Studienbücherei

D. J. Struik
Abriß der Geschichte der Mathematik

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Studienbücherei

Abriß der Geschichte der Mathematik

Dirk J. Struik

Professor em. der Mathematik
am Massachusetts Institute
of Technology

Siebente, ergänzte Auflage

Mit einem Anhang
über die Mathematik des 20. Jahrhunderts
von I. Pogrebysski †

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1980

Dirk J. Struik
A Concise History of Mathematics

The Dover Series in Mathematics and Physics

Das Original trägt die Widmung „For Ruth"

Deutsche Übersetzung nach der zweiten Auflage:
Prof. Dr. H. Karl
Übersetzung der Zusätze und des Anhangs
aus der zweiten russischen Auflage (Nauka, Moskau 1969):
Dr. W. Purkert
Wissenschaftliche Redaktion der Zusätze und des Anhangs:
Prof. Dr. H. Wußing

Verlagslektor: Dipl.-Math. B. Mai
Verlagshersteller: B. Burkhardt
Umschlag: Rudolf Wendt

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/94/80
Satz: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 569 920 6
LSV 1004
DDR 12,80 M

Vorwort zur fünften deutschen Auflage

Dieses Buch erschien in erster Auflage im Jahre 1948 in englischer Sprache. Es wurde wohlwollend aufgenommen, sowohl in den Vereinigten Staaten von Amerika, wo es erschien, als auch außerhalb. Da es sich um einen „Abriß" handelte, hatten allerdings viele interessante Entwicklungen nur skizziert werden können oder ganz außerhalb der Betrachtung bleiben müssen. Russen konnten enttäuscht sein, weil Tschebyscheff anscheinend nicht gebührend berücksichtigt worden war, Franzosen vermißten Roberval. Dagegen wurde mein Bestreben, die Mathematik in ihrem allgemeinen gesellschaftlichen und kulturellen Zusammenhang darzustellen, überall anerkannt, ebenso wie die Charakterisierung führender Mathematiker. Drei amerikanische und eine englische Ausgabe sowie Übersetzungen in zwölf Sprachen sind seither erschienen.

Bei einigen Übersetzungen wurden Ergänzungen angebracht, die speziell für die Leser in diesen Ländern von Interesse waren. So finden wir Material über gewisse Aspekte der Mathematik in Rußland in der ukrainischen Übersetzung (Kiew 1961) sowie in der russischen (Moskau 1964). Bei der Vorbereitung der holländischen Ausgabe des Buches (Utrecht-Antwerpen 1965) habe ich selbst Zusätze eingearbeitet, welche für holländische Leser von Belang sein konnten. Die serbo-kroatische Übersetzung (Belgrad 1969) tat dasselbe für Jugoslawien. Diese Ausgaben enthalten ebenso wie die deutsche (Berlin 1961, 4. Auflage 1967) bibliographische Angaben, die für die betreffenden Länder von besonderer Wichtigkeit sind. Bei der Vorbereitung neuer Auflagen habe ich die Gelegenheit benutzt, Zusätze und Korrekturen im Text anzubringen, so daß das Buch im Laufe seiner verschiedenen Ausgaben eine allmähliche, wenn auch keine grundlegende Veränderung durchgemacht hat. Sein allgemeiner Charakter blieb jedoch erhalten.

Eines Tages entdeckte einer meiner Freunde bei einem Besuch in Peking eine chinesische Übersetzung (Peking 1956) und brachte sie mir mit. In seinem Vorwort lobt der Übersetzer zwar das Buch im allgemeinen, erhebt aber Einwände gegen die Art, in der die Mathematik in China behandelt wird. Da ich schon einige böse Ahnungen hatte, habe ich den Abschnitt über diesen Gegenstand neu geschrieben, so daß die Mathematik im alten China nun, wie es auch sein muß, als integrierender Bestandteil der vormittelalterlichen und der mittelalterlichen Wissenschaft erscheint und nicht als ein mehr oder weniger außerhalb des allgemeinen Stromes befindliches Phänomen, wie es beispielsweise bei der Mathematik der Maya der Fall ist.

Das Buch zeichnet die Geschichte der Mathematik bis zum Ende des 19. Jahrhunderts nach. Mehr als siebzig Jahre gewaltiger Expansion bleiben unberücksichtigt. In der letzten amerikanischen Ausgabe (1967) heißt es:

„Es ist an der Zeit, daß die Geschichte der Mathematik zwischen 1900 und 1950 geschrieben wird, und sei es nur in Form eines ‚Abrisses'. Niemand scheint das bisher versucht zu haben, obgleich einige Monographien existieren. Das ist um so bemerkenswerter, als schon mehrere Werke über die Geschichte der Physik des 20. Jahrhunderts vorliegen. Obwohl die Geschichte der Physik den Vorteil hat, daß sie augenfälliger und (jedenfalls in einigen wichtigen Aspekten) leichter zu verstehen ist, bietet die Periode, die mit Poincaré, Hilbert, Lebesgue, Peano, Hardy und Levi-Civita begann, eine Fülle von Material für eine faszinierende Geschichte der Mathematik, und zwar sowohl für die Mathematik selbst als auch für ihre Beziehungen zur Logik, zur Physik und zu den technischen Wissenschaften. Wer von Ihnen, verehrte Leser, ergreift die Initiative?"
Ich war deshalb sehr erfreut, als ich erfuhr, daß die zweite russische Auflage des Buches einen von I. B. Pogrebysski verfaßten Anhang enthält, der einen solchen Abriß der Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts darstellt.
Dieser Anhang wurde, zusammen mit einigen Anmerkungen und Ergänzungen des russischen Übersetzers, in die vorliegende fünfte deutsche Auflage meines Buches übernommen.[1] Ich darf wohl annehmen, daß auch dieser Anhang seinerseits wieder derselben allmählichen Veränderung unterworfen sein wird, wie sie der übrige Text des Abrisses der Geschichte der Mathematik erfahren hat, damit auch einige andere wichtige Errungenschaften, insbesondere auch amerikanischer Mathematiker, kritisch gewürdigt werden können.
Mein besonderer Dank gilt dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, der das Erscheinen dieser Übersetzung, jetzt schon in der fünften Auflage, ermöglicht hat.

Belmont, Mass., im Oktober 1971 Dirk J. Struik

[1]) Die Ergänzungen betreffen die Geschichte der Mathematik in Rußland; sie sind durch einen Stern bei der Abschnittsnummer gekennzeichnet. Die (kleingedruckten) Anmerkungen sind mit Zahlen in eckigen Klammern ([1]–[10]) numeriert. (*Anm. d. Übers.*)

Vorwort zur ersten russischen Auflage

Erstmals ist diese Geschichte der Mathematik 1948 erschienen (bei Dover Publ. Company, New York). Vorher habe ich hin und wieder Vorlesungen über Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik am Massachusetts Institute of Technology gehalten. Die erste dieser Vorlesungen kam auf Anregung von Prof. Harry W. Tyler zustande. Tyler ist bekannt als Mitautor eines Lehrbuches über die Geschichte der Naturwissenschaften (W. T. Sedgwick-H. W. Tyler, 1917), eines der ersten Bücher dieser Art in den USA. Meine erste Bekanntschaft mit der Geschichte der Naturwissenschaften reicht jedoch in jene Jahre zurück, da ich Student in Leyden war, wo J. A. Vollgraf vor einem kleinen Hörerkreis Vorlesungen hielt — übrigens derselbe Dr. Vollgraf, der in aufopferungsvoller und außerordentlich gewissenhafter Arbeit die Herausgabe der gesammelten Werke von Huygens besorgte. Das rechte Interesse für die Geschichte der Mathematik gewann ich jedoch während meines Aufenthalts in Italien in den Jahren 1924 — 1925, als Ettore Bortolotti mich mit seinen Forschungen über die Bologneser Algebraiker des 16. Jahrhunderts bekannt machte. Dieses Interesse vertiefte sich bei meinem Zusammentreffen mit zwei Autoren bemerkenswerter Arbeiten zur Wissenschaftsgeschichte, nämlich mit F. Enriques und G. Vacca in Rom. Dort kam ich auch mit Gino Loria zusammen. Im übrigen ist das klassische Italien für wissenschaftsgeschichtliche Interessen eine anregende Umgebung.

Von Anfang an war mir bewußt, daß die Geschichte der Mathematik nicht nur die Entwicklungsgeschichte von Begriffen ist, sondern ein Teil der Geschichte des menschlichen Handelns, in dem sich der Kampf des Menschen mit der Natur widerspiegelt — nicht irgendeines abstrakten Menschen, sondern des Menschen als Glied der Gesellschaft. Die Mehrzahl der Mathematikhistoriker jedoch betrachtet die Geschichte der Mathematik vorwiegend als Geschichte von Ideen und Begriffen, die von dem einen Mathematiker an andere weitergegeben und von diesen dann weiterentwickelt werden: Galilei beeinflußte Cavalieri, dieser seinerseits Torricelli, dieser wieder Pascal, während Pascal dann Leibniz und Leibniz die Brüder Bernoulli beeinflußte. Diese Art Historiker erwähnen nur gelegentlich einzelne wichtige politische oder religiöse Ereignisse — etwa die Eroberungen Alexanders des Großen oder die Ausbreitung des Islams, dessen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik so gewaltig war, daß man ihn unmöglich ignorieren kann. Ein solches Herangehen ist einseitig, wenn es auch nicht direkt zu Fehlern führt — es verdeutlicht durchaus wichtige Etappen in der Geschichte der Mathematik. Es wird aber dabei nicht klar, daß zwischen der Mathematik und den allgemeinen kulturellen Bestrebungen einer Epoche ein enges Wechselverhältnis besteht. Diese Bestrebungen ihrerseits spiegeln direkt oder indirekt die jeweils herrschenden gesellschaftlichen und ökonomischen Verhältnisse wider.

Ein treffendes Beispiel bietet die Tätigkeit der Algebraiker des 16. Jahrhunderts. Diese Mathematiker der Renaissance waren Mitgestalter der allgemeinen kulturellen Bewegung; im einzelnen waren sie schöpferische Ärzte, Architekten, Künstler, Zivil- und Militäringenieure, manche waren auch Kaufleute. Wesentlich gefördert wurde ihre Tätigkeit durch die stürmische Entwicklung der großen und mächtigen Handelsstädte. Der frühe Merkantilismus brachte nicht nur eine neue Theorie der algebraischen Gleichungen, sondern auch eine neue Wissenschaft von der Perspektive.

Oft werden wir uns ebenfalls nur auf die Geschichte der Ideen beschränken müssen, insbesondere bei der Betrachtung von Epochen, für die es schwierig ist, Material sozial-ökonomischen Charakters zu sammeln oder zu deuten, wie im Fall des alten Indien. Trotzdem können wir behaupten, daß im allgemeinen die wesentlichen Richtungen des mathematischen Schaffens (aber auch etwaige Stagnation) nur in direkter oder indirekter Beziehung zu den sozialökonomischen Verhältnissen verstanden werden können. Selbst ein Genie wie Newton kann neue Wege in der Mathematik und Mechanik nur dann gehen, wenn es in der Gesellschaft Klassen gibt, die willens sind, ihn zu unterstützen und zu ermutigen, die bereit sind, ihm die Bedingungen für seine Arbeit zu schaffen und dafür zu sorgen, daß er Gehör findet. Der Charakter der griechischen Mathematik, sowohl der vorhellenistischen als auch der hellenistischen, kann nur verstanden werden, wenn man berücksichtigt, welcher Art die antike Gesellschaft an den Küsten des Mittelmeeres war. Dank der Sklaverei konnte sich eine Klasse von Müßiggängern herausbilden. In den östlichen Gebieten bestand Kontakt mit gesellschaftlichen Formen, die sich auf eine Landwirtschaft mit Bewässerungssystem gründeten. Auch die Entstehung der modernen Mathematik im 17. Jahrhundert kann man nur verstehen, wenn man in Betracht zieht, daß in jener Zeit im ökonomischen Leben Westeuropas Formen des Kapitalismus sich gegen den weichenden Feudalismus durchzusetzen begannen. Soche Umstände müssen wir berücksichtigen, wenn wir etwa auf die Frage eine Antwort zu finden suchen, warum ein Land wie China, wo Wissenschaft und Technik sich viele Jahrhunderte auf europäischem Niveau entwickelten oder dieses sogar übertrafen, keinen Anteil an der von Galilei und Descartes eingeleiteten Revolution hatte. Mit diesem Problem hat sich Needham eingehend beschäftigt. Um schließlich einen Eindruck von der Entwicklung der Mathematik in den letzten 150 Jahren zu bekommen, muß man das Wesen der kapitalistischen Industriegesellschaft und jetzt auch der modernen sozialistischen Gesellschaft analysieren und verstehen.

Im allgemeinen beeinflußen die gesellschaftlich-ökonomischen Faktoren diese Entwicklung nicht unmittelbar. Sie wirkten vielmehr meist über Physik, Geographie, Navigation oder sogar über Architektur, Kunst, Religion und Philosophie auf die Mathematik ein. Wichtige mathematische Untersuchungen waren selten das direkte Resultat gesellschaftlicher Einflüsse, sie waren meist nicht für einen unmittelbar nützlichen Zweck bestimmt. G. H. Hardy bemerkt einmal, daß die „wahre“ Mathematik der „echten“ Mathematiker, die Mathematik von Fermat und Euler, von

Gauß, Abel und Riemann vom Standpunkt der praktischen Nutzung fast völlig „unnütz“ ist. Das trifft jedoch nicht das Wesen der Sache (wobei bemerkt sei, daß erstaunlich viel von dieser früher „unnützen“ Mathematik in unserem Jahrhundert in der Rechentechnik, bei der Raumfahrt, bei der Automatisierung und in der wissenschaftlichen Technologie im Großen praktisch nützlich wurde). Wir müssen uns um das Verständnis bemühen, wie die Gesellschaft die exakten Wissenschaften beeinflußt. Damit gewinnen wir oft auch wesentlich tiefere Einsichten in die in diesen Wissenschaften dominierenden Richtungen. Selbstverständlich fördert eine Gesellschaft, in der Universitäten aufblühen können, auch eine Form der wissenschaftlichen Tätigkeit, die dem einzelnen Forscher eine Welt eigener Ideen zugesteht. Aber diese Ideenwelt ist der individuelle Ausdruck von Bedürfnissen oder Tendenzen der jeweiligen Epoche — es genügt, daran zu erinnern, wie die Gruppentheorie einige verschiedene Gebiete der Mathematik vereinigte, die sich früher fast unabhängig voneinander entwickelt hatten. Analog begegnet uns in den Jahren nach der französischen Revolution ein gewaltiger Aufschwung der geometrischen Forschung und damit verbunden eine Revolutionierung des mathematischen Gedankengutes. Die Rolle von Gauß in der Mathematik kann verglichen werden mit der Rolle von Hegel in der Philosophie, von Beethoven in der Musik, von Goethe in der Literatur. Und war nicht Galois ganz und gar ein Sohn der französischen Revolution?

Ein sehr lehrreiches Beispiel dafür, wie nichtmathematische Faktoren mathematische Forschungen stimulieren, ist die Suche nach einer Methode der Längenbestimmung auf See. Beginnend mit den Reisen des Vasco da Gama und Kolumbus währte dieses Suchen drei Jahrhunderte. In der Periode des streitbaren Merkantilismus verfolgte man damit das höchst praktische Ziel, der Schiffahrt über die Ozeane ihre Gefährlichkeit zu nehmen. Regierungen, Akademien und Privatpersonen förderten Studien über das Problem der geographischen Längenbestimmung durch Ehrungen, Spenden und Preise. Die Notwendigkeit, dieses brennende Problem zu lösen, war eines der Motive bei der Bildung der Londoner Royal Society und der Pariser Akademie. Bei der Suche nach der Lösung des Problems wurden die Navigationsapparate und Uhren vervollkommnet, wurde die Bewegung des Mondes und der Jupitertrabanten studiert. Die Mathematik gewann dabei durch die Untersuchungen von Huygens über die Pendeluhr und von Newton über das Zweikörperproblem (wir erinnern an den Artikel von B. Hessen über Newton aus dem Jahre 1931). Die Arbeiten Newtons führten Euler seinerseits zur Untersuchung der Bewegung des Mondes als eines Falles des Dreikörperproblems. Die Erfordernisse der Kartographie haben die mathematischen Theorien von Mercator und Lambert ins Leben gerufen. Hooke legte mit seinen Experimenten mit Schraubenfedern die Grundlagen der Elastizitätstheorie, und Halley, der Experimente auf dem Atlantik durchführte, wurde der Begründer der Theorie des Erdmagnetismus. Alle diese Untersuchungen über Kartographie, Navigation, Mechanik und Astronomie befruchteten die Mathematiker dieser Epoche, insbesondere die Analysis. Dieser Einfluß war sowohl direkt wie auch indirekt: Die mechanistische Philosophie jener Zeit verwendete gern die Uhr als Modell des Universums und betrachtete die Mathematik als einen Schlüssel zum Erfassen ihrer Probleme. Bekanntlich wurde das Problem der geographischen Länge schließlich gelöst, als man das Chronometer erfunden und eine befriedigende Theorie des Mondes geschaffen hatte.

Indessen dürfen wir nie vergessen, daß Ideen selbst wieder neue Ideen hervorbringen können. Nicht wenige mathematische Entdeckungen wurden in der Sphäre abstrakten Denkens gemacht, und zwar unter dem Einfluß eines großen Denkers auf seine Kollegen oder Schüler. Es ist viel Richtiges an der Beschreibung der Mathematik als allmählicher, einmal stetiger, einmal sprunghafter Entwicklung von Ideen. Auch die Bezeichnungen haben eine gewisse Bedeutung: Die Ersetzung früherer Bezeichnungen durch bessere schafft eine neue Form für die Bildung neuer Ideen. Obwohl die Mathematikhistoriker nicht die Hegelsche Terminologie benutzen, könnte man die Entwicklung der Mathematik völlig mit Hegelschen Termini beschreiben: Die Addition positiver ganzer Zahlen wird bei der Subtraktion negiert, diese ihrerseits wird auf einem höheren Niveau der Arithmetik negiert, wenn sowohl positive als auch negative Zahlen eingeführt sind. Man kann bei der Beschreibung der mathematischen Entdeckungen solche Begriffe der Dialektik wie „Objektivierung" und „Entfremdung" verwenden. Allerdings würde ich davon abraten. Man könnte auf diese Weise die Geschichte der Mathematik, wenn man sie nur als eine Geschichte von Ideen betrachtet, in eine neue und spezialisierte „Phänomenologie des Geistes" verwandeln, in eine Phänomenologie des Verstandes, und ein kompetenter Autor könnte das riesige Ideengebäude unter seinen Händen erstehen lassen. Die „Philosophie der Mathematik" von Hermann Weyl[1]) erinnert mich manchmal an eine solche Phänomenologie, ähnlich der Hegelschen, nur mit einigen Zugeständnissen an die materialistische Weltanschauung.

Dennoch bleibt ein solcher Zugang zur Geschichte der Mathematik — bei all seiner Anziehungskraft — einseitig, bisweilen wirkt er sogar desorientierend. Wir müssen uns immer vor Augen halten, daß die mathematischen Begriffe keine freien Schöpfungen des Geistes sind, sondern eine Widerspiegelung der realen objektiven Welt, wenn auch oft in höchst abstrakter Form. Das erklärt, warum die Mathematiker verschiedener Epochen einander verstehen konnten, warum theoretische Mathematik sich in angewandte Mathematik verwandeln kann und warum die angewandte Mathematik die Gesetze der Mechanik, Physik und sogar die Gesetze einiger Teile der Biologie und der Ökonomie auszudrücken imstande ist. Das erklärt auch, warum eine materialistische Dialektik der Mathematik möglich ist, auf die bereits Friedrich Engels hingewiesen hat. Deshalb muß der Mathematikhistoriker umsichtig zu Werke gehen, indem er die Freiheit des mathematischen Schaffens bei der Bildung seiner eigenen Begriffe berücksichtigt und sich gleichzeitig darüber klar ist, daß diese Begriffe im Verlauf der weiteren Entwicklung der Mathematik nur Wert haben können, wenn sie irgendeine Abhängigkeit, irgendeine Gesetzmäßigkeit der realen Welt ausdrücken, der Weltder sinnlichen Wahrnehmungen, in welcher der Mensch als gesellschaftliches Wesen lebt.

---

[1]) H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* (3. Aufl., München-Wien 1966).

Es sei mir gestattet, diese Einführung mit einer Bemerkung ganz anderer Art abzuschließen. Der Hochschulunterricht in Mathematikgeschichte ist vergeudete Zeit, wenn die Studenten auf Grund von Sprachschwierigkeiten die Texte nicht im Original lesen können und davon abhängig sind, was sie aus zweiter oder dritter Hand erfahren. Das ist dasselbe, als wollte man englische Literatur studieren, ohne Shakespeare lesen zu können, oder russische Literatur, ohne Puschkin gelesen zu haben. Besonders in den Vereinigten Staaten ist das ein Hindernis, wo es den Studenten oft schwerfällt, in irgendeiner Sprache außer der englischen zu lesen. Jedoch dürfte es solche Schwierigkeiten auch in anderen Ländern geben, besonders, wenn es um lateinische Texte geht. Bei den griechischen Mathematikern ist die Sache einfach, weil die wichtigsten Autoren — Euklid, Archimedes, Diophant — in ausgezeichneten Übersetzungen in mehreren Sprachen vorliegen, obwohl es auch hier wesentliche Lücken gibt (z. B. gibt es anscheinend keine englische Übersetzung von Pappus). Diese Schwierigkeit läßt sich nur überwinden, wenn eine immer größere Zahl von Klassikern, wie Kepler, Leibniz, Euler, Lagrange, in preiswerten Übersetzungen — mit den erforderlichen Kommentaren versehen — zugänglich gemacht wird. Eine solche Arbeit muß systematisch durchgeführt werden und nicht von Fall zu Fall je nach Laune des einen oder anderen Übersetzers. Bis dahin kann sich das Zusammenstellen von Texten, die in Übersetzungen zugänglich sind, als Hilfe erweisen. Ich habe bereits eine Übersicht über vorhandene Übersetzungen ins Englische veröffentlicht (Scripta Mathematica *15* (1949), 115—131), und sie demonstriert überzeugend, wie unsystematisch diese Arbeit durchgeführt wird.
Ich bin Prof. A. P. Juschkewitsch für sein Interesse an meiner Arbeit dankbar sowie dafür, daß er ihre Übersetzung in die russische Sprache angeregt hat. Das Buch hat wesentlich gewonnen durch Einfügen von Fakten über die Geschichte der Mathematik in Rußland.

Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Massachusetts
17. Dezember 1962 D. Struik

Inhalt

Einleitende Literaturübersicht

Einige der wichtigsten Bücher über die Geschichte des Gesamtbereichs der Mathematik sind nachstehend zusammengestellt. Wir empfehlen an erster Stelle G. Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (103 S., Cambridge 1936; Nachauflage New York 1957), worin sich nicht nur eine interessante Einführung in unseren Gegenstand, sondern auch eine allgemeine Bibliographie bis 1936 findet. Angaben über spätere Literatur kann man in den entsprechenden Kapiteln der mathematischen Referatenblätter finden: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (deutsch), Mathematical Reviews (engl.), Zentralblatt für Mathematik (deutsch) und das Referativny Shurnal Matematika (Ausgabe des Instituts für wissenschaftliche Information der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, seit 1953, russisch). Arbeiten sowjetischer Gelehrter zur Geschichte der Mathematik sind in den folgenden bibliographischen Registerwerken angeführt: *Geschichte der Naturwissenschaften. In der Sowjetunion publizierte Literatur* (*1919–1947*) (Moskau 1949); *Geschichte der Naturwissenschaften. In der Sowjetunion publizierte Literatur (1948–1958)* (Moskau 1965). Nützlich sind auch die Bücher *Bibliographische Quellen zur Mathematik und Mechanik, erschienen in der UdSSR von 1917 bis 1952* (Moskau-Leningrad 1957) und insbesondere K. O. May, *Bibliography and Research Material of the History of Mathematics* (Toronto 1973), 818 Seiten mit biographischem und bibliographischem Material.

Englisch geschriebene Darstellungen:

R. C. Archibald, *Outline of the History of Mathematics* (Amer. Math. Monthly *56*, Jan. 1949, 6. Aufl.).

Diese Arbeit enthält auf 114 Seiten eine wohlgelungene Zusammenfassung und viele bibliographische Angaben.

F. Cajori, *A History of Mathematics* (2. Aufl., New York 1938).

Das ist ein Standardwerk von 514 Seiten.

D. E. Smith, *History of Mathematics* (2 Bände, Boston 1923/1925, Dover Reprint 1958).

Dieses Werk beschränkt sich hauptsächlich auf Elementarmathematik, enthält aber Angaben über alle hervorragenden Mathematiker sowie zahlreiche Abbildungen; Nachauflage, New York 1951 bzw. 1953.

E. T. Bell, *Men of Mathematics* (New York 1937).

E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (2. Aufl., New York—London 1945).

Diese beiden Bücher enthalten eine Fülle von Material, sowohl über die Mathematiker als auch über ihre Leistungen. Das Schwergewicht des zweiten Buches liegt auf der modernen Mathematik.

J. F. Scott, *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century* (London 1958, 2. Aufl. 1960, Neudruck 1969).

H. W. Turnbull, *The Great Mathematicians* (London 1929; Neuauflage, New York 1961).

C. B. Boyer, *A History of Mathematics* (New York 1968).

Ein ausgezeichnetes Buch, mit Aufgaben; 717 Seiten.

M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York 1972).

Ausführliche Behandlung von verschiedenen Spezialgebieten, 1238 Seiten.

Vorwiegend die Elementarmathematik wird behandelt in:

V. Sanford, *A Short History of Mathematics* (Boston 1930).

W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics* (6. Aufl., London 1915, New York 1961).

Ein älteres, gut lesbares, aber veraltetes Werk.

H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (New York 1953, 4. erweiterte Aufl. 1976).

Interessantes Material ist in dem folgenden Buch zusammengetragen:

F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* (2 Bände, Chigaco 1928/1929).

Das Standardwerk über die Geschichte der Mathematik ist noch immer M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (4 Bände, Leipzig 1900—1908, Johnson Reprint, New York 1965).

Dieses groß angelegte Werk, dessen vierter Band von einer Gruppe von Spezialisten unter Cantors Leitung geschrieben wurde, umfaßt die Geschichte der Mathematik bis 1799. Es ist an vielen Stellen veraltet, besonders in den Abschnitten über die antike Mathematik, und oft in Einzelheiten unrichtig, aber es ist für eine erste Orientierung nach wie vor gut geeignet.
Berichtigungen von G. Eneström u. a. finden sich in den Bänden der „Bibliotheca mathematica".

Weitere deutschsprachige Bücher:

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Alertum und Mittelalter* (Kopenhagen 1896; französische Ausgabe Paris 1902; erste dänische Ausgabe 1893, zweite dänische Ausgabe 1949, überarbeitet von O. Neugebauer).

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert* (Leipzig 1903).

S. Günther — H. Wieleitner, *Geschichte der Mathematik* (2 Bände; I, verfaßt von Günther, Leipzig 1908; II, verfaßt von Wieleitner, 2 Teile, 1911—1921), herausgegeben von Wieleitner (Berlin 1939).

J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* (7 Bände, 2. Aufl., Leipzig 1921 bis 1924, Band 1–4 in 3. Aufl. 1930–1940).

Die Kultur der Gegenwart III, 1 (Leipzig—Berlin 1912) enthält:

H. G. Zeuthen, *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter.*

A. Voss, *Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur.*

H. E. Timerding, *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.*

O. Becker — J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik* (Bonn 1951).

J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik* (3 Bände; Sammlung Göschen, Band 226, 875, 882, Berlin 1953—1957).

Diese Bücher haben ein ausführliches Literaturverzeichnis und biographisches Material. Englische Übersetzung (teilweise): *The history of mathematics* (New York 1957).

O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Freiburg—München 1954, Freiburg 1964).

G. Kropp, *Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten* (Heidelberg 1969).

G. Kropp, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I* (Mannheim—Zürich 1969).

Dieses Buch enthält bibliographisches Material.

H. Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik* (Berlin 1979).

Das älteste Lehrbuch über die Geschichte der Mathematik ist in Frankreich erschienen:

J. E. Montucla, *Histoire des mathématiques* (4 Bände, neue Auflage, Paris 1799 bis 1802).

Dieses zuerst 1758 (in 2 Bänden) veröffentlichte Buch behandelt auch die angewandte Mathematik. Es ist noch heute gut lesbar. Neudruck Paris 1960.

Ebenfalls in französischer Sprache geschrieben sind folgende Bücher:

M. d'Ocagne, *Histoire abrégée des sciences mathématiques, ouvrage recueilli et achevé par R. Dugas* (Paris 1952).

Kurze Skizzen von Personen.

I. Dedron — J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris 1959).

Viele Illustrationen.

Ein gutes italienisches Buch ist:

G. Loria, *Storia delle matematiche* (3 Bände, Turin 1929—1933).

In dänischer Sprache ist erschienen:

J. und E. Høyrup, *Mathematikken i Samfundet* (Kopenhagen 1973).

Ein Buch über das Verhältnis von Mathematik und Gesellschaft, besonders im Unterricht, in verschiedenen Kulturen und Jahrhunderten.

Es gibt auch mathematikgeschichtliche Anthologien:

D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics* (New York 1929).

H. Wieleitner, *Mathematische Quellenbücher* (4 Bände, Berlin 1927—1929).

A. Speiser, *Klassische Stücke der Mathematik* (Zürich—Leipzig 1925).

J. R. Newman, *The World of Mathematics* (4 Bände, New York 1956).

Dies ist eine Anthologie von Essays über Mathematik und von Mathematikern.

H. O. Midonick, *The treasury of mathematics* (New York 1965).

D. J. Struik. *A source book in mathematics, 1200—1800* (Cambridge, Mass. 1969).

Dieses Buch enthält 75 Quellen von Fibonacci bis Monge, mit Kommentar versehen.

J. van Heijenoort, *A source book in mathematical logic. From Frege to Gödel, 1879 bis 1961* (Cambridge, Mass. 1967).

G. Birkhoff, *A source book in classical analysis* (ibid. 1973).

J. E. Burckhardt, *Lesebuch zur Mathematik. Quellen von Euclid bis heute* (Lucerne — Stuttgart 1968).

Achtzehn Stücke; ausgewählt, um die Natur und Schönheit der Mathematik zu zeigen.

In russischer Sprache seien genannt:

K. A. Rybnikow, *Geschichte der Mathematik* (2 Bände, Moskau 1960/1963).

Geschichte der Mathematik (herausgegeben von A. P. Juschkewitsch) I (bis zum 17. Jh..), II (17. Jh) (Moskau 1970), III (18. Jh.) (Moskau 1972).

Ebenso gibt es geschichtliche Darstellungen über Einzelgegenstände, von denen folgende erwähnt seien:

E. P. Ozhigova, *Entwicklung der Zahlentheorie in Rußland* (Leningrad 1972, in russischer Sprache).

L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (3 Bände, Washington 1919—1927).

T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (4Bände, London 1906—1923); dazu Ergänzungsband: *Contributions to the History of Determinants* 1900—1920 (London 1930).

A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (2 Bände, Leipzig 1900—1903, Nachdruck Wiesbaden 1971).

T. Dantzig, *Number. The Language of Science* (3. Aufl., New York 1943).

J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (Oxford 1940).

G. Loria. *Il passato e il presente della principali teorie geometriche* (4. Aufl., Turin 1931).

G. Loria, *Storia della geometria descrittiva delle origini sino ai giorni nostri* (Mailand 1921).

G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e transcendenti* (2 Bände, Mailand 1930); deutsche Ausgabe (2 Bände, schon früher veröffentlicht, Leipzig 1910/1911).

A. I. Markuschewitsch, *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen* (Übersetzung aus dem Russischen; Berlin 1955).

F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* (2 Bände, Chigaco 1928/1929).

L. C. Karpinski, *The History of Arithmetic* (Chicago 1925).

H. M. Walker, *Studies in the History of Statistical Methods* (Baltimore 1929).

R. Reiff, *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889).

I. Todhunter, *History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century* (Cambridge 1861).

I. Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge 1865).

I. Todhunter, *History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace* (London 1873).

C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development* (New York 1959; 2. Aufl. von *The concepts of the calculus* [New York 1949]).

C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (New York 1956).

J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford 1949).

R. C. Archibald, *Mathematical Table Makers* (New York 1948).

R. Dugas, *Historie de la mécanique* (Neufchâtel 1950).

E. W. Beth, *Geschiedenis der logica* (s'Gravenhage 1944).

N. I. Styazhkin, *History of mathematical logic from Leibniz to Peano* (Cambridge, Mass.,—London 1969; übersetzt aus dem Russischen, Moskau 1964).

Besprechung von E. Agazzi: Historia mathematica *2* (1975), 361—365.

L. E. Maistrov, *Probobility theory: a historical Sketch* (New York—London 1974).

K. Fladt, *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades* (Stuttgart 1965).

C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies*, 1638—1788, Euler, Opera 2^a ser. 11^2 (1960).

C. Truesdell, *Rational fluid mechanics*, 1687—1765, ibid. 12 (1954).

N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques* (Paris 1960).

Eine Sammlung historischer Artikel aus den mehrbändigen *Eléments de mathématiques* (Paris, seit 1939).

A. P. Juschkewitsch, *Historischer Abriß*, Kap. X aus W. W. Stepanow, *Lehrbuch der Differentialgleichungen* (Übersetzung aus dem Russischen, 4. Aufl., Berlin 1976).

A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik in Rußland* (Moskau 1968, in russischer Sprache).

E. Caruccio, *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo* (Turin 1958; englische Übersetzung: *Mathematics and logic in history and extemporary thought*, Chicago 1964).

H. Tietze, *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit* (München 1944, Zürich 1959).

Historical topics for the mathematics classroom (Washington, D. C. 1969).

Dieses Jahrbuch (Nr. 31) des National Council of Teachers of Mathematics (USA) enthält Monographien über verschiedene Gebiete der (elementaren) Mathematik von H. Eves, E. S. Kennedy, C. B. Boyer u. a.

H. Wußing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* (Berlin 1969).

C. Naux, *Histoire der logarithmes de Napier à Euler* (2 Bände, Paris 1966, 1971).

B. Szénássy, *Geschichte der Mathematik in Ungarn (von den Anfängen bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts)* (Budapest 1970, in ungarischer Sprache: Besprechung in englischer Sprache: Math. Reviews *46* (1973), # 5087).

V. Brun, *Regnekunsten i del gamler Norge, fra arilds tid til Abel* [Die Rechenkunst im alten Norwegen bis zu Abels Zeit] (Oslo 1962, Zusammenfassung in englischer Sprache).

Weitere Bücher werden am Ende verschiedener Kapitel erwähnt.

Die Geschichte der Mathematik wird auch in den Büchern über die allgemeine Geschichte der Wissenschaften besprochen. Das Standardwerk ist:

G. Sarton, *Introduction to the History of Science* (5 Bände, Washington—Baltimore 1927—1948).

Es führt bis zum vierzehnten Jahrhundert[1]) und kann durch folgende Abhandlung ergänzt werden:

G. Sarton, *The Study of the History of Science, with an Introductory Bibliography* (Cambridge 1936).[2])

Das von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin herausgegebene *Mathematische Wörterbuch* enthält ebenfalls zahlreiche Literaturhinweise zur Geschichte der Mathematik.

Ein gutes Werk für den Schulgebrauch ist:

W. T. Sedgwick — H. W. Tyler, *A Short History of Science* (2. Aufl., New York 1939).

Der Einfluß der Mathematik auf die Kultur und umgekehrt wird behandelt in:

M. Kline, *Mathematics in Western Culture* (New York 1953).

R. L. Wilder, *Evolution of Mathematical Concepts* (New York usw. 1968), weitergeführt in

R. L. Wilder, *Hereditary stress as a cultural force in mathematics,* Historia mathematica *1* (1974), 29—46.

Siehe auch dazu:

S. Bochner, *The role of mathematics in the rise of science* (Princeton, N. J. 1966). Aufsätze über Natur und Rolle der Mathematik.

---

[1]) Im vorliegenden Buch wird Sartons Transkription griechischer und orientalischer Namen zugrunde gelegt.

[2]) Siehe auch das auf S. 17 erwähnte Buch von G. Sarton.

Nützlich sind auch die zehn Artikel von G. A. Miller: *A first Lesson in the History of Mathematics, A second Lesson*, usw. in dem „National Mathematics Magazin", Band *13* (1939) bis *19* (1945).

Verwiesen sei ferner auf:

W. P. Subow, *Historiographie der Naturwissenschaften in Rußland* (russisch), Moskau 1956

sowie auf

Geschichte der Naturerkenntnis in Rußland (russisch), I/1 Moskau 1957, I/2 Moskau 1957, II Moskau 1960.

Periodische Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik oder der Naturwissenschaften im allgemeinen sind:

„Bibliotheca mathematica", Reihe 1—3 (1884—1914).
„Scripta mathematica" (seit 1932).
„Isis" (seit 1913), regelmäßig mit Bibliographie.
Revue d'histoire des sciences (seit 1947).
Archives internationales d'histoire des sciences (seit 1947).
Centaurus (seit 1950).
NTM, Z. f. Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (seit 1960).
Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik (1909—1931).
Physis (seit 1959).
Probleme der Geschichte der Naturwissenschaft und Technik (russisch) (seit 1956).
Mathematik-historische Untersuchungen (russisch) (seit 1948).
Mitteilungen zur Geschichte der Medizin, Naturwissenschaft und Technik (Referatenorgan, ab 1961).
Archive for the History of Exact Sciences (seit 1960).
Archeion (seit 1919).
Boethius (seit 1962).
Mathematical Reviews (seit 1940), berichtet über neue Zeitschriftenartikel und Bücher, auch zur Geschichte der Mathematik.
Scientarum historia (Antwerp, seit 1959).
History of Science (Cambridge, seit 1962).
Historia mathematica (Toronto, seit 1974).

In dem *Dictionary of Scientific Biography* (Scribner, New York) werden zahlreiche, sehr fachkundige, Bio- und Bibliographien von Mathematikern und anderen Wissenschaftlern vom Altertum bis zur Gegenwart veröffentlicht. Bis jetzt sind 14 Bände erschienen (1970/1976). In unserem Text zitiert mit D. S. B.

Es sei ferner verwiesen auf:

Biographien bedeutender Mathematiker, herausgegeben von H. Wussing und W. Arnold (Berlin 1975).

1. Die Anfänge

1.1. Von der Steinzeit bis zur Entwicklung einer primitiven Arithmetik

Unsere ersten Vorstellungen von Zahl und Form reichen bis in ferne Zeiten, bis in die ältere Steinzeit (Paläolithikum) zurück. Während der hundert oder mehr Jahrtausende dieser Periode lebten die Menschen in Höhlen und unter Bedingungen, die sich nur von denen der Tiere unterschieden. Ihre Anstrengungen galten hauptsächlich dem elementaren Bedürfnis, sich Nahrung zu verschaffen, wo immer dies möglich war. Sie verfertigten Waffen zum Jagen und Fischen, entwickelten die Sprache, um sich untereinander verständigen zu können, und in den späteren Epochen der älteren Steinzeit bereicherten sie ihr Leben durch schöpferische Kunstformen, Figuren und Malereien. Die Höhlenmalereien in Frankreich und Spanien (schätzungsweise vor etwa 15000 Jahren entstanden) hatten vermutlich eine gewisse rituelle Bedeutung; auf jeden Fall verraten sie einen bemerkenswerten Formensinn.
Das Verständnis für Zahlen und räumliche Beziehungen machte so lange geringe Fortschritte, bis der Übergang vom bloßen *Sammeln* der Nahrung zu ihrer tatsächlichen *Produktion*, vom Jagen und Fischen zum Ackerbau, vollzogen wurde. Mit diesem grundlegenden Wandel, einer Umwälzung, in der sich die passive Einstellung des Menschen zur Natur in eine aktive verwandelte, treten wir in die jüngere Steinzeit (Neolithikum) ein.
Dieses große Ereignis in der Geschichte der Menscheit begann wahrscheinlich vor ungefähr 10000 Jahren, als die Eisdecke, die vordem Europa und Asien bedeckte, geschmolzen war und Wäldern und Wüsten Platz gemacht hatte. Die nomadenhaften Wanderungen zur Nahrungssuche hörten allmählich auf. In großem Umfange traten primitive Bauern an die Stelle der Fischer und Jäger. Diese Bauern, die so lange an einer Stelle blieben, wie dort der Boden noch fruchtbar war, begannen mit der Errichtung dauerhafter Wohnstätten; es entstanden Dörfer als Schutz gegen die Witterung und gegen räuberische Feinde. Viele derartige Siedlungen aus der jüngeren Steinzeit sind ausgegraben worden. Die Überreste zeigen, wie sich nach und nach einfache Formen des Handwerks, wie Töpferei, Zimmerhandwerk und Weberei, entwickelten. Es gab Kornspeicher, so daß die Bewohner in der Lage waren, sich gegen den Winter und gegen schlechte Zeiten durch Vorräte zu sichern. Man buk Brot, braute Bier, und in den späteren Abschnitten der Jungsteinzeit wurden Kupfer und Bronze geschmolzen und verarbeitet. Erfindungen wurden gemacht, vor allem die Töpferscheibe und das Wagenrad; Boote und Schuppen wurden verbessert. Alle diese bedeutsamen Neuerungen entstanden nur innerhalb bestimmter Bezirke und verbreiteten sich nicht immer in andere Gegenden. Die amerikanischen Indianer bespielsweise wußten bis zum Eindringen der Weißen

nicht viel von der Verwendung des Wagenrades. Dessenungeachtet wurde das Tempo der Vervollkommnung der Technik im Vergleich zur Altsteinzeit außerordentlich beschleunigt.

Zwischen den Dörfern entstand ein umfangreicher Handel, der sich so ausbreitete, daß Verbindungen über Hunderte von Meilen hinweg nachweisbar sind. Die Entdeckung der Technik des Erschmelzens zuerst von Kupfer, dann von Bronze und der Herstellung von Werkzeugen und Waffen daraus trug zur Verstärkung dieser Handelstätigkeit bei. Dies wiederum trieb die weitere Ausbildung der Sprachen voran. Die Worte dieser Sprachen drückten sehr konkrete Dinge und sehr wenige Abstraktionen aus, aber sie ließen doch schon einigen Raum für einfache Zahlenausdrücke und einige Beziehungen zwischen Formen. Viele australische, amerikanische und afrikanische Stämme befanden sich zur Zeit ihrer ersten Berührung mit den Weißen in diesem Stadium; einige Stämme leben heute noch unter diesen Bedingungen, so daß es möglich ist, ihre Ausdrucksarten und -formen zu studieren.

1.2. Zur Entwicklung des Zählens

Ausdrücke für Zahlen — die nach Adam Smith eine „der abstraktesten Ideen, zu deren Bildung der menschliche Geist fähig ist“ darstellen — kamen nur langsam in Gebrauch. Ihr erstes Auftreten trug eher qualitativen Charakter, indem man nur zwischen *eins* (genauer eigentlich „e i n e m Mann“ an Stelle von „einem M a n n“), *zwei* und *viel* unterschied. Der alte qualitative Ursprung der Zahlenvorstellungen kann noch in gewissen dualen Ausdrucksweisen festgestellt werden, die in manchen Sprachen, wie im Griechischen oder Keltischen, vorkommen. Als der Zahlbegriff ausgebaut wurde, bildete man größere Zahlen zunächst durch Addition: 3 durch Addition von 2 und 1, 4 durch Addition von 2 und 2, 5 durch Addition von 2 und 3. Nachstehend ein Beispiel dazu von einigen australischen Stämmen:

Murray River: 1 = enea, 2 = petcheval, 3 = petcheval-enea, 4 = petcheval-petcheval.

Kamilaroi: 1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan-bulan, 5 = bulan-guliba, 6 = guliba-guliba.[1])

Die Entwicklung von Handwerk und Handel trug wesentlich zu dieser Herausbildung der Zahlenvorstellung bei. Zahlen wurden zu größeren Einheiten zusammengefaßt, üblicherweise durch die Verwendung der Finger einer Hand oder beider Hände, ein im Handelsverkehr ganz natürliches Verfahren. Dies führte zur Zählung zuerst mit 5, dann mit 10 als Grundzahl, die noch durch Addition und manchmal auch durch Subtraktion ergänzt wurde, so daß 12 als $10 + 2$ oder 9 als $10 - 1$ aufgefaßt wurde. Manchmal wurde auch 20, die Anzahl der Finger und Zehen, als Grundzahl gewählt. Unter 307 von W. C. Eels untersuchten Zahlensystemen von

[1]) L. Conant, *The Number Concept* (New York 1896), S. 106/107, mit vielen ähnlichen Beispielen, sowie *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Band I (Übersetzung aus dem Russischen, 9. Aufl., Berlin 1980), S. 1—60.

primitiven amerikanischen Stämmen waren 146 dezimal, 106 verwendeten 5 sowie 5 und 10 oder auch 20 sowie 5 und 20 als Grundzahl.[1]) Das Zwanzigersystem kam in seiner ausgeprägtesten Form bei den Maya in Mexiko und bei den Kelten in Europa vor.
Zahlenmäßige Unterlagen wurden in verschiedener Weise festgehalten, durch Bündeln, Kerben in einem Stock, Knoten in einer Schnur, zu Fünferhäufchen geordneten Steinchen oder Muscheln — alles Verfahrensweisen, die denen der Gastwirte früherer Tage mit ihrem Kerbholz sehr ähnlich waren. Von dieser Methode war es nur noch ein Schritt bis zur Einführung besonderer Symbole für 5, 10, 20 usw., und man findet den Gebrauch eben dieser Symbole am Anfang der geschriebenen Geschichte, in der sogenannten Morgenröte der Kultur vor.
Ein sehr altes Beispiel für die Verwendung eines Kerbholzes geht bis in die ältere Steinzeit zurück und wurde 1937 in Věstonice (Mähren) gefunden. Es handelt sich um einen 7 Zoll langen Knochen eines jungen Wolfs, in welchen 55 tiefe Kerben eingeschnitten sind, von denen die ersten 25 in Gruppen zu 5 angeordnet sind. Danach kommt eine doppelt so lange Kerbe, mit der die Reihe abschließt; dann beginnt von der nächsten, ebenfalls doppelt so langen Kerbe eine neue Reihe, die bis 30 läuft.[2])
Es ist daher einleuchtend, daß die alte, bei Jacob Grimm zu findende und oft wiederholte Ansicht, das Zählen habe als Zählen an den Fingern begonnen, unrichtigt ist. Das Zählen mit Hilfe der Finger, d. h. in Fünfern und Zehnern, kam erst auf einer gewissen Stufe der gesellschaftlichen Entwicklung auf. Nachdem es einmal erfunden war, konnten die Zahlen mittels einer Grundzahl ausgedrückt werden, mit deren Hilfe große Zahlen gebildet werden konnten; so entstand eine primitive Art der Arithmetik. Vierzehn wurde als $10 + 4$, manchmal auch als $15 - 1$ ausgedrückt. Die Multiplikation begann, als 20 nicht in der Form $10 + 10$, sondern als 2×10 ausgedrückt wurde. Solche Verdoppelungsoperationen wurden jahrtausendelang als eine Art Mittelding zwischen Addition und Multiplikation verwendet, nicht nur in Ägypten und in den alten Indus-Kulturen, sondern bis in die europäische Renaissance hinein. Das Dividieren begann, als 10 in der Form „die Hälfte eines Körpers“ ausgedrückt wurde, obwohl die bewußte Bildung von Brüchen außerordentlich selten blieb. Bei nordamerikanischen Stämmen beispielsweise sind nur wenige Fälle solcher Bildungen bekannt geworden, und das betraf in fast allen Fällen nur $^1/_2$, obwohl gelegentlich auch $^1/_3$ oder $^1/_4$ vorkommen.[3]) Eine merkwürdige Erscheinung war die Vorliebe für sehr große Zahlen, die vielleicht durch das allzu menschliche Bestreben hervorgerufen wurde, die Größe von Viehherden oder die Zahl der erschlagenen Feinde zu übertreiben; Überreste dieser Tendenz finden sich in der Bibel und in anderen heiligen Schriften.

---

[1]) W. C. Eels, *Number Systems of American Indians*, Amer. Math. Monthly *20* (1913), 293.

[2]) Isis *28* (1938), 462/463; entnommen den illustrierten London News vom 2. 10. 1937.

[3]) G. A. Miller hat darauf hingewiesen, daß die Worte one-half, semis, moitié in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den Worten two, duo, deux (im Gegensatz zu one-third, one-fourth usw.) stehen, was zu beweisen scheint, daß der Begrif $^1/_2$ unabhängig von dem der ganzen Zahl entstanden ist. Nat. Math. Magazine *13* (1939), 272.

[1] Entstehung und Entwicklung des Zählens im allgemeinen und der Zahlsysteme im besonderen und die damit zusammenhängende Entwicklung des Begriffs der natürlichen Zahl werden von D. Struik nur sehr knapp dargestellt. Umfangreiches ethnographisches, archäologisches und philologisches Material muß bei solchen Untersuchungen herangezogen werden. Es erlaubt zwar auch nicht, auf alle Fragen eine endgültige Antwort zu geben, aber gewisse Etappen und gewisse allgemeine Züge in der Entwicklung des Zahlbegriffs und der Technik des Zählens und Rechnens können doch mit einem hohen Grad an Sicherheit rekonstruiert werden. Dieser Problemkreis ist sehr gründlich und gleichzeitig gedrängt in dem Artikel von I. G. Baschmakowa und A. P. Juschkewitsch dargestellt (vgl. die Literaturübersicht am Ende des Kapitels). Interesante Angaben, die auf eine noch früher zu datierende Entwicklung (früher als man bis dahin angenommen hatte) der Zahlvorstellungen hinweisen, sind in dem Artikel von B. A. Frolow, *Anwendung des Rechnens im Paläolithikum und die Ursprünge der Mathematik* (russisch), Izv. SO AN USSR, Ser. obstsch. nauk, № 9, Heft 3 (1965), zusammengestellt.

1.3. Zahl- und Raumvorstellungen der Menschen der Steinzeit

Es ergab sich auch die Notwendigkeit, Länge und Rauminhalt von Gegenständen zu messen. Die Vergleichsmaße waren roh und wurden oft durch Vergleich mit Teilen des menchlichen Körpers gewonnen. In dieser Weise entstanden Einheiten wie Finger, Fuß und Hand. Namen wie Elle und Klafter erinnern noch an diese alten Gepflogenheiten. Als Häuser gebaut wurden, wie bei den Ackerbau treibenden Indianern oder den Bewohnern von Pfahlbauten in Mitteleuropa, wurden Regeln festgelegt, um beim Bauen gerade Linien und rechte Winkel einzuhalten. Das englische Wort „straight" (gerade) ist mit „stretch" (strecken) verwandt und weist auf Hantierungen an Seilen hin[1]), das Wort „line" (Linie) mit „linen" (Leinen), worin sich ein Zusammenhang zwischen dem Weberhandwerk und den Anfängen der Geometrie zeigt. Dies war einer der Wege, auf denen sich das Interesse an der Meßkunst herausbildete.

Die Menschen der jüngeren Steinzeit entwickelten auch ein feines Gefühl für geometrische Muster. Das Brennen und Bemalen der Töpferwaren, das Flechten von Binsen und Körben, das Weben von Stoffen und später die Bearbeitung der Metalle, alles das führte zur Beschäftigung mit ebenen und räumlichen Beziehungen. Tanzfiguren müssen ebenfalls eine Rolle gespielt haben. Die jungsteinzeitliche Ornamentik schwelgt geradezu in der vielfältigen Verwendung von Kongruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit. Auch zahlenmäßige Beziehungen können in diesen Figuren vorkommen wie in manchen prähistorischen Ornamenten, die Dreieckszahlen darstellen; andere versinnbildlichen „heilige" Zahlen.

Die interessanten geometrischen Muster, die in der Töpferei, Weberei oder Korbmacherei vorkommen, sind dem Leser sicherlich schon in der Literatur begegnet. Man fand sie auf jungsteinzeitlichen Töpferwaren in Bosnien und auf Kunstge-

[1]) Den Namen „rope-stretchers" (Seilspanner) (griechisch: „harpe donaptai", arabisch: „Massah", assyrisch: „masihānu") erhielten in vielen Ländern diejenigen Menschen, die Vermessungsarbeiten ausführten; siehe S. Gandz, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik *1* (1930), 255–277.

genständen der Ur-Periode in Mesopotamien[1]), auf ägyptischen Töpferwaren der vordynastischen Zeit (4000–3500 v. u. Z.)[2]), andere wurden von Bewohnern von Pfahlbauten nahe Lubljana (Jugoslawien) in der Hallstatt-Periode verwendet (Mitteleuropa, 100–50 v. u. Z.).[3]) Mit Dreiecken ausgefüllte Rechtecke und mit Kreisen ausgefüllte Dreiecke stammen von Urnen aus Gräbern nahe Sopron in Ungarn. Sie zeigen Versuche zur Bildung von Dreieckszahlen, die zu späterer Zeit in der Mathematik der Pythagoreer eine bedeutende Rolle spielten.[4])
Ornamente dieser Art haben ihre Beliebtheit bis in die geschichtliche Zeit hinein bewahrt. Schöne Beispiele finden sich auf Dipylon-Vasen aus Minos und aus den frühen griechischen Perioden, in den späteren byzantinischen und arabischen Mosaiken, auf persischen und chinesischen Wandteppichen. Ursprünglich werden diese Ornamente wohl eine religiöse oder magische Bedeutung besessen haben, aber nach und nach gewann ihr ästhetischer Reiz das Übergewicht.
In der Religion der Steinzeit können wir einen primitiven Versuch erblicken, gegen die Naturkräfte anzukämpfen. Die religiösen Zeremonien waren völlig mit Zauberei durchsetzt, und dieses magische Denken fand seinen Niederschlag sowohl in den vorhandenen Zahl- und Raumvorstellungen als auch in der Bildhauerei, in der Musik und in der Malerei. Es gab magische Zahlen wie 3, 4, 7 und magische Figuren wie den Fünfstern und das sogenannte Hakenkreuz. Manche Autoren haben diese Seite der Mathematik[5]) sogar für den bestimmenden Faktor ihrer Entwicklung gehalten, aber auch wenn die gesellschaftlichen Wurzeln der heutigen Mathematik verdunkelt sein mögen, so sind sie doch während der Frühzeit der Menschheitsgeschichte recht offensichtlich. Der „moderne" Zahlenaberglaube ist ein Überrest von magischen Riten, die in die jüngere, ja vieleicht sogar in die ältere Steinzeit zurückreichen.

[2] Bis in unsere Tage erscheinen Arbeiten, deren Autoren bestrebt sind, den ritualen Ursprung des Rechnens und der Geometrie zu beweisen. Diese Arbeiten gehen konform mit jenen Strömungen in der Soziologie, die auf jede erdenkliche Weise die Bedeutung der Religion in der Geschichte der menschlichen Kultur hervorzuheben suchen. Eine der letzten Untersuchungen von dieser Art ist der Artikel von A. Seidenberg, *The Ritual Origin of Counting*, Arch. History Exact Sci. *2* (1962), 1–40. Der Autor erklärt unumwunden, daß er seine Arbeit als Beitrag zur Erfüllung des Programms von Lord Raglan betrachtet. Dieses Programm setzt sich das Ziel, zu beweisen, daß die gesamte Zivilisation ritualen Ursprungs ist.[6]) Nach Seidenberg wurde das Rechnen unter besonderen Umständen bei der Herausbildung eines bestimmten Rituals erfunden. Die große Ähnlichkeit im Aufbau der Zahlwörter und in den Rechenverfahren bei den verschiedenen Völkern macht diese Version jedoch im höchsten Grade unwahrscheinlich (weil sie das Rechnen mit höchst spezifischen Eigenheiten der einzelnen Völker verknüpft), es sei denn, man nimmt an, daß das Rechnen auf diese Weise an irgendeinem Ort erfunden wurde und sich dann von dort durch Entlehnung über die ganze Welt

---

[1]) W. Lietzmann, *Geometrie und Praehistorie*, Isis *20* (1933), 436–439.
[2]) D. E. Smith, *History of Mathematics* (Ginn & Co., 1923) I, S. 15.
[3]) M. Hoernes, *Urgeschichte der bildenden Kunst in Europa* (Wien 1915).
[4]) Siehe auch F. Boas, *General Anthropology* (1930), S. 273.
[5]) W. J. McGee, *Primitive Numbers*, Nineteenth Annual Report, Bureau Amer. Ethnology 1897/98 (1900), 825–851.
[6]) Lord Raglan, *How came civilisation* (1939).

verbreitet hat. Und A. Seidenberg vertritt in der Tat diese These und versucht, sie in einer gesonderten Arbeit zu beweisen, die in den „Veröffentlichungen der Universität von California“ vom Jahre 1960[1]) abgedruckt ist. Wie unwahrscheinlich es ist, daß das Rechnen bei allen Völkern gemeinsamen Ursprungs ist, kann der Leser selbst beurteilen, wenn er sich die Abgeschlossenheit der prähistorischen Siedlungsräume und die ins Auge springende Ungleichmäßigkeit in der Entwicklung des Rechnens bei den verschiedenen Völkern vergegenwärtigt, wenn er sich vor Augen führt, daß bei ein und demselben Volk verschiedene Wörter für die Bezeichnung derselben Anzahl verschieden gearteter Gegenstände in Gebrauch waren usw.

1.4. Anfänge der Astronomie

Selbst bei sehr primitiven Stämmen findet man eine gewisse Zeitrechnung und daher auch manche Kenntnisse über die Bewegung von Sonne, Mond und Sternen. Diese Kenntnisse gewannen zum erstenmal einen mehr wissenschaftlichen Charakter, als sich Ackerbau und Handel ausbreiteten. Der Gebrauch eines Mondkalenders reicht sehr weit in die Menschheitsgeschichte zurück, da man die sich verändernden Aussichten des Pflanzenwuchses mit den wechselnden Gestalten des Mondes in Zusammenhang brachte. Primitive Völker beachten auch die Sonnenwenden oder den Aufgang der Plejaden in der Dämmerung. Die ältesten zivilisierten Völker verlegten ihre Kenntnis der Astronomie in ihre entfernteste vorgeschichtliche Zeit zurück. Andere primitive Völker verwendeten die Sternbilder als Wegweiser in der Schifffahrt. Aus dieser Astronomie ergaben sich manche Kenntnisse über Eigenschaften der Kugel, von Winkeln und Kreisen.

1.5. Zusammenfassung

Diese kurzen Ausführungen zu den Anfängen der Mathematik zeigen, daß der geschichtliche Werdegang einer Wissenschaft nicht unbedingt dieselben Etappen durchläuft, in denen man sie heute beim Studium entwickelt. Einigen von den der Menschheit am längsten bekannten geometrischen Formen, wie Knoten und Ornamenten, hat sich erst in der Gegenwart das volle wissenschaftliche Interesse zugewendet. Auf der anderen Seite stammen einige der mehr elementaren Teile der Mathematik, wie etwa die graphische Darstellung oder die elementare Statistik, erst aus vergleichsweise moderner Zeit. A. Speiser sagte dazu etwas drastisch: „Schon die ausgesprochene Neigung zum Langweiligen, welche wohl unvermeidlich der elementaren Mathematik anhaftet, spricht eher für die späte Entstehung, denn der schöpferische Mathematiker wird sich mit Vorliebe den interessanten und schönen Problemen zuwenden.“[2])

[3] Diese Ansicht von A. Speiser, der außer durch seine Arbeiten über Gruppentheorie auch durch seine Bemühungen bei der Herausgabe der gesammelten Werke von Leon-

[1]) *The diffusion of counting fractions*, Univ. of California Publ. in Mathematics *3* (1960), 215–299; siehe auch desselben Verfassers *The ritual origin of geometry*, Arch. History Exact Sci. *1* (1962), 400–527.

[2]) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Leipzig 1925), S. 3.

hard Euler bekannt geworden ist, kann als zwar geistreiche Sentenz gelten, aber man kann sie schwerlich ernsthaft vertreten. Auch in einem Buch über Mathematikgeschichte muß man auf die darin vorkommenden Fehler in der Geschichtsauffassung hinweisen.
Was ist das eigentlich — elementare Mathematik? Eine allgemein anerkannte Definition gibt es nicht. Der Inhalt dieses Begriffs hat sich zweifellos gewandelt. Wenn man zur Elementarmathematik all das rechnet, was in den Lehrplan der Oberschule (gemeint ist die „Srednaja schkola" in der SU — *Anm. d. Übers.*) Eingang gefunden hat (was natürlich auch bei weitem nicht eindeutig die Elementarmathematik charakterisiert), so wird man sich leicht von der äußersten Heterogenität ihrer einzelnen Teilgebiete überzeugen können. In der Arithmetik haben wir — außer bei der Ausbildung im Rechnen — Aufgaben, die größtenteils mit sehr alten Verfahren gelöst werden; gewisse Kenntnisse aus der Theorie der ganzen Zahlen gehen meist auf die antike Mathematik zurück. Auch die Geometrie wurde bis vor kurzem schon seit Jahrhunderten im Grunde nach Euklid gelehrt. In der Algebra und Trigonometrie ist das zugrunde liegende Material wesentlich jüngeren Datums, wobei gewisse Begriffe und Verfahren (graphische Darstellungen, funktionale Abhängigkeit) noch eine bedeutende Umgestaltung im modernen Sinne erfahren haben. Ist dieser Lehrstoff „langweilig"? Für den Lernenden hängt das davon ab, wie der Unterricht durchgeführt wird, für den Lehrenden davon, ob es hier Möglichkeiten für schöpferische Arbeiten gibt. Diese brauchen nicht unbedingt fachwissenschaftlichen Charakter zu haben, sondern werden vielmehr pädagogisch-methodisch geprägt sein. Zahlreiche Vorschläge für eine Reform der Lehrpläne in den Schulen und anhaltende Versuche, in den Lehrplan der Oberschule gewisse Fakten aus Analysis, mathematischer Logik, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. aufzunehmen, zeigen, daß hier ein weites Feld für eine sehr interessante Tätigkeit vorliegt.
Man hat auch versucht, die Elementarmathematik negativ zu definieren als den Teil der Mathematik, in dem gewisse (kompliziertere) Methoden und Begriffe nicht verwendet werden, etwa die Analysis (Differential- und Integralrechnung). Dabei fallen jedoch in den Bereich der Elementarmathematik viele ziemlich abstrakte und schwierige Gebiete, die seit jeher schöpferische Mathematiker gefesselt haben und wo es viele „interessante und schöne Probleme"[1]) gibt. Das wäre z. B. ein bedeutender Teil der Mengenlehre, der Gruppentheorie, der mathematischen Logik. Man kann auch unschwer Beispiele dafür angeben, daß ein sogenannter elementarer Beweis dieses oder jenes Satzes später und mit viel größeren Schwierigkeiten gefunden worden ist als ein nichtelementarer.

Literatur

Außer den schon erwähnten Büchern und Artikeln von Conant, Eels, Smith, Lietzmann und Speiser seien genannt:

E. Fettweis, *Das Rechnen der Naturvölker*, Leipzig 1927.

I. G. Baschmakowa — A. P. Juschkewitsch, *Ursprung der Zahlsysteme*, in *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Bd. I (Übersetzung aus dem Russischen, 5. Aufl., Berlin 1970).

K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahlen* (2. Aufl. Bd. I., Göttingen 1957, 2. Aufl. Bd. II [*Zahlschrift und Rechnen*], Göttingen 1958). Englische Ausgabe: *Number words and number symbols* (Cambridge, Mass. 1969).

G. Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites* (Paris 1975).

[1]) ganz zu schweigen davon, wie subjektiv diese Attribute sind.

Ausführliche Betrachtungen (851 S.) über verschiedene Zahlensysteme (Ägypter, Chinesen, Maya usw.). Besprechung von E. M. Bruins: Historia mathematica *5* (1978), 108–113.

D. E. Smith — J. Ginsburg, *Numbers and Numerals* (N.Y. Teachers' College 1937).

Gordon Childe, *What Happened in History* (Pelican Book, Harmondsworth — New York 1942).

D. J. Struik, *Stone Age Mathematics*, Scientific American *179* (1948), 44–49.

Interessante Ornamente werden in folgenden Arbeiten beschrieben:

L. Spier, *Plains Indian Parfleche Designs*, Univ. Washington Publ. in Anthrop. *4* (1931), 293–322.

A. B. Deacon, *Geometrical Drawings from Malekula and Other Islands of the New Hebrides*, J. Roy. Anthrop. Institute *64* (1934), 129–175.

M. Popova, *La géométrie dans la broderie bulgare*, Comptes Rendus, Premier Congrès des Mathématiciens des pays slaves (Warsaw 1929), S. 367–369.

Die Mathematik der amerikanischen Indianer wird auch in folgenden Artikeln behandelt:

J. E. S. Thompson, *Maya Arithmetic*, Contributions to Amer. Anthropology and History 36, Carnegie Inst. of Washington Publ. *528* (1941), 37–62.

M. and R. Ascher, *Numbers and Relations from Ancient Andean Quipus*, Arch. History Exact Sci. *8* (1972), 288–320.

Für die Mathematik der afrikanischen Völker siehe:

C. Zaslavsky, *Africa counts* (Boston 1973).
Besprechung von R. L. Wilder: Historia mathematica *2* (1975), 207–210.

D. W. Crowe, *The geometry of African art.*
I. Journal of Geometry *1* (1971), 169–182.
II. Historia mathematica *2* (1975), 253–271.

Eine ausführliche Bibliographie gibt:

D. E. Smith, *History of Mathematics* I (1923), S. 14.

Eine Bibliographie über die Entwicklung der mathematischen Begriffe bei Kindern findet man in:

A. Riess, *Number Readiness in Research* (Chicago 1947).

J. Piaget, *La genèse du nombre chez l'enfant* (Neufchâtel 1941).

J. Piaget, *Le développement des quantités chez l'enfant* (Neufchâtel 1941).

L. N. H. Bunt, *The development of the ideas of number, and quantity according to Piaget* (Groningen 1951).

2. Der alte Orient

2.1. Entwicklung und Charakter der orientalischen Sklavenhalterdespotie

Während des fünften, vierten und dritten Jahrtausends vor unserer Zeitrechnung entfalteten sich an den Ufern großer Ströme in Afrika und Asien, in subtropischen oder fast subtropischen Gebieten, neuere und fortgeschrittenere Staatsformen aus den festgefügten steinzeitlichen Gemeinwesen. Diese Ströme waren der Nil, der Tigris und Euphrat, der Indus, später der Ganges, der Hoangho und noch später der Jangtsekiang.

Auf den Äckern dieser Flußufer ließen sich reiche Ernten erzielen, sobald die Überschwemmungen eingedämmt und die Sümpfe trockengelegt waren. Im Gegensatz zu den Wüsten- und Gebirgsgegenden und auch zu den umgebenden Ebenen konnten die Flußtäler in ein Paradies verwandelt werden. Im Laufe der Jahrhunderte wurden diese Probleme gelöst, indem man Uferbefestigungen und Dämme baute, Kanäle grub und Stauseen anlegte. Die Regulierung der Wasserversorgung erforderte den gemeinsamen Einsatz der Kräfte von räumlich weit entfernten Gegenden, und zwar in einem Ausmaß, das alles Bisherige bei weitem übertraf. Dies führte zur Schaffung zentraler Verwaltungsorgane, die vorwiegend in Städten statt in den barbarischen Dörfern früherer Zeiten errichtet wurden. Der verhältnismäßig große Überfluß, der durch den gewaltig verbesserten, intensiven Ackerbau entstand, erhöhte den Lebensstandard der gesamten Bevölkerung, führte aber auch zur Herausbildung einer von mächtigen Häuptlingen beherrschten städtischen Aristokratie. Es gab zahlreiche spezialisierte Berufszweige, wie Künstler, Krieger, Kaufleute und Priester. Die Verwaltung der öffentlichen Bauten wurde in die Hände einer Gruppe von Berufsbeamten gelegt, die mit dem Ablauf der Jahreszeiten, der Fortbewegung schwerer Lasten, der Kunst der Aufteilung von Ländereien, der Anlage von Lebensmittelvorräten und der Einziehung von Steuern gut Bescheid wußte. In Urkunden wurden die Erfordernisse der Verwaltung und die Machtbefugnisse der Häuptlinge gesetzlich festgelegt. Sowohl die Angehörigen der Beamtenschaft als auch die Handwerker erwarben in großem Umfange technische Kenntnisse, einschließlich der Metallverarbeitung und der Medizin. Zu diesen Kenntnissen gehörte auch die Kunst des Rechnens und Messens.

Von nun an bildeten sich feste gesellschaftliche Klassen heraus. Es gab Häuptlinge, freie Bauern und Pächter, Handwerker, Schreiber, Beamte, Leibeigene und Sklaven. Örtliche Oberhäupter gewannen soviel Reichtum und Macht, daß sie von Großgrundbesitzern mit begrenzter Machtbefugnis zu örtlichen Königen mit absoluter Souveränität aufstiegen. Zwistigkeiten und Kriege zwischen den verschiedenen

Despoten führten zu größeren Herrschaftsbezirken, die unter einem einzigen Monarchen vereinigt waren. Diese auf Bewässerung und intensivem Ackerbau beruhenden Gesellschaftsformen führten so zu einer „orientalischen“ Form des Despotismus. Ein derartiger Despotismus konnte jahrhundertelang aufrechterhalten werden. Sein Zusammenbruch erfolgte manchmal unter dem Ansturm von Stämmen, die aus Gebirgen oder Wüsten durch den Reichtum der Täler angelockt wurden, manchmal auch durch den Verfall des riesigen, komplizierten und lebenswichtigen Bewässerungssystems. Unter derartigen Umständen konnte die Macht leicht von einem Stammeskönig auf den anderen übergehen, oder der Staat konnte in kleinere feudale Machtbereiche auseinanderfallen und der Prozeß der Wiedervereinigung von neuem beginnen. Bei all diesen dynastischen Umwälzungen und nachfolgenden Rückentwicklungen vom Feudalismus zum Absolutismus blieben jedoch die Dörfer, die die Grundlage dieser Gesellschaft bildeten, im wesentlichen unverändert und damit auch die zugrunde liegende ökonomische und soziale Struktur. Die orientalische Gesellschaftsentwicklung bewegt sich in Kreisläufen, und es gibt in Asien und Afrika sogar noch heute viele Staatsbildungen, die über mehrere Jahrtausende hinweg dieselbe Lebensweise bewahrt haben. Unter solchen Bedingungen konnten sich Fortschritte nur langsam und mehr zufällig durchsetzen, und Blütezeiten der Kultur konnten sehr wohl durch viele Jahrhunderte des Stillstandes und Verfalls unterbrochen werden.
Der statische Charakter des Orients verlieh seinen Institutionen den Nimbus der Heiligkeit, wodurch der Identifizierung der Religion mit dem Staatsapparat Vorschub geleistet wurde. Die Bürokratie hatte an diesem religiösen Charakter des Staates oftmals ihren Anteil; in vielen orientalischen Ländern waren die Priester zugleich die Verwalter des Staates. Da die Pflege der Wissenschaft Aufgabe der Bürokratie war, findet man in vielen — allerdings nicht in allen — orientalischen Ländern, daß die Priester hervorragende Träger wissenschaftlicher Kenntnisse waren.

2.2. Die mathematischen Leistungen der Hauptzentren

Die orientalische Mathematik entstand als eine praktische Wissenschaft, um Kalenderberechnungen, die Verwaltung der Ernte, die Organisation der öffentlichen Bauten und die Eintreibung der Steuern zu erleichtern. Das Hauptinteresse galt anfangs natürlich der praktischen Arithmetik und Meßkunde. Eine Wissenschaft jedoch, die jahrhundertelang als ein besonderes Handwerk betrieben wird, dessen Auftrag nicht nur in den Anwendungen besteht, sondern auch darin, ihre Geheimnisse durch die Lehre weiterzugeben, entwickelt Tendenzen zur Abstraktion. Allmählich kommt es dahin, daß sie um ihrer selbst willen studiert wird. Die Arithmetik entfaltet sich zur Algebra, und zwar nicht nur deshalb, weil dadurch die praktischen Berechnungen verbessert werden, sondern auch als natürlicher Wachstumsprozeß einer Wissenschaft, die in Schreiberschulen gepflegt und entwickelt wird. Aus denselben Gründen führte die Meßkunst bis zu den Anfängen — aber auch nicht mehr — einer theoretischen Geometrie.

Trotz all des Handels und Verkehrs, der in diesen alten Gesellschaftsordnungen blühte, blieb der in den durch Isolierung und Bewahrung des Althergebrachten gekennzeichneten Dörfern konzentrierte Ackerbau doch ihr wirtschaftliches Rückrat. So kam es, daß man trotz aller Ähnlichkeit in der ökonomischen Struktur und im Niveau der wissenschaftlichen Kenntnisse stets überraschende Unterschiede zwischen den verschiedenen Kulturen findet. Die Abgeschlossenheit der Chinesen und Ägypter war sprichwörtlich. Es war stets leicht, zwischen den Kunstformen und der Schrift der Ägypter, Mesopotamier, Chinesen und Inder zu unterscheiden. Man kann ebenso von ägyptischer, mesopotamischer, chinesischer und indischer Mathematik sprechen, obwohl ihr allgemeiner arithmetisch-algebraischer Charakter sehr viele Übereinstimmungen aufweist. Selbst dann, wenn die Wissenschaft während einer Epoche in dem einen Lande größere Fortschritte machte als in einem anderen, behielt sie ihre charakteristische Verfahrensweise und Symbolik bei.
Es ist schwierig, neue Entdeckungen im Osten zeitlich festzulegen. Der statische Charakter seiner gesellschaftlichen Struktur führt dazu, daß die wissenschaftliche Lehre über Jahrhunderte oder sogar Jahrtausende hinweg unverändert bleibt. Entdeckungen, die in der Abgeschlossenheit eines Stadtgebietes gemacht wurden, mögen niemals an andern Orten bekannt geworden sein. Große Schätze wissenschaftlicher und technischer Kenntnisse konnten durch Wechsel der Herrscher, durch Kriege oder Überschwemmungen zerstört werden. Es geht die Sage, daß im Jahre 221 v. u. Z., als China unter der Herrschaft eines absoluten Despoten, Chhin Shih Huang Ti (des ersten Kaisers von Chhin), vereinigt war, von diesem befohlen wurde, alle Lehrbücher mit Ausnahme einiger (z.B. Medizin) zu vernichten. Später wurde vieles aus dem Gedächtnis neu aufgeschrieben, aber solche Ereignisse machen die Datierung von Entdeckungen sehr schwierig.
Eine weitere Schwierigkeit für Zeitbestimmungen in der orientalischen Wissenschaft rührt von dem für ihre Aufzeichnung verwendeten Material her. Die Mesopotamier brannten Tontäfelchen, die praktisch unzerstörbar sind.[1]) Die Ägypter verwendeten Papyrus, und ein beträchtlicher Teil ihres Schrifttums hat sich in dem trockenen Klima erhalten. Die Chinesen und Inder benutzten weit weniger widerstandsfähiges Material, wie Rinde oder Bambus. Im zweiten Jahrhundert v. u. Z. begannen die Chinesen, Papier zu verwenden, aber es ist nur wenig erhalten geblieben, was aus dem Jahrtausend vor 700 u. Z. stammt. Unsere Kenntnis der orientalischen Mathematik ist daher sehr bruchstückhaft; für die vorgriechischen Jahrhunderte sind wir fast ausschließlich auf Material aus Mesopotamien oder Ägypten angewiesen. Es ist sehr wohl möglich, daß neue Entdeckungen zu einer vollständigen Neueinschätzung der Gewichte beim Vergleich der verschiedenen Formen orientalischer Mathematik führen können. Lange Zeit hindurch befand sich unsere reichste geschichtliche Quelle in Ägypten, und zwar infolge der 1858 gemachten Entdeckungen des sogenannten Papyrus Rhind, das um 1650 v. u. Z. geschrieben wurde, aber viel älteres Material enthält. In den letzten fünfzig Jahren hat sich unsere Kenntnis der babylonischen Mathematik durch die bemerkenswerten Entdeckungen

[1]) Außer wenn sie nach der Ausgrabung nicht sorgfältig aufbewahrt werden. Der Verlust an Täfelchen durch schlechte Behandlung ist beträchtlich.

von O. Neugebauer und F. Thureau-Dangin außerordentlich vermehrt, die eine große Anzahl von Tontäfelchen entziffern konnten. Es scheint jetzt, als ob die babylonische Mathematik viel weiter entwickelt war als die ihrer östlichen Gegenspieler. Dieses Urteil kann sehr wohl endgültig sein, da im inhaltlichen Charakter der babylonischen und ägyptischen Texte jahrhundertelang eine gewisse innere Konsequenz besteht. Zudem war die ökonomische Entwicklung Mesopotamiens weiter fortgeschritten als die der anderen Länder in dem sogenannten Fruchtbarkeitsgürtel des Nahen Ostens, der sich von Mesopotamien nach Ägypten erstreckt. Mesopotamien war der Kreuzungspunkt einer großen Zahl von Karawanenstraßen, wogegen Ägypten eine vergleichsweise isolierte Lage besaß. Hinzu kam der Umstand, daß die Bändigung des unberechenbaren Tigris und des Euphrat viel mehr technische Fertigkeiten und Maßnahmen verlangte als die des Nils, des „Flusses mit den besten Manieren“, um mit Sir William Willcocks zu sprechen. Weitere Forschungen über die Mathematik der alten Hindus können noch unerwartete Errungenschaften zutage fördern, obwohl entsprechende Behauptungen bis jetzt noch nicht sehr überzeugend wirken.

2.3. Die ägyptische Mathematik

Die meisten unserer Kenntnisse über die ägyptische Mathematik stammen aus zwei mathematischen Papyri: einmal aus dem bereits erwähnten Papyrus Rhind, der 85 Aufgaben enthält, und sodann aus dem sogenannten Moskauer Papyrus, der vielleicht zwei Jahrhunderte älter ist und worin sich 25 Aufgaben befinden. Diese Aufgaben gehörten bereits zum alten Lehrgut, als die Manuskripte zusammengestellt wurden, und trotzdem existieren kleinere Papyri aus wesentlich jüngerer Zeit — sogar aus der Zeit der Römer —, die keinen Unterschied in den angewandten Methoden zeigen. Die darin gelehrte Mathematik beruht auf einem Dezimalsystem mit besonderen Zeichen für jede höhere dezimale Einheit. Mit diesem System sind wir wohlvertraut durch das römische System, das auf demselben Prinzip beruht: MDCCCLXXVIII = 1878. Auf der Grundlage dieses Systems entwickelten die Ägypter eine Arithmetik von vorwiegend additivem Charakter, womit gemeint ist, daß ihre Haupttendenz darin bestand, alle Multiplikationen auf wiederholte Addition zurückzuführen. Beispielsweise wurde die Multiplikation mit 13 dadurch geleistet, daß zuerst mit 2, dann mit 4, dann mit 8 multipliziert wurde und die Multiplikationsergebnisse mit 4 und 8 zur gegebenen Zahl addiert wurden.

Beispiel der Berechnung von 13×11:

*1	11
2	22
*4	44
*8	88

Die mit * bezeichneten Ergebnisse werden addiert, woraus sich 143 ergibt.

Der hervorstechendste Zug der ägyptischen Arithmetik war ihre Bruchrechnung. Alle Brüche wurden auf Summen von sogenannten Stammbrüchen, d. h. Brüchen mit dem Zähler 1, zurückgeführt. Die einzige Ausnahme bildete $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, wofür ein besonderes Symbol verwendet wurde. Die Zurückführung auf Summen von Stammbrüchen wurde durch Tafeln ermöglicht, welche die Zerlegung für Brüche der Form $2/n$ angaben — der einzigen Zerlegung, die man angesichts der Zweiermultiplikation benötigte. Der Papyrus Rhind enthält eine Tafel, in der für alle ungeraden n von 5 bis 331 die Zusammensetzungen aus Stammbrüchen angegeben sind, z.B.

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \qquad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Wovon man bei einer solchen Zurückführung auf Stammbrüche ausging, ist unklar $\left(\text{z.B. warum man } \frac{2}{19} \text{ in die Summe } \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} \text{ verwandelt und nicht in } \frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}\right)$. Diese Art der Bruchrechnung verlieh der ägyptischen Mathematik einen komplizierten und schwerfälligen Charakter und verhinderte nachhaltig das weitere Wachstum der Wissenschaft. Das Zerlegungsverfahren setzte aber zugleich eine gewisse mathematische Gewandtheit voraus, und es existieren interessante Theorien, um das Verfahren zu erklären, mit dessen Hilfe die ägyptischen Fachleute ihre Ergebnisse erzielt haben können.[1])
Viele Probleme waren sehr einfach und führten auf lineare Gleichungen mit einer Unbekannten:

Addiert man zu einer Größe ihr $\frac{2}{3}$-, $\frac{1}{2}$- und $\frac{3}{7}$faches, so erhält man 33. Welches ist diese Größe?

Die Lösung, $14\frac{28}{97}$, schrieb man als Summe von Stammbrüchen:

$$14\frac{1}{4} + \frac{1}{97} + \frac{1}{56} + \frac{1}{179} + \frac{1}{176} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388}.$$

Für die Unbekannte in den Gleichungen existierte eine spezielle Hieroglyphe, die soviel wie „Haufen" oder „Menge" bedeutete und „Hau" gesprochen wurde. Deshalb wird die ägyptische Algebra manchmal als „Hau-Rechnung" bezeichnet.

Die Aufgaben beschäftigen sich mit dem Gehalt von Brot und von verschiedenen Biersorten, mit der Fütterung der Tiere und der Getreidespeicherung, was den praktischen Ursprung dieser schwerfälligen Arithmetik und primitiven Algebra erweist. Einige Probleme offenbaren theoretische Interessen, wie etwa die Aufgabe, 100 Brote so unter 5 Leute zu verteilen, daß die Anteile eine arithmetische Pro-

[1]) O. Neugebauer, *Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik *1* (1931), 301—380. B. L. van der Waerden, *Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung*, ebenda *4* (1938), 359—382. Siehe auch E.M. Bruins, Proc. Nederl. Akad. Wet. A. *55* (1952).
Ferner: S. A. Janowskaja, *Zur Theorie der ägyptischen Bruchrechnung* (russisch), Arbeiten des Instituts für Geschichte der Naturwissenschaften *1* (1947), 269—282; I. N. Wesselowski, *Die ägyptische Wissenschaft und Griechenland* (russisch), ebenda *2* (1948), 426—428.

gression bilden und daß ein Siebentel der Summe der drei größten Anteile gleich der Summe der beiden kleinsten sein soll. Man findet sogar eine geometrische Progression, die von 7 Häusern handelt, wobei in jedem Haus 7 Katzen vorhanden sind, von denen jede 7 Mäusen auflauert usw. Das offenbart die Kenntnis der Summenformel einer geometrischen Reihe.[1])

Einige Probleme sind geometrischer Natur und behandeln meist Fragen der Messung. Die Dreiecksfläche wurde als das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe gefunden; die Kreisfläche vom Durchmesser d wurde mit $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ angegeben, was zu dem Wert von $\frac{256}{81} = 3{,}1605$ für π führte. Man findet auch einige Volumenformeln, etwa für den Würfel, das Parallelflach und den Kreiszylinder, sämtlich ganz konkret als Behälter, vorwiegend für Getreide, verstanden. Das bemerkenswerteste Ergebnis der ägyptischen Meßkunde war die Volumenformel für einen Pyramidenstumpf von quadratischem Querschnitt: $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, worin a, b die Längen der Quadratseiten und h die Höhe bedeuten. Dieses Resultat, zu dem bis jetzt kein Gegenstück in einer der anderen alten Formen der Mathematik gefunden wurde, ist um so bemerkenswerter, als es keine Anzeichen dafür gibt, daß die Ägypter irgendeine Ahnung vom Lehrsatz des Pythagoras besaßen, trotz einiger unbegründeter Erzählungen über „Seilknüpfer“, die vermutlich mit einem Seil, worin sich $3 + 4 + 5 = 12$ Knoten befanden, rechte Winkel konstruiert haben sollen.[2])

Man muß hier vor Überteibungen hinsichtlich des Alters der mathematischen Kenntnisse der Ägypter warnen. Den Erbauern der Pyramiden (um 3000 v. u. Z. und früher) sind alle möglichen Resultate einer weitentwickelten Wissenschaft zugeschrieben worden, und es gibt sogar eine vielfach für wahr gehaltene Erzählung, daß die Ägypter im Jahre 4212 v. u. Z. den sogenannten Sothis-Zyklus zur Kalenderberechnung eingeführt haben sollen. Derartig genaues mathematisches und astronomisches Wissen kann man nicht ernsthaft einem Volke zuschreiben, das sich gerade langsam aus den Lebensbedingungen der jüngeren Steinzeit herauslöst. Die Quelle solcher Berichte ist gewöhnlich in ägyptischen Überlieferungen aus späterer Zeit zu erkennen, die uns von den Griechen übermittelt wurden. Es ist eine allgemeine Eigenart der alten Kulturen, grundlegende Kenntnisse in sehr frühe Zeiten zurückzudatieren. Alle vorhandenen Texte weisen auf einen ziemlich primitiven Stand der ägyptischen Mathematik hin. Ihre Astronomie befand sich auf dem gleichen allgemeinen Niveau.

---

[1]) Wie sich dasselbe Problem durch die Jahrhunderte erhalten hat, zeigt das folgende Kinderlied:

> As I was going to St. Ives
> I met a man with seven wives,
> Every wife had seven sacks,
> Every sack had seven cats,
> Every cat had seven kits.
> Kits, cats, sacks and wives,
> How many were going to St. Ives?

[2]) Siehe S. Gandz, a. a. O., S. 7.

2.4. Die ältesten sumerischen mathematischen Texte

In der Mathematik Mesopotamiens erheben wir uns auf ein viel höheres Niveau, als es die ägyptische Mathematik jemals erreicht hat. Man kann hier sogar Fortschritte im Laufe der Jahrhunderte entdecken. Schon die ältesten Texte, die aus der letzten Sumerischen Periode (der dritten Dynastie in Ur, etwa 2100 v. u. Z.) stammen, zeigen eine ganz erhebliche Rechenfertigkeit. Diese Texte enthalten Multiplikationstabellen, in denen ein wohldurchgebildetes Sexagesimalsystem (Zahlensystem mit der Grundzahl 60) einem ursprünglich vorhandenen Dezimalsystem überlagert wurde; es gibt ein Keilschriftsymbol, das 1, 60, 3600 und auch $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}$ darstellt. Das war aber nicht ihr Hauptmerkmal. Während die Ägypter jede größere Einheit durch ein neues Symbol bezeichneten, verwendeten die Sumerer dasselbe Symbol, gaben aber seinen Wert durch die *Stellung* an. So bedeutete eine 1, der eine andere 1 folgte, 61, und eine 5, danach 6, danach 3 (wir schreiben dafür 5, 6, 3) bedeutet $5 \times 60^2 + 6 \times 60 + 3 = 18363$. Dieses Positions- oder Stellenwertsystem unterschied sich nicht wesentlich von unserer eigenen Zahlenschreibweise, in der das Symbol 343 an Stelle von $3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$ steht. Ein solches System bot gewaltige Vorteile beim Rechnen, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man eine Multiplikationsaufgabe in unserer dekadischen Schreibweise und in der Schreibweise der römischen Ziffern ausführt. Das Stellenwertsystem beseitigt auch viele Schwierigkeiten der Bruchrechnung genauso, wie es in unserem eigenen System bei den Dezimalbrüchen der Fall ist. Dieses ganze System scheint eine unmittelbare Frucht der Verwaltungstätigkeit gewesen zu sein, wie durch Tausende von Texten belegt wird, die aus derselben Periode stammen und die Ablieferung von Vieh, Getreide usw. sowie auf diesen Lieferungen beruhende Berechnungen behandeln. Bei dieser Art zu rechnen gab es einige Zweideutigkeiten, da die genaue Bedeutung jedes Symbols nicht immer aus seiner Stellung hervorging. So konnte (5, 6, 3) auch $5 \times 60^1 + 6 \times 60^0 + 3 \times 60^{-1} = 306\frac{1}{20}$ darstellen, und die genaue Bedeutung mußte dem Zusammenhang entnommen werden. Eine weitere Unbestimmtheit wurde durch die Tatsache hervorgerufen, daß eine leere Stelle gelegentlich Null bedeutete, so daß (11, 5) auch $11 \times 60^2 + 5 = 39605$ darstellen konnte. Im Laufe der Zeit kam ein besonderes Symbol für die Null auf, aber nicht vor der Persischen Zeit. Die sogenannte „Erfindung der Null" war somit die logische Folge der Einführung des Stellenwertsystems, aber erst dann, als die Rechenfertigkeit eine beträchtliche Vollendung erreicht hatte.

Sowohl das Sexagesimalsystem als auch das Stellenwertsystem blieben dauernder Besitz der Menschheit. Unsere heutige Einteilung der Stunde in 60 Minuten und 3600 Sekunden geht auf die Sumerer zurück, genauso wie die Einteilung des Vollkreises in 360 Grad, jeden Grads in 60 Minuten und jeder Minute in 60 Sekunden. Es gibt Gründe dafür, um anzunehmen, daß die Wahl der Zahl 60 statt der Zahl 10 als Einheit mit dem Versuch zusammenhing, die Maßsysteme zu vereinheitlichen, obwohl auch die Tatsache eine Rolle gespielt haben mag, daß 60 viele ganzzahlige Teiler besitzt. Übrigens ist die Geschichte des Stellenwertsystems, dessen unvergängliche Bedeutung mit der des Alphabets[1]) verglichen worden ist — da beide Erfindungen ein umfangreiches Symbolsystem durch eine von jedermann leicht zu verstehende Methode ersetzen —, noch immer in beträchtliches Dunkel gehüllt. Es ist sachlich begründet, wenn man annimmt, daß es sowohl den Hindus als auch den Griechen auf den Karawanenstraßen durch Babylon bekannt geworden ist; man weiß auch, daß die moslemischen Gelehrten seine Erfindung den Indern zuschrieben. Die babylonische Tradition dürfte jedoch die ganze spätere Verbreitung des Stellenwertsystems beeinflußt haben.

2.5. Babylonische Mathematik

Die nächste Gruppe von Keilschrifttexten stammt aus der Zeit der ersten babylonischen Dynastie, als König Hammurabi in Babylon regierte (18. Jh. v. u. Z.) und ein semitisches Volk die ursprünglichen Einwohner, die Sumerer, unterworfen hatte. In diesen Texten finden wird die Arithmetik zu einer wohlabgerundeten Algebra weiterentwickelt. Während die Ägypter dieser Periode lediglich imstande waren, einfache lineare Gleichungen zu lösen, waren die Babylonier in den Tagen von Hammurabi in vollem Besitz des Verfahrens zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Sie lösten lineare und quadratische Gleichungen in zwei Veränderlichen und sogar Probleme, in denen kubische und biquadratische Gleichungen auftraten. Sie formulierten derartige Probleme nur mit bestimmten Zahlenwerten für die Koeffizienten, aber ihre Methode läßt keinen Zweifel darüber, daß sie das allgemeine Lösungsverfahren kannten. Folgendes Beispiel findet sich auf einem Tontäfelchen, das aus dieser Zeit stammt:[2])

„Eine Fläche A, die aus der Summe von zwei Quadraten besteht, beträgt 1000. Die Seite des einen Quadrats ist $\frac{2}{3}$ mal so lang wie die des anderen, abzüglich 10. Wie groß sind die Quadratseiten?" Das Problem führt auf die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$, deren Lösungen durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$$

gefunden werden können, deren eine Lösung $x = 30$ positiv ist.
Der im Keilschrifttext angegebene Lösungsweg beschränkt sich — wie in allen Problemen des Orients — auf die einfache Aufzählung der zahlenmäßigen Schritte, die man zur Lösung der quadratischen Gleichung vorzunehmen hat: „Quadriere 10, das ergibt 100; subtrahiere 100 von 1000, das ergibt 900", usw.

Der stark arithmetisch-algebraische Charakter dieser babylonischen Mathematik tritt auch in ihrer Geometrie zutage. Wie in Ägypten entwickelt sich die Geometrie

---

[1]) O. Neugebauer, *The History of Ancient Astronomy*, Journal of Near Eastern Studies *4* (1945), 12.

[2]) K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik* II (1939), S. 50.

auf der Grundlage praktischer Probleme des Messens, aber die geometrische Form des Problems war gewöhnlich nur die Einkleidung einer algebraischen Gleichung. Das oben behandelte Beispiel zeigt, wie ein Problem, das Quadratflächen behandelte, auf ein nichttriviales algebraisches Problem führte, und dieses Beispiel bildet keine Ausnahme. Die Texte erweisen, daß die babylonische Mathematik der semitischen Periode im Besitz der Formel für den Flächeninhalt einfacher rechtwinkliger Figuren und für das Volumen einfacher Körper war, wenn auch das Volumen des Pyramidenstumpfs noch nicht gefunden worden war. Der sogenannte Satz des Pythagoras war bekannt, und zwar nicht nur für Spezialfälle, sondern in voller Allgemeinheit. Das wesentlichste Kennzeichen dieser Geometrie war jedoch ihr algebraischer Charakter. Das gilt ebenso für alle späteren Texte, besonders für die aus der dritten Periode stammenden, aus der wir über eine erhebliche Anzahl von Texten verfügen, aus den neubabylonischen, persischen und seleukidischen Zeiten (etwa von 600 v. u. Z. bis 300 u. Z.).

Die Texte dieser späteren Zeit wurden stark durch die Entwicklung der babylonischen Astronomie beeinflußt, die in jenen Tagen wahrhaft wissenschaftliche Züge annahm und durch eine sorgfältige Untersuchung des Laufes von Sonne, Mond und Planeten gekennzeichnet ist. Die Mathematik wurde bezüglich der Rechentechnik noch weiter vervollkommnet; die Algebra nahm Gleichungsprobleme in Angriff, die selbst heutzutage noch eine erhebliche Gewandtheit im Rechnen erfordern. Es kommen aus der Seleukidenperiode stammende Rechnungen vor, die bis auf siebzehn Sexagesimalstellen durchgeführt wurden. Derartig komplizierte numerische Arbeiten standen nicht mehr mit Problemen der Steuererhebung oder Meßkunde in Zusammenhang, sondern wurden durch astronomische Probleme oder allein durch Vorliebe für das Rechnen selbst angeregt.

In dieser rechnerischen Arithmetik wurde viel mit Tafeln gearbeitet, die von einfachen Multiplikationstabellen bis zu Tafeln der Reziproken und von Quadrat- und Kubikwurzeln reichten. Eine Tafel enthält eine Liste von Zahlen der Form $n^3 + n^2$, die anscheinend dazu verwendet wurde, um kubische Gleichungen der Form $x^3 + x^2 = a$ zu lösen. Man kannte einige vorzügliche Näherungswerte, $\sqrt{2}$ wurde mit $1\frac{5}{12}$ angegeben $\left(\sqrt{2} = 1{,}414214,\ 1\frac{5}{12} = 1{,}4167\right)$[1]) und $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$ mit $\frac{17}{24} = 0{,}7083$. Es kommt sogar der Wert $\sqrt{2} = (1;24,51,10) = 1{,}414213$ vor. Quadratwurzeln wurden anscheinend nach folgender Formel berechnet:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + h} = a + \frac{h}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right).$$

Bezüglich des Wertes von π begnügen sich die meisten Täfelchen mit dem Wert der Bibel, $\pi = 3$. Es gibt Hinweise darauf, daß auch bessere Approximationen verwendet wurden, die einen Wert für π von $3\frac{1}{8}$ ergaben.[2])

---

[1]) O. Neugebauer, *Exact Science in Antiquity*, Univ. of Pennsylvania Bicontennial Conference, Studies in Cilivization, Philadelphia 1941, S. 13—29.

[2]) E. M. Bruins — M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse* (Paris 1961), S. 18.

Die Gleichung $x^3 + x^2 = a$ tritt in einem Problem auf, worin nach der Lösung eines Gleichungssystems $xyz + xy = 1 + \frac{1}{6}$, $y = \frac{2}{3}x$, $z = 12x$ gefragt ist, die auf $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$ oder (laut Tabelle) auf $12x = 6$ führt.

Es existieren auch Keilschrifttexte mit Zinseszinsproblemen, wie z.B. die Frage, wie lange es dauern würde, bis eine bestimmte Geldsumme sich bei 20% Zinsen verdoppelt hat. Das führt auf die Gleichung $\left(1\frac{1}{5}\right)^x = 2$, welche gelöst wird, indem man zunächst feststellt, daß $3 < x < 4$ ist, und dann linear interpoliert. In moderner Schreibweise:

$$4 - x = \frac{(1{,}2)^4 - 2}{(1{,}2)^4 - (1{,}2)^3},$$

was auf $x = 4$ Jahre abzüglich (2, 33, 30) Monate führt.
Einer der besonderen Gründe für die Entwicklung der Algebra um etwa 200 v. u. Z. war anscheinend die Verwendung der alten sumerischen Schrift durch die neuen semitischen Herren des Landes, die Babylonier. Die alte Schrift war wie die Hieroglyphen eine Sammlung von Begriffszeichen, wobei jedes Zeichen einen einzigen Begriff darstellt. Die Semiten verwendeten sie zur phonetischen Wiedergabe ihrer eigenen Sprache und übernahmen einige Zeichen auch in ihrer alten Bedeutung. Diese Zeichen drückten jetzt Begriffe aus, wurden aber in abweichender Art ausgesprochen. Solche Begriffszeichen waren für eine algebraische Sprache bestens geeignet, so wie unsere heutigen Zeichen +, —, ., : usw., die in Wahrheit auch Begriffszeichen sind. In den Verwaltungsschulen von Babylon bildete diese algebraische Sprache viele Generationen hindurch einen Teil des Lehrplans, und obwohl das Reich durch die Hände vieler Eroberer ging — Kassiten, Assyrer, Meder, Perser —, blieb diese Tradition erhalten.

