Richter

Methoden der linearen Optimierung

Richter · Methoden der linearen Optimierung

Eine Einführung

Methoden der linearen Optimierung

Eine Einführung

verfaßt von Dr. habil. Klaus-Jürgen Richter

2. Auflage, mit 43 Tabellen und 13 Bildern

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1967

Verlagslektor: Alfred Sommer
Redaktionsschluß: 15. 3. 1967
ES: 19 B 2

Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
Veröffentlicht unter der Lizenznummer: 114–210/151/67
7,80

Vorwort

Betriebliche und überbetriebliche Entscheidungen müssen in der Regel unter Einhalten bestimmter einschränkender Bedingungen getroffen werden. Sowohl ihr Umfang wie auch ihre Komplexität erfordern geeignete Hilfsmittel, die das Auffinden der Entscheidung ermöglichen. Solche Entscheidungen, deren Zielstellung wie auch deren einschränkende Bedingungen durch lineare Gleichungen und Ungleichungen formuliert werden können, lassen sich durch die Anwendung der linearen Optimierung in optimaler Weise treffen.
In diesem Buch soll eine leicht faßliche Einführung in die grundlegenden Methoden der linearen Optimierung gegeben werden. Da der Bereich der Anwendungsmöglichkeiten dieser Methoden sehr umfangreich ist, macht es sich erforderlich, einen breiten Kreis von Menschen mit der linearen Optimierung vertraut zu machen. In diesem Buch werden die Optimierungsmethoden hinsichtlich ihrer Handhabung und der Verwendung der erzielten Resultate gezeigt. Da sich die Aufgaben der linearen Optimierung mathematisch durch Systeme linearer Gleichungen und Ungleichungen darstellen lassen, bietet die Matrizenrechnung eine geeignete mathematische Basis der Darstellung. Wenn trotzdem von den Hilfsmitteln der Matrizenrechnung in sehr sparsamer Weise Gebrauch genommen wird, dann in erster Linie deshalb, weil der Leserkreis in keiner Weise eingeschränkt werden soll. Eine große Zahl von Praktikern löst Aufgaben, die unmittelbar der linearen Optimierung zugänglich sind; viele dieser Menschen verfügen jedoch nicht über anwendungsbereite Kenntnisse der Matrizenrechnung, die erst in jüngster Vergangenheit in die Ausbildungspläne aufgenommen wurde. Leser, denen diese Kenntnisse zur Verfügung stehen, werden unschwer in der Lage sein, die angeführten mathematischen Beziehungen mit Hilfe des Matrizenkalküls auszudrücken.
Neben der Beschränkung hinsichtlich der verwendeten mathematischen Hilfsmittel war eine weitere erforderlich, die sich auf die im Buch enthaltenen Methoden der linearen Optimierung bezieht. Wie bereits angedeutet, werden nur die grundlegenden Methoden behandelt, an denen jedoch das Prinzip der linearen Optimierung sichtbar werden sollte. An der graphischen Methode der linearen Optimierung ist das zugrunde liegende Prinzip, nach dem alle Aufgaben der linearen Optimierung gelöst werden können, deutlich

gemacht. Obwohl diese Methode infolge der Begrenztheit der Aufgaben, die mit ihr gelöst werden können, nur geringe praktische Bedeutung hat, wurde sie wegen der klaren Darstellung des Lösungsprinzips aufgenommen. Im Anschluß daran wird die universell anwendbare Simplex-Methode von DANTZIG angeführt, nach der in der Praxis bereits viele Aufgaben gelöst worden sind. Auch die aus ihr abgeleitete modifizierte Distributionsmethode (bzw. Methode der Potentiale) zur Lösung der sehr häufig auftretenden Transportprobleme ist in die Arbeit aufgenommen. Die bereits früher entwickelten Methoden von KANTOROWITSCH werden zugunsten einer breiteren Behandlung der oben genannten Methoden nicht dargestellt. Auch die große Zahl der noch entwickelten Lösungsmethoden für lineare Optimierungsaufgaben, wie etwa die Multiplex-Methode und die logarithmische Potential-Methode von FRISCH, die Frequenz-Methode von HABR, die VOGELsche Approximationsmethode (VAM) und die Ungarische Methode sind nicht in die Arbeit aufgenommen worden. Sofern der Leser über Grundkenntnisse der linearen Optimierung verfügt, wird er über diese Methoden in der Spezialliteratur nachlesen können.
Das Buch wendet sich sowohl von der Darstellungsweise als auch vom Inhalt her vorwiegend an Kader der mittleren Ebene sowie an Studierende und Absolventen der Ingenieur- und Fachschulen. Darüber hinaus soll durch dieses Buch jedem Zugang zur linearen Optimierung geschaffen werden, der sich für neue Methoden der Entscheidungsfällung interessiert, jedoch nicht die mathematischen Voraussetzungen besitzt, die erforderlich sind, um theoretische Werke über dieses Gebiet durchzuarbeiten. Vom Arbeitsgebiet her werden vor allem Aufgaben für Wirtschaftskader und Technologen gestellt, die durch die lineare Optimierung gelöst werden können.
Da die erste Auflage von „Methoden der linearen Optimierung" in kurzer Zeit vergriffen war, habe ich den Vorschlag des Verlags, so bald wie möglich einen unveränderten Nachdruck herauszugeben, gern angenommen. Ich hoffe, daß auch dieser Nachdruck dazu beiträgt, die Methoden der linearen Optimierung mehr zum praktischen Entscheidungsinstrument zu gestalten.
Schon erhaltene Hinweise, für die ich herzlich danke, aber auch weitere Anregungen, um die ich die Leser bitte, werden zu gegebener Zeit in einer überarbeiteten Fassung ihren Niederschlag finden.

K. J. RICHTER

Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung	9
2.	Vorarbeiten zur Anwendung der linearen Optimierung	13
2.1.	Exakte Formulierung der Aufgabenstellung	13
2.2.	Aufstellung des mathematischen Modells	14
2.3.	Sammlung der Ausgangsdaten	20
3.	Das graphische Verfahren zur Lösung einfacher Aufgaben der linearen Optimierung	22
4.	Die Simplexmethode als universelles Verfahren der linearen Optimierung (Maximum- und Minimumaufgabe)	33
4.1.	Lösung der Maximumaufgabe nach der Simplexmethode	33
4.1.1.	Überführung des mathematischen Modells in die Normalform	33
4.1.2.	Der Simplex-Algorithmus	35
4.1.3.	Die Simplextabelle	45
4.1.4.	Ablaufschema der Simplexmethode	52
4.2.	Lösung der Minimumaufgabe (Duale Aufgabe)	54
4.3.	Parametrische Optimierung	60
4.4.	Optimierungsaufgaben mit begrenzten Variablen	63
4.5.	Aufgaben mit mehreren optimalen Lösungen	71
4.6.	Einschränkende Bedingungen in Form von Gleichungen	74
5.	Das Transportproblem der linearen Optimierung	77
5.1.	Allgemeine Kennzeichnung des Transportproblems	77
5.2.	Mathematisches Modell des Transportproblems	79
5.3.	Lösung des Transportproblems durch die Simplexmethode	83
5.4.	Die modifizierte Distributionsmethode (MODI)	90
5.4.1.	Bestimmung der Ausgangslösung	91
5.4.2.	Prüfung der Optimalität der Ausgangslösung (sowie jeder weiteren Lösung) und Übergang zu einer verbesserten Lösung	93
5.4.3.	Degenerierte Lösungen	109
5.5.	Unausgeglichenheit zwischen Aufkommen und Bedarf	111
5.5.1.	Das Aufkommen übersteigt den Bedarf	111
5.5.2.	Der Bedarf übersteigt das Aufkommen	115
5.6.	Transportprobleme mit zusätzlichen Einschränkungen	116
5.7.	Mehrstufiges (mehrdimensionales) Transportproblem	119
5.8.	Verschiedene Optimalkriterien beim Transportproblem	125

6. Einige Anwendungsfälle der linearen Optimierung 128
6.1. Kostenminimale Brennstoffmischung 128
6.2. Lösung eines Zuschnittproblems 132
6.3. Verteilung von Arbeiten (Verrichtungen) auf verschiedene Maschinen 142
6.4. Optimierung der Lieferbeziehungen in der Volkswirtschaft 148
6.5. Transportoptimale Standortwahl 150

7. Einsatz der modernen Rechentechnik für die Lösung von Optimierungsaufgaben 153

Literaturverzeichnis 155

Sachwortverzeichnis 157

1. Einführung

Leitungstätigkeit in der Wirtschaft ist im allgemeinen Sinne Entscheidungstätigkeit. Im Rahmen der gesamten Volkswirtschaft ist es erforderlich, den vorgesehenen Ausstoß an Produkten und Leistungen auf die einzelnen ökonomischen Einheiten wie Vereinigungen Volkseigener Betriebe (VVB), Betriebe, Produktionsgenossenschaften usw. aufzugliedern. In jedem einzelnen Betrieb müssen eine Reihe von Entscheidungen getroffen werden, um zu gewährleisten, daß mit den verfügbaren Produktionsmitteln und Arbeitskräften das Ausgangsmaterial zu den vorgesehenen Produkten verarbeitet wird. Aber auch in den einzelnen Abteilungen ist z. B. zu entscheiden, welche Arbeiten auf welchen Maschinen durchzuführen sind.
Im allgemeinen ist die Zahl der für einen bestimmten Sachverhalt zu treffenden möglichen Entscheidungen sehr groß. Krekó [1] S. 3, nennt ein Beispiel, nach dem auf zehn Eisenbahnstationen je ein Wagen steht. Diese Wagen sind nach zehn anderen Stationen zu fahren, wobei jede dieser Empfangsstationen einen Wagen erhalten soll. In diesem Falle gibt es $10! = 3\,628\,800$ mögliche Zuordnungsvarianten. Wenn also die Aufgabe gestellt würde, diejenige Zuordnung der Versandstationen zu den Empfangsstationen zu bestimmen, bei der der Austausch der Wagen die geringste Gesamtentfernung erfordert, so könnte diese Aufgabe auf keinen Fall dadurch gelöst werden, daß jede mögliche Zuordnung bestimmt und die damit verbundene Gesamtentfernung berechnet würden.

Aus dem genannten Beispiel können folgende zwei Schlußfolgerungen gezogen werden:

1. Die Komplexität und der Umfang der in der wirtschaftlichen Tätigkeit zu treffenden Entscheidungen lassen es nicht zu, diese Entscheidungen empirisch, durch „Probieren“ zu bestimmen. Ein derartiges Vorgehen ist viel zu aufwendig und mit der verfügbaren Zeit, in der eine Entscheidung zu treffen ist, nicht vereinbar.

2. Es kommt nicht darauf an, irgendeine Entscheidung zu treffen. Vielmehr dient jede Entscheidung der Verwirklichung (Erreichen irgendeines Maximums oder Minimums) eines bestimmten Zieles; sie kann diese Verwirklichung beschleunigen oder verzögern. Es liegt auf der Hand, daß diejenigen Entscheidungen die besten sind, die unter vorgegebenen

Bedingungen die Verwirklichung des gesteckten Zieles am stärksten fördern. Diese Entscheidungen nennen wir optimale Entscheidungen.

Allerdings muß man sich vor Augen halten, daß es unter bestimmten gegebenen Bedingungen verschiedene optimale Entscheidungen gibt. Betrachten wir dazu als Beispiel die Aufstellung eines optimalen Produktionsplanes für einen Industriebetrieb. Die verfügbaren Maschinenkapazitäten und Arbeitskräfte und das Volumen des einzusetzenden Materials sind bekannt. Bekannt sind weiterhin die Gewinne, die die einzelnen vom Betrieb herzustellenden Produkte erzielen. Es wäre demzufolge möglich, einen gewinnoptimalen Produktionsplan aufzustellen. Ein solcher Produktionsplan würde — natürlich nur, wenn er die begrenzten Produktionsbedingungen richtig beachtet — einen hohen Ausstoß jener Produkte vorsehen, die die höchste Gewinnquote besitzen. Es wäre ein Plan, der vorsieht, das Gewinnmaximum zu erzielen. Andererseits kann man sich vorstellen, daß ein Produktionsplan ausgearbeitet werden soll, der garantiert, daß ein vorgegebenes Mindestproduktionsprogramm mit geringsten Kosten erfüllt werden soll. Jetzt ist es erforderlich, daß die mit der Herstellung der einzelnen Produkte verbundenen Einheitskosten bekannt sind. Der so aufgestellte Produktionsplan wäre auch optimal, allerdings im Hinblick auf das mit seiner Verwirklichung verbundene Kostenminimum. Im allgemeinen wird jedoch der Anteil der einzelnen Produkte am gesamten Produktionsvolumen in beiden optimalen Plänen nicht übereinstimmen. Mit anderen Worten: Obwohl zwei optimale Pläne vorliegen, schreiben sie doch unterschiedliche Produktionsprogramme vor. Einen weiteren optimalen Plan könnte man aufstellen mit dem Ziel, ein Produktionsprogramm zu bestimmen, das die bestmögliche, d. h. die maximale Ausnutzung der betrieblichen Produktionskapazitäten oder des verfügbaren Materials garantiert.

Diese Überlegungen haben gezeigt, daß bei der Bestimmung eines optimalen Planes oder eines optimalen Programms stets festgelegt werden muß, in welcher Hinsicht der Plan optimal sein soll. Es ist erforderlich, das *Optimalkriterium* (auch: Optimalitätskriterium) festzulegen. Einige Optimalkriterien sind bereits genannt worden: Gewinn, Kosten, Kapazitätsausnutzung, Materialausnutzung (bzw. Materialabfall). Die universelle Problematik der optimalen Entscheidungsfällung führt jedoch zu weiteren Optimalkriterien. Im Zusammenhang mit der Transportplanung nennen wir den Gesamttransportaufwand, der in einem optimalen Transportplan zum Minimum werden soll. In der Landwirtschaft treten mit dem Übergang zur industriellen Produktionsweise die Fragen der wissenschaftlichen Planung und Leitung immer mehr in den Vordergrund. So kommt es darauf an, mit den verfügbaren Futtermitteln, die sich nach der verfügbaren Menge, dem Nährwert und den Gewinnungskosten unterscheiden, ein bestmögliches Fütterungsergebnis zu erzielen. Als Optimalkriterium wäre etwa der Fütterungserfolg zu nennen. Andererseits kann auch ein bestimmtes Fütterungsergebnis als Limit vorgegeben und gefordert werden, dieses Ergebnis mit geringstmöglichen Futterkosten zu erzielen. Dabei bilden die Futterkosten das Optimalkriterium.

Die hier für Betriebe genannten Beispiele von optimalen Entscheidungen treten auch in größeren wirtschaftlichen Einheiten auf. So steht die Leitung einer VVB vor der Aufgabe, das der VVB auferlegte Produktionsprogramm nach einem bestimmten Optimalkriterium auf die verschiedenen Betriebe der VVB zu verteilen. Oft bereits in den einzelnen Betrieben, in der Regel jedoch auf der Ebene einer VVB genügt es jedoch nicht mehr, eine optimale Entscheidung nur nach einem Kriterium zu treffen. Zum Beispiel wird die Leitung der VVB ein Produktionsprogramm anstreben, das gleichzeitig einen möglichst hohen Gewinn und möglichst niedrige Kosten garantiert. In diesem Programm werden beide Kriterien nicht voll erfüllt sein, und trotzdem wird in der Regel ein solches Kompromiß-Programm der Komplexität der wirtschaftlichen Entscheidungen eher entsprechen als jedes der beiden möglichen (gewinnoptimalen bzw. kostenoptimalen) Programme. Praktisch geht man dann so vor, daß zunächst die reinen, d. h. nur hinsichtlich eines Kriteriums optimalen Programme bestimmt werden und aus diesen der endgültige Plan zusammengestellt wird.

Wenn, wie oben bemerkt, eine empirische Lösung der genannten Entscheidungsprobleme nicht in Frage kommt, und wenn man die Abweichungen von der optimalen Lösung, die dann unvermeidlich sind, sofern die Entscheidungen lediglich auf der Grundlage gewisser Erfahrungen getroffen werden, unterbinden will, müssen spezielle Lösungsverfahren entwickelt werden. Sie gestatten es, die gewünschte optimale Lösung möglichst schnell und sicher zu bestimmen. Die Mathematik stellt sie uns in Form der *Optimierungsverfahren* zur Verfügung. Unter *Optimierung* wollen wir dabei die Festlegung bestimmter Maßnahmen bzw. eines Planes oder Programms verstehen, die es gestatten, ein vorgegebenes Ziel unter bestehenden Bedingungen bestmöglich zu erfüllen (oder ein vorgegebenes Ziel unter rationellster Ausnutzung der bestehenden Bedingungen zu erfüllen).

Das vorliegende Buch behandelt nicht die Optimierung schlechthin, sondern die lineare Optimierung. Diese Abgrenzung ist mathematischer Natur. Von *linearer Optimierung* sprechen wir immer dann, wenn sowohl die Bedingungen, unter denen eine optimale Lösung gefunden werden soll, als auch das Optimalkriterium mathematisch in Form linearer Beziehungen (d. h. Beziehungen, in denen die Unbekannten nur in der ersten Potenz auftreten) dargestellt werden können. Das ist von der mathematischen Seite her eine Einschränkung. Ihrer ungeachtet besteht jedoch für die lineare Optimierung eine außerordentlich breite Skala von Anwendungsmöglichkeiten. Eine sehr große Zahl ökonomischer Entscheidungsprobleme kann mathematisch exakt oder zumindest annäherungsweise durch lineare

Beziehungen dargestellt werden. Damit sind die Voraussetzungen der linearen Optimierung erfüllt. Durch eine ständige Weiterentwicklung der linearen Optimierungsverfahren werden auch immer neue Möglichkeiten erschlossen, ziemlich weitgehende Bedingungen, an die die zu fällende Entscheidung geknüpft ist, zu berücksichtigen. Andererseits entstehen auch ständig neue Entscheidungsprobleme im Rahmen der ökonomischen Tätigkeit. Insbesondere die Verwirklichung der Prinzipien des neuen ökonomischen Systems der Planung und Leitung der Volkswirtschaft stellt die einzelnen Betriebe und die ihnen übergeordneten Wirtschaftseinheiten in zunehmenden Maße vor neue Entscheidungssituationen, die daraus resultieren, daß die Betriebe in steigendem Maße über ihre wirtschaftliche Tätigkeit selbst entscheiden müssen. Insgesamt ergibt sich eine Art Entscheidungspyramide: Auf volkswirtschaftlicher Ebene werden lediglich diejenigen Entscheidungen getroffen, die gewissermaßen die große Linie der Wirtschaftspolitik bestimmen. Je kleiner die wirtschaftliche Einheit wird, für die bestimmte Festlegungen zu treffen sind, um so schärfer werden die Bedingungen, die dabei einzuhalten sind.

Zusammenfassend sei festgehalten, daß eine sehr große Zahl ökonomischer Entscheidungssituationen mathematisch durch lineare Beziehungen ausgedrückt werden kann und damit einer mathematischen Lösung mit Hilfe der Verfahren der linearen Optimierung zugänglich ist. Daraus resultiert die ständig steigende Bedeutung, die der linearen Optimierung im System der wissenschaftlichen Planungs- und Leitungstätigkeit der Volkswirtschaft zukommt.

2. Vorarbeiten zur Anwendung der linearen Optimierung

2.1. Exakte Formulierung der Aufgabenstellung

Eine ökonomische Entscheidung muß in der Regel unter dem Wirken eines ganzen Komplexes von Bedingungen getroffen werden. Das Gewicht der einzelnen Bedingungen, ihr Einfluß auf die angestrebte Lösung des Problems, ist jedoch sehr unterschiedlich. Soll ein optimaler Plan durch Anwenden der linearen Optimierung bestimmt werden, so ist es meist nicht möglich, alle die Lösung beeinflussenden Bedingungen zu berücksichtigen. Offenbar ist das auch nicht notwendig, weil eine Reihe von Bedingungen nur einen geringen Einfluß auf das Ergebnis nimmt. Aus der Notwendigkeit heraus, diejenigen Bedingungen zu bestimmen, die in ihrer Wirkung auf das Optimierungsergebnis unbedingt beachtet werden müssen, erwächst eine wichtige Aufgabe, die vor der eigentlichen Optimierungsrechnung gelöst werden muß. Diese Aufgabe besteht in der exakten Formulierung der Aufgabenstellung, für deren Lösung die lineare Optimierung angewendet werden soll.

Bei der Formulierung der Aufgabenstellung muß man beachten, daß jede Optimierungsaufgabe aus zwei Teilen besteht, nämlich

1. aus dem Ziel, das durch die Optimierung erreicht werden soll, und
2. aus den Bedingungen, die die Lösung zu 1. beeinflussen.

Bereits im einführenden Abschnitt wurde sichtbar, daß eine optimale ökonomische Entscheidung nicht prinzipiell erreicht werden kann. Vielmehr besteht die Optimalität einer Entscheidung bzw. Lösung im Sinne der linearen Optimierung immer nur im Hinblick auf ein zu wählendes Kriterium, das die Entscheidungsgrundlage bildet. So ist ein gewinnoptimaler Produktionsplan in der Regel nicht gleichzeitig ein kostenoptimaler Plan. Für das Rechenverfahren (den Algorithmus) der linearen Optimierung ist es völlig gleichgültig, welches Ziel mit der Optimierung verfolgt wird und welches Optimalkriterium demzufolge zu wählen ist. Die Anwendbarkeit des errechneten Ergebnisses in der ökonomischen Praxis hängt jedoch entscheidend davon ab, ob ein Optimalkriterium gewählt wurde, das der gegebenen ökonomischen Zielstellung entspricht. Die Festlegung des Optimalkriteriums, das der ökonomischen Zielstellung bestmöglich entspricht, ist

demnach die erste und sehr verantwortungsbewußt zu lösende Aufgabe. Ein unscharf gewähltes Optimalkriterium kann die Anwendbarkeit der errechneten Ergebnisse in Frage stellen. Es ist unbegründet, dann die Zweckmäßigkeit des Optimierungsverfahrens in Zweifel zu ziehen.
Von gleicher Tragweite für den Erfolg einer Optimierungsrechnung ist die exakte Formulierung der einschränkenden Bedingungen, unter denen die optimale Lösung gefunden werden soll. Zunächst ist es erforderlich, unter den bestehenden Bedingungen diejenigen auszuwählen, die der ökonomischen Fragestellung des Entscheidungsproblems am besten entsprechen. Das können bei dem gleichen Entscheidungsproblem zu unterschiedlichen Zeiten verschiedene Bedingungen sein. Ein gewinnoptimaler Produktionsplan zum Beispiel wird dann unter besonderer Beachtung der durch die Produktionskapazitäten des Betriebes gesetzten Grenzen bestimmt werden, wenn es sich herausstellt, daß zu dem gegebenen Zeitpunkt zwar Arbeitskräfte und Ausgangsmaterial in genügendem Maße verfügbar sind, die Kapazität der Produktionseinrichtungen jedoch begrenzt ist und somit verhindert, bestimmte gewinngünstige Erzeugnisse in dem angestrebten Umfang zu produzieren. Zu einem anderen Zeitpunkt kann die Begrenztheit der verfügbaren Materialien dazu zwingen, gerade diese Bedingungen bei der Bestimmung der optimalen Planvariante besonders zu berücksichtigen. Hierbei werden, wie auch bei unterschiedlichen Zielen der Optimierung, voneinander abweichende optimale Pläne berechnet. Insbesondere dann, wenn der optimale Plan für einen längeren Zeitraum gültig sein soll, ist besonders viel Sorgfalt darauf zu verwenden, die für diesen Zeitraum wirkenden einschränkenden Bedingungen richtig zu erkennen und bei der Berechnung des Planes anzusetzen.
Die exakte und den ökonomischen Bedingungen bestmöglich entsprechende Formulierung sowohl des Zieles der Optimierungsrechnung als auch der dabei zu berücksichtigenden Einschränkungen (Grenzen oder einschränkenden Bedingungen) schafft die Voraussetzung dafür, daß das errechnete Ergebnis praktisch anwendbar und für die betriebliche Tätigkeit von Nutzen ist.

2.2. Aufstellung des mathematischen Modells

Um ein lineares Optimierungsproblem rechnerisch lösen zu können, ist es erforderlich, dieses Problem in Gestalt mathematischer Beziehungen niederzuschreiben. Die Gesamtheit der mathematischen Beziehungen, die für ein gegebenes Optimierungsproblem benötigt werden, nennen wir das *mathematische Modell* dieses Problems bzw. dieser Aufgabe. Wir betrachten zunächst ein sehr einfaches, übersichtliches Beispiel.
Für die Herstellung von zwei Erzeugnissen E_1 und E_2 erweisen sich zwei Maschinen, auf denen diese Erzeugnisse bearbeitet werden, und zwei

Montagestraßen, auf denen die Erzeugnisse montiert werden, als einschränkende Bedingungen. Ihre Kapazität wird durch die folgenden Daten gekennzeichnet:

> Auf der ersten Maschine können 20 Stück des Erzeugnisses E_1 oder 40 Stück des Erzeugnisses E_2 oder eine entsprechende Kombination beider Erzeugnisse bearbeitet werden;
> auf der zweiten Maschine können 30 Stück des Erzeugnisses E_1 oder 30 Stück des Erzeugnisses E_2 oder eine entsprechende Kombination beider Erzeugnisse bearbeitet werden;
> auf der ersten Montagestraße können maximal 15 Stück des Erzeugnisses E_1 montiert werden;
> auf der zweiten Montagestraße können maximal 25 Stück des Erzeugnisses E_2 montiert werden.

Die Aufgabe besteht darin, einen Produktionsplan zu bestimmen, der einen maximalen Produktionswert zu erreichen gestattet. Dieser Produktionswert soll auf der Grundlage der Industrieabgabepreise für beide Erzeugnisse berechnet werden. Diese Preise betragen je Erzeugniseinheit

> 5 Währungseinheiten (z. B. 1 WE = 1000 MDN) beim Erzeugnis E_1,
> 10 Währungseinheiten bei Erzeugnis E_2.

Diese Aufgabe ist, wie bereits gesagt, außerordentlich einfach und nach kurzer Überlegung sofort lösbar. Aber gerade diese Einfachheit und Übersichtlichkeit gestattet es uns, die mathematischen Überlegungen mit besonderer Aufmerksamkeit zu verfolgen.

Wir stellen nunmehr das mathematische Modell der Aufgabe auf. Es wird nur aus linearen Gleichungen und Ungleichungen bestehen, da es sich um eine Aufgabe der linearen Optimierung handelt. Die lineare Funktion, die das Ziel der Aufgabe darstellt, heißt *Zielfunktion* (bzw. *Zweckfunktion*). Sie ergibt sich durch folgende Überlegung: Der Preis je Erzeugniseinheit des Erzeugnisses E_1 beträgt 5 Währungseinheiten. Für allgemein x_1 Stück des Erzeugnisses ergibt sich somit ein Preis von $5x_1$ Währungseinheiten. Der Preis für x_2 Stück des Erzeugnisses E_2 beträgt entsprechend $10x_2$ Währungseinheiten. Der Gesamtpreis der produzierten Erzeugnisse E_1 und E_2 ergibt sich zu $5x_1 + 10x_2$. Diesen Ausdruck nennen wir die Zielfunktion Z. Nach der Aufgabenstellung soll der durch die Industrieabgabepreise ausgedrückte Produktionswert zum Maximum werden. Das bedeutet, daß die den Produktionsumfang bestimmenden Variablen x_1 und x_2 so zu wählen sind, daß der Wert der Zielfunktion zum Maximum wird. Wir schreiben dafür

$$Z = 5x_1 + 10x_2 \rightarrow \max. \tag{1}$$

Die bezüglich der zwei Maschinen und zwei Montagestraßen bestehenden Beschränkungen werden wie folgt modelliert: Da auf der ersten Maschine 20 Stück des Erzeugnisses E_1 bearbeitet werden können, wird für ein Stück $^1/_{20}$ der Maschinenkapazität und für x_1 Stück $x_1/20$ dieser Kapazität benötigt. Entsprechend benötigt man $^1/_{40}$ der Kapazität der ersten Maschine, um ein Stück des Erzeugnisses E_2 herzustellen. Für x_2 Stück dieses Erzeugnisses benötigt man demnach $x_2/40$ der Kapazität der Maschine. Die Gesamtkapazität dieser Maschine beträgt 1. Die Tatsache, daß diese Gesamtkapazität durch die Bearbeitung von x_1 Stücken des Erzeugnisses E_1 und von x_2 Stücken des Erzeugnisses E_2 nicht überschritten werden darf, schreiben wir

$$\frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{40} \leqq 1. \tag{2}$$

In Worten: Die für das Bearbeiten der Erzeugnisse E_1 und E_2 benötigte Kapazität der ersten Maschine ist kleiner als die oder höchstens gleich der Gesamtkapazität dieser Maschine. Für spätere Rechnungen formen wir die Beziehung (2) um in

$$2x_1 + x_2 \leqq 40. \tag{2a}$$

Analoge Überlegungen ergeben für die Kapazität der zweiten Maschine zunächst die Beziehung

$$\frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} \leqq 1, \tag{3}$$

die in

$$x_1 + x_2 \leqq 30 \tag{3a}$$

umgeformt wird.

Für die Kapazitäten der Montagestraßen ergeben sich die entsprechenden Beziehungen sofort zu

$$x_1 \leqq 15 \tag{4}$$

für die erste Montagestraße und zu

$$x_2 \leqq 25 \tag{5}$$

für die zweite Montagestraße.

Nunmehr sind alle durch die Aufgabenstellung gegebenen einschränkenden Bedingungen modelliert. Bevor jedoch das gesamte mathematische Modell niedergeschrieben werden kann, muß noch eine weitere, von der jeweiligen

Aufgabenstellung unabhängige Bedingung angegeben werden. Sie besteht darin, daß in der Lösung keine negativen Werte der Variablen x_1 und x_2 auftreten dürfen, denn natürlich können negative Mengen der Erzeugnisse E_1 und E_2 nicht produziert werden. Wir schreiben deshalb die sog. Nichtnegativitätsbedingung als

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0. \tag{6}$$

Für die eingangs gestellte Aufgabe kann nunmehr das gesamte mathematische Modell in folgender Zusammenstellung angegeben werden:

1. Zielfunktion

$$Z = 5x_1 + 10x_2 \rightarrow \max.$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 40 \\ x_1 + x_2 &\leqq 30 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} &\leqq 15 \\ x_2 &\leqq 25 \end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0.$$

Diese drei Bestandteile des mathematischen Modells können stets unterschieden werden. Während die unter 3. angegebene Nichtnegativitätsbedingung immer gilt, werden sowohl Zielfunktion als auch einschränkende Bedingungen für jeweils einen bestimmten Planungszeitraum, für den die zutreffende Entscheidung gefällt wird, festgelegt.

Den Gleichungen und Ungleichungen des für das Beispiel angegebenen mathematischen Modells entspricht die folgende allgemeine Form des mathematischen Modells der Maximum-Aufgabe der linearen Optimierung. In der bereits eingeführten Dreiteilung lautet dieses Modell:

1. Zielfunktion

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

bzw.

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow \max. \tag{7a}$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \leqq b_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqq b_m \tag{7b}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0; \; \cdots \; ; \quad x_n \geqq 0. \tag{7c}$$

Durch einen Vergleich der allgemeinen Form des mathematischen Modells mit dem Modell des bereits bekannten Beispiels wird ersichtlich, daß durch (7a) bis (7c) das Maximum-Problem modelliert wird. Ein Vergleich zwischen der Zielfunktion Gl. (1) und der allgemeinen Gl. (7a) ergibt:

$$c_0 = 0$$
$$c_1 = 5$$
$$c_2 = 10 \quad (n = 2).$$

Das konstante Glied der Zielfunktion ist nicht immer gleich Null. So ist es bei der Bestimmung eines kostenminimalen Programms etwa durch die leistungsunabhängigen Kosten bestimmt. Für die Lösung der Optimierungsaufgabe ist c_0 jedoch ohne Bedeutung. Es kann auch in der Rechnung zunächst unbeachtet bleiben, wenn es nicht gleich Null ist. Lediglich dann, wenn der Gesamtwert der Zielfunktion gesucht wird, muß c_0 berücksichtigt werden.

Durch Vergleich der einschränkenden Bedingungen nach (2a), (3a), (4) und (5) mit (7b) ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{12} = 1 & b_1 = 40 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 1 & b_2 = 30 \\ a_{31} = 1 & a_{32} = 0 & b_3 = 15 \\ a_{41} = 0 & a_{42} = 1 & b_4 = 25. \end{array}$$

Damit liegen alle Koeffizienten des für das mathematische Modell des Beispiels aufgestellten Systems der einschränkenden Bedingungen vor. Da, wie bereits gesagt, $n = 2$ ist und weiterhin — wegen der Vorgabe von

vier einschränkenden Bedingungen — $m = 4$ gilt, sind keine weiteren Bedingungen gegeben.
Die Koeffizienten a_{ij} des Systems der einschränkenden Bedingungen nach (7b) sind allgemein Aufwands- oder Einsatzkoeffizienten. Sie geben an, welcher Aufwand der Art i (Material, Kapazität, Arbeitskräfte, Energie u. ä.) für eine Einheit der Art j erforderlich ist. Durch die absoluten Glieder b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ wird die obere Grenze der verfügbaren Einsatzgrößen der Art i angegeben. Im Falle der Maximumaufgabe muß das optimale Planungsprogramm im allgemeinen so bestimmt werden, daß dadurch die durch b_i gegebenen Grenzen nicht überschritten werden. Das wird dadurch ausgedrückt, daß der jeweilige Gesamteinsatz bzw. Gesamtverbrauch der Art i [linke Seite der Beziehungen nach (7b)] kleiner als die oder höchstens gleich der oberen Grenze b_i ist. Für jede der i Einsatz- oder Verbrauchsarten wird eine Beziehung angegeben.
Hinsichtlich der Nichtnegativitätsbedingung sind keine besonderen Erwägungen erforderlich.
Die charakteristischen Merkmale der Maximumaufgabe kehren sich bei der Minimumaufgabe ins Gegenteil um. Ein entsprechendes Beispiel soll später durchgerechnet werden. Nehmen wir an, es sei eine optimale Futtermischung für einen landwirtschaftlichen Betrieb zu bestimmen. Optimalkriterium sind die Futterkosten, die zum Minimum werden sollen. Gleichzeitig gibt es bestimmte Mindestanforderungen an die Futtermischung, die einzuhalten sind. Sie beziehen sich etwa auf einen Mindestnährwert je Mengeneinheit der Futtermischung und auf bestimmte Vitamine, die in vorgegebenen Mindestmengen im Futter enthalten sein müssen.
Die bei der Maximumaufgabe eingeführten Symbole können auch hier verwendet werden. Es ergibt sich dann folgendes mathematische Modell der Minimumaufgabe:

1. Zielfunktion

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$$

bzw.

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min. \tag{8a}$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geqq b_2 \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geqq b_m \end{aligned} \tag{8b}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0; \cdots ; \quad x_n \geqq 0. \tag{8c}$$

Der Unterschied der Minimumaufgabe zur Maximumaufgabe besteht in der Zielfunktion und in den einschränkenden Bedingungen. In der Zielfunktion wird verlangt, daß deren Wert in der optimalen Lösung zum Minimum wird. Die einschränkenden Bedingungen geben nunmehr in der Regel einen Mindestwert an, der nicht unterschritten werden darf (wie etwa einen Mindestnährwert bei der Futtermischung u. ä.). Im Gegensatz dazu geben die einschränkenden Bedingungen der Maximumaufgabe im allgemeinen einen Höchstwert an, der nicht überschritten werden darf. Der Mindestwert wird durch b_i angegeben[1]. Die Koeffizienten a_{ij} werden analog zur Maximumaufgabe interpretiert.
Sowohl bei der Maximum- als auch bei der Minimumaufgabe können die einschränkenden Bedingungen durch Ungleichungen (Kleiner-als- bzw. Größer-als-Beziehungen) und durch Gleichungen ausgedrückt werden. Beide Möglichkeiten sind in der allgemeinen Schreibweise nach (7b) bzw. (8b) berücksichtigt.

2.3. Sammlung der Ausgangsdaten

Aus der Aufgabenstellung gehen alle Bedingungen hervor, die bei der Lösung einer Optimierungsaufgabe zu beachten sind. Sie ergeben eine Maximum- oder eine Minimumaufgabe. Das mathematische Modell der Aufgabe kann erst dann gelöst werden, wenn die im mathematischen Modell angegebenen allgemeinen Größen c_j (Koeffizienten der Zielfunktion, die die Bedeutung der Variablen x_j in der Zielfunktion bestimmen), a_{ij} (Koeffizienten der einschränkenden Bedingungen) und b_i (absolute Glieder der einschränkenden Bedingungen) durch Zahlen ersetzt sind. Diese Zahlen, beispielsweise Gewinne je Mengeneinheit verschiedener Erzeugnisse, Kosten je Mengeneinheit, Materialverbrauchsnormen, erforderliche Maschinenkapazitäten für die verschiedenen Erzeugniseinheiten, verfügbare Herstellungskapazitäten und Materialien u. ä., ergeben sich aus der jeweiligen ökonomischen Situation, für die eine optimale Entscheidung getroffen werden muß. Ihre exakte und auf einer zutreffenden Abgrenzung beruhende Berechnung nimmt wesentlichen Einfluß auf die Güte des Optimierungsergebnisses. Nicht zuletzt liegt es an unexakten Ausgangsdaten, wenn Optimierungsergebnisse die in sie gesetzten Erwartungen nicht erfüllen und für eine praktische Anwendung in der Wirtschaftsleitung nur bedingt geeignet sind. Es ist deshalb notwendig, auf die Bestimmung

[1] Daneben gibt es auch Aufgaben, deren einschränkende Bedingungen sowohl Höchstwerte als auch Mindestwerte enthalten

der Ausgangsgrößen große Sorgfalt zu verwenden. Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe, die im Bereich derjenigen ökonomischen Einheit zu lösen ist, die eine optimale Entscheidung anstrebt. Während nämlich umfangreichere Optimierungsaufgaben in Rechenzentren sehr schnell gelöst werden können, ist es nicht möglich, dort auch die Ausgangsdaten zusammenzustellen und auf ihre sachliche Richtigkeit zu prüfen.

Es ist anzustreben, daß zukünftig immer mehr Entscheidungen mit Hilfe der linearen Optimierung vorgenommen werden. Dann werden ständig Ausgangsdaten (Informationen) benötigt, die für die ökonomische Leitung erforderlich sind. Diese Ausgangsdaten werden aus dem jeweils bestehenden Abrechnungssystem unmittelbar entnommen. Die hinsichtlich der Genauigkeit und sachlichen Richtigkeit der im Abrechnungssystem gewonnenen Daten bestehenden Bestimmungen gelten dann auch für die Ausgangsdaten der linearen Optimierung. Vorläufig werden die Ausgangsdaten nebenher und außerhalb des eigentlichen Abrechnungssystems ermittelt. Das bedeutet, daß Optimierungsrechnungen nur hin und wieder durchgeführt werden, um ökonomische Entscheidungen zu treffen. Die angestrebte Regelmäßigkeit dieses Zustands der Optimierungsrechnungen wird sie in den Vordergrund des gesamten Abrechnungssystems rücken. Sie wird schließlich dazu führen, daß zunehmend nur diejenigen Daten im Abrechnungssystem erfaßt und verarbeitet werden, die tatsächlich erforderlich sind, um die anfallenden Entscheidungen zu treffen. Die exakte Formulierung bestimmter Entscheidungen durch die lineare Optimierung fördert und beschleunigt diesen Prozeß.

3. Das graphische Verfahren zur Lösung einfacher Aufgaben der linearen Optimierung

Zur Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung steht eine ziemlich große Anzahl von Lösungsverfahren zur Verfügung. Wir besprechen zunächst ein Verfahren, dessen Anwendungsbereich zwar sehr eng begrenzt ist, das jedoch das prinzipielle Vorgehen bei der Lösung derartiger Aufgaben deutlich demonstriert. Es handelt sich um das graphische Verfahren zur Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung. Das Verfahren wird an Hand des bereits eingeführten Beispiels erläutert. In 2.2. wurde das mathematische Modell zu diesem Beispiel wie folgt angegeben:

1. Zielfunktion

$$Z = 5x_1 + 10x_2 \rightarrow \max.$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$2x_1 + x_2 \leqq 40 \qquad \text{(I)}$$

$$x_1 + x_2 \leqq 30 \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \qquad \leqq 15 \qquad \text{(III)}$$

$$x_2 \leqq 25 \qquad \text{(IV)}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0.$$

Aus Gründen der Darstellung wurden die einschränkenden Bedingungen abweichend von der allgemeinen Benummerung durch römische Zahlen unterschieden.

Das graphische Verfahren zur Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung beruht darauf, daß ein Punkt in der Ebene, etwa im cartesischen Koordinatensystem, durch zwei Koordinaten x_1 und x_2 dargestellt und bestimmt werden kann. So kann jedes Produktionsprogramm, das aus den Mengen x_1 des Erzeugnisses E_1 und x_2 des Erzeugnisses E_2 besteht, durch einen Punkt im cartesischen Koordinatensystem angegeben werden. Sowohl die Zielfunktion als auch die einschränkenden Bedingungen (I) bis

(IV) können in diesem Koordinatensystem durch Geraden dargestellt werden. Wir demonstrieren das zunächst an den einschränkenden Bedingungen. In Bild 1 ist der Verlauf der die einschränkende Bedingung (I) darstellenden Geraden, deren Gleichung

$$2x_1 + x_2 = 40$$

lautet, angegeben. Die Übertragung der Gleichung in das Koordinatensystem erfolgt am einfachsten mit Hilfe der Achsenabschnittsgleichung, die mit den hier eingeführten Variablen x_1 und x_2

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q} = 1$$

lautet. Dabei sind p und q die Abschnitte, die die Gerade auf der x_1-Achse und auf der x_2-Achse abschneidet. Es müssen also lediglich diese Abschnitte bestimmt werden, um die Gerade durch die somit gefundenen zwei Punkte zeichnen zu können.

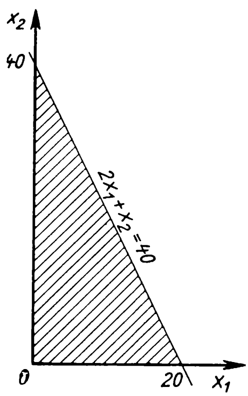

Bild 1. Durch die Gerade mit der Gleichung $2x_1 + x_2 = 40$ bestimmter Bereich der zulässigen Lösungen

Für die oben angegebene Gleichung lautet die Achsenabschnittsgleichung, die man erhält, indem man die Gleichung durch 40 teilt,

$$\frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{40} = 1.$$

Die Gerade schneidet somit die x_1-Achse an der Stelle $p = 20$ und die x_2-Achse an der Stelle $q = 40$.
Uns interessiert der Verlauf dieser Geraden nur im ersten Quadranten, weil nur dort die Nichtnegativitätsbedingung für beide Variablen x_1 (Abszisse) und x_2 (Ordinate) erfüllt ist. Durch die Gerade wird das Gebiet des ersten

Quadranten in zwei Teilgebiete zerlegt. Punkte, die im Gebiet rechts oberhalb der Geraden liegen, erfüllen die durch (I) gegebene einschränkende Bedingung nicht. Sie besitzen Koordinaten x_1 und x_2, für die der Ausdruck $2x_1 + x_2$ größer als vierzig wird. Punkte dagegen, die im Gebiet links unterhalb der Geraden oder auf der Geraden selbst liegen, besitzen Koordinaten x_1 und x_2, für die der genannte Ausdruck kleiner als oder gleich vierzig ist. Sie erfüllen die durch die einschränkende Bedingung (I) gestellte Forderung. Lösungen (x_1, x_2) also, die durch Punkte dargestellt werden können, die im Gebiet links unterhalb der Geraden oder auf der Geraden liegen, sind im Sinne der einschränkenden Bedingung (I) zulässige Lösungen. Dementsprechend sagen wir, daß durch die Gerade das Gebiet des ersten Quadranten unterteilt wird in

1. den Bereich der zulässigen Lösungen, der das Gebiet links unterhalb der Geraden und die Gerade selbst umfaßt,
2. das Gebiet der nichtzulässigen Lösungen rechts oberhalb der Geraden.

