
Der Differentialquotient $\frac{dz}{dt}$ der Funktion $z = r\,e^{j\omega t}$ ist ein Zeiger, der gegenüber dem Zeiger z um 90° im positiven Sinne gedreht ist.

Bei rellen Funktionen hatten Sie gesehen, daß der Differentialquotient die Steigung einer Tangente und damit eine reelle Zahl ist. In unserem Falle aber ist der Differentialquotient ein komplexer Zeiger und keine Richtungsangabe. $\frac{dz}{dt}$ ist nicht die Tangentensteigung an der Ortskurve! Das ist auch verständlich, wenn Sie bedenken, daß eine Ortskurve nichts mit der Darstellung einer reellen Funktion in

der reellen x-y-Ebene zu tun hat.
Nachdem wir eine geometrische Deutung des Differentialquotienten gefunden haben, wollen wir ihn nun ausrechnen.

Zur Zeit t gilt: $z = r\,e^{j\omega t}$, und zur Zeit $t + \Delta t$:

$$z + \Delta z = r\,e^{j\omega(t + \Delta t)}$$

Es ist

$$z + \Delta z = r\,e^{j\omega(t + \Delta t)} = r\,e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega \cdot \Delta t}$$

Jetzt bilden wir:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{(z + \Delta z) - z}{(t + \Delta t) - t} = \frac{r\,e^{j\omega t}\, e^{j\omega \cdot \Delta t} - r\,e^{j\omega t}}{\Delta t} =$$

$$= r\,e^{j\omega \cdot t}\;\frac{e^{j\omega \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t} \qquad (1)$$

Wir entwickeln nun $e^{j\omega \cdot \Delta t}$ in eine Reihe. Ganz allgemein ist

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Mit Hilfe dieser Reihendarstellung wurde die Eulersche Gleichung im Lehrbrief 5 über komplexe Zahlen hergeleitet. Setzen Sie für $x = j\omega \cdot \Delta t$, dann folgt

$$e^{j\omega \cdot \Delta t} = 1 + \frac{j\omega \cdot \Delta t}{1!} + \frac{(j\omega \cdot \Delta t)^2}{2!} + \frac{(j\omega \cdot \Delta t)^3}{3!} +$$

Weiter ergibt sich

$$e^{j\omega \cdot \Delta t} - 1 = \frac{j\omega \cdot \Delta t}{1!} + \frac{(j\omega \cdot \Delta t)^2}{2!} + \frac{(j\omega \cdot \Delta t)^3}{3!} + \dots$$

Wir dividieren durch Δt:

$$\frac{e^{j\omega\cdot\Delta t}-1}{\Delta t} = \frac{j\omega}{1!} + \frac{(j\omega)^2\,\Delta t}{2!} + \frac{(j\omega)^3\,\Delta t^2}{3!} + \dots \quad . \qquad (2)$$

Bilden wir nun den Grenzwert

$$z = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \,,$$

dann wird hiervon der erste Teil von Formel (1), $r\,e^{j\cdot\omega\cdot t}$, nicht berührt, da hierin Δz und Δt nicht vorkommen. Es bleibt nur der Grenzwert von Formel (2). In dieser Reihe bleibt für $\Delta t \to 0$ nur $\frac{j\omega}{1!} = j\omega$. Es ergibt sich also

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = r\,e^{j\omega t} \cdot j\omega = j\omega\, r\,e^{j\omega t} = j\omega z, \qquad (3)$$

denn es war ja $\quad z = r\,e^{j\omega t}$.

Dieses Ergebnis hätten wir auch erhalten, wenn wir sofort die aus der reellen Analysis bekannten Regeln für das Differenzieren angewandt hätten. Es ist nämlich mit der Substitution $x = j\omega t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(r\,e^{x}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = r\,e^{x}\,j\omega = j\omega\,r\,e^{j\omega t}$$

Das bedeutet:
Bei der auf Seite 18 gegebenen Definition des Differentialquotienten der Funktion $z = f(t)$

$$z = \frac{dz}{dt} \quad \text{an der Stelle } t$$

dürfen wir die Ableitung in der aus der reellen Analysis bekannten Weise bilden.
Wir wollen das Ergebnis $\dot{z} = j\cdot\omega\cdot z$ noch etwas genauer

betrachten.

Die von uns betrachtete Funktion war

$$z = r\,e^{j\omega t}$$

Alle unsere Überlegungen gelten natürlich auch für $z = r\,e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ denn das konstante Glied φ_0 fällt beim Differenzieren des Exponenten fort. Für j können wir nach Seite 11 , Formel (4) auch schreiben

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

und hiermit wird aus (3) von S.21 :

$$\dot{z} = j\omega r\,e^{j\omega t} = \omega r\,e^{j\omega t}\,e^{j\frac{\pi}{2}} = r\omega e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

Das bedeutet, daß der Vektor $\dot{z}$ gegenüber dem Vektor z eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2} = 90^{o}$ im positiven Drehsinn hat. Der Betrag des Vektors $\dot{z}$ ist das ω-fache des Vektorbetrages von z, denn es ist

$$|z| = r \quad \text{und} \quad |\dot{z}| = \omega r$$

(Die senkrechten Striche sind nur eine Abkürzung für "Betrag"). Die positive Drehung von $\dot{z}$ gegenüber z hatten wir schon auf Seite 11 erkannt.

Der Differentialquotient der Funktion $z = r\,e^{j\omega t}$ bzw.

$$z = r\,e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

ist ein Vektor, der auf dem Vektor z senkrecht steht und dessen absoluter Betrag ω -mal so groß ist wie der Betrag von z.

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = j\omega r\,e^{j\omega t} = j\omega z \quad \text{bzw.} \quad \dot{z} = j\omega r\,e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$
$$= j\omega z$$

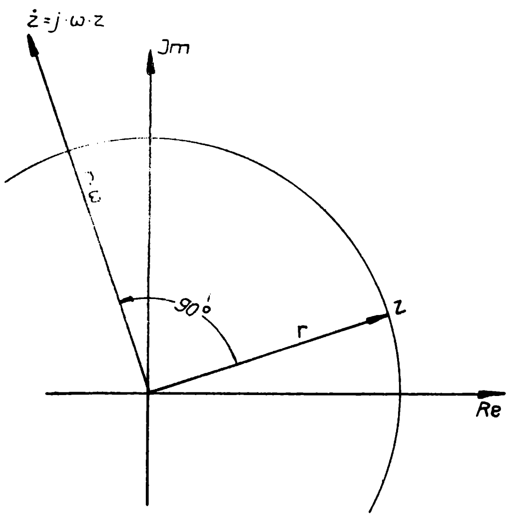


Bild 12

Vergleichen Sie hierzu Bild 12.

Nach diesen Überlegungen ist es nicht mehr schwer, eine Definition für das Integral zu finden. Wir erklären es wie auch in der reellen Analysis als Umkehrung der Differentiation. Wir wollen das Integral auch wieder nur für die Funktion

$$z = r\,e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad z = r\,e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

erklären.

Unter der Funktion $Z = \int z\,dt$ verstehen wir die Funktion, deren Ableitung z ergibt.

$$\frac{dZ}{dt} = z$$

Sie können nun selber leicht nachprüfen, daß

$$Z = \frac{1}{j\omega} \, r \, e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

sein muß, indem Sie diese Funktion nach t differenzieren.
Sie wissen, daß $\frac{1}{j} = -j$ ist. Wir können also schreiben:

$$Z = \int z \, dt = -\frac{j}{\omega} \, r \, e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

$$= + \frac{r}{\omega} \, e^{j(\omega t + \varphi_0)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= + \frac{r}{\omega} \, e^{j(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})},$$

wobei für $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$
geschrieben wurde. Das bedeutet:
Das Integral $Z = \int z \, dt$ der Funktion $z = r \, e^{j(\omega t + \varphi_0)}$
ist ein Vektor, der gegenüber dem Vektor z um 90^0 negativ gedreht ist und dessen Betrag das $\frac{1}{\omega}$ -fache des Betrages von z ist.

$$Z = \int z \, dt = \frac{1}{j\omega} \, r \, e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \frac{1}{j\omega} \, z$$

Vergleichen Sie auch hierzu Bild 13.
Wir haben diese komplexe Schwingungsgleichung ausführlicher behandelt, da die besprochenen Eigenschaften später sehr oft verwendet werden. Ganz besonders wichtig werden sie in der Regelungstechnik bei der Darstellung von Regelkreisgliedern durch den sog. "Frequenzgang". Machen Sie sich deshalb mit den eben besprochenen Dingen gut vertraut.

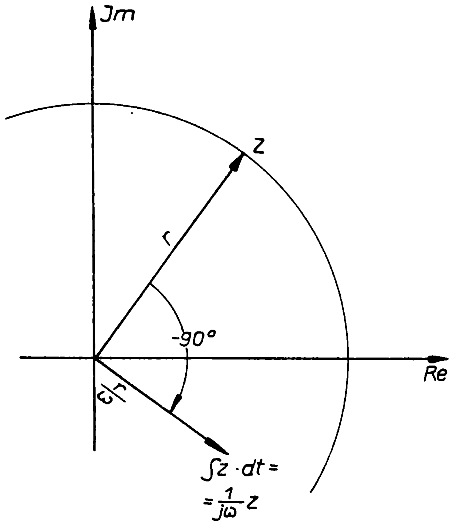


Bild 13

1.8. Anwendung komplexer Vektoren in der Wechselstromtechnik

Zum Schluß des Kapitels über komplexe Zahlen soll Ihnen noch eine Anwendung der komplexen Vektoren gezeigt werden.

Aus den Lehrbriefen über Elektrotechnik wird Ihnen bekannt sein,

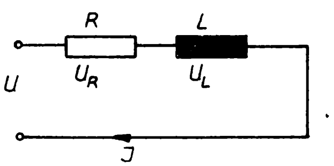


Bild 14 a

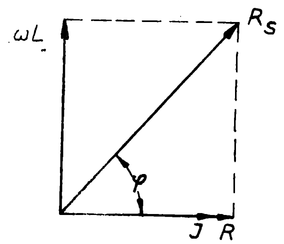


Bild 14 b

daß man Wechselstromvorgänge graphisch durch sog. Zeigerdiagramme beschreibt. Betrachten wir gleich ein Beispiel:
Nach Bild 14 a sei ein ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet mit einer Drossel der Induktivität L. Hierzu zeichnen wir das Zeigerdiagramm für den Scheinwiderstand des Kreises (Bild 14 b).
Wie Sie wissen, ergibt sich der Scheinwiderstand in diesem Falle als Diagonale eines Rechtecks, dessen eine Seite dem ohmschen Widerstand R, dessen andere Seite dem induktiven Blindwiderstand ω L entspricht.

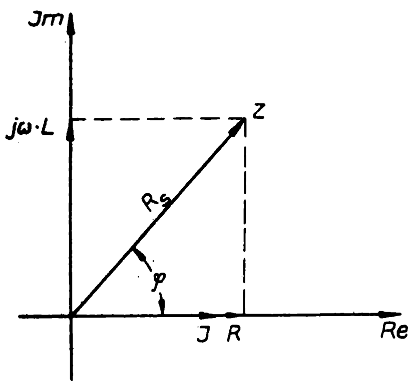


Bild 14 c

Es ist dann

$$R_s = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

U sei der Effektivwert der angelegten Wechselspannung.
J der Effektivwert des Stromes. Dann ist

$$U = J\,R_s = J\,\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Wir denken uns nun das Zeigerdiagramm in eine komplexe Ebene gelegt. Dabei falle R mit der reellen, ωL mit der imaginären Achse zusammen. Dem Zeiger R_s entspricht dann eine komplexe Zahl z mit dem Realteil R und dem Imaginärteil ωL. (Bild 14 c)

$$z = R + j\omega L$$

Die Länge dieser komplexen Zahl z, das ist ihr aboluter Betrag, entspricht dem Scheinwiderstand R_s der Schaltung:

$$|z| = R_s = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Außer der Beziehung zwischen Strom und Spannung interessiert noch der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung. Aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Der Winkel φ ist aber auch gleich dem Argument der komplexen Zahl z, so daß auch dieser Winkel durch die Angabe der komplexen Zahl z bestimmt ist.

Bei einem Gleichstromkreis nach Bild 15, in welchem zwei ohmsche Widerstände in Reihe geschaltet sind,

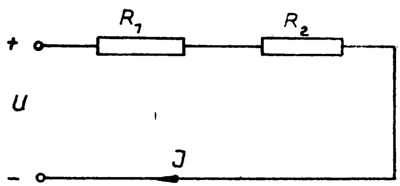


Bild 15

berechnet sich der Gesamtwiderstand nach der Kirchhoffschen Regel aus der Summe der beiden Einzelwiderstände.

$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

Normalerweise ist diese einfache algebraische Addition bei Wechselstrom nicht erlaubt und zwar immer dann, wenn Blindwiderstände vorhanden sind. Aus dem obigen Beispiel sehen Sie aber, daß man bei Verwendung komplexer Zahlen wenigstens formal auch bei Wechselstrom so rechnen darf. Man muß nur den induktiven Blindwiderstand als imaginäre Größe auffassen:

$$R_L = j\,\omega\,L$$

Dann gilt für den zunächst noch komplexen Scheinwiderstand z unseres obigen Beispieles:

$$z = R + R_L = R + j\,\omega\,L$$

Gegenüber Rechnungen in Gleichstromkreisen kommt jetzt hinzu, daß man von z den absoluten Betrag $|z| = R_s$ bilden muß. Dies ist immer dann erforderlich, wenn man numerische Ergebnisse haben will. Bei allgemeinen Rechnungen kann es oft unterbleiben. Man begnügt sich mit der als Ergebnis erscheinenden komplexen Zahl.
Aus der Zahl z erhält man in der schon gezeigten Weise R_s und φ,

$$R_s = |z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Betrachten wir noch ein zweites Beispiel:
Nach Bild 16 a sei ein ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet mit einem Kondensator, der Kapazität C. Es werde eine Wechselspannung mit dem Effektivwert U angelegt. Wie groß ist der Effektivwert J des Stromes und welchen Phasenwinkel hat er zur Spannung?

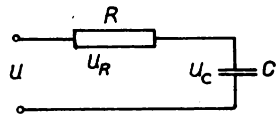


Bild 16 a

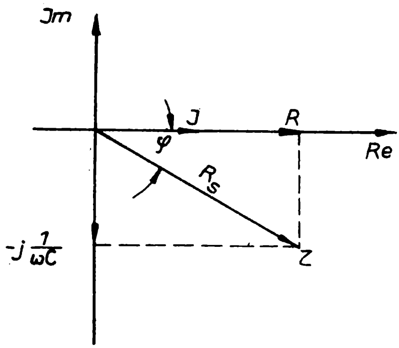


Bild 16 b

Bild 16 b zeigt das Zeigerdiagramm. Es ist hier gleich in die komplexe Ebene gezeichnet. in dem Ihnen bekannten Zeigerdiagramm ergibt sich der Scheinwiderstand der Schaltung als Diagonale in dem aus dem ohmschen Widerstand R und dem kapazitiven Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ bestehenden Rechteck. Hierbei ist noch zu beachten, daß der Zeiger von $\frac{1}{\omega C}$ dem Zeiger von R nacheilt, denn die Spannung über dem Kondensator eilt dem Strom um 9o° nach.

In der komplexen Zahlenebene entspricht nun wieder dem Scheinwiderstand der Schaltung eine komplexe Zahl z, deren Realteil der ohmsche Widerstand, deren Imaginärteil der kapazitive Blindwiderstand $\frac{-1}{\omega C}$ ist. Der absolute Betrag der komplexen Zahl z ist wieder der Scheinwiderstand R_s und das Argument von z ist wieder gleich dem Tangens des

Phasenwinkels φ zwischen Strom und Spannung:

$$z = R - j\frac{1}{\omega C}\ ; \quad R_s = |z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,.$$

$$\tan\varphi = \frac{-1}{R\omega C}$$

Und hiermit erhält man die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Strom und Spannung:

$$U = J\,R_s = J\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Auch dieses Ergebnis ist Ihnen aus der Elektrotechnik bekannt. Wir wollen nun die komplexe Zahl z unseres letzten Beispiels

$$z = R - j\frac{1}{\omega C}$$

noch in etwas anderer Form schreiben. Für - j kennen Sie die Gleichung

$$-j = \frac{1}{j}\,.$$

Hiermit ist

$$z = R + \frac{1}{j\omega C}$$

In dieser Form geschrieben, erscheint auch hier wieder die "algebraische" Summe zweier Widerstände. R ist der reelle ohmsche Wirkwiderstand, $R_c = \frac{1}{j\omega C}$ ist der "imaginäre" kapazitive Blindwiderstand.
Nach den beiden bisher betrachteten Beispielen erscheint die Einführung komplexer Zahlen nicht gerechtfertigt, da sich nichts Neues ergeben hat und die Ergebnisse unserer Rechnungen auch sehr einfach aus dem Zeigerdiagramm folgen. Das nächste und letzte Beispiel hierzu soll Ihnen

aber zeigen, daß schon bei recht einfach aussehenden, aus Reihen- und Parallelschaltung bestehenden Schaltungen die Anwendung der komplexen Rechnung viel Erleichterung bringt. Zunächst aber wollen wir unsere bisherigen Ergebnisse zusammenfassen und ein wenig erweitern.

In einem Gleichstromkreis errechnet sich der Gesamtwiderstand einer aus ohmschen Widerständen bestehenden Reihenschaltung aus der Summe der Einzelwiderstände.

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots .$$

Bei einer Parallelschaltung ohmscher Widerstände ergibt sich der Gesamtleitwert G aus der Summe der Einzelleitwerte

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

oder auch, da der Leitwert als reziproker Widerstand definiert ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots .$$

Diese "Kirchhoffschen Gesetze" gelten auch formal für Wechselstromkreise mit ohmschen Widerständen, induktiven und kapazitiven Blindwiderständen, wenn man komplex rechnet und für

den ohmschen Widerstand $R \; (= \frac{1}{G})$,
den induktiven Blindwiderstand $R_L = j\omega L \; (= \frac{1}{G_L})$,
den kapazitiven Blindwiderstand $R_c = \frac{1}{j\omega C} \quad (= \frac{1}{G_c})$

einsetzt. Der Betrag der so entstehenden komplexen Zahl z ist dem Scheinwiderstand der Schaltung gleich:

$$R_s = |z| \quad ,$$

während das Argument von z den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung angibt.

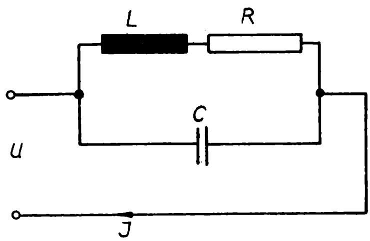


Bild 17

Wir haben diesen Satz auch für Parallelschaltungen formuliert, ohne hierauf weiter eingegangen zu sein. Auch die beiden oben gerechneten Beispiele sind natürlich kein Beweis für die Gültigkeit bei Reihenschaltung. Auf einen exakten Beweis kam es hier auch gar nicht an. Er liegt wesentlich tiefer. Wir wollen nun noch ein etwas umfangreicheres Beispiel rechnen. Eine Drossel der Induktivität L sei in Reihe geschaltet mit einem ohmschen Widerstand R. Parallel hierzu liege ein Kondensator der Kapazität C. (Bild 17).

R und L liegen in Reihe. Deshalb errechnet sich ihr komplexer Scheinwiderstand aus der Summe des "reellen" ohmschen Wirkwiderstandes R und des "imaginären" induktiven Blindwiderstandes $R_L = j\,\omega\,L$.

$$z_1 = R + j\omega L$$

Parallel zu dem "komplexen" Widerstand z_1 liegt der "imaginäre" kapazitive Widerstand z_2 (wir hatten ihn im zweiten Beispiel R_c genannt) $z_2 = \frac{1}{j\omega C}$. Wegen der Parallelschaltung von z_1 und z_2 gilt für den gesamten "komplexen" Scheinwiderstand z

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

Machen Sie diesen Bruch gleichnamig und bilden Sie seinen reziproken Wert, dann erhalten Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 lC + j\omega RC}$$

Der absolute Betrag dieser komplexen Zahl z ist der Scheinwiderstand R_s der Schaltung nach Bild 17. Wäre jetzt $R = 0$, dann würde man recht einfache Ausdrücke erhalten, aus denen die bekannte Resonanzbedingung $\frac{1}{\omega^2} = LC$ folgt, bei welcher innerhalb des Kreises Schwingungen auftreten. Die elektrische Energie pendelt zwischen Kondensator und Drossel hin und her. Für R ungleich Null werden die Ausdrücke für $R_s = |z|$ und für $\tan\varphi$ recht umständlich. Wir wollen deshalb mit Zahlen weiterrechnen.

Es sei

$U = 220$ V (Effektivwert), $R = 500\,\Omega$, $L = 3$ H, $C = 8\,\mu F$, $f = 50$ Hz $\omega = 2\pi f = 100\pi$. Gesucht sei der Effektivwert des Stromes.

Nach unserer letzten Formel für z ist

$$z = \frac{500 + j\,100\pi\,3}{1 - 100^2\pi^2 3.8.10^{-6} + j\,100\pi\,500.8.10^{-6}}$$

und nach Zusammenfassung

$$z = \frac{500 + 942\,j}{-1{,}37 + 1{,}26\,j}$$

Diese Zahl wird mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert:

$$z = \frac{(500 + 942\,j)}{(-1{,}37 + 1{,}26\,j)}\;\frac{(-1{,}37 - 1{,}26\,j)}{(-1{,}37 - 1{,}26\,j)} = 145 - 554\,j$$

Hieraus folgt der Phasenwinkel

$$\tan\varphi = \frac{-554}{145}\,; \quad \varphi = -75{,}3^\circ$$

d.h. die Spannung U eilt dem Strom J um den Winkel $\varphi = 75{,}3^\circ$ nach.

R_s ergibt sich aus dem absoluten Betrag von z: $R_s = |z|$

$$R_s = \sqrt{145^2 + 554^2} = 573$$

Aus $U = J\, R_s$ ergibt sich

$$J = \frac{U}{R_s} = \frac{220}{573} = 0{,}384 \text{ A}$$

An diesem Beispiel konnten Sie sehen, daß eine solche Aufgabe sich bei Verwendung komplexer Zahlen recht einfach lösen läßt. Die ganze Rechnung war algebraischer Natur. Auch schwierigere Beispiele lassen sich nach dieser Methode ganz schematisch rechnen. Aus diesem Grunde hat sich die komplexe Rechnung in der Elektrotechnik so eingebürgert. Später werden wir noch sehen, wie auch die komplexe Schreibweise der Schwingungen wesentliche Vereinfachungen in den Rechnungen bei Schwingungsproblemen ergibt. Es wird sich an anderer Stelle dann auch eine genauere Begründung für die soeben besprochene Rechnung mit komplexen Vektoren ergeben.

<u>Übungsaufgaben:</u>

1) Zur Wiederholung. Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen $z_1 = -3 + 5\,j$ und $z_2 = 2 - j$.
   Zu bilden ist die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$; $z_1\, z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$.
   Summe und Differenz sind auch graphisch zu bilden.

2) Zur Wiederholung. Addieren Sie graphisch
   $z_1 = -4j$; $z_2 = 3 + 5\,j$; $z_3 = -2 - 3\,j$; $z_4 = 2$

3) Zur Wiederholung. Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b\,j$ und $z_2 = a_2 + b\,j$ mit gleichen Imagi-

närteilen. Ihr Produkt soll rein imaginär, ihr Quotient rein reell sein. Unter welchen Bedingungen ist das nur möglich?

4) Zur Wiederholung. Welche Form haben konjugiert komplexe Zahlen in der Euler-Schreibweise?

5) Zur Wiederholung. Berechnen Sie den absoluten Betrag von

$$z = \frac{1}{a + b\,j} \quad .$$

Welche Bedeutung hat das Ergebnis?

6) Eine Ortskurve sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ um den festen Punkt $z_o = 2 + 5\,j$ in der komplexen Ebene. Parameter der Ortskurve sei die Zeit t. Die Winkelgeschwindigkeit sei $\omega = 0{,}2\ \sec^{-1}$. Wie lautet die zugehörige Funktion? Welche Form haben Realteil und Imaginärteil und was stellen sie dar?

7) Zeichnen Sie die Ortskurve der Funktion

$$z = \frac{5}{1 + 2\,j\,x} \quad \text{für x zwischen 0 und } \infty$$

8) Was ist $\frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ für $z = r\,e^{j\,\omega\,t}$?

Was bedeutet $\ddot{z}$ geometrisch?

Was bedeutet $\frac{d^nz}{dt^n} = \overset{(n)}{z}$ geometrisch?

9) Gegeben sei eine Schaltung nach Bild 18. Es sei $R = 1000\,\Omega$, $L = 5$ H, $C = 10\,\mu$F, $f = 50$ Hz. Mit Hilfe komplexer Zahlen ist

a) der Scheinwiderstand der Schaltung

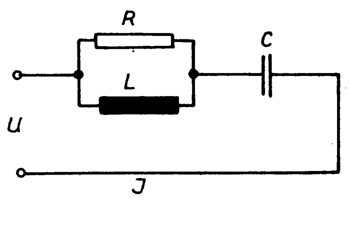


Bild 18

b) der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung
c) der Effektivwert des Stromes bei einer Spannung
   von 220 V

zu berechnen.

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1. Einführung

2.11. Was ist eine Differentialgleichung?

Sie haben während Ihres Studiums der Mathematiklehrbriefe verschiedene Arten von Gleichungen kennengelernt. Wir wollen einige nennen:
Identitätsgleichungen: z.B. $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

und viele andere mehr.
Solche Gleichungen haben die Aufgabe zu zeigen, in welcher Form ein gegebener Ausdruck auch noch anders geschrieben werden kann. Hierzu gehört z.B. auch noch der "binomische Lehrsatz". Er sagt als Identitätsgleichung aus:
Für den Ausdruck $(a + b)^n$ kann auch

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

geschrieben werden.
Sie haben weiterhin Bestimmungsgleichungen kennengelernt; Das sind Gleichungen, in denen eine oder mehrere unbekannte Zahlen gesucht werden. Hierher gehören Gleichungen mit einer oder mit mehreren Unbekannten, quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades.
Für uns ist wichtig zu betonen, daß in den Ihnen bisher bekannten Bestimmungsgleichungen bisher nur Zahlen gesucht wurden. Solche Bestimmungsgleichungen ergeben sich meistens aus irgendwelchen physikalischen Problemen. Sie haben z.B. in der Dynamik bei der Behandlung der Kinematik gesehen, daß verschiedene Aufgaben auf quadratische Gleichungen führten, deren Lösung dann auch die Lösung des physikali-

schen Problems darstellte. Der Weg zur Gleichung ist dabei immer der:
Man schreibe alle den untersuchten Vorgang beschreibenden oder mit ihm im Zusammenhang stehenden Gleichungen auf und eliminiere alle nicht interessierenden Größen. Dann löse man nach der gesuchten Größe auf. Die so entstehende Gleichung enthält dann die gesuchte Lösung. Auf diese Weise wird aus dem physikalischen Problem ein mathematisches, nämlich die Lösung der entstandenen Gleichung zu ermitteln. Die sich so ergebende Lösung muß dann wieder physikalisch gedeutet werden. Was ist nun eine Differentialgleichung? Wir können sie auch als eine Bestimmungsgleichung betrachten. Anstelle einer Zahl ist bei ihnen aber eine Funktion gesucht. Wir wollen diese gesuchte Funktion zunächst y nennen. In der Differentialgleichung kommt y und seine Ableitungen mit verschieden hoher Ordnung vor. Wegen der in der Gleichung vorhandenen Differentialquotienten der gesuchten Funktion y nennt man eine solche Gleichung eine Differentialgleichung.
Wir wollen zunächst einige Beispiele hinschreiben, ohne uns um deren Entstehung oder Lösung zu kümmern.

$2y' + xy = 0$. Hierin ist eine Funktion $y = f(x)$ zu finden, die diese Gleichung erfüllt.
Eine solche Lösung ergibt sich z.B. zu $y = e^{\frac{-x^2}{4}}$.
Nehmen Sie bitte dieses Ergebnis zunächst hin. Später werden Sie es ohne weiteres nachrechnen können.
Setzen Sie das Ergebnis in die gegebene Differentialgleichung ein, dann erhalten Sie mit

$$y = e^{\frac{-x^2}{4}} \quad \text{und} \quad y' = -\frac{x}{2}\, e^{\frac{-x^2}{4}}$$

$$-2\,\frac{x}{2}\, e^{\frac{-x^2}{4}} + x\, e^{\frac{-x^2}{4}} = 0$$

Setzt man die errechnete Funktion in die Dgl ein, dann kommt also tatsächlich Null heraus, wie es die Dgl vorschreibt. Würden Sie irgendeine beliebige andere Funktion einsetzen, dann würde sich nicht Null ergeben, d.h. diese Funktion würde keine Lösung sein.
Probieren Sie das selbst z.B. mit $y = x^2$.
$y' = y$. Diese Differentialgleichung ist besonders einfach. Man kann ihr Ergebnis raten. $y' = y$ bedeutet nämlich: Man suche die Funktion $y = f(x)$, deren Differentialquotient gleich der Funktion selbst ist. Sie kennen eine solche Funktion, nämlich

$$y = e^x \; ; \quad y' = e^x$$

Dies ist aber offenbar nicht die einzige Funktion, welche die gegebene Differentialgleichung erfüllt. Betrachten Sie z.B. die Funktion

$$y = 2\,e^x \quad \text{oder } y = 37\,e^x \quad \text{oder allgemein } y = C\,e^x$$

und setzen Sie diese Funktion in die gegebene Differentialgleichung ein, dann stellen Sie fest, daß all diese Funktionen, die sich um die offenbar beliebige Konstante C unterscheiden, Lösungen der gegebenen Differentialgleichung sind. Sehr viele physikalische Probleme führen auf Differentialgleichungen. (Unter physikalischen Problemen seien hier auch technische Probleme verstanden, denn letzten Endes sind alle technischen Probleme physikalischer Art). Das ist immer dann der Fall, wenn bei einem physikalischen Problem der Ablauf eines Geschehens als Funktion der Zeit, die Änderung einer Größe in Abhängigkeit von der Zeit oder vom Ort (oder auch von beiden) kurz, wenn eine Funktion gesucht ist.
Dies soll an einem Beispiel erläutert werden:
Der Luftdruck der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe ab. Gesucht sei die Funktion des Luftdruckes in

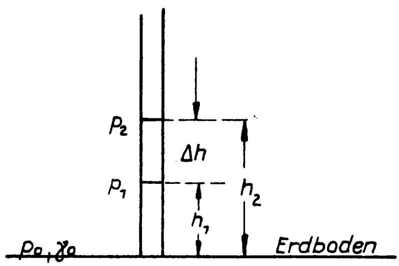


Bild 19

Abhängigkeit von der Höhe h über dem Erdboden.
Nach Bild 19 betrachten wir eine Luftsäule. Wir denken uns aus ihr ein Stück der Länge $\Delta h = h_2 - h_1$ herausgenommen. Auf Grund seines Gewichtes ΔG übt dieses Stückchen Luftsäule auf seine Querschnittsfläche in der Höhe h_1 eine Kraft

$$\Delta G = F \cdot \gamma \cdot (h_2 - h_1) = F \gamma \cdot \Delta h$$

aus. Hierbei ist γ das spezifische Gewicht der Luft. Da sich natürlich auch γ mit der Höhe h ändert, müssen wir uns in diese Formel ein mittleres γ eingesetzt denken. Wir können uns auch näherungsweise in die Formel γ_1 = spez. Gewicht der Luft in der Höhe h_1 eingesetzt denken. Dann wird die Formel um so genauer, je kleiner wir Δh machen.
Gehen wir nun von der Höhe h_1 um Δh auf die Höhe h_2, dann nimmt der Luftdruck um den Betrag

$$\Delta p = \frac{\Delta G}{F} = \gamma (h_2 - h_1) = \gamma \cdot \Delta h$$

ab, denn $\frac{\Delta G}{F}$ ist ja nach voriger Formel der von der kleinen Luftsäule der Länge Δh ausgeübte Druck. Von dem Luftdruck p_1 in der Höhe h_1 müßten wir Δp abziehen, um auf den Luftdruck p_2 in der Höhe $h_2 = h_1 + \Delta h$ zu kommen. Δp ist also eine negative Zahl: wenn die Höhe zunimmt nimmt der Druck ab. Deshalb schreiben wir

$$\Delta p = - \gamma \cdot \Delta h, \text{ oder als Differentiale } dp = - \gamma \cdot dh..$$

Das Minuszeichen folgt auch aus der zu erwartenden Kurve nach Bild 2o. Die Steigung an dieser Kurve $\frac{dp}{dh}$ ist negativ. Da dh positiv ist, muß demnach dp negativ sein.
In der Formel $dp = - \gamma \, dh$ ist γ eine ebenfalls vom Druck oder auch von der Höhe abhängige Größe. Wir müssen sie deshalb auch noch durch p oder durch h ausdrücken.
Zu diesem Zweck betrachten wir ein bestimmtes Luftgewicht G. An der Erdoberfläche habe es das Volumen V_o und stehe unter dem Druck p_o. In der Höhe h habe es das Volumen V und den Druck p. Dann gilt unter der Voraussetzung konstanter Temperatur das Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p\, V = p_o\, V_o = \text{const.}$$

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch das Gewicht G, dann folgt

$$p \frac{V}{G} = p_o \frac{V_o}{G}$$

Es ist

$\frac{G}{V_o} = \gamma_o$ das spezifische Gewicht der Luft am Erdboden,

$\frac{G}{V} = \gamma$ das spezifische Gewicht der Luft in der Höhe h

Es folgt:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_o}{\gamma_o}$$

und hieraus

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} \cdot p.$$

Hiermit und mit $dp = - \gamma \cdot dh$ ergibt sich die Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $p = f(h)$:

$$dp = - \frac{\gamma_0}{p_0} \, p \, dh \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dh} + \frac{\gamma_0}{p_0} \, p = 0$$

Aus dem physikalischen Problem, den Luftdruck in beliebiger Höhe zu berechnen ist jetzt ein mathematisches Problem geworden. Es heißt: Man suche die Funktion $p = f(h)$, bei welcher die Summe aus ihrer Ableitung $\frac{dp}{dh}$ und der mit einem Faktor $(\frac{\gamma_0}{p_0})$ multiplizierten Funktion p Null ergibt. Wir werden die Lösung dieser Differentialgleichung später berechnen. Jetzt wollen wir ihre Lösung nur angeben. Sie lautet

$$p = p_0 \, e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} h}$$

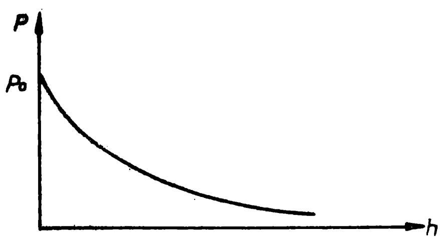


Bild 2o

Ihren Verlauf zeigt Bild 2o. Für $h = 0$ ergibt sich der Druck $p = p_0$ am Erdboden. Mit zunehmender Höhe nimmt der Druck erst schnell, dann immer langsamer ab und wird theoretisch erst in unendlich großer Höhe Null.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichung hatten wir mit der Anwendung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes die Voraussetzung konstanter Temperatur gemacht. Natürlich gilt diese Einschränkung auch für die angegebene Lösung. Für die Anwendung der Formel heißt das, daß wir sie nicht für allzu große Höhenunterschiede anwenden dürfen, da dann die Temperaturänderung nicht mehr vernachlässigt werden darf.
Aus dieser Bemerkung sehen Sie auch, daß es wichtig ist, die Voraussetzungen und Einschränkungen anzugeben, unter welchen eine Differentialgleichung aufgestellt wurde. Denn dieselben Einschränkungen und Voraussetzungen gelten dann auch für die Lösung der Differentialgleichung. Man weiß dann auch, wann die errechnete Lösung keine Gültigkeit hat, bzw. wann sie nur angenähert gilt.
Es könnte nun noch die Frage auftauchen, ob die oben angegebene Lösung der Differentialgleichung die einzig mögliche ist. Es könnte doch sein, daß es noch eine andere Funktion gibt, die man in die Differentialgleichung einsetzen kann, so daß Null herauskommt. Natürlich ist mit dieser zweiten Lösung eine Funktion gemeint, die sich nicht durch irgendwelche Umformung aus der ersten Lösung ergibt. Wenn es eine solche zweite, vielleicht auch noch dritte, vierte Lösung gäbe, dann müßte man durch zusätzliche physikalische Überlegungen die Lösung ermitteln, welche tatsächlich für das gegebene physikalische Problem gilt.
Mit diesen Problemen haben sich die Mathematiker befaßt. In sog. Unitäts- oder Eindeutigkeitssätzen ist nachgewiesen worden, daß bestimmte Klassen von Differentialgleichungen nur eine allgemeine Lösung haben. In der Folge haben wir es auch nur mit solchen Difft.gl. zu tun. Wie man solche Eindeutigkeitssätze beweist, braucht uns in diesem Zusammenhang nicht zu interessieren. Wir werden später auf solche Probleme nicht mehr eingehen.

Wir haben in unseren Beispielen zunächst außerordentlich einfache Differentialgleichungen angeführt. Es gibt natürlich auch wesentlich kompliziertere Gleichungen. Es gibt verschiedene Gruppen von Difft.-gln., die sich durch relativ einfache Ansätze lösen lassen. Demgegenüber aber gibt es auch solche, wo keine einfachen Lösungsverfahren existieren. Ihre Lösung verlangt dann sehr viel Fingerspitzengefühl und Geschick, das man sich nur durch häufigen Umgang mit diesen Gleichungen erwirbt. Wir haben in diesen Lehrbriefen mit solchen Differentialgleichungen nichts zu tun. Die Gleichungen, die in der Theorie der linearen Regelung vorkommen, sind im allgemeinen recht einfacher Natur und lassen sich durch einfache Ansätze lösen. Da sich bestimmte Typen von Difft.-gleichungen durch ganz bestimmte Ansätze lösen lassen, hat man die verschiedenen Difft.-gleichungen nach ihren Lösungsmöglichkeiten eingeteilt.

2.12 Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Sie haben während Ihres Studiums im wesentlichen nur Funktionen kennengelernt, die von einer Veränderlichen abhängen. Z.B.

$y = m x + n$ (Gerade) y hängt nur von x ab.

$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ (Ellipse) y hängt nur von x ab.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{b_0}{2} t^2$$

(Weg in Abhängigkeit von der Zeit bei Bewegung mit konstanter Beschleunigung b_0)
Der Weg s hängt nur von der Zeit t ab.

$N = U J$ (Leistung des elektrischen Stromes J) N hängt scheinbar von zwei Größen, U und J ab. Man kann aber U durch J ausdrücken, was zu der Ihnen bekannten Formel $N = R\ J^2$ führt. Bei konstantem Widerstand R hängt N nur noch von J ab. $N = f\ (J)$

Ist nun in einer Differentialgleichung eine Funktion gesucht, die nur von einer Veränderlichen abhängt, dann nennt man eine solche Gleichung eine

"gewöhnliche Differentialgleichung".

Nun gibt es aber Funktionen, die von mehreren untereinander unabhängigen Veränderlichen abhängen. Wir wollen einige von ihnen nennen.
Das Drehmoment in einem Elektromotor, z.B. einem Gleichstrom-Nebenschlußmotor ergibt sich aus der Formel

$$M_d = c \cdot \Phi\ J\ (\text{kp m})$$

Hierin ist c eine Dimensionskonstante, Φ der vom Feld erzeugte Fluß und J der Ankerstrom. In einem Gleichstrom-Nebenschlußmotor kann man durch entsprechende Schaltung den Fluß Φ unabhängig vom Ankerstrom J und den Ankerstrom J unabhängig vom Fluß ändern. Das vom Motor gelieferte Drehmoment M_d hängt also von zwei unabhängigen Veränderlichen, J und Φ ab.
Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Kugel, wie sie in Bild 21 gezeichnet ist. Zu ihrer Darstellung brauchen wir drei Dimensionen, x, y und z. Die Gleichung einer Kugel in diesen Koordinaten lautet

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Sie soll hier nicht abgeleitet werden. Verständlich wird sie aus der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

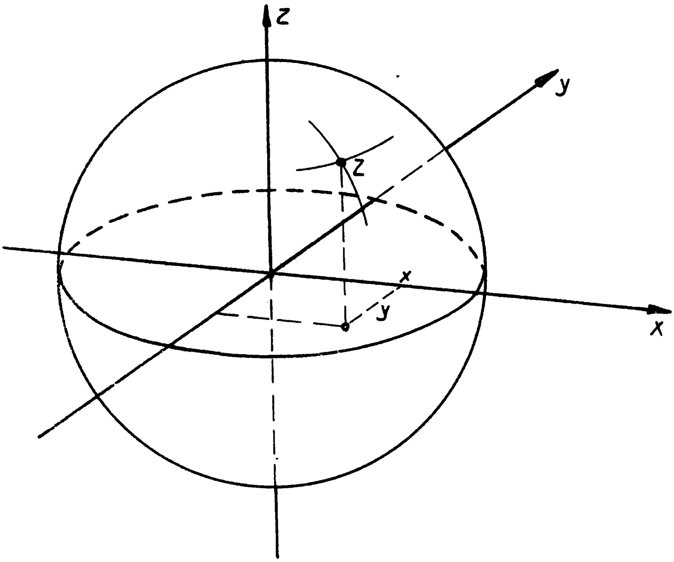


Bild 21

Zu ihr kommt jetzt noch die z-Koordinate hinzu. Daß man das Quadrat von z addieren muß, folgt aus der Symmetrie der Kugel. Es müssen alle Koordinaten gleichberechtigt sein.
Wir lösen die Gleichung der Kugel nach z auf:

$$z = \sqrt{r^2 - y^2 - x^2}$$

Jetzt hängt z nur noch von den beiden Veränderlichen x und y ab. Hierbei können wir x und y ganz beliebig und unabhängig voneinander wählen. Zu jedem beliebig gewählten Wertepaar (x, y) gehört nach unserer Gleichung ein ganz bestimmter Wert für z. Dieser kann reell oder imaginär sein.
Ist beispielsweise r = 1o, dann lautet die Gleichung

$$z = \sqrt{100 - y^2 - x^2}$$

Setzen wir hier einige Punkte ein: $x = 0$; $y = 0$ ergibt $z = \pm 10$ d.h. über dem Nullpunkt der x-y-Ebene ergeben sich die beiden Raumpunkte $z = + 10$ und $z = - 10$. Diese beiden Punkte liegen auf der Kugeloberfläche. $x = 2$; $y = 3$ ergibt $z = \pm 9{,}32$. Wählen wir $x = 7$, $y = 5$, dann ist $z = \pm 5{,}1$. Alle diese Punkte z liegen auf einer Raumfläche, nämlich der Kugeloberfläche. Wir könnten auch $x = 12$, $y = 20$ einsetzen und würden erhalten $z = \pm 21\,j$. In dem von den Koordinaten x, y, z aufgespannten Raume gibt es nur reelle Raumpunkte. Der imaginäre Raumpunkt $z = 21\,j$ existiert also nicht. Das bedeutet, daß über dem Punkt $x = 12$ und $y = 20$ der x-y-Ebene kein zur Kugeloberfläche gehörender Raumpunkt z existiert.

