Formeln - *und was dann?*

Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu den anderen Wissenschaften

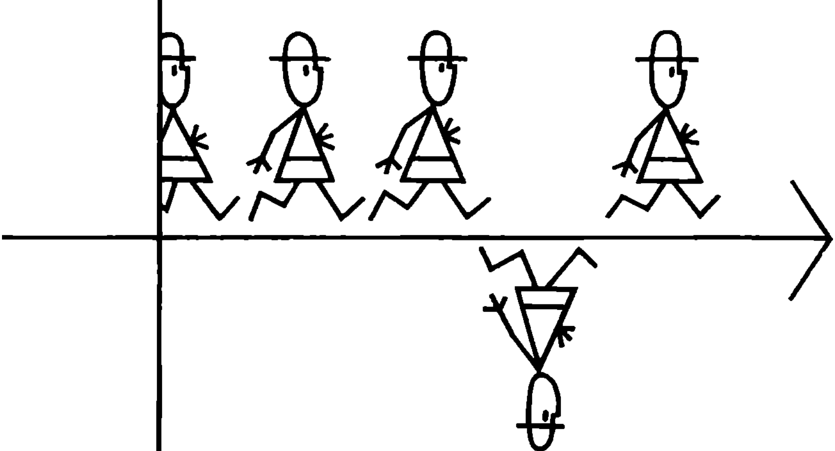
J. Churgin

Churgin · Formeln – *und was dann?*

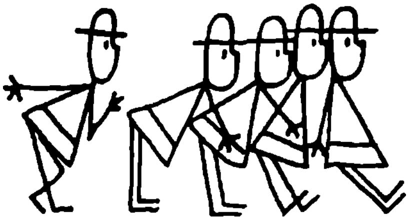
VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

J. CHURGIN

Formeln – *und was dann?*



Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu den anderen Wissenschaften



Originaltitel:

Я. Хургин
Ну и что?
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЦК ВЛКСМ ,,Молодая Гвардия" 1967

Übersetzt von Dr. H. Heckendorff, Karl-Marx-Stadt

Bearbeitet von Dr. H. Heckendorff und Ing. K.-H. Rumpf, Berlin

Lektor: Doris Netz
DK: 51
ES: 19 B, 20 K 2
Bestell-Nr.: 0/3/4283

VLN 201 · Dg.-Nr. 370/6/70 Deutsche Demokratische Republik
Gesamtherstellung: Druckerei Fortschritt Erfurt
Einbandgestaltung: Kurt Beckert

Inhaltsverzeichnis

Einige Worte an die Leser 7
Gespräch mit einem Physiologen im September 9
Gespräch mit dem Physiologen im Winter 15
Ein fast vergessenes Gespräch mit einem Ingenieur der Nachrichtentechnik 18
Noch einige Worte an Sie, lieber Leser 22

Wie denken Sie über die Mathematik? 24
Was ist nun wirklich Mathematik? 25
Eine nicht unnütze historische Abschweifung 26

Figuren auf einem Stück Gummi 30
Mathematik und Kunst 33
Stetige Verformungen 34
Eine merkwürdige Fläche 38
Der Graph 41

Zahlen und Punkte 51

Der Sattel 63
Extremum 68
Extremale Kurven 75
Leonhard Euler 76
Seifenblasen 78

Wie sieht ein Mathematiker aus? 81
Woher kommen die Axiome? 82
Zwei Denkarten 83
Induktion und vollständige Induktion 87
Die dramatische Geschichte des Problems der Lösung von Gleichungen 90

Gespräch mit einem Technologen 95
Was heißt besser? 98
Das Kriterium 101
Wenn die Ente den Schwanz hebt, steckt der Kopf im Wasser 103
Die Nähe 104
Musja und Pusja 106
Kein schreckliches Integral 108
Raum, Abstand, Norm 111
Wie Fachausdrücke entstehen 117

Was wird nun mit den Aufgaben des Technologen? 119
Diplom-Ingenieur Pfiffig sucht eine neue Arbeitsstelle 120
Das Modell 125
Das mathematische Modell 127
Ereignisse und ihre Modelle 130
Wozu ist ein mathematisches Modell überhaupt nötig? 134
Wie erhält man ein mathematisches Modell für die Destillation des Erdöls? . 141

Wahrscheinlich hat Ihnen dieses Buch gefallen? 143

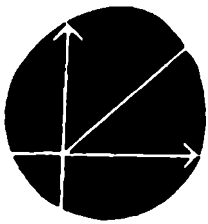
Wie es dazu kam 145
Der Fall und der Zufall 146
Die Wahrscheinlichkeit 147
Sie haben einen Versuch gemacht. Na und? 149
Gespräch mit einem Doktoranden 152
Der Experimentator und der Statistiker 156
Wir müssen eine Entscheidung fällen 159
Intuition: Geburtstage 161
Intuition: Glück — Pech 165
Irrfahrt 170
Der Betrunkene erblickt seinen Zechkumpan 178
Der irrende Schüler 179
Die Sprache 184

Information 189

Gedächtnis und Kode 191
Was ist das, Information? 197
Ein quantitatives Maß 200
Durchlaßfähigkeit 203
Kodierung 205
Modell der Sprache und Informationsübertragung 208
Das Wichtigste der Theorie der Informationsübertragung 209
Was wird mit dem Inhalt? 210

Was können mathematische Maschinen? 213

Gespräch mit einem Psychiater 217
Zeichenerkennung 223
Technische Diagnostik 229
Etwas über medizinische Diagnostik 237
Ist es nicht an der Zeit, den Arzt durch eine diagnostizierende Maschine zu ersetzen 240
Was ist unser Leben? Ein Spiel 242
Am runden Tisch mit Freunden 249
Ein letztes Wort an Sie, verehrter Leser 250



Einige Worte an die Leser

Ich spreche gern und schreibe weniger gern. Dieser Begriff des „Sprechens“ hat viele Synonyme: ein Gespräch führen, sich unterhalten, miteinander reden.

Im Gespräch spürt man ständig die Resonanz bei den Gesprächspartnern, es ist, modern ausgedrückt, Rückkopplung vorhanden.

Seit zwanzig Jahren führe ich Gespräche mit Ingenieuren, Physiologen, Ärzten, Geologen und Ökonomen — mit Menschen verschiedener Berufe, Ansichten und Fähigkeiten. Ich halte Vorträge und führe Seminare durch. Wir unterhalten uns an einem Tisch, den man nicht immer als rund bezeichnen kann. Wir bemühen uns zwar, diesen Tisch zu einem „runden“ zu machen, doch zu Anfang stoßen wir uns tüchtig an seinen „Ecken“. In den Gesprächen geht es oft um Probleme und Schwierigkeiten in wissenschaftlichen Disziplinen, über die ich mitunter so wenig weiß, daß ich mich nicht einmal für einen Dilettanten halten kann.

Irgendwie hat es sich eingebürgert, zu sagen, eine Vorlesung wird „gelesen“. Eine Vorlesung muß aber ein „Gespräch“ mit den Hörern sein; wenn sie gelesen wird, selbst wenn das ohne Manuskript geschieht, so ist es meist unbefriedigend oder langweilig, zuhören zu müssen, und somit auch nahezu nutzlos. Deshalb bemühe ich mich als professioneller Redner stets, während einer Vorlesung oder eines Vortrags mit den Zuhörern ins Gespräch zu kommen.

Die Vorbereitung einer zweistündigen Vorlesung kostet viele Stunden Zeit, trotzdem kann ich nicht bis in alle Einzelheiten festlegen, was ich sagen werde — das hängt auch sehr vom Auditorium ab.

Sicher hat es ein Redner im Fernsehen schwer: Man kann doch einen Witz nicht sich selbst erzählen oder Fragen stellen, ohne darauf wenigstens in den Augen der Hörer eine Antwort zu finden.

Genauso fehlt beim Schreiben eines Buches die Rückkopplung; es fällt mir schwer, mich an einen mir unbekannten Leser zu wenden. Deshalb werde ich mich hier vor Ihnen mit meinen Freunden unterhalten, die Physiologen, Ärzte, Ingenieure oder Geologen sind. Ich werde mit ihnen über Mathematik sprechen. Solche Gespräche gab es viele und wird es auch in Zukunft geben.

Wenn ich in ein Gebiet der Wissenschaft, Technik oder Kunst etwas tiefer eindringen will, so kann ich längere Zeit Literatur wälzen und auch recht

trockene Studien treiben. Ich kann aber auch einen Fachmann fragen, der mir mit Begeisterung von seinen Problemen und Schwierigkeiten erzählen wird. Auf diese Weise kann ich schnell meine Neugier befriedigen, ohne meine angeborene Bequemlichkeit überwinden zu müssen.
Ich unterhalte mich deshalb gern mit Fachleuten der verschiedenen Wissensgebiete.
Doch warum wenden sich diese Fachleute an mich, den Mathematiker? — Man sagt, daß gegenwärtig ein gewaltiger „Prozeß der Mathematisierung" der verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen stattfindet. Solche Ansichten werden von Presse und Rundfunk sowie der populären und sogar der ernsthaften wissenschaftlichen Literatur verbreitet. Allerdings haben die meisten eine sehr verschwommene Vorstellung von diesem Prozeß: Die einen glauben, daß die Mathematiker Gleichungen angeben müßten, die in allen Lebenslagen zu gebrauchen sind; die anderen meinen, daß die Computer das Denken für den Menschen übernehmen könnten und hoffen deswegen, in den gewohnten Bahnen schlecht organisierter Denkweisen verbleiben zu können; die dritten setzen nüchtern auf eine den realen Möglichkeiten der Mathematiker entsprechende Hilfe.
Die Mathematik kann natürlich nicht alle Probleme lösen. Sie ist aber ein wichtiges Hilfsmittel aller wissenschaftlichen Disziplinen, wenn man sie gekonnt und korrekt anwendet. Mit der Anwendung mathematischer Methoden ist es nicht anders als mit allen Dingen des täglichen Lebens: Um guten Hackepeter zu bekommen, müssen Sie das richtige Messer in den Fleischwolf einsetzen, in der richtigen Richtung drehen und vor allen Dingen einwandfreie Rohstoffe verwenden. Verfahren Sie anders, so erwartet Sie eine Enttäuschung, für die Sie natürlich nicht den Fleischwolf verantwortlich machen können.
Es ist sehr wichtig, daß sich der Anwender der Mathematik zunächst mit der Theorie vertraut macht. Er muß sich mit den Waffen aus ihrem Arsenal ausrüsten oder zumindest wissen, wo er diese Waffen finden und einsetzen kann. Der Anwender der Mathematik kann andererseits aber auch Hinweise für ihre weitere Entwicklung geben, indem er dem Mathematiker seine ungelösten Probleme darlegt.
Nach den ersten freundschaftlichen Gesprächen zwischen Fachleuten verschiedener Gebiete kommt es oft zu einem Kreuzen der Klingen, einem Kampf. Das ähnelt der Entwicklung der Handlung in einem Roman: Zuerst sind die Verliebten glücklich und zufrieden miteinander — jeder spricht von sich und hört den anderen nicht. Später, im gemeinsamen Leben, kämpfen die Partner miteinander um eine angemessene Position, um die Behauptung des eigenen Standpunktes. Schließlich kommt es zu einem geteilten Sieg beider, wenn das gegenseitige Verständnis einsetzt.
Mir gefällt das Ringen der Fachleute verschiedener Disziplinen. Wenn dann nach langem Kampf, von dem jetzt die Rede sein wird, die nächste Etappe einsetzt, arbeiten der Mathematiker und der Vertreter des anderen Wissensgebiets zusammen. Sie lösen dann gemeinsam ihre Probleme, und die Arbeit trägt dann für beide Seiten mitunter reiche Früchte.

Wenn Ihnen, verehrter Leser, diese Gespräche interessant und nützlich erscheinen, dann hat es sich gelohnt, sie Ihnen aufzuschreiben.

Gespräch mit einem Physiologen im September

Der goldene Herbst ist ewiges Thema der Dichter und Maler. Über ihn ist viel Schönes zu Papier gebracht worden. Für mich allerdings wie für alle, die mit der Schule zu tun haben, ist der Herbst Beginn eines neuen Jahres. Es kommen neue Menschen, neue Aufgaben und neue Probleme.
An meinem Tisch sitzt ein junger, fähiger Physiologe; keine Berühmtheit, doch jemand, der seine Wissenschaft beherrscht und zu arbeiten versteht. Er sucht nach neuen Wegen und Ideen, er benötigt neue Resultate. Die Unterhaltung mit ihm ist interessant.

Ich: Womit beschäftigen sie sich?
Er: Ich studiere die primären Reaktionen in der Sehzone der Hirnrinde der Katze, die durch Lichtreize vor dem Auge hervorgerufen werden.

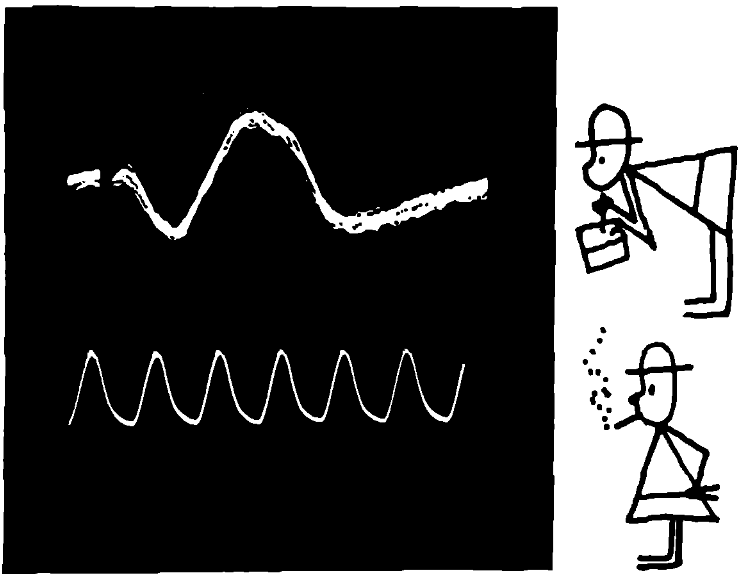


Bild 1

Ich weiß bereits, wie die Sache aussieht: In den Kopf der Katze werden dünne nadelförmige Elektroden eingeführt, und damit werden die bioelektrischen Aktionspotentiale abgetastet. Diese Potentiale kann man auf dem Bildschirm eines Oszillografen beobachten oder fotografieren, wie das die obere Kurve im Bild 1 zeigt; die untere, periodische Kurve dient als Zeitmaßstab.

Ich: Und etwas konkreter?
Er: Die Intensität der Lichtreize kann man ändern. Es zeigt sich, daß sich dabei auch Amplitude und Form der positiven und negativen Halbwelle der erregten Aktionspotentiale ändern.
Ich: Na und?

Wie wenig kann man doch auf dem Papier wiedergeben! Die Betonung dieser beiden Wörter enthält so viele zusätzliche Informationen. Hier drückt sie interessiertes Abwarten aus.

Er: Was heißt — na und? Wir haben eine bestimmte Abhängigkeit zwischen der Intensität der Lichtreize und der Parameter der Reaktionen im Gehirn beobachtet.

Beachten Sie — eine bestimmte Abhängigkeit. Was könnte das bedeuten?

Ich: Was für eine Abhängigkeit haben Sie beobachtet?
Er: Mit wachsender Intensität nimmt die Amplitude der Aktionspotentiale zunächst schnell zu, dann langsamer und bleibt schließlich auf einer bestimmten Höhe.
Ich: Das ist sehr schön. Was möchten Sie denn da noch von mir?
Er: Ich möchte gern die mathematische Beschreibung dieser Abhängigkeit bekommen.
Ich: Und wozu brauchen Sie diese Beschreibung?
Er: Was heißt — wozu? Sind Sie etwa gegen die Anwendung der Mathematik in der Biologie?
Ich: Nein, ganz und gar nicht, ich bin sehr dafür! Sie verstehen unter der mathematischen Beschreibung eine Formel?
Er: Natürlich!
Ich: Was werden Sie denn mit dieser Formel tun, wenn ich sie Ihnen aufstelle?
Er: Stellen Sie sie bitte auf. Wir führen dann zu ihrer Prüfung eine Versuchsreihe durch.
Ich: Sagen Sie, ändern sich die Reaktionen von Katze zu Katze?
Er: Qualitativ ändert sich nichts.
Ich: Aber eine Formel kann man nicht qualitativ aufschreiben. Formeln sind Ausdruck quantitativer Verhältnisse.
Er: Es geht uns gerade um die quantitativen Abhängigkeiten.
Ich: Das habe ich schon so ungefähr verstanden. Stehen die Tiere während des Versuchs unter Narkose?
Er: Meist arbeite ich mit narkotisierten Tieren.
Ich: Wenn man nun die Dosierung des Narkotikums oder das narkotisierende Mittel ändert, ändern sich da auch die Reaktionen?
Er: Ja, quantitativ ändern sie sich; qualitativ bleiben sie jedoch gleich.
Ich: Und wenn man die Versuche mit ein und derselben Katze über längere Zeit ausführt, erweist sich dabei das Bild ebenfalls als nicht konstant?

Er: Ja. Allerdings in unterschiedlichem Maß, doch vieles ändert sich. Möglicherweise setzt eine Gewöhnung ein. Außerdem ändert sich ja auch die Tiefe der Narkose während des Versuchs.
Ich: Warum bezeichnen Sie dann die Abhängigkeit zwischen der Intensität der Lichtreize und den Reaktionen als eine bestimmte?
Er: Vielleicht habe ich mich nicht exakt genug ausgedrückt. Wozu diese Wortklauberei? Ich wollte sagen, daß eine gewisse Abhängigkeit vorhanden ist.
Ich: Das ist keine Wortklauberei. Das Gravitationsgesetz drückt z. B. die bestimmte Abhängigkeit zwischen den Massen zweier Körper, dem Abstand zwischen ihnen und der Anziehungskraft aus. Doch in dem von Ihnen betrachteten Prozeß ist vorläufig keine bestimmte, klare Abhängigkeit zwischen der Intensität des Lichtreizes und der Reaktion des Gehirns zu erkennen.
Er: Doch immerhin, wenn man die Intensität erhöht, so erhöht sich in der Regel auch die Amplitude der beiden Halbwellen der Aktionspotentiale.
Ich: Das ist noch weit entfernt von bestimmter Abhängigkeit. — Was wollen Sie eigentlich untersuchen?
Er: Akademiemitglied A. (oder Professor B. oder der bekannte ausländische Wissenschaftler C.) hat eine Methode zur Messung der Aktionsströme in der Hörzone des Gehirns angegeben. Er und seine Mitarbeiter arbeiteten mit Kaninchen und untersuchten den Hörapparat. Unser Chef hat die Aufgabe gestellt, den Sehapparat näher zu betrachten. Wir sind es gewöhnt, mit Katzen zu arbeiten, obwohl man mit ihnen mehr Scherereien hat.

Wenn man sich statt einer direkten Antwort auf eine Frage auf Autoritäten beruft, wird es mir immer etwas unangenehm zumute. Ich stelle mir bildlich vor: ein muffiges Zimmer, ein Tier auf dem Tisch und einige Dutzend Geräte sind eingeschaltet. Ein Schleifenoszillograf zeichnet gleichzeitig fünfzehn und mehr Kurven auf: Blutdruck, Atemrhythmus, die Bioströme aus verschiedenen Hirnbereichen usw. Eine ganze Gruppe von Leuten führt mehrere Stunden lang ein exaktes Experiment durch. Danach wird das niedliche Versuchskaninchen in den Mülleimer geworfen; nach einer gewissen Zeit landen auch die meterlangen Aufzeichnungen dort, denn nicht immer existiert eine genaue Vorstellung darüber, was man mit ihnen anfangen könnte. Meine Stimme bekommt inzwischen einen metallischen Klang.

Ich: Welche Frage wollen Sie mit Ihrer Untersuchung eigentlich beantworten?
Er (gereizt): Ich habe Ihnen doch gesagt, daß mich die Abhängigkeit der Parameter der primären Reaktion von der Intensität der Lichtreize interessiert.
Ich (bissig): Nehmen wir an, Sie würden diese Abhängigkeit bereits kennen, eine Formel sei aufgestellt. Und nun?

Er (noch gereizter): Ich habe Ihnen doch gerade erklärt, daß Akademiemitglied A. ...

Ich (ihn unterbrechend): Aber welche Aufgabe hat diese Kapazität gelöst?

Er (herablassend): Akademiemitglied A. hat den Einfluß der Intensität eines Schallreizes auf die primäre Reaktion in der Hörzone der Hirnrinde untersucht.

Ich: Meines Erachtens ist das in dieser Formulierung keine mathematische Aufgabe, sondern ein Thema für eine Beschreibung in Worten. Was hat er denn für eine Formel aufgestellt?

Er: Wo denken Sie hin! Akademiemitglied A. ist ein Wissenschaftler der alten Schule, ein Gegner der Anwendung der Mathematik in der Biologie. Von Formeln kann da keine Rede sein! Er ist der Meinung, daß es die Aufgabe des Physiologen ist, eine Erscheinung zu beschreiben.

Ich: Zu beschreiben oder zu erklären?

Er: In der klassischen Physiologie erklärt man natürlich auch die Erscheinungen, doch nur beschreibend.

Ich: Und wie muß man Ihrer Meinung nach eine Erscheinung erklären?

Er: Das muß exakt geschehen. Deshalb habe ich Sie ja auch darum gebeten, mir bei der Aufstellung einer Formel behilflich zu sein.

Ich: Wissen Sie, ich bin kein Verehrer der klassischen Physiologie. Jedenfalls fiel es mir immer sehr schwer, Bücher über Physiologie zu lesen. Sie enthalten sehr viele Fakten, die vom Standpunkt des Mathematikers aus gesehen recht willkürlich ausgelegt werden. Doch was Sie da vorschlagen, ist nicht viel besser.

Er: Wie soll ich das verstehen?

Ich: Ich werde ein Beispiel anführen. Die Blätter verschiedener Pflanzen unterscheiden sich durch ihre Form, und niemand wird ein Ahornblatt mit einem Birkenblatt verwechseln. Nun nehmen wir ein Bügeleisen, bügeln das Ahornblatt glatt (wir machen es eben) und umfahren das Blatt mit einem Bleistift. Wir erhalten auf dem Papier eine Kurve. Mit einiger Anstrengung kann man die Gleichung dieser Kurve aufstellen. Der berühmte *Descartes*, von dem die Methode stammt, die Lage eines Punktes durch seine Koordinaten anzugeben — eine der größten Entdeckungen der Menschheit —, untersuchte z. B. eine Kurve mit der poetischen Bezeichnung „Blütenblatt des Jasmin“. Die Gleichung dieser Kurve ist

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Im Bild 2 sehen Sie diese Kurve, verehrter Leser. Das Stück der Kurve im ersten Quadranten hat tatsächlich etwas Ähnlichkeit mit einem Blatt.

Er: Ich weiß nicht ...

Ich: Das ist es ja gerade. Es existiert sogar eine Menge Literatur über die Bestimmung von Kurven, die Blattformen beschreiben. Viele

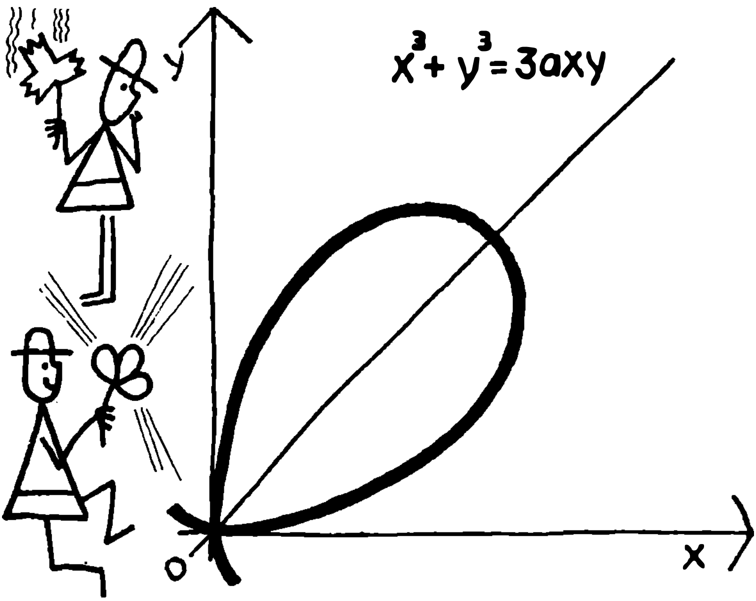


Bild 2

Wissenschaftler haben sich damit beschäftigt, von *Descartes* bis in unsere Tage. Am Ende des vorigen Jahrhunderts hat der deutsche Mathematiker *L. Habenicht* ein ganzes Werk verfaßt unter dem Titel „Analyse der Formen von Blättern". Daß diese Arbeit für die Biologie von Nutzen war, kann man kaum behaupten.
Meines Erachtens kompromittieren derartige Spielereien die Anwendung der Mathematik in der Biologie. Aus diesen Formeln kann man keine Schlußfolgerungen ziehen, die nützlich wären für die Botanik, für die Erklärung der Natur. Nicht nur deshalb, weil sich die Blätter ein und desselben Gewächses in ihrer Form etwas unterscheiden und die Formeln nur näherungsweise die Blattformen beschreiben. Außerdem müßte man noch beachten, daß Blätter keine ebenen Figuren sind, sondern gekrümmte Flächen.
Mit einem Wort, die Formeln allein sind nicht die Mathematik — genausowenig sind die bloßen Noten die Musik.
Er: Sie haben mich verwirrt!
Ich: Kehren wir zurück zur Physiologie. Die Untersuchung des Einflusses der Intensität eines Schallreizes auf die primären Reaktionen in der Hörzone der Hirnrinde kann nicht der Zweck, sondern nur eine Zwischenetappe einer Arbeit sein. Welche Aufgabe ist denn zu lösen?
Er: Die Elektrophysiologen beherrschen heute die Methode des Abtastens von Biopotentialen des Gehirns, sowohl von großen Grup-

pen von Zellen als auch von einzelnen Neuronen. Wir untersuchen die Reaktionen großer Gruppen von Zellen in der Hirnrinde auf verschiedene Reize.

Ich: Wenn Akademiemitglied A. noch nicht geboren wäre oder sich mit Botanik beschäftigen würde und diese neue Methode des Abtastens der Biopotentiale bereits im Standardkurs der Elektrophysiologie gelehrt würde, würden Sie sich dann trotzdem mit diesem Thema beschäftigen?

Er: Ja, wenn wir uns dabei noch in demselben Zustand der Unkenntnis über die Prozesse der Hirntätigkeit befinden würden, täten wir genau das gleiche.

Ich: Was erfahren Sie über die Tätigkeit des Gehirns, wenn Sie die primären Reaktionen registrieren? Alles ist gut und schön, doch welche Aufgaben lösen Sie eigentlich wirklich?

Er: Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der Intensität eines Lichtreizes und den Parametern der primären Reaktion. Sehen Sie selbst.

Er zeigt mir eine Menge Fotos, wir erörtern diese ausgiebig und streiten, streiten ...

Ich: Meine Meinung ist, daß zwischen den beiden Sie interessierenden Größen — der Intensität des Lichtreizes und den Parametern der primären Reaktion — gar kein direkter eindeutiger Zusammenhang besteht. Die Dauer der Reaktion hängt noch von vielen anderen Faktoren ab, deren Einfluß Sie während des Versuchs nicht konstant halten können. Der Zusammenhang zwischen den Parametern des Reizes und der Reaktion ist in Ihrem Fall statistischer, wahrscheinlichkeitstheoretischer Art. Deshalb kann man eine Formel für einen direkten Zusammenhang gar nicht angeben.

Die Sache ist allerdings die, daß Sie das auch gar nicht brauchen. Es ist zumindest unvernünftig, einfach so den Zusammenhang zwischen irgendwelchen Größen untersuchen zu wollen. Sie müßten Versuche anstellen, um Antwort auf eine bestimmte Frage zu bekommen, eine Hypothese aufstellen und zu ihrer Prüfung das Experiment heranziehen. Sie verfahren schließlich auch so, gestehen sich das nur nicht genügend klar ein. Ich schlage Ihnen eine Pause für eine gewisse Zeit vor. Versuchen Sie, die Aufgabe klar zu formulieren, die Sie lösen wollen.

Er: Gut, ich werde darüber nachdenken. — Sie haben mich allzu hart an die Wand gedrückt. Im Kreise der Physiologen ist es vorläufig noch nicht üblich. so grob und schroff die unhöfliche Frage „Na und? zu stellen.

Vielleicht haben Sie verehrter Leser, den Eindruck gewonnen, mein Gesprächspartner sei begriffsstutzig oder kennt sich schlecht aus auf dem Gebiet seiner Wissenschaft? Oder Sie sind zu der Meinung gelangt, die Neurophysiologie sei eine Wissenschaft zweiter Klasse?

Weder das eine noch das andere trifft zu. Der Neurophysiologe, wie der Biologe überhaupt, hat es mit dem lebenden Organismus zu tun. Jedes lebende Objekt, sei es ein Lebewesen oder einfach eine lebende Zelle, ist unvergleichlich komplizierter als irgendeine vom Menschen gebaute Maschine. Einen lebenden Organismus kann man nicht in seine Einzelteile zerlegen und jedes Teil für sich untersuchen — alle Prozesse im Organismus bedingen sich gegenseitig.
Man kann sagen, daß der lebende Organismus im Unterschied zu allen bis jetzt künstlich geschaffenen Maschinen oder Systemen ein System mit sehr vielen, praktisch unendlich vielen Freiheitsgraden (wenn man diesen Begriff in einem vernünftigen Sinn auffaßt) ist.
Daher befindet sich der Biologe in einer schwierigen Situation, und eben deshalb ist die Biologie erst unlängst vom passiven Beobachten der Natur zum aktiven Experiment auf breiter Front übergegangen. Gegenwärtig ist man auf der Suche nach neuen, vollkommeneren Untersuchungsmethoden. Erst in jüngster Zeit ist endgültig klar geworden, daß das Studium des Lebenden eine Vielfalt mathematischer Methoden erfordert, daß neue mathematische Methoden nötig sind, die den komplizierten biologischen Aufgaben entsprechen.
Die Überlegenheit des Mathematikers in diesem und anderen Gesprächen ist nur scheinbar, äußerlich — angreifen ist leichter als sich zu verteidigen.
Der Mathematiker kann eine reale Hilfe und nicht nur eine oberflächliche Kritik erst dann geben, wenn er sich die Grundlagen des entsprechenden Zweiges der Wissenschaft, in diesem Fall der Neurophysiologie, angeeignet hat. Nur dann kann man von ihm nützliche neue Ideen, die Erfassung der Fragestellung und richtige Schlußfolgerungen in dem für ihn neuen Gebiet erwarten.

Gespräch mit dem Physiologen im Winter

Seit dem ersten Gespräch mit dem Physiologen im September sind einige Monate vergangen. Wir haben uns vielmals getroffen, die Anlage der Versuche und ihre Ergebnisse erörtert und uns gestritten, gestritten ... Ich bin während der Versuche im Laboratorium gewesen, habe auch an den Hebeln gedreht und die armen Tiere bemitleidet. Wieder und wieder habe ich beharrlich ein und dieselben Fragen sowohl an den befreundeten Physiologen als auch an seine Arbeitskollegen gerichtet. Wir haben ein regelmäßiges Seminar eingerichtet. Nach und nach bildete sich eine gemeinsame Sprache heraus, und wir schienen zum Verständnis des Zieles, dem die Versuche dienten, und zu einer klaren Formulierung der Aufgabenstellung gekommen zu sein.

Ich: Worum geht es heute? Haben Sie neue Ergebnisse?
Er: Ergebnisse habe ich, doch Neuigkeiten nicht. Mit scheint jedoch, daß man die Aufgabenstellung nun klar formulieren kann.

Ich: Zum wievielten Male?
Er: Ich hoffe, zum letzten Mal!
Ich: Oho! Berichten Sie!
Er: Das Gehirn verarbeitet mit Hilfe des Sehapparats Lichtreize Unsere Aufgabe ist es, zu verstehen, wie dies vonstatten geht.
Ich: Darüber sprachen wir bereits. Ausschlaggebend sind jedoch nicht die Reize, sondern die Information, deren Träger sie sind.
Er: Gerade das meinte ich.
Ich: Welche Parameter des Lichtreizes sind Träger von Information?
Er: Das ist leider nicht genau bekannt.
Ich: Deswegen müssen wir diese Parameter zunächst einmal erraten und unsere Vermutung überprüfen.
Er: Zweifelsohne ist der wichtigste Parameter die Leuchtdichte, die Intensität des Lichtreizes. Da ein gewisser statistischer Zusammenhang zwischen der Intensität des Lichtreizes und der Amplitude der primären Reaktion besteht — damit waren Sie bereits einverstanden —, sind wir auf dem richtigen Wege, wenn wir diesen untersuchen.
Ich: Ja, offenbar liegt hier ein recht enger statistischer Zusammenhang vor. Trotzdem, was bedeutet das? Es hat den Anschein, daß einzelne Zellen der Sehzone der Hirnrinde auf den Lichtreiz reagieren, und daß die Reaktion immer dieselbe Intensität hat. Im Versuch wird die Summe der Aktionsströme vieler Zellen einer bestimmten Zone registriert. Die Erhöhung der Summe der Aktionsströme bei Anwachsen der Intensität des Lichtreizes beruht offensichtlich darauf, daß mit wachsender Intensität der Reizung die Anzahl der reagierenden Zellen zunimmt.
Er: Offenbar ist das so.
Ich: Die Zellen reagieren jedoch nicht gleichzeitig?
Er: Nein. Bei verschiedenen Typen von Zellen ist die Verzögerung zwischen Reizung und Reaktion nicht einheitlich, man sagt, daß die Zellen verschiedene Latenzzeit haben. Außerdem reagieren die verschiedenen Zellentypen auch nicht gleichartig. Jede Zelle sendet nach der Reizung eine Serie von Impulsen aus. Die Anzahl der Impulse und die Intervalle zwischen ihnen sind jedoch bei den verschiedenen Zellentypen unterschiedlich.
Ich: Das bedeutet, daß diese Impulsserien verschiedene Information übertragen. Sagen Sie bitte, reagiert in Wirklichkeit eine jede Zelle immer gleichmäßig auf die Erregung, sind also für eine bestimmte Zelle die Anzahl der Impulse und die Intervalle zwischen ihnen unveränderliche Größen?
Er: Es sieht so aus. Jedenfalls in erster Näherung, wie Sie sagen. Allerdings, wenn man eine einzelne Zelle durch eine in sie eingeführte Elektrode mehrmals reizt, ändert sich das Bild. Aber das ist vielleicht nicht charakteristisch für eine Zelle, die sich gemeinsam mit anderen in normalen Verhältnissen befindet.

Ich: Wieviel Ausreden es doch in der Physiologie gibt!
Er: Sie haben es ja hier auch nicht mit einem Fleischwolf zu tun, der aus einem Dutzend Teilen besteht, und bei dem sofort klar ist, was passiert, wenn man schneller dreht!
Ich: Das habe ich schon verstanden, Sie rennen offene Türen ein! Das Wirkungsprinzip des Fleischwolfs ist längst geklärt. Doch in der Physiologie sind die Prinzipien nicht geklärt, und deshalb zieht sie mich auch an. — Also, wegen der Streuung der Latenzzeiten und der Anzahl und Form der Impulse der einzelnen Zellen sind nicht nur die primären Aktionsströme unterschiedlich, sondern es ändert sich die gesamte Reaktion mit der Erregung. Ist es nicht so?
Er: Ja, genau so. Doch wegen der intensiven Spontanaktivität der Gehirnzellen bildet sich eine spürbare Autorhythmizität der Hirnrinde aus, die sichtbar wird, wenn keine Reizung vorhanden ist. Der „Schwanz" der gesamten Reaktion geht in dieser Grunderregung verloren, er läßt sich nicht aussondern.
Ich: Warum denn nicht? Ich denke, das müßte gerade möglich sein. Dazu führt eine sehr einfache Überlegung. Die Autorhythmizität ist das Ergebnis der Spontanaktivität des Gehirns. Wenn man annimmt, daß die Prozesse der Spontanaktivität der verschiedenen Zellen oder Zellgruppen unabhängig voneinander verlaufen oder nur schwach voneinander abhängig sind, so kann man einzelne entfernt gelegene Abschnitte des Prozesses als unabhängig ansehen. Das bedeutet aber, daß sich, wenn wir z. B. einhundert solcher Abschnitte übereinanderlegen und summieren, fast Null ergeben muß.
Er: Versuche mit der Autorhythmizität sind gemacht worden. Es treten bestimmte periodische Prozesse auf. Sie wissen sicher, daß es α-Wellen, β-Wellen und γ-Wellen gibt.
Ich: Aber diese Prozesse verlaufen doch wohl langsam im Vergleich zu den von uns betrachteten Reaktionen.
Er: Ja, recht langsam.
Ich: Dann wollen wir doch einmal versuchen, Informationen über das Verhalten des „Schwanzes" der Reaktion auf einen Lichtimpuls zu erhalten, indem wir eine Gruppe von, sagen wir, einhundert hervorgerufenen Reaktionen statistisch auswerten. Wir zeichnen sie auf, legen die Anfangspunkte der Reaktionen (oder die Zeitpunkte der Reizung) jeweils übereinander und summieren dann auf. Die Komponente der Spontanaktivität wird dabei im wesentlichen ausgeschaltet, während die durch den Reiz erzeugte Aktivität erhalten bleibt. Das ist eine in der Nachrichtentechnik gebräuchliche Methode, um schwache Signale von Störungen zu trennen.
Er: Wie die Versuche durchzuführen sind, kann ich mir vorstellen. Doch wie soll man die Ergebnisse bearbeiten? Das ist doch sehr aufwendig!
Ich: Ja, von Hand geht das nicht. Doch hier kann man bereits vorhandene technische Hilfsmittel ausnutzen. Die stetigen Kurven

müssen in diskrete Daten umgesetzt und auf einem elektronischen Rechner bearbeitet werden.

Er: Versuchen wir es, der vorgeschlagene Weg ist sehr verlockend.

Wir haben die notwendigen Arbeiten durchgeführt und interessante Ergebnisse erzielt. Ich werde hier nicht ausführlich darüber berichten, denn die Ergebnisse waren nicht der größte Erfolg. Wir sind zu gegenseitigem Verständnis gelangt und fanden auch eine Basis für unsere gemeinsame Arbeit. Als nächste Aufgabe stellten wir die Frage, auf welche Parameter des Lichtreizes das Gehirn reagiert. Der Mathematiker konnte dem Physiologen mit einer Methode zur Gewinnung der notwendigen Information aus den Beobachtungen zu Hilfe kommen. Dabei erwies es sich, daß nicht die Formeln, sondern die Ideen und die Methoden das Wichtigste waren.
Ich habe nur von der ersten Etappe der gemeinsamen Arbeit berichtet, und es liegt mir fern, die erhaltenen Resultate zu überschätzen.
Wir mußten feststellen, daß das Problem nicht nur darin bestand, die Parameter des Reizes, auf die der Sehapparat reagiert, zu untersuchen, sondern daß es bedeutend komplizierter und tiefer ist. Inzwischen wurde geklärt: Bevor die Reize verarbeitet werden können, muß das System „wissen“, wozu dies nötig ist. Nur dann kann es die Parameter vernünftig auswählen, auf die es zu reagieren hat. Nur unter dieser Bedingung wird der Reiz eine für das System nützliche Information tragen und nicht einfach als irgendeine Störung aufgefaßt werden.
Der lebende Organismus hat eine recht große Anzahl von Aufgaben zu lösen. Offensichtlich muß er sich jeweils auf die konkrete Aufgabe, die zu lösen ist, einstellen. Später werden wir diesen wichtigen Fragenkreis noch einmal berühren.

Ein fast vergessenes Gespräch mit einem Ingenieur der Nachrichtentechnik

Dieses Gespräch hat vor längerer Zeit stattgefunden. Zufällig wurde ich daran erinnert, als ich auf alte Aufzeichnungen stieß.
Ein qualifizierter Ingenieur, Spezialist für Empfangsanlagen, hatte mich um Rat gebeten. Er war ein ausgezeichneter Entwickler und hatte, wie man sagt, „ein Gefühl für eine Schaltung“. Seine mathematische Vorbildung war auch nicht schlecht. Wir kannten uns bereits seit Beginn seiner Aspirantur; ich hatte bei den Aspiranten Mathematik zu lehren und lernte gleichzeitig bei ihnen Nachrichtentechnik.

Er: Könnten Sie mir nicht helfen, ein Integral zu berechnen?

Ich: Zeigen Sie mal her! Oho! Woher haben Sie solch eine lange und komplizierte Formel?

Er: Sie hat sich so ergeben.

Ich: Vielleicht ist Ihnen bei der Ableitung ein Fehler unterlaufen?

Er: Nein. Ich habe alles mehrfach nachgeprüft, und immer komme ich auf dieses komplizierte Integral. Handbücher helfen nicht weiter, sie enthalten derartige Integrale nicht.
Ich: Entschuldigen Sie bitte, ich habe vergessen, womit Sie sich beschäftigen?
Er: Ich untersuche die Rauschanfälligkeit eines Systems „Filter-Detektor-Filter".
Ich: Das ist ein sehr interessantes Thema. Aber bei welcher konkreten Aufgabe ergibt sich solch ein Riesenintegral?
Er: Sie glauben nicht, daß sich solch eine Formel ergibt? Bitte, ich kann ihnen sofort sämtliche Ableitungen bringen, überzeugen Sie sich selbst!
Ich: Nein, nicht nötig, ich glaube es fast. Aber ich glaube nicht, daß Sie das Richtige tun. Solche komplizierten Formeln dürften bei der Lösung ihrer Aufgabe nicht auftreten.
Er (gekränkt): Was heißt — dürften nicht? Diese Formel ergibt sich, wenn man einen idealen linearen Detektor betrachtet. Ich habe doch eben auf Ihren Rat hin die Kennlinie der realen Röhre durch die der idealen ersetzt!

Hier entsann ich mich, daß er wirklich etwa zwei Monate vor diesem Gespräch zu mir gekommen war mit der Bitte, ihm eine analytisch bequeme Formel anzugeben, mit der er der Kennlinie des idealen Detektors möglichst nahe kommt. Ich hatte ihm, ohne in das Wesen der Sache ein-

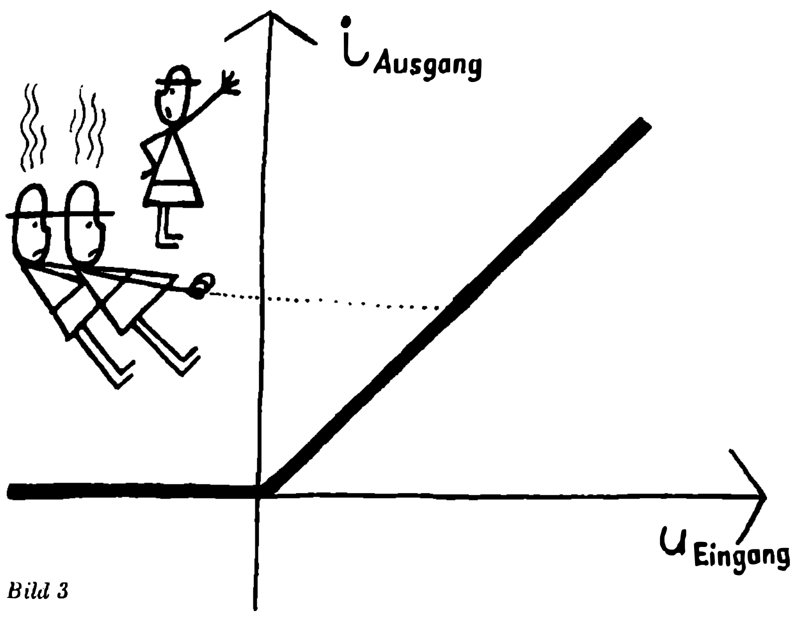


Bild 3

zudringen, geraten, die im Bild 3 dargestellte Funktion zu benutzen. Und nun wurde offensichtlich, daß die Rechnung in diesem Fall sehr kompliziert wurde.

Ich: Nehmen Sie es mir nicht übel, hier bin ich offenbar schuld. Versuchen wir einmal das Wesen des Problems zu erfassen. Was für eine Aufgabe wollen Sie lösen?
Er: Auf den Eingang des Systems „Filter–Detektor–Filter“ treffe gleichzeitig ein Nutzsignal geringer Bandbreite und ein Störsignal. Zu bestimmen ist das Verhältnis Nutzspannung zu Störspannung, also der Störabstand am Ausgang des Kanals.
Ich: Angenommen, Sie hätten den Störabstand berechnet. Und nun?
Er: Was heißt — und nun?
Ich: Was werden Sie mit diesem Verhältnis tun?
Er: Versuchen, es zu erhöhen!
Ich: Das ist schon eher eine Sache. Wenn ich Sie richtig verstanden habe, wollen Sie die Parameter des Systems so bestimmen, daß der Störabstand möglichst groß wird. Stimmt das?
Er: Ja!
Ich: Und was kann man im System ändern, welche Parameter haben Sie in der Hand?
Er: Wenn wir die Filter als gegeben ansehen, kann nur noch die Kennlinie des Detektors geändert werden.
Ich: Mit welcher Genauigkeit läßt sich diese Kennlinie in der Praxis realisieren?
Er: Ich möchte die Aufgabe gern in allgemeiner Form lösen.
Ich: Wie verfahren Sie denn praktisch? Das System arbeitet doch wohl schon?
Er: Natürlich arbeitet es. Der Detektor ist eine Elektronenröhre. In der Schaltung sind zwei Potentiometer vorgesehen, durch die sich die Kennlinie des Detektors variieren läßt. Die günstigsten Kennwerte werden einfach experimentell ermittelt.
Ich: Was verstehen Sie unter der Lösung der Aufgabe in allgemeiner Form?
Er: Ich möchte Formeln aufstellen, nach denen die Vorgänge im System ablaufen.
Ich: Die Formeln müssen von Ihren Ausgangsparametern abhängen. Was nützt Ihnen eine Formel mit absoluter Genauigkeit, wenn Sie die Ausgangsgrößen sowieso nicht genau vorgeben können?
Er: Aber das soll doch in meine Dissertation eingehen! Dort muß ich mathematische Theorie bringen, sonst heißt es, daß ich keine solide Arbeit geleistet habe.
Ich: Und nur aus diesem Grund berechnen Sie das Integral?
Er: Wenn ich nicht diese Dissertation schreiben müßte, hätte ich mich vielleicht gar nicht so sehr mit dieser Sache beschäftigt; dazu hätte ich gar keine Zeit. Andererseits jedoch, wenn man bequeme

Formeln hat, kann man sofort sehen, was wovon abhängt. Man kann das System mit den günstigsten Parametern bauen, und derart u. U. die Störanfälligkeit wesentlich verringern.

Ich: Sie meinen also, daß auch die Theorie von Nutzen sein kann?

Er: Wenn die Beziehungen nicht zu kompliziert sind, zweifellos!

Ich: Dann lohnt es sich also, sich damit zu befassen. Mit welcher Genauigkeit kann man die Detektorkennlinie realisieren?

Er: Nun, sagen wir, mit etwa 1%!

Ich: Und ohne Beschönigung?

Er: Ich glaube, daß wir höchstens 5% Genauigkeit garantieren können.

Ich: Das kommt wohl der Wahrheit näher! Über welches Intervall streuen die Eingangsspannungen?

Er: Theoretisch über ein unendliches Intervall, wenn man Normalverteilung für die Störungen voraussetzt.

Ich: Die Theorie ist gut und schön, doch wie sieht es in Wirklichkeit aus?

Er: Praktisch treten keine Spannungen auf, die über die Grenzen von -1 V bis $+1$ V hinausgehen.

Ich: Das ist schon konkreter. Formulieren wir nun die Aufgabe: Die Form der Kennlinie des Detektors ist im Intervall von -1 V bis $+1$ V so zu wählen, daß sie der im Bild 3 dargestellten Funktion ähnelt und in diesem Intervall eine Genauigkeit von mindestens 5% erreicht. Ich glaube, daß man dabei mit einem Polynom nicht allzu hohen Grades auskommt, sagen wir vierten oder sechsten Grades.

Er: Oh! Dann wären sämtliche Ableitungen wesentlich einfacher, und die Beziehungen zwischen den Parametern wären vollauf zu überschauen.

Ich: Natürlich!

Er: Allerdings befürchte ich da Einwände meines Chefs. Er wird sagen, das sähe zu primitiv aus!

Ich: Sagen Sie, wohnen Sie weit weg von Ihrem Institut? Wieviel Zeit brauchen Sie für den Weg?

Er: Ich wohne im Zentrum, für den Weg zur Arbeit benötige ich etwa 45 bis 50 Minuten. Wieso?

Ich: Sie sind ein Spezialist der Mikrosekundentechnik. Könnten Sie ihre Wegzeit auf die Mikrosekunde genau bestimmen?

Er: Ja. Doch das hätte wenig Sinn!

Ich: Ich glaube auch, daß es keinen Sinn hat, obwohl es prinzipiell möglich ist. Die Analogie zu Ihrer Aufgabe ist offensichtlich!

Er: Ja ... Also, was für ein Polynom müßte ich nehmen?

Ich: Gut, ich werde es berechnen. Kommen Sie in ein paar Stunden wieder!

Das entsprechende Polynom war schnell aufgestellt. Seine Kurve zeigt Bild 4 .Das Problem liegt nicht bei der Aufstellung des Polynoms, sondern im allgemeinen Herangehen an solche Aufgaben.

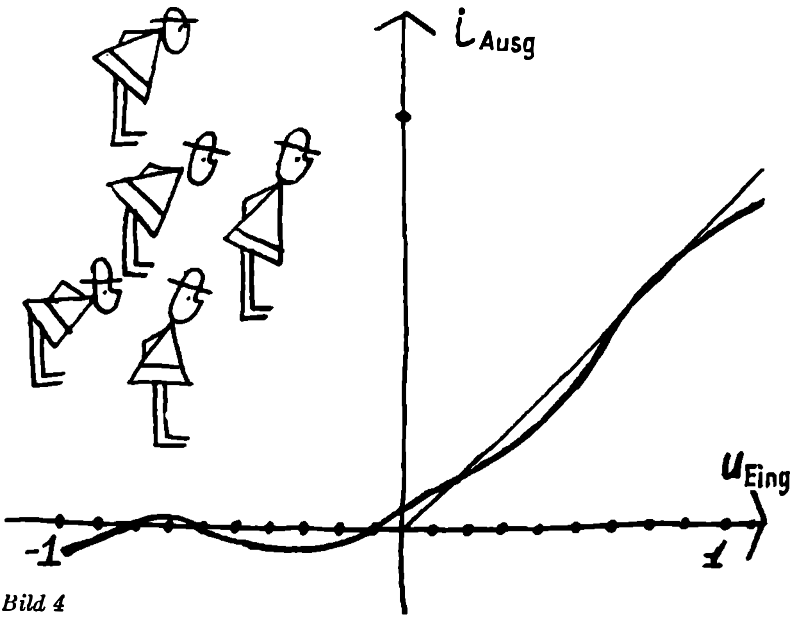


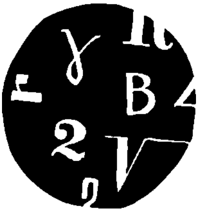
Bild 4

Derartige Gespräche führten mich zu der Erkenntnis, daß der Mathematiker bei Konsultationen durch Fachleute anderer Wissensgebiete in das Wesen ihrer Aufgaben eindringen muß und nicht einfach Fragen beantworten darf.

Noch einige Worte an Sie, lieber Leser

Sie wurden Zeuge und, wie ich hoffe, Teilnehmer an Gesprächen eines Mathematikers mit einem Biologen und mit einem Ingenieur. Später werden wir Dialoge mit Fachleuten anderer Wissensgebiete führen. Sie alle benötigten die Hilfe des Mathematikers. Doch von dieser Hilfe — wie von der Mathematik selbst — hatten sie sehr verschiedene Vorstellungen. Unsere Standpunkte über das Wesen der Mathematik und die Möglichkeiten ihrer Anwendung in anderen Zweigen der Wissenschaft stimmten nicht immer überein.
Anschließend werde ich Ihnen etwas über die Mathematik selbst berichten. Vieles von dem, was ich meinen Freunden — den Ingenieuren, Physiologen, Ärzten, Geologen und Ökonomen — erzählt habe, gebe ich Ihnen nun zusammengefaßt wieder. Sie werden nicht an einem Lehrgang der Mathematik teilnehmen, sondern nur an einem Spaziergang. Sie sollen nur Ideen und Methoden durch kleine Erzählungen kennenlernen. Nirgends wird etwas bewiesen, und Sie können ohne Papier und Bleistift weiterlesen! Ich möchte Ihnen zeigen, womit sich die Mathematiker gegen-

wärtig beschäftigen, und welchen Stand wir heute erreicht haben. Natürlich kann ich Ihnen nicht über alles erzählen, was es in der Mathematik gibt. Ich werde jedoch versuchen, Ihnen einen Überblick über verschiedene und scheinbar gar nicht zusammenhängende mathematische Theorien und ihre Anwendung zu vermitteln.
Manche Leser blättern gern zunächst in den letzten Seiten eines Buches. Einige Abschnitte dieses Buches stützen sich aber auf vorhergehende. Wenn Sie etwas nicht verstehen, weil Sie das Vorangegangene nicht gelesen haben, so schimpfen Sie bitte nicht gleich auf den Autor. Machen Sie erst den Versuch, das Buch von vorn zu lesen!



Wie denken Sie über die Mathematik?

In der Schule liebt man meist nicht die Wissenschaften, sondern die Lehrer. Vor kurzem hielt ich eine Vorlesung vor Abiturienten, die sich an einer technischen Hochschule beworben hatten. Es waren etwa 500 Kandidaten versammelt. Auf die Frage: „Wer von Ihnen hatte in der Schule das Fach Mathematik besonders gern?“ hoben etwa 200 die Hand. Auf die Frage: „Wem hat in der Schule der Mathematiklehrer besonders gefallen?“ erhoben sich ebenfalls 150 bis 200 Hände. Als ich jedoch diejenigen bat, die Hand zu heben, denen in der Schule die Mathematik gefallen hat, der Mathematiklehrer hingegen nicht, meldeten sich von den zweihundert Liebhabern der Mathematik nur noch vier.
Die meisten Schulabgänger und mitunter sogar Absolventen von Hochschulen vergessen gewöhnlich bald nicht nur alle vermittelten Fakten der höheren Mathematik, sondern häufig auch die mathematischen Methoden selbst. Nur mit Mühe können sie mit den verbliebenen Mathematikkenntnissen arbeiten und können nicht erklären, welchen Nutzen sie von der Mathematik haben.[1]) Sie erinnern sich aber an ungerechte Noten, an spaßhafte, rührende oder dramatische Episoden während des Unterrichts und schließlich noch an gewisse Lehrsätze, die ihnen größere Unannehmlichkeiten bereitet haben. Häufig nehmen sie einen der folgenden zwei entgegengesetzten Standpunkte ein.
Der erste dieser Standpunkte läuft auf großmütige Geringschätzung hinaus: „Die Mathematik, das ist so eine superlangweilige Wissenschaft, in der man laufend irgend etwas rechnen muß, wie in einer Buchhaltung. Wer hat schon was davon, wenn er seine kostbare Zeit mit einer Aufgabe über das Umgießen von Wasser aus einem Gefäß in ein anderes vergeudet? Diese Zeit könnte man bedeutend besser verwerten! Wozu soll man mit Hilfe eines komplizierten Verfahrens die dritte Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem Winkel zwischen ihnen bestimmen? Erstens ist es viel einfacher, den Winkel und die bekannten Seiten auf einem Blatt Papier abzutragen und dann die dritte Seite mit dem Lineal abzumessen, und zweitens braucht das sowieso keiner …“

[1]) Sicher wäre es sehr aufschlußreich, besonders auch im Zusammenhang mit dem häufigen Umbau der Lehrpläne an den Schulen, durch eine statistische Erhebung zu klären, was bei den ehemaligen Schülern nach 5, 10 oder 15 Jahren noch vom Schulwissen übriggeblieben ist, was sie noch können, was ihnen ihrer Meinung nach großen Nutzen gebracht hat und was vollkommen unnütz oder gar schädlich war.

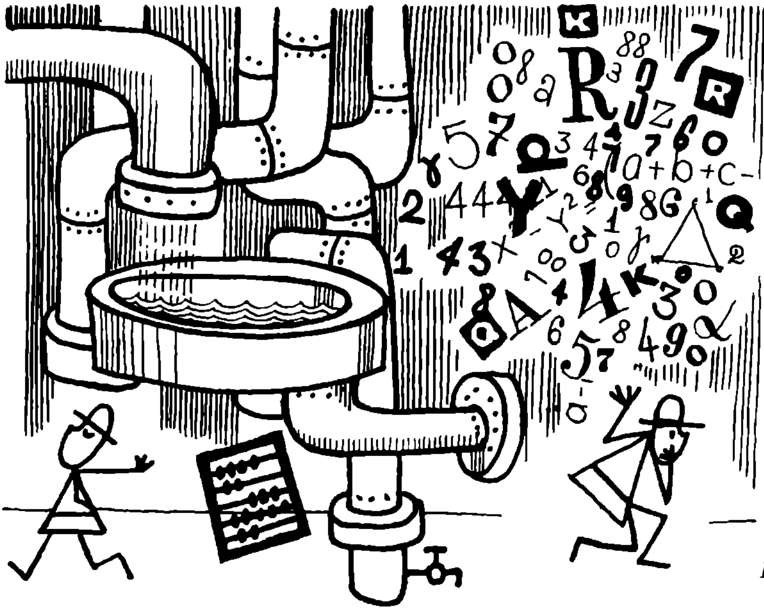


Bild 5

Der zweite Standpunkt ist durch ein hochachtungsvolles Zittern vor der Mathematik gekennzeichnet: „Mathematik? ··· O! ··· Das ist so etwas ganz Kompliziertes und Schwieriges, Unverständliches und Unzugängliches für gewöhnliche Sterbliche. Nur Auserwählte — Talente und Genies — können sich damit wirklich befassen, einander irgendwelche übermenschlichen Aufgaben stellen und sogar deren Lösungen finden."
Sowohl die einen als auch die anderen sind davon überzeugt, daß die Mathematik aus Algebra, Geometrie und Trigonometrie, vielleicht noch aus irgendeiner höheren Mathematik besteht. Die letztere besteht in der Vorstellung aus unendlich vielen Formeln — geheimnisvollen oder nutzlosen, je nachdem, welchen der beiden Standpunkte der Befragte einnimmt.
Die Arithmetik wird gewöhnlich nicht mit zur Mathematik gerechnet, sie ist irgendwie mit der frühen Kindheit verbunden und ebenso banal wie das Alphabet, das Schönschreiben oder die Masern.

Was ist nun wirklich Mathematik?

Alle Schulweisheit ändert sich im Lauf der Zeit: Meine Eltern haben „Thür" und „Thor" geschrieben, in ihrer Schule kamen die Namen von Marx und Lenin, Rutherford und Einstein, Gorki und Majakowski, Darwin und Popow nicht vor. Jedoch, die euklidische Geometrie, den Satz des Pythagoras, die Lösungsformel für quadratische Gleichungen und das

Additionstheorem für die Sinusfunktion haben die Väter bereits gelernt, lernen die Kinder und werden auch die Enkel lernen. Das erweckt den Eindruck der Unveränderlichkeit und Verknöcherung der Mathematik, ihrer Abgeschliffenheit und Vollkommenheit.
Stellen Sie sich vor, wie die Physik und die Astronomie im 17. Jahrhundert ausgesehen haben, vor der Entdeckung des Massenanziehungsgesetzes und der Grundgesetze der Bewegung — der berühmten drei Newtonschen Gesetze —, vor der Entdeckung der Elektrizität und der elektromagnetischen Induktion, vor *Coulomb*, *Volta*, *Ampère* und *Faraday*.
Noch leichter ist es für den Chemiker, sich den Zustand seiner Wissenschaft im 17. Jahrhundert vorzustellen, vor *Lomonossow* und *Lavoisier*, oder für den Biologen und Mediziner, vor der Entdeckung des Mikroskops.
Die Gelehrten wußten aber im 17. Jahrhundert bereits faktisch alles, was heute in den Schulbüchern über Geometrie und Algebra steht, und sogar bedeutend mehr. Viele Tatsachen, die in den Lehrbüchern enthalten sind, waren im wesentlichen schon *Euklid* im 3. Jahrhundert v. u. Z. bekannt.
Das bedrückende Alter der traditionellen Schulmathematik, das fast an das einer Religion grenzt, ist auch der Ausgangspunkt für die Schlußfolgerungen über die Vollkommenheit und Verknöcherung der Mathematik.
Diese Schlußfolgerungen entsprechen jedoch nicht den Tatsachen. In den letzten 300 Jahren, besonders im letzten Jahrhundert, entwickelte sich die Mathematik stürmisch. Ich werde Ihnen zeigen, daß die Mathematik ganz und gar nicht das ist, was man mitunter den Schülern in abgedroschener und langweiliger Form darbietet.
Was ist nun aber wirklich Mathematik?
Man kann *Engels* zitieren: „Die Mathematik ist die Wissenschaft, die die räumlichen Formen und die quantitativen Beziehungen der realen Umwelt zum Gegenstand hat.“ Man kann aber auch einen Aphorismus von *David Hilbert*, dem größten deutschen Mathematiker um die Jahrhundertwende, benutzen: „Mathematik ist das, was kompetente Leute darunter verstehen.“
Für das richtige Verständnis einer Wissenschaft ist es notwendig, ihren Einflußbereich zumindest in grober Form zu umreißen sowie ihren Gegenstand und ihre Methoden zu beschreiben.
Es wird mir nicht gelingen, Gegenstand und Methode der Mathematik in diesem kleinen Büchlein hinreichend ausführlich zu betrachten. Obwohl die Methode der Mathematik mein Hauptanliegen ist, ist auch der Gegenstand der Mathematik, wie wir sehen werden, von großem Interesse.

Eine nicht unnütze historische Abschweifung

Schon sehr frühzeitig in der Menschheitsgeschichte entstand das Zählen. Die Bedürfnisse des Teilens der Beute, des Tausches und des Handels mit den produzierten Gütern führten zur Entwicklung der Arithmetik.

Irgendwo in der Finsternis der Jahrhunderte wurde später die Geometrie als Landvermessungslehre geboren. Allerdings trennte sie sich schon vor etwa zweieinhalb Jahrtausenden durch die Arbeiten der Geometer des alten Griechenlands von der Vermessungslehre. Sie verwandelte sich in die Wissenschaft von den räumlichen Beziehungen und Formen der Körper. Sie basiert auf einigen Axiomen (ohne Beweis angenommene Ausgangsthesen) und Lehrsätzen (aus den Axiomen in folgerichtiger, deduktiver Weise abgeleitete Schlußfolgerungen) und ist so einwandfrei und vollkommen, daß im Verlauf von mehr als zwei Jahrtausenden (bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts) keinerlei Änderungen in ihren Grundlagen vorgenommen wurden.
Die komplizierten Aufgaben des Handels und der Wirtschaft führten zu Gleichungen, in denen Buchstaben verwendet werden, und damit zu den ersten Ansätzen der Algebra, zu der Lehre von den Gleichungen. Schon im Altertum konnte man Gleichungen ersten Grades und die heute bei den Schülern so unbeliebten quadratischen Gleichungen lösen.
Die Menschheit machte große Anstrengungen, um Gleichungen höheren Grades zu lösen. Erst im 16. Jahrhundert gelingt die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades. Noch weitere drei Jahrhunderte bemühen sich die Mathematiker vergebens um die Lösung von Gleichungen höheren als vierten Grades. Über dieses Problem und seine dramatische Geschichte werde ich noch ausführlich berichten.
Die Erfordernisse der Mathematik führten den berühmten Philosophen, Naturwissenschaftler und Mathematiker *Rene Descartes* in der Mitte des 17. Jahrhunderts, genauer im Jahr 1637, dazu, Algebra und Geometrie zu vereinigen und algebraische Methoden in der Geometrie zu benutzen. So wurde die analytische Geometrie geschaffen, in der Geraden, Ebenen, Kreise und andere Kurven und Flächen als Gleichungen im rechtwinkligen oder kartesischen Koordinatensystem erscheinen.
Im Bild 6 sind eine Gerade und ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang dargestellt. Ihre Gleichungen sind in kartesischen Koordinaten angegeben. Später wollen wir ausführlich über Koordinatensysteme sprechen, da wir sie noch brauchen werden.
Die Schaffung der analytischen Geometrie war der erste Schritt der Mathematik nach vorn, nachdem sie viele Jahrhunderte nicht von der Stelle gekommen war. Gegen Ende des 17. Jahrhunderts, das sich bedeutender Fortschritte in der Entwicklung der Astronomie, der Geodäsie, der Mechanik und der Physik rühmen kann, entwickelten der geniale Engländer *Isaak Newton* und unabhängig von ihm der berühmte deutsche Gelehrte *Gottfried Leibniz* die Differential- und Integralrechnung. Damit war der grundlegende mathematische Apparat der klassischen Physik geschaffen. Die Differential- und Integralrechnung ermöglichte die Schaffung der Theorie der Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik.
Diese neuen Kapitel der Mathematik, vereinigt in der „Höheren Analysis", verhalfen der Physik, der Mechanik, der Chemie und den ver-

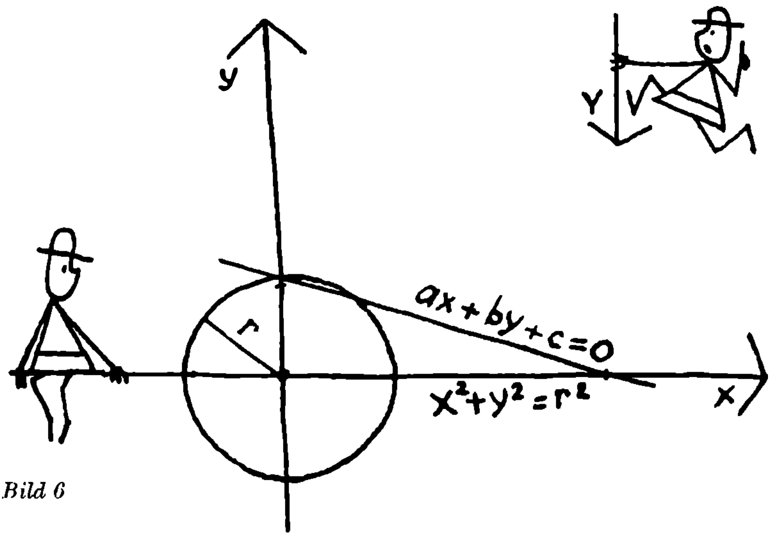


Bild 6

wandten Disziplinen zu so vielen Siegen, daß man sie nicht alle aufführen kann. Hierhin gehören z. B. die Bewegung von Maschinen und Fahrzeugen, von Geschossen und Flugzeugen, von Gestirnen und Raketen, die Elektrizität und das Radio, die Spektralanalyse und die Wettervorhersage. Und die Geometrie? Am Anfang des 19. Jahrhunderts konnte man nach den Triumphen der analytischen und der Differentialgeometrie das Fundament der Geometrie, ihre Postulate, einer näheren Analyse unterziehen.

Nikolai Lobatschewskij, der große russische Mathematiker, unterwarf das System der Geometrie des *Euklid* einer kritischen Betrachtung und änderte insbesondere das berühmte fünfte Postulat über die Parallelen ab. Dieses fünfte Postulat lautet: „Durch jeden Punkt einer Ebene, der nicht auf einer in dieser Ebene gegebenen Geraden liegt, kann man zu dieser Geraden eine Parallele ziehen, und zwar nur eine.“ *N. Lobatschewskij* ersetzte in diesem Postulat die Behauptung über genau eine parallele Gerade zu einer gegebenen durch die Annahme, daß man durch einen solchen Punkt mindestens zwei parallele Geraden legen kann.

Obwohl diese Annahme unserer Intuition widerspricht, darf man nicht vergessen, daß sich eben diese Intuition auf unsere Beobachtungen stützt, und beobachten können wir die Parallelität praktisch nur auf sehr kleinen Abschnitten der Ebene. Deshalb ist es von vornherein gar nicht so klar, was geschieht, wenn wir uns die Geraden nach beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt denken.

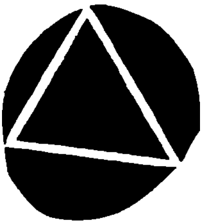
Diese Theorie, die die Bezeichnung „nichteuklidische Geometrie“ oder Lobatschewskijsche Geometrie erhielt, wurde von vielen Zeitgenossen nicht verstanden. Später allerdings wurden noch andere „nichteuklidische Geometrien“ entwickelt. Sie erwies sich, was die Hauptsache ist, als die mathematische Basis, auf die sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Untersuchungen des realen physikalischen Raumes stützten. Diese Untersuchungen fanden in der Schaffung der berühmten Relativitätstheorie durch *Albert Einstein* ihre Krönung.

Das Parallelenpostulat *Euklids* hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker viele Jahrhunderte hindurch auf sich gelenkt. Es wurden — insbesondere auch von den großen arabischen Mathematikern des Mittelalters — viele Versuche unternommen, zu zeigen, daß es einfach eine Folgerung aus den ersten vier Postulaten ist. Ungefähr zur gleichen Zeit wie *Lobatschewskij* überzeugte sich der ungarische Leutnant *Johann Bolyai* von der Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats von *Euklid* und beschäftigte sich mit dem Aufbau einer Geometrie auf neuer Grundlage. Auch der große *Gauß* hat in einem Brief an den Vater von *Johann Bolyai* mitgeteilt, daß er bereits früher über diese Probleme nachgedacht und eine Basis für die nichteuklidsche Geometrie gefunden habe, jedoch zu Lebzeiten solch revolutionäre und sensationelle Resultate nicht publizieren wolle.

Viele mathematische Disziplinen haben sich aus den inneren Bedürfnissen der Mathematik heraus entwickelt und erwiesen sich später zur Lösung von physikalischen, technischen und naturwissenschaftlichen Problemen als überaus nützlich. So dient z. B. die mathematische Logik, mit der die Mathematik auf eine feste, widerspruchsreife Grundlage gebracht wurde, heute als ein wichtiges Hilfsmittel der Digitaltechnik bei der Entwicklung digitaler numerischer Anlagen. Sie ist außerdem eines der wichtigsten Teile des mathematischen Apparats der Kybernetik.

In den letzten drei Jahrzehnten führte die weitere Entwicklung der algebraischen Theorie, die Feststellung tiefliegender Beziehungen zwischen der Algebra und der Höheren Analysis zu großen Erfolgen der sogenannten Funktionalanalysis. Durch einen ihrer Begründer, den sowjetischen Mathematiker *J. Gelfand*, wurde in ihr der mathematische Apparat der modernen Physik erkannt.

Ich könnte über die Entwicklung sehr vieler mathematischer Theorien berichten. Das würde jedoch zu weit führen. Deshalb werden wir uns nur über einige Theorien etwas ausführlicher unterhalten.



Figuren auf einem Stück Gummi

Beginnen wir mit dem sicher schon oft verwünschten Dreieck. Wenn man eine Menge bestimmter Objekte studieren will, so sucht man entweder nach gemeinsamen Eigenschaften dieser Objekte oder man versucht zu verstehen, wodurch sie sich unterscheiden.
Was haben die beiden im Bild 7 dargestellten Dreiecke gemeinsam? Eigentlich nur, daß beide Dreiecke sind, d.h., sie haben drei Winkel, die von drei Strecken gebildet werden. Aus dieser Gemeinsamkeit folgen weitere gemeinsame Eigenschaften: Die Summe ihrer Innenwinkel ist gleich zwei Rechten; ihre Fläche läßt sich ausdrücken als das halbe Produkt einer beliebigen Seite mit der entsprechenden Höhe. Sicher erinnern Sie sich von ihrer Schulzeit her noch an eine ganze Reihe von Sätzen über Dreiecke.
Was haben nun die Figuren im Bild 8 gemeinsam? Sie sind aus Strecken gebildet, sie haben eine ungerade Anzahl von Ecken, und das ist offenbar auch schon alles. Und wie ist es mit den Figuren im Bild 9? Obwohl sie durch irgend etwas einander ähnlich sind, ist es bereits schwieriger, ihre gemeinsamen Eigenschaften herauszustellen.

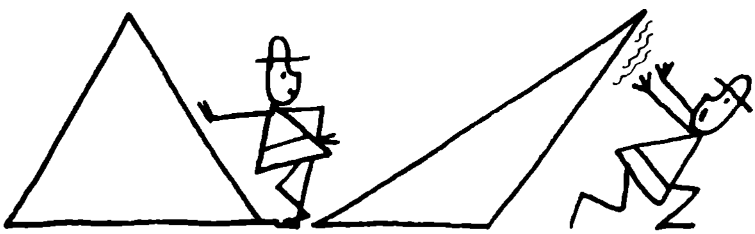


Bild 7

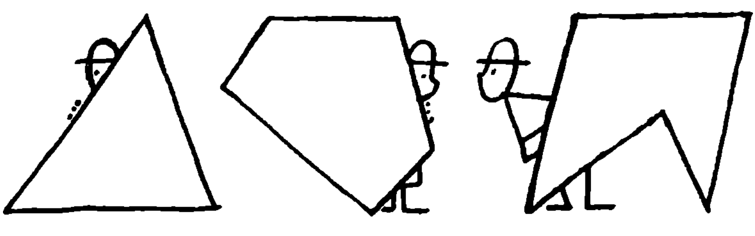


Bild 8

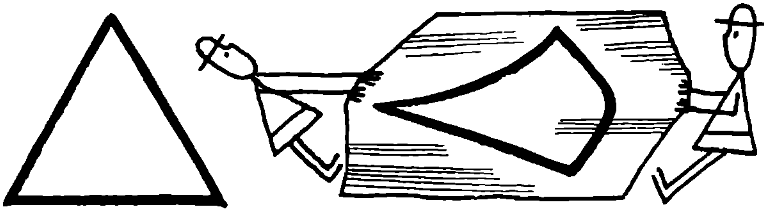


Bild 9

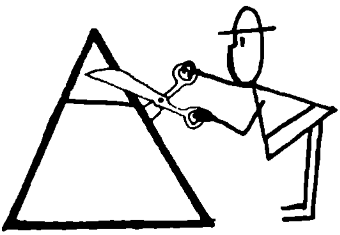


Bild 10

Kehren wir zurück zum Dreieck. Im Bild 10 ist von einem Dreieck ein ähnliches Dreieck abgeschnitten, d. h. ein Dreieck, das ebenso große Winkel wie das ursprüngliche hat. Die beiden Dreiecke besitzen dann außer den gemeinsamen Eigenschaften aller Dreiecke auch noch Ähnlichkeit.

Wir nehmen ein Stück Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 11). Wenn man den Gummi in seiner Länge dehnt, so ändern sich zwar die Dreiecke; sie bleiben aber immer noch einander ähnlich (Bild 12).[1] Somit ist die Ähnlichkeit eine Eigenschaft, die bei gleichmäßiger Ausdehnung in einer bestimmten Richtung erhalten bleibt.

Wenn der Gummistreifen jedoch inhomogen ist oder nicht gleichmäßig ausgezogen wird, so kann aus dem Dreieck so etwas werden, wie im Bild 13 zu sehen ist. Seine Seiten sind schon nicht mehr geradlinig, doch irgend etwas Gemeinsames mit den vorangehenden Figuren ist geblieben. Dieses „Etwas" zu erfassen, wäre interessant.

Doch warum sollten wir den Gummi nur nach einer Richtung ausziehen? Wir nehmen ein Stück dünnen ebenen Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 14). Nun ziehen wir an verschiedenen Seiten unterschiedlich stark, so als ob wir z. B. eine Trommel bespannen wollten. Was wir erhalten, ist etwas, das der Zeichnung eines dreijährigen Kindes ähnelt (Bild 15). Eine gewisse Gemeinsamkeit zwischen den Bildern 14 und 15 ist aber immerhin erhalten geblieben. Die Figuren im Bild 15 sind gewissermaßen eine Karikatur der Dreiecke von Bild 14, aber auch sie haben Ecken, und die Dreiecke haben sich nicht etwa übereinandergeschoben. Und was wird, wenn wir auf dem Gummi zwei

[1]) Wir wollen hier davon absehen, daß das Gummistück etwas schmaler wird, wenn wir es in die Länge ziehen.

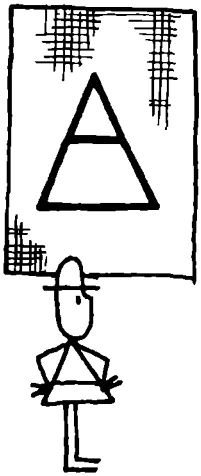


Bild 11

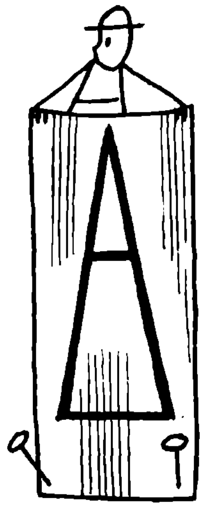


Bild 12

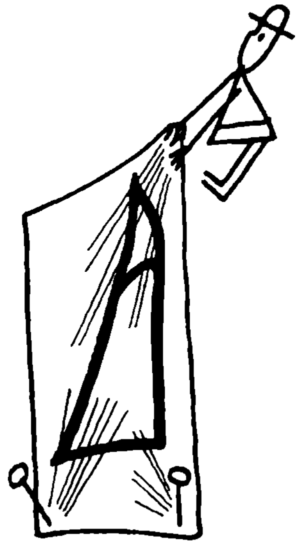


Bild 13

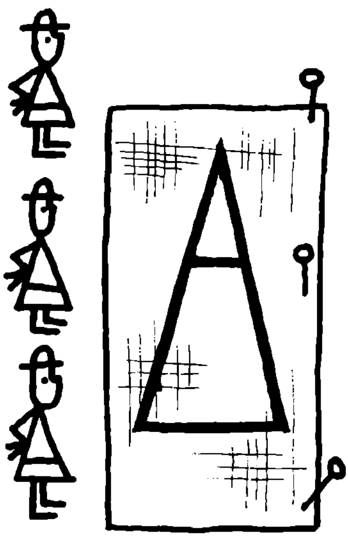


Bild 14

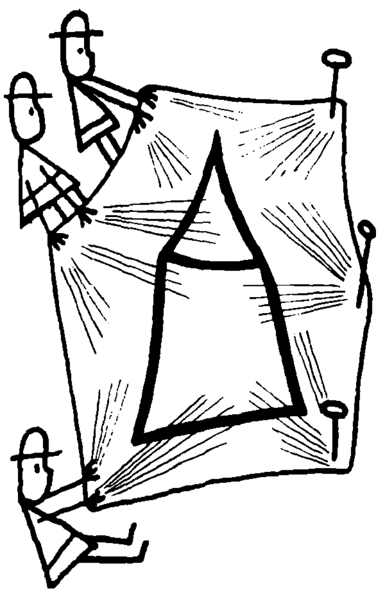


Bild 15

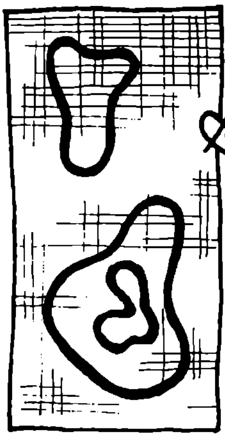


Bild 16

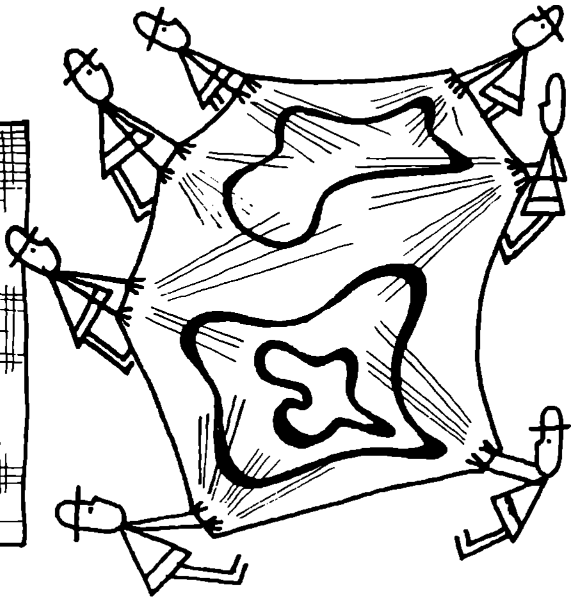


Bild 17

amöbenförmige Figuren aufmalen, eine kompakte und eine mit einem Loch in der Mitte (Bild 16), und den Gummi wieder „auf eine Trommel spannen"? Die „Amöben" bleiben „Amöben", doch auch das Loch bleibt; wenn wir nichts zerreißen, kann uns keine Dehnung davon befreien.
Nach diesen Beobachtungen müßten wir nun versuchen, zu verstehen, wodurch sich alle diese Transformationen des Gummistücks auszeichnen.

Mathematik und Kunst

Die Mathematik geht so ähnlich vor wie die Kunst; sie greift Erscheinungen der realen Umwelt auf, vereint analoge Ereignisse, Prozesse oder Fakten und verallgemeinert sie. Der bekannte Schauspieler und Künstler *Sergej W. Obraszow* führt manchmal Puppen vor. Hündchen, Kätzchen, Löwen oder Hasen veranschaulichen irgendwelche komischen, rührenden oder schlechten Eigenschaften der Menschen. Die Puppen werden durch Kugeln auf den Fingern oder einfach durch die Finger selbst dargestellt. Mit Hilfe dieser primitiven Mittel unterstreicht *S. Obraszow* das Markante im Benehmen und im Charakter der Menschen, in ihren Beziehungen zueinander. Nachdem die Kunst solcherart die Analogie gezeigt hat, hält sie ein und sagt den Zuschauern, daß sie sich den Rest selbst hinzudenken mögen.

Doch beim Mathematiker beginnt die Arbeit erst, wenn er in einer mitunter langen und schwierigen Beobachtung etwas Wichtiges oder Allgemeines bemerkt hat, das eine ganze Klasse von Erscheinungen charakterisiert. Er hat genau zu formulieren, welche Eigenschaften ihn interessieren, ein Schema zu schaffen und dieses genau zu studieren, um dann schließlich noch nachzuprüfen, ob die von ihm geschaffene Theorie der Wirklichkeit entspricht.

Stetige Verformungen

Im vorigen Beispiel haben wir festgestellt, daß bei Verformungen der Ebene wie etwa der willkürlichen Verzerrung eines Stücks Gummi gewisse Eigenschaften der Figuren erhalten bleiben. Der Mathematiker nennt derartige Verformungen stetige Transformationen. Das Wort stetig bedeutet dabei, daß nahe beieinander gelegene Punkte nach der Transformation wieder nahe beieinander liegen und daß eine Linie wieder in eine Linie übergeht. Es ist leicht einzusehen, daß zwei sich schneidende Linien sich auch nach der Transformation schneiden werden; sich nicht schneidende werden sich auch nach der Transformation nicht schneiden. Eine Figur mit einem Loch kann nicht in eine Figur ohne Loch oder eine mit zwei Löchern übergehen, denn dazu wäre eine Klebestelle oder ein Riß nötig, also eine Verletzung der Stetigkeit.

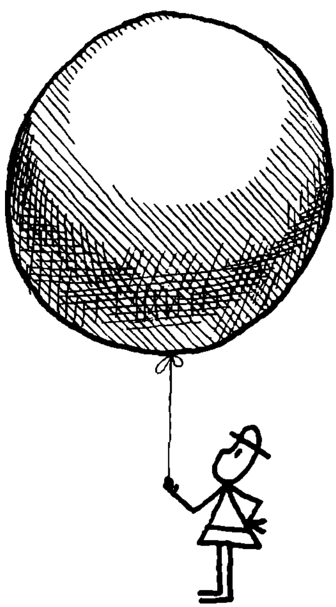


Bild 18

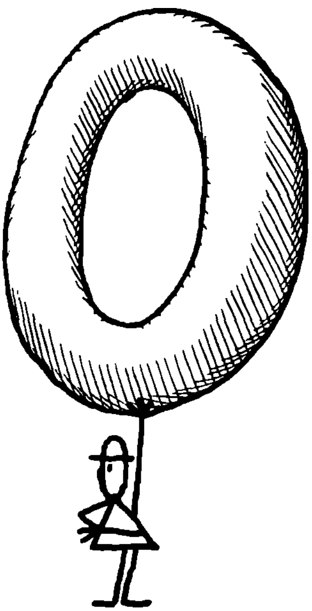


Bild 19

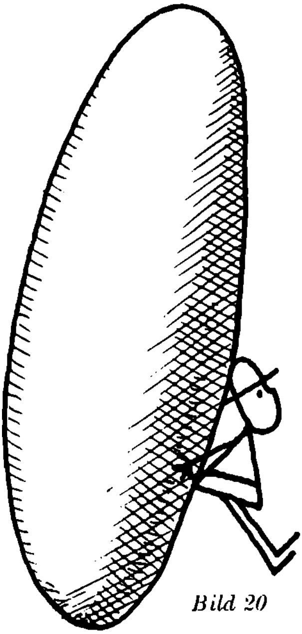


Bild 20

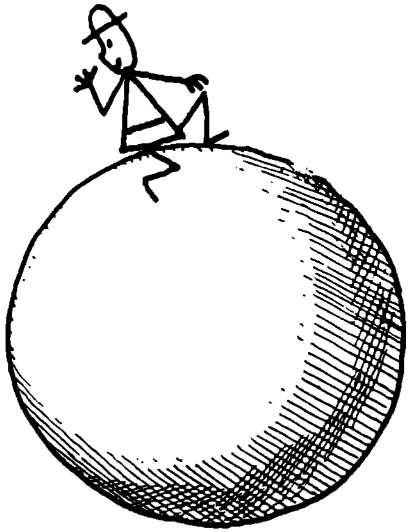


Bild 21

Diese Betrachtungen sind ein Ausgangspunkt der Topologie, einer Wissenschaft, die die Eigenschaften der geometrischen Figuren herausstellt, die sich bei stetigen Transformationen nicht ändern.
Welcher Unterschied besteht zwischen dem Ballon und dem Kringel (Bilder 18 und 19)? Was haben die Gurke und die Kugel (Bilder 20 und 21) gemeinsam?
Wäre die Gurke aus Gummi, so könnte man sie durch Aufblasen in die Form einer Kugel bringen, jedoch auf keinen Fall zu einem Kringel machen. Andererseits ist von diesem Standpunkt aus ein Kringel das gleiche wie eine Kugel mit Griff (Bild 22) oder eine Hantel.
Kehren wir zurück zu den Transformationen in der Ebene.
Wir zeichnen eine Katze (Bild 23) und legen eine waagerechte Gerade hindurch (Bild 24). Drücken wir die gesamte Figur in Richtung auf diese Gerade gleichmäßig zusammen, so erhalten wir ebenfalls eine Katze, doch eine dickere. Dabei werden sämtliche Punkte der Figur versetzt, ausgenommen die Punkte auf der Geraden, die an ihrem alten Platz bleiben. Nun nehmen wir innerhalb der Figur einen beliebigen Punkt 0 und drehen die Katze um diesen Punkt (Bild 25). Dann bleibt bei dieser Transformation nur der Punkt 0 fest, alle anderen werden versetzt. Schließlich wählen wir einen neuen Punkt 0 und fassen ihn als Ähnlichkeitszentrum auf. Auf den verschiedenen Strahlen vom Punkt 0 aus stauchen wir die Katzenfigur zusammen, jedoch nicht gleichmäßig,

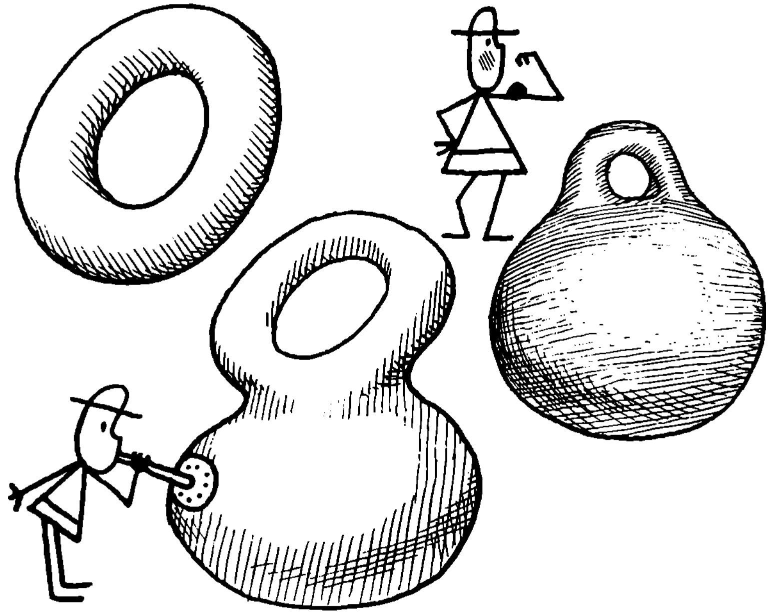


Bild 22

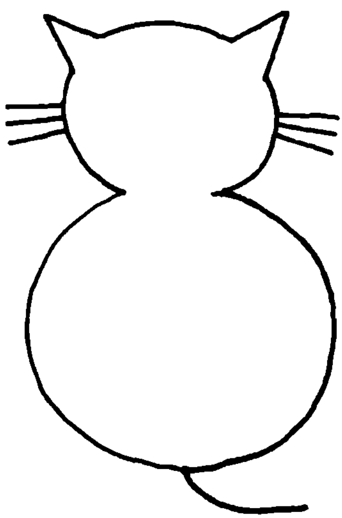


Bild 23

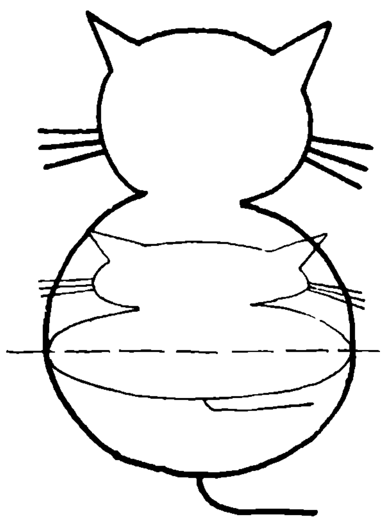


Bild 24

sondern mit unterschiedlichem Maßstab in den einzelnen Richtungen. Den Maßstabsfaktor K für die einzelnen Richtungen berechnen wir z. B. aus

$$K = \frac{1}{2 + \cos \varphi}\,,$$

wenn φ den Winkel zwischen dem jeweiligen Strahl und der Horizontalen bedeutet. Was wir erhalten, ist nur noch eine Karikatur der Katze (Bild 26). Alle Punkte sind versetzt, lediglich der Punkt 0 ist fest geblieben.

Wir führen nun mit dieser Karikatur noch eine Parallelverschiebung aus (Bild 27), jedoch so, daß sie innerhalb der Ausgangsfigur bleibt.

Die zwei nacheinander ausgeführten Transformationen — die ungleichmäßige Stauchung und die Parallelverschiebung — kann man als eine einzige Transformation der Katze in ihr Inneres betrachten.

Was meinen Sie, verehrter Leser, bleibt bei dieser Transformation wenigstens ein Punkt auf der Katzenfigur in seiner ursprünglichen Lage oder werden sämtliche Punkte versetzt?