Die optimale Lösung muß also, indem sie die einschränkende Bedingung (I) erfüllt, in dem durch die entsprechende Gerade abgegrenzten Bereich der zulässigen Lösungen liegen.
In analoger Weise wird die zweite einschränkende Bedingung durch eine Gerade dargestellt, die der Gleichung

$$x_1 + x_2 = 30$$

entspricht. Diese Gerade ist in Bild 2 dargestellt. Auch sie teilt das Gebiet des ersten Quadranten in einen Bereich der zulässigen Lösungen, der aus dem Gebiet links unterhalb der Geraden und der Geraden selbst besteht,

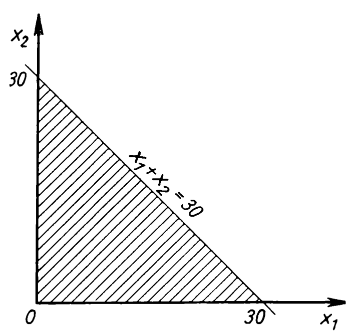

Bild 2. Durch die Gerade mit der Gleichung $x_1 + x_2 = 30$ bestimmter Bereich der zulässigen Lösungen

und in ein Gebiet der nichtzulässigen Lösungen. Die optimale Lösung, die auch die einschränkende Bedingung (II) erfüllen muß, muß demnach durch einen Punkt dargestellt werden können, der auch bezüglich der zweiten Geraden im Bereich der zulässigen Lösungen liegt.

Die einschränkenden Bedingungen (III) und (IV) lassen sich graphisch besonders einfach darstellen. Die Bedingung (III) ergibt eine parallel zur Ordinate (x_2-Achse) durch den Punkt

$$x_1 = 15$$

verlaufende Gerade. Sie und das links von ihr liegende Gebiet bilden den Bereich der zulässigen Lösungen, wie das auch in Bild 3 ersichtlich ist. Die Bedingung (IV) ergibt eine parallel zur Abszisse (x_1-Achse) durch den Punkt

$$x_2 = 25$$

verlaufende Gerade. Sie und das unter ihr liegende Gebiet bilden den Bereich der zulässigen Lösungen (vgl. Bild 4).

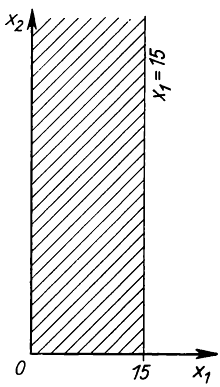

Bild 3. Durch die Gerade mit der Gleichung $x_1 = 15$ bestimmter Bereich der zulässigen Lösungen

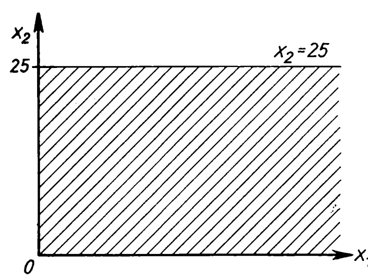

Bild 4. Durch die Gerade mit der Gleichung $x_2 = 25$ bestimmter Bereich der zulässigen Lösungen

In allen vier Bildern sind die Bereiche der zulässigen Lösungen durch Schraffur hervorgehoben.

Von der optimalen Lösung wird erwartet, daß sie alle vier einschränkenden Bedingungen erfüllt. Das bedeutet, daß sie im Bereich der zulässigen Lösungen liegen muß. Dieser Bereich der zulässigen Lösungen ist in Bild 5 durch doppelte Schraffur gekennzeichnet. Die optimale Lösung ist also in diesem Bereich zu suchen. Von der optimalen Lösung wird jedoch nicht nur verlangt, daß sie zulässig ist, sondern daß sie gleichzeitig das Optimalkriterium bestmöglich befriedigt. Aus diesem Grunde ist es notwendig, auch die Zielfunktion durch eine entsprechende Gerade in der graphischen

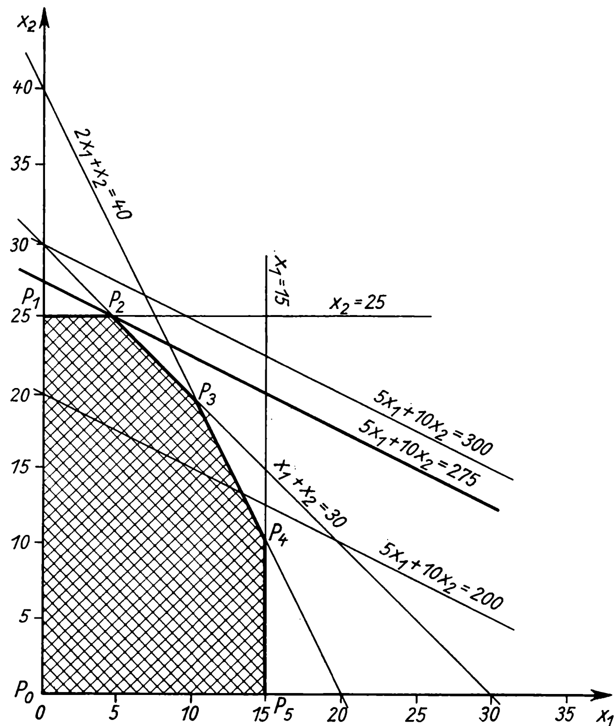

Bild 5. Bereich der zulässigen Lösungen

Darstellung des Problems anzugeben. Wir setzen dafür zunächst die allgemeine Funktion

$$c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$$

an. Da Z_0 beliebig verändert werden kann, gibt es unendlich viele Zielfunktionen, die wegen

$$x_2 = \frac{Z_0}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}\,x_1$$

jedoch alle den gleichen Anstieg $-\,c_1/c_2$ besitzen und somit parallel verlaufen.

Um die der Zielfunktion entsprechende Gerade zu zeichnen, verwenden wir wiederum die Achsenabschnittsgleichung, die jetzt

$$\frac{x_1}{\frac{Z_0}{c_1}} + \frac{x_2}{\frac{Z_0}{c_2}} = 1$$

lautet. Für die vorliegende Aufgabe lautet die Zielfunktion

$$5x_1 + 10x_2 = Z_0.$$

Ihr entspricht die Achsenabschnittsgleichung

$$\frac{x_1}{\frac{Z_0}{5}} + \frac{x_2}{\frac{Z_0}{10}} = 1.$$

Die Gerade schneidet somit die x_1-Achse an der Stelle $p = Z_0/5$ und die x_2-Achse an der Stelle $q = Z_0/10$. Wählt man zum Beispiel $Z_0 = 300$, so ergibt sich für diese Zielfunktion eine in Bild 5 eingetragene Gerade, die die Achsen in $p = 60$ und $q = 30$ schneidet. Diese Gerade verläuft jedoch oberhalb des Bereichs der zulässigen Lösungen. Sie hat keinen gemeinsamen Punkt mit diesem Bereich und wird somit durch keine zulässige Lösung befriedigt. Für die weiteren Betrachtungen ist sie somit ohne Bedeutung. Für $Z_0 = 200$ erhalten wie eine Zielfunktion, deren ebenfalls in Bild 5 eingetragene Gerade die Achsen in $p = 40$ und $q = 20$ schneidet. Diese Gerade geht durch den Bereich der zulässigen Lösungen. Demnach gibt es zulässige Lösungen, die die Zielfunktion $5x_1 + 10x_2 = 200$ befriedigen. Allerdings erfüllen diese Lösungen die gestellte Optimalitätsforderung nicht. Der Wert der Zielfunktion wird vergrößert, wenn die sie repräsentierende Gerade vom Ursprung weg parallel nach rechts oben verschoben wird. Da wir den maximalen Wert der Zielfunktion anstreben unter der Bedingung, daß die die Zielfunktion befriedigende Lösung noch zulässig ist, verschieben wir die Gerade der Zielfunktion so lange parallel nach rechts oben, wie das möglich ist, ohne den Bereich der zulässigen Lösungen zu verlassen. Wir finden schließlich, daß der äußerste gemeinsame Punkt der Geraden der Zielfunktion mit dem Bereich der zulässigen Lösungen der Punkt P_2 ist. Das ist derjenige Punkt, in dem die Zielfunktion einerseits noch im Bereich der zulässigen Lösungen liegt und andererseits den unter diesen Bedingungen maximalen Abstand vom Ursprung des Koordinatenkreuzes hat. Die Koordinaten dieses Punktes liefern somit die optimale Lösung. Sie gehören noch zum Bereich der zulässigen Lösungen und maximieren den Wert der Zielfunktion.

Die auf die geschilderte Weise gefundene optimale Lösung, d. h. die Koordinaten des Punktes P_2, lautet also

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 25.$$

Das bedeutet, daß 5 Stück bzw. Einheiten des Erzeugnisses E_1 und 25 Stück bzw. Einheiten des Erzeugnisses E_2 bearbeitet bzw. produziert werden müssen, um unter Einhaltung der gegebenen einschränkenden Bedingungen einen maximalen Produktionswert (gemessen in Betriebsabgabepreisen) zu erzielen. Der Wert der Zielfunktion beträgt

$$Z = 5 \cdot 5 + 10 \cdot 25 = 275$$

Währungseinheiten.

Die gefundene optimale Lösung soll kurz untersucht werden, ehe noch einige Bemerkungen zum graphischen Lösungsverfahren folgen. Die Beschränkungen, die sich auf das Bestimmen der optimalen Lösung ausgewirkt haben, bestanden in der verfügbaren Produktionskapazität. Es ist deshalb nützlich, zu prüfen, in welcher Weise durch das optimale Programm die vorgegebene Kapazität ausgelastet wird. Wir verwenden dazu die Beziehungen (I) bis (IV) für die einschränkenden Bedingungen, in die wir die optimale Lösung einsetzen.

Für die bezüglich der ersten Maschine bestehende Kapazitätsgrenze (I) erhalten wir

$$2 \cdot 5 + 25 = 35.$$

Das ergibt eine Kapazitätsauslastung der ersten Maschine in Höhe von

$$\frac{35}{40} \cdot 100 = 87{,}5 \text{ Prozent.}$$

12,5 Prozent der Kapazität der ersten Maschine werden durch das optimale Programm nicht ausgeschöpft.

Für die zweite Maschine ergibt sich wegen

$$5 + 25 = 30$$

eine Kapazitätsauslastung von

$$\frac{30}{30} \cdot 100 = 100 \text{ Prozent,}$$

d. h., daß keine Kapazität dieser Maschine ungenutzt bleibt.

Für die erste Montagestraße beträgt wegen $x_1 = 5$ die Kapazitätsauslastung lediglich

$$\frac{5}{15} \cdot 100 = 33{,}3 \text{ Prozent.}$$

Sie ist — bei 67,7 Prozent nichtausgenutzter Kapazität — außerordentlich niedrig.

Schließlich beträgt die Kapazitätsauslastung der zweiten Montagestraße wegen $x_2 = 25$

$$\frac{25}{25} \cdot 100 = 100 \text{ Prozent.}$$

An dieser Montagestraße tritt keine nichtausgenutzte Kapazität auf.

Das Gesamtergebnis der Optimierungsrechnung kann wie folgt zusammengefaßt werden:

Um bei den vorgegebenen Industrieabgabepreisen je Erzeugniseinheit c_1 und c_2 einen — in Industrieabgabepreisen gemessenen — wertmäßig maximalen Produktionsplan zu erzielen, ist vorzusehen, $x_1 = 5$ Stück bzw. Einheiten des Erzeugnisses E_1 und $x_2 = 25$ Stück bzw, Einheiten des Erzeugnisses E_2 in den Plan aufzunehmen. Dabei werden die durch (I) bis (IV) gegebenen einschränkenden Bedingungen eingehalten. Die Kapazitäten der zweiten Maschine und der zweiten Montagestraße werden voll ausgenutzt. Bei der ersten Maschine werden 12,5 Prozent und bei der ersten Montagestraße 66,7 Prozent der verfügbaren Kapazität durch das optimale Programm nicht ausgenutzt. Diese Kapazitäten können entweder verringert oder für andere Produktionsaufgaben eingesetzt werden.

Die teilweise freie Kapazität gibt Veranlassung zu folgender Bemerkung: Das bestimmte Produktionsprogramm ist optimal im Hinblick auf den Produktionswert. Es würde sicher ein anderes Produktionsprogramm errechnet, wenn die Optimalität des Planes an der Kapazitätsausnutzung gemessen würde. So könnte etwa eine Minimumaufgabe formuliert werden, von deren Lösung zu fordern wäre, daß der Umfang der nichtgenutzten Kapazitäten zum Minimum wird. Die Lösung der ersten Aufgabe zeigt, daß zum neuen Problem sicher eine beträchtlich abweichende Lösung gefunden würde. Das zeigt erneut, welchen Einfluß das Ziel eines Entscheides auf das Resultat nimmt.

In Bild 5 ist eine Maximumaufgabe graphisch dargestellt. In analoger Weise kann jedoch auch eine Minimumaufgabe dargestellt werden. Auch dabei ist freilich vorausgesetzt, daß sich die optimale Entscheidung lediglich auf zwei variable Größen x_1 und x_2 bezieht, weil eben durch einen Punkt in der Ebene nur zwei Koordinaten bestimmt sind. Die graphische Darstellung und Lösung der Minimumaufgabe unterscheidet sich von der der Maximumaufgabe etwa in dem Sinne, wie sich die Gln. (7a) und (7b) von den Gln. (8a) und (8b) unterscheiden.

Ein Vergleich zwischen Bild 5 (Maximumaufgabe) und Bild 6 (Minimumaufgabe) zeigt folgende Unterschiede:

1. Bei der Maximumaufgabe ist der Bereich der zulässigen Lösungen in der Regel nach rechts oben beschränkt und nach links unten unbeschränkt. Bei der Minimumaufgabe liegen die einschränkenden Bedingungen vorwiegend in Form von Beziehungen vor, bei denen das auf der rechten Seite stehende absolute Glied nicht unter-, wohl aber überschritten werden darf. Das führt dann zu einem Bereich der zulässigen Lösungen, der nach rechts oben unbeschränkt und nach links unten beschränkt ist.

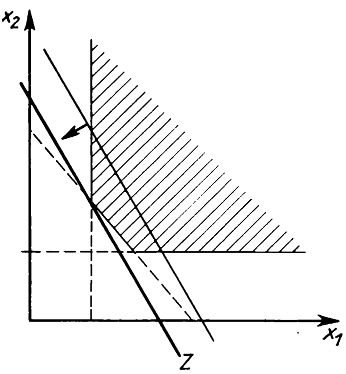

Bild 6. Bereich der zulässigen Lösungen bei einer Minimumaufgabe

2. Bei der Maximumaufgabe wird im allgemeinen angestrebt, die Zielfunktionsgerade so weit wie möglich vom Koordinatenursprung entfernt anzuordnen, weil dadurch der Wert der Zielfunktion erhöht wird. Bei der Minimumaufgabe wird angestrebt, die Zielfunktionsgerade möglichst nahe an den Koordinatenursprung heranzuführen, um einen möglichst niedrigen Wert der Zielfunktion zu erhalten. Dabei muß natürlich gesichert sein, daß diese Gerade wenigstens einen gemeinsamen Punkt mit dem Bereich der zulässigen Lösungen besitzt.

Bisher haben wir der Maximumaufgabe und der Minimumaufgabe eine bestimmte mathematische Form der einschränkenden Bedingungen und eine entsprechende Form des Bereichs der zulässigen Lösungen zugeordnet. Die in der Praxis auftretenden Probleme, deren Lösung mit Hilfe der linearen Optimierung angestrebt wird, lassen sich allerdings nicht immer so einfach klassifizieren. So ist es möglich, daß ein Produktionsprogramm zu bestimmen ist unter einschränkenden Bedingungen, die einerseits Beschränkungen nach unten und andererseits Beschränkungen nach oben enthalten. Das wäre der Fall, wenn etwa bestimmte Kapazitätsgrenzen nicht überschritten werden dürfen (einschränkende Bedingungen nach oben) und gleichzeitig die veränderlichen Größen beschränkt sind derart, daß bestimmte Mindestmengen verschiedener Erzeugnisse hergestellt werden müssen (Beschränkungen nach unten). Dabei ist es allerdings erforderlich, daß die einzelnen einschränkenden Bedingungen einander nicht widersprechen, d. h., wie man sagt, miteinander verträglich sind. In Bild 7 ist ein Bereich der zulässigen Lösungen dargestellt, der sowohl einschränkende Bedingungen nach rechts oben als auch nach links unten enthält. Es entsteht dabei ein allseitig geschlossener Bereich der zulässigen Lösungen, der sowohl einer Maximum- als auch einer Minimumaufgabe zugrunde gelegt werden kann.

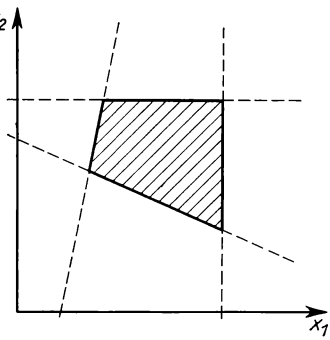

Bild 7. Allseitig abgeschlossener Bereich der zulässigen Lösungen

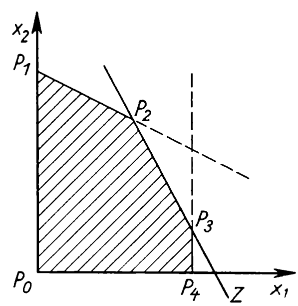

Bild 8. Bereich der zulässigen Lösungen, dessen eine Seite mit der Geraden der Zielfunktion zusammenfällt

Aus Bild 5 und aus Bild 6 ist ersichtlich, daß die optimale Lösung einer aus zwei veränderlichen Größen bestehenden linearen Optimierungsaufgabe in der Regel als ein Punkt darstellbar ist, der eine Ecke des Bereichs der zulässigen Lösungen bildet. Damit ist die Lösung eindeutig. Es kommen jedoch auch Fälle vor, bei denen die Zielfunktionsgerade mit der Geraden einer einschränkenden Bedingung zusammenfällt. In solchen Fällen, von denen einer in Bild 8 skizziert ist, gibt es zwischen der Zielfunktionsgeraden und dem Bereich der zulässigen Lösungen nicht nur einen gemeinsamen Punkt. In Bild 8 beispielsweise bilden alle Punkte von P_2 bis P_3 (P_2 und P_3 eingeschlossen) optimale Lösungen. In der Praxis muß man sich in einer derartigen Situation für eine bestimmte optimale Lösung entscheiden. Im allgemeinen wird es jedoch nicht als ungünstig empfunden, wenn mehrere optimale Lösungen gefunden werden. Auf diese Weise nämlich erhält die ökonomische Leitung einen zusätzlichen Entscheidungsraum, der den besonderen Vorteil besitzt, daß alle ihm angehörenden Entscheidungen optimal sind. Dadurch können weitere Bedingungen, die entweder bei Beginn der Optimierung noch nicht in beachtenswertem Umfange bestanden oder die im allgemeinen von geringerem Einfluß auf das Optimierungsergebnis sind, berücksichtigt werden.

Das graphische Lösungsverfahren in der von uns beschriebenen Form läßt sich lediglich auf Optimierungsprobleme mit zwei veränderlichen Größen x_1 und x_2 anwenden, weil diese beiden Größen als Koordinaten eines Punktes in der Ebene angesehen werden können. Es versinnbildlicht jedoch den prinzipiellen Lösungsweg der linearen Optimierung. Werden statt zwei drei Variable in die Aufgabe eingeführt (etwa dadurch, daß im Produktionsprogramm insgesamt drei verschiedene Erzeugnisse enthalten sein sollen), so wird die gesamte Aufgabe aus der Ebene in den Raum übertragen. Der Bereich der zulässigen Lösungen ist dann keine Fläche mehr, sondern wird durch einen vieleckigen Körper dargestellt. Die graphische Darstellung der Zielfunktion, die nunmehr drei veränderliche Größen enthält, also allgemein

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \tag{9}$$

lautet, ergibt eine Ebene. Diese Ebene der Zielfunktion wird so lange parallel verschoben, bis sie den Raum (das Polyeder, den Vielflächner) der zulässigen Lösungen nur noch in einem Punkte (möglicherweise aber auch in einer Kante oder in einer Fläche) berührt und gleichzeitig ihren maximalen oder minimalen Abstand vom Ursprung besitzt.

Im Prinzip können alle Optimierungsaufgaben auf diese geometrische Interpretation zurückgeführt werden. Wenn jedoch mehr als drei veränderliche Größen auftreten (allgemein n Größen), sind die entstehenden Gebilde nicht mehr vorstellbar. Derartige Aufgabenstellungen wären dann im n-dimensionalen Raum zu lösen.

4. Die Simplexmethode als universelles Verfahren der linearen Optimierung (Maximum- und Minimumaufgabe)

4.1. Lösung der Maximumaufgabe nach der Simplexmethode

4.1.1. Überführung des mathematischen Modells in die Normalform

Bei der von DANTZIG entwickelten Simplexmethode, deren Namen aus der Form des Bereichs der zulässigen Lösungen abgeleitet wurde (n-dimensionaler Simplex: n-dimensionales konvexes Polyeder mit $n + 1$ Eckpunkten), handelt es sich um eine universelle Verfahrensweise zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben. Wir betrachten diese Methode zunächst wieder an Hand des Beispiels, das bereits im Abschnitt 2.2. eingeführt und im Abschnitt 3. graphisch gelöst wurde.
In der im Abschnitt 3. gegebenen Form dieser Aufgabe sind die einschränkenden Bedingungen mit (I) bis (IV) bezeichnet. Alle diese einschränkenden Bedingungen haben die Form von Ungleichungen, die allerdings den Fall der Gleichheit als Sonderfall mit einschließen. Ein wesentlicher vorbereitender Schritt zur Lösung einer Aufgabe nach der Simplexmethode besteht nun darin, daß die in Form von Ungleichungen gegebenen einschränkenden Bedingungen in Gleichungen überführt werden. Im Falle der Maximumaufgabe, bei der die absoluten Glieder b_1 der einschränkenden Bedingungen obere Grenzen darstellen, geschieht das durch Einführung der sog. *Schlupfvariablen* (fiktiven Variablen). Zum Beispiel lautet die erste einschränkende Bedingung

$$2x_1 + x_2 \leqq 40. \tag{I}$$

Wir führen die Schlupfvariable x_3 ein und schreiben nunmehr

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 40.$$

Ein Vergleich beider Beziehungen gibt Aufschluß über die Größe der Schlupfvariablen x_3. Gilt in der Ungleichung (I) nur das Ungleichheitszeichen ($<$), so ist x_3 größer als Null, d. h. eine positive Größe ($x_3 > 0$). Gilt dagegen in (I) das Gleichheitszeichen, so ist auch x_3 gleich Null ($x_3 = 0$).

In entsprechender Weise werden in allen einschränkenden Bedingungen Schlupfvariable eingeführt. Die einschränkenden Bedingungen lauten dann

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 40 && \text{(I)} \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 30 && \text{(II)} \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 15 && \text{(III)} \\ x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 &= 25. && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Im Sinne der ökonomischen Aufgabenstellung des Beispiels können die Schlupfvariablen als Herstellungsmengen der fiktiven Erzeugnisse E_3 bis E_6 betrachtet werden. Diese Erzeugnisse — die eben nur gedacht sind — erzielen selbstverständlich keinen Industrieabgabepreis. Ihre entsprechenden Koeffizienten c_3 bis c_6 der Zielfunktion sind also gleich Null. Gleichzeitig belasten diese Erzeugnisse jeweils nur eine Maschine oder Montagestraße, wie das aus der obigen Darstellung ersichtlich ist. Ihre Koeffizienten a_{ij} sind entweder 1, wenn sie in der betreffenden Gleichung auftreten, oder 0, wenn sie in der betreffenden Gleichung nicht auftreten. Mit den Schlupfvariablen erhält die Zielfunktion die Form

$$Z = 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max.$$

Die Nichtnegativitätsbedingung gilt auch für die Schlupfvariablen, so daß wir nunmehr schreiben

$$x_1 \geqq 0;\ x_2 \geqq 0;\ x_3 \geqq 0;\ x_4 \geqq 0;\ x_5 \geqq 0;\ x_6 \geqq 0.$$

In der vorliegenden Form des mathematischen Modells ist die *Normalform* der Maximumaufgabe gegeben. Diese Normalform enthält noch die Bedingung, daß die absoluten Glieder der Gleichungen der einschränkenden Bedingungen nicht negativ sein sollen, d. h.

$$b_1 \geqq 0;\ b_2 \geqq 0;\ b_3 \geqq 0;\ b_4 \geqq 0.$$

Diese Bedingung ist bereits erfüllt. Sie kann durch eine Multiplikation mit (-1) erforderlichenfalls leicht erfüllt werden.
In Analogie zu (7a), (7b) und (7c) ergibt sich die Normalform der Maximumaufgabe in allgemeiner Darstellung als

1. Zielfunktion

$$\begin{aligned} Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + \\ + c_{n+1}x_{n+1} + c_{n+2}x_{n+2} + \cdots + c_{n+m}x_{n+m} \rightarrow \max. \end{aligned}$$

bzw.

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \rightarrow \max. \tag{10a}$$

Dabei gilt

$$c_{n+i} = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
 & & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m
\end{array} \tag{10b}$$

3. Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1 \geqq 0; \ldots; x_n \geqq 0; x_{n+1} \geqq 0; \ldots; x_{n+m} \geqq 0 \tag{10c}$$

$$b_1 \geqq 0; \ldots; b_m \geqq 0. \tag{10d}$$

Ein Vergleich der Normalform der Beispielaufgabe mit der Normalform der Maximumaufgabe in allgemeiner Darstellung ergibt, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{array}{llll}
n = 2, & a_{11} = 2 & a_{12} = 1 & b_1 = 40 \\
m = 4, & a_{21} = 1 & a_{22} = 1 & b_2 = 30 \\
 & a_{31} = 1 & a_{32} = 0 & b_3 = 15 \\
 & a_{41} = 0 & a_{42} = 1 & b_4 = 25.
\end{array}$$

Weiter ist

$$x_{n+1} = x_3,\ x_{n+2} = x_4,\ x_{n+3} = x_5,\ x_{n+4} = x_6.$$

4.1.2. Der Simplex-Algorithmus

Die eigentliche Lösung der Aufgabe beginnt mit der Bestimmung der ersten *Basislösung*. Eine Basislösung ist eine zulässige Lösung, in der höchstens so viele Variable von Null verschiedene Werte besitzen, wie voneinander unabhängige einschränkende Bedingungen gegeben sind. Mit m voneinander unabhängigen linearen Gleichungen kann man höchstens m Variable bestimmen. Enthält das System m Gleichungen, aber mehr als m Variable, so

müssen im Falle der linearen Optimierung die restlichen Variablen Null gesetzt werden. Hier haben wir bei m Gleichungen infolge der Verwendung von Schlupf- oder künstlichen Variablen mindestens $m + n$ Variable, von denen in einer nicht entarteten Lösung n Variable Null gesetzt sein müssen. Stimmen die Zahl der unabhängigen Gleichungen und die der Variablen überein, so gibt es nur eine Lösung. Liegen mehr Gleichungen als Variable vor, so müssen die linear unabhängigen Gleichungen ausgewählt und die restlichen gestrichen werden. Vorausgesetzt wird, daß keine Gleichungen zueinander in Widerspruch stehen. Sobald überhaupt eine zulässige Lösung existiert, gibt es auch eine optimale Lösung (Simplex-Theorem).
Die Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe besteht somit darin, diejenigen Variablen zu bestimmen, die in der optimalen Lösung nicht gleich Null sind, und gleichzeitig den Wert dieser Variablen anzugeben. Außerdem müssen sie zu einem Extremwert der Zielfunktion führen.
Die Simplexmethode löst diese Aufgabe durch ein Iterationsverfahren. Ausgehend von einer ersten Basislösung, die auf möglichst einfache Weise bestimmt wird, wird diese meist nicht optimale erste Basislösung schrittweise (iterativ) so lange weiter verbessert, bis die optimale Lösung vorliegt.
Die erste Basislösung ergibt sich am einfachsten, indem man die eigentlichen (echten) Variablen eines Problems gleich Null setzt und damit die Schlupfvariablen größer als Null sind. Da bei m unabhängigen einschränkenden Bedingungen m linear unabhängige Gleichungen vorhanden sind und weiterhin m Schlupfvariable eingeführt wurden, kann auf diese Weise stets eine erste Basislösung bestimmt werden. Für die erste Basislösung des Beispiels gilt somit zunächst

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_3 \neq 0 \\ x_2 = 0 & x_4 \neq 0 \\ & x_5 \neq 0 \\ & x_6 \neq 0. \end{array}$$

Die Größe der in der ersten Basis positiven Variablen x_3 bis x_6 (der Schlupfvariablen) finden wir aus der *Basisdarstellung* der einschränkenden Bedingungen, wie sie in Gleichungsform durch (I) bis (IV) gegeben werden. Unter Basisdarstellung versteht man eine Darstellung dieser Bedingungen, bei denen diejenigen Variablen, die in der Basislösung nicht gleich Null sind, in Abhängigkeit der anderen Variablen dargestellt werden. Da in der ersten Basislösung die Schlupfvariablen von Null verschieden sind, werden sie in der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen in Abhängigkeit von den Variablen x_1 und x_2 dargestellt.
Zur Vereinfachung der weiteren Überlegungen führen wir weitere Begriffe ein. Diejenigen Variablen, die in einer Basislösung größer als Null sind,

bilden die *Basis* dieser Basislösung. Sie heißen *Basisvariable.* Diejenigen Variablen, die in der Basislösung gleich Null sind, gehören nicht zur Basis. Sie heißen *Nichtbasisvariable.* Wir können dann einfach sagen, daß in der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen die Basisvariablen in Abhängigkeit von den Nichtbasisvariablen niedergeschrieben werden.
Die Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen für das betrachtete Beispiel lautet, da x_3, x_4, x_5 und x_6 Basisvariable und x_1 und x_2 Nichtbasisvariable sind,

$$x_3 = 40 - 2x_1 - x_2 \tag{I'}$$

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 \tag{II'}$$

$$x_5 = 15 - x_1 \tag{III'}$$

$$x_6 = 25 - x_2. \tag{IV'}$$

Da wir festgelegt haben, daß x_1 und x_2 Nichtbasisvariable sind, setzen wir sie gleich Null. Daraus finden wir für die Basisvariablen sofort $x_3 = 40$, $x_4 = 30$, $x_5 = 15$ und $x_6 = 25$. Die Basislösung können wir allgemein als

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6)$$

schreiben. Die *erste Basislösung* lautet dann

$$(0 \;\; 0 \;\; 40 \;\; 30 \;\; 15 \;\; 25).$$

Wie wir durch Einsetzen dieser Basislösung in die einschränkenden Bedingungen (I) bis (IV) erfahren, erfüllt die erste Basislösung alle einschränkenden Bedingungen. Das läßt sich übrigens auch graphisch an Hand des Bildes 5 beurteilen. Dort sind zwar nur die echten Variablen eingetragen, doch genügen sie zur Beurteilung der Zulässigkeit einer Lösung. Für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ befinden wir uns im Ursprung des Koordinatensystems, nämlich im Punkt P_0. Dieser Punkt stellt die linke untere Ecke des Bereichs der zulässigen Lösungen dar.
Aus Bild 5 ersehen wir auch, daß die erste Basislösung wohl zulässig, keinesfalls jedoch optimal ist. Würde nämlich die die Zielfunktion repräsentierende Gerade durch den Punkt P_0 verlaufen, so besäße sie für dessen Koordinaten den Wert Null. Mit anderen Worten der Wert des durch die erste Basislösung angegebenen Produktionsprogramms ist gleich Null. Das ist auch ökonomisch verständlich, weil es sich bei denjenigen Erzeugnissen, die nach der ersten Basislösung hergestellt bzw. bearbeitet werden sollen, um fiktive Erzeugnisse handelt, deren Wert Null beträgt. Die Tatsache, daß die erste Basislösung den Wert der Zielfunktion zu 0 festlegt, wird auch aus der Zielfunktion in der Normalform der Aufgabe deutlich. Dort besitzen die Nichtbasisvariablen x_1 und x_2 die Koeffizienten 5 und 10, alle übrigen

Variablen jedoch die Koeffizienten 0. Setzen wir dort die Werte der ersten Basislösung ein, so ergibt sich $Z = 0$.
Wie es eine Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen gibt, so auch eine Basisdarstellung der Zielfunktion. Die Basisdarstellung der Zielfunktion enthält nur die Nichtbasisvariablen. Sie lautet deshalb für die erste Basislösung

$$Z_1' = 5x_1 + 10x_2 \,(= 0).$$

Der Index 1 zeigt an, daß es sich um die Basisdarstellung der zur ersten Basislösung gehörenden Zielfunktion handelt. Übrigens stimmen die Basisdarstellung der Zielfunktion der ersten Basislösung und die ursprüngliche Zielfunktion nach Gl. (1) überein. Beide enthalten nur die Variablen x_1 und x_2, d. h. die echten Variablen.
Analog zu den am Beispiel vorgenommenen Veränderungen können wir auch die Normalform der Maximumaufgabe nach (10a) bis (10d) in die Basisdarstellung umformen. Wir gehen davon aus, daß die Schlupfvariablen x_{n+1} bis x_{n+m} die erste Basis bilden sollen, und geben zuerst die Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen allgemein an. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
x_{n+2} &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
x_{n+m} &= b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn}x_n .
\end{aligned} \tag{11a}$$

Durch Nullsetzen der Nichtbasisvariablen x_1 bis x_n ergeben sich für die Basisvariablen die Werte

$$x_{n+i} = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{11b}$$

Die entsprechende Basisdarstellung der Zielfunktion, die nur die Nichtbasisvariablen enthält, lautet für die erste Basislösung nach (11a) und (11b)

$$Z_1' = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n . \tag{11c}$$

Nachdem wir die erste Basislösung der Aufgabe bestimmt haben, ist deren Optimalität zu prüfen. Aus dem Bild 5 und einigen Rechnungen haben wir bereits erkannt, daß die erste Basislösung nicht optimal ist. Es ist jedoch notwendig, dafür ein allgemeines Kriterium (*Simplexkriterium*) anzugeben, an dem ersichtlich ist, ob eine vorliegende Basislösung bereits optimal ist.

Wir verwenden dafür die Basisdarstellung der Zielfunktion. Allgemein gilt folgender Satz:

> Eine Basislösung (der Maximumaufgabe) ist nicht optimal und kann also weiter verbessert werden, wenn die zu ihr gehörige Zielfunktion in der Basisdarstellung positive Koeffizienten c_j enthält.

Die Basisdarstellung der Zielfunktion der ersten Basislösung ist

$$Z_1' = 5x_1 + 10x_2.$$

Sie enthält zwei positive Koeffizienten c_j. Damit ist bestätigt, daß die erste Basislösung weiter verbessert werden kann.[1]

Nach der Simplexmethode erfolgt die Verbesserung einer gegebenen Basislösung, indem eine bisherige Basisvariable aus der Basis entfernt und dafür eine bisherige Nichtbasisvariable in die Basis übernommen wird. Es sind somit zwei Fragen zu beantworten:

1. Welche bisherige Nichtbasisvariable soll in die Basis aufgenommen werden?
2. Welche bisherige Basisvariable muß dafür aus der Basis entfernt werden?

Für die Beantwortung der ersten Frage werden die Koeffizienten der Zielfunktion in der Basisdarstellung herangezogen. Offensichtlich wird der Wert der Zielfunktion je Einheit der Variablen durch jene Variable am stärksten erhöht, die den größten positiven Koeffizienten in der Zielfunktion besitzt. Es zeigt sich, daß in der obigen Zielfunktion

$$c_2 > c_1$$

gilt. Folglich wird die Aufnahme der Nichtbasisvariablen x_2 in die Basis den Wert der Zielfunktion — je Einheit der Variablen — am meisten erhöhen. Die bisherige Nichtbasisvariable x_2 wird beim Übergang zur neuen Basislösung (der zweiten Basislösung) in die Basis aufgenommen und somit zur Basisvariablen.

In der Basis können nur $m = 4$ Variable enthalten sein, weil es ebenso viele Bedingungsgleichungen gibt. Folglich muß bestimmt werden, welche Variable aus der Basis entfernt wird. Dabei ist die Forderung (10d) zu beachten, nach der die absoluten Glieder in der Normalform des mathematischen Modells nicht negativ sein dürfen. Wenn also ein Variablenaustausch in der Basis stattfindet, dann nur so, daß damit keine negativen absoluten Glieder

[1] Zur Erklärung: Für $x_1 = x_2 = 0$ ist $Z_1' = 0$. Gelangt x_1 oder x_2 in die Basis, so wird es einen Wert annehmen, der größer als Null ist. Damit wird aber auch Z_2' einen größeren Wert (größer als Null) als Z_1' annehmen

b_i entstehen. Um diese Bedingungen einzuhalten, gehen wir von der Normalform der einschränkenden Bedingungen nach (I) bis (IV) aus. Da die Variable x_2 in die Basis aufgenommen wird, bilden wir sämtliche Quotienten aus den absoluten Gliedern b_1 und den positiven Koeffizienten a_{i2} des Gleichungssystems der einschränkenden Bedingungen. Wir erhalten

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{40}{1} = 40 \text{ [aus Gl. (I)]}$$

$$\frac{b_2}{a_{22}} = \frac{30}{1} = 30 \text{ [aus Gl. (II)]}$$

$$\frac{b_4}{a_{42}} = \frac{25}{1} = 25 \text{ [aus Gl. (IV)]}.$$

Für Gl. (III) wird der Quotient nicht gebildet, weil in dieser Gleichung die Variable x_2 nicht auftritt, d. h., $a_{32} = 0$ ist. Um zu sichern, daß die absoluten Glieder b_i nicht negativ werden, suchen wir das Minimum der Quotienten, d. h.

$$\min_i \frac{b_i}{a_{i2}}.$$

Dieses Minimum ergibt sich in Gl. (IV). Damit ist entschieden, daß diejenige Basisvariable aus der Basis entfernt wird, die in der Gleichung der vierten einschränkenden Bedingung steht. Das ist die bisherige Basisvariable x_6.

Wir stellen zusammen: In die Basis wird diejenige bisherige Nichtbasisvariable aufgenommen, zu der der größte positive Koeffizient in der Basisdarstellung der Zielfunktion gehört. Das ist die Nichtbasisvariable x_2.

Aus der Basis entfernt wird jene Variable, die in der Gleichung mit dem niedrigsten Quotienten aus den absoluten Gliedern b_i und den positiven Koeffizienten a_{i2} der aufzunehmenden Variablen steht. Das ist die Basisvariable x_6.

Damit wird durch diese Operation eine echte Variable in die Basis aufgenommen und eine Schlupfvariable aus der Basis entfernt.

Der Variablenaustausch führt selbstverständlich zu Veränderungen des Gleichungssystems. Aus der Basisdarstellung der Zielfunktion und der einschränkenden Bedingungen zur ersten Basislösung leiten wir nunmehr die entsprechende Basisdarstellung der zweiten Basislösung ab. Die Umformungen beginnen mit Gl. (IV'), in der die beiden auszutauschenden Variablen enthalten sind. Auflösung nach x_2 liefert

$$x_2 = 25 - x_6. \tag{IVa'}$$

Diese Beziehung setzen wir der Reihe nach in (I′), (II′) und in die Basisdarstellung der Zielfunktion Z_1' ein. Ein Einsetzen in (III′) erübrigt sich, weil in dieser Gleichung die Variable x_2 nicht enthalten ist.
Das Ergebnis der Umformungen ist die Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen für die zweite Basislösung.

$$x_3 = 15 - 2x_1 + x_6 \tag{I a′}$$

$$x_4 = 5 - x_1 + x_6 \tag{II a′}$$

$$x_5 = 15 - x_1 \tag{III a′}$$

$$x_2 = 25 \qquad\quad - x_6. \tag{IV a′}$$

Für die Basisdarstellung der Zielfunktion der zweiten Basislösung erhalten wir

$$Z_2' = 5x_1 - 10x_6 + 250\ (= 250).$$

Die zweite Basislösung selbst ergibt sich aus der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen nach (I a′) bis (IV a′), indem dort die Nichtbasisvariablen gleich Null gesetzt werden. Für $x_1 = 0$ und $x_6 = 0$ finden wir

$$x_3 = 15$$

$$x_4 = 5$$

$$x_5 = 15$$

$$x_2 = 25.$$

Damit schreiben wir die *zweite Basislösung*

$$(0 \quad 25 \quad 15 \quad 5 \quad 15 \quad 0).$$

Diese zweite Basislösung ist auch in Bild 5 dargestellt. Dort finden wir für die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_2 = 25$ den Punkt P_1. Der Austausch der Variablen x_2 und x_6 in der Basis entspricht also dem Übergang vom Punkt P_0 zum Punkt P_1 in der graphischen Darstellung des Problems. Damit ist ein wesentlicher Zug des Simplex-Algorithmus gekennzeichnet. Der Übergang von einer Basis zu einer neuen entspricht der Bewegung von einem Eckpunkt des Vielecks, das den Bereich der zulässigen Lösungen darstellt, zum nächsten Eckpunkt, hier also der Bewegung vom Eckpunkt P_0 zum Eckpunkt P_1. Da wir diejenige Variable in die Basis aufnehmen, zu der der größte Koeffizient der Zielfunktion gehört, bewegen wir uns von einer gegebenen Lösungsecke aus in der Richtung des steilsten Anstiegs zur nächsten Lösungsecke weiter.

Wir können feststellen, daß die zweite Basislösung die einschränkenden Bedingungen nicht verletzt, also zulässig ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß der zugehörige Lösungseckpunkt zum Bereich der zulässigen Lösungen gehört. Die Zielfunktion erhält für die zweite Basislösung den Wert $Z_2' = 250$. Das erhält man sofort für $x_1 = 0$ und $x_6 = 0$.
Der Übergang von der ersten zur zweiten Basislösung läßt sich auch allgemein darstellen. Dazu suchen wir in (11c) den größten Koeffizienten, der positiv ist, d. h.

$$\max_j c_j .$$

Wir nehmen an, daß der größte positive Koeffizient $c_k (k \leqq n)$ ist. Damit wird die bisherige Nichtbasisvariable x_k in die neue Basis aufgenommen. Anschließend bilden wir aus den absoluten Gliedern b_i und allen positiven Koeffizienten a_{ik} die Quotienten b_i/a_{ik}. Wir suchen

$$\min_i \frac{b_i}{a_{ik}} .$$

Nehmen wir an, das gesuchte Minimum stellt sich in der l-ten Zeile ein. Damit muß die in dieser Zeile stehende Basisvariable aus der Basis entfernt werden. Es ist die Variable x_{n+l}. Nunmehr wird diejenige Beziehung der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen gesucht, in der x_k und x_{n+l} enthalten sind. Das ist die Beziehung

$$x_{n+l} = b_l - a_{l1} x_1 - a_{l2} x_2 - \cdots - a_{lk} x_k - \cdots - a_{ln} x_n .$$

Wir finden daraus

$$x_k = \frac{1}{a_{lk}} (b_l - a_{l1} x_1 - \cdots - a_{l \cdot k-1} x_{k-1} - x_{n+l} -$$

$$- a_{l \cdot k+1} x_{k+1} - \cdots - a_{ln} \cdot x_n).$$

Diese Beziehung setzen wir in alle Gleichungen der Basisdarstellung der ersten Basislösung ein (d. h. in die der einschränkenden Bedingungen und in die Zielfunktion), in denen x_k auftritt. Schließlich fassen wir die absoluten Glieder und die Koeffizienten jeder Veränderlichen zusammen und erhalten so die Basisdarstellung der zweiten Basislösung. Ihre Koeffizienten stimmen freilich mit denen der ersten Basislösung nicht mehr überein.
Aus der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen zur zweiten Basislösung, die durch (Ia′) bis (IVa′) gegeben ist, erhalten wir durch

Freistellen der absoluten Glieder

$$
\begin{array}{lllll}
2x_1 & + x_3 & & - x_6 = 15 & \text{(I a)} \\
x_1 & + x_4 & & - x_6 = 5 & \text{(II a)} \\
x_1 & & + x_5 & = 15 & \text{(III a)} \\
x_2 & & & + x_6 = 25. & \text{(IV a)}
\end{array}
$$

Diese Darstellung entspricht im Prinzip der Normalform nach (I) bis (IV).