Es gibt auch Funktionen von vier und mehr unabhängigen Veränderlichen. Als Beispiel denken wir uns die Temperaturverteilung in einem Raume, beispielsweise in einem Ofen in Abhängigkeit von der Zeit. Wenn wir die Temperatur T an einem beliebig gewählten Punkt des Ofens zur beliebigen Zeit t aus der als gegeben gedachten Funktion ermitteln wollten, dann müßten wir die zu dem beliebigen Raumpunkt gehörenden Koordinaten x, y, z einsetzen und außerdem müßten wir noch die vierte unabhängige Koordinate t einsetzen.

Wollte man für eine solche Temperaturverteilung die physikalischen Gleichungen aufstellen, dann würde man eine Gleichung erhalten, in welcher die gesuchte Funktion $T = f\,(x, y, z, t)$ mit ihren sog. "partiellen Ableitungen" nach x, y, z, t auftritt. Unter einer "partiellen Ableitung" versteht man hierbei die Ableitung einer Funktion von mehreren Veränderlichen nach einer dieser Veränderlichen. Man kann z.B. die oben erwähnte Funktion

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

partiell nach x oder auch partiell nach y ableiten. Wenn man etwa nach y partiell ableitet, dann denkt man sich hierbei x als konstanten Wert. Um eine partielle Ableitung deutlich zu machen, schreibt man anstelle von "d" das runde ∂ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - 2 y \cdot \frac{1}{2 \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Solche "partiellen Ableitungen" treten dann in den betreffenden Differentialgleichungen auf. Man nennt sie deshalb "partielle Differentialgleichungen".
Unter "partiellen Differentialgleichungen" versteht man solche Bestimmungsgleichungen, in denen eine Funktion von zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen gesucht ist.
Diese partiellen Differentialgleichungen können in unserem Zusammenhang nicht behandelt werden. Sie erfordern ein sehr tiefgehendes mathematisches Studium. Wir mußten sie aber nennen, "damit Sie wissen, daß Sie hierüber nichts zu wissen brauchen".

2.13. Einteilung der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die später zu besprechenden Lösungsverfahren gelten jeweils für ganz bestimmte Typen von Differentialgleichungen. Um zu entscheiden, welches Lösungsverfahren für eine bestimmte Differentialgleichung in Frage kommt, muß man sie klassifizieren, d.h. man muß sehen, in welchen Typ diese Gleichung gehört. Wir wollen nun die für uns in Frage kommenden Difft.-gleichungen einteilen.
Zunächst entscheidet man, ob die Difft.gleichung gewöhnlich oder partiell ist. Wir haben das in 2.12 besprochen. Für uns kommen nur die gewöhnlichen in Frage. Danach untersucht man, ob die Dgl (so wollen wir in Zukunft Difft.-gl. abkürzen) linear ist.

Die Dgl ist "linear", wenn sie die Form

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x) y = f(x)$$

hat. Dabei sind die $a_v(x)$ und $f(x)$ gegebene Funktionen von x. Die Kennzeichen für eine lineare Dgl sind

1) die $a_v(x)$ und $f(x)$ sind nur von x abhängig. Sie können auch konstante, von x unabhängige Zahlen sein. y oder gar dessen Ableitungen dürfen in ihnen nicht vorkommen.
2) $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y$ dürfen in der Dgl in keiner anderen als in der 1. Potenz vorkommen.

Beispiele: Lineare Dgln sind $y' - y = 0$;

$$2\,x\,y'' - x \sin x\, y' + y = x^2$$

Nichtlineare Dgln sind $y' + y^2 = x$; $y'^2 + y = 0$;

$$y\,y' + xy = f(x); \quad y' - \sin y = 0$$

Die folgenden Definitionen beziehen sich nur auf solche linearen Dgln. Unter den "Koeffizienten" der linearen Dgl wollen wir die Beiwerte von y und seinen Ableitungen verstehen. In der oben angegebenen Dgl sind die Koeffizienten die Funktionen (bzw. Konstanten) $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, .. $a_1(x)$, $a_0(x)$. Die Funktion $f(x)$ ist kein Koeffizient der linearen Dgl. Je nachdem, ob diese Koeffizienten nun Funktionen von x oder aber konstante Zahlen sind, unterscheiden wir "lineare Dgl mit veränderlichen oder konstanten Koeffizienten".

Die lineare Dgl heißt eine "gewöhnliche lineare Dgl mit veränderlichen Koeffizienten", wenn die Koeffizienten Funktionen von x sind. Sind die Koeffizienten konstante Zahlen, dann spricht man von einer "gewöhnlichen linearen Dgl mit konstanten Koeffizienten". Im letzten Falle müssen <u>alle</u> Koeffizienten konstant sein.

Beispiele:

Veränderliche Koeffizienten:

$$x\,y'' + 2\sin x\,y' + y = x$$

$$y'' + y' + xy = 0$$

Konstante Koeffizienten:

$$y''' + 4\,y'' + y' + 6\,y = x^2$$

Danach entscheidet man, ob die gewöhnliche lineare Dgl "homogen" ist oder nicht. Die Dgl

$a_n(x)y^{(n)} + .. + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ heißt "homogen".

Die Dgl

$a_n(x)y^{(n)} + .. + a_1(x)y' + a_0(x)y = f\,(x)$ heißt "inhomogen".

Die beiden Dgln unterscheiden sich also dadurch, daß in der homogenen Dgl $f\,(x)$ fehlt, während es in der inhomogenen vorhanden ist. $f\,(x)$ wird auch "Störfunktion" genannt.

Eine gewöhnliche lineare Dgl heißt homogen, wenn sie keine Störfunktion hat. Andernfalls heißt sie inhomogen.

Schließlich unterscheidet man noch die Ordnung der Differentialgleichung. Die Ordnung der Dgl ist eine Zahl, welche mit der höchsten vorkommenden Ableitung übereinstimmt. Ist z.B. in der Dgl y''' die höchste vorhandene Ableitung, dann heißt die Dgl "von dritter Ordnung". Allgemein:

> Eine Dgl heißt "von n-ter Ordnung", wenn $\frac{d^n y}{dx^n}$ die höchste in der Dgl vorkommende Ableitung ist.

Beispiele:

$2\, y'' + xy' - y = 0$ ist von zweiter Ordnung
$xy' + x^2 y = \sin x$ ist von erster Ordnung

Betrachten wir jetzt noch abschließend zwei wichtige Typen von Dgln, mit denen wir uns in diesen Lehrbriefen noch sehr viel beschäftigen müssen:

1) $$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$$

Das ist eine "gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten". In den Anwendungen ist die unabhängige Veränderliche, die wir hier mit "x" bezeichnet haben, meistens die Zeit t. Ableitungen nach der Zeit werden zur Unterscheidung von Ableitungen nach x (einer Länge) mit einem Punkt gekennzeichnet. Man schreibt

$$\frac{dy}{dx} = y'; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''; \quad \ldots; \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

Dies sind Ableitungen nach x. Demgegenüber schreibt man für Ableitungen nach der Zeit:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad \ldots\ldots; \quad \frac{d^ny}{dt^n} = \overset{(n)}{y}$$

Mit diesen Symbolen schreibt sich die obige Differentialgleichung mit der Zeit t als unabhängige Veränderliche:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t)$$

In dieser Form hat die Difft.-gleichung ein großes Anwendungsgebiet. In der Mechanik beschreibt man mit ihr freie, gedämpfte und harmonische Schwingungen, in der Elektrotechnik ist sie die Difft.-gleichung eines RLC-Gliedes mit Eigenschwingungen, in der Regelungstechnik ist sie wichtig als Difft.-gleichung eines Regelkreisgliedes 2. Ordnung, welches man gerne als Ersatzglied für schwierigere Regelkreisglieder nimmt. Wir werden im Verlaufe dieser Lehrbriefe noch genauer hierauf einzugehen haben.

2) $$a_n \overset{(n)}{y} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t)$$

Das ist die allgemeine Form einer "gewöhnlichen, linearen, inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten".
Auf dieser Differentialgleichung baut sich die Theorie der linearen Regelungsvorgänge auf. Im Rahmen des Fachschulstudiums werden nichtlineare Reglungsvorgänge nicht behandelt. Die hierzu gehörenden Dgln sind nichtlinear und von höherer Ordnung. Sie brauchen deshalb nicht behandelt zu werden. Wir werden die Differentialgleichungen nur bis zu der eben angegebenen "gewöhnlichen, linearen, inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten" kennenlernen.

Zusammenfassung

Eine Differentialgleichung ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. Dabei kommt die gesuchte Funktion in dieser Gleichung mit ihren Ableitungen nach den unabhängigen Veränderlichen vor. Hängt die gesuchte Funktion nur von einer unabhängigen Veränderlichen ab, dann nennt man die Dgl "gewöhnlich".
Hängt die gesuchte Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen ab, dann heißt die Dgl "partiell".

Eine gewöhnliche Dgl heißt linear, wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen in der ersten Potenz vorkommen, sonst heißt sie nichtlinear.

Man unterscheidet Dgln mit veränderlichen und konstanten Koeffizienten. Sind die Koeffizienten Funktionen der unabhängigen Veränderlichen, dann spricht man von veränderlichen Koeffizienten. Sind die Koeffizienten feste Zahlen, dann spricht man von Dgln mit konstanten Koeffizienten.

Kommt in der Differentialgleichung ein Summand vor, der weder die gesuchte Funktion noch ihre Ableitungen enthält, der aber eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen sein kann, dann nennt man diesen Summanden "Störfunktion". Ist nun diese Störfunktion identisch Null, dann heißt die Dgl "homogen", andernfalls inhomogen.

Ist die höchste in einer Dgl vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion von n-ter Ordnung, dann heißt auch die Dgl "von n-ter Ordnung".

Die in der Theorie der linearen Regelung auftretende Dgl ist eine "gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten".

Aufgaben:

1) Gegeben sei $dy + y\,dx = 0$. Was für ein Typ ergibt sich, wenn man entsprechend umformt?

2) Gegeben sei $\frac{y'}{y} + \frac{\sin x}{x} = 1$
Formen Sie diese Gleichung um und klassifizieren Sie die Gleichung. Was für ein Typ ergibt sich?

3) Gegeben seien zwei Differentialgleichungen

$$a_1\, x + x = f(t) \quad \text{und} \quad a_2\, z + z = x$$

Hieraus ist eine Differentialgleichung durch Elimination von x zu bilden. Die entstehende Dgl ist zu kennzeichnen.

2.2. Die Differentialgleichung 1. Ordnung

2.21. Das Richtungsfeld

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Als Beispiel nehmen wir

$$x\,y' - y = 0$$

Diese Dgl können wir nach y' auflösen und erhalten

$$y' = \frac{y}{x}$$

Wir können nun y' als dritte Veränderliche auffassen, welche durch die beiden Veränderlichen x und y bestimmt ist. Wählen wir z.B. in der x-y-Ebene den Punkt P_0 mit den Koordinaten $x = 2$, $y = 1$, dann ergibt sich für

$$y' = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Diese Gleichung zwischen den Richtungsfaktoren zweier Geraden kennen Sie aus der analytischen Geometrie. Es ist die Bedingung dafür, daß beide Geraden aufeinander senkrecht stehen. Dann müssen sich auch die Lösungskurven beider Dgln senkrecht schneiden. Die eine Lösungsschar war das Geradenbüschel durch den Koordinatenursprung. Die andere Lösungsschar muß also aus konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt bestehen.

Lösungen zu den Aufgaben zu 2.221.

1) $y' - y \sin x = 0$ ergibt

$$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx.$$

Hieraus

$$y = C e^{-\cos x}$$

2) $y' - y = 1$ ergibt

$$\frac{dy}{1 + y} = dx.$$

Die Integration ergibt

$$\ln (1 + y) = x + C \text{ und } y = -1 + C e^{x}$$

Einsetzen der Randwerte $x = 0$, $y = 5$ ergibt

$$y = -1 + 6 e^{x}$$

Lösungen zu den Aufgaben zu 2.222.

$U_0 = U_R + U_L$; $U_R = J\,R$; $U_L = L\,\frac{dJ}{dt} = \frac{L}{R}\,\dot{U}_R$; $\dot{U}_R = \frac{R}{L}\,U_L$

Die erste Gleichung differenziert liefert wegen $U_0 = 0$ (Gleichspannung!)
$\dot{U}_R + \dot{U}_L = 0$. Es ergibt sich die Gleichung:

$$\dot{U}_L + \frac{R}{L}\,U_L = 0$$

Ansatz:

$$U_L = C\,e^{k\,t} \;;\quad \dot{U}_L = C\,k\,e^{k\,t}$$

Die charakteristische Gleichung lautet also

$$k = -\frac{R}{L}\,.$$

Allgemeine Lösung:

$$U_L = C\,e^{-\frac{R}{L}\,t}$$

Im ersten Augenblick liegt die gesamte Spannung U_0 an der Drossel. Deshalb ist $U_L = U_0$ für $t = 0$. Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$U_L = U_0\,e^{-\frac{R}{L}\,t}$$

2) Betrachten wir eine Dgl mit veränderlichen Koeffizienten:

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0.$$

Würden wir den e-Ansatz verwenden, dann müßte er so aussehen:

$$y = C\, e^{k(x)\, x}\,;\; y' = C(k'(x)\, x + k(x))\, e^{k(x)\, x}$$

Daß k eine Funktion von x ist, sieht man aus dem Ergebnis, welches sich aus der Trennung der Veränderlichen ergibt. Setzt man y und y' in die Dgl ein, dann erhält man nach Division durch $C\, e^{k\, x}$:

$$a_1(x)\, k'(x)\, x + k(x)) + a_0(x) = 0;\; k'(x)\, x + k(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$$

Die letzte Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung für die Funktion k(x). Dies ist eine lineare inhomogene Dgl. Das Problem der Lösung der gegebenen Dgl ist also durch den e-Ansatz schwieriger geworden. Deshalb ist der e-Ansatz in diesem Falle unbrauchbar.

3) Aus $2\, y' + y - 1 = 0$ folgt mit der Substitution $y - 1 = z$

$$2\, z' + z = 0.\quad \text{e-Ansatz: } z = C\, e^{k\, x}\,;\; z' = C\, k\, e^{k\, x}$$

Charakteristische Gleichung:

$2\, k + 1 = 0;\; k = -\, 0{,}5$

Lösung also:

$$z = y - 1 = C\, e^{-\,0{,}5\, x}\,;\; y = 1 + C\, e^{-\,0{,}5\, x}$$

Hätte man die Substitution nicht gemacht, dann würde man mit dem e-Ansatz aus der Dgl unmittelbar

$$2\, C\, k\, e^{k\, x} + C\, e^{k\, x} - 1 = 0$$

erhalten. Aus dieser Gleichung kann man C und die e-Funktion nicht herausdividieren. Man erhält keine Bestimmungsgleichung für k.

Lösung zu der Aufgabe zu 2.223.

Aus der gegebenen Dgl folgt

$$y' = x\,y^2; \; y = \int x\,y^2\,dx + y_0$$

Aus den gegebenen Anfangswerten folgt $y_0 = 1$.
Für die sukzessive Approximation schreibe man die Gleichung in der Form

$$y_n = 1 + \int_0^x x\,y_{n-1}^2\,dx.$$

Die erste Näherung erhalten wir, wenn wir y_0 einsetzen:

$$y_1 = 1 + \int_0^x x\,y_0^2\,dx = 1 + \int_0^x x\,dx = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Die 2. Näherung wird

$$y_2 = 1 + \int_0^x x\,y_1^2\,dx = 1 + \int_0^x x\,(1 + x^2 + \frac{x^4}{4})\,dx$$

$$\underline{\underline{y_2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24}}}$$

Lösungen zu den Aufgaben zu 2.231

1) Aus den Gleichungen

$$U_o = U_R + U_L, \quad U_R = J\,R\,; \quad U_L = L\,\frac{dJ}{dt}$$

ergibt sich mit

$U_L = \frac{L}{R}\,\dot{U}_R$ die Dgl für U_R

$$\frac{L}{R}\,\dot{U}_R + U_R = U_o.$$

Mit der Substitution

$U_R - U_O = y$ wird die Dgl homogen:

$$\frac{L}{R}\,\dot{y} + y = 0$$

Mit Hilfe des e-Ansatzes ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y = U_R - U_o = C\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

Die Anfangswerte sind $U_R = 0$ für $t = 0$, denn im ersten Augenblick nach dem Einschalten liegt die volle Spannung an der Drossel. Daraus ergibt sich die partikuläre Lösung

$$U_R = U_o\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Die Funktion hat denselben Verlauf, wie ihn Bild 32 zeigt.

2) Aus $y' \sin x - y - 5 = 0$ wird mit der Substitution
$z = y + 5$

$$z' \sin x - z = 0; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{\sin x}; \quad \ln z = \ln \tan \frac{x}{2} + \ln C$$

$$= \ln \left(C \tan \frac{x}{2}\right)$$

$$y = C \tan \frac{x}{2} - 5$$

Lösungen zu den Aufgaben zu 2.232.

1) Es ist $u = u_R + u_c$; $u_R = i\,R$; $u_c = \frac{i}{C}$ oder $u_c = \int \frac{i}{C}\,dt$

$u = i\,R + \int \frac{i}{C}\,dt$ oder nach Differentiation:

$$\dot{u} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i.$$

Für eine sinusförmige Wechselspannung ist $u = U \sin \omega t$
und $\dot{u} = U\omega \cos \omega t$
Damit wird die Dgl

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = U\omega \cos \omega t \qquad \text{oder mit } T = R\,C$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{T}\,i = \frac{U\omega}{R} \cos \omega t$$

Die Lösung der homogenen Dgl $\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{T}\right) i = 0$ ist

$$i = C\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Wir ersetzen C durch C (t), setzen in die inhomogene Dgl ein und erhalten als Bestimmungsgleichung für C (t)

$$C'\ (t) = \frac{U\,\omega}{R}\, e^{\frac{t}{T}} \cos \omega\, t$$

C (t) ergibt sich durch Integration. Das Integral erhalten Sie aus einer Integraltafel (z.B. Dubbel). Es ist

$$C\ (t) = \frac{U\,\omega}{R} \left[\frac{\frac{1}{T} \cos \omega\, t + \omega \sin \omega\, t}{\frac{1}{T^2} + \omega^2}\, e^{\frac{t}{T}} + \underline{c} \right]$$

Hierin ist $\underline{c}$ die Integrationskonstante. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl ist

$$i = \frac{U\,\omega \quad (\frac{1}{T} \cos \omega\, t + \omega \sin \omega\, t)}{R\ (\frac{1}{T^2} + \omega^2)} + c\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Dabei ist $c = \frac{U}{R}\ \underline{c}$ gesetzt worden. Wenn $\underline{c}$ willkürlich ist, dann ist c auch eine willkürliche Konstante. Die Summe aus cos- und sin-Funktion formen wir durch Einführung zweier neuer Zahlen A und φ in ein Additionstheorem um:

$$\frac{1}{T} = A \sin \varphi \ ; \quad \omega = A \cos \varphi \ .$$

Dann ist

$$A^2 = \frac{1}{T^2} + \omega^2 \text{ und } \tan \varphi = \frac{1}{\omega T} = \frac{1}{\omega\ R\ C} \ .$$

Dann wird die allg. Lösung:

$$i = \frac{U\omega}{RA} \sin(\omega t + \varphi) + C\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Im Augenblick des Einschaltens der Spannung u - zur Zeit t = 0 - ist wegen $u = U \sin \omega t$ auch u = 0, d.h. im ersten Augenblick kann noch kein Strom fließen. Dieser Anfangswert für i liefert für die Integrationskonstante

$$c = - \frac{U C \omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

Dann ist die partikuläre Lösung der Dgl:

$$i = \frac{U\omega}{RA} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{U C \omega}{1 + (RC\omega)^2}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Der zweite Summand klingt ab. Es bleibt der erste Summand. Aus ihm erhält man die Beziehungen zwischen den Maximalwerten von Strom und Spannung:

$$J = \frac{U\omega}{RA} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Dieses Ergebnis ist aus der Elektrotechnik bekannt.
Für $\tan\varphi$ hatten wir auf Seite 30 gefunden:

$$\tan\varphi = \frac{-1}{\omega \cdot RC}$$

2) Nach dem Ansatz für u_c ist $\dot{u}_c = U_c \omega \cos(\omega t + \psi)$. Setzen wir dies und die beiden Ansätze in die Dgl ein, dann

folgt:

$$T\,U_c\,\omega\cos(\omega t + \varphi) + U_c\sin(\omega t + \varphi) = U_o\sin\omega t$$

Diese Gleichung muß für jede beliebige Zeit t gelten, so auch für t = 0:

$T\,U_c\,\omega\cos\varphi + U_c\sin\varphi = 0$. Hieraus $\tan\varphi = -\omega T = -\omega RC$

Setzen wir in die Gleichung $t = -\frac{\varphi}{\omega}$ ein, dann ist

$$\omega t + \varphi = 0$$

und es folgt

$$T\,U_c\omega = -U_o\sin\varphi \quad \text{oder}$$

$$U_c = -\frac{U_o\sin\varphi}{T\omega} = +\frac{U_o}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Die letzte Formel folgt mit der Beziehung

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}$$

mit $\tan\varphi = -\omega RC$

homogenen Dgl addiert wird. Ist die gegebene Anordnung nun schwingungsfähig, dann ergibt sich diese Schwingung mit der zugehörigen Kreisfrequenz (Eigenkreisfrequenz) schon vollkommen beim Lösen der homogenen Dgl. Der inhomogene Anteil, welcher dann noch dazuaddiert wird, ändert an dieser Schwingung nur die Achse, um welche die Schwingung stattfindet. An der Frequenz aber wird nichts geändert. An dem unter 2.3.3.2 gerechneten Beispiel können Sie das erkennen.

Hat die homogene Dgl einer gegebenen Anordnung eine Schwingung als Lösung, dann nennt man diese Schwingung die Eigenschwingung der gegebenen Anordnung.

Denn diese Eigenschwingung ist allein eine Folge der verwendeten Bauelemente, sie wird nicht durch die Störfunktion f(t) beeinflußt, sie ist eine Eigenschaft der gegebenen Anordnung. In den Übungsaufgaben werden wir u.a. ein elektrisches Beispiel behandeln, in welchem Sie erkennen werden, daß die Dinge dort ganz analog liegen.
Diese Tatsachen sind für die Regelungstechnik wichtig. Bei der Untersuchung eines Regelkreises auf Stabilität genügt es nämlich, die homogene Dgl des Regelkreises zu betrachten. Denn wenn der Regelkreis stabil sein soll, dann muß die Eigenschwingung des Regelkreises gedämpft sein, unabhängig von der Form und Größe der auftretenden Störungen. (Auch hier lassen wir den Fall einer sinusförmigen Störung noch außer Acht). Sie verstehen jetzt auch schon, daß eine evtl. vorhandene Instabilität eines solchen Regelkreises nur an der Art der verwendeten Bauelemente und deren Einstellung (man könnte z.B. in Bild 45 die Dämpfung k einstellbar machen und könnte nach der Bedingung (2.25) aperiodisches oder schwingendes Übergangsverhalten einstellen) abhängt. Die Art und Größe der im Regelkreis auftretenden Störungen haben auf die Stabilität oder Instabilität keinen Einfluß. Es sei allerdings nebenbei bemerkt, daß das nur für Regelkreise gilt, deren Bauglieder lineares oder wenigstens näherungsweise lineares Ver-

halten zeigen, d.h. zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen der einzelnen Regelkreisglieder müssen lineare (proportionale) Beziehungen im Beharrungszustand gelten.

Zu den Anfangsbedingungen muß auch noch etwas gesagt werden. In all unseren Beispielen haben wir immer die gleichen Anfangsbedingungen gewählt: Zur Zeit $t = 0$ sollte die gesuchte Funktion und ihre Ableitung Null sein, z.B. $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$. Sie dürfen nun nicht etwa glauben, dies müsse immer so sein. Selbstverständlich kann zur Zeit $t = 0$ die gesuchte Funktion und ihre Ableitung beliebige und voneinander verschiedene Werte annehmen. Diese Werte können auch für einen beliebig anderen Zeitpunkt vorgeschrieben sein. Das ist auch klar, wenn man bedenkt, daß durch die Anfangsbedingungen die völlig willkürlichen Integrationskonstanten festgelegt werden sollen. Bei unserem mechanischen Beispiel nach Bild 45 wäre es denkbar, daß man in dem Augenblick, wo der Stab I nach unten bewegt wird, der Masse m einen Stoß nach oben (oder unten) erteilt. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ würden dann $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = v$ lauten, wobei v der positive oder negative Zahlenwert der erteilten Geschwindigkeit bedeutet. Mit diesen Anfangsbedingungen würden sich dann auch entsprechend andere Werte für die Integrationskonstanten ergeben. Man könnte sich beispielsweise auch vorstellen, daß die Masse m vor dem Eingangsstoß auf den Stab I aus der Ruhelage um einen Betrag e herausgenommen, festgehalten und im Augenblick des Eingangsstoßes losgelassen würde. Dann wäre $x_a = e$ und $\dot{x}_a = 0$. Diese Anfangswerte ergäben wieder andere Integrationskonstanten. Man könnte die Masse m aus der Ruhelage herausnehmen und im Augenblick des Eingangsstoßes mit der Geschwindigkeit v abstoßen. Dann wäre $x_a = e$ und $\dot{x}_a = v$ zur Zeit $t = 0$. Die Dgl und ihre allgemeine Lösung ist nun so beschaffen, daß all diese Bewegungsvorgänge mit den verschiedenen Anfangsbedingungen in ihr enthalten sind. Das ist auch klar. Denn beim Aufstellen der Dgln

bei all unseren Beispielen wurden die betrachteten Vorgänge beschreibenden physikalischen Gleichungen und Gesetze benutzt. Diese haben allgemeine Gültigkeit und sind unabhängig vom Anfangszustand des betrachteten Vorganges. Die partikuläre Lösung der Dgl, welche durch Bestimmung der Integrationskonstanten mit Hilfe der Anfangsbedingungen aus der allgemeinen Lösung hervorgeht, ist dann selbstverständlich an die gegebenen Anfangsbedingungen gebunden und hat für andere Anfangswerte keine Gültigkeit.
In den Übungsaufgaben zu diesem Kapitel ist eine Aufgabe mit anderen Anfangswerten enthalten.

Zusammenfassung

Die gewöhnliche lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t).$$

a_2, a_1 sind gegebene Zahlwerte, $f(t)$ ist eine bekannte Funktion der Zeit bzw. eine Konstante.

1. $f(t) = 0$ (Im Text haben wir diesen Fall nicht besonders behandelt). Die Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = 0$$

ergibt mit dem e-Ansatz $x = C\, e^{\lambda t}$ die charakteristische Gleichung

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1 = 0$$

und es ist

$$= - \frac{a_1}{2\, a_2} \pm \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl ist dann

$$x = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1) $a_1^2/4 - a_2 > 0$ oder $a_1^2 > 4\, a_2$. Dann ist die Wurzel reell, λ_1 und λ_2 sind zwei aus a_1 und a_2 berechenbare reelle Zahlen, welche in die allgemeine Lösung eingesetzt werden. Danach werden die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Im Falle 1) hat die Lösung aperiodisches Verhalten.

Fall 2) $a_1^2/4 - a_2 = 0$ oder $a_1^2 = 4\, a_2$. Es liegt eine Doppelwurzel vor. Es ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2\, a_2}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x = (C_1 + C_2\, t)\, e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{a_1}{2\, a_2} t}$$

Die Integrationskonstanten werden durch die Anfangswerte bestimmt. Auch hier ergibt sich noch keine Eigenschwingung. Diese Lösung heißt der "aperiodische Grenzfall".

Fall 3) $a_1^2/4 - a_2 < 0$ oder $a_1^2 < 4\, a_2$

λ_1 und λ_2 werden jetzt zueinander konjugiert komplex.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2\, a_2} \pm j\, \frac{1}{a_2} \sqrt{a_2 - a_1^2/4} = -\delta \pm j\,\omega$$

mit

$$\delta = +\frac{a_1}{2\, a_2} \text{ und } \omega = \frac{1}{a_2} \sqrt{a_2 - a_1^2/4}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x = (C_1\, e^{j\,\omega\, t} + C_2\, e^{-j\,\omega\, t})\, e^{-\delta t}$$

Wir führen zwei neue willkürliche Konstanten C_3 und C_4 ein durch

$$C_3 + C_4 = C_1 \text{ und } C_3 - C_4 = C_2$$

Da die Konstanten C_1 und C_2 noch völlig willkürlich sind, sind es auch die Konstanten C_3 und C_4, denn sie lassen sich nach diesen beiden Gleichungen durch C_1 und C_2 berechnen. Wir setzen ein und erhalten

$$x = \left[(C_3 + C_4)\, e^{j\omega t} + (C_3 - C_4)\, e^{-j\omega t}\right] e^{-\delta t} \qquad (2.75)$$

Die eckige Klammer ergibt anders zusammengefaßt

$$\left[\ldots\right] = C_3\,(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + C_4\,(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$= 2\,C_3 \cos \omega t + 2\,C_4\, j \sin \omega t$$

Da die Koeffizienten von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ in unserem Falle nur reell sein können, wird C_4 imaginär sein müssen, damit jC_4 wieder reell wird. Das ist ohne weiteres denkbar, denn Integrationskonstanten sind <u>beliebige</u> konstante Zahlen, sie können auch imaginär sein!
Bei der letzten Umformung haben wir von den beiden leicht nachprüfbaren Formeln

$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2 \cos \alpha \quad \text{und} \quad e^{j\alpha} - e^{-j\alpha} = 2\, j \sin \alpha$$

Gebrauch gemacht. Jetzt ersetzen wir C_3 und jC_4 erneut durch zwei willkürliche Zahlen A und φ nach den Gleichungen

$$2\,C_3 = A \sin \varphi \qquad \text{und } 2\,jC_4 = A \cos \varphi$$

Im Gegensatz zu früheren ähnlichen Rechnungen sind jetzt A und φ Integrationskonstanten, da sie nach den angegebenen Formeln nur von C_1 und C_2 abhängen. Wir haben die Integrationskonstanten C_1 und C_2 nur umgeschrieben.
Die eckige Klammer wird

$$[\;] = A\,(\cos\omega t \sin\varphi + \sin\omega t \cos\varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Wir setzen in (2.75) ein und erhalten als allgemeine Lösung

$$x = A\,e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \tag{2.76}$$

A und φ sind jetzt noch aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Früher (z.B. (2.56)) wurden solche Zahlen A und φ aus den Koeffizienten der Dgl gebildet und waren damit keine Integrationskonstanten. Außerdem waren die Integrationskonstanten bereits vor der Einführung von A und φ bestimmt worden. Das lag an der Verschiedenheit der Wege, welche zur Lösung der Dgl führt. Dieser letzte Rechnungsgang hat zweierlei Sinn:

1) soll er Ihnen zeigen, daß der früher eingeschlagene Weg der Rechnung nicht der einzig mögliche ist und

2) sehen Sie an (2.76), daß die Sinusschwingung, welche sich jetzt ergibt, schon in der allgemeinen Lösung liegt und nicht etwa erst durch Berücksichtigung der Anfangswerte zustande kommt.

2) <u>f(t) = a = const</u>

Mit der Substitution

$$y = x - a$$

läßt sich die Dgl homogen machen:

$$a_2\,\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + y = 0$$

und läßt sich nach 1) $f(t) = 0$ weiter behandeln. Hat man die allgemeine Lösung dieser homogenen Dgl, dann muß man selbstverständlich <u>vor</u> Bestimmung der Integrationskonstanten die Substitution wieder rückgängig machen. Die allgemeinen Lösungen lauten für

Fall 1) $a_1^2 > 4\,a_2$

$$x = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t} + a$$

Fall 2) $a_1^2 = 4\,a_2$

$$x = (C_1 + C_2 t)\,e^{-\frac{a_1}{2\,a_2}t} + a$$

Fall 3) $a_1^2 < 4\,a_2$

$$x = A\,e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + a$$

wobei λ_1 und λ_2 im Fall 1) die oben berechneten λ-Werte sind und im Fall 3) A und φ Integrationskonstanten, δ und ω sich aus a_1 und a_2 nach S. 74 unten ergebende Werte sind.

3) <u>f(t) sei nicht konstant</u>

Man löse zunächst die homogene Dgl

$$a_2\,\ddot{x} + a_1\,\dot{x} + x = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung sei x_1. Sie berechnet sich wie 1) $f(t) = 0$. Dann suche man eine partikuläre Lösung x_2 der inhomogenen Dgl. Hierzu verwende man die Ansätze nach S. 60 (Tabelle). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl ist dann

$$x = x_1 + x_2$$

Fall 1) $a_1^2 > 4\, a_2$

$$x = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t} + x_2$$

Fall 2) $a_1^2 = 4\, a_2$

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{a_1}{2\, a_2} t} + x_2$$

Fall 3) $a_1^2 < 4\, a_2$

$$x = A\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + x_2$$

Hat die <u>homogene</u> Dgl einer gegebenen Anordnung eine Sinusschwingung als Lösung, dann spricht man von ihrer "Eigenschwingung". Sie ist allein durch die gerätetechnische Ausführung der Anordnung bestimmt und von $f(t)$ unabhängig. Die Eigenschwingung ist gedämpft, wenn außer $a_2 > 0$ auch $a_1 > 0$ ist. Fehlt in der Dgl das Glied mit $\dot{x}$, ist also $a_1 = 0$, dann ist diese Eigenschwingung ungedämpft. Ist $a_1 < 0$, dann ergibt sich eine aufschaukelnde Schwingung. Diesen Fall haben wir früher nicht behandelt und erwähnen ihn wegen der Vollständigkeit.

<u>Aufgaben</u>

1) Gegeben sei die Dgl (2.3o) der RLC-Schaltung. U_e sei eine Gleichspannung, welche zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet werde. Der Kondensator C sei vorher ungeladen und es fließe vorher auch noch kein Strom. Man berechne die partikuläre Lösung der Dgl für die folgenden vier Fälle:

a) $L = 1$ H; $C = 10^{-6}$ F; $R = 4000\,\Omega$ $U_e = 100$ V
b) $L = 1$ H; $C = 10^{-6}$ F; $R = 2000\,\Omega$ $U_e = 100$ V
c) $L = 1$ H; $C = 10^{-6}$ F; $R = 1000\,\Omega$ $U_e = 100$ V
d) $L = 1$ H; $C = 10^{-6}$ F; $R = 0$ $U_e = 100$ V

Wie groß müßten im Falle a) und b) die Zeitkonstanten eines rückwirkungsfreien Zweispeichersystems sein?

2) In Bild 45 sei der Stab I fest eingespannt, so daß er unbeweglich ist. Dann kann durch den Stab I die Masse m nicht zu Schwingungen angestoßen werden. Das geschieht jetzt dadurch, daß die Masse m um den Betrag x_{ao} aus der Ruhelage genommen und dann losgelassen wird. Wie lautet in einem solchen Falle die partikuläre Lösung bei der Bedingung, daß $k^2 < 4\,m\,c$ ist?
Geben Sie weiterhin ohne Rechnung die partikuläre Lösung für die Anfangsbedingungen $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$ an.

3) Gegeben sei ein pneumatisches rückwirkungsfreies Zweispeichersystem nach Bild 49. Die beiden Zeitkonstanten seien $T_1 = T_2 = 60$ sec. Der Eingangsdruck betrage $p_o = 100$ mm WS und werde zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet. Der Ausgangsdruck p (in (2.29)) soll nach 2o sec $p_{2o} = 80$ mm WS betragen. Wie groß muß der Anfangsdruck p_a zur Zeit $t = 0$ im Speicher II sein, wenn außerdem zur Zeit $t = 0$ der Druck p_a in beiden Speichern I und II gleich sein soll?

4) Gegeben sei noch einmal die mechanische Masse - Feder-Ordnung nach Bild 45. Es sei x_e = const. $m = 0{,}05$ kp m^{-1} s^2; $c = 1$ kp m^{-1}. Wie groß muß k sein, wenn die erste Überschwingung 1o % des Endwertes x_e betragen soll?

2.4 Einige gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 3. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.4.1 Die inhomogene Dgl 3. Ordnung

Wir beginnen mit einem Beispiel. Gegeben sei ein elektrisches rückwirkungsfreies Dreispeichersystem nach Bild 63 mit den Zeitkonstanten T_1, T_2 und T_3. Es soll die Dgl aufgestellt und deren Lösung für den Fall U_e = const. berechnet werden.

