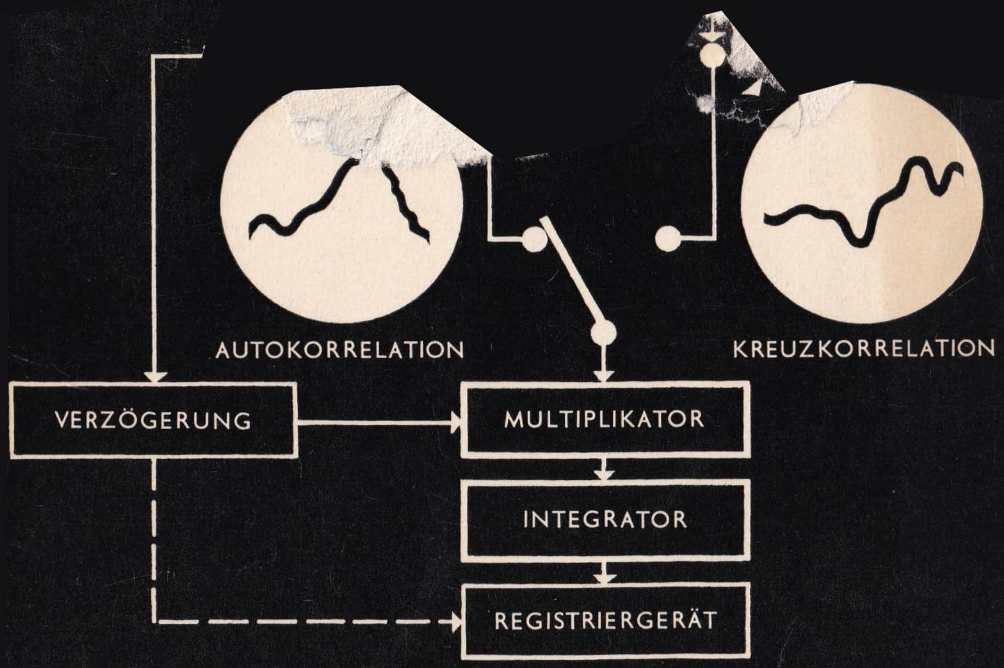
KLEINE BIBLIOTHEK FÜR FUNKTECHNIKER



Poser

Nachrichtentechnik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

KLEINE BIBLIOTHEK FÜR FUNKTECHNIKER

Nachrichtentechnik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Elementare Einführung für Ingenieure und Nachrichtentechniker

Hans Poser

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

Herausgegeben im Auftrage des Ministeriums für Post- und Fernmeldewesen
— Bereich Rundfunk Fernsehen —
Herausgeber: Dipl.-Gwl. Ing. *G. Neuse*,
Oberrat im Rundfunk- und Fernsehtechnischen Zentralamt

Lektor: Ing. *Oswald Orlik*

DK: 519.21 + 621.39

ES: 20 K 5

Bestellnummer: 5/3/3687

VLN 201 · Dg. Nr. 370/103/65 Deutsche Demokratische Republik

Satz und Druck: Druckerei Fortschritt Erfurt, Werk II

Einbandentwurf: *Kurt Beckert*

Vorwort

Die Anwendung mathematisch-statistischer Methoden und die Entwicklung der Informationstheorie sind im Begriff, zu wichtigen Arbeitsgrundlagen der Nachrichtentechnik zu werden. An den Bildungsstand des Nachrichtentechnikers werden daher erhöhte Anforderungen gestellt, von deren Erfüllung insbesondere die Entwicklung moderner Nachrichtenübertragungsverfahren und der weitere Ausbau der Automatisierungstechnik in der DDR abhängig sind. Eine wichtige Voraussetzung für eine immer bewußtere und aktivere Anwendung von statistischen Methoden und Erkenntnissen der Informationstheorie in der Nachrichtentechnik ist die Beherrschung der theoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Da die mathematische Bildung des Nachrichtentechnikers im allgemeinen begrenzt ist, ergibt sich die Notwendigkeit, diesen Personenkreis anhand von konkreten Beispielen aus seinem Tätigkeitsbereich mit den Prinzipien und Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut zu machen. Die Beispiele aus der Nachrichtentechnik sind so gewählt, daß sie dem Leser anschaulich die theoretischen Zusammenhänge nahebringen, und können daher keinen Anspruch auf praktische Aktualität erheben. Manchem mag die Darstellung zu einfach erscheinen. Es wurde jedoch bewußt auf kompliziertere formelmäßige Darstellungen zugunsten von optisch einprägsamen Schemas verzichtet. Der Nachrichtentechniker soll dadurch wenigstens in die Lage versetzt werden, die häufiger auftretenden Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung verstehen zu können.

Die Anregung, eigens für Nachrichtentechniker eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben, die lediglich Oberschulkenntnisse in Mathematik voraussetzt, entstand 1961 im Anschluß an eine Vortragsreihe des Verfassers unter dem Thema „Wahrscheinlichkeitsrechnung — Statistik — Information" anläßlich eines Festkolloquiums zum 15jährigen Bestehen der Kammer der Technik im damaligen Betriebslabor für Rundfunk und Fernsehen der Deutschen Post. Es ist das Ziel des vorliegenden Büchleins, mit einfachen Mitteln Grundgedanken der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer für den Nachrichtentechniker verständlichen Sprache möglichst klar herauszuarbeiten.

Hans Poser

Inhaltsverzeichnis

1. Kybernetik und Nachrichtentechnik

Mit der stürmischen Entwicklung der Kybernetik in den letzten zehn bis zwanzig Jahren hat eine neue Epoche der Wissenschaft begonnen, in der entgegen der Tendenz zu einer immer stärkeren Spezialisierung der einzelnen Wissensgebiete ein gemeinsames Anliegen aller wissenschaftlichen Arbeit, die Lehre vom Aufbau und Zusammenhang belebter und unbelebter Organismen unter dem Aspekt des Austausches und der Verarbeitung von Informationen, in den Vordergrund gerückt wird. Die Kybernetik beschäftigt sich mit den einheitlichen Gesetzmäßigkeiten von Steuerungsvorgängen, die in zielgerichteten Einwirkungen auf das Verhalten komplexer nachrichtenverarbeitender Systeme bestehen. Als Beispiele hierfür seien die Nervensysteme von Tieren und Menschen, elektronische Rechenautomaten und Datenverarbeitungsanlagen sowie automatische Produktionsanlagen genannt. Nach ihren Anwendungsbereichen unterscheidet man die technische und die allgemeine Kybernetik. Die technische Kybernetik ist nach *H. S. Tsien* die Wissenschaft von der Regelung und Steuerung elektrischer und mechanischer Systeme. Demgegenüber untersucht die allgemeine Kybernetik die Verhaltensweisen lebender Organismen. Die große praktische Bedeutung der Kybernetik wird besonders eindrucksvoll auf dem Gebiet der technischen Kybernetik offenbar, wo automatische Steuerungsanlagen entwickelt worden sind, mit deren Hilfe Raketen und Weltraumschiffe unter sehr unregelmäßigen Umweltbedingungen ihren Kurs halten, und solche, die es gestatten, hochwirksame Produktionsvorgänge vollautomatisch durchzuführen.

Für die Volkswirtschaft der DDR ist die Entwicklung der Automatisierungstechnik von erstrangiger Bedeutung. Bei der Umstellung unserer Produktionsstätten auf vollautomatische Produktionsverfahren hat die Nachrichtentechnik die Aufgabe, die technische Entwicklung informationsverarbeitender Anlagen durchzuführen und neue Methoden der Informationsverarbeitung auszuarbeiten. Dazu ist eine gründliche Vorarbeit erforderlich, und insbesondere sind hohe Anforderungen an den Bildungsstand der Techniker, Ingenieure und Wissenschaftler zu stellen. Der Zugang zu den Problemen der technischen Kybernetik wird dadurch erschwert, daß sich viele Sachverhalte nur mit Hilfe mathematischer Formulierungen beschreiben lassen, die für den mathematisch Ungeschulten oft zu unüberwindbaren Schranken werden, die ihn an einem weiteren Eindringen in dieses Fachgebiet hindern.

Ursprünglich beschäftigte sich die Nachrichtentechnik mit einer möglichst „getreuen“ Nachrichtenübertragung. Erst als die Nachrichtenbearbeitung immer mehr an Bedeutung gewann, wurde die Frage nach dem Wesen einer Nachricht aktuell. Es ist das Verdienst des amerikanischen Mathematikers und Nachrichteningenieurs *Claude Shannon* 1949 in einer Arbeit, in der er sich mit mathematischen Grundlagen der Nachrichtentechnik beschäftigte, den statistischen Charakter von Nachrichten erkannt zu haben. Damit wurde es möglich, die Begriffe Nachricht und Information exakt zu definieren. Die in einer Nachricht enthaltene Information wurde zu einer meßbaren Größe, auf der eine neue mathematische Disziplin, die Informationstheorie, aufgebaut werden konnte. Sie hat die quantitative und strukturelle Erfassung der Gesetzmäßigkeiten bei Nachrichtenübertragungen zum Gegenstand.

Die Anwendung statistischer Begriffsbildungen im Bereich der Nachrichtentechnik besitzt keineswegs nur theoretische Bedeutung. Vielmehr sind in letzter Zeit die Arbeitsgrundlagen der modernen Nachrichtentechnik durch zahlreiche statistische Verfahren und Methoden zur Analyse und Synthese von Nachrichtenübertragungssystemen bereichert worden. Es handelt sich hierbei durchweg um Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich mit den Gesetzmäßigkeiten bei „zufälligen" Erscheinungen beschäftigt.

Die Kenntnis der Grundbegriffe und Denkweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist für alle, die auf dem Gebiet der Nachrichten- oder Funktechnik tätig sind, Voraussetzung für ein vertieftes Verständnis der Vorgänge in ihrem eigenen Arbeitsbereich. Es gibt nun zwar zahlreiche gute Lehrbücher über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, der größte Teil dieser Literatur ist jedoch ohne spezielle mathematische Vorbildung recht schwierig zu lesen und nicht für den Nachrichtentechniker geschrieben.

Es ist das Ziel des vorliegenden Bandes, eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf dem Gebiet der Nachrichtentechnik verständlich darzubieten. Auf der Grundlage der Oberschulmathematik können sich Nachrichtentechniker und -ingenieure, Studenten und Funkamateure elementare Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik aneignen. Besonderer Wert wird auf eine anschauliche und klare Herausarbeitung der Grundbegriffe und Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt, um damit dem Leser den Weg für eine eigene Beschäftigung mit der speziellen Fachliteratur zu ebnen.

2. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1. Streng kausale und stochastische Gesetzmäßigkeiten

Das Ziel naturwissenschaftlicher Forschung ist, durch Beobachtungen und Versuche Erscheinungen der realen Welt zu studieren und Gesetzmäßigkeiten aufzudecken, die den Verlauf der untersuchten Erscheinungen bestimmen. Alle Sinneswahrnehmungen des Menschen und alle Meß- oder Untersuchungsergebnisse, die Aufschluß über irgendwelche objektiven Vorgänge geben, können als Nachrichten interpretiert werden. Ein wissenschaftliches Experiment besteht in der Realisierung einer exakt fixierten Versuchsvorschrift, in der erstens die Beobachtungs- oder Versuchsbedingungen möglichst genau festgelegt sind und die zweitens angibt, was man unter einem Versuchsergebnis zu verstehen hat. Ein Versuchsergebnis bildet somit eine Antwort (Nachricht) auf eine in Form eines wissenschaftlichen Experimentes an ein objektives Geschehen (Nachrichtenquelle) gestellte Frage. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spricht man auch davon, daß die Realisierung einer Versuchsvorschrift ein Ereignis (Versuchsergebnis, Nachricht) nach sich zieht. Unter einem Ereignis ist dabei ein nicht näher definierter Grundbegriff zu verstehen, der lediglich als eine andere Bezeichnung für Versuchsergebnis angesehen werden kann.

Auf dem Gebiet der experimentellen Forschung und insbesondere bei allen Vorgängen, die für die Informationstheorie und Nachrichtentechnik interessant sind, enthält eine Versuchsvorschrift nicht alle hinreichenden Bedingungen, durch die der Ablauf eines beobachteten Vorganges eindeutig bestimmt wird. Infolge einer Vielzahl praktisch unkontrollierbarer Einflüsse sind bei einer Realisierung einer Versuchsvorschrift mehrere miteinander unvereinbare Versuchsergebnisse möglich, von denen aber stets nur ein bestimmtes eintreten kann. Solche Versuchsergebnisse werden als zufällige Ereignisse bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Lehre von den Gesetzmäßigkeiten bei zufälligen Ereignissen, den sog. stochastischen Gesetzmäßigkeiten.

Im Gegensatz hierzu stehen die streng kausalen Gesetzmäßigkeiten. Sie treten dort auf, wo die Versuchsvorschrift alle für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses wesentlichen Versuchsbedingungen enthält und somit das Ergebnis einer jeden Realisierung der Versuchsvorschrift schon im voraus festliegt. Das Versuchsergebnis wird auch als ein sicheres Ereignis bezeichnet.

In den Tafeln 1 und 2 wird anhand von einfachen Beispielen der Unterschied zwischen streng kausalen und stochastischen Gesetzmäßigkeiten veranschaulicht. Tafel 1 zeigt Beispiele für sichere Ereignisse. Die Versuchsvorschriften sind nur stichwortartig angegeben. Eine vollständige Formulierung, die auch tatsächlich das Auftreten der genannten sicheren Ereignisse bei jeder Realisierung der Versuchsvorschrift garantiert, kann vom Leser selbst vorgenommen werden.

Das dritte Beispiel stellt eine funktionale Abhängigkeit zwischen der Auslenkung y einer Sinusschwingung und der Zeit t dar. Da der Schwingungsverlauf auf Grund der angegebenen Versuchsvorschrift für jeden zukünftigen Zeitpunkt t eindeutig festgelegt ist, kann ein solcher Schwingungsvorgang nicht Träger eines fortlaufenden Informationsflusses sein. Er ist für eine Informationsübertragung belanglos, da durch ihn nichts Neues ausgesagt wird. Erst wenn man nach einem in der Nachrichtentechnik üblichen Modulationsverfahren die Phase, die Frequenz oder die Amplitude einer Sinusschwingung „regellos" ändert, wird eine Information vermittelt.

Tafel 1. Streng kausaler Zusammenhang

Versuchsvorschrift	Sicheres Ereignis
Schließen eines Stromkreises	Fließen des Stromes
Auflegen eines Telefonhörers	Unterbrechung einer Gesprächsverbindung
Aussenden einer Sinusschwingung mit konstanter Amplitude A, konstanter Frequenz ω und konstanter Phase φ	Auslenkung y_0 zur Zeit t_0: $y_0 = A \sin(\omega t + \varphi)$

Tafel 2. Stochastischer Zusammenhang

Versuchsvorschrift	Zufällige Ereignisse
Werfen eines Würfels	gerade Augenzahl ungerade Augenzahl Augenzahl 6 usw.
Wählen einer Telefonnummer	Ertönen des Freizeichens Ertönen des Besetztzeichens
Regelloses Aussenden von Impulsen	Impuls kein Impuls

Allein hieran läßt sich folgende Tatsache ermessen: Beim Auftreten von zufälligen Erscheinungen widerspiegelt die Versuchsvorschrift nicht mehr die Gesamtheit aller Ursachen, die für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses hinreichend sind. Deshalb kommt den zufälligen Erscheinungen eine außerordentliche Bedeutung zu.

Es sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß ein zufälliges Ereignis durchaus kein seltenes Ereignis zu sein braucht. Die wissenschaftliche Verwendung eines Begriffes (z. B. Zufall) aus dem alltäglichen Sprachschatz ist im allgemeinen mit einer Änderung seines Begriffsinhalts verbunden.

Man könnte daran denken, den Zustand der Unbestimmtheit eines Versuchsergebnisses bei der Realisierung einer Versuchsvorschrift zu beheben, indem man die Versuchsbedingungen enger faßt und damit einen streng kausalen Zusammenhang erzwingt. Das ist theoretisch möglich, praktisch jedoch nicht.

Wie wir bereits erwähnt haben, bildet die „Regellosigkeit" von Signalen überhaupt erst die Grundvoraussetzung für eine jede Informationsübermittlung. Zwischen einer Versuchsvorschrift und den bei ihrer Realisierung gewonnenen zufälligen Ereignissen besteht ein spezifischer Zusammenhang, der mit zunehmender Anzahl von Realisierungen der Versuchsvorschrift immer deutlicher hervortritt. Werden die Versuche unabhängig voneinander gleichzeitig durchgeführt, so spricht man von Massenerscheinungen. Wiederholungsvorgänge liegen vor, wenn es sich um ein zeitliches Nacheinander handelt.

Als mit dem Aufkommen von Funk und Fernsehen im Fernmeldewesen die Leitungskanäle bis an die äußerste Belastungsgrenze mit Nachrichtensignalen belegt wurden, mußten die Leitungsgeräusche oder das elektronische Rauschen immer mehr in die technischen und wissenschaftlichen Betrachtungen einbezogen werden. Die als Schroteffekt bekannte Unregelmäßigkeit des Elektronenstromes ist für die Nachrichtentechnik von großer Bedeutung. Im Sinne einer verantwortungsbewußten wissenschaftlichen Arbeit ist das Studium der bei einer solchen Massenerscheinung auftretenden Gesetzmäßigkeiten notwendig und unentbehrlich. Das Interesse gilt also nicht der individuellen Bewegung eines einzelnen Teilchen, sondern dem Verhalten einer großen Gesamtheit von Teilchen. Diese Gesetzmäßigkeiten gelten allgemein für Betrachtungen von Massenerscheinungen.

Innerhalb gewisser Grenzen erweisen sich die Gesetzmäßigkeiten bei Massenerscheinungen und Wiederholungsvorgängen sogar als unabhängig von den individuellen Besonderheiten der beteiligten Teilchen. Das Studium von objektiven Gesetzmäßigkeiten bei Erscheinungen der realen Welt erfordert mitunter auch, daß man von unwesentlichen Einzelheiten absieht. Die Praxis bleibt stets der Prüfstein für die Theorie. Es zeigt sich, daß das System der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Erscheinungen, die durch Vorgänge im Bereich der Elementarteilchen hervorgerufen werden, besonders gut angepaßt ist.

Unsere Überlegungen lassen vor allem klar erkennen, daß die Grundlage für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung keinesfalls in der ungenügenden Kenntnis der realen Erscheinungen zu suchen ist.

Zur Illustration der bei Massenerscheinungen auftretenden Gesetzmäßigkeiten sei noch eine bemerkenswerte Episode aus dem Buch von *Laplace* „Versuch einer Philosophie der Wahrscheinlichkeitsrechnung" angeführt. Betrachtet man in einer größeren Bevölkerungsgruppe das Verhältnis von Knabengeburten zu Mädchengeburten, so stellt man fest, daß es etwa 1 : 1 beträgt. Diese Gesetzmäßigkeit ist für alle Bereiche des menschlichen Lebens von größter Bedeutung. Eine ernste Störung des Geschlechtergleichgewichts müßte schwerwiegende Folgen haben. *Laplace* hatte durch umfangreiche statistische Untersuchungen gefunden, daß der Anteil der Knabengeburten an der Gesamtgeburtenzahl in London, Petersburg, Berlin und auch in ganz Frankreich fast genau

$$\frac{22}{43} = 0{,}512$$

betrug. Demgegenüber ergab sich für die Stadt Paris über einen Zeitraum von 40 Jahren hinweg (1745—1784) die folgende relative Häufigkeit der Knabengeburten

$$\frac{25}{49} = 0{,}510.$$

Laplace stellte fest, daß auf Grund der sehr großen Geburtenzahlen, die von ihm erfaßt worden waren, der Unterschied zwischen den angegebenen Häufigkeiten als wesentlich angesehen werden mußte. Er versuchte, eine Erklärung für diese

Abweichung zu finden. Eine genaue Untersuchung des Archivmaterials zeigte, daß in die Anzahl aller Geburten in Paris auch alle Findelkinder eingeschlossen waren. Seine Nachforschungen ergaben, daß die Bevölkerung der Pariser Umgebung vorwiegend Mädchen aussetzte. Diese soziale Erscheinung war damals in Paris so verbreitet, daß sie das wahre Bild der Geburtenzahl wesentlich beeinflußte. Als *Laplace* die Findelkinder aus der Zahl der Geburten herausnahm, zeigte sich eine Übereinstimmung mit der an anderen Orten beobachteten Häufigkeit von Knabengeburten.

2.2. Empirisch-statistischer Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für eine möglichst allgemeinverständliche Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet sich der empirisch statistische Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung an, da er sich mit Hilfe bekannter Vorstellungen entwickeln läßt. Wir wenden uns zunächst einem einfachen Beispiel zu und werden durch eine ausführliche Betrachtung hieran die Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickeln.

Beispiel 1:

In einer Telefonzentrale treffen regellos Gespräche über vier verschiedene Leitungen ein. Jedes Gespräch kann nur über eine Leitung geführt werden. Um die Auslastung der einzelnen Leitungen zu untersuchen, wurde für jede Leitung getrennt die Anzahl der geführten Gespräche registriert. Wie aus der Versuchsvorschrift hervorgeht, sind beim Empfang eines Gesprächs folgende vier miteinander unvereinbare, zufällige Ereignisse möglich:

E_1: Gespräch über Leitung *1*,
E_2: Gespräch über Leitung *2*,
E_3: Gespräch über Leitung *3*,
E_4: Gespräch über Leitung *4*,

d. h., ein Gespräch kann stets nur über eine Leitung geführt werden.

Diese vier Versuchsergebnisse werden auch Elementarereignisse genannt. Während eines Zeitraums, in dem die relative Auslastung der vier Leitungen als konstant angesehen werden soll, wurden die absoluten Häufigkeiten n_1, n_2, n_3 und n_4, mit denen die vier Ereignisse auftreten, durch Einbau von Zählwerken bestimmt. Die Bildung der absoluten Häufigkeiten zeigt Bild 1.

Die Gesamtzahl n aller eintreffenden Gespräche ergibt sich aus der Summe

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n. \tag{1}$$

In der Tafel 3 sind die beobachteten absoluten Häufigkeiten n_i in Abhängigkeit von der Gesamtzahl n der ankommenden Gespräche zusammengestellt worden.

Die Angabe der absoluten Häufigkeiten allein gibt noch kein klares Bild von der Eigenart der zufälligen Ereignisse. Es empfiehlt sich daher, zu den relativen Häufigkeiten

$$H(E_i) = \frac{n_i}{n} \tag{2}$$

überzugehen, die sich durch eine Normierung ergeben, indem die absolute Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses durch die Gesamtzahl der Beobachtungen divi-

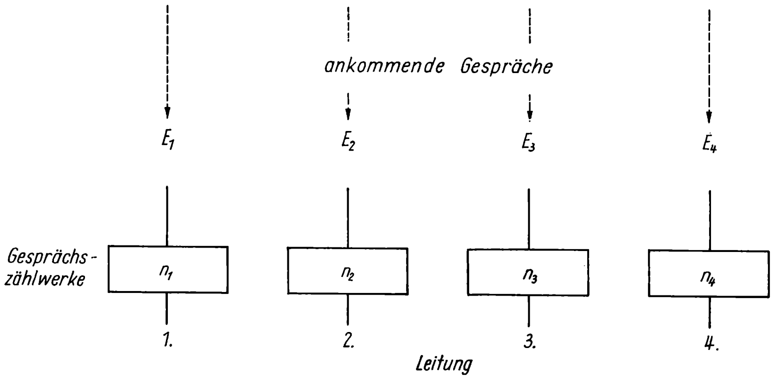


Bild 1. Schematische Darstellung der Bildung von absoluten Häufigkeiten mit Hilfe von Gesprächszählwerken

Tafel 3. Absolute Häufigkeiten n_i

n	n_1	n_2	n_3	n_4
50	13	12	11	14
100	27	23	26	24
200	68	42	48	42
400	152	60	102	86
800	272	128	216	184
1000	315	172	308	205
2000	646	404	600	350
4000	1364	740	1136	760
8000	2704	1496	2200	1600
10000	3331	1849	2798	2022

diert wird. In der Schreibweise $H(E_i)$ kommt zum Ausdruck, daß es sich mathematisch gesehen bei der Bildung der relativen Häufigkeiten um eine Mengenfunktion handelt, deren Argumente zufällige Ereignisse sind, während der Wertevorrat aus rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 besteht. Relative Häufigkeiten werden im folgenden kurz als Häufigkeiten bezeichnet. In Tafel 4 sind die Häufigkeiten $H(E_i)$ eingetragen worden, die sich aus den Werten der Tafel 3 ergeben, indem die absoluten Häufigkeiten durch die in der linken Spalte stehenden Gesamtzahlen der registrierten Gespräche dividiert worden sind.