In der Basisdarstellung der Zielfunktion Z_2' ist weiterhin der positive Koeffizient $c_1 = 5$ enthalten. Damit kann das Programm weiter verbessert werden, wenn die Nichtbasisvariable x_1 in die Basis aufgenommen wird. Um zu entscheiden, welche Variable dafür aus der Basis verschwinden muß, berechnen wir in (I a) bis (IV a) die Quotienten

$$\frac{15}{2} = 7{,}5 \quad \text{[aus Gl. (I a)]}$$

$$\frac{5}{1} = 5 \quad \text{[aus Gl. (II a)]}$$

$$\frac{15}{1} = 15 \quad \text{[aus Gl. (III a)]}.$$

Allgemein lauten diese Quotienten b_i'/a_{i1}'. Der hochgesetzte Strich soll bedeuten, daß die absoluten Glieder und die Koeffizienten gegenüber ihren Werten in (10) und (11) verändert worden sind. Sie beziehen sich auf dasjenige Gleichungssystem, das nach dem Übergang von der ersten zur zweiten Basislösung entstanden ist.
Der kleinste Quotient wird für die zweite Gleichung (II a) gefunden. Nach (II a') enthält diese Gleichung die Basisvariable x_4. Indem also x_1 in die Basis aufgenommen wird, wird x_4 aus der Basis entfernt. Der Austausch ruft folgende Veränderungen im Gleichungssystem hervor: Aus (II a) oder aus (II a') erhalten wir

$$x_1 = 5 - x_4 + x_6. \qquad \text{(II a'')}$$

Das ist die erste Gleichung der Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen für die dritte Basislösung. Diese Beziehung wird in (I a') und (III a') eingesetzt. Das Einsetzen in (IV a') entfällt, weil in dieser Gleichung die Variable x_1 nicht enthalten ist.

Die Umformungen, die nach dem Einsetzen durchgeführt werden, führen schließlich zur Basisdarstellung der dritten Basislösung. Sie lautet für die einschränkenden Bedingungen

$$x_3 = 5 + 2x_4 - x_6 \tag{I a''}$$

$$x_1 = 5 - x_4 + x_6 \tag{II a''}$$

$$x_5 = 10 + x_4 - x_6 \tag{III a''}$$

$$x_2 = 25 \qquad\quad - x_6. \tag{IV a''}$$

Indem (II a'') auch in Z_2' eingesetzt wird, lautet die Basisdarstellung der Zielfunktion für die dritte Basislösung

$$Z_3' = -5x_4 - 5x_6 + 275.$$

Die dritte Basislösung ergibt sich nunmehr, indem die Nichtbasisvariablen x_4 und x_6 in (I a'') bis (IV a'') gleich Null gesetzt werden. Die *dritte Basislösung* lautet

$$(5 \quad 25 \quad 5 \quad 0 \quad 10 \quad 0).$$

Die Zielfunktion erhält für diese Basislösung den Wert 275. Da in Z_3' keine positiven Koeffizienten mehr enthalten sind, ist eine weitere Verbesserung der Basislösung, in deren Basis nun alle echten Variablen enthalten sind, nicht mehr möglich. Die dritte Basislösung ist die optimale Lösung. Wir haben sie gefunden, indem die zunächst nicht zur Basis gehörigen echten Variablen schrittweise in die Basis aufgenommen worden sind.

Eine Diskussion der optimalen Lösung $x_1 = 5$ und $x_2 = 25$ wurde bereits in Abschnitt 3. vorgenommen. Es sei hier lediglich nachgetragen, daß durch die Schlupfvariablen $x_3 = 5$ und $x_5 = 10$ die nichtausgenutzten Kapazitäten der ersten Maschine und der ersten Montagestraße angegeben werden.

Der Übergang von der zweiten zur dritten Basislösung entspricht in Bild 5 der Bewegung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2. Dieser Punkt mit den Koordinaten (5; 25) wurde bereits früher als der Eckpunkt mit der optimalen Lösung erkannt. Es ist derjenige Punkt, bei dem die Gerade der Zielfunktion den Bereich der zulässigen Lösungen wohl noch berührt, vom Ursprung des Koordinatensystems jedoch den größten Abstand besitzt.

Es konnte gezeigt werden, daß die Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe grundsätzlich ohne Kenntnis der Matrizenrechnung und lediglich durch das Umformen von Gleichungssystemen möglich ist. Dabei dürfte klar geworden sein, daß der damit verbundene Rechenaufwand bei Aufgaben größeren Umfangs, wie sie in der ökonomischen Praxis zu lösen sind, ziem-

lich groß wird. Insbesondere werden die numerischen Rechnungen schnell unübersichtlich. Diesem Übelstand hilft die Simplextabelle ab, in der die durchzuführenden Rechenoperationen in überschaubarer Weise abgewickelt werden. Für die allgemeine Darstellung des Rechenganges, die hier allerdings nicht beabsichtigt ist, leistet die Matrizenrechnung entsprechend gute Dienste.
Bevor Aufstellung und Handhabung der Simplextabelle dargestellt werden, seien die Ergebnisse der bisher durchgeführten Berechnungen übersichtlich zusammengestellt. Dazu dient die nachfolgende Übersicht.

	Basislösung	Basis	Aufgenommene Variable	Abgegebene Variable	Wert der Zielfunktion
1. Basislösung	(0 0 40 30 15 25)	x_3, x_4 x_5, x_6	—	x_6	0
2. Basislösung	(0 25 15 5 15 0)	x_2, x_3, x_4, x_5	x_2	x_4	250
3. Basislösung (Optim. Lösung)	(5 25 5 0 10 0)	x_1, x_2, x_3, x_5	x_1	—	275

4.1.3. Die Simplextabelle

Durch die Simplextabelle wird eine wesentliche Vereinfachung der durchzuführenden Rechenarbeiten erreicht. Ausgangsbasis der Simplextabelle ist die Normalform der Aufgabe, wie sie für das Beispiel durch die einschränkenden Bedingungen (I) bis (IV) und die Zielfunktion auf S. 34 angegeben ist. Der erste Teil der dazugehörigen Simplextabelle ist durch Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1. Simplextabelle, Teil 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	0	5	10	0	0	0	0	
x_3	40	2	1	1	0	0	0	40
x_4	30	1	1	0	1	0	0	30
x_5	15	1	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_6$	25	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	25

Diese Tabelle enthält:

in der ersten Spalte die Basisvariablen der ersten Basislösung, d. h. die Schlupfvariablen x_3 bis x_6;

in der zweiten Spalte die Werte der Basisvariablen der ersten Basislösung, d. s. gleichzeitig die absoluten Glieder b_i der Gleichungen (I) bis (IV);

in der dritten bis achten Spalte die Koeffizienten c_j und a_{ij}, mit denen die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ in der Zielfunktion und in den Gleichungen (I) bis (IV) auftreten (die entsprechenden Variablen sind in der ersten Zeile angegeben);

in der neunten Spalte die Quotienten b_i/a_{i2}, gebildet für die positiven Werte a_{i2}.

Das System der Gleichungen (I) bis (IV) und die Zielfunktion finden wir demnach in der dritten bis achten Spalte (Koeffizienten) und in der zweiten Spalte (absolute Glieder). In der zweiten Zeile, die die Koeffizienten der Zielfunktion enthält, stehen in den Spalten der Basisvariablen immer Nullen. Das bedeutet, daß die Basisvariablen in der Zielfunktion nicht enthalten sind.

Wir versuchen nun, die durch Tabelle 1 gegebene erste Basislösung auf ihre Optimalität zu prüfen und nötigenfalls zu verbessern. Die vorliegende Lösung ist so lange nicht optimal, wie in der Koeffizientenzeile der Zielfunktion (zweite Zeile) positive Werte enthalten sind. Das ist für die Nichtbasisvariablen x_1 und x_2 der Fall. Da $c_2 < c_1$ ist, ergibt die Aufnahme von x_2 in die Basis den größeren Zuwachs des Zielfunktionswertes je Einheit der Variablen. Aus den absoluten Gliedern des Gleichungssystems (b_i) und den positiven Koeffizienten der aufzunehmenden Variablen x_2 in diesem System, den Elementen des zu x_2 gehörenden Spaltenvektors, werden Quotienten b_i/a_{i2} gebildet. Der niedrigste Quotient bestimmt die Variable, die aus der bisherigen Basis ausscheidet. Es ist die Basisvariable x_6 in der letzten Zeile des ersten Tabellenteils. Das im Schnittpunkt der x_2-Spalte und der x_6-Zeile stehende Feld wird durch Umrandung hervorgehoben. Sein Element wird oft auch als *Hauptelement* bezeichnet.

Mitunter tritt es ein, daß der kleinste Quotient mehrmals auftritt. Dann kann die auszuschließende Variable aus der bisherigen Basis nicht eindeutig bestimmt werden. Man spricht von Entartung oder Degeneration des Problems. Die unter 6.2. behandelte Aufgabe enthält eine entartete Lösung. Ihre Behandlung ist dort dargestellt.

Der Austausch der Variablen entspricht dem Übergang vom ersten zum zweiten Tabellenteil. Beide Tabellenteile sind in Tabelle 2 angegeben. In der ersten Spalte beider Tabellenteile ist der Austausch der Variablen in der Basis (x_6 wurde gegen x_2 ausgetauscht) ersichtlich. Die jeweils ausscheidende und die aufgenommene Variable werden in der ersten Spalte durch einen entsprechenden Pfeil gekennzeichnet. Völlig unverändert wird die erste Zeile ($x_1 \dots x_6$) übernommen. Sie wird der Einfachheit halber nicht mehr mitgeschrieben, so daß der zweite Tabellenteil mit der zweiten Zeile beginnt.

Die zweite bis sechste Zeile des zweiten Tabellenteils entstehen wie folgt:

Die Elemente der sechsten Zeile (Zeile der neuen Variablen x_2) ergeben sich, indem die Elemente der sechsten Zeile des ersten Tabellenteils durch den Wert des umrandeten Feldes, d. h. des Hauptelements (1) dividiert werden;
die neue sechste Zeile wird der Reihe nach mit 10, 1, 1 und 0 multipliziert und das Ergebnis von der zweiten, dritten, vierten und fünften Zeile des ersten Tabellenteils subtrahiert. Dadurch entstehen die zweite, dritte, vierte und fünfte Zeile des zweiten Tabellenteils. Die genannten Faktoren sind die Koeffizienten der zweiten, dritten, vierten und fünften Zeile in der Spalte der neuaufzunehmenden Variablen x_2 im ersten Tabellenteil.

Tabelle 2. Simplextabelle, Teile 1 und 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	0	5	10	0	0	0	0	
x_3	40	2	1	1	0	0	0	40
x_4	30	1	1	0	1	0	0	30
x_5	15	1	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_6$	25	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	25
	−250	5	0	0	0	0	−10	
x_3	15	2	0	1	0	0	−1	7,5
$\leftarrow x_4$	5	$\boxed{1}$	0	0	1	0	−1	5
x_5	15	1	0	0	0	1	0	15
$\rightarrow x_2$	25	0	1	0	0	0	1	—

Der Übergang sei für die zweite Zeile (Zielfunktion) und für die vierte Zeile besonders demonstriert.

1. Zweite Zeile:

1. Tabellenteil	0	5	10	0	0	0	0
minus 10mal sechste Zeile des zweiten Tabellenteils	—(250	0	10	0	0	0	10)
ergibt zweite Zeile (Zielfunktion) im zweiten Tabellenteil	—250	5	0	0	0	0	—10

In entsprechender Weise wird die vierte Zeile übertragen.

2. Vierte Zeile:

1. Tabellenteil	30	1	1	0	1	0	0
minus 1mal sechste Zeile des zweiten Tabellenteils	—(25	0	1	0	0	0	1)
ergibt vierte Zeile im zweiten Tabellenteil	5	1	0	0	1	0	—1

Auf diese Weise werden alle Zeilen (außer der nicht mehr mitgeschriebenen ersten Zeile) übertragen. Die Umrechnung hat zur Folge, daß in der Spalte der neuaufgenommenen Variablen x_2 im zweiten Tabellenteil außer im Schnittpunkt der x_2-Spalte mit der x_2-Zeile nur Nullen stehen. Im genannten Schnittpunkt steht eine 1. Eine derartige Spalte nennt man einen Einheitsvektor. Alle Basisvariablen besitzen Einheitsvektoren. Das kann sowohl am ersten als auch am zweiten Tabellenteil nachgeprüft werden.
Im zweiten Tabellenteil ist die neue Basis in der ersten Tabellenspalte angegeben. Die Werte der Basisvariablen stehen wieder in der zweiten Tabellenspalte. Die Nichtbasisvariablen x_1 und x_6 sind gleich Null gesetzt. Der zur zweiten Basislösung gehörende Wert der Zielfunktion steht — allerdings mit negativem Vorzeichen — in der zweiten Spalte an erster Stelle. Er beträgt 250.
Die im zweiten Tabellenteil stehende Basislösung ist noch keine optimale Lösung. Man erkennt das daran, daß die Zielfunktion dieser Lösung noch den positiven Koeffizienten $c_1 = 5$ besitzt. Folglich kann eine weitere Verbesserung des Programms erzielt werden, wenn die Nichtbasisvariable x_1 in die Basis aufgenommen wird. Zur Bestimmung der ausscheidenden Variablen werden die Quotienten aus der zweiten Spalte (absolute Glieder) und den positiven Elementen der dritten Spalte (Koeffizienten der aufzunehmenden Variablen x_1) gebildet und in der neunten Spalte des zweiten Tabellenteils niedergeschrieben. Der niedrigste Quotient steht in der vierten Zeile. Demnach wird die bisherige Basisvariable dieser Zeile, x_4, aus der Bais entfernt, wenn die neue Basisvariable x_1 aufgenommen wird. Das im Schnittpunkt der Spalte der aufzunehmenden und der Zeile der auszuschließenden Variablen stehende Feld enthält das Hauptelement und wird umrandet.
Der Austausch der beiden Variablen führt zum dritten Tabellenteil, der zusammen mit dem ersten und zweiten Teil in Tabelle 3 enthalten ist. Der Übergang erfolgt in prinzipiell gleicher Weise wie der vom ersten zum zweiten Tabellenteil. Die unveränderte erste Zeile wird wiederum nicht mitgeschrieben, so daß auch der dritte Tabellenteil mit der zweiten Zeile beginnt. In der ersten Spalte wird gegenüber dem zweiten Tabellenteil die Variable x_4 entfernt und dafür die Variable x_1 aufgenommen. Pfeile kennzeichnen diesen Vorgang. Aus der vierten Zeile des zweiten Tabellenteils, der Zeile mit dem umrandeten Feld, ergibt sich zuerst die vierte Zeile des dritten Tabellenteils. Sie entsteht, indem die Elemente der vierten

Tabelle 3. Simplextabelle, Teile 1, 2 und 3 (Gesamttabelle)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	0	5	10	0	0	0	0	
x_3	40	2	1	1	0	0	0	40
x_4	30	1	1	0	1	0	0	30
x_5	15	1	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_6$	25	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	25
	−250	5	0	0	0	0	−10	
x_3	15	2	0	1	0	0	−1	7,5
$\leftarrow x_4$	5	$\boxed{1}$	0	0	1	0	−1	5
x_5	15	1	0	0	0	1	0	15
$\rightarrow x_2$	25	0	1	0	0	0	1	—
	−275	0	0	0	−5	0	−5	
x_3	5	0	0	1	−2	0	1	
$\rightarrow x_1$	5	1	0	0	1	0	−1	
x_5	10	0	0	0	−1	1	1	
x_2	25	0	1	0	0	0	1	

Zeile im zweiten Teil durch den Wert des umrandeten Feldes (1) dividiert werden. Die zweite, dritte, fünfte und sechste Zeile des dritten Tabellenteils ergeben sich, indem die neue vierte Zeile nacheinander mit 5, 2, 1 und 0 (den Koeffizienten dieser Zeilen in der Spalte der aufzunehmenden Variablen x_1 im zweiten Tabellenteil) multipliziert und von der zweiten, dritten, fünften und sechsten Zeile des zweiten Tabellenteils subtrahiert wird.

Die Basislösung der dritten Stufe, die im dritten Tabellenteil steht, ist optimal, weil die zugehörige Zielfunktion (zweite Zeile des dritten Tabellenteils) keine positiven Koeffizienten mehr enthält. Wie bereits mehrfach festgestellt, lautet die optimale Lösung $x_1 = 5$, $x_2 = 25$, $x_3 = 5$ und $x_5 = 10$. Die Variablen x_4 und x_6 sind gleich Null. Zu dieser Lösung nimmt die Zielfunktion ihren Maximalwert von 275 Währungseinheiten an.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß im ersten Teil der Simplextabelle die Normalform der Zielfunktion und der einschränkenden Bedingungen der vorliegenden Aufgabenstellung enthalten ist. Im Abschnitt 4.1.2. wurde gezeigt, wie der Übergang von einer Basislösung zu einer neuen und besseren Basislösung einer bestimmten Veränderung des Gleichungssystems und der

Zielfunktion entspricht. So finden wir auch im zweiten und im dritten Tabellenteil die Koeffizienten der Gleichungssysteme, die sich durch die im Zusammenhang mit dem Übergang zu neuen Basislösungen auftretenden Veränderungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben. Das Koeffizientenschema der im Zusammenhang mit der zweiten Basislösung gefundenen Gleichungen (Ia) bis (IVa) steht im zweiten Tabellenteil. Weiter erhält man aus (Ia″) bis (IVa″) durch Freistellen der absoluten Glieder ein Gleichungssystem, dessen Koeffizientenschema im dritten Tabellenteil steht. Daraus wird ersichtlich, daß die in der Simplextabelle vorgenommenen Rechenoperationen letztlich eben die Umformungen des Ausgangsgleichungssystems sind, die im Abschnitt 4.1.2. vorgenommen wurden. Da die Rechenarbeit durch die Verwendung der Simplextabelle wesentlich übersichtlicher gestaltet wird, werden praktische Aufgaben mit einem Umfang, der eine numerische Lösung ohne Zuhilfenahme von Rechenanlagen gestattet, mit Hilfe der Simplextabelle gelöst.
In allgemeiner Darstellung geschieht der Übergang von der ersten zur zweiten Basislösung und analog zu jeder weiteren Basislösung wie folgt:
Die erste Basislösung ist durch die nachstehende Koeffizientenmatrix gegeben.

0		$x_1 \ldots x_k \ldots x_n$ $c_1 \ldots c_k \ldots c_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+m}$ $c_{n+1} \ldots c_{n+m}$
x_{n+1}	b_1	$a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n}$	$a_{1.n+1} \ldots a_{1.n+m}$
.	.	. . .	. .
x_{n+l}	b_l	$a_{l1} \ldots \boxed{a_{lk}} \ldots a_{ln}$	$a_{l.n+1} \ldots a_{l.n+m}$
.	.	. . .	. .
x_{n+m}	b_m	$a_{m1} \ldots a_{mk} \ldots a_{mn}$	$a_{m.n+1} \ldots a_{m.n+m}$

Darin sind, da von der Maximumaufgabe ausgegangen wird, die Zielfunktionskoeffizienten c_{n+i} der Schlupfvariablen x_{n+i} sämtlich gleich Null. Die Koeffizienten $a_{i.n+i}$ der Schlupfvariablen sind in der Hauptdiagonale gleich Eins ($a_{1.n+1}$, $a_{2.n+2}$, …, $a_{m.n+n}$), an allen anderen Stellen gleich Null.
Die so gegebene Ausgangslösung gehört zur Maximumaufgabe der linearen Optimierung in der Form

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \leqq 0$$

$$\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{x} \rightarrow \max.$$

$$\mathfrak{x} \geqq 0$$

Darin bedeutet $\mathfrak{A}$ die Matrix der Koeffizienten in den einschränkenden Bedingungen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{x}$ den Spaltvektor der echten Variablen

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{b}$ den Spaltenvektor der absoluten Glieder der einschränkenden Bedingungen

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{c}'$ den Zeilenvektor der Zielfunktionskoeffizienten

$$\mathfrak{c}' = [c_1 \, c_2 \dots c_n]$$

und $\mathfrak{o}$ den Nullvektor

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Überführung der gestellten Aufgabe in die Normalform treten die Schlupfvariablen, ihre Zielfunktionskoeffizienten (0) und ihre Koeffizienten im System der einschränkenden Bedingungen hinzu.
Zur Überführung der ersten Basislösung in die nachfolgende bestimmen wir zunächst den größten positiven Koeffizienten der Zielfunktion. Es sei c_k. Damit steht fest, daß in der nachfolgenden Basis die Variable x_k ent-

halten sein wird. Anschließend werden die Quotienten b_i/a_{ik} gebildet. Ihr kleinster Wert ergebe sich für b_l/a_{lk}, womit feststeht, daß die Variable x_{n+l} aus der bisherigen Basis ausscheidet. Die genannten Quotienten werden nur für $a_{ik} > 0$ gebildet. Nun erfolgt die Berechnung der neuen Koeffizientenmatrix und somit der zweiten Basislösung.

Die einzelnen Schritte verlaufen dabei in folgender Reihe:

1. $c_k = \max\limits_j c_j$ (x_k geht in Basis)

2. $\dfrac{b_l}{a_{lk}} = \min\limits_i \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ (x_{n+l} scheidet aus Basis aus)

3. $x_k \Rightarrow x_{n+l}$ und

   $x_{n+l} \Rightarrow x_k$ (Variablenaustausch)

4. $\dfrac{b_l}{a_{lk}} \Rightarrow b_l$ und

   $\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \Rightarrow a_{lj}$ (Umformung der Zeile in der Ausgangslösung, die das Hauptelement a_{lk} enthält)

5. $b_i - a_{ik} \cdot b_l \Rightarrow b_i \quad (i \neq l)$ und

   $a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{lj} \Rightarrow a_{ij} \quad (i \neq l)$

   (Berechnung der übrigen Koeffizienten der einschränkenden Bedingungen)

6. $c_j - c_k \cdot a_{lj} \Rightarrow c_j$ (Berechnung der Zielfunktionskoeffizienten)

7. $Z - c_k \cdot b_l \Rightarrow Z$ (Berechnung des Wertes der Zielfunktion).

Die Reihenfolge ist einzuhalten, weil jeweils die rechts stehenden Ergebniswerte in den nachfolgenden Schritten weiterverwendet werden. Wenn also im fünften Schritt b_l gebraucht wird, so ist das der Wert, der im Ergebnis des ersten Teils des vierten Schritts gewonnen wurde.
Mitunter verzichtet man darauf, in den Simplextabellen die Spalten der Basisvariablen immer mitzuschreiben. Dadurch wird die Tabelle etwas einfacher, wohingegen die Rechenoperationen an Übersichtlichkeit verlieren.

4.1.4. Ablaufschema der Simplexmethode

Die im Zusammenhang mit der maschinellen Rechentechnik im breiten Umfang verwendeten Ablaufdiagramme eignen sich sehr gut für die Darstellung von Abläufen jeder Art. Das dargelegte Rechenverfahren für die

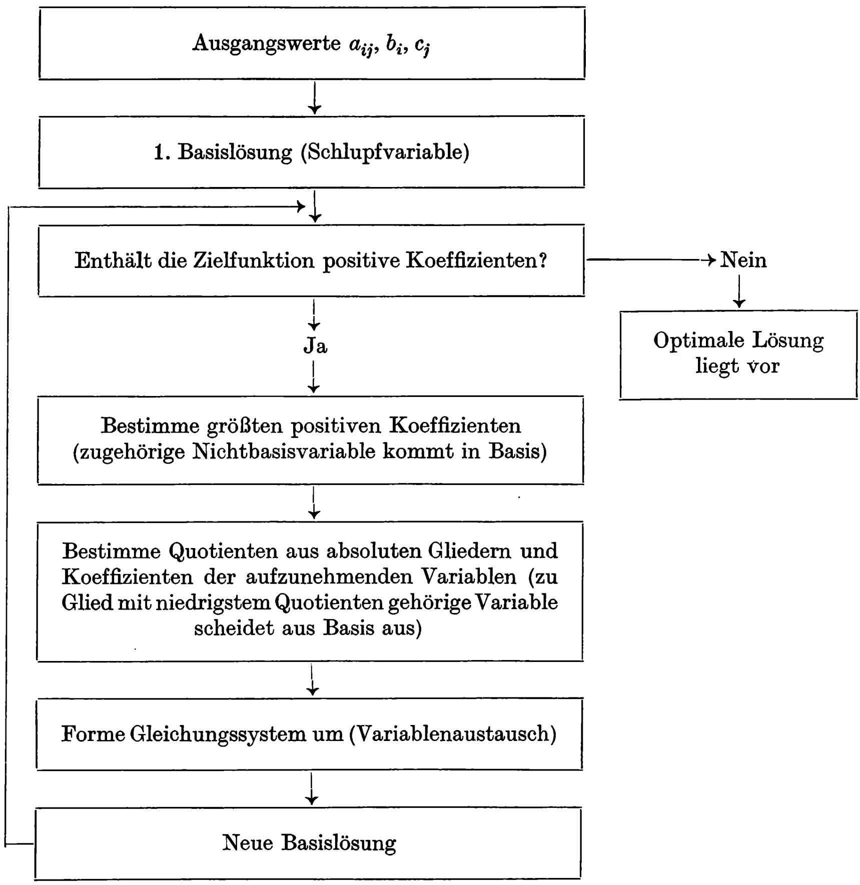

Bild 9. Ablaufschema der Simplexmethode (Maximumaufgabe)

Maximumaufgabe der Simplexmethode ist im obigen Bild 9 in Form eines solchen Ablaufschemas dargestellt. Die wesentlichsten Schritte sind demnach:

1. Sammlung der Ausgangsdaten a_{ij}, b_i und c_j.
2. Aufstellung der ersten Basislösung, deren Basis von den Schlupfvariablen gebildet wird.
3. Prüfung, ob die Zielfunktion positive Koeffizienten enthält; hierbei sind zwei Ergebnisse möglich:

a) Die Zielfunktion enthält keine positiven Koeffizienten mehr, dann ist die optimale Lösung gefunden,
b) die Zielfunktion enthält noch positive Koeffizienten, dann wird das Verfahren mit dem vierten Schritt fortgesetzt.
4. Bestimmung des größten positiven Koeffizienten der Zielfunktion. Die dazugehörige Nichtbasisvariable wird in die Basis aufgenommen.
5. Bestimmung der Quotienten aus den absoluten Gliedern der einschränkenden Bedingungen und den Koeffizienten der aufzunehmenden Variablen in den einschränkenden Bedingungen. Die zum niedrigsten dieser Quotienten gehörende Basisvariable scheidet aus der Basis aus.
6. Der Variablenaustausch wird vorgenommen und das Gleichungssystem entsprechend umgeformt. Damit ergibt sich
7. die neue Basislösung.

Vom siebenten Schritt geht das Programm zurück zum dritten Schritt, wodurch erneut geprüft wird, ob die nunmehr vorliegende Basislösung bereits optimal ist.
In Bild 9 sind nicht alle Einzelschritte des Algorithmus enthalten. So wurde zum Beispiel die Bildung der Normalform durch Aufnahme der Schlupfvariablen nicht besonders erwähnt. Ebenso sind die Einzelheiten des Variablenaustauschs nicht angeführt.

4.2. Lösung der Minimumaufgabe (Duale Aufgabe)

Optimale Entscheidungen werden nicht nur hinsichtlich der Maximierung, sondern auch hinsichtlich der Minimierung bestimmter das Optimalkriterium repräsentierender Werte getroffen. Die durch Gl. (8) gegebene Form einer Minimumaufgabe sei zur Erinnerung noch einmal wiederholt:

1. Zielfunktion (8a)

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \rightarrow \min.$$

2. Einschränkende Bedingungen (8b)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &\geqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n &\geqq b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &\geqq b_m \end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung (8c)

$$x_1 \geqq 0; \; x_2 \geqq 0; \ldots ; \; x_n \geqq 0$$

Zum besseren Verständnis sei ein Beispiel angeführt. Aus drei verschiedenen Futtermitteln F_1, F_2 und F_3 ist eine Futtermischung herzustellen. In einer Einheit dieser Futtermischung sollen die Wirkstoffe W_1, W_2 und W_3 in den Mindestmengen von 10, 15 und 5 Wirkstoffeinheiten vorhanden sein. Die Kosten der drei Futtermittel betragen je Futtermitteleinheit 20, 6 und 10 Währungseinheiten. Es wird verlangt, daß die Futtermischung mit den niedrigsten Futterkosten hergestellt wird, die gleichzeitig die hinsichtlich des Gehalts an Wirkstoffen gestellten Forderungen erfüllt. In den einzelnen Futtermitteln sind die Wirkstoffe wie folgt enthalten (Wirkstoffeinheiten je Futtermitteleinheit):

W_1 in F_1: $a_{11} = 0{,}5$

W_2 in F_2: $a_{12} = 0{,}2$

W_1 in F_3: $a_{13} = 1{,}0$

W_2 in F_1: $a_{21} = 1{,}0$

W_2 in F_2: $a_{22} = 0$

W_2 in F_3: $a_{23} = 0{,}4$

W_3 in F_1: $a_{31} = 0{,}2$

W_3 in F_2: $a_{32} = 0{,}5$

W_3 in F_3: $a_{33} = 0$

Mit den Kosten $c_1 = 20$, $c_2 = 6$ und $c_3 = 10$ ergibt sich folgendes mathematische Modell der Aufgabe:

1. Zielfunktion

$$Z = 20x_1 + 6x_2 + 10x_3 \to \text{min.}$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}0x_3 &\geqq 10 \\ 1{,}0x_1 + \phantom{0{,}2x_2 +} 0{,}4x_3 &\geqq 15 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \phantom{+ 1{,}0x_3} &\geqq 5 \end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0; \; x_2 \geqq 0; \; x_3 \geqq 0.$$

Die Minimierung der oben angegebenen Zielfunktion führt auf die gleiche Lösung wie die Maximierung der Zielfunktion

$$Z^* = -20x_1 - 6x_2 - 10x_3,$$

wie man sich leicht überlegt.

Die Ungleichungen der einschränkenden Bedingungen, durch die hier untere Grenzen vorgegeben werden, müssen durch Einführung der Schlupfvariablen u_1, u_2 und u_3 in Gleichungen überführt werden. Die in Gleichungen ausgedrückten einschränkenden Bedingungen lauten dann

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}0x_3 - u_1 \qquad\qquad &= 10 \\ 1{,}0x_1 \qquad\quad + 0{,}4x_3 \qquad - u_2 \qquad &= 15 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - u_3 &= \ \ 5. \end{aligned}$$

Die Schlupfvariablen besitzen jetzt den Koeffizienten -1, da auch für sie die Nichtnegativitätsbedingung gilt.
Unter Einhaltung der in der obigen Form gegebenen einschränkenden Bedingungen könnte die Zielfunktion Z' nach der Simplexmethode maximiert werden. Beginnen wir damit jedoch in der üblichen Form, d. h., indem wir die erste Basislösung dadurch bilden, daß die echten Variablen Null gesetzt (und damit Nichtbasisvariablen) und die Schlupfvariablen zu Basisvariablen werden, so erhalten wir eine nichtzulässige Ausgangslösung. Diese Ausgangslösung würde sein (0 0 0 -10 -15 -5) und somit negative Variable enthalten. Diese Erkenntnis erhalten wir auch, wenn wir auf Bild 6 zurückkommen. Dort wird deutlich, daß eine Lösung, in der $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gelten, die also im Ursprung des Koordinatensystems liegt, sich außerhalb des Bereichs der zulässigen Lösungen befindet. Man kann versuchen, mit einer solchen nichtzulässigen Ausgangslösung zu beginnen und zunächst danach zu trachten, die negativen Variablen aus der Basis zu beseitigen. Andererseits kann man jedoch weitere *künstliche Variable* einführen und zu folgendem Gleichungssystem gelangen:

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}0x_3 - u_1 + k_1 &= 10 \\ 1{,}0x_1 \qquad\quad + 0{,}4x_3 - u_2 + k_2 &= 15 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \qquad\qquad - u_3 + k_3 &= \ \ 5. \end{aligned}$$

Werden die echten und die Schlupfvariablen gleich Null gesetzt, so bilden die künstlichen Variablen k_1, k_2 und k_3 eine geeignete Basis. Allerdings muß gesichert werden, daß diese künstlichen Variablen nicht in der optimalen Lösung auftreten, weil sie die einschränkenden Bedingungen verletzen würden. Um das zu erreichen, ist es lediglich erforderlich, ihnen einen sehr hohen Kostensatz M zuzuordnen. Da das billigste Programm angestrebt wird, wird es sich auch in erster Linie aus den billigen Futtermitteln zusammensetzen. In der Zielfunktion

$$\begin{aligned} Z = 20x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \\ + Mk_1 + Mk_2 + Mk_3 \to \min \end{aligned}$$

wird ersichtlich, daß zuerst die künstlichen Variablen aus der Basis entfernt werden müssen, weil sie gegenüber allen anderen Variablen die weitaus höchsten Koeffizienten in dieser Funktion besitzen. Auch in der Form

$$Z = -20x_1 - 6x_2 - 10x_3 - 0u_1 - 0u_2 - 0u_3 - \\ - Mk_1 - Mk_2 - Mk_3 \to \max$$

wird das deutlich, weil nunmehr in Analogie zur bereits besprochenen Maximumaufgabe natürlich jene Variablen in die optimale Basis gehören, die die größten Koeffizienten besitzen und gleichzeitig die Bedingungen hinsichtlich der verschiedenen Wirkstoffe zu erfüllen gestatten. Damit können die künstlichen Variablen nicht in der Basis bleiben, weil sie die niedrigsten Koeffizienten aufweisen. Das ergibt sich daraus, daß M dem Betrage nach viel größer als alle übrigen Koeffizienten sein soll. Damit ist $-M$ der kleinste Koeffizient in der obigen Zielfunktion. Er trägt am wenigsten zur Maximierung der Zielfunktion bei.
Durch die Einführung der künstlichen Variablen wird die Zahl der zusätzlich einzuführenden Variablen sehr groß. Die Lösung wird mit einem relativ hohen Rechenaufwand verbunden sein, worauf Krekó [2] hinweist. Er löst die Aufgabe durch die Einführung einer sekundären Zielfunktion, die aus den Koeffizienten derjenigen einschränkenden Bedingungen gebildet wird, die der Normalform nicht entsprechen. Auf diese Problematik wird unter 4.6. noch eingegangen. Im Gegensatz dazu verwendet Sadowski [3] künstliche Variable, um die Minimumaufgabe zu lösen.
Im allgemeinen findet man die einfachste Lösung der Minimumaufgabe, indem man die *duale Maximumaufgabe* löst. Zu jeder Aufgabe der linearen Optimierung gibt es eine *duale Aufgabe*. Eine gegebene und ihre duale Aufgabe führen zur gleichen Lösung. So kann man statt einer Maximumaufgabe die dazu duale Minimumaufgabe und statt einer Minimumaufgabe die dazu duale Maximumaufgabe lösen. Der letztere Fall ist praktisch bedeutungsvoller. Wir betrachten die Bildung der dualen Aufgabe an dem gegebenen Beispiel. Das Koeffizientenschema der Minimumaufgabe lautet, wenn man die Zielfunktion unter die einschränkenden Bedingungen setzt,

0,5	0,2	1,0	10
1,0	0	0,4	15
0,2	0,5	0	5
20	6	10	min.

Das Koeffizientenschema der dualen Maximumaufgabe lautet

0,5	1,0	0,2	20
0,2	0	0,5	6
1,0	0,4	0	10
10	15	5	max.

Das Koeffizientenschema der dualen Maximumaufgabe ergibt sich, indem die Zeilen und Spalten des Koeffizientenschemas der ursprünglichen Minimumaufgabe vertauscht werden. Dabei müssen die Zielfunktionskoeffizienten in der ursprünglichen Aufgabe größer als Null sein.

Mit dem Übergang zur dualen Aufgabe kehrt sich die „Richtung“ der Zielfunktion um. Gleichzeitig ändert sich das Ungleichheitszeichen in den einschränkenden Bedingungen. Aus der zu minimierenden Zielfunktion der Minimumaufgabe mit den „Größer-gleich-Beziehungen“ der einschränkenden Bedingungen werden die zu maximierende Zielfunktion und die „Kleiner-gleich-Beziehungen“ der einschränkenden Bedingungen in der dualen Maximumaufgabe. Die Nichtnegativitätsbedingung wird in der dualen Aufgabe nicht gestellt.
Für die numerische Lösung der dualen Maximumaufgabe, die ja eigentlich zur Lösung der ursprünglichen (primalen) Minimumaufgabe vorgenommen wird, ist es wesentlich zu wissen, daß die Schlupfvariablen der dualen Aufgabe die echten Variablen der ursprünglichen Aufgabe sind. Wenn wir also im mathematischen Modell der ursprünglichen Minimumaufgabe mit x_j die echten Variablen bezeichnet haben, so sollen das die Schlupfvariablen der dualen Aufgabe sein. Andererseits werden die Schlupfvariablen u_i der ursprünglichen Aufgabe in der dualen Aufgabe zu echten Variablen. Aus diesem Grunde kann man, anstatt von echten und Schlupfvariablen oder fiktiven Variablen zu sprechen, auch grundsätzlich von primalen und dualen Variablen sprechen.
Nunmehr können wir das mathematische Modell der dualen Maximumaufgabe als Normalform niederschreiben:

1. Zielfunktion

$$Z = 10u_1 + 15u_2 + 5u_3 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \to \max$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned}
0{,}5u_1 + 1{,}0u_2 + 0{,}2u_3 + x_1 \qquad\qquad &= 20\\
0{,}2u_1 \qquad\quad + 0{,}5u_3 \quad + x_2 \qquad &= \ \ 6\\
1{,}0u_1 + 0{,}4u_2 \qquad\qquad\qquad + x_3 &= 10.
\end{aligned}$$

Die Aufgabe wird in der üblichen Weise, in der die Lösung einer Maximumaufgabe bestimmt wird, gelöst. Die erste Basis ergibt sich aus den dualen Schlupfvariablen x_1 bis x_3. Die Lösung wurde in Tabelle 4 bestimmt. In dieser Tabelle sind in der Zielfunktion des letzten Tabellenteils die Koeffizienten der dualen Schlupfvariablen eingerahmt, um sie besser hervorzuheben. Während die Lösung der dualen Maximumaufgabe an der üblichen Stelle steht, bilden die eingerahmten Koeffizienten die Lösung der ursprünglichen Minimumaufgabe. Diese Lösung lautet somit

$$\begin{aligned}
x_1 &= 14{,}18 \text{ Einheiten des Futtermittels } F_1\\
x_2 &= \ \ 4{,}32 \text{ Einheiten des Futtermittels } F_2\\
x_3 &= \ \ 2{,}04 \text{ Einheiten des Futtermittels } F_3.
\end{aligned}$$

Tabelle 4. Simplextabelle der dualen Aufgabe

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	
BV	0	10	15	5	0	0	0	
$\leftarrow x_1$	20	0,5	$\boxed{1}$	0,2	1	0	0	20
x_2	6	0,2	0	0,5	0	1	0	—
x_3	10	1	0,4	0	0	0	1	25
	− 300	2,5	0	2	− 15	0	0	
$\rightarrow u_2$	20	0,5	1	0,2	1	0	0	40
x_2	6	0,2	0	0,5	0	1	0	30
$\leftarrow x_3$	2	$\boxed{0{,}8}$	0	− 0,08	− 0,4	0	1	2,5
	− 306,25	0	0	2,25	− 13,75	0	− 3,12	
u_2	18,75	0	1	0,25	1,25	0	− 0,62	75
$\leftarrow x_2$	5,5	0	0	$\boxed{0{,}52}$	0,1	1	− 0,25	10,6
$\rightarrow u_1$	2,5	1	0	− 0,1	− 0,5	0	1,25	—
	− 330	0	0	0	− 14,18	− 4,32	− 2,04	
u_2	16,10	0	1	0	1,20	− 0,48	− 0,50	
$\rightarrow u_3$	10,6	0	0	1	0,19	1,92	− 0,48	
u_1	3,56	1	0	0	− 0,48	0,19	1,20	

Wir überprüfen, ob diese Lösung die einschränkenden Bedingungen der primalen Minimumaufgabe erfüllt.

1. Bedingung

$$0{,}5 \cdot 14{,}18 + 0{,}2 \cdot 4{,}32 + 1{,}0 \cdot 2{,}04 = 10$$

2. Bedingung

$$1{,}0 \cdot 14{,}18 \qquad\qquad + 0{,}4 \cdot 2{,}04 = 15$$

3. Bedingung

$$0{,}2 \cdot 14{,}18 + 0{,}5 \cdot 4{,}32 \qquad\qquad = 5.$$

Damit sind alle drei einschränkenden Bedingungen der Minimumaufgabe erfüllt. Der Wert der Zielfunktion beträgt unter diesen Bedingungen

$$Z = 20 \cdot 14{,}18 + 6 \cdot 4{,}32 + 10 \cdot 2{,}05 = 330.$$

Die Dualität zweier Optimierungsaufgaben ist symmetrisch. Es gibt somit zur primalen Minimumaufgabe eine duale Maximumaufgabe und zur primalen Maximumaufgabe eine duale Minimumaufgabe. Bildet man zu einer gegebenen Aufgabe die duale Aufgabe und formuliert man von dieser wiederum das duale Problem, so erhält man wieder die ursprüngliche (primale) Aufgabe. Entscheidend ist die Tatsache, daß wenn eine optimale Lösung einer Optimierungsaufgabe existiert, auch die dazu duale Aufgabe eine optimale Lösung besitzt. Wie bereits gesagt, besitzen die beiden Zielfunktionen für die Optimallösungen den gleichen Wert. Wie man an den Tabellen 4 und 10a nachprüfen kann, gilt für die optimale Lösung der Satz

$$\sum_j c_j x_j = \sum_i b_i u_i .$$

Darin bedeuten c_j die Zielfunktionskoeffizienten und x_j die echten Variablen der primalen Minimumaufgabe und u_i die echten Variablen der dualen Maximumaufgabe sowie b_i die absoluten Glieder der einschränkenden Bedingungen in der primalen Minimumaufgabe, die in der dualen Maximumaufgabe als Zielfunktionskoeffizienten auftreten. Das gilt auch, wenn die Maximumaufgabe gegeben und die duale Minimumaufgabe gebildet wird. Es sei noch vermerkt, daß eine lineare Optimierungsaufgabe nur dann mehrere optimale Lösungen haben kann, wenn die optimale Lösung der dualen Aufgabe entartet (degeneriert) ist.

Da die Rückführung einer primalen Minimumaufgabe auf die duale Maximumaufgabe ohne Schwierigkeiten möglich ist, genügt es letztlich, die Maximumaufgabe der linearen Optimierung (bezüglich der hier behandelten Simplexmethode) lösen zu können. Wenn man weiter in der Lage ist, aus der Minimumaufgabe die duale Maximumaufgabe herzuleiten, kann man die Grundaufgaben der linearen Optimierung lösen.

4.3. Parametrische Optimierung

Bekanntlich werden für die erforderlichen Koeffizienten der Zielfunktion, aber auch für die einschränkenden Bedingungen feste Werte vorgegeben. Das gefundene optimale Programm ist zunächst nur für diese festen Werte optimal. Es ist jedoch leicht möglich, daß die genannten Koeffizienten gewissen Schwankungen unterliegen. So kann es eintreten, daß der beim Verkauf bestimmter Erzeugnisse erzielbare Gewinn Schwankungen unterliegt, die im einzelnen nicht vorausgesagt werden können. In diesem Falle wäre es wichtig, sich eine Vorstellung davon zu erarbeiten, in welchem Intervall die Koeffizienten der Zielfunktion schwanken können, ohne dadurch die Optimalität der Lösung zu gefährden. Wir betrachten dazu das bereits mehrfach angeführte Beispiel, nach dem unter Einhaltung der einschränkenden Bedingungen

$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = 40 \\ x_1 + x_2 & + x_4 & & & & = 30 \\ x_1 & & + x_5 & & & = 15 \\ x_2 & & & + x_6 & & = 25 \end{array}$$

die Zielfunktion

$$Z = 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

zu maximieren ist. Um festzustellen, in welchem Bereich die dabei gefundene Lösung optimal bleibt, wenn sich die Koeffizienten der Zielfunktion ändern, machen wir diese Koeffizienten von einem Parameter t abhängig und schreiben für c_1 anstelle von 5

$$c_1 = f_1(t) = 5 + t$$

sowie für c_2 anstelle von 10

$$c_2 = f_2(t) = 10 + t.$$

Die neue Zielfunktion lautet dann

$$Z = (5 + t)\, x_1 + (10 + t)\, x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to$$
$$\to \max.$$

Diese Aufgabe kann wie jede andere lineare Optimierungsaufgabe gelöst werden. Die optimale Lösung, die in Tabelle 5 gefunden wird, ist mit $x_1 = 5$ und $x_2 = 25$ die bereits bekannte Lösung. Für die Zielfunktion ergibt sich unter den genannten Bedingungen der maximale Wert von $Z_{\max} = 275 + 30\,t$.

