Studienbücherei

P. Schreiber

Theorie der geometrischen Konstruktionen

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Studienbücherei

Theorie der geometrischen Konstruktionen

P. Schreiber

Mit 84 Abbildungen

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1975

Verlagslektor: Dipl.-Math. K. Bratz
Umschlaggestaltung: R. Wendt

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/197/75
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 74 Altenburg
LSV 1044
Bestellnummer: 570 181 2
EVP 18,80 Mark

Vorwort

Die Geometrie hat von Anbeginn eine besondere Rolle als Übungsfeld für neue wissenschaftliche Methoden und Denkweisen gespielt. Den Griechen lieferte sie das Material für den ersten Versuch einer deduktiven Theorie. Die Untersuchungen über die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms bildeten den Ausgangspunkt für die heute meist als „Grundlagen der Mathematik", „mathematische Logik" oder „Metamathematik" bezeichnete Methodologie der deduktiven Wissenschaften. Die Elementargeometrie ist wegen der Anschaulichkeit ihrer Sachverhalte und der Fülle ihrer jedermann vertrauten Begriffe auch ein beliebtes Beispielmaterial für die Technik des Definierens und Beweisens in formalisierten Sprachen geworden.

Der Leser würde auch ohne dieses Vorwort bald bemerken, daß es auch in diesem Buch nicht primär um Geometrie selbst geht, sondern darum, recht allgemeine und sehr aktuelle Züge der gegenwärtigen mathematischen Forschung am Beispiel der geometrischen Konstruktionen zu erläutern. Die klassische Theorie der geometrischen Konstruktionen hat sich im wesentlichen darauf beschränkt, mit meist algebraischen Methoden diejenigen Punkte (einer euklidischen, projektiven, hyperbolischen o. ä. Ebene) zu charakterisieren, die mit bestimmten Konstruktionsmitteln aus gegebenen Punkten erhalten werden können. Ihre Resultate geben einerseits Anlaß zu allgemeinen Methoden zur Lösung von (lösbaren) Konstruktionsaufgaben und ermöglichen es andererseits, die Unlösbarkeit gewisser Konstruktionsaufgaben mit bestimmten Instrumenten zu beweisen. Einsichtige Geometer haben jedoch schon seit EUKLID gespürt, daß die Lösung von Konstruktionsaufgaben viel mehr mit dem Führen von Beweisen als mit wirklichem Konstruieren zu tun hat: Löst man eine Konstruktionsaufgabe, so hat man dabei mehreres zu beweisen, zumindest, daß das Resultat der Konstruktion wirklich die verlangten Eigenschaften hat. Kann man andererseits zum Beispiel eine Konstruktion der Parallelen durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden angeben, so hat man damit doch wohl die Existenz einer solchen Parallelen bewiesen? Im vorliegenden Buch wird erstmals systematisch dieser beweistheoretische Aspekt der geometrischen Konstruktionen untersucht. Gleichzeitig wird präzisiert, in welchem Sinne exakte Konstruktionsbeschreibungen Algorithmen eines bestimmten Typs sind und welche Rolle die willkürliche Wahl von Hilfspunkten bei Konstruktionen spielt. Insofern unterscheidet sich dieses Buch grundsätzlich von allen älteren und neueren Lehrbüchern zum Thema „Geometrische Konstruktionen“. In bezug auf die Mannigfaltigkeit geometrischer Beispiele und Einzelresultate ist keine auch nur annähernde Vollständigkeit angestrebt worden. Jedoch wird so viel an Fakten aus der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen vermittelt, wie nach Ansicht des Verfassers heute zur Allgemeinbildung eines geometrisch interessierten Mathematikers gehören sollte.

Im ersten Teil sind alle für die eigentliche Theorie benötigten Hilfsmittel und Kenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik zusammengestellt, so daß das Buch bereits Lesern mit geringen mathematischen Vorkenntnissen zugänglich ist. Jedoch wurden Dinge, die bei den meisten Lesern als bekannt vorausgesetzt werden können, gedrängt und weitgehend ohne Beweise behandelt, während einige weniger geläufige Gebiete ausführlich dargestellt wurden. Weitgehend neu ist in diesem Teil insbesondere das Konzept der nichtelementaren Sprache und Theorie und die hierauf aufgebaute allgemeine Theorie der Definitionen in formalisierten Sprachen.

Die Kapitel 7 und 8 des zweiten Teils bilden das Kernstück der (bisher unveröffentlichten) eigenen Arbeiten des Verfassers über den Zusammenhang zwischen zwei bisher voneinander unabhängigen Gebieten aktueller mathematischer Forschung: der Semantik beliebiger Programmiersprachen einerseits und der Logik konstruktiver Beweise andererseits. Im dritten Teil werden einige Teilgebiete der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen vom Standpunkt der im zweiten Teil dargelegten allgemeinen Theorie neu aufgebaut. Der geplante zweite Band wird sich darüber hinaus mit folgenden Themen beschäftigen:

— Konstruktionen auf nichteuklidischen Flächen, insbesondere auf Kugeloberflächen und in hyperbolischen Ebenen,
— Optimierung geometrischer Konstruktionen,
— Konstruktionen mit beschränkten Instrumenten und in beschränkten Teilen euklidischer Ebenen,
— Näherungskonstruktionen.

Ich bin mir dessen bewußt, daß der nun vorliegende erste Band weit mehr Fragen aufwirft, als er beantwortet. Möge er viele Leser anregen, an der Beantwortung dieser Fragen und der Tilgung von Mängeln mitzuwirken, insbesondere die Grundgedanken auf andere Gebiete der Mathematik zu übertragen. Dank schulde ich vor allem meinem verehrten Lehrer und Freund, Herrn Prof. Dr. G. Asser, ohne dessen Förderung dieses Buch weder begonnen noch beendet worden wäre. Mein Dank gilt weiterhin dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, insbesondere der Lektorin, Frau Dipl.-Math. K. Bratz, sowie den Mitarbeitern des VEB Druckhaus „Maxim Gorki“ für ihre sorgfältige Arbeit.

Stralsund, im April 1973 Peter Schreiber

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Hilfsmittel

1. Mengen, Relationen, Abbildungen 11

2. Axiomatische Theorien, formalisierte Sprachen, Modelle 17

2.1. Aussagen und Aussageformen 18
2.2. Formalisierte Sprachen 22
2.3. Interpretationen, Modelle, elementare und nichtelementare Theorien 24
2.4. Abkürzungen in formalisierten Sprachen 31
2.5. Definitionen in formalisierten Sprachen 33

3. Abbildungsgruppen und Invarianten 46

4. Algebra 52

4.1. Ringe und Körper 52
4.2. Polynome 57
4.3. Adjunktion, komplexe Zahlen 63
4.4. Quadratwurzelausdrücke, Radikale, Lösungsformeln für Gleichungen 66

5. Ebene Geometrie 74

5.1. Affine Inzidenzebenen 74
5.2. Projektive Inzidenzebenen 79
5.3. Affine Ebenen 81
5.4. Affine Abbildungen 89
5.5. Projektive Ebenen, projektive Koordinaten und projektive Abbildungen 94
5.6. Euklidische Ebenen 99
5.7. Kreise, platonische Ebenen 103

6. Graphen, Flußdiagramme, Algorithmen 108

Teil II. Allgemeine Theorie der geometrischen Konstruktionen

7. Konstruktionsinstrumente 121

7.1. Reale und ideale Konstruktionsmittel 121
7.2. Logische Analyse und Klassifikation von Instrumentensätzen 123

8. Konstruktionen 136

8.1. Konstruktionsaufgaben 136
8.2. Elementare Konstruktionen 144
8.3. Elementar entscheidbare Relationen 154
8.4. Nichtelementare Konstruktionen und Entscheidungen 158
8.5. Konstruktionen mit konstruktiver Auswahl 166
8.6. Konstruktionen mit Hilfselementen 171
8.7. Lösungen von Konstruktionsaufgaben, Äquivalenz von konstruktiven Teiltheorien, Instrumentensätzen und Figuren 178

9. Algebraische Analyse 183

9.1. Algebraische Konstruktionsaufgaben 183
9.2. Geometrische Ausführung der vier Grundrechenarten und der Wurzeloperationen
9.3. Algebraische Analyse geometrischer Konstruktionsinstrumente 197
9.4. Algebraische Analyse und Klassifikation von Konstruktionsaufgaben, Unmöglichkeitsbeweise 208

10. Abriß der Geschichte der geometrischen Konstruktionen 218

Teil III. Konstruktionen in affinen und euklidischen Ebenen

11. Das Lineal in affinen Ebenen 225

12. Das Eichmaß in euklidischen Ebenen 247

13. Äquivalenz von Instrumentensätzen zu Zirkel und Lineal 252

13.1. Der Satz von Poncelet-Steiner und verwandte Sätze 252
13.2. Der Satz von Mohr-Mascheroni 265

14. Konstruktionen dritten und höheren Grades 277

Literaturverzeichnis 291

Namen- und Sachverzeichnis 292

Teil I. Hilfsmittel

1. Mengen, Relationen, Abbildungen

Es wird vorausgesetzt, daß der Leser mit den Grundbegriffen der Mengenlehre vertraut ist. Die folgende summarische Behandlung dient der Abgrenzung der benötigten Begriffe und der Verständigung über die verwendeten Bezeichnungen.

Die Bezeichnung $x \in M$ bedeutet: Das (materielle oder abstrakte) Ding x ist *Element* der Menge M; $x \notin M$ bedeutet: x ist nicht Element von M; $x_1, \dots, x_n \in M$ bedeutet: $x_1 \in M$ und ... und $x_n \in M$. Für Mengen M, N gilt $M = N$ genau dann, wenn M und N die gleichen Elemente enthalten. Eine Menge ist also durch Angabe ihrer Elemente eindeutig bestimmt und unabhängig von der zufälligen Beschreibung dieser Elemente oder der Reihenfolge ihrer Aufzählung. Mit $\{x : E(x)\}$ bezeichnen wir die Menge aller Dinge x, die die Eigenschaft $E(x)$ haben. Endliche Mengen (und nur solche) können auch durch vollständige Aufzählung ihrer Elemente angegeben werden: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ist die Menge, die die Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$ und keine anderen enthält. In einer solchen Aufzählung dürfen Elemente mehrfach vorkommen, obwohl man dies in der Regel vermeidet, sie werden dann aber nur einmal als Element der betreffenden Menge gewertet. Die Bezeichnung $M \subseteqq N$ bedeutet: Die Menge M ist *Teilmenge* der Menge N, d. h., jedes Element von M ist auch Element von N. Insbesondere ist stets $M \subseteqq M$. Dagegen bedeutet $M \subset N$: M ist *echte* Teilmenge von N, d. h. $M \subseteqq N$ und $M \neq N$.

Es zeigt sich, daß die uneingeschränkte Bildung von Mengen, d. h. die Zusammenfassung aller Dinge mit einer irgendwie formulierbaren gemeinsamen Eigenschaft zu einer Menge, zu logischen Widersprüchen führt. In der axiomatischen Mengenlehre wird ausführlich untersucht, wie man die Mengenbildung einschränken muß, um diese Widersprüche zu vermeiden und gleichzeitig die praktische Handhabung der Mengenlehre nicht wesentlich zu behindern. Insbesondere gibt es eine Reihe von unproblematischen Mengen, z. B. alle endlichen Mengen (darunter die *leere* Menge $\emptyset$, die kein Element enthält), die Menge der natürlichen Zahlen und andere Mengen, die in der Mathematik eine wichtige Rolle spielen, sowie eine Reihe von Operationen im Bereich der Mengen, deren Anwendung erfahrungsgemäß nicht zu Widersprüchen führt. Die für uns wichtigsten Operationen dieser Art sind:

$$
\begin{array}{lll}
M \cup N & := \{x\colon x \in M \text{ oder } x \in N\} & (\textit{Vereinigung}),\\
M \cap N & := \{x\colon x \in M \text{ und } x \in N\} & (\textit{Durchschnitt}),\\
M \setminus N & := \{x\colon x \in M \text{ und } x \notin N\} & (\textit{Differenz}),\\
2^M & := \{N\colon N \subseteqq M\} & (\textit{Potenzmenge}).
\end{array}
$$

Ist M ein *Mengensystem*, d. h. eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, so sei

$$\bigcup M := \{x\colon \textit{Es gibt ein } N, \textit{ so daß } x \in N \textit{ und } N \in M\},$$

$$\bigcap M := \{x\colon \textit{Für alle } N \textit{ gilt: Wenn } N \in M, \textit{ so } x \in N\}, \textit{ falls } M \neq \emptyset.$$

Ist $M = \{N\colon E(N)\}$, so schreiben wir zuweilen $\bigcup\limits_{E(N)} N$ für $\bigcup M$ und analog $\bigcap\limits_{E(N)} N$ für $\bigcap M$.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebige nicht notwendig verschiedene Dinge, so kann man aus ihnen das *geordnete System* $(x_1, \ldots, x_n)$ (häufig *n-tupel* und in den Spezialfällen $n = 2, 3, 4$ *geordnetes Paar, Tripel* bzw. *Quadrupel* genannt) bilden. Diese neuen Objekte sind so zu verstehen, daß $(x_1, \ldots, x_n)$ durch Angabe seiner *Komponenten* $x_1, \ldots, x_n$ und deren Reihenfolge eindeutig bestimmt ist, d. h.

(1) $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ *genau dann, wenn* $x_i = y_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$.[1])

Aus Mengen $M_1, \ldots, M_k$ kann nun das *kartesische Produkt* gebildet werden:

$$M_1 \times \cdots \times M_k := \{(x_1, \ldots, x_k)\colon x_1 \in M_1 \textit{ und } \ldots \textit{ und } x_k \in M_k\},$$

insbesondere

$$M^n := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}} \text{ für } n \geqq 2.$$

Für $1 \leqq k, j \leqq n$ sind die Mengen

$$(M_1 \times \cdots \times M_k) \times (M_{k+1} \times \cdots \times M_n),$$
$$(M_1 \times \cdots \times M_j) \times (M_{j+1} \times \cdots \times M_n),$$
$$M_1 \times \cdots \times M_n$$

im allgemeinen[2]) paarweise verschieden, jedoch vermöge der umkehrbar eindeutigen Zuordnung

$$\big((x_1, \ldots, x_k), (x_{k+1}, \ldots, x_n)\big) \Leftrightarrow \big((x_1, \ldots, x_j), (x_{j+1}, \ldots, x_n)\big)$$
$$\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$$

---

[1]) Vom Standpunkt der axiomatischen Mengenlehre erfordert die Bildung von n-tupeln keinen neuen Grundbegriff. Man kann analog zu $\cup$, $\cap$ usw. auf mannigfache Weise n-stellige Mengenoperationen $(\ ,\ldots,\ )$ definieren, so daß (1) gilt. Die konkret benutzte Definition kann aber, sobald man mit ihrer Hilfe (1) bewiesen hat, wieder „vergessen" werden, da man immer nur (1) benutzt.

[2]) Für welches j eventuell $(M_1 \times \cdots \times M_j) \times (M_{j+1} \times \cdots \times M_n) = M_1 \times \cdots \times M_n$ ist, hängt von der speziellen Wahl einer Definition für n-tupel ab (vgl. [1])), die im allgemeinen induktiv aus einer Definition des Begriffs des geordneten Paares abgeleitet wird.

zwischen ihren Elementen als nicht wesentlich verschieden anzusehen. Wir werden diese Mengen im folgenden häufig stillschweigend identifizieren, d. h. die eine durch die andere ersetzen.

Eine beliebige Teilmenge von $M_1 \times \cdots \times M_n$ heißt eine $M_1 \times \cdots \times M_n$-*Relation*. Die Teilmengen von M^n nennen wir *n-stellige Relationen in M*. Zweistellige Relationen heißen auch *binäre* Relationen. In manchen Zusammenhängen ist es zweckmäßig, Teilmengen von M als einstellige Relationen in M anzusehen.

Ist R eine $M_1 \times \cdots \times M_n$-Relation ($n \geqq 2$), π eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$, so sei

$$R^\pi := \{(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) \colon (x_1, \ldots, x_n) \in R\};$$

R^π ist dann eine $M_{\pi(1)} \times \cdots \times M_{\pi(n)}$-Relation. Insbesondere heißt R^π im Fall $n = 2$, $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 1$ die *zu R inverse* Relation und wird auch mit R^{-1} bezeichnet.

Ist R eine Relation und M eine Menge (eventuell kartesisches Produkt gewisser anderer Mengen), so heißt die Relation $R \times M$ eine *formale Ausdehnung* der Relation R. Sie ist eine Relation, deren Stellenzahl gegenüber R um k erhöht ist, wenn M ein k-faches kartesisches Produkt ist. Ist M bekannt, so kann man offenbar R aus $R \times M$ zurückgewinnen. Daher ist die formale Ausdehnung in diesem Fall als nicht wesentlich verschieden von R anzusehen. Da auch alle permutierten Relationen R^π im wesentlichen die gleiche Information wie R enthalten, kann man unter Berücksichtigung der entsprechenden Identifikationen zu je endlich vielen Relationen ein kartesisches Mengenprodukt P finden, so daß alle diese Relationen als Teilmengen von P aufgefaßt werden können.

Es sei R eine binäre Relation in M, d. h. $R \subseteqq M^2$. Wir definieren:

R reflexiv in M $:\leftrightarrow$ *Für alle $x \in M$ gilt: $(x, x) \in R$,*

R irreflexiv in M $:\leftrightarrow$ *Für kein $x \in M$ gilt: $(x, x) \in R$,*

R symmetrisch $:\leftrightarrow$ *Für alle x, y gilt: Wenn $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R$,*

R antisymmetrisch $:\leftrightarrow$ *Für alle x, y gilt: Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so $x = y$,*

R transitiv $:\leftrightarrow$ *Für alle x, y, z gilt: Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so $(x, z) \in R$,*

R vergleichend in M $:\leftrightarrow$ *Für alle $x, y \in M$ gilt: $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ oder $x = y$,*

R reflexive Ordnung in M $:\leftrightarrow$ *R reflexiv in M und R antisymmetrisch und transitiv,*

R irreflexive Ordnung in M $:\leftrightarrow$ *R irreflexiv in M und R transitiv*

R reflexive Totalordnung in M $:\leftrightarrow$ *R reflexive Ordnung in M und R vergleichend in M,*

R irreflexive Totalordnung in M $:\leftrightarrow$ *R irreflexive Ordnung in M und R vergleichend in M,*

R Äquivalenzrelation in M $:\leftrightarrow$ *R reflexiv in M und R symmetrisch und transitiv.*

Ist R eine reflexive Ordnung in M, so ist $R \setminus \{(x, x) \colon x \in M\}$ eine irreflexive Ordnung in M. Ist R' eine irreflexive Ordnung in M, so ist $R' \cup \{(x, x) \colon x \in M\}$ eine reflexive Ordnung in M. Beim Übergang in beiden Richtungen gehen Totalordnungen in Totalordnungen über. Wir sprechen im folgenden von der reflexiven bzw. irreflexiven Form ein und derselben Ordnung. Konkrete Ordnungsrelationen werden meist durch $\leqq$ (reflexiv), $<$ (irreflexiv) oder ähnlich gestaltete Zeichen notiert, d. h., man schreibt z. B. $x \underset{(R)}{<} y$ statt $(x, y) \in R$. Analog benutzen wir $\sim$, $\cong$, $\triangleq$ und ähnliche Zeichen für spezielle Äquivalenzrelationen.

Ist R eine Äquivalenzrelation in M, so sei $\bar{x}^{(R)} := \{y\colon (x,y) \in R\}$ für $x \in M$ die *Äquivalenzklasse von x bezüglich R*. Falls aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Äquivalenzrelation es sich handelt, schreiben wir kurz $\bar{x}$ und Äquivalenzklasse. Das Mengensystem $M_R := \{\bar{x}\colon x \in M\}$ ist dann eine sogenannte *Zerlegung* der Menge M, d. h., es gilt

$$\bigcup M_R = M;\quad N \neq \emptyset \text{ für } N \in M_R;\quad A \cap B = \emptyset \text{ für } A, B \in M_R \text{ mit } A \neq B.$$

Ist umgekehrt Z eine Zerlegung von M, d. h. ein Mengensystem mit diesen drei Eigenschaften, so ist

$$R_Z := \{(x, y)\colon \textit{es existiert ein } A \in Z, \textit{ so daß } x, y \in A\}$$

eine Äquivalenzrelation in M. Dabei gilt $M_{R_Z} = Z$ und $R_{M_R} = R$, d. h., die Zerlegungen einer Menge entsprechen umkehrbar eindeutig den Äquivalenzrelationen in dieser Menge.

Eine zweistellige $M \times N$-Relation R heißt eine *Abbildung aus M in N* oder eine *partielle $M \to N$-Operation*, wenn es zu jedem $x \in M$ höchstens ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt. Ist R Abbildung, so schreiben wir statt $(x, y) \in R$ auch $y = R(x)$. Ist F eine Abbildung aus M in N, so sei

$D_F := \{x\colon$ *es existiert ein y mit* $(x, y) \in F\}$ (*Definitionsbereich von F*);

$W_F := \{y\colon$ *es existiert ein x mit* $(x, y) \in F\}$ (*Wertebereich von F*).

Ist $D_F = M$, so nennen wir F eine Abbildung *von M* (statt aus M) bzw. lassen das Beiwort partiell fort, falls wir F als Operation bezeichnen. Ist $W_F = N$, so nennen wir F eine Abbildung *auf N* (statt in N). Ist F eine Abbildung, so kann F^{-1} als Relation immer gebildet werden. Ist F^{-1} ebenfalls eine Abbildung, so heißt F eine *eineindeutige* bzw. *umkehrbar eindeutige* Abbildung und F^{-1} die *zu F inverse Abbildung*.

Neben den Operationen bzw. Abbildungen, die nach obiger Definition immer eindeutig sind, benötigen wir im folgenden manchmal sogenannte *endlichvieldeutige* Operationen. Hierunter verstehen wir eine binäre Relation F mit der Eigenschaft, daß zu jedem x höchstens endlich viele y mit $(x, y) \in F$ existieren. Sind $y_1, \ldots, y_n$ die sämtlichen y mit $(x, y) \in F$, so schreiben wir zuweilen $F(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ und sinngemäß $y \in F(x)$ statt $(x, y) \in F$. Dahinter steckt der Sachverhalt, daß man jede endlichvieldeutige $M \to N$-Operation auch als eine Abbildung aus M in die Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von N auffassen kann.

Die Begriffe Definitions- und Wertebereich übertragen sich wörtlich auf endlichvieldeutige Operationen. Die *Verkettung* (*Hintereinanderausführung*) definieren wir für endlichvieldeutige Operationen F, G durch

$$F \cdot G := \{(x, z) \colon \textit{es existiert ein } y \textit{ mit } (x, y) \in G \textit{ und } (y, z) \in F\}.$$

Die übliche Verkettung von Abbildungen ergibt sich hieraus als Spezialfall.

Unter einer *n-stelligen* Abbildung bzw. Operation verstehen wir eine Abbildung aus einer Menge der Form $M_1 \times \cdots \times M_n$. Insbesondere bezeichnen wir eine Abbildung aus M^n in M kurz als n-stellige (partielle) *Operation in* M. Unter Benutzung spezieller Namen für die Elemente der beteiligten Mengen verwenden wir zuweilen auch Redeweisen wie „Punkt$^2 \to$ Geraden-Operation" und ähnliche. Hiermit ist gemeint, daß es sich in bezug auf eine bestimmte Ebene um eine $P^2 \to G$-Operation handelt, wobei P die Menge aller Punkte und G die Menge aller Geraden dieser Ebene ist.

Es seien $M_1, \ldots, M_n$ beliebige nichtleere paarweise disjunkte Mengen. Eine *Relation im Bereich* dieser Mengen ist eine Relation R mit $R \subseteqq M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_k}$ für gewisse $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Das k-tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ heißt dann die *Signatur* $s(R)$ von R. Analog sei für eine (partielle) $M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_k} \to M_j$*-Operation* F *im Bereich* dieser Mengen die Signatur $s(F)$ durch $(i_1, \ldots, i_k; j)$ definiert. Für $c \in M_j$ $(j \leqq n)$ sei schließlich $s(c)$ die Zahl j.

Sind $R_1, \ldots, R_m$ Relationen, $F_1, \ldots, F_p$ partielle Operationen im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ und $c_1, \ldots, c_q$ Elemente aus $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$, so heißt

$$\mathfrak{S} = (M_1, \ldots, M_n, R_1, \ldots, R_m, F_1, \ldots, F_p, c_1, \ldots, c_q)$$

eine *n-sortige Struktur* (über den *Grund-* oder *Trägermengen* $M_1, \ldots, M_n$). Dabei ist auch $m = 0, p = 0, q = 0$ zugelassen, jedoch sei immer wenigstens eine dieser Zahlen von Null verschieden. Die Signatur einer derartigen Struktur wird definiert durch

$$s(\mathfrak{S}) := \big(n, m, p, q, s(R_1), \ldots, s(R_m), s(F_1), \ldots, s(F_p), s(c_1), \ldots, s(c_q)\big).$$

Es seien

$$\mathfrak{S} \;= (M_1, \ldots, M_n; R_1, \ldots, R_m, F_1, \ldots, F_p, c_1, \ldots, c_q),$$

$$\mathfrak{S}' = (M_1', \ldots, M_n'; R_1', \ldots, R_m', F_1', \ldots F_p', c_1', \ldots, c_q')$$

Strukturen gleicher Signatur. Eine eineindeutige Abbildung φ von $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ auf $\bigcup_{i=1}^{n} M_i'$ heißt ein *Isomorphismus* von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, wenn gilt:

(1) Für $i = 1, \ldots, n$ ist die Einschränkung von φ auf M_i eine eineindeutige Abbildung von M_i auf M_i'.

(2) Für $i = 1, \ldots, m$ gilt: Ist $s(R_i) = s(R_i') = (i_1, \ldots, i_k)$ und $x_j \in M_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, k$, so ist $(x_1, \ldots, x_k) \in R_i$ genau dann, wenn $\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big) \in R_i'$.

(3) Für $i = 1, \ldots, p$ gilt: Ist $s(F_i) = s(F_i') = (i_1, \ldots, i_k; r)$ und $x_j \in M_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, k$, so existiert $F_i(x_1, \ldots, x_k)$ genau dann, wenn $F_i'\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big)$ existiert, und im Fall der Existenz ist $F_i'\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big) = \varphi\big(F_i(x_1, \ldots, x_k)\big)$.

(4) Für $i = 1, \ldots, q$ gilt: $\varphi(c_i) = c_i'$.

(Der Leser überprüfe, daß (3) sich als Spezialfall von (2) ergibt, wenn man die k-stellige partielle Operation F_i, wie oben erklärt, als $(k+1)$-stellige Relation auffaßt.)

Die Struktur $\mathfrak{S}$ heißt *isomorph* zur Struktur $\mathfrak{S}'$, wenn ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$ existiert. Es gilt:

(5) Die identische Abbildung von $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ auf sich ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}$.

(6) Ist φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, so ist φ^{-1} ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}'$ auf $\mathfrak{S}$.

(7) Ist φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$ und ψ ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}'$ auf $\mathfrak{S}''$, so ist $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}''$.

(5), (6), (7) bedeuten zusammen, daß die Isomorphie in jeder Menge von Strukturen eine Äquivalenzrelation ist. Insbesondere berechtigt (6) dazu, (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) von *zueinander isomorphen* Strukturen zu sprechen.

Isomorphe Strukturen sind vom Standpunkt der Mathematik nicht wesentlich verschieden. Diesen Satz kann man als implizite Definition der Bedeutung des Wortes „wesentlich“ auffassen, andererseits aber auch als eine Charakterisierung der Mathematik gegenüber anderen Wissenschaften, denn gerade das Abstrahieren von der konkreten Beschaffenheit der betrachteten Dinge ist entscheidend für die Abgrenzung der mathematischen Methode in der Wissenschaft.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{E}$ irgendeine euklidische Ebene, P die Menge ihrer Punkte, G die Menge ihrer Geraden, wobei eine Gerade zunächst nicht notwendig als Menge der auf ihr liegenden Punkte aufzufassen ist, sondern als ein Ding einer „zweiten Sorte von Dingen“, das zu den Dingen erster Sorte, den Punkten, in der durch „liegt auf“ ausgedrückten sogenannten *Inzidenzrelation* R stehen kann. (P, G, R) ist eine Struktur der Signatur $s = (2, 1, 0, 0, (1, 1))$. Für $g \in G$ sei $\bar{g} := \{p : p \in P$ *und* p *liegt auf* $g\}$, und es sei $\bar{G} := \{\bar{g} : g \in G\}$. Offenbar ist $(P, \bar{G}, \in)$ ebenfalls eine Struktur der Signatur s. Wir definieren nun eine Abbildung φ durch $\varphi(p) := p$ für $p \in P$ und $\varphi(g) := \bar{g}$ für $g \in G$. Unter der Voraussetzung

(8) *Auf jeder Geraden g liegen wenigstens zwei Punkte, und durch je zwei Punkte geht höchstens eine Gerade*

können wir zeigen, daß φ die Menge G eineindeutig auf $\bar{G}$ abbildet: Ist nämlich $\varphi(g_1) = \bar{g}$ und $\varphi(g_2) = \bar{g}$, so seien p_1, p_2 zwei verschiedene auf g_1 liegende Punkte. Dann ist $p_1 \in \bar{g}$ und $p_2 \in \bar{g}$, und wegen $\varphi(g_2) = \bar{g}$ liegen auch p_1 und p_2 auf g_2. Da g_1 und g_2 demnach zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, ist $g_1 = g_2$. Aus der Definition von φ für Geraden folgt nun unmittelbar: Für beliebige $p \in P$ und $g \in G$ liegt p auf g genau dann, wenn $\varphi(p) \in \varphi(g)$, d. h., φ ist ein Isomorphismus von (P, G, R) auf $(P, \bar{G}, \in)$. Dieses Beispiel lehrt, daß man in einer beliebigen geometrischen Theorie die Geraden als Mengen von Punkten und die Relation „liegt auf“ als Elementbeziehung auffassen kann, sofern nur die Voraussetzung (8) erfüllt ist.

2. Axiomatische Theorien, formalisierte Sprachen, Modelle

Die ebene euklidische Geometrie und ähnliche Teilgebiete der Mathematik, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen werden, sind axiomatische Theorien, d. h., ihre Aussagen betreffen gewisse Dinge, z. B. Punkte, Geraden, Kreise, die in gewissen Relationen stehen können, z. B. Inzidenz, Kongruenz. Was für Dinge die Punkte und Geraden sind, ist für die Geometrie selbst unwesentlich. Desgleichen wird in der Geometrie nicht erklärt, was es bedeutet, daß ein Punkt auf einer Geraden liegt usw. Die Bedeutung der Objektgrundbegriffe (z. B. Punkt, Gerade) und der Grundrelationen (z. B. Inzidenz, Kongruenz) wird lediglich in gewissem Maße implizit durch Axiome festgelegt, d. h. durch gewisse als gültig vorausgesetzte Aussagen über die Grundbegriffe. Alle und nur die Aussagen, die durch logisches Schließen (Beweisen) aus den Axiomen erhalten werden können, sind Sätze der betreffenden axiomatischen Theorie. Insbesondere gehören die Axiome zu diesen Sätzen. Eine axiomatische Theorie kann mit einiger Berechtigung mit der Menge ihrer Sätze identifiziert werden, und von diesem (heute in der Metamathematik weitgehend akzeptierten) Standpunkt ist die spezielle Wahl der Axiome relativ unerheblich. Die Axiome dienen lediglich dazu, die Sätze der betreffenden Theorie (z. B. durch fortlaufendes Beweisen) zu erzeugen. Jedes andere System von Sätzen über die betrachteten Grundbegriffe, aus dem die gleichen Sätze bewiesen werden können, kann als gleichwertiges Axiomensystem benutzt werden. In diesem Kapitel wird unter anderem dargelegt werden, daß und in welcher Weise sogar die Auswahl der Grundbegriffe einer axiomatischen Theorie innerhalb weiter Grenzen willkürlich ist. Das Hauptziel des Kapitels besteht jedoch darin, die für das Verständnis der axiomatischen Methode grundlegenden Begriffe „Menge aller unter Benutzung eines festen Systems von Grundbegriffen formulierbaren Aussagen“ und „logische Schlußfolgerung“ zu präzisieren.

2.1. Aussagen und Aussageformen

Eine *Aussage* ist eine im weiteren Sinn sprachliche (im folgenden immer schriftliche) Widerspiegelung eines möglichen Sachverhalts. Dabei bedeutet „möglich", daß eine Aussage wahr oder falsch sein kann. Es werden jedoch nur solche Widerspiegelungen als Aussagen bezeichnet, die (infolge hinreichend präziser Formulierung bzw. unter Berücksichtigung vorher getroffener Vereinbarungen über die Bedeutung der verwendeten Sprachbestandteile) genau einen der beiden *Wahrheitswerte* $\boldsymbol{W}$ (wahr) oder $\boldsymbol{F}$ (falsch) haben. (Es ist nicht verlangt, daß man von jeder Aussage effektiv feststellen kann, ob sie wahr oder falsch ist!)

Eine einfache kombinatorische Betrachtung lehrt, daß es für $n \geqq 1$ im Bereich $\{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{F}\}$ der Wahrheitswerte 2^{2^n} verschiedene n-stellige Operationen gibt. Diese Operationen werden gewöhnlich *Wahrheitsfunktionen* oder *Boolesche Funktionen* genannt. Jeder von ihnen entspricht eine n-stellige Verknüpfung von Teilaussagen zu einer Gesamtaussage, deren Wahrheit bzw. Falschheit nicht vom konkreten Inhalt der verwendeten Teilaussagen, sondern nur (in der durch die vorgegebene Boolesche Funktion geregelten Weise) von der Wahrheit bzw. Falschheit der ersten bis n-ten verknüpften Teilaussagen abhängt. Umgekehrt entspricht jeder derartigen Regel, nach der man je n beliebige Aussagen zu einer Gesamtaussage verknüpfen kann (*extensionale Aussagenverbindung*) eine Boolesche Funktion. Durch sprachliche Partikel, wie z. B. „nicht", „und", „oder", „wenn, so", „genau dann, wenn", „entweder oder" usw., realisierte extensionale Aussagenverbindungen sind *äquivalent*, wenn sie sprachliche Darstellungen der gleichen Booleschen Funktion sind. Als Beispiele geben wir die Wertetabellen der einstelligen *Negation* $\neg$ (nicht) und der zweistelligen Booleschen Funktionen *Konjunktion* $\wedge$ (und), *Alternative* $\vee$ (oder), *Implikation* $\rightarrow$ (wenn so) und *Äquivalenz* $\leftrightarrow$ (genau dann, wenn) an, die man auch als klassische Wahrheitsfunktionen bezeichnet:

	$\neg$
$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{W}$

	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
$\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$
$\boldsymbol{W}, \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{W}$

Die relative Armut unserer Umgangssprache an weiteren, insbesondere an höherstelligen extensionalen Aussagenverbindungen findet ihre Erklärung dadurch, daß man jede Boolesche Funktion durch Superposition der fünf oben angegebenen Funktionen (sogar schon durch Superposition von Negation und Konjunktion) erzeugen kann. So ist z. B. „wenn A, so B" äquivalent zu „B oder nicht A"; „A oder B" äquivalent zu „nicht (nicht A und nicht B)". In einfachen Fällen handhaben wir derartige aussagenlogische Äquivalenzen meist intuitiv richtig, bzw. die Fähigkeit, solche Äquivalenzen intuitiv zu erkennen, wird als Maß für die Entwicklung des logischen Denkvermögens angesehen. Man kann jedoch nach Kenntnis der Wertetabellen der Booleschen Grundfunktionen die Frage der Äquivalenz von Aussagenverbindungen immer (in einfachen wie in beliebig komplizierten Fällen) durch Aufstellen und Vergleichen der vollständigen Wertetabellen beider Seiten entscheiden.

Zu den praktisch wichtigen aussagenlogischen Äquivalenzen gehört eine Anzahl von Regeln, die entsprechenden arithmetischen Regeln analog sind:

„A und B“ äquivalent „B und A“ (*Kommutativität der Konjunktion*);

„A oder B“ äquivalent „B oder A“ (*Kommutativität der Alternative*);

„A und (B und C)“ äquivalent „(A und B) und C“ (*Assoziativität der Konjunktion, analog Assoziativität der Alternative*);

„A und (B oder C)“ äquivalent „(A und B) oder (A und C)“,

„A oder (B und C)“ äquivalent „(A oder B) und (A oder C)“ (*Distributivgesetze*).

Die Assoziativgesetze für Konjunktion und Alternative rechtfertigen (analog zur Arithmetik) die Bildung von Aussagen der Form „A_1 und A_2 und ... und A_n“ bzw. „A_1 oder A_2 oder ... oder A_n“. Die konjunktive bzw. alternative Verknüpfung von mehr als zwei Teilaussagen ohne sprachlich ausgedrückte oder auch nur gedachte Klammern gehört zu den Dingen, die wir in der Umgangssprache intuitiv richtig handhaben.

Eine *Aussageform* ist ein sprachliches Gebilde, das gewisse *freie Variablen* enthält, wobei zu jeder dieser freien Variablen (die mehrfach in der Aussageform vorkommen können) eine bestimmte Menge von für sie einsetzbaren Dingen als *Variabilitätsbereich* gehört, so daß bei jeder Einsetzung je eines solchen Dinges (bzw. seines Namens) für jede Variable eine Aussage entsteht. Eine Aussageform heißt n-stellig, wenn in ihr genau n verschiedene freie Variablen vorkommen. Es ist zweckmäßig, Aussagen als spezielle (0-stellige) Aussageformen anzusehen.

Enthält die Aussageform A genau die verschiedenen freien Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ und ist für $i = 1, \ldots, n$ die Menge M_i der Variabilitätsbereich der Variablen x_i, so kann A als eine spezielle sprachliche Darstellung derjenigen Relation $R_{\mathrm{A}} \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ aufgefaßt werden, die aus allen und nur den $(x_1, \ldots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ besteht, für die A wahr ist. Zur eindeutigen Festlegung der durch eine Aussageform A dargestellten Relation R_{A} ist genau genommen noch eine zusätzliche Vereinbarung über die Reihenfolge der Argumente von R_{A} (etwa nach dem jeweils ersten Vorkommen der entsprechenden Variablen in A, von links beginnend) erforderlich. Andernfalls stellt A zugleich mit R_{A} auch alle daraus durch Stellenpermutation hervorgehenden Relationen R_{A}^{π} dar (vgl. Kap. 1).

Aussageformen, in denen die gleichen Variablen vorkommen, heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Relation darstellen. Zum Beispiel sind in bezug auf die Punkte und Geraden einer bestimmten Ebene die Aussageformen „$\mathrm{p} \in \mathrm{g}$“, „p liegt auf g“, „der Punkt p liegt auf der Geraden g“ und „g geht durch p“ äquivalent.

Eine Abbildung α von $M_1 \times \cdots \times M_n$ in die Zweiermenge $\{W, F\}$ der beiden Wahrheitswerte heißt ein n-stelliges *Attribut* oder *Prädikat* (*auf* $M_1 \times \cdots \times M_n$). Ist $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ eine Relation, so ist die durch

$$\alpha_R(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} W, \text{ falls } (x_1, \ldots, x_n) \in R, \\ F, \text{ falls } (x_1, \ldots, x_n) \in (M_1 \times \cdots \times M_n) \setminus R, \end{cases}$$

definierte Abbildung ein Attribut. Ist α ein Attribut auf $M_1 \times \cdots \times M_n$, so ist $R_\alpha := \{(x_1, \ldots, x_n) \colon \alpha(x_1, \ldots, x_n) = W\}$ eine Relation. Offenbar gilt: $R_{\alpha_R} = R$ und $\alpha_{R_\alpha} = \alpha$, d. h., Relationen in $M_1 \times \cdots \times M_n$ und Attribute auf dieser Menge entsprechen einander umkehrbar eindeutig und sind nur mengentheoretisch verschiedene Präzisierungen des gleichen Abstraktums.[1]) Es ist klar, in welchem Sinn eine n-stellige Aussageform zugleich mit einer Relation auch ein Attribut darstellt. Wir werden die Begriffe Relation und Attribut im folgenden nebeneinander gebrauchen.

Wir behandeln nun in vorläufiger Form einige Möglichkeiten, aus einer festen Anzahl beliebiger Aussageformen neue Aussageformen zu bilden.

Variablenumbenennung. Ist x eine in der Aussageform A frei vorkommende Variable und y eine Variable, die in A nicht vorkommt, so entsteht eine zu A äquivalente Aussageform, wenn man die Variable x an allen Stellen ihres Vorkommens in A durch y ersetzt und y den gleichen Variabilitätsbereich zuordnet wie vorher x. Auf diese Weise entsteht z. B. aus der Aussageform

(1) „die Strecke p_1p_2 ist der Strecke p_3p_4 kongruent“,

in der der Variabilitätsbereich der vier frei vorkommenden Variablen p_1, p_2, p_3, p_4 die Menge aller Punkte einer gewissen Ebene ist, die Aussageform

„die Strecke p_1p_6 ist der Strecke p_3p_4 kongruent“.

Dabei ist der Variablen p_6 ebenfalls die Menge der Punkte der betrachteten Ebene als Variabilitätsbereich zuzuordnen. Beide Aussageformen sind äquivalent. Sie stellen die gleiche vierstellige Punktrelation, nämlich die sogenannte (Strecken-) Kongruenz dar.

Variablengleichsetzung. Sind x und y in A vorkommende freie Variable mit dem gleichen Variabilitätsbereich, so entsteht eine neue Aussageform A′, wenn man in A überall x durch y ersetzt. Im Unterschied zur Variablenumbenennung ist jedoch A′ nicht zu A äquivalent, insbesondere ist die Stellenzahl von A′ um 1 niedriger als die von A. Auf diese Weise entsteht aus der Aussageform (1) zum Beispiel die dreistellige Aussageform

„die Strecke p_1p_2 ist der Strecke p_1p_4 kongruent“.

Man bemerke, daß die durch diese Aussageform dargestellte Relation nach üblichem Sprachgebrauch u. a. auch durch die Aussageform

„der Punkt p_1 ist von p_2 und p_4 gleich weit entfernt“

[1]) Vgl. den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Zerlegungen.

dargestellt wird, die nicht durch Variablengleichsetzung aus einer anderen Aussageform erhältlich ist.

Konstanteneinsetzung. Ist x eine in A frei vorkommende Variable und c der Name eines bestimmten Dinges aus dem Variabilitätsbereich von x, so entsteht aus A eine (wiederum in der Stellenzahl um 1 erniedrigte) Aussageform A′, wenn man in A überall x durch c ersetzt. Ist speziell A eine einstellige Aussageform, so ist A′ bereits eine Aussage. Ist zum Beispiel vereinbart worden, mit p_0 einen bestimmten Punkt der betrachteten Ebene zu bezeichnen, so entsteht aus (1) u. a. die dreistellige Aussageform

„die Strecke p_1p_0 ist der Strecke p_3p_4 kongruent“.

Im täglichen Leben werden die meisten Aussagen durch Einsetzen von Konstanten für alle ursprünglich in den Aussageformen vorkommenden Variablen gebildet, zum Beispiel „Fritz ist älter als Hans“ aus „x ist älter als y“.

Aussagenlogische Verknüpfung. Ist A eine Aussageform, so ist auch „nicht A“ eine Aussageform. Sind A_1 und A_2 Aussageformen, so sind auch „A_1 und A_2“, „A_1 oder A_2“, „wenn A_1, so A_2“ und „A_1 genau dann, wenn A_2“ usw. Aussageformen. Auf Grund der Erzeugbarkeit aller Booleschen Funktionen mittels Konjunktion und Negation genügt es offenbar im Prinzip, die ersten beiden Spezialfälle zu betrachten. Aus den Aussageformen „p_1 liegt auf g_1“, „g_1 ist parallel zu g_2“ entsteht zum Beispiel durch aussagenlogische Verknüpfung die Aussageform

„wenn g_1 zu g_2 parallel ist, so liegt p_1 auf g_1“,

worin lediglich im Interesse sprachlicher Glätte die Reihenfolge einiger Worte vertauscht wurde.

Quantifizierung. Kommen in der Aussageform A die Variablen x, $x_1, \ldots, x_n$ und keine weiteren frei vor, so kann man aus A die beiden Aussageformen

(2) „für alle x gilt A“,

(3) „es gibt ein x, so daß A“

bilden. (2) heißt *Generalisierung* von A bezüglich x, (3) heißt *Partikularisierung* von A bezüglich x. Generalisierung und Partikularisierung bezeichnen wir mit dem gemeinsamen Namen *Quantifizierung*. Die Variable x kommt zwar in (2) und (3) noch vor (sogar jeweils einmal mehr als in A), jedoch nicht mehr frei: Setzt man nämlich für $x_1, \ldots, x_n$ je ein Ding aus dem zugehörigen Variabilitätsbereich ein, so sind (2) und (3) schon Aussagen (über den Variabilitätsbereich von x). Zum Beispiel entsteht aus der Aussageform

„wenn p auf g liegt, hat g mit k zwei Punkte gemeinsam“.

in der der Variabilitätsbereich der frei vorkommenden Variablen p bzw. g bzw. k die Menge aller Punkte bzw. aller Geraden bzw. aller Kreise einer bestimmten Ebene ist, durch Generalisierung bezüglich g die zweistellige Aussageform

„für alle g gilt: wenn p auf g liegt, so hat g mit k zwei Punkte gemeinsam".

Daß hierin die Variable g nicht mehr frei vorkommt, also nicht mehr zu denjenigen Variablen gehört, über deren Bedeutung man verfügen muß, um zu einer Aussage zu gelangen, erkennt man hier auch daran, daß man eine äquivalente Aussageform angeben kann, in der g überhaupt nicht mehr vorkommt, nämlich

„alle Geraden durch den Punkt p schneiden k in zwei Punkten",

oder völlig anders formuliert, aber in euklidischen Ebenen äquivalent:

„der Punkt p liegt im Innern des Kreises k".

Zusätzlich zu der im Normalfall unmißverständlichen Bedeutung der Aussageformen (2) und (3) vereinbaren wir: Ist der Variabilitätsbereich von x die leere Menge, so sei (2) bei jeder Einsetzung für $x_1, \ldots, x_n$ wahr und (3) bei jeder Einsetzung für $x_1, \ldots, x_n$ falsch.

2.2. Formalisierte Sprachen

Eine *n-sortige formalisierte Sprache* $\mathcal{S}$ ist eine Menge von *Zeichenreihen*, die *Ausdrücke* genannt werden und in einer normierten Form sämtliche mit Hilfe eines vorgegebenen Systems von Grundbegriffen formulierbaren Aussageformen darstellen. Eine formalisierte Sprache wird gegeben durch ihre *Basis* $\mathcal{B}$, das System der verwendeten Grundbegriffe. Exakt ist $\mathcal{B}$ ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, wobei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge von Attributensymbolen, $\mathcal{F}$ eine endliche Menge von Operationssymbolen und $\mathcal{C}$ eine endliche Menge von Konstantensymbolen ist. (Zwei der drei Bestandteile einer Basis können auch leer sein.) Für die folgenden allgemeinen Betrachtungen ist eine normierte Schreibweise der Symbole zweckmäßig und zwar:

$\mathrm{A}_i^{i_1 \ldots i_k}$ zur Bezeichnung einer k-stelligen Relation zwischen Dingen der i_1-ten, ..., i_k-ten Sorte $(i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$;

$\mathrm{F}_j^{i i_1 \ldots i_k,}$ zur Bezeichnung einer k-stelligen Operation, wobei die ersten k oberen Indizes die Sorten der Argumentwerte angeben und der abgetrennte letzte Index die Sorte des Resultats angibt $(i_1, \ldots, i_k, j \in \{1, \ldots, n\})$;

c_i^j zur Bezeichnung eines speziellen Dinges der j-ten Sorte $(1 \leqq j \leqq n)$.

In Analogie zu den Relationen, Operationen und Konstanten werden wir das System der oberen Indizes eines Grundsymbols als dessen *Signatur* bezeichnen. Der eventuell auftretende untere Index dient zur Unterscheidung verschiedener Symbole der gleichen Signatur.

Außer den in der Basis der Sprache aufgeführten Grundsymbolen der drei oben aufgeführten Arten, deren Anzahl und Signatur von Sprache zu Sprache verschieden sind, verwenden wir folgende weitere *Grundzeichen* zum Aufbau der Sprache $\mathscr{S}(\mathscr{B})$:

Für jede der insgesamt in den Signaturen der Basiselemente vorkommende Sortennummer $j = 1, \ldots, n$ abzählbar viele Variablen

$$\mathrm{x}_0^j, \mathrm{x}_1^j, \mathrm{x}_2^j, \ldots$$

zur Bezeichnung von Dingen der j-ten Sorte (in konkreten Fällen benutzen wir spezielle Bezeichnungen, z. B. p_i als Variablen für Punkte, g_i als Variablen für Geraden, k_i als Variablen für Kreise ...),

ferner die Zeichen

$$=, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bigwedge, \bigvee, (\,,) \text{ und , (Komma)}$$

zur Bezeichnung der Identität, der fünf in Abschnitt 2.1. behandelten aussagenlogischen Funktionen, der Quantoren „Für alle“ bzw. „Es gibt ein“ sowie für organisatorische Zwecke (Klammer auf, Klammer zu, Komma).

Aus der Menge aller Zeichenreihen, die aus den genannten Grundzeichen gebildet werden können, sondern wir zunächst durch eine induktive Definition die Menge $\mathscr{T}^j(\mathscr{B})$ aller *Terme der Sorte* j (bezüglich der Basis $\mathscr{B}$) aus, d. h. derjenigen Formeln, die später durch Objekte der j-ten Sorte interpretiert werden:

(1) a) x_i^j liegt in $\mathscr{T}^j(\mathscr{B})$ für jede Sortennummer $j = 1, \ldots, n$ und $i = 0, 1, 2, \ldots$, c_i^j liegt in $\mathscr{T}^j(\mathscr{B})$ für alle c_i^j der Basis $\mathscr{B}$,

b) $\mathrm{F}^{i_1 \ldots i_k, j}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_k)$ liegt in $\mathscr{T}^j(\mathscr{B})$, falls $\mathrm{F}_i^{i_1 \ldots i_k, j}$ zur Basis $\mathscr{B}$ gehört und $\mathrm{t}_\varkappa$ in $\mathscr{T}^{i_\varkappa}(\mathscr{B})$ liegt für $\varkappa = 1, \ldots, k$.

Mit $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ bezeichnen wir die Menge $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathscr{T}^j(\mathscr{B})$ aller Terme der betrachteten Sprache. Nun definieren wir — wiederum induktiv — die Menge $\mathscr{S}(\mathscr{B})$ aller *Ausdrücke* der durch $\mathscr{B}$ gegebenen Sprache:

(2) a) $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$ liegt in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$ für je zwei Terme $\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2$ der gleichen Sorte; $\mathrm{A}_i^{i_1 \ldots i_k}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_k)$ liegt in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$, falls $\mathrm{A}_i^{i_1 \ldots i_k}$ zur Basis $\mathscr{B}$ gehört und für $r = 1, \ldots, k$ die Zeichenreihe t_r ein Term der Sorte i_r ist.

b) Mit H liegt auch $\neg\,\mathrm{H}$ in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$, und mit $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ liegen auch $(\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2)$, $(\mathrm{H}_1 \vee \mathrm{H}_2)$, $(\mathrm{H}_1 \rightarrow \mathrm{H}_2)$, $(\mathrm{H}_1 \leftrightarrow \mathrm{H}_2)$ in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$; liegt $\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$ und kommt die Variable x_i^j in $\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ vollfrei vor, d. h., kommt x_i^j in $\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ an wenigstens einer Stelle vor und kommen die Kombinationen $\bigwedge \mathrm{x}_i^j$ und $\bigvee \mathrm{x}_i^j$ in $\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ nicht vor, so liegen auch $\bigwedge \mathrm{x}_i^j \mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ und $\bigvee \mathrm{x}_i^j \mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j)$ in $\mathscr{S}(\mathscr{B})$.

Die Ausdrücke der Formen $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$ und $\mathrm{A}_i^{i_1 \ldots i_k}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_k)$ heißen *prädikative* Ausdrücke. Alle übrigen Ausdrücke der Sprache entstehen aus prädikativen Ausdrücken durch aussagenlogische Verknüpfung und Quantifizierung. Die hier zunächst gewählte normierte Schreibweise der prädikativen Ausdrücke dient hauptsächlich dazu, Betrachtungen über beliebige formalisierte Sprachen in technisch bequemer Weise formulieren zu können. In konkreten Fällen wird man auch zum Aufbau formalisierter Sprachen traditionelle oder signifikante Symbole benutzen, z. B. $\in$ für die Inzidenz, $\|$ für die Parallelität, $\cong$ für die Kongruenz. Die prädikativen Ausdrücke haben dann die Gestalt $\mathrm{p}_i \in \mathrm{g}_j$, $\mathrm{g}_i \parallel \mathrm{g}_j$, $\mathrm{p}_i\mathrm{p}_j \cong \mathrm{p}_k\mathrm{p}_l$. Wir werden im folgenden häufig auch prädikative Ausdrücke unter Benutzung von Wörtern der deutschen Sprache bilden, z. B. $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ kollinear, g_1 schneidet g_2. Es ist dabei gleichgültig, ob man solche prädikativen Sprachbestandteile als nachträglich durch Vereinbarung eingeführte Modifizierungen bzw. Abkürzungen einer formalisierten Sprache mit normierten Symbolen auffaßt oder sich die allgemeine Definition der formalisierten Sprachen für den konkreten Fall so abgewandelt denkt, daß die tatsächlich benutzte Sprache selbst eine formalisierte Sprache im strengen Sinn ist.

2.3. Interpretationen, Modelle, elementare und nichtelementare Theorien

Unter einer *Interpretation* ω einer n-sortigen formalisierten Sprache $\mathscr{S}$ verstehen wir eine Abbildung, die jeder in den Signaturen der Basissymbole vorkommenden Sorte $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ eine nichtleere Menge $M_j = \omega(j)$, ferner jedem Basiselement eine Relation bzw. partielle Operation bzw. Konstante entsprechender Signatur im Bereich der Mengen M_j zuordnet. Dabei setzen wir voraus, daß die Mengen $M_1, \ldots, M_n$ paarweise disjunkt sind. In konkreten Fällen wird eine Interpretation meist gleich als Struktur, d. h. in der Form

$$\big(M_1, \ldots, M_n, \omega(\mathrm{A}_1), \ldots, \omega(\mathrm{A}_m), \omega(\mathrm{F}_1), \ldots, \omega(\mathrm{F}_p), \omega(\mathrm{c}_1), \ldots, \omega(\mathrm{c}_q)\big)$$

angegeben. Eine solche Schreibweise ist natürlich nur dann zulässig, wenn aus dem Zusammenhang unmißverständlich hervorgeht, welche Variablensorte durch die Elemente welcher Menge, welches Attributensymbol durch welches Attribut usw. interpretiert werden soll. Durch eine Interpretation bekommen die zunächst bedeutungslosen Ausdrücke einer formalisierten Sprache den Charakter von Aussageformen. Dieser Sachverhalt wird in den Anwendungen häufig dadurch verschleiert, daß man bei der Aufstellung einer formalisierten Sprache schon an eine ganz bestimmte Interpretation denkt.

Unter einer *Belegung* bezüglich einer Interpretation ω verstehen wir eine Abbildung f, die jeder Variablen x_i^j ein Element $f(\mathrm{x}_i^j)$ aus $\omega(j)$ zuordnet. Wir definieren nun induktiv zunächst den Wert, den ein Term t aus $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ eventuell bei der Belegung f bezüglich der Interpretation ω annimmt, als dasjenige Ding *Wert*(t, ω, f) aus einem der Grundbereiche $M_j = \omega(j)$, das die Zeichenreihe t bezeichnet, wenn man die darin vorkommenden Konstanten- und Operationssymbole gemäß ω und die darin vorkommenden Variablen gemäß f interpretiert:

(1) a) $Wert(x_i^j, \omega, f) := f(x_i^j)$; $Wert(c_i^j, \omega, f) := \omega(c_i^j)$.

b) $Wert\big(F_i^{i_1 \dots i_k, j}(t_1, \dots, t_k), \omega, f\big)$

$:= \omega(F_i^{i_1 \dots i_k, j}) \big(Wert(t_1, \omega, f), \dots, Wert(t_k, \omega, f)\big)$,

falls $Wert(t_i, \omega, f)$ für $i = 1, \dots, k$ existiert und die (eventuell nur partielle) Operation $\omega(F_i^{i_1 \dots i_k, j})$ an der betreffenden Stelle definiert ist.

Kommen in t genau die verschiedenen Variablen $x_1, \dots, x_n$ vor (deren Sorten und spezielle untere Indizes wir hier außer acht lassen), so hängt $Wert(t, \omega, f)$ nur von den Werten der Belegung f für $x_1, \dots, x_n$ ab. Dies kann man leicht durch Induktion über die Kompliziertheit von t (d. h. entsprechend Definition 2.2. (1)) nachweisen. Bei der Interpretation ω stellt dann t die durch

$$\omega(t)\,(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} Wert(t, \omega, f), & \text{falls dieser existiert,} \\ \text{nicht definiert sonst} & \end{cases}$$

beschriebene partielle Operation $\omega(t)$ im Bereich der Mengen $\omega(j)$ dar, wobei für f eine beliebige Belegung mit $f(x_i) = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ zu nehmen ist.

Wir definieren nun analog das einem Ausdruck H aus $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ bei der Interpretation ω zugeordnete Attribut $\omega(H)$, indem wir zunächst (induktiv entsprechend Definition 2.2.(2)) den Wahrheitswert $Wert(H, \omega, f)$ definieren, den $\omega(H)$ bei der durch die Belegung f beschriebenen Einsetzung von Dingen für die Variablen von H annimmt:

(2) a) $$Wert(t_1 = t_2, \omega, f) := \begin{cases} \boldsymbol{W}, & \text{falls } Wert(t_1, \omega, f),\ Wert(t_2, \omega, f) \text{ existieren und gleich sind,} \\ \boldsymbol{F} & \text{in allen anderen Fällen;} \end{cases}$$

$$Wert\big(A_i^{i_1 \dots i_k}(t_1, \dots, t_k), \omega, f\big) := \begin{cases} \boldsymbol{W}, & \text{falls für } i = 1, \dots, k \text{ die Werte } x_i = Wert(t_i, \omega, f) \text{ existieren und } (x_1, \dots, x_k) \in \omega(A_i^{i_1 \dots i_k}), \\ \boldsymbol{F} & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

b) Ist schon $Wert(H_1, \omega, f)$ $\big($und $Wert(H_2, \omega, f)\big)$ definiert, so erhält man $Wert(\neg H_1, \omega, f)$, $Wert\big((H_1 \wedge H_2), \omega, f\big)$, $Wert\big((H_1 \vee H_2), \omega, f\big)$, $Wert\big((H_1 \to H_2), \omega, f\big)$ und $Wert\big((H_1 \leftrightarrow H_2), \omega, f\big)$ durch Anwendung der jeweiligen Booleschen Funktion (vgl. deren Wertetabellen in Abschnitt 2.1) auf $Wert(H_1, \omega, f)$ $\big($und $Wert(H_2, \omega, f)\big)$, d. h. zum Beispiel $Wert(\neg H_1, \omega, f) = \boldsymbol{W}$ genau dann, wenn $Wert(H_1, \omega, f) = \boldsymbol{F}$ usw. Es sei $Wert\big(H(x_i^j), \omega, f\big)$ bereits für alle Belegungen f definiert. Ist f eine Belegung und $y \in \omega(j)$, so sei $f\left\langle \begin{smallmatrix} x_i^j \\ y \end{smallmatrix} \right\rangle$ die durch

$$f\left\langle \begin{matrix} x_i^j \\ y \end{matrix} \right\rangle (x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq x_i^j, \\ y, & \text{falls } x = x_i^j \end{cases}$$

definierte Belegung. Dann sei

$$Wert\big(\bigwedge \mathrm{x}_i^j \mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j), \omega, f\big) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn

$$Wert\left(\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j), \omega, f\left\langle \begin{matrix} \mathrm{x}_i^j \\ y \end{matrix} \right\rangle\right) = \boldsymbol{W} \text{ für alle } y \in \omega(j),$$

$$Wert(\bigvee \mathrm{x}_i^j \mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j), \omega, f) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn

$$Wert\left(\mathrm{H}(\mathrm{x}_i^j), \omega, f\left\langle \begin{matrix} \mathrm{x}_i^j \\ y \end{matrix} \right\rangle\right) = \boldsymbol{W} \text{ für wenigstens ein } y \in \omega(j).$$

Enthält ein Ausdruck H einen Teilausdruck der Form $\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{H}'(\mathrm{x})$ oder $\bigvee \mathrm{x}\mathrm{H}'(\mathrm{x})$, so heißt $\mathrm{H}'(\mathrm{x})$ der *Wirkungsbereich* der davorstehenden Quantifizierung $\bigwedge \mathrm{x}$ bzw. $\bigvee \mathrm{x}$. Zu jedem Vorkommen einer Quantifizierung $\bigwedge \mathrm{x}$ oder $\bigvee \mathrm{x}$ in einem Ausdruck gehört — wie man zeigen kann — ein eindeutig bestimmter Wirkungsbereich. Kommt eine Variable x in H an wenigstens einer Stelle vor, so daß unmittelbar davor weder $\bigwedge$ noch $\bigvee$ steht, und liegt diese Stelle auch nicht im Wirkungsbereich einer Quantifizierung $\bigwedge \mathrm{x}$ oder $\bigvee \mathrm{x}$, so sagen wir, daß x in H an dieser Stelle *frei* vorkommt. Ist H ein Ausdruck, in dem genau die Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ frei vorkommen, so hängt — wie man leicht zeigt — $Wert(\mathrm{H}, \omega, f)$ nur von $f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_n)$ ab, so daß in diesem Fall $\omega(\mathrm{H})$ ein n-stelliges Attribut ist.

Kommt x in H vollfrei vor, so kommt x in H erst recht frei vor. Das Beispiel $\big(\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{B}(\mathrm{x})\big)$ zeigt, daß die Umkehrung hiervon nicht allgemein richtig ist: Im betrachteten Fall kommt x innerhalb B(x) frei vor, ist jedoch insgesamt nicht vollfrei. Durch geeignete Umbenennungen der *gebundenen* Variablen (an der Stelle $\bigwedge \mathrm{x}$ bzw. $\bigvee \mathrm{x}$ ihrer Quantifizierung und an allen Stellen im zugehörigen Wirkungsbereich), wodurch sich nach obiger Bemerkung das durch H dargestellte Attribut $\omega(\mathrm{H})$ nicht ändert, kann man immer erreichen, daß alle frei vorkommenden Variablen vollfrei vorkommen. Zur Vereinfachung der Formulierungen nehmen wir im folgenden an, daß alle betrachteten Ausdrücke von dieser Art sind. Die Schreibweise $\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ bedeutet dann, daß in H die Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ vollfrei und keine weiteren Variablen frei vorkommen, so daß $\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ bei jeder Interpretation ω ein n-stelliges Attribut darstellt.

Ein Ausdruck H einer Sprache $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{B})$ heißt *abgeschlossen*, wenn in H keine Variablen frei vorkommen. Die Menge aller abgeschlossenen Ausdrücke von $\mathscr{S}$ wird mit $\overline{\mathscr{S}}$ bezeichnet. Ist $\mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}}$, so ist $Wert(\mathrm{H}, \omega)$ $\big(:= Wert(\mathrm{H}, \omega, f)\big)$ unabhängig von f, d. h., H stellt eine Aussage über die durch die Interpretation ω gegebene Struktur dar.

Eine Interpretation ω bzw. die durch sie gegebene Struktur heißt ein *Modell* für eine gegebene Menge $\mathscr{X}$ von abgeschlossenen Ausdrücken, wenn $Wert(\mathrm{H}, \omega) = \boldsymbol{W}$

für alle $\mathrm{H} \in \mathscr{X}$. Eine Menge $\mathscr{X}$ von abgeschlossenen Ausdrücken heißt (*elementar*) *widerspruchsfrei*, wenn $\mathscr{X}$ wenigstens ein Modell besitzt.

Wir kommen nun zu der angekündigten Präzisierung des Begriffes „logische Schlußfolgerung“. Für $\mathscr{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$ sei

$$\mathit{Fl}(\mathscr{X}) := \{\mathrm{H} : \mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}} \textit{ und } \mathit{Wert}(\mathrm{H}, \omega) = \boldsymbol{W} \textit{ in allen Modellen } \omega \textit{ von } \mathscr{X}\},$$

d. h., ein Ausdruck H liegt genau dann in der Folgerungsmenge $\mathit{Fl}(\mathscr{X})$, wenn H bei jeder Interpretation der in $\mathscr{S}$ vorkommenden Grundbegriffe, bei der alle Voraussetzungen aus $\mathscr{X}$ zu wahren Aussagen werden, ebenfalls zu einer wahren Aussage wird. Für $\mathrm{H} \in \mathit{Fl}(\mathscr{X})$ sagen wir auch: H *folgt* (*elementar*) *aus* $\mathscr{X}$. Für die Operation Fl im Bereich der Mengen von abgeschlossenen Ausdrücken einer Sprache $\mathscr{S}$ gilt u. a.

(3) $\quad \mathscr{X} \subseteq \mathit{Fl}(\mathscr{X})$, für alle $\mathscr{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$,

wenn $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$, so $\mathit{Fl}(\mathscr{X}) \subseteq \mathit{Fl}(\mathscr{Y})$, für alle $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$,

$\mathit{Fl}(\mathit{Fl}(\mathscr{X})) = \mathit{Fl}(\mathscr{X})$ für alle $\mathscr{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$.

Die Menge $\mathit{Fl}(\emptyset)$ besteht aus allen denjenigen abgeschlossenen Ausdrücken, die ohne (inhaltliche) Voraussetzungen, d. h. allein auf Grund ihrer logischen Struktur gelten. Zu ihnen gehören insbesondere alle Ausdrücke, die auf Grund ihres aussagenlogischen Aufbaus stets wahr sind, aber z. B. auch Ausdrücke der Form $(\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{H}(\mathrm{x}) \to \bigvee \mathrm{x}\mathrm{H}(\mathrm{x}))$ usw.

Unter einem *Axiomensystem* verstehen wir eine endliche oder wenigstens durch gewisse Schemata beschreibbare unendliche Menge $\mathscr{X}$ von abgeschlossenen Ausdrücken einer Sprache $\mathscr{S}$. Die Menge $\mathscr{T} = \mathit{Fl}(\mathscr{X})$ heißt *die durch* $\mathscr{X}$ *gegebene elementare Theorie*. Zwei Axiomensysteme $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ definieren die gleiche elementare Theorie genau dann, wenn $\mathit{Fl}(\mathscr{X}_1) = \mathit{Fl}(\mathscr{X}_2)$. Aus (3) erhält man leicht, daß das genau dann der Fall ist, wenn $\mathscr{X}_1 \subseteq \mathit{Fl}(\mathscr{X}_2)$ und $\mathscr{X}_2 \subseteq \mathit{Fl}(\mathscr{X}_1)$. Dies präzisiert die in der Einleitung zu diesem Kapitel gemachten Bemerkungen über die relative Willkürlichkeit der Wahl von Axiomensystemen zur Erzeugung einer elementaren Theorie.

Ein Axiomensystem $\mathscr{X}$ heiße (*elementar*) *kategorisch*, wenn es bis auf Isomorphie nur ein einziges Modell besitzt, d. h., wenn je zwei seiner Modelle isomorph sind. In vielen Bereichen der Mathematik besteht das Ziel einer axiomatischen Begründung darin, eine bestimmte Struktur $\mathfrak{S}$ (z. B. die natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen, die euklidische Ebene) implizit durch Axiome zu charakterisieren, d. h. eine formalisierte Sprache $\mathscr{S}$ für $\mathfrak{S}$ und ein Axiomensystem $\mathfrak{X}$ in dieser Sprache so anzugeben, daß $\mathfrak{S}$ bis auf Isomorphie das einzige Modell für $\mathscr{X}$ ist, mithin $\mathit{Fl}(\mathscr{X})$ die Menge der in $\mathscr{S}$ formulierbaren und in $\mathfrak{S}$ gültigen Aussagen wird. Ein wesentliches Resultat der mathematischen Grundlagenforschung (Satz von Löwenheim-Skolem) besagt nun aber, daß eine elementare Theorie, die ein Modell mit wenigstens einem unendlichen Grundbereich besitzt, nicht kategorisch sein kann. Um zu axiomatischen Charakterisierungen unendlicher Strukturen zu kommen, muß man daher den Bereich der zulässigen Interpretationen einer Sprache einschränken. Dadurch ändert sich der Begriff des Modells und der Begriff des Folgerns.

Ist $\mathscr{S}$ eine Sprache und σ eine beliebige nichtleere Klasse von Interpretationen von $\mathscr{S}$, die mit einer beliebigen Interpretation auch alle dazu isomorphen Interpretationen enthält, so heißt das Paar $(\mathscr{S}, \sigma)$ eine *nichtelementare Sprache.* Eine Interpretation aus der Klasse σ bezeichnen wir auch als eine *(bezüglich σ) zulässige Interpretation von $\mathscr{S}$* oder kurz als eine *σ-Interpretation von $\mathscr{S}$.* Ist eine σ-Interpretation von $\mathscr{S}$ ein Modell des Axiomensystems $\mathscr{A} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$, so bezeichnen wir sie als ein *σ-Modell* von $\mathscr{A}$. In konkreten Beispielen wird eine Klasse σ meist durch eine „Beschreibung" der σ-Interpretationen angegeben werden. Eine solche Beschreibung werden wir häufig stillschweigend mit der Klasse der beschriebenen Interpretationen identifizieren und σ daher auch als eine *Interpretationseinschränkung* oder *Interpretationsvorschrift* für $\mathscr{S}$ bezeichnen. Bezüglich beliebiger Sprachen $\mathscr{S}$ sei stets σ_0 die Klasse aller Interpretationen von $\mathscr{S}$. Der Begriff der nichtelementaren Sprache $(\mathscr{S}, \sigma_0)$ stimmt dann im wesentlichen mit dem vorher behandelten Begriff der elementaren Sprache $\mathscr{S}$ überein.

Für beliebige nichtelementare Sprachen $(\mathscr{S}, \sigma)$ und Mengen $\mathscr{X} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$ sei

$$Fl^\sigma(\mathscr{X}) := \{\mathrm{H}\colon \mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}} \text{ und } Wert(\mathrm{H}, \omega) = \boldsymbol{W} \text{ für alle } \sigma\text{-Modelle } \omega \text{ von } \mathscr{X}\}.$$

Die Operation Fl^σ im Bereich der Mengen von abgeschlossenen Ausdrücken der Sprache $\mathscr{S}$ bezeichnen wir als *σ-Folgern in der Sprache $\mathscr{S}$* bzw. als *Folgern in der nichtelementaren Sprache* $(\mathscr{S}, \sigma)$. Offenbar ist das elementare Folgern $Fl\,(= Fl^{\sigma_0})$ ein Spezialfall des nichtelementaren Folgerns. Die für Fl formulierten Sätze (3) gelten jedoch für beliebiges Fl^σ ebenfalls. Sind $(\mathscr{S}, \sigma_1)$ und $(\mathscr{S}, \sigma_2)$ nichtelementare Sprachen mit der gleichen Ausdrucksmenge $\mathscr{S}$ und $\sigma_1 \subseteqq \sigma_2$ (wir nennen dann σ_1 eine *Verschärfung* von σ_2), so gilt für beliebige $\mathscr{X} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$ stets $Fl^{\sigma_2}(\mathscr{X}) \subseteqq Fl^{\sigma_1}(\mathscr{X})$, also insbesondere $Fl(\mathscr{X}) \subseteqq Fl^\sigma(\mathscr{X})$ für beliebige σ.

Eine Interpretationsvorschrift σ für eine Sprache $\mathscr{S}$ heißt eine *elementar charakterisierbare Klasse,* wenn es eine Menge $\mathscr{A} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$ gibt, so daß σ die Klasse aller Modelle von $\mathscr{A}$ ist. Insbesondere heißt eine durch ein endliches Axiomensystem $\mathscr{A}$ (also auch durch ein einzelnes Axiom, nämlich die Konjunktion der endlich vielen Axiome) elementar charakterisierbare Klasse eine *elementare Klasse.*[1]) Ist σ eine durch das Axiomensystem $\mathscr{A}$ elementar charakterisierbare Klasse von Interpretationen der Sprache $\mathscr{S}$, so ist offenbar $Fl^\sigma(\mathscr{X}) = Fl(\mathscr{X} \cup \mathscr{A})$ für beliebige Mengen $\mathscr{X} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$, d. h., in diesem Fall ist das nichtelementare Folgern prinzipiell entbehrlich. Zum Beispiel ist schon das elementare Folgern eigentlich nichtelementar wegen der Vereinbarung, daß das Zeichen $=$ nicht durch beliebige zweistellige Relationen, sondern nur durch die Identität interpretiert werden darf. Diese Interpretationsvorschrift ist „unwesentlich", da man zu jeder Sprache $\mathscr{S}$ ein System $\mathscr{I}(\mathscr{S})$ von identitätstheoretischen Axiomen angeben kann, so daß für alle $\mathscr{X} \subseteqq \overline{\mathscr{S}}$ die Menge $Fl(\mathscr{X})$ mit der Menge $Fl'\big(\mathscr{X} \cup \mathscr{I}(\mathscr{S})\big)$ übereinstimmt, wobei Fl' dasjenige Folgern bezeichnet, bei dem auch das Zeichen „$=$" durch eine beliebige zweistellige Relation interpretiert werden kann.

---

[1]) Siehe hierzu A. Tarski, Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, Proceedings of the internat. congress of mathematicians 1950, Vol. I, p. 705–720, sowie J. L. Bell and A. B. Slomson, Models and Ultraproducts, North Holland Publ. Comp. 1969.

Ein Tripel $(\mathscr{S}, \sigma, \mathfrak{X})$, wobei $(\mathscr{S}, \sigma)$ eine nichtelementare Sprache und $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathscr{F}}$ ein Axiomensystem ist, definiert die *nichtelementare Theorie* $\mathscr{T} = Fl^{\sigma}(\mathfrak{X})$. Dabei heißt das Axiomensystem $\mathfrak{X}$ *σ-kategorisch*, wenn $\mathfrak{X}$ bis auf Isomorphie nur ein einziges σ-Modell besitzt.

Beispiele.

1. Kommen in einer Sprache $\mathscr{S}$ neben Variablen x_i Variable M_i und prädikative Ausdrücke der Form $x_i \in M_i$ vor, so ist damit stillschweigend folgende Interpretationsvorschrift σ_1 verbunden:

Als Grundbereich für die Dinge der Sorte M_i ist bei einer beliebigen σ_1-Interpretation von $\mathscr{S}$ die Potenzmenge des Grundbereichs der Dinge der Sorte x_i zu nehmen und $\in$ ist durch die Elementrelation der in der Metatheorie benutzten Mengenlehre zu interpretieren.

Das klassische Beispiel einer σ_1-kategorischen Theorie ist die axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen nach PEANO:

Zur Formalisierung benötigen wir Variable n_i für natürliche Zahlen und Variable M_i für Mengen von natürlichen Zahlen, das zweistellige Prädikatensymbol $\in$, ein einstelliges Operationssymbol $'$ für die Nachfolgeoperation und eine Konstante o für eine spezielle natürliche Zahl, d. h. die Basis $\mathscr{B} = (\{\in\}, \{'\}, \{o\})$. In der Sprache $\mathscr{S}(\mathscr{B})$ lauten dann die Axiome Peanos:

$$\bigwedge n_1 \bigvee n_2\, n_1' = n_2,\ ^{1})$$

$$\bigwedge n_1 \bigwedge n_2\, (n_1' = n_2' \to n_1 = n_2),$$

$$\neg \bigvee n_1\, n_1' = o,$$

$$\bigwedge M_1\big((o \in M_1 \land \bigwedge n_1(n_1 \in M_1 \to n_1' \in M_1)) \to \bigwedge n_2\, n_2 \in M_1\big).$$

Der Kategorizitätsbeweis wird geführt, indem man unter wesentlicher Benutzung des letzten (Induktions-)Axioms und der nichtelementaren Interpretation des darin vorkommenden $\in$-Symbols induktiv einen Isomorphismus zwischen zwei beliebigen Modellen konstruiert.

2. Treten im folgenden in einer formalisierten Sprache neben Variablen x_i $(y_i, p_i, \ldots)$ Variable $X_i(Y_i, P_i, \ldots)$ und prädikative Ausdrücke der Form $x_i \in X_k (y_i \in Y_k, p_i \in P_k, \ldots)$ auf, so ist damit stillschweigend folgende Vorschrift verbunden (die betreffende Sprache ist also als nichtelementar aufzufassen):

Die mit X_i bezeichneten Dinge sind endliche Mengen von Dingen der Sorte x_i, und $\in$ ist durch die Elementrelation zu interpretieren.

Das zu dieser Vorschrift gehörige nichtelementare Folgern bezeichnet man als *schwache Logik zweiter Stufe.*

---

[1]) Dieses Axiom entfällt bei sonst üblichen Formalisierungen, da dort in der Regel keine Interpretation von Operationssymbolen durch partielle Operationen zugelassen wird.

3. Treten im folgenden in einer formalisierten Sprache neben Variablen $\mathfrak{x}_i$ Variable φ_i und Terme der Form $\varphi_i(\mathfrak{x}_k)$ auf, so ist damit stillschweigend folgende Vorschrift verbunden:

Die φ_i sind als eindeutige Abbildungen der Menge M der Dinge der Sorte $\mathfrak{x}_i$ in sich zu interpretieren, $\varphi_i(\mathfrak{x}_k)$ ist als zweistelliges Operationssymbol mit den Argumenten φ_i und $\mathfrak{x}_k$ aufzufassen und durch diejenige Operation F zu interpretieren, die durch $F(f, y) := f(y)$ beschrieben wird, so daß der Term $\varphi_i(\mathfrak{x}_k)$ insgesamt die übliche Bedeutung hat.

Eine Klasse etwas komplizierterer Beispiele nichtelementarer Sprachen wird ausführlich in Abschnitt 8.4. behandelt.

Die Definition des elementaren bzw. σ-Folgerns liefert unmittelbar eine Methode für den Nachweis, daß ein gewisser Ausdruck $\mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}}$ nicht aus einer Menge $\mathscr{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$ (σ-) folgt: Man gebe ein (σ-) Modell für $\mathscr{X}$ an, in dem H nicht gilt. Existiert ein solches Modell, so heißt H *unabhängig* von $\mathscr{X}$. Zum Beispiel wurde die Unabhängigkeit des sogenannten Parallelenaxioms von den übrigen Voraussetzungen der euklidischen Geometrie durch Angabe einer Interpretation der Grundbegriffe der euklidischen Geometrie geführt, bei der das Parallelenaxiom falsch wird, aber alle übrigen Axiome gelten. (Dieser historisch erste Unabhängigkeitsbeweis hat wesentlich zur Klärung des Wesens der axiomatischen Methode beigetragen.) Leider liefert die Definition des (σ-) Folgerns keinerlei Anhaltspunkte dafür, wie im konkreten Fall stichhaltige Folgerungen zu führen sind. Rückgang auf die Definition würde ja bedeuten, sämtliche (σ-) Modelle des untersuchten Axiomensystems daraufhin zu prüfen, ob die Behauptung in ihnen gilt. Meist hat man jedoch keinen Überblick über sämtliche Modelle eines Axiomensystems. In der mathematischen Logik wird gezeigt, daß sich das elementare Folgern gleichwertig durch ein formales (d. h. mit den Ausdrücken ohne Bezug auf deren mögliche Bedeutung operierendes) „Beweisen" mittels *logischer Axiome* und endlich vieler *Ableitungsregeln* ersetzen läßt. Als Beispiel einer solchen Schlußregel (deren Begründung sich aus dem Wertverlauf der Implikation ergibt) sei genannt:

Sind $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \overline{\mathscr{S}}$ *und* $(\mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2)$ *sowie* H_1 *aus* $\mathscr{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}$ *ableitbar, so ist auch* H_2 *aus* $\mathscr{X}$ *ableitbar* (*Abtrennungsregel bzw. „modus ponens"*).