Eine quantitative Beschreibung zufälliger Ereignisse durch Häufigkeiten beruht in einem konkreten Fall auf einem Auszählen derjenigen Versuche, bei denen diese Ereignisse eintreten. Es fällt auf, daß mit wachsender Anzahl von Beobachtungen die Häufigkeiten der zufälligen Ereignisse immer weniger schwanken und in einem gewissen Sinne einem unbekannten, aber festen Wert zustreben. Man spricht vom Stationärwerden der Häufigkeiten. Der Wert, um den die relativen Häufigkeiten eines zufälligen Ereignisses mit wachsendem n immer

Tafel 4. Häufigkeiten $H(E_i) = \frac{n_i}{n}$

n	$H(E_1)$	$H(E_2)$	$H(E_3)$	$H(E_4)$
50	0,260	0,240	0,220	0,280
100	0,270	0,230	0,260	0,240
200	0,340	0,210	0,240	0,210
400	0,380	0,150	0,255	0,215
800	0,340	0,160	0,270	0,230
1000	0,315	0,172	0,308	0,205
2000	0,323	0,202	0,300	0,175
4000	0,341	0,185	0,284	0,190
8000	0,338	0,187	0,275	0,200
10000	0,333	0,185	0,280	0,202

weniger schwanken, wird empirische Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses genannt. Bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen kann die beobachtete Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses praktisch mit seiner Wahrscheinlichkeit gleichgesetzt werden. Für den Fall der zufälligen Ereignisse E_2 wird das Stationärwerden der Häufigkeiten im Bild 2 veranschaulicht.

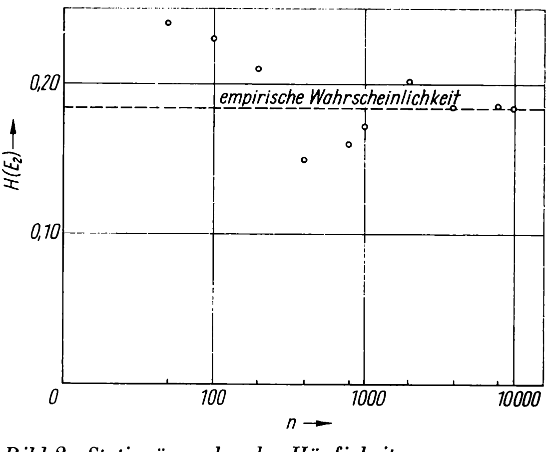


Bild 2. Stationärwerden der Häufigkeiten

Der Maßstab auf der Abszisse wurde logarithmisch unterteilt, um alle angegebenen n-Werte darstellen zu können. Durch eine gestrichelte Linie ist die empirische Wahrscheinlichkeit, die dem Ereignis E_2 auf Grund der gegebenen Versuchsvorschrift zugeordnet ist, angedeutet. Bild 2 veranschaulicht, daß stochastische Gesetzmäßigkeiten um so strenger erfüllt sind, je größer die Anzahl der Einzelereignisse ist. Während bei einer einzelnen Beobachtung, einem

Versuch oder bei dem Empfang eines Signals nicht feststeht, welches Ereignis eintreten wird, kann man dennoch Aussagen über die Häufigkeitsverteilung der einzelnen Ereignisse in einer sehr großen Folge von Beobachtungen machen.

2.2.1. *Eigenschaften von Häufigkeiten*

Da bei n voneinander unabhängigen Realisierungen einer Versuchsvorschrift die absolute Häufigkeit $n(A)$ eines zufälligen Ereignisses A stets nur einen Wert zwischen 0 und n annehmen kann, erhält man aus der Definitionsgleichung (2) der relativen Häufigkeiten die Ungleichung

$$0 \leqq H(A) \leqq 1. \tag{3}$$

Das linke Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das zufällige Ereignis A bei keinem der n Versuche eingetreten ist. Ist demgegenüber A bei jeder Realisierung der Versuchsvorschrift beobachtet worden, so trifft die rechte Gleichheitsrelation zu.

Betrachtet man nun ein sicheres Ereignis E, das bei jeder Realisierung einer Versuchsvorschrift eintreten muß, und ein unmögliches Ereignis $\emptyset$, das bei keinem Versuch eintreten kann, so folgt aus dem eben Gesagten, daß die Relationen

$$\begin{aligned} &H(E) = 1 \\ \text{und} \quad & \\ &H(\emptyset) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

stets erfüllt sind.

2.2.2. *Logische Verknüpfungen von zufälligen Ereignissen*

Die Möglichkeit, Ereignisse durch logische Operationen miteinander zu verknüpfen, bildet eine wichtige Voraussetzung für das Rechnen mit Häufigkeiten und somit eine wesentliche Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst. Bei den Versuchen und Beobachtungen beschränkt sich unser Interesse keineswegs nur auf die Elementarereignisse, wie wir sie im vorhergehenden Beispiel kennengelernt haben, sondern man ist auch an neuen Ereignissen interessiert, die sich mit Hilfe logischer Verknüpfungen gewinnen lassen. Sprachlich sind uns diese vertraut, denn wir benutzen laufend Bindewörter, um aus gegebenen Aussagen neue zu erhalten. In unserem Beispiel könnte etwa auch nach den Ereignissen

nicht E_1: Gespräch *nicht* über Leitung *1*,

E_2 *und* E_3: Gespräch gleichzeitig über Leitung *2 und* Leitung *3* (nach Voraussetzung unmöglich),

E_2 *oder* E_3: Gespräch über Leitung *2 oder 3*

gefragt werden.

Im folgenden lernen wir einige Definitionen logischer Verknüpfungen von Ereignissen kennen. Der Anschaulichkeit halber betrachten wir folgende Versuchsvorschrift: Aus einem vorgegebenen Quadrat soll „blind" ein Punkt ausgewählt werden. Eine Realisierung dieser Versuchsvorschrift könnte beispielsweise darin bestehen, daß mit einem Ball nach einer quadratischen Fläche geworfen und der Punkt des Auftreffens ermittelt wird. Grundsätzlich werden nur solche Würfe gewertet, bei denen der Ball das Quadrat trifft. Wer will, kann auch an das „regellose" Aufleuchten eines Punktes auf einem quadratischen Radarschirm denken. Das Eintreffen eines zufälligen Ereignisses A besteht nun darin, daß der Punkt in einen für A charakteristischen Bereich im Quadratinnern fällt.

Wir beginnen mit den uns schon geläufigen Definitionen eines sicheren und eines unmöglichen Ereignisses.

Sicheres Ereignis E

Ein Ereignis E heißt sicher, wenn es bei jeder Realisierung der Versuchsvorschrift eintreten muß.

Der zu E gehörende charakteristische Bereich umfaßt die gesamte Quadratfläche. Die Versuchsvorschrift garantiert, daß bei jedem Versuch ein Punkt dieses Bereiches ausgewählt wird.

Unmögliches Ereignis $\emptyset$

Ein Ereignis $\emptyset$ heißt unmöglich, wenn es bei keiner Realisierung der Versuchsvorschrift eintreten kann.

Ein unmögliches Ereignis ist auf Grund der Versuchsvorschrift die Auswahl eines Punktes außerhalb des Quadrats oder die gleichzeitige Auswahl zweier verschiedener Punkte im Quadratinnern.

In Anlehnung an mehrere Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden wir für die logischen Verknüpfungsoperationen zwischen Ereignissen die gleichen Symbole wie für die Grundrechenoperationen. Es muß jedoch von vornherein nachdrücklich betont werden, daß es sich hierbei um grundverschiedene Dinge handelt.

Summe zweier Ereignisse

Das Ereignis

$$A + B$$

(lies „A oder B" bzw. „A plus B"), das im Eintreten von mindestens einem der Ereignisse A oder B besteht, heißt Summe der Ereignisse A und B.

Im Bild 3 ist die Summe der beiden Ereignisse A und B schraffiert dargestellt worden. Auch in den folgenden Bildern werden die durch logische Verknüpfungen gewonnenen Ereignisse in der gleichen Weise markiert.

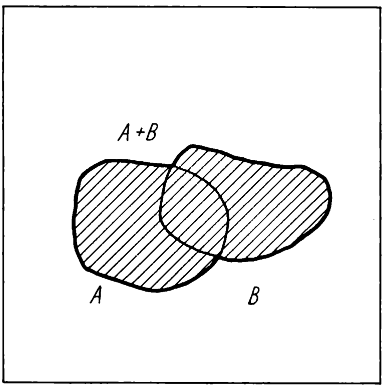


Bild 3. Summe zweier Ereignisse $A + B$

Produkt zweier Ereignisse

Das Ereignis

$$A \cdot B$$

(lies „A und gleichzeitig B“ bzw. „A mal B“), das im gleichzeitigen Eintreten der Ereignisse A und B besteht, heißt das Produkt der Ereignisse A und B.

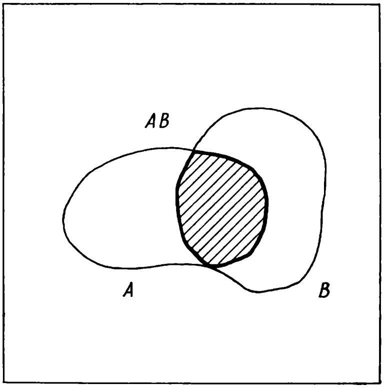


Bild 4. Produkt zweier Ereignisse
$A + B$

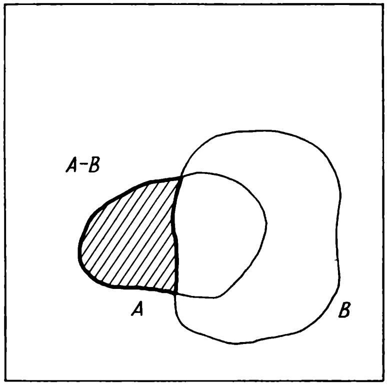


Bild 5. Differenz zweier Ereignisse
$A - B$

Differenz zweier Ereignisse

Das Ereignis

$$A - B$$

(lies „A minus B“), das darin besteht, daß das Ereignis A, aber nicht das Ereignis B eintritt, heißt Differenz der Ereignisse A und B.

Entgegengesetztes Ereignis

Das zu einem Ereignis A entgegengesetzte Ereignis

$$\bar{A}$$

besteht im Eintreten der Differenz $E - A$ zwischen dem sicheren Ereignis E und dem Ereignis A.

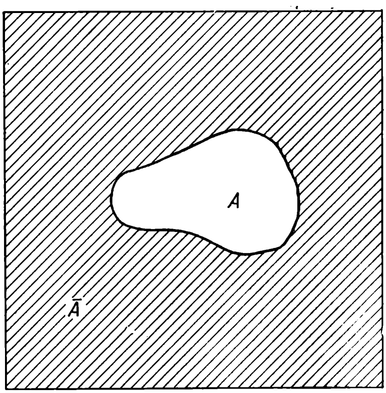


Bild 6. Entgegengesetztes Ereignis A

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Verknüpfungsoperationen bringen die folgenden Definitionen Relationen zwischen zwei Ereignissen zum Ausdruck.

Enthaltensein eines Ereignisses A in einem Ereignis B

Ein Ereignis A ist in einem Ereignis B enthalten:

$$A \subset B,$$

d. h., bei jeder Realisierung der Versuchsvorschrift, bei der A eintritt, tritt auch B ein. Sehr oft wird hierfür auch die Sprechweise, das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich, angewandt.

Gleichheit zweier Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen gleich

$$A = B,$$

wenn A das Ereignis B nach sich zieht und umgekehrt.

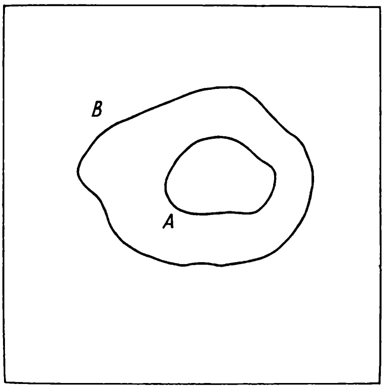


Bild 7. Enthaltensein eines Ereignisses A in einem Ereignis B

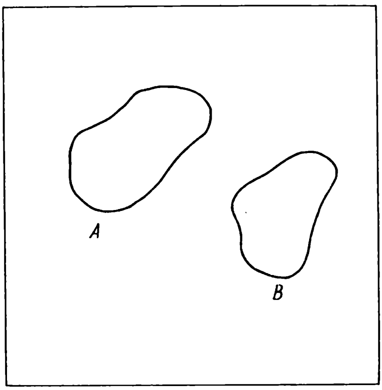


Bild 8. Unvereinbarkeit zweier Ereignisse A und B

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn ihr gleichzeitiges Auftreten unmöglich ist, d. h.

$$AB = \emptyset.$$

Elementarereignis

Ein Ereignis A heißt Elementarereignis, wenn es sich logisch nicht weiter zerlegen läßt, d. h., wenn es kein weiteres mögliches Ereignis enthält.

Die logischen Verknüpfungen von Ereignissen führen zu noch komplizierteren Verbindungen, wenn man anstelle der Ausgangsereignisse gewisse Ereignisse einsetzt, die ihrerseits logische Verknüpfungen von Ereignissen darstellen. Für das Produkt einer Summe von zwei Ereignissen mit einem dritten Ereignis gilt das Distributivgesetz.

$$(A + C)\,D = AD + CD. \tag{5}$$

Ist D gleich der Summe $B + C$, so folgt

$$(A + C)\,(B + C) = AB + AC + CB + CC. \tag{6}$$

Dieses Resultat entspricht rein formal den Regeln der gewöhnlichen Klammerrechnung. Beachtet man, daß es sich um Verknüpfungsoperationen zwischen logischen Ereignissen handelt, dann läßt sich der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (6) noch weiter vereinfachen. Das Ereignis CC ist nach Definition des Produktes gleich C. AC und CB sind beide in C enthalten, so daß die Summe der letzten drei Glieder gleich C ist. Es gilt demnach:

$$(A + C)\,(B + C) = AB + C. \tag{7}$$

Dem Leser sei empfohlen, sich diese Relationen mittels der vorher genannten Definitionen anhand einer Skizze zu erläutern. Die Regeln für logische Verknüpfungen von Ereignissen sind besonders beim Studium elektrischer Netze mit Relaisschaltungen von Bedeutung.

Beispiel 2:

Es seien A, B, C und D Netzwerke mit Relaiskontakten. Sie können in Reihe, z. B. AB, oder parallel, z. B. $A + B$, geschaltet werden. Zwei Netze werden dann als genau gleich angesehen, wenn sie so aufgebaut sind, daß entweder durch beide ein Strom fließt oder durch beide nicht.

Es bedeuten:

$\bar{A}$ ein Netz, das stets eingeschaltet ist, falls A ausgeschaltet ist,
$\emptyset$ ein Netz, durch das kein Strom fließen kann,
E ein Netz, durch das stets Strom fließt.

Bild 9 zeigt eine Darstellung der Relation nach Gl. (5) in Form von zwei äquivalenten Relaisnetzen.

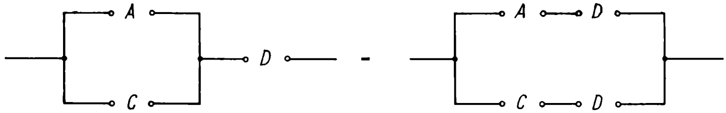


Bild 9. Darstellung der Relation $(A + C)\cdot D = AD + CD$ durch zwei gleichwertige Relaisnetze

Man sieht, daß sich zwei gleichwertige Relaisnetze ergeben, wenn einmal zuerst A und C parallel und das so entstandene Schema mit D hintereinander geschaltet wird, oder wenn zum anderen jeweils A mit D und C mit D in Reihe und die dabei gewonnenen neuen Systeme parallel geschaltet werden.

Bild 10 veranschaulicht die Relation nach Gl. (7). Werden zwei Systeme hintereinander geschaltet, von denen das erste einer Parallelschaltung von A und C entspricht und das zweite einer solchen von B und C, so kann das gesamte Netz auch durch ein System ersetzt werden, in dem A und B hintereinander geschaltet sind und dieses Schema in einer Parallelschaltung mit C verbunden wird.

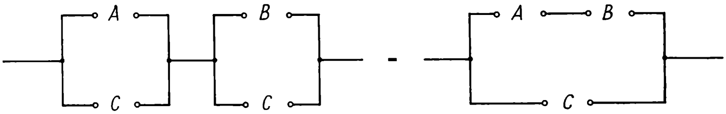


Bild 10. Darstellung der Relation $(A + C)\cdot(B + C) = AB + C$ *durch zwei gleichwertige Relaisnetze*

Nach diesem kurzen Ausblick auf die Theorie von Relaisnetzen kehren wir zu unserem ersten Beispiel zurück. Mit Hilfe der logischen Verknüpfungsoperationen läßt sich aus den Elementarereignissen ein ganzes System von zufälligen Ereignissen aufbauen, das zu der vorliegenden Versuchsvorschrift gehört. Es läßt sich dadurch gewinnen, daß man aus den vier Elementarereignissen alle möglichen 0-, 1-, 2-, 3- und 4gliedrigen logischen Summen bildet. In Tafel 5 wird das auf diese Weise erhaltene System von zufälligen Ereignissen, das auch Ereignisfeld genannt wird, dargestellt.

Tafel 5. Ereignisfeld einer Versuchsvorschrift mit vier Elementarereignissen

Ereignisse des Ereignisfeldes	Anzahl
Unmögliches Ereignis $\emptyset$	$1 = \binom{4}{0}$
E_1, E_2, E_3, E_4	$4 = \binom{4}{1}$
$E_1 + E_2, E_1 + E_3, E_1 + E_4, E_2 + E_3, E_2 + E_4, E_3 + E_4$	$6 = \binom{4}{2}$
$E_1 + E_2 + E_3, E_1 + E_2 + E_4, E_1 + E_3 + E_4, E_2 + E_3 + E_4$	$4 = \binom{4}{3}$
Sicheres Ereignis $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$	$1 = \binom{4}{4}$
	Summe: $16 = 2^4$

Die Gesamtzahl von 2^4 Ereignissen unseres Ereignisfeldes ergibt sich aus der Überlegung, daß jedes der vier Elementarereignisse in einer logischen Summe entweder auftreten oder nicht auftreten kann. Die Anzahl der verschiedenen k-gliedrigen Summen, die sich aus einer Menge von n verschiedenen Elementarereignissen bilden lassen, wird durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8}$$

angegeben. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt demnach die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, aus einer Menge von n verschiedenen Elementen k

auszuwählen oder anders ausgedrückt, n Plätze mit k Elementen zu belegen. Für $k = 0$ gilt:

$$\binom{n}{0} = 1.$$

In unserem Beispiel erhalten wir nach Gl. (8) für die Anzahl aller zweigliedrigen logischen Summen:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6,$$

wie auch der Tafel 5 zu entnehmen ist.

Beispiel 3:

Man überzeuge sich davon, daß Summe, Differenz und Produkt

a) der Ereignisse $A = (E_1 + E_2 + E_3)$ und $B = (E_2 + E_4)$,

b) der Ereignisse $C = (E_1 + E_4)$ und $D = E_3$

aus dem Ereignisfeld der Tafel 5 ebenfalls Ereignisse des Ereignisfeldes sind.

Es gilt:

a)
$$\begin{aligned} A + B &= (E_1 + E_2 + E_3) + (E_2 + E_4) &&= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = E \\ A - B &= (E_1 + E_2 + E_3) - (E_2 + E_4) &&= E_1 + E_3 \\ A \cdot B &= (E_1 + E_2 + E_3)(E_2 + E_4) &&= E_2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} C + D &= (E_1 + E_4) + E_3 &&= E_1 + E_3 + E_4 \\ C - D &= (E_1 + E_4) - E_3 &&= E_1 + E_4 \\ C \cdot D &= (E_1 + E_4) \cdot E_3 &&= \emptyset \end{aligned}$$

Da alle resultierenden Ereignisse unter den in Tafel 5 aufgeführten Ereignissen wiederzufinden sind, ist die Aufgabe bereits gelöst. Dem Leser sei empfohlen, die hier angegebenen Formeln in logische Aussagen zu übertragen und sich die Resultate anschaulich klarzumachen.

Die Tatsache, daß durch die logischen Operationen der Summen-, Differenz- und Produktbildung aus Ereignissen eines Ereignisfeldes stets wieder Ereignisse desselben Ereignisfeldes gewonnen werden, kann zur Definition eines Ereignisfeldes benutzt werden.

Definition eines Ereignisfeldes

Ein System von Ereignissen heißt ein Ereignisfeld, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Gehören zwei Ereignisse

   $$A, B$$

   einem Ereignisfeld an, dann sind auch die Ereignisse

   $$A + B$$
   $$A - B$$
   $$A \cdot B$$

   Elemente des Ereignisfeldes.

2. Das sichere Ereignis E und das unmögliche Ereignis $\emptyset$ gehören zum Ereignisfeld.

Darstellung eines zufälligen Ereignisses

Gehören zu einer Versuchsvorschrift n Elementarereignisse, so kann ein beliebiges zufälliges Ereignis A, das zu dieser Versuchsvorschrift gehört, stets durch eine Summe von Elementarereignissen

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}, \; (0 \leqq m \leqq n) \tag{9}$$

dargestellt werden.

2.2.3. *Das Rechnen mit Häufigkeiten*

Das Rechnen mit Häufigkeiten beruht darauf, daß man die Häufigkeiten der durch logische Verknüpfungen erhaltenen Ereignisse aus den Häufigkeiten der Ausgangsereignisse nach bestimmten Regeln ermitteln kann. Ehe wir darauf im einzelnen eingehen, sei noch darauf hingewiesen, daß sich natürlich auch für jedes beliebige Ereignis eines Ereignisfeldes die Häufigkeit gesondert ermitteln läßt. Das gelingt im Beispiel 1 dadurch, daß man für mehrere Leitungen gemeinsame Zählwerke anbringt. Bild 11 zeigt schematisch die Schaltung von Gesprächszählwerken zum Bestimmen der absoluten Häufigkeiten mehrgliedriger logischer Summen von Elementarereignissen.

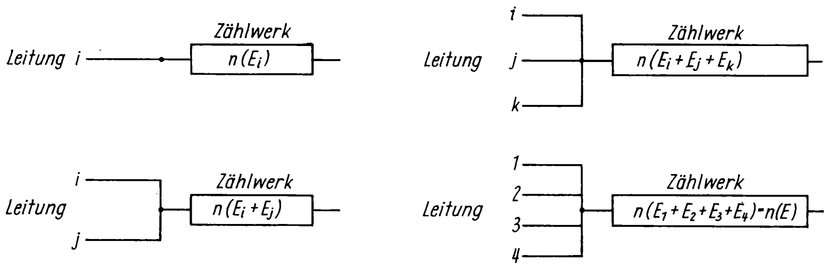


Bild 11. Schematische Darstellung von Zählwerkschaltungen zur Bestimmung der absoluten Häufigkeiten mehrgliedriger logischer Summen von Elementarereignissen im Falle des Beispiels 1

Die Indizes im Bild 11 können nur Werte von 1 bis 4 annehmen. Bei einer Schaltung treten darüber hinaus nur voneinander verschiedene Indizes auf.

Additivität der Häufigkeiten

Sind zwei Ereignisse A und B eines Ereignisfeldes miteinander unvereinbar, d. h. $AB = \emptyset$, so gilt für die absolute Häufigkeit der logischen Summe beider Ereignisse in einer Reihe von n voneinander unabhängigen Beobachtungen

$$n(A + B) = n(A) + n(B), \tag{10}$$

denn $A + B$ tritt genau dann ein, wenn entweder A oder B eintritt. Dividiert man die Anzahl derjenigen Versuche, bei denen die Summe $A + B$ eintritt, durch die Gesamtzahl der Versuche, so erhält man die Häufigkeit:

$$H(A + B) = \frac{n(A + B)}{n}.$$

Aus Gl. (10) folgt:

$$H(A + B) = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}.$$

Auf der rechten Seite stehen die Häufigkeiten von A und B, so daß wir weiter schreiben können:

$$H(A + B) = H(A) + H(B), \quad \text{falls} \quad AB = \emptyset. \tag{11}$$

Die Eigenschaft nach Gl. (11) wird als Additivität der Häufigkeiten bezeichnet.