In der Zielfunktion der optimalen Lösung besitzt die Nichtbasisvariable x_4 den Koeffizienten $-5 - t$. Solange dieser Koeffizient kleiner als Null ist oder höchstens gleich Null wird, bleibt nach dem Simplexkriterium die gefundene Lösung optimal. Die Bedingung einer optimalen Lösung lautet demnach

$$-5 - t \leqq 0$$

oder

$$-5 \leqq t.$$

Solange der Parameter t größer als -5 ist oder — in der Grenze — gerade -5 beträgt, bleibt die Optimalität der Lösung erhalten, obwohl sich der Wert der Zielfunktion natürlich verändert. Die Struktur der Aufgabe ändert

Tabelle 5. Simplextabelle der parametrischen Optimierung

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	0	$5+t$	$10+t$	0	0	0	0	
x_3	40	2	1	1	0	0	0	40
x_4	30	1	1	0	1	0	0	30
x_5	15	1	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_6$	25	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	25
	-250 $-25\,t$	$5+t$	0	0	0	0	$-10-t$	
x_3	15	2	0	1	0	0	-1	7,5
$\leftarrow x_4$	5	$\boxed{1}$	0	0	1	0	-1	5
x_5	15	1	0	0	0	1	0	15
$\rightarrow x_2$	25	0	1	0	0	0	1	—
	-275 $-30\,t$	0	0	0	$-5-t$	0	-5	
x_3	5	0	0	1	-2	0	1	
$\rightarrow x_1$	5	1	0	0	1	0	-1	
x_5	10	0	0	0	-1	1	1	
x_2	25	0	1	0	0	0	1	

sich, sobald der Parameter t Werte unter -5 annimmt. Dann ist auch die gefundene Lösung nicht mehr optimal, weil der Koeffizient der Nichtbasisvariablen x_4 in der Zielfunktion der optimalen Lösung positiv wird. Der Einfluß des Parameters t auf die Höhe des Wertes der Zielfunktion und auf die Koeffizienten dieser Funktion sowie auf die Optimalität der Lösung ist in Tabelle 6 dargestellt. Die dort enthaltene gestrichelte Trennungslinie trennt den Wertebereich von t, für den die Lösung optimal bleibt, von jenem, für den die Lösung nicht mehr optimal ist.

Ansätze der geschilderten Art erlauben es, allgemeine Bedingungen für Parameter zu bestimmen, unter denen gefundene optimale Lösungen auch optimal bleiben. Es ist sicher, daß eine breite Anwendung der parametrischen Optimierung in der Tendenz zu einer Verringerung der Optimierungsrechnungen führt. Veränderungen der Koeffizienten der Zielfunktion müssen nicht in jedem Falle eine erneute Optimierungsrechnung hervorrufen, wenn sie sich in dem Intervall bewegen, in dem nach der parametrischen Optimierung die Optimalität der Lösung erhalten bleibt. Durch die parametrische Optimierung wird der Wirtschaftsleitung nicht nur ein optimaler Verhaltenspunkt, sondern eine optimale Verhaltungsstrecke angeboten. Jeder Punkt dieser Verhaltensstrecke stellt eine optimale Entscheidung dar, die die Wirtschaftsleitung treffen kann. Mit anderen Worten gesagt: Die Optimalität einer Entscheidung gilt unter Bedingungen, die in einem gewissen Intervall variabel sind. Das Intervall wird durch den Parameter t bestimmt.

Tabelle 6. Auswirkung der Größe des Parameters t auf die optimale Lösung nach Tabelle 5

t	$Z = 275 + 30\,t$	c_4	c_6
.	. . . . . .	. . .	−5
3	365	−8	−5
2	335	−7	−5
1	305	−6	−5
0	275	−5	−5
−1	245	−4	−5
−2	215	−3	−5
−3	185	−2	−5
−4	155	−1	−5
−5	125	0	−5
−6	95	1	−5
−7	65	2	−5
.	. . . . . .	. . .	−5

Anmerkung: c_4 und c_6 sind die Koeffizienten der Nichtbasisvariablen in der Zielfunktion der optimalen Lösung.

4.4. Optimierungsaufgaben mit begrenzten Variablen

In der Normalform der linearen Optimierung ist eine Begrenzung der Variablen insofern vorhanden, als die Nichtnegativitätsbedingung besteht. Sie schreibt vor, daß die Variablen keine negativen Werte annehmen dürfen. Gegenüber diesem normalen Fall können zwei Abweichungen auftreten, und zwar

1. eine über die Nichtnegativitätsbedingung hinausgehende (zusätzliche) Begrenzung der Variablen, und
2. die Aufhebung der Nichtnegativitätsbedingung.

Der erste Fall, die zusätzliche Begrenzung der Variablen, ist von großer praktischer Bedeutung. Er wird nachstehend an einem Beispiel behandelt. Auf die Aufhebung der Nichtnegativitätsbedingung, die zum Gegenteil von Optimierungsaufgaben mit begrenzten Variablen führt, wird am Ende dieses Abschnittes kurz hingewiesen.

In der ersten in diesem Buch behandelten Aufgabe haben wir bereits den Fall der begrenzten Variablen kennengelernt. Dort nämlich durften sowohl x_1 als auch x_2 infolge der begrenzten Kapazitäten der entsprechenden Montagestraßen bestimmte Werte nicht übersteigen. Es handelte sich um Begrenzungen nach oben, die mit der allgemeinen Form der einschränkenden Bedingungen bei der Maximumaufgabe übereinstimmen.
Auch im Zusammenhang mit der Lösung von Maximumaufgaben können jedoch Begrenzungen der Variablen nach unten auftreten, etwa so, daß in einer bestimmten Brennstoffmischung, deren Heizwert maximiert werden soll, ein bestimmter Brennstoff in einer vorgeschriebenen Mindestmenge in der Mischung enthalten sein muß. Die Gründe dafür können sehr verschiedener Natur sein. Sie sollen hier nicht erörtert werden.
Die Behandlung von Aufgaben der geschilderten Art wird am folgenden Beispiel demonstriert. Zur Herstellung einer Brennstoffmischung stehen vier verschiedene Brennstoffe zur Verfügung. Bekannt sind der Heizwert und die Kosten dieser Brennstoffe. Es ist gefordert, eine Brennstoffmischung zu berechnen, die

1. einen maximalen Heizwert hat,
2. ein vorgegebenes Kostenlimit nicht überschreitet,
3. ein vorgeschriebenes Mengenlimit einhält und
4. einen Brennstoff in einer bestimmten Mindestmenge enthält.

Die Charakteristika der vier verschiedenen Brennstoffe sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt:

Heizstoffsorte	Heizwert (kcal)	Kosten je Mengeneinheit
H_1	7000	2
H_2	4000	1
H_3	5000	1,2
H_4	6000	1,6

Die Kosten sind relativ zu denen der Heizstoffsorte H_2, die gleich Eins gesetzt wurden, ausgedrückt. Die Heizstoffmischung soll folgende Forderung erfüllen und Bedingungen einhalten:

1. Der Heizwert soll ein Maximum sein,
2. die Gesamtkosten dürfen 4000 nicht übersteigen,
3. die Gesamtmenge darf 3000 nicht übersteigen,
4. von der Heizstoffsorte H_3 sind höchstens 500 Einheiten verfügbar,
5. von der Heizstoffsorte H_1 sollen wenigstens 500 Einheiten in der Mischung enthalten sein.

Demnach ergibt sich folgendes mathematische Modell der Aufgabe:

1. Zielfunktion (Heizwert in Tsd. eingesetzt)

$$Z = 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 &\leqq 4000 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqq 3000 \\
x_3 &\leqq 500 \\
x_1 &\geqq 500
\end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0;\ x_2 \geqq 0;\ x_3 \geqq 0;\ x_4 \geqq 0.$$

Das System der einschränkenden Bedingungen weicht insofern von dem üblichen System bei einer Maximumaufgabe ab, als durch die vierte einschränkende Bedingung eine Begrenzung nach unten gesetzt wird. Durch die Einführung von Schlupfvariablen würde sich folgendes System der einschränkenden Bedingungen ergeben:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 4000 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad + x_6 \qquad\quad &= 3000 \\
x_3 \qquad\qquad + x_7 \qquad &= 500 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad - x_8 &= 500.
\end{aligned}$$

Hier tritt der gleiche Fall ein, den wir bereits bei der Minimumaufgabe beobachtet haben. Eine Basislösung aus den Schlupfvariablen als Basis und den echten Variablen als Nichtbasisvariablen ist nicht zulässig, weil sie eine negative Variable ($x_8 = -500$) enthalten würde. Hätten wir mit einer derartigen nichtzulässigen Ausgangslösung begonnen zu rechnen, so wäre der Rechengang nach Tabelle 7 abgelaufen. Wir hätten im ersten Schritt die Schlupfvariable x_8 aus der Basis entfernt und dagegen die echte Variable x_1 in die Basis gebracht. Nach dem zweiten Schritt besitzt jedoch die Schlupfvariable x_8 in der Zielfunktion wieder einen positiven Koeffizienten. Wir berücksichtigen diese Variable vorläufig nicht. Nach insgesamt vier Verbesserungen finden wir die Lösung

$$x_1 = 500 \qquad x_2 = 1333 \qquad x_3 = 500 \qquad x_4 = 667.$$

Sämtliche Schlupfvariablen sind gleich Null. Der Koeffizient der negativen Schlupfvariablen x_8 in der Zielfunktion der optimalen Lösung ist zwar positiv, doch wäre eine Einbeziehung dieser Schlupfvariablen in die Basis

Tabelle 7. Lösung einer Aufgabe mit eingeschränkten Variablen, die von einer nichtzulässigen Ausgangslösung ausgeht

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-x_8$	
BV	0	7	4	5	6	0	0	0	0	
x_5	4000	2	1	1,2	1,6	1	0	0	0	2000
x_6	3000	1	1	1	1	0	1	0	0	3000
x_7	500	0	0	1	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow -x_8$	500	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	1	500
	-3500	0	4	5	6	0	0	0	-7	
$\leftarrow x_5$	3000	0	1	1,2	$\boxed{1{,}6}$	1	0	0	-2	1875
x_6	2500	0	1	1	1	0	1	0	-1	2500
x_7	500	0	0	1	0	0	0	1	0	—
$\rightarrow x_1$	500	1	0	0	0	0	0	0	1	—
	$-14\,750$	0	0,25	0,50	0	$-3{,}75$	0	0	0,50	
$\rightarrow x_4$	1875	0	0,625	0,75	1	0,625	0	0	$-1{,}25$	2500
x_6	625	0	0,375	0,25	0	$-0{,}625$	1	0	0,25	2500
$\leftarrow x_7$	500	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	500
x_1	500	1	0	0	0	0	0	0	1	—
	$-15\,000$	0	0,25	0	0	$-3{,}75$	0	$-0{,}50$	0,50	
x_4	1500	0	0,625	0	1	0,625	0	$-0{,}75$	$-1{,}25$	2400
$\leftarrow x_6$	500	0	$\boxed{0{,}375}$	0	0	$-0{,}625$	1	$-0{,}25$	0,25	1333
$\rightarrow x_3$	500	0	0	1	0	0	0	1	0	—
x_1	500	1	0	0	0	0	0	0	1	—
	$-15\,333$	0	0	0	0	$-3{,}33$	$-0{,}67$	$-0{,}33$	0,33	
x_4	667	0	0	0	1	1,67	$-1{,}67$	$-0{,}33$	$-1{,}67$	—
$\rightarrow x_2$	1333	0	1	0	0	$-1{,}67$	2,67	$-0{,}67$	0,67	>500
x_3	500	0	0	1	0	0	0	1	0	—
x_1	500	1	0	0	0	0	0	0	1	500

nur im Austausch mit der echten Variablen x_1 möglich, deren Wert in der optimalen Lösung nach den einschränkenden Bedingungen jedoch mindestens 500 betragen muß.
Die gestellte Aufgabe kann noch in anderer Weise gelöst werden. Durch die Aufnahme einer künstlichen Variablen k_9 wird das mathematische Modell in folgender Weise erweitert:

1. Zielfunktion

$$Z = 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + \\ + 0x_8 + 0k_9 \to \max$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{array}{llllllll} 2x_1 + x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 + x_5 & & & & = 4000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 & & & & = 3000 \\ x_3 + x_7 & & & & = 500 \\ x_1 - x_8 + k_9 & & & & = 500 \end{array}$$

3. Außerdem gilt für alle Variablen die Nichtnegativitätsbedingung.

Das mathematische Modell ist bereits in der Normalform gegeben. Durch die Aufnahme der künstlichen Variablen k_9 wird es möglich, eine erste zulässige Ausgangslösung der Aufgabe zu bilden, deren Basis aus den Variablen x_5, x_6, x_7 und k_9 besteht. In der Zielfunktion erhält die künstliche Variable den Koeffizienten 0, um zu sichern, daß in der optimalen Lösung $k_9 = 0$ ist.
Die Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Simplexmethode ist in Tabelle 7a angedeutet. Die Tabelle erhält lediglich die Ausgangs- und die optimale Lösung. Letztere stimmt natürlich mit der bereits gefundenen optimalen Lösung nach Tabelle 7 überein.
Man kann für die vorliegende Aufgabe die optimale Lösung auch dadurch bestimmen, daß man die bezüglich H_1 bestehende einschränkende Bedingung nicht mit angibt, sondern sie in den übrigen Bedingungen berücksichtigt. Offensichtlich bedeutet die Forderung

$$x_1 \geqq 500$$

doch, daß wenigstens 500 Mengeneinheiten der Heizstoffsorte H_1 in die Mischung einzubeziehen sind. Wir können diese 500 Einheiten unmittelbar berücksichtigen, indem wir eine neue Variable

$$x_1^* = x_1 - 500$$

einführen .Gleichzeitig müssen jedoch die Veränderungen der einschränkenden Bedingungen beachtet werden, die dadurch eintreten, daß 500 Einheiten

Tabelle 7a. Lösung einer Aufgabe mit eingeschränkter Variablen (mit Hilfe einer künstlichen Variablen) — Auszug

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	k_9	
BV	0	7	4	5	6	0	0	0	0	0	
x_5	4000	2	1	1,2	1,6	1	0	0	0	0	2000
x_6	3000	1	1	1	1	0	1	0	0	0	3000
x_7	500	0	0	1	0	0	0	1	0	0	—
k_9	500	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	−1	1	500
	−15333	0	0	0	0	−3,33	−0,67	−0,33	−0,33	−0,67	
x_4	667	0	0	0	1	1,67	−1,67	−0,33	1,67	−1,67	
x_2	1333	0	1	0	0	−1,67	2,67	−0,20	−0,67	0,67	
x_3	500	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
x_1	500	1	0	0	0	0	0	0	−1	1	

der Heizstoffsorte H_1 bereits zum Programm gerechnet werden. Diese Menge beansprucht vom Kostenlimit in Höhe von 4000 bereits $2 \cdot 500 = 1000$, so daß das Kostenlimit unter Ausschluß der genannten 500 Mengeneinheiten auf 3000 absinkt. Desgleichen wird das Mengenlimit um 500 Einheiten auf 2500 Einheiten gesenkt. Auf die dritte einschränkende Bedingung ergeben sich keine Auswirkungen, weil dort die Variable x_1 nicht auftritt. Damit ergibt sich das mathematische Modell der umgeformten Aufgabe als[1]:

1. Zielfunktion

$$Z = 7x_1^* + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \max$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1^* + x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 &\leqq 3000 \\ x_1^* + x_2 + \phantom{1{,}2}x_3 + \phantom{1{,}6}x_4 &\leqq 2500 \\ x_3 \phantom{+ 1{,}6x_4} &\leqq 500 \end{aligned}$$

[1] Aus $x_1^* = x_1 - 500$ ergibt sich weiter $x_1 = x_1^* + 500$. Setzt man diese Beziehung überall dort ein, wo x_1 steht, so entsteht das mathematische Modell der umgeformten Aufgabe ebenfalls

3. Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1^* \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0.$$

Nachdem dieses Modell durch die Schlupfvariablen x_5, x_6 und x_7 in die Normalform gebracht wurde, kann es als Maximalaufgabe gelöst werden. Die Lösung befindet sich in Tabelle 8.
Durch die unmittelbare Berücksichtigung der bezüglich der Variablen x_1 bestehenden einschränkenden Bedingung reduziert sich die Zahl der einschränkenden Bedingungen auf drei. Das vereinfacht natürlich gleich-

Tabelle 8. Simplextabelle einer Aufgabe mit eingeschränkten Variablen

		x_1^*	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
BV	0	7	4	5	6	0	0	0	
$\leftarrow x_5$	3000	$\boxed{2}$	1	1,2	1,6	1	0	0	1500
x_6	2500	1	1	1	1	0	1	0	2500
x_7	500	0	0	1	0	0	0	1	—
	-10500	0	0,5	0,8	0,4	$-3,5$	0	0	
$\rightarrow x_1^*$	1500	1	0,5	0,6	0,8	0,5	0	0	2500
x_6	1000	0	0,5	0,4	0,2	$-0,5$	1	0	2500
$\leftarrow x_7$	500	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	500
	-10900	0	0,5	0	0,4	$-3,5$	0	$-0,8$	
x_1^*	1200	1	0,5	0	0,8	0,5	0	$-0,6$	2400
$\leftarrow x_6$	800	0	$\boxed{0,5}$	0	0,2	$-0,5$	1	$-0,4$	1600
$\rightarrow x_3$	500	0	0	1	0	0	0	1	—
	-11700	0	0	0	0,2	-3	-1	$-0,4$	
$\leftarrow x_1^*$	400	1	0	0	$\boxed{0,6}$	1	-1	$-0,2$	667
$\rightarrow x_2$	1600	0	1	0	0,4	-1	2	$-0,8$	4000
x_3	500	0	0	1	0	0	0	1	—
	-11833	$-0,33$	0	0	0	$-3,33$	$-0,67$	$-0,33$	
$\rightarrow x_4$	667	1,67	0	0	1	1,67	$-1,67$	$-0,33$	
x_2	1333	$-0,67$	1	0	0	$-1,67$	2,67	$-0,67$	
x_3	500	0	0	1	0	0	0	1	

zeitig den Rechengang. Die in Tabelle 8 erzielte optimale Lösung lautet:

$$(0 \quad 1333 \quad 500 \quad 667 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Lediglich das Ergebnis $x_1{}^* = 0$ muß entsprechend der weiter oben getroffenen Festsetzung um 500 zu x_1 ergänzt werden. Die tatsächliche optimale Lösung lautet demnach

$$(500 \quad 1333 \quad 500 \quad 667 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Sie stimmt mit der Lösung nach Tabelle 7 völlig überein. Gleichzeitig befriedigt sie die einschränkenden Bedingungen, wie leicht gezeigt werden kann.

1. Bedingung: $2 \cdot 500 + 1333 + 1{,}2 \cdot 500 + 1{,}6 \cdot 667 = 4000$
2. Bedingung: $500 + 1333 + 500 + 667 = 3000$
3. Bedingung: $x_3 = 500$
4. Bedingung: $x_1 = 500$

Der durch die errechnete optimale Heizstoffmischung erzielbare Heizwert beträgt 15333 kcal (in 1000). Er ergibt sich für beide Lösungswege, und zwar aus Tabelle 7 direkt und aus Tabelle 8 durch Hinzufügen des durch $x_1 = 500$ gegebenen Heizwerts zum Optimalwert der Zielfunktion.
Das im Zusammenhang mit Tabelle 8 angeführte Verfahren läßt sich stets dann anwenden, wenn für einzelne Variable Beschränkungen nach unten vorliegen, und zwar sowohl bei der Maximum- als auch bei der Minimumaufgabe. Bei Begrenzungen einzelner Variablen nach oben sind derartige Vereinfachungen im allgemeinen nicht möglich. Selbst dann, wenn derartige Begrenzungen für mehrere Variablen auftreten, dürfte es einfacher sein, zunächst durch Überlegungen wie den im Zusammenhang mit Tabelle 8 durchgeführten eine Reduzierung der Zahl der einschränkenden Bedingungen vorzunehmen und damit die Aufgabe auf die Normalform der Maximumaufgabe zurückzuführen.
Schließlich sei noch eine Bemerkung zur Aufhebung der Nichtnegativitätsbedingung gemacht. Sie tritt ein, wenn bei einer Aufgabe für eine oder mehrere bzw. alle Variablen auch negative Werte zugelassen werden. So könnte es etwa sein, daß die Variable x_1 in der Lösung negative Werte annehmen darf. Da die Normalform der linearen Optimierung die Forderung enthält, daß die Variablen keine negativen Werte annehmen, muß der geschilderte Fall mathematisch so dargestellt werden, daß die Nichtnegativitätsbedingung nicht verletzt wird. Die Lösung besteht darin, daß für die Variable x_1 der Ansatz

$$x_1 = y_1 - y_2$$

gewählt wird. Im mathematischen Modell wird x_1 durch diese Differenz ersetzt. Für y_1 und y_2 gilt wieder die Nichtnegativitätsbedingung. In der Lösung sind dann drei Fälle möglich:

1. $y_1 < y_2$

In diesem Falle ist die Differenz negativ, d. h., die Variable x_1 nimmt einen negativen Wert an.

2. $y_1 = y_2$

In diesem Falle besitzt die Variable in der Lösung den Wert Null.

3. $y_1 < y_2$

In diesem Falle besitzt die Variable x_1 in der Lösung einen positiven Wert.

Der angegebene Ansatz kann generell verwendet werden, wenn Variable auch negative Werte annehmen dürfen. Er gestattet es, den Wertebereich dieser Variablen auszudehnen, ohne die Nichtnegativitätsbedingung zu verletzen.

4.5. Aufgaben mit mehreren optimalen Lösungen

Wir haben festgestellt, daß eine lineare Optimierungsaufgabe (Maximumaufgabe) optimal gelöst ist, wenn die Zielfunktion keine positiven Koeffizienten mehr enthält. Mit anderen Worten: Die Nichtbasisvariablen in der optimalen Lösung müssen negative Koeffizienten in der Zielfunktion aufweisen. Daraus wird deutlich, daß eine Einbeziehung dieser Variablen in die Basis und die Bestimmung der damit zusammenhängenden Basislösung zu einer Verringerung des Wertes der Zielfunktion und somit zu einer Verschlechterung des Programms führen würde. Der Zielfunktionskoeffizient der Basisvariablen beträgt Null.
Nun kann es eintreten, daß eine optimale Lösung errechnet wird, bei der es Nichtbasisvariablen gibt, deren Koeffizient in der Zielfunktion gleich Null ist. Im Gegensatz zu den Nichtbasisvariablen mit negativen Koeffizienten, deren Einbeziehung in die Basis eine Verschlechterung des Programms nach sich ziehen würde, können Nichtbasisvariable, deren Koeffizient in der Zielfunktion Null beträgt, in die Basis aufgenommen werden, ohne daß dadurch der Wert der Zielfunktion verändert wird. Die Lösung bleibt also optimal. Aufgaben dieser Art besitzen mehrere optimale Lösungen. Sie gestatten, wie auch diejenigen optimalen Lösungen, die innerhalb des Intervalls eines bestimmten Parameters optimal sind, einen gewissen Spielraum im Rahmen der Optimalität.
In Tabelle 9 ist eine optimale Lösung angegeben, die aus angenommenen Daten zusammengestellt wurde. Ihre Basis enthält die zwei echten Variablen

Tabelle 9. Beispiel für eine lineare Optimierungsaufgabe mit zwei optimalen Lösungen

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
BV	1000	0	0	0	0	-2	
x_1	100	1	0	0	-2	-1	—
x_2	20	0	1	0	1	0	20
$\leftarrow x_3$	35	0	0	1	$\boxed{2}$	-2	17,5
	1000	0	0	0	0	-2	
x_1	135	1	0	1	0	-3	
x_2	2,5	0	1	$-0,5$	0	1	
$\rightarrow x_4$	17,5	0	0	0,5	1	-1	

x_1 und x_2 mit den Werten

$$x_1 = 100 \text{ und}$$
$$x_2 = 20 \text{ und die Schlupfvariable } x_3 \text{ mit dem Wert}$$
$$x_3 = 35.$$

Der Koeffizient der Nichtbasisvariablen x_4 in der Zielfunktion beträgt Null. Würde diese Nichtbasisvariable in die Basis aufgenommen, so würde sich dadurch der Wert der Zielfunktion nicht verändern. Dieser Schritt ist im zweiten Teil der Tabelle 9 durchgeführt. Er ergibt eine weitere optimale Lösung, die aus den beiden echten Variablen x_1 und x_2 mit den Werten

$$x_1 = 135 \quad \text{und}$$
$$x_2 = 2{,}5 \text{ und der Schlupfvariablen } x_4 \text{ mit dem Wert}$$
$$x_4 = 17{,}5 \text{ besteht.}$$

Offenbar unterscheiden sich diese beiden Programme wesentlich voneinander. Wenn etwa die echten Variablen den Produktionsumfang zweier verschiedener Erzeugnisse angeben und die Schlupfvariablen auf nichtausgenutzte Kapazitäten hinweisen, so stehen uns nunmehr zwei Programme zur Verfügung, die hinsichtlich des Optimalkriteriums die gleiche Güte besitzen, in ihren technologischen und ökonomischen Forderungen aber wesentlich voneinander abweichen. Abgesehen davon, daß man eine Kombination der beiden optimalen Lösungen verwirklichen könnte, wäre es auch möglich, die Entscheidung für eine der beiden Möglichkeiten etwa von der vorliegenden Auftragslage, von den leichter verfügbaren Materialien u. ä.

abhängig zu machen. Da in beiden Programmen unterschiedliche Kapazitäten nicht ausgenutzt werden, kann man sich auch für diejenige Lösung entscheiden, bei der die auftretende Kapazitätsminderausnutzung den geringeren ökonomischen Verlust nach sich zieht oder bei der die verbleibenden Kapazitäten mit größerem Erfolg für die Herstellung oder Bearbeitung anderer Erzeugnisse genutzt werden können. So eröffnet die Existenz zweier oder mehrerer optimaler Lösungen die Möglichkeit, weitere und im Modell nicht erfaßte Kriterien zu beachten.
Natürlich bezieht sich der genannte Fall nicht nur auf Beispiele der Art von Tabelle 9, in der sich die Basen der beiden optimalen Lösungen dadurch unterscheiden, daß die darin enthaltenen Schlupfvariablen ausgetauscht werden. Wenn beispielsweise mehrere echte Variable zur Verfügung stehen, die jedoch nicht alle in die optimale Lösung eingehen, weil die Zahl der einschränkenden Bedingungen geringer ist als die Zahl der echten Variablen, so können sich zwei optimale Lösungen auch hinsichtlich der echten Variablen unterscheiden, die in den Basen der optimalen Lösungen enthalten sind.
In Tabelle 9 haben wir zwei verschiedene optimale Lösungen gefunden. Genauer sollten wir sagen, daß zwei optimale Tabellen vorliegen. Aus den in ihnen enthaltenen beiden optimalen Lösungen lassen sich nämlich, wie Krekó [4, S. 53] zeigt, weitere optimale Lösungen herstellen. Dazu ist es erforderlich, die vorhandenen optimalen Lösungen in geeigneter Weise zu kombinieren. So können wir durch die Einführung sog. *Verteilungskoeffizienten* aus ursprünglichen optimalen Lösungen nunmehr zusammengesetzte optimale Lösungen herstellen. Von den Verteilungskoeffizienten wird lediglich gefordert, daß ihre Summe 1 oder 100 Prozent beträgt. Nachfolgend stellen wir aus den beiden optimalen Lösungen der Tabelle 9 eine weitere optimale Lösung zusammen. Die beiden Programme bzw. Lösungen sollen je zur Hälfte an dem zusammengesetzten Programm beteiligt sein. Damit betragen beide Verteilungskoeffizienten 0,5 oder 50 Prozent. Die beiden optimalen Ausgangslösungen sind

$$\begin{array}{rlllll} \text{I)} & (100 & 20 & 35 & 0 & 0) \\ \text{II)} & (135 & 2{,}5 & 0 & 17{,}5 & 0). \end{array}$$

Die Werte der Variablen in dem zusammengesetzten optimalen Programm ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 135 = 117{,}5 \\ x_2 &= 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}5 \cdot 2{,}5 = 11{,}25 \\ x_3 &= 0{,}5 \cdot 35 + 0{,}5 \cdot 0 = 17{,}5 \\ x_4 &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 17{,}5 = 8{,}75 \\ x_5 &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Bei der Wahl der Verteilungskoeffizienten können weitere ökonomische Gesichtspunkte berücksichtigt werden, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden soll. Es soll lediglich ein weiteres Beispiel angeführt werden, bei dem die Verteilungskoeffizienten wesentlich von den oben angewendeten abweichen. Sie sollen so festgelegt werden, daß die erste optimale Lösung zu 90 Prozent und die zweite optimale Lösung zu 10 Prozent an der zusammengesetzten optimalen Lösung beteiligt ist. Die Verteilungskoeffizienten sind somit 0,9 und 0,1. Die zusammengesetzte Lösung lautet dann:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}9 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 135 &&= 103{,}5\\
x_2 &= 0{,}9 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 2{,}5 &&= 18{,}25\\
x_3 &= 0{,}9 \cdot 35 + 0{,}1 \cdot 0 &&= 31{,}5\\
x_4 &= 0{,}9 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 17{,}5 &&= 1{,}75\\
x_5 &= 0{,}9 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 0 &&= 0
\end{aligned}$$

In beiden Fällen beläuft sich der Wert der Zielfunktion nach wie vor auf 1000, nämlich im ersten Falle auf $0{,}5 \cdot 1000 + 0{,}5 \cdot 1000 = 1000$ und im zweiten Falle auf $0{,}9 \cdot 1000 + 0{,}1 \cdot 1000 = 1000$. Da praktisch beliebig viele Verteilungskoeffizienten festgelegt werden können, gibt es, sofern wenigstens zwei optimale Tabellen vorliegen, auch beliebig viele optimale Lösungen. Für die praktische Anwendung werden sicher nur einige dieser optimalen Lösungen von Bedeutung sein.

Um eine zweite optimale Lösung zu bestimmen, genügt es allerdings nicht, daß die optimale Tabelle eine Nichtbasisvariable enthält, deren Koeffizient in der Zielfunktion gleich Null ist. Es ist außerdem erforderlich, daß auch unter den Koeffizienten dieser Nichtbasisvariablen in den einschränkenden Bedingungen wenigstens einer mit positivem Wert vorhanden ist. Wenn diese Koeffizienten alle negative Werte besitzen oder gleich Null sind, kann die zweite optimale Lösung nicht bestimmt werden.

4.6. Einschränkende Bedingungen in Form von Gleichungen

Mitunter treten in den einschränkenden Bedingungen linearer Optimierungsaufgaben anstelle der üblicherweise anzutreffenden Ungleichungen Gleichungen auf. Es handelt sich dann um die modifizierte Normalaufgabe der linearen Optimierung. Ihre Lösung erfordert besondere Maßnahmen, um zu sichern, daß die Gleichungen durch die optimale Lösung befriedigt werden. Dafür bieten sich verschiedene Möglichkeiten an.

Erstens besteht die Möglichkeit, die Gleichung einer einschränkenden Bedingung durch eine künstliche Variable zu ergänzen. So wäre etwa die Gleichung

$$2x_1 + x_2 + 0{,}5\,x_3 = 150$$

durch die künstliche Variable k_1 zu

$$2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + k_1 = 150$$

zu ergänzen. Die künstlichen Variablen der als Gleichungen gegebenen einschränkenden Bedingungen werden wie die Schlupfvariablen der als Ungleichungen vorliegenden einschränkenden Bedingungen in die Basis der ersten Basislösung aufgenommen. Damit kann wieder eine erste Basislösung bestimmt werden, deren Basis keine echten Variablen, sondern nur Schlupf- und künstliche Variable enthält. In der optimalen Lösung müssen die künstlichen Variablen den Wert Null annehmen, weil sonst die Gleichungen der einschränkenden Bedingungen verletzt werden. Im Falle der Maximumaufgabe erhalten deshalb die künstlichen Variablen in der Zielfunktion die Bewertung (den Koeffizienten) Null. Nach diesem Vorgehen wurde zum Beispiel eine Aufgabe im Abschnitt 4.4 gelöst. Im Falle der Minimumaufgabe erhalten die künstlichen Variablen sehr große Werte M als Koeffizienten der Zielfunktion. Damit wird wieder erreicht, daß diese künstlichen Variablen in der optimalen Lösung den Wert Null haben.
Ein Spezialfall der modifizierten Normalaufgabe legt beim sog. Transportproblem vor (vgl. Abschnitt 5.3.). Hier besitzen im Normalfall alle einschränkenden Bedingungen die Form von Gleichungen. Trotzdem ist die Aufgabe relativ leicht lösbar, weil das Minimum der Zielfunktion angestrebt werden muß. Indem man den künstlichen Variablen in der Zielfunktion Koeffizienten mit sehr großen Werten M zuweist, wird gesichert, daß diese Variablen in der Basis der optimalen Lösung nicht enthalten sind.
Die Einführung künstlicher Variablen stellt nur eine von mehreren Möglichkeiten dar, um lineare Optimierungsaufgaben zu lösen, die einschränkende Bedingungen in Form von Gleichungen enthalten. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, jede auftretende Gleichung durch zwei Ungleichungen zu ersetzen. Die weiter oben angegebene Gleichung wäre dann durch

$$2x_1 + x_2 + 0{,}5\,x_3 \leqq 150$$

und $$2x_1 + x_2 + 0{,}5\,x_3 \geqq 150$$

zu ersetzen. Dadurch können alle Gleichungen aus dem System der einschränkenden Bedingungen beseitigt werden.
Eine dritte Lösungsmöglichkeit für die genannte Aufgabe besteht darin, daß jede als Gleichung vorliegende einschränkende Bedingung nach einer Variablen aufgelöst wird und der dabei entstehende Ausdruck in allen Ungleichungen für diese Variable eingesetzt wird. Wir betrachten als Bei-

spiel das System einschränkender Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqq 10 \\ x_1 + 4x_2 &\leqq 5 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

mit der Zielfunktion

$$Z = 5x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

Aus der als Gleichung vorliegenden dritten einschränkenden Bedingung gewinnen wir

$$x_1 = 4 - x_2$$

und setzen dieses Ergebnis sowohl in die Zielfunktion als auch in die beiden übrigen einschränkenden Bedingungen ein. Dadurch ergibt sich

$$Z = 20 + 10x_2 \rightarrow \max$$

mit den einschränkenden Bedingungen

$$\begin{aligned} x_2 &\leqq 2 \\ 3x_2 &\leqq 1. \end{aligned}$$

Man sieht, daß von den beiden einschränkenden Bedingungen die zweite die erste Bedingung einschließt, so daß schließlich nur die zweite Bedingung maßgebend ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Nichtnegativitätsbedingung für die Variablen gilt.
Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich sofort zu $x_2 = \frac{1}{3}$, woraus weiter $x_1 = \frac{11}{3}$ folgt.

Krekó [5, S. 54ff.] löst die modifizierte Normalaufgabe durch die Einführung einer sekundären Zielfunktion. Die Koeffizienten der sekundären Zielfunktion sind jeweils die Summe der Koeffizienten der entsprechenden Variablen in denjenigen einschränkenden Bedingungen, die als Gleichungen vorliegen. Die Maximierung dieser sekundären Zielfunktion muß gerade jenen Wert ergeben, der die Summe der absoluten Glieder der als Gleichungen vorliegenden einschränkenden Bedingungen ist. Wenn dieser Wert bei der Maximierung der sekundären Zielfunktion nicht erreicht wird, existiert kein zulässiges Programm. Erreicht jedoch das Maximum der sekundären Zielfunktion gerade diesen Wert, so existiert wenigstens eine Lösung, die alle einschränkenden Bedingungen erfüllt. Nach der Feststellung dieser Tatsache kann das Maximum der ursprünglichen Zielfunktion bestimmt und somit die Aufgabe gelöst werden.

5. Das Transportproblem der linearen Optimierung

5.1. Allgemeine Kennzeichnung des Transportproblems

In der arbeitsteiligen Volkswirtschaft aller entwickelten Industrieländer liegen Entstehungsort und Verbrauchsort für die überwiegende Zahl der Güter räumlich auseinander. Es müssen Transporte durchgeführt werden, um die Güter zum Verbraucher zu bringen. Im Laufe der Entwicklung haben sich dabei Transportbeziehungen herausgebildet, die nicht in jedem Falle die günstigsten sind. Während in der kapitalistischen Wirtschaft die Bestrebungen der Transportbetriebe, durch umfangreiche Aufträge und hohe Transportleistungen auch hohe Profite zu erzielen, einer generellen Vereinfachung und Optimierung der Transportbeziehungen im Wege stehen, stellen die Transportleistungen in der einheitlich geplanten und gelenkten Volkswirtschaft der sozialistischen Länder einen Aufwandsfaktor dar, der im Interesse der gesamten Volkswirtschaft so niedrig wie möglich gesetzt werden muß. Die sozialistische Wirtschaft schafft nicht nur die besten Voraussetzungen der Transportoptimierung, sondern sie schließt diese als notwendigen Bestandteil ein.

Das Ziel der Transportoptimierung besteht darin, solche Transportbeziehungen zu schaffen, die den erforderlichen Austausch der Güter mit einem Minimum an Transportleistung gestatten. Werden bestehende Transportbeziehungen hinsichtlich ihrer Optimalität untersucht und erforderlichenfalls verbessert, so bedeutet das in der Regel eine Veränderung der zwischen Versendern und Empfängern bestehenden Zuordnung. Man kann auch sagen, daß die Verteilung der produzierten oder aufkommenden Güter neu festgelegt wird. Das setzt natürlich voraus, daß das Gut, dessen Verteilung optimiert werden soll, für alle in Frage kommenden Empfänger in gleichem Maße verwendbar ist. Man sagt, daß nur die Transporte für *austauschbare* oder *ersetzbare* Güter optimiert werden können. Dieses Problem äußert sich im Grunde vor der eigentlichen Optimierungsrechnung, nämlich dadurch, daß nur diejenigen Versender und Empfänger sorgfältig ausgewählt werden müssen, die innerhalb eines optimalen Transportplanes erfaßt werden können. Dabei wirken sich oft Qualitätsmerkmale der Güter aus, die bei oberflächlicher Betrachtung nicht beachtet werden. So ist es zum Beispiel bei der Optimierung von Kohletransporten durchaus nicht gleichgültig für die Empfänger, aus welchen Gruben die von ihnen bezogenen Kohlenmengen stammen. Sehr oft sind die technischen Einrichtungen etwa von Kraftwerken auf bestimmte Kohlequalitäten eingerichtet, die eben nicht von jeder Grube erreicht werden. Solche Spezialverbraucher sind von der eigentlichen Optimierung auszuschließen. Gleichzeitig muß man jedoch beachten, daß der Nutzen einer Transportoptimierung um so größer ist, je größere Mengen Transportgut, je mehr Versender und je mehr Empfänger in die Optimierung einbezogen werden. Deshalb ist es notwendig, bei der Festlegung von Spezialverbrauchern äußerste Sorgfalt walten zu lassen.

Es dürfte damit ersichtlich geworden sein, daß die Transportoptimierung zur Bestimmung von optimalen Transportbeziehungen für Massengüter eingesetzt wird. Obwohl es sich hierbei um eine relativ geringe Anzahl verschiedener Güter handelt, nehmen diese jedoch den überwiegenden Anteil des Transportraumes in Anspruch. Ihre Optimierung verspricht großen volkswirtschaftlichen Nutzen.

Zu den optimierungswürdigen Massengütern sind zum Beispiel zu rechnen: Kohle verschiedener Sorten, Kalisalze, Baustoffe (Zement, Ziegelsteine, Kies), Nutzholz, landwirtschaftliche Produkte (Getreide, Kartoffeln, Zuckerrüben), in größeren Mengen transportierte Lebensmittel (Mehl, Zucker) u. ä. In dieser Hinsicht sind bereits praktische Erfolge erzielt worden, die einen erheblichen Rückgang der erforderlichen Transportleistungen nachzuweisen vermochten (vgl. z. B. HOFMANN/SCHREITER/VOGEL [6], FINDEISEN/RICHTER [7]). Die Herstellung optimaler Lieferbeziehungen mit Hilfe der Transportoptimierung ist in erster Linie eine Aufgabe der verladenden Wirtschaft. Transportoptimierungen führen zu verringerten Transportleistungen und somit auch zu verringerten Transportkosten für die Versender. Der Name „Transportoptimierung" darf also nicht so verstanden werden, als ob es sich hierbei um ein Problem des Transportwesens als Wirtschaftszweig handeln würde. Er besagt lediglich, daß es sich um die Optimierung von Transportverbindungen handelt. Große Aufgaben im Rahmen der Transportoptimierung erwachsen den zentralen Wirtschaftsleitungen, die die Verteilung von an verschiedenen Orten aufkommenden Gütern gleicher Art zu regeln haben. Das betrifft sowohl Ministerien als auch Vereinigungen Volkseigener Betriebe. Selbst dann, wenn ein Betrieb aus mehreren örtlich getrennten Betriebsteilen besteht, die ein austauschbares Gut herstellen, ist die optimale Verteilung dieser Güter auf die Gesamtheit der Empfänger von Nutzen.

Natürlich führt die Transportoptimierung unter sozialistischen Wirtschaftsverhältnissen auch zu Vorteilen für die Transportbetriebe selbst. Da in der Regel durch die Transportoptimierung die Zersplitterung der Transportbeziehungen beseitigt und eine Konzentration auf wenige und stärker belastete Transportbeziehungen erzielt wird, können die Transportbetriebe die Effektivität ihrer Arbeit erhöhen. Auch die Leitung des Transportprozesses wird konzentriert und dadurch verbessert. Die Auslastung der Transportmittel kann erhöht werden. Darüber hinaus gibt es auch innerhalb der Transportbetriebe Aufgaben betrieblicher Art, die mit Hilfe der Transportoptimierung besseren Lösungen zugeführt werden können. Dazu gehört beispielsweise der Austausch der Leerwagen bei der Eisenbahn (Leerwagenregulierung). Auch die Einsatzplanung der Kraftfahrzeuge eines Betriebes, die von verschiedenen Garagen aus zu verschiedenen Beladestellen fahren sollen, wird durch die Transportoptimierung verbessert. Zu nennen wären weiter der optimale Einsatz unterschiedlicher Flugzeuge auf verschiedenen Linien eines Netzes, die optimale Befrachtung von Seeschiffen usf. Da über diese Fragen Spezialliteratur wie z. B. von KADLEC/VODÁČEK [8] vorliegt, sollen nachfolgend vorwiegend die allgemeine volkswirtschaftliche Fragen berührenden Seiten des Transportproblems behandelt werden.

5.2. Mathematisches Modell des Transportproblems

Unter *Transportproblem* fassen wir eine bestimmte Klasse von Aufgaben der linearen Optimierung zusammen, die wie folgt charakterisiert werden können:

> In m verschiedenen Orten A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ kommt irgendein austauschbares Gut, Transportmittel u. ä. in den Mengen a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ auf, das in den n Orten B_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ in den Mengen b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ benötigt wird. Der Transportaufwand je Mengeneinheit des Transportgutes zwischen A_i und B_j ist durch die Aufwands- oder Bewertungszahlen c_{ij} gegeben. Die Transportmengen x_{ij} sind so zu bestimmen, daß der mit der Verwirklichung des optimalen Transportplanes verbundene Gesamttransportaufwand zum Minimum wird. Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf stimmen überein. Durch den Transportplan soll das Gesamtaufkommen ausgeschöpft werden. Der Gesamtbedarf ist zu befriedigen.

Wir betrachten zunächst ein sehr einfaches Beispiel. Es besteht aus lediglich zwei Aufkommens- und drei Bedarfsorten. Das Aufkommen beträgt

im Aufkommensort A_1:	$a_1 =$	120 Mengeneinheiten
im Aufkommensort A_2:	$a_2 =$	80 Mengeneinheiten
Gesamtaufkommen		200 Mengeneinheiten.