Für nichtelementare Arten des Folgerns existiert jedoch im allgemeinen ein solcher gleichwertiger „Beweiskalkül" nachweisbar nicht. Wir werden uns im folgenden, wie allgemein üblich, auch beim elementaren Folgern nicht auf formale Schlußregeln stützen, sondern weiterhin „inhaltlich" schließen. Der erfahrene Mathematiker begeht dabei nur selten Fehler, und seine Sicherheit ist um so größer, je besser seine Einsicht in die in diesem Kapitel in aller Kürze skizzierten Zusammenhänge und je umfassender sein Überblick über mögliche Nichtstandardmodelle der untersuchten Theorie ist.

Das Folgern verläuft im allgemeinen so, daß man sich zum Beweis von $\mathrm{H} \in Fl^{(\sigma)}(\mathscr{X})$ ein beliebiges (σ-) Modell $\mathfrak{S}$ von $\mathscr{X}$ vorstellt und zeigt, daß H in $\mathfrak{S}$ gilt. Die Schwierigkeit besteht darin, bei diesem Beweis eben nur diejenigen Eigenschaften von $\mathfrak{S}$

zu benutzen, die ausdrücklich (durch σ und $\mathscr{X}$) vorausgesetzt sind. Die Unterscheidung zwischen den Termen und Ausdrücken der benutzten Sprache einerseits und den durch sie bei einer beliebigen Interpretation ω und einer beliebigen Belegung f dargestellten Dingen bzw. Sachverhalten $Wert(\mathrm{t}, \omega, f)$ bzw. $Wert(\mathrm{H}, \omega, f)$ andererseits wird dabei im folgenden dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß letztere mit den gleichen Symbolen wie t und H selbst, jedoch kursiv geschrieben werden. Wir werden also z. B. einen Beweis für die Aussage $\bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}_1(\mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{x})\big)$ einer formalisierten Theorie mit den Worten beginnen: Es sei x ein beliebiges Ding mit der Eigenschaft $H_1(x)$. Die Beachtung oder Nichtbeachtung dieses typographischen Unterschiedes sei dem Leser anheimgestellt.

2.4. Abkürzungen in formalisierten Sprachen

Zur Vereinfachung der Schreibweise von Ausdrücken formalisierter Sprachen benutzen wir im folgenden eine Reihe von Abkürzungsregeln.

1. Die Außenklammern fertiger Ausdrücke werden weggelassen. Die zweistelligen Booleschen Funktoren $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ haben in der angegebenen Reihenfolge zunehmende Bindekraft. Es steht also z. B.

$$\mathrm{H}_1 \leftrightarrow \mathrm{H}_2 \rightarrow \mathrm{H}_3 \text{ für } \big(\mathrm{H}_1 \leftrightarrow (\mathrm{H}_2 \rightarrow \mathrm{H}_3)\big),$$

$$\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2 \rightarrow \mathrm{H}_3 \vee \mathrm{H}_4 \text{ für } \big((\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2) \rightarrow (\mathrm{H}_3 \vee \mathrm{H}_4)\big).$$

Unter Berufung auf die Assoziativität der Alternative und der Konjunktion schreiben wir $\mathrm{H}_1 \vee \mathrm{H}_2 \vee \cdots \vee \mathrm{H}_n$ bzw. $\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{H}_n$ statt $\big(\cdots(\mathrm{H}_1 \vee \mathrm{H}_2) \vee \mathrm{H}_3) \vee \cdots \vee \mathrm{H}_n\big)$ bzw. $\big(\cdots(\mathrm{H}_1 \wedge \mathrm{H}_2) \wedge \mathrm{H}_3) \wedge \cdots \wedge \mathrm{H}_n\big)$ oder äquivalenter Umklammerungen.

Bei der Formulierung von konkreten Axiomen und Sätzen in konkreten formalisierten Sprachen lassen wir häufig äußere Generalisierungen fort. Es ist also z. B.

$$\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \rightarrow \bigvee \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \text{ auf } \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \text{ auf } \mathrm{g})$$

als Abkürzung des abgeschlossenen Ausdrucks

$$\bigwedge \mathrm{p}_1 \bigwedge \mathrm{p}_2\big(\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \rightarrow \bigvee \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \text{ auf } \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \text{ auf } \mathrm{g})\big)$$

zu verstehen, falls aus dem Zusammenhang hervorgeht, daß es sich um die Formulierung eines Axioms bzw. Satzes handelt.

Zur bequemeren Formulierung der folgenden Vereinbarungen sehen wir von der eventuellen Mehrsortigkeit der betrachteten Sprachen ab, d. h., wir benutzen x_i, y_j, ... sozusagen als „Variable für Variable". Statt $\mathrm{x}_1 \bigwedge \mathrm{x}_2 \bigwedge \cdots \bigwedge \mathrm{x}_n \mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ schreiben wir kurz

$$\bigwedge \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_n \mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n),$$

analog

$$\bigvee \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_n \mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n).$$

Bei allgemeinen Erörterungen werden wir häufig

$$\bigwedge \mathbf{x}H(\mathbf{x}) \text{ statt } \bigwedge x_1 \cdots x_n H(x_1, \ldots, x_n)$$

bzw.

$$\bigvee \mathbf{x}H(\mathbf{x}) \text{ statt } \bigvee x_1 \cdots x_n H(x_1, \ldots, x_n)$$

schreiben. Ist es erforderlich, die in H vollfrei vorkommenden Variablen in zwei oder mehr Arten zu trennen, so schreiben wir $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und ähnlich, also z. B. $\bigwedge \mathbf{x} \bigvee \mathbf{y} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ist $\mathbf{x}$ zunächst ohne Angabe der Anzahl und Sorte seiner Komponenten benutzt worden, so bedeutet im weiteren $\mathbf{x}^i$ die i-te Komponente von $\mathbf{x}$ und $n(\mathbf{x})$ die Anzahl der Komponenten von $\mathbf{x}$. Es ist also stets $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 \ldots \mathbf{x}^{n(\mathbf{x})}$.

Während die bisherigen Vereinbarungen einen mehr technischen Charakter hatten, kommt den folgenden Ausführungen, obwohl auch sie — formal betrachtet — von Abkürzungen handeln, grundsätzliche Bedeutung zu.

2. Unter wesentlicher Benutzung der Identität werden in elementaren Sprachen einige Wendungen formulierbar, deren logischer Charakter den beiden Quantoren ähnlich ist. Da sie häufig vorkommen, führen wir gleichzeitig mit ihrer Besprechung abkürzende Symbole für sie ein:

Es gibt wenigstens n verschiedene Dinge mit der Eigenschaft H:

$$\bigvee_n x H(x) :\leftrightarrow \bigvee x_1 \cdots x_n \big(H(x_1) \wedge \cdots \wedge H(x_n)$$
$$\wedge\, x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n\big).$$

(Dabei ist $\neq$ natürlich kein zusätzliches Relationssymbol, sondern $x_i \neq x_j$ steht für $\neg\, x_i = x_j$).

Es gibt genau n verschiedene Dinge mit der Eigenschaft H:

$$\bigvee_n !!\, x H(x) :\leftrightarrow \bigvee_n x H(x) \wedge \neg \bigvee_{n+1} x H(x).$$

Spezialfall: $\bigvee !!\, x H(x) :\leftrightarrow \bigvee x H(x) \wedge \neg \bigvee_2 x H(x)$.

Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Variablentupel gleicher Länge, so bedeutet

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} :\leftrightarrow \mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}^{n(\mathbf{x})} = \mathbf{y}^{n(\mathbf{y})}$$

und

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} :\leftrightarrow \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

In Verallgemeinerung der oben definierten Quantoren $\bigvee_n x$, $\bigvee_n !!\, x$ definieren wir:

$$\bigvee_n \mathbf{x}H(\mathbf{x}) :\leftrightarrow \bigvee \mathbf{x}_1 \cdots \bigvee \mathbf{x}_n \big(H(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge H(\mathbf{x}_n)$$
$$\wedge\, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_n \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{n-1} \neq \mathbf{x}_n\big),$$
$$\bigvee_n !!\, \mathbf{x}H(\mathbf{x}) :\leftrightarrow \bigvee_n \mathbf{x}H(\mathbf{x}) \wedge \neg \bigvee_{n+1} \mathbf{x}H(\mathbf{x}),$$

insbesondere gilt:

$$\bigvee !!\, \mathbf{x}H(\mathbf{x}) :\leftrightarrow \bigvee \mathbf{x}H(\mathbf{x}) \wedge \neg \bigvee_2 \mathbf{x}H(\mathbf{x}).$$

2.5. Definitionen in formalisierten Sprachen

Die Sätze inhaltlicher (d. h. nicht formalisierter) geometrischer Theorien, wie zum Beispiel der ebenen affinen, projektiven oder euklidischen Geometrie, handeln von einer so großen Zahl von Objektarten (z. B. Punkte, Geraden, Kreise, Strecken, Strahlen, Winkel, Dreiecke, Halbebenen, ...) und Relationen bzw. Operationen im Bereich dieser Objektarten (z. B. Inzidenz, Anordnung, Kongruenz, Parallelität, Schneiden; Lot, Schnittpunkt, Mittelpunkt, Parallele, ...), daß man zu sehr unübersichtlichen formalisierten Theorien mit sehr vielen Axiomen kommt, wenn man alle diese Begriffe von Anfang an in die Formalisierung einbeziehen will. Außerdem lassen sich zu jeder Liste von elementargeometrischen Begriffen sicher weitere Begriffe angeben, die ebenfalls Gegenstand der Geometrie sind und noch nicht berücksichtigt wurden. Der übliche Weg in solchen Fällen besteht darin, von wenigen Grundbegriffen auszugehen und alle übrigen interessierenden Begriffe nach und nach durch Definitionen einzuführen, wobei die angestrebten Sätze über diese Begriffe unter Benutzung der Definitionen und der Axiome über die Grundbegriffe bewiesen werden. Die mit der definitorischen Erweiterung von formalisierten Sprachen zusammenhängenden Grundlagenfragen sind bisher vorwiegend für den Spezialfall der Definition von Relationen (zum Teil auch von Konstanten und vollen Operationen) in einsortigen elementaren Sprachen untersucht worden. Da dies einerseits für die Belange der Geometrie und insbesondere für die Belange dieses Buches viel zu speziell ist, andererseits die meisten Schwierigkeiten einer allgemeineren Behandlung formalisierter Definitionen durch die hier ausreichende rein semantische Betrachtungsweise vermieden werden können, stellen wir im folgenden eine neue, sehr allgemeine Definition des Begriffs definitorische Spracherweiterung zur Diskussion. Diese Definition (die sich möglicherweise bei weiteren Untersuchungen als zu allgemein erweisen kann) umfaßt alle bisher behandelten Spezialfälle und auch alle in diesem Buch benötigten Fälle. Die letzten werden anschließend ausführlich behandelt.

Sind $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ und $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ nichtelementare Sprachen, so heißt $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ eine *Erweiterung* von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$, wenn $\mathscr{S}_1 \subseteqq \mathscr{S}_2$ und die Einschränkung einer beliebigen σ_2-Interpretation ω' von $\mathscr{S}_2$ auf $\mathscr{S}_1$ eine σ_1-Interpretation ω dieser Sprache ist. Dabei heißt $\mathscr{S}_2$ eine Erweiterung *erster* bzw. *zweiter Art* von $\mathscr{S}_1$, je nachdem, ob in $\mathscr{S}_2$ nur mehr Relations- bzw. Operations- bzw. Konstantensymbole oder auch mehr Variablensorten als in $\mathscr{S}_1$ vorkommen.

Eine Erweiterung (erster bzw. zweiter Art) $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ einer Sprache $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ heißt eine *definitorische Erweiterung erster* bzw. *zweiter Art* von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$, wenn gilt:

a) σ_2 ist eine solche Verschärfung von σ_1 in bezug auf die in $\mathscr{S}_2$ zusätzlich vorkommenden Sprachbestandteile, daß sich jede σ_1-Interpretation ω von $\mathscr{S}_1$ in eindeutiger Weise zu einer σ_2-Interpretation ω' von $\mathscr{S}_2$ fortsetzen läßt.

b) Es gibt eine Rückübersetzung der abgeschlossenen Ausdrücke der Sprache $\mathscr{S}_2$ in die Sprache $\mathscr{S}_1$, d. h. eine Abbildung f von $\overline{\mathscr{S}}_2$ in $\overline{\mathscr{S}}_1$ mit $f(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ für alle

$\mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}}_1$ und

$$Wert(\mathrm{H}, \omega') = Wert\big(f(\mathrm{H}), \omega'\big) \big(= Wert(f(\mathrm{H}), \omega)\big)$$

für jede σ_2-Interpretation ω' von $\mathscr{S}_2$ und jeden abgeschlossenen Ausdruck $\mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}}_2$. (Gleichwertig ist $Wert\big(\mathrm{H} \leftrightarrow f(\mathrm{H}), \omega'\big) = \boldsymbol{W}$ für jeden abgeschlossenen Ausdruck $\mathrm{H} \in \overline{\mathscr{S}}_2$ und jede σ_2-Interpretation ω' von $\mathscr{S}_2$.)

Die Forderung a) bedeutet etwa: Eine Definition besteht im Übergang zu einer erweiterten Sprache unter gleichzeitiger Angabe einer Interpretationsvorschrift für die definitorisch eingeführten Sprachbestandteile, so daß deren Bedeutung bei einer beliebigen σ_1-Interpretation der ursprünglichen Sprache eindeutig mitfixiert ist. Die Forderung b) bedeutet etwa: Eine definitorische Spracherweiterung muß in dem Sinne prinzipiell entbehrlich sein, daß man zu jedem abgeschlossenen Ausdruck der erweiterten Sprache einen „gleichbedeutenden“ abgeschlossenen Ausdruck der ursprünlichen Sprache angeben kann. Aus b) folgt insbesondere, daß für jedes Axiomensystem $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}_2$ der erweiterten Sprache (speziell für jedes $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathscr{S}}_1$) die Menge $Fl^{\sigma_1}\big(f(\mathfrak{X})\big)$ der Folgerungen, die man in $\mathscr{S}_1$ aus den Rückübersetzungen der Axiome ziehen kann, mit der Menge $f\big(Fl^{\sigma_2}(\mathfrak{X})\big)$ der Rückübersetzungen aller Folgerungen übereinstimmt, die man in der erweiterten Sprache erhält. Die Forderung a) allein wäre zum Beispiel erfüllt, wenn man eine beliebige Sprache durch Variable n_i und prädikative Ausdrücke der Form $n_i < \mathrm{n}_j$ erweitert und festlegt, daß die n_i durch natürliche Zahlen und „$<$“ durch die übliche Anordnung der natürlichen Zahlen interpretiert werden sollen. In diesem Fall wird aber die Forderung b) in der Regel nicht erfüllt sein, und eine solche Spracherweiterung wird man daher nicht als definitorisch ansehen. Es sei aber bemerkt, daß der durch b) zum Ausdruck gebrachte Aspekt der definitorischen Spracherweiterungen eigentlich erst bei metatheoretischen Untersuchungen (etwa Äquivalenz von Theorien mit verschiedenen Grundbegriffen) eine Rolle spielt, während man beim effektiven Aufbau einer formalisierten Theorie aus einem Axiomensystem zunächst nur die Eigenschaft a) der Definitionen benutzt. Ob es im konkreten Fall gelingt, alle interessierenden Begriffe mit Hilfe des gewählten Systems von Grundbegriffen zu definieren, ist in ähnlicher Weise ein Kriterium für deren „Vollständigkeit“, wie die Folgerbarkeit aller Sätze der inhaltlich vorgegebenen Theorie ein Kriterium für die Vollständigkeit des gewählten Axiomensystems ist.

Wie bereits in Abschnitt 2.3. bemerkt wurde, kann eine Interpretationsvorschrift in manchen Fällen durch ein Axiomensystem ersetzt, d. h. eine nichtelementare Theorie auf eine elementare Theorie zurückgeführt werden. In allen im folgenden explizit behandelten Fällen definitorischer Spracherweiterung kann die primär mit den eingeführten Sprachbestandteilen verbundene Interpretationsvorschrift durch sogenannte *Einführungsaxiome* für diese Sprachbestandteile ersetzt werden. Die sukzessive Anreicherung der Sprache unter gleichzeitiger Verstärkung des ursprünglichen Axiomensystems durch die Einführungsaxiome für die jeweils definierten Begriffe liefert dann als Endresultat gerade das zu Beginn dieses Abschnitts skizzierte „Ungetüm“ einer formalisierten Theorie mit sehr vielen Grundbegriffen und sehr vielen Axiomen.

Definition von Relationen

Wir haben bereits festgestellt, daß ein Ausdruck $\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ einer formalisierten Sprache $\mathcal{S}$, in dem genau die Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ (voll)frei vorkommen, bei jeder Interpretation ω der Sprache $\mathcal{S}$ den Charakter einer Aussageform bekommt, d. h. eine wohlbestimmte n-stellige Relation $\omega(\mathrm{H})$ darstellt. Durch Definitionen nach dem Schema

(1) $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) :\leftrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$

wird im folgenden zum Ausdruck gebracht, daß die betrachtete Sprache $\mathcal{S}$ durch das n-stellige Attributensymbol R (d. h. prädikative Ausdrücke der Form $\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$) erweitert und gleichzeitig die bisherige Interpretationsvorschrift (eventuell σ_0) dadurch ergänzt wird, daß R durch die Relation $\omega(\mathrm{H})$ interpretiert werden soll. Eine Rückübersetzung (d. h. Elimination des neuen Sprachbestandteils R) ist bei dieser Art von Definitionen nicht nur für abgeschlossene, sondern sogar für beliebige Ausdrücke möglich. Man hat nur jeden Teilausdruck der Form $\mathrm{R}(\mathrm{x}_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_n})$ durch den gleichbedeutenden Ausdruck $\mathrm{H}(\mathrm{x}_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_n})$ zu ersetzen, wobei allerdings eventuell eine Umbenennung der in H vorkommenden gebundenen Variablen nötig ist. Die Interpretationsvorschrift für das definitorisch eingeführte Symbol R kann offenbar gleichwertig durch das Einführungsaxiom

(2) $\bigwedge \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_n \big(\mathrm{R}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \leftrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)\big)$

für R ersetzt werden. Gilt umgekehrt in einer formalisierten Theorie für eine der bebetrachteten Grundrelationen R ein Satz der Form (2), wobei R nicht in H vorkommt, so ist R offenbar als Grundbegriff der Theorie entbehrlich.

Beispiele. Im folgenden bezeichne $\mathcal{S}_I$ stets die Grundsprache der ebenen Inzidenzgeometrie mit Punktvariablen p_i, Geradenvariablen g_i und prädikativen Ausdrücken der drei Formen $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_j$, $\mathrm{g}_i = \mathrm{g}_j$, $\mathrm{p}_i \in \mathrm{g}_j$. Wir definieren:

(3) $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ kollinear $:\leftrightarrow \bigvee \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_3 \in \mathrm{g})$;

(4) $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ nicht kollinear $:\leftrightarrow \neg\, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ kollinear;

(5) $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2 :\leftrightarrow \neg \bigvee \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2)$;

$\mathrm{g}_1 \underline{\underline{\parallel}}\, \mathrm{g}_2 :\leftrightarrow \mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2 \vee \mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2$ (gelesen: g_1 parallel oder gleich g_2).

(3) ist ein typischer Fall einer zu Abkürzungszwecken eingeführten Definition; (4) zeigt, wie man durch hinreichend viele Definitionen auch in formalisierten Sprachen so etwas wie „sprachliche Glätte" erreichen kann; (5) wirft das Problem der „richtigen Definition" auf: Natürlich ist es sinnlos zu fragen, ob eine formal korrekte Definition nach dem Schema (1) richtig oder falsch ist. Häufig sucht man jedoch für einen inhaltlich bereits vorliegenden Begriff eine Definition mittels einer vorgegebenen formalisierten Grundsprache. In diesem Fall besteht die Gefahr, daß der formal definierte Begriff sich nicht genau mit demjenigen deckt, den man definieren wollte bzw. der üblicherweise mit der gewählten Bezeichnung versehen wird. (5) ist eine

„richtige" Definition der Parallelität in der ebenen Geometrie, deckt sich aber z. B. nicht mit dem inhaltlichen Parallelitätsbegriff in der räumlichen Geometrie. (Hier müßte man etwa definieren:

$$g_1 \parallel g_2 :\leftrightarrow \bigvee e(g_1 \subset e \wedge g_2 \subset e) \wedge \neg \bigvee p(p \in g_1 \wedge p \in g_2),$$

wobei e eine Variable für Ebenen ist und „$\subset$" das Liegen einer Geraden in einer Ebene bezeichnet.)

Oft braucht man eine Schar von ähnlich definierten Relationen, die sich im wesentlichen nur durch die Stellenzahl unterscheiden, z. B.

$$x_1, x_2, x_3 \text{ paarweise verschieden} :\leftrightarrow x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ paarweise verschieden} :\leftrightarrow x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \\ \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge x_3 \neq x_4;$$

...

In solchen Fällen faßt man, soweit es ohne Mißverständnisse möglich ist, unendlich viele Einzeldefinitionen zu einem Schema zusammen, z. B.

$$x_1, \ldots, x_n \text{ paarweise verschieden} :\leftrightarrow x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \\ \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n;$$

$$p_1, \ldots, p_n \text{ kollinear} :\leftrightarrow \bigvee g(p_1 \in g \wedge \cdots \wedge p_n \in g);$$

$$g_1, \ldots, g_n \text{ koinzident} :\leftrightarrow \bigvee p(p \in g_1 \wedge \cdots \wedge p \in g_n);$$

$$p_1, \ldots, p_n \text{ in allgemeiner Lage} :\leftrightarrow$$

$$p_1, p_2, p_3 \text{ nicht kollinear} \wedge \cdots$$
$$\wedge\, p_1, p_2, p_n \text{ nicht kollinear}$$
$$\wedge\, p_1, p_3, p_4 \text{ nicht kollinear} \wedge \cdots$$
$$\wedge\, p_1, p_3, p_n \text{ nicht kollinear} \wedge \cdots$$
$$\wedge\, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n \text{ nicht kollinear}.$$

Analog definiert man „$g_1, \ldots, g_n$ in allgemeiner Lage", indem man Kollinearität durch Koinzidenz ersetzt. In allen solchen Fällen kann man das Schema durch eine induktive Definition ersetzen.

Beispiel.

$$x_1, x_2, x_3 \text{ paarweise verschieden} :\leftrightarrow x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3;$$

$$x_1, \ldots, x_{n+1} \text{ paarweise verschieden} :\leftrightarrow$$

$$x_1, \ldots, x_n \text{ paarweise verschieden}$$
$$\wedge\, x_2, \ldots, x_{n+1} \text{ paarweise verschieden} \wedge x_1 \neq x_{n+1}.$$

Definition von (partiellen) Operationen und Konstanten

Unter einer *bedingten eindeutigen Existenzaussage* (kurz BEE) verstehen wir einen abgeschlossenen Ausdruck der Form

(6) $\quad \bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}_1(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee!!\,\mathrm{y}\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big)$

(dabei müssen nicht notwendig alle Variablen x in $\mathrm{H}_1(\mathrm{x})$ bzw. in $\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ vorkommen, jedoch müssen alle Variablen x in wenigstens einem dieser beiden Teilausdrücke vollfrei vorkommen). Unter einer *unbedingten eindeutigen Existenzaussage* (kurz UEE) verstehen wir einen abgeschlossenen Ausdruck der Form

(7) $\quad \bigwedge \mathrm{x} \bigvee!!\,\mathrm{y}\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

Da jeder Ausdruck der Form (7) dem Ausdruck $\bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{x} = \mathrm{x} \rightarrow \bigvee!!\,\mathrm{y}\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big)$ der Form (6) logisch gleichwertig ist, wollen wir die UEE als Spezialfälle von BEE ansehen, obwohl sie es als Zeichenreihen natürlich nicht sind. Mit ähnlicher Motivierung betrachten wir *absolute eindeutige Existenzaussagen* (kurz AEE), d. h. abgeschlossene Ausdrücke der Form

(8) $\quad \bigvee!!\,\mathrm{y}\mathrm{H}(\mathrm{y})$

als Spezialfälle $\big(n(\mathrm{x}) = 0\big)$ der UEE und damit der BEE.

Gilt in einer in der Sprache $(\mathscr{S}, \sigma)$ formulierten Theorie $\mathscr{T}$ die BEE (6), so kann man in jedem Modell von $\mathscr{T}$ diejenige partielle Operation F betrachten, die für alle $\boldsymbol{x}$ mit $H_1(\boldsymbol{x})$ definiert ist und jedem solchen $n(\mathrm{x})$-Tupel dasjenige y zuordnet, für welches $H_2(\boldsymbol{x}, y)$ gilt. Durch Definitionen nach dem Schema

(9) $\quad \mathrm{F}(\mathrm{x}) := \iota\mathrm{y}\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, falls $\mathrm{H}_1(\mathrm{x})$

(gelesen: dasjenige y, für welches $\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ gilt),

die durch die Gültigkeit von (6) in der betrachteten Theorie gerechtfertigt sein müssen, bzw. nach dem Schema

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) := \iota\mathrm{y}\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}),$$

die durch die Gültigkeit von (7) gerechtfertigt sein müssen, bringen wir im folgenden zum Ausdruck, daß die benutzte Sprache $\mathscr{S}$ durch das in $\mathscr{S}$ noch nicht vorkommende Operationssymbol F erweitert[1]) und gleichzeitig die bestehende Interpretationsvorschrift σ wie folgt ergänzt wird:

(10) $\quad$ F *ist durch die oben beschriebene partielle Operation F zu interpretieren.*

Ein gewisser Widerspruch zwischen dieser Definitionsmethode und dem oben eingeführten allgemeinen Definitionsbegriff besteht darin, daß hier zunächst nicht jede σ-Interpretation ω von $\mathscr{S}$ eindeutig zu einer Interpretation von F fortgesetzt werden

[1]) Bei allgemeinen Betrachtungen werden wir die nach (9) definierte Operation immer mit $\mathrm{F}_{\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2}$ bezeichnen.

kann, sondern dies nur für solche ω möglich ist, die (6) wahr machen. Das kann man am einfachsten dadurch beheben, daß man noch zusätzlich festlegt:

(11) *Falls* (6) *bei der betreffenden Interpretation* ω *nicht gilt, ist* F *durch die nirgends definierte Operation zu interpretieren.*

Die Klasse aller σ-Interpretationen, die (10) bzw. (11) erfüllen, bezeichnen wir als σ' und erhalten somit als Ergebnis der definitorischen Erweiterung die nichtelementare Sprache $(\mathscr{S}', \sigma')$, wobei die Basis von $\mathscr{S}'$ die um das Operationssymbol F erweiterte Basis von $\mathscr{S}$ ist. (10) und (11) können offenbar durch das Einführungsaxiom

(12) $\bigwedge \mathrm{xy}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \leftrightarrow \mathrm{H} \wedge \mathrm{H}_1(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big)$

für F ersetzt werden, wobei H die BEE (6) bezeichnet. Betrachtet man nun eine Theorie $\mathscr{T}$, in der H gilt, so kann das Konjunktionsglied H in (12) weggelassen werden, und nur in solchen Fällen werden wir (9) anwenden. Für Interpretationen der Sprache $(\mathscr{S}, \sigma)$, bei denen H falsch ist, folgt hingegen aus (12) sofort, daß es kein $\boldsymbol{x}, y$ mit $F(\boldsymbol{x}) = y$ gibt.

Gilt in einer Theorie $\mathscr{T}$ für einen der Operations-Grundbegriffe F eine Aussage der Form

$$\bigwedge \mathrm{xy}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \leftrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big),$$

wobei F im Ausdruck H(x, y) nicht vorkommt, so gilt in $\mathscr{T}$ auch die BEE

$$\bigwedge \mathrm{x}\big(\bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \bigvee !!\, \mathrm{y}\mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big),$$

und die auf Grund dieser BEE definierbare Operation stimmt offenbar mit F überein, d. h., F ist als Grundbegriff entbehrlich.

Beispiel. Wir legen wieder die Sprache der ebenen Inzidenzgeometrie zugrunde. In der ebenen affinen bzw. auch projektiven Geometrie gilt die in dieser Sprache formulierbare BEE

$$\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\big(\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \to \bigvee !!\, \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g})\big).$$

Auf Grund dieser BEE kann man „die Gerade durch $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$“ als eine partielle Punkt^2 $\to$ Geraden-Operation definitorisch einführen, für die wir, abweichend vom üblichen Gebrauch, aus später zu erläuternden Gründen das Operationssymbol L wählen:

$$\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) := \iota\mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g}), \text{ falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2.$$

Wir behaupten nun, daß (wie bei den definitorisch eingeführten Attributensymbolen) nicht nur jeder abgeschlossene sondern jeder Ausdruck H der erweiterten Sprache $(\mathscr{S}', \sigma')$ in einen gleichbedeutenden Ausdruck [H] der ursprünglichen Sprache $(\mathscr{S}, \sigma)$ zurückübersetzt werden kann, so daß gilt:

(13) [H] *enthält die gleichen (voll)freien Variablen wie* H. (Insbesondere ist also [H] genau dann abgeschlossen, wenn H abgeschlossen ist).

(14) *Für jede σ'-Interpretation ω von $\mathscr{S}'$, bei der die der Definition von* F *zugrunde liegende* BEE (6) *wahr wird, und für jede Belegung f bezüglich ω gilt* $Wert([\mathrm{H}], \omega, f) = Wert(\mathrm{H}, \omega, f)$, *d.h.*, [H] *und* H *stellen die gleiche Relation und im Fall der Abgeschlossenheit gleichwertige Aussagen dar.*

Wir lösen das Eliminationsproblem für F, indem wir zu jedem Ausdruck $\mathrm{H} \in \mathscr{S}'$, der F wenigstens einmal enthält, einen Ausdruck [H] angeben, der (13) und (14) erfüllt und in dem F wenigstens einmal weniger vorkommt als in H. Nach endlich vielen Schritten erhält man dann offenbar einen solchen Ausdruck [H], in dem F nicht mehr vorkommt. Zur Konstruktion von [H] zu gegebenem H fixieren wir in H einen bestimmten innersten Term der Form $\mathrm{F}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$, d. h. einen derartigen in H als Teilzeichenreihe enthaltenen Term, bei dem in $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n$ das Operationssymbol F nicht mehr vorkommt. In H ist das fixierte Vorkommen in einem bestimmten prädikativen Teilausdruck H* enthalten. Mit H** bezeichnen wir einen Ausdruck, der aus H* entsteht, wenn man den fixierten Term $\mathrm{F}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ durch eine Variable y entsprechender Sorte ersetzt, die in H nicht vorkommt. Dann erhält man [H], indem man in H den fixierten prädikativen Teilausdruck H* durch den Ausdruck

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n) \wedge \bigvee \mathrm{y}\big(\mathrm{H}_2(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{H}^{**}\big)$$

ersetzt.

Es sei bemerkt, daß die Bedeutung des aus einem Ausdruck H gewonnenen F-freien Ausdrucks [H] davon abhängig ist, welche Sprachbestandteile als prädikativ angesehen werden. Zum Beispiel gilt:

$$[\neg\, \mathrm{p}_3 \in \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)] = \neg\,\big(\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \wedge \bigvee \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_3 \in \mathrm{g})\big),$$

d. h.

$$\neg\, \mathrm{p}_3 \in \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \leftrightarrow \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear};$$

verwenden wir jedoch neben $\in$ auch $\notin$ als Grundbegriff, so ist $\mathrm{p}_3 \notin \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ ein prädikativer Ausdruck, und es gilt:

$$[\mathrm{p}_3 \notin \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)] = \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \wedge \bigvee \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_3 \notin \mathrm{g}),$$

d. h.

$$\mathrm{p}_3 \notin \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \leftrightarrow \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \wedge \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear}.$$

Tatäschlich ist der Sprachgebrauch in der Mathematik in allen Fällen, in denen partielle Operationen auftreten (und das betrifft nicht nur definitorisch eingeführte!), nicht einheitlich.[1]) Zu unserem Beispiel werden gewiß einige Geometer die Ansicht vertreten, daß die Aussageform „p_3 liegt nicht auf der Geraden durch $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$“ insbesondere dann wahr ist, wenn gar keine eindeutig bestimmte Gerade durch $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$ existiert (das entspricht der ersten Bedeutungsvariante), während andere meinen werden, daß man in diesem Fall gar nicht von der Geraden durch $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$ sprechen darf, daß also die zitierte Redeweise die Voraussetzung $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$ impliziert (das ent-

[1]) Vgl. G. Pickert, Projektive Ebenen, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955, S. 5.

spricht der zweiten Bedeutungsvariante). Wir werden im folgenden die Bedeutung von Ausdrücken, in denen partielle Operationen auftreten, immer auf die effektiv hingeschriebene Formulierung beziehen, also z. B. $\notin$ und $\nparallel$ als einheitliche Attributensymbole auffassen und, wenn anderes gemeint ist, ausdrücklich $\neg\, p_3 \in L(p_1, p_2)$ bzw. $\neg\, g_1 = L(p_1, p_2)$ usw. schreiben. Analog gilt:

$$\neg\, g_1 \parallel L(p_1, p_2) \leftrightarrow \neg\, (p_1 \neq p_2 \wedge \bigvee g(p_1 \in g \wedge p_2 \in g \wedge g_1 \parallel g).$$

Wollen wir aber zum Ausdruck bringen

$$p_1 \neq p_2 \wedge \bigvee g(p_1 \in g \wedge p_2 \in g \wedge \neg\, g_1 \parallel g),$$

so führen wir definitorisch ein neues Zeichen $\nparallel$ für „nichtparallel" ein und schreiben $g_1 \nparallel L(p_1, p_2)$.

Einige verbreitete Definitionsmethoden für (partielle) Operationen ordnen sich dem oben behandelten Definitionsprinzip als Spezialfälle unter:

Definition durch Superposition

Sind F_1 und F_2 Operationssymbole der betrachteten Sprache, wobei F_2 einstellig ist und die Argumentsorte von F_2 mit der Bildsorte von F_1 übereinstimmt, und kommt das Symbol F_3 noch nicht in der Sprache vor, so ist die nach dem Schema

$$F_3(x) := F_2(F_1(x))$$

definierte partielle Operation identisch mit der durch

$$F_3(x) := \iota y \bigvee z(F_1(x) = z \wedge F_2(z) = y), \text{ falls } \bigvee yz(F_1(x) = z \wedge F_2(z) = y)$$

definierten Operation. Die Aufstellung der zugehörigen BEE sei dem Leser überlassen.

Definition durch Fallunterscheidung

Die nach dem Schema

$$F_3(x) := \begin{cases} F_1(x), \text{ falls } H(x), \\ F_2(x), \text{ falls } \neg\, H(x), \end{cases}$$

definierte Operation F_3 (wobei F_1 und F_2 Operationssymbole der betrachteten Sprache mit gleichen Argument- und Bildsorten sind und F_3 in der Sprache noch nicht vorkommt), ist identisch mit der durch

$$F_3(x) := \iota y((H(x) \wedge F_1(x) = y) \vee (\neg\, H(x) \wedge F_2(x) = y)),$$

$$\text{falls } \bigvee y((H(x) \wedge F_1(x) = y) \vee (\neg\, H(x) \wedge F_2(x) = y))$$

definierten Operation. Analoges gilt für andere Formen der Definition durch Fallunterscheidung, z. B.

$$\mathrm{F}_3(\mathrm{x}) := \begin{cases} \mathrm{F}_1(\mathrm{x}), \text{ falls } \mathrm{H}(\mathrm{x}), \\ \text{nicht definiert sonst.} \end{cases}$$

Definition durch Unterdrückung fiktiver Argumente

Gilt für die (partielle) Operation F der betrachteten Sprache $\mathcal{S}$ in einer in $\mathcal{S}$ formulierten Theorie

$$\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2\big(\bigvee \mathrm{z}_1\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = \mathrm{z}_1 \wedge \bigvee \mathrm{z}_2\mathrm{F}(\mathrm{x}, y_2) = \mathrm{z}_2 \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_2)\big),$$

so ist die Definition einer Operation F_2 (F_2 ein nicht in $\mathcal{S}$ vorkommendes Symbol) nach dem Schema

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{x}) := \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \ \mathrm{y} \text{ beliebig}$$

gerechtfertigt. Die so definierte Operation ist identisch mit der durch

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{x}) := \iota\mathrm{z} \bigvee \mathrm{y}\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{z}, \text{ falls } \bigvee \mathrm{y}\mathrm{z}\mathrm{F}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{z},$$

definierten Operation.

Weitgehend analog zur Definition von (partiellen) Operationen auf Grund von in der betrachteten Theorie gültigen BEE ist die Definition von Konstanten auf Grund von in der betrachteten Theorie gültigen AEE, die wir hier nur der Vollständigkeit halber kurz erwähnen, da Konstanten in den üblichen elementargeometrischen Theorien auf Grund einer gewissen Homogenität ihrer Modelle nicht definierbar sind. Gilt in einer Theorie die AEE (8), so bringt eine Definition nach dem Schema

$$\mathrm{c} := \iota\mathrm{y}\mathrm{H}(\mathrm{y})$$

zum Ausdruck, daß die Sprache durch die Konstante c und die Interpretationsvorschrift dadurch erweitert wird, daß c bei beliebigen zulässigen Interpretationen ω durch dasjenige Ding c zu interpretieren ist, für welches $\mathit{Wert}\big(\mathrm{H}(\mathrm{y}), \omega, f\big) = \boldsymbol{W}$, wenn $f(\mathrm{y}) = c$.

Während die bisher behandelten Definitionsmethoden in unserer Terminologie zu definitorischen Erweiterungen erster Art führen, kommen wir nun zu einer speziell für die Geometrie charakteristischen Definitionsmethode, die zu Erweiterungen zweiter Art, d. h. zur Einbeziehung neuer Sorten von Grunddingen in die Sprache führt. Es sei aber betont, daß diese Methode die definitorischen Erweiterungen zweiter Art keineswegs ausschöpft.

Definitorische Einführung von Familien definierbarer Mengen als Dinge neuer Sorte

Sind $\mathrm{H}_1(\mathrm{x})$ und $\mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ Ausdrücke einer Sprache $\mathcal{S}$, so kann man bei einer beliebigen Interpretation von $\mathcal{S}$ für jedes System $\boldsymbol{x}$ von Dingen mit der Eigenschaft $H_1(\boldsymbol{x})$ die Menge $M(\boldsymbol{x}) = \{y\colon H_2(\boldsymbol{x}, y)\}$ bilden. Dabei ist die Einschränkung der Bildung von

$M(x)$ auf solche x mit der Eigenschaft $H_1(x)$ von der Sache her offenbar nicht nötig, jedoch zur Nachbildung gewisser inhaltlich vorliegender Begriffsbildungen zweckmäßig (vgl. die folgenden Beispiele). Unter Bezug auf diese Vorstellung ist es sinnvoll, prädikative Ausdrücke der Form $y \in M(x)$ als Abkürzung bzw. gleichbedeutende Schreibweise für $H_1(x) \wedge H_2(x, y)$ zu benutzen. Dies ist jedoch zunächst noch ein Spezialfall der definitorischen Einführung von Relationssymbolen:

$$y \in M(x) :\leftrightarrow H_1(x) \wedge H_2(x, y).$$

Es sei betont, daß die „Terme" $M(x)$ und das „zweistellige Relationssymbol" $\in$ in diesem Stadium noch keine selbständige Bedeutung haben, sondern $y \in M(x)$ als unzerlegbare Symbolik für eine (x, y)-Relation aufzufassen ist. Diese Situation ändert sich grundlegend, wenn man Variable neuer Sorte, etwa α_j, für die Mengen $M(x)$ einführt, d. h. die Sprache $\mathcal{S}$ durch prädikative Ausdrücke der Form $y_i \in \alpha_j$ und die bestehende Interpretationsvorschrift durch die Festsetzung erweitert, daß die α_j in der angegebenen Weise und das zweistellige Symbol $\in$ durch die Elementrelation zu interpretieren ist. Will man diese Interpretationsvorschrift durch ein gleichwertiges Axiomensystem ersetzen, so ist erstens axiomatisch zu sichern, daß die α_j Mengen, d. h. durch ihre Elemente eindeutig bestimmt sind:

$$\bigwedge \alpha_i \alpha_j y_k \big((y_k \in \alpha_i \leftrightarrow y_k \in \alpha_j) \rightarrow \alpha_i = \alpha_j\big) \quad (\textit{Extensionalitätsaxiom}).$$

Zweitens ist zu sichern, daß zu jedem x mit $H_1(x)$ ein α mit $\alpha = M(x)$ existiert:

$$\bigwedge x\big(H_1(x) \rightarrow \bigvee \alpha \bigwedge y(y \in \alpha \leftrightarrow H_2(x, y)\big) \quad (\textit{Mengenbildungsaxiom}).$$

Drittens ist zu sichern, daß außer den $M(x)$ mit $H_1(x)$ keine weiteren Dinge unter den mit α_j bezeichneten Dingen vorkommen:

$$\bigwedge \alpha_j \bigvee x\big(H_1(x) \wedge \bigwedge y(y \in \alpha_j \leftrightarrow H_2(x, y)\big).$$

Eine Rückübersetzung in die Sprache $\mathcal{S}$ ist nun für beliebige Ausdrücke offenbar nicht mehr möglich, jedoch kann jede quantifizierte Variable α nach dem Prinzip

$$\bigvee \alpha H(\alpha) \leftrightarrow \bigvee x\big(H_1(x) \wedge H^*\big), \quad \bigwedge \alpha H(\alpha) \leftrightarrow \bigwedge x\big(H_1(x) \rightarrow H^*\big)$$

eliminiert werden, wobei x ein System von Variablen entsprechender Sorte ist, die in H nicht vorkommen, und H^* dadurch aus H entsteht, daß man alle darin vorkommenden prädikativen Ausdrücke der Form $y_i \in \alpha$ durch $H_2(x, y_i)$ ersetzt. Insbesondere kann auf diese Weise zu jedem abgeschlossenen Ausdruck der erweiterten Sprache ein gleichbedeutender Ausdruck der Sprache $\mathcal{S}$ konstruiert werden.

In der durch α_j und $\in$ erweiterten Sprache $\mathcal{S}$ kann man jetzt die Terme $M(x)$ (im folgenden *Mengenterme* genannt), die ursprünglich keine selbständige Bedeutung hatten, korrekt einführen. Auf Grund des Extensionalitäts- und Mengenbildungsaxioms für α_j gilt die BEE

$$\bigwedge x\big(H_1(x) \rightarrow \bigvee!! \alpha \bigwedge y(y \in \alpha \leftrightarrow H_2(x, y)\big).$$

Daher ist die Definition

$$\mathrm{M}(\mathrm{x}) := \iota\alpha \bigwedge \mathrm{y}\big(\mathrm{y} \in \alpha \leftrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big), \text{ falls } \mathrm{H}_1(\mathrm{x})$$

gerechtfertigt.

Beispiele.

Definitorische Einführung der Geraden und der Inzidenz:

Wir gehen von einer Formalisierung der ebenen euklidischen Geometrie aus, in der Geraden und Inzidenz nicht zu den Grundbegriffen gehören, jedoch diejenige dreistellige Punktrelation, die durch die Aussageform „p_2 liegt zwischen p_1 und p_3 (auf einer gemeinsamen Geraden)“ beschrieben und in der formalisierten Sprache im folgenden kurz mit $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$ bezeichnet wird. Mittels dieser Zwischenrelation ist die Kollinearität definierbar:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ kollinear} :\leftrightarrow \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_3 \vee \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)\\ \vee (\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_1) \vee (\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2).\end{aligned}$$

Wir führen nun neue Variable g_i für die Punktmengen

$$(15) \qquad \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) := \{\mathrm{p}_3 \colon \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ kollinear}\}, \text{ falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2,$$

d. h. prädikative Ausdrücke der Form $\mathrm{p}_i \in \mathrm{g}_j$ ein. Würden wir in (15) die Einschränkung $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$ fallen lassen, so bekämen wir in Gestalt der Mengen $L(p, p)$ auch die gesamte Ebene in den Bereich der „Geraden“. In der durch g_i und $\in$ erweiterten Sprache ist nun die Operation L in der bereits behandelten Weise definierbar.

Definitorische Einführung der Kreise und der Punkt-Kreis-Inzidenz:

Wie üblich bezeichne „$\cong$“ die vierstellige Punktrelation Kongruenz der ebenen euklidischen Geometrie. Wir führen neue Variable k_i für die als Punktmengen definierbaren Kreise

$$\mathrm{Z}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) := \{\mathrm{p}_4 \colon \mathrm{p}_1\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\}, \text{ falls } \mathrm{p}_2 \neq \mathrm{p}_3,$$

ein. (Ließe man hier die Einschränkung $\mathrm{p}_2 \neq \mathrm{p}_3$ fallen, so bekäme man in Gestalt der Mengen $Z(p_1; p_2, p_2)$ auch alle einpunktigen Mengen in den Variabilitätsbereich der Kreisvariablen.) In der durch prädikative Ausdrücke der Form $\mathrm{p}_i \in \mathrm{k}_j$ erweiterten Sprache ist nun die Operation Z, die je drei Punkten p_1, p_2, p_3 mit $p_2 \neq p_3$ den Kreis vom Radius p_2p_3 um den Mittelpunkt p_1 zuordnet, definierbar:

$$\mathrm{Z}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) := \iota\mathrm{k} \bigwedge \mathrm{p}_4(\mathrm{p}_4 \in \mathrm{k} \leftrightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3), \text{ falls } \mathrm{p}_2 \neq \mathrm{p}_3.$$

Als Beispiel für die mögliche Rückübersetzung abgeschlossener Ausdrücke diene:

$$\begin{aligned}&\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear} \rightarrow \bigvee \mathrm{k}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p}_3 \in \mathrm{k}))\\ \leftrightarrow &\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear} \rightarrow\\ &\quad \bigvee \mathrm{p}_4\mathrm{p}_5\mathrm{p}_6(\mathrm{p}_5 \neq \mathrm{p}_6 \wedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6 \wedge \mathrm{p}_2\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6 \wedge \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6)).\end{aligned}$$

Wegen ihrer häufigen Anwendung behandeln wir noch die Übertragung von Relationen auf Äquivalenzklassen, die sich als Kombination bereits behandelter Definitionsmethoden erweist. Ist H(x, y) ein Ausdruck einer Sprache $\mathscr{S}$, dessen vollfreie Variable beide von gleicher Sorte sind, so können nach dem eben behandelten Prinzip neue Variable a_i für die Mengen $M(x) := \{y: H(x, y)\}$ eingeführt werden. Ist in einer in $\mathscr{S}$ formulierten Theorie $\mathscr{T}$ die durch H dargestellte Relation eine Äquivalenzrelation, d. h. gilt in $\mathscr{T}$

$$\bigwedge xyz\big(H(x, x) \wedge \big(H(x, y) \rightarrow H(y, x)\big) \wedge \big(H(x, y) \wedge H(y, z) \rightarrow H(x, z)\big)\big),$$

so ist die übliche Bezeichnung der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation ein Spezialfall der Definition von Mengentermen:

$$\overline{x} := \iota a \bigwedge y\big(y \in a \leftrightarrow H(x, y)\big).$$

Gilt nun in $\mathscr{T}$ für einen gewissen anderen Ausdruck H′(x, z)

$$\bigwedge xyz\big(H'(x, z) \wedge H(x, y) \rightarrow H'(y, z)\big),$$

so kann die durch H′ dargestellte Relation durch „repräsentantenweise Definition" von den Dingen der Sorte x auf die Dinge der Sorte a, d. h. auf die Äquivalenzklassen bezüglich H, übertragen werden:

$$\text{(16)} \qquad R(a, z) :\leftrightarrow \bigvee x\big(x \in a \wedge H'(x, z)\big).$$

Kürzer kann man die Definition von R natürlich in der Form

$$R(\overline{x}, z) :\leftrightarrow H'(x, z)$$

schreiben, aber die Form (16) läßt erkennen, daß es sich nicht um ein neues Definitionsprinzip sondern um einen Spezialfall bereits behandelter Definitionsschemata handelt.

Beispiel. Zunächst definieren wir eine „ungerichtete Strecke" als Menge ihrer Endpunkte:

$$p_1p_2 := \{p : p = p_1 \vee p = p_2\}.$$

In der euklidischen Geometrie ist die Kongruenz „$\cong$" eine Äquivalenzrelation im Bereich der ungerichteten Strecken. Die zugehörigen Äquivalenzklassen $\overline{p_1p_2} := \{p_3p_4 : p_1p_2 \cong p_3p_4\}$ bezeichnen wir als *freie Strecken* oder auch als *abstrakte Streckenlängen*. Wir definieren ferner eine zweistellige Relation „$\leqq$" im Bereich der ungerichteten Strecken durch

$$p_1p_2 \leqq p_3p_4 :\leftrightarrow p_1 = p_2 \vee \bigvee p_5\big(p_1p_2 \cong p_3p_5 \wedge (p_3, p_5, p_4)\big) \vee p_1p_2 \cong p_3p_4.$$

Für die so definierte Relation gilt in der euklidischen Geometrie

$$p_1p_2 \leqq p_3p_4 \wedge p_1'p_2' \cong p_1p_2 \wedge p_3'p_4' \cong p_3p_4 \rightarrow p_1'p_2' \leqq p_3'p_4'.$$

Auf Grund dieses Satzes kann man „$\leqq$" durch repräsentantenweise Definition von den ungerichteten Strecken auf deren abstrakte Längen übertragen, wobei wir dasselbe Zeichen „$\leqq$" benutzen können:

$$\overline{p_1p_2} \leqq \overline{p_3p_4} :\leftrightarrow p_1p_2 \leqq p_3p_4$$

bzw., falls die Sprache durch Variable a_i für freie Strecken erweitert wurde,

$$a_i \leqq a_j :\leftrightarrow \bigvee p_1p_2p_3p_4(\overline{p_1p_2} = a_i \wedge \overline{p_3p_4} = a_j \wedge p_1p_2 \leqq p_3p_4).$$

Prädikative Ausdrücke der Form $a_i \leqq a_j$ haben kein Analogon mehr in der ursprünglichen Sprache, abgeschlossene Ausdrücke können jedoch rückübersetzt werden, z. B.

$$\bigwedge a_1a_2(a_1 \leqq a_2 \vee a_2 \leqq a_1)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge p_1p_2p_3p_4(\overline{p_1p_2} \leqq \overline{p_3p_4} \vee \overline{p_3p_4} \leqq \overline{p_1p_2})$$
$$\leftrightarrow \bigwedge p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 \leqq p_3p_4 \vee p_3p_4 \leqq p_1p_2)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge p_1p_2p_3p_4\big(p_1 = p_2 \vee \bigvee p_5(p_1p_2 \cong p_3p_5 \wedge (p_3, p_5, p_4)) \vee p_3 = p_4$$
$$\vee \bigvee p_6(p_3p_4 \cong p_1p_6 \wedge (p_1, p_6, p_2)) \vee p_1p_2 \cong p_3p_4\big).$$

Bemerkung über die Äquivalenz formalisierter Theorien mit verschiedenen Grundbegriffen

Sind $\mathcal{T}_1 = Fl^{\sigma_1}(\mathcal{X}_1)$ und $\mathcal{T}_2 = Fl^{\sigma_2}(\mathcal{X}_2)$ Theorien, die in den eventuell verschiedenen nichtelementaren Sprachen $(\mathcal{S}_1, \sigma_1)$ bzw. $(\mathcal{S}_2, \sigma_2)$ formuliert sind, so heißt $\mathcal{T}_1$ eine *Teiltheorie (im weiteren Sinn) von* $\mathcal{T}_2$, wenn eine definitorische Erweiterung $(\mathcal{S}', \sigma')$ von $(\mathcal{S}_2, \sigma_2)$ existiert, so daß $\mathcal{T}_1 \subseteqq Fl^{\sigma'}(\mathcal{X}_2)$ ist, d. h., wenn die Grundbegriffe von $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$ definierbar sind und die Axiome von $\mathcal{T}_1$ (bezogen auf die in $\mathcal{T}_2$ definierten Grundbegriffe) aus den Axiomen von $\mathcal{T}_2$ folgen.

Theorien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ heißen *äquivalent*, wenn jede im oben definierten Sinn eine Teiltheorie der anderen ist. Die so definierte Äquivalenz von Theorien ist tatsächlich reflexiv, transitiv und symmetrisch. Unter einer *Theorie im weiteren Sinn* wollen wir daher eine Äquivalenzklasse von Theorien verstehen. Es ist also z. B. die „ebene euklidische Geometrie", aufgefaßt als Theorie im weiteren Sinn, ein von der speziellen Wahl von Grundbegriffen und Axiomen unabhängiges Abstraktum, jedoch konkret immer durch einen Repräsentanten, d. h. mit Hilfe einer ganz bestimmten formalisierten Sprache (eventuell nebst Interpretationsvorschrift) und eines ganz bestimmten in dieser Sprache formulierten Axiomensystems anzugeben.

Eine Theorie im weiteren Sinn heißt *elementar*, wenn sie wenigstens einen elementaren Repräsentanten besitzt. Auf Grund dieser Festsetzung definiert auch ein in einer nichtelementaren Sprache formuliertes Axiomensystem eine im weiteren Sinn elementare Theorie, wenn die Interpretationsvorschrift durch ein Axiomensystem ersetzt werden kann. Insbesondere führen alle in diesem Abschnitt behandelten Definitionsprinzipien von elementaren Theorien zu elementaren Theorien, da die Interpretationsvorschrift für die definierten Sprachbestandteile jeweils durch Einführungsaxiome ersetzt werden kann.

3. Abbildungsgruppen und Invarianten

Sind $M_1, \ldots, M_n$ nichtleere, paarweise disjunkte Mengen, so bezeichne $S(M_1, \ldots, M_n)$ die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ auf sich, die jede der Mengen M_i $(i = 1, \ldots, n)$ auf sich abbilden. Bezüglich der durch $(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi\big(\psi(x)\big)$ definierten binären Operation „$\circ$" (*Verkettung*) ist die Menge $S(M_1, \ldots, M_n)$ eine *Gruppe*, d. h., es gilt:

(1a) *Für alle* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S(M_1, \ldots, M_n)$ *ist* $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3)$.

(1b) *Es gibt ein Element* $\iota \in S(M_1, \ldots, M_n)$, *so daß für alle* $\varphi \in S(M_1, \ldots, M_n)$ *gilt:* $\varphi \circ \iota = \varphi$.

(Hierdurch ist ι eindeutig als die *identische Abbildung* von $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ auf sich charakterisiert.)

(1c) *Zu jedem* $\varphi \in S(M_1, \ldots, M_n)$ *existiert ein* $\psi \in S(M_1, \ldots, M_n)$, *so daß* $\varphi \circ \psi = \iota$.

(Hierdurch ist ψ eindeutig als die *zu* φ *inverse Abbildung* φ^{-1} charakterisiert.)

Eine Teilmenge G der Menge $S(M_1, \ldots, M_n)$ heißt eine *Untergruppe* der Gruppe $\big(S(M_1, \ldots, M_n), \circ\big)$, wenn G mit der Einschränkung der Operation „$\circ$" auf Elemente von G wieder eine Gruppe ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

(2a) *Ist* $\varphi, \psi \in G$, *so ist auch* $\varphi \circ \psi \in G$.

(2b) *Ist* $\varphi \in G$, *so ist auch* $\varphi^{-1} \in G$.

(2c) $G \neq \emptyset$.

(Aus (2a, b, c) folgt $\iota \in G$.)

Wir erinnern daran (vgl. Kap. 1), daß wir unter einer *Relation im Bereich der Mengen* $M_1, \ldots, M_n$ eine beliebige Teilmenge R eines kartesischen Produkts der Form $M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_k}$ $(i_1, \ldots, i_n \leqq n)$ und unter einer (partiellen) *Operation im*

Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ eine Abbildung aus einem derartigen kartesischen Produkt in eine der Mengen M_i $(1 \leqq i \leqq n)$ verstehen.

Unter Bezug auf die im vorigen Kapitel behandelten Definitionsmethoden führen wir hier den Begriff der *Mengenabbildung im Bereich der Mengen* $M_1, \ldots, M_n$ ein. Unter einer solchen wollen wir eine Abbildung aus einem kartesischen Produkt der Form $M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_k}$ $(i_1, \ldots, i_k \leqq n)$ in die Potenzmenge einer der Mengen M_i $(1 \leqq i \leqq n)$ verstehen. Als Sammelnamen für Relationen, Operationen und Mengenabbildungen im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ sowie *Konstanten im Bereich dieser Mengen* (d. h. Elemente von $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$) benutzen wir im folgenden den Ausdruck *Objekt im Bereich der Mengen* $M_1, \ldots, M_n$. Diese Bezeichnung soll zugleich andeuten, daß viele der folgenden Formulierungen auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn man unter Objekten im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ noch weitere hier nicht explizit behandelte Mengen versteht, die unter Verwendung mengentheoretischer Konstruktionsprinzipien aus den Mengen $M_1, \ldots, M_n$ bzw. ihren Elementen gebildet sind.

Die bisher für Elemente von $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ definierten Abbildungen der Gruppe $S(M_1, \ldots, M_n)$ können auf beliebige andere Objekte im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$, die stets Mengen M von gewissen Dingen y sind, durch die Definition

$$\varphi(M) := \{\varphi(y) \colon y \in M\}$$

erweitert werden. Insbesondere sei für eine Relation R

$$\varphi(R) := \{(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) \colon (x_1, \ldots, x_k) \in R\},$$

für eine Operation F (insbesondere für eine Mengenabbildung)

$$\varphi(F) := \{(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k), \varphi(y)) \colon (x_1, \ldots, x_k, y) \in F\},$$

d. h.

$$\varphi(F)\,(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) = \varphi(F(x_1, \ldots, x_k)).$$

Ein Objekt M im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ heißt bezüglich einer Abbildung $\varphi \in S(M_1, \ldots, M_n)$ *invariant*, wenn $\varphi(M) = M$ gilt. Invariant bezüglich der Abbildung $\varphi \in S(M_1, \ldots, M_n)$ ist insbesondere

— eine Relation R im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ genau dann, wenn $(x_1, \ldots, x_k) \in R$ genau dann, wenn $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) \in R$;

— eine Operation F im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ genau dann, wenn $F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k))$ genau dann existiert, wenn $F(x_1, \ldots, x_k)$ existiert und im Fall der Existenz stets $F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) = \varphi(F(x_1, \ldots, x_k))$ ist;

— eine Konstante c im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ genau dann, wenn $\varphi(c) = c$ ist;

— eine Mengenabbildung M im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ genau dann, wenn

$M(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k))$ genau dann existiert, wenn $M(x_1, \ldots, x_k)$ existiert und im Fall der Existenz stets gilt:

$$M(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) = \{\varphi(x) : x \in M(x_1, \ldots, x_k)\}.$$

Ist M ein beliebiges Objekt im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$, so ist die Menge

$$G(M) := \{\varphi : \varphi \in S(M_1, \ldots, M_n) \textit{ und } M \textit{ ist bezüglich } \varphi \textit{ invariant}\}$$

eine Untergruppe von $S(M_1, \ldots, M_n)$, wie man an Hand der Bedingungen (2a, b, c) leicht nachprüft. Da allgemein der Durchschnitt eines nichtleeren Systems von Untergruppen einer Gruppe wieder eine Untergruppe dieser Gruppe ist, ist für ein beliebiges nichtleeres System I von Objekten im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ die Menge

$$\begin{aligned} G(I) &:= \{\varphi : \varphi \in S(M_1, \ldots, M_n) \textit{ und alle Elemente von } I \textit{ sind bezüglich } \varphi \textit{ invariant}\} \\ &= \bigcap_{M \in I} G(M) \end{aligned}$$

eine Untergruppe von $S(M_1, \ldots, M_n)$. Ist umgekehrt G eine beliebige Untergruppe von $S(M_1, \ldots, M_n)$, so bezeichne $I(G)$ die Menge aller bezüglich aller Abbildungen aus G invarianten Objekte im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$.

Ist G eine Untergruppe von $S(M_1, \ldots, M_n)$ und R eine beliebige Relation im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$, so genügt es für den Nachweis, daß R zu $I(G)$ gehört, die Implikation

$$(x_1, \ldots, x_k) \in R \rightarrow (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)) \in R$$

für beliebige $\varphi \in G$ zu zeigen. Deren Anwendung auf φ^{-1} statt φ und auf $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k))$ statt $(x_1, \ldots, x_k)$ ergibt die Umkehrung. Analog vereinfacht sich der Nachweis der Invarianz einer (partiellen) Operation bzw. Mengenabbildung bezüglich einer Gruppe G.

Offenbar gilt für beliebige Untergruppen G, G_1, G_2 von $S(M_1, \ldots, M_n)$ und beliebige Mengen I, I_1, I_2 von Objekten im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$

(3a) *Ist* $G_1 \subseteqq G_2$, *so ist* $I(G_2) \subseteqq I(G_1)$.

(3b) *Ist* $I_1 \subseteqq I_2$, *so ist* $G(I_2) \subseteqq G(I_1)$.

(3c) $G \subseteqq G(I(G))$.

(3d) $I \subseteqq I(G(I))$.

Es sei nun

$$\mathfrak{S} = (M_1, \ldots, M_n; R_1, \ldots, R_m, F_1, \ldots, F_p, c_1, \ldots, c_q)$$

eine Struktur (vgl. Kap. 1), d. h., $M_1, \ldots, M_n$ sind paarweise disjunkte nichtleere Mengen, $R_1, \ldots, R_m$ sind Relationen im Bereich dieser Mengen, $F_1, \ldots, F_p$ (partielle) Operationen im Bereich dieser Mengen und $c_1, \ldots, c_q \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Dabei kann $m = 0$, $p = 0$, $q = 0$ sein, jedoch soll $m + p + q > 0$ sein. Es dürfte ohne nähere Erklärung klar sein, was man unter einer (formalisierten) Sprache für die Struktur $\mathfrak{S}$ zu verstehen hat. Ist andererseits $\mathscr{S}$ eine solche Sprache, so kommt unter allen Interpretationen von $\mathscr{S}$ diejenige Interpretation ω_0 vor, die jeder Variablensorte i $(1 \leqq i \leqq n)$ die Menge M_i, jedem Relationssymbol R_j die Relation R_j $(1 \leqq j \leqq m)$, jedem Operationssymbol F_j die Operation F_j $(1 \leqq j \leqq p)$ und jedem Konstantensymbol c_j die Konstante c_j $(1 \leqq j \leqq q)$ zuordnet.

Ein Objekt M im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ heißt in der Struktur $\mathfrak{S}$ definierbar, wenn es für eine (und damit für jede) Sprache $\mathscr{S}$ für $\mathfrak{S}$ eine definitorische Erweiterung $\mathscr{S}'$ gibt, so daß die eindeutige Fortsetzung ω_0' der Interpretation ω_0 von $\mathscr{S}$ in $\mathfrak{S}$ zur Interpretation von $\mathscr{S}'$ dem (den) zusätzlichen Sprachbestandteil(en) gerade das Objekt M zuordnet. Nach 2.5. liefert diese allgemeine Definition für die dort explizit behandelten definitorischen Erweiterungen folgende Spezialisierungen:

Eine Relation R im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist in $\mathscr{S}$ genau dann definierbar, wenn es in der Sprache $\mathscr{S}$ für $\mathfrak{S}$ einen Ausdruck $\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$ gibt, so daß für alle Belegungen f bezüglich ω_0 gilt:

(4) $$\mathit{Wert}\big(\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W} \textit{ genau dann, wenn } \big(f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_k)\big) \in R,$$

d. h. $\omega_0(\mathrm{H}) = R$.

Eine (partielle) Operation F im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist in der Struktur $\mathfrak{S}$ genau dann definierbar, wenn es in der Sprache $\mathscr{S}$ für $\mathfrak{S}$ Ausdrücke $\mathrm{H}'(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$ und $\mathrm{H}''(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k, \mathrm{y})$ gibt, so daß

$$\mathit{Wert}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn $F\big(f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_k)\big)$ existiert, und

$$\mathit{Wert}\big(\mathrm{H}''(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k, \mathrm{y}), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn $F\big(f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_k)\big) = f(\mathrm{y})$ ist. In diesem Fall gilt bei der Interpretation ω_0 die BEE

$$\wedge \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_k\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k) \rightarrow \vee !!\mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k, \mathrm{y})\big),$$

so daß in einer Theorie, die die in $\mathfrak{S}$ gültigen Sätze der Sprache $\mathscr{S}$ zum Gegenstand hat, die Definition

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k) := \iota\mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \text{ falls } \mathrm{H}'(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k),$$

gerechtfertigt ist, und es ist dann $\omega_0'(\mathrm{F}) = F$.

Ein Element $c \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ ist in der Struktur $\mathfrak{S}$ genau dann definierbar, wenn es in der Sprache $\mathscr{S}$ für $\mathfrak{S}$ einen Ausdruck $\mathrm{H}(\mathrm{x})$ gibt, so daß für alle Belegungen f gilt: $\mathit{Wert}\big(\mathrm{H}(x), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$ genau dann, wenn $f(\mathrm{x}) = c$. In diesem Fall gilt bei der Interpretation ω_0 die AEE $\vee !!\mathrm{x}\mathrm{H}(\mathrm{x})$, so daß die Definition $\mathrm{c} := \iota\mathrm{x}\mathrm{H}(\mathrm{x})$ gerechtfertigt ist, und es ist dann $\omega_0'(\mathrm{c}) = c$.

Eine Mengenabbildung M im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist in der Struktur $\mathfrak{S}$ genau dann definierbar, wenn in der Sprache $\mathcal{S}$ für $\mathfrak{S}$ Ausdrücke $\mathrm{H}_1(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$ und $\mathrm{H}_2(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k, \mathrm{y})$ existieren, so daß für alle Belegungen f gilt:

$$Wert\big(\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn die Abbildung $M\big(f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_k)\big)$ existiert, und für alle Belegungen f mit $Wert\big(H_1(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$ ist

$$Wert\big(\mathrm{H}_2(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k, \mathrm{y}), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W}$$

genau dann, wenn $f(\mathrm{y}) \in M\big(f(\mathrm{x}_1), \ldots, f(\mathrm{x}_k)\big)$.

Invariantensatz. *Ist $I_{\mathfrak{S}}$ das System der Relationen, Operationen und Konstanten einer Struktur $\mathfrak{S}$ im Bereich der Mengen $M_1, \ldots, M_n$, so ist jedes in der Struktur $\mathfrak{S}$ definierbare Objekt bezüglich der Gruppe $G(I_{\mathfrak{S}})$ invariant.*

Auf Grund dieses Satzes ist der Beweis der Nichtdefinierbarkeit eines Objektes M in einer Struktur $\mathfrak{S}$ durch Angabe einer Abbildung $\varphi \in G(I_{\mathfrak{S}})$ möglich, die M nicht invariant läßt. Von dieser Beweismethode werden wir im folgenden häufig Gebrauch machen.

Den Beweis des Invariantensatzes führen wir hier nur für Relationen durch. Der Beweis für andere Arten von definierbaren Objekten ergibt sich hieraus jeweils durch geringe Zusätze.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine Struktur über den Grundmengen $M_1, \ldots, M_n$, $\mathcal{S}$ eine Sprache für $\mathfrak{S}$, ω_0 die entsprechende Interpretation von $\mathcal{S}$ in $\mathfrak{S}$. Für Abbildungen $\varphi \in S(M_1, \ldots, M_n)$ und Belegungen f bezüglich ω_0 sei f_φ die durch

$$f_\varphi(\mathrm{x}_i) := \varphi\big(f(\mathrm{x}_i)\big)$$

definierte Belegung. Durch Induktion über die Kompliziertheit der Terme t bzw. Ausdrücke H der Sprache $\mathcal{S}$ ergibt sich leicht

$$Wert(\mathrm{t}, \omega_0, f_\varphi) = \varphi\big(Wert(\mathrm{t}, \omega_0, f)\big),$$

wobei die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte Seite existiert, bzw.

(5) $$Wert(\mathrm{H}, \omega_0, f_\varphi) = \mathrm{Wert}(\mathrm{H}, \omega_0, f)$$

für alle Abbildungen $\varphi \in G(I_{\mathfrak{S}})$, wobei letztere Voraussetzung gerade die Anfangsschritte der Induktionsbeweise liefert.

Ist R eine k-stellige in der Struktur $\mathfrak{S}$ definierbare Relation, so existiert in der Sprache $\mathcal{S}$ ein Ausdruck $\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$ mit genau k (voll)freien Variablen, so daß (4) gilt. Wir haben zu zeigen: Für alle $\varphi \in G(I_{\mathfrak{S}})$ und alle $x_1, \ldots, x_k$ folgt aus $(x_1, \ldots, x_k) \in R$ stets $\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big) \in R$. Es sei $\varphi \in G(I_{\mathfrak{S}})$ und $(x_1, \ldots, x_k) \in R$, ferner sei f

eine Belegung mit $f(\mathrm{x}_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann ist nach (4)

$$Wert\big(\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f\big) = \boldsymbol{W},$$

folglich nach (5)

$$Wert\big(\mathrm{H}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k), \omega_0, f_\varphi\big) = \boldsymbol{W},$$

folglich nach (4)

$$\big(f_\varphi(\mathrm{x}_1), \ldots, f_\varphi(\mathrm{x}_k)\big) \in R,$$

d. h. $\big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big) \in R$.

4. Algebra

Die algebraischen Grundstrukturen Ring und Körper treten im folgenden hauptsächlich in zwei speziellen Formen auf, als geordnete Körper und als Polynomringe über einem geordneten Koeffizientenkörper. Die grundlegenden Definitionen und Sätze aus diesem Bereich der Algebra werden in diesem Kapitel in aller Kürze (häufig ohne Beweis) zusammengestellt. In diesem und in folgenden Kapiteln wird außerdem vorausgesetzt, daß der Leser den Begriff des (abstrakten) Vektorraums über einem beliebigen Skalarkörper und einige weitere elementare Begriffe der linearen Algebra kennt.

4.1. Ringe und Körper

Ist R eine beliebige nichtleere Menge und sind $+$ und $\cdot$ binäre Operationen in R (im folgenden als *Addition* bzw. *Multiplikation* in R bezeichnet), so heißt das Tripel $(R, +, \cdot)$ ein *Ring*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(1) *Für beliebige $a, b, c \in R$ gilt:*

$(a+b)+c = a+(b+c)$ (*Assoziativgesetz der Addition*),

$a+b = b+a$ (*Kommutativgesetz der Addition*),

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativgesetz der Multiplikation*),

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a+b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}\right\} \quad (\textit{Distributivgesetze}).$$

(2) *Es existiert ein eindeutig bestimmtes Element* $o \in R$ (*Nullelement genannt*), *so daß* $x + o (= o + x) = x$ *für alle* $x \in R$, *und zu jedem* $x \in R$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* $y \in R$, *so daß* $x + y (= y + x) = o$.
Dieses y bezeichnen wir mit $-x$, führen also definitorisch „$-$" (Minus) als einstellige Operation in R ein.

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *kommutativ*, falls in ihm zusätzlich gilt:

(3) $a \cdot b = b \cdot a$ *für alle* $a, b \in R$ (*Kommutativgesetz der Multiplikation*).

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *nullteilerfrei*, falls in ihm zusätzlich gilt:

(4) *Sind* $a, b \in R$ *mit* $a \neq o$ *und* $b \neq o$, *so ist auch* $a \cdot b \neq o$.

Ein kommutativer und nullteilerfreier Ring heißt ein *Integritätsbereich*. Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt ein *Ring mit Einselement* (kurz *Ring mit e*), wenn in ihm zusätzlich gilt:

(5) *Es existiert ein eindeutig bestimmtes* $e \in R$, *so daß*

$x \cdot e = e \cdot x = x$ *für alle* $x \in R$.

Ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit e heißt ein *Körper*, wenn in ihm zusätzlich gilt:

(6) *Zu* $x \in R$ *mit* $x \neq o$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* $y \in R$, *so daß* $x \cdot y (= y \cdot x) = e$. (Dieses y bezeichnen wir mit x^{-1}, führen also „$^{-1}$" definitorisch als partielle Operation mit dem Definitionsbereich $R \setminus \{o\}$ ein.)

(7) $o \neq e$.

Körper werden im allgemeinen mit dem Buchstaben K (eventuell mit Indizes) bezeichnet.

In jedem Ring gilt das *allgemeine Assoziativgesetz* für die Addition und für die Multiplikation (als nichtelementare Zusammenfassung unendlich vieler elementarer Assoziativgesetze):

(8) *Eine Summe bzw. ein Produkt endlich vieler Ringelemente ist unabhängig von der Klammerung.*

Unter Berufung auf (8) schreiben wir im folgenden

$$a_1 + \cdots + a_n \text{ bzw. } a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$$

und ähnlich, insbesondere

$$na := \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{-mal}}, \quad a^n := \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Ferner gilt das *allgemeine Kommutativgesetz der Addition*:

(9) *Eine Summe endlich vieler Ringelemente ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.*

In kommutativen Ringen gilt außerdem ein analoges Gesetz für die Multiplikation. Zur weiteren Klammersparung vereinbaren wir, daß „·" stärker bindet als „+", d. h., $a \cdot b + c$ bedeutet $(a \cdot b) + c$ und nicht $a \cdot (b + c)$. Wo keine Mißverständnisse möglich sind, lassen wir das Operationszeichen „·" fort, schreiben also ab statt $a \cdot b$ usw. In beliebigen Ringen gilt weiterhin:

(10) $ao = oa = o$ *für jedes* $a \in R$.

(11) $-(-a) = a$ *für jedes* $a \in R$.

(12) *Die Gleichung* $a + x = b$ *hat für beliebige* $a, b \in R$ *genau eine Lösung, und zwar* $x = b + (-a)$.

(13) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(14) $(-a)(-b) = ab$.

(15) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

Zur weiteren Vereinfachung schreiben wir im folgenden $a - b$ statt a $+(-b)$ und $-ab$ statt $-(ab)$.

In nullteilerfreien Ringen gilt:

(16) *Ist* $ax = ay$ und $a \neq o$, *so ist* $x = y$

(d. h., in nullteilerfreien Ringen hat die Gleichung $ax = c$ für $a \neq o$ höchstens eine Lösung).

In Körpern gilt:

(17) *Die Gleichung* $ax = c$ *hat für* $a \neq o$ *genau eine Lösung, und zwar* $x = a^{-1}c$.

In jedem Körper gilt auch (4).

Beispiele zeigen, daß eine Menge M im allgemeinen auf verschiedene Weise mit zwei Operationen „+", „·" versehen werden kann, so daß $(M, +, \cdot)$ ein Ring oder ein Körper ist. Trotzdem werden wir im folgenden zuweilen von einem Ring R, einem Integritätsbereich I, einem Körper K sprechen, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Operationen es sich handelt. Mit $\boldsymbol{Z}$ beispielsweise bezeichnen wir im folgenden die Menge der ganzen Zahlen, aber auch den Ring $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ mit den üblichen Operationen.

In Spezialisierung des allgemeinen Isomorphiebegriffs auf Strukturen der Form $(M, +, \cdot)$ heißt $(M_1, +_1, \cdot_1)$ isomorph zu $(M_2, +_2, \cdot_2)$, wenn es eine eineindeutige Abbildung f von M_1 auf M_2 gibt, so daß für $a, b \in M_1$ gilt:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{und} \quad f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_1 f(b),$$

und f heißt in diesem Fall ein Isomorphismus von $(M_1, +_1, \cdot_1)$ auf $(M_2, +_2, \cdot_2)$. Dabei gilt: Ist $(M_1, +_1, \cdot_1)$ ein Ring, so ist es auch $(M_2, +_2, \cdot_2)$. Ist M_1 kommutativ, so ist es auch M_2. Ist M_1 nullteilerfrei, so ist es auch M_2. Hat M_1 ein Einselement, so hat es auch M_2. Ist M_1 ein Körper, so ist es auch M_2. Bei einem Isomorphismus f von M_1 auf M_2 wird das Nullelement von M_1 auf das Nullelement von M_2 und das Einselement von M_1 auf das Einselement von M_2 abgebildet. Ferner ist jeder Isomorphismus bezüglich $+$ ein Isomorphismus bezüglich der Operation $-$ und jeder Isomorphismus bezüglich $\cdot$ auch ein Isomorphismus bezüglich $^{-1}$.

Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring und U eine Teilmenge von R, so heißt U ein *Unterring* von R (eigentlich von $(R, +, \cdot)$), wenn U mit der Einschränkung von „$+$" und „$\cdot$" auf Elemente aus U wieder ein Ring ist. Dies ist genau dann der Fall, falls gilt:

(18) a) *Wenn* $a, b \in U$, *so* $a + b \in U$ *und* $ab \in U$;
b) *wenn* $a \in U$, *so* $-a \in U$;
c) $o \in U$.

Statt c) genügt es zu fordern: $U \neq \emptyset$.

Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $C \subseteq K$, so heißt C ein *Unterkörper* von K, wenn C mit der Einschränkung von „$+$" und „$\cdot$" wieder ein Körper ist. Dies ist genau dann der Fall, falls gilt:

(19) a) *Wenn* $a, b \in C$, *so* $a + b \in C$ *und* $ab \in C$;
b) *wenn* $a \in C$, *so* $-a \in C$;
c) *wenn* $a \in C$ *und* $a \neq o$, *so* $a^{-1} \in C$;
d) $o, e \in C$.

Statt d) genügt es zu fordern: C enthält wenigstens zwei verschiedene Elemente.

Ist R_1 Unterring von R_2 und R_2 Unterring von R_3, so ist R_1 Unterring von R_3; analog für Unterkörper. Der Durchschnitt eines beliebigen Systems von Unterringen eines Ringes R ist wieder ein Unterring von R; analog für Unterkörper. Während der Durchschnitt aller Unterringe von R immer $\{o\}$ (ein sogenannter trivialer Unterring von R) ist, bringt der Durchschnitt aller Unterkörper von K (also der kleinste Unterkörper von K) eine interessante Eigenschaft von K zum Ausdruck. Er heißt der *Primkörper* von K. Im folgenden werden nur *Körper der Charakteristik* 0 eine Rolle spielen, d. h. solche, deren Primkörper isomorph dem Körper Q der rationalen Zahlen (versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation) ist.

Jede Teilmenge A eines Ringes R erzeugt einen Unterring $R(A)$, und zwar

$$R(A) := \bigcap \{U\colon U \textit{ Unterring von } R \textit{ und } A \subseteq U\}.$$

Analog erzeugt jede Teilmenge A eines Körpers K den Unterkörper

$$K(A) := \bigcap \{C\colon C \textit{ Unterkörper von } K \textit{ und } A \subseteq C\}.$$

Offenbar ist $R(\emptyset) = \{o\}$ und $K(\emptyset)$ der Primkörper von K. Im Fall $A \neq \emptyset$ gilt $R(A) = A$ genau dann, wenn A ein Unterring ist und analog für Körper.

Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $<$ eine irreflexive Totalordnung in K, so heißt

$(K, +, \cdot, <)$ ein *geordneter Körper*, falls außerdem für beliebige $a, b, c \in K$ gilt:

(20) *Wenn* $a < b$, *so* $a + c < b + c$ (*Monotonie der Addition*).

(21) *Wenn* $a < b$ *und* $o < c$, *so* $ac < bc$ (*Monotonie der Multiplikation*).

In geordneten Körpern gilt u. a.

(22) *Wenn* $a < b$ *und* $c < d$, *so* $a + c < b + d$.

(23) *Wenn* $a < b$, *so* $-b < -a$.

(24) *Wenn* $a < b$ *und* $c < o$, *so* $cb < ca$.

(25) $o < e$.