Die schwierigeren Probleme stammen aus späteren Perioden in der Geschichte der alten Kulturen, vornehmlich aus der Zeit der Perser und Seleukiden. Babylon war zu dieser Zeit kein bedeutendes politisches Zentrum mehr, blieb aber viele Jahrhunderte hindurch das kulturelle Herz eines großen Reiches, in dem sich die Babylonier mit Persern, Griechen, Juden, Hindus und vielen anderen Völkern vermischten. In allen Keilschrifttexten ist eine ununterbrochene Tradition festzustellen, was auf eine stetige örtliche Entwicklung hinzudeuten scheint. Es ist kaum zweifelhaft, daß diese örtliche Entwicklung auch durch Berührung mit anderen Kulturen angeregt wurde und daß diese Anregung in beiden Richtungen wirkte. Wir wissen, daß die babylonische Astronomie dieser Zeit die Astronomie der Griechen und die babylonische Mathematik ihre rechnerische Arithmetik beeinflußte. Man darf wohl annehmen, daß sich die Wissenschaft der Griechen und der Hindus durch die Vermittlung der babylonischen Schreiberschulen begegneten. Die Rolle von Mesopotamien zur Zeit der Perser und Seleukiden bei der Verbreitung der alten und antiken Astronomie und Mathematik ist erst unzureichend geklärt, aber alle verfügbaren Zeugnisse zeigen, daß sie beträchtlich gewesen sein muß. Die Wissenschaft der Araber und Hindus im Mittelalter fußte nicht nur auf den Traditionen von Alexandrien, sondern auch auf denen von Babylon.

2.6. Der Einfluß praktischer Probleme auf die Methoden der orientalischen Mathematik

Nirgends in der gesamten orientalischen Mathematik findet man auch nur einen Ansatzpunkt zu dem, was wir einen Beweis nennen. Keinerlei Beweisführung wurde dargelegt, sondern nur die Beschreibung gewisser Regeln: „Tue dies, tue das.“ Wir wissen nichts von den Wegen, auf denen die Sätze gefunden wurden: Woher kannten beispielsweise die Babylonier den Satz des Pythagoras? Man hat verschiedene Erklärungsversuche gegeben, wie die Ägypter und Babylonier zu ihren Ergebnissen gelangt sind, aber sie beruhen sämtlich auf Hypothesen. Uns heutigen, die wir in der Schule der strengen Beweise Euklids aufgewachsen sind, erscheint diese ganze Denkweise des Orients auf den ersten Blick befremdend und in hohem Maße unbefriedigend. Aber diese Fremdheit verliert sich, sobald wir uns vergegenwärtigen, daß der größte Teil der Mathematik, die wir heute unseren Ingenieuren und Technikern beibringen, noch immer von dieser Art des „Tue dies, tue das“ ist, ohne daß wir uns mit strengen Beweisen große Mühe machen. An vielen Oberschulen wird Algebra mehr im Stile einer Sammlung von Regeln als im Stile einer deduktiven Wissenschaft gelehrt. Die orientalische Mathematik scheint sich niemals von dem jahrtausendelangen Einfluß der technischen Probleme und Verwaltungsprobleme frei gemacht zu haben, zu deren Lösung sie geschaffen worden war.

2.7. Die altindische Mathematik

Das Studium der alten indischen Mathematik wird sehr wesentlich durch die Frage nach dem Einfluß der Griechen, Chinesen und Babylonier bestimmt. Die einheimischen indischen Gelehrten späterer Zeiten pflegten — und bisweilen tun sie es heute noch — nachdrücklich das hohe Alter ihrer Mathematik zu betonen, aber man kennt keine mathematischen Texte, die mit Sicherheit in die Epoche vor dem Beginn unserer Zeitrechnung fallen. Die ältesten Hindutexte stammen vielleicht aus den ersten Jahrhunderten u. Z., die ältesten chinesischen Texte sogar aus noch späterer Zeit. Wir wissen sehr wohl, daß die alten Hindus dezimale Zahlensysteme ohne die Stellenwertschreibweise kannten. Ein solches System wurde aus den sogenannten Brâhmî-Zahlen gebildet, worin es besondere Zeichen für jede der folgenden Zahlen gab: 1, 2, 3, . . ., 9, 10; 20, 30, . . ., 100; 200, 300, . . ., 1000; 2000, . . . Diese Symbole gehen wenigstens in die Zeit des Königs Açoka (300 v. u. Z.) zurück.

Weiter gibt es die sogenannten „Súlvasūtras“, die teilweise bis 500 v. u. Z. oder noch weiter zurückreichen und mathematische Regeln enthalten, die alten einheimischen Ursprungs sein dürften. Diese Regeln finden sich unter religiösen Vorschriften, von denen sich manche mit dem Bau von Altären befassen. Man findet hierin Rezepte zur Konstruktion von Quadraten und Rechtecken und Ausdrücke für die Beziehung zwischen der Diagonale und den Seiten des Quadrats und für den Größenvergleich von Kreisen und Quadraten. Es zeigt sich eine gewisse Kenntnis des Lehrsatzes des Pythagoras in Sonderfällen, und es treten einige bemerkenswerte Näherungswerte in Form von Stammbrüchen auf, wie etwa (in heutiger Schreibweise):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} \ (= 1{,}4142156),$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)^2 = 18\,(3 - 2\sqrt{2})$$
$$= 3{,}088\ldots$$

Die merkwürdige Tatsache, daß diese in den „Súlvasūtras" enthaltenen Resultate in späteren Schriften der Hindus nicht mehr vorkommen, zeigt, daß man von jener für Ägypten und Babylon so charakteristischen Stetigkeit der Überlieferung in der Mathematik der Hindus nicht sprechen kann. Diese Stetigkeit mag bei der tatsächlichen Größe Indiens auch später gelegentlich fehlen. Es mag verschiedene Überlieferungen entsprechend dem Bestehen mannigfaltiger Schulen gegeben haben. Wir wissen beispielsweise, daß der Jainismus, der ebenso alt wie der Buddhismus (etwa 500 v. u. Z.) ist, mathematische Studien förderte. In heiligen Büchern von Jaina findet sich der Wert $\pi = \sqrt{10}$.[1])

2.8. Die Mathematik im alten China

Auch das Studium der altchinesischen Mathematik wird durch das Fehlen von Übersetzungen erheblich beeinträchtigt, obwohl wir durch die Bücher von Mikami und Needham ausgezeichnet über den Stand der Mathematik im alten China informiert werden. Kennern der russischen Sprache ist wesentlich mehr Material zugänglich, sogar eine russische Übersetzung der klassischen mathematischen „Chiu Chang Suan Ching" (Neun Bücher über die Kunst der Mathematik). Sowohl dieses Buch als auch das „Chou Pei" stammen in ihrer jetzigen Form aus der Periode der Han-Dynastie (202 v. u. Z. bis 220 u. Z.), können aber ebensogut Material erheblich älteren Ursprung enthalten. Das „Chou Pei" ist nur teilweise mathematisch, aber interessant, weil es den Satz des Pythagoras diskutiert. Die „Neun Bücher" sind dagegen ein rein mathematisches Werk und charakterisieren schon vollständig die Art der altchinesischen Mathematik im Verlauf der nächsten tausend Jahre und länger.

Sehr alt sind auch gewisse Diagramme aus Büchern der Han-Periode, so z. B. aus dem „I-Ching" (Book of Changes). Zu ihnen gehört das folgende, von vielen Legenden umwobene magische Quadrat (Lo Shu):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Das chinesische Zahlensystem war stets dezimal, und schon im zweiten Jahrtausend v. u. Z. finden wir Zahlen, die durch neun Symbole im Stellenwertsystem ausge-

[1]) B. Datta, *The Jaina School of Mathematics*, Bulletin Calcutta Math. Soc. *21* (1929), 115–146.

drückt wurden.[1]) Diese Schreibweise bürgerte sich in der Han-Periode oder schon früher ein. Die neun Zeichen wurden durch verschieden angeordnete Bambusstäbchen dargestellt; z.B. bedeutete $\perp\top=\top||||$ die Zahl 6729, und sie wurde auch auf diese Weise geschrieben. Die Grundrechenarten wurden auf Rechenbrettern ausgeführt; leere Stellen gaben die Null an (ein spezielles Zeichen für die Null tritt erst im 13. Jahrhundert u. Z. auf, kann aber älter sein). Es gab auch Varianten dieser Schreibweise.

Bei der Kalenderberechnung wurde eine Art von Sexagesimalsystem verwendet, das etwa mit einer Kombination aus zwei miteinander verbundenen Zahnrädern zu vergleichen ist, wobei das eine Zahnrad 12, das andere 10 Zähne hatte. So wurde die Zahl 60 eine höhere Einheit, eine „Periode" (das „cycle" in „Locksley Hall" von Tennyson).

Die Mathematik der „Neun Bücher" besteht in der Hauptsache aus Problemen sowie allgemeinen Hinweisen zu deren Lösung. Diese Probleme stammen aus der praktischen Arithmetik und führen auf algebraische Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten. Quadrat- und Kubikwurzeln werden berechnet, z.B. wird $751\frac{1}{2}$ als Quadratwurzel aus $564752\frac{1}{4}$ gefunden. Für Kreisberechnungen wurde $\pi = 3$ gesetzt.

Eine Reihe von Problemen führt auf lineare Gleichungssysteme, z.B. auf das System

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26, \end{aligned}$$

welches als „Matrix" seiner Koeffizienten geschrieben wurde. Seine Lösung wurde in einer Form angegeben, die wir heutzutage eine „Matrixtransformation" nennen würden. In diesen Matrizen finden wir negative Zahlen, die hier zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik in Erscheinung treten.

Bei der chinesischen Mathematik besteht die ungewöhnliche Situation, daß ihre Tradition praktisch ohne Unterbrechung bis in die Gegenwart fortbesteht, so daß man ihre Rolle in der Gesellschaft wesentlich besser studieren kann als im Fall der ägyptischen und babylonischen Mathematik, die untergegangenen Kulturen angehörten. Man weiß beispielsweise, daß Examenskandidaten eine genau festgelegte Kenntnis der wichtigsten Klassiker nachweisen mußten und daß für dieses Examen hauptsächlich die Fähigkeit erforderlich war, Textstellen fehlerfrei aus dem Gedächtnis zu zitieren. Die traditionelle Lehre wurde so mit peinlicher Gewissenhaftigkeit von Generation zu Generation überliefert. In einer derart stagnierenden kulturellen Atmosphäre stellten neue Entdeckungen außergewöhnliche Ausnahmen dar, wodurch umgekehrt die Unveränderlichkeit der mathematischen Tradition garantiert wurde. Eine solche Tradition konnte Jahrtausend hindurch weitergereicht und nur gelegentlich durch große historische Katastrophen unterbrochen werden. In Indien existieren ähnliche Bedingungen; hier finden sich sogar Bei-

[1]) Die Symbole für die Einer, Hunderter usw. sind aber von den Symbolen für die Zehner, Zehntausender usw. etwas verschieden.

spiele von mathematischen Texten, die in metrischen Stanzen geschrieben sind, um das Auswendiglernen zu erleichtern. Es besteht kein besonderer Grund für die Annahme, daß die diesbezügliche Praxis der alten Ägypter und Babylonier sich von der der Inder und Chinesen wesentlich unterschieden hat. Das Heraufkommen einer ganz neuen Kultur war notwendig, um die völlige Verknöcherung der Mathematik zu unterbrechen. Die für die griechische Kultur charakteristische ganz andere Lebensauffassung hob endlich die Mathematik auf die Höhe einer wirklichen Wissenschaft.

Literatur

The Rhind Mathematical Papyrus, herausgegeben von T. E. Peet (London 1923).

The Rhind Mathematical Papyrus, herausgegeben von A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning und R. C. Archibald (2 Bände, Oberlin, Ohio 8, 1927/1929).
Dieses Werk enthält eine ausführliche Bibliographie zur ägyptischen und babylonischen Mathematik. Eine andere Bibliographie, hauptsächlich über alte Astronomie, findet sich in O. Neugebauer, a. a. O., S. 18.

Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, herausgegeben von W. W. Struve und B. A. Turajeff (Berlin 1930).

O. Neugebauer, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, I. Vorgriechische Mathematik* (Berlin 1934).

O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte* (3 Bände, Berlin 1935–1937).

O. Neugebauer, *The exact Sciences in Antiquity* (1951, 2. Aufl. Providence, R. I.; 1957, 3. Aufl. New York 1969).

R. J. Gillings, *Mathematics in the time of the Pharaos* (Cambridge, Mass. 1972).
Siehe auch Arch. History Exact Sci. *12* (1974), 292–298.

O. Neugebauer — A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (New Haven 1945).

E. M. Bruins — M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse* (Paris 1961).

F. Thureau-Dangin, *Sketch of a history of the sexagesimal system*, Osiris *7* (1939), 95–141.

F. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens* (Leiden 1938).

In der Interpretation der babylonischen Mathematik durch Neugebauer bzw. Thureau-Dangin bestehen gewisse Unterschiede.
Eine Stellungnahme dazu wird gegeben in:

S. Gandz, *Conflicting Interpretations of Babylonian Mathematics*, Isis *31* (1940), 405–425.

Ein guter Überblick über die vorgriechische Mathematik findet sich in:

R. C. Archibald, *Mathematics Before the Greeks*, Science *71* (1930), 109–121, 342; s. a. *72* (1930), 36.

D. E. Smith, *Algebra of 4000 Years Ago*, Scripta mathematica *4* (1936), 111–125.

K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, I, II (Hannover und Paderborn 1958/1959).

Über indische Mathematik unterrichten die Bände des Bulletin of the Calcutta Mathematical Society und

B. Datta – A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics* (2 Bände, Lahore 1935/1938), Besprechung durch O. Neugebauer in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik *3* (1936), 263–271.

L. v. Gurjar, *Ancient Indian Mathematics* (Poona 1947; s. a. Math. Rev. *9*, S. 73).

G. R. Kaye, *Indian Mathematics*, Isis *2* (1919), 326–356.

S. L. Gokhale, *Indian Numerals* (Poona 1966).

A. Seidenberg, *The ritual origin of geometry*, Arch. History Exact. Sci. *1* (1962), 408–527.

Zur chinesisch-japanischen Mathematik:

E. I. Bereskina, *Die altchinesische Schrift „Mathematik in neun Büchern"* (russisch), Istor.-Mat. Issled. *10* (1957), 423–584 oder

Chiu Chang Suan Shu, *Neun Bücher arithmetischer Technik*, übersetzt und erläutert von K. Vogel, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Neue Folge Bd. 4 (Braunschweig 1968).

Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (Leipzig 1913).

A. P. Juschkewitsch, *Über die Errungenschaften der chinesischen Gelehrten auf dem Gebiet der Mathematik* (russisch); Progress in Mathematics *2* (1956), 256–278.

D. J. Struik, *On ancient chinese mathematics*, Mathematics Teacher *56* (1963), 424–431, auch Euclides *40* (1964), 65–79.

Es gibt eine Übersetzung des I-Ching oder Book of Changes von R. Wilhelm (New York 1950).

Der dritte Band von J. Needham, *Science and civilisation in China*, einem auf sieben Bände geplanten Werk, von dem bis jetzt drei und der erste Teil des vierten Bandes erschienen sind (1954, 1956, 1959, 1962), enthält eine Darstellung der exakten Wissenschaften im alten China.

Einige Ausführungen zur chinesischen Mathematik finden sich in:

A. P. Juschkewitsch und B. A. Rosenfeld, *Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter*, in *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft*, herausgegeben von G. Harig, Berlin 1960.

Man vgl. auch die auf S. 41, 76 und 47 aufgeführten Bücher von B. L. van der Waerden, O. Neugebauer und A. P. Juschkewitsch.

Über das Wesen der orientalischen Gesellschaft vgl. die folgenden Abhandlungen.

K. A. Wittfogel, *Die Theorie der orientalischen Gesellschaft*, Z. Sozialforschung *7* (1938), 90—122. Auch: *Le mode de production asiatique*, La Pensée *114* (1964), 3—73.

J. Needham, *Science and society in East and West*, Science and Society *20* (1964), 385—408.

3. Griechenland

3.1. Der Aufstieg der griechischen Stadtstaaten. Die gesellschaftlichen Umwälzungen im östlichen Mittelmeerraum um 1000 v. u. Z.

Gewaltige ökonomische und politische Umwälzungen traten während der letzten Jahrhunderte des zweiten Jahrtausends im Raum des Mittelmeerbeckens und in seiner Umgebung ein. In einer turbulenten Atmosphäre von Wanderungen und Kriegen wurde das Bronzezeitalter durch dasjenige abgelöst, das wir unser Zeitalter, die Eisenzeit, nennen. Über diese Periode der Revolution sind nur wenige Einzelheiten bekannt, aber man weiß, daß gegen ihren Abschluß hin, vielleicht um 900 v. u. Z., das Reich des Minos und das Reich der Hethiter verschwunden waren, daß die Macht Ägyptens und Babylons stark geschwächt war und daß neue Völker auf der geschichtlichen Bühne erschienen waren. Die hervorragendsten unter diesen neuen Völkern waren die Hebräer, die Assyrer, die Phönizier und die Griechen. Die Verdrängung der Bronze durch das Eisen brachte nicht nur einen Umschwung im Kriegswesen, sondern vermehrte durch die Verbilligung der Produktionsmittel auch den gesellschaftlichen Reichtum, förderte den Handel und ermöglichte eine stärkere Beteiligung breiter Schichten an den Angelegenheiten von wirtschaftlichem oder öffentlichem Interesse. Das spiegelte sich in zwei großen Neuerungen wider: in dem Ersatz der schwerfälligen Schrift des alten Orients durch das leicht erlernbare Alphabet und in der Einführung des Hartgeldes, das zur Belebung des Handels beitrug. Die Zeit war herangereift, in der die Kulturgüter nicht länger die exklusive Domäne einer orientalischen Beamtenschaft bleiben konnten.

Das Vordringen der „Seeräuber", wie einige der wandernden Völker in ägyptischen Texten betitelt werden, war zunächst von großen kulturellen Rückschlägen begleitet. Die Kultur von Minos verschwand, die ägyptische Kunst verfiel; die babylonische und ägyptische Wissenschaft stagnierten jahrhundertelang. Aus dieser Übergangsperiode sind uns keine mathematischen Texte überliefert worden. Als wieder stabilere Verhältnisse eingetreten waren, setzte sich die weitere Entwicklung des alten Orients hauptsächlich in seinen traditionellen Bahnen fort, aber der Schauplatz war für einen ganz neuen Typ von Kultur, für die Kultur Griechenlands, vorbereitet.

Die Städte, die längs der Küste Kleinasiens und des griechischen Festlandes entstanden, waren keine Verwaltungszentren einer auf Bewässerungsanlagen basierenden Gesellschaftsordnung mehr. Es waren Handelsstädte, in denen die alten feudalen Großgrundbesitzer einen schweren Kampf mit einer unabhängigen, politisch selbstbewußten Kaufmannsklasse auszutragen hatten. Während des siebenten und sechsten Jahrhunderts v. u. Z. gewann diese Kaufmannsklasse die Herrschaft und mußte ihrerseits Kämpfe gegen die Kleinhändler und Handwerker, das Volk, bestehen. Das Ergebnis war der Aufstieg der griechischen *polis*, des sich selbst regierenden Stadtstaates, der ein neues gesellschaftliches Experiment darstellte, das völlig verschieden von den ehemaligen Stadtstaaten der Sumerer und anderer orientalischer Länder war. Die wichtigsten dieser Stadtstaaten entwickelten sich in Ionien an der anatolischen Küste. Ihr zunehmender Handel brachte sie mit den Küsten des gesamten Mittelmeeres in Verbindung, mit Mesopotamien, Ägypten, Szythien und sogar mit noch entfernteren Ländern. Längere Zeit spielte Milet eine führende Rolle. Auch die Städte an anderen Küsten gewannen Reichtum und Bedeutung: auf dem griechischen Festland zunächst Korinth, später Athen, an der Küste Italiens Kroton und Tarent, auf Sizilien Syrakus.

Diese neue gesellschaftliche Ordnung schuf auch einen neuen Menschentyp. Der Handelskaufmann hatte noch nie eine solche Unabhängigkeit genossen, aber er wußte, daß diese Unabhängigkeit nur das Ergebnis eines andauernden und harten Kampfes war. Die statische Weltanschauung des Orients konnte er sich niemals zu eigen machen. Er lebte in einer Epoche geographischer Entdeckungen, die nur mit denen Westeuropas im sechzehnten Jahrhundert verglichen werden können; er erkannte keinen absoluten Herrscher oder eine angenommene, in einer statischen Gottheit verankerte Obrigkeit an. Außerdem konnte er sich in gewissem Umfange einer auf Reichtum und Sklavenarbeit beruhenden Muße erfreuen. Er konnte über diese seine Welt philosophieren. Das Nichtvorhandensein irgendeiner fest eingewurzelten Religion führte manche Einwohner dieser Küstenstädte zum Mystizismus, förderte aber auch dessen Gegenteil und führte zum Wachsen eines Rationalismus und einer wissenschaftlichen Weltanschauung.

3.2. Grundprinzipien des griechischen Denkens und die Frühgeschichte der griechischen Mathematik

In dieser Atmosphäre des ionischen Rationalismus wurde die moderne Mathematik geboren — diejenige Mathematik nämlich, die nicht nur die orientalische Frage „wie?“ stellte, sondern auch die moderne, die wissenschaftliche Frage „warum?“.
Der traditionelle Vater der griechischen Mathematik ist der Kaufmann Thales von Milet, der in der ersten Hälfte des sechsten Jahrhunderts Babylon und Ägypten besuchte. Doch selbst dann, wenn man seine ganze Erscheinung als legendär betrachtet, bildet sie den Hintergrund von etwas außerordentlich Realem. Sie symbolisiert die Umstände, unter denen die Grundlagen nicht nur der modernen Mathematik, sondern auch der modernen Wissenschaft und Philosophie überhaupt gelegt wurden.

Das Studium der Mathematik in der griechischen Frühzeit verfolgt ein hauptsächliches Ziel, nämlich die Gewinnung einer aus einem Vernunftgebäude ableitbaren Einsicht in die Stellung des Menschen innerhalb des Kosmos. Die Mathematik diente dazu, Ordnung im Chaos zu schaffen, Ideen in logischen Ketten anzuordnen und fundamentale Prinzipien zu entdecken. Sie war die am stärksten verstandesmäßig bestimmte unter allen Wissenschaften, und obwohl kaum ein Zweifel darüber bestehen kann, daß die griechischen Kaufleute auf ihren Handelsreisen die orientalische Mathematik kennenlernten, so fanden sie doch bald heraus, daß die Völker des Orients die meiste Arbeit zur verstandesmäßigen Durchdringung ungetan gelassen hatten. Warum hat das gleichschenklige Dreieck zwei gleiche Winkel? Warum ist die Fläche eines Dreiecks ebenso groß wie die halbe Fläche eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe? Diese Fragen drängten sich solchen Menschen ganz natürlich auf, die ähnliche Fragen bezüglich der Kosmologie, Biologie und Physik stellten.

Es ist ein unglücklicher Umstand, daß keine primären Quellen bekannt sind, die uns ein Bild von der frühen Entwicklung der griechischen Mathematik vermitteln können. Die vorhandenen Zusammenstellungen stammen aus christlicher und islamischer Zeit und werden durch ägyptische Papyrusangaben aus etwas früherer Zeit nur dürftig ergänzt. Immerhin hat es uns die klassische Philologie ermöglicht, die verbliebenen Texte, die aus dem vierten Jahrhundert v. u. Z. und etwas späterer Zeit stammen, wiederherzustellen, und wir besitzen daher zuverlässige Ausgaben von Euklid, Archimedes, Apollonius und anderen großen Mathematikern des Altertums. Aber diese Texte repräsentieren eine bereits voll entwickelte mathematische Wissenschaft, worin die geschichtliche Entwicklung selbst mit Hilfe späterer Kommentare kaum noch nachzuzeichnen ist. Bezüglich der Entstehungsjahre der griechischen Mathematik sind wir gänzlich auf kleine, von späteren Autoren übermittelte Fragmente und auf verstreute Bemerkungen von Philosophen und anderen nicht im eigentlichen Sinne mathematischen Autoren angewiesen. Einer höchst geistreichen und geduldigen Textkritik ist es gelungen, viele dunkle Punkte dieser Frühgeschichte aufzuklären, und wir verdanken es dieser Arbeit, die von Forschern wie Paul Tannery, T. L. Heath, H. G. Zeuthen, E. Frank u. a. geleistet worden und noch nicht abgeschlossen ist, daß wir in der Lage sind, so etwas wie ein folgerichtig zusammenhängendes, wenn auch vielfach hypothetisches Bild von der griechischen Mathematik in ihren Entstehungsjahren zu entwerfen.

3.3. Die Hegemonie von Athen. Hippokrates von Chios. Zentrale Probleme der griechischen Mathematik

Im sechsten Jahrhundert v. u. Z. entstand eine neue und starke Macht auf den Ruinen des Assyrischen Reiches: das Perserreich der Achämeniden. Es eroberte die anatolischen Städte, aber die gesellschaftliche Struktur auf dem griechischen Festland war schon zu fest verwurzelt, um eine Niederlage zu erleiden. Die persische Invasion wurde in den historischen Schlachten von Marathon, Salamis und Platäa zurückgeschlagen. Das Hauptergebnis des griechischen Sieges war die Expansion und Hegemonie von Athen. Hier erlangten unter Perikles in der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts die demokratischen Elemente zunehmenden Einfluß. Sie bildeten die treibende Kraft hinter der wirtschaftlichen und politischen Expansion und machten Athen um 430 nicht nur zum Führer der griechischen Welt,

sondern auch zum Mittelpunkt einer neuen und erstaunlichen Kultur — es war das Goldene Zeitalter Griechenlands.
Im Rahmen der gesellschaftlichen und politischen Kämpfe legten Philosophen und Lehrer ihre Theorien, und darunter auch die neue Mathematik, dar. Zum erstenmal in der Geschichte untersuchte eine Gruppe von kritischen Menschen, die Sophisten, die weniger als irgendeine andere frühere Gruppe von Gelehrten durch den Einfluß der Tradition gehemmt war, Probleme mathematischer Natur mehr im Geiste des Verstehens als in dem der Nützlichkeit. Da es diese Geisteshaltung den Sophisten ermöglichte, zu den Grundlagen des exakten Denkens selbst vorzustoßen, wäre es in hohem Maße lehrreich, ihre Diskussionen zu verfolgen. Leider ist nur ein einziges vollständiges mathematisches Fragment aus dieser Zeit vorhanden; es wurde von dem ionischen Philosophen Hippokrates von Chios geschrieben. Dieses Fragment zeigt einen hohen Grad der Vollkommenheit des mathematischen Denkens und behandelt typischerweise ein merkwürdig „unpraktisches“, aber theoretisch wertvolles Thema, die sogenannten „lunulae“ — die kleinen Möndchen oder Sicheln, die von zwei Kreisbögen begrenzt werden.
Dieser Gegenstand — solche von zwei Kreisbögen begrenzte Flächen zu finden, die sich rational durch die Durchmesser ausdrücken lassen — hat eine unmittelbare Beziehung zum Problem der Quadratur des Kreises, einem zentralen Problem der griechischen Mathematik. Bei der Untersuchung dieses Problems[1]) zeigte Hippokrates, daß die Mathematiker des Goldenen Zeitalters in Griechenland ein geordnetes System der ebenen Geometrie besaßen, in dem sich das Prinzip der logischen Deduktion, Übergang von einer Tatsache zur nächsten „apagoge“, voll durchgesetzt hatte. Es war der Anfang einer Axiomatik gemacht worden, wie aus dem Titel des vermutlich von Hippokrates geschriebenen Buches, den „Elementen“ („stoicheia“), hervorgeht. Dies ist der Titel aller axiomatischen Abhandlungen der Griechen, einschließlich der des Euklid. Hippokrates untersuchte den Flächeninhalt sowohl solcher ebenen Figuren, die von geradlinigen Strecken, als auch von solchen, die von Kreisbögen begrenzt werden. Er lehrt, daß sich die Flächeninhalte von ähnlichen Kreisabschnitten ebenso zueinander verhalten wie die Quadrate ihrer Sehnen. Er kennt den Lehrsatz des Pythagoras und ebenso die entsprechende Ungleichung für nichtrechtwinklige Dreiecke. Die ganze Abhandlung ist schon in dem Geiste geschrieben, den man die Euklidische Tradition nennen könnte, aber sie ist um mehr als ein Jahrhundert älter als Euklid. Das Problem der Quadratur des Kreises ist eines der „drei berühmten mathematischen Probleme des Altertums“, die während dieser Periode zu einem Gegenstand der Forschung wurden. Diese Probleme waren folgende:

(1) Die Trisektion des Winkels; dies bedeutet das Problem, einen gegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

[1]) Eine moderne Untersuchung darüber ist: E. Landau, *Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke*, Berichte Berliner Math. Ges. *2* (1903), 1–6. Siehe ferner: N. G. Tschebotarjew, *Gesammelte Werke*, Bd. 1 (Moskau-Leningrad 1949), S. 193–207; A. W. Dorodnow, Dokl. Akad. Nauk SSSR *58* (1947), 965–968; T. Dantzig, *The Bequest of the Greeks* (New York 1955), Kap. 10.

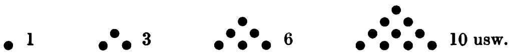
(2) Die Verdopplung des Würfels; dies bedeutet, die Seite eines solchen Würfels zu finden, dessen Volumen zweimal so groß ist wie das eines gegebenen Würfels (das sogenannte Delische Problem).

(3) Die Quadratur des Kreises; dies bedeutet, ein Quadrat mit einem Flächeninhalt zu finden, der dem Inhalt einer gegebenen Kreisfläche gleichkommt.

Die Bedeutung dieser Probleme beruht auf der Tatsache, daß sie durch die Konstruktion einer endlichen Anzahl von geraden Linien und Kreisen nicht exakt gelöst werden können, sondern höchstens näherungsweise, und daß sie deshalb als ein Hilfsmittel zum Eindringen in neue Bereiche der Mathematik dienten. Sie führten zur Entdeckung der Kegelschnitte, einiger kubischer Kurven, Kurven vierter Ordnung und einer transzendenten Kurve, der Quadratrix. Die anekdotenhafte Form, in der die Probleme gelegentlich überliefert werden (Delphisches Orakel usw.), darf uns nicht dazu verleiten, ihre fundamentale Bedeutung zu übersehen. Es geschieht gar nicht selten, daß ein fundamentales Problem in Form einer Anekdote oder eines Rätsels dargestellt wird — der Apfel Newtons, das gebrochene Versprechen von Cardano oder die Weinfässer von Kepler. Mathematiker verschiedener Epochen, unsere eigene nicht ausgenommen, haben den Zusammenhang zwischen diesen griechischen Problemen und der modernen Gleichungslehre klargelegt, wobei sich Betrachtungen über Körpertheorie, algebraische Zahlen und Gruppentheorie als notwendig erwiesen.

3.4. Die Pythagoreer. Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik

Wahrscheinlich außerhalb der Gruppe der Sophisten, die man in gewissem Umfange denken kann als mit der demokratischen Bewegung verbunden, stand eine andere Gruppe von mathematisch interessierten Philosophen, die Beziehungen zu aristokratischen Strömungen entwickelte. Sie nannten sich selbst Pythagoreer nach dem ziemlich mythischen Gründer der Schule, Pythagoras, der vermutlich Mystiker, Wissenschaftler und süditalienischer Politiker war. Während die meisten Sophisten nachdrücklich die Realität der Veränderung vertraten, verlegten die Pythagoreer das Schwergewicht ihrer Studien auf die unveränderlichen Elemente in Natur und Gesellschaft. In ihrer Suche nach den ewigen Gesetzen des Kosmos studierten sie Geometrie, Arithmetik, Astronomie und Musik (das „Quadrivium"). Ihr bedeutendster Führer war Archytas von Tarent, der um 400 lebte und dessen Schule, wenn wir der Hypothese von E. Frank folgen, viel von dem „Pythagoreischen" Geist der Mathematik zuzuschreiben ist. Ihre Arithmetik war eine in hohem Maße spekulative Wissenschaft, die mit der gleichzeitigen babylonischen Rechentechnik wenig zu tun hatte. Die Zahlen wurden in Klassen eingeteilt, in ungerade, gerade, geradzahlig oft gerade, ungeradzahlig oft ungerade, Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen, vollkommene, befreundete, Dreieck-, Quadrat-, Fünfeckzahlen usw. Einige der interessantesten Ergebnisse betreffen die „Dreieckzahlen", die ein Bindeglied zwischen Geometrie und Arithmetik darstellen:



Unsere Bezeichnung „Quadratzahlen“ hat ihren Ursprung in Pythagoreischen Spekulationen:

Die Figuren selbst sind viel älter, denn einige von ihnen finden sich bereits auf Töpferein aus der jüngeren Steinzeit. Die Pythagoreer untersuchten ihre Eigenschaften, wobei sie ihr besonderes Merkmal des Zahlenmystizismus hinzufügten und sie zum Mittelpunkt einer kosmischen Philosophie machten, die alle Beziehungen auf Zahlenbeziehungen zurückzuführen versuchte („Alles ist Zahl“). Ein Punkt war eine „Einheit mit Lage“.[1])

Die Pythagoreer kannten einige Eigenschaften der regulären Polygone und der regulären Körper. Sie zeigten, wie man die Ebene mit Hilfe von regulären Dreiecken, Quadraten und regulären Sechsecken und den Raum mit Würfeln ausfüllen kann. Aristoteles versuchte später, dies durch die falsche Aussage zu ergänzen, der Raum könne mit Hilfe regulärer Tetraeder dicht ausgefüllt werden.[2]) Die Pythagoreer haben möglicherweise auch das reguläre Oktaeder und Dodekaeder gekannt — die Figur des letzteren insbesondere deshalb, weil in Italien vorkommender Pyrit in Dodekaedern kristallisiert und Nachbildungen solcher Figuren in Form von Ornamenten oder magischen Symbolen bis in etruskische Zeiten zurückreichen. Sie gehen zurück auf keltische Völker in Mitteleuropa während des Beginns der Eisenzeit, etwa 900 v. u. Z. und danach (Pyrit ist ein Ausgangsmaterial des Eisens).[3])

Was nun den Satz des Pythagoras betrifft, so schrieben die Pythagoreer seine Entdeckung ihrem Meister zu, von dem angenommen wurde, er habe den Göttern als Zeichen seiner Dankbarkeit hundert Ochsen geopfert, freilich eine Leistung für einen (wie man glaubt) Vegetarier. Wie wir bereits sahen, war der Satz schon im Babylon Hammurabis bekannt, aber der erste allgemeine Beweis kann sehr wohl der Schule der Pythagoreer entstammen.

Die wichtigste den Pythagoreern zugeschriebene Entdeckung war aber die Entdeckung des Irrationalen mit Hilfe von inkommensurablen Strecken. Diese Entdeckung kann das Ergebnis ihres Interesses für das geometrische Mittel $a:b = b:c$ gewesen sein, das als Symbol der Aristokratie galt. Wie groß war das geometrische Mittel von 1 und 2, von zwei heiligen Symbolen? Das führte zum Studium des Ver-

---

[1]) Über die Arithmetik der Pythagoreer siehe B. L. van der Waerden, Math. Ann. *120* (1948), 127—153, 676—700.

[2]) D. J. Struik, *Het probleem „De impletione loci“*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 2e ser, *15* (1926), 121—137.

[3]) F. Lindemann, Sitzungsberichte bayr. Akad. Wiss., München *26* (1896), 625—757; *63* (1934), 265—275.

hältnisses von Seite und Diagonale ein und desselben Quadrates, und man fand, daß dieses Verhältnis nicht durch „Zahlen“ ausgedrückt werden konnte — d. h. durch positive ganze Zahlen und ihre Verhältnisse, die in der Pythagoreischen Arithmetik allein zugelassenen Begriffe. Dies kann man nach Aristoteles wie folgt erkennen.[1])

Angenommen, dieses Verhältnis sei $p:q$, wobei man stets p und q als teilerfremd voraussetzen kann. Daraus folgt $p^2 = 2q^2$, also ist p^2 und damit auch p eine gerade Zahl, etwa $p = 2r$. Dann müßte q ungerade sein, aber wegen $q^2 = 2r^2$ müßte es zugleich gerade sein. Dieser Widerspruch wurde nicht, wie im Orient oder in Europa im Zeitalter der Renaissance, durch eine Verallgemeinerung des Zahlbegriffes aufgelöst, sondern unter Ablehnung einer auf Zahlen beruhenden Theorie durch den Versuch einer geometrischen Synthese.

Diese Entdeckung, die die wohlabgestimmte Harmonie zwischen Arithmetik und Geometrie zerstörte, wurde wahrscheinlich in den letzten Jahrzehnten des fünften Jahrhunderts v. u. Z. gemacht. Sie kam noch zu einer anderen Schwierigkeit hinzu, die aus Erörterungen über die Realität der Veränderungen entstanden war, d. h. aus Erörterungen, die die Philosophen seit jener Zeit bis in unsere Tage beschäftigt haben. Diese Schwierigkeit wird Zeno von Elea (um 450 v. u. Z.), einem Schüler von Parmenides, zugeschrieben. Zeno war konservativer Philosoph, nach dessen Lehre der menschliche Verstand nur das absolute, unveränderliche Sein der Dinge erkennen kann, während alle Veränderungen nur Schein sind. Sie gewann mathematische Bedeutung, als im Zusammenhang mit solchen Fragen wie der Bestimmung des Pyramidenvolumens unendliche Prozesse studiert werden mußten. Hier gerieten die Zenonschen Paradoxien in Widerspruch mit einigen älteren intuitiven Begriffen bezüglich des unendlich Kleinen und unendlich Großen. Man hatte immer geglaubt, daß die Summe von unendlich vielen Größen so groß gemacht werden kann, wie man nur will, selbst wenn jede Größe beliebig klein ist ($\infty \times \varepsilon = \infty$), und daß weiter die Summe von endlich oder unendlich vielen Größen, von denen jede einzelne gleich Null ist, wieder Null ergibt ($n \times 0 = 0$, $\infty \times 0 = 0$). Die Kritik des Zeno zweifelte die Zulässigkeit dieser Begriffe an, und seine vier Paradoxien erregten ein solches Aufsehen, daß man die Auswirkungen davon noch heute beobachten kann. Sie sind durch Aristoteles überliefert worden und als Paradoxien des Achilles, des fliegenden Pfeiles, der (unendlich oft wiederholten) Halbierung und des Stadions bekannt. Sie sind so formuliert, daß sie Widersprüche in den Begriffen der Bewegung und der Zeit hervorkehren; es wird dabei kein Versuch unternommen, die Widersprüche aufzulösen. Der Hauptgedanke der Überlegung kann dem „Achilles“ und der „Halbierung“ entnommen werden, die in moderner Fassung wie folgt lauten:

Achilles. Achilles und eine Schildkröte bewegen sich geradlinig in derselben Richtung. Achilles läuft viel schneller als die Schildkröte; aber um sie einzuholen, muß er zuerst denjenigen Punkt P erreichen, von dem aus die Schildkröte gestartet ist. Wenn er nach

[1]) Aristoteles weist in seiner *Analytica Priora* (I, 23) auf diesen Beweis nur hin als ein Beispiel einer *reductio ad absurdum*. Für den Beweis selbst siehe T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (Nachdruck New York 1956), Band III, S. 2.

P gelangt ist, hat sich die Schildkröte nach einem anderen Punkt P_1 vorwärtsbewegt. Achilles kann sie nicht einholen, ehe er nicht P_1 passiert hat, aber die Schildkröte hat inzwischen einen neuen Punkt P_2 erreicht. Wenn Achilles in P_2 angelangt ist, hat die Schildkröte wieder einen neuen Punkt P_3 erreicht, usw. Folglich kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

Dichotomie (Zweiteilung). Angenommen, ich möchte längs einer Strecke von A nach B wandern. Um B zu erreichen, muß ich zunächst die halbe Entfernung AB_1 von AB zurücklegen, und um nach B_1 zu kommen, muß ich zuerst B_2 in der Mitte von AB_1 erreichen. Entsprechend geht es unendlich oft weiter, so daß die Bewegung überhaupt nicht beginnen kann.

Die Überlegungen von Zeno machten klar, daß eine endliche Strecke in unendlich viele kleine Strecken zerlegt werden kann, von denen jede eine endliche Länge besitzt. Sie zeigten außerdem, daß es schwierig zu erklären ist, was man eigentlich damit meint, wenn man sagt, daß eine Linie aus Punkten „zusammengesetzt" ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Zeno selbst gar keine Vorstellung von den mathematischen Konsequenzen seiner Überlegung hatte. Probleme, die zu seinen Paradoxien führen, sind nämlich im Verlauf von philosophischen und theologischen Diskussionen regelmäßig aufgetaucht. Sie sind bekannt als jene Fragen, die die Beziehungen zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen betreffen. Paul Tannery jedoch glaubte, daß die Überlegungen von Zeno sich besonders gegen die Pythagoreische Idee des Raumes als einer Summe von Punkten („der Punkt ist Einheit mit Lage")[1]) richteten. Was nun auch die Wahrheit sein mag, die Darlegungen von Zeno beeinflußten jedenfalls das mathematische Denken während vieler Generationen. Seine Paradoxien können mit denjenigen verglichen werden, die 1734 von Bischof Berkeley vorgebracht wurden, als dieser die logischen Widersprüche nachwies, zu denen eine unsachgerechte Formulierung der Prinzipien der Infinitesimalrechnung führen kann, ohne allerdings selbst eine bessere Fundierung zu bieten.

Zenos Überlegungen beunruhigten die Mathematiker noch mehr, nachdem das Irrationale entdeckt worden war. War Mathematik als exakte Wissenschaft überhaupt möglich? Tannery[2]) vertrat die Meinung, daß man von „einem wirklichen logischen Skandal", von einer Krise in der griechischen Mathematik, sprechen könne. Wenn das zutrifft, dann entstand diese Krise in der letzten Zeit des Peloponnesischen Krieges, der 404 mit dem Fall von Athen endete. Man kann dann auch einen Zusammenhang zwischen der Krise in der Mathematik und der im sozialen System entdecken, da der Fall von Athen den Zusammenbruch der Herrschaft einer Sklavenhalterdemokratie über die ganze griechische Welt herbeiführte — eine Krise, die im Geiste der neuen Periode gelöst wurde.

---

[1]) P. Tannery, *La géométrie grecque* (Paris 1887), S. 217—261. Eine andere Meinung vertritt B. L. van der Waerden, Math. Ann. *117* (1940), 141—161.

[2]) P. Tannery, *La géométrie grecque* (Paris 1887), S. 98. Tannery behandelt an dieser Stelle nur den Zusammenbruch der alten Theorie der Proportionen als Ergebnis der Entdeckung inkommensurabler Strecken. Siehe aber H. Freudenthal, *Y avait-il une crise des fondaments des mathématiques dans l'Antiquité?*, Bull. Soc. math. Belgique *18* (1966), 43—55.

3.5. Griechenland nach dem Peloponnesischen Krieg. Die Überwindung der Krise in der Mathematik durch Eudoxus und Demokrit

Typisch für diese neue Periode der griechischen Geschichte war der wachsende Reichtum gewisser Schichten der herrschenden Klassen, der mit ebenso wachsendem Elend und zunehmender Unsicherheit der Armen einherging. Die herrschenden Klassen gründeten ihr gesamtes Dasein mehr und mehr auf die Sklaverei, wodurch sie Muße gewannen, Künste und Wissenschaften zu pflegen, aber zugleich auch jeder Handarbeit immer mehr entfremdet wurden. Ein edler Vertreter der Muse sah verächtlich auf die Arbeit der Sklaven und Handwerker herab und suchte Zuflucht vor der rauhen Wirklichkeit im Studium der Philosophie und der Ethik. Plato und Aristoteles verkörperten diese Haltung; und gerade in Platos „Staat" (etwa um 360 geschrieben) findet man den klarsten Ausdruck der Ideale der Sklavenhalteraristokratie. Die „Wächter" (Krieger) in Platos Staat müssen das „Quadrivium", die oberste Stufe der freien Künste (Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik) studieren, um die Gesetze des Universums zu verstehen. Eine solche geistige Atmosphäre wirkte sich, zumindest in ihrer ersten Zeit, sehr förderlich auf eine Diskussion über die Grundlagen der Mathematik und auf die spekulative Kosmogonie aus. Wenigstens drei große Mathematiker dieser Zeit waren mit der Akademie von Plato verbunden, nämlich Archytas, Theätet (gestorben 369) und Eudoxus (etwa 408—355). Theätet wird die Theorie des Irrationalen zugeschrieben, die im zehnten Buch der „Elemente" von Euklid enthalten ist. Der Name des Eudoxus ist mit der Theorie der Proportionen verbunden, die Euklid im fünften Buch darlegt, und außerdem mit der sogenannten „Exhaustionsmethode", die eine strenge Behandlung von Flächen- und Volumenberechnungen gestattete. Das bedeutet aber, daß es Eudoxus war, der die „Krise" der griechischen Mathematik überwand und dessen strenge Formulierungen dazu beitrugen, die weitere Entwicklung der griechischen Axiomatik und in erheblichem Umfange der gesamten griechischen Mathematik zu bestimmen.

Die Theorie der Proportionen des Eudoxus beseitigte die arithmetische Theorie der Pythagoreer, die nur für kommensurable Größen gültig war. Es handelte sich um eine rein geometrische Theorie, die in ihrer strengen axiomatischen Form jede Bezugnahme auf inkommensurable oder kommensurable Größen überflüssig machte.

Typisch dafür ist die Definition 5 in Buch V der Euklidischen „Elemente":

„Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und der dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich kleiner sind."

Die heutige Theorie der Irrationalzahlen, wie sie von Dedekind und Weierstraß entwickelt wurde, folgt fast wörtlich dem Gedankengang von Eudoxus, hat aber durch Verwendung moderner arithmetischer Methoden wesentlich weitere Perspektiven eröffnet.

Die „Exhaustionsmethode" (der Ausdruck „Exhaustion" kommt zum erstenmal 1647 bei Grégoire de Saint Vincent vor) war die Antwort der Platonischen Schule auf Zeno. Sie vermied die Fallstricke des Infinitesmalen, indem sie diese einfach dadurch umging, daß sie Probleme, die zu infinitesimalen Betrachtungen führen konnten, auf solche zurückführte, die allein mit formaler Logik zu bewältigen waren. Wollte man beispielsweise beweisen, daß das Volumen V eines Tetraeders gleich einem Drittel des Volumens P eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so bestand der Beweis darin, daß gezeigt wurde, daß die beiden Annahmen $V > \frac{1}{3} P$ und $V < \frac{1}{3} P$ auf logische Widersprüche führen. Hierbei wurde ein Axiom eingeführt, das heute nach Archimedes benannt wird und das dem Axiom, das der Theorie der Proportionen von Eudoxus zugrunde liegt, ähnlich ist, nämlich: „Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können" (Euklid, Buch V, Definition4)[1]. Diese Methode, die zur Standardmethode bei den Griechen und in der Renaissance wurde, sobald es sich um exakte Beweise zur Flächen- und Volumenbestimmung handelte, war vollkommen streng und kann leicht in eine Beweisform gebracht werden, die den Anforderungen der modernen Analysis genügt. Sie hat den großen Nachteil, daß das Ergebnis, um bewiesen werden zu können, vorher bekannt sein muß, so daß der Mathematiker es zuerst mit Hilfe anderer weniger strenger und mehr heuristischer Methoden finden muß.

Es gibt einwandfreie Anzeichen dafür, daß eine andere Methode dieser Art tatsächlich verwendet wurde. Wir besitzen einen Brief von Archimedes an Eratosthenes (um 250 v. u. Z.), der erst 1906 entdeckt wurde, in dem Archimedes ein unstrenges, aber fruchtbares Verfahren zur Auffindung von Resultaten erläutert. Dieser Brief ist unter dem Namen „Methode" bekannt. Es ist, besonders von S. Luria, vermutet worden, daß sie Ausdruck einer Schule mathematischen Denkens ist, die mit der Schule von Eudoxus konkurrierte, ebenfalls in die Zeit der „Krise" zurückreicht und mit dem Namen von Demokrit, dem Begründer der Atomistik, verbunden ist. Nach der Theorie von Luria wurde in der Schule von Demokrit der Begriff des „geometrischen Atoms" eingeführt. Man dachte sich eine Strecke, eine Fläche oder ein Volumen aus einer zwar großen, aber endlichen Anzahl von unteilbaren „Atomen" aufgebaut. Die Berechnung eines Volumens bedeutete die Summation der Volumina von allen „Atomen", aus denen der betreffende Körper besteht. Diese Theorie hört sich nur so lange absurd an, bis man sich vergegenwärtigt, daß mehrere Mathematiker in der Periode vor Newton, besonders Vieta und Kepler, im wesentlichen dieselben Begriffe verwendeten, indem sie sich etwa den Umfang eines Kreises aus einer sehr großen Anzahl von winzigen Strecken zusammengesetzt dachten. Es gibt keinen Hinweis darauf, daß im Altertum auf dieser Grundlage jemals eine strenge Methode entwickelt worden ist, aber unsere modernen Grenz-

[1]) Die Fassung von Archimedes (die er ausdrücklich dem Eudoxus zuschreibt) lautet: „Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Größen übertrifft." (In: „Kugel und Zylinder", Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 202, Leipzig 1922).

wertbetrachtungen haben es möglich gemacht, diese „Atom"-Theorie in eine genauso strenge Thorie einzubauen, wie es die Exhaustionsmethode ist. Sogar noch heute verwenden wir ganz selbstverständlich diese Auffassung von den „Atomen", wenn wir den mathematischen Ansatz für ein Problem aus der Theorie der Elastizität, der Physik oder Chemie machen, wobei wir die strenge „Grenzwert"-Theorie dem Berufsmathematiker überlassen.[1])

Der Vorteil der „Atom"-Methode gegenüber der „Exhaustions"-Methode bestand darin, daß sie das Auffinden neuer Ergebnisse erleichterte. Im Altertum hatte man somit die Wahl zwischen einer zwar strengen, aber vergleichsweise unfruchtbaren und einer nur unzureichend begründeten, aber viel fruchtbareren Methode. Es ist aufschlußreich, daß praktisch in allen klassischen Werken die erste Methode verwendet wurde. Das dürfte mit der Tatsache zusammenhängen, daß die Mathematik eine Lieblingsbeschäftigung einer Klasse der Muße geworden war, die sich auf die Sklaverei gründete, gegen Erfindungen gleichgültig und an besinnlicher Schau interessiert war. Es kann auch eine Widerspiegelung des Sieges des Platonischen Idealismus über den Materialismus des Demokrit im Bereich der Philosophie der Mathematik sein.

3.6. Die Periode des Hellenismus

Im Jahre 334 begann Alexander der Große die Eroberung von Persien. Als er 323 in Babylon starb, war der ganze Nahe Osten den Griechen zugefallen. Alexanders Eroberungen wurden unter seine Heerführer aufgeteilt, und aus ihnen gingen schließlich drei Reiche hervor: Ägypten unter den Ptolemäern, Mesopotamien und Syrien unter den Seleukiden und Mazedonien unter Antigonos und seinen Nachfolgern. Selbst im Tal des Indus regierten griechische Fürsten. Das Zeitalter des Hellenismus hatte begonnen.

Die unmittelbare Folge von Alexanders Siegeszug bestand darin, daß das Vordringen der griechischen Kultur in große Gebiete des Orients beschleunigt wurde. Ägypten, Mesopotamien und ein Teil Indiens wurden hellenisiert. Die Griechen strömten als Händler, Kaufleute, Ärzte, Abenteurer, Reisende und Söldner in den Nahen Osten. Die Städte — von denen viele neu gegründet wurden, die an ihren griechischen Namen kenntlich sind — standen unter griechischer Militär- und Verwaltungskontrolle und besaßen eine aus Griechen und Orientalen gemischte Bevölkerung. Aber der Hellenismus war im wesentlichen eine städtische Kultur. Die Landbevölkerung blieb einheimisch und lebte auch weiterhin in althergebrachter Weise. In den Städten traf die alte orientalische Kultur mit der neu hereinkommenden Kultur von Griechenland zusammen und vermischte sich teilweise mit ihr, obwohl

[1]) „So kann etwa, insoweit nur erste Differentiale berücksichtigt werden, ein kleiner Teil einer Kurve nahe bei einem bestimmten Punkt als gerade und analog ein kleiner Teil einer Fläche als eben angesehen werden; während einer kurzen Zeit kann ein Teilchen als mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und ein beliebiger physikalischer Prozeß als konstant ablaufend angesehen werden" (H. B. Phillips, *Differential Equations*, New York 1922; S. 7).

zwischen beiden Welten ständig eine tiefgreifende Trennung bestehenblieb. Die griechischen Herrscher nahmen orientalische Sitten an und hatten sich mit orientalischen Verwaltungsproblemen auseinanderzusetzen, förderten aber zugleich griechische Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Die so in eine neue Umgebung verpflanzte griechische Mathematik bewahrte viele ihrer gewohnten Züge, erfuhr aber auch den Einfluß der Probleme aus Verwaltung und Astronomie, die im Orient zu lösen waren. Dieser enge Kontakt der griechischen Wissenschaft mit dem Orient war außerordentlich fruchtbar, besonders während der ersten Jahrhunderte. Praktisch das ganze wirklich produktive Gesamtwerk, das wir „Griechische Mathematik" nennen, wurde in der relativ kurzen Zeitspanne von 350 bis 200 v. u. Z., von Eudoxus bis Apollonius, geschaffen, und sogar die Meisterleistungen von Eudoxus sind uns nur durch ihre Darstellung bei Euklid und Archimedes bekannt. Bemerkenswert ist außerdem, daß die größte Blüte dieser griechischen Mathematik in Ägypten unter den Ptolemäern und nicht in Mesopotamien erreicht wurde, obwohl die einheimische Mathematik in Babylon einen höheren Stand erreicht hatte.

Der Grund für diese Entwicklung ist wohl darin zu suchen, daß Ägypten nunmehr eine zentrale Lage in der Welt des Mittelmeeres einnahm. Die neue Hauptstadt Alexandria war an der Meeresküste erbaut worden und wurde zum geistigen und wirtschaftlichen Mittelpunkt der hellenistischen Welt. Demgegenüber spielte Babylon lediglich die Rolle eines entlegenen Kreuzungspunktes von Karawanenstraßen und verlor noch mehr an Bedeutung, als es durch Ktesiphon-Seleukia, die neue Hauptstadt der Seleukiden, ersetzt wurde. Soweit uns bekannt ist, waren keine großen griechischen Mathematiker jemals mit Babylon verbunden. Antiochia und Pergamon, gleichfalls Städte im Seleukidenreich, aber näher am Mittelmeer, hatten bedeutende griechische Schulen. Die Entwicklung der einheimischen babylonischen Astronomie und Mathematik erreichte unter den Seleukiden sogar ihren Höhepunkt, und die griechische Astronomie empfing einen Impuls, dessen Bedeutung wir erst jetzt besser zu verstehen beginnen. Neben Alexandria gab es einige andere Mittelpunkte mathematischer Gelehrsamkeit, insbesondere Athen und Syrakus. Athen wurde zu einem Zentrum der Erziehung, während Syrakus Archimedes, den größten griechischen Mathematiker, hervorbrachte.

3.7. Die „Elemente" des Euklid

In dieser Periode entstand der berufsmäßige Wissenschaftler, also ein Mann, der sein Leben dem Studium der Wissenschaft widmete und dafür ein Gehalt empfing. Einige der allerbedeutendsten Vertreter dieses Kreises von Menschen lebten in Alexandria, wo die Ptolemäer ein großes Zentrum der Gelehrsamkeit in dem sogenannten Museum mit seiner berühmten Bücherei errichteten. Hier wurde das griechische Erbe in Wissenschaft und Literatur bewahrt und weiterentwickelt. Der Erfolg dieser Einrichtung war beträchtlich. Unter den ersten mit Alexandria verbundenen Gelehrten befand sich Euklid, einer der einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten.

Euklid, über dessen Leben wir nichts Genaues wissen, war vermutlich während der Zeit des ersten Ptolemäers (306—283), zu dem er der Überlieferung nach die Bemerkung gemacht haben soll, daß es keinen Königsweg zur Geometrie gebe, auf der Höhe seines Schaffens. Seine berühmtesten und wissenschaftlich bedeutsamsten Werke sind die 13 Bücher seiner „Elemente“ („stoicheia“), obwohl ihm auch einige andere kleinere Werke zugeschrieben werden. Unter diesen anderen Werken finden sich die „Daten“, die das enthalten, was wir Anwendung der Algebra auf Geometrie nennen würden; aber sie werden in strenger geometrischer Sprache dargestellt. Wir wissen nicht, wie viele von ihnen als Zusammenfassung anzusehen sind, aber sie zeigen an vielen Stellen eine erstaunliche sachliche Tiefe. Es sind die ersten vollständigen mathematischen Lehrbücher, die aus der griechischen Antike auf uns gekommen sind.

Die „Elemente“ bilden wohl nächst der Bibel das am meisten gedruckte und studierte Buch in der Geschichte der westlichen Welt. Über tausend Ausgaben sind seit Erfindung der Buchdruckerkunst erschienen, und vor dieser Zeit wurde der Unterricht in Geometrie von handschriftlichen Kopien beherrscht. Der größte Teil unserer Schulgeometrie wurde, häufig sogar wörtlich, aus neun von den dreizehn Büchern entnommen; und die Euklidische Tradition lastet noch schwer auf unserem Elementarunterricht. Auf den Fachmathematiker haben diese Bücher immer einen unwiderstehlichen Reiz ausgeübt, und ihre logische Struktur hat das wissenschaftliche Denken vielleicht mehr als irgendein anderes Buch der Welt beeinflußt.

Die Darstellung Euklids wird auf eine streng logische Deduktion der Sätze aus einer Anzahl von Definitionen, Postulaten und Axiomen gegründet. Die ersten vier Bücher behandeln die ebene Geometrie und führen von den elementarsten Eigenschaften von Geraden und Winkeln zur Dreieckskongruenz und Flächengleichheit, zum Satz des Pythagoras (I, 47), zur Konstruktion eines Quadrats, das zu einem gegebenen Rechteck flächengleich ist, zum Goldenen Schnitt, zum Kreis und zu den regulären Vielecken. Das fünfte Buch stellt die Theorie inkommensurabler Größen von Eudoxus in rein geometrischer Form dar, und im sechsten Buch wird sie auf die Ähnlichkeit von Dreiecken angewendet. Diese erst an so später Stelle erfolgende Darlegung der Ähnlichkeitslehre ist einer der hauptsächlichen Unterschiede zwischen der Euklidischen Behandlung der ebenen Geometrie und dem gegenwärtigen Verfahren und muß dem besonderen Gewicht zugeschrieben werden, das von Euklid der neuen Theorie der inkommensurablen Größen von Eudoxus beigemessen wird. Die geometrische Diskussion wird im zehnten Buch wieder aufgenommen, das meist als das schwierigste unter den Büchern des Euklid angesehen wird und das eine geometrische Klassifizierung quadratischer Irrationalitäten und von Quadratwurzeln aus solchen enthält, die wir daher als Zahlen von der Form $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ bezeichnen. Die letzten drei Bücher behandeln räumliche Geometrie und führen über räumliche Winkel, die Volumina von Parallelepiped, Prisma und Pyramide zur Kugel und zu dem, was anscheinend als Höhepunkt des Ganzen gedacht war: zur Diskussion der fünf regulären („Platonischen“) Körper und zum Beweis, daß es nur fünf solche Körper gibt.

Die Bücher VII—IX sind der Zahlentheorie gewidmet — nicht einer Technik des Rechnens, sondern solchen Pythagoreischen Fragestellungen wie der Teilbarkeit von ganzen Zahlen, der Summierung von geometrischen Reihen und einigen Eigenschaften von Primzahlen. Dort finden wir sowohl den „Euklidischen Algorithmus", der dazu dient, den größten gemeinsamen Teiler von gegebenen ganzen Zahlen zu bestimmen, als auch den „Satz des Euklid", daß es unendlich viele Primzahlen gibt (IX, 20). Von besonderem Interesse ist der Satz VI, 27, der das erste Maximumproblem enthält, das uns überliefert worden ist, und dazu den Beweis, daß das Quadrat unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt besitzt. Das fünfte Postulat von Buch I (die Beziehung zwischen „Axiomen" und „Postulaten" bei Euklid ist nicht klar) ist dem sogenannten „Parallelenaxiom" gleichwertig, nach welchem durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden eine und nur eine Gerade parallel zu dieser Geraden gezogen werden kann. Erst im neunzehnten Jahrhundert führten die Versuche, dieses Axiom auf einen Satz zu reduzieren, zu einer vollen Einsicht in die Weisheit von Euklid, es als Axiom anzunehmen, und zur Entdeckung von anderen, sogenannten nichteuklidischen Geometrien.
Die algebraischen Überlegungen werden bei Euklid vollständig in geometrischer Fassung dargestellt. Der Ausdruck $\sqrt{A}$ wird als Seite eines Quadrates der Fläche A eingeführt, das Produkt $a \cdot b$ als Fläche eines Rechtecks mit den Seiten a und b. Diese Ausdrucksweise war in erster Linie eine Folge der Theorie der Proportionen von Eudoxus, der ganz bewußt numerische Angaben für Strecken verwarf und auf diese Art die inkommensurablen Größen rein geometrisch behandelte. Die Arithmetik beschränkte sich ausschließlich auf „Zahlen" (positive ganze Zahlen) und ihre Verhältnisse.
Welche Absicht verfolgte Euklid bei der Abfassung seiner „Elemente"? Wir können mit einiger Sicherheit annehmen, daß er drei große Entdeckungen der jüngsten Vergangenheit in einem Lehrbuch vereinigen wollte: die Theorie der Proportionen von Eudoxus, die Theorie irrationaler Größen von Theätet und die Theorie der fünf regulären Körper, die in der Kosmologie von Plato einen hervorragenden Platz einnehmen. Alle drei waren typisch „griechische" Errungenschaften.

3.8. Archimedes

Der größte Mathematiker der hellenistischen Periode — und darüber hinaus des gesamten Altertums — war Archimedes (287—212), der in Syrakus als Ratgeber von König Hieron lebte. Er ist eine der wenigen wissenschaftlichen Persönlichkeiten des Altertums, von denen mehr als der bloße Name übriggeblieben ist; über sein Leben und seine Person sind einige Einzelheiten bekannt. Wir wissen, daß er getötet wurde, als Syrakus von den Römern eingenommen wurde, nachdem er sein technisches Genie den Verteidigern der Stadt zur Verfügung gestellt hatte. Dieses Interesse an praktischen Anwendungen ist zunächst verwunderlich, wenn wir es mit der Verachtung vergleichen, mit der ein solches Interesse von seinen Zeitgenossen aus der Platonischen Schule gestraft wurde, aber man kann eine Erklärung in einer oft zitierten Stelle aus dem „Marcellus" von Plutarch finden, daß er es

„obwohl ihm diese Erfindungen den Ruf einer übermenschlichen Weisheit verschafft hatten, nicht zuließ, daß von ihm über derartige Fragen irgendein schriftliches Werk auf die Nachwelt kam, denn da er die Beschäftigung mit Mechanik und jede Art von Betätigung, die auf Nutzen und Profit gerichtet war, als erniedrigend und unedel ansah, legte er seinen ganzen Ehrgeiz in solche Forschungen, deren Schönheit und Tiefe von jeder Beimengung gewöhnlicher Lebensbedürfnisse völlig frei waren".

[4] Eine solche Charakterisierung des Archimedes, die ihn als einen Mathematiker hinstellt, der praktischen Anwendungen der Wissenschaft als unwissenschaftlich ablehnt und sie bestenfalls als drittrangige Beschäftigung für einen Gelehrten betrachtet, ist weit verbreitet. Sie gründet sich indessen nur darauf, was Plutarch, ein relativ später Autor (2. Jahrhundert u. Z.), über Archimedes schreibt. Diese Charakterisierung wird von den früheren Autoren nicht bestätigt und stimmt mit den leider sehr dürftigen Angaben, die wir über Archimedes haben, nicht überein. Für den Historiker Polybius (2. Jahrhundert v. u. Z.) genießt Archimedes hohes Ansehen durch seine Ingenieurtätigkeit, für Cicero (1. Jahrhundert v. u. Z.) ist Archimedes vor allem Astronom, der Architekt Vitruvius (Ende des 1. Jahrhunderts v. u. Z.) zählt Archimedes unter die wenigen genialen Menschen, die „mit Hilfe von Berechnungen und durch Kenntnis der Geheimnisse der Natur große Entdeckungen in der Mechanik und beim Bau von Sonnenuhren machen konnten. . .". Die ersten Arbeiten von Archimedes sind Arbeiten zur Mechanik, in seinen späteren Arbeiten über Mathematik kommt die numerische Richtung ziemlich stark zum Ausdruck. Es gibt keinen Grund, das mathematische Schaffen von Archimedes aus seiner zweifellos vielseitigen und systematischen Ingenieurtätigkeit herauszulösen; ja, der Theoretiker Archimedes muß ausschließlich als ein hervorragender Vertreter der „mathematischen Physik" seiner Epoche gesehen werden. Uns erscheint die von I. N. Wesselowski gegebene Charakterisierung vollkommen gerechtfertigt: „Wenn man sich an die Tatsachen hält, so steht sowohl am Anfang wie auch am Ende von Archimedes' wissenschaftlicher Tätigkeit die Mechanik, und in seinen mathematischen Werken ist die Mechanik ein mächtiges Hilfsmittel bei der Gewinnung der mathematischen Ergebnisse. Diese Ergebnisse selbst werden nicht nutzlos in den Raum gestellt, sondern dienen wiederum der Begründung mechanischer Theorien."[1])

Die bedeutendsten Beiträge, die Archimedes zur Mathematik geliefert hat, liegen auf dem Gebiet, das wir heute Integralrechnung nennen — Sätze über Flächeninhalte von ebenen Figuren und Volumina von Körpern. In seiner „Kreismessung" fand er Näherungswerte für den Kreisumfang mit Hilfe von einbeschriebenen und umbeschriebenen regulären Vielecken. Indem er diese Approximation bis zum 96-Eck weiterführte, fand er (in heutiger Schreibweise)

$$3\frac{10}{71} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}\,,$$ [2])

[1]) Vgl. den einführenden Artikel von I. N. Wesselowski in dem Buch *Archimedes' Werke* (russisch, Moskau 1962), S. 11, sowie A. Rényi, *Dialoge über Mathematik* (Berlin—Budapest—Basel 1967), S. 45—69.

[2]) $3{,}1409 < \pi < 3{,}1429$. Das arithmetische Mittel aus dem oberen und dem unteren Näherungswert beträgt $\pi = 3{,}1419$. Der genaue Wert ist $\pi = 3{,}14159\ldots$ Diese Bezeichnung π für das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser stammt aus dem 18. Jahrhundert. Für Archimedes bedeutet π die Zahl 80.

was man gewöhnlich so ausdrückt, daß man sagt, π habe ungefähr den Wert $3\frac{1}{7}$. In dem Buch „Kugel und Zylinder" finden wir den Ausdruck für die Kugeloberfläche (in der Form, daß die Kugeloberfläche viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises) und für das Kugelvolumen (in der Form, daß dieses Volumen das $\frac{3}{2}$fache vom Volumen des umbeschriebenen Zylinders beträgt). Der Ausdruck von Archimedes für den Flächeninhalt des Parabelsegments (das $\frac{4}{3}$fache der Fläche desjenigen einbeschriebenen Dreiecks mit derselben Basis wie das Segment, dessen dritte Ecke in dem Punkt liegt, in welchem die Tangente parallel zur Basis ist) findet sich in seinem Buch „Quadratur der Parabel". In dem Buch „Über Spiralen" findet man die „Spirale des Archimedes" nebst Flächenberechnungen; in dem Buch „Über Konoide und Sphäroide" finden sich die Volumina von gewissen (quadratischen) Rotationsflächen. Der Name von Archimedes ist auch mit seinem Satz über den Gewichtsverlust von in Flüssigkeiten eingetauchten Körpern (Archimedisches Prinzip) verbunden, der in seinem Buch „Über schwimmende Körper", einer Abhandlung über Hydrostatik, enthalten ist.

In allen diesen Werken verband Archimedes eine überraschende Originalität der Gedankenführung mit großer Meisterschaft der Rechentechnik und Strenge der Beweise. Typisch für diese Strenge ist das schon erwähnte „Axiom des Archimedes" und seine ständige Verwendung des Exhaustionsverfahrens zum Beweis seiner Integrationsresultate. Wir sahen schon, wie er in Wahrheit diese Resultate auf einem mehr heuristischen Wege fand (durch „Wägung" von Infinitesimalen); aber anschließend veröffentlichte er sie unter Einhaltung der schärfsten Anforderungen bezüglich der Strenge. Durch seine rechnerische Gewandtheit unterschied sich Archimedes von den meisten produktiven griechischen Mathematikern. Dadurch erhielt sein Werk, bei allen seinen typisch griechischen Eigenheiten, einen Zug zum Orientalischen. Dieser Zug tritt deutlich in seinem „Rinderproblem" zutage, einem sehr komplizierten Problem der Gleichungslehre, das als ein Problem darstellbar ist, welches auf eine Gleichung vom „Pellschen" Typ, nämlich

$$t^2 - 4729494\, u^2 = 1$$

führt, die nur durch sehr große Zahlen lösbar ist.

Dies ist nur eins von vielen Anzeichen dafür, daß die griechische Mathematik von der Platonischen Tradition niemals vollständig beherrscht wurde; in die gleiche Richtung weist die griechische Astronomie.

3.9. Apollonius von Perge

Bei dem dritten griechischen Mathematiker, Apollonius von Perge (etwa 260 bis etwa 170), befinden wir uns wieder vollständig innerhalb der griechischen Tradition. Apollonius, der wohl in Alexandria und Pergamon gelehrt hat, schrieb eine Abhandlung von acht Büchern über „Kegelschnitte", von denen sieben erhalten sind, drei allerdings nur in einer arabischen Übersetzung. Es ist eine Abhandlung über Ellipse, Parabel und Hyperbel, die als Schnitte eines Kreiskegels eingeführt werden, und dringt bis zur Diskussion der Evoluten von Kegelschnitten vor. Wir kennen diese Kegelschnitte noch heute unter den Namen, die sich bei Apollonius finden; sie beziehen sich auf gewisse Flächeneigenschaften dieser Kurven, die in heutiger Bezeichnung durch die Gleichungen

$$y^2 = px, \quad y^2 = px \pm \frac{p}{d} x^2$$

ausgedrückt werden. (p und d sind bei Apollonius Strecken.) Das Pluszeichen ergibt die Hyperbel, das Minuszeichen die Ellipse. Parabel bedeutet hier „Abbildung", Ellipse „Abbildung mit Defekt", Hyperbel „Abbildung mit Überschuß". Apollonius besaß unsere Koordinatenmethode nicht, weil er keine algebraische Schreibweise hatte (die er, wahrscheinlich unter dem Einfluß der Schule von Eudoxus, bewußt ablehnte). Viele seiner Ergebnisse können jedoch sofort in die Koordinatensprache umgeschrieben werden — einschließlich der Evoluteneigenschaften, die mit der Cartesischen Gleichung übereinstimmen.[1]) Dasselbe kann von anderen Büchern des Apollonius gesagt werden, von denen Teile erhalten sind und die „algebraische" Geometrie in geometrischer und daher in homogener Ausdrucksweise enthalten. Hier findet man das Apolloniussche Berührungsproblem, bei dem die Konstruktion des Berührungskreises an drei gegebene Kreise gefordert wird; die Kreise können auch durch gerade Linien oder Punkte ersetzt werden. Bei Apollonius finden wir zum erstenmal ausdrücklich die Forderung ausgesprochen, daß bei geometrischen Konstruktionen nur Zirkel und Lineal verwendet werden sollen, die daher nicht eine so allgemeine „griechische" Forderung darstellt, wie man manchmal glaubt.

3.10. Die Entwicklung der Astronomie bis zu Hipparch

Die Mathematik kann während ihrer ganzen Geschichte bis in unsere Zeit hinein nicht von der Astronomie getrennt werden. Die Erfordernisse der Bewässerung und des Ackerbaus im allgemeinen — und in gewissem Umfang auch die der Schiffahrt — verschafften der Astronomie den ersten Platz in der orientalischen und griechischen Wissenschaft, und ihre Entwicklung war von keinem geringen Einfluß auf die der Mathematik. Der rechnerische und auch oft der begriffliche Inhalt der Mathematik wurde weitgehend durch die Astronomie bedingt, und ebenso hing der Fortschritt der Astronomie vom wissenschaftlichen Stand der zur Verfügung stehenden mathematischen Literatur ab. Die Struktur des Planetensystems erlaubte es, weitreichende Ergebnisse bereits mit relativ einfachen mathematischen Methoden zu erzielen, die aber immerhin kompliziert genug sind, um einen Ansporn zu ihrer Vervoll-

---

[1]) „Meine Behauptung geht deshalb dahin, daß der Kernpunkt der analytischen Geometrie in dem Studium der Örter mit Hilfe ihrer Gleichungen besteht, und daß dies den Griechen bekannt war und die Grundlage ihrer Untersuchung der Kegelschnitte bildete." J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (Oxford 1940), S. 119. Man vergleiche jedoch unsere Bemerkungen über Descartes.

kommnung und damit zu einem Fortschritt der astronomischen Wissenschaft überhaupt zu liefern. Im Orient waren während der dem hellenistischen Zeitalter unmittelbar vorangehenden Periode beträchtliche Fortschritte der rechnerischen Astronomie erreicht worden, besonders in Mesopotamien während der späteren assyrischen und persischen Perioden. Hier hatten die langfristigen sorgfältigen Beobachtungen zu einer bemerkenswerten Einsicht in viele veränderliche Sternörter geführt. Die Bewegung des Mondes war eines der sich dem Mathematiker am meisten aufdrängenden Probleme der Astronomie, und zwar sowohl im Altertum als auch noch im achtzehnten Jahrhundert. Babylonische (chaldäische) Astronomen haben ihrem Studium viel Kraft gewidmet. Das Zusammentreffen von griechischer und babylonischer Wissenschaft während der Periode der Seleukiden führte zu großen rechnerischen und theoretischen Fortschritten, und während die babylonische Wissenschaft ihre alte Tradition der Kalenderberechnung fortsetzte, erzielte die griechische Wissenschaft einige ihrer bemerkenswertesten theoretischen Ergebnisse.

Der älteste bekannte griechische Beitrag zur theoretischen Astronomie war die Planetentheorie desselben Eudoxus, der auf Euklid so anregend gewirkt hatte. Es war ein Versuch, die Bewegung der Planeten (um die Erde herum) durch die Annahme von vier sich überlagernden, rotierenden, konzentrischen Kugelschalen zu erklären, wobei jede ihre eigene Rotationsachse besaß, deren Endpunkte an der umgebenden Kugelschale befestigt waren. Das war etwas Neues und typisch Griechisches, eine Erklärung anstelle einer bloßen Beschreibung von Erscheinungen am Himmel. Trotz ihrer noch wenig durchgearbeiteten Form enthielt die Theorie des Eudoxus die zentrale Idee aller Planetentheorien bis zum 17. Jahrhundert, die darin bestand, Unregelmäßigkeiten in den scheinbaren Bahnen des Mondes und der Planeten durch die Überlagerung von kreisförmigen Bewegungen zu erklären. Sie liegt sogar noch den rechnerischen Verfahren unserer modernen dynamischen Theorien zugrunde, sobald man Fourierreihen benutzt. Auf Eudoxus folgte Aristarch von Samos (etwa 280 v. u. Z.), der „Kopernikus des Altertums", dem Archimedes die Hypothese zuschreibt, daß die Sonne und nicht die Erde das Zentrum der Planetenbewegung ist. Diese Hypothese fand im Altertum nur wenige Anhänger, obwohl der Glaube, daß sich die Erde um ihre Achse dreht, weit verbreitet war. Der geringe Erfolg der heliozentrischen Anschauung beruht in der Hauptsache auf der Autorität von Hipparch, der oft als der bedeutendste Astronom des Altertums angesehen wird.

Die Beobachtungstätigkeit des Hipparch von Nicäa fiel in die Jahre von 161 bis 126 v. u. Z. Von seinem Werk ist uns unmittelbar nur wenig bekannt. Die wichtigste Quelle unserer Kenntnis über seine Leistungen bilden die Schriften von Ptolemäus, der drei Jahrhunderte später lebte. Ein großer Teil des Inhalts des großen Werkes von Ptolemäus, des „Almagest", kann Hipparch zugeschrieben werden, insbesondere die Verwendung von exzentrischen Kreisen und Epizyklen zur Erklärung der Bewegung von Sonne, Mond und Planeten, außerdem die Entdeckung der Präzession der Äquinoktien. Auf ihn geht nach unserer Kenntnis auch eine Methode zurück, Länge und Breite mit astronomischen Mitteln zu bestimmen, aber das Altertum war nie in der Lage, irgendwelche wissenschaftlichen Messungen großen Stils durchzuführen. (Im Altertum waren Wissenschaftler sehr dünn gesät, sowohl in räumlicher als auch in zeitlicher Hinsicht.) Das wissenschaftliche Werk von Hipparch war eng mit den Fortschritten der babylonischen Astronomie verbunden, die in dieser Periode große Erfolge erreichte, und wir können in diesem Werk die bedeutendste wissenschaftliche Frucht der Berührung zwischen Griechenland und dem Orient während der hellenistischen Periode[1]) sehen.

3.11. Die Entstehung des römischen Reiches und der Niedergang der griechischen Mathematik

Die dritte und letzte Periode der antiken Gesellschaft ist die der römischen Herrschaft. Syrakus fiel 212 an Rom, Karthago im Jahre 146, Griechenland auch 146, Mesopotamien 64 und Ägypten 30 v. u. Z. Der gesamte von Rom beherrschte Orient einschließlich Griechenland wurde in die Lage einer von römischen Verwaltungsbeamten regierten Kolonie übergeführt. Diese Kontrolle beeinflußte die ökonomische Struktur der orientalischen Länder so lange nicht, wie die hohen Steuern und andere Abgaben pünktlich entrichtet wurden. Das römische Imperium teilte sich ganz natürlich in einen westlichen Teil mit extensiver Landwirtschaft, die sich völlig auf Sklavenarbeit gründete, und in einen östlichen Teil mit intensiver Landwirtschaft, der Sklaven nie zu anderen Zwecken als für häusliche Dienste und öffentliche Arbeiten verwendete. Trotz des Wachstums einiger Städte und eines die ganze bekannte westliche Welt umfassenden Handels blieb die gesamte ökonomische Struktur des römischen Imperiums auf die Landwirtschaft gegründet. Die Verbreitung der Sklavenwirtschaft in einer solchen Gesellschaft war aller schöpferischen wissenschaftlichen Arbeit äußerst abträglich. Die Klasse der Sklavenhalter ist an technischen Entdeckungen selten interessiert, einesteils deshalb, weil die Sklaven billige Arbeitskräfte darstellen, und zum anderen deswegen, weil sie sich fürchtet, Sklaven irgendein Hilfsmittel in die Hand zu geben, das ihre Intelligenz fördern könnte. Freilich gab es auch gelehrte Haussklaven. Viele Angehörige der herrschenden Klasse beschäftigten sich in leichter Form mit den Künsten und Wissenschaften, und dieser ausgeprägte Dilettantismus begünstigte mehr die Mittelmäßigkeit als das produktive Denken. Als mit dem Niedergang des Sklavenmarktes die römische Wirtschaft verfiel, gab es nur wenige Menschen, die selbst die mittelmäßige Wissenschaft der vergangenen Jahrhunderte hätten weiter pflegen können.

Solange das römische Imperium gefestigt war, dauerte die Blütezeit der Wissenschaft des Ostens auf der Grundlage einer eigenartigen Mischung hellenistischer und orientalischer Elemente an. Obwohl Originalität und Einfallsreichtum allmählich verschwanden, ermöglichte die mehrere Jahrhunderte hindurch bestehende pax Romana ungestörtes Weiterdenken in traditionellen Bahnen. Gleichzeitig mit der pax Romana bestand mehrere Jahrhunderte hindurch die pax Sinensis; der

[1]) O. Neugebauer, *Exact Science in Antiquity*, Studies in Civilization, Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf. (Philadelphia 1941), S. 22—31, und das Buch des Autors „*The Exact Sciences in Antiquity*" (Princeton 1952, 2. Aufl. 1957.)

eurasische Kontinent hat in seiner ganzen Geschichte nie mehr eine solche Periode ununterbrochenen Friedens wie unter den Antoninen (Antoninus Pius 138—161, Marcus Aurelius 161—180, Commodus Lucius Aurelius 180—192) in Rom und den Han (202 v. u. Z. —220 u. Z.) in China erlebt. Dadurch wurde die Verbreitung von Wissen von Rom und Athen aus über den Kontinent hinweg nach Mesopotamien, China und Indien mehr erleichtert als jemals zuvor. Die hellenistische Wissenschaft gelangte weithin nach China und Indien und wurde ihrerseits durch die Wissenschaft dieser Länder beeinflußt. Einzelne Kenntnisse der babylonischen Astronomie und der griechischen Mathematik gelangten nach Italien, Spanien und Gallien. Ein Beispiel dafür ist die Verbreitung der Sexagesimalteilung des Winkels und der Stunde im römischen Imperium. Es gibt eine Theorie von F. Woepcke (1801—1885), welche die Verbreitung der sogenannten indisch-arabischen Ziffern in Europa auf neupythagoreische Einflüsse in der Spätzeit des römischen Imperiums zurückführt (1865). Mag nun die Verbreitung schon zu dieser Zeit zutreffen oder nicht, wenn sie aber so weit zurückreicht, dann beruht sie viel wahrscheinlicher auf dem Einfluß des Handels als auf dem der Philosophie.

Alexandria blieb das Zentrum der antiken Mathematik. Die schöpferische Arbeit ging weiter, obwohl allmählich Sammeln und Kommentieren immer mehr zur vorherrschenden Form der Wissenschaft wurden. Viele Ergebnisse der alten Mathematiker und Astronomen sind uns durch die Arbeit der Verfasser dieser Sammelwerke überliefert worden, und es ist oft sehr schwierig herauszufinden, was sie abgeschrieben und was sie selbst entdeckt haben. Wenn man versuchen will, den allmählichen Niedergang der griechischen Mathematik zu verstehen, muß man auch ihre technische Seite berücksichtigen: die schwerfällige geometrische Ausdrucksweise im Verein mit der konsequenten Ablehnung jeder algebraischen Bezeichnung, wodurch ein Fortschritt über die Kegelschnitte hinaus fast unmöglich gemacht wurde. Algebra und Rechnung wurden den verachteten Orientalen überlassen, deren Lehre mit einem Anstrich griechischer Kultur überzogen wurde. Trotzdem ist es falsch zu glauben, daß die Mathematik in Alexandria rein „griechisch" im Sinne der Euklidisch-Platonischen Tradition war; rechnerische Arithmetik und Algebra in ägyptisch-babylonischer Art wurde neben den abstrakten geometrischen Beweisen gepflegt. Man braucht nur an Ptolemäus, Heron und Diophant zu denken, um sich von dieser Tatsache zu überzeugen. Das einzige Band unter den vielen Rassen und Schulen war die allgemeine Verwendung der griechischen Sprache.

3.12. Die Schule von Alexandria zur Zeit der römischen Herrschaft

Einer der frühesten Mathematiker in Alexandria während der römischen Zeit war Nicomachus von Gerasa (100 u. Z.), dessen „Einführung in die Arithmetik" die vollständigste erhaltene Darstellung der Pythagoreischen Arithmetik bildet. Darin werden großenteils dieselben Fragestellungen behandelt wie in den arithmetischen Büchern von Euklids „Elementen", aber dort, wo Euklid Zahlen durch Strecken darstellt, verwendet Nicomachus eine arithmetische Bezeichnungsweise unter Zuhilfenahme der gewöhnlichen Sprache, sobald unbestimmte Zahlen auszudrücken

sind. Seine Behandlung der Polygonalzahlen und Pyramidalzahlen übte einen gewissen Einfluß auf die mittelalterliche Arithmetik aus, insbesondere durch Boethius. Eines der bedeutendsten Dokumente aus dieser zweiten Alexandrinischen Periode ist das „Große System" des Ptolemäus, das besser unter dem arabisierten Titel „Almagest" (etwa 150 u. Z.) bekannt ist. Der „Almagest" ist ein astronomisches Werk von höchster Meisterschaft und Originalität, selbst unter Berücksichtigung der Tatsache, daß darin viele von Hipparch oder Kidinnu und anderen babylonischen Astronomen stammende Ideen vorkommen. Er enthält auch eine Trigonometrie mit einer Sehnentafel von 0 bis 180°, die in Intervallen von einem halben Grad fortschreitet und einer Sinustafel im Winkelbereich von 0 bis 90° gleichwertig ist. Ptolemäus fand für die Sehne von 1° den Wert $(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}$ $= 0{,}0174537$ (der genaue Wert ist 0,0174524) und für π den Wert $(3, 8, 30) = \frac{377}{120}$ $= 3{,}141\,66$. Man findet im „Almagest" die Formeln für den Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz von zwei Winkeln, außerdem die Anfänge der sphärischen Trigonometrie. Die Sätze wurden in eine geometrische Darstellung gekleidet; unsere heutigen trigonometrischen Bezeichnungen stammen erst von Euler aus dem achtzehnten Jahrhundert. In diesem Werk findet sich auch der „Satz des Ptolemäus" über das einem Kreis einbeschriebene Viereck. In dem „Planisphaerium" von Ptolemäus ist eine Diskussion der stereographischen Projektion enthalten, und in seiner „Geographia" wird die Lage von Orten auf der Erde mit Hilfe von Länge und Breite bestimmt, die somit antike Beispiele von Koordinaten auf der Kugel bilden. Die stereographische Projektion liegt der Konstruktion des Astrolabiums zugrunde, eines zur Bestimmung der Lage auf der Erde verwendeten Instruments, das schon in der Antike bekannt war und bis zur Einführung des Sextanten im achtzehnten Jahrhundert vielfach benutzt wurde.[1])
Etwas älter als Ptolemäus war Menelaus (etwa 100 u. Z.), dessen Werk „Sphaerica" eine Geometrie der Kugel einschließlich sphärischer Dreiecke enthält, einem Gegenstand, der bei Euklid fehlt. Darin findet man den „Satz des Menelaus" für das Dreieck in seiner Erweiterung auf die Kugeloberfläche. Während die Astronomie von Ptolemäus großenteils Berechnungen mit Hilfe von Sexagesimalbrüchen enthält, ist die Abhandlung von Menelaus streng geometrisch im Sinne der reinen Euklidischen Tradition abgefaßt. In dieselbe Zeit wie Menelaus dürfte auch Heron gehören, jedenfalls wissen wir, daß er eine genaue Beschreibung einer im Jahre 62 u. Z.[2]) eingetretenen Mondfinsternis gegeben hat. Heron war ein vielseitiger Gelehrter, der über geometrische, rechnerische und mechanische Fragen schrieb; darin offenbart sich eine bemerkenswerte Mischung von griechischem und orientalischem Wissen. In seinem Werk „Metrica" leitete er die „Heronische" Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

[1]) H. Michel, *Traité de l'astrolabe* (Paris 1947), O. Neugebauer, Isis *40* (1949), 240 bis 256.

[2]) O. Neugebauer, *Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria—Rom bei Heron*, Hist. fil. Medd. Danske Vid. Sels. *26* Nr. 2 (1938), 28ff.

in rein geometrischer Form her; der Satz selbst wird Archimedes zugeschrieben: Ebenda finden sich typisch ägyptische Stammbrüche wie der Näherungswert von $\sqrt{63}$ in der Form $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. Die Heronische Formel für das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfs kann leicht in diejenige umgeformt werden, die dafür in dem alten Moskauer Papyrus angegeben ist. Im Gegensatz dazu war seine Volumenbestimmung für die fünf regulären Polyeder wieder im Geiste von Euklid gehalten.

3.13. Die „Arithmetica" des Diophant

Die Berührung mit der orientalischen Wissenschaft ist noch ausgeprägter in der „Arithmetica" von Diophant (etwa 250 u. Z.). Nur sechs der ursprünglichen Bücher sind erhalten geblieben; über ihre Gesamtzahl ist man auf Vermutungen angewiesen. Die geschickte Behandlung unbestimmter Gleichungen zeigt, daß die alte Algebra Babyloniens oder vielleicht Indiens nicht nur unter einem Anstrich von griechischer Kultur weiterlebte, sondern auch durch einige aktive Männer weiterentwickelt worden war. Wie und wann das geschah, ist nicht bekannt, ebenso wie wir nicht wissen, wer Diophant war — er kann ein hellenisierter Babylonier gewesen sein. Sein Werk ist eine der großartigsten Abhandlungen aus dem griechisch-römischen Altertum.

Die Diophantische Sammlung von Problemen ist sehr vielseitig, und ihre Lösungen sind oft höchst geistvoll. Die „Diophantische Analyse" besteht darin, Lösungen von unbestimmten Gleichungen der Formen $Ax^2 + Bx + C = y^2$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$ oder Systemen von solchen Gleichungen zu finden. Typisch für Diophant ist die Tatsache, daß er nur an positiven rationalen Lösungen interessiert ist; irrationale Lösungen nennt er „unmöglich" und ist sorgfältig darauf bedacht, seine Koeffizienten so zu wählen, daß er die positive rationale Lösung erhält, die er sucht. Unter diesen Gleichungen finden sich $x^2 - 26y^2 = 1$ und $x^2 - 30\,y^2 = 1$, die heute als „Pellsche" Gleichungen bezeichnet werden. Diophant kennt auch einige Sätze aus der Zahlentheorie, beispielweise den Satz (III, 19), wonach das Produkt von zwei ganzen Zahlen, von denen jede die Summe von zwei Quadraten ist, auf zwei Arten in zwei Quadrate zerlegt werden kann. Er besitzt auch Sätze über die Darstellung einer Zahl als Summe von drei und vier Quadraten.

Bei Diophant wird zum erstenmal ein systematischer Gebrauch von algebraischen Symbolen gemacht. Er hat ein besonderes Zeichen für die Unbekannte, für die Subtraktion und für die Reziprokenbildung. Die Zeichen besitzen noch mehr den Charakter von Abkürzungen als den von algebraischen Symbolen im heutigen Sinne (sie bilden die sogenannte „rhetorische" Algebra); für jede Potenz der Unbekannten gibt es ein besonderes Symbol.[1]) Es kann nicht zweifelhaft sein, daß wir

[1]) Papyrus 620 der Universität Michigan, der 1921 erworben wurde, enthält einige Probleme der griechischen Algebra, die in die Zeit vor Diophant, vielleicht in den Anfang des zweiten Jahrhunderts u. Z., gehören. Einige bei Diophant verwendete Symbole kommen in diesem Manuskript vor. Siehe F. E. Robbins, Classical Philology *24* (1929) 321—329; K. Vogel, ebenda *25* (1930), 373—375.

hier nicht nur, wie in Babylon, arithmetische Fragen von ausgeprägt algebraischer Natur finden, sondern auch eine gut durchgebildete algebraische Bezeichnungsweise, die sich für die Lösung von weit komplizierteren Aufgaben, als sie jemals zuvor in Angriff genommen worden waren, als vorteilhaft erwies.

3.14. Der Niedergang der Schule von Alexandria

Die letzte der großen alexandrinischen mathematischen Abhandlungen wurde von Pappus geschrieben (Ende des dritten Jahrhunderts). Seine „Sammlung" („Synagoge") war eine Art von Handbuch zum Studium der griechischen Geometrie mit historischen Anmerkungen, Verbesserungen und Abänderungen bereits bekannter Sätze und Beweise. Man sollte es besser mit den Originalwerken zusammen als unabhängig von ihnen studieren. Viele Resultate der antiken Autoren sind nur in der Form bekannt, in der sie uns von Pappus überliefert worden sind. Beispiele dafür sind die Probleme, welche die Quadratur des Kreises, die Würfelverdopplung und die Dreiteilung des Winkels betreffen. Interessant ist das Kapitel über isoperimetrische Figuren, in dem ausgesprochen wird, daß der Kreis eine größere Fläche hat als irgendein reguläres Polygon von gleichem Umfang. Hier findet man auch eine Bemerkung darüber, daß die Zellen einer Bienenwabe gewissen Maximum-Minimum-Bedingungen genügen.[1]) Die halbregulären Körper von Archimedes sind uns ebenfalls durch Pappus bekannt. Ebenso wie die „Arithmetica" von Diophant ist die „Sammlung" ein anregendes Buch, dessen Probleme viele weitere Forschungen in späteren Zeiten veranlaßten.

Die Alexandrinische Schule erstarb nach und nach, zusammen mit dem Niedergang der antiken Gesellschaft. Sie blieb als Ganzes ein Bollwerk des Heidentums gegen das Vordringen des Christentums, und einige ihrer Mathematiker haben sich auch in der Geschichte der antiken Philosophie einen Namen gemacht. Proclus (410 bis 485), dessen „Kommentar zum ersten Buche von Euklid" eine unserer Hauptquellen für die Geschichte der griechischen Mathematik ist, war das Haupt einer neuplatonischen Schule in Athen. Eine andere Vertreterin dieser Schule in Alexandria war Hypatia, die Kommentare zu den klassischen Mathematikern schrieb. Sie wurde im Jahre 415 von den Anhängern des Heiligen Cyrill ermordet, ein Vorgang, der Charles Kingsley[2]) zu einem Roman inspirierte (1853). In diesen Philosophenschulen mit ihren Kommentatoren wechselten Jahrhunderte hindurch Zeiten des Aufstiegs und Niedergangs ab. Die Akademie in Athen wurde von Kaiser Justinian (529) als „heidnisch" aufgehoben, aber zu dieser Zeit gab es schon wieder Schulen an solchen Orten wie Konstantinopel und Jundīshāpūr. Viele alte Sammelwerke überdauerten die Zeit in Konstantinopel, während Kommentatoren fortfuhren, das Andenken an die griechische Wissenschaft und Philosophie in der griechischen

[1]) Eine ausführliche Diskussion dieses Problems ist enthalten in D'Arcy W. Thompson, *Growth and Form* (2. Aufl., Cambridge 1942). Das Studium isoperimetrischer Probleme wird Zenodorus (2. Jh. v. u. Z.) zugeschrieben. Vgl. S. 176.

[2]) Ch. Kingsley, *Hypathia* (deutsche Übersetzung, Berlin 1962). Siehe auch F. Mauthner, *Hypatia, Roman aus dem Altertum* (1892).

Sprache für immer zu erhalten. Im Jahre 641 wurde Alexandria von den Arabern erobert, die den Anstrich mit griechischer Kultur in Ägypten durch einen entsprechenden arabischen Anstrich ersetzten. Es gibt wenig Grund zu der Annahme, daß die Araber die berühmte Bibliothek von Alexandria zerstört haben, da es zweifelhaft ist, ob diese Bibliothek zu dieser Zeit überhaupt noch existierte. Tatsächlich haben die arabischen Eroberer den Charakter der mathematischen Studien in Ägypten nicht wesentlich verändert. Es mag einen Rückgang gegeben haben, aber als wieder etwas von ägyptischer Mathematik zu hören ist, schreitet sie auf den Bahnen der alten griechisch-orientalischen Tradition fort (z.B. Alhazen).

3.15. Griechische Arithmetik und Rechenkunst

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen über die griechische Arithmetik und Rechenkunst. Die griechischen Mathematiker machten einen Unterschied zwischen „Arithmetik" oder Wissenschaft von den Zahlen („arithmoi") und „Logistik" oder praktische Rechenkunst. Der Ausdruck „arithmos" bezog sich nur auf natürliche Zahlen, auf „aus Einheiten zusammengesetzte Größen" (Euklid VII, Def. 2; dies bedeutete auch, daß „eins" nicht als eine Zahl angesehen wurde).[1] Unser Begriff der reellen Zahl war unbekannt. Eine Strecke hatte daher nicht immer eine Länge. Geometrisches Denken ersetzte unser Arbeiten mit den reellen Zahlen. Wenn Euklid die Tatsache ausdrücken wollte, daß die Fläche eines Dreiecks gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe ist, mußte er sagen, daß sie halb so groß ist wie die Fläche eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie, das zwischen denselben Parallelen liegt (Euklid I, 41). Der Satz des Pythagoras stellte eine Beziehung zwischen den Flächen von drei Quadraten dar und nicht zwischen den Längen von drei Seiten. Die „Elemente" von Euklid geben eine Theorie der quadratischen Gleichungen, aber sie wird unter „Anlegung" von Flächen behandelt, und da die Wurzeln durch gewisse Konstruktionen gefundene Strecken sind, kann man verstehen, daß die einzigen zugelassenen Wurzeln die positiven sind. In den „Elementen" besitzt jedoch eine Strecke nicht notwendig einen ihr zugeordneten Zahlenwert. Diese Auffassungen über Strecken und Zahlen müssen als eine wohlüberlegte Einstellung angesehen werden, die auf dem Sieg des Platonischen Idealismus innerhalb derjenigen Teile der herrschenden Klasse Griechenlands beruhte, die an der Mathematik interessiert waren, während die gleichzeitige orientalische Auffassung über die Beziehung zwischen Algebra und Geometrie keinerlei Beschränkung des Zahlbegriffs zuließ. Es bestehen gute Gründe dafür, zu glauben, daß der Satz des Pythagoras für die Babylonier eine zahlenmäßige Beziehung zwischen den Längen von Seiten war, und es war gerade diese Art von Mathematik, mit der die ionischen Mathematiker zuerst bekannt geworden waren.