Der bei den drei Bedarfsorten zu befriedigende Bedarf beläuft sich auf

im Bedarfsort B_1:	$b_1 =$	10 Mengeneinheiten
im Bedarfsort B_2:	$b_2 =$	120 Mengeneinheiten
im Bedarfsort B_3:	$b_3 =$	70 Mengeneinheiten
Gesamtbedarf		200 Mengeneinheiten.

Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf stimmen demnach voraussetzungsgemäß überein. Die mit dem Transport einer Mengeneinheit verbundenen Transportaufwendungen werden durch die Aufwands- oder Bewertungszahlen c_{ij} ausgedrückt, die in diesem Falle als Entfernungen (in Kilometern) vorliegen. Sie lauten

$$c_{11} = 5 \quad c_{12} = 12 \quad c_{13} = 7$$
$$c_{21} = 18 \quad c_{22} = 7 \quad c_{23} = 14.$$

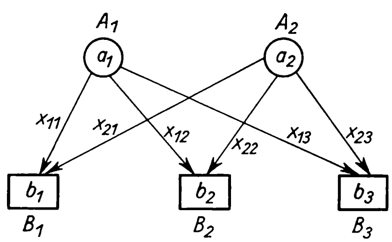

Bild 10. Prinzipskizze eines Transportproblems

Das mathematische Modell der Aufgabe kann nunmehr an Hand folgender Festlegungen getroffen werden:

1. Der Gesamttransportaufwand ist zu minimieren,
2. das Aufkommen sämtlicher Aufkommensorte ist auszuschöpfen,
3. der Bedarf sämtlicher Bedarfsorte ist zu befriedigen;
4. es dürfen keine negativen Transportmengen auftreten (diese würden einen gegengerichteten Transport anzeigen).

Aus diesen Festlegungen ergibt sich folgendes mathematische Modell:

1. Zielfunktion

$$Z = 5x_{11} + 12x_{12} + 7x_{13} + 18x_{21} + 7x_{22} + 14x_{23} \to \min.$$

2. Einschränkende Bedingungen

a) bezüglich des Aufkommens

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \text{ (Gesamtaufkommen von } A_1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80 \text{ (Gesamtaufkommen von } A_2)$$

b) bezüglich des Bedarfs

$$x_{11} + x_{21} = 10 \text{ (Gesamtbedarf von } B_1\text{)}$$
$$x_{12} + x_{22} = 120 \text{ (Gesamtbedarf von } B_2\text{)}$$
$$x_{13} + x_{23} = 70 \text{ (Gesamtbedarf von } B_3\text{)}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_{11} \geqq 0;\ x_{12} \geqq 0;\ x_{13} \geqq 0;\ x_{21} \geqq 0;\ x_{22} \geqq 0;\ x_{23} \geqq 0.$$

Wegen der Übereinstimmung von Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf muß schließlich

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$$

gelten.

Wir können bereits feststellen, daß es sich beim Transportproblem grundsätzlich um eine Minimumaufgabe der linearen Optimierung handelt. Weiterhin wird ersichtlich, daß im einfachsten Fall des Transportproblems alle einschränkenden Bedingungen in Form von Gleichungen vorliegen. Nachdem das mathematische Modell für das eingeführte Beispiel aufgestellt wurde, soll nun das allgemeine mathematische Modell des Transportproblems niedergeschrieben werden. Es lautet

1. Zielfunktion

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \to \min \tag{12a}$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} &= a_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} &= a_2 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + \cdots + x_{3n} &= a_3 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} &= a_m
\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{m1} &= b_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{m2} &= b_2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + \cdots + x_{m3} &= b_3 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} &= b_n
\end{aligned} \tag{12c}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_{ij} \geqq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n). \tag{12d}$$

Eine übersichtlichere Darstellung ergibt sich durch Verwendung des Summenzeichens. Damit wird die Zielfunktion nach (12a) zu

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Die einschränkenden Bedingungen nach (12b) lauten

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i = 1, 2, \ldots, m),$$

und diejenigen nach (12c)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Für die Forderung der Übereinstimmung von Aufkommen und Bedarf schreiben wir dann

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Es ist bemerkenswert, daß die Koeffizienten a_{ij} in den einschränkenden Bedingungen beim Transportproblem nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Lauten sie 0, dann ist die zugehörige Variable x_{ij} in der betreffenden Gleichung nicht enthalten; lauten sie 1, so tritt die zugehörige Variable in der betreffenden Gleichung auf. Durch diesen Umstand tritt eine wesentliche Vereinfachung im mathematischen Modell des Transportproblems gegenüber dem allgemeinen mathematischen Modell der linearen Optimierung ein. Weiterhin treten die Variablen x_{ij} in den einschränkenden Bedingungen zweimal auf.

Für die Lösung des Transportproblems kann die Simplexmethode eingesetzt werden. Daneben gibt es Spezialverfahren der linearen Optimierung, die speziell für die Lösung des Transportproblems geeignet sind. Diese Verfahren gestatten es, die Aufgaben der Transportoptimierung schneller als durch die Simplexmethode zu lösen. Andererseits gibt es Abweichungen vom normalen Transportproblem, die durch die Simplexmethode behandelt werden. Wir werden deshalb sowohl die Simplexmethode als auch Spezialmethoden besprechen.

5.3. Lösung des Transportproblems durch die Simplexmethode

Die Lösung des Transportproblems durch die Simplexmethode wird an Hand des im Abschnitt 5.2. eingeführten Beispiels demonstriert. Um eine geeignete Ausgangslösung zu finden, ist es zunächst erforderlich, die Gleichungen der einschränkenden Bedingungen durch die Einführung von künstlichen Variablen zu ergänzen. Die einschränkenden Bedingungen lauten dann:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + k_1 = 120$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + k_2 = 80$$

$$x_{11} + x_{21} + k_3 = 10$$

$$x_{12} + x_{22} + k_4 = 120$$

$$x_{13} + x_{23} + k_5 = 70.$$

Es lagen jedoch die einschränkenden Bedingungen bereits vor der Einführung der künstlichen Variablen als Gleichungen vor. Schlupfvariable werden deshalb nicht benötigt. Gleichzeitig ist unbedingt zu sichern, daß die künstlichen Variablen in der Lösung nicht mehr auftreten. Würde nämlich die optimale Lösung künstliche Variable in der Basis aufweisen, dann wären diese größer als Null. In diesem Falle wäre jedoch die Einhaltung der einschränkenden Bedingungen durch die echten Variablen nicht möglich und somit die Lösung nicht im vorgegebenen Rahmen erfolgt.
Das Nichtauftreten der künstlichen Variablen in der Basis der optimalen Lösung wird dadurch gesichert, daß diesen Variablen sehr hohe Aufwands- oder Bewertungszahlen M (Prohibitivwerte oder Prohibitivsätze, vgl. z. B. Kadlec/Vodáček [9, S. 97]) zugeordnet werden. Diese Prohibitivwerte sind höher als alle tatsächlichen Aufwandszahlen. Da jedoch das Minimum des Transportaufwands angestrebt wird, werden Variable mit derartig hohen Sätzen aus der Basis der optimalen Lösung ausscheiden.
Die durch (13) geforderte Gleichheit zwischen Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf ist zwar nicht unmittelbar Bestandteil der einschränkenden Bedingungen, wirkt sich auf diese aber aus. Sofern diese Forderung erfüllt ist, sind von den allgemein $m + n$ Gleichungen, aus denen die einschränkenden Bedingungen bestehen, nur $(m + n - 1)$ linear unabhängig voneinander. Eine dieser Gleichungen ergibt sich aus den $(m + n - 1)$ voneinander unabhängigen Gleichungen und der Tatsache, daß Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf übereinstimmen. Betrachten wir dahingehend unser Bei-

spiel. Die ersten beiden Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80 \\ \hline x_{11} + x_{12} + x_{13} &+ \\ + x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200 = a_1 + a_2 . \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist unter dem Strich angegeben. Diese Summe muß gleich sein der Summe der drei folgenden Gleichungen, die sich auf die Bedarfsorte beziehen. Von diesen beiden Gleichungen mögen nur die erste und die letzte bekannt sein, also

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 10 \\ x_{13} + x_{23} &= 70 \\ \hline x_{11} + x_{21} &+ \\ + x_{13} + x_{23} &= 80 = b_1 + b_3 . \end{aligned}$$

Ein Vergleich der beiden linksstehenden Summen ergibt, daß in der unteren Summe die Glieder x_{12} und x_{22} fehlen. Rechts stellen wir fest, daß zwischen beiden Summen eine Differenz von 120 besteht. Daraus ergibt sich die noch fehlende Gleichung der bezüglich der Bedarfsorte einschränkenden Bedingungen, nämlich

$$x_{12} + x_{22} = 120 .$$

Allgemein sagen wir, daß bei einem Transportproblem mit m Aufkommens- und n Bedarfsorten $(m + n)$ einschränkende Bedingungsgleichungen vorhanden sind, von denen $(m + n - 1)$ linear unabhängig voneinander sind. Da aber mit einem System aus $(m + n - 1)$ voneinander unabhängigen Gleichungen gerade $(m + n - 1)$ Variable bestimmt werden können (die übrigen müssen gleich Null gesetzt werden), besteht eine Lösung des Transportproblems, die zulässig ist, aus $(m + n - 1)$ Variablen mit Werten über Null. Da insgesamt $m \cdot n$ Variable im System der einschränkenden Bedingungen vorhanden sind, gibt es weitere $(m \cdot n - m - n + 1)$ Variable in der Lösung, die gleich Null sind.
Im gegebenen Beispiel sind zwei Aufkommensorte und drei Bedarfsorte gegeben. Demzufolge gibt es fünf Gleichungen in den einschränkenden Bedingungen, von denen vier linear voneinander unabhängig sind.
In einer zulässigen Lösung, zu der auch die optimale Lösung zählt, gibt es somit vier Variable, deren Werte größer als Null sind, und weitere zwei

Variable mit dem Wert Null. Bei Aufgaben mit mehr Aufkommens- und Bedarfsorten wächst die Zahl der Variablen mit dem Wert Null sehr schnell an. Schließlich gibt es noch Fälle, bei denen weniger als $(m + n - 1)$ Variable mit Werten über Null in der Lösung enthalten sind. Solche Lösungen heißen entartet oder degeneriert.

Von den gegebenen fünf Gleichungen benötigen wir für die Lösung der als Beispiel gegebenen Aufgabe also lediglich vier. Da es gleichgültig ist, welche Gleichung wir weglassen, soll der Einfachheit halber die letzte entfallen. Mit der Zielfunktion, die neben den sechs echten weitere vier künstliche Variable (vier Gleichungen werden für die Lösung benötigt) enthält, und den vier Gleichungen der einschränkenden Bedingungen wird nunmehr der erste Teil der Simplextabelle entsprechend Tabelle 10 aufgestellt.

Im Prinzip unterscheidet sich die Simplextabelle 10 nicht von den bisher behandelten Tabellen. Sie enthält lediglich im ersten Tabellenteil eine zusätzliche Zeile. Der Inhalt dieser Zeile ergibt sich wie folgt:

Bereits im Abschnitt 4.2. wurde darauf hingewiesen, daß die Minimierung der Zielfunktion

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \rightarrow \min$$

zum gleichen Ergebnis führt wie die Maximierung der Zielfunktion

$$Z = - c_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n \rightarrow \max.$$

Von dieser Tatsache gehen wir bei der Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe der Simplexmethode aus. Die Zielfunktion dieser Aufgabe lautet unter Einschluß der künstlichen Variablen $k_1 \cdots k_4$

$$\begin{aligned} Z = 5x_{11} + 12x_{12} + 7x_{13} + 18x_{21} + 7x_{22} + 14x_{23} + \\ + Mk_1 + Mk_2 + Mk_3 + Mk_4 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Wir verwenden zur Lösung die Zielfunktion

$$\begin{aligned} Z = - 5x_{11} - 12x_{12} - 7x_{13} - 18x_{21} - 7x_{22} - 14x_{23} - \\ - Mk_1 - Mk_2 - Mk_3 - Mk_4 \rightarrow \max, \end{aligned}$$

die maximiert werden soll. Die Koeffizienten dieser Zielfunktion stehen in der zweiten Zeile des ersten Tabellenteils der Tabelle 10, und zwar unter den echten und künstlichen Variablen. Das Gleichungssystem der einschränkenden Bedingungen wird nicht verändert.

Bekanntlich besitzen die jeweiligen Basisvariablen einer Lösung in der zugehörigen Zielfunktion die Koeffizienten Null. Wenn wir von der angegebenen Zielfunktion ausgehen und die erste Basis aus den künstlichen Variablen $k_1 \cdots k_4$ bilden, erhalten diese ersten vier Basisvariablen die Zielfunktions-

Tabelle 10. Lösung eines einfachen Transportproblems mit Hilfe der Simplexmethode

		x_{11} -5	x_{12} -12	x_{13} -7	x_{21} -18	x_{22} -7	x_{23} -14	k_1 $-M$	k_2 $-M$	k_3 $-M$	k_4 $-M$	
BV	$330M$	$2M$ -5	$2M$ -12	M -7	$2M$ -18	$2M$ -7	M -14	0	0	0	0	
k_1	120	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	120
k_2	80	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	—
$\leftarrow k_3$	10	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	10
k_4	120	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	—
	$310M$ $+50$	0	$2M$ -12	M -7	-13	$2M$ -7	M -14	0	0	$-2M$ $+5$	0	
k_1	110	0	1	1	-1	0	0	1	0	-1	0	—
$\leftarrow k_2$	80	0	0	0	1	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	80
$\rightarrow x_{11}$	10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
k_4	120	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	120
	$150M$ $+610$	0	$2M$ -12	M -7	$-2M$ -6	0	$-M$ -7	0	$-2M$ $+7$	$-2M$ $+5$	0	
k_1	110	0	1	1	-1	0	0	1	0	-1	0	110
$\rightarrow x_{22}$	80	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	—
x_{11}	10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow k_4$	40	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	40
	$70M$ $+1090$	0	0	M -7	-18	0	M -19	0	-5	$-2M$ $+5$	$-2M$ $+12$	
$\leftarrow k_1$	70	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1	1	-1	-1	70
x_{22}	80	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	—
x_{11}	10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
$\rightarrow x_{12}$	40	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	—
	$+1580$	0	0	0	-18	0	-12	$-M$ $+7$	$-M$ $+2$	$-M$ -2	$-M$ $+5$	
$\rightarrow x_{13}$	70	0	0	1	0	0	1	1	1	-1	-1	
x_{22}	80	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	
x_{11}	10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	
x_{12}	40	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	

koeffizienten $-M$. Um zu erreichen, daß diese Basisvariablen die Zielkoeffizienten Null erhalten, berechnen wir die Zielfunktionskoeffizienten zur ersten Lösung in Tabelle 10, die in der dritten Zeile dieser Tabelle stehen, nach folgendem Verfahren:
Für jede Variable werden die Koeffizienten dieser Variablen im System der einschränkenden Bedingungen mit den ursprünglichen Zielfunktionskoeffizienten der zu den einzelnen Zeilen gehörenden Basisvariablen multipliziert und die Produkte je Variable addiert. Dieser Schritt ist relativ einfach, weil in der Basis der ersten bzw. Ausgangslösung die künstlichen Variablen stehen, die in der ursprünglichen Zielfunktion (zweite Zeile) alle den Koeffizienten $-M$ besitzen. Für die Variable x_{11} gestaltet sich die Berechnung demnach wie folgt:

Basis-variable (1)	Koeff. d. Basisvar. (2)	Koeff. i. d. einschr. Bed. (3)	Produkt Sp. 2 × Sp. 3 (4)
k_1	$-M$	1	$-M$
k_2	$-M$	0	0
k_3	$-M$	1	$-M$
k_4	$-M$	0	0
		Summe	$-2M$

In entsprechender Weise werden für alle Variablen die genannten Summen berechnet. Diese Summen werden schließlich von den Koeffizienten der ursprünglichen Zielfunktion (zweite Zeile) subtrahiert und liefern dann die Zielfunktionskoeffizienten der ersten Lösung (dritte Zeile). Wiederum für die Variable x_{11} ergibt sich $-5-(-2M)=-5+2M=2M-5$ (vgl. dritte Zeile in Tabelle 10). Durch diese Berechnungsweise erhalten die Basisvariablen $k_1 \cdots k_4$ der ersten Lösung die Zielfunktionskoeffizienten Null, die in der dritten Zeile in den Spalten der künstlichen Variablen eingetragen sind. Die Aufgabe wird nunmehr ausgehend von der in der dritten Zeile stehenden Zielfunktion wie jede andere Maximumaufgabe gelöst. Zu beachten ist dabei, daß die Zielfunktion der ersten Lösung den Wert 330 M hat. Indem durch die schrittweise Verbesserung der Lösung die künstlichen Variablen in der Basis durch echte Variable ausgetauscht werden, wird dieser Wert schließlich bis auf Null reduziert, während der durch die echten Variablen bestimmte Wert der Zielfunktion auf 1580 (optimale Lösung) anwächst.
Am Rande sei darauf hingewiesen, daß die Berechnung, die notwendig wurde, um zu erreichen, daß die Basisvariablen der ersten Lösung die Zielfunktionskoeffizienten Null erhalten, implizit auch angewendet wird,

wenn die Schlupf- oder künstlichen Variablen der ersten Basis von Anfang an die Bewertung Null besitzen. Dann ist jedoch das Produkt aus den Koeffizienten der Basisvariablen und den Koeffizienten in den Spalten der Variablen stets gleich Null, wodurch auch die Summe der zu einer Variablen gehörenden Produkte Null ergibt. Wird diese Summe von den ursprünglichen Zielfunktionskoeffizienten subtrahiert, so ändern sich diese nicht. Besitzen also Schlupf- und künstliche Variable von Anfang an die Zielfunktionskoeffizienten Null, so können sie direkt in die erste Lösung übernommen werden.
Im fünften Teil der Tabelle 10 ergibt sich die optimale Lösung der gestellten Aufgabe zu

$$\begin{aligned} x_{11} &= 10 & x_{21} &= 0 \\ x_{12} &= 40 & x_{22} &= 80 \\ x_{13} &= 70 & x_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Liegen etwa die Transportmengen in Tonnen und die Koeffizienten der Zielfunktion als Entfernungen in Kilometer vor, so erfordert die Verwirklichung des optimalen Transportplanes eine Gesamttransportleistung von 1580 Tonnenkilometer (tkm).
Da die gelöste Aufgabe als Minimumaufgabe gestellt ist, besteht auch die Möglichkeit, sie als duale Maximumaufgabe zu lösen. Obwohl man im allgemeinen wegen der Möglichkeit, das Transportproblem mit einfachen Methoden zu lösen, diesen Weg nicht gehen wird, sei er zur Übung des Dualprinzips hier angeführt.

Die Koeffizientenmatrix der primalen Minimumaufgabe lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 70 \\ 5 & 12 & 7 & 18 & 7 & 14 & \text{min} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Koeffizientenmatrix der dualen Maximumaufgabe zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 120 & 80 & 10 & 120 & 70 & \text{max} \end{pmatrix}$$

Die einschränkenden Bedingungen der dualen Aufgabe werden durch Schlupfvariable zu Gleichungen ergänzt. Bei der Aufstellung des mathematischen Modells beachten wir, daß die echten Variablen der primalen Minimumaufgabe zu dualen Variablen der dualen Maximumaufgabe werden. Die Lösung der dualen Maximumaufgabe erfolgt in Tabelle 10a. Die optimale Lösung steht im letzten Tabellenteil, und zwar für die duale Aufgabe in den beiden linken Spalten und für die primale Aufgabe in der Zeile der Zielfunktion (Koeffizienten der dualen Variablen). Wir finden in

Tabelle 10a. Lösung der Aufgabe nach Tabelle 10 mit Hilfe der dualen Maximumaufgabe (Ausschnitt)

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
BV	0	120	80	10	120	70	0	0	0	0	0	0	
x_{11}	5	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	—
x_{12}	12	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	12
x_{13}	7	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	—
x_{21}	18	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	—
$\leftarrow x_{22}$	7	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0	7
x_{23}	14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	—
	−840	120	−40	10	0	70	0	0	0	0	−120	0	
x_{11}	5	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	5
$\leftarrow x_{12}$	5	$\boxed{1}$	−1	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	5
x_{13}	7	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	7
x_{21}	18	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	—
$\rightarrow u_4$	7	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	—
x_{23}	14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	—
………													
	−1580	0	0	0	0	0	−10	−40	−70	0	−80	0	
u_2	0	0	1	1	0	0	1	−1	0	0	1	0	
u_1	5	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	
u_5	2	0	0	−1	0	1	−1	0	1	0	0	0	
x_{21}	18	0	0	0	0	0	−1	1	0	1	−1	0	
u_4	7	0	0	−1	1	0	−1	1	0	0	0	0	
x_{23}	12	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	−1	1	

der Reihenfolge der ursprünglichen echten Variablen $x_{11} \cdots x_{23}$ die Werte 10, 40, 70, 0, 80 und 0.
Sowohl Tabelle 10 als auch Tabelle 10a machen deutlich, daß die Bestimmung der optimalen Lösung mit Hilfe der Simplexmethode relativ aufwendig ist. Wir werden deshalb im folgenden Abschnitt eine sehr oft angewendete einfachere Verteilungs- bzw. *Distributionsmethode* besprechen, die auf der Simplexmethode beruht und als deren Spezialfall ebenfalls zur exakten optimalen Lösung des Transportproblems führt. Neben dieser Methode der Potentiale (Krekó [11]) bzw. modifizierten Distributionsmethode (Kadlec/Vodáček [12]) — die Bezeichnungen sind unterschiedlich — gibt es eine Anzahl weiterer Verfahren, die zur Lösung des Transportproblems entwickelt worden sind. Diese Spezialmethoden des Transportproblems sind in der Fachliteratur beschrieben (Kadlec/Vodáček [13]).

5.4. Die modifizierte Distributionsmethode (MODI)

Bei dieser Methode ist es nicht erforderlich, eine zulässige erste Basislösung aus künstlichen Variablen zu bilden. Von den einschränkenden Bedingungen gehen nur die absoluten Glieder (die Aufkommens- und die Bedarfswerte) in das Rechenverfahren ein. Das Verfahren sei an einem Beispiel demonstriert, für das folgende Ausgangsdaten gegeben sind.

1. Drei Aufkommensorte mit den Aufkommensmengen

$$a_1 = 90;\ a_2 = 75;\ a_3 = 35.$$

2. Vier Bedarfsorte mit den Bedarfsmengen

$$b_1 = 50;\ b_2 = 50;\ b_3 = 85;\ b_4 = 15.$$

Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf betragen übereinstimmend je 200 Mengeneinheiten. Die Aufwands- oder Bewertungszahlen, die wieder als Entfernungen in Kilometer angesetzt werden sollen, sind in der Entfernungsmatrix nach Tabelle 11 zusammengefaßt.

Tabelle 11. Matrix der Entfernungen (Entfernungsmatrix) c_{ij} (in km)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3^x	15	6^o	4^o
A_2	1^{xo}	8	10	5
A_3	4	3^{xo}	6^o	10

5.4.1. Bestimmung der Ausgangslösung

Wenngleich bei der Distributionsmethode keine erste Basislösung aus künstlichen Variablen gebildet werden muß, so ist es doch erforderlich, eine zulässige Ausgangslösung zu bilden. Zulässig ist diese Ausgangslösung, wenn sie $(m + n - 1)$ Variable aufweist, deren Werte größer als Null sind, während alle übrigen Variablen den Wert Null besitzen. Zur Bestimmung der Ausgangslösung stehen wiederum verschiedene Verfahren zur Verfügung. Genannt seien die *Nordwest-Ecken-Regel*, die *Methode des doppelten Vorzugs* und die *Vogelsche Approximationsmethode* (VAM). Hier werden die beiden zuerst genannten Verfahren behandelt. Die VAM stellt zwar nur ein Näherungsverfahren dar, führt jedoch in einer großen Zahl von Fällen zumindest in unmittelbare Nähe des Optimums. Sie ist in der Spezialliteratur beschrieben (vgl. KADLEC/VODÁČEK [14]).

Tabelle 12. Ausgangslösung nach der Nordwest-Ecken-Regel

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	50	40	—	—	90
A_2	—	10	65	—	75
A_3	—	—	20	15	35
b_j	50	50	85	15	200

Nach der *Nordwest-Ecken-Regel* wird zunächst eine Tabelle angelegt, die Tabelle 12 entspricht. In dieser Tabelle trägt man zuerst nur die Zeilen- und Spaltensummen, d. h. die Aufkommenswerte und die Bedarfswerte ein. Anschließend werden die Felder im inneren Tabellenfeld, die die Verbindungen zwischen den Aufkommens- und Bedarfsorten repräsentieren, belegt. Die Belegung beginnt im linken oberen Tabellenfeld (*Nordwest-Ecke*) und schreitet unter Einhaltung der durch die Randzahlen gegebenen einschränkenden Bedingungen entlang der Hauptdiagonale der Tabelle zum rechten unteren Tabellenfeld fort. Im linken oberen Feld, dem Feld A_1B_1 oder kurz 1.1, können maximal 50 Mengeneinheiten untergebracht werden, da der Gesamtbedarf von B_1 (1. Spalte) gerade 50 Mengeneinheiten beträgt. Die verbleibenden 40 Mengeneinheiten aus dem Aufkommen in A_1 werden im Feld 1.2 untergebracht. Damit ist die Zeile A_1 ausgeschöpft. Da zur Deckung des Bedarfs in B_2 noch 10 Mengeneinheiten fehlen, wird das Feld 2.2 mit diesen 10 Einheiten belegt. Die restlichen 65 Mengeneinheiten des Aufkommens in A_2 werden dem Feld 2.3 zugeordnet. A_2 ist damit hinsichtlich seines Aufkommens ebenfalls ausgeschöpft. Um den Bedarf in B_3 zu decken, muß weiterhin das Feld 3.3 mit 20 Einheiten belegt werden. Das

restliche Aufkommen aus A_3 im Umfang von 15 Mengeneinheiten deckt den Bedarf von B_4 und wird dem Feld 3.4 zugeordnet. Damit ist das Gesamtaufkommen ausgeschöpft, während der Gesamtbedarf befriedigt wurde. Die Lösung enthält sechs belegte Felder, d. h. sechs Variablen, deren Werte größer als Null sind. Sie ist somit zulässig.
Die auf diese Weise gefundene Ausgangslösung wird nur in seltenen Fällen günstig im Hinblick auf eine optimale Lösung sein. Die Belegung der Felder nimmt keinerlei Rücksicht auf die Bewertungszahlen c_{ij}, die den Aufwand angeben, der mit der Belegung eines Feldes durch eine Mengeneinheit entsteht. Damit steht dem außerordentlich einfachen Verfahren, nach dem die Ausgangslösung gefunden wird, der Nachteil entgegen, daß diese Lösung meist weit entfernt ist von der optimalen Lösung. Das hat zur Folge, daß noch eine große Zahl von Verbesserungsschritten erforderlich ist, ehe die optimale Lösung vorliegt.
Bei der Bestimmung einer Ausgangslösung nach der *Methode des doppelten Vorzugs* wird gerade der umgekehrte Weg gegangen. Hier entscheidet die Größe der Bewertungszahlen darüber, welche Felder in der Ausgangslösung belegt werden sollen. Dazu ist es erforderlich, zunächst die vorteilhaften Felder zu kennzeichnen. Das ist in Tabelle 11 geschehen. Dort sind in jeder Zeile und in jeder Spalte die Felder mit der jeweils niedrigsten Bewertungszahl bestimmt worden. Die in den Zeilen niedrigsten Bewertungszahlen wurden durch ein hochgesetztes „x" gekennzeichnet, während die in den Spalten niedrigsten Bewertungszahlen durch ein hochgesetztes „o" hervorgehoben wurden. Damit entstehen drei Kategorien von Feldern:

1. Felder, die sowohl in der Zeile als auch in der Spalte, der sie angehören, die niedrigste Bewertungszahl besitzen: das sind die Felder mit dem *doppelten Vorzug*;
2. Felder, die in der Zeile, in der sie stehen, die niedrigste Bewertungszahl besitzen (Felder mit einfachem Vorzug);
3. Felder, die in der Spalte, in der sie stehen, die niedrigste Bewertungszahl besitzen (Felder mit einfachem Vorzug).

Zunächst werden die Felder mit doppeltem Vorzug unter Einhaltung der einschränkenden Bedingungen maximal belegt. Entsprechend der Größe der Bewertungszahlen der doppelt bevorzugten Felder wird zunächst das Feld 2.1 und anschließend das Feld 3.2 belegt. Anschließend werden Felder einfachen Vorzugs und — sofern das zur Einhaltung der einschränkenden Bedingungen noch erforderlich ist — sonstige Felder belegt. In der Regel können nicht alle bevorzugten Felder belegt werden, weil die Belegung des einen Feldes die eines anderen Feldes in der gleichen Zeile oder Spalte ausschließt. Das Ergebnis dieser Belegung ist die Ausgangslösung nach Tabelle 13. Man kann bereits an Hand des Vorgehens feststellen, daß die nach der Methode des doppelten Vorzugs gefundene Ausgangslösung wesentlich besser ist als die nach der *Nordwest-Ecken-Regel.* Trotzdem hat die *Nordwest-Ecken-Regel* Vorteile, die insbesondere in der außerordentlich einfachen Verfahrensweise liegen. Wenn in einer Transportoptimierungsaufgabe eine Tabelle der Bewertungszahlen vorliegt, bei der in der Nähe der Hauptdiagonale vorwiegend vorteilhafte Felder liegen, kann die *Nordwest-Ecken-Regel* vorgezogen werden.

Tabelle 13. Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	—	—	85	5	90
A_2	50	15	—	10	75
A_3	—	35	—	—	35
b_j	50	50	85	15	200

Wir vergleichen die beiden Ausgangslösungen an Hand des Wertes der zugehörigen Zielfunktionen. Der jeweilige Zielfunktionswert ist die Summe der Produkte, die aus den Belegungswerten x_{ij} der besetzten Felder und den zugehörigen Bewertungszahlen c_{ij} gebildet werden. Wir erhalten

1. $Z = 1750$ Einheiten (z. B. Tonnenkilometer) für die Ausgangslösung nach der *Nordwest-Ecken-Regel,* und
2. $Z = 855$ Einheiten für die Ausgangslösung nach der *Methode des doppelten Vorzugs.*

Damit zeigt sich deutlich, in welchem Umfang die Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs besser ist als die nach der *Nordwest-Ecken-Regel.* Wenn wir trotzdem die weiteren Berechnungen auf der Ausgangslösung nach der *Nordwest-Ecken-Regel* aufbauen, dann deshalb, weil die Lösung nach der Methode des doppelten Vorzugs bereits die optimale Lösung ist. Das ist nicht immer so, sondern tritt nur hin und wieder ein. In diesem Falle jedoch ist eine weitere Verbesserung der Lösung nicht möglich. Um also das modifizierte Distributionsverfahren demonstrieren zu können, müssen wir von einer nichtoptimalen Ausgangslösung ausgehen. Eine solche Lösung ist durch die *Nordwest-Ecken-Regel* gefunden worden.

5.4.2. Prüfung der Optimalität der Ausgangslösung (sowie jeder weiteren Lösung) und Übergang zu einer verbesserten Lösung

Nachdem die Ausgangslösung vorliegt, ist es erforderlich zu prüfen, ob diese Ausgangslösung bereits optimal ist. Ist sie noch nicht optimal, so ist eine neue Lösung zu bilden, die besser als die Ausgangslösung ist. Die

gleichen Operationen werden bei jeder Lösung vorgenommen, um deren Optimalität zu prüfen.
Die Prüfung der Ausgangslösung nach der *Nordwest-Ecken-Regel* erfolgt in Tabelle 14. Diese Tabelle stellt eine erweiterte Tabelle der Ausgangslösung (Tabelle 12) dar. In Tabelle 12 sind zusätzlich die Werte der Tabelle 11 eingetragen worden. Damit enthält Tabelle 14 sowohl die Besetzungszahlen x_{ij} als auch — in der rechten oberen Ecke jedes Feldes — die Bewertungszahlen c_{ij}. Weiterhin sind in Tabelle 14 die *Randzahlen* oder *Potentiale* u_i für die Zeilen und v_j für die Spalten eingetragen. Diese Potentiale werden benötigt, um zu prüfen, ob eine vorliegende Lösung noch verbessert werden kann. Zu jedem Feld der Tabelle 14 gehören zwei Potentiale, nämlich dasjenige der Zeile, in der das Feld steht, und dasjenige der Spalte, zu der das Feld gehört. Zum Beispiel gehören

zum Feld 1.1 die Potentiale u_1 und v_1,

zum Feld 1.2 die Potentiale u_1 und v_2,

. . . .

zum Feld 2.3 die Potentiale u_2 und v_3 usf.

Aus den Potentialen werden die *fiktiven Bewertungszahlen* nach der Beziehung

$$c'_{ij} = u_i + v_j \tag{14}$$

gebildet. So gilt beispielsweise für

das Feld 1.1 $c'_{11} = u_1 + v_1$

das Feld 1.2 $c'_{12} = u_1 + v_2$

. . . .

das Feld 2.3 $c'_{23} = u_2 + v_3$ usf.

Die Potentiale werden so festgelegt, daß für die besetzten Felder fiktive Bewertungszahl c'_{ij} und tatsächliche Bewertungszahl c_{ij} übereinstimmen, d. h.

$$c'_{ij} = c_{ij} \text{ (für besetzte Felder)} \tag{15}$$

gilt. Um also das Potential einer Zeile oder Spalte bestimmen zu können, muß bereits ein Potential einer Spalte oder Zeile bekannt sein und im Schnittpunkt derjenigen Zeile (Spalte), für die das Potential bestimmt werden soll, und derjenigen Spalte (Zeile), deren Potential bereits bekannt ist, ein besetztes Feld stehen. Demnach muß das erste Potential in irgendeiner Weise festgelegt werden. Da diese Festlegung freizügig erfolgen kann, wird im allgemeinen das erste Potential zu Null festgelegt, um die anschließenden Berechnungen zu vereinfachen. Weiterhin ist es zweckmäßig, das erste Potential für eine Zeile oder Spalte festzulegen, die möglichst viele besetzte Felder hat.

Tabelle 14. Prüfung der nach der Nordwest-Ecken-Regel gefundenen Ausgangslösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	3	15	17	21	
A_1	0	50 $\boxed{3}$	40 $\boxed{15}$ −	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ +	90
A_2	−7	$\boxed{1}$	10 $\boxed{8}$ +	65 $\boxed{10}$ −	$\boxed{5}$	75
A_3	−11	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	20 $\boxed{6}$ +	15 $\boxed{10}$ −	35
b_j		50	50	85	15	200

In der Tabelle 14 sind mehrere Zeilen und Spalten vorhanden, in denen zwei besetzte Felder stehen. Wir geben deshalb dem Potential der ersten Zeile den Wert Null und setzen

$$u_1 = 0.$$

Da in der ersten Zeile zwei besetzte Felder vorhanden sind, die zur ersten und zweiten Spalte gehören, können nunmehr die Potentiale dieser beiden Spalten bestimmt werden. Für die erste Spalte gehen wir von der Beziehung (15) aus und setzen bei gleichzeitiger Verwendung von (14)

$c_{11} = u_1 + v_1$, woraus sofort

$v_1 = c_{11} - u_1$ folgt. Sowohl $c_{11} = 3$ als auch $u_1 = 0$ sind bekannt. Damit ist das Potential der ersten Spalte

$$v_1 = 3 - 0 = 3.$$

Entsprechend ergibt sich das Potential der zweiten Spalte, ausgehend von

$c_{12} = u_1 + v_2$, über

$$v_2 = c_{12} - u_1$$

zu $\quad v_2 = 15 - 0 = 15.$

Vom Potential der zweiten Spalte aus bestimmen wir über das besetzte Feld 2.2 das Potential der zweiten Zeile. Hier folgt aus

$$c_{22} = u_2 + v_2 \quad \text{zunächst}$$

$$u_2 = c_{22} - v_2$$

und somit $u_2 = 8 - 15 = -7.$

Nunmehr besteht die Möglichkeit, von der zweiten Zeile ausgehend, über das besetzte Feld 2.3 das Potential der dritten Spalte zu bestimmen. Es wird

$$c_{23} = u_2 + v_3 \quad \text{gesetzt, woraus}$$

$$v_3 = c_{23} - u_2, \quad \text{also}$$

$$v_3 = 10 - (-7) = 17$$

folgt. Weiterhin bestimmen wir das Potential der dritten Zeile aus

$$c_{33} = u_3 + v_3. \quad \text{Es ist}$$

$$u_3 = c_{33} - v_3 \quad \text{und somit}$$

$$u_3 = 6 - 17 = -11.$$

Schließlich muß nur noch das Potential der vierten Spalte bestimmt werden. Dafür gehen wir von der dritten Zeile und dem besetzten Feld 3.4 aus. Es gilt

$$c_{34} = u_3 + v_4, \text{ d. h.}$$

$$v_4 = c_{34} - u_3.$$

Damit wird v_4 zu

$$v_4 = 10 - (-11) = 21$$

bestimmt.

Um die Potentiale zu bestimmen, wird praktisch ein Gleichungssystem gelöst. Wegen (14) und (15) gilt für die besetzten Felder

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Demnach ergibt sich für die besetzten Felder der Tabelle 12 das folgende Gleichungssystem:

1. $u_1 + v_1 = c_{11} = 3$
2. $u_1 + v_2 = c_{12} = 15$
3. $u_2 + v_2 = c_{22} = 8$
4. $u_2 + v_3 = c_{23} = 10$
5. $u_3 + v_3 = c_{33} = 6$
6. $u_3 + v_4 = c_{34} = 10.$

Das System besteht aus $(m + n - 1) = 6$ Gleichungen und sieben Unbekannten u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 und v_4. Um die Unbekannten zu bestimmen, legen wir zunächst

$$u_1 = 0$$

fest und erhalten für die übrigen Unbekannten folgende Werte:

1. $v_1 = 3 - 0 = +3$
2. $v_2 = 15 - 0 = +15$
3. $u_2 = 8 - 15 = -7$
4. $v_3 = 10 - (-7) = +17$
5. $u_3 = 6 - 17 = -11$
6. $v_4 = 10 - (-11) = +21$.

Damit sind eben die Potentiale gefunden.

Alle auf diese Weise bestimmten Potentiale sind in Tabelle 14 eingetragen. Voraussetzung dafür, daß die Potentiale auf diese Weise bestimmt werden können, ist das Vorliegen einer zulässigen Lösung, in der $(m + n - 1)$ Felder besetzt sind. In diesem Falle ist es möglich, vom Potential einer Zeile oder Spalte aus über die besetzten Felder die Potentiale aller weiteren Zeilen und Spalten zu bestimmen. Wie im Falle einer degenerierten Lösung zu verfahren ist, in der weniger als $(m + n - 1)$ Felder besetzt sind, wird später noch erläutert. Wenn das Verfahren zuerst möglicherweise umständlich anmutet, so kann doch gesagt sein, daß man bereits nach der Lösung weniger Aufgaben hinreichende Fertigkeiten besitzt, um die Berechnungen bei weniger umfangreichen Transportproblemen ohne weitere Hilfsmittel vorzunehmen. Bei großzahligen Bewertungszahlen empfiehlt sich der Gebrauch einer Tischrechenmaschine. Umfangreiche Aufgaben dagegen wird man zweckmäßigerweise auf einem elektronischen Digitalrechengerät lösen.

Nachdem die Potentiale sämtlicher Zeilen und Spalten der Tabelle 14 bestimmt sind, ist es möglich, für sämtliche Felder dieser Tabelle und somit der nach der *Nordwest-Ecken-Regel* bestimmten Ausgangslösung die fiktiven Bewertungszahlen c'_{ij} zu berechnen. Diese Berechnung wird im einzelnen vorgeführt:

Feld 1.1: $c'_{11} = u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3$
Feld 1.2: $c'_{12} = u_1 + v_2 = 0 + 15 = 15$
Feld 1.3: $c'_{13} = u_1 + v_3 = 0 + 17 = 17$
Feld 1.4: $c'_{14} = u_1 + v_4 = 0 + 21 = 21$

Feld 2.1: $c'_{21} = u_2 + v_1 = -7 + 3 = -4$
Feld 2.2: $c'_{22} = u_2 + v_2 = -7 + 15 = 8$
Feld 2.3: $c'_{23} = u_2 + v_3 = -7 + 17 = 10$
Feld 2.4: $c'_{24} = u_2 + v_4 = -7 + 21 = 14$

$$
\begin{array}{llr}
\text{Feld 3.1:} & c'_{31} = u_3 + v_1 = -11 + 3 = & -8 \\
\text{Feld 3.2:} & c'_{32} = u_3 + v_2 = -11 + 15 = & 4 \\
\text{Feld 3.3:} & c'_{33} = u_3 + v_3 = -11 + 17 = & 6 \\
\text{Feld 3.4:} & c'_{34} = u_3 + v_4 = -11 + 21 = & 10.
\end{array}
$$

Wenn die fiktiven Bewertungszahlen in der Ordnung zusammengestellt werden, in der die Felder, zu denen sie gehören, stehen, ergibt sich die Matrix der fiktiven Bewertungszahlen

$$
(c'_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 17 & 21 \\ -4 & 8 & 10 & 14 \\ -8 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}.
$$

Nunmehr besteht die Möglichkeit, die einzelnen Felder der Ausgangslösung dahingehend zu prüfen, ob ihre Belegung eine Verbesserung der bestehenden Lösung verspricht. Diese Prüfung bezieht sich natürlich nur auf die freien (bzw. leeren bzw. unbesetzten) Felder. Für die Prüfung der Besetzungswürdigkeit der Felder gelten folgende Beziehungen:

1. Die Besetzung eines Feldes verspricht eine Verbesserung der Lösung, wenn die fiktive Bewertungszahl größer ist als die tatsächliche Bewertungszahl, d. h., wenn gilt

$$c'_{ij} > c_{ij}$$

bzw.

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} < 0. \tag{16b}$$

(Die Differenz zwischen der tatsächlichen und der fiktiven Bewertungszahl ist negativ.)

2. Die Besetzung eines Feldes verändert die Lösung nicht, d. h., sie läßt den Wert der Zielfunktion unverändert, wenn die tatsächliche und die fiktive Bewertungszahl übereinstimmen. Es gilt dann

$$c'_{ij} = c_{ij} \tag{17a}$$

bzw.

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = 0. \tag{17b}$$

(Die Differenz zwischen der tatsächlichen und der fiktiven Bewertungszahl ist gleich Null.)

3. Die Bewertung eines Feldes führt zu einer Verschlechterung der Lösung bzw. zu einer Erhöhung des Wertes der Zielfunktion, wenn die fiktive

Bewertungszahl kleiner ist als die tatsächliche Bewertungszahl. Wir schreiben

$$c'_{ij} < c_{ij} \tag{18a}$$

bzw.

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} > 0. \tag{18b}$$

(Die Differenz zwischen der tatsächlichen und der fiktiven Bewertungszahl ist positiv.)

Die Beziehungen (17a) bzw. (17b) gelten vereinbarungsgemäß für die in einer Lösung besetzten Felder. Sie bilden die Grundlage für die Bestimmung der Potentiale u_i und v_j.

Durch die Differenzen Δc_{ij} beurteilt man nicht nur, in welcher Weise eine bestimmte Besetzung die vorliegende Lösung verändern würde (Verbesserung, Konstanz oder Verschlechterung der Lösung), sondern man bestimmt gleichzeitig das Ausmaß der Veränderung der Zielfunktion. Um den Betrag von Δc_{ij} verändert sich der Wert der Zielfunktion, wenn das Feld $i \cdot j$ mit einer Mengeneinheit belegt wird. Beträgt die Belegung x_{ij} Mengeneinheiten, so verändert sich der Zielfunktionswert um den Betrag von $\Delta c_{ij} x_{ij}$. Bei der Belegung eines Feldes mit negativer Differenz nimmt der Wert der Zielfunktion um den genannten Betrag ab, während er bei der Belegung eines Feldes mit positiver Differenz um diesen Betrag anwächst. Es ist verständlich, daß wir die optimale Lösung eines Transportproblems nur dann erreichen, wenn wir Felder mit negativer Differenz belegen.