Wegen (22), (23) und (25) sind die ganzzahligen Vielfachen von e paarweise verschieden und bilden daher einen zu $\boldsymbol{Z}$ isomorphen Unterring. Ferner muß K mit je zwei dieser Elemente auch deren Quotienten enthalten. Daher hat jeder geordnete Körper die Charakteristik 0.

Ein geordneter Körper heiße *archimedisch geordnet*, wenn in ihm zusätzlich das Archimedische Axiom gilt:

(26) *Zu beliebigem* $a, b > o$ *existiert eine natürliche Zahl* n, *so daß* $b < na$.

Der Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen und der Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen sind bezüglich der natürlichen Anordnung archimedisch geordnete Körper.

Zwei Strukturen der Form $(M_1, +_1, \cdot_1, <_1)$, $(M_2, +_2, \cdot_2, <_2)$ sind isomorph, wenn ein Isomorphismus f von $(M_1, +_1, \cdot_1)$ auf $(M_2, +_2, \cdot_2)$ existiert, für den zusätzlich gilt:

$$a <_1 b \text{ genau dann, wenn } f(a) <_2 f(b).$$

Ist dabei $(M_1, +_1, \cdot_1, <_1)$ ein geordneter Körper, so ist es auch $(M_2, +_2, \cdot_2, <_2)$. Ist einer von beiden archimedisch geordnet, so ist es auch der andere.

Da die natürliche Anordnung der rationalen Zahlen die einzige Totalordnung der Menge $\boldsymbol{Q}$ ist, die zusammen mit der Addition und Multiplikation die Axiome (20) und (21) erfüllt, und da andererseits jeder geordnete Körper einen zu $\boldsymbol{Q}$ isomorphen Primkörper enthält, ist der geordnete Körper $\boldsymbol{Q}$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte kleinste geordnete Körper.

Die grundlegenden Begriffe der Analysis wie *absoluter Betrag* von Elementen, *arithmetisches Mittel*, *konvergente Folge*, *Grenzwert* einer Folge usw. lassen sich auf beliebige geordnete Körper übertragen. Eine Folge (a_n) von Elementen eines geordneten Körpers K heiße *Fundamentalfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > o$ ($\varepsilon \in K$!) ein Index n_0 existiert, so daß für $n, m \geqq n_0$ stets $|a_n - a_m| < \varepsilon$ ist. In jedem geordneten Körper gilt: Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge. Der angeordnete Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist unter allen archimedich geordneten Körpern dadurch ausgezeichnet, daß in ihm auch umgekehrt jede Fundamentalfolge einen Grenzwert besitzt. In beliebigen archimedisch geordneten Körpern (und nur in solchen) kann man nun zu jedem Element a eine Folge von rationalen Elementen (d. h. solchen des Primkörpers) finden, die gegen a konvergiert. Dies gestattet es, einen beliebigen archimedisch geordneten Körper isomorph in den Körper der reellen Zahlen abzubilden, d. h., bis auf Isomorphie sind die archimedisch geordneten Körper genau die Unterkörper von R.

Abschließend wollen wir den in einem späteren Zusammenhang wichtigen Satz beweisen, daß das Kommutativgesetz der Multiplikation aus den übrigen Axiomen eines archimedisch geordneten Körpers folgt. Es sei also $(K, +, \cdot, <)$ eine Struktur, in der die Axiome (1), (2), (5), (6), (7), (20), (21), (26) gelten. Ein Element x aus K heißt mit $a \in K$ *vertauschbar*, falls $ax = xa$ ist. Wir haben zu zeigen, daß je zwei Elemente a, b aus K vertauschbar sind.

Zunächst sind o und e nach (2) bzw. (5) mit allen Elementen aus K vertauschbar. Ferner ist für jede natürliche Zahl n und jedes a aus K nach (1) und (5)

$$\underbrace{(e + \cdots + e)}_{n-\text{mal}} a = ea + \cdots + ea = ae + \cdots + ae = a\underbrace{(e + \cdots + e)}_{n-\text{mal}}.$$

Aus $xa = ax$ folgt $ax^{-1} = x^{-1}a$ (falls $x \neq o$), und aus $xa = ax$ und $ya = ay$ folgt $xya = axy$; mithin sind alle positiven rationalen Elemente aus K mit jedem Element aus K vertauschbar. Es seien nun a, b zwei beliebige Elemente aus K. Da (14) und (15) sogar in beliebigen Ringen gelten, brauchen wir nur den Fall $a > o$, $b > o$ zu betrachten. Es sei $\varepsilon > o$ $(\varepsilon \in K)$ beliebig und $c \in K$ so gewählt, daß $a < c$, $b < c$. Wegen (26) existieren in K rationale Elemente r_1, r_2, r_3, r_4, so daß

$$o < r_1 < a < r_2, \quad o < r_3 < b < r_4 < c, \quad r_2 - r_1 < \frac{\varepsilon}{2a}, \quad r_4 - r_3 < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dann ist nach (21)

$$r_1r_3 < ar_3 = r_3a < ba < r_4a = ar_4 < r_2r_4$$

und analog $r_3r_1 < ab < r_4r_2$, also folglich

$$|ab - ba| < r_4r_2 - r_3r_1 = r_4(r_2 - r_1) + r_1(r_4 - r_3) < r_4\frac{\varepsilon}{2c} + r_1\frac{\varepsilon}{2a} < \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt $ab = ba$.

4.2. Polynome

Ist R ein Ring, so bildet die Menge R^R aller Abbildungen von R in sich bezüglich der Operationen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in R, f, g \in R^R)$$

wieder einen Ring. In diesem Ring erzeugt die identische Abbildung i_R von R auf sich zusammen mit den konstanten Abbildungen $f_c(x) := c (x \in R, c \in R)$ den Unterring $(P(R), +, \cdot)$ der *Polynomialfunktionen* in R. Ist R ein kommutativer Ring mit e, so wird jedes Element aus $P(R)$ durch ein *Polynom,* d. h. einen Term P der Form

$$(1) \qquad \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}^n \quad \left(\text{oder kurz} \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{a}_\nu \mathrm{x}^\nu\right)$$

mit $\mathrm{a}_n \neq \mathrm{o}$ oder durch das *Nullpolynom* $0 := \mathrm{o} \cdot \mathrm{x}^0$ dargestellt. Die Zahl n heißt in diesem Fall der *Grad* des Polynoms P $(\mathit{grad}(\mathrm{P}))$, und es sei auch $\mathit{grad}(0) = 0$ gesetzt. Die Polynome nullten Grades nennen wir *konstante,* die Polynome ersten Grades *lineare* und die Polynome zweiten Grades *quadratische* Polynome. Jedes Polynom P stellt eine gewisse Polynomialfunktion f dar, deren Wert an der Stelle $x \in R$ wir mit $P(x)$ bezeichnen. Wird f durch P und g durch $\mathrm{Q} := \sum_{\mu=0}^{m} \mathrm{b}_\mu \mathrm{x}^\mu$ dargestellt, so wird (mit $b_\mu = 0$ für $\mu > m$ und $\mathrm{a}_\nu = 0$ für $\nu > n$) $f + g$ durch

$$(2) \qquad \mathrm{P} + \mathrm{Q} := \sum_{\nu=0}^{\max(\mathrm{m},\mathrm{n})} (\mathrm{a}_\nu + \mathrm{b}_\nu)\, \mathrm{x}^\nu$$

und $f \cdot g$ durch

$$(3) \qquad \mathrm{P} \cdot \mathrm{Q} := \sum_{\varkappa=0}^{m \cdot n} \left(\sum_{\nu+\mu=\varkappa} \mathrm{a}_\nu \cdot \mathrm{b}_\mu \right) \mathrm{x}^\varkappa$$

dargestellt. Dabei ist $\mathit{grad}(\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q}) = \mathit{grad}(\mathrm{P}) + \mathit{grad}(\mathrm{Q})$, falls $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \neq 0$ und R nullteilerfrei ist.

Wie man leicht nachprüft, bildet die Menge $R[\mathrm{x}]$ der Polynome mit Koeffizienten aus R (eine gewisse Menge von Termen!) bezüglich der in (2) und (3) definierten Operationen einen kommutativen Ring mit e, falls R selbst ein solcher Ring ist. $R[\mathrm{x}]$ enthält in Gestalt der konstanten Polynome einen zu R isomorphen Unterring. Ist R nullteilerfrei, so ist es auch $R[\mathrm{x}]$. Die Zuordnung zwischen den Polynomen und den durch sie dargestellten Polynomialfunktionen ist jedoch unter den bisher gemachten Voraussetzungen im allgemeinen nicht eineindeutig, d. h., verschiedene Polynome können die gleiche Funktion darstellen, können wertverlaufsgleich sein.

Im folgenden sei R immer ein Integritätsbereich mit e.

Satz 1. *Es sei* $\mathrm{P} \in R[\mathrm{x}]$, $\mathrm{P} \neq 0$ *und* $x_0 \in R$ *mit* $P(x_0) = o$. *Dann ist* P (*im Sinne des Ringes* $R[\mathrm{x}]$) *ein Produkt der Form* $(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \cdot \mathrm{P}'$ *mit* $\mathit{grad}(\mathrm{P}') = \mathit{grad}(P) - 1$.

Beweis. Für P der Form (1) und zunächst beliebiges x_0 ergibt sich aus dem Ansatz

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{a}_\nu \mathrm{x}^\nu = (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} \mathrm{b}_\mu \mathrm{x}^\mu + \mathrm{d}$$

durch Koeffizientenvergleich die Lösung

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \\
&\dots \\
b_0 &= a_1 + x_0 b_1, \\
d &= a_0 + x_0 b_0.
\end{aligned}
$$

d. h., jedes Polynom $\mathrm{P} \neq 0$ ist durch jedes Polynom der Form $\mathrm{x} - \mathrm{x}_0$ mit konstantem Rest d teilbar. Für $\mathrm{x} = x_0$ ist nun nach Voraussetzung $\big(P(x_0) = o\big)$ die linke Seite von (4) gleich o, und folglich muß auch $\mathrm{d} = 0$ sein.

Folgerungen.

a) *Ist $P(x_i) = o$ für paarweise verschiedene $x_0, x_1, \ldots, x_k \in R$, so ist*

(5) $$\mathrm{P} = (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) \cdots (\mathrm{x} - \mathrm{x}_k)\,\mathrm{P}'.$$

Dies folgt durch Induktion über k aus Satz 1, der den Anfangsschritt liefert. Ist die Behauptung schon für k richtig und x_{k+1} eine von $x_0, \ldots, x_k$ verschiedene Nullstelle von P, so ist für $\mathrm{x} = x_{k+1}$ die linke Seite von (5) gleich o; auf der rechten Seite ist wegen der Nullteilerfreiheit von R einerseits $(x_{k+1} - x_0) \cdots (x_{k+1} - x_k) \neq o$ und andererseits $P'(x_{k+1}) = o$, worauf wieder Satz 1 anzuwenden ist.

b) *Jede durch ein Polynom n-ten Grades dargestellte Funktion hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Dies folgt unmittelbar aus a). Ebenso unmittelbar folgt aus b):

c) *Ist R unendlich, so stellt nur das Nullpolynom die identisch verschwindende Funktion dar.*

d) *Ist R unendlich, so ist die Zuordnung zwischen Polynomen und dargestellten Funktionen eineindeutig und folglich wegen* (2), (3) *ein Isomorphismus zwischen* $R[\mathrm{x}]$ *und* $P(R)$.

Wir werden im folgenden nur unendliche Integritätsbereiche mit e betrachten und können daher die Polynome mit den durch sie dargestellten Funktionen identifizieren.

Beweis von d). Es seien $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in R[\mathrm{x}]$, und es gelte $P(x) = Q(x)$ für alle $x \in R$. Dann ist $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ eine Darstellung der Nullfunktion, folglich sind alle Koeffizienten von $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ gleich 0 (nach c), und mithin ist $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Ein Polynom $\mathrm{P} \in R[\mathrm{x}]$ heißt *reduzibel in* $R[\mathrm{x}]$, wenn P in der Form $\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{S}$ mit $\mathrm{Q}, \mathrm{S} \in R[\mathrm{x}]$ und $0 < \mathit{grad}(\mathrm{Q}) < \mathit{grad}(\mathrm{P})$ $\big($und damit auch $0 < \mathit{grad}(\mathrm{S}) < \mathit{grad}(\mathrm{P})$, $\mathit{grad}(\mathrm{P}) \geqq 2\big)$ darstellbar ist. Ein nicht konstantes Polynom, das nicht reduzibel in $R[\mathrm{x}]$ ist, heißt *irreduzibel in* $R[\mathrm{x}]$. (Auf konstante Polynome wenden wir diese Begriffe nicht an.) Offenbar folgt aus Satz 1, daß ein in $R[\mathrm{x}]$ irreduzibles Polynom mindestens zweiten Grades keine Nullstelle in R hat. Übrigens ist der Zusatz „*in* $R[\mathrm{x}]$" bei reduzibel bzw. irreduzibel wichtig; ist nämlich R' ein Unterring von R, so ist auch $R'[\mathrm{x}]$ ein Unterring von $R[\mathrm{x}]$, und ein in $R'[\mathrm{x}]$ irreduzibles Polynom hat in geeigneten, R' umfassenden Ringen R sogar immer Nullstellen.

Das Problem der Zerlegung eines Polynoms (1) in nichttriviale Faktoren bzw. des Nachweises seiner Irreduzibilität führt auf einen Ansatz der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{a}_\nu \mathrm{x}^\nu = \sum_{\mu=0}^{m} \mathrm{b}_\mu \mathrm{x}^\mu \cdot \sum_{\varkappa=0}^{n-m} \mathrm{c}_\varkappa \mathrm{x}^\varkappa, \quad 0 < m \leqq \left[\frac{n}{2}\right],$$

und damit auf folgendes Gleichungssystem für die gesuchten b_μ und $c_\varkappa$:

$$\begin{aligned} &b_0 c_0 = a_0 \\ &b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1 \\ &b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2 \\ &\dots \\ &b_m c_{n-m} = a_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Ist R der Ring $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen, so ist (6) ein *diophantisches* Gleichungssystem (d. h. ein durch ganze Zahlen zu lösendes Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten). Hat es im konkreten Fall eine Lösung, so findet man diese mit Sicherheit, indem man sich alle $(n+2)$-tupel $(b_0, \dots, b_m, c_0, \dots, c_{n-m}) \in \boldsymbol{Z}^{n+2}$ in irgendeiner Weise durchnumeriert denkt ($\boldsymbol{Z}^{n+2}$ ist abzählbar!) und sie der Reihe nach in (6) einsetzt. Dagegen ist bis heute kein allgemeines Verfahren für den Nachweis der Unlösbarkeit von (6) und damit der Irreduzibilität von P bekannt.[1]) Die zahlreichen sogenannten Irreduzibilitätskriterien sind hinreichende Bedingungen (an die a_ν), die großen praktischen Nutzen haben, aber nur in speziellen Fällen anwendbar sind.

Für $m = 1$ wird aus (6) (wir können $a_0 \neq o$ annehmen, da sonst $\mathrm{P} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{P}'$)

$$\begin{aligned} &b_0 c_0 = a_0 \\ &b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1 \\ &b_0 c_2 + b_1 c_1 = a_2 \\ &\dots \\ &b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} = a_{n-1} \\ &b_1 c_{n-1} = a_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Auf Grund der eindeutigen Primfaktorzerlegung der ganzen Zahlen liefert die erste dieser Gleichungen endlich viele Möglichkeiten für b_0, c_0 und die letzte analog endlich viele Möglichkeiten für b_1, c_{n-1}. Jede Kombination dieser Möglichkeiten verwandelt

[1]) Zum gegenwärtigen Stand der Theorie der diophantischen Gleichungen siehe Ju. I. Chmelevskij, Zum zehnten Hilbertschen Problem. In: Die Hilbertschen Probleme, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1971.

die zweite bis n-te der Gleichungen (7) in ein lineares System für $c_1, \ldots, c_{n-1}$, das von oben nach unten eindeutig auflösbar ist. Also hat (7) genau dann eine ganzzahlige Lösung, wenn eine der endlich vielen Ausgangskombinationen zu ganzzahligen Lösungen $c_1, \ldots, c_{n-1}$ führt, bei der der für c_{n-1} erhaltene Wert mit dem Wert in der Ausgangskombination übereinstimmt. Da im Fall $n = 3$ allenfalls eine Zerlegung in einen linearen und einen quadratischen Faktor möglich ist, kann demnach insbesondere die Reduzibilität bzw. Irreduzibilität für Polynome dritten Grades aus $\boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ in einfacher Weise entschieden werden.

Der Nachweis der Irreduzibilität eines Polynoms $\mathrm{P} \in \boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ in $\boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ kann auf den Nachweis der Irreduzibilität eines ganzzahligen Polynoms gleichen Grades zurückgeführt und daher für Polynome dritten Grades effektiv durchgeführt werden:

Satz 2. a) *Zu* $\mathrm{P} \in \boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ *existiert ein* $\mathrm{P}' \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ *gleichen Grades, so daß* P' *genau dann in* $\boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ *reduzibel ist, wenn es* P *in* $\boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ *ist.*

b) *Ist* $\mathrm{P}' \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ *in* $\boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ *irreduzibel, so auch in* $\boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$.

Beweis. a) P' erhält man aus P durch Multiplikation mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nenner der Koeffizienten von P.

b) Ein ganzzahliges Polynom heißt eine *Einheitsform*, wenn seine Koeffizienten keinen echten gemeinsamen Teiler haben. Durch Ausklammern des größten gemeinsamen Teilers (ggT) der Koeffizienten kann man offenbar jedes Polynom $\mathrm{P} \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ als Produkt $c \cdot \mathrm{E}$ eines konstanten Faktors c und einer Einheitsform E darstellen, und diese Darstellung ist bis auf Vorzeichen eindeutig. Sind $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ Einheitsformen, so ist es auch $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$. Zum Beweis nehmen wir an, p sei ein gemeinsamer Primfaktor der Koeffizienten c_i von E. Da E_1 und E_2 Einheitsformen sind, können nicht alle ihre Koeffizienten durch p teilbar sein. Es sei a_{ν_0} der Koeffizient mit kleinstem Index in E_1, der nicht durch p teilbar ist, b_{μ_0} der Koeffizient mit kleinstem Index in E_2, der nicht durch p teilbar ist. Dann hat der Koeffizient $c_{\nu_0+\mu_0}$ in $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ die Gestalt

$$c_{\nu_0+\mu_0} = a_{\nu_0} b_{\mu_0} + a_{\nu_0+1} b_{\mu_0-1} + \cdots + a_{\nu_0-1} b_{\mu_0+1} + \cdots.$$

Da die linke Seite und alle Summanden der rechten Seite außer $a_{\nu_0} b_{\mu_0}$ durch p teilbar sein sollen, erhalten wir einen Widerspruch. Nun sei $\mathrm{P} \in \boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ in $\boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ reduzibel, d. h., es existieren Polynome $\mathrm{Q}, \mathrm{S} \in \boldsymbol{Q}[\mathrm{x}]$ mit $grad(\mathrm{Q}), grad(\mathrm{S}) > 0$ und $\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{S}$. Nach dem Bewiesenen gibt es Einheitsformen $\mathrm{E}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ und positive ganze Zahlen a, b, c, d, e, so daß

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{P} = e \cdot \mathrm{E}, \quad \mathrm{Q} = \frac{a}{b} \cdot \mathrm{E}_1, \quad \mathrm{S} = \frac{c}{d} \cdot \mathrm{E}_2.$$

Da $\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{S}$, $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ Einheitsform und die Darstellung (8) von P eindeutig ist, folgt $e = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ und damit $\mathrm{P} = (e \cdot \mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{E}_2$, d. h., P ist in $\boldsymbol{Z}[\mathrm{x}]$ reduzibel.

Für den folgenden Abschnitt benötigen wir

Satz 3. *Ist* K *ein Körper, so existieren zu* $P_1, P_2 \in K[x]$ *mit* $P_2 \neq 0$ *Polynome* Q, $R \in K[x]$, *so daß*

(9) $\quad P_1 = Q \cdot P_2 + R$ *und* $grad(R) < grad(P_2)$.

Zum Beweis setzen wir $P_1 = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, $P_2 = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu$ mit $b_m \neq o$. Ist $m > n$, so ist $P_1 = 0 \cdot P_2 + P_1$ eine Darstellung der Form (9). Ist $m \leqq n$, so ist

$$P_1 = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot P_2 + \left(P_1 - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot P_2\right)$$

mit

$$grad(R_1) = grad\left(P_1 - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot P_2\right) \leqq n - 1.$$

Wiederholung dieser Umformung mit R_1 statt P_1 usw. liefert nach k Schritten

$$P_1 = (c_1 x^{n-m} + \cdots + c_k) \cdot P_2 + R_{k+1} \quad \text{mit} \quad grad(R_{k+1}) < m.$$

Satz 3 liefert die Begründung für eine zur Teilbarkeitstheorie der ganzen Zahlen analoge Teilbarkeitstheorie im Ring $K[x]$. Die konstanten Polynome $\neq 0$ spielen hier die Rolle der Zahlen 1 und -1. Sie sind algebraisch charakterisiert als „Einheiten“, d. h. als Ringelemente, die ein multiplikatives Inverses besitzen. Mehrfache Anwendung von Satz 3 liefert zu beliebigen Polynomen $P_1, P_2 \neq 0$ Polynome $P_3, \ldots, P_n$ und $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ $(n \geqq 2)$, so daß gilt:

$$(10) \quad \begin{aligned} P_1 &= Q_1 P_2 + P_3 \textit{ mit } P_3 \neq 0 \textit{ und } grad(P_3) < grad(P_2), \\ P_2 &= Q_2 P_3 + P_4 \textit{ mit } P_4 \neq 0 \textit{ und } grad(P_4) < grad(P_3), \\ &\cdots \\ P_{n-2} &= Q_{n-2} P_{n-1} + P_n \textit{ mit } P_n \neq 0 \textit{ und } grad(P_n) < grad(P_{n-1}), \\ P_{n-1} &= Q_{n-1} P_n. \end{aligned}$$

Vom letzten vom Nullpolynom verschiedenen Polynom P_n beweist man leicht, daß es in folgendem Sinne ein größter gemeinsamer Teiler von P_1, P_2 ist:

a) *Es existieren* $R_1, R_2 \in K[x]$, *so daß* $P_1 = R_1 P_n$, $P_2 = R_2 P_n$.

b) *Ist auch* P *im Sinne von* a) *ein gemeinsamer Teiler von* P_1, P_2, *so existiert ein* $R \in K[x]$ *mit* $P_n = RP$.

Aus (10) entnimmt man überdies, daß für $i = 1, \ldots, n-2$ das Polynom P_{i+2} eine Linearkombination von P_i und P_{i+1} ist, und hieraus folgt durch sukzessives Einsetzen, daß P_n in der Form $S_1 P_1 + S_2 P_2$ darstellbar ist. Sind P_1, P_2 *teilerfremd*, d. h., haben sie nur konstante Faktoren gemeinsam, so existieren also Polynome S_1, $S_2 \in K[x]$ mit $S_1P_1 + S_2P_2 = 1$, wobei natürlich auch umgekehrt Polynome P_1, P_2 mit dieser Eigenschaft teilerfremd sind.

4.3. Adjunktion, komplexe Zahlen

Ist K_0 ein Unterkörper des Körpers $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen, so heißt $x \in \boldsymbol{R} \setminus K_0$ *algebraisch vom Grade* n ($n \geqq 2$) *über* K_0, falls x Nullstelle eines in $K_0[x]$ irreduziblen Polynoms n-ten Grades ist. Ist $x \in \boldsymbol{R} \setminus K_0$ von keinem Grade algebraisch über K_0, so heißt x *transzendent über* K_0. Die über $\boldsymbol{Q}$ algebraischen bzw. transzendenten reellen Zahlen nennt man kurz *algebraische* bzw. *transzendente Zahlen*. Ist x_0 algebraisch über K_0, so wird durch die Eigenschaften

(1) a) $P_0 \in K_0[x]$,

b) $P_0(x_0) = 0$,

c) P_0 *ist irreduzibel in* $K_0[x]$,

d) $P_0 = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$

eindeutig ein Polynom P_0 festgelegt; es heißt das *definierende Polynom von* x_0, und $P_0(x) = 0$ heißt die *definierende Gleichung für* x_0.

Zum Beweis nehmen wir an, es sei P_2 ein festes Polynom minimalen Grades mit $P_2(x_0) = 0$ und P_1 ein beliebiges Polynom mit den Eigenschaften (1a, b, c, d). Nach 4.2., Satz 3, gilt $P_1 = Q \cdot P_2 + R$ mit $grad(R) < grad(P_2)$. Für $x = x_0$ folgt daraus zunächst $R(x_0) = 0$, und daher muß wegen der Minimalität des Grades von P_2 das Polynom R das Nullpolynom sein. Dann ist aber wegen der Irreduzibilität von P_1 das Polynom Q eine Konstante c, und aus (1d) folgt $c = 1$. Also ist $P_1 = P_2$, was zu zeigen war.

Ist $M \subseteqq \boldsymbol{R} \setminus K_0$, so kann man den Körper

$$K_0(M) := \bigcap \{K\colon K \textit{ Unterkörper von } \boldsymbol{R} \textit{ und } K_0 \cup M \subseteqq K\}$$

bilden. Seine Konstruktion bezeichnet man als (mengentheoretische) *Adjunktion von* M *zu* K_0. Statt $K_0(\{x_0\})$ schreibt man auch kurz $K_0(x_0)$.

Satz. *Ist* x_0 *algebraisch vom Grade* n *über* K_0, *so ist*

(2) $$K_0(x_0) = \{P(x_0)\colon P \in K_0[x] \textit{ und } grad(P) \leqq n - 1\}.$$

Für den Beweis bezeichnen wir die rechte Seite von (2) mit K. Offenbar ist $K \subseteqq K_0(x_0)$ und $K_0 \cup \{x_0\} \subseteqq K$. Es genügt daher zu zeigen, daß K ein Körper ist. Nicht-trivial ist von dieser Behauptung nur

a) *Wenn $x, y \in K$, so $xy \in K$.*

b) *Wenn $x \in K$ und $x \neq 0$, so $x^{-1} \in K$.*

Zu a). Es sei P_0 das definierende Polynom von x_0, $x = \mathrm{P}_1(x_0)$, $y = \mathrm{P}_2(x_0)$ mit $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in K_0[\mathrm{x}]$ und $\mathit{grad}(\mathrm{P}_1) \leqq n - 1$, $\mathit{grad}(\mathrm{P}_2) \leqq n - 1$. Nach 4.2., Satz 3, existieren Polynome $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in K_0[\mathrm{x}]$ mit $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{QP}_0 + \mathrm{R}$ und $\mathit{grad}(\mathrm{R}) \leqq n - 1$. Wegen $\mathrm{P}_0(x_0) = 0$ folgt daraus $x \cdot y = \mathrm{R}(x_0) \in K$.

Zu b). Ist $\mathrm{P}(x_0) \in K$, $\mathrm{P}(x_0) \neq 0$, so sind P und P_0 teilerfremd, da P_0 irreduzibel ist und wegen $\mathit{grad}(\mathrm{P}) < \mathit{grad}(\mathrm{P}_0)$ kein Teiler von P sein kann. Folglich existieren nach Abschnitt 4.2. Polynome $\mathrm{S}, \mathrm{S}_0 \in K_0[\mathrm{x}]$, so daß $\mathrm{SP} + \mathrm{S}_0\mathrm{P}_0 = 1$. Wegen $\mathrm{P}_0(x_0) = 0$ ist dann $\mathrm{S}(x_0) \cdot \mathrm{P}(x_0) = 1$, d. h. $\mathrm{S}(x_0) = \dfrac{1}{\mathrm{P}(x_0)}$. Wiederum nach Abschnitt 4.2., Satz 3, existieren Polynome $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in K_0[\mathrm{x}]$ mit $\mathrm{S} = \mathrm{QP}_0 + \mathrm{R}$ und $\mathit{grad}(\mathrm{R}) \leqq n - 1$, so daß $\mathrm{S}(x_0) = \mathrm{R}(x_0)$; also ist in der Tat $\dfrac{1}{\mathrm{P}(x_0)} \in K$.

Als Beispiel betrachten wir den folgenden Fall: Es sei $c \in K_0$, und das (im Fall $c > 0$ in $\boldsymbol{R}$ existierende) positive Element d mit $d^2 = c$ sei nicht Element von K_0. Dann ist nach (2)

$$K_0\left(\sqrt{c}\right) = K_0(d) = \left\{a + b\sqrt{c} : a, b \in K_0\right\},$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + b_1\sqrt{c}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{c}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c},\\
(3)\qquad &\left(a_1 + b_1\sqrt{c}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{c}\right) = (a_1a_2 + b_1b_2c) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{c},\\
&\frac{1}{a + b\sqrt{c}} = \frac{a - b\sqrt{c}}{\left(a + b\sqrt{c}\right)\left(a - b\sqrt{c}\right)} = \frac{a}{a^2 - b^2c} - \frac{b}{a^2 - b^2c}\sqrt{c}
\end{aligned}$$

$\big($falls $(a, b) \neq (0, 0)\big)$.
Dabei ist $a^2 - b^2c \neq 0$, da sonst $\sqrt{c} \in K_0$ wäre.

Die Kenntnis der Struktur von $K_0(x_0)$, insbesondere von $K_0\left(\sqrt{c}\right)$, gibt uns die Möglichkeit, zu gegebenem Körper K_0 und Polynom $\mathrm{P}_0 \in K_0[x]$ mit den Eigenschaften (1a, b, c, d) auch dann einen minimalen Körper $K_0(x_0)$ zu konstruieren, der K_0 umfaßt und in dem P_0 eine Nullstelle x_0 hat, wenn die Existenz eines umfassenden Körpers für K_0 und x_0 nach Art von $\boldsymbol{R}$ noch nicht bekannt ist. Man hat in diesem Fall $K_0(x_0)$ als Menge aller Terme der Form $a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_{n-1}x_0^{n-1}$ und die Operationen $+, \cdot$ in $K_0(x_0)$ nach den aus (2) folgenden Überlegungen $\big($z. B. im Fall $x_0 = \sqrt{c}$ gemäß (3)$\big)$ zu definieren. Diese Konstruktion von $K_0(x_0)$ bezeichnet man (im Gegensatz zur mengentheoretischen Adjunktion) als *symbolische Adjunktion von x_0*

zu K_0. Im Fall einer zu adjungierenden endlichen Menge kann man offenbar die mengentheoretische Adjunktion durch eine mehrfach wiederholte symbolische Adjunktion ersetzen.

Wichtigstes Beispiel für eine symbolische Adjunktion ist die übliche Konstruktion des Körpers $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen als $\boldsymbol{R}(i) := \{a + bi : a, b \in \boldsymbol{R}\}$. In diesem Fall liefert (3) (mit $c = -1$):

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i,$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i,$$

und man bestätigt durch direkte Nachprüfung der Axiome, daß $(\boldsymbol{C}, +, \cdot)$ wirklich ein Körper ist.

Wir vermerken hier ohne Beweis die folgende wichtige Eigenschaft des Körpers der komplexen Zahlen:

Jedes nichtkonstante Polynom $\mathrm{P} \in \boldsymbol{C}[\mathrm{x}]$ *ist in* $\boldsymbol{C}[\mathrm{x}]$ *ein Produkt von Linearfaktoren*, d. h., jedes Polynom n-ten Grades ($n \geqq 1$) hat in $\boldsymbol{C}$ (bei Berücksichtigung ihrer Vielfachheit) genau n Nullstellen. Insbesondere hat in $\boldsymbol{C}$ jede Gleichung der Form $\mathrm{x}^n = z$ bei gegebenem $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ genau n *verschiedene* Lösungen (den Beweis ihrer Verschiedenheit werden wir in einem späteren Kapitel (vgl. Abschnitt 9.2.) nachholen), die wir gemeinsam mit dem Symbol $\sqrt[n]{z}$ bezeichnen. Demnach ist $\sqrt[n]{}$ eine in $\boldsymbol{C}$ definierbare n-deutige einstellige Operation.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ die n (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen des Polynoms $\mathrm{x}^n + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \mathrm{x}^\nu$, so liefert der Koeffizientenvergleich in

$$\mathrm{x}^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \mathrm{x}^\nu = (\mathrm{x} - x_1)(\mathrm{x} - x_2) \cdots (\mathrm{x} - x_n)$$

die Vietaschen Formeln

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$a_{n-2} = \sum_{i \neq j} x_i x_j,$$

$$\ldots$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{n-1} \\ \text{paarweise verschieden}}} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}$$

$$a_0 = (-1)^n\, x_1 \cdots x_n.$$

Insbesondere wird im Fall $a_\nu = 0$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$, $a_0 = -c$ (d. h. für das Polynom $x^n - c$), wenn $\underset{(i)}{\sqrt{c}}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ die n verschiedenen Werte des Symbols $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet:

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{(i)}{\sqrt[n]{c}} = 0, \sum_{i \neq j} \underset{(i)}{\sqrt[n]{c}} \cdot \underset{(j)}{\sqrt[n]{c}} = 0, \ldots, \prod_{i=1}^{n} \underset{(i)}{\sqrt{c}} = (-1)^{n-1} \cdot c,$$

also z. B. im Fall $n = 2$:

$$\underset{(1)}{\sqrt[2]{c}} \cdot \underset{(2)}{\sqrt[2]{c}} = -c, \quad \underset{(1)}{\sqrt[2]{c}} = -\underset{(2)}{\sqrt[2]{c}},$$

was für positives reelles c die bekannte Tatsache einschließt, daß eine der beiden Quadratwurzeln aus c positiv und die andere negativ ist. Dies erlaubt es uns, für positives reelles c — wie in der Elementarmathematik üblich — statt des zweideutigen Symbols $\sqrt[2]{c}$ auch $\pm \sqrt{c}$ zu schreiben. Wir verabreden dabei, daß im folgenden $\sqrt{c}$ nur für den Fall definiert ist, daß der Radikand positiv reell ist, und dann den positiven der beiden Werte von $\sqrt[2]{c}$ bedeutet.

4.4. Quadratwurzelausdrücke, Radikale, Lösungsformeln für Gleichungen

Unter einem *rationalen Ausdruck* $\mathrm{r}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ verstehen wir einen Term, der aus den Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ und den Konstanten $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m$ zur Bezeichnung spezieller komplexer (reeller, rationaler, ganzer usw.) Zahlen und den Operationssymbolen $+, -, \cdot, ^{-1}$ entsprechend der allgemeinen Termdefinition (vgl. Kap. 2.) bei Verwendung der üblichen Klammersparungen aufgebaut ist, wobei in Anwendungsbeispielen der Quotient auch wie üblich unter Verwendung des Bruchstrichs geschrieben wird. Ist K ein beliebiger Unterkörper von $\boldsymbol{C}$, so daß $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$, so stellt $\mathrm{r}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ eine n-stellige partielle Operation in K dar. Der Definitionsbereich dieser Operationen wird dadurch eingeschränkt, daß eine der Grundoperationen, nämlich $^{-1}$, partiell ist. Ein rationaler Ausdruck hat daher nur für solche Argumentwerte $(x_1, \ldots, x_n)$ einen Sinn, d. h. einen Wert, für die alle in r vorkommenden Teilnenner von Null verschieden sind.

Unter einem *Quadratwurzelausdruck* $\mathrm{q}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ verstehen wir analog einen Term, der aus den Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, den Konstanten $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m$ zur Bezeichnung spezieller reeller Zahlen und den Operationssymbolen $+, -, \cdot, ^{-1}$ und $\sqrt{\ }$ aufgebaut ist. Ist K ein beliebiger Unterkörper von $\boldsymbol{R}$, so daß $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$, so stellt $\mathrm{q}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ eine n-stellige partielle Operation in K dar, deren Definitionsbereich durch die Bedingungen eingeschränkt ist, daß bei festen $x_1, \ldots, x_n$

alle auftretenden Teilnenner von Null verschieden und für alle Teilterme der Form $\sqrt{\mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)}$ sowohl $t(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$ als auch $\sqrt{t(x_1, \ldots, x_n)} \in K$ sein muß.

Unter einem *Radikal* $\varrho\ (x_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ verstehen wir schließlich einen Term, der aus den Variablen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, den Konstanten $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m$ zur Bezeichnung spezieller komplexer Zahlen und den Operationssymbolen $+, -, \cdot, ^{-1}, \sqrt{\ }$ sowie den Symbolen $\sqrt[n]{\ }$ zur Bezeichnung der mehrdeutigen Wurzeloperationen in $\boldsymbol{C}$ aufgebaut ist. Enthält ϱ jeweils m_n Symbole $\sqrt[n]{\ }$ $(n = 2, \ldots, k)$, so stellt ϱ bei jeder Einsetzung von $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von ϱ im allgemeinen $p(\varrho) = 2^{m_2}3^{m_3} \cdots k^{m_k}$ (nicht notwendig paarweise verschiedene) komplexe Zahlen, also insgesamt eine partielle n-stellige und maximal $p(\varrho)$-deutige Operation in $\boldsymbol{C}$ dar. Der Definitionsbereich des Radikals ϱ wird dadurch eingeschränkt, daß alle vorkommenden Nenner von Null verschieden sein müssen und alle unter einem Symbol $\sqrt{\ }$ (ohne Wurzelexponenten!) stehenden Teilradikale bei der betreffenden Einsetzung für die Variablen wenigstens einen nichtnegativen reellen Wert haben müssen (vgl. die Bemerkung am Ende von Abschnitt 4.3.).

In allen drei vorangehenden Definitionen soll der Fall $n = 0$ nicht ausgeschlossen sein. Der rationale bzw. Quadratwurzelausdruck heißt dann *konstant,* da er ein festes Element aus K darstellt (falls er nicht sinnlos ist). Auch ein Radikal, in dem keine Variablen vorkommen, wollen wir konstant nennen, obwohl es im allgemeinen mehrere komplexe Zahlen darstllt.

Über die Quadratwurzelausdrücke benötigen wir folgenden

Satz 1. *Zu jeder durch einen konstanten Quadratwurzelausdruck* $\mathrm{q}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m)$ *mit* $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$ *dargestellten reellen Zahl a existiert eine Folge von reellen Oberkörpern* $K_0 = K, K_1, \ldots, K_n$, *so daß für* $\nu = 0, \ldots, n-1$ *gilt:* $K_{\nu+1} = K_\nu\left(\sqrt{c_\nu}\right)$ mit $c_\nu \in K_\nu$, $\sqrt{c_\nu} \notin K_\nu$ *und* $a \in K_n$. (In diesem Fall heißt K_n eine *quadratische Erweiterung von* K_0.)

Beweis. Es seien $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_s$ endlich viele konstante Quadratwurzelausdrücke, so daß die in den q_i vorkommenden Konstanten sämtlich im Körper K_0 liegen. Wir denken uns die in den q_i insgesamt vorkommenden $\sqrt{\ }$-Symbole in irgendeiner Weise $\underset{1}{\sqrt{\ }}, \ldots, \underset{m}{\sqrt{\ }}$ durchnumeriert, so daß $i < j$ ist, falls $\underset{i}{\sqrt{\ }}$ in dem unter $\underset{j}{\sqrt{\ }}$ stehenden Teilausdruck vorkommt, und beweisen durch Induktion über die Anzahl m der insgesamt vorkommenden $\sqrt{\ }$-Symbole folgende Verschärfung von Satz 1:

Zu beliebigen endlich vielen Quadratwurzelausdrücken existiert eine endliche Folge von Körpern der in Satz 1 beschriebenen Art, so daß alle durch die Ausdrücke dargestellten Zahlen in K_n *liegen.*

Für $m = 0$ leistet offenbar schon K_0 selbst das Verlangte. Kommen in $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_s$ insgesamt $m + 1$ $\sqrt{\ }$-Symbole vor und $\underset{m+1}{\sqrt{\ }}$ etwa in q_1, so hat, da $\underset{m+1}{\sqrt{\ }}$ eine „äußerste" Wurzel ist, q_1 die Form $\mathrm{r}\left(\underset{m+1}{\sqrt{\mathrm{q}^{(1)}}}, \mathrm{q}^{(2)}, \ldots, \mathrm{q}^{(k)}\right)$ eines aus den Quadratwurzelausdrücken $\sqrt[m+1]{q^{(1)}}, q^{(2)},\ldots, q^{(k)}$ durch rationale Operationen gebildeten Terms, und in $q^{(1)},\ldots, q^{(k)}, q_2,\ldots, q_s$ kommen insgesamt nur die Wurzelsymbole $\sqrt[1]{\ }, \ldots, \sqrt[m]{\ }$ vor. Daher existiert nach Induktionsannahme eine Folge der im Satz beschriebenen Art, so daß alle von $q^{(1)},\ldots, q^{(k)}, q_2,\ldots, q_s$ dargestellten Zahlen in K_n liegen. Falls auch $\sqrt{q^{(1)}} \in K_n$, so leistet die Folge $K_0, \ldots, K_n$ das Verlangte, andernfalls verlängern wir diese Folge um $K_{n+1} := K_n\left(\sqrt{q^{(1)}}\right)$.

Sind $t_\nu(x_1, \ldots, x_k, a_1,\ldots, a_m)$ $(\nu = 0,\ldots, n-1)$ irgendwelche Terme von einer der oben behandelten Arten, in denen die Variable x nicht vorkommt, so heißt die Gleichung

$$(1) \qquad x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} t_\nu x^\nu = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

eine *Gleichung n-ten Grades.* Als Extremfälle erhalten wir die *speziellen Gleichungen n-ten Grades*

$$(2) \qquad x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu = 0 \qquad (n \geqq 2),$$

in denen die Koeffizienten a_ν Konstanten sind, und die *allgemeine Gleichung n-ten Grades*

$$(3) \qquad x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu x^\nu = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

in der die Koeffizienten paarweise verschiedene Variable sind. Falls der Koeffizient von x^{n-1} gleich Null ist, erhalten wir die sogenannten *kanonischen Gleichungen n-ten Grades*

$$(4) \qquad x^n + \sum_{\nu=0}^{n-2} t_\nu x^\nu = 0 \qquad (n \geqq 2).$$

Durch die lineare Substitution $\bar{x} = x + \frac{t_{n-1}}{n}$ kann (1) auf (4) reduziert werden, d. h., unter Voraussetzung des genannten Zusammenhangs zwischen $\bar{x}$ und x erfüllt x genau dann (1), wenn $\bar{x}$ die aus (1) entstehende Gleichung der Form (4) erfüllt.

Eine Gleichung der Form (1) heißt *rationalreduzibel* bzw. *radikalreduzibel,* falls es ein m $(1 < m < n)$ und rationale Ausdrücke $r_\mu^{(1)}(x_1,\ldots, a_1,\ldots)$, $r_\nu^{(2)}(x_1, \ldots, a_1, \ldots)$ bzw. Radikale $\varrho_\mu^{(1)}(x_1, \ldots, a_1,\ldots)$, $\varrho_\nu^{(2)}(x_1,\ldots, a_1,\ldots)$ $(\mu = 0,\ldots, m-1;\ \nu = 0,\ldots, n-m-1)$ gibt, so daß die Terme

$$x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} t_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \left(x^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} r_\mu^{(1)} x^\mu\right)\left(x^{n-m} + \sum_{\nu=0}^{n-m-1} r_\nu^{(2)} x^\nu\right)$$

die gleiche Operation darstellen, d. h. den gleichen Definitionsbereich und an allen Stellen des gemeinsamen Definitionsbereichs den gleichen Wert haben bzw. (bei Radikalen)

$$\mathrm{x}^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathrm{t}_\nu \mathrm{x}^\nu \quad \text{und} \quad \left(\mathrm{x}^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \varrho_\mu^{(1)} \mathrm{x}^\mu\right)\left(\mathrm{x}^{n-m} + \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \varrho_\nu^{(2)} \mathrm{x}^\nu\right)$$

den gleichen Definitionsbereich und an allen Stellen des Definitionsbereichs wenigstens einen gemeinsamen Wert haben.

Beispiele.

1. Da für beliebige Elemente x, a eines beliebigen Körpers stets $x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$ ist, die die Gleichung $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{px} + \mathrm{p}^2 = 0$ (wobei p Variablencharakter hat) rationalreduzibel.

2. Wegen

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt[2]{\frac{p^2}{4} - q}_{(1)}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt[2]{\frac{p^2}{4} - q}_{(2)}\right)$$

ist die allgemeine Gleichung zweiten Grades radikalreduzibel.

Die Frage nach der Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung (3) oder speziellerer Gleichungen der Form (1) durch Radikale, die eines der zentralen Probleme der klassischen Algebra darstellt, ist auf Grund des bereits diskutierten Zusammenhangs zwischen Reduzibilität von Polynomen einerseits und der Existenz von Nullstellen andererseits offenbar ein Spezialfall des Problems der Radikalreduzibilität. Bekanntlich versteht man unter einer *Lösung der Gleichung* (3) oder *einer Gleichung der Form* (1) *durch Radikale* ein aus den Variablen und Konstanten, die in den Koeffizienten der gegebenen Gleichung vorkommen (also im Fall (3) aus den Koeffizienten selbst) gebildetes Radikal, unter dessen Werten wenigstens eine Nullstelle der gegebenen Gleichung vorkommt. Die Existenz einer Lösung in diesem Sinne bedeutet Radikalreduzibilität der gegebenen Gleichung, und zwar Abspaltung eines Linearfaktors. Wir wollen ferner ein Radikal eine *starke Lösung* der gegebenen Gleichung nennen, wenn deren sämtliche Nullstellen (im Bereich der komplexen Zahlen) unter den Werten dieses Radikals vorkommen.

3. Nach Beispiel 2 ist das Radikal $-\frac{\mathrm{p}}{2} + \sqrt[2]{\frac{\mathrm{p}^2}{4} - \mathrm{q}}$ eine starke Lösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit komplexen Koeffizienten.

4. Die Cardanosche Lösung der kanonischen Gleichung dritten Grades

$$\mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0 \tag{5}$$

besagt, daß sich die Nullstellen dieser Gleichung unter denjenigen (im allgemeinen neun) Werten des kubischen Radikals

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{6}$$

befinden, bei denen im ersten und zweiten Summanden verschiedene Werte des zweideutigen quadratischen Radikals eingesetzt sind. Demnach ist (6) eine starke Lösung von (5). Um dies zu beweisen, geht man folgendermaßen vor: Ist x_0 eine beliebige Lösung von (5), so seien u, v die (eventuell komplexen) Lösungen der Gleichung $t^2 - x_0 t - \frac{p}{3} = 0$. Daher ist

$$x_0 = u + v, \tag{7}$$

$$-\frac{p}{3} = u \cdot v, \quad \text{d. h.} \quad u^3 \cdot v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{8}$$

und

$$0 = x_0^3 + px_0 + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = (u+v)(3uv+p) + (u^3+v^3+q),$$

d. h. wegen (8)

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{9}$$

Aus (9) und der zweiten Gleichung (8) folgt aber, daß u^3 und v^3 gerade die Lösungen der Gleichung $z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ sein müssen, demnach ist $x_0 = u + v$ einer der Werte des Radikals (6).

5. Ferrari, ein Schüler Cardanos, zeigte, daß die Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{10}$$

auf die Lösung von Gleichungen höchstens dritten Grades zurückgeführt werden kann: (10) ist äquivalent zu

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Daher ist x eine Lösung von (10) genau dann, wenn für ein beliebiges y

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d + 2\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)y + y^2 \tag{11}$$

gilt. Man sucht nun y so zu bestimmen, daß die rechte Seite von (11) die Form $(Ax + B)^2$ bekommt. Das führt auf

$$A^2 = 2y + \frac{a^2}{4} - b, \quad B^2 = y^2 - d, \quad 2AB = ay - c.$$

Wegen $4A^2B^2 = (2AB)^2$ erhält man für y die Gleichung dritten Grades

$$4\left(2y + \frac{a^2}{4} - b\right)(y^2 - d) = (ay - c)^2$$

bzw.

$$(12) \qquad 8y^3 - by^2 + (2ac - 8d)\, y + (4bd - a^2d - c^2) = 0,$$

die als kubische Resolvente von (10) bezeichnet wird. Setzt man für y eine Lösung dieser Gleichung (die man nach CARDANO als kubisches Radikal erhält, so wird (11) zu

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\,x + y\right)^2 = \left(\sqrt[2]{2y + \frac{a^2}{4} - b} \cdot x + \sqrt[2]{y^2 - d}\right)^2$$

bzw.

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right)^2 - \left(\sqrt[2]{2y + \frac{a^2}{4} - b} \cdot x + \sqrt[2]{y^2 - d}\right)^2 = 0.$$

Demnach ist

$$(13) \qquad \begin{aligned} &x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y + \sqrt[2]{2y + \frac{a^2}{4} - b} \cdot x + \sqrt[2]{y^2 - d}\right) \\ &\quad \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y - \sqrt[2]{2y + \frac{a^2}{4} - b} \cdot x - \sqrt[2]{y^2 - d}\right), \end{aligned}$$

d. h., (10) ist radikalreduzibel. Insbesondere können die Nullstellen von (10) als Nullstellen der quadratischen Faktoren von (13) durch Radikale dargestellt werden, wobei man sich für y das Lösungsradikal von (12) eingesetzt denken muß. Stellt das Radikal R_1 die (im allgemeinen zwei) Nullstellen des ersten Faktors von (13) und R_2 die Nullstellen des zweiten Faktors dar, so ist $x = \frac{R_1 + R_2}{2} + \frac{\sqrt{(R_1 - R_2)^2}}{2}$ sogar eine starke Lösung der Gleichung (10).

Ohne Beweis[1]) nennen wir hier den

Satz von RUFFINI und ABEL. *Die allgemeinen Gleichungen von höherem als viertem Grade sind nicht durch Radikale lösbar.*

Der Satz von RUFFINI und ABEL schließt natürlich nicht die Lösbarkeit spezieller Typen von Gleichungen höheren als vierten Grades durch Radikale aus. Es ist z. B.

[1]) Einen Beweis dieses Satzes wie auch ausführlichere Darstellungen der Lösungsmethoden von CARDANO und FERRARI findet man in [7].

trivialerweise das Radikal $\sqrt[n]{c}$ eine starke Lösung der Gleichung $x^n - c = 0$. Er schließt insbesondere nicht die Lösbarkeit spezieller Gleichungen höheren als zweiten Grades durch quadratische Radikale bzw. Quadratwurzelausdrücke aus. Gerade diese Frage wird in der Theorie der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal eine entscheidende Rolle spielen.

Satz von Gauss. *Hat eine irreduzible Gleichung n-ten Grades eine Lösung, die durch einen Quadratwurzelausdruck dargestellt wird, so ist n eine Zweierpotenz, d. h. $n = 2^m$.*

Der folgende relativ elementare Beweis geht auf Bieberbach [2] zurück. Es sei $P \in K_0[x]$ ein in $K_0[x]$ irreduzibles Polynom n-ten Grades und q ein aus Koeffizienten von P gebildeter Quadratwurzelausdruck, der eine Nullstelle von $P(x) = 0$ darstellt. Es sei ferner $K_0, K_1, \ldots, K_m$ eine Folge von Körpern der in Satz 1 beschriebenen Art, so daß $q \in K_m$ ist. Da P in $K_0[x]$ irreduzibel, aber in $K_m[x]$ reduzibel ist, existiert ein erster Index k $(0 < k \leqq m)$, so daß P in K_k reduzibel ist. Es sei $P_1 \in K_k[x]$ ein echter Faktor minimalen Grades von P. Ist $K_k = K_{k-1}\left(\sqrt{c}\right)$ mit $c \in K_{k-1}$, $\sqrt{c} \notin K_{k-1}$, so kann P_1 auf die Form $P_1 = \sum\limits_{\varrho=0}^{r} \left(a_\varrho + b_\varrho \sqrt{c}\right) x^\varrho$ gebracht werden, und mit

$$P_{11} = \sum_{\varrho=0}^{r} a_\varrho x^\varrho, \qquad P_{12} = \sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho$$

gilt: $P_1 = P_{11} + \sqrt{c}\, P_{12}$. Es sei $P = P_1 P_2$. Dann erhalten wir für den anderen Faktor P_2 analog eine Darstellung $P_2 = P_{21} + \sqrt{c} \cdot P_{22}$, wobei $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} \in K_{k-1}[x]$. Nun ist

$$P = P_1 P_2 = (P_{11}P_{21} + c \cdot P_{12}P_{22}) + \sqrt{c}\,(P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}) = Q_1 + \sqrt{c}\, Q_2$$

mit $Q_1, Q_2 \in K_{k-1}[x]$. Wäre hierbei Q_2 nicht das Nullpolynom, so erhielte man für ein beliebiges $x_0 \in K_{k-1}$ mit $Q_2(x_0) \neq 0$ aus $P(x_0) = Q_1(x_0) + \sqrt{c}\, Q_2(x_0)$ den Widerspruch $\sqrt{c} \in K_{k-1}$. Folglich ist $P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}$ das Nullpolynom, woraus sofort folgt, daß auch $\overline{P}_1 := P_{11} - \sqrt{c}\, P_{12}$ ein Teiler (und zwar gleichen Grades wie P_1) von P ist. Da P_1 und $\overline{P}_1$ wegen der vorausgesetzten Minimalität des Grades von P_1 teilerfremd sind, ist daher auch $P_1\overline{P}_1$ ein Teiler von P. Da aber $P_1\overline{P}_1 \in K_{k-1}[x]$ und P in K_{k-1} irreduzibel war, stimmt P bis auf einen konstanten Faktor mit $P_1\overline{P}_1$ überein, d. h., der Grad von P ist durch 2 teilbar. Falls $\mathit{grad}(P_1) \geqq 1$, führt die Anwendung des gleichen Schlusses auf das in K_{k-1} irreduzible Polynom P_1 usw. auf die Behauptung.

Sind $x, y \in \boldsymbol{C}$ verschiedene Nullstellen des gleichen über einem Körper $K_0 \subset \boldsymbol{C}$ irreduziblen Polynoms, so heißen sie *zueinander konjugiert* (*bezüglich* K_0, falls $K_0 \neq \boldsymbol{Q}$).

Eine reelle Zahl x heißt *platonisch über dem Körper* $K_0 \subseteqq \boldsymbol{R}$, wenn x aus Elementen von K_0 durch Anwendung der Operationen $+, -, \cdot, ^{-1}$ und $\sqrt{\ }$ erhalten werden kann. Die Menge $\mathit{Plat}(K_0)$ aller über K_0 platonischen Zahlen ist offenbar ein Körper und stimmt mit der Menge aller derjenigen reellen Zahlen überein, die durch Quadratwurzelausdrücke mit Konstanten aus K_0 dargestellt werden. Ist $Plat(K) = K$, so heißt der Körper K *platonisch.* Ein Polynom $\mathrm{P} \in K[\mathrm{x}]$ vom Grade $n \geqq 1$ heißt *platonisch-reduzibel* bzw. *-irreduzibel über* K, je nachdem, ob P in $Plat(K)$ reduzibel ist oder nicht.

Eine reelle Zahl x heißt *pythagoräisch über dem Körper* $K_0 \subseteqq \boldsymbol{R}$, wenn x aus Elementen von K_0 durch Anwendung der Operationen $+, -, \cdot, ^{-1}$ und $Pyth(a, b) := \sqrt{a^2 + b^2}$ erhalten werden kann. Die Menge $Pyth(K_0)$ aller über K_0 pythagoräischen Zahlen ist offenbar ein Körper und stimmt mit der Menge aller derjenigen reellen Zahlen überein, die durch Quadratwurzelausdrücke mit Konstanten aus K_0 dargestellt werden, wobei nur Quadratsummen als Radikanden auftreten. Ist $Pyth(K) = K$, so heißt der Körper K *pythagoräisch.* Offenbar ist für beliebige reelle Körper K_0

$$Pyth(\mathrm{K}_0) \subseteqq Plat(K_0).$$

Wir wollen zeigen, daß im allgemeinen $Pyth(K_0) \subset Plat(K_0)$ ist. Dazu benötigen wir

Satz 2. *Entsteht* K_n *aus* K_0 *durch Adjunktion von endlich vielen* (hier aber im allgemeinen komplexen) *Quadratwurzeln wie in Satz* 1, *so daß das in* $K_0[\mathrm{x}]$ *irreduzible Polynom* P *in* K_n *eine Nullstelle hat, so zerfällt* P *in* $K_n[\mathrm{x}]$ *in Linearfaktoren, d. h., ist eine Nullstelle* x_0 *von* P *durch ein quadratisches Radikal* ϱ *über* K_0 *darstellbar, so sind es auch alle dazu konjugierten Nullstellen.*

(Man erhält sie im Regelfall in Gestalt der restlichen Werte des gleichen Radikals ϱ: Eine Gleichung G, der x_0 genügt, entsteht nämlich aus $x = \varrho$ durch fortlaufendes Auflösen nach „äußeren" Wurzeln und nachfolgendes Quadrieren. Daher genügen mit x_0 auch alle anderen Werte von ϱ der Gleichung G. Falls also G irreduzibel ist, sind sie und nur sie zu x_0 konjugiert.)

Der Beweis von Satz 2 ist im wesentlichen eine Wiederholung unseres Beweises des Satzes von Gauss. Man hat nur statt der jeweils adjungierten positiven Wurzeln aus positiven reellen Zahlen beliebige komplexe Quadratwurzeln zuzulassen.

Aus Satz 2 folgt, daß die zu einer über K_0 pythagoräischen Zahl konjugierten Zahlen sämtlich reell sind, da in einem „pythagoräischen Quadratwurzelausdruck" nur Wurzeln aus Quadratsummen gezogen werden, Vorzeichenwechsel der vorkommenden Wurzeln also keinen Teilradikanden negativ machen können. Diese Bedingung ist für platonische Zahlen im allgemeinen nicht erfüllt. Zum Beispiel ist

$$x_0 := \sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)} \in Plat(\boldsymbol{Q}),$$

jedoch sind die zu x_0 konjugierten Zahlen $\sqrt[2]{2\left(-\sqrt{2} - 1\right)}$ imaginär, demnach $x_0 \notin Pyth(\boldsymbol{Q})$. Umgekehrt gilt der

Satz von Artin. *Jede über einem reellen Körper* K_0 *platonische Zahl, deren Konjugierte bezüglich* K_0 *sämtlich reell sind, ist über* K_0 *pythagoräisch.*

Für den Beweis sei der Leser auf [10, §37] verwiesen.

5. Ebene Geometrie

5.1. Affine Inzidenzebenen

Eine Interpretation der Sprache $\mathscr{S}_I$ der ebenen Inzidenzgeometrie (vgl. Abschnitt 2.5.), d. h. eine Struktur der Form $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I})$, wobei $\boldsymbol{P}$ die Menge der „Punkte", $\boldsymbol{G}$ die Menge der „Geraden" und $\boldsymbol{I} \subseteqq \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{G}$ die „Inzidenzrelation" dieser Struktur ist, heißt eine *affine Inzidenzebene*, wenn sie Modell des folgenden Axiomensystems ist:

I1. $\bigvee \mathrm{p_1 p_2 p_3}$; $\mathrm{p_1, p_2, p_3}$ nicht kollinear,

I2. $\bigwedge \mathrm{p_1 p_2}\big(\mathrm{p_1} \neq \mathrm{p_2} \rightarrow \bigvee !!\, \mathrm{g}(\mathrm{p_1} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{g})\big)$,

I3. $\bigwedge \mathrm{g} \bigvee \mathrm{p_1 p_2}(\mathrm{p_1} \neq \mathrm{p_2} \wedge \mathrm{p_1} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{g})$,

I4. (*Starkes Parallelenaxiom*) $\bigwedge \mathrm{pg} \ \bigvee !!\, \mathrm{g}'(\mathrm{p} \in \mathrm{g}' \wedge \mathrm{g} \mathrel{\underline{\parallel}} \mathrm{g}')$,

I5. (*Satz von* DESARGUES).

Dabei haben wir zur Formulierung von I1 bis I4 die bereits in Abschnitt 2.5. behandelten definitorischen Erweiterungen von $\mathscr{S}_I$ benutzt. Die Formulierung von I5 erfordert einige Vorbereitungen und wird später nachgetragen.

Zunächst bemerken wir, daß auf Grund der Axiome I2 und I3 eine beliebige affine Inzidenzebene zu einer Struktur der Form $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \in)$ isomorph ist, wobei $\boldsymbol{G} \subseteqq 2^{\boldsymbol{P}}$ (vgl. Kap. 1.). Daher können wir zur Vereinfachung der Formulierungen und der Anschaulichkeit halber annehmen, daß in den jeweils betrachteten affinen Inzidenzebenen die „Geraden" Mengen von „Punkten" sind und „$\in$" durch die Elementrelation interpretiert ist. Andererseits zeigt die in Abb. 1 dargestellte Interpretation, bei der jede „Gerade" nur zwei Punkte enthält, daß es affine Inzidenzebenen gibt, die sich sehr von dem ursprünglich intendierten Modell der „Anschauungsebene" unterscheiden. Die Existenz von wenigstens vier Punkten und sechs Geraden läßt sich leicht aus I1 bis I4 folgern, so daß die in Abb. 1 dargestellte affine Inzidenzebene das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte kleinste Modell von I1 bis I4 (und I5, das hier trivialerweise gilt) ist. Man beachte, daß im Sinne der Definition von „$\|$“ die Gerade durch p_1, p_3 die Parallele zu der Geraden durch p_2, p_4 ist. Das minimale Modell zeigt also u. a., daß man aus I1 bis I5 noch nicht folgern kann, daß sich in einem Parallelogramm die Diagonalen schneiden.

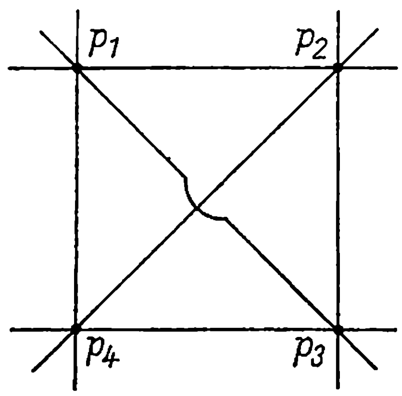


Abb. 1

Wir kehren zur allgemeinen Theorie der affinen Inzidenzebenen zurück. Unter Bezug auf I2 definieren wir

$$\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) := \iota \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g}), \text{ falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2,$$

und unter Bezug auf I4 definieren wir

$$\mathrm{P}(\mathrm{p}, \mathrm{g}) := \iota \mathrm{g}'(\mathrm{p} \in \mathrm{g}' \wedge \mathrm{g} \,\underline{\underline{\|}}\, \mathrm{g}').$$

Auf Grund von I2 trifft für beliebige Geraden g_1, g_2 genau einer der drei Fälle $\mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2$, $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2$, $\bigvee!!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2)$ zu. Definieren wir:

$$\mathrm{g}_1 \text{ schneidet } \mathrm{g}_2 :\leftrightarrow \bigvee!!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2),$$

so gilt trivialerweise

$$\bigwedge \mathrm{g}_1\mathrm{g}_2 \big(\mathrm{g}_1 \text{ schneidet } \mathrm{g}_2 \to \bigvee!!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2)\big),$$

und unter Bezug auf diese BEE definieren wir die „erste Schnittpunktoperation“

$$\mathrm{S}_1(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) := \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2), \text{ falls } \mathrm{g}_1 \text{ schneidet } \mathrm{g}_2.$$

Wir wenden uns nun der Formulierung des Satzes von Desargues zu. Dazu definieren wir zunächst

$$\begin{aligned}&\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \textit{ zentralperspektiv} \text{ zu } \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3' :\leftrightarrow \\ &\bigvee \mathrm{p}(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_1' \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_2' \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_3' \text{ kollinear}).\end{aligned}$$

Falls wenigstens zwei der drei Punktepaare p_i, p_i' ($i = 1, 2, 3$) aus verschiedenen Punkten bestehen, ist der Punkt p eindeutig bestimmt und heißt dann das *Perspektivitätszentrum* von $p_1p_2p_3$ und $p_1'p_2'p_3'$.

(1) $$\begin{aligned}&\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \textit{ achsenperspektiv} \text{ zu } \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3' :\leftrightarrow \\ &\bigvee \mathrm{p}_4\mathrm{p}_5\mathrm{p}_6(\mathrm{p}_4, \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6 \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4 \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}_1', \mathrm{p}_2', \mathrm{p}_4' \text{ kollinear} \\ &\qquad \wedge \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_5 \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}_1', \mathrm{p}_3', \mathrm{p}_5 \text{ kollinear} \\ &\qquad \wedge \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_6 \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p}_2', \mathrm{p}_3', \mathrm{p}_6 \text{ kollinear}).\end{aligned}$$

Falls wenigstens zwei der drei Punkte p_4, p_5, p_6 eindeutig bestimmt und voneinander verschieden sind, ist durch p_4, p_5, p_6 eine Gerade g eindeutig bestimmt und heißt dann die *Perspektivitätsachse* von $p_1p_2p_3$ und $p_1'p_2'p_3'$.

Im allgemeinen gilt nun

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \text{ zentralperspektiv zu } \mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3'$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \text{ achsenperspektiv zu } \mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3'$$

(Abb. 2a).

Es kann jedoch vorkommen, daß trotz vorhandener Perspektivitätsachse kein Perspektivitätszentrum existiert, weil die Geraden, deren Schnittpunkt es sein müßte, zueinander parallel sind, oder daß zwar ein Perspektivitätszentrum existiert, aber einige der Geraden, die sich paarweise auf der Perspektivitätsachse schneiden müßten, parallel sind. Die genauere Untersuchung der verschiedenen Fälle führt auf den folgenden Satz:

Affiner Satz von Desargues. *Ist $p_1p_2p_3$ zentralperspektiv zu $p_1'p_2'p_3'$ (Fall a) oder existieren Geraden g_i durch p_i, p_i'* $(i = 1, 2, 3)$, *die paarweise parallel oder gleich sind (Fall b), so tritt einer der folgenden Fälle ein:*

α) $p_1p_2p_3$ achsenperspektiv zu $p_1'p_2'p_3'$.

β) Zwei der Punkte p_4, p_5, p_6 aus Definition (1) *existieren, und die beiden Geraden, die sich im dritten schneiden müßten, sind zu einer Geraden durch diese beiden Punkte parallel.*

γ) Es existieren Geraden g_1 durch p_2, p_3, g_1' durch p_2', p_3', g_2 durch p_1, p_3, g_2' durch p_1', p_3', g_3 durch p_1, p_2, g_3' durch p_1', p_2', so daß $g_1 \mathrel{\underline{\parallel}} g_1'$ und $g_2 \mathrel{\underline{\parallel}} g_2'$ und $g_3 \mathrel{\underline{\parallel}} g_3'$.
Umgekehrt zieht jede der Voraussetzungen α), β), γ) einen der Fälle a), b) nach sich.

Die Abbildungen 2a—f zeigen, daß tatsächlich alle Kombinationen der Fälle a), b) mit den Fällen α), β), γ) eintreten können. Es sei noch bemerkt, daß eine Reihe weiterer Ausartungsfälle, die dadurch entstehen, daß gewisse der Punkte $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ kollinear sind oder gar zusammenfallen, nicht gesondert dargestellt wurden, aber in den Definitionen der Begriffe zentralperspektiv und achsenperspektiv sowie im Satz von Desargues durch entsprechend vorsichtige Formulierung mit enthalten sind. In allen diesen Fällen folgt die Gültigkeit des Satzes übrigens bereits aus den Axiomen I1 bis I4. Der Satz von Desargues folgt aus den üblichen Systemen räumlicher Inzidenzaxiome durch rein geometrische Überlegungen (vgl. [5]), ist jedoch unabhängig von I1 bis I4. Hilbert bemerkte als erster, daß seine Gültigkeit in einer affinen Inzidenzebene sogar notwendig und hinreichend für deren Einbettbarkeit in einen dreidimensionalen affinen Raum ist [10].

Der Satz von Desargues ist ein typisches Beispiel eines Satzes der affinen Geometrie, dessen Formulierung sehr schwerfällig wird durch die Fallunterscheidungen, die die eventuelle Parallelität gewisser sich im allgemeinen schneidender Geraden betreffen. Derartige Sätze lassen sich wesentlich einfacher aussprechen, wenn man an-

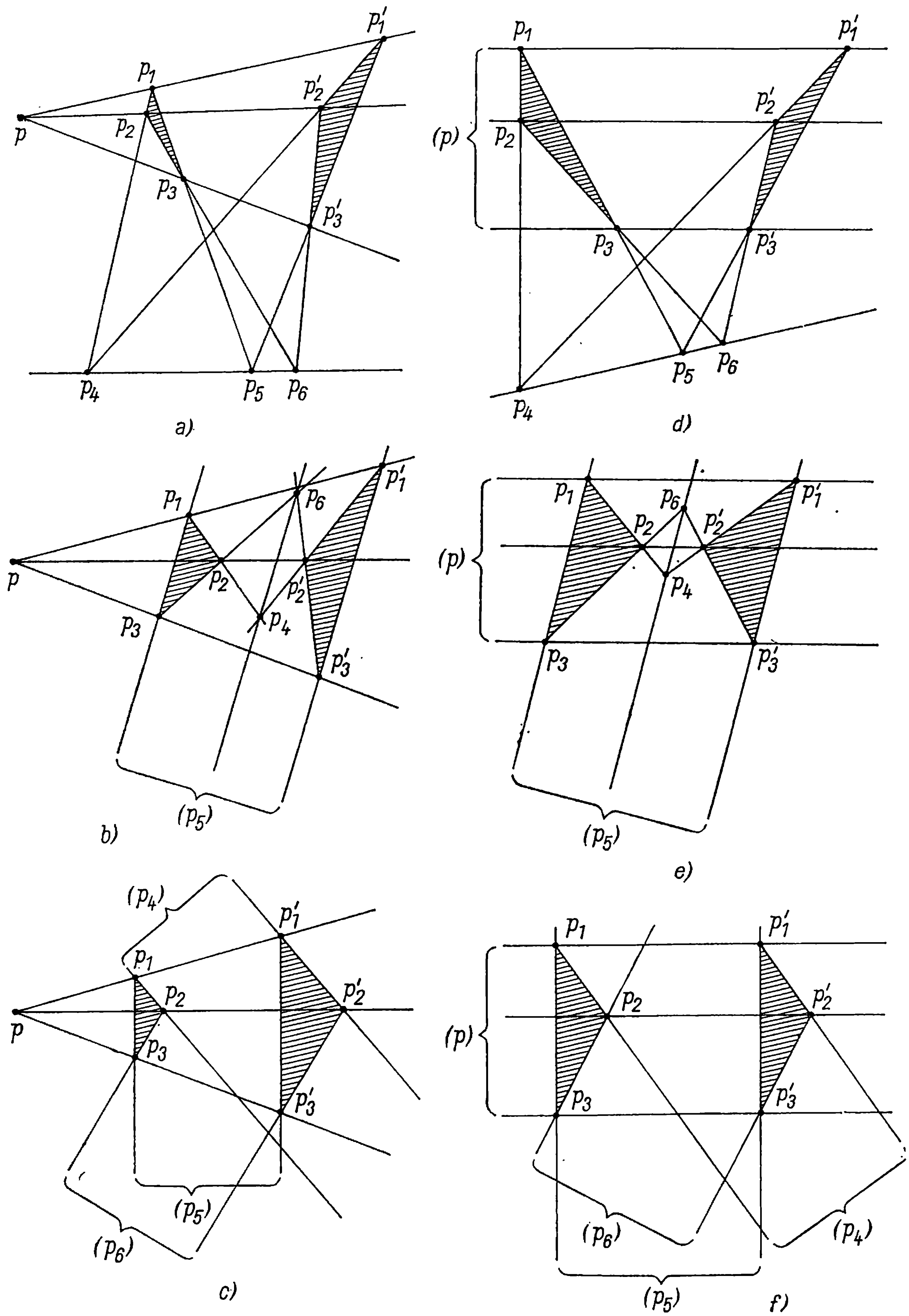


Abb. 2

nimmt, daß parallele Geraden sich „in einem uneigentlichen Punkt schneiden“ und in der Formulierung nicht mehr ausdrücklich zwischen eigentlichen und uneigentlichen Punkten unterscheidet. Der Satz von DESARGUES etwa reduziert sich dann sofort auf die einfache Form (2). Die folgenden Überlegungen zeigen, daß man dem zunächst nur abkürzenden Sprachgebrauch „uneigentlicher Punkt“ einen exakten mathematischen Sinn geben kann.

Die Relation „$\underline{\underline{\parallel}}$“ ist ihrer Definition zufolge reflexiv und symmetrisch. Das in I4 als Teilaussage enthaltene *schwache* Parallelenaxiom

I4′. $\bigwedge p g g_1 g_2 (p \in g_1 \wedge p \in g_2 \wedge g_1 \parallel g \wedge g_2 \parallel g \rightarrow g_1 = g_2)$

ist, wie man leicht erkennt, der Transitivität von „$\underline{\underline{\parallel}}$“ äquivalent, und diese Äquivalenz zeigt vielleicht am deutlichsten von allen bekannten Äquivalenten die Rolle des vieldiskutierten Parallelenaxioms im Gesamtaufbau der euklidischen Geometrie. Der andere Teil des starken Parallelenaxioms I4, der die Existenz wenigstens einer Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt aussagt, folgt (genau wie der Satz von DESARGUES) in der vollen ebenen euklidischen Geometrie aus den üblichen Kongruenz- bzw. Bewegungsaxiomen. Für die axiomatische Charakterisierung der affinen Ebenen werden jedoch I4 und I5 benötigt.

Die Tatsache, daß „$\underline{\underline{\parallel}}$“ eine Äquivalenzrelation ist, ermöglicht es, jeder affinen Inzidenzebene $\mathfrak{J} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I)$ eine als *projektive Abschließung* von $\mathfrak{J}$ bezeichnete Struktur $\bar{\mathfrak{J}} = (\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{G}}, \bar{I})$ gleicher Signatur zuzuordnen: Für jede „Gerade“ $g \in \boldsymbol{G}$ sei $\bar{g}$ die Äquivalenzklasse von g bezüglich der Parallelgleichheit, und es sei g_u die Menge der Äquivalenzklassen $\bar{g}$. Ferner sei $\bar{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P} \cup g_u$ und $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} \cup \{g_u\}$. Die neue Inzidenzrelation $\bar{I}$ sei definiert durch:

$$(p, g) \in \bar{I} \textit{ genau dann, wenn } (p, g) \in I$$
$$\textit{oder } (p \in g_u \textit{ und } g = g_u)$$
$$\textit{oder } (p \in g_u \textit{ und } g \in p).$$

Bezeichnet man wie üblich die Äquivalenzklassen $\bar{g}$ paralleler Geraden als *uneigentliche Punkte* und die Menge g_u dieser Äquivalenzklassen als *uneigentliche Gerade*, so ist die ursprüngliche Inzidenzrelation demnach durch die Festlegung ergänzt, daß auf der uneigentlichen Geraden genau die uneigentlichen Punkte liegen und daß jede Gerade denjenigen uneigentlichen Punkt, dem sie als Element angehört, als Punkt enthält. Insbesondere schneiden sich daher parallele Geraden einer affinen Inzidenzebene in deren projektiver Abschließung in einem uneigentlichen Punkt.

5.2. Projektive Inzidenzebenen

Eine Interpretation der Sprache der ebenen Inzidenzgeometrie, d. h. eine Struktur $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{G}', I')$, wobei $\boldsymbol{P}'$ die Menge der „Punkte", $\boldsymbol{G}'$ die Menge der „Geraden" und $I' \subseteqq \boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{G}'$ ist, heißt eine *projektive Inzidenzebene*, wenn sie Modell des folgenden Axiomensystems ist:

P1. $\bigvee \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4;\ \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4$ in allgemeiner Lage,

P2. $\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \left(\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g})\right)$,

P3. $\bigwedge \mathrm{g} \bigvee \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3$ $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ paarweise verschieden $\wedge\ \mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_3 \in \mathrm{g})$,

P4. $\bigwedge \mathrm{g}_1\mathrm{g}_2 \left(\mathrm{g}_1 \neq \mathrm{g}_2 \rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2)\right)$,

P5. (*Projektiver Satz von* DESARGUES)
$\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3'$ $(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3$ zentralperspektiv zu $\mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3'$
$\leftrightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3$ achsenperspektiv zu $\mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3')$.

In den Formulierungen von P1 bis P5 und im folgenden benutzen wir alle Definitionen von Relationen aus Abschnitt 2.5. und 5.1. sowie (auf Grund von P2) ungeändert die Definition der Operation L. Die erste Schnittpunktoperation S_1 ist wegen P_4 in der projektiven Geometrie durch

$$\mathrm{S}_1(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) := \iota\mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_2), \text{ falls } \mathrm{g}_1 \neq \mathrm{g}_2,$$

zu definieren. Wegen P2 und P3 ist auch jede projektive Inzidenzebene zu einer Struktur der Form $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{G}', \in)$ mit $\boldsymbol{G}' \subseteqq 2^{\boldsymbol{P}'}$ isomorph.

Satz. *Die projektive Abschließung einer beliebigen affinen Inzidenzebene ist eine projektive Inzidenzebene. Ist umgekehrt* $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{G}', I')$ *eine beliebige projektive Inzidenzebene,* $g_u \in \boldsymbol{G}'$ *eine beliebige ihrer Geraden,* $\boldsymbol{P} = \{p : p \in \boldsymbol{P}' \text{ und } (p, g_u) \notin I'\}$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}' \setminus \{g_u\}$ *und* $I = I' \cap (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{G})$, *so ist* $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I)$ *eine affine Inzidenzebene. Führt man die letzte Konstruktion insbesondere an der projektiven Abschließung einer beliebigen affinen Inzidenzebene* $\mathfrak{J}$ *mit einer beliebigen (nicht notwendig der uneigentlichen) Geraden* g_u *aus, so ist die erhaltene affine Inzidenzebene isomorph zur Ausgangsebene* $\mathfrak{J}$.

Der erste Teil dieses Satzes ist fast trivial, da der Begriff der projektiven Inzidenzebene offenbar von den Eigenschaften der projektiven Abschließungen affiner Inzidenzebenen abstrahiert wurde. Der zweite Teil enthält neben der Aussage, daß man die projektiven Abschließungen ihrerseits axiomatisch charakterisieren kann, den zunächst überraschenden Sachverhalt, daß die uneigentliche Gerade und die uneigentlichen Punkte einer affinen Inzidenzebene, dieser einmal „hinzugefügt", ihre Sonderrolle verlieren, d. h. in der projektiven Abschließung durch keine aus dem Grundbegriff Inzidenz definierbare Eigenschaft mehr von den eigentlichen Punkten und Geraden zu unterscheiden sind. Erst die Aufhebung der Sonderrolle der uneigentlichen Elemente bewirkt den Übergang von affiner zu projektiver Betrachtungsweise. Andererseits bedeutet der Satz, daß die Theorie der affinen und die Theorie der projektiven Inzidenzebenen im wesentlichen die gleichen mathematischen Strukturen zum Gegenstand haben, daß projektive Geometrie nichts anderes als eine in vielen Fällen rationelle Methode des Studiums affiner Ebenen ist.

Der etwas umfangreiche Beweis des Satzes, der aber keine besonderen Schwierigkeiten enthält, sei dem Leser überlassen. Wir bemerken statt dessen, daß man auf Grund des Zusammenhanges zwischen affinen und projektiven Inzidenzebenen die kleinste projektive Inzidenzebene (Abb. 3) als projektive Abschließung der in Abb. 1 dargestellten kleinsten affinen Inzidenzebene erhält. Abb. 3 liefert die Ansatzpunkte für die meisten Beweisschritte des besprochenen Satzes.