Additionsregel für zwei beliebige Ereignisse A und B

Läßt man zu, daß die Ereignisse A und B gleichzeitig auftreten können, so würden nach der Rechenvorschrift (11) die Häufigkeit $H(A + B)$ größer werden als es der Versuchszahl entspricht, und zwar dadurch, daß gleichzeitig die Ereignisse A und B auftreten. Daher muß in Gl. (10) auf der rechten Seite noch das Korrekturglied $-n(AB)$ angebracht werden.

$$n(A + B) = n(A) + n(B) - n(AB).$$

Die gesuchte Additionsregel für zwei beliebige Ereignisse lautet schließlich:

$$H(A + B) = H(A) + H(B) - H(AB). \tag{12}$$

Die Gl. (11) ist ein Spezialfall von Gl. (12), der eintritt, wenn (AB) als unmögliches Ereignis verausgesetzt wird.

Produktregel

Die Häufigkeit des Produktes AB zweier Ereignisse A und B bei n Realisierungen einer Versuchsvorschrift ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl $n(AB)$ der Versuche, bei denen das Produkt AB beobachtet worden ist, und der Gesamtanzahl von Versuchen n.

$$H(AB) = \frac{n(AB)}{n}. \tag{13}$$

Setzt man voraus, daß beide Ereignisse im Laufe der Versuchsreihe mindestens je einmal aufgetreten sind, was gleichbedeutend damit ist, daß die absoluten Häufigkeiten $n(A)$ und $n(B)$ beide von Null verschieden sind, so kann die rechte Seite der Gl. (13) mit diesen Größen erweitert werden, woraus wir die Ausdrücke

$$H(AB) = \frac{n(A)}{n} \cdot \frac{n(AB)}{n(A)}$$

und (14)

$$H(AB) = \frac{n(B)}{n} \cdot \frac{n(AB)}{n(B)}$$

erhalten. Der erste Faktor auf der rechten Seite ist gleich der Häufigkeit $H(A)$ bzw. $H(B)$. Auch der zweite Faktor kann als Häufigkeit interpretiert werden. Wir brauchen nur von der ursprünglichen Versuchsvorschrift zu einer neuen überzugehen, indem wir im ersten bzw. zweiten Fall die Bedingung hinzunehmen, daß nur solche Versuche gewertet werden sollen, bei denen A bzw. B eingetreten ist. Um zum Ausdruck bringen zu können, daß das Ereignis AB einmal unter der Bedingung, daß B eingetreten ist, betrachtet wird, führen wir für das Ereignis AB die Schreibweise A/B bzw. B/A ein (lies „A unter der Bedingung B" bzw. „B unter der Bedingung A"). Die rechten Seiten der Gl. (14) lassen sich somit als Produkte von sog. unbedingten und bedingten Häufigkeiten schreiben.

$$\begin{aligned} H(AB) &= H(A)\, H(B/A), \\ H(AB) &= H(B)\, H(A/B). \end{aligned} \tag{15}$$

Die Gl. (15) kann auch als Definitionsgleichung für die bedingten Häufigkeiten aufgefaßt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} H(B/A) &= \frac{H(AB)}{H(A)}, \\ H(A/B) &= \frac{H(AB)}{H(B)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Auf der rechten Seite stehen jetzt nur Häufigkeiten, die sich auf die ursprüngliche Versuchsvorschrift beziehen.

Von den Rechenregeln für Häufigkeiten wird man praktisch kaum Gebrauch machen, da die Werte der Häufigkeiten von der Anzahl der durchgeführten Versuche n abhängig sind und darüber hinaus sogar bei konstant gehaltenem n von Versuchsreihe zu Versuchsreihe schwanken. Es wird dennoch eine ausführlichere Darstellung der Regeln für das Rechnen mit Häufigkeiten gezeigt, da diese ein anschauliches Modell für die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestehen die auf Grund der Variabilität der Häufigkeiten sich ergebenden Schwierigkeiten nicht, da man dort von der Voraussetzung ausgeht, daß bei vorgegebener Versuchsvorschrift jedem zufälligen Ereignis ein fester Zahlenwert, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, zugeordnet werden kann.

2.3. Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.3.1. *Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*

Wenn wir rückschauend unser bisheriges Vorgehen betrachten, so zeigt sich, daß wir stillschweigend die Gültigkeit gewisser Grundprinzipien als gegeben angesehen haben, ohne die unsere Ergebnisse in Frage gestellt wären. Zum anderen haben wir einige prinzipielle Resultate gewonnen, die ebenfalls beim Aufbau einer Wahrscheinlichkeitsrechnung Beachtung finden müssen. Als Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehen wir an:

1. Entscheidbarkeit

Bei einer Realisierung einer Versuchsvorschrift muß eindeutig entscheidbar sein, ob ein bestimmtes zufälliges Ereignis, das zu dieser Versuchsvorschrift gehört, eingetreten ist oder nicht.

Das Prinzip der Entscheidbarkeit ist sehr wichtig für alle Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es zwingt zu einer klaren Klassifikation der möglichen Versuchsergebnisse. Wo das Prinzip der Entscheidbarkeit nicht gewährleistet ist, bleibt natürlich die Aussagekraft der mit Hilfe eines Zählvorganges gewonnenen quantitativen Charakterisierung eines zufälligen Ereignisses von vornherein in Frage gestellt.

2. *Wiederholbarkeit*

Eine Versuchsvorschrift muß so geartet sein, daß sie zumindest prinzipiell beliebig oft realisierbar ist, d. h., es muß wenigstens theoretisch möglich sein, eine sehr lange Versuchsreihe von voneinander unabhängigen gleichartigen Versuchen vorzunehmen.

Das Prinzip der Wiederholbarkeit unterstreicht, daß sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich mit Gesetzmäßigkeiten bei Massenerscheinungen und Wiederholungsvorgängen beschäftigt. Häufigkeiten können überhaupt erst dann gebildet werden, wenn mehrere Realisierungen einer Versuchsvorschrift vorliegen.

3. *Existenz eines Ereignisfeldes*

Zu jeder Versuchsvorschrift mit k Elementarereignissen gehört ein System von 2^k zufälligen Ereignissen, das Ereignisfeld der Versuchsvorschrift. Eine wichtige Eigenschaft eines Ereignisfeldes ist seine Abgeschlossenheit gegenüber den logischen Grundoperationen, d. h., durch die Bildung der Summe, des Produktes und der Differenz zweier Ereignisse aus einem Ereignisfeld erhält man wieder ein Ereignis, das dem Ereignisfeld angehört.

4. *Existenz einer Wahrscheinlichkeit*

Jedem zufälligen Ereignis A aus einem Ereignisfeld ist bei vorgegebener Versuchsvorschrift eine feste reelle Zahl

$$P(A),$$

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A, zugeordnet. Sie genügt der Ungleichung:

$$0 \leqq P(A) \leqq 1. \tag{17}$$

5. *Wahrscheinlichkeit des sicheren und des unmöglichen Ereignisses*

Ein sicheres Ereignis E, das bei jeder Realisierung der Versuchsvorschrift eintritt, und ein unmögliches Ereignis $\emptyset$, das bei keiner Realisierung eintreten kann, besitzen die Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(E) &= 1, \\ P(\emptyset) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

6. *Prinzip der Additivität*

Sind A und B zwei miteinander unvereinbare Ereignisse eines Ereignisfeldes, so gilt:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \quad AB = \emptyset. \tag{19}$$

Die noch folgenden Grundprinzipien sind für alle praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von außerordentlicher Bedeutung.

7. Stationärwerden der relativen Häufigkeiten

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses A in einer genügend langen Versuchsreihe ist „praktisch gleich" seiner Wahrscheinlichkeit.

$$H(A) \approx P(A) \tag{20}$$

8. Prinzip der praktischen Gewißheit

Besitzt ein Ereignis eine Wahrscheinlichkeit nahe bei Eins bzw. Null, so kann als praktisch gewiß angenommen werden, daß bei einer einmaligen Realisierung der Versuchsvorschrift das betreffende Ereignis eintritt bzw. nicht eintritt. Das heißt mit anderen Worten:

$P(A) \approx 1$ bedeutet, A ist ein praktisch sicheres Ereignis und

$P(B) \approx 0$ bedeutet, B ist ein praktisch unmögliches Ereignis.

Wie nahe die Wahrscheinlichkeiten bei Eins bzw. Null liegen müssen, damit ein Ereignis als praktisch sicher bzw. praktisch unmöglich angesehen werden kann, läßt sich generell nicht festlegen. Es hängt in erster Linie von der Art des betreffenden Ereignisses und den Schlußfolgerungen ab, die mit einer solchen Bewertung verbunden sind. In den experimentellen Naturwissenschaften haben sich als kritische Werte für ein praktisch sicheres Ereignis Wahrscheinlichkeiten von 0,95 und 0,99 und für ein praktisch unmögliches Ereignis solche von 0,05 und 0,01 eingebürgert.

Dabei darf nicht außer acht gelassen werden, daß jedes Ereignis, das eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzt und die noch so klein sein mag, bei jedem Versuch dennoch eintreten kann. In einer Versuchsreihe mit einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen wird es sogar mit Sicherheit mindestens einmal eintreten.

2.3.2. *Wahrscheinlichkeitsdefinitionen*

Nachdem wir im vierten Grundprinzip festgelegt haben, daß jedem zufälligen Ereignis A, das zu einer Versuchsvorschrift gehört, eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zugeordnet ist, erhebt sich die Frage, wie sich der Wert dieser Wahrscheinlichkeit bestimmen läßt. Es gibt sehr viele Wahrscheinlichkeitsdefinitionen, die alle durch eine verfeinerte logische Bearbeitung einer Reihe einfacher Beobachtungen und zweckmäßiger Verfahren entstanden sind. Die verschiedenen Definitionen lassen sich im wesentlichen in drei Gruppen von Wahrscheinlichkeitsdefinitionen einteilen, die jedoch alle vom mathematischen Standpunkt aus unbefriedigend bleiben. Dies ändert sich erst durch den axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bild 12).

Das Axiomensystem, das im Jahre 1933 von dem sowjetischen Mathematiker *Kolmogorov* vorgeschlagen wurde und eine exakte mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglichte, umfaßt im wesentlichen die vorher angegebenen Grundprinzipien 3 bis 6, die rein mathematischer Natur sind. Dem interessierten Leser, der mehr darüber erfahren möchte, sei das Studium eines modernen Lehrbuches über Wahrscheinlichkeitsrechnung empfohlen.

Subjektive Definition der Wahrscheinlichkeit

Die subjektive Definition der Wahrscheinlichkeit steht in engem Zusammenhang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff der Umgangssprache. Sie drückt den

Überzeugtheitsgrad des Sprechenden von der Wahrheit oder Falschheit einer Aussage aus. Die Aussagen

a) es ist „sehr wahrscheinlich“, daß im Jahre 1966 die ersten Fernsehaufnahmen von der Oberfläche eines Nachbarplaneten zur Erde gesandt werden und

b) es ist „unwahrscheinlich“, daß auf dem Mond Lebewesen existieren,

besitzen nur subjektive Bedeutung. Sie sind entweder wahr oder falsch. Mit ihrer Widerlegung werden alle vorher ausgesprochenen Einschätzungen wertlos. Solche Wahrscheinlichkeitsaussagen stehen im Widerspruch zum Prinzip der Wiederholbarkeit und sind daher für eine Beschreibung objektiver Gesetzmäßigkeiten ungeeignet.

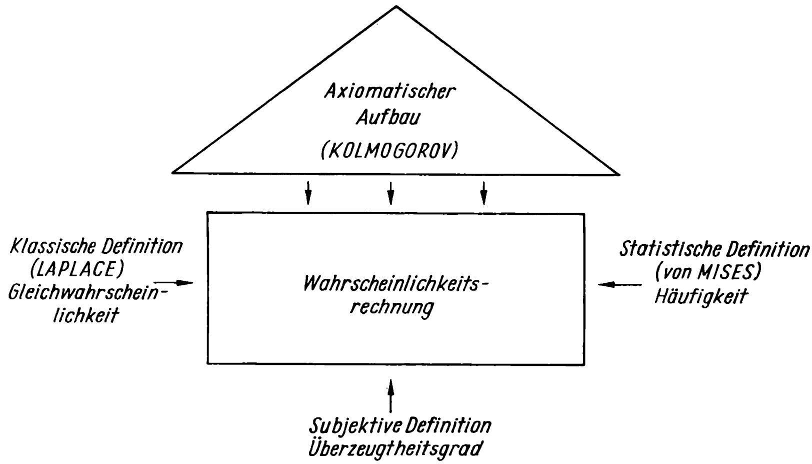


Bild 12. Wahrscheinlichkeitsdefinitionen

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit geht von dem Begriff der Gleichmöglichkeit (Gleichwahrscheinlichkeit) von Ereignissen aus, der als Grundbegriff nicht näher definiert ist.

Beispielsweise werden beim Würfeln mit einem Würfel, der eine einwandfreie kubische Gestalt besitzt und aus vollkommen homogenem Material gefertigt ist, die Augenzahlen 1 bis 6 gleichmögliche Ereignisse sein, denn es besteht infolge der Symmetrieeigenschaften des Würfels kein Grund, anzunehmen, daß eine Seite vor einer anderen „ausgezeichnet“ sei.

Wir betrachten jetzt allgemein eine Versuchsvorschrift, zu der n gleichmögliche Elementarereignisse

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

gehören und fragen nach der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A, das dem Ereignisfeld der Versuchsvorschrift entnommen ist. Wie wir bereits wissen, kann A nach Gl. (9) stets durch eine Summe von Elementarereignissen dargestellt werden.

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}.$$

Der Index m ist eine ganze Zahl zwischen 0 und n.

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A lautet:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{21}$$

Es ist allgemein üblich, die n gleichwahrscheinlichen Elementarereignisse als mögliche Versuchsergebnisse und die m Elementarereignisse, aus denen sich das zufällige Ereignis A zusammensetzt, als für A günstige Versuchsergebnisse zu bezeichnen. Mit dieser Sprechweise kann die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Gl. (21) auch folgendermaßen formuliert werden:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Versuchsergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse}}.$$

Offensichtlich ist die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nur bei endlich vielen möglichen Ereignissen anwendbar. Eine natürliche Ausdehnung der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit auf unendliche Ereignisfelder stellt die geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit dar.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit beruht auf der Betrachtung von endlichen vielen gleichmöglichen Ereignissen. Zahlreiche praktische Aufgabenstellungen erfordern die Bildung von Wahrscheinlichkeiten auch in solchen Fällen, bei denen unendlich viele Versuchsergebnisse denkbar sind.

Problemstellung

In einer Ebene sind ein Bereich G und ein Teilbereich g von G vorgegeben (Bild 13). Beide Bereiche werden als meßbar vorausgesetzt, d. h., sie besitzen im herkömmlichen Sinne die Flächeninhalte $J(G)$ und $J(g)$.

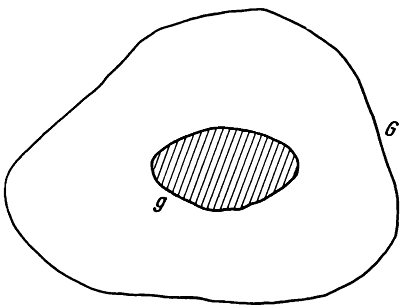


Bild 13. Menge der möglichen Elementarereignisse G und der für A günstigen Elementarereignisse g im Fall geometrischer Wahrscheinlichkeiten

Auf Grund einer bestimmten Versuchsvorschrift werde auf „gut Glück" ein Punkt aus dem Bereich G ausgewählt. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, daß der Punkt in dem Teilbereich g liegt.

Ein Punkt wird auf „gut Glück" ausgewählt, bedeutet, jeder beliebige Punkt von G kann ausgewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er in einen beliebigen Teilbereich von G fällt, ist dem Flächeninhalt dieses Teilbereiches proportional und hängt nicht von dessen Lage oder Form ab.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A wird durch den Ausdruck

$$P(A) = \frac{J(g)}{J(G)} \tag{22}$$

definiert.

An dieser Stelle sei eine Zwischenbemerkung eingefügt. Löst man die Gl. (22) nach $J(g)$ auf und ersetzt $P(A)$ durch die Häufigkeit $H(A)$ des Ereignisses A, die bei einer sehr großen Anzahl von Realisierungen der obigen Versuchsvorschrift gewonnen worden ist, so erhält man

$$J(g) = H(A) \cdot J(G)$$

und somit die Möglichkeit, bei bekanntem Inhalt des Gesamtbereiches und bekannter Häufigkeit $H(A)$ den Flächeninhalt $J(g)$ eines vorgegebenen Teilbereiches zu schätzen. Ein solches Verfahren wird Monte-Carlo-Methode genannt. Man benötigt dazu in dem geschilderten Fall eine Anlage, die in schneller Folge „regellos" Punkte aus dem Gesamtbereich auswählt und darüber hinaus noch die Versuche registriert, bei denen der Punkt in g liegt.

Im folgenden werden wir Beispiele zur klassischen und geometrischen Definition der Wahrscheinlichkeit betrachten und auf Besonderheiten bei ihrer Anwendung hinweisen. Ein einfaches Beispiel zeigt zunächst das prinzipielle Vorgehen.

Beispiel 4

Wie groß ist beim einmaligen Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) eine gerade Augenzahl und
b) eine Augenzahl größer als 4

geworfen wird?

Unter der Annahme, daß es sich um einen idealen Würfel handelt, liegen sechs gleichwahrscheinliche Elementarereignisse

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$$

vor, die dem Auftreten der Augenzahlen 1 bis 6 entsprechen. Die Anzahl der gleichmöglichen Versuchsergebnisse beträgt demnach $n = 6$.

a) Das Ereignis A, eine gerade Augenzahl zu würfeln, kann durch die logische Summe

$$A = E_2 + E_4 + E_6$$

ausgedrückt werden. Die Anzahl der für A günstigen Versuchsergebnisse ist folglich $m = 3$. Nach Gl. (21) gilt dann:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) Bezeichnet man das Ereignis, eine Augenzahl größer als 4 zu werfen, mit B, so ergibt sich für B die Darstellung:

$$B = E_5 + E_6.$$

Aus $m = 2$ folgt schließlich

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Problemen, bei denen die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, begegnet man nur selten. In vielen Fällen gelingt es jedoch, durch eine Verfeinerung der Versuchsvorschrift zu einer Menge gleichmöglicher Elementarereignisse zu gelangen, was im folgenden Beispiel veranschaulicht werden soll.

Beispiel 5

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, mit zwei Würfeln die Augensummen

$$2, 3, 4, \ldots, 11 \quad \text{oder} \quad 12$$

zu werfen?

Zu der Versuchsvorschrift gehören elf Elementarereignisse E_2 bis E_{12}, die wir uns durch Punkte längs einer Geraden dargestellt denken können.

Es handelt sich offenbar nicht um gleichwahrscheinliche Elementarereignisse, denn jeder weiß, daß beispielsweise die Augensumme 7 wesentlich öfter eintritt als die Augensumme 12. Wir können uns weiter helfen, indem wir zu einer verfeinerten Versuchsvorschrift übergehen und als Versuchsergebnis das Paar der Augenzahlen vom ersten und zweiten Würfel notieren.

$$(w_i, w_j) \quad i, j = 1, 2, \ldots, 6. \tag{23}$$

Beide Würfel sind jetzt markiert zu denken. w_i bzw. w_j gibt die Augenzahl i bzw. j an, die der erste bzw. zweite Würfel zeigt. Da nach Gl. (23) zu jedem der sechs möglichen Versuchsergebnisse des ersten Würfels noch sechs mögliche Versuchsergebnisse des zweiten Würfels hinzukommen, gibt es im Fall der verfeinerten Versuchsvorschrift insgesamt $n = 6 \cdot 6 = 36$ Elementarereignisse, die als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt werden können.

Bild 14 zeigt Darstellungen der Menge der Elementarereignisse für die ursprüngliche und für die verfeinerte Versuchsvorschrift.

Die in das Punktegitter (verfeinerte Versuchsvorschrift) eingezeichneten Verbindungsgeraden kennzeichnen Ereignispaare mit gleicher Augensumme. Die Anzahl derjenigen Punkte, die auf einer solchen Verbindungsgeraden liegen, gibt dann die Anzahl m der für die betreffende Augensumme günstigen Elementarereignisse an. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten betragen demnach:

$$P(E_2) = \frac{1}{36} \qquad P(E_{12}) = \frac{1}{36}$$

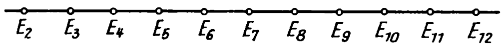
$$P(E_3) = \frac{2}{36} \qquad P(E_{11}) = \frac{2}{36}$$

$$P(E_4) = \frac{3}{36} \qquad P(E_{10}) = \frac{3}{36}$$

$$P(E_5) = \frac{4}{36} \qquad P(E_9) = \frac{4}{36}$$

$$P(E_6) = \frac{5}{36} \qquad P(E_8) = \frac{5}{36}$$

$$P(E_7) = \frac{6}{36}$$



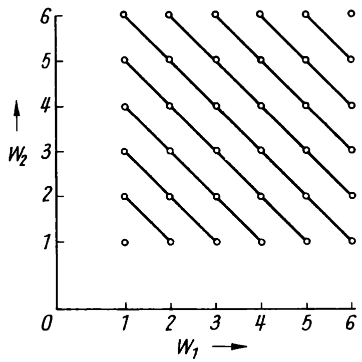


Bild 14. Darstellung der Menge der Elementarereignisse für die ursprüngliche und für die verfeinerte Versuchsvorschrift beim Würfeln mit zwei Würfeln

Man überzeugt sich leicht, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse 1 ergibt.

Die Schwierigkeiten bei der numerischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten nach der klassischen Definition beruht im allgemeinen in der Abzählung der günstigen und möglichen Versuchsergebnisse. Das soll am Beispiel des Zahlenlotto veranschaulicht werden.

Beispiel 6

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Spielen im Zahlenlotto die Ereignisse

A_5 : fünf richtige Zahlen (Fünfer)
A_4 : vier richtige Zahlen (Vierer)
A_3 : drei richtige Zahlen (Dreier)

A_2 : zwei richtige Zahlen (Zweier)
A_1 : eine richtige Zahl
A_0 : keine richtige Zahl

eintreten.

Bild 15 zeigt die schematische Darstellung eines Lottoscheines.

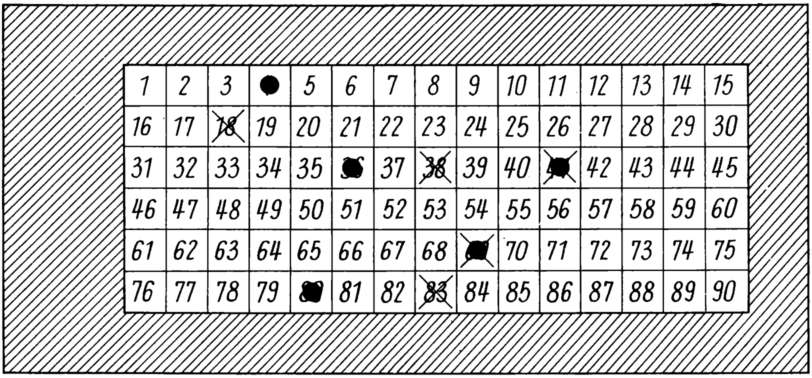


Bild 15. Muster eines Lottoscheines (○ gelochte Zahlen, × gezogene Zahlen)

Die mit einem Kreis ○ markierten Felder kennzeichnen die von einem Spieler gelochten Zahlen, während die in der Sonntagsziehung ermittelten Zahlen durch Kreuze × dargestellt sind. Der Lottoschein im Bild 15 zeigt den Fall eines Zweiers, denn von den fünf gelochten Zahlen sind am Sonntag zwei gezogen worden. Die Anzahl der möglichen Tips, die alle als gleichwahrscheinlich angesehen werden dürfen, ergibt sich aus der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, aus 90 Feldern 5 auszuwählen. Nach Gl. (8) beträgt die Anzahl der möglichen Tips:

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268.$$

Für einen Zweier A_2 wird die Abzählung der günstigen Ereignisse ausführlich erläutert. Das Eintreten von A_2 setzt voraus, daß zwei von den fünf in der Sonntagsziehung ermittelten Zahlen bei der Abgabe des Tipscheins gelocht worden sind. Das ergibt zunächst

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Möglichkeiten. Die restlichen drei Lochungen können jeweils beliebig auf den 85 Feldern verteilt werden, die den nicht gezogenen Zahlen entsprechen. Die Anzahl der möglichen Belegungen ist:

$$\binom{85}{3} = \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 98770.$$

Aus dem Produkt der beiden zuletzt berechneten Anzahlen ergibt sich dann die Gesamtzahl der für das Eintreten des Ereignisses A_2 günstigen Tips, die mit m_2 bezeichnet wird.

$$m_2 = \binom{85}{3}\binom{5}{2} = 987\,700.$$

Im folgenden wird eine Zusammenstellung der m_i-Werte für die Ereignisse A_5 bis A_0 gegeben.

$$\begin{aligned}
m_5 &= \tbinom{85}{0}\tbinom{5}{5} = & 1\\
m_4 &= \tbinom{85}{1}\tbinom{5}{4} = & 425\\
m_3 &= \tbinom{85}{2}\tbinom{5}{3} = & 35\,700\\
m_2 &= \tbinom{85}{3}\tbinom{5}{2} = & 987\,700\\
m_1 &= \tbinom{85}{4}\tbinom{5}{1} = & 10\,123\,925\\
m_0 &= \tbinom{85}{5}\tbinom{5}{0} = & 32\,801\,517\\
\hline
\text{Summe: } n &= \tbinom{90}{5} = & 43\,949\,268
\end{aligned}$$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gewinnt man, indem man die m_i durch n dividiert. Die Ergebnisse lauten auf zwei geltende Ziffern abgerundet:

$$\begin{aligned}
P(A_5) &= 0{,}000\,000\,023\\
P(A_4) &= 0{,}000\,009\,7\\
P(A_3) &= 0{,}000\,81\\
P(A_2) &= 0{,}022\\
P(A_1) &= 0{,}23\\
P(A_0) &= 0{,}75
\end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir uns einem instruktiven Beispiel für die Unmöglichkeit zu, auf Grund theoretischer Erwägungen allein zu entscheiden, welche Erscheinungen als gleichwahrscheinlich anzusehen sind. In der statistischen Mechanik interessiert die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Belegung von N Zellen eines Phasenraumes mit k nicht unterscheidbaren physikalischen Teilchen. Wir betrachten dazu das nächste Beispiel.