Die Differenz Δc_{ij} wird also nunmehr für jedes Feld der Tabelle 14 berechnet. Man kann dazu so vorgehen, daß man von der tatsächlichen Bewertungszahl des Feldes das Potential sowohl der zugehörigen Zeile als auch der zugehörigen Spalte subtrahiert. So müßten wir im Feld 1.4 etwa rechnen

$$c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 0 - 21 = -17.$$

Dabei müssen nur diejenigen Felder gekennzeichnet werden, bei denen auf die geschilderte Weise eine Differenz zustande kommt, die negativ ist. Dort lohnt es sich, eine Belegung des Feldes vorzunehmen. Gleichzeitig wäre die Größe der negativen Differenz, etwa in der linken unteren Ecke des Feldes, anzuschreiben.

Durch das genannte Vorgehen wird möglicherweise die Übersichtlichkeit der Rechentabelle wesentlich gemindert. Deshalb ist es zweckmäßiger — und führt zu einem übersichtlicheren Ergebnis —, wenn in der folgenden Weise vorgegangen wird. Wir benutzen die Matrix der tatsächlichen Bewertungszahlen nach Tabelle 11, die

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 6 & 4 \\ 1 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

lautet, und subtrahieren davon die bereits bestimmte Matrix der fiktiven Bewertungszahlen, d. h., wir bilden

$$(\Delta c_{ij}) = (c_{ij}) - (c'_{ij})\text{[1]}. \tag{19}$$

Für die Ausgangslösung nach Tabelle 14 erhalten wir

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 6 & 4 \\ 1 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 15 & 17 & 21 \\ -4 & 8 & 10 & 14 \\ -8 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -11 & -\underline{17} \\ 5 & 0 & 0 & -9 \\ 12 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Ergebnismatrix stehen die Differenzen für alle Felder. Wir können somit erkennen, ob die einzelnen Felder für eine Belegung geeignet sind oder nicht. Zunächst bemerken wir, daß die belegten Felder 1.1, 1.2, 2.2, 2.3, 3.3 und 3.4 alle die Differenz Null aufweisen, wie das nach Voraussetzung zu erwarten war. Die Felder 2.1 und 3.1 kommen für eine Belegung nicht in Frage, weil dadurch der Wert der Zielfunktion ansteigen und somit der Transportaufwand steigen würde. Günstige Belegungsmöglichkeiten bieten die Felder 1.3, 1.4, 2.4 und 3.2, die alle negative Differenzen besitzen. Bei einer Verbesserung kann jedoch nur ein leeres Feld belegt werden. Wir suchen deshalb dasjenige Feld, dessen Belegung die größte Verringerung des Wertes der Zielfunktion je Transportmengeneinheit verspricht. Das ist das Feld 1.4 mit der bereits unterstrichenen Differenz -17.

Damit steht fest, daß

1. die Ausgangslösung noch nicht optimal ist, da die Differenzenmatrix noch negative Werte bzw. Elemente enthält,
2. die Verbesserung der Lösung dadurch erfolgt, daß das bisher leere Feld 1.4 belegt wird.

Nunmehr muß bestimmt werden, mit welcher Maximalmenge das Feld 1.4 belegt werden kann. Je mehr Mengeneinheiten wir auf diesem Feld unterbringen, um so stärker wird die gegenwärtige Lösung verbessert. Betrachten wir zunächst die Veränderungen in der Lösung, die eintreten, wenn das Feld 1.4 nur mit einer Mengeneinheit belegt wird.

Durch die Randsummen a_i und b_j sind die einschränkenden Bedingungen vorgegeben, die auch in der neuen Lösung eingehalten werden müssen. Belasten wir demnach das Feld 1.4 mit einer Einheit, so müssen wir ein anderes Feld der ersten Zeile und der vierten Spalte um eben diese Einheit entlasten, um die Einhaltung der Randsummen zu sichern. Betrachten wir

[1] Die Differenz der beiden Matrizen wird errechnet, indem die an gleicher Stelle in beiden Matrizen stehenden Elemente voneinander subtrahiert werden, z. B. $c_{11} - c'_{11}$, $c_{12} - c'_{12}$ usf.

zunächst die Zeile 1. Die Entlastung um eine Einheit kann nicht im Feld 1.1 erfolgen, weil dieses das einzige besetzte Feld der ersten Spalte ist und somit ein Ausgleich der in 1.1 eintretenden Verminderung in der ersten Spalte nicht mehr erfolgen kann. Somit bietet sich in der ersten Zeile nur das Feld 1.2 an, das um eine Einheit weniger besetzt werden kann. Die Einhaltung der Spaltensumme in der zweiten Spalte wird dadurch gewährleistet, daß die Besetzung des Feldes 2.2 um eine Einheit erhöht wird. Allerdings muß dann die Besetzung in 2.3 wiederum um eine Einheit verringert werden, um die Randsumme der zweiten Zeile einzuhalten. Gleichzeitig hat das eine Erhöhung der Besetzung in 3.3 zur Folge, um die Randsumme b_3 der dritten Spalte einzuhalten. Schließlich hat das zur Folge, daß in der dritten Zeile das Feld 3.4 um eine Einheit weniger besetzt wird. Dadurch wird gleichzeitig die Randsumme der vierten Spalte ausgeglichen. Diese Operationen stellen wir in einer Übersicht zusammen.

Feld	Zunahme der Belegung	Abnahme der Belegung
1.4	+1	
1.2		−1
2.2	+1	
2.3		−1
3.3	+1	
3.4		−1
	+3	−3

$$\underbrace{+3 \qquad -3}_{\pm 0}$$

Wie man sieht, ändert sich der Gesamtumfang der Mengeneinheiten nicht. Außerdem haben wir festgestellt, daß die Randsummen der einzelnen betroffenen Zeilen und Spalten eingehalten werden.

Wenn wir den Weg von Feld 1.4 aus über die in der Übersicht angegebenen Felder bis zum Feld 1.4 zurück verfolgen und in der Tabelle 14 durch eine gestrichelte Linie sichtbar machen, so stellen wir fest, daß wir eine Bewegung vorgenommen haben, die einem geschlossenen Turmzug beim Schachspiel entspricht. Man nennt diese Bewegung deshalb Turmzug oder Zyklus. Weiterhin ist wichtig, daß die Ecken des Turmzugs mit Ausnahme des Ausgangsfeldes stets besetzte Felder sind und sein müssen, in denen Besetzungsveränderungen vorgenommen werden. Zu jedem leeren Feld einer zulässigen Lösung kann ein Turmzug oder Zyklus konstruiert werden. Seine Ecken sind stets diejenigen Felder, in denen eine Besetzungsveränderung erfolgen muß, wenn in der Ausgangsecke des Turmzugs, dem

leeren Feld, eine Besetzung erfolgen soll. Ein Blick auf die Übersicht zeigt weiter, daß im Turmzug abwechselnd Felder die Ecken bilden, in denen die Besetzung erhöht bzw. in denen die Besetzung verringert wird. Kennzeichnen wir die Erhöhung durch „+" und die Verringerung durch „—", so bilden die Ecken des Turmzugs die Aufeinanderfolge + — + — + — ..., wobei das erste Pluszeichen stets zum leeren Ausgangsfeld des Turmzugs gehört.
Jetzt kann die Frage beantwortet werden, mit wieviel Einheiten das Feld 1.4 maximal belegt werden kann. Ausschlaggebend dafür ist die Nichtnegativitätsbedingung in der mathematischen Formulierung der Aufgabe. Demnach dürfen die Variablen keine negativen Werte annehmen. Da jedoch die Einheiten, mit denen ein leeres Feld belegt wird, bei anderen besetzten Feldern subtrahiert werden, können auf ein leeres Feld immer höchstens so viele Einheiten gegeben werden, wie auf dem am geringsten besetzten negativen Feld vorhanden sind. Negative Felder sind dabei alle die Felder, deren Besetzung verringert wird, wenn ein leeres Feld belegt wird. In Tabelle 14 sind 1.2, 2.3 und 3.4 solche negativen Felder. Dasjenige unter ihnen mit der geringsten Besetzung ist Feld 3.4 mit der Besetzung von 15 Einheiten. Wenn diese Menge von der Besetzung aller negativen Felder subtrahiert wird, wird keine Variable einen negativen Wert annehmen. Demnach subtrahieren wir 15 Mengeneinheiten von der Besetzung aller negativen Felder des Turmzuges in Tabelle 14, während wir die gleiche Menge bei allen positiven Feldern (Feldern mit „+", deren Besetzung erhöht wird) der Besetzung zuschlagen. Damit wird auch das bisher leere Feld 1.4 belegt. Durch diese Maßnahme tritt bei den einzelnen Eckfeldern folgende Besetzungsveränderung auf:

Feld	Besetzungsveränderung
1.4	$0 + 15 = 15$
1.2	$40 - 15 = 25$
2.2	$10 + 15 = 25$
2.3	$65 - 15 = 50$
3.3	$20 + 15 = 35$
3.4	$15 - 15 = 0$

Ein bisher leeres Feld ist besetzt, ein bisher besetztes Feld geleert worden. Die Gesamtbesetzung der betroffenen Felder hat sich nicht geändert.
Durch die Veränderung der Besetzung im Turmzug ist eine neue Lösung, die erste verbesserte Lösung entsprechend Tabelle 15 entstanden. Bevor ihre Optimalität geprüft wird, sei noch eine Bemerkung zu den Differenzen Δc_{ij} eingefügt. Weiter oben wurde gesagt, daß diese Differenzen angeben,

in welcher Weise sich der Wert der Zielfunktion verändert, wenn das (leere) Feld $i \cdot j$ mit einer Mengeneinheit belegt wird. Mit Hilfe des Turmzugs können wir diese Tatsache nunmehr am Beispiel eines leeren Feldes demonstrieren. Wir gehen vom leeren Feld 3.1 der Tabelle 14 aus. Für dieses Feld gilt

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - c'_{31}$$

bzw.

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - u_3 - v_1.$$

Zur weiteren Darstellung greifen wir auf das weiter oben angegebene Gleichungssystem aus den Größen u_i, v_j und c_{ij} (für die besetzten Felder) zurück, das für Tabelle 12 und damit auch für Tabelle 14 aufgestellt wurde. Es ergibt sich aus Gl. (1)

$$v_1 = c_{11} - u_1$$

und aus Gl. (5)

$$u_3 = c_{33} - v_3.$$

Damit wird

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - (c_{33} - v_3) - (c_{11} - u_1)$$

bzw.

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - c_{33} + v_3 - c_{11} + u_1.$$

Die Randwerte u_1 und v_3 gehören zum leeren Feld 1.3. Da für dieses Feld die Gleichheit zwischen Randwertsumme und Aufwandssatz c_{13} nicht gegeben ist, müssen u_1 und v_3 (wie vorher bereits u_3 und v_1) durch die Potentiale und Aufwandswerte anderer besetzter Felder ausgedrückt werden. Wir erhalten aus Gl. (2)

$$u_1 = c_{12} - v_2$$

und aus Gl. (4)

$$v_3 = c_{23} - u_2.$$

Damit ergibt sich

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - c_{33} + c_{23} - u_2 - c_{11} + c_{12} - v_2.$$

Für $-u_2 - v_2$ setzen wir entsprechend Gl. (3) $-c_{22}$ und erhalten somit schließlich

$$\varDelta c_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{12} - c_{22} + c_{23} - c_{33}.$$

In der angegebenen Reihenfolge der Glieder auf der rechten Seite erkennt man den Verlauf des Turmzugs, der zu durchlaufen wäre, wenn das Feld 3.1 besetzt werden sollte. Die Vorzeichen der c_{ij} zeigen an, ob die an diesem

Turmzug beteiligten Felder zu einer Erhöhung (+) oder zu einer Verringerung (—) des Wertes der Zielfunktion führen. Entsprechend Tabelle 14 liefert die gefundene Beziehung schließlich

$$\begin{array}{rrl} \Delta c_{31} = & 4 & \text{(Besetzung von 3.1 mit einer Einheit)} \\ & -3 & \text{(Entlastung von 1.1 um eine Einheit)} \\ & +15 & \text{(Belastung von 1.2 mit einer Einheit)} \\ & -\ 8 & \text{(Entlastung von 2.2 um eine Einheit)} \\ & +10 & \text{(Besetzung von 2.3 mit einer Einheit)} \\ & -\ 6 & \text{(Entlastung von 3.3 um eine Einheit)} \\ \hline & \underline{\underline{= +12}} & \text{(Erhöhung des Wertes der Zielfunktion, wenn das leere Feld 3.1 in Tabelle 14 mit einer Einheit belegt wird.)} \end{array}$$

Bei der Anwendung der Randwerte und der Berechnung der Δc_{ij}-Matrix für Tabelle 14 ergab sich für das leere Feld 3.1 ebenfalls +12. Dieses Ergebnis wie auch die bezüglich 3.1 angestellten allgemeinen Überlegungen zeigen, daß die durch die Anwendung der Randwerte gefundenen Werte der Differenzenmatrix $(c_{ij} - u_i - v_j)$ die Veränderung des Wertes der Zielfunktion angeben, die bei Belegung des Feldes $i \cdot j$ mit einer Einheit eintritt.

Tabelle 15. Erste verbesserte Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	3	15	17	4	
A_1	0	$\boxed{3}$ 50	$\boxed{15}$ 25 −	$\boxed{6}$ +	$\boxed{4}$ 15	90
A_2	−7	$\boxed{1}$	$\boxed{8}$ 25 +	$\boxed{10}$ 50 −	$\boxed{5}$	75
A_3	−11	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 35	$\boxed{10}$	35
b_j		50	50	85	15	200

Der Wert der Zielfunktion für die Ausgangslösung nach Tabelle 14 beträgt 1750. Durch die Besetzungsveränderung (Besetzung von Feld 1.4) hat sich der Wert der Zielfunktion um 17 · 15 = 255 auf 1495 verringert. Diesen Wert nimmt die Zielfunktion der ersten verbesserten Lösung an.

Er kann auch errechnet werden, indem für alle Felder die Besetzungswerte mit den Bewertungszahlen multipliziert und die Produkte addiert werden.
Wie die Berechnung der Potentiale zu Tabelle 15 nach dem w. o. beschriebenen Verfahren zeigt, ist die erste verbesserte Lösung noch nicht optimal. Die Matrix der Differenz für die Tabelle 15 lautet.

$$(\varDelta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{-11} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Demnach wird die größte Verringerung des Gesamttransportaufwandes erzielt, wenn das Feld 1.3 belegt wird. Die Veränderung der Besetzung entsprechend dem in Tabelle 15 eingezeichneten Turmzug führt zur zweiten verbesserten Lösung in Tabelle 16. Für diese Tabelle lautet die Matrix der Differenzen

$$(\varDelta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 0 \\ \underline{-6} & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tabelle 16. Zweite verbesserte Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	$u_i \diagdown v_j$	3	4	6	4	
A_1	0	50 − $\boxed{3}$	$\boxed{15}$	25 + $\boxed{6}$	15 $\boxed{4}$	90
A_2	4	+ $\boxed{1}$	50 $\boxed{8}$	25 − $\boxed{10}$	$\boxed{5}$	75
A_3	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	35 $\boxed{6}$	$\boxed{10}$	35
b_j		50	50	85	15	200

Sie zeigt an, daß die größte weitere Verbesserung der Lösung durch die Belegung des Feldes 2.1 eintritt. Der entsprechende Turmzug ist in Tabelle 16 eingezeichnet. Die Veränderung der Besetzung nach diesem Turmzug ergibt die dritte verbesserte Lösung nach Tabelle 17. Auch diese Lösung ist noch nicht optimal, wie die Matrix der Differenzen

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & \underline{-7} & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

anzeigt. Eine weitere Verbesserung wird durch die Besetzung des Feldes 3.2 erzielt. Sie führt zur vierten verbesserten Lösung nach Tabelle 18. Für diese Lösung lautet die Matrix der Differenzen

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \underline{-4} \\ 8 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Besetzung des Feldes 2.4 zieht Veränderungen der Besetzung anderer Felder nach sich, die entsprechend dem in Tabelle 18 eingezeichneten Turmzug ablaufen. Damit entsteht die fünfte verbesserte Lösung nach Tabelle 19. Ihre Differenzen-Matrix

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

zeigt an, daß eine weitere Verbesserung der fünften verbesserten Lösung nicht möglich ist, da es kein Feld mehr gibt, dessen Differenz zwischen der

Tabelle 17. Dritte verbesserte Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	3	10	6	4	
A_1	0	25 − $\boxed{3}$	$\boxed{15}$	50 + $\boxed{6}$	15 $\boxed{4}$	90
A_2	−2	25 + $\boxed{1}$	50 − $\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	75
A_3	0	$\boxed{4}$	+ $\boxed{3}$	35 − $\boxed{6}$	$\boxed{10}$	35
b_j		50	50	85	15	200

tatsächlichen und der fiktiven Bewertungszahl negativ ist. Durch Tabelle 19 ist damit die optimale Lösung gegeben. Nach dieser optimalen Lösung sind

$x_{13} = 85$ Mengeneinheiten von A_1 nach B_3 zu transportieren,
$x_{14} = 5$ Mengeneinheiten von A_1 nach B_4 zu transportieren,
$x_{21} = 50$ Mengeneinheiten von A_2 nach B_1 zu transportieren,
$x_{22} = 15$ Mengeneinheiten von A_2 nach B_2 zu transportieren,
$x_{24} = 10$ Mengeneinheiten von A_2 nach B_4 zu transportieren,
und $x_{32} = 35$ Mengeneinheiten von A_3 nach B_2 zu transportieren.

Tabelle 18. Vierte verbesserte Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	-4	3	6	4	
A_1	0	$\boxed{3}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 75 +	$\boxed{4}$ 15 −	90
A_2	5	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{8}$ 25 −	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$ +	75
A_3	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 25 +	$\boxed{6}$ 10 −	$\boxed{10}$	35
b_j		50	50	85	15	200

Tabelle 19. Fünfte verbesserte Lösung (Optimale Lösung)

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	1	8	7	5	
A_1	-1	$\boxed{3}$	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 85	$\boxed{4}$ 5	90
A_2	0	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$ 10	75
A_3	-5	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 35	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	35
b_j		50	50	85	15	200

Auf allen übrigen Beziehungen zwischen den Aufkommens- und den Bedarfsorten erfolgt kein Transport, weil die entsprechenden Variablen in der optimalen Lösung den Wert Null besitzen.
Für die optimale Lösung besitzt die Zielfunktion den Wert 855. Sie stimmt mit der Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs überein. In der Regel wird man diese Methode der Nordwest-Ecken-Regel vorziehen. Hier wurde die ungünstigere Ausgangslösung verwendet, um durch die verschiedenen Verbesserungsschritte das angewendete Distributionsverfahren besonders deutlich hervorzuheben.

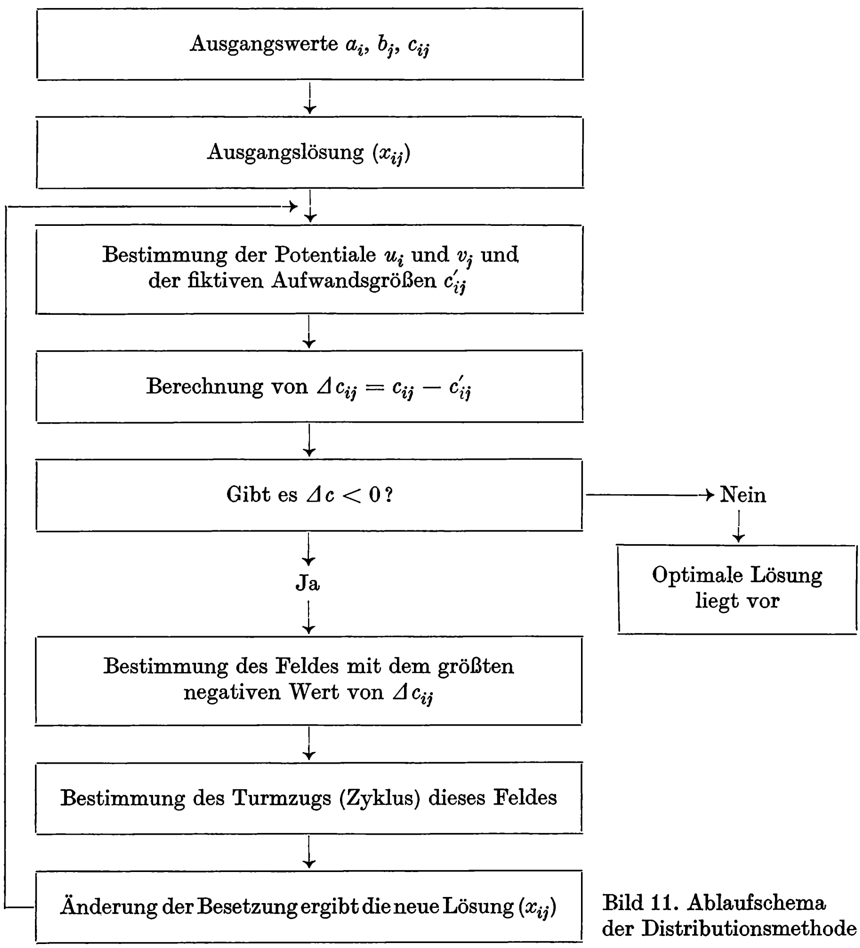

Bild 11. Ablaufschema der Distributionsmethode

Außer der in Tabelle 19 angegebenen optimalen Lösung gibt es keine weitere optimale Lösung. Das wäre nur dann der Fall, wenn die letzte Matrix der Differenzen auch für unbesetzte Felder den Wert Null enthielte. Dann nämlich könnten diese Felder ohne Veränderung des Wertes der Zielfunktion besetzt und somit weitere optimale Lösungen bestimmt werden. Tabelle 19 enthält jedoch nur unbesetzte Felder, deren Differenz Δc_{ij} positiv ist.

Wie die Simplexmethode läßt sich auch die Methode der Potentiale in bestimmte Schritte zerlegen. Dadurch entsteht ein Ablaufschema der Methode der Potentiale bzw. der modifizierten Distributionsmethode. Dieses Ablaufschema ist in Bild 11 angegeben.

Durch die bisher behandelten Fälle und Beispiele des Transportproblems sind wir in der Lage, Transportprobleme zu lösen, die dem w. o. angegebenen mathematischen Modell entsprechen. Bei der Lösung praktischer Aufgaben tritt es jedoch nicht selten ein, daß Abweichungen vom Normalfall oder zusätzliche Bedingungen auftreten, die bei der Lösung beachtet werden müssen. So wäre etwa der Fall zu betrachten, daß die angenommene Übereinstimmung zwischen Gesamtaufkommen und Gesamtbedarf nicht eintritt. Auch ist es möglich, daß für bestimmte Beziehungen zwischen den Aufkommens- und Bedarfsorten einschränkende Bedingungen der Art bestehen, daß die Transportmenge einen bestimmten Höchstwert nicht übersteigen darf. Das sind nur einfache Abweichungen vom Normalfall, die jedoch relativ oft auftreten können. Bevor sie jedoch behandelt werden, seien einige Bemerkungen zur Bearbeitung solcher Lösungen gemacht, die degeneriert sind.

5.4.3. Degenerierte Lösungen

Im Zusammenhang mit dem Transportproblem heißt eine Lösung *degeneriert* oder *entartet*, wenn sie weniger als $(m + n - 1)$ Variable enthält, die größer als Null sind. Degenerierte Lösungen besitzen also weniger als $(m + n - 1)$ besetzte Felder. Eine solche Lösung ist in Tabelle 20 gegeben. Dort ist eine Aufgabe gestellt, die drei Aufkommensorte und vier Bedarfsorte enthält. Eine nichtdegenerierte Lösung müßte demnach sechs besetzte Felder besitzen. Dagegen besitzt die Lösung in Tabelle 20 nur fünf besetzte Felder. Man kann leicht prüfen, daß die Potentiale der ersten und zweiten Zeile und der ersten und zweiten Spalte sofort bestimmt werden können. Von diesen Zeilen und Spalten gibt es jedoch keine Verbindung zu den übrigen Reihen der Tabelle. Es existiert kein besetztes Feld, das es erlaubt, auch die weiteren Potentiale zu berechnen. Deshalb sind anstelle der Potentiale der dritten und vierten Spalte und der dritten Zeile zunächst Fragezeichen gesetzt.

Um die fehlenden Potentiale berechnen zu können, muß ein weiteres Feld belegt werden. Hierbei darf jedoch die für die einzelnen Zeilen und Spalten

Tabelle 20. Degenerierte Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	3	5	?	?	
A_1	0	20 $\boxed{3}$	80 $\boxed{5}$	— $\boxed{10}$	— $\boxed{8}$	100
A_2	1	— $\boxed{4}$	100 $\boxed{6}$	— $\boxed{8}$	— $\boxed{12}$	100
A_3	?	— $\boxed{10}$	— $\boxed{10}$	100 $\boxed{3}$	100 $\boxed{6}$	200
b_j		20	180	100	100	400

vorgeschriebene Summe nicht überschritten werden. Diese Situation zwingt dazu, ein bisher freies Feld mit der Menge Null zu besetzen. Dabei werden die einschränkenden Bedingungen nicht verletzt, und dennoch kann die erforderliche Zahl der besetzten Felder erreicht werden.
Es bleibt die Frage zu beantworten, welches leere Feld mit Null besetzt werden soll. Offensichtlich kann das nur ein Feld, für das bereits ein Potential bestimmt ist, sein. Dadurch wird die fehlende Möglichkeit geschaffen, die restlichen Potentiale zu berechnen.

Tabelle 21. Ergänzte Tabelle (Optimale Lösung)

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i \ v_j	3	5	-2	1	
A_1	0	20 $\boxed{3}$	80 $\boxed{5}$	— $\boxed{10}$	— $\boxed{8}$	100
A_2	1	— $\boxed{4}$	100 $\boxed{6}$	— $\boxed{8}$	— $\boxed{12}$	100
A_3	5	— $\boxed{10}$	0 $\boxed{10}$	100 $\boxed{3}$	100 $\boxed{6}$	200
b_j		20	180	100	100	400

Wir besetzen in Tabelle 20 das leere Feld 3.2 mit dem Wert Null und erhalten dadurch Tabelle 21, in der sämtliche Potentiale bestimmt werden können. Demnach ist es auch möglich, zu prüfen, ob die degenerierte Lösung noch verbessert werden kann. Es stellt sich heraus, daß die Lösung nach Tabelle 20 bzw. Tabelle 21 bereits optimal ist.

5.5. Unausgeglichenheit zwischen Aufkommen und Bedarf

Die Forderung

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

ist in der Praxis nicht immer erfüllt. Insbesondere wird es bei Optimierungen, die für relativ kurze Zeiträume vorgenommen werden, oft eintreten, daß das Aufkommen über oder unter dem Bedarf liegt. Beide Fälle muß man bei der Optimierung unterscheiden.

5.5.1. Das Aufkommen übersteigt den Bedarf

In diesem Fall, bei dem

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j \tag{19}$$

gilt, muß ein Teil des Aufkommens im Optimierungszeitraum gelagert werden. Zweckmäßigerweise wird man das jeweils am Aufkommensort tun, um zusätzliche Transportkosten zu vermeiden. Allerdings setzt das voraus, daß an den Aufkommensorten Lagermöglichkeiten bestehen. Diese Voraussetzung soll zunächst als erfüllt angesehen werden. Für die optimale Lösung ist es nicht gleichgültig, an welchem Aufkommensort das Lager eingerichtet wird. Bei ungenügender Kenntnis der Transportaufwendungen kann es eintreten, daß an Aufkommensorten, die günstige Verbindungen zu den Bedarfsorten besitzen, Lager eingerichtet werden, während das Aufkommen transportungünstiger Standorte vollständig ausgeschöpft wird. Die Aufkommensorte, an denen Lager eingerichtet werden sollen, müsen im Verlaufe der Transportoptimierung bestimmt werden.
Ausgangsbasis sei die in Tabelle 22 gestellte Aufgabe, bei der das Gesamtaufkommen 400 und der Gesamtbedarf 340 Mengeneinheiten betragen. Damit übersteigt das Aufkommen den Bedarf um 60 Mengeneinheiten, die an einem der Aufkommensorte gelagert werden müssen.
Um die Aufgabe mit Hilfe der Distributionsmethode lösen zu können, ist zunächst die Gleichheit zwischen Aufkommen und Bedarf herzustellen. Zu diesem Zweck wird eine weitere Spalte eingerichtet, die einen fiktiven Bedarfsort repräsentiert. Diese Spalte wird mit R (Reserve) bezeichnet. Lieferungen von den Aufkommensorten an den fiktiven Ort R bedeuten,

daß die betreffenden Mengen an den Aufkommensorten gelagert werden. Damit entstehen jedoch keine Transportaufwendungen. Deshalb erhalten die Felder A_1R, A_2R und A_3R die Bewertungszahlen Null. Nach dieser Erweiterung der Tabelle und der Matrix der Bewertungszahlen ist es möglich, die Aufgaben zu lösen. Zunächst wird die Ausgangslösung nach der

Tabelle 22. Ausgangsgrößen eines Transportproblems, dessen Gesamtaufkommen über dem Gesamtbedarf liegt

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	3	5	1	200
A_2	3	7	4	4	80
A_3	5	2	3	1	120
b_j	30	170	60	80	$\frac{400}{340}$

Methode des doppelten Vorzugs ermittelt. Sie ist in Tabelle 23 angegeben. In der dargelegten Weise bestimmt man schließlich die optimale Lösung, die Tabelle 24 enthält. Nach dieser optimalen Lösung ist es am besten, im Aufkommensort A_1 die überschüssigen 60 Mengeneinheiten zu lagern. Würde die Lagerung bei den Aufkommensorten A_2 oder A_3 vorgenommen, so würden sich weniger günstige Lösungen als in Tabelle 24 ergeben, d. h., die Transportaufwendungen lägen höher.

Auch der Fall, daß nicht bei allen Aufkommensorten Lagermöglichkeiten bestehen, kann berücksichtigt werden. Er beinhaltet eine zusätzliche Einschränkung, die unter Umständen zu einer neuen und weniger vorteilhaften Lösung führt. Natürlich würden Lagerbeschränkungen in den Orten A_1

Tabelle 23. Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs

	B_1	B_2	B_3	B_4	R	a_i
A_1	$\boxed{6}$ —	$\boxed{3}$ 50	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{1}$ 80	$\boxed{0}$ 60	200
A_2	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{7}$ —	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{4}$ —	$\boxed{0}$ —	80
A_3	$\boxed{5}$ —	$\boxed{2}$ 120	$\boxed{3}$ —	$\boxed{1}$ —	$\boxed{0}$ —	120
b_j	30	170	60	80	60	400

und A_2 sowie A_3 zu unterschiedlichen Folgen führen. Träten sie in A_2 und A_3 auf, so bliebe die optimale Lösung nach Tabelle 24 erhalten. Dagegen führt eine Lagerbeschränkung bei A_1 zu einem neuen Ergebnis. Nehmen wir deshalb an, daß die Bedingungen am Aufkommensort A_1 die Einrichtung eines Lagers nicht zulassen. Das kann in der Matrix der Bewertungszahlen

Tabelle 24. Optimale Lösung

	B_1	B_2	B_3	B_4	R	a_i
A_1	—	60	—	80	60	200
A_2	30	—	50	—	—	80
A_3	—	110	10	—	—	120
b_j	30	170	60	80	60	400

dadurch ausgedrückt werden, daß das Feld A_1R mit einer sehr großen Zahl M bewertet wird, die größer als alle anderen c_{ij}-Werte ist. Damit ist eine Belegung dieses Feldes ausgeschlossen, d. h., A_1 wird für Lagerungen nicht vorgesehen.

Tabelle 25. Matrix der Bewertungszahlen (Aufwandszahlen)

	B_1	B_2	B_3	B_4	R
A_1	6	3	5	1^{xo}	M
A_2	3^{o}	7	4	4	0^{xo}
A_3	5	2^{o}	3^{o}	1^{o}	0^{xo}

Tabelle 25 enthält die Bewertungszahlen zu diesem Problem, wobei bereits die doppelt und einfach bevorzugten Felder gekennzeichnet sind. Damit ist es möglich, sofort die Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs zu berechnen. Sie liefert Tabelle 26. Diese Ausgangslösung ist jedoch noch nicht optimal. Sie wird noch in zwei Schritten, die im einzelnen hier

Tabelle 26. Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs

	B_1	B_2	B_3	B_4	R	a_i
A_1	10	50	60	80	—	200
A_2	20	—	—	—	60	80
A_3	—	120	—	—	—	120
b_j	30	170	60	80	60	400

nicht angegeben werden, verbessert und liefert dann die optimale Lösung nach Tabelle 27. Die Optimalität dieser Lösung ergibt sich aus den Potentialen u_i und v_j, die gemeinsam mit den tatsächlichen Bewertungszahlen schließlich die Matrix der Differenzen

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & M-1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergeben. In dieser Matrix treten keine negativen Elemente auf, so daß eine weitere Verbesserung der Lösung nicht mehr möglich ist.

Tabelle 27. Optimale Lösung

		B_1	B_2	B_3	B_4	R	a_i
	u_i \ v_j	3	2	3	0	0	
A_1	1	$\boxed{6}$ —	$\boxed{3}$ 120	$\boxed{5}$ —	$\boxed{1}$ 80	$\boxed{M}$ —	200
A_2	0	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{7}$ —	$\boxed{4}$ —	$\boxed{4}$ —	$\boxed{0}$ 50	80
A_3	0	$\boxed{5}$ —	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{3}$ 60	$\boxed{1}$ —	$\boxed{0}$ 10	120
b_j		30	170	60	80	60	400

Ein Vergleich der Lösungen in den Tabellen 24 und 27 zeigt, daß sich die Veränderung in den Lagermöglichkeiten entscheidend auf die Gesamtlösung ausgewirkt hat. Das wirkt sich bei dem vorliegenden Problem allerdings nur geringfügig auf den Wert der Zielfunktion aus, der 800 für Tabelle 24 und 810 für Tabelle 27 beträgt. Die auftretenden Unterschiede zwischen beiden Tabellen sind vorwiegend organisatorischer Natur bezüglich der Belastung der einzelnen Beziehungen.

Mit der Unterscheidung der Aufkommensorte in solche, die eine Lagerung zulassen, und solche, bei denen keine Lagerung möglich ist, wird ein sehr grober Maßstab angelegt. In vielen Fällen wird die Lagerung überschüssiger Mengen bestimmte Vorbereitungen erfordern, die je nach den örtlichen Bedingungen unterschiedliche Aufwendungen nach sich ziehen. In diesem

Falle ist es besser, die bei den verschiedenen Aufkommensorten anfallenden Lagerkosten abzuschätzen und als Bewertungen in der R-Spalte einzusetzen. Das setzt allerdings voraus, daß auch die übrigen Bewertungen als Kosten ausgedrückt werden. Auf diese Weise ist es möglich, das Modell des Transportproblems den tatsächlichen Bedingungen noch besser anzupassen.

5.5.2. Der Bedarf übersteigt das Aufkommen

Nunmehr gilt

$$\sum_i a_i < \sum_j b_j . \tag{20}$$

Jetzt ist es ebenso möglich, durch Aufnahme eines fiktiven Ortes eine transportoptimale Lösung zu suchen. Dieser fiktive Ort müßte ein Aufkommensort sein. Der fehlende Ausstoß an Aufkommen wird diesem Aufkommensort zugeordnet. Seine Entfernungen von den Bedarfsorten sind gleichfalls gleich Null, weil die Mengen, die von diesem Aufkommensort bezogen werden, nicht existieren und somit nicht transportiert werden. Sie rufen keinen Transportaufwand hervor. Erhält also ein Bedarfsort Lieferungen des fiktiven Aufkommensortes, so bedeutet das, daß sein Bedarf um diesen Betrag nicht gedeckt wird.

Eine derartige Lösung ist optimal im Hinblick auf den Transportaufwand. Im allgemeinen liegt jedoch eine schwerer wiegende Entscheidung vor, wenn Fehlaufkommen besteht, als wenn überschüssiges Aufkommen gelagert werden soll. Es wird bei fehlendem Aufkommen deshalb ökonomisch besser sein, eine formale transportoptimale Lösung zu vermeiden und dafür durch Überlegungen, die außerhalb der eigentlichen Optimierungsrechnung stehen, zunächst einen Ausgleich zwischen Aufkommen und Bedarf insgesamt dadurch herzustellen, daß der Bedarf einiger Bedarfsorte vor der eigentlichen Optimierung gekürzt wird. Dabei werden Gesichtspunkte wie etwa der der vordringlichen Belieferung bestimmter Bedarfsorte usf. berücksichtigt. Erst dann, wenn auf diese Weise eine Übereinstimmung zwischen Gesamtbedarf und Gesamtaufkommen erzielt wurde, wird nach dem normalen Transportproblem optimiert.

Gerade das Problem der Unausgeglichenheit zwischen Aufkommen und Bedarf macht deutlich, in welch starkem Maße das Transportproblem zur Lösung von Aufgaben angewendet wird, die nicht zum Bereich des Transportwesens selbst gehören. Verteilungsaufgaben aller Art, die sich auf austauschbare Massengüter beziehen und bei denen sehr oft zeitlich begrenzte Abweichungen zwischen Aufkommen und Bedarf vorliegen, führen letztlich zum Transportproblem. Ihre ökonomisch zweckmäßige Lösung ist zuerst eine Aufgabe der Produktions- und Verteilungsorgane. Der Nutzen solcher optimal entschiedener Verteilungsaufgaben erstreckt sich darüber hinaus auch auf das Transportwesen. Sein Hauptteil liegt jedoch im Bereich der Produktion und Verteilung. Das zeigt sich auch daran, daß das Transportproblem nicht nur zur transportoptimalen Verteilung von Aufkommen und Bedarf eingesetzt werden kann, sondern gleichzeitig dabei die Verbrauchs- oder Einsatzkosten bei den Bedarfsorten beachtet werden können und somit die Möglichkeit entsteht, eine produktions- und transportoptimale Verteilung des Aufkommens auf die verschiedenen Bedarfsorte vorzunehmen. In einem solche Falle, der mathematisch nach dem Transportproblem in der beschriebenen Form behandelt werden kann, stellen die Bewertungszahlen c_{ij} Summen aus wenigstens zwei Bestandteilen dar. Man kann schreiben

$$c_{ij} = t_{ij} + e_{ij}, \tag{21}$$

wobei die einzelnen Symbole bedeuten:

c_{ij} Gesamtkosten, die entstehen beim Transport einer Mengeneinheit von A_i nach B_j und beim Verbrauch dieser Einheit in B_j

t_{ij} Transportkosten je Mengeneinheit von A_i nach B_j

e_{ij} Kosten für den Verbrauch einer aus A_i stammenden Mengeneinheit in B_j (Einsatzkosten).

Alle Bewertungszahlen wie auch ihre Bestandteile wären dann in Kosten (MDN) auszudrücken. Die eben beschriebene Situation kann zum Beispiel eintreten, wenn n Kraftwerke aus m Kohlegruben beliefert werden sollen und nicht nur die Transportkosten verschieden sind, sondern gleichzeitig unterschiedliche Kosten beim Einsatz der verschiedenen Kohlesorten in den Kraftwerken entstehen. Dieses reine Verteilungsproblem führt zwar auf das Transportproblem, hat zu diesem aber nur indirekte Beziehungen.

Bei der Ungleichheit zwischen Aufkommen und Bedarf gestattet es die Lösung des Transportproblems, zugleich Standortfragen zu entscheiden. So findet man bei überschüssigem Aufkommen heraus, wo am zweckmäßigsten ein Lagerplatz einzurichten wäre.

5.6. Transportprobleme mit zusätzlichen Einschränkungen

Im allgemeinen hängt die Besetzung der Felder bei einem Transportproblem allein von den Bewertungszahlen dieser Felder und somit von dem Transportaufwand ab, der mit ihrer Belegung entsteht. Hier können jedoch Einschränkungen auftreten, die durch die Bedingungen der Transportwege ebenso wie durch jene bestimmt sein können, die bei den Bedarfsorten hinsichtlich des Einsatzes der aus den Aufkommensorten gelieferten Mengen bestehen. Wir betrachten dazu ein sehr einfaches Beispiel, das auf den Werten der Tabelle 10 aufbaut. Dort ist ein Transportproblem.

$$Z = 5x_{11} + 12x_{12} + 7x_{13} + 18x_{21} + 7x_{22} + 14x_{23} \to \min$$

unter den einschränkenden Bedingungen

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 120\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80\\
x_{11} + x_{21} \qquad\quad &= 10\\
x_{12} + x_{22} \qquad\quad &= 120\\
x_{13} + x_{23} \qquad\quad &= 70
\end{aligned}$$

gelöst worden. Diesen einschränkenden Bedingungen soll eine weitere hinzugefügt werden, die darin besteht, daß der Bedarfsort B_3 vom Aufkommensort A_1 höchstens 50 Mengeneinheiten erhalten darf. Wir wollen annehmen, daß diese Bedingung durch die Verbrauchstechnologie bei B_3 gegeben ist. Sie lautet

$$x_{13} \leqq 50.$$

Wir lösen diese Aufgabe nach der Simplexmethode, wobei, wie bereits im Zusammenhang mit Tabelle 10 ausgeführt, eine der obigen fünf einschränkenden Bedingungen entfallen kann. Durch Einführung von vier künstlichen Variablen und einer Schlupfvariablen lautet das mathematische Modell schließlich

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 120\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \qquad + k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 80\\
x_{11} + x_{21} \qquad\qquad\qquad\quad + k_3 \qquad\qquad\quad &= 10\\
x_{12} + x_{22} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + k_4 \qquad &= 120\\
x_{13} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_1 &= 50.
\end{aligned}$$

Während wie bisher die künstlichen Variablen die Bewertungszahl M erhalten, lautet diese für die Schlupfvariable Null.

In der üblichen Weise liefert die Tabelle 28 die optimale Lösung in Form von

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 10 \qquad & x_{21} &= 0\\
x_{12} &= 60 \qquad & x_{22} &= 60\\
x_{13} &= 50 \qquad & x_{23} &= 20.
\end{aligned}$$

Tabelle 28. Simplextabelle einer Transportaufgabe mit einer zusätzlichen Beschränkung

		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	k_1	k_2	k_3	k_4	w_1	
		-5	-12	-7	-18	-7	-14	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	
BV	$330M$	$2M-5$	$2M-12$	$M-7$	$2M-18$	$2M-7$	$M-14$	0	0	0	0	0	
k_1	120	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	120
k_2	80	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	—
$\leftarrow k_3$	10	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10
k_4	120	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
w_1	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	—
...													
	1820	0	0	0	-18	0	0	$-M+19$	$-M+14$	$-M-14$	$-M-7$	-12	
x_{23}	20	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	
x_{22}	60	0	0	0	1	1	0	-1	0	1	1	1	
x_{11}	10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	
x_{12}	60	0	1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	-1	
x_{13}	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	

In der optimalen Lösung nach Tabelle 10 besitzt die Zielfunktion den Wert 1580. Der Wert der Zielfunktion in der optimalen Lösung nach Tabelle 28 beträgt dagegen 1820. Damit erhöht sich der Aufwand allein dadurch, daß für das günstigste Feld 1.3 eine begrenzte Belegung vorgeschrieben wird, um 240 Einheiten des Transportaufwands. Bei langfristigen Optimierungen kann man auf dieser Differenz Überlegungen aufbauen, die sich mit der Zweckmäßigkeit der Begrenzung auseinandersetzen. Sofern es nämlich, auf die Dauer gesehen, billiger ist, Maßnahmen zur Aufhebung der Begrenzung vorzunehmen, müßte man sich in dieser Richtung entscheiden. Dazu muß jedoch bekannt sein, wieviel mehr Aufwand die zusätzlich begrenzte Lösung gegenüber der ursprünglichen Lösung erfordert.