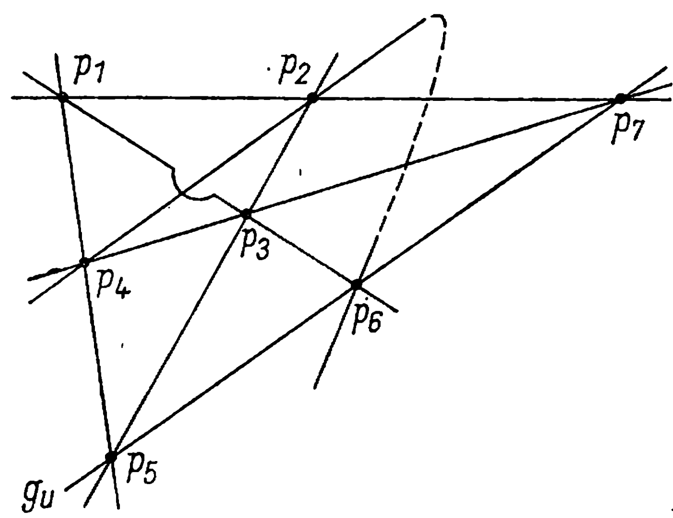


Abb. 3

Der in Abschnitt 5.1. formulierte affine Satz von Desargues liefert — als Axiom I5 genommen — sofort die Gültigkeit von P5 in der projektiven Abschließung einer affinen Inzidenzebene für die Fälle, in denen die Punkte p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3' sämtlich eigentlich sind. Die Behauptung, daß in der projektiven Abschließung P5 gilt, schließt jedoch auch diejenigen affinen Spezialfälle ein, in denen einer oder mehrere dieser Punkte uneigentlich sind (also Fälle, auf die man ohne die Betrachtung der projektiven Abschließung vermutlich niemals kommen würde). Daher geben wir dem Axiom I5 sicherheitshalber folgende Kurzfassung:

I5. *In der projektiven Abschließung gilt* P5.

Die interessante Frage, ob diese „allgemeinste Fassung des affinen Satzes von Desargues" aus gewissen ihrer Spezialfälle folgt, d. h. I5 durch eine schwächere Formulierung ersetzbar ist, können wir hier aus Platzgründen nicht verfolgen. Überhaupt legen wir hier und im folgenden keinen Wert auf möglichst schwache oder gar unabhängige Axiomensysteme, sondern vielmehr darauf, daß die Rolle der einzelnen Axiome im Gesamtaufbau möglichst deutlich wird.

Ersetzt man in einem Ausdruck H der (affinen oder projektiven) Inzidenzgeometrie alle Punktvariablen durch Geradenvariablen und umgekehrt und gleichzeitig die Inzidenz durch die inverse Relation, so erhält man den *zu* H *dualen Ausdruck* D(H).

Offenbar ist $D(D(H)) = H$. $D(H)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn H selbst abgeschlossen ist. Das Beispiel

D(I2). $g_1 \neq g_2 \rightarrow \bigvee !\, ! p(p \in g_1 \wedge p \in g_2)$ (gleich P4)

zeigt, daß die Dualisierung eines Satzes der affinen Inzidenzgeometrie im allgemeinen kein Satz der affinen Inzidenzgeometrie ist. Die Dualisierungen der Axiome P1 bis P5 folgen jedoch sämtlich aus P1 bis P5. Daraus folgt das Dualitätsprinzip der ebenen projektiven Inzidenzgeometrie:

Ist H ein Satz der projektiven Inzidenzgeometrie (d. h. folgt H aus P1 bis P5), *so ist es auch* D(H).

Man erhält nämlich einen Beweis von D(H) aus den Dualisierungen der Axiome (die ja Sätze sind), indem man in einem Beweis von H alle Zwischenschritte dualisiert.

Eine Aussage H der Inzidenzgeometrie heißt *selbstdual,* wenn D(H) und H äquivalent sind. Der erste Teil des projektiven Satzes von DESARGUES ist zum zweiten Teil (der Umkehrung) dual. Daher ist der Satz von DESARGUES in der Formulierung P5 selbstdual.

5.3. Affine Ebenen

Ist $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I)$ eine affine Inzidenzebene und bezeichnet die Aussageform (p_1, p_2, p_3) eine dreistellige $\boldsymbol{P}$-Relation $Z((p_1, p_2, p_3)$ wird gelesen: p_2 liegt zwischen p_1 und $p_3)$, so heißt $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I, Z)$ eine *affine Ebene,* wenn folgende *Anordnungsaxiome* erfüllt sind:

A1. $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow p_1, p_2, p_3$ kollinear $\wedge\ p_1, p_2, p_3$ paarweise verschieden,

A2. $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow (p_3, p_2, p_1) \wedge \neg (p_2, p_1, p_3)$,

A3. $p_1 \neq p_2 \rightarrow \bigvee p_3 (p_1, p_2, p_3)$,

A4. (Axiom von PASCH, siehe Abb. 4)

p_1, p_2, p_3 nicht kollinear $\wedge\ p_1 \notin g \wedge p_2 \notin g \wedge p_3 \notin g \wedge \bigvee p(p \in g \wedge (p_1, p, p_2))$
$\rightarrow \bigvee p'(p' \in g \wedge ((p_1, p', p_3) \vee (p_2, p', p_3)))$.

A1 bis A3 heißen die linearen Anordnungsaxiome.[1])

[1]) Zur Unabhängigkeit des Axioms von PASCH und zu dessen Rolle im Gesamtaufbau der euklidischen Geometrie vgl. folgende Arbeiten von L. W. SZCZERBA bzw. W. SZMIELEW: Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 659—666 und 751—758, desgl. **19** (1971), 213—215 und 469—474.

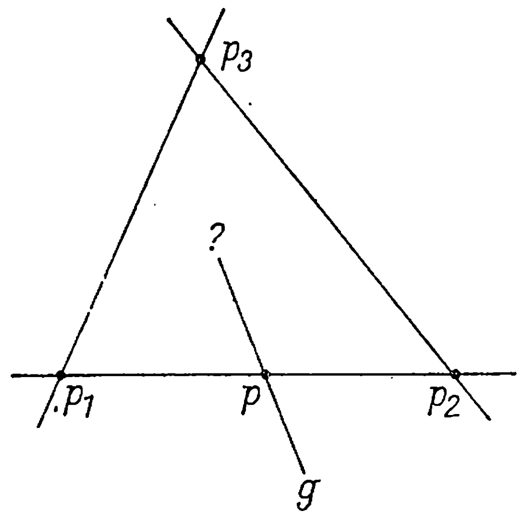


Abb. 4

Erste wichtige Folgerungen aus A1 bis A4 sind u. a.

(1) $$\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_3 \rightarrow \bigvee \mathrm{p}_2(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3);$$

(2) $$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ kollinear} \leftrightarrow \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_3 \vee \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 \\ \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \vee (\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3) \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_2).$$

((2) ermöglicht die definitorische Einführung der Grundbegriffe Gerade, Inzidenz in affinen Ebenen und die Übersetzung der Inzidenzaxiome in zusätzliche Anordnungsaxiome; vgl. Abschnitt 2.5.)

(3) $$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear} \wedge \mathrm{p}_1 \notin \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \notin \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_3 \notin \mathrm{g} \\ \wedge \bigvee \mathrm{pp}'\big(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}' \in \mathrm{g} \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2) \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}', \mathrm{p}_3)\big) \\ \rightarrow \neg \bigvee \mathrm{p}''\big(\mathrm{p}'' \in \mathrm{g} \wedge (\mathrm{p}_2, \mathrm{p}'', \mathrm{p}_3)\big).$$

((3) ist offenbar eine „Ergänzung“ zum Axiom von PASCH; vgl. Abb. 4.) In Zusammenfassung unendlich vieler Einzeldefinitionen definieren wir für $n \geqq 4$:

$$(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_n) :\leftrightarrow (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \wedge (\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{p}_{n-2}, \mathrm{p}_{n-1}, \mathrm{p}_n)$$

(gelesen: $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ liegen in der angegebenen Reihenfolge auf einer Geraden). Dann gilt für $1 \leqq i < j < k \leqq n$:

(4) $$(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n) \rightarrow (\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j, \mathrm{p}_k).$$

Für die Beweise von (1) bis (4) und eine Reihe ähnlicher Sätze verweisen wir auf [4].

Der Grundbegriff „zwischen“ ermöglicht die Definition einer Reihe grundlegender elementargeometrischer Begriffe, im wesentlichen all derer, mit denen in einer schulmäßig aufgebauten Geometrie anschaulich gearbeitet wird. Für verschiedene folgende Bedürfnisse stellen wir voran:

$$\mathrm{M} \text{ konvex} :\leftrightarrow \bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{M} \wedge \mathrm{p}_3 \in \mathrm{M} \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \rightarrow \mathrm{p}_2 \in \mathrm{M}).$$

Zwar sind beliebige Punktmengen M nicht Gegenstand unserer Betrachtungen, aber wir werden diese Definition im folgenden für alle Arten von definierbaren Punktmengen verwenden.

$$\mathrm{p}_1 \underset{g}{\sim} \mathrm{p}_2 :\leftrightarrow \mathrm{p}_1 \notin \mathrm{g} \wedge \mathrm{p}_2 \notin \mathrm{g} \wedge \neg \bigvee \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2)\big)$$

(gelesen: p_1 und p_2 liegen auf der gleichen Seite von g). Ist g eine beliebige Gerade einer affinen Ebene $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \in, \boldsymbol{Z})$, so ist $\underset{g}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{P} \setminus g$ mit genau zwei Äquivalenzklassen. Dabei folgen Reflexivität und Symmetrie unmittelbar aus der Definition, während die Transitivität dem Axiom von Pasch gleichwertig ist. (Man vergleiche die Formulierung des Parallelenaxioms als Transitivität der Relation „$\underline{\underline{\|}}$"!) Daß es wenigstens zwei nichtäquivalente Punkte gibt, folgt so: Nach I1, I2 existieren zu jeder Geraden g Punkte $p_1 \notin g$ und $p_2 \in g$ und nach A3 zu diesen Punkten ein Punkt p_3 mit (p_1, p_2, p_3). Offenbar ist dann $p_1, p_3 \notin g$ und $\neg\, p_1 \underset{g}{\sim} p_3$. Daß es nur zwei Äquivalenzklassen gibt, folgt sofort aus (3). Die beiden Äquivalenzklassen, in die eine Gerade g die Punktemenge $\boldsymbol{P}\setminus g$ einer affinen Ebene $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \in, \boldsymbol{Z})$ zerlegt, nennen wir *(offene) Halbebenen,* ihre Vereinigung mit der Geraden g *abgeschlossene Halbebenen.* Eine bestimmte der beiden Halbebenen wird durch einen Repräsentanten festgelegt. Wir definieren

$$\text{Halbebene}(\mathrm{g}, \mathrm{p}) := \{\mathrm{p}' : \mathrm{p}' \underset{g}{\sim} \mathrm{p}\}, \text{ falls } \mathrm{p} \notin \mathrm{g},$$

insbesondere

$$\text{Halbebene}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2; \mathrm{p}_3) := \text{Halbebene}\big(\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{p}_3\big),$$
$$\text{falls } \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear.}$$

Mittels „zwischen" sind auch die Begriffe *Strahl* und *Strecke* definierbar:

$$\text{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) := \{\mathrm{p} : \mathrm{p} = \mathrm{p}_1 \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2) \vee \mathrm{p} = \mathrm{p}_2 \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p})\},$$
$$\text{falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2.$$

(Im Unterschied zu den sonst analogen Halbebenen ist es bei den Strahlen (Halbgeraden) zweckmäßig, den Anfangspunkt p_1 des Strahls als Punkt des Strahls anzusehen.) Strecken werden, soweit sie nicht nur als Inbegriff ihrer Endpunkte aufzufassen sind, analog zu den verschiedenen Typen von Intervallen reeller Zahlen bezeichnet:

$$\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 := \{\mathrm{p} : \mathrm{p} = \mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p} = \mathrm{p}_2\} \; (= \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2\}),$$
$$]\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2[\; := \{\mathrm{p} : (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2)\}, \text{ falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2,$$
$$[\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2[\; := \{\mathrm{p} : \mathrm{p} = \mathrm{p}_1 \vee (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2)\}, \text{ falls } \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2,$$

usw. (In der Elementargeometrie spielt es nur selten eine Rolle, ob bzw. welche der Endpunkte einer Strecke man ihr zurechnet.)

Was die definitorische Einführung des Winkelbegriffs betrifft, so liegen die Schwierigkeiten weniger in der Präzisierung selbst als darin, daß in der anschaulichen Geometrie je nach dem gerade verfolgten Zweck verschiedene Winkelbegriffe nebeneinander benutzt werden: orientierte und nichtorientierte Winkel, Winkel als „linienhafte“ oder als „flächenhafte“ Gebilde usw.

Der *orientierte* bzw. *nichtorientierte Winkel* als „linienhaftes“ Gebilde ist ein geordnetes Paar bzw. eine Zweiermenge von Strahlen $\mathit{Strahl}\,(p_2, p_1)$, $\mathit{Strahl}(p_2, p_3)$ mit gemeinsamem Anfangspunkt p_2. Wir bezeichnen ihn mit $\overset{\curvearrowright}{\sphericalangle}\, p_1p_2p_3$ bzw. $\sphericalangle\, p_1p_2p_3$. Es ist also stets

$$\sphericalangle\, p_1p_2p_3 = \sphericalangle\, p_3p_2p_1,$$

aber

$$\overset{\curvearrowright}{\sphericalangle}\, p_1p_2p_3 = \overset{\curvearrowright}{\sphericalangle}\, p_3p_2p_1$$

nur im Fall $\mathit{Strahl}(p_2, p_1) = \mathit{Strahl}(p_2, p_3)$. Die durch einen (orientierten oder nichtorientierten) Winkel $p_1p_2p_3$ gegebene Punktmenge

$$W = \mathit{Strahl}(p_2, p_1) \cup \mathit{Strahl}(p_2, p_3)$$

einer affinen Ebene $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \in, \boldsymbol{Z})$ zerlegt in ähnlicher Weise wie eine Gerade die Punktmenge $\boldsymbol{P} \setminus W$ in zwei Klassen, die der flächenhaften Auffassung des Winkelbegriffs („Winkelräume“) entsprechen. Eine bestimmte von diesen beiden Klassen kann wieder durch einen Repräsentanten festgelegt werden (in der anschaulichen Geometrie durch Einzeichnen eines die Schenkel verbindenden Kreisbogens). Da die verschiedenen Aspekte des Winkelbegriffs im folgenden keine bedeutende Rolle spielen, gehen wir nicht weiter darauf ein.[1])

Je drei nicht kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 bestimmen ein „Dreieck“, wobei $\triangle\, p_1p_2p_3$ im allgemeinsten Sinn ein Sammelbegriff für sehr viele Begriffe ist, die man mit Hilfe dreier nicht kollinearer Punkte definieren kann. Wir geben nur beispielshalber drei konkrete Definitionen an, die die „null- bzw. ein- bzw. zweidimensionale Auffassung“ präzisieren:

$$\begin{aligned}
\triangle_0\, \mathrm{p_1p_2p_3} &:= \{\mathrm{p_1, p_2, p_3}\}, \text{ falls } \mathrm{p_1, p_2, p_3} \text{ nicht kollinear,}\\
\triangle_1\, \mathrm{p_1p_2p_3} &:= [\mathrm{p_1, p_2}[\cup[\mathrm{p_2, p_3}[\cup]\mathrm{p_3, p_1}[, \text{ falls } \mathrm{p_1, p_2, p_3} \text{ nicht kollinear,}\\
\triangle_2\, \mathrm{p_1p_2p_3} &:= \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p_1, p_2; p_3}) \cap \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p_2, p_3; p_1})\\
&\qquad \cap \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p_3, p_1; p_2}), \text{ falls } \mathrm{p_1, p_2, p_3} \text{ nicht kollinear.}
\end{aligned}$$

Ein *affines Koordinatensystem* (kurz AKS) ist ein Tripel (p_0, p_1, p_2) nicht kollinearer Punkte. Der Punkt p_0 heißt der *Ursprung*, p_1 der *erste Einheitspunkt*, p_2 der *zweite Einheitspunkt* des AKS (p_0, p_1, p_2). Ist A ein beliebiges AKS einer affinen Inzidenz-

---

[1]) Siehe hierzu etwa B. Klotzek, Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

ebene, so sei für beliebige Punkte p

$$(5)\qquad \begin{aligned} k_1(A, p) &:= S_1\bigl(P(p, L(p_0, p_2)), L(p_0, p_1)\bigr), \\ k_2(A, p) &:= S_1\bigl(P(p, L(p_0, p_1)), L(p_0, p_2)\bigr) \text{ (Abb. 5)} \end{aligned}$$

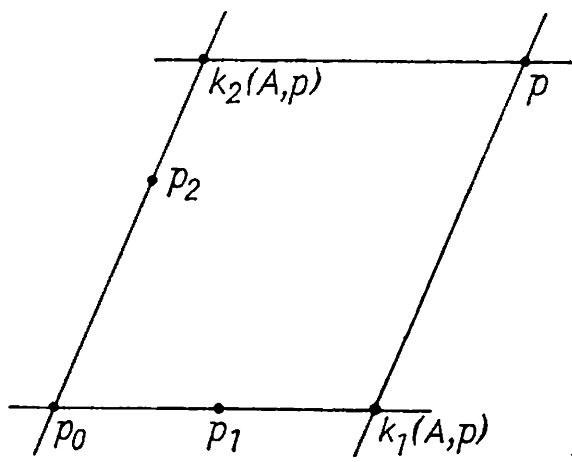


Abb. 5

I1 sichert die Existenz eines AKS in jeder affinen Inzidenzebene, I_4 hat zur Folge, daß die durch

$$k(A, p) := \bigl(k_1(A, p), k_2(A, p)\bigr)$$

definierte Abbildung nach Wahl von A eine eineindeutige Abbildung der gesamten Ebene auf die Menge $L(p_0, p_1) \times L(p_0, p_2)$ von Punktepaaren ist. Um aus dieser Abbildung ein Koordinatensystem üblicher Auffassung, d. h. eine eineindeutige Abbildung der betreffenden Ebene auf eine Menge von Zahlenpaaren (im Extremfall auf $\boldsymbol{R}^2$) zu gewinnen, hat man ersichtlich nur die Punkte einer beliebigen Geraden g einer affinen Ebene, auf der zwei Punkte vorgegeben sind, durch Einführung einer Totalordnung und zweier binärer Operationen zu einem archimedisch geordneten Körper zu machen. Nach Abschnitt 4.1. ist dieser dann einem Unterkörper von $\boldsymbol{R}$ isomorph, und die Verkettung eines solchen Isomorphismus f mit den Abbildungen k_1, k_2 liefert die Koordinaten von p bezüglich A:

$$(6)\qquad K(A, p) := \bigl(f(k_1(A, p)), f(k_2(A, p))\bigr).$$

Die interessante Frage, wie weit dieses Programm ohne Benutzung des Grundbegriffs „zwischen", d. h. schon in affinen Inzidenzebenen durchführbar ist, können wir hier nicht verfolgen. Bekannt ist, wie man im Rahmen der Kongruenzgeometrie die eineindeutige Zuordnung zwischen Punkten einer Geraden und reellen Zahlen bezüglich einer gewählten Einheitsstrecke herstellt. Weniger bekannt ist jedoch, daß die gesamte Theorie der Längenmessung, soweit sie nur Strecken einer festen Geraden betrifft, schon in der affinen Geometrie aufgebaut werden kann.

Ein Tripel (g, p_0, p_1) mit $p_0, p_1 \in g$ und $p_0 \neq p_1$ nennen wir im folgenden eine *Achse* mit dem *Nullpunkt* p_0 und dem *Einspunkt* p_1. Es sei (g, p_0, p_1) eine Achse. Für $p_2, p_3 \in g$ definieren wir, zunächst unter Benutzung eines wegen I1 existierenden Hilfspunktes

$p \notin g$, eine Addition durch zweimalige Parallelverschiebung der gerichteten Strecke p_0p_3 (Abb. 6):

$$p_2 +_{(p)} p_3 := S_1\big(g, P\big(S_1\big(P(p, g), P(p_3, L(p_0, p))\big), L(p_2, p)\big)\big).$$

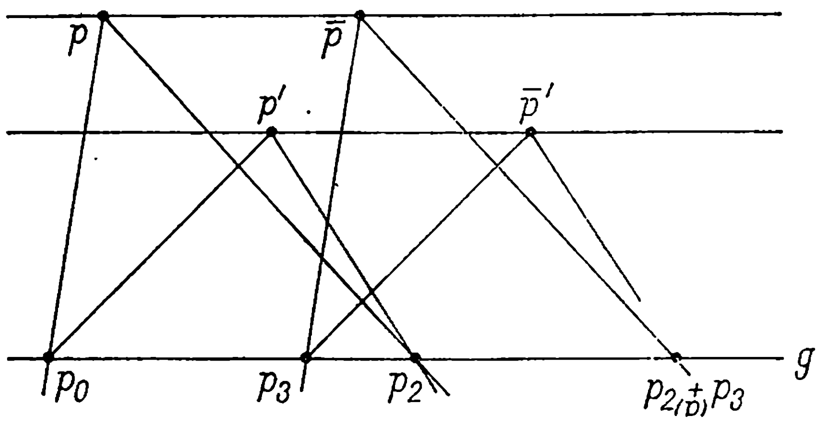


Abb. 6

Es ist nun zu zeigen, daß die so definierte Operation von der speziellen Wahl des Hilfspunktes p unabhängig ist, d. h.

$$p_2 +_{(p)} p_3 = p_2 +_{(p')} p_3 \text{ für alle } p_2, p_3 \in g \text{ und } p, p' \notin g.$$

Beim Beweis beziehen wir uns auf die Bezeichnungen der Abb. 6. Die Punktepaare (p_0, p_3), $(p_2, p_2 +_{(p)} p_3)$, $(p_2, p_2 +_{(p')} p_3)$, $(p, \bar{p})$ und $(p', \bar{p}')$ haben alle ein gemeinsames uneigentliches Perspektivitätszentrum. Da bei den Dreieckspaaren $(p_0p_2p', p_3p_2 +_{(p')} p_3\bar{p}')$ und $(p_0p_2p, p_3p_2 +_{(p)} p_3\bar{p})$ jeweils zwei zugeordnete Dreiecksseiten nach Konstruktion parallel sind, sind es nach dem Satz von Desargues (Fall b,γ) auch die dritten Seiten. Der gleiche Schluß, auf $(p_2pp', p_2 +_{(p)} p_3\bar{p}\bar{p}')$ angewandt, ergibt, daß $L(p_2p')$ sowohl zu $L(p_2 +_{(p)} p_3, \bar{p}')$ als auch zu $L(p_2 +_{(p')} p_3, \bar{p}')$ parallel ist, folglich wegen der Eindeutigkeit der Parallelen durch $\bar{p}'$ und ihres Schnittpunktes mit g: $p_2 +_{(p)} p_3 = p_2 +_{(p')} p_3$.

Damit ist die Definition

(7) $\quad p_2 + p_3 := p_2 +_{(p)} p_3 \quad$ (für $p_2, p_3 \in g$ und $p \notin g$ beliebig)

gerechtfertigt. Wir merken an, daß der Einspunkt p_1 der betrachteten Achse hierfür nicht benötigt wurde.

Analog definieren wir nun, wiederum zunächst unter Benutzung eines Hilfspunktes $p \notin g$ das Produkt zweier Punkte $p_2, p_3 \in g$ (Abb. 7),

$$p_2 \cdot_{(p)} p_3 := S_1\big(g, P\big(S_1\big(L(p_0, p), P(p_3, L(p_1, p))\big), L(p_2, p)\big)\big).$$

Die Intention dabei ist, daß nach dem Strahlensatz

$$\overline{p_0p_1} : \overline{p_0p_3} = \overline{p_0p} : \overline{p_0\bar{p}} = \overline{p_0p_2} : \overline{p_0p_4},$$

also

$$\overline{p_0p_4} = \overline{p_0p_2} \cdot \overline{p_0p_3}$$

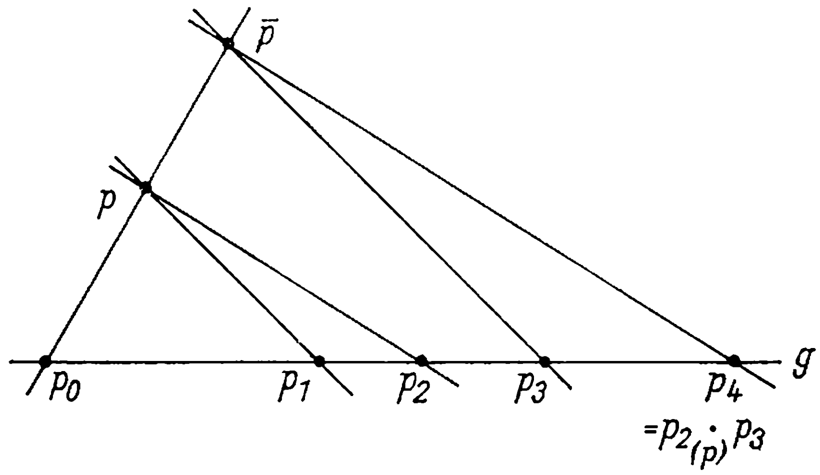


Abb. 7

ist, wenn man die Länge $\overline{p_0 p_1}$ der Einheitsstrecke gleich 1 setzt. Bei Anerkennung des Strahlensatzes als Beweismittel würde sich aus dieser Idee sofort die Unabhängigkeit des definierten Produktes vom Hilfspunkt p ergeben. In der affinen Geometrie muß diese Unabhängigkeit jedoch durch ähnliche Schlüsse wie im Fall der Addition unter wesentlicher Benutzung des Satzes von DESARGUES gezeigt werden. Dieser Beweis, der dem Leser überlassen sei, rechtfertigt die Definition

(8) $\quad p_2 \cdot p_3 := p_2 \cdot_{(p)} p_3 \quad$ (für $p_2, p_3 \in g$ und $p \notin g$ beliebig).

Schließlich definieren wir eine Ordnungsrelation für die Punkte von g durch

(9)
$$p_2 < p_3 :\leftrightarrow p_2 \neq p_3 \wedge \big(\mathit{Strahl}(p_2, p_3) \subseteqq \mathit{Strahl}(p_0, p_1) \vee \mathit{Strahl}(p_0, p_1) \subseteqq \mathit{Strahl}(p_2, p_3)\big).$$

Aus den Axiomen I1 bis I5, A1 bis A4 folgt nunmehr, daß die Struktur $(g, +, \cdot, <)$ ein *geordneter Schiefkörper* ist, d. h. alle Axiome eines geordneten Körpers mit Ausnahme des Kommutativgesetzes der Multiplikation erfüllt [10]. Ferner kann man zeigen, daß je zwei zu verschiedenen Achsen einer affinen Ebene gehörige Strukturen isomorph sind. Diesen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Schiefkörper werden wir im folgenden als den *Koordinatenkörper* der betreffenden affinen Ebene bezeichnen.

Es sei umgekehrt $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger geordneter Schiefkörper. Eine Teilmenge g von $\boldsymbol{K}^2$ heißt eine Gerade, wenn es Elemente $a, b, c \in \boldsymbol{K}$ mit $a^2 + b^2 > 0$ gibt, so daß $(x, y) \in g$ genau dann, wenn $ax + by + c = 0$. (Gleichungen der Form $xa + yb + c = 0$ beschreiben im Fall eines echten Schiefkörpers keine Geraden!) Ferner definieren wir in $\boldsymbol{K}^2$ eine Zwischenrelation Z durch $\big((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)\big) \in Z$ genau dann, wenn es ein $t \in K$ mit $0 < t < 1$ und $y_i = x_i + t(z_i - x_i)$ $(i = 1, 2)$ gibt.

Bezeichnet $\boldsymbol{G}$ die Menge der oben definierten Geraden in $\boldsymbol{K}^2$, so ist $(\boldsymbol{K}^2, \boldsymbol{G}, \in, \boldsymbol{Z})$ eine affine Ebene mit dem Koordinatenkörper $\boldsymbol{K}$, und jede affine Ebene mit dem Koordinatenkörper $\boldsymbol{K}$ ist zu dieser speziellen isomorph.

Eine affine Ebene heißt *archimedisch*, wenn ihr Koordinatenkörper archimedisch ist. Die Möglichkeit, diese Eigenschaft als ein Axiom A5 der affinen Geometrie zu formulieren, ergibt sich daraus, daß wir die Grundbegriffe $+, \cdot, <$ der Theorie der geordneten Körper in der affinen Geometrie definieren konnten, folglich jede Aussage der Theorie der geordneten Körper als eine in einer definitorischen Erweiterung der affinen Geometrie formulierte Aussage ansehen und grundsätzlich in die Grundbegriffe „zwischen" und „Inzidenz" zurückübersetzen können. Da dies jedoch recht kompliziert ist, wollen wir hier auf eine explizite Formulierung des Axioms A5 verzichten. *Der Koordinatenkörper einer archimedischen Ebene ist ein Körper* (vgl. Abschnitt 4.1). Will man das Kommutativgesetz der Multiplikation unabhängig vom archimedischen Axiom fordern, so hat man das Axiom I5 durch ein stärkeres Inzidenzaxiom I5′ (Satz von Pappos-Pascal) zu ersetzen [10]. Dies führen wir nicht aus, da es im folgenden nicht benötigt wird.

Unter allen archimedischen Ebenen ist die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Ebene $(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{G}, \in, Z)$ durch ihre Maximalität ausgezeichnet. Wenn wir im folgenden von *der* affinen Ebene sprechen, so meinen wir stets die affine Ebene mit dem Koordinatenkörper $\boldsymbol{R}$. Genau wie die Forderung, daß der Koordinatenkörper archimedisch ist, kann auch die Forderung, daß der Koordinatenkörper einer affinen Ebene stetig (d. h. dem Körper der reellen Zahlen isomorph) ist, grundsätzlich als ein Axiom A6 der affinen Geometrie formuliert werden, indem man eine beliebige algebraische Formulierung des Stetigkeitsaxioms als Ausdruck einer definitorischen Erweiterung der Sprache der affinen Geometrie auffaßt bzw. mittels der Definitionen von $+, \cdot, <$ in eine rein geometrische Aussage zurückübersetzt. Während die affine Geometrie, aufgefaßt als Menge der Folgerungen aus I1 bis I5, A1 bis A4 eine elementare Theorie ist, erfordern A5 und A6 zur korrekten Formalisierung eine nichtelementare Spracherweiterung. (Für A5 wird dies ausführlich in Abschnitt 8.4 behandelt werden.) Ist A5 noch Präzisierung naiver geometrischer Vorstellungen bzw. Erfahrungen, so kann man dies von A6, welches die Kategorizität erzwingt, kaum behaupten.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir den gewonnenen Überblick über die Struktur der affinen Ebenen dazu benutzen, die Nichtdefinierbarkeit der Zwischenrelation durch die Inzidenz zu beweisen. Dazu betrachten wir die archimedische Ebene $\boldsymbol{K}^2$, wobei $\boldsymbol{K}$ der Körper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ ist. Für $a, b \in \boldsymbol{Q}$ sei $f(a + b \cdot \sqrt{2}) := a - b \cdot \sqrt{2}$. Wie man leicht bestätigt, ist f ein Isomorphismus (bezüglich $+$ und $\cdot$) von $\boldsymbol{K}$ auf sich. Folglich ist die durch $F(x, y) := (f(x), f(y))$ definierte Abbildung F eine eineindeutige Abbildung der Ebene $\boldsymbol{K}^2$ auf sich. Da f Isomorphismus ist, gilt für $a, b, c, x, y \in \boldsymbol{K}$:

$$ax + by = c \textit{ genau dann, wenn } f(a)f(x) + f(b)f(y) = f(c),$$

d. h., die durch die Gleichung $ax + by = c$ gegebene Gerade g von $\boldsymbol{K}^2$ wird durch die Abbildung F in die durch die Gleichung $f(a)\,x + f(b)\,y = f(c)$ gegebene Gerade $F(g)$ übergeführt, und es ist $p \in g$ genau dann, wenn $F(p) \in F(g)$. Wäre nun „zwischen" durch Inzidenz definierbar, so müßte nach Kapitel 3. für beliebige Punkte p_1, p_2, $p_3 \in \boldsymbol{K}^2$ gelten:

$$(p_1, p_2, p_3) \in Z \textit{ genau dann, wenn } (F(p_1), F(p_2), F(p_3)).$$

Es ist aber u. a.

$$\big((1,0), (\sqrt{2},0), (2,0)\big) \in Z;$$

$$\big(F(1,0), F(\sqrt{2},0), F(2,0)\big) = \big((1,0), (-\sqrt{2},0), (2,0)\big) \notin Z.$$

5.4. Affine Abbildungen

Es sei $\mathfrak{A} = (\boldsymbol{P}, G, \in, Z)$ eine affine Ebene. Eine eineindeutige Abbildung φ von $\boldsymbol{P}$ auf sich heißt *affin*, wenn φ die Zwischenrelation Z der Ebene $\mathfrak{A}$ invariant läßt, d. h., wenn für $p_1, p_2, p_3 \in \boldsymbol{P}$ genau dann $(p_1, p_2, p_3) \in Z$ gilt, wenn $\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3)\big) \in Z$ erfüllt ist. Es sei $A_{\mathfrak{A}}$ die Menge der affinen Abbildungen der Ebene $\mathfrak{A}$. Nach den allgemeinen Untersuchungen in Kapitel 3 ist $A_{\mathfrak{A}}$ bezüglich Verkettung der Abbildungen eine Gruppe, die wir ebenfalls mit $A_{\mathfrak{A}}$ bezeichnen (da andere Verknüpfungen in der Menge $A_{\mathfrak{A}}$ nicht betrachtet werden). Für den Nachweis, daß eine Abbildung φ der Menge $\boldsymbol{P}$ in sich affin ist, genügt es nach Kapitel 3 zu zeigen, daß aus $(p_1, p_2, p_3) \in Z$ stets $\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3)\big) \in Z$ folgt. Alle durch „zwischen" definierbaren Relationen und sonstigen mathematischen Objekte einer affinen Ebene bleiben bei affinen Abbildungen invariant. Eine affine Abbildung φ führt daher u. a. kollineare Punkte in kollineare Punkte über, Geraden in Geraden, die Strecke mit den Endpunkten p_1, p_2 in die Strecke mit den Endpunkten $\varphi(p_1), \varphi(p_2)$, $Strahl(p_1, p_2)$ in $Strahl\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2)\big)$, $Halbebene(p_1, p_2; p_3)$ in $Halbebene\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2); \varphi(p_3)\big)$, das Dreieck mit den Ecken p_1, p_2, p_3 in das Dreieck mit den Ecken $\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3)$ usw. Da allgemein eine eineindeutige Abbildung einer Menge M auf sich Vereinigung, Durchschnitt bzw. Differenz von Teilmengen von M auf die Vereinigung bzw. den Durchschnitt bzw. die Differenz der Bildmengen abbildet, führt eine affine Abbildung parallele (disjunkte) Geraden in parallele Geraden über und Geraden, die sich in einem Punkt p schneiden, in Geraden, die sich im Punkt $\varphi(p)$ schneiden.

Eine affine Abbildung φ führt ein AKS $A = (p_0, p_1, p_2)$ in ein AKS $\varphi(A) = \big(\varphi(p_0), \varphi(p_1), \varphi(p_2)\big) = (p_0', p_1', p_2')$ über, und für jeden Punkt p der betrachteten affinen Ebene ist

$$k_i\big(\varphi(A), \varphi(p)\big) = \varphi\big(k_i(A, p)\big) \quad (i = 1, 2).$$

Da ferner wegen der affinen Definierbarkeit der Struktur des Koordinatenkörpers einer affinen Ebene die Einschränkung einer affinen Abbildung auf eine Achse (g, p_0, p_1) ein Isomorphismus auf die Bildachse $\big(\varphi(g), \varphi(p_0), \varphi(p_1)\big)$ bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung ist, ergibt sich schließlich für jeden Punkt p

$$(1) \qquad K\big(\varphi(A), \varphi(p)\big) = K(A, p)$$

(vgl. Abschnitt 5.3, (6)), d. h., bei einer affinen Abbildung sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes bezüglich eines beliebigen affinen Koordinatensystems gleich den Koordinaten des Bildpunktes bezüglich des Bildkoordinatensystems (Abb. 8). Damit ist eine affine Abbildung durch Vorgabe dreier nicht kollinearer

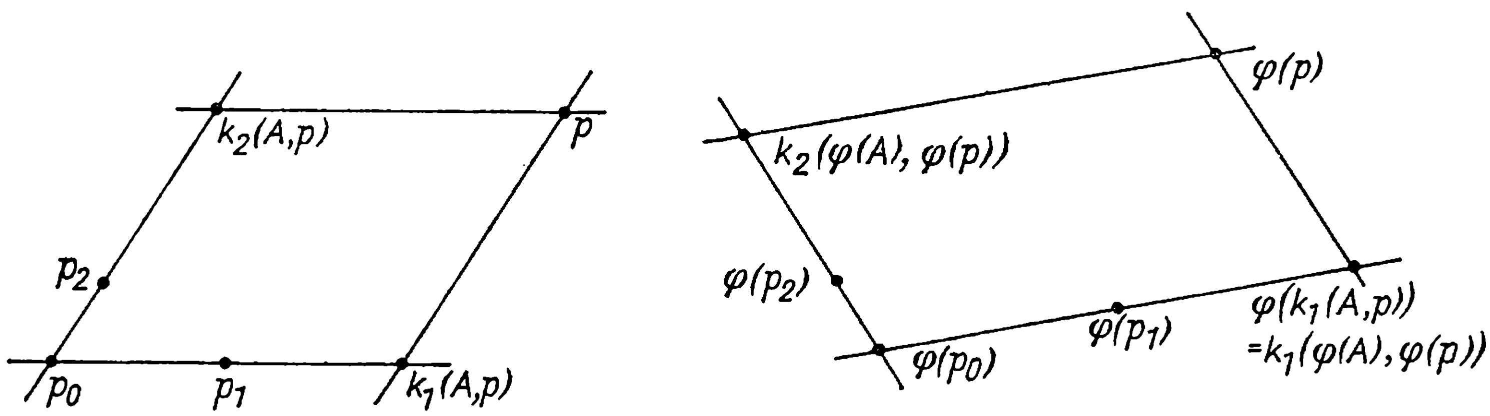


Abb. 8

Punkte und dreier nicht kollinearer Bildpunkte eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man zeigen, daß die mittels (1) auf die gesamte Ebene fortgesetzte Abbildung dreier nicht kollinearer Punkte auf drei nicht kollineare Bildpunkte stets affin ist, d. h., es gilt der

Hauptsatz über affine Abbildungen. *Sind p_0, p_1, p_2 und p_0', p_1', p_2' jeweils drei nicht kollineare Punkte einer affinen Ebene, so existiert genau eine affine Abbildung φ mit $\varphi(p_i) = p_i'$ für $i = 0, 1, 2$.*

Aus diesem Satz ergibt sich unter Bezugnahme auf den Invariantensatz (vgl. Kap. 3) eine Reihe von Resultaten über die Nichtdefinierbarkeit geometrischer Begriffe in der affinen Geometrie:

Satz 1. *Durch „zwischen“ ist keine dreistellige Punktrelation definierbar, die (in wenigstens einer affinen Ebene) auf wenigstens ein Tripel nicht kollinearer Punkte zutrifft und auf ein anderes solches Tripel nicht zutrifft.*

Beweis. Wir nehmen an, in einer affinen Ebene sei R eine dreistellige durch „zwischen“ definierbare Punktrelation, und es seien $(p_1, p_2, p_3) \in R$, $(p_1', p_2', p_3') \notin R$, p_1, p_2, p_3 nicht kollinear, p_1', p_2', p_3' nicht kollinear. Nach dem Hauptsatz existiert eine affine Abbildung φ mit $\varphi(p_i) = p_i'$ für $i = 1, 2, 3$. Da R nach Voraussetzung durch die Relation „zwischen“ definierbar ist, ist nach Kapitel 3 wegen $(p_1, p_2, p_3) \in Z$ auch $(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3)) \in Z$ im Widerspruch zu $(p_1', p_2', p_3') \notin Z$.

Folgerung. *Die Kongruenzrelation ist nicht durch die Zwischenrelation definierbar.*

Wäre Kongruenz in der affinen Geometrie definierbar, so wäre auch die hieraus durch Variablengleichsetzung entstehende dreistellige Punktrelation „$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cong \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$“ definierbar. Diese erfüllt aber die Voraussetzungen von Satz 1.

Satz 2. *Durch „zwischen" ist keine zweistellige Punktrelation definierbar, die auf wenigstens ein Paar verschiedener Punkte zutrifft und auf wenigstens ein Paar verschiedener Punkte nicht zutrifft.*

Beweis. Es seien p_1, p_2, p_1', p_2' Punkte einer affinen Ebene mit $p_1 \neq p_2, p_1' \neq p_2'$, $(p_1, p_2) \in R$, $(p_1', p_2') \notin R$. Nach Axiom I1 gibt es hierzu Punkte p_3, p_3', so daß p_1, p_2, p_3 nicht kollinear und p_1', p_2', p_3' nicht kollinear sind. Ist φ eine affine Abbildung mit $\varphi(p_i) = p_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, so folgt analog zum Beweis von Satz 1 aus der Definierbarkeit von R und $(p_1, p_2) \in R$, daß auch $(p_1', p_2') \in R$ sein muß im Widerspruch zur Voraussetzung.

Analog zu den Sätzen 1 und 2 beweist man leicht:

Satz 3. *Durch „zwischen" ist*

a) *keine von den beiden trivialen ($\emptyset$ und $\boldsymbol{P}$) verschiedene einstellige Punktrelation definierbar,*

b) *keine von den beiden trivialen ($\emptyset$ und $\boldsymbol{G}$) verschiedene einstellige Geradenrelation definierbar,*

c) *keine von $\parallel$ und $=$ und deren Booleschen Verknüpfungen verschiedene zweistellige Geradenrelation definierbar,*

d) *keine dreistellige Geradenrelation definierbar, die (in wenigstens einer affinen Ebene) auf ein Tripel einander paarweise schneidender Geraden zutrifft und auf ein anderes solches Geradentripel nicht zutrifft,*

e) *keine von Inzidenz und Nichtinzidenz ($\in$ und $\notin$) verschiedene zweistellige Punkt-Geraden-Relation definierbar.*

Eine eineindeutige Abbildung φ der Menge $\boldsymbol{P}$ der Punkte einer affinen Ebene auf sich heißt eine *Translation*, wenn für je zwei Punkte p_1, p_2 und die zugehörigen Bildpunkte $\varphi(p_1), \varphi(p_2)$ Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 existieren (die, abgesehen von gewissen Ausartungsfällen, sogar eindeutig bestimmt sind), so daß $g_1 \parallel g_2$ und $g_3 \parallel g_4$ und $p_1, p_2 \in g_1$ und $\varphi(p_1), \varphi(p_2) \in g_2$ und $p_1, \varphi(p_1) \in g_3$ und $p_2, \varphi(p_2) \in g_4$ (siehe Abb. 9, S. 92). Mit $T_{\mathfrak{A}}$ bezeichnen wir die Menge der Translationen der affinen Ebene $\mathfrak{A}$. Aus der Definition der Translationen folgt unmittelbar:

(2) *Die identische Abbildung $\iota_{\boldsymbol{P}}$ der Ebene auf sich gehört zu $T_{\mathfrak{A}}$.*

(3) *Sind $p_1, p_2, \varphi(p_1)$ nicht kollinear, so sind die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 eindeutig bestimmt und paarweise verschieden, und $\varphi(p_2)$ ist eindeutig als Schnittpunkt von g_2 und g_4 bestimmt.*

Gibt es also überhaupt einen Punkt p_1 mit $\varphi(p_1) \neq p_1$, so kann man unter Einschaltung eines Hilfspunktes $p_2 \notin L(p_1, \varphi(p_1))$ auch für alle $p_3 \in L(p_1, \varphi(p_1))$ die Lage des Bildpunktes $\varphi(p_3)$ auf Grund der Definition der Translationen eindeutig ermitteln (Abb. 9). Insbesondere ist für eine von $\iota_{\boldsymbol{P}}$ verschiedene Translation φ für alle Punkte p der betrachteten Ebene $\varphi(p) \neq p$.

Unter wesentlicher Benutzung des Satzes von DESARGUES (Fall b, γ) ergibt sich, daß die aus vorgegebenen Punkten p_1, $\varphi(p_1)$ durch Konstruktion des entsprechenden Parallelogramms auf die ganze Ebene fortgesetzte Abbildung φ immer eine Translation ist, d. h. (in Analogie zum Hauptsatz über affine Abbildungen):

(4) *Zu je zwei Punkten p_1, p_2 gibt es genau eine Translation φ mit $\varphi(p_1) = p_2$.*

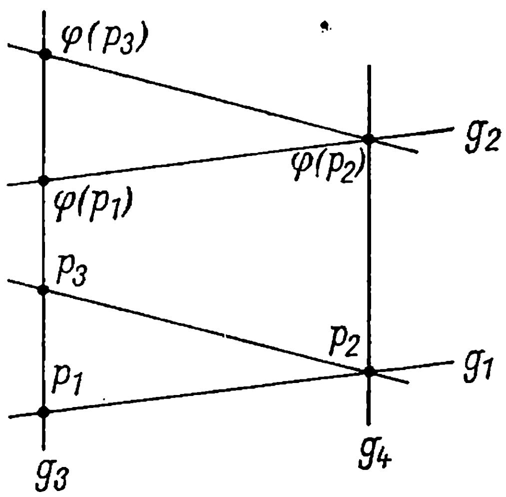


Abb. 9

Diese Translation bezeichnen wir mit $\overrightarrow{p_1p_2}$. Während aus der Definition der Translationen unmittelbar folgt, daß die inverse Abbildung einer Translation ebenfalls eine Translation ist, benötigt man für den Beweis, daß die Hintereinanderausführung zweier Translationen eine Translation ist, wieder wesentlich den Satz von DESARGUES (Fall b, γ). Statt $\overrightarrow{p_4p_3} \circ \overrightarrow{p_1p_2}$ schreiben wir $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_4p_3}$. Es ist dann offenbar

$$\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_1p_3}.$$

Der Vergleich der so eingeführten „Vektoraddition“ mit der Definition der Addition für Punkte einer Achse (g, p_0, p_1) ergibt, daß für beliebige Punkte $p_2, p_3, p_4 \in g$ genau dann $p_2 + p_3 = p_4$, wenn

$$\overrightarrow{p_0p_2} + \overrightarrow{p_0p_3} = \overrightarrow{p_0p_4}.$$

Da die Hintereinanderausführung von Translationen offenbar kommutativ ist, ist demnach $T_{\mathfrak{A}}$ eine kommutative Gruppe. Um zur bekannten Vektorraumstruktur zu kommen, definieren wir für Translationen φ und Elemente λ des Koordinatenkörpers $\boldsymbol{K}$ der betrachteten Ebene eine Skalarmultiplikation:

$\lambda\overrightarrow{pp'}$ sei (falls $p \neq p'$) die Translation $\overrightarrow{pp''}$, die p in denjenigen Punkt p'' überführt, der auf der Achse $\big(L(p, p'), p, p'\big)$ die Maßzahl λ hat. Für $p = p'$ sei $\lambda\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{pp'}$ (die identische Translation bzw. der „Nullvektor“).

Man kann nun zeigen, daß $T_{\mathfrak{A}}$ bezüglich der oben betrachteten Addition und der Skalarmultiplikation ein zweidimensionaler Vektorraum über dem Koordinatenkörper $\boldsymbol{K}$ ist, d. h. daß außer den bereits genannten Eigenschaften der Addition für beliebige $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in T_{\mathfrak{A}}$ gilt:

$$\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\mathfrak{a},$$

$$(\lambda + \mu)\,\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a},$$

$$\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b},$$

$$1\mathfrak{a} = \mathfrak{a},$$

und es gibt Translationen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in T_{\mathfrak{A}}$, so daß jedes Element $\mathfrak{x}$ von $T_{\mathfrak{A}}$ in der Form $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{e}_1 + \mu\mathfrak{e}_2$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ darstellbar ist.

(5) *Translationen sind affine Abbildungen, d.h., $T_{\mathfrak{A}}$ ist eine Untergruppe von $A_{\mathfrak{A}}$.*

Zu zeigen ist, daß aus $(p_1, p_2, p_3) \in Z$ stets $\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3)\big) \in Z$ für beliebige Translationen φ folgt. Indem wir φ andernfalls als Hintereinanderausführung zweier nicht zu $L(p_1, p_2)$ paralleler Translationen darstellen, können wir uns beim Beweis auf den Fall beschränken, daß $p_1, p_2, \varphi(p_1)$ nicht kollinear sind. Mit den Bezeichnungen von Abb. 10: Anwendung des Axioms A4 auf das Dreieck $p_1p_3\varphi(p_3)$ und g_2 liefert, da $g_2 \parallel g_3$, einen Punkt $p_2' \in g_2$ mit $\big(p_1, p_2', \varphi(p_3)\big)$. Da g_2 auch zu g_1 parallel ist, ergibt der gleiche Schluß, auf das Dreieck $p_1\varphi(p_3)\,\varphi(p_1)$ und g_2 angewandt, die Existenz eines Punktes $p_2'' \in g_2$ mit $\big(\varphi(p_1), p_2'', \varphi(p_3)\big)$, und es muß $p_2'' = \varphi(p_2)$ sein.

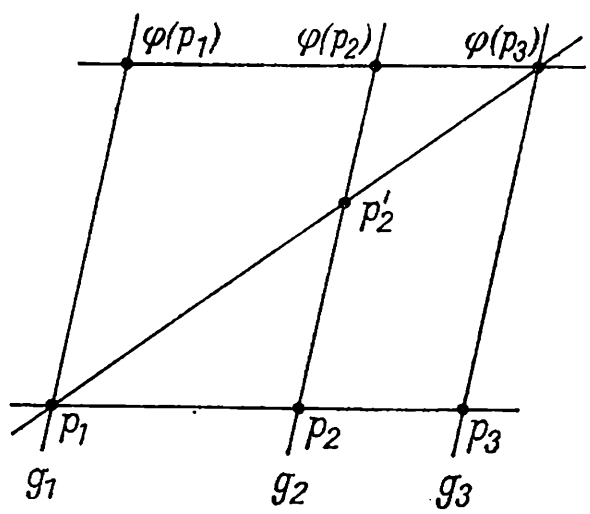


Abb. 10

Als methodische Vorbereitung der Bewegungsgeometrie definieren wir eine vierstellige Punktrelation „Translationskongruenz“ ($\underset{t}{\cong}$):

$$\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 :\leftrightarrow \bigvee \varphi(\varphi \in T \wedge \varphi(\mathrm{p}_1) = \mathrm{p}_3 \wedge \varphi(\mathrm{p}_2) = \mathrm{p}_4).$$

Es gilt:

Tr1. a) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$ (wegen $\iota \in T$),

b) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \wedge \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6 \rightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6$
(da mit φ, ψ auch $\varphi \circ \psi \in T$),

c) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \rightarrow \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \underset{t}{\cong} \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$ (da mit φ auch $\varphi^{-1} \in T$);

Tr2. $p_1p_2 \underset{t}{\cong} p_3p_3 \to p_1 = p_2$.

(wegen Eineindeutigkeit der Translationen);

Tr3. $\bigwedge p_1p_2p_3 \bigvee!! p_4 p_1p_2 \underset{t}{\cong} p_3p_4$

(jede Strecke kann auf genau eine Weise an einen gegebenen Punkt „angetragen" werden).

Tr4. $(p_1, p_2, p_3) \wedge (p_1', p_2', p_3') \wedge p_1p_2 \underset{t}{\cong} p_1'p_2' \wedge p_2p_3 \underset{t}{\cong} p_2'p_3' \to p_1p_3 \underset{t}{\cong} p_1'p_3'$

(folgt wesentlich aus (5) und Tr3).

Tr1 bedeutet: $\underset{t}{\cong}$ ist eine Äquivalenzrelation im Bereich der Punktepaare. Es sei $\overline{p_1p_2}$ die Äquivalenzklasse, in der p_1p_2 liegt. Dann ist $\{\overline{p_1p_2}: p_1, p_2 \in \boldsymbol{P}\}$ der Bereich der abstrakten Streckenlängen der betrachteten Ebene. Bei festgehaltener Einheitsstrecke p_0p_1 hat jede zu p_0p_1 parallele Strecke genau einen Repräsentanten der Form p_0p mit $p \in L(p_0, p_1)$. Daher können die Operationen $+, \cdot$ und die Ordnung $<$ von den Punkten der Achse $\big(L(p_0, p_1), p_0, p_1\big)$ auf alle dazu parallelen Strecken bzw. deren Längen übertragen werden. Der wesentliche Unterschied gegenüber den sonst weitgehend analogen Betrachtungen in der euklidischen Geometrie liegt darin, daß nichtparallele Strecken nicht zueinander in Beziehung gebracht werden, insbesondere ihre Längen „unvergleichbar" sind.

5.5. Projektive Ebenen, projektive Koordinaten und projektive Abbildungen

Die axiomatische Behandlung der projektiven Abschließung affiner Ebenen erfordert es, in projektiven Ebenen neben der bereits in Abschnitt 5.2 betrachteten Inzidenz einen weiteren Grundbegriff zu betrachten, mittels dessen bei Herausnahme einer uneigentlichen Geraden in der affinen Restebene die Zwischenbeziehung definiert werden kann. Wir gehen von der anschaulichen Vorstellung aus, daß eine affine Gerade durch Hinzufügung ihres uneigentlichen Punktes p_u die Ordnungseigenschaften einer einfach geschlossenen Kurve erhält (Abb. 11). Auf einer solchen liegt aber von drei verschiedenen Punkten jeder zwischen den beiden anderen. Dagegen ist es eine echte Aussage über vier Punkte einer geschlossenen Kurve, ob das Paar p_1, p_3 das Paar p_2, p_4 „trennt" (Abb. 12a) oder nicht trennt (Abb. 12b). Wir erweitern daher die Sprache der projektiven Geometrie durch prädikative Ausdrücke der Form $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ (gelesen: p_1, p_2 trennt p_3, p_4) zur Bezeichnung einer vierstelligen Punktrelation T und nennen eine Interpretation $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{T})$ der so erweiterten Sprache eine *projektive Ebene*, wenn $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I})$ eine projektive Inzidenzebene ist und zusätzlich folgende Trennungsaxiome erfüllt sind:

T1. $\bigwedge p_1p_2p_3p_4\big((p_1, p_2; p_3, p_4) \to p_1, p_2, p_3, p_4$ kollinear $\wedge\ p_1, p_2, p_3, p_4$ paarweise verschieden$\big)$.

T2. $\bigwedge p_1p_2p_3p_4(p_1, p_2, p_3, p_4$ kollinear
$\wedge\, p_1, p_2, p_3, p_4$ paarweise verschieden
$\rightarrow (p_1, p_2; p_3, p_4) \vee (p_1, p_3; p_2, p_4) \vee (p_1, p_4; p_2, p_3))$.

T3. $\bigwedge p_1p_2p_3p_4((p_1, p_2; p_3, p_4)$
$\rightarrow (p_2, p_1; p_3, p_4) \wedge (p_3, p_4; p_1, p_2) \wedge \neg (p_1, p_3; p_2, p_4))$.

(T2 und T3 zusammen sagen aus, daß je vier kollineare und paarweise verschiedene Punkte in eindeutiger Weise ein ungeordnetes Paar einander trennender ungeordneter Punktepaare bilden.)

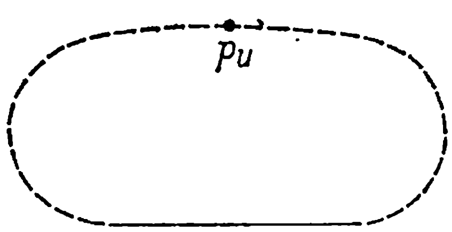


Abb. 11

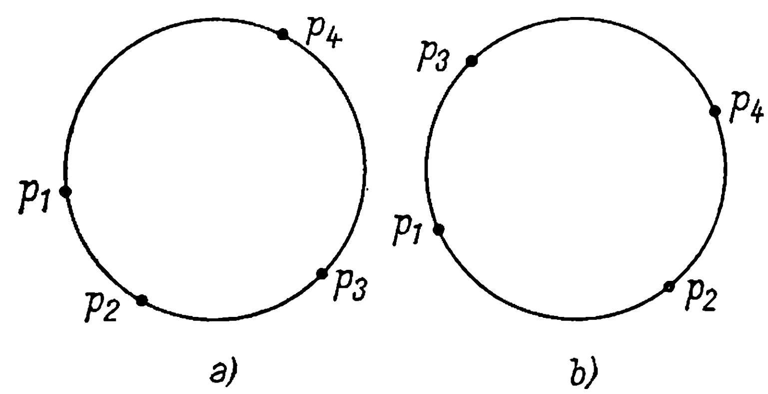


Abb. 12

T4. $\bigwedge p_1p_2p_3(p_1, p_2, p_3$ kollinear $\wedge\, p_1, p_2, p_3$ paarweise verschieden
$\rightarrow \bigvee p_4(p_1, p_2; p_3, p_4))$.

T5. $\bigwedge p_1p_2p_3p_4p_5(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ kollinear $\wedge\, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ paarweise verschieden $\wedge\, (p_1, p_2; p_3, p_4) \rightarrow (p_1, p_2; p_3, p_5) \vee (p_1, p_2; p_4, p_5))$.

Zur bequemeren Formulierung des letzten Trennungsaxioms verallgemeinern wir eine Definition aus Abschnitt 5.1:

$p_1p_2 \cdots p_n$ (zentral)perspektiv zu $p_1'p_2' \cdots p_n' :\leftrightarrow$
$\bigvee p(p, p_1, p_1'$ kollinear $\wedge\, p, p_2, p_2'$ kollinear $\wedge \cdots \wedge\, p, p_n, p_n'$ kollinear).

T6. $p_1p_2p_3p_4$ perspektiv zu $p_1'p_2'p_3'p_4' \wedge (p_1, p_2; p_3, p_4)$
$\wedge\, p_1', p_2', p_3', p_4'$ kollinear $\rightarrow (p_1', p_2'; p_3', p_4')$.

Ist $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I, \boldsymbol{Z})$ eine affine Ebene, $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{G}', I')$ die projektive Abschließung der affinen Inzidenzebene $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I)$, so definieren wir eine Trennungsrelation T in $\boldsymbol{P}'$ durch

(1) *$(p_1, p_2, p_3, p_4) \in T$ genau dann, wenn p_1, p_2, p_3, p_4 eigentlich (d. h. Elemente von $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{P}'$) sind und in einer der Reihenfolgen* (vgl. Abschnitt 5.3) *p_1, p_3, p_2, p_4 oder p_1, p_4, p_2, p_3 oder p_4, p_1, p_3, p_2 oder p_3, p_1, p_4, p_2 auf einer Geraden liegen oder wenn genau einer der Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 uneigentlich ist und die drei anderen in der projektiven Abschließung mit ihm kollinear sind und in der*

entsprechenden Zwischenrelation stehen $\big($*z. B.* $(p_1, p_3, p_2) \in Z$ *und* $p_4 = \overline{L(p_1, p_2)}\big)$ *oder wenn* p_1, p_2, p_3, p_4 *die uneigentlichen Punkte der koinzidenten Geraden* g_1, g_2, g_3, g_4 *sind, die sich ihrerseits trennen, d. h., es gibt eigentliche Punkte* p_i' *auf* g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, *so daß* p_1', p_2', p_3', p_4' *in einer der vier oben angegebenen Reihenfolgen auf einer Geraden liegen.*

Ist $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{G}', I', T)$ eine beliebige projektive Ebene, g_u eine beliebige ihrer Geraden, so definieren wir für die Punkte $p \in \boldsymbol{P}' \setminus \{p\colon (p, g_u) \in I'\}$ der affinen Restebene eine Zwischenrelation $Z(g_u)$ durch

(2) $(p_1, p_2, p_3) \in Z(g_u)$ *genau dann, wenn ein Punkt* p_4 *auf* g_u *mit* $(p_1, p_3, p_2, p_4) \in T$ *existiert.*

Dann gilt in Erweiterung des Satzes aus Abschnitt 5.2:

Satz. *Die mit der nach* (1) *definierten Trennungsrelation* T *versehene projektive Abschließung einer affinen Ebene ist eine projektive Ebene. Entfernt man umgekehrt aus einer beliebigen projektiven Ebene eine beliebige Gerade* g_u *und die mit ihr inzidierenden Punkte, so bilden die verbleibenden Punkte und Geraden bezüglich der Einschränkung der Inzidenz und der nach* (2) *definierten Zwischenrelation* $Z(g_u)$ *eine affine Ebene. Wendet man letzteren Prozeß insbesondere auf die projektive Abschließung einer affinen Ebene und eine beliebige ihrer Geraden an, so ist das Resultat zur Ausgangsebene isomorph.*

Bezüglich der Bedeutung dieses Satzes, den wir hier nicht beweisen, vergleiche man noch einmal die Bemerkungen im Anschluß an den Satz in Abschnitt 5.2, die — nun unter Einschluß der Zwischen- bzw. Trennungsrelation — hier zu wiederholen wären. Ergänzt man das Axiomensystem P1 bis P5, T1 bis T6 durch Trennungsaxiome T7 bzw. T8, die zum Ausdruck bringen, daß für beliebige $g_u \in \boldsymbol{G}'$ die nach (2) definierte Zwischenrelation Axiom A5 bzw. A6 erfüllt, so erhält man offenbar eine axiomatische Charakterisierung der projektiven Abschließungen archimedischer Ebenen bzw. ein kategorisches Axiomensystem für die projektive Abschließung der affinen Ebene $\boldsymbol{R}^2$.

Ein *projektives Koordinatensystem* (PKS) wird durch ein Quadrupel (p_0, p_3, p_4, p_5) von Punkten in allgemeiner Lage gegeben. p_0 dient als Ursprung, p_3 und p_4 legen eine „uneigentliche" Gerade fest und markieren gleichzeitig auf ihr die „Achsenrichtungen" des in der affinen Restebene zu errichtenden AKS, p_5 ist der sogenannte Einspunkt (der die affinen Koordinaten (1, 1) bekommt). Definieren wir

$$p_1 := S_1\big(L(p_0, p_3), L(p_4, p_5)\big), \quad p_2 := S_1\big(L(p_0, p_4), L(p_3, p_5)\big),$$

so ist auf Grund der Voraussetzung über (p_0, p_3, p_4, p_5) das Tripel (p_0, p_1, p_2) ein AKS für die affine Restebene (Abb. 13).

Auf Grund des oben formulierten Satzes kann man insbesondere in einer affinen Ebene vier Punkte p_0, p_3, p_4, p_5 in allgemeiner Lage wählen und erhält durch sie ein Koordinatensystem, durch das jedem nicht auf $L(p_3, p_4)$ gelegenen Punkt und jedem uneigentlichen Punkt ein Paar reeller Koordinaten zugeordnet wird. In der Definition der Streckenoperationen $+$ und $\cdot$ auf den Koordinatenachsen ist das Parallelsein überall durch „auf $\mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$ schneiden" zu ersetzen. Die „Summe zweier Strecken" deckt sich nun natürlich nicht mehr mit der Bedeutung dieses Wortes im Sinne der

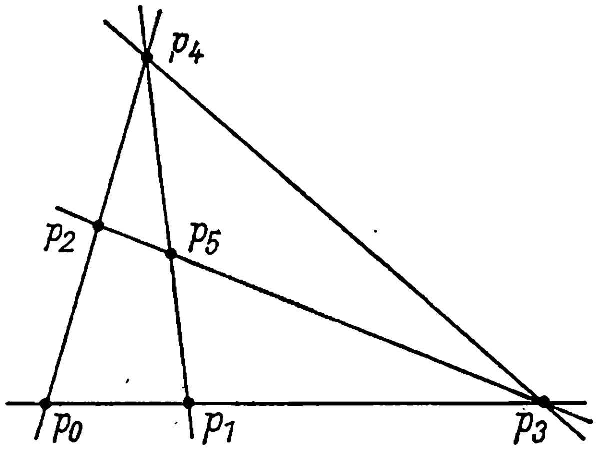


Abb. 13

metrischen Geometrie. Insbesondere ist es unmöglich, durch fortlaufende Addition der Einheitsstrecke p_0p_1 den „uneigentlichen" Punkt p_3 zu übertreffen. Der Beweis, daß alle Grundgesetze eines angeordneten Körpers gelten, überträgt sich jedoch fast wörtlich. Man hat lediglich bei jeder Anwendung des Desarguesschen Satzes statt (b, γ) den allgemeinen Fall zu benutzen.

Derartige Koordinatensysteme in affinen Ebenen, die wir zuweilen benutzen werden, werden wir ebenfalls als PKS bezeichnen. Ihre Entdeckung liefert ein weiteres Beispiel dafür, welche überraschenden Einsichten die projektive Behandlung der affinen Geometrie eröffnet. Den Nachteil der PKS (sowohl in projektiven als auch in affinen Ebenen), daß der als uneigentlich gewählten Geraden bzw. ihren Punkten keine Koordinaten zugeordnet werden können, kann man durch Übergang zu sogenannten „homogenen Koordinaten" beseitigen. Da dieser Übergang rein kalkülmäßig mit den Begriffen und Methoden der linearen Algebra geleistet werden kann, gehen wir hier nicht darauf ein, obwohl wir im folgenden zuweilen homogene Koordinaten benutzen werden.

Eine eineindeutige Abbildung der Menge $\boldsymbol{P}$ der Punkte einer projektiven Ebene $\mathfrak{P} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{T})$ auf sich heißt *projektiv*, wenn sie (im Sinne von Kapitel 3) die Trennungsrelation invariant läßt. Bezeichnen wir die Menge der projektiven Abbildungen der projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ mit $P_{\mathfrak{P}}$, so ist also

(3) *$\varphi \in P_{\mathfrak{P}}$ genau dann, wenn für alle $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \boldsymbol{P}$ aus $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in T$ stets $\big(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3), \varphi(p_4)\big) \in T$ folgt.*

$P_{\mathfrak{P}}$ ist bezüglich der Hintereinanderausführung ihrer Elemente eine Gruppe, die wir ebenfalls mit $P_{\mathfrak{P}}$ bezeichnen. Alle durch die Trennungsrelation definierbaren Relationen, Abbildungen und sonstigen mathematischen Objekte sind Invarianten dieser Gruppe (vgl. Kap. 3), insbesondere die Kollinearität (auf Grund von T1 bis

T4 ist offenbar

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \text{ kollinear} :\leftrightarrow \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 \vee \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_3 \vee \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 \vee \bigvee \mathfrak{p}_4(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$$

eine mögliche Definition), Geraden, Inzidenz, die Operationen L, S_1, die Begriffe PKS, Koordinaten eines Punktes bezüglich eines PKS usw. Durch analoge Überlegungen wie in Abschnitt 5.4 erhält man den

Hauptsatz über projektive Abbildungen. *Sind p_0, p_3, p_4, p_5 bzw. p_0', p_3', p_4', p_5' jeweils vier Punkte in allgemeiner Lage, so existiert genau eine projektive Abbildung φ mit*

$$\varphi(p_i) = p_i' \quad (i = 0, 3, 4, 5).$$

Zeichnet man in einer projektiven Ebene $\mathfrak{P}$ eine Gerade g_u als uneigentlich aus, so bilden diejenigen projektiven Abbildungen, die außerdem g_u (nicht notwendig punktweise) invariant lassen, eine Untergruppe von $P_{\mathfrak{P}}$. Andererseits lassen genau diese Abbildungen sich zu einer eineindeutigen Abbildung der Restebene $\boldsymbol{P} \setminus g_u$ auf sich einschränken. Aus der Definition (2) folgt sofort, daß die Gruppe der auf $\boldsymbol{P} \setminus g_u$ eingeschränkten projektiven Abbildungen mit der Gruppe der affinen Abbildungen der affinen Restebene $\boldsymbol{P} \setminus g_u$ übereinstimmt. Wenn wir im folgenden von projektiven Abbildungen in einer affinen Ebene sprechen, so meinen wir projektive Abbildungen der projektiven Abschließung. Sie sind — als Abbildungen der affinen Ebene betrachtet — zwar nicht mehr überall definiert, bilden aber wieder bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die die Gruppe der affinen Abbildungen der betreffenden Ebene echt umfaßt. Daher ist nach Kapitel 3 jede affine Invariante erst recht eine projektive Invariante, während das Beispiel der Zwischenrelation zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt.

Ohne Beweis vermerken wir, daß eine Abbildung einer projektiven Ebene auf sich genau dann projektiv ist, wenn sie bezüglich eines PKS durch ein Gleichungssystem der Form

$$(4) \qquad y_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

mit von 0 verschiedener Koeffizientendeterminante beschrieben wird, wobei x_0, x_1, x_2 die homogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes und y_0, y_1, y_2 die homogenen Koordinaten des zugehörigen Bildpunktes sind. Übergang zu inhomogenen Koordinaten $\xi_i = \dfrac{x_i}{x_0}$ bzw. $\eta_i = \dfrac{y_i}{y_0}$ $(i = 1, 2)$ ergibt für die (bezüglich des gewählten PKS) eigentlichen Punkte, die durch $x_0 \neq 0$ charakterisiert sind,

$$(5) \qquad \eta_i = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0} + a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2}{a_{00} + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2} \quad (i = 1, 2).$$

Umgekehrt führt jede Transformation der Form (5) für die Punkte einer affinen Ebene bezüglich eines PKS beim Übergang zu homogenen Koordinaten zu einer eindeutig auf die projektive Abschließung fortsetzbaren Transformation der Form (4), d. h., die durch Einschränkung einer projektiven Abbildung auf eine affine Restebene entstehenden Abbildungen sind genau diejenigen Abbildungen, die bezüglich eines projektiven (speziell affinen) Koordinatensystems in inhomogenen Koordinaten durch Gleichungen der Form (5) (gebrochen lineare Transformation mit gleichem Nenner für beide Koordinaten) beschrieben werden.

5.6. Euklidische Ebenen

Wir erweitern die Sprache der ebenen affinen Geometrie durch prädikative Ausdrücke der Form $p_i p_j \cong p_k p_l$ zur Bezeichnung einer vierstelligen Punktrelation *Kongruenz* und nennen eine Interpretation $\mathfrak{E} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{K})$ dieser Sprache eine *euklidische Ebene*, wenn $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{Z})$ eine affine Ebene und $\boldsymbol{K}$ eine vierstellige $\boldsymbol{P}$-Relation ist, die folgende Kongruenzaxiome erfüllt:

K1. a) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$,

b) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \wedge \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6 \rightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_5\mathrm{p}_6$,

c) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \rightarrow \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$,

d) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_2\mathrm{p}_1$,

(d. h., die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation im Bereich der ungeordneten Punktepaare).

K2. $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_3 \rightarrow \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$.

K3. $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \wedge \mathrm{p}_3 \neq \mathrm{p}_4 \rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{p}_5(\mathrm{p}_5 \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4) \wedge \mathrm{p}_3\mathrm{p}_5 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2)$.

K4. $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \wedge (\mathrm{p}_1', \mathrm{p}_2', \mathrm{p}_3') \wedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2' \wedge \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3' \rightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_3'$.

K5. $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2' \wedge \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ nicht kollinear $\wedge\, \mathrm{p}_1', \mathrm{p}_2', \mathrm{p}_3'$ nicht kollinear
$\rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p}_1', \mathrm{p}_2'; \mathrm{p}_3') \wedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_1'\mathrm{p} \wedge \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_2'\mathrm{p})$.

K6. $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \wedge \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4$ nicht kollinear $\wedge\, (\mathrm{p}_1', \mathrm{p}_2', \mathrm{p}_3') \wedge \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_2' \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$
$\wedge\, \mathrm{p}_2'\mathrm{p}_3' \cong \mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \wedge \mathrm{p}_1'\mathrm{p}_4' \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_4 \wedge \mathrm{p}_2'\mathrm{p}_4' \cong \mathrm{p}_2\mathrm{p}_4 \rightarrow \mathrm{p}_3'\mathrm{p}_4' \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4$.

Eine eineindeutige Abbildung φ der Menge $\boldsymbol{P}$ aller Punkte einer euklidischen Ebene auf sich heißt eine *Bewegung*, wenn

(1) $p_1 p_2 \cong \varphi(p_1)\, \varphi(p_2)$ *für alle* $p_1, p_2 \in \boldsymbol{P}$.

Mit $B_{\mathfrak{E}}$ bezeichnen wir die Menge aller Bewegungen der Ebene $\mathfrak{E}$. Aus K1 bis K6 und der Definition der Bewegungen folgen deren Grundeigenschaften:

(2) *Die Bewegungen bilden eine Untergruppe der Gruppe der affinen Abbildungen.*

(3) *Zu nicht kollinearen Punkten* p_1, p_2, p_3 *und nicht kollinearen Punkten* p'_1, p'_2, p'_3 *gibt es genau eine Bewegung* φ *mit* $\varphi(p_1) = p'_1$ *und* $\varphi(p_2) \in Strahl(p'_1, p'_2)$ *und* $\varphi(p_3) \in Halbebene(p'_1, p'_2; p'_3)$.

(4) *Zu* p_1, p_2 *gibt es eine Bewegung* φ *mit* $\varphi(p_1) = p_2$ *und* $\varphi(p_2) = p_1$. *Zu nicht kollinearen* p_1, p_2, p_3 *gibt es eine Bewegung* φ *mit* $\varphi(p_1) = p_1$ *und* $\varphi(p_2) \in Strahl(p_1, p_3)$ *und* $\varphi(p_3) \in Strahl(p_1, p_2)$.

Statt des Kongruenzbegriffs wird aus methodischen Gründen häufig der Bewegungsbegriff als Grundbegriff der euklidischen Geometrie gewählt. Für eine exakte Formalisierung dieses Ansatzes hat man Variablen φ_i für „Bewegungen" und eine „Anwendungsoperation" einzuführen, die jeder Bewegung φ und jedem Punkt p den Bildpunkt $\varphi(p)$ zuordnet, d. h. als mögliche Interpretationen Strukturen der Form $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}, I, Z, A)$ zu betrachten, wobei $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}, I, Z)$ eine affine Ebene ist, $\boldsymbol{B}$ die Menge der als Bewegungen bezeichneten Dinge und A eine $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$-Operation. Eine solche Struktur heißt eine *Bewegungsebene*, wenn folgende *Bewegungsaxiome* erfüllt sind:

B0. a) $\bigwedge \varphi_1\varphi_2\mathrm{p}(\varphi_1(\mathrm{p}) = \varphi_2(\mathrm{p}) \to \varphi_1 = \varphi_2)$,

b) $\bigwedge \varphi\mathrm{p} \bigvee \mathrm{p}'\varphi(\mathrm{p}) = \mathrm{p}'$.

(B0 ersetzt die nichtelementare Interpretationsvorschrift, daß die φ_i eindeutige Abbildungen der Menge der Punkte in sich sind.)

B1. a) $\bigwedge \varphi_1\varphi_2 \bigvee \varphi_3 \bigwedge \mathrm{p}\varphi_3(\mathrm{p}) = \varphi_2(\varphi_1(\mathrm{p}))$,

b) $\bigwedge \varphi_1 \bigvee \varphi_2 \bigwedge \mathrm{p}\varphi_2(\varphi_1(\mathrm{p})) = \mathrm{p}$,

c) $\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\varphi((\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \leftrightarrow (\varphi(\mathrm{p}_1), \varphi(\mathrm{p}_2), \varphi(\mathrm{p}_3)))$.

B2. $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ nicht kollinear $\wedge$ $\mathrm{p}'_1, \mathrm{p}'_2, \mathrm{p}'_3$ nicht kollinear

$\to \bigvee!! \varphi(\varphi(\mathrm{p}_1) = \mathrm{p}'_1 \wedge \varphi(\mathrm{p}_2) \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}'_1, \mathrm{p}'_2)$

$\wedge\ \varphi(\mathrm{p}_3) \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p}'_1, \mathrm{p}'_2; \mathrm{p}'_3))$.

B3. a) $\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \bigvee \varphi(\varphi(\mathrm{p}_1) = \mathrm{p}_2 \wedge \varphi(\mathrm{p}_2) = \mathrm{p}_1)$,

b) $\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ nicht kollinear

$\to \bigvee \varphi(\varphi(\mathrm{p}_1) = \mathrm{p}_1 \wedge \varphi(\mathrm{p}_2) \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3) \wedge \varphi(\mathrm{p}_3) \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)))$.

(B1 bis B3 sind offenbar Formalisierungen der Grundeigenschaften (2), (3), (4)). Definiert man nun mittels des Grundbegriffs Bewegung eine Kongruenz $\cong$ durch

(5) $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 :\leftrightarrow \bigvee\varphi(\varphi(\mathrm{p}_1) = \mathrm{p}_3 \wedge \varphi(\mathrm{p}_2) = \mathrm{p}_4)$,

so folgen K1 bis K6 für die definitorisch eingeführte Kongruenz aus B0 bis B3.[1]). Definiert man andererseits mit Hilfe der nach (1) definitorisch eingeführten Be-

[1]) Das heißt, die Theorie der euklidischen Ebenen und die Theorie der Bewegungsebenen sind im weiteren Sinne äquivalent; vgl. Abschnitt 2.5.

wegungen eine neue Kongruenz $\equiv$ durch

$$p_1p_2 \equiv p_3p_4 :\leftrightarrow \textit{Es gibt eine Bewegung } \varphi \textit{ mit } \varphi(p_1) = p_3 \textit{ und } \varphi(p_2) = p_4,$$

so folgt aus K1 bis K6 sogar $\bigwedge p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 \cong p_3p_4 \leftrightarrow p_1p_2 \equiv p_3p_4)$. Wir werden im folgenden die Begriffe Kongruenz und Bewegung nebeneinander benutzen.

Wir definieren:

$$\llcorner\, p_1p_2p_3 :\leftrightarrow \bigvee p_4p_5(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \text{ paarweise verschieden}$$
$$\wedge\, p_1p_3 \cong p_3p_4 \wedge p_3p_4 \cong p_4p_5 \wedge p_4p_5 \cong p_5p_1 \wedge p_1p_2 \cong p_2p_4 \wedge p_3p_2 \cong p_2p_5)$$

(Abb. 14). (Gelesen: p_1, p_2, p_3 bilden (bei p_2) einen rechten Winkel.)

$$g_1 \perp g_2 :\leftrightarrow \bigvee p_1p_2p_3(p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_1 \wedge p_2 \in g_2 \wedge p_3 \in g_2 \wedge \llcorner\, p_1p_2p_3)$$

(gelesen: g_1 senkrecht auf g_2).

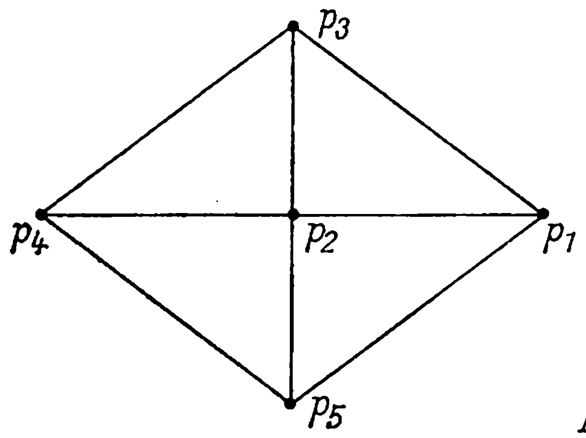


Abb. 14

Unter Benutzung der ersten Definition gilt in euklidischen Ebenen

$$(p_1, p_2, p_3) \leftrightarrow \bigvee p_4(\llcorner\, p_1p_4p_3 \wedge \llcorner\, p_1p_2p_4 \wedge \llcorner\, p_3p_2p_4)$$

(Abb. 15), d. h., die Zwischenrelation ist durch die Kongruenz definierbar.