Beispiel 7

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte „Belegung“ A von N Kästchen mit k Teilchen zu beobachten, wenn alle „Belegungen“ als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt werden? Die Anzahl k der Teilchen wird dabei kleiner als N vorausgesetzt.

Man kann sich etwa vorstellen, daß die physikalischen Partikel wie eine Handvoll Glaskugeln blindlings in N offenstehende Kästchen geworfen werden und nach der Wahrscheinlichkeit einer „Belegung“ A gefragt wird. Die Lösung der Aufgabe hängt davon ab, welche Versuchsergebnisse (Belegungen) als möglich angesehen werden.

a) In der Maxwell-Boltzmann-Statistik werden alle denkbaren Belegungen als gleichmöglich angesehen. Da für jedes einzelne Teilchen die Möglichkeit besteht, in eines der N Kästchen zu fallen, sind insgesamt N^k Anordnungen möglich, die alle als gleichwahrscheinlich betrachtet werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$P(A) = \frac{1}{N^k}. \tag{24}$$

Es sind zahlreiche Versuche durchgeführt worden, um nachzuweisen, daß sich auch Lichtquanten, Elektronen und andere Elementarteilchen im Einklang mit diesem Modell verhalten. Es konnte jedoch überzeugend nachgewiesen werden, daß diese Statistik nicht auf diese Teilchen anwendbar ist. In keinem Fall sind alle N^k Anordnungen angenähert gleichwahrscheinlich.

b) In der Bose-Einstein-Statistik werden nur unterscheidbare Anordnungen betrachtet. Um hierbei die Anzahl der möglichen Anordnungen abzählen zu können, betrachten wir den Fall $N = 3$ und $k = 2$. Denkt man sich die Kästchen längs einer Geraden nebeneinandergestellt, so lassen sich die äußerlich unterscheidbaren Belegungen durch die Lage der Teilchen und die Lage der Trennwände der Kästchen beschreiben. Im Bild 16 sind die verschiedenen Kästchenbelegungen eingezeichnet und gleichzeitig rechts daneben die Lage der Teilchen und Trennwände längs einer Geraden in gleichen Abständen in der entsprechenden Reihenfolge charakterisiert worden.

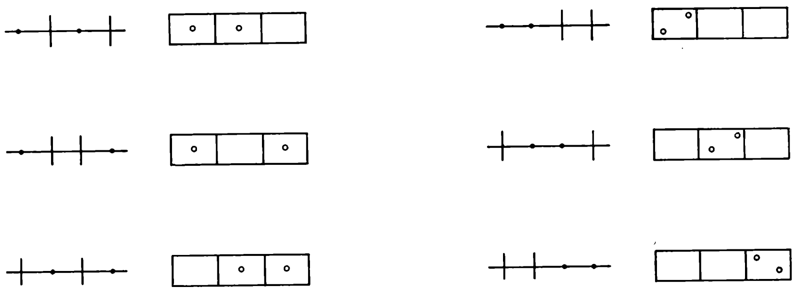


Bild 16. Darstellung der unterscheidbaren Anordnungen bei der Belegung von $N = 3$ Kästchen mit $k = 2$ gleichen Teilchen (Bose-Einstein-Statistik)

Aus der grafischen Darstellung erkennt man, daß die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen im Fall der Bose-Einstein-Statistik sich aus der Anzahl der möglichen Belegungen von $N + k - 1$ (Summe der Anzahl der Trennwände und Teilchen) Plätzen mit k Teilchen ergibt. Nach Gl. (8) gilt für die gesuchte Anzahl:

$$\binom{N+k-1}{k},$$

und im obigen Fall erhalten wir:

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{N+k-1}{k}}. \tag{25}$$

Dieses Modell gilt für Photonen und ähnliche Teilchen. Beim Studium des Atombaues trifft man auf Teilchen, die wiederum ein anderes Verhalten zeigen.

c) In der Fermi-Dirac-Statistik werden alle Belegungen der Kästchen ausgeschlossen, bei denen zwei oder mehr Teilchen in einem Kästchen beobachtet werden. Danach handelt es sich nur noch um die Belegung von N Plätzen mit k Teilchen, deren Anzahl, wie wir wissen, $\binom{N}{k}$ beträgt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Belegung lautet:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{N}{k}}. \tag{26}$$

Das Verhalten von Elektronen, Neutronen und Protonen läßt sich mit diesem Modell beschreiben.

Wir haben bisher drei verschiedene Wahrscheinlichkeitsmodelle kennengelernt. Die Rechtfertigung eines jeden Modells wird von seiner erfolgreichen Anwendung bei der Beschreibung physikalischer Erscheinungen und nicht durch theoretische Erwägungen bestimmt.

Mit der Anwendung der geometrischen Definition der Wahrscheinlichkeit wollen wir uns im nächsten Beispiel beschäftigen.

Beispiel 8

Zwei Personen verabreden sich, zwischen 18 und 19 Uhr von zwei bestimmten Sprechstellen S_1 und S_2 aus anzurufen. Beide treffen im genannten Zeitraum auf „gut Glück“ an ihrer Sprechstelle ein und rufen sofort den anderen an. Meldet sich der Partner nicht, wartet der zuerst eingetroffene eine halbe Stunde und geht dann weg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dafür, daß eine Gesprächsverbindung zustande kommt? Bezeichnet man die Ankunftszeit der ersten Person in der Sprechstelle S_1 mit x und die Ankunftszeit der zweiten in der Sprechstelle S_2 mit y, so lassen sich die möglichen Kombinationen der Ankunftszeiten als Punkte eines Quadrates mit der Kantenlänge 1 Stunde in der xy-Ebene darstellen (Bild 17). Der für das Zustandekommen eines Gespräches günstige Bereich ist schraffiert dargestellt. Er enthält alle Punkte, bei denen die Ankunftszeiten beider Personen um weniger als eine halbe Stunde differieren.

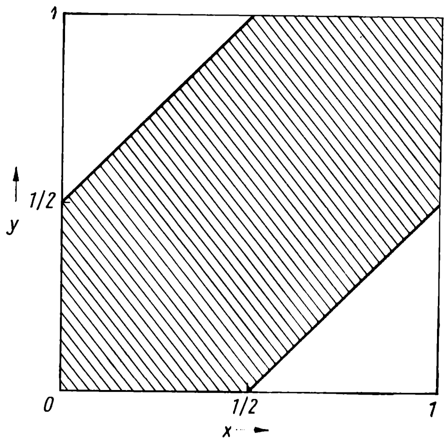


Bild 17. Menge der möglichen und für A günstigen Elementarereignisse im Beispiel 8

Die Fläche des Quadrates ist gleich 1, und der Flächeninhalt des schraffierten Teilbereiches ergibt sich, indem man von der Fläche des Quadrates die Flächen der unschraffierten Restbereiche subtrahiert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ beträgt nach Gl. (22):

$$P(A) = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4}.$$

Die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

Beim Übergang von einfachen Beispielen zur Betrachtung komplizierter Aufgaben, wie sie auf naturwissenschaftlichen oder besonders auf nachrichtentechnischen Gebieten auftreten, stößt die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit auf unüberwindliche Schwierigkeiten, die prinzipieller Natur sind. Sehr oft ist es unmöglich, in vernünftiger Weise die gleichmöglichen Fälle herauszufinden. Eine überzeugende Kritik an den Begriffen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie hat *von Mises* geübt. Er schlug vor, die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit fallen zu lassen, und führte für die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A, das zu einer vorgegebenen Versuchsvorschrift gehört, die statistische Definition

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = \lim_{n \to \infty} H(A) \tag{27}$$

ein. Dem Experiment kommt hierbei eine wesentliche Bedeutung zu. Da die Definition nach Gl. (27) auf alle wissenschaftlich interessanten Fälle anwendbar ist, wird sie in der Nachrichtentechnik viel verwendet.

Man übersieht leicht, daß die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit für eine objektive zahlenmäßige Beschreibung gewisser realer Erscheinungen wenig geeignet ist. In der Tat kann man, bevor nicht unendlich viele Versuche und eine Limesbildung vorgenommen worden sind, noch nicht einmal von der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sprechen.

2.3.3. *Einige Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*

Die Rechenregeln, die wir bei der Betrachtung der Häufigkeiten von zufälligen Ereignissen gefunden haben, kehren in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder, da sie ja an den Eigenschaften von Häufigkeiten modelliert worden ist. Wir können uns daher im folgenden kurz fassen.

Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten für zwei beliebige Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeit der Summe $A + B$ zweier beliebiger Ereignisse eines Ereignisfeldes ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von A und B, vermindert um die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von A und B.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{28}$$

Dem Ereignis A eines Ereignisfeldes haben wir bei der Betrachtung von logischen Verknüpfungen zwischen Ereignissen das entgegengesetzte Ereignis $\bar{A}$ = Nicht-A gegenübergestellt. Die Summe beider Ereignisse bildet das sichere Ereignis E.

$$A + \bar{A} = E. \tag{29}$$

Da A und $\bar{A}$ miteinander unvereinbare Ereignisse sind, gilt:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{30}$$

In Verallgemeinerung von Gl. (29) kann E auch in mehrere miteinander unvereinbare Ereignisse zerlegt werden.

$$E = A_1 + A_2 + \cdots + A_n. \tag{31}$$

Es gilt dann:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1. \tag{32}$$

Die Ereignisse A_i in Gl. (31) bilden ein sog. vollständiges Ereignissystem.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zufälliger Ereignisse sind wir bisher von einer Versuchsvorschrift ausgegangen, zu der eine Menge möglicher Elementarereignisse und ein Ereignisfeld gehören. Man spricht auch von sog. unbedingten Wahrscheinlichkeiten, wenn außer der vorgegebenen Versuchsvorschrift keine weiteren Bedingungen bei der Bildung der Wahrscheinlichkeiten in Betracht gezogen werden. Wir haben bisher nur unbedingte Wahrscheinlichkeiten kennengelernt. Es seien A und B zwei miteinander unvereinbare Ereignisse $AB = \emptyset$. Sehr oft interessiert die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses A unter der Bedingung, daß das Ereignis B bereits eingetreten ist. Wir sprechen dann von einer bedingten Wahrscheinlichkeit.

Bild 18 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

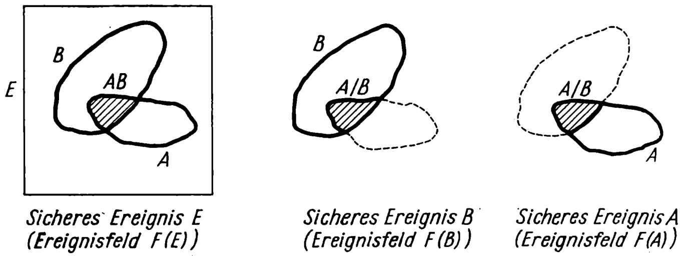


Bild 18. Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Im rechten Bild — sicheres Ereignis A — ist die Bezeichnung A/B in B/A zu ändern!)

Die zusätzliche Forderung, daß das Ereignis B bzw. A eingetreten ist, bedeutet, das Ereignis $E - B$ bzw. $E - A$ wird zu einem unmöglichen Ereignis. Insbesondere kann dann auch das Ereignis $A - B$ bzw. $B - A$ nicht mehr eintreten. Von dem Ereignis A bzw. B kann, nachdem das Ereignis B bzw. A eingetreten ist, nur noch das Ereignis AB eintreten. Damit übernimmt B bzw. A die Rolle einer neuen Menge von Elementarereignissen, aus denen sich ein neues Ereignisfeld $F(B)$ bzw. $F(A)$ im Gegensatz zu dem ursprünglichen Ereignisfeld $F(E)$ aufbauen läßt. Das Produkt AB der beiden Ereignisse A und B erscheint als Element von drei verschiedenen Ereignisfeldern. Um diese drei Auffassungen auseinanderhalten zu können, verwenden wir die bereits geläufigen Schreibweisen:

AB: Produkt von A und B
A/B: A unter der Bedingung B
B/A: B unter der Bedingung A.

Zunächst sind uns nur die auf dem Ereignisfeld $F(E)$ definierten Wahrscheinlichkeiten bekannt. Unser Ziel ist es daher, die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A/B)$ bzw. $P(B/A)$, die auf dem Ereignisfeld $F(B)$ bzw. $F(A)$ erklärt sind, auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff in $F(E)$ zurückzuführen. Man erwartet nach Bild 8, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ direkt proportional $P(AB)$ und umgekehrt proportional $P(B)$ sein wird. Entsprechendes gilt für $P(B/A)$. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden daher wie folgt definiert.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B) > 0;$$
$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad P(A) > 0. \tag{33}$$

In der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist die unbedingte Wahrscheinlichkeit als Spezialfall $B = E$ bzw. $A = E$ enthalten.

Aus den Definitionen nach Gl. (33) ergibt sich unmittelbar der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten.

Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit des Produktes AB zweier Ereignisse ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bzw. B mit der bedingten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B bzw. A unter der Bedingung, daß A bzw. B eingetreten ist.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{34}$$

Unabhängige Ereignisse

Im allgemeinen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ von der unbedingten Wahrscheinlichkeit $P(A)$ verschieden. Hängt jedoch die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A nicht von dem Eintreten des Ereignisses B ab, so sagt man, das Ereignis A ist unabhängig vom Ereignis B. Zwei Ereignisse A und B heißen voneinander unabhängig, wenn

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B/A) = P(B) \tag{35}$$

gilt, wobei die eine Relation die andere zur Folge hat. Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse ist demnach eine wechselseitige Eigenschaft.

Der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen ist von zentraler Wichtigkeit für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen. Oft ist es sehr schwierig zu entscheiden, ob in einem konkreten Fall unabhängige Ereignisse im obigen Sinne vorliegen. Das soll an einem Beispiel demonstriert werden. Wir betrachten das Werfen von zwei Würfeln. Werden beide Würfel in verschiedenen Räumen geworfen, so ist die Augenzahl des einen Würfels offenbar unabhängig von der Augenzahl, die mit dem anderen Würfel erzielt worden ist. Die Entscheidung, ob die Augenzahl zweier Würfel voneinander unabhängige Ereignisse sind oder nicht, fällt wesentlich schwerer, wenn die Würfel durch einen Faden miteinander verbunden werden. Ist der Faden sehr lang, dann ist die Abhängigkeit des Wurfergebnisses praktisch unbedeutend. Sie nimmt zu, wenn man den Faden verkürzt. Wo nun die Grenze zwischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit zu ziehen ist, kann nur mit Hilfe umfangreicher Untersuchungen ermittelt werden.

Multiplikationssatz für voneinander unabhängige Ereignisse

Für voneinander unabhängige Ereignisse geht der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeiten nach Gl. (34) über in

$$P(AB) = P(A)\,P(B). \tag{36}$$

Beispiel 9

Man prüfe, ob beim Werfen eines Würfels die Ereignisse

$$A = E_2 + E_4 + E_6 \quad \text{(gerade Augenzahl)}$$

und

$$B = E_4 + E_5 + E_6 \quad \text{(Augenzahl größer als 3)}$$

voneinander unabhängig sind.

Für das Produkt von A und B gilt:

$$AB = E_4 + E_6.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und AB lauten:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt:

$$P(A/B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}; \qquad P(B/A) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Die Ereignisse A und B sind voneinander abhängig, da sich die bedingten von den unbedingten Wahrscheinlichkeiten unterscheiden.

Beispiel 10

Sind beim Werfen mit zwei Würfeln die Ereignisse

$$A = E_3 + E_5 + E_7 + E_9 + E_{11} \quad \text{(ungerade Augenzahl)}$$

und

$$B = E_9 + E_{10} + E_{12} \quad \text{(Augenzahl 9, 10 oder 12)}$$

voneinander abhängig?

Es gilt:

$$AB = E_9.$$

Die Wahrscheinlichkeiten für A, B und AB ergeben sich durch Addition der im Beispiel 5 bestimmten Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse. Wir erhalten:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{2}{9}, \qquad P(AB) = \frac{1}{9}.$$

Daraus folgt:

$$P(A/B) = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2}; \qquad P(B/A) = \frac{1/9}{1/2} = \frac{2}{9}.$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten stimmen mit den unbedingten Wahrscheinlichkeiten überein, die Ereignisse A und B sind folglich im Sinne der Definition nach Gl. (35) voneinander unabhängig.

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Betrachtet man ein Ereignis B und ein vollständiges System von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die paarweise unvereinbar sind und der Relation nach Gl. (31) genügen, so kann B als Summe der paarweise unvereinbaren Ereignisse BA_i geschrieben werden.

$$B = BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n.$$

Nach dem Additionssatz für unvereinbare Ereignisse folgt:

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n).$$

Wendet man auf jeden Summanden einzeln den Multiplikationssatz nach Gl. (34) an, so gewinnt man die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n). \tag{37}$$

Mit Hilfe von Gl. (37) erhält man leicht die Bayessche Formel, die bei Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von großer Bedeutung ist.

Der Satz von Bayes

Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges Ereignissystem, und betrachtet man die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(B)} \tag{38}$$

eines Ereignisses A_i des vollständigen Ereignissystems unter der Bedingung, daß ein Ereignis B mit positiver Wahrscheinlichkeit eingetreten ist, so kann der Nenner von Gl. (38) durch die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit von Gl. (37) ersetzt werden.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n)}. \tag{39}$$

Die Gl. (39) wird Bayessche Formel genannt.

Beispiel 11

Bei der Untersuchung des Einflusses des Wetters auf einen störungsfreien Rundfunkempfang werden drei verschiedene Wetterlagen A_1, A_2 und A_3 unterschieden, die mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(A_1) = 0{,}5, \quad P(A_2) = 0{,}3, \quad P(A_3) = 0{,}2$$

auftreten. Bekannt seien außerdem die bedingten Wahrscheinlichkeiten für einen störungsfreien Rundfunkempfang B für jede einzelne Wetterlage.

$$P(B/A_1) = 1{,}0, \quad P(B/A_2) = 0{,}8, \quad P(B/A_3) = 0{,}5.$$

Die angegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten lassen erkennen, daß bei der Wetterlage A_1 durchweg ein störungsfreier Empfang erfolgt, während bei A_2 nur in 80% und bei A_3 nur in 50% aller Fälle die Sendungen störungsfrei empfangen werden. Gefragt wird erstens nach der Wahrscheinlichkeit $P(B)$ eines störungsfreien Rundfunkempfangs überhaupt und zweitens nach der bedingten Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Wetterlage vorliegt, wenn der Rundfunkempfang störungsfrei ist.

Nach der Gl. (37) für die totale Wahrscheinlichkeit gilt für einen störungsfreien Rundfunkempfang:

$$P(B) = 0{,}5 \cdot 1{,}0 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}5,$$
$$P(B) = 0{,}84.$$

Ferner erhält man nach Gl. (39), wenn man beachtet, daß der Nenner gleich dem eben errechneten Wert ist, die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten.

$$P(A_1/B) = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}0}{0{,}84} = \frac{25}{42}$$

$$P(A_2/B) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}84} = \frac{12}{42}$$

$$P(A_3/B) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}84} = \frac{5}{42}$$

Die drei Ereignisse bilden wiederum ein vollständiges Ereignissystem, so daß die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten gleich 1 sein muß, wovon man sich leicht überzeugen kann.

2.4. Zufallsgrößen

Bisher haben wir nur davon Gebrauch gemacht, daß die Ergebnisse eines Versuches oder einer Beobachtung klassifizierbare Ereignisse sind, deren Häufigkeit in einer Versuchsreihe durch Auszählen bestimmt werden kann. Man spricht dann von sog. qualitativen Merkmalen. Sehr oft liegen die Beobachtungsergebnisse selbst als Zahlenangaben vor, die durch einen Meß- oder Zählvorgang gewonnen werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

1. Augenzahl beim Würfeln,
2. Anzahl der Telefongespräche, die je Tag an einem Ort geführt werden,

3. Dauer eines Telefongespräches,
4. Lebensdauer eines nachrichtentechnischen Bauelements und
5. Rauschspannung des Widerstandsrauschens.

Es handelt sich bei den fünf Beispielen um zufällige Ereignisse, die durch die Angabe einer reellen Zahl charakterisiert werden. Wie wir später sehen werden, kann für eine zahlenmäßige Charakterisierung physikalischer und technischer Vorgänge auch die Angabe mehrerer solcher Zahlen erforderlich sein. Wir beschränken uns zunächst auf den eindimensionalen Fall. Durch einen Meß- oder Zählvorgang, der auf ein zufälliges Ereignis angewandt wird, gelangen wir zu einem quantitativen Merkmal. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es üblich, von Zufallsgrößen oder Zufallsvariablen zu sprechen. Im Bild 19 wird der Unterschied zwischen einem qualitativen Merkmal und einer Zufallsgröße veranschaulicht.

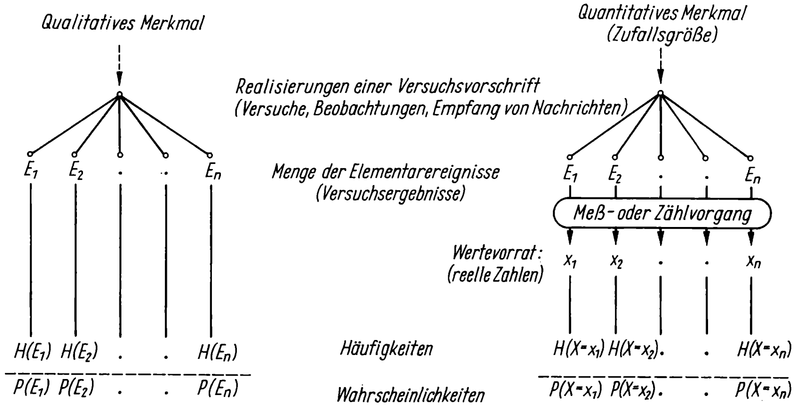


Bild 19. Veranschaulichung des Unterschiedes zwischen einem qualitativen Merkmal und einem quantitativen Merkmal (Zufallsgröße)

Bei den vorhergehenden Beispielen bietet sich die zahlenmäßige Charakterisierung der Versuchsergebnisse durch einen Meß- oder Zählvorgang von selbst an. Prinzipiell ist sie sogar stets möglich, wenn nur endlich viele Versuchsergebnisse vorliegen und man diese numeriert. Betrachtet man eine einfache Alternative A und $\bar{A}$, z. B. Impuls — kein Impuls, so wird gewöhnlich das Ereignis A durch die Zahl 1 und $\bar{A}$ durch die Zahl 0 gekennzeichnet. Diese Zuordnung ist nicht zwingend, sondern beruht auf einer willkürlichen Vereinbarung. Das trifft natürlich auch für die Augenzahlen bei einem Würfel zu. Man kann sich vorstellen, daß man anstelle der Augenzahlen x auf den Würfelflächen auch x^2, x^3 oder irgendeine andere Funktion von x anbringen könnte.