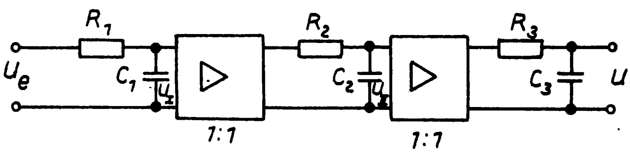


Bild 63

Wie bei der Ableitung der Dgl (2.19) gelten auch hier für die einzelnen RC-Glieder

$$T_1 \dot{U}_I + U_I = U_e; \quad T_2 \dot{U}_{II} + U_{II} = U_I; \quad T_3 \dot{U} + U = U_{II}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen U_I und U_{II}, dann erhält man die Dgl des rückwirkungsfreien Dreispeichersystems

$$T_1T_2T_3 \dddot{U} + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) \ddot{U} + (T_1 + T_2 + T_3) \dot{U} + U = U_e \tag{2.77}$$

Damit haben wir eine gewöhnliche lineare inhomogene Dgl 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Um die Dgl zu lösen, verwenden wir auch hier wieder den e-Ansatz. Das ist jedoch nur möglich, wenn die Dgl homogen ist. Deshalb machen wir wie früher die Substitution

$$y = U - U_e$$

und erhalten

$$T_1T_2T_3\dddot{y} + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\ddot{y} + (T_1 + T_2 + T_3)\dot{y} + y = 0$$

Mit dem e-Ansatz

$$y = C\,e^{\lambda t} \tag{2.78}$$

erhalten wir die charakteristische Gleichung 3. Grades

$$T_1T_2T_3\lambda^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\lambda^2 + (T_1 + T_2 + T_3)\lambda + {} + 1 = 0 \tag{2.79}$$

Nun lassen sich Gleichungen 3. Grades im allgemeinen nur mit sehr viel Rechenaufwand lösen. Meistens benutzt man Näherungsverfahren. (Ein solches werden wir im nächsten Beispiel kennen lernen.) In unserem Beispiel jedoch können wir uns die umständliche Berechnung der Wurzeln ersparen. Nach der Bemerkung auf S. 29 sind nämlich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung eines Zweispeichersystems gleich den negativ-reziproken Zeitkonstanten. Dieser Satz gilt auch für Drei- und n-Speichersysteme. Dies können Sie in unserem Falle durch Einsetzen in (2.79) leicht nachprüfen. Demnach wären

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}; \quad \lambda_3 = -\frac{1}{T_3}$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.79). Mit (2.78) erhalten wir als allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$y = C_1\, e^{-t/T_1} + C_2\, e^{-t/T_2} + C_3\, e^{-t/T_3}$$

und nach Rücksubstitution $y = U - U_e$

$$U = C_1\, e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2\, e^{-\frac{t}{T_2}} + C_3\, e^{-\frac{t}{T_3}} + U_e \qquad (2.80)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl (2.77). In ihr sind jetzt die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 zu bestimmen. Da es jetzt drei Zahlen sind, brauchen wir zu ihrer Berechnung drei Gleichungen und damit drei Anfangsbedingungen. Nehmen wir an, es seien in Bild 63 alle drei Kondensatoren vor dem Einschalten von U_e entladen. Dann wäre zur Zeit $t = 0$ auch $U = U_I = U_{II} = 0$. Dies sind schon drei Bedingungen, die uns aber in dieser Form nichts nützen, da in der Dgl U_I und U_{II} nicht vorkommen. Wir müssen deshalb versuchen, $U_I = 0$ und $U_{II} = 0$ für $t = 0$ durch U auszudrücken.
Aus der oben angeführten Gleichung $T_3\,\dot{U} + U = U_{II}$ erhalten wir mit $U = 0$ und $U_{II} = 0$ für $t = 0$ auch $\dot{U} = 0$ für $t = 0$. Ferner erhalten wir durch Elimination von U_{II} aus den beiden Gleichungen $T_2\,\dot{U}_{II} + U_{II} = U_I$ und $T_3\,\dot{U} + U = U_{II}$ die Dgl

$$T_2 T_3\,\ddot{U} + (T_2 + T_3)\,\dot{U} + U = U_I.$$

Wenn für $t = 0$ $U = U_I = 0$ und nach dem letzten Ergebnis auch $\dot{U} = 0$ sein soll, dann muß nach dieser Gleichung auch $\ddot{U} = 0$ für $t = 0$ sein. Damit haben wir die Anfangsbedingungen in einer für uns sinnvollen Form erhalten:

Zur Zeit $t = 0$ sei $U = 0$, $\dot{U} = 0$ und $\ddot{U} = 0$.
Aus (2.8o) erhält man

$$\dot{U} = -\frac{C_1}{T_1} e^{-t/T_1} - \frac{C_2}{T_2} e^{-t/T_2} - \frac{C_3}{T_3} e^{-t/T_3} \qquad (2.81)$$

$$\ddot{U} = \frac{C_1}{T_1^2} e^{-t/T_1} + \frac{C_2}{T_2^2} e^{-t/T_2} + \frac{C_3}{T_3^2} e^{-t/T_3} \qquad (2.82)$$

Aus diesen beiden Gleichungen und aus (2.8o) erhält man mit den beiden Anfangsbedingungen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -U_e \\ \frac{1}{T_1} C_1 & + & \frac{1}{T_2} C_2 & + & \frac{1}{T_3} C_3 & = & 0 \\ \frac{1}{T_1^2} C_1 & + & \frac{1}{T_2^2} C_2 & + & \frac{1}{T_3^2} C_3 & = & 0 \end{array}$$

zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 für die gewählten Anfangsbedingungen. Es hat nun keinen Zweck mehr, mit allgemeinen Zahlen T_1, T_2, T_3 weiterzurechnen. Die sich aus dem Gleichungssystem ergebenden Ausdrücke für die Integrationskonstanten sind lang und umständlich. Man würde jetzt in das Gleichungssystem die Zahlenwerte für die Zeitkonstanten T_v einsetzen und die Integrationskonstanten zahlenmäßig bestimmen. Das bietet keine Schwierigkeiten, da es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt. Falls Ihnen der Umgang mit Determinanten vertraut ist, dann können Sie folgendermaßen weiterrechnen:

Es sei

$$D_1 = \begin{vmatrix} -U_e & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_3} \\ 0 & \frac{1}{T_2^2} & \frac{1}{T_3^2} \end{vmatrix} = -U_e \begin{vmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_3} \\ \frac{1}{T_2^2} & \frac{1}{T_3^2} \end{vmatrix} = -U_e\, d_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -U_e & 1 \\ \frac{1}{T_1} & 0 & \frac{1}{T_3} \\ \frac{1}{T_1^2} & 0 & \frac{1}{T_3^2} \end{vmatrix} = +U_e \begin{vmatrix} \frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_3} \\ \frac{1}{T_1^2} & \frac{1}{T_3^2} \end{vmatrix} = +U_e\, d_2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -U_e \\ \frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_2} & 0 \\ \frac{1}{T_1^2} & \frac{1}{T_2^2} & 0 \end{vmatrix} = -U_e \begin{vmatrix} \frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_2} \\ \frac{1}{T_1^2} & \frac{1}{T_2^2} \end{vmatrix} = -U_e\, d_3$$

Die d_v sind dabei Abkürzungen für die Unterdeterminanten 2. Ordnung.

Ferner sei die Systemdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_3} \\ \frac{1}{T_1^2} & \frac{1}{T_2^2} & \frac{1}{T_3^2} \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Determinanten kann man die Ergebnisse des Gleichungssystems in der Form

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = - U_e \frac{d_1}{D}; \; C_2 = \frac{D_2}{D} = + U_e \frac{d_2}{D}; \; C_3 = \frac{D_3}{D} = - U_e \frac{d_3}{D}$$

schreiben.

Auch für die Determinanten gilt, daß ihre Werte allgemein ausgedrückt zu recht umständlichen Ausdrücken führen. Weiterrechnen hat nur numerisch Sinn. Deshalb schreiben wir nur noch

$$U = U_e \left[1 - \frac{d_1}{D} e^{-t/T_1} + \frac{d_2}{D} e^{-t/T_2} - \frac{d_3}{D} e^{-t/T_3} \right] \quad (2.83)$$

Für diejenigen Leser, welche mit Determinanten nicht vertraut sind, sei noch vermerkt, daß die Ausdrücke

$$- U_e \cdot \frac{d_1}{D}, \; U_e \cdot \frac{d_2}{D}, \; - U_e \cdot \frac{d_3}{D}$$

weiter nichts sind, als die Ergebnisse für C_1, C_2, C_3 nach obigem Gleichungssystem, wobei allerdings noch U_e ausgeklammert wurde.

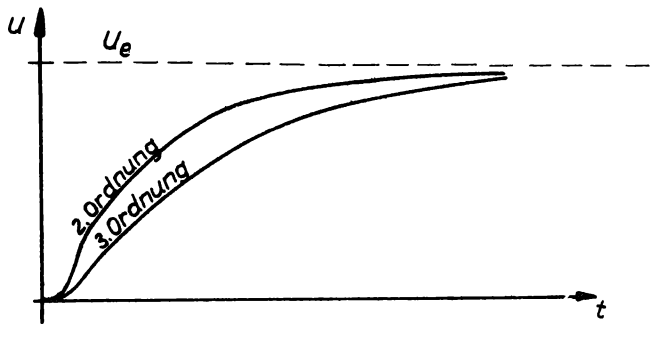


Bild 64

Den Verlauf von (2.83) zeigt Bild 64. Der Verlauf ist ganz ähnlich dem von Gleichung (2.45) in Bild 55. Nur ist dort die Kurve im Anfang etwas steiler. Wir haben sie zum Vergleich in Bild 64 beide eingezeichnet.

Vergleichen Sie den Rechnungsgang, welcher zur Lösung der Dgl 3. Ordnung führte, mit dem der entsprechenden Dgl 2. Ordnung unter 2.3.3.1 mit dem Ergebnis 2.45, dann stellen Sie fest, daß hier nichts grundsätzlich Neues hinzugekommen ist. Der e-Ansatz und alle sich aus ihm ergebenden weiteren Rechnungen bis einschließlich der Bestimmung der Integrationskonstanten ist bei gewöhnlichen linearen Dgln mit konstanten Koeffizienten prinzipiell bis zu beliebig hoher Ordnung anwendbar. Allerdings steigt mit der Ordnung der Dgl auch der Rechenaufwand sehr stark an. Dies macht sich einerseits beim Lösen der charakteristischen Gleichung n-ten Grades der Dgl bemerkbar, welches bei höherer Ordnung nur näherungsweise möglich ist. Andererseits nimmt auch die Rechenarbeit bei der Bestimmung der Integrationskonstanten sehr stark zu.
Nun ist es in der Regelungstechnik so, daß es nur selten notwendig ist, eine Dgl höherer Ordnung zu lösen. Es gibt dort genügend Methoden und Kriterien, welche es gestatten, die für die Regelungstechnik wichtigen Ergebnisse aus den Koeffizienten der Dgl abzulesen und diese lassen sich mit verhältnismäßig wenig Rechenaufwand verwenden. Eine solche Methode ist z.B. der Frequenzgang, den wir noch besprechen werden. Trotzdem muß der Regelungstechniker natürlich die Dgln und auch ihre Lösungen kennen, um vor einer allzu schematischen Handhabe sicher zu sein.
Als nächstes Beispiel wählen wir eine Dgl, bei welcher man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung berechnen muß. Gegeben sei die Dgl

$$\dddot{x} - 9{,}44\, x + 26{,}24 = 0$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung.

Mit dem e-Ansatz $x = C\,e^{\lambda t}$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 9{,}44\,\lambda + 26{,}24 = 0.$$

Es müssen jetzt die Wurzeln der charakteristischen Gleichung berechnet werden. Eine Gleichung 3. Grades hat bekanntlich drei Wurzeln. Von diesen muß mindestens eine Wurzel reell sein, denn die Funktion 3. Grades

$$y = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

hat mindestens einen Schnittpunkt mit der λ-Achse ($y = 0$). Die anderen beiden Wurzeln können ebenfalls reell sein, y hat dann insgesamt drei Schnittpunkte mit der λ-Achse. Hat die Funktion y aber nur einen Schnittpunkt mit der λ-Achse, dann sind die beiden anderen Wurzeln zueinander konjugiert komplex. Es ist noch der Fall denkbar, daß bei drei reellen Wurzeln zwei gleich sind, d.h. es liegt eine Doppellösung vor. Die Funktion y hat dann eine Berührungsstelle mit der λ-Achse. In Bild 65 sind diese drei Fälle für die Funktion y gezeichnet.

Um nun zunächst eine Lösung zu finden, gehen wir folgendermaßen vor.

Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$\lambda^3_{\nu+1} = 9{,}44\,\lambda_\nu - 26{,}24 \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots.)$$

und setzen jetzt für λ_1 einen beliebig gewählten reellen Wert in die rechte Seite der Gleichung ein. Wir wählen z.B. $\lambda_1 = 0$. Den sich links ergebenden Wert für λ nennen wir λ_2. Natürlich stimmen sie nicht überein. Das wäre nur dann der Fall, wenn wir zufällig eine Wurzel gewählt hätten.

Also

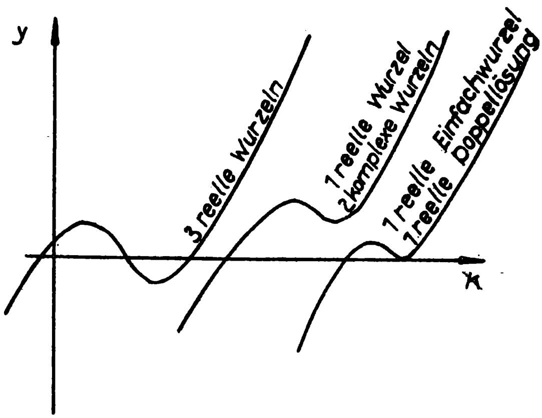


Bild 65

$$\lambda_2^3 = 9,44 \ \lambda_1 - 26,24 = 9,44 \ . \ 0 - 26,24 = - 26,24$$

$$\lambda_2 = - 2,97$$

Jetzt setzen wir rechts in die Gleichung den Wert λ_2 ein und erhalten λ_3:

$$\lambda_3^3 = 9,44 \ \lambda_2 - 26,24 = 9,44 \ .(-2,97) - 26,24 = - 54,54$$

$$\lambda_3 = - 3,79$$

Jetzt setzen wir λ_3 ein und so fort:

$$\lambda_4^3 = - 9,44 \ . \ 3,79 - 26,24 = - 62; \quad \lambda_4 = - 3,96$$
$$\lambda_5^3 = - 9,44 \ . \ 3,96 - 26,24 = - 63,6; \quad \lambda_5 = - 3,99$$
$$\lambda_6^3 = - 9,44 \ . \ 3,99 - 26,24 = - 63,9; \quad \lambda_6 = - 3,995 \approx - 4$$
$$\lambda_7^3 = - 9,44 \ . \ 4 \quad - 26,24 = - 64 \quad ; \quad \lambda_7 = - 4$$

Damit können wir das Verfahren abbrechen, da zwischen λ_6 und λ_7 kein Unterschied mehr besteht. (Wo das Verfahren nicht so glatt aufgeht, rechnet man soweit, bis die noch auftretenden Änderungen unterhalb der gewünschten Genauigkeit liegen.) Sie erkennen in dieser Methode das "Verfahren der sukzessiven Approximation" wieder, welches schon im 1. Lehrbrief für die Lösung einer Dgl angewandt wurde.

Natürlich kann man auch nach anderen Verfahren eine Lösung der Gleichung dritten Grades finden, z.B. mit dem Verfahren nach Newton, der "regula falsi", dem Hornerschen Schema.
Die Durchnumerierung der Indices bei λ von 1 bis 7 lassen wir jetzt wieder fallen und nennen die so gefundene Lösung unserer charakteristischen Gleichung

$$\lambda_1 = -4$$

Eine Gleichung n-ten Grades hat n Wurzeln. Sie seien mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bezeichnet. Man kann die Gleichung n-ten Grades mit diesen Wurzeln bekanntlich auch in der Form

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda$$

schreiben. Diese Gleichung gilt für beliebiges λ und nicht etwa nur für die Wurzeln $\lambda = \lambda_1$ usw. Für beliebiges λ sind beide Seiten der Gleichung gleich, während sie für $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2 \ldots \lambda = \lambda_n$ außerdem noch Null werden. (Sie erkennen das am rechten Teil der Gleichung, in welcher die Faktoren $\lambda - \lambda_1$ für $\lambda = \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$ für $\lambda = \lambda_2$ usw. Null werden und damit die ganze rechte Seite zu Null machen).

In unserem Falle also gilt

$$\lambda^3 - 9{,}44\,\lambda + 26{,}24 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

wobei $\lambda_1 = -4$ die oben bestimmte Wurzel, λ_2 und λ_3 die noch zu bestimmenden Wurzeln sind. Multiplizieren wir die Klammern aus, dann ergibt sich

$$\lambda^3 - 9{,}44\,\lambda + 26{,}24 = \qquad (2.84)$$

$$\lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Wir führen jetzt den sog. "Koeffizientenvergleich" durch. Die beiden Seiten der Gleichung (2.84) sind für beliebiges λ gleich. (Die rechte Seite der Gleichung ist nur eine andere Schreibweise der linken Seite). Das aber ist nur möglich, wenn die Koeffizienten entsprechender λ-Potenzen auf beiden Seiten übereinstimmen.

λ^3 hat auf beiden Seiten den Koeffizienten 1.

λ^2 hat links den Koeffizienten 0, rechts $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Also gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (2.85)$$

λ^1 hat links den Koeffizienten - 9,44, rechts $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$.

Also gilt

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -9{,}44 \qquad (2{,}86)$$

λ^0 (das Absolutglied) hat links + 26,24, rechts $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

Also gilt

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +26{,}24$$

Dies sind drei Gleichungen zur Bestimmung von λ_1, λ_2, λ_3. Natürlich kann man mit diesem System von drei Gleichungen nicht die Gleichung 3. Grades umgehen, denn die Auflösung dieses Systems nach einer der drei Unbekannten λ_1, λ_2, λ_3 führt wieder auf die ursprüngliche Gleichung dritten Grades. - Da wir nun die Unbekannte λ_1 schon berechnet haben, brauchen wir zur Bestimmung der zwei restlichen Unbekannten λ_2 und λ_3 nur noch zwei der drei Gleichungen. Wir wählen (2.85) und (2.87) und erhalten mit $\lambda_1 = -4$ die quadratische Gleichung

$$\lambda_2^2 - 4\,\lambda_2 + 6{,}56 = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$\lambda_3^2 - 4\,\lambda_3 + 6{,}56 = 0$$

mit den beiden anderen Lösungen

$$\lambda_2 = +\,2 + 1{,}6\,j \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = +\,2 - 1{,}6\,j$$

Unsere Lösungen der charakteristischen Gleichung sind also $\lambda_1 = -4$; $\lambda_2 = +\,2 + 1{,}6\,j$; $\lambda_3 = +\,2 - 1{,}6\,j$

und nach unserem e-Ansatz wäre die allgemeine Lösung der gegebenen homogenen Dgl

$$x = C_1\,e^{-4t} + C_2\,e^{+2t + 1{,}6\,j\,t} + C_3\,e^{+2t - 1{,}6\,j\,t}$$

$$= C_1\,e^{-4t} + x_{2,3} \text{ mit } x_{2,3} = C_2\,e^{+2t + 1{,}6\,j\,t} +$$

$$+ C_3\,e^{+2t - 1{,}6\,j\,t}$$

$x_{2,3}$ führt, wie wir von früher wissen, wieder auf eine Schwingung. Deshalb müßten wir wieder die langwierigen Umformungen durchführen. Jedoch können wir sie umgehen, denn nach (2.76) können wir für die sich ergebende Schwingung sofort

$$x_{2,3} = A\,e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

schreiben. Dabei sind A und φ die Integrationskonstanten. δ und ω erhalten wir aus λ_2 und λ_3. Es ist

$$\lambda_{2/3} = +\delta \pm j\omega = +2 \pm 1{,}6\,j$$

(Im Unterschied zu früher schreiben wir jetzt $+\delta$, da der Realteil von $\lambda_{2/3}$ positiv ist). Demnach ist

$$\delta = +2 \quad \text{und} \quad \omega = 1{,}6$$

($\delta = +2$ bedeutet aufklingende Schwingung)

Wir erhalten also

$$x_{2,3} = A\,e^{2t} \sin(1{,}6\,t + \varphi)$$

und für die allgemeine Lösung der homogenen Dgl ergibt sich

$$x = C_1\,e^{-4t} + A\,e^{2t} \sin(1{,}6\,t + \varphi)$$

Wären jetzt Anfangsbedingungen gegeben, z.B. durch

$$x = a; \quad \dot{x} = b; \quad \ddot{x} = c \quad \text{für } t = 0\,,$$

dann würden wir zunächst aus der allgemeinen Dgl $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ berechnen und nach Einsetzen der Anfangswerte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a &= C_1 + A \sin\varphi \\
b &= -4\,C_1 + A\,(2 \sin\varphi + 1{,}6 \cos\varphi) \\
c &= 16\,C_1 + A\left[(4 + 1{,}6^2) \sin\varphi + 2\cdot 3{,}2 \cos\varphi\right]
\end{aligned}$$

erhalten, woraus sich die Integrationskonstanten C_1, A

und φ berechnen lassen. Da uns diese Rechnung jedoch keine neuen Erkenntnisse liefert, soll sie hier nicht weiter fortgeführt werden.
Die allgemeine Lösung besteht aus zwei Summanden

$$x_1 = C_1 e^{-4t} \quad \text{und} \quad x_2 = 2 A e^{2t} \sin (1,6 t + \varphi)$$

x_1 geht mit wachsendem t gegen Null. Sie hat deshalb auf den wesentlichen Verlauf der Funktion x praktisch keinen Einfluß. x_2 ist eine Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = 1,6 [s^{-1}]$ deren Amplitude mit der e-Funktion e^{2t} wächst. Die Schwingung ist also aufschaukelnd. Für $t \to \infty$ geht auch die Amplitude der Schwingung gegen ∞.
Für ein gegebenes mechanisches oder elektrisches System darf so etwas natürlich nicht eintreten, da bei einem Maximalwert von x das System zerstört werden würde.
In unserem Beispiel tritt eine aufklingende Schwingung auf. Für alle partikulären Lösungen, bei welchen C_2 und C_3 nicht Null sind, gilt dann dasselbe. Die Art der Schwingung ist also nicht abhängig von der Wahl der Anfangsbedingungen, sondern liegt, wie früher schon betont wurde, nur am gerätetechnischen Aufbau des gegebenen Systems und dessen Einstellung, und dies wird durch die Koeffizienten der homogenen Dgl ausgedrückt.
Das Auftreten einer aufklingenden Schwingung haben wir schon an den Wurzeln der charakteristischen Gleichung erkannt. $\lambda_1 = -4$ ist negativ- reell und ergibt die abklingende e-Funktion, $x_1 = C_1 e^{-4t}$. Wäre λ_1 größer als Null, z.B. = + 4 gewesen, dann hätte sich die mit der Zeit immer schneller wachsende e-Funktion $x_1 = C_1 e^{+4t}$ ergeben, welche ebenfalls zur Zerstörung des Systems führt. Die Wurzeln k_2 und k_3 sind zueinander konjugiert komplex und haben den gemeinsamen Realteil + 2. Dieser bildet mit t den Exponenten der e-Funktion e^{2t} in der Amplitude der Sinusschwingung. Dadurch ergibt sich das

Anwachsen der Amplitude mit der Zeit. Hätte sich dieser Realteil negativ, z.B. - 2 ergeben, dann hätte e^{-2t} in der Amplitude gestanden und die Schwingung wäre gedämpft gewesen.

Zwei konjugiert komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung ergeben eine Schwingung. Sie ist gedämpft, wenn der Realteil der Wurzeln negativ und aufklingend, wenn der Realteil positiv ist. Ist der Realteil Null, dann ergibt sich eine ungedämpfte Schwingung (konstante Amplitude). Reelle Wurzeln ergeben keine Schwingung, sondern eine abklingende e-Funktion für eine negative und eine aufklingende e-Funktion für eine positive Wurzel.

Diese Verhältnisse können wir in der komplexen Ebene deuten. Damit die Lösung x einer linearen Dgl n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $t \to \infty$ zu endlichen (stabilen) Werten geht und auch keine Dauerschwingung ausführt, müssen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der komplexen Ebene alle in der linken Halbebene liegen (neg. Realteil!)(Bild 66). Im Bild sind für

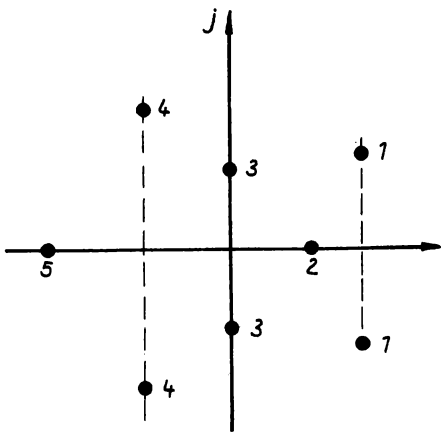


Bild 66

die verschiedenen von uns besprochenen Fälle die möglichen Lagen der Wurzeln eingetragen. Es ergeben die Punkte

1 - 1 eine aufschaukelnde Schwingung.
  2 eine e-Funktion, nach ∞ wachsend
3 - 3 eine ungedämpfte Schwingung
4 - 4 eine gedämpfte Schwingung
  5 eine abklingende e-Funktion.

Sie werden in der Regelungstechnik beim Studium der "Stabilitätskriterien" diese Gedankengänge brauchen.
Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bestimmen sich aus den Koeffizienten der homogenen Dgl, denn diese sind auch die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung. Es müßte nun auch möglich sein, aus den Koeffizienten der homogenen Dgl auf das Verhalten der Lösung zu schließen und zwar ohne erst die ganze homogene Dgl lösen zu müssen, was ja bei höherer Ordnung mit viel Aufwand verbunden ist. Dieses Problem wurde von Hurwitz gelöst und Sie werden es als Stabilitätskriterium in der Regelungstechnik kennen lernen. Wir wollen nur einen Teil desselben angeben:

Wenn nicht alle Koeffizienten der homogenen Dgl von Null verschieden sind oder wenn nicht alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, dann ist die von der Dgl beschriebene Anordnung instabil.
In unserem Zusammenhang wollen wir eine Anordnung dann stabil nennen, wenn in der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl der Anordnung alle als Summanden auftretenden Funktionen für $t \to \infty$ gegen Null oder gegen einen festen endlichen Wert gehen und wenn evtl. auftretende Schwingungen abklingen. Im anderen Falle nennen wir die Anordnung instabil.

Für Dgln 1. und 2. Ordnung gilt auch die Umkehrung:
Sind bei einer Dgl 1. und 2. Ordnung alle Koeffizienten vorhanden und haben sie auch gleiches Vorzeichen, dann ist die durch die Dgl beschriebene Anordnung stabil.

Man kann an Beispielen zeigen, daß bei Dgln höherer Ordnung trotz vorhandener Koeffizienten mit gleichem Vorzeichen Instabilität auftritt, d.h. dieses Kriterium reicht dort nicht aus. Nach Hurwitz muß in einem solchen Falle noch eine zusätzliche Determinantenbedingung erfüllt werden, damit Stabilität vorliegt. Wir wollen diese Bedingung hier nicht besprechen.
In unserem letzten Beispiel fehlte das Glied mit x, sein Koeffizient ist Null. Außerdem haben die Koeffizienten von x und $\dot{x}$ verschiedenes Vorzeichen. Demzufolge hatte die Lösung einen instabilen Anteil. Die Amplitude der Schwingung wächst mit der Zeit über jeden Wert.
Ein anderes Beispiel ist unsere Dgl (2.23). Sie ist von 2. Ordnung und es sind alle Koeffizienten vorhanden und von gleichem Vorzeichen. In diesem Falle ist die Anordnung, wie wir gesehen haben, immer stabil, es treten immer gedämpfte Schwingungen oder gegen einen festen Wert gehende e-Funktion auf. Würden wir aber die Dämpfung wegnehmen, dann wäre $k = 0$ und die Anordnung wäre instabil, denn es ergibt sich jetzt eine ungedämpfte Schwingung. Würden wir k negativ machen (die technische Realisierung dieses Falles interessiert jetzt nicht), dann würden wir aufklingende Schwingungen erhalten, was ebenfalls Instabilität bedeutet. In diesem Falle wären alle Koeffizienten vorhanden, jedoch hätten sie verschiedenes Vorzeichen.

2.4.2 Dgln höherer Ordnung

Gewöhnliche lineare Dgln mit konstanten Koeffizienten treten auch von höherer Ordnung in der Regelungstechnik häufig in Erscheinung. Sie entstehen beispielsweise durch Verkettung mehrerer Regelkreisglieder. Der Regelungstechniker braucht nun im allgemeinen die numerisch explizite Form der Lösung nicht zu kennen. Er muß nur wissen, welche Lösungsformen möglich sind und ob Stabilität vorliegt. Wir können nach unseren bisherigen Erfahrungen nun angeben, welche Lösungen möglich sind. Entscheidend ist dafür, wie Sie gesehen haben, das Verhalten der Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Es können hierbei folgende Fälle auftreten:

1. Alle Wurzeln sind reell. Dann treten keine Schwingungen auf. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl besteht aus einer Summe von e-Funktionen mit reellen Exponenten. Im allgemeinen treten so viele Summanden auf, wie die Ordnung der Dgl beträgt. Lautet die homogene Dgl

$$a_n \overset{(n)}{x} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{x} + \dots + a_1 x = 0,$$

dann lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu e^{\lambda_\nu}$$

Hierbei gilt allerdings die Voraussetzung, daß alle $\lambda_\nu \neq 0$ und voneinander verschieden sind. Bei Vorhandensein einer oder mehrerer Doppelwurzeln hat die Lösung eine andere Form. Sie finden sie im Bedarfsfalle in Taschenbüchern, z.B. Dubbel. Es sei an die Formel (2.66) erinnert, in welcher für die Dgl 2. Ordnung im Falle einer Doppelwurzel die Lösung angegeben wurde. Sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung negativ, dann gehen alle e-Funktionen gegen

Null, es liegt Stabilität vor. In diesem Falle verhält sich die durch die Dgl beschriebene Anordnung wie ein rückwirkungsfreies n-Speichersystem. Die Zeitkonstanten der einzelnen Speicher sind gleich den negativ-reziproken Wurzeln der charakteristischen Gleichung.
Ist auch nur eine reelle Wurzel positiv, dann liegt Instabilität vor: x wächst mit der Zeit über alle Grenzen.

2. Ein Wurzelpaar ist zueinander konjugiert komplex, alle anderen Wurzeln sind reell. Das konjugiert-komplexe Wurzelpaar liefert eine Schwingung, deren Kreisfrequenz gleich dem Imaginärteil der Wurzeln ist. Sie ist gedämpft, wenn der Realteil kleiner als Null, ungedämpft, wenn der Realteil gleich Null und aufklingend, wenn der Realteil größer als Null ist. Die rellen Wurzeln ergeben wie oben eine Summe von e-Funktionen. Wir können für den Fall, daß alle reellen Wurzeln voneinander verschieden sind, die allgemeine Lösung der homogenen Dgl auf die Form

$$x = A\, e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_3\, e^{\lambda_3 t} + C_4\, e^{\lambda_4 t} + \dots +$$
$$+ C_n\, e^{\lambda_n t}$$

bringen. Hierin sind A, φ , C_4, C_5, ..., C_n die Integrationskonstanten, δ und ω sind Real- und Imaginärteil der konjugiert-komplexen Wurzeln. Liegt eine inhomogene Dgl vor, dann wird zu der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl addiert, welche man auf dieselbe Weise finden kann, wie dies für Dgln 2. Ordnung beschrieben wurde.

3. Mehrere Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind zueinander konjugiert-komplex. In diesem Falle liefert jedes zueinander konjugiert-komplexe Wurzel-

paar eine Schwingung, so daß die allgemeine Lösung mehrere Schwingungen enthält. Die evtl. noch vorhandenen reellen Lösungen liefern wieder eine Summe von e-Funktionen, die für negative Wurzeln abklingen. Für den Fall von zwei zueinander konjugiert komplexen Wurzelpaaren (also vier komplexen Lösungen) können wir die allgemeine Lösung der homogenen Dgl in der Form schreiben

$$x = A_1\, e^{\delta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\, e^{\delta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) +$$

$$+ C_5\, e^{\lambda_5 t} + C_6\, e^{\lambda_6 t} + \ldots + C_n\, e^{\lambda_n t}$$

Im inhomogenen Falle kommt noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl hinzu. Bild 67 zeigt Ihnen,

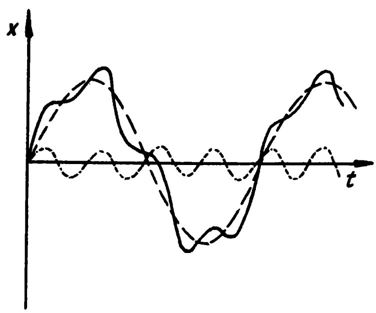


Bild 67

wie die beiden Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 sich überlagern. Bild 68 zeigt ein partikuläres Integral der homogenen Dgl für den Fall, daß außer zwei konjugiert komplexen Wurzelpaaren noch eine negativ-relle Wurzel auftritt. Der Verlauf wird für andere Anfangsbedingungen nur im Anfang wesentlich anders, der hauptsächliche Verlauf der Funktion bleibt bestehen. Ob die gegebene Anordnung, welche durch die

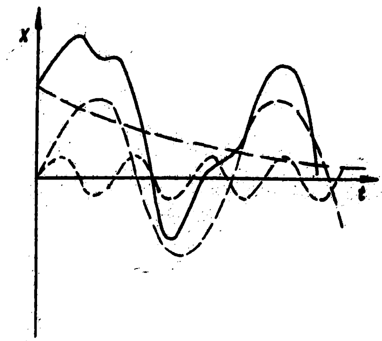


Bild 68

Dgl beschrieben wird, stabil ist, kann durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bereits entschieden werden. Reelle Wurzeln müssen negativ sein und bei komplexen Wurzeln müssen die Realteile negativ sein. Um so vorzugehen, bedarf es aber der Kenntnis der Wurzeln, welche nur durch mühsame Rechnung zu finden sind. Man kann aber, wie schon besprochen, aus den Koeffizienten der Dgl auf die Stabilität schließen. Außer dem Hurwitz-Verfahren gibt es in der Regelungstechnik eine Anzahl verschiedener Verfahren, um über Stabilität oder Instabilität zu entscheiden. Dort werden Sie auch einige dieser Verfahren kennen lernen. Diese sog. "Stabilitätskriterien" entheben uns der Mühe, eine Dgl n-ter Ordnung explizit lösen zu müssen.

Lösungen zu den Aufgaben

Lösungen zu den Aufgaben zu 2.3.2

1. Es gelten wie beim Beispiel 4 die Gleichungen

   $U_e = U_R + U_L + U_C$ (1); $\dot{U}_c = J/C$ (2);

   $U_L = L\,\dot{J}$ (3); $U_R = J\,R$ (4)

   Es soll U_R berechnet werden. Dazu müssen U_L, U_c und J eliminiert werden. Aus (4): $J = U_R/R$; $\dot{J} = \dot{U}_R/R$. Hiermit ergibt sich aus (2) $\dot{U}_c = U_R/RC$ und aus (3) $U_L = L\,\dot{U}_R/R$.
   Wir setzen in (1) ein. Dann folgt

   $$U_e = U_R + \frac{L}{R}\dot{U}_R + \frac{1}{R\,C}\int U_R\,dt \quad \text{oder}$$

   $$L\,C\,\ddot{U}_R + R\,C\,\dot{U}_R + U_R = R\,C\,\dot{U}_e$$

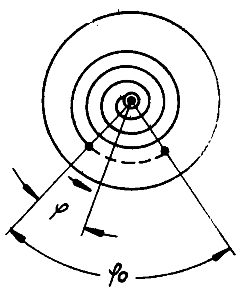


Bild 69

Vergleich mit (2.3o) ergibt: Die homogene Dgl ist die gleiche wie dort, nur die Störfunktion ist verschieden.

2. Infolge der Verschiebung des freien Federendes um den Winkel tritt am anderen an der Achse befindlichen Federende das Moment $M_o = c\ \varphi_o$ auf. Nach einem kleinen Augenblick hat sich der Körper um den Winkel φ gedreht, und damit hat sich auch die Feder um diesen Winkel φ entspannt. Das in diesem Augenblick wirksame Drehmoment beträgt $M = M_o - c\varphi = c\ \varphi_o - c\varphi$. Andererseits ist nach dem dynamischen Grundgesetz des starren Körpers $M = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$. Wir erhalten also die Dgl

$$\Theta\ddot{\varphi} + c\varphi = c\ \varphi_o$$

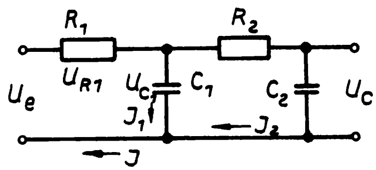


Bild 7o

3. Aus Bild 7o entnehmen wir die Formeln

$U_e = U_{R1} + U_{C1}$ (1) $\quad U_{C1} = U_{R2} + U_c$ (2)

$J = J_1 + J_2$ (3) $\quad U_{R1} = J\ R_1$ (4)

$U_{R2} = J_2\ R_2$ (5) $\quad \dot{U}_{c1} = J_1/C_1$ (6) und

$\dot{U}_c = J_2/C_2$ (7).

Aus (1) und (2) folgt $U_e = U_{R1} + U_{R2} + U_c$ (8)

Aus (5) und (7): $U_{R2} = R_2 J_2 = R_2C_2 \dot{U}_c$. (9)

Aus (4) und (3): $U_{R1} = J_1 R_1 + J_2R_1$. Mit (7) folgt hieraus

$U_{R1} = J_1R_1 + R_1C_2 \dot{U}_c$. Mit (6): $U_{R1} = R_1C_1\dot{U}_{c1} + R_1C_2\dot{U}_c$.

Mit (2): $U_{R1} = R_1C_1\dot{U}_{R2} + R_1C_1\dot{U}_c + R_1C_2\dot{U}_c$ und mit (9)

$U_{R1} = R_1C_1R_2C_2 \ddot{U}_c + R_1C_1 \dot{U}_c + R_1C_2 \dot{U}_c$ (1o)

Die Gleichungen (9) und (1o) werden in (8) eingesetzt. Man erhält geordnet

$$R_1C_1R_2C_2 \ddot{U}_c + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) \dot{U}_c + U_c = U_e$$

Bei dem nicht rückwirkungsfreien Zweispeichersystem sind die Koeffizienten anders gebildet als beim rückwirkungsfreien System. Deshalb muß sich auch eine andere Lösung ergeben. Beide Systeme unterscheiden sich also. Mit den Abkürzungen $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$ des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems und $T_{12} = R_1C_2$ lautet die Dgl

$$T_1T_2\ddot{U}_c + (T_1 + T_2 + T_{12}) \dot{U}_c + U_c = U_e$$

Der Koeffizient von $\dot{U}_c$ ist beim rückwirkenden System um T_{12} größer als beim rückwirkungsfreien System.

Lösungen der Aufgaben zu 2.3.3

1) $L\,C\,\ddot{U}_c + R\,C\,\dot{U}_c + U_c = U_e$.

Substitution $x = U_c - U_e$.

$L\,C\,\ddot{x} + R\,C\,\dot{x} + x = 0$. Charakteristische Gleichung:

$L\,C\,\lambda^2 + R\,C\,\lambda + 1 = 0$.

Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

a) $L = 1$ H; $C = 10^{-6}$ F; $R = 4000\,\Omega$

Die Wurzeln werden

$\lambda_1 = -270\ s^{-1}$ und $\lambda_2 = -3730\ s^{-1}$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl:

$$x = C_1\,e^{-270\,t} + C_2\,e^{-3730\,t}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$U_c = C_1\,e^{-270\,t} + C_2\,e^{-3730\,t} + 100\ \text{V}\ (U_e = 100\ \text{V})$$

$$\dot{U}_c = -270\,C_1\,e^{-270\,t} - 3730\,C_2\,e^{-3730\,t}$$

Anfangswerte $U_c = 0$ und $\dot{U}_c = 0$ für $t = 0$ ergeben die Gln $0 = C_1 + C_2 + 100$ und $0 = -270\,C_1 - 3730\,C_2$

Hieraus

$$C_1 = -107{,}8\ [\text{V}] \quad \text{und}\ C_2 = 7{,}81\ [\text{V}]$$

Partikuläre Lösung:

$$U_c = 100\left[1 - 1{,}08\,e^{-270\,t} + 0{,}0781\,e^{-3730\,t}\right]$$

Sie hat die Form der Gleichung (2.45) und damit den Verlauf nach Bild 55. Da keine Schwingung vorliegt, kann man die Anordnung durch ein rückwirkungsfreies Zweispeichersystem ersetzen. Durch Vergleich unserer

partikulären Lösung mit (2.45) erhält man
$T_1 = 1/27o$ [s] und $T_2 = 1/373o$ [s.]

b) $L = 1$ [H] ; $C = 1o^{-6}$ [F] $R = 2ooo$ [Ω]
Es ergibt sich jetzt die Doppelwurzel

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1ooo \ [s^{-1}]$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl:

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t)\, e^{-1ooo\,t}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl:

$$U_c = (C_1 + C_2 t)\, e^{-1ooo\,t} + 1oo \qquad (U_e = 1oo \text{ V})$$

$$\dot{U}_c = -(C_1 + C_2 t)\, 1ooo\, e^{-1ooo\,t} + C_2\, e^{-1ooo\,t}$$

Mit den Anfangswerten $U_c = \dot{U}_c = 0$ für $t = 0$ ergibt sich

$$C_1 = -1oo \text{ und } C_2 = -1o^5$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

$$U_c = 1oo \left[1 - (1 + 1ooo\,t)\, e^{-1ooo\,t}\right]$$

Auch hier tritt keine Schwingung auf. Verlauf der Funktion prinzipiell wie Bild 55. Zeitkonstanten T_1 T_2. Nach S.29 sind die Zeitkonstanten gleich den negativ-reziproken Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$T_1 = T_2 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1ooo} \ [s]$$

Man kann also im Falle a) und b) eine Anordnung nach Bild 44 benutzen. Die Spannung U_c hat bei der Wahl der berechneten Zeitkonstanten den gleichen Verlauf in Abhängigkeit von der Zeit wie bei unserem Beispiel.

c) $L = 1[H], C = 10^{-6}[F], R = 1000[\Omega]$
Die Lösungen der chrakteristischen Gleichung werden jetzt komplex.

$$\lambda_{1/2} = -500 \pm 867\, j$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl wird

$$U_c = C_1 \cdot e^{-500\,t + 867\,j\,t} + C_2\, e^{-500\,t - 867\,j\,t} + 100$$

Jetzt müßte wieder die Bestimmung der Integrationskonstanten folgen. Danach wäre wieder die umständliche Umformung auf die sich ergebende Schwingung notwendig. Wir können jedoch diese langwierige Rechnung wesentlich abkürzen. Wir wissen: Wegen der komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung ergibt sich eine Schwingung. Sie ist gedämpft, da der Realteil von $\lambda_{1/2}$ negativ ist und hat die Kreisfrequenz $\omega = 867\ s^{-1}$. Nach (2.76) kann man für die allgemeine Lösung der homogenen Dgl in unserem Falle mit den Integrationskonstanten A und φ

$$x = A\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = A\, e^{-500\,t} \sin(867\,t + \varphi)$$

schreiben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl wird

$$U_c = A\, e^{-500\,t} \sin(867\,t + \varphi) + 100$$

Hieraus erhalten wir

$$\dot{U}_c = A \Big[-500\, e^{-500\,t} \sin(867\,t + \varphi) + + 867\, e^{-500\,t} \cos(867\,t + \varphi) \Big]$$

Mit den Anfangswerten $U_c = 0$, $\dot{U}_c = 0$ für $t = 0$ ergeben sich aus U_c und $\dot{U}_c$ die Gleichungen zur Bestimmung von A und φ:

$$0 = A \sin\varphi + 100$$

$$0 = A - 500 \sin\varphi + 867 \cos\varphi$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\tan\varphi = \frac{867}{500} = 1{,}733 \qquad \varphi = 60^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{3}$$

und aus der anderen

$$A = -\frac{100}{\sin\varphi} = -\frac{100}{0{,}866} = -115{,}5$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$U_c = -115{,}5\, e^{-500\, t} \cdot \sin\left(867\, t + \frac{\pi}{3}\right) + 100\ V$$

Jetzt ergibt sich also eine Eigenschwingung mit der Eigenkreisfrequenz $\omega = 867\ [s^{-1}]$

Erste Überschwingung:

$$\frac{U_c - U_e}{U_e} = e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}} = e^{-\frac{500\cdot\pi}{867}} = 0{,}163$$

Die erste Überschwingung beträgt 16,3 % von U_e. Dadurch tritt am Kondensator eine maximale Spannung von $U_{c\,max} = U_e + 0{,}163\, U_e = 116{,}3\ V$ auf.

d) $L = 1\ H$; $C = 10^{-6}\ F$; $R = 0$

Die charakteristische Gleichung hat jetzt die rein imaginäre Wurzel

$$\lambda_{1/2} = \pm 10^3\, j$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl:

Da jetzt der Realteil von $\lambda_{1/2}$ Null ist, so besitzt die sich ergebende Schwingung keine Dämpfung ($\delta = 0$) und die allgemeine Lösung der homogenen Dgl lautet mit den Integrationskonstanten A und φ

$$x = A \sin (1000\, t + \varphi) \qquad (e^{-0} = 1\,!)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl wird

$$U_c = A \sin (1000\, t + \varphi) + 100$$

Hieraus

$$\dot{U}_c = 1000\, A \cos (1000\, t + \varphi)$$

Mit den Anfangswerten

$U_c = 0$, $\dot{U}_c = 0$ für $t = 0$ folgt

$$0 = A \sin \varphi + 100$$

$$0 = 1000\, A \cos \varphi$$

Aus der letzten Gleichung: $\cos \varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Aus der Gleichung zuvor:

$$A = - \frac{100}{\sin \varphi} = - \frac{100}{1} = - 100$$

Partikuläre Lösung:

$$U_c = - 100 \sin(1000\, t + \frac{\pi}{2}) + 100 = 100\,(1 - \cos 1000\, t)$$

$$U_c = 100\,(1 - \cos 1000\, t)$$

Es liegt jetzt gegenüber R = 1000 Ω eine ungedämpfte Schwingung vor. Sie hat die Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 1000\ s^{-1}$ und ist größer als oben. Den Verlauf der Funktion zeigt Bild 71. Mit R = 0 hat die Schaltung

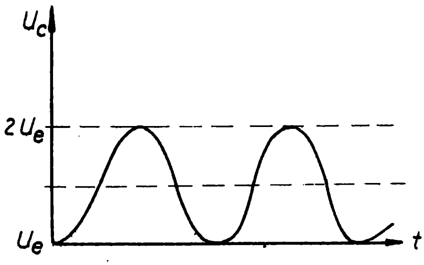


Bild 71

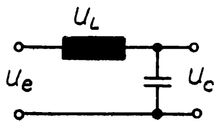


Bild 72

das Aussehen nach Bild 72. Wegen $U_r = 0$ ist in jedem Augenblick

$$U_e = U_c + U_L$$

oder

$$U_L = U_e - U_c = 100 - 100 + 100 \cos 1000\, t$$

$$= 100 \cos 1000\, t$$

Die Spannung an U_L hat also gegenüber U_c eine Phasenverschiebung von 18o° und schwingt symmetrisch um die Zeitachse. In jedem Augenblick ist die Summe beider

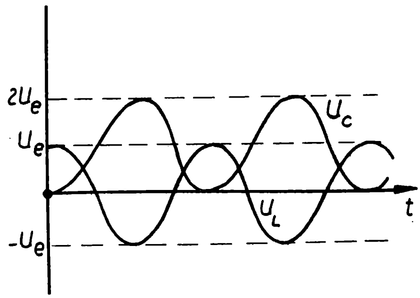


Bild 73

Spannungen = U_e = const. In Bild 73 ist der Verlauf beider Spannungen gezeichnet. Eine Betrachtung der Energieverteilung würde zeigen, daß die elektrische Energie zwischen L und C hin- und herpendelt. In praktischen Fällen läßt sich natürlich R = 0 nicht verwirklichen. Der durch R fließende Strom J entwickelt dort Joulesche Wärme, welche die Schwingung wie unter c) R = 1ooo Ω abklingen läßt.