Die gewöhnliche rechnerische Mathematik (unter dem Namen „Logistik") blieb während aller Perioden der griechischen Geschichte sehr lebendig. Euklid lehnte sie ab, aber Archimedes und Heron verwendeten sie mit Geschick und ohne alle Be-

[1] Noch Stevin bringt in seiner „Arithmétique" (1585) einen fast leidenschaftlichen Aufruf, endlich doch „eins" als eine Zahl anzuerkennen.

denken. Sie beruhte auf einem Zahlensystem, das sich mit der Zeit änderte. Das ältere griechische Zahlensystem beruhte auf einem additiven Dezimalprinzip ähnlich dem der Ägypter und Römer. In der alexandrinischen Zeit, vielleicht auch schon früher, kam eine Zahlenschreibweise auf, die fünfzehn Jahrhunderte hindurch verwendet wurde, und zwar nicht nur von Wissenschaftlern, sondern auch von Kaufleuten und Verwaltungsbeamten. Sie verwendete der Reihe nach die Buchstaben des griechischen Alphabets, um zunächst unsere Ziffern 1, 2, . . ., 9, sodann die Zehner von 10 bis 90 und schließlich die Hunderter von 100 bis 900 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, usw.) auszudrücken. Drei besondere ältere Buchstaben wurden zu den 24 Buchstaben des griechischen Alphabets noch hinzugenommen, um auf die notwendige Anzahl von 27 Zeichen zu kommen. Mit Hilfe dieses Systems konnte jede Zahl unter 1000 mit höchstens drei Zeichen geschrieben werden, z. B. 14 als $\iota\delta$, da $\iota = 10$, $\delta = 4$; größere Zahlen als 1000 konnten durch eine einfache Erweiterung des Systems ausgedrückt werden. Es wird in den noch vorhandenen Manuskripten von Archimedes, Heron und allen anderen klassischen Autoren benutzt. Es gibt archäologische Beweise, daß es in den Schulen gelehrt wurde.

Es war ein dezimales System ohne Stellenwertcharakter; $\iota\delta$ und $\delta\iota$ konnten beide nur 14 bedeuten. Dieses Fehlen des Stellenwertes und die Verwendung von nicht weniger als 27 Symbolen werden gelegentlich als Beweis für die Minderwertigkeit des Systems angesehen. Die Leichtigkeit, mit der es die antiken Mathematiker handhabten, seine allgemeine Verwendung bei den griechischen Kaufleuten, auch wenn es sich um recht komplizierte Geschäftsabwicklungen handelte, sein langer Bestand — im oströmischen Reich unverändert bis zu dessen Ende 1453 — scheinen auf gewisse Vorteile hinzuweisen. Man kann sich durch einige praktische Übungen in diesem System tatsächlich davon überzeugen, daß es möglich ist, die vier Grundrechenarten ziemlich leicht auszuführen, sobald man die Bedeutung der Symbole sicher beherrscht. Die Bruchrechnung mit einer besonderen Bezeichnungsweise ist auch einfach; aber die Griechen waren insofern inkonsequent, als sie kein einheitliches System benutzten. Sie verwendeten ägyptische Stammbrüche, babylonische Sexagesimalbrüche und auch Brüche in einer Bezeichnungsweise, die an die heutige erinnert. Dezimalbrüche wurden nie eingeführt, aber dieser große Fortschritt erscheint auch erst spät in der europäischen Renaissance, nachdem die Rechentechnik sich weit über den Stand hinaus entwickelt hatte, der jemals in der Antike erreicht worden war; bis ins achtzehnte und neunzehnte Jahrhundert hinein wurden die Dezimalbrüche in viele Schulbücher nicht aufgenommen. Freilich waren Rechnungen mit Dezimalbrüchen bei chinesischen und arabischen Mathematikern seit längerer Zeit bekannt (vgl. S. 86—88).

Man hat gesagt, daß dieses alphabetische System für die Entwicklung der griechischen Algebra nachteilig gewesen sei; denn der Gebrauch von Buchstaben für bestimmte Zahlen verhinderte ihre Verwendung zur Bezeichnung von allgemeinen Zahlen, wie es in der heutigen Algebra geschieht. Eine derartige rein formale Erklärung für das Fehlen einer griechischen Algebra vor Diophant ist abzulehnen, selbst wenn man den großen Wert einer zweckmäßigen Bezeichnung anerkennt. Wenn die klassischen Autoren an der Algebra interessiert gewesen wären, dann hätten sie auch eine geeignete Symbolik geschaffen, womit Diophant tatsächlich den Anfang gemacht hat. Das Problem der griechischen Algebra kann nur geklärt werden, indem man tiefer in die Zusammenhänge zwischen den griechischen Mathematikern und der babylonischen Algebra im Rahmen der gesamten Beziehungen zwischen Griechenland und dem Orient eindringt.

Literatur

Die klassischen griechischen Autoren sind in ausgezeichneten Ausgaben erhältlich, die Hauptwerke auch in englischen, deutschen und französischen Übersetzungen. Die beste Einführung wird durch folgende Bücher vermittelt:

T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics* (2 Bände, Cambridge 1912).

T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics* (Oxford 1931).

T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (3 Bände, Cambridge 1908; Nachdruck New York 1955).

In russischer Sprache liegen vor:

Die Elemente des Euklid, Übersetzung und Kommentare von D. D. Morduchai-Boltowski:
Bücher I–VI, Moskau-Leningrad 1948; Bücher VII–X, Moskau-Leningrad 1949; Bücher XI–XV, Moskau-Leningrad 1950.

Archimedes. Übersetzung und Erläuterungen von I. N. Wesselowski (Moskau 1962).

Archimedes, *Die Sandrechnung*, Übersetzung, Kommentar und Erläuterungen von G. N. Popow (Moskau-Leningrad 1932).

J. L. Heiberg, *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum* (deutsch, München 1925), mit einem Vorwort von A. P. Juschkewitsch (Moskau-Leningrad 1936).

S. J. Lurje, *Archimedes* (Moskau-Leningrad 1945).

W. F. Kagan, *Archimedes* (Moskau 1951; deutsche Übersetzung Leipzig 1955).

I. G. Baschmakowa, *Differentielle Methoden in den Arbeiten von Archimedes*, Istor.-Mat. Issled. *6* (1953), 609–658.

I. G. Baschmakowa, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik im antiken Griechenland*, Istor.-Mat. Issled. *11* (1958), 225–438.

E. J. Kolman, *Geschichte der Mathematik im Altertum* (Moskau 1961).

In den Lieferungen I (1948), II (1949), VIII (1955) der Istoriko-Matematitscheskie Issledowanija siehe die Artikel über die Elemente von Euklid; in dem Buch von M. J. Wygodski, *Arithmetik und Algebra in der antiken Welt* (2. Aufl., Moskau 1967) siehe Abschnitt III: Die Arithmetik der alten Griechen.

Siehe auch:

P. Ver Eecke, *Œuvres complètes d'Archimède* (Brüssel 1921, Paris 1961, mit Kommentar von Eutocius).

P. Ver Eecke, *Pappus d'Alexandrie. La Collection mathématique* (Paris-Bruges 1933).

P. Ver Eecke, *Proclus de Lycie. Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide* (Bruges 1948).

K. Manitius, *Ptolemäus, Handbuch der Astronomie* (2 Bände, Leipzig 1912/1913; 2. Aufl. mit einem Vorwort und Berichtigungen von O. Neugebauer, Leipzig 1963).

Heron's „Metrica" wurde neu herausgegeben von E. M. Bruins, *Codex Constantinopolitanus Palatini Veteris № 1* (3 Bände, Leiden 1961, mit englischer Übersetzung).

G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (2. Aufl., Mailand 1914).

G. J. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin 1889).

J. Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge 1884).

E. J. Dijksterhuis, *Archimedes* (Copenhagen 1956).

T. Dantzig, *The bequest of the Greeks* (New York 1955).

W. Blaschke, *Griechische und anschauliche Geometrie* (München 1953).

O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (Göttingen 1957).

O. Becker, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik* (Darmstadt 1965).

G. Hauser, *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid* (Luzern 1955).

K. Reidemeister, *Die Arithmetik der Griechen*, Hamburger Math. Sem. (Einzelschriften) *26* (1939).

K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen* (Hamburg 1959).

H. Wussing, *Mathematik in der Antike* (2. Aufl., Leipzig 1965).

Dieses Buch beschäftigt sich auch mit der ägyptischen und babylonischen Mathematik.

S. Heller, *Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer*, Abh. Dtsch. Akad. Wiss., Kl. Math., Phys., Techn. *6* (1958).

A. D. Steele, *Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik*, Quellen und Studien *2* A (1932), 61—89.

L. Schönberger, *Proklus Diadochus. Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen* (Halle 1948).

Es gibt eine französische Ausgabe von Proclus durch P. Ver Eecke (Brügge 1949) und eine englische durch G. R. Morrow (Princeton 1970).

I. G. Bašmakova, *Diophant und diophantische Gleichungen* (deutsche Übersetzung, Berlin und Basel/Stuttgart 1974).

F. Beeckman, *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, Arch. History Exact Sci. *4* (1967), 1—144.

E. Neuenschwander, *Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids*, ibid. *9* (1973), 325—380.

Vgl. auch die weiteren Arbeiten: ibid. *11* (1973), 127—133, und *14* (1974), 91—125. Dies sind Versuche, diese Bücher „mit modernen Augen" zu lesen.

Vergleichende griechische, lateinische und englische Texte in:

J. Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.-London 1939).

Weitere Textkritik in:

P. Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène* (2. Aufl., Paris 1930).

P. Tannery, *Mémoires scientifiques* (Bände 1—4).

H. Vogt, *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4ten Jahrhunderts*, Bibliotheca math. (3) *10* (1909/1910), 97—105.

E. Sachs, *Die fünf Platonischen Körper* (Berlin 1917).

E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer* (Halle 1923).

S. Luria, *Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten*, Quellen und Studien *2* (1932), 106—185.

P. Lorenzen, *Die Entstehung der exakten Wissenschaften* (Berlin 1960).

A. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik* (München-Wien 1969).

K. v. Fritz, *Platon, Theaetet und die antike Mathematik* (Darmstadt 1969).

Neudruck mit Nachtrag von Artikeln in Philologon *87* (1932).

J. Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide* (Paris 1961).

E. A. Parsons, *The Alexandrian Library* (Amsterdam, etc. 1952).

Eine gute und kritische Übersicht über die vergleichenden Hypothesen bezüglich der griechischen Mathematik in:

E. J. Dijksterhuis, *De elementen van Euclides* (2 Bände, Groningen 1930, holländisch).

Über das Zenonsche Paradoxon (siehe außer bei van der Waerden, a. a. O., S. 50):

F. Cajori, *The History of Zenon's Arguments on Motion*, Amer. Math. Monthly *22* (1915), 8 Artikel (siehe auch Isis *3* (1920/1921), 7—20).

Über die Beziehung der griechischen zur orientalischen Astronomie:

O. Neugebauer, *The History of Ancient Astonomy. Problems and Methods*, J. Near Eastern Studies *4* (1945), 1—38.

Siehe außerdem:

M. R. Cohen — J. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (New York 1948).

T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle* (Oxford 1949).

B. L. van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap* (Groningen 1950).

Dieses holländisch geschriebene Buch behandelt die ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Deutsche Ausgabe: *Erwachende Wissenschaft* (Basel und Stuttgart 1956). Diese Mathematik wird auch behandelt in:

H. O. Apostle, *Aristotle's Philosophy of Mathematics* (Chicago 1952).

E. M. Bruins, *Fontes matheseos* (Leiden 1953).

Eine Auswahl griechischer Texte für Gymnasien mit Erklärungen in holländischer Sprache und einer Einleitung über ägyptische und babylonische Mathematik.

Lexikon der alten Welt, Artikel über Mathematik von K. v. Fritz, H. Gericke, K. Vogel (Stuttgart 1965).

K. Vogel, *Byzantine Science,* Cambridge Medieval History 4, part 2 (Cambridge 1967), chapter 20. Siehe auch das auf S. 105 zitierte Werk.

K. Vogel, *Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts* (Wien-Köln 1968).

Siehe auch Artikel in D. S. B., z. B. Archimedes, Diophantus usw.

L. N. H. Bunt, P. S. Jones, J. D. Bedient, *The historical roots of elementary mathematics* (Englewood Cliffs, New Jersey, 1976).

Vornehmlich griechische und vorgriechische Mathematik mit Aufgaben.

S. Unguru, *On the Need to rewrite the History of Greek Mathematics,* Arch. History Exact. Sc. *15* (1975), 67–114.

Der Verfasser kehrt sich in scharfer Weise gegen die von Mathematikhistorikern oft verwandte Methode, mathematische Aussagen aus anderen Kulturen als der unsrigen nur in einer Übersetzung in die uns vertraute mathematische Sprache anzugeben. Diese Methode kritisiert er als unhistorisch, weil sie die Mathematik der Vergangenheit aus ihren kulturellen Rahmen herauslöst. Ein Beispiel sei die sogenannte „geometrische Algebra" der Antike. Diese Kritik besteht natürlich zu Recht. Die meisten an ihrer Fachgeschichte interessierten Mathematiker sind leider nicht immer kulturhistorisch interessiert und deshalb froh, die Resultate „übersetzt" zu finden. Einen Kompromiß findet man in den mathematischen Quellenbüchern. So kann man in meinem „Source Book of Mathematics" den langweiligen Cavalieri sowohl im Original als auch in „Übersetzung" genießen, leider ohne weiteren Hinweis auf die Scholastik der Indivisiblen. Chaucer im Original (auf dem Hintergrund des 14. Jahrhunderts) ist natürlich schön, aber die meisten von uns sind mit einer modernen Übersetzung ganz zufrieden.

4. Der Orient nach dem Niedergang der griechischen Gesellschaft

4.1. Das Vordringen des Islams

Die alte Kultur des Nahen Ostens war trotz des hellenistischen Einflusses niemals verschwunden. Sowohl orientalische als auch griechische Einflüsse traten in der Wissenschaft von Alexandria deutlich zutage; Konstantinopel und Indien waren ebenfalls wichtige Treffpunkte des Ostens und Westens. Im Jahre 395 gründete Theodosius I. das Byzantinische Reich; die Hauptstadt Konstantinopel war griechisch, aber sie war das Verwaltungszentrum von großen Gebieten, in denen die Griechen nur einen Teil der städtischen Bevölkerung bildeten. Tausend Jahre lang kämpfte dieses Reich gegen die Kräfte aus dem Osten, Norden und Westen, wobei es gleichzeitig als Bewahrer der griechischen Kultur und als Brücke zwischen Ost und West in Erscheinung trat. Mesopotamien wurde schon frühzeitig, im zweiten Jahrhundert u. Z., von den Römern und Griechen unabhängig, zuerst unter den Partherkönigen, später (266) unter der rein persischen Dynastie der Sassaniden. Das Gebiet am Indus hatte einige hundert Jahre lang mehrere griechische Dynastien, die im ersten Jahrhundert u. Z. verschwanden; aber die darauffolgenden einheimischen indischen Königreiche hielten kulturelle Beziehungen mit Persien und dem Westen aufrecht.
Die politische Vorherrschaft der Griechen über den Nahen Osten verschwand fast vollständig seit dem plötzlichen Aufstieg des Islams. Nach 622, dem Jahre der Hegira, eroberten die Araber in einem erstaunlichen Ansturm große Teile des westlichen Asiens (unwiderstehlich wie der Ansturm, der später die Eroberung Amerikas durch die Spanier brachte) und hatten vor dem Ende des siebenten Jahrhunderts auch Teile des weströmischen Reiches bis nach Sizilien, Nordafrika und Spanien hin besetzt. Überall, wohin sie kamen, versuchten sie, die griechisch-römische Kultur durch die des Islams zu verdrängen. Die Amtssprache wurde Arabisch an Stelle von Griechisch oder Lateinisch; aber die Tatsache, daß für die wissenschaftlichen Dokumente eine neue Sprache verwendet wurde, kann leicht die Wahrheit verdunkeln, daß unter der arabischen Herrschaft eine bemerkenswerte Stetigkeit der Kultur erhalten blieb. Die alten einheimischen Kulturen hatten unter dieser Herrschaft sogar eine bessere Möglichkeit des Fortbestandes als unter der Fremdherrschaft der Griechen. Persien beispielsweise blieb trotz der arabischen Verwaltung weitgehend das alte Land der Sassaniden. Dennoch lebte der Wettstreit zwischen den verschiedenen Traditionen fort, nur jetzt in einer neuen Form. Während der ganzen Zeit der Herrschaft des Islams existierte eine ungebrochene griechische Tradition, die ihren eigenen Charakter gegenüber den verschiedenen einheimischen Kulturen bewahrte.

4.2. Die Mathematik in Indien

Wir haben gesehen, daß die glänzendsten mathematischen Resultate aus dem Wettstreit und der Mischung orientalischer und griechischer Kultur während der Blütezeit des Römischen Imperiums in Ägypten erzielt wurden. Mit dem Niedergang des Römischen Imperiums verlagerte sich das Zentrum der mathematischen Forschung allmählich nach Indien und später wieder zurück nach Mesopotamien. Die ersten wohlerhaltenen indischen Beiträge zu den exakten Wissenschaften sind die „Siddhāntās", wovon ein Teil, der „Sūrya", in einer dem Original (etwa 300 bis 400 u. Z.) gleichenden Form erhalten sein dürfte. Diese Bücher beschäftigen sich hauptsächlich mit Astronomie und operieren mit Epizyklen und Sexagesimalbrüchen. Diese Tatsachen lassen einen Einfluß der griechischen Astronomie vermuten, der vielleicht in der Zeit vor dem „Almagest" wirksam geworden ist; sie können auch auf einen unmittelbaren Kontakt mit der babylonischen Astronomie hindeuten. Außerdem aber zeigen die „Siddhāntās" zahlreiche typisch indische Besonderheiten. Die „Sūrya Siddhāntā" enthält Tafeln von Sinuswerten (jyā) statt von Sehnen.
Die Resultate der „Siddhāntās" wurden in indischen Mathematikerschulen, die vornehmlich in Ujjain (Zentralindien) und in Mysore (Südindien) beheimatet waren, systematisch erläutert und ausgebaut. Seit dem 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung sind Namen und Bücher von einzelnen indischen Mathematikern erhalten; einige Bücher sind in englischen Übersetzungen greifbar.
Die bekanntesten dieser Mathematiker sind Āryabhata (genannt „der Erste", etwa 500) und Brahmagupta (etwa 625). Bezüglich der Frage ihrer Bekanntschaft mit griechischen, babylonischen und chinesischen Resultaten ist man in starkem Maße auf Vermutungen angewiesen; zugleich aber zeigen sie eine beachtliche Originalität. Charakteristisch für ihre Arbeiten sind die arithmetisch-algebraischen Teile, die in ihrer Vorliebe für unbestimmte Gleichungen eine gewisse Verwandtschaft mit Diophant und den Chinesen verraten.
Diesen Autoren folgten in den nächsten Jahrhunderten weitere, die auf denselben Gebieten arbeiteten; ihr Werk war teilweise astronomisch, teilweise arithmetisch-algebraisch bestimmt und streifte auch Meßkunde und Trigonometrie. Āryabhata I. besaß den Wert 3,1416 für π. Einen Lieblingsgegenstand bildete die Auffindung von rationalen Dreiecken und Vierecken, worin Mahāvīrā aus der Schule von Mysore (etwa 850) besonders erfolgreich war. Um 1150 finden wir in Ujjain, wo Brahmagupta gewirkt hatte, einen anderen ausgezeichneten Mathematiker, Bhāskara. Die erste allgemeine Lösung von unbestimmten Gleichungen ersten Grades $ax + by = c$ (a, b, c ganze Zahlen) findet sich bei Brahmagupta. Es ist daher strenggenommen unrichtig, unbestimmte lineare Gleichungen als Diophantische Gleichungen zu bezeichnen. Während Diophant noch gebrochene Lösungen zuließ, waren die Inder und die Chinesen nur an ganzzahligen Lösungen interessiert. Sie gingen auch darin über Diophant hinaus, daß sie negative Wurzeln von Gleichungen zuließen, obwohl dies bei den Indern eine ältere, von der babylonischen Astronomie angeregte Praxis gewesen sein dürfte. Zum Beispiel löste Bhāskara $x^2 - 45\,x = 250$ durch $x = 50$ und $x = -5$; bezüglich der Gültigkeit der negativen Wurzeln huldigte er einem

gewissen Skeptizismus. Sein „Lilāvāti" war mehrere Jahrhunderte hindurch ein Standardwerk über Arithmetik und Meßkunst im Osten; Kaiser Akbar hatte es ins Persische übersetzt (1587). 1832 erschien eine Ausgabe in Kalkutta.[1] Im alten Indien gab es sicher noch mehr mathematische Schätze: So wissen wir z. B. seit kurzem, daß die Gregory-Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ bereits bei Nīlakantha (um 1500) zu finden ist.[2]

4.3. Die Entwicklung des dezimalen Stellenwertsystems

Die bekannteste Leistung der indischen Mathematik ist unser heutiges dezimales Stellenwertsystem. Das Dezimalsystem ist sehr alt, und dasselbe gilt für das Stellenwertsystem; aber ihre Kombination scheint in Indien entstanden zu sein, wo im Laufe der Zeit ältere Nicht-Stellenwertsysteme dadurch allmählich verdrängt wurden. Das erste bekannt gewordene Auftreten datiert aus dem Jahre 595 u. Z., wo sich auf einer Tafel die Jahreszahl 346 in dezimaler Stellenwertschreibweise findet. Die Inder besaßen lange vor dieser schriftlichen Urkunde eine System, um große Zahlen mit Hilfe von Worten auszudrücken, die nach einem Stellenwertverfahren angeordnet wurden. Es gibt Texte aus früher Zeit, in denen das Wort „Sūnya", das Null bedeutet, ganz ausdrücklich verwendet wird.[3] Das sogenannte Bakshāli-Manuskript, das aus siebzig Steifen aus Birkenrinde besteht, ist unbekannten Ursprungs und unbekannter Datierung (die Schätzungen reichen vom dritten bis zum zwölften Jahrhundert u. Z.). Es enthält traditionelles indisches Material über unbestimmte und quadratische Gleichungen sowie über Approximationen und verwendet einen Punkt, um die Null auszudrücken. Der älteste schriftliche Beleg mit einem Zeichen für die Null stammt aus dem neunten Jahrhundert. Das ist alles viel späteren Datums als das Auftreten eines Zeichens für die Null in babylonischen Texten. Das Zeichen 0 für die Null kann auf griechischen Einfluß beruhen („ouden" ist das griechische Wort für nichts); während der babylonische Punkt nur zwischen Ziffern geschrieben wird, erscheint die indische Null auch am Ende, und dadurch werden 0, 1, 2, . . ., 9 zu gleichwertigen Ziffern.[4]

---

[1]) Brahmagupta sagt an einer Stelle seines Buches, daß einige seiner Probleme „einfach zum Vergnügen" gestellt werden. Dies bestätigt, daß die Mathematik des Orients sich schon lange aus ihrer bloßen Nützlichkeitsrolle befreit hatte, wenn es überhaupt eine solche Rolle je gegeben hat. Hundertundfünfzig Jahre später schrieb Alcuin im Westen seine „Aufgabe zur Verstandesschärfung für Jünglinge", worin er eine ähnliche, nicht allein auf Nützlichkeit gerichtete Absicht bekundet. Mathematik in Form von Denkaufgaben hat oft wesentlich zum Fortschritt der Wissenschaft beigetragen, indem sie neue Gebiete eröffnete. Einige solcher Aufgaben harren noch der Übernahme in den Hauptbereich der Mathematik.

[2]) C. T. Rajagopal — T. V. Vedamurthi Aiyar, Scripta math. *17* (1951), 65—74, ibid. *10* (1952), 25—30. Vgl. auch C. T. Rajagopal — A. Venkatamaran, J. Royal Asiatic Soc. Bengal *15*, Nr. 1 (1949), 1—13, und J. E. Hofmann, Math.-phys. Semesterberichte *3* (1953), 194—206.

[3]) Dies kann mit der Verwendung des Begriffs des „Leeren" (kenos) in der „Physica" IV 8.215^b von Aristoteles verglichen werden. Siehe C. B. Boyer, *Zero: the symbol, the concept, the number*. Nat. Math. Magazine *18* (1944), 323—330.

[4]) Vgl. H. Freudenthal, *5000 jaren internationale wetenschap* (Groningen 1946).

Das dezimale Stellenwertsystem drang längs der Karawanenstraßen nach und nach in viele Teile des Nahen Ostens vor und nahm seinen Platz neben anderen Systemen ein. Das Vordringen nach Persien, vielleicht auch nach Ägypten, kann sehr wohl während der Periode der Sassaniden (224—641) erfolgt sein, als ein enger Kontakt zwischen Persien, Ägypten und Indien bestand. Während dieser Zeit kann die Erinnerung an das alte babylonische Stellenwertsystem in Mesopotamien noch lebendig gewesen sein. Die älteste deutliche Bezugnahme auf das indische Stellenwertsystem außerhalb Indiens findet sich in einem 662 von Severus Sēbōkht, einem syrischen Bischof, geschriebenen Werk. Mit Al-Fāzarīs Übersetzung der „Siddhāntāas" ins Arabische (etwa 773) begann die Bekanntschaft der islamischen wissenschaftlichen Welt mit dem sogenannten indischen System. Dieses System wurde allmählich in der arabischen Welt und darüber hinaus in wachsendem Umfange verwendet, obwohl das griechische Zahlensystem ebenso wie auch andere ältere Systeme gleichfalls weiterhin in Gebrauch blieben. Gesellschaftliche Faktoren können auch eine Rolle gespielt haben — die orientalische Tradition, die die dezimale Stellenwertmethode gegenüber der Methode der Griechen bevorzugte. Die Symbole, die für die Schreibung der Stellenwertziffern verwendet wurden, zeigen große Unterschiede, aber es gibt zwei Haupttypen: die von den östlichen Arabern gebrauchten indischen Symbole und die sogenannten „gobâr"- (oder ghubār-) Ziffern, die von den westlichen Arabern in Spanien benutzt wurden. Die ersteren Symbole werden in der arabischen Welt noch heute verwendet, aber unser heutiges System scheint aus dem „gobār"-System abgeleitet zu sein. Es gibt eine (bereits erwähnte) Theorie von Woepcke, wonach die „gobār"-Ziffern in Spanien in Gebrauch waren, als die Araber dort eindrangen, und nach der sie durch die Neupythagoreer aus Alexandria schon frühzeitig (450 u. Z.) nach dem Westen gelangt sein sollen.[1])

4.4. Die Mathematik zur Zeit des Islams

Mesopotamien, das unter den griechischen und römischen Herrschern ein Vorposten des römischen Imperiums geworden war, gewann seine zentrale Lage bezüglich der Handelsstraßen unter den Sassaniden zurück, die als einheimische persische Könige in der Tradition von Cyrus und Xerxes in Persien regierten. Über diese Periode der persischen Geschichte, insbesondere über die Wissenschaft, ist wenig bekannt, aber die sagenhaft überlieferte Geschichte — wie sie sich in Tausendundeinenacht, Omar Khayyam, Firdawsī findet — bekräftigt die dürftigen historischen Urkunden darin, daß die Periode der Sassaniden ein Zeitalter großer kultureller Entfaltung war. Zwischen Konstantinopel, Alexandria, Indien und China gelegen, war das Persien der Sassaniden ein Land, in dem sich viele Kulturen trafen. Babylon war verschwunden, aber es wurde durch Seleukia-Ktesiphon abgelöst, das wiederum nach

[1]) Vgl. S. Gandz, *The Origin of the Ghubār Numerals*, Isis *16* (1931), 393—424. Es gibt auch eine Theorie von N. Bubnow, die annimmt, daß die gobâr-Formen aus den alten römisch-griechischen Symbolen abgeleitet worden sind, die auf dem Abakus verwendet wurden. Siehe auch die Fußnote in F. Cajori, *History of Mathematics* (New York 1938), S. 90, ebenso Smith-Karpinski (auf S. 89 angegeben), S. 71.

der arabischen Eroberung im Jahre 641 seinen Platz an Bagdad abtrat. Diese Eroberung ließ vieles im alte Persien unangetastet, obwohl Pehlevisch durch Arabisch als Amtssprache abgelöst wurde. Sogar der Islam wurde nur in abgewandelter Form (Shi-ism) angenommen; Christen, Juden und Anhänger Zarathustras trugen weiterhin zum kulturellen Leben des Kalifats von Bagdad bei.
Die Mathematik der Periode des Islams zeigt dieselbe Mischung verschiedener Einflüsse, wie sie uns schon in Alexandria und Indien[1]) entgegengetreten ist. Die Abbāsiden-Kalifen, besonders Al-Mansūr (754—775), Hārun-ar-Raschīd (786—809) und Al-Ma'mūn (813—833), förderten Astronomie und Mathematik. Al-Ma'mūn richtete sogar in Bagdad ein „Haus der Weisheit" mit einer Bücherei und einem Observatorium ein. Die islamischen Arbeiten in den exakten Wissenschaften, die mit Al-Fāzarīs Übersetzung der „Siddhāntās" begannen, erreichten ihren ersten Höhpunkt mit dem aus Khiva gebürtigen Muhammad ibn Musā al-Khwārizmī, dessen Schaffensperiode um 825 herum lag. Muhammad schrieb viele Bücher über Mathematik und Astronomie. Seine Arithmetik erläuterte das indische System der Zahlenschreibweise. Die arabische Originalschrift ist verloren, aber eine lateinische Übersetzung aus dem zwölften Jahrhundert ist vorhanden. Dieses Buch war eines der Hilfsmittel, durch welche Westeuropa mit dem dezimalen Stellenwertsystem bekannt wurde. Der Titel der Übersetzung „Algorithmi de numero Indorum" fügte unserer mathematischen Sprache den Ausdruck „Algorithmus", eine Latinisierung des Namens des Autors, hinzu. Etwas Ähnliches geschah mit Muhammads Algebra, die den Titel „Hisāb al-jabr wal-muqābala" (wörtlich „Wisenschaft der Reduktion und des gegenseitigen Aufhebens") hatte, was wahrscheinlich „Wissenschaft von den Gleichungen" bedeutete. Diese Algebra, von welcher der arabische Text erhalten ist, wurde im Westen gleichfalls durch lateinische Übersetzung bekannt, und das Wort „al-jabr" wurde synonym mit der ganzen Wissenschaft der „Algebra" verwendet, die in der Tat bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhunderts nichts anderes war als die Wissenschaft von den Gleichungen.
Diese „Algebra" enthält eine Diskussion linearer und quadratischer Gleichungen, aber ohne irgendeinen algebraischen Formalismus. Nicht einmal ein „rhetorischer" Algorithmus wie bei Diophant war vorhanden. Unter diesen Gleichungen finden sich die drei Typen:

$$x^2 + 10x = 39, \qquad x^2 + 21 = 10x, \qquad 3x + 4 = x^2,$$

die gesondert behandelt werden mußten, solange nur positive Koeffizienten zugelassen waren. Diese drei Typen kehren in späteren Texten häufig wieder — „so läuft die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ mehrere Jahrhunderte hindurch wie ein goldener Faden durch die Algebrabücher", schreibt Professor L. C. Karpinski. Viele Über-

[1]) Die Darlegungen zur „arabischen Mathematik" waren oft nur langweilige Wiederholungen von Informationen aus zweiter und dritter Hand, weil nur wenige Quellen in Übersetzungen vorhanden waren. Die Lage hat sich in den letzten Jahren durch die Arbeiten von P. Luckey, E. S. Kennedy (meistens Astronomie), A. P. Juschkewitsch, B. A. Rosenfeld u. a. wesentlich verbessert. Da viele Quellen nur in die russische Sprache übersetzt worden sind, ist das Buch von A. P. Juschkewitsch, *Mathematik im Mittelalter* (Leipzig 1964) sehr willkommen.

legungen sind geometrischer Natur. Muhammads astronomische und trigonometrische Tafeln (mit Sinus- und Tangenswerten) gehören auch zu den arabischen Werken, die später ins Lateinische übersetzt wurden. Seine Geometrie ist ein einfaches Verzeichnis von Messungsregeln; sie hat eine gewisse Bedeutung, weil sie unmittelbar auf einen jüdischen Text aus dem Jahre 150 u. Z. zurückgeführt werden kann. Sie zeigt einen deutlichen Mangel an Achtung vor der Euklidischen Tradition. Die Astronomie von Al-Khwārizmī war ein Auszug aus den „Siddhāntās" und kann daher auf dem Umweg über den Sanskrittext einen gewissen griechischen Einfluß aufweisen. Die Werke von Al-Khwārizmī als Ganzes scheinen mehr orientalischen als griechischen Einfluß[1]) zu zeigen, und dies dürfte auf die wohlerwogene Absicht des Autors zurückzuführen sein.
Al-Khwārizmis Gesamtwerk spielt eine wichtige Rolle in der Geschichte der Mathematik, denn es ist eine der Hauptquellen, durch die die indischen Zahlzeichen und die arabische Algebra nach Westeuropa kamen. Die Algebra offenbarte bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhunderts ihren orientalischen Ursprung durch den Mangel an axiomatischer Fundierung und unterschied sich in dieser Hinsicht deutlich von der Euklidischen Geometrie. Die heutige Schulalgebra und -geometrie haben diese Merkmale ihres verschiedenen Ursprungs noch immer bewahrt.

4.5. Pflege und Weiterentwicklung der griechischen Tradition durch arabische Gelehrte

Die griechische Tradition wurde durch eine Schule von arabischen Gelehrten[2]) weitergepflegt, die die griechischen Klassiker gewissenhaft ins Arabische übersetzten — Apollonius, Archimedes, Euklid, Ptolemäus u. a. Die allgemein gewordene Verwendung des Namens „Almagest" für die „Große Sammlung" von Ptolemäus zeigt den Einfluß der arabischen Übersetzungen auf den Westen. Durch diese Abschriften und Übersetzungen blieb so mancher griechische Klassiker erhalten, der sonst verlorengegangen wäre. Dabei machte sich eine natürliche Tendenz geltend, die rechnerische und praktische Seite der griechischen Mathematik auf Kosten ihrer theoretischen Seite zu betonen. Die arabische Astronomie war besonders an der Trigonometrie interessiert — das Wort „Sinus" ist eine lateinische Übersetzung der arabischen Schreibweise des Sanskritwortes jyā. Die Sinus entsprechen der halben Sehne des doppelten Bogens (Ptolemäus verwendete die ganze Sehne) und wurden als Strecken, nicht als Zahlen aufgefaßt. Ein großer Teil der

[1]) S. Gandz, *The Sources of Al-Khwārizmī's Algebra*, Osiris *1* (1936), 263—277. Auch: Osiris *5* (1930), 319—391 [über Erbschaftsprobleme].

[2]) Wenn wir von „arabischen Gelehrten" und „arabischer Wissenschaft" sprechen, so meinen wir nur, daß die Sprache, in der sie schrieben, die arabische Sprache war. Die meisten „arabischen" Gelehrten waren Perser, Tadshiken, Ägypter, Juden, Mohren usw. In derselben Weise könnten wir viele europäische Gelehrte von Boethius bis Gauß „lateinische Gelehrte" nennen, weil sie ihre Arbeiten in lateinischer Sprache abfaßten. Arabisch war die *lingua franca* der islamischen Welt, wie lateinisch die der römischen und griechisch die der östlichen christlichen Welt war.

Trigonometrie findet sich in den Werken von Al-Battānī (Albategnius, vor 858 bis 929), einem der großen arabischen Astronomen, der sowohl eine Tafel von Cotangenswerten für jeden Grad („umbra extensa") besaß als auch den Cosinussatz des sphärischen Dreiecks kannte.

Dieses Werk des Al-Battānī zeigt, daß die Araber nicht nur abschrieben, sondern durch ihre Beherrschung sowohl der griechischen als auch der orientalischen Methoden neue Resultate hinzufügten. Abū'l-Wafā'(940—997/98) leitete den Sinussatz der sphärischen Trigonometrie ab, berechnete Sinustabellen für Intervalle von 15′, deren Werte auf acht Dezimalstellen genau waren, führte die sec und cosec entsprechenden Strecken ein und führte vielerlei geometrische Konstruktionen aus, wobei er den Zirkel mit einer festen Öffnung verwendete. Er setzte auch das griechische Studium kubischer und biquadratischer Gleichungen fort. Al-Karkhī (Anfang des elften Jahrhunderts), der ein Buch über Algebra schrieb, wobei er sich an Diophant orientierte, besaß interessante Ergebnisse über irrationale Zahlen, wie z. B. die Formeln $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$. Er zeigte eine entschiedene Vorliebe für die Griechen; seine „Vernachlässigung der indischen Mathematik war so ausgeprägt, daß sie systematischen Charakter besessen haben muß".[1])

4.6. Höhepunkte des arabischen mathematischen Denkens

Wir brauchen die vielen politischen und ethnologischen Veränderungen in der Welt des Islams nicht zu verfolgen. Sie verursachten Zeiten des Aufschwungs und des Niedergangs in der Pflege von Astronomie und Mathematik, manche Zentren verschwanden, andere blühten eine gewisse Zeit hindurch; aber der allgemeine Charakter des islamischen Typs der Wissenschaft blieb dem Wesen nach unverändert. Hier sollen nur einige Höhepunkte erwähnt werden.

Um 1000 u. Z. erschienen in Nordpersien neue Herrscher, die Saljūq-(Selchuk-) Türken, deren Reich um das Bewässerungszentrum von Merv herum aufblühte. Hier lebte Omar Khayyam (etwa 1038/48 bis 1123/24), der im Westen als Autor des „Rubaiyat" (in der „Übersetzung" von Fitzgerald, 1859) bekannt wurde; er war Astronom und Philosoph:

„Ah, but my Computations, People say,
Have squared the Year to human Compass, eh?
If so, by striking from the Calendar
Unborn Tomorrow, and dead Yesterday" (LIX)
[Nachdichtung von Fitzgerald, 2. Aufl. 1868].

Hier scheint Omar auf seine Reform des alten persischen Kalenders anzuspielen, die einen Fehler von einem Tag im Verlauf von 5000 Jahren (1540 oder 3770 Jahren nach abweichenden Interpretationen) ergab, während unser gegenwärtiger Gregorianischer Kalender einen Fehler von einem Tag innerhalb von 3330 Jahren aufweist. Seine Reform wurde 1079 eingeführt, aber später durch den muslimischen Mondkalender ersetzt. Omar schrieb eine „Algebra", die einen beträchtlichen Fort-

[1]) G. Sarton, *Introduction to the History of Science* I, S. 719.

schritt bedeutete, denn sie enthielt eine systematische Untersuchung der kubischen Gleichungen. Indem er eine gelegentlich von den Griechen benutzte Methode anwendete, bestimmte er die Wurzeln dieser Gleichungen durch den Schnitt zweier Kegelschnitte. Er bestimmte keine zahlenmäßigen Lösungen und unterschied — ebenfalls im Stil der Griechen — zwischen „geometrischen" und „arithmetischen" Lösungen, wobei letztere nur dann als existent angesehen wurden, wenn die Wurzeln positive rationale Zahlen ergaben. Dieses Verfahren war also gänzlich verschieden von dem der Bologneser Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts, die rein algebraische Methoden verwendeten. In einem anderen Buch, das sich mit den Schwierigkeiten bei Euklid befaßte, ersetzte Omar das Parallelenaxiom durch eine Anzahl anderer Annahmen. Hier fand er die Figuren, die heute mit der „Hypothese des stumpfen, spitzen und rechten Winkels" zusammenhängen, wie sie in der nichteuklidischen Geometrie verwendet werden. Er ersetzte auch die Euklidische Theorie der Proportionen durch eine zahlenmäßige Theorie, in der er sich mit Irrationalitäten und dem allgemeinen Begriff der reellen Zahl beschäftigte.

Nach der im Jahre 1256 erfolgten Plünderung Bagdads durch die Mongolen entstand in der Nähe ein neues Zentrum der Gelehrsamkeit im Observatorium von Maragda, das von dem mongolischen Herrscher Hulagu für Nasir al-din (Nasir ed-din, 1201—1274) erbaut wurde. Hier entstand wieder ein Institut, in dem die gesamte Wissenschaft des Orients zusammengetragen und mit der Griechenlands verglichen werden konnte. Nasir trennte die Trigonometrie als eine selbständige Wissenschaft von der Astronomie ab; seine Versuche, das Euklidische Parallelenaxiom zu „beweisen", wobei er Gedankengängen von Omar Khayyam folgte, zeigen, daß er die theoretische Methode der Griechen schätzte. Nasirs Einfluß war später im Europa der Renaissance weithin spürbar; noch 1651 und 1663 benutzte John Wallis Nasirs Werk über das Euklidische Postulat.[1])

Nasir setzte Omars Tradition auch in seiner Theorie der Proportionen und der neuen numerischen Annäherung irrationaler Zahlen fort.

Ein anderer persischer Mathematiker, Al-Kaschi (erste Hälfte des fünfzehnten Jahrhunderts), zeigte eine große Gewandheit in der Durchführung von Rechnungen, die mit derjenigen vergleichbar ist, die später von den Europäern am Ende des sechzehnten Jahrhunderts erreicht wurde. Er löste kubische Gleichungen durch Iteration und trigonometrische Verfahren und kannte die jetzt als Hornersches Schema bezeichnete Methode zur Lösung allgemeiner algebraischer Gleichungen höheren Grades, die das Ausziehen von Wurzeln höherer Ordnung aus gewöhnlichen Zahlen verallgemeinert (wahrscheinlich unter chinesischem Einfluß). In seinem Werk findet sich die binomische Formel für beliebige positive ganzzahlige Exponenten. Neben Sexagesimalbrüchen verwendet er Dezimalbrüche mit Komma (z.B. 25,07 mal 14,3 ist 358,501) und kennt π auf 16 gültige Dezimalen.

Eine bedeutende Persönlichkeit in Ägypten war Ibn Al-Haitham (Alhazen, etwa 965 bis 1039), der größte muslimische Physiker, dessen „Optik" einen großen Einfluß auf den Westen ausübte. Er löste das „Problem des Alhazen", in welchem ge-

---

[1]) Vgl. B. A. Rosenfeld, *The theory of parallel lines in the Medieval East*, Actes du XI[e] Congrès intern. d'histoire des sciences 1969, III (Warschau 1968), S. 175—178.

fordert wird, von zwei Punkten in der Ebene eines Kreises aus Geraden zu ziehen, die sich in einem Punkt des Kreisumfangs treffen und mit der Normalen in diesem Punkt gleiche Winkel bilden. Dieses Problem führt auf eine biquadratische Gleichung und wurde in griechischer Art durch den Schnitt einer Hyperbel mit einem Kreis gelöst. Alhazen verwendete auch die Exhaustionsmethode, um die Volumina von Körpern zu berechnen, die durch Rotation einer Parabel um irgendeinen Durchmesser oder eine Ordinate entstehen. Hundert Jahre vor Alhazen lebte in Ägypten der Algebraiker Abū Kāmil, der das Werk von Al-Khwārizmī fortsetzte und erweiterte. Er beeinflußte nicht nur Al-Karkhī, sondern auch Leonardo von Pisa.

Ein anderes Zentrum der Gelehrsamkeit existierte in Spanien. Einer der bedeutendsten Astronomen in Cordoba war Al-Zarqāli (Arzachel, etwa 1029 bis etwa 1087), der beste Beobachter seiner Zeit und Herausgeber der sogenannten Toledoer Planetentafeln. Die trigonometrischen Tafeln dieses Werks, das ins Lateinische übersetzt wurde, übten einen gewissen Einfluß auf die Entwicklung der Trigonometrie in der Renaissance aus. Sie fanden ihre Fortsetzung in den Alfonsinischen Tafeln (nach Alfons dem Weisen, zweite Hälfte des dreizehnten Jahrhunderts), welche großes Ansehen genossen.

Obwohl fast die ganze chinesische und ein großer Teil der islamischen Mathematik in der algorithmisch-algebraischen Tradition des Orients geschaffen wurde, stellte sie einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den antiken Methoden dar. Westeuropa gewann erst gegen Ende des sechzehnten Jahrhunderts die gleiche Höhe.

4.7. Die Mathematik in China bis zum Ende der Sung-Dynastie

Informationen über die Mathematik der Japaner beginnen vom zwölften Jahrhundert an zugänglich zu werden. Vieles ging auf chinesischen Einfluß zurück. Neue Formen werden im siebzehnten Jahrhundert entwickelt, zum Teil auf Grund des Kontakts mit Europa. Von dieser Periode an begannen neue und höhere Formen der Mathematik im Westen zu blühen.[1])

Zur chinesischen Mathematik bleibt festzustellen, daß sie nicht als eine isolierte Erscheinung etwa wie die Mathematik der Maya betrachtet werden kann. Es gab stets, wenigstens seit der Han-Dynastie (die etwa zur gleichen Zeit wie das Römische Imperium bestand), bedeutende kommerzielle und kulturelle Beziehungen zu anderen Teilen Asiens und sogar zu Europa. Indische und später arabische Wissenschaft beeinflußten die Wissenschaft Chinas, die ihrerseits auf andere Länder zurückwirkte. Wir denken z.B. an das dezimale Positionssystem und die negativen Zahlen, die sehr wohl ihren Weg von China nach Indien gefunden haben können. Der indische Einfluß auf China mag durch das Eindringen des Buddhismus nach China bedingt sein (1. Jahrhundert u. Z.). Dagegen macht sich ein griechischer Einfluß trotz einiger paralleler Entwicklungen wenig oder gar nicht bemerkbar.

---

[1]) Westliche Mathematik und Astronomie wurden in China von Pater Matteo Ricci eingeführt, der von 1583 bis zu seinem Tode 1610 in Peking blieb. Siehe H. Bosmans. *L'œuve scientifique de Mathieu Ricci S. J.*, Revue des Questions Scient. (Jan. 1921), 16 Seiten.

Deshalb sind wahrscheinlich die Untersuchungen über das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser des Kreises, die für die Zeit nach der Han-Periode typisch sind, unabhängig von Archimedes durchgeführt worden. Liu Hui, der Verfasser eines überlieferten Kommentars zu den „Neun Büchern“ (263 u. Z.), fand mit Hilfe von einbeschriebenen und umbeschriebenen regulären Polygonen, daß $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$ ist, und zwei Jahrhunderte später gaben Tsu Chhung-Chih (430—501) und sein Sohn nicht nur einen Wert von π mit sieben Dezimalen, sondern auch die Werte $\pi = \frac{22}{7}$ und $\pi = \frac{355}{113}$ an.[1])

Unter der Thang-Dynastie (618—907) wurde eine Sammlung der wichtigsten mathematischen Texte zu Staatsprüfungen von Beamten benutzt. In dieser Periode wurde der Buchdruck erfunden, aber die ersten gedruckten mathematischen Werke, von denen wir Kenntnis haben, datieren von 1084 und später. Im Jahre 1115 erschien eine gedruckte Ausgabe der „Neun Bücher“.

Schon in einem von Wang Hsiao Thung um 625 verfaßten Buch finden wir eine kompliziertere kubische Gleichung als die Gleichung $x^3 = a$ aus den „Neun Büchern“. Aber die altchinesische Mathematik hatte ihre Blüteperiode erst während der Sung-Dynastie (960—1279) und der ersten Zeit der Mongolenherrschaft des Jüan (des „Großen Chan“ aus Marco Polos Reisebericht). Von den führenden Mathematikern erwähnen wir Chhin Chiu-Shao, der die zur damaligen Zeit schon alte Theorie der unbestimmten Gleichungen entwickelte (sein Buch datiert von 1247). Eins seiner Beispiele kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$x \equiv 32 \pmod{83} \equiv 70 \pmod{110} \equiv 30 \pmod{135}.$$

Chhin beschäftigte sich auch mit der numerischen Lösung von Gleichungen höheren Grades, z. B.

$$-x^4 + 763200\,x^2 - 40642560000 = 0.$$

Solche Gleichungen löste er durch Verallgemeinerung der Methode der sukzessiven Approximation, die schon in den „Neun Büchern“ zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln verwendet wurde. In dieser Methode erkennen wir das in unseren Lehrbüchern nach W. G. Horner benannte Verfahren wieder, der es im Jahre 1819 veröffentlichte, anscheinend ohne zu wissen, daß er auf eine für eintausend Jahre chinesischer Mathematik typische Methode gestoßen war.

Ein anderer Mathematiker der Sung-Periode ist Yang Hui. Er arbeitete mit Dezimalbrüchen und schrieb diese in einer Form, die uns an unsere heutige Schreibweise erinnert (sein Buch datiert von 1261). Eins seiner Probleme führt auf die Gleichung

$$24{,}68 \times 36{,}56 = 902{,}3008.$$

---

[1]) Der letzte Wert von π kann aus den Werten von Ptolemäus und Archimedes gewonnen werden: $\frac{355}{113} = \frac{377 - 22}{120 - 7}$. Dieser Wert, der einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von π darstellt, wird manchmal „Wert des Metius“ genannt, nach dem Bürgermeister von Alkmaar, Adriaen Anthonisz (1584; wie Stevin Kriegsingenieur), dessen Söhne sich den Namen Metius zulegten.

Yang Hui macht uns auch mit der ältesten überlieferten Darstellung des Pascalschen Dreiecks bekannt, die wir in einem im Jahre 1303 von Chu Chiu-Shao geschriebenen Buch wiederfinden.[1]) Chu, der für den bedeutendsten dieser Mathematiker gehalten wird, gibt in seinen Büchern die vollendetste Darstellung der chinesischen arithmetisch-algebraischen Berechnungsmethode. Erüberträgt sogar die „Matrix"-Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen auf Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten und verwendet dazu Methoden, die an Sylvester erinnern.
In der Zeit nach der Sung-Dynastie blieb die mathematische Aktivität zwar bestehen, gelangte aber nicht mehr zu neuer Blüte. Allgemein können wir sagen, daß die chinesischen Mathematiker in ihrer Fähigkeit in bezug auf komplizierte arithmetische und algebraische Überlegungen mit den indischen Gelehrten und denen des arabischen Sprachkreises nicht nur vergleichbar sind, sondern diesen manches vorwegnehmen. Zum Beispiel finden sich die Methode von Horner und die Dezimalbrüche erst später in den Büchern von Al-Kaschi aus Samarkand (um 1420; vgl. auch S. 85).[2])

Literatur

Siehe auch S. 46–48.

H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig 1900, Nachträge 1902).

Siehe H. P. J. Renaud, Isis *18* (1932), 166–183.

D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam* (New York 1931), S. 126. Siehe auch A. R. Amir-Moe'z, Scripta mathematica *26* (1963), 323–337, Istor.-Mat. Issled. *15* (1963), 445–472.

F. Woepcke, *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî* (Paris 1851).

A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig 1964).

Die beste Einführung in die Mathematik der Chinesen, Araber und Inder. Das Buch enthält auch einen Abschnitt über die Mathematik der Europäer im Mittelalter.

Viele arabische Quellen wurden in den letzten Jahren in der russischen Zeitschrift Istoriko-Matematitscheskie Issledowanija publiziert und kommentiert. In Band *15* (1963), 69–72, findet man eine Liste von 52 Arbeiten über die Mathematik des Mittelalters.

A. P. Juschkewitsch — B. A. Rosenfeld, *Kommentar zu den mathematischen Abhandlungen von D. G. Kaschi* (russisch), Istor.-Mat. Issled. *7* (1954), 380–449, bzw. Dshemschid Gijasseddin al-Kaschi (photographische Reproduktion des arabischen Textes mit dem erwähnten Kommentar [russisch]), Moskau 1956.

---

[1]) Vgl. L. Y. Lam, *On the existing fragments of Yang Hui's Hsiang Chieh Suan Fa*, Arch. History Exact Sci. *6* (1969), 82–88.

[2]) Siehe A. P. Juschkewitsch, *Über die Errungenschaften der chinesischen Gelehrten auf dem Gebiet der Mathematik* (russisch), Istor.-Mat. Issled *8* (1955), 539–572, und das bereits auf S. 47 zitierte Buch von J. Needham, insbesondere Band III (1959).

D. G. Al-Kaschi, *Der Schlüssel zur Arithmetik. Verhandlung über den Kreis* (russisch, Moskau 1956). Übersetzt von B. A. Rosenfeld.

B. A. Rosenfeld — A. P. Juschkewitsch, *Die Verhandlung von Nasīr al-Din at Tūsi über die Parallelentheorie* (russisch), Istor.-Mat. Issled. *13* (1960), 475—524.

Dieselben, *Die Mathematik des Nahen und Mittleren Ostens im Mittelalter* (russisch), Sowj. Wostokowedenie *3* (1958), 101—108; *6* (1958), 66—76.

Dieselben, *Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter* [deutsch], Beiträge zur Naturwissenschaft (Berlin 1960), S. 62—160.

Vgl. P. Luckey, Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Math. 1950, Nr. 6, 95 S. (1953).

Al-Bīrūnī, *Die trigonometrischen Lehren*, herausgegeben von J. Ruska und H. Wieleitner (Hannover 1927).

Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern, herausgegeben von K. Vogel (Aalen 1963).

P. Luckey, *Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik*, Math. Ann. *120* (1947—1949), 217—274.

F. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa* (London 1831).

Siehe S. Gandz, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik *2* (1932), 61—85.

W. E. Clark, *The Āryabhatya of Āryabhata* (Chicago 1930).

B. Datta, *The Science of the Sulba, a Study in Early Hindu Geometry* (Calcutta 1932).

D. E. Smith — L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston 1911).

L. C. Karpinski, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwārizmī* (New York 1915).

S. Gandz, *Studies in Hebrew astronomy and mathematics. Selected with introduction by S. Sternberg*, New York 1970.

T. Hayashi, *A Brief History of the Japanese Mathematics*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) *6* (1904/1905), 296—361.

D. E. Smith, *Unsettled Questions Concerning the Mathematics of China*, Scient. Monthly *33* (1931), 244—250.

H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta und Bhāscara* (London 1817; bearbeitet von H. C. Banerji, 2. Aufl. Calcutta 1927).

C. N. Srinivasiengar, *The history of ancient Indian mathematics* (Calcutta 1967).

Kūshyār ibn Labbān, *Principles of Hindu Reckoning.* Übersetzt und mit einer Einführung und Bemerkungen von M. Levey und M. Petruck (Univ. of Wisconsin Press 1965).

Ang Tian Se, *A Study of the Mathematical Manual of Chang Ch'iu-Chien*, Thesis, Univ. of Malaya 1969.

A. S. Saidan, *The arithmetic of Abū l-Wafā*, Isis *65* (1974), 367—375.

Siehe auch Historia mathematica *1* (1974), 108—112.

U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth century* (Cambridge, Mass., 1973).

S. K. Sirazhdinov, *From the History of the exact Sciences in the Medieval Near and Middle East* (Taschkent 1972).

Eine Sammlung von Aufsätzen, in russischer Sprache.

P. C. Sengupta, *Infinitesimal calculus in Indian mathematics*, Journal Dept. of Letters, Calcutta Univ., *22* (1932), 1—7.

R. C. Gupta, *Sine of eighteen degrees in India up to the eighteenth century*, Indian Journ. Hist. Science *11* (1976), 1—10.

D. M. Bose u. a., *A concise history of science in India* (New Delhi 1971).

Siehe A. Volodorsky, Historia mathematica *1* (1974), 208—212.

Das *Dictionary of Scientific Biography* enthält in seinen 14 Bänden (1970—76) sehr dokumentierte Berichte über die Arbeiten arabischer, indischer und chinesischer Mathematiker.

B. D. Gillon, *Introduction, translation, and discussion of Chao Chün-ch'ing's notes to the diagrams of short legs and long legs and of squares and circles*, Historia mathematica *4* (1977), 253—293.

5. Die Anfänge in Westeuropa

5.1. Westeuropa nach dem Fall des westlichen Imperiums 476. Die Verlagerung der kulturellen Zentren nach Norden

Der fortgeschrittenste Teil des Römischen Imperiums sowohl in ökonomischer als auch in kultureller Hinsicht ist stets der Osten gewesen. Der westliche Teil hat sich niemals auf eine Bewässerungswirtschaft gestützt; seine Landwirtschaft wurde extensiv betrieben, wodurch das Studium der Astronomie keine Anregung erfuhr. Tatsächlich kam der Westen auf seine Art mit einem Minimum an Astronomie, etwas praktischer Arithmetik und einiger Meßkunde für Handel und Feldmessung sehr gut zurecht; aber der Anstoß, diese Wissenschaften weiterzuentwickeln, kam aus dem Osten. Als sich Osten und Westen politisch voneinander getrennt hatten, hörte dieser fördernde Einfluß fast ganz auf. Die statische Kultur des westlichen Römischen Imperiums dauerte mit wenigen Unterbrechungen oder Veränderungen viele Jahrhunderte hindurch an; die durch das Mittelmeer bedingte Einheit der antiken Kultur blieb ebenfalls unverändert und wurde nicht einmal durch die Eroberungen der Barbaren besonders stark in Mitleidenschaft gezogen. In allen germanischen Königreichen, vielleicht mit Ausnahme desjenigen von Britannien, blieben die wirtschaftlichen Bedingungen, die gesellschaftlichen Einrichtungen und das geistige Leben im Grunde die gleichen, wie sie im niedergehenden Römischen Imperium gewesen waren. Die Basis des Wirtschaftslebens war die Landwirtschaft, in der die Sklaven nach und nach durch freie Bauern und Pächter ersetzt wurden; außerdem gab es blühende Städte und einen Großhandel mit einer Geldwirtschaft. Die zentrale Autorität der griechisch-römischen Welt nach dem Fall des westlichen Imperiums im Jahre 476 teilte sich der Kaiser in Konstantinopel mit den Päpsten in Rom. Die katholische Kirche des Westens setzte, so gut sie konnte, durch ihre Institutionen und die Sprache innerhalb der germanischen Königreiche die kulturelle Tradition des Römischen Imperiums fort. Klöster und gebildete Laien erhielten etwas von der griechisch-römischen Kultur lebendig.

Einer dieser Laien, der Diplomat und Philosoph Anicius Manilius Severinus Boethius, schrieb mathematische Bücher, die in der westlichen Welt mehr als tausend Jahre hindurch als maßgeblich angesehen wurden. Sie spiegeln die kulturellen Bedingungen wider, denn sie sind arm an wissenschaftlichem Gehalt, und ihre lange andauernde Wertschätzung dürfte durch die Vorstellung beeinflußt worden sein, daß der Autor im Jahre 524 als Märtyrer des katholischen Glaubens gestorben war. Seine „Instituto arithmetica“, eine oberflächliche Übersetzung des Nicomachus, bewahrte tatsächlich etwas pythagoreische Zahlentheorie auf, die als Teil des alten „Triviums“ (Grammatik, Rhetorik, Dialektik) und „Quadriviums“ (Arithmetik,

Geometrie, Astronomie und Musik) (untere bzw. obere Stufe der freien Künste) in den Rahmen der mittelalterlichen Unterweisung aufgenommen wurde.
Es ist schwierig, die genaue Zeit anzugeben, in der im Westen die Wirtschaftsform des alten Römischen Imperiums aufhörte, um der neuen Feudalordnung Platz zu machen. Einiges Licht wird auf diese Frage durch die freilich nicht allgemein anerkannte Hypothese von H. Pirenne[1]) geworfen, nach welcher das Ende der alten westlichen Welt mit der Expansion des Islams zusammenfällt. Die Araber beraubten das Byzantinische Reich aller seiner Provinzen am Ost- und Südufer des Mittelmeers und machten das östliche Mittelmeer zu einem muslimischen Binnenmeer. Sie erschwerten die Handelsbeziehungen zwischen dem Nahen Osten und dem christlichen Westen mehrere Jahrhunderte hindurch außerordentlich. Der geistige Verkehr zwischen der arabischen Welt und dem nördlichen Teil des früheren Römischen Imperiums wurde, obwohl er niemals völlig versiegte, jahrhundertelang lang behindert.
Dann verschwand in der Folgezeit im fränkischen Gallien und anderen früheren Teilen des Römischen Imperiums die großräumige Wirtschaft; Dekadenz bereitete sich in den Städten aus; die Zolleinnahmen sanken zur Bedeutungslosigkeit herab. Die Geldwirtschaft wurde durch Tauschhandel und örtliche Märkte abgelöst. Westeuropa wurde in den Zustand der Halbbarbarei zurückgeworfen. Die Landaristokratie gewann durch den Niedergang des Handels an Bedeutung; die Landbesitzer in Nordfranken wurden unter der Führung der Karolinger die herrschende Gewalt im Lande der Franken. Das wirtschaftliche und kulturelle Zentrum verlagerte sich nach Norden, nach Nordfrankreich und Britannien Die Trennung des Ostens vom Westen beschränkte die tatsächliche Autorität des Papstes in einem solchen Umfange, daß sich das Papsttum mit den Karolingern verbündete, ein Vorgang, der durch die Krönung Karls des Großen zum Kaiser des Heiligen Römischen Reiches im Jahre 800 seinen symbolischen Ausdruck fand. Die westliche Welt wurde feudal und kirchlich, ihre Orientierung nach Norden gerichtet und germanisch.

5.2. Mathematik im Feudalismus

Während der ersten Jahrhunderte des westlichen Feudalismus findet man selbst in den Klöstern nur eine geringe Wertschätzung der Mathematik. In der wieder primitiv gewordenen Ackerbaugesellschaft dieser Zeit waren die mathematisches Denken anregenden Faktoren, sogar für unmittelbar praktischen Bedarf, so gut wie nicht vorhanden, und die klösterliche Mathematik umfaßte nicht mehr als etwas kirchliche Arithmetik, die hauptsächlich zur Berechnung des Datums des Osterfestes (des sogenannten „Computus“) gebraucht wurde. Boethius war die höchste Quelle der Autorität. Eine gewisse Bedeutung unter diesen kirchlichen Mathematikern besaß der aus Britannien stammende Alcuin, der am Hofe Karls des Großen lebte, dessen lateinisch geschriebenes Werk „Aufgaben zur Verstandsschärfung“ (s. S. 80) eine Sammlung enthielt, die die Verfasser von Lehrbüchern mehrere Jahr-

[1]) H. Pirenne, *Mahomet et Charlemagne* (Paris 1937). Vgl. A. F. Havighurst, *The Pirenne thesis* (Boston 1958).

hunderte lang beeinflußte. Viele dieser Aufgaben gehen auf den alten Orient zurück. Zum Beispiel:

„Ein Hund verfolgt ein Kaninchen, das anfänglich einen Vorsprung von 150 Fuß hat. Er springt jedesmal 9 Fuß weit, während das Kaninchen nur Sprünge von 7 Fuß macht. Nach wieviel Sprüngen hat der Hund das Kaninchen eingeholt?"
„Ein Wolf, eine Ziege und eine Ladung Kohl müssen in einem Boot über einen Fluß gebracht werden, das außer dem Fährmann nur einen der anderen Passagiere tragen kann. Wie muß er verfahren, um sie alle hinüberzubringen, ohne daß die Ziege den Kohl oder der Wolf die Ziege frißt?"

Ein anderer kirchlicher Mathematiker war Gerbert, ein französischer Mönch, der 999 unter dem Namen Sylvester II. Papst wurde. Er schrieb einige Abhandlungen, die unter dem Einfluß von Boethius standen; aber seine Hauptbedeutung als Mathematiker beruht auf der Tatsache, daß in den Klosterschulen das Interesse für die Mathematik geweckt wurde. Gerbert war in seiner Jugendzeit in Katalonien im Hause eines Bischofs. Es ist aber zweifelhaft, ob er dort die Wissenschaft der arabischen Welt studiert hat.

5.3. Entwicklung des Frühkapitalismus. Mittlerrolle der Araber beim Zugang zu griechischen mathematischen Originalwerken

Es bestehen wesentliche Unterschiede in der Entwicklung des westlichen, des frühen griechischen und des orientalischen Feudalismus. Der extensive Charakter der westlichen Landwirtschaft machte ein großangelegtes System von bürokratischen Verwaltungsbeamten überflüssig, so daß es nicht als Grundlage für einen möglichen Despotismus im orientalischen Sinne dienen konnte. Im Westen bestand keine Möglichkeit, große Massen von Sklaven zusammenzubringen. Als in Westeuropa die Dörfer zu Städten anwuchsen, entwickelten sich diese Städte zu selbständigen Verwaltungseinheiten, deren Bürger nicht in der Lage waren, ein auf der Sklaverei beruhendes Leben der Muße zu führen. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, daß sich die Entwicklung des griechischen Stadtstaates und der westlichen Stadt, die in den Anfangsstadien viele gemeinsame Züge besaßen, in den späteren Perioden stark unterschieden. Die mittelalterliche Stadtbevölkerung konnte sich zur Verbesserung ihres Lebensstandards nur auf ihre eigene Erfindungsgabe verlassen. Aus einem schweren Kampf gegen die feudalen Großgrundbesitzer — und zudem mit vielem Hader im Innern — ging sie im zwölften, dreizehnten und vierzehnten Jahrhundert siegreich hervor. Dieser Triumph beruhte nicht nur auf dem schnellen Anwachsen des Handels und der Geldwirtschaft, sondern auch auf einer allmählichen Verbesserung der Technik. Die feudalen Fürsten unterstützten oft die Städte in ihrem Kampf gegen die kleineren Grundbesitzer, um ihre Herrschaft mit der Zeit auch auf die Städte auszudehnen. Das führte schließlich zur Herausbildung der ersten Nationalstaaten in Europa.
Die Städte begannen, Handelsbeziehungen mit dem Orient aufzunehmen, der noch immer das Zentrum der Kultur war. Manchmal wurden diese Beziehungen auf friedlichem Wege hergestellt, manchmal aber auch durch Gewaltanwendung wie in den

zahlreichen Kreuzzügen. Zuerst waren es die italienischen Städte, die solche Handelsbeziehungen aufnahmen, ihnen folgten die Städte Frankreichs und Mitteleuropas. Gelehrte folgten dem Kaufmann und dem Soldaten, gingen ihm manchmal auch voran. Spanien und Sizilien waren die nächstgelegenen Berührungspunkte zwischen Osten und Westen, dort wurden die westlichen Kaufleute und Gelehrten mit der Kultur des Islams bekannt. Als im Jahre 1085 die Christen Toledo von den Mauren zurückeroberten, strömten westliche Forscher in diese Stadt, um die Wissenschaft der Araber kennenzulernen. Sie bedienten sich oft jüdischer Dolmetscher zur Gesprächsführung und für Übersetzungen, und so findet man im Spanien des zwölften Jahrhunderts Plato von Tivoli, Gherardo von Cremona, Adelard von Bath und Robert von Chester bei der Übersetzung mathematischer Manuskripte aus dem Arabischen ins Lateinische. So wurde Europa durch die Araber mit den griechischen Klassikern bekannt; und inzwischen war Westeuropa weit genug entwickelt, um diese Kenntnis richtig einzuschätzen.

5.4. Die Entstehung der norditalienischen Handelsstädte. Fibonaccis „Liber Abaci"

Wie bereits erwähnt wurde, entstanden die ersten mächtigen Handelsstädte in Italien, wo während des zwölften und dreizehnten Jahrhunderts Genua, Pisa, Venedig, Mailand und Florenz einen blühenden Handel zwischen der arabischen Welt und dem Norden betrieben. Italienische Kaufleute besuchten den Orient und studierten seine Kultur; Marco Polos Reisen zeigen die Unerschrockenheit dieser Abenteurer. Gleich den fast zweitausend Jahre früher lebenden ionischen Kaufleuten versuchten sie, Wissenschaft und Kunst der älteren Kultur nicht nur deshalb zu studieren, um sie zu reproduzieren, sondern auch dazu, um sie in ihrer merkantilen Zivilisation nutzbar zu machen, die schon im zwölften und dreizehnten Jahrhundert das Wachstum des Bankwesens und die Anfänge einer kapitalistischen Form der Industrie hervorbrachte. Der erste westliche Kaufmann, dessen mathematische Studien eine gewisse Reife zeigen, war Leonardo von Pisa.

Leonardo, auch Fibonacci („Sohn des Bonaccio") genannt, reiste als Kaufmann in den Orient. Nach seiner Rückkehr schrieb er das „Liber Abaci" (1202), das arithmetische und algebraische Unterweisungen enthält, die er auf seinen Reisen gesammelt hatte. In der „Practica Geometriae" (1220) beschrieb Leonardo in ähnlicher Weise alles, was er in Geometrie und Trigonometrie in Erfahrung gebracht hatte. Er dürfte zudem auch ein selbständiger Forscher gewesen sein, denn seine Bücher enthalten viele Beispiele, die keine genauen Vorlagen in der arabischen Literatur zu haben scheinen.[1]) Er zitiert jedoch besonders Al-Khwārizmī, z.B. in der Diskussion der Gleichung $x^2 + 10x = 39$. Das Problem, das zur Folge der „Fibonaccischen Zahlen" 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... führt, von denen jede die

[1]) L. C. Karpinski, Amer. Math. Monthly *21* (1914), 37—48, der das Pariser Manuskript von Abū Kāmils Algebra durchforschte, gibt an, daß Leonardo eine ganze Reihe von Problemen von Abū Kāmil übernommen hat.

Summe der beiden vorangehenden ist, scheint neu zu sein, ebenso wie sein bemerkenswert durchdachter Beweis, daß die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ nicht mit Hilfe von Euklidischen Irrationalitäten der Form $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ausgedrückt (und daher nicht unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal konstruiert) werden können. Leonardo führte den Beweis, indem er jeden der fünfzehn Fälle bei Euklid nachprüfte, und berechnete danach die positive Wurzel dieser Gleichung näherungsweise auf sechs Sexagesimalstellen.
Die Folge der Fibonaccischen Zahlen entstand aus folgender Aufgabe:

Wieviel Kaninchenpaare können in einem Jahr von einem einzigen Paar erzeugt werden, wenn a) jedes Paar in jedem Monat ein neues Paar erzeugt, das vom zweiten Monat an selbst wieder neue Paare erzeugt, b) keine Todesfälle vorkommen?

Das „Liber Abaci" ist eines der Hilfsmittel, durch die die indisch-arabische Zahlenschreibweise nach Westeuropa eingeführt wurde. Ihre gelegentliche Anwendung reicht Jahrhunderte vor Leonardo zurück, wenn sie von Kaufleuten, Diplomaten, Gelehrten, Pilgern und Soldaten, die aus Spanien oder dem Vorderen Orient kamen, mitgebracht wurde. Das älteste europäische Manuskript, das diese Zahlen enthält, ist der „Codex Vigilanus", der 976 in Spanien geschrieben wurde. Trotzdem erfolgte die Einführung der zehn Symbole nach Westeuropa nur langsam; das älteste französische Manuskript, worin sie vorkommen, stammt aus dem Jahre 1275. Die griechische Zahlenschreibweise blieb längs der Adria viele Jahrhunderte hindurch in Gebrauch. Rechnungen wurden oft auf dem alten Abakus ausgeführt, einem Brett mit Rechenplättchen oder Steinchen (oft auch einfach aus im Sand gezogenen Linien bestehend), das im Prinzip den Rechenbrettern ähnlich ist, die noch heute in der Sowjetunion, in China und Japan sowie von Kindern benutzt werden. Römische Zahlzeichen wurden dazu verwendet, um das Ergebnis einer Rechnung auf dem Abakus festzuhalten. Das ganze Mittelalter hindurch und sogar noch später findet man römische Zahlzeichen in den Hauptbüchern der Kaufleute, woraus ersichtlich ist, daß in den Büros der Abakus verwendet wurde. Die Einführung der indisch-arabischen Ziffern stieß in der Öffentlichkeit auf Widerstand, weil die Anwendung dieser Symbole die Kaufmannsbücher schwierig lesbar werden ließ. In den Statuten der „Arte del Cambio" aus dem Jahre 1299 wurde den Geldwechslern von Florenz verboten, arabische Zahlen zu verwenden, und sie wurden verpflichtet, römische Zahlen zu benutzen. Irgendwann im Laufe des vierzehnten Jahrhunderts begannen italienische Kaufleute, arabische Ziffern in ihren Kontobüchern zu verwenden.[1])

[1]) In den Kontobüchern der Medici (aus dem Jahre 1406 stammend) in der Sammlung Selfridge, die in der Harvard Graduate School of Business Administration (Harvard-Handels-Hochschule) aufbewahrt wird, erscheinen indisch-arabische Ziffern häufig im berichtenden oder beschreibenden Text. Von 1439 an ersetzen sie die römischen Ziffern in der Geld- oder Effektivspalte in den Eingangsbüchern, Journalen, Kladden usw. durch arabische, aber erst 1482 wurden die römischen Zahlen in der Geldkolonne der Geschäftshauptbücher aller Medici-Kaufleute (bis auf eine Ausnahme) abgeschafft. Ab 1494 werden nur indisch-arabische Ziffern in allen Kontobüchern der Medici verwendet. [Aus einem Brief von Dr. Florence Edler de Roover. Siehe auch F. Edler, *Glossary of Medieval Terms of Business* (Cambridge, Mass. 1934), S. 389.]

5.5. Scholastik und mathematisches Denken

Mit der Ausdehnung des Handels breitete sich das Interesse an Mathematik langsam in den Städten des Nordens aus. Zunächst war es hauptsächlich ein praktisches Interesse, und mehrere Jahrhunderte hindurch wurden Arithmetik und Algebra außerhalb der Universitäten von handwerksmäßigen Rechenmeistern gelehrt, die gewöhnlich die Klassiker nicht kannten und die auch Buchführung und Navigation lehrten. Lange Zeit hindurch bewahrte diese Art Mathematik deutliche Spuren ihres arabischen Ursprungs, was durch Worte wie „Algebra" und „Algorithmus" bezeugt wird.

Die Mathematik war während des Mittelalters nicht völlig untergegangen; sie wurde aber nicht bei den Praktikern, sondern bei den scholastischen Philosophen kultiviert. Hier führte das Studium von Plato und Aristoteles im Verein mit Grübeleien über die Natur der Gottheit zu spitzfindigen Spekulationen über die Natur der Bewegung, des Kontinuums und der Unendlichkeit. Origenes war Aristoteles darin gefolgt, daß er die Existenz des aktual Unendlichen leugnete, aber Augustin hatte in seinem Werk „De civitate Dei" die vollständige Folge der ganzen Zahlen als eine aktuale Unendlichkeit angesehen. Seine Worte waren so wohl abgewogen, daß Georg Cantor bemerkt hat, das Transfinite könne nicht energischer gewünscht und nicht vollkommener begrifflich bestimmt und verteidigt werden, als es Augustin getan habe.[1]) Die scholastischen Schriftsteller des Mittelalters, insbesondere Thomas von Aquino, übernahmen Aristoteles' Satz „infinitum actu non datur"[2]), betrachteten vielmehr jedes Kontinuum als potentiell unbegrenzt teilbar. Folglich gab es für sie keine kleinste Strecke, da jeder ihrer Teile wieder die Eigenschaften einer Strecke besitzt. Somit konnte ein Punkt nicht Teil einer Strecke sein, da er unteilbar ist: „ex indivisibilibus non potest compari aliquod continuum"[3]). Ein Punkt konnte durch Bewegung eine Strecke erzeugen. Solche Spekulationen beeinflußten die Erfinder der Infinitesimalrechnung im siebzehnten Jahrhundert und die Philosophen des Unendlichen im neunzehnten; Cavalieri, Tacquet, Bolzano und Cantor kannten die scholastischen Autoren und stellten Erwägungen über die Sinndeutung ihrer Ideen an.

[5] Die Gelehrten des Mittelalters, von denen hier die Rede ist, betrachteten die Begriffe des Sprunghaften und des Stetigen, des Endlichen und des Unendlichen vorzugsweise in Verbindung mit philosophischen und physikalischen Fragestellungen (Untersuchung des Bewegungsvorgangs). Jedoch war die Physik noch nicht zu einer experimentellen Wissenschaft aufgerückt, und die Mathematik besaß noch keine hinreichend bequeme Sprache algebraischer Bezeichnungen, so daß bei der logischen Analyse der Begriffe Stetigkeit und Unendlichkeit die Scholastiker des 14. Jahrhunderts im wesentlichen mit demselben Material operierten, welches bereits der antiken Wissenschaft zur Verfügung stand, und natürlich stießen sie auch auf dieselben Schwierigkeiten. Deshalb

[1]) G. Cantor, *Brief an Eulenberg* (1886), Ges. Abhandlungen (Berlin 1932), S. 400 bis 402. Die von Cantor zitierte Stelle, Kapitel XVIII von Buch XII der „Stadt Gottes", ist überschrieben: „Gegen diejenigen, die behaupten, daß unendliche Dinge über Gottes Wissen hinausgehen."

[2]) Es gibt keine aktuale Unendlichkeit.

[3]) Ein Kontinuum kann nicht aus Indivisiblen bestehen.

ließ das Interesse an dieser Problematik in den nächsten Jahrhunderten nach. Daß man sich ihr im 17. Jahrhundert erneut zuwandte, hängt mit den Erfolgen der neuen Physik und Mechanik zusammen. Galilei erwähnt nirgends seine scholastischen Vorgänger, Cavalieri stützt sich faktisch nicht auf sie. Im allgemeinen hat die Bewältigung (in diesem oder jenem Sinne — auch das Beiseiteschieben ist eine gewisse Bewältigung) der „Paradoxien des Unendlichen“ jedesmal die Entstehung neuer Probleme hervorgerufen und bewirkt, daß neue Begriffsbildungen entstanden oder sich durchsetzten. Mit der Berufung auf die früheren Autoren konnten diejenigen, die deren Werke kannten, den erzielten Fortschritt abschätzen, und zum anderen konnten sie sich auch auf die Autorität der Vorgänger stützen.[1])

Diese Männer der Kirche erzielten gelegentlich auch Resultate von unmittelbarem mathematischem Interesse. Thomas Bradwardine, der Erzbischof von Canterbury wurde, untersuchte Sternpolygone, nachdem er Boethius studiert hatte. Der bedeutendste unter diesen mittelalterlichen kirchlichen Mathematikern war Nicolaus Oresme, Bischof von Lisieux in der Normandie, der sich unter anderem mit gebrochenen Potenzen befaßte. Wegen $4^3 = 64 = 8^2$ schrieb er als 8 als $1^p \frac{1}{2} 4$ oder $\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2} 4$, was $4^{1\frac{1}{2}}$ bedeutete. Er schrieb auch eine Abhandlung mit dem Titel „De latitudinibus formarum“ (etwa 1360), worin er eine abhängige Variable (latitudo) gegen eine unabhängige (longitudo) auftrug, die als veränderlich betrachtet wurde. Hierin zeigte sich ein gewisser noch verschwommener Übergang von Koordinaten auf der Erd- oder Himmelskugel, die schon in der Antike bekannt waren, zur modernen Koordinatengeometrie. Diese Abhandlung wurde zwischen 1482 und 1515 mehrere Male gedruckt und kann die Mathematiker der Renaissance, einschließlich Descartes, beeinflußt haben.

Oresme behandelte auch unendliche Reihen und bewies, daß die harmonische Reihe divergiert.

5.6. Der Einfluß des Handelsgeistes auf die Mathematik. Regiomontanus. Die Trennung von Trigonometrie und Astronomie

Die Hauptlinie des mathematischen Fortschritts verlief durch die unter dem direkten Einfluß von Handel, Navigation, Astronomie und Feldmessung wachsenden Städte des frühen Kapitalismus. Die Stadtbevölkerung war an Arithmetik und Berechnungen interessiert. Sombart hat dieses Interesse des Bürgers des fünfzehnten und sechzehnten Jahrhunderts als seine „Rechenhaftigkeit“ bezeichnet.[2]) Führer in der Liebe zur praktischen Mathematik waren die Rechenmeister, denen nur sehr selten ein Mann mit Universitätsbildung zur Seite stand, der sie durch

[1]) Vgl. etwa J. Pogrebysski, *Sur la préhistoire de la théorie des ensembles* (in dem Buch: *Mélanges Alexandre Koyré*, Paris 1964).

[2]) W. Sombart, *Der Bourgeois* (München-Leipzig 1913), S. 164. Der Ausdruck „Rechenhaftigkeit“ soll auf eine Bereitschaft zum Rechnen, auf den Glauben an die Nützlichkeit der Beschäftigung mit Arithmetik hinweisen.

sein Studium der Astronomie befähigte, die Bedeutung von verbesserten Rechenverfahren zu verstehen. Mittelpunkte des neuen Lebens waren die italienischen Städte und die mitteleuropäischen Städte Nürnberg, Wien und Prag. Der Fall von Konstantinopel im Jahre 1453, der das Byzantinische Reich beendete, führte viele griechische Gelehrte in die Städte des Westens. Das Interesse an den griechischen Originaltexten wuchs, und es wurde leichter, dieses Interesse zu befriedigen. Universitätsprofessoren fanden sich mit gebildeten Laien im Studium dieser Werke zusammen, ehrgeizige Rechenmeister lauschten es ihnen ab und versuchten, das neue Wissen auf ihre Art zu verstehen.

Typisch für diese Periode war Johannes Müller aus Königsberg in Franken oder Regiomontanus, die führende mathematische Persönlichkeit des fünfzehnten Jahrhunderts. Die Tätigkeit dieses bemerksenwerten Rechners, Instrumentenmachers, Druckers und Wissenschaftlers veranschaulicht die Fortschritte, welche die europäische Mathematik in den zwei Jahrhunderten nach Leonardo erzielt hatte. Er war eifrig bemüht, die verfügbaren klassischen mathematischen Manuskripte zu übersetzen und zu veröffentlichen. Sein Lehrer, der Wiener Astronom Georg Peurbach — Verfasser astronomischer und trignometrischer Tafeln —, hatte schon eine Übersetzung der Astronomie des Ptolemäus aus dem Griechischen begonnen. Regiomontanus führte diese Übersetzung fort und übersetzte auch Apollonius, Heron und, den schwierigsten von allen, Archimedes. Sein eigenes Hauptwerk war „De triangulis omnimodis libri quinque" (1464, aber erst 1533 gedruckt) eine vollständige Einführung in die Trigonometrie, die sich von unseren heutigen Darstellungen hauptsächlich darin unterscheidet, daß unsere bequemen Bezeichnungen noch nicht existierten. Sie enthält den Sinussatz für sphärische Dreiecke. Alle Sätze mußten noch in Worten ausgedrückt werden. Von nun an wurde die Trigonometrie eine von der Astronomie unabhängige Wissenschaft. Nasir al-din hatte etwas Ähnliches schon im dreizehnten Jahrhundert getan, aber der Bedeutungsunterschied besteht darin, daß sein Werk zum weiteren Fortschritt niemals viel beigetragen hat, während das Buch von Regiomontanus die weitere Entwicklung der Trigonometrie und ihrer Anwendung auf Astronomie und Algebra zutiefst beeinflußt hat. Regiomontanus verwandte auch viele Mühe auf die Berechnung von trigonometrischen Tafeln. Er besitzt Tafeln für das Verhältnis des Sinus zum Radius.

Die Sinusangaben wurden als Strecken aufgefaßt, die als Halbsehnen von Winkeln in einem Kreise definiert waren. Ihre Werte hingen deshalb von der Länge des Radius ab. Ein großer Radius ermöglichte große Genauigkeit in den Sinuswerten ohne Verwendung von Sexagesimal- (oder Dezimal-) Brüchen. Der systematische Gebrauch des Radius 1 und damit der Auffassung des Sinus, Tangens usw. als Verhältniswerte (Zahlen) geht auf Euler (1748) zurück.

5.7. Die Lösung der Gleichung dritten Grades und die Einführung komplexer Zahlen

Bis dahin war noch kein wesentlicher Schritt über den alten Wissensstand der Griechen und Araber hinaus getan worden. Die Klassiker blieben das Nonplusultra der Wissenschaft. Es bedeutete daher eine ungeheure und freudige Überraschung, als italienische Mathematiker am Anfang des sechzehnten Jahrhunderts tatsächlich zeigten, daß es möglich war, eine neue mathematische Theorie zu entwickeln, die bei den Alten und den Arabern nicht vorhanden war. Diese Theorie, die zur allgemeinen algebraischen Lösung der kubischen Gleichung führte, wurde von Scipio del Ferro und seinen Schülern an der Universität von Bologna entdeckt.

Die italienischen Städte waren auch nach der Zeit von Leonardo Pflegestätten der Mathematik geblieben. Im fünfzehnten Jahrhundert waren ihre Rechenmeister wohlerfahren in arithmetischen Rechnungen einschließlich Irrationalzahlen (ohne irgendwelche geometrischen Skrupel zu haben), und ihre Maler waren gute Geometer. In seinem Buch „Lives of the Painters" betont Vasari das besondere Interesse, das viele Künstler des fünfzehnten Jahrhunderts an der räumlichen Geometrie zeigten. Eine ihrer Leistungen war die Entwicklung der Perspektive durch Männer wie Alberti und Piero della Francesca; letzterer schrieb auch ein Buch über reguläre Körper. Die Rechenmeister fanden ihren Interpreten in dem Franziskanermönch Luca Pacioli, dessen „Summa de Arithmetica" 1494 gedruckt wurde — übrigens eines der ersten überhaupt gedruckten mathematischen Bücher.[1]) Es ist italienisch geschrieben — in keinem sehr angenehmen Italienisch — und enthält alles, was damals in Arithmetik, Algebra und Trigonometrie bekannt war. Von jetzt an ist der Gebrauch der indisch-arabischen Ziffern fest eingebürgert, und die arithmetische Bezeichnungsweise unterschied sich nicht viel von der unsrigen. Pacioli beendete sein Buch mit der Bemerkung, daß die Lösung der Gleichungen $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ beim derzeitigen Stand der Wissenschaft genauso unmöglich sei wie die Quadratur des Kreises.

An dieser Stelle setzte die Arbeit der Mathematiker an der Universität von Bologna ein. Diese Universität war um die Wende des fünfzehnten Jahrhunderts eine der größten und berühmtesten in Europa. Allein ihre astronomische Fakultät hatte zeitweise sechzehn Lektoren. Aus allen Teilen Europas strömten die Studenten herbei, um die Vorlesungen zu hören — und zu den öffentlichen Disputationen, die ebenfalls die Aufmerksamkeit großer, sportlich eingestellter Hörermassen auf sich lenkten. Unter diesen Studenten befanden sich zeitweise Pacioli, Albrecht Dürer und Kopernikus. Charakteristisch für dieses neue Zeitalter war der Wunsch, nicht nur das klassische Erbe aufzunehmen, sondern zugleich Neues zu schaffen und über die von den Klassikern abgesteckten Grenzen hinaus vorzudringen. Die Erfindung der Buchdruckerkunst und die Entdeckung Amerikas waren Beispiele für derartige Möglichkeiten. War es möglich, in der Mathematik Neues zu finden? Griechen und Orientalen hatten ihren Scharfsinn an der Lösung der kubischen Gleichung versucht, aber sie hatten nur einige Spezialfälle numerisch lösen können. Die Mathematiker in Bologna versuchten nun, die allgemeine Lösung zu finden.

Diese kubischen Gleichungen konnten sämtlich auf drei Typen reduziert werden:

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q, \quad x^3 + q = px,$$

[1]) Die ersten gedruckten mathematischen Bücher waren eine kaufmännische Arithmetik (Treviso 1478) und eine lateinische Ausgabe der Elemente von Euklid (Ratdolt, Venedig 1482).

wobei p und q positive Zahlen waren. Sie wurden besonders eingehend von Professor Scipio del Ferro untersucht, der 1526 starb. Man darf sich dabei auf die Autorität von E. Bortolotti berufen,[1]) daß del Ferro tatsächlich alle Typen gelöst hat. Er veröffentlichte seine Lösungen nie und erzählte nur wenigen Freunden etwas davon. Trotzdem wurde die Tatsache der Entdeckung bekannt, und nach Scipios Tod entdeckte ein venezianischer Rechenmeister mit dem Spitznamen Tartaglia („der Stotterer") die Lösungsmethode von neuem (1535). Er gab seine Resultate in einer öffentlichen Veranstaltung bekannt, hielt aber die Methode, mit der er sie erzielt hatte, geheim. Schließlich offenbarte er seine Ideen einem gelehrten Arzt aus Mailand, Hieronimo Cardano, der ihm schwören mußte, sie geheimzuhalten. Als aber Cardano 1545 sein kurzes, aber vielgelesenes Buch über Algebra, die „Ars magna", veröffentlichte, entdeckte Tartaglia zu seinem größten Mißfallen, daß die Methode in dem Buch vollständig dargelegt wurde, zwar mit gebührender Anerkennung für den Entdecker, aber doch auch zugleich gestohlen. Daraus entstand ein erbitterter Streit, in dessen Verlauf beide Seiten nicht mit Beschimpfungen zurückhielten, worin Cardano von einem jüngeren, feingebildeten Schüler, Ludovico Ferrari, verteidigt wurde. Dieser Streitfall brachte einige interessante Dokumente hervor, darunter die „Quaesiti" von Tartaglia (1546) und die „Cartelli" von Ferrari (1547/1548), aus denen die ganze Geschichte dieser eindrucksvollen Entdeckung öffentlich bekannt wurde.

Die Lösung wird heute als Cardanische Formel bezeichnet, die im Falle $x^3 + px = q$ folgende Form hat:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{25} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Wie man sieht, führte diese Lösung Größen der Form $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ ein, die von den Euklidischen $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ verschieden waren.

Cardanos „Ars Magna" enthielt auch eine andere glänzende Entdeckung: Die Methode von Ferrari, um die Lösung einer allgemeinen biquadratischen Gleichung auf die einer kubischen zurückzuführen. Ferraris Gleichung lautete

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x,$$

die er auf

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

zurückführte. Cardano betrachtete auch negative Zahlen, die er „fiktiv" nannte aber er wußte nichts anzufangen mit dem sogenannten „casus irreducibilis" der kubischen Gleichung, in dem drei reelle Lösungen vorhanden sind, die als Summe oder Differenz von solchen Zahlen erscheinen, die wir heute komplex nennen.

Diese Schwierigkeit wurde von dem letzten der großen Bologneser Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts, Raffael Bombelli, behoben, dessen „Algebra" 1572 erschien. In diesem Buch — und in einer ungefähr 1550 geschriebenen Geometrie, die im Manuskript erhalten ist — führte er eine konsequente Theorie der imaginären

[1]) E. Bortolotti, *L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI*, Periodico di Matematica, ser. 4, *5* (1925), 147—184.

Zahlen ein. Er schrieb $3i$ als $\sqrt{0-9}$ (wörtlich so: $R[0m\ .\ 9]$, R für radix, m für meno). Dies ermöglichte Bombelli, den irreduziblen Fall zu behandeln, indem er beispielsweise zeigte, daß

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0 - 2209}} = 4 + \sqrt{-1}$$

gilt. Bombellis Buch wurde viel gelesen; Leibniz benutzte es zum Studium der kubischen Gleichungen, und Euler zitiert Bombelli in seiner eigenen „Algebra“ im Kapitel über biquadratische Gleichungen. Von da an verloren die komplexen Zahlen etwas von ihrem übernatürlichen Charakter, obwohl sich ihre uneingeschränkte Anerkennung als Zahlen erst im neunzehnten Jahrhundert durchsetzte.
Es ist eine merkwürdige Tatsache, daß die erste Einführung der komplexen Zahlen in der Theorie der kubischen Gleichungen geschah, und zwar gerade in dem Fall, in dem klar ist, daß reelle Lösungen existieren (wenn auch in unerkennbarer Form), und nicht in der Theorie der quadratischen Gleichungen, wo sie in unseren heutigen Lehrbüchern gewöhnlich eingeführt werden.

5.8. Fortschritte in der Technik des Auflösens von Gleichungen und die Verbesserung der Tafelwerke. F. Vieta

Algebra und rechnerische Arithmetik blieben viele Jahrzehnte hindurch der bevorzugte Gegenstand mathematischer Beschäftigung. Die Anregung dazu erwuchs jetzt nicht mehr lediglich aus der „Rechenhaftigkeit“ der Kaufmannsbourgeoisie, sondern auch aus den Anforderungen, die von den Führern der neuen Nationalstaaten an Vermessungswesen und Navigation gestellt wurden. Man brauchte Ingenieure zur Errichtung öffentlicher Bauten und für militärische Zwecke. Die Astronomie blieb, wie schon in allen früheren Perioden, eine wichtige Domäne für mathematische Studien. Es war das Zeitalter der großen astronomischen Theorien von Kopernikus, Tycho Brahe und Kepler. Eine neue Auffassung vom Universum bildete sich heraus.
Philosophisches Denken spiegelte die Strömungen im wissenschaftlichen Denken wider; Plato mit seiner Hochachtung vor quantitativem mathematischem Denken gewann die Oberhand über Aristoteles. Der Einfluß Platos wird besonders in Keplers Werk sichtbar. Trigonometrische und astronomische Tafeln mit ständig steigender Genauigkeit erschienen, besonders in Deutschland. Die Tafeln von G. J. Rhäticus, die 1596 von seinem Schüler Valentin Otho vollendet wurden, enthalten die Werte aller sechs trigonometrischen Funktionen von zehn zu zehn Sekunden auf zehn Dezimalen. Die Tafeln von Pitiscus (1613) gingen bis auf fünfzehn Dezimalen. Die Technik der Auflösung von Gleichungen und das Verständnis der Natur ihrer Wurzeln machten ebenfalls Fortschritte. Die im Jahre 1593 von dem belgischen Mathematiker Adriaen van Roomen ausgehende öffentliche Herausforderung, folgende Gleichung 45. Grades zu lösen:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \ldots - 3795x^3 + 45x = A,$$

war für diese Zeit charakteristisch. Van Roomen schlug Spezialfälle vor, beispielsweise

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

was

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

ergibt; diese Fälle wurden durch die Betrachtung regulärer Polygone nahegelegt. François Viète (Vieta), ein dem Hof Heinrichs III. und IV. verbundener Rechtsanwalt, löste van Roomens Problem durch die Bemerkung, daß die linke Seite mit der Entwicklung von $\sin \Phi$ nach Ausdrücken in $\sin \frac{\Phi}{45}$ äquivalent ist. Die Lösung konnte daher mit Hilfe von Tafeln gefunden werden. Viète fand 23 Lösungen der Form $\sin \left(\frac{\Phi}{45} - n \cdot 8°\right)$, wobei er negative Wurzeln ausschied. Viète führte auch die Cardanische Lösung der kubischen Gleichung in eine trigonometrische Form über, wobei der irreduzible Fall seinen Schrecken verlor, da sich die Einführung komplexer Zahlen hierbei als unnötig erwies. Diese Lösungen findet man heute in den (Schul-) Lehrbüchern der höheren Algebra.

Viètes Hauptleistungen lagen in der Vervollkommnung der Theorie der Gleichungen (z.B. „In artem analyticam isagoge", 1591), worin er als einer der ersten Zahlen mit Hilfe von Buchstaben darstellte. Der Gebrauch von Zahlenkoeffizienten, sogar in der „rhetorischen" Algebra der Diophantischen Schule, hatte die allgemeine Diskussion algebraischer Probleme verhindert. Das Werk der Algebraiker des sechzehnten Jahrhunderts (der „Cossisten", nach dem italienischen Wort „cosa" für die Unbekannte") wurde in einer ziemlich komplizierten Bezeichnung dargestellt. Aber in Viètes „logistica speciosa" erschien zum mindesten ein allgemeiner Symbolismus, in welchem Buchstaben verwendet wurden, um Zahlenkoeffizienten auszudrücken. Viète schreibt „A quadratum" für A^2 und benutzte die Zeichen $+$ und $-$ in unserer heutigen Bedeutung; freilich findet man diesen Gebrauch meist früher, gedruckt wohl zuerst in Johann Widmanns Rechenbuch von 1489.[1]) Die Algebra von Viète unterschied sich noch dadurch von der unsrigen, daß Viète am griechischen Homogenitätsprinzip festhielt, wonach das Produkt von zwei Strecken notwendigerweise als Fläche aufgefaßt wurde; es konnten also nur Strecken zu Strecken, Flächen zu Flächen und Rauminhalte zu Rauminhalten addiert werden. Es herrschte sogar ein gewisser Zweifel, ob Gleichungen von höherem Grade als drei tatsächlich eine Bedeutung haben könnten, da sie sich nur in vier Dimensionen veranschaulichen ließen, was eine damals kaum zu verstehende Begriffsbildung erforderte.

Dies war die Periode, in der die Rechentechnik neue Höhepunkte erreichte. Viète vervollkommnete Archimedes und fand π auf neun Dezimalen; kurz darauf wurde π von Ludolph van Ceulen, einem Fechtmeister aus Delft, auf fünfunddreißig Dezimalen berechnet, wobei er einbeschriebene und umbeschriebene Polygone von

---

[1]) J. Widmann, *Behennde und hüpsche Rechnung auf allen Kauffmannschaft* (Leipzig 1489, auch spätere Ausgaben).

immer größer werdenden Eckenzahlen benutzte. Viète drückte π auch als unendliches Produkt aus (1593), in unserer Bezeichnung so:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{32} \dots .$$

Die Verbesserung der Technik war das Ergebnis der Verbesserung der Bezeichnungsweise. Die neuen Resultate zeigen deutlich, daß es falsch ist, wenn man sagt, daß Männer wie Viète „bloß" die Bezeichnung verbessert haben. Eine solche Feststellung mißachtet die tiefgreifende Beziehung zwischen Inhalt und Form. Neue Resultate sind oftmals nur auf Grund einer neuen Schreibweise möglich geworden. Die Einführung der indisch-arabischen Ziffern gibt dafür eine Beispiel, die Leibnizschen Bezeichnungen in der Infinitesimalrechnung ein anderes. Eine gut angepaßte Bezeichnung spiegelt die Wirklichkeit besser wider als eine schlechte und scheint deshalb mit einem gewissen Eigenleben begabt zu sein, das seinerseits neue Resultate hervorbringt. Auf Viètes Verbesserung der Bezeichnung folgte eine Generation später die Descartessche Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

5.9. S. Stevin. Die Entdeckung der Logarithmen

Ingenieure und Arithmetiker wurden am meisten in den neuen Handelsstaaten gebraucht, besonders in Frankreich, England und den Niederlanden. Die Astronomie stand in ganz Europa in Blüte. Obwohl die italienischen Städte nach der Entdeckung des Seeweges nach Indien nicht mehr an den Haupthandelsstraßen nach dem Orient lagen, blieben sie auch weiterhin bedeutende Zentren. Man findet so unter den großen Mathematikern und Rechnern zu Beginn des siebzehnten Jahrhunderts Simon Stevin, einen Ingenieur, Johannes Kepler, einen Astronomen, sowie Adriaen Vlacq und Ezechiel de Decker, zwei Feldmesser.