Alle Zufallsgrößen weisen die gleiche Bauart auf. Sie können verschiedene reelle Werte annehmen, und man kann bei einem Versuch nie vorhersagen, welchen Wert die Zufallsgröße annimmt, da sich die Werte der Zufallsgröße regellos von Versuch zu Versuch ändern. Zufallsgrößen lassen sich nach ihrem Wertevorrat einteilen, der aus der Menge aller derjenigen Werte gebildet wird, die von der Zufallsgröße angenommen werden können. Gibt die Zufallsgröße eine Anzahl von Gesprächen, Teilchen oder Individuen an, so umfaßt ihr Wertevorrat in der Regel endlich viele natürliche Zahlen einschließlich Null, z. B.

$$0, 1, 2, \ldots, n - 1, n.$$

Wie die Beispiele 3 bis 5 zeigten, kann der Wertevorrat einer Zufallsgröße auch aus unendlich vielen reellen Zahlen bestehen und alle Punkte eines bestimmten Intervalls der reellen Achse umfassen. Die Angabe des Wertevorrates allein reicht aber noch nicht aus, um eine Zufallsgröße eindeutig zu kennzeichnen. Wie dem Bild 19 zu entnehmen ist, erfordert eine vollständige Beschreibung einer Zufallsgröße noch zusätzliche Angaben darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Werte ihres Wertevorrates angenommen werden. Im folgenden bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben X, Y, ... Zufallsgrößen und mit kleinen lateinischen Buchstaben x, y, ... Werte, die von den Zufallsgrößen angenommen werden. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Elementarereignisse E_i und die aus ihnen gebildeten zufälligen Ereignisse A, B, ... auftreten, übertragen sich in natürlicher Weise auf die Werte der Zufallsgrößen. Ist X die Augenzahl beim Würfeln mit einem Würfel, so gilt beispielsweise:

$$P(X = 6) = \frac{1}{6};$$

$$P(X < 4) = \frac{1}{2};$$

$$P(1 < X \leqq 5) = \frac{2}{3}.$$

Betrachtet man als einfache Alternative das Eintreten eines Impulses A und das Nicht-Eintreten des Impulses $\bar{A}$, wobei die beiden Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ auftreten mögen, so können wir schreiben:

$$\mathrm{P}(A) = P(X = 1) = p,$$
$$P(\bar{A}) = P(X = 0) = 1 - p.$$

Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Rauschspannung U des Widerstandsrauschens unter einem vorgegebenen Wert u_0 liegt, bekannt

$$P(U < u_0) = \mathrm{p},$$

so folgt für die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses

$$P(U \geqq u_0) = 1 - p.$$

Prinzipiell unterscheidet man, wie bereits angedeutet, nach der Art des Wertvorrates zwei Typen von Zufallsgrößen, wobei von Zwischenformen abgesehen werden soll.

2.4.1. *Diskrete Zufallsgrößen*

Eine diskrete Zufallsgröße X kann nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte x_i, z. B. ganze Zahlen, annehmen.

Die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = x_i) = p_i, \tag{40}$$

die sich aus den Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Elementarereignisse ergeben und im diskreten Fall als positiv vorausgesetzt werden, bilden die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Summiert man über alle Punkte des Wertevorrates, so folgt:

$$\sum p_i = 1. \tag{41}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße kann daher auch als eine Verteilung einer Gesamtmasse 1 auf die diskreten Punkte x_1 der x-Achse interpretiert werden, wobei auf einen Punkt x_i die Wahrscheinlichkeitsmasse p_i entfällt. Bild 20 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augenzahl X beim Würfeln mit einem Würfel.

Hierin sind als Ordinaten die Wahrscheinlichkeiten $p_i = 1/6$ in den Punkten $1, 2, \ldots, 6$ aufgetragen.

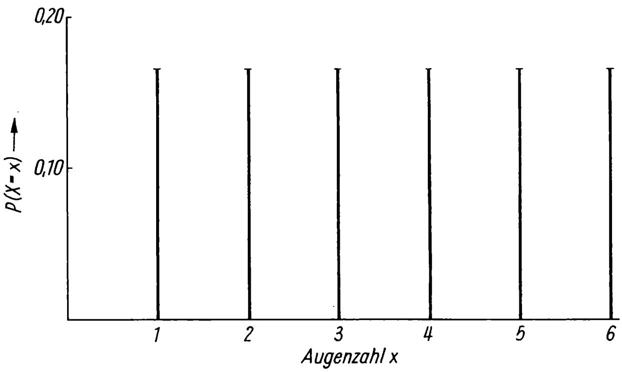


Bild 20. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahl X beim Würfeln mit einem Würfel

2.4.2. *Stetige Zufallsgrößen*

Eine stetige Zufallsgröße X kann alle reellen Zahlen aus einem bestimmten Intervall der reellen Achse, das auch unendlich sein kann, annehmen.

Im Falle einer stetigen Zufallsgröße ist die Gesamtmasse 1 kontinuierlich über die x-Achse verteilt. Die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ beschrieben. Bild 21 zeigt die Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die stetige Zufallsgröße X einen Wert im Intervall $[a, b]$ annimmt, wird durch die schraffierte Fläche, die durch die Kurve $f(x)$, die x-Achse und die Ordinaten in den Punkten a und b begrenzt wird, gekennzeichnet. In einer Gleichung läßt sich dieser Sachverhalt wie folgt ausdrücken:

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{42}$$

Da die längs der x-Achse verteilte Gesamtmasse gleich 1 ist, muß die Gesamtfläche unter der Kurve $f(x)$ einer stetigen Zufallsgröße X stets gleich 1 sein. Das bedeutet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{43}$$

Im stetigen Fall tritt an die Stelle der Wahrscheinlichkeiten p_i einer diskreten Zufallsgröße das sog. Wahrscheinlichkeitselement

$$\mathrm{d}P = P(x \leqq X \leqq x + \mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

und die Summenbildung ist durch eine Integralbildung zu ersetzen.

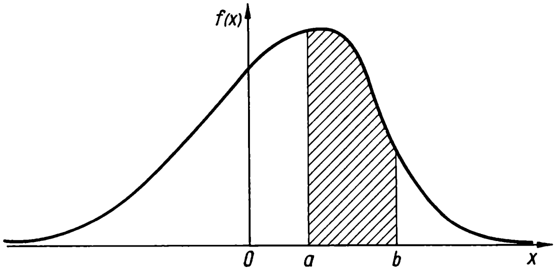


Bild 21. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsgröße X

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine stetige Zufallsgröße X eine vorgegebene reelle Zahl x_0 annimmt, ist nach Gl. (42) gleich Null, da die obere und untere Grenze des bestimmten Integrals zusammenfallen. Dennoch ist das Eintreten eines solchen Ereignisses nicht unmöglich, d. h., die Wahrscheinlichkeit Null ist nicht an die Unmöglichkeit eines Ereignisses gebunden.

Binomialverteilung

Für die Praxis ist die Betrachtung einer Summe von voneinander unabhängigen diskreten Zufallsgrößen von großem Interesse. Wir wenden uns folgender Situation zu: Gegeben seien n Fernsprechanschlüsse. Für jeden Anschluß besteht die einfache Alternative:

A: es wird ein Gespräch geführt $(X_i = 1)$,
$\bar{A}$: es wird kein Gespräch geführt $(X_i = 0)$.

Für jede Sprechstelle sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu einer bestimmten Tageszeit ein Gespräch geführt wird,

$$P(A) = P(X_i = 1) = p. \tag{44}$$

Hieraus folgt:

$$P(\bar{A}) = P(X_i = 0) = 1 - p = q. \tag{45}$$

Es liegen also n Zufallsgrößen X_i vor, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Die Wahrscheinlichkeit p, die für alle X_i konstant ist, wird Grundwahrscheinlichkeit genannt.

Die Anzahl derjenigen Gespräche X, die gleichzeitig über die n Sprechstellen zu einem bestimmten Zeitpunkt geführt werden, läßt sich als Summe

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{46}$$

schreiben. Die Versuchsvorschrift für die Zufallsgröße X sieht vor, daß die Werte der Zufallsgrößen X_i gleichzeitig ermittelt und addiert werden. Auf diese Weise erscheint die Zufallsgröße X als Resultat des Zusammenwirkens mehrerer zufälliger Größen. Das kommt auch in der schematischen Darstellung, nach Bild 22, zum Ausdruck.

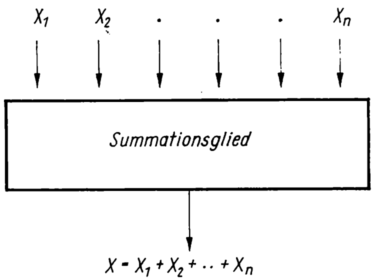


Bild 22. Schematische Darstellung der Summe X von n Zufallsgrößen X_i

Die Forderung, daß die Zufallsgrößen voneinander unabhängig sind, verlangt, daß keine Gespräche zwischen den betrachteten n Sprechstellen geführt werden und die Leitungskapazität groß genug ist, um Gespräche von allen n Anschlüssen aus zu ermöglichen.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß in der Technik solche Baugruppen, die verschiedene Eingangssignale entweder addieren, subtrahieren, multiplizieren oder auch dividieren, immer mehr an Bedeutung gewinnen.

Uns interessiert nun die Frage, wie sich aus der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summanden [Gln. (44) und (45)] die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe gewinnen läßt. Da die Zufallsgrößen X_i nur der Werte 0 und 1 fähig sind, besteht der Wertevorrat von X aus den Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n.$$

$X = k$ bedeutet, an k Stellen wird gesprochen, während an den restlichen $n-k$ Stellen kein Gespräch geführt wird. Die Wahrscheinlichkeit, daß an k bestimmten Sprechstellen gesprochen und an den übrigen $n-k$ nicht gesprochen wird, ist nach Gl. (36)

$$p^k q^{n-k},$$

wenn Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X_i vorausgesetzt wird.

Nach Gl. (8) gibt es $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten, von n Sprechstellen aus k Gespräche zu führen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe X der n Zufallsgrößen X_i den Wert k annimmt, beträgt daher:

$$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0,1, \ldots, n. \tag{47}$$

Die in Gl. (47) angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt Binomialverteilung, da die Wahrscheinlichkeiten $P_n(X = k)$ Glieder des Binoms $(q + p)^n$ sind. Für $n = 4$ Sprechstellen und einer Grundwahrscheinlichkeit $p = 1/3$ ergibt sich nach Gl. (47) folgende Binomialverteilung:

Zahl der geführten Gespräche k	Wahrscheinlichkeiten $P_4(X = k)$
0	0,198
1	0,395
2	0,296
3	0,099
4	0,012
	Summe: 1,000

Bild 23 zeigt eine grafische Darstellung dieser Binomialverteilung.

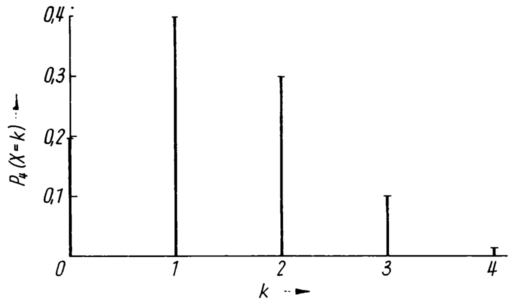


Bild 23. Binomialverteilung mit $n = 4$ und der Grundwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$

Hieraus erkennt man bereits die allgemeine Gestalt einer Binomialverteilung. Mit wachsendem k nehmen die Wahrscheinlichkeiten zunächst zu, erreichen einen größten Wert und werden schließlich wieder kleiner. Je weniger sich die Grundwahrscheinlichkeit p einer Binomialverteilung von dem Wert 1/2 unterscheidet, um so symmetrischer ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beispiel 12

Eine Fernsprechzentrale A hat Gespräche mit 2000 Fernsprechteilnehmern zu vermitteln, die einer Zentrale B angeschlossen sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Leitung von A nach B von einem Teilnehmer während der Hauptgeschäftszeit in Anspruch genommen wird, betrage $p = 1/30$. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt

a) 50 Gespräche und
b) weniger als 70 Gespräche

geführt werden, wenn man voraussetzt, daß ausreichend viele Leitungen zwischen A und B vorhanden sind.

Nach Gl. (47) gilt für den Fall:

$$\text{a)}\qquad P_{2000}(X = 50) = \binom{2000}{50}\left(\frac{1}{30}\right)^{50}\left(\frac{29}{30}\right)^{1950},$$

$$\text{b)}\qquad P_{2000}(X < 70) = \sum_{k=0}^{69}\binom{2000}{k}\left(\frac{1}{30}\right)^{k}\left(\frac{29}{30}\right)^{2000-k}. \tag{48}$$

Die numerische Auswertung der rechts stehenden Ausdrücke bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Es ist einfach eine rechnerische Notwendigkeit, handliche Näherungsformeln für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung im Falle großer n-Werte zu entwickeln.

Zentraler Grenzwertsatz für die Binomialverteilung

Denkt man sich eine diskrete Zufallsgröße, die eine Binomialverteilung nach Gl. (47) besitzt, durch eine stetige Zufallsgröße ersetzt, indem man die in den Punkten $k = 0, 1, \ldots, n$ konzentrierten Wahrscheinlichkeiten $P_n(X = k)$ jeweils gleichmäßig in den Intervallen von $k - \frac{1}{2}$ bis $k + \frac{1}{2}$ „verschmiert", so hat man die Aussage

$$P_n(X = k)$$

im stetigen Fall durch

$$P_n\left(k - \frac{1}{2} \leqq X \leqq k + \frac{1}{2}\right). \tag{49}$$

zu ersetzen. Wird eine Binomialverteilung in diesem Sinne durch eine stetige Verteilung ersetzt und geht man von k zu der transformierten Größe

$$u(k) = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \tag{50}$$

über, die allein von k abhängt, da für eine vorgegebene Binomialverteilung n, p und q konstante Größen sind, so gilt für hinreichend große n der zentrale Grenzwertsatz:

$$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{u\left(k-\frac{1}{2}\right)}^{u\left(k+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv. \tag{51}$$

Er besagt, für genügend große n folgt die Größe u einer standardisierten Normal- oder Gauß-Verteilung, die für weite Teile der Statistik von größter Bedeutung ist. Da die standardisierte Gauß-Verteilung tabelliert vorliegt, bringt der zentrale Grenzwertsatz eine wesentliche Erleichterung bei numerischen Rechnungen mit sich. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der standardisierten Normalverteilung führen wir die Bezeichnung $\varphi(u)$ ein.

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{52}$$

Sie zeigt die für die Normalverteilung typische Glockenform, ist symmetrisch zu $u = 0$ und erreicht dort ihr Maximum $\varphi(0) = 0{,}399$.

Den Ausgangspunkt auf unserem Weg zur Normalverteilung bildete die Betrachtung einer Summe von voneinander unabhängigen Zufallsgrößen, wie sie im Bild 22 veranschaulicht worden sind. Dieses Schema trifft nun für zahlreiche statistische Erscheinungen zu, die auf den verschiedensten Gebieten der belebten und unbelebten Natur beobachtet werden. Sie entstehen durch ein additives Zusammenwirken vieler unabhängiger, im einzelnen regelloser und unkontrollierbarer Einflüsse. Hierin ist auch die Erklärung für die grundlegende Rolle zu suchen, die die Normalverteilung bei zahllosen statistischen Fragen einnimmt.

Dem experimentell arbeitenden Techniker oder Wissenschaftler ist die Normalverteilung aus der Fehlertheorie unter der Bezeichnung Fehlerfunktion oder Fehlerintegral bekannt. Bei sehr vielen praktischen Problemen der Nachrichtentechnik beobachtet man in der Tat Fehler im Sinne von Verfälschungen der Nutzsignale durch Störsignale beim Durchlaufen eines Nachrichtenübertragungssystems. Die Vermischung von Signalen mit zufälligen Störungen längs einer Nachrichtenkette führt zu Abweichungen von den gewünschten Ausgangssignalen und zu Fehlern bei der Signalauswertung. In einem Übertragungskanal treten neben zufälligen teilweise auch systematische Störungen auf. Ein großer Teil der auftretenden zufälligen Störungen kann mit einer praktisch ausreichenden Genauigkeit durch eine Normalverteilung beschrieben werden. Auch Rauschvorgänge in elektronischen Schaltungen, wie beispielsweise das durch die Wärmebewegung der Leitungselektronen bedingte Widerstandsrauschen (Schroteffekt), folgen angenähert einer Normalverteilung. Man spricht von einem Gaußschen Rauschen, wenn die Amplituden der Elementarprozesse normalverteilt sind.

Gleichung von Poisson

Die durch die Gln. (50) und (51) gewonnene Approximation einer Binomialverteilung durch eine standardisierte Gauß-Verteilung versagt für die Grundwahrscheinlichkeiten $p = 0$ und $p = 1$. Die Übereinstimmung wird um so schlechter, je mehr die Grundwahrscheinlichkeit sich diesen Werten nähert. Bei vielen Anwendungen interessiert man sich nun aber für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $P_n(X = k)$ im Fall sog. „seltener Ereignisse", deren Grundwahrscheinlichkeit p klein ist. *Poisson* entwickelte eine Näherungsgleichung, die speziell für den Fall kleiner p-Werte brauchbar ist. Für hinreichend große Werte von n gilt:

$$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} = P(X = k). \tag{53}$$

Dabei ist $a = np$ als Konstante aufzufassen. Die durch die rechts stehenden Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{54}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Poisson-Verteilung. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1.$$

In der Tafel 9 des Anhangs ist die Poisson-Verteilung für einige Werte von a tabelliert. Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ sind auf vier Dezimalstellen genau angegeben.

Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X

Um die verschiedensten Zufallsgrößen einheitlich charakterisieren zu können, wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Begriff einer Verteilungsfunktion eingeführt. Gegeben sei eine Zufallsgröße X und eine beliebige reelle Zahl x. Unter der Verteilungsfunktion $F(x)$ der Zufallsgröße X versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X einen Wert annimmt, der nicht größer als die vorgegebene reelle Zahl x ist.

$$F(x) = P(X \leqq x). \tag{55}$$

Ob man neben dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen zuläßt, ist eine Sache der Vereinbarung. Als Wahrscheinlichkeit kann die Verteilungsfunktion $F(x)$ nur Werte zwischen Null und Eins annehmen. Die Bezeichnung Verteilungsfunktion erklärt sich daraus, daß unter n voneinander unabhängigen Versuchen, bei denen eine Zufallsgröße X beobachtet wurde, die Anzahl derjenigen Versuche, bei denen X nicht größer als x ausfällt, im Mittel $n \cdot F(x)$ beträgt.

Beispiel 13

Man bestimme die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Augenzahl X beim Würfeln mit einem Würfel. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist durch

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6} \quad \text{mit} \quad x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

gegeben. Für die Verteilungsfunktion $F(x)$ folgt daraus:

$$F(x) = P(X \leqq x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ 1/6 & \text{für} \quad 1 \leqq x < 2 \\ 2/6 & \text{für} \quad 2 \leqq x < 3 \\ 3/6 & \text{für} \quad 3 \leqq x < 4 \\ 4/6 & \text{für} \quad 4 \leqq x < 5 \\ 5/6 & \text{für} \quad 5 \leqq x < 6 \\ 1 & \text{für} \quad 6 \leqq x \end{cases}$$

Bild 24 zeigt die grafische Darstellung dieser Verteilungsfunktion.

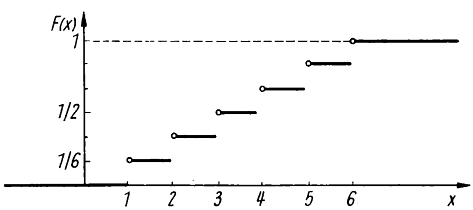


Bild 24. Verteilungsfunktion der Augenzahl X beim Würfeln mit einem Würfel

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist eine Treppenfunktion mit Sprungstellen in den Punkten x_i. Die Sprunghöhe entspricht dabei den Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Punkte behaftet sind. An den Sprungstellen sind die Funktionswerte von $F(x)$ durch Kreise markiert worden.

Beispiel 14

Man gebe eine formelmäßige Darstellung für die Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ einer Zufallsgröße U, die einer standardisierten Normalverteilung folgt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von U lautet nach Gl. (52):

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Die gesuchte Verteilungsfunktion entspricht der Fläche unter der Kurve $\varphi(u)$ im Intervall von $-\infty$ bis u.

$$\Phi(u) = P(U \leqq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\, \mathrm{d}v. \tag{56}$$

Die Werte der Wahrscheinlichkeitsdichte und der Verteilungsfunktion sind in der Tafel 8 im Anhang aufgeführt. Bild 25 zeigt eine Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion einer standardisierten Normalverteilung.

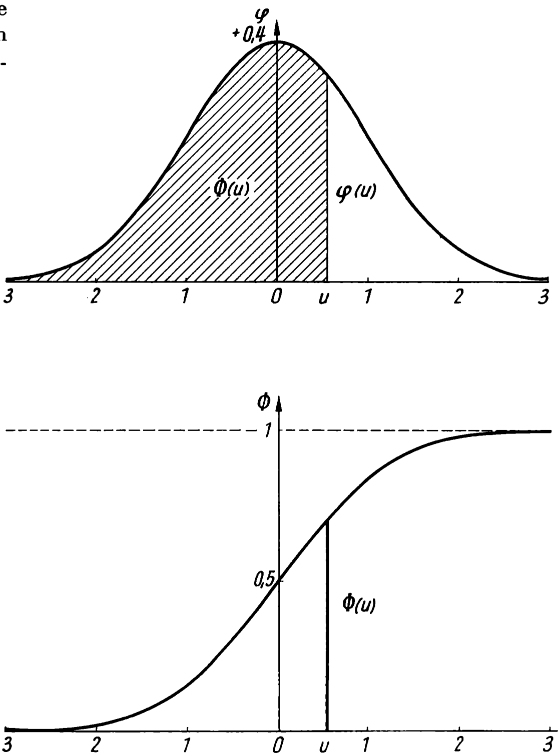


Bild 25
Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u)$ und der Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ einer standardisierten Normalverteilung

In dieser Darstellung erscheint $\Phi(u)$ als Fläche unter der Kurve $\varphi(u)$ und in der unteren als Ordinate der Verteilungsfunktion.

Die Bilder 24 und 25 lassen erkennen, daß eine Verteilungsfunktion stets monoton wachsend, d. h. nicht fallend, ist. Für kleine Werte ihres Arguments verläuft sie nahe bei Null oder nimmt gar den Wert 0 an, und für große Werte des Arguments nähert sie sich dem Wert 1.

Beispiel 15

Wir wenden uns nochmals der im Beispiel 12 beschriebenen Situation zu. Es würde natürlich viel zu kostspielig und aufwendig sein, für jeden der 2000 Fernsprechanschlüsse eine Leitung zwischen A und B zu installieren. Es reicht praktisch aus, wenn die Anzahl der Leitungen so groß gehalten wird, daß nur einer von 100 Anrufen keine freie Leitung vorfindet. Das bedeutet, in der Ungleichung

$$P_{2000}(X \geqq k) < 0{,}01$$

wird die kleinste Zahl k gesucht, für die die Ungleichung gerade noch erfüllt ist. Sie ist identisch mit der Anzahl der zu installierenden Leitungen. Da es sich bei der Durchführung eines Gespräches um ein seltenes Ereignis ($p = 1/30$) handelt und $n = 2000$ als sehr groß angesehen werden kann, bietet sich die Poisson-Verteilung mit $a = 2000 \cdot 1/30 = 66{,}67$ als Approximation für den auf der linken Seite der Ungleichung stehenden Ausdruck an.

$$P_{2000}(X \geqq k) = P(X \geqq k) < 0{,}01.$$

Aus einer gegenüber Tafel 9 (Anhang) weit umfangreicheren Tabelle der Poisson-Verteilung entnimmt man:

$$P(X \geqq 87) = 0{,}0097$$

und

$$P(X \geqq 86) = 0{,}013.$$

Hieraus folgt, zwischen A und B müssen 87 Leitungen angelegt werden.