Wir nehmen wieder ein Stück Gummi, ziehen es nach den verschiedensten Richtungen aus, wie es gerade kommt, und zeichnen jetzt die Katze auf den gespannten Gummi. Danach lassen wir los, so daß der Gummi in seine ursprüngliche Form zurückkehrt. Dabei zieht sich auch die Katze zusammen; sie wird innerhalb der alten Katze liegen und ein vollkommen neues Aussehen annehmen (Bild 28).

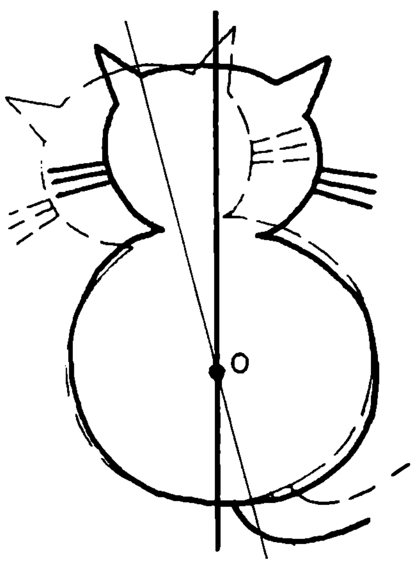


Bild 25

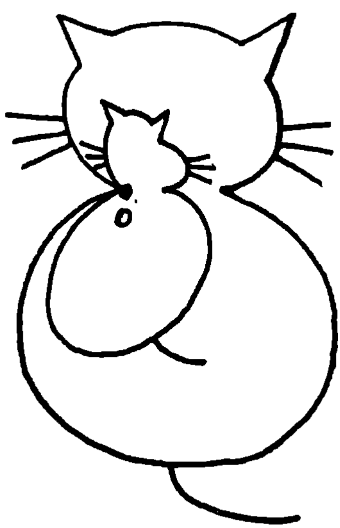


Bild 26

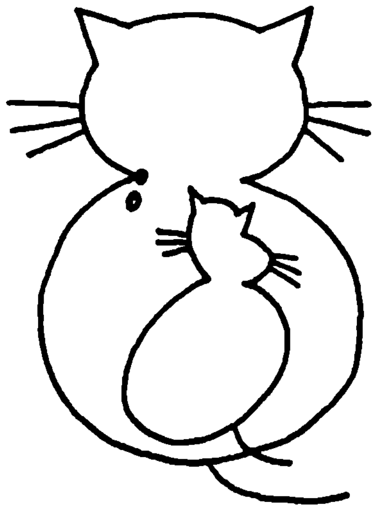


Bild 27

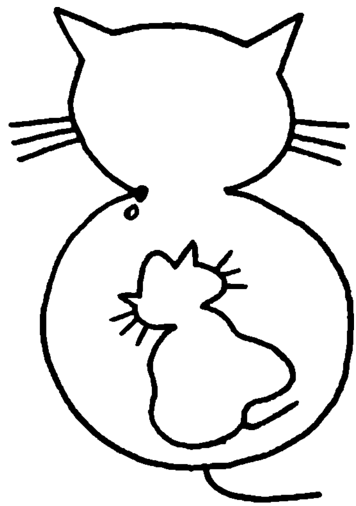


Bild 28

Es ist sehr wahrscheinlich, daß auch Sie, verehrter Leser, mir nicht widersprechen würden, wenn ich behaupte, daß sämtliche Punkte der Katze in eine neue Lage gerückt sind. Kein einziger Punkt auf der gesamten Katzenfigur ist noch dort, wo er vor der Transformation war. Jedenfalls habe ich bis jetzt noch niemanden getroffen, der nicht zunächst diese Meinung mit großem Nachdruck verteidigt hätte.
Hier führt uns jedoch unsere Intuition irre. Die Behauptung, daß sämtliche Punkte der Figur an einen neuen Platz gerückt sind, stimmt nicht. Sondern: Bei jeder stetigen Punkttransformation einer solchen Figur in ihr Inneres bleibt wenigstens ein Punkt fest.[1])
Dieser berühmte Fixpunktsatz wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts von *Boll* und *Brauer* bewiesen. Er spielt bei vielen Fragen der Topologie und der Analysis eine wichtige Rolle, besonders bei der Untersuchung der Bewegung dynamischer Systeme.

Eine merkwürdige Fläche

Die Fakultät für Mathematik und Mechanik der Moskauer Universität hat sich unlängst ein Fakultätsemblem zugelegt. Die Skizze dieses Emblems sehen Sie im Bild 29. Auf ihm sind ein Koordinatennetz, ein Integralzeichen und ein verschlungenes Band — das Möbiussche Band — dargestellt.

[1]) Das gilt für alle ebenen Figuren, die man durch stetige Transformation aus einem Kreis ableiten kann, sowie in analoger Weise für alle räumlichen Figuren, die stetig verformte Kugeln darstellen.

Kleben wir die Enden eines Papierstreifens zusammen, ohne sie zu verdrehen, so erhalten wir einen Zylinder. Auf die Außenseite zeichnen wir horizontale Linien, auf die Innenseite vertikale (Bild 30). Dann führen wir das folgende Gedankenexperiment aus:

Wir lassen eine Ameise auf der äußeren Seite der Mantelfläche des Zylinders entlangkriechen, und verbieten ihr, über den Rand zu klettern. Sie möge sich auf den mittleren Linien bewegen. Nach einer gewissen Zeit kommt sie zu dem Punkt zurück, von dem sie ausgegangen ist (wie die Schiffe *Magellans* nach der Erdumsegelung).
Ein Deckel, ein Hut oder ein Autoreifen haben, wie Sie wissen, eine Außen- und eine Innenseite. Es scheint außer jedem Zweifel zu stehen, daß jede beliebige Fläche zwei Seiten hat, von der wir die eine als Außen- und die andere als Innenseite bezeichnen. Wie könnte es anders sein?
Wir nehmen einen neuen Papierstreifen, bezeichnen seine Ecken mit *ABCD* und zeichnen auf die Vorder- und Rückseite horizontale Linien verschiedener Farbe und kleben seine Enden nach einer halben Umdrehung zusammen. Punkt *A* wird also mit Punkt *D* und Punkt *B* mit Punkt *C* zusammengeklebt (Bild 31). Lassen wir nun die Ameise auf einer Linie entlang marschieren, so werden Sie überrascht sein: Die Ameise bewegt sich auf Linien verschiedener Farbe, die der Vorder- und der Rückseite des Papierstreifens entsprechen, ohne irgendwo den Rand zu überklettern. Sie läuft plötzlich mit den Beinen nach oben; trotzdem kehrt sie zum Ausgangspunkt zurück, allerdings muß sie dabei eine Strecke durchlaufen, die der doppelten Länge des Papierstreifens entspricht.

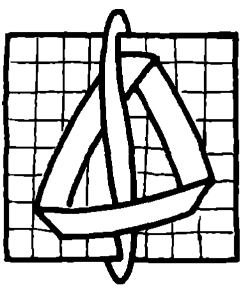


Bild 29

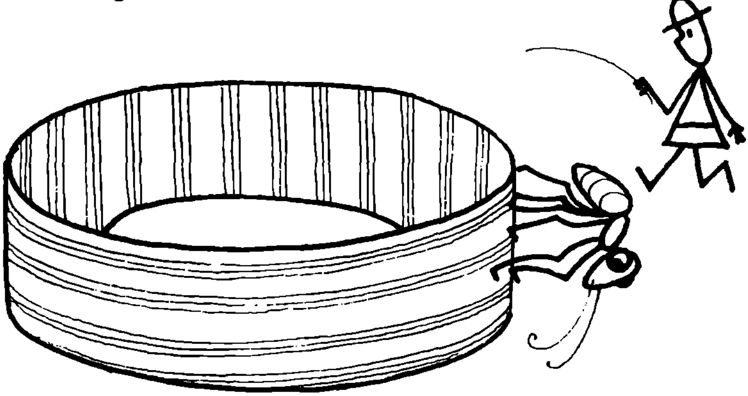


Bild 30

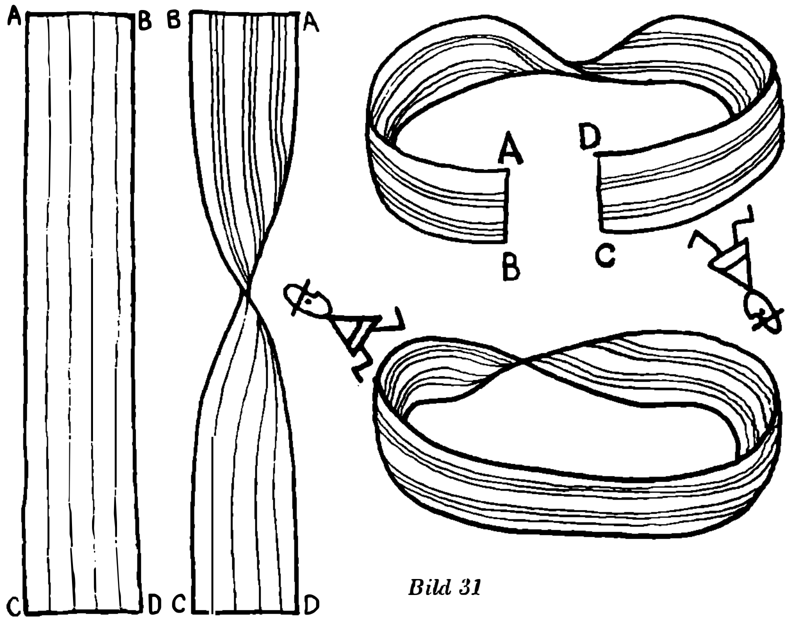


Bild 31

Die erhaltene Fläche ist also recht sonderbar: Linien verschiedener Farbe gehen ineinander über; sie liegen also auf ein und derselben Seite. Wir könnten die Linien auch einfarbig zeichnen, denn diese Fläche hat nur eine Seite! Unsere Behauptung, daß jede beliebige Fläche zwei Seiten hat, ist also falsch!
Die Figur, die wir erhalten haben, ist das Möbiussche Band, das *Möbius* im Jahre 1858 entdeckt hat. Es besitzt noch andere ungewöhnliche Eigenschaften.
Ein Zylindermantel hat zwei Ränder, einen oberen und einen unteren. Das Möbiussche Band hat nur einen!
Schneiden wir einen Zylindermantel (Bild 30) längs seiner Mittellinie auf, so entstehen offensichtlich zwei Zylinder. Doch, was ergibt sich, wenn man ein Möbiussches Band längs seiner Mittellinie aufschneidet? Glaubwürdig sind folgende Antworten:

1. Es ergeben sich zwei Möbiussche Bänder.
2. Es ergeben sich zwei Zylinder.
3. Es ergibt sich ein Zylinder.
4. Es ergibt sich ein Möbiussches Band.
5. Es ergeben sich zwei verschlungene Ringe.

Suchen Sie bitte aus diesen fünf Antworten die nach Ihrer Meinung richtige aus oder schlagen Sie eine neue vor. Nun kleben Sie sich bitte ein Möbiussches Band. Das dauert nur einige Minuten, und sie werden es

nicht bereuen. Schneiden Sie Ihr Band längs der Mittellinie auf, und stellen Sie fest, ob sich das ergeben hat, was Sie erwarteten! Danach schneiden Sie die erhaltenen Streifen nochmals längs der Mittellinien auf. Es ist kaum anzunehmen, daß sich auch jetzt noch die Figuren ergeben, die Sie erwartet haben ...
Der Reichtum an geometrischen Figuren ist durch die alten griechischen Geometer längst nicht ausgeschöpft worden. Er ist keineswegs auf Vielecke, Kegel und Pyramiden beschränkt, sondern unendlich und wird auch noch gegenwärtig intensiv studiert.

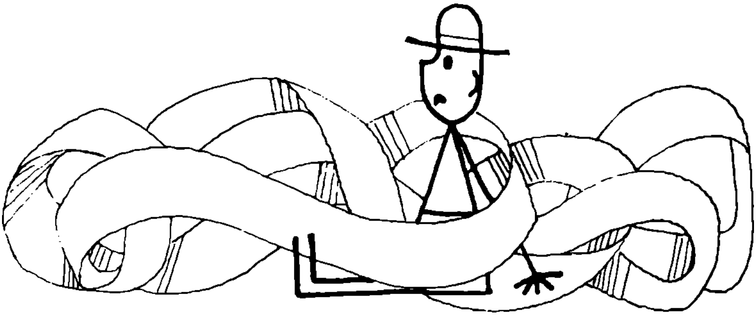


Bild 32

Noch etwas müssen wir feststellen. Die scheinbar unzweifelhafte Behauptung, daß jede Fläche zwei Seiten hat, erwies sich als falsch. Deswegen lassen sich die so sehr korrekten Mathematiker nicht nur von ihrem bloßen Vergnügen leiten, wenn sie zu jeder Behauptung einen logisch einwandfreien Beweis fordern. Sie tun das auch zur Prüfung von Tatsachen, die uns offensichtlich scheinen, weil sich diese bei einer genauen Überprüfung manchmal als unrichtig erweisen.

Der Graph

Auf einer Eisenbahnkarte oder einem Stadtplan (Bild 33) werden die Bahnstrecken bzw. Straßen der Stadt durch ein Netz aus Linien dargestellt. Jede Linie verbindet zwei Punkte, die Knoten genannt werden. Ein Netz aus Punkten und den zugehörigen Verbindungslinien trägt den „vornehmen" Namen Graph.
Der Plan des Wasserleitungsnetzes einer Stadt ist ebenfalls ein Graph. Im Unterschied zum Straßenverkehr kann das Wasser in den Leitungen jedoch nur in einer Richtung fließen. Vermerkt man auf den Kanten (Verbindungslinien) des Graphen die Bewegungsrichtung des Wassers durch Pfeile, so erhält man einen gerichteten oder orientierten Graphen (Bild 34). Wegen des immer stärker werdenden Straßenverkehrs erklärt man immer mehr Straßen zu Einbahnstraßen. Deutet man im Stadtplan die Verkehrsrichtung dieser Straßen durch Pfeile an, während die in beiden

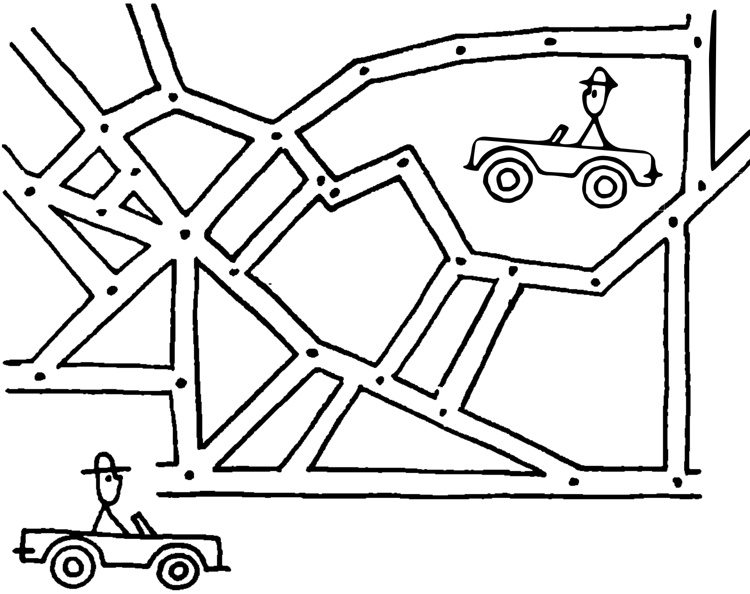


Bild 33

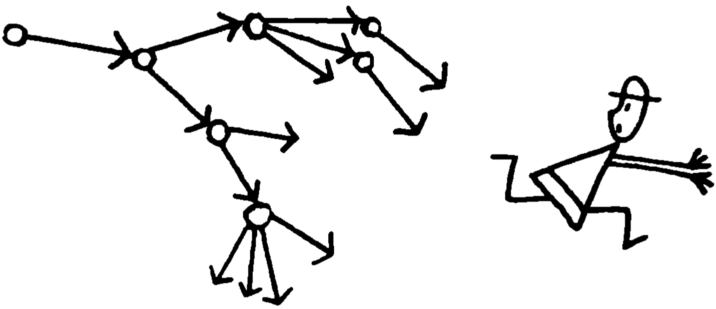


Bild 34

Richtungen befahrenen Straßen ohne Pfeil bleiben, so erhält man einen gemischten Graphen (Bild 35).

Die Ergebnisse eines Schachturniers kann man ebenfalls in Form eines Graphen darstellen (Bild 36). Man zeichnet auf dem Papier für jeden Turnierteilnehmer einen Kreis und bezeichnet die Kreise mit den Startnummern der Teilnehmer. Das Ergebnis eines jeden Spiels wird durch eine Kante dargestellt, die die Kreise der Spieler verbindet. Eine Pfeilspitze zeigt vom Gewinner zum Verlierer. Endet das Spiel Remis, so wird an die Kante kein Pfeil gemacht.

Am Ende des Turniers ist jeder Kreis mit jedem anderen verbunden. Ein solcher Graph heißt vollständig. Gewinner des Turniers ist der Spieler.

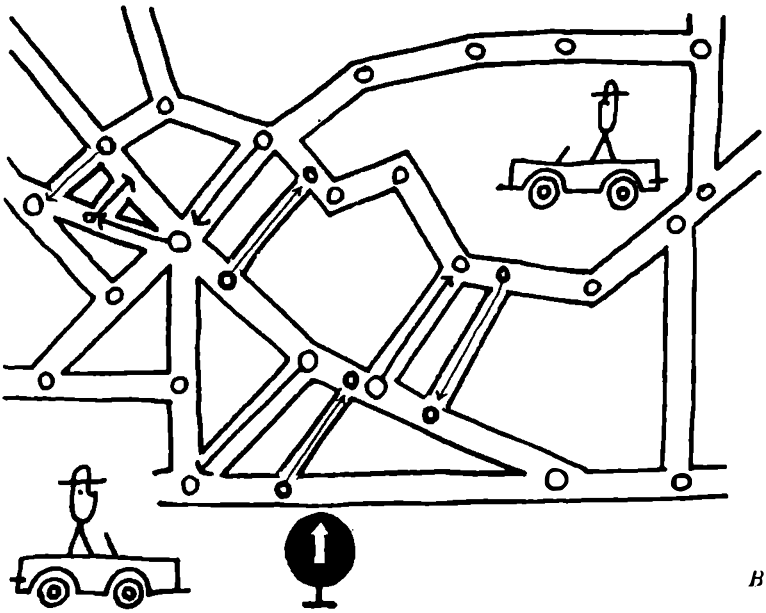


Bild 35

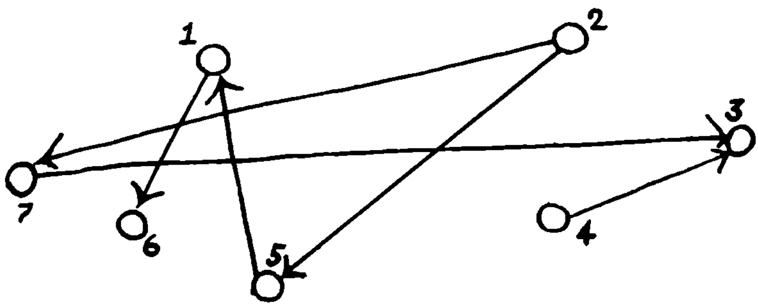


Bild 36

von dessen Kreis die meisten Pfeile wegführen. Wenn alle Teilnehmer jeweils zwei Partien gegeneinander zu bestreiten haben (weiß und schwarz), so muß man jeweils zwei Kanten ziehen. Bild 36 zeigt die Situation, in der außer dem vierten und dem sechsten alle Teilnehmer je zwei Partien gespielt haben, der vierte und sechste jedoch nur eine. Den ersten Platz hält zu diesem Zeitpunkt der Teilnehmer Nummer zwei.
Man könnte vermuten, daß die nicht durch Kreise gekennzeichneten Schnittpunkte der Kanten des Graphen auch irgend etwas bedeuten. Sie haben jedoch keinerlei Bedeutung. Das macht man sich am besten dadurch klar, daß man sich den Graphen im Raum vorstellt: dann schneiden sich seine Kanten nicht. Die Kanten eines Graphen brauchen auch nicht

unbedingt geradlinig zu sein. So sind die Graphen in den Bildern 36 und 37 in dem Sinne gleich, daß einer durch eine stetige Transformation in den anderen übergeführt werden kann. Solche Graphen nennen die Mathematiker isomorph.

Es ist übrigens nicht immer gleichgültig, ob man einen Graphen so zeichnen kann, daß sich seine Kanten nicht schneiden. So ist z. B. das Schaltbild eines Rundfunkempfängers ein Graph, dessen Knoten die Widerstände, Kondensatoren, Röhren usw. sind, während die Leitungen die Kanten sind. Hier ist es unwesentlich, ob sich die gezeichneten Kanten

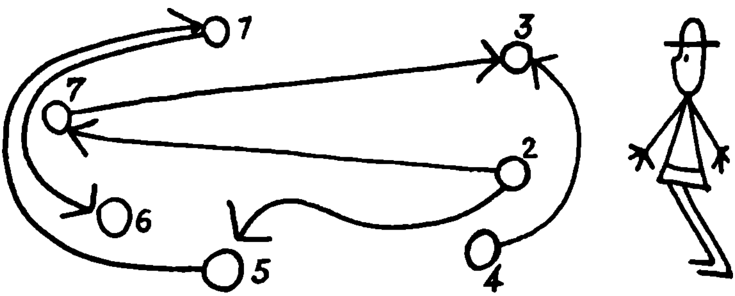


Bild 37

schneiden oder nicht. Bei der praktischen Realisierung der Schaltung schneiden sich die Leitungen nicht; man kann sie übereinanderlegen und Kurzschlüsse durch Isolation verhindern.

In den letzten Jahren werden jedoch immer mehr gedruckte Schaltungen verwendet. Eine gedruckte Schaltung besteht aus einer mit Bauelementen bestückten Leiterplatte, auf der die dem Schaltbild entsprechenden Leitungszüge verlaufen. Dabei ist es wichtig, daß man die Knoten des Graphen (der Schaltung) durch sie nicht schneidende Linien verbinden kann.

Es gibt also Fälle, in denen es notwendig ist, einen gegebenen Graphen in der Ebene so darzustellen, daß sich seine Kanten nur in den Knoten schneiden. Wenn das möglich ist, heißt der Graph eben. Man kann eine Methode angeben, nach der entschieden werden kann, ob ein Graph eben ist oder nicht. Das ist eine für die Praxis wichtige Aufgabe.

Bei der Einrichtung von Einbahnstraßen in einer Stadt muß die Verkehrspolizei die Verkehrsrichtungen so festlegen, daß es keine Stellen gibt, zu denen man überhaupt nicht gelangen oder von denen man nicht mehr weiterfahren kann. So kann man z. B. im Bild 38 von A nach B fahren, jedoch nicht von B nach A. Derartige Aufgabenstellungen können wir bereits als allgemeine Aufgabe über die Struktur eines gerichteten ebenen Graphen formulieren.

Natürlich würde die Verkehrspolizei zu Recht kritisiert werden, wenn sie die Verkehrsregeln nur nach den Gesetzen der Graphentheorie aufstellen würde.

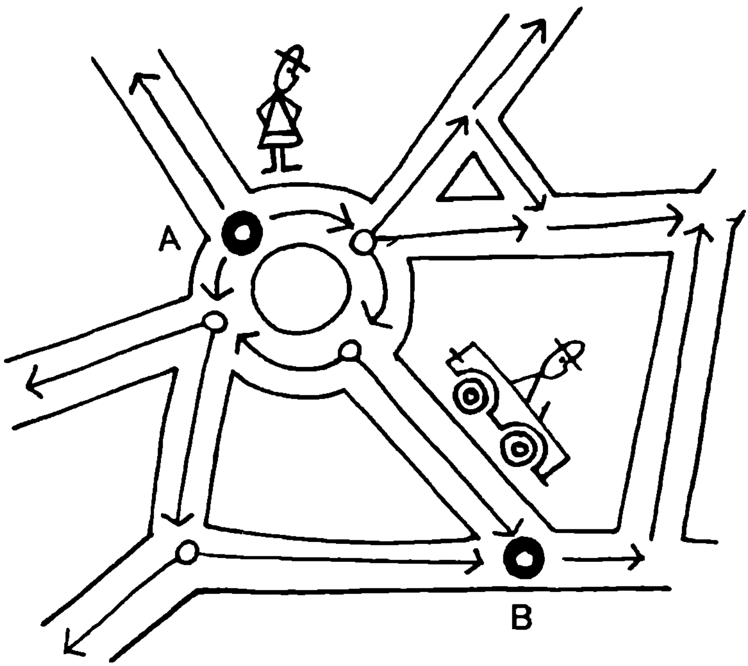


Bild 38

Die Lenkung des Verkehrs in einer großen Stadt ist eine sehr schwierige Aufgabe, die wegen des Anwachsens der Anzahl der Fahrzeuge von Jahr zu Jahr komplizierter wird. Immerhin ist es aber eine mathematische Aufgabe, die eng mit der Graphentheorie zusammenhängt, jedoch nicht nur mit dieser.

Sie haben sicher schon Glossen gelesen, in denen kritisiert wird, daß man Badeanzüge in die Arktis schickt oder daß sich eine Sendung Spaten z. B. von Rostock nach Suhl mit einer Sendung gleicher Spaten von Suhl nach Rostock kreuzt. Solche Glossen sind oft sehr geistreich geschrieben, doch die Autoren können meist, wenn man sie fragt, wie die Mängel abzustellen seien, nur vorschlagen, die Verantwortlichen zur Rechenschaft zu ziehen. Aber wie kann man es besser machen? Natürlich, unqualifizierte Mitarbeiter bringen manchmal etwas durcheinander, doch meist liegt das Problem tiefer. Die Planung des Transports und die Lagerhaltung sind komplizierte Aufgaben, und ein Fuhrparkleiter oder ein Lagerverwalter sind gar nicht immer ohne weiteres in der Lage, sie zu lösen.

Die Graphentheorie in Verbindung mit einigen anderen mathematischen Disziplinen gibt die Möglichkeit, solche Aufgaben zu lösen. Ich werde einmal kurz das Wesen der Transportoptimierung erläutern.

Die Zeiten ändern sich, und, sagen wir, in der Stadt Surbagan, deren Entstehen wir der Phantasie des utopischen Schriftstellers *Alexander Grin* verdanken, wird intensiv gebaut. Eine Schule, ein Institut für Hochseeschiffahrt, ein sechzehnstöckiges Wohnhaus und ein Hafen sollen zur gleichen Zeit entstehen. In der Nähe der Stadt gibt es drei Werke für Baumaterial. Doch die Baustellen sind weit voneinander entfernt und befinden sich außerdem in verschiedenen Entfernungen von den Werken. Der Verantwortliche für die Versorgung der Baustellen muß den Transport des Baumaterials so organisieren, daß der Materialbedarf der Baustellen gedeckt wird und die recht beträchtlichen Transportkosten von den Werken zu den Baustellen möglichst niedrig bleiben. Diese Aufgabe ist prinzipiell lösbar; man braucht dazu jedoch Erfahrung und vor allem solide mathematische Kenntnisse und die moderne Rechentechnik, insbesondere wenn die Anzahl der Baustellen und Werke größer ist. Ich werde nun den Lösungsweg dieser Aufgabe skizzieren.

Wir stellen einen gerichteten Graph auf, in dem die Werke mit den Ziffern *1*, *2* und *3* bezeichnet sind und die Baustellen die Buchstaben *S* (Schule), *I* (Institut), *W* (Wohnhaus) und *H* (Hafen) tragen; von den Werken zu allen Baustellen sind Kanten gezogen (Bild 39), die mit Zahlen versehen sind, die die relativen Transportkosten einer Einheit Fracht auf dem betreffenden Weg angeben.

Die Lösung der Aufgabe scheint zunächst offensichtlich zu sein: Der Schulneubau ist am günstigsten durch das Werk Nr. 1 zu versorgen, die Baustelle Hafen durch das Werk Nr. 2. Der Institutsneubau kann so-

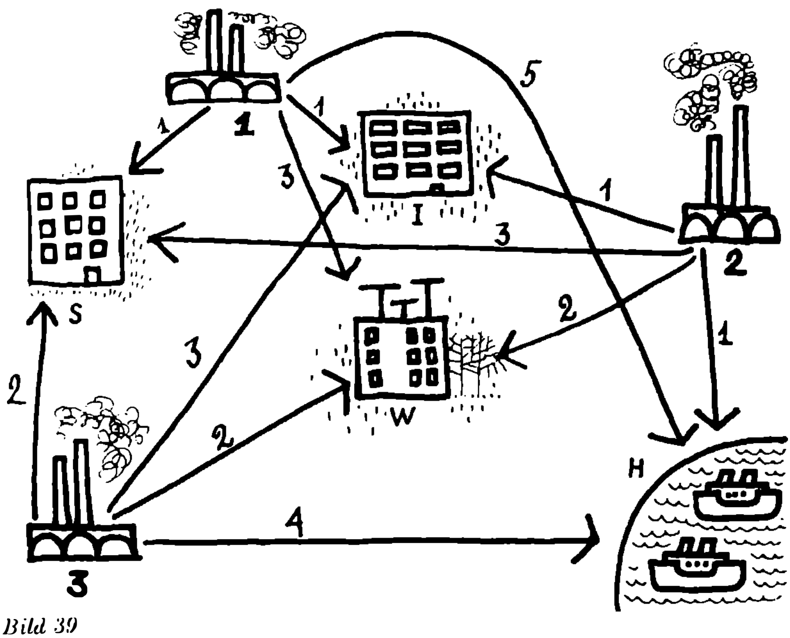


Bild 39

wohl vom Werk Nr. 1 als auch vom Werk Nr. 2 versorgt werden; die Baustelle des Wohnhauses kann man durch das Werk Nr. 2 oder das Werk Nr. 3 beliefern lassen. Es hat den Anschein, daß man das Werk Nr. 3 überhaupt nicht benötigt.
Doch so einfach liegen die Dinge in Wirklichkeit nicht.
Stellen Sie sich vor, daß die drei Werke einen unterschiedlichen Produktionsausstoß haben und ihre Gesamtproduktion den Bedarf der Baustellen gerade deckt. Außerdem möge das Werk Nr. 3 den höchsten Ausstoß haben und Werk Nr. 2 den geringsten. Derartige Bedingungen erschweren die Lösung der Aufgabe bedeutend. Trotzdem kann man durch Betrachtung der möglichen Varianten die Lösung finden, die die Versorgung der Baustellen bei minimalen Transportkosten garantiert.
Aus dem vorstehenden Beispiel kann man eine Erkenntnis ableiten: Plant man den Transport nur „über den Daumen", so führt das unweigerlich zu Störungen in der Versorgung, besonders wenn die Gesamtmenge des erzeugten Materials den Bedarf nicht wesentlich übersteigt. Die Benutzung der günstigsten Variante des Transports kann außerdem riesige Einsparungen bringen.
Nun wollen wir noch eine Klasse von Aufgaben betrachten, die auf Probleme der Graphentheorie hinauslaufen. In einem Ort leben einige (n) junge Damen, die gern heiraten möchten, und einige (m) ledige junge Männer.
Die Mädchen sind wählerisch, und jedem gefallen nur wenige Kandidaten. Wie kann man es nun einrichten, daß jede der Schönen einen für sich annehmbaren Ehegatten erhält?
Die Anzahl der Mädchen muß geringer oder darf höchstens gleich der der jungen Männer ($n \leqq m$) sein, und diese Voraussetzung erschwert das Leben ungemein. Aber es können noch mehr Schwierigkeiten auftreten. Wenn fünf Mädchen nur die ersten zwei von vielen Kandidaten gefallen, so ist die Aufgabe, alle fünf zu verheiraten, unlösbar.
Eine günstige Situation wird durch Bild 40 illustriert. Die von den Mädchen ausgehenden Pfeile weisen auf die jungen Männer, die ihr Herz erobern könnten.
Eigentlich müßten wir allen jungen Leuten unseres Bildes wohlklingende Namen geben, doch ist es einfacher, sie durchzunumerieren. In der dargestellten Situation können wir alle Mädchen glücklich machen. Die erste Zahl sei die Nummer des Mädchens und die zweite die des jungen Mannes; man kann nun fünf Paare bilden: $(1, 1)$; $(2, 2)$; $(3, 5)$; $(4, 3)$; $(5, 6)$.
Wie es im Leben häufig vorkommt, ist derjenige, der den meisten Mädchen gefiel, nämlich der Vierte, übriggeblieben. Wir könnten unsere jungen Leute auch in anderen Kombinationen verheiraten. Dabei haben wir allerdings die Interessen der Männer sowie die alltäglichen Konflikte durch Eifersucht, Eitelkeit und andere Gründe, die häufig die Stimmung und manchmal das ganze Leben verderben, nicht berücksichtigt.
Wenn die Anzahl der jungen Leute sehr groß ist und sich ihre Interessen in komplizierter Weise überschneiden, so ist es gar nicht so einfach, alle

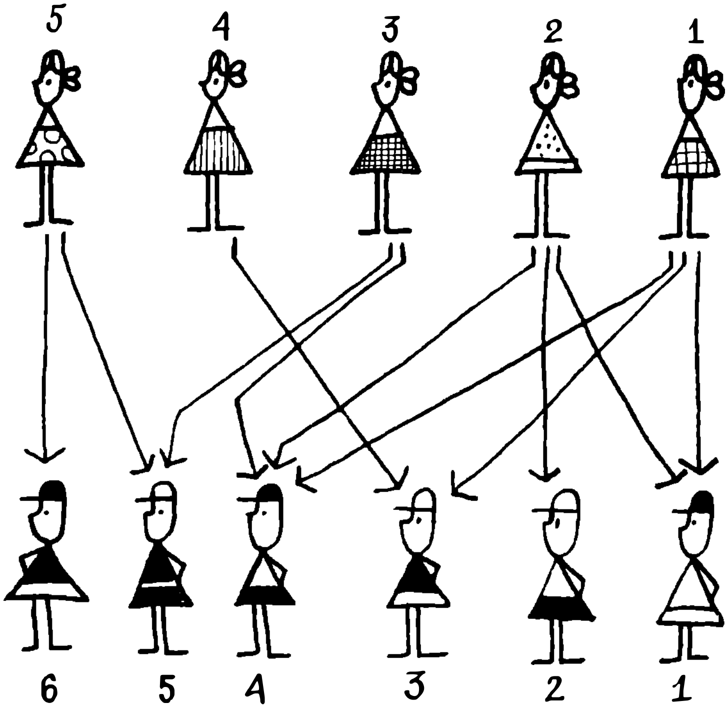


Bild 40

glücklich zu machen. Man kann jedoch die Bedingungen angeben, die die Existenz einer Lösung der gestellten Aufgabe garantieren. Ich will Sie nicht mit der Formulierung des entsprechenden Satzes ermüden, sondern werde Ihnen ein anderes, weniger dramatisches Modell derselben mathematischen Situation vorführen.

Stellen Sie sich eine Werkhalle mit n verschiedenen Maschinen und m Arbeitern ($n < m$) vor. Die Bedienung jeder Maschine ist nur einigen Arbeitern entsprechend ihrer Qualifikation möglich. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Bedienung sämtlicher Maschinen gewährleistet ist? Die Lösung dieser Aufgabe ist, wie man sieht, der Lösung der Aufgabe über die Bildung der jungen Paare äquivalent.

Ähnlich ist die Situation, wenn Arbeitskräfte möglichst rationell eingesetzt werden sollen. Angenommen, wir haben n Mitarbeiter und ebenso viele Arbeiten; jeder Mitarbeiter kann jede der Arbeiten verrichten, doch die Leistungen sind unterschiedlich. Wenn a_{ij} die Leistung a (in gewissen Maßeinheiten) bei der Erfüllung der Arbeit Nummer j durch den Mitarbeiter Nummer i ist, dann ist z. B. a_{24} die Leistung des Mitarbeiters Nr. 2 bei der Arbeit Nr. 4. Es ist vorteilhaft, die Mitarbeiter so einzusetzen, daß sie alle mit hoher Effektivität arbeiten. Diese Situation wird durch Bild 41 illustriert. Als Kennziffer für die Arbeit des gesamten Kollektivs der Mitarbeiter kann man die Summe der Leistungen nehmen. Dann ist für die Situation im Bild 41 die

$$\text{Gesamtleistung} = a_{12} + a_{24} + a_{31} + a_{43}$$

Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter wird durch die Arbeitseinteilung gelöst, bei der die Gesamtleistung maximal wird.
Man könnte die Arbeit eines Kollektivs auch an der Effektivität des schwächsten Mitarbeiters messen.
Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter besteht dann darin, den schwächsten Mitarbeiter am wirksamsten einzusetzen. Das läßt sich so formulieren: Die Arbeit ist so aufzuteilen, daß die kleinste Leistung ihren größten Wert hat. Die kleinste Leistung muß also größer sein als die kleinste Leistung bei irgendeiner anderen Aufteilung. In der Sprache der Graphentheorie würde sich das folgendermaßen ausdrücken lassen: Angenommen, a_{31} sei die kleinste Leistung im Graphen (Bild 41). Man kann nun die Arbeiten anders aufteilen, z. B. so, daß sich die Leistungen a_{11}, a_{23}, a_{32} und a_{44} ergeben. Ist nun a_{44} die kleinste Leistung, a_{44} aber größer als a_{31}, so ist die zweite Arbeitseinteilung der ersten vorzuziehen. Die Aufgabe besteht also darin, die Anordnung der Pfeile so zu bestimmen, daß die kleinste der jeweils vier auftretenden Zahlen für die Leistungen maximal ist.

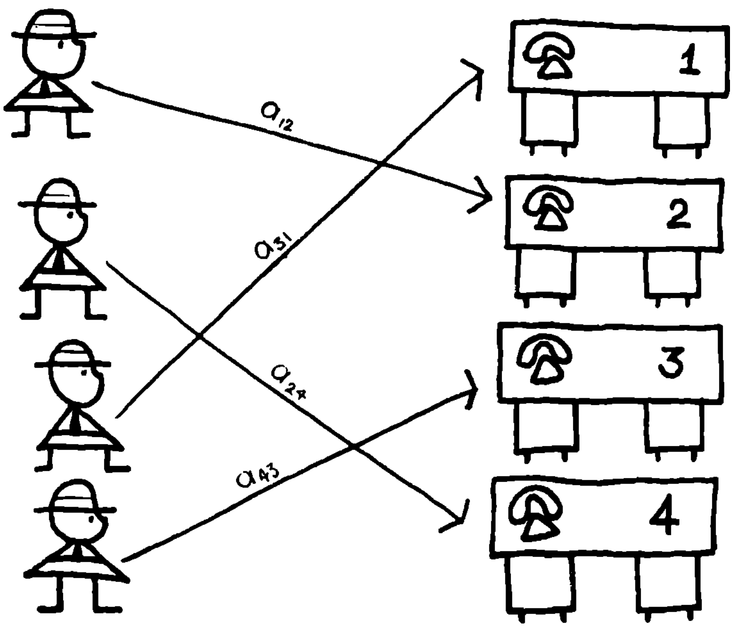


Bild 41

Die optimale Variante kann bei der vorstehenden Aufgabe, bei dem bereits betrachteten Transportproblem und einer Reihe weiterer Aufgaben in der Praxis natürlich nicht durch Probieren gefunden werden. Man benutzt die Methoden der Spieltheorie und der linearen bzw. nichtlinearen Optimierung und findet so einen systematischen Lösungsweg, der auch den Einsatz von Rechenautomaten ermöglicht.
Die Graphentheorie wird heute in den verschiedensten Gebieten von Wissenschaft und Technik benutzt. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die Netzwerkplanung. Ursprünglich hatte ich die Absicht, einen Abschnitt darüber zu schreiben. In letzter Zeit ist jedoch so viel darüber geschrieben worden, daß ich die mir zur Verfügung stehenden Seiten lieber benutzen will, um über weniger bekannte Probleme zu sprechen.

Zahlen und Punkte

Für die weiteren Betrachtungen werden einige ganz elementare Grundbegriffe der analytischen Geometrie benötigt. Ich bitte um Verzeihung, wenn ich diese zunächst kurz darlege. Es könnte ja sein, daß die Mathematik bei dem einen oder anderen Leser in der Schule zu kurz gekommen ist, oder daß seine Mathematikkenntnisse schon längst in Vergessenheit geraten sind. Sie können diesen Abschnitt sicher ohne weiteres überspringen.

Entlang den Autostraßen und Eisenbahnlinien stehen in regelmäßigen Abständen Kilometersteine, auf denen die Entfernung von einem Ausgangspunkt angegeben ist. In anderen Ländern ist es teilweise üblich, Hinweisschilder aufzustellen, die außerdem auch die Entfernung zum Endpunkt angeben (Bild 42). Hier begegnen wir der einfachsten Möglichkeit, die Lage von Punkten auf einer Linie (nicht unbedingt einer Geraden) durch Zahlen zu kennzeichnen. Dabei kann man die Zahl auf dem Kilometerstein als Koordinate des Punktes auffassen, wobei als Nullpunkt des Bezugssystems (Koordinatensystem) der Ausgangspunkt der Straße und der Kilometer als Maßeinheit dienen.

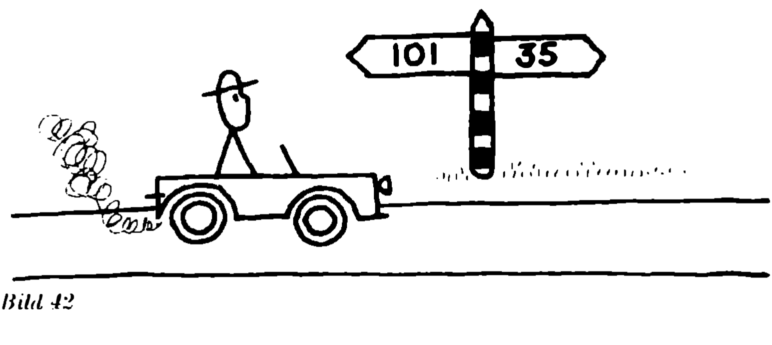


Bild 42

Es wurde bereits erwähnt, daß man die Lage von Punkten in der Ebene durch kartesische Koordinaten angeben kann.

Die Lage von Punkten auf einer beliebigen Fläche läßt sich in ähnlicher Weise durch Zahlen beschreiben. Als der legendäre Kapitän *Nemo* die

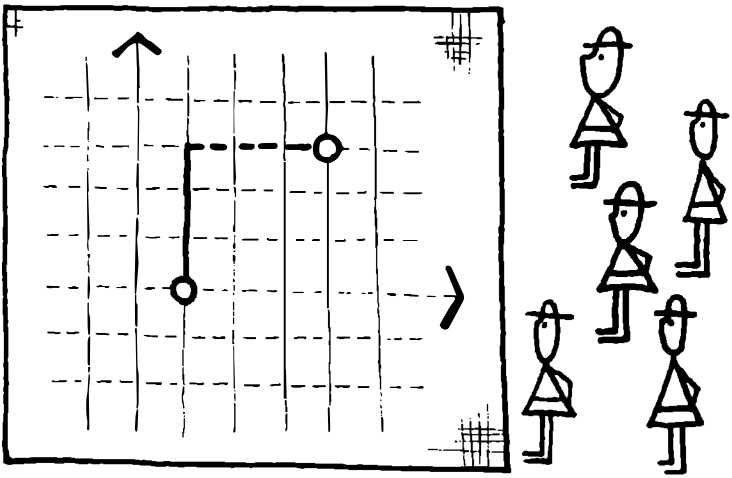


Bild 43

Lage seines „Nautilius" auf der Erdoberfläche angeben wollte, berechnete er die geographische Länge und Breite.[1])

Wir zeichnen ein kartesisches Koordinatensystem auf ein Stück Gummi — also ein rechtwinkliges Netz mit einem bestimmten Einheitsschritt. Um von einem beliebigen Punkt des Netzes zu einem beliebigen anderen zu gelangen, muß man, wenn man sich auf den Linien des Netzes bewegen will, zunächst ein Stück auf einer ausgezogenen „Straße" zurücklegen und dann auf einer gestrichelten (Bild 43). Man könnte natürlich auch zuerst die gestrichelte Richtung einschlagen und dann die ausgezogene, das ändert nichts an der Sache.

Jetzt deformieren wir das Gummistück durch eine beliebige stetige Transformation. Das erhaltene krummlinige Netz ist ebenfalls ein Koordinatensystem: Auch hier hat man für die Fahrt von einem Punkt des Netzes zu einem anderen zunächst eine ausgezogene, nun jedoch nicht mehr geradlinige „Straße" zu benutzen und dann eine gestrichelte (Bild 44).

Ganz analog sieht die Sache im Raum aus. Um die Lage einer im Raum hängenden Glühlampe anzugeben, sind drei Zahlenangaben nötig: z. B. die Entfernung des Punktes der Decke, an dem die Lampe befestigt ist. von zwei senkrechten Wänden und die Länge des Leitungsdrahtes (Bild 45). Diese Zahlen sind kartesische Koordinaten im Raum.

Wenn der Kapitän *Nemo* die Lage des „Nautilius" im Raum angeben will, muß er außer der geographischen Länge und Breite auch die Tauchtiefe bestimmen. Diese drei Zahlen sind ebenfalls Koordinaten im Raum.

In der Astronomie ist es üblich, die Lage von Himmelskörpern, bezogen auf die Erde, durch drei Koordinaten zu kennzeichnen: durch zwei

[1]) *J. Verne* (1829—1905): „Zwanzigtausend Meilen unter dem Meer".

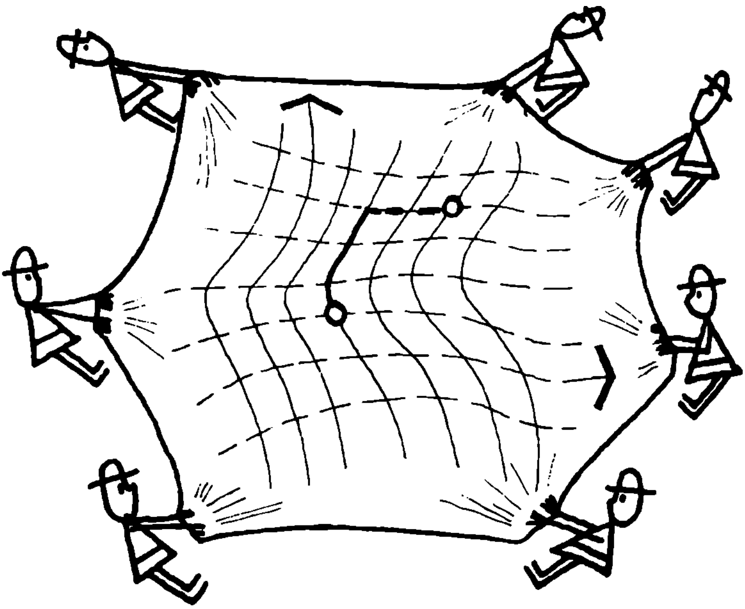


Bild 44

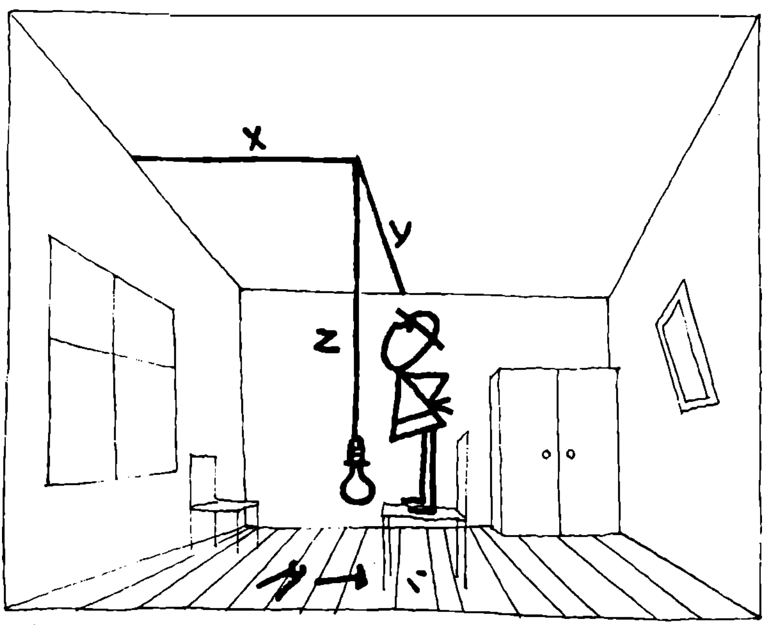


Bild 45

Winkel — die Deklination und die Rektaszension — und die Entfernung von der Erde.
Mit Hilfe eines Koordinatensystems können wir beliebige geometrische Aufgaben in der Sprache der Zahlen ausdrücken. Für ein geometrisches Gebilde erscheint eine äquivalente Zahlenmenge.
So entspricht z. B. dem Abschnitt der Zahlengeraden zwischen den zwei Punkten mit den Koordinaten $x_1 = 2$ und $x_2 = 7.5$ (Bild 46) die Menge aller Zahlen x, die den zwei Ungleichungen

$$x \geqq 2 \quad \text{und} \quad x \leqq 7{,}5$$

genügen.
Es ist üblich, diese zwei Ungleichungen zusammenzufassen:

$$2 \leqq x \leqq 7.5$$

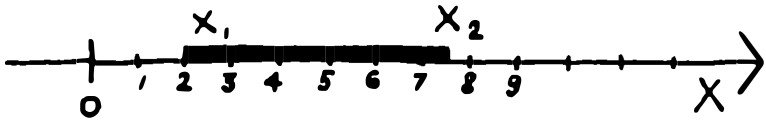


Bild 46

Das Einheitsquadrat in der Ebene, dessen Ecken durch die Punkte mit den Koordinaten (0; 0); (1; 0); (0; 1) und (1; 1) gegeben sind, wird durch die Menge der Zahlenpaare (x, y) dargestellt, die den folgenden Ungleichungen genügen (Bild 47):

$$0 \leqq x \leqq 1; \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

Die gesamte Geometrie kann man also analytisch darlegen, beginnend damit, daß man einem Punkt der Geraden eine Zahl (x) zuordnet, einem Punkt der Ebene ein Zahlenpaar (x, y) und einem Punkt im Raum drei

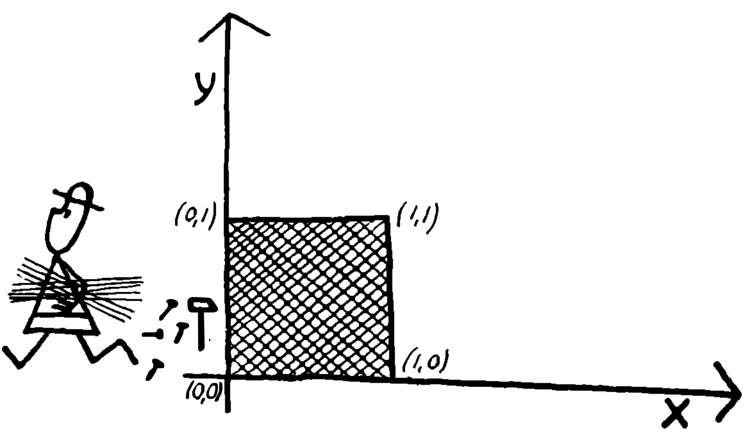


Bild 47

Zahlen (x, y, z). Eine Kreisfläche vom Radius 5 mit dem Mittelpunkt im Punkt (2, 3) ist dann nichts anderes als die Menge der Zahlen (x, y), die der Ungleichung

$$(x-2)^2+(y-3)^2 \leqq 5^2$$

genügen. Eine Ebene im Raum, die durch den Koordinatenursprung geht, ist einfach die Menge der Zahlentripel (x, y, z), die der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

genügen, wobei a, b und c bestimmte konstante Zahlen sind.
Wichtig ist die völlige Äquivalenz des geometrischen und des analytischen Standpunktes: Geometrische Gebilde lassen sich analytisch durch Gleichungen oder Ungleichungen beschreiben, während sich analytische Beziehungen in Form von Kurven, Flächen oder Figuren darstellen lassen.
Das analytische Herangehen an geometrische Aufgaben gibt z. B. dem Arzt die Möglichkeit, verschiedene Daten eines Menschen anschaulich darzustellen. So kann beispielsweise die Körpergröße auf einer Geraden abgetragen werden.
Bei Messung der Körpergröße h und des Gewichts p entspricht jedem Menschen ein Punkt in der Ebene mit den Koordinaten (h, p). Wird noch zusätzlich das Alter t angegeben, so erfolgt die Kennzeichnung im Raum durch einen Punkt mit den Koordinaten (h, p, t).
Doch wie kann man verfahren, wenn der Mensch durch viele Parameter charakterisiert wird: Körpergröße h, Gewicht p, Alter t, Brustumfang Q, Druckkraft der linken und rechten Hand f_1 und f_2, Sehschärfe r? Vorstehend sind sieben Größen vorgegeben worden. Eine anschauliche geometrische Darstellung scheint nicht mehr möglich zu sein.
Tatsächlich ist jedoch eine analoge geometrische Betrachtung weit verbreitet: Man faßt die Menge der Kombinationen von vier Zahlen (x, y, z, t) als Koordinaten von Punkten im vierdimensionalen Raum auf; die Kombinationen von sieben Zahlen (x, y, z, t, u, v, w) werden als Koordinaten von Punkten im siebendimensionalen Raum aufgefaßt. Derart kann man alle Kombinationen von n Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ als Punkte im n-dimensionalen Raum ansehen.
Solch eine Auffassung wird bei jedem, der erstmalig damit in Berührung kommt, auf Befremden stoßen: Was bedeutet vierdimensionaler Raum? Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen?
Wir nehmen ein dünnes Glasrohr, dessen Durchmesser gerade so groß ist, daß eine Ameise hindurchpaßt, und lassen das Insekt hinein. Wenn die Ameise zurück will, muß sie rückwärts kriechen. Lassen wir von der anderen Seite noch eine zweite Ameise hinein, so können die beiden Ameisen nicht aneinander vorbei (Bild 48). So traurig ist das Leben im eindimensionalen Raum — auf einer Linie!
Nun lassen wir die zwei Ameisen auf dem Tisch oder der Oberfläche eines Kürbis umherspazieren. Sie können sich in beliebiger Richtung bewegen, Hindernisse umgehen usw. (Bild 49). Für sie bedeutet das Leben auf einer

Bild 48

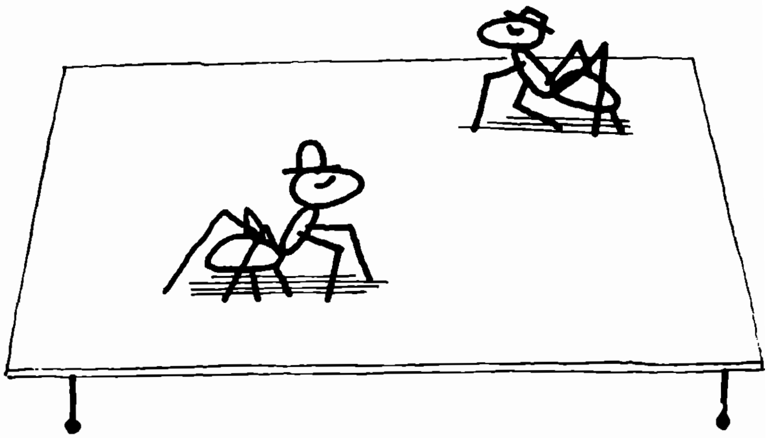


Bild 49

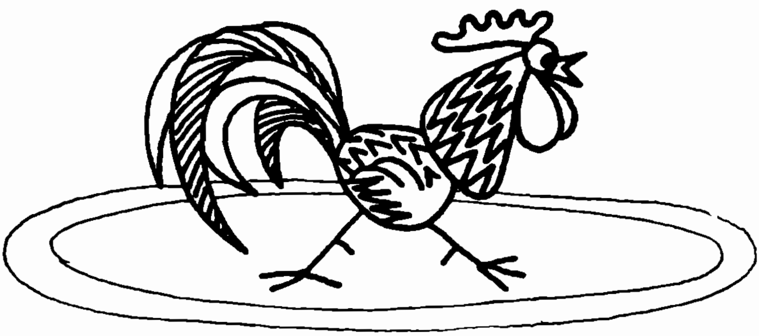


Bild 50

Fläche — im zweidimensionalen Raum — bereits die große Freiheit. Allerdings gibt es auch hier gewisse Schwierigkeiten: Zwei Ameisen, die z. B. durch einen Bach voneinander getrennt sind, können niemals zusammenkommen. Man sagt, daß ein Hahn, den man in einen mit weißer Farbe gezogenen Kreis stellt, unentschlossen darin herumlaufen würde und nicht darauf käme, die Kreislinie einfach zu überschreiten. Wenn man sich in die Lage des Hahnes hineindenkt, kann man sich vorstellen, daß

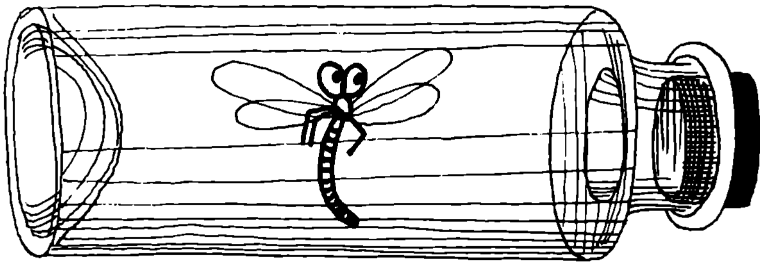


Bild 51

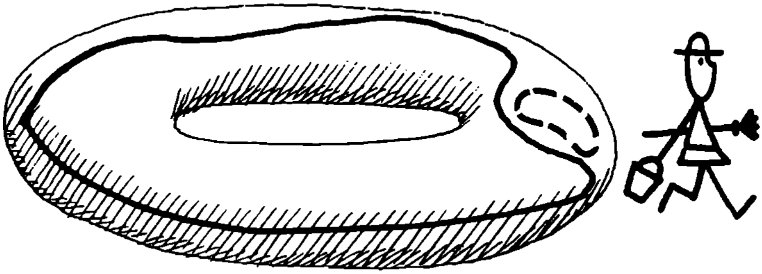


Bild 52

tatsächlich allerhand Auffassungsgabe und Mut dazugehören, um aus dem zweidimensionalen Raum in den dreidimensionalen zu gehen.
Eine Libelle hat es schon besser als eine Ameise — sie kann einen Bach einfach überfliegen. Die Libelle lebt im dreidimensionalen Raum, und eine geschlossene Linie auf einer Fläche stellt für sie kein Hindernis dar. Setzt man die Libelle jedoch in ein Glas und deckt es zu, so sitzt auch sie in der Klemme: Sie kann nicht herausfliegen. Eine geschlossene Fläche (die Oberfläche des Glasgefäßes) teilt ihren dreidimensionalen Lebensraum in zwei Teile — ein Inneres und ein Äußeres —, ähnlich wie eine geschlossene Kurve den Lebensraum der Ameise — die Fläche — in zwei Teile zerlegt.
Übrigens wird eine Fläche nicht durch jede daraufgezeichnete geschlossene Kurve in zwei Teile zerlegt, so daß die Ameise nicht von einem Teil in den anderen käme, ohne die Kurve zu überschreiten. Als Beispiel kann der Kringel im Bild 52 dienen: Die gestrichelte Linie zerlegt seine Oberfläche in zwei Teile, die ausgezogene Linie jedoch nicht.
Überlegen Sie selbst einmal: Wie sieht es auf der Kugel mit drei Griffen im Bild 53 oder auf dem Möbiusschen Band aus? Allerdings gibt es auf jeder Fläche geschlossene Kurven, die sie in zwei Teile, ein Äußeres und ein Inneres zerlegen. Das ist für uns hier wesentlich.
Stellen Sie sich nun ein Wesen vor, das im vierdimensionalen Raum lebt. Für ein solches Tier ist das geschlossene Glas kein Hindernis, es zerlegt

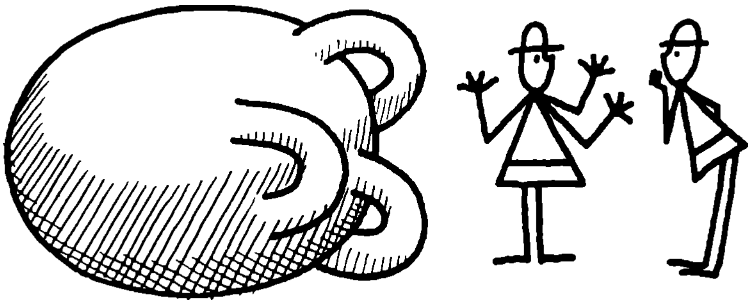


Bild 53

seinen Lebensraum nicht in zwei Teile. Das Wesen „überfliegt" das Glas einfach, indem es sich der vierten Dimension bedient.
Beachten Sie, lieber Leser, daß wir selbst nicht im dreidimensionalen, sondern im vierdimensionalen Raum leben; seine Koordinaten sind die drei Ortskoordinaten x, y, z und die Zeit t. Diese Koordinaten sind allerdings nicht gleichwertig: Während für x, y und z beliebige Werte zulässig sind, können wir uns in der Zeit t nur vorwärts bewegen. In diesem vierdimensionalen Raum gelangen wir aus einem geschlossenen Zimmer heraus, ohne die Tür oder die Fenster zu benutzen, wenn wir die vierte Koordinate — die Zeit — benutzen. Bewegen wir uns nur in dieser vierten Koordinate und lassen wir die drei anderen unverändert, so können wir uns irgendwann in einer anderen Situation befinden und aus dem Zimmer heraustreten, z. B. wenn das Haus auseinanderbröckelt und die Zimmerwände für uns keine Grenze mehr sind.
Dieser Zustand braucht nicht sehr bald einzutreten, uns geht es nur um die prinzipielle Möglichkeit.
Die Situation wird noch deutlicher, wenn wir zulassen, daß wir uns auf der Zeitachse auch nach der anderen Seite, rückwärts, bewegen können. Denselben Punkt (x, y, z) innerhalb des verschlossenen Zimmers haben früher nicht die Wände, der Fußboden und die Decke eingeschlossen, sie waren noch gar nicht da. Bewegen wir uns also zunächst nur auf der Zeitachse zurück, so können wir zu einem gewissen Zeitpunkt aus dem verschlossenen Zimmer heraustreten.
Wir wollen noch etwas bei den mehrdimensionalen Welten verbleiben. In der Ebene (im zweidimensionalen Raum) ist eine Kreislinie mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Bild 54) gegeben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Das Analogon zum Kreis in der Ebene ist die Kugelfläche im dreidimensionalen Raum. Liegt der Mittelpunkt im Koordinatenursprung und wird der Radius mit r bezeichnet (Bild 55), so lautet die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

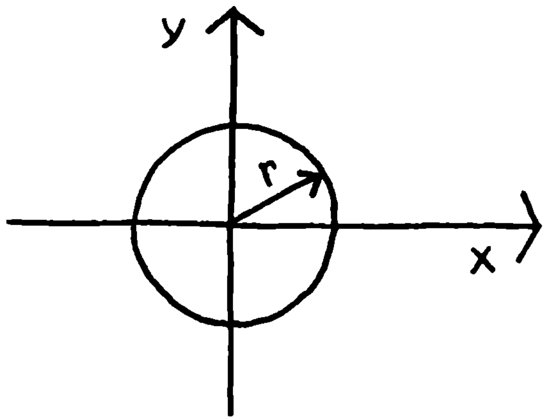


Bild 54

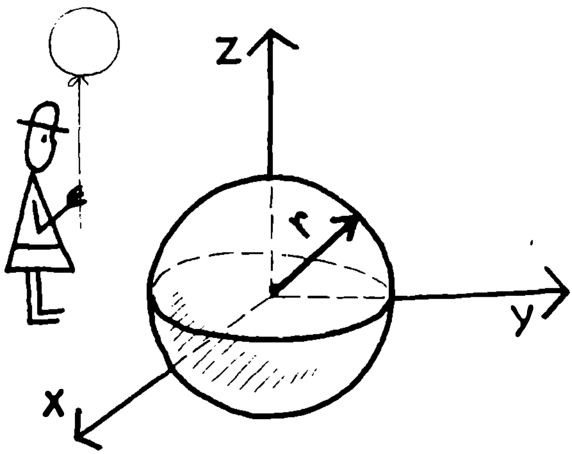


Bild 55

Geht man vom dreidimensionalen zum vierdimensionalen Raum über, so liegt es nahe, als Kugelfläche mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung die „dreidimensionale Fläche“ zu bezeichnen, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$$

genügt.

Ein Küken, das im dreidimensionalen Raum lebt, kann nicht aus dem Ei schlüpfen, ohne die Schale aufzupicken. Genausowenig kann ein vierdimensionales Küken aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten.

Um aus der vierdimensionalen Kugel herauszukommen, muß sie das Küken aufpicken. Kann es sich jedoch im fünfdimensionalen Raum

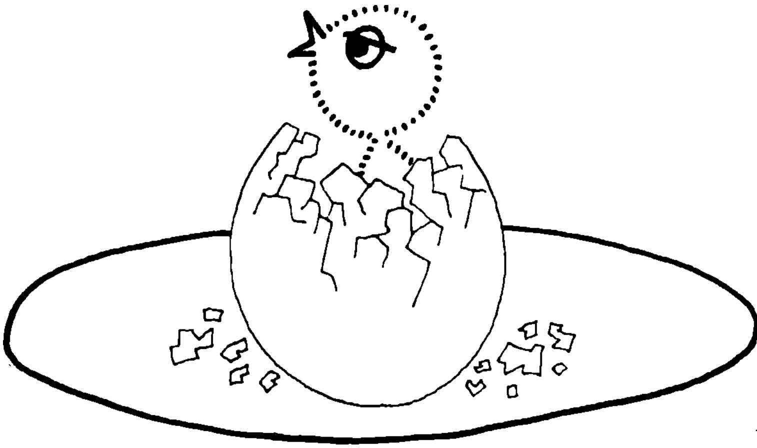


Bild 56

bewegen, so könnte es aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten. Die Eierschale müßte aber in diesem Fall eine fünfdimensionale Kugelfläche sein und keine vierdimensionale, denn die letztere könnte das Embryo nicht von allen Seiten bedecken. (Genausowenig wie eine zweidimensionale Kreislinie ein dreidimensionales Küken einhüllen kann.) Das fünfdimensionale Embryo in einer vierdimensionalen Eierschale würde von seinen fünfdimensionalen Feinden aufgefressen sein, bevor es überhaupt zum Küken heranwachsen könnte.

Natürlich bereitet es Schwierigkeiten, sich eine vierdimensionale Kugel praktisch vorzustellen oder diese aufzuzeichnen, wenn man nicht eine Darstellung durch eine Gleichung benutzt. Wenn man es genau nimmt, zeichnen Sie aber auch eine dreidimensionale Kugel nicht in den dreidimensionalen Raum, sondern nur die Projektion dieser Kugel in die Ebene des zweidimensionalen Zeichenpapiers. Ein beliebiges dreidimensionales Gebilde können Sie durch Grundriß, Aufriß und Seitenriß, also in drei Projektionen eindeutig im Zweidimensionalen darstellen. Wer hindert Sie daran, ein vierdimensionales Gebilde in den dreidimensionalen Raum oder in die Ebene zu projizieren?

Grund-, Auf- und Seitenriß einer dreidimensionalen Kugel sind Kreise auf dem Zeichenpapier. Die entsprechenden senkrechten Parallelprojektionen einer vierdimensionalen Kugel sind vier dreidimensionale Kugeln, die man dann nochmals auf Zeichenpapier projizieren kann.

Nun wollen wir den mehrdimensionalen Raum noch von einer anderen Seite her betrachten. Ein beliebiger Punkt teilt eine Gerade in zwei Halbgeraden ohne gemeinsame Punkte.

Eine Ebene läßt sich nicht durch einen Punkt in zwei Teile zerlegen. Doch eine beliebige Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Eine Ameise, die von einem Teil in den anderen will, muß die trennende Gerade überschreiten.

Für die Teilung des dreidimensionalen Raumes reicht eine Gerade nicht mehr aus. Eine beliebige Ebene teilt ihn aber ohne weiteres in zwei Halbräume. Wenn es der Libelle einfällt, von einem Halbraum in den anderen zu fliegen, muß sie die trennende Ebene durchqueren.
Analog kann der vierdimensionale Raum nicht durch eine zweidimensionale Ebene zerlegt werden. Er läßt sich jedoch in zwei Halbräume zerlegen, wenn man ihn mit einer beliebigen dreidimensionalen „Hyperebene" teilt, also mit einem dreidimensionalen Raum, der sich in dem vierdimensionalen Raum befindet.
Ein vierdimensionaler Raum enthält also Unterräume verschiedener Dimensionen: dreidimensionale Hyperebenen, zweidimensionale Ebenen, eindimensionale gerade Linien und nulldimensionale Punkte.
Im n-dimensionalen Raum gibt es analog Hyperebenen verschiedener Dimensionen, von den nulldimensionalen (Punkten) bis zu den (n-1)-dimensionalen. Doch nur die (n-1)-dimensionalen Hyperebenen zerlegen den n-dimensionalen Raum in zwei Teile. Wir hatten bereits festgestellt, daß die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Ungleichungen

$$0 \leqq x \leqq 1; \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

gelten, ein Quadrat bildet. Seine Ecken sind die Punkte mit den Koordinaten (0;0), (0;1), (1;0), (1;1).
Im dreidimensionalen Raum ist der Würfel die analoge Figur zum Quadrat. Er läßt sich als die Menge der Punkte (x, y, z) des Raumes betrachten, bei denen alle drei Koordinaten zwischen Null und Eins liegen.

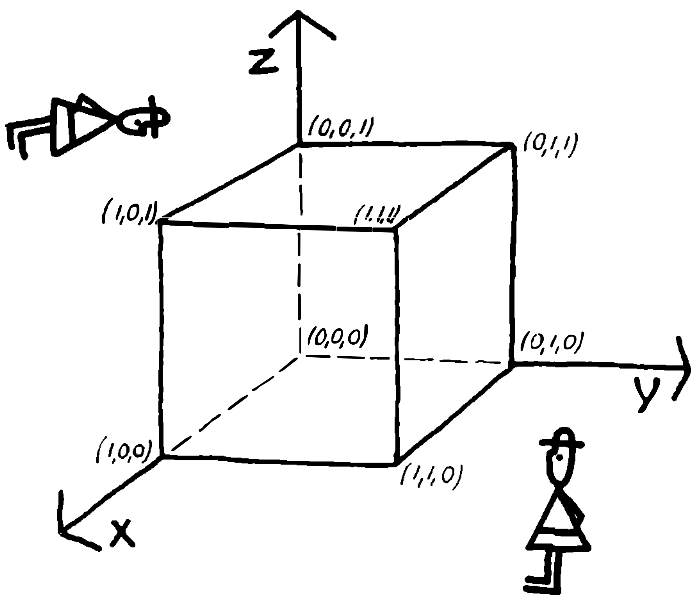


Bild 57

Die Ecken des Würfels sind die Punkte, deren Koordinaten entweder Null oder Eins sind (Bild 57). Wie man leicht feststellt, gibt es acht Ecken, jede hat drei Koordinaten: (0;0;0), (0;0;1), (0;1;0), (0;1;1), (1;0;0), (1;0;1), (1;1;0), (1;1;1).
Im vierdimensionalen Raum läßt sich der (vierdimensionale) Würfel als die Menge der Punkte (x, y, z, t) betrachten, deren vier Koordinaten zwischen Null und Eins liegen. Die Ecken dieses Würfels sind die Punkte, deren Koordinaten entweder Null oder Eins sind, also (0;0;0;0), (0;0;0;1), (0;0;1;0), (0;0;1;1), (0;1;0;0) usw.
Wieviel Ecken hat ein vierdimensionaler Würfel?
Diese Frage kann man beantworten, ohne erst alle möglichen Eckpunkte aufzuschreiben. Wir wissen bereits, daß der dreidimensionale Würfel acht Ecken hat. Das ist gerade die Anzahl der möglichen Kombinationen aus Nullen und Einsen zu je drei Elementen. Die Anzahl der Ecken des vierdimensionalen Würfels erhält man, wenn man an diese Tripel eine weitere Stelle, entweder eine Null oder eine Eins, anschließt. Der vierdimensionale Würfel hat also doppelt soviel Ecken wie der dreidimensionale, nämlich 16. Wir fassen zusammen: Der zweidimensionale „Würfel“, das Quadrat, hat $4 = 2^2$ Ecken; der dreidimensionale Würfel hat $8 = 2^3$ Ecken; der vierdimensionale „Würfel“ hat $16 = 2^4$ Ecken.
Es ist jetzt nicht mehr schwer einzusehen, daß der Einheitswürfel im n-dimensionalen Raum aus der Menge der Punkte besteht, deren Koordinaten zwischen Null und Eins liegen. Ecken dieses Würfels sind alle Punkte, deren Koordinaten entweder Nullen oder Einsen sind. Die Anzahl der möglichen Kombinationen, d. h. die Anzahl der Ecken des n-dimensionalen Würfels, beträgt 2^n.
Diese Tatsachen sowie die Methode zur Bestimmung der Anzahl der möglichen Kombinationen aus n Nullen und Einsen werden uns später bei der Erörterung einiger anderer Fragen von Nutzen sein.
Hier hat einer meiner Freunde, dem ich das Manuskript zu lesen gab, an den Rand geschrieben: „Wozu?“ — Seine deutliche Unzufriedenheit ist zu spüren. — „Es sind keinerlei Schlußfolgerungen oder Hinweise über den Nutzen der auf diesen Seiten diskutierten Ideen für die Praxis, die Wissenschaft oder das Leben zu finden.“
Haben Sie bitte etwas Geduld, ich beginne doch gerade erst. In den folgenden Abschnitten werde ich den mehrdimensionalen Raum sehr oft benutzen müssen und die Grundbegriffe der analytischen Geometrie ohne nochmalige Erläuterung verwenden.

Der Sattel

Stellen Sie sich eine schöne Gebirgslandschaft vor: sanfte Täler und steile Gipfel, enge Talkessel und schmale Pässe. Die Fläche eines Gebirges läßt sich auf verschiedene Weise beschreiben. Es ist zwar nicht besonders poetisch, doch von großem Wert, daß sich die Gebirgsfläche auch in analytischer Form durch eine Gleichung

$$z = f(x, y)$$

darstellen läßt, worin z die vertikale Koordinate und x, y die Koordinaten in der horizontalen Ebene sind (Bild 58). Den Gipfeln entsprechen die Maximalwerte der Funktion $z = f(x, y)$, den Tälern die Minimalwerte. Befinden Sie sich auf einem Gipfel, so führen alle Wege abwärts, sind Sie in einem Talkessel, so steigt jeder beliebige Weg an. Diese Maximal- und Minimalstellen der Fläche werden bald Gegenstand unserer besonderen Aufmerksamkeit sein. Wenn Sie sich in irgendeinem anderen Punkt der Fläche befinden, können Sie ganz nach Wunsch absteigen oder aufsteigen. Sie können — zumindest theoretisch — Ihren Weg auch so legen, daß Sie auf gleicher Höhe bleiben. Solche Wege ergeben sich als Schnittlinien der Fläche mit horizontalen Ebenen. Projizieren Sie diese Wege auf eine gemeinsame horizontale Ebene, so erhalten Sie die Höhenlinien (Bild 59). Die Höhenlinien werden häufig in geographische Karten eingetragen; an die einzelnen Linien wird die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel geschrieben.

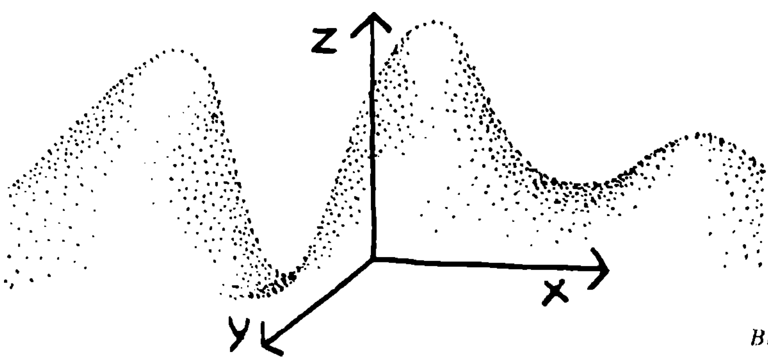


Bild 58

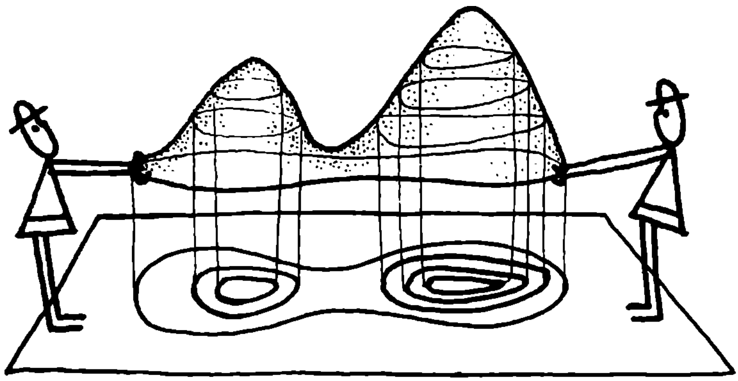


Bild 59

Ein Rotationsellipsoid ist eine Figur, die durch Rotation einer Ellipse um eine der Symmetrieachsen entsteht. Jede Ellipse hat eine große und eine kleine Symmetrieachse. Bei Rotation um die große Achse entsteht ein langgezogenes Rotationsellipsoid, das einer Gurke ähnelt; bei Rotation um die kleine Achse ergibt sich ein plattgedrücktes Rotationsellipsoid, das einer Diskusscheibe oder einem zusammengedrückten Ball ähnlich sieht.
Wählen wir auf der Ellipsoidoberfläche einen beliebigen Punkt P, so können wir stets mit Hilfe einer Ebene von dem Ellipsoid eine kleine „Kappe" abschneiden, derart, daß der Punkt P auf dieser Kappe liegt und die Ausmaße der Kappe recht klein sind (der Mathematiker sagt, kleiner als eine beliebige vorgegebene Zahl).
Ein Punkt P auf einer beliebigen Fläche heißt elliptisch, wenn man um diesen Punkt durch eine Ebene eine „Kappe" von dem Körper abschneiden kann. Auf einer Fläche brauchen bei weitem nicht alle Punkte ellip-

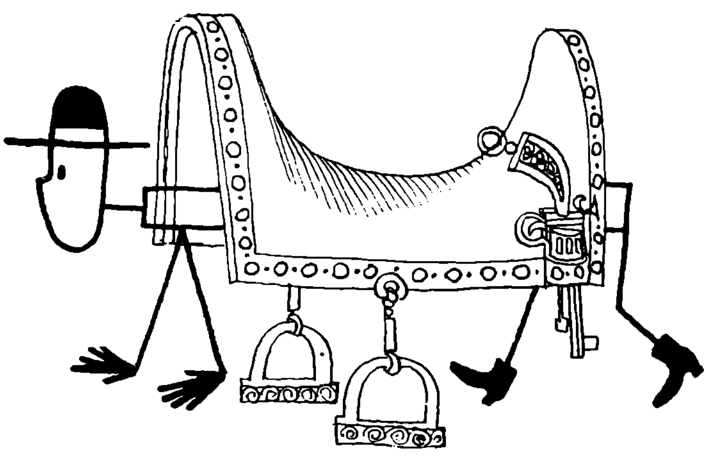


Bild 60

tisch zu sein. Sie werden sich sehr bald davon überzeugen. Man kann den elliptischen Punkt auch noch anders definieren. Wir ziehen alle möglichen Ebenen durch den Punkt selbst. Der Punkt P ist elliptisch, wenn es unter diesen Ebenen wenigstens eine gibt, so daß die Fläche in einer gewissen Umgebung des Punktes ganz auf einer Seite der Ebene liegt.
Kehren wir nun zur Gebirgslandschaft zurück. Außer den Gipfeln und Talkesseln interessieren uns die Pässe besonders. Ein Gebirgspaß ähnelt seiner Form nach einem Reitsattel (Bild 60). Auf den beiden absteigenden Seiten des Passes kennzeichnen wir jeweils einen Punkt A und B (Bild 61). Von A nach B kann man auf verschiedenen Wegen gelangen; einige sind als punktierte Linien eingezeichnet. Jede punktierte Linie hat einen höchsten Punkt, der durch einen kleinen Kreis markiert ist. Unter allen Wegen von A nach B muß es einen geben, dessen höchster Punkt tiefer liegt als bei allen anderen. Dieser Weg ist fett punktiert gezeichnet.
Analog hat jeder Weg von C nach D einen tiefsten Punkt. Der Weg, dessen tiefster Punkt höher liegt als bei allen anderen, ist im Bild 61 fett ausgezogen dargestellt.
Der höchste Punkt der fetten punktierten Linie fällt mit dem tiefsten Punkt der fetten ausgezogenen Linie zusammen. Ein solcher Punkt wird Sattelpunkt genannt.
Man könnte einen Sattelpunkt auch auf folgende Weise beschreiben, die vielleicht anschaulicher ist. In der Umgebung eines Sattelpunktes kann man durch keine Ebene eine Kappe von der Fläche abschneiden. Zieht man durch einen Sattelpunkt Ebenen, so schneiden diese im Gegensatz

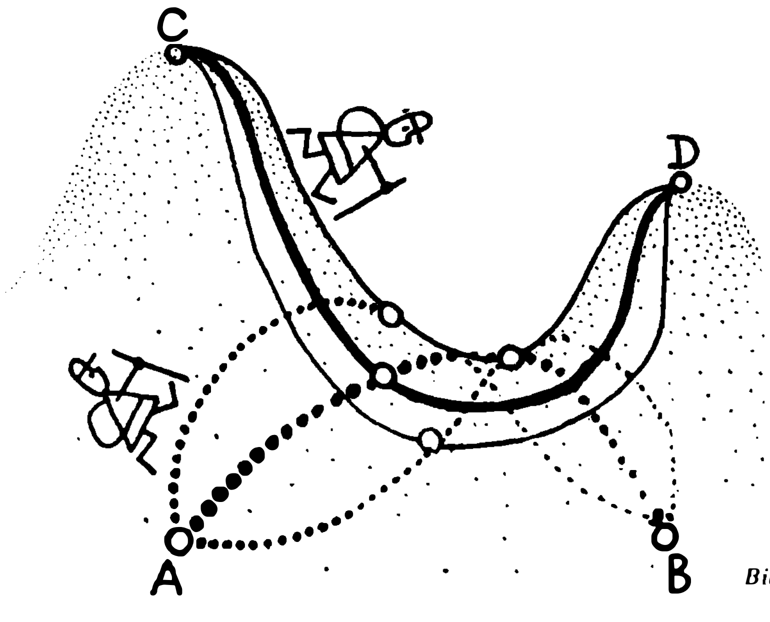
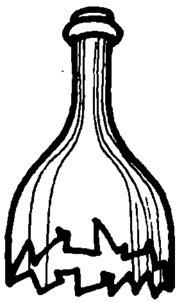
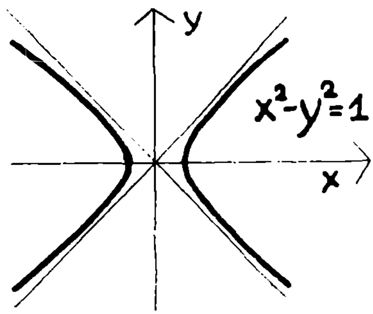
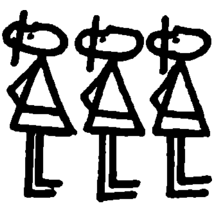


Bild 61

zum elliptischen Punkt stets die Fläche in jeder noch so kleinen Umgebung des Sattelpunktes so, daß sich auf beiden Seiten der Ebenen Teile der Fläche befinden. Eine Fläche kann mehrere Sattelpunkte haben, so wie es im Gebirge mehrere Pässe geben kann.
Gestatten Sie eine Frage, verehrter Leser. Kann es auf einer Fläche sehr viele Sattelpunkte geben? Kann eine Fläche nur aus Sattelpunkten bestehen? Wenn nicht, kann es auf einem begrenzten Stück einer Fläche unendlich viele Sattelpunkte geben?
Bevor Sie weiterlesen, denken Sie bitte über diese Fragen etwas nach: versuchen Sie, sich die entsprechende Situation vorzustellen.
Die Antwort ist einfach. Sehen Sie sich den Flaschenhals im Bild 62 an. Sämtliche Punkte des Halses sind Sattelpunkte. Auch eine unendliche Fläche, deren sämtliche Punkte Sattelpunkte sind, kann man sich unschwer vorstellen. Man läßt z. B. eine Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ um die y-Achse rotieren (Bild 63). Die entstehende Fläche, das Rotationshyperboloid, besteht nur aus Sattelpunkten. Das Hyperboloid ist die einfachste Fläche mit dieser Eigenschaft. Deshalb werden die Sattelpunkte auch hyperbolische Punkte genannt. Flächen, die — wie das Hyperboloid — nur aus Sattelpunkten bestehen, spielen in vielen Anwendungen eine große Rolle.
Wir nehmen eine ebene Membran, wie wir sie z. B. im Telefonhörer haben, spannen den Rand an einigen Stellen fest ein und hängen an einigen







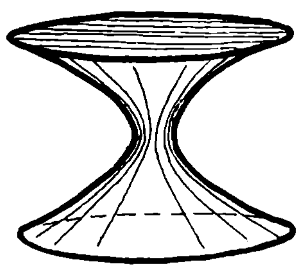


Bild 62

Bild 63

anderen Stellen kleine Lasten an (Bild 64). Nach Abklingen einiger unvermeidlicher Anfangsschwingungen nimmt die Membran die Form einer Fläche aus lauter Sattelpunkten an. Es läßt sich mathematisch beweisen, daß eine beliebige Deformation des Randes einer ebenen Membran alle inneren Punkte zu Sattelpunkten macht.

Erwärmen wir verschiedene Teile des Randes einer Membran unterschiedlich stark, jedoch so, daß die Wärmeströme konstant bleiben, so stellt sich bald ein Temperaturgleichgewicht ein: der eintretende Wärmestrom ist gleich dem austretenden.

Trägt man die Temperatur in den einzelnen Membranpunkten in vertikaler Richtung über der Membran als Längen ab, so ergibt sich als „Temperaturfläche" wiederum eine Fläche aus lauter Sattelpunkten.

Die Untersuchung der Flächen aus lauter Sattelpunkten steht in enger Beziehung zur Hydrodynamik, zur Elektrostatik und zu einigen anderen wichtigen Gebieten der Wissenschaft.

Die Form der eingespannten Membran wird durch eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung beschrieben. (Der Name des berühmten *Laplace* wird später noch mehrmals auftauchen.) Dieselbe Gleichung beschreibt auch den Prozeß der wirbelfreien Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die Wärmeströmung, die Verteilung der Kräfte im elektrostatischen Feld, den Stromfluß, die Diffusion eines in Wasser gelösten Salzes und viele andere Erscheinungen und Prozesse. Stets

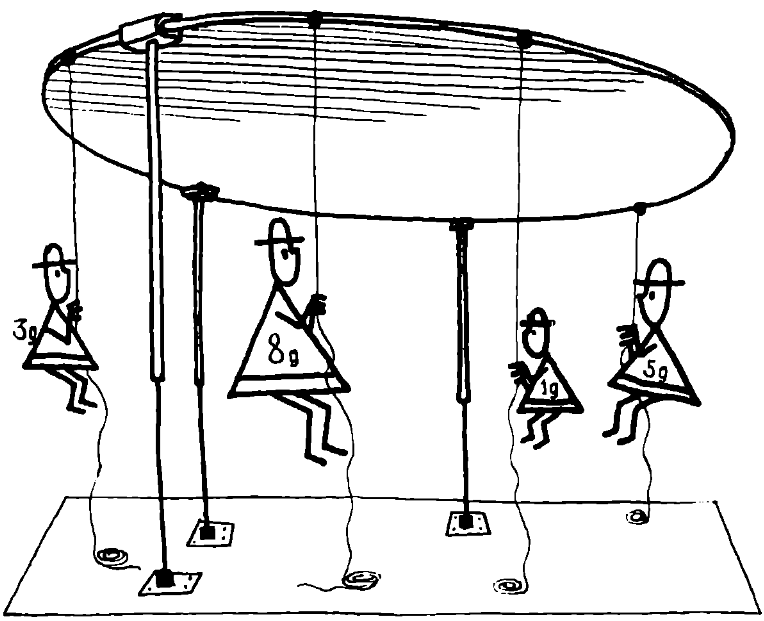


Bild 64

stellen die Lösungsfunktionen der Gleichung Flächen aus lauter Sattelpunkten dar. Deshalb ist die Untersuchung solcher Flächen für die verschiedensten Gebiete der Wissenschaft und Technik von großer Bedeutung.

Extremum

Das Wort Extremum umfaßt die Begriffe „Maximum" und „Minimum", so wie das Wort Eltern ein Sammelbegriff für Vater und Mutter ist. In Extremwertaufgaben sind Maxima oder Minima zu bestimmen. Auf solche Aufgaben stoßen wir vielerorts. Man kann ohne Übertreibung sagen: Sämtliche Aufgaben, die der lebende Organismus löst, sind Extremwertaufgaben.
In der Tat, wir streben stets nach größtem Effekt, bemühen uns, eine Arbeit in der kürzesten Zeit oder mit minimalem Energieverbrauch zu erledigen; wir versuchen, ein Maximum an Befriedigung oder ein Minimum an Unannehmlichkeiten zu erhalten.
In sämtlichen Bewegungsaufgaben geht es um Extremwerte. Wenn sich ein Lebewesen von einem Ort zu einem anderen bewegt, so sucht es den kürzesten Weg; es bemüht sich, möglichst schnell zu dem neuen Ort zu gelangen oder unter möglichst geringer Kraftanstrengung.
Wenn ein Mensch einfach auf der Stelle steht, löst er ständig eine Extremwertaufgabe. Er muß ständig das Gleichgewicht halten, um nicht umzufallen. Ein scheinbar unbeweglich stehender Mensch bewegt sich ständig etwas; er sucht nach der Gleichgewichtsstellung. Zu diesem interessanten Problem kehren wir später zurück, um es ausführlicher zu behandeln.