Stevin, ein Buchhalter aus Bruges, wurde Ingenieur in der Armee des Prinzen Moritz von Oranien, der die Art schätzte, wie Stevin praktischen Sinn mit theoretischer Einsicht und Originalität verband. In „La disme" (1585) führte er als Teil eines Projekts, das gesamte System der Messungen auf dezimaler Basis zu vereinheitlichen, als erster in Europa systematisch die Dezimalbrüche ein (vgl. S. 85). Das war einer der großen Fortschritte, der durch die allgemeine Einführung der indisch-arabischen Zahlenschreibweise möglich geworden war. Freilich stimmten weder Stevins Terminologie noch seine Schreibweise mit der heutigen überein; der Dezimalpunkt wurde von Neper (s. u.) in seinem 1619 erschienen Buch vorgeschlagen.

Der große andere rechnerische Fortschritt war die Erfindung der Logarithmen. Mehrere Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts hatten mit der Möglichkeit gespielt, arithmetische und geometrische Reihen zu verknüpfen, hauptsächlich zu dem Zweck, das Arbeiten mit den komplizierten trigonometrischen Tafeln zu erleichtern. Ein bedeutender Beitrag zu diesem Ziel wurde von einem schottischen Gutsbesitzer, John Neper (oder Napier), geleistet, der im Jahre 1614 sein Werk "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" veröffentlichte. Seine Hauptidee bestand darin, zwei so miteinander verknüpfte Zahlenfolgen zu konstruieren, daß immer, wenn die eine in arithmetischer Progression wächst, die andere in geometrischer Progression abnimmt. Dann besteht zwischen dem Produkt von zwei Zahlen der zweiten Folge und der Summe der beiden entsprechenden Zahlen der ersten Folge eine einfache Beziehung, und die Multiplikation konnte auf die Addition zurückgeführt werden. Durch dieses System konnte Neper die rechnerische Arbeit mit den Sinuswerten beträchtlich erleichtern. Nepers erster Versuch war noch ziemlich unbeholfen, da seine beiden Folgen, in moderner Schreibweise ausgedrückt, sich wie folgt entsprechen:

$$y = a \cdot e^{-x/a} \text{ (oder } x = \text{Nep. log } y\text{)},$$

wobei $a = 10^7$ ist.[1]) Ist dann $x = x_1 + x_2$, so erhält man nicht $y = y_1 y_2$, sondern $y = y_1 y_2 / a$. Dieses System befriedigte Neper selbst nicht, wie er seinem Bewunderer Henry Briggs, Professor am Gresham College in London, mitteilte. Sie entschieden sich gemeinsam für die Funktion $y = 10^x$, für welche $x = x_1 + x_2$ wirklich $y = y_1 y_2$ ergibt. Briggs führte nach Nepers Tod diese Anregung aus und veröffentlichte im Jahre 1624 seine „Arithmetica logarithmica", die die „Briggsschen" Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Stellen enthielten. Die Lücke zwischen 20000 und 90000 wurde von Ezechiel de Decker, einem holländischen Feldmesser, geschlossen, der mit Unterstützung von Vlacq im Jahre 1627 in Gouda eine vollständige Logarithmentafel veröffentlichte. Die neue Erfindung wurde sofort von Mathematikern und Astronomen und besonders von Kepler begrüßt, der eine lange und schmerzliche Erfahrung mit komplizierten Rechnungen hinter sich hatte.

Unsere hier gegebene Erklärung der Logarithmen mit Hilfe von Exponentialfunktionen ist historisch etwas irreführend, da der Begriff der Exponentialfunktion erst aus dem letzten Teil des siebzehnten Jahrhunderts stammt. Neper kannte den Begriff einer Basis nicht. Natürliche Logarithmen auf der Grundlage der Funktion $y = e^x$ erschienen fast gleichzeitig mit den Briggschen Logarithmen, aber ihre fundamentale Bedeutung wurde nicht eher erkannt, als bis die Infinitesimalrechnung besser verstanden worden war.[2])

[6] Da in der kurzen Darstellung der Geschichte der Mathematik im Mittelalter nichts über die Mathematik der slawischen Völker und der Völker Transkaukasiens mitgeteilt wird, sei der Leser verwiesen auf die

Geschichte der einheimischen Mathematik (russisch), unter der Redaktion von I. S. Stokalow (Bd. I, Von der Urzeit bis zum Ende des VIII. Jahrhunderts, Kiew 1966).

Siehe ferner:

G. B. Petrosjan, *Geschichte der Mathematik in Armenien* (in armenischer Sprache mit russischer und englischer Zusammenfassung, Jerewan 1960).

[1]) Aus diesem Grunde ist Nep. log $y = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y) = 161\,180\,957 - 10^7 \ln y$ und Nep. log $1 = 161\,180\,957$; $\ln y$ bedeutet unseren natürlichen Logarithmus.

[2]) E. Wright veröffentlichte 1618 einige natürliche Logarithmen, J. Speidell 1619, aber danach wurden bis 1770 keine Tafeln dieser Logarithmen mehr veröffentlicht. Siehe F. Cajori, *History of the Exponential and Logarithmic Concepts*, Amer. Math. Monthly *20* (1913).

D. G. Zchakaja, *Geschichte der Mathematik in Georgien von der Frühzeit bis zum Anfang des XX. Jahrhunderts* (russisch, Tbilissi 1959).

Kirik von Nowgorod, *Eine Lehre, damit der Mensch wisse die Zahlen aller Jahre* (russisch), mit Erläuterungen von W. P. Subow, Istor.-Mat. Issled *6* (1953).

W. P. Subow, *Kirik von Nowgorod und die altrussischen Stundenteilungen* (russisch), ebenda.

G. Vetter, *Kurzer Abriß der Entwicklung der Mathematik in den tschechischen Ländern bis zur Schlacht von Belogorsk* (russisch), Istor.-Mat. Issled. *11* (1958).

In den Ausführungen von Struik wird auch die Frage nicht berührt, welche Rolle Byzanz bei der Erhaltung und Weitergabe des wissenschaftlichen Erbes der Antike gespielt hat. Diese Frage ist in der Tat sehr wenig untersucht worden. Siehe dazu:

K. Vogel, *Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und Weiterbildung der griechischen Mathematik*, Miscellanea Mediaevalia, Bd. I, 1962.

Literatur

M. Folkerts, *Boethius Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters* (Diss. Göttingen 1967, Wiesbaden 1970).

Gerberti Opera mathematica, herausgegeben von N. Bubnov (Berlin 1899, 2. Auflage Hildesheim 1913).

Leonardo von Pisa, *Scritti*, herausgegeben von B. Boncompagni (3 Bände, Rom 1857 bis 1862).

N. Oresme, *De proportionibus proportionum* and *Ad pauca respicientes*, herausgegeben von E. Grant (Madison, Wisc. 1968).

N. Oresme and the medieval geometry of qualities and motions, herausgegeben von M. Clagett (Madison, Wisc. 1968).

N. Oresme, *Questiones super geometriam Euclidis*, herausgegeben von H. L. L. Busard (Leiden 1961, mit englischer Übersetzung).

T. Bradwardine, *Tractatus de proportionibus*, herausgegeben von H. L. Crosby (Madison, Wisc. 1955).

Regiomontanus on triangles, herausgegeben von B. Hughes (Madison, Wisc. 1967).
Faksimileausgabe von *De triangulis omnimodis*, mit englischer Übersetzung.

H. Cardanus, *The great art*, herausgegeben von T. R. Witmer (Cambridge, Mass. 1968).
Die *Ars magna* in englischer Übersetzung.

S. Stevin, *Selected works* (5 Bände, Amsterdam 1955–1966).

F. Viète, *Opera mathematica* (Leiden 1646, Neudruck mit Biographie von J. E. Hofman, Hildesheim–New York 1970).

Über die Ausbreitung der indisch-arabischen Ziffern in Europa:

D. E. Smith – L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston-London 1911).

Zur theoretischen Mathematik im Mittelalter siehe:

C. B. Boyer, *The History of the Calculus* (New York 1959).

E. Bodewig, *Die Stellung des heiligen Thomas von Aquino zur Mathematik,* Archiv für die Geschichte der Philosophie *11* (1931), 1–34.

B. Geyer, *Die mathematischen Schriften des Albertus Magnus,* Angelicus *35* (1958), 159–175.

Die italienische Mathematik des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts wird in einer Reihe von Arbeiten besprochen:

E. Bortolotti, geschrieben zwischen 1922–1928, z.B. Periodico di mathematica *5* (1925), 147–184; *6* (1926), 217–230; *8* (1928), 19–59; Scientia 1923, S. 385 bis 394, und

E. Bortolotti, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica della equazione cubiche* (Imola 1926), 54 S.

P. Dell'Abbaco, *Trattato d'aritmetica*, herausgegeben von G. Arrighi (Pisa 1964).

H. Cardano, *My Life*, transl. by J. Stoner (New York 1930).

O. Ore, *Cardano, the gambling scholar* (Princeton 1953, Nachdruck 1965).

Informationen über die Mathematiker des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts und ihre Werke finden sich in den Arbeiten von H. Bosmans S. J., von denen die meisten in den Annales de la Société Scientifique Bruxelles, 1905–1927, zu finden sind.

Vollständiges Verzeichnis in A. Rome, Isis *12* (1929), 80–112. Außerdem:

P. Treutlein, *Das Rechnen im 16. Jahrhundert*, Abh. zur Geschichte der Math. *1* (1877), 1–100.

M. Steck, *Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste* (Halle 1948).

H. S. Carslaw, *The Discovery of Logarithms by Napier*, Math. Gaz. *8* (1915/1916), 76–84, 115–119.

E. Zinner, *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg, genannt Regiomontanus* (München 1938).

J. D. Bond, *The Development of Trigonometric Methods down to the close of the Fifteenth Century*, Isis *4* (1921/22), 295–323.

F. A. Yeldham, *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (London 1926).

E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin* (s'Gravenhage 1943; englisch: The Hague 1970).

G. Sarton, *Simon Stevin of Bruges*, Isis *21* (1934), 241–303.

Nikolaus von Cues, *Math. Schriften*, übersetzt und herausgegeben von J. und J. E. Hofmann (Hamburg 1952).

L. Thorndike, *The sphere of Sacrobosco* (Chicago 1949).

M. Clagett, *The science of mechanics in the Middle Ages* (Madison, Wisc.-London 1959).

D. E. Smith, *Rara arithmetica. A catalogue of the arithmetics written before the year 1601 in the library of G. A. Plympton* (1908, 4. erw. Aufl. New York 1970).

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages* (ibid. 1959).

E. G. R. Taylor, *The mathematical practitioners of Tudor and Stuart England* (Cambridge 1954).

J. A. Lohne, *Thomas Harriott* (1560—1621), Centaurus *6* (1959), 113—121. Siehe auch ibid. *8* (1963), 69—84; *10* (1964), 248—257.

J. E. Hofmann, *Über Viète's Beiträge zur Geometrie der Einschiebungen*, Math.-phys. Semesterberichte *8* (1962), 191—214.

G. Sarton, *Six wings: men of science of the Renaissance* (Bloomington, Ind. 1957).

H. Averdunk — J. Müller-Reinhard, *Gerhard Mercator*, Petermanns Mitt., Ergänzungsheft 182 (Gotha 1914).

N. Z. Davis, *Sixteenth century French Arithmetics and the business life*, J. History of Ideas *21* (1960), 18—48.

P. Bockstaele, *Adriaan van Roomen*, National Biografisch Woordenboek 2 (Brussel 1966), S. 751—765.

J. J. Verdonk, *Petrus Ramus en de wiskunde* (Assen 1966).

Piero Borghi, *Arithmetica*, Venedig 1484 (herausgegeben von K. Elfering, München 1964).

W. Kaunzner, *Über Johannes Widmann von Eger.* Veröff. Forschungsinstituts d. Deutschen Museums f. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Reihe C, No 7 (München 1968).

E. de Decker, *Tweede Deel van de Nieuwe Telkonst, 1627, Fasc. mit Einleitung von A. J. E. M. Smeur* (Nieuwkoop 1964).

Siehe Math. Reviews *43* (1972), # 6038. Dieses Werk enthält die erste vollständige 10stellige Logarithmentafel von 1 bis 100000.

Über die (meist angewandte) Mathematik der iberischen Halbinsel im „goldenen Zeitalter" berichten:

J. Rey Pastor, *Los mathemáticos espanoles del siglo XVI* (Oviedo 1913).

F. Gomes Teixeira, *História das Mathemáticos em Portugal* (Lisboa 1934).

Über Boethius, Fibonacci, Bradwardine, Cardano u. a. siehe die Artikel in D. S. B.

Shirley, J. W. ed., *Thomas Harriot: Renaissance scientist* (Oxford 1974).

Beiträge von E. Rosen, J. W. Shirley, D. B. Quinn u. a.
Besprechung von D. T. Whiteside, Hist. of Science *13* (1975), 61—70.

G. E. Harig, *Cardans und Tartaglias Streit um die kubischen Gleichungen und seine gesellschaftlichen Grundlagen.* Arch. Hist. Sci. Techn. *7* (1935), 67—104, 534.

P. L. Rose, *The Italian Renaissance of mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo* (Geneva 1975).

6. Das siebzehnte Jahrhundert

6.1. Übersicht über die Entwicklung der Mathematik in der Renaissance

Die schnelle Entwicklung der Mathematik während der Renaissance beruhte nicht nur auf der „Rechenhaftigkeit“ der Kaufmannsklasse, sondern auch auf der ausgiebigen Verwendung und weiteren Vervollkommnung von Maschinen. Maschinen kannte man schon im Orient und in der klassischen Antike; sie hatten das Genie von Archimedes inspiriert. Jedoch war durch die Existenz der Sklaverei und das Fehlen eines wirtschaftlich vorwärtsdrängenden städtischen Lebens der Gebrauch von Maschinen in diesen älteren Gesellschaftsformationen praktisch unterbunden worden. Das kann man den Werken von Heron entnehmen, in denen Maschinen beschrieben werden, die aber lediglich zur Unterhaltung oder zu Täuschungszwecken verwendet wurden.

Im späteren Mittelalter wurden Maschinen in kleinen Fabriken, bei öffentlichen Bauten und in Bergwerken verwendet. Dabei handelte es sich um Unternehmungen, die von städtischen Kaufleuten oder von Fürsten auf der Suche nach barem Geld eingerichtet und häufig gegen den Widerstand der städtischen Gilden betrieben wurden. Kriegswesen und Navigation regten ebenfalls zur Vervollkommnung von Werkzeugen und zu ihrem fortschreitenden Ersatz durch Maschinen an.

Bereits im vierzehnten Jahrhundert existierte in Lucca und in Venedig eine wohlausgerüstete Silberindustrie. Sie beruhte auf Arbeitsteilung und der Ausnutzung der Wasserkraft. Im fünfzehnten Jahrhundert entwickelte sich das Bergwesen in Mitteleuropa zu einer völlig kapitalistischen Industrie, die technisch auf dem Gebrauch von Pumpen und Aufzugsmechanismen beruhte, wodurch das Vordringen in immer tiefere Schichten ermöglicht wurde. Die Erfindung der Feuerwaffen und des Buchdrucks, die Errichtung von Windmühlen und Kanälen und der Bau von Schiffen, die den Ozean überqueren konnten, erforderten technische Fertigkeiten und erzeugten ein technisches Bewußtsein. Die Vervollkommnung der Uhren, die für Astronomie und Navigation von großem Nutzen waren und oft auf öffentlichen Plätzen aufgestellt wurden, lenkte die allgemeine Aufmerksamkeit auf bewundernswerte Erzeugnisse der Mechanikerkunst; ihr regelmäßiger Gang und die durch sie eröffnete Möglichkeit einer genauen Messung des Zeitablaufs machten auf die philosophische Haltung dieser Zeit einen tiefen Eindruck. Während der Renaissance und sogar noch in späteren Jahrhunderten wurde die Uhr als ein Modell des Universums angesehen. Das bildete einen wichtigen Bestandteil in der Entwicklung des mechanischen Weltbildes.

Die Maschinen führten zur theoretischen Mechanik und zum wissenschaftlichen Studium der Bewegung und der Veränderung überhaupt. Schon in der Antike waren

Lehrbücher über Statik verfaßt worden, und das neue Studium der theoretischen Mechanik stützte sich natürlich auf die Statik der klassischen Autoren. Bücher über Maschinen waren schon lange vor der Erfindung der Buchdruckerkunst erschienen, zuerst empirische Beschreibungen (Kyeser, Anfang des fünfzehnten Jahrhunderts), später mehr theoretische Darstellungen, wie beispielsweise das Buch von Leon Battista Alberti über Architektur (etwa 1450) und die Schriften Leonardo da Vincis (etwa 1500). Leonardos Manuskripte enthalten die Anfänge eines ausgesprochen mechanistischen Weltbildes. In seiner „Nuova scienzia“ (1537) diskutierte Tartaglia die Konstruktion von Uhren und die Flugbahn von Projektilen, hatte aber noch nicht die parabolische Bahn gefunden, die erst von Galilei entdeckt wurde. Die Veröffentlichung lateinischer Ausgaben von Heron und Archimedes regte diese Art von Untersuchungen an, besonders F. Commandinos Archimedes-Ausgabe, die 1558 erschien und den Mathematikern die antike Integrationsmethode zugänglich machte. Commandino selbst wendete diese Methode auf die Berechnung von Schwerpunkten an (1565), wenngleich mit geringerer Strenge als sein Meister.
Diese Schwerpunktsberechnungen blieben ein Lieblingsthema der Archimedes-Nachfahren, die ihr Studium der Statik benutzten, um sich ein gewisses praktisches Wissen über die Anfangsgründe von dem zu verschaffen, was wir heute Infinitesimalrechnung nennen. Unter diesen Nachfahren ragen Simon Stevin hervor, der 1586 sowohl über Schwerpunkte als auch über Hydraulik schrieb, sodann Luca Valerio, der 1604 über Schwerpunkte und 1606 über die Quadratur der Parabel schrieb, und schließlich Paul Guldin, in dessen „Centrobaryca“ (1641) die sogenannte Guldinsche Regel über Rotationskörper enthalten ist, die sich aber schon bei Pappus findet. Unmittelbar nach den ersten Wegbereitern entstanden die großen Arbeiten von Kepler, Cavalieri und Torricelli, in denen Methoden entwickelt wurden, die schließlich zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung führten.

6.2. Vorstudien zur Infinitesimalrechnung. G. Galilei

Typisch für diese Autoren war ihre Bereitschaft, die archimedische Strenge zugunsten von solchen Gedankengängen aufzugeben, die häufig auf unstrengen, manchmal „atomaren“ Voraussetzungen beruhten — wahrscheinlich, ohne zu wissen, daß Archimedes selbst (in seinem Brief an Eratosthenes) derartige Methoden auf Grund ihres heuristischen Wertes angewendet hatte. Dies beruhte teilweise auf der Unduldsamkeit gegenüber der Scholastik bei einigen von ihnen, traf aber nicht für alle diese Autoren zu, denn mehrere waren in der Scholastik wohlerfahrene katholische Priester. Der Hauptgrund war der Wunsch, schnell zu Ergebnissen zu kommen, wozu die griechische Methode unbrauchbar war.
Die mit den Namen Kopernikus, Tycho, Brahe und Kepler verbundene Revolution in der Astronomie eröffnete gänzlich neue Einsichten in die Stellung des Menschen im Universum und in die Fähigkeit der Menschen, die astronomischen Erscheinungen mit Hilfe der Vernunft zu erklären. Die Möglichkeit, die irdische Mechanik durch eine Himmelsmechanik zu ergänzen, vermehrte die Kühnheit der Männer der Wissenschaft. In den Werken von Johannes Kepler wird der anregende Ein-

fluß der neuen Astronomie, die sowohl umfangreiche Rechenarbeiten als auch infinitesimale Betrachtungen erforderte, besonders deutlich sichtbar. Kepler machte sich sogar an Volumenberechnungen für den eigenen Bedarf und berechnete in seiner „Nova stereometria doliorum vinariorum" („Neue Volumenberechnung von Weinfässern", 1615) den Rauminhalt von Körpern, die durch Rotation von Abschnitten von Kegelschnitten um eine in ihrer Ebene gelegene Achse entstehen. Er brach mit der archimedischen Strenge; für ihn war die Kreisfläche aus unendlich vielen Dreiecken mit einer gemeinsamen Ecke im Kreismittelpunkt zusammengesetzt und die Kugel aus unendlich vielen spitzen Pyramiden. Kepler sagte, daß die Beweise von Archimedes absolut streng seien, „absolutae et omnibus numeris perfectae"[1]), aber er überlasse sie den Leuten, die durchaus exakten Beweisen frönen wollten. Jeder folgende Autor nahm sich nun die Freiheit, seine eigene Art der Strenge festzulegen oder auch ganz darauf zu verzichten.

Galileo Galilei verdanken wir die neue Mechanik frei fallender Körper, die Anfänge der Elastizitätstheorie und eine geistvolle Verteidigung des Kopernikanischen Systems. Vor allem aber verdanken wir Galilei, in höherem Maße als irgendeinem anderen Forscher dieser Periode, den Geist der modernen Wissenschaft, die auf der harmonischen Wechselwirkung zwischen Experiment und Theorie beruht, wobei die mathematische Behandlung betont wird (obgleich das Experiment bei Galilei eine geringere Rolle spielt, als man manchmal glaubt). In den „Discorsi" (1638) entwickelte Galilei das mathematische Studium der Bewegung sowie die Beziehung zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Er veröffentlichte keine systematische Darlegung seiner Ideen zur Infinitesimalrechnung, sondern überließ dies seinen Schülern Torricelli und Cavalieri. Tatsächlich waren Galileis Ideen zu dieser Frage der reinen Mathematik ganz originell, wie es nach seiner Bemerkung erscheint, daß „weder die Anzahl der Quadratzahlen kleiner ist als die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen noch letztere größer als die erste". Diese Verteidigung des aktual Unendlichen (die in den „Discorsi" von Salviati geführt wird) war bewußt gegen die aristotelische und scholastische Lehre (in den „Discorsi" von Simplicio vertreten) gerichtet. Die „Discorsi" enthalten auch die parabolische Bahn eines geworfenen Körpers, dazu Tabellen über Höhe und Wurfweite als Funktionen des Erhebungswinkels und der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit. Salviati macht auch die Bemerkung, daß die Kettenlinie wie eine Parabel aussieht, gibt aber keine genaue Beschreibung der Kurve.

[7] Das zu Galilei Gesagte erfordert einige Ergänzungen. Galilei nimmt, obwohl er nicht direkt Mathematiker war, in der Geschichte der Mathematik einen bedeutenden Platz ein. Schon zu Beginn seiner wissenschaftlichen Tätigkeit studierte er gründlich die ihm zugänglichen Werke von Archimedes, und während seiner viele Jahre währenden Tätigkeit als Professor an den Universitäten Pisa und Padua trug er ständig zur Verbreitung der Methoden des großen griechischen Meisters bei. Immer hat Galilei auf jede nur mögliche Weise die Anwendung mathematischer Methoden beim Studium der Naturerscheinungen propagiert, und er hat selbst vortreffliche Beispiele eines solchen Einsatzes der Mathematik gegeben. In den Untertitel zu einer Sammlung seiner Werke wollte er schreiben, daß „hier an einer Menge von Beispielen klar wird, wie außerordentlich nützlich die Mathematik für alle Schlußfolgerungen ist, die die Natur betreffen und

[1]) „absolut und in jeder Beziehung vollkommen".

daß es schier unmöglich ist, erfolgreich Untersuchungen ohne Hilfe der Geometrie anzustellen. . .". Aber Galilei verwendete nicht nur Vorhandenes, sondern fand auch Neues in der Mathematik. Er suchte neue mathematische Methoden, die er für die Entwicklung seiner neuen physikalischen Theorien brauchte. Seine Tätigkeit in dieser Richtung, die sich allerdings nur teilweise in seinen fertiggestellten und gedruckten Werken widerspiegelt, übte einen großen Einfluß auf seine unmittelbaren und mittelbaren Schüler aus, zu denen man alle bedeutenden italienischen Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts zählen muß.
Während seiner Studien zur beschleunigten Bewegung kam Galilei zur Vorstellung von der Augenblicksgeschwindigkeit als Summe aller Geschwindigkeitszuwächse des Körpers, die dieser seit Beginn der Bewegung erfahren hat. Dabei beschrieb Galilei diesen Vorgang als stetig in der Zeit verlaufend, und er stellte eine Beziehung auf zwischen zwei Kontinua: dem Kontinuum der Werte der Zeit und dem Kontinuum der Werte der Geschwindigkeit. Damit war ein Teil jenes Weges gebahnt, der zum allgemeinen Begriff der funktionalen Abhängigkeit und zu den Fluenten und Fluxionen von Newton führte (dazu sei noch bemerkt, daß Newton schon in seiner Jugend die Arbeiten Galileis studierte und daß der ältere Zeitgenosse und Lehrer Newtons, Barrow, Verbindung mit italienischen Mathematikern — Schülern und Nachfolgern Galileis — hatte). Galilei benutzte jedoch auch atomistische Vorstellungen über den Aufbau der Materie, und er sah sich in seinem Schaffen immer wieder veranlaßt, sich Gedanken über die formal widersprüchlichen Verhältnisse von Unstetigem und Stetigem und über die Eigenschaften des unendlich Großen und des unendlich Kleinen zu machen. Die Erfolge jedoch, die beim Studium der Bewegung erzielt worden waren (Aufstellung der Fallgesetze), regten zu kühnem Vorwärtsschreiten an, ohne sich von den Widersprüchen verwirren zu lassen, denn man hatte nun Grund genug, auf ihre Lösung zu hoffen. Insbesondere zog Galilei selbst, nachdem er auf die scheinbar widersprüchliche Beziehung zwischen der Menge der Quadrate und der Menge aller Zahlen hingewiesen hatte, von hier aus den wichtigen Schluß, daß man nicht ohne weiteres Verhältnisse auf das Unendliche übertragen kann, die für endliche Größen richtig sind. Galilei war ein Mensch, der seine eigenen Schlußfolgerungen und Vorstellungen durchaus nicht als endgültig ansah. In die Diskussion der Probleme, welche damals grundlegend für die Entwicklung der mathematischen Methoden waren, deren die neue Naturwissenschaft bedurfte, bezog er gern andere Gelehrte ein. Salviati, einer der Diskussionspartner in den berühmten „Discorsi" von Galilei, der die Gedanken des Autors zum Ausdruck bringt, beendet dort eine Debatte so: „Wenn es euch gefällt, so folgt meinen Schlußfolgerungen, wenn nicht, so verwerft sie samt meinen Überlegungen und sucht euch andere, befriedigendere Erklärungen. Ich möchte euch dabei nur an zweierlei erinnern: Wir befinden uns im Reich des Unendlichen und der Indivisiblen."[1])

Inzwischen war die Zeit für eine erste systematische Darstellung der bis dahin erzielten Resultate in dem Gebiet, das wir heute Infinitesimalrechnung nennen, herangereift. Diese Darstellung erschien in der „Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" (1635) von Bonaventura Cavalieri, der Professor an der Universität von Bologna war. Hierin entwickelte Cavalieri eine einfache Form der Infinitesimalrechnung, die sich auf den scholastischen Begriff der „Indivisiblen"[2]) stützte, wonach durch die Bewegung eines Punktes eine Gerade und

---

[1]) Siehe: Galileo Galilei, *Le opere*, edizione nazionale, herausgegeben von A. Favaro, *8*, S. 78. Vgl. auch A. Rényi, a. a. O. (Fußnote 1 auf S. 63), S. 71ff.

[2]) F. Cajori, *Indivisibles and „Ghosts of departed quantities"* in *The History of Mathematics*, Scientia 1925, S. 301—306. E. Hoppe, *Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung bei Leibniz und Newton*, Jahresb. Dtsch. Math.-Verein. *37* (1928), 148—187. Über gewisse Feststellungen bei Hoppe siehe C. B. Boyer, *The History of the Calculus* (New York 1949), S. 192, 206, 209.

durch die Bewegung einer Geraden eine Ebene entsteht. Cavalieri benötigte deshalb keine infinitesimalen Größen oder „Atome". Eines seiner Resultate wird in dem „Calvalierischen Prinzip" zusammengefaßt, das die Volumengleichheit von zwei Körpern gleicher Höhe ausspricht, wenn in gleichen Höhen geführte ebene Schnitte bei beiden stets dieselben Flächeninhalte ergeben. Damit konnte er die zur Integration von Polynomen äquivalente Rechnung durchführen. Zunächst addierte er Strecken, um eine Fläche zu erhalten, als aber Torricelli nachwies, daß man bei diesem Verfahren beweisen kann, daß jedes Dreieck durch eine Höhe in zwei flächengleiche Teile zerfällt, ersetzte er „Strecken" durch „Fäden", d. h., er verwandelte die Strecken in Flächen von sehr kleiner Breite, und kam so zu einer „atomistischen" Theorie.

6.3. Die „Géométrie" von Descartes und ihr Einfluß auf die weitere Entwicklung der analytischen Geometrie

Diese schrittweise Entwicklung der Infinitesimalrechnung wurde durch die Veröffentlichung der Descartesschen „Géométrie" (1637) erheblich vorangetrieben, da sie die gesamte klassische Geometrie den Methoden der Algebra unterwarf. Das Buch war ursprünglich als Anhang des „Discours de la Méthode" veröffentlicht worden, der Abhandlung über die Vernunft, worin der Verfasser sein rationalistisches Herangehen an das Studium der Natur erklärte. René Descartes war ein aus der Touraine stammender Franzose, der das Leben eines Edelmannes führte, eine Zeitlang in der Armee von Moritz von Oranien diente, viele Jahre in den Niederlanden lebte und in Stockholm starb, wohin er von der Königin von Schweden eingeladen worden war. Gleich vielen anderen großen Denkern des siebzehnten Jahrhunderts suchte Descartes nach einem allgemeinen Denkverfahren, das es ermöglichen sollte, Entdeckungen zu erleichtern und die Wahrheit in den Wissenschaften zu erkennen. Da die einzige bekannte Naturwissenschaft mit einem einigermaßen zusammenhängenden systematischen Aufbau die Mechanik war und da die Mathematik den Schlüssel zum Verständnis der Mechanik bildete, wurde die Mathematik zum wichtigsten Hilfsmittel für das Verständnis des Universums. Darüber hinaus war die Mathematik selbst mit ihren überzeugenden Aussagen ein glänzendes Beispiel dafür, daß in der Wissenschaft Wahrheit gefunden werden konnte. Die mechanistische Philosophie dieser Periode kam somit, allerdings aus einem anderen Grunde, zu einer Ansicht, die der der Platoniker ähnlich war. Sowohl die Platoniker, die an die Harmonie des Universums, als auch die Cartesianer, die an eine allgemeine auf Vernunft gegründete Methode glaubten, erblickten in der Mathematik die Königin der Wissenschaften.
Descartes veröffentlichte seine „Géométrie" als eine Anwendung seiner allgemeinen Methode der Vereinheitlichung, in diesem Falle der Vereinigung von Algebra und Geometrie. Das Verdienst dieses Werkes besteht nach dem allgemein angenommenen Standpunkt hauptsächlich in der Schaffung der sogenannten analytischen Geometrie. Es ist wahr, daß sich dieser Teil der Mathematik unter dem Einfluß des Werkes von Descartes in der Folgezeit entwickelte, aber die „Géométrie" selbst

kann kaum als das erste Lehrbuch über dieses Gebiet angesehen werden. Sie enthält keine „kartesischen" Achsen, es werden keine Gleichungen für die Gerade und für Kegelschnitte abgeleitet, obwohl von einer besonderen Gleichung zweiten Grades festgestellt wird, daß sie einen Kegelschnitt darstellt. Überdies besteht ein großer Teil des Buches aus einer Theorie algebraischer Gleichungen, worin die „Descartessche Zeichenregel" zur Bestimmung der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln enthalten ist.

Wir müssen uns daran erinnern, daß schon Apollonius Hilfsmittel zur Beschreibung von Kegelschnitten besaß, die wir — nach Leibniz — heute Koordinaten nennen, obwohl sie keine numerischen Werte hatten. Breite und Länge in der „Geographie" von Ptolemäus waren zahlenmäßige Koordinaten. Pappus hatte in seiner „Sammlung" einen „Schatz der Analysis" („Analyomenos"), in dem man nur die Bezeichnung zu modernisieren braucht, um eine folgerichtige Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu erhalten. Sogar die Andeutung einer graphischen Darstellung tritt gelegentlich schon vor Descartes auf (Oresme). Descartes' Verdienste liegen vor allem in der konsequenten Anwendung der zu Beginn des siebzehnten Jahrhunderts weit entwickelten Algebra auf die Geometrie der Alten und die dadurch ermöglichte enorme Erweiterung ihrer Anwendbarkeit. Ein weiteres Verdienst von Descartes besteht in der endgültigen Aufhebung der einschränkenden Homogenitätsforderung seiner Vorgänger, die sogar noch Viètes „logistica speciosa" beeinträchtigte, so daß nun x^2, x^3, xy als Strecken betrachtet wurde. Eine algebraische Gleichung wurde zu einer Beziehung zwischen Zahlen: ein neuer Fortschritt der mathematischen Abstraktion, der für die allgemeine Behandlung algebraischer Kurven notwendig war, den man allerdings auch als die endgültige Übernahme der algorithmisch-algebraischen Tradition des Orients durch den Westen ansehen kann.

Vieles in Descartes' Bezeichnungen ist schon modern; man findet in seinem Buch Ausdrücke wie $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, die von unserer heutigen Bezeichnung nur darin abweichen, daß Descartes noch aa statt a^2 schreibt (was man sogar noch bei Gauß finden kann), obwohl er sonst a^3 für aaa, a^4 für $aaaa$ usw. setzte. Es ist nicht schwer, sich in seinem Buch zurecht zu finden, nur darf man nicht unsere moderne analytische Geometrie darin suchen.

Etwas näher an diese analytische Geometrie kam Pierre Fermat, ein Jurist in Toulouse, heran, der eine kurze Abhandlung über Geometrie wahrscheinlich noch vor dem Erscheinen des Buches von Descartes schrieb, die aber erst 1679 (postum) gedruckt wurde. In diesem Werk „Isagoge" findet man die Gleichungen $y = mx$, $xy = k^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 \pm a^2y^2 = b^2$, die Geraden und Kegelschnitten bezüglich eines (im allgemeinen rechtwinkligen) Achsensystems zugeordnet werden. Da die Arbeit aber in den Bezeichnungen von Viète geschrieben war, macht sie einen altertümlicheren Eindruck als die „Géométrie" von Descartes. Zu der Zeit, als Fermats „Isagoge" gedruckt wurde, gab es bereits andere Veröffentlichungen, in denen die Algebra auf die Resultate von Apollonius angewendet wurde, insbesondere den „Tractatus de sectionibus conicis" (1655) von John Wallis und einen Teil der „Elementa curvarum linearum" (1659) von Jan de Witt, Ratspensionär von Holland. Beide Werke waren unter dem unmittelbaren Einfluß von Descartes entstanden. Aber der Fortschritt kam nur sehr langsam voran; selbst l'Hospitals „Traité analytique des sections coniques" (1707) enthielt nichts weiter als eine Übersetzung des Apollonius in die Sprache der Algebra. Alle Autoren zögerten, negative Werte für die Koordinaten zuzulassen. Der erste, der ohne Hemmungen mit algebraischen Gleichungen arbeitete, war Newton in seiner Studie über kubische Kurven (1703); die erste analytische Geometrie der Kegelschnitte, die sich völlig von Apollonius frei gemacht hatte, erschien erst mit Eulers „Introduction" (1748).

6.4. Weiterentwicklung der Infinitesimalrechnung. Das Entstehen von Akademien

Das Erscheinen des Buches von Cavalieri regte zahlreiche Mathematiker in verschiedenen Ländern zum Studium von Problemen an, die sich aus infinitesimalen Betrachtungen ergeben. Man begann, die Grundprobleme in mehr abstrakter Form anzugreifen, und erzielte auf diese Weise einen Gewinn an Allgemeinheit. Das Tangentenproblem, das darin besteht, Methoden zur Bestimmung der Tangente an eine gegebene Kurve in einem gegebenen Punkt zu erforschen, spielte allmählich eine immer stärker hervortretende Rolle neben den alten Problemen der Volumen- und Schwerpunktsbestimmung. Bei diesen Forschungen zeichneten sich deutlich zwei Richtungen ab, eine geometrische und eine algebraische. Die Nachfolger von Cavalieri, besonders Torricelli und Isaac Barrow, der Lehrer von Newton, wendeten die griechische Methode der geometrischen Schlußweisen an, ohne sich allzuviel um ihre Strenge zu kümmern. Auch Christian Huygens zeigte eine entschiedene Vorliebe für die griechische Geometrie. Andere aber, besonders Fermat, Descartes und John Wallis, vertraten die entgegengesetzte Richtung und wendeten die neue Algebra auf dieselben Fragestellungen an. Praktisch alle Autoren in dieser Zeit von 1630 bis 1660 beschränkten sich auf die Fragen, die bei algebraischen Kurven auftreten, insbesondere bei solchen mit der Gleichungsform $a^m y^n = b^n x^m$. Sie alle fanden Formeln, und zwar jeder auf seine eigene Art, die mit

$$\int_0^a x^m\,dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

äquivalent sind, zunächst für positive ganzzahlige m, später für gebrochene Exponenten, dann erweitert für negatives m. Gelegentlich taucht eine nichtalgebraische Kurve auf, wie etwa die von Descartes und Blaise Pascal untersuchte Zyklode (Rollkurve); Pascals „Traité général de la roulette" (1658), die einen Teil eines unter dem Namen A. Dettonville veröffentlichten Büchleins bildete, übte einen großen Einfluß auf den jungen Leibniz aus.[1])

In dieser Periode begannen mehrere charakteristische Züge der Infinitesimalrechnung aufzutauchen. Fermat entdeckte 1638 eine Methode zur Bestimmung

[1]) H. Bosmans, *Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal*, Revue des Questions Scientifiques *4* (1929), 136—160; J. Guitton, *Pascal et Leibniz* (Paris 1951).

von Maxima und Minima, indem er kleine Änderungen der Veränderlichen in einer einfachen algebraischen Gleichung vornahm und die Änderung Null setzte; dies wurde 1658 von Jan Hudde, später Bürgermeister von Amsterdam, auf allgemeinere algebraische Kurven übertragen. Es wurden Bestimmungen von Tangenten, Volumina und Schwerpunkten vorgenommen, aber die Beziehung zwischen Integration und Differentiation als ihrer Natur nach inverse Operationen wurde nicht richtig begriffen, bis sie von Barrow 1670 auseinandergesetzt wurde (aber in schwieriger geometrischer Form). Pascal verwendete gelegentlich Entwicklungen nach kleinen Größen, worin er die Ausdrücke höherer Ordnung vernachlässigte und so die umstrittene Annahme Newtons vorwegnahm, daß die Formel

$$(x + dx)\,(y + dy) - xy = xdy + ydx$$

gilt. Er rechtfertigte sein Vorgehen mehr durch Berufung auf Intuition („esprit de finesse") als auf Logik („esprit de géométrie"), wobei er hier die Kritik von Bischof Berkeley an Newton[1]) vorwegnahm.

Scholastisches Denken kam bei diesem Forschen nach neuen Methoden nicht nur durch Cavalieri hinein, sondern auch durch das Werk des belgischen Jesuiten Grégoire de Saint Vincent und seiner Schüler und Mitarbeiter Paul Guldin und André Tacquet. Diese Männer wurden sowohl durch den Geist ihres Zeitalters als auch durch die mittelalterlichen scholastischen Schriften über die Natur des Kontinuums und die „Latitude" der Formen (S. 97) angeregt. In ihren Schriften erscheint der Ausdruck „Exhaustion" für die Methode des Archimedes zum erstenmal. Tacquets Buch „Über Zylinder und Ringe" (1651) hat Pascal beeinflußt.

Diese mitreißende Aktivität der Mathematiker in einer Zeit, als es noch keine wissenschaftlichen Zeitschriften gab, führte zu Diskussionszirkeln und zu ständiger Korrespondenz. Einige Persönlichkeiten erwarben sich dadurch Verdienste, daß sie als Zentren des wissenschaftlichen Gedankenaustausches dienten. Der bekannteste diese Männer ist der Minoriten-Pater Marin Mersenne, dessen Name als Mathematiker in den Mersenneschen Primzahlen weiterlebt. Mit ihm standen Descartes, Fermat, Desargues, Pascal und viele andere Wissenschaftler in Briefwechsel.[2])

Aus den Diskussionsgruppen von Gelehrten erwuchsen Akademien. Sie entstanden in gewisser Hinsicht als Opposition zu den Universitäten, die sich — mit einigen Ausnahmen, wie etwa der Universität Leiden — in der Zeit der Scholastik entwickelte und noch die mittelalterliche Gepflogenheit beibehalten hatten, Wissen in erstarrter Form weiterzugeben. Die neuen Akademien verkörperten im Gegensatz dazu den neuen Geist der Forschung. Sie waren die typischen Vertreter „dieses von der Fülle des neuen Wissens trunkenen Zeitalters, das eifrig bemüht war, allen überalterten Aberglauben auszurotten, mit den Traditionen der Vergangenheit zu brechen und sich den übertriebensten Hoffnungen auf die Zukunft hinzugeben. Hier lernte der einzelne Wissenschaftler, sich zu bescheiden und stolz darauf zu

[1]) B. Pascal, *Œuvres* (Paris 1908—1914), XII, S. 9, XIII, S. 141—155.

[2]) „Informer Mersenne d'une découverte, c'était la publier par l'Europe entière", schreibt H. Bosmans (a. a. O., S. 43), d. h. „Mersenne über eine Entdeckung zu informieren, war gleichbedeutend damit, sie in ganz Europa bekanntzumachen".

sein, einen winzigen Beitrag zur Summe des Wissens hinzugefügt zu haben; hier bildete sich, kurz gesagt, der moderne Wissenschaftler heraus."[1])

Die erste Akademie wurde in Neapel gegründet (1560); ihr folgte die „Accademia dei Lincei" in Rom (1603). Die Royal Society besteht seit 1662, die Französische Akademie seit 1666. Wallis war eines der Gründungsmitglieder der Royal Society, Huygens der Französischen Akademie.

6.5. J. Wallis und Ch. Huygens

Unter den in dieser Periode der Vorläufer geschriebenen Büchern ist nächst dem von Cavalieri die „Arithmetica infinitorum" (1655) von Wallis eines der bedeutendsten. Der Autor war von 1643 bis zu seinem Tode 1703 Savilian-Professor der Geometrie in Oxford. Schon der Titel seines Buches zeigt, daß Wallis über Cavalieri mit seiner „Geometria indivisibilium" hinausgehen wollte; er wollte die neue „arithmetica" (Algebra) ausgestalten, nicht die alte Geometria. Bei diesem Vorhaben baute Wallis als erster Mathematiker die Algebra zu einer wirklichen Analysis aus. Seine Methoden der Behandlung von unendlichen Prozessen waren oftmals recht grob, aber er erzielte neue Ergebnisse; er führte unendliche Reihen und unendliche Produkte ein und handhabte völlig unbekümmert imaginäre Zahlen sowie negative und gebrochene Exponenten. Er schrieb ∞ für $\frac{1}{0}$ (und behauptete, daß $-1 > \infty$ sei). Eines seiner typischen Resultate ist die Entwicklung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

sowie zu Beta-Integralen äquivalente Ausdrücke. Für die Größe, die wir durch $\frac{4}{\pi}$ ausdrücken, schrieb er ein kleines Quadrat.

Wallis war nur einer aus einer ganzen Reihe von hervorragenden Männern dieser Periode, die die Mathematik um eine Entdeckung nach der anderen bereicherten. Die treibende Kraft für diese Blüte der schöpferischen Wissenschaft, die ihresgleichen seit den großen Tagen Griechenlands nicht hatte, war nur zum Teil die Leichtigkeit, mit der die neue Technik gehandhabt werden konnte. Viele große Denker wollten mehr erzielen: eine „allgemeine Methode", die manchmal in eingeschränktem Sinne als eine Methode der Mathematik, manchmal aber auch allgemeiner als eine Methode zum Verständnis der Natur und zur Schaffung neuer Erfindungen verstanden wurde. Dies ist der Grund dafür, daß in dieser Periode alle hervorragenden Philosophen Mathematiker und alle hervorragenden Mathematiker Philosophen waren. Die Suche nach neuen Erfindungen führte manchmal unmittelbar zu mathematischen Entdeckungen. Ein berühmtes Beispiel dafür ist das „Horologium oscillatorium" (1673) von Christian Huygens, wobei die Suche nach besseren Uhren (um das sehr alte Problem der Bestimmung der geographischen Länge auf See zu lösen) nicht nur zu den Pendeluhren führte, sondern auch zum

[1]) M. Ornstein, *The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century* (Chicago 1913), S. 262.

Studium von Evoluten und Evolventen ebener Kurven. Huygens war ein unabhängiger, vermögender Holländer, der viele Jahre in Paris lebte. Er war als Physiker ebenso hochbedeutend wie als Astronom, er stellte die Wellentheorie des Lichtes auf und erklärte die Tatsache, daß der Saturn von einem Ring umgeben ist. Sein Buch über Pendeluhren übte auf die Newtonsche Gravitationstheorie einen Einfluß aus; es stellt zusammen mit Wallis' „Arithmetica" die am weitesten entwickelte Form der Infinitesimalrechnung in der Zeit vor Newton und Leibniz dar. Die Briefe und Bücher von Wallis und Huygens und anderen führenden Mathematikern ihrer Zeit sind voll von neuen Entdeckungen, von Rektifikationen, Enveloppen und Quadraturen. Huygens studierte die Traktrix, die logarithmische Kurve, die Kettenlinie und wies die Zykloide als tautochrone Kurve nach. Trotz dieses Reichtums an Resultaten, von denen viele erst gefunden wurden, nachdem Leibniz seinen Kalkül veröffentlicht hatte, gehört Huygens eindeutig in die Periode der Vorläufer. Er bekannte gegenüber Leibniz, daß er nicht imstande war, sich mit der Leibnizschen Methode vertraut zu machen. Ebenso fand sich Wallis niemals in den Bezeichnungen von Newton zurecht. Huygens war einer der wenigen großen Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, die sich ernstlich um Strenge mühten; seine Methoden waren stets in der alten archimedischen Tradition durchgebildet.

6.6. Fermats Arbeiten zur Zahlentheorie. Die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erste Anfänge der synthetischen Geometrie

Die Forschungsarbeit der Mathematiker dieser Periode erstreckt sich auf viele Gebiete, sowohl alte als auch neue. Sie bereicherten klassische Fragestellungen um neuentdeckte Ergebnisse, ließen alte Gebiete in neuem Licht erscheinen und schufen sogar völlig neue Gegenstände mathematischer Forschung. Ein Beispiel der ersten Art war Fermats Studium des Diophant, ein Beispiel der zweiten Art dagegen die neue Interpretation der Geometrie durch Desargues. Die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit war eine gänzlich neue Schöpfung. Diophant wurde den Kennern des Lateins 1621 zugänglich.[1]) In Fermats Exemplar dieser Übersetzung befinden sich seine berühmten Randbemerkungen, die sein Sohn veröffentlichte. Darunter ist der „Große Fermatsche Satz" enthalten (wonach die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für positive ganze Zahlen x, y, z, n und $n > 2$ niemals gelten kann), der den deutschen Mathematiker Kummer 1847 zurAufstellung der Theorie der idealen Zahlen führte. Ein für alle n gültiger Beweis ist noch nicht geführt worden, obwohl der Satz für eine große Anzahl von n-Werten gilt.[2])

[1]) Lateinische Übersetzungen wurden erstmals zugänglich: Euklid 1482, Ptolemäus 1515, Archimedes 1558, Apollonius I—IV 1566, V—VIII 1661, Pappus 1589, Diophant 1621.

[2]) Siehe H. S. Vandiver, Amer. Math. Monthly *53* (1946), 555—578. Auch: P. Bachmann, *Der Fermatsche Satz* (Berlin 1919); R. Noguès, *Théorème de Fermat, son histoire* (Paris 1932); L. J. Mordell, *Three lectures on Fermat's last theorem* (Cambridge 1921, Nachdruck Berlin 1972); O. Ore, *Number theory and its History* (New York 1948).

Fermat schrieb an den Rand neben Diophant II 8: „Eine Quadratzahl ist in die Summe zweier anderer Quadratzahlen zu zerlegen" folgende Worte: „Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen." Wenn Fermat einen so wunderbaren Beweis hatte, dann ist es drei Jahrhunderten intensiver Forschung jedenfalls nicht gelungen, ihn wiederzufinden. Es ist wohl richtiger anzunehmen, daß sich sogar der große Fermat zuweilen irrte.

Eine andere Randbemerkung von Fermat besagt, daß eine Primzahl der Form $4n + 1$ auf eine und nur eine Art als Summe von zwei Quadraten ausgedrückt werden kann. Dieser Satz wurde später von Euler bewiesen. Der andere „Satz von Fermat", der aussagt, daß $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar ist, wobei p eine Primzahl und a zu p teilerfremd ist, erscheint in einem Brief aus dem Jahre 1640; dieser Satz kann mit elementaren Hilfsmitteln bewiesen werden. Fermat war auch der erste, der behauptete, daß die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ (A ganz, keine Quadratzahl) unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Fermat und Pascal waren die Begründer der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung.[1]) Die allmähliche Herausbildung des Interesses an Problemen, die mit Wahrscheinlichkeitsfragen zusammenhängen, ist in erster Linie der Entwicklung des Versicherungswesens zuzuschreiben, aber die besonderen Fragen, die große Mathematiker dazu anregten, über diese Dinge nachzudenken, wurden von Edelleuten aufgeworfen, die dem Würfel- oder Kartenspiel huldigten. Mit den Worten von Poisson: „Ein aus Glücksspielen stammendes Problem, das einem strengen Jansenisten von einem Weltmann unterbreitet wurde, ist der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewesen." Dieser „Weltmann" war der Chevalier de Méré (ein Edelmann von hoher Bildung), der an Pascal mit einer das sogenannte „problème des points" betreffenden Frage herantrat. Pascal führte über dieses Problem und verwandte Fragestellungen einen Briefwechsel mit Fermat, und beide stellten einige Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf (1654). Als Huygens nach Paris kam, erfuhr er von diesem Briefwechsel und versuchte, die Fragen selbst zu beantworten; das Ergebnis war das Werk „De ratiociniis in ludo aleae" (1657), die erste Abhandlung über Wahrscheinlichkeit. Die nächsten Schritte wurden von de Witt und Halley getan, die Tabellen für Rentenzahlungen aufstellten (1671, 1693).

[8] Der „strenge Jansenist" [d. h. Anhänger des niederländischen Theologen Cornelis Jansen (1585–1638)] — das ist Blaise Pascal. Man muß sagen, daß der zitierte Ausspruch von Poisson über die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einigen Punkten nicht ganz der Wahrheit entspricht. Der „Weltmann" de Méré frönte durchaus nicht nur dem Glücksspiel; er interessierte sich ernsthaft für die Wissenschaft, und sein Umgang mit Pascal ist nicht zufällig. Fragen, die mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses oder jenes Spielausganges bei verschiedenen Spielen zusammenhingen, wurden mehrmals in der mittelalterlichen Literatur vor jenem Zeitpunkt, da de Méré sich an Pascal wandte, gestellt und — mal richtig, mal falsch — gelöst. Insbesondere sind unter den unmittelbaren Vorläufern von Pascal und Fermat die Gelehrten Tartaglia und Galilei zu nennen. Die Lösung solcher Probleme konnte jedoch

[1]) Vgl. A. Rényi, *Briefe über die Wahrscheinlichkeit* (Budapest-Berlin 1969).

nur unter dem Einfluß ernsthafter Anforderungen der Praxis zum Anlaß für die Schaffung einer besonderen Theorie und später gar einer ganzen mathematischen Disziplin werden. Außer dem von Struik genannten Einfluß von Fragen des Versicherungswesens (die ersten Versicherungsgesellschaften bildeten sich im 14. Jahrhundert in Italien, Flandern und den Niederlanden, im 16. — 17. Jahrhundert war die Versicherung von Schiffen und die Feuerversicherung in fast allen Ländern Westeuropas verbreitet) stellten die Bevölkerungsstatistik und die Theorie der Auswertung von Beobachtungen verschiedene Aufgaben zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. All dies hängt natürlich mit der Herausbildung neuer ökonomischer Verhältnisse und mit neuen wissenschaftlichen Problemen zusammen. Nur dadurch konnte die Lösung von sich auf Glücksspiele beziehenden Problemen (Glücksspiele sind ja ein geeignetes und bis heute verwendetes Modell für die Analyse einer Reihe von Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie) systematisch die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich ziehen und so zu einem Anstoß für die Entwicklung einer neuen Wissenschaft werden. Das wird auch durch die Worte von Huygens in seinem oben erwähnten Buch „De ratiociniis in ludo aleae“ (über Berechnungen bei Glücksspielen) bestätigt: „. . . bei aufmerksamen Studium des Gegenstandes bemerkt der Leser, daß er sich nicht nur mit Spielen beschäftigt, sondern daß hier die Grundlagen einer tiefsinnigen und höchst interessanten Theorie gegeben werden.“ Vgl. im Zusammenhang damit das Buch: L. E. Maistrow, *Wahrscheinlichkeitstheorie. Historischer Abriß*, russisch, Moskau 1967).

Blaise Pascal war der Sohn von Etienne Pascal, einem der mit Mersenne korrespondierenden Gelehrten; die „Pascalsche Schnecke“ wird nach Etienne benannt. Blaise entwickelte sich unter der Obhut seines Vaters sehr schnell und entdeckte bereits im Alter von sechzehn Jahren den „Pascalschen Satz“ über das einem Kegelschnitt einbeschriebene Sechseck. Er wurde 1641 auf einer einzigen Seite veröffentlicht und ließ den Einfluß von Desargues erkennen. Ein paar Jahre später erfand Pascal eine Rechenmaschine. Mit fünfundzwanzig Jahren faßte er den Entschluß, in den Konvent von Port Royal einzutreten und das asketische Leben eines Jansenisten zu führen, widmete sich aber auch weiterhin der Wissenschaft und Literatur. Seine Abhandlung über das von den Binomialkoeffizienten gebildete „arithmetische Dreieck“, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützliche Anwendungen findet, erschien postum im Jahre 1664. Wir haben schon sein Werk über Integration und seine Gedanken über das Infinitesimale, die einen Einfluß auf Leibniz ausübten, erwähnt. Pascal hat auch dem Prinzip der vollständigen Induktion eine befriedigende Form gegeben.[1])

Gérard Desargues war ein Architekt aus Lyon und Verfasser eines Buches über Perspektive (1636). Seine Schrift mit dem merkwürdigen Titel „Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan“[2]) (1639) enthält in merkwürdiger botanischer Sprache einige der Hauptbegriffe der synthetischen Geometrie, wie z.B. unendlich ferne Punkte, Involutionen und Polarentheorie. Sein „Satz des Desargues“ über perspektiv gelegene Dreiecke wurde im Jahre 1648 veröffentlicht. Diese Ideen entfalteten ihr volle Fruchtbarkeit erst im neunzehnten Jahrhundert.

---

[1]) H. Freudenthal, Arch. intern. Hist. Sciences *22* (1953), 17—37. Vgl. aber N. L. Rabinovitch, Arch. History Exact Sci. *6* (1970), 237—248; R. Rashed, ibid. *9* (1972), 1—21.

[2]) Erster Entwurf der Skizze eines Versuches, die Ereignisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene zu erfassen.

6.7. I. Newton und die Theorie der Fluxionen

Eine allgemeine Methode der Differentiation und Integration, die in voller Erkenntnis der Tatsache, daß jeder dieser beiden Prozesse das Inverse des anderen bedeutet, abgeleitet wurde, konnte nur von Männern entdeckt werden, die sowohl die geometrische Methode der Griechen und von Cavalieri als auch die algebraische Methode von Descartes und Wallis beherrschten. Solche Männer konnten erst nach 1660 in Erscheinung treten, und sie traten tatsächlich in Gestalt von Newton und Leibniz auf. Viel ist schon über die Priorität der Entdeckung geschrieben worden, aber es ist heute klargestellt, daß beide Forscher ihre Ergebnisse unabhängig voneinander gefunden haben. Newton besaß die Differential- und Integralrechnung zuerst (Newton 1665/66, Leibniz 1673/76, aber Leibniz veröffentlichte sie zuerst (Leibniz 1684/86, Newton 1704/36). Die Leibnizsche Darstellungsweise war wesentlich eleganter als die von Newton.

Isaac Newton war der Sohn eines Hofbesitzers in Lincolnshire in England. Er studierte in Cambridge bei Isaac Barrow, der die Lucasische Professur im Jahre 1669 aufgab. Newton erhielt das Amt und blieb bis 1696 in Cambridge, als er die Stellung eines Aufsehers und später des Präsidenten der Münze annahm. Seine überragende Autorität geht in erster Linie auf seine „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) zurück, ein einzigartiges Werk, das der Mechanik eine axiomatische Grundlage gibt und das Gravitationsgesetz enthält — das Gesetz, nach dem ein Apfel zur Erde fällt und das den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält. Er zeigte durch strenge mathematische Beweisführung, wie die empirisch aufgestellten Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung durch das Gravitationsgesetz der reziproken Quadrate erklärt werden konnten, und lieferte eine dynamische Erklärung vieler Tatsachen der Bewegung schwerer Körper und der Gezeiten. Er löste das Zweikörperproblem für Kugeln und legte den Grundstein zu einer Theorie der Mondbewegung. Durch die Lösung des Problems der Massenanziehung von Kugeln schuf er auch die Grundlage der Potentialtheorie. Seine axiomatische Darstellung erforderte die Annahme des absoluten Raumes und der absoluten Zeit.

Die geometrische Form der Beweise ließ kaum erkennen, daß der Autor im vollen Besitz der Differential- und Integralrechnung war, die er „Theorie der Fluxionen“ nannte. Newton entdeckte seine allgemeine Methode in den Jahren 1665/66, als er in seinem Geburtsort auf dem Lande weilte, um sich vor der Pest zu schützen, die Cambridge heimsuchte. Aus dieser Zeit stammen auch seine grundlegenden Ideen über die allgemeine Gravitation sowie über die Zusammensetzung des Lichts. „In der Geschichte der Wissenschaft sind keine anderen Beispiele großer Leistungen bekannt, die mit denen von Newton während jener beiden goldenen Jahre verglichen werden könnten“, bemerkt Professor More.[1])

Newtons Entdeckung der „Fluxionen“ hing sehr eng mit seinem Studium der unendlichen Reihen in Wallis' „Arithmetica“ zusammen. So kam er darauf, den binomischen Satz auf gebrochene und negative Exponenten zu verallgemeinern, und wurde zur Entdeckung der binomischen Reihe geführt. Dies wiederum half ihm

[1]) L. T. More, *Isaac Newton, A Biography* (New York-London 1934), S. 41.

sehr bei der Ausarbeitung seiner Theorie der Fluxionen für „alle" Funktionen, sowohl algebraische als auch transzendente. Eine „Fluxion", die durch einen über den Buchstaben gesetzten Punkt ausgedrückt wurde („punktierte Buchstaben"), war ein endlicher Wert, eine Geschwindigkeit; die Buchstaben ohne den Punkt stellten „Fluenten" dar.

Nachstehend ein Beispiel dafür, in welcher Weise Newton seine Methode erklärte („Methode der Fluxionen", 1736): Die Variablen für Fluenten werden mit v, x, y, z, ... bezeichnet, „und die Geschwindigkeiten, mit denen jede Fluente durch ihre Bewegung vergrößert wird (die ich Fluxionen oder einfach Geschwindigkeiten nennen will), werde ich durch dieselben (punktierten) Buchstaben bezeichnen, also $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$". Die infinitesimalen Größen werden bei Newton „Momente der Fluxionen" genannt und durch $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$ bezeichnet, wobei o „eine unendlich kleine Größe" ist. Newton fährt dann fort:

„So sei eine beliebige Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ gegeben. Man setze darin $x + \dot{x}o$ für x, $y + \dot{y}o$ für y und erhält dann

$$\begin{aligned} &x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o + axy + ay\dot{x}o \\ &\quad + a\dot{x}o\dot{y}o + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 = 0. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Voraussetzung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, so daß sich nach Streichung dieser Größen und Division des verbleibenden Ausdrucks durch o ergibt:

$$\begin{aligned} &3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o \\ &\quad -3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0. \end{aligned}$$

Da aber o als unendlich klein vorausgesetzt wird, so daß es Momente von Größen darstellen kann, ergeben die damit multiplizierten Ausdrücke im Vergleich zu den übrigen nichts. Ich lasse sie deshalb weg, und es bleibt übrig:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ay\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0."$$

Dieses Beispiel zeigt, daß Newton unter seinen Ableitungen in erster Linie Geschwindigkeiten verstand, es zeigt aber auch, daß in seiner Ausdrucksweise eine gewisse Unbestimmtheit lag. Bedeuten die Symbole „o" Nullen? Sind es infinitesimale Größen? Oder sind es endliche Größen? Newton hat versucht, seinen Standpunkt durch die Theorie der „ersten und letzten Verhältnisse" zu erklären, die er in den „Principia" einführte und die den Limesbegriff enthielt, aber in einer solchen Form, daß er nur sehr schwer zu verwenden war.

„Jene letzten Verhältnisse, die sich aus verschwindenden Größen ergeben, sind in Wahrheit nicht die Verhältnisse von letzten Größen, sondern Grenzwerte, gegen welche die Verhältnisse von unbegrenzt abnehmenden Größen stets konvergieren und denen sie sich mehr nähern als bis auf eine beliebig vorgegebene Differenz, die sie aber nie überschreiten noch wirklich erreichen, bis die Größen unendlich klein geworden sind" (Principia I, Sect. I, letzte Anmerkung).

„Größen und das Verhältnis von Größen, die in beliebiger endlicher Zeit unaufhörlich der Gleichheit zustreben und sich vor Ablauf dieser Zeit näherkommen als bis auf eine beliebig vorgegebene Differenz, werden zuletzt gleich" (Principia I, Sect. I, Lemma I).

Das war durchaus nicht klar, und die Schwierigkeiten, die mit dem Verständnis der Newtonschen Theorie der Fluxionen verknüpft waren, führten zu vielen Verwirrungen und zu scharfer Kritik durch Bischof Berkeley im Jahre 1734. Die Mißverständnisse wurden erst beseitigt, als der moderne Grenzwertbegriff einwandfrei entwickelt worden war.

Newton schrieb auch über Kegelschnitte und ebene kubische Kurven. In dem Werk „Enumeratio linearum tertii ordinis" (1704) gab er eine Klassifikation der ebenen kubischen Kurven in 72 Arten, wobei er sich auf seinen Satz stützte, daß jede derartige Kurve aus einer „divergenten Parabel" $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ durch Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere Ebene erhalten werden kann. Das war das erste bedeutsame Ergebnis, das durch Anwendung der Algebra auf die Geometrie erzielt wurde, da alle vorangehenden Arbeiten lediglich die Übersetzung des Apollonius in die Ausdrucksweise der Algebra darstellten. Eine andere Leistung von Newton war seine Methode zur genäherten Bestimmung der Wurzeln von Zahlengleichungen, die er an dem Beispiel $x^3 - 2x - 5 = 0$ auseinandersetzte, wobei sich $x = 2{,}09455147$ ergibt.

Die Schwierigkeit, den Einfluß Newtons auf seine Zeitgenossen richtig einzuschätzen, beruht auf der Tatsache, daß er ständig zögerte, seine Entdeckungen zu veröffentlichen. Er prüfte das Gesetz der allgemeinen Massenanziehung zuerst in den Jahren 1665/66, machte es aber nicht eher bekannt, als bis er das Manuskript des größten Teils der „Principia" an den Drucker gab (1686). Seine „Arithmetica universalis", die seine von 1673—1683 gehaltenen Algebravorlesungen enthielt, wurde 1707 veröffentlicht. Sein Werk über Reihen, das aus dem Jahre 1669 stammt, wurde 1676 in einem Brief an Oldenburg angekündigt und erschien 1711 im Druck. Seine Quadratur der Kurven aus dem Jahre 1693 wurde erst 1704 veröffentlicht: hier wurde die Theorie der Fluxionen zum erstenmal der Fachwelt vorgelegt. Seine „Methode der Fluxionen" selbst erschien erst nach seinem Tode im Jahre 1736.

6.8. G. W. Leibniz und sein Kalkül der Infinitesimalrechnung

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde in Leipzig geboren und verbrachte den größten Teil seines Lebens am Hofe von Hannover im Dienst der Herzöge, von denen einer unter dem Namen Georg I. König von England wurde. Leibniz war in seiner Denkweise mehr universal eingestellt als die anderen großen Denker seines Jahrhunderts; neben Philosophie befaßte er sich mit Geschichte, Theologie, Sprachwissenschaften, Biologie, Geologie, Mathematik, Diplomatie und mit der Kunst, Erfindungen zu machen. Er war einer der ersten nach Pascal, der eine Rechenmaschine erfand; er faßte den Gedanken an Dampfmaschinen, studierte chinesische Philosophie und versuchte, die Einheit Deutschlands zu fördern. Dieses Suchen nach einer universellen Methode, mit der man Wissen erlangen, Erfindungen machen und das Wesen der Einheit des Universums verstehen konnte, war die Haupttriebfeder seines Lebens. Die „Scientia generalis", die er auszubauen versuchte, besaß viele Seiten, und einige von ihnen führten Leibniz zu mathematischen Entdeckungen. Sein Forschen nach einer „characteristica generalis" führte zu Permutationen, Kombinationen und zur symbolischen Logik; sein Suchen nach einer „lingua universalis", in der alle

Fehler des Denkens in Gestalt von Rechenfehlern erscheinen sollten, führte nicht nur zur symbolischen Logik, sondern auch zu vielen Neuerungen in mathematischen Bezeichnungen. Leibniz war einer der größten Erfinder mathematischer Symbole. Wenige Menschen haben die Einheit von Form und Inhalt so gut verstanden. Seine Erfindung des „Kalküls" muß auf diesem philosophischen Hintergrund verstanden werden; sie war das Ergebnis seines Forschens nach einer „lingua universalis" der Veränderung und insbesondere der Bewegung.

Leibniz fand seinen Kalkül zwischen 1673 und 1676 in Paris unter dem persönlichen Einfluß von Huygens und durch das Studium von Descartes und Pascal. Er wurde dazu durch die Nachricht angeregt, daß Newton im Besitz einer solchen Methode sein sollte. Während Newtons Vorgehen in erster Linie kinematisch orientiert war, war das von Leibniz geometrischer Natur; er dachte in der Sprache des „charakteristischen Dreiecks" (dx, dy, ds), das schon in mehreren anderen Schriften aufgetaucht war, besonders bei Pascal und in Barrows „Geometrical Lectures" von 1670.[1]) Die erste Veröffentlichung der Leibnizschen Form der Differential- und Interechnung geschah 1684 in einem sechs Seiten langen Artikel in den „Acta Eruditorum", einer mathematischen Zeitschrift, die 1682 gegründet worden war. Die Arbeit hatte den charakteristischen Titel „Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitatas moratur, et singulare pro illi calculi genus"[2]). Es war eine trockene und dunkle Darlegung, aber sie enthielt unsere Symbole dx, dy und die Differentiationsregeln einschließlich $d(uv) = udv + vdu$ und des Differentials für den Quotienten sowie die Bedingung $dy = 0$ für Extremwerte und $d^2y = 0$ für Wendepunkte. Dieser Arbeit folgte 1686 eine weitere mit den Regeln der Integralrechnung, die das Symbol $\int$ enthielt (sie war in Form einer Buchbesprechung geschrieben). Sie drückte die Gleichung der Zykloide wie folgt aus:

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Eine ungewöhnlich fruchtbare Periode mathematischer Schaffenskraft wurde durch die Veröffentlichungen dieser Arbeiten eingeleitet. Nach 1687 war Leibniz eng mit den Brüdern Bernoulli verbunden, die seine Methoden begierig aufnahmen. Noch vor 1700 hatten diese Männer das meiste von dem gefunden, was heute den Studenten in der Differential- und Integralrechnung geboten wird, dazu aber wichtige Teile höherer Gebiete einschließlich der Lösung einiger Probleme aus der Variationsrechnung. 1696 erschien das erste Lehrbuch über Differential- und Integralrechnung, die „Analyse des infiniment petits" des Marquis de l'Hospital, eines Schülers von Johann Bernoulli, ein Werk, das sich auf die Bernoullischen Vor-

[1]) Der Ausdruck „triangulum characteristicum" scheint zuerst von Leibniz gebraucht worden zu sein, der ihn bei der Lektüre von Pascals *Traité des sinus du quart de cercle* fand, der einen Teil seiner Dettonville-Briefe (1658) bildete. Er war schon in Snellius' *Tiphys Batavus* (1624), S. 22–25, aufgetreten.

[2]) „Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten, die durch gebrochene und irrationale Werte nicht beeinträchtigt wird, und eine merkwürdige Art des Kalküls dafür."

lesungen über den Differentialkalkül stützt. Dieses Buch enthält die sogenannte „l'Hospitalische Regel" zur Bestimmung des Grenzwertes eines Quotienten, bei dem Zähler und Nenner beide gegen Null gehen.[1])
Unsere Bezeichnungen in der Differential- und Integralrechnung gehen auf Leibniz zurück, sogar die Namen „calculus differentialis" und „calculus integralis"[2]). Unter seinem Einfluß wird das Zeichen $=$ für die Gleichheit und der Malpunkt für die Multiplikation verwendet. Auch die Ausdrücke „Funktion" und „Koordinaten" gehen auf Leibniz zurück, ebenso wie der bildhafte Ausdruck „Oskulieren". Die Reihen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots,$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

werden nach Leibniz benannt, obwohl ihm nicht die Priorität ihrer Entdeckung gebührt. (Sie scheint auf James Gregory, einen vielversprechenden schottischen Mathematiker, zurückzugehen, der auch versuchte, die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal zu beweisen. Gregory studierte von 1664 bis 1668 im Ausland, insbesondere in Padua, und war von 1668 bis zu seinem Tode im Jahre 1675 Professor in St. Andrews. Seine Briefe und die drei Bücher, die er in Italien schrieb, u. a. die *Exercitationes mathematicae* (1668), zeigen große Originalität in der Behandlung infinitesimaler Prozesse. Er fand die Binomialreihe (1670) und 1675 sogar die Taylorsche Reihe. Hätte er länger gelebt, so wäre er wohl mit Newton und Leibniz als Erfinder der Infinitesimalrechnung bekannt geworden.)
Die Leibnizsche Erklärung der Grundlagen des neuen Kalküls litt unter derselben Unbestimmtheit wie die Newtonsche. Manchmal waren seine dx, dy endliche Größen, manchmal aber Größen, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch nicht Null waren. Mangels strenger Definition gab er Analogien an und verwies auf die Beziehung zwischen dem Radius der Erde und der Entfernung der Fixsterne. Er bediente sich unterschiedlicher Verfahren bei der Behandlung von Fragen, die das Unendliche betreffen; in einem seiner Briefe (an Foucher, 1693) nahm er die Existenz des aktual Unendlichen an, um die Schwierigkeiten von Zeno zu überwinden, und lobte Grégoire de Saint Vincent, der die Stelle berechnet hatte, wo Achilles die Schildkröte trifft. Und ebenso, wie Newtons Unbestimmtheit die Kritik von Berkeley hervorrief, so verursachte die Leibnizsche Unbestimmtheit den Widerspruch von Bernhard Nieuwentijt, der Bürgermeister von Purmerend in der Nähe von Amsterdam war (1694). Sowohl die Kritik von Berkeley als auch die von Nieuwentijt hatte ihre Berechtigung, aber sie waren völlig negativ. Sie vermochten nicht, eine strenge Begründung für den Kalkül zu liefern, jedoch gaben sie die Anregung zu weiterer schöpferischer Arbeit, besonders die beißende Kritik von Berkeley.

[1]) Diese Regel stammt von Johann Bernoulli, der sie in einem Brief von 1694 mitgeteilt hat: J. Bernoulli, *Briefwechsel* I (Basel 1955), S. 235.

[2]) Leibniz schlug zuerst den Namen „calculus summatorius" vor, aber 1696 einigten sich Leibniz und Johann Bernoulli auf den Namen „calculus integralis". Die moderne Analysis ist zum früheren Fachausdruck von Leibniz zurückgekehrt. Siehe außerdem: F. Cajori, *Leibniz, the Master Builder of Mathematical Notations*, Isis 7 (1925), 412–429.

Literatur

Die gesammelten Werke von Kepler, Descartes, Mersenne, Pascal, Huygens, Galilei, Torricelli und Fermat sind in modernen Ausgaben erhältlich, die von Leibniz in einer etwas älteren (unvollständigen) und die von Newton in einer sogar noch älteren (gleichfalls unvollständigen) Ausgabe, letztere auch in einer neueren Ausgabe in russischer Sprache. Jetzt aber ist mit der Herausgabe aller Newtonschen mathematischen Arbeiten mit vorzüglichen Einführungen ein Anfang gemacht. Erschienen ist:

Correspondence of Isaac Newton, herausgegeben von H. W. Turnbull und J. F. Scott (4 Bände, Cambridge 1959–1974).

The mathematical papers of Isaac Newton, herausgegeben von D. T. Whiteside mit M. A. Hoskin und A. Prag (4 Bände, London-New York 1967–71).

Geplant sind 8 Bände. Die ersten vier Bände gehen bis 1684.

I. Newton, *The mathematical principles of natural philosophy* (*translated by A. Motte, 1728*), herausgegeben mit einer Einführung von I. B. Cohen (2 Bände, London 1968).

I. Newton, *Mathematical principles of natural philosophy* (*translated by R. Thorp, 1765*), Nachdruck mit einer Einführung von I. B. Cohen (London 1969).

I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica, the Third Edition* (*1726*) *with variant readings* (2 Bände, herausgegeben von I. B. Cohen, Cambridge, Mass., 1972).

The mathematical works of Isaac Newton, herausgegeben von D. T. Whiteside (2 Bände, New York-London 1964/1967).

Enthält alle bereits früher publizierten mathematischen Arbeiten in englischer Übersetzung.

Zur Entdeckung der Differential- und Integralrechnung siehe:

C. B. Boyer, *The History of the Calculus* (New York 1959), besonders Kap. IV und V. Dieses Buch enthält eine große Bibliopraphie.

G. Castelnuovo, *Le origine del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Bologna 1938, 2. Ausgabe Mailand 1962).

Über den historischen und technischen Hintergrund:

H. Großmann, *Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur*, Z. Sozialforschung *4* (1935), 161–231.

R. K. Merton, *Science, Technology and Society in the Seventeenth Century*, Osiris *4* (1938).

Über die führenden Mathematiker:

J. F. Scott, *The Mathematical Works of John Wallis D. D., F. R. S.* (London 1938).

A. Prag, *John Wallis. Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert*, Quellen und Studien *1* B (1930), 381–412.

Siehe auch T. P. Num, Math. Gaz. *5* (1910/1911).

C. J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis* (Wiesbaden 1966).

I. Barrow, *Geometrical lectures*, übersetzt und herausgegeben von J. M. Child (Chicago 1916).

A. E. Bell, *Christiaan Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century* (London 1948).

L. T. More, *Isaac Newton. A Biography* (New York-London 1934).

Siehe auch:

S. I. Wawilow, *Isaac Newton* (Übersetzung aus dem Russischen; Berlin 1951).

I. Newton, *Principia*. Englisch herausgegeben von F. Cajori (Universität von Kalifornien 1934). Auch eine deutsche Ausgabe existiert.

Sammlungen von Arbeiten über Newton sind veröffentlicht worden von der History of Science Soc. (Baltimore 1928), von der Math. Assoc. (London 1927) und von der Roy. Soc. (Cambridge 1947). Es existiert eine russische Gesamtausgabe der Werke Newtons.

Siehe auch H. W. Turnbull, *The Mathematical Discoveries of Newton* (Glasgow 1945).

J. M. Child, *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, übersetzt aus den lateinischen Texten (Chicago 1920).

J. E. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik* (München 1949). Andere Studien von J. E. Hofmann über Mathematiker des 17. Jahrhunderts sind den umfangreichen bibliographischen Angaben seiner auf S. XI erwähnten *Geschichte der Mathematik* zu entnehmen. Siehe auch seine Schriften.

Ein Verzeichnis der Schriften von J. E. Hofmann findet man in den *Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Gießen*, Heft 90 (1971), 51–73, und in C. J. Scriba, Historia mathematica *2* (1975), 147–152.

Frans van Schooten der Jüngere (Wiesbaden 1962).

Aus der Frühzeit der Infinitesimalmethoden, Arch. History Exact Sci. *2* (1964/1965), 271–343.

G. Milhaud, *Descartes savant* (Paris 1921).

R. Taton, *L'œuvre mathématique de G. Desargues* (Paris 1951).

M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat 1601–1665* (Princeton, N. J. 1973).

R. Taton, *L'œuvre de Pascal en géométrie projective*, Revue Histoire des Sciences *15* (1962), 197–252.

[H. W. Turnbull (Hrsg.)] *James Gregory tercentenary memorial volume* (London 1939).

Siehe auch M. Dehn — E. D. Hellinger, Amer. Math. Monthly *50* (1943), 149–163.

K. Haas, *Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde*, Centaurus *4* (1956), 235–284.

E. A. Fellman, *Die mathematischen Werke von Honoratius Fabri*, Physis *1* (1959), 1–54.

D. T. Whiteside, *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century*, Arch. History Exact Sci. *1* (1961), 179–388.

H. Bosmans (s. S. 106) veröffentlichte Arbeiten über: Tacquet [Isis *9* (1927–1928), 66–83], Stevin [Mathesis *37* (1923); Ann. Soc. Sci. Bruxelles 37 (1913), 171–199; Biographie nationale de Belgique], della Faille [Mathesis *41* (1927), 5–11], de Saint Vincent [Mathesis *38* (1924), 250–256].

O. Toeplitz, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I* (Berlin 1949).

Siehe weiterhin:

Paul Tannery, *Notions historiques*, in J. Tannery, *Notions de mathématiques* (Paris 1903), S. 324–348.

J. O. Fleckenstein, *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton* (Basel-Stuttgart 1956).

L. Auger, *Un savant méconnu, Giles Personne de Roberval* 1602–1675 (Paris 1962).

C. J. Scriba, *The inverse method of tangents. A dialogue between Leibniz and Newton* (1675–1677), Arch. History Exact Sci. *2* (1964–1965), 113–157.

T. E. Mulcrone, *A catalog of Jesuit mathematicians*, Bull. Amer. Ass. of Jesuit Scientists, Eastern States Division, *41* (1964), 83–90.

L. Couturat, *La logique de Leibniz* (Paris 1901).

L. Couturat, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (Paris 1903, Nachdruck Hildesheim 1961).

P. Montel, *Pascal mathematicien* (Paris 1951).

R. Dugas, *La mécanique au XVII^e siècle* (Neuchâtel 1954).

D. J. Struik, *Het land van Stevin en Huygens* (Amsterdam 1958).

O. B. Sheynin, *Newton and the classical theory of probability*, Arch. History Exact Sci. *7* (1971), 217–256.

J. A. Lohne, *Thomas Harriot als Mathematiker*, Centaurus *11* (1965), 19–45.

Siehe auch Arch. History Exact Sci. *3* (1966), 185–205.

H. J. M. Bos, *Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus* (Diss. Utrecht 1973), Arch. History Exact Sci. *14* (1974), 1–90.

O. B. Sheynin, *Early history of probability*, Arch. History Exact Sci. *17* (1977), 201–260.

M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus* (New York 1969).

E. Knoblauch, *The mathematical studies of G. W. Leibniz on combinatorics*, Historia mathematica *1* (1974), 409–430.

F. N. David, *Games, gods and gambling* (New York 1962).

P. van Geer, *Hugeniana geometrica I–XII*, Nieuw Archief voor Wiskunde *7* (1906) – *10* (1913).

7. Das achtzehnte Jahrhundert

7.1. Die Bedeutung der Akademien für die mathematische Arbeit

Im achtzehnten Jahrhundert konzentrierte sich die mathematische Produktivität auf die Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung auf die Mechanik. Die bedeutendsten Namen können in der Art eines Stammbaumes angeordnet werden, um ihre geistige Verwandtschaft anzudeuten:

Leibniz (1646–1716);

die Brüder Bernoulli: Jakob (1654–1705), Johann (1667–1748);

Euler (1707–1783);

Lagrange (1736–1813);

Laplace (1749–1827).

In enger Beziehung zu dem Werk dieser Männer stand die Tätigkeit einer Gruppe französischer Mathematiker, zu der insbesondere Clairaut, d'Alembert und Maupertuis gehörten, die ihrerseits mit den Philosophen der Aufklärung verbunden waren. Ihnen sind noch die Mathematiker Lambert und Daniel Bernoulli hinzuzurechnen. Die wissenschaftliche Tätigkeit konzentrierte sich gewöhnlich im Umkreis von Akademien, unter denen die von Paris, Berlin und Petersburg hervorragten. Der Universitätsunterricht spielte demgegenüber eine geringe oder gar keine Rolle. In dieser Zeit wurden einige der führenden Länder Europas von Despoten regiert, die man in beschönigender Manier aufgeklärt genannt hat, von Friedrich II., Katharina der Großen; auch Carlos III. und Ludwig XVI.können dazu gerechnet werden. Einen Teil ihres Anspruchs auf Ruhm leiteten diese Despoten aus ihrer Freude daran her, Gelehrte in ihrer Umgebung zu wissen. Diese Freude war eine Art von geistigem Snobismus, der dadurch etwas gemildert wurde, daß sie einiges von der wichtigen Rolle begriffen, welche die Naturwissenschaft und die angewandte Mathematik bei der Verbesserung der Produktion und der Erhöhung der Schlagkraft der Armee spielen konnten. Man hat beispielsweise gesagt, daß die Vortrefflichkeit der französischen Flotte auf der Tatsache beruhte, daß die Meister des Schiffbaus beim Bau von Fregatten und Linienschiffen teilweise mathematische Hilfsmittel herangezogen. Eulers Arbeiten sind voll von Anwendungen auf Fragen, die für Heer und und Flotte von Bedeutung sind. Die Astronomie spielte weiterhin unter königlicher und kaiserlicher Schirmherrschaft eine hervorragende Rolle bei Anregungen zu mathematischer Forschungarbeit.

7.2. Die Familie Bernoulli. Jakob Bernoulli

Basel in der Schweiz, seit 1263 freie Reichsstadt, war bereits seit langem ein Mittelpunkt der Gelehrsamkeit. Schon zur Zeit des Erasmus war die Basler Universität ein bedeutendes Zentrum. Wie in den Städten Hollands blühten auch in Basel Kunst und Wissenschaft unter der Herrschaft von Kaufmannspatriziern. Zu diesen Basler Patriziern gehörte die Kaufmannsfamilie der Bernoullis, die aus Antwerpen via Amsterdam im siebzehnten Jahrhundert nach Basel übergesiedelt war, nachdem ihre Heimatstadt von den Spaniern erobert worden war. Seit der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts bis in unsere Zeit hat diese Familie in jeder Generation Wissenschaftler hervorgebracht. Es ist tatsächlich schwierig, in der ganzen Geschichte der Wissenschaft eine Familie von vergleichbarer Höchstleistung zu finden.

Diese Höchstleistung beginnt mit zwei Mathematikern, Jakob und Johann Bernoulli. Jakob hatte Theologie, Johann Medizin studiert; als aber die Arbeiten von Leibniz in den „Acta eruditorum" erschienen, faßten beide den Entschluß, Mathematiker zu werden. Sie wurden die ersten bedeutenden Schüler von Leibniz. Im Jahre 1687 übernahm Jakob den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Basel, wo er bis zu seinem Tode (1705) lehrte. 1695 wurde Johann Professor in Groningen; nach dem Tode seines Bruders wurde er dessen Nachfolger auf dem Lehrstuhl in Basel, wo er dreiundvierzig Jahre, bis zu seinem Tode, blieb.

Jakob begann den Briefwechsel mit Leibniz im Jahre 1687. In beständigem Gedankenaustausch mit Leibniz und untereinander -- oftmals in heftiger Rivalität miteinander — entdeckten die beiden Brüder nach und nach die in der kühnen Pioniertat von Leibniz enthaltenen Schätze. Die Reihe ihrer Ergebnisse ist lang und enthält nicht nur vieles von dem, was man heute in unseren elementaren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung findet, sondern auch die Integration von vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Unter den Leistungen von Jakob sind zu nennen: die Verwendung von Polarkoordinaten, das Studium der Kettenlinie, die schon von Huygens und anderen diskutiert worden war, die Lemniskate (1694) und die logarithmische Spirale. 1690 fand er die sogenannte Isochrone, die von Leibniz 1687 als diejenige Kurve eingeführt worden war, längs der ein Körper mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fällt; sie ergab sich als semikubische Parabel. Jakob diskutierte auch isoperimetrische Figuren (1701), die auf ein Problem der Variationsrechnung führten. Die logarithmische Spirale, die die Eigenschaft besitzt, sich bei verschiedenen Transformationen zu reproduzieren (ihre Evolute ist wieder eine logarithmische Spirale, so daß beide Fußpunktkurve und Kaustik bezüglich des Pols sind), bereitete Jakob eine derartige Freude, daß er anordnete, diese Kurve mit der Inschrift „eadem mutata resurgo"[1]) solle auf seinem Grabstein eingemeißelt werden.

Jakob Bernoulli war auch einer der ersten Bearbeiter der Theorie der Wahrscheinlichkeit, worüber er die „Ars conjectandi" schrieb, die 1713 postum veröffentlicht wurde. Im ersten Teil dieses Buches ist die Huygenssche Abhandlung über die

[1]) „Ich bleibe dieselbe, auch wenn ich verändert werde." Die Spirale auf dem Grabstein sieht jedoch wie eine Archimedische Spirale aus.

Glücksspiele neu abgedruckt; die anderen Teile behandeln Permutationen und Kombinationen und erreichen ihren Höhepunkt im „Bernoullischen Theorem" über biomiale Verteilungen. Die „Bernoullischen Zahlen" erscheinen in diesem Buch bei einer Diskussion des Pascalschen Dreiecks.

7.3. Johann Bernoulli und seine Söhne

Das Werk von Johann Bernoulli war mit dem seines älteren Bruders eng verbunden, und es ist nicht immer leicht, die Ergebnisse dieser beiden Männer auseinanderzuhalten. Beide Brüder werden wegen ihrer Arbeit zum Problem der Brachystochrone häufig als Entdecker der Variationsrechnung angesehen. Das ist die (ebene) Kurve der kürzesten Fallzeit für einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluß des Schwerefeldes bewegt; sie wurde von Leibniz und den Bernoullis 1697 und in den folgenden Jahren studiert. In dieser Zeit fanden sie die Gleichung der Geodätischen auf einer Fläche.[1] Die Lösung des Problems der Brachystochrone ist die Zyklode. Diese Kurve liefert auch die Lösung des Problems der Tautochrone, d. h. derjenigen Kurve, längs der ein Massenpunkt im Gravitationsfeld den tiefsten Punkt nach einer von seinem Startpunkt unabhängigen Zeit erreicht. Huygens hatte diese Eigenschaft der Zykloide entdeckt und sie bei der Konstruktion von tautochronen Pendeluhren verwendet (1673), bei denen die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude ist.
Unter den anderen Bernoullis, die die Entwicklung der Mathematik beeinflußt haben, befinden sich zwei Söhne von Johann, Nikolaus und vor allem Daniel.[2] Nikolaus wurde nach Petersburg berufen, das erst wenige Jahre vorher von dem Zaren Peter dem Großen gegründet worden war; er starb nach kurzer Zeit. Das Problem aus der Theorie der Wahrscheinlichkeit, das er während seines Aufenthaltes in dieser Stadt stellte, ist als „Petersburger Problem" (oder, dramatischer gesagt, „Paradoxon") bekannt. Dieser Sohn von Johann starb in jungen Jahren, aber der andere, Daniel, erreichte ein hohes Alter. Bis 1777 war er Professor an der Universität Basel. Daniels reiche wissenschaftliche Tätigkeit war in der Hauptsache der Astronomie, Physik und Hydrodynamik gewidmet. Seine „Hydrodynamica" erschien 1738, und einer der darin aufgestellten Sätze über den hydraulischen Druck trägt seinen Namen. Im gleichen Jahr stellte er die kinetische Gastheorie auf; mit

[1] Newton hatte schon in einer Anmerkung der „Principia" (II, Satz 35) die Form eines Rotationskörpers diskutiert, der bei der Bewegung in einer Flüssigkeit den geringsten Widerstand erfährt. Er veröffentlichte aber keinen Beweis seiner Behauptungen.

[2]

Nikolaus Bernoulli

Jakob (1654—1705)
„Ars conjectandi"

Johann (1667—1748)
„Brachystochrone"

Nikolaus (1695—1726)
„Petersburger Problem"

Daniel (1700—1782)
„Hydrodynamik'

d'Alembert und Euler entwickelte er die Theorie der schwingenden Saite. Während sein Vater und sein Onkel die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelten, leistete Daniel auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen Pionierarbeit.

7.4. Das Werk L. Eulers

Aus Basel stammte auch der produktivste Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts — wenn nicht aller Zeiten —, Leonhard Euler. Sein Vater studierte Mathematik bei Jakob Bernoulli und Leonhard bei Johann. Als Johanns Sohn Nikolaus 1725 nach Petersburg reiste, folgte ihm der junge Euler und blieb bis 1741 an der dortigen Akademie. Von 1741 bis 1766 arbeitete Euler an der Berliner Akademie, die unter der besonderen Schirmherrschaft Friedrichs II. stand; von 1766 bis 1883 war er wieder in Petersburg, nunmehr unter der Ägide der Kaiserin Katharina. Er heiratete zweimal und hatte dreizehn Kinder. Das Leben dieses Akademikers des achtzehnten Jahrhunderts war fast ausschließlich den verschiedenen Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik gewidmet. Obwohl er 1735 das eine und 1766 das zweite Auge verlor, konnte nichts seine enorme Produktivität unterbrechen. Der erblindete Euler, der über ein phänomenales Gedächtnis verfügte, fuhr fort, seine Entdeckungen zu diktieren. Während seines Lebens erschienen 530 Bücher und Arbeiten; bei seinem Tode hinterließ er viele Manuskripte, die während der nächsten siebenundvierzig Jahre von der Petersburger Akademie veröffentlicht wurden. (Damit erhöhte sich die Anzahl seiner Werke auf 771, aber durch Nachforschungen von Gustav Eneström wurde die Liste auf 886 ergänzt.)
Euler lieferte in allen Gebieten der Mathematik, die zu seiner Zeit existierten, maßgebliche Beiträge. Er veröffentlichte seine Ergebnisse nicht nur in Einzelarbeiten von verschiedener Länge, sondern auch in einer eindrucksvollen Zahl von großen Lehrbüchern, die das während der früheren Zeiten gesammelte Material ordneten und geschlossen darstellten. Auf einigen Gebieten war die Eulersche Darstellung so gut wie endgültig. Ein Beispiel dafür ist unsere heutige Trigonometrie mit ihrer Auffassung der trigonometrischen Werte als Verhältniszahlen und ihrer üblichen Schreibweise, die aus Eulers „Introductio in analysin infinitorum" (1748) stammt. Das überragende Ansehen seiner Lehrbücher bereinigte viele strittige Bezeichnungsfragen der Algebra und Infinitesimalrechnung für immer; Lagrange, Laplace und Gauß kannten Euler und übernahmen seine Bezeichnungen in allen ihren Werken.
Die „Introductio" von 1748 enthält in ihren zwei Bänden eine Vielzahl von verschiedenen Gegenständen. Sie gibt eine Darstellung der unendlichen Reihen einschließlich derjenigen für e^{ix}, $\sin x$ und $\cos x$ und die Relation $e^x = \cos x + i \sin x$ (die schon von Johann Bernoulli und anderen in verschiedenen Formen entdeckt worden war). Kurven und Flächen werden mit Hilfe ihrer Gleichungen so gewandt untersucht, daß man die „Introductio" als die erste lehrbuchmäßige Darstellung der analytischen Geometrie betrachten kann. Auch eine algebraische Eliminationstheorie ist darin enthalten. Zu den reizvollsten Teilen dieses Buches gehören das

Kapitel über die Zetafunktion und ihre Beziehung zur Theorie der Primzahlen ebenso wie das Kapitel über die „partitio numerorum".[1])

Ein anderes großes und reichhaltiges Lehrbuch war Eulers Werk „Institutiones calculi differentialis" (1755), dem weitere drei Bände der „Institutiones calculi integralis" (1768—1774) folgten. Hier findet man nicht nur unsere elementare Differential und Integralrechnung, sondern auch eine Theorie der Differentialgleichungen, den Satz von Taylor mit zahlreichen Anwendungen, die Eulersche Summenformel und die Eulerschen Γ- und B-Integrale. Der Abschnitt über Differentialgleichungen mit seiner Unterscheidung zwischen „linearen", „exakten" und „homogenen" Gleichungen dient noch heute als Muster unserer elementaren Lehrbücher.

Eulers „Mechanica, sive motus scientia analytice exposita" (1736) war das erste Lehrbuch, in dem die Newtonsche Dynamik des Massenpunktes mit analytischen Methoden entwickelt wurde. Ein Lehrbuch von 1765 enthält die Eulersche Gleichung für einen um einen Punkt rotierenden Körper. Die „Vollständige Anleitung zur Algebra" (1770), die deutsch geschrieben und einem Diener diktiert wurde, ist zum Vorbild für viele spätere Lehrbücher der Algebra geworden. Sie führt bis zur Theorie der kubischen und biquadratischen Gleichungen und zu unbestimmten Gleichungen.

Im Jahre 1744 erschien Eulers „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes". Das war die erste Darstellung der Variationsrechnung; sie enthielt die Eulersche Differentialgleichung mit vielen Anwendungen einschließlich der Entdeckung, daß das Katenoid und die Schraubenfläche Minimalflächen sind. Viele andere Resultate von Euler finden sich in seinen kleineren Arbeiten, die manchen sogar heute wenig bekannten Edelstein enthalten. Zu den wohlbekannten Entdeckungen gehören der Eulersche Polyedersatz, der die Anzahl der Ecken (E), Kanten (K) und Flächen (F) eines geschlossenen Polyeders verknüpft ($E + F - K = 2$)[2]), die Eulersche Gerade im Dreieck, die Kurven konstanter Breite (Euler nannte sie orbiforme Kurven) und die Eulersche Konstante C:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0{,}5772156\ldots$$

Einige Arbeiten sind mathematischen Unterhaltungen gewidmet (das Königsberger Brückenproblem, Rösselsprünge). Eulers Beiträge zur Zahlentheorie würden allein hinreichen, um ihm eine Nische in der Ruhmeshalle zu sichern; zu seinen Entdeckungen auf diesem Gebiet gehört das quadratische Reziprozitätsgesetz.

Ein großer Teil der Tätigkeit von Euler war der Astronomie gewidmet, wo die Mondtheorie, ein wichtiger Sonderfall des Dreikörperproblems und auch für die Lösung der uralten Frage der Längenbestimmung von Bedeutung, seine besondere Aufmerksamkeit auf sich zog. Die „Theoria motus planetarum et cometarum" (1774) ist eine Abhandlung über Himmelsmechanik. Verwandt mit dieser Arbeit war Eulers Studium der Anziehung von Ellipsoiden (1738).

Euler hat Bücher über Hydraulik, Schiffbau und Artillerie geschrieben. 1769 bis 1771 erschienen drei Bände einer „Dioptrica" mit einer Theorie des Strahlenver-

[1]) Siehe A. Speisers Vorrede zur *Introductio* in: Euler, *Opera* I, 9 (1945).
[2]) Er war schon Descartes bekannt: *Œuvres* (C. Adam et P. Tannery) X, S. 257—276.

laufs beim Durchgang durch ein Linsensystem. Im Jahre 1739 erschien seine neue Theorie der Musik, von der man gesagt hat, daß sie zu musikalisch für Mathematik und zu mathematisch für Musiker sei. Eulers philosophische Darlegung der wichtigsten Probleme der Naturwissenschaft in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin" (1760/61 geschrieben) sind ein Musterbeispiel einer populären Darstellung geblieben.

Die enorme Fruchtbarkeit Eulers bildet eine ständige Quelle der Überraschung und Bewunderung für jeden, der versucht hat, sein Werk zu studieren, übrigens eine Aufgabe, die nicht so schwierig ist, wie sie scheint, denn Eulers Latein ist sehr einfach, und seine Bezeichnungen sind fast modern — oder vielleicht sollte man besser sagen, daß die heutigen Bezeichnungen fast die gleichen wie bei Euler sind! Man kann eine lange Liste der bekannten Entdeckungen aufstellen, bei denen Euler die Priorität besitzt, und eine weitere Liste von Ideen, die es noch verdienen, bearbeitet zu werden. Große Mathematiker haben stets ihre Schuld gegenüber Euler betont. Laplace pflegte zu jüngeren Mathematikern zu sagen „Lisez Euler, c'est notre maître à tous." (Lest Euler, er ist unser aller Meister.) Und Gauß drückte sich etwas gewichtiger so aus: „Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden." Riemann kannte Eulers Werke sehr gut, und einige seiner tiefschürfenden Werke haben einen Eulerschen Zug. Verleger könnten wohl Schlimmeres tun, als Übersetzungen von einigen Werken Eulers unter Beifügung moderner Kommentare herauszubringen.