Die vier Fälle unseres Beispieles zeigen Ihnen folgendes:

R ist in der Dgl nur im Koeffizienten von U_c enthalten. Wir haben diesen Koeffizienten immer kleiner gemacht: 4ooo, 2ooo, 1ooo und 0 Ω . Dabei ging das Übergangsverhalten vom aperiodischen Verhalten über den aperiodischen Grenzfall zum gedämpften Schwingen und für R = 0 schließlich zur ungedämpften Schwingung. Der Koeffizient von $\dot{U}_c$ bestimmt also in unserer Schreibweise, wo der Koeffizient von U_c zu 1 gemacht worden war, wesentlich das Übergangsverhalten. Außerdem zeigt Ihnen dieses Beispiel, daß die Verhältnisse hier ganz analog denen bei unserer mechanischen Masse-Feder-Anordnung liegen. Das ist nicht verwunderlich, denn mathematisch sind die Probleme die gleichen und müssen demnach auch die gleichen Lösungen haben.

2) Da jetzt $x_e = 0$ ist, lautet die Dgl

$$\frac{m}{c}\ddot{x}_a + \frac{k}{c}\dot{x}_a + x_a = 0.$$

Für den ersten Teil der Aufgabe lauten die Anfangsbedingungen

$$x_a = x_{a_0} \text{ und } \dot{x}_a = 0 \text{ für } t = 0.$$

Charakteristische Gleichung:

$$\frac{m}{c}\lambda^2 + \frac{k}{c}\lambda + 1 = 0$$

Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2\,m} \pm j\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4mc}} = -\delta \pm j\omega$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl ist eine Schwingung der Form

$$x_a = A\,e^{-\,t}\sin(\omega t + \varphi)$$

mit A und φ als Integrationskonstanten. Hieraus

$$x_a = A\left[-\delta e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + \omega e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)\right]$$

[illegible] $x_a = x_{a0}$; $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$

$$x_{ao} = A \sin\varphi \text{ und } 0 = A\left[-\delta \sin\varphi + \omega \cos\varphi\right]$$

Hieraus

$$\tan\varphi = \frac{\omega}{\delta}$$

Nun ist

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\omega/\delta}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\delta^2}}}$$

und hiermit

$$A = \frac{x_{ao}}{\sin\varphi} = x_{ao}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\delta^2}}$$

Partikuläre Lösung:

$$x_a = x_{ao}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\delta^2}}\; e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

mit $\tan\varphi = \frac{\omega}{\delta}$

Den Verlauf der Lösung zeigt Bild 74. Vergleichen Sie

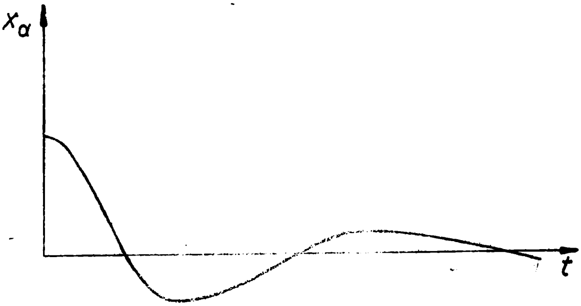


Bild 74

mit (2.58), dann sehen Sie, daß die wesentlichen Teile der Funktionen übereinstimmen. Auch σ und ω sind dieselben Ausdrücke. Sie hängen nur von m, k und c ab, wie früher schon betont.

Der zweite Teil der Aufgabe ergibt für alle t

$$x_a = 0,$$

denn $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$ bedeutet, daß die Masse m nicht aus der Ruhelage herausgenommen und auch nicht angestoßen wird. Sie muß also weiterhin in Ruhe bleiben, d.h. in diesem Falle ist $x_a = 0$ die partikuläre Lösung der Dgl. Sie erhalten dieses Ergebnis natürlich auch aus der allgemeinen Lösung nach Bestimmung der Integrationskonstanten mit den vorliegenden Anfangswerten.
Man erhält $C_1 = C_2 = 0$ und hiermit auch $x_a = 0$ für jeden beliebigen t-Wert.

3) Die Dgl lautet

$$T_1 T_2 \ddot{p} + (T_1 + T_2)\dot{p} + p = p_o$$

$T_1 = T_2 = 60$ [s] ergibt

$$3600\,\ddot{p} + 120\,\dot{p} + p = p_o$$

Substitution: $x = p - p_o$

$$3600\,\ddot{x} + 120\,\dot{x} + x = 0$$

Die charakteristische Gleichung hat die Doppelwurzel

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 = -1/60$$

Danach lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$p = (C_1 + C_2\,t)\,e^{-t/6o} + p_o$$

und ihr Differentialquotient

$$\dot{p} = C_2\,e^{-t/6o} - (C_1 + C_2\,t)\,\frac{1}{6o}\,e^{-t/6o}$$

Für t = 2o [s] sei $p = p_{2o} = 8o$ [mm WS]

Aus der ersten Gleichung erhalten wir hiermit

$$8o = (C_1 + 2o\,C_2)\,e^{-\frac{2o}{6o}} + loo$$

oder $C_1 + 2o\,C_2 = -\,28$

Zur Zeit t = o soll der Druck im Speicher I gleich dem im Speicher II sein. In diesem Augenblick kann dann keine Luft über die Drossel D_2 fließen, d.h. im Speicher II kann sich der Druck zur Zeit t = 0 nicht ändern. $\dot{p} = 0$ für t = o. Dies ist der zweite Anfangswert. Wir erhalten damit als zweite Gleichung

$$0 = C_2 - \frac{C_1}{6o}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$C_1 = -\,21 \text{ und } C_2 = -\,o{,}35$$

Damit lautet die partikuläre Lösung der Dgl

$$p = -\,(21 + o{,}35\,t)\,e^{-t/6o} + loo$$

Diese Gleichung gibt den Verlauf des Druckes in Abhängigkeit von der Zeit an. Zur Zeit t = 0 ist

$$p = p_a = -(21 + 0{,}35 \cdot 0)\, e^{-0/60} + 100$$

$$p_a = 79 \quad [\mathrm{mm\ WS}]$$

Dieses Beispiel sollte Ihnen zeigen, daß die Anfangsbedingungen auch anderer Art als bisher sein können und daß sie nicht immer in expliziter Form vorliegen müssen. In unserem Beispiel war eine Bedingung die Druckgleichheit in beiden Speichern zur Zeit $t = 0$. Die Bedingungen sind wie die Integrationskonstanten völlig willkürlich, sie müssen nur voneinander unabhängig sein, d.h. die eine darf nicht aus der anderen folgen.

4) Für die erste Überschwingung gilt nach S.44

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = e^{-\frac{\delta \tau}{\omega}}$$

Laut Aufgabenstellung ist $(x_a - x_e) / x_e = 0{,}1$

$0{,}1 = e^{-\frac{\delta \tau}{\omega}}$ oder $10 = e^{+\frac{\delta \tau}{\omega}}$. Hieraus

$$\frac{\delta \tau}{\omega} = \frac{\log 10}{\log e} = 2{,}31$$

$$\delta = \frac{k}{2\, m} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4\, m^2}}$$

Wir setzen diese Werte in $\frac{\delta^2 \pi^2}{\omega^2} = 2{,}31^2 = 5{,}32$ ein und erhalten

$$\frac{k^2\, \tau^2}{4\, m\, c - k^2} = 5{,}32$$

und hieraus

$$k = \pm\ 0{,}265\ [\mathrm{kp\ m^{-1}\ s}]$$

III/9/278

Ag 616/ 139 /61 Bestell-Nr. 1009 – 02 /60

INGENIEUR-
FERNSTUDIUM

BRAUNSCHWEIG

HÖHERE MATHEMATIK FÜR REGELUNGSTECHNIKER

1.2

HERAUSGEBER
INGENIEURSCHULE FÜR
FEINWERKTECHNIK JENA

1009-01.2/63

1963

ZENTRALSTELLE FÜR FACHSCHULAUSBILDUNG · BEREICH MASCHINENBAU, ELEKTROTECHNIK, LEICHTINDUSTRIE · DRESDEN

Höhere Mathematik für Regelungstechniker

Lehrbrief 1.2

von

Karl Braunschweig

3. Auflage

Herausgeber:
Ingenieurschule für Feinwerktechnik Jena

Gebühr DM 2,50 Ag 616/ 138 /63 Best-Nr. 1009-01.2/63

III, 9/278

y' ist aber die Tangentenrichtung der gesuchten Funktion $y = f(x)$. Die gesuchte Funktion hat also an der Stelle $x = 2$; $y = 1$ die Tangentensteigung $y' = 0{,}5$. So kann man für jeden beliebigen Punkt der x-y-Ebene nach der gegebenen Differentialgleichung eine Steigung ausrechnen. (Allerdings gibt es auch Punkte, die keine eindeutige Tangentenrichtung haben. Für den Punkt $x = 0$, $y = 0$ unseres Beispiels ist $y' = \frac{0}{0}$, also ein unbestimmter Ausdruck).

Trägt man für jeden Punkt der x-y-Ebene, für welchen durch die Dgl eine Steigung definiert ist, die Steigung ein, dann erhält man ein sog. "Richtungsfeld".

In Bild 22 haben wir das Richtungsfeld für unser Beispiel.

Wir hatten schon weiter oben betont, daß eine Dgl eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion, etwa $y = f(x)$, ist.

In der x-y-Ebene ergibt diese Funktion irgendeine Kurve. Es ist ohne weiteres klar, daß diese Kurve auch in das durch die Dgl bestimmte Richtungsfeld passen muß. Für unser Beispiel sind die Kurven, die in das nach Bild 22 gegebene Richtungsfeld

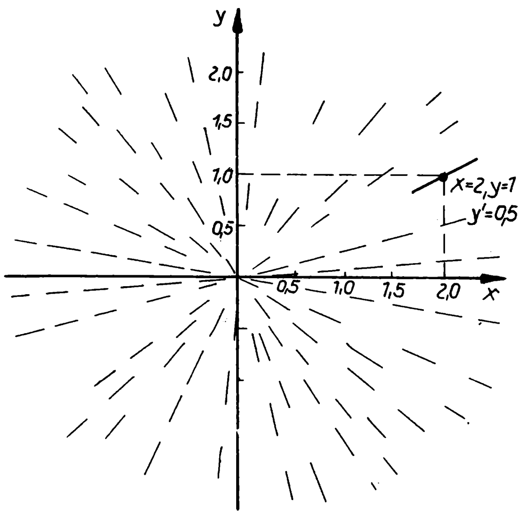


Bild 22

passen, offenbar alle durch den Koordinatenursprung gehenden Geraden. (Zu jedem Punkt der x-y-Ebene gehört, wie Sie sehen, eine ganz bestimmte Gerade. Deshalb gibt es für jeden Punkt nach der Dgl auch nur eine ganz bestimmte Richtung. Nur der Koordinatenursprung gehört zu allen Geraden.

(Daran liegt es auch, daß für unser Beispiel $y' = \frac{y}{x}$ die Richtung im Koordinatenursprung unbestimmt, $\frac{0}{0}$ war. Dort können eben alle Richtungen auftreten).

Wir können nun auch eine geometrische Deutung für die Lösung einer Dgl geben:

Die Lösung einer Dgl ist eine Kurvenschar, welche in das durch die Dgl gegebene Richtungsfeld paßt.

Betrachten wir daraufhin noch einmal unser obenstehendes Beispiel: $y' = \frac{y}{x}$. In das Richtungsfeld nach Bild 22 passen alle Geraden, die durch den Nullpunkt gehen. Die Gleichung einer solchen Geraden ist

$$y = m\,x \quad (m = \text{Richtungsfaktor})$$

Setzen wir hier ein anderes m, etwa m_1 ein, dann ist auch dies eine in das Richtungsfeld passende Gerade. Die Dgl ist offenbar "auf ein bestimmtes m nicht angewiesen". Sie gilt für jedes beliebige m. Das bedeutet, daß m in der Dgl nicht auftreten darf, denn würde m in der Dgl auftreten,dann würde doch die Dgl nur für gerade das in der Dgl vorkommende m gelten. Wollen wir also für die Geradenschar $y = m\,x$ die Dgl aufstellen, dann müssen wir m eliminieren. Es ist

$y = m\,x$ und $y' = m$, also $y = y'\,x$ und hieraus

$$y' = \frac{y}{x}$$

Dies ist die Dgl unseres Beispieles. Setzen Sie hier wieder $y = mx$ ein, dann erhalten Sie selbstverständlich wieder eine Identität, denn es ist $y' = m$ und $\frac{y}{x} = m$. Die ganze Kurvenschar $y = m\,x$, d.h. alle Geraden, welche durch $y = m\,x$ für verschiedenes m entstehen, ist also eine Lösung der Dgl.

Wir wollen hierzu noch ein zweites Beispiel betrachten. In 2.11 hatten wir die Dgl für den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Erdboden aufgestellt. Sie lautete:

$$\frac{dp}{dh} = - \frac{\gamma_o}{p_o} \; p$$

Wir wollen das zugehörige Richtungsfeld zeichnen. Das spezifische Gewicht der Luft bei 0^o C und 760 Torr beträgt $\gamma_o = 1{,}293 \frac{kp}{m^3}$. Der Luftdruck 760 Torr entspricht

$$1{,}033 \cdot 10^4 \; \frac{kp}{m^2} .$$

Also ist

$$\frac{\gamma_o}{p_o} = \frac{1{,}293}{1{,}033 \quad 10^4} = 1{,}25 \; 10^{-4} \; (m^{-1})$$

Hiermit ist

$$\frac{dp}{dh} = - 1{,}25 \; p \; 10^{-4} \; (\frac{kp}{m^3})$$

Das Richtungsfeld hierzu ist in Bild 23 gezeichnet. (p entspricht der y-Achse, h der x-Achse). Wie Sie aus der Dgl sehen, hängt $\frac{dp}{dh}$ nur von p und nicht von h ab. Deshalb haben alle Punkte auf einer zur h-Achse parallelen Geraden dieselbe Steigung. Die Steigung für alle Punkte mit $p = 4000 \frac{kp}{m^2}$ beispielsweise berechnet sich so:

$$\frac{dp}{dh} = - 1{,}25 \cdot 4000 \cdot 10^{-4} = - 0{,}5 \; (kp/m^3)$$
$$= - 0{,}5 \; (\frac{kp/m^2}{m})$$

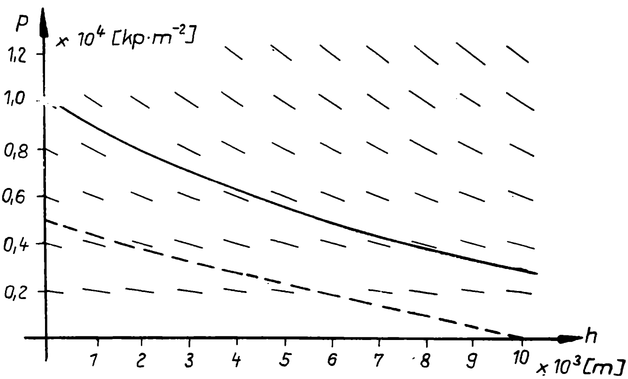


Bild 23

oder nach Erweiterung mit 10^4

$$\frac{dp}{dh} = -\ 0{,}5\ .\ 10^4\ \left(\frac{kp/m^2}{10000\ m}\right)$$

Nach diesem Ergebnis erhält man die Steigung für p = 4000 kp/m^2, indem man durch den Punkt $0{,}5\ .\ 10^4$ auf der p-Achse und durch den Punkt 10 000 m auf der h-Achse eine Gerade zieht. Alle auf der Linie $p = 0{,}4\ .\ 10^4\ kp/m^2$ liegenden

Punkte haben dann eine zu dieser Geraden parallele Steigung. Diese Gerade ist in Bild 23 eingetragen.
In 2.11 hatten wir auch die Lösung der Dgl angegeben. (Wir werden sie später noch ausrechnen). Sie lautete

$$p = p_o \, e^{\frac{-\gamma_o}{p_o} h}$$

Nach dieser Funktion ist mit $p_o = 1{,}033 \cdot 10^4$ (kp/m^2) die in Bild 23 gezeichnete Kurve ausgerechnet worden. Sie sehen, daß die Kurve in das Richtungsfeld paßt. Es gibt aber sicher noch andere Kurven, die in das Richtungsfeld hineinpassen. Die charakteristische Form dieser Kurven ist nach dem Richtungsfeld die gleiche, wie die der gezeichneten Kurve. Das erklärt sich folgendermaßen:
Wir nehmen einen anderen Ausgangsdruck an. Statt p_o = 10330 kp/m^2 wählen wir etwa p_{o1} = 10000 kp/m^2. Das spezifische Gewicht der Luft γ wird proportional dem Druck ebenfalls kleiner, so daß also der Quotient $\frac{\gamma_o}{p_o}$ denselben Wert von $1{,}25 \cdot 10^{-4}$ (m^{-1}) behält. Schreiben wir für $\frac{\gamma_o}{p_o} = k$, dann ist k eine Zahl, die nicht von p_o abhängt. (Denn ändert man p_o, dann bleibt der Quotient $\frac{\gamma_o}{p_o} = k$ unverändert).
Hiermit wird die Gleichung für die Kurve

$$p = p_o \, e^{-k x}$$

Setzen wir hier verschiedene p_o ein, dann erhalten wir auch verschiedene Kurven, die alle in das durch die Dgl gegebene Richtungsfeld passen. Wir sprechen von einer "Kurvenschar". Aus dieser Kurvenschar muß die Kurve herausgesucht werden, die das gegebene physikalische Problem beschreibt. Das ist die Kurve, die für h = 0 den am Erdboden vorhandenen Druck angibt. In Bild 24 ist eine solche Kurvenschar gezeichnet. Ist der Luftdruck am Boden (h = 0) z.B. p_o = 10400 kp/m^2, dann gilt die Kurve, welche diesen "Anfangswert" aufweist.

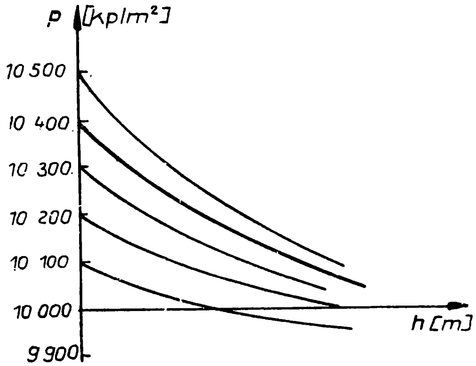


Bild 24

In Bild 24 ist diese Kurve hervorgehoben.

Aufgaben:

1) Was für ein Richtungsfeld hat die Dgl $y' = 0$?
2) Was für ein Richtungsfeld hat die Dgl $y' = x$?
3) Was für ein Richtungsfeld hat die Dgl $y' = -\frac{x}{y}$?

   Vergleichen Sie diese Dgl mit der auf S. besprochenen Dgl $y' = \frac{y}{x}$. Was ergibt sich?

2.22. Die lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung

2.221. Lösung durch Trennung der Veränderlichen

In der linearen Dgl kommen y und seine Ableitungen nur in der 1. Potenz vor. Weiterhin soll die Dgl homogen sein. Das bedeutet, daß alle in der Dgl vorkommenden Summanden y und y' enthalten müssen. Die allgemeine Form einer solchen Dgl ist demzufolge

$$a_1 (x) y' + a_0 (x) y = 0 \qquad (2.1)$$

$a_1(x)$ bzw. $a_o(x)$ sind hierbei Funktionen, die nur von x abhängen. (Eine solche Dgl könnte z.B. $x\,y' - y = 0$ sein. Sie ergibt nach y' aufgelöst, die auf S. 54 besprochene Dgl $y' = \frac{y}{x}$).

Die Funktionen $a_1(x)$ und $a_o(x)$ können natürlich auch konstante Zahlenwerte sein. In diesem Falle hätte die Dgl "konstante Koeffizienten". Aus obiger Dgl folgt der Reihe nach

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} = -a_o(x)\,y;\ \frac{dy}{y} = -\frac{a_o(x)}{a_1(x)}\,dx$$

Wir integrieren auf beiden Seiten und erhalten:

$\ln y = -\int\frac{a_o(x)}{a_1(x)}\,dx + c$ (c = Integrationskonstante).

Diese Gleichung muß nun nach y aufgelöst werden. Es sei an folgendes Logarithmengesetz erinnert:

Wenn $a^x = b$ ist, dann ist $x = {}_a\log b$. Dies wieder in $a^x = b$ eingesetzt, liefert

$$a^{{}_a\log b} = b$$

d.h. logarithmieren und exponieren zur gleichen Basis hebt sich auf. Setzt man als Basis $a = e = 2{,}71..$, dann schreibt man bekanntlich für ${}_a\log = \ln$. Aus unserer letzten Gleichung folgt dann

$$e^{\ln b} = b$$

Für $b = y$ folgt dann für unser Integrationsergebnis

$$e^{\ln y} = y = e^{-\int\frac{a_o(x)}{a_1(x)}\,d\,x}\cdot e^{c}$$

Schreibt man für $e^c = C$ (denn e^c kann wie c jeden beliebigen Zahlenwert annehmen), dann folgt als Lösung für unsere Dgl:

$$y = C\, e^{-\int \frac{a_0\,(x)}{a_1\,(x)}\, d\,x} \qquad (2.2)$$

Die Integration der Dgl (2.1.) ist also recht einfach möglich. Das liegt daran, daß es möglich war, die Veränderlichen x und y so zu trennen, daß auf der einen Seite nur y bzw. dy, auf der anderen Seite nur x bzw. dx stand. Das ist nicht immer so. Darauf werden wir später noch hinweisen. Die eben gezeigte Integrationsmethode heißt "Trennung der Veränderlichen".
Wir wollen sie gleich an einigen Beispielen zeigen.

1. Beispiel. Wir integrieren die auf Seite 38 angegebene Dgl

$$2\,y' + x\,y = 0$$

Wir wollen die Rechnungen noch einmal im einzelnen durchführen.
Es folgt

$$\frac{dy}{y} = -\,\frac{x}{2}\,dx \text{ und integriert } \ln y = -\,\frac{x^2}{4} + c$$

Beide Seiten als Exponent zu e gesetzt:

$$y = C\, e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Auf Seite 38 war dieses Ergebnis mit C = 1 angegeben worden. Was bedeutet nun die Konstante C? Sie können selbst durch Einsetzen dieser Lösung in die Dgl nachprüfen, daß diese Lösung für jedes beliebige C gilt, sobald C wirklich nur eine Zahl ist und nicht etwa eine

Funktion von x! Wählen Sie für C beliebige Zahlenwerte, z.B. C = 1; 18; -7; j; 0.

Für verschiedene Zahlwerte C liefert $y = C\,e^{-\frac{x^2}{4}}$ verschiedene Kurven. Wir erhalten eine Kurvenschar. Bei einem physikalischen Problem muß dann aus dieser Kurvenschar die spezielle Kurve herausgesucht werden, die das entsprechende Problem löst.

> Eine Lösung einer Dgl, die noch die Integrationskonstante als frei wählbare Zahl enthält, wird "allgemeine Lösung" oder "allgemeines Integral" der Dgl genar t.
> Eine Lösung einer Dgl, welche keine Integrationskonstante mehr enthält, wo also die Integrationskonstante schon bestimmt ist, heißt "partikuläre Lösung" oder "partikuläres Integral" der Dgl.

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Dgl des Luftdruckes in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden. Wir haben sie in 2.11. abgeleitet. Sie lautete

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\,p$$

Nach Trennung der Veränderlichen folgt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\,dh$$

und hieraus durch Integration:

$$\ln p = -\frac{\gamma_0}{p_0}\,h + c\ ; \quad p = C\,e^{-\frac{\gamma_0}{p_0}h}$$

Die letzte Gleichung stellt das "allgemeine Integral" der Dgl dar, denn die Integrationskonstante ist noch vorhanden.

Die Gleichung stellt eine Kurvenschar dar. Aus dieser Kurvenschar muß nun die Kurve herausgefunden werden, die in unser Problem paßt. Herrscht am Boden der Luftdruck p_0, dann ist die Kurve, die richtige, welche für $h = 0$ den geforderten Luftdruck $p = p_0$ liefert. Wir setzen den sog.

"Anfangswert" $p = p_0$ für $h = 0$

in die allgemeine Lösung der Dgl ein und erhalten nacheinander:

$$p_0 = C\,e^{-\frac{\gamma_0}{p_0}0} = C. \text{ Also ist } C = p_0$$

Damit ist die bisher noch frei wählbare Integrationskonstante des allgemeinen Integrals bestimmt. Aus der allgemeinen Lösung der Dgl wird damit die partikuläre Lösung:

$$p = p_0\,e^{-\frac{\gamma_0}{p_0}h}$$

Dieses Ergebnis war in 2.11. ohne Ableitung genannt worden. Nach diesem Beispiel sehen Sie folgende Tatsache ohne weiteres ein:

> Unter Berücksichtigung der "Anfangswerte" wird aus dem "allgemeinen Integral" der Dgl ein "partikuläres Integral".

Als Beispiele haben wir nur solche Funktionen gewählt, bei denen die Integration einfach möglich war. Es gibt selbstverständlich auch Fälle, bei denen die Integration Schwierigkeiten bereitet, bzw., wo es nicht möglich ist, die auftretenden Integrale explizit auszurechnen. In solchen Fällen muß man versuchen, durch Reihenentwicklung wenigstens ein angenähertes Ergebnis zu erhalten. Als Beispiel hierzu diene die Dgl

$$x\,y' - y\,e^{x} = 0$$

Nach Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration erhält man

$$\ln y = \int \frac{e^{x}}{x}\,dx + c$$

Das Integral $\int \frac{e^{x}}{x}$ dx existiert aber als elementare Funktion nicht. Man kann es durch Reihenentwicklung angenähert integrieren. Das soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Aufgaben:

1) Lösen Sie die Dgl $y' - y \sin x = 0$
2) Lösen Sie die Dgl $y' - y = 1$. Gesucht ist die Kurve, welche durch den Punkt $y = 5$; $x = 0$ geht.

2.222. Lösung durch e-Ansatz

Der e-Ansatz hat zunächst noch wenig Bedeutung, da wir für lineare homogene Dgln 1. Ordnung das sehr einfache Lösungsverfahren durch die Trennung der Veränderlichen zur Verfügung haben. Dieses Verfahren geht für diesen Typ von Dgl immer, während das jetzt zu besprechende Verfahren durch den e-Ansatz nur dann geht, wenn die Dgl außerdem noch konstante Koeffizienten besitzt. Demnach wäre das Verfahren sinnlos. Es hat aber einen großen Vorteil: es läßt sich ohne weiteres auf Dgln höherer Ordnung übertragen, wo eine Trennung der Veränderlichen wenn überhaupt, dann nur äußerst umständlich möglich ist. Aus diesem Grunde wollen wir es hier schon besprechen.
Gegeben sie die Dgl

$$a_1\,y' + a_0\,y = 0 \qquad (2.3)$$

Zum Unterschied von Gleichung (2.1) sollen jetzt a_1 und a_o konstant sein.
Sie haben unter 2.221 gesehen, daß die Lösung solcher homogener linearer Dgln 1. Ordnung immer in Form einer e-Funktion erschien.

$$y = C\,e^{k\,x} \tag{2.4}$$

C ist hierin die Integrationskonstante, während k eine Zahl ist, die sich aus den Koeffizienten der Differentialgleichung ergibt. Wir können also bei Dgln der Form (2.3) die Lösung nach (2.4) angeben und können dann versuchen, die Konstante k zu bestimmen. Aus (2.4) folgt durch Differentiation

$$y' = C\,k\,e^{k\,x}$$

Setzt man dies und (2.4) in (2.3) ein, dann ergibt sich

$$a_1\,C\,k\,e^{k\,x} + a_o\,C\,e^{k\,x} = 0$$

$C\,e^{k\,x}$ fällt heraus und es bleibt eine Bestimmungsgleichung für die Konstante k:

$$a_1\,k + a_o = 0$$

Diese Bestimmungsgleichung für k wird "charakteristische Gleichung" genannt. Aus ihr folgt

$$k = -\frac{a_o}{a_1}$$

Dies in (2.4) eingesetzt, ergibt die allgemeine Lösung der Dgl (2.3)

$$y = C\,e^{-\frac{a_0}{a_1}x} \qquad (2.5)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (2.2) überein, wenn für a_0 und a_1 konstante Zahlen angenommen werden.

Wir wollen wieder einige Beispiele rechnen. Die Dgln hierzu wollen wir erst aufstellen.

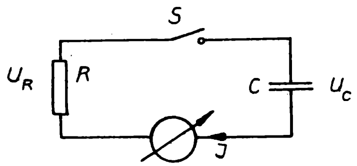


Bild 25

1. <u>Entladung eines Kondensators</u>

Ein Kondensator ist so geladen, daß er eine Spannung U_o besitzt. Er wird über einen Widerstand R entladen (Bild 25).
Gesucht ist der Entladestrom in Abhängigkeit von der Zeit: J = f (t).
Machen wir während des Entladevorganges eine "Momentaufnahme", dann gelten folgende Verhältnisse: Die Spannung am Kondensator ist vom Anfangswert U_o auf den Wert U_c gefallen und es ist $U_c = U_R$ = Spannungsabfall am ohmschen Widerstand. Da nach dem Strom J gefragt ist, müssen wir versuchen, die Gleichung $U_c = U_R$ durch den Strom J auszudrücken. Für U_R gilt $U_R = J\,R$.
Für den Kondensator gilt die Kondensatorgleichung

$$U_c = \frac{Q}{C},$$

wobei Q die Ladung des Kondensators bedeutet.

Sie erinnern sich an die Definition des elektrischen Stromes $J = \frac{dQ}{dt}$ (Strom = Ladungsmenge pro Zeiteinheit). Nun nimmt aber die Ladung Q auf dem Kondensator ab. Infolgedessen ist dQ negativ. Wir müssen deshalb

$$\frac{dQ}{dt} = -J$$

setzen.

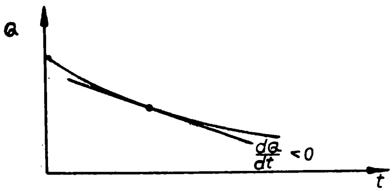


Bild 26

Sie können das auch so einsehen: Die Ladung Q nimmt mit der Zeit ab. Würde man Q in Abhängigkeit von der Zeit auftragen, dann würde sich eine Kurve nach Bild 26 ergeben. Sie hat eine negative Steigung, während natürlich der Strom positiv ist. $\frac{dQ}{dt}$ ist also negativ und da dt immer positiv ist, so muß dQ negativ sein.

Mit $J = -\frac{dQ}{dt}$ können wir die Kondensatorgleichung $U_c = \frac{Q}{C}$ auch

$$\dot{U}_c = \frac{-J}{C}$$

schreiben.

Aus $U_c = U_R$ folgt $\dot{U}_c = \dot{U}_R$. Wir setzen ein und erhalten: unter Beachtung von $\dot{U}_R = \dot{J}\,R$:

$$-\frac{J}{C} = \dot{J}\,R \text{ oder } R\,C\,\dot{J} + J = 0$$

Das ist die Dgl für den gesuchten Entladestrom in Abhängigkeit von der Zeit. Wir lösen sie mit e-Ansatz.

Er muß lauten:

$$J = \bar{C}\, e^{k\,t}$$

und differenziert:

$$\dot{J} = \bar{C}\, k\, e^{k\,t}$$

(Die Integrationskonstante nennen wir $\bar{C}$, da C die Kapazität ist). Eingesetzt in die Dgl:

$$R\,C\,\bar{C}\,k\,e^{k\,t} + \bar{C}\,e^{k\,t} = 0$$

Es bleibt nach Kürzen die charakteristische Gleichung für k:

$$R\,C\,k + 1 = 0$$

Aus ihr folgt

$$k = -\frac{1}{R\,C}$$

Hiermit lautet die allgemeine Lösung der Dgl:

$$J = \bar{C}\, e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

Wir müssen jetzt die Integrationskonstante $\bar{C}$ bestimmen. Dazu brauchen wir die Anfangswerte für unser Problem. Im Augenblick des Einschaltens des Schalters S hat die Spannung am Kondensator den Wert $U_c = U_o$ (Siehe Aufgabenstellung). Diese Spannung U_o bewirkt im ersten Augenblick einen Anfangsstrom

$$J = J_o = \frac{U_o}{R} \quad \text{zur Zeit } t = 0$$

Setzen wir diese Anfangswerte in die allgemeine Lösung der Dgl ein, dann ergibt sich

$$J_o = \bar{C}\, e^{-\frac{0}{R\,C}} = \bar{C} = \frac{U_o}{R}$$

Die partikuläre Lösung der Dgl ist hiermit

$$J = \frac{U_o}{R}\, e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

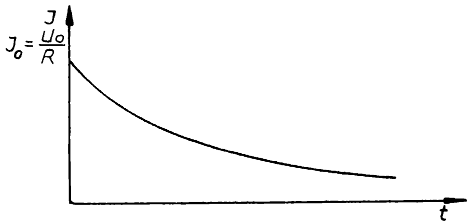


Bild 27

Der Kurvenverlauf dieser Funktion ist in Bild 27 gezeigt. Übrigens können Sie selber nachrechnen, daß die Spannung U_c am Kondensator ebenfalls nach einer e-Funktion abnimmt:

$$U_c = U_o\, e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

Mit dieser Gleichung können Sie für den Strom J auch schreiben:

$$J = \frac{U_c}{R}$$

Dann hat das Ergebnis die durch das ohmsche Gesetz gegebene Form.

2. Stab gleicher Zugfestigkeit

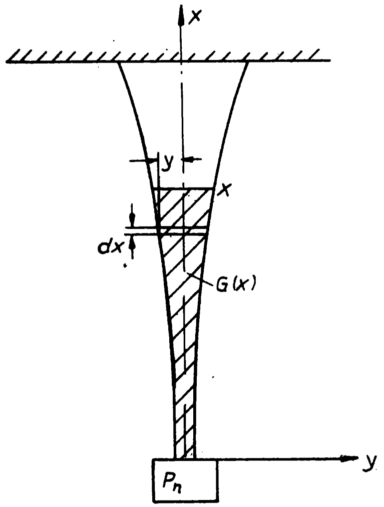


Bild 28

Dieses Beispiel ist aus der Festigkeitslehre und behandelt folgendes Problem: An einem sehr langen Stab, welcher senkrecht nach unten aufgehängt ist, hängt am unteren Ende eine Nutzlast P_n. Ein beliebiger Querschnitt des Stabes wird durch die Nutzlast und durch das Eigengewicht des Stabes an dieser Stelle belastet. Wie muß der Verlauf des Querschnittes in Abhängigkeit von der Stablänge x aussehen, damit in jedem Querschnitt dieselbe Zugspannung $\sigma_{zul.}$ auftritt? Der Stab habe Kreisquerschnitt. Wir berechnen den Radius y des Querschnittes in Abhängigkeit von x. Bild 28 zeigt den Stab und die Lage des Koordinatensystems.

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \quad \text{oder } P = \sigma_z F$$

An der Stelle x ist die Gesamtlast $P = P_n + G(x)$

G (x) sei das Gewicht des Stabes bis zur Stelle x. Es berechnet sich so: Wir denken uns den Stab in lauter kleine Scheiben der Dicke dx zerlegt. Der Durchmesser einer solcher Scheibe ist 2 y. Das Gewicht eines Scheibchens ist

$$d\,G\,(x) = \pi\, y^2\, dx \cdot \gamma \quad (\gamma = \text{spez. Gewicht des Stabes})$$

Dann ist das Gewicht des Stabes bis zur Stelle x gleich der Summe aller dG (x) bis zur Stelle x:

$$G\,(x) = \int_0^x \pi\, y^2 \gamma\, dx\ .$$

Weiter ist der Querschnitt F (x) an der Stelle x

$$F\,(x) = \pi\, y^2$$

Die Formulierung unseres Problems sieht dann so aus:

$$\frac{P}{F} = \frac{P_n + G\,(x)}{F\,(x)} = \sigma_{zul}$$

und hier eingesetzt:

$$\frac{P_n + \pi\gamma \cdot \int_0^x y^2\, dx}{\pi\, y^2} = \sigma_{zul}$$

Hieraus folgt

$$\pi y^2\ \sigma_{zul} = P_n + \pi\gamma \int_0^x y^2\, dx$$

Gesucht war y = f (x). Wir haben hier eine Bestimmungsgleichung für y. Doch ist dies keine Differentialgleichung, da y nicht mit seiner Ableitung vorkommt. Da y unter einem Integral vorkommt, nennt man eine solche Gleichung eine "Integralgleichung". Sie ist in unserem Falle recht einfach, wir können sie durch Differentiation sofort in eine Dgl überführen. Es gibt allerdings auch

Integralgleichungen, bei denen das nicht möglich ist. Sie sind wesentlich schwieriger und erfordern ein Gebiet für sich.
Wir differenzieren also unsere Integralgleichung und erhalten

$$2\, y\, y' \pi\, \sigma_{zul} = \pi \cdot \gamma \cdot y^2$$

y ist der Radius des Stabquerschnittes. Er ist überall $\neq 0$. Wir dürfen deshalb durch y dividieren. Außerdem fällt noch π fort. Wir erhalten:

$$2\, \sigma_{zul}\, y' = \gamma\, y \quad \text{oder} \quad 2\, \sigma_{zul}\, y' - \gamma\, y = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen sie mit dem e-Ansatz:

$$y = C\, e^{k\,x} \quad \text{und} \quad y' = C\, k\, e^{k\,x}$$

Die charakteristische Gleichung wird

$$2\, \sigma_{zul}\, k - \gamma = 0$$

und

$$k = \frac{\gamma}{2\, \sigma_{zul}}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl ist

$$y = C\, e^{\frac{\gamma}{2\, \sigma_{zul}}\, x}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C brauchen wir Anfangsbedingungen:
An der Stelle $x = 0$, also dort, wo die Nutzlast hängt, ist

der Stab durch sein Eigengewicht noch nicht belastet. Die ganze Spannung im Stab entsteht nur durch die Wirkung von P_n. Der Querschnitt F_o muß an dieser Stelle so beschaffen sein, daß

$$\frac{P_n}{F_o} = \sigma_{zul} \quad \text{ist.}$$

F_o enthält den Anfangswert y_o. Es ist $F_o = \pi y_o^2$. Für y_o erhält man

$$y_o = \pm \sqrt{\frac{P_n}{\pi \sigma_{zul}}}$$

An der Stelle x = 0 muß $y = y_o$ sein. Aus der allgemeinen Lösung der Dgl folgt für x = 0

$$y_o = C\, e^{\frac{\gamma}{2\,\sigma_{zul}} 0} = C$$

Die Integrationskonstante C ist also gleich y_o. Das partikuläre Integral der Dgl lautet demnach:

$$y = \pm \sqrt{\frac{P_n}{\pi \sigma_{zul}}}\; e^{\frac{\gamma}{2\,\sigma_{zul}} x}$$

Ihren Verlauf zeigt Bild 28. Das doppelte Vorzeichen bedeutet, daß es zwei Kurven gibt, die den Rand des Stabes angeben. Aus dieser Gleichung könnte man Punkt für Punkt den erforderlichen Durchmesser des Stabes berechnen. Die Herstellung eines Stabes mit einem solchen stetig veränderlichen Querschnitt wäre außerordentlich teurer. Deshalb sieht man von der praktischen Verwirklichung solcher Körperformen ab. Sie haben sich nur bei Stäben, die auf

Biegung belastet werden, durchgesetzt. Dort ist der Verlauf der Rechnung vollkommen anders und wird dort meistens unter Vernachlässigung des Eigengewichtes durchgeführt.