Benutzt man anstelle der Poisson-Verteilung die Approximation durch die Normalverteilung, so geht man folgendermaßen vor:

$$P_{2000}(X \geqq k) = 1 - P_{2000}(X < k) = 1 - \Phi(u) < 0{,}01.$$

Dabei muß die Ungleichung

$$u \leqq \frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \tag{57}$$

erfüllt sein. Betrachtet man anstelle der Ungleichung $1 - \Phi(u) < 0{,}01$ die entsprechende Gleichung, so erhält man die Beziehung:

$$\Phi(u) = 0{,}99.$$

Aus der Tafel 8 (Anhang) liest man hierzu den Wert

$$u = 2{,}33$$

ab. Löst man die Ungleichung (57) nach k auf und setzt die Werte für u, n, p und q ein, so gewinnt man für k die Abschätzung:

$$k \geqq 86.$$

Praktisch stimmen die mit den beiden Näherungsmethoden gefundenen Werte überein.

2.4.3. *Funktionen von Zufallsgrößen*

2.4.3.1. Die Beeinflussung von Zufallsgrößen durch Übertragungsglieder

Das im Bild 22 schematisch dargestellte Summationsglied ist nur ein Spezialfall eines allgemeinen Übertragungsgliedes, wie man es in den verschiedensten Formen in der Nachrichtentechnik verwendet. Hierbei handelt es sich um Baugruppen, die als Ausgangsgröße eine Funktion einer oder mehrerer Eingangsgrößen liefern. Bei einer statistischen Betrachtungsweise interessiert die Verteilung der Ausgangsgröße, wenn in das Übertragungsglied eine oder mehrere Zufallsgrößen mit bekannter Verteilung eintreten. Folglich muß das Verhalten einer Funktion

$$Y = f(X)$$

untersucht werden. Y ist selbst wieder eine Zufallsgröße, da sich die Schwankungen von X auch auf Y übertragen. Ein näheres Eingehen auf die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten ist im Rahmen unserer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht möglich. Als Beispiele für Übertragungsglieder seien genannt:

1. linearer Doppelweggleichrichter,
2. linearer Einweggleichrichter,
3. quadratischer Doppelweggleichrichter,
4. unsymmetrischer Begrenzer mit nichtlinearem Arbeitsbereich und
5. symmetrischer Begrenzer mit linearem Arbeitsbereich.

Die aufgeführten Baugruppen zeigen nur in einzelnen Abschnitten des Arbeitsbereiches ein lineares Verhalten, während in den anderen Bereichen die Amplituden des Eingangssignals mit amplitudenabhängigen Bewertungsfaktoren transformiert werden. Eine schematische Darstellung für ein allgemeines Übertragungsglied zeigt Bild 26.

Die Funktion $y = f(x)$ heißt statische Kennlinie des Übertragungssystems.

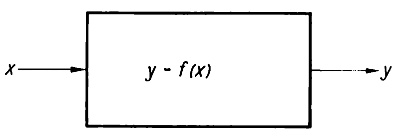


Bild 26. Allgemeines Übertragungsglied

2.4.3.2. Zahlenmäßige Charakterisierung von Zufallsgrößen

Bisher haben wir gelernt, Zufallsgrößen vollständig durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion zu beschreiben. Die Praxis erfordert aber oft gar keine so ins einzelne gehenden Kenntnisse. In vielen Fällen genügt es, sich ein „grobes Bild" von einer Zufallsgröße zu verschaffen. Man gibt sich mit Angaben über die durchschnittliche Größe und die Streuung der Werte einer Zufallsgröße zufrieden. Dem Nachrichtentechniker und Ingenieur ist die zahlenmäßige Charakterisierung von Zeitfunktionen durch Mittelwerte in der Wechselstromtechnik schon seit langem vertraut. Der Physiker macht davon in der Mechanik Gebrauch, indem er Massenverteilungen durch ihre Momente, insbesondere durch den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment, beschreibt.

Erwartungswert der Funktion $g(X)$ einer Zufallsgröße X

Eine Antwort auf die Frage: „Wie groß ist eine Zufallsgröße?", gibt der Erwartungswert. Er entspricht der Gleichstromkomponente in der Elektrotechnik und dem Schwerpunkt einer Massenverteilung in der Mechanik. Wir wenden uns gleich dem allgemeineren Fall des Erwartungswertes einer Funktion $g(X)$ einer Zufallsgröße X zu.

Gegeben sind

a) eine diskrete Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots$ und

b) eine stetige Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$,

weiterhin eine Funktion $g(X)$ der Zufallsgröße X. Der Erwartungswert $E\{g(X)\}$ ist definiert durch:

a) $$E\{g(X)\} = \sum_i p_i g(x_i). \tag{58}$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle möglichen Werte x_i der Zufallsgröße X.

b) $$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, p(x)\, \mathrm{d}x. \tag{59}$$

Die Werte $g(x)$ einer Zufallsgröße $g(X)$ werden bei der Bildung des Erwartungswertes mit Gewichten versehen, die gleich den Wahrscheinlichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten der Punkte x sind. Anschließend summiert bzw. integriert man alle so entstehenden Produkte und dividiert schließlich durch die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse 1. Die Division durch 1 tritt natürlich in den Gleichungen nicht in Erscheinung, so daß bei einer oberflächlichen Betrachtung der Definitionsgleichungen (58) und (59) der Mittelwertcharakter eines Erwartungswertes nicht sofort ins Auge fällt.

Momente von Zufallsgrößen

Besonderes Interesse gilt der Betrachtung von Erwartungswerten, bei denen $g(X)$ eine Potenzfunktion von X ist. Dabei unterscheidet man zwei Fälle:

$$g(X) = X^k$$

und

$$g(X) = (X - c)^k, \quad c = \text{const}.$$

Der Erwartungswert

$$E\{X^k\} \tag{60}$$

heißt k-tes Nullmoment oder ausführlicher k-tes Moment von X bezüglich des Nullpunktes. Wichtig ist ferner das k-te Moment einer Zufallsgröße X bezüglich einer Konstanten c.

$$E\{(X-c)^k\}. \tag{61}$$

Die Momente charakterisieren bestimmte Eigenschaften einer Zufallsgröße. Durch Vorgabe sämtlicher Momente ist sogar die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße bestimmt.

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf Momente erster und zweiter Ordnung. Der Techniker und Ingenieur unterscheidet dementsprechend bei der zahlenmäßigen Beschreibung von Zeitvorgängen lineare und quadratische Mittelwerte, indem er einmal den zeitlichen Mittelwert $\overline{x(t)}$ der Funktion $x(t)$ selbst und zum anderen den zeitlichen Mittelwert $\overline{x^2(t)}$ des Quadrates $x^2(t)$ der gegebenen Funktion bildet. Im Falle einer stetigen Funktion gelten folgende Definitionsgleichungen:

Linearer Mittelwert

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{62}$$

Quadratischer Mittelwert

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{63}$$

Die Limesbildung bringt zum Ausdruck, daß sich die zahlenmäßige Charakterisierung des Verlaufs einer Zeitfunktion $x(t)$ durch den zeitlichen Mittelwert auf einen hinreichend großen Zeitraum zu erstrecken hat. Wie bereits erwähnt, besitzt der Mittelwert nach Gl. (62) in der Technik die Bedeutung einer Gleichstromkomponente. Sie kann bei vielen Problemen der technischen Kybernetik außer acht gelassen werden. Das trifft jedoch nicht für die Fernsehtechnik und zahlreiche Probleme der Regelungstechnik zu.

Der Ausdruck nach Gl. (63) wird vom Ingenieur als Wechselstromleistung bezeichnet. Der Mittelwert über das momentane Stromquadrat oder Spannungsquadrat stellt streng genommen nur dann die Leistung dar, wenn der Widerstand genau 1 Ω beträgt. Der Leistungsbegriff ist hierbei jedoch so anschaulich und handlich, daß man ihn auch in übertragenem Sinne anwendet.

Im folgenden wenden wir uns wieder den dem Ingenieur und Techniker weniger vertrauten analogen Mittelwertbildungen bei Zufallsgrößen zu.

Erwartungswert oder Mittelwert einer Zufallsgröße X

Das erste Nullmoment $E\{X\}$ einer Zufallsgröße X wird Erwartungswert oder Mittelwert von X genannt. Häufig wird die Abkürzung

$$\mu = E\{X\} \tag{64}$$

verwendet.

Momente zweiter Ordnung

Das zweite Nullmoment einer Zufallsgröße X wird vielfach mit

$$\mu_2' = E\{X^2\} \tag{65}$$

bezeichnet. Es kann als ein Maß für die Variabilität der Werte der Zufallsgröße um den Nullpunkt aufgefaßt werden. Eine wichtige Rolle spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Frage, wie stark die Werte einer Zufallsgröße um den Erwartungswert μ streuen.

Varianz einer Zufallsgröße X

Die Schwankung der Werte einer Zufallsgröße um den Mittelwert wird durch das zweite Zentralmoment gemessen. Es wird als Varianz der Zufallsgröße X bezeichnet und mit σ^2 abgekürzt.

$$\sigma^2 = E\{(X - \mu)^2\}. \tag{66}$$

Die positive Quadratwurzel aus der Varianz σ wird Streuung oder Standardabweichung genannt. Durch eine einfache Umformung erhält man aus Gl. (66) eine Darstellung der Varianz als Funktion des ersten und zweiten Nullmoments

$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2. \tag{67}$$

Die Relation nach Gl. (67) ist in der Mechanik als Steinerscher Verschiebungssatz bekannt.

Kovarianz einer zweidimensionalen Zufallsgröße $X = (X_1, X_2)$

Bereits vorher wurde angedeutet, daß sehr oft Beobachtungs- oder Versuchsergebnisse in der Angabe von mehreren Zahlen bestehen können. Das ist beispielsweise der Fall, wenn man mehrere quantitative Merkmale gleichzeitig an einem Versuchsobjekt registriert, eine bestimmte zufällige Erscheinung an verschiedenen Orten zu einem gemeinsamen Beobachtungszeitpunkt mißt oder einen regellosen Vorgang zu verschiedenen Zeitpunkten beobachtet. Wir wollen nun Versuchsergebnisse betrachten, die Werte zweier Zufallsgrößen X_1 und X_2 enthalten. Wir sprechen dann davon, daß eine zweidimensionale Zufallsgröße

$$X = (X_1, X_2)$$

vorliegt. Infolge von gewissen physikalischen oder biologischen Zusammenhängen, die recht verschiedener Natur sein können, bestehen zwischen den Komponenten einer zweidimensionalen Zufallsgröße im allgemeinen gewisse Verknüpfungen, die dazu führen, daß die Kenntnis der Werte der einen Komponente die Wahrscheinlichkeitsverteilung der anderen beeinflußt. Das bedeutet, eine Komponente enthält im allgemeinen bereits eine Teilinformation über die andere. Für jede Komponente X_1 und X_2 kann getrennt die Varianz bestimmt werden.

$$\sigma_1^2 = E\{(X_1 - \mu_1)^2\},$$

$$\sigma_2^2 = E\{(X_2 - \mu_2)^2\};$$

μ_1 und μ_2 sind die Erwartungswerte der Zufallsgrößen X_1 und X_2. Eine mögliche Verkopplung der beiden Zufallsgrößen kommt in der Kovarianz

$$E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\} \tag{68}$$

zum Ausdruck. Auf eine formelmäßige Darstellung sei verzichtet. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß bei einer zweidimensionalen Zufallsgröße die in den Definitionsgleichungen (58) bzw. (59) auftretenden Wahrscheinlichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten sich auf Punkte (x, y) der xy-Ebene beziehen und die Summation bzw. Integration durch eine Doppelsumme bzw. ein Doppelintegral zu ersetzen sind.

Die Kovarianz nach Gl. (68) kann auch in der Form

$$E\{(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\} = E\{X_1 X_2\} - \mu_1 \mu_2 \tag{69}$$

geschrieben werden. Der Erwartungswert des Produktes $X_1 X_2$ ist der einfachste Parameter einer zweidimensionalen Zufallsgröße, in dem sich die Abhängigkeit ihrer Komponenten X_1 und X_2 widerspiegelt.

3. Auswertung von Meßergebnissen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir uns ausführlich mit Zufallsgrößen und ihrer mathematischen Beschreibung durch Verteilungsfunktionen, Wahrscheinlichkeitsdichten und Erwartungswert beschäftigt. Die zufälligen Ereignisse und Zufallsgrößen, mit denen es der Techniker oder der experimentell arbeitende Naturwissenschaftler zu tun hat, zeigen sich als Meßergebnisse bei der Realisierung bestimmter Versuchsvorschriften. Um ein genaues Bild von den Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen zu erhalten, müssen wir die Gesamtheit aller unter den gleichen Bedingungen durchgeführten Realisierungen einer Versuchsvorschrift betrachten, deren Zahl wir uns zumindest prinzipiell beliebig groß vorstellen. Die Gesamtheit der dabei erhaltenen Meß- oder Versuchswerte wird Grundgesamtheit genannt. In der Praxis ist es gewöhnlich so, daß man nur endlich viele Realisierungen einer Versuchsvorschrift kennt. Man spricht dann davon, daß eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit vorliegt. Daraus ergibt sich die Aufgabe, Wahrscheinlichkeiten und Momente von Zufallsgrößen mit Hilfe von Stichprobenwerten zu schätzen. Eine der wichtigsten Aufgaben der mathematischen Statistik besteht in der Ausarbeitung von solchen Schätzmethoden.

Auch wenn es möglich erscheint, Wahrscheinlichkeiten von vornherein festzulegen, muß in einem konkreten Fall stets geprüft werden, ob die gewonnenen Beobachtungsergebnisse auch tatsächlich mit den aufgestellten Hypothesen in Einklang stehen. Die Gültigkeit der Annahme, daß alle Augenzahlen eines bestimmten Würfels gleichwahrscheinlich sind, kann nur mit Hilfe einer Versuchsreihe überprüft werden. Dieses Vorgehen ist typisch für das Gebiet der experimentellen Naturwissenschaften. Das Aufdecken von Gesetzmäßigkeiten beginnt mit dem Aufstellen von Hypothesen, die verschiedenen statistischen Tests unterworfen und entweder angenommen oder abgelehnt werden. Jede Entscheidung basiert auf dem Sammeln von Beobachtungs- und Versuchsergebnissen. Die Aussagen, die bei der Anwendung eines statistischen Prüfverfahrens gewonnen werden, sind stets mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit behaftet und dürfen nicht mit einer mathematischen Beweisführung verwechselt werden. Während ein Gegenbeispiel genügt, um eine mathematische Behauptung zu widerlegen, handelt es sich bei statistischen Entscheidungen darum, gewisse Ereignisse als praktisch unmöglich oder als praktisch sicher einzuordnen. Die praktische Unmöglichkeit oder Gewißheit ist jedoch nicht mit einer absoluten Unmöglichkeit oder Gewißheit gleichzusetzen. Es kann nicht die Aufgabe dieser Broschüre sein, die Prüfung von Hypothesen ausführlicher zu behandeln. In den Lehrbüchern über Statistik werden statistische Prüfverfahren gründlich beschrieben.

Als wesentliches Ergebnis unserer Überlegungen halten wir fest, daß sich statistische Aussagen über objektive Sachverhalte nur durch Beobachtungs- oder Versuchsreihen gewinnen lassen. Die mathematisch-statistische Beschreibung und zahlenmäßige Charakterisierung von Stichprobenwerten einer Zufallsgröße sind daher wichtige Aufgaben der Statistik.

3.1. Häufigkeitsverteilungen von Meßwerten

Die Beobachtungs- oder Versuchsergebnisse, die man bei der Untersuchung eines Merkmals durch mehrmalige Realisierung einer Versuchsvorschrift erhält, bilden eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit. Die Meßergebnisse werden in der Regel in der Reihenfolge ihres Anfalls registriert.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n.$$

Die in chronologischer Folge aufgeschriebenen Stichprobenwerte werden als Urliste bezeichnet und bilden das Rohmaterial für eine statistische Bearbeitung. Trägt man die Stichprobenwerte längs der x-Achse auf, so ergibt sich Bild 27.

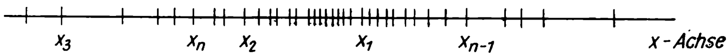


Bild 27. Grafische Darstellung von Stichprobenwerten durch Auftragen längs der x-Achse

Aus der Abbildung erkennt man, daß die Stichprobenwerte in der Mitte des Variationsbereiches dichter liegen als nach außen hin. Ein anschauliches Bild vom Typ der Verteilung der Stichprobenwerte wird dem Betrachter jedoch nicht vermittelt. Eine erste Aufgabe der Statistik besteht nun darin, die Meßwerte geeignet zusammenzufassen, um die Besonderheiten der Stichprobe hervortreten zu lassen. Der gesamte Variationsbereich wird in mehrere äquidistante Klassen eingeteilt. Danach zählt man aus, wie viele Stichprobenwerte in den einzelnen Klassen vorhanden sind. Ein solches Vorgehen setzt voraus, daß insgesamt mindestens 25 bis 30 Meßwerte vorliegen. Nach einer Faustregel soll die Anzahl der Klassen zwischen 8 und 15 liegen. Bild 28 zeigt eine Einteilung in 10 äquidistante Klassen.

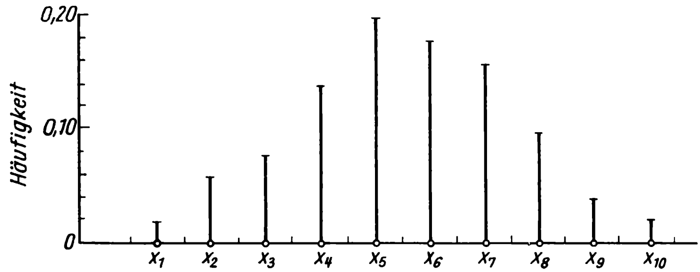


Bild 28. Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe (die Stichprobenwerte sind jeweils in den Klassenmitten vereinigt zu denken)

Denkt man sich jeweils alle Stichprobenwerte einer Klasse in der Klassenmitte vereinigt, so können die erhaltenen Klassenhäufigkeiten als Ordinaten über den Klassenmitten aufgetragen werden. Die Fehler, die man begeht, indem man die beobachteten Stichprobenwerte durch die zugehörigen Klassenmitten ersetzt, heben sich insgesamt gesehen gegenseitig etwa auf. Die Klassenmitten sind theoretische Werte, die in der Stichprobe selbst nicht aufzutreten brauchen. Nach einer Umbezeichnung sind im Bild 28 die Symbole $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ für die Klassenmitten verwendet worden. Nach der Definition der Häufigkeiten muß die Summe aller Ordinaten im Bild 28 gleich 1 sein.

Wenn eine Stichprobe einer stetigen Zufallsgröße X vorliegt, wird die Häufigkeitsverteilung gewöhnlich in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Streng genommen wird dann auf der Ordinate nicht mehr die Häufigkeit der Stichprobenelemente einer Klasse, sondern ihre Häufigkeitsdichte, d. h. die Häufigkeit je Merkmalseinheit, aufgetragen. Erst durch die Multiplikation mit der Klassenbreite gelangt man zur Häufigkeit der Stichprobenwerte einer Klasse. Anschaulich bedeutet das, die Häufigkeit der Elemente einer Klasse wird durch ein Rechteck dargestellt. Bild 29 enthält die Säulendiagrammdarstellung der Häufigkeitsverteilung der betrachteten Stichprobe.

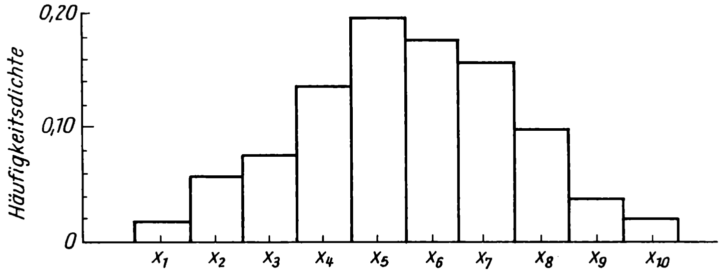


Bild 29. Säulendiagrammdarstellung der Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe

Summiert man die Flächeninhalte der einzelnen Säulen, so erhält man den Wert 1. Die im Bild 29 angegebene Ordinatenskale gilt nur für die Klassenbreite $d = 1$.

Eine andere Art der Darstellung, die der Beschreibung von Zufallsgrößen durch Verteilungsfunktionen entspricht, bietet die sog. Summenhäufigkeitsverteilung. Die Summenhäufigkeiten geben an, wie groß die Häufigkeit derjenigen beobachteten Werte ist, die kleiner sind als ein vorgegebener Wert x. Man gewinnt die Summenhäufigkeiten durch fortgesetzte Addition der Häufigkeiten. Sie sind jeweils in den rechten Klassengrenzen aufzutragen. Die letzte Summenhäufigkeit ist als Gesamtsumme der einzelnen Häufigkeiten gleich Eins. Bild 30 zeigt eine Summenhäufigkeitsverteilung, die der Säulendiagrammdarstellung des Bildes 29 entspricht.

Wir sind davon ausgegangen, daß die Stichprobenwerte durch mehrmaliges Realisieren einer Versuchsvorschrift, oder anders ausgedrückt, durch eine Folge voneinander unabhängiger gleichartiger Versuche gewonnen worden sind. Die Stichprobe bildet somit eine Teilmenge aus der Gesamtheit aller möglichen Realisierungen einer Zufallsgröße. Die Stichprobe dient dazu, um Aussagen über die Grundgesamtheit zu erhalten. Die Art und Weise, in der man auf Grund einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen kann, hängt vom Verfahren ab, nach dem die Stichprobe gewonnen wurde. Unser Vorgehen entspricht einer reinen Zufallsauswahl, bei der abgesehen von zufälligen Schwankungen die Häufigkeitsverteilung der Stichprobenwerte ein Abbild der Wahrscheinlichkeitsverteilung der untersuchten Zufallsgröße ist. Je größer der Stichprobenumfang ist, desto deutlicher zeichnen sich die wesentlichen Eigenschaften der Zufallsgröße ab (Gesetz der großen Zahl).

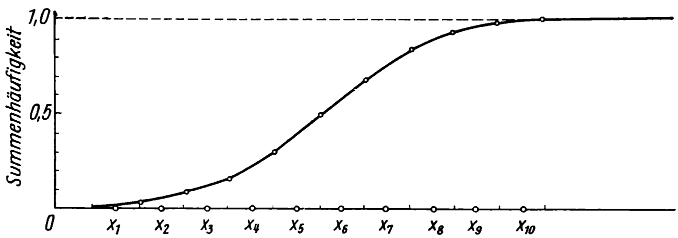


Bild 30. Summenhäufigkeitsverteilung einer Stichprobe

3.2. Zahlenmäßige Charakterisierung von Stichproben

Bei der statistischen Bearbeitung vieler praktischer Probleme genügt es, anstelle der Häufigkeitsverteilung der Stichprobenwerte nur gewisse statistische Maßzahlen zu betrachten. Wie die Häufigkeitsverteilung der Stichprobenwerte Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Grundgesamtheit zuläßt, so können die Stichprobenparameter als Schätzwerte für entsprechende Parameter der Grundgesamtheit angesehen werden. Die wichtigsten Parameter einer Stichprobe sind der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s, die im allgemeinen auch als Streuung bezeichnet wird. Im folgenden soll die Berechnung beider statistischer Maßzahlen kurz erläutert werden, um hieran das prinzipielle Vorgehen bei der statistischen Beschreibung kompliziertere Phänomene, wie sie uns in der Nachrichtentechnik entgegentreten, zu erklären. Wenn auch diese Probleme infolge eines gewaltigen Rechenaufwandes nicht mehr mit manuellen Methoden bewältigt werden können, so bleiben doch auch beim Einsatz sehr leistungsfähiger elektronischer Rechengeräte die einzelnen Rechenschritte im wesentlichen die gleichen.

Mittelwert und Standardabweichung

Von einer Zufallsgröße X liege eine Stichprobe, die sich aus n Beobachtungswerten

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}$$

zusammensetzt, vor. Bildet man die Summe der n Einzelwerte

$$\sum x,$$

so erhält man eine erste zahlenmäßige Charakterisierung der Stichprobe. Da die Summe jedoch mit wachsendem Stichprobenumfang wächst, ist sie zunächst nicht für eine quantitative Beschreibung der Zufallsgröße X geeignet. Indem man die Summe durch die Anzahl der Beobachtungswerte n dividiert, gewinnt man den Mittelwert der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}. \tag{70}$$

Er gibt an, wie groß die Werte der Stichprobe durchschnittlich sind und ist gleichzeitig ein Schätzwert für den festen, aber im allgemeinen unbekannten Erwartungswert $E\{X\}$ der Zufallsgröße X. Der Mittelwert stellt im Sinne einer früher von uns angewandten Bezeichnungsweise das erste Nullmoment der Stichprobenverteilung dar. Die Bildung des zweiten Nullmoments beruht auf der Summation der Quadrate aller Einzelwerte einer Stichprobe

$$\sum x^2. \tag{71}$$

Die Berechnung der Summe der Einzelwerte und der Summe der Quadrate der Einzelwerte ist gewöhnlich der Ausgangspunkt für weitere statistische Bearbeitungen des Beobachtungsmaterials. Mit Hilfe einer vollautomatischen Bürorechenmaschine können beide Größen in einem Arbeitsgang gewonnen werden. Durch geeignete Normierungen erhält man aus ihnen den Mittelwert nach Gl. (70) und die Stichprobenvarianz nach Gl. (73).