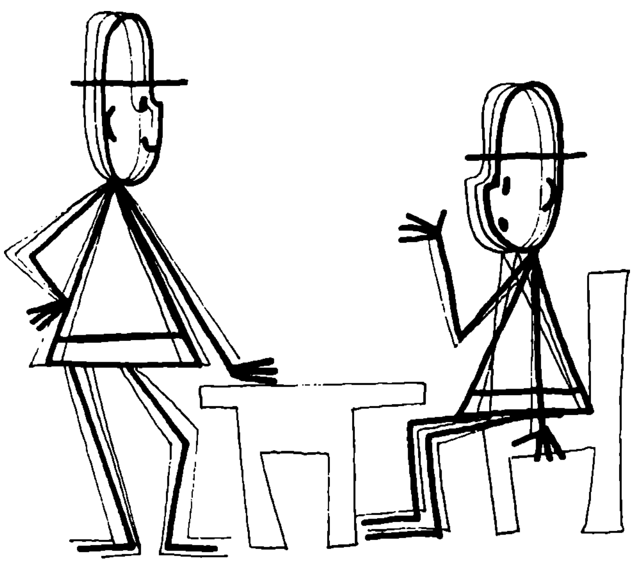


Bild 65

Beginnen wir unser Gespräch über Extremwertaufgaben mit einem Problem aus der Luftfahrt. Während des Fluges wirken auf ein Flugzeug verschiedene Störgrößen ein, die sich mit der Zeit ändern: Die Masse des Flugzeugs verringert sich unterwegs durch den Treibstoffverbrauch; der Wind wirkt ständig ein; in verschiedenen Höhen ist die Dichte der Atmosphäre unterschiedlich usw.
Es soll z. B. der Treibstoffverbrauch, bezogen auf den zurückgelegten Weg gegenüber der Erde, minimiert werden. Der Treibstoffverbrauch wird durch Änderung der Drehzahl des Motors gesteuert. Wenn man annimmt, daß die Störgrößen konstant sind und sich die Steuergröße vollkommen in der Hand des Piloten befindet, so hat die Funktion Treibstoffverbrauch r in Abhängigkeit von der Motordrehzahl V das Aussehen der im Bild 66 dargestellten Parabel.
Die Entstehung der Kurve kann man leicht erläutern: Bei kleiner werdender Umdrehungszahl sinkt die Leistung ab. Deswegen muß der Anstellwinkel des Flugzeugs vergrößert werden. Dadurch wachsen die aerodynamischen Verluste; mit ihnen steigt der Treibstoffverbrauch an. Bei Vergrößerung der Umdrehungszahl des Motors wachsen die Verluste durch den Luftwiderstand, was ebenfalls zu höherem Treibstoffverbrauch führt. Es muß also einen optimalen Wert für die Umdrehungszahl des Motors geben, bei dem der Treibstoffverbrauch minimal ist.
Der Pilot hat außerdem die Möglichkeit, den Steigungswinkel U der Luftschraube zu ändern. (Der Steigungswinkel ist der Winkel, den die Luftschraubenblätter mit der Drehebene bilden.) Wenn alle anderen Bedingungen gleich bleiben, also auch die Drehzahl des Motors konstant ist, hat die uns interessierende Funktion Treibstoffverbrauch r in Ab-

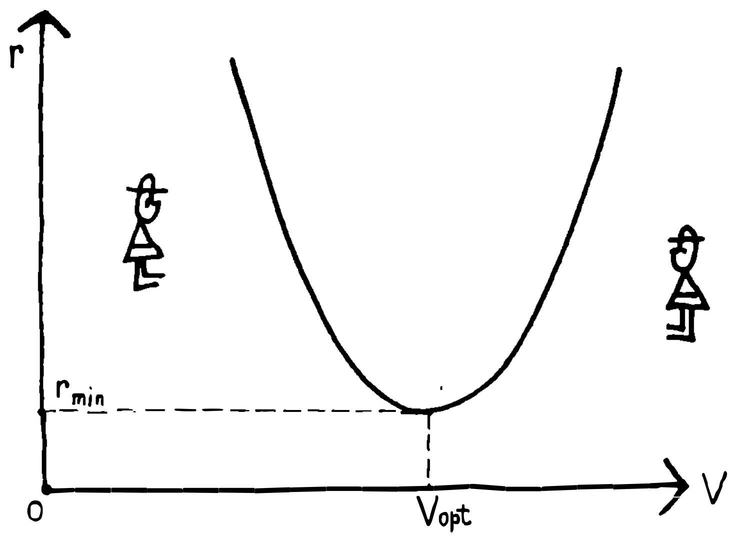


Bild 66

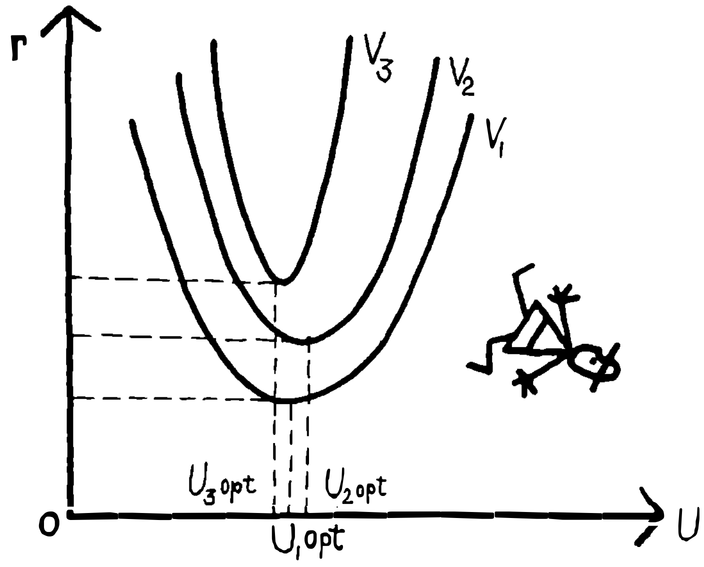


Bild 67

hängigkeit vom Steigungswinkel U ebenfalls die Form einer Parabel. Bei verschiedenen Werten der Drehzahl bleibt der Charakter dieser Kurve erhalten, es ändern sich lediglich die Parameter. Im Bild 67 ist die Abhängigkeit zwischen U und r für die Drehzahlen V_1, V_2 und V_3 dargestellt.

Der Treibstoffverbrauch r, bezogen auf den zurückgelegten Weg, ist somit eine Funktion der zwei Variablen U und V. Zur Bestimmung des minimalen Treibstoffverbrauchs ist also das Minimum einer Funktion zweier Variabler zu bestimmen, die geometrisch durch eine Fläche dargestellt wird. In unserem Fall ähnelt die Fläche einer Tasse, und dem Extremwert des Treibstoffverbrauchs entspricht ihr tiefster Punkt (Bild 68).

Maximum und Minimum sind zwei Begriffe, die untrennbar zusammengehören: Drehen wir unsere tassenähnliche Fläche um, so erhalten wir eine Fläche, die einem Hut ähnelt. Der höchste Punkt (das Maximum) des Hutes war vorher der tiefste Punkt (das Minimum) der Tasse. Sind wir auf dem Gipfel eines Berges, so kann uns ein Beobachter gleichzeitig an der tiefsten Tiefe eines Kessels sehen, wenn ein See in der Nähe ist, in dem der Berg gespiegelt wird. Deshalb sprechen wir auch ständig von der Bestimmung des Extremwertes und nicht des Maximums oder Minimums.

Bei der Abteufung einer Bohrung mit Hilfe einer Bohrturbine entstehen ebenfalls Extremwertaufgaben, die der vorstehend betrachteten Aufgabe ähneln. Eine Bohrung kann täglich Hunderte Tonnen Erdöl liefern, wenn sie fündig geworden ist. Das Abteufen einer Bohrung kostet viele hundert-

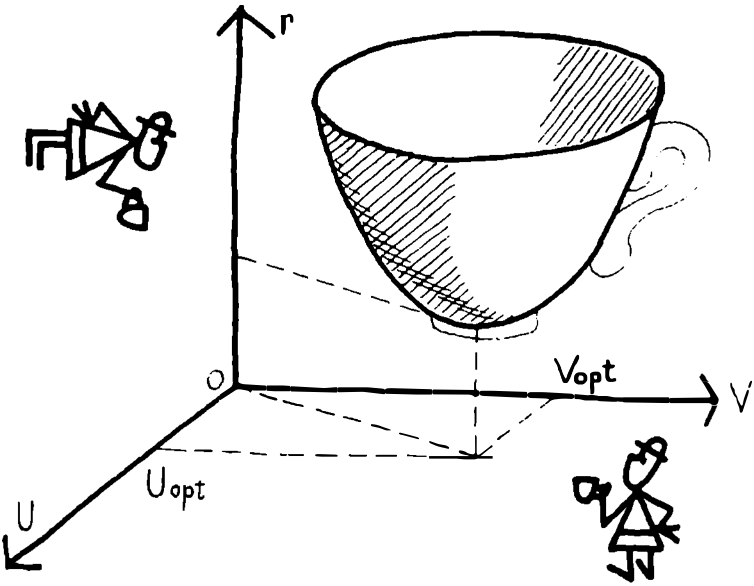


Bild 68

tausend Mark. Eine Verkürzung der Bohrzeiten bringt bedeutenden ökonomischen Gewinn. Sie läßt sich durch Erhöhung der Vortriebsleistung erreichen.

Bei der Abteufung mit einer Bohrturbine wird das Spülmittel unter Druck in das Bohrgestänge gegeben. Das Spülmittel treibt den Bohrer an, der das Gestein abbaut, und fördert gleichzeitig das Bohrgut an die Oberfläche.

Der sich drehende Bohrmeißel baut das Gestein ab, wenn auf ihn ein Druck wirkt. Durch Vergrößerung des Druckes läßt sich die Vortriebsleistung erhöhen. Allerdings sind dieser Erhöhung Grenzen gesetzt, denn bei sehr hohem Druck liegt der Bohrmeißel zu fest am Gestein an, die Drehzahl verringert sich, und die Vortriebsleistung sinkt ab. Die Funktion Vortriebsleistung in Abhängigkeit vom Bohrdruck P hat das Aussehen einer Parabel.

Mit ihrer Hilfe kann man den Bohrdruck bestimmen, für den die Vortriebsleistung maximal wird.

In dieser Form ist die Aufgabe jedoch allzusehr vereinfacht. Tatsächlich hängt die Vortriebsleistung noch von vielen anderen Einflußgrößen ab. In erster Linie ist sie auch von der Menge des die Bohrturbine durchfließenden Spülmittels abhängig: Eine Erhöhung der durch die Turbine gepumpten Flüssigkeitsmenge führt zur Erhöhung der Drehzahl des Bohrers und damit der Vortriebsleistung.

Die Erdrinde ist inhomogen, sie ähnelt einem Blätterteiggebäck aus einer Menge von Schichten unterschiedlicher Struktur. Es ist einleuchtend, daß die Vortriebsleistung auch stark von der Härte des Gesteins

abhängt. Die Vortriebsleistung ist somit bereits eine Funktion von drei Variablen.
Bei der Darstellung einer Funktion von drei Veränderlichen versagen die gewohnten geometrischen Vorstellungen — wir befinden uns im vierdimensionalen Raum. Doch auch hier haben Begriffe, die sich analog zum tiefsten Punkt eines Tals oder höchsten Punkt eines Gipfels bilden lassen, eine wohlumrissene Bedeutung.
Die Vortriebsleistung hängt tatsächlich nicht nur von drei, sondern von einer viel größeren Anzahl von Variablen ab. So wird z. B. die Drehzahl des Bohrers nicht nur von der Durchflußmenge der Bohrspülung, sondern auch von der Konsistenz der Flüssigkeit bestimmt. Der Bohrmeißel wird während des Betriebes abgenutzt, und sein Zustand hat wesentlichen Einfluß auf die Vortriebsleistung usw. Deshalb ist die Bestimmung der maximal möglichen Vortriebsleistung eine mathematische Extremwertaufgabe einer Funktion von vielen Veränderlichen.
Wenn die funktionale Abhängigkeit zwischen den Variablen bekannt ist, kann man das Extremum der Funktionswerte und der Werte der Variablen, für die das Extremum erreicht wird, mit den herkömmlichen mathematischen Methoden bestimmen. Diese Methoden sind in jedem Lehrbuch der Analysis zu finden. Nach einigen nicht schwierigen Operationen ist die Aufgabe auf die Lösung eines Gleichungssystems zurückgeführt. Gewöhnlich enthält das System soviel Gleichungen wie Unbekannte; es kann jedoch eine recht komplizierte Form haben.
Vielleicht erinnern Sie sich an dieser Stelle, verehrter Leser, wieviel Schwierigkeiten es bereiten kann, eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu lösen, wenn es sich nicht gerade um eine quadratische Gleichung, sondern um eine kompliziertere goniometrische oder Exponentialgleichung handelt.
Sicher ist Ihnen von Ihrer Schulzeit her im Gedächtnis geblieben, wie man so etwas macht: Man muß versuchen, geeignete Substitutionen zu finden, neue Variable so einzuführen, daß man eine lineare oder eine quadratische Gleichung erhält. Hier muß ich Sie jedoch enttäuschen, denn mit solchen Methoden haben Sie nur bei den Aufgaben aus dem Schulbuch Glück. Tatsächlich sind die Fälle sehr selten, bei denen man durch Substitution eine quadratische Gleichung erhält, so selten, daß es sich gar nicht lohnt, nach einer geeigneten Substitution zu suchen, wenn sich nicht sofort eine anbietet.
Es gibt nämlich auch Gleichungen, die sich gar nicht nach der Unbekannten auflösen lassen. Für solche Gleichungen läßt sich keine Lösungsformel angeben. Als Beispiel dafür kann neben den algebraischen Gleichungen höheren als vierten Grades auch die Gleichung

$$a^x - ax = 0$$

dienen. Eine Lösung läßt sich leicht erraten: $x = 1$. Doch eine explizite Formel für alle Lösungen gibt es nicht, und die zweite Lösung (diese Gleichung hat genau zwei Lösungen) läßt sich nicht explizit angeben.

Sie wissen sicher, daß sich bereits algebraische Gleichungen dritten und vierten Grades im allgemeinen nicht auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen und ihre Lösung viel Mühe bereitet.
Doch kehren wir zurück zur Extremwertberechnung. Der Weg desjenigen, der eine Extremwertaufgabe lösen will, kann sehr dornenvoll sein. Dabei können, wie das folgende Beispiel zeigt, bereits prinzipielle Schwierigkeiten auftreten.
Stellen Sie sich vor, die größte ganze Zahl sei zu bestimmen. Ich behaupte und beweise im Gegensatz zum gesunden Menschenverstand, daß 1 die größte ganze Zahl ist.
Angenommen, die größte ganze Zahl sei größer als 1. Wir wollen sie mit N bezeichnen (sagen wir, $N = 2$). Dann ist jedoch N^2 größer als N ($2^2 = 4$ ist tatsächlich größer als 2), und N^2 ist ebenfalls eine ganze Zahl. Also kann N nicht größte ganze Zahl sein. Doch das Quadrat von 1 ist nicht größer als 1 ($1^2 = 1$). Also ist 1 größte ganze Zahl!
Solch ein Unfug kommt zustande, weil wir angenommen haben, es gebe eine größte ganze Zahl, die Extremwertaufgabe habe also eine Lösung. Tatsächlich existiert jedoch keine Lösung, da die Menge der ganzen Zahlen gegen Unendlich geht.
Nach einer treffenden Bemerkung des deutschen Mathematikers *Hausdorff* kann man aus der Annahme, daß zwei mal zwei fünf ist, folgern, daß es Hexen gibt. Im allgemeinen folgt aus einer beliebigen falschen Behauptung eine beliebige andere falsche Aussage.

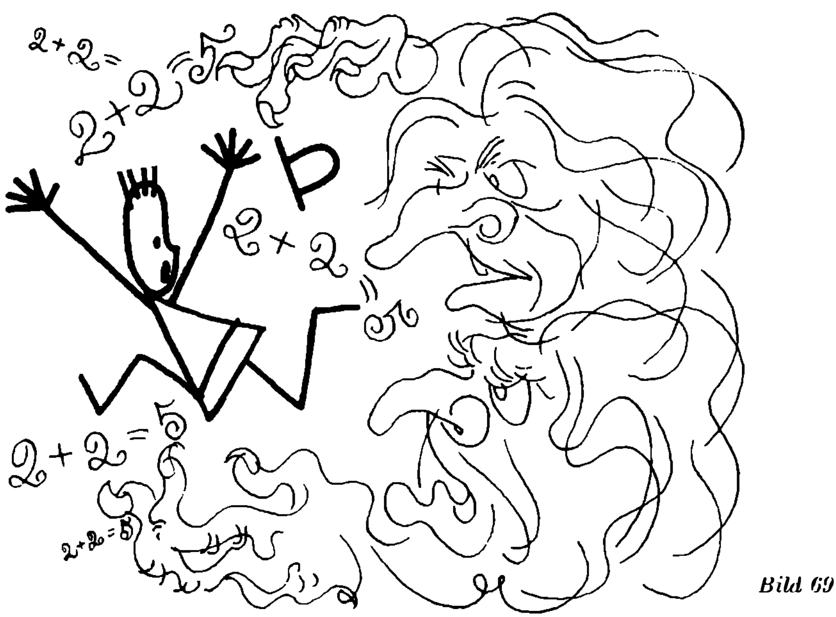


Bild 69

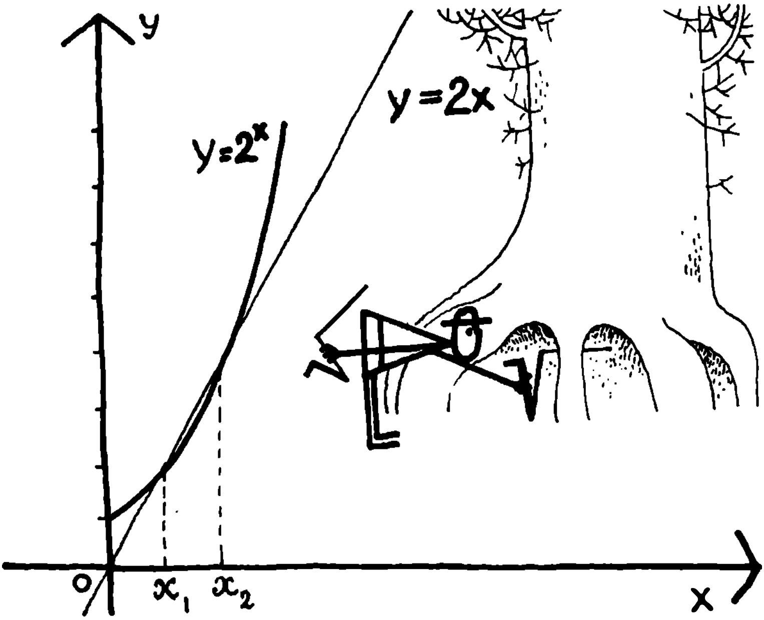


Bild 70

Das betrachtete Beispiel und die sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen sind offenbar für alle von Wichtigkeit, die sich mit theoretischer oder experimenteller wissenschaftlicher Arbeit beschäftigen. Geht man von einer falschen Ausgangsposition aus oder benutzt man fehlerhafte Überlegungen, so können selbst bei noch so exakter Arbeit falsche oder sogar paradoxe Schlußfolgerungen entstehen. Oft rettet dann der gesunde Menschenverstand die Situation, doch auf ihn kann man sich auch nicht immer verlassen. (Davon wird später noch die Rede sein, wenn ich ausführlicher über die Arbeitsmethoden des Mathematikers sprechen werde.) Wir wollen annehmen, daß die notwendige Untersuchung durchgeführt und die Existenz einer Lösung bewiesen sei, die gefundene Gleichung aber so kompliziert ist, daß man sie nicht ohne weiteres lösen kann. Was kann man in solch einer Situation tun? Man greift zu Näherungsmethoden zur Lösung von Gleichungen. Hier gibt es analytische und grafische Verfahren. Hat man z. B. die Gleichung

$$2^x - 2x = 0$$

zu lösen, so zeichnet man in einem Koordinatensystem die beiden Funktionen $y = 2^x$ und $y = 2x$. Die gesuchten Lösungen x_1 und x_2 sind die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven (Bild 70). Selbstverständlich liefert das grafische Verfahren die Lösung nur mit einer begrenzten Genauigkeit, doch es kann einen Weg zur exakteren analytischen Näherungsbestimmung der gesuchten Lösung zeigen.

Mit einem Wort, für Funktionen von einer Veränderlichen sieht die Sache gar nicht so schlecht aus; die Gleichung läßt sich numerisch lösen. Hat man jedoch ein Gleichungssystem mit einer großen Anzahl von Unbekannten zu lösen, so können die Schwierigkeiten ins Unermeßliche steigen, selbst bei nur näherungsweiser Lösung. In solch einem Fall helfen uns heute die elektronischen Rechner. Allerdings können sie auch nicht in jeder Situation helfen.
Schätzen Sie die Lage selbst ein: Ein elektronischer Rechner, der 20000 Operationen in der Sekunde ausführen kann, benötigt für die Lösung eines einfachen linearen algebraischen Gleichungssystems aus 100 Gleichungen mit 100 Unbekannten eine Stunde! Zur Bestimmung der Parameter für die maximale Vortriebsleistung bei der Abteufung einer Bohrung benötigt man die Lösung jedoch sehr schnell, binnen weniger Sekunden oder Minuten. Denn bald befindet man sich schon wieder in einer ganz anderen Situation — man kommt in eine andere Gesteinsschicht, das Bohrgerät hat sich abgenutzt usw. — und die erhaltenen Ergebnisse haben keinen Wert mehr.
Was kann man hier tun? — Davon wird noch die Rede sein.

Extremale Kurven

Will man auf kürzestem Weg von der Tür zum Fenster gelangen, so muß man sich auf einer geraden Linie bewegen. Befinden sich jedoch viele Möbel im Zimmer, die sich nicht wegschieben lassen, so ist der kürzeste Weg bereits schwieriger zu finden.
Angenommen, wir haben vom traditionellen Punkt A zum nicht weniger traditionellen Punkt B zu gehen, wobei es zwei Wege gibt: einen geraden, doch schwer begehbaren, und einen gewundenen, langen, dafür aber leichter begehbaren. Der gerade Weg ist kürzer, doch dicker Schlamm erschwert jede Fortbewegung. Ist die Aufgabe gestellt, von A nach B auf dem kürzesten Weg zu gehen, so muß man durch den Schlamm waten. Ist jedoch nach minimaler Zeit oder minimaler Kraftanstrengung gefragt, so wird man einen Umweg wählen.
Vor der Bestimmung des günstigsten Weges aus einer Menge möglicher Wege ist also genau zu formulieren, in welchem Sinn der ausgewählte Weg besser sein soll als die anderen.
Es ist nicht sehr schwierig, abzuwägen, wie man auf kürzestem Weg von der Tür znm Fenster gelangt. Wie findet man aber den kürzesten Weg vom Gipfel eines Berges, z. B. des Elbrus, zu seinem Fuß? Die Antwort auf diese Frage ist gar nicht so offensichtlich. Ein blindes Pferd löst die Aufgabe, ohne viel zu überlegen: Es geht ganz einfach immer die Richtnng, die am steilsten abfällt. Genauso verhält sich das herabfließende Wasser.
Interessant ist die „physikalische“ Lösung dieser Aufgabe: Stellen Sie sich eine beliebige glatte Oberfläche vor. Wir wollen noch annehmen, daß sie konvex sei (wie eine Kugeloberfläche). Spannt man zwischen zwei

Punkten dieser Fläche einen dünnen Gummi, so liegt er auf der kürzesten Verbindungslinie der Punkte.
Hat man jedoch die kürzeste Autostraße auf einen Berg zu legen, wobei die Steigerung nicht mehr als, sagen wir, 5% betragen darf, so wird die Aufgabe der Bestimmung dieses Weges schon komplizierter.
Die Tiere und auch die Menschen lösen die Aufgabe der Bestimmung des optimalen Weges oder, wie die Mathematiker sagen, der Extremalen, nicht immer richtig.
Man hat mir erzählt, daß ein Hund, der einem Hasen nachjagt, in jedem Moment direkt auf den Hasen zuläuft. So kann er den Hasen zwar fangen, wenn er schneller laufen kann als der Hase, doch nicht in der kürzestmöglichen Zeit. Will er das in kürzester Zeit schaffen, so muß er seine Taktik ändern: Er darf nicht auf den Punkt zulaufen, in dem sich der Hase im betreffenden Moment befindet, sondern muß seine Richtung auf einen Punkt einstellen, in dem der Hase in einer gewissen Zeit sein wird. Den Jägern und den Artilleristen ist diese Taktik genau bekannt. Sie schießen zwar auch oft daneben, doch das passiert, weil sie den Treffpunkt von Geschoß und Ziel nicht richtig berechnet haben.
Viele wichtige Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik führen auf das Bestimmen der Extremalen. Der Teil der Mathematik, der sich damit beschäftigt, trägt die Bezeichnung „Variationsrechnung".
Obwohl einige Aufgaben dieses Gebietes schon durch die Geometer des Altertums gelöst wurden, konnte sich die Variationsrechnung erst auf der Basis der Differential- und Integralrechnung systematisch entwickeln. Sie wurde in der Mitte des 18. Jahrhunderts durch *Leonhard Euler* geschaffen. Neue Probleme der Physik und der Technik, besonders der Automatisierung und der Kybernetik, führten zur Schaffung neuer Methoden in der Variationsrechnung, die in letzter Zeit in einer stürmischen Weiterentwicklung begriffen sind.

Leonhard Euler

Ich habe nicht die Absicht, eine Geschichte der Mathematik zu schreiben. Nachdem ich jedoch *Leonhard Euler* erwähnt habe, ist die Versuchung sehr groß, etwas mehr über diesen vielseitigen Menschen zu erzählen, der aus der an Talenten reichen mathematischen Welt herausragt.
Euler wurde im Jahre 1707 in Basel in der Familie eines Pastors geboren. Sein Vater war ein Mensch mit sehr vielseitigen Kenntnissen. Seine besondere Liebe galt der Mathematik. Er bereitete den Sohn auf die geistliche Laufbahn vor, versäumte jedoch nicht, ihm eine umfassende Allgemeinbildung zu vermitteln. Schon als Schüler des Baseler Gymnasiums besuchte der junge *Euler* in der Freizeit die Vorlesungen des berühmten Mathematikers *Johann Bernoulli*, der ihn auch zum Studium schwieriger mathematischer Bücher anregte.
Mit zwanzig Jahren hatte *Leonhard Euler* bereits Theologie, Medizin und östliche Sprachen studiert. 1727 wurde er an den Lehrstuhl für Physiolo-

gie der Petersburger Akademie berufen, nachdem seine Kandidatur für den Lehrstuhl für Physik an der Baseler Universität abgelehnt worden war. Zu dieser Zeit hatte er bereits bedeutende Leistungen in der Mathematik und der Physik vollbracht: So war z. B. seine Arbeit über die Anordnung der Masten auf einem Schiff von der Pariser Akademie gedruckt und sehr ehrenhaft rezensiert worden.

In Petersburg lebte *Euler* viele Jahre. Im Jahre 1729 wurde er Professor für Physik an der Petersburger Akademie, und ein Jahr später übernahm er den Lehrstuhl für Mathematik, den er bis 1741 innehatte. Zu dieser Zeit gerieten in Rußland die Wissenschaften in Verfall; die zaristische Verwaltung erschwerte jegliche wissenschaftliche Tätigkeit. Deshalb nahm er eine Einladung Friedrichs des Zweiten nach Berlin an und wurde Direktor der Klasse für Mathematik der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1766 kehrte *Euler* nach Petersburg zurück, wo er bis zu seinem Tode blieb.

Die Schaffenskraft *Eulers* war sehr groß. Etwa 900 wissenschaftliche Arbeiten aus seiner Feder sind bekannt. Seine Interessen reichten sehr weit, und seine Arbeiten hatten grundlegende Bedeutung. So hat er z. B. in der Astronomie die Theorie der Mondbewegung bis zur praktischen Anwendung geführt; bedeutende Beiträge zur Hydrodynamik und Optik, zur Nautik und Kartographie, zur Ballistik und Zahlentheorie tragen seinen Namen. Die Funktionentheorie, die Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen sowie die schon erwähnte

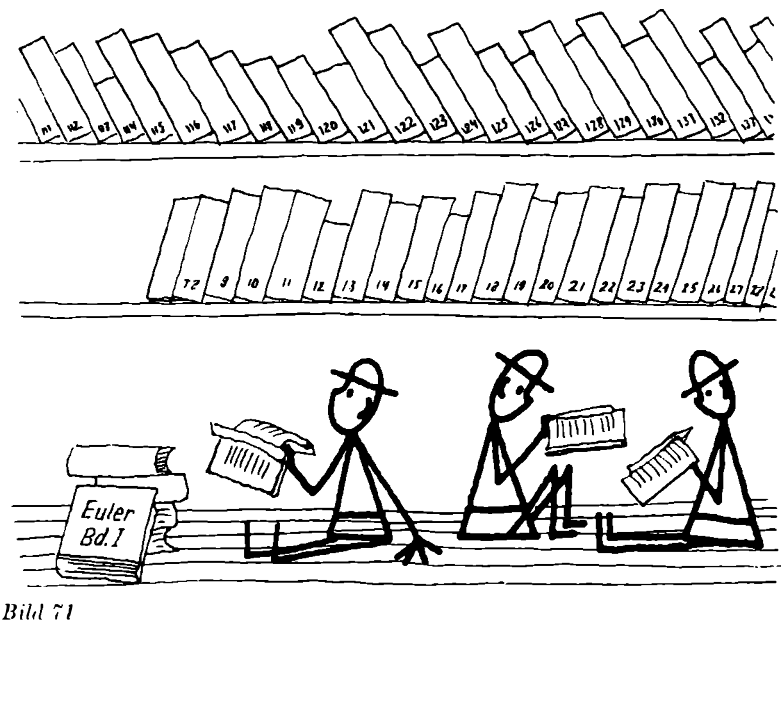


Bild 71

Variationsrechnung gehen auf *Euler* zurück. Außerdem hat *Euler* Arbeiten über Theologie, Medizin, Physiologie, Musik und andere Wissensgebiete geschrieben. Charakteristisch für alle Arbeiten *Eulers* ist die konkrete Aufgabenstellung und die Ausführung bis zur Anwendbarkeit.
Im Jahre 1736 verlor *Euler* ein Auge. Man sagt, daß er davor eine umfangreiche mathematische Arbeit innerhalb dreier Tage ausgeführt hat, für die andere Professoren einige Monate veranschlagten. Doch das hielt seine wissenschaftlichen Arbeiten nicht im geringsten auf. Als er kurz nach seiner Rückkehr nach Petersburg das zweite Auge einbüßte, behielt er seine Schaffenskraft; er diktierte seinem Sohn und seinen Schülern seine Arbeiten. Sogar noch an seinem Todestage, dem 18. September 1783, beschäftigte er sich mit astronomischen Berechnungen.
Vor dem ersten Weltkrieg hat die Schweizer Gesellschaft der Naturforscher auf internationale Veranlassung mit der Herausgabe der Gesammelten Werke Eulers begonnen. Ursprünglich waren etwa 40 Bände geplant. Inzwischen sind 50 Bände veröffentlicht, und jetzt schätzt man, daß der Gesamtumfang etwa 200 Bände betragen wird.

Seifenblasen

Die Variationsrechnung liefert den mathematischen Apparat für einen großen Aufgabenkreis. Mit ihrer Hilfe kann man nicht nur den kürzesten Weg vom Punkt A zum Punkt B bestimmen, sondern noch viele andere Extremwertaufgaben lösen.
Es ist allgemein bekannt, daß unter allen ebenen Figuren, die gleichen Umfang haben, der Kreis die größte Fläche einnimmt. Im dreidimensionalen Raum hat die Kugel unter allen Figuren mit gleicher Oberfläche das größte Volumen. Umgekehrt — von allen geometrischen Figuren mit gleichem Volumen besitzt die Kugel die kleinste Oberfläche. Eben deshalb sind Seifenblasen kugelförmig.
Wir wollen nun einige weniger offensichtliche Probleme betrachten. Ein Kreis begrenzt eine Fläche, z. B. die Oberfläche eines Eimers. Von allen Flächen, die durch eine Kreislinie begrenzt werden, hat der ebene Kreis die kleinste Fläche. Wir verbiegen nun die Grenzlinie so, daß nicht mehr alle Punkte in einer Ebene liegen. Es gibt sehr viele Flächen, deren Umrandung so aussieht. Wie findet man aber hier die Fläche, die von allen möglichen die geringste Größe hat? Das ist bereits eine schwierige Aufgabe, und ihre Lösung erfordert die Anwendung der Methoden der Variationsrechnung. Es zeigt sich — und auch das hat *Euler* bewiesen —, daß die Minimalfläche in jedem Punkt sattelförmig ist.
Interessant ist auch die physikalische Lösung dieser Aufgabe. Wir formen die Umrandung aus dünnem Messingdraht und tauchen sie in Seifenwasser. (Seifenlösung ist eine Flüssigkeit mit geringer Oberflächenspannung.) Die Drahtschleife wird dann von einer dünnen Seifenhaut bespannt, deren Fläche minimal ist. Bei diesen Überlegungen vernachlässigen wir z. B. die Schwerkraft und betrachten nur die der Oberflächenspannung

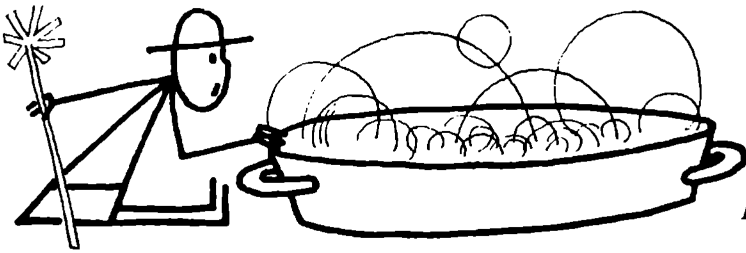


Bild 72

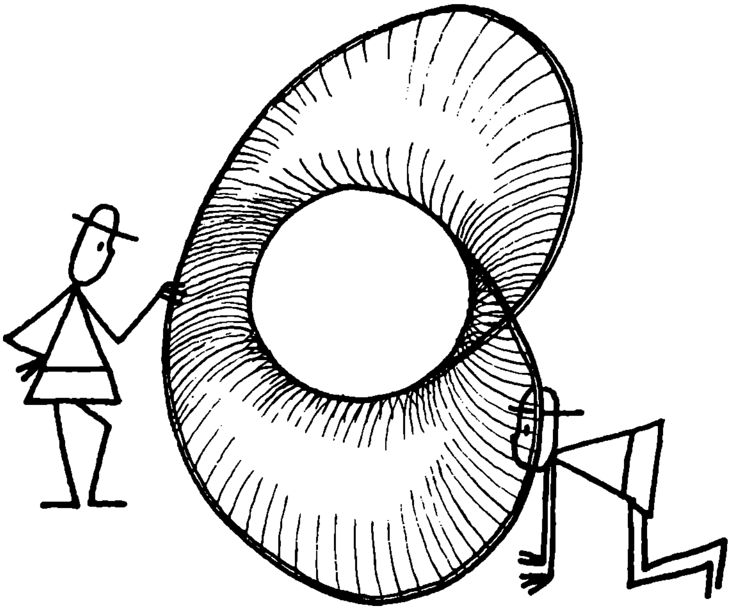


Bild 73

der Seifenlösung entsprechende Kraft. Das Gleichgewicht wird erreicht, wenn die Fläche der Seifenhaut minimal ist, da dabei die durch die Oberflächenspannung bedingte potentielle Energie minimal wird.
Sie haben sicher noch nicht vergessen, was für ein Vergnügen Ihnen das Spiel mit Seifenblasen bereitet hat. Riskieren Sie eine Rückkehr in die Kindheit und führen Sie einige Experimente mit Seifenlösung durch![1])
Löten Sie aus weichem Draht einen Ring mit zwei Griffen (dann können Sie die Schleife nach Belieben transformieren) und tauchen Sie ihn in die Seifenlösung. Der Ring wird von einer ebenen Seifenfläche überspannt. Jetzt deformieren Sie den Ring langsam. Es zeigt sich, daß man bei

[1]) Ein günstiges Rezept für solch eine Lösung: 10 g reine trockene Oleinseife werden in 500 g destilliertem Wasser gelöst. Jeweils 15 Teile der Lösung werden mit 11 Teilen Glyzerin vermischt. Die Drahtschleife, die eingetaucht wird, darf nicht sehr groß sein, höchstens 10 ··· 15 cm im Durchmesser.

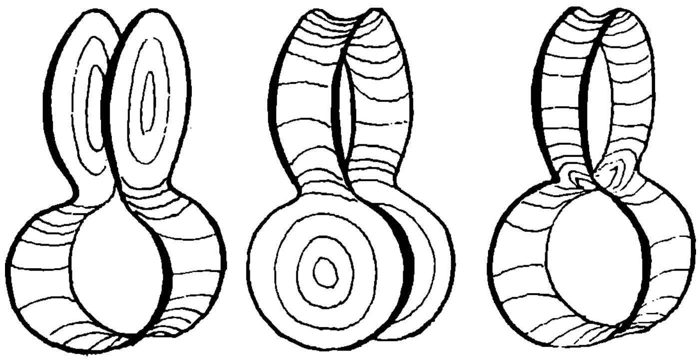


Bild 74

stetigem Verbiegen des Ringes die Seifenhaut, die, auf den Ring gespannt, eine zweiseitige Membran ist, in die Form eines einseitigen Möbiusschen Bandes bringen kann (Bild 73). Das ist sehr verwunderlich, da die Ausgangsfläche und die erhaltene Fläche topologisch nicht äquivalent sind!
Biegt man den Ring zu der im Bild 74 dargestellten Raumkurve, so lassen sich auf eine solche Figur drei verschiedene Minimalflächen aufspannen. Die letzte ist nicht einfach zusammenhängend (sie hat zwei Öffnungen), während die ersten zwei einfach zusammenhängend sind. Das bedeutet, sie lassen sich ohne Risse zu einem Punkt zusammenziehen (wenn der Ring aus Gummi wäre).
Alle diese hübschen geometrischen Figuren dienen nicht nur der ästhetischen Bewunderung. Minimalflächen sind am stabilsten, und diese Eigenschaft wird in der Technik bei statischen Konstruktionen ausgenutzt.

Wie sieht ein Mathematiker aus?

In den vorangegangenen Abschnitten habe ich Ihnen einiges über den Gegenstand der Wissenschaft Mathematik berichtet. Doch — die Mathematik wird von Mathematikern betrieben, und das Interesse für diese mysteriösen Individuen, die eine solche Wissenschaft meistern, ist nur natürlich.
Ein älterer Gelehrter wird häufig mit einem wallenden Bart dargestellt, auf einer Stehleiter sitzend und in verstaubten Büchern lesend. Mathematiker stellt man sich dagegen oft jünger vor. Statistisch ist das nicht unrichtig, denn berühmte Mathematiker konnten mitunter schon mit 20 Jahren bedeutende wissenschaftliche Erfolge aufweisen, die sie verdientermaßen berühmt machten. Aus irgendeinem Grund werden Mathematiker manchmal als langhaarige und liederlich gekleidete, zerzauste, kurzsichtige und zerstreute Person unbestimmten Alters dargestellt, die. wenn sie nicht gerade in den Wolken schweben, die Leute auf der Straße anrempeln oder in irgendeiner Ecke in unbequemer Stellung sitzen und komplizierten Gedanken nachhängen.
Ich kann nicht abstreiten, daß es auch solche Mathematiker gibt. Doch muß ich Sie sogleich enttäuschen: Solche meist sehr jungen „Wunderkinder“ wollen sich nur interessant machen. In Wirklichkeit sind es normale Menschen, und zu Wunderkindern wurden sie nur durch eitle Verwandte oder wenig gebildete Freunde gemacht, die ihnen besser ordentlich die Haare geschnitten, den Kopf gewaschen und sie ausgelacht hätten. Mir gefällt die Definition: Ein Wunderkind — das ist ein normales Kind unnormaler Eltern.
Es gibt noch einen anderen „Gelehrtentyp“ — die Gestalt des trockenen weltfremden Paukers, der alles buchstäblich genommen wissen will und sinnloses Auswendiglernen von Lehrsätzen und Lösungen nach einem genau vorgegebenen Plan verlangt. Solche Menschen sind davon überzeugt, daß die Wissenschaft langweilig sein muß, sonst ist es keine Wissenschaft. Man trifft sie auch unter den Mathematikern hin und wieder an, doch nur als traurige Karrikaturen dieses Berufs.
In Wirklichkeit gibt es aber auch unter den Mathematikern viele aufgeschlossene Menschen, die sich auch für die schönen Künste oder den Sport interessieren. Man findet Modehelden, Hansdampfs und Herzensbrecher, auch hübsche Puppen sind in ihren Reihen.

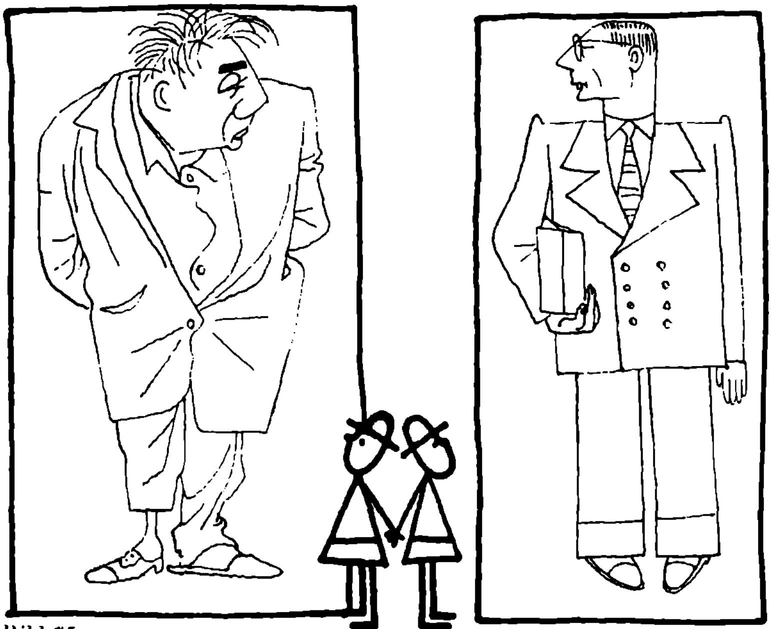


Bild 75

Worin unterscheidet sich aber dann der Mathematiker vom Mediziner, Biologen oder Ökonomen? Der Hauptunterschied besteht, wie mir scheint, in den Methoden des wissenschaftlichens Denkens.

Woher kommen die Axiome?

Viele Menschen stellen sich unter der Mathematik eine deduktive Wissenschaft vor, in der die Theoreme, Resultate und Fakten mit Hilfe logischer Überlegungen erhalten werden, ausgehend von einigen wenigen Axiomen (Grundannahmen), die offensichtlich scheinen und einfach keines Beweises bedürfen.
Bis zu einem gewissen Grad ist das zutreffend, obwohl ich noch einige kritische Bemerkungen zur scheinbaren Offensichtlichkeit der Axiome machen muß. Das ist jedoch nur die eine Seite der Sache.
Wohl jeder hat von der Schule her eine bestimmte Vorstellung, wie die deduktive Mathematik aufgebaut wird; diese Vorstellung ist allerdings wegen der begrenzten schulischen Möglichkeiten meist etwas verzerrt. Ich möchte nun etwas bei einer anderen Seite der Sache verweilen, dem induktiven Herangehen beim Aufbau jeder mathematischen Theorie, den Geburts- und Sterbeprozessen der mathematischen Theorien.
Man kann der Meinung sein, daß eine mathematische Theorie folgendermaßen aufgebaut wird: Der Mathematiker denkt sich gewisse Ausgangs-

thesen — Axiome— aus, prüft ihre Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit nach (andernfalls würde aus ihnen nichts Vernünftiges folgen) und zieht dann aus ihnen verschiedene Schlußfolgerungen, entweder zu seinem reinen Vergnügen oder um z. B. das Verzeichnis seiner wissenschaftlichen Arbeiten zu vergrößern.
Solch eine Meinung sieht zwar primitiv aus, es gibt aber bis zum heutigen Tage Menschen, die auf diesem Standpunkt stehen. Zu ihnen gehören nicht nur solche, die von der Mathematik sehr wenig wissen, sondern sogar einige Fachleute, die die Anwendung der Mathematik in den Naturwissenschaften propagieren.
In Wirklichkeit denkt sich der Mathematiker nicht einfach irgendein Axiomensystem aus und baut daraus Theorien ohne Ziel und ohne Sinn. Jede vernünftige mathematische Theorie spiegelt die reale Wirklichkeit wider: Der Mathematiker schematisiert, idealisiert und ordnet die realen Erscheinungen, wenn er die Ausgangsthesen seiner Theorie aufstellt. Die Schlußfolgerungen, die er zieht, vergleicht er mit den Erscheinungen der Wirklichkeit.

Zwei Denkarten

In der Wissenschaft bedienen wir uns, wie auch im Leben, des Denkens, der Überlegung. Es gibt zwei Typen von Überlegungen: beweisende und nichtbeweisende, aber überzeugende. Letztere nennt man Plausibilitätsbetrachtungen[1]).
Plausibilitätsbetrachtungen stützen sich auf Induktion, Analogien, Beobachtungen, Hypothesen und Experimente, also auf Methoden, die allen Naturwissenschaftlern geläufig sind.
Hier ist nicht von der vollständigen (mathematischen) Induktion die Rede, mit deren Hilfe der binomische Lehrsatz in der Schule bewiesen wird, sondern von der gewöhnlichen Induktion, der Ableitung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten aus der Beobachtung spezieller Erscheinungen.

[1] Die großen Mathematiker waren sich stets über den Unterschied zwischen Beweisen und Plausibilitätsbetrachtungen im klaren, insbesondere auch über die Rolle der Plausibilitätsbetrachtungen in allen Zweigen der Wissenschaft, nicht zuletzt in der schöpferischen Arbeit des Mathematikers. Zu diesem Thema ist sowohl von den Klassikern als auch von Zeitgenossen viel gesagt worden. Treffend sind diese Fragen in zwei vorzüglichen Büchern des in der USA tätigen großen ungarischen Mathematikers und Pädagogen *G. Polya* dargestellt.
Das erste Buch, das sich vor allem an Lehrer und Studierende der Mathematik wendet, ist unter dem Titel „Schule des Denkens“ in deutscher Sprache im A. Francke Verlag, Bern (1949, 266 Seiten) erschienen. Eine erweiterte Ausgabe wurde im Jahre 1966 als Übersetzung aus dem Englischen im Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, unter dem Titel „Vom Lösen mathematischer Aufgaben“ herausgebracht. Hierin werden anhand schulmathematischer Probleme die Überlegungen dargestellt, die nötig sind, um die Lösung einer Aufgabe zu finden, etwas zu beweisen und Schlüsse zu ziehen.
Das zweite Buch heißt „Mathematics and plausible resoning“ (Mathematik und plausibles Schließen). Es ist im Jahre 1954 in zwei Bänden im Verlag Princeton University Press erschienen (280 und 188 Seiten). In diesen Bänden werden auch Probleme der höheren Mathematik, der Analysis, der Variationsrechnung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. Die allgemeinen, über den ganzen Text verstreuten Überlegungen beziehen sich auch auf beliebige andere Zweige der Wissenschaft.
Die Bezeichnung „Plausibilitätsbetrachtung“ bzw. „plausibles Schließen“ stammt offenbar von *G. Polya*. Der ältere Ausdruck „Induktion“ wird in einem etwas weiteren Sinn gebraucht.

Unsere mathematischen Kenntnisse sind durch Beweise gesichert. Aber, der Weg zu diesen Kenntnissen führt über Plausibilitätsbetrachtungen. Man geht von gewissen Voraussetzungen aus und stützt sich auf Annahmen und Vermutungen. Diese Annahmen können so zuverlässig wie die Newtonschen Gesetze oder das Periodensystem *Mendelejews* sein, oder weniger zuverlässig wie die modernen Hypothesen über die Entwicklung des Universums oder die Entstehung des Lebens auf der Erde, bei denen irgendein neuer Fakt alles über den Haufen werfen kann.

Die Ableitung des Pythagoreischen Lehrsatzes oder des Lösungswegs für quadratische Gleichungen sind beweisende Überlegungen. Die induktiven Gründe, die für die Richtigkeit des Gravitationsgesetzes oder des Massenwirkungsgesetzes sprechen, oder die Darwinsche Theorie der natürlichen Auslese sind Plausibilitätsbetrachtungen. Sie stützen sich auf die Beobachtung einer beschränkten Anzahl von Experimenten und sind deshalb Mutmaßungen, wenn auch geniale.

Plausibilitätsbetrachtungen und nicht Beweise sind die Überlegungen des Arztes, der eine Diagnose stellt, die Überlegungen Sherlok Holmes, der den Spuren eines Verbrechers folgt, die dokumentarisch belegten Aussagen über das Leben im Römischen Reich, die statistisch begründeten Angaben des Ökonomen über den Nutzen oder Schaden der Einführung des Leistungslohnes. Der Beweis unterscheidet sich von der Plausibilitätsbetrachtung wie ein Fakt von einer Vermutung. Ein Beweis ist sicher, endgültig und unbestreitbar. Eine Plausibilitätsbetrachtung ist nicht immer richtig, sie kann umstritten und manchmal riskant sein.

Beweise sind ein wichtiger Bestandteil der Mathematik; jedoch ist auch jede beliebige andere Wissenschaft von beweisenden Betrachtungen durchdrungen.

Wenn man den Satz des Pythagoras einwandfrei beweist, so erfährt man nichts Neues; man erfährt lediglich, daß die Hypothese „Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der Kathetenquadrate" richtig ist.

Das Neue enthielt die Hypothese. Sie mußte zunächst erraten werden, bevor man beginnen konnte, sie zu beweisen. Die Beweise liefern uns also keine neuen Erkenntnisse über unsere Umwelt. Alles Neue, was wir erfahren, entstammt Plausibilitätsbetrachtungen.

In der Mathematik ist genügend genau geklärt, was ein Beweis ist. Die Beweismethoden und die Begriffe der Strenge und der Genauigkeit der Schlüsse ändern sich im Lauf der Jahrhunderte. Jeder Mathematiker weiß, auf welchem Niveau wir uns in der modernen Mathematik befinden.

Bei Plausibilitätsbetrachtungen gibt es keine Normen, keine Theorie, die etwa der Logik des Beweisens entspräche; trotzdem werden sie von jedem Naturwissenschaftler gebraucht wie die Luft zum Atmen — ohne sie wäre keine Wissenschaft denkbar.

Man wird kaum ein Verfahren zum Auffinden von Neuem entwickeln können, dazu ist die Vielfalt der menschlichen Individualität zu groß.

Wie viele andere Arten menschlicher Tätigkeit lernt man das Anstellen von Plausibilitätsbetrachtungen durch Nachahmung und durch praktische Übung.
Auf Grund ihrer Besonderheiten ist die Mathematik vorzüglich geeignet, um das Anstellen von Plausibilitätsbetrachtungen zu erlernen. Eine fertige mathematische Theorie scheint ein nur mit Beweisen operierendes System zu sein. Jedoch die Schaffung einer solchen Theorie verläuft in der Mathematik genauso wie in einer beliebigen anderen Wissenschaft. Bevor man irgendeine Behauptung beweisen kann, muß man sie entdecken, erraten; man muß eine Vermutung haben.
In einem strengen Beweis muß man begründete, beweiskräftige Schlüsse von unbegründeten Annahmen unterscheiden. In der Plausibilitätsbetrachtung ist die Unterscheidung zwischen mehr oder weniger vernünftigen Annahmen nötig, die Belegung der Vermutung durch die vorhandenen Fakten, das bedingungslose Suchen nach Fakten, die der Vermutung widersprechen, das Gegenüberstellen und das erneute Überlegen.
Absichtlich habe ich die Suche nach Fakten, die der Vermutung widersprechen, betont. Im täglichen Leben trifft man nicht immer das Bestreben, unbedingt nach der Wahrheit zu suchen: Unkenntnis stört mitunter nicht die Bequemlichkeit, während Kenntnis unerwünschte Entscheidungen notwendig machen kann. In der Wissenschaft können aber Selbstzufriedenheit und der Glaube an die eigene Unfehlbarkeit zur Katastrophe führen.
Die folgenden Beispiele sollen Ihnen zeigen, zu welchen Trugschlüssen leichtfertige Plausibilitätsbetrachtungen führen können.
Wenn wir eine Küchenschabe auf den Tisch setzen und mit den Fingern auf den Tisch klopfen, läuft diese weg. Setzen wir eine Küchenschabe, die ihre Beine verloren hat, auf den Tisch, und klopfen wieder, so läuft diese nicht weg. Also: Die Küchenschabe hört mit den Beinen! Diese Schlußfolgerung sieht wie ein Witz aus. Jedoch vor gar nicht allzu langer Zeit wurde noch behauptet, daß die Erkrankung eines Menschen an Cholera, Grippe oder Typhus eine Strafe Gottes sei. Später erkannte man sie als Folge der Ansteckung durch Übertragung von Mikroben oder Viren.
Ein Meisterstück „wissenschaftlicher" Plausibilitätsbetrachtung und intellektueller Hochnäsigkeit, mit dem sich die Pioniere der Raumfahrt auseinanderzusetzen hatten, findet sich in dem Artikel eines gewissen Professors *A. U. Becerton* aus dem Jahre 1926:
„Die überaus dumme Idee eines Schusses zum Mond ist ein Beispiel der grenzenlosen Absurditäten, zu denen im Ergebnis der erschreckend engen Spezialisierung Wissenschaftler gelangen, die in gedankendichten Zellen in völliger Isolierung voneinander arbeiten. Versuchen wir einmal, diese Idee kritisch zu analysieren. Damit ein Geschoß die Schwerkraft der Erde überwinden kann, muß es eine Anfangsgeschwindigkeit von mindestens 11 km/s haben. Die äquivalente Wärmeenergie für ein Gramm des Geschosses beträgt für diese Geschwindigkeit mindestens 15180 Kalorien ...
Die Energie des Nitroglyzerins — des brisantesten Sprengstoffs, den wir

besitzen — ist geringer als 1500 Kalorien je Gramm. Demzufolge besitzt dieser Sprengstoff nur $^1/_{10}$ der Energie, die er benötigen würde, nur um sich selbst von der Erde abzusetzen, sogar ohne Berücksichtigung irgendwelcher zusätzlicher Belastung ...
Daraus geht hervor, daß die Idee von Grund auf unrealistisch ist ..."
Dieses Zitat verdient eine ausführlichere Betrachtung, um festzustellen, wie es kommen konnte, daß diese „erschreckende Spezialisierung" den ehrwürdigen Professor so sehr in die Irre geführt hat.
Sein erster Fehler verbirgt sich in dem Satz: Die Energie des Nitroglyzerins — des brisantesten Sprengstoffs ... Es müßte jedem klar sein, daß wir von einem Raketentreibstoff Energie verlangen und nicht Brisanz, schnelles Freiwerden der Energie. Nitroglyzerin und ähnliche Sprengstoffe enthalten je Gewichtseinheit weniger Energie als eine Mischung aus Kerosin und flüssigem Sauerstoff. Das wurde bereits von *Ziolkowski* und *Goddard* vor vielen Jahren erkannt.
Der zweite Fehler *Becertons* ist noch weniger verzeihlich. Soll doch das Nitroglycerin ruhig nur $^1/_{10}$ der Energie besitzen, die zur Überwindung der Schwerkraft nötig ist. Das bedeutet lediglich, daß zum Auflassen eines Kilogramms Nutzlast in den Kosmos zehn Kilogramm Nitroglyzerin erforderlich sind.
Der Treibstoff selbst braucht gar nicht unseren Planeten zu verlassen; er kann in der Nähe der Erdoberfläche verausgabt werden — das Wesen der Sache besteht darin, daß der Nutzlast die nötige Energie vermittelt wird. Als 33 Jahre nach der Erklärung Professor *Becertons* über die Unmöglichkeit kosmischer Flüge Lunik II startete, wurde der größte Teil des aus mehreren Tonnen Kerosin und flüssigem Sauerstoff bestehenden Treibstoffs unweit der Erdoberfläche verbraucht, doch eine halbe Tonne Nutzlast erreichte das Meer des Regens auf dem Mond.
Wir wollen keine Zeit mehr darauf verwenden, Plausibilitätsbetrachtungen zu analysieren, die sich auf die Bewegung von Raumflugkörpern oder irgendwelche anderen Probleme beziehen. Ich wollte lediglich zeigen, daß auch das Anstellen von Plausibilitätsbetrachtungen gar nicht so einfach ist.
Die Überzeugungskraft von Plausibilitätsbetrachtungen ist in den einzelnen Zweigen der Wissenschaft unterschiedlich. In der Physik gibt es recht überzeugende Schlüsse; in der Medizin ist die Beweiskraft von Plausibilitätsbetrachtungen oft recht gering.
Unter den Mathematikern geht eine Anekdote um:
„Der Physiker nimmt an", so sagt der Mathematiker, „60 sei durch alle ganzen Zahlen teilbar. Er bemerkt, daß 60 durch 1, 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. Er prüft noch einige andere Zahlen nach, z. B. 10, 15, 20 und 30, die er, wie er sagt, zufällig ausgewählt hat. Da 60 auch durch diese Zahlen teilbar ist, betrachtet er die experimentellen Daten für seine Annahme als ausreichend."
„Ja, sehen Sie sich doch einmal den Ingenieur an", entgegnet der Physiker. „Der Ingenieur nimmt an, daß alle ungeraden Zahlen Primzahlen seien.

Er stellt fest, daß die 1 eine Primzahl ist. Dann kommen 3, 5 und 7, alles zweifellos Primzahlen. Danach kommt die 9. Diese ist ein unangenehmer Fall, denn sie ist offenbar keine Primzahl. Doch 11 und 13 sind wieder Primzahlen. Er kehrt nun zur 9 zurück und kommt zu dem Schluß, daß das abweichende Ergebnis bei der 9 auf einen Fehler beim Experiment zurückzuführen sei."

„Oho", sagt der Ingenieur, „nehmen Sie mal den Arzt. Er gestattet einem hoffnungslos Nierenkranken, Borschtsch zu essen, und der Kranke wird gesund. Der Arzt schreibt sofort eine wissenschaftliche Arbeit über die Heilerfolge von Borschtsch bei Nierenerkrankungen. Dann gibt er einem anderen Nierenkranken Borschtsch, und dieser stirbt. Auf den Druckfahnen korrigiert der Arzt: Borschtsch hilft in 50% aller Fälle."

„Ja, wie verfährt denn der Mathematiker?" sagt der Arzt.

„Auf die Frage, wie man einen Löwen in der Wüste fängt, definiert er erst einmal, was es heißt, einen Löwen zu fangen. Er sagt, daß man den Löwen von sich durch ein Gitter abtrennen muß. Dann setzt er sich selbst in einen Käfig, und der Löwe ist laut Definition gefangen!"

Mir scheint, daß diese Anekdote recht treffend zeigt, daß der Wahrheitsgehalt der Schlüsse in den einzelnen Zweigen der Wissenschaft unterschiedlich ist. Das ist jedoch im allgemeinen nicht die Schuld der Fachleute, sondern eher deren Mißgeschick. Die Schwierigkeiten beim Experimentieren sind z. B. in der Medizin mitunter so groß, daß es fast unmöglich ist, spezielle Versuche in mehrfachen Wiederholungen auszuführen. Deshalb muß man sich mit den vorhandenen Daten begnügen. Allerdings ist die Lage nicht immer so hoffnungslos; häufig läßt sich die Überzeugungskraft und der Wahrheitsgehalt der Schlußfolgerungen erhöhen, wenn die Plausibilitätsbetrachtungen möglichst gut angestellt werden.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß die Induktion zu Fehlschlüssen führen kann. Das ist aber nicht immer so, denn sonst wäre sie als Methode schon längst verworfen.

Ich möchte hervorheben, daß in der Mathematik Induktion und Analogie, Experiment und Beobachtung ebensooft benutzt werden wie in den anderen Wissenschaften.

Induktion und vollständige Induktion[1])

Induktion ist die Erkenntnis allgemeiner Gesetze durch Beobachtung und Gegenüberstellung von Spezialfällen. Die Methode der Induktion wird in allen Wissenschaften benutzt, u. a. auch in der Mathematik. Die mathematische, oder, wie sie genannt wird, vollständige Induktion dagegen wird nur von den Mathematikern beim Beweis von Sätzen ganz bestimmter Art benutzt. Allerdings gibt es oft Verwechslungen in der Terminologie, auf die ich später noch eingehen werde. Immerhin bestehen zwischen der Induktion und der vollständigen Induktion gewisse Be-

[1]) Dieser Abschnitt stützt sich in bedeutendem Maße auf das schon erwähnte Buch von *G. Polya*: „Schule des Denkens".

ziehungen. Deswegen wollen wir beide Methoden an einem Beispiel demonstrieren.
Wir stellen fest, daß auf der linken Seite der Gleichung

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

die Kuben der Zahlen 1, 2, 3, 4 stehen und daß die rechte Seite eine Quadratzahl ist. Nun schreiben wir diese interessante Gleichung in der Form

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Sie, verehrter Leser, könnten der Meinung sein, daß es hier nichts Interessantes gibt: Was bedeutet es schon, daß die Summe irgendwelcher Kubikzahlen gleich irgendeiner Quadratzahl ist! Hier ist ein günstiger Moment für Sie, mich zu fragen: „Na und?“
Vor einigen Jahren habe ich in einer Vorlesung über ganze Funktionen einmal geäußert: „Beachten Sie das unerwartete und bemerkenswerte Ergebnis.“ Einer der Hörer, der gelangweilt die Vorlesung nachschrieb, bemerkte stumpfsinnig: „Wie denn, befehlen Sie, daß wir uns wundern sollen?“ Hier war ich es, der sich wunderte. Ein wissenschaftlich tätiger Mensch muß jeden unerwarteten Fakt oder jeden unerwarteten Gedanken mit Verwunderung aufnehmen, andernfalls ist er kein Wissenschaftler, sondern nur ein Stümper. Neugier, gesunde Neugier, und Wißbegierde führen den Wissenschaftler von Aufgabe zu Aufgabe, und ein Wissenschaftler, der die Fähigkeit verloren hat, sich zu wundern und sich an neuen Erkenntnissen zu begeistern, wird kaum etwas Neues entdecken.
Einer unserer großen Physiker hat einmal im Scherz gesagt, daß wissenschaftliche Arbeit die Befriedigung der Neugier des Wissenschaftlers auf Staatskosten sei. Man kann diesen Gedanken weiterführen und sagen, daß die Schauspielerei die Befriedigung der Eitelkeit des Schauspielers auf Kosten der Zuschauer sei. Für die Gesellschaft ist wichtig, daß die Arbeit — in der Wissenschaft wie in der Kunst — den anderen Menschen im Endeffekt Nutzen bringt.
Verstehen Sie mich bitte richtig, lieber Leser. Ich bin keineswegs der Meinung, daß eine derartige Neugier immer und in gleichem Maße für alle Zweige der Wissenschaft notwendig ist. Wenn Sie die hier behandelte Frage nicht interessiert, können Sie gern zum nächsten Abschnitt übergehen. Das Problem, zu dem wir jetzt zurückkehren wollen, soll lediglich die Methode der Induktion demonstrieren.
Kommt es öfter vor, daß die Summe der Kuben einer Reihe aufeinanderfolgender Zahlen eine Quadratzahl ist? Wie kann das zustande kommen?
Wenn wir die Frage so stellen, sind wir in genau derselben Lage wie der Naturwissenschaftler, der, nachdem er erstmalig eine bestimmte Pflanze oder eine bestimmte Folge der Gesteinsschichten gefunden hat, die Frage nach der Verallgemeinerungsfähigkeit stellt. In unserem Beispiel bezieht sich diese Frage auf die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

Zu dieser allgemeinen Fragestellung sind wir ausgehend vom „Spezialfall" $n = 4$ gelangt.
Was können wir zur Klärung unserer Frage unternehmen? Zunächst verfahren wir so, wie der Naturwissenschaftler verfahren würde: Wir untersuchen weitere Spezialfälle. Die Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ sind einfacher als der zuerst betrachtete. Der Fall $n = 5$ folgt danach. Der Konsequenz und der Vollständigkeit halber fügen wir noch den Fall $n = 1$ hinzu.
Wenn wir die Gleichungen sorgfältig notieren, wie der Geologe seine Gesteinsproben ausbreiten würde, so erhalten wir die folgende Tafel:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2\\
1 + 8 &= 9 = 3^2\\
1 + 8 + 27 &= 36 = 6^2\\
1 + 8 + 27 + 64 &= 100 = 10^2\\
1 + 8 + 27 + 64 + 125 &= 225 = 15^2
\end{aligned}$$

Es ist kaum anzunehmen, daß alle diese Summen von Kuben aufeinanderfolgender Zahlen nur zufällig Quadratzahlen sind. In einer derartigen Situation würde der Naturwissenschaftler wenig Zweifel daran hegen, daß die Beobachtungen eine allgemeine Gesetzmäßigkeit ausdrücken, die durch die Induktion fast bewiesen ist. Der Mathematiker drückt sich zurückhaltender aus, obwohl er innerlich vielleicht genauso denkt. Er sagt, daß der induktive Schluß den folgenden Satz nahelegt: Die Summe der Kuben der Zahlen 1 bis n ist eine Quadratzahl.
Wir gelangen zu der Vermutung, daß eine bemerkenswerte, etwas rätselhafte Gesetzmäßigkeit existiert. Warum muß die Summe der Kuben aufeinanderfolgender Zahlen gerade eine Quadratzahl sein?
Wie würde der Naturwissenschaftler in einem derartigen Fall verfahren? Er würde seine Vermutung weiter nach verschiedenen Richtungen untersuchen und zusätzliche experimentelle Daten sammeln. Wenn wir diesen Weg einschlagen wollen, müßten wir die Fälle $n = 6$, $n = 7$ usw. nachprüfen.
Der Naturwissenschaftler könnte sich jedoch ebenso wieder den Fakten zuwenden, die ihn auf seine Vermutung gebracht haben. Er würde sie sorgfältig vergleichen, versuchen, eine tiefere Gesetzmäßigkeit herauszufinden oder irgendwelche zusätzlichen Analogien festzustellen. In genau derselben Richtung führen wir unsere Untersuchung weiter.
Wir kehren zu unserer Tafel zurück und betrachten die Fälle $n = 1, 2, 3, 4, 5$ nochmals. Warum ist die Summe der Kuben eine Quadratzahl? Was kann man über die Quadratzahlen aussagen? Die Wurzeln der Quadrate sind 1, 3, 6, 10, 15. Was kann man über sie sagen? Existiert hier irgendeine Gesetzmäßigkeit, eine zusätzliche Analogie? Es scheint jedenfalls so, als ob sie nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit zunehmen. Wie sieht diese Gesetzmäßigkeit aus? Es erweist sich, daß die Differenz zwischen

aufeinanderfolgenden Wurzeln zunimmt. In der Tat, es ist

$$3 - 1 = 2; \quad 6 - 3 = 3; \quad 10 - 6 = 4; \quad 15 - 10 = 5$$

Die Gesetzmäßigkeit, nach der diese Differenzen zunehmen, fällt sofort auf. Nachdem wir verschiedene Varianten durchprobiert haben, gelangen wir schließlich zu der Feststellung, daß die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 der folgenden Gesetzmäßigkeit genügen:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemeinen Charakter trägt (es ist kaum zu glauben, daß es nicht so ist), erhält der von uns vermutete Satz bereits eine exaktere Form. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Ich will nicht beim Gang der weiteren Überlegungen verweilen, sondern lediglich, um Sie, verehrte Leser, nicht im Ungewissen zu lassen, die endgültige Formel angeben:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Wenn man die mathematische Methode der vollständigen Induktion beherrscht, wird man ohne Mühe den formulierten Satz beweisen können.
Die hier gezeigte Gesetzmäßigkeit wurde durch Induktion entdeckt. Der Gang der Überlegungen ist hier zwar etwas einseitig und unvollkommen dargestellt. Er kommt jedoch der Wirklichkeit nahe und vermittelt eine Vorstellung über die Anwendung der Induktion. Durch sie werden Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge aufgedeckt, die durch äußere Erscheinungen verdeckt sind. Ihre bekanntesten Mittel sind Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie.
Induktive Überlegungen an bedeutend inhaltsreicherem Material, das mehr Findigkeit und Auffassungsgabe erfordert, machen einen großen Teil der Arbeit des Mathematikers aus.

Die dramatische Geschichte des Problems der Lösung von Gleichungen

Die Tatsache, daß induktive Schlußfolgerungen und Analogien nicht immer zu richtigen Ergebnissen führen, ist wohlbekannt. In diesem Zusammenhang gibt es in der Mathematik selbst einen interessanten Fall, den ich bereits früher erwähnt habe, das Problem der Lösung algebraischer Gleichungen. Ich hatte bereits bemerkt, daß die Mathematiker im Verlauf von 300 Jahren, bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts, versuchten, eine Lösungsformel für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades zu finden, z. B. für die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

in der a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 beliebige Koeffizienten sind. Sie suchten nach einer Formel, die die Wurzeln dieser Gleichung durch ihre Koeffizienten, die nur durch die Operationen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Radizieren miteinander verbunden sind, ausdrückt. Gerade die Induktion war es, die sie veranlaßte, in dieser Richtung zu arbeiten, denn für Gleichungen bis zum vierten Grad einschließlich waren solche Formeln gefunden worden, und diese waren der Menschheit auch nicht gerade in den Schoß gefallen. Außerdem hatte *Gauß* gezeigt, daß eine algebraische Gleichung stets Lösungen besitzt, und zwar genau so viele, wie ihr Grad angibt. Erst die genialen Gedanken von *Abel* und *Galois* konnten das Problem klären.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich der junge norwegische Mathematiker *Niels Henrik Abel* mit dieser Aufgabe. Er schien die allgemeine Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades gefunden zu haben. Nach der Freude kam jedoch die Enttäuschung: Als er seine Berechnungen gewissenhaft prüfte, kam ein Fehler zum Vorschein. Lange und hartnäckige Überlegungen führten ihn auf ein ganz anderes Ergebnis: Algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades lassen sich im allgemeinen nicht in Radikalen lösen. *Abel* hat diese Behauptung bewiesen. Sein Satz stellt den Wendepunkt bei der Lösung des Problems dar.

Der Name *Abel* nimmt einen Ehrenplatz in der Mathematik ein. Seine Arbeiten auf dem Gebiet der Analysis sind tiefgründig und vielseitig. Obwohl *Abel* von den großen europäischen Mathematikern bereits zu Lebzeiten anerkannt und geachtet wurde, verstarb er im Alter von 27 Jahren in völliger Armut an Tuberkulose.[1])

Etwa zur gleichen Zeit „fand“ der junge Evariste Galois eine Lösung der Gleichung fünften Grades. Er mußte ebenso wie Abel eine tiefe Enttäuschung hinnehmen, als er in seinen Überlegungen einen Fehler entdeckte. Auch er hatte die Kraft, die Arbeit an diesem Problem fortzusetzen.

In dem kurzen und stürmischen Leben von *Galois* kam alles unerwartet: Begeisterung für die Mathematik und aktive Teilnahme am politischen Leben, völliger Einbruch in der Mathematikprüfung bei der Aufnahme in die Polytechnische Schule, Ausschluß aus der Normalschule (Equole Normale) aus politischen Gründen, Gefängnishaft und Tod im Duell, als er noch nicht 21 Jahre alt war. Trotzdem hat *Evariste Galois* eine wahrhafte Umwälzung in der Wissenschaft vollbracht.

[1]) Über das tragische Leben *Abels* gibt es ein interessantes Buch von *O. Ore*: „Niels Henrik Abel.“ Moskau: Fismatgis 1961. Nicht weniger interessant sind die folgenden Bücher über Galois: *L. Infeld*: „Evariste Galois, wen die Götter lieben“ und *A. Dalma*: „Evariste Galois — Revolutionär und Mathematiker“ mit einem Nachwort von *A. Jaglom*. Auf diesem Nachwort basiert der Abschnitt über Galois.

Das Schicksal seiner Arbeiten ist ebenfalls ungewöhnlich. Zu seinen Lebzeiten wurden sie nicht beachtet; nach seinem Tode waren sie bald völlig in Vergessenheit geraten. Erst ein halbes Jahrhundert später wurden sie wieder entdeckt. Sie hatten dann einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik. Seine Arbeiten waren nicht sehr umfangreich; die uns bekannten Werke *Galois* umfassen nicht mehr als sechzig Seiten. Ihr Studium macht große Mühe, da *Galois* eine große Abneigung gegen ausführliche Darlegungen hatte; seine Formulierungen sind überaus knapp.
Beim Lösen algebraischer Gleichungen ging *Evariste Galois* einen völlig neuen Weg. Er untersuchte den allgemeinsten Fall algebraischer Gleichungen beliebigen Grades. Wir wollen zunächst feststellen, daß es dem Physiker, Chemiker oder Ingenieur im konkreten Fall gar nicht auf die exakte Lösung der Gleichung ankommt. Er verlangt vom Mathematiker lediglich Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wurzeln seiner Gleichung. Mit Hilfe der modernen Rechentechnik kann man die Näherungslösungen mit beliebigerGnauigkeit erhalten. Für das Studium allgemeiner Gleichungen, deren Koeffizienten mit Buchstaben bezeichnet sind, sind die Näherungsmethoden jedoch unzulänglich.
Man kann eine allgemeine algebraische Gleichung aufschreiben und ihre unbekannten Lösungen durch Buchstaben ausdrücken. Die erste Entdeckung *Galois* bestand darin, daß er den Grad der Unbestimmtheit der Lösungen verringerte, indem er einige allgemeine Beziehungen aufstellte, denen die Wurzeln genügen müssen. Beispiel einer solchen Beziehung ist: Jede Wurzel ist eine bestimmte Funktion zweier anderer.
Der Name *Galois* ist also nicht durch spezielle Lösungen von Gleichungen höheren Grades berühmt geworden, sondern durch die allgemeinen Methoden, die er für das Studium der Eigenschaften solcher Gleichungen geschaffen hat. Das Hauptverdienst von *Galois* — des Schöpfers der modernen höheren Algebra und einer der Urheber der modernen Mathematik überhaupt — besteht in der Benutzung des allgemeinen Begriffes der Gruppe bei der gestellten konkreten Aufgabe.
In der Mathematik wird eine Gesamtheit von Elementen beliebiger Natur, für die eine Operation, Gruppenaddition genannt, definiert ist, als Gruppe bezeichnet. Diese Operation ordnet je zwei Elementen a und b der Gruppe ein drittes Element c der Gruppe zu. Man schreibt dafür auch $a + b = c$ und nennt das Ergebnis Summe, obwohl die Operation $+$ im allgemeinen nicht die gewöhnliche Addition von Zahlen ist, da a, b, c gar keine Zahlen zu sein brauchen. Man verlangt lediglich einige allgemeine Regeln für die Gruppenoperation, die gewissen Gesetzen der Arithmetik ähneln. So muß z. B. für drei beliebige Elemente a, b, c der Gruppe stets das „assoziative Gesetz" $(a + b) + c = a + (b + c)$ erfüllt sein; manchmal verlangt man auch die Gültigkeit des „kommutativen Gesetzes" $a + b = b + a$.
Zahlen, Funktionen, Drehungen oder andere Bewegungen können eine Gruppe bilden. Am günstigsten ist es allerdings, abstrakte Gruppen zu betrachten, deren Elemente mathematische Symbole sind, deren Bedeutung bis zu einem gewissen Grad nicht konkretisiert wird. Der Hauptwert

des Gruppenbegriffes besteht gerade in seiner außerordentlichen Allgemeinheit. In der Mathematik und ihren Anwendungen sowie bei den verschiedensten Problemen der anderen Wissenschaften ist es überaus vorteilhaft, die Gruppeneigenschaften auf bestimmte Gesamtheiten von zu untersuchenden Objekten anzuwenden. Das gibt z. B. die Möglichkeit, Teilgebiete der Mathematik, die früher sehr weit voneinander entfernt schienen, zu verbinden und einheitlich zu betrachten.

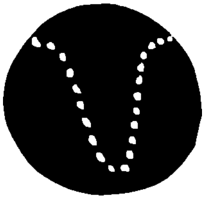
Ein wichtiges Beispiel einer Gruppe ist die sogenannte Permutationsgruppe. Die Schüler einer Klasse haben eine bestimmte Sitzordnung. Werden einige Schüler umgesetzt, so findet eine Umordnung statt, oder, wie die Mathematiker sagen, eine Permutation. Selbstverständlich brauchen bei einer Permutation nicht alle Schüler ihre Plätze zu wechseln. Als Summe zweier Permutationen (Umsetzungen) wird man das bezeichnen, was sich ergibt, wenn man zunächst die erste Umsetzung vornimmt und dann die zweite. Bei einer solchen Definition der „Summe zweier Permutationen" bilden die Permutationen selbst eine Gruppe.

Dieses Beispiel läßt sich weiter ausbauen. Die Schüler einer Klasse unterscheiden sich in gewissen Merkmalen voneinander: Es gibt Jungen und Mädchen, gute Schüler und schlechte, undisziplinierte und Musterknaben, kurzsichtige und weitsichtige. Bei der Aufteilung der Schüler auf die Bänke des Klassenzimmers bedingen diese Unterschiede bestimmte Einschränkungen der Sitzordnung. So müssen kurzsichtige Schüler möglichst weit vorn sitzen, zwei Rowdys dürfen nicht auf einer Bank sitzen, usw. Die Gesamtheit der Permutationen unter Berücksichtigung dieser Forderungen bildet ebenfalls eine Gruppe, deren Aussehen in starkem Maß von der konkreten Zusammensetzung der Klasse abhängt. In einer anderen Klasse hat man normalerweise eine andere Permutationsgruppe. Vereinfachend kann man die für eine Klasse charakteristische Gruppe als Galois-Gruppe der Klasse bezeichnen.

Bei der Untersuchung von Gleichungen ist *Galois* analog vorgegangen. Statt der Schüler einer Klasse nahm er die Wurzeln einer bestimmten algebraischen Gleichung. Diese sind durch bestimmte algebraische Beziehungen miteinander verbunden (eine Wurzel kann die Summe zweier anderer sein, usw.).

Galois ordnete jeder Gleichung die Permutationsgruppe ihrer Wurzeln zu, wobei nur die zugelassen sind, bei denen die Beziehungen zwischen den Wurzeln erhalten bleiben. Die Untersuchung dieser Gruppe erlaubt viele Aussagen über die Wurzeln selbst. Wenn die Galois-Gruppe einer algebraischen Gleichung einige bestimmte, leicht nachprüfbare Eigenschaften besitzt (solche Gruppen heißen auflösbar), so ist die Gleichung in Radikalen lösbar, d. h., ihre Wurzeln können mit Hilfe einer Formel durch die Koeffizienten ausgedrückt werden, die nur durch die Operationen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren miteinander verbunden sind. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Gleichung in Radikalen lösbar ist, hat man nur ihre Galois-Gruppe aufzustellen und zu prüfen, ob diese auflösbar ist oder nicht.

Damit hat *Galois* die Frage, wann eine algebraische Gleichung in Radikalen lösbar ist, vollständig beantwortet.
Nach der „Neuentdeckung" der Arbeiten von *Galois* in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts begannen die neuen Methoden in alle Zweige der Mathematik einzudringen. Gegenwärtig ist der Begriff der Gruppe neben dem der Zahl, der Menge, der Funktion und der Transformation einer der Hauptbegriffe der moderenen Mathematik.
Von Differentialgleichungen, die eine große Rolle in der Mathematik spielen, war bereits die Rede. Ihre Untersuchung und Lösung ist komplizierter als die von algebraischen Gleichungen. Nach dem von *Galois* vorgezeichneten Weg kann man jeder Differentialgleichung eine Gruppe zuordnen, die der Galois-Gruppe bei den algebraischen Gleichungen entspricht. Diese Methode, die auf den norwegischen Mathematiker *Sophus Lie* zurückgeht, erlaubt die Aufdeckung wichtiger und tiefliegender Eigenschaften von Differentialgleichungen.
Die Einführung des Gruppenbegriffes in die Geometrie veränderte dieses Gebiet der Mathematik in bedeutendem Maß. Der berühmte deutsche Mathematiker *Felix Klein* ordnete im Jahre 1872 jedem Teilgebiet der Geometrie eine Gruppe zu und erklärte das Studium der Eigenschaften dieser Gruppen zur Hauptaufgabe der Geometrie.
Im weiteren erwiesen sich diese Ideen von *Lie* und *Klein* als überaus nützlich für die verschiedensten Teilgebiete der Mathematik und der mathematischen Physik, besonders für die moderne Quantenphysik. Heute ist der mathematische Apparat der Gruppentheorie eines der Hauptinstrumente der theoretischen Physik.



Gespräch mit einem Technologen

Wir haben bereits festgestellt, daß Gespräche zwischen Mathematikern und Spezialisten anderer Wissensgebiete beide Seiten bereichern. Außerdem kann die gemeinsame Arbeit durchaus zu bedeutenden ökonomischen Ergebnissen führen. Ein derartiges Gespräch hatte ich mit einem auf dem Gebiet der Erdölverarbeitung tätigen Technologen.

Er: Könnten Sie uns eine mathematische Beschreibung des technologischen Prozesses der Destillation des Erdöls liefern?

Ich: Das ist offensichtlich eine schwierige Aufgabe. Wenn ich mich nicht irre, handelt es sich um einen komplizierten Prozeß?

Er: Ja, der Prozeß ist recht kompliziert.

Ich: Beschreiben Sie ihn mir bitte, wenigstens in Übersichtsform.

Er: Das Rohöl gelangt zunächst in eine Entsalzungsanlage, wo der Hauptanteil des Wassers und damit des Salzes ausgeschieden wird.

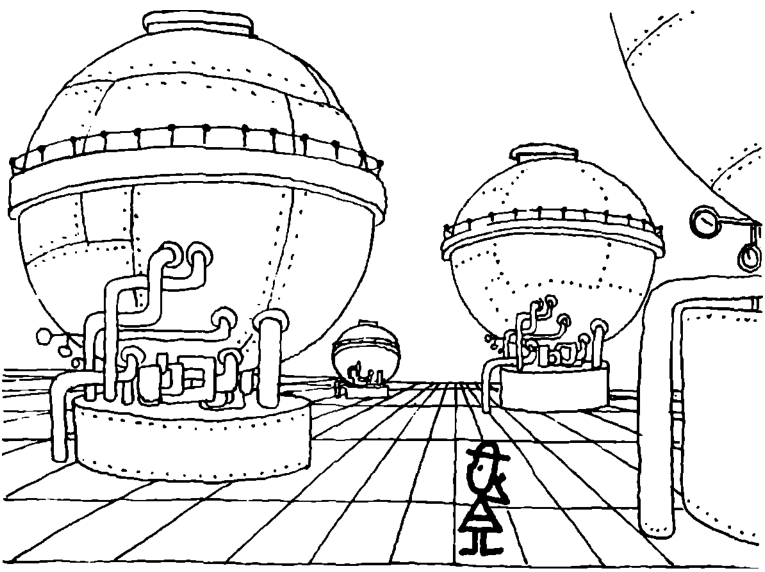


Bild 76

Darauf kommt das Erdöl in die erste Fraktionskolonne, wo durch Erwärmen die leichtesten Fraktionen ausgeschieden werden. Der Rückstand wird weiter erwärmt, und es werden weitere Fraktionen ausgeschieden. Dieser Prozeß wird in einer Wasserdampfatmosphäre einigemal wiederholt.

Man zeigt mir das Blockschema des automatisierten Teils dieses Prozesses. Es ist in recht kleinem Maßstab auf einer Tafel von 1 m Höhe und 5 m Länge dargestellt. Man kann sich natürlich nicht schnell darin zurechtfinden. Einige Tage nach diesem Gespräch war ich im Erdölverarbeitungswerk: Kugeln von 10 m Durchmesser, mit einem Betonmantel versehen — die Entsalzungsanlagen; 30 bis 40 m lange glänzende Fraktionskolonnen; Gasöfen, die eine Temperatur von einigen hundert Grad erzeugen; Schaltwarten, in denen mehr als zwanzig Geräte Druck, Temperatur und andere Kennziffern registrieren; Entfernungen von mehreren hundert Metern von einer Anlage zur anderen ... Ich habe diese Anlage schon mehr als einmal auf Bildern und in der Wochenschau gesehen. Steht man jedoch inmitten eines solchen Werkes, so sieht alles noch gewaltiger und respekteinflößender aus. Aber kehren wir zurück zu unserem Gespräch.

Ich: Durch wieviel Parameter wird der Prozeß bestimmt?
Er: Das kann ich nicht genau sagen; man müßte sie einmal zählen. Jedenfalls sind es etwa einhundert. Darunter sind allerdings auch solche, die keine besondere Aufmerksamkeit erfordern, weil es lediglich darauf ankommt, ihren Wert in bestimmten weiten Grenzen zu halten.
Ich: Und was ergibt sich schließlich am Ende?
Er: Man erhält die verschiedenen Fraktionen — von den leichten Benzinen bis zu den Ölen.
Ich: Was wollen Sie eigentlich erreichen?
Er: Wir brauchen eine mathematische Beschreibung des technologischen Prozesses!
Ich: Wozu?
Er: Wir müssen den Prozeß steuern!
Ich: Sie steuern ihn doch bereits jetzt!
Er: Ja, jedoch nicht besonders gut, eher irgendwie, damit alles einigermaßen normal abläuft. Könnte man den technologischen Prozeß aber um nur 1% verbessern, so ergäbe dies bereits einen großen ökonomischen Nutzen.
Ich: Das heißt also, daß jetzt nach Augenmaß gearbeitet wird?
Er: Nun — nicht ganz nach Augenmaß!
Ich: Immerhin löst der Fahrer der Anlage viele Fragen auf Grund seiner Erfahrung und nach seinem Gutdünken?
Er: Ja, das kommt der Wahrheit nahe.
Ich: Was will denn der Anlagenfahrer erreichen? Ist es einer oder sind es einige?

Er: Es sind mehrere. Jeder muß versuchen, die Größen, die er steuert, so einzustellen, daß der technologische Prozeß innerhalb gewisser Grenzen verläuft.
Ich: Hat das Ausgangsprodukt — das Erdöl — eine homogene Zusammensetzung oder ändert sich diese ständig?
Er: Das Rohöl besteht aus einigen hundert Kohlenwasserstoffen. Ihr prozentualer Anteil schwankt erheblich. Das Werk erhält jedoch entweder über längere Zeit ein und dasselbe Öl oder es trifft spezielle Vorkehrungen, um die Zusammensetzung des Rohstoffes möglichst konstant zu halten.
Ich: Darf man also in erster Näherung die Zusammensetzung des Rohöls als konstant ansehen?
Er: Ja, etwa!
Ich: Irgendwelche variablen Kenngrößen des Rohöls muß man wohl berücksichtigen?
Er: Ja, natürlich. So spielt z. B. die Temperatur des Rohöls eine sehr große Rolle. Deshalb wird es vor der Verarbeitung vorgewärmt.
Ich: Schön. Wieviel Kennwerte des Rohöls beachtet denn der Technologe? Ich meine solche Kennwerte, die wirklich Einfluß auf die Verarbeitung des Röhols haben.
Er: Außer der Temperatur sind die Zuflußmenge je Minute und manchmal auch die Dichte zu berücksichtigen.
Ich: Wir können also annehmen, daß das Rohöl am Eingang des Systems durch drei Kennwerte beschrieben wird, also durch drei Zahlen. Versuchen wir nun in analoger Weise das Endprodukt zu beschreiben.
Er: Als Endprodukte der Erdölverarbeitung entstehen verschiedene Benzine, Leuchtöle, Dieselöl, Schmieröle usw. Wir haben etwa zehn Endprodukte.
Ich: Und die Eigenschaften eines jeden lassen sich durch eine Zahl charakterisieren?
Er: Wo denken Sie hin. Jedes Erzeugnis wird durch mehrere Kennwerte beschrieben. Für die Eigenschaften z. B. des Benzins sind die Oktanzahl, der Heizwert und die Dichte von Bedeutung.
Ich: Das befriedigt mich nicht. Welche Kennwerte muß man angeben, um die wichtigsten Eigenschaften der Endprodukte zu charakterisieren?
Er: Sie alle aufzuzählen, würde lange dauern. Ich glaube, für den Anfang käme man mit etwa zwanzig Größen aus.
Ich: Stellen wir uns die Situation vor. Wir haben einen technologischen Prozeß, der durch drei Eingangsgrößen, zwanzig Ausgangsgrößen und etwa hundert Parameter beschrieben wird. Was für eine Aufgabe ist zu lösen?
Er: Der technologische Prozeß soll mathematisch beschrieben werden.
Ich: Eine schöne Sache! Sie wollen ein mathematisches Modell für einen so komplizierten Prozeß haben. Wie stellen Sie sich diese

Beschreibung vor? Wünschen Sie ein Gleichungssystem, das diese 130 Größen verbindet?

Er: Ja, das wäre wünschenswert.

Ich: Sind denn die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen bekannt?

Er: Qualitativ schon.

Ich: Was heißt — qualitativ? In welchem Zusammenhang stehen z. B. die Dichte des Rohöls und der Siedepunkt der leichten Fraktionen?

Er: Solche Details sind uns nicht bekannt. Wir wissen nur, daß bei einer Erhöhung der Dichte des Rohöls die Temperatur des Siedepunkts zunimmt.

Ich: Wie soll ich ein Gleichungssystem aufstellen, wenn die Zusammenhänge zwischen den Kennwerten nicht bekannt sind?

Er: Wenn ich die Antwort auf diese Frage wüßte, wäre ich nicht zu Ihnen gekommen!

Ich: Leider bin ich auch nicht allwissend! Nehmen wir aber einmal an, ich hätte irgendwie die Zusammenhänge aufgedeckt und die Gleichungen aufgestellt. Und nun?

Er: Wie soll ich das verstehen — und nun? Wenn wir die Gleichungen hätten, könnten wir sie zur Optimierung der Technologie benutzen.

Ich: Das ist klar. Was wollen Sie eigentlich optimieren?

Er: Ich sagte doch — die Technologie.

Ich: Nein, das ist lediglich ein Mittel zum Zweck. Zu optimieren sind die Kennwerte des Endprodukts. Und welche Kennwerte sind speziell zu optimieren?

Er: Nach Möglichkeit alle!

Ich: Das ist sicher wünschenswert, doch leider unmöglich. Wenn wir z. B. die Kennwerte des entstehenden Dieselöls optimieren, müssen wir die der übrigen Endprodukte vernachlässigen.

Er: Ja, manchmal verfährt man auch so!

Ich: Die übrigen Endprodukte können mit verschiedenen Anteilen auftreten. Welche von ihnen sind am meisten erwünscht?

Er: Das ist verschieden, die Anforderungen ändern sich. Diese Frage wird Ihnen kaum ein Technologe in allgemeiner Form beantworten können.

Ich: Ohne Antwort auf diese Fragen kann man die Optimierungsaufgabe nicht formulieren. Nun wollen wir die Situation doch erst einmal ausführlicher klären.

Was heißt besser?