Aufgaben:

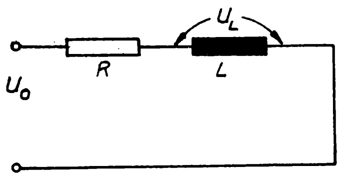


Bild 29

1) Ein ohmscher Widerstand R ist in Reihe geschaltet mit einer Drossel der Induktivität L. (Bild 29). Es wird eine Gleichspnnung angelegt. Gesucht ist der Verlauf des Spannungsabfalles an der Drossel kurz nach dem Einschalten der Gleichspannung.

2) Warum ist der e-Ansatz für lineare homogene Dgl 1. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten nicht brauchbar?

3) Die Dgl $2\,y' + y = 1$ ist inhomogen. Man kann den e-Ansatz unmittelbar nicht anwenden. Rechnen Sie nach, warum das nicht geht. Mit Hilfe einer einfachen Substitution kann der e-Ansatz jedoch verwendet werden. Schreiben Sie die Dgl in der Form $2\,y' + y - 1 = 0$. Wie kann man die Dgl mit Hilfe des e-Ansatzes lösen?

2.223. Lösung durch sukzessive Approximation

Dieses Verfahren der sukzessiven Approximation - zu deutsch der schrittweisen Näherung ist nicht auf Dgl 1. Ordnung beschränkt, sondern kann theoretisch bei fast allen Dgln angewandt werden. Wir wollen es hier schon grundsätzlich erläutern. Es soll an einem Beispiel geschehen.
Gegeben sei die Dgl $y' = y$. Als Anfangswert sei gegeben

$y = 0{,}5$ für $x = 0$.
Aus der gegebenen Dgl folgt

$$y = \int_0^x y \, dx + C$$

Die Integrationskonstante C errechnet sich aus $y = 0{,}5$ für $x = 0$. Für $x = 0$ wird das Integral auch Null, da dann obere und untere Grenze gleich sind.

$$0{,}5 = 0 + C \longrightarrow C = 0{,}5$$

Es ist also

$$y = \int_0^x y \, dx + 0{,}5 \qquad (2.6)$$

Jetzt geben wir in die Dgl irgendeine Funktion hinein. Diese Funktion kann z.B. eine irgendwie gefundene Näherungslösung der Dgl sein. Wir können auch die Funktion $y_0 = 0{,}5$ - das ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 0,5 - einsetzen. Sie erfüllt den Anfangswert der Dgl. Es ist wesentlich, daß nur Funktionen eingesetzt werden, welche durch den Anfangswert der Dgl gehen. Nun wird eine neue Funktion y_1 ausgerechnet nach der Gleichung (2.6)

$$y_1 = 0{,}5 + \int_0^x y_0 \, dx = 0{,}5 + \int_0^x 0{,}5 \, dx$$

$$y_1 = 0{,}5 + 0{,}5\,x$$

Als nächste Funktion errechnen wir

$$y_2 = 0{,}5 + \int_0^x y_1 \, dx = 0{,}5 + 0{,}5\,x + \frac{0{,}5}{2}\,x^2$$

Sie sehen schon, wie das Verfahren läuft. Es läßt sich mit der Arbeitsweise eines Tischlers vergleichen, der ein Brett hobelt. Er gibt es in die Maschine, es geht durch und kommt mit einer Stärke heraus, die schon näher an der gewünschten Stärke liegt. Danach geht es wieder durch die Maschine, wobei es sich immer mehr dem gewünschten "Grenzwert" nähert, bis es ihn schließlich erreicht. Genauso verfahren wir.
Als erstes "grobes Brett" geben wir eine von der Lösung im allgemeinen noch weit abseits liegende Funktion in die Gleichung. Heraus kommt dann eine schon etwas bessere Funktion, die wir wieder hineingeben und so fort. Im Grenzwert ergibt sich dann die gesuchte Funktion.
Die 3. Näherung wird

$$y_3 = 0{,}5 + \int_0^x y_2 \, dx = 0{,}5 + 0{,}5\ x + \frac{0{,}5}{2}\ x^2 + \frac{0{,}5}{2 \cdot 3}\ x^3$$

Die 4. Näherung:

$$y_4 = 0{,}5 + \int_0^x y_3 \, dx = 0{,}5 + 0{,}5\ x + \frac{0{,}5}{2!}\ x^2 + \frac{0{,}5}{3!}\ x^3 + \frac{0{,}5}{4!}\ x^4$$

Die n-te Näherung wird offenbar

$$y_n = 0{,}5 + \int_0^x y_{n-1} \, dx = 0{,}5 + 0{,}5\ x + \frac{0{,}5}{2!}\ x^2 + \ldots + \frac{0{,}5}{n\ !}\ x^n$$

$$= 0{,}5 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\ x^\nu$$

Im Grenzwert erhalten Sie für $n \longrightarrow \infty$

$$y = 0{,}5 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\ x^\nu \qquad (2.7)$$

Die in der Summe stehende Reihe ist die Reihenentwicklung für e^x. Aus der Lösung (2.7) wird

$$y = 0{,}5\ e^x$$

Sie können die Richtigkeit des Ergebnisses leicht entweder durch Trennung der Veränderlichen oder durch e-Ansatz nachprüfen. Das Ergebnis enthält keine Integrationskonstante mehr. Wir haben schon durch das Verfahren die partikuläre Lösung erhalten.
An der Lösung in der Form (2.7) können wir leicht verfolgen, wie das Ergebnis durch die schrittweise Näherung zustande kommt. Zwei benachbarte Glieder in der e-Reihe sind um so weniger unterschieden, je weiter hinten sie in der Reihe stehen. Das ist auch bei jedem anderen Beispiel einer sukzessiven Approximation so. Je mehr Näherungen wir berechnen, um so kleiner werden die Unterschiede der folgenden zur vorherigen Näherung. Oft kann man das Verfahren schon nach wenigen Schritten abbrechen, da die folgenden Schritte nur noch sehr kleine Beträge bringen, die unterhalb der geforderten Genauigkeit liegen. Natürlich hat man dann nur eine Näherungslösung der Dgl.
Bild 3o zeigt für unser Beispiel, wie die einzelnen Näherungen sich immer mehr der genauen Lösung nähern.

Es soll noch ein zweites Beispiel gezeigt werden. Gegeben sei die nichtlineare Dgl

$$y' - y^2 = 1 \quad \text{Anfangswerte: } y = 0 \text{ für } x = 0$$

Wir schreiben sie in der Form

$$y' = 1 + y^2 \text{ oder integriert } y = \int_0^x (1 + y^2)\, dx + y_0$$

y_0 bezeichnet die Integrationskonstante. Für $x = 0$ soll $y = 0$ sein. Für $x = 0$ ist das Integral in der letzten Gleichung Null. Daraus folgt, daß auch $y_0 = 0$ sein muß. Wir haben jetzt die Anfangswerte der Dgl schon berücksichtigt und gehen bei der Sukzessiven Approximation von

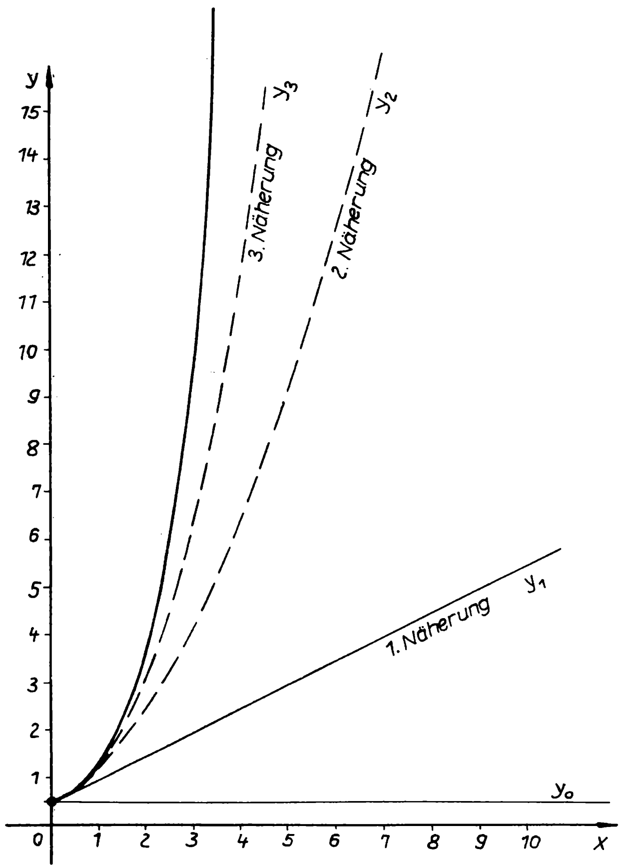

y
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
3. Näherung
y_3
2. Näherung
y_2
1. Näherung
y_1
y_0

Bild 3o

der Gleichung

$$y = \int_0^x (1 + y^2)\, dx$$

aus.
Aus dieser Gleichung errechnet sich die n-te Näherung zu

$$y_n = \int (1 + y_{n-1}^2)\, dx$$

Die erste Näherung y_1 berechnen wir, indem wir für $y_0 = 0$, den Anfangswert der Dgl einsetzen.
Dann ist

$$y_1 = \int_0^x dx = x$$

2. Näherung:

$$y_2 = \int_0^x (1 + y_1^2)\, dx = \int_0^x (1 + x^2)\, dx = x + \frac{x^3}{3}$$

3. Näherung:

$$y_3 = \int_0^x (1 + y_2^2)\, dx = \int_0^x (1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4 + \frac{1}{9} x^6)\, dx$$

$$= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{1}{63} x^7$$

4. Näherung:

$$y_4 = \int_0^x (1 + y_3^2)\, dx = x + 0{,}33\, x^3 + 0{,}133\, x^5 + 0{,}054\, x^7 +$$

$$0{,}0134\, x^9 + 0{,}00258\, x^{11} + 0{,}000326\, x^{13} + 0{,}0000168\, x^{15}$$

An diesem Beispiel sehen Sie, daß die Koeffizienten schon nach der 4. Näherung recht klein sind.
Die Dgl unseres Beispiels läßt sich durch Trennung der Veränderlichen exakt lösen. Es ist

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx \text{ und nach Integration: } \arctan y = x + C$$

$$y = \tan (x + C)$$

Für $x = 0$ soll $y = 0$ sein. Daraus folgt $C = 0$.

$$y = \tan x$$

ist die partikuläre Lösung unserer Dgl. Wir wollen den Funktionswert der exakten Lösung $y = \tan x$ mit der Näherungslösung y_4 vergleichen, indem wir beispielsweise $x = 1$ einsetzen.

Für y_4 erhalten Sie $y_4 = 1,53699$

Nach Tabelle ist $\tan 1 = \underline{1,55741}$

als Differenz ergibt sich = 0,02042. Dies ist der absolute Fehler. Der relative Fehler ist

$$f = \frac{0,02042}{1,55741} = 0,0131 \text{ oder } 1,31\ \%$$

Für technische Rechnungen ist dieser Fehler meistens tragbar.
Natürlich ist es nicht immer so, daß sich nach so wenigen Schritten schon derartig genaue Werte einstellen. Man muß dann weitere Näherungen berechnen. Die schlechte Konvergenz einer Approximation erkennt man daran, daß die sich in der Reihe ergebenden Koeffizienten nur sehr langsam kleiner

werden.
Es ist noch etwas zu den Grenzen des Integrals zu sagen, welches in den einzelnen Schritten vorkommt. Wir hatten in beiden Beispielen von o bis x integriert. Das lag daran, daß die Anfangswerte der Dgl für x = 0 vorgeschrieben waren. Sind ganz allgemein die Anfangswerte an der Stelle x = a vorgegeben, dann wird die untere Grenze des Integrals ebenfalls gleich a. Wir werden auf das Verfahren der schrittweisen Annäherung noch einmal bei Dgln höherer Ordnung zurückkommen.

Aufgabe:
Berechnen Sie nach der Methode der schrittweisen Näherung die partikuläre Lösung der Dgl

$$y' - x\,y^2 = 0$$

mit den Anfangswerten y = 1 für x = 0.
Das Verfahren ist bis zur zweiten Näherung durchzuführen.

2.23. Die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

2.231. Lösung durch Substitution

Wir beginnen mit einem Beispiel: Ein Kondensator mit der Kapazität C ist in Reihe mit einem ohmschen Widerstand R geschaltet (Bild 31). Nach Anlegen einer Gleichspannung U_0 lädt sich der Kondensator über den Widerstand auf. Dadurch steigt der über dem Kondensator liegende Spannungsabfall U_c als Funktion der Zeit.

Es gilt $U_0 = U_R + U_c$; $U_R = I\,R$; $U_c = \frac{Q}{C}$; $\dot{U}_c = \frac{\dot{Q}}{C} = \frac{J}{C}$

Aus der letzten Formel ergibt sich $J = C\,\dot{U}_c$ und hiermit

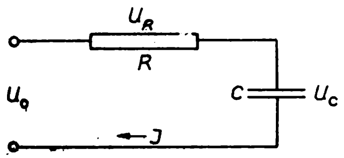


Bild 31

wird

$$U_R = J\ R = R\ C\ \dot{U}_c.$$

Aus der ersten Formel ergibt sich mit dem letzten Ergebnis:

$$R\ C\ \dot{U}_c + U_c = U_o$$

R C hat die Dimension einer Zeit, (sec). R C $\dot{U}_c$ muß nämlich die Dimension einer Spannung haben, da es zu einer Spannung U_c addiert wird. $\dot{U}_c$ hat aber die Dimension (Volt/sec) deshalb muß R C (sec) sein. Wir kürzen R C durch den Buchstaben T ab und nennen T die Zeitkonstante der Aufladung.

$$T = R\ C$$

Hiermit ergibt sich eine "gewöhnliche, lineare, inhomogene Dgl erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten":

$$T\ \dot{U}_c + U_c = U_o$$

T und U_o sind hierin konstante Zahlen. Solche inhomogenen Dgln lassen sich z.B. durch den e-Ansatz unmittelbar nicht lösen. Ist aber die Störfunktion (in unserem Falle U_o) konstant, dann lassen sich solche Dgln durch eine einfache Substitution homogen machen.

Daß sich der e-Ansatz nicht unmittelbar anwenden läßt, sehen Sie, wenn Sie mit dem Ansatz

$$U_c = C_1\ e^{kt}; \quad C_1 = \text{Integrationskonstante}$$

in die Dgl hineingehen. Die charakteristische Gleichung läßt sich nicht bilden, da auf der rechten Seite der entstehenden Gleichung U_0 steht und C_1 und die e-Funktion nicht herausfallen.
In unserem Falle machen wir nun die Substitution

$$U_c - U_0 = y$$

Dann ist

$$\dot{U}_c = \dot{y}$$

und die Dgl geht in die homogene Dgl

$$T \dot{y} + y = 0$$

über.
Wir lösen sie durch den e-Ansatz $y = c_2 e^{kt}$
(C_2 ist hierin die Integrationskonstante, nicht zu verwechseln mit C der Kapazität)
Die charakteristische Gleichung lautet

$$T k + 1 = 0$$

und hieraus

$$k = - \frac{1}{T}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl lautet

$$y = C_2 e^{- \frac{t}{T}}$$

Indem wir die Substitution wieder rückgängig machen, erhalten wir auch die Lösung der inhomogenen Dgl

$$U_c = U_o + C_2\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Es bleibt noch die Bestimmung der Integrationskonstanten. Die im Augenblick des Einschaltens der Spannung U_o auf dem Kondensator vorhandene Spannung sei Null. Dann gilt die Anfangsbedingung

$$U_c = 0 \text{ für } t = 0$$

Aus der allgemeinen Lösung der Dgl erhält man

$$0 = U_o + C_2; \text{ also } C_2 = - U_o$$

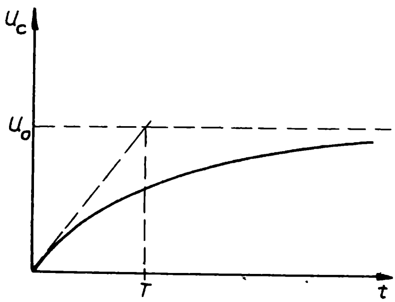


Bild 32

Man erhält als partikuläre Lösung der Dgl

$$U_c = U_o\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Der Verlauf der Spannung als Funktion der Zeit ist in Bild 32 gezeigt.
In der Theorie der Regelung werden Sie diese Funktion als Übergangsfunktion eines Einspeichersystems kennenlernen.
Wir vermerken noch, daß die Zeitkonstante T sich als der Abschnitt erweist, welchen die Anfangstangente an der Funktion U_c auf der Geraden U_o liefert. Sie wollen dies selbst nachrechnen.
Wir wollen unsere Rechnung jetzt allgemein formulieren.

Gegeben sie die Dgl

$$a_1 (x) y' + a_o y = a$$

a_1 (x) kann eine beliebige Funktion von x sein, während a_o und a konstante Zahlen sein sollen.
Durch die Substitution

$$a_o y - a = z$$

wird aus der Dgl mit

$$a_o y' = z' \text{ oder } y' = \frac{z'}{a_o}$$

$$\frac{a_1 (x)}{a_o} z' + z = 0$$

Diese Dgl ist homogen und kann durch Trennung der Veränderlichen oder wenn a_1 = const mit dem e-Ansatz gelöst werden.
Sie können das Ergebnis der Trennung der Veränderlichen selbst nachrechnen. Es lautet

$$z = C e^{-\int \frac{a_o}{a_1 (x)} dx} = a_o y - a$$

Hieraus erhalten Sie y = f (x).

<u>Aufgaben:</u>

1) In 2.222 war in der ersten Aufgabe der Verlauf der Spannung über der Induktivität L der Schaltung nach Bild 29 zu berechnen. Berechnen Sie für die gleiche Schaltung zu den gleichen Bedingungen den Verlauf des Spannungsabfalles über dem ohmschen Widerstand R.

2) Zu berechnen ist die allgemeine Lösung der Dgl

$$y' \sin x - y = 5$$

2.232. Die Variation der Konstanten

Im vorigen Kapitel hatten wir lineare inhomogene Dgln 1. Ordnung betrachtet, bei denen die Störfunktion konstant war. Von dieser Voraussetzung wollen wir uns jetzt lösen und wollen sehen, wie man das allgemeine Integral der Dgl

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = f(x)$$

erhalten kann. $a_0(x)$, $a_1(x)$, $f(x)$ sind dabei beliebige stetige Funktionen von x. Wir können die Dgl durch $a_0(x)$ dividieren. Schreiben wir für

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = p(x); \quad \frac{f(x)}{a_0(x)} = q(x),$$

dann lautet unsere Dgl

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{2.8}$$

Das Lösungsverfahren, welches wir jetzt besprechen wollen, stammt von Lagrange. Nach ihm löse man zuerst die homogene Dgl

$$y' + p(x)\, y = 0$$

Die Lösung ergibt sich durch Trennung der Veränderlichen:

$$y = C\, e^{-\int p(x)\, dx} \tag{2.9}$$

Das ist die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. Sie enthält die noch frei wählbare Integrationskonstante C.
Der wesentliche Gedanke von Lagrange besteht nun darin, diese Konstante C durch eine Funktion zu ersetzen und zu versuchen, diese Funktion so zu bestimmen, daß (2.9) eine Lösung der gegebenen inhomogenen Dgl (2.8) wird. Sie dürfen für diese Methode nicht nach einer logischen Begründung suchen. Es gibt keinen logischen Weg, der auf diesen Gedanken führt. Lagrange ist sicher erst auf ihn gekommen, nachdem er sich lange mit Dgln beschäftigt hat. Er hat diese Möglichkeit sicherlich mehr "gefühlsmäßig" gefunden.

Anstelle von C setzen wir also C (x) und erhalten aus (2.9)

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} \qquad (2.1o)$$

Zur Bestimmung der Funktion C (x) setzen wir in (2.8) ein. Dazu brauchen wir auch y': Es ergibt sich aus der Produktenregel.

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

Diese Gleichung und (2.1o) setzen wir in (2.8) ein und erhalten:

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)dx} + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

In dieser Gleichung fallen der zweite und dritte Summand heraus und es bleibt

$$c'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = q(x)$$

oder

$$C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}$$

Durch Integration ergibt sich hieraus C (x)

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\, dx}\, dx + c$$

c ist die sich bei der zweiten Integration ergebende Integrationskonstante.
Wir setzen nun dieses Ergebnis in (2.1o) ein und erhalten die allg. Lösung der inhomogenen Dgl (2.8):

$$y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + c \right) e^{-\int p(x)\, dx} \qquad (2.11)$$

Die partikuläre Lösung findet man wie früher durch Berücksichtigung der Anfangswerte.

Als Beispiel wollen wir die allgemeine Lösung der Dgl

$$x\, y' - y = x^3$$

berechnen. Zunächst wird die homogene Dgl

$$x\, y' - y = 0$$

gelöst. Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

und nach Integration:

$$\ln y = \ln x + \ln C = \ln (C\, x)$$

(Die Integrationskonstante haben wir in der Form "ln C" geschrieben. Das ist selbstverständlich möglich. Denken

Sie zunächst c als Integrationskonstante geschrieben, dann kann man mit $c = \ln C$ eine neue Konstante C berechnen, die genauso willkürlich ist, wie die Konstante c.) Es ist nun

$$y = C x$$

Jetzt wird C durch eine Funktion von x ersetzt:

$$y = C(x)\, x;$$

hieraus

$$y' = C'(x)\, x + C(x)$$

Beide Gleichungen setzen wir in die inhomogene Dgl ein:

$$x\, C'(x)\, x + x\, C(x) - C(x)\, x = x^3$$

Nach Streichen des 2. und 3. Summanden bleibt

$$C'(x) = x$$

Die Integration ergibt

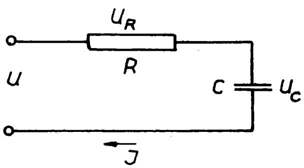
$$C(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

c ist die Integrationskonstante des letzten Integrals. Mit $y = C(x)\, x$ wird die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right) x = \frac{x^3}{2} + c\, x$$

Als nächstes Beispiel behandeln wir eine Reihenschaltung von ohmschen Widerstand R und Kapazität C. Angelegt werde eine Wechselspannung. Gesucht ist der Spannungsverlauf am

Kondensator (Bild 33).



Dieses Beispiel ist für Gleichspannung schon in 2.231 behandelt worden. Wir können die dortigen Formeln weitgehend übernehmen. Es gilt

Bild 33

$$u = u_R + u_C; \quad u_R = R\,C\,\dot{u}_C; \quad R\,C = T$$

$$T\,\dot{u}_C + u_C = u$$

Das ist auch hier die für die Schaltung geltende Dgl. Bei ihrer Aufstellung wurden stets die Augenblickswerte von Strom und Spannung benutzt. Sie gelten für Gleich- und Wechselspannung.
Die anliegende Spannung u ist eine Wechselspannung:

$$u = U_0 \sin \omega\, t$$

Damit wird die Dgl

$$T\,\dot{u}_C + u_C = U_0 \sin \omega\, t$$

Zunächst lösen wir die homogene Dgl

$$T\,\dot{u}_C + u_C = 0$$

Durch Trennung der Veränderlichen oder durch e-Ansatz ergibt sich

$$u_c = C\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Beachten Sie, daß C die Integrationskonstante und nicht die Kapazität ist. Wir brauchen für sie keine andere Bezeichnung einzuführen, da in unseren Rechnungen augenblicklich die Bezeichnung C als Kapazität nicht vorkommt.

C wird nun durch eine Funktion der Zeit ersetzt: $C = C(t)$

$$u_c = C(t)\,e^{-\frac{t}{T}} \;;\; \dot{u}_c = \dot{C}(t)\,e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T}\,C(t)\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Dgl erhalten wir:

$$T\,\dot{C}(t)\,e^{-\frac{t}{T}} - C(t)\,e^{-\frac{t}{T}} \cdot + C(t)\,e^{-\frac{t}{T}} = U_o \sin\omega\, t$$

Es bleibt

$$\dot{C}(t) = \frac{1}{T}\,U_o\,e^{+\frac{t}{T}}\,\sin\omega\, t$$

Diese Funktion muß integriert werden. Aus einer Integraltafel entnehmen wir

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}\,e^{ax} + C$$

Danach ergibt sich für

$$C(t) = \frac{U_o}{T}\left(\frac{\frac{1}{T}\sin\omega\, t - \omega\cos\omega\, t}{\frac{1}{T^2} + \omega^2}\,e^{\frac{t}{T}} + c\right)$$

Dieses C setzen wir in die Lösung der homogenen Dgl ein und erhalten das allgemeine Integral der inhomogenen Dgl:

$$u_c = \frac{U_o}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left[\frac{\frac{1}{T} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} e^{\frac{t}{T}} + c \right] \tag{2.12}$$

Wir wollen etwas vereinfachen, indem wir versuchen, aus der Summe der sin- und cos-Funktion ein Additionstheorem zu gewinnen. Um das zu erreichen, gibt es einen oft angewendeten Kunstgriff: Wir bestimmen zwei neue Zahlen A und φ aus den beiden Gleichungen

$$A \cos \varphi = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad A \sin \varphi = \omega$$

Bedenken Sie hierbei, daß T und ω als bekannte Zahlen anzusehen sind, da von der Schaltung R, C und die Kreisfrequenz der Wechselspannung ω bekannt sind. Die Zahlen A und φ lassen sich also bestimmen:

$$A^2 = \frac{1}{T^2} + \omega^2; \quad \tan \varphi = \omega T = \omega \cdot R\, C$$

Der in (2.12) auftretende Bruch wird nun

$$\frac{A \cos \varphi \sin \omega t - A \sin \varphi \cos \omega t}{A^2} = \frac{1}{A} \sin (\omega t - \varphi)$$

und aus (2.12) wird

$$u_c = \frac{U_o}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{A} \sin (\omega t - \varphi) e^{\frac{t}{T}} + c\right);$$

$$= \frac{U_o}{T\,A} \sin(\omega t - \varphi) + c\,\frac{U_o}{T}\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Nun ist $T\,A = \sqrt{1 + T^2\omega^2}$ und damit wird

$$u_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + T^2\,\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + c\,\frac{U_o}{T}\,e^{-\frac{t}{T}}$$

Das ist die allgemeine Lösung unserer inhomogenen Dgl. Jetzt muß die Integrationskonstante bestimmt werden. Dazu gelten folgende Anfangswerte: Zur Zeit $t = 0$, d.h. im Augenblick des Einschaltens der Spannung ist die Spannung am Kondensator ebenfalls noch Null, da der Kondensator noch keine Ladung haben kann, vorausgesetzt, daß er vor dem Einschalten entladen war.
Es gilt also

$$u_c = 0 \text{ für } t = 0$$

Für diese Anfangswerte folgt aus der allgemeinen Lösung der Dgl:

$$0 = \frac{U_o}{\sqrt{1 + T^2\,\omega^2}} \sin(-\varphi) + c\,\frac{U_o}{T}$$

Wegen $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ist, wenn nach c aufgelöst wird:

$$c = \frac{T\sin\varphi}{\sqrt{1 + T^2\,\omega^2}} = \frac{T\,\omega}{A\sqrt{1 + T^2\,\omega^2}} \quad \left(\text{denn } \sin\varphi = \frac{\omega}{A}\right)$$

Setzt man hier A ein, dann ergibt sich schließlich

$$c = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)}$$

Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$u_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{U_o \omega}{T\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)} e^{-\frac{t}{T}}$$

oder

$$u_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{U_o}{\left(\frac{1}{\omega T} + \omega T\right)} e^{-\frac{t}{T}}$$

Diese Lösung der Dgl besteht aus zwei Summanden, deren erster eine reine Sinusschwingung und deren zweiter eine Abklingfunktion darstellt. Betrachten wir zunächst den zweiten Summanden

$$\frac{U_o}{\left(\frac{1}{\omega T} + \omega T\right)} e^{-\frac{t}{T}}$$

Für $t \rightarrow \infty$ geht die e-Funktion $e^{-\frac{t}{T}}$ gegen Null.
Der zweite Summand wird also mit der Zeit immer kleiner, bis er schließlich nicht mehr merkbar ist. Danach ist nur noch der erste Summand

$$u_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \qquad (2.13)$$

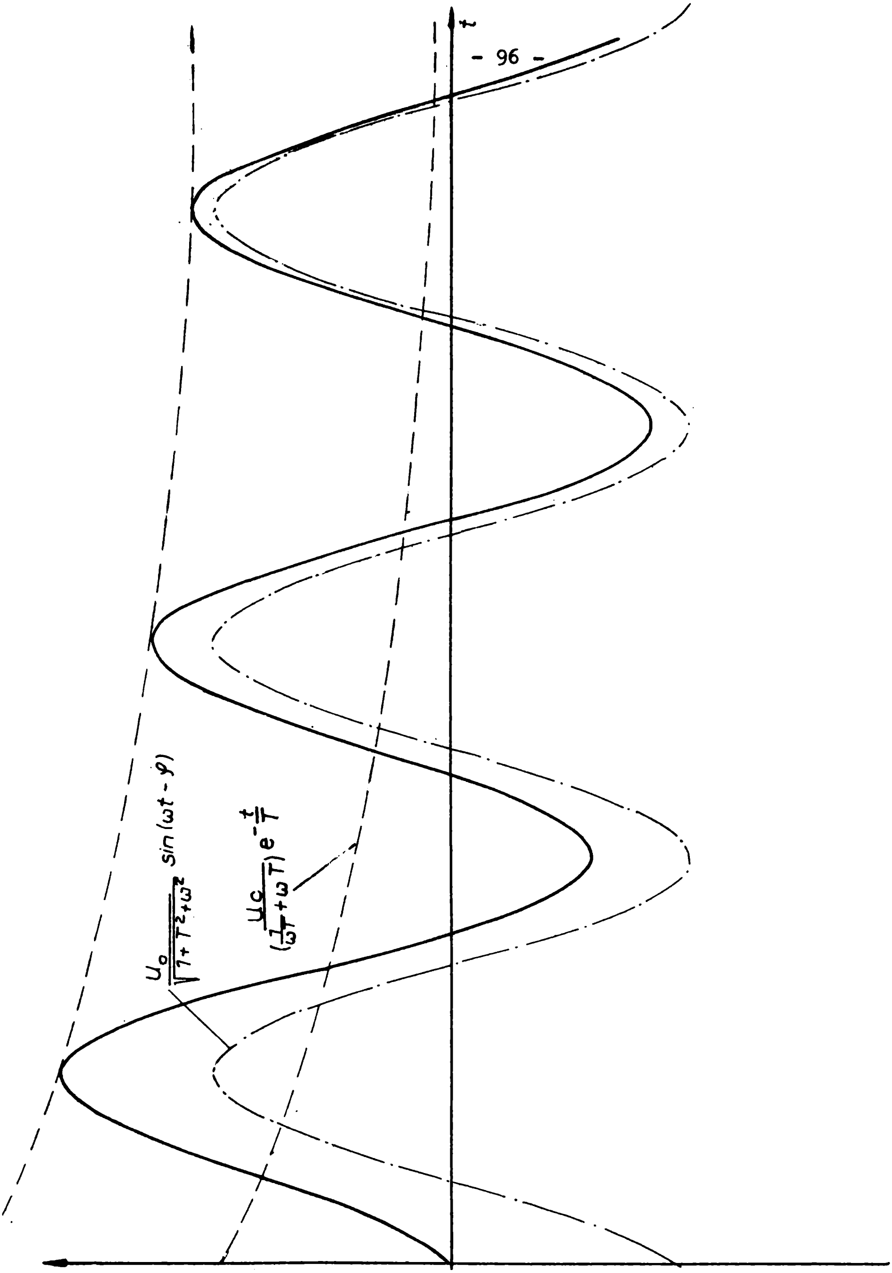

t
$\frac{U_o}{\sqrt{1+T^2+\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi)$
$\frac{U_c}{(\frac{1}{\omega T}+\omega T)} e^{-\frac{t}{T}}$

Bild 34

Das ist der Verlauf der Spannung über dem Kondensator, wie er sich schließlich einstellt.
Bild 34 zeigt beide Kurven. Im ersten Augenblick nach dem Einschalten ist die sich ergebende resultierende Kurve eine Schwingung, die nicht symmetrisch zur t-Achse liegt. Die Schwingung erfolgt während des Einschwingvorganges um die abklingende e-Funktion als Achse.
Für den Elektrotechniker ist meistens nur der Verlauf der Spannung im eingeschwungenen Zustand interessant. Dieser Spannungsverlauf ist durch (2.13) gegeben. Wir wollen dort noch T = R C einsetzen. Dann erhalten wir

$$u_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \varphi) \qquad (2.14)$$

Sie können dieses Ergebnis leicht durch das Zeigerdiagramm oder durch komplexe Rechnung wie in 1.74 nachprüfen. Bei einer solchen Berechnung des Ergebnisses erhalten Sie nicht den Einschwingvorgang. Die Abklingfunktion wird durch Zeigerdiagramme nicht erfaßt. Um sie zu erhalten, mußte die Dgl gelöst werden. Einen anderen Weg gibt es nicht.
Die Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms nach Bild 35 würde ergeben

$$u_{c_{eff}} = \frac{U_{o_{eff}}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$ als Beziehung zwischen den Effektivwerten.

Dies ist auch unser Ergebnis. Der Maximalwert von U_c wird nämlich durch den Koeffizienten der sin-Funktion geliefert und die Effektivwerte ergeben sich, indem man beidseitig durch $\sqrt{2}$ dividiert.
Weiterhin erhält man aus dem Vektordiagramm als Phasenwinkel zwischen der Kondensatorspannung und der angelegten

Wechselspannung

$$\tan \varphi = \omega R C$$

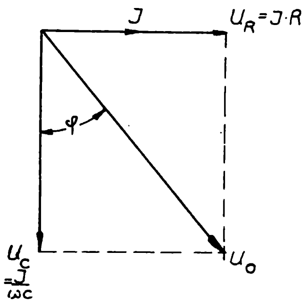


Bild 35

In unserem Ergebnis (2.14) ist die Phasenverschiebung zwischen der Kondensatorspannung u_c und der angelegten Spannung u gegeben durch den Winkel φ im Argument der sin-Funktion.

Für diesen Winkel φ hatten wir auf Seite 93 unten dieselbe Beziehung, wie aus dem Zeigerdiagramm

$$\tan \varphi = \omega R C$$

erhalten.

Bild 36 zeigt noch einmal den Verlauf der Spannung U und den von U_c im eingeschwungenen Zustand.

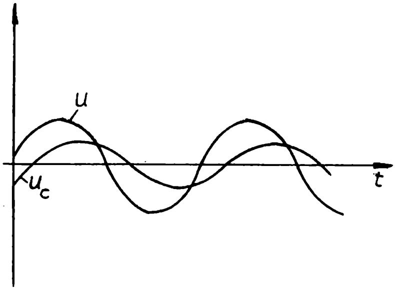


Bild 36

Sie haben an diesem Beispiel erkennen können, daß die Lösung einer Dgl recht viel Aufwand erfordert. Sehr viel Rechnung ergibt sich auch durch die Be-

stimmung der Integrationskonstanten. Es soll Ihnen nun noch gezeigt werden, wie man für solche Probleme mit der komplexen Rechnung sehr viel schneller zum Ziel kommt. Dieses Verfahren liefert allerdings nicht den Einschwingvorgang, sondern gibt das Verhalten der Schaltung nach theoretisch unendlich langer Zeit wieder, nämlich für den Fall, daß die e-Funktion in der partikulären Lösung unserer Dgl abgeklungen ist.
Bei dem komplexen Ansatz nimmt man die Form der Lösung schon voraus. Man weiß aus der Erfahrung, daß die Spannung am Kondensator ebenfalls eine Schwingung ist. Ihre Frequenz stimmt mit der Frequenz der angelegten Spannung U überein. Jedoch ist eine andere Amplitude zu erwarten. Außerdem ist eine Phasenverschiebung zwischen beiden Spannungen zu erwarten.

Die angelegte Spannung war

$$u = U_o \sin \omega t$$

Nach 1.72 ist $U_o \sin \omega t$ der Imaginärteil der komplexen Funktion

$$u = U_o e^{j \omega t}$$

Die zu erwartende Spannung u_c muß die Form

$$u_c = U_c \sin (\omega t + \varphi)$$

haben. Damit setzen wir von der Lösung schon folgendes voraus:

1) u_c ist sinusförmige Wechselspannung
2) die Frequenz ω stimmt mit der Frequenz der angelegten Spannung überein
3) die Spannung u_c hat eine andere Amplitude als die

angelegte Spannung

4) die Spannung u_c hat gegenüber der angelegten Spannung eine Phasenverschiebung

Die Gültigkeit dieser Voraussetzungen wird durch die Erfahrung bestätigt. Der Ansatz $u_c = U_c \sin(\omega t + \varphi)$ ist der Imaginärteil der komplexen Funktion

$$u_c = U_c\, e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{2.16}$$

Die Realteile der Funktion (2.15) und (2.16) ergeben die entsprechenden Cosinusschwingungen.
Wir könnten nun die Funktionen

$$u = U_0 \sin \omega t \text{ und } u_c = U_c \sin(\omega t + \varphi)$$

in die Dgl der Schaltung $T\,\dot{u}_c + u_c = u$ einsetzen und könnten versuchen, Beziehungen für die Amplitude U_c und den Phasenwinkel zu finden, aus denen sich u_c und φ berechnen lassen. Dieser Weg führt zum Ziel. Wir werden ihn in einer Übungsaufgabe zu diesem Kapitel behandeln. Wir können aber auch die komplexen Funktionen (2.15) und (2.16) einsetzen und können versuchen, die entsprechenden Beziehungen zu erhalten.
Aus (2.16) folgt durch Differentiation:

$$\dot{u}_c = U_c\, j\omega\, e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Diese Gleichung setzen wir mit (2.15) und(2.16) in die Dgl $T\,\dot{u}_c + u_c = u$ ein und erhalten

$$T\, U_c\, j\omega\, e^{j(\omega t + \varphi)} + U_c\, e^{j(\omega t + \varphi)} = U_0\, e^{j\omega t}$$

Hierfür schreiben wir

$$T\,U_c\,j\omega\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi} + U_c\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi} = U_o\,e^{j\omega t}$$

Es fällt nun $e^{j\omega t}$ heraus, und es bleibt:

$$T\,U_c\,j\omega\,e^{j\varphi} + U_c\,e^{j\varphi} = U_o$$

In dieser Gleichung ist die Zeit nicht mehr enthalten. Das bedeutet, daß diese Gleichung zu jeder beliebigen Zeit gilt.
Wir dividieren durch die e-Funktion:

$$U_c + j\omega\,T\,U_c = U_o\,e^{-j\varphi} \qquad (2.17)$$

Die hier stehende Gleichung hat die Form

$$a + j\,b = r\,e^{-j\varphi}$$

Wir suchen diese komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene auf. Es wird in Bild 37 gezeigt.
In unserer Gleichung steht rechts die komplexe Zahl in rechtwinkligen Koordinaten und links steht dieselbe komplexe Zahl (zwischen beiden steht das Gleichheitszeichen! in Polarkoordinaten.
Der absolute Betrag von $U_c + j\,\omega\,T\,U_c$ ist

$$U_c\,\sqrt{1 + \omega^2\,T^2}$$

Der absolute Betrag von $U_o\,e^{-j\varphi}$ ist U_o.
Die beiden absoluten Beträge müssen gleich sein. Das bedeutet

$$U_o = U_c \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = U_c \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

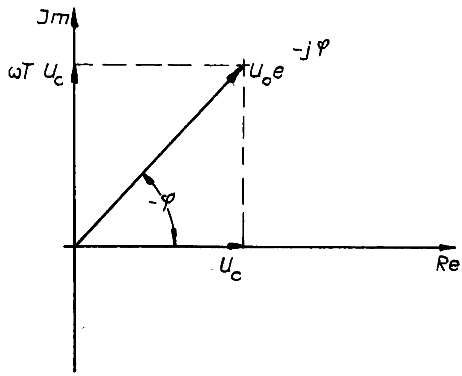


Bild 37

Hieraus ergibt sich

$$U_c = \frac{U_o}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis, wie wir es auch aus der partikulären Lösung der Dgl erhalten hatten.
Aus Bild 37 erhält man auch den Phasenwinkel zwischen U_c und U_o. In (2.17) ist φ im Exponenten von e negativ eingetragen. Nach Bild 37 aber ist dieser Winkel positiv und es ist

$$\tan \varphi = \omega R C$$

Der Winkel $-\varphi$ ist positiv, demzufolge ist φ negativ. Das bedeutet, daß die Spannung u_c der Spannung u nacheilt. Wir können jetzt noch unsere Ergebnisse in (2.16) einsetzen und erhalten

$$u_c = U_c\, e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{U_o}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}\, e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Das ist die komplexe Schreibweise für die am Kondensator liegende Wechselspannung.
Aus dieser Rechnung haben Sie gesehen, daß die komplexe Schreibweise für Schwingungen offenbar recht vorteilhaft ist. Man erhält dann auf einfache Weise die gewünschten Ergebnisse. Allerdings geht der Einschwingvorgang aus dieser Rechnung nicht hervor.