7.5. Schwierigkeiten bei der Begründung der Infinitesimalrechnung

Es ist recht lehrreich, nicht nur einige von Eulers Beiträgen zur Wissenschaft darzulegen, sondern auch einige seiner Schwächen. Unendliche Prozesse wurden im achtzehnten Jahrhundert noch unsorgfältig gehandhabt, und vieles in den Werken der führenden Mathematiker jener Zeit mutet uns wie ein abenteuerlich-enthusiastisches Experimentieren an. Dieses Experimentieren betraf unendliche Reihen, unendliche Produkte und Integrationen sowie den Gebrauch solcher Symbole wie 0, ∞, $\sqrt{-1}$. Kann man manchen von Eulers Schlüssen heute zustimmen, so kommen auch andere vor, denen gegenüber wir Vorbehalte machen müssen. Wir stimmen beispielsweise Eulers Feststellung zu, daß $\log n$ unendlich viele Werte besitzt, die alle komplex sind, außer dann, wenn n positiv ist, in welchem Falle einer der Werte reell ist. Euler kam zu dieser Schlußfolgerung in einem Brief an d'Alembert (1747), der behauptet hatte, daß $\log(-1) = 0$ ist. Aber wir können Euler darin nicht folgen, wenn er

$$1 - 3 + 5 - 7 + - \ldots = 0$$

setzt oder wenn er aus

$$n + n^2 + \ldots = \frac{n}{1-n} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{n}{n-1}$$

auf

$$\cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0$$

schließt.
Doch man muß Zurückhaltung üben und sollte Euler wegen seiner Art, mit unendlichen Reihen umzugehen, nicht zu vorschnell kritisieren; er verwendete einfach nicht immer einige unserer heutigen Konvergenz- oder Divergenzkritierien als Richtschnur für die Gültigkeit der von ihm behandelten Reihen. Viele der von ihm durch unbekümmertes Arbeiten mit Reihen gewonnenen Ergebnisse sind durch die moderne Mathematik in strenger Weise umgedeutet und gerechtfertigt worden.

[9] Es ist Grund genug gegeben, bei der „Rehabilitierung" der Arbeiten von Euler, die sich auf Reihentheorie beziehen, noch weiter zu gehen. Euler ging in der Regel von dem Prinzip aus: „Die Summe jeder (unendlichen) Reihe ist der Wert desjenigen (endlichen) Ausdrucks, durch dessen Entwicklung diese Reihe entsteht." Dieses Prinzip rief auch bei den Zeitgenossen Eulers Einwände hervor. So ist uns ein Briefwechsel eines der Opponenten — Nikolaus Bernoulli — mit Euler erhalten (aus dem Jahre 1743), in dem dieses Prinzip erörtert wird. Ohne Beispiele anzugeben, behauptete N. Bernoulli, daß man ein und dieselbe Reihe durch Entwicklung verschiedener Ausdrücke erhalten kann. Folglich müßte man ihr im allgemeinen nach dem Prinzip von Euler gleichzeitig verschiedene Werte zuschreiben. Euler blieb bei der Behauptung, daß „niemals ein und dieselbe Reihe durch Entwicklung zweier wesentlich verschiedener endlicher Ausdrücke gewonnen werden kann" (Brief an Goldbach aus dem Jahre 1745), und er hatte recht, weil er nur Potenzreihen im Auge hatte und seine „endlichen Ausdrücke" analytische Funktionen waren. In der Auffassung dessen, was man unter einer Reihensumme überhaupt verstehen soll, kam Euler dem weiterreichenden Standpunkt der Mathematik des 20. Jahrhunderts näher als der „Weierstraßschen Strenge" der Mathematiker in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Er glaubte, daß „jede series einen bestimmten Wert haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Wert nicht mit dem Namen der Summe belegt werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die Summe durch eine wirkliche Summierung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht stattfindet. . .". G. H. Hardy zitiert diese Worte Eulers und bemerkt dazu: „Das ist fast die Sprache, der sich Cesàro oder Borel hätten bedienen können."[1]) Darüber hinaus hat Euler in der Frage der divergenten Reihen auf einem völlig modernen Standpunkt gestanden, wenn er in der „Vollständigen Anleitung zur Differentialrechnung" schrieb: „Meiner Meinung nach liegt die ganze Schwierigkeit in dem Wort Summe. Denn wenn man das Wort ‚Summe der Reihe' in dem gewöhnlichen Sinne nimmt, wo man darunter das Aggregat aller ihrer wirklich vereinigten Glieder versteht, so ist es ausgemacht, daß man nur die Summen derjenigen Reihen wirklich darstellen kann, die konvergieren, und den Wert der Reihe einem gewissen beständigen Wert desto mehr nähern, je mehrere Glieder wirklich zusammen genommen werden. Dagegen haben die divergierenden Reihen, deren Glieder nicht abnehmen . . . gar keine beständige Summen, wenn man dies in dem angeführten Sinne nimmt.
Wir werden also diese Schwierigkeiten und anscheinenden Widersprüche gänzlich vermeiden, wenn wir dem Worte Summe eine andere Bedeutung geben, als es gewöhnlich zu haben pflegt. Wir wollen also den Ausdruck, aus dessen Entwickelung eine unendliche

---

[1]) G. H. Hardy, *Divergent series* (Oxford 1949), S. 15.

Reihe entsteht, die Summe dieser Reihe nennen. In diesem Sinne ist also $\frac{1}{1-x}$ in der Tat die Summe der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, weil diese Reihe aus der Entwickelung jenes Bruches entsteht, man mag für x eine Zahl setzen, was für eine man will. Wenn also die Reihe eine konvergierende Reihe ist, so stimmt dieser neue Begriff der Summe mit dem gewöhnlichen überein; und was die divergierenden Reihen betrifft, die keine eigentlich sogenannten Summen haben, so vermeidet man bei ihnen, wenn man jene Erklärung zugrunde legt, alle Schwierigkeiten. Endlich ist man vermittelst derselben imstande, die Nutzbarkeit der divergierenden Reihen zu behaupten und sie wider alle Einwürfe zu verteidigen."[1])
Überhaupt ist die Entwicklung der Theorie der divergenten Reihen ein höchst lehrreicher Abschnitt der Mathematikgeschichte, besonders unter dem „begrifflichen Aspekt". Für eine erste Orientierung kann man das oben zitierte Buch von G. H. Hardy empfehlen, welches besonders in der Einleitung und im ersten Kapitel viel interessantes historisches Material enthält.

Jedoch kann man Eulers Verfahren, der Infinitesimalrechnung Nullen verschiedener Ordnung zugrunde zu legen, nicht gutheißen. Eine unendlich kleine Größe, schrieb Euler in seiner „Differentialrechnung" von 1755, ist wirklich Null,

$$a \pm n dx = a,^{2)} \qquad dx \pm (dx)^{n+1} = dx \qquad \text{und} \qquad a\sqrt{dx} + C dx = a\sqrt{dx}.$$

‚Daher existieren unendlich viele Ordnungen von unendlich kleinen Größen, die, obwohl sie alle $= 0$ sind, wohl voneinander zu unterscheiden sind, wenn man auf ihre gegenseitige Beziehung achtet, die als ein geometrisches Verhältnis erklärt ist."[3])

In der ganzen Frage der Begründung der Infinitesimalrechnung blieben Meinungsverschiedenheiten bestehen, und dasselbe galt für alle Fragen, die sich auf unendliche Prozesse beziehen. Die „mystische" Periode in der Begründung der Infinitesimalrechnung (um einen von Karl Marx vorgeschlagenen Ausdruck zu gebrauchen) brachte einen Mystizismus hervor, der gelegentlich weit über den der geistigen Väter des Kalküls hinausging. Guido Grandi, ein Mönch und Professor in Pisa, der wegen seines Studiums von Rosetten ($r = \sin n\theta$) und anderen Kurven, die Blumen ähneln, bekannt ist,[4]) betrachtete die Formel

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \begin{cases} 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots & = 1, \\ (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0, \end{cases}$$

somit

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2},$$

---

[1]) Zitiert nach L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung*, übersetzt aus dem Lateinischen von Michelsen (Berlin und Libau 1790), S. 99, 100. (Anm. d. Übers.)

[2]) Diese Formel erinnert an eine Behauptung, die von Simplicius dem Zeno zugeschrieben wird: „Dasjenige, was bei Addition zu einem anderen dieses nicht größer macht und bei Wegnahme von einem anderen dieses nicht kleiner macht, ist nichts."

[3]) L. Euler, *Opera omnia* 1^e ser. 10, S. 72.

[4]) L. Tenca, *Guido Grandi*, Physis *2* (1960), 84–89.

als das Symbol für die Schöpfung aus dem Nichts. Er erhielt das Ergebnis $\frac{1}{2}$ durch die Interpretation, daß ein Vater seinen beiden Söhnen einen Edelstein hinterläßt, den jeder der beiden abwechselnd ein Jahr lang behalten darf. Er gehört dann jedem Sohn zur Hälfte.

Eulers Begründung der Differentialrechnung mag ihre Schwächen gehabt haben, aber er drückte seinen Standpunkt wenigstens ohne Unbestimmtheit aus. D'Alembert versuchte in einigen Artikeln der „Encyclopédie" eine Begründung mit anderen Hilfsmitteln zu geben. Newton hatte den Ausdruck „erstes und letztes Verhältnis" für die „Fluxion" als das erste und letzte Verhältnis von zwei Größen verwendet, die eben zu entstehen beginnen. D'Alembert ersetzte diesen Begriff durch die Idee eines *Grenzwertes*. Er nannte eine Größe den Grenzwert einer anderen, wenn die zweite der ersten näherkommt als bis auf eine beliebig vorgegebene (von 0 verschiedene) Größe. „Die Differentiation von Gleichungen besteht einfach darin, die Grenzwerte des Verhältnisses von endlichen Differenzen zweier in der Gleichung enthaltener Veränderlicher zu finden." Das war ein großer Schritt vorwärts, wie es auch d'Alemberts Idee von unendlichen Größen verschiedener Ordnungen war. Seine Zeitgenossen waren jedoch nicht so schnell von der Bedeutung des neuen Schrittes überzeugt, und wenn d'Alembert sagte, daß die Sekante zur Tangente wird, falls die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, merkte man, daß er die in den Zenonschen Paradoxien liegenden Schwierigkeiten nicht überwunden hatte. Erreicht eine Variable nach alledem ihren Grenzwert, oder erreicht sie ihn niemals?

Wir haben bereits über die Kritik des Bischofs Berkeley an den Newtonschen Fluxionen berichtet. George Berkeley, erster Dean of Derry, nach 1734 Bischof von Cloyne in Südirland und von 1729 bis 1731 Resident von Newport (Rhode Island, USA), ist in erster Linie auf Grund seines extremen Idealismus („esse est percipi") bekannt. Er mißbilligte die Unterstützung, die die Newtonsche Wissenschaft dem Materialismus gewährte, und griff die Theorie der Fluxionen im „Analyst" von 1734 an. Er verspottete die infinitesimalen Größen als „Geister von abgeschiedenen Größen"; erfährt x den Zuwachs o, dann ist der durch o geteilte Zuwachs von x^n gleich $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot o + \ldots$. Das erhält man, indem man o als verschieden von Null voraussetzt. Die Fluxion von x^n, also nx^{n-1}, ergibt sich aber im Widerspruch dazu, indem man o als Null annimmt, so daß die Voraussetzung plötzlich beiseite geschoben wird, daß o verschieden von Null sein sollte. Das war der „offensichtliche Sophismus", den Berkeley in der Infinitesimalrechnung entdeckt hatte, und er glaubte, daß ihre richtigen Resultate durch eine Kompensation von Fehlern erzielt würden. Die Fluxionen waren logisch unhaltbar. „Aber wahrlich braucht jemand, der eine zweite oder dritte Fluxion, eine zweite oder dritte Differenz verträgt" rief Berkeley dem „ungläubigen Mathematiker", an den er sich wandte (Halley), zu, „so dünkt mich, in gar keinem Punkt der Theologie etwas am Zeuge zu flicken." Dies ist nicht der einzige Fall, in dem eine ernste Schwierigkeit in einer Wissenschaft dazu ausgenutzt wurde, um eine idealistische Philosophie zu stützen.

John Landen, ein autodidaktischer englischer Mathematiker, dessen Name in der Theorie der elliptischen Integrale fortlebt, versuchte, die Schwierigkeiten bei der

Begründung der Infinitesimalrechnung auf seine Weise zu beheben. In der „Residual analysis" (1764) begegnete er der Berkeleyschen Kritik, indem er infinitesimale Größen ganz und gar vermied; die Ableitung von x^3 wurde beispielsweise gefunden, indem man x in x_1 verwandelte, wonach der Ausdruck

$$\frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2$$

den Wert $3x^2$ annimmt, wenn $x_1 = x$ ist. Da dieses Verfahren unendliche Reihen benötigt, wenn die Funktionen komplizierter sind, besitzt die Methode von Landen eine gewisse Verwandtschaft zu der „algebraischen" Methode von Lagrange.

7.5.* Euler war mit Rußland fast während seines gesamten wissenschaftlichen Lebens eng verbunden (in seinen Berliner Jahren blieb er ein reges Mitglied der Petersburger Akademie: Er ließ einen wesentlichen Teil seiner Arbeiten in ihren Annalen drucken, er beriet die Akademie in verschiedenen Fragen einschließlich der Auswahl der Mitarbeiter und leitete schließlich die Studien der von der Akademie zu ihm entsandten jungen Gelehrten an). Für Rußland hatten seine Arbeiten besondere Bedeutung. Viele seiner angewandten Arbeiten, z. B. über Kartographie, Schiffahrt bzw. Meereskunde waren entstanden, um auf Anfragen der russischen Regierungsbehörden eine Antwort zu geben. In Rußland wurden sowohl die Abhandlungen Eulers als auch seine Lehrbücher elementaren Inhalts gedruckt, letztere trugen zur Erhöhung des Niveaus der mathematischen Bildung wesentlich bei. Die „Anleitung zur Arithmetik" erschien in russischer Sprache in zwei Auflagen (1740 und 1760), die „Universalnaja arifmetika" wurde in russischer Sprache früher herausgegeben (1768–1769) als ihr deutsches Original, die „Vollständige Anleitung zur Algebra" (1770), und erlebte drei Auflagen. Die ersten Akademiker, die Rußland auf den Gebieten der Mathematik (S. K. Kotelnikow, 1723–1806) und Astronomie (S. J. Rumowski, 1734–1812, auch als Autor einiger mathematischer Arbeiten bekannt) hatte, haben bei Euler studiert. In seiner zweiten Petersburger Periode stellt Euler den Mittelpunkt einer ganzen Gruppe von Gelehrten dar, zu der außer den bereits genannten gehören: sein Sohn J. A. Euler, dessen Verdienste hauptsächlich darin bestehen, daß er dem fast blinden Vater in „technischen" Fragen zur Seite stand; ein Neffe Eulers, N. Fuss (1755–1826), Autor vieler origineller Untersuchungen, vor allem zur Differentialgeometrie, der seinem Onkel auch in verschiedenen Dingen beistand; A. J. Lexell (1740–1784), der durch seine Arbeiten über Polygonometrie bekannt ist, und der Astronom und Geometer F. T. von Schubert (1758–1825). Die selbständigen mathematischen Untersuchungen dieser Schüler von Euler bestehen vor allem in der Lösung spezieller Aufgaben, die in den Arbeiten ihres Lehrers gestellt sind oder doch zumindest damit in Zusammenhang stehen. Sie haben alle einen gewissen geometrischen Einschlag und bewegen sich ganz im Rahmen der Eulerschen Methoden und Verfahren. Eine solche Richtung führte nach und nach von den wesentlichen Strömungen der Mathematik jener Zeit weg, und im 19. Jahrhundert bedurfte es der Arbeiten eines M. W. Ostrogradski und P. L. Tschebyscheff, um der Petersburger mathematischen Schule zu neuem Glanz zu verhelfen.

7.6. Anwendungen der Mathematik auf Geodäsie, Astronomie und Mechanik

Obwohl Euler unstreitig der führende Mathematiker dieser Zeit war, entstanden in Frankreich weiterhin Werke von großer Originalität. Hier wurde die Mathematik, stärker als in irgendeinem anderen Lande, als die Wissenschaft angesehen, die die Theorie von Newton vervollkommen sollte. Die Theorie der universellen Gravitation übte auf die Philosophen der Aufklärung eine große Anziehungskraft aus, die sie als Waffe in ihrem Kampf gegen die Reste des Feudalismus benutzten. Die katholische Kirche hatte Descartes im Jahre 1664 auf den Index gesetzt, aber um 1700 waren seine Lehren sogar in konservativen Kreisen in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Die Frage Newtonianismus gegen Cartesianismus wurde eine Zeitlang ein Thema von größtem Interesse, und zwar nicht nur in gelehrten Zirkeln, sondern auch in den Salons. Voltaires „Lettres sur les Anglais" (1734) trugen viel dazu bei, Newton dem französischen Lesepublikum zugänglich zu machen; Voltaires Freundin, Frau du Châtelet, übersetzte sogar die „Principia" ins Französische (1759). Ein besonderer Streitpunkt zwischen den beiden Schulen war die Gestalt der Erde. In der von den Cartesianern verfochtenen Kosmogonie war die Erde an den Polen verlängert; die Theorie von Newton verlangte, daß sie abgeplattet war. Die kartesianischen Astronomen Cassini (Jean Dominique, der Vater, und Jacques, der Sohn; der Vater ist in der Geometrie auf Grund der „Cassinischen Kurve" [1680] bekannt) hatten zwischen 1700 und 1720 einen Meridianbogen in Frankreich gemessen und die Cartesische Schlußfolgerung bestätigt. Es entstand ein Streit, an dem viele Mathematiker teilnahmen. Im Jahre 1735 wurde eine Expedition nach Peru geschickt, der 1736/37 eine andere unter Leitung von Pierre de Maupertuis an den Torneälv in Schweden (Lappland) folgte, um einen Längengrad auszumessen. Das Ergebnis beider Expeditionen war ein Triumph sowohl für die Newtonsche Theorie als auch für Maupertuis selbst. Der nunmehr berühmte „grand aplatisseur" („großer Abplatter") wurde Präsident der Berliner Akademie und sonnte sich viele Jahre hindurch in der Sonne seines Ruhmes am Hofe Friedrichs II. Dies dauerte bis 1750, als er in einen lebhaften Streit mit dem Schweizer Mathematiker Samuel König geriet, der das (vielleicht schon von Leibniz ausgesprochene) Prinzip der kleinsten Wirkung in der Mechanik betraf. Maupertuis suchte, wie vordem Fermat und nach ihm Albert Einstein, nach einem gewissen allgemeinen Prinzip, mit dessen Hilfe die Gesetze des Universums zusammengefaßt werden konnten. Die Formulierung von Maupertuis war nicht klar, aber er definierte als „Wirkung" die Größe mvs (m = Masse, v = Geschwindigkeit, s = Entfernung); er verband damit einen Beweis der Existenz Gottes. Der Streit erreichte seinen Höhepunkt, als Voltaire in seinem Stück „Diatribe du docteur Akakia, Médecin du pape" (1752) den unglücklichen Präsidenten verhöhnte. Weder die Unterstützung durch den König noch die Verteidigung durch Euler konnte die gesunkenen Lebensgeister von Maupertuis wieder heben, und der innerlich zerbrochene Mathematiker starb nicht lange danach in Basel im Hause der Bernoullis. Euler brachte das Prinzip der kleinsten Wirkung auf die Form, daß $\int mvds$ ein Minimum sein muß; weiter gab er den metaphysischen Auffassungen von Maupertuis nicht nach. Damit war das Prinzip auf eine gesunde Grundlage gestellt, auf der es von Lagrange[1]) und später von Hamilton verwendet wurde. Die allgemeine Verwendung der „Hamilton-Funktion" in der modernen mathematischen Physik zeigt deutlich den fundamentalen Charakter des Eulerschen Beitrages zum Streit zwischen Maupertuis und König.[2])

Unter den Mathematikern, die mit Maupertuis nach Schweden gegangen waren, befand sich Alexis Claude Clairaut. Clairaut hatte mit achtzehn Jahren die „Recherches sur les courbes à double courbure" (Untersuchungen über die Kurven mit doppelter Krümmung) veröffentlicht, einen ersten Versuch, die analytische Geometrie und die Differentialgeometrie von Raumkurven zu behandeln. Nach seiner Rückkehr aus Schweden veröffentlichte Clairaut seine „Théorie de la figure de la terre" (Theorie der Erdgestalt) (1743), ein Standardwerk über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten und die Anziehung von Rotationsellipsoiden. Laplace konnte es nur in kleineren Teilfragen verbessern. Unter den vielen darin enthaltenen Ergebnissen findet sich die Bedingung dafür, daß ein Differential $M\,dx + N\,dy$ exakt ist. Diesem Buch folgte die „Théorie de la lune" (Mondtheorie) (1752), die zu Eulers Theorie der Mondbewegung und zum allgemeinen Dreikörperproblem ergänzendes Material lieferte. Clairaut leistete auch Beiträge zur Theorie der Linienintegrale und zu Differentialgleichungen; eine der Typen, die er untersuchte, ist als Gleichung von Clairaut bekannt und lieferte eines der ersten bekannten Beispiele einer singulären Lösung.

7.7. J. R. d'Alembert. Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die geistige Opposition gegen das „ancien régime" sammelte sich nach 1750 um die berühmte „Encyclopédie" (28 Bände, 1751–1772). Der Herausgeber war Denis Diderot, unter dessen Leitung die Enzyklopädie eine eingehende Darstellung der Aufklärungsphilosophie gab. Diderots Kenntnisse in Mathematik waren nicht unbedeutend[3]), aber der führende Mathematiker unter den Enzyklopädisten war Jean

---

[1]) Siehe E. Mach, *The Science of Mechanics* (Chicago 1893), S. 364, und R. Dugas, *Histoire de la mécanique* (Neufchâtel 1950).

[2]) Über diesen Streit siehe J. O. Fleckensteins Einführung zu Eulers *Opera Omnia*, 2[e] ser. 5 (1957).

[3]) Es gibt eine oft wiederholte Geschichte über Diderot und Euler, nach welcher es Euler in einem öffentlichen Streitgespräch in Petersburg gelungen sein soll, den Freidenker Diderot in stärkste Verlegenheit zu versetzen, indem er behauptete, einen algebraischen Beweis für die Existenz Gottes zu besitzen: „Mein Herr, es gilt $(a + b^n)/n = x$; also existiert Gott; äußern Sie sich bitte dazu!" Das ist ein gutes Beispiel für eine schlechte Anekdote, denn der Wert einer Anekdote über eine historische Persönlichkeit liegt gerade in der Möglichkeit, verschiedene Seiten ihres Charakters schlagartig zu erhellen; diese Anekdote dient nur dazu, den Charakter sowohl von Diderot als auch von Euler zu verdunkeln. Diderot kannte sich in Mathematik recht gut aus, hatte über Involutionen und Wahrscheinlichkeit geschrieben, und es ist kein Grund einzusehen, warum sich der besonnene Euler in der geschilderten tölpelhaften Art benommen haben

(Fortsetzung S. 140)

Le Rond d'Alembert, der uneheliche Sohn einer Adligen, der in der Nähe der Kirche St. Jean Le Rond in Paris als Findling ausgesetzt worden war. Seine früh hervortretende glänzende Begabung erleichterte seine Laufbahn; im Jahre 1754 wurde er „secrétaire perpétuel" (ständiger Sekräter) der Französischen Akademie und in dieser Stellung der einflußreichste Wissenschaftler in Frankreich. 1743 erschien sein „Traitéde dynamique" (Lehrbuch der Dynamik), worin das als „d' Alembertsches Prinzip" bekannte Verfahren enthalten ist, die Dynamik starrer Körper auf die Statik zu reduzieren. Er schrieb weiterhin über verschiedene Fragen der Anwendungen, insbesondere über Hydrodynamik, Aerodynamik und das Dreikörperproblem. Im Jahre 1747 erschien seine Theorie der schwingenden Saite, die ihn mit Euler und Daniel Bernoulli zum Begründer der Theorie der partiellen Differentialgleichungen werden ließ. Während d'Alembert und Euler die Gleichung $z_{tt} = k^2 \cdot z_{xx}$ durch den Ansatz $z = f(x + kt) + \varphi(x - kt)$ lösten, verwendete Bernoulli zur Lösung trigonometrische Reihen. Es erhoben sich ernste Zweifel an der Zulässigkeit einer solchen Lösung; d'Alembert glaubte, daß die anfängliche Gestalt der Saite nur durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck gegeben sein dürfte, während Euler der Meinung war, daß man eine „beliebige" stetige Kurve zulassen könnte. Im Gegensatz zu Euler war Bernoulli davon überzeugt, daß seine durch Reihen erzielte Lösung allgemeingültig war. Die völlige Aufklärung dieser Frage mußte bis 1824 vertagt werden, als Fourier die Zweifel an der Gültigkeit der Darstellung einer „beliebigen" Funktion durch trigonometrische Reihen beseitigte. D'Alembert war ein gewandter Bearbeiter vieler Probleme, darunter sogar fundamentaler Fragen der Mathematik. Die von ihm stammende Einführung des Grenzwertbegriffes wurde bereits erwähnt. Der „Fundamentalsatz" der Algebra wird zuweilen Satz von d'Alembert genannt, da er 1746 einen Beweisversuch machte; und das d'Alembertsche „Paradoxon" in der Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt, daß er — wenn auch nicht immer sehr erfolgreich — über die Begründung dieser Theorie ebenfalls nachdachte.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie machte in dieser Zeit schnelle Fortschritte, hauptsächlich durch die weitere Ausarbeitung der Gedanken von Fermat, Pascal und Huygens. Auf die „Ars conjectandi" folgten mehrere andere Arbeiten, darunter „The Doctrine of Chances" (1716) von Abraham de Moivre, einem französischen Hugenotten, der nach der Aufhebung des Edikts von Nantes (1685) nach London übersiedelte und seinen Lebensunterhalt als Privatlehrer verdiente. Der Name de Moivre ist mit einem Satz der Trigonometrie verbunden, der in seiner heutigen Form

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

(Fortsetzung von Fußnote [3])

sollte. Die Geschichte scheint von dem englischen Mathematiker de Morgan (1806 bis 1871) aufgebracht worden zu sein. Siehe L. G. Krakeur — R. L. Krueger, Isis *31* (1940), 431—432; auch *33* (1941), 219—231. Es ist wahr, daß im achtzehnten Jahrhundert gelegentlich von der Möglichkeit eines algebraischen Beweises der Existenz Gottes die Rede war; Maupertuis hatte sich einen solchen zurechtgemacht, siehe *Diatribe* von Voltaire, *Œuvres* 41 (Ausgabe 1821), S. 19; 30. Siehe auch B. H. Brown, Amer. Math. Monthly *49* (1944).

zuerst in Eulers „Introductio“ vorkommt. In einer 1733 veröffentlichten Arbeit leitete er die Normalverteilung der Wahrscheinlichkeit als Näherung der Binomialverteilung ab und stellte eine zur Stirlingschen Formel äquivalente Formel auf. James Stirling, ein schottischer Mathematiker der Newtonschen Schule, veröffentlichte seine Reihe im Jahre 1730.
Die vielen Lotterien und Versicherungsgesellschaften, die in dieser Zeit organisiert wurden, lenkten das Interesse vieler Mathematiker (einschließlich Eulers) auf die Wahrscheinlichkeitstheorie. Das führte zu Versuchen, die Wahrscheinlichkeitslehre auf neue Gebiete anzuwenden. Der Graf de Buffon, bekannt als Autor einer Naturgeschichte in 36 hübschen Bänden und der berühmten Abhandlung über den Stil [1753: „le style est de l'homme même“ (Der Stil ist der Mensch)], führte 1777 das erste Beispiel einer geometrischen Wahrscheinlichkeit ein. Dies war das sogenannte Nadelproblem, das die Einbildungskraft vieler Menschen beschäftigte, weil es eine „experimentelle“ Bestimmung der Zahl π ermöglichte, indem man eine Nadel auf eine mit parallelen Geraden in gleichem Abstand versehene Ebene wirft und die Anzahl derjenigen Fälle auszählt, in denen die Nadel eine der Linien kreuzt.
In diese Zeit fallen auch die Versuche, die Wahrscheinlichkeitstheorie auf das Gerichtswesen anzuwenden, etwa zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gerichtshof zu einem gerechten Urteil kommen kann, wenn sich jedem der Zeugen und Geschworenen eine Zahl zuordnen läßt, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß er die Wahrheit sagt oder erfaßt. Diese merkwürdige „probabilité de jugements“ (Wahrscheinlichkeit von Urteilen) mit ihrem deutlichen Beigeschmack der Aufklärungsphilosophie war in dem Werk des Marquis de Condorcet vorherrschend; sie tauchte bei Laplace und sogar bei Poisson wieder auf (1837).

7.8. Die Stellung der englischen Mathematik unter dem Einfluß des Erbes von Newton

De Moivre, Stirling und Landen waren tüchtige Vertreter der englischen Mathematik des achtzehnten Jahrhunderts. Wir müssen darüber etwas mehr berichten, obwohl keiner von ihnen das Niveau ihrer kontinentalen Zeitgenossen erreichte. Die Tradition des so hochverehrten Newton lastete schwer auf der englischen Wissenschaft, und seine im Vergleich mit der von Leibniz schwerfällige Bezeichnung machte Fortschritte schwierig. Es gab tiefliegende gesellschaftliche Gründe, aus denen sich die englischen Mathematiker dagegen wehrten, sich von den Newtonschen Fluxionsmethoden zu befreien. England lag in unaufhörlichen Handelskriegen mit Frankreich und entwickelte ein Gefühl der geistigen Überlegenheit, das nicht nur durch seine Siege im Krieg und im Handel genährt wurde, sondern auch durch die Bewunderung, mit der sein politisches System von den kontinentalen Philosophen betrachtet wurde. England wurde so das Opfer seiner eigenen vermeintlichen Vortrefflichkeit. Zwischen der Mathematik in England im achtzehnten Jahrhundert und der der spätalexandrinischen Antike bestehen gewisse Analogien. In beiden Fällen wurde der Fortschritt durch eine ungeeignete Bezeichnungsweise stark behindert, aber die Gründe für die Selbstgenügsamkeit der Mathematiker hatten tieferliegende soziale Wurzeln.

7.9. C. Maclaurin. B. Taylor

Der führende englische — oder besser: englisch sprechende — Mathematiker dieser Zeit war Colin Maclaurin, Professor an der Universität Edinburgh, ein Schüler von Newton, mit dem er persönlichen Verkehr pflegte. Sein Studium und Ausbau der Fluxionsmethoden, der Kurven von zweiter und höherer Ordnung und der Anziehung von Ellipsoiden erfolgte gleichzeitig mit entsprechenden Bemühungen von Euler und Clairaut. Einige Sätze von Maclaurin haben ihren festen Platz in der heutigen Theorie der ebenen Kurven und der projektiven Geometrie. In seiner „Geometria organica" (1720) findet man die als Cramers Paradoxon bekannte Beobachtung, daß eine Kurve n-ter Ordnung nicht immer durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt ist, so daß neun Punkte nicht immer ausreichen, um eine Kubik eindeutig festzulegen, während zehn bereits zuviel sein würden. Hier finden sich auch kinematische Methoden, um ebene Kurven verschiedener Ordnungen zu beschreiben. Maclaurins „Treatise of Fluxions" (2 Bände, 1742) — zur Verteidigung Newtons gegen Berkeley geschrieben — ist wegen seiner veralteten geometrischen Ausdrucksweise schwierig zu lesen, was in deutlichem Gegensatz zur leichten Faßlichkeit der Eulerschen Schriften steht. Malclaurin versuchte, archimedische Strenge zu erzielen. Das Buch enthält Maclaurins Untersuchungen über die Anziehung von Rotationsellipsoiden und seinen Satz, daß zwei solche Ellipsoide, wenn sie konfokal sind, ein Teilchen auf der Achse oder auf dem Äquator mit zu ihren Volumina proportionalen Kräften anziehen. In dieser „Treatise" behandelte Maclaurin auch die berühmte „Malclaurinsche Reihe".

Die Reihe war jedoch nicht von ihm entdeckt worden, denn sie kam in dem Werk „Methodus incrementorum" (1715) vor, das von Brook Taylor geschrieben worden war, der eine Zeitlang Sekretär der Royal Society war. Maclaurin erkannte seine Verpflichtung gegenüber Taylor ausdrücklich an. Die Taylorsche Reihe wird heute fast immer in der Bezeichnung von Lagrange geschrieben:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

Taylor erwähnt ausdrücklich die Reihe für $x = 0$, die viele Hochschullehrbücher immer noch hartnäckig „Maclaurinsche Reihe" nennen. Die Herleitung von Taylor schloß keine Konvergenzbetrachtungen ein, aber Maclaurin machte den Anfang mit solchen Betrachtungen — er war sogar im Besitz des sogenannten Integralkriteriums für unendliche Reihen. Die volle Bedeutung der Taylorschen Reihe wurde erst erkannt, als Euler sie in seiner Differentialrechnung (1755) anwendete. Lagrange fügte das Restglied hinzu und verwendete sie als grundlegendes Hilfsmittel in seiner Funktionentheorie. Taylor selbst wendete seine Reihe zur Integration einiger Differentialgleichungen an. Taylor begann auch das Studium der schwingenden Saite, das später zu den Arbeiten über trigonometrische Reihen führte (S. 140).

7.10. Leben und Werk J. L. Lagranges

Joseph Louis Lagrange wurde in Turin geboren und war italienisch-französischer Herkunft. Im Alter von neunzehn Jahren wurde er Mathematikprofessor an der Artillerieschule von Turin (1755). Als Euler 1766 aus Berlin wieder nach Petersburg ging, lud Friedrich II. Langrange ein, nach Berlin zu kommen, wobei seine Einladung von der bescheidenen Botschaft begleitet war, nach der „es notwendig ist, daß der größte Mathematiker von Europa in der Umgebung des größten Königs leben sollte". Lagrange blieb bis zum Tode Friedrichs (1786) in Berlin und ging dann nach Paris. Während der Revolution leistete er Hilfe bei der Reform der Maße und Gewichte; später wurde er Professor, zuerst an der École Normale (1795), sodann an der École Polytechnique (1797).
Zu den frühesten Arbeiten von Lagrange gehören seine Beiträge zur Variationsrechnung. Eulers Schrift darüber war 1755 erschienen. Lagrange bemerkte, daß Eulers Methode „nicht durchweg diejenige Einfachheit besitzt, die bei einem Gegenstand der reinen Analysis wünschenswert ist". Das Ergebnis war die rein analytische Variationsrechnung von Lagrange (1760/61), die nicht nur voll von selbständigen Entdeckungen ist, sondern außerdem das historische Material wohlgeordnet und verarbeitet darbietet — eine für alle Lagrangeschen Werke typische Erscheinung. Lagrange wandte seine Theorie sofort auf Probleme der Dynamik an, in welchen er von Eulers Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung, dem Ergebnis der beklagenswerten „Akakia"-Episode, vollen Gebrauch machte. Viele der wesentlichen Ideen der „Mécanique analytique" reichen somit in die Turiner Zeit von Lagrange zurück. Er leistete auch zu einem der Hauptprobleme seiner Zeit, der Theorie der Mondbewegung, einen Beitrag. Er gab die ersten partikulären Lösungen des Dreikörperproblems an. Der Satz von Lagrange sagt aus, daß es möglich ist, drei endliche Körper so zu starten, daß ihre Bahnen ähnliche Ellipsen sind, die alle in derselben Zeit durchlaufen werden (1772). Im Jahre 1767 erschien seine Schrift „Sur la résolution des équations numériques" (Über die Auflösung numerischer Gleichungen), in welcher er Methoden zur Trennung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und zu ihrer Approximation mit Hilfe von Kettenbrüchen angab. Darauf folgten 1770 die „Réflexions sur la résolution algébrique des équations" (Betrachtungen über die algebraische Lösung von Gleichungen), in denen die fundamentale Frage behandelt wurde, warum die Methoden, die zur Lösung der Gleichungen vom Grade $\leqq 4$ führen, für $n > 4$ ohne Erfolg bleiben. Dadurch wurde Lagrange auf rationale Funktionen der Wurzeln und ihr Verhalten bei Permutationen der Wurzeln geführt; das war das Verfahren, das nicht nur Ruffini und Abel zu ihrer Bearbeitung des Falles $n > 4$ anregte, sondern auch Galois zu seiner Gruppentheorie führte.[1] Lagrange erzielte auch Fortschritte in der

[1] Siehe H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Grundbegriffes* (Berlin 1969).

Zahlentheorie, als er quadratische Reste untersuchte und unter vielen anderen Sätzen bewies, daß jede ganze Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten dargestellt werden kann.

Lagrange widmete den zweiten Teil seines Lebens der Abfassung seiner großen Werke, der „Mécanique analytique" (1788), der „Théorie des fonctions analytiques" (1797) und ihrer Fortsetzung, den „Leçons sur le calcul des fonctions" (1801). Die beiden Bücher über Funktionen waren ein Versuch, der Infinitesimalrechnung eine sichere Grundlage zu geben, indem er sie auf die Algebra reduzierte. Lagrange lehnte die Theorie der Grenzwerte ab, wie sie von Newton angedeutet und von d'Alembert formuliert worden war. Er konnte sich keine genaue Vorstellung davon machen, was dann geschah, wenn $\Delta y/\Delta x$ seinen Grenzwert annahm. Um es mit den Worten von Lazare Carnot, dem „Organisator des Sieges" in der Französischen Revolution, der sich gleichfalls nicht mit Newtons Methode der infinitesimalen Größen befreunden konnte, zu sagen:

„Jene Methode hat die große Unannehmlichkeit, Größen gerade in dem Zustande zu betrachten, in dem sie sozusagen aufhören, Größen zu sein; denn obgleich wir das Verhältnis von zwei Größen immer sehr gut verstehen können, solange sie endlich bleiben, liefert dieses Verhältnis dem Verstand keinen klaren und genauen Begriff, sobald seine beiden Bestandteile zugleich verschwinden."[1]

Die Methode von Lagrange unterschied sich von der seiner Vorgänger. Er ging von der Taylorschen Reihe aus, die er mit Restglied ableitete, wobei er in recht naiver Weise zeigte, daß eine „beliebige" Funktion $f(x)$ mit Hilfe eines rein algebraischen Prozesses in eine derartige Reihe entwickelt werden kann. Dann wurden die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ usw. als Koeffizienten von $h, h^2, \ldots$ in der Taylorentwicklung von $f(x+h)$ nach Potenzen von h definiert. [Die Schreibweise $f'(x)$, $f''(x)$ stammt von Lagrange.]

Obwohl sich diese „algebraische" Methode der Begründung der Infinitesimalrechnung als unbefriedigend herausstellte und obwohl Lagrange die Konvergenz der Reihen nur ungenügend beachtete, bedeutete die abstrakte Behandlung einer Funktion einen beträchtlichen Schritt vorwärts. Hier erschien erstmalig eine „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen" mit Anwendung auf eine Vielzahl von Problemen der Algebra und Geometrie.

Die „Mécanique analytique" von Lagrange ist vielleicht sein wertvollstes Werk und lohnt noch heute ein sorgfältiges Studium reichlich. In diesem Buch, das hundert Jahre nach den „Principia" von Newton erschien, wird die volle Kraft der neu entwickelten Analysis auf die Mechanik der Punkte und der starren Körper angewendet. Die Resultate von Euler, d'Alembert und anderen Mathematikern des achtzehnten Jahrhunderts wurden verarbeitet und von einem einheitlichen Standpunkt aus weiterentwickelt. Die umfassende Verwendung der eigenen Variationsrechnung ermöglichte Lagrange eine Vereinheitlichung der verschiedenen Prinzipe der Statik und Dynamik — in der Statik durch die Verwendung des Prinzips der

[1] L. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Betrachtungen über die Metaphysik der Infinitesimalrechnung) (5. Auflage, Paris 1881), S. 147; siehe dazu F. Cajori, Amer. Math. Monthly *22* (1915), 148.

virtuellen Geschwindigkeiten, in der Dynamik durch die Verwendung des d'Alembertschen Prinzips. Das führte ganz naturgemäß zu verallgemeinerten Koordinaten und zur Bewegungsgleichung in ihrer „Lagrangeschen" Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F.$$

Newtons geometrisches Verfahren wurde jetzt völlig fallengelassen; das Buch von Lagrange bedeutete einen Triumph der reinen Analysis. Der Autor ging so weit, daß er im Vorwort betonte: „On ne trouvera point des figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques."[1]) Das kennzeichnete Lagrange als den ersten reinen Analytiker.

7.11. P. S. Laplace

Mit Pierre Simon Laplace kommen wir zum letzten der führenden Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts. Als Sohn eines kleinen Grundeigentümers in der Normandie besuchte er die Schulen in Beaumont und Caen und wurde durch die Hilfe von d'Alembert Professor der Mathematik an der Militärschule von Paris. Er hatte außerdem mehrere andere Lehr- und Verwaltungsämter inne und nahm während der Revolution sowohl am Aufbau der École Normale als auch École Polytechnique teil. Napoleon verlieh ihm zahlreiche Ehrungen, dasselbe gilt aber auch von Ludwig XVIII. Im Gegensatz zu Monge und Carnot wechselte Laplace seine politischen Treuebekenntnisse sehr leicht und war in dieser Hinsicht eine Art von Streber; aber dieser Charakterzug ermöglichte es ihm, seine rein mathematische Tätigkeit trotz aller politischen Umwälzungen in Frankreich fortzusetzten.
Die beiden großen Werke von Laplace, die nicht nur seine eigenen Untersuchungen, sondern auch alle früheren Arbeiten über die betreffenden Gegenstände zusammenfassen, sind die „Théorie analytique des probabilités" (Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten) (1812) und die „Mécanique céleste" (Himmelsmechanik) (5 Bände, 1799 bis 1825). Diese beiden großartigen Werke wurden durch ausführliche, den mathematischen Apparat weitgehend vermeidende Darstellungen eingeleitet, nämlich den „Essai philosophique sur les probabilités" (Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeit) (1814) und die „Exposition du système du monde" (Erkärung des Weltsystems) (1796). Diese „Exposition" enthält die Nebelhypothese, die unabhängig von ihm von Kant im Jahre 1755 (und sogar schon vor Kant im Jahre 1734 von Swedenborg) vorgeschlagen worden war. Die „Mécanique céleste" ihrerseits war die Krönung des Werkes von Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange und Laplace über die Gestalt der Erde, die Theorie der Mondbewegung, das Dreikörperproblem und die Störungen der Planeten und führt bis zu der bedeutungsvollen Frage der Stabilität des Sonnensystems. Die Bezeichnung

[1]) „In diesem Werk findet man keine Figuren, sondern nur algebraische Operationen." Das Wort „algebraisch" an Stelle von „analytisch" ist charakteristisch.

„Laplacesche Gleichung“ für

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

erinnert daran, daß die Potentialtheorie einen Teil der „Mécanique céleste“ bildet. (Die Gleichung selbst war schon 1752 von Euler gefunden worden, als er einige der Hauptgleichungen der Hydrodynamik ableitete.) Über dieses fünfbändige Werk gibt es sehr viele Anekdoten. Wohlbekannt ist beispielsweise die Laplace zugeschriebene Antwort an Napoleon, der ihn mit der Bemerkung aufziehen wollte, daß Gott in diesem Buch nirgends erwähnt wird: „Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.“[1] Und Nathaniel Bowditch aus Boston, der vier Bände des Laplaceschen Werkes ins Englische übersetzt hat, bemerkte einmal: „Niemals stieß ich auf eine der Laplaceschen Wendungen ‚Somit erkennt man leicht‘, ohne völlig sicher zu sein, daß ich stundenlange, angestrengte Arbeit aufwenden mußte, um die Lücke zu schließen und herauszubekommen und zu zeigen, wie man es leicht erkennt.“ Hamilton begann seine mathematische Laufbahn mit der Entdeckung eines Fehlers in Laplaces „Mécanique céleste“. Green kam beim Studium von Laplace auf die Idee einer mathematischen Theorie der Elektrizität.

Der „Essai philosophique sur les probabilités“ ist eine bequem lesbare Einführung in die Theorie der Wahrscheinlichkeit[2]); er enthält die „negative“ Laplacesche Definition der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Forderung von „gleichmöglichen Ereignissen“:

„Die Wahrscheinlichkeitstheorie besteht in der Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl von gleich möglichen Fällen, d. h. von solchen Fällen, über deren Eintreten wir gleich wenig wissen, und in der Bestimmung derjenigen Anzahl von Fällen, die für das Ereignis günstig sind, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen.“

Wahrscheinlichkeitsprobleme treten nach Laplace deshalb auf, weil wir manches nicht wissen und manches wissen. Diese Grundhaltung führte Laplace zu seinem berühmten Ausspruch, der die Interpretation des mechanischen Materialismus des achtzehnten Jahrhunderts zusammenfaßte:

„Eine Intelligenz, die in einem bestimmten Augenblick alle Kräfte überschauen könnte, die in der Natur wirksam sind, und außerdem die gegenseitige Lage aller Teilchen, aus denen sie besteht, und die zudem umfassend genug wäre, diese Angaben der mathematischen Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper und diejenigen des leichtesten Atoms erfassen; nichts wäre für sie ungewiß, und sowohl die Zukunft als auch die Vergangenheit würde klar vor ihren Augen liegen. Der menschliche Geist bietet eine schwache Vorstellung von dieser Intelligenz dar, angesichts der Vollendung, die er der Astronomie zu geben in der Lage war.“

Das eigentliche Lehrbuch enthält eine solche Fülle von Material, daß viele spätere Entdeckungen der Wahrscheinlichkeitstheorie schon bei Laplace zu finden sind.[3])

---

[1]) Majestät, ich benötigte diese Annahme nicht.

[2]) Deutsche Übersetzung Ostwald's Klassiker, Nr. 233, Leipzig 1932.

[3]) E. C. Molina, *The Theory of Probability: Some comments on Laplace's Théorie analytique*, Bull. Amer. Math. Soc. *36* (1930), 369–392.

Der stattliche Band enthält eine eingehende Diskussion der Glücksspiele und der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, des Satzes von Bernoulli und seiner Beziehung zum Normalintegral und der von Legendre entdeckten Methode der kleinsten Quadrate. Der Leitgedanke ist die Verwendung der „Erzeugenden Funktionen" deren Kraft für die Lösung von Differenzengleichungen dargelegt wird. Hier wird auch die „Laplace-Transformation" eingeführt, die später die exakte Begründung für die Heavisidesche Operatorenrechnung geliefert hat. Laplace rettete auch eine von Thomas Bayes, einem ziemlich unbekannten englischen Geistlichen, entworfene Theorie, die 1763/64 postum veröffentlicht worden war, vor der Vergessenheit und gab ihr eine neue Formulierung. Diese Theorie wurde als die Theorie der Wahrscheinlichkeit a posteriori bekannt.

7.12. Ausklang einer mathematischen Epoche

Es ist eine merkwürdige Tatsache, daß einige der führenden Mathematiker gegen Ende des Jahrhunderts dem Gefühl Ausdruck verliehen, der Bereich der Mathematik scheine irgendwie erschöpft zu sein. Die mühevollen, anstrengenden Arbeiten von Euler, Lagrange, d'Alembert und anderen hatten schon die meisten wichtigen Sätze geliefert; die großen Standardlehrbücher hatten sie bereits (oder würden es bald tun) im Zusammenhang dargestellt; die wenigen Mathematiker der nächsten Generation würden nur noch geringere Probleme zu lösen haben. „Ne vous semble-t-il pas que la haute géometrie va un peu à décadence ?" schrieb Lagrange 1772 an d'Alembert. „Elle n'a d'autre soutien que vous et M. Euler."[1] Lagrange unterbrach sogar seine mathematische Arbeit eine Zeitlang. D'Alembert konnte auch nur wenig Hoffnung geben. Arago drückte später in seiner „Lobrede auf Laplace" (1842) einen Gedanken aus, der für das Verständnis dieses Gefühls eine Hilfe bedeuten kann:

„Fünf Mathematiker — Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange und Laplace — teilten die Welt unter sich auf, deren Existenz Newton enthüllt hatte. Sie erklärten sie nach allen Richtungen, drangen in Gebiete ein, die für unzugänglich gehalten worden waren, wiesen auf zahllose Erscheinungen in diesen Gebieten hin, die von der Beobachtung noch nicht entdeckt worden waren, und schließlich brachten sie — und darin liegt ihr unvergänglicher Ruhm — alles, was höchst verwickelt und geheimnisvoll in den Bewegungen der Himmelskörper ist, unter die Herrschaft eines einzigen Prinzips, eines einheitlichen Gesetzes. Die Mathematik besaß auch die Kühnheit, über die Zukunft zu verfügen; wenn die Jahrhunderte abrollen, werden sie die Entscheidungen der Wissenschaft gewissenhaft bestätigen."

Aragos Rednerkunst wies auf die Hauptquelle dieses „fin-de-siècle"-Pessimismus hin, der in der Tendenz bestand, den Fortschritt der Mathematik allzusehr mit dem der Mechanik und Astronomie gleichzusetzen. Seit den Zeiten des alten Babylon

[1]) „Scheint es Ihnen nicht, daß die erhabene Geometrie ein wenig dazu neigt, dekadent zu werden?" „Sie hat keine andere Stütze als Sie und Herrn Euler."
Die Bezeichnung „Geometrie" wird im Französischen während des achtzehnten Jahrhunderts für die Mathematik insgesamt gebraucht.

bis zu denen von Euler und Lagrange hatte die Astronomie in der Mathematik die erhabensten Entdeckungen herbeigeführt und angeregt; nunmehr schien diese Entwicklung ihren Gipfel erreicht zu haben. Aber eine neue Generation machte sich daran, zu zeigen, wie unbegründet dieser Pessimismus war. Dieser große neue Impuls kam nur zum Teil aus Frankreich; er kam auch, wie so oft in der Geschichte der Kultur, aus dem Randgebiet der politischen und wirtschaftlichen Zentren, in diesem Fall von Gauß in Göttingen.

Literatur

Die Werke von Lagrange und Laplace sind in modernen Ausgaben erhältlich, die von Euler nähern sich nunmehr schnell der Vollendung. Einige Bände haben umfangreiche Einleitungen (A. Speiser, C. Truesdell, C. Carathéodory).
In den letzten Jahren wurden auch verschiedene Bände von Eulers Briefwechsel veröffentlicht:

Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel L. Eulers (2 Bände, Berlin 1959/1961).

Briefe an Kollegen (russisch, Moskau-Leningrad 1965).

Leonhard Euler und Christian Goldbach, *Briefwechsel* 1729–1764, herausgegeben von A. P. Juschkewitsch und E. Winter (Berlin 1965).

Eine vollständige Ausgabe der Werke der Bernoullis ist in Vorbereitung. Erschienen ist:

Johann Bernoulli: *Briefwechsel I* (Basel 1955).

Johann Bernoulli, *Opera omnia I–IV*, neu herausgegeben von J. E. Hofmann (Hildesheim 1968).

Jakob Bernoulli, *Die Werke* I, bearbeitet von J. O. Fleckenstein (Basel 1969).

J. H. Lambert, *Opera mathematica* (2 vols, Berlin 1946).

S. IX–XXXI Vorwort von A. Speiser.

J. J. Gray, L. Tilling, *J. H. Lambert, mathematician and scientist*, Historia mathematica *5* (1978), 13–41.

F. Cajori, *A History of the Conception of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (Chicago 1931).

P. E. B. Jourdain, *The Principle of Least Action* (Chicago 1913).

L. G. du Pasquier, *Léonard Euler et ses amis* (Paris 1927).

Leonhard Euler, Sammelband zu Ehren seines 250. Geburtstages (russisch, Moskau 1958). *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (Berlin 1959).

Sammelband anläßlich des 150. Todestages Leonhard Eulers (russisch, Moskau-Leningrad 1935).

Euler, L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, mit Einleitung von J. E. Hofmann (Stuttgart 1959). Über Euler siehe auch Istor.-Mat. Issled. *7* (1954), 451—640 (russisch).

H. Andoyer, *L'œuvre scientifique de Laplace* (Paris 1922).

G. Loria, *Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange*, Isis *28* (1938), 366—375 (mit großer Bibliographie).

H. Auchter, *Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph* (Marburg 1937).

Dieses Buch weist auf Grund von Angaben aus den Manuskripten von Leibniz nach, daß Leibniz die Taylorsche Reihe von 1694 ab besessen hat. Freilich war sie schon James Gregory bekannt.

H. G. Green, H. J. J. Winter, *John Landen, F. R. S.* (1719—1790), *Mathematician*, Isis *35* (1944), 6—10.

[Th. Bayes], *Facsimile of Two Papers*, with commentaries by E. C. Molina and W. E. Deming (Washington, D. C., 1940).

K. Pearson, *Laplace*, Biometrica *21* (1929), 202—216.

C. Truesdell, *Notes on the history of the general equations of hydrodynamics*, Amer. Math. Monthly *60* (1953), 445—448.

[J. A. Vollgraf, ed.], *Les œuvres de Nicolas Struyck* (1687—1769) *qui se rapportent au calcul des chances* (Amsterdam 1912).

G. Sarton, *Montucla*, Osiris *1* (1936), 519—576.

J. O. Fleckenstein, *Johann und Jakob Bernoulli*, Elemente der Mathematik, Beiheft 7 (Basel 1949).

J. E. Hofmann, *Über Jakob Bernoulli's Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, L'Enseignement mathematique, 2 sér., *5* (1956), 61—171.

P. Stäckel, *Zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert*, Bibliotheca math. *3* (1901), 111—121.

N. Nielsen, *Géomètres français du dix-huitième siècle* (Kopenhagen-Paris 1955).

J. F. Scott, *Mathematics trough the eighteenth century*, Philos. Mag., Commemoration number (1948), 67—90.

Meistens über England und Schottland.

C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1630—1780*, in Eulers *Opera omnia*, 2ᵉ ser. 11 (Zürich 1960). Andere wichtige Einleitungen zu Eulers *Opera omnia* sind die von G. Faber über unendliche Reihen (1ᵉ ser. 16, 1935), G. Faber und A. Krazer über Integrale (1ᵉ ser. 19, 1932), C. Carathéodory über Variationsrechnung (1ᵉ ser. 24, 1952), A. Speiser über Geometrie (1ᵉ ser. 26—29, 1953—1956) und J. O. Fleckenstein über Mechanik (2ᵉ ser. 5, 1957).

A. P. Juschkewitsch, *Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis*, in: Euler-Sammelband (Berlin 1959; siehe S. 148), S. 224—244.

I. Schneider, *Der Mathematiker Abraham de Moivre* (1667—1754), Arch. History Exact Sci. *5* (1968), 177—317.

N. Daniels, *Thomas Reid's Inquiry. The Geometry of Visibles and the Case for Realism* (New York 1974).

N. Daniels, *Thomas Reid's Discovery of a non-euclidean geometry*, Philosophy of Science *39* (1972), 219–233.

Thomas Reid (1710–1796), der schottische Philosoph entdeckte 1764 eine elliptische Geometrie, die unbeachtet blieb. Siehe S. 178.

C. C. Gillespie, *Lazare Carnot, savant* (Princeton, N. J., 1970).

O. B. Sheynin, *J. H. Lambert's work on probability*, Arch. History Exact. Sci. *7* (1971), 244–256.

O. B. Sheynin, *R. J. Boscovich's work on probability*, ibid. *9* (1973), 306–324.

Rudjer J. Boškovič (1711–1787), südslawischer Jesuit und „Polymathematiker".

Über Boškovič, die Bernoullis, Euler, Lambert, Maclaurin u. a. siehe die Artikel in D. S. B.

A. P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. History Exact Sci. *16* (1976), 37–85.

Siehe A. F. Monna, ibid. *9* (1972), 57–84.

O. B. Sheynin, *P. S. Laplace's work on probability*, Arch. History Exact Sci. *16* (1976), 137–187.

Siehe auch die Artikel ibid. *9* (1972), 45–56; *12* (1974), 97–141; *17* (1977), 1–62.

S. B. Engelsman, *Lagrange's early contributions to the theory of first order partial differential equations*, Preprint 75, Dept. of Mathematics, Univ. Utrecht, Feb. 1978, 28 S.

T. F. Mulcrone, *Benjamin Banneker, pioneer negro mathematician*, Mathem. Teacher *69* (1976), 155–160.

I. Grattan-Guinness, *The development of the foundation of mathematical analysis from Euler to Riemann* (Cambridge, Mass., 1970).

8. Das neunzehnte Jahrhundert

8.1. Mathematik und industrielle Revolution

Die Französische Revolution und die Napoleonische Zeit schufen außerordentlich günstige Bedingungen für die Weiterentwicklung der Mathematik. Die Bahn für die industrielle Revolution auf dem europäischen Kontinent war frei gemacht. Sie wirkte sich auf die Pflege der physikalischen Wissenschaft günstig aus; sie schuf neue gesellschaftliche Klassen mit einer neuen, an Wissenschaft und technischer Bildung interessierten Lebensanschauung. Demokratische Ideen drangen in das akademische Leben ein; an überalterten Denkformen wurde Kritik geübt, Schulen und Universitäten mußten reformiert und verjüngt werden.
Die neue und ungestüme mathematische Produktivität beruhte nicht in erster Linie auf technischen Problemen, die von den neuen Industrien aufgeworfen wurden. England, das Herz der industriellen Revolution, blieb mathematisch mehrere Jahrzehnte hindurch unfruchtbar. Der mathematische Fortschritt entfaltete sich am kräftigsten in Frankreich und etwas später auch in Deutschland, also in Ländern, in denen der ideologische Bruch mit der Vergangenheit besonders stark empfunden wurde und in denen schnelle Veränderungen eingetreten waren oder noch eintreten sollten, die die Grundlage für die neue kapitalistische wirtschaftliche und politische Struktur vorbereiteten. Die neue mathematische Forschung machte sich allmählich von der alten Tendenz frei, in Mechanik und Astronomie das endgültige Ziel der exakten Wissenschaften zu erblicken. Das Studium der Wissenschaft im ganzen machte sich noch stärker von den Forderungen des Wirtschaftslebens oder des Kriegswesens frei. Es entwickelte sich der Spezialist, der an der Wissenschaft um ihrer selbst willen interessiert war. Die Verbindung mit der Praxis war niemals ganz abgerissen, aber sie wurde oft verdunkelt. Als Begleiterscheinung der zunehmenden Spezialisierung trat die Trennung in „reine" und „angewandte" Mathematik ein.[1])

---

[1]) Der Unterschied der Auffassungen fand seinen klassischen Ausdruck in einer Äußerung von Jacobi zu den Ansichten von Fourier, der noch den Nützlichkeitsstandpunkt des achtzehnten Jahrhunderts vertrat: „Il est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde." („Es ist wahr, daß Herr Fourier der Meinung war, daß das Hauptziel der Mathematik im öffentlichen Nutzen und in der Erklärung der Naturvorgänge bestünde; aber ein solcher Philosoph wie er hätte wissen müssen, daß das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen

(Fortsetzung S. 152)

Die Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts lebten nicht mehr in der Umgebung von Königshöfen oder in den Salons der Aristokratie. Ihren Hauptberuf bildete nicht mehr die Mitgliedschaft in gelehrten Akademien; sie waren gewöhnlich an Universitäten oder technischen Lehranstalten tätig und zugleich Lehrer und Forscher. Die Bernoullis, Lagrange und Laplace hatten gelegentlich eine Tätigkeit ausgeübt. Jetzt nahmen die Lehrverpflichtungen zu; Mathematikprofessoren wurden Erzieher und Examinatoren der Jugend. Der Internationalismus der vorangegangenen Jahrhunderte zeigte angesichts der zunehmend engeren Beziehung zwischen den Wissenschaftlern der einzelnen Nationen die Tendenz abzubröckeln, obwohl der internationale Gedankenaustausch durchaus aufrechterhalten wurde. Latein als Sprache der Wissenschaft wurde allmählich durch die Nationalsprachen ersetzt. Die Mathematiker begannen, sich auf einzelnen Gebieten zu spezialisieren; und während man Leibniz, Euler, d'Alembert als „Mathematiker" (als „Geometer" in der Wortbedeutung des achtzehnten Jahrhunderts) bezeichnen kann, sehen wir in Cauchy einen Analytiker, in Cayley einen Algebraiker, in Steiner einen Geometer (sogar einen „reinen" Geometer) und in Cantor den Schöpfer der Mengenlehre (Punktmengen). Die Zeit war herangereift, in der es „mathematische Physiker" gab, denen Fachleute für „mathematische Statistik" oder „mathematische Logik" folgten. Diese Spezialisierung wurde nur auf dem höchsten Niveau des Genies durchbrochen; und gerade aus den Werken eines Gauß, Riemann, Klein und Poincaré empfing die Mathematik im neunzehnten Jahrhundert ihre stärksten Impulse.

8.2. Gauß' Arbeiten über Zahlentheorie, Algebra und Astronomie

Auf der Trennungslinie der Mathematik des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts erhebt sich die majestätische Gestalt von Carl Friedrich Gauß. Er wurde in Braunschweig als Sohn eines Tagelöhners geboren. Durch glückliche Umstände erkannte der Herzog von Braunschweig in dem jungen Gauß ein Wunderkind und übernahm die Sorge für seine Ausbildung. Der junge Genius studierte von 1795 bis 1798 in Göttingen und erwarb 1799 in Helmstedt den Doktorhut. Von 1807 an bis zu seinem Tode im Jahre 1855 arbeitete er ruhig und ungestört als Direktor der Sternwarte in Göttingen und Professor der dortigen Universität. Seine verhältnismäßig ausgeprägte Isolierung, seine Beherrschung sowohl der „angewandten" als auch der „reinen" Mathematik, seine Beschäftigung mit der Astronomie und der häufige Gebrauch des Lateins in seinen Werken verleihen ihm einen Wesenszug des

---

(Fortsetzung von Fußnote [1])

Geistes ist und daß unter diesem Gesichtspunkt ein Problem der Zahlen genauso wertvoll ist wie eine Frage nach dem Bau der Welt.") In einem Brief an Legendre (Werke I, S. 454) sprach sich Gauß 1830 für eine Synthese beider Auffassungen aus; er wendete die Mathematik ausgiebig auf Astronomie, Physik und Geodäsie an, sah in der Mathematik aber gleichzeitig die Königin der Wissenschaften und insbesondere in der Zahlentheorie die Königin der Mathematik.

achtzehnten Jahrhunderts, aber sein Werk atmet den Geist einer neuen Zeit. Er stand wie seine Zeitgenossen Kant, Beethoven und Hegel abseits von dem großen politischen Kampf, der sich in anderen Länder abspielte, verlieh aber in seinem eigenen Arbeitsgebiet den neuen Ideen seines Zeitalters in höchst wirksamer Weise Ausdruck.

Die Tagebücher von Gauß zeigen, daß er schon im siebzehnten Lebensjahr begann, aufsehenerregende Entdeckungen zu machen. Im Jahre 1795 entdeckte er beispielsweise unabhängig von Euler das quadratische Reziprozitätsgesetz der Zahlentheorie. Einige seiner ersten Entdeckungen wurden 1799 in seiner Helmstedter Dissertation und 1801 in seinen imponierenden „Disquisitiones arithmeticae" veröffentlicht. Die Dissertation lieferte den ersten strengen Beweis für den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra, also für den Satz, daß jede algebraische Gleichung vom Grade n mit reellen Koeffizienten wenigstens eine und damit n Wurzeln besitzt. Der Satz selbst geht wohl auf Albert Girard, den Herausgeber der Werke von Stevin („Invention nouvelle en algèbre", 1629), zurück. D'Alembert hatte im Jahre 1746 versucht, einen Beweis dafür zu geben. Gauß liebte diesen Satz, gab später zwei weitere Beweise und kam 1849 auf seinen ersten Beweis zurück. Der dritte Beweis (1816) verwendete komplexe Integrale und zeigte die frühzeitige Beherrschung der Theorie der komplexen Zahlen durch Gauß.

Die „Disquisitiones arithmeticae" stellten alle von den Vorgängern von Gauß stammenden Meisterleistungen in der Zahlentheorie zusammen und bereicherten sie in einem derartigen Umfang, daß man manchmal den Beginn der modernen Zahlentheorie von der Veröffentlichung dieses Buches ab rechnet. Sein Kernstück ist die Theorie der quadratischen Kongruenzen, Formen und Reste; den Höhepunkt bildet das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste, jenes „theorema aureum", für das Gauß den ersten vollständigen Beweis gab. Gauß war von diesem Satz ebenso begeistert wie von dem Fundamentalsatz der Algebra und veröffentlichte später fünf weitere Beweise; einer wurde außerdem nach seinem Tode noch im Nachlaß gefunden. Die „Disquisitiones" enthalten auch die Gaußschen Untersuchungen über die Kreisteilung, mit anderen Worten, über die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$. Sie gipfelten in dem bemerkenswerten Satz, daß die Seite des regulären Siebzehnecks (allgemein des n-Ecks, wobei $n = 2^p + 1$, $p = 2^k$, n Primzahl, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, was eine überraschende Erweiterung der griechischen Art, Geometrie zu treiben, bedeutet.

Gauß' Interesse an der Astronomie wurde geweckt, als Piazzi in Palermo am ersten Tage des neuen Jahrhunderts, am 1. Januar 1801, den ersten Planetoiden entdeckte, der den Namen Ceres erhielt. Da nur wenige Beobachtungen des neuen Planetoiden gemacht werden konnten, entstand das Problem, die Bahn eines Planeten aus relativ wenigen, nahe benachbarten Beobachtungen zu berechnen. Gauß löste das Problem vollständig; es führte auf eine Gleichung achten Grades. Als im Jahre 1802 die Pallas, ein weiterer Planetoid, entdeckt wurde, begann sich Gauß für die säkularen Störungen der Planeten zu interessieren. Eine Frucht dieser Studien bideten die „Theoria motus corporum coelestium" (1809), seine Arbeit über die Anziehung des allgemeinen Ellipsoids (1813), seine Abhandlung über die mechanische Quadratur (1814) und seine Arbeit über die säkularen Störungen (1818).

Dieser Periode gehört auch die Gaußsche Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) an, die die Diskussion einer großen Zahl von Funktionen unter einem einzigen Gesichtspunkt zusammenfaßt. Sie stellt die erste systematische Untersuchung über die Konvergenz von Reihen dar.

8.3. Gauß' Werke ab 1820

Nach 1820 begann sich Gauß lebhaft für die Geodäsie zu interessieren. Hierbei vereinigte er eine umfangreiche praktische Tätigkeit in der Triangulation mit seiner theoretischen Forschung. Eines der Ergebnisse war die Darlegung der Methode der kleinsten Quadrate (1821, 1923), die schon von Legendre (1806) und von Laplace zum Gegenstand der Untersuchung gemacht worden war. Vielleicht der bedeutendste Beitrag dieser Periode im Leben von Gauß war die Flächentheorie in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1827), die diesen Problemkreis auf einem Wege behandelte, der sich von dem Mongeschen auffällig unterschied. Hier waren abermals praktische Erwägungen, diesmal auf dem Gebiet der höheren Geodäsie, aufs engste mit tiefschürfenden theoretischen Untersuchungen verknüpft. Erstmalig wurde die „innere" Geometrie einer Fläche behandelt, in der durch Parameterlinien gegebene Koordinaten dazu genutzt werden, um das Linienelement ds mit Hilfe einer quadratischen Differentialform

$$ds^2 = E\,du^2 + F\,du \cdot dv + G\,dv^2$$

auszudrücken. Hierin wird ebenfalls ein Höhepunkt erreicht, nämlich das „theorema egregium", welches aussagt, daß die Gesamtkrümmung der Fläche nur von E, F und G und deren Ableitungen abhängt und daher biegungsinvariant ist. Aber selbst in dieser Periode angestrengter Beschäftigung mit Problemen der Geodäsie vernachlässigte Gauß seine erste Liebe, die „Königin der Mathematik", nicht, denn 1825 und 1831 erschienen seine Abhandlungen über biquadratische Reste. Sie bildeten die Fortsetzung der Theorie der quadratischen Reste in den „Disquisitiones arithmeticae", aber eine Fortsetzung mit Hilfe einer neuen Methode, der Theorie der komplexen Zahlen. Die Abhandlung aus dem Jahre 1831 lieferte nicht nur eine Algebra der komplexen Zahlen, sondern auch eine Arithmetik derselben. Dabei entstand eine neue Theorie der Primzahlen, in der 3 Primzahl bleibt, aber die Zahl $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ ihre Primzahleigenschaft verliert. Diese neue komplexe Zahlentheorie klärte viele dunkle Punkte der Arithmetik auf, so daß das quadratische Reziprozitätsgesetz einfacher als bei reellen Zahlen wurde. In dieser Arbeit beseitigte Gauß ein für allemal das Geheimnis, das die komplexen Zahlen immer noch umgeben hatte, durch ihre Darstellung als Punkte einer Ebene.[1])

---

[1]) Vgl. E. T. Bell, *Gauss and the Early Development of Algebraic Numbers*, Nat. Math. Magazine *18* (1944), 188, 219. A. Speiser hat bemerkt, daß bereits Euler und andere Mathematiker nach 1760 in den Begriffen dieser Darstellung der komplexen Zahlen gedacht haben: Einleitung zu Eulers *Opera omnia* I 28 (Zürich 1955, S. XXXVII). Eine vollständig ausgearbeitete geometrische Interpretation der komplexen Zahlen vor Gauß gaben C. Wessel (1799) und J. Argand (1806).

Ein Standbild in Göttingen stellt Gauß und seinen jüngeren Mitarbeiter Wilhelm Weber dar, als sie im Begriff sind, den elektrischen Telegraphen zu erfinden. Das geschah in den Jahren 1833/34 zu einer Zeit, als sich Gauß der Physik zuzuwenden begann. In dieser Zeit führte er viele Experimentaluntersuchungen über den Erdmagnetismus durch. Er fand aber auch die Zeit für einen theoretischen Beitrag von erstrangiger Bedeutung: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“ (1839, 1840). Dies bedeutete den Beginn der Potentialtheorie als eines besonderen Zweiges der Mathematik (die Greensche Arbeit aus dem Jahre 1828 war zu dieser Zeit praktisch unbekannt) und gab Anlaß zur Aufstellung verschiedener Minimalprinzipe über Volumenintegrale, in denen das „Dirichletsche“ Prinzip zu erkennen ist. Gauß hielt die Existenz eines Minimums noch für evident; später entstand daraus eine vieldiskutierte Fragestellung, die schließlich von Hilbert gelöst wurde.

Gauß blieb bis zu seinem Tode im Jahre 1855 tätig. In seinen späteren Lebensjahren wandte er sich immer mehr der angewandten Mathematik zu. Seine Veröffentlichungen liefern jedoch kein zutreffendes Bild von seiner vollen Größe. Die Auffindung seiner Tagebücher und einiger seiner Briefe hat bewiesen, daß er einige seiner tiefsten Gedanken für sich behalten hatte. Wir wissen heute, daß Gauß bereits 1800 die elliptischen Funktionen entdeckt hatte und um 1816 im Besitz der nichteuklidischen Geometrie war. Über diese Frage hat er niemals etwas veröffentlicht, tatsächlich hat er nur in einigen Briefen an Freunde seine kritische Einschätzung aller Versuche, das Euklidische Parallelenaxiom zu beweisen, offenbart. Gauß scheint nicht willens gewesen zu sein, sich öffentlich in die Behandlung einer Streitfrage einzulassen. In Briefen schrieb er über die Wespen, die ihm dann um die Ohren fliegen würden, und über das „Geschrei der Böotier“, das sich erheben würde, wenn er seine Geheimnisse nicht bewahren würde. Gauß selbst bezweifelte die Gültigkeit der allgemein angenommenen Lehre von Kant, wonach unsere Raumvorstellung a priori euklidisch ist; für ihn war die Geometrie des wirklichen Raumes eine physikalische Tatsache, die experimentell zu erforschen war.

8.4. A. M. Legendre

In seiner „Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ hat Felix Klein einen Vergleich zwischen Gauß und dem fünfundzwanzig Jahre älteren französischen Mathematiker Adrien Marie Legendre angeregt. Es ist vielleicht nicht ganz fair, Gauß mit einem beliebigen Mathematiker, abgesehen von den allergrößten, zu vergleichen; aber dieser besondere Vergleich zeigt, daß die Gaußschen Ideen „in der Luft lagen“, denn Legendre bearbeitete auf seinem eigenen unabhängigen Wege die meisten Fragen, die auch Gauß beschäftigten. Legendre lehrte von 1775 bis 1780 an der Kriegsschule in Paris und hatte später mehrere Regierungsstellungen inne wie die eines Professors an der École Normale, eines Examinators an der École Polytechnique und eines Vermessungsbeamten.

Wie Gauß leistete er Grundlegendes in der Zahlentheorie („Essai sur les nombres" 1798, „Théorie des nombres" 1830), worin er das quadratische Reziprozitätsgesetz aussprach. Er lieferte auch wichtige Arbeiten über Geodäsie und theoretische Astronomie, war ein ebenso fleißiger Berechner von Tafelwerken wie Gauß, gab 1806 die Methode der kleinsten Quadrate an und studierte die Anziehung von Ellipsoiden — sogar von solchen, die nicht zu den Rotationsflächen gehören. Hier führte er die „Legendreschen" Funktionen ein. Er hatte genau wie Gauß Interesse an elliptischen und Eulerschen Integralen sowie an den Grundlagen und Methoden der euklidischen Geometrie.
Obwohl Gauß tiefer in das Wesen aller dieser verschiedenen Gebiete der Mathematik eindrang, schuf Legendre Arbeiten von hervorragender Bedeutung. Seine umfangreichen Lehrbücher waren lange Zeit hindurch maßgeblich, besonders seine „Exercises du calcul intégral" (3 Bände, 1811—1819) und sein „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes" (1827—1832), der noch immer ein Standardwerk ist. In seinen „Eléments de géométrie" (1794) brach er mit dem platonischen Ideal von Euklid und gab ein Lehrbuch der elementaren Geometrie, das von den Erfordernissen der modernen Erziehung ausging. Dieses Buch erschien in vielen Auflagen und wurde in mehrere Sprachen übersetzt; es hat einen lang anhaltenden Einfluß ausgeübt.

8.5. Mathematik an französischen Hochschulen

Der Anfang der neuen Periode in der Geschichte der französischen Mathematik kann vielleicht von der Errichtung der Militärschulen und -akademien an gerechnet werden, die im zweiten Teil des achtzehnten Jahrhunderts stattfand. In diesen Schulen, von denen einige auch außerhalb Frankreichs (Turin, Woolwich) gegründet wurden, spielte der mathematische Unterricht als Teil der Ausbildung von Militäringenieuren eine beträchtliche Rolle. Lagrange begann seine Laufbahn an der Turiner Artillerieschule; Legendre und Laplace lehrten an der Militärschule in Paris, Monge in Mézières. Carnot war Ingenieur-Hauptmann. Napoleons Interesse an Mathematik reicht in seine Studentenzeit an den Militärakademien von Brienne und Paris zurück. Während des Einfalls der königlichen Armeen in Frankreich wurde das Bedürfnis nach einer stärker zentralisierten Ausbildung im Militäringenieurwesen offenkundig. Das führte zur Gründung der École Polytechnique in Paris (1794). Diese Schule entwickelte sich bald zu einer führenden Einrichtung für das Studium der allgemeinen Ingenieurwissenschaft und wurde allmählich zum Vorbild für alle Ingenieur- und Militärschulen des frühen neunzehnten Jahrhunderts, einschließlich West Point in den Vereinigten Staaten. Die Ausbildung in theoretischer und angewandter Mathematik bildete einen wesentlichen Bestandteil des Lehrplans. Forschung und Lehre wurden mit gleichem Nachdruck betrieben. Die besten Wissenschaftler Frankreichs wurden herangezogen, um ihre Kraft der Schule zu widmen; viele große französische Mathematiker waren Studenten, Professoren oder Examinatoren an der École Polytechnique.[1])

[1]) Vgl. C. G. J. Jacobi, *Werke* 7, S. 355 (im Jahre 1835 gehaltene Vorlesung).

Die Ausbildung an dieser Institution ebenso wie die an anderen technischen Schulen erforderte einen neuen Lehrbuchtyp. Die gelehrten Abhandlungen für die Kenner, die so charakteristisch für die Zeit von Euler waren, mußten durch Bücher für den Hochschulunterricht ergänzt werden. Einige der besten Lehrbücher des frühen neunzehnten Jahrhunderts wurden für die Ausbildung an der École Polytechnique oder an ähnlichen Institutionen ausgearbeitet. Ihr Einfluß kann bis in unsere heutigen Lehrbücher hinein verfolgt werden. Ein gutes Beispiel eines solchen Handbuches ist der von Sylvestre François Lacroix geschriebene „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“ (2 Bände, 1797), aus dem ganze Generationen ihre Kenntnisse der Infinitesimalrechnung erwarben. Die Bücher von Legendre haben wir schon erwähnt. Ein weiteres Beispiel ist das Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Monge, das vielen Büchern über diesen Gegenstand als Muster diente.

8.6. Die École Polytechnique

Gaspard Monge, der Direktor der École Polytechnique, war der wissenschaftliche Führer der Gruppe von Mathematikern, die mit dieser Institution verbunden waren. Er hatte seine Laufbahn als Dozent an der Militärakademie von Mézières (1768 bis 1789) begonnen, wo ihm seine Vorlesungen über Festungsbau Gelegenheit boten, die darstellende Geometrie als einen besonderen Zweig der Geometrie zu entwickeln. Er veröffentlichte seine Vorlesungen in der „Géométrie descriptive“ (1795 bis 1799). In Mézières begann er auch mit der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Raumkurven- und flächen, und seine Arbeiten darüber wurden später in der „Application de l'analyse à la géométrie“ (Anwendung der Analysis auf die Geometrie) (1809) veröffentlicht, dem ersten Buch über Differentialgeometrie, obwohl es noch nicht in der heute üblichen Form ausgeführt war. Monge war einer der ersten modernen Mathematiker, die wir als Spezialisten ansprechen: ein Geometer — sogar seine Behandlung der partiellen Differentialgleichungen war deutlich durch einen geometrischen Zug gekennzeichnet.
Durch den Einfluß von Monge begann die Geometrie an der École Polytechnique aufzublühen. In der darstellenden Geometrie von Monge lag der Kern der projektiven Geometrie, und seine vollkommene Beherrschung der Anwendung algebraischer und analytischer Methoden auf Kurven und Flächen kam der analytischen und Differentialgeometrie wesentlich zugute. Jean Hachette und Jean Baptiste Biot entwickelten die analytische Geometrie der Kegelschnitte und Quadriken; in Biots „Essai de géométrie analytique“ (1802) beginnen wir endlich unsere heutigen Lehrbücher der analytischen Geometrie zu erkennen. Charles Dupin, ein Schüler von Monge, wendete als junger Marineingenieur der Napoleonischen Zeit die Methoden seines Lehrers auf die Flächentheorie an, wobei er die asymptotischen und konjugierten Kurven fand. Dupin wurde Professor der Geometrie in Paris und gewann während seines langen Lebens auch als Politiker und Förderer der industriellen Entwicklung Ansehen. Die „Dupinsche Indikatrix“ und die „Zykliden von Dupin“ zeigen die anfänglichen Interessen dieses Gelehrten, dessen „Développements de géométrie“ (1813) und „Applications de géométrie“ (1825) eine große Zahl interessanter Ideen enthalten.

Der selbständigste Schüler von Monge war Victor Poncelet. Er hatte während des Jahres 1813 Gelegenheit, über die Methoden seines Lehrers nachzudenken, als er nach der Niederlage der Napoleonischen „Großen Armee" als Kriegsgefangener in Rußland lebte. Poncelet fühlte sich durch den rein synthetischen Gehalt der Geometrie von Monge angesprochen und wurde dadurch zu einer Denkweise geführt, die schon zwei Jahrhunderte früher von Desargues angeregt worden war. Poncelet wurde zum Begründer der projektiven Geometrie.
Der „Traité des propriétés projectives des figures" (Lehrbuch der projektiven Eigenschaften von Figuren) von Poncelet erschien im Jahre 1822. Dieser umfangreiche Band enthält alle wesentlichen Begriffe, die der neuen Form der Geometrie zugrunde liegen, wie etwa das Doppelverhältnis, die Perspektivität, die Projektivität, die Involution und sogar die unendlich fernen Kreispunkte. Poncelet wußte, daß die Brennpunkte eines Kegelschnitts als Schnittpunkte der durch diese Kreispunkte hindurchgehenden Tangenten an den Kegelschnitt aufgefaßt werden können. Der „Traité" enthält auch die Theorie der Polygone, die einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben sind (das sogenannte „Schließungsproblem von Poncelet"). Obwohl dieses Buch die erste vollständige Abhandlung über projektive Geometrie war, erreichte diese Geometrie bereits während der nächsten Jahrzehnte jenen Grad der Vollkommenheit, der sie zu einem klassischen Beispiel einer wohlabgerundeten mathematischen Struktur werden ließ.
Obgleich Monge ein Mann von streng demokratischen Grundsätzen war, verhielt er sich gegenüber Napoleon loyal, in dem er den Vollstrecker der Ideale der Revolution sah. Im Jahre 1815, als die Bourbonen zurückkehrten, verlor Monge seine Stellung und starb bald darauf. Die École Polytechnique jedoch blühte weiterhin im Geiste von Monge. Das innere Wesen dieser Institution machte es schwer, reine und angewandte Mathematik zu trennen. Die Mechanik wurde stark gepflegt, und die mathematische Physik begann, sich endlich von der „Katoptrik" und „Dioptrik" der Alten zu befreien. Etienne Malus entdeckte die Polarisation des Lichtes (1810), und Augustin Fresnel nahm die Huygenssche Wellentheorie des Lichtes wieder auf (1821). André Marie Ampère, der sehr erfolgreich über partielle Differentialgleichungen gearbeitet hatte, wurde nach 1820 der große Pionier des Elektromagnetismus. Diese Forscher brachten der Mathematik viele direkte und indirekte Anregungen: Ein Beispiel ist Dupins Verbesserung der Malusschen Geometrie der Lichtstrahlen, die bei der Modernisierung der geometrischen Optik mithalf und auch einen Beitrag zur Geometrie der Linienkongruenzen leistete.
Die „Mécanique analytique" von Lagrange wurde sorgfältig studiert, ihre Methoden erprobt und angewandt. Die Statik interessierte Monge und seine Schüler wegen ihrer geometrischen Möglichkeiten, und im Laufe dieser Jahre erschienen mehrere Lehrbücher über Statik, darunter eins von Monge selbst (1788, viele Auflagen). Voll zur Geltung gebracht wurde der geometrische Gehalt der Statik von Louis Poinsot, der viele Jahre hindurch Mitglied des französischen Hohen Rates für den öffentlichen Unterricht war. Seine „Eléments de statique" (1804) und die „Théorie nouvelle de la rotation des corps" (1834) fügte zum Begriff der Kraft denjenigen des Drehmoments (Kräftepaars) hinzu, stellte Eulers Theorie der Trägheitsmomente mit Hilfe des Trägheitsellipsoids dar und analysierte die Bewegung dieses

Ellipsoids, wenn sich der starre Körper im Raum bewegt oder um einen festen Punkt dreht. Poncelet und Coriolis verliehen der analytischen Mechanik von Lagrange einen geometrischen Zug; beide Gelehrte, ebenso wie Poinsot, betonen die Anwendung der Mechanik auf die Theorie von einfachen Maschinen. Die „Coriolisbeschleunigung", die dann in Erscheinung tritt, wenn sich ein Körper in einem beschleunigten System bewegt, ist ein Beispiel einer solchen geometrischen Interpretation der Ergebnisse von Lagrange (1835).

[10] Das über das Verhältnis von Poinsot, Poncelet und Coriolis zur analytischen Mechanik von Lagrange Gesagte muß noch etwas präzisiert werden. Poinsot war ein entschiedener Anhänger geometrischer Methoden in der Mechanik, denn er strebte nach einer anschaulichen Vorstellung aller Umstände eines Bewegungsvorgangs bzw. der verschiedenen Größen, die eine Bewegung charakterisieren. Nach Poinsot ist es zu wenig, die die Bewegung beschreibenden Formeln herzuleiten, die Bewegung zu berechnen; man muß vielmehr noch das Resultat so darstellen, daß man bei gegebener Lösung gleichsam den Bewegungsvorgang sieht. Poncelet, der sich auch noch nach seinen bedeutenden Untersuchungen zur projektiven Geometrie mit Mechanik beschäftigte, war bestrebt, die theoretischen Resultate und Methoden auf Probleme praktischer Art anzuwenden, etwa in der Theorie der Maschinen und Mechanismen. Gleichzeitig stellte er sich das Ziel, den Praktikern die Theorie zugänglich zu machen, eine Darstellung der Methoden und Resultate zu geben, die nicht nur für Ingeniere erreichbar war, sondern auch für Techniker, Meister, Handwerker.
Ohne die analytischen Methoden abzulehnen (die erste Herleitung der allgemeinen Formel für die Beschleunigung bei Relativbewegung, die von Coriolis stammt, ist rein analytisch), haben Poncelet und die seiner Richtung nahestehenden Vertreter der Mechanik, wie Coriolis und andere, Aufgaben gestellt und gelöst, die mit technischen Anforderungen verbunden waren: Sie berücksichtigten die Reibung (was man bei Lagrange gar nicht findet) und verwendeten dabei empirische Reibungskoeffizienten; dem Ruf von Ampère folgend, entwickelten sie die Kinematik der Mechanismen; sie definierten exakt den Begriff „Arbeit" und verwendeten das Gesetz von der „lebendigen Kraft" in der Dynamik der Maschinen, indem sie den Verlust an Arbeit (Energie) ermittelten, der infolge des Vorhandenseins von Führungen auftritt u. a. m. Poinsot ist in der Mechanik ein Repräsentant der „anschaulichen Richtung", aber er bleibt Theoretiker. Poncelet und Coriolis sind Vertreter der „industriellen Richtung"; sie vereinigen sowohl in ihren Vorlesungen als auch in ihrer Forschungsarbeit die theoretische Mechanik mit neu entstehenden Disziplinen, mit der Kinematik und Dynamik von Maschinen und Mechanismen.

Die hervorragendsten Mathematiker, die mit den ersten Jahren der École Polytechnique verbunden waren — außer Lagrange und Monge — waren Siméon Poisson, Joseph Fourier und Augustin Cauchy. Alle drei waren zutiefst an der Anwendung der Mathematik auf die Mechanik und Physik interessiert, alle drei wurden durch dieses Interesse zu Entdeckungen in der „reinen" Mathematik geführt. Die Produktivität von Poisson wird durch die Häufigkeit gekennzeichnet, mit der sein Name in unseren Lehrbüchern genannt wird: Poissonsche Klammern in der Theorie der Differentialgleichungen, die Poissonsche Konstante in der Elastizitätstheorie, das Poissonsche Integral und die Poissonsche Gleichung der Potentialtheorie. Diese „Poissonsche Gleichung", $\Delta V = 4\pi\varrho$, war das Ergebnis der Entdekkung von Poisson (1812), daß die Laplacesche Gleichung $\Delta V = 0$ nur außerhalb von Massen gilt; ihr exakter Beweis für Massen von veränderlicher Dichte wurde erst von Gauß in seinen „Allgemeinen Lehrsätzen" (1839/40) geliefert. Poissons

„Traité de mécanique" (1811) war im Geiste von Lagrange und Laplace geschrieben, enthielt aber auch viele neue Gedanken, wie die explizite Verwendung von Impulskoordinaten $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i}$, wodurch später die Arbeiten von Hamilton und Jacobi angeregt wurden. Sein Buch aus dem Jahre 1837 enthält das „Poissonsche Gesetz" der Wahrscheinlichkeit (siehe S. 118, 141).

Fourier ist in erster Linie als Autor der „Théorie analytique de la chaleur" (Analytische Theorie der Wärme) (1822) bekannt. Hierbei handelt es sich um die mathematische Theorie der Wärmeleitung und daher im wesentlichen um das Studium der Gleichung $\Delta U = k\frac{\partial u}{\partial t}$. Dank der Allgemeinheit seiner Methode wurde dieses Buch zum Ausgangspunkt aller modernen Methoden der mathematischen Physik, die sich auf die Integration von partiellen Differentialgleichungen bei vorgegebenen Randbedingungen beziehen. Diese Methode ist der Gebrauch von trigonometrischen Reihen, die schon Gegenstand der Diskussion zwischen Euler, d'Alembert und Daniel Bernoulli gewesen waren. Fourier klärte die Situation völlig auf. Er stellte die Tatsache klar, daß eine „willkürliche" Funktion (eine Funktion, die sich durch ein stetiges Kurvenstück oder durch eine Aneinanderreihung von solchen darstellen läßt) durch eine trigonometrische Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nax + B_n \sin nax)$$

dargestellt werden kann. Trotz der Betrachtungen von Euler und Bernoulli war die Idee zur Zeit der Untersuchungen Fouriers so neu und frappierend, daß berichtet wird, wie er 1807, als er seine Idee zum erstenmal bekanntgab, auf den scharfen Widerspruch von niemand anderem als Lagrange selbst stieß.

Die „Fourierreihen" wurden nun zu einem gut durchgebildeten Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit gegebenen Randbedingungen. Sie fanden aber auch ein selbständiges Interesse. Ihre Handhabung bei Fourier drängte auf die Klärung der Frage, was unter einer „Funktion" zu verstehen ist. Dies war einer der Gründe, warum die Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts es für notwendig hielten, sich mehr mit Fragen nach der Strenge mathematischer Beweise und den Grundlagen der mathematischen Begriffe überhaupt zu beschäftigen.[1]) Diese Aufgabe wurde insbesondere bei den Fourierreihen von Dirichlet und Riemann in Angriff genommen.

8.7. A. Cauchy

Cauchys zahlreiche Beiträge zur Theorie des Lichtes und zur Mechanik sind durch den Erfolg seiner Leistungen in der Analysis zurückgedrängt worden, aber man darf nicht vergessen, daß er zusammen mit Navier zu den Begründern der mathematischen Elastizitätstheorie gehört. Sein Ruhm beruht hauptsächlich auf der

[1]) P. E. B. Jourdain, *Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics*, Proc. Intern. Congress of Mathem. (Cambridge 1912) II, S. 526/27.

Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und auf seinem beharrlichen Streben nach Strenge in der Analysis. Funktionen einer komplexen Veränderlichen waren schon vordem konstruiert worden, besonders von d'Alembert, der in einer Arbeit über den Widerstand in Flüssigkeiten im Jahre 1752 sogar zu dem gelangt war, was wir heute die Cauchy-Riemannschen Gleichungen nennen. Unter den Händen von Cauchy befreite sich die komplexe Funktionentheorie davon, lediglich als ein nützliches Hilfsmittel in der Hydrodynamik und Aerodynamik zu gelten, und wurde zu einem neuen und unabhängigen Gebiet mathematischer Forschung. Cauchys Untersuchungen über diesen Gegenstand erschienen nach 1814 in ununterbrochener Folge. Eine der bedeutendsten seiner Arbeiten ist das „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires" (1825). In dieser Abhandlung erschien der Cauchysche Integralsatz, wobei der Begriff des Residuums auftauchte. Der Satz, daß jede reguläre Funktion $f(z)$ um jeden Punkt $z = z_0$ in eine Reihe entwickelt werden kann, die innerhalb eines Kreises konvergiert, der durch den zu $z = z_0$ nächstgelegenen singulären Punkt hindurchgeht, wurde 1831 veröffentlicht, also im gleichen Jahr, als Gauß seine arithmetische Theorie der komplexen Zahlen veröffentlichte. Laurents Erweiterung des Cauchyschen Reihensatzes wurde 1843 veröffentlicht — als sie auch im Besitz von Weierstraß war. Diese Tatsachen zeigen, daß die Cauchysche Theorie keine Widerstände in Fachkreisen zu überwinden hatte; die Theorie der komplexen Funktionen wurde von ihrem Erscheinen an vollständig anerkannt.

Cauchy gehört zusammen mit seinen Zeitgenossen Gauß, Abel und Bolzano zu den Pionieren des neu erwachten Bedürfnisses nach Strenge in der Mathematik. Das achtzehnte Jahrhundert war im wesentlichen eine Zeit des Experimentierens gewesen, in der sich Ergebnisse in verschwenderischer Fülle einstellten. Die Mathematiker dieser Zeit hatten sich nicht allzusehr um die Grundlagen ihrer Arbeit gekümmert — „allez en avant, et la foi vous viendra" (Geht vorwärts, der Glaube wird sich schon einstellen) soll d'Alembert gesagt haben. Wenn sie sich um Strenge sorgten, wie es Euler und Lagrange gelegentlich taten, waren ihre Argumente nicht immer überzeugend. Nunmehr war die Zeit für eine zielgerichtete Konzentration auf die Sinndeutung der Resultate gekommen. Was war eigentlich eine „Funktion" einer reellen Veränderlichen, die ein so verschiedenes Verhalten bezüglich einer Fourierreihe und bezüglich einer Potenzreihe zeigte? In welcher Beziehung stand sie zu der völlig andersartigen „Funktion" einer komplexen Veränderlichen? Diese Fragen schoben alle ungelösten Probleme der Begründung der Infinitesimalrechnung und der Existenz des aktual und des potentiell Unendlichen in den Vordergrund des mathematischen Denkens.[1]) Was Eudoxus in der Zeit nach dem Sturz der Athener Demokratie geleistet hatte, begannen Cauchy und seine exakt denkenden Zeitgenossen in der Periode der sich ausbreitenden Industrialisierung zu vollenden. Dieser Unterschied der gesellschaftlichen Umstände führte zu unterschiedlichen Ergebnissen: Während der Erfolg des Eudoxus die Tendenz besaß, die Produktivität zu hemmen, wirkte der Erfolg der modernen Reformer auf die mathema-

[1]) P. E. B. Jourdain, *The Origin of Cauchy's Conception of a Definite Integral and of the Continuity of a Function*, Isis *1* (1913), 661—703 (siehe auch Bibl. Math. *6* (1905), 190—207).

tische Produktivität in hohem Maße anregend. Auf Cauchy und Gauß folgten Weierstraß und Cantor. Cauchy arbeitete die Begründung der Infinitesimalrechnung so aus, wie sie heute allgemein in unseren Lehrbüchern dargelegt wird. Sie findet sich in seinem „Cours d'analyse" (1821) und seinem „Resumé des leçons données à l'école royale polytechnique" I (1823). Cauchy verwendete den Grenzwertbegriff von d'Alembert, um die Ableitung einer Funktion zu definieren und sie auf eine festere Grundlage zu stellen, als es seinen Vorgängern möglich war.
Ausgehend vom Grenzwertbegriff gab Cauchy solche Beispiele wie den Limes von $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ für $\alpha \to 0$. Danach definierte er eine „unendlich kleine Variable" als eine veränderliche Zahl, die Null als Grenzwert besitzt; dann forderte er, daß Δy und Δx „seront des quantités infiniment petites" (unendlich kleine Größen seien). Er schrieb dann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

und nannte den Grenzwert für $i \to 0$ die „fonction dérivée (abgeleitete Funktion) y' ou $f'(x)$". Er setzte weiter $i = \alpha h$, α eine „infiniment petite" und h eine „quantité finie":

$$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}\, h\,.$$

h wurde die „différentielle de la fonction $y = f(x)$" (das Differential von y) genannt. Weiterhin ist $dy = df(x) = hf'(x)$; $dx = h$.[1])
Cauchy benutzte sowohl die Bezeichnung von Lagrange als auch viele seiner Beiträge zur reellen Funktionentheorie, ohne irgendein Zugeständnis an die Lagrangesche „algebraische" Begründung zu machen. Der Mittelwertsatz und das Restglied der Taylorschen Reihe wurden so übernommen, wie sie von Lagrange abgeleitet worden waren, aber die Reihen wurden jetzt unter gebührender Beachtung ihrer Konvergenz diskutiert. Mehrere Konvergenzkriterien in der Lehre von den unendlichen Reihen werden nach Cauchy benannt. In seinen Büchern finden sich deutliche Ansätze zu der „Arithmetisierung" der Analysis, die später das Kernstück der Untersuchungen von Weierstraß bildete. Cauchy gab auch den ersten Existenzbeweis für die Lösung einer Differentialgleichung und eines Systems von solchen Gleichungen (1836). Auf diese Weise lieferte Cauchy wenigstens den Beginn einer Antwort auf jene Reihe von Problemen und Paradoxien, die die Mathematik seit den Tagen von Zeno beunruhigt hatten, und er tat dies nicht, indem er sie leugnete oder übersah, sondern dadurch, daß er eine mathematische Technik schuf, mit der es möglich war, ihnen gerecht zu werden.
Cauchy war wie sein Zeitgenosse Balzac, mit dem er die Fähigkeit zu einem beinahe unbegrenzten Arbeitsvolumen gemeinsam hatte, Legitimist und Anhänger des Königtums. Beide Männer besaßen ein so tiefes Verständnis für Werte, daß trotz ihrer reaktionären Ideale vieles von ihrem Werk seinen fundamentalen Wert behalten hat. Cauchy verließ seinen Lehrstuhl an der École Polytechnique nach

[1]) Resumé I (1823), *Calcul différentiel*, S. 13—27. Eine genaue Untersuchung dieses Vorgehens in M. Pasch, *Mathematik am Ursprung* (Leipzig 1927), S. 47—73.

der Revolution von 1830 und verbrachte einige Jahre in Turin und Prag; 1838 kehrte er nach Paris zurück. Nach 1848 wurde sein weiterer Aufenthalt gestattet, und er konnte lehren, ohne den Treueeid auf die neue Regierung geleistet zu haben. Seine Produktivität war so gewaltig, daß die Pariser Akademie den Umfang aller an die „Comptes Rendus" eingereichten Arbeiten einschränken mußte, um mit Cauchys Produktivität fertig zu werden. Man sagt, daß er Laplace, als er seine erste Arbeit über die Konvergenz von Reihen an der Pariser Akademie las, so stark beunruhigte, daß der große Gelehrte nach Hause eilte, um die Reihen in seiner „Mécanique céleste" zu überprüfen. Er fand, wie es scheint, heraus, daß keine großen Fehler vorgekommen waren.