Sicher kennen Sie die spaßhafte Redewendung: Lieber reich und gesund als arm und krank. Das erstere ist natürlich besser!
Doch was ist besser, reich und krank zu sein oder arm und gesund? Auf diese Frage kann man nicht sofort antworten, man wird erst einmal den

genauen Inhalt der Begriffe reich und arm, gesund und krank wissen wollen. Danach entsteht eine noch schwierigere Frage: Was heißt besser? Häufig findet man Redewendungen, die einer Sache verschiedene Ziele zuschreiben. Ich halte die Verwendung solcher Ausdrücke für falsch, da sich kein festumrissener Sinn ergibt; man kann nicht mehrere Ziele gleichzeitig zulassen.
Möglicherweise stimmen Sie mit mir nicht überein. Sie werden z. B. sagen, daß ein Mensch im Sport und in der Wissenschaft gleichzeitig große Erfolge erringen kann. Ein Betrieb kann seinen Plan in mehreren Kennziffern übererfüllen. Ich werde mich bemühen, die Widersprüchlichkeit dieser Problematik aufzuzeigen.
Beginnen wir mit der Betrachtung der Planerfüllung. Stellen Sie sich zwei gleiche Betriebe vor, die Damen- und Herrenfahrräder produzieren. Wir wollen sie „Wolga" und „Desna" nennen. Sie sollen beide im Monat 900 Herren- und 600 Damenfahrräder herstellen. Angenommen, in einem Monat hat der erste Betrieb 1000 Herren- und 550 Damenfahrräder gebaut, der zweite hingegen 800 Herren- und 800 Damenfahrräder.
Beide Betriebe haben nach der Stückzahl den Plan übererfüllt und nach dem Sortiment nicht erfüllt. allerdings in unterschiedlichen Artikeln. Welcher Betrieb hat besser gearbeitet? Die Frage nach dem besseren Betrieb ist noch schwieriger zu beantworten, wenn man zur Beurteilung

Tafel 1. Planerfüllung des Fahrradwerks „Wolga"

Fahrräder	Anzahl		Bruttoproduktion (in Mark)		Allgemeine Kennziffer
	Plan	Ist	Plan	Ist	
Herrenräder	900	1000	288000	1000·200 = 200000	A = 94,5
Damenräder	600	550		550·180 = 99000	
Insgesamt	1500	1550		299000	

Tafel 2. Planerfüllung des Fahrradwerks „Desna"

Fahrräder	Anzahl		Bruttoproduktion (in Mark)		Allgemeine Kennziffer
	Plan	Ist	Plan	Ist	
Herrenräder	900	800	288000	800·200 = 160000	A = 94,0
Damenräder	600	800		800·180 = 144000	
Insgesamt	1500	1600		304000	

der Planerfüllung weitere Kennziffern hinzuzieht, z. B. die Qualität, den Lohnfonds, den Materialverbrauch usw.
Das Problem läßt sich nur lösen, wenn man eine allgemeine Kennziffer einführt, die die Arbeit der Betriebe charakterisiert, und nach dieser vergleicht. So kann man die Arbeit der Betriebe z. B. nach dem Produktionsvolumen beurteilen; dann ist auch der Monatsplan in Mark vorzugeben. Angenommen, ein Herrenfahrrad kostet 200 Mark und ein Damenfahrrad 180 Mark. Dann ist die Planauflage für beide Betriebe

$$900 \cdot 200 + 600 \cdot 180 = 288\,000 \text{ Mark}$$

Jetzt braucht man keine sortimentsgerechte Planerfüllung zu verlangen. In unserem Beispiel beträgt das Produktionsvolumen des ersten Werks $1000 \cdot 200 + 550 \cdot 180 = 299\,000$ Mark und des zweiten $800 \cdot 200 + 800 \cdot 180 = 304\,000$ Mark.
Das zweite Werk hat demnach eine höhere Gesamtproduktion und somit besser gearbeitet.
Man könnte zur Beurteilung der Betriebe auch irgendeine andere Kennziffer bilden, die das Sortiment berücksichtigt.
So könnte man als Anreiz zur sortimentsgerechten Planerfüllung unter Berücksichtigung des Produktionsvolumens die Kennziffer $A = D \cdot n$ wählen, in der D die prozentuale Erreichung des vorgegebenen Gesamtvolumens bedeutet und n folgendermaßen bestimmt wird:

1. Wenn der Plan sortimentsgerecht erfüllt ist, wird $n = 1$.
2. Ist der Plan bei einem der zwei zu produzierenden Artikel nicht erfüllt, so wird $n = m_1/m$, wobei m die Planauflage dieses Artikels und m_1 die tatsächlich produzierte Menge ist.
3. Ist der Plan bei beiden Artikeln nicht erfüllt, so wird $n = e_1/e$, wobei e die Planauflage für beide Artikel und e_1 die tatsächlich produzierte Menge ist.

Bei Planerfüllung ist $A = 100$; bei Übererfüllung wird die Kennziffer $A > 100$.
Im betrachteten Fall ergibt sich für den ersten Betrieb $A = 94{,}5$ und für den zweiten Betrieb $A = 94{,}0$. Nach der letztgenannten Kennziffer hat der erste Betrieb besser gearbeitet als der zweite; beide haben den Plan nicht erfüllt.
Man kann beliebig viele solcher Kennziffern bilden und jedesmal zu einem anderen Ergebnis kommen.
Wie findet man aber die zweckmäßigste Kennziffer? Diese Frage läßt sich nicht beantworten, da es keine vernünftige Antwort für alle vorkommenden Fälle geben kann.
Versuchen Sie einmal die Frage zu beantworten: Welches Verkehrsmittel ist das beste — die Eisenbahn, das Flugzeug, der Dampfer oder der Maulesel? Die Antwort hängt von der Situation ab. Für eine weite Reise ist das Flugzeug am günstigsten; in die nächstgelegene Stadt kommt man am schnellsten mit der Bahn; für eine Hochzeitsreise ist der Dampfer

sehr schön und in den Bergen kann der Maulesel das geeignete Verkehrsmittel sein.

Das Kriterium

Im vorher betrachteten Beispiel wurde gezeigt, daß die Wahl des besten Transportmittels von der jeweiligen Situation abhängt. Für die Hochzeitsreise bietet z. B. ein komfortables Schiff die bequemsten Lebensbedingungen sowie eine intime und romantische Umgebung. Jungvermählte haben es meist nicht eilig, irgendein bestimmtes Ziel zu erreichen. Hier können allerdings die Vorzüge des Schiffes gegenüber der Eisenbahn schlecht quantitativ angegeben werden.

Zur Lösung von Optimierungsaufgaben ist es jedoch unumgänglich, die verschiedenen möglichen Varianten quantitativ zu vergleichen. Deshalb ist die Fähigkeit, quantitativ Kriterien exakt zu formulieren, sehr wichtig.

Kommen wir zurück auf das Problem, vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen, wenn der direkte Weg morastig ist. Wir können die Aufgabe folgendermaßen formulieren: Aus allen Wegen, die A mit B verbinden und den Morast umgehen, ist der kürzeste auszuwählen, Hier ist das Kriterium, nach dem die Wege verglichen werden, ihre Länge.

Man könnte die Aufgabe auch anders stellen: Aus allen Wegen von A nach B ist der auszuwählen, für den man zu Fuß die kürzeste Zeit braucht. Das Kriterium, nach dem jetzt die Wege verglichen werden, ist die Zeit.

Es ist durchaus möglich, daß sich bei beiden Aufgabenstellungen ein und derselbe Weg ergibt, z. B. die punktierte Linie im Bild 78. Die Aufgabenstellungen sind jedoch nicht identisch. Zunächst unterscheidet sich das Angebot an Wegen, aus denen der beste gewählt wird. Bei der Minimierung der Zeit muß man alle Wege von A nach B betrachten, bei der Minimierung der Länge nur diejenigen, die nicht durch den Morast führen.

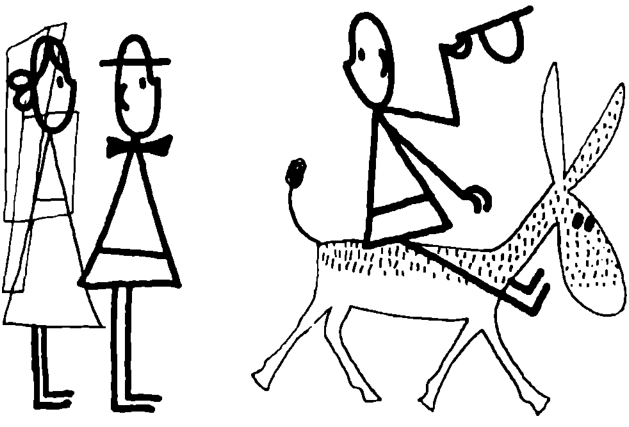


Bild 77

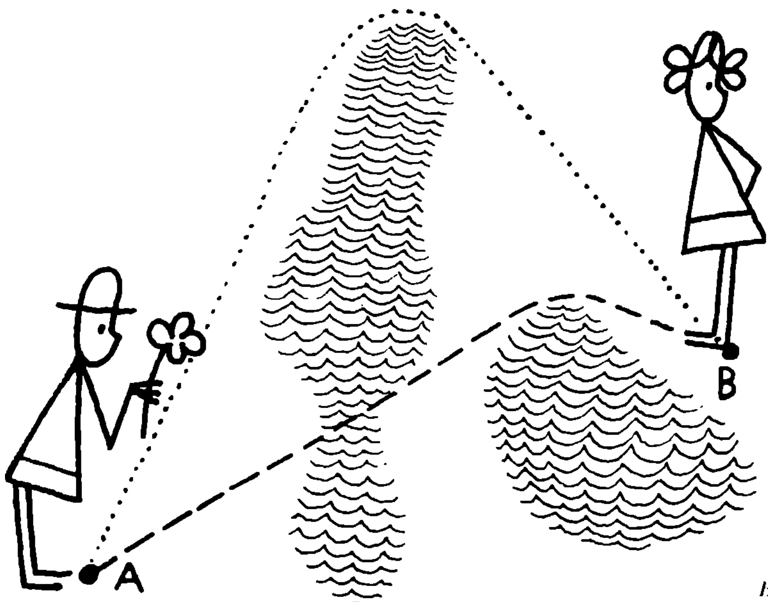


Bild 78

Außerdem können die Aufgaben verschiedene Lösungen haben. Ist z. B. der Morast an einer Stelle so schmal, daß ihn ein Fußgänger einfach überspringen kann, so kann man den kürzesten Weg entlang der gestrichelten Linie wählen.
Kehren wir nun zu unserem Beispiel des Abteufens einer Bohrung zurück. Wir wollten die maximal mögliche Vortriebsleistung beim Anlegen einer Erdölbohrung bestimmen.
Warum streben wir nach einer maximalen Vortriebsleistung? Die Antwort scheint offensichtlich zu sein: Je größer die Vortriebsleistung, um so schneller ist die Bohrung fertiggestellt, und jeder Tag Zeitgewinn kann hunderte Tonnen Erdöl bedeuten.
Diese Antwort erweist sich aber als falsch. Die kürzeste Zeitdauer für die Fertigstellung der Bohrung muß sich nicht bei der maximalen Vortriebsleistung ergeben. Je höher die Vortriebsleistung der Bohrturbine bei gleichbleibenden anderen Bedingungen ist, um so kleiner ist der erreichbare Vortrieb, bis der Bohrmeißel abgenutzt ist und ausgewechselt werden muß. Hierzu ist das gesamte Bohrgestänge hochzuziehen, manchmal aus einer Tiefe von einigen Kilometern, und das erfordert viel Zeit. Unwillkürlich kommt einem da der im Straßenverkehr so aktuelle Slogan „Nimm Dir Zeit und nicht das Leben“ in den Sinn.
Wir müssen also die Aufgabenstellung ändern: Die Vortriebsleistung ist so zu wählen, daß die Bohrung in kürzester Zeit fertiggestellt ist.
Sie sehen: eine andere Aufgabenstellung — ein anderes Kriterium. Das Kriterium für die Arbeit des Bohrtrupps ist jetzt die Gesamtzeit bis zur

Fertigstellung der Bohrung. Die Aufgabe besteht in der Minimierung dieser Zeit. Die optimale Vortriebsleistung im Sinne des neuen Kriteriums wird unter der maximal möglichen liegen.

Wenn die Ente den Schwanz hebt, steckt der Kopf im Wasser

In den bisher betrachteten Aufgaben wurde das Kriterium durch eine Variable angegeben. Die Optimierungsaufgabe bestand darin, den Extremwert für das zu betrachtende Kriterium zu finden. Doch — kann man wirklich ein Kriterium angeben, das gleichzeitig mehrere Kennziffern enthält?
Kann man nicht — im Gegensatz zum bereits betrachteten Beispiel — die Arbeit der Betriebe gleichzeitig nach der Gesamtproduktion und der sortimentsgerechten Planerfüllung vergleichen? Man kann doch auch das Extremum für eine Funktion von mehreren Variablen bestimmen, genauso wie für eine Funktion von einer Variablen!
Eine solche Frage wird — entweder in verdeckter oder auch in offener Form — häufig gestellt. Bei ihrer Beantwortung muß man vor allem zeigen, daß es sich tatsächlich um ganz verschiedene Aufgabenstellungen handelt. Stellen Sie sich zwei Knirpse auf einer Kinderschaukel vor (Bild 79). Wenn einer nach oben steigt, sinkt der andere. Beide wollen aber

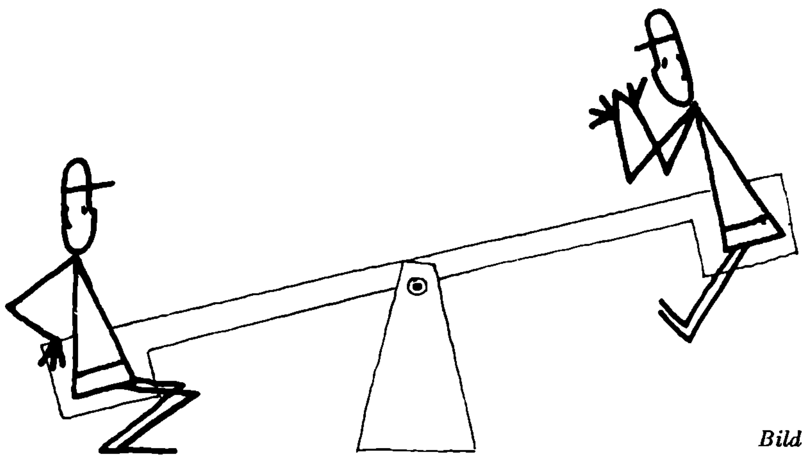


Bild 79

ganz oben sein. Sie beherrschen noch nicht die Weisheit: „Wenn die Ente den Schwanz hebt, steckt der Kopf im Wasser; hebt sie den Kopf — so sinkt der Schwanz nach unten“, deshalb freuen sie sich, wenn es aufwärts geht, und weinen, wenn sie nach unten sinken. Doch sie können es auf keine Weise erreichen, daß sie sich beide gleichzeitig im höchsten Punkt befinden.

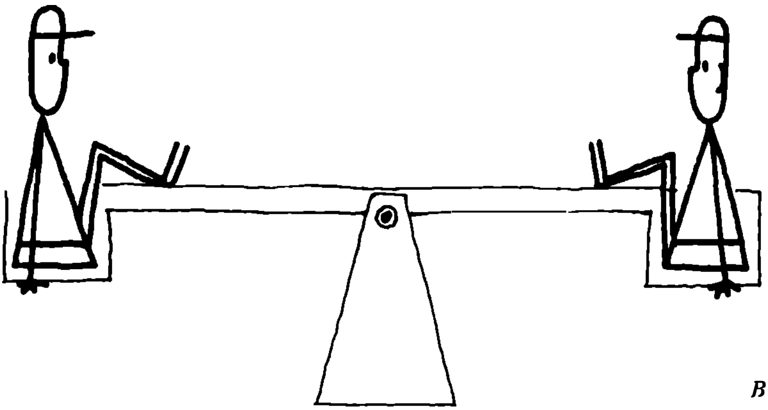


Bild 80

Die Summe ihrer Abstände von der Erde ist immer dieselbe; sie ist gleich dem doppelten Abstand des Stützpunktes des Schaukelbalkens von der Erde. Ihre Höhen über der Erde sind also keine unabhängigen Größen, sondern abhängige; die Summe der Höhen ist konstant. Wenn der eine nach oben steigt, muß notwendigerweise der andere nach unten sinken.
Es ist schwierig, den beiden Kindern (aber nicht nur Kindern) klarzumachen, daß Mäßigung die optimale Verhaltensweise ist.[1]) Das Beste, was beide gleichzeitig erreichen können, ist die gleiche Höhe (Bild 80). Nun ist zwar keiner der Knirpse begeistert; wahrscheinlich weint aber auch keiner. Fassen wir die Schlußfolgerungen zusammen: Wenn wir von der Bestimmung des Extremums einer Funktion von mehreren Variablen sprechen, setzen wir stillschweigend voraus, daß diese Variablen voneinander unabhängig sind, daß man also eine beliebige von ihnen verändern kann, ohne daß sich dabei gleichzeitig die Werte einer anderen ändern. Handelt es sich jedoch um eine Extremwertbestimmung bei abhängigen Variablen, so sind die Abhängigkeiten zu berücksichtigen. Hier stoßen wir auf den Begriff des bedingten Extremwerts.
Geht es um ein quantitatives Kriterium zum Vergleich mehrerer Objekte, so darf dieses Kriterium nur eine Variable haben. Die Werte der Variablen charakterisieren die einzelnen Objekte, und die Objekte werden verglichen, indem die Werte einander gegenübergestellt werden. Haben zwei Objekte dieselben Werte, so sind sie gleichwertig. Nur unter den vorgenannten Voraussetzungen hat es überhaupt Sinn, die Aufgabe der Bestimmung des optimalen Objekts zu stellen.

Die Nähe

Es ist sehr schwierig, ein quantitatives Kriterium für den Grad der menschlichen Nähe aufzustellen, sowohl für das geistige Nahestehen als

[1]) Der Dichter *Shukowskij* hat irgendwo einmal gesagt: „Mäßigung ist das beste Gelage."

auch für die menschliche Nähe, die erstes Gesprächsthema der Sechzehnjährigen ist, wenn es ihnen gelungen ist, einen nicht jugendfreien französischen oder italienischen Film anzusehen.
Wir wollen jetzt bei dem Aspekt der Nähe etwas verweilen, für den sich ein quantitatives Kriterium einführen läßt. Man spricht von nahen geologischen Epochen und nahe gelegenen Städten. Was bedeutet das?
Sind zwei Städte nahe gelegen, wenn die Entfernung zwischen ihnen 200 km beträgt? Sind zwei Erdzeitalter, die durch 200 Millionen Jahre voneinander getrennt sind, einander nahe oder fern? Der aufmerksame Leser wird sofort die Gegenfrage stellen: Nahe oder fern im Vergleich wozu?
Die Erdzeitalter werden in Millionen Jahren gemessen; wenn die Zeit zwischen zwei Epochen geringer ist als die Dauer der Epochen selbst, kann man von nahe gelegenen Erdzeitaltern sprechen.
Die Entfernung zwischen zwei Städten kann einige wenige, hunderte oder gar tausende Kilometer betragen. Die Entfernung zwischen Berlin und Moskau ist groß im Vergleich zur Entfernung zwischen Berlin und Dresden; im Vergleich zur Entfernung zwischen Berlin und Wladiwostok ist sie jedoch klein. Der Begriff der Nähe hängt also von der jeweiligen Situation ab.
Es ist klar, daß man zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte eine Maßeinheit für die Länge haben muß. Doch das ist für die Definition des Begriffes der Nähe noch nicht ausreichend. Man muß noch angeben, wozu man die Entfernung in Beziehung setzt. Manchmal handelt es sich nur um einen Vergleich von Entfernungen, wie im eben betrachteten Beispiel. In anderen Fällen kann der Vergleich, wie sich bald zeigen wird, viel schwieriger werden.
Sie, verehrter Leser, werden meinen, daß Sie aus diesen ganzen trivialen Überlegungen nichts Neues erfahren haben. Ich bin fast mit Ihnen einverstanden. Können Sie mir aber sagen, welche der beiden Kurven im Bild 81 der horizontalen Achse näher liegt, die gestrichelte oder die punktierte?
Ich glaube, Sie befinden sich nun in derselben schwierigen Situation wie der Vater eines Zwillingspaares, der nur einen der Zwillinge zum Fußball mitnehmen kann, natürlich denjenigen, der sich am besten geführt hat. Der eine hat die ganze Woche nicht essen wollen, sich zweimal geweigert, die Zähne zu putzen und an den Fingernägeln gekaut. Der andere hat sich die ganze Woche tadellos benommen; doch am Sonnabend hat er mit Hilfe einer speziell dazu konstruierten Vorrichtung aus Spiegeln, Rohren und Hebeln den ganzen Abend die ältere Schwester beobachtet, als deren Freund zu Besuch war. Versuchen Sie nun zu sagen, wer mit zum Fußball darf!
Der Leser, der die vorigen Abschnitte aufmerksam gelesen hat, wird überlegen antworten: „Die Antwort auf diese Frage wurde bereits früher gegeben — wir müssen ein Kriterium einführen, in unserem Fall ein Kriterium für die Nähe zweier Kurven.“

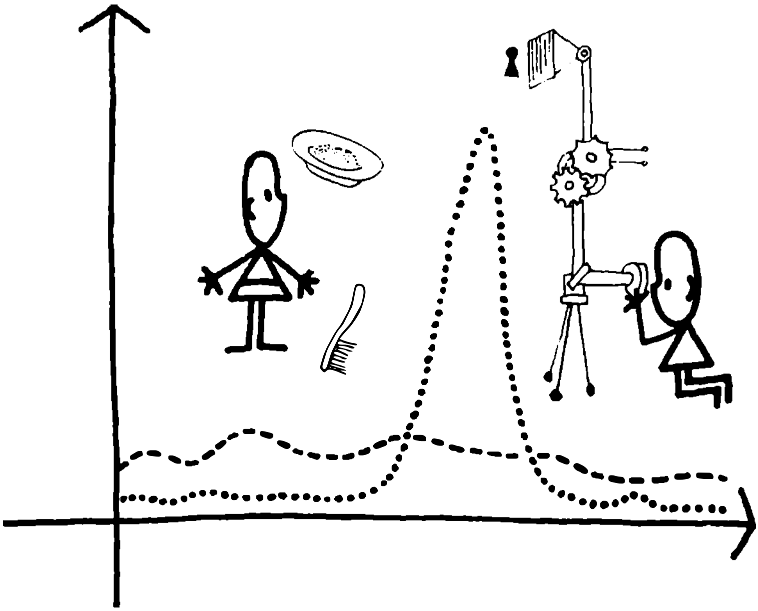


Bild 81

Einverstanden, doch was für Kriterien kann man für die Nähe von Kurven vorschlagen?

Musja und Pusja

Die Nachbarinnen Musja und Pusja sind gute Freundinnen. Sie wohnen außerdem nahe beieinander und haben ähnlich klingende Vornamen — sie unterscheiden sich lediglich im ersten Buchstaben.
Musja und Pusja kommen gemeinsam von der Arbeit zurück. Sie öffnen ihre Wohnungstüren und schalten das Licht ein. Die resolutere Musja macht sofort das Licht im Korridor, im Wohnzimmer, in der Küche und im Bad an, das Radio wird auf volle Lautstärke eingestellt, und sie beginnt, das Abendessen zuzubereiten.
Pusja setzt sich erst einmal in Ruhe in den großen Sessel, um eine spannende Erzählung über die Schädlichkeit von Fleischgerichten in der Zeitschrift „Deine Gesundheit“ zu lesen.
Musja hört sich die Sendung des Frauenfunks an. Der aktuelle Schlager

> Zweimal zwei ist vier,
> Bleib gesund und trink Kefir!
> Gehst Du nachher aus dem Haus,
> Mach noch schnell die Lampen aus . . .

erreicht sein Ziel, und Musja löscht das Licht im Wohnzimmer, im Korridor und im Bad. Bald ist die Frauensendung zu Ende, und sie schaltet den

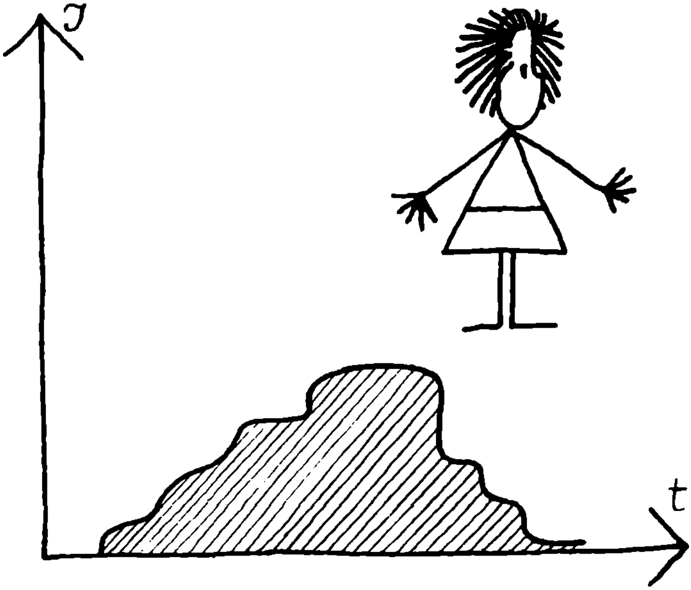


Bild 82

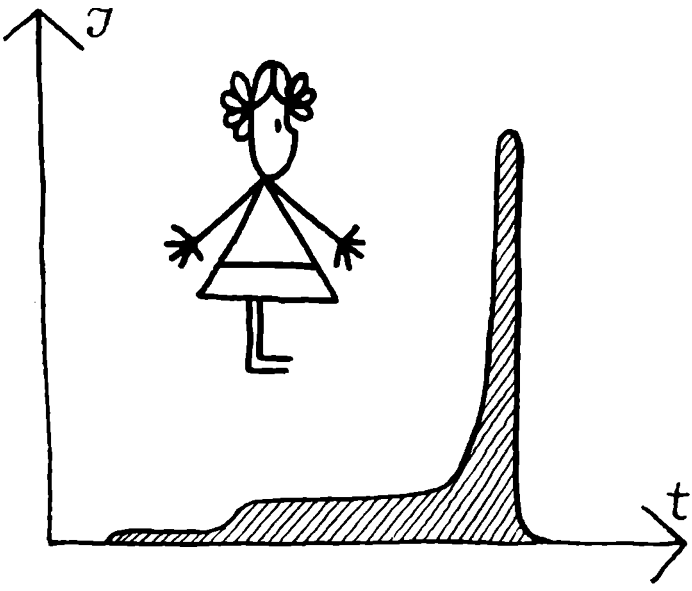


Bild 83

Radioapparat aus. Es klopft, Pusja kommt. Sie wollte, nachdem sie sich erholt hat, bügeln und hat das Bügeleisen eingeschaltet. Dabei ist in ihrer Wohnung die Sicherung durchgebrannt. Musja lädt Pusja zu sich ein. Bis die Männer vom Fußball kommen, ist niemand da, der die Ursache des Kurzschlusses suchen und die Sicherungen auswechseln kann. Nachdem sie die neuesten Strickmuster erörtert haben, setzen sie sich vor den Fernsehapparat, um am internationalen Fußballspiel teilzunehmen. Das hilft ihnen, sich die Zeit zu verkürzen, und gibt ihnen die Möglichkeit, sich mit ihren Männern über das Spiel zu unterhalten.
In den Bildern 82 und 83 kann man den Verbrauch an Elektroenergie in den Wohnungen von Musja und Pusja verfolgen. Auf der horizontalen Achse ist die Zeit abgetragen und in vertikaler Richtung der jeweilige Energieverbrauch.
Als Pusja das defekte Bügeleisen eingeschaltet hat, kam es zum Kurzschluß; die aufgenommene Energiemenge stieg sehr stark an, und die Sicherung brannte durch. Die Kurve sank auf Null ab.
Will man nun den Energieverbrauch einschätzen, so kann man das mindestens auf zweierlei Weise:
Die Zählerstände von Musja und Pusja haben sich um einen Betrag geändert, der der Größe der Flächen unter den Kurven in den Bildern 82 und 83 proportional ist. Die Fläche unter der Kurve von Musja ist größer, demzufolge liegt also die Kurve von Pusja insgesamt näher an der horizontalen Achse (der Nullinie).
Vergleicht man jedoch die Kurven nach ihrem maximalen Wert (gerade darauf reagieren die Sicherungen), so ist die Kurve von Pusja bedeutend höher als die von Musja, und nach diesem Kriterium liegt die Kurve von Musja näher an der horizontalen Achse.

Kein schreckliches Integral

Ich erwähnte die Fläche unter einer Kurve. Der genaue Leser wird dabei eine Erklärung vermißt haben: In der Elementargeometrie wird nur der Flächeninhalt von Figuren bestimmt, die durch Strecken begrenzt sind, während es sich hier um Flächen handelt, die von beliebigen Kurven begrenzt werden können. In der Schule wird zwar auch die Fläche des Kreises durch Grenzübergang von den Flächen einbeschriebener und umbeschriebener Vielecke ausgehend bestimmt; unexakte Schlüsse mit dem schlecht gefaßten Begriff des Grenzwertes verschleiern jedoch nur das Wesen der Sache.
Zur Bestimmung des Flächeninhalts einer ebenen Figur, also eines Teils der Ebene, der durch eine Kurve begrenzt wird, braucht man bestimmte Rechenregeln. Diese Rechenregeln kann man nur herleiten, wenn man einige Kenntnisse der Theorie der Grenzwerte hat.
Ich werde im folgenden versuchen, einige Grundideen und einfache Tatsachen darzulegen, ohne die Theorie der Grenzwerte zu benutzen.

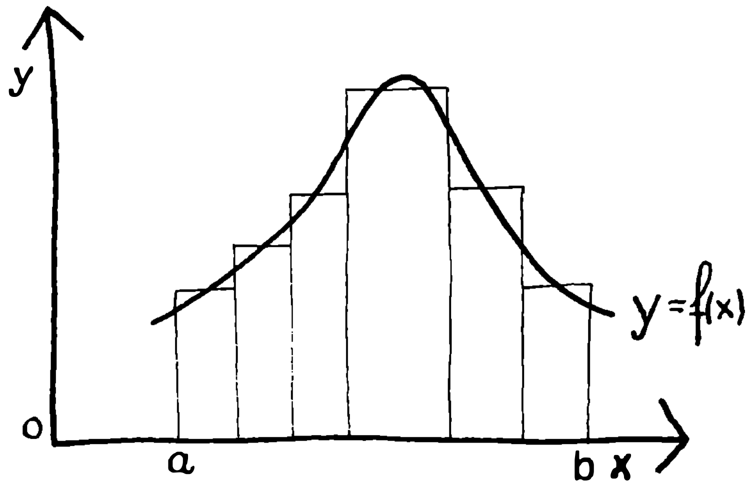


Bild 84

In erster Linie wollen wir uns damit beschäftigen, wie man den Flächeninhalt unter einer Kurve, wie sie z. B. im Bild 84 dargestellt ist, bestimmen kann. Die Fläche wird durch den Abschnitt $a \leqq x \leqq b$ auf der x-Achse, die Kurve $y = f(x)$ und zwei zur y-Achse parallele Strecken durch die Punkte $x = a$ und $x = b$ begrenzt. Die Grundidee zur Berechnung des Flächeninhalts S besteht darin, daß man die Ausgangskurve durch eine im Bild 84 ebenfalls dargestellte Treppenkurve ersetzt.
Die Flächeninhalte der einzelnen so erhaltenen Rechtecke lassen sich leicht bestimmen. Ihre Summe ist etwa gleich dem gesuchten Flächeninhalt unter der Kurve. Je schmaler die Rechtecke gemacht werden (dabei nimmt natürlich ihre Anzahl zu), um so mehr kommt die Summe ihrer Flächeninhalte dem gesuchten Flächeninhalt nahe.
Bei weiterem Anwachsen der Anzahl der Rechtecke (wobei ihre Breite immer geringer wird) nähert sich ihr Flächeninhalt immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt. Man sagt: Die Summe ihrer Flächeninhalte strebt gegen einen Grenzwert, den Flächeninhalt S unter der Kurve $y = f(x)$, für den wir uns interessieren. Er heißt bestimmtes Integral der Funktion $y = f(x)$ über das Intervall (a, b) und wird bezeichnet mit

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

Das Zeichen $\int$ für das Integral stammt vom Anfangsbuchstaben S des Wortes Summe und wurde von *Leibniz* eingeführt, der gleichzeitig mit *Newton* die Integralrechnung geschaffen hat. Vor allem *Leibniz* verdanken wir fast sämtliche Symbole und Bezeichnungen der Integral- und Differentialrechnung. Die Buchstaben oberhalb und unterhalb des Symbols $\int$ deuten auf Anfang und Ende des Intervalls hin, über dem der

Flächeninhalt bestimmt wird. Mit dx ist nicht das Produkt von d und x bezeichnet, sondern dx ist als geschlossenes Symbol anzusehen. Es trägt die Bezeichnung Differential.

Falls Sie nun glauben, verehrter Leser, Sie hätten hiermit bereits das Wesen der Integralrechnung kennengelernt, so muß ich Sie leider enttäuschen und auf spezielle Literatur verweisen. Wir brauchen aber für unsere weiteren Betrachtungen die Integralrechnung nicht.

Bei komplizierten Kurven bietet die Integralrechnung nur Näherungsverfahren zur Bestimmung der Flächeninhalte. Wenn Sie einmal einen Flächeninhalt zu bestimmen haben und es Ihnen nicht auf sehr große Genauigkeit ankommt, können Sie ein einfaches Verfahren anwenden. Nehmen Sie ein rechteckiges Blatt Papier und bestimmen Sie den Flächeninhalt aus Länge und Breite. Danach stellen Sie das Gewicht des Papierbogens auf einer genauen Waage fest. Nun zeichnen Sie Ihre Figur auf das Papier, schneiden sie sauber aus und wiegen sie auf derselben Waage. Ich glaube, die weiteren Operationen mit den erhaltenen Werten sind Ihnen klar. Die beschriebene Methode stellt ein sehr gutes Näherungsverfahren zur Berechnung bestimmter Integrale dar; natürlich ist die Genauigkeit nicht sehr groß. Für größere Genauigkeiten muß man sich auf die Methoden der Analysis stützen und die Rechnungen auf einem elektronischen Rechner ausführen.

Bevor wir unser Gespräch über die Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren abschließen, möchte ich noch feststellen, daß es manchmal günstig ist, auch vom negativen Flächeninhalt zu sprechen. Befindet sich die begrenzende Kurve unterhalb der x-Achse, so sieht man den Flächeninhalt als negativ an (Bild 85). Das ist auch verständlich: Die Werte der Funktion $y = f(x)$ sind hier negativ, während man die Grundseite der krummlinigen Fläche auf der x-Achse in positiver Richtung orientiert.

Schneidet die Kurve $y = f(x)$ die x-Achse, so ist der Teil der Fläche oberhalb der x-Achse positiv, während der Teil der Fläche unterhalb der x-Achse negativ ist (Bild 86). Für die durch die x-Achse und die Sinuskurve im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ eingeschlossene Fläche ergibt sich der

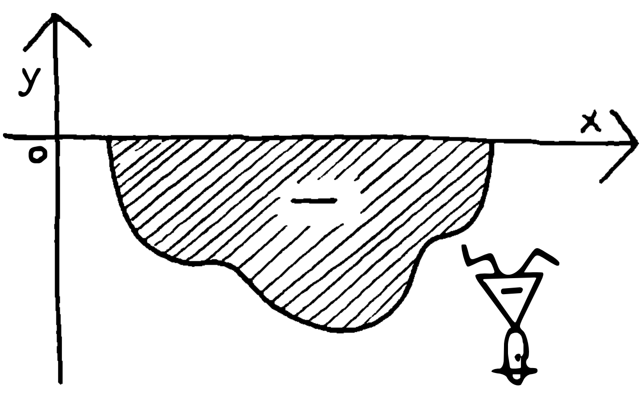


Bild 85

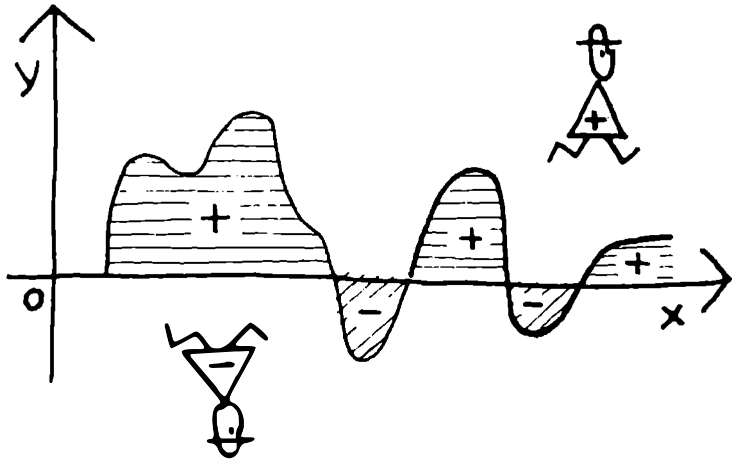


Bild 86

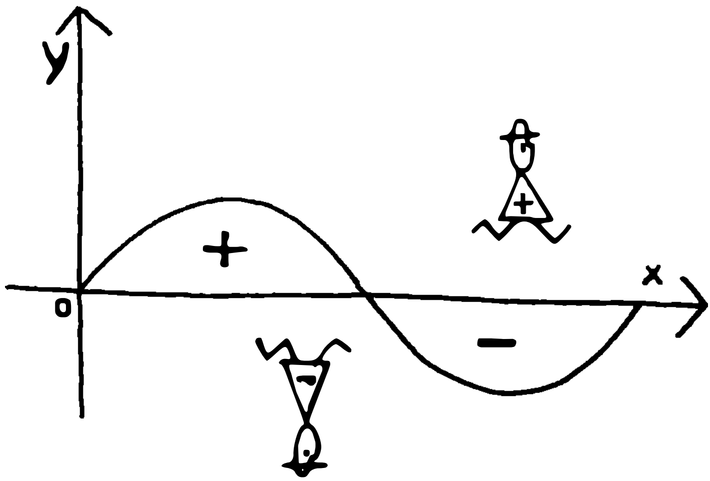


Bild 87

Wert Null, da der positive und der negative Teil der Fläche gleich groß sind (Bild 87).

Raum, Abstand, Norm

Viele Wörter unserer Sprache haben mehrere Bedeutungen; manche erhalten auch mit der Zeit einen neuen Inhalt. Der Begriff „Masse" für eine große Menge irgendwelcher Dinge hat auch die Bedeutung eines dickflüssigen Breis (z. B. Teermasse, Klebemasse). Außerdem stellt er einen wichtigen physikalischen Grundbegriff dar.

In analoger Weise verwendet man den Begriff „Raum" für die Räume in einem Haus (z. B. die Zimmer) oder auch mit einer wesentlich allgemeineren Bedeutung. Wir haben bereits vom mehrdimensionalen Raum — der Verallgemeinerung des gewöhnlichen Raumes — gesprochen. Jetzt möchte ich auf eine weitere Verallgemeinerung hinweisen, die eng mit dem Begriff der Nähe zusammenhängt.

Jedem ist bekannt, daß in unserem Raum der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten P und Q durch die Länge der geraden Verbindungslinie angegeben wird. Wir leben aber nicht irgendwo, sondern auf der Erde, und die Erde ist näherungsweise eine Kugel. Deshalb kann man den kürzesten Abstand z. B. zwischen Berlin und Alma-Ata nicht mit Hilfe einer geraden Verbindungslinie messen, sondern auf einem Großkreisbogen. Diese kürzeste Verbindung längs des Großkreisbogens könnte allerdings nur das Flugzeug benutzen. Fährt man mit der Eisenbahn, so hat man als Entfernung zwischen Berlin und Alma-Ata die Länge der Eisenbahnlinie anzusehen, deren Trassen z. B. die Wüsten umgehen. Die Entfernung zwischen den beiden Städten längs der Eisenbahnlinie ist bedeutend größer als längs des Großkreisbogens.

In der Stadt mißt man die Entfernung zwischen der Wohnung und der Arbeitsstelle nicht längs der Luftlinie, sondern entlang den Straßen, die von der Wohnung zur Arbeitsstelle führen.

Diese Entfernung ist für den Fußgänger meist kleiner als für den Autofahrer: Der Fußgänger kann einen Park durchqueren; er braucht auch nicht auf Einbahnstraßen zu achten. Außerdem geben wir die Entfernung zwischen der Wohnung und der Arbeitsstelle oft nicht in Kilometern an, sondern wir nennen die Zeit, die wir für den Weg brauchen.

Stellen wir uns einmal ein Drahtgestell in Form eines Würfels vor. Eine Ameise, die von einer Ecke zur gegenüberliegenden will, muß die Kanten des Würfels entlanglaufen. Demzufolge ist für sie die Summe der Länge der Kanten, auf denen sie entlangzugehen hat, der Abstand zweier Eckpunkte.

Im Abschnitt über Musja und Pusja wurde die Frage der Nähe der beiden Kurven noch nicht endgültig geklärt. Wir müssen uns eine Methode ausdenken, nach der wir den Abstand zwischen zwei Kurven messen können.

Das alles zwingt den Mathematiker nachzudenken: Welche gemeinsamen Eigenschaften haben alle diese verschiedenen Abstandsbegriffe? Einige Überlegungen führen uns zu den Haupteigenschaften:

Der Abstand zwischen zwei Punkten P und Q ist nie negativ; er beträgt nur dann Null, wenn P und Q zusammenfallen. Wir wollen den Abstand zwischen P und Q mit $r(P, Q)$ bezeichnen. Im gewöhnlichen Raum ist der Abstand von P nach Q der gleiche wieder von Q nach P: $r(P, Q) = r(Q, P)$. Diese Eigenschaft wird als Symmetrie bezeichnet. Glauben Sie nur nicht, daß sie immer erfüllt sein muß. Der Weg von der Wohnung zur Gaststätte ist oft viel kürzer als der von der Gaststätte zur Wohnungstür! In einer Stadt mit Einbahnstraßen ist der Weg für ein Auto von P nach Q

nicht der gleiche wie der von Q nach P. Zunächst wollen wir aber derartige unsymmetrische Situationen außer acht lassen.
Schließlich ist die Beziehung, die zwischen den Seiten eines Dreiecks besteht, die wichtigste Eigenschaft des Abstandsbegriffes: Die Summe zweier Dreieckseiten ist nie kleiner als die dritte Seite. Das läßt sich folgendermaßen schreiben, wenn P, Q und S beliebige Punkte des Raumes sind:

$$r(P, Q) \leqq r(P, S) + r(Q, S)$$

Diese Ungleichung wird als Dreiecksungleichung bezeichnet. Stellen Sie sich vor, Sie verfügen über eine gewisse Menge von Objekten beliebiger Art. Diese Objekte können Punkte der Ebene oder des zehndimensionalen Raumes, Vektoren oder Polynome, Funktionen oder Transformationen sein. Aus diesen Objekten konstruieren wir einen neuen Raum. Wir bezeichnen unsere Objekte einfach als Punkte des neuen Raumes und kennzeichnen sie durch Großbuchstaben. Das führt zu keinerlei Komplikationen. Wir gehen mit den Elementen unseres konstruierten Raumes (die z. B. Funktionen oder Transformationen darstellen) genauso um wie mit den Punkten im gewöhnlichen Raum. Jetzt wollen wir definieren, was ein metrischer Raum ist (d. h., ein Raum mit einer Metrik — einem Abstandsbegriff). Das ist ein Raum, der aus einer Menge irgendwelcher Elemente besteht und in dem für zwei beliebige Elemente P und Q eine reelle Zahl $r(P, Q)$ definiert ist, die Abstand genannt wird und den folgenden zwei Bedingungen genügt:
Erstens gilt $r(P, Q) = 0$ genau dann, wenn die Punkte P und Q zusammenfallen. Zweitens gilt für drei beliebige Punkte P, Q und S die bereits angegebene Dreiecksungleichung.
Gelten für einen Abstandsbegriff diese zwei Beziehungen, so kann man daraus leicht die Nichtnegativität, die Symmetrie und viele andere Eigenschaften ableiten. Der Abstandsbegriff gibt uns die Möglichkeit, ein Kriterium für die Nähe zweier betrachteter Objekte zu finden.
Im folgenden können Sie sich davon überzeugen, wie allgemein der eingeführte Begriff des metrischen Raumes ist und was man damit anfangen kann. Setzen wir zunächst voraus, daß die Punkte P, Q und S unseres metrischen Raumes Funktionen $y = p(t)$; $y = q(t)$; $y = s(t)$ sind, die alle über einem bestimmten Zeitintervall $a \leqq t \leqq b$ definiert sind. In der Menge dieser Funktionen läßt sich ein Abstandsbegriff auf verschiedene Weise einführen. Nehmen wir als konkretes Beispiel die Kurven, die den Energieverbrauch von Musja und Pusja beschreiben. Als Abstand zwischen den Funktionen können wir das Maximum der Differenz der Kurven betrachten (die absolute Größe — der Abstand darf nicht negativ sein). Bild 88 zeigt die Funktionskurven $y = p(t)$ und $y = q(t)$, Bild 89 ihre Differenz in den einzelnen Punkten und Bild 90 den absoluten Betrag dieser Differenz. Der größte Wert der letzten Kurve wurde als Abstand zwischen den Funktionen eingeführt. Dieser Abstandsbegriff ist zweckmäßig bei der Beurteilung des Stromverbrauchs, wenn es darum geht,

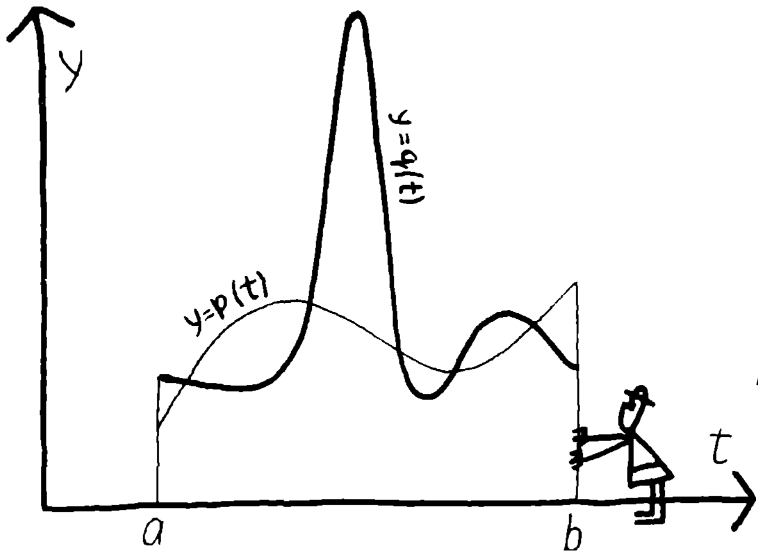


Bild 88

festzustellen, bei welcher Kurve die Gefahr größer ist, daß die Sicherung durchbrennt.
Wollen wir sparsam mit der Elektroenergie umgehen, wählen wir als Abstand zwischen den Funktionen die Größe der im Bild 90 schraffierten Fläche. Die Formel dafür sieht folgendermaßen aus:

$$r(P, Q) = \int_a^b |p(t) - q(t)| \, dt$$

Ich hoffe, Sie nehmen diese Formel bereits gelassen hin, anderenfalls können Sie sie einfach übersehen.
Für beide Abstandsbegriffe — das Maximum des absoluten Betrages der Differenz der Kurven und das Integral über den Absolutbetrag der Differenz — sind die beiden Axiome für einen metrischen Raum erfüllt. Wenn Sie mir das nicht glauben wollen, können Sie sich leicht selbst davon überzeugen.
Nimmt man als Abstand zweier Punkte auf der Kugel die Länge des entsprechenden Großkreisbogens, so sind ebenfalls die Axiome des metrischen Raumes erfüllt, und die Kugelfläche erweist sich bei dieser Abstandsdefinition als metrischer Raum.
Einen Raum stellt man sich oft als riesengroß und allumfassend vor. Aber der metrische Raum, den wir kennengelernt haben, kann aus nur drei Punkten, z. B. den Ecken irgendeines Dreiecks, bestehen. Wenn wir die Eckpunkte eines Dreiecks mit P, Q, S bezeichnen und als Abstand zwischen ihnen jeweils die Länge der Verbindungsstrecke definieren, sind beide Axiome des metrischen Raumes erfüllt. Der Abstand zwischen

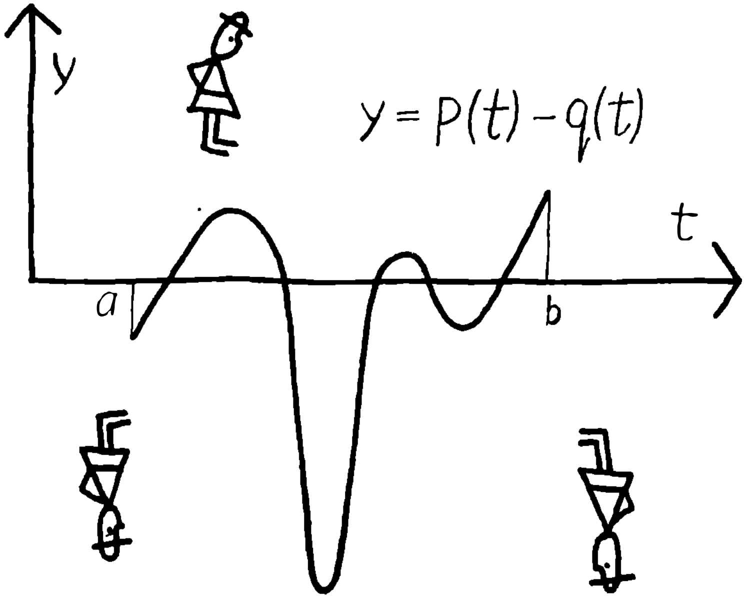


Bild 89

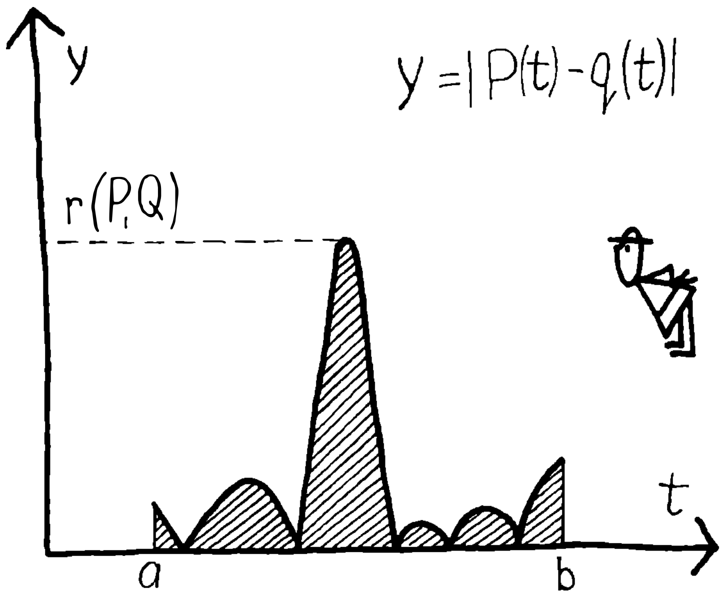


Bild 90

zwei Punkten ist genau dann gleich Null, wenn sie zusammenfallen, und die Dreiecksungleichung gilt trivialerweise. Weiter ist nichts nötig, die drei Punkte sind bereits ein metrischer Raum!
Später werde ich noch ein anderes ungewöhnliches Beispiel für einen metrischen Raum bringen.
Möglicherweise erweckt die Verwendung des Begriffes Raum für eine Menge aus nur drei einzelnen Punkten bei Ihnen den Verdacht, daß bei der Verallgemeinerung des Raumbegriffes nicht die wesentlichsten Eigenschaften dessen, was man gemeinhin unter Raum versteht, benutzt wurden. Im gewöhnlichen Raum kann man z. B. Vektoren addieren oder mit einer reellen Zahl multiplizieren und erhält dabei neue Vektoren desselben Raumes. Im metrischen Raum braucht das nicht erfüllt zu sein, wie man an dem betrachteten Beispiel des metrischen Raumes aus nur drei Punkten erkennt.
Man könnte einen neuen Raum auch so konstruieren, daß die Addition der Elemente und die Multiplikation mit reellen Zahlen ausführbar bleiben. Dann bleiben die gewöhnlichen Eigenschaften dieser Operationen erhalten, insbesondere bilden die Elemente des Raumes dann bezüglich der Addition eine Gruppe, von der im Zusammenhang mit den großen Entdeckungen von *Evariste Galois* die Rede war. Ein solcher Raum heißt linearer Raum. Der Raum der ebenen Vektoren ist beispielsweise mit der gewöhnlichen Vektoraddition und mit der Multiplikation eines Vektors mit Zahlen linear. Die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten bildet ebenfalls einen linearen Raum. In der Tat, die Summe zweier Polynome ist wieder ein Polynom, und ein Polynom bleibt ein Polynom, wenn man es mit einer Zahl multipliziert.
Vektoren haben eine bestimmte Länge. Läßt man die Vektoren im Koordinatenanfangspunkt beginnen, so ist die Länge eines Vektors nichts anderes als der Abstand zwischen dem Endpunkt des Vektors und dem Nullpunkt — dem Koordinatenursprung.
Führt man im linearen Raum einen Abstandsbegriff ein, so erhält man einen Raum, der sowohl linear als auch metrisch ist. Solche Räume heißen lineare normierte Räume oder Banachräume (nach dem großen polnischen Mathematiker *Stefan Banach*, einem der Schöpfer der Funktionalanalysis, der im Jahr 1945 verstorben ist).
Im linearen normierten Raum gibt es etwas Entsprechendes wie die Länge eines Vektors. Bezeichnet der Buchstabe P ein beliebiges Element des Raumes und O das Nullelement, so ist die Länge des Elementes P der Abstand $r(P, O)$ zwischen den Elementen P und O. Diese Zahl heißt Norm des Elementes und wird mit $||P||$ bezeichnet.
Führt man zuerst den Begriff der Norm ein, so kann man als Abstand zwischen zwei Elementen P und Q die Norm ihrer Differenz $||P - Q||$ benutzen. Im Raum der z. B. im Intervall $a \leqq t \leqq b$ definierten Funktionen läßt sich die Norm in verschiedener Weise definieren. Man könnte etwa den maximalen Betrag $||f|| = \max |f(t)|$ der Funktionswerte im Intervall $a \leqq t \leqq b$ als Norm der Funktion einführen. Mit der so defi-

nierten Norm und der üblichen Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit Zahlen erhält man einen linearen normierten Funktionenraum, von dem man sagt, er sei unendlichdimensional.

Wie Fachausdrücke entstehen

An dieser Stelle erlaube ich mir eine Abschweifung vom Thema. Man kann sie zwar nicht als lyrische Abschweifung bezeichnen, doch hoffe ich, sie kompensiert die Mühen, die Sie mit den Formeln und langen Betrachtungen des vorigen Abschnitts hatten.

Es ist völlig berechtigt, zu fragen, warum die Norm — das Analogon zur Länge eines Vektors — Norm genannt wird. Das wäre nur ein Spezialfall der allgemeinen Frage, wie überhaupt Fachausdrücke entstehen.

In der neuesten Ausgabe des Duden findet man unter Norm: „Norm, die, —, -en (1. Regel, Richtschnur, Musterbeispiel, Einheitsmuster; Vorbild; Vorschrift, Standard — 2. *Techn, Wirtsch* Größenvorschrift, Leistungssoll — 3. *Buchw* Bogensignatur) ⟨lat⟩".

In gewissem Sinne entspricht das unter 2. Genannte dem von uns eingeführten Normbegriff, obwohl die Norm einer Funktion natürlich eine ganz andere Bedeutung hat als eine Arbeitsnorm oder die Norm der Brotrationen, die es einmal auf Brotkarten gab.

Die Mathematiker haben eine Vorliebe für Wörter, die vom Wort „Norm" abgeleitet sind. Es gibt Normalräume, Normaloperatoren, Normalteiler, Normalverteilung, Normalgleichungen und einfach Normalen. Dabei hat man es in allen Fällen mit grundverschiedenen Dingen zu tun, die verschiedenen Gebieten der Mathematik entnommen sind.

Das Gegenteil eines normalen Menschen ist ein unnormaler (gewöhnlich ist allerdings unklar, was das bedeutet!). In der Mathematik gibt es aber keine unnormalen Gleichungen, unnormalen Verteilungen oder unnormalen Operatoren.

Es ist allgemein so, daß sich ein Wissenschaftler, der einen neuen Fachausdruck einführt, wenig darum kümmert, ob das betreffende Wort ein Antonym — ein Wort mit entgegengesetzter Bedeutung — hat. Es gibt z. B. gewöhnliche Differentialgleichungen, doch keine ungewöhnlichen! Als gewöhnliche Differentialgleichungen werden solche bezeichnet, bei denen die zu bestimmende Funktion eine Funktion einer unabhängigen Variablen ist; Differentialgleichungen für Funktionen mehrerer Variabler heißen partielle Differentialgleichungen und nicht ungewöhnliche Differentialgleichungen!

In der Mathematik werden rechteckige Tabellen als Matrizen bezeichnet. Ein Beispiel einer Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Elemente der Tabelle können Zahlen, Buchstaben oder Funktionen sein. Wie Sie sehen, ähnelt die Bezeichnung der der typographischen Matrizen für den Schriftguß (hier lautet der Singular jedoch Matrize), obwohl es eine ganz andere Sache ist.
Nehmen wir eine quadratische Matrix, die soviel Zeilen wie Spalten hat:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Die Summe der Diagonalelemente $a_1 + b_2 + c_3$ wird als Spur der Matrix bezeichnet. Man wird schwerlich eine Analogie zu dem bekannten Gebrauch des Wortes „Spur" finden, zur Spur im Schnee, zur Spur eines Verbrechens usw.
Vor nicht allzulanger Zeit hat der bekannte amerikanische Mathematiker *J. L. Doob*, Spezialist auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einen neuen Begriff für bestimmte Zufallsprozesse eingeführt, den des Martingals. Die entsprechende Definition in dem Buch „Stochastische Prozesse" von *J. L Doob* lautet:
„Ein Zufallsprozeß $\{x_t, t \in T\}$ heißt Martingal, wenn für jedes $t \in T$ gilt $E\{|x_t|\} < \infty$ und wenn für beliebige $n \geqq 1$ und $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt

$$E\{x_{t_{n+1}} | x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\} = x_{t_n}\text{“}$$

Vor einigen Jahren war Professor *Doob* in Moskau und hat an der Moskauer Universität einen Vortrag gehalten. Danach wurde ihm von einigen Zuhörern die Frage gestellt, woher der Ausdruck Martingal stamme. Obwohl Professor *Doob* seinen Vortrag in Russisch gehalten hatte, reichte sein Wortschatz für die Antwort auf diese Frage nicht aus. Er malte eine pferdeähnliche Figur an die Tafel, zog eine ovale Linie um den dürren Hals, die offenbar ein Kumt darstellen sollte, legte die Kreide beiseite. zeigte mit dem Finger auf diese Stelle und sagte: „Das ist ein Martingal... und auch das, was ich vorher als Martingal definiert habe."
Mir hat diese forsche Art gefallen, neue Begriffe einzuführen: Sie erübrigt jede Rechtfertigung und Erklärung vor den peniblen Kollegen, welche komplizierten Gründe gerade diese und keine andere Bezeichnung nahelegen. Ein Begriff erwirbt bereits seine Existenzberechtigung, wenn er gut klingt und sich leicht einprägt.
Genauso ist das Wort Kybernetik entstanden: Der Begriff ist durch *Norbert Wiener* eingeführt worden, hat sich eingebürgert und verdrängt nach und nach alle anderen langen umschreibenden Wortkombinationen für den Gegenstand dieses Fachgebietes.
Auch hier kann sich kaum jemand etwas anderes unter dem Inhalt dieses Wortes vorstellen, denn die altgriechische Sprache beherrschen nur noch wenige Menschen auf der Erde.
Natürlich muß die Einführung eines neuen Begriffes etwas mehr begründet sein als durch den Wunsch des Autors, in die Geschichte einzugehen.

Die betrachteten Objekte oder Erscheinungen müssen so wichtig sein, daß sie eine neue Bezeichnung verdienen. Die Bezeichnung gebührt dem Gegenstand und nicht dem ruhmsüchtigen Autor!

Was wird nun mit den Aufgaben des Technologen?

Im Gespräch mit dem Technologen für Erdölverarbeitung hatten sich drei Aufgaben ergeben:

1. Es soll ein Kriterium angegeben werden, nach dem die Güte des Verarbeitungsprozesses beurteilt werden kann
2. Es sollte ein mathematisches Modell für den Verarbeitungsprozeß geschaffen werden
3. Auf Grund des Gütekriteriums und des mathematischen Modells soll ein Algorithmus für die Steuerung des Prozesses angegeben werden

Leider können wir uns noch nicht rühmen, die Aufgaben gelöst zu haben. Wir haben es mit recht schwierigen Problemen zu tun, und auch in der Literatur ist noch keine vollständige Lösung zu finden. Die Grundideen, die zur Lösung der Aufgaben führen könnten, sind über den Prozeß der Erdölverarbeitung hinaus für die Steuerung vieler technologischer Prozesse von Bedeutung. Deshalb werde ich mich lediglich mit den Grundideen auseinandersetzen, ohne ausführlich auf die möglichen Wege zur Lösung unserer konkreten Aufgaben einzugehen.
Beginnen wir mit der Auswahl eines Kriteriums zur Beurteilung der Güte des Verarbeitungsprozesses. Der Mathematiker kann gewöhnlich nicht sagen, nach welchen Gesichtspunkten man ein Kriterium auszuwählen hat.
„Die Auswahl eines Gütekriteriums ist Aufgabe des Technologen, wenn nicht des Werkdirektors selbst" — so lautet das Hauptargument des Mathematikers, mit dessen Hilfe er das Schlachtfeld in Ehren zu verlassen sucht.
Natürlich kann man vom Mathematiker nicht die genaue Kenntnis der Technologie des Verarbeitungsprozesses verlangen oder ein ausreichendes Verständnis für die komplizierten Beziehungen des Betriebes zu den Zulieferern und den Verbrauchern. Aber gerade davon hängt die Wirksamkeit der Strategie und die Auswahl des Gütekriteriums ab (ich habe das Wort „Strategie" vielleicht etwas zu früh gebraucht, später wird der Inhalt des Begriffes exakt erklärt werden; hier wollen wir das Wort im üblichen Sinne auffassen).
Auch die Verantwortlichen des Betriebes bzw. die Technologen befinden sich in keiner guten Lage: Sie müssen ein Gütekriterium finden und den Mathematiker zufriedenstellen, der ein exaktes Gütekriterium haben will und an den Formulierungen herumnörgelt. Wie soll aber der arme Technologe mit den überspitzt genauen mathematischen Formulierungen zurecht kommen, wenn er es seit Jahren gewöhnt ist, nur mit technologischen Begriffen umzugehen?

Deshalb muß entweder der Technologe zum Mathematiker werden oder der Mathematiker zum Technologen, oder beide Seiten müssen gut zusammenarbeiten. Die ersten zwei Wege sind zwar sicher, doch schwer zu verwirklichen. Die dritte Variante würde mit geringstem Aufwand für beide Partner zum Erfolg führen.
Hier scheint es mir angebracht, den Mathematiker aufzufordern, an die Basis, in die Produktion, zu gehen. Nein, keinesfalls, um sich dort eine Lebensstellung zu suchen! Es lohnt sich aber für ihn, einige Wochen regelmäßig den Betrieb aufzusuchen, sich mit den Fachleuten zu unterhalten und nach und nach aus ihnen alle die Angaben „herauszuholen", die er zur Formulierung des Gütekriteriums braucht. Aber auch die Fachleute müssen den Mathematiker wohlwollend empfangen und im Trubel der täglichen Sorgen die Zeit finden, um ihm die Probleme ausführlich darzulegen und zu erklären. Zweifellos erweist sich hier das Prinzip „Lieber einmal sehen als hundertmal hören" als richtig.
Entschuldigen Sie die vielen Schlagworte, verehrter Leser, ich komme jetzt zur Sache. Ich werde Ihnen jedoch nicht über das berichten, was sich in irgendeinem bestimmten Betrieb abspielt, sondern an einem Beispiel erläutern, wie man ein Kriterium aufstellt.

Diplom-Ingenieur Pfiffig sucht eine neue Arbeitsstelle

Fritz Pfiffig, Diplom-Ingenieur für Automatisierung, ist nicht mehr zufrieden mit dem Betrieb, in dem er arbeitet: Die Arbeitsorganisation ist schlecht; es bleibt ihm keine Zeit, um sich im Fachgebiet weiterzubilden; der Chef hat einen schwierigen Charakter und auf eine Wohnung besteht kaum Aussicht. Er wendet sich an Freunde und Bekannte und erhält nach einiger Zeit fünf Angebote.
Im Nördlichen Kombinat für Milchkonservierungsanlagen (NÖKOMI) wird in der Meß- und Prüfgeräteabteilung an einem Projekt zur numerischen Steuerung des Betriebes gearbeitet. Dort haben sich junge Leute der Sache angenommen, sind mit Begeisterung dabei, machen nachts noch Berechnungen, wälzen Literatur und brauchen dringend einen Automatisierungsspezialisten. Von Freizeit kann keine Rede sein, von einer Wohnung auch nicht. Die Direktion glaubt nicht an die Möglichkeit der numerischen Steuerung des Betriebes; ihr geht es nur darum, irgendwie den Plan zu schaffen ...
Die Abteilungsleiter im Staatlichen Konstruktionsbüro (SKB), im Zentralen Konstruktionsbüro (ZKB) und im Werk für mathematische Maschinen und Apparate (MAMASCHA) erzählen statt einer Antwort auf die Frage, womit er sich zu beschäftigen hätte, ausführlich über Zuwendungen für langjährige Betriebszugehörigkeit, über Prämien und über den betriebseigenen Sportclub. Von Studienkollegen erfährt er unter dem Siegel der Verschwiegenheit, daß man sich im SBK zur Zeit damit beschäftigt, kleine Regler für Klimaanlagen zu entwickeln; das ZKB sattelt aus irgendeinem Grund von Elektronik auf Pneumatik um, und im

MAMASCHA wird ein Gerät auf Vibrationsstabilität untersucht, das ein anderes Werk produziert, wobei das Öffnen der Geräte verboten ist.
Dafür gibt es in MAMASCHA die Möglichkeit einer Aspirantur. Im vergangenen Jahr waren noch Plätze frei, da fähige Mitarbeiter von den Chefs nicht weggelassen und unfähige von den zur Betreuung gewonnenen Professoren nicht genommen wurden.
Mit der Wohnungsfrage ist es am besten im ZKB bestellt. Dort wird bald ein Haus fertig. Natürlich wird man als Neuer kaum damit rechnen können, in diesem Haus eine Wohnung zu bekommen. Man darf aber annehmen, daß durch den Hausbau alle dringlichen und superdringlichen Fälle erledigt werden, so daß man eine Wohnung auf gewöhnlichem Wege erhält.
Im SKB und im MAMASCHA verspricht man eine Wohnung, doch nicht sehr fest, man betont mehr das Wort „Leistung für den Betrieb“ ...
Im Forschungsinstitut zur Untersuchung des Einflusses von Strahlen auf die lebende Natur (FINZUN) ist alles umgekehrt. In der Abteilung dieses neuen Instituts, in der eine Stelle frei ist, untersucht ein Doktor der Biologie den Einfluß von Hochfrequenz auf das Wachstum von Champignons. Er klagt über den geringen Automatisierungsgrad. Da im Institut keinerlei technische Ausrüstung vorhanden ist, muß man sie vollkommen neu schaffen. Dabei verspricht sich der Biologe Hilfe von einem Spezialisten aus dem Institut für Automatisierung, mit dem er zusammen auf die Jagd geht. Im FINZUN wird ein um 30% höheres Gehalt als für die übrigen Stellen geboten, und es besteht bei günstiger Entwicklung die Möglichkeit, in ein bis zwei Jahren eine selbständige Abteilung für Automatisierung zu schaffen.
Für den Weg zum Institut würde man etwa zwei Stunden benötigen, und die Perspektive des dreimaligen Umsteigens und eines Fußmarsches von zwei Kilometern bei trübem Matschwetter oder grimmiger Kälte ist nicht gerade rosig. Das FINZUN will jedoch auch ein Wohnhaus bauen.
Die Freundin von Diplom-Ingenieur Pfiffig, Liesa, arbeitet im SKB. Würde er auch dort arbeiten, so könnte er sie wohl mit soviel Aufmerksamkeit umgeben, daß kein anderer an sie herankommt. Würde er im FINZUN anfangen, so könnte er sie höchstens zweimal in der Woche treffen. Wenn er sich jedoch schnell zur Heirat entscheiden könnte, bestände die Möglichkeit, daß auch sie zum FINZUN überwechselt.
Wofür würden Sie sich entscheiden? Der Jungingenieur Pfiffig wußte es trotz aller Pfiffigkeit auch nicht. Er bat einen befreundeten Kybernetiker um Rat. Dieser hörte sich nicht erst lange alle Varianten, Feinheiten, seelischen Ergüsse und karrieristischen Träumereien an, sondern schlug vor, eine Tabelle aufzustellen.
In die Spaltenüberschriften trug er die einzelnen Institutionen ein, die bereit waren, den neuen Mitarbeiter aufzunehmen. Vor die Spalten schrieb er die Hauptpunkte, von denen für Pfiffig die Wahl der neuen Arbeitsstelle abhing. Die Tabelle wurde zeilenweise ausgefüllt, an jede Stelle kam ein Punktwert zwischen null und zehn Punkten. Das war

wesentlich leichter, als die Situation im ganzen zu überblicken. Urteilen Sie selbst!
Am interessantesten schien die Arbeit im FINZUN; sie hatte zwar keine großen Maßstäbe zu bieten, war aber immerhin eine selbständige Arbeit. Sie erhielt die höchste Punktzahl — 10. Im NÖKOMI gibt es auch interessante Arbeit, doch der Hauptteil wird von Programmierern und Spezialisten für numerische Berechnungen ausgeführt, während der Automatisierungsingenieur nur eine Nebenrolle spielt. Dafür gibt es 8 Punkte.

Tafel 3. Punktbewertung für die Stellensuche des Diplom-Ingenieurs Pfiffig

	Bezeichnung	NÖKOMI	SKB	ZKB	MAMASCHA	FINZUN	Gewichtsfaktor	Bezeichnung des Gewichtsfaktors
Arbeit	x_1	8	2	5	2	10	15	a_1
Vorgesetzter	x_2	7	5	4	2	9	12	a_2
Kollektiv	x_3	10	2	6	2	8	12	a_3
Aussichten auf Promotion	x_4	1	1	6	8	7	10	a_4
Materielle Bedingungen (Gehalt, Prämien usw.)	x_5	7	8	8	9	10	10	a_5
Aufstiegsmöglichkeiten	x_6	2	2	5	2	7	8	a_6
Aussichten auf Wohnung	x_7	1	5	9	5	10	15	a_7
Wegzeit zur Arbeit	x_8	10	4	6	3	1	8	a_8
Sport	x_9	2	2	10	2	5	5	a_9
Liesa	x_{10}	5	1	10	5	1	5	a_{10}
Summe S		53	32	69	40	68		
Kriterium K — gewogene Summe		550	342	658	398	768		

Im SKB, im ZKB und im MAMASCHA zeigt man keine konkrete Aufgabenstellung, sondern vorläufig nur die „Katze im Sack“. Die interessanteste Arbeit hat, wenn man den Studienkollegen glauben kann, vielleicht das ZKB zu bieten — die Probleme der Pneumatik scheinen Perspektive zu haben (jedenfalls hat der berühmte Professor M. Aiserman in einem öffentlichen Vortrag so etwas gesagt). Allerdings ist noch nicht entschieden, ob Diplom-Ingenieur Pfiffig zur Pneumatik kommt oder nicht, man könnte es auf alle Fälle versuchen. Also erhalten SKB und MAMASCHA 2 Punkte, und ZKB erhält 5 Punkte.
Die Leiter der Abteilungen sind Pfiffig nicht gut bekannt. Einige Informationen über sie sind aber vorhanden.

Im NÖKOMI ist der Leiter der Gruppe, die für die Einführung der numerischen Steuerung arbeitet, ein lebhafter, energischer Mensch. Er hat die Hochschule zwei Jahre vor Pfiffig verlassen. Die Leute reden zwar gut über ihn, er kann aber auch noch nicht allzuviel, also kann man von ihm auch nicht viel lernen. Bewertung — 7 Punkte.
Der voraussichtliche Chef im SKB ist ein finsterer Mensch, der kurz vor der Rente steht. Das Gespräch mit ihm hat keinen guten Eindruck hinterlassen, obwohl schwer zu sagen ist, worin dieser schlechte Eindruck besteht. Er soll zwar niemand etwas Böses tun, doch sehr kleinlich sein. So wurden 5 Punkte angesetzt.
Im ZKB gelang es nicht, mit dem unmittelbaren Vorgesetzten zu sprechen — er war auf einer längeren Dienstreise. Dem Vernehmen nach soll er keinen einfachen Charakter haben, ehrgeizig sein und ein schlechtes Verhältnis zu den höheren Chefs haben. Das ist 4 Punkte wert.
Der Doktor der Biologie ist bärtig, umgänglich, spricht drei Sprachen und kennt alle und jeden. Er hat grandiose Perspektiven ausgemalt — die Champignons sind bloß der Anfang; offenbar läßt sich das Wachstum jeglicher Pflanzen in Gewächshäusern bedeutend beschleunigen. Die Meinungen über ihn sind gut. Er ist aber selten an seinem Arbeitsplatz, fährt oft ins Ausland, ist Mitglied aller möglichen Wissenschaftlichen Räte usw. In der Automatisierung kann man von ihm natürlich nichts lernen, doch auf Hilfe kann man rechnen. Das ist gut — 9 Punkte. So entstanden die Zahlen in der Zeile „Vorgesetzter".
Das Gehalt ist außer im FINZUN überall etwa dasselbe: 800 bis 1000 Mark im Monat. Allerdings gibt es im SKB und ZKB häufig Prämien, und das macht im Mittel noch 100 Mark im Monat zusätzlich aus. Im MAMASCHA gibt es Prämien quartalsweise, und zwar recht hohe, es ergeben sich im Mittel je Monat 200 Mark. Im FINZUN handelt es sich um die Planstelle eines Gruppenleiters mit 1200 Mark im Monat. Bewertet man dieses Gehalt mit 10 Punkten, so lassen sich leicht auch die übrigen Punktzahlen ansetzen.
Der Wohnung am nächsten gelegen ist das NÖKOMI, man benötigt nur 10 Minuten Fußweg. Zum SKB und zum MAMASCHA sind es etwa 40 Minuten, zum MAMASCHA muß man von der Metro in den Autobus umsteigen. Bis zum ZKB sind es 25 Minuten mit dem Obus; zum FINZUN benötigt man zwei Stunden. Die Punktzahlen für diese Zeile sind klar.
Liesa ist konsequent dagegen, daß Pfiffig zum SKB geht, wo sie selbst arbeitet; ihr gefällt es dort nicht so recht, und sie möchte auch gern die Stelle wechseln. Sie schlägt ZKB als Arbeitsstelle vor, dort wären die Perspektiven günstig. Sie wohnt in der Nähe des ZKB, und im Fall einer Heirat könnten sie gut bei ihren Eltern wohnen. Sie ist gegen das FINZUN, denn sie möchte nicht so weit von ihren Eltern wegziehen. In der Tabelle erscheinen neue Zahlen.
So überlegten sich die Freunde auch die anderen Zahlen, schätzten die Arbeitskollektive ein, die Möglichkeiten zur Promotion, die Chancen für das Aufsteigen, die sportlichen Möglichkeiten und die Aussichten auf

eine Wohnung. Die entsprechenden Punkte sind in die Tabelle eingetragen.
Nun werden die Zahlen in den einzelnen Spalten addiert, und für jede Arbeitsstelle ergibt sich eine Punktzahl. Es stellt sich heraus, daß ZKB und FINZUN bedeutende Vorzüge gegenüber den anderen haben (s. Zeile „Summe"). Das ZKB hat einen Punkt voraus, und Pfiffig müßte das ZKB als die Arbeitsstelle mit den meisten Vorzügen wählen.
Es ist jedoch noch eine wichtige Überlegung anzustellen. Nicht alle zehn Zeilen der Tabelle haben für Pfiffig denselben Wert. So haben beispielsweise die Aufstiegsmöglichkeiten im Moment des Arbeitsstellenwechsels ein bedeutend geringeres Gewicht als die Art der Arbeit oder die Lösung des Wohnungsproblems. Deshalb werden für die verschiedenen Zeilen der Tabelle Gewichtsfaktoren eingeführt. Diese Faktoren könnte man nach einem 10-Punkte System aufstellen. Wir werden die Wichtigkeit der einzelnen Zeilen in Prozent angeben; dies entspricht einer Aufteilung von 100 Punkten.
Die Gewichtsfaktoren sind nach subjektiven Gesichtspunkten zu verteilen. Zweifel ruft lediglich der Faktor hervor, der die Meinung von Liesa zum Ausdruck bringt. Pfiffig mißt dieser Meinung jedoch kein großes Gewicht bei, da die Frage einer Heirat noch gar nicht entschieden ist.
Das Gütekriterium K für die verschiedenen Varianten der Wahl der neuen Arbeitsstelle ist also nicht einfach die Summe $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$, sondern die gewogene Summe $K = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{10}x_{10}$.
Für die von Pfiffig festgelegten Faktoren, die den Grad seiner Interessiertheit an den einzelnen Dingen ausdrücken, hat die gewogene Summe die Form $K = 15x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 8x_6 + 15x_7 + 8x_8 + 5x_9 + 5x_{10}$.
Das Ergebnis ist in der letzten Zeile der Tafel 3 angegeben. Es ist nach wie vor zu erkennen, daß ZKB und FINZUN bedeutende Vorzüge gegenüber den anderen Arbeitsstellen haben. FINZUN liegt aber jetzt weit vor ZKB, um etwa 15%. Nun fällt Pfiffig die Entscheidung, zum FINZUN zu gehen.
Der Gang der Überlegungen zur Aufstellung eines Gütekriteriums ist in vielen Aufgaben vollkommen analog. Wenn irgendwelche Kennziffern objektiv gemessen werden können — wie im vorstehenden Beispiel das Gehalt —, so sind sie zu benutzen. Wenn die Kennziffern subjektiv festgelegt werden, so ist auf den Rat eines Experten oder die Einschätzung der interessierten Stelle zurückzugreifen. Wenn wir ein Gütekriterium für die Erdölverarbeitung aufstellen wollen, so können wir z. B. den Gewinn zugrunde legen, den das Werk erzielt. Die verschiedenen bei der Verarbeitung entstehenden Fraktionen, Benzine, Gasolin, Raketentreibstoff usw., sind die Kenngrößen, und die Gewichtsfaktoren sind die Werksabgabepreise. Außerdem sind die Kosten für die Rohstoffe, die Elektroenergie, die Heizung, den Lohnfonds des Betriebes und andere Ausgaben zu berücksichtigen. Wir werden allerdings bald feststellen, daß selbst bei

einem scheinbar so leicht faßbaren Kriterium wie dem Gewinn bedeutende Schwierigkeiten entstehen können. Es kann vorteilhaft sein, den Prozeß für verschiedene Betriebsteile unterschiedlich zu führen. Für den einen Betriebsteil kann die Erzeugung leichter Fraktionen ökonomischer sein, da in den dort vorhandenen Anlagen die geringsten Verluste auftreten, während die Anlagen eines anderen Betriebsteils einen höheren Gewinn bringen, wenn weniger leichte Fraktionen entstehen. Die Werkleitung muß die Interessen der einzelnen Betriebsteile in Einklang bringen.
Ein Gütekriterium für das gesamte Werk (beispielsweise nach dem Gewinn) muß nicht unbedingt den Interessen der Volkswirtschaft entsprechen. Das kann verschiedene Gründe haben. So kann z. B. ein Werk auf Grund der Gewinnoptimierung die Benzinproduktion erhöhen wollen, während aber gerade vor allem schwere Erdölprodukte benötigt werden.
Das Gütekriterium, nach dem die Produktion optimiert wird, muß auch den Interessen der Volkswirtschaft gerecht werden. Deshalb muß die Produktion so geplant werden, daß alle Teile des Landes mit den notwendigen Erdölprodukten versorgt werden und die Transportkosten zu den Verbrauchern möglichst gering sind.
Man könnte noch viele Faktoren anführen, die die Wahl eines Gütekriteriums erschweren. Wir wollen es bei den gezeigten Beispielen bewenden lassen.

Das Modell

Ein Spielzeugauto ist das Modell eines wirklichen Autos, das Bild eines Filmstars ist das Modell des Filmstars selbst. Ein Objekt und sein Modell haben etwas Gemeinsames, sie stimmen jedoch nie ganz überein. Die Bilder des Filmstars von vorn und im Profil sind verschiedene Modelle. Sie können Briefmarkenformat haben oder die ganze Fassade eines Hauses einnehmen.
Ein Luftballon kann sowohl das Modell der Erdkugel als auch das eines Tennisballs sein. In der Himmelsmechanik dient häufig ein Punkt, dem die Masse der Erdkugel zugeschrieben wird, als Modell der Erde.
Es ist klar, daß man den Tennisball ebenso als Modell für den Luftballon ansehen kann. Ist aber ein wirkliches Auto auch das Modell eines Spielzeugautos? Oder ist etwa der Filmstar nur ein Modell seines Reklamefotos? Ich bin der Meinung, daß es sinnvoll ist, diese Fragen zu bejahen.
Als Modell eines Objektes, eines Prozesses oder einer Erscheinung bezeichnen wir ein anderes Objekt, einen anderen Prozeß oder eine andere Erscheinung, wenn gewisse gemeinsame Züge vorhanden sind. Gewöhnlich versteht sich dabei von selbst, daß das Modell das betrachtete Objekt vereinfacht darstellt. Es ist jedoch nicht immer leicht, dem Begriff „vereinfacht“ einen genauen Sinn zu geben, da tatsächlich alle Objekte und Erscheinungen unendlich kompliziert sind; sie werden lediglich mit unterschiedlichem Genauigkeitsgrad betrachtet. Das Modell wird in dieser Betrachtung zu einem wechselseitigen Begriff. Den Tennisball

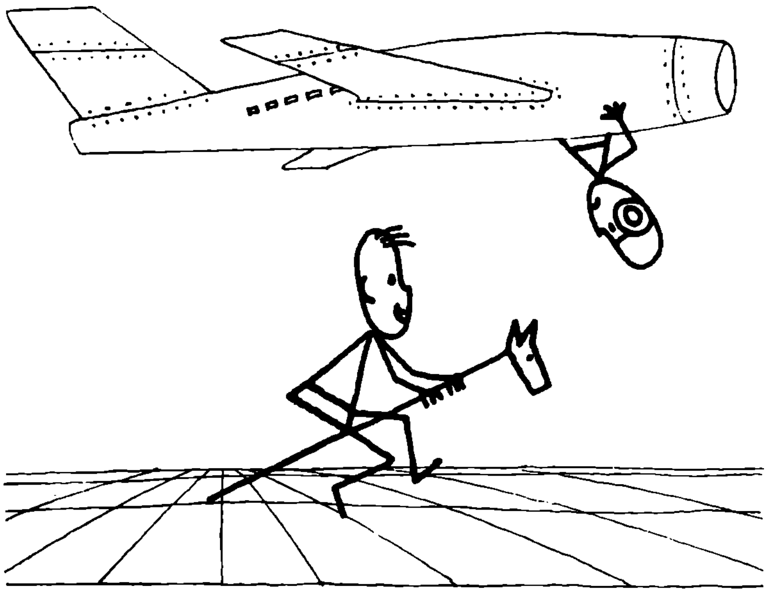


Bild 91

kann man als Modell des Luftballons ansehen, andererseits kann der Luftballon als Modell eines Tennisballs dienen. Von diesem Standpunkt aus ist auch der Filmstar ein Modell seines Reklamebildes, und ein wirkliches Auto ist Modell des Spielzeugautos, denn stets lassen sich am Spielzeugauto gewisse Eigenschaften bemerken, die das tatsächliche Auto nicht besitzt.

Wenn wir also für ein bestimmtes Objekt ein Modell bauen wollen, müssen wir genau verabreden, welche Eigenschaften des Ausgangsobjektes modelliert werden sollen.

Nicht nur Objekte lassen sich modellieren, sondern auch Prozesse und Erscheinungen. Das Spiel auf der Mundharmonika modelliert den Sologesang und das Spiel auf der Orgel einen vielstimmigen Chor. Die Zubereitung des Mittagessens kann Modell für viele technologische Prozesse sein. Ein Junge, der auf einem Steckenpferd reitet, modelliert einige Eigenschaften des Fluges eines großen Flugzeugs.

Die Modellierung dient seit langem als Hilfsmittel beim Studium der verschiedensten Erscheinungen. In der Technik greift man alltäglich auf sie zurück, und sie dringt auch immer weiter in die Biologie, die Psychologie und die Ökonomie ein. An Modellen werden die Eigenschaften von Schiffskörpern untersucht. Das Verhalten von Flugzeugmodellen im Windkanal gibt Hinweise für die Konstruktion von Flugzeugen. Bei der Projektierung von Wasserkraftwerken, Brücken und anderen großen

Bauwerken werden zunächst Modelle untersucht, die diese Anlagen im verkleinerten Maßstab darstellen. Im Schiffbau, Flugzeugbau und Raketenbau sind Modelle eine übliche Sache. Diese physikalische Modellierung stützt sich auf die Ähnlichkeitslehre.

Kraftfahrer, Piloten und Kosmonauten werden an Modellen von Steuerungssystemen ausgebildet. Diese Modelle haben keine geometrische Ähnlichkeit mehr zu dem, was modelliert wird; hier kommt es auf die Analogie in der Funktion der entsprechenden Anlagen an.

Von großer Wichtigkeit sind auch die Verhaltensmodelle.

Claude Shannon (von dem noch die Rede sein wird) baute eine künstliche Maus, der sich bestimmte zweckmäßige Verhaltensweisen beibringen ließen. Später wurden noch viele derartige Modelle gebaut.

Für die Modellierung der Funktionen eines bestimmten (lebenden oder unbelebten) Objektes werden häufig elektronische oder pneumatische Modelle benutzt. Ihre Funktion beruht auf der Identität der mathematischen Beschreibung der Prozesse im Objekt und im Modell. Solche Modelle werden in immer größerem Umfang angewendet. Zu ihrer Entwicklung benötigt man jedoch eine mathematische Beschreibung des Objektes, des Prozesses bzw. der Erscheinung.

Das mathematische Modell

„Ein rechteckiger Spielplatz ist von einem Zaun umgeben. Die Länge des Platzes ist um 15 m größer als seine Breite. Die Summe der zwei langen Seiten beträgt 80 m. Die Länge des Zaunes ist zu bestimmen."

Schade, daß manche Spielplätze eingezäunt sind, doch offenbar ist das notwendig. Mit der übrigen Situation hatten jedoch weder ich noch meine nächsten Verwandten je etwas zu tun. Leider trifft man in den Schulbüchern allenthalben noch solche sinnlosen Aufgaben an. Der erste Schritt, den der Schüler zu ihrer Lösung zu gehen hat, besteht darin, die Aufgabe „auseinanderzunehmen", um herauszustellen, welche Größen und welche Beziehungen zwischen ihnen gegeben sind und welche Größen oder Beziehungen bestimmt werden müssen. Auf diese Weise erhält er eine mathematische Beschreibung der Situation. Der zweite Schritt besteht aus der Suche nach einem passenderen mathematischen Modell, der Einführung symbolischer Bezeichnungen und der Aufstellung mathematischer Gleichungen. Wir bezeichnen die Länge des Rechtecks mit x und seine Breite mit y. Dann lauten die Bedingungen der Aufgabe:

$$x = y + 15; \quad 2x = 80$$

Zu bestimmen ist

$$2x + 2y$$

Es ist klar, daß eine solche Formulierung der Aufgabe einfacher und übersichtlicher ist als eine Formulierung in Worten: Das Aufstellen von Gleichungen ist eine bequeme Methode, um eine mathematische Beschrei-

bung, ein mathematisches Modell, zu erhalten. Ein anderes mathematisches Modell derselben Situation bekäme man, wenn man für die Koeffizienten Buchstabenbezeichnungen einführen würde.
Das Modell würde lauten: Gegeben ist $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x = c_2$. Gesucht wird $Ax + By$.
Die Koeffizienten sind beliebige gegebene Zahlen. Um die Lösung einer konkreten Aufgabe zu erhalten, hat man nur in die entsprechende Endformel konkrete Zahlenwerte einzusetzen.
Als Modell der Erdkugel dient manchmal einfach ein Massepunkt, in dem man sich die Masse der Erde vereinigt denkt. In anderen Fällen nimmt man als Modell der Erde eine Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (wo $R \approx 6400$ km ist und der Koordinatenanfangspunkt in das Zentrum der Erdkugel gelegt wird); wenn es notwendig ist, betrachtet man die Erde als Geoid (eine an den Polen abgeplattete Kugel), dessen Gleichung komplizierter ist als die der Kugel.
In Abhängigkeit von der Aufgabe sieht man die Erde als homogenen Körper an, als Festkörper mit variabler Dichte oder als Körper, der von einer Flüssigkeitsschicht bedeckt wird. Jede Situation wird durch ein mathematisches Modell beschrieben. Wenn wir z. B. die Gezeiten untersuchen wollen, dann ist es natürlich illusorisch, eine mathematische Beschreibung der Erdkugel ohne Berücksichtigung dessen zu geben, daß bedeutende Teile der Erdoberfläche von Wasser bedeckt sind und der Mond Anziehungskräfte auf die Erde ausübt.

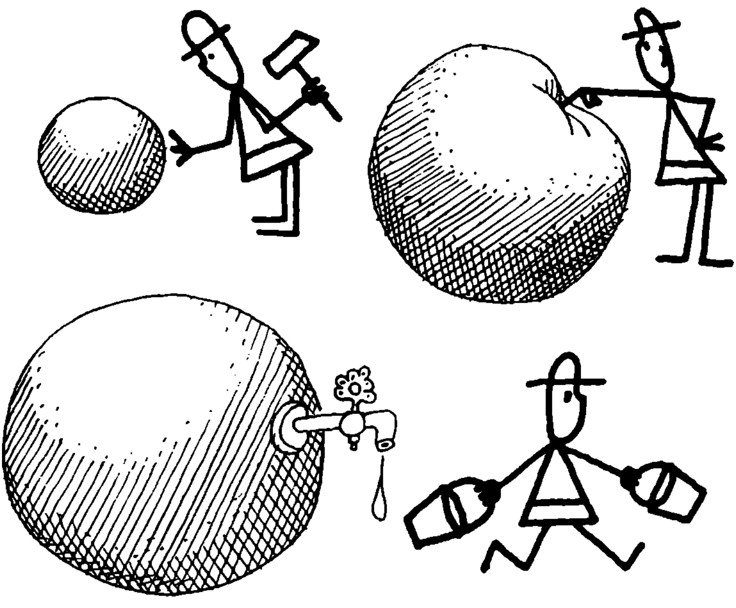


Bild 92

Das zweite Newtonsche Grundgesetz der Mechanik (der Impulssatz) lautet: Das Produkt aus der Masse eines Körpers und der Beschleunigung, die er erfährt, ist gleich der Summe der wirkenden Kräfte. Der Einfachheit halber wollen wir uns darauf beschränken, die Kräfte und die Bewegung längs einer geraden Linie zu betrachten. Wenn m die Masse des Körpers, b der Betrag der Beschleunigung und F die Summe der wirkenden Kräfte sind, so läßt sich das mathematische Modell für den Zusammenhang zwischen Masse, Beschleunigung und den wirkenden Kräften ausdrücken durch die Gleichung

$$m b = F \tag{1}$$

Dieses mathematische Modell beschreibt die entsprechenden physikalischen Erscheinungen recht gut, wenn die Geschwindigkeiten der Körper relativ klein sind. Es ist bekannt, daß man die Masse der Körper als von der Geschwindigkeit unabhängig ansehen kann, wenn diese klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit ist. Wenn jedoch die Geschwindigkeit der Körper in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit kommt, beschreibt das durch *Newton* gegebene mathematische Modell die Situation unzulänglich, und es treten große Abweichungen zu den im Versuch gemessenen Werten auf. Um ein exakteres Modell zu bauen, wird der Begriff der Ableitung einer Funktion benötigt.
Verehrter Leser, wenn Sie die Formeln immer noch zum Gähnen anregen und den Wunsch aufkommen lassen, das Buch in die Ecke zu werfen, wenn Ihnen die Geschwindigkeit des Flugzeugs IL 62 als höchstes der Gefühle ausreicht und Sie keine Reise zu fernen Planeten beabsichtigen, und wenn Sie die Relativitätstheorie *Einsteins* nicht weiter interessiert, können Sie die folgenden Absätze und die dahinterstehenden Gedanken einfach überspringen.
Den Begriff der Ableitung werde ich nicht ausführlich erläutern, sondern lediglich die Symbolik erklären. Die Geschwindigkeit eines Körpers sei $v = v(t)$, das Zeitdifferential (d. h. die Änderungsgröße der Zeit) ist $\mathrm{d}t$, und $\mathrm{d}v$ ist das zugehörige Geschwindigkeitsdifferential. Die Beschleunigung des Körpers zum Zeitpunkt t wird gegeben durch den Ausdruck

$$b(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Die rechte Seite heißt Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. In dem von uns betrachteten Problem spielt der Begriff der „Bewegungsgröße" eine wichtige Rolle. Als Bewegungsgröße bezeichnet man das Produkt $m\,v$ aus Masse und Geschwindigkeit des Körpers. Dann läßt sich das angeführte Newtonsche Gesetz auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F \tag{3}$$

schreiben, d.h., die Ableitung der Bewegungsgröße nach der Zeit ist gleich der Summe der wirkenden Kräfte.