Aufgaben:

1) Für die Schaltung nach Bild 33 ist die Dgl des Stromes in Abhängigkeit von der Zeit t aufzustellen. Angelegt wird wie im Beispiel eine Wechselspannung u. Die Dgl ist durch Variation der Konstanten zu lösen.

2) Gegeben ist noch einmal die Dgl $T\,u_c + u_c = u$ des Beispiels auf Seite 91 . Die angelegte Wechselspannung hat die Form

$$u = U_o \sin \omega t$$

Die Lösung der Dgl hat die Form

$$u_c = U_c \sin (\omega t + \varphi)$$

Setzen Sie beide Gleichungen in die Differentialgleichung ein und versuchen Sie Bedingungen zu finden, welche die Amplitude U_c und den Winkel φ der Spannung u_c berechnen lassen.

Zusammenfassung

Eine gewöhnliche Dgl 1. Ordnung enthält x, y, y'. Faßt man y' als neue Veränderliche auf, die von x und y abhängt, dann wird durch die Dgl jedem Punkt der x-y-Ebene eine Richtung zugeordnet. Man erhält ein sog. Richtungsfeld. Geometrisch kann man die allgemeine Lösung einer Dgl als Kurvenschar deuten, welche in die Dgl paßt.

Eine lineare homogene Dgl mit veränderlichen Koeffizienten hat die allgemeine Form

$$a_1 (x)\, y' + a_o (x)\, y = 0$$

Sie läßt sich durch Trennung der Veränderlichen integrie-

ren:
Dazu forme man die Dgl so um, daß auf der einen Seite nur Ausdrücke mit y, auf der anderen Seite nur solche mit x stehen.
Dann läßt sich die Integration durchführen:

$$\frac{dy}{y} = - \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\, dx; \quad \ln y = - \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\, dx + c$$

$$y = C\, e^{- \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\, dx}$$

Hat die lineare homogene Dgl 1. Ordnung konstante Koeffizienten a_0 und a_1, dann läßt sich die Dgl auch durch den e-Ansatz lösen: Der Ansatz lautet

$$y = C\, e^{k x}$$

Mit ihm erhält man aus der Dgl $a_1\, y' + a_0\, y = 0$ die sog. charakteristische Gleichung:

$$a_1\, k + a_0 = 0$$

und hieraus

$$k = - \frac{a_0}{a_1}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y = C\, e^{- \frac{a_0}{a_1} x}$$

Wird in einer Lösung einer Dgl der Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen ein bestimmter Wert erteilt, dann nennt man diese Lösung der Dgl eine partikuläre Lösung oder ein partikuläres Integral. Eine Lösung mit noch freier Integrationskonstanten heißt allgemeine Lösung oder allgemeines Integral.

Fast alle Dgln lassen sich durch sog. sukzessive Approximation - d.h. schrittweise Annäherung - lösen. Hat man z.B. eine Dgl 1. Ordnung, dann löse man sie nach y' auf.

$$y' = f\,(x,\, y)$$

f(x, y) ist dabei der Ausdruck, welcher sich nach Auflösung der Dgl nach y' ergibt. Er hängt im allgemeinen immer von x und y ab. Durch einmaliges Integrieren erhält man

$$y = \int_a^x f\,(x,\, y)\, dx + C$$

Ist nun für x = a y = y_o als Anfangswert vorgeschrieben, dann folgt

$$y = \int_a^x f\,(x,\, y)\, dx + y_o$$

Jetzt bestimme man eine Funktion y_1 nach der Gleichung

$$y_1 = \int_a^x f\,(x,\, y_o)\, dx + y_o$$

Danach

$$y_2 = \int_a^x f\,(x,\, y_1)\, dx + y_o$$

$$y_3 = \int_a^x f\,(x,\, y_2)\, dx + y_o$$

. . . .

$$y_n = \int_a^x f\,(x,\, y_{n-1})\, dx + y_o$$

Im allgemeinen konvergiert dieses Verfahren und es ergibt sich im Grenzwert eine partikuläre Lösung der Dgl. Man kann oft die Reihe nach endlich vielen Schritten abbrechen und hat dann eine Näherungslösung der gegebenen Dgl.
Die inhomogene Dgl 1. Ordnung läßt sich durch eine einfache Substitution homogen machen, wenn die Störfunktion und der Koeffizient von y konstant sind:

$$a_1 (x) y' + a_0 y = a$$

Durch die Substitution $a_0 y - a = z$, $y' = \frac{z'}{a_0}$

wird die Dgl in eine homogene Dgl überführt, die man durch Trennung der Veränderlichen oder - wenn a_1 konstant ist - durch e-Ansatz lösen kann.

Hat die Dgl 1. Ordnung die Form

$$a_1 (x) y' + a_0 (x) y = f (x),$$

dann dividiere man zunächst durch $a_1 (x)$ und erhält die Form

$$a' + p (x) y = q (x)$$

(Manchmal ist es allerdings einfacher, von der ersten Form auszugehen. Die Variation der Konstanten läßt sich dann genauso durchführen).
Man löse zunächst die homogene Gleichung

$$a' + p (x) y = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen oder gegebenenfalls durch e-Ansatz:

$$y = C e^{- \int p (x) dx}$$

Danach ersetze man C durch eine Funktion C (x)

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Dgl erhält man eine Bestimmungsgleichung für C(x):

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + c$$

c ist die neue Integrationskonstante.
Hiermit und mit der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl folgt die Lösung der inhomogenen Dgl

$$y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + c \right) e^{-\int p(x)\, dx}$$

Bei Schwingungsproblemen läßt sich oft die mühsame Ausrechnung einer solchen Lösung umgehen, indem man komplex rechnet.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösungen zu 1.

1) $z_1 = -3 + 5j$; $z_2 = 2 - j$; $z_1 + z_2 = -1 + 4j$

$z_1 - z_2 = -5 + 6j$

$z_1 z_2 = -1 + 13j$

Graphische Lösungen siehe Bild 38

$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{11}{5} + \frac{7}{5}j$

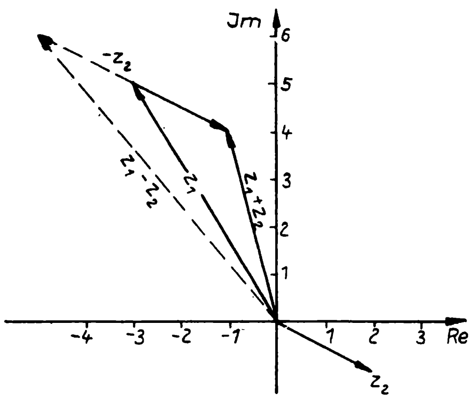


Bild 38

2) Lösung in Bild 39

$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3 - 2j$

3) $z_1 = a_1 + b j$; $z_2 = a_2 + b j$

$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b^2 + j(a_1 + a_2) b$. Es soll $a_1 a_2 - b^2 = 0$ sein.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b^2 + j(a_2 - a_1) b}{a_2^2 + b^2}$. Es soll $(a_2 - a_1) b = 0$ sein.

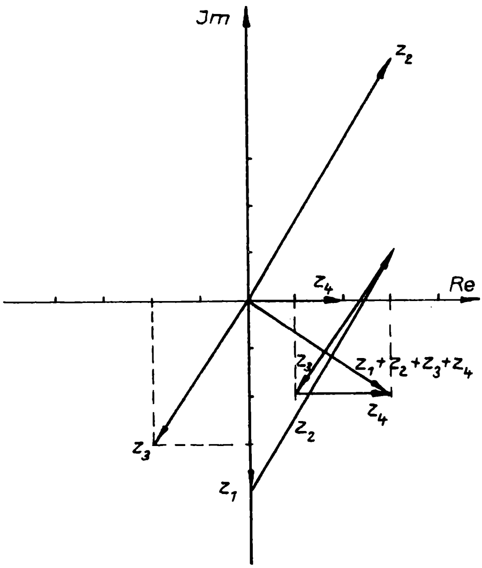


Bild 39

Aus der letzten Bedingung folgt $a_1 = a_2$ oder $b = 0$

Nach der ersten Bedingung müßte für $b = 0$ auch $a_1 = a_2 = 0$ sein. Diese Lösung ist auch möglich.
Für $a_1 = a_2$ folgt aus der ersten Bedingung, daß

$$a_1 = a_2 = b \text{ sein muß.}$$

4) $z = r\,e^{j\varphi}$ Die hierzu konjugiert komplexe Zahl ist
$z^* = r\,e^{-j\varphi}$

5) $z = \dfrac{1}{a + b\,j} = \dfrac{a - b\,j}{a^2 + b^2}$; $|z|^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|a + b\,j|}$$

Das Ergebnis erhält man in diesem Falle sehr schnell, indem der absolute Betrag im Nenner gebildet wird.

6) Ein Punkt auf dem Kreis hat den Vektor $z = z_0 + z_1$ (Bild 4o)

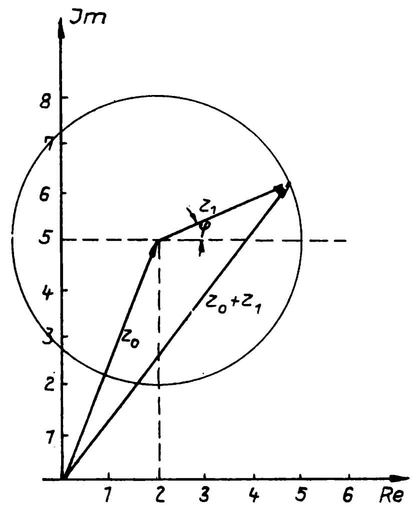


Bild 4o

$$z_0 = 2 + 5\,j,\ z_1 = r\,e^{j\omega t} = 3\,e^{j\,0{,}2\,t}$$

also ist

$$z = 2 + 5\,j + 3\,e^{j\,0{,}2\,t}$$

Der Realteil dieser Funktion stellt eine cos-Schwingung um den Punkt $x_0 = + 2$ dar: $x = 2 + 3 \cos 0{,}2\,t$.
Der Imaginärteil der Funktion ergibt eine sin-Schwingung um den Punkt $y_0 = 5$: $y = 5 + 3 \sin 0{,}2\,t$

7) Die Ortskurve der Funktion $z = \frac{5}{1 + 2\,j\,x}$ für x zwischen 0 und ∞ ist ein Halbkreis im 4. Quadranten nach Bild 41.

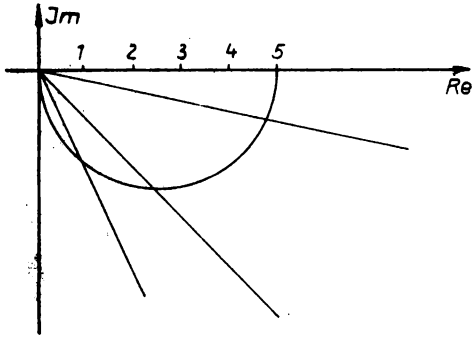


Bild 41

Es ist

$$|z| = \frac{5}{\sqrt{1 + 4 \cdot x^2}} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = -2x$$

Hieraus ergeben sich die drei in der Zeichnung eingetragenen Punkte:

$x = 1{,}0$; $|z| = 2{,}24$; $\varphi = -63{,}5^\circ$

$x = 0{,}5$; $|z| = 3{,}54$; $\varphi = -45{,}0^\circ$

$x = 0{,}1$; $|z| = 4{,}91$; $\varphi = -11{,}3^\circ$

8) $\ddot{z}$ ist die zweite Ableitung. Für $z = r\,e^{j\omega t}$ ist

$$\ddot{z} = j^2\omega^2\, r\, e^{j\omega t} \quad \text{oder auch} \quad z = j^2\omega^2 z = -\omega^2 z$$

Der Vektor $\ddot{z}$ ist also gegenüber dem Vektor z um 180° gedreht. Bei n-maligem Differenzieren ist der Vektor $d^n z/dt^n$ gegenüber dem Vektor z um n-mal 90° gedreht.

9) Zuerst wird der Gesamtwiderstand berechnet.

$$R_{ges} = R_1 + R_c$$

Hierbei ist R_1 der Ersatzwiderstand von ohmschen Widerstand und Drossel. Er errechnet sich

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{1000\Omega} + \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 5}$$

Danach ergibt sich

$$R_1 = 710 + 452\, j$$

Weiter ist

$$R_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\, 2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = -\, j \cdot 319$$

$$R_{ges} = R_1 + R_c = 710 + 452\, j - 319\, j = 710 + 133\, j$$

$$R_{ges} = \sqrt{710^2 + 133^2} = 723\Omega$$

Zwischen den Effektivwerten von Strom und Spannung gilt die Beziehung:

$$\underline{\underline{J}} = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{220}{723} = \underline{\underline{0{,}304\ A}}$$

Der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ist

$$\tan\varphi = \frac{133}{710} = 0{,}188; \quad \underline{\underline{\varphi = 10{,}6^{\circ}}}$$

Lösungen zu den Aufgaben 2.1.

1) $dy + y\,dx = 0$ ergibt $y' + y = 0$. Dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

2) Aus $\frac{y'}{y} + \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt durch Multiplikation mit $x\,y$

$x\,y' + y \sin x = x\,y$ oder $x\,y' + (\sin x - x)\,y = 0$

Dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Dgl 1. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten.

3) $a_1\dot{x} + x = f(t)$; $a_2\dot{z} + z = x$; $a_2\ddot{z} + \dot{z} = \dot{x}$

$$a_1\,a_2\,\ddot{z} + (a_1 + a_2)\,\dot{z} + z = f\,(t)$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Lösungen zu den Aufgaben 2.21.

1) Richtungsfeld von $y' = 0$. in jedem Punkt der x - y - Ebene ist die Steigung = 0. Bild 42 zeigt das Richtungsfeld. Demzufolge sind alle zur x - Achse parallelen Geraden Lösungen der Dgl.

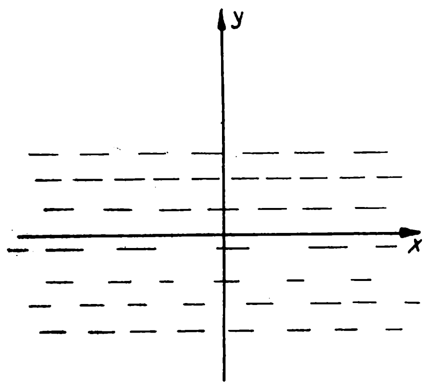


Bild 42

2) Die Dgl $y' = x$ ergibt das Richtungsfeld nach Bild 43. Es passen alle Parabeln der Form

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

herein. Sie können diese Dgl unmittelbar durch Integration lösen.

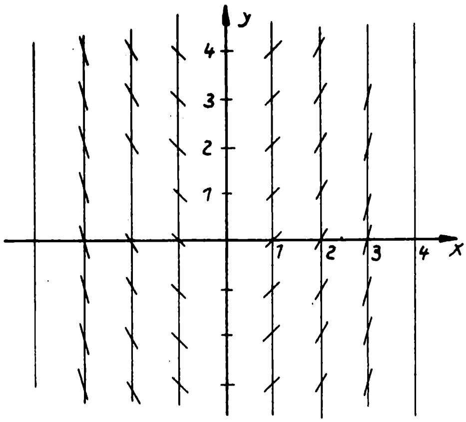


Bild 43

3) Die auf Seite 54 besprochene Dgl hieß $y' = \frac{y}{x}$. $y' = m_1$ ist der Richtungsfaktor der Tangenten an die Kurven $y = f(x)$.
Tangenten und Kurven fallen zusammen, da die zu dieser Dgl gehörenden Lösungen alle Geraden durch den Nullpunkt waren. In unserem Beispiel ist $y' = -\frac{x}{y} = m_2$. Hierbei ist m_2 der Richtungsfaktor der Tangenten für die Lösungen.
Es ist in unserem Falle

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

2.3.3.2 Die Störfunktion f(t) sei nicht konstant

In der Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t) \qquad (2.69)$$

sei jetzt im Gegensatz zu 2.3.3.1 f(t) nicht konstant, sondern mit der Zeit veränderlich. Besonders wichtig ist hierbei der Fall, daß $f(t) = A_o \sin \omega_o t$, also eine Schwingung mit der als bekannt angenommenen Amplitude A_o und der ebenfalls bekannten Frequenz ω_o ist. Wegen der Wichtigkeit dieses Falles hat man in der Elektrotechnik und in der Regelungstechnik hierfür ein eigenes Verfahren, den Frequenzgang, entwickelt. Wir werden ihn noch ausführlich besprechen und können daher an dieser Stelle auf den Fall $f(t) = A_o \sin \omega_o t$ verzichten.

Für die Regelungstechnik ist außer dem Fall f(t) = const., der unter 2.3.3.1 ausführlich behandelt wurde, noch $f(t) = b_o + b_1 t$ wichtig. Es handelt sich also um eine lineare Anstiegsfunktion (Gerade) mit als bekannt anzusehendem b_o und b_1. Solche Anstiegsfunktionen sind manchmal bei der Aufnahme der Übergangsfunktion von sog. "D-Gliedern" wichtig.

Zur Lösung der Dgl $a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t)$ gibt es mehrere Verfahren. Wir wollen das einfachste besprechen. Es beruht auf folgender Tatsache:

x_1 sei das allgemeine Integral der homogenen Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = 0.$$

Es läßt sich mit Hilfe des e-Ansatzes berechnen.

x_2 sei ein partikuläres Integral der inhomogenen Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t)$$

Funktionen schreiben wir diesen Ansatz auf und rechnen dann ein Beispiel.

$f(t)$	Ansatz für partikuläre Lösung
a	$x_2 = c$
$b_o + b_1 t$	$x_2 = c_o + c_1 t$
$A_o \sin \Omega t$) $A_o \cos \Omega t$)	$x_2 = b_1 \sin \Omega t + b_2 \cos \Omega t$
$b_o e^{bt}$	$x_2 = c\, e^{bt}$
$a(1 + e^{bt})$	$x_2 = c_o + c_1 e^{bt}$

Im Falle $A_o \sin\Omega t$ bzw. $A_o \cos\Omega t$ steht im Argument der gegebenen Funktion $f(t)$, wie auch im Argument des Ansatzes die gleiche Kreisfrequenz Ω . Das ist auch klar, denn wenn ein System mit der Kreisfrequenz Ω zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird, dann muß es mit derselben Kreisfrequenz schwingen. Im Falle $f(t) = b_o e^{bt}$ unterscheidet sich der Ansatz nur durch die multiplikative Konstante c. Der Exponent ist der gleiche.
Der Fall $f(t) = a$ wurde bereits mit einer anderen Methode unter 2.3.3.1 ausführlich behandelt und wurde hier nur erwähnt, um zu zeigen, daß er auch auf diese Weise gerechnet werden kann. Wir betrachten jetzt ein Zahlenbeispiel.

Gegeben sei noch einmal die mechanische Masse-Feder-Anordnung mit Flüssigkeitsdämpfung nach Bild 45. Es sei $m = 2$ kp m^{-1} s^2, $k = 2$ kp m^{-1} s und $c = 2$ kp m^{-1}. Dann lautet die Dgl nach (2.23)

$$\ddot{x}_a + \dot{x}_a + x_a = x_e$$

Bei der Aufstellung dieser Gleichung war über x_e nichts vorausgesetzt worden. (Die Tatsache, daß x_e eine Sprungfunktion sein sollte, spielte erst bei der Lösung der Dgl, nicht aber bei der Aufstellung der Dgl eine Rolle).

x_e kann beliebig sein. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Stab I in Bild 45 mit konstanter Geschwindigkeit v = o,5 [m/s] nach unten bewegt wird. Bei t = 0 sei x_e = 0. Dann ist

$$x_e = 0{,}5\ t\ [m]$$

und die Dgl lautet

$$\ddot{x}_a + \dot{x}_a + x_a = 0{,}5\ t$$

Welche Bewegung x_a vollführt die Masse m, wenn $\dot{x}_a$ = 0, x_a = 0 für t = 0 ist?

Wir lösen zuerst die homogene Dgl

$$\ddot{x}_a + \dot{x}_a + x_a = 0$$

wie es unsere Vorschrift verlangt. (Beachten Sie, daß im Gegensatz zu früher jetzt nicht substituiert wurde!).

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

und hat die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\, j\, \sqrt{3} = -0{,}5 \pm 0{,}866\ j$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$x_1 = C_1\, e^{-0{,}5\, t + 0{,}866\, j\, t} + C_2\, e^{-0{,}5\, t - 0{,}866\, j\, t}$$

Jetzt ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl zu finden. f(t) hat die Form $b_0 + b_1$ t, wobei in unserem Falle b_0 = 0 ist. Nach unserer Tabelle machen wir den Lösungsansatz

$$x_2 = c_o + c_1 t$$

mit den noch zu bestimmenden Zahlen c_o und c_1.
Aus unserem Ansatz folgt

$$\dot{x}_2 = c_1 \quad \text{und} \quad \ddot{x}_2 = 0.$$

Wir setzen in die gegebene inhomogene Dgl ein und erhalten

$$0 + c_1 + \underbrace{c_o + c_1 t} = o{,}5\ t$$

$$(\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + \quad x_2 \qquad = o{,}5\ t)$$

Die Gleichung muß für jedes beliebige t Gültigkeit haben, denn sie wurde aus der Dgl gewonnen, welche für jede beliebige Zeit gilt. Z.B. muß die Gleichung auch für t = 0 gelten. Setzen wir t = 0 ein, dann erhalten wir

$$c_1 + c_o = 0$$

Setzen wir z.B. t = 1 ein und berücksichtigen $c_1 + c_o = 0$, dann ergibt sich weiter die Gleichung

$$c_1 = o{,}5$$

Hiermit erhalten wir für

$$c_o = - o{,}5$$

und das partikuläre Integral lautet damit

$$x_2 = - o{,}5 + o{,}5\ t \tag{2.72}$$

Das allgemeine Integral unserer inhomogenen Dgl ist nun

$$x_a = x_1 + x_2 = C_1\, e^{-0{,}5\,t + 0{,}866\,j\,t} + C_2\, e^{-0{,}5\,t - 0{,}866\,j} - 0{,}5 + 0{,}5\,t \qquad (2.73)$$

Jetzt müssen die Konstanten aus den Anfangsbedingungen berechnet werden. Hierzu ist wieder die übliche umständliche Rechenarbeit erforderlich. Wir wollen sie aber an dem vorliegenden Zahlenbeispiel doch einmal durchführen. Es wird vielleicht manche Unklarheit dabei noch beseitigt.

Aus der allgemeinen Lösung erhalten wir $\dot{x}_a$.

$$\dot{x}_a = (-0{,}5 + 0{,}866\,j)\, C_1\, e^{-0{,}5\,t + 0{,}866\,j\,t} - (0{,}5 + 0{,}866\,j)\, C_2\, e^{-0{,}5\,t - 0{,}866\,j\,t} + 0{,}5$$

Aus x_a und $\dot{x}_a$ erhalten wir mit $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$ die Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten.

$$0 = C_1 + C_2 - 0{,}5$$

$$0 = (-0{,}5 + 0{,}866\,j)\, C_1 - (0{,}5 + 0{,}866\,j)\, C_2 + 0{,}5$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet man

$$C_1 = 0{,}25 + 0{,}1444\,j \text{ und } C_2 = 0{,}25 - 0{,}1444\,j$$

Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$x_a = (0{,}25 + 0{,}1444\,j)\, e^{-0{,}5\,t + 0{,}866\,j\,t} + (0{,}25 - 0{,}1444\,j)\, e^{-0{,}5\,t - 0{,}866\,j\,t} - 0{,}5 + 0{,}5\,t$$

Diese Gleichung hat eine höchst unübersichtliche Form. Deshalb werden wir versuchen, sie einfacher zu gestalten. Zunächst schreiben wir sie

$$x_a = e^{-0{,}5\,t} \left[0{,}25\, (e^{0{,}866\,j\,t} + e^{-0{,}866\,j\,t}) + 0{,}1444\,j\, (e^{0{,}866\,j\,t} - e^{-0{,}866\,j\,t}) \right] - 0{,}5 + 0{,}5\,t$$

Mit den Formeln

$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha + \cos\alpha - j\sin\alpha = 2\cos\alpha$$

$$e^{j\alpha} - e^{-j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha - \cos\alpha + j\sin\alpha = 2\,j\sin\alpha$$

erhalten wir

$$x_a = e^{-0{,}5\,t} \left[0{,}25 \cdot 2 \cdot \cos 0{,}866\,t + 0{,}1444\,j \cdot 2 \cdot j \cdot \sin 0{,}866\,t \right] - 0{,}5 + 0{,}5\,t$$

$$= e^{-0{,}5\,t} \left[0{,}5 \cos 0{,}866\,t - 0{,}2888 \sin 0{,}866\,t \right] - 0{,}5 + 0{,}5\,t$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer läßt sich nun durch Einführung zweier neuer Zahlen A und φ so umformen, daß ein Additionstheorem anwendbar ist.
Wir setzen

$$0{,}5 = A \cos\varphi \quad \text{und} \quad 0{,}2888 = A \sin\varphi$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$x_a = A\,e^{-0,5\,t}\left[\cos 0,866\,t \cos\varphi - \sin 0,866\,t \sin\varphi\right] - 0,5 + 0,5\,t$$

$$= A\,e^{-0,5\,t} \cos(0,866\,t + \varphi) - 0,5 + 0,5\,t$$

Aus den beiden Gleichungen für A und φ erhalten wir

$$A = \sqrt{0,5^2 + 0,2888^2} = 0,577$$

und $\tan\varphi = 0,2888/0,5 = 0,578$ und $\varphi = 30^\circ = \pi/6$

Wir setzen diese Werte in unsere Gleichung für x_a ein und erhalten die endgültige partikuläre Lösung

$$x_a = 0,577\,e^{-0,5\,t} \cos\left(0,866\,t + \frac{\pi}{6}\right) - 0,5 + 0,5\,t \quad (2.74)$$

x besteht aus der Summe der beiden Funktionen $0,577\,e^{-0,5\,t} \cos\left(0,866t + \frac{\pi}{6}\right)$ und $-0,5 + 0,5\,t$. Sie sind in Bild 62 gezeichnet. Durch Addition der Ordinaten ergibt sich die dick gezeichnete Funktion x_a. (In Bild 62 sind die Funktionen nicht maßstabgerecht gezeichnet). Wie Sie sehen, kommt also auch hier ein Einschwingvorgang zustande, x_a geht theoretisch erst nach unendlich langer Zeit in die Gerade $-0,5 + 0,5\,t$ über. In praktischen Anordnungen kann x_a natürlich nicht beliebig lange auf beliebig große Werte wachsen. Der Bereich, in welchem x_a laufen kann, ist durch die gerätetechnische Ausführung festgelegt und kann durch die Dgl natürlich nicht erfaßt werden.
Im Verlaufe der Rechnungen zu unsererem letzten Beispiel wird Ihnen aufgefallen sein, daß hier von zwei partikulären Lösungen die Rede war. Die eine, (2.72), brauchten wir, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl zu berechnen, die andere, (2.74), ergab sich nach Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 in der allge-

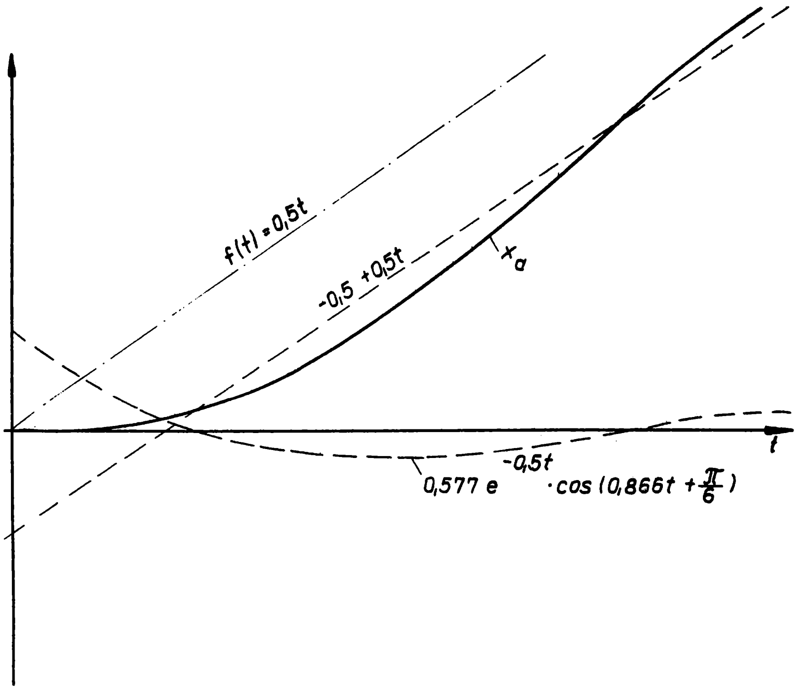


Bild 62

meinen Lösung der inhomogenen Dgl. Dieser Sachverhalt ist verständlich. Zunächst einmal können die Integrationskonstanten C_1 und C_2 in der allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl jeden beliebigen Wert annehmen. Das richtet sich nach den jeweils gestellten Anfangsbedingungen. Diese könnten z.B. auch einmal so beschaffen sein, daß sich $C_1 = C_2 = 0$ ergibt. Setzen Sie diese Werte in die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl ein, dann erhalten Sie unsere erste partikuläre Lösung (2.72). Für unsere vorliegenden Anfangsbedingungen ergeben sich aber die oben

berechneten Werte für C_1 und C_2. Sie sind in unserem Falle ungleich Null und führen deshalb auf die andere partikuläre Lösung (2.74), welche gleichzeitig die Lösung unseres Problems darstellt.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl setzt sich additiv aus der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl und <u>irgendeiner</u> partikulären Lösung der inhomogenen Dgl zusammen. Eine solche partikuläre Lösung ist aber auch (2.74). Folglich müßte die allgemeine Lösung auch mit ihr zu bilden sein. Es wäre also auch

$$x_a = C_3\, e^{-0{,}5\,t + 0{,}866\,j\,t} + C_4\, e^{-0{,}5\,t - 0{,}866\,j\,t} +$$

$$+ 0{,}577\, e^{-0{,}5\,t} \cos\left(0{,}866\,t + \frac{\pi}{6}\right) - 0{,}5 + 0{,}5\,t \qquad (2.75)$$

eine allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. Für die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung der hom. Dgl schreiben wir C_3 und C_4, da sie bei Bestimmung durch die Anfangswerte jetzt andere Werte annehmen werden als vordem. Diese allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl sieht wegen des cos-Anteiles zunächst anders aus als die oben gefundene allgemeine Lösung (2.73) der inhomogenen Dgl. Doch man kann durch entsprechende Umformung zeigen, daß beide Lösungen letzten Endes gleich sind. Wir wollen hier darauf verzichten, da diese Rechnung keinen praktischen Wert hat.
Übrigens erhalten Sie auch aus der allgemeinen Lösung (2.75) die partikuläre Lösung (2.74), indem Sie $C_1 = C_2 = 0$ setzen.

2.3.4 Allgemeine Betrachtungen zur Dgl 2. Ordnung

Nach unseren bisher behandelten Beispielen ist es jetzt an der Zeit, ein Wort zu dem Einfluß der Störfunktion f(t) zu sagen. In der Dgl (2.19) war $f(t) = U_0 = const.$ Die Lösung war gegeben durch (2.45). Ihren Verlauf zeigt Bild 55. In der Dgl (2.23) war $f(t) = x_e$. Für die Lösung (2.58), deren Verlauf Bild 59 zeigt, war $x_e = const.$ und für die Lösung (2.74) war $f(t) = b_1.t$. An all diesen Beispielen können Sie erkennen, daß die Lösungen der besprochenen Dgln nach einem bestimmten Übergangsverhalten, welches aperiodisch oder gedämpft schwingend sein kann, sich dem Verlauf der Störfunktion f(t) nähern und ihn nach theoretisch unendlich langer Zeit auch annehmen bzw. mit f(t) parallel verlaufen, wie in Bild 62.
Die Störfunktion f(t) ist also bei aperiodischem oder gedämpft schwingendem Verhalten für den grundsätzlichen Verlauf der Lösungsfunktion verantwortlich, während die eigentliche Differentialgleichung (der homogene Teil) dafür verantwortlich ist, wie der Übergang des gegebenen Systems vom Anfangszustand in den neuen, durch f(t) gegebenen Zustand stattfindet, ob aperiodisch oder schwingend. Diesen Sachverhalt wollen wir am Beispiel der Dgl (2.23) etwas genauer diskutieren. Zu diesem Zwecke denken wir uns in Bild 45 die Dämpfung weggenommen ($k = 0$). Weiter stellen wir uns vor, daß in dieser Anordnung die Masse derartig klein sei, daß wir sie vernachlässigen können ($m = 0$). Setzen wir in die Dgl (2.23) $m = 0$ und $k = 0$ ein, dann bleibt

$$x_a = x_e$$

und diese Gleichung ist in unserem Falle auch gleich die Lösung der verbleibenden Gleichung, welche jetzt keine Differentialgleichung mehr ist. Ist $x_e = const.$, dann ist auch $x_a = const.$, ist $x_e = b_1\, t$, dann ist auch

$x_a = b_1\, t$. In beiden Fällen gibt es kein aperiodisches oder schwingendes Übergangsverhalten. x_a folgt der Funktion x_e sofort nach. Hieraus müssen wir schließen, daß das schwingende oder aperiodische Übergangsverhalten von x_a durch die Masse m und die Dämpfung k veranlaßt wird, welche, wie oben schon erwähnt, nur im homogenen Teil der Dgl vorhanden sind. Die Störfunktion f(t) hat mit m und k nichts zu tun.

Der eigentliche (mathematische) Grund dafür liegt daran, daß die Masse m mit $\ddot{x}_a$, die Dämpfung k mit $\dot{x}_a$ in die Dgl eingeht. Hauptverantwortlich für das Übergangsverhalten sind die Differentialquotienten der gesuchten Funktion x_a. Betrachten Sie daraufhin noch einmal den Rechnungsgang beim Lösen der Dgl in 2.3.3.1, dann sehen Sie, daß die zur Dgl gehörige charakteristische Gleichung nur dann eine quadratische wird, wenn $\ddot{x}_a$ in der Dgl vorhanden sind. Denn nur dann können die Wurzeln (2.46) z.B. zueinander konjugiert komplex werden und nur ein solches konjugiert komplexes Wurzelpaar führt auf eine Schwingung, wie Sie am dortigen Rechnungsgang erkennen können.

Der homogene Teil der Differentialgleichung einer gegebenen(elektrischen oder mechanischen) Anordnung ist also für das Übergangsverhalten der Lösung verantwortlich, während die Störfunktion hierauf keinen Einfluß hat. Ist z.B. das System schwingungsfähig, dann wird eine solche Schwingung sich bei jeder beliebigen Störfunktion f(t) bemerkbar machen und zwar immer mit der gleichen, für das System charakteristischen Frequenz, der sog. "Eigenfrequenz". (Der Fall, daß f(t) eine Sinusschwingung ist, soll hier zunächst außer Acht gelassen werden. Wir werden ihn später ausführlich behandeln). Denn die Lösung der Dgl

$$a_2\, \ddot{x} + a_1\, \dot{x} + x = f(t)$$

wird ja dadurch erhalten, daß erst die homogene Dgl gelöst wird und zu ihr ein partikuläres Integral der in-

INGENIEUR-FERNSTUDIUM

BRAUNSCHWEIG

HÖHERE MATHEMATIK FÜR REGELUNGS-TECHNIKER

2

HERAUSGEBER
INGENIEURSCHULE FÜR
FEINWERKTECHNIK JENA

1009–02/61

Herausgeber:
Ingenieurschule für Feinwerktechnik
Jena

Höhere Mathematik für Regelungstechniker

Lehrbrief 2

1. Auflage

von

Karl Braunschweig

1961

Zentralstelle für Fachschulausbildung
– Bereich Maschinenbau, Elektrotechnik, Leichtindustrie –
Dresden

Inhaltsverzeichnis

S.43 5.Zeile von unten

Ergänze: . . .als wenn man eine <u>gewisse</u> Überschwingung . . .

S.44 9.Zeile von unten

Andererseits wird . . . "keine Zeit hat".
Diesen Satz streichen

S.48 letzte Zeile

lies:

$\dot{x}_a = \dot{x}_e$ . . . . . und tan =

(zwei getrennte Gleichungen)

S.50 9.Zeile

falsch: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{k}{2m}$ richtig: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{k}{2m}$

S.52 3.Zeile

falsch: . . .Differentiation nach . . richtig: Differentiation nach . . .

vorletzte Zeile: Zwischen λ_2 und f (λ) senkrechten Trennungsstrich anbringen

S.88 Bild 65

Anstelle von K ist λ an die Abszisse zu schreiben

S.107 4.Zeile

falsch: $0=A-500\sin\varphi+867\cos\varphi$ richtig:
$0=A\left[-500\sin\varphi+867\cos\right.$

S.112 5.Zeile - 9.Zeile muß richtig heißen:

$$\sin = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\omega/\delta}{\sqrt{1+\omega^2/\delta^2}}$$

und hiermit

$$A = \frac{x_{a_0}}{\sin\varphi} = x a_0 \sqrt{1+\frac{\delta^2}{\omega^2}}$$

Partikuläre Lösung:

$$x_a = x_{a_0} \sqrt{1+\frac{\delta^2}{\omega^2}}\; e^{-\delta t} \sin\;(\omega t + \varphi)$$

Berichtigungen zum Lehrbrief "Höhere Mathematik für Regelungstechniker 2" (Braunschweig)

S.3 letzte Zeile
falsch: $T_2\ddot{U}_c + U_c = U_I$ richtig: $T_2\ddot{U}_c + \dot{U}_c = \dot{U}_I$

S.6 8.Zeile
falsch: Drucke richtig: Drücke

S.14 2.Zeile
falsch: . . steigender Druck p_1 richtig: . . . steigender Druck $p_1{}'$

S.17 9.Zeile von unten
falsch: $U_1 = LCU_c$ richtig: $U_1 = L.C.\ddot{U}_c$

S.20 Formel (+)
falsch: $U_0 = JR + LJ + . .$ richtig: $U_0 = J \cdot R + L \cdot \dot{J} + . . .$
und zwei Zeilen weiter
falsch: $\Theta \cdot \omega = c_1 \cdot \phi \cdot J$ richtig: $\Theta \cdot \dot{\omega} = c_1 \phi \cdot J$

S.34 Mitte
falsch: $T_{1/2} = -\frac{k}{2c} \pm \sqrt{.}$. richtig: $T_{1/2} = +\frac{k}{2c} \pm \sqrt{. .}$
7.Zeile von unten
falsch: k/2 m richtig: k/2c

S.36 8.Zeile
falsch: . . .Geschwindigkeit $x_a = 0$ richtig: . . . Geschwindigkeit $\dot{x}_a = 0$
8.Zeile von unten
falsch: . . mit $x_a=0$ richtig: . . . mit $\dot{x}_a=0$

S.37 Formel (2.53) vervollständigen:

$$. . . \left\{ \left(1 - j\frac{\delta}{\omega}\right) e^{j\omega t} + \left(1 + j\frac{\delta}{\omega}\right) . e^{-j\omega t} \right\}$$

2.3 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.3.1 Die allgemeine Form der Differentialgleichung

Wir wollen uns jetzt mit einer Differentialgleichung befassen, die in der Regelungstechnik eine wichtige Rolle spielt. Die unabhängige Veränderliche ist dabei meistens die Zeit t. Die abhängige Veränderliche ist je nach dem vorliegenden Problem eine Spannung, ein Druck, eine Temperatur, eine Drehzahl oder anderes. Wir wollen sie für unsere Betrachtungen "x" nennen. Mit diesen Bezeichnungen hat die lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten die Form

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t) \qquad (2.18)$$

Hierin sind a_2 und a_1 konstante Zahlen. Der Faktor vor x ist in unserer Schreibweise gleich 1, was durch Division immer zu erreichen ist. Diese Art der Darstellung ist in der Regelungstechnik üblich. f(t) ist eine Funktion der Zeit, welche sich wie auch die Konstanten a_1 und a_2 aus dem gestellten Problem ergibt.