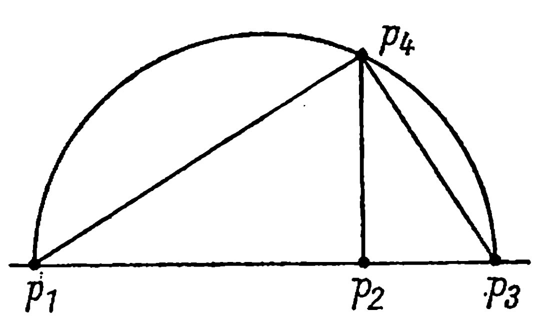


Abb. 15

Ein AKS (p_0, p_1, p_2) heißt ein *kartesisches Koordinatensystem* (kurz KKS), wenn es die beiden Nebenbedingungen $p_1p_0 \cong p_2p_0$ und $\llcorner\, p_1p_0p_2$ erfüllt. Aus den Axiomen I1 bis I5, A1 bis A4 und K1 bis K6 folgt die Existenz eines KKS in jeder euklidischen Ebene. Für das Weitere ist es nützlich, zunächst sicherzustellen, daß die in affinen Ebenen definierten Koordinatenoperationen $+$ und $\cdot$ in euklidischen Ebenen den üblichen metrischen Definitionen gleichwertig sind. Für die Multiplikation ergibt sich dies — wie bereits in Abschnitt 5.3 bemerkt — aus den Strahlensätzen. Für die Addition beruht die Gleichwertigkeit der affinen mit der metrischen Definition (durch Streckenabtragung nach K3) im wesentlichen auf dem

Hauptsatz über Parallelogramme.

$$\bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4 \text{ in allgemeiner Lage}$$
$$\wedge\, L(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \parallel L(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4) \wedge L(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3) \parallel L(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4) \rightarrow \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4)$$

(wegen der Symmetrie in den Voraussetzungen ist dann auch $p_1p_3 \cong p_2p_4$).

Der Beweis ergibt sich, indem man eine Diagonale des Parallelogramms einführt, aus bekannten Sätzen über Winkel an geschnittenen Parallelen und Dreieckskongruenz. Offenbar kann man den Hauptsatz über Parallelogramme auch so formulieren:

Jede Translation ist eine Bewegung.

Dieser Satz erscheint nicht mehr so selbstverständlich, wenn man weiß, daß in einer affinen Ebene durch die Axiome B0 bis B3 keineswegs eine bestimmte Untergruppe der Gruppe der affinen Abbildungen als Gruppe der Bewegungen charakterisiert wird. Vielmehr gilt, wie man leicht überprüft: Ist B eine Untergruppe der Gruppe A der affinen Abbildungen, die B0 bis B3 erfüllt, und φ eine beliebige affine Abbildung, so erfüllt die konjugierte Untergruppe $\{\varphi\psi\varphi^{-1}: \psi \in B\}$ ebenfalls B0 bis B3. Geht man insbesondere von der „Anschauungsebene" und den „naiven Bewegungen" aus, so erhält man in Gestalt der konjugierten Untergruppen unendlich viele Gruppen von „Nichtstandardbewegungen", und zu jeder solchen gehört eine durch die Definition (5) mit ihr verknüpfte „Nichtstandardkongruenz", die die Axiome K1 bis K6 erfüllt.

In einer euklidischen Ebene wird die *abstrakte Länge* $\overline{p_1p_2}$ einer Strecke p_1p_2 als Äquivalenzklasse aller zu p_1p_2 kongruenten Strecken definiert. Ist s ein Strahl mit dem Anfangspunkt p_0, so besitzt nach Axiom K3 jede abstrakte Streckenlänge genau einen Repräsentanten der Form p_0p mit $p \in s$. Nach Wahl eines Einspunktes p_1 auf s ($p_1 \neq p_0$) kann man jedem Punkt $p \in s$ und damit jeder Strecke p_2p_3 und jeder abstrakten Streckenlänge ein nichtnegatives Element $l_{p_0p_1}(p_2p_3)$ bzw. $l_{p_0p_1}(\overline{p_2p_3})$ des Koordinatenkörpers als konkrete Länge zuordnen, nämlich die Maßzahl des entsprechenden Punktes $p \in s$ bezüglich der Achse $\big(L(p_0, p_1), p_0, p_1\big)$. In Zusammenhängen, die unabhängig von der speziellen Wahl der Einheitsstrecke p_0p_1 sind oder in denen eine bestimmte Einheitsstrecke betrachtet wird, werden wir die unteren Indizes der Längenfunktion l weglassen. Jede Längenfunktion l ist als Abbildung der abstrakten Streckenlängen in den Koordinatenkörper umkehrbar eindeutig und hat als Wertebereich die Menge der nichtnegativen Elemente des Koordinatenkörpers.

Sind l und l' zwei verschiedene Längenfunktionen, so gilt für beliebige abstrakte Streckenlängen x, y

$$l(x) < l(y) \leftrightarrow l'(x) < l'(y)$$

und

$$l^{-1}(l(x) + l(y)) = l'^{-1}(l'(x) + l'(y)).$$

Dies ermöglicht es, die Ordnung und die Addition des Koordinatenkörpers auf die Menge der abstrakten Streckenlängen zu übertragen, während das Resultat der Multiplikation von Streckenlängen von der gewählten Einheitsstrecke abhängig ist. Wir definieren für abstrakte Streckenlängen x, y

$$\begin{aligned} \mathrm{x} < \mathrm{y} &:\leftrightarrow \mathrm{l}(\mathrm{x}) < \mathrm{l}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} &:= \mathrm{l}^{-1}(\mathrm{l}(\mathrm{x}) + \mathrm{l}(\mathrm{y})) \end{aligned} \qquad \text{(l beliebige Längenfunktion).}$$

Dies ist wichtig für die Formulierung vieler Sätze, z. B. der

Dreiecksungleichung. $\overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_5} \leqq \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} + \overline{\mathrm{p}_4\mathrm{p}_5}$;

$$\overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_5} = \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} + \overline{\mathrm{p}_4\mathrm{p}_5} \leftrightarrow (\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4, \mathrm{p}_5) \vee \mathrm{p}_4 = \mathrm{p}_3 \vee \mathrm{p}_4 = \mathrm{p}_5.$$

Aus dem Satz des PYTHAGORAS folgt die

Euklidische Abstandsformel. *Hat der Punkt p_i ($i = 3, 4, \ldots$) bezüglich des KKS (p_0, p_1, p_2) die Koordinaten x_i, y_i, so ist*

$$l_{p_0p_1}(p_3p_4) = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}. \tag{6}$$

Es gilt demnach $p_3p_4 \cong p_5p_6$ genau dann, wenn

$$l_{p_0p_1}(p_3p_4) = l_{p_0p_1}(p_5p_6),$$

d. h. genau dann, wenn

$$(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2. \tag{7}$$

Aus (6) folgt insbesondere, daß der Koordinatenkörper einer euklidischen Ebene pythagoräisch sein muß (vgl. Abschnitt 4.4). Umgekehrt gilt: Ist $\boldsymbol{K}$ ein pythagoräischer geordneter Körper, so ist die bereits in Abschnitt 5.3 betrachtete affine Ebene $\boldsymbol{K}^2$, versehen mit der nach (7) definierten Kongruenzrelation, eine euklidische Ebene, d. h. ein Modell der Axiome I1 bis I5, A1 bis A4, K1 bis K6. Insbesondere ist I1 bis I5, A1 bis A6, K1 bis K6 ein kategorisches Axiomensystem, durch das bis auf Isomorphie eindeutig die euklidische Ebene $\boldsymbol{R}^2$ charakterisiert wird.

5.7. Kreise, platonische Ebenen

In beliebigen euklidischen Ebenen können Kreise definitorisch als spezielle Punktmengen eingeführt werden (vgl. Abschnitt 2.5.).

Bezüglich eines KKS habe p_i die Koordinaten x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$). Dann folgt aus der Kreisdefinition und der euklidischen Abstandsformel, daß die allgemeine Kreisgleichung

$$(1)\qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$$

genau dann gilt, wenn der Punkt p mit den Koordinaten x, y auf dem Kreis $Z(p_1; p_2, p_3)$ vom Radius p_2p_3 um den Punkt p_1 liegt. Die in (1) auftretenden Elemente x_1, y_1 und

$$r = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

des Koordinatenkörpers heißen *Koordinaten des Kreises* $Z(p_1; p_2, p_3)$ bezüglich des gewählten KKS. Umgekehrt ist jedes Tripel (x_1, y_1, r) von Elementen des Koordinatenkörpers mit der Nebenbedingung $r > 0$ Koordinatentripel genau eines Kreises, nämlich zum Beispiel des Kreises $Z(p; p, p')$, wobei p der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 und p' der Punkt mit den Koordinaten $x_1 + r, y_1$ ist.

In einer Sprache der euklidischen Geometrie mit Kreisvariablen k_i bzw. Variablen x_i für abstrakte Streckenlängen (bzw. Elemente des Koordinatenkörpers) sind die Operationen „Mittelpunkt von k" und „Radius von k" definierbar:

$$\mathrm{M(k)} := \iota \mathrm{p} \bigwedge \mathrm{p_1 p_2}(\mathrm{p_1} \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{k} \rightarrow \mathrm{pp_1} \cong \mathrm{pp_2}),$$

$$\mathrm{r(k)} := \iota \mathrm{x} \bigwedge \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{k} \leftrightarrow \mathrm{x} = \overline{\mathrm{pM(k)}}\big).$$

Im folgenden benötigen wir häufig die mit dem Begriff *Potenz eines Punktes p bezüglich eines Kreises k* zusammenhängenden Grundtatsachen. Da diese Potenz mittels Multiplikation von Streckenlängen definiert wird, hängt sie außer von p und k noch von der Einheitsstrecke p_0p_1 ab. Wir definieren

$$\mathrm{Pot}_{\mathrm{p_0p_1}}(\mathrm{p}, \mathrm{k}) := \mathrm{l}_{\mathrm{p_0p_1}}\big(\mathrm{pM(k)}\big)^2 - \mathrm{l}_{\mathrm{p_0p_1}}\big(\mathrm{r(k)}\big)^2.$$

Dann ist offenbar

$$Pot_{p_0p_1}(p, k) \begin{cases} > 0, \text{ falls } p \text{ „außerhalb" von } k \text{ liegt,} \\ = 0, \text{ falls } p \in k, \\ < 0, \text{ falls } p \text{ „innerhalb" von } k \text{ liegt.} \end{cases}$$

Ohne Beweis nennen wir hier den Satz

$$\mathrm{p, p_2, p_3} \text{ kollinear} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p_3} \in \mathrm{k}$$
$$\rightarrow \mathrm{l}_{\mathrm{p_0p_1}}(\mathrm{pp_2}) \cdot \mathrm{l}_{\mathrm{p_0p_1}}(\mathrm{pp_3}) = \mathrm{Pot}_{\mathrm{p_0p_1}}(\mathrm{p}, \mathrm{k}).$$

Für Kreise k_1, k_2 mit verschiedenen Mittelpunkten ist die Menge aller Punkte, die bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz haben, eine auf $L\big(M(k_1), M(k_2)\big)$ senkrechte Gerade, die wir die *Potenzgerade* der Kreise k_1, k_2 nennen. Falls k_1 und k_2 zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, haben diese beiden bezüglich beider Kreise die Potenz 0, legen also die Potenzgerade fest. Andernfalls findet man die Potenzgerade leicht, indem man einen Hilfskreis k_3 wählt, der k_1 und k_2 schneidet und vom Schnittpunkt der beiden Potenzgeraden zu k_1, k_3 bzw. k_2, k_3 (der also bezüglich aller drei Kreise die gleiche Potenz hat) das Lot auf $L(M(k_1), M(k_2))$ fällt. Weiteres hierzu siehe [1], [8].

Wir betrachten nun zwei Kreise k_1, k_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 und dem Mittelpunktsabstand d. Aus den Axiomen der euklidischen Ebenen folgt, daß k_1 und k_2 entweder keinen oder genau einen oder genau zwei gemeinsame Punkte haben. Wir definieren

$$\mathrm{k}_1 \text{ schneidet } \mathrm{k}_2 :\leftrightarrow \bigvee_2 !!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p} \in k_2).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt als notwendige Bedingung für das Schneiden von k_1 und k_2

$$\mathrm{d} < \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 \wedge \mathrm{r}_1 < \mathrm{d} + \mathrm{r}_2 \wedge \mathrm{r}_2 < \mathrm{d} + \mathrm{r}_1. \tag{2}$$

Bezeichnet $d(p, g)$ den Abstand des Punktes p von der Geraden g, der in beliebigen euklidischen Ebenen als Punkt-Geraden-Operation in die Menge der abstrakten Streckenlängen definierbar ist, so folgt wiederum aus der Dreiecksungleichung

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}(\mathrm{k}), \mathrm{g}) < \mathrm{r}(\mathrm{k}) \tag{3}$$

als notwendige Bedingung für das durch

$$\mathrm{g} \text{ schneidet } \mathrm{k} :\leftrightarrow \bigvee_2 !!\, \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{k})$$

definierte Schneiden der Geraden g und des Kreises k. Da in der Elementargeometrie die Existenz gewisser Punkte häufig dadurch nachgewiesen wird, daß man sie als Schnitt von Kreisen bzw. von Kreis und Gerade „konstruiert", ist die Frage von grundlegender Bedeutung, in welchen euklidischen Ebenen folgende Sätze gelten:

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{M}(\mathrm{k}_1)\,\mathrm{M}(\mathrm{k}_2)} < \mathrm{r}(\mathrm{k}_1) + \mathrm{r}(\mathrm{k}_2) \wedge \mathrm{r}(\mathrm{k}_1) < \overline{\mathrm{M}(\mathrm{k}_1)\,\mathrm{M}(\mathrm{k}_2)} + \mathrm{r}(\mathrm{k}_2) \\ &\wedge \mathrm{r}(\mathrm{k}_2) < \overline{\mathrm{M}(\mathrm{k}_1)\,\mathrm{M}(\mathrm{k}_2)} + \mathrm{r}(\mathrm{k}_1) \rightarrow \mathrm{k}_1 \text{ schneidet } \mathrm{k}_2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}(\mathrm{k}), \mathrm{g}) < \mathrm{r}(\mathrm{k}) \rightarrow \mathrm{g} \text{ schneidet } \mathrm{k}, \tag{5}$$

d. h. unter welchen Voraussetzungen die notwendigen Bedingungen (2) bzw. (3) auch hinreichend für die Existenz der Schnittpunkte sind.

Zunächst ist festzustellen, daß in beliebigen euklidischen Ebenen (4) genau dann gilt, wenn (5) gilt. Der Beweis sei nur angedeutet: Erfüllen zwei Kreise die Voraussetzungen (2), so erfüllt jeder dieser Kreise zusammen mit der gemeinsamen Potenzgeraden (3), und man erhält die Schnittpunkte dieser Kreise auch als Schnittpunkte eines dieser Kreise mit der Potenzgeraden. Erfüllen umgekehrt ein Kreis und eine Gerade (3), so erfüllen dieser Kreis und der an der Geraden gespiegelte Kreis (2), und man erhält die gesuchten Schnittpunkte von Kreis und Gerade auch als Schnittpunkte dieser beiden Kreise.

Eine euklidische Ebene heißt *platonische Ebene*, wenn in ihr (4) (und damit auch (5)) gilt.[1])

Satz. *Eine euklidische Ebene ist genau dann platonisch, wenn ihr Koordinatenkörper platonisch ist* (vgl. Abschnitt 4.4).

Beweis. Daß der Koordinatenkörper einer platonischen Ebene platonisch ist, ergibt sich daraus, daß man in einer platonischen Ebene zu jeder Strecke der Länge x eine Strecke der Länge $\sqrt{x}$ konstruieren kann. Diese Konstruktion werden wir später behandeln, und die Untersuchung, in welchem Sinne derartige Konstruktionen Beweiskraft haben, bildet den Hauptgegenstand dieses Buches. Zum Beweis der umgekehrten Richtung bedienen wir uns der analytischen Geoemtrie. Es seien k_1, k_2 Kreise mit den Mittelpunkten p_1, p_2 und den Radien r_1, r_2, die (2) erfüllen. Wir wählen p_1 als Ursprung und p_2 als Einspunkt der x-Achse eines KKS. Dann ergibt sich für die Koordinaten x, y eines Schnittpunktes p von k_1 und k_2 (Abb. 16)

$$x^2 + y^2 = r_1^2, \quad (1 - x)^2 + y^2 = r_2^2.$$

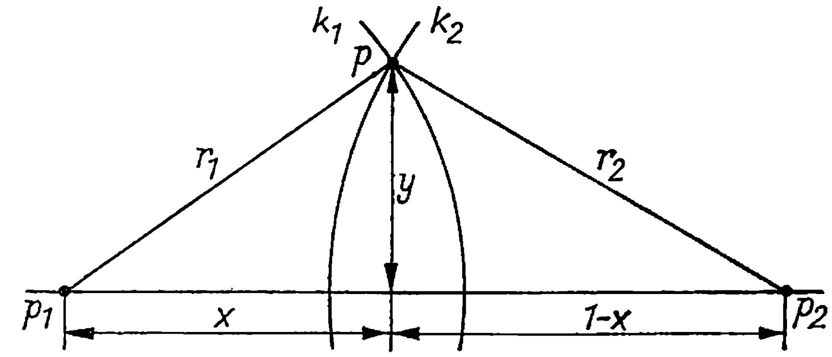


Abb. 16

Dieses Gleichungssystem wird, da der Koordinatenkörper nach Voraussetzung platonisch ist, durch

$$x = \frac{1 + r_1^2 - r_2^2}{2}, \quad y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4r_1^2 - (1 + r_1^2 - r_2^2)^2}$$

genau dann gelöst, wenn der auftretende Radikand $4r_1^2 - (1 + r_1^2 - r_2^2)^2$ nicht negativ ist. Aus den vorausgesetzten Ungleichungen (2) folgt aber $|r_1 - 1| < r_2$ wegen $r_1 < 1 + r_2$ und $1 < r_1 + r_2$, d. h. $(r_1 - 1)^2 < r_2^2$, d. h. $2r_1 > r_1^2 + 1 - r_2^2$. Ferner $r_2^2 < (1 + r_1)^2$, d. h. $2r_1 > r_2^2 - 1 - r_1^2$. Es ist also $2r_1 > |1 + r_1^2 - r_2^2|$, demnach tatsächlich $4r_1^2 > (1 + r_1^2 - r_2^2)^2$.

Da zum Beispiel $Pyth(\boldsymbol{Q})$ ein zwar pythagoräischer, aber nicht platonischer Unterkörper des Körpers $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist, folgt aus dem Satz die Unabhängigkeit des Zusatzaxioms (4) von den Axiomen I1 bis I5, A1 bis A5, K1 bis K6. Andererseits ergibt sich sofort die Abhängigkeit von (4) von dem kategorischenAxiomensystem I1 bis I5, A1 bis A6, K1 bis K6, d. h. die Gültigkeit von (4) in der Ebene $\boldsymbol{R}^2$. Die Hinzu-

[1]) Eine vom Kreisbegriff unabhängige axiomatische Charakterisierung derjenigen euklidischen Ebenen, die hier als platonisch bezeichnet werden, hat zuerst F. Schur gegeben. Sein zusätzliches Axiom lautet: Zu (durch Punktepaare gegebenen) Strecken $c > a > 0$ existiert ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und der Kathete a. Dieses Axiom ist offenbar zu (4) bzw. (5) äquivalent.

nahme von (4) zu den Axiomen I1 bis I5, A1 bis A5, K1 bis K6 und damit die Fixierung der platonischen Ebenen als Gegenstand der Elementargeometrie kommt den Vorstellungen und Bedürfnissen der Schulmathematik sicher näher als die Theorie der euklidischen Ebenen.

Es soll nun kurz dargelegt werden, in welcher Weise die Begriffe Kreis und Punkt-Kreis-Inzidenz anstelle der Kongruenz bzw. Bewegung als Grundbegriffe der euklidischen Geometrie dienen können. Wir beginnen mit dem Hinweis, daß die Operation $M(p_1, p_2)$ (Mittelpunkt der Strecke p_1p_2) in der affinen Geometrie definierbar ist; man erhält $M(p_1, p_2)$ zum Beispiel als Schnittpunkt der Diagonalen eines über der Diagonalen p_1p_2 erreichteten Parallelogramms. Dies wird in Kapitel **11** ausführlich behandelt. Ferner ist der Mittelpunkt $M(k)$ eines Kreises k offenbar dadurch charakterisierbar, daß jede Gerade durch $M(k)$ den Kreis k in zwei Punkten p_1, p_2 schneidet, deren (affin definierter) Mittelpunkt $M(k)$ ist. Wir definieren daher zunächst als Relation „p ist ein Mittelpunkt von k“:

$$\mathrm{pMk} :\leftrightarrow \bigwedge \mathrm{g}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \rightarrow \bigvee \mathrm{p_1p_2}(\mathrm{p_1} \neq \mathrm{p_2} \wedge \mathrm{p_1} \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p_1} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p} = \mathrm{M}(\mathrm{p_1}, \mathrm{p_2}))\big).$$

Unter Benutzung dieser Relation und der in Abschnitt 5.4 eingeführten Translationskongruenz definieren wir nun (Abb. 17):

$$\mathrm{p_1p_2} \cong \mathrm{p_3p_4} :\leftrightarrow \bigvee \mathrm{kp_5}(\mathrm{p_1p_2} \underset{\mathrm{t}}{\cong} \mathrm{p_3p_5} \wedge \mathrm{p_3Mk} \wedge \mathrm{p_4} \in \mathrm{k} \wedge \mathrm{p_5} \in \mathrm{k}).$$

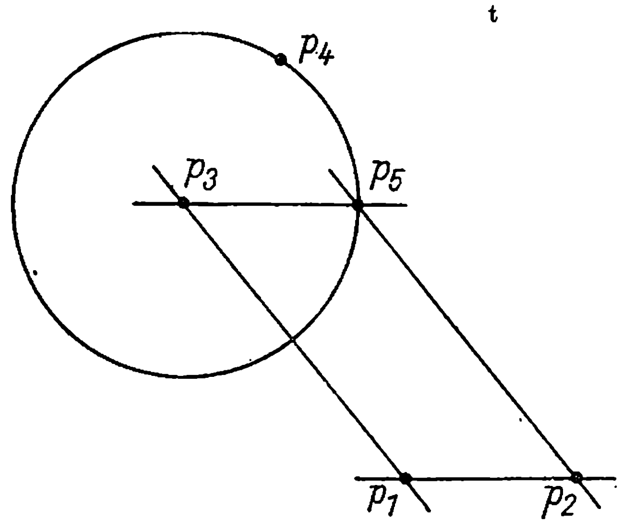


Abb. 17

Damit ist das Problem der Definition der Kongruenz in einer durch Kreisvariablen und Punkt-Kreis-Inzidenz erweiterten affinen Geometrie im Prinzip gelöst, da man die Axiome K1 bis K6 jetzt als Forderungen an die definitorisch eingeführte Kongruenz lesen, d. h. in Axiome über Punkt-Kreis-Inzidenz zurückübersetzen kann. Es gibt jedoch sicher äquivalente Axiomensysteme, die vom Standpunkt der Punkt-Kreis-Inzidenz als Grundbegriff „natürlicher“ sind. Zum Beispiel liegt es nahe,

$$\bigwedge \mathrm{k} \bigvee \mathrm{ppMk}$$

und

$$\bigwedge \mathrm{p_1p_2}(\mathrm{p_1} \neq \mathrm{p_2} \rightarrow \bigvee !!\, \mathrm{k}(\mathrm{p_1Mk} \wedge \mathrm{p_2} \in \mathrm{k})$$

als erste Axiome zu wählen.

6. Graphen, Flußdiagramme, Algorithmen

Eine binäre Relation R in einer endlichen Menge M kann man graphisch veranschaulichen, indem man die Elemente von M durch entsprechend beschriftete paarweise disjunkte Kreisscheiben x, Rechtecke $\boxed{y}$ oder ähnliches darstellt und für jedes Paar $(x, y) \in R$ einen (der Übersichtlichkeit halber eventuell gekrümmten) Pfeil von dem x darstellenden Gebilde zu dem y darstellenden Gebilde zeichnet. So wird z. B. die Teilbarkeitsrelation $T_6 := \{(m, n)\colon m, n = 1, \cdots, 6 \wedge m \text{ teilt } n\}$ durch Abb. 18 dar-

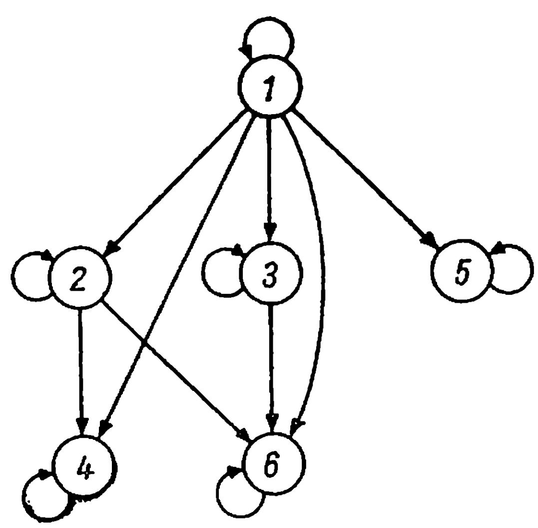


Abb. 18

gestellt. Eine derartige Zeichnung heißt ein *endlicher gerichteter Graph*, im folgende kurz Graph genannt. Die in ihm auftretenden Pfeile heißen seine Kanten, die durch Pfeile verbundenen Gebilde seine Knoten. Es ist klar, daß umgekehrt jeder Graph eine binäre Relation in der Menge seiner Knoten beschreibt. (Die dafür notwendige Bedingung, daß vom Knoten x zum Knoten y höchstens ein Pfeil gezeichnet ist, sehen wir als Bestandteil der Definition des Begriffs Graph an.) Die Begriffe Graph bzw. binäre Relation stellen also im Grunde genommen die gleiche Art von Sachverhalten dar. Deshalb werden sie meist identifiziert. Wie der aufmerksame Leser schon bemerkt haben wird, ist es gar nicht so einfach, eine wirklich exakte Definition des anschaulichen Graphenbegriffs zu geben, während es keine Schwierigkeiten macht, zu erklären, was die Knoten bzw. die Kanten einer binären Relation R sind, nachdem man die Möglichkeit der zeichnerischen Veranschaulichung einer solchen Relation kennt. Wir werden im folgenden Definitionen und allgemeine Betrachtungen auf die mengentheoretische Fassung des Graphenbegriffs beziehen und graphische Darstellungen nur zur Veranschaulichung heranziehen.

Eine nichtleere endliche Menge G von geordneten Paaren heißt ein *Graph*. Die Elemente (x, y) von G heißen die *Kanten* von G, und x heißt ein *Knoten* von G, wenn ein y existiert, so daß $(x, y) \in G$ oder $(y, x) \in G$. Mit $K(G)$ bezeichnen wir die Menge der Knoten von G. Ist $(x, y) \in G$, so heißt x ein *Vorgänger* von y und y ein *Nachfolger* von x. Im folgenden werden wir nur Graphen betrachten, in denen jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger hat. Knoten mit genau zwei Nachfolgern heißen *Prüfknoten*, Knoten mit genau einem Nachfolger heißen *Arbeitsknoten*, Knoten ohne Nachfolger heißen *Ausgänge*. Obwohl diese Knotenarten durch die Anzahl der jeweiligen Nachfolger unterschieden sind, werden wir in graphischen Darstellungen zusätzlich die Arbeitsknoten durch eckige Umrandung, die Prüfknoten durch abgerundete Umrandung hervorheben, während die Ausgänge nicht umrandet werden.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ Knoten von G, so daß $(x_i, x_{i+1}) \in G$ für $i = 1, \ldots, n-1$, so heißt die Folge $W = x_1, \ldots, x_n$ ein *Weg in* G, genauer ein *Weg der Länge* n *von* x_1 *nach* x_n. Existiert ein solcher Weg, so heißt x_n *von* x_1 *erreichbar*. Ein Weg heißt *einfach*, wenn seine Knoten paarweise verschieden sind. Ein Weg von x nach x heißt ein *Zyklus*.

Ein Paar $S = (G, e)$ heißt ein *Strukturgraph*, wenn gilt:

(1a) G ist ein Graph und e einer seiner Knoten, der kein Ausgang ist. (e heißt Eingangsknoten von S und wird bei der graphischen Darstellung durch einen „freien Eingangspfeil" markiert; vgl. Abb. 19a, S. 110.

(1b) Jeder Knoten von G hat höchstens zwei Nachfolger.

(1c) Jeder von e verschiedene Knoten ist von e erreichbar. Von jedem Knoten, der kein Ausgang ist, ist wenigstens ein Ausgang erreichbar.

(1d) Beide Nachfolger eines Prüfknotens x sind von x und voneinander verschieden.

Ist $S = (G, e)$ ein Strukturgraph, so sei $K(S) = K(G)$. Statt Kanten bzw. Knoten von G sagen wir dann auch Kanten bzw. Knoten von S.

Ein einfaches Beispiel eines Strukturgraphen (in mengentheoretischer Notierung) ist $(\{(\mathrm{e}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{e}), (\mathrm{b}, \mathrm{c}), (\mathrm{c}, \mathrm{a})\}, \mathrm{e})$. Daß die Eigenschaften (1a bis e) erfüllt sind, sieht man am einfachsten aus seiner graphischen Darstellung (Abb. 19a).

Es sei (G, e) ein Strukturgraph, ψ eine Abbildung, die jedem Prüfknoten von G einen seiner beiden Nachfolger zuordnet, φ eine Abbildung, die jedem Prüfknoten von G eine beliebige Menge (im allgemeinen eine Relation) und jedem Arbeitsknoten von G eine beliebige partielle Operation zuordnet, so heißt das Paar (ψ, φ) eine *Belegung* von (G, e), das Quadrupel $\mathfrak{F} = (G, e, \psi, \varphi)$ ein *Flußdiagramm*, und (G, e) heißt der (Struktur-) Graph des Flußdiagramms $\mathfrak{F}$. Flußdiagramme veranschaulichen wir, indem wir für alle Prüfknoten x den Pfeil, der die Kante $(x, \psi(x))$ darstellt, durch ein herangeschriebenes „ja" markieren und in jeden Arbeits- bzw. Prüfknoten die Bezeichnung bzw. Definition der zugeordneten Operation bzw. Menge hineinschreiben. Letzteres bedingt natürlich in konkreten Fällen unterschiedliche und dem jeweiligen Text angepaßte Größen der Knoten. Die den Prüfknoten zugeordneten Mengen (Relationen) notieren wir meist durch eine darstellende Aussageform und setzen,

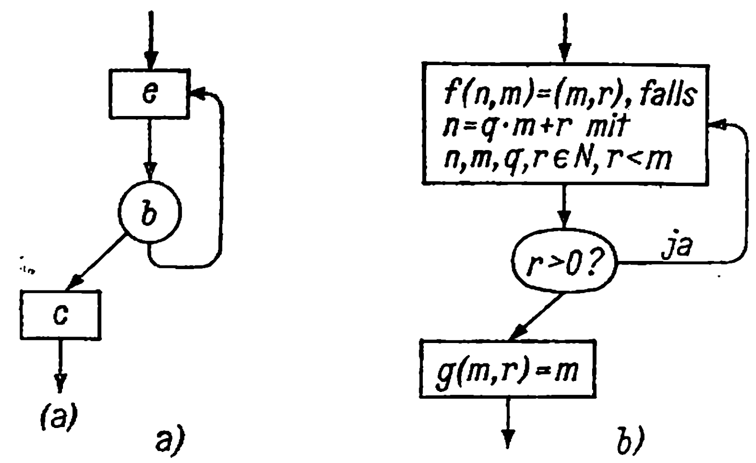


Abb. 19

um den Zusammenhang zu den beiden Ausgangskanten und dem „ja" signifikanter zu machen, ein Fragezeichen dahinter. Abb. 19b zeigt ein Flußdiagramm, das durch eine Belegung des in Abb. 19a dargestellten Strukturgraphen entstanden ist. Aus der Darstellung ist ersichtlich, daß das Flußdiagramm in einer noch zu präzisierenden Weise den (hier als bekannt vorausgesetzten) Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen m, n beschreibt. Allgemein definiert jedes Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ eine neue partielle Operation, die aus den den Arbeitsknoten des zugehörigen Graphen zugeordneten Operationen in sehr allgemeiner Weise superponiert ist:

Für beliebige Dinge x sei

$$\mathfrak{F}_1(x) = \begin{cases} \varphi(e)\ (x), & \text{falls } e \text{ Arbeitsknoten und die Operation } \varphi(e) \text{ für } x \\ & \text{definiert ist;} \\ x, & \text{falls } e \text{ Prüfknoten ist;} \\ \text{nicht definiert in allen übrigen Fällen.} & \end{cases}$$

Es sei schon $\mathfrak{F}_1(x), \ldots, \mathfrak{F}_n(x)$ definiert, und dabei seien im Graphen des Flußdiagramms $\mathfrak{F}$ der Reihe nach die Knoten $x_1 = e, x_2, \ldots, x_n$ berührt worden. Dann sei

$$x_{n+1} = \begin{cases} \text{der Nachfolger von } x_n, \text{ falls } x_n \text{ Arbeitsknoten ist;} \\ \text{der Nachfolger } \psi(x_n), \text{ falls } x_n \text{ Prüfknoten ist und } \mathfrak{F}_n(x) \in \varphi(x_n) \\ \qquad \text{gilt (d.h. falls die dem Knoten } x_n \text{ zugeordnete Relation auf } \mathfrak{F}_n(x) \text{ zutrifft);} \\ \text{der von } \psi(x_n) \text{ verschiedene Nachfolger von } x_n, \text{ falls } x_n \text{ Prüf-} \\ \qquad \text{knoten ist und } \mathfrak{F}_n(x) \notin \varphi(x_n) \text{ gilt.} \end{cases}$$

Ist x_{n+1} ein Ausgang, so sei $\mathfrak{F}(x) := \mathfrak{F}_n(x)$. Andernfalls sei

$$\mathfrak{F}_{n+1}(x) = \begin{cases} \varphi(x_{n+1})\,\mathfrak{F}_n(x), & \text{falls } x_{n+1} \text{ Arbeitsknoten und die Operation} \\ & \varphi(x_{n+1}) \text{ für } \mathfrak{F}_n(x) \text{ definiert ist,} \\ \mathfrak{F}_n(x), & \text{falls } x_{n+1} \text{ Prüfknoten ist,} \\ \text{nicht definiert in allen übrigen Fällen.} \end{cases}$$

$\mathfrak{F}(x)$ ist also — kurz gesagt — das Resultat, das man eventuell erhält, wenn man mit x in den Eingangsknoten „hineingeht" und einen (implizit durch x) eindeutig bestimmten Weg verfolgt, wobei man in jedem Arbeitsknoten die diesem zugeordnete Operation auf das zuletzt erhaltene Zwischenresultat anwendet, in jedem Prüfknoten die Fortsetzung des Weges in Abhängigkeit vom Zutreffen oder Nichtzutreffen der diesem Knoten zugeordneten Relation auf das zuletzt erhaltene Zwischenresultat wählt und das Verfahren abbricht, wenn man bei einem Ausgangsknoten ankommt (falls dies jemals der Fall ist). Die eventuelle Nichtexistenz von $\mathfrak{F}(x)$ für gegebenes x kann dadurch zustandekommen, daß ein gewisses Zwischenresultat nicht im Definitionsbereich der jeweils anzuwendenden Operation liegt oder dadurch, daß der auf Grund der Prüfungen der Zwischenresultate einzuschlagende Weg niemals zu einem Ausgangsknoten führt. Zwar wird man in konkreten Fällen nur solche Operationen durch ein Flußdiagramm miteinander verknüpfen, bei denen zumindest von der Art der Zwischenresultate die Anwendbarkeit der jeweils nächsten Operation möglich erscheint. Man wird also z. B. einen Arbeitsknoten, der mit einer Operation im Bereich der Punkte einer Ebene belegt ist, nicht mit einem Arbeitsknoten verbinden, dessen Operation höchstens auf gewisse natürliche Zahlen anwendbar ist. Da jedoch auch bei einem — etwas vage ausgedrückt —„sinnvollen" Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ im allgemeinen nicht übersehbar ist, für welche x ein Resultat $\mathfrak{F}(x)$ existiert, bietet es kaum einen Vorteil, den Begriff des Flußdiagramms von vornherein in der angedeuteten Richtung einzuschränken. (Die Bedingungen (c) und (d) in der Definition der Strukturgraphen dienen der Ausschließung gewisser mit Sicherheit unsinniger Verknüpfungen.)

Sind die den Arbeitsknoten eines Flußdiagramms $\mathfrak{F}$ zugeordneten Operationen in einem nicht näher präzisierten Sinn „effektiv ausführbar" und die den Prüfknoten von $\mathfrak{F}$ zugeordneten Relationen im gleichen Sinn „effektiv entscheidbar" (d. h., man kann von jedem Ding feststellen, ob es in der betreffenden Relation steht oder nicht), so stellt $\mathfrak{F}$ offenbar eine partielle Operation dar, die ebenfalls effektiv ausführbar ist. Andererseits ist es nach allen bisherigen Erfahrungen als sicher anzunehmen (vgl. die Hypothese von Church), daß die Verknüpfung von Operationen und Prüfrelationen mittels Flußdiagrammen die allgemeinste Methode zur Erzeugung von effektiv ausführbaren Operationen aus einem System von Operationen und Relationen ist, die als effektiv ausführbar bzw. effektiv entscheidbar angesehen werden, d. h., der Begriff des Flußdiagramms stellt eine implizite Charakterisierung dessen dar, was notwendig als algorithmisch (effektiv, konstruktiv) durchführbar anerkannt werden muß, wenn man diese Eigenschaft gewissen Grundoperationen und der Entscheidung über das Zutreffen gewisser Grundrelationen zuerkennt.

Der bisher benutzten (allgemeinsten) Erklärung der durch ein Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ definierten partiellen Operation lag die Vorstellung zugrunde, daß ein Eingabeding x als „Arbeitsgegenstand" tatsächlich in $\mathfrak{F}$ von Knoten zu Knoten einen Weg zurücklegt und sich dabei Schritt für Schritt ändert. Für innermathematische Anwendungen ist jedoch folgende speziellere Situation charakteristisch:

Der sich Schritt für Schritt ändernde Arbeitsgegenstand ist ein „Speicher" (in sehr allgemeinem Sinn), dessen jeweiliger Inhalt aus einzelnen Komponenten besteht, die mittels „Addressen" aufrufbar sind und in dem zu Beginn unter endlich vielen Adressen $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ die Komponenten der Eingabe x vorliegen. Jede einem Prüfknoten von $\mathfrak{F}$ zugeordnete Prüfrelation (die eigentlich auf den gesamten Arbeitsgegenstand, d. h. den Speicher samt Inhalt anzuwenden ist) bezieht sich auf endlich viele Adressen. Ihre effektive Entscheidbarkeit bedeutet, daß man das n-tupel der zur Zeit unter diesen Adressen gespeicherten Dinge dieser Prüfung unterwerfen kann. Analog bezieht sich jede (eigentlich auf den gesamten Speicher anzuwendende) einem Arbeitsknoten von $\mathfrak{F}$ zugeordnete Operation auf endlich viele Adressen. Ihre effektive Ausführbarkeit bedeutet, daß man die unter den angegebenen Adressen gespeicherten Dinge „abrufen", an ihnen die angegebene Operation ausführen und das Resultat unter der angegebenen Adresse wieder abspeichern kann. Dabei ist ein Abrufen mit oder ohne Löschen möglich. Im ersten Fall (der zum Beispiel bei „materieller Produktion" eintritt) gehen die Zwischenresultate bei weiterer Bearbeitung verloren. Die freiwerdenden Adressen können neu besetzt werden. Im zweiten Fall bleiben alle jemals auftretenden Zwischenresultate erhalten. Jedes neue Zwischenresultat benötigt dann eine neue Adresse, d. h., der Speicher muß im allgemeinen potentiell unendlich sein. Eventuelles Endresultat der Anwendung von $\mathfrak{F}$ auf einen Speicher mit ursprünglichem Inhalt x ist eigentlich der gesamte letzte Speicherinhalt, in Wirklichkeit meist nur der Inhalt endlich vieler Adressen unter Vernachlässigung aller für das gewünschte Resultat uninteressanten Zwischenrechnungen.

Um dem Leser eine Vorstellung von der großen Allgemeinheit des hier skizzierten Prinzips eines durch ein Flußdiagramm bearbeiteten Speichers zu vermitteln, sei auf folgende Beispiele bzw. Spezialfälle verwiesen:

1. Es gibt nur eine Adresse, und der Speicher enthält nur ein einziges Ding x. In jedem Schritt wird der jeweilige Speicherinhalt entnommen, geprüft oder bearbeitet und unter derselben Adresse wieder im Speicher abgelegt. — Diese Überlegung zeigt, daß der ursprüngliche Ansatz eines einzelnen durch ein Flußdiagramm bearbeiteten Dinges seinerseits ein Spezialfall des bearbeiteten Speichers ist.

2. Der Speicher ist in numerierte Zellen eingeteilt, deren jede eine Zahl speichern kann. Die Adressen sind die Nummern der Zellen. Die Arbeitsweise entspricht der realer Rechenautomaten.

3. Der Speicher ist ein großer Kasten, in dem endlich viele materielle Dinge liegen, denen Adressen in Form von beschrifteten Etiketten beigefügt sind. Ein Arbeitsschritt besteht darin, zunächst die dafür benötigten Teile anhand der Etiketten im Kasten zu suchen, mit ihnen eine Operation auszuführen (z. B. Verbinden zweier

Teile, Bohren eines Loches in ein Teil), das Resultat mit einem Etikett zu versehen und in den Kasten zurückzulegen.

4. Der Speicher ist ein Zeichenblatt, auf dem gewisse Dinge in Form gezeichneter Punkte, Geraden, Kreise gespeichert sind, denen Adressen in Form von Beschriftungen (z. B. $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_{17}$, $\mathfrak{g}_3$) beigefügt sind. Ein Arbeitsschritt besteht darin, die Stücke mit den angegebenen Adressen im Speicher zu suchen, an ihnen eine geometrische Operation auszuführen und das Resultat mit einer neuen Adresse (Beschriftung) laut Anweisung des vorliegenden Arbeitsknotens zu versehen.

In diesem Buch wird uns hauptsächlich der zuletzt beschriebene Fall beschäftigen. Da jedoch die spezielle Art und Weise der Ausführung von Prüf- und Arbeitsschritten für die weiteren Untersuchungen über Flußdiagramme in diesem Kapitel ohne Bedeutung ist, kehren wir hier zunächst zur ursprünglichen Vorstellung zurück.

Flußdiagramme heißen *äquivalent* ($\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$), wenn sie die gleiche partielle Operation darstellen, d. h. $\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$, wenn für jedes Ding x genau dann $\mathfrak{F}_1(x)$ existiert, wenn $\mathfrak{F}_2(x)$ existiert und im Fall der Existenz $\mathfrak{F}_1(x) = \mathfrak{F}_2(x)$ ist.

Es seien (G_1, e_1), (G_2, e_2) Strukturgraphen. Eine Abbildung f von $K(G_2)$ auf $K(G_1)$ heißt eine *Darstellung von* (G_1, e_1) *in* (G_2, e_2), wenn gilt:

(2a) $f(e_2) = e_1$.

(2b) f bildet die Arbeitsknoten von G_2 auf die Arbeitsknoten von G_1, die Prüfknoten von G_2 auf die Prüfknoten von G_1 und die Ausgänge von G_2 auf die Ausgänge von G_1 ab.

(2c) Ist $(x, y) \in G_2$, so ist $\big(f(x), f(y)\big) \in G_1$.

(2d) f ordnet den beiden Nachfolgern eines Prüfknotens die beiden Nachfolger des Bildknotens zu.

Gibt es eine solche Darstellung, so heißt (G_1, e_1) *in* (G_2, e_2) *darstellbar*.

Ist f eine Darstellung von (G_1, e_1) in (G_2, e_2) und (ψ, φ) eine Belegung von (G_1, e_1), so sei für jeden Prüfknoten z von G_2 $\psi_f(z)$ derjenige seiner beiden Nachfolger, der durch f auf $\psi(z)$ abgebildet wird. Ferner ordnet die Verkettung $\varphi \circ f$ der Abbildungen φ und f jedem Prüfknoten von G_2 eine Menge und jedem Arbeitsknoten von G_2 eine Operation zu. Daher ist $(\psi_f, \varphi \circ f)$ eine Belegung von (G_2, e_2). Ist $\mathfrak{F} = (G_1, e_1, \psi, \varphi)$, so sei $\mathfrak{F}^f := (G_2, e_2, \psi_f, \varphi \circ f)$. Auf Grund der Definition der Darstellung verifiziert man nun leicht:

Satz 1. *Für jedes Ding x und jede natürliche Zahl n existiert $\mathfrak{F}_n(x)$ genau dann, wenn $\mathfrak{F}^f_n(x)$ existiert, und im Fall der Existenz ist $\mathfrak{F}_n(x) = \mathfrak{F}^f_n(x)$. Es gilt ferner: $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}^f$.*

Strukturgraphen (G_1, e_1), (G_2, e_2) heißen *isomorph*, wenn eine eineindeutige Abbildung f von $K(G_1)$ auf $K(G_2)$ existiert mit $f(e_1) = e_2$ und $(x, y) \in G_1$ genau dann, wenn $\big(f(x), f(y)\big) \in G_2$. Isomorphe Strukturgraphen sind „nicht wesentlich verschieden“. In der Tat betreffen verschiedene Betrachtungen in diesem Abschnitt eigentlich weniger Strukturgraphen als Klassen untereinander isomorpher Strukturgraphen.

Offenbar ist jeder Isomorphismus eine Darstellung. Da ferner, wie man leicht nachweist, die Verkettung von Darstellungen wieder eine Darstellung ist, gilt insbesondere:

Ist ein Strukturgraph S_1 in einem Strukturgraphen S_2 darstellbar und ist S_1 isomorph zu S_1' und S_2 isomorph zu S_2', so ist auch S_1' in S_2' darstellbar.

Durch die Forderung minimaler Knotenzahl ist bis auf Isomorphie eindeutig der als Arbeitsbaustein bezeichnete Strukturgraph $(\{(e, a)\}, e)$ charakterisiert. Strukturgraphen der Form $(\{(e_1, a_1), (e, a_2)\}, e)$ bezeichnen wir als Prüfbausteine (Abb. 20).

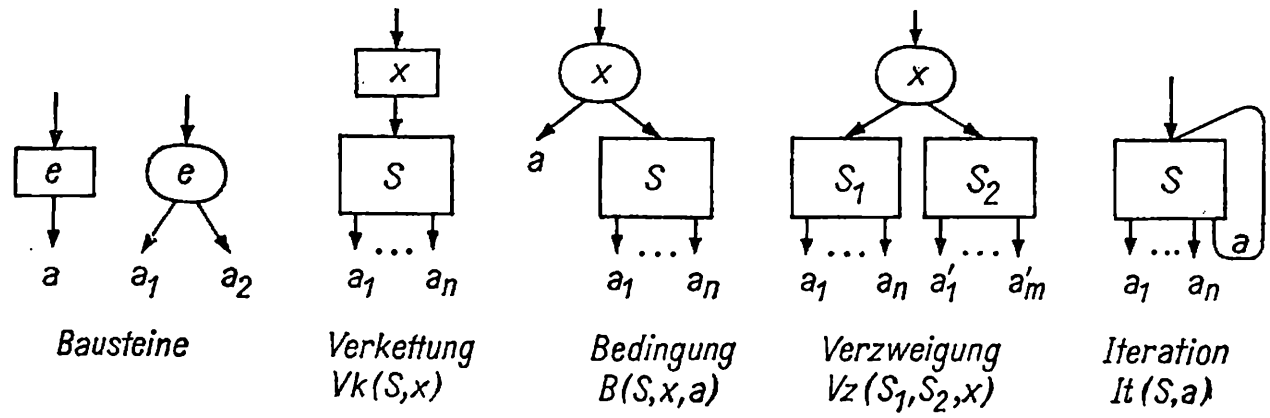


Abb. 20

Ist $S = (G, e)$ ein beliebiger Strukturgraph, so sei für $x \notin K(G)$

$$Vk(S, x) := \big(G \cup \{(x, e)\}, x\big).$$

Für $x \notin K(G)$, $a \notin K(G)$ sei

$$B(S, x, a) := \big(G \cup \{(x, e), (x, a)\}, x\big).$$

Ist $S' = (G', e')$ ein weiterer Strukturgraph mit $K(G) \cap K(G') = \emptyset$, $x \notin K(G)$, $x \notin K(G')$, so sei

$$Vz(S, S', x) := \big(G \cup G' \cup \{(x, e), (x, e')\}, x\big).$$

Hat S wenigstens zwei Ausgänge und ist a einer dieser Ausgänge, so sei

$$It(S, a) := \big(G \setminus \{(x, a) \colon x \in K(G)\} \cup \{(x, e) \colon (x, a) \in G\}, e\big).$$

Die Operationen $Vk, B, Vz, It,$ die in Abb. 20 veranschaulicht sind, heißen *Verkettung* bzw. *Bedingung* bzw. *Verzweigung* bzw. *Iteration.* Das Resultat ihrer Anwendung auf einen bzw. zwei Strukturgraphen ist offenbar wieder ein Strukturgraph. Vk erhöht die Anzahl der Arbeitsknoten um 1, B und Vz erhöhen die Anzahl der Prüfknoten um 1, It reduziert die Zahl der Ausgänge um 1, B erhöht die Zahl der Ausgänge um 1 usw.

Wir definieren die Menge $\boldsymbol{I}$ der induktiven Strukturgraphen als die kleinste Menge, die alle Graphen vom Bausteintyp enthält und bezüglich der Operationen Vk, B, Vz und It abgeschlossen ist, d. h.

(3a) *Jeder Baustein ist Element von* $\boldsymbol{I}$.

(3b) *Ist* $S \in \boldsymbol{I}$, *so ist auch* $Vk(S, x) \in \boldsymbol{I}$ *für* $x \notin K(G)$ *und* $B(S, x, a) \in \boldsymbol{I}$ *für* $x, a \notin K(G)$ *und* $It(S, a) \in \boldsymbol{I}$, *falls* S *mindestens zwei Ausgänge hat und* a *ein Ausgang von* S *ist.*
Sind $S_1, S_2 \in \boldsymbol{I}$, *so ist auch* $Vz(S_1, S_2, x) \in \boldsymbol{I}$, *falls* $K(S_1) \cap K(S_2) = \emptyset$ *und* $x \notin K(S_1) \cup K(S_2)$.

(3c) *Aus $S \in \boldsymbol{I}$ folgt: S ist Baustein, oder es gibt ein $S' \in \boldsymbol{I}$, so daß $S = Vk(S', x)$ oder $S = B(S', x, a)$ oder $S = It(S', a)$ mit gewissen x, a, oder es gibt $S_1, S_2 \in \boldsymbol{I}$, so daß $S = Vz(S_1, S_2, x)$ mit einem gewissen x.*

Abb. 21a (siehe S. 116) zeigt, daß nicht jeder Strukturgraph induktiv ist. Es gilt jedoch

Satz 2. *Jeder Strukturgraph ist in einem induktiven Strukturgraphen darstellbar.*

Zum Beweis zunächst folgende Vorbetrachtung: Ist $S = (G, e)$ ein Strukturgraph und e' ein Nachfolger von e, der kein Ausgang ist, so sei $K' = K(e')$ die Menge derjenigen Knoten von G, die von e' auf einem Wege erreichbar sind, der e höchstens als letztes Glied enthält. Ist e Arbeitsknoten, d. h. e' der einzige Nachfolger von e, so ist $K' = K(G)$, falls e von e' erreichbar ist, andernfalls ist $K' = K(G) \setminus \{e\}$. Ist e ein Prüfknoten, sind e' und e'' die beiden Nachfolger von e und ist $K'' = K(e'')$, so haben K' und K'' im allgemeinen auch dann Knoten gemeinsam, wenn weder e'' von e' noch e' von e'' erreichbar ist.

Unter unserer Voraussetzung, daß der betrachtete Nachfolger e' von e kein Ausgang ist, ist

$$S' = S(e') = \big((G \cap (K' \times K')) \setminus \{(e, e')\}, e'\big)$$

wieder ein Strukturgraph. Falls e in S' überhaupt noch vorkommt, d. h. falls e von e' erreichbar ist, so ist e in S' nur noch Ausgang, d. h., die Anzahl $n(S')$ der Prüf- und Arbeitsknoten in S' ist mindestens um 1 kleiner als die betreffende Anzahl $n(S)$ in S $\big(n(S') = n(S) - 1$, falls e Arbeitsknoten ist$\big)$.

Nun werden wir Satz 2 durch Induktion über $n(S)$ beweisen: Ist $n(S) = 1$, so ist S offenbar ein Baustein, also selbst induktiv. Satz 2 sei schon für alle Strukturgraphen mit $n(S) \leqq n$ $(n \geqq 1)$ bewiesen, und es sei $S = (G, e)$ ein Strukturgraph mit $n(S) = n + 1$.

Fall 1: e ist Arbeitsknoten. Der Nachfolger e' von e ist kein Ausgang, folglich ist S' ein Strukturgraph mit $n(S') = n$. Daher existiert nach Induktionsannahme eine Darstellung f von S' in einem induktiven Strukturgraphen S_1 (wobei wir annehmen können, daß e nicht in S_1 vorkommt; das kann man erreichen, indem man nötigenfalls statt S_1 einen dazu isomorphen Graphen nimmt). $S_2 = Vk(S_1, e) \in \boldsymbol{I}$.

Fall 1a: e ist von e' in S nicht erreichbar. Dann ist

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in K(S_1), \\ e & \text{für } x = e \end{cases}$$

eine Darstellung von S in S_2.

Fall 1b: e ist in S von e' erreichbar. Dann ist e in S' ein Ausgang. Es seien $e_1, \ldots, e_m$ diejenigen Ausgänge von S_2, für die $f(e_i) = e$ ist. Da S' außer e mindestens noch einen Ausgang a hat, hat auch S_2 mindestens einen von $e_1, \ldots, e_m$ verschiedenen Ausgang. Daher ist $S_3 := It\big(\ldots (It(S_2, e_1), \ldots), e_n\big)$

definiert und ein induktiver Strukturgraph, und die wie oben definierte Abbildung f ist eine Darstellung von S in S_3.

Fall 2: e ist Prüfknoten. Die beiden Nachfolger e' und e'' von e in S sind beide keine Ausgänge. Dann sind S' und S'' Strukturgraphen mit $n(S') \leqq n$, $n(S'') \leqq n$. Daher existieren nach Induktionsannahme Darstellungen f' von S' in einem Graphen

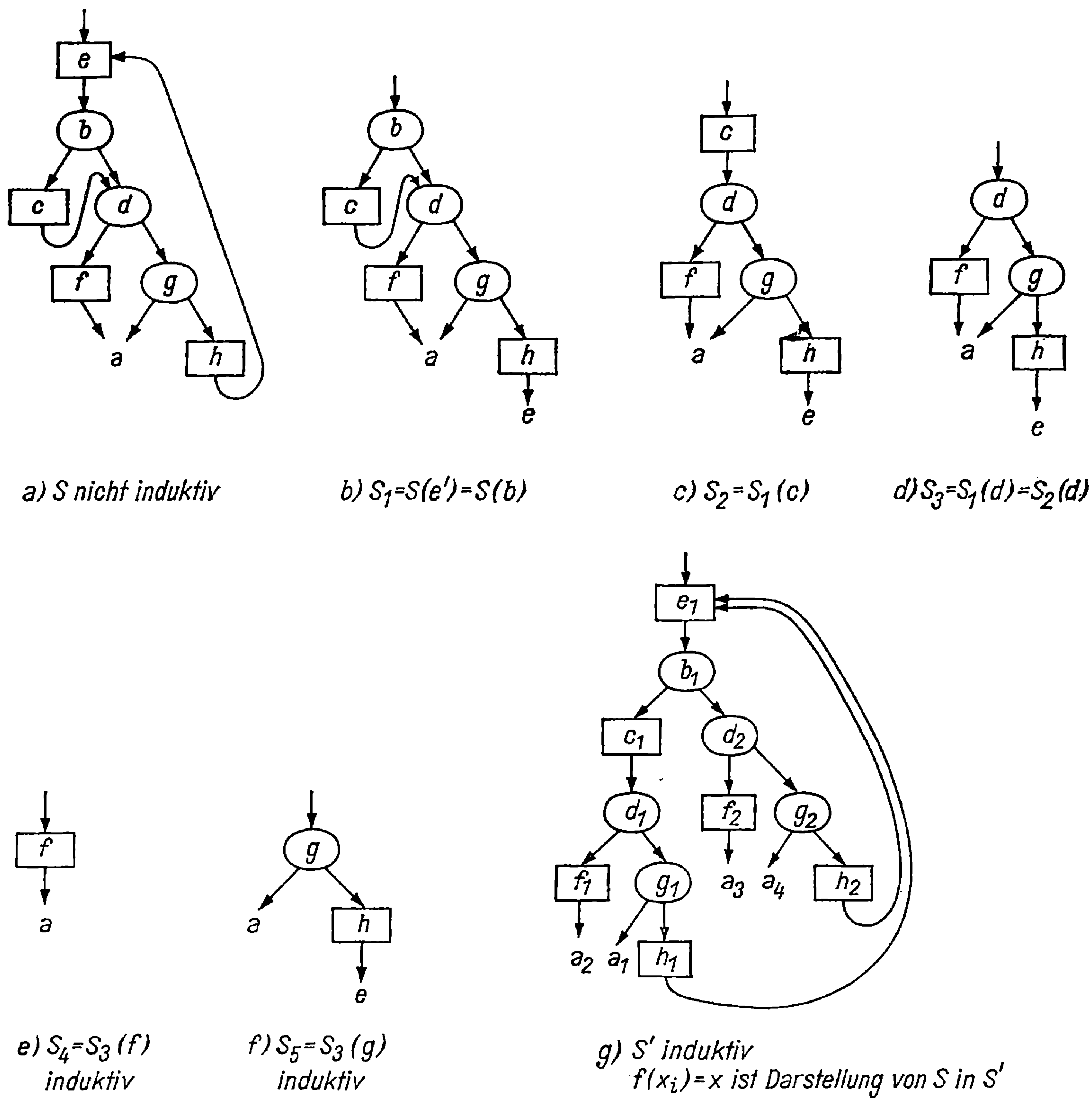


Abb. 21

$S_1' \in \boldsymbol{I}$ bzw. f'' von S'' in einem Graphen $S_1'' \in \boldsymbol{I}$. Dabei können wir annehmen, daß S_1' und S_1'' keinen Knoten gemeinsam haben und daß auch beide e nicht enthalten. $S_2 = Vz(S_1', S_1'', e) \in \boldsymbol{I}$.

Fall 2a: e ist weder von e' noch von e'' erreichbar. Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x \in K(S_1'), \\ f''(x) & \text{für } x \in K(S_1''), \\ e & \text{für } x = e \end{cases}$$

eine Darstellung von S in S_2.

Fall 2b: e ist von wenigstens einem der Nachfolger e', e'' erreichbar. Dann ist e in S' oder in S'' (oder in beiden) Ausgang. $e_1, \ldots, e_m$ seien diejenigen Ausgänge von S_1' bzw. S_1'', die durch f' bzw. f'' auf e abgebildet werden. Da wenigstens einer der Graphen S', S'' einen von e verschiedenen Ausgang hat, hat S_2 einen von $e_1, \ldots, e_m$ verschiedenen Ausgang. Daher ist

$$S_3 = It\big(\cdots(It(S_2, e_1), \cdots), e_m\big)$$

definiert und $S_3 \in \boldsymbol{I}$ und die wie oben definierte Abbildung f eine Darstellung von S in S_3.

Der Leser wird nun in der Lage sein, den Beweis des noch fehlenden Falles 3 (e ist Prüfknoten, und einer seiner beiden Nachfolger ist ein Ausgang) selbst zu ergänzen.

Der Beweis des Satzes 2 liefert ein Verfahren, durch das man zu einem beliebigen Strukturgraphen S eine Darstellung f in einem induktiven Strukturgraphen effektiv konstruieren kann. Ein Beispiel ist in Abb. 21 dargestellt.

Ein Flußdiagramm heißt *induktiv*, wenn sein Strukturgraph induktiv ist. Die Sätze 1 und 2 bedeuten zusammen:

Die induktiven Flußdiagramme bilden ein vollständiges Repräsentantensystem (bezüglich der Äquivalenz) für alle möglichen Flußdiagramme, die aus einem gegebenen System von Grundoperationen und Prüfrelationen erzeugt werden können. Dies gestattet es, induktive Definitions- und Beweismethoden (die sich auf (3c) stützen) bei Untersuchungen über Flußdiagramme anzuwenden.

Teil II. Allgemeine Theorie der geometrischen Konstruktionen

7. Konstruktionsinstrumente

7.1. Reale und ideale Konstruktionsmittel

Die Bezeichnung *Konstruktionsmittel* verwenden wir als Oberbegriff für die drei zur Durchführung einer konkreten geometrischen Konstruktion erforderlichen materiellen Hilfsmittel:

a) *Zeichenfläche*, z. B. Papierbogen, glatte Metallfläche, Wandtafel;

b) *Zeichengerät*, z. B. Bleistift, Reißnadel, Tafelkreide;

c) *Konstruktionsinstrumente*, z. B. Lineal, Zirkel, Winkeldreieck.

Gegenstand der mathematischen Behandlung geometrischer Konstruktionen waren ursprünglich konkrete Konstruktionen, die auf *realen Zeichenflächen* mit *realen Zeichengeräten* und *realen Konstruktionsinstrumenten* durchgeführt werden. Um aber überhaupt mathematische Methoden anwenden zu können, sind — wie überall, wo die Mathematik mit der Praxis konfrontiert wird — gewisse mehr oder weniger schwerwiegende Abstraktionen bzw. Idealisierungen der wirklichenBedingungen erforderlich. Diese Abstraktionen betreffen die Zeichenfläche, die Zeichengeräte und die Konstruktionsinstrumente, und das Resultat derartiger Abstraktionen bezeichnen wir als *ideale Zeichenflächen, ideale Zeichengeräte* bzw. *ideale Konstruktionsinstrumente.*

Es wird angenommen, daß die Zeichenfläche bezüglich der auf ihr gezeichneten Punkte, Geraden, Kreise bzw. sonstigen Kurven ein exaktes Modell einer mathematisch definierten Struktur ist. In der Regel ist diese Struktur die euklidische Ebene, in bescheidenerem Umfang hat man sich auch mit Konstruktionen in nichteuklidischen Ebenen, auf Kugeloberflächen u. ä. beschäftigt. Die die Zeichenfläche betreffenden Idealisierungen schließen ferner im allgemeinen die Vernachlässigung der beschränkten Ausdehnung realer Zeichenflächen ein, d. h., es wird angenommen, daß alle im Laufe einer Konstruktion entstehenden Schnittpunkte „zugänglich" sind. Ein besonderer Zweig der Theorie der geometrischen Konstruktionen befaßt sich demgegenüber mit der Ausführbarkeit von Konstruktionen in beschränkten Teilen der euklidischen Ebene. Hierunter fallen neben Konstruktionen auf nach außen beschränkten, z. B. rechteckigen Zeichenflächen auch Konstruktionen auf Zeichenflächen mit „Löchern“ wie sie z. B. in der Feldmessung auftreten, wo Seen, Sümpfe u. ä. zu umgehen sind. Wenn auch die Voraussetzungen der Theorie der Konstruktionen in beschränkten Teilen der Ebene den wirklichen Verhältnissen besser angepaßt sind als die sonst üblichen Annahmen (in ähnlicher Weise, wie z. B. die spezielle Relativitätstheorie die Realität besser modelliert als die Newtonsche Mechanik), so muß doch gesagt werden, daß auch die Zeichenflächen dieser Theorie ideale Zeichenflächen sind.

Die Idealisierung der Zeichengeräte, die eng mit der jeweiligen Zeichenfläche und deren Idealisierung verknüpft sind, schließt ein, daß die gezeichneten Punkte ausdehnungslos — aber dennoch für das Auge des Konstrukteurs erkennbar sind, analog, daß die gezeichneten Kurven eindimensional sind und sich ihre Schnittpunkte exakt bestimmen lassen. Ein Analogon zur Theorie der Konstruktionen in beschränkten Gebieten wäre eine Theorie der Konstruktionen, in der statt mit Punkten etwa mit konvexen Punktmengen kleinen Durchmessers und statt mit Geraden mit Streifen endlicher Breite operiert wird.

Bezüglich der Konstruktionsinstrumente wird angenommen, daß die mit ihrer Hilfe gezeichneten Gebilde mathematisch genaue Kurven bestimmter Art sind, daß also z. B. die mit dem Lineal gezogenen Linien Geraden im Sinne der euklidischen Geometrie und die mit dem Zirkel gezeichneten Kurven exakte Kreise sind. In bezug auf diese Annahmen spricht man vom *idealen Lineal, idealen Zirkel* usw. Diese Begriffe schließen in der Regel weiterhin ein, daß man mit dem Lineal beliebig weit entfernte und auch beliebig dicht benachbarte Punkte durch einfaches Anlegen verbinden und daß man mit dem Zirkel Kreise von beliebigem (insbesondere beliebig großem und beliebig kleinem) Radius schlagen kann. Ein Teilgebiet der Theorie der Konstruktionen beschäftigt sich damit, wie sich die endliche Länge realer Lineale und die begrenzte Spannweite realer Zirkel auf die Ausführbarkeit von Konstruktionen auswirken. Aber auch das *kurze Lineal* und der *beschränkte Zirkel* dieser Theorie sind — obwohl der Zeichenpraxis näher — nach unserer Terminologie ideale Instrumente.

Die klassische Theorie der geometrischen Konstruktionen hat sich vor allem mit den Instrumenten Lineal, Parallellineal, (Lineal mit zwei parallelen Kanten von festem oder einstellbarem Abstand), Winkellineal (Lineal mit zwei sich schneidenden Kanten, die einen festen oder einstellbaren Winkel bilden), markiertes Lineal (Lineal mit einer darauf markierten festen Strecke) und Zirkel beschäftigt. Auch das Studium von Mechanismen zur Erzeugung ebener Kurven (z. B. Ellipsenzirkel verschiedener Ausführung; vgl. [3]) kann man ihr zurechnen. Gelegentlich sind Untersuchungen über recht ausgefallene, aber mathematisch interessante Konstruktionsmittel (z. B. Falten von durchscheinendem Papier [2, § 12]) angestellt worden. Gemeinsam ist allen diesen Untersuchungen, daß die betrachteten Instrumente bzw. Sätze von mehreren Instrumenten (z. B. Zirkel und Lineal) gewissermaßen axiomatisch charakterisiert werden, indem man festlegt, welche abstrakten Operationen (in der Regel im Bereich der Punkte, Geraden und Kreise der betrachteten Ebene) mit ihnen ausgeführt werden können bzw. dürfen. Dadurch werden alle mit der technischen Realisierung zusammenhängenden Fragen bereits im Anfangsstadium der Untersuchung eliminiert. Jedes reale Instrument, mit dem die festgelegten Operationen ausgeführt werden können, ist „ein Modell" des betrachteten idealen Instruments. Außer dem üblichen hölzernen bzw. metallenen Lineal ist z. B. auch eine aus einer Schnur und zwei Stiften bestehende Vorrichtung ein Modell des idealen Lineals. Auch ein Mensch, der die Fähigkeit besitzt, mit für den beabsichtigten Zweck hinreichender Genauigkeit Geraden aus freier Hand zu zeichnen, ist ein Modell des idealen Lineals.

Bei der anschließenden Betrachtung der einzelnen Instrumente werden wir feststellen, daß einige ideale Instrumente die Ausführung mehrerer Operationen gestatten, während andererseits gewisse zur Durchführung der Konstruktionen nötige Einzelschritte (vornehmlich die visuelle Bestimmung von Schnittpunkten) keines besonderen Instrumentes bedürfen. Es besteht also im allgemeinen keine eineindeutige Zuordnung zwischen den idealen Instrumenten eines gewissen Instrumentensatzes und den Operationen, die als Einzelschritte von Konstruktionen zulässig sind. Der entscheidende Ansatz für die weitere mathematische Untersuchung eines gegebenen Instrumentensatzes ist daher die Aufstellung des Systems der zulässigen Grundoperationen (Einzelschritte der Konstruktionen). Diesen Vorgang bezeichnen wir als *logische Analyse* des gegebenen Systems von idealen Instrumenten und sein Resultat als einen *abstrakten Instrumentensatz*. Im nächsten Abschnitt werden wir eine größere Anzahl klassischer Instrumentensätze logisch analysieren. Da wir uns danach nur noch auf die herauspräparierten abstrakten Instrumentensätze beziehen werden, treten die Begriffe „reales Konstruktionsinstrument" und „ideales Konstruktionsinstrument" in der eigentlichen Theorie der geometrischen Konstruktionen nicht mehr auf. Es sei noch bemerkt, daß man, von rein theoretischen Überlegungen ausgehend, ein gewisses System von geometrischen Operationen (d. h. einen abstrakten Instrumentensatz) zum Gegenstand eines Zweiges der Theorie der geometrischen Konstruktionen machen und nachträglich nach technischen Realisierungen dieses abstrakten Instrumentensatzes fragen kann.

7.2. Logische Analyse und Klassifikation von Instrumentensätzen

Wir erinnern daran (vgl. Abschnitt 2.5), daß Grundlage für die Definition einer (eventuell partiellen) Operation in einer axiomatischen Theorie $\mathscr{T}$ die Gültigkeit einer BEE (bedingten eindeutigen Existenzaussage) ist:

$$\textit{Ist } \bigwedge \mathrm{x}\left(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee !!\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\right) \in \mathscr{T}, \textit{ so ist}$$
$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}',\mathrm{H}''}(\mathrm{x}) := \iota \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \textit{ definiert für alle } \mathrm{x} \textit{ mit } \mathrm{H}'(\mathrm{x}).$$

Ist andererseits die (partielle) Operation F Grundbegriff einer axiomatischen Theorie, so ist $\mathrm{F} = \mathrm{F}_{\mathrm{H}',\mathrm{H}''}$, wenn man für H′ den Ausdruck $\bigvee \mathrm{y}\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ und für H″ den Ausdruck $F(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ setzt. Jede Grundoperation oder definierbare Operation F wird also durch ein Paar H′, H″ von Ausdrücken der zugrundeliegenden Sprache beschrieben, wobei H′ den Definitionsbereich und H″ die charakteristische Beziehung zwischen Urbild- und Bildelement angibt. Der Definitionsbereich muß dabei nicht notwendig maximal sein. Ist

$$\bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee!!\ \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big) \in \mathscr{T}$$

und H ein beliebiger Ausdruck, in dem gewisse der Komponenten von x vollfrei vorkommen, so gilt in $\mathscr{T}$ erst recht

$$\bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}' \wedge \mathrm{H} \rightarrow \bigvee!!\ \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big).$$

Wir nennen $\mathrm{F}_{\mathrm{H}' \wedge \mathrm{H}, \mathrm{H}''}$ die *durch* H *eingeschränkte Operation* $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$.

Die logische Analyse eines idealen Instrumentensatzes besteht in der Angabe des Systems $\mathrm{S} = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n)$ derjenigen Operationen, die durch die einzelnen Instrumente bzw. die Art, in der sie benutzt werden „dürfen", realisiert werden. Umgekehrt werden wir jedes derartige in einer geometrischen Theorie definierbare System als einen (abstrakten) Instrumentensatz bezeichnen. Die hierdurch vollzogene Präzisierung des Begriffs logische Analyse schließt ein, daß nur solche Operationen mit den idealen Instrumenten betrachtet werden können, die im Rahmen der gewählten Formalisierung bzw. Axiomatisierung der Geometrie definierbar sind. Wie die folgenden Beispiele zeigen werden, ist die Betrachtung der meisten traditionellen geometrischen Instrumentensätze gerade wegen dieser notwendigen Einschränkung mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden.

Die logische Analyse ermöglicht die Klassifikation der betrachteten Instrumentensätze nach verschiedenen Gesichtspunkten, die sich dann von den abstrakten Istrumenten (-sätzen) auf ihre „Modelle", die idealen bzw. realen Instrumente (Instrumentensätze) übertragen lassen. Auf vordergründige Merkmale wie die Unterscheidung von partiellen und vollen Operationen, die Stellenzahl usw., gehen wir nicht weiter ein und lenken die Aufmerksamkeit auf die beiden folgenden Einteilungsprinzipien:

Klassifikation nach den in der Definition vorkommenden Grundbegriffen: Instrumente, die allein mittels Inzidenz definierbar sind, heißen *Inzidenzinstrumente,* Instrumente, die allein mittels „zwischen" definierbar und nicht schon Inzidenzinstrumente sind, heißen *affine Instrumente.* Instrumente, zu deren Definition der Kongruenzbegriff oder ein gleichwertiger Grundbegriff erforderlich ist, heißen *Kongruenzinstrumente.* Ein Instrumentensatz heißt *Inzidenzinstrumentensatz,* wenn alle seine Komponenten Inzidenzinstrumente sind, *affiner Instrumentensatz,* wenn alle seine Komponenten affine Instrumente bzw. Inzidenzinstrumente sind und er nicht schon ein Inzidenzinstrumentensatz ist. Enthält ein Instrumentensatz wenigstens ein Kongruenzinstrument, so heißt er ein *Kongruenzinstrumentensatz.*

Klassifikation nach dem Auftreten von Konstanten: Gibt es für ein abstraktes Instrument F Ausdrücke H′, H″, in denen keine Konstanten vorkommen, so daß $\mathrm{F} = \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ ist, so heißt F ein *freies Instrument.* Andernfalls heißt F *beschränkt.*

Als erstes Beispiel wollen wir verschiedene Varianten der Konstruktionen mit dem Lineal allein logisch analysieren.

Das abstrakte Lineal L ist durch

$$L(p_1, p_2) := \iota g(p_1 \in g \wedge p_2 \in g), \quad \text{falls} \quad p_1 \neq p_2,$$

definiert. Zum Instrumentensatz „Lineal allein“ gehört jedoch notwendig als zweite Elementaroperation die durch

$$S_1(g_1, g_2) := \iota p(p \in g_1 \wedge p \in g_2), \quad \text{falls} \quad g_1 \text{ schneidet } g_2,$$

definierte erste Schnittpunktoperation (vgl. Abschnitt 5.1). L und S_1 sind freie Inzidenzinstrumente und können in jeder affinen oder projektiven Inzidenzebene betrachtet werden. Für das Folgende betrachten wir jedoch euklidische Ebenen. Wir erweitern die Sprache durch Konstanten a, b für abstrakte Streckenlängen. $L_{a\infty}$ sei die durch $a < \overline{p_1p_2}$ eingeschränkte, L_{0b} die durch $\overline{p_1p_2} < b$ eingeschränkte, L_{ab} die durch die Konjunktion beider Ausdrücke eingeschränkte Operation L. Offenbar sind $L_{a\infty}$, L_{0b}, L_{ab} verschiedene Varianten des „beschränkten Lineals“ und in der Tat im Sinne unserer Terminologie beschränkte Instrumente. Auch der freien Schnittpunktoperation S_1 kann man — von praktischen Vorstellungen ausgehend — beschränkte Operationen gegenüberstellen: Wir erweitern z. B. die Sprache durch eine Winkelkonstante α und definieren S_1^α als die durch $\sphericalangle\, g_1, g_2 \geqq \alpha$ eingeschränkte Operation, d. h., wir sehen nur noch Schnittpunkte von Geraden, die sich nicht zu flach schneiden, als unmittelbar (durch Hinsehen) konstruierbar an. Naturgemäß entsteht nun die Frage, ob und in welchem Sinne die Instrumentensätze (L, S_1) und (L_{ab}, S_1^α) gleichwertig sind. Der Leser wird bemerken, daß in die logische Analyse beschränkter Instrumente viel Willkürliches eingeht bzw. sich eine verwirrende Vielfalt von Möglichkeiten anbietet. Man könnte das abstrakte Lineal z. B. statt durch $a < \overline{p_1p_2}$ ebensogut durch $a \leqq \overline{p_1p_2}$ einschränken usw. Ist die obere Schranke *b* für die Anwendbarkeit des Lineals L_{ab} noch durch die Länge eines betrachteten realen Lineals gegeben, so ist die untere Schranke völlig subjektiv. Letzteres gilt auch für den Grenzwinkel α, von dem ab man Schnittpunkte nicht als korrekt bestimmbar ansehen will.

Ein Beispiel dafür, daß die in der Definition von beschränkten Instrumenten auftretenden Konstanten nicht notwendig Strecken, Winkel oder ähnliche abgeleitete Dinge sein müssen, ist das in einem Punkt p_0 befestigte (sogenannte „hängende“) Lineal:

$$L_{p_0}(p) := \iota g(p_0 \in g \wedge p \in g), \quad \text{falls} \quad p \neq p_0.$$

Zur Präzisierung der Konstruktionen mit dem Lineal in beschränkter Ebene erweitern wir die Sprache der Geometrie durch das einstellige Punktprädikat $p \in M$, wo M den zur Verfügung stehenden Teil[1]) der Zeichenebene bezeichnet. In vielen konkreten Fällen kann man $p \in M$ durch detailiertere Ausdrücke, in denen aber wieder Konstanten auftreten, ersetzen, z. B. durch $\overline{pp_0} < r$, wo p_0 eine Punktkonstante und r eine Streckenkonstante ist. Nun sei L^M die durch $p_1 \in M \wedge p_2 \in M$ eingeschränkte Operation L und S_1^M die durch $S_1(g_1, g_2) \in M$ eingeschränkte Operation S_1. Den In-

[1]) hier als konvex vorausgesetzten

strumentensatz (L^M, S_1^M) bezeichnen wir als *Lineal in M*. Es ist interessant, daß die Beschränkung, die scheinbar die Zeichenfläche betraf, sich bei der logischen Analyse als Beschränkung der Instrumente erweist.

Bei der traditionellen Behandlung der geometrischen Konstruktionen sieht man meist nur Punkte als Ausgangsgrößen und Resultat von Konstruktionen an und wertet die im Laufe der Konstruktion auftretenden Geraden und Kreise nur als Hilfslinien ohne eigene Bedeutung. Als Rechtfertigung für diese vor allem die algebraische Analyse der Konstruktionsaufgaben vereinfachende Einschränkung wird angegeben:

(1a) Jede zu den Ausgangsgrößen einer Konstruktion gehörende Gerade kann man auch durch zwei ihrer Punkte vorgeben. Analog kann man jeden Kreis durch seinen Mittelpunkt und einen seiner Punkte vorgeben.

(1b) Die Aufgabe, eine Gerade mit gewissen Eigenschaften zu konstruieren, kann als im wesentlichen gelöst gelten, wenn man zwei ihrer Punkte konstruiert hat. Analog kann die Aufgabe, einen bestimmten Kreis zu konstruieren, auf die Aufgabe reduziert werden, seinen Mittelpunkt und einen seiner Punkte zu konstruieren.

Obwohl wir diesen Standpunkt aus Gründen, die anschließend erörtert werden, nicht teilen, wollen wir am Beispiel der Konstruktionen mit dem Lineal allein das Prinzip erläutern, nach dem diese Auffassung der Konstruktionen im Rahmen der logischen Analyse präzisiert werden kann. Dazu ersetze man das Paar (L, S_1) durch die *Kreuzoperation* K:

$$K(p_1, p_2, p_3, p_4) := \iota p(p, p_1, p_2 \text{ kollinear } \wedge \text{ } p, p_3, p_4 \text{ kollinear}), \text{ falls}$$
$$p_1 \neq p_2 \wedge p_3 \neq p_4 \wedge L(p_1, p_2) \text{ schneidet } L(p_3, p_4).$$

Während die verschiedenen Varianten der Konstruktionen mit dem Lineal allein geradezu ideale Beispiele für die zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Begriffe und Methoden liefern, wirft schon die Analyse des klassischen Instrumentensatzes Zirkel und Lineal einige Probleme auf, die bei der üblichen Behandlung der geometrischen Konstruktionen übersehen oder umgangen werden. Obwohl dies mit zusätzlichen Schwierigkeiten verknüpft ist, wollen wir im Bereich der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal Punkte, Geraden und Kreise als gleichberechtigte Dinge ansehen und begründen unsere Ablehnung der in (1a, b) fixierten Auffassung wie folgt: Durch (1a) werden interessante Konstruktionen wie z. B. die Konstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises gegenstandslos. Ferner beabsichtigen wir eine gründliche Klärung der Rolle von willkürlich gewählten Hilfspunkten (Hilfsgeraden, Hilfskreisen). Nun kann man z. B., wenn nur eine Gerade und ein nicht auf ihr liegender Punkt gegeben sind, ohne Hilfspunkte nicht mit Zirkel und Lineal das Lot fällen. Ist die Gerade jedoch durch zwei ihrer Punkte gegeben, so kann man diese als Hilfspunkte benutzen und die Aufgabe lösen. Dieses Beispiel zeigt, daß in gewissen Fällen die Vorgabe zweier Punkte „wesentlich ergiebiger" ist als die Vorgabe einer Geraden.