Wenn die Masse nicht von der Geschwindigkeit (und somit nicht von der Zeit) abhängt, ist

$$\frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = mb \tag{4}$$

und es gilt das ursprüngliche mathematische Modell Gl. (1).
Kommt der Betrag der Geschwindigkeit in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit, so hängt nach der Einsteinschen Relativitätstheorie die Masse von der Geschwindigkeit ab:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Hierin ist m_0 die Ruhemasse des Körpers und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
Nun kann man in Gl. (3) die Masse m nicht mehr vor das Ableitungszeichen nehmen, und als mathematisches Modell für den Zusammenhang zwischen Masse, Geschwindigkeit und wirkender Kraft in der Mechanik, in der die Relativitätstheorie gilt, dient Gl. (3) zusammen mit Gl. (5).
Gl. (3) stellt die einfachste Differentialgleichung dar. Sie brauchen jedoch nicht zu erschrecken, ich habe nicht die Absicht, Sie auf die gefährliche Reise durch das Dickicht der Differentialrechnung oder gar der Differentialgleichungen zu führen (Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen außer den unbekannten Funktionen auch deren Ableitungen vorkommen). Die Differentialgleichungen sind in der Physik, Chemie und anderen Wissensgebieten Hauptelement der mathematischen Modelle der verschiedensten Erscheinungen, in denen die Dynamik (Veränderung) der eingehenden Größen zu berücksichtigen ist.

Ereignisse und ihre Modelle

„Folgt daraus, daß alle roten gekochten Krebse tot sind und alle toten roten Krebse gekocht sind, daß tote gekochte Krebse immer rot sind?"
Sie werden sich natürlich selbst in dieser dramatischen Situation zurechtfinden wollen, verehrter Leser, und sicher mit Hilfe des gesunden Menschenverstandes und der elementaren Logik schnell auf die gestellte Frage antworten.
Der Mathematiker läßt sich jedoch nicht darauf ein, sich mit solch einer Wortklauberei auseinanderzusetzen und die Vielzahl der Varianten durchzuprobieren, in der man sich leicht verlieren kann. Er würde die Ereignisalgebra anwenden, über die ich jetzt berichten werde.
Wir betrachten eine Gesamtheit oder Menge von irgendwelchen Objekten, Gegenständen oder Elementen. Für die folgenden Erörterungen ist es gleichgültig, ob die auftretenden Mengen endlich oder unendlich sind, ob sie aus Krebsen, schönen Mädchen, den Wegen vom Punkt A zum Punkt

Bild 93

B, Spielkarten oder aus allen Punkten der Ebene bestehen. Es ist lediglich wichtig, daß es sich um homogene Elemente handelt.
Ferner stellen wir uns den Begriff „Versuch" in allgemeiner Form vor. Versuche können naturwissenschaftliche Experimente sein, sie können aber auch im Geben von Skatkarten bestehen, in der Auswahl schöner Mädchen als Mannequins für ein Modehaus, in der Wahl der Wege, die kürzer als drei Kilometer sind, in der Festlegung einer Menge von Punkten auf der Ebene oder auch darin, daß man überprüft, ob die aus dem Topf genommenen Krebse rot sind.
Die Resultate der Versuche oder Beobachtungen wollen wir Ereignisse nennen. Bei der Überprüfung einer Gruppe aus zehn Krebsen kann es sich erweisen, daß drei davon rot sind — das ist ein Ereignis. Ein nicht weniger bedeutendes Ereignis wäre es, im Skat einen Grand ouvert zu bekommen, Sie würden dies sofort laut bekanntgeben. Nebenbei bemerkt, das wäre schon wieder ein neues Ereignis!
Ein Ereignis ist also für uns gleichbedeutend damit, daß im Ergebnis des Versuchs eine gewisse Menge von Ausgangselementen auftritt, also eine Teilmenge. Die einzelnen Elemente der Ausgangsgesamtheit wollen wir Elementarereignisse nennen.
Jedes Ereignis besteht dann also aus einer gewissen Menge von Elementarereignissen.
Jetzt ist es an der Zeit, einige Operationen mit den Ereignissen einzuführen. Die zwei Ereignisse A und B kann man zu neuen Ereignissen verbinden: zum Produkt $A \cdot B$ und zur Summe $A + B$. Das Produkt $A \cdot B$ ist das Ereignis, das aus den Elementarereignissen besteht, die sowohl zu A als auch zu B gehören; die Summe $A + B$ sind sämtliche Elementarereignisse, die entweder zu A oder zu B oder zu A und B gehören.
Das Ereignis A sei das Auftreten eines Punktes im senkrecht schraffierten Bereich vom Bild 94 und das Ereignis B das Auftreten eines Punktes im waagerecht schraffierten Bereich.
Für das Produkt $A \cdot B$ (abgekürzt auch einfach mit AB bezeichnet) gilt dann der doppelt schraffierte Bereich, während für die Summe $A + B$ alles Schraffierte gilt — im Bild 94 durch eine fette Linie eingefaßt.
Zunächst erscheint es ungerechtfertigt, die wohlbekannten Begriffe Summe und Produkt in irgendeinem anderen Sinn zu gebrauchen. Die

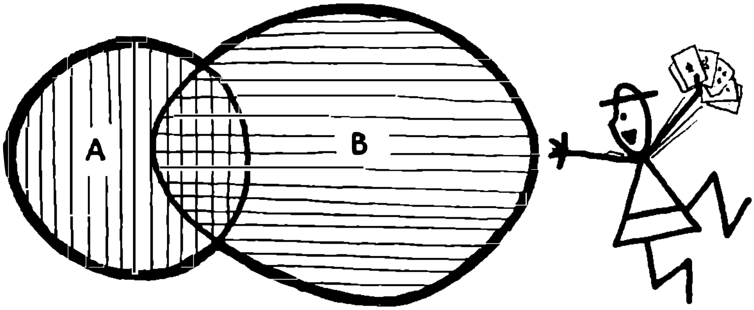


Bild 94

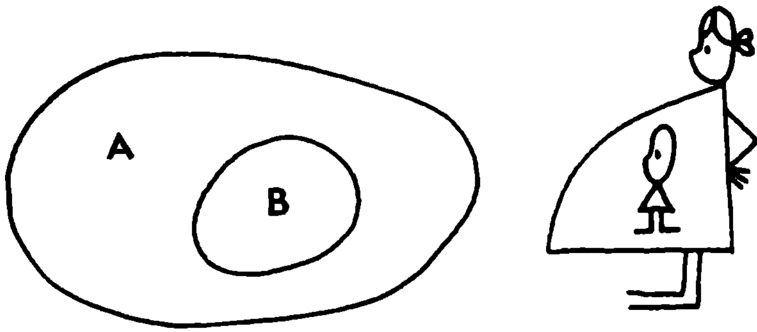


Bild 95

Bezeichnungen haben sich aber auch hier für Ereignisse und Mengen eingebürgert, und man kann sich an sie genausogut gewöhnen wie an die gewöhnlichen arithmetischen Operationen, wenn man einige Übung im Umgang mit Mengen hat.
Wenn das Ereignis A das Ereignis B einschließt (das wird symbolisch durch $B \subset A$ ausgedrückt), so gilt (Bild 95)

$$A + B = A \quad \text{und} \quad A \cdot B = B$$

Insbesondere ist für jedes Ereignis A

$$A + A = A \quad \text{und} \quad A \cdot A = A$$

Das widerspricht natürlich den gewohnten Regeln für die Addition und Multiplikation bei den Zahlen, doch man kann sich damit trösten, daß ich es sicher nicht gebracht hätte, wenn es nichts Neues wäre.
In der Aufgabe über die roten Krebse, die uns besonders interessierten, bezeichnen wir mit T die Menge der toten Krebse, mit G die Menge der gekochten und mit R die Menge der roten Krebse.
Rote Krebse können gekocht sein, aber auch ungekocht. Im Bild 96 ist die Menge G durch senkrechte Linien schraffiert und die Menge R durch waagerechte. Die Menge GR, die sowohl senkrecht als auch waagerecht schraffiert ist, entspricht den gekochten roten Krebsen.

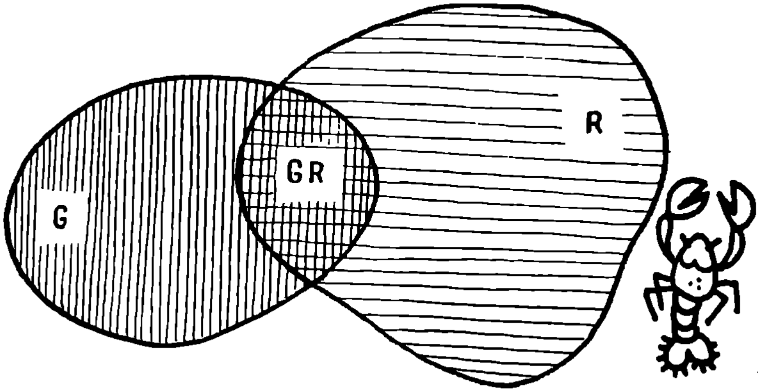


Bild 96

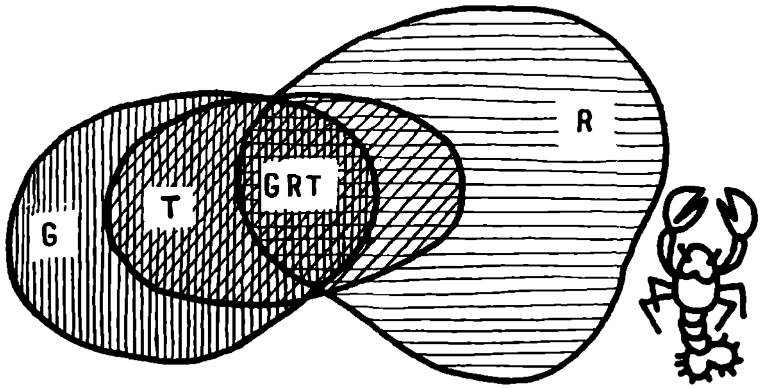


Bild 97

Da laut Bedingung alle roten gekochten Krebse tot sind, muß die Menge T aller toten Krebse die Menge GR einschließen. Das läßt sich in der Form $GR \subset T$ schreiben. Diese Situation ist im Bild 97 dargestellt, in dem die Menge T durch schräge Linien schraffiert ist. Das Gebiet, das durch alle drei Schraffierungsarten bedeckt wird, ist das Produkt GRT und entspricht den gekochten, roten, toten Krebsen. Der nur waagerecht und schräg schraffierte Bereich entspricht den roten und toten, jedoch nicht gekochten Krebsen.
So ist die allgemeine Situation. Nun müssen wir noch die zweite Bedingung der Aufgabe berücksichtigen, die aussagt, daß alle roten toten Krebse gekocht sind. Demzufolge kann es keine roten und toten, jedoch ungekochten Krebse geben; d. h., der nur schräg und waagerecht schraffierte Bereich muß ausgeschlossen werden. Im Ergebnis gelangen wir zu der im Bild 98 gezeigten endgültigen Darstellung.
Dieses Bild stellt die vollständige Lösung unserer Aufgabe dar. Die Existenz eines nur durch senkrechte und schräge Linien schraffierten

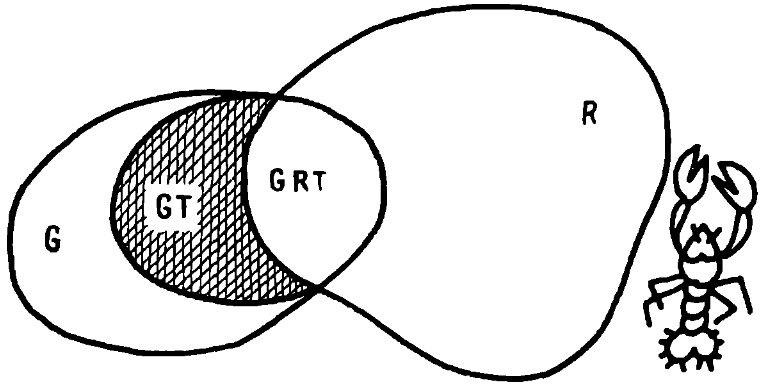


Bild 98

Bereiches beweist nämlich, daß es in der beschriebenen Situation tote gekochte Krebse geben kann, die nicht rot sind. Aus den Bedingungen, daß alle roten gekochten Krebse tot und alle roten toten Krebse gekocht sind, folgt also nicht, daß alle toten gekochten Krebse rot sind.

Formal ließe sich das so schreiben: Aus $RG \subset T$ und $RT \subset G$ folgt nicht $TG \subset R$. Das ist kurz und klar, nicht wahr?

Das alles zeigt, daß die Ereignisalgebra, von der Sie jetzt einen Teil kennengelernt haben, die Möglichkeit gibt, mathematische Modelle nicht nur mit Hilfe der gewöhnlichen Vorstellungen der elementaren Algebra und der Analysis zu bauen. Nebenbei bemerkt, die Bilder 94 bis 98 sind Modelle der betrachteten Ereignisse!

Die Ereignisalgebra wird oft der Booleschen Algebra (nach dem englischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts *Georg Boole*) oder der symbolischen Logik gleichgesetzt. Die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie stützt sich auf die Grundlagen der Booleschen Algebra. Zur Lösung vieler technischer Probleme — z. B. zur Synthese von Relaisschaltungen, in der Theorie der Ziffernrechner und der Theorie der endlichen Automaten — wird diese Algebra ebenfalls benutzt.

Wozu ist ein mathematisches Modell überhaupt nötig?

Zweifellos sind die Verfolgung einer Rakete mit einer Radaranlage, das Anlegen eines Bohrlochs oder der Erdölverarbeitungsprozeß bedeutend einfacher als das gewöhnliche Laufen. Am Laufen sind Hunderte von Muskeln und Millionen von Zellen des lebenden Organismus beteiligt. Jede der Zellen ist für sich ein so komplizierter Organismus, daß die mathematische Beschreibung ihrer Lebenstätigkeit der Wissenschaft bis jetzt noch nicht gelungen ist.

Ungeachtet dessen sind Katzen, Elefanten und auch wir Menschen in der Lage, zu laufen, zu essen und Laute von sich zu geben, ohne daß vorher ein mathematisches Modell des betreffenden Vorgangs konstruiert werden

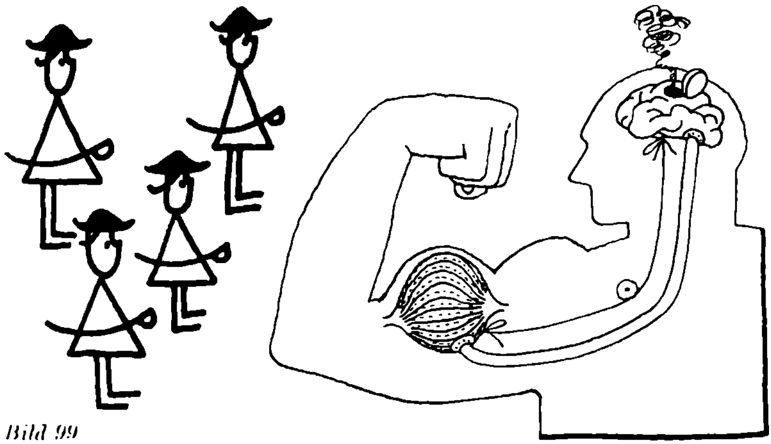


Bild 99

mußte. Außerdem bewegen sich sämtliche lebenden Organismen auch ohne derartige Modelle überaus exakt und mit geringem ökonomischem Aufwand!

Nachdem ich diese Zeilen geschrieben hatte, habe ich den Federhalter hingelegt und ihn dann wieder aufgenommen. Wie läuft der Mechanismus dieser scheinbar so einfachen Bewegung ab? *René Descartes*, der Schöpfer der analytischen Geometrie, war nicht nur Mathematiker, sondern auch ein großer Naturphilosoph und eine sehr interessante und gebildete Persönlichkeit. Er war genau wie wir bestrebt, die Natur zu verstehen und solche erstaunlichen Dinge wie die zielgerichteten Bewegungen der Lebewesen zu erklären. Den Reflex des Zurückziehens der Hand bei einer schmerzhaften Erregung erklärte *Descartes* folgendermaßen: Bei der Erregung durch den Schmerz wird im Nerv ein Seil gezogen, das im Gehirn das entsprechende Ventil öffnet. Nun gelangt durch ein Röhrensystem das Nervengas in den entsprechenden Muskel; dieser wird aufgefüllt, und dadurch wird schließlich seine Verkürzung verursacht.

Eine solche Erklärung kommt uns heute naiv vor. *Descartes* lebte jedoch in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, als die Elektrizität noch nicht bekannt war. Deswegen konnte er noch nichts von den Bioströmen ahnen. Damals war die Blütezeit der Uhren, der größten mechanischen Maschinen jener Zeit, und deshalb konnte sich *Descartes* viele Dinge noch nicht vorstellen, die heute die Kinder bereits in den Schulbüchern finden. Immerhin ist das Descartessche Modell das erste Modell des Reflexbogens mit seinen sämtlichen Hauptelementen.

Im dritten Viertel des 19. Jahrhunderts veröffentlichte der große Physiologe *M. Setschenov* seine Arbeit „Die Reflexe des Gehirns". Er nahm an, daß ähnlich geartete Reflexe die Grundlage der Nerventätigkeit des Menschen und der Tiere bilden. Später untersuchten der berühmte *Pawlow* und andere bedeutende Physiologen die Reflexe experimentell. Auf *I.*

Pawlow geht die Entdeckung und Untersuchung der bedingten Reflexe zurück — der Antwortreaktion auf eine Erregung, die durch oftmaliges Wiederholen eintrainiert wird.
Die Physiologen der Pawlowschen Schule würden auf die Frage, wie es mir gelingt, den Federhalter mit der Hand vom Tisch zu nehmen, antworten, daß im Zentralnervensystem — in meinem Gehirn — der Befehl entsteht, den Federhalter vom Tisch zu nehmen; dieser Befehl wird über das periphere Nervensystem an die Muskeln weitergeleitet, die sich entsprechend verkürzen oder strecken, und so nehme ich den Federhalter vom Tisch.
Mit Hilfe dieses Modells gelingt es allerdings nicht, eine Reihe von Erscheinungen zu erklären, die bei Bewegungen auftreten, und viele krankhafte Erscheinungen sind in diesem Schema überhaupt nicht vorstellbar.
Im Jahre 1948 erschien das Buch „Kybernetik, oder Steuerung und Nachrichtenübertragung im Lebewesen und in der Maschine" des großen amerikanischen Mathematikers *Norbert Wiener*. Das Erscheinen dieses Buches war eins der wichtigsten wissenschaftlichen Ereignisse der Mitte des 20. Jahrhunderts. *N. Wiener* schlägt darin ein neues Modell der Reflexbewegung vor.
Schon vor dem zweiten Weltkrieg interessierte sich *N. Wiener* für die allgemeinen methodischen Fragen, die die verschiedenen Wissenschaften verbinden, besonders auch für die allgemeinen Probleme der Physiologie. Während des zweiten Weltkrieges hatte *N. Wiener* mit Problemen der Funkortung zu tun. Er sah den tieferen Zusammenhang, der zwischen der Verfolgung eines beweglichen Zieles mit Hilfe des Radars und der Bewegung der Lebewesen besteht: In beiden Fällen ist eine Rückkopplung festzustellen, eine ständige Verarbeitung des Fehlersignals, der Abweichung.
Um den Federhalter zu nehmen, muß sich zunächst in meinem Gehirn ein bestimmter Befehl ausbilden, der das Ziel der Bewegung und die Anfangshandlungen enthält. Danach bewege ich meine Hand in bestimmter Richtung und erhalte ständig Signale, inwieweit ich mich dem Ziel genähert habe. Ich vergleiche das Erreichte ständig mit der Aufgabe, und es bildet sich ein Signal über die Abweichung aus. Die Aufgabe — den Federhalter zu nehmen — ist erfüllt, wenn die Abweichung zu Null gemacht ist. Ich habe also bei der Ausführung der Bewegung die Abweichung ständig zu verkleinern. Mit Hilfe des Wienerschen Modelles werden viele Erscheinungen verständlich, die sich vorher nicht erklären ließen.
Auf die Rolle der Rückkopplung bei der Erklärung der Bewegungen wurde von Physiologen bereits früher hingewiesen. So z. B. hat der berühmte sowjetische Physiologe *N. A. Bernstein*, einer der ersten Propagandisten der Kybernetik in der Sowjetunion, bereits 1928 entsprechende Ideen publiziert. Er kann somit zu den Urvätern der Kybernetik gezählt werden.
Zu den — leider — zahlreichen Krankheiten des Nervensystems gehört auch der Intentionstremor, eine Krankheit, die häufig mit Schäden am

Kleinhirn zusammenhängt. Ein an Intentionstremor Leidender greift beim Versuch einer zielbewußten Handlung, wie beim Ergreifen eines auf dem Tisch liegenden Federhalters, am Ziel vorbei: Die Hand unterliegt einem starken Zittern, das er nicht unter die Kontrolle seines Bewußtseins bringen kann. Derartige Erscheinungen lassen sich im Schema der Reflexe nicht erklären. Betrachtet man sie jedoch vom Standpunkt der Rückkopplung, so findet man für das ungewollte Zittern der Hand eine einleuchtende Erklärung. In der Regelungstechnik begegnet man auch derartigen Erscheinungen in schlecht eingestellten Regelungssystemen, dort werden sie als Überregelung bezeichnet.
Es hatte zunächst den Anschein, daß das Modell *N. Wieners* universal sei. Im Zeitalter der Automatisierung und der Computer stellen sich viele unter dem menschlichen Gehirn einen großen, überaus rationell gebauten Rechenautomaten vor.
Aber selbst das Wienersche Modell ist offenbar noch zu primitiv. Um das zu verdeutlichen, werde ich über eine Versuchsreihe berichten, die der talentierte sowjetische Physiologe *V. Gurfinkel* über den stehenden Menschen angestellt hat.
Stellen Sie bitte das folgende Experiment an, verehrter Leser: Legen Sie Ihren Arm so, daß der Ellenbogen auf dem Tisch liegt und die geöffnete Hand frei herabhängt, und beobachten Sie Ihre Finger. Sie werden ein ununterbrochenes Zittern bemerken, das Tremor genannt wird. Die Physiologen hielten diesen Tremor für zufällige Schwingungen, ähnlich dem Rauschen im Radiogerät.
Zur Untersuchung der Haltung eines stehenden Menschen lassen sich sehr interessante Versuche anstellen, beispielsweise folgender: Ein Mensch stellt sich auf eine Plattform, die so eingerichtet ist, daß jede Verlagerung des Schwerpunktes registriert wird. Die Versuchsperson wird aufgefordert, stillzustehen, und sie hat auch den Eindruck, daß sie völlig unbeweglich

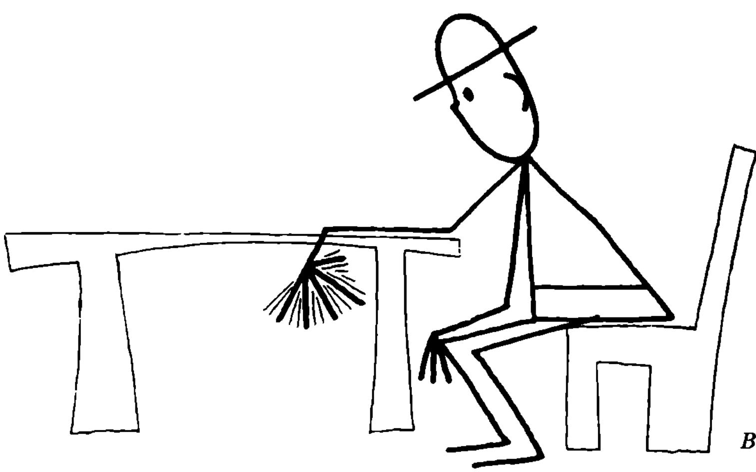


Bild 100

steht. Der Schwerpunkt der Versuchsperson befindet sich aber trotzdem in ständiger Bewegung. Die Registrierung dieser Bewegung ergibt eine chaotische Kurve. Aus diesen scheinbar völlig unregelmäßigen Schwingungen lassen sich jedoch bestimmte Frequenzen aussondern. Darunter sind Schwingungen mit einer Frequenz von 8 bis 12 Hz und einer Amplitude von 0,1 mm, mit einer Frequenz von 1 Hz und einer Amplitude von 2 bis 3 mm und Schwingungen mit einer Frequenz von einer Schwingung je Minute und einer Amplitude bis zu 10 mm. Derartige Schwingungen lassen sich nicht mit der Theorie der Rückkopplung erklären.
Bei einer zielgerichteten Bewegung ist die Rückkopplung zur Kontrolle und Korrektur der Bewegung notwendig. Ein stillstehender Mensch hätte aber eigentlich dieses Wanken gar nicht nötig, und die Rückkopplung wäre überflüssig. Andererseits hat der stehende Mensch nicht nur zu stehen, er muß auch in ständiger Bereitschaft sein, von der stehenden Haltung zu den verschiedensten Bewegungen überzugehen.
Ein unbeweglich stehender Mensch hat eine große Anzahl von Freiheitsgraden. Das von den Muskeln erfaßte Knochengerüst und die 28 Wirbel der Wirbelsäule, von denen jeder drei Freiheitsgrade hat, ergeben insgesamt über hundert Freiheitsgrade. Sie verleihen dem Menschen seine hohe Manövrierfähigkeit. Ein Stehender kann, sobald es nötig ist, in eine beliebige Richtung gehen, sich fallenlassen oder springen.
Für solch einen schnellen Übergang aus einer Haltung in eine andere muß irgendein spezieller Mechanismus existieren. Dieser muß den Organismus in ständige Bereitschaft zu beliebigen Änderungen der Haltung versetzen.

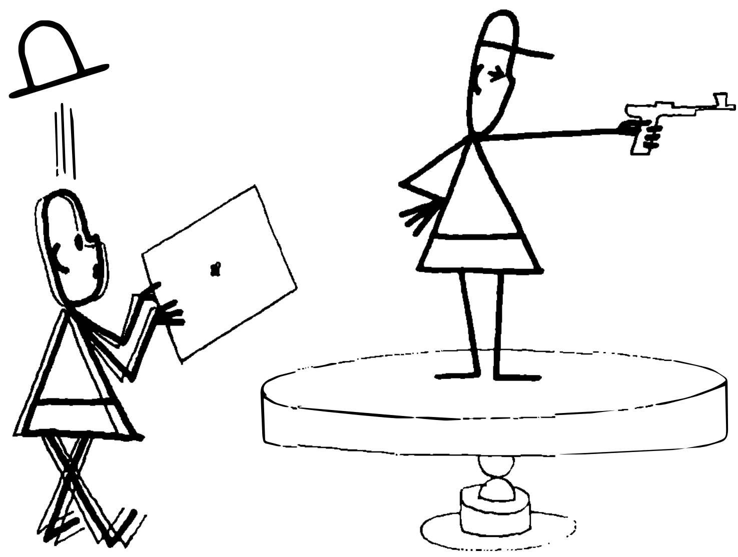


Bild 101

Bei einer Versuchsperson entdeckte *Gurfinkel*, daß die Geräte keinen Ausschlag zeigen. Eine Untersuchung der Plattform und der Apparatur brachte keinen Defekt zum Vorschein. Daraufhin sah man sich die Versuchsperson näher an. Es stellte sich heraus, daß ein Schütze auf der Plattform stand, ein Meister des Schießsports. Als er aufgefordert wurde, stillzustehen, schwankte er nur so wenig, daß die Apparatur die Schwingungen nicht registrieren konnte. Bei der weiteren Untersuchung stellte sich heraus, daß auch andere Schützen in großartiger Weise ihre Haltungsreflexe steuern und sie während des Zielens ausschalten können. Wenn ein auf der Plattform stehender Schütze zielte, registrierten die Geräte eine Verringerung der Amplitude der Schwingungen des Schwerpunktes auf ein Zehntel und weniger.
Jetzt können wir auch eine Hypothese über den speziellen Mechanismus aufstellen, der dem Organismus die Möglichkeit gibt, eine beliebige Haltung beizubehalten oder von einer Haltung zu einer anderen überzugehen. Man stellt sich die Haltungs-, Lage- und Stellreflexe als einen ständig wirkenden Suchmechanismus für die Gleichgewichtslage des stehenden Menschen vor. Sie sorgen gleichzeitig für die Möglichkeit eines schnellen Übergangs von einer Haltung zu einer anderen.
Es ist anzunehmen, daß dieser Suchmechanismus einer der universellsten und vollkommensten Mechanismen der lebenden Natur ist. Die Biene vollführt auf der Suche nach Nektar eine äußerlich ungeordnete Flugbewegung; ein Hund bewegt sich ungeordnet hin und her, wenn er eine Spur sucht; bei der Betrachtung eines Gegenstandes werden die Augen ständig in äußerlich ungeordneter Weise in verschiedene Richtungen gelenkt. Der Suchmechanismus ermöglicht den lebenden Organismen, die vielfältigen Aufgaben des Verweilens in einer bestimmten Haltung oder einer Lageänderung zu lösen und vor allem Extremwertbestimmungen auszuführen. (In stehender Haltung muß sich der Schwerpunkt des Körpers im extremalen, im höchsten Punkt befinden, und die Stellreflexe garantieren, daß der Körper in der Nähe dieser Gleichgewichtslage bleibt.)
Nun ist die Frage naheliegend, ob man solch einen Suchmechanismus nicht auch zur Steuerung in technischen Systemen benutzen kann. Stellen Sie sich vor, daß Sie in finsterer Nacht von der Höhe eines Berges nach unten gehen müssen. Beim Aufstieg am Tage schien der Weg glatt und eben zu sein. Beim nächtlichen Abstieg bemerken Sie ständig irgendwelche Unebenheiten und Löcher, die zu einem Sturz führen können. Nachdem Sie Ihren gesamten Vorrat an Kraftausdrücken aufgebraucht haben, machen Sie jeden Schritt sehr vorsichtig. Sie setzen das Bein etwas nach rechts, nach links und nach vorn und wählen so den günstigsten Weg nach unten. Die Schritte wählen Sie klein, da Sie bei langen Schritten das Gleichgewicht verlieren können. Auch dieses Suchen nach dem Weg ist eine Extremwertbestimmung.
Auf diese Art kann man auch das Minimum (oder Maximum) einer Funktion zweier Variabler $z = f(x, y)$ oder in der Sprache der Geometrie

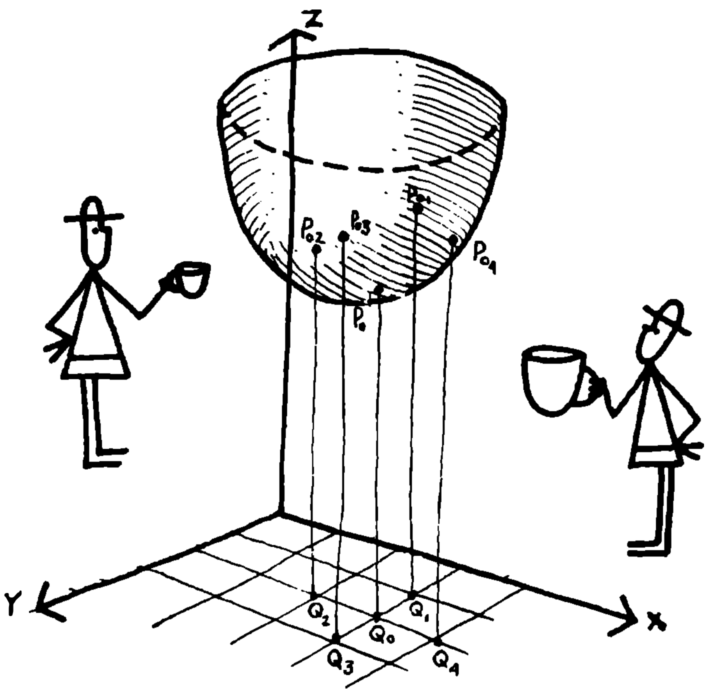


Bild 102

das einer „Oberfläche“ nach Bild 102 suchen. Wir tragen ein quadratisches Gitter auf die horizontale xy-Ebene auf; die Seitenlänge der Quadrate sei h. Die Kreuzungspunkte des Gitters sollen Knoten heißen. Da wir auf dem Gitter entlangschreiten werden, sagen wir, das Gitter habe die Schrittweite h.

Wir wählen einen beliebigen Knoten Q_0 aus und bezeichnen den Punkt auf der „Tasse“, der Q_0 entspricht, mit P_0. Nun machen wir einen Schritt zu jeweils einem der Nachbarpunkte Q_1, Q_2, Q_3 bzw. Q_4 und wählen aus den zugehörigen Punkten P_{01}, P_{02}, P_{03} bzw. P_{04} auf der „Tasse“ den aus, der am tiefsten liegt, z. B. P_{02}. Diesen vergleichen wir mit dem Ausgangspunkt P_0. Liegt P_0 höher als P_{02}, so setzen wir die Suche nach tieferen Punkten fort, indem wir zu den noch nicht ausgewählten Nachbarpunkten von Q_2 übergehen. Liegt jedoch P_0 tiefer als P_{02} und demzufolge auch tiefer als die vier zu P_0 benachbarten Funktionswerte in den Gitterpunkten, so ist der Suchprozeß beendet. Wenn die Funktion ein Minimum hat, so führt uns dieser Suchprozeß zum Minimum der Funktion oder, genauer gesagt, zu einem Punkt in der Nähe des Minimums. Natürlich sind hierbei noch viele Feinheiten zu beachten. Die Abweichung vom tatsächlichen Minimum hängt von der Schrittweite h und von der Funktion selbst ab. Wir wollen uns das Leben jedoch nicht durch pessimistische

„Wenn“ und „Aber“ erschweren ... Mir kam es lediglich darauf an, zu zeigen, daß es Methoden gibt, mit denen man sich auch ohne mathematisches Modell an den Extremwert einer Funktion herantasten kann.
Bei solch einem Suchverfahren für das Minimum kommt es gar nicht darauf an, die Funktion $z = f(x, y)$ zu kennen; man braucht lediglich eine Methode zur Bestimmung der Funktionswerte in den Knotenpunkten des Gitters mit der Schrittweite h. Mit Hilfe des Suchverfahrens kann man also, ohne ein mathematisches Modell zu haben, ein Objekt oder einen Prozeß näherungsweise optimal steuern.

Wie erhält man ein mathematisches Modell für die Destillation des Erdöls?

Jetzt wollen wir das Problem der Aufstellung eines mathematischen Modells für den technologischen Prozeß der Destillation des Erdöls erörtern.
Alles, was sich in den Fraktionskolonnen, Wärmeaustauschern, Öfen und anderen Aggregaten abspielt, unterliegt natürlich den physikalischen und chemischen Gesetzen. Demzufolge ist alles sehr einfach: Wir brauchen nur die Beziehungen aufzuschreiben, die sich aus diesen Gesetzen ergeben und die den Zusammenhang zwischen den uns interessierenden Größen ausdrücken, und auf dem Papier erscheint unser Traum — das mathematische Modell.
Genauso einfach ist es, sagt *Anton Tschechow*, eine Skulptur zu machen: Man braucht nur einen genügend großen Steinklotz zu nehmen und alles Überflüssige wegzuschlagen.
Sie werden vielleicht annehmen, ich wolle die Wissenschaft kompromittieren und in Ihnen Zweifel säen, ob wir irgendwelche wichtigen Naturgesetze noch nicht kennen. Nichts dergleichen, alle Naturgesetze, die zur

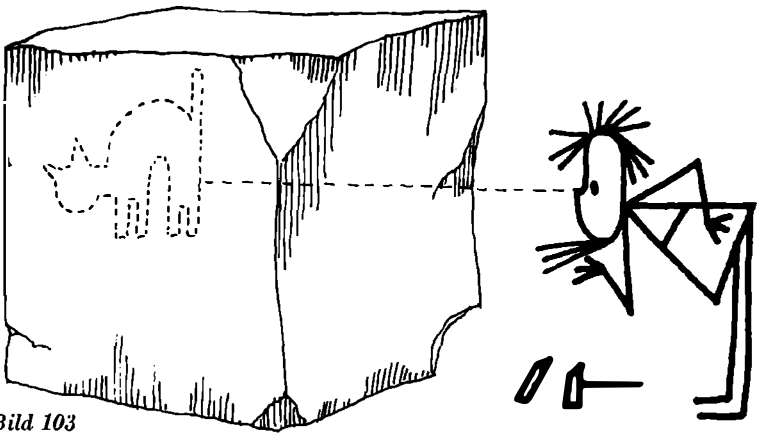


Bild 103

Aufstellung der gewünschten Gleichungen nötig sind, hat die Menschheit bereits entdeckt. Die Gesetze zur Herstellung einer Skulptur sind aber auch bekannt, und doch ist es gar nicht so einfach, auch nur die Stiefel eines großen Mannes aus dem Stein herauszumeißeln!
Erinnern Sie sich an unser Gespräch mit dem Technologen. Der Fraktionsprozeß des Erdöls — die Zerlegung des Erdöls in die verschiedenen Komponenten (Benzin, Heizöl usw.) — wird bei starker Vereinfachung durch über hundert miteinander verknüpfter Variablen beschrieben. Selbst im statischen Fall, d. h. im Gleichgewicht, ist es nicht einfach. alle diese Größen zu berücksichtigen, und für die Festlegung eines Algorithmus zur optimalen Steuerung des Prozesses hat man die dynamischen Gleichungen aufzustellen. Die Prozesse in den Kolonnen sind nicht bis in alle Einzelheiten bekannt. Die Schwierigkeit besteht darin, die Darstellung der Prozesse so geschickt zu vereinfachen, daß die Gleichungen einerseits nicht allzu kompliziert sind und andererseits dem Prozeß hinreichend genau entsprechen (in dem Sinne, in dem wir das früher betrachtet haben).
Noch ein Problem tritt auf: Wir müssen alle möglichen fremden Einflüsse berücksichtigen. Die Zusammensetzung des Rohöls kann sich ändern, die Lufttemperatur oder der Luftdruck steigt oder fällt usw. Alle diese zufälligen Änderungen ergeben sich unabhängig vom technologischen Prozeß; sie müssen jedoch berücksichtigt und möglichst kompensiert werden. Da auch das mathematische Modell den technologischen Prozeß nur näherungsweise beschreibt, werden immer irgendwelche Abweichungen auftreten, und man muß jederzeit die Möglichkeit haben, die Steuergrößen zu korrigieren.
Die Konstruktion eines mathematischen Modells, das aus irgendwelchen Grundgleichungen des technologischen Prozesses besteht, bietet noch nicht die Möglichkeit, den technologischen Prozeß optimal zu steuern. Im mathematischen Modell hat man außerdem noch den Einfluß des Zufalls zu berücksichtigen, eine schnelle Reaktion auf unvorhergesehene Veränderungen zu garantieren und eine gute Steuerung bei den verschiedensten Abweichungen, Ungenauigkeiten und Fehlern zu gewährleisten. Dazu sind noch andere mathematische Methoden nötig, von denen im folgenden die Rede sein wird.

Wahrscheinlich hat Ihnen dieses Buch gefallen?

Wenn Sie, verehrter Leser, bis zu dieser Stelle gelesen und das Buch nicht an irgend jemand verschenkt oder in die hintere Reihe des Bücherschranks gestellt haben, wo die Folianten und Broschüren herumstehen, die zu schade zum Wegwerfen sind und sich nur aus Zeit- und Bequemlichkeitsgründen noch nicht im Antiquariat befinden, so ist es sehr wahrscheinlich, daß Sie es bis zum Ende lesen werden.

Zwei Ehegatten wollen ausgehen. Er steht angezogen im Korridor, sie gibt der Tochter die vorletzten Verhaltensmaßregeln und beginnt die passende Halskette zu suchen. Nun ist er geneigt, eine Verspätung für recht wahrscheinlich zu halten, während sie vom Gegenteil überzeugt ist.

In der Umgangssprache verstehen wir unter Wahrscheinlichkeit so etwas wie eine Einschätzung der Chancen, eine Annahme oder eine Vermutung. Die Wahrscheinlichkeit, durch irgend etwas überrascht zu werden, sich mit Scharlach anzustecken oder zu spät zum Zug zu kommen, schätzen wir subjektiv ein, abhängig von unserem Charakter, unseren Fähigkeiten, unserer momentanen Laune, von der Information, über die wir verfügen, und vom gesunden Menschenverstand.

Die Leute klagen oft über ihr schlechtes Gedächtnis, ihre angegriffene Gesundheit oder ihr Pech, doch niemals über mangelnden Verstand. Aber die Chancen in irgendeiner Situation schätzen sie völlig unterschiedlich ein ...

Der große französische Mathematiker *Emil Borel* bemerkt in seinem kurzen, aber interessanten Buch „Wahrscheinlichkeit und Sicherheit“: „Es ist bekannt, daß die Kenntnisse der Menschen die Bezeichnung Wissenschaft in Abhängigkeit davon verdienen, welche Rolle in diesen Kenntnissen die Zahl spielt.“ Und bei den verschiedensten Fragen der Naturwissenschaft, Technik, Ökonomie, Soziologie usw. ist es tatsächlich notwendig, ein objektives Maß für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses zu haben. Hier einige Beispiele!

In der Leninstraße in Moskau wird Eis verkauft. Steht dort nur ein Eiswagen, so bildet sich davor eine Schlange. Die Leute, die keine Zeit oder Lust haben, in der Schlange zu warten, sind verärgert und werden kein Eis kaufen. Es gehen Käufer verloren, und die Einnahme sinkt. Stellt man jedoch 20 Eiswagen auf, so sind die Verkäufer nicht ausreichend beschäftigt, denn so viele Käufer, wie sie bedienen könnten, gibt es auch wieder

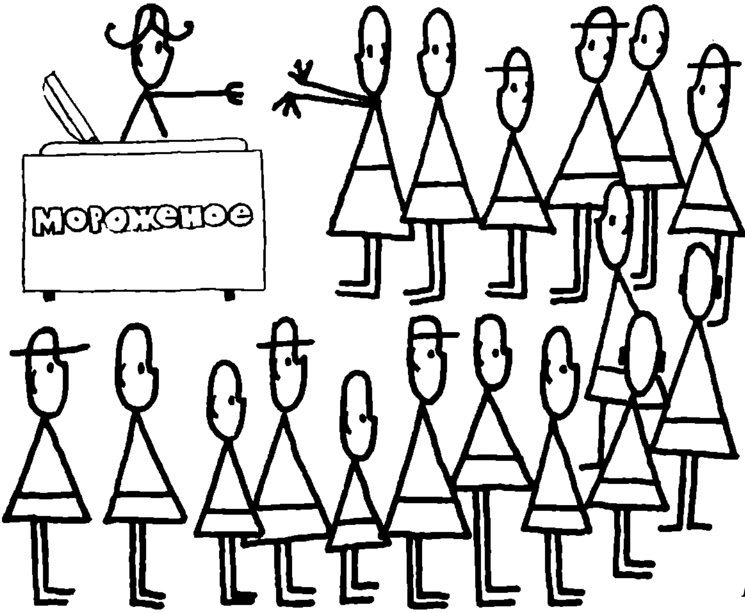


Bild 104

nicht. Wie viele Eiswagen muß man nun aufstellen? Bei der Beantwortung dieser Frage muß man natürlich auch die Jahreszeit und das Wetter berücksichtigen, die einen großen Einfluß auf die Nachfrage nach Eis haben.
Sie kaufen ein Radiogerät, einen Kühlschrank oder eine Uhr und erhalten Garantie auf ein Jahr, eineinhalb Jahre, zwei Jahre od. dgl. Welchen Wert hat der Garantieschein für Sie?
Natürlich werden Ihr in der Garantiezeit ausgefallener Kühlschrank oder Ihre stehengebliebene Uhr in einer Garantiewerkstatt kostenlos repariert. Doch das allein ist für Sie nicht sehr interessant: Sie haben sich in Unkosten gestürzt und wollen eine Uhr tragen, an der Sie jederzeit die Zeit ablesen können. Sie lesen die Garantieverpflichtung des Herstellerwerkes durch und glauben, daß es wenig wahrscheinlich ist, daß die Uhr schon während der Garantiezeit stehenbleibt. Warum aber nennt das Werk eine Garantiezeit von eineinhalb Jahren? Inwieweit ist eine Uhr mit der Garantiezeit von zwei Jahren zuverlässiger?
In einer Poliklinik werden täglich etwa 50 Patienten wegen Grippe krankgeschrieben. An einem Tag kommt es plötzlich zu 72 Krankschreibungen. Muß man das als Beginn einer Grippeepidemie ansehen und entsprechende Vorbeugungsmaßnahmen veranlassen, oder kann man das auch noch als Zufall ansehen?
Auf derartige Probleme, in denen der Zufall eine große Rolle spielt, kann man überall stoßen. Häufig kann man nicht nur die Zufälligkeit eines

Ereignisses konstatieren, sondern auch die Bestimmtheit des Eintretens oder Nichteintretens dieses Ereignisses abschätzen. Eine solche Abschätzung wird ausgedrückt durch Worte folgender Art: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Werfen eines symmetrischen Geldstücks Wappen fällt, ist gleich 1 : 2“. Oder: „Die Wahrscheinlichkeit, in der Straßenbahn eine Fahrkarte mit einer geradzahligen Nummer zu bekommen, ist gleich 1 : 2; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nummer mit der Ziffer 7 endet, ist gleich 1 : 10.“ Diese Zahlen für die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus offensichtlichen Symmetrievorstellungen, aus der Gleichmöglichkeit der verschiedenen Ereignisse. Mit einer derartigen Gleichmöglichkeit der Ereignisse hat man es auch beim Kartenspiel und beim Würfeln zu tun. Der Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Wissenschaft über die zufälligen Erscheinungen und ihre Gesetzmäßigkeiten, ist gerade in den Aufgaben über Glücksspiele zu suchen.

Wie es dazu kam

Der Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung lag im 19. Jahrhundert. Ihre Grundlagen wurden durch die auch auf anderen Gebieten der Wissenschaft bekannten Wissenschaftler *Pascal*, *Huygens*, *Fermat* und vor allem *Jacob Bernoulli*[1]) geschaffen. Obwohl sie sich nur mit Aufgaben über Glücksspiele beschäftigten, spürten diese berühmten Gelehrten doch die große naturphilosophische Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Allerdings konnte eine Reihe von Aufgaben nicht gelöst werden. Vor allem blieb unbeantwortet, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar ist. Die Frage nach den Bedingungen für die Anwendbarkeit dieses oder jenes mathematischen Schemas oder mathematischen Modells ist durchaus nicht gegenstandslos, und die Unbestimmtheit in den Grundbegriffen einer Theorie führte schon oft zu dramatischen Situationen.

Im Jahre 1812 faßte der große Astronom, Physiker und Mathematiker *Laplace* in seinem Buch „Versuch einer Philosophie der Wahrscheinlichkeit“ die seinerzeitigen Erfolge der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen und veröffentlichte gleichzeitig seine eigenen fundamentalen Erkenntnisse.

Doch neben wichtigen mathematischen Erkenntnissen und deren Anwendungen in den Naturwissenschaften zeigt dieses Werk *Laplaces* auch Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Moral, auf die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit von Zeugenaussagen, auf voraussichtliche Wahlergebnisse, auf voraussichtliche Versammlungsbeschlüsse und auf die Beurteilung der Gerechtigkeit von Gerichtsentscheidungen. Die Willkür der Einschätzung und die Unmöglichkeit einer objektiven

[1]) *Jacob Bernoulli* war ein Mitstreiter von *Leibniz* bei der Schaffung der Grundlagen der Analysis. Er ist der bekannteste Vertreter der Schweizer Gelehrtenfamilie *Bernoulli*, aus der elf (!) große Mathematiker hervorgegangen sind.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit führten dazu, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Mitte des 19. Jahrhunderts nicht ernst genommen wurde, man hielt sie für eine besondere Art der mathematischen Unterhaltung.
Erst dem Genie des russischen Akademiemitglieds *P. L. Tschebyscheff* gelang es, die nicht zur Sache gehörenden Dinge auszusondern und die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer exakten mathematischen Wissenschaft mit eigener Theorie und einem spezifischen mathematischen Apparat zu machen. Diesen Fragen widmete *Tschebyscheff* lediglich vier Artikel, die er mit großen Pausen zwischen 1845 und 1887 veröffentlichte. Ihre Bedeutung für die Wissenschaft ist sehr groß. — Genug der Geschichte, kehren wir zum Wesen der Sache zurück!

Der Fall und der Zufall

Am Strand von Gagra tatenlos zu liegen ist recht langweilig. Wir nehmen einen Kindereimer, werfen eine Handvoll Kieselsteine hinein und wetten, ob im Eimer, sagen wir, weniger als 100 Kiesel sind.
Eine Wette beschäftigt irgendwie die Gedanken und entfacht die während des Winters eingeschlafenen Leidenschaften. Das Ereignis, das darin besteht, daß sich im Eimer weniger als einhundert Kieselsteine befinden, ist zufällig.
Man könnte auch eine Wette darüber abschließen, welche Mannschaft die nächste Weltmeisterschaft im Volleyball gewinnen wird. Der Gewinn der Weltmeisterschaft ist ebenfalls ein zufälliges Ereignis. Doch zwischen beiden Ereignissen besteht ein wesentlicher Unterschied.
Der Versuch mit den Kieselsteinen läßt sich vielmals unter den gleichen Bedingungen wiederholen, denn entlang dem Strande liegen sehr viele dieser Kieselsteine. Für derartige Situationen ist die statistische Stabilität charakteristisch, die die Gesetzmäßigkeit von Erscheinungen widerspiegelt, die in großer Anzahl auftreten.
Der Gewinn einer Weltmeisterschaft ist ein Ereignis ganz anderer Art: Die Spiele lassen sich nicht beliebig oft unter den gleichen Bedingungen wiederholen, denn im folgenden Jahr werden andere Mannschaften teilnehmen, die alten Mannschaften werden in anderer Form sein, die Spiele werden in einem anderen Land ausgetragen usw.
Derartige Ereignisse sind zwar auch zufällig (sie können eintreten oder auch nicht, und es läßt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen, welche Mannschaft Weltmeister wird), doch sie zeichnen sich nicht durch statistische Stabilität aus.
Die letztgenannten zufälligen Ereignisse werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht betrachtet, jedoch beginnen sich Mathematiker anderer Spezialrichtungen damit zu beschäftigen. Gegenwärtig versucht man auch Situationen wie das Volleyballspiel, die Wechselbeziehungen zwischen Warenproduzenten und Verbrauchern usw. mathematisch zu durchdringen. Davon wird noch die Rede sein; kehren wir jetzt zur Wahr-

scheinlichkeitsrechnung zurück, einer Wissenschaft, die sich mit zufälligen Erscheinungen mit Massencharakter, mit statistisch stabilen Ereignissen beschäftigt.

Die Wahrscheinlichkeit

Es ist für Sie sicher offensichtlich, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einem 32 Karten umfassenden gut durchgemischten Kartenspiel das Kreuz-As zu ziehen, gleich 1 : 32 ist, denn man hätte mit gleicher Wahrscheinlichkeit auch jede andere der 32 Karten ziehen können. Wenn hintereinander ein As, eine Zehn und ein König gezogen werden, so ist das ebenfalls ein zufälliges Ereignis. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß aus einem gut durchgemischten Spiel diese drei Karten in dieser Reihenfolge gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Asses (im Spiel gibt es vier Asse) ist 4 : 32. Wenn ein As gezogen ist, verbleiben noch 31 Karten und das Ereignis, eine der vier Zehnen zu ziehen, hat die Wahrscheinlichkeit 4 : 31. Schließlich soll aus den verbleibenden Karten einer der vier Könige gezogen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür ist 4 : 30. Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für das reihenfolgegerechte Ziehen der Karten As – Zehn – König sind die drei Zahlen zu multiplizieren, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird

$$\frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{4}{30} = 0{,}00213$$

Das ist eine recht geringe Wahrscheinlichkeit, und die Freude ist verständlich, wenn dem Versuch solch ein Erfolg beschieden ist.
Wir teilen einen Volleyballplatz in zwei gleiche Teile und werfen von irgendwo her mit verbundenen Augen auf gut Glück einen Ball auf den Platz. Wenn wir voraussetzen, daß der Ball in jedem Fall auf den Platz fällt (und nie daneben), dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Aufsetzen des Balls in einer bestimmten Hälfte gleich 1 : 2, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Ball in eine auf dem Platz befindliche Pfütze fällt, ist gleich dem Verhältnis der Fläche der Pfütze zur Fläche des ganzen Platzes.
Wie kann man aber die Wahrscheinlichkeit für Zahl oder Wappen beim Werfen eines unsymmetrischen, schiefen Geldstücks bestimmen? Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein am Strand von Gagra auf gut Glück aufgenommener Kieselstein weniger als 20 g wiegt? Es wäre keine besonders kluge Idee, sämtliche Kieselsteine am Strand zu wiegen und das Verhältnis der Anzahl derer, die weniger als 20 g wiegen, zur Gesamtzahl zu bilden, nicht nur wegen der Unrealität eines solchen Vorhabens, sondern auch deswegen, weil nicht alle Steine gleiche Chancen haben, ausgewählt zu werden.
Wie kann man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß eine Glühlampe nicht vor tausend Stunden Brenndauer durchbrennt? Auch hier

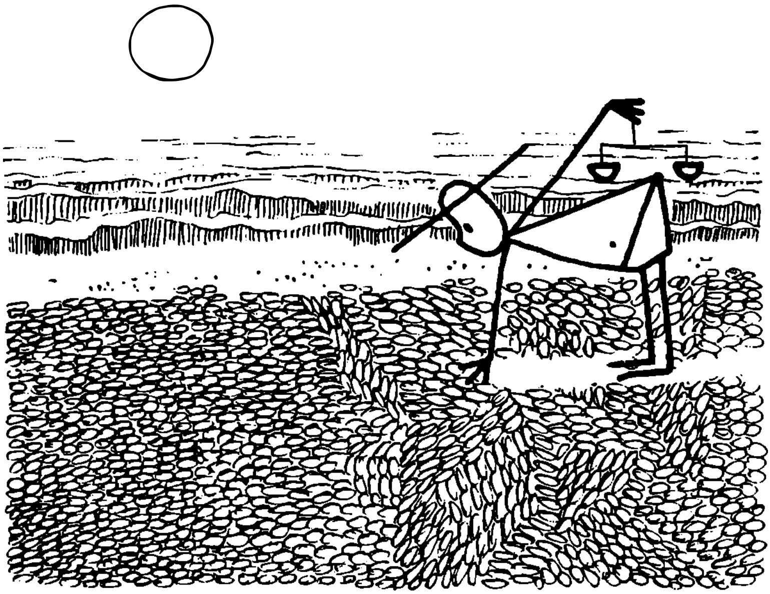


Bild 105

wäre offenbar die Empfehlung nicht angebracht, erst einmal sämtliche Glühlampen auszuprobieren und dann das Verhältnis aus der Anzahl der Lampen, die länger als tausend Stunden halten, und der Gesamtzahl zu bilden.
Trotzdem muß man aber annehmen, daß auch für die zuletzt aufgeführten Ereignisse eine ganz bestimmte Wahrscheinlichkeit existiert. Die Wahrscheinlichkeit ist ein objektiver Kennwert der Ereignisse, der unabhängig von unserer Beziehung zu ihm ist. Das Vorhandensein einer Wahrscheinlichkeit bei den betrachteten Ereignissen ist vergleichbar mit dem Vorhandensein von Masse und Geschwindigkeit bei einem Körper: Masse und Geschwindigkeit sind objektiv existierende Größen, die das betrachtete Objekt charakterisieren. Wir können sie jedoch nicht mit absoluter Genauigkeit, sondern lediglich ausreichend genau näherungsweise bestimmen. Ebenso kann man ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses angeben.
Wollen wir die Wahrscheinlichkeit für Wappen beim Werfen eines unsymmetrischen Geldstücks bestimmen, so führen wir eine größere Anzahl von Würfen aus, sagen wir n, und zählen, in wieviel Fällen das Wappen oben ist. Wenn dies bei m Würfen der Fall ist, dann ist das Verhältnis $m : n$, die relative Häufigkeit des Ereignisses „Wappen", ein Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Da man also die Wahrscheinlichkeit nicht immer auf Grund irgendwelcher Überlegungen berechnen kann, beispielsweise auf Grund von Symmetrie-

betrachtungen oder aus der Gleichmöglichkeit aller Versuchsergebnisse, benutzt man auch die Möglichkeit ihrer Ermittlung über die relative Häufigkeit. Uns tröstet dabei, daß ein so ermittelter Wert bei Erhöhung der Anzahl n der Versuche immer genauer realisiert wird. Obwohl das einleuchtend ist, müssen wir den genauen Sinn dieser Behauptung einer weiteren Betrachtung unterziehen.

Sie haben einen Versuch gemacht. Na und?

Was heißt „Na und?" — werden Sie sagen. Eine große Arbeit ist beendet, und es liegen viele Meßwerte vor.
Das ist lobenswert, sage ich. Sie können alle diese Meßwerte in den Arbeitsbericht aufnehmen. Das ist aber nur die eine Seite der Sache. Andererseits sind auf Grund der Meßwerte Schlußfolgerungen zu ziehen, und das ist gar nicht so einfach.
Das Ergebnis des Versuchs kann entweder eine qualitative Aussage sein, etwa wie folgt: „Bei der Injektion von Adrenalin erhöht sich der Blutdruck", oder eine quantitative Beschreibung der Situation, z. B.: „Bei der Injektion von 1 cm^3 Adrenalin erhöhte sich bei vier von fünf Versuchskaninchen der Blutdruck um ...".
Zum Ergebnis eines Versuchs gehören immer gewisse quantitative Angaben, zumindest über die Anzahl der durchgeführten Experimente. In den meisten Fällen läßt sich auch das Ergebnis des Versuchs quantitativ beschreiben. Diese Beschreibung setzt eine mathematische Bearbeitung der Versuchsergebnisse voraus.
Stellen Sie sich eine geologische Expedition vor, die den Auftrag hat, Apatitlagerstätten zu erkunden. Während der Arbeit stößt die Expedition auf Diamanten, Gold und Uranerz, läßt jedoch das alles unbeachtet, da sie Apatit zu suchen hat. Es wird kaum möglich sein, diese — vorsichtig ausgedrückt — Verschwendung zu rechtfertigen. Wodurch unterscheidet sich aber der Physiologe von der geologischen Expedition, wenn er umfangreiche und schwierige experimentelle Arbeiten ausführt und nur ein Körnchen der erhaltenen Information nutzt?

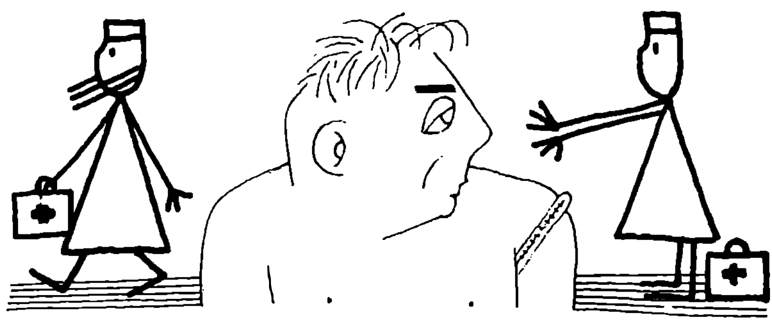


Bild 106

Erinnern Sie sich an unsere Gespräche mit dem Physiologen am Anfang des Buches! Der Schleifenoszillograf bietet offenbar die Möglichkeit, sehr viel Information über die Lebenstätigkeit der Versuchskaninchen zu erfassen. Als Ergebnis werden jedoch hauptsächlich einige qualitative Feststellungen ausgewiesen, wie: „Nach der Injektion von Adrenalin erhöhte sich der Blutdruck." Die ganze übrige Information wird nicht verarbeitet; sie geht also verloren.
Bei der Bearbeitung und Interpretation von Versuchsmaterial muß man fast immer die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik heranziehen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung dient als theoretische Grundlage der mathematischen Statistik. In den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik wird gezeigt, daß die mathematische Statistik die wissenschaftlichen Methoden zur statistischen Beobachtung und Analyse des Beobachtungsmaterials liefert.
Insbesondere wenn die Anzahl der Versuche klein ist, kann man recht verschiedene Schlußfolgerungen ziehen. Der berühmte Physiker *Niels Bohr* hat einmal sehr treffend gesagt: „Bei einer endlichen Menge von Experimenten und einer unendlichen Menge von Theorien existiert immer eine unendliche Menge von Theorien, die den endlich vielen Experimenten genügt."
Noch einmal möchte ich betonen, daß man mit Schlußfolgerungen aus statistischen Auswertungen sehr vorsichtig sein muß. Es ist nicht immer klar, ob die Resultate die aufgestellte Hypothese bestätigen oder nur dem Spiel des Zufalls entstammen.
Ich führe ein Beispiel an. Zur Heilung einer gefährlichen Krankheit kann man zwei Methoden benutzen; wir wollen sie „alte Methode" und „neue Methode" nennen. Die Ergebnisse der Behandlungen über einen gewissen Zeitraum sind in Tafel 4 zusammengefaßt.

Tafel 4. Vergleich zweier Heilmethoden

	Patientenanzahl	Tödliche Ausgänge	Überlebende	Todesfälle in %
Alte Methode	9	6	3	$\frac{6}{9} \triangleq 67$
Neue Methode	11	2	9	$\frac{2}{11} \triangleq 18$
Insgesamt	20	8	12	

Aus Tafel 4 folgt, daß die Anzahl der tödlichen Ausgänge bei der neuen Methode bedeutend geringer als bei der alten ist. Wenn wir etwas nachdenken, können wir jedoch durchaus bezweifeln, ob die Anzahl der Beobachtungen groß genug ist, um uns von der Richtigkeit der erhaltenen Prozentzahlen zu überzeugen.

Wären beispielsweise beide Methoden gleich wirksam oder hätten beide überhaupt keinen Einfluß auf den Ausgang der Krankheit, so hätte das in Tafel 4 wiedergegebene Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 : 25. (Mit derselben Wahrscheinlichkeit ist die Nummer einer Straßenbahnfahrkarte durch 25 teilbar, d. h., die zwei letzten Ziffern sind 00, 25, 50 oder 75.) Obwohl die Ergebnisse sehr für die neue Methode sprechen, würde ich sie für noch nicht so überzeugend halten, um den generellen Übergang zur neuen Methode anzuweisen. Würde ich jedoch erkranken und hätte ich die Möglichkeit, zwischen den beiden Methoden zu wählen, so würde ich die neue Methode vorziehen. Aber das ist keine Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern geht auf eine andere Wissenschaft zurück, von der noch die Rede sein wird.

Häufig kommen falsche Schlußfolgerungen dadurch zustande, daß der Experimentator eine Reihe von Versuchsergebnissen einfach wegläßt und bestimmte extreme Punkte nicht aufnimmt, weil ihm scheint, daß sie nicht den Versuchsbedingungen entsprechen. Oft macht sich dabei bewußt oder unbewußt der Wunsch geltend, eine bestimmte Hypothese zu rechtfertigen, der gerade diese unerwünschten Ergebnisse widersprechen würden. Natürlich können auch einmal offensichtliche Fehlmessungen auftreten, doch ohne triftigen Grund darf man nicht einfach irgendwelche Daten weglassen.

Der sowjetische Physiker *Kapiza* hat in einer Gedenkrede zu Ehren *Rutherfords* einmal gesagt:

„Das Studium der Kernprozesse bei Zusammenstößen enthält bis zum heutigen Tage eine schwache Stelle — die Notwendigkeit einer statistischen Auswertung der Versuchsergebnisse. Es ist wohlbekannt, daß bei der Ableitung einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit auf Grund statistischer Daten bei einer beschränkten Anzahl von Beobachtungen größte Vorsicht geboten ist. Irgendwer hat zur Anwendung der Statistik einmal gesagt:

„Es gibt drei Arten von Lügen: Notlügen, gemeine Lügen und die Statistik.“[1])

Allerdings ging es dabei um die Anwendung der Statistik auf gesellschaftliche Prozesse; in einem gewissen Umfang kann man das jedoch auch auf die Anwendung der Statistik in der Physik beziehen. Auf keinem anderen Gebiet der Physik wurden so viele grobe Fehler und falsche Entdeckungen gemacht, wie bei der statistischen Auswertung der bei Kernzusammenstößen gesammelten statistischen Daten. Bis in unsere Zeit hinein wurden fast jährlich Entdeckungen neuer Teilchen, Elemente oder Resonanzstufen bekannt, die sich dann als Fehlmeldungen erwiesen.

Rutherford wußte sehr gut, welche Gefahr die nicht objektive Interpretation experimenteller Daten statistischen Charakters in sich birgt, wenn

[1]) *R. von Mises* zitiert in seinem bekannten Buch „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit“ (2. Auflage, Wien: 1936) den Engländer Sir *Francis Calton*: „Es gibt drei Arten von Lügen: 1. die Notlüge, die verzeihlich ist; 2. die gemeine Lüge, für die es keine Entschuldigung gibt, und 3. die Statistik.“ (J. Ch.)

der Wissenschaftler ein gewünschtes Resultat bekommen möchte. Statistische Daten bearbeitete er mit größter Vorsicht; interessant ist die Methode, nach der er vorging. Die numerischen Rechnungen führten gewöhnlich Studenten aus, die nicht wußten, worin der Versuch bestand. Die auf Grund der erhaltenen Punkte zu zeichnenden Kurven wurden von Mitarbeitern angefertigt, die nicht wußten, was sich ergeben muß. Soweit ich mich erinnere, haben sowohl *Rutherford* als auch seine Schüler nicht eine einzige Fehlentdeckung gemacht, während deren Anzahl in anderen Laboratorien nicht gering war."[1])

Die Methoden der mathematischen Statistik müssen also gekonnt und sehr überlegt angewendet werden, damit sie ein nützliches und jederzeit anwendbares Mittel zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen sind.

Ich sagte, daß man in der Physiologie und Medizin manchmal recht verschwenderisch mit Versuchsergebnissen umgeht, daß man ihnen im Vergleich zu den bestehenden Möglichkeiten sehr wenige Informationen entnimmt. Diese Feststellung bezieht sich in starkem Maß auch auf die Geologie und die Geophysik, die Chemie und die Technik. Es ist natürlich nicht immer das Verschulden des Experimentators, wenn die Versuchsergebnisse nicht genügend ausgewertet werden: Man muß nicht nur die statistischen Methoden beherrschen, sondern auch die technischen Einrichtungen besitzen, die zur Bearbeitung erforderlich sind.

Die Entschlüsselung eines Elektro-Enzephalogramms oder die komplexe Interpretation der bei einer Erdölbohrung gewonnenen geophysikalischen Daten erfordert nicht nur einen großen Rechenaufwand, sondern auch komplizierte Algorithmen. Hierfür sind die üblichen mechanischen Rechenmaschinen nicht mehr ausreichend; man benötigt die moderne elektronische Rechentechnik, am besten einen Schnellrechner, der die Versuchsdaten automatisch aufnimmt und die Ergebnisse sofort in Form von Tabellen oder Kurven ausgibt.

Nicht nur die Auswertungsmethode, sondern auch die Deutung der Ergebnisse erfordert ein tiefes und unvoreingenommenes Eindringen in das betrachtete Problem. Die Rechner allein genügen nicht; sie müssen auf bestimmte Fragestellungen antworten, und diese Fragen exakt zu formulieren ist gerade das schwierigste. Ist es nicht so?

Gespräch mit einem Doktoranden

Zu mir kommt ein Doktorand. Er ist ein erfahrener Ingenieur, hat in seine Dissertation bereits viel Arbeit investiert, Material gesammelt und viele Versuche durchgeführt. Nun meint er, daß es an der Zeit wäre, die Fakten zu systematisieren und Schlußfolgerungen zu ziehen.

Er: Ich möchte Sie gern einmal konsultieren. Ich habe einen Laborversuch zur Untersuchung der Festigkeit verschiedener Plastrohre aufgebaut und eine Reihe von Versuchen angestellt. Nun möchte ich

[1]) Zeitschrift „Novij mir" (1966) Nr. 8, S. 209

wissen, ob ich noch weitere Versuche anstellen muß oder ob die erhaltenen Ergebnisse ausreichen.

Ich: Wozu ausreichen?

Er: Zu Schlußfolgerungen über die Festigkeit der Plastrohre unter den verschiedenen Bedingungen.

Ich: Erläutern Sie bitte ausführlicher, welches Ziel Sie sich gestellt haben.

Er zeigt mir Tabellen mit den Resultaten. Jeder Versuch zog sich über mehrere Wochen hin. Nach der Aufgabenstellung sollte der günstigste Kunststoff für Rohrleitungen ausgewählt werden, durch die Erdöl unter Druck gepumpt wird. Während der Versuche wurden die Rohre einige Wochen einem bestimmten Druck ausgesetzt; danach wurden sie in einer speziellen Maschine aufgerissen, und die zum Zerreißen notwendige Kraft wurde gemessen. Die Überreste der Rohre wurden nach dem Versuch weggeworfen.

Ich: Warum haben Sie die Versuche nicht alle gleich lange durchgeführt?

Er: Meine Versuchsmethodik hat zum Ziel, möglichst schnell zu Schlußfolgerungen über die Festigkeit der Rohre zu gelangen. Es sollte die Abhängigkeit zwischen der Zeitdauer der Belastung der Rohre und der notwendigen Zerreißfestigkeit festgestellt werden. Diese Abhängigkeit habe ich über eine Dauer von zehn Wochen experimentell untersucht, und für den weiteren Verlauf kann ich sie dann mit Hilfe theoretischer Überlegungen extrapolieren.

Ich: Bei einem solchen Herangehen können die Angaben über die Zerreißfestigkeit der Rohre nach einem, zwei oder drei Jahren Benutzung fehlerhaft werden?

Er: Ja; durch den Vergleich verschiedener Plastsorten ist es jedoch möglich zu entscheiden, ob ein Kunststoff einem anderen vorzuziehen ist. Ein Rohr müßte viele Monate oder Jahre belastet werden, um zu einer exakten Aussage zu gelangen. Ich kann aber nicht so lange warten, um die Qualität der verschiedenen Rohrtypen zu beurteilen.

Ich: Natürlich, die Dissertation soll möglichst schnell verteidigt werden!

Er: Sie können gut lachen: Ein Mathematiker beweist einige Sätze und verteidigt dann seine Arbeit. Wir müssen aber experimentell Resultate sammeln. Dabei geht viel Zeit verloren.

Ich: Ja, zur schnellen Fertigstellung einer Dissertation sind theoretische Fragen besser geeignet, wenn sie nicht zu schwierig sind. Nebenbei bemerkt: Man kann auch bei theoretischen Fragen hängenbleiben. Für Sie scheint es also offensichtlich zu sein, daß Ihre Versuchsanordnung zu entscheiden erlaubt, welche Plastsorte die größte Zerreißfestigkeit hat. Mir ist das vorläufig gar nicht offensichtlich ... Nehmen wir aber an, Ihre Hypothese sei richtig. Nach welchen

Zeitabschnitten messen Sie die Zerreißfestigkeit, und wieviel Rohre untersuchen Sie gleichzeitig?
Er: Ich kann 20 Rohrstücke einlegen und nehme alle zwei Wochen 5 Stück heraus. Leider kann ich keine größere Menge gleichzeitig erproben — die Anlage erlaubt es nicht.
Ich: Worin besteht nun Ihre Frage?
Er: Ich habe bisher Versuchsserien für drei Rohrtypen durchgeführt. Ist das ausreichend, oder muß ich weitere Versuche anstellen?
Ich: Besitzt nach Ihren bisher durchgeführten Versuchen ein Rohrtyp besondere Vorteile? Können Sie beispielsweise zeigen, daß nach zweimonatiger Belastung bei dem einen, besseren Rohrtyp die Zerreißfestigkeit nur um 1% gesunken ist und bei den anderen um ganze 20%?
Er: Wo denken Sie hin! Sehen Sie sich die Tabellen an. Die Werte haben alle ungefähr die gleiche Größenordnung. Beim Vergleich der Mittelwerte scheint mir allerdings die erste Plastsorte um etwa 50% besser zu sein als die anderen. Und Rohre aus diesem Plast hätten dann auch eine um 50% höhere Lebensdauer; das würde Millionen an Einsparungen bedeuten.
Ich: Wieviel kosten Ihre Versuche?
Er: Warum wollen wir uns auf Ökonomie einlassen? Beschäftigen wir uns lieber mit der Statistik.
Ich: Stellen Sie sich vor, daß Ihnen die Gallenblase entfernt werden müßte. Es gibt zwei Chirurgen, die Sie operieren können. Der eine hat 10 Operationen ausgeführt, davon 9 erfolgreich, der andere hat bereits 100 Operationen gemacht und 90 erfolgreich. Welchen würden Sie vorziehen?
Er: Selbstverständlich den zweiten, jedoch ...
Ich: Wenn beim zweiten aber nur 85 von 100 Operationen erfolgreich verlaufen sind?
Er: Ich weiß nicht recht, vielleicht doch den zweiten, er hat immerhin mehr Erfahrung!
Ich: Ich will Sie von der Angst um den Ausgang der Operation befreien. Nehmen wir an, daß wir zwei gute Schützen haben. Der eine hat 9 von 10 möglichen Treffern, der andere 85 von 100 möglichen, welcher verdient den Lorbeerkranz des besseren Schützen?
Er: Ich bin zu Ihnen gekommen, um Antwort auf meine Fragen zu erhalten, und Sie tischen mir neue auf. Das ist gegen die Spielregeln.
Ich: Nicht doch, ich will Ihnen nur helfen, Ihre Fragen richtig zu formulieren. Da Ihnen aber dieser Weg nicht gefällt, will ich versuchen, auf Ihre nichtgestellten Fragen zu antworten. Wir haben es hier mit mehreren Fragen zu tun. Versuchen wir sie einzeln aufzuführen.
Die erste Frage. Wieviel Versuche muß man fahren, um völlig davon überzeugt zu sein, daß der aus den Versuchen erhaltene Mittelwert mit dem tatsächlichen Wert der Zerreißfestigkeit übereinstimmt? Diese Frage läßt sich exakt beantworten — unendlich viele!

Er: Wie denn — unendlich viele?

Ich: Jede Messung ist mit einem Fehler behaftet, dessen Größe unbekannt ist und sich von Versuch zu Versuch ändern kann. Das arithmetische Mittel aus den erhaltenen Werten wird deshalb immer einen Fehler aufweisen, wenn wir endlich viele Versuche ausführen. Natürlich nimmt die Fehlergröße des Mittelwerts mit der Anzahl der Versuche ab, wenn die Fehler rein zufällig sind und die Versuche unter gleichbleibenden Bedingungen stattfinden. Sie läßt sich jedoch bei endlicher Anzahl der Versuche nie zu Null machen. Daraus ergibt sich *die zweite Frage.* Was kann man bei 5, 10 oder 1000 Versuchen garantieren? Sie haben mehr Vertrauen zu einem Chirurgen, der 90 von 100 Operationen erfolgreich ausgeführt hat, Sie trauen ihm mehr Erfahrung zu (ein richtiges Wort!). Das Vertrauen zur Behauptung: „Der Chirurg führt 90% der Operationen erfolgreich aus!" ist also unterschiedlich: Es ist größer bei 90 von 100 und kleiner bei 9 von 10 erfolgreichen Operationen. Ihnen ist bestimmt intuitiv klar, was ein Vertrauensfaktor ist?

Er: Ja, wie kann man ihn aber ermitteln?

Ich: Das kann auf verschiedene Weise geschehen. Grob ausgedrückt, das ist der Preis, den Sie für stärker gesicherte Ergebnisse zahlen müssen. Dieser Preis kann durch die Anzahl der notwendigen Versuche bei Berücksichtigung ihrer Genauigkeit ausgedrückt werden; er läßt sich auch in Geld oder noch anders angeben. Hier berühren sich die Statistik und die Ökonomie, obwohl Sie beide gern trennen möchten.

Er: Ja, ich verstehe. Wie habe ich mich aber zu verhalten?

Ich: Davon wird später die Rede sein. Ich will erst einmal die Fragen formulieren. Sie haben aus irgendeinem Grund jeweils fünf Probestücke in gleichen Zeitabständen herausgenommen. Tatsächlich ändert sich die von Ihnen untersuchte Zerreißfestigkeit jedoch nicht linear mit der Zeit; eher ist der Zusammenhang hyperbelförmig oder exponentiell, das hieße $y = 2^{-\alpha t}$ (t — die Zeit; y — die Festigkeit; α — ein Zahlenfaktor). Der entscheidende Teil dieser Kurve ist der Anfangsabschnitt. Daraus ergibt sich noch eine Frage. *Die dritte Frage.* Zu welchen Zeitpunkten ist es am zweckmäßigsten, die Messungen der Zerreißfestigkeit durchzuführen, und wieviel Rohre sind jedesmal zu nehmen? Diese Frage kann auf verschiedene Weise gestellt werden. Man kann annehmen, daß die Anzahl der zur Verfügung stehenden Rohrstücke sowie die Zeitdauer zur Durchführung aller Versuche von vornherein festgelegt sind. Dann besteht die Aufgabe darin, die Zeitpunkte für die Messungen und die Anzahl der jeweils zu prüfenden Rohre so festzulegen, daß sich ein maximaler Vertrauensfaktor ergibt. Man kann aber auch den zu erreichenden Vertrauensfaktor vorgeben und die Gesamtkosten für sämtliche Versuche minimisieren. Die Aufgabe läßt sich auch noch auf verschiedene andere Arten lösen.

Er: Nun bin ich völlig ratlos ... Wie habe ich mich den nun zu verhalten?

Wir haben die Aufgabe entsprechend formuliert, der Versuch wurde geplant, und nach zwei Monaten lagen die Ergebnisse vor. Ich werde nicht ausführlicher bei dieser speziellen Aufgabe verweilen.

Der Experimentator und der Statistiker

Das Gespräch mit dem Doktoranden macht die allgemeine Situation deutlich, in der sich jemand befindet, der eine experimentelle Untersuchung durchführt. Wir wollen nun die in diesem Gespräch berührten Fragen etwas ausführlicher behandeln.

Die Experimentatoren bitten selten die Statistiker um Hilfe. Meist bearbeiten sie ihre Beobachtungsergebnisse selbst, so gut sie es können. Die Schlußfolgerungen sind manchmal einfach phantastisch, ich erwähnte das bereits. Es gibt aber noch weitere Probleme. Die Ergebnisse eines Versuchs, ihre Aussagekraft und ihr Informationsgehalt hängen stark davon ab, wie der Versuch durchgeführt wird; zu welchen Zeitpunkten gemessen wird, wie viele Messungen gemacht werden und in welchen Punkten, wie die Werte der Parameter oder Einflußgrößen gewählt werden, die sich in der Hand des Experimentators befinden usw. Man könnte noch sehr viele Frage- und Ausrufesätze anführen. Offenbar muß der Mathematiker dem Experimentator zu Hilfe kommen, um ihn in Ehren aus dem Gewirr dieser peinlichen Fragen zu retten.

Wie hat man sich zu verhalten? Ganz einfach: Wenn man selbst nicht versiert ist, muß man sich an den Statistiker um Hilfe wenden. Nicht erst, wenn die Versuche abgeschlossen sind, sondern zu Beginn der Arbeit. Oft macht sich der Experimentator bei der Planung eines Versuchs wenig Gedanken darüber, wie er später aus den Versuchsergebnissen möglichst viel Information über die zu untersuchende Erscheinung gewinnen kann. Dafür würde sich aber der Statistiker in erster Linie interessieren. Er müßte den Versuch planen, die Anzahl der notwendigen Messungen festlegen, ihre Ausführung durchdenken und sich auch darum kümmern, daß die Daten in einer für die unmittelbare Bearbeitung bequemen Form aufgezeichnet werden. Er würde den Experimentator laufend „stören" und die Beachtung der verschiedenen scheinbar unwesentlichen Bedingungen fordern. Doch dafür ginge die Bearbeitung und Auswertung der Versuchsergebnisse dann sehr schnell und wirksam vonstatten.

Ein Biologe, der den Einfluß einer Strahlung auf weiße Mäuse untersuchen will, nimmt 30 Mäuse und bildet aus ihnen zwei Gruppen: eine Kontrollgruppe mit z. B. 10 Mäusen und eine Versuchsgruppe mit 20 Mäusen. Diese 20 Mäuse teilt er in 5 Gruppen zu je 4 Mäusen ein. Jede Gruppe aus 4 Mäusen wird einer bestimmten Strahlendosis ausgesetzt. Scheinbar ist alles in Ordnung, er hat eine Kontrollgruppe und eine Versuchsgruppe. Der Statistiker würde alle Mäuse mit Nummern ver-

sehen und unter Benutzung einer Tabelle mit Zufallszahlen, ohne die Mäuse anzusehen, bestimmen, welche Nummern in welche Gruppe kommen. Damit schließt er nicht nur das bewußte Vorziehen bestimmter Mäuse aus (z. B. der kräftigsten für die stärkste Bestrahlung), sondern auch das unbewußte.
Die Versuchsobjekte müssen im allgemeinen völlig zufällig ausgewählt werden, damit auch nicht die geringste Ursache für Fehlschlüsse besteht.
Diese Feststellungen beziehen sich auch auf unbelebte Gegenstände. Als Beispiel wollen wir die Organisation der Gütekontrolle in einem Werk für Elektronenröhren betrachten.
Gütekennziffer ist die Lebensdauer der Röhren. Das Werk möge in einem Monat 50000 Röhren eines Typs herstellen, deren Lebensdauer bei ununterbrochenem Betrieb 500 Stunden (also über 20 Tage) betragen muß. Nun soll die Aufgabe der Gütekontrolle für die 50000 Röhren gelöst werden.
Zur Kontrolle der Lebensdauer der Röhren wird eine bestimmte Anzahl, eine Stichprobe, ausgewählt, auf den Prüfstand gebracht und 20 Tage belastet. Während dieser Zeit verbleibt der gesamte Röhrenposten im Werk. Es könnte ja sein, daß die Röhren nicht der Forderung nach 500 Stunden Lebensdauer genügen. Und es gibt viele Röhrentypen; die Lager sind mit fertiger Produktion vollgestopft. Eine schlimme Lage ...
Wenn man stichprobenweise kontrolliert, ist es wichtig zu wissen, wieviel Röhren geprüft werden müssen und wann das Ergebnis als befriedigend angesehen werden kann.
Vor etwa 15 Jahren begegnete ich in einem Betrieb diesem Problem. Der Monatsproduktion von 20000 bis zu 100000 Röhren eines Typs entnahm man 10 Röhren und betrieb sie 500 Stunden lang auf dem Prüfstand. Wenn innerhalb dieser Frist keine der 10 Röhren versagte, wurde der Posten als qualitätsgerecht angenommen. Hielt jedoch nur eine Röhre der Prüfung nicht stand, so gab man Alarm, und es wurden die Gründe für diesen so hohen (!) Ausschuß gesucht und schleunigst Maßnahmen zur Senkung des Ausschusses ergriffen.
Man kann aber unschwer berechnen, daß bei einer derartigen Methode die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dem Verbraucher ein ganz miserabler Röhrenposten ausgeliefert wird, recht groß ist. Enthält der Posten 5% Ausschuß, sind also von 100000 Röhren 5000 nicht in Ordnung, so sind bei zufälliger Auswahl alle 10 Röhren der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 einwandfrei. Das bedeutet, daß im Mittel 60 Posten von 100 angenommen werden, selbst bei 5% Ausschuß. Sogar bei einer tatsächlichen Ausschußquote von 10% werden nach diesem Kontrollverfahren 34 von 100 Posten als einwandfrei angenommen. Der Verbraucher wird mit solch einer schlechten Güte kaum zufrieden sein.
Es ist natürlich nicht gut, wenn sich derart unzuverlässige Röhren im Fernsehgerät oder Radioapparat befinden. Aber hier bleibt die Sache auf einige Kraftausdrücke an die Adresse des Röhrenwerks und den Garan-

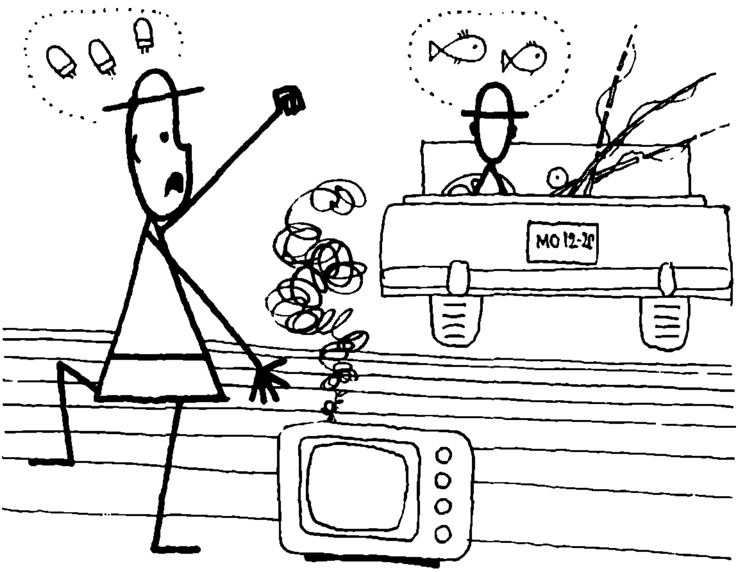


Bild 107

tieumtausch der Röhren beschränkt. Die Flüche werden meist nur zu Hause ausgesprochen, und der Direktor des Werkes kann in Ruhe angeln fahren. Ist aber der Verbraucher ein anderer Betrieb, der die Röhren für irgendwelche Spezialgeräte benutzt, die mit hunderten oder noch mehr Röhren bestückt sind, so kann es sehr ernste Unannehmlichkeiten geben.

Wir wollen hier nur eine Näherungsbetrachtung anstellen. Sind in dem betrachteten Röhrenposten 10% Ausschuß und sind die Ausfälle gleichmäßig über die 500 Stunden verteilt, so ist die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer beliebigen Röhre im Verlauf eines Tages etwa 0,005. Nehmen wir an, daß ein Gerät zur automatischen Steuerung irgendeines Prozesses 300 Röhren enthält. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß im Verlauf eines Tages keine der 300 Röhren ausfällt, ist etwa $(1-0{,}005)^{300} = 0{,}995^{300} \approx 0{,}2$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Verlauf eines Tages wenigstens eine Röhre ausfällt, ist dann $1-0{,}2 = 0{,}8$.

Wenn der Ausfall nur einer Röhre zu Fehlern in der Funktion oder zum Ausfall eines ganzen Geräts führt, ergibt sich aus unserer Überschlagsrechnung ein katastrophales Bild: Im Mittel wird das Gerät nur an 2 von 10 Tagen ohne Störungen arbeiten. Nur Selbstmörder würden sich z. B. in ein Flugzeug setzen, das mit solch einem Gerät ausgerüstet ist.

Kehren wir zurück zur Frage der Entnahme einer Stichprobe für die Gütekontrolle. Stellen wir uns einmal vor, das Werk wolle nur seinen Plan erfüllen, und für die Qualität übernimmt der Betrieb keine besondere Verantwortung. In solch einem Fall werden die Vertreter des Werkes bewußt oder unbewußt möglichst gute Röhren zur Gütekontrolle senden. Wenn z. B. die Tagschicht bessere Röhren fertigt als die Nachtschicht, wird man von der Tagschicht hergestellte Röhren auswählen; wenn gewisse Arbeitsgänge von Hand ausgeführt werden, ist es günstig, nur von erfahrenen Facharbeitern bearbeitete Röhren zur Gütekontrolle zu geben. Bei einer solchen Gütekontrolle müßte der Verbraucher noch schlechtere Röhren in Kauf nehmen!

Natürlich ist für eine Gütekontrolle eine Stichprobe von 10 Röhren meist bei weitem nicht ausreichend. Nun entstehen aber organisatorische Probleme: Es gibt viele Röhrentypen. Nimmt man von jedem Posten z. B. 1000 Röhren für 20 Tage auf den Prüfstand, so sind riesige Prüfräume nötig. Außerdem benötigt man viel Elektroenergie, und die Röhren wandern vom Prüfstand auf den Schrotthaufen oder können nur noch stark preisgesenkt abgesetzt werden. Das alles führt zu hohen Produktionsverlusten.

Ein Statistiker würde zunächst fordern, daß die zu prüfenden Röhren zufällig ausgewählt werden. Außerdem ließe sich auch das Verfahren selbst bedeutend vervollkommnen.

Die Statistiker kennen heute schon vorteilhaftere *Verfahren zur Entscheidung* über Annahme oder Zurückweisung der Posten.

Stop! Achten Sie auf die hervorgehobenen Begriffe! Bis jetzt war von ihnen nur so nebenbei die Rede, wir wollen uns jetzt direkt mit der Entscheidungstheorie beschäftigen.

Wir müssen eine Entscheidung fällen

Entscheidungen hat jeder von uns auf Schritt und Tritt zu fällen. Die Leiter von Betrieben und Laboratorien, die Mitglieder der Regierung, Pionierleiter und Brigadiere haben z. B. organisatorische Entscheidungen zu fällen. Der Arzt fällt eine Entscheidung, wenn er eine Diagnose stellt, ein Rezept verordnet, sich für eine Behandlungsmethode ausspricht oder einen Patienten krankschreibt. Ein Kraftfahrer oder ein Pilot entscheidet, wenn er einen bestimmten Weg zu seinem Ziel festlegt oder diesen ändert, wenn er Gas gibt oder auf die Bremse tritt. Der Wissenschaftler trifft eine Entscheidung, wenn er eine Versuchsmethodik festlegt oder den Beweis für einen Lehrsatz auf bestimmte Weise führt.

Wenn wir zum Stelldichein oder zum Standesamt gehen oder zum Gericht, treffen wir vorher eine Entscheidung, die jedoch leider nicht immer gut durchdacht ist! Es kann allerdings auch in anderen Situationen vorkommen, daß die gefällten Entscheidungen nicht ausreichend begründet sind und auf einer schlechten Basis ruhen. Das muß nicht unbedingt an Leichtsinn oder mangelnder Weisheit liegen, die Ursache kann auch ungenügende Information sein.