2.3.2 Einige Beispiele

Beispiel 1: Bild 44 zeigt eine Schaltung, bestehend aus zwei R-C-Gliedern I und II und einem Verstärker. An I werde eine Gleichspannung U_o angelegt. Dann wird sich der Kondensator C_1 über den Widerstand R_1 aufladen. Durch den Verstärker mit dem Verstärkungsfaktor 1 ($U_{II} = U_I$) wird die an C_1 liegende Spannung an das R-C-Glied II weitergegeben. Der Verstärker dient in dieser Schaltung nur als Übertragungsglied. Er soll bewirken, daß dem R-C-Glied I durch das R-C-Glied II keine Energie entzogen wird. (Man spricht auch in diesem Falle, wo der Verstär-

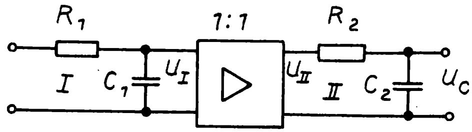


Bild 44

kungsfaktor 1 ist, von einem Verstärker, da ein solches Bauglied alle entsprechenden Merkmale haben muß.) Man nennt diese Anordnung eine "rückwirkungsfreie Schaltung". Eine an I angelegte Spannung U_o wird verzögert nach II weitergeleitet und als U_c abgegeben. Würde man bei U_c eine Spannung anlegen, dann würde wegen der Ventilwirkung des Verstärkers bei U_o nichts spürbar sein, die Schaltung ist "rückwirkungsfrei", ein Signal wird nur in einer Richtung durchgelassen.

Solche Anordnungen spielen in der Regelungstechnik eine wichtige Rolle (z.B. bei elektronischen und pneumatischen Modellregelkreisen und Analogrechnern. Auch bei Berechnungen von Regelkreisen wird meist Rückwirkungsfreiheit angenommen.)

Um zu der Dgl dieser Schaltung zu kommen, betrachten wir noch einmal das im ersten Lehrbrief, Seite 32 gerechnete Beispiel.

Für die dort berechnete RC-Schaltung ergab sich die Dgl

$$T\,\dot{U}_c + U_c = U \;;\quad T = R\,C$$

Diese Dgl gilt sicherlich auch für das RC-Glied I, denn der Verstärker entzieht keine Energie.

Wenn Sie noch einmal die Aufstellung der Dgl im 1. Lehrbrief verfolgen, dann werden Sie feststellen, daß von der Voraussetzung U = const (Gleichspannung) nirgends Gebrauch gemacht wurde. Das geschah erst bei der Berechnung der Lösung, die mit der Substitution $U_c - U = y$ begann. Wegen U = const wurde nämlich $\dot{U}_c = \dot{y}$, wodurch die Substitution erst sinnvoll wurde. Die Dgl gilt demnach auch dann, wenn U eine zeitlich veränderliche Spannung ist. Dies aber ist für das RC-Glied II unserer betrachteten Schaltung der Fall. Die in II hineingehende Spannung ist U_{II}. Sie ist, da der Verstärker den Verstärkungsfaktor 1 haben soll, gleich U_I. Diese aber wächst nach einer e-Funktion mit der Zeit an, ist also zeitlich veränderlich. Die aus II herauskommende Spannung ist U_c. Wenden wir jetzt die uns schon bekannte Dgl $T\,\dot{U}_c + U_c = U$ mit entsprechenden Bezeichnungen auf II an, dann ist

$$T_2\,\ddot{U}_c + U_c = U_{II}\ ; \qquad T_2 = R_2\,C_2$$

Für I gilt sinngemäß

$$T_1\,\dot{U}_I + U_I = U \quad ; \qquad T_1 = R_1\,C_1$$

und es ist noch

$$U_{II} = U_I$$

Aus der ersten und dritten dieser Gln ergibt sich

$$T_2\,\dot{U}_c + U_c = U_I$$

und nach der Zeit differenziert

$$T_2\,\ddot{U}_c + \dot{U}_c = \dot{U}_I\ .$$

Wir setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten der Reihe nach

$$T_1 \; (T_2 \ddot{U}_c + \dot{U}_c) + T_2 \dot{U}_c + U_c = U$$

$$T_1 \; T_2 \ddot{U}_c + (T_1 + T_2) \dot{U}_c + U_c = U \qquad (2.19)$$

Hiermit haben wir die "Dgl des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems erhalten. Es ist eine gewöhnliche lineare inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Auch hier kann U eine zeitlich veränderliche Spannung sein.
Vergleichen Sie die Dgl (2.19) mit der allgemeinen Form (2.18), dann ergibt sich

$$U_c \mathrel{\hat{=}} x \; ; \quad T_1 \cdot T_2 \mathrel{\hat{=}} a_2 \; ; \quad T_1 + T_2 \mathrel{\hat{=}} a_1 \; ; \quad U \mathrel{\hat{=}} f(t)$$

Sie erkennen nun auch, was in 2.3.1 gesagt wurde:
a_1, a_2, $f(t)$ ergeben sich als bekannte Zahlen bzw. Funktionen aus dem gestellten Problem. Denn in unserem Beispiel sind R_1, R_2, C_1, C_2 und damit auch T_1 und T_2 als bekannt anzusehen. Ebenso ist $f(t) = U$ eine aus dem gegebenen Problem heraus bekannte Funktion. Sie ist in unserem Beispiel aus der Wahl der Spannung bestimmt, die an I angelegt wird. Für Gleichspannung ist $f(t) = U = \text{const.}$, für Wechselspannung hätte man $f(t) = U_0 \sin \omega t$ zu setzen.
Von der Dgl (2.19) wollen wir uns für später noch merken, daß die Zeitkonstanten T_1 und T_2 reelle positive Zahlen sind. Damit sind es auch die Zahlen a_1 und a_2.
Die Lösung der Dgl werden wir erst später berechnen.

<u>Beispiel 2:</u> An einem Stab I befinde sich eine Feder mit der Federhärte c. An ihr hänge ein Körper mit der Masse m und an diesem befinde sich eine Ölbremse (Bild 45). Der Stab I werde nun plötzlich um den Betrag x_e nach unten bewegt. Was für eine Bewegung vollführt die Masse m?

Wir betrachten nun - gewissermaßen als Momentaufnahme - die Bewegung der Masse kurz nach dem Eingangsstoß. Bild 45a zeigt die Ruhelage der Anordnung vor dem Eingangsstoß. $x_a = 0$; $x_e = 0$. Bild 45b zeigt den Zustand kurz nach dem Eingangsstoß. Im Augenblick des Eingangstoßes wird die Feder um den Betrag x_e gespannt. Wegen ihrer Trägheit folgt die Masse nicht sofort. Kurz danach hat sich die Feder um den Weg x_a des Körpers entspannt, so daß die Feder noch um den Weg $x_e - x_a$ gespannt ist. Demzufolge übt sie auf die Masse die Kraft

$$P_c = c\ (x_e - x_a) \qquad (2.2o)$$

aus.

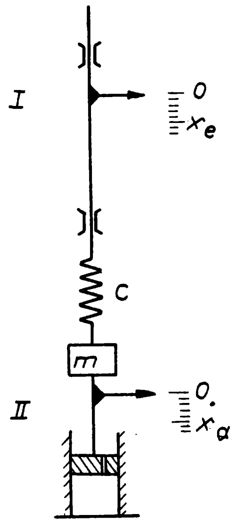


Bild 45a

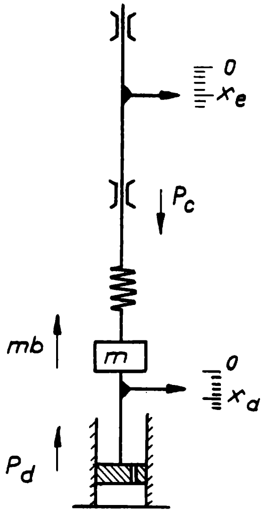


Bild 45b

Die Dämpfungskraft berechnet sich aus folgender Überlegung:
Auf den Kolben wirke die Kraft P_d. Sie erzeugt in der Flüssigkeit unter dem Kolben den Druck p. Oberhalb des Kolbens herrscht kein Druck, da man gegenüber p den geringen Bodendruck der Flüssigkeit vernachlässigen kann. Am Überströmkanal des Kolbens herrscht also die Druckdifferenz p - 0 = p (Bild 46). Für nicht zu große Drücke kann man annehmen, daß der durch den Überströmkanal durchfließende Flüssigkeitsstrom i dieser Druckdifferenz proportional ist.

$$i = \frac{p}{R} \quad \left[cm^3/s \right] \qquad (2.21)$$

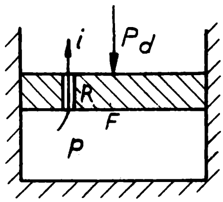


Bild 46

Hierbei soll R den Strömungswiderstand des Kanals charakterisieren. Der Strom i sei als die pro sec fließende Flüssigkeitsmenge in cm^3 definiert. Senkt sich jetzt der Kolben um den Weg x_a, dann strömt das Volumen

$$V = F \cdot x_a$$

(F = Kolbenfläche) durch den Kanal, da die Flüssigkeit inkompressibel ist. Differentieren wir diese Gleichung nach der Zeit, dann ergibt sich

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = F \dot{x}_a$$

$\dot{V}$ ist aber nichts anderes als der Strom i, nämlich die Flüssigkeitsmenge pro sec, die durch den Kanal hindurchtritt, während $\dot{x}_a = dx_a/dt$ die Geschwindigkeit des Kolbens ist. Aus der Gleichung $\dot{V} = F \cdot \dot{x}_a$ folgt mit (2.21)

$$\frac{p}{R} = F \dot{x}_a$$

und

$$P_d = p\,F = R\,F^2\,\dot{x}_a = k\,\dot{x}_a \quad (k = R\,F^2) \qquad (2.22)$$

dh. die Dämpfungskraft P_d ist der Geschwindigkeit des Kolbens proportional. Man spricht von "geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung". Sie tritt recht oft auf. Auch Luft- und Wirbelstromdämpfung rechnet man nach diesem Gesetz. Als Gegenbeispiel sei die Dämpfung durch trockene Reibung genannt, wo die Dämpfungskraft von der Geschwindigkeit nicht oder nur unwesentlich abhängt.
(Daß P_d in Bild 45a nach oben, in Bild 46 aber nach unten wirkt, erklärt sich so: Um den Kolben mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_a$ in den Zylinder hineinzudrücken, muß eine Kraft P_d aufgebracht werden. Diese Kraft wirkt dann auch entgegengesetzt als Reaktionskraft auf die Masse m).
Für eine Abwärtsbewegung der Masse m im Bild 45b gilt folgende Gleichung nach d'Alembert (die Kräfte P_c und P_d sind mit der Richtung anzusetzen, wie sie auf die Masse m wirken!)

$$P_c - P_d - m\,b = 0$$

Mit (2.2o), (2.22) und $b = \ddot{x}_a$ folgt

$$c\,(x_e - x_a) - k\,\dot{x}_a - m\,\ddot{x}_a = 0$$

oder

$$\frac{m}{c}\,\ddot{x}_a + \frac{k}{c}\,\dot{x}_a + x_a = x_e \qquad (2.23)$$

Die in dieser Differentialgleichung gesuchte Funktion $x_a = x_a(t)$ ergibt das Weg-Zeit-Gesetz des Bewegungsablaufes der Masse m. Die Lösung x_a werden wir ebenfalls später berechnen. Etwas kann man aber schon jetzt erkennen: Es ist $\dot{x}_a$ die Geschwindigkeit und $\ddot{x}_a$ die Beschleunigung der Masse m. Der Anschauung entnehmen wir, daß nach entsprechend langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) $\dot{x}_a = 0$ und auch $\ddot{x}_a = 0$ ist. Dann wird nach der Dgl (2.23)

$$x_a = x_e.$$

Den Zustand, wo dies eingetreten ist, nennt man den "Beharrungszustand" oder den "stationären Zustand". In unserem Beispiel ist das Ergebnis $x_a = x_e$ selbstverständlich.

Wir vergleichen die beiden Dgln (2.23) und (2.19)

$$\frac{m}{c}\ddot{x}_a + \frac{k}{c}\dot{x}_a + x_a = x_e$$

$$T_1 T_2 \ddot{U}_c + (T_1+T_2)\dot{U}_c + U_c = U$$

x_a bzw. U_c sind die Größen, die uns in beiden Dgln interessieren. Es sind die Funktionen, die aus den gegebenen Anordnungen "herauskommen". Wir nennen sie deshalb die "Ausgangsgrößen", während x_e bzw. U die Größen sind, welche in die Anordnung "hineingegeben" werden und deshalb "Eingangsgrößen" heißen.

Wir fragen jetzt:

Wie müssen die Zeitkonstanten T_1 und T_2 aussehen, damit die Koeffizienten der Dgl für das Zweispeichersystem die gleichen wie in der Dgl für das Masse-Federsystem sind? Den Sinn dieser Frage werden Sie noch erkennen.

Aus dem Vergleich beider Dgln ergeben sich die Gleichungen

$$T_1 T_2 = \frac{m}{c} \text{ und } T_1 + T_2 = \frac{k}{c}$$

Die Auflösung nach T_1 und T_2 ergibt

$$T_{1/2} = + \frac{k}{c} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4c^2} - \frac{m}{c}} \qquad (2.24)$$

Für gegebenes m, c und k kann man also T_1 und T_2 berechnen. Was bedeutet dieses Ergebnis? Wie Sie gesehen haben, sind T_1 und T_2 die beiden Zeitkonstanten $R_1 \cdot C_1$ und $R_2 \cdot C_2$ des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems. Dimensioniert man nun die R und C so, daß sich die nach (2.24) berechneten Zeitkonstanten T_1 und T_2 ergeben, dann sind die beiden Dgln (2.23) und (2.19) miteinander identisch und müssen, wenn auch die gleichen Anfangsbedingungen gewählt werden, die gleichen Lösungen haben. Das aber bedeutet, daß $x_a = x_a(t)$ und $U_c = U_c(t)$ denselben Verlauf haben. Damit ist die Möglichkeit gegeben, das Verhalten des Masse-Federsystems elektrisch nachzubilden. Allerdings ist diese Nachbildbarkeit in unserem Falle noch an eine Bedingung gebunden. Damit sich die Konstanten $T_1 = R_1 \cdot C_1$ und $T_2 = R_2 \cdot C_2$ tatsächlich gerätetechnisch realisieren lassen, müssen sie reell und positiv sein, denn imaginäre oder negative R und C sind hier nicht denkbar. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn die Wurzeln in (2.24) reell sind, d.h. wenn nach (2.24)

$$\frac{k^2}{4\,c^2} - \frac{m}{c} > 0 \text{ oder } k^2 > 4\,mc \qquad (2.25)$$

ist.

Die Dämpfungskonstante k muß also einen Mindestwert haben. Wir werden später wieder auf diese Bedingung stoßen, wenn wir die Schwingungsfähigkeit des Masse-Feder-Systems betrachten. Es wird sich ergeben, daß bei der Bedingung (2.25) keine Schwingung des Systems auftreten kann. Damit wird die Bedingung für die Nachbildbarkeit des Masse-Federsystems durch ein Zweispeichersystem auch anschaulich verständlich: Das Zweispeichersystem kann offenbar nicht schwingen, denn dazu wäre ein Energieaustausch zwischen den Speichern I und II notwendig. Das aber ist wegen der Rückwirkungsfreiheit der Schaltung nicht möglich. Mit einem solchen System kann man also keine Schwingungen nachbilden.

Das Nachbilden irgendwelcher Regelkreisglieder - auch das Masse-Federsystem kommt in der Regelungstechnik z.B. als Rückführgestänge vor - ist sehr wichtig. Sicher haben Sie schon von sog. Modellregelkreisen gehört oder gelesen. Das sind Versuchsaufbauten oder schon fertige Geräte, mit denen man Regelkreisglieder oder auch ganze Regelkreise in ihrem Verhalten "nachbildet", um im Modell den Funktionsablauf des Regelkreisgliedes oder -kreises zu verfolgen. Im gewissen Sinne gehören auch die sog. Analogierechner hierzu.

Beispiel 3: Pneumatisches rückwirkungsfreies Zweispeichersystem. Zunächst betrachten wir die Anordnung nach Bild 47. Über eine Drossel D (Kapillarwiderstand) kann Luft in den Behälter mit dem Volumen V einströmen.

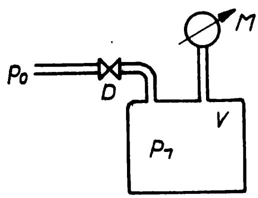


Bild 47

Vor der Drossel liegt der Druck p_0, der auch veränderlich sein kann. Ist im Behälter der Druck kleiner als p_0, dann wird Luft einströmen und der Druck im Behälter wird steigen. Er habe in dem betrachteten Augenblick zur Zeit t den Wert p_1. Die Luftmenge, die pro sec durch die Drossel fließt, sei i_1 [kg/s] .
Man kann nun annehmen, daß i_1 der Druckdifferenz an der

Drossel direkt und dem Drosselwiderstand umgekehrt proportional ist:

$$i_1 = \frac{p_o - p_1}{R} \quad \left[kg/s\right] \tag{2.26}$$

Dieses Gesetz gilt recht genau, wenn die Druckdifferenz nicht zu groß ist. R charakterisiere den Drosselwiderstand. Er wird bestimmt durch die Form der Drossel, und durch die Zähigkeit der Luft. Außerdem gehen noch Zahlenfaktoren ein. Die Gleichung (2.26) ist das sog. "Gesetz von Hagen-Poiseuille". Sie finden es in jedem besseren Physikbuch (z.B. Gerthsen, Physik). Weiterhin ist offenbar der Druck p_1 im Gefäß der darin enthaltenen Luftmenge q_1 direkt und dem Volumen V_1 umgekehrt proportional. Wir können schreiben

$$p_1 = a \frac{q_1}{V_1} \quad \left[kp/cm^2\right] \tag{2.27}$$

Dabei ist a ein Faktor, der für richtige Dimensionen sorgt. Er müßte die Dimension $[cm]$ haben, denn q_1/V_1 hat die Dimension $\left[kp/cm^3\right]$.
Weiter ist

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1 = \text{pro sec in den Behälter strömende Luftmenge}$$

denn in der Zeit dt erhöht sich die Luftmenge im Behälter um den Betrag dq_1. Mit dieser Beziehung folgt aus (2.27)

$$\frac{V_1\, p_1}{a} = \dot{q}_1 = i_1$$

und mit (2.26) ergibt sich

$$\frac{V_1}{a}\, \dot{p}_1 = \frac{1}{R_1}\, (p_o - p_1) \quad \text{oder}$$

$$\frac{V_1}{a} R_1 \dot{p}_1 + p_1 = p_o$$

V_1, R_1 und a sind für unser Beispiel Konstanten, die von der gerätetechnischen Ausführung abhängen. Sie lassen sich experimentell bestimmen. Aus der letzten Gleichung geht folgendes hervor:

$\frac{V_1 \cdot R_1}{a} \cdot \dot{p}_1$ muß die Dimension eines Druckes haben,

da es zu einem Druck p_1 addiert wird und einen Druck p_o ergibt. $\dot{p}_1 = dp_1/dt$ hat aber die Dimension $\left[\text{Druck/sec}\right]$. Deshalb muß $\frac{V_1}{a} R_1$ die Dimension [sec] haben. Wir kürzen demzufolge

$$\frac{V_1}{a} R_1 = T_1$$

ab und bezeichnen T_1 wieder als Zeitkonstante. Damit lautet die Dgl des "pneumatischen Einspeichersystems"

$$T_1 \dot{p}_1 + p_1 = p_o \qquad (2.28)$$

Jetzt betrachten wir ein pneumatisches rückwirkungsfreies Übertragungsglied, wie es in Bild 48 gezeigt ist. Es sind zwei Kammern 1 und 2 vorhanden, die durch eine ungespannt aufgehängte Gummimembran M getrennt sind. Die Membran ist mit einer Prallplatte P starr verbunden, welche eine Düse mehr oder weniger öffnen kann. Dadurch kann der Luftdruck in Leitung und Membrankammer 2 gesteuert werden. Anstelle der Stopfbuchse wird meist eine Membrandurchführung gewählt, um die Reibung in der Stopfbuchse zu vermeiden. Über die Drossel D wird Hilfsluft H L zugeführt.

Wird jetzt ein Druck p_1 auf die Kammer 1 gegeben, dann wird die Membran nach rechts gedrückt, die Düse wird

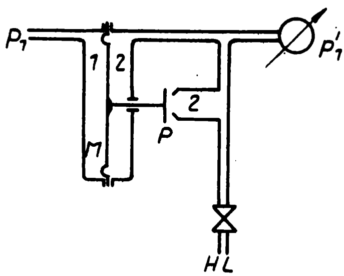


Bild 48

durch die Prallplatte geschlossen und das Meßgerät zeigt einen steigenden Druck p_1'. Würde nun p_1' größer als p_1 werden, dann würde die Druckdifferenz die spannungslose Membran sofort nach links drücken. Dadurch würde sich die Prallplatte öffnen und der Druck p_1' würde sofort absinken. Dann hätte p_1 wieder das Übergewicht, p_1' würde wieder steigen. Es ist offenbar nur ein Gleichgewichtsfall vorhanden: die beiden Drucke p_1 und p_1' müssen gleich sein. Die Wirkung der Anordnung geht nur in einer Richtung vor sich, von 1 nach 2, aber nicht umgekehrt. Würde man von rechts einen Druck p_1' einführen, dann würde an p_1 nichts geändert werden. Dies Verhalten nennen wir "rückwirkungsfreie Übertragung". Die Anordnung überträgt also den Druck rückwirkungsfrei im Verhältnis 1:1. Es ist $p_1' = p_1$. (Wir haben hier ein pneumatisches Analogon zu unserem Verstärker des 1. Beispiels).

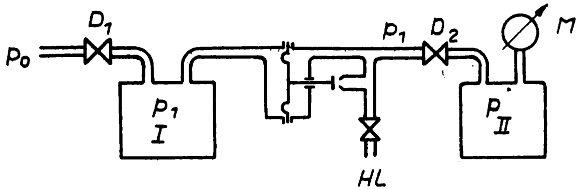


Bild 49

Die gesamte Schaltung des pneumatischen rückwirkungsfreien Zweispeichersystems zeigt Bild 49. Zunächst wirkt der Druck p_0 auf ein Einspeichersystem I, wie wir es nach Bild 47 besprochen haben. Über das rückwirkungsfreie Übertragungsglied nach Bild 48 wird ein zweites Einspeichersystem II aufgeladen. Der Druck p wird vom Manometer M angezeigt. Der vor der Drossel D_2 liegende Eingangsdruck für II ist wegen des rückwirkungsfreien Übertragungsgliedes in jedem Augenblick gleich dem Ausgangsdruck p_1 von I. II entzieht I keine Energie, da es durch die Hilfsluft HL aufgeladen wird. I lädt sich also so auf, als wäre das Übertragungsglied und Speicher II nicht vorhanden. (Sie erkennen schon die Analogie zu der im Beispiel 1 besprochenen Schaltung.)

Die Dgl der gesamten Schaltung ist jetzt sehr einfach herzuleiten. Für beide Speicher I und II gilt mit entsprechenden Bezeichnungen die Dgl (2.28). Über die Art des Eingangsdruckes p_0 war dort nichts vorausgesetzt worden, er kann veränderlich sein.

Speicher I : $T_1 \dot{p}_1 + p_1 = p_0$ (a)

Speicher II : $T_2 \dot{p} + p = p_1$ (b)

T_2 ist hierbei entsprechend wie T_1 durch R_2 und V_2 bestimmt. Aus (b) folgt durch Differentiation

$$T_2 \ddot{p} + \dot{p} = \dot{p}_1$$

Dies und Gleichung (b) setzen wir in (a) ein und erhalten

$$T_1 (T_2 \ddot{p} + \dot{p}) + T_2 \dot{p} + p = p_o$$

oder

$$T_1 T_2 \ddot{p} + (T_1 + T_2) \dot{p} + p = p_o \qquad (2.29)$$

Damit haben wir die Dgl des pneumatischen rückwirkungsfreien Zweispeichersystems gefunden. Es ist eine lineare inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Vergleichen wir sie mit der Dgl (2.19), dann sehen wir, daß sie einander gleichwertig sind. Der einzige Unterschied besteht in der gesuchten Funktion. Dort war es eine Spannung, hier ist es ein Druck. Der Verlauf der Kurven $U_c = U_c(t)$ und $p = p(t)$ muß bei gleichen Anfangsbedingungen und gleichen Zeitkonstanten der gleiche sein. Es ist klar, daß man also auch pneumatisch ein Verzögerungsglied in seinem Zeitverhalten nachbilden kann. Es gilt hier das gleiche, was anhand des Beispiels 2 durch Vergleich mit der Dgl (2.19) gesagt wurde. (Hierauf beruht die Modellnachbildung von Verzögerungsgliedern beim pneumatischen Modellregelkreis des VEB Geräte- und Reglerwerkes Teltow, dem auch das Schaltungsbeispiel nach Bild 49 entnommen wurde.)

<u>**Beispiel 4:**</u> Wir betrachten eine RLC-Schaltung nach Bild 5o. Es soll die Dgl für den Verlauf der Spannung U_c über dem Kondensator mit der Kapazität C für eine beliebige Eingangsspannung U_e (Gleich- oder Wechselspannung) aufgestellt werden.

Es ist $U_e = U_r + U_l + U_c$; $\dot{U}_c = J/C$; $U_l = L\,\dot{J}$; $U_r = J\,R$

U_r, U_l und J interssieren uns nicht und werden deshalb eliminiert.

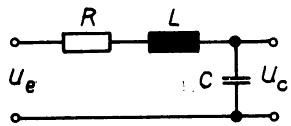


Bild 5o

Aus $\dot{U}_c = J/C$ folgt $J = C\,\dot{U}_c$, $\dot{J} = C\,\ddot{U}_c$. Hiermit wird $U_l = L.C.\ddot{U}_c$ und $U_r = R\,C\,\dot{U}_c$.

Setzen wir diese Gleichungen in $U_e = U_r + U_l + U_c$ ein, dann folgt

$$U_e = R\,C\,\dot{U}_c + L\,C\,\ddot{U}_c + U_c$$

oder

$$L\,C\,\ddot{U}_c + R\,C\,\dot{U}_c + U_c = U_e \qquad (2.3o)$$

Dies ist die gesuchte Dgl für den Spannungsverlauf U_c am Kondensator C. Sie werden später sehen, daß für entsprechend kleines R Schwingungen auftreten können. Damit hat man die Möglichkeit, das Masse-Feder-System des Beispiels 2 auch für den Fall elektrisch nachzubilden, daß dort Schwingungen auftreten. Dies zeigt auch folgende Rechnung: Damit die Dgl (2.3o) der Dgl (2.23) gleichwertig ist, müssen die Gleichungen

$$L\,C = \frac{m}{c} \quad \text{und} \quad R\,C = \frac{k}{c} \tag{2.31}$$

gelten. L C und m/c haben die Dimension $[sec^2]$, R C und k/c haben die Dimension $[sec]$. Sie können das selbst leicht nachprüfen.

Die Gleichungen (2.31) lassen sich, wenigstens theoretisch, durch entsprechende Wahl der R, L, C stets erfüllen. Wir können sagen, die Schaltung nach Bild 5o ist das elektrische Analogon zu Bild 45. Dabei entspricht L der Masse m, C der reziproken Federhärte c und R der Dämpfung k.

Führen wir für die Dgl (2.3o) auch noch die Betrachtung im stationären Zustand für den Fall durch, daß U_e eine Gleichspannung ist. Nach unendlich langer Zeit müssen alle Spannungsänderungen abgeklungen sein. Dann ist $\dot{U}_c = 0$ und $\ddot{U}_c = 0$ und es bleibt

$$U_c = U_e$$

Auch dieses Ergebnis ist verständlich: Bei Gleichheit seiner Spannung U_c mit der Speisespannung U_e kann der Kondensator keine Ladung mehr aufnehmen. In diesem Falle liegt an ihm die gesamte Eingangsspannung.

Beispiel 5: Gegeben sei ein unbelasteter fremderregter Gleichstrommotor, dessen Schaltung in Bild 51 gezeigt ist. U_F sei die konstante Erregerspannung, deren Strom das konstante Magnetfeld erzeugt. Der Anker habe das Massenträgheitsmoment Θ, den ohmschen Widerstand R und die Induktivität L. An den Anker werde die Gleichspannung

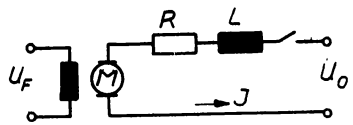


Bild 51

U_o gelegt. Gesucht ist der Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ω nach Einschalten der Spannung U_o. Reibung und Luftwiderstand sollen vernachlässigt werden (Große Motoren).

Es gelten folgende Gleichungen:

$$M_d = \Theta \cdot \varepsilon = \Theta \cdot \dot{\omega} \qquad (*)$$

$\varepsilon = \dot{\omega}$ ist hierbei die Winkelbeschleunigung und M_d das wirksame Drehmoment. Aus der Elektrotechnik ist bekannt

$$M_d = c_1 \cdot \Phi\, J. \qquad (**)$$

c_1 ist hierbei eine Umrechungskonstante, Φ der Magnetfluß, J der Ankerstrom. Weiter ist

$$U_o = U_r + U_l + U_g \qquad (***)$$

U_r = Spannungsabfall über R, U_l = Spannungsabfall über L, U_g = im Anker induzierte Gegenspannung, welche dadurch zustande kommt, daß der Anker sich in einem Magnetfeld dreht (Dynamowirkung).

$$U_r = J\,R; \; U_l = L\,\frac{dJ}{dt}\,; \quad U_g = c_2\,w\cdot\omega\cdot\Phi$$

In der letzten Formel ist c_2 eine Umrechnungskonstante, w ist die Windungszahl der Ankerwicklung und ω die Winkelgeschwindigkeit. (Die induzierte Gegenspannung ist umso größer, je größer die Anzahl der Windungen und je größer die Winkelgeschwindigkeit ist).
Aus den letzten Formeln folgt mit ($\overset{**}{*}$)

$$U_o = J\,R + L\,\dot{J} + c_2\,w\cdot\omega\cdot\Phi \qquad (+)$$

Aus (*) und (**) folgt

$$\Theta\cdot\dot{\omega} = c_1\,\Phi\,J \quad \text{oder } J = \frac{\Theta\cdot\dot{\omega}}{c_1\,\Phi} \quad \text{und } \dot{J} = \frac{\Theta\cdot\ddot{\omega}}{c_1\,\Phi}$$

(Θ, c, Φ sind konstant)
Setzen wir die letzten beiden Formeln in (+) ein, dann ergibt sich

$$U_o = \frac{\Theta\cdot R}{c_1\,\Phi}\,\dot{\omega} + \frac{\Theta\cdot L}{c_1\,\Phi}\,\ddot{\omega} + c_2\,w\,\Phi\cdot\omega$$

Wir dividieren durch den Koeffizienten $c_2 w\,\Phi$ von ω und erhalten

$$\frac{\Theta\cdot L}{c_1 c_2\,w\,\Phi^2}\,\ddot{\omega} + \frac{\Theta\,R}{c_1 c_2\,w\,\Phi^2}\,\dot{\omega} + \omega = \frac{1}{c_2\,w\,\Phi}\,U_o \qquad (2.33)$$

Auch hier ergibt sich eine lineare inhomogene Difft.gl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die gesuchte Funktion $\omega = \omega(t)$, die das Anlaufverhalten des Gleichstrom-Nebenschlußmotors charakterisiert.
Betrachten wir auch hier den stationären Zustand, d.h. den Zustand, in welchem der Motor seine maximale Drehzahl erreicht hat. Es ist dann ω konstant, $\dot{\omega} = 0$ und

$\ddot{\omega} = 0$. Es bleibt

$$\omega = \frac{1}{c_2 \, w \, \Phi} \, U_0,$$

was die bekannte Tatsache ausdrückt, daß die Winkelgeschwindigkeit (Drehzahl) des Motors sich erhöht, wenn der Fluß Φ verringert wird. Das liegt daran, daß bei kleinerem Φ eine größere Drehzahl notwendig ist, um wieder dieselbe Gegenspannung U_g im Anker zu erzeugen. Denn die Gegenspannung ist es, welche nach Erreichen einer bestimmten Drehzahl die Spannung U_0 kompensiert (abgesehen vom Spannungsabfall über R), so daß für den angenommenen Fall des idealen Motors kein Strom J mehr fließen kann. Dann ist auch nach (**) M_d und damit $\dot{\omega} = 0$, d.h. die Winkelgeschwindigkeit ist konstant. Im Realfall nimmt der Motor natürlich noch einen Leerlaufstrom auf, da die auftretenden Reibungsverluste gedeckt werden müssen.

Zusammenfassung

Die lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t)$$

f(t) kann hierbei Null, konstant oder eine Funktion der Zeit sein. Ein Beispiel, in welchem f(t) = 0 ist, haben wir oben nicht behandelt. Wir kommen aber auf diese Form noch zurück.
Unter den oben abgeleiteten Dgln war auch die eines rückwirkungsfrei geschalteten Zweispeichersystems (elektrisch und pneumatisch). Sie hatte die Form

$$T_1 T_2 \ddot{x} + (T_1 + T_2) \dot{x} + x = f(t)$$

ierbei war f(t) die Spannung bzw. der Druck am Eingang es Systems. Wenn Sie noch einmal die Ableitungen der ntsprechenden Dgln verfolgen, dann erkennen Sie, daß irgends von der Annahme U_0 bzw. p_0 = const Gebrauch emacht wurde. Die Dgln gelten demnach auch für veränderiches U_0 bzw. p_0.

enn irgendeine Anordnung auf eine lineare Dgl 2. Ordnung it konstanten Koeffizienten führt, dann kann man das erhalten der Anordnung durch ein rückwirkungsfreies weispeichersystem nachbilden. Das ist aber nur dann öglich, wenn sich die Koeffizienten a_2 und a_1 in zwei ositive reelle Konstanten T_1 und T_2 umformen lassen, o daß

$$T_1 T_2 = a_2 \quad \text{und} \quad T_1 + T_2 = a_1 \qquad \text{(a)}$$

st.

$_1$ und T_2 sind reell, wenn

$$a_1^2 > 4 a_2$$

st.

un müssen T_1 und T_2 aber auch noch positiv sein. Damit as der Fall ist, muß wegen (a) auch a_1 und a_2 positiv ein, denn Produkt und Summe zweier positiver Zahlen önnen auch nur positiv sein. Die Bedingungen für die achbildbarkeit einer Anordnung durch ein rückwirkungsreies Zweispeichersystem sind also

$$\begin{aligned} &1)\quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \\ &2)\quad a_1^2 > 4 a_2 \end{aligned} \qquad (2.34)$$

päter werden Sie sehen, daß unter diesen Bedingungen ich keine Schwingungen auftreten können. Diese Beiiele mögen genügen, Die Dgln hatten immer die Form der leichung (2.18). Das Auftreten von $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ neben x bedeutet, daß die zu einer gegebenen Anordnung gehörende Dgl das dynamische Verhalten der Anordnung beschreibt, denn $\dot{x}$ ist nichts anderes als die zeitliche Änderung von x und $\ddot{x}$ die von $\dot{x}$ (etwa Geschwindigkeit und Beschleunigung nach Beispiel 2). Gerade dieses dynamische Verhalten ist für die Regelungstechnik sehr wichtig, weil dieses die Ursache evtl. auftretender Schwingungen und Instabilitäten ist. Deshalb werden Sie beim Studium der Regelungstechnik immer wieder auf Dgln stoßen.

Aufgaben:

1) Stellen Sie die Dgl für den Spannungsverlauf über dem ohmschen Widerstand der in Bild 50 gegebenen Schaltung auf.

2) Ein Körper nach Bild 53 sei mit Hilfe einer Achse durch seinen Schwerpunkt drehbar und reibungsfrei gelagert. Sein Massenträgheitsmoment, bezogen auf die Drehachse, sei Θ . Ferner sei noch eine Spiralfeder mit der Federhärte c als Rückstellfeder angebracht (Unruhe in einer Uhr). Das System werde dadurch in Drehschwingungen versetzt, daß das freie Federende plötzlich um den Winkel φ_0 tangential auf einer Kreisbahn verschoben und dann festgehalten wird. Wie lautet die Dgl für diesen Vorgang?

3) Stellen Sie die Dgl für U_c der nach Bild 54 gegebenen nicht rückwirkungsfreien Schaltung auf.

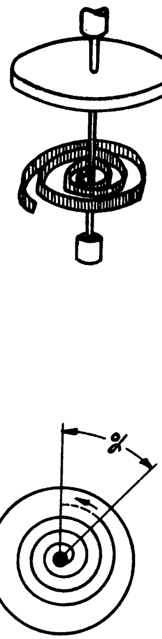


Bild 53

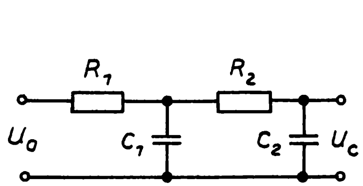


Bild 54

2.3.3 Die Lösung der linearen inhomogenen Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.3.3.1 $f(t) = a = constant$

In der Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t)$$

sei zunächst f(t) eine Konstante, f(t) = a. Dann lautet die Dgl mit a auf der linken Seite

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x - a = 0 \tag{2.35}$$

Wir machen die Substitution

$$x - a = y \tag{2.36}$$

Sie ist nur sinnvoll, wenn a konstant ist. Bilden wir nämlich die Ableitungen

$$\dot{x} = \dot{y} \quad \text{und} \quad \ddot{x} = \ddot{y} ,$$

dann ist in ihnen a nicht mehr vorhanden. Aus der inhomogenen wird die homogene Dgl

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + y = 0 \tag{2.37}$$

(Vergl. auch 1. Lehrbrief 2.2.3.1)

Diese Dgl läßt sich jetzt mit Hilfe des e-Ansatzes leicht lösen. Der e-Ansatz lautet hier wie früher

$$y = C e^{\lambda t} \tag{2.38}$$

Aus ihm folgt

$$\dot{y} = C\,\lambda\,e^{\lambda t} \quad \text{und} \quad \ddot{y} = C \cdot \lambda^2\,e^{\lambda t}$$

Wir setzen in (2.37) ein und erhalten

$$a_2\,C\,\lambda^2\,e^{\lambda t} + a_1\,C\,\lambda\,e^{\lambda t} + C\,e^{\lambda t} = 0$$

Nach Kürzen bleibt die sog. "charakteristische Gleichung"

$$a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + 1 = 0 \qquad (2.39)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des λ.
Die Lösungen sind

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{a_2}\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \qquad (2.40)$$

Nach dieser Gleichung können $\lambda_{1/2}$ entweder reell oder zueinander konjugiert komplex sein. (Der Fall, daß die Wurzel Null wird, soll zunächst nicht betrachtet werden). Das richtet sich danach, ob der Radikand positiv oder negativ ist.

$\lambda_{1/2}$ ist reell, wenn $a_1^2 > 4\,a_2$,

$\lambda_{1/2}$ ist komplex, wenn $a_1^2 < 4\,a_2$ ist.