Eine Möglichkeit, die geschilderte Aufgabe durch die Distributionsmethode zu lösen, zeigen die Tabellen 29 und 30. In der Tabelle 29 sind die Bewertungszahlen zusammengestellt. Dabei erhielt das Feld 1.3 keine Bewertungszahl. Dieses Feld ist sofort mit 50 Einheiten belegt worden, womit die zusätzliche einschränkende Bedingung befriedigt wurde. Das Feld wird damit entsprechend der einschränkenden Bedingung maximal besetzt. Das ist gerechtfertigt, weil es sich um ein sehr günstiges Feld handelt, das in der ursprünglichen Lösung nach Tabelle 10 höher als mit 50 Einheiten belegt ist. Die Vorteilhaftigkeit der einzelnen Felder (Kleinstwerte der Bewertungszahlen in den Zeilen und Spalten) wird nun für alle übrigen Felder bestimmt, wobei das Feld 1.3 ausgenommen ist. Damit können die günstigsten unter

Tabelle 29. Aufwandszahlen c_{ij} mit gesperrtem Feld 1.3

	B_1	B_2	B_3
A_1	5^{xo}	12	/
A_2	18	7^{xo}	14^{o}

den verbliebenen Feldern bestimmt und unter Beachtung der einschränkenden Bedingungen maximal belegt werden. Praktisch handelt es sich um die Anwendung der Methode des doppelten Vorzugs. Das Ergebnis dieses Vorgehens ist die Ausgangslösung nach Tabelle 30, die jedoch zugleich die optimale Lösung ist, wie ein Vergleich mit Tabelle 28 zeigt. Doch sei betont, daß diese Übereinstimmung zwischen Ausgangslösung und optimaler Lösung bei der Methode des doppelten Vorzugs nicht generell besteht.

Tabelle 30. Ausgangslösung nach der Methode des doppelten Vorzugs (zugleich optimale Lösung)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	60	50	120
A_2	—	60	20	80
b_j	10	120	70	200

Wenn mehr als eine zusätzliche einschränkende Bedingung gegeben ist, kann man das geschilderte Verfahren in prinzipiell gleicher Weise anwenden.

5.7. Mehrstufiges (mehrdimensionales) Transportproblem

Die meisten Transporte sind Bestandteil einer längeren Transportkette. Auch Verteilungsaufgaben, die durch Produktions- und Verteilungsorgane gelöst werden, können als Glied eines ganzen Verteilungssystems betrachtet werden. Denken wir etwa an den Transport des Obstes von den Plantagen in die Konservenfabriken und der Konserven von den Fabriken in die Geschäfte oder Großhandelslager. Auch die Verteilung des Getreides auf die Sammelstellen, von da auf die Mühlen und schließlich des Mehls auf die weiteren Verbraucher ergibt ein mehrstufiges Transport- bzw. Verteilungsproblem. Andere Waren wiederum, die in größeren Mengen transportiert werden und die gegenseitig austauschbar sind, werden über Zwischenlager an die Verbraucher geliefert. In all diesen Fällen liegt der Wunsch nahe, das mehrstufige Transportproblem in seiner Gesamtheit auf einmal zu lösen, statt die einzelnen Transportstufen getrennt zu optimieren.

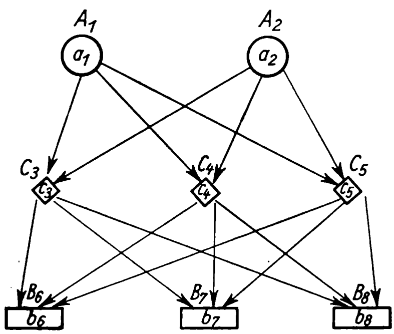

Bild 12. Prinzipskizze eines Standortproblems in Form des zweistufigen Transportproblems

In Bild 12 ist der einfachste Fall eines mehrstufigen Transportproblems, das zweistufige Transportproblem, dargestellt. Wir können uns vorstellen, daß die Aufkommensorte A_i zum Beispiel Versandorte oder -schwerpunkte für Getreide, die B_j Bedarfsorte für Getreide (zum Beispiel Mühlen) und die C_k Zwischenlager oder Sammelstellen sind. Entsprechend der in „Die Mathematik in der Ökonomie" [15] verwendeten Symbolik ergibt sich dann:

A_i: Aufkommensorte $(i = 1, 2, \ldots, m)$

C_k: Zwischenlager $(k = m + 1, m + 2, \ldots, m + s)$

B_j: Bedarfsorte $(j = m + s + 1, m + s + 2, \ldots, m + s + n)$

c_{ik}: Entfernung zwischen dem Aufkommensort A_i und dem Zwischenort C_k

c_{kj}: Entfernung zwischen den Zwischenort C_k und dem Bedarfsort B_j

c_{ij}: Entfernung zwischen dem Aufkommensort A_i und dem Bedarfsort B_j.

Generell gilt

$$c_{ij} = c_{ik} + c_{kj} \tag{22}$$

Um zu zeigen, über welchen Zwischenort C_k die Entfernung c_{ij} bestimmt wurde, wird allgemein $c_{ij}^{(k)}$ geschrieben.

Sind die Aufkommensmengen a_i, die Kapazitäten der Zwischenorte c_k und die Bedarfsmengen b_j vorgegeben, so kann die Lösung mit der entsprechend modifizierten Distributionsmethode gefunden werden. Darüber hat KORDA [16] geschrieben. Das Schema einer derartigen Aufgabe mit nur zwei Aufkommensorten, zwei Zwischenorten und zwei Bedarfsorten lautet:

		B_5	B_6	c_k	a_i
A_1	C_3			c_3	a_1
	C_4			c_4	
A_2	C_3			c_3	a_2
	C_4			c_4	
b_j		b_5	b_6	—	

Die Entfernungen bzw. Aufwandssätze werden hierbei als $c_{ij}^{(k)}$ geschrieben. Eine zulässige Lösung umfaßt $(m + s + n - 2)$ besetzte Felder. Bei der Festlegung der Randzahlen werden die ersten beiden Randzahlen frei gewählt. Wie beim einfachen Transportproblem muß die Summe der Randzahlen für besetzte Felder gleich dem Aufwandssatz dieser Felder sein. Es gilt

$$u_i + w_k + v_j = c_{ij}^{(k)}.$$

Die Besetzung leerer Felder verbessert die Lösung dann, wenn

$$c_{ij}^{(k)} - c_{ij}^{(k)\prime} < 0,$$

wobei

$$c_{ij}^{(k)\prime} = u_i + w_k + v_j$$

ist.

Die skizzierte Aufgabe kann mit der Simplexmethode ebenfalls gelöst werden. Die Anwendung dieser Methode empfiehlt sich insbesondere dann, wenn zusätzliche Beschränkungen für die zu bestimmenden Variablen bestehen.

Die einfachste Form des zweistufigen Transportproblems liegt vor, wenn lediglich die Aufkommenswerte a_i und die Bedarfswerte b_j vorgegeben sind. Die Kapazitätsgrößen c_k der Zwischenorte werden dann erst im Verlaufe der Berechnungen bestimmt, und zwar so, wie das für die optimale Lösung erforderlich ist. Bei der Lösung dieser Aufgabe werden die Bedarfsorte den Aufkommensorten direkt zugeordnet. Die Grundlage dieser Zuordnung sind die Bewertungszahlen (Entfernungen) $c_{ij}^{(k)}$. Da es stets mehrere solche Entfernungen zwischen einem Bedarfsort und einem Aufkommensort gibt, nämlich so viele, wie es Lager gibt, über die der Transport geleitet werden kann, wird in die Matrix der Bewertungszahlen jeweils die kürzeste Entfernung zwischen zwei Orten A_i und B_j aufgesucht und eingesetzt. Nehmen wir an, daß sich die kürzeste Entfernung zwischen A_i und B_j über den Zwischenort C_l ergibt, so ist

$$c_{ij}^{(l)} = \min_k (c_{ik} + c_{kj}) = c_{il} + c_{lj}. \tag{23}$$

Zur Demonstration dient die Berechnung der kürzesten Entfernung zwischen A_1 und B_6 an Hand der Werte aus Tabelle 31. Zwischen A_1 und B_6 sind Verbindungen über C_3, C_4 und C_5 möglich. Wir erhalten folgende Werte:

1. über C_3: $c_{16}^{(3)} = c_{13} + c_{36} = 5 + 12 = 17$
2. über C_4: $c_{16}^{(4)} = c_{14} + c_{46} = 3 + 1 = 4$
3. über C_5: $c_{16}^{(5)} = c_{15} + c_{56} = 10 + 6 = 16$.

Tabelle 31. Ausgangsgrößen eines zweistufigen Transportproblems (nach Bild 12)

	C_3	C_4	C_5	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	5	3	10		?		120
A_2	8	5	2				80
C_3				12	8	20	
C_4				1	11	6	
C_5				6	13	8	
b_j				70	110	20	200

Die kürzeste Entfernung ergibt sich über die Zwischenstation C_4. Es ist demnach.

$$c_{16}^{(4)} = \min_k (c_{1k} + c_{k6}) = c_{14} + c_{46} = 4.$$

Auf diese Weise werden alle Bewertungszahlen $c_{ij}^{(k)}$ und daraus weiter $c_{ij}^{(l)}$ berechnet. Das Ergebnis ist in Tabelle 32 zusammengestellt. Diese Tabelle

Tabelle 32. Bewertungszahlen $c_{ij}^{(l)}$ zwischen den Aufkommensorten A_i und den Bedarfsorten B_j (über die Zwischenorte bzw. Lager l)

	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	$4^{(4)}$	$13^{(3)}$	$9^{(4)}$	120
A_2	$6^{(4)}$	$15^{(5)}$	$10^{(5)}$	80
b_j	70	110	20	200

enthält die Ausgangsgrößen für die direkte optimale Zuordnung der Aufkommens- zu den Bedarfsorten. Die optimale Lösung wird mit Hilfe der Methode der Potentiale bestimmt. Sie lautet

$$\begin{array}{ll} x_{16}^{(4)} = 70 & x_{26}^{(4)} = 0 \\ x_{17}^{(3)} = 50 & x_{27}^{(5)} = 60 \\ x_{18}^{(4)} = 0 & x_{28}^{(5)} = 20 \end{array}$$

(vgl. Tabelle 33). Nachdem auch bekannt ist, über welche Zwischenorte die Verteilung des Aufkommens erfolgt, kann die dadurch erfolgende Belastung der Zwischenorte abgeleitet werden. Gleichzeitig werden auch die Mengen bestimmt, die in den einzelnen Stufen des mehrstufigen Transportproblems ausgetauscht werden.

Tabelle 33. Optimale Lösung I

	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	70	50	—	120
A_2	—	60	20	80
b_j	70	110	20	200

Für die in den einzelnen Stufen verteilten Mengen bzw. für die Besetzung der Felder in den beiden Teilproblemen des gesamten Transportproblems erhalten wir

$$x_{ik} = \sum_{j} x_{ij}^{(k)} \tag{24a}$$

in der ersten Stufe und

$$x_{kj} = \sum_{i} x_{ij}^{(k)} \tag{24b}$$

in der zweiten Stufe. Die Belastung der Zwischenorte ist

$$c_k = \sum_{i} x_{ik} \tag{25a}$$

bzw.

$$c_k = \sum_{j} x_{kj}. \tag{25b}$$

In der Tabelle 34 sind die Werte nach (24a) und (24b) sowie die nach (25b) eingetragen. In dieser ausführlichen Lösung sind sowohl die zwischen den Aufkommens- und Bedarfsorten ausgetauschten Mengen (Gesamttransportproblem) als auch die auf den beiden Stufen des Transportproblems ausgetauschten Mengen enthalten.

Tabelle 34. Vollständige optimale Lösung I

	C_3	C_4	C_5	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	50	70	—	70	50	—	120
A_2	—	—	80	—	60	20	80
C_3				—	50	—	50
C_4				70	—	—	70
C_5				—	60	20	80
b_j				70	110	20	200

In der Tabelle 33 (und auch in Tabelle 34) liegt nur eine der beiden möglichen optimalen Lösungstabellen vor. Die Matrix der Differenzen nach der Methode der Potentiale ergibt für die optimale Lösung nach Tabelle 33

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ 0 & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

Die Nullelemente der besetzten Felder sind unterstrichen. Es bleibt demnach noch ein Nullelement, das zu dem unbesetzten Feld 2.6 gehört. Eine Besetzung dieses Feldes ergibt zwar eine andere, doch keine bessere oder schlechtere Lösung, weil die dadurch eintretende Veränderung des Wertes der Zielfunktion gleich Null ist. Die Belastung des Feldes 2.6, die hier nicht im einzelnen vorgeführt werden soll, ergibt eine zweite optimale Lösungstabelle entsprechend Tabelle 35. Zu ihr gehört die Matrix der Differenzen

$$(\Delta c_{ij}) = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ \underline{0} & 0 & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

Sie zeigt an, daß es zu dieser Lösung eine zweite optimale Lösung gibt, die durch Belegung von 2.7 entsteht. Das ist jedoch die ursprüngliche optimale Lösung entsprechend Tabelle 33. Die vollständige optimale Lösung II ist in Tabelle 36 gegeben.

Das Modell des mehrstufigen Transportproblems kann auch zur Bestimmung transportoptimaler Standorte eingesetzt werden. In diesem Zusammenhang

Tabelle 35. Optimale Lösung II

	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	10	110	—	120
A_2	60	—	20	80
b_j	70	110	20	200

Tabelle 36. Vollständige optimale Lösung II

	C_3	C_4	C_5	B_6	B_7	B_8	a_i
A_1	110	10	—	10	110	—	120
A_2	—	60	20	60	—	20	80
C_3				—	110	—	110
C_4				70	—	—	70
C_5				—	—	20	20
b_j				70	110	20	200

ist es in „Die Mathematik in der Ökonomie“ [17] angeführt. Voraussetzung dazu ist, daß mögliche Standorte vorliegen, für die lediglich zu entscheiden ist, ob sie eingerichtet werden und welche Kapazität sie aufweisen müssen. Auf diese Weise kann auch das in den Tabellen 31 bis 36 behandelte Beispiel interpretiert werden. Die drei Zwischenorte C_3, C_4 und C_5 sind dann mögliche Standorte, die für ein Lager oder eine andere Einrichtung, über die die Verteilung erfolgen muß, in Frage kommen. Durch die Optimierung hat sich herausgestellt, daß in beiden optimalen Lösungen alle drei Zwischenorte benötigt werden, um eine transportminimale Verteilung zu sichern. Allerdings ist die Kapazität der Zwischenorte in den verschiedenen Lösungen unterschiedlich.

Auch hierbei muß man beachten, daß zunächst nur eine transportoptimale Lösung gefunden wurde. Bekanntlich sind jedoch die Lagerkosten je Einheit der Lagermenge von der Größe des Lagers abhängig (diese Feststellung gilt im Prinzip auch für andere Zwischeneinrichtungen), wobei sie mit steigender Kapazität sinken. Außerdem sind diese Kosten auch standortabhängig und somit nicht notwendigerweise in allen drei Zwischenorten gleich. Sollte also eine Bestimmung der Kapazität hinsichtlich eines allgemeineren ökonomischen Kriteriums optimal sein, so müßten diese Kosten oder allgemein Aufwendungen in die Bewertungszahlen und damit in die Zielfunktion eingehen. Untersuchungen in dieser Hinsicht hat Holdhaus [18] angestellt.

5.8. Verschiedene Optimalkriterien beim Transportproblem

Obwohl die Bewertungszahlen allgemein als Aufwandsgrößen eingeführt sind, wurden sie doch in allen Beispielen bisher als Entfernungen aufgefaßt. Diese Interpretation liegt bei Transportproblemen sehr nahe. Werden nämlich die Bewertungszahlen in Kilometern angegeben, so ergibt sich unbedingt eine lineare Zielfunktion, die ja zu den Voraussetzungen zur Anwendung der linearen Optimierung gehört. Gibt man gleichzeitig die Transportmengen, die auf die einzelnen Verbindungen oder Felder der Tabelle verteilt werden, in Tonnen an, so liefert die Zielfunktion den entstehenden Gesamttransportaufwand in Tonnenkilometer. Das ist eine Einheit, die für die Planung und Abrechnung von Transportleistungen von großer Bedeutung ist. Gleichzeitig kann man über einen mittleren Kostensatz je Tonnenkilometer bzw. — seitens der verladenden Wirtschaft — über entsprechende Tarifgrößen, den Aufwand in Mark der Deutschen Notenbank (MDN) umrechnen. Für die verladende Wirtschaft wird dieses Vorgehen im allgemeinen das übliche sein.

Für innerbetriebliche Optimierung in den Transportbetrieben, etwa bei der Zuführung von Lastkraftwagen zu Beladeplätzen, bei der Optimierung des Leerwagenausgleichs der Eisenbahn und ähnlichen Aufgaben kann das Entfernungskriterium natürlich auch angewendet werden. Dessenungeachtet spielen natürlich hier auch die tatsächlich für den Betrieb anfallenden Kosten eine entscheidende Rolle. Es wäre also denkbar, sie den Bewertungszahlen zugrunde zu legen. Dagegen sprechen vor allem zwei Gründe. Zum einen hängen die Kosten von der zu optimierenden Leistung im allgemeinen weder streng noch approximativ linear ab, so daß es notwendig wird, entweder nichtlinear zu optimieren oder aber zu versuchen, die nichtlineare Zielfunktion stückweise in lineare Teilfunktionen zu zerlegen. Das entspräche etwa einem Vorgehen, bei dem ein Gesamtleistungsbereich in Teilbereiche zerlegt wird. Für jeden Teilbereich wird dann mit festen Einheitskosten gerechnet, womit stückweise lineare Zielfunktionen angesetzt werden können. Zum anderen jedoch bereitet es insbesondere bei komplexen Verkehrsprozessen große Schwierigkeiten, die für bestimmte und zu optimierende Teiloperationen anfallenden Kosten exakt zu erfassen. Das ist zumindest mit einem erheblichen Erfassungsaufwand verbunden. Solange nicht das gesamte Erfassungs- und Abrechnungswesen der Volkswirtschaft auf diejenigen Kennziffern eingerichtet worden ist, die für Optimierungsrechnungen vordringlich benötigt werden und somit echte Planungsunterlagen zu liefern vermögen, wird die Erfassung von spezifischen Kostenunterlagen als Grundgrößen der Optimierung so aufwendig sein, daß man in vielen Fällen davon absieht.

Bewertungszahlen im MDN-Ausdruck werden schließlich auch benötigt, wenn zusammengesetzte Bewertungszahlen verwendet werden. Das tritt zum Beispiel ein, wenn bei einem mehrstufigen Transportproblem sowohl die Transportaufwendungen als auch die betrieblichen Aufwendungen in den Zwischenorten in den Bewertungszahlen berücksichtigt werden sollen. Hierbei können die Transportaufwendungen auch durch die Tarifdaten ausgedrückt werden.

Für einige sehr hochwertige oder verderbliche Transportgüter ist der weg- oder kostenoptimale Transportplan nicht immer der beste. Der optimale Transportplan ist dann derjenige, dessen längste Transportzeit ein Minimum ist. Über die Lösung des zeitoptimalen Transportplanes hat BARSOW [19] berichtet.

Die einschränkenden Bedingungen eines Transportproblems, das zeitoptimal gelöst werden soll, sind die gleichen wie beim üblichen Transportproblem. Sie lauten bezüglich der Aufkommensmengen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

und bezüglich der Bedarfsmengen

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j .$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Die Bewertungsmatrix besteht aus den Elementen t_{ij}, die die Zeit (in Stunden, Tagen oder anderen Einheiten) angeben, die erforderlich ist, um das Transportgut aus dem Aufkommensort A_i in den Bedarfsort B_j zu transportieren.

Zu jeder nichtnegativen Lösung (x_{ij}) des gestellten Problems gibt es eine Zeitmatrix. Die Elemente dieser Matrix sind gleich t_{ij} für diejenigen x_{ij}, die größer als Null sind, und gleich Null für die x_{ij}-Werte, die gleich Null sind, d.h. für die unbesetzten Felder. Das größte Element der Zeitmatrix der k-ten nichtnegativen Lösung (x_{ij}) sei $t_{\max}^{(k)}$. Unter allen möglichen nichtnegativen Lösungen ist diejenige die optimale, für die das maximale Zeitelement den kleinsten Wert aller maximalen Zeitelemente besitzt, d. h., für die optimale Lösung gilt

$$t_{\max}^{(\text{opt})} = \min_{k} t_{\max}^{(k)} . \tag{26}$$

Optimal ist somit jene Lösung, deren längste Transportzeit kleiner ist als die längste Transportzeit aller übrigen Lösungen.

In der bereits zitierten Quelle wird ein Verfahren angegeben, nach dem die optimale Lösung bestimmt wird. Es weicht verständlicherweise vom allgemeinen Transportalgorithmus ab.

In der skizzierten Form wird vorausgesetzt, daß die Transportzeit t_{ij} zwischen dem Aufkommensort A_i und dem Bedarfsort B_j konstant und somit unabhängig von der Transportmenge x_{ij} ist. Das bedeutet, daß immer diejenige Transportkapazität vorgehalten wird, die zur Erfüllung der optimalen Lösung notwendig ist. Da diese Forderung praktisch kaum erfüllbar ist, müssen im Modell noch diejenigen Höchstwerte für x_{ij} angegeben werden, die nicht überschritten werden dürfen, wenn die Transportzeiten t_{ij} eingehalten werden sollen.

6. Einige Anwendungsfälle der linearen Optimierung

Im Zusammenhang mit der Darstellung der verschiedenen Optimierungsmethoden wurden bereits Beispiele für die Anwendung dieser Methoden dargelegt. Um die unterschiedlichen Möglichkeiten des Aufstellens und der Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung noch mehr zu verdeutlichen, werden in diesem Abschnitt weitere Beispiele behandelt. Im einzelnen handelt es sich um

1. die Bestimmung einer kostenminimalen Brennstoffmischung,
2. die Lösung eines einfachen Zuschnittproblems und
3. die Verteilung von Arbeiten (Verrichtungen) auf verschiedene Maschinen.

Gleichzeitig sollen weitere Hinweise zur Optimierung von Lieferbeziehungen in der Volkswirtschaft und zur transportoptimalen Standortwahl gegeben werden.

6.1. Kostenminimale Brennstoffmischung

Im Abschnitt 4.4. wurde eine optimale Brennstoffmischung gesucht, die bei vorgegebenen Gesamtkosten und Einschränkungen hinsichtlich der Menge einen maximalen Heizwert besitzen sollte. Natürlich kann auch eine entsprechend umgekehrte Fragestellung beantwortet werden. In der Regel wird seitens der Technologie der Heiz- und Kraftanlagen eine Brennstoffmischung gefordert, die einen minimalen Heizwert nicht unterschreitet. Gleichzeitig sollen die Kosten dieser Mischung so gering wie möglich sein. Eine derartige Aufgabe wird nunmehr gestellt und gelöst.
Zur Bildung einer Brennstoffmischung mit minimalen Kosten stehen wiederum vier Brennstoffe zu Verfügung. Ihre Kosten betragen, umgerechnet auf die Einheit, in der Reihenfolge der Sorten 2; 1; 1,2 und 1,6. Die Brennstoffmischung muß demnach so zusammengestellt werden, daß der Ausdruck

$$2x_1 + 1x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4$$

seinen Kleinstwert annimmt. In ihm sind x_1 bis x_4 die Mengen, mit denen die einzelnen Heiz- oder Brennstoffsorten in der Mischung enthalten sind. Die Heizwerte der vier Brennstoffsorten betragen, in Tausend kcal ausgedrückt, in der gleichen Reihenfolge wie die Kosten 7, 4, 5 und 6. Der minimale Heizwert der Mischung soll — in der gleichen Einheit — 14000 nicht unterschreiten. Daraus ergibt sich als eine einschränkende Bedingung:

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geqq 14000.$$

Weitere einschränkende Bedingungen, die durch die Verfügbarkeit der Brennstoffsorten und durch andere technologische Bestimmungen gegeben sind, lauten

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &\geqq 2000 \\ x_4 &\geqq 500. \end{aligned}$$

Das gesamte mathematische Modell der Aufgabe läßt sich somit wie folgt zusammenstellen:

1. Zielfunktion

$$2x_1 + 1x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 \to \min$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & \geqq & 14000 \\ 2x_1 + x_3 & \geqq & 2000 \\ x_4 & \geqq & 500 \end{array}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_4 \geqq 0.$$

Es liegt eine Minimumaufgabe vor. Entsprechend früheren Überlegungen lösen wir nicht diese Minimumaufgabe, sondern die entsprechende Maximumaufgabe. Wir erhalten ihr Koeffizientenschema aus dem Koeffizientenschema der ursprünglichen (primalen) Minimumaufgabe, das wie folgt lautet:

7	4	5	6	14000
2	0	1	0	2000
0	0	0	1	500
2	1	1,2	1,6	min.

Indem dieses Koeffizientenschema der primalen Minimumaufgabe spaltenweise gelesen wird, erhalten wir das Koeffizientenschema der dualen Maximumaufgabe als

7	2	0	2
4	0	0	1
5	1	0	1,2
6	0	1	1,6
14000	2000	500	max.

Nunmehr sind die einschränkenden Bedingungen durch obere Begrenzungen gegeben. Um diese Ungleichungen zu Gleichungen umzuformen, werden sie durch Schlupfvariable ergänzt. Die Schlupfvariablen der dualen Aufgabe sind jedoch die echten Variablen der primalen Aufgabe. Wir bezeichnen sie deshalb, um sofort die für die ursprüngliche Aufgabe zutreffende Bezeichnung zu gebrauchen, mit x. Die echten Variablen der dualen Aufgabe sind u.

Das mathematische Modell der dualen Aufgabe lautet nunmehr

$$\begin{aligned}
7u_1 + 2u_2 \quad + x_1 \qquad\qquad &= 2\\
4u_1 \qquad\qquad + x_2 \qquad\quad &= 1\\
5u_1 + u_2 \qquad\qquad + x_3 \quad &= 1{,}2\\
6u_1 \quad + u_3 \qquad\qquad + x_4 &= 1{,}6\\
14000\,u_1 + 2000\,u_2 + 500\,u_3 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &\rightarrow \max.
\end{aligned}$$

Die Nichtnegativitätsbedingung ist nicht besonders angegeben, da sie im Dualproblem nicht erfüllt sein muß.

Die Lösung der geschilderten Aufgabe — duales Maximumproblem — erfolgt in der Tabelle 37. Nach zwei Verbesserungsschritten findet man die optimale Lösung für die primale Minimumaufgabe in der Zielfunktion des letzten Schrittes. Sie lautet

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \qquad & x_3 &= 2200\\
x_2 &= 0 \qquad & x_4 &= 500.
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion besitzt dabei den Wert 3440 (Währungseinheiten), der die Kosten der optimalen Lösung angibt. Zunächst sei geprüft, ob die optimale Lösung die einschränkenden Bedingungen der primalen Minimumaufgabe erfüllt.

$$\begin{aligned}
7\cdot 0 + 4\cdot 0 + 5\cdot 2200 + 6\cdot 500 &= 14000\\
2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2200 + 0\cdot 500 &= 2200\\
0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 2200 + 1\cdot 500 &= 500.
\end{aligned}$$

Lediglich die untere Grenze der zweiten einschränkenden Bedingung wird um 200 überschritten. Das entspricht dem Wert $u_2 = 200$ der Schlupfvariablen u_2 in der Minimumaufgabe, die in der dualen Maximumaufgabe als echte Variable auftritt. Damit zeigt sich, daß alle einschränkenden Bedingungen der ursprünglichen Minimumaufgabe erfüllt werden.

Zugleich gibt es eine Lösung der dualen Maximumaufgabe, die uns hier jedoch nicht interessiert. Sie steht an der üblichen Stelle, d. h. in den ersten beiden Spalten des letzten Schrittes. Allgemein kann man sagen, daß, wenn

Tabelle 37. Berechnung einer kostenminimalen Brennstoffmischung nach der Simplexmethode

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	
BV	0	14000	2000	500	0	0	0	0	
x_1	2	7	2	0	1	0	0	0	$\frac{2}{7}$
x_2	1	4	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$
$\leftarrow x_3$	1,2	$\boxed{5}$	1	0	0	0	1	0	$\frac{1,2}{5}$
x_4	1,6	6	0	1	0	0	0	1	$\frac{1,6}{6}$
	-3360	0	-800	500	0	0	-2800	0	
x_1	$\frac{1,6}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	1	0	$-\frac{7}{5}$	0	—
x_2	$\frac{0,2}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	—
$\rightarrow u_1$	$\frac{1,2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	—
$\leftarrow x_4$	$\frac{0,8}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	$\boxed{1}$	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{0,8}{5}$
	-3440	0	-200	0	0	0	-2200	-500	
x_1	$\frac{1,6}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	1	0	$-\frac{7}{5}$	0	
x_2	$\frac{0,2}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	
u_1	$\frac{1,2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	
$\rightarrow u_3$	$\frac{0,8}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	1	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	

die ursprüngliche Minimumaufgabe die Bestimmung einer kostenminimalen Brennstoffmischung bei einem bestimmten Mindestheizwert fordert, in der dualen Maximumaufgabe eine Brennstoffmischung bestimmt werden soll, deren Heizwert maximal ist und die gleichzeitig bestimmte Kostengrenzen einhält. Diese Kostengrenzen sind als Einheitskosten in den einschränkenden Bedingungen der dualen Maximumaufgabe vorgegeben.

6.2. Lösung eines Zuschnittproblems

Die Abmessungen der zu verarbeitenden Materialien entsprechen in der Regel nicht den Abmessungen, nach denen die Materialien in der Produktion eingesetzt werden sollen. Es ist deshalb erforderlich, entsprechende Teile oder Stücke herzustellen. Sehr deutlich wird diese Aufgabe zum Beispiel bei der Verarbeitung von Blechtafeln vorgegebener Abmessung, aus denen Tafeln kleinerer Abmessungen geschnitten werden sollen. Dabei wird angestrebt, die anfallenden Abfallstreifen insgesamt so gering wie möglich zu halten. Formulieren wir dazu eine Aufgabe:

Zur Verfügung stehen Tafeln der Abmessung 2 m · 1 m, aus denen

100 Tafeln der Abmessung 0,5 m · 0,6 m

50 Tafeln der Abmessung 0,8 m · 0,4 m

100 Tafeln der Abmessung 0,3 m · 1,0 m

geschnitten werden sollen. Die drei verschiedenen Tafelarten bezeichnen wir in der Reihenfolge der Aufzählung mit I, II und III. Es soll nun bestimmt werden, wieviel ursprüngliche Tafeln (2×1) benötigt werden, wobei gefordert wird, daß der Verschnitt (Abfall beim Zuschneiden der Stücke) möglichst gering bleibt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daß verlangt wird, die erforderlichen Stückzahlen der zuzuschneidenden Tafeln aus einer möglichst geringen Stückzahl der ursprünglichen Tafeln herzustellen.

Zur Lösung der Aufgabe müssen zunächst die möglichen Zuschnittvarianten bestimmt werden. Im Falle des gegebenen Beispiels sollen aus hier nicht näher zu erläuternden Gründen folgende sechs Zuschnittvarianten zur Auswahl stehen (Bild 13):

1) 6 Tafeln I
2) 2 Tafeln II und 4 Tafeln III
3) 2 Tafeln I, 2 Tafeln II und 2 Tafeln III
4) 5 Tafeln II
5) 4 Tafeln I und 2 Tafeln II
6) 6 Tafeln III.

Der bei den einzelnen Zuschnittvarianten anfallende Verschnitt V_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ beträgt

$$V_1 = 0{,}20,\ V_2 = 0{,}16,\ V_3 = 0{,}16,\ V_4 = 0{,}40,\ V_5 = 0{,}16$$

und $V_6 = 0{,}20$ m² je ursprüngliche Tafel.

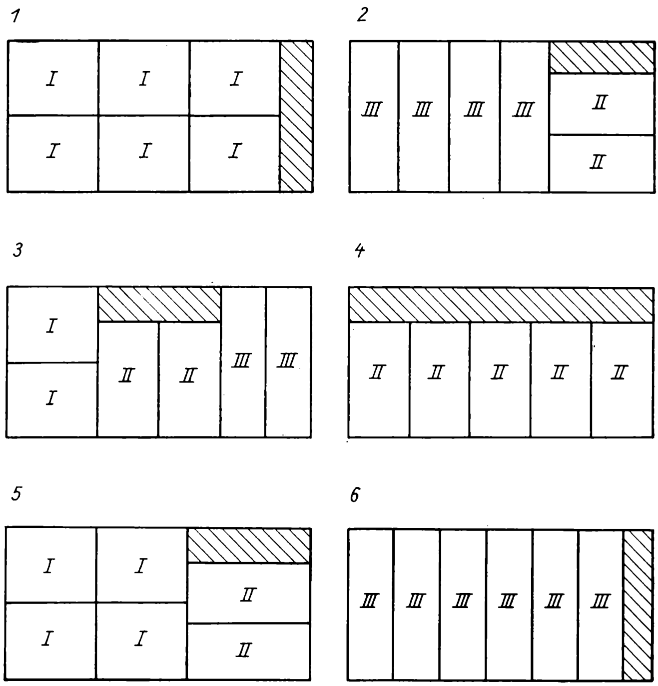

Bild 13. Mögliche Zuschnittvarianten

Die Ausgangsgrößen der Berechnung sind in Tabelle 38 zusammengestellt. Dabei werden die geforderten Stückzahlen der Tafel I bis III durch b_i $(i = 1, 2, 3)$ und der anfallende Verschnitt durch V_j angegeben. Die Koeffizienten a_{ij} geben an, wieviel Tafeln der Sorte i (I oder II oder III) bei der Zuschnittvariante j gewonnen werden können. Zu bestimmen sind die Werte x_j, die angeben, wieviel ursprüngliche Tafeln nach der Variante j zugeschnitten werden sollen.

Bei der Aufstellung des mathematischen Modells werden wir die einschränkende Bedingung hinsichtlich der geforderten Stückzahlen dadurch etwas unschärfer fassen, daß wir fordern, mindestens die angegebenen Stückzahlen zuzuschneiden. Damit stellen die Werte b_i untere Grenzen dar, die

Tabelle 38. Zusammenstellung der Zuschnittvarianten

Teil \ Variante	1	2	3	4	5	6	b_i
I	6	0	2	0	4	0	100
II	0	2	2	5	2	0	50
III	0	4	2	0	0	6	100
V_j	0,2	0,16	0,16	0,4	0,16	0,2	

nicht unterschritten werden dürfen. Das mathematische Modell lautet dann:

1. Zielfunktion

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned} 6x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 4x_5 + 0x_6 &\geqq 100 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 0x_6 &\geqq 50 \\ 0x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 6x_6 &\geqq 100 \end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0.$$

Es liegt somit wiederum eine Minimumaufgabe vor. Aus dem oben angegebenen Koeffizientenschema, bei dem wir uns die Zielfunktion unter die einschränkenden Bedingungen gesetzt denken, ergibt sich das folgende Koeffizientenschema der dualen Maximumaufgabe wie folgt:

6	0	0	1
0	2	4	1
2	2	2	1
0	5	0	1
4	2	0	1
0	0	6	1
100	50	100	max.

Nachdem die Schlupfvariablen eingeführt sind, die wiederum die echten Variablen der ursprünglichen Minimumaufgabe darstellen, ergibt sich das mathematische Modell der dualen Maximumaufgabe zu

1. Zielfunktion

$$100u_1 + 50u_2 + 100u_3 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \\ + 0x_6 \to \max$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned}
6u_1 \qquad\qquad\qquad + x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 1\\
2u_2 + 4u_3 \qquad + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1\\
2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 1\\
5u_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_4 \qquad\qquad &= 1\\
4u_1 + 2u_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 1\\
6u_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 &= 1.
\end{aligned}$$

Die so formulierte Aufgabe wird mit Hilfe des Simplexverfahrens gelöst. In Tabelle 39 ergibt sich folgende optimale Lösung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 16{,}67 \text{ (entspr. 17)}\\
x_2 &= 25\\
x_3 &= \ \ 0\\
&\cdots\\
x_6 &= \ \ 0.
\end{aligned}$$

Demnach werden 16,67 (praktisch 17) Tafeln nach der Variante 1 und 25 Tafeln nach der Variante 2 zugeschnitten. Dadurch werden alle einschränkenden Bedingungen der ursprünglichen Minimumaufgabe erfüllt. Der anfallende Verschnitt beträgt $17 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}16 = 7{,}4\,\mathrm{m}^2$. Die Spalte der Quotienten (letzte Spalte) im vorletzten Tabellenteil von Tabelle 39 enthält den kleinsten Quotienten $^1/_6$ insgesamt dreimal. Damit liegt Entartung vor. Es kommen zunächst drei Basisvariable für das Ausscheiden aus der Basis in Frage, nämlich x_2, x_3 und x_5. Da die Entartung in der dualen Aufgabe auftritt, besteht die Möglichkeit, daß die zugehörige primale Aufgabe mehrere optimale Lösungen besitzt.

Nachdem die optimale Lösung entsprechend Tabelle 39 gefunden wurde, indem x_2 aus der Basis ausschied, sollen weitere Lösungen dadurch bestimmt werden, daß auch x_3 und x_5 aus der Basis entfernt werden. Wird x_3 aus der

Tabelle 39. Lösung eines Zuschnittproblems mit der Simplexmethode

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	0	100	50	100	0	0	0	0	0	0	
$\leftarrow x_1$	1	$\boxed{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
x_2	1	0	2	4	0	1	0	0	0	0	—
x_3	1	2	2	2	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_4	1	0	5	0	0	0	0	1	0	0	—
x_5	1	4	2	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$
x_6	1	0	0	6	0	0	0	0	0	1	—
	$-\frac{100}{6}$	0	50	100	$-\frac{100}{6}$	0	0	0	0	0	
$\rightarrow u_1$	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	—
x_2	1	0	2	4	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{4}{6}$	0	2	2	$-\frac{2}{6}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$
x_4	1	0	5	0	0	0	0	1	0	0	—
x_5	$\frac{2}{6}$	0	2	0	$-\frac{4}{6}$	0	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_6$	1	0	0	$\boxed{6}$	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{6}$

Tabelle 39. (*Fortsetzung*)

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	$-\frac{200}{6}$	0	50	0	$-\frac{100}{6}$	0	0	0	0	$-\frac{100}{6}$	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	—
$\leftarrow x_2$	$\frac{2}{6}$	0	$\boxed{2}$	0	0	1	0	0	0	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_3	$\frac{2}{6}$	0	2	0	$-\frac{2}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_4	1	0	5	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_5	$\frac{2}{6}$	0	2	0	$-\frac{4}{6}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{6}$
$\rightarrow u_3$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	—
	$-\frac{250}{6}$	0	0	0	$-\frac{100}{6}$	-25	0	0	0	0	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	
$\rightarrow u_2$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{2}{6}$	
x_3	0	0	0	0	$-\frac{2}{6}$	-1	1	0	0	$\frac{2}{6}$	
x_4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{10}{6}$	
x_5	0	0	0	0	$-\frac{4}{6}$	-1	0	0	1	$\frac{4}{6}$	
u_3	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	

Tabelle 40. Lösung eines Zuschnittproblems mit der Simplexmethode (zweite optimale Lösung)

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	$-\frac{200}{6}$	0	50	0	$-\frac{100}{6}$	0	0	0	0	$-\frac{100}{6}$	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	—
x_2	$\frac{2}{6}$	0	2	0	0	1	0	0	0	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\leftarrow x_3$	$\frac{2}{6}$	0	$\boxed{2}$	0	$-\frac{2}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_4	1	0	5	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_5	$\frac{2}{6}$	0	2	0	$-\frac{4}{6}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{6}$
u_3	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	—
	$-\frac{250}{6}$	0	0	0	$-\frac{50}{6}$	0	-25	0	0	$-\frac{50}{6}$	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	
x_2	0	0	0	0	$\frac{2}{6}$	1	-1	0	0	$-\frac{2}{6}$	
$\rightarrow u_2$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	
x_4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{5}{6}$	
x_5	0	0	0	0	$-\frac{2}{6}$	0	-1	0	1	$\frac{2}{6}$	
u_3	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	

Basis entfernt, so entsteht die optimale Lösung nach Tabelle 40. Sie lautet

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 8{,}33 \text{ (entspr. 9)}\\
x_2 &= 0\\
x_3 &= 25\\
x_4 &= 0\\
x_5 &= 0\\
x_6 &= 8{,}33 \text{ (entspr. 9).}
\end{aligned}
$$

Diese optimale Lösung erfüllt ebenso wie die in Tabelle 39 enthaltene die einschränkenden Bedingungen. Der anfallende Gesamtverschnitt beträgt 7,6 m². Der geringe Unterschied zur ersten optimalen Lösung erklärt sich daraus, daß zunächst gebrochene Werte für die Variablen gefunden werden, die aufzurunden sind. Die Aufrundungsverluste sind in der zweiten optimalen Lösung etwas größer als in der ersten.

Werden x_2 und x_3 in der Basis belassen und scheidet dafür x_5 aus der Basis aus, so ergibt sich eine weitere optimale Lösung nach Tabelle 41. Diese Lösung erfüllt ebenfalls die einschränkenden Bedingungen. Der durch sie verursachte Gesamtverschnitt beträgt 7,4 m². Die dritte optimale Lösung lautet

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_4 &= 0\\
x_5 &= 25\\
x_6 &= 16{,}67 \text{ (entspr. 17).}
\end{aligned}
$$

Wir stellen die gefundenen optimalen Lösungen in der folgenden Übersicht zusammen:

Optimale Lösung nach Tabelle	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Verschnitt (m²)
39	16,67	25	0	0	0	0	7,4
40	8,33	0	25	0	0	8,33	7,6
41	0	0	0	0	25	16,67	7,4

Die errechneten Variablen sind in der Mehrzahl gebrochene Werte. Praktisch kann man natürlich keine Teiltafeln bestellen. Deshalb sind die gefundenen gebrochenen Werte auf ganze Werte aufgerundet worden. Diese einfache Methode läßt sich im allgemeinen stets anwenden. Darüber hinaus

Tabelle 41. Lösung eines Zuschnittproblems mit der Simplexmethode (dritte optimale Lösung)

		u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
BV	$-\frac{200}{6}$	0	50	0	$-\frac{100}{6}$	0	0	0	0	$-\frac{100}{6}$	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	—
x_2	$\frac{2}{6}$	0	2	0	0	1	0	0	0	$-\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_3	$\frac{2}{6}$	0	2	0	$-\frac{2}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_4	1	0	5	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
$\leftarrow x_5$	$\frac{2}{6}$	0	$\boxed{2}$	0	$-\frac{4}{6}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{6}$
u_3	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	—
	$-\frac{250}{6}$	0	0	0	0	0	0	0	-25	$-\frac{100}{6}$	
u_1	$\frac{1}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	
x_2	0	0	0	0	$\frac{4}{6}$	1	0	0	-1	$-\frac{4}{6}$	
x_3	0	0	0	0	$\frac{2}{6}$	0	1	0	-1	$-\frac{2}{6}$	
x_4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{10}{6}$	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	0	
$\rightarrow u_2$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	$-\frac{2}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	
u_3	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	

ist es auch möglich, das Optimierungsverfahren so aufzubauen, daß die Variablen in der optimalen Lösung ganzzahlige Werte annehmen (ganzzahlige Optimierung). Darüber sind in der im Literaturverzeichnis angeführten Literatur Ausführungen gemacht.
Die Zielfunktionskoeffizienten der optimalen Lösungen nach Tabelle 39 und Tabelle 41 zeigen an, daß es zu den dort angegebenen optimalen Lösungen weitere gibt. Sie enthalten jeweils eine Schlupfvariable, deren Zielfunktionskoeffizient in der optimalen Lösung Null beträgt.
In der geschilderten Aufgabe sind alle drei möglichen Variablenaustausche durchgeführt worden. Sie haben zu drei verschiedenen optimalen Lösungen geführt. Allerdings kann man diese Tatsache nicht verallgemeinern. In entarteten Fällen führt oft nur einer von zwei möglichen Variablenaustauschen zur optimalen Lösung, während der andere in einen Zyklus hineinführt, der schließlich bei der Ausgangslösung endet und somit keine optimale Lösung ergibt. In Fällen der Degeneration ist es deshalb notwendig, ein weiteres Kriterium anzuwenden, das eindeutig diejenige Basisvariable angibt, die aus der Basis ausscheiden muß, damit die optimale Lösung bestimmt werden kann.
Im dritten Teil der Tabelle 39 kann der Variablenaustausch in der zweiten, dritten und fünften Zeile erfolgen. Wir schreiben das Koeffizientenschema dieser drei Zeilen noch einmal auf, jedoch nur für die Schlupfvariablen.

$$\begin{array}{cccccc l} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{6} & \text{(2. Zeile)} \\ -\frac{2}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{6} & \text{(3. Zeile)} \\ -\frac{4}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(5. Zeile)}. \end{array}$$

Danach dividieren wir die Koeffizienten der ersten Spalte durch die Werte der in Frage kommenden Hauptelemente 2 (2. Zeile), 2 (3. Zeile) und 2 (5. Zeile). Wir erhalten die Quotienten

$$\begin{aligned} 0 : 2 &= 0 \quad \text{(2. Zeile)} \\ -\frac{2}{6} : 2 &= -\frac{1}{6} \quad \text{(3. Zeile)} \\ -\frac{4}{6} : 2 &= -\frac{2}{6} \quad \text{(5. Zeile)}. \end{aligned}$$

Diejenige Variable scheidet aus der Basis aus, in deren Zeile sich nach der angegebenen Berechnung der kleinste Quotient ergibt. Das ist demnach die in der fünften Zeile stehende Variable x_5. Ihr Austausch führt zu der in Tabelle 41 angegebenen optimalen Lösung. Sollte die Quotientenbildung wiederum zu mehreren niedrigsten Werten führen, so ist die beschriebene Berechnung von Spalte zu Spalte des Koeffizientenschemas fortzusetzen, bis unterschiedliche Quotienten und darunter nur ein Minimalwert auftreten.