Wenn die vorhandene Information unzuverlässig und nicht ausreichend ist, ist man gezwungen, eine Entscheidung „auf Verdacht“ zu fällen und sich auf das unglückselige Gefühl zu verlassen. Entscheidungen werden

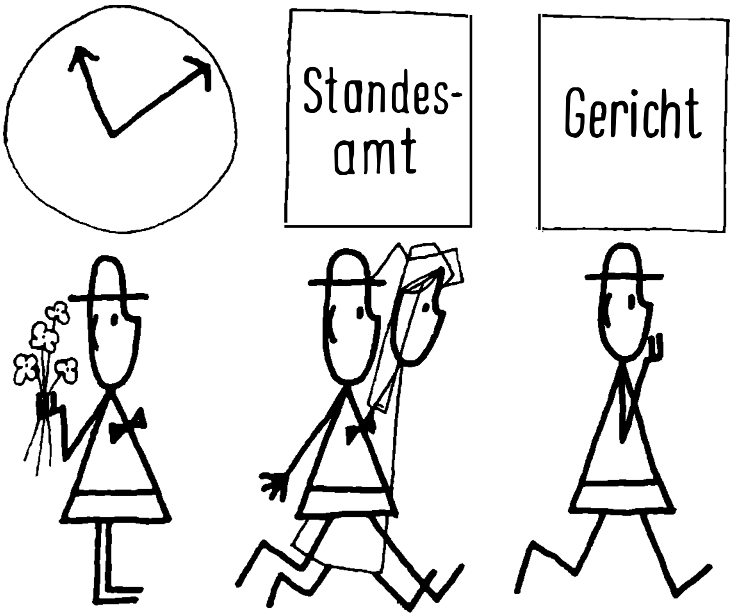


Bild 108

oft unter den Bedingungen völliger Unbestimmtheit getroffen. Die Messungen oder Untersuchungen werden unter der Bedingung der Unbestimmtheit durchgeführt und nur selten (um nicht zu sagen — nie) dienen sie als Anlaß zur Durchführung und Auswertung von Versuchen. Jeder wissenschaftlich Tätige — der Physiker, der Ingenieur, der Arzt und der Soziologe — stellt Versuche an und zieht aus ihnen Schlußfolgerungen mit unvollständiger Information und unter dem Einfluß des Zufalls, also unter der Bedingung einer gewissen Unbestimmtheit. Die Schlußfolgerung — Entscheidung — kann verschiedener Art sein: in einem bestimmten Gebiet eine Bohrung anzulegen; ein Gebiet als erdölfündig zu bezeichnen; Streptomyzin als wirksames Mittel gegen Lungenentzündung anzusehen, einen Posten Rundfunkröhren anzunehmen, wenn in einer Stichprobe aus 50 Röhren höchstens zwei den Güteansprüchen nicht entsprechen; die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu $2{,}99793 \cdot 10^{10}$ cm/s anzunehmen; zu behaupten, ein neues Elementarteilchen entdeckt zu haben; zu einer neuen Form des ökonomischen Hebels für die Mitarbeiter der Betriebe überzugehen; die Aufnahmeziffern für das Fernstudium an den Technischen Hochschulen auf ein Fünftel zu senken.

Damit man aus einer Menge möglicher Entscheidungen die optimale oder zumindest eine nahezu optimale auswählen kann, muß man bestimmte Regeln für diese Auswahl kennen und sich von diesen leiten lassen.

Heute ist die Wissenschaft bereits in der Lage, in vielen Fällen die Regeln oder, wie es jetzt zu sagen üblich ist, die Strategie für die Auswahl der optimalen Entscheidung anzugeben. In anderen Fällen existiert eine derartige Strategie noch nicht; es gibt aber bestimmte Empfehlungen, wie man die Fragen am besten formuliert, ein passendes mathematisches Modell für die zu betrachtende Situation wählt und die Eigenschaften des Modells untersucht.
Die Probleme der Entscheidungstheorie hängen eng mit einigen anderen mathematischen Gebieten zusammen. Dazu gehören die Spieltheorie, die Theorie der Optimierung, speziell der optimalen Planung und Leitung und andere, nicht zuletzt die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.
Die mathematische Statistik beschäftigt sich nicht nur mit Methoden zur Auswertung experimenteller Untersuchungen, sondern liefert auch Methoden zur Auswahl von Entscheidungen, wenn die Unsicherheit, unter der die Entscheidung zu treffen ist, statistisch stabilen Charakter hat.
Man muß sich natürlich eingestehen, daß die Auswahl einer Entscheidung nicht nur auf statistischen Überlegungen beruhen kann. Es ist Ihnen sicher ganz und gar nicht gleichgültig, ob sich in 10 von 100 Fällen ein Schüler beim Lösen einer Rechenaufgabe irrt, ein Geologe, der eine Schicht als erdölfündig bezeichnet, oder ein Chirurg, dem Sie Ihr Leben anvertrauen.
Es ist für Sie sicher interessant zu wissen, ob eine unzuverlässige Röhre in Ihr Fernsehgerät kommt oder in ein Gerät des Flugzeugs, mit dem Sie fliegen wollen. Doch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Röhre nur eine Stunde funktioniert, ist in beiden Fällen dieselbe!
Der Statistiker, der Regeln für eine Entscheidung angibt, und der Experimentator, der diese Regeln benutzt, müssen die Folgen ihrer Entscheidung kennen: Bei einer falschen Entscheidung kann ein Verlust an Menschenleben und großen Werten eintreten, ein Zeitverlust die Folge sein oder ein guter Ruf eingebüßt werden. Deshalb sollte man keine Mühe scheuen, um gute Regeln für Entscheidungen aufzustellen.
Ich sprach davon, daß Entscheidungen nicht nur in der Wissenschaft verlangt werden, sondern auch von jedem einzelnen im täglichen Leben. Und Sie, verehrter Leser, entscheiden gar nicht so schlecht, denn sonst würden Sie jetzt kaum die Zeit, Gelegenheit und Muße haben, dieses Buch zu lesen. Sie verlassen sich dabei auf Ihren gesunden Menschenverstand und die Intuition, die Sie selten in die Irre führen. Doch wir wollen Sie anschließend einer kleinen Prüfung unterziehen.

Intuition: Geburtstage

Wenn der Geburtstag eines Ihrer Bekannten mit Ihrem zusammenfällt (selbst, wenn er fünfzig wird und Sie dreißig), halten Sie das für einen „ganz großen Zufall“. Ich kannte Verliebte, die sich an ihrem gemein-

samen Geburtstag kennengelernt hatten. Schon den gemeinsamen Geburtstag betrachteten sie als Wink des Schicksals! Und daß sie sich gerade an diesem Tage kennengelernt hatten, war doppeltes Omen!
Stellen Sie sich einen Hörsaal vor, in dem einige hundert Hörer sitzen. Wir führen folgendes Gedankenexperiment aus: Wir befragen sämtliche Anwesenden nach ihren Geburtstagen und notieren, wie oft jeweils zwei, drei, vier usw. an ein und demselben Tag Geburtstag haben. Vorher schließen wir eine Wette ab, das macht die Sache interessanter. Ich zahle Ihnen 5 Mark, wenn im Hörsaal nicht wenigstens zwei Personen gemeinsam Geburtstag haben, und Sie zahlen mir 5 Mark, wenn im Hörsaal wenigstens zwei Personen an ein und demselben Tag Geburtstag feiern.
Wieviel Personen müssen im Hörsaal sein, damit unsere Wette reell ist, d.h. damit wir beide die gleichen Chancen zum Gewinnen haben? Wenn 367 Personen im Hörsaal sitzen, so gibt es mit Sicherheit zwei mit gemeinsamem Geburtstag, und Sie befinden sich in aussichtsloser Position. Ein Jahr kann höchstens 366 Tage haben, und es kann im äußersten Fall vorkommen, daß bei 366 Personen jeder an einem anderen Tag Geburtstag hat (am 1. Januar, am 2. Januar usw. bis zum 31. Dezember). Doch für die 367. Person bleibt kein Tag frei, und er muß mit jemanden gemeinsam feiern. Sind andererseits im Hörsaal nur zwei — Sie und ich —, so sind die Chancen recht gering, daß wir an ein und demselben Tag Geburtstag feiern, und ich habe wenig Aussicht, die fünf Mark zu gewinnen.
Ich bitte Sie, zunächst die vorstehend gestellte Frage nach der Anzahl der Personen im Hörsaal zu beantworten (im Verlauf von 5 Minuten), ohne die folgenden Seiten zu lesen. Merken Sie sich die Zahl, die Sie als Antwort festgelegt haben.
Man erhält durch eine einfache Rechnung leicht die exakte Antwort. Zur Erläuterung der Methode betrachten wir zunächst eine einfache Aufgabe.
Wir schreiben das Wort MÄUSLEIN auf Pappe, zerschneiden das Pappstück in kleine Quadrate mit jeweils einem Buchstaben, drehen die Buchstaben nach unten, wie beim Dominospiel (Bild 109), und vermischen die Pappstücke. Jetzt nehmen wir nacheinander einzelne Buchstaben auf und setzen sie in der Reihenfolge des Aufnehmens aneinander.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die nacheinander aufgenommenen Buchstaben das Wort EIS ergeben?
Wenn wir annehmen, daß die Buchstaben gut durchgemischt sind und alle die gleiche Chance haben, gezogen zu werden, läßt sich die Wahrscheinlichkeit leicht berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, zuerst das E zu ziehen, ist gleich 1:8 (das E steht auf einem der acht Pappquadrate). Aus den restlichen sieben Quadraten kann man mit der Wahrscheinlichkeit 1:7 den Buchstaben I ziehen und schließlich aus den verbleibenden sechs mit der Wahrscheinlichkeit 1:6 das S. Wir erhalten damit

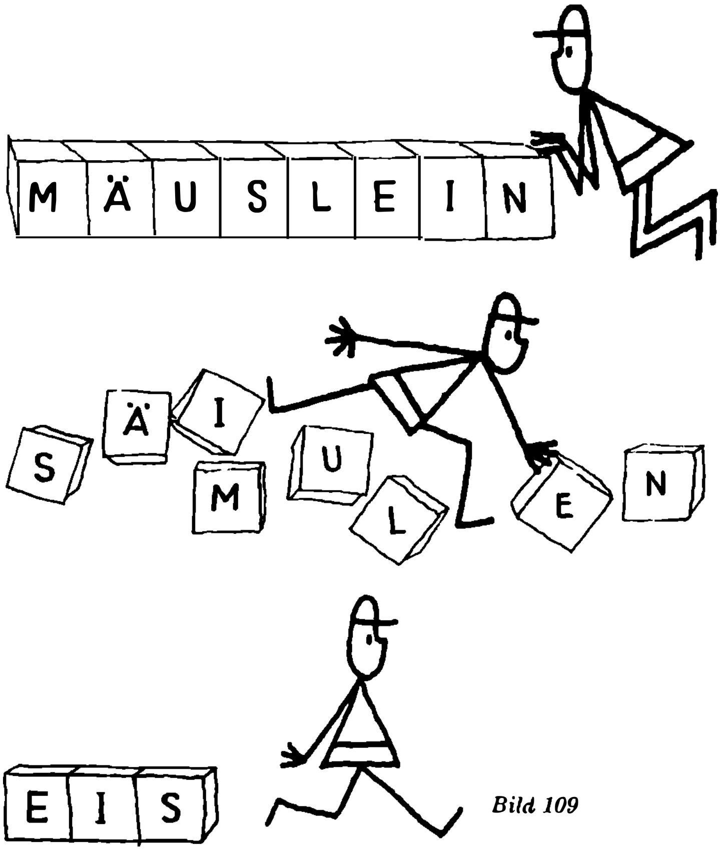


Bild 109

für die Wahrscheinlichkeit des Wortes EIS

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}003$$

Das ist eine recht kleine Wahrscheinlichkeit.
Jetzt wollen wir zu unserer Wette zurückkehren. In meinen Vorlesungen über die Wahrscheinlichkeitsberechnung habe ich die Frage, die ich an Sie gerichtet habe, auch öfter meinen Zuhörern gestellt. Es gab die verschiedensten Antworten: 100 Personen, 150, 183 (das ist gerade 366:2). Weniger als 50 hat nie jemand genannt. Danach haben wir die Geburtstage der im Hörsaal Anwesenden festgestellt (das nimmt weniger Zeit in Anspruch, als man zunächst meint), und bei einem Auditorium von 80, 50 oder nur 30 Personen fanden sich fast immer einige mit gemeinsamem Geburtstag. Auf die Hörer macht das einen sehr großen Eindruck.

Nun wollen wir die Rechnung ausführen. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit für das entgegengesetzte Ereignis, daß n Personen verschiedene Geburtstage haben. Der Einfachheit halber legen wir das Jahr mit 365 Tagen zugrunde. Ferner setzen wir voraus, daß jeder der 365 Tage gleichwahrscheinlich für einen Geburtstag ist.
Die erste Person darf an einem beliebigen Tag geboren sein, ohne daß sie zusammen mit einer anderen Person Geburtstag haben kann:
$365:365 = 1$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die zweite Person nicht zusammen mit der ersten, sondern an einem anderen Tag Geburtstag hat, ist $364:365$ (denn einer der 365 Tage ist schon von der ersten Person besetzt). Die Wahrscheinlichkeit für die dritte Person, nicht mit der ersten oder zweiten gemeinsam Geburtstag zu haben, ist $363:365$. Der weitere Ansatz ist offensichtlich. Die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der n Ereignisse, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle n Personen verschiedene Geburtstage haben, berechnet sich zu

$$Q_n = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}$$

Die Wahrscheinlichkeit des uns interessierenden Ereignisses — wenigstens zwei Personen haben an ein und demselben Tag Geburtstag — ist

$$P_n = 1 - Q_n$$

Tafel 5. Wahrscheinlichkeiten für Geburtstage an ein und demselben Tag

Anzahl der Personen n	Wahrscheinlichkeit des Zusammenfallens wenigstens zweier Geburtstage P_n	Näherungsweises Verhältnis der Einsätze bei einer reellen Wette
5	0,027	
10	0,117	
15	0,253	
20	0,411	70 : 100
21	0,444	80 : 100
22	0,476	91 : 100
23	0,507	103 : 100
24	0,538	116 : 100
25	0,569	132 : 100
30	0,706	242 : 100
40	0,891	819 : 100
50	0,970	33 : 1
60	0,994	169 : 1
70		1200 : 1
80		12000 : 1
90		160000 : 1
100		$33 \cdot 10^5$: 1
125		$31 \cdot 10^9$: 1
150		$45 \cdot 10^{14}$: 1

Rechnet man P_n für verschiedene n aus, so erhält man die Zahlen der zweiten Spalte von Tafel 5. Die dritte Spalte gibt für dieselben n an, in welchem Verhältnis die Wetteinsätze für eine reelle Wette stehen müßten, bei der die Chancen für die beiden Partner gleich groß sind. Wie man leicht sieht, ist dieses Verhältnis

$$P_n : (1 - P_n)$$

Aus Tafel 5 entnimmt man, daß die Antwort auf unsere am Anfang dieses Abschnitts gestellte Frage verblüffend ist: Unsere Wette ist bei gleichen Einsätzen etwa reell, wenn 23 Personen im Hörsaal sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Personen verschiedene Geburtstage haben, ist dann ungefähr die gleiche wie die, daß die Geburtstage von wenigstens zwei Personen zusammenfallen. Bei 100 anwesenden Personen ist unsere Wette nur dann reell, wenn ich 3300000·5 Mark gegen Ihre 5 Mark setzen würde.

Intuition: Glück — Pech

Verspätungen, Niederlagen, unerwünschte Begegnungen, Unglück in der Liebe, schlechtes Wetter und schlechtes Beißen der Fische beim Angeln vergiften das Leben der Menschheit. Während das schlechte Wetter oder das schlechte Beißen der Fische nicht auf das persönliche Konto des einzelnen Menschen kommen, sind Verspätungen, Niederlagen oder Unglück in der Liebe schon Ihr eigenes Pech. Man sagt zwar, daß jemand ein Glückspilz sei und ein anderer eine Pechsträhne habe. Das scheinen aber nur poetische Redewendungen zu sein! Wenn Sie jedoch in Ihrem Gedächtnis nachforschen, werden Sie sicher auch feststellen, daß es in Ihrem Leben ausgesprochene Erfolgsperioden und Pechsträhnen gab.
Haben Sie etwa weniger in den Vordergrund tretende Ereignisse vergessen oder gibt es tatsächlich Erfolgsperioden und Pechsträhnen? Ich will mir darüber kein Urteil erlauben; man müßte erst einmal über mehrere Jahre ernsthafte Beobachtungen anstellen und vor allen Dingen definieren, was Glück und was Pech ist. Für Glücksspiele, aber auch für ernsthafte Aufgaben aus der Theorie der Diffusion, kann man die Begriffe Pech oder Glück exakt definieren und genau untersuchen, inwieweit unsere intuitiven Vorstellungen der tatsächlichen Sachlage entsprechen.
In Tafel 6 sind die beim Werfen eines Geldstücks erzielten Ergebnisse angegeben. Jede zweistellige Zahl gibt an, wie oft bei jeweils 100 Würfen Wappen aufgetreten ist; die Gesamtanzahl der Würfe betrug 10000. In der ersten Spalte sind die Nummern der Versuche angegeben, in der letzten die Anzahl von Wappen in der jeweiligen Serie zu 1000 Würfen. Die Gesamtanzahl des Auftretens von Wappen betrug 4979. Diese Zahl wird in Ihnen sicher keine Zweifel hervorrufen: Offenbar ist das Geldstück wirklich symmetrisch.

Tafel 6. Ergebnisse des „Zahl-Wappen-Spiels“

Anzahl der Würfe	Anzahl der Wappen										Gesamtanzahl der Wappen
0 bis 1000	54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
bis 2000	48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
bis 3000	43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
bis 4000	58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
bis 5000	48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
bis 6000	49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
bis 7000	45	47	41	51	49	59	50	55	53	50	500
bis 8000	53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
bis 9000	45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
bis 10000	47	41	51	48	59	51	52	55	39	41	484
0 bis 10000											4979

Betrachten Sie nun nochmals Tafel 6! Nach kürzerer oder längerer aufmerksamer Betrachtung werden Sie mir die alte Frage stellen: „Na und?“ Ich möchte Ihnen ein Zahl-Wappen-Spiel vorschlagen. Laden Sie Ihren Freund oder Ihre Freundin ein und holen Sie ein beliebiges Geldstück aus der Tasche, möglichst das größte und schwerste. Sie (oder Ihr Partner) beginnen und werfen das Geldstück hoch. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß Sie in gleichen Zeitabständen werfen. Fällt Wappen, so gewinnen Sie, und Ihr Partner zahlt Ihnen einen Pfennig; fällt Zahl, so zahlen Sie einen Pfennig an Ihren Spielpartner.
Glauben Sie nicht, daß ich Sie auf die schiefe Bahn eines Glücksspielers bringen will. Ich habe bewußt einen so kleinen Einsatz vorgeschlagen, damit sie nicht bankrott werden oder Ihre Aufregung über Verlust oder Gewinn nicht die wissenschaftliche Seite der Frage überschattet.
Es ist ein klare Sache, Zahl und Wappen werden sich unregelmäßig abwechseln. Sie interessiert aber nicht, ob bei einem bestimmten Wurf, beispielsweise beim zweihundertsten, Zahl oder Wappen auftritt, sondern vielmehr die verlorene oder gewonnene Summe bis zum betrachteten Zeitpunkt, also bis zum 200. Wurf. Von diesem Gesamtumsatz soll im folgenden die Rede sein und nicht davon, ob Sie in einem bestimmten Zeitpunkt gerade einen Pfennig gewinnen oder verlieren.
Stellen Sie sich vor, Ihr Partner führt gerade die Würfe aus, und Sie sind schon 200 Würfe lang nur auf der Verlustseite (Sie gewinnen zwar immer einmal etwas zurück, haben aber in der Summe immer nur minus). Glauben Sie, daß Sie einfach Pech haben oder verdächtigen Sie Ihren Partner der Falschspielerei? Wenn Sie an der Ehrlichkeit Ihres Spielpartners nicht zweifeln können, ist dann vielleicht das Geldstück an dieser Ungerechtigkeit schuld, und Sie müssen es gegen ein anderes auswechseln? Vielleicht scheinen Ihnen aber 200 Würfe zu wenig, um sich in eine Diskussion über Gerechtigkeit und Ungerechtigkeit einzulassen?

Ihre gute Laune ist hin. Sie lassen sich aber Ihren Ärger und Ihren Verdacht nicht anmerken und spielen weiter. Sie sind schon bei 1000 Würfen angelangt und sind immer noch auf der Verlustseite. Wie schätzen Sie jetzt die Situation ein? Sie beginnen spätestens jetzt, Ihren Mitspieler zu verdächtigen. Doch, verzeihen Sie, was gibt Ihnen Anlaß zu einem Verdacht? Das Geldstück ist symmetrisch, Ihr Mitspieler verhält sich korrekt, bei jedem Wurf haben Zahl und Wappen die gleiche Chance. Ihr gesunder Menschenverstand sagt Ihnen, daß bei einer genügend langen Serie von Würfen jeder Spieler etwa die gleiche Zeit gewinnen und verlieren müßte.

Das klingt zwar überzeugend, ist aber ein völliger Fehlschluß!

Wir wollen jeweils den Spieler als führend bezeichnen, der im betrachteten Zeitpunkt gewonnen hat, d. h. Pfennige des anderen auf seiner Seite hat. Es erweist sich nun, daß ein Wechsel in der Führung bedeutend seltener eintritt als uns das die Intuition — der „gesunde Menschenverstand" — sagt. Die Wurfserien können beliebig lang sein; am wahrscheinlichsten ist, daß die Führung überhaupt nicht wechselt; nur ein einziger Wechsel der Führung ist wahrscheinlicher als zwei; zwei sind wahrscheinlicher als drei usw.

Ein Untersuchungsrichter oder Psychologe müßte die meisten Spieler als Gauner einstufen und die meisten Geldstücke für unsymmetrisch halten. Wiederholt man das Spiel mit 1000 verschiedenen Geldstücken und macht mit jedem 10000 Würfe, so wird sich bei den meisten der 1000 Spiele das gleiche Bild ergeben: Ein Spieler übernimmt die Führung und behält sie fast die ganze Zeit. Nur bei sehr wenigen Spielen wird die

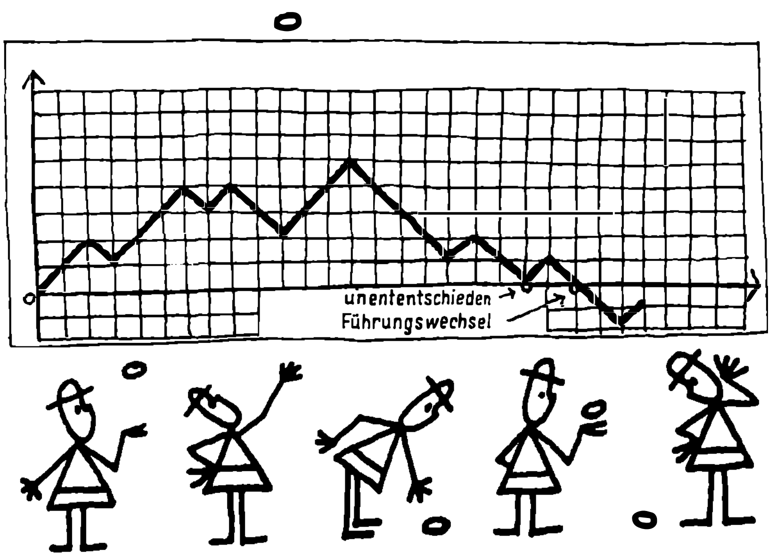


Bild 110

Führung laufend wechseln, so wie das unserer Intuition nach sein müßte, wenn das Geldstück symmetrisch ist.
Der Anschaulichkeit halber wollen wir den Ablauf des Spiels in einer Kurve darstellen. Auf der horizontalen Achse tragen wir die Würfe ab, auf der vertikalen jeweils die Anzahl der gewonnenen Pfennige des einen Spielers. Bild 110 zeigt eine typische Kurve für solch ein Spiel.
Bei unserem Spiel muß jedem Führungswechsel ein Unentschieden vorausgehen, d. h. eine Situation, in der keiner etwas gewonnen hat. Nicht jedes Unentschieden kündigt einen Führungswechsel an, das geschieht nur mit der Wahrscheinlichkeit 1:2. Sie werden sicher der folgenden intuitiven Behauptung nicht widersprechen: Wirft man das Geldstück in gleichen Zeitabständen, so wird es an zwei Tagen doppelt so viele Unentschieden geben wie an einem Tag. Doch das stimmt auch nicht!
Es zeigt sich, daß die Anzahl der Unentschieden nur mit der Quadratwurzel aus der Zeit wächst, erst nach vier Tagen gibt es doppelt so viele Unentschieden wie am ersten Tag, wenn man ununterbrochen spielt. Das ist natürlich schwer zu glauben. Vielleicht überzeugen Sie aber Zahlen? Ich muß dazu einen Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Medianwert, einführen.
In der Anatomie wird als Medianebene die Symmetrieebene des menschlichen Körpers bezeichnet, d. h. die Ebene, die durch die Mitte des Körpers geht. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung halbiert der Medianwert (abgekürzt Me) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. (Die Wahrscheinlichkeit für Werte, die kleiner oder gleich Me sind, und die Wahrscheinlichkeit für Werte größer oder gleich Me sind mindestens jeweils gleich 1:2.)
In der Aufgabe über das Zusammenfallen der Geburtstage ging es gerade um den Medianwert der Anzahl von Personen, bei denen wenigstens zwei gemeinsamen Geburtstag haben. Dieser Wert lag etwa bei 23.
Die Rechnung zeigt, daß der Medianwert (also ein gewisser Mittelwert) der Anzahl der Unentschieden bei 10000 Würfen des Geldstücks 67 beträgt, während sich für eine Million Würfe der Medianwert 674 ergibt, also nur das Zehnfache und nicht das Hundertfache, wie man nach dem „gesunden Menschenverstand“ annehmen sollte.
Zur Bestätigung dieser unserer Intuition so zuwiderlaufenden Ergebnisse werde ich einige experimentelle Daten anführen. Sie entstammen, wie übrigens fast das gesamte Material dieses Abschnitts, dem großartigen Buch von *W. Feller* „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen“, Verlag J. Wiley and Sons, New York.
Kehren wir für einen Augenblick zur Tafel 6 am Anfang dieses Abschnitts zurück, zu der Sie sagten: „Na und?“ Diese Tafel ist auf Grund eines tatsächlich durchgeführten Versuchs entstanden.
Um ein Geldstück 10000mal zu werfen, benötigt man 10 bis 15 Stunden. *Feller* hat sich natürlich nicht die Zeit genommen, um ein Geldstück

hochzuwerfen, wie das z. B. *Buffon* vor 300 Jahren gemacht hat. Statt ein Geldstück zu werfen, kann man einen beliebigen anderen Versuch mit zwei gleichwahrscheinlichen Ausgängen nehmen. Derartige Versuche lassen sich besonders leicht mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine ausführen. Anstelle von Zahl und Wappen werden die Binärzahlen 0 und 1 mit gleichen Wahrscheinlichkeiten erzeugt. Ein Rechenautomat benötigt für 10000 Würfe weniger als eine Minute. Die Ergebnisse eines solchen Versuchs sind in Tafel 7 wiedergegeben. Tafel 7 zeigt, welches Bild sich für die Führungswechsel während des Experiments ergab. Ich werde die Terminologie Zahl-Wappen beibehalten.

Tafel 7. Verlauf des „Zahl-Wappen-Spiels“

Erster Spieler in Führung	Zweiter Spieler in Führung
Erste 7804 Würfe	
	Folgende 8 Würfe
Folgende 2 Würfe	
	Folgende 54 Würfe
Folgende 30 Würfe	
	Folgende 2 Würfe
Folgende 48 Würfe	
	Folgende 6 Würfe
Folgende 2046 Würfe	

Während der 10000 Würfe hatte der erste Spieler bei 9930 Würfen die Führung und der zweite nur bei 70 Würfen.
Sie sehen, daß der erste Spieler großes „Glück“ gehabt hat. Solch ein Bild ist keine Ausnahmeerscheinung, sondern eher die Regel, allerdings kann das „Glück“ auch auf der Seite des zweiten Spielers sein. Im Mittel ist es bei einem von zehn Spielen sogar so, daß einer der Spieler noch mehr „Pech“ hat als in unserem Beispiel der zweite Spieler.
Bild 111 zeigt eine Kurve, die den Verlauf eines derartigen Spiels veranschaulicht. Auf der horizontalen Achse sind die Würfe abgetragen und auf der vertikalen der Stand des ersten Spielers, also die Anzahl der jeweils gewonnenen oder verlorenen Pfennige. Im Verlauf des Spiels treten 142 Unentschieden auf; nur bei 78 von ihnen kommt es zu einem Führungswechsel. In dem zu Anfang beschriebenen Versuch gab es 14 Unentschieden und 8 Führungswechsel. Man kann berechnen, daß bei 10000 Würfen die Wahrscheinlichkeit für mehr als 140 Unentschieden gleich 0,157 und die Wahrscheinlichkeit für weniger als 15 Unentschieden gleich 0,115 beträgt.
Fast alle in diesem Abschnitt dargelegten Ergebnisse stehen nicht mit unserer Intuition im Einklang! Ich weiß nicht, ob es Sie tröstet, doch es sieht in der Tat so aus, als ob der Wechsel von Erfolgsperioden und Pechsträhnen gar nichts besonderes ist, sondern eine Gesetzmäßigkeit darstellt.

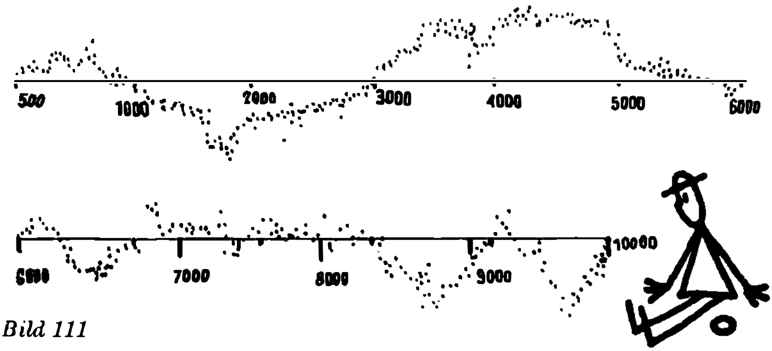


Bild 111

Irrfahrt

Vor etwa 300 Jahren erblickte der Holländer *Antony van Leeuwenhoeck*, an und für sich ein selbstzufriedener Dilettant, doch ein äußerst wißbegieriger und hartnäckiger Mensch, zum ersten Mal das Leben durch die Linsen des von ihm selbst geschaffenen Mikroskops. Im Regenwasser tummelten sich kleine Lebewesen, hundertmal kleiner als die dem bloßen Auge sichtbaren Wesen! — so schreibt *Paul de Kruif* in seinem berühmten Buch „Mikrobenjäger".

150 Jahre nach der Entdeckung *Leeuwenhoecks* betrachtete der englische Botaniker *Robert Brown* das Leben durch das Okular des damals schon recht vollkommenen Mikroskops. Die unregelmäßigen Sprünge und Tänze der kleinen Blütenstaubteilchen erregten seine Aufmerksamkeit. *Brown* war ein gebildeter Wissenschaftler; er wußte, daß er keine Lebewesen, sondern im Wasser schwimmende Staubteilchen beobachtete. Zur Erklärung der Ursache der von ihm entdeckten Bewegungen der Staubteilchen im Wasser untersuchte er das Verhalten der Teilchen einer riesigen Anzahl von Gegenständen, darunter sogar eines Bruchstücks einer Sphinx. Selbst als er ein Stück Quarz mit einem durch Wasser ausgefüllten Hohlraum unter das Mikroskop legte, bemerkte er im Hohlraum die chaotische Bewegung der im Wasser schwebenden Teilchen. Das Wasser befand sich sicher schon sehr lange in dem abgeschlossenen Hohlraum, und doch tanzten die Teilchen, wie er es auch sonst beobachtet hatte. Das war im Jahre 1827.

Die Erklärung der ungeordneten Bewegungen der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit war nicht leicht. Die Universalität des Effekts machte auf *Brown* großen Eindruck, und er glaubte eine elementare Lebensform

gefunden zu haben, die sowohl der organischen als auch der anorganischen Materie eigen ist.
In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts brachen nacheinander mehrere Hypothesen zusammen, die die Brownsche Bewegung mit irgendeiner elektrischen Kraft, einem Verdampfen der Flüssigkeit oder mit mechanischen Stößen in Verbindung brachten. Die Brownsche Bewegung wurde in völliger Finsternis und auch nach mehrstündiger Erwärmung unverändert beobachtet. Schließlich wurde klar, daß die Brownsche Bewegung eine Erscheinung von grundlegender Bedeutung ist.
Heute meint man, daß die Ursache der beschriebenen Erscheinung in der unregelmäßigen Bombardierung der Teilchen durch die Moleküle der angrenzenden Flüssigkeit zu suchen ist. Zur exakten und eindeutigen Klärung des Problems kam es aber erst durch das Genie von *Einstein*.
Wir wollen uns mit einigen bei der Brownschen Bewegung auftretenden Fragen befassen. Wir wissen bereits, wie man an eine solche Aufgabe heranzugehen hat: Zunächst ist ein leicht faßliches Modell aufzustellen, auf dessen Grundlage das mathematische Modell geschaffen werden kann.
Ein in einer Flüssigkeit schwebendes Teilchen wird von allen Seiten durch Flüssigkeitsmoleküle angestoßen. Die Kraft der einzelnen Stöße ist verschieden, da sich die Moleküle mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen und ihre Bewegungsrichtung zufällig ist. Die Chancen eines Stoßes von rechts oder links, von oben oder unten sind gleich. Die Anzahl der Zusammenstöße des Teilchens mit den Molekülen ist sehr groß, in der Größenordnung von 10^{14} je Sekunde. Allerdings sind die genauen Werte für die Anzahl der Zusammenstöße und die Geschwindigkeiten der Moleküle für den Aufbau des Modells nicht wesentlich.
Wir wollen ein Zeitintervall betrachten, das relativ groß ist im Vergleich zur Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstößen, und versuchen, die Lageänderung des Teilchens während dieser Zeit zu bestimmen.
Dazu stellen wir uns zunächst ein Modell her. Wir nehmen vereinfachend an: 1. die Geschwindigkeiten aller Teilchen haben denselben Betrag; 2. die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist immer dieselbe (wenn in der Sekunde 10^{14} Zusammenstöße auftreten, wollen wir also annehmen, daß die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen 10^{-14} s beträgt); als Maßeinheit auf der Zeitachse wählen wir diesen Zeitabschnitt; 3. die in der Flüssigkeit schwebenden Teilchen sind kugelförmig.
Die Gleichmöglichkeit der verschiedenen Bewegungsrichtungen der Moleküle drückt sich folgendermaßen aus: Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Molekül auf eines von zwei Flächenstücken gleicher Größe (jedoch nicht unbedingt gleicher Form!) auf einer Kugeloberfläche trifft, sind für beide Flächenstücke gleich. Die Wahrscheinlichkeit des Auftreffens eines Moleküls auf ein Kugelflächenstück ist gleich dem Verhältnis der Größe dieses Flächenstücks zur Gesamtoberfläche der Kugel. Eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung wird als Gleichverteilung bezeichnet.

Außerdem wollen wir voraussetzen, daß die Ereignisse, die im Auftreffen von Flüssigkeitsmolekülen auf sich nicht überschneidende Oberflächenstücke bestehen, statistisch unabhängig voneinander sind. Unter diesen Voraussetzungen hängt ein Schritt des Teilchens in der Flüssigkeit nicht vom vorhergehenden ab; die Schritte haben immer die gleiche Größe, ihre Richtung ist zufällig und gleichverteilt (selbstverständlich wird in unserem Modell die Wirkung der Schwerkraft auf das Teilchen vernachlässigt).

Wir wollen nun vom dreidimensionalen Modell zum zweidimensionalen übergehen. Das Verhalten des Teilchens in der Ebene ähnelt nun dem Gang eines Betrunkenen über den Marktplatz. Er kann sich kaum auf den Beinen halten, und jeder Schritt geht zufällig nach irgendeiner Seite, mit gleichen Chancen für jede Richtung. Die Richtung des folgenden Schrittes hängt nicht von den vorangehenden ab. Einen solchen Betrunkenen wollen wir volltrunken nennen.

Wo wird er sich nach einer gewissen Zeit befinden? Das weiß weder er, noch können wir es vorhersagen, wenn wir nicht vermuten wollen, daß er schnell unter das erste beste Auto und danach in ein Krankenhaus kommt.

Doch wir wollen die Hand über ihn halten, da er uns als gutes Modell für die Brownsche Bewegung dient. Wir könnten ihn zwar durch einen Floh ersetzen, der in einem leeren Saal herumhüpft, in dem nichts seine besondere Aufmerksamkeit erregt. Allerdings ist dann die Gefahr, unser Modell zu verlieren, noch größer!

Ein Volltrunkener ist in der Lage, sich in n Schritten irgendwohin zu bewegen, und man kann abschätzen, wie weit er sich vom Ausgangspunkt entfernt. Die Entfernung ϱ_n zwischen dem Ausgangspunkt P_0 und dem Endpunkt P_n seines Weges (nach n Schritten) ist natürlich eine zufällige Größe. Doch wie groß ist der Mittelwert $\bar{\varrho}_n$ dieser Entfernung?

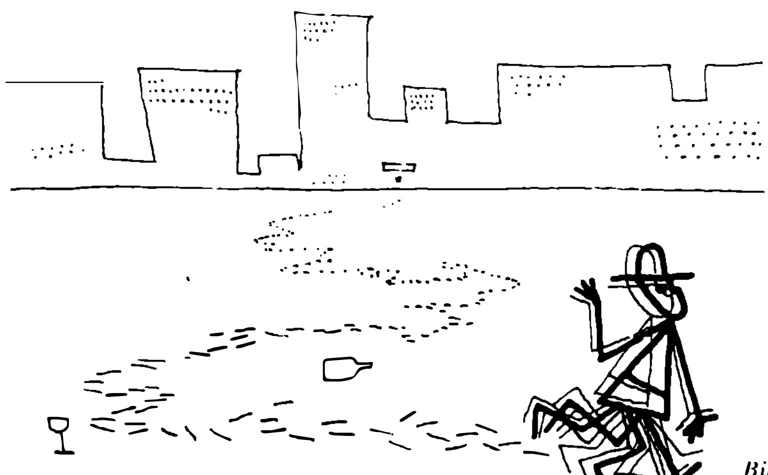


Bild 112

Die Größe $\bar{\varrho}_n$ läßt sich auf Grund unserer Voraussetzungen berechnen. Bevor wir das tun, möchte ich jedoch unser Modell noch mehr vereinfachen (vereinfachen bedeutet hier: die Anzahl der Koordinaten oder Freiheitsgrade verringern).
Stellen wir uns den Betrunkenen in einem engen Korridor vor, in dem er nur vorwärts oder rückwärts kann. Sein Verhalten soll jedoch so wie vorher sein: Er macht jeden Schritt unabhängig vom vorangehenden und schreitet mit derselben Wahrscheinlichkeit vorwärts oder rückwärts. Die Schritte sollen alle die gleiche Länge l haben, und mit jedem Schritt entfernt er sich von seinem Ausgangspunkt P_0 um die Größe l mit der Wahrscheinlichkeit 1:2, bzw. er nähert sich ihm mit der Wahrscheinlichkeit 1:2.
Uns interessiert nach wie vor, wie weit sich der Betrunkene von seinem Ausgangspunkt entfernt. Der Betrunkene im Korridor ist ein Modell für die eindimensionale zufällige Irrfahrt des Teilchens; der Gang des Betrunkenen über den Marktplatz ist ein Modell der zweidimensionalen Irrfahrt, während die Brownsche Bewegung des Staubteilchens in der Flüssigkeit das Modell für eine dreidimensionale Irrfahrt ist.
Das Modell der eindimensionalen Irrfahrt läßt sich durch Umformulierung auf das Modell des Zahl-Wappen-Spiels zurückführen, das wir bereits erörtert haben. Wenn Sie ein symmetrisches Geldstück werfen

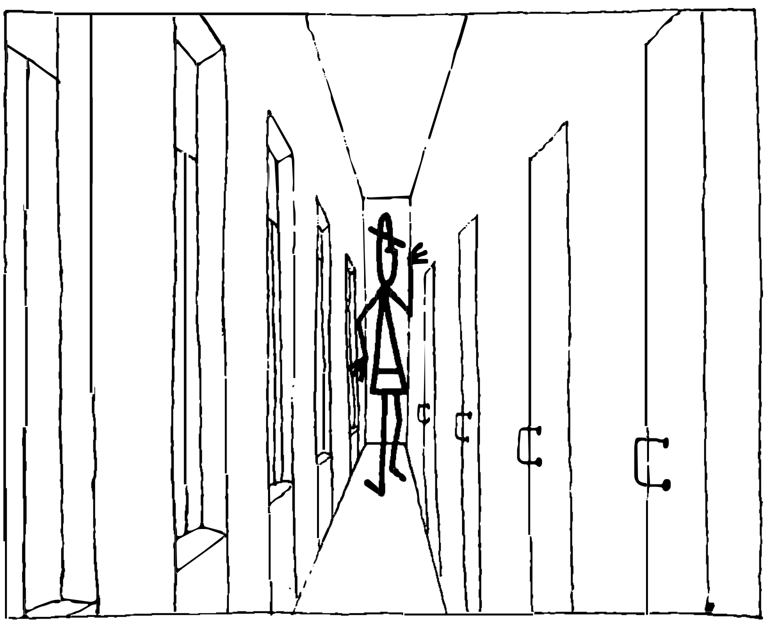


Bild 113

und Ihr Spielpartner bei Wappen l Pfennige an Sie zahlt, während Sie bei Zahl l Pfennige an ihn auszahlen, so ist Ihr Gewinn oder Verlust nach n Würfen gleich der mit l multiplizierten Differenz der Anzahl von Wappen und Zahl. Zahlenmäßig ist das dann gerade gleich der Entfernung, die der Betrunkene in n Schritten zurücklegt; damit ist also die zurückgelegte Entfernung gleich der mit der Schrittweite multiplizierten Differenz der Vorwärts- und Rückwärtsschritte.
Sie erinnern sich bestimmt noch daran, wie erstaunt Sie waren, als Sie die Ergebnisse unserer Betrachtungen zur Führung und zur Anzahl der Unentschieden im Zahl-Wappen-Spiel erfuhren. Ähnliche Ergebnisse erhält man auch hier.
Da die Wahrscheinlichkeiten für die Schritte nach beiden Richtungen gleich und die einzelnen Schritte unabhängig voneinander sind, werden im Mittel gleich viele Vorwärts- und Rückwärtsschritte gemacht; demzufolge ist die mittlere Entfernung, die der Betrunkene auf dem Korridor zurücklegt, gleich 0; ein Volltrunkener bleibt also im Mittel am Ausgangspunkt.
Ich will erläutern, was das bedeutet. Wir verfolgen eine große Anzahl irrfahrender Teilchen. Für jedes Teilchen registrieren wir die Lage, in der es sich nach n Schritten befindet, bezogen auf den jeweiligen Ausgangspunkt. Nach n Schritten haben wir sowohl positive als auch negative Zahlen registriert. Der Mittelwert dieser Zahlen (d. h. ihre durch die Anzahl der betrachteten Teilchen dividierte Summe) ist jedoch nahe bei Null. Der Mathematiker sagt, der Mittelwert (oder, wie es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung heißt, der Erwartungswert) der durch das Teilchen in n Schritten zurückgelegten Entfernung ist Null. Uns interessieren jedoch die möglichen Abweichungen vom Mittelwert.
In der Sprache des Zahl-Wappen-Spiels heißt das, daß der Erwartungswert des Gewinns für jeden der Spieler gleich Null ist. Wir interessieren uns jedoch für die Größe des immerhin möglichen Gewinns.
Der von der Ausgangslage P_0 bis zum n-ten Schritt zurückgelegte Weg wurde mit ϱ_n bezeichnet. Er kann sowohl in positiver als auch in negativer Richtung liegen. Es erscheint naheliegend, den absoluten Betrag der Größe ϱ_n zu betrachten (oder anders ausgedrückt, den Gewinn eines Spielers). Für die Rechnung ist es jedoch bequemer, eine andere positive Größe zu benutzen, das Quadrat der zurückgelegten Entfernung ϱ_n^2 (das Quadrat des Gewinns).
Wenn die aufeinanderfolgenden Schritte (oder aufeinanderfolgenden Würfe des Geldstücks) unabhängig voneinander sind, kann man beweisen, daß der Erwartungswert der Größe ϱ_n^2 (d. h. der Mittelwert dieser Größe, wenn man eine große Anzahl umherirrender Teilchen beobachtet) der Anzahl der Schritte proportional ist. Genauer ausgedrückt: Bezeichnet man den Erwartungswert der Größe ϱ_n^2, wie das in der Physik üblich ist, mit $\overline{\varrho_n^2}$, so ist

$$\overline{\varrho_n^2} = nl^2$$

Wenn in der Zeiteinheit k Sprünge der Größe $\pm l$ auftreten, so ist der Mittelwert der Auslenkung der Teilchen aus der Anfangslage $\overline{\varrho_t^2}$ in der Zeit t dieser Zeit proportional:

$$\overline{\varrho_t^2} = ktl^2$$

Diese Größe enthält als Dimension das Quadrat der Längeneinheit; für uns wäre es bequemer, ein lineares Maß zu haben (Zentimeter statt Quadratzentimeter). Die entsprechende Größe für die Auslenkung in n Schritten ist nun

$$\sqrt{\overline{\varrho_n^2}} = \sqrt{n}l$$

Die analoge Größe für die Auslenkung des Teilchens in der Zeit t ist dann

$$\sqrt{\overline{\varrho_t^2}} = \sqrt{kt}\,l$$

Die Proportionalität der Auslenkung des Teilchens zur Wurzel aus der Anzahl der Schritte $\sqrt{n}$ (oder $\sqrt{t}$) (und nicht zur Anzahl der Schritte n selbst) ist ein fundamentales Ergebnis bei der Untersuchung derartiger statistischer Erscheinungen. Schätzt man die Gewinnchancen beim Zahl-Wappen-Spiel ein, so kann man sagen, daß die typische Gewinngröße (oder Verlustgröße) bei n Würfen des Geldstücks proportional $\sqrt{n}$ ist. Sie erinnern sich sicher, daß die Anzahl der Unentschieden ebenfalls proportional $\sqrt{n}$ war.

Das Modell der Irrfahrt erlaubt eine Vielzahl von Interpretationen. Wenn am Ende des Arbeitstags die Autos das Zentrum einer großen Stadt verlassen, kann man die Fahrten der Autos ebenfalls als zufällig ansehen.

Nehmen Sie mir die Hypothese nicht übel, daß auch Ihr Lebensweg vom Zufall bestimmt ist, die Hypothese, daß unsere Fortbewegung auf dem Lebensweg einer „Irrfahrt" gleicht! Wir werden dieses mathematische Modell auf andere Menschen anwenden, deren Lebensweg sich nicht mit unserem kreuzt.

Die menschliche Eitelkeit kann manchmal paradoxe Formen annehmen, z. B. bei der recht inhaltslosen Polemik zur Frage, ob Maschinen denken können. Nicht an die mathematische Denkweise gewöhnte Leute verteidigen das alleinige Recht des Menschen auf das Denken bis zur Heiserkeit, ohne sich die Mühe zu machen, den Streitgegenstand und die Ausgangsbegriffe exakt zu formulieren (z. B. die Begriffe „Maschine", „denken" und „können").

Kehren wir jedoch zum Autostrom am Ende des Arbeitstages zurück. Für den Straßenbauingenieur oder den Mathematiker, der das Problem der Lenkung des Verkehrsflusses zu lösen hat, ist es sinnvoll, mit der zufälligen Irrfahrt als einfachstem Modell für die Bewegung der Autos zu beginnen. Es ist einfacher, den Weg eines jeden einzelnen Autos als zufällig anzusehen, als zu versuchen, ihn vorherzubestimmen (obwohl es für den Autofahrer selbst natürlich kein Zufall ist, wohin er fährt). Ein solches Modell ist zumindest, wie man sagt, als erste Näherung annehmbar. Später sind eventuell Korrekturen nötig.

Betrachtet man den Straßenverkehr als statistische Erscheinung (gewissermaßen als Diffusionsproblem), so kann man die Kenngrößen für die Verkehrswege näherungsweise bestimmen, die das ungehinderte Fortkommen in den Hauptverkehrszeiten garantieren! Wenn Sie auf dem Nachhauseweg mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h statt mit 15 km/h vorwärtskommen und nicht aus der Haut zu fahren brauchen, weil Sie an jeder Verkehrsampel warten müssen, wird Ihr unangenehmes Gefühl gegenüber der beleidigenden Annahme, daß Ihr Weg rein zufällig und nicht durchdacht ist, sicher etwas gemindert.

Wenn Sie eine T-förmige Kreuzung anfahren, müssen Sie entweder nach rechts oder nach links abbiegen. Für unser Modell ist es am einfachsten, die Abbiegerichtung als zufällig anzunehmen und vorauszusetzen, daß die Abbiegerichtung eines Autos nicht von der des vorherfahrenden abhängt. Ferner wollen wir annehmen, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Abbiegen nach links und nach rechts dieselben sind. Mit Hilfe dieses Modells können wir quantitativ abschätzen, um wieviel die Anzahl der Rechtsabbieger die Anzahl der Linksabbieger überschreiten kann. Diese Aufgabenstellung entspricht völlig der über das Verhalten eines Betrunkenen im engen Korridor oder der Abschätzung des möglichen Gewinns im „Zahl-Wappen-Spiel".

Ich hatte bereits auf das Diffusionsproblem hingewiesen. Die Diffusion der Atome oder Moleküle kann man anhand genau desselben Modells studieren. Beobachten wir die Bewegung eines Gasmoleküls. Man kann das natürlich tatsächlich nicht, doch ich rechne mit Ihrer Phantasie! Das betrachtete Molekül bewegt sich frei durch den Raum, es wird durch nichts behindert. Plötzlich stößt es auf seinem Weg mit einem anderen zusammen, und beide fliegen nach verschiedenen Seiten auseinander. Das gleiche Bild können Sie beim Zusammenstoß zweier Billardkugeln beobachten, lediglich mit dem Unterschied, daß sich die Billardkugeln in der Ebene bewegen und die Moleküle im Raum. Es kommt sehr häufig zu Zusammenstößen von Molekülen (bei normalem Druck). Die mittlere Entfernung zwischen zwei Zusammenstößen, die aus verständlichen Gründen *freie Weglänge* heißt, ist eine bestimmte, kleine Größe.

Nun wollen wir uns vorstellen, daß die Entfernungen zwischen den Zusammenstößen immer gleich sind und mit der freien Weglänge übereinstimmen. Dann ähnelt die Bewegung unseres Moleküls dem Verhalten des Volltrunkenen auf dem Marktplatz: Es bewegt sich in Schritten bestimmter Weite, die Richtung eines jeden Schrittes ist zufällig und gleichverteilt, und der nachfolgende Schritt hängt nicht vom vorhergehenden ab. Der Unterschied besteht nur darin, daß sich der Betrunkene auf einem ebenen Platz bewegt und das Molekül im Raum. Das hindert uns jedoch nicht, nach derselben Methode den Weg des Moleküls in einer bestimmten Zeit zu berechnen.

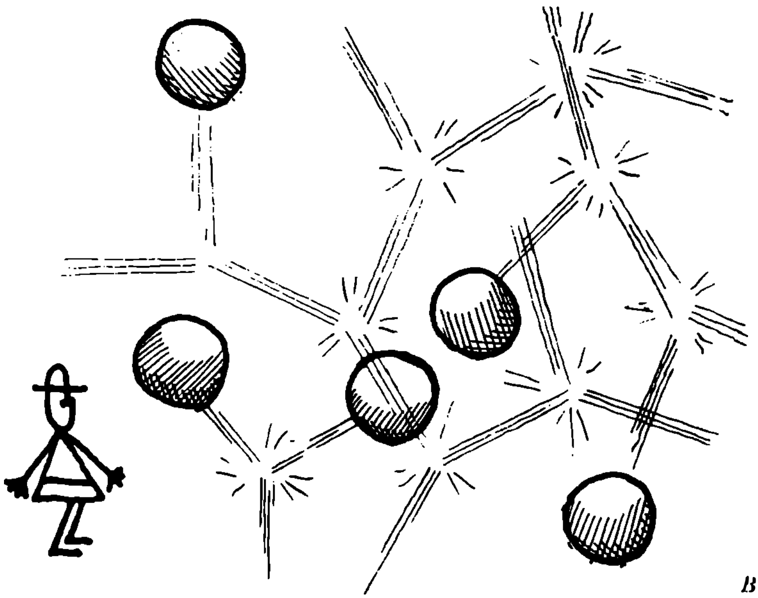


Bild 114

Die Elektronen eines Körpers sind an der Wärmebewegung der Materie beteiligt. Betrachten wir beispielsweise einen Schwingkreis, der nur aus Kondensator, Widerstand und Spule besteht. Die Wärmebewegung der Elektronen ruft auf den Kondensatorflächen eine sich mit der Zeit nach Größe und Vorzeichen ändernde elektrische Ladung hervor und induziert in der Spule einen elektrischen Strom. Den Mechanismus dieses Vorgangs kann man sich folgendermaßen vorstellen: Die ungeordnete Wärmebewegung der Elektronen im Schwingkreis ist sehr kleinen, nach Größe und Vorzeichen häufig wechselnden elektrischen Stromstößen — kurzzeitig wirkenden elektromotorischen Kräften — äquivalent. Diese chaotischen Schwingungen der Ladung und des Stroms als elektrische Fluktuation tragen die Bezeichnung thermisches Rauschen.

Der Pegel des thermischen Rauschens ist sehr niedrig. Er hängt von der Temperatur, der Bandbreite und dem Widerstandswert ab. *Einstein* hat, von allgemeinen Überlegungen ausgehend, das Vorhandensein dieser Erscheinung vorhergesagt; erst 20 Jahre später gelang es, sie experimentell nachzuweisen.

Eine analoge Erscheinung kann man in Elektronenröhren beobachten. Die in der Zeiteinheit zur Anode gelangende Elektronenmenge unterliegt unregelmäßigen Schwankungen. Bei Stromstärken in der Größenordnung von 1 mA gelangen in der Sekunde etwa 10^{16} Elektronen von der Katode zur Anode; die für das Übertreten benötigte Zeit beträgt etwa 10^{-9} s. Die Abweichungen vom mittleren „Elektronenstrom" werden als Schroteffekt bezeichnet.

Auch den Schroteffekt kann man mit Hilfe des bereits bekannten Modells der Brownschen Bewegung untersuchen.
Durch das thermische Rauschen in den Leitern und den Schroteffekt, die sich prinzipiell nicht beseitigen lassen, ist die Reichweite von Funkverbindungen (hierzu gehören z. B. auch die Funkortung und das Fernsehen) begrenzt.
Vor 20 bis 25 Jahren interessierte sich kaum ein Nachrichten- oder Navigationsingenieur für wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden. In den letzten Jahren sind diese zu einem der wichtigsten Hilfsmittel im Nachrichtenwesen und in der Automatisierungstechnik geworden.

Der Betrunkene erblickt seinen Zechkumpan

Ein Betrunkener in einem Korridor erblickt plötzlich am anderen Ende des Korridors seinen Zechkumpan. Die Widersprüche, die ihn hin und her reißen, sind offensichtlich. Er macht nach wie vor zufällige Schritte vorwärts und rückwärts. Jetzt zieht es ihn jedoch mehr zur Seite seines Kumpans hin. Er führt zwar seine der Größe nach gleichen Schritte nach wie vor zufällig und unabhängig voneinander aus, die Wahrscheinlichkeit p für einen Vorwärtsschritt ist jetzt jedoch größer als die Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ für einen Rückwärtsschritt. In dieser Situation wird der Betrunkene im Mittel nicht mehr auf der Stelle bleiben, sondern er wird sich allmählich, wenn auch langsam, vorwärtsbewegen.
Diese mittlere Vorwärtsbewegung ist dem Produkt der Schrittweite und der Differenz der Wahrscheinlichkeiten p und q proportional.[1])
Natürlich gilt auch hier unser Hauptinteresse nicht dem Betrunkenen — er dient uns lediglich als Modell einer eindimensionalen Irrfahrt, bei der eine Kraft vorhanden ist, die bewirkt, daß Vorwärtsschritte des Teilchens häufiger auftreten als Rückwärtsschritte.
Man kann nicht nur den Mittelwert der Entfernung des Teilchens von der Ausgangslage nach n Schritten bestimmen, sondern auch ein Maß für die typischen Abweichungen von diesem Mittelwert finden. Diese sind (genau wie bei der symmetrischen Irrfahrt) der Quadratwurzel aus der Anzahl der Schritte und der Wurzel aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die Vorwärts- und Rückwärtsschritte proportional.[2])

[1]) Der Mittelwert (Erwartungswert) der Vorwärtsbewegung in n Schritten beträgt $S = (p - q)\, ln$.
Wenn es den Betrunkenen sehr zu seinem Zechkumpan zieht ($p = 0{,}9$), so beträgt der Mittelwert bei 100 Schritten $S = (0{,}9 - 0{,}1) \cdot 100\, l = 80\, l$. Wenn der Drang zum Gesinnungsgenossen nicht so stark ist ($p = 0{,}51$), so ist für 100 Schritte $S = (0{,}51 - 0{,}49) \cdot 100\, l = 2\, l$.
[2]) Der Mittelwert der quadrierten möglichen Abweichungen des Teilchens, das unabhängige Schritte der Größe l mit der Wahrscheinlichkeit p nach der einen Richtung und mit der Wahrscheinlichkeit q nach der anderen Richtung ausführt, ist $\overline{\varrho_n^2} = 4\, pqnl^2$.
Demzufolge ergibt sich als Maß für die typischen Abweichungen vom Mittelwert

$$\sqrt{\overline{\varrho_n^2}} = 2\, l \sqrt{pqn}.$$

Für die symmetrische Irrfahrt mit $p = q = 1/2$ geht die letzte Formel in die bereits bekannte Formel über:

$$\sqrt{\overline{\varrho_n^2}} = 2\, l \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot n} = 2\, l \sqrt{\frac{n}{2}} = l\sqrt{n}.$$

Die unsymmetrische Irrfahrt ist ein gutes mathematisches Modell für viele Prozesse. In vielen Fällen kann man den in der Aufgabe über das Abbiegen an einer T-förmigen Kreuzung betrachteten Straßenverkehr als unsymmetrische Irrfahrt ansehen, denn es werden unterschiedlich viele Autofahrer auf dem Nachhauseweg in die eine und die andere Richtung abbiegen. Die Wahrscheinlichkeiten kann man einfach aus einer Beobachtung des Verkehrsstroms ermitteln.
Von größter Wichtigkeit sind Diffusionsprobleme bei Teilchen (Atome, Moleküle, Staubteilchen), die sich in einer Strömung bestimmter Richtung befinden. Als Beispiel einer solchen Erscheinung kann die Diffusion von Gasionen innerhalb eines elektrischen Feldes dienen. Sie läßt sich ebenfalls am mathematischen Modell der unsymmetrischen Irrfahrt untersuchen. Hier ist die betrachtete Irrfahrt zwar zweidimensional, manchmal sogar dreidimensional. Das führt aber nur zu unbedeutenden Komplikationen, auf die ich nicht näher eingehe.

Der irrende Schüler

In den vorangegangenen Abschnitten konnte das irrfahrende Teilchen mit jedem Schritt nur zu den Nachbarpunkten übergehen. Es ist von großem praktischen Interesse, auch ein ausgelasseneres Teilchen zu betrachten, das gleichzeitig zwei, drei oder mehrere Punkte weit springen kann.
Wir wenden uns einem anderen Modell zu. Ein Schüler möge in einer Mathematikarbeit eine beliebige Zensur von 1 bis 5 erhalten können. Solche Arbeiten werden einmal wöchentlich geschrieben. Jede Woche wird neuer Lehrstoff behandelt, deshalb wollen wir das Ergebnis einer jeden Arbeit als unabhängig vom vorhergehenden ansehen. Außerdem setzen wir voraus, daß die Ergebnisse zufällig sind und jede Note eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat. Wir wollen die in Tafel 8 wiedergegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung annehmen.

Tafel 8. Wahrscheinlichkeiten für die Zensuren eines Schülers

Zensur	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Natürlich werden Sie sofort dagegen protestieren, daß der Ausgang einer Kontrollarbeit bei Ihrem Kind zufällig und unabhängig von den vorhergehenden Arbeiten sein soll (Sie wissen ja die Gründe für das Mißgeschick ihres Lieblings!). Bitte haben Sie ein wenig Geduld. Ich werde später die Abhängigkeit des Ergebnisses einer Arbeit von denen der vorhergehenden berücksichtigen. Außerdem muß gesagt werden, daß das Ergebnis einer Kontrollarbeit in einem gewissen Maß immer zufällig ist. Die Hauptsache ist jedoch, daß es für uns bequemer, leichter und zweckmäßiger ist, den Ausgang der Arbeit als zufällig anzusehen (ähnlich wie das Abbiegen der Autos) und nicht die vielen Gründe zu untersuchen, die Einfluß auf das Ergebnis haben können. Wenn wir nur das Ausmaß der Katastrophe abschätzen wollen, zu der die Leistungen des Schülers führen können, um rechtzeitige Maßnahmen gegen die Halbjahreszensur Vier oder Fünf oder eine Wiederholungsprüfung zu ergreifen, so ist die berechnete Prognose selbst unter unseren einschränkenden Voraussetzungen durchaus ausreichend.

Es ist günstiger, eine andere Terminologie zu benutzen. Ich werde von den Zuständen eines Systems sprechen und annehmen, daß sich das System jeweils in einem bestimmten aus einer Menge möglicher Zustände befinden kann. Mit jedem Schritt kann es von einem Zustand in irgendeinen anderen übergehen. Das System ist der Schüler, seine Zustände sind die wöchentlichen Zensuren, und der Übergang von einem Zustand zu einem anderen ist der Übergang zu einer neuen Zensur.

Um Mißverständnisse zu vermeiden: Der Übergang zu einer neuen Zensur soll auch dann Übergang heißen, wenn sich die Zensur nicht ändert. Wir sprechen dann jedoch von einem Übergang in denselben Zustand. Von diesem Standpunkt aus verläuft das Leben des Schülers sehr stumpfsinnig, ohne irgendwelche besonderen Gefühle, die Lob oder Tadel auslösen.

Der Übergang von einem Zustand in einen anderen Zustand erfolgt entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände — der Zensuren. Man kann ihn als Irrfahrt in der Menge der möglichen Zustände ansehen.

Am anschaulichsten ist es, eine solche Irrfahrt anhand einer Kurve darzustellen (Bild 115). Auf der horizontalen Achse sind die Übergänge abgetragen, also die Zeitpunkte, zu denen der Schüler seine Wochenzensuren erhält. Ich habe einfach die Nummern der Wochen abgetragen: es ist gleichgültig, in welchem Maßstab man die Zeit mißt. Auf der vertikalen Achse sind die Zensuren abgetragen, die Nummern der Zustände des Systems. Eine solche beliebige Kurve bedeutet dann eine Folge von Wochenzensuren, doch die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kurven sind im allgemeinen nicht dieselben.

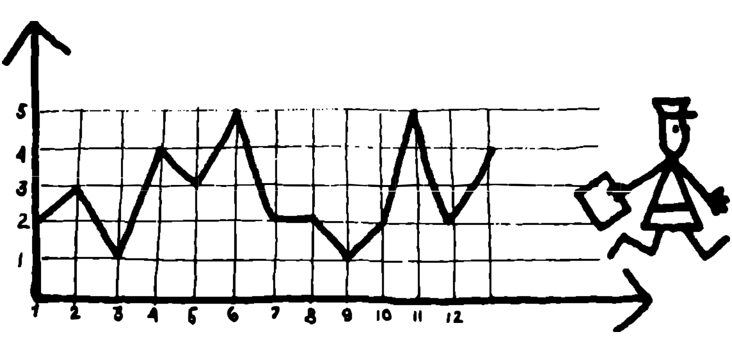


Bild 115

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Zensur für das Halbjahres- oder das Jahreszeugnis festzulegen. Die Zensur ist ein Kriterium, das den Schüler als zurückbleibend, mittelmäßig, gut oder sehr gut einschätzt. Verschiedene Lehrer benutzen dabei unterschiedliche Kriterien. Am einfachsten ist es für den Lehrer, den Mittelwert zu nehmen: Die Zensuren werden aufsummiert und durch ihre Anzahl geteilt.

Der Zensurendurchschnitt charakterisiert natürlich die Leistung des Schülers in der abgelaufenen Periode. Bei ein und denselben Wahrscheinlichkeiten gemäß Tafel 8 können sich jedoch verschiedene Durchschnitte für das Halbjahr ergeben. Es ist nicht ausgeschlossen, daß ein Schüler in jeder Woche eine 4 erhält (die Wahrscheinlichkeit dafür ist immer 0,2), dann ist seine Durchschnittszensur 4. Ich erinnere an unsere Voraussetzungen: Jede Zensur ist zufällig, unabhängig von den vorhergehenden, und sie ergibt sich nach einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Deshalb ist die Halbjahreszensur eine zufällige Größe, wir wollen sie mit x bezeichnen. Der Erwartungswert, d. h. der Mittelwert $\bar{x}$ für das Halbjahr, ist für unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\bar{x} = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$$

Schüler, bei denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die einzelnen Zensuren nach Tafel 8 zutrifft, werden also im Mittel eine 3 als Zensur erhalten. Im „Mittel“ bedeutet hier lediglich, daß sich für eine große Anzahl, z. B. 1000, solcher Schüler ein arithmetisches Mittel für die Zensuren um 3,2 ergibt. Die einzelnen Schüler können ganz verschiedene Noten auf den Zeugnissen haben. Es kann durchaus passieren, daß ein Schüler bei zehn aufeinanderfolgenden Arbeiten nicht schlechter als mit 3 abschneidet! Die Wahrscheinlichkeit für solch eine angenehme Situation läßt sich folgendermaßen bestimmen: Die Wahrscheinlichkeit für eine 1, eine 2 oder eine 3 ist $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieses Ereignis bei 10 unabhängigen Versuchen eintritt, ist $0{,}6^{10} \approx 0{,}006$. Deshalb kann man damit rechnen, daß im Mittel 6 von 1000 Schülern unverdient gut abschneiden. Man kann auch die mittlere Anzahl der Schüler (von den 1000) berechnen, die es in allen Arbeiten nur zu einer 4 oder 5 bringen.

Bitte beachten Sie, daß das vorstehende Resultat nicht bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Durchschnittszensur 3 und besser 0,006 ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist größer (sie wurde vorstehend auch gar nicht berechnet), da sogar einige Fünfen oder Vieren durch eine genügend große Anzahl von Einsen oder Zweien ausgeglichen werden können. Der Durchschnitt der ersten zehn Noten aus Bild 115 ist 2,5, obwohl eine 5 und eine 4 dabei ist. Man kann berechnen, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Durchschnitt schlechter als 3,5 etwa 0,23 ist, während sie für einen Durchschnitt besser als 2,5 etwa 0,04 beträgt. Unser Schüler hat also keine geringen Chancen, die Unannehmlichkeiten einer 4 oder 5 auf dem Zeugnis über sich ergehen lassen zu müssen.

Ein nachlässiger Schüler wird sich freuen, seine schlechten Zensuren durch die recht große Wahrscheinlichkeit der ebenso schlechten Zensierung eines besseren Schülers rechtfertigen zu können. Diese Befriedigung wollen wir ihm aber nicht geben. Seine Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die verschiedenen Zensuren so zu verändern, daß die Wahrscheinlichkeit für eine 4 oder 5 im Zeugnis sehr klein wird. Dazu hat er im Mathematikunterricht ordentlich aufzupassen und seine Hausarbeiten sorgfältig zu erledigen.
Es wird selten vorkommen, daß der Lehrer einfach den Durchschnitt aus den vorliegenden Zensuren als Halbjahreszensur verwendet. Ein solches formales Herangehen gäbe ihm nicht die Möglichkeit, einen Leistungsanstieg zu berücksichtigen, wenn ein Schüler das am Anfang Versäumte aufholt. Außerdem hängen tatsächlich die folgenden Zensuren stark von den vorangegangenen ab, denn die logischen Beziehungen zwischen den einzelnen Gebieten der Mathematik, der Glaube des Schülers an seine Kraft, die Voreingenommenheit des Lehrers und andere Ursachen wirken sich doch recht stark aus. Obwohl man die Ergebnisse einer Mathematikarbeit nicht vorhersagen kann, muß man doch ihre Abhängigkeit von den Zensuren der vorhergehenden Arbeiten berücksichtigen. Wenn ein Schüler gerade eine Fünf geschrieben hat, ist die Wahrscheinlichkeit dafür sehr gering, daß er in der folgenden Arbeit eine Eins bekommen wird.
In unserer Terminologie heißt es, daß die nachfolgenden Zustände von den vorangehenden abhängen, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände zu einem bestimmten Zeitpunkt hängen davon ab, welcher Zustand im vorangehenden Schritt vorlag.
Sie vermuten völlig zu Recht, daß jede Zensur nicht nur zufallsbedingt ist, sondern auch vom gesamten vorherigen Entwicklungsgang des Schülers, von seinen mathematischen (und nicht nur seinen mathematischen!) Erfolgen und Mißerfolgen abhängt. Wir müssen uns aber vorläufig mit einem primitiveren Modell begnügen und werden annehmen, daß die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Zustände, sprich Zensuren, nur von den jeweiligen Zuständen im vorangehenden Schritt abhängen. Bei einem solchen Modell kann man die Wahrscheinlichkeiten

Tafel 9. Übergangswahrscheinlichkeiten für die Leistungen eines Schülers

Vorangehende Zustände	Nachfolgende Zustände				
	1	2	3	4	5
1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
3	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
4	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2
5	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

der Zensuren in Abhängigkeit von den vorangehenden Zensuren in einer Tabelle angeben. Das Beispiel einer solchen Tabelle sehen Sie in Tafel 9.
Die 0,2 am Schnittpunkt der zweiten Zeile mit der dritten Spalte bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs vom Zustand 2 in den Zustand 3 gleich 0,2 ist. Für unseren Schüler heißt das, daß er mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in der nachfolgenden Mathematikarbeit eine Drei bekommt, wenn er in der vorangegangenen Arbeit eine Zwei hatte.
Die Mathematiker schreiben bei solch einer Tabelle die Nummern der Zustände links und oben nicht mit, sondern geben nur die Wahrscheinlichkeitstabelle an:

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Es sei daran erinnert, daß eine derartige Tabelle Matrix genannt wird. Im vorliegenden Fall heißen die Elemente der Matrix, die einzelnen Zahlen, Übergangswahrscheinlichkeiten und die Tabelle selbst Übergangsmatrix.
Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich auch anschaulich mit Hilfe eines Graphen darstellen. Die Kreise (Knoten) bezeichnen die Zustände, die Pfeile die Übergänge von einem Zustand zum anderen, die Zahlen an den Pfeilen die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge.
Im Bild 116 sind nur die Übergänge aus den Zuständen 2 und 5 in alle anderen dargestellt. Die übrigen Pfeile sind zur Erleichterung der Übersicht nicht eingezeichnet.
Die Mathematiker schreiben aus Bequemlichkeit oder aus Tradition nicht die Nummern der Zustände, sondern bezeichnen die Zustände durch Buchstaben mit irgendwelchen Indizes.

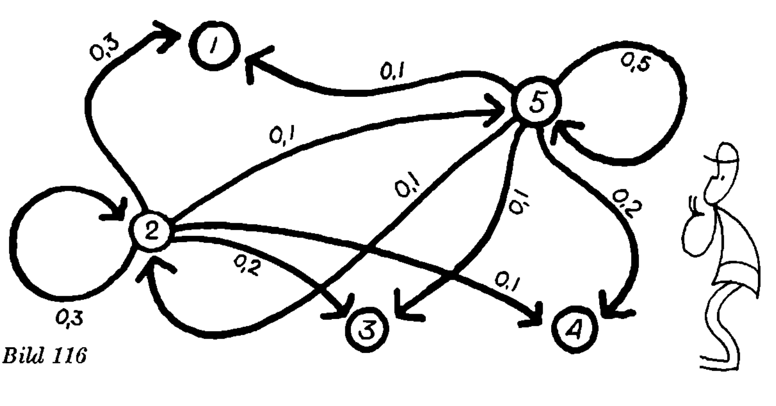


Bild 116

In unserem Beispiel haben wir fünf Zustände; wir können sie mit E_1, E_2, E_3, E_4 und E_5 bezeichnen. Der Schüler befindet sich also im Zustand E_2, wenn er eine Zwei bekommt. Erhält der Schüler nacheinander die im Bild 115 angegebenen Zensuren, so kann man diese auch als Kette darstellen:

$$E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1 \rightarrow E_4 \rightarrow E_3 \rightarrow E_5 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow \ldots$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden durch die Übergangsmatrix angegeben.
Als erster untersuchte zu Beginn unseres Jahrhunderts *A. A. Markoff*, ein bekannter russischer Mathematiker, Schüler *P. L. Tschebyscheffs*, die Ketten zufälliger Ereignisse oder, in unserer Terminologie ausgedrückt, die Ketten der Übergänge des Systems von einem Zustand in den anderen.
Schon das Beispiel der Zensuren zeigt die Unzulänglichkeiten eines Modells mit unabhängigen Ausgängen der Versuche für die Beschreibung des Wechsels der Zustände in einem System. In der Mehrzahl der Aufgabenstellungen aus der Physik und den Naturwissenschaften hängt der zukünftige Zustand eines Systems auch davon ab, in welchem Zustand sich das System gegenwärtig befindet.
Diese Abhängigkeit braucht nicht eindeutig zu sein: Das System kann sich nach einer gewissen Zeit in einem von verschiedenen möglichen Zuständen befinden; die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen zukünftigen Zustände hängen jedoch gewöhnlich vom gegenwärtigen ab.
Wenn die Wahrscheinlichkeiten des Übergangs eines Systems aus einem Zustand in einen anderen nur vom unmittelbar vorangehenden Zustand abhängen, so wird eine Folge dieser Übergänge einfache Markoffsche Kette genannt. Hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten von k vorangehenden Zuständen ab, so spricht man von einer Markoffschen Kette k-ter Ordnung.

Die Sprache

Der bekannte Physiker *Gibbs*, einer der Schöpfer der statistischen Mechanik, war ein sehr verschlossener Mensch. Er sagte selten etwas auf den Sitzungen des Wissenschaftlichen Rates der Universität. Auf einer der Sitzungen ging es um die Frage, ob in den neuen Lehrplänen der Mathematik oder den Fremdsprachen mehr Raum gegeben werden soll. Hier hat *Gibbs* erstmalig sein Schweigen gebrochen. Seine Rede bestand aus nur drei Worten: „Mathematik ist Sprache!“
In gewissem Sinn gilt auch die Umkehrung, und ich werde Ihnen jetzt von einem mathematischen Modell der lebenden Sprache berichten. Für die Übertragung eines nur aus Buchstaben bestehenden deutschen Telegrammtextes benötigt man 27 Zeichen. ä, ö, ü und ß werden durch ae, ue und sz wiedergegeben, so daß insgesamt 26 Zeichen für die Buchstaben gebraucht werden. Ferner bedarf es eines Symbols zur Kennzeichnung des Wortzwischenraums, wir wollen es mit „—“ bezeichnen.

Das einfachste Modell der Sprache ist die Aneinanderreihung von Buchstaben, die zufällig und mit gleichen Wahrscheinlichkeiten erscheinen. Auf 27 gleich aussehenden Karten sind die 27 Zeichen aufgeschrieben. Die Karten werden gut durchgemischt, auf gut Glück wird eine Karte gezogen und der entsprechende Buchstabe notiert. Die gezogene Karte wird wieder untergemischt, der nächste Buchstabe wird gezogen und an den vorangegangenen gefügt. Wenn die Karte mit „—" gezogen wird, ist das Ende eines Worts erreicht. Bei einem solchen Versuch wurde der im Bild 117 wiedergegebene Satz „gedichtet"[1]).

Dieser Satz ähnelt in keiner Weise unserer Sprache. Die hauptsächliche Ursache ist sicher darin zu suchen, daß die Buchstaben der deutschen Sprache nicht alle die gleiche Häufigkeit haben, daß sowohl in Goethes „Faust" als auch im Märchen „Schneewittchen" oder im „Lehrbuch der Zoologie" der Buchstabe X bedeutend seltener vorkommt als die Buchstaben E und N. Der häufigste Buchstabe der deutschen Sprache ist das E, der seltenste das Y. Tafel 10 enthält die relativen Häufigkeiten (die näherungsweise gleich den Wahrscheinlichkeiten sind) der einzelnen Buchstaben der deutschen Schriftsprache.

Die nächstbessere Näheruug an die deutsche Sprache ergibt sich, wenn man die Buchstaben zwar auch zufällig zieht, jedoch mit den Wahrscheiulichkeiten, mit denen sie in der natürlichen Sprache auftreten. Das kann man realisieren, indem man 10000 Karten entsprechend den relativen Häufigkeiten nach Tafel 10 mit Buchstaben versieht.

So müßte auf 211 Karten das O stehen, auf 172 das M, auf 1442 stünde „—" (der Wortzwischenraum oder ein Satzzeichen) usw. Dann könnte

Tafel 10. Häufigkeiten der Buchstaben der deutschen Schriftsprache

Buchstabe	Relative Häufigkeit	Buchstabe	Relative Häufigkeit
—	0,1442	o	0,0211
e	0,1440	m	0,0172
n	0,0865	b	0,0138
s	0,0646	w	0,0113
i	0,0628	z	0,0092
r	0,0622	v	0,0079
a	0,0594	f	0,0078
d	0,0546	k	0,0071
t	0,0536	p	0,0067
u	0,0422	j	0,0028
h	0,0361	x	0,0008
l	0,0345	q	0,0005
c	0,0255	y	0,0000
g	0,0236		

[1]) Die russischsprachigen Beispiele wurden durch entsprechende deutschsprachige ersetzt, die dem Buch von *P. Fey*: Informationstheorie, Akademie-Verlag, Berlin (1963) entnommen sind.

man den bereits beschriebenen Versuch nochmals ausführen, indem man die Karten gut durchmischt und nacheinander zieht.
Solch ein kompliziertes Experiment ist aber gar nicht nötig. Man kann ein beliebiges deutsches Buch nehmen und daraus Buchstaben zufällig wählen (z. B. den sechsten Buchstaben einer jeden Zeile). Im Bild 118 ist ein Satz wiedergegeben, der auf diese Weise entstanden ist.

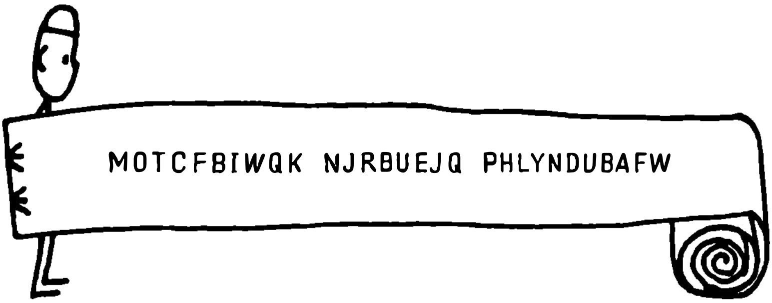


Bild 117

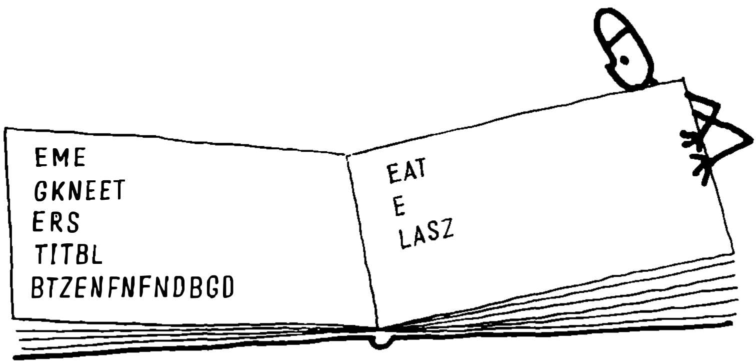


Bild 118

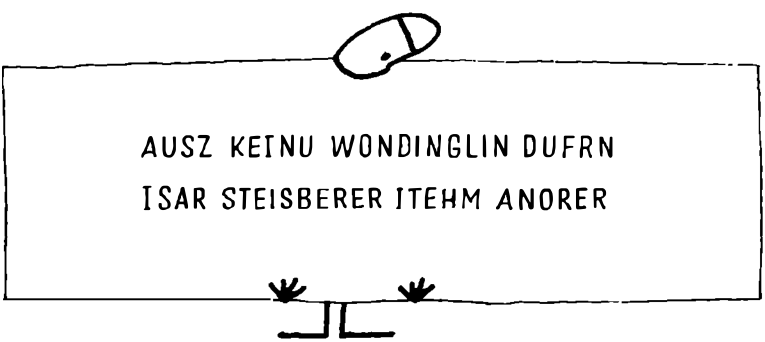


Bild 119

Auch dieser Satz hat wenig Ähnlichkeit mit unserer Sprache. Das ist verständlich: In der Sprache existieren enge Beziehungen zwischen benachbarten Buchstaben. Die Buchstabenkombinationen QQ oder QC treten überhaupt nicht auf, dafür jedoch ER oder IS sehr oft. Die aufeinanderfolgenden Buchstaben wurden aber unabhängig voneinander gezogen.
Wenn man nur die Abhängigkeiten zwischen benachbarten Buchstaben berücksichtigt, kann man die Sprache durch eine einfache Markoffsche Kette beschreiben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen Buchstaben, die auf einen gegebenen Buchstaben folgen können, sind verschieden groß. So ist die Wahrscheinlichkeit für M → E wesentlich größer als für M → T, und die Wahrscheinlichkeit für Q → Q ist offenbar Null, denn die Kombination QQ gibt es in der deutschen Sprache praktisch nicht. Bei Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen benachbarten Buchstaben ergibt sich im Versuch beispielsweise der Satz im Bild 119. Er ist unserer Sprache schon bedeutend ähnlicher.
Berücksichtigt man die Beziehungen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Buchstaben unserer Sprache, so erhält man eine noch bessere Näherung, wie das Bild 120 zeigt. Schließlich ergibt die Berücksichtigung der Beziehungen zwischen vier Buchstaben ein Modell der Sprache in Form einer Markoffschen Kette dritter Ordnung. Man erhält nun z. B. den Satz im Bild 121.

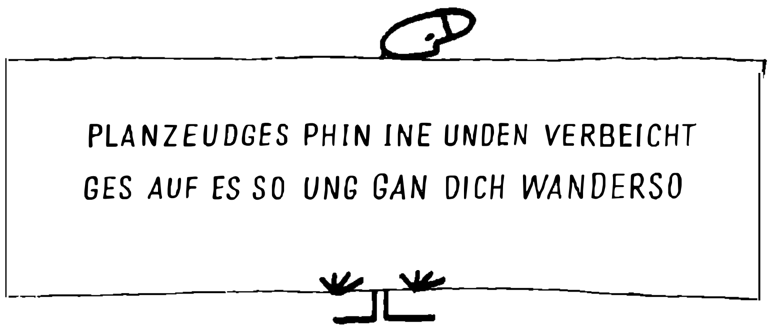


Bild 120

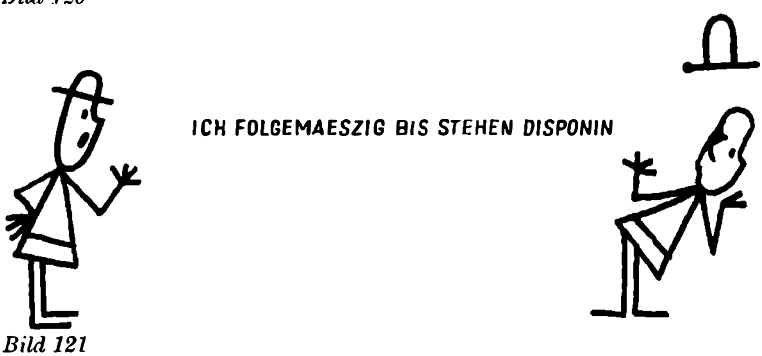
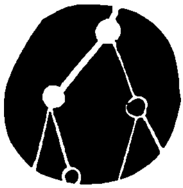


Bild 121

Dieser Satz ist wie die zwei vorangehenden der deutschen Sprache bereits sehr ähnlich. Wenn Ihnen jemand den letzten Satz sagen würde, würden Sie gar nicht sofort bemerken, daß es irgendwelcher Unsinn ist. Sie würden zunächst versuchen, seinen Sinn zu verstehen!
Spätestens jetzt werden Sie, verehrter Leser, die Frage stellen: „Na und?“ Natürlich kann man beliebig viele unsinnige Sätze komponieren, die in ihrer Struktur der Sprache nahekommen. Doch warum sollte man dazu Zeit aufwenden?
Ich könnte entgegnen: Sie haben damit ein Modell der deutschen Schriftsprache. Doch Modelle baut man nicht einfach um ihrer selbst willen, sondern zu einem bestimmten Zweck. Jetzt muß ich das Ziel erläutern, dem das Modell der Sprache dienen soll; jedoch nicht gleich im nächsten Abschnitt, denn zum Verständnis des Wesens der Sache muß erst noch etwas über die Informationstheorie gesagt werden.

Information



Das Erkennen der allumfassenden Bedeutung der Rückkopplung und der Informationsübertragung bei Steuerungsproblemen brachte *Norbert Wiener* auf die Idee, die Steuerung in der Technik, in der lebenden Natur und in der Gesellschaft von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu betrachten.
Über die Rückkopplung haben wir uns bereits unterhalten. Nun will ich einiges aus der Informationstheorie berichten.
„Für morgen wird wechselnde Bewölkung mit zeitweiligen Regenschauern erwartet; schwache bis mäßige Winde aus wechselnden Richtungen ..."
Diese Nachricht wird über den Telegraf, den Rundfunk, die Zeitung und das Telefon und auf viele andere Arten übertragen. Es ist gleichgültig, auf welche Weise Sie den Wetterbericht erfahren, für Sie ist lediglich der Inhalt wichtig. Die physikalischen Träger der Nachricht können sehr verschieden sein: elektrischer Strom, elektromagnetische Wellen, Buchstaben auf dem Papier, Schallwellen usw. Was haben alle diese Träger gemein? Sie tragen ein und dieselbe Information.
Das Telefon klingelt — Sie erhalten die Information, daß Sie jemand zu sprechen wünscht. Sie nehmen den Hörer (in der Fachsprache: Handapparat) ab und melden sich.

Bild 122

Sie berühren den heißen Teekessel — fluchen und ziehen die Hand zurück. Die modernen Erkenntnisse über den Ablauf des Schmerzreflexes hatte ich bereits erläutert. Jetzt soll es uns lediglich auf die Feststellungen ankommen, daß die Information über die Verbrennung der Haut über die Nervenstränge zum Gehirn gelangt und dort verarbeitet wird. Im Gehirn wird ein neues Signal erzeugt; dieses gelangt über die Nervenstränge zu den Muskeln, und Sie ziehen Ihre Hand zurück.
Fische tauschen mit Hilfe von Ultraschallschwingungen im Wasser gegenseitig Informationen aus (sie „sprechen" miteinander!); Fledermäuse orientieren sich im Raum durch Ultraschallortung.
Auf erstaunliche Weise vollzieht sich der Informationsaustausch bei den Bienen. Wenn eine Biene das „Schlaraffenland" entdeckt hat, in dem sich der ganze Schwarm am Nektar duftender Blüten laben kann, kehrt sie zum Stock zurück und tanzt: Die Figuren ihres Tanzes enthalten die Information über Richtung und Entfernung des gefundenen Blütenfeldes. Das ist durch scharfsinnige Versuche belegt.
Das Leben eines jeden Organismus ist von einem intensiven Informationsaustausch mit der Umwelt begleitet. Bei höher organisierten Lebewesen kommt ein gezielter wechselseitiger Informationsfluß zwischen den Organismen hinzu.
In einen Automaten wird vor Betriebsbeginn die erforderliche Information eingegeben — das Programm. Außerdem erhält der Automat laufend Information über die Meßergebnisse an den erzeugten Teilen. Wenn eine Toleranzgrenze erreicht wird, gibt es eine Information über die notwendige Neueinstellung des Automaten.

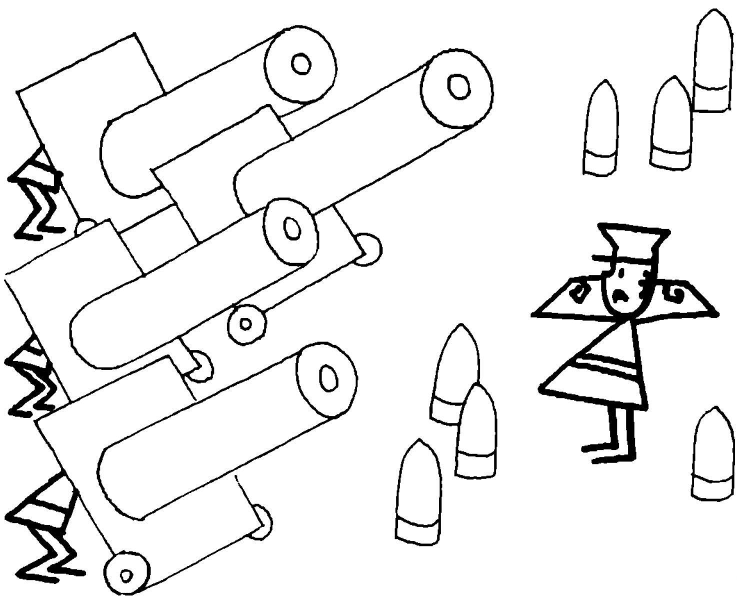


Bild 123

Bei der automatischen Steuerung eines Flugzeugs wird die Information über die Lage des Flugzeugs im Raum und die meteorologischen Bedingungen zum Autopiloten übertragen und dort mit dem vorgeschriebenen Kurs verglichen. Im Ergebnis entsteht die Information über die notwendigen Korrekturen der Lage des Flugzeugs und dessen Kurs.
Die Leitung eines Betriebes benutzt zu ihrer Arbeit Information über vorhandene Rohstoffe und Halbfertigprodukte, über die betriebsbereiten und in Reparatur befindlichen Betriebsanlagen, über die Arbeitskräftesituation usw., sie orientiert sich an einem vorgegebenen Produktionsplan, der als eine gespeicherte Information anzusehen ist. Information ist also überall; sämtliche Steuerungs- und Regelungssysteme enthalten Nachrichtenkanäle, auf denen Information übertragen wird.
Durch Einschalten eines roten Lichtes kann man einen Zug anhalten; durch einen Knopfdruck wird eine Presse von mehreren Tonnen in Bewegung gesetzt; ein Satz des Kommandierenden kann eine Salve aus vielen tausend Geschützen auslösen.
In den betrachteten Beispielen nimmt die zum Empfänger gelangende Nachricht nur zwei Bedeutungen an: rot — grün, eingeschaltet — ausgeschaltet. Das ist die einfachste Information; sie ist die Antwort auf eine Frage, die man mit „Ja" oder „Nein" beantworten kann.
Der Empfänger weiß die Antwort vorher nicht, denn sonst würde er gar keine Information empfangen. Vom Standpunkt des Empfängers aus ist die Antwort auf solch eine Frage zufällig; ihm ist vorher nicht bekannt, welche der zwei möglichen Antworten er empfangen wird.
Die Verkehrsampel für den Straßenverkehr hat drei Farben: Rot, Gelb und Grün. Die Nachricht, die dem Autofahrer übermittelt wird, kann drei Bedeutungen haben: „Halt", „Achtung", „Straße frei".
Bei der Übertragung der Buchstaben auf dem Fernschreiber hat jedes Zeichen eine von insgesamt 27 möglichen Bedeutungen. Wir können übrigens auch, unsere andere Terminologie benutzend, sagen, daß im Ergebnis des Versuchs (des Empfangs eines Buchstaben) einer der möglichen Versuchsausgänge eingetreten ist (z. B. wurde der Buchstabe R empfangen).
Es gibt auch Versuche, die eine so große Anzahl von Ausgängen ermöglichen, daß es einfacher ist, sie als Versuche mit unendlich vielen Ausgängen zu betrachten. Beispielsweise gibt es für das Relief einer Schallplatte bei der Aufzeichnung von Musik praktisch unendlich viele mögliche Varianten. Der Empfänger weiß vorher nicht, welcher Ausgang eintreten wird; für ihn ist die Antwort ein zufälliges Ereignis.