Als Schnittgebilde von Kreisen untereinander bzw. von Geraden und Kreisen treten im allgemeinen zwei durch ihre Entstehung zunächst nicht voneinander unterscheidbare Punkte auf. Die Verwendung eines einzelnen Punktes aus einem solchen Paar für weitere Konstruktionsschritte oder seine Benennung als Bestandteil des Endresultats setzt streng genommen voraus, daß die willkürliche Auswahl ein zulässiger Konstruktionsschritt ist. Selbst wenn wir einen solchen „zulassen" wollen, ist seine logische Analyse im hier definierten Sinn nicht möglich, weil der willkürlichen Auswahl keine in der Geometrie definierbare eindeutige Operation entspricht. Man könnte die Entstehung von Punktepaaren als Resultat des Schneidens von Kreisen z. B. dadurch vermeiden, daß man die entsprechende Schnittoperation S statt für sich schneidende k_1, k_2 für Tripel k_1, k_2, p definiert, wobei der Punkt p der Bedingung $p \notin L(M(k_1), M(k_2))$ genügt:

$$\mathrm{S}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p}) := \iota \mathrm{p}_1\big(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{Halbebene}\,(\mathrm{M}(\mathrm{k}_1), \mathrm{M}(\mathrm{k}_2); \mathrm{p})\big).$$

Dies ist jedoch nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten, mit Hilfe zusätzlicher (gegebener oder schon konstruierter) Stücke einen definierbaren der beiden Schnittpunkte p_1, p_2 von k_1 und k_2 auszuwählen. Welche dieser definierbaren Auswahlen als konstruktiv zu gelten haben, wird im nächsten Kapitel systematisch untersucht. Hier sollen zunächst die Konsequenzen des Ansatzes untersucht werden, daß als Resultat des Schneidens von Kreisen untereinander bzw. Kreisen mit Geraden ungeordnete Punktepaare (d. h. Zweiermengen von Punkten) entstehen.

Ein Berührungspunkt von zwei Kreisen oder von Kreis und Gerade wird in der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen in der Regel nicht als unmittelbar bestimmbar angesehen. Wir schließen uns dieser Auffassung mit folgenden Argumenten an: Es ist „sehr unwahrscheinlich", daß bei willkürlicher Lage der Ausgangsstücke ein exakter Berührungspunkt entsteht. Man kann also bei der praktischen Durchführung einer Konstruktion annehmen, daß ein scheinbarer Berührungspunkt entweder in zwei sehr dicht beieinander liegende Schnittpunkte zerfällt oder daß doch keine Berührung stattfindet. Ist aber auf Grund der Voraussetzungen über die Ausgangsfigur beweisbar, daß ein exakter Berührungspunkt entsteht, so kann man diesen mit Zirkel und Lineal stets durch eine andere Konstruktion auch als echten Schnittpunkt erhalten: Den Berührungspunkt zweier Kreise als Schnitt des einen mit der die Mittelpunkte verbindenden Geraden, den Berührungspunkt eines Kreises k und einer Geraden g als Lotfußpunkt von $M(k)$ auf g.

Bei der Analyse weiterer Instrumente werden wir feststellen, daß das Auftreten ungeordneter Paare und allgemeiner endlicher Mengen von Punkten, Geraden, Kreisen usw. als unmittelbares Resultat der Anwendung herkömmlicher Konstruktionsinstrumente geradezu typisch ist. Damit derartige endliche Mengen von Dingen überhaupt als Argumente für weitere Konstruktionsschritte dienen können, muß der ursprüngliche Definitionsbereich der betrachteten Instrumente auf Systeme von endlichen Mengen erweitert werden. Zur korrekten Formulierung werden wir die benutzte Sprache $\mathscr{S}$ (in der Regel die Sprache der platonischen ebenen Geometrie) durch Variable X_i für endliche Mengen von Dingen der Sorte x_i und prädikative

Ausdrücke der Form $x_i \in X_j$ erweitern (vgl. Abschnitt 2.3, Beispiel 2). In dieser nichtelementaren Erweiterung $\overline{\mathcal{S}}$ der Sprache $\mathcal{S}$ ist für jede feste natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Operation

$$\{x_1, \dots, x_n\} := \iota X \bigwedge x(x \in X \leftrightarrow x = x_1 \vee \cdots \vee x = x_n)$$

definierbar. Umgekehrt kann man jeder Einermenge ihr eindeutig bestimmtes Element zuordnen:

$$\langle X \rangle := \iota x\, x \in X, \quad \text{falls} \quad \bigvee!!\, x\, x \in X.$$

Der in der Sprache $\overline{\mathcal{S}}$ formulierbare Ausdruck

$$\text{(2)} \qquad \bigwedge x\big(H'(x) \to \bigvee X \bigwedge x(x \in X \leftrightarrow H(x, x))\big)$$

bedeutet offenbar, daß unter der Voraussetzung $H'(\boldsymbol{x})$ die Menge $\{x\colon H(\boldsymbol{x}, x)\}$ endlich ist. Da mit beliebigen Ausdrücken $H'(x)$ und $H(x, x)$ stets die BEE

$$\bigwedge x\big(H'(x) \wedge \bigvee X \bigwedge x(x \in X \leftrightarrow H(x, x)) \to \bigvee!!\, X \bigwedge x(x \in X \leftrightarrow H(x, x))\big)$$

gilt, sind alle Definitionen der Form

$$\text{(3)} \qquad F(x) := \iota X \bigwedge x\big(x \in X \leftrightarrow H(x, x)\big), \quad \text{falls} \quad H'(x),$$

gerechtfertigt, falls man weiß, daß (2) gilt. Statt (3) schreiben wir in diesem Fall im folgenden kürzer

$$F(x) := \{x\colon H(x, x)\}, \quad \text{falls} \quad H'(x).$$

Das Grundprinzip der folgenden Definitionen abstrakter Konstruktionsinstrumente besteht darin, die ursprünglich nur für n-Tupel von Punkten, Geraden, Kreisen usw. definierten Operationen auf n-Tupel von endlichen Mengen von Punkten, Geraden Kreisen usw. auszudehnen, indem man die entsprechende Operation F symmetrisch auf alle endlich vielen Kombinationen von Elementen dieser Mengen anwendet:

$$\text{(4)} \qquad F(X_1, \dots, X_n) := \{y\colon \bigvee x_1 \cdots x_n\big(x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge y = F(x_1, \dots, x_n)\big)\}.$$

Für den abstrakten Zirkel Z zum Beispiel, der bereits in Abschnitt 2.5 als eine Operation definiert wurde, die jedem Punkttripel (p_1, p_2, p_3) mit $p_2 \neq p_3$ den Kreis vom Radius p_2p_3 um den Mittelpunkt p_1 zuordnet, ist dann u. a.

$$Z(\{p_1, p_2\}; \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_2\}) = \{Z(p_1; p_1, p_2), Z(p_2; p_1, p_2)\}, \quad \textit{falls} \quad p_1 \neq p_2.$$

(Von den übrigen Kombinationen sind $Z(p_1; p_1, p_1)$ usw. nicht definiert, während $Z(p_1; p_2, p_1)$ mit $Z(p_1; p_1, p_2)$ übereinstimmt usw.) Die so mit dem — eventuell als Schnittgebilde zweier Kreise entstandenen — Paar $\{p_1, p_2\}$ ununterscheidbarer Punkte begonnene Konstruktion (Abb. 22) kann nun in symmetrischer Ausführung beliebig fortgesetzt werden, und das Beispiel

$$L(\{p_1, p_2\}, \{p_1, p_2\}) = \{L(p_1, p_2)\}, \quad \textit{falls} \quad p_1 \neq p_2,$$

zeigt, daß dabei auch wieder eindeutige Resultate entstehen können. Bei der später behandelten Hintereinanderausführung von Einzelschritten werden wir von so entstandenen Einermengen durch die Operation $\langle\ \rangle$ wieder zu den ursprünglichen

Stücken (Punkten, Geraden, Kreisen) zurückkehren, während andererseits durch den möglichen Übergang von x zu $\{x\}$ die ursprüngliche Operation F im wesentlichen die Einschränkung der nach (4) definierten Erweiterung auf n-Tupel von Einermengen ist.

Für die logische Analyse des Instrumentensatzes *Zirkel und Lineal* benötigen wir Variable P_i bzw. G_i bzw. K_i für endliche Mengen von Punkten bzw. Geraden bzw. Kreisen und neben der Erweiterung der Operationen L, S_1 und Z nach dem Prinzip

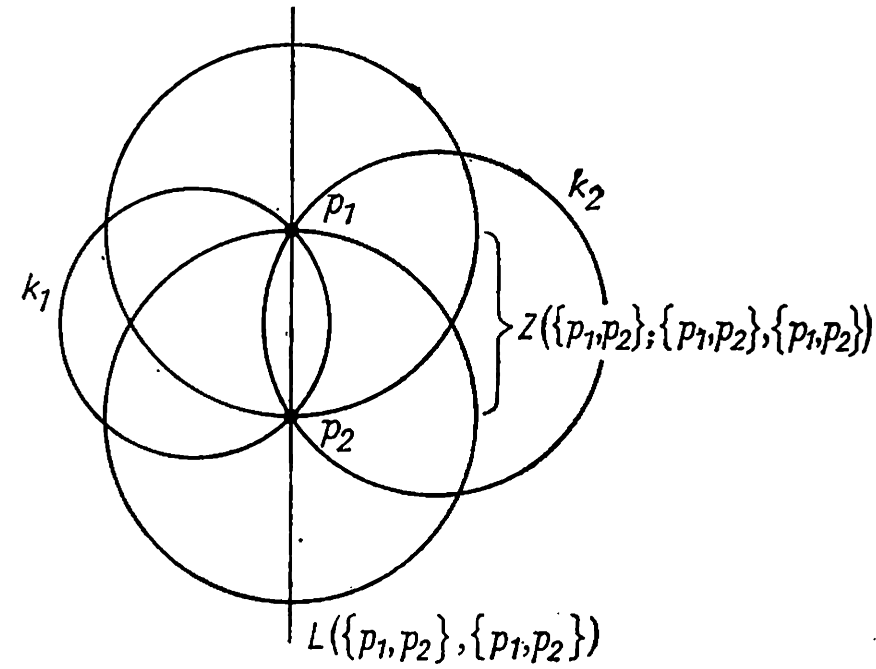


Abb. 22

(4) zwei weitere Schnittpunktoperationen S_2 für den Schnitt von Geraden mit Kreisen bzw. S_3 für den Schnitt von Kreisen untereinander:

$$L(P_1, P_2) := \{g\colon \bigvee p_1p_2(p_1 \in P_1 \wedge p_2 \in P_2 \wedge p_1 \neq p_2 \wedge p_1 \in g \wedge p_2 \in g)\},$$

$$Z(P_1; P_2, P_3) := \{k\colon \bigvee p_1p_2p_3(p_1 \in P_1 \wedge p_2 \in P_2 \wedge p_3 \in P_3 \wedge p_2 \neq p_3 \wedge \bigwedge p(p \in k \leftrightarrow pp_1 \cong p_2p_3))\},$$

$$S_1(G_1, G_2) := \{p\colon \bigvee g_1g_2(g_1 \in G_1 \wedge g_2 \in G_2 \wedge g_1 \text{ schneidet } g_2 \wedge p \in g_1 \wedge p \in g_2)\}$$

$$S_2(K, G) := \{p\colon \bigvee kg(k \in K \wedge g \in G \wedge g \text{ schneidet } k \wedge p \in k \wedge p \in g)\},$$

$$S_3(K_1, K_2) := \{p\colon \bigvee k_1k_2(k_1 \in K_1 \wedge k_2 \in K_2 \wedge k_1 \text{ schneidet } k_2 \wedge p \in k_1 \wedge p \in k_2)\}.$$

Der Instrumentensatz (Z, L, S_1, S_2, S_3) heißt *Zirkel und Lineal*, (Z, S_3) heißt *Zirkel allein.*

Zur Analyse weiterer bereits in Abschnitt 7.1 erwähnter Instrumente sei im voraus bemerkt, daß sie hier nur als Beispiel für allgemeine Überlegungen zur logischen Analyse dienen und viele nicht erwähnte bzw. nur angedeutete Fälle später ausführlich behandelt werden. Für parallele Geraden g_1, g_2 bezeichne $d(g_1, g_2)$ den als abstrakte Streckenlänge aufgefaßten Abstand zwischen g_1 und g_2, der in euklidischen Ebenen definierbar ist. Das ideale Parallellineal ist ein Lineal mit zwei parallelen idealen Linealkanten vom Abstand d. Außer der gewöhnlichen Linealoperation L

kann man mit diesem Instrument die in Abb. 23 veranschaulichten Operationen ausführen. Das Resultat einmaliger Anwendung der in Abb. 23a dargestellten realen Operation auf eine Gerade g ist zwar eine einzelne Gerade g_1. Diese ist jedoch durch g und d nicht eindeutig bestimmt, so daß der realen Operation keine in der euklidischen Ebene definierbare abstrakte Operation zugrunde liegt. Daher präzisieren wir diese

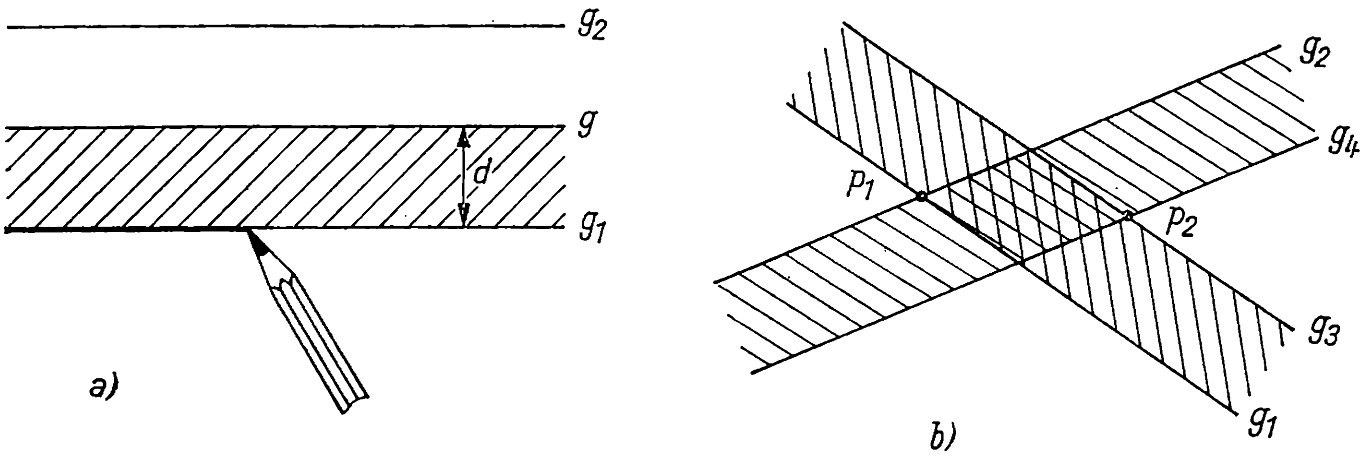


Abb. 23

Operation analog zur Behandlung der Schnittoperationen S_2 und S_3, indem wir das Paar zunächst ununterscheidbarer Geraden g_1, g_2 als Resultat einmaliger Anwendung ansehen. Damit die so entstehenden Geradenpaare als Ausgangsmaterial für weitere Konstruktionsschritte dienen können, sind wieder alle am Instrumentensatz Parallellineal beteiligten Operationen für beliebige endliche Mengen von Punkten bzw. Geraden zu definieren, insbesondere sei

$$\mathrm{PL}_1^d(\mathrm{G}) := \{\mathrm{g}_1 : \vee\, \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G} \wedge \mathrm{g} \parallel \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{d}(\mathrm{g}, \mathrm{g}_1) = \mathrm{d})\}.$$

Wir wenden uns nun der in Abb. 23b dargestellten Operation zu. Offenbar ist ohne Hilfe weiterer Stücke als p_1, p_2 nicht g_1 von g_2 und nicht g_3 von g_4 unterscheidbar. Dagegen unterscheiden sich die beiden erstgenannten Geraden von den zuletzt genannten dadurch, daß sie durch p_1 gehen. Wir wollen die Operation PL_2^d so definieren, daß in Abb. 23b

$$PL_2^d(p_1, p_2) = \{g_1, g_2\}, \quad PL_2^d(p_2, p_1) = \{g_3, g_4\}$$

wird. Ferner bemerken wir, daß PL_2^d nur für $d < \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ ausführbar sein wird. (Möglich wäre noch $d = \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$, aber bei willkürlichen Ausgangsstücken ist dieser Fall wieder sehr unwahrscheinlich, während andererseits unter der ausdrücklichen Voraussetzung $d = \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ die Senkrechten auf $L(p_1, p_2)$ in p_1 bzw. p_2, die bei Anwendung von PL_2^d entstehen würden, durch geeignete Hintereinanderausführung von Elementarschritten auch auf andere Weise konstruierbar werden; vgl. die Argumentation zur Ausschließung der unmittelbaren Konstruierbarkeit von Berührungspunkten von Kreisen.) Wir definieren daher

$$\mathrm{PL}_2^d(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) := \{\mathrm{g} : \vee\, \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{d} < \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{p}_2, \mathrm{g}) = \mathrm{d})\}.$$

Den Instrumentensatz ($\mathrm{L}, \mathrm{PL}_1^d, \mathrm{PL}_2^d, \mathrm{S}_1$) bezeichnen wir als (abstraktes) *Parallellineal*. Bei Anwendung dieses Instrumentensatzes erhält man z. B. die Mittelsenkrechte auf $\overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ mit $d < \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ als

(5) $$L\big(S_1(PL_2^d, (p_1,p_2), PL_2^d(p_2, p_1)), S_1(PL_2^d(p_1, p_2), PL_2^d(p_2, p_1))\big),$$

und dieses Beispiel zeigt, wie auch bei Anwendung der mehrdeutigen Operationen des abstrakten Parallellineals nach endlich vielen Schritten wieder eindeutige Resultate entstehen können.

Das Parallellineal ist ein *beschränkter* Kongruenzinstrumentensatz, da in seine Definition notwendig die Breite d des Lineals eingeht. Offenbar kann aus ihm nach dem Muster von L_{0b} eine Variante entwickelt werden, die der beschränkten Länge realer Instrumente Rechnung trägt. Interessanter ist jedoch hier die Frage, wie man das Parallellineal zu einem freien Instrumentensatz umgestalten, d. h. seine Abhängigkeit von der Konstanten d eliminieren kann. Hierzu denke man sich ein reales Parallellineal mit einstellbarer Breite, die dann wie der Radius beim freien Zirkel an gegebenen oder schon konstruierten Punktepaaren abzugreifen ist. Ein solches Gerät wird z. B. (innerhalb gewisser Schranken für die einstellbare Breite) durch ein Parallelogramm aus gelenkig verbundenen Linealen verwirklicht. Die logische Analyse ergibt

$$\mathrm{PL}_1(\mathrm{G}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) := \big\{\mathrm{g}_1 : \bigvee \mathrm{g}\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\big(\mathrm{g} \in \mathrm{G} \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \\ \wedge\, \mathrm{d}(\mathrm{g}, \mathrm{g}_1) = \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}\big)\big\},$$

$$\mathrm{PL}_2(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4) := \big\{\mathrm{g} : \bigvee \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4\big(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}_4 \in \mathrm{P}_4 \wedge \mathrm{p}_3 \neq \mathrm{p}_4 \\ \wedge\, \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} < \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{p}_2, \mathrm{g}) = \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4}\big)\big\}.$$

(Läßt man bei PL_1 die Bedingung $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$ bzw. bei PL_2 die Bedingung $\mathrm{p}_3 \neq \mathrm{p}_4$ fort, so erhält man jeweils als Ausartungsfall die Operation L.)

Das ideale Winkellineal besteht aus zwei von einem Punkt ausgehenden einseitig unbeschränkten idealen Linealkanten, die einen festen Winkel α ($0 < \alpha < 2R$) einschließen. Mit diesem Instrument können außer L (und S_1) folgende Operationen ausgeführt werden:

$$\mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{G}) := \{\mathrm{g}_1 : \bigvee \mathrm{p}\mathrm{g}(\mathrm{p} \in \mathrm{P} \in \mathrm{g} \in \mathrm{G} \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g}_1 \wedge \sphericalangle\, \mathrm{g}_1, \mathrm{g} = \alpha)\}.$$

Abb. 24a zeigt $W_1^\alpha(p, g) = \{g_1, g_2\}$ für $p \notin g$, Abb. 24b den Spezialfall $p \in \mathrm{g}$.

$$\mathrm{W}_2^\alpha(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{G}) := \{\mathrm{p} : \bigvee \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{g}(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{g} \in \mathrm{G} \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge \sphericalangle\, \mathrm{p}_1\mathrm{p}\mathrm{p}_2 \\ = \alpha)\}.$$

Abb. 24c zeigt $W_2^\alpha(p_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{g}) = \{p_3, p_4\}$. Offenbar sind p_3, p_4 die Schnittpunkte von g mit der Vereinigung der beiden bezüglich $L(p_1, p_2)$ spiegelbildlichen Kreisbögen durch diese Punkte, die bezüglich p_1, p_2 den Peripheriewinkel α haben (Abb. 24d). Den Instrumentensatz ($\mathrm{L}, \mathrm{W}_1^\alpha, \mathrm{W}_2^\alpha, \mathrm{S}_1$) bezeichnen wir als (abstraktes) *Winkellineal*, den Spezialfall $\alpha = R$ als *Rechtwinkellineal*. Auf ähnliche Weise wie beim Parallellineal kann man zu einem freien Winkellineal mit einstellbarem Winkel übergehen, wobei drei nichtkollineare Punkte, an denen der Winkel jeweils abzugreifen ist, als zusätzliche Argumente auftreten.

Mit dem *markierten Lineal*, einem idealen Lineal, an dessen Kante im Abstand a zwei Punkte markiert sind, kann man außer L und S_1 folgende Operationen ausführen:

Das Abtragen der Strecke a auf dem $Strahl(p_1, p_2)$

$A_a^+(P_1, P_2) := \{p: \bigvee p_1p_2(p_1 \in P_1 \wedge p_2 \in P_2 \wedge p_1 \neq p_2 \wedge p \in \mathrm{Strahl}(p_1, p_2) \wedge \overline{p_1p} = a)\}$,

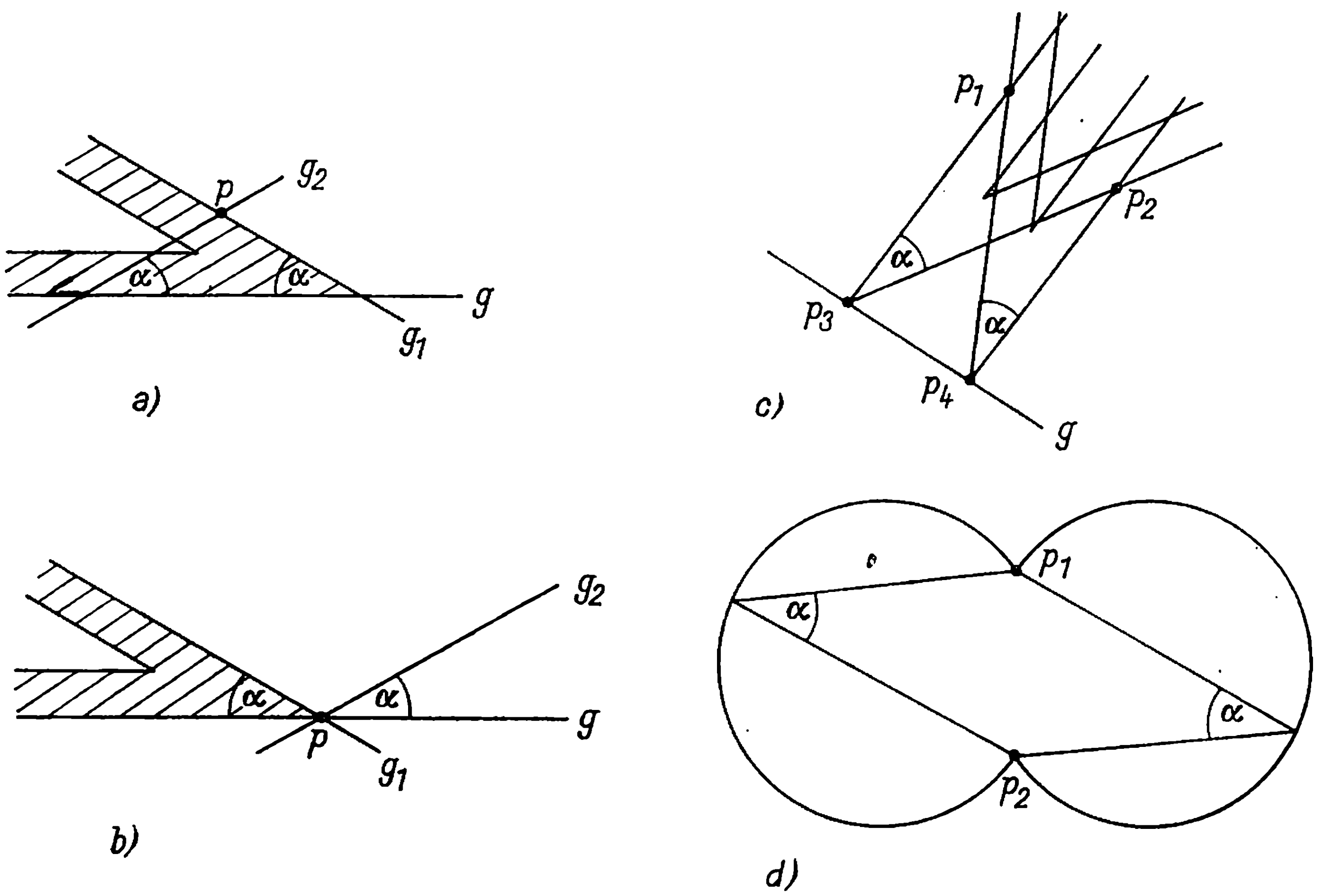


Abb. 24

insbesondere

$$A_a^+(p_1, p_2) = \iota p\big(p \in \mathrm{Strahl}(p_1, p_2) \wedge \overline{p_1p} = a\big), \text{ falls } p_1 \neq p_2,$$

analog das Abtragen der markierten Strecke a an p_1 in der p_2 entgegengesetzten Richtung:

$$A_a^-(P_1, P_2) := \big\{p: \bigvee p_1p_2\big(p_1 \in P_1 \wedge p_2 \in P_2 \wedge (p, p_1, p_2) \wedge \overline{p_1p} = a\big),$$

insbesondere

$$A_a^-(p_1, p_2) = \iota p((p, p_1, p_2) \wedge \overline{p_1p} = a), \text{ falls } p_1 \neq p_2.$$

Das Schneiden einer Geraden g mit dem Kreis vom Radius a um einen Punkt p (ohne daß dieser Kreis selbst dabei konstruiert wird, Abb. 25):

$$S_4^a(G, P) := \{p_1: \bigvee pg(p \in P \wedge g \in G \wedge p_1 \in g \wedge \overline{p_1p} = a)\},$$

analog das Schneiden eines Kreises k mit dem Kreis vom Radius a um p:

$$S_5^a(K, P) := \{p_1 : \bigvee pk(p \in P \wedge k \in K \wedge p_1 \in K \wedge \overline{pp_1} = a)\}.$$

Das „Einschieben“ der markierten Strecke a zwischen zwei Geraden $g_1 \nparallel g_2$ durch einen Punkt $p \notin g_1, g_2$, so daß die Enden von a auf g_1 bzw. g_2 liegen und die Linealkante durch p geht: Dreht man in Abb. 26a die Linealkante aus der Lage pp_0 im

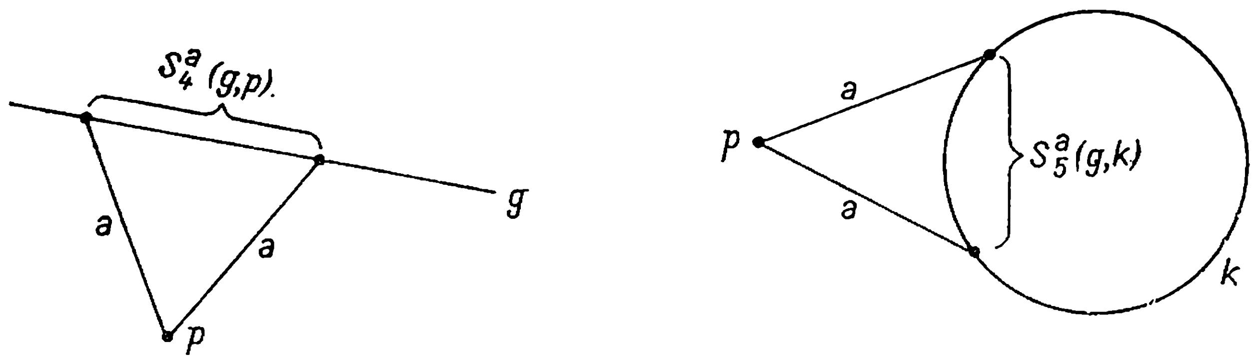


Abb. 25

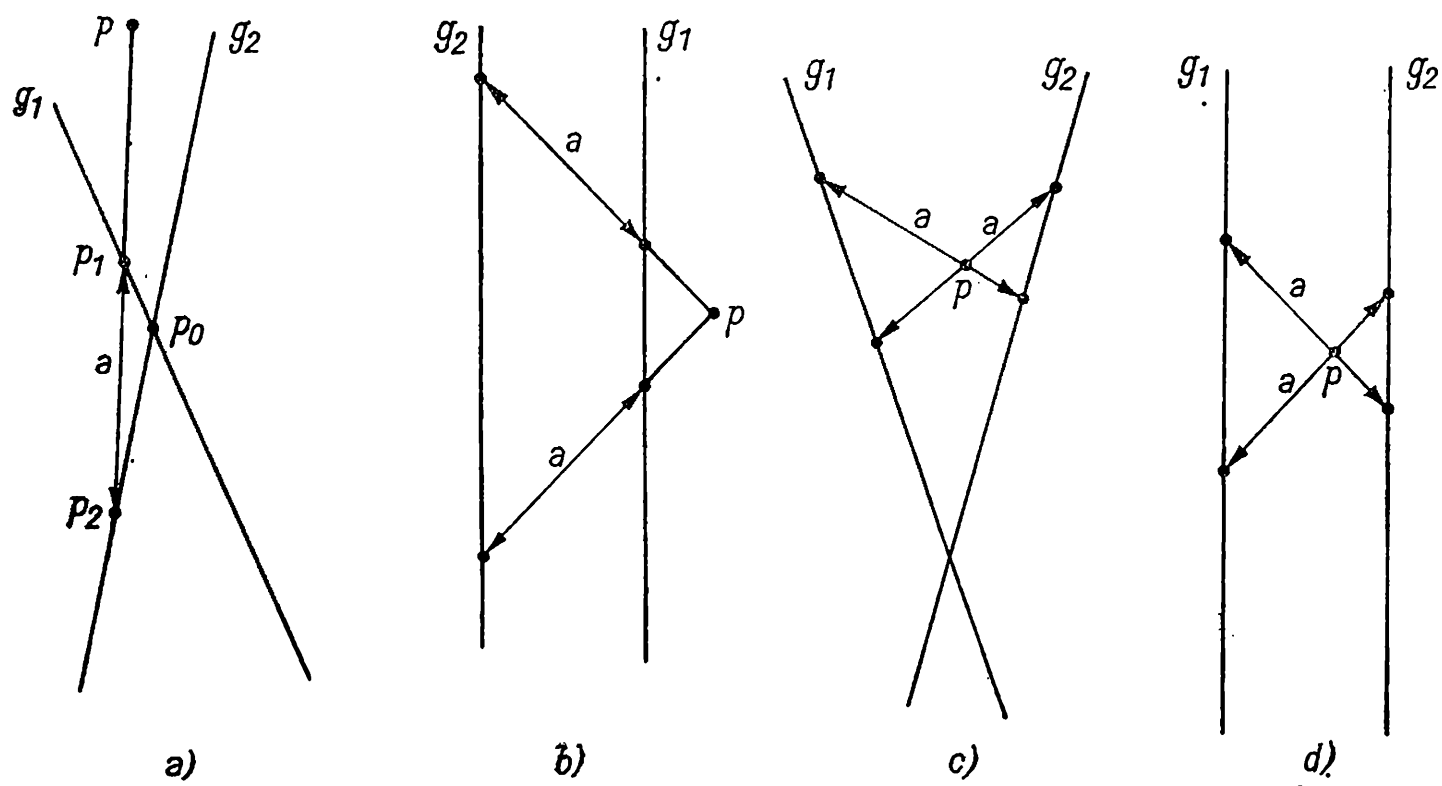


Abb. 26

Uhrzeigersinn um p, so wachsen die Abstände der Schnittpunkte mit g_1 bzw. g_2 monoton von 0 bis ∞. Daher gibt es in der euklidischen Ebene (wegen deren Stetigkeit) genau eine Lage, bei der dieser Abstand gleich a ist. Den Prozeß der Auffindung dieser Lage bezeichnen wir als *äußere Einschiebung* (weil p außerhalb der eingeschobenen Strecke a liegt). Ihm entspricht die Operation

$$E_{\ddot{a}}^a(p, g_1, g_2) := \iota p_1 \bigvee p_2(p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_2 \wedge \overline{p_1p_2} = a \wedge (p, p_1, p_2)),$$
$$\text{falls } g_1 \text{ schneidet } g_2 \wedge p \notin g_1 \wedge p \notin g_2.$$

$E^a_{\ddot{a}}(p, g_2, g_1)$ liefert gerade das ebenfalls eindeutig bestimmte Resultat bei Drehung im entgegengesetzten Sinn. $E^a_{\ddot{a}}(p, g_1, g_2)$ existiert auch noch, falls $g_1 \parallel g_2$, wenn $d(g_1, g_2) < a$ und p, g_2 auf verschiedenen Seiten von g_1 liegen (Abb. 26b), nun aber als Paar von ununterscheidbaren Punkten. In Zusammenfassung beider Fälle definieren wir:

$$\mathrm{E}^a_{\ddot{a}}(\mathrm{P}, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2) := \{\mathrm{p}_1 : \bigvee \mathrm{p}_2\mathrm{p}\mathrm{g}_1\mathrm{g}_2(\mathrm{p} \in \mathrm{P} \wedge \mathrm{g}_1 \in \mathrm{G}_1 \wedge \mathrm{g}_2 \in \mathrm{G}_2 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g}_2 \wedge \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} = \mathrm{a} \wedge (\mathrm{p}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2))\}.$$

Bei gewissen Lagen von p bezüglich g_1, g_2 ist neben der äußeren die *innere Einschiebung* möglich, die dadurch charakterisiert ist, daß p zwischen den auf g_1 bzw. g_2 gelegenen Punkten vom Abstand a liegt. Abb. 26c, d zeigt, daß diese Operation wieder nicht mehr eindeutig ist. (Die algebraische Analyse des Einschiebens wird ergeben, daß es für $g_1 \nparallel g_2$, $p_1 \notin g_1 \cup g_2$ höchstens zwei Möglichkeiten der inneren Einschiebung gibt). Wir definieren die innere Einschiebung E^a_i durch

$$\mathrm{E}^a_i(\mathrm{P}, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2) := \{\mathrm{p}_1 : \bigvee \mathrm{p}_2\mathrm{p}\mathrm{g}_1\mathrm{g}_2(\mathrm{p} \in \mathrm{P} \wedge \mathrm{g}_1 \in \mathrm{G}_1 \wedge \mathrm{g}_2 \in \mathrm{G}_2 \wedge \mathrm{g}_1 \nparallel \mathrm{g}_2 \wedge \mathrm{p} \notin \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p} \notin \mathrm{g}_2 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{g}_1 \wedge \mathrm{p}_2 \in \mathrm{g}_2 \wedge \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} = \mathrm{a} \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2))\}.$$

Die Operationen der inneren und äußeren Einschiebung der Strecke a durch einen Punkt p kann man sinngemäß auch für Kreis und Gerade bzw. für zwei Kreise (statt wie hier für zwei Geraden) definieren. Ferner sei bemerkt, daß man die Einschiebungen auf analoge Weise wie die Parallel- und Winkellinealoperationen von der ihnen zunächst anhaftenden Konstante a befreien kann. Der abstrakte Instrumentensatz $(\mathrm{L}, \mathrm{A}^+_{\mathrm{a}}, \mathrm{A}^-_{\mathrm{a}}, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_4, \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_5, \mathrm{E}^{\mathrm{a}}_{\ddot{\mathrm{a}}}, \mathrm{E}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{i}})$ heißt *Einschiebelineal*, $(\mathrm{L}, \mathrm{A}^+_{\mathrm{a}}, \mathrm{A}^-_{\mathrm{a}}, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_4, \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_5)$ heißt *normiertes Lineal*, $(\mathrm{L}, \mathrm{A}^+_{\mathrm{a}}, \mathrm{A}^-_{\mathrm{a}}, \mathrm{S}_1)$ heißt *Eichmaß* oder *Streckenabtrager*, d. h., ein und dasselbe reale Instrument modelliert, je nachdem, welche damit ausführbaren Einzelschritte „erlaubt" werden, verschiedene abstrakte Instrumentensätze. Nun könnte man z. B. auch mit dem realen Lineal außer L das unmittelbare Ziehen der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis als erlaubten Konstruktionsschritt ansehen. Er ist in der Praxis sicher nicht weniger genau ausführbar als das Einschieben. Der Grund, warum die klassische Theorie im Fall des markierten Lineals drei Präzisierungsvarianten, im Fall des unbeschränkten gewöhnlichen Lineals nur eine Variante untersucht hat, ist darin zu sehen, daß die Instrumentensätze Einschiebelineal, normiertes Lineal bzw. Eichmaß wesentlich verschiedene Leistungsfähigkeit besitzen, während die grundsätzliche Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal durch die zusätzliche Erlaubnis, Tangenten durch einfaches Anlegen des Lineals zu ziehen, bekanntlich nicht erweitert wird.

Abschließend wollen wir am Beispiel der „Gärtnerkonstruktion" von Ellipsen zeigen, wie sich Vorrichtungen zum Zeichnen (gegenüber Geraden und Kreisen) höherer Kurven dem Begriff des idealen Konstruktionsinstruments unterordnen und der logischen Analyse unterwerfen lassen. Dazu führen wir Variable e_i für Ellipsen (als spezielle Punktmengen) ein, die entweder als Grunddinge aufgefaßt werden können und dann nach dem Muster der Kreise axiomatisch zu charakterisieren sind (vgl. Abschnitt 2.5) oder — wieder analog zu den Kreisen — definitorisch eingeführt werden können. Ellipsen sind durch die Inzidenz mit den Punkten verknüpft, d. h., die Liste der Grundprädikate ist durch $p_i \in e_j$ zu ergänzen. Der Gärtnerkonstruktion, zu zwei gegebenen Brennpunkten p_1, p_2 die Ellipse mit vorgegebenem Hauptdurchmesser $a = \overline{p_3p_4}$ zu zeichnen, indem man einen Faden der Länge a zwischen p_1 und p_2 ausspannt und ihn durch das Zeichengerät strafft, entspricht dann das durch

$$G(p_1, p_2, p_3, p_4) := \iota e \wedge p(p \in e \leftrightarrow \overline{pp_1} + \overline{pp_2} = \overline{p_3p_4})$$

für alle $p_1, \ldots, p_4$ mit $\overline{p_1p_2} < \overline{p_3p_4}$ definierte abstrakte freie Kongruenzinstrument G. Zieht man die beschränkte Länge jedes realen Fadens in Betracht, so erhält man durch Einschränkung von G auf $\overline{p_3p_4} < a$ das beschränkte Instrument G^a. Da wir $p_1 = p_2$ nicht ausgeschlossen haben, enthält G^a bzw. G als Spezialfall den freien bzw. beschränkten Zirkel, was auch der Realität entspricht. Zum Instrumentensatz *Ellipsenzirkel und Lineal* bzw. *Ellipsenzirkel allein* gehören notwendig entsprechende Schnittoperationen, im zweiten Fall zwischen Ellipsen untereinander (wo es maximal vier ununterscheidbare Schnittpunkte gibt), im ersten Fall außerdem zwischen Ellipsen und Geraden, wo es maximal zwei ununterscheidbare Schnittpunkte gibt. Die dadurch entstehende Mehrdeutigkeit der Konstruktionen erfordert es wieder, die ursprünglich nur für einzelne Punkte und Ellipsen (und evtl. Geraden) definierten Grundoperationen nach dem Muster (4) auf endliche Mengen von Punkten, Geraden, Ellipsen auszudehnen. Die Ausführung sei dem Leser zur Übung empfohlen.

8. Konstruktionen

8.1. Konstruktionsaufgaben

Gegeben sei eine in einer Sprache $\mathscr{S}$ formulierte axiomatische Theorie $\mathscr{T}$, ein nichtleeres System $\mathscr{K}$ von in $\mathscr{T}$ gültigen BEE (von denen im konkreten Fall angenommen wird, daß die auf ihrer Grundlage definierbaren partiellen Operationen in gewissen Modellen von $\mathscr{T}$ „effektiv ausführbar" sind) und ein (eventuell leeres) System $\mathscr{E}$ von nicht abgeschlossenen Ausdrücken der Sprache $\mathscr{S}$ (von denen im konkreten Fall angenommen wird, daß die in den betrachteten Modellen durch sie dargestellten Relationen „effektiv entscheidbar" sind). Ein solches Tripel $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ heißt eine *konstruktive Teiltheorie* (*von* $\mathscr{T}$).

Ist $\mathscr{T}$ eine axiomatische Geometrie, zum Beispiel die ebene euklidische oder die ebene affine oder die ebene projektive Geometrie, so kommen als Elemente von $\mathscr{K}$ insbesondere solche BEE in Frage, die sich als Resultat der logischen Analyse von Instrumentensätzen ergeben. Indem wir über die Elemente des Bestandteils $\mathscr{E}$ einer zu konstituierenden konstruktiven Teiltheorie einer Geometrie verfügen, legen wir fest, ob wir es bei den zu untersuchenden geometrischen Konstruktionen z. B. zulassen, von zwei gegebenen oder schon konstruierten Geraden zu entscheiden, ob sie parallel sind oder nicht und in Abhängigkeit davon den weiteren Verlauf der Konstruktion zu bestimmen. Es sei schon hier betont, daß diese im Grunde zur Auswahl der zulässigen Operationsschritte völlig analoge Auswahl der zulässigen Prüfschritte bisher niemals explizit in die Untersuchung geometrischer Konstruktionen aufgenommen wurde. Allerdings ist bei manchen Autoren zwischen den Zeilen herauszulesen, daß $\mathscr{E} = \emptyset$ gemeint ist[1]; obwohl dieses Prinzip bei den dann vorgeführten

---

[1]) Bieberbach [2, S. 54] schreibt z. B.: „... und doch gibt es (für eine zuvor erwähnte Aufgabe, Erg. des Verf.) kein einheitliches Konstruktionsverfahren mit Zirkel und Lineal, weil nämlich die Zahl der Konstruktionsschritte, die man zur Lösung nötig hat, von m abhängt." Hieraus kann man wohl schließen, daß Bieberbach nur unverzweigte und nichtzyklische Flußdiagramme als zulässige Konstruktionsbeschreibungen ansieht.

Konstruktionen nicht immer eingehalten wird. Es dürfte klar sein, in welcher Weise der Begriff der konstruktiven Teiltheorie die speziellen Voraussetzungen eines beliebigen Zweiges der Theorie der geometrischen Konstruktionen präzisiert.

Eine *Konstruktionsaufgabe* wird gegeben durch ein Quadrupel $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H})$, wobei $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ eine konstruktive Teiltheorie und H eine in der Sprache $\mathscr{S}$ von $\mathscr{T}$ formulierte *bedingte Existenzaussage* (BE), d. h. ein abgeschlossener Ausdruck der Form

$$(1) \qquad \wedge\, \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \vee\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big)$$

ist. (*Unbedingte Existenzaussagen*, d. h. abgeschlossene Ausdrücke der Gestalt $\wedge\, \mathrm{x} \vee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, sehen wir wieder als Spezialfälle der BE mit in $\mathscr{T}$ stets gültiger Voraussetzung $\mathrm{H}'(\mathrm{x})$ an). Unter einer *Lösung* der Konstruktionsaufgabe $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H})$ werden wir einen Beweis spezieller Art für die BE (1) verstehen, der in dem Sinn „konstruktiv“ ist, daß er zugleich für jedes Modell von $\mathscr{T}$ einen Algorithmus liefert, der im gleichen Maße „effektiv“ ist wie die zugelassenen Hilfsmittel $\mathscr{K}, \mathscr{E}$ und angewendet auf ein System von „Stücken“ $\boldsymbol{x}$, die die Bedingung $H'(\boldsymbol{x})$ erfüllen, stets ein Resultat $\boldsymbol{y}$ liefert, das zu den Stücken $\boldsymbol{x}$ in der Relation $H''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ steht. Nach den Vorbereitungen in Kapitel 6, ist nun schon klar, daß es sich im wesentlichen darum handelt,

a) *ein Flußdiagramm* $\mathfrak{F}$ *anzugeben, dessen Arbeitsknoten mit den zu den* BEE *aus* $\mathscr{K}$ *gehörigen Operationen belegt sind und dessen Prüfknoten mit den durch die Ausdrücke aus* $\mathscr{E}$ *dargestellten Relationen belegt sind,*

b) *unter ausschließlicher Benutzung der Axiome bzw. schon bewiesener Sätze von* $\mathscr{T}$ *zu beweisen, daß für* $\boldsymbol{x}$ *mit* $H'(\boldsymbol{x})$ *stets* $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ *existiert und der Bedingung* $H''\big(\boldsymbol{x}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{x})\big)$ *genügt.*

Offenbar ist a) eine Präzisierung bzw. teilweise Verallgemeinerung dessen, was man in der Schule als „Konstruktionsbeschreibung“ bezeichnet, während b) im wesentlichen der sogenannte „Beweis der Richtigkeit der Konstruktion“ ist. Die weitere Präzisierung des in a), b) formulierten Ansatzes erfordert einige Vorbetrachtungen:

1. Im allgemeinen wird jede der als entscheidbar geltenden Relationen durch einen darstellenden Ausdruck angegeben. Daß z. B. die Parallelität entscheidbar sein soll, bringen wir dadurch zum Ausdruck, daß wir etwa den Ausdruck $\mathrm{g}_1 \parallel \mathrm{g}_2$ in die Menge $\mathscr{E}$ der betrachteten konstruktiven Teiltheorie aufnehmen. In konkreten Konstruktionsbeschreibungen wird die Prüfung $\mathrm{g}_i \parallel \mathrm{g}_j$? jedoch auf beliebig bezeichnete Geraden anzuwenden sein. Außerdem ist mit einer Relation sicher auch jede aus ihr durch Variablengleichsetzung oder Konstanteneinsetzung entstehende Relation entscheidbar. Schließlich wird die Entscheidbarkeit einer Relation nicht von der zufälligen Wahl eines darstellenden Ausdrucks abhängig sein. Daher gehen wir von der Menge $\mathscr{E}$, in der wir der Bequemlichkeit halber nur jeweils einen darstellenden Ausdruck aufzählen (also in der Regel eine endliche Menge von nicht abgeschlossenen Ausdrücken) zur Menge $\mathscr{E}^*$ über, die wie folgt definiert wird:

$$(2\mathrm{a}) \qquad \mathscr{E} \subseteq \mathscr{E}^*.$$

(2b) *Kommen in* H(x) *bzw.* H′(x) *die Variablen* x *vollfrei und keine weiteren Variablen frei vor und ist* $\mathrm{H}(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}^*$ *und* $\wedge\, \mathbf{x}\big(\mathrm{H}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathrm{H}'(\mathbf{x})\big) \in \mathscr{T}$, *so sei auch* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}^*$.

(2c) *Ist* $\mathrm{H}(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}^*$ *und entsteht* H′(x′) *dadurch aus* H(x), *daß eine der vollfreien Variablen* x *an allen Stellen ihres Vorkommens durch eine Konstante entsprechender Sorte ersetzt wird, oder daß zwei der vollfreien Variablen gleichgesetzt werden oder dadurch, daß für eine der vollfreien Variablen an allen Stellen ihres Vorkommens eine in* H *nicht vorkommende Variable eingesetzt wird, so sei auch* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}') \in \mathscr{E}^*$.

(2d) $\mathrm{H} \in \mathscr{E}^*$ *nur dann, wenn dies auf Grund von* (2a, b, c) *der Fall ist.*

2. Laut Definition in Kapitel 6 ordnet eine Belegung eines Strukturgraphen den Knoten dieses Graphen konkrete Operationen bzw. Prüfrelationen zu. Da wir uns hier für Algorithmen interessieren, die für alle Modelle einer gewissen Theorie $\mathscr{T}$ einheitlich definiert werden können und daher den Arbeits- bzw. Prüfknoten eines Strukturgraphen statt konkreter Operationen bzw. Relationen im wesentlichen Symbole für Operationen bzw. Ausdrücke der Sprache $\mathscr{S}$ zuordnen werden, erhalten wir statt konkreter Flußdiagramme so etwas wie Schemata für Flußdiagramme, denen erst durch eine Interpretation der betreffenden Sprache in einem Modell der betrachteten Theorie ein konkretes Flußdiagramm entspricht. Diesem Problem sind die folgenden Definitionen gewidmet.[1])

Ist $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ eine konstruktive Teiltheorie, so heißt $\mathfrak{F} = (G, e, \psi, \varphi, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein *uniformes Flußdiagramm über* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, wenn gilt:

(3a) (G, e) *ist ein Strukturgraph.*

(3b) ψ *ist eine Abbildung, die jedem Prüfknoten von* G *einen seiner Nachfolger (den „ja-Ausgang“) zuordnet.*

(3c) φ *ist eine Abbildung, die jedem Prüfknoten von* G *einen Ausdruck* $\mathrm{H} \in \mathscr{E}^*$ *zuordnet und jedem Arbeitsknoten von* G *eine Termgleichung der Form* $\mathrm{x}_i = \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathbf{z})$ *oder der Form* $\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_j$ $(i \neq j)$ *zuordnet, wobei im ersten Fall die zu* $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ *gehörige* BEE *zu* $\mathscr{K}$ *gehören muß.*

(3d) x *und* y *sind endliche geordnete Systeme von Variablen der Sprache* $\mathscr{S}$ *von* $\mathscr{T}$, *wobei die Variablen* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{n(\mathbf{x})}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_{n(\mathbf{y})}$ *paarweise verschieden sind.* (Die x_i heißen *Eingangsvariable* und die y_i *Ausgangsvariable* von $\mathfrak{F}$).

Bei der Angabe konkreter uniformer Flußdiagramme schreiben wir die Werte $\varphi(k)$ der Knoten k in die Knoten hinein und setzen bei Prüfknoten ein Fragezeichen dahinter, um den Zusammenhang zum Ausgang $\psi(k)$ deutlicher zu machen, den wir mit „ja“ beschriften. Die Eingangsvariablen x werden an den freien Eingangspfeil geschrieben, durch den der Eingangsknoten e von G markiert ist. Dahinter vermerken wir in Klammern die Voraussetzung H′(x), unter der wir die Anwendbarkeit des

[1]) Zu den folgenden Ausführungen vgl. A. Blikle, About the Meaning of Programs, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 18 (1970), 341–348.

Flußdiagramms behaupten wollen. Die Ausgangsvariablen y werden in den freien Raum unterhalb des (oder der) Ausgangspfeile geschrieben.

Ist ω eine Interpretation von $\mathscr{S}$ in einem Modell $\mathfrak{S}$ von $\mathscr{T}$, so verstehen wir unter einer *partiellen Belegung* f bezüglich ω eine Abbildung, die endlich vielen Variablen von $\mathscr{S}$ je ein Element entsprechender Sorte in dem Modell $\mathfrak{S}$ zuordnet. Ist f eine partielle Belegung bezüglich ω mit dem Definitionsbereich $\{\mathrm{x}_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_n}\}$ und $f(\mathrm{x}_{i_\nu}) = x_{i_\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n$, so kann man das Paar (ω, f) als einen Speicher mit dem momentanen Inhalt $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ auffassen, wobei die Variable x_{i_ν} zu diesem Zeitpunkt an das Ding x_{i_ν} als Adresse angeheftet bzw. herangeschrieben ist (vgl. die Ausführungen in Kapitel 6 über Flußdiagramme, die über einem Speicher operieren, insbesondere den Fall, daß der Speicher eine Zeichenebene ist, in der endlich viele Punkte, Geraden, Kreise usw. mit entsprechenden Variablen beschriftet sind). Es wird nicht gefordert, daß die Zuordnung f zwischen Variablen und Dingen umkehrbar eindeutig ist, d. h., es kann ein Ding des Modells $\mathfrak{S}$ unter mehreren Adressen gespeichert sein, obwohl dies — zumindest im Bereich geometrischer Konstruktionen — selten auftritt.

Ist $\mathfrak{F} = (G, e, \psi, \varphi, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und ω eine Interpretation von $\mathscr{S}$ in einem Modell $\mathfrak{S}$ von $\mathscr{T}$, so definieren wir durch Angabe der Belegung φ_ω ein zunächst im Bereich der partiellen Belegungen bezüglich ω operierendes Flußdiagramm $\mathfrak{F}_\omega = (G, e, \psi, \varphi_\omega)$:

(4a) *Ordnet φ einem Prüfknoten k von G den Ausdruck* $\mathrm{H}(\mathrm{z})$ *aus $\mathscr{E}^*$ zu, so treffe die Relation $\varphi_\omega(k)$ auf eine beliebige partielle Belegung f bezüglich ω genau dann zu, wenn f für alle Variablen* z *definiert und Wert*$(\mathrm{H}(\mathrm{z}), \omega, f) = \boldsymbol{W}$ *ist (d. h., wenn die mit* z *adressierten Dinge in der durch* $\mathrm{H}(\mathrm{z})$ *dargestellten Relation stehen).*

(4b) *Ist einem Arbeitsknoten k von G durch φ die Termgleichung* $\mathrm{x}_i = \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathrm{z})$ *zugeordnet, so ist $\varphi_\omega(k)(f)$ genau für solche f definiert, für die alle Variablen* z *im Definitionsbereich von f liegen und Wert*$\big(\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathrm{z}), \omega, f\big)$ *existiert. In diesem Fall sei $\varphi_\omega(k)\,(f)$ die wie folgt definierte partielle Belegung f':*

$$f'(\mathrm{x}_j) := \begin{cases} \mathit{Wert}\big(\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathrm{z}), \omega, f\big) & \textit{für } \mathrm{x}_j = \mathrm{x}_i, \\ f(\mathrm{x}_j) & \textit{für } \mathrm{x}_j \neq \mathrm{x}_i,\ \mathrm{x}_j \in D_f, \\ \textit{nicht definiert sonst} & \end{cases}$$

(d. h., auf die mit den Adressen z bezeichneten Dinge des Modells wird die mit $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ bezeichnete Operation angewendet, und das Resultat wird mit der Bezeichnung x_i versehen, wobei die alte Bedeutung von x_i gelöscht bzw. vergessen wird, falls x_i schon in D_f vorkam).

(4c) *Ist einem Arbeitsknoten k von G durch φ die Gleichung* $\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_j$ *zugeordnet, so ist $\varphi_w(k)$ genau für solche partiellen Belegungen f definiert, für die* $\mathrm{x}_j \in D_f$. *In* *diesem Fall sei* $\varphi_\omega(k)(f)$ *die wie folgt definierte Belegung* f':

$$f'(\mathrm{x}_k) := \begin{cases} f(\mathrm{x}_j) \text{ für } \mathrm{x}_k = \mathrm{x}_i, \\ f(\mathrm{x}_k) \text{ für } \mathrm{x}_k \in D_f,\ \mathrm{x}_k \neq \mathrm{x}_i, \\ \text{nicht definiert sonst} \end{cases}$$

(d. h., das vorher mit x_j bezeichnete Ding wird (zusätzlich) mit x_i bezeichnet, wobei die alte Bedeutung von x_i gelöscht bzw. vergessen wird, falls x_i in D_f vorkam).

Damit ist $\mathfrak{F}_\omega$ zunächst als im Bereich der partiellen Belegungen operierendes Flußdiagramm erklärt. Unter Benutzung der Eingangs- und Ausgangsvariablen $\mathrm{x}_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_n}$ bzw. $\mathrm{y}_{j_1}, \ldots, \mathrm{y}_{j_m}$ von $\mathfrak{F}$ kann man jetzt auch eine durch $\mathfrak{F}$ dargestellte partielle Abbildung der n-Tupel von Dingen von $\mathfrak{S}$ in die m-Tupel solcher Dinge erklären (für die wir die gleiche Bezeichnung $\mathfrak{F}_\omega$ verwenden):

> $\mathfrak{F}_\omega(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = (y_{j_1}, \ldots, y_{j_m})$ *genau dann, wenn eine partielle Belegung* f *bezüglich* ω *existiert, so daß* $f(\mathrm{x}_{i_\nu}) = x_{i_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, f *im Definitionsbereich von* $\mathfrak{F}_\omega$, *alle Variablen* y_{j_μ} *im Definitionsbereich der partiellen Belegung* $f' = \mathfrak{F}_\omega(f)$ *und* $f'(\mathrm{y}_{j_\mu}) = y_{j_\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$.

Der Begriff der *Lösung einer Konstruktionsaufgabe* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H})$, wobei H die BE (1) ist, läßt sich jetzt wie folgt präzisieren:

a$'$) *Es ist ein uniformes Flußdiagramm* $\mathfrak{F}$ *über* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *mit den Eingangsvariablen* $\mathbf{x}$ *und den Ausgangsvariablen* $\mathbf{y}$ *anzugeben.*

b$'$) *Es ist zu beweisen: Für alle Interpretationen* ω *von* $\mathscr{S}$ *in Modellen von* $\mathscr{T}$ *und jede partielle Belegung* f *bezüglich* ω *mit* $Wert(\mathrm{H}'(\mathbf{x}), \omega, f) = \boldsymbol{W}$ *existiert* $f' = \mathfrak{F}_\omega(f)$, *und für die durch*

$$f''(\mathrm{x}_i) := \begin{cases} f(\mathrm{x}_i) \text{ für } \mathrm{x}_i \text{ in } \mathbf{x}, \\ f'(\mathrm{x}_i) \text{ für } \mathrm{x}_i \text{ in } \mathbf{y} \end{cases}$$

(nach Voraussetzung sind die Ein- und Ausgangsvariablen eines uniformen Flußdiagramms paarweise verschieden) *definierte partielle Belegung* f'' *gilt*

$$Wert(\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \omega, f'') = \boldsymbol{W}.$$

Nach dieser grundsätzlichen Erklärung des Zusammenhanges zwischen Formalismus und Interpretation im Bereich der Flußdiagramme, die als Fortsetzung der Ausführungen über formalisierte Sprachen aufzufassen ist, werden wir — wie schon bei der praktischen Handhabung der formalisierten Sprachen — im folgenden wieder alle Symbole mit den durch sie bei einer beliebigen Interpretation und Belegung dargestellten Objekten identifizieren, d. h. zusätzlich zum üblichen Gebrauch von Variablen, Konstanten, Operations- und Relationssymbolen auch uniforme Flußdiagramme $\mathfrak{F}$ als ein beliebiges konkretes Flußdiagramm $\mathfrak{F}_\omega$ behandeln.

Beispiele.

1. Die einfache Aufgabe, mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu einer durch ihre Endpunkte gegebenen Strecke zu konstruieren, bedeutet in unserem Sinn: Es

ist ein konstruktiver Beweis für die BE

$$\bigwedge p_1 p_2 \big(p_1 \neq p_2 \to \bigvee g(g \perp L(p_1, p_2) \wedge S_1(L(p_1, p_2), g)\, p_1 \cong S_1(L(p_1, p_2), g)\, p_2)\big)$$

durch Angabe eines uniformen Flußdiagramms über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ zu führen, wobei $\mathscr{T}$ die ebene euklidische Geometrie, $\mathscr{K}$ das aus den fünf zu den Operationen L, Z, S_1, S_2, S_3 gehörigen BEE bestehende System ist und $\mathscr{E}$, wie sich zeigt, als leer angenommen werden kann. Die übliche Lösung dieser Aufgabe lautet, als uniformes Flußdiagramm geschrieben:

$$\begin{array}{c}
p_1, p_2 \quad (p_1 \neq p_2) \\
\downarrow \\
\boxed{k_1 = Z(p_1; p_1, p_2)} \\
\downarrow \\
\boxed{k_2 = Z(p_2; p_1, p_2)} \\
\downarrow \\
\boxed{P = S_3(k_1, k_2)} \\
\downarrow \\
\boxed{g = L(P, P)} \\
\downarrow \\
g
\end{array}$$

Zu beweisen ist: Unter der Voraussetzung $p_1 \neq p_2$ sind die Kreise k_1, k_2 definiert, schneiden sich, die Verbindungsgerade der Schnittpunkte steht senkrecht auf $L(p_1, p_2)$ und ihr Schnittpunkt mit dieser Geraden ist von p_1 und p_2 gleich weit entfernt. Die hiermit bewiesene BE läßt sich zur BEE verschärfen: In $\mathscr{T}$ gilt sogar

$$\bigwedge p_1 p_2 (p_1 \neq p_2 \to \bigvee !!\, g(g \perp L(p_1, p_2) \wedge S_1(L(p_1, p_2), g)\, p_1 \cong S_1(L(p_1, p_2), g)\, p_2)).$$

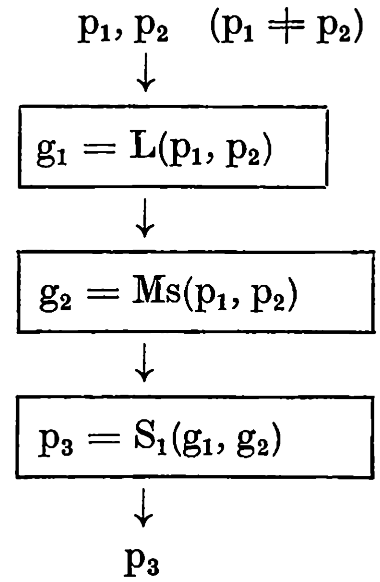
Auf Grund dieser BEE ist in $\mathscr{T}$ die Operation „Mittelsenkrechte" (Ms) definierbar:

$$\begin{aligned} Ms(p_1, p_2) :=\ & \iota g\big(g \perp L(p_1, p_2) \wedge S_1\big(L(p_1, p_2), g\big)\, p_1 \\ & \cong S_1\big(L(p_1, p_2), g\big)\, p_2\big), \text{ falls } p_1 \neq p_2. \end{aligned}$$

Das oben angegebene uniforme Flußdiagramm rechtfertigt die Benutzung der Operation Ms als „Unterprogramm" bei der Lösung weiterer Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal, d. h. die Verwendung von Arbeitsknoten mit Belegungen der Form $g_k = Ms(p_i, p_j)$. Daß die Lösung einer Konstruktionsaufgabe jedoch nicht immer gleichbedeutend mit der Realisierung einer in $\mathscr{T}$ definierbaren Operation als Flußdiagramm ist, zeigt folgende Überlegung: $\bigwedge p_1 p_2 \big(p_1 \neq p_2 \to \bigvee g\ g \perp L(p_1, p_2)\big)$ ist ebenfalls durch das bereits angegebene Flußdiagramm konstruktiv beweisbar. Diese BE läßt sich jedoch nicht zur BEE verschärfen.

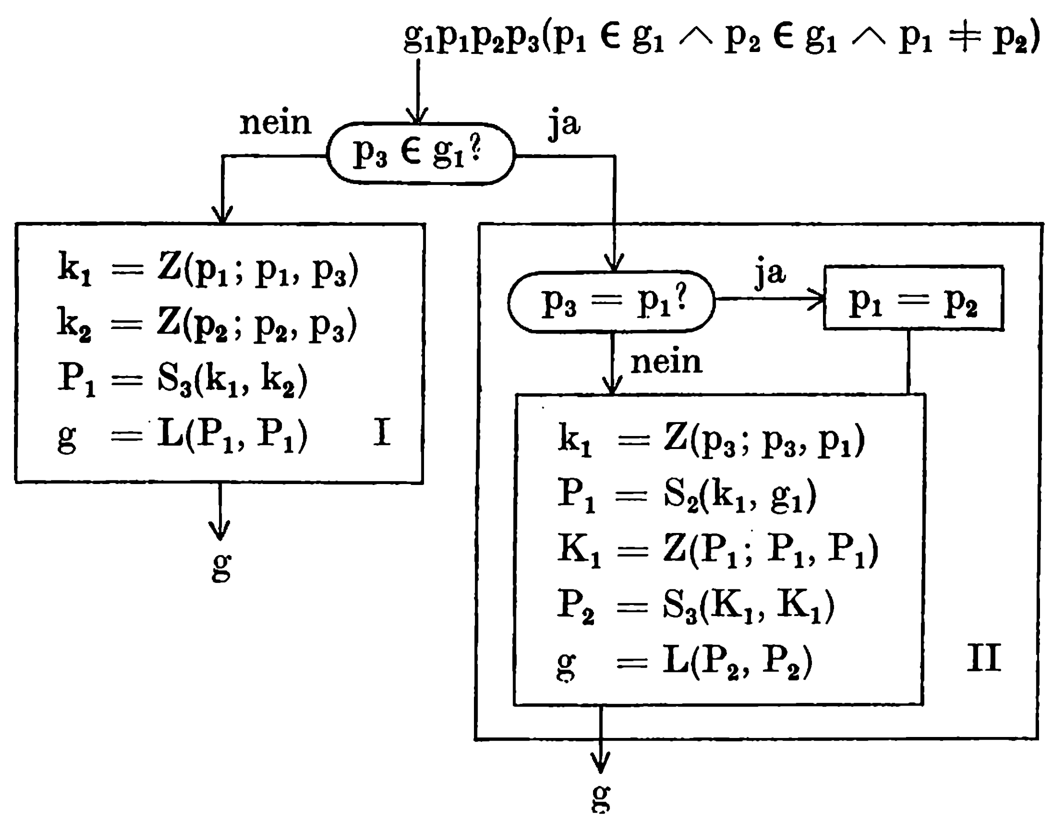
2. Die übliche Lösung der Aufgabe, mit Zirkel und Lineal den Mittelpunkt einer Strecke zu konstruieren, können wir unter Benutzung des unter 1. angegebenen Unter-

programms so schreiben:



Die so bewiesene BE $\bigwedge p_1p_2(p_1 \neq p_2 \rightarrow \bigvee p_3(p_3p_1 \cong p_3p_2 \wedge p_1, p_2, p_3 \text{ kollinear}))$ läßt sich zur BEE verschärfen. Auf Grund dieser BEE ist die Operation „Mittelpunkt" (M) definierbar, und das angegebene Flußdiagramm rechtfertigt die Benutzung des Unterprogramms $p_k = M(p_i, p_j)$ bei weiteren Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

3. Die Operation Lot, definiert durch $\mathrm{Lot}(p, g) := \iota g'(p \in g' \wedge g \perp g')$ beruht auf der BEE $\bigwedge pg \bigvee !! g'(p \in g' \wedge g \perp g')$. Die entsprechende BE ist jedoch nicht im bisherigen Sinn mit Zirkel und Lineal konstruktiv beweisbar, da auf ein aus einem Punkt und einer Geraden bestehendes System von gegebenen Stücken keine der fünf Operationen L, Z, S_1, S_2, S_3 anwendbar ist. Statt dessen lösen wir die Aufgabe unter der Voraussetzung, daß auf g zwei Punkte gegeben sind:



Unterprogramm I ist eine Lösung der Aufgabe „Lotfällen", Unterprogramm II eine Lösung der Aufgabe „Loterrichten". Die Zusammensetzung beider zu einer Lösung der Gesamtaufgabe „Lot" setzt die Entscheidbarkeit der Punkt-Geraden-inzidenz voraus, die vom Standpunkt des praktischen Zeichnens natürlich recht problematisch ist. Im Abschnitt 8.6 werden systematische Konstruktionen mit beliebigen Hilfspunkten untersucht. Dann werden wir die Aufgabe „Lot" im ursprünglich beabsichtigten Sinn lösen können.

4. Als Beispiel einer Konstruktion mit anderen Instrumenten sei die Konstruktion der Mittelsenkrechten zu p_1p_2 mit dem Parallellineal angegeben, wobei zunächst die Einschränkung gemacht wird, daß $\overline{p_1p_2}$ größer als die Breite d des Lineals ist:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2 \qquad (\mathrm{d} < \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}) \\
\quad\downarrow \\
\boxed{\mathrm{G}_1 = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)} \\
\quad\downarrow \\
\boxed{\mathrm{G}_2 = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)} \\
\quad\downarrow \\
\boxed{\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_1(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)} \\
\quad\downarrow \\
\boxed{\mathrm{g}_1 = \mathrm{L}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_1)} \\
\quad\downarrow \\
\quad\mathrm{g}_1
\end{array}
$$

Der Vergleich dieser Konstruktionsbeschreibung mit dem Term (5) aus Abschnitt 7.2 wirft die Frage auf, ob Terme, die aus gewissen Variablen für gegebene Stücke und Operationssymbolen für zulässige Grundoperationen aufgebaut sind, exakte Konstruktionsbeschreibungen darstellen. Selbstverständlich läßt sich jeder solche Term als Anweisung zur Hintereinanderausführung von Grundoperationen auffassen. Dabei bleibt jedoch, abgesehen von Ausnahmefällen, die Reihenfolge gewisser Schritte dem Ausführenden überlassen. Tritt z. B. eine zweistellige Operation auf, deren beide Argumentstellen mit unterschiedlichen Teiltermen besetzt sind, so ist das Endresultat von der Reihenfolge, in der die diesen beiden Teiltermen entsprechenden Zwischenresultate konstruiert werden, unabhängig. Ein Term der beschriebenen Art wird daher erst durch zusätzliche Vereinbarungen über die Reihenfolge solcher „vertauschbaren Schritte" (etwa Bildung der Zwischenresultate von links nach rechts) zur Kurzfassung eines Algorithmus. Abgesehen von diesem theoretischen Einwand sind derartige Terme schon bei geringer Länge sehr schwer lesbar und werden durch eventuell nötige Wiederholung des gleichen Teilterms an verschiedenen Stellen häufig länger als ein die gleiche Konstruktion exakter beschreibendes Flußdiagramm. Wir stellen jedoch fest, daß keine wesentliche Information verlorengeht, wenn man die Inhalte der Arbeitsknoten eines unverzweigten Flußdiagramms oder eines unverzweigten Teilstücks eines Flußdiagramms ohne Umrahmung und Zwischenpfeile untereinander oder sogar, etwa durch „;“ getrennt, platzsparend nebeneinander schreibt. Obiges Flußdiagramm kann man z. B. in der Form

$$\begin{aligned}&p_1, p_2(d < \overline{p_1p_2});\ G_1 = PL_2^d(p_1, p_2);\ G_2 = PL_2^d(p_2, p_1);\\ &P_1 = S_1(G_1, G_2);\ g_1 = L(P_1, P_1);\ g_1\end{aligned}$$

notieren. Von derartigen Abkürzungen werden wir im folgenden häufig Gebrauch machen.

In den folgenden Abschnitten (8.2. bis 8.6.) werden wir schrittweise die Menge der im Rahmen einer konstruktiven Teiltheorie $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ konstruktiv beweisbaren BE auf eine andere Weise definieren, die vom Begriff des uniformen Flußdiagramms unabhängig ist. Dabei werden die letzten Schritte (Konstruktionen mit konstruktiver Auswahl und Konstruktionen mit Hilfselementen) einer Erweiterung des in diesem Abschnitt behandelten Formalismus der uniformen Flußdiagramme entsprechen.

8.2. Elementare Konstruktionen

Im folgenden bedeute $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$ stets: Jede Komponente des Variablentupels $\mathbf{x}$ kommt unter den Komponenten von $\mathbf{y}$ vor.

Es sei $\mathscr{S}$ eine Sprache und $\mathscr{T}$ eine beliebige in $\mathscr{S}$ formulierte Theorie. Für $i = 1, 2, 3$ bezeichne H_i die BE $\bigwedge \mathbf{x}_i\big(H_i'(\mathbf{x}_i) \to \bigvee \mathbf{y}_i H_i''(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\big)$ der Sprache $\mathscr{S}$.

H_3 heißt eine *Verkettung von* H_1 *mit* H_2 (*bezüglich* $\mathscr{T}$) genau dann, wenn $\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{x}_3$

$$\text{und } \mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1 \text{ und } \mathbf{y}_3 \leqq \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \text{ und in } \mathscr{T} \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}\bigwedge \mathbf{x}_3\Big(H_3'(\mathbf{x}_3) \to H_1'(\mathbf{x}_1) \wedge \bigwedge \mathbf{y}_1\big(H_1''(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \to H_2'(\mathbf{x}_2)\\ \wedge \bigwedge \mathbf{y}_2(H_2''(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \to H_3''(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3))\big)\Big).\end{aligned}$$

Es bezeichne ferner $H(\mathbf{x})$ einen Ausdruck der Sprache $\mathscr{S}$, der genau die Variablen $\mathbf{x}$ vollfrei enthält.

H_3 heißt eine *Verzweigung von* H_1 *und* H_2 *an* $H(\mathbf{x})$ (*bezüglich* $\mathscr{T}$) genau dann, wenn $\mathbf{x} \leqq \mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{x}_3$ und $\mathbf{y}_3 \leqq \mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_3 \leqq \mathbf{y}_2$ und in $\mathscr{T}$ gilt

$$\bigwedge \mathbf{x}_3\big(H_3'(\mathbf{x}_3) \wedge H(\mathbf{x}) \to H_1'(\mathbf{x}_1) \wedge \bigwedge \mathbf{y}_1(H_1''(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \to H_3'(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3))\big)$$

und

$$\wedge\, \mathrm{x}_3\big(\mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_3) \wedge \neg\, \mathrm{H}(\mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{H}_2'(\mathrm{x}_2) \wedge \wedge\, \mathrm{y}_2(\mathrm{H}''(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2) \rightarrow \mathrm{H}_3''(\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3))\big).$$

Offenbar gilt: *Sind* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \mathscr{T}$ *und ist* H_3 *eine Verkettung von* H_1 *mit* H_2 *oder eine Verzweigung von* H_1 *und* H_2 *an einem beliebigen Ausdruck* $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathscr{S}$, *so ist auch* $\mathrm{H}_3 \in \mathscr{T}$, *d. h., der Schluß von* H_1 *und* H_2 *auf* H_3 *ist in diesem Fall zulässig.*

Es sei nun $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ eine beliebige konstruktive Teiltheorie von $\mathscr{T}$. Wir definieren induktiv die Menge $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der mittels $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *durch elementare Konstruktion beweisbaren* BE:

(1a) *Ist* x *eine der Variablen* x *und* y *eine Variable gleicher Sorte, die nicht in* x *vorkommt, so ist* $\wedge\, \mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{x} \rightarrow \vee\, \mathrm{y}\; \mathrm{y} = \mathrm{x}) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1b) *Ist* $\wedge\, \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \vee\; !!\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big) \in \mathscr{K}$, *so ist* $\wedge\, \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \vee\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1c) *Sind* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *und ist* H_3 *eine Verkettung von* H_1 *mit* H_2, *so ist auch* $\mathrm{H}_3 \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1d) *Sind* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *und ist* H_3 *eine Verzweigung von* H_1 *und* H_2 *an einem Ausdruck* $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}^*$, *so ist auch* $\mathrm{H}_3 \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Aus dieser Definition und der oben gemachten Bemerkung folgt unmittelbar $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \subseteq \mathscr{T}$, d. h., jeder im hier definierten Sinne konstruktive Beweis einer BE ist insbesondere ein Beweis im üblichen Sinn. In der traditionellen Ausdrucksweise der Theorie der geometrischen Konstruktionen bedeutet Definition (1) etwa folgendes:

a) Jedes der gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}$ gilt bei Benutzung beliebiger Hilfsmittel als aus $\boldsymbol{x}$ konstruierbar.

b) Jedes Stück y, das durch einmalige Anwendung einer zulässigen Grundkonstruktion aus gegebenen Stücken $\boldsymbol{x}$ entsteht, ist aus $\boldsymbol{x}$ konstruierbar.

c) Sind unter der Voraussetzung H_3' über die gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}_3$ für ein gewisses Teilsystem $\boldsymbol{x}_1$ die Bedingungen H_1' für die Anwendbarkeit einer bereits gelösten Konstruktionsaufgabe erfüllt und folgt ferner aus H_3', daß dann ein gewisses Teilsystem $\boldsymbol{x}_2$ der ursprünglich gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}_3$ und der in der ersten Teilkonstruktion entstandenen Stücke $\boldsymbol{y}_1$ die Voraussetzungen H_2' einer weiteren bereits gelösten Konstruktionsaufgabe erfüllt, und folgt schließlich aus H_3', daß ein gewisses Teilsystem $\boldsymbol{y}_3$ der im ersten Teilschritt konstruierten Stücke $\boldsymbol{y}_1$ und der im zweiten Teilschritt konstruierten Stücke $\boldsymbol{y}_2$ die Bedingung $H_3''(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ erfüllt, so ist aus beliebigen $\boldsymbol{x}_3$ mit $H_3'(\boldsymbol{x}_3)$ ein System $\boldsymbol{y}_3$ mit $H_3''(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ konstruierbar.

d) Ist H eine der als entscheidbar geltenden Relationen und ist unter der Voraussetzung H_3' über die gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}_3$ beweisbar, daß im Fall des Zutreffens von H auf gewisse der Stücke $\boldsymbol{x}_3$ ein Teil $\boldsymbol{x}_1$ von $\boldsymbol{x}_3$ die Voraussetzungen H_1' für die Anwendbarkeit einer bereits bekannten Konstruktion erfüllt und ein Teilsystem $\boldsymbol{y}_3$ der hierbei entstehenden Resultate der Bedingung $H_3''(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ genügt, während im Fall des Nichtzutreffens von H ein Teil $\boldsymbol{x}_2$ der gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}_3$ die Voraussetzungen H_2' für die Anwendbarkeit einer ebenfalls bereits bekannten Konstruktion erfüllt und aus $H_3'(\boldsymbol{x}_3)$ folgt, daß die Resultatkomponenten $\boldsymbol{y}_3$ des Gesamtresultats $\boldsymbol{y}_2$ der letzteren Konstruktion der Bedingung $H_3''(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ genügen, so ist zu jedem System $\boldsymbol{x}_3$ mit $H_3'(\boldsymbol{x}_3)$ ein System $\boldsymbol{y}_3$ mit $H_3'(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ konstruierbar (vgl. Beispiel 3 in Abschnitt 8.1).

Durch Induktion über die Anzahl m der Variablen y_i erhält man aus (1a) und (1c) leicht folgende Verallgemeinerung von (1a):

(1a′) *Ist für* $\mu = 1, \ldots, m$ $(m \leqq n)$ y_{i_μ} *eine Variable gleicher Sorte wie* x_{j_μ} *und sind die Variablen* $\mathrm{x}_{j_1}, \ldots, \mathrm{x}_{j_n}, \mathrm{y}_{i_1}, \ldots, \mathrm{y}_{i_m}$ *paarweise verschieden, so ist*

$$\wedge\, \mathrm{x}_{j_1} \cdots \mathrm{x}_{j_n}\big(\mathrm{x}_{j1} = \mathrm{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{x}_{j_n} = \mathrm{x}_{j_n}$$
$$\rightarrow \vee\, \mathrm{y}_{i_1} \cdots \mathrm{y}_{i_m} (\mathrm{y}_{i_1} = \mathrm{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{y}_{i_m} = \mathrm{x}_{jm})\big) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}),$$

d. h., jedes Teilsystem der gegebenen Stücke ist aus diesen konstruierbar.