8.8. E. Galois und der Beginn der modernen Algebra

Dieses Pariser Milieu mit seiner intensiven mathematischen Tätigkeit brachte um 1830 ein Genie ersten Ranges hervor, das wie ein Komet ebenso plötzlich verschwand, wie es erschienen war. Evariste Galois, dem Sohn des Bürgermeisters einer Kleinstadt in der Nähe von Paris, wurde zweimal die Aufnahme in die École Polytechnique verweigert, und als es ihm endgültig gelungen war, in die École Normale einzutreten, wurde er schnell wieder entlassen. Er versuchte sich als Privatlehrer für Mathematik durchzuschlagen, wobei er gleichzeitig ein schwieriges Gleichgewicht zwischen seiner heißen Liebe zur Wissenschaft und für die Demokratie aufrechterhalten mußte. Galois nahm auf republikanischer Seite an der Revolution von 1830 teil, verbrachte mehrere Monate im Gefängnis und wurde bald danach im Alter von einundzwanzig Jahren in einem Duell getötet. Zwei der von ihm zur Veröffentlichung eingereichten Arbeiten verloren sich auf dem Schreibtisch des Herausgebers; einige andere wurden lange nach seinem Tode veröffentlicht. Am Vorabend des Duells teilte er einem Freund brieflich eine Zusammenfassung seiner Entdekkungen in der Theorie der Gleichungen mit. Dieses ergreifende Dokument, in welchem er seinen Freund bat, seine Entdeckungen den führenden Mathematikern zu unterbreiten, schloß mit den Worten:

„Du wirst Jacobi oder Gauß öffentlich bitten, ihre Meinung nicht über die Wahrheit, sondern über die Bedeutung der Sätze zu sagen. Danach wird es, so hoffe ich, einige Leute geben, die es für vorteilhaft erachten, diesen ganzen Wirrwarr zu entziffern."

Dieser Wirrwarr („ce gâchis") enthielt nicht weniger als die Theorie der Gruppen, den Schlüssel zur modernen Algebra und zur modernen Geometrie. Die Gedanken waren in gewissem Umfange schon von Lagrange und dem Italiener Ruffini vorweggenommen worden, aber Galois hatte die Konzeption einer vollständigen Gruppentheorie. Er brachte die grundlegenden Eigenschaften der zu den Wurzeln einer algebraischen Gleichung gehörenden Transformationsgruppe zum Ausdruck und zeigte, daß der Körper dieser Wurzeln durch die Gruppe bestimmt ist. Galois wies auf die entscheidende Bedeutung hin, die den invarianten Untergruppen zukommt. Alte Probleme, wie etwa die Dreiteilung des Winkels, die Verdopplung des Würfels, die Lösung der kubischen und der biquadratischen Gleichungen, ebenso wie

die Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades, fanden ihren natürlichen Platz in der Theorie von Galois. Der Brief von Galois wurde, soweit wir wissen, niemals Gauß oder Jacobi vorgelegt. Er wurde der mathematischen Öffentlichkeit nicht eher bekannt, als bis Liouville im Jahre 1846 die meisten Arbeiten von Galois in seinem „Journal de mathématiques" veröffentlichte, zu welcher Zeit Cauchy bereits begonnen hatte, über Gruppentheorie zu arbeiten (1844–1846). Erst jetzt begannen einige Mathematiker, sich für die Theorien von Galois zu interessieren. Volles Verständnis für die Bedeutung von Galois wurde erst durch Camille Jordans „Traité des substitutions" (1870) und die nachfolgenden Veröffentlichungen von Klein und Lie geschaffen. Heute hat man erkannt, daß das vereinheitlichende Prinzip von Galois eine der hervorragendsten Leistungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts darstellt.
Galois besaß auch neue Ideen über die Integrale algebraischer Funktionen von einer Veränderlichen, die wir heute Abelsche Integrale nennen. Das läßt seine Denkweise mit der Denkweise von Riemann verwandt erscheinen. Man kann darüber Vermutungen anstellen, ob die Möglichkeit bestanden hätte, falls Galois länger gelebt hätte, daß die moderne Mathematik ihre tiefsten Gedanken aus Paris und der Schule von Lagrange empfangen hätte statt aus Göttingen und der Schule von Gauß.

8.9. N. H. Abel

Ein anderes junges Genie tauchte in den zwanziger Jahren auf, Niels Henrik Abel, der Sohn eines norwegischen Dorfpfarrers. Abels kurzes Leben verlief fast so tragisch wie das von Galois. Als Student in Christiania glaubte er eine Zeitlang, die Gleichung fünften Grades gelöst zu haben, aber er korrigierte sich selbst in einer im Jahre 1824 veröffentlichten Schrift. Das war eine berühmte Arbeit, in der Abel die Unmöglichkeit der Lösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades mit Hilfe von Radikalen bewies — ein Problem, das den Mathematiker seit der Zeit von Bombelli und Viète Kopfzerbrechen bereitet hatte (ein von dem Italiener Paolo Ruffini im Jahre 1799 versuchter Beweis wurde von Poisson und anderen Mathematikern als zu unbestimmt angesehen). Abel erhielt nun ein Stipendium, das es ihm ermöglichte, nach Berlin, Italien und Frankreich zu reisen. Von Armut und Schwindsucht gepeinigt, schüchtern und zurückgezogen, konnte der junge Mathematiker nur wenige persönliche Kontakte herstellen und starb (1829) bald nach seiner Rückkehr in die Heimat.
In dieser Zeit schrieb Abel mehrere Arbeiten, die seine Untersuchungen über die Konvergenz von Reihen, über „abelsche" Integrale und elliptische Funktionen enthalten. Abels Sätze in der Theorie der unendlichen Reihen zeigen, daß er imstande war, diese Theorie auf eine zuverlässige Grundlage zu stellen. „Kannst Du Dir etwas Schrecklicheres vorstellen als zu behaupten, daß $0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n$ + etc. gilt, wobei n eine positive ganze Zahl ist?" schrieb er an einen Freund und fuhr fort:

„Es gibt in der Mathematik kaum eine einzige unendliche Reihe, deren Summe in strenger Weise bestimmt worden ist." (Brief an Holmboe, 1826.)

Abels Untersuchungen über elliptische Funktionen wurden in einem kurzen, aber aufregenden Wettlauf mit Jacobi durchgeführt. Gauß hatte in seinen persönlichen Aufzeichnungen schon lange entdeckt, daß die Umkehrung der elliptischen Integrale zu eindeutigen doppelt-periodischen Funktionen führt, aber er veröffentlichte seine Gedanken darüber nie. Legendre, der so viele Mühe an elliptische Integrale gewandt hatte, hatte diese Tatsache gänzlich übersehen und war tief beeindruckt, als er Abels Entdeckungen als alter Mann zu Gesicht bekam. Abel hatte darin viel Glück, daß er eine neue Zeitschrift fand, die begierig darauf war, seine Arbeiten zu drucken; der erste Band des von Crelle herausgegebenen „Journals für die reine und angewandte Mathematik" enthielt nicht weniger als fünf Arbeiten von Abel. Im zweiten Band (1827) erschien der erste Teil seiner „Recherches sur les fonctions elliptiques", mit der die Theorie der doppelt-periodischen Funktionen beginnt.
Wir sprechen von der Abelschen Integralgleichung und vom Abelschen Satz über die Summe von Integralen algebraischer Funktionen, der zu den Abelschen Funktionen führt. Kommutative Gruppen werden abelsche Gruppen genannt, was darauf hinweist, wie eng die Ideen von Galois mit denen von Abel verwandt sind.

8.10. C. G. J. Jacobi

Im Jahre 1829, in dem Abel starb, veröffentlichte Carl Gustav Jakob Jacobi seine „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum". Der Autor war ein junger Professor an der Universität Königsberg. Es war der Sohn eines Berliner Bankiers und Angehöriger einer vornehmen Familie; sein Bruder Moritz in Petersburg war einer der ersten russischen Wissenschaftler, der experimentell in der Elektrizitätslehre arbeitete. Nach seinem Studium in Berlin lehrte Jacobi von 1826 bis 1843 in Königsberg. Er verbrachte dann einige Zeit in Italien, wo er versuchte, seine Gesundheit wiederzuerlangen, und beendete seine Laufbahn als Mitglied der Akademie zu Berlin, wo er 1851 im Alter von sechsundvierzig Jahren starb. Er war ein geistreicher und liberaler Denker, ein begeisternder Lehrer und ein Wissenschaftler, dessen ungewöhnliche Energie und klare Gedankengänge wenige Zweige der Mathematik unberührt ließen.
Jacobi gründete seine Theorie der elliptischen Funktionen auf vier durch unendliche Reihen definierte Funktionen, die als Thetafunktionen bezeichnet werden. Die doppelt-periodischen Funktionen sn u, cn u und dn u sind Quotienten von Thetafunktionen; sie genügen gewissen Identitäten und Additionstheoremen, die denen der Sinus- und Kosinusfunktionen der gewöhnlichen Trigonometrie sehr ähnlich sind. Die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen können auch als spezielle Anwendungen des Abelschen Satzes über die Summe von Integralen algebraischer Funktionen betrachtet werden. Nun entstand die Frage, ob hyperelliptische Integrale ebenso umgekehrt werden konnten, wie elliptische Integrale umgekehrt worden waren, als sie die elliptischen Funktionen lieferten. Die Lösung wurde 1832 von Jacobi gefunden, als er sein Ergebnis veröffentlichte, wonach die

Umkehrung mit Hilfe von Funktionen von mehr als einer Veränderlichen vorgenommen werden konnte. So wurde die Theorie der abelschen Funktionen von p Variablen geschaffen, die zu einem bedeutenden Zweig der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts wurde.

Sylvester hat der Funktionaldeterminante den Namen „Jacobische" Determinante gegeben, um Jacobis Leistungen bezüglich Algebra und Eliminationstheorie zu ehren. Die am besten bekannte Jacobische Arbeit über dieses Gebiet ist „De formatione et proprietatibus determinantium" (1841), die die Theorie der Determinanten zum Gemeingut der Mathematiker werden ließ. Die Idee der Determinante ist viel älter — sie geht im wesentlichen auf Leibniz (1693), den Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer (1750) und Lagrange (1773) zurück; der Name rührt von Cauchy (1812) her. Y. Mikami hat darauf hingewiesen, daß der japanische Mathematiker Seki Kōwa die Idee der Determinante etwas vor 1683 besessen hat.[1]) Man wird hier an die von den chinesischen Mathematikern der Sung-Dynastie entwickelten „Matrix"-Methoden erinnert.

Die beste Vorstellung von Jacobi gewinnt man vielleicht durch seine ausgezeichneten „Vorlesungen über Dynamik", die 1866 nach Vorlesungsnotizen von 1842 bis 1843 veröffentlicht wurden. Sie sind in der Tradition der französischen Schule von Lagrange und Poisson geschrieben, enthalten aber eine Fülle neuer Ideen. Hier findet man Jacobis Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Anwendung auf die Differentialgleichungen der Dynamik. Ein interessantes Kapitel der „Vorlesungen über Dynamik" ist die Bestimmung der Geodätischen auf einem Ellipsoid; das Problem führt auf eine Relation zwischen zwei abelschen Integralen.

8.11. W. R. Hamilton

Jacobis Vorlesungen über Dynamik führen uns zu einem anderen Mathematiker, dessen Name oft mit dem von Jacobi zusammen genannt wird, zu William Rowan Hamilton (nicht mit seinem Zeitgenossen William Hamilton, dem Edinburgher Philosophen, zu verwechseln.) Er verbrachte sein ganzes Leben in Dublin, wo er als Sohn irischer Eltern geboren wurde. Er besuchte das Trinity College, wurde im Jahre 1827 im Alter von zweiundzwanzig Jahren „königlicher Astronom von Irland" und hatte diese Stellung bis zu seinem Tode 1865 inne. Als Knabe lernte er die Mathematik des Kontinents — das war noch eine Neuheit im Vereinigten Königreich —, indem er Clairaut und Laplace studierte, und bewies seine Beherrschung der neuen Methoden durch seine von außerordentlicher Originalität zeugenden Arbeiten über Optik und Dynamik. Seine Theorie der Lichtstrahlen (1824) war mehr als nur eine Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen; sie war zugleich eine Theorie der optischen Instrumente und ermöglichte Hamilton, die konische Refraktion in zweiachsigen Kristallen vorauszusagen. In dieser Arbeit erschien seine „charakteristische Funktion", die zum Leitgedanken seiner 1834/

[1]) Y. Mikami, *On the Japanese Theory of Determinants*, Isis *2* (1914), 9—36. Seki Kōwa wird auch Seki Takakazu genannt.

35 veröffentlichten „General Method in Dynamics" wurde. Seine Idee bestand darin, Optik und Dynamik zusammen aus einem einzigen allgemeinen Prinzip herzuleiten. Euler hatte anläßlich seiner Verteidigung von Maupertuis bereits gezeigt, wie der stationäre Wert des Wirkungsintegrals zu diesem Zweck benutzt werden konnte. Hamilton machte im Verfolg dieser Anregung Optik und Dynamik zu zwei Anwendungsbeispielen der Variationsrechnung. Er fragte nach dem stationären Wert eines gewissen Integrals und betrachtete es als Funktion seiner Grenzen. Das war die „charakteristische" oder „Wirkungs"-Funktion, die zwei partiellen Differentialgleichungen genügt. Eine dieser partiellen Differentialgleichungen, die man üblicherweise

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0$$

schreibt, war von Jacobi für seine Vorlesung über Dynamik besonders gewählt worden und ist jetzt als Hamilton-Jacobische Gleichung bekannt. Das hat die Bedeutung der Hamiltonschen charakteristischen Funktion verdunkelt, die in seiner Theorie als Mittel zur Vereinheitlichung von Mechanik und mathematischer Physik eine zentrale Stellung einnahm. Sie wurde im Jahre 1895 von Bruns für den Fall der geometrischen Optik wiederentdeckt und hat als „Eikonal" ihren Nutzen in der Theorie der optischen Instrumente bewiesen.

Der Teil der Hamiltonschen Arbeiten über Dynamik, der zum Allgemeingut der Mathematiker geworden ist, ist in erster Linie die „kanonische" Form $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, in welcher er die Gleichungen der Dynamik schrieb. Kanonische Form und Hamilton-Jacobische Differentialgleichung haben es Lie ermöglicht, eine Beziehung zwischen Dynamik und Berührungstransformationen aufzustellen. Diese mit dieser Entwicklung verbundene allgemeine Idee von Hamilton war daher die Herleitung der Gesetze der Physik und Mechanik aus der Variation eines Integrals. Die moderne Relativitätstheorie ebenso wie die Quantenmechanik sind auf der „Hamiltonschen" Funktion als ihrem grundlegenden Prinzip aufgebaut.

Das Jahr 1843 bedeutete einen Wendepunkt im Leben Hamiltons. In diesem Jahr entdeckte er die Quaternionen, deren Studium er den späteren Teil seines Lebens widmete. Wir werden diese Entdeckung an späterer Stelle diskutieren.

8.12. P. L. Dirichlet. M. W. Ostrogradski

Peter Lejeune Dirichlet war sowohl mit Gauß und Jacobi als auch mit den französischen Mathematikern eng verbunden. Er lebte von 1822 bis 1827 als Privatlehrer und traf mit Fourier zusammen, dessen Buch er studierte; er machte sich auch mit den „Disquisitiones arithmeticae" von Gauß vertraut. Er lehrte später an der Universität Breslau und wurde 1855 Nachfolger von Gauß in Göttingen. Seine persönliche Bekanntschaft sowohl mit französischen und deutschen Mathematikern als auch mit der mathematischen Wissenschaft beider Länder ließen ihn zum geeigneten Mann werden, um als Interpret von Gauß zu wirken und die Fourierreihen einer tiefschürfenden Analyse zu unterziehen. Dirichlets ausgezeichnete „Vorlesungen über Zahlentheorie" (1863 veröffentlicht) bilden noch immer eine der besten Einführungen in die Gaußschen Untersuchungen zur Zahlentheorie. Sie enthalten auch viele neue Ergebnisse. In einer Arbeit aus dem Jahre 1840 lehrte Dirichlet, wie man die volle Kraft der Theorie der analytischen Funktionen auf Probleme der Zahlentheorie anwendet; eben in diesen Untersuchungen führte er die „Dirichletschen" Reihen ein. Er erweiterte auch den Begriff der quadratischen Irrationalitäten zu dem der allgemeinen algebraischen Rationalitätsbereiche (Körper). Dirichlet gab als erster einen strengen Konvergenzbeweis für Fourierreihen und trug auf diese Weise zum richtigen Verständnis des Wesens einer Funktion bei. Außerdem führte er das sogenannte Dirichletsche Prinzip in die Variationsrechnung ein, das die Existenz einer Funktion v als gegeben annahm, die das Integral $\int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, d\tau$ bei vorgegebenen Randbedingungen zum Minimum macht. Es war eine Abänderung eines Prinzips, das Gauß in seiner Potentialtheorie von 1839/40 eingeführt hatte, und diente später Riemann als kraftvolles Hilfsmittel bei der Lösung von Problemen der Potentialtheorie. Es wurde schon erwähnt, daß schließlich Hilbert die Gültigkeit dieses Prinzips streng nachwies (S. 155).

8.12.* Heute gilt N. I. Lobatschewski, einer der Begründer der nichteuklidischen Geometrie, als bedeutendster Mathematiker Rußlands in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts. Lobatschewski wurde jedoch erst postum entsprechend gewürdigt, und für die Zeitgenossen stand an erster Stelle Michail Wassilewitsch Ostrogradski. Er wurde 1801 in der Familie eines poltawischen Gutsbesitzers geboren. Während seines Studiums an der Charkower Universität lernte er die Mathematik kennen und schätzen. Charkow war eine der Universitäten, die in Rußland Anfang des neunzehnten Jahrhunderts gegründet worden waren, als unter dem Einfluß der ökonomischen und gesellschaftlichen Anforderungen die zaristische Regierung zur Erneuerung und Umgestaltung des gesamten Bildungssystems überging. Bis zum gewissen Grade hatte sich der liberale Geist an der Charkower Universität noch bis in die Zeit erhalten, als Ostrogradski dort studierte. Das verdankte man vor allem dem Rektor, T. F. Ossipowski. Ossipowski — Mathematiker von Haus aus mit Interessen auf dem Gebiet der mathematischen Physik — übte großen Einfluß auf Ostrogradski aus, dessen Talent er zu schätzen wußte. Die Reaktion, die in Rußland und in Westeuropa in jenen Jahren der „Heiligen Allianz" die Oberhand gewann, erreichte auch die Universitäten. Ossipowski wurde seines Amtes enthoben. Auch sein Schüler wurde gemaßregelt, man gab ihm kein Abschlußdiplom. Daraufhin ging Ostrogradski nach Paris (1822—1828), um sich in der Mathematik zu vervollkommnen. Hier pflegte er — genau wie Dirichlet — Umgang mit den bedeutendsten französischen Mathematikern, vor allem mit Fourier, Cauchy, Poisson; hier machte er sich mit den neuesten Errungenschaften der Analysis und mathematischen Physik vertraut. In die Heimat kehrte er mit einer Reihe von Arbeiten und mit wohldurchdachten Plänen für neue Untersuchungen zurück. Fast unmittelbar nach seiner Rückkehr wurde er, obwohl nicht einmal im Besitz eines Universitätsabschlusses, in die Petersburger Akademie der Wissenschaften gewählt. Seiner intensiven wissenschaftlichen Arbeit und seiner umfangreichen Lehrtätigkeit setzte erst der Tod (1. Januar 1862) ein Ende.

In der Analysis begegnen wir der „Formel von Ostrogradski" für die Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral (oft bezeichnet man den durch diese Formel ausgedrückten Sachverhalt als „Gaußschen Satz", was nicht korrekt ist). Ostrogradski gab auch die Verallgemeinerung seiner Formel auf ein Gebiet beliebiger Dimension an. Etwa gleichzeitig mit Jacobi und Catalan gab Ostrogradski eine erste richtige Herleitung der Regel für die Variablensubstitution in Mehrfachintegralen an. Seine Methode der Abspaltung des rationalen Teils eines Integrals über eine rationale Funktion ging ebenfalls in die Analysislehrbücher ein, ein weiteres Mal unter anderem Namen, nämlich unter dem von Hermite, von dem die Methode einige Jahrzehnte später bekannt gemacht wurde. Diese und viele andere Resultate erzielte Ostrogradski, indem er die Analysis auf Probleme der mathematischen Physik und Mechanik anwandte. Er beschäftigte sich mit Wärmelehre (im Zusammenhang damit formulierte er eine sehr allgemeine Problemstellung der mathematischen Physik), mit Wellentheorie, mit Schwingungen elastischer Medien. In der Mechanik verallgemeinerte er das vordem nur für konservative Systeme formulierte Hamiltonsche Prinzip auf nichtkonservative Systeme; ferner studierte er die Eigenschaften kanonischer Systeme und gab eine allgemeine Theorie des unelastischen Stoßes. In der Variationsrechnung leitete er Formeln für die Variation mehrfacher Integrale her und brachte die Differentialgleichungen des allgemeinen isoperimetrischen Problems auf kanonische Form.
Während der vielen Jahre akademischer und pädagogischer Tätigkeit arbeitete Ostrogradski mit V. J. Bunjakowski (1804–1889) zusammen. Bunjakowski ist Autor zahlreicher Arbeiten über Analysis (Bunjakowskische Ungleichung), Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit letzterer hat sich auch Ostrogradski beschäftigt). Zahlreiche Schüler Ostrogradskis auf den Gebieten der Mathematik und Mechanik und Bunjakowskis auf dem Gebiet der Mathematik haben wesentlich zur Hebung des Ausbildungsniveaus in Mathematik und Mechanik an den höheren Lehranstalten Rußlands, besonders seiner beiden Hauptstädte, beigetragen. In Petersburg und in Moskau bildeten sich neue wissenschaftliche Schulen. Als Haupt der Petersburger Schule konnte noch zu Lebzeiten Ostrogradskis P. L. Tschebyscheff angesehen werden; über ihn siehe S. 192.

8.13. B. Riemann und der Weg der modernen Mathematik

Mit Bernhard Riemann, dem Nachfolger Dirichlets in Göttingen, kommen wir zu dem Mann, der mehr als irgendein anderer den Weg der modernen Mathematik beeinflußt hat. Riemann war der Sohn eines Landpfarrers und studierte an der Universität Göttingen, wo er 1851 den Doktorgrad erwarb. Im Jahre 1854 wurde er Privatdozent und 1859 Professor an der gleichen Universität. Er war wie Abel kränklich und verbrachte seine letzten Tage in Italien, wo er 1866 im Alter von 40 Jahren starb. In seinem kurzen Leben hat er nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Arbeiten veröffentlicht, aber jede von ihnen war — und ist es noch — bedeutend, und einige von ihnen haben ganz neue und fruchtbare Gebiete eröffnet. Im Jahre 1851 erschien Riemanns Doktordissertation über die Theorie der kom-

plexen Funktionen $u + iv = f(x + iy)$. Wie d'Alembert und Cauchy wurde Riemann von hydrodynamischen Vorstellungen beeinflußt. Er bildete die x, y-Ebene konform auf die u, v-Ebene ab und wies die Existenz einer Funktion nach, die die Transformation eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebietes der einen Ebene in ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet der anderen Ebene leistete. Das führt zur Idee der Riemannschen Fläche, die topologische Betrachtungen in die Analysis hineintrug. In jener Zeit war die Topologie noch ein fast unberührtes Gebiet, über das J. B. Listing in den „Göttinger Studien" von 1847 eine Arbeit veröffentlicht hatte. Riemann zeigte ihre zentrale Bedeutung für die Theorie der komplexen Funktionen. Diese Dissertation erläuterte auch die Riemannsche Definition einer komplexen Funktion: Real- und Imaginärteil müssen in einem gegebenen Gebiet den „Cauchy-Riemannschen" Differentialgleichungen genügen: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, und außerdem Bedingungen bezüglich des Randes und der Singularitäten erfüllen.
Riemann wendete seine Ideen auf hypergeometrische und abelsche Funktionen (1857) an, wobei er ausgiebig von dem (von ihm so bezeichneten) Dirichletschen Prinzip Gebrauch machte. Unter seinen Ergebnissen findet sich die Entdeckung des Geschlechts einer Fläche als einer topologischen Invariante und eines Hilfsmittels zur Klassifizierung abelscher Funktionen. In einer postum veröffentlichten Arbeit werden diese Ideen auf Minimalflächen angewendet (1867). Zu diesem Teil der Riemannschen Tätigkeit gehören auch seine Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen und Thetareihen von p unabhängigen Veränderlichen ebenso wie die über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten.
Riemann wurde im Jahre 1854 Privatdozent, indem er nicht weniger als zwei grundlegende Arbeiten vorlegte, eine über trigonometrische Reihen und die Grundlagen der Analysis, die andere über die Grundlagen der Geometrie. In der ersten Arbeit wurden die Dirichletschen Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fourierreihe untersucht. Eine dieser Bedingungen forderte, daß die Funktion „integrabel" sein muß. Was bedeutet das aber? Cauchy und Dirichlet hatten schon gewisse Antworten gegeben; Riemann ersetzte sie durch seine eigene umfassende Antwort. Er gab jene Definition, die wir heute als „Riemannsches Integral" kennen und die erst im zwanzigsten Jahrhundert durch das Lebesguesche Integral ergänzt wurde. Riemann zeigte, daß durch Fourierreihen definierte Funktionen solche Eigenschaften besitzen können wie das Auftreten unendlich vieler Maxima und Minima, die von älteren Mathematikern bei der Definition einer Funktion nicht zugelassen worden wären. Der Funktionsbegriff begann sich ernstlich von der „curva quaecunque libero manus ductu descripta"[1]) von Euler zu befreien. In seinen Vorlesungen gab Riemann ein Beispiel einer stetigen Funktion ohne Ableitung; ein Beispiel einer solchen Funktion, das Weierstraß angegeben hatte, wurde im Jahre 1875 veröffentlicht. Die Mathematiker weigerten sich, derartige Funktionen besonders ernst zu nehmen, und nannten sie „pathologische" Funktionen; die moderne Analysis hat nachgewiesen, wie naturgemäß solche Funktionen sind

[1]) Eine Kurve, die man mit der freien Hand zeichnen kann. Aus *Institutiones Calculi Integralis* III, § 301.

und wie Riemann hier wieder zu einem grundlegenden Gebiet der Mathematik vorgestoßen war.

Die andere Arbeit aus dem Jahre 1854 behandelte die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Der Raum wurde als topologische Mannigfaltigkeit von beliebiger Dimensionszahl eingeführt; in einer solchen Mannigfaltigkeit wurde mittels einer quadratischen Differentialform eine Metrik definiert. Während Riemann in der Analysis eine komplexe Funktion durch ihr lokales Verhalten definiert hatte, definierte er in dieser Arbeit den Charakter des Raumes in derselben Weise. Riemanns vereinheitlichendes Prinzip ermöglichte ihm nicht nur, alle vorhandenen Formen der Geometrie zu klassifizieren, einschließlich der noch sehr undurchsichtigen nichteuklidischen Geometrie, sondern gestattete ihm auch die Schaffung einer beliebigen Anzahl von neuen Raumtypen, von denen seither viele einen nützlichen Platz in der Geometrie und mathematischen Physik gefunden haben. Riemann veröffentlichte seine Arbeit ohne irgendwelche analytischen Hilfsmittel, wodurch es schwierig war, seinen Ideen zu folgen. Später erschienen einige Formeln in einer Preisschrift über die Wärmeverteilung in einem festen Körper, die Riemann der Pariser Akademie eingereicht hatte (1861). Hierin ist eine Skizze der Transformationstheorie der quadratischen Formen enthalten.

Die letzte Arbeit von Riemann, die erwähnt werden muß, ist seine Diskussion der Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen, die unterhalb einer gegebenen Zahl x liegen (1859). Es handelte sich um eine Anwendung der Theorie der komplexen Zahlen auf das Problem der Verteilung der Primzahlen, und es wurde die Gaußsche Vermutung untersucht, daß $\pi(x)$ durch „den Integrallogarithmus“ $\int_2^x (\log t)^{-1}\,dt$ angenähert werden kann. Diese Arbeit ist berühmt, weil sie die sogenannte Riemannsche Vermutung enthält, daß die Eulersche Zetafunktion $\zeta(s)$ — diese Bezeichnung stammt von Riemann —, wenn man sie für komplexe Werte $s = x + iy$ betrachtet, sämtliche nicht reellen Nullstellen auf der Geraden $x = \frac{1}{2}$ besitzt. Diese Vermutung ist bis jetzt weder bewiesen noch als falsch nachgewiesen worden.[1])

8.14. K. Weierstraß

Riemanns Auffassung der Funktion einer komplexen Veränderlichen ist oft mit der von Weierstraß verglichen worden. Karl Weierstraß war viele Jahre hindurch Lehrer an einem preußischen Gymnasium und wurde 1856 Mathematikprofessor an der Universität Berlin, wo er dreißig Jahre lang lehrte. Seine stets aufs sorgfältigste vorbereiteten Vorlesungen erfreuten sich wachsender Berühmtheit; hauptsächlich durch diese Vorlesungen sind die Gedanken von Weierstraß zum Gemeingut der Mathematiker geworden.

---

[1]) R. Courant, *Bernard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre*, Naturwissenschaften *14* (1926), 813—818; E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (Oxford 1951); H. M. Edwards, *Riemann's Zeta-Function* (New York 1974).

In seiner Gymnasiallehrerzeit schrieb Weierstraß mehrere Arbeiten über hyperelliptische Integrale, abelsche Funktionen und algebraische Differentialgleichungen. Seine am meisten bekannt gewordene Leistung ist die Begründung der Theorie der komplexen Funktionen durch die Methode der Potenzreihen. Das war in gewissem Sinne eine Rückkehr zu Lagrange, allerdings mit dem Unterschied, daß Weierstraß in der komplexen Ebene arbeitete und durchweg völlige Strenge erzielte. Die Werte der Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises ergeben das „Funktionselement", das dann, falls es möglich ist, mit Hilfe der sogenannten analytischen Fortsetzung fortgesetzt wird. Weierstraß studierte insbesondere ganze Funktionen und solche, die durch unendliche Produkte definiert sind. Seine elliptische Funktion $\wp(u)$ ist ebenso maßgeblich geworden wie die älteren sn u, cn u, dn u von Jacobi.
Der Ruhm von Weierstraß beruht auf seinen mit höchster Sorgfalt ausgeführten Schlußweisen, auf der „Weierstraßschen Strenge", die nicht nur in seiner Funktionentheorie zutage tritt, sondern auch in seiner Variationsrechnung. Er klärte die Begriffe des Minimums, der Funktion und der Ableitung völlig auf und beseitigte damit die noch vorhandene Unbestimmtheit der Ausdrucksweise in den grundlegenden Begriffen der Infinitesimalrechnung. Er war das mathematische Gewissen schlechthin, sowohl in methodischer als auch in logischer Beziehung. Ein anderes Beispiel seiner peinlich genauen Denkweise ist seine Entdeckung der gleichmäßigen Konvergenz. Mit Weierstraß begann jene Zurückführung der Prinzipien der Analysis auf die einfachsten arithmetischen Begriffe, die wir die Arithmetisierung der Mathematik nennen.

„Wenn heute in Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Irrationalzahl und überhaupt des Limes beruhen, in der Analysis volle Übereinstimmung und Sicherheit herrscht und in den verwickeltsten Fragen, die die Theorie der Differential- und Integralgleichungen betreffen, trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung von Über-, Neben- und Durcheinander-Häufung der Limites doch Einhelligkeit aller Ergebnisse statthat, so ist dies wesentlich ein Verdienst der wissenschaftlichen Tätigkeit von Weierstraß."[1])

8.15. Die sogenannte Berliner Schule. R. Dedekind. G. Cantor

Diese Arithmetisierung war typisch für die sogenannte Berliner Schule und besonders für Leopold Kronecker. Zu dieser Schule gehörten solche bedeutenden, in Algebra und algebraischer Zahlentheorie maßgeblichen Mathematiker wie Kronekker, Kummer und Frobenius. Zusammen mit diesen Männern sind Dedekind und Cantor zu nennen. Ernst Eduard Kummer wurde 1855 als Nachfolger von Dirichlet nach Berlin berufen; dort lehrte er bis 1883, zu welcher Zeit er freiwillig seine mathematische Tätigkeit einstellte, weil er eine Abnahme der Produktivität herannahen fühlte. Kummer entwickelte weiterhin die Differentialgeometrie der Kongruenzen, die von Hamilton skizziert worden war, und entdeckte im Verlauf dieser Studien die Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten, die nach ihm benannt wird. Sein Ruf beruht aber in erster Linie auf der Einführung der „idealen"

[1]) D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. *95* (1926), 161–190.

Zahlen in die Theorie der algebraischen Zahlkörper (1846). Diese Theorie wurde zu einem Teil durch Kummers Versuche, den großen Fermatschen Satz zu beweisen, angeregt, zum anderen Teil durch die Gaußsche Theorie der biquadratischen Reste, in welche der Begriff der Primfaktoren auf den Bereich der komplexen Zahlen übertragen worden war. Kummers „ideale" Faktoren erlaubten die eindeutige Zerlegung von Zahlen in Primfaktoren innerhalb allgemeiner Zahlkörper. Diese Entdeckung ermöglichte große Fortschritte in der Arithmetik der algebraischen Zahlen, die später in dem von David Hilbert für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1896 oder 1897 (Bd. 4 1897), 1880 datiert,[1]) geschriebenen Bericht meisterhaft zusammengefaßt wurden. Die Theorie von Dedekind und Weber, die eine Beziehung zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen und der Theorie der algebraischen Zahlen in einem gewissen Körper herstellte (1882), bildete ein Beispiel für den Einfluß der Kummerschen Theorie auf den Prozeß der Arithmetisierung der Mathematik.

Leopold Kronecker, ein Gelehrter mit Privatvermögen, siedelte 1855 nach Berlin über, wo er, ohne formal im Besitz eines Lehrstuhls zu sein, viele Jahre an der Universität lehrte und erst nach dem Ausscheiden von Kummer 1883 einen solchen annahm. Kroneckers Hauptarbeiten betreffen elliptische Funktionen, Idealtheorie und Arithmetik der quadratischen Formen; seine veröffentlichten Vorlesungen über Zahlentheorie sind sorgfältige Darstellungen seiner eigenen und früheren Entdeckungen und lassen seinen Glauben an die Notwendigkeit der Arithmetisierung der Mathematik klar erkennen. Dieser Glaube beruhte auf seinem Streben nach Strenge; er war der Auffassung, daß die ganze Mathematik auf die Zahlen und alle Zahlen auf die natürlichen Zahlen gegründet werden müssen. Die Zahl π beispielsweise sollte man, statt sie auf dem üblichen goemetrischen Weg zu gewinnen, auf die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ und damit auf eine Kombination von ganzen Zahlen gründen; gewisse Kettenbrüche für π könnten dem gleichen Zweck dienen. Kroneckers Bemühen, die ganze Mathematik in das Schema der Zahlentheorie zu pressen, wird durch seinen bekannten Ausspruch auf einer Tagung in Berlin im Jahre 1886 erläutert: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Er erkannte die Definition eines mathematischen Begriffs nur dann an, wenn er in einer endlichen Anzahl von Schritten erzeugt werden kann. So wurde er mit der Schwierigkeit des aktual Unendlichen fertig, indem er sich weigerte, es anzuerkennen. Die Losung von Plato, daß Gott stets „Geometrie treibt", wurde in der Kroneckerschen Schule durch die Losung ersetzt, daß Gott stets „Arithmetik treibt".

Kroneckers Lehre über das aktual Unendliche stand in klaffendem Widerspruch zu den Theorien von Dedekind und von Cantor. Richard Dedekind, der einunddreißig Jahre hindurch Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig war, arbeitete eine strenge Theorie des Irrationalen aus. In zwei kleinen Bändchen, „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) und „Was sind und was sollen die Zahlen?" (1888), vollendete er das für die moderne Mathematik, was Eudoxus für die

[1]) Vgl. zur Datierung: H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work* (= Ges. Abhandlungen Bd. IV, S. 130—172, insbes. S. 144, Aufforderung 1893, Frist 2 Jahre).

griechische Mathematik geleistet hatte. Es besteht eine große Ähnlichkeit zwischen dem „Dedekindschen Schnitt", mit dem die moderne Mathematik (mit Ausnahme der Schule von Kronecker) die irrationalen Zahlen definiert, und der alten Theorie von Eudoxus, wie sie im fünften Buch der Elemente von Euklid dargestellt wird. Cantor und Weierstraß gaben arithmetische Definitionen der irrationalen Zahlen, die von der Dedekindschen Theorie etwas abweichen, aber auf ähnlichen Betrachtungen beruhen. Der größte Ketzer war in Kroneckers Augen jedoch Georg Cantor. Cantor, der von 1869 bis 1905 in Halle lehrte, ist nicht nur wegen seiner Theorie der irrationalen Zahlen, sondern auch wegen der Schöpfung der Mengenlehre bekannt. Mit dieser Theorie schuf Cantor einen vollkommen neuen Bereich mathematischer Forschung, der imstande war, den verfeinertsten Ansprüchen an Strenge zu genügen, wenn man einmal seine Grundvoraussetzungen angenommen hatte. Cantors Veröffentlichungen begannen 1870 und wurden viele Jahre lang fortgesetzt; im Jahre 1883 veröffentlichte er seine „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre". In diesen Arbeiten entwickelte Cantor eine Theorie der transfiniten Kardinalzahlen, die auf eine systematische mathematische Behandlung des aktual Unendlichen gegründet war. Er ordnete die kleinste transfinite Kardinalzahl $\aleph_0$ einer abzählbaren Menge zu, dem Kontinuum wurde eine höhere transfinite Zahl zugewiesen, und so wurde es möglich, eine Arithmetik der transfiniten Zahlen zu schaffen als eine Erweiterung der gewöhnlichen Arithmetik. Cantor definierte auch transfinite Ordnungszahlen, die das Verfahren ausdrücken, nach welchem unendliche Mengen geordnet werden.

Diese Entdeckungen von Cantor waren eine Fortsetzung der alten scholastischen Spekulationen über das Wesen des Unendlichen, und Cantor war sich dessen wohl bewußt. Er verteidigte die uneingeschränkte Anerkennung des aktual Unendlichen durch den Heiligen Augustin, mußte sich aber selbst gegen den Widerstand vieler Mathematiker verteidigen, die sich weigerten, das Unendliche in anderer Form anzuerkennen als in der Gestalt eines durch ∞ ausgedrückten Prozesses. Der führende Widersacher von Cantor war Kronecker, der in dem gleichen Prozeß der Arithmetisierung der Mathematik eine völlig entgegengesetzte Richtung vertrat. Cantor erzielte schließlich weltweite Anerkennung, als die außerordentliche Bedeutung seiner Theorie für die Begründung der Theorie der reellen Funktionen und der Topologie allmählich immer klarer wurde — und dies insbesondere dann, als Lebesgue im Jahre 1902 die Mengenlehre durch seine Maßtheorie bereichert hatte. In der Theorie der transfiniten Zahlen blieben logische Schwierigkeiten bestehen, und es traten Paradoxien zutage wie die von Burali-Forti und von Russell. Dies wiederum führte zu verschiedenen Richtungen in der prinzipiellen Einstellung zu den Grundlagen der Mathematik. Der Grundlagenstreit des zwanzigsten Jahrhunderts zwischen den Formalisten und den Intuitionisten war eine Fortsetzung des Streites zwischen Cantor und Kronecker auf neuer Ebene.

8.16. Entwicklung der projektiven Geometrie

Gleichzeitig mit dieser bemerkenswerten Entwicklung der Algebra und Analysis trat eine ebenso bemerkenswerte Blüte der Geometrie ein. Sie kann bis auf Monges

Lehrtätigkeit zurückverfolgt werden, in der die Wurzeln sowohl für die „synthetische“ als auch für die „algebraische“ Methode der Geometrie enthalten sind. In den Arbeiten der Schüler von Monge wurden beide Methoden getrennt, die „synthetische“ Methode entwickelte sich zur projektiven Geometrie, die „algebraische“ Methode zu unserer modernen analytischen und algebraischen Geometrie. Die projektive Geometrie als eine Einzelwissenschaft begann mit dem Buch von Poncelet (S. 158). Wie so oft im Fall einer grundlegenden Entdeckung gab es Prioritätsstreitigkeiten, da sich Poncelet der Rivalität von Joseph Gergonne, Professor in Montpellier, gegenübersah. Gergonne veröffentlichte mehrere bedeutende Arbeiten über projektive Geometrie, in denen er zugleich mit Poncelet die Bedeutung der Dualität in der Geometrie erkannte. Diese Arbeiten erschienen in den „Annales de mathématiques“, der ersten rein mathematischen Zeitschrift. Ihr Herausgeber war Gergonne; sie bestand von 1810 bis 1832.
Typisch für die Denkweise von Poncelet war ein anderes Prinzip, nämlich das Prinzip der Stetigkeit, durch das es ihm möglich wurde, die Eigenschaften einer Figur aus denen einer anderen herzuleiten. Er drückte das Prinzip wie folgt aus:

Wenn eine Figur aus einer anderen durch eine stetige Veränderung hervorgeht und ebenso allgemein ist wie die erste, dann kann eine für die erste Figur bewiesene Eigenschaft ohne erneute Untersuchung auf die andere übertragen werden.

Das war ein Prinzip, welches mit großer Sorgfalt gehandhabt werden mußte, denn diese Formulierung war weit davon entfernt, genau zu sein. Erst die moderne Algebra ist in der Lage gewesen, seinen Gültigkeitsbereich schärfer zu definieren. In den Händen von Poncelet und seiner Schule führte es zu interessanten, neuen und richtigen Ergebnissen, insbesondere dann, wenn es auf den Übergang vom Reellen zum Komplexen angewendet wurde. Es erlaubte Poncelet die Feststellung, daß alle Kreise der Ebene „zwei ideale imaginäre Punkte im Unendlichen gemeinsam“ haben, was außerdem zum Begriff der sogenannten „unendlich fernen Gerade“ der Ebene führte. G. H. Hardy hat die Bemerkung gemacht, daß diese Tatsache bedeutet, daß die projektive Geometrie das aktual Unendliche ohne irgendwelche Bedenken anerkannt hat.[1] Die Analytiker blieben in dieser Frage geteilter Auffassung.

Poncelets Ideen wurden von deutschen Geometern weiterentwickelt. 1826 erschien die erste Veröffentlichung von Steiner, 1827 der „Barycentrische Calcül“ von Möbius, 1828 der erste Band von Plückers „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“. Im Jahre 1831 erschien der zweite Band, dem 1832 Steiners „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ folgte. Die letzte der großen deutschen Pionierarbeiten in dieser Art der Geometrie erschien 1847 mit der Veröffentlichung von v. Staudts axiomatischer „Geometrie der Lage“.
Sowohl die synthetische als auch die algebraische Auffassung der Geometrie war unter diesen deutschen Geometern vertreten. Der typische Vertreter der synthetischen (oder „reinen“) Schule war Jakob Steiner, ein ohne Schulbildung aufge-

[1] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics* (6. Aufl., Cambridge 1933), Anhang IV.

wachsener Schweizer Bauernsohn, ein „Hirtenknabe“, dessen Begeisterung für die Geometrie erwachte, als er mit den Ideen von Pestalozzi bekannt wurde. Er entschloß sich, in Heidelberg zu studieren, und lehrte später in Berlin, wo er von 1834 bis zu seinem Tode 1863 einen Lehrauftrag an der Universität hatte. Steiner war durch und durch Geometer; er haßte den Gebrauch der Algebra und Analysis in einem solchen Maße, daß er sogar Figuren ablehnte. Geometrie konnte man seiner Meinung nach am besten durch angestrengtes Nachdenken lernen. Rechnen ersetzt das Denken, pflegte er zu sagen, während es durch Geometrie angeregt wird. Das traf sicherlich auf Steiner selbst zu, dessen Methoden die Geometrie um eine große Anzahl von schönen und oftmals schwierigen Sätzen bereichert haben. Wir verdanken ihm die Entdeckung der Steinerschen Fläche, auf der eine zweifach unendliche Schar von Kegelschnitten liegt (die auch römische Fläche genannt wird). Er unterdrückte oft den Beweis seiner Sätze, wodurch die gesammelten Werke von Steiner für Geometer, die nach zu lösenden Probleme Ausschau halten, zu einer Fundgrube geworden sind.

Steiner baute seine projektive Geometrie in streng systematischer Weise auf, wobei er von der Perspektivität zur Projektivität und von da zu den Kegelschnitten überging. Er löste auch eine Anzahl isoperimetrischer Probleme auf dem ihm eigenen geometrischen Wege. Sein Beweis (1836), daß der Kreis die Figur mit der größten Fläche unter allen geschlossenen Kurven von gegebenem Umfang ist, machte von einem Verfahren Gebrauch, durch das jede Figur von gegebenem Umfang, die kein Kreis ist, in eine andere mit demselben Umfang und von größerer Fläche verwandelt werden kann. Steiners Schlußfolgerung, daß daher der Kreis die maximale Fläche besitzt, litt unter einer Auslassung: sie wies die tatsächliche Existenz eines Maximums nicht nach. Dirichlet versuchte, Steiner dies klarzumachen; ein strenger Beweis wurde später von Weierstraß gegeben.[1])

Steiner benötigte noch eine Metrik, um das Doppelverhältnis von vier Punkten oder Geraden zu definieren. Dieser Mangel der Theorie wurde von Christian v. Staudt beseitigt, der viele Jahre hindurch Professor an der Universität Erlangen war. In seiner „Geometrie der Lage“ definierte v. Staudt den „Wurf“ von vier Punkten auf einer Geraden auf rein projektivem Wege und zeigte dann seine Identität mit dem Doppelverhältnis. Er verwendete zu diesem Zweck die sogenannte Möbiussche Netzkonstruktion, die zu eng mit Dedekinds Arbeiten verwandten axiomatischen Betrachtungen Anlaß gibt, wenn irrationale Werte von projektiven Koordinaten eingeführt werden. Im Jahre 1857 zeigte v. Staudt, wie man imaginäre Elemente als Fixpunkte von elliptischen Involutionen streng in die Geometrie einführen kann.

Während der nächsten Jahrzehnte wuchs die synthetische Geometrie auf den von Poncelet, Steiner und v. Staudt gelegten Grundlagen in großem Umfange an. Sie wurde schließlich zum Gegenstand einer Anzahl von Standardlehrbüchern gemacht, unter denen Reyes „Geometrie der Lage“ (1868, 3. Aufl. 1886–1892) eines der besten ist.

---

[1]) W. Blaschke, *Kreis und Kugel* (2. Aufl., Berlin 1956), S. 1–42.

8.17. Algebraische Geometrie

Vertreter der algebraischen Geometrie waren Möbius und Plücker in Deutschland, Chasles in Frankreich und Cayley in England. August Ferdinand Möbius, der mehr als fünfzig Jahre Beobachter, später Direktor der Leipziger Sternwarte war, war ein vielseitiger Wissenschaftler. In seinem Buch „Der barycentrische Calcül" führte er zum erstenmal homogene Koordinaten ein. Bringt man die Massen m_1, m_2, m_3 in den Ecken eines festen Dreiecks an, so erteilte Möbius dem Schwerpunkt (barycentrum) dieser Massen die Koordinaten $m_1 : m_2 : m_3$ und zeigte, daß diese Koordinaten gut geeignet sind, um projektive und affine Eigenschaften der Ebene zu beschreiben. Von da an wurden die homogenen Koordinaten das allgemein verwendete Hilfsmittel in der algebraischen Behandlung der projektiven Geometrie. Möbius machte, ähnlich seinem Zeitgenossen v. Staudt in ziemlicher Isolierung arbeitend, viele andere interessante Entdeckungen. Ein Beispiel ist das Nullsystem in der Theorie der Linienkongruenzen, das er in seinem Lehrbuch über Statik einführte (1837). Das „Möbiussche Band", das erste Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche, bringt die Tatsache in Erinnerung, daß Möbius auch einer der Begründer der modernen Topologie ist.

Julius Plücker, der viele Jahre in Bonn lehrte, war sowohl Experimentalphysiker als auch Geometer. Er machte eine Reihe von Entdeckungen über Magnetismus der Kristalle, über Elektrizitätsleitung in Gasen und in der Spektroskopie. In einer Reihe von Arbeiten und Büchern, besonders in seinem Werk „Neue Geometrie des Raumes" (1868/69), gab er einen Aufbau der analytischen Geometrie unter Verwendung eines Reichtums an neuen Ideen. Plücker zeigte die Kraft der abgekürzten Bezeichnungsweise, in der z. B. $C_1 + \lambda \cdot C_2 = 0$ ein Büschel von Kegelschnitten darstellt. In diesem Buch führt er homogene Koordinaten nunmehr als auf ein Fundamentaltetraeder bezogenene „projektive" Koordinaten ein und spricht auch das grundlegende Prinzip aus, daß die Geometrie nicht allein auf dem Punkt als Grundelement aufgebaut zu werden braucht. Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln können sämtlich als Elemente (Raumelemente) verwendet werden, auf die eine Geometrie gegründet werden kann. Dieser fruchtbare Gedanke warf sowohl auf die synthetische als auch auf die algebraische Geometrie neues Licht und schuf neue Formen der Dualität. Die Anzahl der Dimensionen einer besonderen Form der Geometrie konnte nunmehr eine beliebige positive ganze Zahl sein, die von der Anzahl der zur Definition des „Elements" notwendigen Parameter abhängt. Plükker veröffentlichte auch eine allgemeine Theorie der algebraischen Kurven in der Ebene, in der er die „Plückerschen Relationen" zwischen den Anzahlen der Singularitäten ableitete (1834, 1839).

Michel Chasles, viele Jahre hindurch der führende Vertreter der Geometrie in Frankreich, war ein Schüler der École Polytechnique in der späteren Zeit von Monge und wurde dort 1841 Professor. Im Jahre 1846 nahm er den ausdrücklich für ihn eingerichteten Lehrstuhl für höhere Geometrie an der Sorbonne an, wo er viele Jahre hindurch lehrte. Das Werk von Chasles wies viel Gemeinsames mit dem von Plücker auf, besonders in seiner Gewandtheit, ein Maximum an geometrischen Aussagen aus den Gleichungen herauszulesen. Das bot die Grundlage für geschickte

Operationen mit isotropen Geraden und unendlich fernen Kreispunkten. Chasles übernahm von Poncelet die Verwendung „abzählender“ Methoden, die sich unter seinen Händen zu einem neuen Zweig der Geometrie, der sogenannten „abzählenden Geometrie“ entwickelte. Dieses Gebiet wurde später von Hermann Schubert in seinem Werk „Kalkül der abzählenden Geometrie“ (1879) und von H. G. Zeuthen in „Abzählende Methoden“ (1914) vollständig untersucht. Beide Bücher offenbaren sowohl die Stärke als auch die Schwäche dieser Art von Algebra in geometrischer Sprache. Ihr anfänglicher Erfolg rief eine von E. Study geführte Gegenströmung hervor, die nachdrücklich betonte, daß „die Exaktheit in der Geometrie nicht ewig als etwas Nebensächliches behandelt werden sollte.“[1])
Chasles besaß ein feines Verständnis für die Geschichte der Mathematik, insbesondere der Geometrie. Sein wohlbekannter „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie“ (Historische Bemerkungen über den Ursprung und die Entwicklung der Methoden in der Geometrie) (1837) steht am Anfang der modernen Mathematikgeschichte. Es ist eine sehr lesbare Abhandlung über griechische und moderne Geometrie und ein gutes Beispiel einer Mathematikgeschichte, die von einem produktiven Wissenschaftler geschrieben ist. Chasles wurde auch bekannt als Opfer eines Schwindlers, der es zwischen 1861 und 1870 fertigbrachte, ihm Tausende von gefälschten Dokumenten zu verkaufen, angefangen von Briefen, die von Pascal geschrieben sein sollten, bis zu solchen von Plato und den Aposteln.[2])

8.18. Die Entdeckung nichteuklidischer Geometrien. N. I. Lobatschewski

Während dieser Jahre einer fast fieberhaften Produktion in den neuen Zweigen der projektiven und algebraischen Geometrie lag ein anderer neuer und sogar noch stärker revolutionärer Typ von Geometrie in wenigen dunklen Veröffentlichungen verborgen, die von den meisten führenden Mathematikern unbeachtet gelassen wurden. Die Frage, ob das Euklidische Parallelenpostulat ein unabhängiges Axiom ist oder aus anderen Axiomen abgeleitet werden kann, hatte die Mathematiker zweitausend Jahre lang beunruhigt. Ptolemäus hatte in der Antike versucht, eine Antwort zu finden, Nasīr al-dīn im Mittelalter, Lambert und Legendre im achtzehnten Jahrhundert. Alle diese Gelehrten hatten versucht, das Axiom zu beweisen, und waren gescheitert, selbst wenn sie im Laufe ihrer Untersuchung manches sehr interessante Ergebnis fanden. Gauß war der erste, der an die Unabhängigkeit des Parallelenpostulats glaubte, woraus folgte, daß andere Geometrien, die auf der Wahl eines anderen Axioms beruhten, logisch möglich waren. Gauß veröffentlichte seine Gedanken über diese Frage nicht. Die ersten, die offen die Autorität von zwei Jahrtausenden herausforderten und eine nichteuklidische Geometrie konstruierten, waren ein Russe, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, und ein Ungar,

[1]) Siehe E. Study, *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg* (1905), S. 388—395; B. L. van der Waerden, Dissertation, Leiden 1926.
[2]) J. A. Farrar, *Literary forgeries* (London 1907), Abschnitt XII.

Janos Bolyai.[1]) Derjenige, der seine Idee zuerst veröffentlichte, war Lobatschewski, der Professor in Kasan war und 1826 über die Frage des Euklidischen Parallelenaxioms Vorlesungen hielt. Sein erstes Buch erschien 1829/30 und war russisch geschrieben. Wenige Leute nahmen Notiz davon. Sogar eine spätere deutsche Ausgabe mit dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" fand wenig Beachtung, obwohl immerhin Gauß Interesse zeigte. In der Zwischenzeit hatte schon Bolyai seine Ideen über diesen Gegenstand veröffentlicht.
Janos (Johann) Bolyai war der Sohn eines Mathematiklehrers in einer ungarischen Provinzstadt. Dieser Lehrer, Farkas (Wolfgang) Bolyai, hatte in Göttingen studiert, als auch Gauß dort Student war. Beide Männer hielten einen gelegentlichen Briefwechsel aufrecht. Farkas wendete viel Zeit daran, das fünfte Postulat von Euklid (S. 62) zu beweisen, konnte aber zu keiner endgültigen Schlußfolgerung gelangen. Sein Sohn hatte diese Leidenschaft geerbt und begann ebenfalls, an einem Beweis zu arbeiten, obwohl ihm sein Vater geraten hatte, etwas anderes zu tun:

„Du solltest es genauso verabscheuen wie liederlichen Umgang, es kann Dich all Deiner Muße, Deiner Gesundheit, Deiner Ruhe und Deines ganzen Lebensglücks berauben. Diese abgrundtiefe Dunkelheit könnte vielleicht tausend turmhohe Newtons verschlingen, es wird niemals Licht auf Erden sein. . ." (Brief aus dem Jahre 1820).

Janos Bolyai trat in die Armee ein und erwarb sich den Ruf eines schneidigen Offiziers. Er begann, das Euklidische Postulat als ein unabhängiges Axiom anzusehen, und entdeckte, daß es möglich war, eine auf einem anderen Axiom beruhende Geometrie aufzustellen, in der sich durch einen gegebenen Punkt der Ebene unendlich viele Geraden legen lassen, die eine gegebene Gerade der Ebene nicht schneiden. Das war die gleiche Idee, die schon Gauß und Lobatschewski gefaßt hatten. Bolyai schrieb seine Überlegungen auf, die 1832 als Anhang eines Buches seines Vaters veröffentlicht wurden, der den Titel hatte: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens." Der beunruhigte Vater schrieb an Gauß und bat um Rat bezüglich der unorthodoxen Ansichten seines Sohnes. Als die Antwort aus Göttingen eintraf, enthielt sie eine enthusiastische Wertschätzung des Werkes des jüngeren Bolyai. Angefügt war die Bemerkung von Gauß, daß er Bolyai nicht loben könne, da es Selbstlob bedeuten würde, denn die Ideen des „Appendix" seien ihm bereits seit vielen Jahren bekannt gewesen. Der junge Janos war von diesem Beifall zollenden Brief, der ihn in den Rang eines großen Wissenschaftlers hob, ihn aber zugleich seiner Priorität beraubte, zutiefst enttäuscht. Seine Enttäuschung verstärkte sich, als er weiterhin sehr wenig Anerkennung fand. Er geriet noch mehr außer sich, als Lobatschewskis Buch in deutscher Sprache veröffentlicht wurde (1840); er veröffentlichte nie mehr etwas über Mathematik.

8.18.* Im Gegensatz zu Bolyai kämpfte Lobatschewski bis zuletzt um die Anerkennung seiner Ideen. Er wurde nicht müde, seine neue Geometrie weiterzuent-

[1]) Der schottische Philosoph Thomas Reid (1710—1796) hatte bereits in seiner *Geometry of Visibles* (wider G. Berkeley) eine nichteuklidische Geometrie aufgestellt (*Inquiry into his human mind*, 1764), die aber unbeachtet blieb. Vgl. dazu N. Daniels, *Thomas Reid's discovery of a non-euclidean geometry*, Philosophy of Science *39* (1972), 219—234.

wickeln, indem er sie auch mit seiner Tätigkeit auf anderen Gebieten in Verbindung brachte.
Sein ganzes Leben widmete Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856) der Wissenschaft und seiner Heimatuniversität Kasan. An dieser Universität hat er 1811 seine Studien beendet, hier wurde er 1816 Professor, hier war er Dekan und zwanzig Jahre lang Rektor. Von Beginn seiner wissenschaftlichen Tätigkeit an beschäftigte er sich mit Fragen der Begründung der Analysis und mit der Axiomatik der Geometrie. Zuerst versuchte er, das fünfte Euklidische Axiom zu beweisen; danach sonderte er in der Euklidischen Geometrie das aus, was nicht von diesem Axiom abhängt – die sogenannte „absolute Geometrie" – und kam schließlich auf den Gedanken, daß man einen Widerspruch erzeugen könnte, wenn man das fünfte Euklidische Axiom durch folgendes ersetzt: Durch einen Punkt einer Ebene, der nicht auf einer in dieser Ebene liegenden Geraden liegt, kann man mehr als eine Parallele zu dieser Geraden ziehen. Der Widerspruch stellte sich nicht ein, aber Lobatschewski erhielt ein neues geometrisches System, über das er zum ersten Mal (und als erster, wie wir schon bemerkten) am 11. (23.) Februar 1826 an der Kasaner Universität etwas mitteilte. Wie Euler war auch Lobatschewski gegen Ende seines Lebens fast blind, und seine letzte Arbeit über die von ihm entdeckte Geometrie mußte er diktieren („Pangeometrie", 1855).
Lobatschewski war nicht nur ein genialer Geometer. Bei ihm findet man auch wertvolle Arbeiten zur Analysis. So gab er die allgemeine Definition der funktionalen Abhängigkeit, wie sie später Dirichlet in die Mathematik eingeführt hat. In der Algebra ist seine Methode für die angenäherte Berechnung der Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grades bekannt („Graeffesches Verfahren"). In seinen tiefschürfenden Äußerungen über das Verhältnis von Geometrie und Physik, über die empirischen Wurzeln der Geometrie nahm er Ideen aus der Wissenschaft des zwanzigsten Jahrhunderts vorweg. Der von ihm im Kampf für die neue Geometrie an den Tag gelegten Kühnheit und Standhaftigkeit muß man uneingeschränkte Hochachtung zollen, wurde diese doch auch von solchen seiner Landsleute wie Ostrogradski und Bunjakowski abgelehnt.*

Die Theorien von Bolyai und Lobatschewski waren im Prinzip ähnlich, aber ihre Arbeiten waren sehr verschieden. Es ist bemerkenswert, wie die neuen Ideen unabhängig voneinander in Göttingen, Budapest und Kasan und in der gleichen Periode nach einer Zeit des Stillstands von zweitausend Jahren entstanden sind. Es ist auch bemerkenswert, daß sie teilweise außerhalb des geographischen Umkreises der Welt der mathematischen Forschung heranreiften. Manchmal werden große und neue Ideen außerhalb und nicht innerhalb von Schulen geboren.
Die nichteuklidische Geometrie (der Name stammt von Gauß) blieb mehrere Jahrzehnte ein dunkler Bereich der Wissenschaft. Die meisten Mathematiker kannten sie nicht, die vorherrschende Kantsche Philosophie weigerte sich, sie ernst zu nehmen. Der erste führende Wissenschaftler, der ihre volle Bedeutung verstand, war Riemann, dessen allgemeine Theorie der Mannigfaltigkeiten (1854) nicht nur den existierenden Typen der nichteuklidischen Geometrie volles Bürgerrecht gewährte, sondern auch vielen anderen, den sogenannten Riemannschen Geometrien. Je-

doch kam es erst dann zu einer vollen Anerkennung der neuen Theorien, als die Generation nach Riemann den Sinn seiner Theorien zu verstehen begann (1870 und später).

Noch eine andere Verallgemeinerung der klassischen Geometrie entstand in den Jahren vor Riemann und fand erst nach seinem Tode volles Verständnis. Das war die Geometrie von mehr als drei Dimensionen. Sie kam vollständig entwickelt zur Welt in Graßmanns Werk „Lineale Ausdehnungslehre“ (1844). Hermann Graßmann war Lehrer am Gymnasium in Stettin und ein Mann von außerordentlicher Vielseitigkeit: er schrieb über so verschiedene Gegenstände, wie elektrische Ströme, Farben und Akustik, Sprachen, Botanik und Folklore. Sein Sanskrit-Wörterbuch über den Rigweda ist noch in Gebrauch. Die „Ausdehnungslehre“, von der eine durchgesehene und lesbare zweite Ausgabe 1862 veröffentlicht wurde, war in streng euklidischer Form geschrieben. Sie baute eine Geometrie in einem Raum von n Dimensionen auf, zuerst im affinen und dann im metrischen Raum. Graßmann verwendete einen invarianten Symbolismus, in welchem wir heute eine Vektor- und Tensorbezeichnung erkennen (seine Lückenprodukte sind Tensoren), der sein Werk aber für seine Zeitgenossen fast unzugänglich machte. Eine spätere Generation verwendete Teile der Graßmannschen Struktur, um die Vektoranalysis für affine und für metrische Räume aufzubauen.

Obwohl Cayley im Jahre 1843 denselben Begriff eines Raumes von n Dimensionen in einer viel weniger abschreckenden Form einführte, wurde die Geometrie von mehr als drei Dimensionen mit Mißtrauen und Unglauben aufgenommen. Hier wurde das völlige Verständnis wieder durch Riemanns Habilitationsvortrag erleichtert. Zu den Riemannschen Ideen waren die von Plücker hinzugetreten, der darauf hingewiesen hatte, daß die Raumelemente nicht Punkte sein müssen (1865), so daß die Liniengeometrie im dreidimensionalen Raum als eine vierdimensionale Geometrie betrachtet werden kann oder auch, wie Klein betont hat, als die Geometrie einer vierdimensionalen Quadrik in einem fünfdimensionalen Raum. Die volle Anerkennung der Geometrien von mehr als drei Dimensionen setzte sich erst im letzten Teil des neunzehnten Jahrhunderts durch, hauptsächlich wegen ihrer Verwendung zur Interpretation der Theorien von algebraischen Formen und Differentialformen in mehr als drei Veränderlichen.

8.19. Die Mathematik in England und den USA

Die Namen von Hamilton und Cayley zeigen, daß die englisch sprechenden Mathematiker um 1840 endlich begonnen hatten, ihre kontinentalen Kollegen einzuholen. Bis weit in das neunzehnte Jahrhundert hinein betrachteten die maßgebenden Cambridger und Oxforder Akademiker jeden Versuch einer Verbesserung der Theorie der Fluxionen als frevelhafte Revolte gegen das geheiligte Andenken an Newton. Das Ergebnis bestand darin, daß die Newtonsche Schule in England und die Leibnizsche Schule auf dem Kontinent sich in so starkem Maße voneinander entfernten, daß Euler in seiner Integralrechnung (1768) eine Vereinigung beider Ausdrucksmethoden als nutzlos ansah. Das Dilemma wurde im Jahre 1812 von einer Gruppe junger Mathematiker in Cambridge durchbrochen, die auf Anregung des älteren Robert Woodhouse eine „Analytische Gesellschaft" gründeten, um die Differentialschreibweise zu verbreiten. Die Führer waren George Peacock, Charles Babbage und John Herschel.[1]) Sie versuchten, nach den Worten von Babbage, „the principles of pure d-ism as opposed to the dot age of the university"[2]) zu verfechten. Diese Bewegung stieß anfänglich auf heftige Kritik, die aber durch solche Maßnahmen wie die Veröffentlichung des „Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus" (1816), einer Übersetzung eines Lehrbuchs von Lacroix, überwunden wurde. Nunmehr begann die neue Generation in England, an der modernen Mathematik mitzuarbeiten. Der erste wichtige Beitrag kam jedoch nicht aus der Cambridger Gruppe, sondern von einigen Mathematikern, welche die kontinentale Mathematik selbständig aufgenommen hatten. Die bedeutendsten dieser Mathematiker waren Hamilton und George Green. Es ist interessant festzustellen, daß bei beiden Männern, ebenso wie bei Nathaniel Bowditch in Neuengland, die Anregung zum Studium des „reinen d-ismus" aus dem Studium der Laplaceschen „Mécanique Céleste" erwachsen war. Green, ein Müllersohn aus Nottingham, ein Autodidakt, verfolgte mit großer Aufmerksamkeit die neuen Entdeckungen auf dem Gebiet der Elektrizität. Es gab zu jener Zeit (um 1825) so gut wie keine mathematische Theorie zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen; Poisson hatte 1812 nicht mehr als einen Anfang dazu gemacht. Green las Laplace und schilderte seinen Weg mit folgenden Worten:

Von dem Wunsche ausgehend, eine Kraft von solch allgemeiner Wirksamkeit, wie die Elektricität, soweit als möglich der Rechnung zu unterwerfen, und geleitet von der Überzeugung, daß die Lösung manch schwieriger Probleme großen Vorteil gewähren könne, wenn man davon befreit wird, speciell die Kräfte zu untersuchen, die in irgendeinem System von Körpern wirksam werden, indem man seine Aufmerksamkeit bloß auf die besonderen Functionen richtet, von deren Differentialquotienten sie sämmtlich abhängen, — fing ich an zu untersuchen, ob sich nicht einige allgemeine Beziehungen entdecken ließen zwischen dieser Function und den dieselbe hervorrufenden in den Körpern enthaltenen Elektricitätsmengen. (Ostwald's Klassiker, Nr. 61, Leipzig 1895).

Das Ergebnis war eben Greens „Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism" (Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden) (1828), der erste Versuch einer mathematischen Theorie des Elektromagnetismus. Diese Arbeit bedeutete den Anfang der modernen mathematischen Physik in England und, zusammen mit der Gaußschen Arbeit von 1839, die Herausbildung der Potentialtheorie als eines selbständigen Zweiges der Mathematik. Gauß kannte die

---

[1]) Vgl. K. R. Biermann, *Alexander von Humboldt über den Vorläufer der programmgesteuerten Rechenautomaten*, NTM *9* (1972), 21—24.

[2]) „die Prinzipien des reinen d-ismus im Gegensatz zum Punkt-Zeitalter der Universität". Es handelt sich um ein geistreiches Wortspiel, das auf dem Doppelsinn von „d-ismus" (Differentialschreibweise von Leibniz) und dot age „Punkt- (Fluxionsschreibweise von Newton) Zeitalter" beruht, denn „Deismus" ist gleichzeitig die Bezeichnung für die Vernunftreligion der Aufklärung, das englische Wort „dotage" bedeutet „Altersschwachsinn". (*Anm. d. Übers.*) Siehe J. M. Dubbey, Annals of Science *19* (1963), 37 bis 48.

Arbeit von Green nicht, die erst dann allgemeiner bekannt wurde, als William Thomson (der spätere Lord Kelvin) ihren Wiederabdruck im Crelleschen Journal von 1846 veranlaßt hatte. Trotzdem war die Verwandtschaft von Gauß und Green so eng, daß da, wo Green für die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung den Ausdruck „Potentialfunktion" gewählt hatte, Gauß fast denselben Ausdruck „Potential" verwendete. Zwei eng zusammenhängende Identitäten, die Kurven- und Oberflächenintegrale verknüpfen, werden als Formel von Green und Formel von Gauß bezeichnet. Auch der Ausdruck „Greensche Funktion" bei der Lösung partieller Differentialgleichungen wird zu Ehren des Müllerssohnes gebraucht, der in seiner Freizeit Laplace studierte.
Der hier zur Verfügung stehende Raum gestattet es nicht, eine Skizze der weiteren Entwicklung der mathematischen Physik in England und Deutschland zu geben. Mit dieser Entwicklung sind die Namen Stokes, Rayleigh, Kelvin und Maxwell, Kirchhoff und Helmholtz, Gibbs und viele andere verknüpft. Diese Männer trugen zur Lösung partieller Differentialgleichungen in einem derartigen Umfange bei, daß es manchmal schien, als ob mathematische Physik und Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen ein und dasselbe wären. Die mathematische Physik lieferte aber auch in anderen Gebieten der Mathematik fruchtbare Ideen, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der komplexen Funktionentheorie ebenso wie in der Geometrie. Maxwells „Treatise on the Electricity and Magnetism" (1873, 2 Bände), worin eine systematische mathematische Darstellung der auf den Experimenten von Faraday beruhenden Theorie des Elektromagnetismus gegeben wurde, war dabei von besonderer Bedeutung. Diese Maxwellsche Theorie beherrschte schließlich die ganze mathematische Elektrizitätslehre und gab später die Anregung zur Elektronentheorie von Lorentz und zur Relativitätstheorie von Einstein.

8.20. Algebraische Geometrie im angloamerikanischen Bereich

Die reine Mathematik wurde im neunzehnten Jahrhundert in England vornehmlich als Algebra mit hauptsächlich auf Geometrie gerichteten Anwendungen gepflegt und wurde von drei auf diesem Gebiet führenden Gelehrten, Cayley, Sylvester und Salmon, getragen. Arthur Cayley widmete sich in jungen Jahren dem Studium und der Praxis des Rechtswesens, nahm aber 1863 die neu errichtete Sadlerian-Professur für Mathematik in Cambridge an, wo er dann dreißig Jahre hindurch lehrte. In den vierziger Jahren, während Cayley Rechtsanwalt in London war, traf er mit Sylvester zusammen, der zu dieser Zeit den Beruf eines Versicherungsstatistikers ausübte; und aus jenen Jahren stammt das gemeinsame Interesse von Cayley und Sylvester an der Algebra der Formen oder „quantics", wie sie von Cayley genannt wurde. Ihre Zusammenarbeit bedeutete den Beginn der algebraischen Invariantentheorie.
Diese Theorie hatte viele Jahre „in der Luft gelegen", besonders nachdem die Determinanten zum Gegenstand eines allgemeinen Studiums geworden waren. Die

ersten Arbeiten von Cayley und Sylvester gingen über die bloße Lehre von den Determinanten hinaus, sie waren der bewußte Versuch, eine systematische Invariantentheorie der quadratischen Formen aufzubauen, vollständig durchgebildet mit ihrem eigenen Symbolismus und ihren eigenen Verknüpfungsgesetzen. Das war die Theorie, die später von Aronhold und Clebsch in Deutschland weiterentwickelt wurde und das algebraische Gegenstück zur projektiven Geometrie von Poncelet bildete. Das umfangreiche Werk von Cayley umfaßte eine große Mannigfaltigkeit von Themen aus den Gebieten der endlichen Gruppen, algebraischen Kurven, Determinanten und Invarianten algebraischer Formen. Zu seinen am besten bekannten Arbeiten gehören die neun „Memoirs on Quantics" (1854—1878). Die sechste Arbeit dieser Reihe (1859) enthielt die projektive Definition einer Metrik bezüglich eines Kegelschnitts. Diese Entdeckung führte Cayley zur projektiven Definition der Euklidischen Metrik und ermöglichte es ihm dadurch, die Stellung der metrischen Geometrie im Rahmen der projektiven Geometrie zu kennzeichnen. Die Bezeichnung dieser Metrik zur nichteuklidischen Geometrie war ihm entgangen; sie wurde spqter von Felix Klein entdeckt.

James Joseph Sylvester war nicht nur ein Mathematiker, sondern auch ein Dichter, ein witziger Kopf und mit Leibniz zusammen der bedeutendste Schöpfer neuer Bezeichnungen in der ganzen Mathematikgeschichte. Von 1855 bis 1869 lehrte er an der Woolwicher Militärakademie. Er war zweimal in Amerika, beim erstenmal als Professor an der Universität von Virginia (1841/42), beim zweitenmal als Professor an der John-Hopkins-Universität in Baltimore (1877—1883). Während dieser zweiten Periode war er einer der ersten, die das Studium der modernen Mathematik an den amerikanischen Universitäten aufgebaut haben.

Zwei unter den zahlreichen Beiträgen Sylvesters zur Algebra sind klassisch geworden: die Theorie der Elementarteiler (1851, wiederentdeckt von Weierstraß im Jahre 1868) und das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen (1852, bereits Jacobi und Riemann bekannt, aber nicht veröffentlicht). Wir verdanken Sylvester viele heute allgemein angenommene Bezeichnungen, wie etwa invariant, kovariant, kontravariant, kogredient und Syzygie. Viele Anekdoten sind ihm zugeschrieben worden, einige vom Typ des zerstreuten Professors.

Der dritte Algebraiker-Geometer war George Salmon, der während seines langen Lebens mit dem Trinity-College in Dublin, der Hochschule Hamiltons, verbunden war, an der er sowohl Mathematik als auch Theologie lehrte. Sein Hauptverdienst liegt in seinen wohlbekannten Lehrbüchern, die sich durch Klarheit und Eleganz auszeichnen. Diese Bücher eröffneten mehreren Generationen von Studenten in vielen Ländern den Weg zur analytischen Geometrie und zur Invariantentheorie und sind sogar heute noch kaum überholt. Es sind dies die „Conic Sections" (1848), „Higher Plane Curves" (1852), „Modern Higher Algebra" (1859) und die „Analytic Geometry of Three Dimensions" (1862). Das Studium dieser Bücher kann allen Studenten der Geometrie noch immer bestens empfohlen werden.[1]

---

[1] „Die Bücher sind wie erfreuende und belehrende Spaziergänge durch Wald und Feld". (F. Klein).

8.21. Formale Algebra in den englisch sprechenden Staaten

Zwei Errungenschaften der Algebra des Vereinigten Königreichs verdienen unsere besondere Aufmerksamkeit: Hamiltons Quaternionen und Cliffords Biquaternionen. Nachdem Hamilton, der Königliche Astronom von Irland, seine Arbeiten über Mechanik und Optik abgeschlossen hatte, wandte er sich ab 1835 der Algebra zu. Seine „Theory of Algebraic Couples" (1835) definierte die Algebra als die Wissenschaft der reinen Zeit und konstruierte eine strenge Algebra der komplexen Zahlen mit Hilfe der Auffassung einer komplexen Zahl als Zahlenpaar. Das geschah wahrscheinlich unabhängig von Gauß, der in seiner Theorie der biquadratischen Reste (1831) ebenfalls eine strenge Algebra der komplexen Zahlen aufgebaut hatte, die aber auf der Geometrie der komplexen Ebene beruhte.

Beide Auffassungen werden heute gleichermaßen anerkannt. Hamilton versuchte anschließend, in die Algebra von Zahlentripeln, Zahlenquadrupeln usw. einzudringen. Ein Licht ging ihm auf — wie es seine Bewunderer gern erzählten —, als er an einem Oktobertag des Jahres 1843, unter einer Brücke in Dublin hindurchschreitend, die Quaternionen entdeckte. Seine Untersuchungen über Quaternionen wurden in zwei umfangreichen Büchern, den „Lectures on Quaternions" (1853) und den postum herausgegebenen „Elements of Quaternions" (1866), veröffentlicht. Der am besten bekannte Teil seines Quaternionenkalküls war die Theorie der Vektoren (der Name stammt von Hamilton), die auch einen Teil der Graßmannschen Ausdehnungslehre bildeten. In der Hauptsache wegen dieser Tatsache werden die algebraischen Arbeiten von Hamilton und Graßmann heutzutage oft zitiert. Zur Zeit Hamiltons jedoch und auch noch lange danach bildeten die Quaternionen selbst den Gegenstand einer übertriebenen Bewunderung. Einige britische Mathematiker sahen im Quaternionenkalkül eine Art von Leibnizscher „arithmetica universalis", was natürlich eine Gegenströmung erzeugte (Heaviside gegen Tait), in der die Quaternionen viel von ihrem Ruhm einbüßten. Die von Peirce, Study, Frobenius und Cartan ausgearbeitete Theorie der hyperkomplexen Zahlen hat die Quaternionen schließlich auf den ihnen zustehenden Platz des einfachsten assoziativen Zahlensystems mit mehr als zwei Einheiten gestellt. Der Quaternionenkult führte in seiner Blütezeit sogar zu einer „International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics", die als Opfer des ersten Weltkrieges wieder verschwand. Eine andere Seite des Quaternionenstreits war der Kampf zwischen den Anhängern von Hamilton und Graßmann, als sich durch die Bemühungen von Gibbs in Amerika und Heaviside in England die Vektoranalysis als selbständiger Bestandteil der Mathematik herausgebildet hatte. Dieser Streit tobte zwischen 1890 und dem ersten Weltkrieg und wurde schließlich durch die Anwendung der Gruppentheorie geschlichtet, die die Verdienste beider Methoden auf ihrem eigenen Tätigkeitsfeld absteckte.[1])

William Kingdon Clifford, der 1879 im Alter von dreiunddreißig Jahren starb, lehrte am Trinity College in Cambridge und am University College in London. Er

---

[1]) F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin 1927) II, S. 27—52; J. A. Schouten, *Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis* (Leipzig 1914).

war einer der ersten Engländer, der Riemann verstanden hat und mit ihm das grundsätzliche Interesse an der Herkunft unserer Raumvorstellungen teilte. Clifford entwickelte eine Bewegungsgeometrie zum Studium dessen, wozu er die Hamiltonschen Quaternionen verallgemeinert hat, zu den sogenannten Biquaternionen (1873—1876). Das waren Quaternionen, deren Koeffizienten einem System komplexer Zahlen $a + b\,\varepsilon$, wobei ε^2 die Werte $+1$, -1 oder 0 haben kann, angehörten und die auch zum Studium der Bewegung in nichteuklidischen Räumen verwendet werden konnten. Cliffords „Common Sense in the Exact Sciences" ist noch immer eine gute Lektüre; hierin kommt die Verwandtschaft der Denkweise des Autors mit Felix Klein zum Ausdruck. Diese Verwandtschaft zeigt sich auch in dem Ausdruck „Clifford-Kleinsche Räume" für gewisse geschlossene euklidische Mannigfaltigkeiten in der nichteuklidischen Geometrie. Wenn Clifford länger gelebt hätte, hätten die Ideen von Riemann die britischen Mathematiker wohl eine Generation früher beeinflußt haben können, als es tatsächlich der Fall war.
Viele Jahrzehnte lang blieb die starke Betonung der formalen Algebra in der reinen Mathematik der englisch sprechenden Länder bestehen. Sie beeinflußte das Schaffen von Benjamin Peirce von der Harvard-Universität, einem Schüler von Nathaniel Bowditch, der erfolgreich über Himmelsmechanik gearbeitet hatte und im Jahre 1872 seine „Linear Associative Algebras" veröffentlichte, die eine der ersten systematischen Studien über hyperkomplexe Zahlen war. Der formalistische Zug in der englischen Mathematik kann auch als Erklärung für das Erscheinen der Untersuchung „The Laws of Thought" (1854) von George Boole vom Queens College in Cork dienen. Hier wurde dargelegt, wie die Gesetze der formalen Logik selbst, die von Aristoteles aufgestellt und jahrhundertelang an den Universitäten gelehrt worden waren, zum Gegenstand eines Kalküls gemacht werden konnten. Dieser stellte Prinzipien auf, die mit der Leibnizschen Idee einer „characteristica generalis" weitgehend übereinstimmten. Diese „Algebra der Logik" leitete eine Denkrichtung ein, die sich bemühte, eine Vereinigung von Logik und Mathematik herbeizuführen. Sie empfing ihren Anstoß aus Gottlob Freges Buch „Die Grundlagen der Arithmetik" (1884), das eine Ableitung arithmetischer Begriffe aus der Logik versuchte. Diese Untersuchungen erreichten ihren Höhepunkt im zwanzigsten Jahrhundert mit den „Principia Mathematica" von Russell und Whitehead (1910—1913); sie beeinflußten auch die späteren Arbeiten von Hilbert über die Grundlagen der Arithmetik und die Beseitigung der Paradoxien des Unendlichen.[1])

8.22. Untersuchung algebraischer Invarianten in Deutschland

Die Arbeiten von Cayley und Sylvester über die Invariantentheorie fanden in Deutschland die größte Beachtung, wo mehrere Mathematiker die Theorie zu einer auf einem vollständigen Algorithmus beruhenden Wissenschaft weiterentwickelten. Die maßgeblichen Wissenschaftler waren dabei Hesse, Aronhold, Clebsch und Gordan. Hesse, der in Königsberg und später in Heidelberg und München Professor

[1]) D. Hilbert — W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 4. Aufl. (Berlin 1959). M. Black, *The nature of mathematics* (New York—London 1934).

war, zeigte wie Plücker die Kraft der abgekürzten Schreibweise in der analytischen Geometrie. Er liebte es, seine Untersuchungen mit Hilfe von homogenen Koordinaten und Determinanten durchzuführen. Aronhold, der an der Technischen Hochschule in Berlin lehrte, schrieb im Jahre 1858 eine Arbeit, in der er mit Hilfe von sogenannten „idealen" Faktoren (die mit denen von Kummer nichts zu tun haben) eine konsequente Symbolik in der Invariantentheorie entwickelte; dieser Symbolismus wurde außerdem von Clebsch im Jahre 1861 entwickelt, unter dessen Händen die „Clebsch-Aronhold"-Symbolik die fast allgemein angenommene Methode zur systematischen Untersuchung algebraischer Invarianten geworden ist. Wir erkennen heute in diesem Symbolismus ebenso wie in den Hamiltonschen Vektoren, den Graßmannschen äußeren Produkten und Gibbsschen Dyaden besondere Seiten der Tensoralgebra. Diese Invariantentheorie wurde später von Paul Gordan von der Universität Erlangen bereichert, der 1868/69 bewies, daß es zu jeder binären Form ein endliches System von rationalen Invarianten und Kovarianten gibt, durch das alle anderen rationalen Invarianten und Kovarianten in rationaler Form ausgedrückt werden können. Dieser Satz von Gordan (der Endlichkeitssatz) wurde von Hilbert 1890 auf algebraische Formen in n Veränderlichen verallgemeinert.
Alfred Clebsch war Professor in Karlsruhe, Gießen und Göttingen und starb im Alter von neununddreißig Jahren. Sein Leben war eine gedrängte Folge von bemerkenswerten Leistungen. Er veröffentlichte 1862 ein Buch über Elastizität, worin er dem Vorbild von Lamé und de Saint Venant in Frankreich folgte; er wendete seine Invariantentheorie auf die projektive Geometrie an. Er war einer der ersten, die Riemann verstanden hatten, und einer der Begründer jenes Zweiges der algebraischen Geometrie, in der Riemanns Funktionentheorie und seine Theorie der mehrfach zusammenhängenden Flächen auf reelle algebraische Kurven angewendet wurde. Die Clebsch-Gordansche „Theorie der Abelschen Funktionen" (1866) gab einen umfassenden Überblick über diese Ideen. Clebsch gründete auch die „Mathematischen Annalen", die über sechzig Jahre hindurch die führende mathematische Zeitschrift war. Seine von F. Lindemann herausgegebenen Vorlesungen über Geometrie sind ein Standardlehrbuch der projektiven Geometrie geblieben.

8.23. F. Klein, S. Lie. Gruppentheorie

Um 1870 war die Mathematik zu einem riesigen und unübersehbaren Gebäude angewachsen, das in eine große Anzahl von Teilgebieten aufgegliedert war, in denen sich nur noch Spezialisten auskannten. Selbst bedeutende Mathematiker, wie etwa Hermite, Weierstraß, Cayley, Beltrami, konnten nur wenige dieser vielen Gebiete überblicken. Diese Spezialisierung hat beständig zugenommen, bis sie gegenwärtig beunruhigende Ausmaße erreicht hat. Der Kampf dagegen hat niemals aufgehört, und einige der bedeutendsten Leistungen der letzten hundert Jahre sind das Resultat einer Synthese von verschiedenen Gebieten der Mathematik gewesen.
Eine solche Synthese war im achtzehnten Jahrhundert durch die Werke von Lagrange und Laplace über Mechanik verwirklicht worden. Sie blieben die Grundlage für sehr ertragreiche Arbeiten verschiedenen Charakters. Das neunzehnte Jahr-

hundert fügte neue vereinheitlichende Prinzipien hinzu, insbesondere die Gruppentheorie und den Riemannschen Funktions- und Raumbegriff. Ihre Bedeutung kann man am besten aus den Werken von Klein, Lie und Poincaré erkennen.

Felix Klein war gegen Ende der sechziger Jahre Assistent von Plücker in Bonn; hier vertiefte er sich in die Geometrie. Im Alter von zweiundzwanzig Jahren besuchte er im Jahre 1870 Paris. Hier traf er mit Sophus Lie zusammen, einem sechs Jahre älteren Norweger, der erst kurze Zeit vorher Interesse an Mathematik gewonnen hatte. Der junge Klein suchte die Begegnung mit den französischen Mathematikern, darunter auch Camille Jordan von der École Polytechnique, und studierte ihre Werke. Jordan hatte gerade 1870 seinen „Traité des substitutions", ein Buch über Substitutionsgruppen und die Galoissche Theorie der Gleichungen, geschrieben. Klein und Lie begannen die beherrschende Rolle der Gruppentheorie zu verstehen und teilten von da ab das Gebiet der Mathematik mehr oder weniger ausgeprägt in zwei Teile: Klein konzentrierte sich in der Regel auf diskontinuierliche, Lie auf kontinuierliche Gruppen.

Im Jahre 1872 wurde Klein Professor in Erlangen. In seiner Antrittsvorlesung setzte er die Bedeutung des Gruppenbegriffs für die Klassifizierung der verschiedenen Gebiete der Mathematik auseinander. Diese Vorlesung, die unter dem Namen „Erlanger Programm" bekannt geworden ist, erläuterte, daß jedes Gebiet der Geometrie die Invariantentheorie einer besonderen Transformationsgruppe ist. Durch Übergang zu einer erweiterten Gruppe oder zu einer Untergruppe kann man von einem Typ der Geometrie zu einem anderen übergehen. Die euklidische Geometrie hat das Studium der Invarianten der metrischen Gruppe zum Inhalt, die projektive Geometrie das Studium der Invarianten der projektiven Gruppe. Die Klassifizierung der Transformationsgruppen ergibt so eine Klassifikation der Geometrie; die Theorie der algebraischen und Differentialinvarianten jeder Gruppe ergibt die analytische Struktur der Geometrie. Die Cayleysche projektive Definition einer Metrik ermöglicht es, die metrische Geometrie im Rahmen der projektiven Geometrie zu untersuchen. Die „Adjunktion" eines invarianten Kegelschnitts zu einer projektiven Geometrie der Ebene ergibt die nichteuklidischen Geometrien. Sogar die (damals) noch relativ unbekannte Topologie erhielt den ihr zukommenden Platz als Invariantentheorie der stetigen Punkttransformationen.

Im vorhergehenden Jahr hatte Klein ein wichtiges Beispiel seiner Denkweise gegeben, als er zeigte, wie man die nichteuklidischen Geometrien als projektive Geometrien mit einer Cayley-Metrik auffassen kann. Das verschaffte endlich den vernachlässigten Theorien von Bolyai und Lobatschewski volle Anerkennung. Ihre logische Folgerichtigkeit war nunmehr gesichert. Gäbe es logische Fehler in der nichteuklidischen Geometrie, dann könnten sie in der projektiven Geometrie gefunden werden, und natürlich waren wenige Mathematiker bereit, einen solchen ketzerischen Gedanken überhaupt ernstlich zu hegen. Später wurde diese Idee der „Abbildung" eines Gebietes der Mathematik auf ein anderes oft verwendet und spielt eine wichtige Rolle bei der Hilbertschen Axiomatik der Geometrie.

Die Gruppentheorie ermöglichte eine Synthese der geometrischen und algebraischen Arbeiten von Monge, Poncelet, Gauß, Cayley, Clebsch, Graßmann und Riemann. Die Riemannsche Theorie des Raumes, die so viele der ins Erlanger Pro-

gramm eingearbeiteten Anregungen erzeugt hatte, regte nicht nur Klein zu neuen Gedanken an, sondern auch Helmholtz und Lie. Helmholtz studierte 1868 und 1884 die Riemannsche Raumauffassung, teilweise auf der Suche nach einem geometrischen Bild für seine Farbentheorie, teilweise, um den Ursprung unserer Raumanschauung zu erforschen. Das führte ihn zu Untersuchungen des Wesens der geometrischen Axiome und besonders der Riemannschen quadratischen Form, die die Grundlage vieler Messungen bildet. Lie verbesserte die theoretischen Erwägungen von Helmholtz über die Natur des Riemannschen Maßes, indem er das Wesen der ihm zugrunde liegenden Transformationsgruppen untersuchte (1890). Dieses „Lie-Helmholtzsche" Raumproblem hat seine Bedeutung nicht nur in der Relativitätstheorie und Gruppentheorie, sondern auch in der Physiologie erwiesen.[1])
Klein gab eine Darlegung der Riemannschen Auffassung der komplexen Funktionen in seinem Büchlein „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen" (1882), in welchem er mit Nachdruck darauf hinwies, wie physikalische Betrachtungen selbst die verfeinertsten Überlegungen der Mathematik beeinflussen können. In den „Vorlesungen über das Ikosaeder" (1884) zeigte er, daß die moderne Algebra über die alten Platonischen Körper viele und überraschende Einsichten bringen kann. Dieses Werk hat das Studium der Drehungsgruppen der regulären Körper und ihre Beziehungen zu den Galoisschen Gruppen algebraischer Gleichungen zum Inhalt. In umfassenden, von ihm selbst unter Mitarbeit zahlreicher Schüler durchgeführten Studien wendete Klein den Gruppenbegriff auf lineare Differentialgleichungen, elliptische Modulfunktionen, auf abelsche und die neuen „automorphen" Funktionen an, letzteres in einem interessanten und freundschaftlichen Wettstreit mit Poincaré. Unter der begeisternden Führung von Klein wurde Göttingen mit seiner auf Gauß, Dirichlet und Riemann zurückgehenden Tradition ein Weltzentrum mathematischer Forschung, in dem sich junge Menschen aus vielen Nationen zusammenfanden, um das Studium spezieller mathematischer Fragen als integrierenden Bestandteil der Gesamtheit des mathematischen Wissens durchzuführen. Klein hielt begeisternde Vorlesungen, deren Nachschriften in vervielfältigter Form von Hand zu Hand gingen und ganzen Generationen von Mathematikern sowohl spezielle Kenntnisse als auch — und dies vor allem — das Verständnis für die Einheit ihrer Wissenschaft vermittelten. Nach dem Tode von Klein im Jahre 1925 wurden mehrere dieser Vorlesungsnachschriften in Buchform veröffentlicht.
In der Zwischenzeit hatte Sophus Lie in Paris die Berührungstransformationen und damit den Schlüssel zur ganzen Hamiltonschen Dynamik als eines Teils der Gruppentheorie entdeckt. Nach seiner Rückkehr nach Norwegen wurde er Professor in Christiania, später, von 1886 bis 1898, lehrte er in Leipzig. Er widmete sein ganzes Leben dem systematischen Studium der stetigen Transformationsgruppen und ihrer Invarianten, wobei er ihre zentrale Bedeutung als Klassifikationsprinzip in der Geometrie, der Mechanik und in der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen nachwies. Das Resultat dieser Lebensarbeit wurde

[1]) H. Freudenthal, *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtzschen Raumproblems*, Math. Z. *63* (1956), 374—405. Vgl. weiter J. Naas — H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch*, Bd. II (Berlin 1961), S. 513—515.

in einer Anzahl von Standardbänden niedergelegt, die mit Hilfe seiner Schüler Scheffers und Engel herausgegeben wurden: „Transformationsgruppen" (1888 bis 1893), „Differentialgleichungen" (1891), „Kontinuierliche Gruppen" (1893), „Berührungstransformationen" (1896). Lies Werk ist seitdem unter dem Einfluß des französischen Mathematikers Elie Cartan[1]) wesentlich bereichert worden.

8.24. Übersicht über die Mathematik in Frankreich

Frankreich, das sich dem riesigen Wachstum der mathematischen Wissenschaft in Deutschland gegenübersah, brachte weiterhin hervorragende Mathematiker auf allen Gebieten hervor. Es ist interessant, französische und deutsche Mathematiker zu vergleichen: Hermite mit Weierstraß, Darboux mit Klein, Hadamard mit Hilbert, Paul Tannery mit Moritz Cantor. In den vierziger bis sechziger Jahren war Joseph Liouville, Professor am Collège de France in Paris, der führende Mathematiker, ein guter Lehrer und Organisator und langjähriger Herausgeber des „Journal de mathématiques pures et appliquées". Er führte eine systematische Untersuchung der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen von zwei und mehr Veränderlichen durch, jedoch läßt ihn das „Liouvillesche Theorem" der statistischen Mechanik auch als einen produktiven Forscher auf einem ganz anderen Gebiet erkennen. Er wies die Existenz von transzendenten Zahlen nach und bewies 1844, daß weder e noch e^2 Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann. Das war ein Schritt in einer Kette von Überlegungen; sie führte von Lamberts Beweis im Jahre 1761, daß π irrational ist, zum Hermiteschen Beweis (1873), daß e transzendent ist, und zum abschließenden Beweis von F. Lindemann (1882) (einem Schüler von Weierstraß), daß π transzendent ist. Liouville und mehrere seiner Mitarbeiter entwickelten die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen; die Formeln von Frenet-Serret (1847) entstammen dem Liouvilleschen Kreis.

Charles Hermite, Professor an der Sorbonne und an der École Polytechnique, wurde nach dem Tode von Cauchy im Jahre 1857 der führende Vertreter der Analysis in Frankreich. Hermites Werk bewegte sich ebenso wie das von Liouville in der Tradition von Gauß und Jacobi; es zeigte auch eine gewisse Verwandtschaft mit Riemann und Weierstraß. Elliptische Funktionen, Modulfunktionen, Thetafunktionen, Zahlen- und Invariantentheorie — allen diesen Gebieten wandte sich sein Interesse zu, wie die Namen „Hermitesche Zahlen", „Formen", „Polynome" bezeugen. Seine Freundschaft mit dem holländischen Mathematiker Stieltjes, der durch die Fürsprache von Hermite einen Lehrstuhl in Toulouse erhielt, bedeutete für den Entdecker des Stieltjesintegrals und der Anwendung der Kettenbrüche auf die Theorie der Momente eine große Ermutigung. Die Wertschätzung beruhte auf Gegenseitigkeit: „Sie haben immer recht, und ich habe immer unrecht", schrieb Hermite einmal an seinen Freund. Der vierbändige „Briefwechsel" (1905) zwischen Hermite

[1]) S. S. Chern, *Obituary. Elie Cartan and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. *50* (1952), 217—250.

und Stieltjes enthält eine Fülle von Material, hauptsächlich über Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Die französische Tradition in der Geometrie wurde in den Büchern und Arbeiten von Gaston Darboux großartig fortgesetzt. Darboux war ein Geometer im Sinne von Monge, der geometrische Probleme unter voller Beherrschung der Gruppen und Differentialgleichungen behandelte und an Probleme der Mechanik mit einer lebhaften Raumanschauung heranging. Darboux war Professor am Collège de France und ein halbes Jahrhundert lang als Hochschullehrer tätig. Sein einflußreichstes Werk war das Standardlehrbuch „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ (Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Flächen) (4 Bände, 1887 bis 1896), das die Forschungsergebnisse eines Jahrhunderts über die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen zusammenfaßte. In den Händen von Darboux wurde diese Differentialgeometrie auf den verschiedensten Wegen sowohl mit den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen als auch mit der Mechanik verknüpft. Darboux nahm bei seiner verwaltungstechnischen und pädagogischen Gewandtheit, seiner glänzenden geometrischen Anschauung, seiner Beherrschung der analytischen Technik und seinem Verständnis für Riemann in Frankreich eine irgendwie ähnliche Stellung ein wie Klein in Deutschland.