Außerdem sehen Sie, daß es zwei λ-Werte, λ_1 und λ_2 gibt, welche die charakteristische Gleichung erfüllen. Demzufolge gibt es auch zwei Lösungen

$$y_1 = C_1\,e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad y_2 = C_2\,e^{\lambda_2 t}$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen von y_1 und y_2 in die Dgl, daß in beiden Fällen Null herauskommt. Hierbei müssen Sie natürlich für y_1 und y_2 die nach (2.4o) errechneten Werte einsetzen. Es gilt also

$$a_2 \ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + y_1 = 0$$

$$a_2 \ddot{y}_2 + a_1 \dot{y}_2 + y_2 = 0$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

$$a_2 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + a_1 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + (y_1 + y_2) = 0 \quad (2.41)$$

Es ergibt sich also auch dann Null, wenn wir die Summe

$$y = y_1 + y_2$$

in die Dgl einsetzen. Demnach ist auch y eine Lösung der Dgl (2.37), und wir nennen sie die <u>allgemeine Lösung</u> der homogenen Dgl. Sie lautet

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} =$$

$$= C_1 e^{-\frac{a_1}{2a_2} t + \frac{1}{a_2}\sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2\right)} \cdot t} + C_2 e^{-\frac{a_1}{2a_2} t - \frac{1}{a_2}\sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2\right)} t} \quad (2.42)$$

Macht man nun die Substitution (2.36) wieder rückgängig, dann erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl (2.35)

$$x = a + C_1 e^{-\frac{a_1}{2a_2}t + \frac{1}{a_2}\sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2\right)}\,t} + C_2 e^{-\frac{a_1}{2a_2}t - \frac{1}{a_2}\sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2\right)}\cdot t} \quad (2.43)$$

Hierin sind C_1 und C_2 beliebige Konstanten, die noch bestimmt werden müssen. Das geschieht durch Festlegen der Anfangsbedingungen. C_1 und C_2 nennt man die Integrationskonstanten. Werden sie bestimmt, dann ergibt sich aus (2.43) eine "partikuläre Lösung" der Dgl (2.35). Es ist noch darauf hinzuweisen, daß jetzt zwei voneinander unabhängige Anfangsbedingungen aufgestellt werden müssen, da zwei Konstanten bestimmt werden müssen. Wie das geschieht, werden Sie in den Beispielen sehen.
Zunächst betrachten wir die Dgl des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems nach (2.32)

$$T_1 T_2 \ddot{U}_c + (T_1 + T_2)\dot{U}_c + U_c = U_o$$

U_o sei eine konstante Gleichspannung. Wir machen die Substitution

$$U_c - U_o = y; \quad \dot{U}_c = \dot{y}; \quad \ddot{U}_c = \ddot{y}$$

und erhalten

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2)\dot{y} + y = 0.$$

Der e-Ansatz lautet

$$y = C\,e^{\lambda t}; \quad \dot{y} = C\,\lambda e^{\lambda t}; \quad \ddot{y} = C\,\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir aus der Dgl die charakteristische Gleichung (in welcher $C\,e^{\lambda t}$ schon gekürzt ist)

$$T_1 T_2 \lambda^2 + (T_1 + T_2)\lambda + 1 = 0.$$

Ihre Lösungen, die Sie leicht nachrechnen können, lauten

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1} ; \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}$$

Sie sind also reell. Wir vermerken: Die Wurzeln λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung des Zweispeichersystems sind gleich den negativ-reziproken Zeitkonstanten der einzelnen Speicher.
Damit erhalten wir die Lösung der homogenen Dgl

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$$

und nach Beseitigung der Substitution

$$U_c = U_o + C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \qquad (2.44)$$

Jetzt haben wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl, in welcher nun die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmt werden müssen. Dazu sind zwei Bedingungen notwendig. Rein mathematisch sind diese Bedingungen völlig willkürlich, da die beiden Integrationskonstanten jede beliebige Zahl sein können. Physikalisch sind natürlich die beiden Bedingungen durch das gestellte Problem gegeben. In unserem Falle wollen wir annehmen, daß vor dem Einschalten der Spannung U_o beide Kondensatoren völlig entladen sind. Dann wäre zur Zeit $t = 0$ die Spannung $U_c = 0$ und auch $U_I = 0$ (Bild 44).
Damit sind zwei Anfangswerte gegeben. Wir hätten diese Bedingungen natürlich auch anders wählen können. Z.B. hätten wir den Kondensatoren vor Beginn des Einschaltens von U_o die Spannungen $U_c = U_{co}$ und $U_I = U_{IO}$ erteilen können. Auch in diesem Falle liefert die Dgl die hierzu

passende Aufladungskurve des Kondensators C_2, denn die Aufstellung der Dgl gilt ganz allgemein. Dort wurde über die Anfangszustände der Kondensatorspannungen nichts vorausgesetzt. In unserer Dgl kommt die Spannung U_I nicht vor. Aus diesem Grunde müssen wir versuchen, die Bedingung $U_I = 0$ so umzuformen, daß sie durch U_c ausgedrückt wird. Zu diesem Ende betrachten wir noch einmal die allein für den Kreis II (Bild 44) geltende Dgl. Sie lautete

$$T_2 \dot{U}_c + U_c = U_{II} = U_I$$

oder anders geschrieben

$$\dot{U}_c = \frac{1}{T_2} \cdot (U_I - U_c)$$

Dies bedeutet: Die Änderungsgeschwindigkeit $\dot{U}_c$ der Spannung U_c am Kondensator C_2 ist proportional der an II liegenden Spannungsdifferenz $U_I - U_c$.
Im ersten Augenblick sollten nach Voraussetzung die an den Kondensatoren liegenden Spannungen $U_I = U_c = 0$ sein. Setzen wir diese Werte in unsere umgeformte Dgl ein, dann folgt, daß auch $\dot{U}_c = 0$ sein muß. Damit lauten die Anfangsbedingungen

Zur Zeit $t = 0$ ist $U_c = 0$ und $\dot{U}_c = 0$.

Aus der für verschiedene Werte von C_1 und C_2 sich ergebenden Kurvenschar der allgemeinen Lösung (2.44) muß nun diejenige Kurve herausgesucht werden, welche diese gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Dazu differenzieren wir (2.44) nach der Zeit t und erhalten

$$\dot{U}_c = -\frac{C_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{C_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \qquad (2.44\ a)$$

Setzen wir nun in (2.44) und (2.44 a) die beiden Anfangswerte mit $t = 0$ ein, dann erhalten wir unter Beachtung von $e^0 = 1$ zwei Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten C_1 und C_2. Sie lauten

$$0 = U_o + C_1 + C_2 \quad \text{(aus (2.44)) und}$$

$$0 = -\frac{C_1}{T_1} - \frac{C_2}{T_2} \quad \text{(aus (2.44 a)}$$

Aus ihnen berechnet sich

$$C_1 = -T_1 \frac{1}{T_1 - T_2} U_o \text{ und } C_2 = +\frac{T_2}{T_1 - T_2} U_o$$

Diese Ergebnisse setzen wir in die Lösung (2.44) der Dgl ein und erhalten das partikuläre Integral

$$U_c = U_o \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \tag{2.45}$$

Bild 55 zeigt den Verlauf der Funktion (2.45), wie er sich nach Aufstellen einer Wertetabelle und Aufzeichnen auf Millimeterpapier ergibt.
Wenn also an die Schaltung nach Bild 44 eine konstante Gleichspannung U_o plötzlich angelegt wird, so daß sie einen Verlauf nach Bild 56 hat, dann ändert sich die Spannung U_c nach der Funktion (2.45).
Für die Schaltung nach Bild 44 ist U_o die "Eingangsgröße" und U_c die "Ausgangsgröße". Die Funktion $U_a = U_c(t)$ wird in der Regelungstechnik die "Übergangsfunktion" der gegebenen Schaltung genannt, da sie zeigt, wie die Ausgangsgröße in den neuen Endwert übergeht, wenn

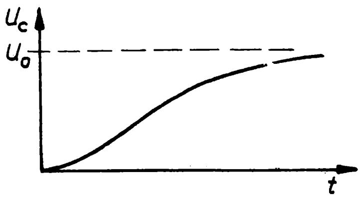


Bild 55

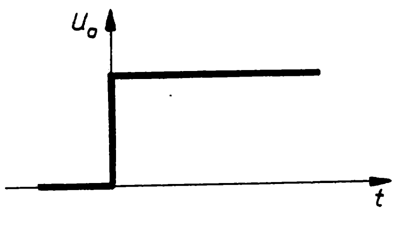


Bild 56

die Eingangsgröße in bestimmter Weise geändert wird. Als nächstes Beispiel betrachten wir die Dgl (2.23)

$$\frac{m}{c}\,\ddot{x}_a + \frac{k}{c}\,\dot{x}_a + x_a = x_e \tag{2.23}$$

Der Stab 1 möge ruckartig um die Länge x_e nach unten gedrückt werden (Bild 45) und danach konstant bleiben Bild 57 zeigt den Verlauf von x_e in Abhängigkeit von

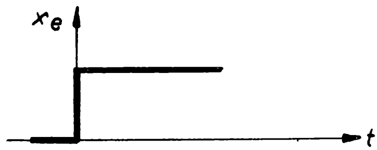


Bild 57

der Zeit t. Mit

$$x_a - x_e = y$$

wird

$$\frac{m}{c}\ddot{y} + \frac{k}{c}\dot{y} + y = 0$$

Mit dem e-Ansatz folgt die charakteristische Gleichung

$$\frac{m}{c}\lambda^2 + \frac{k}{c}\lambda + 1 = 0$$

Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}} =$$

$$= -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{\frac{k^2}{4mc} - 1} \qquad (2.46)$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $\frac{k^2}{4\ mc} > 1$. Dann ist die letzte Wurzel reell und damit wird auch λ reell. Die Bedingung $k^2/4mc > 1$ oder $k^2 > 4\ mc$ stimmt mit der Bedingung (2.25) überein. Das bedeutet, daß in diesem Falle die mechanische Schwingungsanordnung durch ein Zweispeichersystem nach Bild 44 oder Bild 49 nachgebildet werden kann und damit den gleichen Lösungsverlauf haben muß. Durch Vergleich der Dgln (2.23) und (2.19) ergibt sich für

$$T_1\, T_2 = \frac{m}{c} \quad \text{und} \quad T_1 + T_2 = \frac{k}{c}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt T_1 und T_2, ausgedrückt durch m, k und c.

$$T_{1/2} = + \frac{k}{2\ c} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\ c^2} - \frac{m}{c}}$$

Die Wurzel ist reell, wenn

$$\frac{k^2}{4\ c^2} > \frac{m}{c} \quad \text{oder wenn} \quad k^2 > 4\ m\ c$$

ist. Das aber war unsere obige Bedingung, für welche die Lösung gilt. Dann sind auch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell. Außerdem erkennen Sie, daß T_1 und T_2 positiv werden, denn die Wurzel ist kleiner als $k/2c$, so daß auch im Falle des Minuszeichens vor der Wurzel insgesamt ein positiver Wert herauskommt.
Sie können nun die für T_1 und T_2 errechneten Werte in die Lösung (2.45) des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems einsetzen und erhalten für den Fall 1) die Lösung der Dgl. Sie hat denselben Verlauf wie die dort besprochene Kurve.

Natürlich können Sie diese Lösung auch mit dem e-Ansatz und den λ-Werten (2.46) erhalten. Führen Sie diese Rechnungen durch und vergleichen Sie beide.
Interessant wird für uns der Fall 2, in welchem die Wurzel imaginär wird.

2) $\frac{k^2}{4\,mc} < 1$. Die Wurzel wird imaginär, λ_1 und λ_2 werden zueinander konjugiert komplex. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung schreiben wir folgendermaßen:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2\,m} \pm \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{\frac{k^2}{4\,mc} - 1} = -\frac{k}{2\,m} \pm \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{(-1)(1 - \frac{k^2}{4mc})}$$

$$= -\frac{k}{2\,m} \pm j\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\,mc}}$$

Durch die kleine Umformung unter der Wurzel ist in der letzten Gleichung die Wurzel selbst reell geworden.
Zur weiteren Rechnung ist es zweckmäßig, folgende Abkürzungen einzuführen:

$$\frac{k}{2\,m} = \delta \qquad (2.47)$$

$$\overline{\frac{c}{m}} = \omega_0 \qquad (2.48)$$

$$\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\,m\,c}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\,m\,c}} = \omega \qquad (2.49)$$

Damit wird

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm j\omega \qquad (2.50)$$

Die Abkürzungen δ und ω sind in der weiteren Rechnung als bekannte Zahlen anzusehen, denn sie lassen sich nach den Gleichungen (2.47) bis (2.49) aus m, k und c

berechnen. Die allgemeine Lösung ergibt sich nun aus dem e-Ansatz mit (2.5o).

$$x_a = x_e + C_1\, e^{-\delta t + j\omega t} + C_2\, e^{-\delta t - j\omega t} \qquad (2.51)$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 legen wir nun die Anfangswerte fest:

Zur Zeit $t = 0$, also im Augenblick des Eingangsstoßes, habe die Masse m die Lage $x_a = 0$ und außerdem sei ihre Geschwindigkeit $\dot{x}_a = 0$. (Das System sei energielos).
Aus (2.51) folgt

$$\dot{x}_a = C_1\,(-\delta + j\,\omega)\, e^{-\delta t + j\omega t} + C_2(-\delta - j\omega)e^{-\delta t - j\omega t} \qquad (2.52)$$

Für $t = 0$ folgt aus (2.51) mit $\dot{x}_a = 0$

$$0 = x_e + C_1 + C_2$$

und für $t = 0$ mit $x_a = 0$ aus (2.52)

$$0 = C_1\,(-\delta + j\omega) + C_2\,(-\delta - j\omega)$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnen wir C_1 und C_2.
Es ist

$$C_2 = -\,x_e - C_1\,.$$

Hiermit folgt aus der zweiten Gleichung

$$C_1 = \frac{-\,x_e\,(\delta + j\,\omega)}{2\,j\,\omega} = -\,\frac{x_e}{2}\,(1 - j\,\frac{\delta}{\omega})$$

und

$$C_2 = - x_e + x_e \frac{1 - j \frac{\delta}{\omega}}{2} = - \frac{x_e}{2} \left(1 + j \frac{\delta}{\omega}\right)$$

Diese Werte für C_1 und C_2 setzen wir in (2.51) ein und erhalten die partikuläre Lösung

$$x_a = x_e \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - j \frac{\delta}{\omega}\right) e^{- \delta t + j \omega t} - \frac{1}{2} \left(1 + j \frac{\delta}{\omega}\right) e^{- \delta t - j \omega t} \right]$$

Diese Funktion läßt sich nicht überblicken. Deshalb formen wir sie um. Das geschieht in folgenden Schritten:

$$x_a = x_e \left[1 - \frac{1}{2} e^{- \delta t} \left\{ \left(1 - j \frac{\delta}{\omega}\right) e^{j \omega t} + \left(1 + j \frac{\delta}{\omega}\right) \cdot e^{-j \omega t} \right\} \right. \qquad (2.53)$$

Nun ist

$$e^{j \omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t; \quad e^{- j \omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer wird hiermit, wenn Sie diese Ausdrücke in die letzte Gleichung einsetzen, ausmultiplizieren und kürzen*

$$\{...\} = 2 \cos \omega t + 2 \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \qquad (2,54$$

Diesen Ausdruck formen wir noch so um, daß durch Anwendung eines Additionstheorems eine Vereinfachung möglich wird. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zwei neue Zahlen A und φ aus den beiden Gleichungen

$$A \sin \varphi = 1 \quad \text{und} \quad A \cos \varphi = \frac{\delta}{\omega} \qquad (2.55)$$

Es ist dann

$$A^2 = 1 + \frac{\delta^2}{\omega^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{\omega}{\delta} \qquad (2.56)$$

In (2.54) ist $1 = A \sin\varphi$ der Koeffizient von $\cos\omega t$ und $\frac{\delta}{\omega} = A \cos\varphi$ der von $\sin\omega t$. Zunächst einmal ist es einleuchtend, daß die Einführung zweier solcher Zahlen A und φ mathematisch völlig in Ordnung ist, denn wir drücken mit ihnen die beiden bekannten Zahlen δ und ω nur durch zwei andere, aus (2.56) zu berechnende Zahlen aus. (Man könnte z.B. die Zahl 10 durch 2 + 8, 2 . 5; 10 . $\sqrt{2}$. sin 45° oder noch umständlicher ausdrücken).

Den Sinn der Einführung von A und φ sehen Sie ein, wenn Sie die Gln (2.55) in (2.54) einsetzen. Die Gln (2.55) sind nämlich so gewählt, daß auf (2.54) ein Additionstheorem anwendbar ist:

$$\{\dots\} = 2\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right) = 2A\left(\cos\omega t \sin\varphi + \sin\omega t \cos\varphi\right)$$
$$= 2A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2,57)$$

Anstelle der Gln (2.55) hätten Sie auch

$$A\cos\varphi = 1 \text{ und } A\sin\varphi = \frac{\delta}{\omega}$$

wählen können. Allerdings hätte sich dann $A \cdot \cos(\omega t - \varphi_1)$ ergeben. Dabei hätte φ_1 einen solchen Wert, daß die nach dieser Funktion bestimmte Kurve mit der nach (2.52) gegebenen übereinstimmt. $A \cdot \cos(\omega t - \varphi_1)$ wäre nur eine andere Form von (2.57).

Wir setzen nun (2.57) in (2.53) ein und erhalten, wenn wirnoch A nach (2.56) ausdrücken, die übersichtliche Lösung der Dgl

$$x_a = x_e\left[1 - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\; e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)\right] \qquad (2.58)$$

Dieses Ergebnis ergibt den Verlauf der gesuchten Funktion $x_a = x_a(t)$. Wir wollen es noch etwas genauer untersuchen.

δ und ω sind zwei Zahlen, welche nicht von der Zeit t abhängen und sich aus den gegebenen Werten m, k und c nach den Formeln (2.47) bis (2.49) berechnen lassen. Sie stellen also feste Zahlenwerte dar. Damit wird auch die in (2.58) auftretende Wurzel ein fester Zahlenwert. Der Subtrahend in (2.58)

$$\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

stellt eine Sinusschwingung dar, in welcher

$$\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\, e^{-\delta t}$$

die Amplitude ist. Wegen $e^{-\delta t}$ hängt diese Amplitude von der Zeit t ab. Da die e-Funktion mit wachsendem t gegen Null geht, so geht auch die Amplitude der Schwingung gegen Null. Für $t \to \infty$ wird also in (2.58) der ganze Subtrahend Null und es bleibt

$$x_a = x_e$$

Bild 58 zeigt zunächst den Verlauf der Funktion

$$- \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Sie ist in (2.58) der Subtrahend in der eckigen Klammer, wegen (2.55) und (2.56) ist für t = 0 $- \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} \cdot \sin\varphi = -1$ (für t = 0 ist $e^{-\delta t} = 1$)

Wollen wir jetzt den Verlauf der Funktion (2.58) haben, dann müssen wir nach (2.58) zu jedem Wert der in Bild 58 gezeichneten Funktion noch 1 addieren (das ergibt die eckige Klammer), und dies Ergebnis muß dann mit x_e multi-

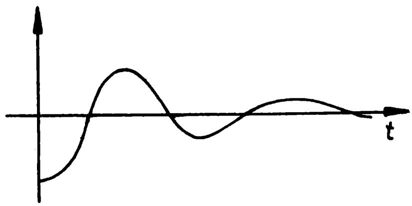


Bild 58

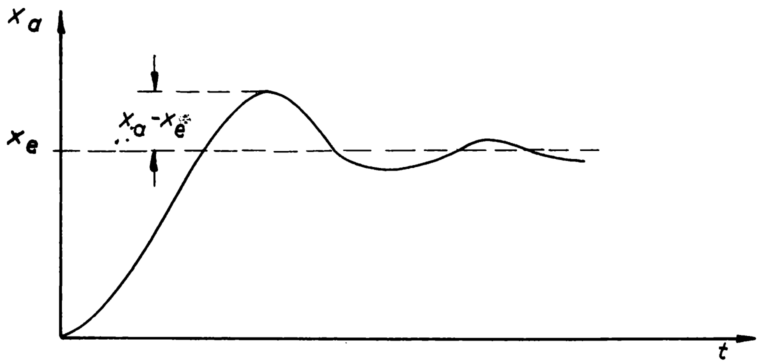


Bild 59

pliziert werden. Durch die Multiplikation mit x_e werden die Ordinaten der Kurve gestreckt. Der charakteristische Verlauf bleibt bestehen. Den Verlauf von x_a zeigt Bild 59. Die Kurve beginnt im Nullpunkt mit waagerechter Tangente, wie es nach den vorgegebenen Anfangsbedingungen ($x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$) auch sein muß.
Die Kreisfrequenz der Schwingung ist ω oder nach (2.49)

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4mc}}$$

Hieraus errechnet sich die Frequenz f und die Schwingungsdauer ν

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\nu}$$

Im Argument der Sinusfunktion steht noch der Winkel φ. Als Phasenverschiebung kann man ihn schlecht deuten, da wir unsere Schwingung nicht mit einer anderen Schwingung vergleichen. Er sagt einfach aus, daß $\sin(\omega t + \varphi)$ für $t = 0$ zu $\sin\varphi$ wird und damit ungleich Null ist. Nach Bild 59 hat nun die Funktion $x_a = x_a(t)$ an der Stelle $t = 0$ ein Minimum ($x_a = 0$). Die sin-Funktion hat ihre Extremwerte aber an den Stellen $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ... , oder $t = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$, $\frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$, ...
Für $t = 0$ hat also $\sin\varphi$ keinen Extremwert. Aus unseren Überlegungen folgt aber, daß für die Funktion $x_a = x_a(t)$ an der Stelle $t = 0$, wo $\sin(\omega t + \varphi) = \sin\varphi$ ist, ein Extremwert auftritt. Das erklärt sich dadurch, daß der Verlauf der Funktion x_a nicht nur durch $\sin(\omega t + \varphi)$, sondern in der Hauptsache durch $e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ bestimmt wird. Durch den Einfluß der e-Funktion erleidet die sin-Funktion eine Verzerrung, die eine Verlagerung der Extrema zur Folge hat.
Jetzt betrachten wir Bild 59 und sehen, daß die Funktion

x_a um den Endwert x_e gedämpft schwingt, bis sie den Wert x_e nach unendlich langer Zeit schließlich erreicht. Wir interessieren uns für die Lage der Extrema von x_a. Dazu bilden wir $dx_a/dt = 0$. Wir brauchen jedoch nicht die ganze Funktion (2.58) zu differenzieren, sondern begnügen uns mit dem Anteil, der nur von t abhängt, denn wo seine Extrema liegen, müssen auch die von x_a liegen. Wir bilden

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)\right] =$$

$$= -\delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + e^{-\delta t} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\omega}{\delta} \qquad (2.59)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Zeiten, bei denen Extrema auftreten. Nach (2.56) ist $\tan\varphi = \frac{\omega}{\delta}$. Danach ergibt sich

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\omega}{\delta} = \tan\varphi$$

Als erster Wert für t ergibt sich hieraus

$$t_o = 0$$

Dieses Ergebnis ist uns bereits bekannt. Bei $t_o = 0$ liegt ein Minimum von x_a.
Der nächste Extremwert liegt bei

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

denn es ist

$$\tan(\omega t_1 + \varphi) = \tan(\pi + \varphi) = \tan\varphi = \frac{\omega}{\delta}$$

(Sie kennen die allgemeine Beziehung $\tan\varphi = \tan(\varphi + \pi) = \ldots$
$\ldots = \tan(\varphi + k\pi)$)

Da bei $t_o = 0$ ein Minimum lag, muß bei $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ ein Maximum liegen, denn zwischen t_o und t_1 liegt kein weiterer Extremwert. Danach folgt bei $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ wieder ein Minimum, bei $t_3 = \frac{3\pi}{\omega}$ ein Maximum und so fort.
Da wir es nun mit einer gedämpften Schwingung zu tun haben, muß das erste Maximum zugleich den größten Wert liefern, welchen die Funktion $x_a = x_a(t)$ überhaupt annimmt.
Die Funktion x_a zeigt an dieser Stelle die größte Überschwingung. Als Überschwingung wollen wir den Ausdruck

$$\frac{x_a - x_e}{x_e}$$

definieren. Offenbar gibt er an, um welchen Wert die Funktion x_a über den sich nach unendlich langer Zeit einstellenden Wert x_e überschwingt bezogen auf $x_e = 1$. Ergibt sich hierfür z.B. 0,3, dann bedeutet das, daß wegen

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = 0{,}3 \qquad x_a = x_e + 0{,}3\, x_e \text{ ist,}$$

d.h. im ersten Maximum würde die Funktion x_a um das 0,3-fache des Endwertes über den Endwert hinausschwingen.
Diese Überschwingung spielt z.B. bei Meßgeräten eine große Rolle. Würde man sie so stark dämpfen, daß keine Überschwingung auftritt, sondern daß sie sich nach Bild [illegible] auf den Endwert einstellen, dann würde der Einstellvorgang länger dauern, als wenn man eine Überschwingung zuläßt. Gibt man die Größe dieser Überschwingung vor, dann kann man die Stärke der Dämpfung berechnen.
Wir können nun leicht die Überschwingung berechnen.
Zunächst erhalten wir aus (2.58)

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} \, e^{-\delta t} \sin (\omega t + \varphi)$$

Hier setzen wir $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ ein und erhalten

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} \, e^{-\frac{\delta \pi}{\omega}} \sin (\pi + \varphi)$$

Nun ist $\sin (\pi + \varphi) = - \sin \varphi$ und außerdem ist nach (2.55) und (2.56)

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}}$$

Wir erhalten schließlich

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = e^{-\frac{\delta \pi}{\omega}} \qquad (2.60)$$

Man sieht aus dieser Formel, daß die Überschwingung kleiner wird, je größer δ (und nach (2.47) auch k = Dämpfung) und je kleiner die Kreisfrequenz ω der Schwingung gemacht wird. Das ist auch erklärlich, denn im Falle großer Dämpfung kann es nach Fall 1) dazu kommen, daß gar keine Schwingung mehr auftritt. Andererseits wird bei großer Frequenz die Überschwingung deshalb klein werden, weil die Masse m für eine große Überschwingung "keine Zeit hat".

Es gibt noch einige andere Beziehungen, die aus (2.58) folgen, z.B. das sog. "logarithmische Dekrement". Sie sind aber in unserem Zusammenhang nicht so wichtig. Sie können das in entsprechenden Lehrbüchern nachlesen.
Einen wichtigen Sonderfall aber wollen wir noch betrachten. In der Dgl (2.23) sei k = 0.

$$\frac{m}{c}\ddot{x}_a + x_a = x_e \qquad (2.61)$$

Das Dämpfungsglied ist also Null. Ideal kann man diesen Fall natürlich nicht verwirklichen, denn jede Schwingung kommt nach einer gewissen Zeit zur Ruhe, wenn sie nicht periodisch angeregt wird. Trotzdem spielt dieser Sonderfall in der Praxis eine große Rolle. Die Dgl (2.61) kann in der Regelungstechnik mit entsprechenden Koeffizienten als Dgl eines instabilen Regelkreises auftreten. Ferner weiß man in der Mechanik, daß eine Welle mit umlaufender Masse m (Bild 6o) wegen der elastischen Eigen-

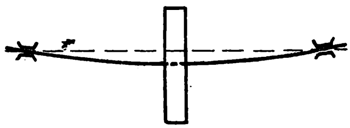


Bild 6o

schaft der Welle ein Feder-Masse-System darstellt. Die Schwingungszahl dieses ungedämpften Systems stimmt mit der sog. "kritischen Drehzahl" überein. Es gibt für (2.61) noch manch anderes Beispiel.
Mit k = 0 wird nach (2.49)

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Wir haben damit eine Deutung für die dort eingeführte Zahl ω_0 gefunden. ω_0 ist die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems.
Gleichzeitig sieht man aus (2.49), daß die Kreisfre-

quenz des gedämpften Systems kleiner ist als die des ungedämpften Systems, denn

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{k^2}{4mc}} < \omega_0 \qquad (2.62)$$

Das gedämpfte System schwingt also langsamer, als das gleiche System im ungedämpften Zustande.
Mit k = 0 ist auch wegen (2.47) $\delta = 0$ und es ist

$$e^{-\delta t} = 1$$

Damit erhält man aus (2.58)

$$x_a = x_e \left[1 - \sin(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

Für $\delta = 0$ wird $\tan \varphi = \frac{\omega_0}{\delta} = \infty$ und damit $\varphi = \pi/2$, also

$$x_a = x_e \left[1 - \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= x_e \left[1 - \cos \omega_0 t\right] \qquad (2.63)$$

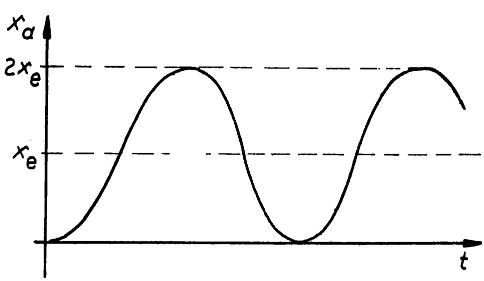


Bild 61

Den Verlauf dieser Funktion zeigt Bild 61. Der Wert von x_a schwingt mit gleichbleibender Amplitude um die Schwingungsachse x_e. Wie es sein muß, folgt mit $\delta = 0$ aus (2.60)

$$\frac{x_a - x_e}{x_e} = 1$$

oder $x_a = 2\,x_e$ im ersten Maximum und damit auch in allen folgenden.

Wir wollen nun die einzelnen Stufen der Rechnung noch einmal übersichtlich zusammenstellen, da wegen der langwierigen Umformungen der Zusammenhang leicht verloren gehen kann.

Gegeben sei die gewöhnliche lineare inhomogene Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten eines Masse-Federsystems mit Flüssigkeitsdämpfung

$$\frac{m}{c}\,\ddot{x}_a + \frac{k}{c}\,x_a + \dot{x}_a = x_e$$

mit x_e = const.
Mit der Substitution

$$x_a - x_e = y$$

folgt die homogene Dgl

$$\frac{m}{c}\,\ddot{y} + \frac{k}{c}\,\dot{y} + y = 0$$

Der Lösungsansatz lautet

$$y = C\,e^{\lambda t}$$

Er liefert die charakteristische Gleichung

$$\frac{m}{c}\lambda^2 + \frac{k}{c}\lambda + 1 = 0$$

und hieraus

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{\frac{k^2}{4mc} - 1}$$

Da die Wurzel reell oder imaginär sein kann, sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Wurzel reell. Das ist der Fall, wenn

$$k^2 > 4\,m\,c$$

In diesem Falle stimmt die Lösung der Dgl mit der Lösung der Dgl des rückwirkungsfreien Zweispeichersystems überein. In der dortigen Lösung berechne man T_1 und T_2 aus den beiden Gleichungen

$$T_1\,T_2 = m/c \text{ und } T_1 + T_2 = k/c$$

2) Wurzel imaginär. Das ist der Fall, wenn

$$k^2 < 4\,m\,c \quad \text{(geringe Dämpfung)}$$

Dann kann man mit den Abkürzungen

$$k/2m = \delta \text{ und } \sqrt{c/m}\sqrt{1 - k^2/4mc} = \omega$$

schreiben

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm j\omega$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_a = 0$ und $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$ folgt nach entsprechender Umformung

$$x_a = x_e\left[1 - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)\right] \quad \tan\varphi = \frac{\omega}{\delta}$$

Den Verlauf dieser Funktion zeigt Bild 59. Es ist eine gedämpfte Schwingung mit der Kreisfrequenz ω, der Frequenz $f = \omega/2\pi$. Nach theoretisch unendlich langer Zeit wird $x_a = x_e$.
Die erste Überschwingung (1. Maximum) tritt nach der Zeit $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ auf. Die Größe dieser Überschwingung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{x}_a - x_e}{x_e} = e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}}$$

Ist in der gegebenen Dgl k = 0, d.h. handelt es sich um ein Masse-Federsystem ohne Dämpfung, dann lautet die Dgl

$$\frac{m}{c}\ddot{x}_a + x_a = x_e$$

Da k = 0, m, c $\neq$ 0 sind, ist immer $k^2 = 0 < 4\,m\,c$, d.h. es ergibt sich immer eine Schwingung. Die Lösung lautet für $x_a = 0$, $\dot{x}_a = 0$ bei $t = 0$

$$x_a = x_e\left[1 - \cos\omega_o t\right]$$

Hierbei ist $\omega_o = \sqrt{c/m}$. Da jetzt die Abklingfunktion $e^{-\delta t}$ in der Amplitude des cos-Gliedes nicht vorhanden ist, handelt es sich hier um eine ungedämpfte Schwingung. Die Masse schwingt (theoretisch) unendlich lange mit gleicher Amplitude. Ein Vergleich der Kreisfrequenz ω der gedämpften mit ω_o der ungedämpften Schwingung ergibt sich aus der Beziehung

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4mc}}\;;\quad \omega_o = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Es ist

$$\omega = \omega_o\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\,mc}}\ \text{d.h.}\ \omega < \omega_o$$

Soweit die Zusammenfassung. Es gibt nun aber noch einen dritten Fall, der wegen seines anderen Lösungsansatzes etwas aus dem Rahmen herausfällt. Deshalb wollen wir ihn zum Schluß unseres Beispieles gesondert behandeln. Wir haben die Lösungen der Dgl (2.23) für die beiden Fälle $k^2 > 4\,m\,c$ und $k^2 < 4\,m\,c$ behandelt.
Was passiert nun, wenn $k^2 = 4\,m\,c$ ist? Nach (2.46) tritt in diesem Falle eine Doppelwurzel

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{k}{2\,m}$$

auf und die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$\frac{m}{c}\ddot{y} + \frac{k}{c}\dot{y} + y = 0$$

müßte bei Anwendung der bisherigen Methode lauten

$$y = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t} = (C_1 + C_2)\,e^{\lambda_1 t} = C\,e^{\lambda_1 t}$$

denn offenbar ist auch $C_1 + C_2 = C$ ebenfalls eine willkürliche Konstante. Würden wir so verfahren, dann hätte die allgemeine Lösung der homogenen Dgl und mit ihr auch die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl nur eine Integrationskonstante und das ist offenbar nicht möglich.
Wir wollen diesen Fall nicht auf unser letztes Beispiel beschränken und gehen deshalb von der allgemeinen Dgl (2.35)

$$a_2\,\ddot{x} + a_1\,\dot{x} + x = a$$

aus. Mit der Substitution

$$x - a = y \quad (a = \mathrm{const})$$

folgt

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + y = 0.$$

Der Lösungsansatz lautet

$$y = C\, e^{\lambda t}$$

Damit wird nach Kürzen von C

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + a_1 \frac{d}{dt} e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1) =$$

$$= e^{\lambda t} f(\lambda). \qquad (2.64)$$

Hierbei ist

$$f(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1$$

gesetzt worden.
Die Gleichung (2.64) gilt nicht nur für die Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung, sondern sie gilt auch für beliebiges, d.h. veränderliches λ. Wir können sie nach λ differenzieren. Dadurch erhalten wir

$$a_2 \frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (e^{\lambda t}) + a_1 \frac{d}{d\lambda} \frac{d}{dt} (e^{\lambda t}) + \frac{d}{d\lambda} (e^{\lambda t}) =$$

$$= t\, e^{\lambda t} f(\lambda) + e^{\lambda t} f'(\lambda)$$

Offenbar ist nun bei den doppelten Differentialquotienten links die Reihenfolge der Differentiation gleichgültig. (Sie können sich durch Ausrechnung leicht davon überzeugen!) Deshalb können wir auch schreiben

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\right) + a_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\right) + a_0 =$$

$$= t\, e^{\lambda t} f(\lambda) + e^{\lambda t} f'(\lambda)$$

und nach ausgeführter Differentiation nach

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} \left(t\, e^{\lambda t}\right) + a_1 \frac{d}{dt} \left(t\, e^{\lambda t}\right) + t\, e^{\lambda t} = t\, e^{\lambda t} f(\lambda) +$$

$$+ e^{\lambda t} f'(\lambda) \qquad (2.65)$$

Die charakteristische Gleichung der homogenen Dgl lautet

$$f(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1 = 0$$

Die Lösungen für $f(\lambda) = 0$ sind

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2\, a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^{\,2}}{4\, a_2^{\,2}} - \frac{1}{a_2}}$$

Es soll jetzt eine Doppellösung vorliegen. Die Wurzel ist dann Null und es wird

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2\, a_2}$$

In (2.65) ist für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \mid f(\lambda) = f(\lambda_1) = 0$, denn so ist $\lambda_1 = \lambda_2$ berechnet worden. Ferner ist

$$f'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = 2\, a_2 \lambda + a_1.$$

Setzt man hier $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2\, a_2}$ ein, dann ergibt sich auch für $f'(\lambda_1) = 0$. (Beachten Sie, daß dies nur im Falle einer Doppelwurzel gilt!). Damit ist die rechte Seite von (2.65) für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ Null und es ist

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} (t\, e^{\lambda t}) + a_1 \frac{d}{dt} (t\, e^{\lambda t}) + t\, e^{\lambda t} = 0$$

Was bedeutet dieses Ergebnis? Die gegebene Dgl lautete

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + y = 0$$

Setzen Sie für y den Wert $t\, e^{\lambda t}$ in die Dgl ein, dann kommt nach unserem Ergebnis ebenfalls Null heraus. Allerdings ist das nur dann der Fall, wenn eine Doppelwurzel vorliegt, da sonst die rechte Seite von (2.65) wegen $f'(\lambda) \neq 0$ nicht Null wird.

Für den Fall einer Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung ist

$$y_2 = t\, e^{\lambda_1 t}$$

oder allgemeiner

$$y_2 = C_2\, t\, e^{\lambda_1 t}$$

ebenfalls eine Lösung der homogenen Dgl

$$a_2\,\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + y = 0.$$

Da

$$y_1 = C_1\,e^{\lambda_1 t}$$

ebenfalls eine Lösung der homogenen Dgl ist, so lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$y = y_1 + y_2 = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,t\,e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2\,t)\,e^{\lambda_1 t} \tag{2.66}$$

Wir wollen das Ergebnis nun auf unsere beiden letzten Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Gegeben sei ein rückwirkungsfreies Zweispeichersystem mit den Zeitkonstanten $T_1 = T_2 = T$. Wie lautet die Übergangsfunktion für $U_c = 0$, $\dot{U}_c = 0$ bei $t = 0$? Nach (2.19) lautet die Dgl

$$T^2\,\ddot{U}_c + 2\,T\,\dot{U}_c + U_c = U_o \qquad \text{mit } U_o = \text{const.}$$

Substitution

$$y = U_c - U_o \text{ ergibt}$$

$$T^2\,\ddot{y} + 2\,T\,\dot{y} + y = 0$$

Mit dem Ansatz

$$y = C\,e^{\lambda t}$$

folgt die charakteristische Gleichung

$$T^2 \lambda^2 + 2T\lambda + 1 = 0,$$

deren Lösung die Doppelwurzel

$$\lambda_1 = - \frac{1}{T}$$

ist. Wegen der Doppelwurzel wird nach (2.66) die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{t}{T}}$$

und es ist

$$U_c = U_o + (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Durch Differenzieren folgt

$$\dot{U}_c = C_2\, e^{-\frac{t}{T}} - (C_1 + C_2 t)\, \frac{1}{T}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Mit den Anfangswerten $U_c = 0$ und $\dot{U}_c = 0$ für $t = o$ folgt

$$0 = U_o + C_1 \quad \text{und} \quad 0 = C_2 - \frac{C_1}{T}$$

Also ist

$$C_1 = - U_o \text{ und } C_2 = - \frac{U_o}{T}$$

Die partikuläre Lösung lautet also

$$U_c = U_o \left[1 - (1 + \frac{t}{T})\, e^{-\frac{t}{T}} \right] \qquad (2.67)$$

Zeichnet man diese Funktion, dann ergibt sich derselbe Verlauf wie in Bild 55. Vergleichen Sie das Ergebnis (2.67) mit (2.45) dann sehen Sie, daß sich beide Funktionen unterscheiden. Lassen Sie in (2.45) $T_1 \to T_2$ gehen, dann müßte sich ebenfalls (2.67) ergeben. Das geht jedoch so ohne weiteres nicht. Im Nenner von (2.45) erscheint nämlich $T_1 - T_2$. Sieht man genauer hin, dann erkennt man, daß (2.45) für $T_1 \to T_2$ in die unbestimmte Form 0/0 übergeht. Durch Grenzwertbildung kann man nach einigen Umformungen schließlich auf (2.67) kommen.

Beispiel 2. Wir betrachten noch einmal

$$m\, \ddot{x}_a + k\, \dot{x}_a + c\, x_a = c\, x_e$$

Es sei

$$m = 2 \text{ kp m}^{-1} \text{ s}^{2},\ k = 4 \text{ kp m}^{-1} \text{ s},\ c = 2 \text{ kp m}^{-1},$$

also

$$2\,\ddot{x}_a + 4\,\dot{x}_a + 2\,x_a = 2\,x_e \quad \text{oder} \quad \ddot{x}_a + 2\,\dot{x}_a + x_a = x_e$$

Substitution:

$$x_a - x_e = y$$

$$\ddot{y} + 2\,\dot{y} + y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Sie hat die Wurzel

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Wegen der Doppelwurzel ist die allgemeine Lösung der homogenen Dgl

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_a = 0$, $\dot{x}_a = 0$ für $t = 0$ folgt

$$x_a = x_e \left[1 - (1 + t)\, e^{-t}\right] \qquad (2.68)$$

An diesem Ergebnis sehen Sie, daß keine periodische Lösung in Form einer sin- oder cos-Funktion auftritt, welche auf einen Schwingungsvorgang schließen läßt. Der Verlauf der Lösungsfunktion (2.68) ist dergleiche wie von (2.67) und ist in Bild 55 gezeichnet.

Im Falle

$$k^2 = 4\, m\, c$$

gibt es also keine Schwingung. Der Körper "kriecht" aperiodisch an seine Endlage x_e heran, welchen er nach theoretisch unendlich langer Zeit erreicht. Den Fall $k^2 = 4\, m\, c$ nennt man den "aperiodischen Grenzfall".

Im Falle

$$k^2 < 4\, m\, c$$

erhalten wir eine oben besprochene Sinusschwingung.

Es wird durch einen noch zu besprechenden Ansatz gefunden. Das allgemeine Integral der gegebenen inhomogenen Dgl

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x = f(t)$$

ist dann

$$x = x_1 + x_2$$

Zum Beweise addieren wir die beiden Gleichungen

$$a_2 \ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + x_1 = 0$$

$$a_2 \ddot{x}_2 + a_1 \dot{x}_2 + x_2 = f(t)$$

(Laut Voraussetzung sollte ja x_1 eine Lösung der homogenen und x_2 der inhomogenen Dgl sein).
Es ergibt sich

$$a_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + a_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + (x_1 + x_2) = f(t)$$

Man sieht hieran, daß der Ausdruck $x = x_1 + x_2$ eine Lösung der inhomogenen Dgl sein muß. Die allgemeine Lösung x_1 der homogenen Dgl enthält zwei Integrationskonstanten, welche in $x = x_1 + x_2$ ebenfalls enthalten sind. Durch x_2 kommen keine weiteren Integrationskonstanten hinzu, da x_2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl sein soll. Das bedeutet, daß x die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl sein muß.

Damit man nach dieser Methode verfahren kann, ist es nun allerdings notwendig, ein partikuläres Integral der inhomogenen Dgl zu kennen. Um ein solches zu finden, macht man einen bestimmten Ansatz, der sich nach der Art der gegebenen Funktion f(t) richtet. Für einige