Wir haben schon einmal betont, daß bei Problemen der Fernsehtechnik und Regelungstechnik die Gleichstromkomponente, d. h. der arithmetische Mittelwert nach Gl. (70), nicht vernachlässigt werden darf. Auf unsere Verhältnisse übertragen bedeutet das, anstelle von Gl. (71) muß die Summe der Abweichungsquadrate der Einzelwerte vom Mittelwert betrachtet werden, für die wir ein eigenes Symbol S_{xx} einführen:

$$S_{xx} = \sum (x - \bar{x})^2. \tag{72}$$

Die Transformation $x - \bar{x}$ ergibt eine Größe, deren Mittelwert Null ist. Mittels einer Durchschnittsbildung gelangt man von Gl. (72) zur Stichprobenvarianz s^2. Da durch die Vorgabe des Mittelwertes $\bar{x}$ nicht mehr alle n Abweichungsquadrate, sondern nur noch $n - 1$ beliebig vorgebbar sind, dividiert man durch $n - 1$, die sog. Anzahl von Freiheitsgraden:

$$s^2 = \frac{S_{xx}}{n - 1}. \tag{73}$$

Die Stichprobenvarianz ist ein Schätzwert für die Varianz σ^2 der Zufallsgröße X. Sie zeichnet sich auf Grund mehrerer Eigenschaften, auf die wir hier nicht eingehen können, vor anderen Streuungsmaßen aus. Die positive Quadratwurzel aus der Stichprobenvarianz wird Standardabweichung, mittlere quadratische Abweichung oder auch Streuung genannt. Im Bild 31 wird die Bildung von Mittelwert und Varianz einer Stichprobe in einem Schema veranschaulicht.

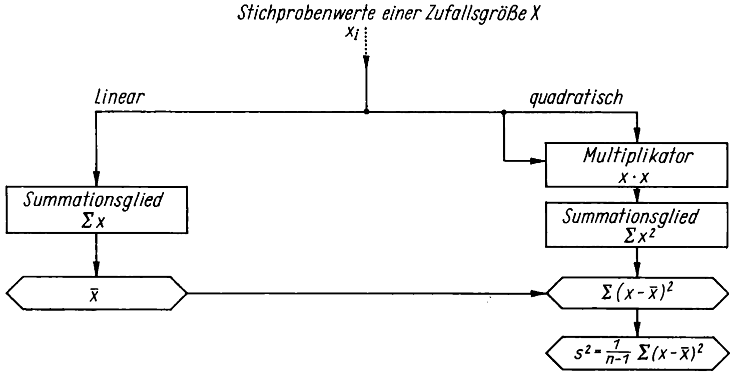


Bild 31. Schematische Darstellung der Bildung von Mittelwert $\bar{x}$ und Varianz s^2 einer Stichprobe

3.2.1. *Zahlenmäßige Charakterisierung von Stichproben einer zweidimensionalen Zufallsgröße $Z = (X, Y)$*

Es sei X eine Zufallsgröße am Eingang und Y eine Zufallsgröße am Ausgang eines allgemeinen Übertragungsgliedes oder Nachrichtenübertragungssystems. Die Übertragungseigenschaften des Systems können dann durch die zweidimensionale Zufallsgröße $Z = (X, Y)$ beschrieben werden. Auf dem Weg vom Eingang bis zum Ausgang eines Nachrichtenübertragungssystems ist eine Nachricht im allgemeinen sehr unregelmäßigen Störungen, dem sog. Rauschen, ausgesetzt. Auf diese Weise werden die übertragenen Nachrichten im allgemeinen so stark beeinflußt, daß keine im mathematischen Sinne eindeutige Abhängigkeit zwischen den Werten von X und Y besteht. Für jeden Eingangswert sind in der Regel mehrere Ausgangswerte möglich und umgekehrt. Die völlig störungsfreie Nachrichtenübertragung ist ein Spezialfall, der in der Praxis höchst selten vorkommt.

Wir gehen davon aus, daß eine Folge von n Wertepaaren vorliegt, die sich jeweils aus dem Wert einer zufälligen Eingangsgröße und dem zugehörigen Wert der Ausgangsgröße eines Nachrichtenübertragungssystems zusammensetzen:

$$\begin{array}{ll} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{array}$$

Hieraus lassen sich zunächst wie im eindimensionalen Fall folgende Größen berechnen:

1. die Summen der Einzelwerte

$$\sum x \qquad \sum y,$$

2. die Summen der Quadrate der Einzelwerte

$$\sum x^2 \qquad \sum y^2.$$

Neben der multiplikativen Verknüpfung der beiden Zufallsgrößen X und Y mit sich selbst, die in der Bildung der Quadrate x^2 und y^2 zum Ausdruck kommt, bietet sich als weitere multiplikative Verknüpfungsmöglichkeit die Produktbildung xy an. Zu den Summen der Quadrate der Einzelwerte tritt dann noch die Summe der Produkte der Einzelwerte

$$\sum xy \tag{74}$$

hinzu. Wir haben damit eine Größe gewonnen, die den statistischen Zusammenhang beider Zufallsgrößen beschreibt. Ersetzt man die Einzelwerte durch ihre Abweichungen vom zugehörigen Mittelwert, so erhält man in Analogie zu Gl. (72) die Summe der Abweichungsprodukte.

$$S_{xy} = \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}). \tag{75}$$

Dividiert man durch die Anzahl der Freiheitsgrade n-1, so geht der Ausdruck nach Gl. (75) in die Kovarianz der Stichprobe über.

$$s_{xy} = \frac{S_{xy}}{n - 1}. \tag{76}$$

Die Kovarianz bildet den Durchschnittswert der Produkte aus den Abweichungen der Beobachtungswerte von ihrem Mittelwert.

3.2.2. *Korrelationsanalyse*

Ziel einer Korrelationsanalyse ist es, die statistische Verwandtschaft zweier Zufallsgrößen X und Y durch eine Kennziffer zu beschreiben. Eine anschauliche Vorstellung über die gegenseitige Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y gewinnt man, indem man die als Wertepaare (x_i, y_i) vorliegenden Stichprobenergebnisse als Punkte in ein x, y-Koordinatensystem einträgt (Bild 32).

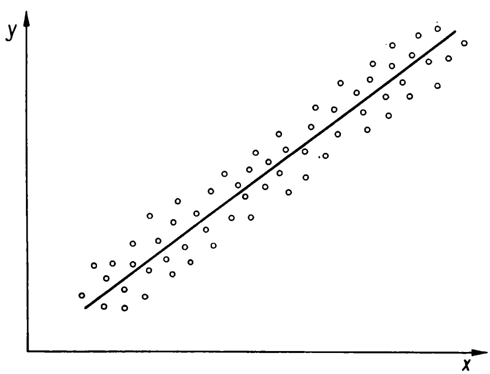


Bild 32. Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen

Die bei der grafischen Darstellung entstehende Punktwolke läßt die Art des Zusammenhanges beider Zufallsgrößen erkennen und kann in vielen Fällen mit ausreichender Genauigkeit durch einen Kurvenzug approximiert werden. Die

Punktwolke im Bild 32 läßt im Durchschnitt auf einen linearen Zusammenhang schließen. Mit Hilfe einer Regressionsanalyse ist ihr daher eine Gerade angepaßt worden. Hierauf soll nicht näher eingegangen werden. Hierbei interessiert nur die Frage, welche Schlüsse mittels der eingeführten statistischen Maßzahlen einer Stichprobe einer zweidimensionalen Zufallsgröße auf den Grad der Verknüpfung ihrer Komponenten gezogen werden können. Alle Aussagen, die wir im folgenden machen werden, beziehen sich auf den Grad der linearen Abhängigkeit der Zufallsgrößen.

Als Maße für den statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen haben wir bisher die Summe der Abweichungsprodukte S_{xy} und die Kovarianz s_{xy} kennengelernt. Durch eine geeignete Normierung ergibt sich hieraus der von *Bravais* eingeführte Korrelationskoeffizient r.

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} \tag{77}$$

oder

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}. \tag{78}$$

Im Nenner von Gl. (78) stehen die aus den x_i- bzw. y_i-Werten berechneten Standardabweichungen s_x bzw. s_y. Der Korrelationskoeffizient ist dimensionslos und mißt den Grad des linearen Zusammenhangs zweier Zufallsgrößen.

Die in der Tafel 7 im Anhang angegebenen Häufigkeitstabellen kennzeichnen einige typische Fälle, die bei der Analyse der Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen auftreten können. Es wurde jeweils davon ausgegangen, daß von zwei Merkmalen X und Y 50 Wertepaare beobachtet worden sind. Da die x- bzw. y-Werte -2, -1, 0, $+1$ und $+2$ je zehnmal auftreten, sind die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ beide gleich Null. Wendet man die Gl. (72) zur Berechnung von S_{xx} und S_{yy} an, so hat man in beiden Fällen die Summe

$$10\cdot(-2)^2 + 10\cdot(-1)^2 + 10\cdot 0^2 + 10\cdot(+1)^2 + 10\,(+2)^2 = 100$$

zu bestimmen. Es gilt somit durchweg:

$$S_{xx} = 100,$$
$$S_{yy} = 100.$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{S_{xx} S_{yy}} = 100. \tag{79}$$

Die Summe der Abweichungsprodukte S_{xy} wird gebildet, indem man für jedes Feld der Häufigkeitstabelle das Produkt aus dem zugehörigen x- und y-Wert mit der Besetzungszahl z des Feldes multipliziert und anschließend über alle Felder summiert. Als Gleichung gilt hierfür:

$$S_{xy} = \sum zxy. \tag{80}$$

Für den Korrelationskoeffizienten gilt dann in allen Tabellen:

$$r = \frac{S_{xy}}{100}. \tag{81}$$

Neben den Tabellen sind die Werte für S_{xy} und r angegeben.

Die Beispiele zeigen, daß die Summe $\Sigma\, xy$ aller Produkte xy den Grad der linearen Abhängigkeit der beiden Zufallsgrößen X und Y kennzeichnet. Ein positives Vorzeichen der Summe deutet an, daß mit wachsenden Werten der einen Größe die Werte der anderen im Mittel auch zunehmen. Ein negatives Vorzeichen der Summe weist dagegen auf eine gegensinnige Abhängigkeit beider Größen hin, d. h., wenn die eine Größe zunimmt, nimmt die andere ab. Beispiele für ein gleichsinniges Verhalten sind die Fälle *d*, *e* und *g*, während eine gegensinnige Abhängigkeit in *c* und *f* vorliegt. Die Produktbildung ist somit die Grundlage der gesamten Korrelationstheorie. Der Übergang zum Korrelationskoeffizienten entspricht einer geeigneten Normierung.

Der Korrelationskoeffizient r ist so definiert, daß seine Werte zwischen -1 und $+1$ liegen. Je näher der Betrag des Korrelationskoeffizienten bei Eins liegt, desto stärker ist der Grad der linearen Abhängigkeit ausgeprägt. Besteht eine vollständig gleichsinnig lineare Abhängigkeit, so ist $r = 1$, Beispiel *g*. Die Tafel 7 (Anhang) zeigt ebenfalls eine vollständige, aber gegensinnig lineare Abhängigkeit, die in dem Wert $r = -1$ zum Ausdruck kommt. In beiden Fällen gehört zu einem vorgegebenen x-Wert ein ganz bestimmter y-Wert, d. h., y steht mit x in einem funktionalen Zusammenhang. Das trifft jedoch auch für das Beispiel *e* zu, obwohl wir für den Korrelationskoeffizienten dort nur den Wert $r = 0{,}80$ ermittelt haben.

Hieraus zeigt sich deutlich, daß durch den Korrelationskoeffizienten nur der Grad der linearen Abhängigkeit gemessen werden kann. $r = 0$ bedeutet, daß kein linearer Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen besteht, wie dem Fall *a* zu entnehmen ist, in dem beide Größen X und Y voneinander unabhängig sind.

Sind die Zufallsgrößen X und Y voneinander unabhängig, so ist stets $r = 0$. Das Umgekehrte gilt jedoch nicht, wie wir am Beispiel *b* sehen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, der Korrelationskoeffizient r mißt lediglich den Grad einer angenommenen oder in der Natur der untersuchten Erscheinungen begründeten linearen Abhängigkeit. Andere Arten eines Zusammenhanges werden von ihm nicht erfaßt.

Aufbau einer Korrelationsanalyse

Die Untersuchung der Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y stellt nur einen Spezialfall der Analyse von Zusammenhängen allgemeinerer Art dar, wie sie häufig in der Nachrichtentechnik auftreten. Im nächsten Kapitel werden wir auf diese Erscheinungen noch etwas näher eingehen. Zur Vorbereitung der folgenden Betrachtungen dient eine schematische Darstellung des Ablaufs einer Korrelationsanalyse (Bild 33).

Die Abbildung zeigt, daß eine Korrelationsanalyse zweier Zufallsgrößen X und Y in der Praxis stets mit der Registrierung von Beobachtungswerten (Stichprobenwerten) x und y beginnt. Die wichtigsten Glieder des Schemas sind der Multiplikator für die Produktbildung xy und das Summationsglied zur Gewinnung der Summe $\Sigma\, xy$. Die übrigen Operationen bewirken im wesentlichen eine Normierung, die eine einheitliche Beurteilung der Ergebnisse von Korrelationsanalysen gestattet.

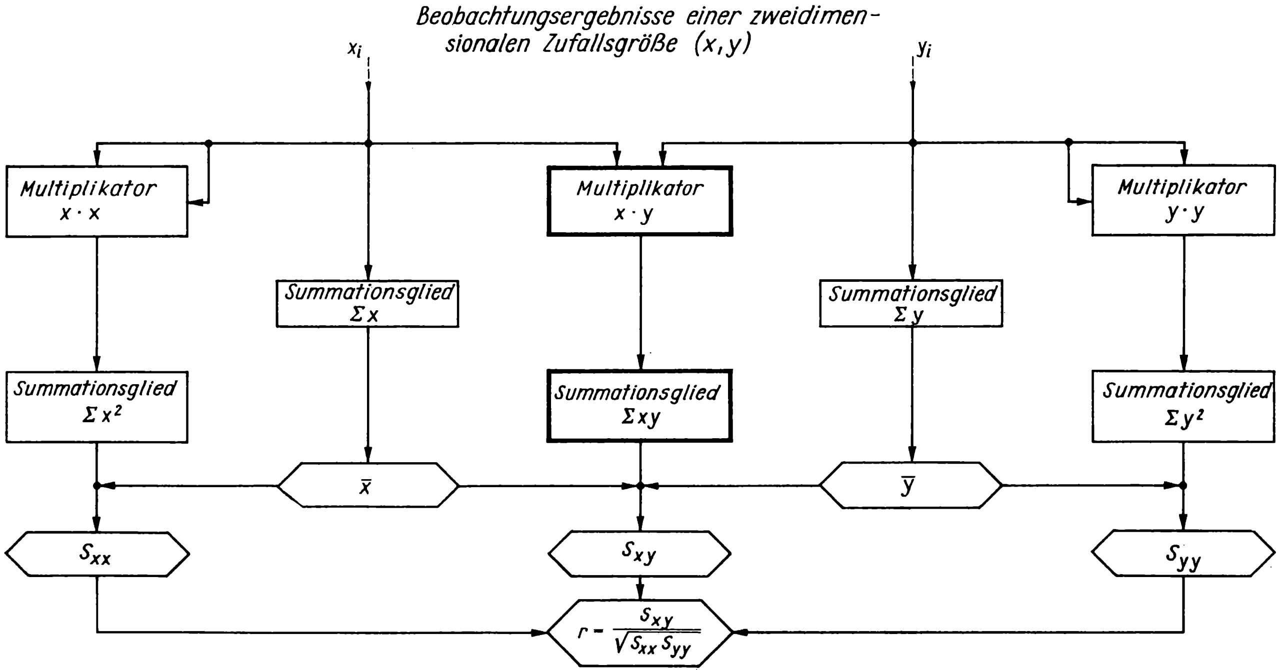


Bild 33. Schematische Darstellung der Korrelationsanalyse der Beobachtungsergebnisse einer zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y)

4. Stochastische Prozesse

Im letzten Abschnitt unserer Untersuchungen erweitern wir den Bereich der zufälligen Ereignisse und Zufallsgrößen und dehnen unsere Betrachtungen auf allgemeinere Erscheinungen aus, die für den Nachrichtentechniker von besonderem Interesse sind. Als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wählen wir einen Würfelversuch mit zehn Würfeln.

Bild 34 zeigt das Ergebnis eines Wurfes mit zehn Würfeln, wobei die einzelnen Würfel numeriert zu denken sind.

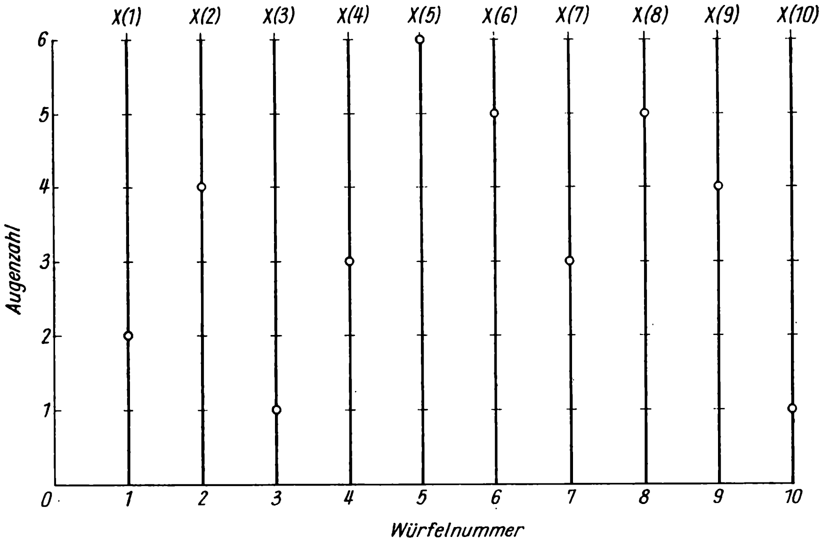


Bild 34. Darstellung des Ergebnisses $x = (2, 4, 1, 3, 6, 5, 3, 5, 4, 1)$ eines Würfelversuches mit 10 Würfeln

Das Versuchsergebnis umfaßt demnach die Realisationen von 10 Zufallsgrößen $X(1), X(2), \ldots, X(10)$. Über den Würfelnummern ist der Wertevorrat der Zufallsgrößen markiert worden. Das Ergebnis des betrachteten Wurfes ist in Form von Kreisen eingezeichnet worden. Während die Augenzahlen der zehn Würfel als voneinander unabhängig angesehen werden können, hat man es im allgemeinen mit einer zeitlichen Folge von Zufallsgrößen zu tun, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der k-ten Zufallsgröße davon abhängt, welche Werte von den früher eingetretenen Zufallsgrößen angenommen worden sind. Das im Bild 34 dargestellte Versuchsergebnis kann mathematisch als eine diskrete reelle Funktion

$$x(t)$$

mit x als Augenzahl und t als Würfelnummer aufgefaßt werden, die nur in den isolierten Punkten $t = 1, 2, \ldots, 10$ erklärt ist und dort jeweils einen ganzzahligen Wert zwischen 1 und 6 annimmt.

Verbindet man im Bild 34 die beobachteten Augenzahlen der Würfel 1 bis 10 durch einen Streckenzug, so erhält man ein Diagramm, das zur Behandlung stetiger Prozesse überleitet (Bild 35).

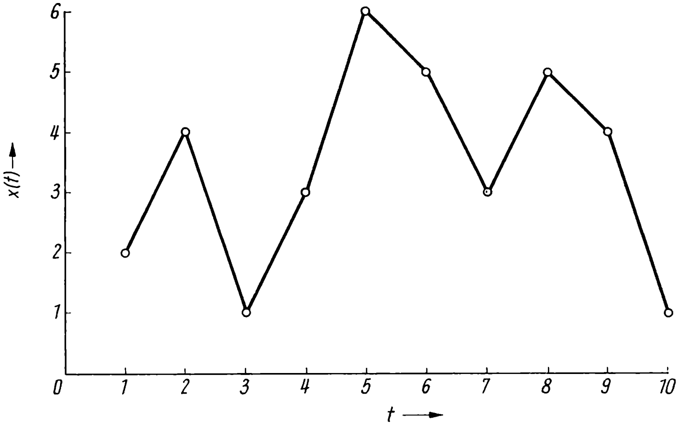


Bild 35. Diagrammdarstellung des Ergebnisses eines Würfelversuches mit 10 Würfeln

Vom Zufall abhängige Erscheinungen, deren Realisierungen stetige reelle Funktionen $x(t)$ sind, spielen in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle. Bild 36 zeigt eine zufällige stetige Signalfunktion $x(t)$.

Die Untersuchung zufälliger Funktionen gehört zur Theorie der stochastischen Prozesse. Eine während eines Experiments gewonnene zufällige Funktion $x(t)$ wird als Realisierung eines stochastischen Prozesses $X(t)$ aufgefaßt.

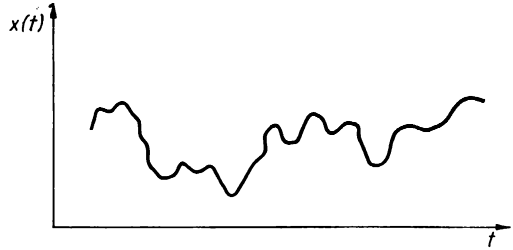


Bild 36. Darstellung einer zufälligen stetigen Signalfunktion $x(t)$

4.1. Definition eines stochastischen Prozesses

Eine Menge von Zufallsgrößen $X(t)$, die von einem Parameter t abhängen, der eine gewisse Menge reeller Zahlen durchläuft, heißt stochastischer Prozeß.

Allgemein ist es üblich, den auftretenden Parameter t als Zeit zu bezeichnen. In der Nachrichtentechnik bedeutet der Parameter t tatsächlich die Zeit, in der eine Erscheinung abläuft. Das trifft für akustische, elektrische und elektromagnetische Signale zu, für die die Zeit die entscheidende unabhängige Veränderliche ist. Der Parameter t kann aber auch irgendeine andere physikalische Größe darstellen. Beispielsweise hängt der Meßfehler X bei einer Längenmessung, die durch Abfahren einer vorgegebenen Strecke geschieht, von der Länge t der zurückgelegten Strecke ab. Unter Umständen besitzt t auch keinerlei physikalische Bedeutung.

Das Studium von Zufallsgrößen erscheint demnach als ein Spezialfall der Theorie der stochastischen Prozesse, wie Tafel 6 es zeigt.

Tafel 6. Stochastische Prozesse $X(t)$

Definitionsbereich	Stochastischer Prozeß	Versuchsergebnis
ein Punkt	Zufallsgröße	eine reelle Zahl x
endlich viele Punkte	mehrdimensionale Zufallsgrößen	mehrere reelle Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Intervall	stochastischer Prozeß mit stetiger Zeit	stetige Zufallsfunktion $x(t)$

Eine Zufallsgröße entspricht in dieser Sicht einer Momentaufnahme aller Zufallsfunktionen eines stochastischen Prozesses in einem bestimmten Zeitpunkt. Ein einzelner Stichprobenwert einer Zufallsgröße kann somit als momentaner Aussschnitt einer zufälligen Funktion angesehen werden.

4.2. Quantitative Charakterisierung von stochastischen Prozessen

Die Kennzeichnung einer Zufallsgröße durch Momente kann auch auf die Menge der Zufallsgrößen eines stochastischen Prozesses ausgedehnt werden. Die Momente sind dann im allgemeinen ebenfalls Funktionen des Parameters t. Ehe wir auf bestimmte Erwartungswerte stochastischer Prozesse näher eingehen, wenden wir uns einer speziellen Klasse stochastischer Prozesse zu.

4.2.1. *Stationäre Prozesse*

Eine umfangreiche Klasse stochastischer Prozesse bilden die stationären Prozesse, deren Theorie in den letzten Jahren entwickelt und in bedeutendem Maße in der Nachrichtentheorie angewandt worden ist. Auf stationäre Prozesse führen die Analyse der in der Funktechnik auftretenden zufälligen Geräusche und die Untersuchung verborgener Periodizitäten in der Radioastronomie.