Der zweite Teil des neunzehnten Jahrhunderts war die Periode der bedeutenden und umfassenden Lehrbücher über Analysis und ihre Anwendungen, die oft unter dem Namen „Cours d'analyse“ erschienen und von den führenden Mathematikern geschrieben waren. Die berühmtesten sind der „Cours d'analyse“ von Camille Jordan (3 Bände, 1882–1887) und der „Traité d'analyse“ von Emile Picard (3 Bände, 1891–1896), zu denen noch der „Cours d'analyse mathématique“ von Edouard Goursat (2 Bände, 1902–1905) hinzukam.

8.25. H. Poincaré. P. L. Tschebyscheff und seine Schule

Der größte französische Mathematiker der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts war Henri Poincaré, der von 1881 bis zu seinem Tode Professor an der Sorbonne in Paris war. Kein Mathematiker dieser Zeit beherrschte eine so große Zahl von Gebieten und war imstande, sie alle zu bereichern. Jedes Jahr las er über einen anderen Fragenkomplex; diese Vorlesungen wurden von seinen Hörern herausgegeben und umspannen einen gewaltigen Bereich: Potentialtheorie, Optik, Elektrizitätslehre, Wärmeleitung, Kapillarität, Elektromagnetismus, Hydrodynamik, Himmelsmechanik, Thermodynamik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jede einzelne dieser Vorlesungen war in ihrer Art hervorragend; insgesamt stellen sie Ideen dar, die in den Werken anderer fruchtbar geworden sind, während viele noch der weiteren Bearbeitung harren. Poincaré schrieb darüber hinaus eine Anzahl von populären und halbpopulären Werken, die dazu beitrugen, ein allgemeines Interesse an den Problemen der modernen Mathematik zu fördern. Darunter befinden sich „La valeur de la science“ (Vom Wert der Wissenschaft) (1905) und „La science et l'hypothèse“ (Wissenschaft und Hypothese) (1906).[1] Außer diesen Vorlesungen

[1]) Der idealistische Standpunkt, den Poincaré in diesen Büchern einnimmt, ist von W. I. Lenin in seinem *Materialismus und Empiriokritizismus* (1908) kritisiert worden.

veröffentlichte Poincaré eine große Anzahl von Arbeiten über die sogenannten automorphen und Fuchsschen Funktionen, über Differentialgleichungen, Topologie und die Grundlagen der Mathematik, wobei er mit großartiger Beherrschung der Technik und vollem Verständnis alle einschlägigen Gebiete der reinen und angewandten Mathematik bearbeitete. Kein Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts, wohl mit Ausnahme von Riemann, hat unserer heutigen Generation ebensoviel zu sagen.
Der Schlüssel zum Verständnis von Poincarés Gesamtwerk dürfte in seinen Gedanken über Himmelsmechanik und insbesondere über das Drei-Körper-Problem („Les méthodes nouvelles de mécanique céleste", 3 Bände, 1893) liegen. Hier zeigte er seine unmittelbare Verwandtschaft mit Laplace und bewies, daß selbst am Ende des neunzehnten Jahrhunderts die alten mechanischen Probleme des Universums nichts von ihrem Beziehungsreichtum für den schöpferischen Mathematiker verloren hatten. Gerade im Zusammenhang mit diesen Problemen studierte Poincaré divergente Reihen und schuf die Theorie der asymptotischen Entwicklungen, arbeitete über Integralinvarianten, die Stabilität der Planetenbahnen und die Gestalt der Himmelskörper. Seine grundlegenden Entdeckungen über das Verhalten der Integralkurven von Diffentialgleichungen in der Nähe von Singularitäten und im Großen hängen mit seinem Werk über Himmelsmechanik zusammen. Das trifft auch auf seine Untersuchungen über das Wesen der Wahrscheinlichkeit zu, auf welchem Gebiet er abermals ähnliche Interessen entwickelte wie Laplace. Poincaré war Euler und Gauß ähnlich; von welcher Seite man ihn auch betrachtet, stets entdeckt man den Reiz der Originalität. Unsere moderne Theorien in der Relativitätstheorie, Kosmogonie, Wahrscheinlichkeit und Topologie sind alle ganz wesentlich durch das Lebenswerk von Poincaré beeinflußt worden.

8.25.* An der Spitze der russischen Mathematik der fünfziger bis neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts stand unbestritten Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821—1894). Tschebyscheff war Student der Moskauer Universität, die er 1841 beendete und wo er seine Magisterdissertation „Versuch einer elementaren Analyse der Wahrscheinlichkeitsrechnung" verteidigte, die aus einem Gebiet gewählt war, welches später einer der Hauptgegenstände seiner Forschungen werden sollte. Einige Zeit danach, in den sechziger Jahren, ging aus dem Kreis der Mathematiker und Vertreter der Mechanik, die sich um den Lehrer von Tschebyscheff an der Universität, Prof. N. D. Braschman, versammelt hatten, die Moskauer mathematische Gesellschaft hervor. Deren Zeitschrift „Matematitscheski sbornik", die bis heute erscheint, wurde eine der besten mathematischen Zeitschriften.
Alle diese Unternehmungen förderte Tschebyscheff durch seine Autorität, an ihrer Organisation war er jedoch nicht mehr direkt beteiligt, weil er 1847 nach Petersburg übersiedelte, welches bis zu seinem Tode seine Arbeitsstätte blieb. 35 Jahre lang hielt Tschebyscheff Vorlesungen an der Petersburger Universität, von 1853 an war er Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Seine Lehrtätigkeit trug reiche Früchte. Auch nach Beendigung ihres Studiums fuhr er fort, seine Schüler zu unterweisen. Diejenigen seiner Hörer, die sich der Mathematik verschrieben hatten, taten stets ihre ersten Schritte in der wissenschaftlichen Arbeit unter seiner

unmittelbaren Leitung und unter dem Einfluß seiner wertvollen Hinweise, die er jedem gab, der es wünschte und sie zu nutzen verstand. „Einmal in der Woche, zu einer festgesetzten Zeit, stand sein Haus für jeden offen, der dem berühmten Mathematiker irgend etwas über eigene Bemühungen mitzuteilen hatte oder von ihm Hinweise erhalten wollte, und selten ging jemand von ihm fort, der nicht neue Ideen und einen Ansporn zu weiterer Arbeit mitnahm.
Einer der unvergänglichen Verdienste Tschebyscheffs als Lehrer der russischen Mathematiker bestand darin, daß er durch seine Arbeiten und durch seine Hinweise in wissenschaftlichen Diskussionen seine Schüler auf fruchtbare Themen für selbständige Forschungen lenkte und ihre Aufmerksamkeit auf solche Fragen richtete, deren Behandlung fast immer zu wertvollen Resultaten führte."[1])
Den Ruf eines erstklassigen Mathematikers trugen Tschebyscheff schon seine ersten Arbeiten zur Zahlentheorie ein: die Doktordissertation „Theorie der Kongruenzen" (1849), ferner ein vortreffliches und originelles Lehrbuch über Zahlentheorie und der in Form eines Anhanges zu diesem Lehrbuch erschienene Artikel „Über die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen, die unterhalb einer gegebenen Größe liegen". Erstmalig seit Euklid wurden hier streng begründete Resultate über die asymptotische Verteilung der Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe gegeben. Insbesondere zeigte Tschebyscheff (Satz III des Artikels), daß der Ausdruck $\frac{x}{\varphi(x)} - \ln x$ für $x \to \infty$ als Grenzwert keinen von -1 verschiedenen Wert haben kann ($\varphi(x)$ bezeichnet die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$). Erst ein halbes Jahrhundert später wurde unter Hinzuziehung der Mittel der komplexen Funktionentheorie dieses Resultat verschärft: Unabhängig voneinander zeigten Hadamard und de la Vallée-Poussin (1896), daß der Grenzwert, von dem im Tschebyscheffschen Satz die Rede ist, wirklich existiert, folglich ist

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{\varphi(x)} - \ln x\right] = -1,$$

woraus

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) : \frac{x}{\ln x} = 1$$

folgt.[2])
In der Integralrechnung wird immer darauf hingewiesen, daß Tschebyscheff als erster bewiesen hat, daß sich die sogenannten „binomischen Differentiale" nur in den drei Fällen, die im wesentlichen schon Newton bekannt waren, geschlossen integrieren lassen. Das ist nur eines der Ergebnisse seiner schwierigen und scharfsinnigen Arbeiten über Integration in geschlossener Form, womit sich vor ihm Abel, Liouville und Ostrogradski beschäftigt hatten. In unserer Zeit befaßte sich mit diesem etwas aus der Mode gekommenen Gebiet der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts ein solcher Gelehrter wie Hardy (hervorragende Ergebnisse auf

[1]) A. A. Markoff — N. J. Sonin, *Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff*, in: P. L. Tschebyscheff, *Gesammelte Werke*, Bd. 1 (Moskau—Leningrad 1944), S. 8, 9.
[2]) Vgl. S. 215.

diesem Gebiet erzielte auch ein unmittelbarer Schüler Tschebyscheffs, E. I. Solotarew).

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung verdankt man Tschebyscheff vor allem die Verallgemeinerung des „Gesetzes der großen Zahlen", die Einführung einer neuen Methode, der sogenannten Momentenmethode, und den zentralen Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Viele Male las er den Kurs „Wahrscheinlichkeitstheorie" an der Petersburger Universität. Er machte die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer strengen mathematischen Disziplin, indem er verschwommene Formulierungen und unsachgemäße Anwendungen ausmerzte. Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung interessierte Tschebyscheff die besten seiner Schüler: A. A. Markoff (1856—1922) und A. M. Ljapunow (1857—1918). Markoff verallgemeinerte die Ergebnisse seines Lehrers und präzisierte dessen Beweise, er gab eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Methode der kleinsten Quadrate und führte die „Markoffschen Ketten" ein, die sich als wichtiges Instrument bei der Anwendung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden in Wissenschaft und Technik erwiesen haben. Auf Ljapunow geht die Anwendung charakteristischer Funktionen in der Theorie der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück. Die Arbeiten der Tschebyscheffschen Schule trugen wesentlich dazu bei, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich in Verbindung mit Anforderungen der Naturwissenschaften und der angewandten Wissenschaften entwickelt hatte, zu einer führenden mathematischen Disziplin werden konnte.

Tschebyscheff beschäftigte sich auch viel mit der Kinematik von Mechanismen, sowohl von der theoretischen als auch von der praktischen Seite her. Auf ihn geht eine große Zahl origineller Konstruktionen von Mechanismen zurück. Er erfand z. B. das erste Arithmometer[1]) mit stetiger Arbeitsweise. Die Untersuchung von Mechanismen führte Tschebyscheff zu neuen mathematischen Problemen und zur Schaffung einer neuen Theorie der besten Approximation von Funktionen. Die beste Approximation einer gegebenen Funktion $f(x)$ etwa auf dem Intervall (a, b) mit Hilfe von Funktionen vorgegebenen Typs, etwa von Polynomen $P_n(x)$ verschiedener Grade n, besteht in der Auswahl von $P_n(x)$ derart, daß $\max |f(x) - P_n(x)|$ auf (a, b) einen möglichst kleinen Wert hat. Die Theorie der besten Approximation wurde in der Tschebyscheffschen Schule weit vorangetrieben; sie mündete schließlich im zwanzigsten Jahrhundert in die moderne konstruktive Funktionentheorie ein. Für diese Untersuchungen hat Tschebyscheff auch die nach ihm benannten Polynome eingeführt.

Tschebyscheff hat sich auch mit den klassischen Verfahren der approximativen Darstellung von Funktionen — mit der Interpolation — beschäftigt. Er studierte die Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate, was ihn auf die allgemeine Theorie der orthogonalen Polynome führte, insbesondere für die „Tschebyscheff-Laguerreschen" und die „Tschebyscheff-Hermiteschen" Polynome.

Großen Einfluß übte Tschebyscheff durch die gesamte Zielsetzung seines Schaffens aus. Er sagte: „Ungeachtet des hohen Grades der Entwicklung, bis zu dem die mathematischen Wissenschaften durch die Arbeiten der großen Geometer der letz-

---

[1]) Rechenmaschine. (D. S.)

ten drei Jahrhunderte vorangetrieben wurden, spürt die Praxis klar ihre Unvollständigkeit in vielen Beziehungen auf; sie wirft Fragen auf, die für die Wissenschaft ganz neu sind und zum Aufsuchen völlig neuer Methoden herausfordern. Wenn die Theorie schon einen Gewinn hat von neuen Anwendungen einer alten Methode oder von Weiterentwicklungen einer solchen, um wieviel mehr gewinnt sie durch die Entdeckung neuer Methoden, und somit finden die Wissenschaften ihren wahren Führer in der Praxis".[1]) Die Mathematik ist bei Tschebyscheff die „Wissenschaft von den Größen mit ihren offenkundigen Eigenschaften. Diese Eigenschaften haben einen konkreten Sinn; jede Beziehung zwischen mathematischen Symbolen entspricht einer Beziehung zwischen realen Dingen. Eine mathematische Überlegung ist gleichbedeutend mit einem Experiment von beliebig großer Genauigkeit, welches unbeschränkt oft wiederholbar ist, und sie muß zu einer logisch und sachlich fehlerfreien Folgerung führen"[2]).

Es sei noch ganz kurz auf die oben nicht erwähnten Ergebnisse der nächsten Schüler von Tschebyscheff hingewiesen. Auf A. A. Markoff gehen bedeutende Arbeiten zur arithmetischen Theorie der quadratischen Formen, zum Momentenproblem und zu verschiedenen Fragen der Analysis zurück. Bei seinen Untersuchungen zum Momentenproblem stieß er auf Stieltjes, und der entbrennende Wettstreit sah bald diesen, bald jenen in Front. Markoff hielt für seine Zeit mustergültige Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Differenzenrechnung.

A. M. Ljapunow untersuchte als erster in seiner Dissertation „Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung" (1892) auf streng mathematische Weise das Stabilitätsproblem für mechanische Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden. Gleichzeitig war das ein Beitrag zur Theorie der Differentialgleichungen. Der Weiterentwicklung der Ideen und Methoden, die Ljapunow in dieser Untersuchung dargelegt hat, ist eine umfangreiche Literatur gewidmet. Die Arbeiten Ljapunows zur Potentialtheorie kennzeichnen eine neue Etappe in deren Entwicklung, die den neuen Anforderungen an die Strenge der Formulierungen und Beweise entspricht. Die letzten zwei Jahrzehnte seines Lebens widmete Ljapunow im wesentlichen dem ihm von Tschebyscheff gestellten Problem, die von den ellipsoidförmigen verschiedenen Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten zu untersuchen. Seine Ergebnisse dazu legte er in einer Reihe von Arbeiten nieder, deren Gesamtumfang mehr als 1000 Quartseiten umfaßte. Diese Arbeiten enthielten auch viel für die damalige Zeit neues Material auf dem Gebiet der reinen Mathematik, z. B. zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen. Der hervorragende französische Mathematiker und Physiker Paul Appell (1855—1930) sagte über diese Untersuchungen Ljapunows: „Diese Arbeiten sind so tiefschürfend, daß man sie weder nur anschauen noch flüchtig durchlesen darf — man muß sie studieren. Meiner Ansicht nach könnte man darauf gut und gern 10 Jahre verwenden . . ."[3]).

---

[1]) Im Artikel *Zeichnen geographischer Karten* in: P. L. Tschebyscheff, *Gesammelte Werke*, Bd. 5, S. 150.

[2]) S. N Bernstein, *Tschebyscheff und sein Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik*, Utschen. Sap. Mosk. Gos. Univ. *91* (1947).

[3]) Siehe A. N. Krylow, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1, Teil 2, S. 261.

Auf dem Gebiet der Zahlentheorie stammen hervorragende Arbeiten von E. I. Solotarew (1847—1878), A. N. Korkin (1837—1908) und G. F. Voronoi (1868 bis 1908). Solotarew, der in seinem 31. Lebensjahr durch einen Unglücksfall ums Leben kam, schuf gleichzeitig mit Dedekind eine allgemeine Teilbarkeitstheorie in algebraischen Zahlkörpern.[1]) Seine Methode ist von der Dedekinds verschieden. Korkin leistete, gemeinsam mit Solotarew, Beiträge zur arithmetischen Theorie der quadratischen Formen; auf ihn geht auch die Methode zur Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zurück. Voronoi, ein Schüler Markoffs, erzielte fundamentale Ergebnisse sowohl in der algebraischen als auch in der analytischen und geometrischen Zahlentheorie. Eine Reihe grundlegender mathematischer Probleme der Kartographie, die eigentlich auf Probleme der Differentialgeometrie hinauslaufen, löste in seiner Dissertation (1897) ein Schüler von Tschebyscheff und Korkin, D. A. Grave (1863—1939).

8.26. Mathematik in Italien nach dem Risorgimento

Das Risorgimento, die nationale Wiedergeburt Italiens, bedeutete auch die Wiedergeburt der italienischen Mathematik. Mehrere der Begründer der modernen Mathematik in Italien nahmen an den Kämpfen teil, durch die ihr Land von Österreich befreit wurde und die zu seiner Einigung führten; später hatten sie neben ihren Lehrstühlen politische Stellungen inne. Ein starker Einfluß ging von Riemann aus, und durch Klein, Clebsch und Cayley erwarben sie ihre Kenntnisse der Geometrie und Invariantentheorie. Sie begannen sich auch für die Elastizitätstheorie mit ihrem stark geometrischen Einschlag zu interessieren.
Zu den Gründern der neuen italienischen Mathematikschule gehörten Brioschi, Cremona und Betti. Im Jahre 1852 wurde Francesco Brioschi Professor in Pavia, und 1862 organisierte er die Technische Hochschule in Mailand, wo er bis zu seinem Tode 1897 lehrte. Er war Begründer der „Annali di matematica pura et applicata" (1858), die im Titel ihre Absicht kundgaben, mit Crelles und Liouvilles Journal zu wetteifern. Im Jahre 1858 besuchte er zusammen mit Betti und Casorati die führenden Mathematiker in Frankreich und Deutschland. Volterra behauptete später, daß „die wissenschaftliche Existenz Italien als einer Nation" von dieser Reise an gerechnet werden müsse.[2]) Brioschi war der italienische Vertreter der im Sinne von Cayley-Clebsch unternommenen Forschungen über algebraische Invarianten. Luigi Cremona (1830—1903), seit 1873 Direktor der Ingenieurschule in Rom, untersuchte in den Jahren 1863—1865 die nach ihm benannten birationalen Transformationen der Ebene und des Raumes. Er war auch einer der Pioniere der graphischen Statik.
Eugenio Beltrami war ein Schüler von Brioschi und hatte Lehrstühle in Bologna, Pisa, Pavia und Rom inne. Seine Hauptleistungen in der Geometrie stammen aus

[1]) Vgl. hierzu R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. I (Braunschweig 1930), XV: *Über den Zusammenhang der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen*, S. 202—230, insbes. S. 203, 208, 218 sowie die Erläuterungen von Ö. Ore, S. 230—272, insbes. S. 231, Abs. 2 und 3, S. 232, Abs. 2.
[2]) V. Volterra, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1900), 60—62.

der Zeit zwischen 1860 und 1870, als er mit seinen Differentialparametern den Kalkül der Differentialinvarianten in die Flächentheorie einführte. Ein anderer Beitrag aus dieser Zeit war das Studium der sogenannten pseudosphärischen Flächen, der Flächen mit negativer konstanter Gaußscher Krümmung. Auf einer solchen Pseudosphäre kann man die nichteuklidische Geometrie von Bolyai im Zweidimensionalen verwirklichen. Das lieferte, ebenso wie die projektive Interpretation von Klein, eine Methode, um zu zeigen, daß in der nichteuklidischen Geometrie keine inneren Widersprüche vorhanden sind, da sich derartige Widersprüche dann auch in der gewöhnlichen Flächentheorie zeigen müßten.
Um 1870 wurden die Ideen von Riemann mehr und mehr zum Gemeingut der jüngeren Mathematikergeneration. Seine Theorie der quadratischen Differentialformen bildete den Gegenstand von zwei Arbeiten der deutschen Mathematiker E. B. Christoffel und R. Lipschitz (1870). Die erstgenannte Arbeit führte die „Christoffel"-Symbole ein. Diese Untersuchungen zusammen mit der Beltramischen Theorie der Differentialparameter brachten Gregorio Ricci-Curbastro in Padua auf die Idee des sogenannten absoluten Differentialkalküls (1884).[1] Das war ein neuer invarianter Symbolismus, der ursprünglich zur Behandlung der Transformationstheorie von partiellen Differentialgleichungen geschaffen worden war, aber er erwies sich zugleich als ein für die Transformationstheorie der quadratischen Differentialformen geeigneter Symbolismus.
In den Händen von Ricci und einigen seiner Schüler, besonders von Tullio Levi-Civita, entwickelte sich der absolute Differentialkalkül zu dem, was wir heute Tensorrechnung nennen. Die Tensoren waren imstande, eine Vereinheitlichung von vielen invarianten Symbolismen herbeizuführen, und bewiesen außerdem ihre Kraft zur Behandlung allgemeiner Sätze der Elastizitätslehre, der Hydrodynamik und Relativitätstheorie. Der Name Tensor hat seinen Ursprung in der Elastizitätstheorie (W. Voigt, 1900).

8.27. D. Hilberts Vortrag von 1900 und Ausblick auf die weitere Entwicklung

David Hilbert, Professor in Göttingen, unterbreitete dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im Jahre 1900 eine Reihe von dreiundzwanzig Forschungsproblemen. Zu dieser Zeit hatte Hilbert für seine Arbeiten über algebraische Formen bereits Anerkennung gefunden und sein heutzutage berühmtes Buch über die „Grundlagen der Geometrie" (1899) vorbereitet. Dieses Buch war in vieler Hinsicht durch sein Buch „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) angeregt worden, worin Pasch die Grundlagenfragen der Geometrie durch die axiomatische Denkmethode bereichert hatte, die zur gleichen Zeit Frege zu seinen Arbeiten über die Grundlagen der Arithmetik geführt hatte. Hilbert gab in seinem Buch eine Untersuchung der Axiome, auf denen die Euklidische Geometrie beruht, und erklärte, inwiefern die moderne axiomatische Forschung in der Lage war, die Leistungen der Griechen zu vervollkommnen.

---

[1] Vgl. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus* (Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954), Bibliography S. 476—478, ibid. bezüglich Levi-Civita S. 463.

In seinem Vortrag aus dem Jahre 1900 versuchte Hilbert, die Strömungen der mathematischen Forschung der vergangenen Jahrzehnte zu erfassen und einen Umriß künftiger produktiver Arbeit zu skizzieren.[1]) Ein Überblick über die von ihm vorgeschlagenen Probleme wird ein besseres Verständnis für die Bedeutung der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts geben können.

Zu allererst schlug Hilbert die arithmetische Formulierung des Kontinuumbegriffs vor, wie er in den Arbeiten von Cauchy, Bolzano und Cantor ausgebildet worden war. Gibt es eine Kardinalzahl zwischen derjenigen der abzählbaren Mengen und der des Kontinuums? Und kann das Kontinuum als eine wohlgeordnete Menge betrachtet werden? Was kann darüber hinaus über die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome gesagt werden?

Die nächsten Probleme behandelten die Grundlagen der Geometrie, dazu den Lieschen Begriff der stetigen Transformationsgruppe — ist Differenzierbarkeit eine notwendige Bedingung? — und die mathematische Durchforschung der Axiome der Physik.

Darauf folgten einige Spezialprobleme, zuerst aus Arithmetik und Algebra. Die Irrationalität oder Transzendenz gewisser Zahlen war noch unbekannt (z. B. α^β für algebraisches α und irrationales β). Gleichermaßen unbekannt war ein Beweis der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der Zeta-Funktion ebenso wie die Formulierung des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes in der Zahlentheorie.[2]) Ein anderes Problem auf diesem Gebiet betraf den Beweis für die Endlichkeit gewisser vollständiger Funktionensysteme, das durch die Invariantentheorie nahegelegt wurde.

Das fünfzehnte Problem forderte einen strengen Beweis des abzählenden Kalküls von F. T. von Schubert, das sechzehnte das Studium der Topologie algebraischer Kurven und Flächen. Ein anderes Problem betraf die Zerlegung des Raumes in kongruente Polyeder.

Die restlichen Probleme handelten von Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Sind die Lösungen von regulären Problemen der Variationsrechnung immer analytisch? Besitzt jedes reguläre Variationsproblem bei gegebenen Randbedingungen eine Lösung? Was läßt sich über die Uniformierung analytischer Relationen mit Hilfe von automorphen Funktionen sagen? Hilbert beendete seine Aufzählung mit einem Aufruf zur Weiterentwicklung der Variationsrechnung.[3])

[1]) Göttinger Nachrichten (1900), S. 253—297. Bei dieser Arbeit wurde Hilbert von H. Minkowski unterstützt.

[2]) Vgl. ebenda, S. 214, insbes. Fußnote 1.

[3]) Eine Diskussion der von Hilbert umrissenen Probleme nach dreißig Jahren findet man in L. Bieberbach, *Über den Einfluß von Hilberts Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme" auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreißig Jahren*, Naturwissenschaften *18* (1936), 1101—1111. Seitdem sind neue Fortschritte gemacht worden, siehe S. S. Demidow, *Über die Geschichte der Hilbertschen Probleme* (russisch), Istor.-Mat. Issled. *17* (1966), 91—121; mit Bibliographie (etwa 150 Titel), dazu auch S. S. Demidow — K. A. Rybnikow in *Geschichte und Methodologie der Naturwissenschaften* (Moskau) *9* (1970), 150—159) (ebenfalls russisch). Vgl. dazu auch das Buch „Die Hilbertschen Probleme" (russisch), erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Leitung von P. S. Alexandroff; deutsche Übersetzung Leipzig 1971 = Ostwald's Klassiker Bd. 252.

Hilberts Programm bewies die Lebenskraft der Mathematik am Ende des neunzehnten Jahrhunderts und hebt sich scharf von dem gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts aufgekommenen pessimistischen Ausblick ab. Gegenwärtig sind einige der Hilbertschen Probleme gelöst worden; andere harren noch der endgültigen Lösung. Die Entwicklung der Mathematik in den Jahren nach 1900 hat die Erwartungen, die am Ende des neunzehnten Jahrhunderts geäußert wurden, nicht enttäuscht. Jedoch hat selbst Hilberts Genie einige der überraschendsten Entwicklungen nicht voraussehen können, die tatsächlich stattgefunden haben und heute noch stattfinden. Die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts hat ihren eigenen neuen Weg zum Ruhm angetreten.

Literatur

Die beste Einleitung zu der Geschichte der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts bleibt noch immer:

F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II* (Berlin 1926/27).

Weitere Orientierung geben die Bücher von M. Kline und C. Boyer sowie

G. Birkhoff, *A source book in classical analysis* (Cambridge, Mass., 1973).

Eine Bibliographie der führenden Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts findet sich in:

G. Sarton, *The Study of the History of Mathematics* (Cambridge, Mass., 1936), S. 70 bis 98.

Dort werden Biographien verzeichnet von Abel, Adams, Airy, Appell, Aronhold, Babbage, Bachmann, Baire, Ball, Bellavitis, Beltrami, Bertrand, Bessel, Betti, Boltzmann, Bolyai, Bolzano, Boole, Borchardt, Brioschi, G. Cantor, L. Carnot, Cauchy, Cayley, Chasles, Clausius, Clebsch, Clifford, Cournot, Couturat, Cremona, Darboux, G. Darwin, Dedekind, de Morgan, Dirichlet, Edgeworth, Eisenstein, Encke, Fiedler, Fourier, Fredholm, Frege, Fresnel, Fuchs, Galois, Gauß, Germain, Gibbs, Göpel, Gordan, Graßmann, Green, Halphen, Jevons, Jordan, Kelvin, Kirchhoff, Klein, Kowalewskaja, Kronecker, Kummer, Laguerre, Lamé, Laplace, Legendre, Lemoine, Leverrier, Lie, Liouville, Lobatschewski, Lorentz, MacCullagh, Maxwell, Méray, Minkowski, Mittag-Leffler, Möbius, F. Neumann, Newcomb, E. Noether, Olbers, Oppolzer, Painlevé, Peacock, B. Peirce, Pfaff, Plücker, Poincaré, Poinsot, Poisson, Poncelet, Ramanujan, Rankine, Rayleigh, Riemann, Rosenhain, Ruffini, Saint-Venant, Schwarz, Smith, v. Staudt, Steiner, Stokes, Sylow, Sylvester, Tait, Tschebyscheff, Weierstraß.

Außerdem gibt es in russischer Sprache Biographien von Andrejew, Bunjakowski, Grave, Imschenetzki, Korkin, A. N. Krylow, Ljapunow, Markoff, Mlodsejewski, Ostrogradski, Peterson, Shukowski, Tschaplygin, Tschebyscheff, Voronoi.
In deutscher Sprache existiert ferner eine Biographie von Minding (siehe unten). Weiteres bibliographisches Material in den Ausgaben der Scripta mathematica (New York, seit 1932).

Von folgenden Mathematikern sind gesammelte Werke herausgegeben worden (manchmal nur teilweise): Abel, E. Artin, Beltrami, S. N. Bernstein, Betti, Bianchi, G. Birkhoff, H. Bohr, Bolzano, Borchardt, Brioschi, G. Cantor, Carathéodory, E. Cartan, Casorati, Cauchy, Cayley, E. Cesàro, H.-C. Chow, Clifford, Cremona, Dedekind, Denjoy, Dini, Dinnik, Dirichlet, Eisenstein, Fourier, Fuchs, Galois, Gauß, Gibbs, Graßmann, Green, Haar, Halphen, Hamilton, G. H. Hardy, Hecke, Hermite, Hilbert, Jacobi, Klein, S. Kowalewskaja, Kronecker, Laguerre, E. E. Levi, Levi-Civita, Lie, Ljapunow, Lobatschewski, Lusin, Mandelstam, G. A. Miller, Minkowski, Möbius, Mukhopadhyaya, J. v. Neumann, Peano, C. S. Peirce, Pincherle, Plücker, Poincaré, van der Pol, Pompeiu, Ramanujan, Ricci, Riemann, Ruffini, Schläfli, Schwarz, Scorza, C. Segre, H. I. S. Smith, Steiner, Stieltjes, Sylow, Sylvester, Szász, Tait, Tschebyscheff, Urysohn, Vaidyanathaswamy, Volterra, Voronoi, Wald, Weierstraß, Weyl.

Außerdem von: A. A. Andronow, L. E. J. Brouwer, Dolbnja, Frobenius, Korkin, A. N. Krylow, N. M. Krylow, Markoff, Ostrogradski, F. Riesz, O. J. Schmidt, Shukowski, Solotarew, Sonin, Tschaplygin, Winogradow.

Literatur zu Einzelfragen:

L. de Launay, *Monge. Fondateur de l'École Polytechnique* (Paris 1934).

R. Taton, *Monge* (Paris 1951), auch kürzer: Elemente der Mathematik, Beiheft *49* (Basel 1950).

F. Klein u. a., *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß* (8 Bände, Leipzig 1911–1920).

G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauß; Titan of Science* (New York 1955).

C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages, herausgegeben von H. Reichardt (Leipzig 1957).

C. F. Gauß, Sammelband zu seinem 100. Todestag (russisch) (Moskau 1956).

C. F. Gauß und die Landesvermessung in Niedersachsen (Hannover 1955).

Für einen weiteren Kreis sind:

H. Wussing, *Carl Friedrich Gauß* (Leipzig 1974).

W. C. Schaaf, *Carl Friedrich Gauß, Prince of Mathematics* (New York 1964).

T. Hall, *Carl Friedrich Gauss, a biography* (aus dem Schwedischen, Stockholm 1965; Cambridge, Mass., — London 1970).

Quaternion centenary celebration. Proc. Roy. Irish Acad. A *50* (1945), 69–98; unter den Artikeln befindet sich A. J. McConnell, *The Dublin mathematical school in the First Half of the Nineteenth Century.*

Eine Sammlung von Arbeiten zum Gedenken an Sir William Rowan Hamilton (Scripta mathematica studies [New York, 1945]).

E. Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf v. Staudt*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. *5* (1901), 1–486.[1])

[1]) Siehe E. Hofmann, *Staudt, Karl Georg Christian v.*, in: Veröffentlichung der Gesellschaft für Fränkische Geschichte, 7. Reihe: Lebensläufe aus Franken, Bd. 6 (1960).

H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin 1969.

M. Black, *The Nature of Mathematics* (New York 1934); enthält eine Bibliographie über symbolische Logik.

W. F. Kagan, *Lobatschewski* (russisch, Moskau-Leningrad 1944).

[A. P. Norden, Herausg.] *Hundertfünfundzwanzig Jahre nichteuklidische Geometrie von Lobatschewski* (russisch, Moskau-Leningrad 1952).

D. M. Y. Sommerville, *Bibliography of non-euclidean geometry* (London 1911; Neudruck mit Supplement New York 1970).

P. Stäckel — F. Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung* (Leipzig 1895; Neudruck New York-London 1968).

D. J. Struik, *Outline of a History of Differential Geometry*, Isis *19* (1933), 92—120; *20* (1934), 161—191.

K. Reich, *Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis auf Riemann*, Arch. History Exact Sci. *11* (1973), 273—382.

J. W. Dauben, *The invariance of dimension. Problems in the early development of set theory and topology*, Historia mathematica *2* (1975), 273—288.

L. M. Osen, *Women in Mathematics* (Cambridge, Mass., 1974).

Neben die von Coolidge besprochenen Mathematiker werden auch Car. Herschel und Emmy Noether eingeführt.

J. L. Coolidge, *Six female mathematicians*, Scripta math. *17* (1951), 20—31. Siehe auch E. G. Kramer, Scripta math. *23* (1957), 83—95.

Behandelt werden Hypatia, M. G. Agnesi, E. du Châtelet, M. Sommerville, S. Germain und S. Kowalewskaja.

Sonja Kowalewskaja, *Her recollections of childhood*. Aus dem Russischen übersetzt von I. F. Hapgood (New York 1895).

Dieses Buch enthält auch die von A. C. Leffler verfaßte, aus dem Schwedischen (1892) übersetzte Biographie; in Sammlung Reclam, Leipzig, vorhanden.

Sonja Kowalewskaja, *Erinnerungen an meine Kindheit* (Weimar 1960).

Zur Erinnerung an S. V. Kowalewskaja. Sammlung von Essays (russisch, Moskau 1951).

Siehe auch Istor.-Mat. Issled. *7* (1954), 666—715.

E. Høyrup, *Women and mathematics, science and engineering* (Roskilde Univ. Library, Danmark, 1978).

Ausführliche Bibliographie.

L. P. Wheeler, *Josiah Willard Gibbs* (New Haven 1951).

E. Worbs, *Carl Friedrich Gauß*. Ein Lebensbild (Leipzig 1955).

N. Nielsen, *Géomètres français sous la Révolution* (Copenhagen 1929).

F. A. Medwedew, *Die Entwicklung der Mengentheorie im 19. Jahrhundert* (russisch, Moskau 1965).

G. A. Miller, *History of the theory of groups to 1900*, Gesammelte Werke *1* (1935), 427—467.

L. Kollros, *Jakob Steiner*, Elemente der Mathematik, Beiheft 7 (Basel 1947).

J. T. Merz, *A History of European Thought in the Nineteenth Century* (London 1903 bis 1914).

J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton, N. J. 1945).

G. Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century: Their Lives and Their Works* (2 Bände, Benares 1933/34).

I. Gratton-Guinness, *Joseph Fourier 1768–1830* (Cambridge, Mass., 1972).

E. Winter, *B. Bolzano und sein Kreis* (Leipzig 1933, Halle 1949).

E. Winter, *Bernard Bolzano. Ein Lebensbild* (Stuttgart 1969).

Einleitungsband zu einer geplanten Gesamtausgabe.

E. J. Kolman, *Bernard Bolzano* (Berlin 1963).

O. Ore, *Niels Henrik Abel* (Minneapolis 1957).

L. Infeld, *Wen die Götter lieben* (Wien 1954).

Das ist ein auf dem Leben von Galois beruhender Roman. Über Galois vgl. auch R. Taton, Revue Hist. Sci. appl. *1* (1947), 114–130, und

A. Dalmas, *Evariste Galois, Révolutionnaire et Géomètre* (Paris 1958) (russisch Übersetzung Moskau 1960).

P. E. B. Jourdain, *The development of the theory of transfinite numbers*, Archiv der Mathematik und Physik (3) *10* (1906); *14* (1908/1909); *16* (1910); *22* (1913/1914).

Für das Studium der mathematischen Arbeiten von Karl Marx siehe

K. Marks, *Matematičeskie Rukopisi* (russisch, Moskau 1968).

Die Marxschen Arbeiten in deutscher Sprache mit russischer Übersetzung und Kommentar. Siehe dazu

M. Miller, *Karl Marx' Begründung der Differentialrechnung*, Wiss. Z. Hochschule f. Verkehrswesen Dresden *16* (1969), 649–659.

A. P. Gokieli, *Die mathematischen Handschriften von Karl Marx* (russisch, Tblissi 1947).

D. J. Struik, *Marx and Mathematics*, Science and Society *12* (1948), 181–196.

H. C. Kennedy, *Karl Marx and the foundations of differential calculus*, Historia mathematica *4* (1977), 305–318.

Mit Bibliographie.

Vgl. auch K. A. Rybnikow, Uspechi mat. nauk *10* (1955), 197–199 (russisch); E. J. Kolman, Wopr. ist. estestw. i techn. *25* (1968), 101–112 (russisch).

Siehe auch E. Kolman, *Eine neue Grundlegung der Differentialrechnung durch Karl Marx*, Verhandlungen des Internat. Math.-Kongresses Zürich 1932, Bd. II, S. 349–351.

G. H. Hardy, *A mathematician's apology* (Cambridge, Mass. 1940, 2. Aufl. mit Vorwort von C. P. Snow, ibid. 1967).

C. Reid, *Hilbert* (New York 1970).

J. Fang, *Hilbert. Toward a philosophy of modern mathematics II* (New York 1970).

Bourbaki ist das Thema des ersten Bandes (1970).

Hermann Minkowski. Briefe an David Hilbert, herausgegeben von Lily Rüdenberg und H. Zassenhaus (Berlin-Heidelberg-New York 1973).

Die Briefe von Hilbert an Minkowski sind bis jetzt nicht aufgefunden worden.

I. Gratton-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann* (Cambridge, Mass., 1970).

W. A. Dobrowolski, *Essays on the development of the analytical theory of differential equations* (Kiew 1974).

Besprechung dieses russischen Buches von 455 S. von L. Reiziņš, Historia mathematica *3* (1976), 221—223.

R. I. Galtschenkowa u. a., *Ferdinand Minding* (russisch, Leningrad 1970). Siehe auch: A. Kneser, Zeitschr. Math. Physik *45* (1900), 113—128.

A. F. Monna, *Herman Hankel*, Nieuw Archief voor Wiskunde *21* (1973), 64—87.

A. F. Monna, *The Concept of Function in the* 19^{th} *and* 20^{th} *Centuries in particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue*, Arch. History Exact Sci. *9* (1972), 57—81.

H. C. Kennedy ed., *Selected works of Guiseppe Peano* (Toronto 1973).

J. Herival, *Josef Fourier. The man and the physicist* (Oxford 1975).

L. Nový, *Origins of modern algebra.* Transl. by J. Tauer (Leiden-Prague 1973).

M. Crowe, *A history of vector analysis* (Notre Dame, Indiana, 1967).

B. Ross, *The development of fractional calculus 1695—1960.* Historia mathematica *4* (1977), 73—89.

K. R. Manning, *The emergence of the Weierstrassian Approach to Complex analysis*, Arch. History Exact Sci. *14* (1975), 297—383.

B. M. Kiernan, *Development of Galois Theory from Lagrange to Artin*, Arch. History Exact Sci. *8* (1971), 40—154.

Siehe dazu B. L. van der Waerden, ibid. *9* (1972), 240—248.

E. Koppelman, *The Calculus of operations and the rise of abstract algebra*, ibid. *8* (1971), 155—242.

A. E. Taylor, *The differentials: nineteenth and twentieth century developments*, Arch. History Exact Sci. *12* (1974), 355—383.

Zu einzelnen Mathematikern des 19. Jahrhunderts siehe auch:

Kurt-R. Biermann, *Zum Verhältnis zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß*, Wiss. Z. Humb.-Univ. Berlin, Math.-nat. Reihe, *8* (1958/59), 121—130.

Ders., *Über die Förderung deutscher Mathematiker durch Alexander von Humboldt.* Gedenkschr. z. 100. Wiederkehr seines Todestages, Berlin 1959, S. 83—159.

Ders., *F. Woepckes Beziehungen zur Berliner Akademie*, Mon. Ber. Dt. Akad. Wiss, *2* (1960), 240—249.

Ders., *J. P. G. Lejeune Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken*, Berlin 1959 (= Abh. Dt. Akad. Wiss., Kl. f. Math., Phys. u. Techn., 1959, Nr. 2).

Ders., *Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie*, Berlin 1960 (= Abh. Dt. Akad. Wiss., Kl. f. Math., Phys. u. Techn., 1960, Nr. 3).

Ders., *Gotthold Eisenstein*, J. reine angew. Math. *214* (1964), 19–30.

Ders., *Eine unveröffentlichte Jugendarbeit C. G. J. Jacobis über wiederholte Funktionen*, J. reine angew. Math. *207* (1961), 96–112.

Ders., *Der Mathematiker Ferdinand Minding und die Berliner Akademie*, Mon. Ber. Dt. Akad. Wiss. *3* (1961), 128–133.

Ders., *David Hilbert und die Berliner Akademie*, Math. Nachr. *27* (1964), 377–384.

Ders., *N. H. Abel und Alexander von Humboldt*, Nordisk Mat. Tidskr. *11* (1963), 59–63.

Ders., *Jakob Steiner, Eine Biographische Skizze*, Nova Acta Leopold., N. F. *27* (1963), Nr. 167, 31–45.

Ders., *Thomas Clausen, Mathematiker und Astronom*, J. reine angew. Math. *216* (1964), 159–198.

Ders., *Über die Beziehungen zwischen C. F. Gauß und F. W. Bessel*, Mitt. Gauß-Ges. *3* (1966), 7–20.

Ders., *Karl Weierstraß, Ausgewählte Aspekte seiner Biographie*, J. reine angew. Math. *223* (1966), 191–220.

Ders., *Ein Brief von Wolfgang Bolyai*, Math. Nachr. *32* (1966), 341–346.

Ders., *Richard Dedekind im Urteil der Berliner Akademie*, Forsch. u. Fortschr. *40* (1966), 301–302.

Ders., *Carl Friedrich Gauß im Spiegel seiner Korrespondenz mit Alexander von Humboldt*, Mitt. Gauß-Ges. *4* (1967), 5–18.

Ders., *Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauß*, NTM *8* (1971), H. 1, 9–12.

Ders., *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1920* (Berlin 1973).

9. Das zwanzigste Jahrhundert (erste Hälfte)[1]

D. J. Struik hat zweifellos recht mit der Ansicht, daß die Beschreibung und Analyse der Entwicklung der Mathematik im zwanzigsten Jahrhundert eine sehr schwierige Sache ist. Unsere Ergänzung wurde mit einem bei weitem bescheideneren Ziel geschrieben: Sie soll dem Leser wenigstens teilweise jene allgemeinen Kenntnisse vermitteln, die ihm eine Vorstellung von der Mathematik der ersten Jahrzehnte unseres Jahrhunderts geben und in ihm den Wunsch wecken, gründlicher mit diesem Problemkreis bekannt zu werden.
Der erste Teil der Ergänzung bezieht sich auf die Zeit bis zum ersten Weltkrieg, die Darstellung im zweiten Teil führt bis zum zweiten Weltkrieg. Der dritte und letzte Teil ist nicht mehr als eine kurze, sehr unvollständige Schlußbemerkung. Ein Buch über die Geschichte der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts existiert noch nicht. Die vollständigste Übersicht darüber gibt nach wie vor der entsprechende Abschnitt in der französisch geschriebenen, unter der Redaktion von Prof. René Taton herausgegebenen „Allgemeinen Geschichte der Naturwissenschaften"[2]).

9.1. Vom Anfang unseres Jahrhunderts bis zum ersten Weltkrieg

9.1.1. Es versteht sich, daß der erste Tag im neuen Jahrhundert, der 1. Januar 1901 nicht als irgendein Umschwung oder eine Wende in der Mathematik betrachtet werden kann, ebensowenig, wie man auf den anderen Gebieten menschlicher Tätigkeit zu diesem Zeitpunkt irgendeine Besonderheit bemerkt hat. Es gibt keine klare Grenze, die die Mathematik des zwanzigsten von der des neunzehnten Jahrhunderts trennt. Die Zeit vom Beginn des neuen Jahrhunderts bis zum ersten Weltkrieg ist in der Mathematik charakterisiert durch die kontinuierliche Fortsetzung der Arbeit der vorangegangenen Jahrzehnte, durch eine Weiterentwicklung und kritische Verstärkung jener Fortschritte und Tendenzen, die im Verlauf etwa des letzten Viertels des neunzehnten Jahrhunderts ziemlich klar hervorgetreten waren. Deshalb wird es nützlich sein, noch einmal auf das Ende des neunzehnten Jahrhunderts zurückzublicken — aber nicht mit „kleinlicher Kritik", sondern mit anerkennender Aufmerksamkeit.

---

[1]) Ergänzung von I. B. Pogrebysski (1906—1971), siehe Russian Math. Surveys *27* (1973), № 1. 195—206 (Übersetzung aus Uspechi mat. nauk). (D. S.).

[2]) *Histoire générale des sciences, publiée sous la direction de René Taton*, t. III, II (le XX siècle), Paris 1964, S. 10—127.

Man muß sich zuerst einen Begriff davon machen, in welchem Maße in dieser Periode die einzelnen Länder zur Entwicklung der Mathematik beigetragen haben. Die Wissenschaft war zu jener Zeit vorwiegend europäisch. Die Länder Asiens, Afrikas und Südamerikas nahmen fast keinen Anteil an der wissenschaftlichen Entwicklung. Außerhalb Europas bildete sich eine nennenswerte Gruppe von Mathematikern nur in den USA heraus, aber auch diese Mathematiker standen gewissermaßen noch im Schatten ihrer europäischen Lehrer. In Europa selbst war die Verteilung der mathematischen Zentren über die verschiedenen Ländern sehr ungleichmäßig. An erster Stelle nach der Zahl der aktiv Forschenden, nach der Anzahl der gedruckten Publikationen verschiedener Art und unterschiedlichster Bestimmung, nach dem Grad ihrer Organisation und nach der Bedeutung im kulturellen Leben und überhaupt in ihrem Land standen die Mathematiker Deutschlands und Frankreichs. Im Aufschwung befand sich nach der Einigung des Landes die Mathematik in Italien. In Rußland erlebte das „mächtige Häuflein" der Mathematiker aus der Tschebyscheffschen Schule seine Blütezeit. In England hatte nach dem Tode von Cayley und Sylvester (noch früher war Clifford in jungen Jahren gestorben) die „reine Mathematik" keine so glänzenden Vertreter mehr. Der gute Ruf der Mathematik wurde dort aufgrund der Beiträge zur theoretischen Mechanik und mathematischen Physik aufrechterhalten. Nur wenige Gelehrte vertraten die Mathematik des noch zersplitterten Polens, der in den Grenzen des damaligen Österreich-Ungarn lebenden slawischen Völker, der Balkanländer und der weit unter dem mitteleuropäischen Niveau stehenden Länder Spanien und Portugal. Dagegen haben die in technischer und ökonomischer Hinsicht höher entwickelten Länder Holland, Belgien und Skandinaviens schon einen spürbaren Beitrag zur Mathematik geleistet, der nicht so sehr dem spontanen Auftreten bedeutender Talente, sondern mehr der systematischen Arbeit verschiedener Gruppen von Gelehrten zu verdanken ist. Im übrigen war dieser Beitrag aber doch wesentlich kleiner als der, den die „mathematischen Großmächte" Europas leisteten.

9.1.2. Ungeachtet dieses territorial verhältnismäßig beschränkten Wirkungsbereiches der Mathematik sahen sich jedoch die Mathematiker bereits genötigt, sich Gedanken über neue Formen der Organisation der wissenschaftlichen Arbeit und der Heranbildung des Nachwuchses zu machen. Die früheren Formen des wissenschaftlichen Verkehrs und der Ausbildung des Nachwuchses genügten den Anforderungen immer weniger. Das lag im beschleunigten Wachstum der Wissenschaft im allgemeinen und der Mathematik im besonderen, in der allmählichen Veränderung ihrer Rolle in der entwickelten kapitalistischen Gesellschaft, also letzten Endes in der gesellschaftlichen Entwicklung überhaupt begründet. Es ist z. B. folgendes leicht zu sehen: Die oben gegebene Skizze der Verteilung der Mathematiker entspricht annähernd einer Einteilung der damaligen Länder nach dem Grad ihrer Industrialisierung und nach dem Anteil, den der kapitalistische Sektor in jedem einzelnen Lande hatte.

Wir kommen jetzt zu einigen Zahlenangaben. Im Jahre 1871 erschien in Berlin eine Referatenzeitschrift, das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathema-

tik"[1]). Mit der Herausgabe war nach dem Vorbild der analogen bibliographischen Zeitschrift für Physik (Fortschritte der Physik) begonnen worden.
Im ersten Band dieses „Jahrbuchs" werden Arbeiten über Mathematik und ihre Anwendungen auf die Mechanik, die mathematische Physik, die Astronomie und Geodäsie aus dem Jahre 1868 referiert. Insgesamt sind dort etwas weniger als 900 Arbeiten von ungefähr 650 Autoren aufgeführt. Diese Arbeiten sind nach 12 Sachgebieten eingruppiert: 1. Geschichte und Philosophie; 2. Algebra; 3. Zahlentheorie; 4. Wahrscheinlichkeitstheorie; 5. Reihen; 6. Differential- und Integralrechnung (einschließlich Differentialgleichungen und Variationsrechnung); 7. Funktionentheorie; 8. analytische Geometrie (hier wurde die Differentialgeometrie eingeordnet); 9. synthetische Geometrie (im Grunde genommen die projektive Geometrie); 10. Mechanik; 11. mathematische Physik; 12. Geodäsie und Astronomie.
Entsprechende Angaben gegen Ende des Jahrhunderts zeigen die Tragweite der vor sich gegangenen Veränderungen. Auf dem ersten internationalen Mathematikerkongreß 1897 in Zürich wurde die Intensität der mathematischen Publikationstätigkeit der unmittelbar vorhergegangenen Jahre auf 2000 Veröffentlichungen im Jahr geschätzt. Die gesamte wissenschaftliche mathematische Literatur (vom Beginn des Buchdrucks in Europa bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts) bestand nach Schätzungen von Bibliographen aus annähernd 125000 Titeln (es handelt sich dabei um ungefähr 95000 Originalarbeiten und 30000 Bücher; Neuauflagen und Übersetzungen nicht mitgezählt). Und von diesen 125000 Titeln kam ungefähr die Hälfte in den letzten 50 Jahren des neunzehnten Jahrhunderts heraus.
Kommen wir nochmals auf das „Jahrbuch" zurück. Im Band für das Jahr 1900 (Bd. 31, hrsg. 1902) werden mehr als 2600 Arbeiten referiert, die Zahl der Autoren erreicht nicht ganz 1500. Somit hatte sich in drei Jahrzehnten die Menge der pro Jahr erscheinenden Publikationen fast verdreifacht, die Zahl der in einem Jahr mit Veröffentlichungen hervortretenden Mathematiker war auf das 2,5fache angewachsen.
Die Aufteilung nach Sachgebieten blieb dieselbe. Die Redaktion des „Jahrbuchs" sah sich gezwungen, die Zahl der Abschnitte bei vielen Sachgebieten zu vergrößern, wobei dann neue Namen von früher noch nicht vorhandenen Disziplinen auftauchten.
So bestand die Algebra (Sachgebiet 2) im Jahre 1868 aus drei Abschnitten: Gleichungen; symmetrische Funktionen; Eliminationstheorie und Permutationen. 1900 blieb der erste Abschnitt „Gleichungen", den zweiten bildete die Formentheorie, und der dritte enthielt Permutationen, Gruppentheorie, Determinanten und Eliminationstheorie.
In der Funktionentheorie (Sachgebiet 7) wurde die Nomenklatur beträchtlich erweitert. Das Sachgebiet 7 bestand früher aus zwei Abschnitten: allgemeine Fragen und spezielle Funktionen. Während man vorher den zweiten Abschnitt nicht weiter untergliederte, unterschied man hier jetzt verschiedene Teile: elliptische Funktionen, Kugelfunktionen usw. Der Prozentsatz der Arbeiten auf diesem Gebiet hatte sich seit 1868 verdoppelt. In den geometrischen Sachgebieten ent-

[1]) Im folgenden kurz „Jahrbuch" genannt.

stand ein neuer Abschnitt, er enthielt die Arbeiten zur Topologie. Es ist vielleicht noch interessant, darauf hinzuweisen, daß der Prozentsatz der Arbeiten in den letzten drei Sachgebieten, die man zur angewandten Mathematik rechnen kann, praktisch unverändert blieb (22—23%) und sich der Anteil der geometrischen Arbeiten wesentlich verringert hatte: von 39% auf 26%.
Unverändert mit ungefähr 10% blieb der Anteil der Arbeiten des ersten Sachgebietes. Man kann es als ein Zeichen der Zeit betrachten, daß hier die pädagogischen Arbeiten dominierten. Man begann allmählich systematisch die Vorschläge zu durchdenken, die sowohl von Pädagogen als auch von Fachgelehrten zur Veränderung der Mathematiklehrpläne an den mittleren und höheren Schulen und zur Umgestaltung der mathematischen Lehrmethoden gemacht wurden. Verschiedene Umstände hatten diese Entwicklung hervorgerufen: Die Mathematik war um vieles Neue bereichert worden; die neuen Resultate führten zur Überprüfung früherer Kenntnisse, zu deren Eingliederung in ein neues System von Begriffen und Vorstellungen: der Anwendungsbereich der Mathematik erweiterte sich, der Charakter der Anforderungen von Seiten der Naturwissenschaften und der technischen Diziplinen begann sich zu verändern.

9.1.3. Angesichts des raschen Wachstums der Zahl der Forscher und der mathematischen Arbeiten empfanden den Anforderungen ihrer Zeit aufgeschlossen gegenüberstehende Mathematiker die Notwendigkeit, neue Formen des wissenschaftlichen Lebens zu schaffen. Mitte des neunzehnten Jahrhunderts wurden spezielle mathematische Gesellschaften gegründet, die aber zunächst mit bestimmten Städten verbunden waren. So wurden z. B. fast gleichzeitig die Moskauer Mathematische Gesellschaft (1864) und die Londoner Mathematische Gesellschaft (1865) gegründet[1]). Beide Gesellschaften begannen sehr bald, nationalen Charakter anzunehmen, nicht zuletzt dank ihrer Zeitschriften. Später bildeten sich nationale mathematische Vereinigungen, die sich von den entsprechenden allgemeinwissenschaftlichen Vereinigungen abspalteten (z. B. wurde die Französische Mathematische Gesellschaft 1872, die Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1891 gegründet). Hauptsächlich diese nationalen mathematischen Vereinigungen organisierten die bibliographische Arbeit und stellten sie auf eine wesentlich breitere Grundlage. Sie sorgten ferner für die Ausarbeitung der notwendig gewordenen Übersichtsartikel zu den verschiedenen Disziplinen und widmeten sich Fragen der Neugestaltung der mathematischen Lehrprogramme. Schließlich organisierten sie mathematische Kongresse im Landesmaßstab. Überdies erwies es sich aber auch als notwendig, eine internationale Organisation zu schaffen. Der erste Versuch in dieser Richtung wurde 1893 unternommen, als in Chicago die Weltausstellung stattfand. In deren Programm waren nämlich auch wissenschaftliche Kongresse und Konferenzen vorgesehen, bei denen man mit internationaler Beteiligung rechnete, darunter auch ein mathematischer Kongreß. Aber neben amerikanischen Gelehrten (ungefähr 40 Teilnehmer) nahmen an diesem Mathematikerkongreß nur wenige Europäer teil.

[1]) Die Hamburger Mathematische Gesellschaft geht als „Societät“ auf das Jahr 1690, das „Wiskundig Genootschap“ zu Amsterdam auf das Jahr 1778 zurück. (D. S.)

Freilich hatte Felix Klein eine bedeutende Zahl von Vorträgen seiner deutschen Kollegen mitgebracht, und er konnte dem Kongreß versichern, daß diese Vorträge ein ziemlich vollständiges Bild von der Arbeit der deutschen Mathematiker jener Zeit gaben. Die anderen Länder waren allerdings nur durch einzelne Mitteilungen vertreten.

An diesen Kongreß, für den man die Bezeichnung „international" beibehielt, erinnert heute ein Sammelband der für ihn ausgearbeiteten Vorträge (insgesamt 39, davon 13 von amerikanischen Autoren, 16 von deutschen, je 3 von französischen und italienischen). Dieser Sammelband ist der erste Band einer von der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft herausgegebenen Reihe.[1]) Der Chicagoer Kongreß gab außerdem einen zusätzlichen Impuls zur Organisierung eines repräsentativen internationalen Mathematikerkongresses im heutigen Sinne. Man wählte als Ort des ersten Kongresses die Schweiz, anscheinend um alle „Prestigefragen" zu umgehen. Dort fand in Zürich 1897 der I. Internationale Mathematikerkongreß statt. Er währte drei Tage und vereinigte etwas mehr als 200 Teilnehmer (ungefähr 2000 Einladungen waren verschickt worden, hauptsächlich an die Adresse der nationalen Organisationen). Die offiziellen Kongreßsprachen waren deutsch und französisch. Auf dem Kongreß wurden unter anderem Probleme der Gründung internationaler Kommissionen erörtert, die für die Zusammenstellung der Referate und für das Studium von Fragen der Bibliographie und Terminologie verantwortlich sein sollten. Zu Ergebnissen auf diesem Gebiet kam man allerdings nicht. Für die Einberufung und Organisation der folgenden Kongresse wurde in Zürich eine Ordnung festgelegt. Als wichtigste Aufgaben solcher internationaler Kongresse erkannte man die Abfassung von Berichten über den derzeitigen Stand der verschiedenen mathematischen Disziplinen, die Mitarbeit an der Ausarbeitung einer Klassifikation der mathematischen Wissenschaften und an bibliographischen Arbeiten von allgemeiner wissenschaftlicher Bedeutung. Weitere wesentliche Aufgaben sah man in der Mithilfe bei der Herausgabe von für alle Mathematiker bedeutsamen Werken und schließlich in der Förderung der persönlichen Kontakte zwischen den Gelehrten.

9.1.4. Aus den auf dem Kongreß gehaltenen Hauptvorträgen und aus den wichtigsten Sektionsvorträgen lassen sich gewisse Schlußfolgerungen über das Charakteristische der Mathematik am Ende des Jahrhunderts ziehen. Die Mengenlehre erfreute sich fast einmütiger Anerkennung. Damit fanden gleichzeitig die Verdienste Georg Cantors ihre Würdigung. Fast ebenso im Brennpunkt der mathematischen Forschung stand damals die Theorie der analytischen Funktionen. Ihre Entwicklung in den vorangegangenen Jahren war das Thema eines groß angelegten Vortrags

[1]) *Mathematical Papers read at the International Mathematical Concress held in connection with the worlds Columbian Exposition Chicago 1893* — Papers published by the American Mathematical Society, vol. I, New York 1896, Edited by the Commitee of the Congress, E. Hastings Moore, Oscar Bolza, Heinrich Maschke, Harry J. White.
In den USA begann die New Yorker Mathematische Gesellschaft ihre Tätigkeit im Jahre 1888. Zum Teil wurde sie im Hinblick auf den Chicagoer Kongreß reorganisiert und 1894 in die „American Mathematical Society" umgebildet.

von A. Hurwitz (1859–1919, Schweiz). Hurwitz hat insbesondere die Bedeutung der Methoden und Begriffe der Mengelehre für die Funktionentheorie überzeugend dargelegt. Damals waren diese mengentheoretischen Dinge noch das letzte Wort der Wissenschaft, und Hurwitz tat offenbar recht daran, wenn er bei dieser Gelegenheit seinen Hörern die notwendigen Tatsachen über die transfiniten Zahlen von G. Cantor zur Kenntnis brachte. Er beschloß seinen Vortrag mit einem Hinweis auf Fragen, die mit der Betrachtung von „Funktionen von Funktionen" zusammenhängen — man hatte bei diesen Untersuchungen Operationen funktionalen Charakters im Auge. V. Volterra (1860–1940, Italien) wies in diesem Zusammenhang auf gewisse italienische und französische Autoren hin, in deren Arbeiten ähnliche Ideen geäußert wurden (Volterra hätte auch auf seine eigenen Untersuchungen hinweisen können); so begannen sich Teile der Funktionalanalysis zu entwickeln. Die Erhebung der mathematischen Logik in den Rang einer mathematischen Disziplin war ebenfalls erfolgt. Über ihren derzeitigen Stand trug in einer Sektionssitzung E. Schröder (1841–1902, Deutschland) vor. G. Peano machte die Kongreßteilnehmer in einem Hauptvortrag mit dem Inhalt des von ihm herausgegebenen „Formulario mathematico" (1895–1908, fünf Bände) bekannt. In diesem Werk sollte die gesamte Mathematik jener Zeit mit Hilfe der von Peano ausgearbeiteten Symbolik der mathematischen Logik dargestellt werden. Großen Raum nahmen auf dem I. Internationalen Mathematikerkongreß Fragen ein, die den mathematischen Unterricht, die Wechselbeziehungen von theoretischen und angewandten Richtungen und die Anwendung der Mathematik in der Technik betrafen. Zum Beispiel hielt A. Stodola, der bedeutendste Turbinenfachmann jener Zeit, einen interessanten Vortrag über die Beziehungen von Mathematik und Technik. H. Poincaré, dem man unter den damaligen Mathematikern zweifellos den ersten Rang einräumen muß, hatte einen Vortrag über die Beziehungen zwischen der reinen Analysis und der mathematischen Physik eingesandt. Dort finden wir einen Ausspruch, der zeigt, daß Poincaré ungeachtet allen „Kokettierens" mit verschiedenen idealistischen Strömungen in seiner schöpferischen Tätigkeit Materialist geblieben war: „Es hieße, die Geschichte der Wissenschaft vollständig zu vergessen, wollte man den steten und sehr ersprießlichen Einfluß leugnen, den das Streben nach Erkenntnis der Natur auf die Mathematik ausgeübt hat ... Ein reiner Mathematiker, der die Existenz der Außenwelt vergäße, würde einem Maler ähnlich werden, welcher es zwar versteht, Farben und Formen harmonisch zu kombinieren, dessen schöpferische Kraft aber bald erlahmte, würde man ihn der Natur, des Modells berauben."[1])

Felix Klein berichtete in seinem Vortrag, daß er zur Zeit, als er in das wissenschaftliche Leben eintrat, in der Mathematik drei Disziplinen zu den „führenden" rechnete: die neue Geometrie, die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die Gruppentheorie. Dies würde er nach wie vor meinen, nur müsse er jetzt noch eine „allgemeine Größenlehre" (unter diesem nicht allgemeingültigen Terminus ist etwa das zu verstehen, was man in unserer Zeit „Grundlagen der Mathematik" nennt) und die Zahlentheorie hinzufügen. Wie Poincaré sprach auch

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 191. (D. S.)

Klein von der besonders großen Bedeutung, die die Verbindung mit den Anwendungen für die Entwicklung einer Wissenschaft hat. Grundlegende Ausführungen widmete Klein ferner der Reorganisation der höheren mathematischen Ausbildung.
Ein interessanter Aspekt der Mathematik am Ende des Jahrhunderts kam (in mehr scherzhafter Form) in der Rede von E. Picard auf dem Abschlußbankett zum Ausdruck: „Auch wir haben unsere Philosophen unter den Mathematikern und es ist am Ende unseres Jahrhunderts genauso wie in früheren Zeiten, daß die Mathematik recht intensiv mit der Philosophie „kokettiert“ (est en grande coquetterie avec la philosophie). Das ist durchaus zum Wohle der Sache — aber nur, wenn die Philosophie sich tolerant zeigt und den schöpferischen Geist nicht unterdrückt.“ Wir möchten zu diesem Ausspruch ergänzend feststellen, daß der erste internationale Philosophenkongreß im Jahre 1900 in Paris stattfand und daß dort die Fragen der Methodologie der Mathematik einen bedeutenden Platz einnahmen. Natürlich muß man berücksichtigen, daß zu jener Zeit auf den Kongressen und auf den Lehrstühlen der Universitäten die Philosophie hauptsächlich von Anhängern der verschiedenen idealistischen Strömungen repräsentiert wurde.

9.1.5. Ein weiteres für das Ende des neunzehnten Jahrhunderts charakteristisches Ereignis verdient erwähnt zu werden: der Beginn der Herausgabe der großen „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ (in deutscher Sprache). Einer der Initiatoren dieses Unternehmens war Felix Klein. „Aufgabe der Enzyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des neunzehnten Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete mit berücksichtigen und dadurch ein Gesamtbild der Stellung geben, die die Mathematik innerhalb der heutigen Kultur einnimmt.“[1]) Ungeachtet der ständig zunehmenden Abstraktheit und Allgemeinheit der mathematischen Begriffe und Methoden sehen wir, daß hier die Anwendungen besonders betont werden. Es wurden auch nur die ersten drei Bände der reinen Mathematik gewidmet, die folgenden drei der Mechanik, mathematischen Physik, Astronomie, Geodäsie und Geophysik. In den allgemeinen Grundsätzen für die Bearbeitung der Artikel wird als ein besonderer Punkt folgender Satz hervorgehoben: „Die einzelnen mathematischen Fächer werden nicht als von einander isoliert betrachtet; es ist im Gegenteil eine der Hauptaufgaben des Werkes, das vielfache In- und Übereinandergreifen der verschiedenen Gebiete allgemein zum Bewußtsein zu bringen.“[2]) Im einleitenden Bericht heißt es weiter: „Der bleibende Besitzstand einer jeden Wissenschaft ist ein internationales Gut, ge-

[1]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. Band, 1. Teil, Einleitender Bericht (Leipzig 1898—1904), S. IX.
[2]) Ebenda, S. XIII.

wonnen aus der gesamten Arbeit der Gelehrten aller Zeiten und aller Länder. Aber in verschiedenen Richtungen, mit verschiedener Betonung und Wertschätzung der einzelnen Gebiete, mit charakteristischem Unterschied in den Methoden und in der Darstellungsform haben die verschiedenen Nationen, die verschiedenen Epochen sich an dieser Arbeit beteiligt. Dies muß in der Encyklopädie in der Darlegung des Inhaltes nach seiner geschichtlichen Entwicklung wie in der Heranziehung der Mitarbeiter zum Ausdruck gebracht werden. In der Tat zählt das Unternehmen heute neben dem Grundstock seiner deutschen Autoren Gelehrte Amerikas, Belgiens, Englands, Frankreichs, Hollands, Italiens, aus Norwegen, Österreich, Rußland, Schweden zu seinen Mitarbeitern."[1]) Seit 1904 hat man eine französische Ausgabe der Enzyklopädie begonnen, wobei jeder Artikel vervollständigt oder teilweise umgearbeitet wurde.
Die Organisation internationaler Kongresse, die Herausgabe der mathematischen Enzyklopädie, die im Weltmaßstab betriebene Referierung der umfangreichen wissenschaftlichen Literatur — alles dies diente außer der Lösung der unmittelbaren Tagesaufgaben einem allgemeinen Ziel: der Erhaltung — wenn man so will — der organisatorischen Einheit einer Mathematik, die sich immer mehr auseinanderentwickelte und verzweigte. Andererseits waren das Interesse an philosophischen und methodologischen Problemen, die die Entwicklung der Mathematik aufgeworfen hatte, und die höchst widerspruchsvollen Standpunkte zu diesen Problemen ein Beweis dafür, daß die spätere „Grundlagenkrise" der Mathematik bereits nicht mehr fern war. Auch sie gehört zum Erbe des neunzehnten Jahrhunderts.
Es machte sich eine zuverlässige allgemeine Grundlage für die zahlreichen mathematischen Disziplinen erforderlich, und zwar nicht nur für ihre Eingliederung in ein einheitliches System, sondern auch für die Lösung vieler Einzelprobleme, z. B. in der Mengenlehre und Funktionentheorie. Neben vielen ganz konkret gestellten Fragen (als Beispiel kann die in dem berühmten Pariser Vortrag von Hilbert als 7. Problem genannte Frage dienen, ob die Zahlen der Form α^β mit algebraischem $\alpha \neq 0$ oder 1 und algebraisch irrationalem β algebraisch oder transzendent sind) hat das neunzehnte Jahrhundert dem zwanzigsten nicht wenige Probleme offengelassen, die eine erstrangige Bedeutung für die Entwicklung verschiedener mathematischer Disziplinen hatten. Solcherart sind viele der Hilbertschen Probleme, ein solches ist z. B. auch das Problem der Eigenwerte und Eigenfunktionen für die klassischen Randwertaufgaben der mathematischen Physik (es durchzieht das ganze neunzehnte Jahrhundert) oder auch das Problem der „kleinen Nenner" in der Himmelsmechanik, welches schon im achtzehnten Jahrhundert seinen Ursprung hat. Gerade diese „Übergangsthematik" bestimmte im bedeutenden Maße die Richtung der Forschungen in jenen 15 bis 20 Jahren, die man als eine erste Periode in der Geschichte der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts auffassen kann.

9.1.6. Eines der wichtigsten Ereignisse dieser Periode bestand darin, daß die Theorie der Funktionen einer reellen Variablen (Theorie der reellen Funktionen) eine hervorragende Stellung einzunehmen begann. In Gestalt einer selbständigen Disziplin,

[1]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. Band, 1. Teil, Einleitender Bericht (Leipzig 1898—1904), S. XIV. (*Anm. d. Übers.*)

die sich mit der Analyse solcher Grundbegriffe wie funktionale Abhängigkeit, Integral, Ableitung usw. beschäftigte, bildete sich die Theorie der reellen Funktionen in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts heraus, und zwar in Verbindung mit verfeinerten Fragestellungen, die sich aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ergaben. (Auf Anregungen, die sich aus der Untersuchung trigonometrischer Reihen ergaben, gehen auch die Arbeiten Georg Cantors zur Mengenlehre zurück). Die Herausbildung der Theorie der reellen Funktionen wurde durch die Arbeiten von Mathematikern verschiedener Länder gefördert, beispielsweise von P. du Bois-Reymond (1831 bis 1889, Deutschland), C. Jordan (1838—1922, Frankreich; hauptsächlich durch den „Cours d'analyse") und U. Dini (1845—1918, Italien).

Für diese Zeit, da sich die Theorie der reellen Funktionen herauszubilden begann, sind die Arbeiten von Guiseppe Peano (1858—1932) charakteristisch. Er war — wenn nicht der größte, so doch offenbar der originellste italienische Mathematiker seiner Zeit. Er hinterließ Bleibendes in der Analysis, der Geometrie, der Mechanik und mathematischen Logik. Ferner beschäftigte er sich mit der Geschichte der Mathematik, mit mathematisch-methodischen Fragen, mit vergleichender Philologie und mit der Schaffung einer internationalen Sprache. Für Peanos Schaffen typisch sind jene originellen Konstruktionen, mit denen er gewisse unpräzise bzw. falsche Behauptungen widerlegte. Solche falsche Behauptungen waren durch unsachgemäße Verallgemeinerungen oder durch ungenügend kritisches intuitives Herangehen entstanden. Wir erinnern z. B. and die „Peanosche Kurve", die eine zweidimensionale Figur (ein Quadrat) ausfüllt, und an die Bemerkung, daß der Grenzwert des Bruches

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

wenn sowohl x_1 als auch x_2 gleichzeitig gegen ein und denselben Wert x streben, sich von $f'(x)$ unterscheiden kann, obwohl die Ableitung $f'(x)$ überall existiert und endlich ist. Die Kraft und Präzision der kritischen Ideen Peanos fanden auch ihren Ausdruck in den Arbeiten über die Grundlagen der Mathematik und denen zur mathematischen Logik. Von 1895 bis 1908 gab Peano fünf Bände seines „Formulario matematico" heraus, eines Werkes, in dem die gesamte Mathematik mit Hilfe der von Peano geschaffenen Symbolik für die in der Mathematik verwendeten logischen Begriffe zur Darstellung kommen sollte. Die Symbolik von Peano hat sich nicht völlig eingebürgert, aber die historische Bedeutung seiner Arbeit ist zweifellos groß. Sie wurde jedoch von den Zeitgenossen nicht entsprechend gewürdigt, vielleicht infolge der kritischen Verhältnisse von Poincaré zu Peano und zur mathematischen Logik überhaupt.

Ende des neunzehnten Jahrhunderts wurde die Theorie der reellen Funktionen durch die Begriffe und Methoden der Mengenlehre bereichert. Darauf gründen sich eine Reihe wesentlicher Erfolge: die Schaffung der Maßtheorie für Punktmengen, die Einführung des Begriffs der meßbaren Funktion, eine wesentliche Verallgemeinerung des Integralbegriffs, eine Klassifikation der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Das Lebesguesche Maß einer Menge, die meßbaren Mengen von

Borel, die Baireschen Funktionenklassen, das Lebesgue-Integral — all dies ist heute Bestandteil der Universitätsvorlesungen in Mathematik. Entstanden aber ist das alles in den ersten Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts. Eine weitere Verallgemeinerung des Integrationsprozesses wurde 1912 von A. Denjoy (* 1884) angegeben. Die Wechselbeziehung zwischen Integration und Differentiation wird dabei besser aufrechterhalten: Die „Totalisation" nach Denjoy gestattet es für eine sehr umfangreiche Funktionenklasse, aus der Ableitung das ursprüngliche Funktionsbild wiederherzustellen.

Im vorhergehenden Absatz werden durchweg Mathematiker der französischen Schule erwähnt. Unter ihnen spielte E. Borel (1871—1956) die Rolle eines Initiators und Organisators. Er war der Begründer einer Serie von Monographien über Funktionentheorie und ihre Anwendungen, die über mehrere Jahrzehnte hinweg erschien und einen spürbaren Einfluß auf die Entwicklung der jungen Mathematiker in Frankreich und in anderen Ländern hatte. Auf Borel gehen auch bedeutende Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück (auch auf diesem Gebiet war er Organisator eines vielbändigen Werkes, welches sowohl die mathematischen Grundlagen der Theorie als auch alle ihre wesentlichen Anwendungen in der mathematischen und physikalischen Statistik, der Ökonomie und Technik enthielt). Borel hat auch in hervorragender Weise die Mathematik popularisiert.

Die glänzend begonnene schöpferische Tätigkeit von R.-L. Baire (1874—1932) währte leider nicht lange. Beispielgebend bezüglich der Klarheit der Darstellung und der Vollkommenheit der Resultate bleiben seine „Vorlesungen über unstetige Funktionen"[1]).

H. Lebesgue (1875—1941, Frankreich) — der Sohn eines Druckereiarbeiters — war einer der wenigen Gelehrten seiner Zeit von proletarischer Herkunft. Durch den frühen Tod seines Vaters hatte er eine sehr schwere Schulzeit, aber dank seiner Ausdauer und seiner großen Begabung gelang es dem jungen Lebesgue, die höhere Schule zu beenden und im Jahre 1894 in die Pariser École Normale einzutreten. Mit dem Abschluß der École Normale war die bescheidene Existenz eines Lehrers an einer höheren Schule gesichert. 1897, nachdem er das Diplom erhalten hatte, begann Lebesgue seine Tätigkeit als Mathematiklehrer an einem der Lyzeen von Nancy. Die große Lehrbelastung hinderte ihn nicht daran, in drei Jahren eine ausgezeichnete Dissertation fertigzustellen, die unter dem Titel „Integral — Länge — Fläche" veröffentlicht wurde[2]). In ihr ist die Maßtheorie der Punktmengen enthalten und seine Integrationstheorie, in der sein Name fortlebt. Seine Ideen schienen einigen führenden Vertretern der französischen Mathematik jener Zeit zu kühn zu sein, jedenfalls wurde die Arbeit nicht sofort zur Verteidigung zugelassen, sondern erst 1902.[3]) Danach wurde Lebesgue Hochschullehrer, aber bis 1910 an Universitäten der Provinz. Diese Jahre waren sehr fruchtbar: Es erschien sein großes Werk über

[1]) *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris 1905). (*Anm. d. Übers.*)

[2]) *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Mat. (3) 7 (1902), 231—359. (*Anm. d. Übers.*)

[3]) Auf der Grundlage der Resultate der Dissertation wurde das Buch Lebesgues „Vorlesungen über Integrationstheorie" (Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives; Paris 1904) geschrieben. Dieses Buch hat einen großen Einfluß ausgeübt.

analytisch darstellbare Funktionen mit u. a. dem Beweis für die Existenz von Funktionen einer beliebigen Baireschen Klasse, Arbeiten zur Dimensionstheorie und über das Dirichletsche Prinzip. Mit dem Jahre 1910 begann die Pariser Zeit Lebesgues. Seine Verdienste wurden jetzt anerkannt, er hatte einen Lehrstuhl am Collège de France inne (seit 1921) und wurde im folgenden Jahr in die Akademie der Wissenschaften gewählt. In den letzten zwanzig Jahren seines Lebens beschäftigte er sich fast ausschließlich mit pädagogischen Fragen und mit Wissenschaftsgeschichte.

Für die französische Mathematik war das um die Jahrhundertwende zu beobachtende Aufrücken von jungen Vertretern der neuen funktionentheoretischen Schule in die erste Reihe noch in einer anderen Beziehung bedeutsam: Jenes, das ganze 19. Jahrhundert währende Vorherrschen der Absolventen der École Polytechnique, die eine Ingenieurausbildung erhielten, ging jetzt zu Ende. Tonangebend wurden die Abgänger der École Normale in Paris, einer Lehranstalt pädagogischer Prägung, in der neben Mathematik und Physik in hohem Maße auch andere Wissenschaften vertreten waren.

Außerhalb Frankreichs begannen sich mit den neuen Problemen der Funktionentheorie zu beschäftigen: N. N. Lusin (seine bemerkenswerte Dissertation „Integral und trigonometrische Reihe" erschien 1915), W. Sierpiński (1882--1969, Polen), W. H. Young (1863—1942, England) sowie eine Reihe deutscher und italienischer Mathematiker. Die weitere Entwicklung dieser Untersuchungen bezieht sich schon auf die folgende Periode (vgl. 9.2.4). Zu der auf P. L. Tschebyscheff zurückgehenden konstruktiven Funktionentheorie, die Probleme der Approximation verschiedener Klassen von Funktionen mit Hilfe von Polynomen oder ähnlichen Ausdrücken untersucht, hat in der betrachteten Periode S. N. Bernstein (1880—1968) wichtige Beiträge geleistet.

9.1.7. Neben der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen entwickelte sich eine der „führenden" mathematischen Disziplinen des vergangenen Jahrhunderts, die Theorie der analytischen Funktionen, ebenfalls rasch weiter. In der Theorie der ganzen und der meromorphen Funktionen wurden nach den fundamentalen Arbeiten von H. Poincaré und E. Picard (1858—1941) aus den achtziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts wichtige Resultate von J. Hadamard (1865—1963, Frankreich), E. Borel und anderen Mathematikern erzielt. Hadamard wandte seine Methoden auf die analytische Zahlentheorie an und zeigte, daß die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen unterhalb x asymptotisch gleich $\frac{x}{\log x}$ ist. Dieses Resultat erzielte gleichzeitig C. J. de la Vallée-Poussin (1866 — 1962, Belgien). Auf Borel geht die Unterscheidung der Begriffe monogene Funktion[1]) und analytische Funktion[2]) zurück. Seine Analyse des Begriffs „Analytizität" regte später die Entwicklung der Theorie der quasianalytischen Funktionen an. D. Pompeiu (1873—1954, Rumänien) ver-

[1]) Eine solche Funktion besitzt in jedem Punkt des betrachteten Gebiets eine Ableitung.

[2]) Eine solche Funktion kann in jedem Punkt des betrachteten Gebiets in eine Potenzreihe entwickelt werden.

allgemeinerte den Begriff der Monogenität, indem er die sogenannte areolare Ableitung (Flächenableitung) einer Funktion einer komplexen Variablen einführte. Das wurde später zur Grundlage der Entwicklung einer Theorie der polygenen Funktionen durch rumänische Mathematiker. H. Poincaré löste das Uniformisierungsproblem, indem er zeigte, daß man für eine beliebige nicht eindeutige analytische Funktion $w = f(z)$ das Argument z und die Funktion w als eindeutige analytische Funktionen einer gewissen Hilfsveränderlichen darstellen kann. Unabhängig von Poincaré wurde das Uniformisierungsproblem von P. Koebe (1882 bis 1945, Deutschland) gelöst. Bedeutende Erfolge erzielte man in der Theorie der konformen Abbildung. Es wurde auch viel über verschiedene Klassen spezieller Funktionen im komplexen Bereich gearbeitet. In enger Beziehung mit der Entwicklung der komplexen Funktionentheorie stehen bedeutende Resultate, die P. Painlevé (1863—1933, Frankreich) und eine Reihe anderer Mathematiker in der analytischen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erzielten.

9.1.8. Eines der neuen Gebiete der Mathematik war die Topologie. Nach der berühmten Serie von Arbeiten Poincarés: „Analysis situs“ (d. h. „Analysis der Lage“) und den fünf Nachträgen zu diesem ersten Werk (1895—1904) wurde die kombinatorische Topologie zu einer selbständigen Disziplin. Das war jedoch erst der Beginn. H. Poincaré schrieb, als er seinen fünften Nachtrag begann: „Ich hatte schon oft Gelegenheit, mich mit der Analysis situs zu beschäftigen. Ich komme jetzt nochmals auf diese Sache zurück in der Überzeugung, daß man eine erschöpfende Theorie nur durch anhaltende Bemühungen erreichen wird und daß diese Fragen hinreichend wichtig sind und solche Anstrengungen verdienen.“ Und in der Tat haben nach Poincaré und unter Verwendung der von ihm ausgearbeiteten Methode der Triangulation und der simplizialen Zerlegung zahlreiche Forscher die topologischen Invarianten von zwei-, drei- und mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten systematisch studiert. Die kombinatorische Topologie könnte man in dieser Zeit auch als algebraische Topologie bezeichnen, weil ihre Probleme in Verbindung mit der Theorie der algebraischen Funktionen und Integrale formuliert waren. Das Aufdecken ihrer tieferen Beziehungen zur Algebra aber stand noch bevor. Dazu mußte die Algebra selbst erst in eine neue Phase treten, die man auf die Jahre um 1910 herum datieren kann.

9.1.9. Gerade in dieser Zeit begann sich die Algebra aus der „Wissenschaft von der Lösung algebraischer Gleichungen“ in jene „abstrakte“ oder „moderne“ Algebra, wir wir heute kennen, zu verwandeln. Das Problem der Lösung algebraischer Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten fand in natürlicher Weise seinen Platz in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen: Dort wurde es ein Spezialfall des Problems der Bestimmung der Nullstellen ganzer Funktionen (ihrer Verteilung in der komplexen Ebene und ihrer Berechnung). Man kann sagen, daß sich die gesamte Algebra nach dem Vorbild der Gruppentheorie umzugestalten begann. Sie wurde zu einer Lehre von den algebraischen Verknüpfungen, die für irgendwelche Elemente definiert sind. Die Algebra studierte jetzt in ganz allgemeiner Weise Mengen von Elementen mit zwischen diesen Elementen definierten Verknüpfungen, mit anderen Worten, sie untersuchte algebraische Strukturen. Vollkommen klar umrissen finden wir die neue Formulierung der algebraischen Probleme bei E. Steinitz (1871—1928, Deutschland). Im Jahre 1910 schrieb er in der Einführung zu seiner fundamentalen Arbeit „Algebraische Theorie der Körper“[1]): „In dem vorliegenden Aufsatz ist der Begriff ‚Körper‘ in derselben abstrakten und allgemeinen Weise gefaßt wie in H. Webers ‚Untersuchungen über die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie‘[2]), nämlich als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und dem kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkte und eindeutige Umkehrungen zulassen.[3]) Während aber bei Weber das Ziel eine allgemeine, von der Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der Galoisschen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses. Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen, kann als Programm dieser Arbeit gelten.“ Daß eine solche allgemeine Körpertheorie erst dann entstehen konnte, als genügend entsprechendes konkretes Material in spezielleren Untersuchungen angesammelt worden war, zeigt eine Fußnote von Steinitz zu der zitierten Stelle: „Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch Hensels[4]) Theorie der algebraischen Zahlen angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist.“ Aus zahlentheoretischen und arithmetischen Untersuchungen, die ja eine der Hauptrichtungen in der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts bildeten, wuchs so die neue Algebra (abstrakte Algebra) in natürlicher Weise heraus. Diese Untersuchungen wurzeln in jenem ursprünglich zentralen Problem der Lösung algebraischer Gleichungen, mit dessen jahrhundertealter Geschichte der Leser bereits vertraut ist. Man darf sich aber den Beginn der neuen Algebra nicht so vorstellen, daß keine Wechselbeziehnngen mit anderen damals neuen oder in der Entstehung begriffenen Gebieten der Mathematik bestanden. In der Arbeit von Steinitz finden wir eine diesbezügliche Bemerkung, die er im Vorwort (S. 170) zur Erläuterung eines seiner Theoreme macht: „Dieser Beweis[5]) kann z. B. schon für den Körper der rationalen Zahlen nicht ohne Benutzung des Auswahlprinzips geführt werden. Dieses Prinzip erscheint auch unvermeidlich, wenn man den Beweis der Existenz einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung für jeden beliebigen Körper führen will. Der auf dem Auswahlprin-

---

[1]) E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, J. reine angew. Math. (Crelle) *137* (1910), 167—309. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: *Abriß der Galoisschen Theorie* versehen von R. Baer und H. Hasse (Berlin 1930; Nachdruck New York 1950).

[2]) H. Weber, *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie*, Math. Ann. *43* (1893), 521—549.

[3]) Mit Ausnahme der Division durch Null.

[4]) K. Hensel (1861—1941), *Theorie der algebraischen Zahlen* (Leipzig 1908).

[5]) Es handelt sich um den Beweis des Satzes, daß die maximale algebraisch abgeschlossene Erweiterung „im wesentlichen“ eindeutig ist.

zip beruhende Wohlordnungssatz von Zermelo bildet ein wesentliches Hilfsmittel für diesen Beweis".

9.1.10. Der erwähnte Satz von E. Zermelo (1871—1953) führte Anfang unseres Jahrhunderts unter den Mathematikern zu einem heftigen Streit. Auch vor Zermelo hatte man schon gewisse Paradoxien in der Mengenlehre entdeckt, die aber aus der sozusagen unbeschränkten nichtaxiomatischen Verwendung des Mengenbegriffs entsprangen. Im Fall des Zermeloschen Satzes ging es aber um eine mathematische Überlegung, um einen Beweis, der von den einen Mathematikern akzeptiert, von den anderen abgelehnt wurde. Der erste Zermelosche Beweis für den Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, wurde 1904 publiziert; er stützte sich auf das „Auswahlaxiom". Nach diesem Axiom kann man aus jeder Teilmenge einer gegebenen Menge ein gewisses ihrer Elemente auswählen („ausgezeichnetes Element")[1]).
Weil die Rede von beliebigen Teilmengen einer völlig willkürlichen Menge ist, kann es offenbar kein konstruktives Verfahren für die Angabe solcher ausgezeichneter Elemente geben. Deshalb haben viele Mathematiker, unter ihnen Poincaré, das Axiom von Zermelo nebst den sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen abgelehnt; andere, unter ihnen Hilbert, haben es akzeptiert. In Verbindung mit dieser Diskussion[2]) stellte sich heraus, daß es mehrere Zugänge zum Problem der Begründung der Mathematik gibt, ferner, daß es nötig ist, die in der Mathematik verwendeten logischen Mittel genau zu präzisieren. Das gab einen mächtigen Impuls für Untersuchungen zur Axiomatik der Mengenlehre (von Zermelo selbst stammt das erste Axiomensystem) und zur mathematischen Logik. Insbesondere legte der holländische Mathematiker L. E. J. Brouwer (1881—1966) — Autor bedeutender Arbeiten zur Topologie — die sogenannte intuitionistische Logik vor, in der das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Mengen nicht akzeptiert wird. Der Intuitionismus bei Brouwer steht in engem Zusammenhang mit idealistischen-philosophischen Beiträgen des Autors, die intuitionistische Logik aber gestattet, wie später A. N. Kolmogoroff zeigte, eine völlig konkrete nützliche Interpretation. Borel hat sich in der obengenannten Diskussion dafür ausgesprochen, daß in der Mathematik nur „konstruktive Definitionen" verwendet werden. Das sind Definitionen, die mit einer endlichen oder abzählbaren Menge von Operationen auskommen. Hilbert skizzierte ein anderes Programm der Begründung der Mathematik, zu dessen Verwirklichung er aber erst viel später kam; seine Richtung wurde als Formalismus bezeichnet. Eine Axiomatik der Mengenlehre, die darauf gerichtet war, die Paradoxien der „naiven Mengenlehre" zu beheben, wurde von Bertrand Russell (1872—1970) und A. N. Whitehead (1861—1947) in ihrem dreibändigen Werk „Principia Mathematica" (1910—1913) vorgeschlagen. Die Präzisierung und die Abgrenzung dieser verschiedenen Richtungen voneinander erfolgte in den dar-

---

[1]) Zweiter Beweis 1908. (D. S.)

[2]) Eines der interessantesten Dokumente dazu bilden die „Fünf Briefe zur Mengenlehre" von Hadamard, Baire, Borel und Lebesgue, Bull. Soc. math. France *33* (1905), 261—273.

auffolgenden Jahrzehnten.[1]) Im Rahmen der eigentlichen Mengenlehre kann man noch die Arbeiten zur Arithmetik der von Cantor zur Charakterisierung der unendlichen Mengen eingeführten Kardinal- und Ordinalzahlen und die Schaffung der mengentheoretischen (oder allgemeinen) Topologie hervorheben. Den Schlußpunkt dieser Epoche setzte 1914 das Erscheinen von F. Hausdorffs (1868—1942, Deutschland) Monographie „Grundzüge der Mengenlehre".

9.1.11. In der klassischen Analysis nahmen um die Jahrhundertwende diejenigen Probleme einen zentralen Platz ein, die mit der Lösung von Randwertaufgaben der mathematischen Physik in Zusammenhang stehen. In den neunziger Jahren hat Poincaré die Resultate und Methoden seiner Vorgänger wesentlich verallgemeinert, allerdings war bei ihm nicht alles hinreichend streng begründet. Weitere Erfolge in dieser Richtung — im wesentlichen unter Beibehaltung der früheren Methoden — erzielten A. M. Ljapunow, S. Zaremba (1863—1942, Polen) und W. A. Steklow.

Gebürtig aus Nishni-Nowgorod, Neffe des bedeutenden Kritikers N. A. Dobroljubow, war W. A. Steklow Schüler von A. M. Ljapunow an der Charkower Universität und später sein Kollege an der Akademie der Wissenschaften. Als hervorragender Analytiker gelang es ihm, neue Fälle der Integrierbarkeit der Bewegungsgleichungen solcher fundamentaler Aufgaben der Mechanik zu finden, wie sie die Bewegung eines festen Körpers um einen Punkt darstellt. Die bedeutendsten Ergebnisse aber erzielte er in der Theorie der Randwertaufgaben der mathematischen Physik. Seine höchst allgemeinen und bemerkenswerten Resultate beziehen sich auf die grundlegenden Probleme der Existenz von Fundamentallösungen für Randwertaufgaben und der Begründung der Reihenentwicklung nach solchen Fundamentallösungen. Erst die Theorie der Integralgleichungen gestattete es, die Methodik zu vereinfachen und in diesen Fragen weiter fortzuschreiten, in den Händen von Steklow jedoch waren die klassischen Methoden des neunzehnten Jahrhunderts noch erstaunlich fruchtbar. Mit dem Namen Steklows ist auch für immer die Umgestaltung der früheren zaristischen Akademie in die Akademie der UdSSR verbunden; in seinen letzten Lebensjahren widmete er diesem Werk als Vizepräsident der Akademie alle seine Kräfte.

Mit der neuen Methode — der Methode der Integralgleichungen — gelang es, eine abgerundete Theorie der Randwertaufgaben der mathematischen Physik aufzubauen. Nachdem 1903 die bemerkenswerte Arbeit des schwedischen Mathematikers Erik Ivar Fredholm (1866—1927) erschienen war, erfuhr die Integralgleichungstheorie eine rasche Verbreitung. In dieser Arbeit gab Fredholm in allgemeiner Form die Lösung der nach ihm benannten linearen Integralgleichung an. Fredholm erhielt seine Lösung, indem er sie in Analogie mit der Lösung eines Systems n linearer algebraischer Gleichungen aufbaute, dann den Grenzübergang $n \to \infty$ ausführte und schließlich nachwies, daß die in der Grenze erhaltenen Formeln tatsächlich die Lösung der Ausgangsintegralgleichung liefern. Diesen Grenz-

---

[1]) Vgl. dazu M. Black, *The nature of mathematics* (New York 1934, Neudruck 1950). (D. S.)

übergang schätzten die Zeitgenossen Fredholms als einen der effektvollsten Grenzübergänge der Analysis ein. Hilbert indessen blieb nicht bei der Bewunderung der glanzvollen Resultate Fredholms stehen, er erkannte ihr tieferes Wesen: Er interpretierte die Fredholmschen Ergebnisse als Sätze einer Analysis, die eine unendlich große Zahl von Variablen zuläßt, d. h., er sah die Möglichkeit, gleichsam direkt mit $n = \infty$ zu operieren. Somit verlief die weitere Entwicklung in zwei Richtungen. Die erste, mehr traditionelle Richtung ist verbunden mit den Namen von Fredholm, Volterra (der bis zum Erscheinen der Fredholmschen Arbeiten Gleichungen mit veränderlichen Integrationsgrenzen, sogenannte Volterrasche Gleichungen untersuchte), Picard (der viel in der schwierigen Theorie der homogenen Integralgleichungen mit Singularitäten leistete) und anderen. Die zweite Richtung, die von Hilbert und seinen Schülern und Nachfolgern repräsentiert wurde, mündete später in natürlicher Weise in den breiten Strom der Funktionalanalysis. In einer berühmten Serie von Abhandlungen (1904–1910) baute Hilbert, in Analogie mit der linearen Algebra und der Theorie der quadratischen Formen für endliche Variablenzahl, eine „Algebra" auf, deren Elemente Funktionen oder unendliche Zahlenfolgen sind. Die Elemente dieser „funktionalen Algebra" kann man als Punkte in einem Raum von unendlicher Dimension interpretieren. Es ist möglicherweise Hilberts größter Verdienst, daß es ihm gelungen ist, in dem von ihm studierten Raum (Hilbertraum) in geeigneter Weise topologische Beziehungen einzuführen. Dadurch war es insbesondere möglich, sich in dem neuen, von Hilbert entdeckten Gebiet der Analysis der Sprache und der Methoden der Geometrie zu bedienen.

9.1.12. In den bisherigen Ausführungen begegneten wir nicht nur einmal dem Namen Hilbert. Nach dem Tode Poincarés gab es kaum jemand, der ihm den ersten Platz unter den Mathematikern seiner Zeit hätte streitig machen können. David Hilbert wurde 1862 in Königsberg (dem heutigen Kaliningrad) geboren. Er studierte an der Universität Königsberg und war daselbst nach seiner Promotion im Jahre 1885 Dozent (von 1886–1892) und Professor (bis 1895). Seit 1896 bis zu seinem Tode war Hilbert Professor an der Universität Göttingen, deren Ruhm er wachhielt und weiter mehrte. In seinen letzten Lebensjahren (er starb 1943) versuchte Hilbert vergeblich, die Göttinger Universität vor den faschistischen Obskuranten zu bewahren.

Das erste bedeutende Resultat Hilberts (1888) bezieht sich auf die damals populäre Invariantentheorie. Für die zahlreichen Arbeiten jener Zeit zur Invariantentheorie sind umfangreiche algebraische Berechnungen charakteristisch. Eine solche — wenn auch gut ausgearbeitete — Technik verlangte einen recht großen Aufwand, um verhältnismäßig spezielle Fälle gewisser allgemeiner Sätze, die das Wesen der Theorie ausmachten, zu beweisen. Hilbert bewies diese allgemeinen Sätze fast ohne jede Rechnung. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß eine der Autoritäten jener Zeit, P. Gordan (1837–1912), als er mit Hilberts Arbeit bekannt wurde, ausrief: „Das ist keine Mathematik, das ist Theologie!"

In den folgenden Jahren beschäftigte sich Hilbert sowohl mit Algebra als auch mit Zahlentheorie. In dem der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1896 vorgelegten Übersichtsartikel über die Theorie der algebraischen Zahlen (S. 173) gab Hilbert eine abgerundete Darstellung dieser auf Gauß zurückgehenden Theorie.[1]) Hauptsächlich in Deutschland war diese Theorie ausgearbeitet worden. Durch die Bemühungen Dirichlets, Kummers, Kroneckers, Dedekinds, später Minkowskis, wurde eine abgeschlossene Teilbarkeitslehre in Zahlkörpern geschaffen, die sich auf die Begriffe Ideal und Primideal gründete. Indessen blieb die Frage offen, was mit einem Primideal eines Körpers geschieht, wenn man diesen in einen Oberkörper einbettet. In Verbindung mit diesem schwierigen Problem führte Hilbert eine Reihe wichtiger neuer Begriffe ein, formulierte grundlegende diesbezügliche Sätze und bewies sie zum Teil. Die vollständigen Beweise dieser Sätze und die weitere Entwicklung waren das Werk einiger seiner hervorragendsten Nachfolger.