Gedächtnis und Kode

Information kann man speichern. Das Wesen des gesamten Lernprozesses besteht in einer Speicherung von Information. Information wird in Büchern, Zeitschriften, Fragebogen, in Bildern und architektonischen Denkmälern, auf Notenpapier, Schallplatten oder Magnetband gespei-

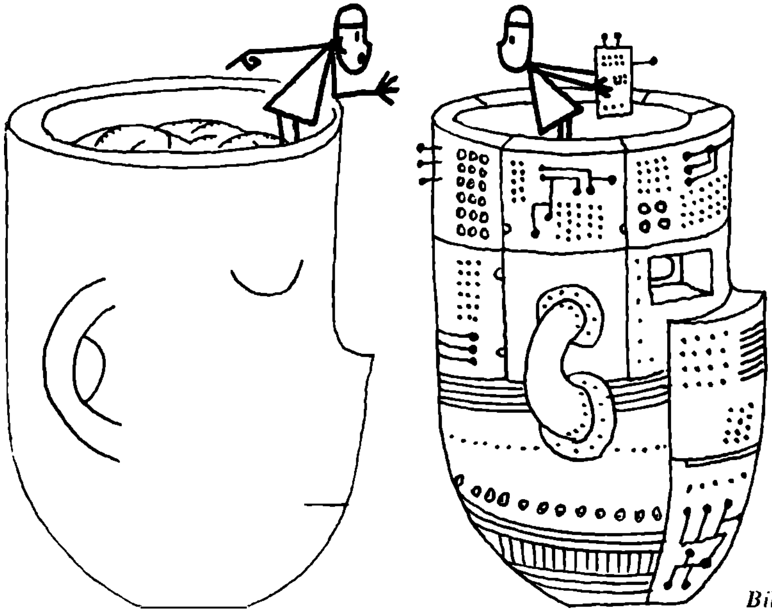


Bild 124

chert. In elektronischen Rechenmaschinen gibt es spezielle Einrichtungen zum Speichern der Information; bestimmte Information wird über längere Zeiträume gespeichert, z. B. die Ausgangsdaten; es gibt aber auch Kurzzeitspeicher, in denen z. B. die Ergebnisse von Zwischenrechnungen nur so lange aufgehoben werden, bis die betreffende Rechnung beendet ist.

Im Gehirn der Lebewesen und vor allem des Menschen ist der Mechanismus des Gedächtnisses (des Speichers!) sehr kompliziert und vielseitig. Seine Erforschung steckt noch in den Anfängen. Einige der Gedächtniseinrichtungen des Menschen ähneln den Speichereinrichtungen einer elektronischen Rechenmaschine; es gibt aber auch stark abweichende Elemente.

In den verschiedenen Speichersystemen wird die Information auf verschiedene Weise dargestellt. Zeichen auf Papier, Rillen in der Schallplatte, Erregungszustände (erregt — nicht erregt) eines Relais oder einer Nervenzelle sind einige der verschiedenen Arten, in denen Information dargestellt werden kann. Ein und dieselbe Information kann auf verschiedene Weise dargestellt werden: Die Zahl 5 läßt sich durch verschiedene Ziffernzeichen (5, V), in Buchstaben (fünf) oder durch die Finger einer Hand ausdrücken.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Unterscheidbarkeit der Information. Ein Versuchsausgang muß sicher vom anderen unterschieden werden können; die Nachrichten müssen sich eindeutig auseinanderhalten lassen.

Zur Speicherung oder Übertragung der Dezimalziffern benötigt man zehn verschiedene Symbole. Es ist gleichgültig, ob man arabische oder römische Ziffernzeichen, eine Aufzeichnung in Worten, Folgen von elektrischen Impulsen oder irgendwelche anderen Symbole verwendet.
Die Darstellung der möglichen Versuchsausgänge (oder der möglichen Antworten, der möglichen Nachrichten) in bestimmter, verabredeter Form heißt Kode. Der Prozeß der Darstellung der Information selbst in irgendeiner Form wird Kodierung genannt.
Information kann man in bestimmter, verabredeter Form darstellen, also kodieren, und man kann sie speichern. Für uns ist jetzt wesentlich:

Information kann man übertragen.

Nach einem etwas abgewandelten Aphorismus von *D. Thomson* kann man sagen, daß man Information wie Geld speichern kann, doch Nutzen bringen beide nur dann, wenn man sie ausgibt. Ausgeben heißt übertragen!
Der Wetterbericht von vorgestern ist uninteressant; sich von einem unerfahrenen Arzt behandeln zu lassen oder sich in ein Auto zu setzen, dessen Fahrer betrunken ist, ist gefährlich — die Information muß zur rechten Zeit vorliegen und zuverlässig sein.
Wenn ein Redner oder ein Gesprächspartner zu schnell spricht, kann der Zuhörer nicht folgen, er kann die Information nicht zuverlässig, eindeutig aufnehmen. Bei jeder Art der Übertragung und der Aufnahme von Information sind die Zuverlässigkeit, d. h das sichere Erkennen der übertragenen Nachrichten, und die Geschwindigkeit der Informationsübertragung einander widersprechende Forderungen. Deshalb entsteht beim Entwurf eines beliebigen Informationsübertragungssystems die Frage: Wie muß man die Informationsübertragung realisieren, damit den beiden Hauptforderungen möglichst gut Rechnung getragen wird?
Erschwerend kommt hinzu, daß in jedem Nachrichtenkanal Störungen wirken.
Wenn in einem Raum großer Lärm herrscht, ist es schon schwierig, sich mit dem Nachbarn zu unterhalten; es ist fast unmöglich, dem Vortrag eines Redners zu folgen.
Ich erwähnte bereits, daß bei allen Formen der elektrischen Übermittlung von Nachrichten stets ein Rauschen auftritt, das den Empfang stört. Der Pegel dieses Rauschens im Nachrichtenkanal läßt sich zwar klein halten, doch prinzipiell niemals ganz beseitigen.
Außerdem wird das Leben ohnehin durch viele Störungen anderer Art erschwert. Im Rundfunkgerät entstehen Störungen durch Sender benachbarter Wellenlängen, durch atmosphärische Entladungen, durch vorbeifahrende Straßenbahnen, durch Röntgenanlagen usw. Im angeregten Telefongespräch mit Ihrer Erbtante hören Sie (und die Tante!) plötzlich lautes Schimpfen, das aus dem benachbarten Kanal in Ihre Leitung gerät, oder Sie hören ein schreckliches Heulen und Pfeifen, weil die Verstärker nicht richtig eingepegelt sind.

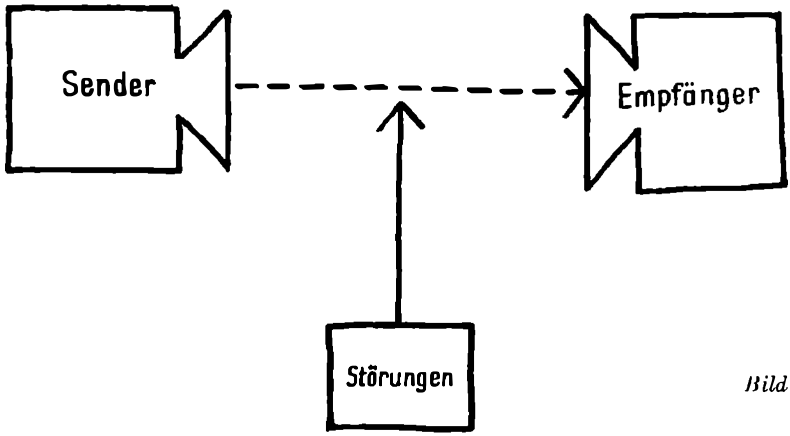


Bild 125

Bei der Übertragung telegrafischer Nachrichten verfälschen Störungen die Buchstaben, und auf die telegrafische Anfrage nach dem Ergehen Ihrer verreisten minderjährigen Tochter erhalten Sie die telegrafische Antwort: „KEINE SORGE — BIN MUTTER"! Nur ein fehlender Punkt (–. entspricht n; — entspricht t) hat das Wort „munter" verfälscht! Die Entstellung von nur einem Buchstaben kann Sie bereits in Verwirrung bringen ... In der Presse entstehen ebenfalls Druckfehler auf Grund der Wirkung verschiedener „Rauschquellen". Sämtliche denkbaren Systeme zur Informationsübertragung werden durch alle möglichen Störungen beeinflußt, die in der Technik „Rauschen" genannt werden.

Die verschiedenen Informationsübertragungen lassen sich auf den ersten Blick in ein einfaches Schema bringen, das im Bild 125 dargestellt ist.

Im Nachrichtenkanal werden die Signale vom Sender zum Empfänger übertragen. Sie sind der Träger der Information.

Wie kann man einen fehlerfreien, sicheren Transport der zu übermittelnden Nachrichten gewährleisten?

Die nachfolgende Plausibilitätsbetrachtung scheint zunächst offensichtlich und einfach zu sein: Die falsche Entschlüsselung einer Nachricht beruht auf einer Verfälschung der Signale durch Störungen im Nachrichtenkanal. Man muß also die Störung beseitigen, am besten an der Stelle, an der sie entsteht. Man kann auch ein anderes Verfahren zur Übertragung der Signale suchen, bei dem die Signale nicht durch Störungen entstellt werden. Wenn das nicht möglich ist, muß man die Stärke des Signals vergrößern. Wenn Sie sehr laut schreien, können Sie sich selbst in einem lauten Zimmer bemerkbar machen. Sie werden zwar keine Liebeserklärung abgeben, immerhin können Sie aber z. B. ein Treffen vereinbaren.

Seit der Erfindung des Telegrafen in der Mitte des 19. Jahrhunderts dienten die vorstehenden Überlegungen bis zur Mitte unseres Jahrhun-

derts als Leitstern der Ingenieure; auf sie stützten sich die Konstrukteure von Telefon und Telegraf, von Rundfunk und Fernsehen.
Ungeachtet aller riesigen Aufwendungen und der bedeutenden Erfolge auf diesem Weg stört das Rauschen weiterhin den Empfang. Sie haben sicher schon erfahren können, daß es mitunter sogar sehr stört.
Wir müssen aber ständig die Reichweite der Nachrichtenübertragung erhöhen. Es reicht schon nicht mehr aus, Informationen aus Moskau nach Wladiwostok oder zum Mond zu übertragen. Bereits vor einigen Jahren mußte eine Nachrichtenverbindung mit einem Raumschiff im Gebiet der Venus hergestellt werden... Der Erhöhung der Leistung ist eine Grenze gesetzt, denn wir können nicht mit beliebig hoher Leistung aus einem Raumschiff senden!
Auch an die Funkortung werden immer höhere Ansprüche gestellt. Heute wird gefordert, daß auch schnellfliegende Flugzeuge und Raketen rechtzeitig erkannt werden. Bei der Steuerung komplizierter Objekte, z.B. ganzer technologischer Prozesse, kommt es darauf an, die Parameter immer genauer zu erfassen und in die Steuereinrichtung zu übertragen, ohne dabei Genauigkeit zu verlieren. Die Exaktheit der Übertragung wird allerdings durch das Rauschen beeinträchtigt.
Wie man sieht, sind nicht nur im kosmischen Raum, sondern auch auf unserem Planeten gute Nachrichtenverbindungen eine teure Sache, und wir müssen lernen, Information schnell, sicher und billig zu übertragen. Ist es aber wirklich so wichtig, daß der Empfänger nur unverzerrte Signale erhält?
Auf dem Bahnhof gibt der Dispatcher über die Lautsprecheranlage die Abfahrt eines Zuges bekannt. Mitunter ähnelt seine Stimme kaum noch der eines Menschen, und man kann nicht mehr erkennen, ob ein Mann oder eine Frau spricht. Trotzdem erfahren wir, von welchem Bahnsteig unser Zug abfährt. Das übertragene Signal — die menschliche Rede — wird sehr stark verzerrt, doch die für uns wichtige Information erhalten wir trotzdem.
Die Aufgabe besteht also nicht in der unverzerrten Wiedergabe der Signale, sondern in der richtigen Wiedergabe der übertragenen Information. Dieser einfache, jedoch sehr wichtige Tatbestand wurde erst vor weniger als 20 Jahren klar erkannt und für praktische Zwecke nutzbar gemacht.
Übrigens haben wir hier wieder ein Beispiel für eine recht überzeugende Plausibilitätsbetrachtung, die sich später als falsch erwies. Die Sendeleistung ist bei der Nachrichtenübertragung nicht das allein Entscheidende!
Im Jahre 1948 erschienen zwei Aufsätze *Claude Shannons*, des bekannten amerikanischen Mathematikers und Ingenieurs, die er unter dem Titel „Mathematische Theorie der Nachrichtenübermittlung" zusammenfaßte. Über die Shannonsche Theorie werde ich später berichten. Hier will ich lediglich bemerken, daß *Shannon* die Probleme der Informationsübertragung in Nachrichtenkanälen richtig erkannte und formulierte.

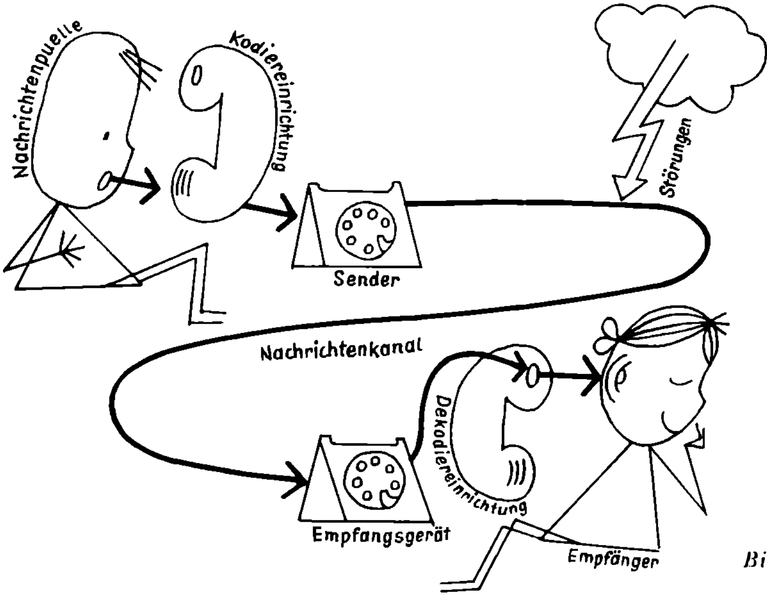


Bild 126

Im Bild 125 ist einiges vergessen worden: Wenn man den Absender und den Empfänger der Information noch berücksichtigt, erhält man das im Bild 126 dargestellte Schema. Nachrichtenquelle oder Absender bin z. B. ich, wenn ich ein Telegramm aufgebe, einen Freund anrufe oder meine Mitarbeiter veranlasse, eine bestimmte Arbeit schnell auszuführen. Zur Übertragung muß die Nachricht kodiert, also in eine übertragbare Form gebracht werden. Das Telegramm kodiere ich durch Buchstaben auf dem Papier, über das Telefon kann ich mich mit Hilfe elektrischer Schwingungen verständigen, und meine Mitarbeiter kann ich durch eine vielsagende Geste zur schnelleren Arbeit anregen.
Der Telegrafist kodiert mein Telegramm nochmals und bringt es in die Form elektrischer Stromstöße. Diese Signale werden über den Nachrichtenkanal — das Kabel — gesendet. Auf der Empfangsseite gelangen die Signale in die Dekodiereinrichtung, wo sie in Buchstaben zurückverwandelt werden. Das Telegramm gelangt nun zum Empfänger.
Beim Telefongespräch ist das Mikrofon die Kodiereinrichtung, in der die Schallschwingungen in elektrische Schwingungen umgewandelt werden. Die Dekodiereinrichtung ist das Telefon meines Freundes. Dort werden die elektrischen Schwingungen in mechanische Schwingungen der Membran umgewandelt.
An den Beispielen und dem dargestellten Schema ist erkennbar, daß der Konstrukteur nicht nur auf Sende- und Empfangsanlage Einfluß hat, sondern auch auf die Kodier- und Dekodiereinrichtung. Er kann die Kodierungs- und Dekodierungsmethode nach seinem Ermessen wählen.

Hier entstehen die wichtigen Fragen: Kann man eine fehlerfreie Übertragung überhaupt erreichen? Wie wählt man Kodes für eine fehlerfreie Informationsübertragung aus?

Was ist das, Information?

Im vorangehenden habe ich vielfach das Wort „Information" benutzt, ohne etwas über den konkreten Inhalt zu sagen, den dieses Wort hat. Sie wissen sicher, was unter diesem Begriff zu verstehen ist, obwohl Sie kaum in der Lage sein werden, es genau zu definieren. Das ist verständlich, denn es ist gar nicht so einfach, einen geläufigen Begriff zu definieren. Es besteht immer die Gefahr, sich in allgemeinen Worten zu verlieren.
Gewöhnlich meint man, wenn man von den Informationseigenschaften eines bestimmten Prozesses oder einer bestimmten Erscheinung spricht, die Eigenschaften, die der energetischen oder massemäßigen Charakterisierung in gewissem Sinn gegenübergestellt werden. Es ist uns gleichgültig, auf welche Weise wir den Wetterbericht erfahren haben, aus der Zeitung, dem Rundfunk oder anderswo her.
Information ist keine Masse und auch keine Energie. Selbstverständlich wird zur Übertragung von Information Energie benötigt. Diese Energie charakterisiert jedoch die übertragene Information weder quantitativ noch qualitativ. Auf ein Wort eines Kommandierenden hin kann ein Krieg ausgelöst werden, ein Sirenensignal kann den Betrieb eines Werkes oder sogar einer ganzen Stadt stoppen. Dabei kann die für das auslösende Signal benötigte Energiemenge recht klein sein.
Die Information ist jedoch ebenfalls eine objektive Kenngröße materieller Prozesse wie die Masse und die Energie. Während sich die Wissenschaft mit den Begriffen Masse und Energie schon seit langem beschäftigt, begann das systematische Studium der Information erst vor etwa 20 Jahren.
Bis jetzt haben die Mathematiker den Begriff „Information" noch nicht so allseitig umfassend definiert, daß er als Grundlage für den Aufbau einer Informationstheorie dienen könnte, obwohl schon fruchtbare Versuche in dieser Hinsicht gemacht wurden.
Wenn man heute von der Informationstheorie spricht, versteht man darunter meist, mehr oder weniger deutlich ausgesprochen, die vor etwa zwanzig Jahren von *Shannon* entwickelten Ideen. Die von *Shannon* begründete Richtung bezieht sich jedoch nicht allgemein auf die Information, sondern auf das Problem der Übertragung von Information in Nachrichtenkanälen. Für dieses Gebiet stellt sie eine einheitliche wissenschaftliche Disziplin dar. Nach den benutzten mathematischen Methoden gehört die Theorie der Informationsübertragung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie ist schon jetzt eines ihrer Kapitel, und zwar ein sehr nützliches und inhaltsreiches.
Zunächst werde ich etwas über die Probleme sagen, die mit der Informationsübertragung auf Nachrichtenkanälen zusammenhängen. Danach werde ich kurz einige andere Fragen berühren.

Manchmal spricht man z. B. von überraschender, wertvoller oder auch wertloser Information. Solche Ausdrücke charakterisieren die Information nicht mengenmäßig. Es wäre aber sehr nützlich, eine quantitative Kennziffer für die Information zu haben.
Wenn wir davon sprechen, daß eine Nachricht viel oder wenig Information enthält, vergleichen wir die Informationen mengenmäßig, ähnlich wie wir das Gewicht, die Länge oder die Kosten von irgendwelchen Gegenständen vergleichen.
Versuchen wir nun, uns ein quantitatives Maß für die Information auszudenken. Hier haben Sie vier Mitteilungen:

1. Beim Werfen eines Geldstücks fiel Wappen.
2. Die Schranken sind geschlossen.
3. Ich habe eine Tochter bekommen.
4. Die Nummer des Straßenbahnfahrscheins endet mit der Ziffer 7.

Können Sie mir sagen, welcher dieser Sätze die meiste Information enthält? Auf solch eine hinterlistige Frage werden Sie kaum antworten können. Für mich ist z. B. die Geburt meiner Tochter ein großes Ereignis, Sie wird das kaum sonderlich berühren. Wenn Sie entgegen allen Warnungen „Zahl — Wappen“ um Geld spielen, so wird für Sie das Fallen des Wappens Freude oder Verdruß bringen — eine Information, deren Ausmaß sich noch mit dem Einsatz ändern kann. Wenn Sie es eilig haben und zu einer Verabredung wollen, aber vor geschlossenen Schranken stehen, so kann solch eine Information Ärger und Enttäuschung bedeuten.
Die Antwort auf meine Frage hängt, wie sich zeigt, vom Standpunkt ab. Welchen Standpunkt hat nun aber ein Konstrukteur von Nachrichtenanlagen, z. B. von Telegrafenanlagen? Der subjektive Inhalt der zu übertragenden Information hat für ihn keinerlei Bedeutung. Er muß ein Übertragungssystem schaffen, über das man die Nachricht von der Geburt meiner Tochter möglichst fehlerfrei übertragen kann, unabhängig davon, wie sehr diese Nachricht den Empfänger erfreut.
Eines der Verdienste von *Shannon* besteht gerade darin, einen Begriff für die Informationsmenge geschaffen zu haben, der in der Nachrichtentechnik brauchbar ist. Der Inhalt der Information hat für die Übertragung durch den Nachrichtenkanal keinerlei Bedeutung. Der Begriff der Informationsmenge muß sich also auf andere Kennzeichen der übertragenen Nachrichten stützen.
Kehren wir zu der Frage zurück, welche der vier Mitteilungen die meiste Information enthält.
Bei den ersten drei Mitteilungen sind nur jeweils zwei Varianten der Aussage möglich: Zahl — Wappen, offen — geschlossen, Junge — Mädchen. Für die Übertragung solch einer Mitteilung braucht man nur zwei Symbole, z. B. 0 oder 1, plus oder minus. Das ist offenbar die einfachste Information, sie ist in jedem Versuch mit zwei Ausgängen enthalten.
Sofort müssen wir feststellen, daß in einem Versuch mit nur einem möglichen Ausgang gar keine Information enthalten ist. Ein Erwachsener

erfährt beispielsweise nichts Neues aus der Mitteilung, daß, wenn heute Mittwoch ist, morgen Donnerstag sein wird.
Die Nummer des Straßenbahnfahrscheins kann auf eine beliebige der Ziffern von 0 bis 9 enden, und somit hat die letzte unserer Mitteilungen 10 mögliche Varianten. Deshalb braucht man, um jeden möglichen Ausgang des Versuchs, der in der Feststellung der Endziffer des Fahrscheins besteht, übertragen zu können, mindestens 10 verschiedene Symbole. Will man aber einen deutschsprachigen Text übertragen, braucht man mindestens 27 verschiedene Symbole.
Der Konstrukteur für Nachrichtenübertragungssysteme interessiert sich also in erster Linie für die Anzahl der möglichen Varianten der Nachricht oder die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge.
Denken Sie jetzt an die Aufgabe über das Zusammenfallen von Geburtstagen zurück. Wenn Sie den ersten besten, den Sie treffen, fragen, wann er Geburtstag hat (zweckmäßigerweise einen Bekannten; wer weiß, was ein Unbekannter von Ihnen denken würde ...), und feststellen, daß Sie gemeinsam Geburtstag haben, so schätzen Sie die erhaltene Information sehr hoch ein. Wenn es sich erweist, daß Ihre Geburtstage nicht zusammenfallen, so sehen Sie eine solche Information als nicht sehr bedeutend an; eine solche Antwort haben Sie fast mit Sicherheit erwartet.
Im Versuch mit dem Werfen eines symmetrischen Geldstücks müßte die quantitative Größe der Information für das Auftreten von Zahl dieselbe wie bei Wappen sein: Die Chancen für das Auftreten von Zahl und Wappen sind gleich groß. Den subjektiven Charakter der Ausgänge, z. B. Wappen — Gewinn, Zahl — Verlust, wollen wir ausschließen.
Nun stellen wir fest: Die Information über die Geburt eines Mädchens (und keines Jungen) und über das Auftreten von Wappen (und nicht Zahl) wird man vernünftigerweise durch dieselbe Maßzahl ausdrücken, denn die Unbestimmtheit des Ausgangs ist in beiden Fällen dieselbe: Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Wappen und der Geburt eines Mädchens sind gleich groß, und zwar 1:2.[1])
Beim einmaligen Werfen eines Geldstücks ist die Unbestimmtheit des Ausgangs bedeutend größer als bei der Feststellung, daß die Geburtstage zweier Personen nicht übereinstimmen. Die Informationsmenge, die man erhält, wenn Wappen fällt, muß man höher einschätzen als die Information über das Nichtzusammentreffen zweier Geburtstage, andererseits aber niedriger als die Information über das Zusammentreffen der Geburtstage.
Die Informationsmenge, die eine zu übertragende Nachricht enthält, wird also durch die Menge aller möglichen Nachrichten und die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens bestimmt. Sie hängt nicht vom Inhalt der Nachricht ab. Das ist die grundlegende Idee der Nachrichtenübertragungstheorie von *Shannon*.

[1]) In den verschiedenen historischen Perioden ändert sich das Verhältnis der Geburtenzahlen von Jungen zu Mädchen zwar etwas. Bei einer groben Betrachtung kann man die Wahrscheinlichkeiten der Geburt eines Mädchens der der Geburt eines Jungen mit je 1/2 gleichsetzen.

Ein quantitatives Maß

Die Wahl eines Verkehrsmittels (Auto, Bahn, Flugzeug) für eine Reise von einer Stadt in eine andere hängt nicht von der genauen Entfernung zwischen diesen Städten ab (97 km oder 5472 km), sondern davon, ob es sich um einige zehn, einige hundert oder einige tausend Kilometer handelt. Oft kommt es nicht auf den exakten Wert einer bestimmten Größe an, sondern nur auf die Größenordnung, d. h. auf die Anzahl der Stellen in der gewöhnlichen dezimalen Schreibweise. So liegt die Zahl 5472 zwischen $1000 = 10^3$ und $10000 = 10^4$. Es ist einfach zu sagen, daß die Zahl 5472 die Größenordnung 10^4 hat. Wenn wir uns an die Logarithmen erinnern, so wissen wir, daß man statt $10^3 < 5472 < 10^4$ auch $3 < \lg 5472 < 4$ schreiben kann. Wir sehen, daß es angebracht ist, die Größenordnung von Zahlen im logarithmischen Maßstab anzugeben.

In der Informationstheorie benutzt man gewöhnlich nicht das dezimale, sondern das duale Zahlensystem, in dem es nur die Ziffern Null und Eins gibt. Wie bereits am Ende des Abschnitts über den mehrdimensionalen Raum gezeigt wurde, ist die Anzahl aller möglichen Kombinationen eines dualen Ausdrucks mit n Stellen 2^n.

Auch im Dualzahlensystem wird die Größenordnung einer Zahl im logarithmischen Maßstab angegeben, denn n ist gleich dem Logarithmus von 2^n. Hier verwendet man jedoch nicht die üblichen Zehnerlogarithmen, sondern Logarithmen zur Basis 2. Im ersten Gespräch mit dem Physiologen ging es um einen der vollkommensten Mechanismen der Natur — den Sehapparat des Menschen und der Tiere. Er muß die großen in der Natur auftretenden Leuchtdichteunterschiede verarbeiten können. Nachfolgend sind einige Beispiele von Leuchtdichten aufgeführt:

Leuchtdichte des nächtlichen Himmels ohne Mondschein:	1,5 Stilb
Leuchtdichte des Metallfadens einer Glühlampe:	200 Stilb
Leuchtdichte der Sonne:	$1{,}5 \cdots 10^5$ Stilb

Mit dem ungeschützten Auge in die Sonne zu sehen ist schmerzhaft. Weniger hell leuchtende Gegenstände kann man betrachten und sogar deren Leuchtdichten unterscheiden. Die Physiologen haben festgestellt, daß das Auge einen sehr großen Leuchtdichtebereich mit Sicherheit verarbeiten kann.

Einen so großen Bereich kann der Sehapparat nur vermöge eines logarithmischen Maßstabs bewältigen. Versuche haben bestätigt, daß das Auge tatsächlich eine logarithmische Empfindlichkeitskurve hat.

Zum Aufschreiben einer dreistelligen dezimalen Zahl benötigt man für jede der drei Stellen ein Symbol aus dem Vorrat von zehn Symbolen, von denen jedes eine von zehn möglichen Bedeutungen hat. Will man diese Zahl über einen Nachrichtenkanal übertragen, so benötigt man ebenfalls zehn verschiedene zur Übertragung geeignete Symbole, die der Darstellung der dreistelligen Zahl in gewöhnlichen Ziffern entsprechen.

Eine dreistellige dezimale Zahl hat im Dualzahlensystem maximal zehn Stellen, denn $2^{10} = 1024$. Man benötigt aber nur noch einen Vorrat von

zwei Symbolen. Im Telegrafenkode werden nur zwei unterschiedliche Signale, z. B. Stromfluß und Pause, zur Übertragung der Information benutzt. Deswegen ist das Dualzahlensystem hier vorteilhaft.
Schon im Jahr 1928 hatte *Hartley* vorgeschlagen, für die Messung einer im Nachrichtenkanal übertragenen Informationsmenge ein logarithmisches Maß zu benutzen. *Shannon* ging bedeutend weiter — er berücksichtigte auch noch die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Informationen.
Wenn in einer Nachricht keinerlei Unbestimmtheit enthalten ist, ihr Inhalt also von vornherein bekannt ist (z. B.: ein geworfener Stein fällt auf die Erde zurück!), so enthält sie keinerlei Information, und die Informationsmenge ist Null.
Die Chancen (die Wahrscheinlichkeiten) irgendwelcher Nachrichten, übertragen zu werden, können mehr oder weniger groß sein. Je geringer die Wahrscheinlichkeit für die Übertragung einer bestimmten Nachricht ist, um so höher ist die Informationsmenge, die sie enthält. Dieser Sachverhalt muß auch bei der Definition der Informationsmenge berücksichtigt werden. Die Informationsmenge muß größer werden, wenn sich die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer Nachricht verringert. Trifft eine bestimmte Nachricht zweimal, dreimal oder noch öfter ein, und sind die Übermittlungen unabhängig voneinander, so muß sich die Informationsmenge verdoppeln, verdreifachen usw.
Für das Einkommen eines Arbeiters im Leistungslohn ist der mittlere Tagesverdienst und nicht der Verdienst an irgendeinem zufällig betrachteten Tag maßgebend. Genauso ist in der Informationstheorie nicht die Informationsmenge wesentlich, die sich bei der zufälligen Übermittlung irgendeiner Nachricht ergibt (im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung), sondern die mittlere Informationsmenge.
Da die Übermittlung einer bestimmten Nachricht zufällig ist und einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt, muß man als Mittelwert die uns bereits bekannte mathematische Erwartung verwenden.
Wenn der Vorrat der möglichen Nachrichten lediglich aus zwei Nachrichten mit den Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 besteht (dabei ist stets $P_1 + P_2 = 1$), dann ist nach *Shannon* die mittlere Informationsmenge, die man in dieser Situation bei der Übertragung einer Nachricht erhält

$$I = -P_1 \log P_1 - P_2 \log P_2$$

(die Minuszeichen stehen hier, damit die Informationsmenge positiv wird; die Wahrscheinlichkeiten P sind Zahlen, die kleiner als Eins sind, und ihre Logarithmen sind demnach negativ).
Bei dieser Definition ist gewährleistet, daß sich die Informationsmenge bei zweifacher unabhängiger Übertragung einer Nachricht verdoppelt, bei dreifacher Übertragung verdreifacht usw.
Verlangt man von dem einzuführenden Begriff der Informationsmenge noch einige weitere naheliegende Eigenschaften, so muß man ein logarithmisches Maß für die Informationsmenge wählen. Das ist der Inhalt

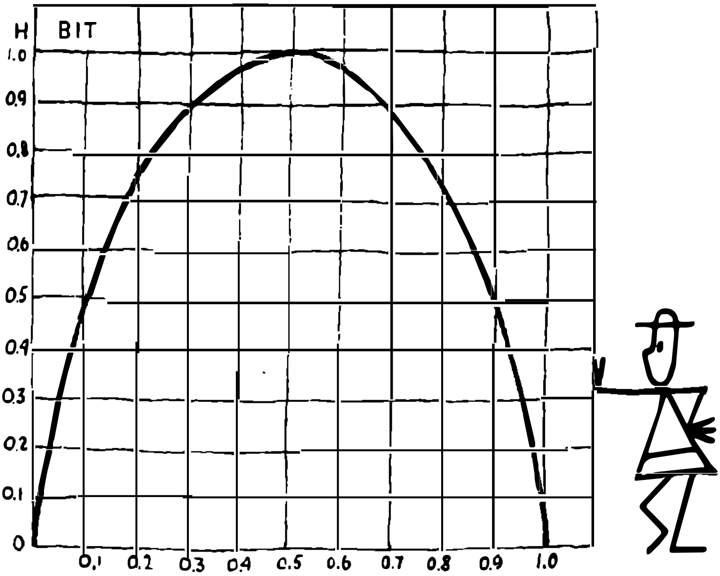


Bild 127

eines Satzes von *Shannon*. Ich will Ihre Aufmerksamkeit nicht mit seinem Beweis belasten. Er ist zwar elementar, aber sehr lang.[1])
Jonglieren wir nun ein wenig mit unserer letzten Formel. Da $P_2 = 1 - P_1$ ist, können wir sie in die folgende Gestalt bringen:

$$I = -P_1 \log P_1 - (1 - P_1) \log (1 - P_1)$$

Jetzt ist I nur noch Funktion einer Veränderlichen, der Wahrscheinlichkeit P_1. Man kann diese Funktion ohne viel Mühe grafisch darstellen, wenn man sich an die Definition des Logarithmus erinnert oder Tabellen benutzt. Aus Bild 127 ist sofort ersichtlich, daß die Informationsmenge nur dann gleich Null ist, wenn entweder $P_1 = 0$ oder $P_1 = 1$ ist. Das bedeutet, daß entweder die erste Nachricht niemals eintrifft und demzufolge bei jedem beliebigen Versuch immer nur die zweite, oder (bei $P_1 = 1$), daß immer die erste Nachricht eintrifft.
Eine solche Situation würde bedeuten, daß man tatsächlich nur eine Nachricht hat, daß also gar keine Unbestimmtheit im Versuch vorhanden ist. Der Empfang einer derartigen Nachricht liefert also auch keine Information.

[1]) Auch hier rechne ich mit Ihrem Vertrauen. Wenn Ihre Wißbegierde jedoch über den Rahmen dieses Buches hinausgeht, können Sie bei *Shannon* nachlesen oder in genügend elementarer Form im Buch von *A. M. Jaglom* und *J. M. Jaglom* „Wahrscheinlichkeit und Information" (deutsche Übersetzung im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965). Übrigens steht der Beweis bei *Shannon* im Anhang, und der entsprechende § 4 des Kapitels II bei den *Jagloms* ist kleingedruckt. Das bedeutet gewöhnlich, daß die Ausführungen mehr an den pedantischen Leser adressiert sind.

Die größte Informationsmenge ergibt sich bei $P_1 = 1:2$. Das Eintreffen beider Nachrichten ist dann gleichwahrscheinlich. Hier liegt im Versuchsausgang die größte Unbestimmtheit, und deshalb schätzen wir hier die erhaltene Information am höchsten ein. Bei Benutzung von Logarithmen zur Basis 2 ergibt sich bei $P_1 = 1:2$ ein Wert von $I = 1$.
Wenden wir uns nun Versuchen mit mehreren möglichen Ausgängen zu. Wenn eine Nachricht aus Buchstaben besteht, so erscheint als elementarer Versuchsausgang ein Buchstabe. Im deutschen Alphabet gibt es 27 Zeichen (einschl. des Wortzwischenraums). Die mittlere Information, die uns ein Zeichen liefert, ist

$$I = -P_1 \log P_1 - P_2 \log P_2 - \cdots - P_{27} \log P_{27}$$

Hierin bedeuten $P_1, P_2, \cdots, P_{27}$ die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Zeichen mit den entsprechenden Nummern.
Die größte Informationsmenge ergibt sich, wenn alle Zeichen die gleiche Wahrscheinlichkeit des Auftretens haben.
Wie die Sache allgemein aussieht, wird Ihnen nun sicher klar sein. Ich möchte lediglich noch bemerken, daß der Maximalwert der Informationsmenge bei einer Menge von n möglichen Nachrichten dann erreicht wird, wenn die Wahrscheinlichkeiten für die Übertragung bei allen diesen Nachrichten die gleiche Größe $1/n$ haben. Dann ist

$$I_{\max} = \log n .$$

An dieser Gleichung erkennt man, daß bei Erhöhung der Anzahl der möglichen Nachrichten die mittlere Informationsmenge nur langsam wächst.

Durchlaßfähigkeit

Die zwischen, sagen wir, Berlin und Erfurt verkehrenden Güterzüge transportieren Frachten von der einen Stadt zur anderen. Man kann viele Waggons an eine Lokomotive anhängen und damit die vom Zug transportierte Frachtmenge erhöhen; nun sinkt aber die Reisegeschwindigkeit. Es ist naheliegend, die maximale Frachtmenge (in Tonnen), die sich auf einer Bahnstrecke in der Stunde transportieren läßt, als Maß für deren Durchlaßfähigkeit zu verwenden. Man muß also die Frachtmenge ermitteln, die sich bei möglichst günstiger Verteilung der Frachten auf die Züge und bei bestmöglicher Gestaltung des Fahrplans befördern läßt.
Für die Informationsübertragung im Nachrichtenkanal gelten ähnliche Überlegungen. Der Einfachheit halber wollen wir eine Telegrafenlinie mit den zwei Elementarsignalen Stromfluß und Pause betrachten. Mit Hilfe dieser beiden Elementarsignale lassen sich Buchstaben, Ziffern und beliebige andere Symbole übertragen. So wird z. B. beim Telegrafenkode für Fernschreiber jedes Zeichen durch eine Kombination aus fünf Elementarsignalen gebildet.

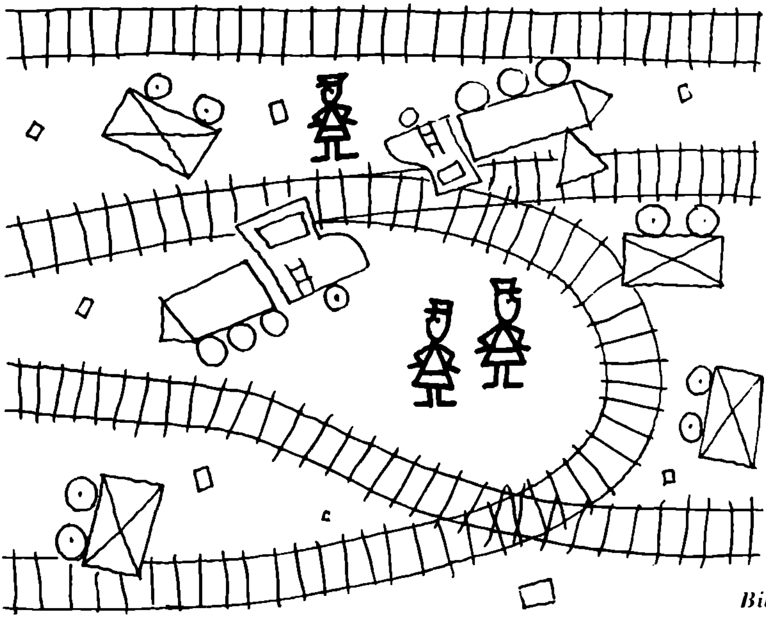


Bild 128

Die Elementarsignale sind ähnlich wie die beladenen Eisenbahngüterwagen Träger der zu übertragenden Information. Die Informationsmenge, mit der sich ein Elementarsignal „beladen" läßt, ist am größten. wenn das Auftreten der Elementarsignale gleichwahrscheinlich ist. Die Elementarsignale haben eine bestimmte zeitliche Dauer. Deshalb ist die Informationsmenge begrenzt, die sich in der Zeiteinheit durch den Kanal übertragen läßt. Als Maß für die Durchlaßfähigkeit eines Nachrichtenkanals wird man die maximale Informationsmenge ansehen, die sich in der Zeiteinheit über den Kanal übertragen läßt.
Beim Eisenbahntransport geht ein Teil der Fracht verloren, z. B. durch Zugunglücke und Naturkatastrophen, durch Unachtsamkeit usw. Wenn derartige Verluste häufig eintreten würden, müßte man sie bei der Zusammenstellung der Züge und der Aufstellung der Fahrpläne berücksichtigen. Eine derartige Situation kann beispielsweise in Kriegszeiten eintreten, wenn die Züge häufigen feindlichen Angriffen ausgesetzt sind.
Selbst beim Auftreten von Verlusten kann man die Durchlaßfähigkeit einer Bahnstrecke ermitteln. Sie ist natürlich geringer als die Durchlaßfähigkeit, wenn keine Verluste auftreten.
Eine analoge Situation liegt beim Nachrichtenkanal vor: Im Kanal wirkende Störungen entstellen die zu übertragenden Signale, und im Ergebnis geht ein Teil der Information verloren. Auch hier läßt sich der Begriff der Durchlaßfähigkeit des Kanals aufrechterhalten: Sie wird

bestimmt durch die maximale Informationsmenge, die sich im Mittel in der Zeiteinheit über den gestörten Kanal übertragen läßt.
Die Durchlaßfähigkeit des gestörten Kanals wird also durch die Anzahl und die Dauer der Elementarsignale und durch die Wahrscheinlichkeit, mit der sie durch Störungen entstellt werden (d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Elementarsignal gesendet und statt dessen ein anderes empfangen wird) bestimmt. Sie hängt von nichts weiter ab.

Kodierung

Sicher werden Sie auch bei einer schlechten Fernsprechverbindung alles mitbekommen, was Ihnen Ihr Gesprächspartner mitteilen will, wenn er es nur genügend oft wiederholt. Doch dann dauert das Gespräch sehr lange. Das gleiche gilt auch für den Telegrafen und andere Informationsübertragungssysteme. Die mehrfache Wiederholung der Nachrichten gibt die Möglichkeit der zuverlässigen Übertragung. Dabei sinkt allerdings die Übertragungsgeschwindigkeit stark.
Betrachten wir nun einige Beispiele für Kodes. Allgemein bekannt ist das Morse-Alphabet, bei dem die Buchstaben durch Folgen von Punkten („0“) und Strichen („1“) dargestellt werden. Hier sind einige Beispiele für Kodegruppen im Morse-Alphabet:

Buchstabe	A	B	C	D	E	F	G
Kode	01	1000	1010	100	0	0010	110

Sie erinnern sich sicher an die in Tafel 10 wiedergegebenen Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Buchstaben in der deutschen Sprache auftreten. Im Morse-Alphabet bestehen die Kodegruppen aus unterschiedlich vielen Symbolen; durch einen Vergleich können Sie feststellen, daß häufig auftretende Buchstaben kurze Kodegruppen haben.
Im bereits erwähnten Telegrafen-Alphabet für den Fernschreiber haben alle Kodegruppen die gleiche Anzahl von Symbolen. Einige Beispiele für Kodegruppen im Telegrafen-Alphabet sind:

Buchstabe	A	B	C	D	E	F	G
Kode	00011	11001	01110	01001	00001	01101	11010

Solche Kodes heißen gleichmäßig, weil im Gegensatz zu den ungleichmäßigen Kodes (wie dem Morsekode) alle Kodegruppen die gleiche Länge haben.
Der Vorteil der ungleichmäßigen Kodes ist offensichtlich: man hat zur Übertragung von häufig vorkommenden Nachrichten (Buchstabe E!) nicht die gleiche Zeit zu verwenden wie zur Übertragung von seltener auftretenden Nachrichten (Buchstabe F!). Dafür besitzen die gleichmäßigen Kodes andere Vorzüge.
Bei der Übertragung der Kodegruppen muß man sorgfältig auf ihre Trennung achten, damit kein völliger Wirrwarr entsteht. Beim Morse-Alphabet trennt man die Kodegruppen durch Zwischenräume. Geht bei-

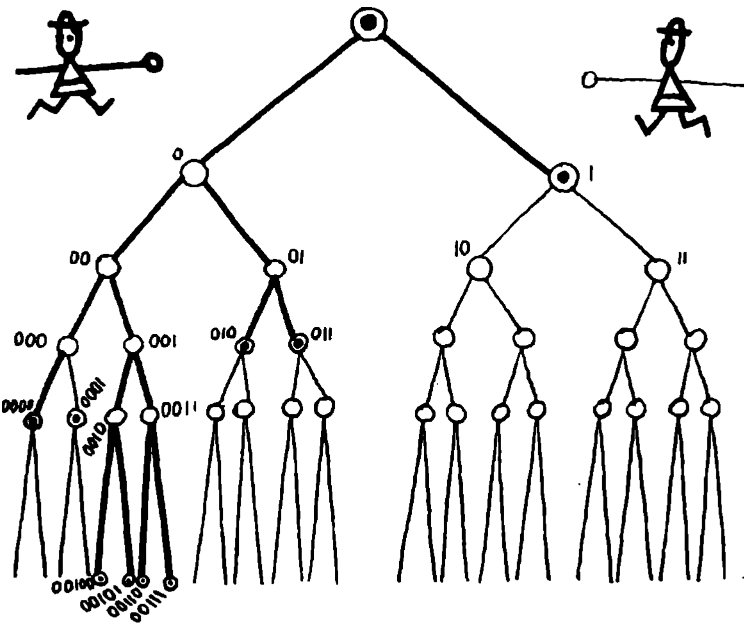


Bild 129

spielsweise im Wort DA (10001) der Zwischenraum verloren, so kann man die erhaltene Folge 10001 fälschlich z. B. als NU (10 001), als NIT (10 00 1) oder als TV (1 000 1) dechiffrieren.

Man kann einen ungleichmäßigen Binärkode aber auch ohne Zwischenräume aufstellen. Die Idee besteht darin, daß man keine Kodegruppen verwendet, deren Anfänge bereits selbständige Kodegruppen sind. Die möglichen Kodegruppen kann man mit Hilfe eines Graphenbaums auswählen. An die zwei oberen Knoten schreiben wir 0 und 1 (Bild 129). Bei jeder Verzweigung nach unten schreiben wir an den linken Knoten eine 0 und an den rechten eine 1. Somit stehen hinter dem n-ten Schritt alle 2^n Kombinationen zur Verfügung.

Den Kode ohne Zwischenräume bauen wir nach dem folgenden Algorithmus: Wenn wir eine bestimmte Kodegruppe bereits benutzt haben, sagen wir 010, so bleibt der ganze weitere Teil des Baumes, der sich von diesem Knoten aus verzweigt, unberücksichtigt. Im Beispiel nach Bild 129 sind die benutzten Knoten durch einen Punkt im Kreis gekennzeichnet und die benutzten Kanten fett ausgezogen. Auf diese Weise kann man die erforderlichen nicht verwechselbaren Kodegruppen bilden.

In den vorstehend beschriebenen Kodes wird jeder zu übertragende Buchstabe einzeln kodiert. Derartige Kodes kann man den jeweiligen Erfordernissen entsprechend bilden. So lassen sich günstige z. B. selbst-

Bild 130

kontrollierende oder selbstkorrigierende Kodes angeben, bei deren Verwendung etwa auftretende Übertragungsfehler erkannt oder sogar korrigiert werden können.

Glückwunschtelegramme, z. B. zum Neuen Jahr, werden zu ermäßigten Gebühren übermittelt. Man muß dann aus einer Reihe von Standardtexten einen passenden auswählen. Es ist nicht nötig, den gesamten Text eines solchen Telegramms zu übertragen. Man muß nur die Adresse des Empfängers und die Chiffre des gewünschten Textes übermitteln. Deswegen kann man die Gebühren senken.

Dienstliche Mitteilungen, z. B. über Bankoperationen, lassen sich meist auch in eine Standardform bringen. Bei der Übertragung solcher Nachrichten hat die Zuverlässigkeit der Übermittlung entscheidende Bedeutung. Darum empfiehlt es sich, die Chiffre mehrfach zu übertragen.

Wir haben bereits die Struktur unserer Sprache erörtert und festgestellt, daß nicht alle möglichen Buchstabenkombinationen, sondern vor allem einige bestimmte verwendet werden.

Sie kennen sicher das Wortspiel, mit dem sich Schüler und Studenten während uninteressanter Unterrichtsstunden oder Vorlesungen die Zeit vertreiben. Aus den Buchstaben eines bestimmten Wortes sind alle möglichen anderen sinnvollen Wörter zu bilden. Aus einem langen Wort wie „Elektrifizierung" entstehen derart etwa 200 andere sinnvolle Wörter!

Ich will die Bedingungen etwas ändern. Wir nehmen drei Buchstaben, z. B. A, K, R, und bilden aus ihnen alle möglichen Wörter. Hierfür gibt es $3^3 = 27$ Möglichkeiten, die nachfolgend aufgeführt sind. Diejenigen, die in der deutschen Sprache einen Sinn haben, sind durch Großbuchstaben hervorgehoben:

aaa	kaa	raa
aak	kak	rak
AAR	KAR	RAR
aka	kka	rka
akk	kkk	rkk
akr	kkr	rkr
ara	kra	rra
ark	krk	rrk
arr	krr	rrr

Von den 27 Wörtern sind lediglich drei sinnvoll!
Die Anzahl der Wörter in unserer Sprache beträgt etwa 100000; die Anzahl aller möglichen siebenbuchstabigen Wörter aus den 26 Buchstaben des deutschen Alphabets ist offensichtlich 26^7, das sind mehr als 8 Milliarden! In der deutschen Sprache gibt es aber auch Wörter aus 10, 12, 15 und mehr Buchstaben! Bei der Bildung der Wörter wird also nur ein kleiner Teil der möglichen Buchstabenkombinationen benutzt; auf Millionen sinnloser Wörter kommt nur ein sinnvolles!

Modell der Sprache und Informationsübertragung

Im Modell der Sprache in Form einer Markoffschen Kette hingen die Wahrscheinlichkeiten des jeweils nachfolgenden Buchstabens von den vorangegangenen Buchstabenkombinationen ab. Mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten kann man die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen mehrbuchstabigen Nachrichten berechnen. Unter den möglichen zehnbuchstabigen Wörtern gibt es solche wie aqcuhxsyer, für die die Wahrscheinlichkeit, auf dem Telegrafen übertragen zu werden, praktisch Null ist und solche wie gratuliere, die in Telegrammen mit recht großer Wahrscheinlichkeit vorkommen.
Ich werde weiterhin alle Nachrichten in zwei Kategorien einteilen: hochwahrscheinliche und wenigwahrscheinliche. Obwohl eine solche Einteilung nur bedingt gültig ist, kann man ihr doch einen wohlumrissenen Sinn geben. Das Wesentliche besteht darin, daß nicht nur die Wahrscheinlichkeit eines jeden Wortes der geringwahrscheinlichen Gruppe klein ist, sondern sogar die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Wörter dieser Gruppe.
Shannon betrachtet die Übertragung von Nachrichten, die eine einfache Markoffsche Kette bilden.
Markoffsche Ketten treten nicht nur in der menschlichen Sprache auf. Die Folge der Steuerbefehle irgendeines Aggregats, der Prozeß des

Verlaufs einer Krankheit, die Aufeinanderfolge chemischer Umwandlungen u. ä. können häufig mit Hilfe Markoffscher Ketten beschrieben werden.
Ihnen ist sicher auch schon die Möglichkeit eingefallen, die Kodierung einzelner Buchstaben durch die Kodierung ganzer Wörter, oder, besser gesagt, ganzer Blöcke von Zeichen zu ersetzen.
Ist die Zeichenfolge am Eingang des Nachrichtenkanals eine Markoffsche Kette, so zerfällt bei Betrachtung genügend langer Blöcke von Zeichen die Menge der Nachrichten in eine relativ kleine Gruppe hochwahrscheinlicher Nachrichten, deren Übertragung wichtig ist, und in eine relativ große Gruppe geringwahrscheinlicher Nachrichten, deren Übertragung weniger wichtig ist. Sie brauchen u. U. gar nicht übertragen zu werden, so gering ist die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens.
Jetzt ist die Kodierungsmethode für die Gruppe der hochwahrscheinlichen Wörter zu wählen. Wir gehen dabei davon aus, daß die Kodierung günstiger wird, wenn längere Ketten von Zeichen gleichzeitig kodiert werden.

Das Wichtigste der Theorie der Informationsübertragung

Wenn die Frachtmenge, die im Mittel in der Stunde angeliefert wird, die Durchlaßfähigkeit der Bahnstrecke nicht übersteigt, läßt sich die Fracht abtransportieren. Im anderen Fall können nicht alle Güter befördert werden; sie werden sich nach und nach zu großen Mengen ansammeln, und schließlich sind besondere Maßnahmen nötig, um die gesamte Fracht doch noch zu befördern.
Ein analoges Bild kann man bei der Informationsübertragung im Nachrichtenkanal beobachten. Wenn die mittlere Informationsmenge, die in der Zeiteinheit auf den Eingang des Nachrichtenkanals gelangt, kleiner ist als die Kanalkapazität, so kann die gesamte Information über den Kanal übertragen werden. Übersteigt die in der Zeiteinheit auf den Kanal gelangende Informationsmenge die Kanalkapazität, ist eine Übertragung der gesamten Information unmöglich.
Diese Behauptung scheint auf den ersten Blick offensichtlich zu sein. Ich erinnere jedoch daran, daß im Kanal Störungen wirken, die die übertragenen Signale auf zufällige Weise entstellen. Deshalb können bei näherem Überlegen Zweifel daran entstehen, daß beim gestörten Kanal eine fehlerfreie Übertragung der Information möglich ist.
Zur Klärung sei zunächst daran erinnert, daß zwar ein Teil der Signale entstellt wird, doch trotz der zufälligen Störungen wird eine gewisse Information übertragen. Die Kanalkapazität war gerade als die maximal mögliche Informationsmenge, die sich unter Berücksichtigung der Störungen in der Zeiteinheit übertragen läßt, definiert.
Um jedoch eine der Kanalkapazität entsprechende Informationsmenge übertragen zu können, ist eine entsprechende Kodierung nötig. Der Kode ist so zu wählen, daß die Information, auch wenn einzelne Signale ent-

stellt werden, eindeutig entziffert werden kann. Dazu kann man z. B. längere Blöcke kodieren und nicht einzelne Zeichen oder Buchstaben. Um genau zu sein, muß man noch eine Bemerkung machen: Zur Realisierung einer näherungsweise idealen Kodierung wären recht lange Nachrichten auf einmal zu kodieren, was technisch schwer zu verwirklichen ist. Wie schwierig wäre es, sämtliche im Verlauf eines Tages abgesandten Telegramme als eine Nachricht zu kodieren!

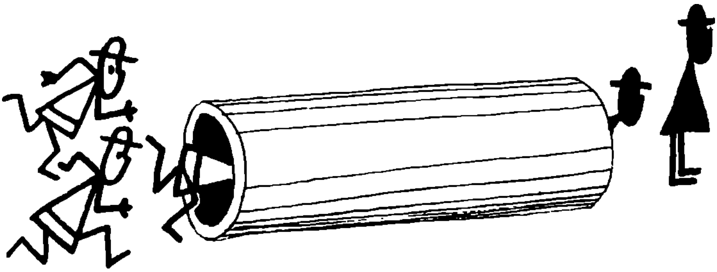


Bild 131

Mit der Erhöhung der Sicherheit der Übertragung, d. h. mit der Verringerung der Anzahl der Übertragungsfehler wird die Kodierung komplizierter. Diese wichtige Idee und die Theorie, die die Möglichkeit einer solchen Kodierung begründet, sowie einige Konstruktionsmethoden für Kodes stammen von *Shannon*. Wie sind die Kodes aufzustellen, die die Shannonschen Ideen verwirklichen? Es gibt viele Verfahren zur Entwicklung solcher Kodes. Im letzten Jahrzehnt sind auf dem Gebiet der Theorie der fehlererkennenden und fehlerkorrigierenden Kodes beachtenswerte Erfolge erzielt worden.

Die Aufstellung solcher Kodes ist eine interessante mathematische Aufgabe. Viele Kodierungsmethoden sind elementar und interessant. Es würde zuviel Raum einnehmen, um über sie zu berichten. Vor allem habe ich schon so übermäßig lange Ihre Aufmerksamkeit für die Probleme der Informationsübertragung in Anspruch genommen.

Was wird mit dem Inhalt?

Wenn Sie nicht Konstrukteur von Nachrichtensystemen sind, sondern der glückliche Vater, ist für Sie die Geburt eines Mädchens oder eines Jungen keinesfalls ein und dieselbe Information. Für Sie ist der Inhalt, die Bedeutung der erhaltenen Nachricht wichtiger als ihre Wahrscheinlichkeit für den Konstrukteur. Es ist schwer, hier mit Ihnen nicht einer Meinung zu sein. Wie könnte man aber ein Maß für den Inhalt, den Wert oder die Wichtigkeit einer Nachricht einführen? Wie kann man die bedeutungsmäßige oder, wie man sie auch nennt, semantische Information untersuchen? Ist das überhaupt möglich?

Die Nachricht über die Entdeckung eines neuen Antibiotikums hat für ein Kind, das gerade buchstabieren kann, für einen Schüler der neunten

Klasse, für einen Mikrobiologiestudenten und für einen führenden Spezialisten auf dem Gebiet der Antibiotika sehr unterschiedlichen Informationswert. Für die verschiedenen Empfänger kann also eine Information von unterschiedlichem Wert sein.

In der statistischen Informationstheorie, von der in den vorangegangenen Abschnitten ausführlich die Rede war, wird angenommen, daß der Empfänger in der Lage ist, die gesamte Informationsmenge, die im Nachrichtenkanal übertragen wird, zu erfassen; gerade diese größtmögliche Informationsmenge wurde dort betrachtet. Es ging also um die potentielle Möglichkeit, aus einer gegebenen Nachricht eine gewisse Informationsmenge zu entnehmen, und nicht darum, welche Information irgendein Empfänger einer zu ihm gelangenden Nachricht entnimmt.

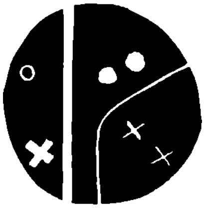
Andererseits hängt die Fähigkeit, einer Nachricht Information zu entnehmen, davon ab, über welchen Vorrat an Kenntnissen der Empfänger der Nachricht verfügt. Gerade deshalb enthält die Nachricht über die Entdeckung eines neuen Antibiotikums unterschiedliche Information für das Kind, den Oberschüler, den Studenten oder den Spezialisten.

Wir wollen uns den Vorrat an Ausgangsinformation, über den der Empfänger verfügt, in Form eines Wörterbuchs vorstellen, das nicht nur die Wörter enthält, sondern auch die Beziehungen zwischen ihnen. Wenn also die Wörter „Schüler“ und „Buch“ in diesem Lexikon stehen, ist auch die Beziehung zwischen ihnen aufgeführt: Der Schüler liest ein Buch, oder der Schüler hat ein Buch; in keinem Fall liest das Buch den Schüler od. dgl.

Der Autor des hier dargelegten Zugangs zum Studium der semantischen Information, der sowjetische Mathematiker *J. Schreider*, hat dieses Lexikon Tesaurus genannt. Das ist ein griechisches Wort und bedeutet so viel wie Schatz, doch das ist unwesentlich, wie wir bereits im Abschnitt über das Entstehen von Fachausdrücken bemerkten. Da der Tesaurus beim Kind, beim Oberschüler, beim Studenten und beim Spezialisten unterschiedlich ist, ist die Nachricht über die Wirksamkeit von Streptomyzin bei der Heilung von Lungenentzündung für sie von unterschiedlichem Informationswert. Das Kind kann eine solche Information überhaupt nicht aufnehmen (deshalb ist die Informationsmenge gleich Null); der Oberschüler empfängt weniger Information als der Student, der gerade die Pharmakologie studiert, und der Spezialist erhält keine Information aus dieser Nachricht, da ihm diese Tatsache längst bekannt ist. Das Maß der erhaltenen Information hängt also von der Größe (der Entwicklung) des Tesaurus des Empfängers ab. Stellt man die Informationsmenge in Abhängigkeit vom Tesaurus grafisch dar, so sieht die Kurve wie die positive Halbschwingung einer Sinuskurve aus. Das Maximum entspricht dem Empfänger, dessen Tesaurus gerade so weit entwickelt ist, daß er die empfangene Information aufnehmen kann, andererseits jedoch nicht so weit, daß sie für ihn nichts Neues bietet.

Wenn eine Nachricht zum Empfänger gelangt, ändert sich sein Tesaurus irgendwie. Die größte Änderung vollzieht sich im genügend vorbereiteten

Empfänger, der jedoch noch nicht so weit ausgebildet ist, daß die Nachricht für ihn etwas Bekanntes darstellt oder offensichtlich ist. Derart kann man den Grad der Änderung des Tesaurus als ein Maß für die Information ansehen, die ein bestimmter Empfänger mit der Nachricht erhält (oder als Maß der Information, die — bezogen auf den gegebenen Empfänger — in der Nachricht enthalten ist).
Vorläufig ist nur ein Anfang in dieser neuen schwierigen Forschungsrichtung gemacht worden. Nach fast zwanzigjährigem Triumph der statistischen Informationstheorie hat sich jetzt eine neue, hoffnungsvolle Untersuchungsrichtung aufgetan, die es auch erlaubt, die inhaltliche Bedeutung der Nachrichten zu berücksichtigen. Das verspricht neue Erfolge in der hochinteressanten Wissenschaft von der Information.



Was können mathematische Maschinen?

Auf den Titelseiten der Illustrierten oder populär-wissenschaftlichen Zeitschriften sind manchmal hübsche Mädchen in modernen Sesseln am Steuerpult von elektronischen Rechenmaschinen abgebildet. Aus dem Text geht hervor, daß die Maschine die Arbeit Tausender Rechner macht, daß sie arithmetische Operationen mit sagenhafter Geschwindigkeit und einmaliger Exaktheit ausführt. Für sie gibt es keine Schwierigkeiten und Hindernisse ...

Das ist eine schlechte Reklame! Genausowenig wie das Mädchen löst der Rechenautomat die Aufgaben, denn diese werden tatsächlich von den Mathematikern gelöst! Nicht nur die zwei oder drei, die das Programm aufgestellt haben, sind beteiligt, obwohl ihr Anteil mitunter groß und ihre Arbeit nicht leicht ist. In der Lösung jeder Aufgabe wird das Genie vieler Generationen großer Mathematiker sichtbar, darunter auch unserer Zeitgenossen.

Wenn die elektronische Rechentechnik lediglich die Arbeit der Bankangestellten und Kassiererinnen verbessern sollte, würde man keine Maschinen benötigen, die Tausende oder Millionen Operationen in der Sekunde ausführen können. Diese Arbeit könnten bedeutend kleinere und billigere Geräte verrichten. Wichtig ist, daß sich die Möglichkeit bietet, qualitativ neue Aufgaben lösen zu können. Sämtliche drei Milliarden Erdbewohner würden es nicht fertigbringen, mit Hilfe von mechanischen Rechenmaschinen die Bahnkurve einer Rakete während des Fluges zu berechnen. Eine elektronische Rechenmaschine löst die Aufgabe ohne weiteres.

Wir wollen jetzt von den Möglichkeiten moderner mathematischer Maschinen sprechen. Absichtlich habe ich die Begriffe „elektronisch" und „schnellrechnend" vermieden, denn es gibt z. B. auch hydraulische und pneumatische Maschinen, und die Geschwindigkeit ist nicht immer das Wichtigste. So kann man beispielsweise in der chemischen Industrie elektronische Einrichtungen nicht überall benutzen; ein zufälliger Kurzschluß oder ein kleiner Funken könnte eine Explosion oder einen Brand auslösen. Außerdem laufen die Vorgänge hier relativ langsam ab. Gegenwärtig entsteht ein neuer Zweig der Wissenschaft, die Pneumonik. Sämtliche arithmetischen und logischen Operationen, die die elektronische Rechenmaschine elektrisch löst, müssen in pneumatischen Rechenanlagen mit Hilfe von Luftströmen realisiert werden, wobei man mit einem Luft-

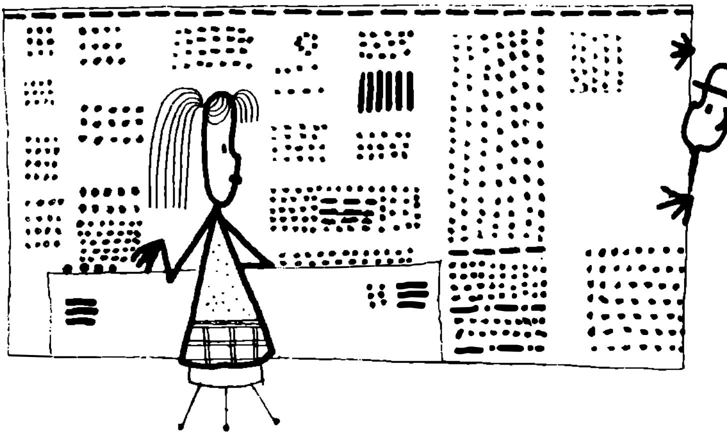


Bild 132

druck arbeitet, der sich nur wenig vom Normaldruck unterscheidet. Glauben Sie bitte nicht, daß ich sie davon überzeugen will, daß die Geschwindigkeit bei mathematischen Maschinen nicht wichtig ist.
Ökonomische Aufgaben, beispielsweise die Aufstellung des Monats- oder Jahresplans eines Betriebes oder des Volkswirtschaftsplans eines ganzen Landes, erfordern das Durchrechnen einer großen Anzahl von Varianten und die Auswahl der optimalen. Allerdings ist es von der allgemeinen Theorie bis zur praktischen Verwirklichung ein weiter Weg. Gegenwärtig arbeiten viele Mathematiker und Ökonomen an der Einführung mathematischer Methoden und mathematischer Maschinen in die Ökonomie. Die Schwierigkeiten sind sehr groß, vor allem auch die numerischen. Viele ökonomische Aufgaben werden mit Methoden der mathematischen Optimierung gelöst. Dabei besteht die lineare Optimierung als mathematisch einfachste Art in der Lösung linearer algebraischer Gleichungen und Ungleichungen.
Das aus der Schule bekannte System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, beispielsweise

$$5x_1 + 4x_2 = 25$$

$$2x_1 - 6x_2 = -9$$

läßt sich in 2 bis 3 Zeilen lösen. Dazu könnte man die erste Gleichung mit 2 und die zweite mit 5 multiplizieren, die zweite von der ersten abziehen, mit Hilfe von Addition und Division ergibt sich $x_2 = 2{,}5$; diesen Wert setzt man in die zweite Gleichung ein und erhält nach einer Subtraktion und einer Division $x_1 = 3$. Hier sind lediglich 9 Multiplikationen bzw. Divisionen und 6 Additionen bzw. Subtraktionen notwendig, also insgesamt 15 arithmetische Operationen.
Hat man jedoch ein System aus 800 Gleichungen mit 800 Unbekannten, so erfordert die Lösung bereits 250 Millionen arithmetische Operationen!

Bei der Untersuchung vieler Fragen in Ökonomie und Technik ergeben sich Aufgaben mit einem noch größeren Umfang an Rechenarbeit. Hier ist natürlich eine hohe Rechengeschwindigkeit von entscheidender Bedeutung, darüber hinaus werden Speicher mit großer Kapazität sowie spezielle Methoden zur Beschleunigung der Programmierung benötigt.
Man kann den mathematischen Maschinen nicht nur einfache Rechenarbeit, sondern auch andersartige Aufträge erteilen. Heute schon kann man viele Sätze der Elementargeometrie, sogar solche, die nicht in den Schulbüchern stehen oder der Menscheit vielleicht noch nicht einmal bekannt sind, auf mathematischen Maschinen beweisen; dafür existieren die erforderlichen Programme.
Dem Anschein nach unterscheidet sich der Beweis von Lehrsätzen prinzipiell von den arithmetischen und logischen Operationen, die beim Lösen von Gleichungen ausgeführt werden. Tatsächlich führen aber mathematische Maschinen nur arithmetische und elementare logische Operationen, Ordnungsoperationen, Vergleich von Zahlen und Auswahloperationen (z. B. die Auswahl der größten Zahl aus einer Gruppe von Zahlen) aus. Für den Beweis von Sätzen und zur Durchführung beweisender Überlegungen sind jedoch andere Operationen gar nicht notwendig.
Man kann mathematischen Maschinen sogar aufgeben, Musik zu komponieren. Der Mathematiker und Musiker *R. Saripov* hat sich mit der Modellierung musikalischer schöpferischer Arbeit auf universellen mathematischen Maschinen beschäftigt. Er untersuchte einige allgemeine Gesetzmäßigkeiten des Komponierens und stellte ein entsprechendes Programm für eine mathematische Maschine auf. Die Maschine hat nach diesem Programm Musik „komponiert". Ich habe diese Musik gehört – einige vernünftige Cellostücke, ein paar davon haben mir sogar gefallen. Freilich, wenn man diese Stücke hört, hat man den Eindruck, bereits bekannte Musik zu hören. Doch das kann einem auch manchmal im Konzert eines lebenden Komponisten passieren ...
Wie mir scheint, entsprechen die Illustrationen *A. Blocks* zu diesem Buch recht gut dessen Zielstellung. An dieser Stelle jedoch hat er sich hinreißen lassen, und, wie Sie sehen, in den Bildern 133, 134 und 146 Roboter dargestellt. Im Bild 133 sind nicht nur der Komponist und der Ausführende vertauscht, sondern, was noch wichtiger ist, auch die Arbeit *Saripovs* wird entstellt wiedergegeben. Seine Leistung besteht in der Aufstellung eines Programms zur Komposition von Musik, nach dem die Maschine eine Folge von Ziffern ausdrückt, die die Noten nach einem bestimmten Kode darstellen. Die Aufgabe des Musikanten besteht lediglich in der Wiedergabe des Musikstücks.
In der wissenschaftlichen Öffentlichkeit wird die Frage der Nutzung mathematischer Maschinen zur Erhöhung der Effektivität des Lehrprozesses breit diskutiert. Für mich bestehen in dieser Frage keinerlei Zweifel: Die vernünftige Anwendung von Lernmaschinen hat zweifellos große Vorteile. In die Lehre dringen aber neue Methoden recht langsam ein.

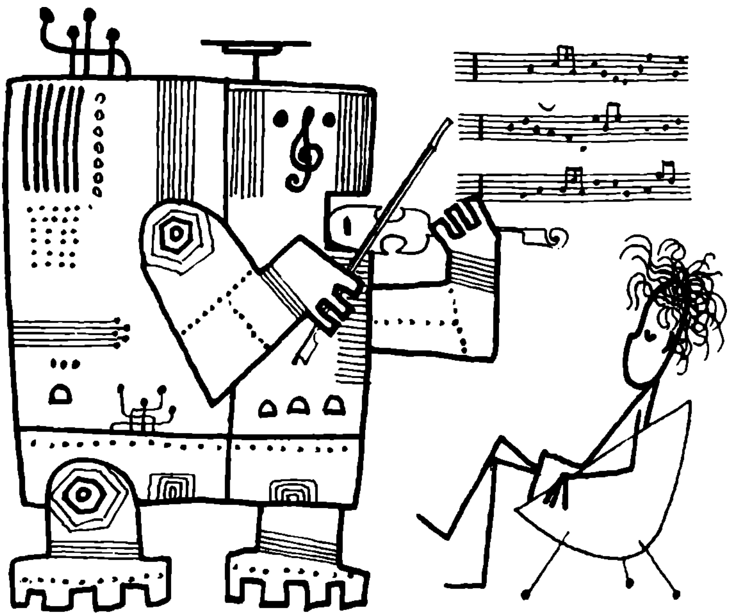


Bild 133

Vorlesungen werden heute noch genauso wie vor Hunderten von Jahren gehalten. Ich schreibe die Formeln mit Kreide an die Tafel, wische die Tafel mit einem Lappen ab, diktiere Definitionen, die jeder Student dem Lehrbuch entnehmen kann und erobere die Aufmerksamkeit des Auditoriums durch die bekannte Politik mit „Zucker und Peitsche": Einerseits erzähle ich Anekdoten oder „Geschichten aus dem Leben", andererseits unterbreche ich sich munter unterhaltende Mädchen durch eine giftige Bemerkung und mache junge Männer lächerlich, die nach einem für das Selbststudium vorgesehenen, aber stürmisch verbrachten Abend im Hörsaal einschlafen. In der Prüfung muß ich einem Studenten in einer halben Stunde oder sogar einer ganzen beweisen, daß er eine schlechte Zensur gerecht verdient hat, obwohl mir die Zensur nach einigen Minuten klar ist. Der Student darf aber nicht glauben, daß er seine Fünf nur erhält, weil er zufällig unglückliche Fragen gezogen hat, er muß von seinem Nichtkönnen überzeugt werden.
Man überträgt bereits gegenwärtig Maschinen das Abnehmen von Prüfungen, und die gesammelten Erfahrungen sind offenbar nicht schlecht. Die Angst vor dem Prüfenden verschwindet, und man kann ihn nicht der Ungerechtigkeit bezichtigen: Die Maschine gibt die Zensur in Abhängigkeit von der Anzahl der richtigen und falschen Antworten und vom Schwierigkeitsgrad der gestellten Fragen. Erfolge gibt es auch bei der Anwendung mathematischer Maschinen im Lernprozeß selbst; man darf hoffen, daß die bereits gemachten Schritte nur ein Anfang sind.

Die Mathematiker haben auf Maschinen das Schachspiel und andere Spiele programmiert, z. B. Domino und einfache Kartenspiele. Den Leser wird sicher interessieren, wer diese fröhliche Unterhaltung der Mathematiker bezahlt! Die Programmierung eines Spiels, z. B. des Schachspiels, ist jedoch keine Unterhaltung, sondern die Modellierung der intellektuellen Tätigkeit des Menschen.
Gegenwärtig wird der Aufstellung von Programmen für Übersetzungen aus einer Sprache in eine andere viel Aufmerksamkeit gewidmet. Auch hier könnte man sich wieder fragen, ob es nicht billiger wäre, einen Übersetzer einzustellen. Heute ist das gewiß noch so, doch wahrscheinlich kommt bald die Zeit, in der eine maschinelle Übersetzung billiger und vor allem schneller sein wird. Außerdem ist die Programmierung der maschinellen Übersetzung ebenfalls eine Modellierung der intellektuellen Tätigkeit des Menschen. Und was kann für uns von größerem Interesse sein als wir selbst?

Gespräch mit einem Psychiater

Es gibt kein interessanteres Forschungsobjekt als den Menschen. Jeder Psychiater stößt auf eine erstaunliche Vielfalt menschlicher Charaktere und auf interessante Abweichungen von den gewöhnlichen Denknormen. Wenn ein Psychiater in der Lage ist, das alles zu sehen und zu erzählen, so wird es kaum eine interessantere Erzählung geben als diese.
Ich habe Glück gehabt: Ein Freund unserer Familie, ein talentierter Psychiater und äußerst wißbegieriger Mensch, hat uns im Verlauf vieler Jahre über die wichtigsten Ereignisse in seiner Praxis auf dem laufenden gehalten. Wenn man noch hinzufügt, daß der Psychiater eine reizende Frau und ein großartiger Erzähler ist, so hatte ich dreifaches Glück.
Mein Interesse für Kybernetik, Biologie und Medizin blieb ihr nicht unbekannt. Obwohl ich ihr über meine Gespräche mit Biologen und Medizinern berichtet hatte, schien ihr bis vor kurzem, daß sich kybernetische Methoden in der Psychiatrie nicht anwenden ließen. Vor einiger Zeit kam es nun zu folgendem Gespräch:

Psychiater: Ich möchte mich gern mit Ihnen über meine Arbeit beraten.
Ich: Mit Vergnügen! Welchen Nutzen erwarten Sie?
P: Ich muß meine Arbeit irgendwie kritisch durchdenken und umorganisieren. Wie Sie wissen, beschäftige ich mich mit den sogenannten Involutions- oder Alterspsychosen. Ich habe jetzt die Katamnesen[1]) meiner früheren Patienten zusammengetragen. Damit ergibt sich die Möglichkeit, den Verlauf der Krankheiten in Abhängigkeit von der Zeit zu verfolgen. Dieses Material ist irgendwie zu bearbeiten.
Ich: Was heißt — bearbeiten?

[1]) Anamnese — Vorgeschichte einer Krankheit bis zum Moment der Behandlung, Katamnese — Ausgang der Krankheit, Verlauf nach Beginn der Behandlung.

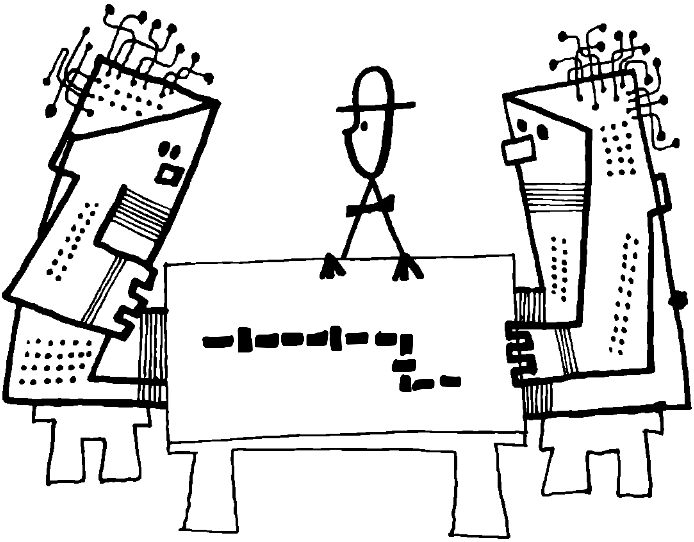


Bild 134

P: Es sind Schlußfolgerungen zu ziehen. Jetzt ist ersichtlich, ob ich vor 10 bis 15 Jahren die Diagnosen richtig gestellt habe.
Ich: Angenommen, wir berechnen den Anteil der richtig gestellten Diagnosen in Prozent. Was haben wir davon? Mir scheint, im besten Fall gelingt es uns lediglich, Ihre Qualifikation als Psychiater zu jener Zeit zu beurteilen. Man könnte dann die Frage stellen, ob Sie vor 15 Jahren Ihr Gehalt zu Recht bekommen haben, wenn viele Diagnosen falsch waren, oder eine Nachrechnung zu Ihren Gunsten verlangen, wenn der Anteil der Fehldiagnosen nur klein war. Allerdings ist hier die Hoffnung auf Erfolg gering!
P: Machen Sie bitte keine Späße, meine Frage war ernst gemeint.
Ich: Sagen Sie bitte, ob man den Anteil der Fehldiagnosen absolut sicher bestimmen kann! Ich meine die Zuverlässigkeit der Diagnosen zum gegebenen Zeitpunkt!
P: In irgendeiner britischen medizinischen Fachzeitschrift begann ein Artikel über Psychiatrie folgendermaßen:
„Der Neurastheniker ist ein Subjekt, das Luftschlösser baut. Der Schizophreniker ist ein Mensch, der in einem dieser Schlösser wohnt. Der Psychiater kassiert die Pacht und die Miete bei beiden."
Sie sehen, daß der Autor Neurastheniker und Schizophreniker unterscheidet; doch er achtet die Möglichkeiten des Individuums, sich zunächst ein Luftschloß zu bauen und sich dann darin einzuquartieren.
Wir wollen ernst bleiben: es ist sehr schwierig, eine zuverlässige Diagnose zu stellen. Vor kurzem habe ich eine meiner Patientinnen meinem wissenschaftlichen Chef vorgestellt; wir konnten nicht zu

einer Meinung kommen, ob die Patientin an Schizophrenie oder an Psychopathie leidet.
Ich: Es gibt aber auch Fälle, in denen die Diagnose eindeutig ist?
P: Ja, recht häufig. Jedenfalls gelangen qualifizierte Psychiater ein und derselben Schule in der Regel zu denselben Diagnosen.
Ich: Was ändert sich denn, wenn eine andere Diagnose gestellt wird? Bessert sich dadurch der Zustand des Patienten?
P: Wohl kaum. Die Behandlungsmethode kann aber anders aussehen.
Ich: Wieviel verschiedene Diagnosen kann es bei den von Ihnen untersuchten Krankheiten, deren Symptome doch sehr ähnlich sind, überhaupt geben?
P: Wir diagnostizieren viele Krankheiten. Bei den Psychosen des späten Alters, mit denen ich mich beschäftige, kann man sieben unterscheidbare klinische Formen feststellen. Das sind die praktisch diagnostizierbaren Krankheiten. Bei einer tieferen und feineren Analyse kann man, wenn man kasuistisch vorgeht, vermutlich mehr als 20 verschiedene Krankheiten unterscheiden.
Ich: Jede Krankheit hat ihre besondere Behandlungsmethode, oder gibt es weniger Behandlungsmethoden als Krankheiten?
P: Vorläufig haben wir noch nicht für jede Erkrankung eine besondere Behandlungsmethode. Es gibt weniger Methoden als Krankheiten.
Ich: Wozu sind dann mehr Diagnosen nötig als es Behandlungsmethoden gibt?
P: Das ist eine schwierige Frage. Vielleicht werden wir später einmal mehr Behandlungsmethoden haben. In den letzten zehn Jahren hat sich ein neues Wissensgebiet entwickelt, ein Grenzgebiet zwischen Psychiatrie und Pharmakologie, die sogenannte Psychopharmakologie. Die Anzahl der neusynthesierten psychopharmakologischen Präparate wächst ständig. In der klinischen Praxis werden sie in reiner Form und in Kombinationen angewendet; ihre Wirkung ist manchmal frappierend, manchmal ungenügend. Die Kliniker wenden sich immer neuen Kombinationen zu. Es ist klar, daß wir nach und nach lernen, die Präparate besser und genauer zu wählen, und es ist nicht ausgeschlossen, daß bald einer genau und rechtzeitig gestellten Diagnose eine ganz bestimmte Behandlungsmethode entsprechen wird. Deshalb ist heute die frühzeitige Diagnostik eine aktuelle Aufgabe. In späteren Stadien der Erkrankungen ist die Diagnose zwar offensichtlich, jedoch die Behandlung fast erfolglos.
Ich: Gut! Nehmen wir an, daß es Ihnen gelungen ist, die Diagnosen mit dem Ausgang der Krankheit bei den Patienten zu vergleichen, die Sie behandelt haben. Na und?
P: Das ist es ja gerade, dieses „Na und nun?“ In der Psychiatrie sind viele derartiger beschreibender Arbeiten erschienen. Vielleicht ist die Zeit für einige wesentliche und objektive Verallgemeinerungen gekommen, damit die charakteristischen Besonderheiten des frühen

Krankheitsstadiums, die zu dem einen oder anderen Ausgang der Krankheit führen, sicher erkannt werden können.

Ich: Wozu ist das nötig, wenn der Weg zum Höhepunkt der Krankheit nicht von Ihnen abhängt?

P: Halt, das stimmt nicht! Bei einer richtigen Diagnose kann die Heilung beeinflußt werden. Außerdem hat eine richtige Diagnose häufig allergrößte Bedeutung für das Schicksal des Kranken, z. B. bei gerichtspsychiatrischen Gutachten.

Von der Diagnose des Zustands des Untersuchten hängt die Feststellung seiner Zurechnungsfähigkeit oder Unzurechnungsfähigkeit ab. Diese Feststellung hat strafrechtliche und zivile Bedeutung. So kann ein Angeklagter nur dann verurteilt werden, wenn er zum Zeitpunkt des Verbrechens zurechnungsfähig war. Einem anderen Menschen kann das Recht abgesprochen werden, Kinder zu erziehen oder eine Ehe einzugehen, wenn seine Unzurechnungsfähigkeit festgestellt wird.

Ich: Ja, das sind ernste Probleme. Aber wie werden Sie denn jetzt damit fertig?

P: In den gewöhnlichen Fällen stellt ein erfahrener Psychiater eine einwandfreie Diagnose. Leider gibt es auch mehr als genügend ungewöhnliche Fälle. Ich hatte beispielsweise einen Patienten zu konsultieren, der wegen wiederholter Rechtsverletzungen bereits in mehreren Instanzen gerichtspsychiatrisch untersucht worden war. Die Diagnose schwankte zwischen Psychopathie und Schizophrenie und dementsprechend zwischen Zurechnungsfähigkeit und Unzurechnungsfähigkeit.

Ich: Einen Moment, habe ich recht verstanden: Schizophrenie ist eine Krankheit und Psychopathie nur eine psychische Abart, die nicht als Krankheit gilt?

P: Bei Schizophrenie, einer recht verbreiteten Krankheit, verliert der Mensch weitgehend die Fähigkeit zu denken, zu fühlen und zu handeln. Diese drei Fähigkeiten bilden im Normalfall eine Einheit. Verliert der Mensch diese Einheit, so kommt es zur Spaltung, zur Zersplitterung (Schizophrenie – Spaltung der Person). Der Schizophreniker kann also keine Verantwortung für seine Handlungen tragen.

Bei der Störung der psychischen Tätigkeit, die als Psychopathie bezeichnet wird, können die Patienten ihre Handlungen steuern, sie haben sich unter Kontrolle. Verstehen Sie, hier ist die Rede von einem differentiellen Abgrenzen komplizierter Syndrome; die diagnostischen Abweichungen können bedingt sein durch verschiedenartige Auslegung einzelner Symptome.

Ich: Leider weiß ich nicht, was ein Syndrom ist!

P: Ein Syndrom ist ein bestimmtes Zusammentreffen verschiedener Symptome, manchmal sagt man, ein Symptomkomplex, der eine bestimmte Krankheit kennzeichnet.

Ich: Das ist schon verständlicher. Aus wie vielen Symptomen besteht ein Syndrom?
P: Das ist unterschiedlich, drei, fünf oder auch zehn.
Ich: Der Zustand eines Patienten wird durch einen ganz bestimmten Symptomkomplex charakterisiert, in dem jedes Symptom eine genau bestimmbare Bedeutung hat?
P: Eine mehr oder weniger bestimmte!
Ich: Das verstehe ich nicht. Versuchen wir die Situation zu vereinfachen. Wir wollen annehmen, daß jedes Symptom binär ist, d. h. nur zwei Werte annehmen kann. Der Untersuchte kann entweder erregt sein oder nicht, eifersüchtig sein oder nicht!
P: Gut, allerdings würde das die Situation übermäßig vereinfachen!
Ich: Ihnen scheint das zu einfach zu sein. Wollen wir etwas rechnen! Wenn ein Symptomkomplex aus 10 Symptomen besteht, so gibt es $2^{10} = 1024$ mögliche Varianten. Jede dieser Varianten läßt sich beschreiben, bedeutet etwas Bestimmtes!
P: Woher haben Sie die vielen Varianten?
Ich: Aha! Sie sagen, ich würde die Situation übermäßig vereinfachen. Machen wir uns die Sache klar! Angenommen, wir haben drei binäre Charakteristiken: Mann – Frau; erregt – nicht erregt; eifersüchtig – nicht eifersüchtig. Das entsprechende Schema zeigt Bild 135. Hier sind alle Möglichkeiten aufgeführt. Wie sie sehen, verdoppelt sich bei jedem Schritt die Anzahl der Varianten. Deshalb gibt es bei drei Symptomen $2^3 = 8$ Varianten, bei 10 Symptomen $2^{10} = 1024$ Varianten.

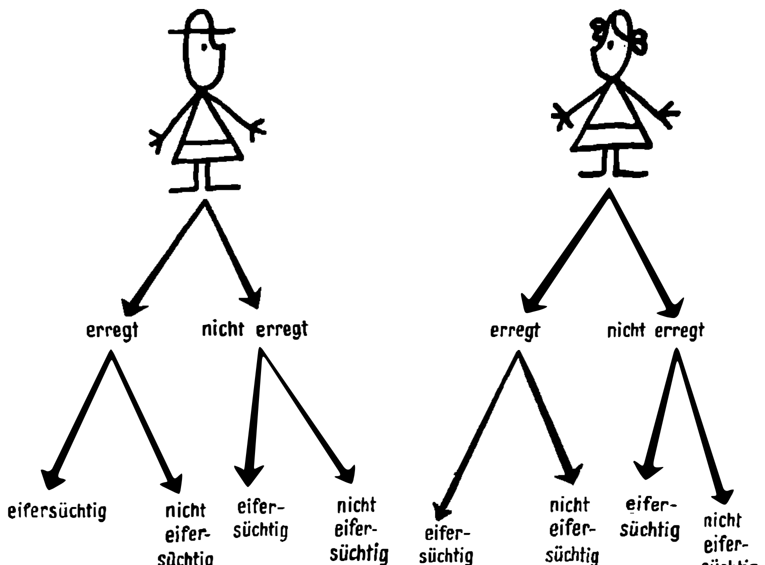


Bild 135

P: Ja, jetzt habe ich es verstanden. Ich habe mir nicht vorstellen können, daß es so viele Varianten gibt!
Ich: Was machen Sie nun, wie entwirren Sie diese Situation?
P: Das kann ich nicht sofort sagen, ich rechne selten!
Ich: Keine Angst, es müssen nicht alle Varianten auftreten. tatsächlich können es bedeutend weniger sein.
P: Ja, natürlich!
Ich: Wie lassen sich aber die wesentlichen Symptomkomplexe von den unwesentlichen unterscheiden?
P: Wir machen das irgendwie anders. Die Krankheitsbeschreibung umfaßt in der Psychiatrie etwa 15 bis 20 Schreibmaschinenseiten. Wenn sie gut geschrieben sind, kann man sich den Patienten bis in die kleinsten Einzelheiten vorstellen.
Ich: Wozu ist das nötig?
P: Die Menschen sind verschieden, und auch die Geisteskrankheiten verlaufen sehr unterschiedlich.
Ich: Es gibt aber auch verschiedene Psychiater. Angenommen, *Dostojewskij, Tolstoi, Tschechow, Tendrjakow* und *Nekrassow* hätten Psychiatrie studiert und würden ein und denselben Kranken beschreiben, sähe das nicht sehr verschieden aus? Ich gewinne fast den Eindruck, daß die Psychiatrie keine Wissenschaft, sondern eher eine Kunst ist!
P: Ja, die Psychiatrie ist heute tatsächlich fast eine Abart der Kunst! Deshalb frage ich Sie auch, was man da tun kann! Mir ist klar, daß man die Frage irgendwie anders stellen muß, doch wie, das kann ich mir schlecht vorstellen.
Ich: Wie viele Symptome werden in einer Krankheitsbeschreibung aufgeführt?
P: Viele, sehr viele. Ich kann es gar nicht so ohne weiteres sagen, wie viele!
Ich: Versuchen wir folgendermaßen vorzugehen: Sie stellen einen ausführlichen Fragebogen auf, meinetwegen mit mehreren hundert Fragen. Eine Reihe von Antworten sind Zahlen, beispielsweise das Alter, der Blutdruck usw. Bei den Symptomen, die sich nicht in Zahlen messen lassen, aber binärer Natur sind, setzen wir 1 und 0. Wenn ein Symptom unterschiedlich bewertet werden kann, messen wir es meinetwegen in einem Vierpunktesystem; eine stärkere Detailierung wird kaum nötig sein. Gerade in der Einschätzung der Details gehen ja die Meinungen der Ärzte auseinander; deshalb ist es meines Erachtens besser, wenn die Charakterisierung gröber ist.
P: Stopp! Das ist ein neues Moment – je gröber, um so besser. Wir bemühen uns immer, unsere Untersuchungen möglichst fein anzulegen!
Ich: Und dann finden Sie keine Übereinstimmung in den Einschätzungen!
P: Ja, in der Tat. Nehmen wir also an, ich hätte solch einen Fragebogen aufgestellt! Na und?