Stationäre Prozesse sind Vorgänge, deren erzeugender Mechanismus sich mit der Zeit nicht ändert. Sie weisen daher im Kleinen keine erkennbaren „Gesetzmäßigkeiten“ auf, während sich ihre Eigenschaften im Großen nicht ändern.

Etwas mathematischer ausgedrückt heißt das, daß alle zufälligen Veränderlichen $X(t)$ eines stationären Prozesses für alle Parameterwerte t entweder die gleichen oder zumindest einige Momente gemeinsam haben. Das bedeutet, die Erwartungswerte eines stationären stochastischen Prozesses sind zeitunabhängig. Für die Erwartungswerte von $X(t)$ zu den Zeitpunkten $t, t - \tau, 0$ gilt demzufolge:

$$E\{X(t)\} = E\{X(t-\tau)\} = E\{X(0)\}. \tag{82}$$

Für den Erwartungswert des Produktes zweier Zufallsgrößen eines stationären stochastischen Prozesses, deren zeitlicher Abstand τ beträgt, folgt:

$$E\{X(t-\tau)\,X(t)\} = E\{X(0)\,X(\tau)\}. \tag{83}$$

Die zahlenmäßige Kennzeichnung stochastischer Prozesse und insbesondere die Gewinnung von Schätzwerten für die Größen nach Gl. (82) und (83) können in der Meßtechnik praktisch nicht in der von uns behandelten Weise durchgeführt werden, da im allgemeinen von einem stochastischen Prozeß gar nicht mehrere Realisierungen vorliegen, sondern nur eine einzige zufällige Funktion registriert wird. Auf den ersten Blick erscheint somit eine statistische Behandlung zufälliger Prozesse in der Nachrichten- und Regelungstechnik nicht möglich zu sein. Es bleibt praktisch nur der Ausweg, Informationen über einen stochastischen Prozeß aus dem zeitlichen Verlauf einer empirisch gewonnenen Zufallsfunktion zu erhalten. Anstatt viele Vorgänge zu einem bestimmten Zeitpunkt zu registrieren, verfolgt man einen einzigen Vorgang über eine sehr lange Zeit.

4.2.2. *Stationäre und ergodische Prozesse*

Die Bildung des Erwartungswertes einer Zufallsgröße $X(t_0)$, die eine Momentaufnahme eines stochastischen Prozesses darstellt, ergibt im allgemeinen nicht das gleiche Resultat wie die Bestimmung des zeitlichen Mittelwertes einer einzelnen zufälligen Funktion $x(t)$, die eine Realisierung des betreffenden stochastischen Prozesses ist. Im folgenden betrachten wir nur solche Prozesse, bei denen die Bildung des Erwartungswertes nach Gl. (64) durch eine entsprechende Zeitmittelung nach Gl. (62) ersetzt werden kann.

$$E\{X(t_0)\} = \overline{x(t)}. \tag{84}$$

Stochastische Prozesse mit der Eigenschaft nach Gl. (84) heißen stationär und ergodisch. Die Gl. (84) besagt, daß der Durchschnittswert einer großen Menge von Beobachtungsergebnissen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gewonnen worden sind, dem zeitlichen Mittelwert entspricht, der sich aus dem Verhalten eines einzelnen Elements während eines längeren Zeitraums ergibt. Das ist eine starke Einschränkung. Wenn analysiert werden soll, wie viele Stunden ein Fernsehgerät durchschnittlich am Tage eingeschaltet ist, können die Untersuchungen entweder an einem bestimmten Stichtag in sehr vielen Familien oder in einer zufällig ausgewählten Familie an mehreren Tagen durchgeführt werden. Die gewonnenen Mittelwerte brauchen durchaus nicht übereinzustimmen, da der in einer Familie über einen längeren Zeitraum gewonnene Wert sehr stark von der beruflichen Tätigkeit und den persönlichen Interessen der betreffenden Personen abhängt. Man wird erwarten dürfen, daß der „Ergodensatz" nach Gl. (84) besser erfüllt ist, wenn eine über einen längeren Zeitraum beobachtete Einzelerscheinung durch das regellose Zusammenwirken einer großen Zahl von Einzelfaktoren hervorgerufen wird. Das elektronische Rauschen, das wir in Form des gleichmäßigen Flimmerns am Bildschirm oder des akustischen Rauschens im Lautsprecher kennen, ist ein Beispiel für einen solchen Vorgang. Das bedeutet, in der Meßtechnik erhalten wir im Mittel das gleiche Resultat, wenn wir sehr viele Rauschvorgänge zur gleichen Zeit, oder wenn wir statt dessen einen Rauschvorgang über einen längeren Zeitraum verfolgen.

In der Praxis läßt sich die Übereinstimmung nach Gl. (84) kaum kontrollieren, da, wie bereits erwähnt, sehr oft nur eine Realisierung des stochastischen Prozesses vorliegt, aus der sich der auf der linken Seite stehende Erwartungswert nicht direkt bestimmen läßt. Der Übergang zu den zeitlichen Mittelwerten wird dadurch erreicht, daß man die beobachtete zufällige Funktion in einem sehr großen Zeitintervall mitteln muß, um ausreichende Informationen über die statistischen Eigenschaften eines stochastischen Prozesses zu erhalten.

4.2.3. *Korrelationsfunktionen*

Im Bereich stochastischer Prozesse muß man bei der Frage nach dem statistischen Zusammenhang zweier Zufallsgrößen, deren zeitlicher Abstand τ Zeiteinheiten beträgt, unterscheiden, ob die beiden Zufallsgrößen zu einem oder zu zwei verschiedenen stochastischen Prozessen gehören. Im ersten Fall handelt es sich um zwei Zufallsgrößen

$$X(t - \tau) \quad \text{und} \quad X(t) \tag{85}$$

und im zweiten um die Gegenüberstellung von

$$X(t - \tau) \quad \text{und} \quad Y(t)\,. \tag{86}$$

Im Bild 37 wird eine beobachtete zufällige Funktion $x(t)$ einmal zusammen mit einer zeitlich nur wenig verzögerten Funktion $x(t - \tau_1)$ und zum anderen zusammen mit einer stärker verzögerten Funktion $x(t - \tau_2)$ dargestellt.

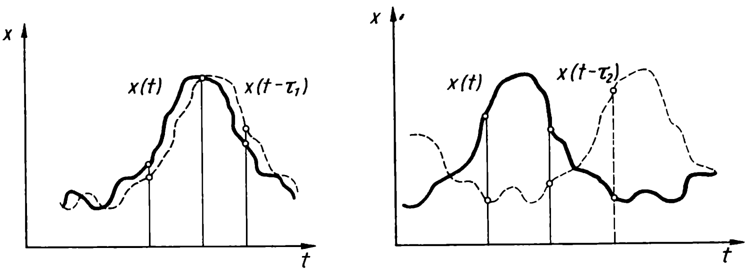


Bild 37. Gegenüberstellung einer zufälligen Signalfunktion $x(t)$ mit einer aus ihr durch eine geringe bzw. starke Verzögerung gewonnenen Funktion

4.2.4. *Autokorrelationsfunktion*

Ein Maß für die Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen ist, wie wir bereits feststellten, der Erwartungswert ihres Produktes. Handelt es sich um zwei Zufallsgrößen eines stochastischen Prozesses, deren zeitlicher Abstand τ beträgt, so erhält man den Ausdruck:

$$E\{X(t - \tau)\, X(t)\}\,. \tag{87}$$

Im Falle eines stationären und ergodischen stochastischen Prozesses ist der Erwartungswert nach Gl. (87) allein von der Zeitdifferenz τ abhängig und kann durch den zeitlichen Mittelwert einer zufälligen Funktion des Prozesses ersetzt werden. Wenn man für Gl. (87) das Symbol $R_{xx}(\tau)$ einführt, kann man schreiben:

$$R_{xx}(\tau) = E\{X(t-\tau)\,X(t)\} = \overline{x(t-\tau)\,x(t)}\,. \tag{88}$$

$R_{xx}(\tau)$ heißt Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $X(t)$. Sie wird nach der rechten Seite von Gl. (88) aus dem zeitlichen Mittelwert des Produktes der momentanen Amplituden $x(t-\tau)$ und $x(t)$ bestimmt, die in einem gewissen zeitlichen Abstand τ registriert werden. Die Autokorrelationsfunktion gibt somit an, wie stark die Zufallsgrößen $X(t)$ eines stationären und ergodischen Prozesses in verschiedenen Zeitabständen miteinander korreliert sind.

Aus Bild 37 ist zu entnehmen, daß bei einer kurzzeitigen Verzögerung τ_1 zusammengehörige Ordinaten $x(t)$ und $x(t-\tau_1)$ noch eine enge Verwandtschaft aufweisen, während bei einer größeren Verzögerung τ_2 die Bindung zwischen den zu einem Zeitpunkt zugehörigen Ordinaten immer mehr verlorengeht. Das kommt auch im Bild 38 zum Ausdruck, das den Verlauf der Autokorrelationsfunktion für einen völlig regellosen Prozeß zeigt.

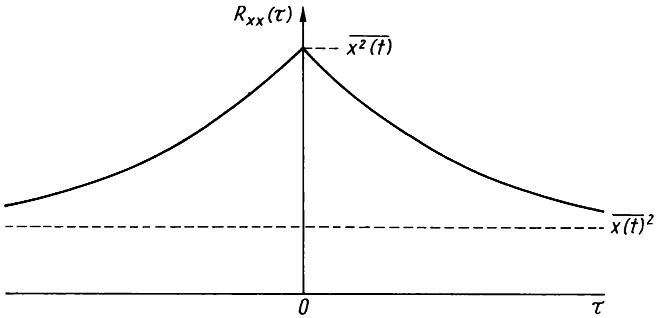


Bild 38. Verlauf der Autokorrelationsfunktion für einen „völlig regellosen“ Prozeß

Das Maximum der Autokorrelationsfunktion liegt bei $\tau = 0$, denn hier liegt die engste überhaupt denkbare Verknüpfung vor, da die Korrelation einer Zufallsgröße mit sich selbst untersucht wird. Aus Gl. (88) folgt:

$$R_{xx}(0) = \overline{x(t)\,x(t)} = \overline{x^2(t)}\,. \tag{89}$$

Strebt τ gegen unendlich, so darf man annehmen, daß die beiden Zufallsgrößen in Gl. (88) voneinander unabhängig sind. Der Erwartungswert des Produktes wird dann gleich dem Produkt der Erwartungswerte, und es gilt:

$$R_{xx}(\infty) = \overline{x(t)}^2. \tag{90}$$

Sind in einem Vorgang periodische Teilkomponenten enthalten, so kehren bestimmte Abhängigkeiten immer wieder. Das bedeutet, daß die Periodizität einer Zufallsfunktion auch in ihrer Autokorrelationsfunktion erhalten bleibt. Die Autokorrelationsfunktion bewertet somit regellose Anteile völlig anders als periodische. Periodische Teilkomponenten, die in einem regellos erscheinenden Gesamtvorgang enthalten sind, können daher mittels der Autokorrelationsfunktion aufgedeckt werden.

Zur Beschreibung der meisten praktisch vorkommenden Signalfunktionen reichen die Autokorrelationsfunktion und die zeitlichen Mittelwerte nach Gln. (62) und (63) aus. Der Prozeß der Autokorrelation, der einer Zufallsfunktion eine „glatte" Funktion zuordnet, beschreibt die Struktur eines stochastischen Prozesses, aber er läßt keine Rückschlüsse auf den Verlauf der Signalfunktion zu. Zu jeder Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ gibt es eine große Zahl verschiedener Signalfunktionen $x(t)$.

4.2.5. *Kreuzkorrelationsfunktion*

Auf der Konfrontierung der Zufallsgrößen zweier verschiedener stochastischer Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ beruht die Bildung der Kreuzkorrelationsfunktion. Sie mißt im Gegensatz zur Autokorrelationsfunktion, die die „innere" Bindung eines stochastischen Prozesses beschreibt, die „äußere" Verwandtschaft der beiden Prozesse ebenfalls in Abhängigkeit von der Zeitdifferenz τ.

In Analogie zu Gl. (88) ergibt sich für die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{xy}(\tau)$ die folgende Darstellung:

$$R_{xy}(\tau) = E\{X(t-\tau)\ Y(t)\} = \overline{x(t-\tau)\,y(t)}\,. \qquad (91)$$

Auf die Behandlung der Eigenschaften einer Kreuzkorrelationsfunktion sei an dieser Stelle nicht eingegangen.

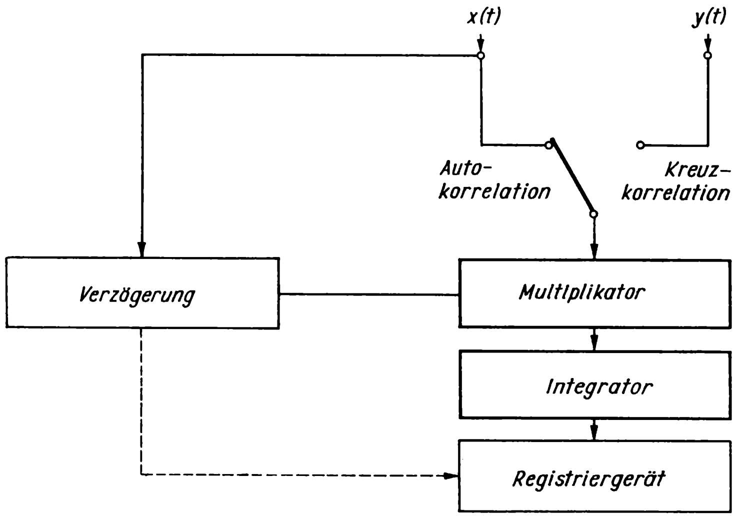


Bild 39. Schema eines Korrelationsanalysators

4.2.6. *Korrelationsanalysatoren*

Die Gewinnung von Korrelationsfunktionen erfolgt mittels Korrelationsanalysatoren. Bild 39 zeigt schematisch den Aufbau eines Korrelationsanalysators.

Wie schnell man die verschiedenen τ-Werte bei einer Korrelationsanalyse erfassen kann, hängt entscheidend von den experimentellen Voraussetzungen ab. Auf technische Einzelheiten und Probleme beim Aufbau von Korrelationsanalysatoren kann hier nicht näher eingegangen werden.

Die Charakterisierung von Signalfunktionen durch Korrelationsfunktionen hat in der Nachrichtentechnik ein weites Anwendungsgebiet gefunden und zu einer wesentlichen Bereicherung ihrer Arbeitsmethoden geführt.

5. Tafelanhang

Tafel 7. Beispiele für die Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y

a)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$	2	2	2	2	2	10
	$+1$	2	2	2	2	2	10
Y	0	2	2	2	2	2	10
	-1	2	2	2	2	2	10
	-2	2	2	2	2	2	10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = 0$$
$$r = 0$$

b)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$	5				5	10
	$+1$	5				5	10
Y	0		5		5		10
	-1		5		5		10
	-2			10			10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = 0$$
$$r = 0$$

c)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$	6	4				10
	$+1$	4	2	2	2		10
Y	0		4	4	2		10
	-1			2	2	6	10
	-2			2	4	4	10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = -78$$
$$r = -\ 0{,}78$$

d)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$			2	4	4	10
	$+1$			2	2	6	10
Y	0		4	4	2		10
	-1	4	2	2	2		10
	-2	6	4				10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = 78$$
$$r = 0{,}78$$

e)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$				10		10
	$+1$					10	10
Y	0			10			10
	-1	10					10
	-2		10				10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = 80$$
$$r = 0{,}80$$

f)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$	10					10
	$+1$		10				10
Y	0			10			10
	-1				10		10
	-2					10	10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = -100$$
$$r = -1$$

g)

		X					
		-2	-1	0	$+1$	$+2$	Summe
	$+2$					10	10
	$+1$				10		10
Y	0			10			10
	-1		10				10
	-2	10					10
	Summe	10	10	10	10	10	50

$$\sum zxy = 100$$
$$r = 1$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Teil 1: Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u)$ und Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ sind in Abhängigkeit von u tabelliert.

Teil 2: u ist in Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ tabelliert.

Teil 1

u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$
−3,0	0,0044	0,0014	0,0	0,3989	0,5000
−2,9	0,0060	0,0019	+0,1	0,3970	0,5398
−2,8	0,0079	0,0026	+0,2	0,3910	0,5793
−2,7	0,0104	0,0035	+0,3	0,3814	0,6179
−2,6	0,0136	0,0047	+0,4	0,3683	0,6554
−2,5	0,0175	0,0062	+0,5	0,3521	0,6915
−2,4	0,0224	0,0082	+0,6	0,3332	0,7257
−2,3	0,0283	0,0107	+0,7	0,3123	0,7580
−2,2	0,0355	0,0139	+0,8	0,2897	0,7881
−2,1	0,0440	0,0179	+0,9	0,2661	0,8159
−2,0	0,0540	0,0228	+1,0	0,2420	0,8413
−1,9	0,0656	0,0287	+1,1	0,2179	0,8643
−1,8	0,0790	0,0359	+1,2	0,1942	0,8849
−1,7	0,0940	0,0446	+1,3	0,1714	0,9032
−1,6	0,1109	0,0548	+1,4	0,1497	0,9192
−1,5	0,1295	0,0668	+1,5	0,1295	0,9332
−1,4	0,1497	0,0808	+1,6	0,1109	0,9452
−1,3	0,1714	0,0968	+1,7	0,0940	0,9554
−1,2	0,1942	0,1151	+1,8	0,0790	0,9641
−1,1	0,2179	0,1357	+1,9	0,0656	0,9713
−1,0	0,2420	0,1587	+2,0	0,0540	0,9772
−0,9	0,2661	0,1841	+2,1	0,0440	0,9821
−0,8	0,2897	0,2119	+2,2	0,0355	0,9861
−0,7	0,3123	0,2420	+2,3	0,0283	0,9893
−0,6	0,3332	0,2743	+2,4	0,0224	0,9918
−0,5	0,3521	0,3085	+2,5	0,0175	0,9938
−0,4	0,3683	0,3446	+2,6	0,0136	0,9953
−0,3	0,3814	0,3821	+2,7	0,0104	0,9965
−0,2	0,3910	0,4207	+2,8	0,0079	0,9974
−0,1	0,3970	0,4602	+2,9	0,0060	0,9981
0,0	0,3989	0,5000	+3,0	0,0044	0,9986

Teil 2

$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u
0,00	$-\infty$	0,31	−0,50	0,62	0,31	0,93	1,48
0,01	−2,33	0,32	−0,47	0,63	0,33	0,94	1,55
0,02	−2,05	0,33	−0,44	0,64	0,36	0,95	1,64
0,03	−1,88	0,34	−0,41	0,65	0,39	0,96	1,75
0,04	−1,75	0,35	−0,39	0,66	0,41	0,97	1,88
0,05	−1,64	0,36	−0,36	0,67	0,44	0,98	2,05
0,06	−1,55	0,37	−0,33	0,68	0,47	0,99	2,33
0,07	−1,48	0,38	−0,31	0,69	0,50	1,00	$+\infty$
0,08	−1,41	0,39	−0,28	0,70	0,52		
0,09	−1,34	0,40	−0,25	0,71	0,55		
0,10	−1,28	0,41	−0,23	0,72	0,58		
0,11	−1,23	0,42	−0,20	0,73	0,61		
0,12	−1,18	0,43	−0,18	0,74	0,64		
0,13	−1,13	0,44	−0,15	0,75	0,67		
0,14	−1,08	0,45	−0,13	0,76	0,71		
0,15	−1,04	0,46	−0,10	0,77	0,74		
0,16	−0,99	0,47	−0,08	0,78	0,77		
0,17	−0,95	0,48	−0,05	0,79	0,81		
0,18	−0,92	0,49	−0,03	0,80	0,84		
0,19	−0,88	0,50	0,00	0,81	0,88		
0,20	−0,84	0,51	0,03	0,82	0,92		
0,21	−0,81	0,52	0,05	0,83	0,95		
0,22	−0,77	0,53	0,08	0,84	0,99		
0,23	−0,74	0,54	0,10	0,85	1,04		
0,24	−0,71	0,55	0,13	0,86	1,08		
0,25	−0,67	0,56	0,15	0,87	1,13		
0,26	−0,64	0,57	0,18	0,88	1,18		
0,27	−0,61	0,58	0,20	0,89	1,23		
0,28	−0,58	0,59	0,23	0,90	1,28		
0,29	−0,55	0,60	0,25	0,91	1,34		
0,30	−0,52	0,61	0,28	0,92	1,41		

Tafel 9. Poisson-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

einer Zufallsgröße X mit Poisson-Verteilung

k	a								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

Poisson-Verteilung

k	a								
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002

Literaturverzeichnis

[1] *Ackermann, W. G.:* Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig: Hirzel Verlag 1955.

[2] *Asser, G.:* Einführung in die mathematische Logik, Teil I. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959.

[3] *Beier, W.:* Biophysik. Leipzig: VEB Georg Thieme Verlag 1960.

[4] *Bernstein, S. N.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Aufl. Moskau—Leningrad: Gostechisdat 1946.

[5] *Brillouin, Leon:* Science and Information Theory. New York: Academic Press Inc. 1956.

[6] *Chintschin, A. J.:* Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Arbeiten zur Informationstheorie I. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1961.

[7] *Feller, W.:* Probability Theory and its Applications. New York: John Wiley 1952.

[8] *Fisz, M.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.

[9] *Gnedenko, B. W.:* Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Akademie-Verlag 1957.

[10] *Gnedenko, B. W.*, und *Chintchin, A. J.:* Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955.

[11] *Herschel, R.:* Information — Theorie und Technik. Regelungstechnik (1954) H. 1.

[12] *Hoff, F.:* Klinische Physiologie und Pathologie. Stuttgart: Georg Thieme Verlag 1954.

[13] *Hristow, W. K.:* Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematischen Statistik und Methode der kleinsten Quadrate. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1961.

[14] *Kitow, A. J.*, und *Krinitzki, N. A.:* Wie arbeitet eine elektronische Rechenmaschine? Leipzig: Fachbuchverlag 1960.

[15] *Kolmogorow, A. N.:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1933.

[16] *Kupfmüller, K.:* Nachricht und Energie. Regelungstechnik (1957) H. 7.

[17] *Kupfmüller, K.:* Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Stuttgart: Hirzel Verlag 1949.

[18] *Lange, F. H.:* Der Korrelationsdetektor als Signalempfänger. Mathematische und physikalisch-technische Probleme der Kybernetik. Berlin: Akademie-Verlag 1963.

[19] *Lange, F. H.:* Korrelationselektronik, 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1962.

[20] *Laplace, P. S.:* Essai philosophique sur les probabilités I—III. Paris: Gauthier-Villars 1921.

[21] *Meyer-Eppler, W.:* Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer Verlag 1959.

[22] *v. Mises, R.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig — Wien: Verlag Deuticke 1931.

[23] *v. Mises, R.:* Wahrscheinlichkeit — Statistik und Wahrheit. Berlin: Springer Verlag 1952.

[24] *Neidhardt, P.:* Informationstheorie und automatische Informationsverarbeitung, 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1964.

[25] *Pfanzagl, J.:* Allgemeine Methodenlehre der Statistik, Bd. I und II. Berlin: Sammlung Göschen 1962.

[26] *Quastler, H.:* Symposium on Information Theory in Biology. London — New York — Paris — Los Angeles: Pergamon Press 1956.

[27] *Renyi, A.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

[28] *Schrödinger, E.:* What is Life? New York: The Mac Millan Comp. 1945.

[29] *Shannon, C. E.*, und *Weaver, W.:* The Mathematical Theorie of Communication. The University of Illinois Press 1949.

[30] *Van der Waerden, B. L.:* Mathematische Statistik. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer Verlag 1957.

[31] *Weber, E.:* Grundriß der biologischen Statistik, 4. Aufl. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1961.

[32] *Wiener, N.:* Cybernetics or control and Communication in the Animal and the Machine. New York: John Wiley und Sons Inc. 1948.

[33] *Wiener, N.:* Mensch und Menschmaschine. Frankfurt a. M.: Ullstein Bücher 1958.

[34] *Wieser, W.:* Organismen, Strukturen, Maschinen. Frankfurt a. M.: Fischer Bücherei 1959.

[35] *Zemanek, H.:* Elementare Informationstheorie. Wien und München: Oldenbourg Verlag 1958.

[36] *Zurmühl, R.:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 4. Aufl. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer Verlag 1963.