Ab Ende der neunziger Jahre treten in der Forschungsthematik Hilberts Analysis und Geometrie an die erste Stelle. In der Analysis stammen außer den Arbeiten zur Theorie der Integralgleichungen richtungsweisende Untersuchungen in der Variationsrechnung von ihm, etwa der Beweis des sogenannten „Dirichletschen Prinzips" und einige andere erstrangige Resultate. In den folgenden zwanzig Jahren seines Lebens beschäftigte sich Hilbert vor allem mit mathematischer Logik (vgl. 9.2.14).

Hilbert schuf nicht nur wichtige allgemeine Theorien, sondern löste auch eine Reihe schwieriger spezieller Probleme. In der Zahlentheorie z. B. stammt von ihm der erste allgemeine Beweis des bereits im achtzehnten Jahrhundert formulierten Waringschen Satzes: Jede ganze Zahl kann als Summe von nicht mehr als n (>0) k-ter Potenzen $(k > 0)$ ganzer Zahlen dargestellt werden, wobei n nur von k abhängt. So ist z. B. der von Lagrange bewiesene Satz, daß jede ganze Zahl als Summe von nicht mehr als vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar ist, ein Spezialfall des Waringschen Satzes, und zwar ist hier $k = 2$ und $n(k) = 4$. In der Differentialgeometrie bewies Hilbert den schwierigen und auf den ersten Blick unerwarteten Satz: Im dreidimensionalen Raum hat jede Fläche konstanter negativer Krümmung Singularitäten. Hilbert hat sich in der zweiten Hälfte seines Lebens auch viel mit Problemen der theoretischen Physik beschäftigt. So wies er auf physikalische Anwendungen seiner Theorie der Integralgleichungen hin und kam in einer seiner Arbeiten den grundlegenden Sätzen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein sehr nahe.

Überhaupt wirkte sich seine Tätigkeit sogar in Theorien aus, welche er selbst nie bearbeitet hat, wie beispielsweise in der allgemeinen Topologie. Möglicherweise hat Hilbert die mathematische Welt am tiefsten durch die Art seines Denkens beeinflußt, und zwar mehr noch als durch seine genialen Entdeckungen; er hat die Mathematiker axiomatisch denken gelehrt, d. h. danach zu streben, jede Theorie auf ihr strengstes logisches Schema zu reduzieren, befreit von dem entsprechenden kalkülmäßig-technischen Beiwerk. . . In seinem leidenschaftlichen Streben nach Erkenntnis, seiner immer anspruchsvolleren intellektuellen Rechtschaffenheit, in seiner unermüdlichen Arbeit für eine immer einheitlichere, reinere, immer mehr von Überflüssigem befreite Wissenschaft verkörperte Hilbert in der Tat das Ideal

[1]) Vgl. H. Hasse, *Zu Hilberts algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten*. In: *D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, Berlin 1932, S. 528–535. (D. S.)

eines Mathematikers für die Generation „zwischen den beiden Weltkriegen" (pour la génération de l'„entre-deux-guerres").[1])

9.1.13. Wenn wir uns der Geometrie zuwenden, so begegnet uns erneut vor allem der Name Hilbert. Im Jahre 1899 erschienen seine „Grundlagen der Geometrie" (sie erfuhren eine Reihe aufeinanderfolgender Auflagen mit wesentlichen Ergänzungen und Änderungen und wurden ins Russische, Französische, Englische und andere Sprachen übersetzt). Das Buch von Hilbert setzt die mühsame Arbeit des neunzehnten Jahrhunderts an der Präzisierung der Axiomatik der Geometrie fort, vollendet sie und leitet ein neues Kapitel in der Geschichte der axiomatischen Methode ein. Hilbert hat natürlich nicht daran gezweifelt, daß die Axiome der Geometrie aus der Erfahrung genommen sind. Sind sie jedoch einmal als Grundlage der Theorie formuliert, so braucht man prinzipiell weder Intuition noch irgendwelche anschaulichen Vorstellungen heranzuziehen und Folgerungen aus den Axiomen abzuleiten, d. h. also, Sätze zu beweisen. Es ist nur zu fordern, daß die Beweise wirklich streng sind. Somit hat in dieser deduktiven Theorie die Natur der untersuchten Objekte selbst keinerlei Bedeutung — die Axiome definieren lediglich Beziehungen zwischen den Objekten; deren Natur ebenso wie ihre Bezeichnung ist gleichgültig. Deshalb leitete Hilbert die Grundlagen der Geometrie mit dem Satz ein: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen, welche wir Punkte, Geraden und Ebenen nennen werden." In Diskussionen hat er jedoch oftmals scherzend bemerkt, daß man in der Geometrie anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen genausogut von Tischen, Stühlen und Bierseideln sprechen könnte.
In der ersten Auflage der „Grundlagen der Geometrie" wird ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie gegeben, welches dann im weiteren noch etwas präzisiert wird. Es werden eine Reihe von Untersuchungen begonnen über die gegenseitigen Beziehungen dieser Axiome, über die Rolle dieser oder jener Gruppe von Axiomen bei verschiedenen Fragestellungen. Ein bedeutender Teil der geometrischen Untersuchungen unseres Jahrhunderts ist den hier angeschnittenen Fragen gewidmet worden. In der Entwicklung der axiomatischen Methoden war das aber noch nicht das letzte Wort: Die Regeln, nach denen aus den Axiomen Sätze hergeleitet werden, wurden stillschweigend hinzugedacht, das war „übliche Logik". Die Formalisierung der Schlußregeln und ihre Darstellung in Form eines jede Mehrdeutigkeit vermeidenden Algorithmus wurden dann zu einem Forschungsgegenstand der Logik, die explizite Angabe dieser Schlußregeln wurden zu einem Bestandteil der axiometischen Methode. Hilbert war einer der Forscher, die die axiomatische Methode auf ein höheres Niveau hoben.

9.1.14. In der betrachteten Periode wurden auch einer so traditionellen Disziplin wie der Zahlentheorie neue Kapitel hinzugefügt (außer den schon in Zusammenhang mit Hilbert erwähnten Untersuchungen). Noch in den neunziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts legten H. Minkowski (1864—1909, Deutschland) und

[1]) Aus dem Artikel „David Hilbert" von Jean Dieudonné, erschienen in dem Sammelband *Les grands courants de la pensée mathématiques*, herausgegeben von F. Le Lionnais (Paris 1962), S. 297.

G. F. Voronoi (1868—1908, Rußland) die Grundlagen einer „Geometrie der Zahlen", die eng mit kristallographischen Untersuchungen (reguläre Zerlegung des Raumes) verbunden war. Hervorragende Resultate in der analytischen Zahlentheorie erzielten Hilberts nächster Schüler, Hermann Weyl (1885—1955), ferner E. Landau (1877—1938, Deutschland), G. H. Hardy (1877—1947, England) und J. Littlewood (*1885, England). Die Schaffensperiode des erstaunlich talentierten Srinivasa Ramanujan (1887—1920) war leider nur sehr kurz. Er war der erste große Gelehrte, den Indien der modernen Mathematik geschenkt hat.
Außer von der russischen (Petersburger) und der deutschen Schule konnte man auch schon vor einer englischen Schule der Zahlentheorie sprechen.

9.1.15. Auch in einem sehr kurzen Überblick über die Mathematik am Anfang des Jahrhunderts muß unbedingt etwas über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik gesagt werden. Das Zentrum der theoretischen Richtung auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung blieb Rußland: In diese Jahre fallen die bereits erwähnten klassischen Untersuchungen von A. M. Ljapunow und A. A. Markoff. Der Einfluß der neuen Methoden aus der Theorie der reellen Funktionen zeigte sich besonders in den Arbeiten der französischen Schule, die vor allem von E. Borel, Paul Lévy (1886—1971), M. Fréchet (1878—1956) u. a. repräsentiert wurde. Leistungsfähige Schulen auf dem Gebiet der mathematischen Statistik bildeten sich in England (Karl Pearson, 1857—1936; R. A. Fisher, 1890—1962; u. a.), in den skandinavischen Ländern und später in den USA. Die Probleme, vor die die Physik, Technik und Ökonomie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik stellten, wurden wesentlich vielfältiger. Den allgemeinen Tendenzen in der Mathematik folgend begann man, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu axiomatisieren (S. N. Bernstein, E. Borel).

9.1.16. Wie knapp der oben gegebene fragmentarische Überblick über die Mathematik am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts auch sein mag, so zeigt er doch, daß man dieser Periode eine erstaunliche Fülle neuer Ideen und einen großen Schatz neuer Ergebnisse verdankt. Gewiß kann man, die berühmte Erwiderung Newtons abwandelnd, mit vollem Recht sagen, daß das zwanzigste Jahrhundert auf den Schultern des neunzehnten stand. Europa eignete sich die Naturschätze fast des ganzen Erdballs an. Kriege waren nach 1815 selten, sie erfaßten nicht den ganzen Kontinent und kosteten weniger als die napoleonischen. Der Kapitalismus war noch im Aufschwung begriffen und schuf im Vergleich zum Feudalismus bei weitem größere Möglichkeiten für technischen und wissenschaftlichen Fortschritt. Die Akademien, die das Antlitz der Wissenschaft im achtzehnten Jahrhundert geprägt hatten, traten in den Hintergrund — die Mathematik stützte sich jetzt auf zahlreiche Universitäten, an denen man mit den scholastischen Traditionen gebrochen hatte, und stellte in großen, für die Ingenieurausbildung geschaffenen Instituten eine engere Verbindung mit Technik und Ökonomie her. Sie förderte einen wirksamen Ideenaustausch mit der Physik und der theoretischen Astronomie. Für diejenigen, die die Anzeichen für künftige Erschütterungen in der Epoche des Imperialismus nicht sehen konnten oder nicht sehen wollten, mußten die Perspek-

tiven der Wissenschaft im allgemeinen und der Mathematik im besonderen als unbegrenzt erscheinen: ein stetiger Fortschritt auf der Grundlage einer durch nichts getrübten internationalen Zusammenarbeit.
In der Tat war Optimismus das typische Merkmal für die programmatischen Reden der Mathematiker dieser Zeit. Hilbert sagte 1900 auf dem II. Internationalen Mathematikerkongreß in Paris: „Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; ..."[1]). Die Zusammenstellung seiner dreiundzwanzig Probleme hatte er so vorgenommen, daß die Lebenskraft praktisch aller Gebiete der Mathematik jener Zeit demonstriert wurde. 1908 auf dem IV. Internationalen Mathematikerkongreß in Rom hielt Poincaré einen Vortrag zum Thema „Die Zukunft der Mathematik", aber in etwas anderem Stil als seinerzeit Hilbert: Poincaré hat weniger konkrete als vielmehr allgemeine Probleme, die vor den verschiedenen mathematischen Disziplinen standen, umrissen und versucht, Wege ihrer weiteren Entwicklung zu skizzieren. Mit diesem allgemeinen Interesse an der Zukunft wuchs die Aufmerksamkeit für die Vergangenheit. Das Studium der Mathematikgeschichte zog eine immer größere Zahl von Gelehrten an und erfuhr eine immer höhere Wertschätzung. Auf dem II. Internationalen Mathematikerkongreß hielt der große Wissenschaftshistoriker Moritz Cantor (1829—1920) einen der vier Hauptvorträge zum Thema: „Über die Historiographie der Mathematik". Auf dem III. Kongreß in Heidelberg richtete man dann eine spezielle Sektion Mathematikgeschichte ein. Bei den Hauptvorträgen (es waren vier, wie in Paris) nahm ein historisches Thema gleichfalls einen bedeutenden Platz ein: Der englische Physiker und Mathematiker A. G. Greenhill referierte über das Thema „Die mathematische Theorie des Kreisels in historischer Sicht". Auf dem V. Internationalen Mathematikerkongreß, der 1912 in Cambridge (England) stattfand, wurde einer der wenigen Hauptvorträge von dem italienischen Geometer, Philosophen und Mathematikhistoriker F. Enriques (1871—1946) zum Thema „Die Bedeutung der Kritik der Grundlagen in der Entwicklung der Mathematik" gehalten. Auch auf dem I. Internationalen Kongreß über Wissenschaftsgeschichte in Rom (1902) und auf dem Internationalen Wissenschaftlichen Kongreß in St. Louis (USA, 1904) war die Mathematikgeschichte in starkem Maße vertreten. Das Thema des Vortrags von Enriques zeigt auch das Interesse an der philosophischen Durchdringung der Mathematik, an Problemen ihrer Grundlegung. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die Rede von Picard auf dem I. Internationalen Mathematikerkongreß. Bei der Eröffnung des Heidelberger Kongresses bemerkte dazu der große deutsche Algebraiker H. Weber (1842—1913): „Wohl kaum hat es eine Zeit gegeben, da der philosophische Teil unserer Wissenschaft, die Frage nach dem letzten Grunde unserer mathematischen Überzeugung ein so allgemeines Interesse in Anspruch nahm wie jetzt."[2])
Die Vielfalt und Stabilität der Beziehungen der damaligen Mathematik mit anderen Gebieten wird recht gut durch eine Übersicht über die Hauptvorträge des Cam-

---

[1]) D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachr. (1900), 254 (*Anm. d. Übers.*)
[2]) Verhandlungen des III. Internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg (Leipzig 1905), S. 29.

bridger Kongresses von 1912 illustriert. Von den acht Vorträgen waren nur drei eigentlich mathematische: von E. Borel „Definition und Existenzgebiet eindeutiger monogener Funktionen“, von M. Bôcher (1867–1918, USA) „Eindimensionale Randwertprobleme“ und von E. Landau „Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion“. Die restlichen Vorträge wurden gehalten von Enriques (s. o.), dem Physiker J. Larmor („Dynamik der Strahlung“), dem Physiker und Seismologen B. Galitzin („Die Prinzipien der instrumentellen Seismik“), dem Astronomen E. W. Brown („Periodizitäten im Sonnensystem“). W. H. White hielt einen Vortrag zum Thema „Der Platz der Mathematik in der Praxis des Ingenieurs“.
Eine gewisse Vorstellung von den quantitativen Veränderungen, die im ersten Jahrzehnt des zwanzigsten Jahrhunderts erfolgt sind, geben die folgenden Daten: Im „Jahrbuch“ (vgl. 9.1.2.) von 1911 werden Arbeiten von fast 2400 Autoren referiert. In einem Jahrzehnt wuchs ihre Zahl also um 60%. Noch schneller nahm die Teilnehmerzahl auf den internationalen Kongressen zu: Waren es 1900 in Paris erst ungefähr 200, so waren es 1912 in Cambridge schon 600; hierbei muß man natürlich auch den allgemeinen wirtschaftlichen Fortschritt in Betracht ziehen, der u. a. bewirkte, daß Auslandsreisen jetzt leichter und billiger zu machen waren als früher.

9.2. Von der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution bis zum Ende des zweiten Weltkrieges

9.2.1. Der 1914 begonnene imperialistische Krieg rief eine Welle des Nationalismus auch unter den Gelehrten hervor, besonders in Deutschland. Er zerriß viele internationale wissenschaftliche Verbindungen. Das gilt auch in vollem Maße für die abstrakteste Wissenschaft, die Mathematik. Auch nach dem Kriege gelang es nicht, gewisse Arbeiten internationalen Charakters wieder in Gang zu bringen. So blieb die französische Ausgabe der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften unvollendet. Die Tätigkeit der Kommission, die mit Hilfe einer großen Zahl von Spezialisten die Organisation des mathematischen Unterrichts in den verschiedenen Ländern studieren sollte, verlief im Sande. Die in Aussicht genommenen Arbeiten bibliographischen Charakters konnten nicht realisiert werden. Der für 1916 einberufene internationale Mathematikerkongreß fand nicht statt. Die beiderseitige Verbitterung, angeheizt durch chauvinistische Propaganda, wirkte sich noch lange aus. Nach dem Sieg der Entente im Jahre 1918 fand eine Konferenz der Akademien der Siegermächte statt. Dort wurde eine Entschließung angenommen, in der es u. a. heißt: „In den vorangegangenen Kriegen haben sich die Gelehrten der sich bekämpfenden Staaten weiterhin gegenseitig geachtet und wenige Friedensjahre reichten aus, um jede Spur früherer Zwistigkeiten zu tilgen. Jetzt aber sind die Verhältnisse völlig anders geworden .... Wir müssen die früheren internationalen Organisationen abschaffen und neue bilden, die nur den verbündeten Ländern und neutralen Staaten offenstehen.“ Am Rande sei bemerkt, daß diese Entschließung auch viele Jahre als Vorwand zum Boykott der Vertreter der Sowjetwissenschaft durch einige wissenschaftliche Organisationen des Westens diente. Ganz im Sinne dieser Tendenzen erfolgte 1919 in Brüssel die Gründung einer Internationalen Mathematikervereinigung, in der nur eine gewisse Gruppe von Ländern vertreten war. Der erste von dieser Vereinigung organisierte Nachkriegskongreß fand 1920 in Straßbourg statt. Dieser Ort war nicht zufällig gewählt[1]: Deutschland hatte 1871 Straßbourg von Frankreich annektiert, und nach dem ersten Weltkrieg war die Stadt wieder an Frankreich gefallen. Der Straßbourger Kongreß vereinigte ungefähr 200 Teilnehmer, der folgende, der 1924 in Toronto (Kanada) stattfand, ungefähr 400.

Die Internationale Mathematikervereinigung war in dieser Zeit eher ein trennendes als ein vereinigendes Organ: Einige nationale mathematische Organisationen, die man früher dort nicht aufgenommen hatte, die „ihre Vergehen büßen" sollten, boykottierten nun ihrerseits die Internationale Mathematikervereinigung. Die Situation besserte sich auch nicht bis zum Kongreß in Bologna (1928). Erst auf dem nächstfolgenden Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich (1932) überstieg die Teilnehmerzahl merklich das Vorkriegsniveau (667 Teilnehmer aus 40 Ländern)[2]. Dort wurde auch beschlossen, die Internationale Mathematikervereinigung in der früheren Form aufzulösen. Man bildete eine Kommission mit dem Auftrag, von neuem die Frage einer internationalen Organisation der Mathematiker zu sondieren. In Deutschland aber kam Hitler an die Macht, ein neuer Krieg zeichnete sich ab. Auf dem folgenden internationalen Kongreß in Oslo (1936) waren nicht mehr 40, sondern nur noch 27 Länder vertreten mit nur 487 Teilnehmern. Die in Zürich gebildete Kommission erklärte hier, daß es ihr nicht gelungen sei, allgemein akzeptierte Vorschläge auszuarbeiten. Der nächste internationale Mathematikerkongreß konnte dann erst 1950 stattfinden.

9.2.2. Ganz gewaltig war der Einfluß der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution auf die Entwicklung der Wissenschaft im allgemeinen und der Mathematik im besonderen. Direkt und unverzüglich wurde dieser Einfluß wirksam, zunächst natürlich in der UdSSR, dann allmählich auch — hauptsächlich aufgrund der Errungenschaften der Sowjetwissenschaft — über deren Grenzen hinaus. „Der Einzug der russischen Mathematik in die Weltarena erfolgte erst nach der Oktoberrevolution. Die Gelehrten des Sowjetstaates haben die ruhmreichen Traditionen ihrer Vorgänger nicht nur weiterentwickelt und vermehrt, sondern sie haben auch prinzipiell neue Wege bei der Entwicklung der Wissenschaft beschritten. Ihre Aktivität erstreckte sich auf neue Gebiete der Mathematik, vor allem auf Mengentheorie und Theorie der reellen Funktionen. Diese Gebiete erwiesen sich gleichsam

[1] Nicht zufällig war wahrscheinlich auch, daß auf dem Heidelberger Kongreß von 1904 der Vorsitzende (er repräsentierte das Gastgeberland) H. Weber war, Professor an der damals deutschen Universität von Straßbourg, und nicht F. Klein oder D. Hilbert. Als dann die Straßbourger Universität erneut französisch wurde, schickte man eine große Gruppe bedeutender Gelehrter — darunter Mathematiker — dorthin, um nahe an der deutschen Grenze einen starken Vorposten der französischen Kultur zu errichten.

[2] Die Gesamtzahl der Mathematiker und der mathematischen Arbeiten wächst weiter exponentiell an: Im „Jahrbuch" von 1929 sind fast 4100 Autoren verzeichnet.

als Ausgangsbasis, von wo aus die neue — bereits sowjetische — mathematische Schule von der gesamten modernen Mathematik Besitz ergriff."[1]) Es ist unbestreitbar, daß Moskau in den dreißiger Jahren zu einem der größten mathematischen Zentren der Welt wurde. Auch in Leningrad, Charkow, Kiew und Kasan nahm das Ausmaß der mathematischen Forschungsarbeit wesentlich zu. Neue mathematische Schulen begannen sich auch in anderen wissenschaftlichen Zentren der Sowjetunion herauszubilden, z. B. in Tbilissi und Taschkent.

In den zwanziger und dreißiger Jahren beobachten wir auch eine schnelle Entwicklung der Mathematik in einer Reihe von Ländern, die nach dem ersten Weltkrieg ihre Selbständigkeit erhalten hatten, vor allem in Polen und Ungarn. Gleichzeitig nahm (in den zwanziger Jahren) die mathematische Aktivität in Italien unter dem Mussolini-Regime ab. In Deutschland warf der Faschismus in den dreißiger Jahren die Wissenschaft weit zurück. Emigranten aus Deutschland, später aus Österreich, Ungarn und anderen Ländern Mitteleuropas ließen sich hauptsächlich in den USA nieder und verstärkten so wesentlich deren mathematisches Potential. Die Mathematik Frankreichs, die im Krieg von 1914—1918 viele junge Kräfte verloren hatte, büßte gleichfalls ihre Vorrangstellung ein, in England konnte man gerade so die Positionen halten. Somit hatte sich Ende der dreißiger Jahre die Verteilung des mathematischen Potentials wesentlich geändert: Die beiden Hauptzentren befanden sich jetzt in der UdSSR und in den USA, während Westeuropa in den Hintergrund trat. Ein langsamer Aufschwung war in Japan, Indien, einigen Ländern Lateinamerikas und Kanadas zu verzeichnen. Die mathematische Gesamtproduktion wuchs weiter im früheren Tempo; das sieht man etwa an der Autorenzahl oder der Zahl der Publikationen.

Die vor sich gegangene Umverteilung der Kräfte zwischen den mathematischen Zentren läßt sich gut durch eine Übersicht darüber illustrieren, wie sich von Jahr zu Jahr der Umfang der Zeitschriften und die Zahl der Arbeiten in den Zeitschriften „Matematitscheski sbornik" und „Mathematische Annalen" verändert haben. Der „Sbornik" war ja die führende mathematische Zeitschrift in der UdSSR, die Annalen spielten dieselbe Rolle in Deutschland.

„Mathematische Annalen"

Jahr	Seitenzahl	Anzahl der Arbeiten
1930	1427	61
1931	1592	95
1932	1598	91
1933	1084	59
1934	1083	59
1935	1080	34

[1]) Mat. sbornik *74* (116), wyp. 3 (1967), 323—324.

„Matematitscheski Sbornik“

Jahr	Seitenzahl	Anzahl der Arbeiten	Anzahl der Lieferungen pro Jahr
1900 —	(im Mittel)		
1918	305	13	3
1932	450	29	3
1936	1000	80	6

Ein Kommentar zu dieser Statistik ist offensichtlich überflüssig.[1])

9.2.3. Indessen können die statistischen Daten für sich genommen noch nicht zeigen, wie stark sich in den zwei Jahrzehnten nach 1917 das mathematische Klima insgesamt verändert hat. Die Organisation, der Charakter und die Zielsetzung der wissenschaftlichen Untersuchungen waren anders geworden. Inwieweit wurde das den Teilnehmern dieser Vorgänge selbst bewußt? Es gibt Dokumente, in denen man auf solche Fragen eine Antwort finden kann. Wenden wir uns nun einem derartigen Dokument zu:
Bei der Eröffnung der Internationalen Mathematischen Konferenz von 1937[2]) begann der hervorragende französische Mathematiker A. Denjoy seine Rede mit dem Bekenntnis, daß die Wissenschaft eine gesellschaftliche Erscheinung ist, die man nicht isoliert betrachten dürfe. Er stellte fest, daß zu allen Zeiten Kunst, Literatur und „sogar die wirtschaftlichen und politischen Verhältnisse, die ja alles übrige beeinflussen“, in der Wissenschaft ihren Niederschlag finden und auf sie Einfluß nehmen.
Dabei sei hervorgehoben, daß nach dem ersten Weltkrieg die mathematische Produktion ganz allgemein, besonders aber in den neugebildeten Staaten, wesentlich gewachsen war. Die Wissenschaft hatte jetzt insgesamt mehr Autorität. Es wurde allgemein anerkannt, daß die Interessen eines Landes sowohl auf wirtschaftlichem als auch auf militärischem Gebiet eine stete Förderung seines wissenschaftlichen Potentials auf höchstem Niveau verlangen. In vielen Ländern wurden die Organisationsformen der wissenschaftlichen Arbeit modifiziert oder neu gestaltet. Für die Mathematik kamen diese Änderungen vorerst in einer wesentlichen Vergrößerung der Anzahl der Wissenschaftler zum Ausdruck. Die steigenden Kosten wurden sowohl von seiten des Staates als auch — außerhalb der UdSSR — von seiten kapitalistischer Unternehmen getragen. Man kam jetzt auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Forschung zur Anwendung von Methoden, die in der Wirtschaft üblich waren. Denjoy sagte in seiner Rede ferner: „Selbst wenn man die marxistische Lehre nicht insgesamt akzeptiert, kann der vom dialektischen Materialismus bestätigte entscheidende Einfluß rein ökonomischer Faktoren auf solche scheinbar weit von der Ökonomie abliegende Erscheinungen, wie es Entdeckungen auf dem Gebiet der reinen Wissenschaft sind, auf keinen Fall übersehen werden.“

[1]) Siehe A. F. Bermant, *Über die sowjetische mathematische Literatur*, Uspechi mat. nauk *3* (1937), 254—262.
[2]) Sie wurde von der französischen mathematischen Gesellschaft anläßlich der Weltausstellung in Paris organisiert und fand vom 7. bis 10. Juli 1937 statt.

Das Ansteigen der Zahl der wissenschaftlich arbeitenden Mathematiker bewirkte auch einen Wandel im Charakter der wissenschaftlichen Arbeit.[1]) Als die Wissenschaft von einer kleinen Zahl herausragender Forscher getragen wurde, erreichte man ein Fortschreiten dadurch, daß von Zeit zu Zeit fundamentale Sätze entdeckt und prinzipiell neue Begriffe herausgearbeitet wurden und man zwischen ihnen die Verbindungen knüpfte. Das ist etwa vergleichbar mit der Erforschung eines völlig unbekannten Kontinents durch eine kleine Expedition: In die Karte werden nur die höchsten Berge, die wichtigsten Flüsse usw. eingetragen und ihre gegenseitige Lage festgestellt. Selbstverständlich gab es auch vor dem zwanzigsten Jahrhundert, besonders im neunzehnten, nicht wenige zweit- und drittrangige Wissenschaftler, die in die Karte die feineren Details eintrugen. Aber erst in den zwanziger und dreißiger Jahren unseres Jahrhunderts wurde eine organisierte Verteilung der Arbeit auf verschiedene Gruppen von Gelehrten möglich, d. h., um bei obigem Vergleich zu bleiben, erst jetzt konnte man darangehen, gemeinsam die gesamte Gegend zu untersuchen mit dem Ziel, eine bis in die kleinsten Details ausgearbeitete Karte herzustellen. Denjoy, der diesen Strukturwandel wohl bemerkte, meinte, daß sich auch darin die Wissenschaft an der Industrie ein Beispiel nimmt.

Mit diesen neuen Zügen in der Entwicklung der Mathematik kann man die folgenden Fakten in Zusammenhang bringen. In der Zeit zwischen erstem und zweitem Weltkrieg waren die regionalen mathematischen Kongresse wichtige Ereignisse im internationalen mathematischen Leben, etwa die Kongresse der skandinavischen und die der slawischen Länder. Auch die Allunionskongresse in der Sowjetunion (der erste fand 1930 in Charkow, der zweite 1934 in Leningrad statt) hatten keine geringere Bedeutung. Man begann mit der Herausgabe spezialisierter mathematischer Zeitschriften: 1920 wurde die polnische Zeitschrift „Fundamenta Mathematicae" gegründet, in der vor allem Arbeiten zur Mengenlehre, zur mathematischen Logik und zur Theorie der reellen Funktionen veröffentlicht werden. Seit 1921 erscheint die deutschsprachige „Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik" (ZAMM). Seit 1935 wird die „Acta arithmetica" herausgegeben, eine der Zahlentheorie vorbehaltene polnische Zeitschrift.

Ein Novum waren auch die internationalen Konferenzen zu speziellen Gebieten und Problemen der Mathematik. Während sie einerseits die allgemeine Tendenz zur Spezialisierung widerspiegelten, wirkten sie ihr andererseits z. T. entgegen, weil auf diesen Konferenzen an der Erörterung eines begrenzten Problemkreises auch Spezialisten angrenzender Gebiete teilnahmen. Die ersten Konferenzen dieser Art fanden in Moskau statt: 1934 über tensorielle und mehrdimensionale Geometrie und 1935 über Topologie.

Der in den zwanziger Jahren unternommene Versuch, die Herausgabe der deutschen mathematischen Enzyklopädie in Form einer Reihe von Ergänzungen zu den vor 1914 herausgegebenen und mittlerweile stark veralteten Bänden fortzusetzen, hatte keinen großen Erfolg. Wesentlich größere Bedeutung erlangten Serien von

[1]) In dieser Rede bemerkte Denjoy, daß die Anzahl der wissenschaftlichen Arbeiten und die der Wissenschaftler nach dem „Exponentialgesetz" anwächst. Das war möglicherweise der erste Hinweis dieser Art.

Monographien. Die erste Serie — über Funktionentheorie — wurde von E. Borel bereits 1898 begonnen und erst in den Jahren des zweiten Weltkrieges abgebrochen. In den zwanziger Jahren begann man in Deutschland mit der Herausgabe einer Reihe von Monographien über alle grundlegenden Gebiete der Mathematik. Ungeachtet des großen Werts solcher Bücher machte sich mit der Zeit die Notwendigkeit bemerkbar, gedrängte Übersichtsartikel über die neuesten Veröffentlichungen zu schreiben. Solche Übersichtsartikel müssen sich schnell durcharbeiten lassen, sie kommen also in der Art der Darstellung den Enzyklopädieartikel nahe, indem sie ganz oder teilweise auf Beweise verzichten. Von dieser Art sind die französischen mit dem Titel „Mémorial des sciences mathématiques" und die deutschen „Ergebnisse der exakten Wissenschaften".
Die mathematische Forschungskapazität konzentrierte sich nach wie vor an den Lehrstühlen der Universität. Man begann aber auch an speziellen mathematischen Instituten größere Kapazitäten zu vereinigen. Solche Institute sind z. B. das „Institut Poincaré" in Paris und das Forschungsinstitut bei der Universität Princeton (USA), das sich auch hauptsächlich mit Mathematik beschäftigt. Im Personalbestand der Universitäten und einiger technischer Hochschulen begann man freie Stellen für Mathematiker vorzusehen, die von allen Pflichten in der Lehre befreit waren und nur zu forschen hatten.
Recht eigenartig ist in dieser Zeit in den kapitalistischen Ländern die Geisteshaltung der Mathematiker. Der frühere, man kann sagen von den Vorgängern vererbte Optimismus macht Zweifeln Platz, und bei vielen verbreitet sich Unglauben an die Zukunft einer Wissenschaft, die gezwungen wird, imperialistischen und faschistischen Regimen zu dienen. Bei einigen drückte sich der Protest im Bestreben aus, möglichst weit von den Anwendungen der Mathematik wegzukommen. So begann Hardy eine seiner Einführungsvorlesungen mit der demonstrativen Erklärung, daß Mathematik, seine Mathematik, eine „nutzlose" Wissenschaft ist. „Ich meine damit" — fuhr Hardy fort — „daß sie direkt weder zur Ausbeutung noch zur Vernichtung von Menschen verwendet werden kann."[1]) Und einer der führenden Köpfe der jüngeren französischen Mathematikergeneration schrieb nach dem zweiten Weltkrieg, an den Vortrag von Poincaré auf dem Kongreß in Rom erinnernd: „Unser Glaube an den Fortschritt und unsere Zuversicht in die Zukunft der menschlichen Zivilisation sind nicht mehr sehr stark; zu heftig und zu hart waren die sie erschütternden Schläge ... Ein Mathematiker, der nach der Zukunft seiner Wissenschaft gefragt wird, tut recht daran, wenn er zurückfragt: Wie steht es um die Zukunft der Menschheit überhaupt?"[2])

9.2.4. In den etwa zwei Jahrzehnten zwischen erstem und zweitem Weltkrieg blieb die Funktionentheorie, vor allem die Theorie der reellen Funktionen (zusammen mit der Mengenlehre) eine der am meisten bearbeiteten mathematischen Disziplinen.

---

[1]) Vgl. dazu G. H. Hardy, *A mathematician's apology* (Cambridge, Mass. 1940), S. 60. (D. S.)

[2]) André Weil, *L'avenir des mathématiques*. In dem Buch „Les grands courants de la pensée mathématiques", Paris 1962, S. 306.

Ihre Entwicklung wurde in vielen Punkten durch die Arbeiten der sich unter Leitung von N. N. Lusin formierenden Moskauer Schule bestimmt.[1])

N. N. Lusin (1883—1950) wurde in Tomsk geboren, wo er auch das Gymnasium besuchte. Sein Großvater war noch Leibeigener gewesen. Für die Mathematik begeisterte er sich erst an der physikalisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Universität, an der er sich 1901 immatrikulieren ließ, um später einmal Ingenieur zu werden. 1906 absolvierte er die Universität Moskau, 1914 begann seine Lehrtätigkeit an dieser Universität. In den dazwischenliegenden Jahren eignete er sich vollständig die gesamte damals bekannte Funktionentheorie an. Er durchdachte ihre grundlegenden Probleme und erhielt eine Reihe bemerkenswerter Resultate. In systematisierter Form bildeten die Ergebnisse dieser Schaffensperiode den Inhalt der schon an früherer Stelle erwähnten Dissertation „Integral und trigonometrische Reihe".[2]) Sie war zur Erlangung des Magistergrades eingereicht. Lusin erhielt aber aufgrund dieser hervorragenden Dissertation sofort den wissenschaftlichen Grad eines Doktors der reinen Mathematik (entspricht dem Dr. sc. — *Anm. d. Übers.*). Wie die Biographen Lusins bemerken, war ein solcher Fall eine große Seltenheit an den russischen Universitäten.

Von 1914 an bis Ende der zwanziger Jahre vereinigte Lusin intensive wissenschaftliche Arbeit mit einer vielfältigen Lehrtätigkeit. Außer den ihm offiziell übertragenen Vorlesungen hielt er eine fakultative Vorlesung über die Theorie der reellen Funktionen. Auch Spezialseminare führte er durch. Seine Vorlesungen waren von außerordentlichem Erfolg gekrönt. „Sie waren weder didaktisch durchgebildet noch liebte es Lusin, seinen Hörern irgendein Gebiet in abgeschlossener Form darzubieten. Er eröffnete vielmehr seinem Auditorium stets immer wieder neue Horizonte... Er zeigte seinen Zuhörern stets aufs neue, wie man Schwierigkeiten, an denen es in der wissenschaftlichen Forschung nie mangelt, überwindet. Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Art der Lehre Erfolg hat, besonders wenn der Vortragende ein Gelehrter ist, der selbst in der Blüte seines wissenschaftlichen Schaffens steht."[3]) Anfang der zwanziger Jahre standen Fragen der Mengenlehre im Mittelpunkt des Interesses von N. N. Lusin, und in den Arbeiten aus dieser Zeit legte er die Grundlagen einer im wesentlichen neuen mathematischen Disziplin, der deskriptiven Funktionentheorie. „Nicht nur auf diesem Gebiet erzielte er fundamentale Ergebnisse, seine Untersuchungen berührten auch die Grundlagen der Mengenlehre. Er hat sich als erster über die Grenzen der mengentheoretischen Denkweise ausgesprochen. Die von ihm formulierten Prinzipien und Richtlinien waren ein Programm, welches der weiteren fruchtbaren Arbeit auf dem Gebiet der modernen Funktionentheorie diente."[4])

---

[1]) Vgl. *Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongresses*, Zürich 1932, Bd. I; Vorträge von Carathéodory, Bieberbach, Fueter, F. Riesz, Valiron, H. Bohr, P. Fatou, E. Borel, M. Fréchet, R. Nevanlinna. (D. S.)

[2]) Moskau 1915. Eine neue Ausgabe mit verschiedenen Ergänzungen, Kommentaren und einführenden Artikeln von N. K. Bari, W. W. Golubew und L. A. Ljusternik erschien 1951.

[3]) Aus dem Artikel von W. W. Golubew und N. K. Bari, „Biographie von N. N. Lusin" in dem Buch *Integral und trigonometrische Reihe* (russisch, Moskau 1951), S. 21.

[4]) Ebenda, S. 27.

In den folgenden zwanzig Jahren seines Lebens erzielte Lusin, während er seine Forschungen zur deskriptiven Funktionentheorie fortsetzte, wichtige Resultate in der Differentialgeometrie und bei gewissen Fragen der angewandten Mathematik. Er hinterließ auch einige interessante Arbeiten zur Geschichte der Mathematik.

9.2.5. Zu der ersten Gruppe von Gelehrten, die zusammen mit N. N. Lusin die funktionentheoretische Schule bildeten, gehörten seine jüngeren Freunde I. I. Priwalow (1891–1941) und W. W. Stepanow (1889–1950) und seine ersten Schüler M. J. Suslin (1894–1919), A. J. Chintschin (1894–1959), P. S. Urysohn (1898 bis 1924), P. S. Alexandroff (*1896), D. E. Menschow (*1892) u. a. Sie alle wurden ganz wesentlich von Lusin beeinflußt. Seit Beginn der zwanziger Jahre stießen neue Kräfte zur Moskauer Schule: N. K. Bari (1901–1961), A. N. Kolmogoroff (*1903), M. A. Lawrentjew (*1900), P. S. Nowikow (*1901), L. A. Ljusternik (*1899), L. W. Keldysch (*1904), L. S. Pontrjagin (*1908) u. a. Viele von ihnen traten in der Folgezeit selbst an die Spitze neuer Schulen und Richtungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik.

Die Moskauer funktionentheoretische Schule erzielte fundamentale Resultate zur Integrationstheorie, zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Orthogonalsysteme, bei vielen angrenzenden Fragen der Theorie der reellen Funktionen und der komplexen Funktionentheorie, zum Problem der Monogenität, in der geometrischen Funktionentheorie im Komplexen. Sie legte die Grundlagen für die Theorie der quasikonformen Abbildungen. Sie leistete Erhebliches bei der Weiterentwicklung neuer Theorien, die im Ausland entstanden waren, z. B. bei der Verallgemeinerung der fastperiodischen Funktionen, deren Theorie zu Beginn der zwanziger Jahre von H. Bohr (1887–1951, Dänemark) geschaffen worden war. In Moskau verband man naturgemäß die Untersuchungen zur Funktionentheorie mit Arbeiten zur Mengenlehre. Wir weisen in diesem Zusammenhang nur auf die Theorie der analytischen Mengen von M. J. Suslin und die Theorie der projektiven Mengen von N. N. Lusin hin. Eine ebenso natürliche Verbindung bestand zur Topologie — so entstand die Moskauer topologische Schule, die von P. S. Urysohn, P. S. Alexandroff, A. N. Kolmogoroff, L. S. Pontrjagin, A. N. Tychonoff (*1906) u. a. repräsentiert wird. Unablässig erweiterte sich die Thematik der Moskauer Schule. Mathematiker anderer wissenschaftlicher Zentren der Sowjetunion kamen nach Moskau oder wurden anderweitig an ihren Forschungen beteiligt.

In der Theorie der analytischen Funktionen begann M. A. Lawrentjew eine systematische Arbeit, und bereits in den dreißiger Jahren leitete er ein Kollektiv junger Mathematiker, dem sich u. a. M. W. Keldysch (1911–1978) anschloß. Ebenfalls in den dreißiger Jahren wurde Moskau zum Hauptzentrum von Forschungen zur konstruktiven Theorie der reellen Funktionen (S. N. Bernstein und seine Schule). An diesen Forschungen beteiligten sich auch Gelehrte Leningrads, Charkows und anderer Städte.

Für die Moskauer funktionentheoretische Schule ist das Streben charakteristisch, die ausgearbeiteten Methoden und die erzielten Ergebnisse möglichst umfassend auf andere Gebiete der Mathematik, in der Mechanik, Physik usw. anzuwenden.

Gleich nach der Moskauer Schule muß man die polnische nennen, in der man ebenfalls Untersuchungen zur Mengenlehre mit solchen zur Funktionentheorie und Topologie kombinierte. Das, was Lusin für die Moskauer Schule war, war für die polnische W. Sierpiński. Sierpiński stand in den Jahren des ersten Weltkrieges mit Lusin in regem Verkehr und wurde von ihm stark beeinflußt. Unter seinen Schülern und Nachfolgern sind K. Kuratowski (*1896), S. Mazurkiewicz (1888—1945) u. a. zu nennen. Andere Länder waren in der Funktionentheorie nur durch kleinere Gruppen von Gelehrten vertreten. Diese waren meist nicht durch irgendein allgemeines Programm vereinigt, erzielten aber insgesamt sehr wichtige Resultate. In der Theorie der ganzen und der meromorphen Funktionen wurde durch die Arbeiten der finnischen Mathematiker R. Nevanlinna (*1895) und L. Ahlfors (*1908) ein gewisser Abschluß erreicht. Die Theorie der schlichten Funktionen wurde hauptsächlich durch Arbeiten deutscher Mathematiker vorangetrieben. Mehrblättrige Funktionen und die ihnen entsprechenden Riemannschen Flächen waren der Untersuchungsgegenstand sowjetischer und finnischer Mathematiker. Von P. Montel (*1876, Frankreich) wurden die „normalen Familien" von Funktionen eingeführt und in breitem Maße angewendet.

Dieser Überblick ist bei weitem nicht vollständig. Insgesamt nimmt, ungeachtet der Fülle von Resultaten, die Funktionentheorie am Ende der dreißiger Jahre keine zentrale Stellung in der mathematischen Forschung mehr ein. Der Schwerpunkt verlagert sich im Laufe zweier Jahrzehnte zusehends in andere Gebiete der Mathematik. Eines dieser Gebiete ist die Algebra.

9.2.6. Im Laufe einiger Jahre wurde die Algebra im neuen Sinne, d. h. das, was man in den zwanziger Jahren „moderne Algebra" nannte, zu einer selbständigen Disziplin. Heute sagt man wieder einfach Algebra, wenn man diese „moderne Algebra" meint. An früherer Stelle war schon von der Arbeit von E. Steinitz aus dem Jahre 1910 über Körpertheorie die Rede (vgl. 9.1.9). Ganz im Sinne dieser Arbeit baute Emmy Noether (1882—1935) gemeinsam mit ihren Schülern eine allgemeine Theorie der kommutativen Ringe auf, ferner eine Theorie der Ideale und Moduln über Ringen. Sie unterzog weiterhin die Grundprobleme der nichtkommutativen Algebra einem systematischen Studium. Alle genannten algebraischen Strukturen wurden auf der Grundlage der sie definierenden Axiome untersucht, unabhängig von der Natur der zu ihnen gehörigen Elemente. Schon die Titel der Arbeiten von Emmy Noether trugen programmatischen Charakter: „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern" (1926), „Nichtkommutative Algebra" (1933) u. a. Auch von sowjetischen Algebraikern, ferner von jüngeren holländischen, amerikanischen und französischen Mathematikern wurde in dieser Richtung intensiv geforscht. Das Haupt der sowjetischen Gruppierung war O. J. Schmidt (1891—1956), der auch als Polarforscher und Geophysiker bekannt ist. Hilbert hat durch seinen Einfluß die Entwicklung der neuen Algebra gefördert. Auch H. Weyl und andere Mathematiker der Generation von E. Noether waren an ihrer Weiterentwicklung beteiligt. E. Noether jedoch hielt bis zu ihrem Tode anerkanntermaßen die führende Rolle in der Algebra.

9.2.7. Emmy Noether ist die bekannteste Mathematikerin des zwanzigsten Jahrhunderts und war überhaupt einer der bedeutendsten Vertreter der Mathematik unserer Tage. Ihr Lebensweg ist jedoch von Tragik überschattet und weist uns eindringlich auf die sozialen Aspekte der Mathematikgeschichte hin. Emmy Noether war die Tochter des bedeutenden Mathematikers Max Noether (1844—1921), der durch seine Arbeiten zur Theorie der algebraischen Funktionen bekannt geworden ist. Sie wurde in der kleinen Universitätsstadt Erlangen geboren, wo ihr Vater Professor war. Gemeinsam mit dem Invariantentheoretiker P. Gordan (1837 bis 1912), dem Meister in der Handhabung des algebraischen Kalküls, repräsentierte Max Noether viele Jahre lang die Mathematik an der Universität Erlangen. Gordan war auch E. Noether erster Lehrer, und ihre 1907 verteidigte Dissertation hatte den Titel „Über vollständige Invariantensysteme ternärer biquadratischer Formen". Sie vermochte aber nicht nur den Kalkül zu handhaben, sie konnte auch begrifflich denken und entwickelte sich in Göttingen, in Gemeinschaft mit D. Hilbert, F. Klein und H. Weyl zu einem selbständigen mathematischen Geist. Sie arbeitete hier systematisch am Aufbau der abstrakten Algebra und wurde so das Haupt eines kleinen, aber leistungsfähigen Kreises von Nachfolgern und Schülern. Indessen haben ihre hervorragenden Arbeiten ihre mehr als bescheidene akademische Stellung nicht verändern können. Erst als 1919 die deutsche Monarchie gefallen war, erhielt sie das Recht, Vorlesungen an der Göttinger Universität zu halten (als Privatdozent). Früher war selbst dies für eine Frau unerreichbar.
Im Jahre 1922 erreichte sie den Höhepunkt ihrer akademischen Laufbahn in Göttingen, sie wurde außerordentlicher Professor mit einem höchst dürftigen Gehalt. Beharrliche Versuche ihrer mathematischen Kollegen, für sie eine Stellung zu erwirken, die ihrer Begabung, ihren Verdiensten und ihrem Ruf entsprochen hätten, blieben ohne Erfolg; nicht einmal Hilberts Autorität nützte etwas. Die Mehrheit des Senats der Universität wollte in ihrer Mitte keine Frau haben, zumal jüdischer Herkunft und für ihre linke Gesinnung bekannt (man nannte sie die „rote Emmy"). Nach der Machtergreifung Hitlers im Jahre 1933 mußte sie Göttingen und Deutschland verlassen. Sie lebte in der Emigration (Tätigkeit am Mädchencollege Bryn Mawr in den USA) nur noch $2^1/_2$ Jahre.[1])
Die neue Algebra war ein mächtiges Instrument für die Algebraisierung der Topologie. Einerseits konnte die algebraische Natur vieler wichtiger Beziehungen, die man ursprünglich in geometrischer Form entdeckt hatte, klargestellt werden. Andererseits konnte man Beziehungen sachgemäß verallgemeinern, in denen durch die Betrachtungsweise induzierte Beschränkungen vorkommen, die nicht durch das Wesen der Sache gegeben sind. Als Beispiel dafür kann etwa der Übergang von Komplexsummen mit ganzen Koeffizienten zu ähnlichen Summen mit Koeffizienten aus einem beliebigen Ring gelten, d. h. die Einführung der Homologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten. Durch diese Verallgemeinerung konnte man dem Dualitätssatz eine wesentlich allgemeinere Form geben. Außer in der Topologie wurden

[1]) Auguste Dick, *Emmy Noether 1882—1935*, Elemente der Mathematik, Beiheft 13 (1970); H. Weyl, *Emmy Noether*. In: H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III (Berlin—Heidelberg—New York 1968), S. 425—444. (D. S.)

auch in vielen anderen Gebieten, z. B. in einem solch klassischen Kapitel der Analysis wie der Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale, die algebraischen Aspekte von Problemen aufgedeckt, die bei ihrer Entstehung mit Algebra nicht das geringste zu tun zu haben schienen. Man konnte auch gewisse algebraisch-analytische Analogien klarstellen, die in den voraufgegangenen zwei Jahrzehnten nur formalen Charakter hatten. Die Axiomatisierung des mathematischen Denkens, wie sie Hilbert so nachdrücklich forderte, erfolgte in nicht geringem Maße durch eine Algebraisierung.

9.2.8. Aus der einen Geometrie waren schon im neunzehnten Jahrhundert viele geworden, und jede der „reinen" Geometrien zeitigte im zwanzigsten Jahrhundert eine große Menge von Resultaten, die einer gesonderten Übersicht wert wären. Hier können wir nur solche Verallgemeinerungen erwähnen wie die Einführung von Koeffizienten aus einem beliebigen Körper (im neunzehnten und zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts hatte man sich vor allem auf den Körper der reellen Zahlen, später auf den der komplexen Zahlen beschränkt) in die Formeln, welche eine Transformationsgruppe definieren (d. h. die Grundlage irgendeiner Geometrie in der Klassifikation von F. Klein). So entstand z. B. die projektive Quaternionengeometrie. Ein Beispiel für die Entwicklung in einer anderen Richtung liefert uns ebenfalls die Geschichte der projektiven Geometrie, nämlich die Schaffung der projektiven Differentialgeometrie. Neben der Entwicklung solch allgemeiner Auffassungen und Konstruktionen wurden auch viele wichtige Einzelprobleme gelöst, z. B. in der algebraischen Geometrie.
Erwähnenswert ist die Lösung eines der klassischen Probleme der Differentialgeometrie, nämlich des Plateauschen Problems: die Minimalfläche zu bestimmen, die durch eine vorgegebene Kontur geht. Aber die größte historische Bedeutung haben wahrscheinlich die mit der Relativitätstheorie zusammenhängenden geometrischen Untersuchungen.
In den Jahren 1915/16 führte A. Einstein beim Aufbau der allgemeinen Relativitätstheorie eine Riemannsche Differentialgeometrie in die Physik ein. Er verwendete einen Kalkül, den er Tensorkalkül nannte. Der Tensorkalkül, hervorgegangen aus dem absoluten Differentialkalkül von Ricci-Curbastro (1853—1925, Italien) und T. Levi-Civita (1873—1941, Italien), wurde schon im neunzehnten Jahrhundert entwickelt, aber erst der Erfolg der Einsteinschen Theorie machte ihn allgemein bekannt. Gleichzeitig belebte sich das Interesse am Studium Riemannscher Mannigfaltigkeiten ganz wesentlich. Das betraf sowohl das Studium solcher Mannigfaltigkeiten „an sich" als auch ihre Betrachtung als in einen Euklidischen Raum einer entsprechenden (größeren) Dimensionen eingebettete Mannigfaltigkeiten. Damit war ein neues und höchst fruchtbares Gebiet der Geometrie eröffnet. Levi-Civita führte in die Riemannschen Geometrien den wichtigen Begriff der Parallelverschiebung ein. H. Weyl entwickelte im Zusammenhang mit seinen physikalischen Konzeptionen eine erweiterte Riemannsche Geometrie.[1]) An der Weiterentwicklung und Anwendung der Tensorrechnung waren vor allem Geometer der

[1]) Vgl. I. M. Jaglom, *Hermann Weyl* (russ., Moskau 1967); R. König, Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss. 1956, S. 236—248. (D. S.)

Moskauer Schule sowie holländische und amerikanische Mathematiker beteiligt. Einen ganz wesentlichen Beitrag zur Geometrie leistete der bedeutende französische Mathematiker E. Cartan (1869—1961). Er führte die sogenannten Holonomiegruppen ein und baute auf dieser Grundlage eine Klassifikation der Geometrie auf, welche die Kleinschen und Riemannschen Geometrien als Spezialfälle enthält. Cartan bereicherte die Mathematik auch um neue wichtige Begriffe und zahlreiche konkrete Resultate.

9.2.9. Das Aufeinandertreffen von Ideen und Methoden der Algebra, Geometrie, Topologie und Analysis brachte einen neuen Zweig der Mathematik hervor — die Funktionalanalysis. Unter Funktionalanalysis verstehen wir hier üblicherweise jene „allgemeine Analysis", die die Verallgemeinerung aller Grundbegriffe der klassischen Analysis (Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit, Differential usw.) auf den Fall der Abbildung einer Menge in eine andere bei immer weitgehenderen Annahmen bezüglich dieser Mengen beinhaltet. Insbesondere muß man die Variationsrechnung, die eine Differentialrechnung über Funktionalen darstellt, als ältesten Teil der Funktionalanalysis ansehen. In die Funktionalanalysis fanden auch die Ergebnisse vieler Arbeiten vom Ende des neunzehnten und Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts Eingang, in denen konkrete Funktionale und Operationen untersucht wurden, die die klassischen Operationen der Analysis verallgemeinerten. Als Programm, als allgemeine Zielstellung finden wir den Aufbau einer „allgemeinen Analysis" in metrischen Räumen erstmals in den Arbeiten von M. Fréchet (1878—1973). Der Beginn dieser Arbeiten fällt in das erste Jahrzehnt nach der Jahrhundertwende. Zur Funktionalanalysis gehört auch die Integralgleichungstheorie, die in der voraufgegangenen Periode geschaffen wurde. Zur selben Zeit wurden der Hilbertraum und die Räume L^p eingeführt. 1918 zeigte F. Riesz (1880—1956, Ungarn), daß alle grundlegenden Resultate von Fredholm über Integralgleichungen für eine umfangreiche Klasse von Gleichungen mit linearen Operatoren gültig bleiben. In dieser Arbeit von Riesz ist schon jene Vereinigung topologischer, algebraischer und analytischer Vorstellungen sichtbar, die wir auch in der Theorie der vollständigen normierten Räume (Banachräume) bemerken, welche von S. Banach (1892—1945, Polen) und seiner Schule entwickelt wurde.

In den breiten Strom der Funktionalanalysis mündeten auch die Untersuchungen ein, die man in der UdSSR begonnen hatte im Zusammenhang mit Problemen der Theorie der reellen Funktionen und der Topologie, in Verbindung mit Arbeiten zur Matrizentheorie, über Integralgleichungen, zur qualitativen Theorie der Differentialgleichungen und zur Variationsrechnung. In der zweiten Hälfte der dreißiger Jahre wurde die sowjetische Schule der Funktionalanalysis durch starke Kollektive repräsentiert, in denen sowohl Gelehrte arbeiten, die ihre wissenschaftliche Tätigkeit auf anderen Gebieten begonnen hatten, als auch junge Mathematiker, für welche die Funktionalanalysis das erste Arbeitsgebiet war. Als bedeutsame Ereignisse in der Geschichte der Funktionalanalysis muß man auch die diesem Gebiet gewidmeten Konferenzen von Moskau (1937) und Kiew (1940) werten.

Außerhalb der UdSSR hat man — z. T. im Zusammenhang mit Problemen der Quantenmechanik — die Theorie der Operatoren im Hilbertraum, die Theorie der

Banachräume (polnische Schule) und der lokalkonvexen Räume (französische Schule) weiter erfolgreich ausgebaut.

9.2.10. In den verschiedensten Richtungen entwickelte sich in dem betrachteten Zeitraum die Zahlentheorie.
In der analytischen Zahlentheorie sind grundsätzliche Fortschritte mit den Arbeiten von I. M. Winogradow (*1891) verbunden. Mit der von ihm entwickelten Methode gelang es ihm, den „Dreiprimzahlensatz“ (jede hinreichend große ungerade Zahl ist als Summe von drei Primzahlen darstellbar) zu beweisen. Ferner konnte er mit dieser Methode die Resultate seiner Vorgänger bezüglich des Waring-Problems wesentlich verbessern. A. J. Chintschin erzielte unter Verwendung funktionaler Methoden wesentliche Resultate in der sogenannten metrischen Zahlentheorie. Weiter fortgesetzt wurde die Entwicklung der geometrischen Zahlentheorie (B. N. Delauney *1890, u. a.). In der Arithmetik der algebraischen Kurven, die mit der Lösung diophantischer Gleichungen zusammenhängt, waren die Arbeiten von A. Weil (*1902, Frankreich) und C. L. Siegel (*1896, Deutschland) ein bedeutsamer Fortschritt. Diese Arbeiten kann man als Fortsetzung der bemerkenswerten Untersuchungen von A. Thue (1863—1922, Norwegen) ansehen, die in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts erschienen sind. Eine neue Methode zur Konstruktion transzendenter Zahlen gab A. O. Gelfond (1906—1968) an. Er löste auch ein Problem, das mit dem 7. Hilbertschen Problem in engem Zusammenhang steht (vgl. 9.1.5.)

9.2.11. Auf dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen setzte man in den ersten zwei bis drei Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts die Entwicklung der analytischen Theorie im Sinne der im neunzehnten Jahrhundert entstandenen Ideen und Methoden fort. In den dreißiger Jahren rückten Probleme der qualitativen Theorie in den Vordergrund, der Schwerpunkt verlagerte sich zur reellen Betrachtungsweise. Wesentlichen Einfluß hatten Anforderungen der Physik, besonders der nichtlinearen Schwingungstheorie. Dabei traten auch Physiker (A. A. Andronow, L. I. Mandelstam) mit wichtigen mathematischen Ideen und Resultaten hervor. Eine grundlegende Arbeit auf dem in Rede stehenden Gebiet leisteten sowjetische Mathematiker. N. N. Bogoljubow (*1909) und N. M. Krylow (1879 bis 1955) entwickelten asymptotische Methoden zur Integration nichtlinearer Gleichungen. In der Schule von Mandelstam-Andronow wendete man die Poincaréschen Methoden in breitem Maße an. Die von Ljapunow in der Stabilitätstheorie entwickelten Methoden wurden umfassend angewandt und weiter vervollkommnet. Gleichzeitig schenkte man der allgemeinen Theorie der dynamischen Systeme und dem Beweis des Ergodentheorems in seinen verschiedenen Varianten in diesen Jahren viel Beachtung. Die Theorie der dynamischen Systeme war Gegenstand der bekannten Monographie von G. D. Birkhoff (1884—1944, USA), die 1927 erschienen ist.
Schon Ende des neunzehnten Jahrhunderts bauten Picard und seine Schüler eine Theorie auf, die bei linearen Differentialgleichungen das Analogon zur Galoisschen Theorie bei algebraischen Gleichungen darstellen sollte. Diese „algebraische“ Rich-

tung wurde in den dreißiger Jahren und später hauptsächlich durch amerikanische Autoren vorangetrieben. In der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen gab I. A. Lappo-Danilewski Antwort auf eine Reihe prinzipieller Fragen (lokaler Natur), indem er den Apparat der analytischen Funktionen von Matrizen systematisch zum Einsatz brachte. Überhaupt wurde von ihm erstmals das Problem über die Charakteristik einer Singularität der Lösung in der Nähe eines singulären Punktes mit hinreichender Allgemeinheit formuliert. Lappo-Danilewski gab eine Lösung des Riemannschen Problems, zu gegebenen Charakteristiken der Singularitäten in den singulären Punkten der Gleichung die Gleichung selbst zu konstruieren.
In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen haben sich die Problemstellungen selbst allmählich verändert: Neue Mittel der Funktionentheorie und Topologie gestatteten es in vielen Fällen, Sätze über die Existenz, Eindeutigkeit, Stetigkeit usw. zu erhalten, ohne eingehende Voraussetzungen machen zu müssen. Zum Beispiel wurde die Formulierung solch klassischer Probleme, wie des Dirichletschen Problems, allgemeiner gefaßt, und man begann mit der Schaffung einer Potentialtheorie auf neuer, bedeutend allgemeinerer Grundlage (N. Wiener, 1894–1964, u. a.). Den Begriff des korrekt (bzw. nicht korrekt) gestellten Cauchyschen Problems führte Hadamard schon Anfang des Jahrhunderts ein.
Die Systematisierung und Analyse verschiedener Typen von Gleichungen zweiter Ordnung sind — im wesentlichen durch I. G. Petrowski (1901–1973) — auf Gleichungssysteme übertragen worden. J. Leray (*1906, Frankreich) und J. P. Schauder (1896–1943, Polen) begannen erfolgreich mit der Anwendung topologischer Methoden.

9.2.12. Auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik wurde in der Zeit zwischen erstem und zweitem Weltkrieg weiter sowohl an der Ausarbeitung der theoretischen Probleme als auch an der Erweiterung des Anwendungsbereiches gearbeitet. Nach den Arbeiten S. N. Bernsteins, der die klassischen Grenzwertsätze verallgemeinerte und sich mit den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigte, wandten in der UdSSR A. N. Kolmogoroff[1]) und A. J. Chintschin systematisch Methoden aus der Theorie der reellen Funktionen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. A. N. Kolmogoroff gab auch eine Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung an.
Im Gegensatz zur Vorkriegszeit wurde die Arbeit auf dem Gebiet der mathematischen Statistik in der UdSSR nicht mehr mit im Vergleich zur Wahrscheinlichkeitstheorie geringerer Intensität betrieben. Außer in der Sowjetunion bildete sich eine wahrscheinlichkeitstheoretische Schule in Frankreich. An ihrer Spitze standen E. Borel, M. Fréchet, P. Lévy. In England und den USA stand traditionsgemäß die mathematische Statistik an erster Stelle (R. A. Fisher; A. Wald, 1902–1950, u. a.). Die Wahrscheinlichkeitstheorie war dort zweitrangig. Die Grundlagenfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden ganz allgemein sehr lebhaft diskutiert, vor

[1]) A. N. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933 (Ergebnisse der Mathematik, Bd. II, Nr. 3). (D. S.)

allem die von R. von Mises (1883—1953, Deutschland, dann USA) vorgeschlagene neue Variante einer Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als Grenzwert einer Folge relativer Häufigkeiten. Letztlich hat die v. Misessche Theorie, ungeachtet aller Versuche, sie zu vervollkommnen, der Kritik nicht widerstanden.[1])

9.2.13. Die Probleme, die mit den Grundlagen der Mathematik zusammenhängen, wurden in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen ebenfalls höchst lebhaft erörtert. Diese Diskussionen trugen zu einer schnellen Entwicklung der mathematischen Logik bei. L. E. J. Brouwer, der zunächst mit einer Kritik der Grundlagen der klassischen Mathematik hervorgetreten war (er negierte die Anwendbarkeit des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten in allen Betrachtungen, die sich auf unendliche Mengen beziehen), gab in den zwanziger Jahren in einer Reihe von Arbeiten eine ausführliche Darlegung der Grundlagen einer „intuitionistischen Mathematik". Für Brouwer wie auch für H. Weyl, den anderen bedeutenden Vertreter des Intuitionismus, ist die Mathematik nicht von der uns umgebenden und von uns wahrgenommenen Welt abhängig, sondern sie gründet sich auf kontemplative Betrachtung im Sinne des Kantschen Idealismus. Es zeigte sich indessen ein weiteres Mal, daß eine „Schöpfung des freien Geistes" ihrem wissenschaftlichen, ihrem objektiven Wesen nach in der den Menschen umgebenden materiellen Welt wurzelt. Von A. N. Kolmogoroff wurde ein den Regeln der intuitionistischen Logik entsprechender sogenannter „Problemkalkül" aufgebaut. Damit erhielt das Axiomensystem der intuitionistischen Logik, in dem der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt, eine Deutung als Axiomensystem einer Logik, die die Methoden der konstruktiven Lösung von Problemen studiert. Heutzutage wird der Ausdruck „intuitionistische Logik" immer mehr durch den Ausdruck „konstruktive Logik" ersetzt. Nach dem zweiten Weltkrieg entstand auf dieser Grundlage — nach den erforderlichen Präzisierungen — die sogenannte konstruktive Analysis oder konstruktive Richtung in der Mathematik, die durch eine ganze Reihe bedeutender Arbeiten repräsentiert wird.

9.2.14. Die mit den Antinomien der Mengenlehre und mit Existenzbeweisen nichtkonstruktiven Charakters verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden und dabei aus dem Schatz der klassischen Mathematik nichts preiszugeben — das war das erklärte Ziel von Hilbert und seinen Nachfolgern. Die Losung hieß: „Niemand kann uns mehr aus dem Paradies vertreiben, das Cantor uns geschaffen hat" (Hilbert). Einen Weg, um dieses Ziel zu erreichen, gab Hilbert nicht gleich an, erst Anfang der zwanziger Jahre hatte er ihn hinreichend klar herausgearbeitet. An die Spitze (sowohl logisch als auch chronologisch) wurde das Prinzip gestellt, daß die Widerspruchsfreiheit eines gewissen mathematischen Begriffs gleichbedeutend mit seiner Existenz ist. Damit wurde die Begründung einer mathematischen Theorie auf den Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit zurückgeführt, der natürlich a priori bezüglich dieser Theorie geführt werden muß. Für die Erhaltung des „Paradieses" der klassi-

[1]) Siehe dagegen C. P. Schnorr, *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Eine algorithmische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Lecture Notes Math. Bd. 218 (Berlin—Heidelberg—New York 1971). (D. S.)

sehen Mathematik wurde das Problem der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik wesentlich. Um einen Widerspruchsfreiheitsbeweis einwandfrei durchzuführen, d. h. nicht an irgendwelche intuitiv angenommenen Sätze zu appellieren, muß man die entsprechende Theorie formalisieren: Man muß ihre Sätze als Zeichenreihen aus bestimmten Symbolen, die frei von jeglicher konkreten Bedeutung sind, betrachten; man muß Regeln für die Kombination dieser Symbole aufstellen. Um die Widerspruchsfreiheit zu beweisen, muß man schließlich zeigen, daß man unter Anwendung dieser Regeln nie eine solche Kombination von Symbolen (Formel) erhalten kann, die in der gegebenen Theorie wahr ist und deren Negation ebenfalls wahr ist. Wegen der mit solchem Ideengut unvermeidlich verbundenen Formalisierung der Mathematik, wurde diese von Hilbert geführte Richtung als Formalismus bezeichnet. Weil jedoch der Kern der Sache im *Beweis* der Widerspruchsfreiheit liegt, ist für den Formalismus neben der Formalisierung der Mathematik eine Metamathematik notwendig — eine wissenschaftliche Disziplin, die eine „Beweistheorie" liefert. Durch die Ausarbeitung des mit diesen Ideen zusammenhängenden Problemkreises leisteten Hilbert und seine Schule sehr viel für die Entwicklung der mathematischen Logik.
Es fragt sich, warum wir in der Mathematik nicht die früheren Schwierigkeiten antreffen, die mit dem Unendlichen zusammenhängen. Die Hoffnungen der Formalisten gingen dahin, daß alle Sätze, darunter auch die das Unendliche betreffenden, in Form endlicher Axiome, endlicher Ableitungsregeln bzw. in Form von Sätzen mit endlichen Beweisen formuliert werden können. Deshalb war Hilbert der Meinung, daß man bei Beschränkung auf endliche („finite") Prozesse und Überlegungen auch die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik, dieser Basis der klassischen Analysis, würde zeigen können und daß für die entsprechend formalisierte Theorie das Entscheidungsproblem und das Vollständigkeitsproblem zu lösen sein wird. Zwei Resultate von K. Gödel (1906—1978, Österreich, dann USA) bedeuteten den Zusammenbruch dieser Hoffnungen und damit der gesamten Richtung:

1. Wir erinnern an die Definition der Vollständigkeit: Eine Theorie ist vollständig, wenn für jede in ihrer Sprache formulierbare Aussage A entweder A oder die Negation von A ein Satz der Theorie ist. Gödel zeigte nun 1931 folgendes: Ist eine Theorie widerspruchsfrei und sind die Axiome der formalisierten Arithmetik Sätze dieser Theorie, so ist die Theorie nicht vollständig.

2. Unter Benutzung der Unvollständigkeit der Arithmetik zeigte Gödel 1933, daß mittels finiter Prozesse im Sinne von Hilbert die Widerspruchsfreiheit einer beliebigen Theorie, welche die formalisierte Arithmetik enthält, nicht bewiesen werden kann. Das bedeutete, daß es in diesem Fall unmöglich ist, das *Entscheidungsproblem* zu lösen.

Diese Resultate sozusagen negativen Charakters zeigten die Eigentümlichkeit und andererseits auch die Wichtigkeit der Probleme der mathematischen Logik. Sie trugen neben den technischen Anwendungen der Logik dazu bei, daß das Interesse vieler Mathematiker sich diesem Gebiet zuwandte. Die mathematische Logik ist auch heute eine sich schnell entwickelnde mathematische Disziplin.

Mit Problemen der Grundlage der Mathematik hat sich — außer Intuitionisten und Formalisten — auch eine Gruppe sowjetischer Mathematiker beschäftigt, die sich bemühten, von den Prinzipien des dialektischen Materialismus auszugehen. Dazu gehören: A. N. Kolmogoroff, A. A. Markoff (*1903), P. S. Nowikow, S. A. Janowskaja (1896—1966) u. a. Sie kritisierten die idealistischen Konstruktionen der Intuitionisten und vieler Formalisten, die den Inhaltsreichtum der Mathematik aufzugeben bereit waren und die mathematischen Theorien als Resultat einer bloßen Übereinkunft[1]) betrachteten. Gleichzeitig erzielten sie wichtige Resultate zu allen wesentlichen Problemen, die mit den logischen Grundlagen der Mathematik in Zusammenhang stehen.

9.2.15. In den Jahren des zweiten Weltkrieges brach die wissenschaftliche Tätigkeit der Mathematiker nicht völlig zusammen, die Verluste waren jedoch außerordentlich groß. In den von den Hitlerfaschisten okkupierten Ländern war das wissenschaftliche Leben fast erloschen, und in Polen, der Tschechoslowakei und Jugoslawien drohte den Gelehrten, darunter auch den Mathematikern, gar physische Vernichtung, und viele sind umgekommen. Der internationale Verkehr der Mathematiker kam faktisch zum Erliegen, sogar zwischen den neutralen Staaten. Die junge Mathematikergeneration in der UdSSR, in geringerem Maße auch in den anderen Ländern der Antihitlerkoalition, erlitt bedeutende Verluste. In Deutschland und Italien setzte sich der Niedergang des mathematischen Potentials, der mit der Errichtung der faschistischen Regimes begonnen hatte, weiter fort.

9.3. Über die Mathematik nach 1945

9.3.1. Ganz im Gegensatz zu dem, was in den Jahren nach dem ersten Weltkrieg zu beobachten war, wurden die internationalen Verbindungen zwischen den Mathematikern nach 1945 schnell wieder hergestellt. Zweifellos trugen dazu die völlige Vernichtung der faschistischen Regimes, die gewachsene Rolle der Sowjetunion und das Anwachsen des sozialistischen Lagers bei. 1950 fand der erste internationale Mathematikerkongreß nach dem Kriege an der Harvard-Universität (USA) statt. Dort wurde eine Übereinkunft über die Wiederaufnahme der Tätigkeit der internationalen Mathematikervereinigung erzielt. Seitdem fanden die internationalen

[1]) Nicht alle, die sich den Formalisten in Fragen der Begründung der Mathematik anschlossen, waren Formalisten im mathematischen Sinn des Wortes. „Hilbert hat anscheinend stets an eine objektive mathematische ‚Wahrheit‘ geglaubt“ — diese Bemerkung von Bourbaki (siehe N. Bourbaki, *Éléments de histoire des mathématiques*, Paris 1969, S. 50) ist unserer Ansicht nach auch richtig, wenn man die Gänsefüßchen bei dem Wort Wahrheit wegläßt. Charakteristisch ist auch die folgende Bemerkung von Bourbaki (ebenda, S. 30): „Selbst in unserer Zeit findet man nicht einen von den einen unnachgiebigen Formalismus predigenden Mathematikern, der nicht in der Tiefe seines Ich gerne den Ausspruch von Hermite unterschriebe: ‚Ich glaube, daß die Zahlen und die Funktionen der Analysis keine freien Schöpfungen unseres Geistes sind; ich glaube vielmehr, daß sie außerhalb von uns mit derselben Notwendigkeit existieren wie die Objekte der realen Welt, und wir finden oder entdecken sie und studieren sie ganz genauso, wie dies die Physiker, Chemiker und Zoologen tun.‘“

Mathematikerkongresse regelmäßig statt: 1954 in Amsterdam, 1958 in Edinburgh, 1962 in Stockholm, 1966 in Moskau, 1970 in Nizza, 1974 in Vancouver, 1978 in Helsinki. Die Teilnehmerzahl übertraf schon an der Harvard-Universität den früheren Höchststand, in Moskau betrug sie ungefähr 4000. Die Zahl der mathematischen Publikationen in der Welt wuchs seit 1946 weiter exponentiell an.

Der Prozeß der Verzweigung der Mathematik in verschiedene Disziplinen setzte sich fort. Auf den internationalen Kongressen kommt das im Wachsen der Anzahl der Sektionen zum Ausdruck: Im Jahre 1966 in Moskau gab es deren 15, wobei einige von ihnen mit Erfolg in Untersektionen hätten aufgegliedert werden können. Diese Verzweigung der Mathematik brachte es mit sich, daß immer mehr mathematische Spezialzeitschriften entstanden, welche die Zeitschriften früheren Typs, in denen Arbeiten beliebiger Thematik veröffentlicht werden konnten, allmählich verdrängten.

Ebenso wichtig wie die allgemeinen mathematischen Kongresse wurden internationale Konferenzen und Symposien zu einzelnen Disziplinen und Gebieten. In den letzten Jahren hat man solche speziellen Konferenzen in verschiedenen Ländern im nationalen Maßstab durchgeführt. In der Sowjetunion z. B. gab es regelmäßig Konferenzen zur Algebra, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik und zur Geometrie. In der UdSSR entstand auch eine neue Form des Informationsaustausches, nämlich die „mathematischen Schulen“: Ein relativ kleines Kollektiv von Mathematikern kommt für zwei bis vier Wochen zusammen. In dieser Zeit hören sich die Teilnehmer kleine Lektionszyklen oder Gruppen von Vorträgen an, in denen ein bestimmter Fragenkreis systematisch erörtert wird. Auch in anderen Ländern bestehen solche Gruppen (D. S.).

Das schnelle Wachstum der Mathematik und der Zahl der Mathematiker hängt auch mit der Erweiterung und Vertiefung ihrer Anwendungsmöglichkeiten zusammen. Der Prozeß der Mathematisierung, der sich schon vor dem Krieg in verschiedenen Wissenschaften und angewandten Gebieten ziemlich klar abzeichnete, ging in zunehmendem Tempo weiter. Außer den für die Mathematik traditionellen Anwendungsgebieten, wie Physik, Mechanik, Astronomie, Ballistik, kann man jetzt auch auf die Chemie, Biologie, Linguistik, Psychologie und auf eine ganze Reihe ökonomischer und technischer Disziplinen verweisen. Alle diese neuen Anwendungen der Mathematik bringen neue Wechselwirkungen zwischen Mathematik und anderen Wissenschaften hervor, führen zu neuen Problemen und erfordern die Entwicklung neuer Methoden. Auch der Charakter des Einflusses der traditionellen Anwendungsgebiete auf die Mathematik bleibt nicht unverändert. Die Anforderungen an die Mathematik seitens der klassischen Himmelsmechanik waren seinerzeit durch Anforderungen der klassischen Physik (Randwertaufgaben der mathematischen Physik) in den Hintergrund gedrängt worden. Später verstärkte sich der Einfluß solcher nichtklassischer Teilgebiete der Physik wie Relativitätstheorie und Quantenmechanik auf die Entwicklung der Mathematik (die Quantenmechanik förderte die Entwicklung der Theorie der Operatoren im Hilbertraum und stärkte die Positionen der „linearen Mathematik“).

Oben wurde schon hervorgehoben, daß der Prozeß der Verzweigung, der Spezialisierung in der Mathematik sich immer weiter fortsetzte. In der Literatur kann man

aus diesem Grunde viele Klagen finden, in denen bedauert wird, daß jene Zeiten unwiderruflich vorbei sind, da ein einzelner die gesamte Mathematik überblicken konnte und — große Begabung vorausgesetzt — imstande war, auf allen mathematischen Gebieten zu arbeiten. Man darf indessen nicht übersehen, daß der Prozeß der Spezialisierung auch entgegengesetzte Reaktionen hervorruft.[1]) In der Mathematik selbst bemüht man sich immer mehr, die gemeinsamen Grundlagen verschiedener Theorien herauszuarbeiten. Aus den Arbeiten in dieser Richtung muß man die „Eléments de mathématique" von Nicolas Bourbaki hervorheben. N. Bourbaki ist das Pseudonym für eine Gruppe vorwiegend französischer Mathematiker, die in diesem Werk versucht, einen vollständigen Überblick über die gegenwärtige Mathematik zu geben. Man kann sich nicht vorstellen, daß dieses Werk, dessen Herausgabe vor mehr als 30 Jahren begonnen wurde, irgendwann einmal abgeschlossen sein wird. Indessen stellt es schon in seiner jetzigen Form (ca. 30 Bände) in der heutigen Literatur die einzige einheitlich aufgebaute Darstellung eines großen Teils der modernen Mathematik dar (ohne Anwendungen!). Dieses Werk hat auf die Entwicklung einiger wichtiger Gebiete einen bedeutenden Einfluß ausgeübt, z. B. auf die Entwicklung einer allgemeinen Theorie der linearen topologischen Räume.[2]) Auf dem Gebiet der Anwendungen wird in gewissem Maße die früher existierende Ähnlichkeit von naturwissenschaftlichem und mathematischem Denken auf einer engeren Basis wiederhergestellt. Man beobachtet bisweilen eine organische Synthese dieser Denkrichtungen: Es gibt viele Fälle, wo bei einer bisher nicht bekannten Anwendung eines fertigen mathematischen Apparats oder bei der Notwendigkeit der Entwicklung neuer mathematischer Hilfsmittel der Mathematiker — um mit den Worten von A. N. Kolmogoroff zu sprechen — sich selbst das Wesen des gegebenen Problems zu eigen macht und danach strebt, dafür ein adäquates mathematisches Modell zu finden. Es ist unbestritten, daß gerade in den letzten Jahrzehnten viele hervorragende Mathematiker Beträchtliches in der theoretischen Physik, in technischen und ökonomischen Disziplinen geleistet haben. 1947 wies P. S. Alexandroff mit voller Berechtigung darauf hin, daß Anzeichen einer neuen Wendung bei jener uralten Frage nach dem Wechselverhältnis von Theorie und Praxis im mathematischen Denken sichtbar werden: Es entstehen ganze Gebiete der Mathematik, in denen es nicht möglich ist, eine genaue Grenze zwischen mathematischen und physikalischen Fragestellungen zu ziehen.[3])
Auf diese Weise entstand auch ein neuer Typ von Mathematikern. Die Mathematik wird jetzt nicht nur von Akademikern (im achtzehnten Jahrhundert der vorherrschende Typ des Wissenschaftlers) und Universitätsprofessoren (der dominierende Typ des neunzehnten Jahrhunderts) repräsentiert, sondern auch von Mitarbeitern staatlicher oder (in den kapitalistischen Ländern) privater Forschungsinstitute und Forschungslaboratorien. Das hängt mit den neuen Organisationsformen der wissenschaftlichen Arbeit zusammen. Es gibt jetzt ingenieurwissenschaftlich aus-

[1]) Interessante Gedanken dazu äußert bereits Hilbert in seinem Pariser Vortrag „Mathematische Probleme", Göttinger Nachr. (1900). (*Anm. d. Übers.*)

[2]) Siehe N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* (Paris 1955). Über „Bourbaki" siehe P. R. Halmos, Scient. American, May 1957 (D. S.).

[3]) Utschen. Sap. Mosk. Gos. Univ. *91*, S. 27.

gerichtete Mathematiker, ökonomisch ausgerichtete usw. Sie forschen nicht mehr einzeln, wie früher, sondern in großen Kollektiven, die auch aktiv an der Lösung theoretischer Probleme teilnehmen.

9.3.2. Die geographische Verteilung des mathematischen Potentials hat sich gegenüber der Vorkriegszeit wesentlich verändert. Freilich bleiben die UdSSR und die USA nach wie vor die Länder, in denen alle wesentlichen Forschungsrichtungen in breitem Maße vertreten sind. Dabei wächst der Anteil der sowjetischen Mathematik, während der der USA etwas zurückgeht (sowjetische Arbeiten machen ungefähr ein Viertel aller mathematischen Publikationen aus). Die französische Mathematik hat ihren früheren Ruf in erheblichem Maße wiederhergestellt. Langsamer erhöht sich das mathematische Potential in Italien und den beiden deutschen Staaten. Die „Enteuropäisierung" schreitet weiter fort: Der Beitrag der japanischen Wissenschaftler gewinnt an Bedeutung. Es konsolidieren sich die mathematischen Zentren Indiens, Kanadas, Südamerikas, Chinas. Die Universitäten Australiens und Afrikas haben in ihrem Personalbestand ebenfalls Mathematiker, so daß erstmals in der Geschichte unserer Wissenschaft ihre Weiterentwicklung auf allen fünf bewohnten Kontinenten betrieben wird.
Die Ausbreitung der mathematischen Forschung über die ganze Welt bewirkt zusammen mit dem Anwachsen der Zahl der Wissensgebiete und der Beschleunigung der wissenschaftlichen Entwicklung überhaupt, daß das Verfolgen der Literatur auf dem jeweiligen Spezialgebiet für jeden Wissenschaftler eine komplizierte Aufgabe wird. Schon im achtzehnten Jahrhundert bemerkte d'Alembert die Nachteile, die sich aus dem Übergang von der einheitlichen wissenschaftlichen Sprache des mittelalterlichen Europa, dem Latein, zu den einzelnen Nationalsprachen ergaben. Er sah nämlich voraus, daß man in Zukunft gezwungen sein wird, um die wissenschaftliche Literatur zu verstehen, für das Studium von vier oder fünf Sprachen Zeit zu verlieren. Eine viel größere Komplikation als die Sprachschwierigkeiten bildet jedoch die außerordentlich rasche Zunahme der laufenden mathematischen Literatur. Wir zitierten zu diesem Problem Emil Artin (1898–1963, Deutschland, dann USA), einen der bedeutendsten Algebraiker unseres Jahrhunderts: „Die Schattenseiten der jetzigen Lage rühren von dem Anschwellen der Literatur her. Die Anzahl der jährlichen Publikationen ist so stark angewachsen, daß es keinem Mathematiker mehr möglich ist, auch nur die in seinem Spezialgebiet erscheinenden Arbeiten genau zu studieren, geschweige denn die in Nachbargebieten. Dazu kommt noch, daß es infolge der enormen Überlastung der Zeitschriften sehr lange dauert, bis eine mathematische Arbeit im Druck erscheint. Viele Mathematiker haben als Ausweg zu Vervielfältigungen von Seminarausarbeitungen gegriffen. Es kommt vor, daß einzelne mitunter sogar wichtige Ergebnisse überhaupt nicht zur Publikation gelangen, sondern nur mündlich auf Konferenzen verbreitet werden. Diesen unangenehmen Auswirkungen der Überschwemmung der Literatur wird einigermaßen entgegengearbeitet durch die Referatenzeitschriften. Ich muß gestehen, daß ich ohne diese Zeitschriften überhaupt nicht imstande wäre, auf dem laufenden zu bleiben".[1])

[1]) *The collected papers of Emil Artin* (Reading, Mass., 1965), S. 557–558.

In der Tat wurden die Referatenzeitschriften (die wichtigsten erscheinen in der UdSSR und in den USA) zu einer unentbehrlichen Hilfe für jeden Mathematiker, der die Entwicklung seiner Wissenschaft verfolgen will. In immer stärkerem Maße gibt man auch vorläufige Mitteilungen (sogenannte Preprints), Seminarausarbeitungen und Thesen von Konferenzen heraus. Dabei werden Vervielfältigungsverfahren angewendet, die einfacher und billiger sind als der gewöhnliche Druck. In der UdSSR erscheinen ferner regelmäßig Sammelbände von Übersetzungen der wichtigsten ausländischen Arbeiten (sbornik perewodow); in den USA werden russischsprachige Arbeiten ins Englische übersetzt. In vielen Ländern geht man dazu über, die wichtigsten ausländischen Zeitschriften vollständig zu fotokopieren. In der Sowjetunion entstand mit der Zeitschrift „Erfolge der mathematischen Wissenschaften“ (Uspechi matematitscheskich nauk) eine Zeitschrift neuen Typs, in der im wesentlichen Übersichtsartikel zu aktuellen Problemen veröffentlicht werden. In verschiedenen Ländern erscheinen Serien von Monographien zur Mathematik. Alle diese Anstrengungen werden unternommen, um „auf dem laufenden zu bleiben“ und nicht von dem Strom neuer Informationen überschwemmt zu werden. Die Effektivität dieser Bemühungen sinkt jedoch ab. In der Mathematik unserer Tage wird — wie in der gesamten modernen Wissenschaft — das Problem der Gewinnung, Verarbeitung und Speicherung von Informationen immer brennender. Die Hoffnung auf eine erfolgreiche Lösung dieses Problems gründet sich auf die Perspektiven des Einsatzes informationsverarbeitender Maschinen.

9.3.3. In den letzten zwei Jahrzehnten haben sich einige neue mathematische Disziplinen herausgebildet, alle früher entstandenen haben sich weiterentwickelt. Wir beschränken uns auf ein einziges Beispiel aus dem Bereich der „klassischen“ mathematischen Richtungen, welches gleichzeitig zeigt, welche tiefen Veränderungen auch in Gebieten vor sich gehen, die eine sehr lange Tradition haben. Die algebraische Geometrie war eine der tragenden Säulen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts, und vor allem italienische Gelehrte hatten sie um die Jahrhundertwende sehr weit vorangetrieben. Allerdings waren die neuen Resultate nicht immer streng genug begründet, und es war notwendig, beim Studium der immer wieder auftretenden „Singularitäten“ besonders zugeschnittene Methoden anzuwenden, was die Sache sehr kompliziert machte. Verschiedene solche Schwierigkeiten konnte man dadurch überwinden, daß man zu allgemeineren Problemstellungen überging und neue Begriffe und Methoden anwandte, die in anderen Gebieten der modernen Mathematik entstanden waren. Die frühere — oder wenn man so will — klassische algebraische Geometrie gründete sich auf die komplexe Funktionentheorie und arbeitete somit mit transzendenten Methoden, wobei auch nicht ganz strenge geometrische Überlegungen mit hineinspielten. Unter dem Einfluß der neuen (abstrakten) Algebra und angeregt durch Probleme aus der Theorie der diophantischen Gleichungen (Bestimmung von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten auf algebraischen Kurven) kam man zu dem Schluß, daß es zweckmäßig ist, die gesamte Problematik weiter zu fassen, d. h. nicht wie bisher vom Körper der komplexen Zahlen auszugehen, sondern von einem beliebigen Körper. So wurde in der Schule von E. Noether eine Umgestaltung der algebraischen Geometrie in Angriff genommen, die das Maß der in der abstrakten Algebra erzielten Strenge voll erreichte. Alle früher gewonnenen Resultate bekam man auf diesem Wege allerdings nicht. Dazu mußte man neue Methoden ausarbeiten, welche Ideen und Ergebnisse der algebraischen Topologie, die in den fünfziger Jahren als sogenannte homologischen Algebra entstanden war, heranzogen. Dank dieser Verbindung von algebraischen und topologischen Ideen hat man in der modernen abstrakten algebraischen Geometrie einen solchen Grad von Allgemeinheit der Ergebnisse (bei völlig strenger Begründung) erreicht, der mit früheren Mitteln völlig unerreichbar scheint. Ein typisches Beispiel dafür ist die in Arbeiten der letzten Jahre angegebene Verallgemeinerung der klassischen Formel von Riemann-Roch, die bereits wichtige Anwendungen in der Theorie der Randwertaufgaben für elliptische Differentialoperatoren findet.[1])

9.3.4. Viele der mathematischen Teilgebiete, die erst in den letzten zwanzig Jahren zu selbständigen Disziplinen wurden, werden unter die Kybernetik[2]) subsummiert. Das zeigt freilich, daß der Ausdruck „Kybernetik" noch recht verschwommen ist (es gibt dafür keine allgemein akzeptierte Definition; trotzdem existiert eine internationale Gesellschaft für Kybernetik, die seit 1956 schon einige internationale Kongresse zur Kybernetik organisiert hat). Einen bedeutenden Platz nehmen hier die Probleme ein, die mit dem Bau und der Anwendung elektronischer Rechenmaschinen zusammenhängen. Erst mit der Entwicklung der modernen Elektronik konnte man in den vierziger Jahren daran denken, Rechenmaschinen zu bauen, die im Verlauf einiger weniger Jahre zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für die Lösung der wichtigsten angewandten Probleme wurden. Außerdem beeinflußte diese Zäsur in der Rechentechnik die Entwicklung der Mathematik insgesamt: a) Die von früher her bekannten numerischen Methoden erfuhren eine Neubewertung von Grund auf. Diese Neubewertung berührte auch theoretische Methoden, wovon einige, die früher wegen des hohen numerischen Aufwandes keine praktische Bedeutung hatten, nunmehr für die Anwendung bedeutsam wurden. Dementsprechend veränderte sich die Forschungsthematik. b) Es entstand eine neue wissenschaftliche Disziplin — die Theorie und Praxis der Programmierung (von Algorithmen für Rechenmaschinen). c) Die neue Rechentechnik machte eine vollständig oder teilweise automatisierte Steuerung verschiedener Prozesse und die Modellierung von Prozessen und Erscheinungen mit einer Genauigkeit und in einem Rahmen möglich, die früher völlig unerreichbar waren. Dies hatte eine ungestüme Erweiterung des Anwendungsbereichs der Mathematik zur Folge und bewirkte eine Bereicherung und teilweise Umorientierung ihrer Forschungsthematik. d) Die modernen Rechenmaschinen können elementare logische Operationen mit derselben oder fast derselben Geschwindigkeit ausführen wie arithmetische Operationen, was neue Perspektiven des Zusammenwirkens von Mensch und Maschine eröffnet und den Charakter der wissenschaftlichen Arbeit selbst — in erster Linie natürlich der

---

[1]) Vgl. etwa M. Atiyah, *Global Aspects of the Theory of Elliptic Differential Operators*, Internationaler Mathematikerkongreß, Eingereichte Vortragsthesen (Moskau 1966), S. 8–14.

[2]) Name und Begriff eingeführt durch N. Wiener: *Cybernetics* (Paris 1948). (D. S.)

mathematischen — verändern kann. Die mit diesen Perspektiven verbundene Problematik kann heute erfolgreich in Angriff genommen werden. Um wieviel „mächtiger“ die Mathematik durch die moderne Technik wurde, zeigt der folgende Vergleich: „Nach äußerst vorsichtigen Schätzungen übertrifft der Umfang der in den letzten fünf Jahren (1962—1966. — I. P.) mittels elektronischer Rechenmaschinen durchgeführter Rechnungen mindestens um das fünffache den Umfang sämtlicher Berechnungen, die von der gesamten Menschheit seit Beginn ihrer Existenz bis 1945, dem Entstehungsjahr der ersten elektronischen Rechenmaschine, durchgeführt worden sind.“[1])

Zur Kybernetik kann man auch die eng mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik verbundene Informationstheorie zählen. Sie entwickelte sich aus der Lösung einzelner Probleme, die sich bei Übertragung von Telegrammen, Telefongesprächen usw. ergaben. In dem Maße, wie es gelang, hinreichend allgemeine Begriffe herauszuarbeiten (z. B. Information, Einheit der Information, Entropie, Negentropie, zufälliges Rauschen u. a. m.) und die Probleme so aufzubereiten und zu vereinfachen, daß sie eine mathematische Modellierung zuließen, wurde die Informationstheorie zu einer eigenständigen Disziplin. Charakteristisch für die Forschungen zur Informationstheorie ist die Beteiligung, genauer das schöpferische Zusammenwirken von Ingenieuren, Physikern und Mathematikern (vgl. 9.2.15.). Über Informationstheorie haben z. B. gearbeitet: Nyquist, Hartley, Shannon, R. Fisher, N. Wiener, A. N. Kolmogoroff, Szilard, Schrödinger, L. Brillouin u. a.

DieSpieltheorie (Theorie der „strategischen Spiele“), mit der sich schon E. Borel zu beschäftigen begann, entwuchs den Kinderschuhen mit dem Erscheinen der Monographie von J. von Neumann und dem Ökonomen O. Morgenstern „Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten“[2]) (1944). Auf die Jahre des zweiten Weltkrieges ist auch die Entstehung der Operationsforschung zu datieren, die zunächst für die Lösung militärischer Fragen Verwendung fand.

Auch Spieltheorie und Operationsforschung hängen direkt mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik zusammen. Obwohl sie schon in breitestem Maße angewendet werden, wird an ihren Grundlagen weiter intensiv gearbeitet. Dabei verwendet man auch hier die axiomatische Methode (ebenso in der Informationstheorie), um einen strengen Aufbau der Theorie zu gewährleisten. Die mathematische Logik wird ebenfalls zu den Untersuchungen auf diesen Gebieten herangezogen. Dabei ergibt sich die Notwendigkeit, mehrwertige und unendlichwertige Logiken zu entwickeln.

9.3.5. Der eben gegebene Überblick über die Nachkriegsperiode ist sehr fragmentarisch. Man könnte ihn wesentlich erweitern, aber man würde nie den Eindruck gewinnen, daß er vollkommen, daß er abgeschlossen ist. Die Ursache dafür ist nicht

---

[1]) Shurnal wytsch. mat. i mat. fis. 7 (1967), 963.

[2]) J. von Neumann — O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior* (deutsche Übersetzung Würzburg 1961, russische Übersetzung mit einem Anhang von N. N. Worobjow Moskau 1970; vgl. auch N. N. Worobjow, *Entwicklung der Spieltheorie* (Berlin 1975). — (*Anm. d. Übers.*)

nur die Menge an Material. In der gegenwärtigen Mathematik befinden sich alle wesentlichen Teilgebiete im Fluß, im Zustand dauernder Veränderung.[1])

„Vor unseren Augen verläuft der Prozeß einer qualitativen Veränderung der Mathematik; es werden enge Beziehungen zwischen Zweigen der Mathematik entdeckt, die früher weit voneinander entfernt zu sein schienen; neue mathematische Disziplinen entstehen. Die Schaffung der elektronischen Rechentechnik hat die Auffassungen von Grund auf verändert, die man von der Effektivität verschiedener mathematischer Verfahren hatte. Sie hat ferner den Anwendungsbereich der Mathematik in einem bisher nie gekannten Ausmaß erweitert. Die Beziehungen zwischen der Mathematik und den anderen Wissenschaften entwickeln sich ständig. Waren sie früher im wesentlichen auf Mechanik, Astronomie und Physik beschränkt, so dringen jetzt mathematische Methoden immer tiefer in die Chemie, Geologie, Biologie, Medizin, Ökonomie und Sprachwissenschaft ein. Allgemein bekannt ist die Rolle der Mathematik bei der Entwicklung neuer technischer Richtungen, wie Radioelektronik, Kernenergetik, Weltraumflug. Die alte Behauptung, daß die Mathematik die Königin der Wissenschaften sei, gewinnt somit einen um vieles tieferen Inhalt".[2]) [3])

---

[1]) Sehr lehrreich in dieser Beziehung ist die Geschichte jener 23 Probleme von Hilbert, mit deren Aufzählung D. J. Struik seine Betrachtungen über das neunzehnte Jahrhundert abschloß. Siehe dazu den Sammelband „Die Hilbertschen Probleme", Redaktion: P. S. Alexandroff, Moskau 1969. (Deutsche Übersetzung Leipzig 1971.)

[2]) Mat. sbornik *74* (116), wyp. 3 (1967), 324–325.

[3]) (D. S.) Über charakteristische Entwicklungen in der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts kann man sich u. a. weiter orientieren in:

G. Prasad, *Mathematical Research in the Last Twenty Years* (Berlin 1923),
J. P. La Salle – S. Lefschetz, *Recent Soviet Contributions to Mathematics* (New York 1962),
C. B. Boyer, *A history of mathematics* (New York 1968), Chapter XXVII,
C. Reid, *Courant in Göttingen und New York* (New York etc. 1976).
J. H. Ewing u. a., *American Mathematics from 1940 to the day before yesterday*, Amer. Math. Monthly *83* (1976), 503–516.
Nieuw Archief voor Wiskunde, 3[e] serie, *26*, No. 1 (Maart 1978).
Artikel über Brouwer, Schouten u. a. holländische Mathematiker in englischer Sprache.
E. Nagel – J. R. Newman, *Gödel's Proof* (New York 1958).
J. A. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique I* (Paris 1974),
T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration, its origin and development* (Madison, Wisc. – London 1970),
A. F. Monna, *Functional analysis in historical perspective* (Utrecht 1973),
J. van Heyenoort, *From Frege to Gödel, A source book in mathematics 1870–1931* (Cambridge, Mass., 1967),
J. Dieudonné, *Recent development in mathematics*, Amer. Math. Monthly *71* (1964), 239–248,
sowie in Lebensberichten hervorragender Mathematiker wie
P. Lévy u. a., *La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard* (Genève 1967),
H. Weyl, *In memory of Emmy Noether*, Scripta mathematica *3* (1935), 201–220,
A. Dick, *Emmy Noether 1882–1935*, Elemente der Mathematik, Beiheft 13 (1970),
S. S. Chern – C. Chevalley, *Elie Cartan and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. *58* (1952), 217–250,
The work of J. v. Neumann, ibid., May 1958, 130 S.,
N. Levinson, *Wiener's life*, ibid. *72* (1968), 1–32,
und in den bereits zitierten Büchern von Hilbert, Weyl, Boyer und Kline.

Namenverzeichnis