Satz 1. *Gehört die* BE

(2) $$\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_1'(\mathrm{x}_1) \rightarrow \vee\, \mathrm{y}_1 \mathrm{H}_1''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)\big)$$

zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *und gilt in* $\mathscr{T}$ $\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_1) \rightarrow \mathrm{H}_1'(\mathrm{x}_1)\big)$ *und* $\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_1) \rightarrow \wedge\, \mathrm{y}_1(\mathrm{H}_1''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) \rightarrow \mathrm{H}_3''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1))\big)$, *so gehört auch*

(3) $$\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_1) \rightarrow \vee\, \mathrm{y}_1 \mathrm{H}_3''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)\big)$$

zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

„Verschärfung der Voraussetzung“ H′ über die gegebenen Stücke und „Abschwächung der Bedingung“ H″ an die zu konstruierenden Stücke führt also von durch elementare Konstruktion beweisbaren BE zu ebensolchen. Hierin ist insbesondere der Spezialfall enthalten, daß in $\mathscr{T}$ sogar gilt:

$$\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_1'(\mathrm{x}_1) \leftrightarrow \mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_1)\big)$$

bzw.

$$\wedge\, \mathrm{x}_1\big(\mathrm{H}_3'(\mathrm{x}_1) \rightarrow \wedge\, \mathrm{y}_1(\mathrm{H}_3''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) \leftrightarrow \mathrm{H}_1''(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1))\big),$$

d. h., die Zugehörigkeit einer BE zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist unabhängig von der speziellen Formulierung der Voraussetzung H' und der Bedingung H''.

Zum Beweis von Satz 1 setze man $\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_1$, $\mathrm{y}_3 = \mathrm{y}_1$. Ferner sei x eine der Variablen x_1 und y_2 eine Variable gleicher Sorte, die in x_1 und y_1 nicht vorkommt. Dann gehört nach (1a)

(4) $$\wedge\, \mathrm{x}_2(\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2 \rightarrow \vee\, \mathrm{y}_2\, \mathrm{y}_2 = \mathrm{x})$$

zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und (3) ist als Verkettung von (2) und (4) nach (1c) Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Die beiden folgenden Sätze stellen den Zusammenhang zwischen der hier durch „Axiome und Beweisregeln“ definierten Menge $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ konstruktiv beweisbarer

BE und der im vorigen Abschnitt behandelten Präzisierung des konstruktiven Beweisens durch Angabe von uniformen Flußdiagrammen her.

Satz 2. *Zu jeder* BE $\bigwedge \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \bigvee \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$ *aus* $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ *existiert ein zyklenfreies uniformes Flußdiagramm* $\mathfrak{F}$ *über* $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, *so daß in jedem Modell von* $\mathcal{T}$ *für alle* x *mit* $H'(x)$ *das Resultat* $\mathfrak{F}(x)$ *der Anwendung von* $\mathfrak{F}$ *auf* x *existiert und der Bedingung* $\mathrm{H}''\big(x, \mathfrak{F}(x)\big)$ *genügt.*

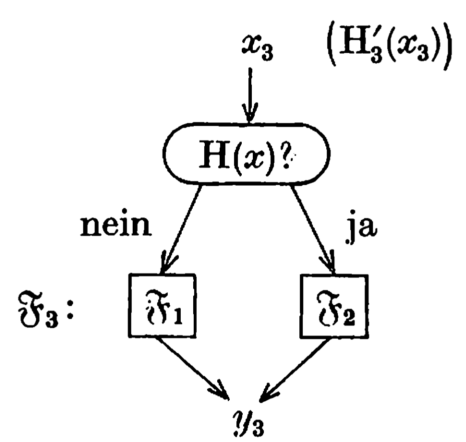
Satz 2 wird durch Induktion bezüglich Definition (1) bewiesen. Für $\bigwedge \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x} \to \bigvee \mathbf{y}\ \mathbf{y} = \mathbf{x}) \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ (x eine der Variablen $\mathbf{x}$) leistet das Flußdiagramm

$$\begin{array}{c} \mathrm{x} \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{y} = \mathrm{x}} \\ \downarrow \\ \mathrm{y} \end{array}$$

und für $\bigwedge \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \bigvee \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ mit $\bigwedge \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \bigvee !!\, \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) \in \mathcal{K}$ leistet das Flußdiagramm

$$\begin{array}{c} \mathrm{x}\ \big(\mathrm{H}'(\mathrm{x})\big) \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{y} = \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathrm{x})} \\ \downarrow \\ \mathrm{y} \end{array}$$

das Verlangte. Ist $\mathrm{H}_3 \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ eine Verkettung von $\mathrm{H}_1 \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ mit $\mathrm{H}_2 \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, wobei wir annehmen, daß für H_1 bzw. H_2 die uniformen Flußdiagramme $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ das im Satz Geforderte leisten, so erhält man ein Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ mit der für H_3 geforderten Eigenschaft, indem man alle Ausgänge von $\mathfrak{F}^1$



mit dem Eingangsknoten von $\mathfrak{F}_2$ identifiziert. Ist schließlich H_3 eine Verzweigung der beiden BE H_1, H_2 an $H(x)$, wobei wiederum $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ uniforme Flußdiagramme sind, die für H_1 bzw. H_2 das Verlangte leisten, so erfüllt das Flußdiagramm $\mathfrak{F}_3$ für H_3 die geforderten Bedingungen. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Der folgende Satz stellt in gewissem Sinne die Umkehrung von Satz 2 dar. Ist $\mathfrak{F}$ ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ mit den Eingangsvariablen $\mathbf{x}$ und den Ausgangsvariablen $\mathbf{y}$, so heißt eine BEE

$$(5) \qquad \wedge\, \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \wedge\, !!\, \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$$

eine *Beschreibung* von $\mathfrak{F}$, wenn in jedem Modell von $\mathcal{T}$ für alle Systeme $\boldsymbol{x}$ von Dingen entsprechender Sorten gilt: $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ existiert genau dann, wenn $H'(\boldsymbol{x})$ gilt, und im Fall der Existenz ist $H''\big(\boldsymbol{x}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{x})\big)$ erfüllt. Exakter formuliert bedeutet dies: Ist ω ein Interpretation der Sprache von $\mathcal{T}$ in einem Modell von $\mathcal{T}$ und f eine partielle Belegung bezüglich ω mit dem Definitionsbereich $\mathbf{x}$, so existiert die Belegung $f' = \mathfrak{F}_\omega(f)$ genau dann, wenn $\mathit{Wert}(\mathrm{H}'(\boldsymbol{x}), \omega, f) = \boldsymbol{W}$ gilt, und im Falle der Existenz ist $\mathit{Wert}(\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \omega, f'') = \boldsymbol{W}$ für die durch

$$f''(\mathbf{x}_i) := \begin{cases} f(\mathbf{x}_i) & \text{für } \mathbf{x}_i \text{ in } \mathbf{x}, \\ f'(\mathbf{x}_i) & \text{für } \mathbf{x}_i \text{ in } \mathbf{y} \end{cases}$$

definierte partielle Belegung f''. Analog zur gewöhnlichen definitorischen Einführung partieller Operationen kann man auf der Grundlage einer BEE der Form (5) eine partielle Operation einführen, deren Wertebereich nun allerdings nicht mehr aus Einzeldingen einer gewissen Sorte sondern aus $n(\mathbf{y})$-Tupeln von Dingen besteht. Genau wie die bisher betrachteten speziellen BEE mit $n(\mathbf{y}) = 1$ einen gewissen Ersatz für die auf ihrer Grundlage definierbaren Operationen darstellen, bedeutet die Existenz einer Beschreibung für ein uniformes Flußdiagramm, daß einerseits dieses Flußdiagramm eine in der Theorie $\mathcal{T}$ definierbare Operation darstellt und daß man andererseits die Verwendung dieser Operation bzw. dieses Flußdiagramms prinzipiell umgehen kann.

Wir verabreden noch, im folgenden die BE $\wedge\, \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \vee\, \mathbf{y}\, \mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$ als *die zu* (5) bzw. auch als *eine zu* $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ *gehörige* BE zu bezeichnen.

Ein uniformes Flußdiagramm stellt offenbar höchstens dann bei gewissen Interpretationen eine Operation mit nichtleerem Definitionsbereich dar, wenn es folgende beiden Bedingungen erfüllt:

a) Auf der rechten Seite jeder einem Arbeitsknoten zugeordneten Termgleichung und in jedem einem Prüfknoten zugeordneten Ausdruck kommen höchstens solche Variable frei vor, die entweder Eingangsvariable sind oder für die es wenigstens einen Weg vom Eingang des Strukturgraphen zu dem betreffenden Knoten gibt, der einen Arbeitsknoten enthält, dessen zugeordnete Termgleichung diese Variable auf der linken Seite enthält.

b) Unter den Ausgangsvariablen befinden sich nur solche, die in wenigstens einer einem Arbeitsknoten zugeordneten Termgleichung auf der linken Seite auftreten.

Ein uniformes Flußdiagramm, das die Bedingungen a) und b) erfüllt, wollen wir der Kürze halber *konsistent* nennen. Ein uniformes Flußdiagramm ohne Arbeitsknoten ist niemals konsistent.

Satz 3. *Zu jedem zyklenfreien konsistenten uniformen Flußdiagramm über* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *gibt es eine Beschreibung in* $\mathscr{T}$, *so daß die zugehörige* BE *Element von* $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *ist.*

Unter Berufung auf Kapitel 6. können wir uns beim Beweis von Satz 3 auf Flußdiagramme mit induktivem Strukturgraphen beschränken und den Beweis durch Induktion bezüglich des induktiven Aufbaus des Strukturgraphen führen.

Ein aus einem einzelnen Prüfknoten bestehendes Flußdiagramm ist, wie bereits bemerkt, nicht konsistent. Ein Arbeitsbaustein der Form

$$\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \downarrow \\ \mathfrak{F} : \boxed{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j} \\ \downarrow \\ \mathbf{y} \end{array}$$

ist nur dann konsistent, wenn $\mathbf{x}_j$ in $\mathbf{x}$ vorkommt und $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ ist. In diesem Fall ist $\bigwedge \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow \bigvee !! \, \mathbf{x}_i \, \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j)$ eine Beschreibung von $\mathfrak{F}$ und die zugehörige BE nach (1a) in $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Ein Arbeitsbaustein der Form

$$\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \downarrow \\ \mathfrak{F} : \boxed{\mathbf{x}_i = \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathbf{z})} \\ \downarrow \\ \mathbf{y} \end{array}$$

ist nur dann konsistent, wenn $\mathbf{z} \leqq \mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ ist. In diesem Fall ist

$$\bigwedge \mathbf{x}\big(\mathbf{x} = \mathbf{x} \wedge \mathrm{H}'(\mathbf{z}) \rightarrow \bigvee !! \, \mathbf{x}_i \mathrm{H}''(\mathbf{z}, \mathbf{x}_i)\big)$$

eine Beschreibung von $\mathfrak{F}$. (Das Konjunktionsglied $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ist nötig, damit die Konstruktionsvoraussetzung formal von allen Eingangsvariablen des Flußdiagramms abhängt und über diese quantifiziert werden kann.) Da nach Voraussetzung die zu $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ gehörige BEE zu $\mathscr{K}$ gehört, gehört nach (1b) die BE

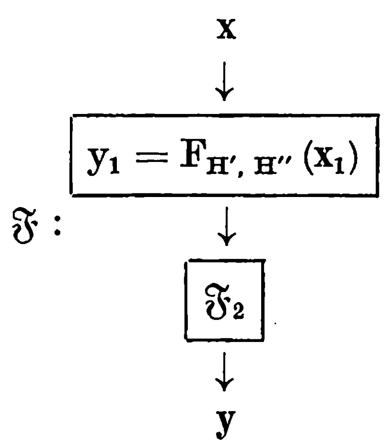
$$\bigwedge \mathbf{z}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{z}) \rightarrow \bigvee \mathbf{x}_i \mathrm{H}''(\mathbf{z}, \mathbf{x}_i)\big)$$

zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Die zur Beschreibung von $\mathfrak{F}$ gehörige BE ist eine Verkettung von

$$\wedge\, \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow \vee\, \mathbf{x}_i\ \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j)$$

($\mathbf{x}_j$ eine beliebige der Variablen $\mathbf{x}$) mit der zu $F_{H', H''}$ gehörigen BE, gehört also nach (1c) zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Es sei nun $\wedge\, \mathbf{x}_2\big(H'_2(\mathbf{x}_2) \rightarrow \vee !!\, \mathbf{y}_2 H''_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)\big)$ eine Beschreibung eines uniformen Flußdiagramms $\mathfrak{F}_2$, und die zugehörige BE gehöre zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Das Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ entstehe aus $\mathfrak{F}_2$ durch Vorschalten eines Arbeitsknotens, der etwa mit der Gleichung $\mathbf{y}_1 = F_{H', H''}(\mathbf{x}_1)$ belegt sei:



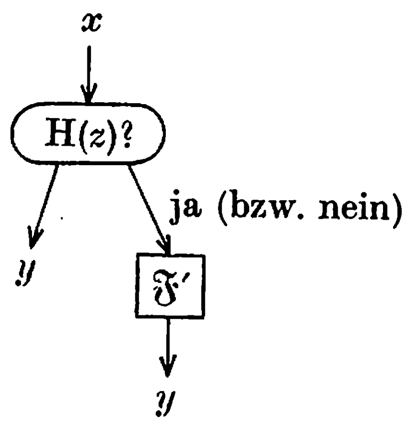
(Der Fall, daß der vorgeschaltete Arbeitsknoten mit einer Gleichung der Form $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ belegt ist, sei dem Leser überlassen.) Damit $\mathfrak{F}$ konsistent ist, muß $\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{x}\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y} \leqq \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ sein. Offenbar ist $\mathfrak{F}$ genau dann auf ein System $\mathbf{x}$ von Eingabestücken anwendbar, wenn das Teilsystem $\mathbf{x}_1$ die Voraussetzung $H'(\mathbf{x}_1)$ erfüllt und für das Teilsystem $\mathbf{x}_2$ von $\mathbf{x}\mathbf{y}_1$ die Voraussetzung $H'_2(\mathbf{x}_2)$ gilt. Die Komponenten $\mathbf{y}$ des Gesamtresultats sind dadurch charakterisiert, daß sie zusammen mit den weiteren Zwischenresultaten $\mathbf{y}_3$ den Bedingungen $H''(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ und $H''_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ genügen. Eine Beschreibung für $\mathfrak{F}$ lautet demnach

$$\begin{aligned}&\wedge \mathbf{x}\big(\mathbf{x} = \mathbf{x} \wedge H'(\mathbf{x}_1) \wedge \wedge \mathbf{y}_1(H''(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \rightarrow H'_2(\mathbf{x}_2))\\ &\rightarrow \vee\ !!\ \mathbf{y} \vee \mathbf{y}_3(H''_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \wedge H''_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2))\big).\end{aligned}$$

Die zugehörige BE ist laut (1b), (1c) und Satz 1 Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Auf analoge Weise stellt man eine Beschreibung für ein Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ auf, das durch Anwendung der Operation *Vz* aus zwei Flußdiagrammen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ unter Vorschaltung eines Prüfknotens $H(\mathbf{z})$? mit $H(\mathbf{z}) \in \mathscr{E}^*$ entsteht, wenn man für $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ schon Beschreibungen kennt. Setzt man voraus, daß die zu diesen Beschreibungen gehörigen BE Elemente von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ sind, so folgt im wesentlichen aus (1d), daß auch die zur Beschreibung von $\mathfrak{F}$ gehörige BE Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist. Die Ausführung sei dem Leser überlassen.

Entsteht $\mathfrak{F}$ durch Vorschalten eines Prüfknotens vor ein Flußdiagramm $\mathfrak{F}'$, für das eine Beschreibung $\wedge\, \mathbf{x}'\big(H'(\mathbf{x}') \rightarrow \vee !!\, \mathbf{y}H''(\mathbf{x}', \mathbf{y})\big)$ bereits bekannt und die zugehörige

BE in $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ gelegen ist,



so existiert, da die Variablen $\mathbf{y}$ von den Variablen $\mathbf{x}$ verschieden sind, ein Resultat $\mathfrak{F}(\mathbf{x})$ höchstens für solche $\mathbf{x}$, für die $\mathrm{H}(\mathbf{z})$ (bzw. $\neg\, \mathrm{H}(\mathbf{z})$) gilt. (Aus der Konsistenz von $\mathfrak{F}$ folgt $\mathbf{z} \leqq \mathbf{x}$ und $\mathbf{x}' \leqq \mathbf{x}$.) In diesem Fall entsteht eine Beschreibung für $\mathfrak{F}$, indem man in der Beschreibung für $\mathfrak{F}'$ die Voraussetzung $\mathrm{H}'(\mathbf{x}')$ durch $\mathbf{x} = \mathbf{x} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{z}) \wedge \mathrm{H}'(\mathbf{x}')$ bzw. durch $\mathbf{x} = \mathbf{x} \wedge \neg\, \mathrm{H}(\mathbf{z}) \wedge \mathrm{H}'(\mathbf{x}')$ ersetzt, und die zugehörige BE gehört nach Satz 1 (Verschärfung der Voraussetzung) zu $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Es seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ Systeme von Variablen mit $n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{y})$, so daß die $2n(\mathbf{x})$ Variablen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ paarweise verschieden sind und für $i = 1, \ldots, n(\mathbf{x})$ die i-te Komponente von $\mathbf{x}$ und die i-te Komponente von $\mathbf{y}$ Variablen gleicher Sorte sind. Ist unter dieser Voraussetzung über die Variablen die BEE

$$(6) \qquad \bigwedge \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \bigvee !!\, \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$$

in $\mathscr{T}$ gültig und gilt ferner in $\mathscr{T}$

$$\bigwedge \mathbf{x}\mathbf{y}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \neg\, \mathrm{H}(\mathbf{y}) \to \mathrm{H}'(\mathbf{y})\big)$$

für einen gewissen Ausdruck H, so heißen die BEE (6) und die auf ihrer Grundlage definierbare partielle Operation *in $\mathscr{T}$ bezüglich* H *iterativ.* Gilt in $\mathscr{T}$ sogar

$$\bigwedge \mathbf{x}\mathbf{y}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathrm{H}'(\mathbf{y})\big),$$

so heißen (6) und die Operation $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ *in $\mathscr{T}$ iterativ.*

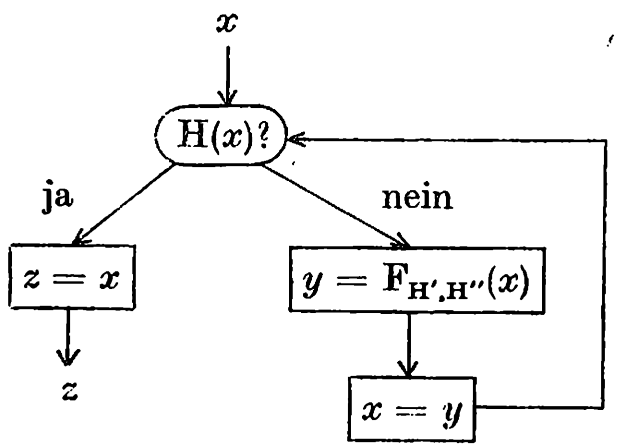
Ist die BEE (6) in $\mathscr{T}$ bezüglich H iterativ und die zugehörige BE Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ für eine gewisse konstruktive Teiltheorie von $\mathscr{T}$, so ist (6) eine Beschreibung eines gewissen uniformen Flußdiagramms über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, folglich (7) ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, falls $\mathrm{H}(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}^*$ und $\mathbf{z}$ ein System von Variablen entsprechender Sorte ist, die von den Variablen $\mathbf{x}$ verschieden sind. Die Nichtanwendbarkeit von (7) auf ein System $\mathbf{x}$ von Eingabestücken, die $\mathrm{H}'(\mathbf{x})$ erfüllen, kann wegen der vorausgesetzten Iterativität von $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ bezüglich H nur dadurch verursacht werden, daß keines der durch

$$\mathrm{F}^0_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}, \quad \mathrm{F}^{n+1}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathbf{x}) := \mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}\big(\mathrm{F}^n_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}(\mathbf{x})\big)$$

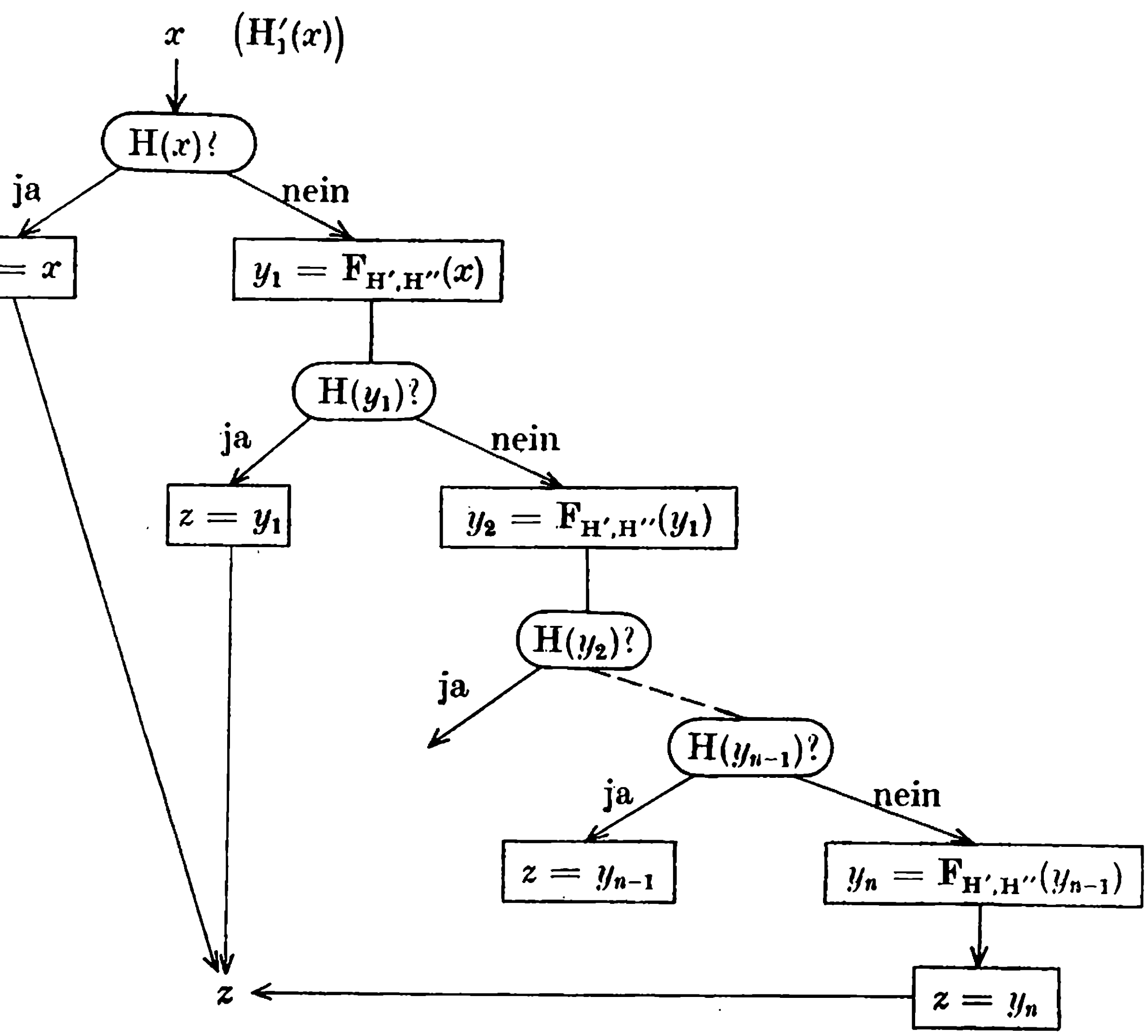
induktiv definierten Zwischenresultate der Bedingung H(**x**) genügt. Demnach ist (7) auf **x** genau dann anwendbar, wenn gilt:

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}) \vee \big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \wedge \bigvee n \bigvee \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n(\mathrm{H}''(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{H}''(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) \wedge \mathrm{H}(\mathbf{y}_n))\big).$$

(7)

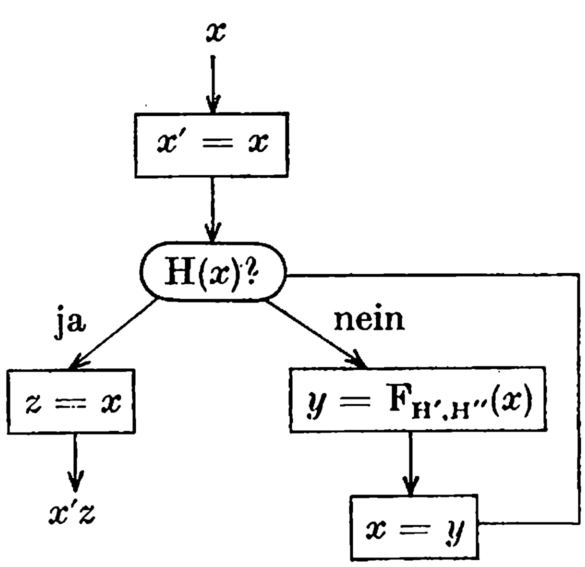


(8)



Dies oder etwas Gleichwertiges ist aber in einer elementaren Sprache nicht formulierbar, so daß ein zu Satz 3 analoger Satz für nicht zyklenfreie uniforme Flußdiagramme nicht allgemein behauptet werden kann. Elementar formulierbar ist nur der Fall, daß es unter der Voraussetzung $H_1'(\mathbf{x})$ eine von $\mathbf{x}$ unabhängige obere Schranke n für die Anzahl der Durchlaufungen des Zyklus von (7) gibt. In diesem Fall ist jedoch auch (7) einem zyklenfreien uniformen Flußdiagramm (8) äquivalent, für welches eine Beschreibung nach Satz 3 gefunden werden kann. Auf den nichtelementaren Fall werden wir in Abschnitt 8.4 zurückkommen.

Abschließend eine Bemerkung zur Vorbereitung des nächsten Abschnitts. Bei der Aufstellung eines zyklenfreien Flußdiagramms kann man offenbar die auf den linken Seiten der den Arbeitsknoten zugeordneten Termgleichungen auftretenden Variablen (Bezeichnungen der Zwischenresultate) stets so wählen, daß sie von den Bezeichnungen der gegebenen und bis zu diesem Schritt bereits konstruierten Stücke verschieden sind. In diesem Fall wird im Lauf der Abarbeitung des Flußdiagramms kein Inhalt einer schon benutzten Adresse gelöscht. Die gegebenen Stücke und alle konstruierten Stücke stehen als mögliche Komponenten des Resultats $\mathbf{y}$ zur Verfügung. In einem Flußdiagramm der Form (7) ist es dagegen unumgänglich, die Adressen $\mathbf{x}$, die auf der rechten Seite des zu iterierenden Arbeitsknotens auftreten, immer wieder neu zu besetzen und damit ihre alte Bedeutung zu löschen. Allerdings kann man auch bei nicht zyklenfreien Flußdiagrammen generell erreichen, daß die ursprünglich gegebenen Stücke $\mathbf{x}$ erhalten bleiben, indem man sie vor Beginn der eigentlichen Konstruktion $\mathfrak{F}$ unter je einer zweiten Adresse $\mathbf{x}'$ speichert (d. h. mit einer zweiten Bezeichnung versieht), die in $\mathfrak{F}$ nirgends vorkommt. Zum Beispiel (7) geht dann über in



8.3. Elementar entscheidbare Relationen

Die Anerkennung der Konstruktivität gewisser Grundoperationen und der Effektivität gewisser Prüfrelationen hat nicht nur — wie bisher betrachtet — die Konstruktivität aller hieraus durch Flußdiagramme erhältlichen Operationen sondern auch die effektive Durchführbarkeit gewisser zusammengesetzter Entscheidungsprozesse zur Folge. Wir definieren induktiv die Menge $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ der *bezüglich* $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ *elementar entscheidbaren Ausdrücke* (die in jedem Modell von $\mathscr{T}$, in dem $\mathscr{K}$ und $\mathscr{E}$ wirklich effektiv sind, effektiv entscheidbare Prüfrelationen darstellen):

(1a) $\mathscr{E}^* \subseteqq \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$.

(1b) *Ist* $\mathrm{H} \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, *so ist auch* $\neg\,\mathrm{H} \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$.

(1c) *Ist* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, $\mathrm{H}(\mathbf{y}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, $\bigwedge \mathbf{x}\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \to \bigvee !!\, \mathbf{y}\mathrm{H}''(\mathbf{x},\mathbf{y})\big) \in \mathscr{T}$ *und die zu dieser* BEE *gehörige* BE *Element von* $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, *so ist auch* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{H}\big(\mathrm{F}_{\mathrm{H}',\,\mathrm{H}''}(\mathbf{x})\big) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$.

Der Definition liegt der Gedanke zugrunde, daß die bezüglich $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ elementaren Entscheidungen durch zyklenfreie uniforme Flußdiagramme über $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ gegeben werden, die mindestens zwei Ausgänge besitzen und deren sämtliche Ausgänge in zwei nichtleere Teilmengen „ja-Ausgänge" und „nein-Ausgänge" eingeteilt sind. Ein solches Flußdiagramm muß — wie die ursprünglichen Prüfknoten — auf beliebige Eingaben $\mathbf{x}$ anwendbar sein. Die Entscheidung fällt positiv oder negativ aus je nachdem, an welchem Ausgang das Resultat erscheint. Da bei geeigneter Wahl der Variablen die Eingabe $\mathbf{x}$ im Laufe der Abarbeitung eines solchen Flußdiagramms erhalten bleibt (vgl. Abschnitt 8.2.), kann man an jeden Ausgang des Flußdiagramms $\mathbf{y}(=\mathbf{x})$ als gewünschtes Resultat schreiben. Die angegebene Definition (1) liefert nun — analog zur Definition von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ — eine vom Begriff des Flußdiagramms unabhängige Präzisierung dieser Vorstellungen. (1a) bedeutet, daß die Prüfknoten selbst die einfachsten Flußdiagramme der verlangten Art sind. (1b) bedeutet, daß aus einem „Prüfdiagramm" durch Vertauschung von ja- und nein-Ausgängen wieder ein Prüfdiagramm entsteht. (1c) bedeutet: Ist F eine in $\mathscr{T}$ definierbare Operation, die bezüglich $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ konstruktiv ist, und sind H′ und H bezüglich $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ konstruktiv entscheidbar, so daß F auf alle $\mathbf{x}$ mit $\mathrm{H}'(\mathbf{x})$ anwendbar ist und $\mathrm{F}(\mathbf{x})$ auf H prüfbar ist, so ist folgendes Prüfverfahren effektiv: Man prüfe zunächst $\mathrm{H}'(\mathbf{x})$; falls diese Prüfung positiv ausfällt, bilde man $\mathrm{F}(\mathbf{x})$ und prüfe $\mathrm{H}\big(\mathrm{F}(\mathbf{x})\big)$. Falls diese Prüfung auch positiv ausfällt, sei der Gesamtausgang positiv, andernfalls negativ.

Da nach Abschnitt 8.2 (1a′) insbesondere jede identische Abbildung $\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ konstruktiv ist, umfaßt Teil c) der Definition von $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ als Spezialfall

(1d) *Ist* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ *und* $\mathrm{H}(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, *so ist auch* $\mathrm{H}'(\mathbf{x}) \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$,

d. h. zusammen mit (1b): $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ *ist aussagenlogisch abgeschlossen.*

Ist $\mathscr{E}$ leer, so auch $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, andernfalls enthält $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ nach der letzten Bemerkung auch allgemeingültige — d. h. auf alle Eingaben $\mathbf{x}$ zutreffende — Ausdrücke H'. Damit ergibt sich als weiterer Spezialfall von (1c):

(1e) *Ist die in $\mathscr{T}$ definierbare volle Operation* F *bezüglich* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *konstruktiv und* F(x) *auf* $\mathrm{H} \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *prüfbar, so ist* $\mathrm{H}(\mathrm{F}(\mathrm{x})) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1d) (zusammen mit (1b)) und (1e) erscheinen als „Axiome" der elementar konstruktiven Entscheidbarkeit natürlicher als (1c). Jedoch ist der relativ komplizierte Fall (1c) nicht entbehrlich, da die meisten konstruktiven Operationen F eben nicht voll sind, andererseits aber gesichert werden muß, daß die zusammengesetzten Prüfungen ebenso wie die einzelnen Prüfknoten auf jede Eingabe anwendbar sind.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in einem Prüfdiagramm ein Operationsknoten, auf den kein Prüfknoten mehr folgt, keinen Beitrag für die Prüfaufgabe des Diagramms liefert, ist leicht zu zeigen, daß jedes „sinnvolle" zyklenfreie induktive Prüfdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ unter Benutzung der Schritte (1b), (1c) (bzw. auch (1d) und (1e)) aus mit Ausdrücken aus $\mathscr{E}^*$ belegten Prüfknoten aufgebaut werden kann. Die angegebene Definition ist also hinreichend umfassend. Andererseits gilt der

Satz über elementar entscheidbare Relationen. *Die Ersetzung von $\mathscr{E}^*$ durch $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ in der Definition von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$* (Teil d)) *führt nicht aus der Menge der bereits definierten elementar konstruktiven* BE *heraus.* (D. h., die im folgenden häufig praktizierte Benutzung zusammengesetzter Prüfknoten dient nur der Bequemlichkeit der Formulierung und ist prinzipiell entbehrlich.)

Zum Beweis zeigen wir durch Induktion bezüglich der Definition von $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, daß jede durch Verzweigung an einem $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ konstruktiv beweisbare BE bereits Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist.

Ist $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}^*$ (Fall a), so ist nichts zu beweisen. Ist die Behauptung für ein $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ schon bewiesen, so bedeutet die Benutzung von $\neg\, \mathrm{H}(\mathrm{x})$ statt H(x) (Fall b)) beim Beweis, daß eine gewisse BE als Verzweigung an H(x) in $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ enthalten ist, lediglich die Vertauschung der hierfür benutzten Voraussetzungen

$$\wedge\, \mathrm{x}_i(\mathrm{H}'_i(\mathrm{x}_i) \to \vee\, \mathrm{y}_i \mathrm{H}''_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \quad (i = 1, 2).$$

Fall c). Es sei $\mathrm{H}'_1(\mathrm{x}_1)$ der Ausdruck $\mathrm{H}'_1(\mathrm{x}_1) \wedge \mathrm{H}_2(\mathrm{F}_{\mathrm{H}'_1, \mathrm{H}''_1}(\mathrm{x}_1))$ aus $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, wobei

(2) $$\wedge\, \mathrm{x}_1(\mathrm{H}'_1(\mathrm{x}_1) \to \vee\, \mathrm{y}_1 \mathrm{H}''_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}\, \mathscr{K}, \mathscr{E}),$$

und es sei schon bekannt, daß Verzweigung an den Prüfrelationen H'_1 bzw. H_2 nicht aus $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ herausführt. Ferner sei $\mathrm{x}_1 \leqq \mathrm{x}$, $\mathrm{x}_2 \leqq \mathrm{x}$, $\mathrm{x}_3 \leqq \mathrm{x}$, $\mathrm{y} \leqq \mathrm{y}_2$, $\mathrm{y} \leqq \mathrm{y}_3$ und für $i = 2, 3$

(3) $$\wedge\, \mathrm{x}_i(\mathrm{H}'_i(\mathrm{x}_i) \to \vee\, \mathrm{y}_i \mathrm{H}''_1(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}),$$

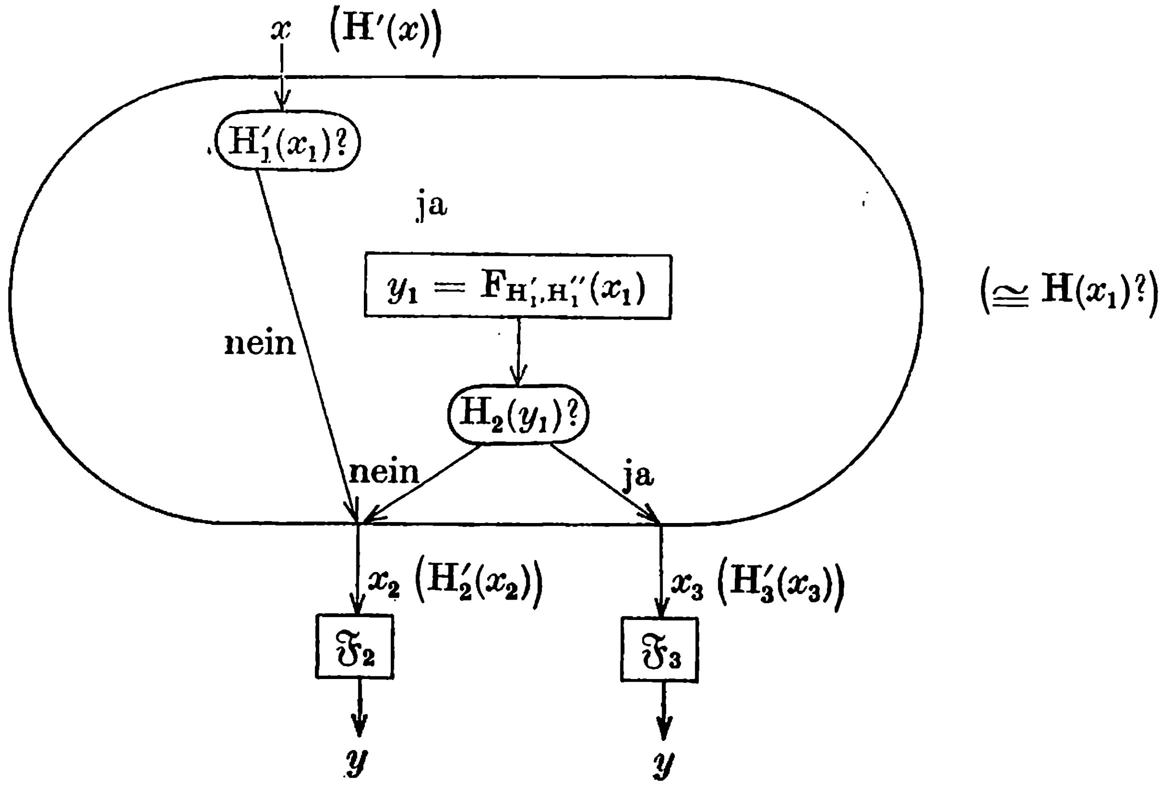
und es gelte in $\mathscr{T}$:

(4) $$\wedge\, \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \wedge \neg\, \mathrm{H}(\mathrm{x}_1) \to \mathrm{H}'_2(\mathrm{x}_2) \wedge \wedge\, \mathrm{y}_2(\mathrm{H}''_2(\mathrm{x}_{12}, \mathrm{y}_2) \to \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y}))),$$
$$\wedge\, \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{H}(\mathrm{x}_1) \to \mathrm{H}'_3(\mathrm{x}_3) \wedge \wedge\, \mathrm{y}_3(\mathrm{H}''_3(\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3) \to \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y}))),$$

d. h., wenn die Benutzung der Prüfrelation $H(x_1)$ zulässig ist, folgt (laut Abschnitt 8.2, (1a))

$$x\big(H'(x) \rightarrow \bigvee yH''(x, y)\big) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$$

Es ist zu zeigen, daß dies auch schon unter der Induktionsannahme gilt, daß Verzweigung an H_1' und H_2 nicht aus $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ herausführt. Folgendes Schema stellt die Verknüpfung der beteiligten Teilflußdiagramme dar:



Der Beweisgedanke besteht darin, dieses Flußdiagramm in das auf S. 157 dargestellte äquivalente Flußdiagramm umzuformen.

Bezeichnen wir mit $\overline{H}(x, y_1)$ den Ausdruck $H'(x) \wedge H_1(x_1) \wedge H_1''(x_1, y_1)$, so folgt aus den Voraussetzungen zunächst:

(5) $\bigwedge xy_1\big(\overline{H}(x, y_1) \wedge H_2(y_1) \rightarrow H_3'(x_3) \wedge \bigwedge y_3(H_3''(x_3, y_3) \rightarrow H''(x, y))\big) \in \mathscr{T}$,

$\bigwedge xy_1\big(\overline{H}(x, y_1) \wedge \neg H_2(y_1) \rightarrow H_2'(x_2) \wedge \bigwedge y_2(H_2''(x_2, y_2) \rightarrow H''(x, y))\big) \in \mathscr{T}$.

Da nach Induktionsannahme Verzweigung an H_2 nicht aus $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ herausführt, folgt aus (3) und (5)

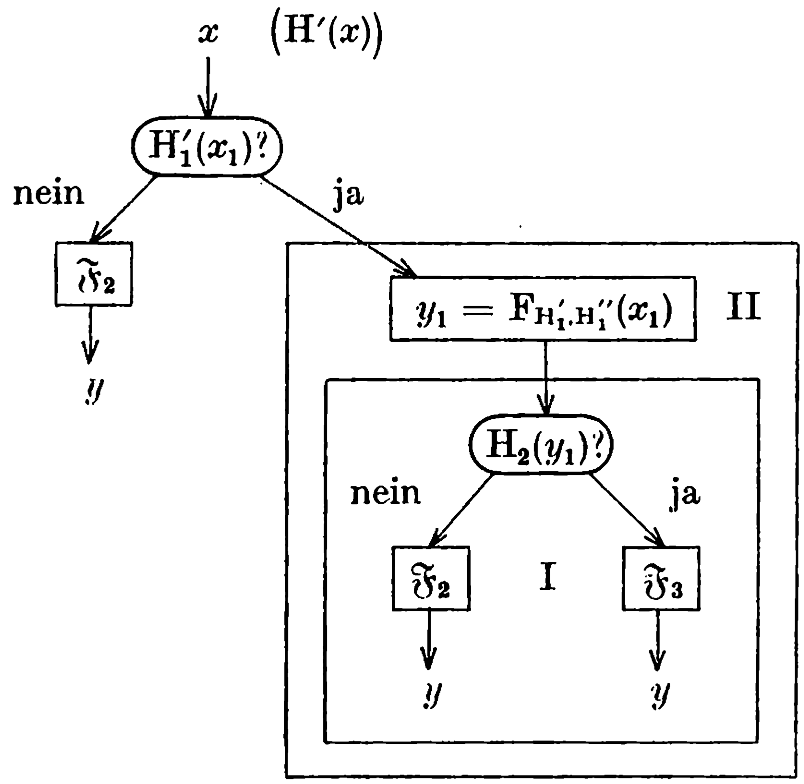
(6) $\bigwedge xy_1\overline{H}(x, y_1) \rightarrow \bigvee yH''(x, y)\big) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Diese BE gehört zum Teilflußdiagramm I. Die zum Teilflußdiagramm II gehörige BE

(7) $\bigwedge x\big(H'(x) \wedge H_1'(x_1) \rightarrow \bigvee yH''(x, y)\big)$

entsteht durch Verkettung von (2) mit (6), ist also ebenfalls Element von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Da schließlich in $\mathscr{T}$ aus $H'(x) \wedge H_1'(x_1)$ folgt $H'(x) \wedge H_1'(x_1)$, während aus $H'(x) \wedge$

$\neg\, H_1'(x_1)$ nach (4) $H_2'(x_2)$ folgt, ist die BE $\bigwedge x\bigl(H'(x) \to \bigvee y H''(x, y)\bigr)$ auch als Verzweigung von (3) für $i = 2$ und (7) an H_1' erhältlich, folglich Element von $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, was zu beweisen war.



Wir geben hier noch ein geometrisches Beispiel für die Zusammensetzung komplizierter Prüfrelationen aus vorgegebenen Grundprüfungen an. Es sei $\mathcal{T}$ die durch die Axiome I1 bis I5, A1 bis A4 gegebene ebene affine Geometrie,

$$\mathcal{K} = \Bigl\{\bigwedge p_1p_2\bigl(p_1 \neq p_2 \to \bigvee!!\, g(p_1 \in g \wedge p_2 \in g)\bigr),$$

$$\bigwedge g_1g_2\bigl(g_1 \text{ schneidet } g_2 \to \bigvee!!p(p \in g_1 \wedge p \in g_2)\bigr)\Bigr\},$$

$$\mathcal{E} \supseteqq \{p \in g,\ p_1 = p_2,\ g_1 \parallel g_2,\ (p_1, p_2, p_3)\},$$

$(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ also eine mögliche Präzisierung des Zweiges „Konstruktionen mit dem Lineal allein in beliebigen affinen Ebenen". Wir wollen zeigen, daß die durch den Ausdruck „p_1 und p_2 auf verschiedenen Seiten von g" dargestellte dreistellige Relation bezüglich $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ effektiv entscheidbar ist, der entsprechende Prüfknoten also bei Konstruktionen in $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ in gleicher Weise wie die Elemente von $\mathcal{E}^*$ verwendet werden darf:

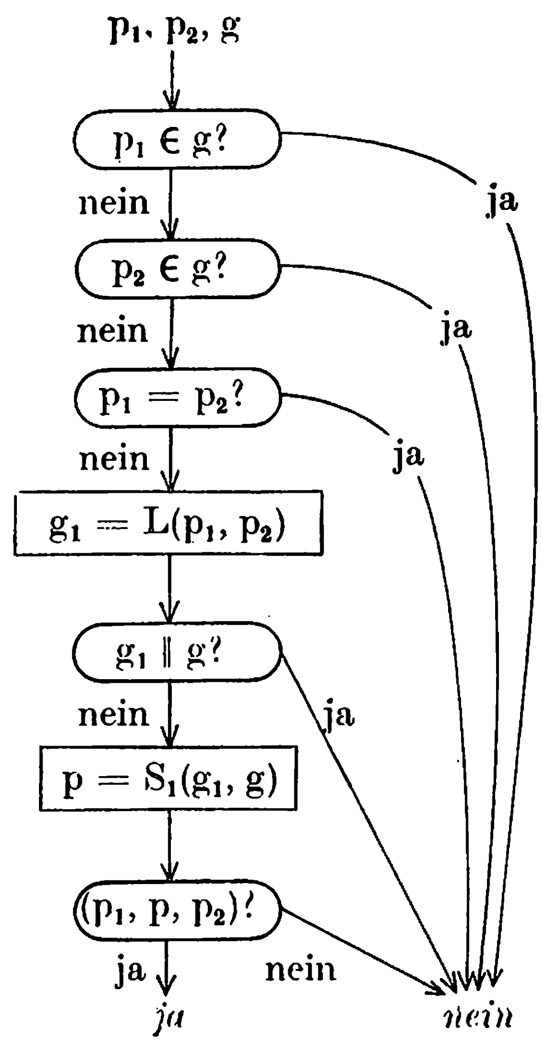
Die Ausdrücke $p_1 \in g$, $p_2 \in g$ gehören zu $\mathcal{E}^*\bigl(\subseteqq \mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})\bigr)$, also nach (1b) und (1d) auch der Ausdruck $(p_1 \notin g \wedge p_2 \notin g \wedge p_1 \neq p_2)$. Da für p_1, p_2, g, die diese Bedingung erfüllen, $L(p_1, p_2)$ definiert und außerdem die Operation L bezüglich $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ konstruktiv ist, gilt nach (1c)

$$p_1 \notin g \wedge p_2 \notin g \wedge p_1 \neq p_2 \wedge \neg\, L(p_1, p_2) \parallel g \in \mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}).$$

Diesen Ausdruck nennen wir $\mathrm{H}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{g})$. Ist er für gewisse p_1, p_2, g erfüllt, so ist die Konstruktion $S_1\big(L(p_1, p_2), g\big)$ ausführbar. Daher ist (wiederum nach (1c))

$$\mathrm{H}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{g}) \wedge \big(\mathrm{p}_1, \mathrm{S}_2(\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{g}), \mathrm{p}_2\big) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$$

Dieser Ausdruck ist aber gerade eine „richtige“ Definition für „p_1 und p_2 auf verschiedenen Seiten von g“. Der gesamte Entscheidungsprozeß wird durch das folgende uniforme Prüfdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ dargestellt:



8.4. Nichtelementare Konstruktionen und Entscheidungen

Wir erweitern eine beliebige Sprache $\mathscr{S}$ in folgender Weise zu einer nichtelementaren Sprache $\mathscr{S}^+$: Es werden natürliche Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ und abzählbare Folgen von Dingen einheitlicher Sorte der ursprünglichen Sprache $\mathscr{S}$ in die Betrachtung einbezogen. Als Variable für natürliche Zahlen verwenden wir $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3, \ldots$, in konkreten Fällen auch i, j, k, l, m, n. Sind x_i^j $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ die Variablen für Dinge der Sorte j, so verwenden wir $(\mathrm{x}^j)_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ als Variable für Folgen von Dingen der

Sorte j, in konkreten Fällen aber z. B. $(p)_i$ als Variable für Punktfolgen, $(g)_i$ als Variable für Geradenfolgen, $(k)_i$ als Variable für Kreisfolgen, und genau wie bei den Grunddingen der Sprache $\mathcal{S}$ verwenden wir gelegentlich auch Variable ohne Index, also z. B. (p) zur Bezeichnung einer gewissen Punktfolge. Ist $(x^j)_i$ eine Folge von Dingen der Sorte j, k eine natürliche Zahl, so bezeichnet $(x^j)_i(k)$ das k-te Glied der Folge $(x^j)_i$, also z. B. (p) (n) das n-te Glied der Punktfolge (p). Die neuen Objekte (Folgen von Grunddingen) können dadurch in Beziehung zueinander gebracht werden, daß gewisse ihrer Folgenglieder in Relationen stehen, die in der Sprache $\mathcal{S}$ formulierbar sind. Ist z. B. $x_i R y_j$ ein prädikativer Ausdruck der Sprache $\mathcal{S}$, d. h. kann die durch R bezeichnete zweistellige Relation zwischen Dingen der Sorte x und Dingen der Sorte y bestehen, so können in der zu beschreibenden nichtelementaren Erweiterungssprache $\mathcal{S}^+$ von $\mathcal{S}$ folgende prädikative Ausdrücke mit dem Symbol R gebildet werden:

(1) $\quad x_i R y_j$,

(2) $\quad (x)_i\,(m)\,R(y)_j\,(n)$,

(3) $\quad x_i R(y)_j\,(n)$,

(4) $\quad (x)_i\,(m)\,R y_j$

Dabei bedeutet (1): Die Dinge x_i und y_j stehen in der Relation R. (2) bedeutet: Das m-te Glied der Folge $(x)_i$ und das n-te Glied der Folge $(y)_j$ stehen in der Relation R, d. h., (2) stellt eine vierstellige Relation zwischen Folgen der Sorte x, natürlichen Zahlen m, Folgen der Sorte y und natürlichen Zahlen n dar. (3) bedeutet: Das Ding x_i und das n-te Folgenglied der Folge $(y)_j$ stehen in der Relation R, d. h., (3) stellt eine dreistellige Relation zwischen Dingen der Sorte x, Folgen von Dingen der Sorte y und natürlichen Zahlen dar. Entsprechend ist (4) zu interpretieren.

Außer prädikativen Ausdrücken der Typen (1) bis (4), wobei jedem n-stelligen Prädikatensymbol (einschließlich des Zeichens „=") der Sprache $\mathcal{S}$ 2^n Möglichkeiten für prädikative Ausdrücke in $\mathcal{S}^+$ entsprechen (da an jeder Stelle für x-Variable in R eine solche Variable oder eine Variable für x-Folgen und eine Gliednummer eingesetzt werden kann), sollen in $\mathcal{S}^+$ prädikative Ausdrücke der Form $i_j \leqq i_k$ erlaubt sein; $\leqq$ ist immer durch die Ordnung der natürlichen Zahlen zu interpretieren.

In $\mathcal{S}^+$ ist u. a. stets definierbar:

$$i = j :\leftrightarrow i \leqq j \wedge j \leqq i,$$
$$i < j :\leftrightarrow i \leqq j \wedge \neg\, j \leqq i,$$
$$i = j + 1 :\leftrightarrow j < i \wedge \neg \bigvee k(j < k \wedge k < i),$$

für festes k:

$$i = j + k :\leftrightarrow \bigvee i_1 \cdots i_{k-1}(i_1 = j + 1 \wedge i_2 = i_1 + 1 \wedge \cdots \wedge i = i_{k-1} + 1).$$

Ist k eine feste natürliche Zahl, so schreiben wir statt $\bigvee m\big(m = n + k \wedge H((x^j)_i\,(m))\big)$ einfacher $H\big((x^j)_i\,(n + k)\big)$. Diese Schreibweise ermöglicht es insbesondere, in einfacher Weise induktive Definitionen, die bezüglich $\mathcal{S}$ metatheoretisch, d. h. in $\mathcal{S}$ nicht formulierbar waren, in $\mathcal{S}^+$ exakt zu formulieren: Ist z. B. $\bigwedge x\big(H'(x) \to \bigvee !!y H''(x, y)\big)$ in $\mathcal{S}$ formulierbar und in $\mathcal{T}$ gültig und iterativ, so kann man statt der induktiven Definition $F^0_{H', H''}(x) := x$, $F^{n+1}_{H', H''}(x) := F_{H', H''}\big(F^n_{H', H''}(x)\big)$ formulieren:

(5) $\quad \bigwedge x\big(H'(x) \to \bigvee !!\,(y)\,\overline{H}''(x, (y))\big)$,

wobei $\overline{H}''\big(x, (y)\big)$ den Ausdruck $(y)(0) = x \wedge \bigwedge i H''\big((y)(i), (y)(i+1)\big)$ bezeichnet. Unter Berufung auf die BEE (5) definiert man jetzt zunächst

(6) $\quad F_{H', H''}(x) := \iota(y)\,\overline{H}''\big(x, (y)\big)$, falls $H'(x)$,

d. h., jedem x mit $H'(x)$ wird die Folge der $F^n_{H', H''}(x)$ zugeordnet. Schließlich wird $F^n_{H', H''}(x)$ als das n-te Glied dieser Folge definiert:

(7) $\quad F^n_{H', H''}(x) := F_{H', \overline{H}''}(x)(n)$.

Statt $(x)_1\,(x)_2 \cdots (x)_n$ schreiben wir bei allgemeinen Betrachtungen $(\mathbf{x})$, d. h., wir identifizieren n-Tupel von Folgen mit Folgen von n-Tupeln. Analog bedeutet $(\mathbf{x})(i)$ das n-Tupel der i-ten Folgenglieder der in $(\mathbf{x})$ zusammengefaßten n Folgenvariablen. (5) bis (7) sind dann ohne weiteres von x, y auf $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ übertragbar.

Ist $\mathcal{S}$ die Sprache der ebenen euklidischen Geometrie, so ist in $\mathcal{S}^+$ z. B. das Archimedische Axiom exakt formulierbar:

$$\begin{aligned}&\bigwedge p_0p_1p_2p_3(p_0 \neq p_1 \wedge p_2 \neq p_3 \to \bigvee (p) \bigvee n((p)(0) = p_0 \wedge (p)(1) \in \mathrm{Strahl}(p_0, p_1)\\ &\wedge \bigwedge i\big(i \leqq n \to (p)(i)\,(p)(i+1) \cong p_2p_3 \wedge ((p)(i), (p)(i+1), (p)(i+2))\big)\\ &\wedge \big((p)(n) = p_1 \vee ((p)(n), p_1, (p)(n+1))\big)\big)\big),\end{aligned}$$

d. h., zu jedem Paar Strecken p_0p_1, p_2p_3 gibt es eine Folge $(p)(i)$ von Punkten und eine natürliche Zahl n, so daß $(p)(0) = p_0$ und wenigstens bis $n+1$ die Punkte $(p)(i)$ in der Reihenfolge der Numerierung auf dem *Strahl*(p_0, p_1) aufeinanderfolgen und je zwei aufeinanderfolgende den Abstand p_2p_3 haben und p_1 entweder gleich $(p)(n)$ ist oder zwischen $(p)(n)$ und $(p)(n+1)$ liegt. Daß wir darüber hinaus die Existenz einer Folge gefordert haben, bedeutet keine echte Verschärfung der inhaltlichen Aussage des Archimedischen Axioms, da man von der Stelle $n+3$ ab die Folgenglieder ganz willkürlich — etwa konstant gleich $(p)(n+2)$ — wählen kann. Aus diesem Beispiel geht deutlich hervor, daß die von uns gewählte Erweiterung der sprachlichen Ausdrucksmittel im wesentlichen bezweckt, Formulierungen der Art

$$\bigvee n \bigvee p_1 \cdots p_n\big(H_1(p_1, \ldots, p_n) \wedge \cdots \wedge H_{f(n)}\,(p_1, \ldots, p_n)\big)$$

u. ä. zu umgehen, wo die Pünktchen nicht nur der Abkürzung dienen, sondern der entsprechende Ausdruck prinzipiell nicht vollständig hingeschrieben werden kann, weil die Anzahl der benutzten Variablen und die Anzahl gewisser Teilausdrücke von einer im Gesamtausdruck selbst als Variablen auftretenden natürlichen Zahl abhängt.

Es sei nun $\mathcal{T}$ eine in der Erweiterung $\mathcal{S}^+$ einer Sprache $\mathcal{S}$ formulierte Theorie, $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ eine konstruktive Teiltheorie von $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$. Ferner setzen wir $\mathscr{E} \neq \emptyset$ voraus, da sonst gegenüber der bereits behandelten elementaren Konstruier- bzw. Entscheidbarkeit nichts Neues entsteht. Im folgenden wird der Begriff der *bedingten Entscheidbarkeit bezüglich* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ eine wesentliche Rolle spielen. Die Intention ist, daß eine bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ bedingt entscheidbare Relation H(x) durch ein uniformes Prüfdiagramm $\mathfrak{F}$ über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ entschieden wird, welches aber jetzt im Unterschied zu den in Abschnitt 8.3 betrachteten Prüfdiagrammen nicht auf beliebige Eingaben $\boldsymbol{x}$ anwendbar sein muß, sondern eine Entscheidung (durch Erscheinen des Resultats an einem ja- bzw. nein-Ausgang) nur für solche $\boldsymbol{x}$ liefert, für die $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ existiert. In diesem Fall werden wir $\boldsymbol{x}$ *auf* $H(\boldsymbol{x})$ *prüfbar* nennen. Zur Definition der Menge $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der *bezüglich* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *bedingt entscheidbaren Ausdrücke* ist demnach gerade in der Definition von $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der Teil c) durch die schwächeren Bedingungen d) und e) zu ersetzen (vgl. Abschnitt 8.3).

Da der Umfang der Menge $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ von den bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ konstruktiv ausführbaren Operationen abhängt, andererseits $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und der Begriff der Prüfbarkeit von x auf H(x) wesentlich in das neue Erzeugungsprinzip „Iteration" für die Menge $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der *bezüglich* $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *konstruktiv beweisbaren* BE eingehen, sind die drei folgenden Definitionen ineinander verschränkt, d. h., die Mengen $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ von Ausdrücken und die (für jeden konkreten Ausdruck $H \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ in $\mathscr{S}^+$ formulierbare) Relation „x ist auf H prüfbar" werden simultan induktiv definiert:

(8a) $\mathscr{E}^* \subset \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(8b) $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *ist aussagenlogisch abgeschlossen, d. h. mit* H *gehört auch* $\neg$ H, *mit* H_1 *und* H_2 *gehört auch* $(H_1 \wedge H_2)$ *zu* $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(8c) *Ist* $H(y) \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, $\bigwedge x(H'(x) \to \bigvee !! y H''(x, y)) \in \mathscr{T}$ *und die zugehörige* BE *Element von* $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, *so ist* $H(F_{H', H''}(x)) \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(8d) *Ist* $H(z) \in \mathscr{E}^*$ *und* $z \leqq x$, *so sei* x auf H(z) prüfbar $:\leftrightarrow x = x$.

(8e) x auf $\neg$ H(z) prüfbar $:\leftrightarrow$ x auf H(z) prüfbar,
x auf $(H_1 \wedge H_2)$ prüfbar $:\leftrightarrow$ (x auf H_1 prüfbar $\wedge$ x auf H_2 prüfbar),

(8f) x auf $H(F_{H', H''}(x))$ prüfbar $:\leftrightarrow H'(x) \wedge \bigwedge y(H''(x, y) \to y$ auf H(y) prüfbar).

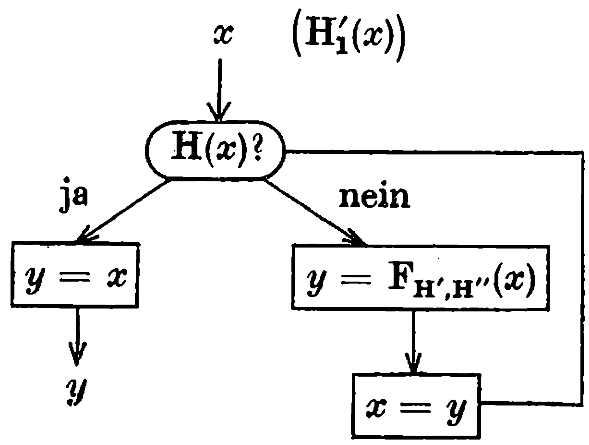
(8g) $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \subseteqq \mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(8h) $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *ist bezüglich Verkettung und bezüglich Verzweigung an Ausdrücken aus* $\mathscr{E}^*$ *abgeschlossen.*

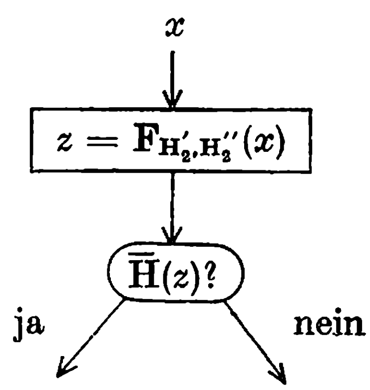
(8i) *Iteration:*
Ist $H(x) \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *und* $\bigwedge x(H'(x) \to \bigvee !! y H''(x, y)) \in \mathscr{T}$ *und die zugehörige* BE *Element von* $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *und gilt in* $\mathscr{T}$
$\bigwedge x(H_1'(x) \to \bigvee (y) \bigvee n((y)(o) = x \wedge \bigwedge i(i \leqq n \to (y)(i)$ auf H prüfbar$)$
$\wedge \bigwedge i(i < n \to \neg H((y)(i)) \wedge H'((y)(i)) \wedge H''((y)(i), (y)(i+1))) \wedge H((y)(n))))$
und gilt ferner in $\mathscr{T}$
$\bigwedge x\, y(H_1'(x) \wedge H(y) \to H_1''(x, y))$,
so ist auch $\bigwedge x(H_1'(x) \to \bigvee y H''(x, y)) \in \mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Satz 1 aus Abschnitt 8.2 läßt sich samt Beweis sofort auf $\mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ übertragen. Auch Satz 2 behält seine Gültigkeit, wenn man $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ durch $\mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ ersetzt. Beim Beweis ist nur die Iteration zusätzlich zu berücksichtigen, die von einem Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ (Abschnitt 8.2) zur Darstellung der Operation $\mathrm{F}_{\mathrm{H}', \mathrm{H}''}$ zu einem Flußdiagramm der Form

(9)



führt. Daß dabei der Prüfknoten H(x)? mit $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathcal{E}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ durch ein uniformes Prüfdiagramm über $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ ersetzt werden kann, ist für den Fall $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \in \mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ schon in Abschnitt 8.3 gezeigt worden. Ist H(x) (laut (8c)) von der Form $\overline{\mathrm{H}}(\mathrm{F}_{\mathrm{H}_2', \mathrm{H}_2''}(\mathrm{x}))$, wobei die Ersetzbarkeit des Prüfknotens H(z)? schon gezeigt sei, so ist H(x)? durch



zu ersetzen. Da sich die Iteration von Strukturgraphen (vgl. Kap. 6.) graphentheoretisch nicht auf den Spezialfall (9) zurückführen läßt, ist die Gültigkeit des folgenden zu Satz 3 in Abschnitt 8.2 analogen Satzes durchaus nicht selbstverständlich.

Satz 1. *Zu jedem konsistenten uniformen Flußdiagramm* $\mathfrak{F}$ *über* $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ *gibt es eine Beschreibung* $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathcal{T}$, *so daß die zugehörige* BE *Element von* $\mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ *ist.*

Beim Beweis von Satz 1 können wir uns auf Flußdiagramme mit induktivem Strukturgraphen beschränken und den Beweis durch Induktion bezüglich des Aufbaus des Strukturgraphen führen. Aus beweistechnischen Gründen müssen wir dabei zugleich folgenden Satz mitbeweisen:

Satz 2. *Zu jedem konsistenten induktiven uniformen Flußdiagramm* $\mathfrak{F}$ *mit den Eingangsvariablen* x *und jedem Ausgang* a *von* $\mathfrak{F}$ *gibt es einen Ausdruck* $\mathrm{H}_{\mathfrak{F},a}(\mathrm{x})$ in

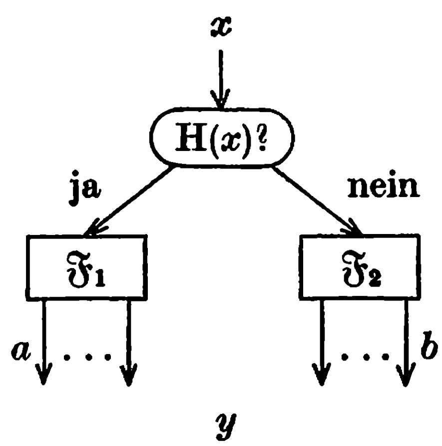
$\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, so daß für alle Systeme $\boldsymbol{x}$ von Eingaben für $\mathfrak{F}$ gilt: Wenn $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ existiert, so ist $\boldsymbol{x}$ auf $H_{\mathfrak{F},a}(\boldsymbol{x})$ prüfbar und $H_{\mathfrak{F},a}(\boldsymbol{x})$ ist genau dann erfüllt, wenn $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ am Ausgang a erscheint.

Wir betonen ausdrücklich: Satz 2 bedeutet nicht, daß die Anwendbarkeit eines uniformen Flußdiagramms $\mathfrak{F}$ über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ effektiv entscheidbar ist. In der Tat ist im allgemeinen nicht einmal die Anwendbarkeit eines einzelnen Arbeitsknotens entscheidbar. Zum Beispiel hat die effektive Ausführbarkeit der Linealoperation nicht notwendig zur Folge, daß man als entscheidbar ansehen muß, ob zwei Punkte verschieden sind. Ist die Punktegleichheit nicht entscheidbar, so darf L eben nur auf solche Punktepaare angewendet werden, für die aus den Voraussetzungen über die gegebenen Stücke folgt, daß sie verschieden sind. Andererseits ist Satz 2 nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß für solche $\boldsymbol{x}$, von denen man schon weiß, daß $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ existiert, die Entscheidung, an welchem Ausgang von $\mathfrak{F}$ das Resultat erscheint, inhaltlich dadurch herbeigeführt werden kann, daß man $\mathfrak{F}$ auf $\boldsymbol{x}$ anwendet. Für zyklenfreie Flußdiagramme läßt sich Satz 2 noch wie folgt verschärfen:

S a t z 2′. *Ist für alle* BEE $\wedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \vee !!\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big)$ *aus $\mathscr{K}$ die Anwendungsvoraussetzung* $\mathrm{H}'(\mathrm{x})$ *elementar entscheidbar* $\big(\in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})\big)$, *so gibt es zu jedem zyklenfreien konsistenten uniformen Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ mit den Eingangsvariablen* x *und jedem Ausgang a von $\mathfrak{F}$ einen Ausdruck* $\mathrm{H}^*_{\mathfrak{F},a}(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, *so daß für beliebige $\boldsymbol{x}$ gilt: $H^*_{\mathfrak{F},a}(\boldsymbol{x})$ ist genau dann erfüllt, wenn $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ existiert und am Ausgang a erscheint. Sind $a_1, \ldots, a_m$ die sämtlichen Ausgänge von $\mathfrak{F}$, so existiert insbesondere $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ genau dann, wenn $H^*_{\mathfrak{F},a_1}(\boldsymbol{x}) \vee \cdots \vee H^*_{\mathfrak{F},a_m}(\boldsymbol{x})$ gilt, d. h., die Anwendbarkeit von $\mathfrak{F}$ ist bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ elementar entscheidbar.*

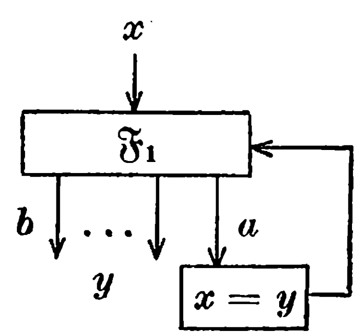
Wir wenden uns nun dem simultanen Beweis der Sätze 1 und 2 zu, in den wir Bemerkungen zum Beweis von Satz 2′ einschalten.

Ist $\mathfrak{F}$ ein einzelner Arbeitsbaustein oder entsteht $\mathfrak{F}$ durch Anwendung einer der Operationen B, Vk, Vz aus Flußdiagrammen, für die die Gültigkeit von Satz 1 vorausgesetzt wird, so entspricht der Beweis von Satz 1 dem Beweis von Satz 3 in Abschnitt 8.2. Da $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ $\big(\subseteq \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})\big)$ wegen der Voraussetzung $\mathscr{E} \neq \emptyset$ ebenfalls nicht leer und aussagenlogisch abgeschlossen ist, enthält $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ auch identisch wahre und identisch falsche Ausdrücke. Ist $\mathfrak{F}$ ein mit der Gleichung $\mathrm{x}_j = \mathrm{x}_i$ belegter Arbeitsbaustein, so erfüllt ein identisch wahrer Ausdruck die an $\mathrm{H}_{\mathfrak{F},a}$ bzw. $\mathrm{H}^*_{\mathfrak{F},a}$ gestellten Forderungen. Das Gleiche gilt allgemein für $\mathrm{H}_{\mathfrak{F},a}$, falls $\mathfrak{F}$ ein Flußdiagramm mit nur einem Ausgang a ist. Sind die Voraussetzungen von Satz 2′ erfüllt, so ist für einen mit $\mathrm{y} = \mathrm{F}_{\mathrm{H}',\mathrm{H}''}(\mathrm{x})$ belegten Arbeitsbaustein $\mathfrak{F}$ für den einzigen Ausgang a von $\mathfrak{F}$ $\mathrm{H}^*{}_{\mathfrak{F},a}(\mathrm{x})$ gleich $\mathrm{H}'(\mathrm{x})$ $\big(\subseteq \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})\big)$ zu setzen; entsteht $\mathfrak{F}$ durch Verkettung des so belegten Arbeitsknotens mit $\mathfrak{F}'$, so ist jeder Ausgang a von $\mathfrak{F}$ ein Ausgang von $\mathfrak{F}'$. Es ist $\mathrm{H}_{\mathfrak{F},a}(\mathrm{x})$ gleich $\mathrm{H}_{\mathfrak{F}',a}\big(\mathrm{F}_{\mathrm{H}',\mathrm{H}''}(\mathrm{x})\big)$. Falls $\mathrm{H}^*_{\mathfrak{F}',a}(\mathrm{x})$ existiert und $\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, ist $\mathrm{H}^*_{\mathfrak{F},a}(\mathrm{x})$ gleich $\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{H}^*_{\mathfrak{F}',a}\big(\mathrm{F}_{\mathrm{H}',\mathrm{H}''}(\mathrm{x})\big)$ $\big(\in \mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})\big)$ zu setzen. Hat $\mathfrak{F}$ die Form



wobei $H_{\mathfrak{F}_1,a}(x)$ und $H_{\mathfrak{F}_2,b}(x)$ schon für alle Ausgänge von $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ definiert sind, so ist jeder Ausgang von $\mathfrak{F}$ entweder ein Ausgang a von $\mathfrak{F}_1$ oder ein Ausgang b von $\mathfrak{F}_2$. Es ist $H_{\mathfrak{F},a}(x)$ gleich $H(x) \wedge H_{\mathfrak{F}_1,a}(x)$ und $H_{\mathfrak{F},b}(x)$ gleich $\neg H(x) \wedge H_{\mathfrak{F}_2,a}(x)$ zu setzen. Ist $H^*_{\mathfrak{F}_1,a}(x)$ und $H^*_{\mathfrak{F}_2,b}(x)$ definiert, so ist $H^*_{\mathfrak{F},a}(x)$ gleich $H(x) \wedge H^*_{\mathfrak{F}_1,a}(x)$ und $H^*_{\mathfrak{F},b}(x)$ gleich $\neg H(x) \wedge H^*_{\mathfrak{F}_2,b}(x)$ zu setzen.

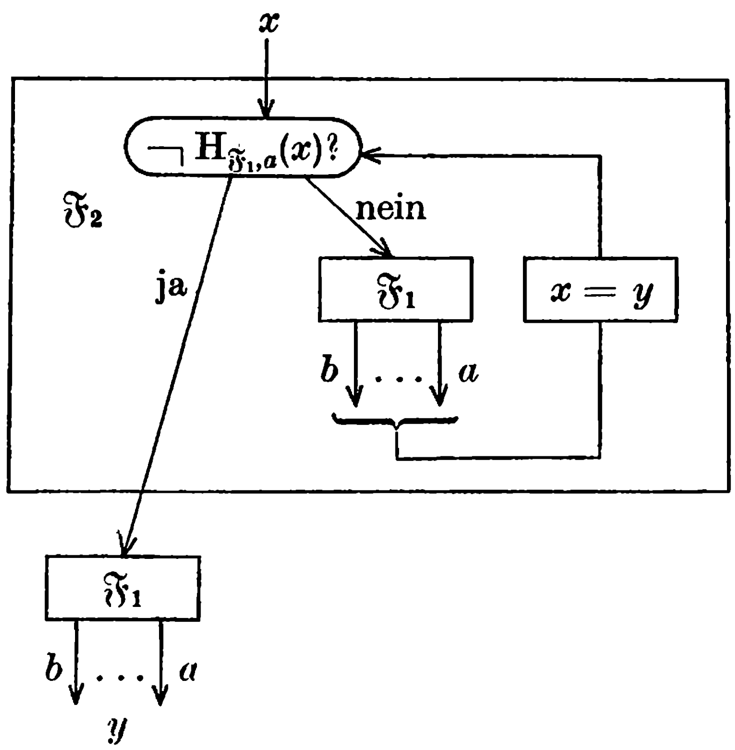
Nun sei $\mathfrak{F}_1$ ein Flußdiagramm mit mindestens zwei Ausgängen a, b, für welches Satz 1 gilt und $H_{\mathfrak{F}_1,a}(x), \ldots, H_{\mathfrak{F}_1,b}(x)$ $(\in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}))$ für alle Ausgänge schon definiert st. $\mathfrak{F}$ entstehe aus $\mathfrak{F}_1$ durch Iteration bezüglich a:



Wir formen $\mathfrak{F}$ wie folgt äquivalent um (s. S. 165)
Nach Voraussetzung existiert für $\mathfrak{F}_1$ eine Beschreibung $\bigwedge x(H'(x) \rightarrow \bigvee !!\, y H''(x,y)) \in \mathscr{T}$, so daß die zugehörige BE Element von $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist. Eine Beschreibung für das mit $\mathfrak{F}_2$ bezeichnete Teilflußdiagramm lautet dann offenbar:

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & \bigwedge x\big(\bigvee (y) \bigvee n\big((y)(0) = x \wedge \bigwedge i(i < n \rightarrow H_{\mathfrak{F}_1,a}((y)(i)) \wedge H'((y)(i)) \\
& \wedge H''((y)(i), (y)(i+1))\big) \wedge (y)(n) \text{ auf } H_{\mathfrak{F}_1,a} \text{ prüfbar} \\
& \wedge \neg H_{\mathfrak{F}_1,a}((y)(n))\big) \rightarrow \bigvee !!\, y \bigvee (y) \bigvee n((y)(0) = x \\
& \wedge \bigwedge i\big(i < n \rightarrow H_{\mathfrak{F}_1 a}((y)(i)) \wedge H'((y)(i)) \wedge H''((y)(i), (y)(i+1))\big) \\
& \wedge (y)(n) = y \wedge \neg H_{\mathfrak{F}_1,a}(y))).
\end{aligned}
$$

Wegen der Voraussetzung $H_{\mathfrak{F}_1,a}(x), \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ (und damit auch $\neg H_{\mathfrak{F}_1,a}(x) \in \mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$) folgt nach (8i), daß die zur Beschreibung von $\mathfrak{F}_2$ gehörige BE Element von $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist. Durch Anwendung des zur Verkettung von Flußdiagrammen gehörigen Beweisschrittes auf $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_1$ erhält man nun auch die Gültigkeit von Satz 1



für $\mathfrak{F}$. Kürzen wir die oben für $\mathfrak{F}_2$ gefundene Beschreibung (10) mit $\wedge\, x(H_1'(x) \rightarrow \vee !\, !\, y H_1''(x, y))$ ab, so ist $H_{\mathfrak{F},\, b}(x)$ offenbar durch $H_{\mathfrak{F}_1,\, b}(F_{H_1',\, H_1''}(x))$ zu definieren und laut (8c) in $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ enthalten.