6.3. Verteilung von Arbeiten (Verrichtungen) auf verschiedene Maschinen

Weiter vorn ist dargelegt worden, wie die lineare Optimierung eingesetzt werden kann, um unter bestimmten dem Betrieb gegebenen Bedingungen optimale Pläne aufzustellen. Zur Verwirklichung dieser Pläne stehen den Betrieben und der Volkswirtschaft im allgemeinen verschiedene Maschinen oder allgemein Produktionsmittel zur Verfügung. Sehr oft verrichten diese Maschinen verschiedene Arbeitsgänge, jedoch mit einem unterschiedlichen zeitlichen oder finanziellen Aufwand. Die Aufgabe besteht nun darin, ein gegebenes Produktions- oder Arbeitsprogramm so auf die verfügbaren Maschinen aufzuteilen, daß insgesamt eine minimale Auslastung des bestehenden Zeitfonds eintritt. Die Arbeiten sollen also auf denjenigen Maschinen verrichtet werden, auf denen sie den geringsten Zeitaufwand erfordern.
In Anlehnung an eine Aufgabe, die von Kadlec/Vodáček [20, S. 78ff.] behandelt wird, betrachten wir folgendes sehr einfache Beispiel:

> In einem Planungszeitraum sind drei Werkstücke 1, 2 und 3 in den Stückzahlen 200, 50 und 100 zu bearbeiten. Dazu stehen zwei Maschinen I und II zur Verfügung. Der Zeitfonds der Maschinen beträgt 11000 Minuten für die Maschine I und 6000 Minuten für die Maschine II. Die Werkstücke werden auf den Maschinen mit unterschiedlichem Zeitaufwand bearbeitet. Die Bearbeitung eines Werkstücks 1 dauert auf der Maschine I 50 Minuten und auf der Maschine II 100 Minuten. Die entsprechenden Werte für ein Werkstück 2 sind 40 und 25 Minuten. Werkstück 3 kann nur auf der Maschine II bearbeitet werden. Es erfordert 50 Minuten Bearbeitungsdauer je Werkstück.

Die für die Lösung der Aufgabe erforderlichen Ausgangsgrößen sind in Tabelle 42 zusammengestellt. Die Lösung der Aufgabe besteht in einer Verteilung der Bearbeitung der drei verschiedenen Werkstückarten auf die beiden Maschinen, durch die die entstehende Gesamtbearbeitungszeit ein Minimum wird.

Tabelle 42. Matrix der Aufwands- bzw. Bewertungszahlen und weiterer Ausgangsgrößen

Werkstücke \ Maschinen	I	II	Stückzahl
1	50	100	200
2	40	25	50
3	—	50	100
Maschinenzeitfonds	11000	6000	

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um ein Zuordnungsproblem. Hierbei wird eine nach einem vorgegebenem Kriterium optimale Zuordnung der Arbeiten (Bearbeitung der drei verschiedenen Werkstücke) zu den einsetzbaren Maschinen angestrebt. Sowohl hinsichtlich der zu verteilenden Arbeiten als auch hinsichtlich der einsetzbaren Maschinen sind gegebene Grenzen einzuhalten. Damit erhalten wir zwei Gruppen von einschränkenden Bedingungen. Die einschränkenden Bedingungen hinsichtlich der zu bearbeitenden Werkstücke lauten, wenn durch die Variable x_{ij} die Stückzahl der Werkstücksorte i bezeichnet wird, die auf der Maschine j bearbeitet werden,

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 200 \text{ (Werkstücksorte 1)} \\ x_{21} + x_{22} &= 50 \text{ (Werkstücksorte 2)} \\ x_{32} &= 100 \text{ (Werkstücksorte 3).} \end{aligned}$$

Für den Einsatz der Maschinen bestehen folgende einschränkende Bedingungen:

$$\begin{aligned} 50x_{11} + 40x_{21} &\leqq 11000 \\ 100x_{12} + 25x_{22} + 50x_{32} &\leqq 6000. \end{aligned}$$

Die Analogie zum System der einschränkenden Bedingungen beim Transportproblem ist offenkundig. Auch dort gibt es zwei Gruppen einschränkender Bedingungen, die die gleichen Variablen enthalten. Allerdings ist für dieses Zuordnungsproblem die für das Transportproblem typische Bedingung nicht erfüllt, nach der die Koeffizienten a_{ij} nur die Werte 1 oder 0 annehmen können. Es zeigt sich, daß das Transportproblem ein Spezialfall des allgemeinen Zuordnungsproblems ist. Die Zuordnung wird dort zwischen räumlich getrennten Aufkommens- und Bedarfsorten vorgenommen.

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, daß in der optimalen Lösung der Ausdruck

$$50x_{11} + 100x_{12} + 40x_{21} + 25x_{22} + 50x_{32},$$

der den erforderlichen Gesamtzeitfonds angibt, ein Minimum sein soll. Das gesamte mathematische Modell der Aufgabe lautet also:

1. Zielfunktion

$$50x_{11} + 100x_{12} + 40x_{21} + 25x_{22} + 50x_{32} \rightarrow \min$$

2. Einschränkende Bedingungen

$$\begin{aligned}
x_{11} + \quad x_{12} &= 200\\
x_{21} + \quad x_{22} &= 50\\
x_{32} &= 100\\
50x_{11} + 40x_{21} \qquad\qquad &\leqq 11000\\
100x_{12} + 25x_{22} + 50x_{32} &\leqq 6000
\end{aligned}$$

3. Nichtnegativitätsbedingung

$$x_{ij} \geqq 0.$$

Die durch dieses Modell gegebene Aufgabe wird in Tabelle 43 gelöst. Die Lösung erfolgt nach dem Simplexalgorithmus, der bereits bei der Lösung des Transportproblems angewendet wurde. Wie KADLEC/VODÁČEK [21, S. 78ff.] zeigen, kann die Aufgabe auch nach der modifizierten Distributionsmethode gelöst werden. Dabei entstehen aber Schwierigkeiten dadurch, daß die einschränkenden Bedingungen der beiden Gruppen nicht die gleiche Dimension besitzen. In unserem Beispiel werden die einschränkenden Bedingungen der ersten Gruppe durch Stückzahlen und die der zweiten Gruppen durch Minuten gegeben. Bei der Anwendung der modifizierten Distributionsmethode müssen diese unterschiedlichen Dimensionen beachtet werden.
In Tabelle 43 sind sämtliche einschränkende Bedingungen in die Rechenoperationen einbezogen. Dadurch entsteht eine relativ umfangreiche Tabelle, deren schrittweises Studium zur Festigung der Optimierungsregeln beiträgt. Eine Verkürzung der Rechenarbeiten tritt ein, wenn die einschränkende Bedingung $x_{32} = 100$ bereits in den übrigen einschränkenden Bedingungen berücksichtigt wird und dadurch explizit im Gleichungssystem nicht mehr auftritt. In der ersten Gruppe der einschränkenden Bedingungen verbleiben dann nur die beiden ersten Gleichungen. Die erste Ungleichung der zweiten Gruppe bleibt unverändert, während die zweite Ungleichung nach Abzug der 100 Einheiten des Werkstücks 3 bzw. der zu ihrer Bearbeitung

erforderlichen Gesamtzeit

$$100x_{12} + 25x_{22} \leqq 1000$$

lautet.

In der ausführlichen Schreibweise der einschränkenden Bedingungen werden in den Gleichungen der ersten Gruppe der einschränkenden Bedingungen die künstlichen Variablen k_1, k_2 und k_3 eingeführt. Da sie in der optimalen Lösung nicht auftreten dürfen, erhalten sie in der Zielfunktion den Wert M. Die Ungleichungen der zweiten Gruppe der einschränkenden Bedingungen werden durch die Schlupfvariablen w_1 und w_2 in Gleichungen überführt. Ihr Koeffizient in der Zielfunktion ist Null.

Die optimale Lösung dieses Problems lautet

$$\begin{aligned} x_{11} &= 200 \qquad & x_{22} &= 40 \\ x_{12} &= 0 & x_{32} &= 100 \\ x_{21} &= 10 & w_1 &= 600. \end{aligned}$$

Damit werden alle 200 Werkstücke des Typs 1 auf der Maschine I bearbeitet. Von den erforderlichen 50 Werkstücken des Typs 2 werden 10 auf der Maschine I und 40 auf der Maschine II bearbeitet. Schließlich werden auf der Maschine II die 100 Werkstücke des Typs 3 bearbeitet. Die Größe $w_1 = 600$ verstehen wir als auf der Maschine I bearbeitete fiktive Werkstücke, deren Bearbeitung je Stück eine Minute dauert. Damit stellt w_1 die Zeitreserve der Maschine I bei der gegebenen Lösung dar. Durch die angegebenen Werte der Variablen werden alle einschränkenden Bedingungen befriedigt, wie aus folgender Übersicht deutlich wird.

$$\begin{gathered} 200 + 0 = 200 \\ 10 + 40 = 50 \\ 100 = 100 \\ 50 \cdot 200 + 40 \cdot 10 + 600 = 11000 \\ 100 \cdot 0 + 25 \cdot 40 + 50 \cdot 100 = 6000. \end{gathered}$$

Der Wert der Zielfunktion beträgt im Minimalfall 16400 Minuten. Vorgegeben waren 17000 Minuten Gesamtzeitfonds, so daß die verbleibende Restzeit nur einen relativ kleinen Anteil am Gesamtzeitfonds ausmacht. Die angeführten drei Beispiele sollen stellvertretend für viele weitere Anwendungsfälle stehen, die ebenfalls linear entschieden werden können. So kann man allgemein von einem Mischungsproblem sprechen und damit Aufgaben meinen, bei denen eine bestimmten Bedingungen genügende Mischung hergestellt werden soll, die in der Regel ein Aufwandsminimum

Tabelle 43. Aufteilung von Arbeiten auf verschiedene Maschinen

		x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{32}	k_1	k_2	k_3	w_1	w_2	
		-50	-100	-40	-25	-50	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	
BV	$350M$	M -50	M -100	M -40	M -25	M -50	0	0	0	0	0	
k_1	200	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	—
$\leftarrow k_2$	50	0	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	50
k_3	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	—
w_1	11000	50	0	40	0	0	0	0	0	1	0	—
w_2	6000	0	100	0	25	50	0	0	0	0	1	240
	$300M$ $+1250$	M -50	M -100	-15	0	M -50	0	$-M$ $+25$	0	0	0	
$\leftarrow k_1$	200	$\boxed{1}$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	200
$\rightarrow x_{22}$	50	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	—
k_3	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	—
w_1	11000	50	0	40	0	0	0	0	0	1	0	220
w_2	4750	0	100	-25	0	50	0	-25	0	0	1	—
	$100M$ $+11250$	0	-50	-15	0	M -50	$-M$ $+50$	$-M$ $+25$	0	0	0	
$\rightarrow x_{11}$	200	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	—
x_{22}	50	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	—
k_3	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	100
w_1	1000	0	-50	40	0	0	-50	0	0	1	0	—
$\leftarrow w_2$	4750	0	100	-25	0	$\boxed{50}$	0	-25	0	0	1	95
	$5M$ $+16000$	0	$-2M$ $+50$	$0{,}5M$ -40	0	0	$-M$ $+50$	$-0{,}5M$	0	0	$-0{,}02M$ $+1$	
x_{11}	200	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	—
x_{22}	50	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	50
$\leftarrow k_3$	5	0	-2	$\boxed{0{,}5}$	0	0	0	0,5	1	0	$-0{,}02$	10
w_1	1000	0	-50	40	0	0	-50	0	0	1	0	25
$\rightarrow x_{32}$	95	0	2	$-0{,}5$	0	1	0	$-0{,}5$	0	0	0,02	—

Tabelle 43. (*Fortsetzung*)

		x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{32}	k_1	k_2	k_3	w_1	w_2	
	16400	0	-110	0	0	0	$-M+50$	$-M+40$	$-M+80$	0	$-0{,}6$	
x_{11}	200	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	
x_{22}	40	0	4	0	1	0	0	0	-2	0	0,04	
$\rightarrow x_{21}$	10	0	-4	1	0	0	0	1	2	0	$-0{,}04$	
w_1	600	0	110	0	0	0	-50	-40	-80	1	1,6	
x_{32}	100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	

erfordert. Für Futter- und Brennstoffmischungen haben wir diesen Fall besprochen. Aber ebenso wäre es möglich, in der beschriebenen Weise optimale Betonmischungen oder optimale Kunstdüngermischungen zu berechnen, die es gestatten, die verfügbaren Einzelbestandteile der Mischung bestmöglich auszunutzen. Ähnliche Betrachtungen wären zum Zuschnittproblem anzuführen. In der Blechverarbeitungsindustrie, in der Holzindustrie, aber vor allem auch in der Lederindustrie bzw. der lederverarbeitenden Industrie tritt dieses Problem ständig auf. Seine mathematische Lösung ist im Prinzip möglich. Schwierigkeiten bereitet jedoch möglicherweise die Ermittlung der in Frage kommenden Zuschnittvarianten. Insbesondere dann, wenn keine einfachen Figuren zugeschnitten werden sollen, erfordert die Ermittlung dieser Varianten viel Aufwand. Er kann vermindert werden, wenn durch die Herstellung von Typenprogrammen prinzipielle Veränderungen der zuzuschneidenden Teile nur noch selten vorkommen.

Von sehr großer allgemeiner Bedeutung ist die Zuordnung bestimmter Arbeiten auf einsetzbare Maschinen. Dieses sehr einfache und leicht überschaubare Problem kompliziert sich mit der Zunahme der Arbeiten und der Zunahme der einsetzbaren Maschinen sehr schnell, so daß sich der Einsatz der linearen Optimierung lohnt. Aber dieses Problem hat eine große überbetriebliche Bedeutung. Im Grunde kann jegliche Arbeitsteilung zwischen den produzierenden Einheiten auf diese Weise gefunden und bestimmt werden. Anstelle der drei Werkstücke im Beispiel können wir die Produktion von drei Erzeugnissen annehmen, die in verschiedenen Betrieben einer VVB hergestellt werden können. Es ist, da die einzelnen Betriebe diese Erzeugnisse mit unterschiedlichem Aufwand oder mit unterschiedlichem Gewinn herstellen, die optimale Zuordnung zwischen den Erzeugnissen und den Betrieben zu suchen. Der Rechengang ist im Prinzip unverändert gegenüber dem, der bei der Zuordnung zwischen Werkstücken und Maschinen angewendet wurde. Dagegen bereitet die Bestimmung der Modellparameter jetzt etwas mehr Aufwand als in dem genannten Beispiel. Größen, die die Beanspruchung der Produktionskapazität durch die verschiedenen Erzeugnisse in den einzelnen Betrieben anzeigen, und solche, an denen die Optimalität der Lösung bestimmt werden kann, sind auf der betrieblichen Ebene bereits komplex und umschließen meist eine größere Anzahl Einzelangaben. Das Problem besteht weniger darin, diese Einzelangaben zu finden, als darin, daß sie in der richtigen Gewichtung in die komplexen Größen (z. B. a_{ij} und c_j) eingehen. Diese Gewichtung muß für die Betriebe, die in das Optimierungsprogramm einbezogen werden, gleich sein. Es zeigt sich dabei wieder, welch große Bedeutung einer exakt betriebenen statistischen und finanziellen Abrechnung zukommt, wenn Ausgangsgrößen für Optimierungsrechnungen gesucht werden.

6.4. Optimierung der Lieferbeziehungen in der Volkswirtschaft

Auf die große Bedeutung der Optimierung von Lieferbeziehungen und Austauschrelationen in den verschiedenen Ebenen der Volkswirtschaft wurde bereits im Abschnitt 5.1. hingewiesen. Da weiterhin die Algorithmen zur Lösung des Transportproblems besprochen wurden, sollen nunmehr noch einige Fragen erörtert werden, die mit der Durchführung der Transportoptimierung zusammenhängen. Über die Auswahl der optimierungsfähigen und optimierungswürdigen Arten von Gütern wurde bereits gesprochen. Diese Auswahl ist mit größter Sorgfalt vorzunehmen, um nachträgliche Korrekturen des optimalen Programms zu vermeiden. Sofern es seitens der Verkehrsträger erforderlich ist, müssen weiterhin deren technologischen Forderungen berücksichtigt werden. Im Zusammenhang mit der Optimierung der Lieferbeziehungen für Massengüter spielt insbesondere die Ganzzugbildung eine entscheidende Rolle. Da die Eisenbahn im Interesse einer einfachen und damit flüssigen Betriebsabwicklung daran interessiert ist, möglichst viele Ganzzüge zu bilden und dadurch die mit der Bildung und Auflösung von Zügen verbundenen Arbeiten auf ein Mindestmaß zu verringern, tritt hier praktisch ein weiteres Optimierungskriterium auf. Das ursprüngliche Kriterium besteht im Transportaufwand. In der Regel wird die Ganzzugbildung einen Teil der Vorteile, die die bezüglich des Transportaufwands optimale Lösung bietet, wieder aufheben. Dafür bietet sie der Eisenbahn die Möglichkeit einer besseren Betriebsabwicklung, die sich als allgemeine Beschleunigung des Transportprozesses für die gesamte Volkswirtschaft positiv auswirkt. Im Zusammenhang mit der Betriebsabwicklung bei den Verkehrsträgern ergibt sich aus der Optimierung der Lieferbeziehungen die Möglichkeit, daran anschließend eine Optimierung des Fahrzeugeinsatzes vorzunehmen und somit dem volkswirtschaftlichen Vorteil einen betrieblichen Vorteil zur Seite zu stellen.

Ein generell bindender Zeitraum für die Optimierung von Lieferbeziehungen kann nicht angegeben werden. HOFMANN/SCHREITER/VOGEL [22, S. 39] weisen auf die Notwendigkeit hin, verschiedene Optimierungszeiträume zu verwenden. Dabei werden kurzfristige, operative Optimierungen mit einer sehr weitgehenden räumlichen Gliederung der Empfangs- und Versandorte verbunden sein, während bei langfristigen Optimierungen in dieser Hinsicht eine Konzentration auf wenige Gebiete erforderlich und unumgänglich ist.
Auf spezifische Untersuchungen im Zusammenhang mit der Optimierung der Lieferbeziehungen für bestimmte Massengüter soll hier nicht eingegangen werden. HOFMANN/SCHREITER/VOGEL [23, S. 57ff.] geben eine ausführliche Darstellung aller Überlegungen, die zum Beispiel mit der Optimierung der Lieferbeziehungen für Kohle aufgetreten sind. Insbesondere wird dabei deutlich, daß die gesamte erzielbare Einsparung an Aufwand nicht allein diejenige ist, die durch die Zielfunktion erfaßt wird. Obwohl es sich dabei um die für die Volkswirtschaft entscheidende Einsparung an Transportleistung und somit an Frachtgebühren handelt, treten ihr doch weitere nennenswerte Einsparungen zur Seite. Es ist für die Eisenbahn entscheidend, daß gleichzeitig die mittlere Umlaufzeit der Güterwagen verringert und der Einsatz von Triebfahrzeugen vermindert werden können.
Die Untersuchungen und Berechnungen, die in der bereits genannten Broschüre von HOFMANN/SCHREITER/VOGEL [24] angestellt worden sind, haben ein weiteres typisches Ergebnis der Optimierung der Lieferbeziehungen deutlich gemacht. Dieses Ergebnis besteht in einer wesentlichen Vereinfachung der Transportbeziehungen, d. h. auch in deren Verringerung. Untersuchungen nichtoptimaler Lieferbeziehungen ergeben sehr oft ein Bild, das nahe an den Zustand „Jeder liefert an jeden“ heranreicht. Dagegen ist bekannt, daß eine optimale Transportgestaltung bzw. Festlegung der Lieferbeziehungen stets nicht mehr als $(m + n - 1)$ Transportbeziehungen enthalten kann. Nehmen wir also an, daß ein Massengut an 30 Orten aufkommt und nach 50 Orten befördert werden soll. Die Orte können hier als Transportschwerpunkte oder Zentren zugehöriger Ortemengen aufgefaßt werden. Dann wird im optimalen Transportplan die Zahl der benötigten Transportbeziehungen nicht größer als 79 sein. Möglich sind jedoch $30 \times 50 = 1500$ Lieferbeziehungen. Die Zahl der vor der Optimierung bestehenden Beziehungen geht im allgemeinen weit über die Zahl der erforderlichen Beziehungen hinaus. Ihre Verringerung führt zu einer wesentlichen organisatorischen Vereinfachung des gesamten Transportprozesses. Vereinfachung der Organisationsbeziehungen bedeutet jedoch gleichzeitig, daß die Leitungstätigkeit mehr als bisher auf wenige und entscheidende Punkte konzentriert werden und somit rationeller gestaltet werden kann. Der durch die organisatorische Vereinfachung des Systems der Lieferbeziehungen eintretende Nutzen sowohl bei den Versendern und Empfängern der Massen-

güter als auch bei den Verkehrsträgern wird sehr oft nicht gebührend beachtet. Da kaum Anhaltspunkte über den Aufwand von Organisationsarbeiten vorliegen, ist es schwierig, den Nutzen, der durch die Vereinfachung der Transportbeziehungen für den Leitungsprozeß entsteht, zahlenmäßig auszudrücken. Eben deshalb soll an dieser Stelle besonders darauf hingewiesen werden.

Neben der Optimierung der Lieferbeziehungen für Kohle verspricht insbesondere die von Baumaterialien nennenswerte ökonomische Erfolge. Solche Optimierungen sind bereits für verschiedene Baumaterialien durchgeführt worden. Die dabei nachgewiesenen Einsparungsmöglichkeiten sind beachtlich. In einer Zusammenstellung bei Hofmann/Schreiter/Vogel [25, S. 87] ist ersichtlich, daß beispielsweise folgende Einsparungsmöglichkeiten auftreten:

1. Optimierung des Schottertransports für die DDR, Einsparung an Transportleistung 2,6 Prozent,
2. Optimierung des Transports von Hochofenzement in der DDR, Einsparung an Transportleistung 4 Prozent,
3. Optimierung von Mauerziegeltransporten im Bezirk Dresden, Einsparung an Transportleistung 20,6 Prozent,
4. Optimierung von Kiestransporten im Raum Dresden, Einsparung an Transportleistung 17 Prozent.

Zu den genannten Einsparungen sind nun noch diejenigen hinzuzuzählen, die bei den Transportbetrieben selbst auftreten und die auf die Vereinfachung der Lieferbeziehungen zurückzuführen sind.

Diese kurzen Ausführungen sollen die weiter vorn aufgestellte Behauptung unterstützen, daß die Herstellung von optimalen Lieferbeziehungen durch die Anwendung des Transportproblems nicht zuerst eine Aufgabe der Transportbetriebe ist. Der entscheidende Nutzen dieser Optimierungen ist volkswirtschaftlicher Art. Deshalb obliegt den Versendern von Massengütern die Aufgabe, die Beziehungen zu den Empfängern zu optimieren und auf diese Weise sowohl den Aufwand der Gütertransporte zu verringern wie auch den gesamten Austauschprozeß zu vereinfachen.

6.5. Transportoptimale Standortwahl

Insbesondere im Zusammenhang mit der Optimierung perspektivischer Güterströme spielt die Festlegung geeigneter Standorte für neue Versender und Empfänger von Massengütern eine große Rolle. Da meist noch keine Kostenparameter vorliegen, kommt hier vorwiegend die Bestimmung transportoptimaler Standorte in Frage. Als Optimalkriterium kommt dabei die Entfernung in Ansatz.

Bei der transportoptimalen Standortbestimmung gelten die gleichen Grundsätze, die auch für die eigentliche Transportoptimierung gültig sind. Seitens des Transportproblems stehen vornehmlich zwei Verfahren zur Verfügung, die zur Lösung von Standortaufgaben geeignet sind. In beiden Fällen wird jedoch vorausgesetzt, daß bestimmte Standortvarianten bereits bekannt sind und die Aufgabe darin besteht, die unter dem Gesichtswinkel des Transportaufwandes günstigsten Kapazitäten dieser Standorte zu berechnen. Ergeben sich dabei für einzelne Orte die Kapazitäten Null, so werden die zugehörigen Standorte nicht genutzt, weil sie dem Minimum des Transportaufwands widersprechen.

Eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung derartiger Kapazitäten liefert das sogenannte offene Transportproblem. Bei ihm sind neben den Aufwandszahlen c_{ij} lediglich die Bedarfsmengen b_j der Empfängerorte gegeben. Die Aufkommensmengen a_i sind nicht vorgegeben. Sie sind so zu bestimmen, daß der Transportaufwand zur Verwirklichung der entstehenden Austauschbeziehungen ein Minimum wird. Somit wird die optimale Belegung jedem Bedarfsort nur einen Aufkommensort zuordnen, und zwar denjenigen, der von dem betreffenden Bedarfsort die kürzeste Entfernung aufweist. Betrachten wir dazu folgendes einfache Beispiel:

Der Bedarf an vier Bedarfsorten B_1 bis B_4 beträgt

$$b_1 = 200,\ b_2 = 50,\ b_3 = 650 \text{ und } b_4 = 150$$

Mengeneinheiten. Zur Deckung dieses Bedarfs kommen drei Aufkommensstandorte A_1 bis A_3 in Frage, deren Aufkommen a_1 bis a_3 jeden der Bedarfswerte zu erreichen gestattet. Mit anderen Worten: Hinsichtlich des Aufkommens bestehen im Rahmen der vorliegenden Bedarfswerte keine einschränkenden Bedingungen. Die Matrix der Aufwandszahlen lautet

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 12 \\ 15 & 8 & 10 & 6 \\ 7 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung wird hier gefunden, indem in jeder Spalte die niedrigste Aufwandszahl gesucht wird. Sie bestimmt den Aufkommensort, der zu dieser Spalte am günstigsten liegt. In der Matrix handelt es sich

in der ersten Spalte um den Wert c_{11},
in der zweiten Spalte um den Wert c_{32},
in der dritten Spalte um den Wert c_{13},
in der vierten Spalte um den Wert c_{24}.

Damit entstehen sofort folgende günstigste Lieferverbindungen:

A_1 liefert an B_1 200 und an B_3 650, zusammen also 850 Einheiten,
A_2 liefert an B_4 150 Einheiten,
A_3 liefert an B_2 50 Einheiten.

Anschließend wäre zu prüfen, ob es insgesamt sinnvoll ist, die Aufkommensorte A_2 und A_3 mit der relativ niedrigen Kapazität von 150 bzw. 50 Einheiten bestehen zu lassen. Die Erhöhung des Transportaufwandes bei einer Konzentration des Aufkommens auf A_1 muß dabei geringer sein als die Verringerung der Aufkommenskosten, die durch die Konzentration erzielt wird.

In der beschriebenen Form tritt das offene Transportmodell allerdings selten auf. Dagegen werden sowohl natürliche wie auch technische und ökonomische Gründe dazu führen, für das Aufkommen in den möglichen Aufkommensorten bestimmte Höchstgrenzen vorzusehen. Wir erhalten dabei ein Transportproblem, bei dem die einschränkenden Bedingungen seitens der Bedarfsorte als Gleichungen und seitens der Aufkommensorte als Ungleichungen (Begrenzungen nach oben) vorliegen. Die Lösung dieses Problems ergibt zugleich die Lösung des Standortproblems in der w. o. angedeuteten Weise. Weiterhin besteht die Möglichkeit, daß zu einer gegebenen Menge von Aufkommensorten lediglich ein weiterer hinzukommen soll, um ein Aufkommensdefizit auszugleichen. Stehen dabei mehrere Standortvarianten zur Wahl und soll gesichert sein, daß die fehlende Aufkommensmenge nur von einem der möglichen neuen Aufkommensorte geliefert wird, so ist eine entsprechende Begrenzung der Variablen, die sich auf die neuen Aufkommensorte beziehen, vorzunehmen.

Im Zusammenhang mit der Behandlung des mehrstufigen Transportproblems wurde bereits darauf hingewiesen, daß auch dieses mathematische Modell der Transportoptimierung geeignet ist, transportoptimale Standorte zu bestimmen. In diesem Sinne wird dieses Modell auch in „Anwendung der Mathematik in der Ökonomie“ [26] angewendet. Die Problematik deckt sich im Prinzip mit der bereits geschilderten: Aus einer auf Grund sachlicher Überlegungen gewonnenen Menge möglicher Standorte sind diejenigen auszuwählen, die hinsichtlich des mit ihrer Nutzung verbundenen Transportaufwandes die günstigsten sind. Ihre Kapazität ist zu berechnen. Beim mehrstufigen Transportproblem und seiner Anwendung für Standortbestimmungen kann es eintreten, daß sich die Mengen des Transportgutes in den Zwischenorten verändern. So wird zum Beispiel die Menge des auf die Konservenfabriken zu verteilenden Obstes nicht mit der Menge der Konserven übereinstimmen, die aus den Konservenfabriken geliefert werden und zu verteilen sind. In diesem Falle ist es zweckmäßig, durch entsprechende Koeffizienten zunächst eine Umrechnung auf eine einheitliche Basis vorzunehmen und die durch die Optimierung gewonnenen Liefermengen nachträglich wieder auf die ursprüngliche Basis umzurechnen.

7. Einsatz der modernen Rechentechnik für die Lösung von Optimierungsaufgaben

Die in diesem Buch behandelten Beispiele dienen in erster Linie der Demonstration und Erläuterung der verwendeten Optimierungsalgorithmen. Sie sind in der Regel so einfach gewählt, daß in einigen Fällen auch ohne Kenntnis spezieller Optimierungsverfahren, lediglich durch gründliches Probieren, eine optimale Lösung gefunden werden könnte. Diese einfachen Beispiele wurden gewählt, um den Leser die Möglichkeit zu geben, die Richtigkeit der Ergebnisse auch noch auf anderem Wege zu prüfen.
Zweifellos ist das eine sehr weitgehende Vereinfachung der Wirklichkeit. Die in der Praxis auftretenden Optimierungsprobleme übertreffen nach Umfang und Struktur die hier dargestellten Aufgaben um ein Vielfaches. Sie werden deshalb nur zu einem Teil im Betrieb selbst gelöst werden können, dann nämlich, wenn das Umfang und Struktur der Aufgabe zulassen. Optimierungen jedoch, die beispielsweise beim Transportproblem die Lieferbeziehungen im Territorium der gesamten DDR betreffen, sind manuell mit einem vertretbaren Aufwand nicht mehr lösbar. Sie erfordern den Einsatz von geeigneten Rechenhilfsmitteln, in der Regel von elektronischen Rechenautomaten.
In der DDR steht für die Lösung umfangreicher Optimierungsaufgaben vorwiegend der Rechenautomat ZRA 1 zur Verfügung. Seine Leistungsfähigkeit ist bestimmt durch die Speicherkapazität von 4096 Plätzen und durch die Operationsgeschwindigkeit von etwa 130 Operationen je Sekunde. Den Rechenzentren müssen folgende Ausgangsdaten geliefert werden, wenn ein Optimierungsproblem auf dem Rechenautomaten gelöst werden soll:

1. die Koeffizienten der Zielfunktion,
2. die Koeffizienten der Ungleichungen bzw. Gleichungen der einschränkenden Bedingungen,
3. die absoluten Glieder der Ungleichungen bzw. Gleichungen der einschränkenden Bedingungen.

Eine Vorstellung von der Größenordnung der lösbaren Aufgaben, bezogen auf den ZRA 1, geben folgende Beziehungen:

Bei allgemeinen Optimierungsaufgaben müssen die Zahl m der einschränkenden Bedingungen und die Zahl n der Variablen der Ungleichung

$$(m + 2)(n + 3) \leqq 3755$$

genügen. So könnte etwa eine Aufgabe mit 33 einschränkenden Bedingungen und 104 Variablen gelöst werden. Für die Lösung von Transportproblemen sind nach HOFMANN/SCHREITER/VOGEL [27, S. 28ff.] mehrere Verfahren für den Automaten ZRA 1 programmiert, die sich vornehmlich aus der modifizierten Distributionsmethode (Methode der Potentiale) und verschiedenen Möglichkeiten der Bestimmung der Ausgangslösung zusammensetzen. Für die Anwendung der MODI und die Bestimmung der Ausgangslösung nach der Häufigkeitsmethode beträgt die Kapazität des Rechenautomaten ZRA 1

$$(m + 4)(n + 6) \leqq 3735.$$

Dabei ist m die Zahl der Aufkommens- und n die Zahl der Bedarfsorte.

Für die Lösung von Transportproblemen benötigen die Rechenzentren die Koeffizienten der Zielfunktion, die Aufkommenswerte und die Bedarfswerte. Des Überblicks wegen sei angeführt, daß der Automat ZRA 1 ein Transportproblem mit 13 Aufkommens- und 55 Bedarfsorten in ca. 1 Stunde und eine Simplexaufgabe mit 9 Gleichungen und insgesamt 118 Variablen in ca. 2 Stunden löst. Ein- und Ausgabezeit sind einbegriffen.
Obwohl bereits nennenswerte Optimierungsaufgaben in der Wirtschaftspraxis gelöst worden sind, sind für die Zukunft derartige Aufgaben in größerer Zahl und in größerem Umfang zu erwarten. Von einer durchgängigen Anwendung der linearen Entscheidungsmodelle für die Planung und Leitung der Volkswirtschaft auf allen ihren Ebenen kann zur Zeit noch nicht gesprochen werden. Die Lösung der ständig komplizierter werdenden Entscheidungsprobleme unter Berücksichtigung der zunehmenden Zahl von Bedingungen wird in kurzer Zeit dazu führen, daß die Anforderungen an die Rechenzentren über das heutige Maß hinausgehen. Auch die Kapazität der heute verfügbaren Rechenautomaten wird dann nicht mehr ausreichen. Insbesondere für volkswirtschaftliche Optimierungen werden Rechenautomaten mit einer Kapazität eingesetzt werden, die ein Vielfaches der Kapazität der zur Zeit eingesetzten Automaten beträgt. Als Beispiel sei die im Institut für Datenverarbeitung in Dresden installierte Maschine National Elliot 503 genannt, die Simplexprogramme in der Größenordnung $m + n \leqq 900$ (bei Verwendung des Hauptspeichers) und $m(n + 1) \leqq 49000$ (bei Verwendung des Zusatzspeichers) zu bearbeiten gestattet. Transportprogramme unterliegen den Grenzen $m + 2n \leqq 4100$ bei Verwendung des Hauptspeichers und $m \cdot n \leqq 49000$ bei Verwendung des Zusatzspeichers. Die Symbole m und n entsprechen den weiter oben angegebenen Zeichen.

Die zunehmende Anwendung linearer Entscheidungsmodelle stellt jedoch auch an die Leitungskräfte der Wirtschaft steigende Anforderungen. Diese können nur erfüllt werden, wenn die Leitungskräfte sich rechtzeitig mit den grundlegenden Verfahren der linearen Optimierung vertraut machen. Sie müssen in die Lage versetzt werden, die Optimierungswürdigkeit eines Problems sachkundig zu beurteilen und alle Vorbereitungsarbeiten vornehmen zu können. Erst dadurch werden die Voraussetzungen für einen effektiven Einsatz größerer und leistungsfähigerer Rechenautomaten geschaffen.

Literaturverzeichnis

I. Verwendete Literatur

[1] KREKÓ, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964
[2] KREKÓ, B.: Wie [1]
[3] SADOWSKI, W.: Theorie und Methoden der Optimierungsrechnung in der Wirtschaft. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1963
[4] KREKÓ, B.: Wie [1]
[5] KREKÓ, B.: Wie [1]
[6] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: Optimierung der Lieferbeziehungen und des Transports. Berlin: TRANSPRESS VEB Verlag für Verkehrswesen 1964
[7] FINDEISEN, W. und K. J. RICHTER: Rationalisierung der Faserholzbeförderung durch die Anwendung der elektronischen Rechentechnik (lineare Programmierung) im Bereich der Zellstoff- und Papierindustrie der DDR. — Zellstoff und Papier Jg. 11 (9162) Nr. 12, S. 475—482
[8] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: Mathematische Methoden zur Lösung von Transportproblemen. Berlin: TRANSPRESS VEB Verlag für Verkehrswesen 1964
[9] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[10] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[11] KREKÓ, B.: wie [1]
[12] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[13] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[14] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[15] Zentralinstitut für Automatisierung (ZIA): Anwendung der Mathematik in der Ökonomie, Dresden: 1962 (als Manuskript gedruckt)
[16] KORDA, B.: Das mehrdimensionale Transportproblem. In: Elektronische Rechentechnik im Betrieb und in der Volkswirtschaft. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1961
[17] Zentralinstitut für Automatisierung (ZIA): wie [15]
[18] HOLDHAUS, R.: Ermittlung optimaler Betriebsgrößen und Standortverteilungen bei mehrstufigen Produktions- und Transportbeziehungen. — Wirtschaftswissenschaft Jg. 11 (1963) Nr. 9, S. 1400—1408
[19] BARSOW, A. S.: Was ist lineare Programmierung? Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft in Zusammenarbeit mit der Akademischen Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. 1962
[20] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[21] KADLEC, V. und L. VODÁČEK: wie [8]
[22] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: wie [6]

[23] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: wie [6]
[24] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: wie [6]
[25] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: wie [6]
[26] Zentralinstitut für Automatisierung (ZIA): wie [15]
[27] HOFMANN, K., SCHREITER, D. und H. VOGEL: wie [6]

II. Weitere Literaturhinweise

[28] BADER, H. und S. FRÖHLICH: Mathematik für Ökonomen, Einführung. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1964
[29] CHURCHMAN, C. W., ACKOFF, R. L. und E. L. ARNOFF: Operations Research. — Eine Einführung in die Unternehmensforschung. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1966
[30] KILIAN, R. und W. MATTHIES: Mathematische Methoden in Organisation und Planung. Anwendung in Maschinenbaubetrieben. Berlin: VEB Verlag Technik 1963
[31] Linearprogrammierung im Transportwesen. Über die Anwendung mathematischer Methoden in der Wirtschaftsplanung. Beiträge aus der ČSSR, Ungarn und der Sowjetunion. Mit einer Einführung von G. POTTHOFF. Berlin: TRANSPRESS VEB Verlag für Verkehrswesen 1961
[32] Mathematik und Technik. Vorträge, geh. auf d. Konferenz d. Forschungsgemeinschaft d. Dt. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin am 8. und 9. 12. 1961 in Berlin-Adlershof, Berlin: Akademie-Verlag 1962
[33] Mathematik und Wirtschaft, Bd. 1. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1963
[34] Mathematik und Wirtschaft, Bd. 2. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1964
[35] Mathematik und Wirtschaft, Bd. 3. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1966
[36] PIEHLER, J.: Einführung in die lineare Optimierung (lineare Programmierung). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962

Sachwortverzeichnis

Ablaufschema der Distributionsmethode 108
Ablaufschema der Simplexmethode 52, 53
Achsenabschnittsgleichung 27
Aufkommensort 84, 121
Aufkommenswert 154
Aufwandskoeffizient 19
Aufwands- oder Bewertungszahlen 79ff.
Ausgangsdaten, Sammlung der 20
Ausgangslösung 91, 92

Basis 37, 40
Basisdarstellung der einschränkenden Bedingungen 36
— — der Zielfunktion 38, 40
Basislösung 35, 41, 46, 49, 51
Basisvariable 37, 38, 39, 40, 42, 46, 87
Bedarfsort 84, 120
—, fiktiver 111
Bedarfswert 154
Bedingungen, einschränkende 14, 35, 54, 80, 81, 153
Bereich der zulässigen Lösungen 24, 27, 42, 56
Bewertungszahlen 94, 116, 122
Bewertungszahl, fiktive 94
Brennstoffmischung, kostenminimale 128ff.

Degeneration 46
Distributionsmethode 90, 91, 111, 118
—, modifizierte 90, 154
Dualaufgabe (duale Aufgabe) 54ff.
Dualität 54, 58

Eckfelder 102
Einsatzkoeffizient 19
Entartung, s. Degeneration
Entfernungsmatrix 90
Entscheidung, ökonomische 13
—, optimale 10, 11, 29
Entscheidungen, mögliche 9
Entscheidungs-probleme, ökonomische 11
—-pyramide 12
—-situationen 12
—-tätigkeit 9

Gebiet der nichtzulässigen Lösungen 24
Gesamtaufkommen 80
Gesamtbedarf 80
Güter, austauschbare oder ersetzbare 77

Hauptelement 46

Koeffizientenmatrix 50, 51, 89

Lösung, degenerierte 97
—, optimale 27, 31, 36, 88
—, zulässige 24, 27, 35, 36, 97
Lösungen, degenerierte, beim Transportproblem 109
—, mehrere optimale 71, 72

Matrix der fiktiven Bewertungszahlen 98
— — tatsächlichen Bewertungszahlen 99
Maximumaufgabe der linearen Optimierung 17, 19, 30ff., 50
— — Simplexmethode 53
—, duale 57, 89, 129
Maximum-Problem 18
Methode des doppelten Vorzugs 91ff., 119
Minimumaufgabe 19, 29ff., 54ff., 75, 81
—, primale 129
Modell, mathematisches 14, 65, 79
—, mathematisches, des Transportproblems 79, 80, 81

Nichtbasisvariable 37 ff.
Nichtnegativitätsbedingung 17, 20, 35, 54, 81, 82
Nordwest-Ecken-Regel 91, 93
Normalaufgabe, modifizierte 76
Normalform 33, 45, 51, 58, 63
Normalform der einschränkenden Bedingungen 40
— — Maximumaufgabe 34, 38

Optimalitätskriterium (Optimalkriterium) 10, 11, 13, 14, 125 ff.
Optimierung der Lieferbeziehungen 148 ff.
—, lineare 11, 12
—, parametrische 60
Optimierungsverfahren 11

Plan, optimaler 10, 13
Potentiale 94 ff.
Produktionsplan, optimaler 10
Programm, optimales 10
Prohibitivsätze 83

Randwerte, s. Potentiale
Rechentechnik 153 ff.

Schlupfvariable 33 ff., 83 ff.
Simplex 33
Simplex-Algorithmus 35, 41
Simplexkriterium 38
Simplexmethode 33 ff., 82 ff.
Simplextabelle 45 ff., 83 ff.
Simplex-Theorem 36
Standorte, transportoptimale 124, 150 ff.

Transportbeziehungen, optimale 78
Transportoptimierung 77, 78, 79
Transportplan, optimaler 10
—, zeitoptimaler 127
Transportproblem der linearen Optimierung 77, 79 ff., 154
—, mehrstufiges (mehrdimensionales) 119 ff., 152
—, offenes 151
—, zweistufiges 121, 122
Transportprobleme mit zusätzlichen Einschränkungen 116 ff.
Turmzug 101, 102, 103

Unausgeglichenheit zwischen Aufkommen und Bedarf 111 ff.

Variable, begrenzte 63, 64
—, künstliche 36, 56, 57, 67, 75, 83, 87
Variablenaustausch 39, 52, 54
Verfahren, graphisches 22 ff.
Verteilungskoeffizient 73, 74
Vogelsche Approximationsmethode (VAM) 91

Zielfunktion 15, 17, 19, 25, 34, 46, 54, 61, 80, 81, 85, 153, 154
Zuordnung 9
Zuordnungsproblem 143
Zuordnungsvarianten 9
Zuschnittproblem 132 ff.
Zweckfunktion, s. Zielfunktion
Zyklus 101