Ich: Dann nehmen Sie einige hundert Patienten, von denen Ihnen alles bekannt ist, sowohl die Krankheitsgeschichte als auch deren Ausgang. Für diese füllen Sie den Fragebogen aus. Dann versuchen wir eine kybernetische diagnostische Methode, ein Programm zur Zeichenerkennung, anzuwenden.
P: Was bringt das ein?
Ich: Zunächst kann man so lernen, automatisch Diagnosen zu stellen; außerdem kann man die Signifikanz oder den Informationsgehalt der verschiedenen Symptome und Charakteristiken herausfinden.
P: Das ist doch eine Riesenarbeit!
Ich: Geschenkt wird nichts!
P: Versuchen wir es ...

Zeichenerkennung

Das Schachspiel, das Komponieren einer Melodie, das Lösen von Gleichungen oder das Beweisen eines Lehrsatzes sind Tätigkeiten, die mathematische Maschinen nach bestimmten Regeln, die aus Folgen arithmetischer und logischer Operationen bestehen, ausführen können. Diese Regeln – das Programm – werden vom Menschen aufgestellt. Können sich mathematische Maschinen, ähnlich wie die Menschen, ein solches Programm zum Erreichen eines bestimmten Zieles auch selbst aufstellen oder können sie ohne ein vom Menschen aufgestelltes ausführliches Programm gar nichts?
Diese Frage kann gegenwärtig noch nicht abschließend beantwortet werden. Vor allem von Biologen, Medizinern und anderen Vertretern humanitärer Wissenschaften wird das Monopol des Lebenden für die Aufstellung von Programmen für ein zielgerichtetes Verhalten, d. h. die Überlegenheit des Lebenden gegenüber der Maschine, verteidigt. Dabei versteht man unter dem Wort Maschine etwas, das von Menschenhand mit Hilfe von Hammer, Meißel und Lötkolben geschaffen worden ist.
Was sagen die Mathematiker? Hier ist die Meinung des großen Mathematikers und Pädagogen *G. Polya*, dessen Name bereits früher erwähnt wurde. In einem Buch „Mathematik und plausibles Schließen“ schreibt er:
„Es war von Anfang an klar, daß diese beiden Denkarten (gemeint ist Beweisen und plausibles Schließen. J. Ch.) verschiedene Aufgaben haben. Von Anfang an schienen sie verschieden zu sein: Die Beweise schienen etwas Bestimmtes, Endgültiges, Maschinenähnliches zu sein, während die Plausibilitätsbetrachtungen einen unklaren, bedingten, spezifisch menschlichen Eindruck erweckten. Jetzt können wir den Unterschied deutlicher sehen. Im Gegensatz zur beweisenden Folgerung läßt der plausible Schluß einen wesentlichen Punkt offen: die „Kraft“ oder das Gewicht des Schlusses. Dieses Gewicht braucht nicht nur von den geklärten Beweggründen abzuhängen, von solchen, die irgendwie ausgedrückt werden können. Es kann auch von ungeklärten, unausgespro-

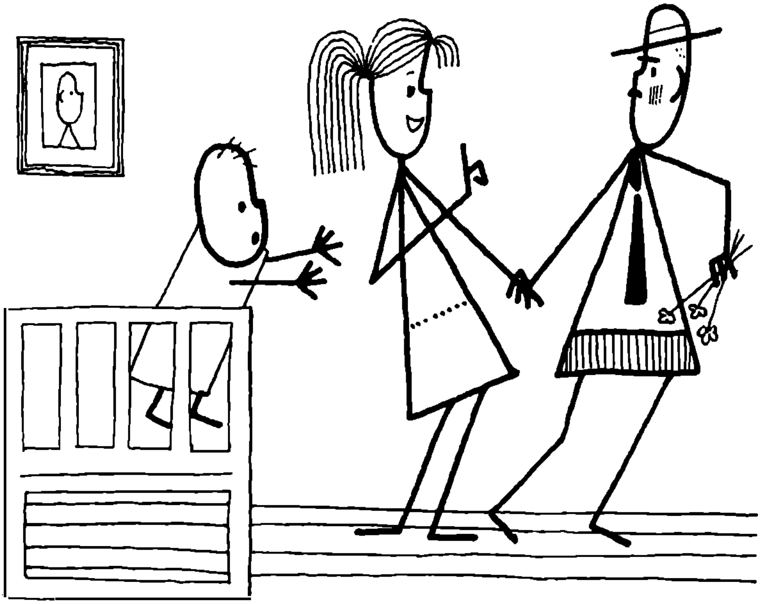


Bild 136

chenen Gründen abhängen, die irgendwo im Unterbewußtsein des Menschen liegen, der den Schluß ausführt. Der Mensch hat ein Unterbewußtsein, die Maschine nicht. Tatsächlich, Sie können eine Maschine bauen, die für Sie beweisende Schlüsse ausführt; ich bin aber der Meinung, daß Sie niemals eine Maschine bauen können, die Plausibilitätsbetrachtungen anstellt."

G. Polya glaubte also vor etwas mehr als zehn Jahren nicht, daß man von der Maschine plausible Schlüsse ausführen lassen kann. Heute wissen wir, daß sich *G. Polya* geirrt hat: Man kann eine Maschine auch lehren, Plausibilitätsbetrachtungen anzustellen, und an manchen Stellen hat sie bereits ihren Meister übertroffen.

Die Situation ist kompliziert; deshalb will ich etwas weiter ausholen: Einen Säugling lehrt man zunächst, Papa, Mama und Oma zu unterscheiden. Man wiederholt ihm laufend die Wörter Papa, Mama, Oma und zeigt dabei auf die entsprechenden Personen. Doch die Mama sieht jedesmal anders aus: aus dem Frisiersalon oder dem Bett gekommen, munter oder abgespannt, mal in dem einen Kleid, mal in einem anderen. und immer ist es Mama. Dasselbe bezieht sich auf den Papa. Da kommt eine Person mit dunklen Haaren (wie der Vater sie hat) und beugt sich zum Kind. Das Kind lallt freudig „Papa", aber die Mutter sagt — „Onkel". Das Kind muß nun lernen, seinen Vater von diesem Onkel und von allen anderen Onkel zu unterscheiden. Wie bringt es das fertig?

Wie geht der Prozeß des Lernens und des Erkennens der Onkel, Tanten, Katzen, Elefanten und Autos vor sich? Wie funktioniert dieser Mechanismus? Vorläufig ist uns darüber nichts Genaues bekannt!
Wodurch unterscheidet sich ein weibliches Porträt von einem männlichen, wie ein Erlenblatt von einem Birkenblatt? Tatsächlich sieht kein Birkenblatt wie das andere aus, sie sind sich nur ähnlich! Ist es möglich, einer mathematischen Maschine beizubringen, alle Objekte in Klassen ähnlicher Objekte zu unterteilen, genauso wie es die Kinder lernen, Buchstaben zu lesen, die von verschiedenen Leuten geschrieben wurden und deshalb nicht in genau derselben Weise geschrieben sind, oder wie es die Ärzte lernen, Diagnosen zu stellen, obwohl es auf der Welt keine zwei völlig gleichartige Menschen und völlig gleichartige Krankheiten gibt? Man kann der Maschine nicht einmal ein vorher formalisiertes Kriterium geben, nach dem sie die Klassifizierung vornehmen kann, denn uns stehen lediglich einige Exemplare von Objekten aus den verschiedenen Klassen zur Verfügung, z. B. zehn Erlenblätter und ein Dutzend Birkenblätter.
Das gleiche Problem ist auch bei der Konstruktion eines Automaten zum Lesen eines hand- oder maschinengeschriebenen Textes, beim Aufstellen eines Programms für eine mathematische Maschine, die das Stadium einer Schizophrenie klassifizieren oder Krebs diagnostizieren soll, zu lösen. Solche Automaten modellieren Denkfunktionen!
Die ersten Automaten zur Erkennung optischer Zeichen waren wie der Sehapparat der Lebewesen aufgebaut. Dieser ist eine der vollkommensten und erstaunlichsten Schöpfungen der Natur, eines der kompliziertesten Systeme. Auf der Netzhaut des menschlichen Auges befinden sich etwa 130 Millionen lichtempfindliche Zellen — Stäbchen und Zäpfchen. Nach diesen Rezeptoren (Zellen, die die Reizung aufnehmen) kommen noch einige Schichten anderer Zellen. Sie verarbeiten die auftretenden Signale in komplizierter Weise und schicken sie zum Gehirn. Dort werden sie weiter verarbeitet. Dieser Prozeß ist noch nicht endgültig geklärt. Die vorhandenen Modelle erlauben nur eine sehr grobe Vorstellung von diesem komplizierten Apparat.
Einer der Pioniere der Modellierung von Denkfunktionen durch Automaten, der amerikanische Ingenieur *F. Rosenblatt*, prägte für die Automaten, die Funktionen neurophysiologischer Systeme modellieren, den Namen Perzeptron. Das Wort kommt vom lateinischen perceptio, was soviel wie Auffassen, Begreifen bedeutet.
Ich werde nicht über die Theorie der Perzeptrons berichten, auch nicht über die Schaffung solcher Modelle durch den Menschen. Die Ideen, auf denen die Funktion der verschiedenen Perzeptrons beruht, sind sehr interessant; ihre praktische Realisierung für hinreichend komplizierte Aufgaben stößt aber vorläufig noch auf bedeutende Schwierigkeiten.
Viele Forscher, die sich mit dem Problem der Modellierung der Zeichenerkennung beschäftigten, begannen mit der Suche nach neuen Wegen. Über einen davon werde ich jetzt berichten.

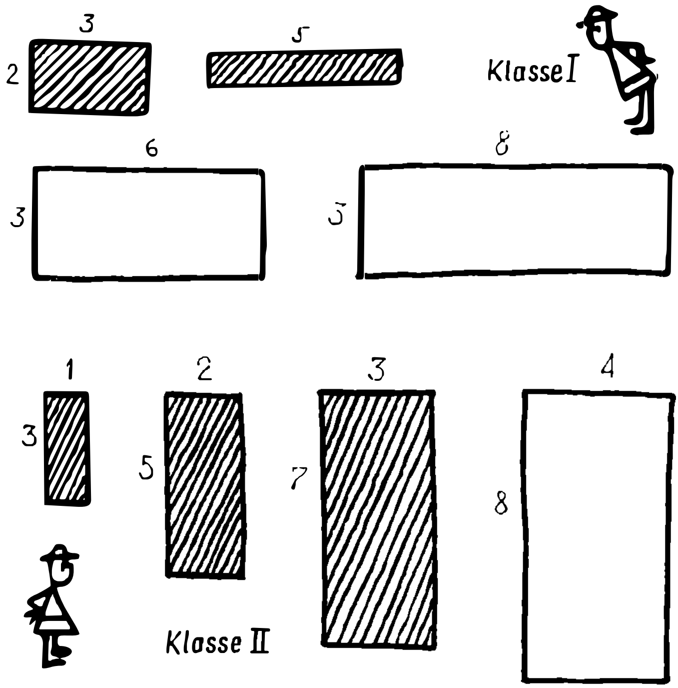


Bild 137

Im Bild 137 sind zwei Klassen von Rechtecken dargestellt. Kann man eine Maschine lehren, Rechtecke zu klassifizieren? Stellen wir die Aufgabe konkret! Zunächst werden Ihnen nur die im Bild dargestellten acht Rechtecke gezeigt. Dann erhalten Sie ein neues Rechteck, das nicht diesen acht aufgezeichneten entnommen wurde. Können Sie einen Algorithmus (eine Regel) vorschlagen, nach dem jedes neue Rechteck eindeutig in die Klasse I oder II eingeordnet werden kann?

Sie werden sagen, daß sich eine solche Regel sehr leicht formulieren läßt. Wir haben liegende und stehende Rechtecke. Vielleicht haben Sie recht: wie wollen Sie aber der Maschine die Begriffe liegend und stehend erklären? Das ist gar nicht so schwierig. Wir führen Bezeichnungen ein: x_1 sei die Breite des Rechtecks, x_2 seine Höhe. Dann ergibt sich für die Rechtecke der Klasse I und II die folgende Tafel:

Klasse I		Klasse II	
x_1	x_2	x_1	x_2
3	2	1	3
5	1	2	5
6	3	3	7
8	3	4	8

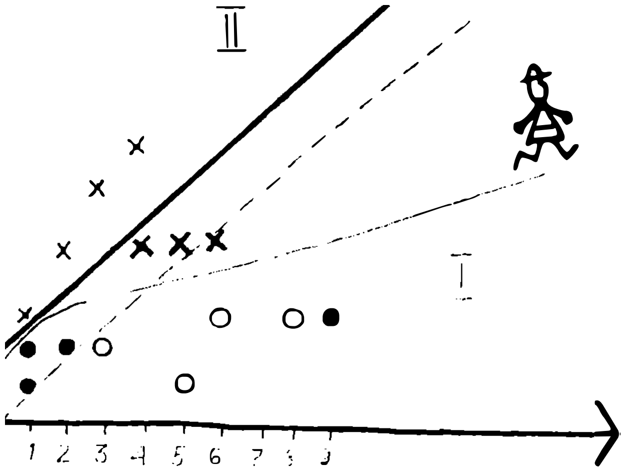


Bild 138

en wir die Punkte x_1, x_2, die diesen Zahlenpaaren entsprechen, artesischen Koordinatensystem ab (Bild 138). Die Punkte, die tecken der Klasse I entsprechen, sind durch kleine Kreise , und diejenigen, die der Klasse II entsprechen, durch dünne 1. Man kann eine Linie ziehen, die die zwei Mengen, die Kreuze ullen, trennt. Das kann eine beliebige Linie sein, die zwischen zehen und den Nullen liegt. Im Bild 138 sind zwei der mögennungslinien eingezeichnet — eine dünne ausgezogene ge-Linie und eine fette Gerade.

et sich die Regel zur Einordnung von Rechtecken in die zwei irmlich an. Ein Rechteck wird zur Klasse I gezählt, wenn der rechende Punkt (x_1, x_2) in das Gebiet I fällt, und zur Klasse II, Punkt in das Gebiet II fällt.

nan beispielsweise den Algorithmus, der durch die dünne e Trennungslinie gegeben ist, so werden die im Bild 139 dar-Rechtecke folgendermaßen klassifiziert: Zur Klasse I werden ecke (1, 1), (1, 2), (2, 2) und (9, 3) gezählt, zur Klasse II die (4, 5), (5, 5), (6, 5).

ian jedoch den durch die fette Gerade gegebenen Algorithmus, alle sieben Rechtecke vom Bild 139 zur Klasse I gerechnet. gefallen Ihnen die gewählten Regeln nicht? Sie werden na-erlegen lächeln: Ihnen war sofort klar, daß man als Trennungs-Gerade zu nehmen hat, und zwar gerade die Winkelhalbierende n Winkels. Ich habe sie zum Spaß gestrichelt eingezeichnet.

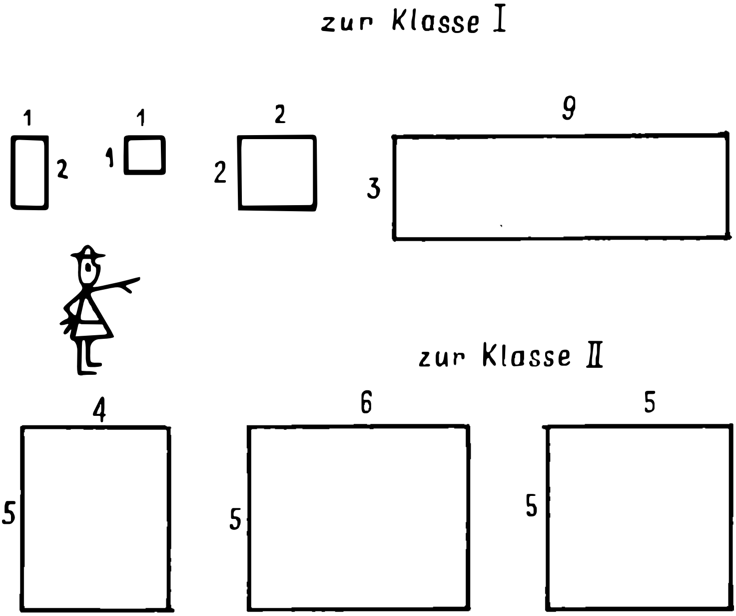


Bild 139

Ihr überlegenes Lächeln würde sofort verschwinden, wenn ich sagen würde, daß zur Klasse I alle schraffierten Rechtecke vom Bild 137 und zur Klasse II alle nichtschraffierten gehören sollen. Wie würden Sie da die Grenze zwischen den Klassen ziehen?

Stellen wir die wesentlichen Eigenschaften eines Klassifizierungsalgorithmus zusammen! Zunächst werden die Rechtecke in zwei Kategorien eingeteilt. Einige Rechtecke werden von Anfang an gezeigt (die im Bild 137 dargestellten). Dann wird eine Trennungsregel gewählt (durch die Trennungslinie im Bild 138), und damit ist der Lernprozeß beendet. Danach werden neue Rechtecke vorgelegt. Mit Hilfe der Regel werden die neuen Rechtecke klassifiziert, also in verschiedene Klassen eingeordnet in Abhängigkeit davon, ob die ihnen entsprechenden Punkte auf der einen oder der anderen Seite der Trennungslinie liegen.

Nun können wir die ausgewählte Regel ins Examen nehmen. Von seinem Ausgang soll unsere Einschätzung der Güte der gewählten Regel abhängen. Natürlich müssen wir selbst von jedem zur Prüfung vorgelegten Rechteck von vornherein wissen, zu welcher Klasse es gehört, denn der Prüfende muß ja selbst die richtige Antwort wissen! Nun können wir auf Grund der Anzahl der Fehler bei der Prüfung ein Urteil über die Güte der gewählten Regel abgeben.

Jetzt wollen wir die Prüfung durchführen. Zur Prüfung der Güte der beiden von uns gewählten Klassifizierungsregeln (der gekrümmten Linie und der fetten Geraden) werden sieben Rechtecke vorgelegt, die

im Bild 139 dargestellt sind. Es ist vorher bekannt, daß die Rechtecke (9, 3) und (6, 5) zur Klasse I gehören, die Rechtecke (1, 2) und (4, 5) zur Klasse II, und die Quadrate (1, 1), (2, 2) und (5, 5) können in jede der beiden Klassen eingeordnet werden.
Bei der Klassifizierung nach der Regel „gekrümmte Linie" werden die Rechtecke (9, 3), (1, 1), (2, 2) und (1, 2) zur Klasse I gezählt und die Rechtecke (4, 5), (6, 5), (5, 5) zur Klasse II (Bild 139). Die Klassifizierung nach dieser Regel führt zu zwei Fehlern: Die Rechtecke (1, 2) und (6, 5) sind nicht richtig eingestuft.
Bei der Klassifizierung mit Hilfe der Regel „fette Gerade" gelangen alle sieben Prüfungsrechtecke in die Klasse I, und es treten ebenfalls zwei Fehler auf. Die Rechtecke (1, 2) und (4, 5) sind nicht richtig eingeordnet.
Urteilt man also nur nach dem Ergebnis dieser Prüfung, so sind beide Klassifizierungsregeln gleich gut (oder schlecht), denn sie führen zur gleichen Fehleranzahl.
Wir müssen jedoch berücksichtigen, daß das Vorlegen von Quadraten zu einer Prüfung von Rechtecken auf ihre Lage ebenso unrechtmäßig ist, wie das Vorlegen des Fotos eines gut rasierten Beatles zur Prüfung von Porträtfotos auf das Geschlecht der porträtierten Personen. Deshalb müssen die Quadrate aus dem Prüfungsmaterial herausgenommen werden.
Sie sehen also, daß die Wahl einer Trennungsregel vom Material abhängt; außerdem gibt es die Möglichkeit, sich verschiedene Trennungslinien zu ziehen.
Ist die Trennung in Klassen etwa keine Plausibilitätsbetrachtung? Ich werde jetzt über Klassifizierungsaufgaben berichten (über technische und medizinische Diagnostik), die typische Beispiele für plausible Schlüsse sind.

Technische Diagnostik

Zunächst soll die Rede von der technischen Diagnostik sein. Als erstes wollen wir das Problem betrachten, vor dem der Geologe oder Geophysiker beim Anlegen einer Erdölbohrung steht. Je tiefer das Erdöl lagert, um so geringer sind seine Spuren an der Erdoberfläche und um so schwieriger ist es zu entdecken. Deshalb greifen die Geophysiker zu den verschiedensten Methoden, um die Eigenschaften der tieferliegenden Gesteinsschichten zu erkunden. Sie messen und untersuchen Gravitations-, elektrische und magnetische Felder, Strahlungen verschiedener Art, elastische seismische Schwingungen, die durch Explosionen hervorgerufen werden. Geochemische Methoden erlauben, geringste Mengen der gesuchten Bodenschätze oder sie begleitender Stoffe nachzuweisen. Solche Untersuchungen werden an der Luft, auf der Erde und unter der Erde — in Schächten und Bohrlöchern — angestellt.
Der Geologe oder Geophysiker hat auf diese Weise viele indirekte Daten zu seiner Verfügung. Diese Information ist jedoch sehr schwer verwertbar.

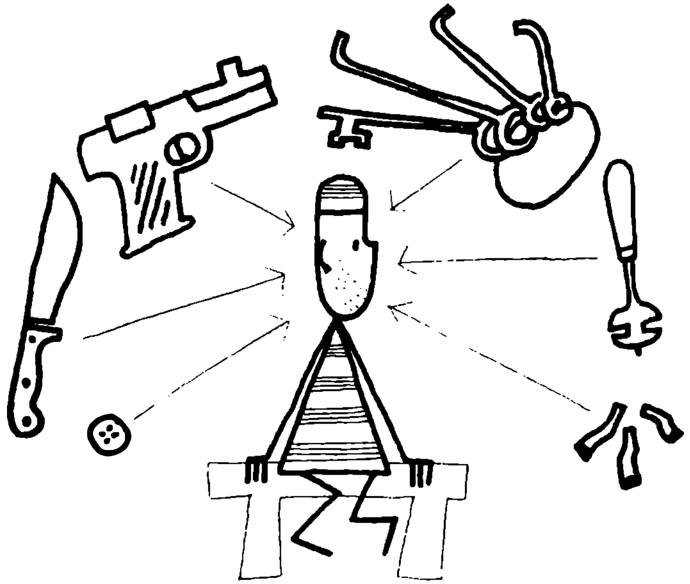


Bild 140

Keine dieser Erkundungsmethoden gibt dem Geologen eine eindeutige Antwort auf die Frage, ob die betreffende Schicht Erdöl enthält.
Diese Situation ähnelt der eines Untersuchungsrichters, der auf Grund indirekter Beweisstücke die Schuld eines Angeklagten beurteilen muß. Kein einzelnes Beweisstück ist als Schuldbeweis ausreichend; in ihrer Gesamtheit legen sie den Verbrecher jedoch eindeutig fest.
Auch vor dem Geophysiker steht mitunter eine ähnlich schwierige Aufgabe: Auf Grund einer großen Anzahl von Messungen und anderer Angaben über qualitative Charakteristiken muß er ein Urteil abgeben, ob die betrachtete Schicht erdölfündig ist oder nicht.
Ein solches Urteil, oder, wie wir früher gesagt haben, eine solche Entscheidung hat ernsthafte Folgen. Wenn seine Entscheidung lautet, die Schicht enthält Erdöl, dann wird die Bohrung angelegt, das Bohrloch zementiert und der aus dem Bohrloch aufsteigende Flüssigkeitsstrom betrachtet, der aus der porösen Gesteinsschicht kommt. Wenn diese Flüssigkeit Erdöl ist, dann ist alles in Ordnung. Wenn es aber kein Erdöl ist, sondern Wasser? Dann waren die für die Bohrung aufgewendete Zeit, das Geld und die Arbeit vieler Menschen vergebens. Die Verluste sind bedeutend! Eine Bohrung von 4 bis 5 km Tiefe dauert ungefähr ein Jahr und kostet etwa eine Viertelmillion Mark.
Wenn die Entscheidung getroffen wird, die poröse Schicht enthält nur Wasser, während sie tatsächlich mit Erdöl angereichert ist, so sind die Verluste noch höher: Millionen Tonnen wertvollen Erdöls bleiben unter der Erde.

Während der Durchführung der Bohrung werden mehrere Größen gemessen, die die Änderung des einen oder anderen Parameters längs der Bohrung angeben (z. B. die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit des Gesteins).
Die Geophysiker haben verschiedene Interpretationsmethoden für die geophysikalischen Parameter sowie Methoden zur komplexen Interpretation von zwei oder sogar drei Parametern der Gesteinsschicht ausgearbeitet. Dadurch wird zwar die Zuverlässigkeit der Interpretation erhöht, es gibt aber noch keine Möglichkeit, sichere Entscheidungen zu fällen. Selbst in relativ leicht überschaubaren Gebieten, beispielsweise in Tatarien, werden 5 bis 6% Fehlentscheidungen getroffen. Es gibt aber auch Gebiete, in denen die Anzahl der Fehlentscheidungen wesentlich höher ist. Davon wird noch die Rede sein.
Die gleichzeitige Interpretation von zehn und mehr Parametern durch den Geologen ist unmöglich. Eine solche Aufgabe übersteigt bei weitem die Möglichkeiten des menschlichen Gedächtnisses, die der Analyse und Synthese sowie der logischen und arithmetischen Operationen beim Durchmustern der Varianten, d. h. die menschlichen Möglichkeiten zur Informationsverarbeitung. Die Schwierigkeit der Aufgabe der Erdölerkundung und ihre Wichtigkeit sind, glaube ich, ausreichend erklärt. Gehen wir nun an ihre Lösung.
Der Mensch kann vielfältigere Arbeit ausführen als ein Kran. Ein Kran kann jedoch viele Tonnen heben, während selbst die Rekordhalter in der Schwerathletik keine 300 kg bewältigen. Ebenso ist die Sachlage bei der technischen Diagnostik, z. B. der Interpretation der geophysikalischen Messungen. Die mathematische Maschine kann solch eine Arbeit besser, schneller und wirksamer ausführen als der Mensch. So wie wir die liegenden und stehenden Rechtecke mit Hilfe von Zahlenpaaren (Länge und Breite) beschrieben haben, müssen wir die Erdschichten durch Zahlen beschreiben.
Wenn 12 Parameter, also 12 Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_{12}$, gemessen werden, so kann man $(x_1, x_2, \cdots, x_{12})$ als Koordinaten eines Punktes P im zwölfdimensionalen Raum auffassen, der einer Gesteinsschicht mit diesen Parameterwerten entspricht. Ich hoffe, Sie erschrecken nicht mehr vor dem mehrdimensionalen Raum und vor einer so großen Anzahl von Koordinaten. Versuchen Sie nicht, sich in Gedanken in diesen Raum zu versetzen; es genügt, wenn Sie sich die folgende Sachlage im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum vorstellen und sich gelassen sagen, daß im zwölfdimensionalen oder zweihundertdimensionalen Raum alles analog aussieht. Wir wollen den Raum als Parameterraum bezeichnen. Jeder Satz von Messungen der gewählten 12 Parameter, die die Schichten des untersuchten Reviers charakterisieren, soll als Punkt im Parameterraum dargestellt werden. Die Menge aller „erdölfündigen“ Punkte bildet im Raum ein gewisses Gebiet, das wir mit dem Buchstaben E (Erdöl) bezeichnen wollen. Die Punkte, die die nicht ölhaltigen porösen Schichten, die leeren Schichten, charakterisieren, bilden ebenfalls ein gewisses

Gebiet im Parameterraum, das wir mit L bezeichnen wollen. Was meinen Sie — werden die Gebiete E und L gemeinsame Punkte haben, werden sie sich überschneiden?

Die Antwort ist hier nicht eindeutig; alles hängt davon ab, wie die zu messenden Parameter gewählt sind. Angenommen, es würden nur drei Parameter gemessen — die Mächtigkeit der Schicht (ihre Dicke), die elektrische Leitfähigkeit, die durch eine 2,25-m-Sonde gemessen wird, und die relative Amplitude der Potentiale der Eigenpolarisation — so hätten die Gebiete E und L gemeinsame Punkte, denn diese drei Parameter gestatten nicht immer die Unterscheidung von Erdöl und Wasser.

Würden nur die Lagerungstiefe der Schicht, ihre Mächtigkeit und die Porosität (d. h. die relativen Abmessungen des Raumes zwischen den festen Teilchen, die mit Flüssigkeit angereichert sein können) gemessen, so wären die Gebiete E und L überhaupt nicht unterscheidbar.

Die erdölfündigen Schichten unterscheiden sich tatsächlich sehr wesentlich von den leeren: Sie enthalten Öl und die anderen nicht. Die wesentliche Hypothese besteht darin, daß ein Satz von Parametern existiert, mit dessen Hilfe sich erdölfündige Schichten von leeren unterscheiden lassen. Ein solcher Satz von Parametern kann sehr groß und schwer zugänglich für Messungen sein, doch existieren muß er bestimmt, denn wir wissen genau, daß Erdöl und Wasser nicht dasselbe sind.

Wenn die Parameter günstig gewählt sind, liegen die Gebiete E und L in verschiedenen Teilen des Raumes und können durch eine Fläche von-

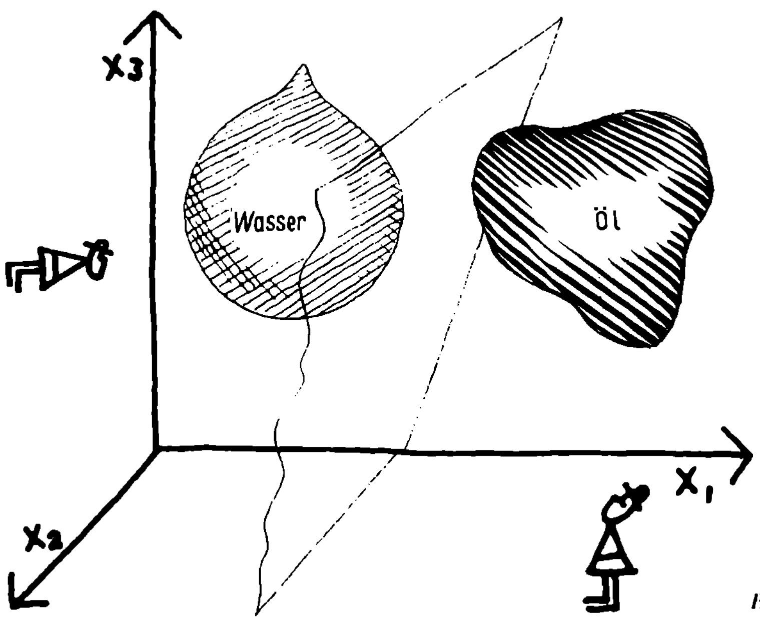


Bild 141

einander getrennt werden. Diese Sachlage sehen Sie im Bild 141. Im zwölfdimensionalen Raum sieht alles analog aus, nur die Trennungsfläche ist jetzt elfdimensional.
Wir wollen zunächst annehmen, daß alles klappt: Die Parameter konnten günstig gewählt werden, und die Gebiete *E* und *L* im Parameterraum lassen sich trennen. Wenn uns die Gebiete *E* und *L* genau bekannt wären, ließe sich die Trennungsfläche leicht angeben. In Wirklichkeit kennen wir aber nur die Meßwerte, die aus einigen schon angelegten Bohrungen stammen und die Ergebnisse der Erprobung dieser Bohrlöcher. In der geometrischen Sprache ausgedrückt, verfügen wir nur über einige Gruppen von Punkten in den Gebieten *E* und *L*, und weiter ist uns nichts bekannt. Nur auf diese Daten zurückgreifend, müssen wir lernen, beliebige andere Schichten zu klassifizieren, die in der Folge auftreten können, d. h., wir müssen die den Schichten entsprechenden Punkte entweder in das Gebiet *E* oder in das Gebiet *L* einordnen.
Jetzt ist logisch klar, daß wir genauso vorgehen müssen wie bei den Rechtecken. Die Gruppe der uns zur Verfügung stehenden Punkte aus dem Gebiet *E* zerlegen wir in zwei Teile. Dasselbe machen wir mit den Punkten aus dem Gebiet *L*. Wir nehmen je eine Untergruppe aus *E* und aus *L* und benutzen sie zum Aufbau der Trennungsfläche, der Entscheidungsregel. Diese Punktmengen stellen das Lehrmaterial dar. Die restlichen Punkte benutzen wir zur Beurteilung der Güte der aufgebauten Regel, d. h. zur Prüfung; sie bilden das Prüfungsmaterial.
Die entscheidende Frage besteht jetzt darin, wie die Entscheidungsregel — die Trennungsfläche — aufgestellt wird. Die gewählte Methode muß natürlich nicht nur die prinzipielle Möglichkeit der Aufstellung einer Entscheidungsregel garantieren, sondern auch ihre Aufstellung in hinreichend kurzer Zeit und die folgende Klassifizierung des Prüfungsmaterials mit geringer Fehleranzahl. Diese Forderungen sind einander widersprechend: Je einfacher die Form der Trennungsfläche ist, um so leichter läßt sie sich aufstellen. Gleichzeitig kann eine einfache Form der Trennungsfläche eine hohe Fehleranzahl bedeuten. Zur Verdeutlichung können die Bilder 142 und 143 dienen; eine beliebige Gerade — eine einfache Regel — trennt schlechter als eine Kurve, die Kurve eines Polynoms dritten Grades.
Ich habe Ihnen nicht die Wahrheit gesagt, verehrter Leser, als ich feststellte, daß bei der Aufstellung der Entscheidungsregel nichts weiter bekannt ist als die Menge der als Lehrmaterial dienenden Punkte. Natürlich stehen uns außer den Lehrpunkten keine weiteren Punkte im Parameterraum zur Verfügung. Es existiert aber doch noch etwas, ohne das alle unsere Schlußfolgerungen keinerlei Perspektive haben: die statistische Stabilität. Das Wetter, die in zehn Jahren erforderliche Anzahl an Lehrern oder die Anzahl der Lungenkrebserkrankungen lassen sich auf Grund der vorangegangenen Erfahrungen nur unter der Voraussetzung, daß im folgenden „etwas Ähnliches eintreffen“ wird, vorhersagen, also unter der Voraussetzung des Vorhandenseins einer be-

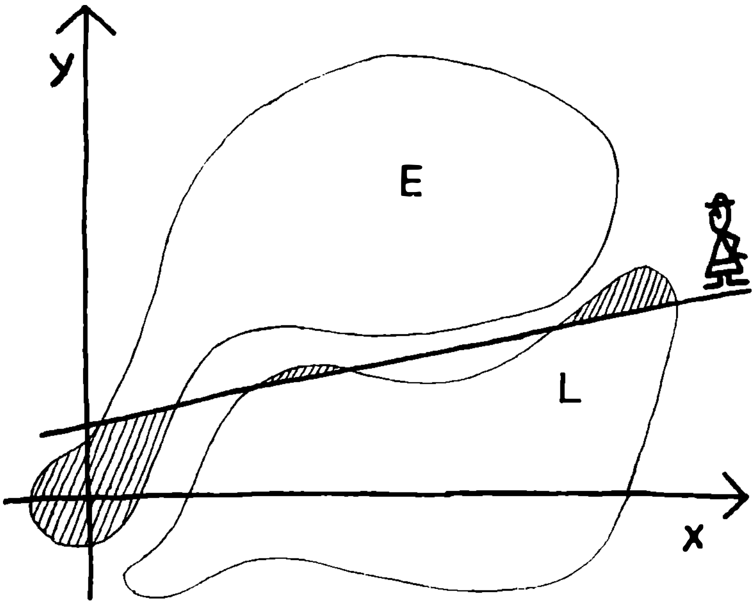


Bild 142

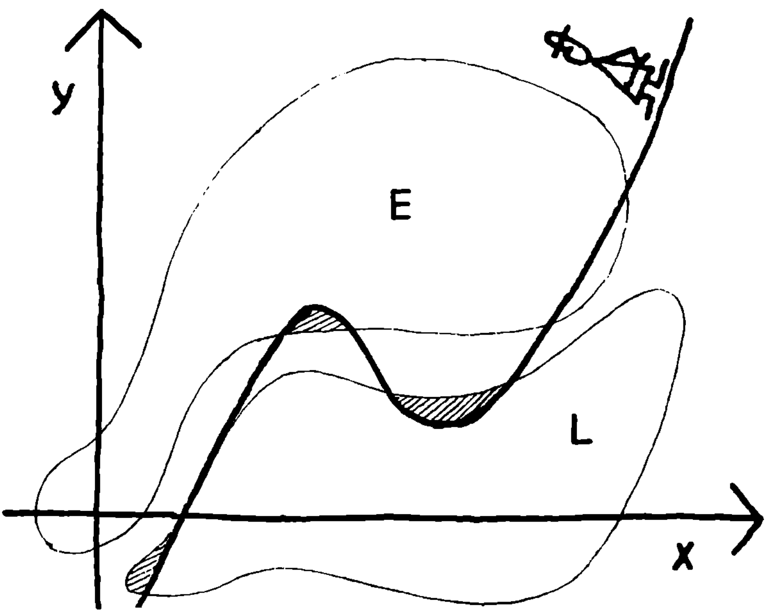


Bild 143

stimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung bei der Menge der betrachteten Größen.
Für das Wetter ist das die Verteilung von Druck, Temperatur, Feuchtigkeit usw.; für den Lehrerbedarf ist es die Verteilung der geborenen Kinder und anderer Größen, die die Anzahl der Kinder in zehn Jahren bestimmen. Zur Vorhersage der Wirksamkeit der gewählten Entscheidungsregel, d. h. zur Vorhersage der Anzahl der Fehlentscheidungen bei der Klassifizierung reicht die Kenntnis der Fehleranzahl im Prüfmaterial noch nicht aus. Man muß sich noch davon überzeugen, daß in der Folge „etwas Ähnliches eintreffen" wird, d. h., man muß voraussetzen können, daß die Menge der zu klassifizierenden Objekte einer uns zwar unbekannten, doch ganz bestimmten festen Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt. Erst auf der Grundlage dieser Voraussetzung kann man eine statistische Prognose aufstellen. Wir hatten bereits früher erörtert, daß nicht alle zufälligen Ereignisse statistisch stabil sind.
Während man die Echtheit der Unterschrift auf einem Scheck (gegenüber der Fälschung) mit Hilfe eines Programms zur Zeichenerkennung mit Erfolg prüfen kann, da hier eine exakte statistische Aufgabe vorliegt, kann man ein Urteil über einen Verbrecher nicht nach einem derartigen Programm fällen.
Ich werde nicht über die möglichen Verfahren zur Aufstellung der Entscheidungsregeln bei der Zeichenerkennung berichten, obwohl man die entsprechenden Methoden elementar darlegen kann, das würde zuviel Platz einnehmen. Ich möchte lediglich bemerken, daß die uns zur Verfügung stehenden Parameter nicht die Möglichkeit bieten, die Objekte immer eindeutig zu klassifizieren. Bei jeder Entscheidungsregel können also Fehler auftreten. Man kann aber stets die Regel so wählen, daß eine minimale Fehleranzahl gewährleistet ist.
Die Sachlage wird durch Bild 144 verdeutlicht. Die Bereiche E und L überschneiden sich. Im Fall der Gleichverteilung für das Auftreten von Punkten aus den Gebieten E und L garantiert die durch die ausgezogene Linie gegebene Entscheidungsregel eine bedeutend geringere Fehleranzahl als die Regel, die der gestrichelten Linie entspricht.
Es ist schwer zu sagen, wann die Benutzung derartiger Erkennungsprogramme gerechtfertigt ist. Manchmal kann sie einem Schießen mit Kanonen auf Spatzen gleichkommen; andererseits können die Schwierigkeiten bei der Gewinnung der nötigen Daten so groß sein, daß die Anwendung der vorgeschlagenen Methoden unzweckmäßig ist.
Die Benutzung von Erkennungsprogrammen bei der komplexen Interpretation geophysikalischer Messungen für die Erdölerkundung hat bedeutende Erfolge gebracht. In den für die „menschliche Interpretation" gut geeigneten tatarischen Revieren machten die Geophysiker 5 bis 6% Fehler. Die Interpretation desselben Materials mit Hilfe der mathematischen Maschine M-20 und eines Programms zur Zeichenerkennung ergab eine Fehleranzahl von etwa 1%. Bei den Untersuchungen im Erdölrevier von Shetybai trafen die dort tätigen Geophysiker 35% Fehl-

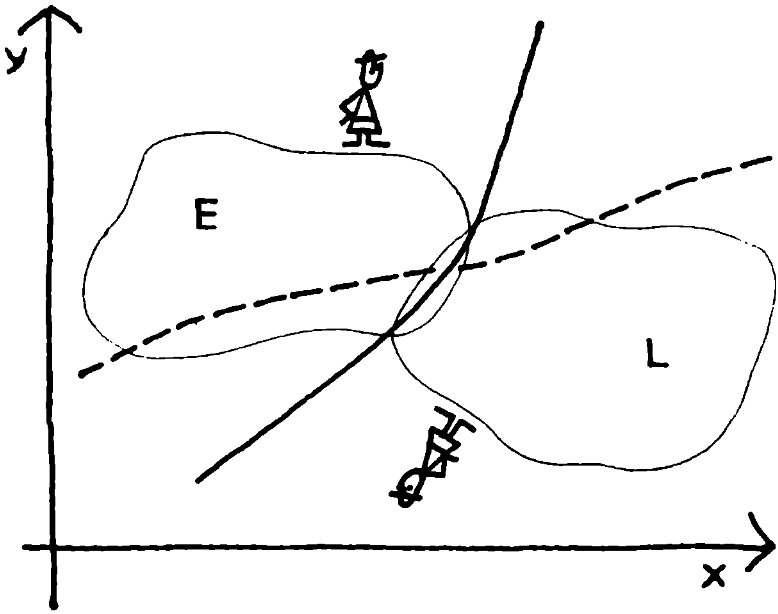


Bild 144

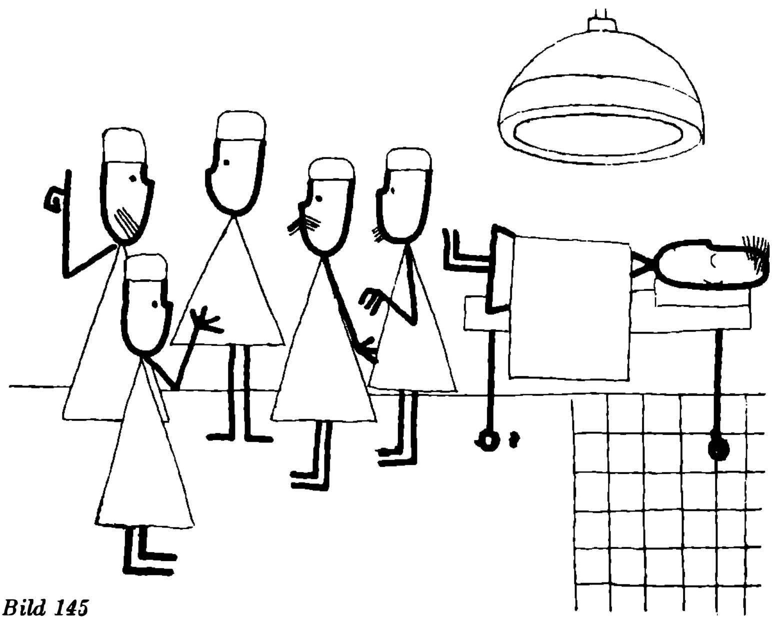


Bild 145

entscheidungen: selbst hochqualifizierte Geophysiker kamen unter Ausnutzung der modernsten Methoden und Mittel der „menschlichen Interpretation" zu mehr als 20% Fehlurteilen. Die maschinelle Bearbeitung desselben Materials mit Hilfe eines Programms zur Zeichenerkennung ergab nur 6% Fehler. Sie sehen, der Effekt ist erheblich!
Es ist hervorzuheben, daß bei der Interpretation der geophysikalischen Daten mit Hilfe eines Programms zur Zeichenerkennung die mathematische Maschine lediglich für die Aufstellung der Klassifizierungsregel benutzt wird. Danach läuft die ganze Klassifizierung nur noch auf die Multiplikation und Addition von Zahlen hinaus. Die Werte der an der Schicht gemessenen Parameter sind in bestimmter Reihenfolge anzuordnen; jeder der Werte wird mit einem entsprechenden Koeffizienten multipliziert, und die erhaltenen Zahlen werden addiert. Ist die Summe größer als eine vorgegebene Zahl (die auch Schwelle genannt wird), so wird angenommen, daß die betrachtete Schicht erdölhaltig ist.
Heute werden die maschinellen Methoden der Interpretation der geophysikalischen Daten bei der Erdölerkundung in der Praxis bereits in großem Maßstab angewandt.

Etwas über medizinische Diagnostik

Die Arbeit in der Diagnostik psychischer Krankheiten und Nervenkrankheiten hat erst begonnen. Es ist schwierig, vorauszusagen, ob die vorgeschlagenen Methoden hier zu brauchbaren Lösungen führen werden. Die Sammlung zuverlässigen Ausgangsmaterials über Hunderte von Patienten, bei der sehr viele Fragen zu beantworten sind, ist recht aufwendig. Der Fragebogen, von dem im Gespräch mit dem Psychiater die Rede war, wurde in mehreren Varianten aufgestellt. Einer davon enthält 130 Symptome. Es ist noch unbekannt, wieviele davon für die Diagnostik der Schizophrenie wesentlich sind.
Bevor ich über andere Aufgaben der medizinischen Diagnostik berichte, bei denen die Anwendung von Programmen zur Zeichenerkennung zu bestimmten Erfolgen geführt hat, müssen wir klar umreißen, welche Aufgaben der Diagnostik hier in Frage kommen.
Die Diagnose einer Krankheit ist ein sehr komplizierter geistiger Prozeß. Der Arzt muß sich auf Grund der Beschwerden des Patienten, der Befragung und der Untersuchung ein Bild von der möglicherweise vorliegenden Erkrankung machen. Durch zusätzliche Untersuchungen muß er seine Vorstellungen präzisieren und schließlich eine Heilungsmethode wählen, die er u. U. entsprechend dem Verlauf der Krankheit korrigieren muß.
Wenn ein Patient über Schmerzen in der Hand klagt, so kann das durch eine Erkrankung des Nervensystems, durch Störungen in der Tätigkeit des Blutgefäßsystems, durch Muskelerkrankungen usw. bedingt sein. Vorläufig ist nicht bekannt, wie man an solche allgemeinen Fragen der Diagnostik mit Hilfe mathematischer Methoden herankommt. Zum

gegenwärtigen Zeitpunkt geben die Methoden der Zeichenerkennung nur die Möglichkeit, Aufgaben der differenzierenden Diagnostik zu formalisieren und zu lösen. Was damit gemeint ist, erkläre ich jetzt etwas genauer.
In der klinischen Praxis wird die Gesamtheit der Erkrankungen durch den Arzt relativ leicht in sich deutlich voneinander unterscheidende Gruppen eingeteilt. Jede dieser Gruppen besteht aus einigen Krankheiten, die von untereinander ähnlichen Symptomen begleitet werden. Nach dieser groben Einteilung entsteht die Aufgabe, die entsprechende Krankheit innerhalb der Gruppe zu bestimmen — die Aufgabe der Differenzierung. Gerade die differenzierende Diagnostik ist mitunter selbst für hochqualifizierte Kliniker mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Deshalb müssen oft mehrere Fachärzte miteinander beraten. Auch diese kollektive Erörterung führt nicht immer zur Rettung des Patienten. Die Bürde der Verantwortung für eine falsche Entscheidung ist jedoch für ein Kollektiv weniger schwer. Sie werden verstehen, daß das ebenfalls von Bedeutung ist, wenn Sie sich an unsere Überlegungen über die Wahl eines Kriteriums und über das Treffen einer Entscheidung erinnern.
Die Erörterung der Probleme der differenzierenden Diagnostik im Rahmen dieses Buches deutet nicht auf irgendeinen tieferen Zusammenhang zwischen der Differentialrechnung und der differenzierenden Diagnostik hin. Differenzierung bedeutet die Zerlegung eines Ganzen in Teile, die Aufgliederung in einfache Elemente. Ob die Elemente abstrakte Intervalle auf der Zahlengeraden darstellen oder ganz konkrete Krankheiten, ist Sache der Autoren dieser Fachausdrücke, die in beiden Spezialrichtungen vom Differenzieren sprechen. Wenn Sie den Abschnitt über das Entstehen von Fachausdrücken ausgelassen haben sollten, können Sie schnell zurückblättern! Vergessen Sie jedoch nicht, hier über die differenzierende Diagnostik weiterzulesen, das Interessanteste beginnt gerade erst!
Die Anwendung der Methoden der Zeichenerkennung auf die differenzierende Diagnostik von Krankheiten erfordert zunächst die Feststellung der charakteristischen Symptome bzw. Syndrome. Wenn die Symptome festgestellt sind und genügend Lehr- und Prüfmaterial gesammelt ist, d. h. Angaben über eine große Anzahl von Patienten mit den zu differenzierenden Krankheiten zusammengetragen sind, wird mit Hilfe der Maschine die Entscheidungsregel aufgestellt und dann in der Praxis angewandt.
Sowohl in der Sowjetunion als auch in anderen Ländern sind viele Arbeiten über die Anwendung der Methoden der Zeichenerkennung bei der Diagnostik von Krankheiten erschienen. Ich kann zwar nicht über alle berichten, möchte Sie aber, verehrter Leser, von ihrer Wirksamkeit überzeugen. Als Beispiel führe ich eine Arbeit an, die ein Leningrader Kollektiv ausgeführt hat, das aus einigen Kybernetikern, die Programme für die Zeichenerkennung aufgestellt haben, und einigen Neurologen

besteht. Ich kann nicht sagen, ob diese Arbeit die eindrucksvollsten Ergebnisse geliefert hat; ich habe sie lediglich deshalb gewählt, weil mir die Autoren persönlich bekannt sind.
Störungen des Blutkreislaufs im Gehirn können sowohl zu Gehirnblutungen als auch zur Aufweichung der Hirnmasse führen. Ihre Ursachen sind unterschiedlicher Natur. Die Aufweichung der Hirnmasse wird häufig durch Thrombosen im Gehirn hervorgerufen. Zur Beseitigung der Thrombosen werden Antikoagulate in den Blutkreislauf des Kranken eingeführt, also Stoffe, die der Blutgerinnung entgegenwirken. Bei Blutungen werden entgegengesetzt wirkende Mittel eingeführt — Koagulate, die die Blutgerinnung fördern und den weiteren Blutaustritt aus den Blutgefäßen in die Hirnmasse verhindern.
Fehler bei der differenzierenden Diagnostik dieser beiden Krankheiten können für den Patienten verhängnisvolle Folgen haben. Wird bei einer Aufweichung der Hirnmasse fälschlicherweise Gehirnblutung diagnostiziert, und dem Patienten ein gerinnungsförderndes Mittel verschrieben, so wird die Ausbildung der Thrombose verstärkt. Die Unterbrechung der Durchblutung weiter Teile des Gehirns führt zu deren Zerstörung, und der Patient kann sterben. Wird andererseits eine Gehirnblutung nicht erkannt und dem Patienten ein gerinnungshemmendes Medikament verschrieben, so kann sich die Blutung verschlimmern.
Die Lösung solch einer Aufgabe der differenzierenden Diagnostik stellt sogar erfahrene Kliniker — Neurologen — vor große Schwierigkeiten. Häufig ist der Anteil der Fehlurteile oder der unbestimmten Diagnosen sehr groß. Die Leningrader Kybernetiker und Neurologen (*A. Franzus*, *J. Tonkonogij* und ihre Mitarbeiter) untersuchten 278 Fälle klinisch. Sie führten anatomische Beobachtungen der Gehirnblutung und der Embolie durch, die im Ergebnis eines Insults bei hypertonischen Erkrankungen, infolge Arteriosklerose oder rheumatischen Vaskulits entstanden waren. Wie ein Vergleich der Ergebnisse der ärztlichen Diagnosen in der Klinik mit den Daten einer folgenden pathologoanatomischen Untersuchung zeigte, betrug die Anzahl der richtigen ärztlichen Diagnosen 75%, die Anzahl der unbestimmten Fälle 13% und die Anzahl der Fehldiagnosen 12%. Eine unbestimmte Diagnose, bei der die Ärzte zu keinem Urteil gelangen können, ist für den Patienten fast dasselbe wie eine Fehldiagnose, denn es werden keine entsprechenden Maßnahmen zur Heilung eingeleitet, und der Kranke kann sterben.
Es wirkt befremdend, daß der Anteil der richtigen Diagnosen bei so verbreiteten Krankheiten so niedrig ist, zumal die erforderlichen therapeutischen Maßnahmen gerade entgegengesetzt sind. Man muß jedoch berücksichtigen, daß die äußeren Erscheinungen in beiden Fällen sehr ähnlich sind.
So werden beispielsweise Bewußtlosigkeit und Erbrechen für Anzeichen der Gehirnblutung gehalten. Aber die gleichen Symptome werden manchmal auch bei der Embolie beobachtet. Rote, blutige Färbung der Hirn- und Rückenmarkflüssigkeit werden als charakteristisch für die Gehirn-

blutung angesehen, während Farblosigkeit als Zeichen der Embolie gilt. Nicht selten treten aber auch bei der Gehirnblutung keine Änderungen in der Färbung ein. Jedes dieser Anzeichen kann also bei beiden betrachteten Krankheiten auftreten, Offenbar besteht der einzige Weg zur Erhöhung der Zuverlässigkeit der Diagnosen in der komplexen Diagnostik sämtlicher Symptome.
Die Leningrader Wissenschaftler haben bei der Anwendung der Methoden der Zeichenerkennung 25 Krankheitssymptome berücksichtigt. Als Lehrmaterial dienten 100 von den 278 zur Verfügung stehenden Fällen, und eine Prüfung am restlichen Material ergab, daß die maschinelle Diagnostik zu 88% richtiger Urteile führte. Wie Sie sehen, konnte die Zuverlässigkeit der Diagnostik durch die Anwendung mathematischer Methoden bedeutend erhöht werden: von 75 auf 88%. Angestrebt werden natürlich 100% richtiger Diagnosen. Bisher wurden jedoch erst die ersten Schritte getan. Außerdem kann es sein, daß die beobachteten Symptome für eine eindeutige Diagnostik nicht ausreichend sind und noch andere Symptome berücksichtigt oder zusätzliche Untersuchungsmethoden angewandt werden müssen. Der Arzt benutzt bedeutend mehr Informationen, als sich aus den 25 Symptomen ergeben, die in die mathematische Maschine eingegeben wurden. Er sieht den Patienten und beurteilt manches intuitiv. Vergleichbare Möglichkeiten auch für die Maschine zu schaffen, ist sehr schwierig, denn die Ärzte können wie viele andere Menschen nicht immer ihre Beweggründe analysieren, auf deren Grundlage sie ihre Entscheidungen treffen.

Ist es nicht an der Zeit, den Arzt durch eine diagnostizierende Maschine zu ersetzen?

Wenn die mathematischen Methoden einen höheren Anteil richtiger Diagnosen liefern, ist es da nicht an der Zeit, auf die Ärzte zu verzichten und Mathematiker mit der medizinischen Diagnostik zu beauftragen?
Ich glaube, daß die Ärzte ruhig schlafen können! Man darf nicht annehmen, daß die Aufgabe der Ärzte nur im Stellen der Diagnosen besteht. Sie haben die noch schwierigere Aufgabe, die Kranken zu heilen, wichtige Probleme der Prophylaxe und viele andere Probleme der Medizin zu lösen.
Vielleicht kann man aber wenigstens den Ärzten die Diagnostik abnehmen und sie den mathematischen Maschinen übertragen?
Ohne Arzt ist die maschinelle Diagnostik nicht möglich, denn der Arzt muß die für eine Krankheit wichtigen Symptome erkennen. Wenn er sich auch manchmal bei der Einschätzung der Wichtigkeit eines Symptoms irrt, so bedeutet das keinesfalls, daß man ihn ganz ausschalten kann. Im Gegenteil, die diagnostizierenden Maschinen erleichtern und verbessern die Arbeit des Arztes. Hier liegt jedoch eine Gefahr, deretwegen ich diesen scheinbar unnötigen Abschnitt eingefügt habe.
In Wirklichkeit ist der Mensch — der Arzt — eine hervorragende diagnostizierende „Maschine"! Ich hoffe, daß sich die Ärzte durch einen der-

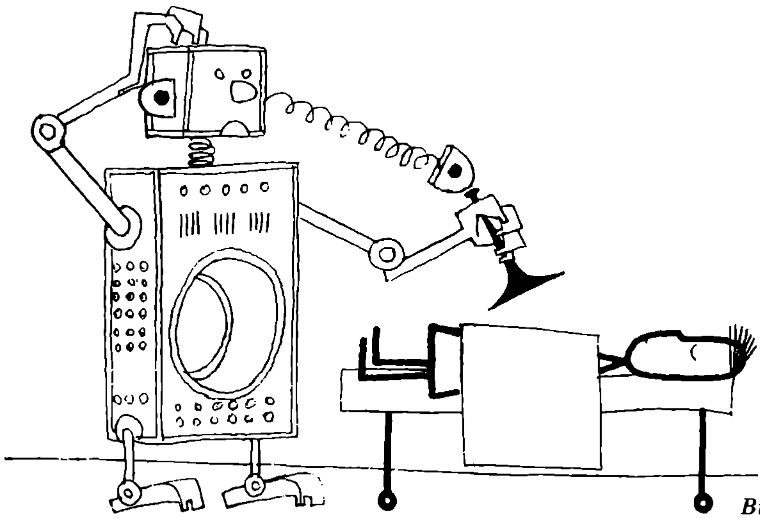


Bild 146

artigen Vergleich nicht gekränkt fühlen, sondern ihn als höchstes Lob auffassen. Allerdings ist ein Vorbehalt nötig: Der Arzt muß den Kranken nicht nur beobachten, er darf nicht nur ansehen und anhören, er muß auch sehen und hören können.
Ich hatte Gelegenheit, mit *B. E. Votschal* über die Fragen der medizinischen Diagnostik zu sprechen, einem hervorragenden Therapeuten, erudierten Wissenschaftler und klugen Menschen. Er entwirft nicht nur Geräte für medizinische Untersuchungen, sondern stellt sie auch gern selbst her. Er ist aktiver Propagandist der neuen Technik in der Medizin und Vorsitzender vieler maßgebender Kommissionen auf diesem Gebiet. Deshalb ist seine Meinung über die Rolle der Elektronik in der Medizin besonders interessant. Er behauptet, daß die elektronischen und kybernetischen Geräte zum gegenwärtigen Zeitpunkt dem Arzt mitunter nicht helfen, sondern eher schaden. Der Arzt verläßt sich mehr auf die elektronischen Geräte als auf seine eigenen Augen und Ohren. Statt den Kranken ordentlich abzuhorchen und abzuklopfen, betrachtet er das Elektrokardiogramm und sieht es als Urteil der höchsten Instanz an. Ähnliche Bemerkungen beziehen sich auch auf beliebige andere Untersuchungsmethoden, bei denen der Arzt in den Hintergrund gedrängt wird.
Ich möchte die Ärzte ganz und gar nicht aufrufen, die neuen Untersuchungsmethoden zu ignorieren und zu den guten alten Methoden des Landarztes zurückzukehren; mir geht es lediglich darum, zur Nutzung aller Möglichkeiten bei der Diagnose von Krankheiten aufzufordern. Die Augen, die Hände und die Ohren des Arztes sind von der Natur geschaffene hervorragende Geräte! Deshalb sind nicht Ärzte durch Maschinen und Maschinen durch Ärzte zu ersetzen; sie müssen beide der Medizin dienen.

Was ist unser Leben? Ein Spiel ...

So beginnt die bekannte, aus lauter Aphorismen bestehende Arie des Hermann in der Oper „Pique Dame“.
Obwohl andere Aphorismen dieser Arie ernsthafte Zweifel auslösen, ist es unmöglich, sich mit dieser Aussage nicht einverstanden zu erklären.
Im Lauf unseres Lebens begegnen wir nicht selten Situationen, in denen die Beteiligten verschiedene Interessen haben und verschiedene Wege zur Erreichung ihrer Ziele gehen. Ich habe absichtlich gesagt — Ziele und nicht Ziel, da es beliebig viele Beteiligte gibt und jeder sein Ziel hat. Derartige Situationen werden häufig Konflikt genannt, und das mathematische Modell dafür wird als Spiel bezeichnet. Jetzt verstehen Sie sicher, wie richtig der erste Satz in der Arie des Hermann ist, obwohl der Autor des Librettos sicher etwas anderes gemeint hat!
Erinnern wir uns an eine andere dramatische Situation, das Duell Lenskijs und Onegins:

Das Paar wirft rasch die Mäntel ab,
Sarezkij, schweigsam wie ein Grab,
Hat zweiunddreißig Schritt vermessen.
Die Gegner wählen ihren Stand
Und harr'n, die Waffen in der Hand.
„Jetzt los!“
Und bittren Ernstes schreiten
Zwei Feinde, stumm in kalter Ruh,
Den Lauf gesenkt, von beiden Seiten
Vier Schritte aufeinander zu.
Vier Schritte, die zum Jenseits führen.
Dann hebt in stetem Avancieren,
Onegin, schweigend wie zuvor,
Ganz langsam sein Pistol empor.
Fünf Schritt noch sind zurückzulegen.
Jetzt hat auch Lenskij haltgemacht.
Legt an und zielt — da plötzlich kracht
Onegins Schuß ... mit dumpfen Schlägen
Entschied das Los: der Dichter wankt,
Sein Arm versagt, die Waffe schwankt,
Still hebt er seine Hand zum Herzen
Und fällt. Sein mattes Auge spricht
Von sanftem Sterben ohne Schmerzen.[1])

Die Duellanten hatten verschiedene Ziele. Es ist anzunehmen, daß Lenskij der Möglichkeit, sterben zu müssen, kaltblütig gegenüberstand, er wollte den Beleidiger bestrafen; Onegin bemühte sich, sein Leben zu erhalten und hatte auch kein Interesse, den Gegner umzubringen. Sie durften jeder nur einen Schuß abgeben; jeder konnte, dem anderen entgegengehend,

[1]) Nach *A. S. Puschkin*, Gesammelte Werke in 6 Bänden. Aufbau-Verlag 1964.

beim ersten Schritt, beim zweiten, dritten usw. bis zur Barriere seinen Schuß abfeuern. Jeder konnte also seinen Schußmoment wählen oder, wie man in der mathematischen Spieltheorie sagt, eine von sechzehn Strategien wählen.
Wenden wir uns einer Aufgabe zu, die auch einen dramatischen Einschlag hat, doch gewöhnlich nicht zu so katastrophalen Folgen führt wie ein Duell — der Verteidigung einer Dissertation. Das einfachste mathematische Modell findet man, wenn man die Situation, in der sich Doktorand und Gutachter befinden, als ein Spiel betrachtet. Bei gröbster Betrachtung dieses Spiels hat der Doktorand zwei Strategien zur Verfügung — er kann eine gute oder eine schlechte Dissertation abliefern; dem Gutachter stehen ebenfalls zwei Strategien zur Verfügung — er kann ein positives oder ein negatives Gutachten abgeben.
Für den Doktoranden ist es einfacher, eine schlechte Dissertation zu schreiben; dann ist aber ein negatives Gutachten wahrscheinlicher, und er würde sein Ziel — den Doktorgrad zu erhalten — nicht erreichen.
Für den Gutachter ist es am leichtesten, die Arbeit nur kurz durchzublättern und ein positives Gutachten zu schreiben. Schreibt er allerdings ein positives Gutachten für eine miserable Arbeit und kommt das bei der öffentlichen Verteidigung zum Vorschein, so wird sein wissenschaftlicher Ruf untergraben. Der Doktorand weiß nicht, welche Strategie der Gutachter wählen wird. Er hat seine Lage allseitig einzuschätzen und die Strategie zu wählen.
Jeder der Spieler kann für sich irgendeine der für ihn möglichen Strategien wählen. Jede Gruppe von möglichen Strategien (eine Gruppe für jeden Spieler!) wollen wir Situation nennen. In der betrachteten Aufgabe ist z. B. die Situation möglich, daß der Doktorand die Strategie gewählt hat, eine schlechte Dissertation zu schreiben, und der Gutachter die Strategie, ein negatives Gutachten abzugeben.
Man kann ein quantitatives Kriterium einführen — ein Maß für die Vorteile, die jede der möglichen Situationen bietet. Der Spieler muß für eine schlechte Wahl der Strategie zahlen und gewinnt bei guter Wahl der Strategie. Deshalb wird dieses Maß häufig Gewinn genannt. Das Spiel führt natürlich nicht immer zu Gewinnen; wenn Ihnen irgendeine Situation einen Verlust gebracht hat, so entspricht das einem negativen Gewinn. Manchmal wird der Verlust als Maß für die Güte der Strategie benutzt; dann entspricht einer erfolgreichen Situation, die zum Gewinn führt, ein negativer Verlust.
In unseren Beispielen sind die Gewinne des einen Spielers keinesfall den Verlusten des anderen Spielers gleich, so daß sich ihre Interessen zwar nicht widersprechen, wie das z. B. bei Glücksspielen der Fall ist, jedoch auch nicht dieselben sind.
Wir befinden uns ebenfalls in einem Spiel, verehrter Leser! Das sind meine Strategien: Ich schreibe ein gutes, ein mittelmäßiges oder ein miserables Buch. Ihre Strategien sind: Sie lesen das Buch in allen Einzelheiten, Sie sehen es aufmerksam durch, oder Sie blättern es nur ober-

flächlich durch. Das ist ein sogenanntes 3×3-Spiel, denn ich habe drei Strategien und Sie ebenfalls drei.
Wenn Sie nach dem Lesen des Buches eine begeisterte, eine kühle oder eine niederschmetternde Rezension schreiben, es nach dem Durchsehen in die Ecke werfen oder Verwandten schenken, so habe ich nach wie vor drei Strategien, Sie jedoch sechs. Jetzt handelt es sich um ein 3×6-Spiel!
In unserem Spiel bezahlen Sie an der Kasse der Buchhandlung, in der Sie das Buch kaufen; danach wenden Sie Zeit für das Lesen auf; für mich kann eine negative Rezension nachteilig sein, auch in dem Fall, in dem ich der Meinung bin, ein gutes Buch geschrieben zu haben. Deshalb wollen wir auch weiterhin von Gewinnen und Verlusten sprechen. Wie Sie sehen, haben wir in unserem Spiel auf recht unterschiedliche Weise zu zahlen, die Gewinne in ein und demselben Spiel können also für die verschiedenen Spieler in unterschiedlichen Einheiten gemessen werden.
Jedes Spiel zweier Personen mit einer endlichen Anzahl von Strategien läßt sich am bequemsten in Form einer Tafel, einer Matrix, darstellen, wobei die Zeilen den Strategien des ersten Spielers und die Spalten den

Tafel 11. Gewinne des Doktoranden

Strategien des Gutachters \ Strategien des Doktoranden	Gute Dissertation	Schlechte Dissertation
Positives Gutachten	4	3
Negatives Gutachten	—4	—2

Strategien des zweiten entsprechen. In Tafel 11 sehen Sie eine solche Matrix für das 2×2-Spiel zwischen Doktorand und Gutachter.
Die Zahlen in der Matrix sollen hier den Gewinn des Doktoranden für jede Situation bedeuten. Diese Gewinne sind natürlich in bedingten Einheiten angegeben, denn wir wissen vorläufig noch nicht, wie wir die Begeisterung des Doktoranden bei glücklichem Ausgang der Verteidigung oder seinen Kummer beim Durchfallen quantitativ ausdrücken können.
Die Gewinnmatrix für den Gutachter kann völlig anders aussehen, z. B. so wie in Tafel 12. Es ist bereits klar, warum der Verlust des Gutachters hoch ist, wenn er eine schlechte Dissertation gut einschätzt. Ein negatives

Tafel 12. Gewinne des Gutachters

Strategien des Gutachters \ Strategien des Doktoranden	Gute Dissertation	Schlechte Dissertation
Positives Gutachten	1	—3
Negatives Gutachten	—4	—5

Gutachten für eine schlechte Arbeit und womöglich gar für eine gute abzugeben, ist für ihn nicht angenehm: In der Regel haben es die Leute nicht gern, in der Rolle des Nachbarn aufzutreten, den man bestellt, wenn ein Huhn zu schlachten ist. Wenn es dem Gutachter nicht gelingt, sich rechtzeitig aus der Affäre zu ziehen und er eine negative Einschätzung schreiben muß, erleidet auch er einen gewissen Verlust. Für diesen Fall habe ich den Gewinn durch die Zahl — 3 angegeben. Die günstigste Situation für den Gutachter ist ein positives Gutachten zu einer guten Dissertation, deshalb ist hier sein Gewinn positiv; er ist zwar nicht sehr groß, doch es ist immerhin ein Gewinn. Wenn man sich nun die Matrix aufmerksam ansieht, wird verständlich, warum es gewöhnlich so schwierig ist, einen Gutachter für eine Dissertation zu finden.
In unserem Beispiel können Gewinn (und Verlust) nur in bedingten Einheiten angegeben werden. Bei vielen Glücksspielen und bei der Untersuchung vieler ökonomischer Fragen wird der Gewinn in Geld ausgedrückt; bei technischen Problemen können die Verluste z. B. Reparaturzeiten oder Stillstandszeiten der Anlagen sein. Die Gewinne können also in den verschiedensten Einheiten ausgedrückt werden.
Ein Spiel kann beliebig viele Beteiligte haben. In unserem Spiel, verehrter Leser, wird es sicher viele Teilnehmer geben, die Leser dieses Buches. Es wird sicher so sein, daß die einzelnen Leser verschiedene Interessen, unterschiedliche Vorbildung und unterschiedliche Ziele haben. Die einen wollen aus dem Buch etwas Neues und Wichtiges erfahren, die anderen wollen sich einfach von ihrer eigenen Arbeit etwas ablenken lassen, die dritten ...
Ich glaube, wir brauchen nicht alle Gründe zu suchen, die uns zum Lesen eines Buches bewegen. Ich kann auch nicht immer erklären, warum ich ein Buch über Genetik oder Architektur lese, das mir gerade in die Hände gerät.
Nicht immer braucht eine einzelne Person als Spielteilnehmer aufzutreten. Beim Fußballspiel sieht man die beiden Mannschaften als Ganzes als Spielbeteiligte an, im Krieg sind in Abhängigkeit von der Sachlage ganze Staaten oder Staatengruppen oder einzelne Armeegruppierungen die Beteiligten des Spiels.
Das Ziel des Spiels ist für jeden Beteiligten die Wahl einer solchen Strategie, bei der sein Gewinn möglichst hoch ist. Alles wäre recht einfach, wenn dem Spieler bekannt wäre, welche Strategie die anderen Teilnehmer gewählt haben. In diesem Fall braucht er nur die Situationen durchzusehen, zu denen die von den anderen Teilnehmern gewählten Strategien führen, um für sich selbst die Strategie zu wählen, die ihm den maximalen Gewinn gewährleistet. Der Spieler weiß jedoch nicht, welche Strategie seine Gegner gewählt haben. Gerade darin besteht die Schwierigkeit, das Interesse und manchmal auch das Risiko des Spiels.
Von allen möglichen Spielen sind die mit zwei Teilnehmern, deren Interessen entgegengesetzt sind, am einfachsten: In jeder Partie des Spiels ist der Verlust des einen Spielers gleich dem Gewinn (mit entgegengesetzten Vorzeichen) des anderen. Solche Spiele werden manchmal antagonistische

Spiele genannt. Ich werde den letzten Ausdruck jedoch nicht benutzen, um keine Verwirrung mit Begriffen der Philosophie zu stiften, die, wie Sie sehen, auch in der Mathematik auftreten. Die Summe der Gewinne beider Spieler (des Gewinnes und des Verlustes als negativer Gewinn) ist stets gleich Null. Deshalb wollen wir solche Spiele Nullsummenspiele nennen.

Die Bedingung, daß das Spiel die Summe Null hat, bedeutet eine wesentliche Einschränkung. Sogar bei so ernsten Konflikten wie kriegerischen braucht sie nicht erfüllt zu sein — der Verlust der einen Seite braucht durchaus nicht gleich dem Gewinn der anderen zu sein, da die Verluste der beiden Seiten, wie wir bereits wissen, sogar in verschiedenen Einheiten ausgedrückt sein können.

Es ist offensichtlich, daß es bei Nullsummenspielen nicht notwendig ist, die Gewinne beider Spieler anzugeben. Deshalb ist ein solches Spiel bereits durch die Aufzählung der Strategien beider Spieler in einer einzigen Gewinnmatrix gegeben.

Wir setzen voraus, daß ein bestimmtes Spiel vorgegeben ist; die Strategien $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des ersten Spielers und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des zweiten Spielers seien bekannt, ebenso die Werte a_{ij}, die den Gewinn des Spielers A (bzw. den Verlust des Spielers B) bedeuten, wenn die Spieler die Strategien A_i und B_j wählen. Die Matrix des Spiels hat das folgende Aussehen:

$A \diagdown B$	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Wie kann man die Lösung des Spiels finden?

Für jeden Spieler bedeutet Lösung die Festlegung einer solchen Handlungsweise, bei der sein mittlerer Gewinn über eine große Anzahl von Spielen maximal ist. Es muß jedoch noch gesagt werden, daß wir beide Spieler für gleichmäßig „schlau" oder gleichmäßig „dumm" halten — jeder kann mit demselben Erfolg alle möglichen Situationen übersehen und die Ausmaße von Katastrophen abschätzen. Wir wollen noch verabreden, daß die für die bevorstehende Partie des Spiels gewählte Strategie jedes Spielers dem Gegner nicht bekannt ist.

Wenn beide Spieler der Spieltheorie gemäß handeln, werden sie jedesmal eine solche Strategie wählen, bei der sich ein maximal möglicher Gewinn bei ungünstigster Handlungsweise des Gegners ergibt.

Ein Nullsummenspiel kann man z. B. als Wahl eines Punktes auf der Erdoberfläche deuten, wenn man die Strategie des Spielers A als Wahl der geografischen Breite und die des Spielers B als Wahl der geografischen Länge des Punktes auffaßt. Die Höhe des Gewinnes läßt sich als Höhe des gewählten Punktes über dem Meeresspiegel auffassen. Wenn das Relief der betreffenden Gegend auf der Erdoberfläche eine Gebirgskette in Richtung des Breitenkreises mit einem relativ niedrigen Paß ist, so entspricht die uns interessierende Situation gerade dem Sattelpunkt — dem Minimax. Deshalb heißt eine solche Strategie auch Minimax-Strategie. Für den Spieler B ist die Minimax-Strategie am günstigsten, d. h., er stellt zunächst für jede seiner Strategien B_j (jede Spalte der Matrix) den größten Wert fest, d. h. den jeweils größtmöglichen Gewinn des Gegners A, und er wählt die kleinste dieser Maximalzahlen. Die zugehörige Strategie, die den maximalen Gewinn des Gegners minimal hält, garantiert ihm, daß er bei für ihn ungünstigster Handlungsweise des Gegners am wenigsten verliert. Für den Spieler A ist die Maximin-Strategie optimal, d. h. die Strategie, die sich ergibt, wenn er den minimalen Gewinn bei jeder seiner Strategien (Minimalzahlen der Zeilen der Matrix) maximiert. Man kann beweisen, daß das Maximin niemals größer als das Minimax sein kann. Wenn sie zusammenfallen, hat das Spiel einen Sattelpunkt, der gleichzeitig Maximin für den einen Spieler und Minimax für den anderen ist. Dieser gemeinsame Wert von größtem Minimalgewinn und kleinstem Maximalverlust heißt dann Wert des Spiels, der eine ganz bestimmte Zahl a_{ij} der Matrix ist.

Wenn ein Spiel einen Sattelpunkt hat und einer der Spieler wählt die dazugehörige Strategie, so ist es für den anderen am günstigsten, auch die Strategie zu wählen, bei der der Sattelpunkt auftritt — eine beliebige andere Strategie würde seine Verluste nur erhöhen.

Die optimalen Strategien, die dem Sattelpunkt entsprechen, heißen reine Strategien. Wenn ein Spiel einen Sattelpunkt hat, ist es sinnlos, zu versuchen, seine Absichten vor dem Mitspieler zu verbergen — am sinnvollsten ist es für beide Spieler (natürlich immer unter der Annahme, daß der Gegner genau so schlau ist), immer nur einzig und allein die reine Strategie zu wählen. Wenn das Spiel keinen Sattelpunkt hat, gibt es keine reine optimale Strategie für die Spieler. Die Lösung des Spiels (d. h. die Bestimmung der optimalen Verhaltensweise der Spieler) ist dann komplizierter; die Spieler müssen sich dann auf die eigenen Überlegungen und den Zufall stützen. Wie *J. v. Neumann* bewiesen hat, gibt es jedoch bei jedem Spiel mit endlich vielen Strategien eine Lösung. Im jetzt vorliegenden Fall ist die optimale Verhaltensweise der Wechsel der Strategien von Partie zu Partie, wobei die Strategie zufällig gewählt wird, doch mit ganz bestimmten zu berücksichtigenden Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Strategien. Diese Wahrscheinlichkeiten können berechnet werden, wenn die Matrix des Spiels gegeben ist. Ein derartiges Vorgehen bezeichnet man als gemischte Strategie.

Damit diese Überlegungen nicht „in der Luft hängen", wollen wir wieder ein „Zahl-Wappen-Spiel" betrachten, jedoch vorher die Spielregeln ändern. Das Spiel möge darin bestehen, daß Sie ein Geldstück auf den Tisch legen und mit der Hand zudecken. Ihr Gegner muß raten, ob Zahl oder Wappen oben ist. Wenn er richtig geraten hat, zahlen Sie ihm einen Pfennig, wenn nicht, zahlt er an Sie. Die Matrix des Spiels ist sehr einfach:

$$\begin{matrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{matrix}$$

In diesem Fall ist das Minimax (d. h. das Minimum der Maxima jeder Zeile) + 1, während das Maximin — 1 ist. Das Spiel hat also keinen Sattelpunkt.

Nach welcher Strategie werden Sie vorgehen? Die einfachste Möglichkeit wäre, das Geldstück immer mit derselben Seite nach oben zu legen, z. B. immer Wappen zu haben. Das würde aber Ihr Gegner sehr bald herausbekommen und ständig gewinnen. Möglich wäre, sagen wir, immer abwechselnd Zahl und Wappen zu legen. Doch auch das würde der Gegner schnell entdecken, und Sie gerieten wieder auf die Verliererseite. Wenn Sie die Regel des Wechselns von Zahl und Wappen noch so kompliziert machen, wird ein aufmerksamer Gegner Sie doch einmal herausbekommen und Sie schließlich ruinieren.

Dem Gegner muß also die Möglichkeit genommen werden, aus dem Verlauf des Spiels irgendwelche nützlichen Informationen über Ihre Absichten für die Zukunft schöpfen zu können. Dazu müssen Ihre Entscheidungen bei jedem Schritt zufällig und unabhängig sein. Außerdem muß das Auftauchen von Zahl und Wappen gleichwahrscheinlich sein. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß auch für Ihren Gegner die optimale Strategie darin besteht, Zahl und Wappen unabhängig von den einzelnen Spielen zu nennen, und zwar mit gleichen Wahrscheinlichkeiten. Im beschriebenen Spiel ist es also das beste, was die Gegner tun können, für ihre jeweilige Entscheidung hinter dem Rücken ein anderes Geldstück zu werfen.

Das scheint paradox zu sein: Nicht ein zielbewußtes Verhalten wird empfohlen, sondern eins nach dem Willen des Zufalls, ohne den Verstand walten zu lassen. Eine gründliche Überlegung zeigt indessen, daß das nicht paradox, sondern vielmehr unerwartet ist. Und das ist nichts Außergewöhnliches; im Verlauf unseres ganzen Lebens erfahren wir viele vernünftige Dinge, von denen wir vorher keine Ahnung hatten.

Obwohl unsere Schlußfolgerung nicht sehr aussichtsvoll aussieht, hat die Spieltheorie schon heute eine Reihe wichtiger Erfolge zu verzeichnen, z. B. bei der Analyse des Verhaltens von Lebewesen, von Menschen oder sozialen Gruppen in der Gesellschaft, bei der Wahl der optimalen Handlungsweise in einer Konfliktsituation mit unvollständiger Information sowie bei der Lösung ökonomischer, juristischer, betriebswirtschaftlicher und anderer Probleme. Die Erfolge der Spieltheorie bestehen allerdings weniger in der Lösung konkreter Aufgaben, als vielmehr darin, daß sie den Menschen, die mit sehr verwickelten Problemen zu tun haben, eine

gewisse Orientierung gibt, nach der sie in komplizierten Konfliktsituationen einen Überblick gewinnen können.
Am Anfang des Buches führten uns die Gespräche mit dem Physiologen zu dem Schluß, daß sich der Organismus häufig umzustellen (seinen Zustand zu ändern) hat, um die Menge der vielgestaltigen Aufgaben zu lösen, die auf seinem Lebensweg auftreten. Die Modellierung der Anpassung des lebenden Organismus an die äußeren Bedingungen zur Erfüllung bestimmter Aufgaben, d. h. die Modellierung zielgerichteten Verhaltens, geht jetzt den Weg über die Spieltheorie. Man spricht über das Spielen von Automaten gegeneinander und ihr Spielen gegen die „Natur", d. h. über die Anpassung des Automaten an Einwirkungen von außen, deren Ursachen nicht von ihm abhängen.
Hier sind die hervorragenden Arbeiten des unlängst verstorbenen talentierten sowjetischen Wissenschaftlers *M. L. Zetlin* über das Verhalten von Automaten in „zufälliger Umwelt", das Schachspiel mathematischer Maschinen gegen den Menschen und gegeneinander, die Modellierung ökonomischer Tatbestände und vieles andere zu erwähnen. Der gesamte Fragenkreis ist sehr interessant und aussichtsreich. Darüber kann ich jedoch nicht ausführlicher berichten, denn wir müssen zum Schluß kommen.
Da ich mir die Aufgabe gestellt habe, Ihre Aufmerksamkeit auf einige Abschnitte der Mathematik zu lenken, die Ihnen von unmittelbarem Nutzen sein können, empfehle ich Ihnen, sich mit der mathematischen Spieltheorie bei Gelegenheit etwas gründlicher zn beschäftigen.

Am runden Tisch mit Freunden

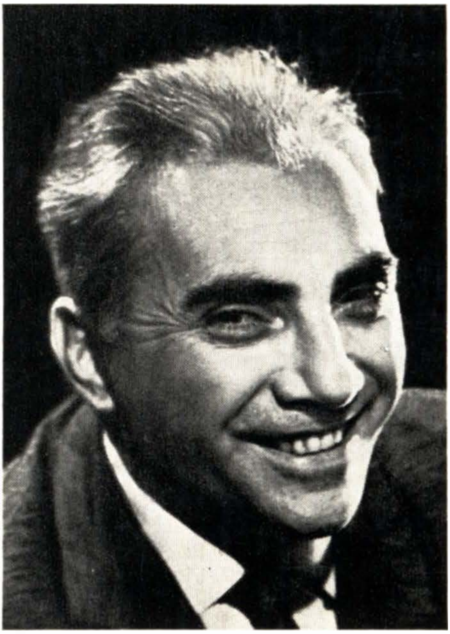
Die ersten Leser dieses Buches waren meine Freunde. Einige haben wenige Abschnitte gelesen, andere große Teile, manche das gesamte Manuskript. Die einen sagten, dieses und jenes wäre etwas langatmig, und ich begann zu kürzen. Die anderen bemerkten, daß gewisse Stellen zu knapp und schwer verständlich wären, und ich erweiterte die entsprechenden Stellen. Vorsichtige und Höfliche lenkten meine Aufmerksamkeit auf den manchmal zu scharfen Ton und auf unangebrachte Ansdrücke; Entschiedenere empfahlen nicht nur, die Schärfe der Polemik zu belassen, sondern sie noch zu verschärfen.
Einmal haben wir das Manuskript zu viert erörtert. Der erste forderte, die Dialoge herauszunehmen — ihm schien diese Form für ein solches Buch nicht angebracht zu sein; der zweite bestand darauf, sie zu belassen, nach seinen Worten verleihen sie Klarheit; der dritte bemerkte, daß meine Gesprächspartner bei diesen Dialogen weniger gut als ich abschneiden, und das könnte man dem Autor als Hervorhebung der eigenen Person anrechnen. Der zweite Gesprächspartner entgegnete: „Obwohl „Gullivers Reisen" in der ersten Person im Singular geschrieben sind, ist noch niemand auf den Gedanken gekommen, daß *J. Swift* selbst mit den gelehrten Männern der Großen Akademie von Lagado gesprochen hätte. Um so

weniger wird sich der Leser dieses Buches hintergangen fühlen." Darauf kam die spöttische Bemerkung, daß sich der dritte Gesprächspartner offenbar selbst wiedererkennt, wie er im Dialog den Kürzeren zieht. Worauf dieser antwortete, daß dieses Gespräch gar nicht mit ihm stattfand; er hätte sich nie mit der Analyse des Sehens beschäftigt.
Sie stritten noch lange, wer recht hätte und worin, ohne mich zu Wort kommen zu lassen. Als sie sich meiner erinnerten und fragten, was ich mir dabei gedacht habe, bemerkte der zweite Gesprächspartner, daß der Streit doch eigentlich die Unwichtigkeit der Person in der Polemik und die Nützlichkeit der Polemik selbst gezeigt habe. Gemeinsam beschlossen wir schließlich, die Dialoge beizubehalten.
Die Arbeit am Buch hat viel Zeit erfordert, und ich wollte dieses Vorhaben mehrmals aufgeben. Meine Freunde und Verwandten ermunterten mich immer wieder. Sie hatten sich nicht nur meine Klagen anzuhören, sondern zuletzt auch noch das Manuskript zu lesen und ihr Urteil abzugeben. Sie haben alle zum Gelingen beigetragen. Wenn Sie, verehrter Leser, bis zu diesem Abschnitt gelangt sind und die anderen wenigstens durchgesehen haben, sind ihre guten Absichten und ihre Mühe schon belohnt. Ich wollte eigentlich jedem einzelnen an dieser Stelle namentlich danken. Als ich versuchte, das Verzeichnis derer aufzustellen, die mir mit nützlichen Hinweisen zur Seite gestanden haben, mußte ich feststellen, daß es so viele waren, daß ich sie nicht namentlich nennen kann. Ich hoffe, sie verzeihen mir das Fehlen eines persönlichen Dankes an jeden einzelnen.

Ein letztes Wort an Sie, verehrter Leser

Der Autor muß wissen, warum er ein Buch geschrieben und vom armen Leser die Zeit zum Durchlesen oder wenigstens zum oberflächlichen Durchblättern gefordert hat.
Dieses Buch soll keine Fibel und erst recht kein Lehrbuch der modernen Mathematik zum Selbstunterricht sein. Es ist für diejenigen geschrieben, für die sich die Mathematik hinter einem dichten Nebelschleier von Formeln, Kurven, Formulierungen und Beweisen verbirgt. Diesen Nebel zu durchschauen ist schwierig. Man kann schließlich nicht schwimmen oder ein Instrument spielen lernen, wenn man nur zuschaut, wie es andere machen. Genauso ist es ohne selbständige Arbeit unmöglich, die mathematischen Methoden zu erlernen, die verschiedenen Gebiete der Mathematik zu beherrschen und die Mathematik anzuwenden.
Ich wollte Ihnen, verehrter Leser, eine Hilfe bieten, damit Sie erkennen können, daß sich hinter diesem Nebelschleier tatsächlich verständliche, interessante und nützliche Dinge verbergen. Sicher ist es mir nur gelungen, eine kleine Bresche zu schlagen. Sie haben nur Fragmente gesehen, möglicherweise nicht einmal die eindrucksvollsten. Kann man aber, wenn man nur durch einen Spalt in den Kulissen schaut oder eine Sinfonie mit einem Kofferradioapparat hört, einen wirklichen Kunstgenuß empfinden?

Ich weiß nicht, ob es mir gelungen ist, Ihnen die Größe und Bedeutung der Mathematik zu zeigen und ihr das Siegel des Geheimnisvollen und Unzugänglichen zu nehmen. Wenn Sie wollen, antworten Sie dem Autor oder dem Verlag auf diese Frage.
Wenn Sie sich über den Autor beschweren wollen, tun Sie das bitte mit Nachsicht, ich habe mir immerhin Mühe gegeben, Ihnen über die ersten Klippen der Mathematik hinwegzuhelfen.
Zum Schluß möchte ich noch einmal drei verschiedene Definitionen der Wissenschaft Mathematik, die von großen Gelehrten stammen, angeben.
Friedrich Engels: „Mathematik ist die Wissenschaft, welche die räumlichen Formen und die quantitativen Beziehungen der realen Umwelt zum Gegenstand hat."
David Hilbert: „Mathematik ist das, was kompetente Leute darunter verstehen."
Willard Gibbs: „Mathematik ist Sprache."
Im Sommer 1966 fand in Moskau der IV. Internationale Mathematikerkongreß statt. Dort wurde erstmalig eine Sektion über mathematische Probleme der Steuerungs- und Regelungssysteme gebildet. Der Nestor der sowjetischen Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie *A. N. Kolmogoroff* sagte auf der Eröffnungssitzung dieser Sektion: „Die Mathematik ist das, womit die Menschen die Natur und sich selbst steuern."
Die Menschen sind trivialerweise gezwungen, ihre Handlungen zu steuern, sie wollen Herr über die Natur sein und auch andere Menschen anleiten. Deshalb besteht ihre optimale Strategie offenbar darin, sich entweder mathematische Methoden anzueignen oder mit den Mathematikern zusammenzuarbeiten.
Wenn Sie die in diesem Buch enthaltenen Gebote befolgen und sich zum Glauben an die Mathematik bekennen, so können auch Sie die so vieldeutige und gleichzeitig eindeutig verständliche Frage stellen: „Na und?"



ZUM AUTOR

Der Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften *Jakov Issevic Churgin* hat sich mit vielen Dingen beschäftigt. Er war sowohl Dispatcher eines Großbetriebes als auch wissenschaftlicher Mitarbeiter mehrerer führender Institute für Nachrichtentechnik sowie Lehrer an verschiedenen Hochschulen. Zur Zeit ist er Professor am Moskauer Gubkin-Institut für Erdölchemie und Gasindustrie.

Die Themen seiner wissenschaftlichen Arbeiten umfassen Fragen der reinen und der angewandten Mathematik, der Nachrichtentechnik, der Informationstheorie, der Kybernetik, der Neurophysiologie und der Diagnostik.

Prof. Dr. *Churgin* ist der Meinung, daß er in seiner Arbeit immer in derselben Richtung geblieben ist.

Das vorliegende Buch ist die erste Arbeit des Autors, die an einen breiten Leserkreis gerichtet ist.