Wir beenden diesen Abschnitt wieder mit einem geometrischen Beispiel. Es bezeichne Z_r den durch $Z_r(p) := \iota k \wedge p'(p' \in k \leftrightarrow \overline{pp'} = r)$ und $Z_r(P) := \{Z_r(p)/p \in P\}$ definierten Zirkel vom festen Radius r. Wir betrachten das Parallellineal der Breite d

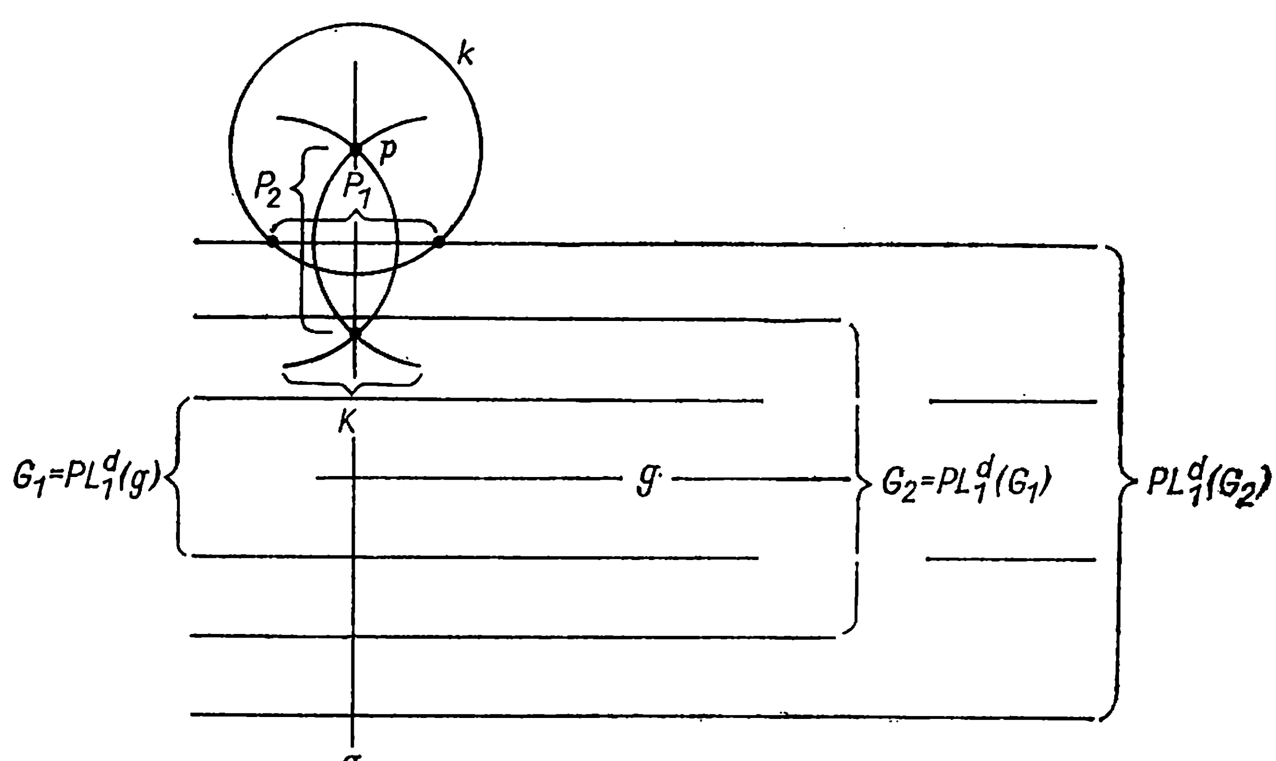
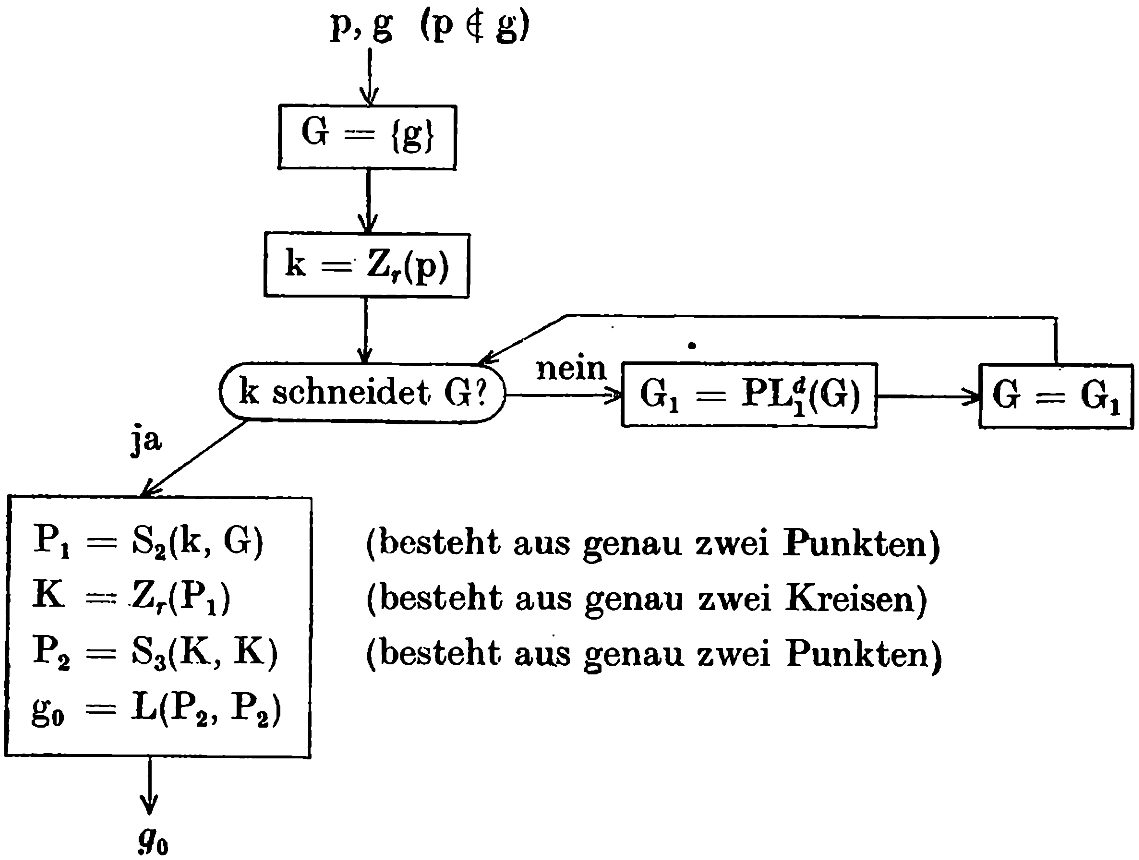


Abb. 27

und den Zirkel vom Radius r in einer beliebigen archimedischen platonischen Ebene. Dabei denken wir uns die Sprache der platonischen Ebenen zunächst durch Konstanten d, r zur Sprache $\mathscr{S}$ und dann zu $\mathscr{S}^+$ erweitert. In $\mathscr{S}^+$ ist das Archimedische Axiom formulierbar. Den Axiomen fügen wir außerdem die Voraussetzung $\mathrm{d} < \mathrm{r}$ über die gewählten Konstanten hinzu. Damit sind die Bestandteile $\mathscr{T}$ und $\mathscr{K}$ einer konstruktiven Teiltheorie von der in diesem Abschnitt betrachteten Art fixiert. Die übliche Konstruktion des Lotes von einem Punkt p auf eine Gerade g ist mit dem Zirkel Z_r offenbar nur dann ausführbar, wenn $Z_r(p)$ die Gerade g schneidet. Wir definieren für endliche Geradenmengen G die Relation „k schneidet G" durch $\bigvee \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G} \wedge \mathrm{k}$ schneidet g) und bezeichnen die aus diesem Ausdruck bestehende Menge mit $\mathscr{E}$. Wir bemerken ferner, daß die Operation Pl_1^d offenbar iterativ ist; auf eine einzelne Gerade g angewendet liefert sie schrittweise Büschel von paarweise parallelen Geraden vom Abstand $2d$, deren Zahl sich bei jedem Schritt um 1 erhöht (Abb. 27).

Das Flußdiagramm

$\mathfrak{F}$:



löst die Konstruktionsaufgabe $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H})$ mit der BE H:

$$(11) \qquad \bigwedge \mathrm{pg}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \rightarrow \bigvee \mathrm{g}_0(\mathrm{p} \in \mathrm{g}_0 \wedge \mathrm{g}_0 \perp \mathrm{g})\big).$$

Da $\mathfrak{F}$ nicht zyklenfrei ist, ist nur $\mathrm{H} \in \mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ bewiesen.

Wir zeigen, daß $\mathrm{H} \notin \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Dazu stellen wir zunächst fest, daß jedes *zyklenfreie* Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ für alle Eingaben $\mathfrak{x}$, für die $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ definiert ist, das Resultat in einer im voraus angebbaren Maximalzahl von Arbeitsschritten liefert, die gleich der maximalen Zahl der Arbeitsknoten in den *endlich vielen* Wegen vom Eingangsknoten zu einem Ausgang ist. Auf p, g mit $p \notin g$ muß jedoch (nach eventueller einmaliger Anwendung von Z_r) erst PL_1^d eine Anzahl von Malen angewendet werden, die bei geeigneter Lage von p zu g beliebig groß wird, ehe neue Punkte entstehen und damit die Möglichkeit der Konstruktion irgendwelcher Stücke gegeben ist, die keine zu g parallelen Geraden sind.

8.5. Konstruktionen mit konstruktiver Auswahl

Ist $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ eine konstruktive Teiltheorie und kommen in der zugrundeliegenden Sprache neben Variablen $\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i, \ldots$ für Dinge gewisser Sorten auch Variablen $\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, \ldots$ für endliche Mengen von Dingen der Sorte x bzw. y $\cdots$ vor (dies wird z. B. immer dann der Fall sein, wenn die Sprache wie bei den Konstruktionen mit Zirkel, Parallellineal usw. der realen Mehrdeutigkeit gewisser zu behandelnder Grundoperationen angepaßt werden muß), so wollen wir folgende Erweiterung der Mengen $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und $\mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ in Erwägung ziehen: Wir definieren induktiv die Menge $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ der durch *elementare Konstruktion mit konstruktiver Auswahl* beweisbaren BE und die Menge $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ der zugehörigen elementar entscheidbaren Ausdrücke. Da hier (wie bei den nichtelementaren Konstruktionen und Entscheidungen) nicht nur $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ in die Definition von $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ eingeht, sondern $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ seinerseits auf $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ zurückwirkt, müssen wieder beide Mengen simultan definiert werden:

a) Die Definition von $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ entsteht aus der Definition von $\mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, indem man dort überall $\mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ durch $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ durch $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ ersetzt und folgendes Erzeugungsprinzip hinzufügt:

(1) Ist $\mathrm{H(x, y)} \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, so ist auch $\bigvee \mathrm{y}\big(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H(x, y)}\big) \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$.

b) Die Definition von $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ entsteht aus der Definition von $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, indem man dort überall $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ durch $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ ersetzt, in Teil d) (Verzweigung) $\mathcal{E}^*$ durch $\mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ ersetzt und folgendes Erzeugungsprinzip hinzufügt: Ist $\mathrm{H(x, y)} \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und $\bigwedge \mathrm{xY}\big(\mathrm{H'(x, Y)} \to \bigvee \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H(x, y)})\big) \in \mathcal{T}$, so ist

$$\bigwedge \mathrm{x\,Y}(\mathrm{H'(x, Y)} \to \bigvee \mathrm{Y_1} \bigwedge \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y_1} \leftrightarrow \mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H(x, y)})) \in \mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}).$$

Ist insbesondere $\mathrm{H(x, y)} \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und

(2) $\bigwedge \mathrm{xY}\big(\mathrm{H'(x, Y)} \to \bigvee !!\, \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H(x, y)})\big) \in \mathcal{T}$,

so ist

(3) $\bigwedge \mathrm{xY}\big(\mathrm{H'(x, Y)} \to \bigvee \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H(x, y)})\big) \in \mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$.

In die Definition sind gegenüber $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ bzw. $\mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ alle für die Effektivität wesentlichen Folgerungen aus der Tatsache aufgenommen, daß die Variablen Y nicht beliebige Dinge, sondern endliche Mengen von Dingen der Sorte y bezeichnen. Da derartige Sprachen bei der Anwendung der Theorie der konstruktiven Teiltheorien in vielen Bereichen der Mathematik (z. B. in der Theorie der Konstruktionen mit dem Lineal allein) keine Rolle spielen, wäre es unzweckmäßig, die entsprechenden Varianten von vornherein in die Betrachtung einzubeziehen.

Aus der Definition folgt unmittelbar für beliebige konstruktive Teiltheorien: $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E}) \subseteqq \mathscr{K}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ und $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E}) \subseteqq \mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$. Ist $\mathscr{E}$ leer, so ist auch $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$, und die Definition von $\mathscr{K}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ reduziert sich auf die Definition von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$. Daher ist dann $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E}) = \mathscr{K}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$. Deshalb sei für das Folgende $\mathscr{E} \neq \emptyset$ vorausgesetzt. $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ ist dann aussagenlogisch abgeschlossen. Daraus und aus der logischen Äquivalenz von $\bigwedge y(y \in Y \rightarrow H(x, y))$ mit $\neg \bigvee y(y \in Y \wedge \neg H(x, y))$ folgt, daß mit $H(x,y)$ im wesentlichen (d. h. bis auf Formulierung) nicht nur $\bigvee y(y \in Y \wedge H(x, y))$ sondern auch $\bigwedge y(y \in Y \rightarrow H(x, y))$ in $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ enthalten ist, mit anderen Worten: Die Aufnahme von (1) als zusätzliches Erzeugungsprinzip für entscheidbare Ausdrücke bedeutet im wesentlichen, daß $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ bezüglich Quantifizierung über endliche Bereiche abgeschlossen sein soll. Dabei tritt statt der quantifizierten Variablen y die Variable Y als neue freie Variable auf. Dieses neue „Axiom der Entscheidbarkeit" präzisiert unsere Vorstellung, daß man entscheiden kann, ob ein Element bzw. ob alle Elemente einer gewissen endlichen Menge eine entscheidbare Eigenschaft haben, indem man die Elemente in einer beliebigen Reihenfolge daraufhin prüft. Da dieser Vorgang sich jedoch nicht durch ein uniformes Prüfdiagramm über $(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ im Sinne von Abschnitt 8.3 beschreiben läßt, kann die Beschreibung von Entscheidungsverfahren durch Flußdiagramme jetzt nur noch in dem Sinne beibehalten werden, daß man Prüfknoten der Formen

$$\begin{array}{c} x, Y \\ \downarrow \\ \boxed{\bigvee y(y \in Y \wedge H(x, y))?} \\ \swarrow \qquad \searrow \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{c} x, Y \\ \downarrow \\ \boxed{\bigwedge y(y \in Y \rightarrow H(x, y))?} \\ \swarrow \qquad \searrow \end{array}$$

zuläßt, die jeweils durch den Nachweis für $H(x, y) \in \mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ zu rechtfertigen sind. In diesem Fall ist $H(x, y)?$ selbst durch ein Prüfdiagramm der erweiterten Art darstellbar.

Im allgemeinen ist $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E}) \subset \mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$: Enthält beispielsweise $\mathscr{K}$ keine Operationen, die von (durch große Variablen dargestellten) endlichen Mengen wieder zu (durch kleine Variablen dargestellten) Grunddingen zurückführen, und enthält $\mathscr{E}$ nur Ausdrücke, in denen sämtliche freien Variablen klein sind, so trifft letzteres auch auf $\mathscr{E}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ zu. Jede Anwendung von (1) führt aber aus dem Bereich dieser Ausdrücke heraus.

$\mathscr{K}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ unterscheidet sich von $\mathscr{K}_e(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ außer durch die Benutzung von Elementen von $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T},\mathscr{K},\mathscr{E})$ (statt nur von $\mathscr{E}^*$ und damit nach 8.3. im wesentlichen von $\mathcal{E}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})\big)$ für Verzweigungen dadurch, daß Arbeitsbausteine der Formen

$$\begin{array}{l} \mathrm{x}, \mathrm{Y}\big(\bigvee \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{y}))\big) \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{Y}_1 = \{\mathrm{y} : \mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{y})\}} \\ \downarrow \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{l} \mathrm{x}, \mathrm{Y}\big(\bigvee !! \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{y}))\big) \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{y}_1 = \iota \mathrm{y}\big(\mathrm{y} \in \mathrm{Y} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{y})\big)} \\ \downarrow \end{array}$$

mit $\mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{y}) \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ zugelassen werden, d. h., unter der Voraussetzung, daß wenigstens ein Element der (gegebenen oder schon konstruierten) Menge Y die entscheidbare Eigenschaft $H(x, y)$ hat, gilt die Bildung der Teilmenge Y_1 aller Elemente von Y mit dieser Eigenschaft als zulässiger Konstruktionsschritt. Ist insbesondere beweisbar, daß genau ein Element y von Y die entscheidbare Eigenschaft $H(x, y)$ hat, so gilt die Auswahl dieses Elements als zulässiger Konstruktionsschritt. Konstruktionsschritte dieser beiden Typen bezeichnen wir als ***konstruktive Auswahl.*** Durch Verkettung von S_3, PL_1^d und ähnlichen „mehrdeutigen" Operationen mit konstruktiven Auswahlen des zweiten Typs wird das in Abschnitt 7.2 angeschnittene Problem gelöst, solche Operationen durch Vermehrung der Argumente eindeutig zu machen. Wir wollen dieses Prinzip am Beispiel der zunächst für Paare von Kreisen definierten Operation S_3 erläutern:

Ist $\mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p}) \in \mathcal{E}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, so sei die Operation $\mathrm{S}_3^{\mathrm{H}}$ für alle Systeme $\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2$, die die Bedingung

$$\mathrm{k}_1 \text{ schneidet } \mathrm{k}_2 \wedge \bigvee !! \, \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p})\big) \; (\leftrightarrow \mathrm{H}'(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p})$$

erfüllen, durch $\mathrm{S}_3^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, k_1, k_2) := \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p})$ definiert. Die zugehörige BE

$$\bigwedge \mathbf{x}\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2) \to \bigvee \mathrm{p}_1(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p}))\big)$$

ist in $\mathcal{K}_e^a(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ enthalten. ($\mathcal{T}$ ist dabei die Theorie der platonischen Ebenen und $\mathcal{K}$ die dem Instrumentensatz „Zirkel und Lineal" entsprechende Menge von BEE.) $\mathrm{S}_3^{\mathrm{H}}$ wird durch das uniforme Flußdiagramm (im erweiterten Sinn)

$$\begin{array}{l} \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathbf{x} \quad \big(\mathrm{H}'(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\big) \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{P} = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)} \\ \downarrow \\ \boxed{\mathrm{p}_1 = \iota \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P} \wedge \mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{p})\big)} \\ \downarrow \\ \mathrm{p}_1 \end{array}$$

beschrieben. Unsere Präzisierung bedeutet: Ob z. B. mit Zirkel (und Lineal) derjenige Schnittpunkt zweier Kreise k_1, k_2, der auf der p_0-Seite $(p_0 \notin L(M(k_1), M(k_2)))$ von $L(M(k_1), M(k_2))$ liegt, aus k_1, k_2 und p_0 konstruierbar ist, hängt davon ab, ob die durch den Ausdruck $\mathrm{p}_1 \in$ Halbebene $(\mathrm{M}(\mathrm{k}_1), \mathrm{M}(\mathrm{k}_2);\ \mathrm{p}_0)$ dargestellte Punkt-Kreis²-Relation als entscheidbar gilt.

Es bleibt zu zeigen, daß die konstruktive Auswahl im allgemeinen den Bereich der mit vorgegebenen Hilfsmitteln lösbaren Konstruktionsaufgaben echt erweitert. Als Beispiel dafür diene die Theorie der Konstruktionen mit dem Zirkel allein, genauer: $\mathscr{T}$ sei die Theorie der platonischen Ebenen, $\mathscr{K}$ enthalte die zu Z und S_3 gehörigen BEE, $\mathscr{E}$ sei so beschaffen, daß die eben erwähnte Relation in $\mathscr{E}_e^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ist. Wir haben gezeigt, daß

$$\text{(4)} \qquad \bigwedge \mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\mathrm{p}_0\big(\mathrm{k}_1 \text{ schneidet } \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{p}_0 \notin \mathrm{L}(\mathrm{M}(\mathrm{k}_1), \mathrm{M}(\mathrm{k}_2))$$
$$\rightarrow \bigvee \mathrm{p}_1(\mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{p}_1 \in \mathrm{k}_2 \wedge \mathrm{p}_1 \in \text{Halbebene}(\mathrm{M}(\mathrm{k}_1), \mathrm{M}(\mathrm{k}_2); \mathrm{p}_0))\big) \in \mathscr{K}_e^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$$

Ohne konstruktive Auswahl können Punkte bei Anwendung von Z und S_3 nur als Einermenge $\{p\} = S_3(K_1, K_2)$ entstehen, wobei K_1, K_2 endliche Mengen von Kreisen sind. Damit $S_3(K_1, K_2) \neq \emptyset$ ist, muß es wenigstens ein Paar $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$ geben, so daß $S_3(k_1, k_2)$ definiert ist. In diesem Fall enthält $S_3(K_1, K_2)$ aber schon mindestens zwei verschiedene Punkte, d. h., es gilt: (4) $\notin \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Es sei dem Leser überlassen, die durch Kombination der Definition von $\mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und $\mathscr{E}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ mit den in diesem Abschnitt behandelten Prinzipien entstehende Definition der Mengen $\mathscr{K}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und $\mathscr{E}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ explizit aufzustellen.

Es liegt nahe, aus der Voraussetzung, daß die Dinge der Sorte X endliche Mengen von Dingen der Sorte x sind, noch weitere Folgerungen für die Entscheidbarkeit und Konstruierbarkeit zu ziehen. Daher nehmen wir noch eine Diskussion gewisser Varianten der hier angegebenen Definition der Ausdrucksmengen $\mathscr{K}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ und $\mathscr{E}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ vor.

Mit X_i, X_j sind auch $X_i \cup X_j$, $X_i \cap X_j$ und $X_i \setminus X_j$ endliche Mengen von Dingen der Sorte x und in der Regel als aus X_i, X_j konstruierbar anzusehen. Daher könnte man die Definition von $\mathscr{K}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ mit einiger Berechtigung durch die Regeln

$$\text{(5)} \qquad \bigwedge \mathrm{X}_i \bigwedge \mathrm{X}_j \bigvee \mathrm{X} \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{X}_i \vee \mathrm{x} \in \mathrm{X}_j) \in \mathscr{K}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}),$$

$$\text{(6)} \qquad \bigwedge \mathrm{X}_i \bigwedge \mathrm{X}_j \bigvee \mathrm{X} \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{X}_i \wedge \mathrm{x} \in \mathrm{X}_j) \in \mathscr{K}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}),$$

$$\text{(7)} \qquad \bigwedge \mathrm{X}_i \bigwedge \mathrm{X}_j \bigvee \mathrm{X} \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{X}_i \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{X}_j) \in \mathscr{K}_{(e)}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$$

erweitern. (5), (6), (7) kann man jedoch im Bedarfsfall auch dadurch erreichen, daß man die entsprechenden mengentheoretischen Operationen bzw. die zu ihnen gehörigen BEE in das System $\mathscr{K}$ aufnimmt. Ist die Rahmentheorie $\mathscr{T}$ eine axiomatische Mengenlehre oder enthält sie eine solche als Teiltheorie, so sind neben $\cup$, $\cap$, $\setminus$ auch das kartesische Produkt, die Potenzmengenoperation und andere Operationen (die insbesondere nicht aus dem Bereich der endlichen Mengen herausführen) als konstruktiv anzusehen. Dies zu präzisieren und auszuführen muß einer als konstruktive Teiltheorie aufgefaßten konstruktiven Mengenlehre vorbehalten bleiben.

Will man die Elementrelation zwischen Dingen der Sorte x und endlichen Mengen X von Dingen dieser Sorte als entscheidbar ansehen, so kann dies durch die Aufnahme des Ausdrucks $x \in X$ in $\mathscr{E}$ erreicht werden. Es sprechen jedoch gute Gründe dagegen, diese Relation ein für allemal als entscheidbar einzustufen, d. h. die Definition von $\mathscr{E}^a_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ durch die Regel

„Alle Ausdrücke der Form $x \in X$ gehören zu $\mathscr{E}^a_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}\ \mathscr{E})$"

abzuändern. Dazu zeigen wir, daß $x \in X \in \mathscr{E}^a_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ genau dann gilt, wenn $x_i = x_j \in \mathscr{E}^a_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Ist die Identität im Bereich der x-Dinge entscheidbar, so ist es laut Definition von $\mathscr{E}^a_{(e)}$ auch $\bigvee x_j(x_j \in X \wedge x_j = x)$, was offenbar gleichbedeutend mit $x \in X$ ist. Umgekehrt ist mit „$\in$" auch „$=$" entscheidbar wegen der Gleichwertigkeit von $x_i = x_j$ und $x_i \in \{x_j\}$. Zwischen der (in manchen Zusammenhängen anfechtbaren) Entscheidbarkeit der Identität und der in unserer Definition ein für allemal postulierten Entscheidbarkeit von $\bigvee x\big(x \in X \wedge H(x, y)\big)$ besteht vom Standpunkt der konstruktiven Mathematik ein wesentlicher Unterschied: In vielen Bereichen der Mathematik werden Dinge recht abstrakter Art durch Repräsentanten konkreterer Natur gegeben, z. B. reelle Zahlen durch eine algorithmische Vorschrift zur Produktion beliebig genauer rationaler Näherungswerte bzw. zur Produktion der unendlichen Folge der Dezimalstellen. Ist nun H(x) eine auf solche Algorithmen anwendbare entscheidbare Eigenschaft von reellen Zahlen und sind endlich viele reelle Zahlen X durch je einen Algorithmus gegeben, so kann man sehr wohl diejenige Teilmenge von X bestimmen, auf die H(x) zutrifft. Entscheidbarkeit der Identität würde jedoch bedeuten, daß man von zwei durch ihre Dezimalstellenentwicklung gegebenen reellen Zahlen feststellen kann, ob sie gleich sind. Durch endlich langes Vergleichen der nach und nach berechneten Dezimalstellen beider Zahlen kann man jedoch nur deren eventuelle Verschiedenheit feststellen.

8.6. Konstruktionen mit Hilfselementen

Besteht ein System von gegebenen Stücken aus höchstens einem Punkt p, endlich vielen Geraden und endlich vielen Kreisen, die sich paarweise nicht schneiden (außer daß eventuell gewisse der Geraden den Punkt p gemeinsam haben), so sind mit Zirkel und Lineal im bisher definierten Sinne überhaupt keine neuen Stücke konstruierbar, da die Anwendung von Schnittoperationen nach Voraussetzung höchstens den bereits gegebenen Punkt p liefert, die Anwendung von Z oder L aber mindestens zwei verschiedene Punkte voraussetzt. Insbesondere sind also mit Zirkel und Lineal im bisher betrachteten Sinn folgende Aufgaben nicht lösbar (falls keine Stücke außer den ausdrücklich genannten gegeben sind):

— Konstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises,
— Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,
— Errichten des Lotes in einem Punkt einer Geraden,
— Halbieren des gegebenen Winkels bzw. der Winkel, die durch ein Paar von sich schneidenden Geraden gegeben sind,
— Konstruktion der Potenzgeraden zweier sich nicht schneidender Kreise

usw. In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß der Bestandteil $\mathscr{K}$ einer konstruktiven Teiltheorie $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ außer gewissen BEE eventuell gewisse in $\mathscr{T}$ gültige nichteindeutige BE enthält. Diese Annahme über $\mathscr{K}$ wirkt sich auf keine der Definitionen für $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ $\mathscr{K}^a_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ usw. aus. $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}$ interpretieren wir wie folgt: Zu jedem System $\boldsymbol{x}$ von gegebenen oder schon konstruierten Stücken, das der Voraussetzung $H'(\boldsymbol{x})$ genügt, darf ein beliebiges System $\boldsymbol{y}$ von Hilfselementen gewählt werden, so daß $\mathrm{H}''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ gilt. Dabei ist jedoch $\boldsymbol{y}$ selbst nicht als mögliches Resultat einer Konstruktion anzusehen. Vielmehr definieren wir induktiv die Menge $\mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der durch *elementare Konstruktion mit Hilfselementen* konstruktiv beweisbaren BE:

Ty.

(1a) *Ist* x *eine der Variablen* x *und* y *eine Variable gleicher Sorte, die nicht in* x *vorkommt, so ist*
$\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{x} \to \bigvee \mathrm{y}\, \mathrm{y} = \mathrm{x}) \in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1b) *Ist* $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \bigvee !!\mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}$, *so sei*
$\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

(1c) $\mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *sei bezüglich Verkettung und Verzweigung an Elementen von* $\mathscr{E}^*$ *abgeschlossen.*

(Aus (1a—c) folgt $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \subseteqq \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.)

(1d) *Ist* $\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{x}_1(\mathrm{H}_1'(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1) \to \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}_1''(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, (*)
$\bigwedge \mathrm{x}_2(\mathrm{H}_2'(\mathrm{x}_2) \to \bigvee \mathrm{y}_2\mathrm{H}_2''(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)) \in \mathscr{K}$ (*Hilfselementoperation!*)

$\mathrm{x}_2 \leqq \mathrm{x}$, $\mathrm{x}_1 \leqq \mathrm{y}_2$ *und*

$\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \mathrm{H}_2'(\mathrm{x}_2) \wedge \bigwedge \mathrm{y}_2(\mathrm{H}_2''(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2) \to \mathrm{H}_1'(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1) \wedge \bigwedge \mathrm{y}_1(\mathrm{H}_1''(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \mathrm{y})$
$\to \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})))) \in \mathscr{T}$,

so ist

$\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$.

Dem neuen Erzeugungsprinzip (1d) für konstruktiv beweisbare BE entspricht die Erweiterung des Formalismus der uniformen Flußdiagramme dadurch, daß einem Flußdiagramm $\mathfrak{F}$, das die Aufgabe (*) löst, unter den in (1d) formulierten Voraussetzungen ein Arbeitsknoten der Form

$$\downarrow$$
$$(2) \qquad \boxed{y_2 = \varepsilon z H_2''(x_2, z)}$$
$$\downarrow$$

vorgeschaltet werden darf, wobei $\varepsilon z H(z)$ zu lesen ist: *ein gewisses (beliebiges) System* z *mit der Eigenschaft* H(z).
Die durch (1d) vorgenommene Präzisierung der Verwendung von Hilfselementen ist in folgendem Sinne allgemeiner als die traditionell übliche Benutzung von Hilfselementen bei geometrischen Konstruktionen: Wählt man zu dem Teilsystem $\boldsymbol{x}_2$ des Systems $\boldsymbol{x}$ der gegebenen oder schon konstruierten Stücke statt $\boldsymbol{y}_2$ ein anderes System $\boldsymbol{z}_2$ von Hilfselementen, die ebenfalls der Bedingung $H_2''(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{z}_2)$ genügen, so ist das aus $\boldsymbol{x}$ und dem entsprechenden Teilsystem von $\boldsymbol{z}_2$ erhaltene Endresultat der Konstruktion (*) im allgemeinen von dem aus $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}_1$ gewonnenen Resultat verschieden. Es ist lediglich gefordert, daß beide Endresultate zu $\boldsymbol{x}$ in der Beziehung $H''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ stehen, und nur in dem Sinn, daß in dieser Beziehung die bei der Konstruktion benutzten Hilfselemente nicht vorkommen, ist das Resultat der Konstruktion von den benutzten Hilfselementen unabhängig. Eine solche Verwendung von Hilfselementen ist — wie das folgende Beispiel erhärten wird — vom Standpunkt des konstruktiven Beweisens von BE sinnvoll. Sie hat natürlich zur Folge, daß verallgemeinerte uniforme Flußdiagramme, die Arbeitsknoten der Form (2) enthalten, im allgemeinen nicht als Darstellung einer partiellen Operation sondern nur noch als formalisierte Darstellung eines — in unserem Sinne konstruktiven — Existenzbeweises gedeutet werden können.
Die Verwendung von Hilfselementen im üblichen engeren Sinn ergibt sich wie folgt: Gilt für die mit Hilfselementen gelöste Konstruktionsaufgabe $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee \mathrm{y} \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \in \mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ in $\mathscr{T}$: $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee !! \mathrm{y} \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$, so sind alle zu gegebenem $\boldsymbol{x}$ unter Benutzung irgendwelcher Hilfselemente konstruierten $\boldsymbol{y}$ gleich, falls sie die Bedingung $H''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ erfüllen, d. h., in diesem Fall stellt auch das verallgemeinerte uniforme Flußdiagramm wieder eine partielle Operation dar.

Im allgemeinen Fall kann das durch die in (1d) formulierte Konstruktion erhaltene Objektsystem $\boldsymbol{y}$ nur als $\varepsilon \boldsymbol{y} H''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, d. h. *ein gewisses* $\boldsymbol{y}$ mit der gewünschten Eigenschaft bezeichnet werden. Es ist leicht zu beweisen, daß die Benutzung solcher „nichtdeterminierter Konstruktionen“ als neue Hilfselementoperationen, d. h. die Ersetzung der Voraussetzung

$$\bigwedge \mathrm{x}_2(\mathrm{H}_2'(\mathrm{x}_2) \rightarrow \bigvee \mathrm{y}_2 \mathrm{H}_2''(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)) \in \mathscr{K}$$

in (1d) durch

$$\bigwedge \mathrm{x}_2(\mathrm{H}_2'(\mathrm{x}_2) \rightarrow \bigvee \mathrm{y}_2 \mathrm{H}_2''(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)) \in \mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$$

den Bereich $\mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ der mit Hilfselementen konstruktiv beweisbaren BE nicht erweitert.

Beispiel. Es sei $\mathscr{T}$ die Theorie der platonischen Ebenen, $\mathscr{K}$ enthalte die zu den Instrumenten L, Z, S_1, S_2, S_3 gehörigen BEE und als zulässige Wahloperation von

Hilfselementen

(3) $\bigwedge g_1 \bigvee p_1p_2(p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_1 \wedge p_1 \neq p_2).$

$\mathscr{E}$ sei beliebig, etwa $\mathscr{E} = \emptyset$. Nach der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts ist

$$\bigwedge g_1p_3(p_3 \notin g_1 \to \bigvee g(p_3 \in g \wedge g \perp g_1) \notin \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$$

Aus dem bereits in Abschnitt 8.1, Beispiel 3, angegebenen Unterprogramm I ergibt sich jedoch

(4) $\bigwedge g_1p_1p_2p_3(p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_1 \wedge p_1 \neq p_2 \wedge p_3 \notin g_1$
$\to \bigvee g(p_3 \in g \wedge g \perp g_1) \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \subseteqq \mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$

Unter der Voraussetzung $p_3 \notin g_1$ erfüllen (3) und (4) die Voraussetzungen von (1d), daher gilt:

(5) $\bigwedge g_1p_3(p_3 \notin g_1 \to \bigvee g(p_3 \in g \wedge g \perp g_1) \in \mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$

Die entsprechende Konstruktion wird durch das Flußdiagramm

$$g_1, p_3 \quad (p_3 \notin g_1)$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{p_1, p_2 = \varepsilon p_1', p_2'(p_1' \in g_1 \wedge p_2' \in g_2 \wedge p_1' \neq p_2')}$$
$$\downarrow$$
$$\mathfrak{F}: \boxed{\begin{array}{l} k_1 = Z(p_1; p_1, p_3) \\ k_2 = Z(p_2; p_2, p_3) \\ P_1 = S_3(k_1, k_2) \\ g = L(P_1, P_1) \end{array}}$$
$$\downarrow$$
$$g$$

beschrieben.

Da in $\mathscr{T}$ gilt: $\bigwedge g_1p_3 \bigvee!! g(p_3 \in g \wedge g \perp g_1)$, ist die erhaltene Gerade g unabhängig von der Wahl der Hilfspunkte p_1, p_2. Das angegebene Flußdiagramm stellt daher — trotz vorkommender Hilfselementoperation — eine Operation dar, nämlich Lot(p_3, g_1).

Nun wollen wir annehmen, es sei lediglich konstruktiv zu beweisen:

(6) $\bigwedge g_1 \bigvee g\, g \perp g_1.$

Dazu benötigen wir außer (3) $\in \mathscr{K}$ noch

(7) $\bigwedge g_1 \bigvee p_3\, p_3 \notin g_1 \in \mathscr{K}.$

Aus (5) und (7) folgt laut (1d)

$$(6) \qquad \in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).$$

Das zugehörige Flußdiagramm hat die Form

$$
(8) \qquad \begin{array}{c} g_1 \\ \downarrow \\ \boxed{p_1 = \varepsilon p(p \notin g_1)} \\ \downarrow \\ \boxed{\mathfrak{F}} \\ \downarrow \\ g \end{array}
$$

Es stellt schematisch einen im Sinne von $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ konstruktiven Existenzbeweis, jedoch keine Operation dar. Man bemerke, daß die beiden vorkommenden Hilfselementoperationen (3) bzw. (7) den Inzidenzaxiomen I3 bzw. I1 (vgl. Abschnitt 5.2) entsprechen, die die Form von nichteindeutigen BE haben, während die übrigen vorkommenden Operationen Z, L, S_3 bei geeigneter Wahl eines Axiomensystems unmittelbar Axiomen von BEE-Form entsprechen. (8) ist also primär tatsächlich die Kurzschrift eines unter Benutzung der Axiome geführten Existenzbeweises. Die zusätzliche Bedeutung einer Konstruktionsbeschreibung erhält (8) erst in bezug auf die angenommene Effektivität von $\mathscr{K}$. Der durch (8) für (6) $\in \mathscr{K}^h_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ geführte Beweis berechtigt dazu, bei weiteren Konstruktionen (bzw. konstruktiven Beweisen) den Knoten

$$
\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{g_2 = \varepsilon g\, g \perp g_1} \\ \downarrow \end{array}
$$

zu verwenden.

Ein besonderer Fall von Konstruktionen mit (hier unbewußt benutzten) Hilfselementen sind die in der Schule geübten Dreieckskonstruktionen. Dies sei am Beispiel der Konstruktion eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten erläutert. Es bezeichne $H'(p_1, \ldots, p_6)$ den Ausdruck

$$p_1p_2 < p_3p_4 + p_5p_6 \wedge p_3p_4 < p_5p_6 + p_1p_2 \wedge p_5p_6 < p_1p_2 + p_3p_4,$$

$H''(p_1, \ldots, p_6, p_a, p_b, p_c)$ den Ausdruck

$$p_ap_b \cong p_5p_6 \wedge p_ap_c \cong p_3p_4 \wedge p_bp_c \cong p_1p_2.$$

Sind nun die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks in Gestalt repräsentierender Strecken $a = \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$, $b = \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4}$, $c = \overline{\mathrm{p}_5\mathrm{p}_6}$ vorgegeben, so bedeutet die Konstruktion des entsprechenden Dreiecks mit Zirkel und Lineal den konstruktiven Beweis der BE

$$(9) \qquad \bigwedge \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4\mathrm{p}_5\mathrm{p}_6\big(\mathrm{H}'(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6) \\ \rightarrow \bigvee \mathrm{p}_a\mathrm{p}_b\mathrm{p}_c\mathrm{H}''(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6, \mathrm{p}_a, \mathrm{p}_b, \mathrm{p}_c)\big),$$

d. h. die Angabe eines uniformen Flußdiagramms $\mathfrak{F}$, so daß für alle $p_1, \ldots, p_6$ mit $H'(p_1, \ldots, p_6)$ das Resultat $\mathfrak{F}(p_1, \ldots, p_6)$ existiert und $H''\big(p_1, \ldots, p_6, \mathfrak{F}(p_1, \ldots, p_6)\big)$ erfüllt. Da ein Dreieck durch Angabe dreier Seitenlängen (die den Dreiecksungleichungen genügen) noch nicht eindeutig bestimmt ist bzw. nur in dem Sinn eindeutig bestimmt ist, daß je zwei solcher Dreiecke einander kongruent sind, sind die gegebenen Stücke zunächst durch Angabe der gewünschten Lage des Dreiecks zu ergänzen, wodurch das Resultat der Konstruktion eindeutig wird. Da je zwei Dreiecke, die man durch verschiedene Lagevorschriften erhält, der Bedingung H″ genügen, in der die Lagevorschriften nicht mehr vorkommen, spielen diese die Rolle von Hilfselementen beim konstruktiven Beweis der nichteindeutigen BE (9). Die vollständige Lösung der Aufgabe (9) sieht demnach so aus: Das Flußdiagramm

$$\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6, \mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8, \mathrm{p}_9\big(\mathrm{H}'(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6) \wedge \mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8, \mathrm{p}_9 \text{ nicht kollinear}\big)$$

$$\downarrow$$

$$\mathfrak{F}_1: \quad \boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{p}_a & = \mathrm{p}_7 \\ \mathrm{g}_1 & = \mathrm{L}(\mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8) \\ \mathrm{k}_1 & = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_7; \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6) \\ \mathrm{P}_1 & = \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_1, \mathrm{g}_1) \\ \mathrm{p}_b & = \iota\mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8)\big) \\ \mathrm{k}_2 & = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_b; \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\ \mathrm{k}_3 & = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_a; \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4) \\ \mathrm{P}_2 & = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3) \\ \mathrm{p}_c & = \iota\mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_1, \mathrm{p}_9)\big) \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{p}_a, \mathrm{p}_b, \mathrm{p}_c$$

wird durch die BEE

$$\bigwedge \mathrm{p}_1 \cdots \mathrm{p}_9\big((\mathrm{H}'\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6) \wedge \mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8, \mathrm{p}_9 \text{ nicht kollinear} \\ \rightarrow \bigvee!!\, \mathrm{p}_a\mathrm{p}_b\mathrm{p}_c(\mathrm{H}''(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_6, \mathrm{p}_a, \mathrm{p}_b, \mathrm{p}_c) \wedge \mathrm{p}_b = \mathrm{p}_7 \\ \wedge\, \mathrm{p}_b \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8) \wedge \mathrm{p}_c \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{p}_7, \mathrm{p}_8; \mathrm{p}_9))\big)$$

beschrieben, löst demnach die durch die zugehörige BE gegebene Konstruktionsaufgabe. Gilt die Wahl dreier nicht kollinearer Punkte p_7, p_8, p_9 als zulässige Hilfselementoperation, so ist laut (1d) die BE (9) durch Konstruktion mit Hilfselementen beweisbar. Das entsprechende uniforme Flußdiagramm hat die Gestalt

$$
\begin{array}{c}
p_1, \ldots, p_6 \quad (H'(p_1, \ldots, p_6)) \\
\downarrow \\
\boxed{p_7, p_8, p_9 = \varepsilon p', p'', p''' \quad (p', p'', p''' \text{ nicht kollinear})} \\
\downarrow \\
\boxed{\mathfrak{F}_1} \\
\downarrow \\
p_a, b_b, p_c
\end{array}
$$

Es ist klar, daß alle Aufgaben, „irgendwo in der Ebene“ eine Figur mit vorgeschriebenen Maßen zu konstruieren, analog zu behandeln sind.

Die Definition von $\mathscr{E}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ entsteht aus der Definition von $\mathscr{E}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, indem man dort $\mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ durch $\mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ ersetzt. Es gilt: Verzweigung an Elementen von $\mathscr{E}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ (statt nur von $\mathscr{E}^*$) führt nicht aus $\mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ heraus. Der Beweis ist dem Beweis des entsprechenden Satzes in Abschnitt 8.3 analog.

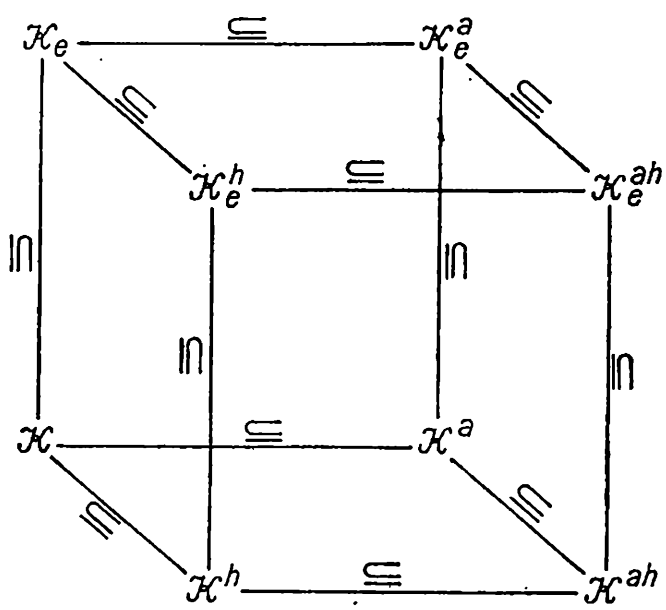


Abb. 28

Indem man die jeweiligen Erzeugungsprinzipien kombiniert, erhält man durch simultane Definition die Mengen

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{K}^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \quad \text{und} \quad \mathscr{E}^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}), \\
&\mathscr{K}_e^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \quad \text{und} \quad \mathscr{E}_e^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}), \\
&\mathscr{K}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}) \quad \text{und} \quad \mathscr{E}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}).
\end{aligned}
$$

Abb. 28 veranschaulicht die Inklusionsbeziehungen im Bereich der BE-Mengen einer konstruktiven Teiltheorie.

8.7. Lösungen von Konstruktionsaufgaben, Äquivalenz von konstruktiven Teiltheorien, Instrumentensätzen und Figuren

Ist $\mathcal{T}$ eine axiomatische Theorie, $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ eine konstruktive Teiltheorie von $\mathcal{T}$ und H eine in der $\mathcal{T}$-Sprache formulierte BE:

$$(1) \qquad \bigwedge \mathrm{x}\big(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \to \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big),$$

so bezeichnen wir einen Beweis für $\mathrm{H} \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ als eine *elementare Lösung der Konstruktionsaufgabe* $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathrm{H})$ (vgl. Abschnitt 8.1). Ein solcher Beweis kann entweder durch Angabe eines zyklenfreien uniformen Flußdiagramms $\mathfrak{F}$ über $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und Beweis, daß $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x}$ mit $H'(\boldsymbol{x})$ existiert und $H''\big(\boldsymbol{x}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{x})\big)$ genügt, oder unter Benutzung der induktiven Definition von $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ geführt werden, indem man z. B. zeigt, daß H durch Verkettung oder Verzweigung aus BE H_1, H_2 entsteht, von denen schon $\mathrm{H}_{1/2} \in \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ bekannt ist. Auf Grund der Sätze 2 und 3 (Abschnitt 8.2) sind beide Methoden gleichwertig. Ihre Grundzüge sind schon in der schulmäßigen Behandlung geometrischer Konstruktionsaufgaben vorgezeichnet: Manche Aufgaben werden dadurch gelöst, daß man unmittelbar angibt, in welcher Reihenfolge die zulässigen Einzelschritte miteinander zu verknüpfen sind, andere dadurch, daß man sie auf bereits gelöste Konstruktionsaufgaben zurückführt.

Einen Beweis für $\mathrm{H} \in \mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ bezeichnen wir als eine *Lösung der Konstruktionsaufgabe* $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathrm{H})$. Er kann nach Abschnitt 8.4 entweder durch Angabe eines (im allgemeinen nicht zyklenfreien) uniformen Flußdiagramms $\mathfrak{F}$ über $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ und den Nachweis, daß $\mathfrak{F}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x}$ mit $H'(\boldsymbol{x})$ existiert und $H''\big(\boldsymbol{x}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{x})\big)$ erfüllt, oder durch Benutzung der induktiven Definition von $\mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ geführt werden. $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ bedeutet: Jede elementare Lösung der Konstruktionsaufgabe $(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathrm{H})$ ist eine Lösung dieser Aufgabe. Einen Beweis für $\mathrm{H} \in \mathcal{K}^a_{(e)}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ bezeichnen wir als eine *(elementare) Lösung mit konstruktiver Auswahl*, einen Beweis für $\mathrm{H} \in \mathcal{K}^h_{(e)}(\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{E})$ als eine *(elementare) Lösunng mit Hilfselementen*, einen Beweis für $\mathrm{H} \in \mathcal{K}^{ah}_{(e)}(\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ als eine *(elementare) Lösung mit konstruktiver Auswahl und Hilfselementen.*

Zwei konstruktive Teiltheorien $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)$, $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ der gleichen Rahmentheorie $\mathcal{T}$ heißen *elementar äquivalent* (symbolisch: $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1) \underset{e}{\cong} (\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$), wenn $\mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1) = \mathcal{K}_e(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ ist. Entsprechend heißen $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)$ und $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ *äquivalent*, *(elementar) a-äquivalent* bzw. *h-äquivalent* bzw. *ah-äquivalent* $\Big($symbolisch $\cong$, $\overset{a}{\underset{(e)}{\cong}}$, $\overset{h}{\underset{(e)}{\cong}}$, $\overset{ah}{\underset{(e)}{\cong}}\Big)$, wenn $\mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1) = \mathcal{K}(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ bzw. $\mathcal{K}^a_{(e)}(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1) = \mathcal{K}^a_{(e)}(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ usw. Ferner heißen $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)$ und $(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2)$ *stark äquivalent*, wenn alle oben definierten Äquivalenzen bestehen.

Die so definierten Äquivalenzrelationen im Bereich der konstruktiven Teiltheorien einer gemeinsamen Rahmentheorie $\mathcal{T}$ sind vom Standpunkt einer allgemeinen Theorie der konstruktiven Teiltheorien naheliegend und bewähren sich u. a. beim Studium der Äquivalenz von Grundoperationen in der Theorie der rekursiven (Wort-)Funktionen. Sie sind jedoch für die Wertung der vorliegenden Einzelresultate der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen von geringem Nutzen, da kaum zwei der von dieser Theorie bisher untersuchten Instrumentensätze (nach sinnvoller Ergänzung durch Systeme von zulässigen Prüfrelationen) in einer der genannten Äquivalenzrelationen stehen. Vielmehr sagen die meisten klassischen Sätze (Mohr-Mascheroni, Poncelet-Steiner, Adler usw.) bei genauer Formulierung nur unter komplizierten Zusatzvoraussetzungen etwas über die Gleichwertigkeit von Instrumentensätzen aus. Dabei kann man folgende Fälle unterscheiden:

a) Zu jeder Operation bzw. Hilfsoperation aus $\mathscr{K}_1$ existiert ein diese Operation darstellendes Geradeausprogramm mit Arbeitsknoten aus $\mathscr{K}_2$ und umgekehrt. Dann ist

$$\mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}) = \mathscr{K}_e^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}) \text{ und } \mathscr{K}^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}) = \mathscr{K}^h(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E})$$

für jedes System $\mathscr{E}$ von Prüfrelationen, insbesondere für $\mathscr{E} = \emptyset$. Im Fall a) nennen wir die Instrumentensätze $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ *unbedingt äquivalent.*

b) Es gibt Systeme $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ von Prüfrelationen, so daß

$$\mathscr{K}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1) = \mathscr{K}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2) \text{ oder } \mathscr{K}_e^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1) = \mathscr{K}_e^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2)$$

ist. Im ersten Fall nennen wir $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ *äquivalent*, im zweiten Fall *elementar äquivalent*. Natürlich ist eine Aufspaltung in weitere Fälle nach dem Muster der Äquivalenz von konstruktiven Teiltheorien möglich, je nachdem, ob sogar für gewisse $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$

$$\mathscr{K}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1) = \mathscr{K}^a(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2)$$

gilt usw. Von wirklicher Bedeutung im Bereich der Geometrie dürfte jedoch nur die Unterscheidung von elementarer und nichtelementarer Äquivalenz sein. Äquivalenz zweier Instrumentensätze $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ ist dadurch nachzuweisen, daß man zu jedem Element von $\mathscr{K}_1$ ein die entsprechende Operation oder Hilfsoperation darstellendes uniformes Flußdiagramm mit Arbeitsknoten aus $\mathscr{K}_2$ angibt und umgekehrt. (Der Nachweis elementarer Äquivalenz erfordert schärfer die Angabe entsprechender zyklenfreier Flußdiagramme.) Ist dabei $\mathscr{E}_1$ das endliche System der insgesamt zur Darstellung von $\mathscr{K}_2$ benutzten Prüfrelationen und $\mathscr{E}_2$ das System der insgesamt zur Darstellung von $\mathscr{K}_1$ benutzten Prüfrelationen, so ist im allgemeinen noch nicht $\mathscr{K}_{(e)}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1) = \mathscr{K}_{(e)}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2)$, da nicht notwendig jede Prüfrelation aus $\mathscr{E}_1$ durch ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2)$ darstellbar ist (bzw. umgekehrt). Es ist aber dann trivialerweise

$$\mathscr{K}_{(e)}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) = \mathscr{K}_{(e)}^{ah}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2),$$

d. h., $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ sind (elementar) äquivalent.

c) In der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen tritt häufig der Fall auf, daß zwei Instrumentensätze nur bezüglich der Konstruierbarkeit einer oder mehrerer Sorten von Grunddingen äquivalent sind. Der Satz von Mohr-Mascheroni z. B., der in der üblichen nachlässigen Formulierung behauptet, daß alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben schon mit dem Zirkel allein lösbar sind, kann nur so zu verstehen sein, daß alle aus gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Kreise auch ohne Verwendung des Lineals erhalten werden können, da es unmöglich ist, mit dem Zirkel Geraden zu konstruieren. Aufgaben, bei denen primär eine Gerade gesucht ist, sind in diesem Zusammenhang so umzuformulieren, daß zwei Punkte dieser Geraden gesucht werden. Der Satz von Mohr-Mascheroni (und einige analoge Sätze) lassen sich auf Grund der Tatsache beweisen, daß der Instrumentensatz (L, Z, S_1, S_2, S_3) folgende Eigenschaft hat:

(2) Jedes uniforme Flußdiagramm mit Arbeitsknoten aus (L, Z, S_1, S_2, S_3), das als Resultat keine Geraden (keine Kreise, allgemein: nur Dinge der Sorten $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$) liefert, ist aus endlich vielen Flußdiagrammen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ mit der gleichen Eigenschaft erzeugbar.

Nimmt man die den Flußdiagrammen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ entsprechenden Operationen als neuen Instrumentensatz, paßt man also die logische Analyse des betrachteten Instrumentensatzes gewissermaßen dem zu beweisenden Satz an (vgl. die Definition der Kreuzoperation K in Abschnitt 7.2), so hat man die Betrachtung von Geraden (allgemein: Dingen der Sorten $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots$) eliminiert und den Fall c) auf den allgemeinen Fall zurückgeführt. Es lassen sich jedoch leicht Beispiele (nicht notwendig geometrischer Art) konstruieren, in denen die für die Anwendung dieser Beweismethode nötige Voraussetzung (2) nicht erfüllt ist.

d) In vielen Sätzen der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen wird die Gleichwertigkeit von Instrumentensätzen nur unter der Voraussetzung behauptet, daß die gegebenen Stücke gewisse Bedingungen erfüllen: Ist $H(\mathbf{z})$ ein Ausdruck der betrachteten Sprache so sei, $\mathscr{M}^{\mathscr{T}}_{H(\mathbf{z})}$ die Menge derjenigen BE $\bigwedge \mathbf{x}\big(H'(\mathbf{x}) \rightarrow \bigvee \mathbf{y} H''(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$, aus deren Voraussetzung $H'(\mathbf{x})$ in $\mathscr{T}$ $H(\mathbf{z})$ folgt, d. h. für die $\mathbf{z} \leqq \mathbf{x}$ und $\bigwedge \mathbf{x}\big(H'(\mathbf{x}) \rightarrow H(\mathbf{z})\big) \in \mathscr{T}$ gilt. $(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1)$ und $(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2)$ heißen (*bezüglich* $H(\mathbf{z})$) *bedingt* (*elementar*) *äquivalent*, wenn

$$\mathscr{K}^{ah}_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_1, \mathscr{E}_1) \cap \mathscr{M}^{\mathscr{T}}_{H(\mathbf{z})} = \mathscr{K}^{ah}_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_2) \cup \mathscr{M}^{\mathscr{T}}_{H(\mathbf{z})}.$$

Die Übertragung der so definierten bedingten Äquivalenz von konstruktiven Teiltheorien auf Instrumentensätze kann nun nach dem Muster von a) oder b) erfolgen.

Wir zeigen an einem Beispiel, wie der Begriff der bedingten Äquivalenz aus der Formulierung entsprechender Sätze eliminiert werden kann, wobei sich allerdings deren Sinn geringfügig ändert.

Satz von Poncelet-Steiner. *Befinden sich unter den gegebenen Stücken ein Kreis und sein Mittelpunkt, so sind alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Geraden schon mit dem Lineal allein konstruierbar.*

Mit anderen Worten: *Die Instrumentensätze* (L, Z, S_1, S_2, S_3) *und* (L, S_1, S_2, S_3)[1]) *sind bezüglich der Konstruierbarkeit von Punkten und Geraden bedingt äquivalent.*

---

[1]) Dabei wird S_3 höchstens benutzt, um die Schnittpunkte gegebener Kreise zu bestimmen. Sieht man solche Punkte als von vornherein gegeben an, so ist die bedingte Äquivalenz von (L, Z, S_1, S_2, S_3) und (L, S_1, S_2) behauptet.

Führt man in die Sprache Konstanten k_0, p_0 zur Bezeichnung des gegebenen Kreises und seines Mittelpunktes ein und ergänzt die benutzten Axiome (der platonischen Ebenen) durch das Axiom $p_0 = M(k_0)$, so werden folgende Operationen definierbar:

$$S_2^*(g) := S_2(k_0, g), \text{ falls g schneidet } k_0,$$

$$L^*(p) := L(p, p_0), \text{ falls } p \neq p_0.$$

Bei den Poncelet-Steinerschen Konstruktionen mit dem Lineal allein unter Benutzung von k_0 und p_0 wird S_2 nur benutzt, um gegebene oder schon konstruierte Geraden mit k_0 zu schneiden, kann also durch S_2^* ersetzt werden. Ersetzt man ferner in den Konstruktionen jeden Arbeitsknoten der Form $p_i = L(p_j, p_0)$ durch $p_i = L^*(p_j)$, so wird durch das Axiom $p_0 = M(k_0)$ gesichert, daß sich die Konstruktionen nicht ändern. Demnach kann man dem Satz von Poncelet-Steiner folgende Form geben:

In einer platonischen Ebene mit p_0, k_0, in der $p_0 = M(k_0)$ gilt, sind alle aus gegebenen Punkten und Geraden mit Zirkel und Lineal (d. h. mit (L, Z, S_1, S_2, S_3)) konstruierbaren Punkte und Geraden auch mit dem Instrumentensatz $(L, L^*, S_1, S_2^*, S_3)$ konstruierbar.

In Wahrheit ist der ursprüngliche Satz von Poncelet-Steiner nur noch ein Spezialfall des neuen Satzes: Sind (eventuell zusätzlich zu den Ausgangsstücken der betrachteten Aufgabe) ein Kreis k_0 und sein Mittelpunkt p_0 gegeben, so sind die Operationen L^* und S_2^* mittels eines gewöhnlichen (idealen) Lineals realisierbar, d. h., k_0 und p_0 werden primär nicht als gegebene Stücke, sondern als Bestandteil der Realisierung der abstrakten Instrumente aufgefaßt. Der neue Satz umfaßt aber auch alle Möglichkeiten, die Operationen L^* und S_2^* zu realisieren, ohne daß ein Kreis gezeichnet vorliegt. Hierunter fallen insbesondere — wie in Abschnitt 13.1 ausgeführt werden wird — die Sätze von Adler, wonach alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Geraden auch mit dem normierten oder dem Parallel- oder dem Winkellineal allein konstruiert werden können.

Übrigens sind die Instrumentensätze (L, Z, S_1, S_2, S_3) und $(L, L^*, S_1, S_2^*, S_3)$ nicht etwa äquivalent. L^* und S_2^* sind durch die in ihre Definition eingehenden Konstanten beschränkte Instrumente, bei deren Verwendung in der Regel die Konstanten die konstruierbaren Stücke beeinflussen (vgl. die Abschnitte 7.2 und 9.3). Sind z. B. p_1, p_2 gegeben, so daß p_0, p_1, p_2 nicht kollinear sind und p_0 mit Zirkel und Lineal nicht aus p_1, p_2 konstruierbar ist, so ist aber $p_0 = S_1(L^*(p_1), L^*(p_2))$.

Im Bereich der geometrischen Anwendungen der Theorie der konstruktiven Teiltheorien werden wir ein Paar der Form $(x, H'(x))$ eine *Figur* nennen. Zeichnet man zur Veranschaulichung der Voraussetzungen einer Konstruktionsaufgabe eine „Figur" im umgangssprachlichen Sinn, so sollen die gezeichneten Stücke x, die die gegebenen Stücke modellieren, die Voraussetzungen $H'(x)$ der betrachteten Konstruktionsaufgabe erfüllen, jedoch möglichst keine weiteren Eigenschaften haben, da sonst die Gefahr besteht, daß man auch diese unbewußt zur Lösung der Konstruktionsaufgabe heranzieht. Unsere Definition des Begriffs Figur ist also der Inbegriff dessen, was mit „Figuren“ bezweckt, jedoch nie streng erreicht wird.

Es sei $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_n$. Die Figur $\left(\mathrm{x}, \mathrm{H}'(\mathrm{x})\right)$ heißt bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ *(elementar) abgeschlossen*, wenn für jedes $\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ mit der Eigenschaft $\bigwedge \mathrm{x}\left(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\right) \in \mathscr{K}_{(e)}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ für gewisse $i_1, \ldots, i_m \leqq n$ in $\mathscr{T}$ gilt:

$$\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{y}\left(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_m}\right).$$

Analog ist (elementare) a-, h-, ah-Abgeschlossenheit zu definieren. Offenbar folgt aus der ah-Abgeschlossenheit einer Figur jede andere Art von Abgeschlossenheit dieser Figur. Zu Beginn von Abschnitt 8.6 wurden Beispiele von Figuren genannt, die bezüglich Zirkel und Lineal a-abgeschlossen, also erst recht abgeschlossen und elementar abgeschlossen sind. Das in Abschnitt 8.6 behandelte Beispiel einer Konstruktion mit Hilfselementen bedeutet jetzt: Die Figur $(\mathrm{g}_1, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_3 \notin \mathrm{g}_1)$ ist bezüglich der dort genannten konstruktiven Teiltheorie der Theorie der platonischen Ebenen nicht elementar ah-abgeschlossen, also erst recht nicht ah-abgeschlossen.

Es sei $\bigwedge \mathrm{x}\left(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee !!\, \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\right) \in \mathscr{T}$. Bezüglich einer konstruktiven Teiltheorie $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ heißt $\iota \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *aus der Figur* $\left(\mathrm{x}, \mathrm{H}'(\mathrm{x})\right)$ *konstruierbar* (*elementar konstruierbar, mit Hilfselementen konstruierbar* usw.), wenn $\bigwedge \mathrm{x}\left(\mathrm{H}'(\mathrm{x}) \rightarrow \bigvee \mathrm{y}\mathrm{H}''(\mathrm{x}, \mathrm{y})\right) \in \mathscr{K}(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$, d. h. wenn aus $\boldsymbol{x}$ mit $\mathrm{H}'(\boldsymbol{x})$ $\iota \boldsymbol{y}\mathrm{H}''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ durch ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ erhalten werden kann. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß aus einer abgeschlossenen Figur $\left(\mathrm{x}, \mathrm{H}'(\mathrm{x})\right)$ nichts außer den Komponenten von x konstruierbar ist. Daß die Umkehrung nicht gilt, zeigt das in Abschnitt 8.6. behandelte Beispiel der Konstruktion einer zu g_1 senkrechten Geraden aus g_1 allein unter Benutzung von Hilfselementen. Sie bedeutet, daß die Figur $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_1)$ nicht h-abgeschlossen ist. Aus einer einzelnen Geraden g_1 ist jedoch selbst bei Zulassung beliebiger Hilfsoperationen mit keinem Instrumentensatz außer g_1 etwas konstruierbar, da in der euklidischen Geometrie keine einstellige Geradenoperation außer der identischen Abbildung definierbar ist.

9. Algebraische Analyse

9.1. Algebraische Konstruktionsaufgaben

Die im vorigen Kapitel dargelegte Theorie der konstruktiven Teiltheorien versetzt uns in die Lage, einige in Abschnitt 4.4 zwangsläufig etwas unbefriedigend gebliebene Ausführungen zu präzisieren. Gleichzeitig bildet der Inhalt dieses Abschnitts ein Beispiel für außergeometrische Anwendungen der Theorie der konstruktiven Teiltheorien.

Es sei $\mathscr{S}$ eine Sprache, deren Basis mindestens die zweistelligen Operationssymbole $+$ und $\cdot$ und die Konstantensymbole 0 und 1 enthält (außerdem eventuell weitere Operationssymbole, Relationssymbole wie $\leqq$ usw.). $\mathscr{T}$ sei eine in $\mathscr{S}$ formulierte Theorie, die mindestens die Körperaxiome umfaßt, außerdem eventuell Axiome angeordneter Körper, Axiome über Charakteristik, Archimedisches Axiom, Stetigkeitsaxiom usw. In $\mathscr{T}$ gelten u. a. folgende BEE:

(1) $\quad \bigwedge x_1x_2 \bigvee !!\, y\; x_1 + x_2 = y,$

(2) $\quad \bigwedge x_1x_2 \bigvee !!\, y\; x_1 + y = x_2,$

(3) $\quad \bigwedge x_1x_2 \bigvee !!\, y\; x_1 \cdot x_2 = y,$

(4) $\quad \bigwedge x_1x_2(x_1 \neq 0 \rightarrow \bigvee !!\, y\; x_1 \cdot y = x_2).$

(1) bzw. (3) sagen aus, daß die zu den Grundbegriffen gehörigen Operationen Addition ($+$) bzw. Multiplikation ($\cdot$) volle Operationen sind. Auf der Grundlage von (2) bzw. (4) werden die beiden anderen „Grundrechenarten" definitorisch eingeführt:

Für beliebige x_1, x_2 sei $x_2 - x_1 := \iota y\; x_1 + y = x_2,$

für beliebige x_1, x_2 sei $\dfrac{x_2}{x_1} := \iota y\; x_1 \cdot y = x_2$, falls $x_1 \neq 0$.

Die vier in jedem Körper definierbaren Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bilden demnach einen „algebraischen abstrakten Instrumentensatz", analog zu den in Abschnitt 7.2 betrachteten geometrischen Instrumentensätzen.

Ist $\mathscr{K} = \{(1), (2), (3), (4)\}$, so ist $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \emptyset)$ eine konstruktive Teiltheorie von $\mathscr{T}$. Ihre Betrachtung bedeutet, daß die Ausführung der vier Grundrechenarten in gewissen Modellen von $\mathscr{T}$ als effektiv durchführbar gilt. Insbesondere bedeutet effektive Durchführbarkeit der vier Grundrechenarten im Koordinatenkörper einer gewissen Ebene, daß man über Instrumente verfügt, mit denen die geometrisch definierten Streckenoperationen „exakt" ausgeführt werden können. Aber z. B. auch in dem aus unendlichen Dezimalbrüchen (d. h. abzählbaren Ziffernfolgen) bestehenden Modell des Körpers $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist die Möglichkeit, die Grundrechenarten exakt zu definieren, nicht gleichbedeutend mit deren effektiver Ausführbarkeit und diese gar nicht selbstverständlich.

Als Beispiele von Konstruktionsaufgaben bezüglich des durch $\mathscr{K}$ gegebenen abstrakten Instrumentensatzes betrachten wir $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H}_n)$, wobei wir $\mathscr{E}$ zunächst offen lassen und H_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgende BE ist:

$$\bigwedge \mathrm{b}_1 \cdots \mathrm{b}_n \mathrm{a}_{11} \cdots \mathrm{a}_{1n} \cdots \mathrm{a}_{n1} \cdots \mathrm{a}_{nn}(\mathrm{Det}(\mathrm{a}_{ik}) \neq 0 \to \bigvee \mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_n$$

$$\big(\mathrm{a}_{11}\mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{a}_{1n}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{a}_{n1}\mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{a}_{nn}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_n)\big),$$

d. h., es ist die Lösbarkeit eines beliebigen linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten unter der Voraussetzung von 0 verschiedener Determinante in dem Sinne konstruktiv zu beweisen, daß ein uniformes Flußdiagramm über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$ angegeben wird, das in Abhängigkeit von den Koeffizienten a_{ik} und b_j eine Lösung liefert. Diese Aufgabe wird bekanntlich durch den Gaußschen Algorithmus gelöst. Ebenso bekannt ist, daß in diesem Algorithmus wiederholt geprüft werden muß, ob gewisse im Lauf der Rechnung entstandene neue Koeffizienten von 0 verschieden sind, d. h., der für festes n zyklenfrei formulierbare Gaußsche Algorithmus liefert $\mathrm{H}_n \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \{\mathrm{x} = 0\})$, jedoch nicht $\mathrm{H}_n \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \emptyset)$. Er ist also nur in solchen Modellen der Körpertheorie effektiv, in denen für beliebige Elemente entscheidbar ist, ob sie gleich 0 sind. Für den Koordinatenkörper einer (Zeichen-)ebene bedeutet das die Entscheidbarkeit, ob zwei beliebige Punkte gleich sind oder nicht.

Wir setzen nun voraus, daß $\mathscr{T}$ mindestens die Axiome eines angeordneten Körpers umfaßt und daß in $\mathscr{T}$ die BEE

(5) $$\bigwedge \mathrm{x}\big(x \geqq 0 \to \bigvee !!\, \mathrm{y}(\mathrm{y} \geqq 0 \wedge \mathrm{y}^2 = \mathrm{x})\big)$$

gilt. Auf dieser Grundlage kann dann die partielle Operation $\sqrt{}$ durch

$$\sqrt{\mathrm{x}} := \iota \mathrm{y}(\mathrm{y} \geqq 0 \wedge \mathrm{y}^2 = \mathrm{x}), \text{ falls } \mathrm{x} \geqq 0,$$

definiert werden. Ist $\mathscr{K} = \{(1), \ldots, (5)\}$, $\mathscr{E} = \{x = 0\}$ und H die BE

$$\bigwedge p\, q\big(p^2 > 4q \rightarrow \bigvee x_1 x_2 (x_1^2 + px_1 + q = 0 \wedge x_2^2 + px_2 + q = 0 \wedge x_2 < x_1)\big),$$

so ist die Konstruktionsaufgabe $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E}, \mathrm{H})$ durch elementare Konstruktion lösbar, d. h. $\mathrm{H} \in \mathscr{K}_e(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$. Die Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ist nämlich nichts anderes als eine Kurzfassung eines uniformen Flußdiagramms über $(\mathscr{T}, \mathscr{K}, \mathscr{E})$:

$p, q\ (p^2 > 4q)$

↓

$\boxed{0 = p - p}$

↓

$(p = 0?)$

nein ↙ ↘ ja (Daraus folgt $q \neq 0$)

$\boxed{1 = \frac{p}{p}}$ $\boxed{1 = \frac{q}{q}}$

↓ ↓

(6)

$$\begin{array}{|l|} \hline x_3 = 1 + 1 \\ x_4 = x_3 + 1 \\ x_5 = x_4 + 1 \\ x_6 = p \cdot p \\ x_7 = \dfrac{x_6}{x_5} \\ x_8 = x_7 - q \\ x_9 = \sqrt{x_8} \\ x_{10} = \dfrac{p}{x_3} \\ x_{11} = 0 - x_{10} \\ x_1 = x_{11} + x_9 \\ x_2 = x_{11} - x_9 \\ \hline \end{array}$$

↓

x_1, x_2

Das Resultat ist freilich „interessant" nur für solche Modelle von $\mathscr{T}$, in denen die Operation $\sqrt{}$ im gleichen Maße effektiv ist wie die vier Grundrechenarten. Dies ist

z. B. bei einer Interpretation der Körperelemente durch Streckenlängen einer (als platonisch vorausgesetzten) Zeichenebene der Fall, da man mit Zirkel und Lineal dort alle fünf notwendigen Grundoperationen ausführen kann. Die Aufnahme von $\sqrt{\ }$ in den abstrakten Instrumentensatz kann aber auch dadurch motiviert sein, daß man als reales Konstruktionsinstrument eine als hinreichend genau angesehene numerische Tabelle für $\sqrt{x}$ zur Verfügung hat. Ist dies nicht der Fall, muß man also zur Berechnung von $\sqrt{\frac{\mathrm{p}^2}{4} - \mathrm{q}}$ Näherungsverfahren anwenden, könnte man diese gleich auf die zu lösende Gleichung ansetzen, und der Nutzen des Lösungsalgorithmus (6) wird in Frage gestellt.

Ist nun $\mathscr{T}$ die kategorische Theorie der komplexen Zahlen, so gilt für $n \geqq 2$, daß es zu $x \neq 0$ genau n verschiedene y mit $y^n = x$ gibt. Da von diesen kein Wert vor den anderen ausgezeichnet ist, ist es sinnvoll, die Sprache der Theorie der komplexen Zahlen durch Variablen X_i für endliche Mengen von komplexen Zahlen zu bereichern und (analog zur logischen Analyse mehrdeutiger geometrischer Konstruktionsinstrumente S_2, S_3, Pl_1^d usw.) auf Grund der in $\mathscr{T}$ gültigen BEE

$$(7\mathrm{n}) \qquad \bigwedge \mathrm{x} \bigvee !! \mathrm{X} \bigwedge \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{y}^n = \mathrm{x}) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

$\sqrt[n]{\ }$ durch $\sqrt[n]{\mathrm{x}} := \{\mathrm{y} : \mathrm{y}^n = \mathrm{x}\}$ zu definieren. Ist

$$\mathscr{K}_n = \{(1), \ldots, (5), (7, 2), \ldots, (7, n)\} \quad (n \geqq 2),$$

so kann nun nach dem Muster von (6) jedes Radikal als Kurzfassung eines gewissen zyklenfreien uniformen Flußdiagramms über einer konstruktiven Teiltheorie $(\mathscr{T}, \mathscr{K}_n, \{\mathrm{x} = 0\})$ gedeutet werden, und alle Sätze der klassischen Algebra über die Auflösbarkeit gewisser Typen von Gleichungen durch Radikale bestimmter Bauart lassen sich als Lösungen algebraischer Konstruktionsaufgaben interpretieren. Zum Beispiel bedeutet der Satz von CARDANO (die sämtlichen Lösungen der Gleichung $\mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0$ befinden sich unter den maximal neun Werten des kubischen Radikals (6) aus Abschnitt 4.4) aus der Sicht algebraischer Konstruktionsaufgaben

$$\bigwedge \mathrm{pq} \bigvee \mathrm{X} \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0) \in \mathscr{K}_e^a(\mathscr{T}, \{(1), \ldots, (4), (7,2), (7,3)\}, \{\mathrm{x} = 0\}).$$

Es kann nämlich zunächst die durch das Radikal (6) aus Abschnitt 4.4 dargestellte Menge Y von komplexen Zahlen durch ein Flußdiagramm nach Art von (6) aus p, q erhalten werden. Da aus x, p, q stets $x^3 + px + q$ konstruierbar ist, ist mit $\mathrm{x} = 0?$ auch $\mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0?$ eine entscheidbare Prüfung. Das bedeutet aber, daß man die Lösungen der kanonischen Gleichung dritten Grades durch eine konstruktive Auswahl aus der Menge Y erhält. Da die allgemeine Gleichung dritten Grades durch eine lineare Substitution auf die kanonische Form gebracht werden kann, die Koeffizienten p, q der zu $\mathrm{x}^3 + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{a}_0 = 0$ gleichwertigen kanonischen Gleichung also durch Anwendung der vier Grundrechenarten aus $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ berechnet werden können, bedeutet der Satz von CARDANO zugleich die Lösung der Konstruktionsaufgabe

$$\big(\mathscr{T}, \{(1), \ldots, (4), (7,2), (7,3)\}, \{x = 0\},$$
$$\wedge\, a_0a_1a_2 \vee X \wedge x(x \in X \leftrightarrow x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0)\big)$$

durch elementare Konstruktion mit konstruktiver Auswahl. Das Lösungsradikal kann ohne weiteres für diesen Fall umgeschrieben werden, wird dann aber wesentlich unübersichtlicher. Allgemein bedeuten die in Abschnitt 4.4 eingeführten Begriffe Lösung bzw. starke Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ durch Radikale einen bezüglich $(\mathscr{T}, \mathscr{K}_n, \mathscr{E})$ konstruktiven Beweis der BE

$$\wedge\, a_1 \cdots a_m\big(H'(a_1, \ldots, a_m) \rightarrow \vee\, xF(x) = 0\big)$$

bzw.

$$\wedge\, a_1 \cdots a_m\big(H'(a_1, \ldots, a_m) \rightarrow \vee\, X \wedge x\big(x \in X \leftrightarrow F(x) = 0\big)\big).$$

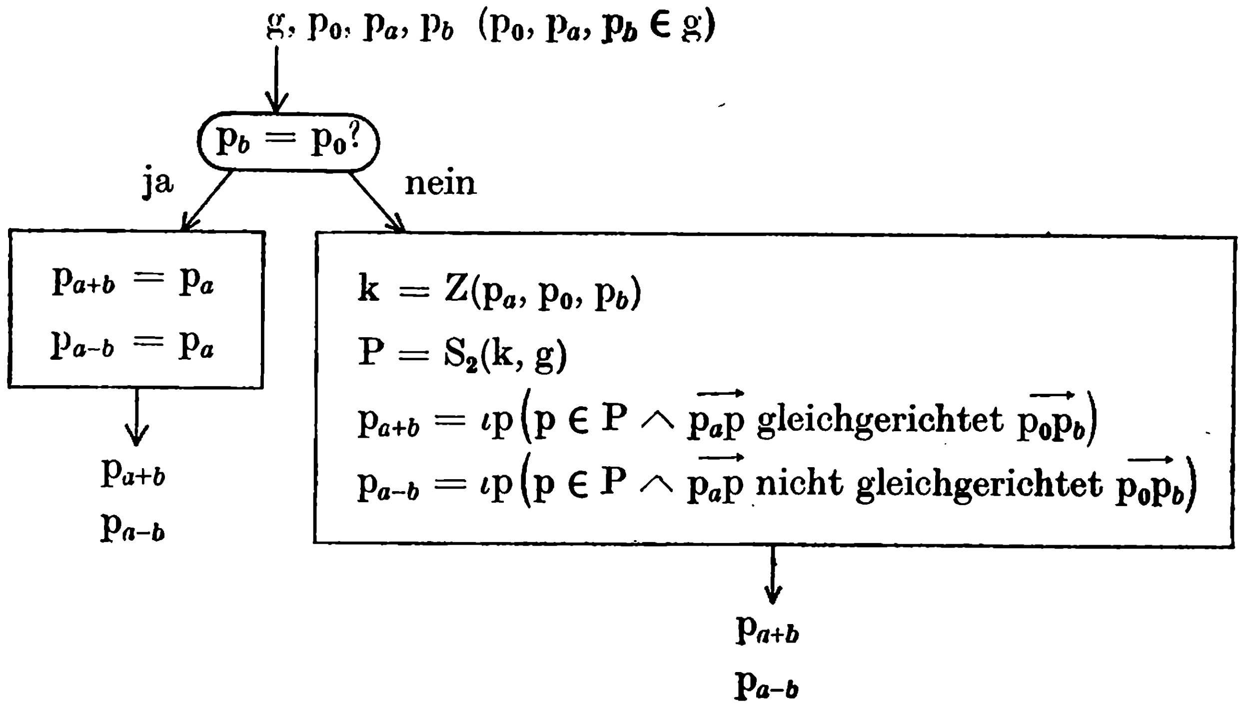
Dabei sind $a_1, \ldots, a_m$ die sämtlichen in $F(x)$ vorkommenden Konstanten, und H' ist die Bedingung, unter der die Lösbarkeit durch ein Radikal behauptet wird.

Lösungen von Gleichungen durch Radikale sind wieder nur für solche Modelle von $\mathscr{T}$ von Bedeutung, in denen die benutzten Grundoperationen wirklich konstruktiv und die benutzten Prüfprädikate entscheidbar sind. Das relativ geringe Interesse, das man im Zeitalter der elektronischen Rechentechnik den Lösungsmethoden der klassischen Algebra entgegenbringt, ist vielleicht aus der Sicht zu verstehen, daß vom Standpunkt der Näherungsmethoden die unmittelbare Lösung einer beliebigen Gleichung n-ten Grades kein prinzipiell anderes oder schwierigeres Problem als die näherungsweise Berechnung n-ter Wurzeln ist. Renaissance-Mathematiker wie CARDANO, FERRARI u. a. sind aber davon ausgegangen, daß man bereits seit dem Altertum exakte geometrische Methoden kannte, Quadrat- und Kubikwurzeln aus durch Strecken gegebenen Größen zu ziehen. Das alte Problem der Lösung von Gleichungen durch Radikale (oder sonstige „geschlossene Ausdrücke“ bzw. „Formeln“) klingt plötzlich sehr modern, wenn man es so formuliert: Welche algebraischen Gleichungen kann man effektiv lösen unter der Voraussetzung, daß man gewisse spezielle Gleichungen ($x^n = a$, $a + x = b$, $a \cdot x = b$) effektiv lösen kann? Die Analogie zu den typischen Fragestellungen der Theorie der geometrischen Konstruktionen scheint nie bemerkt worden zu sein. Während man in der Geometrie schon im Altertum neben Zirkel und Lineal andere Instrumente betrachtete, ist die Algebra nicht über ihren aus den vier Grundrechenarten und den Wurzeln bestehenden „klassischen Instrumentensatz“ hinausgekommen. Der Vergleich mit der Theorie der geometrischen Konstruktionen legt jedoch die Frage nahe, ob die negative Aussage des Satzes von ABEL vielleicht vom speziellen Instrumentensatz abhängt, d. h. ob man vielleicht für festes $n \geqq 5$ die Lösung der allgemeinen Gleichung n-ten Grades in analoger Weise auf die Lösung gewisser spezieller Gleichungen zurückführen kann, wie dies für $n = 2, 3, 4$ durch die Lösungen von VIETA, CARDANO und FERRARI geschieht.

9.2. Geometrische Ausführung der vier Grundrechenarten und der Wurzeloperationen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Präzisierung der in der Schule üblichen Verfahren, mit Zirkel und Lineal die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen an durch Strecken gegebenen (Körper-)größen auszuführen.

a) Addition und Subtraktion. Nach Fixierung einer Geraden g und eines Nullpunktes $p_0 \in g$ können wir die Größen a, b durch $p_a \in g$ bzw. $p_b \in g$ vorgeben. Gesucht sind $p_{a+b} \in g$ und $p_{a-b} \in g$. Man bemerke, daß es für die Addition und Subtraktion gerichteter Strecken auf g nicht nötig ist, eine Halbgerade (bezüglich p_0) als positiv auszuzeichnen. Da die uniformen Flußdiagramme zur Konstruktion von p_{a+b} bzw. p_{a-b} sich erst im letzten Schritt unterscheiden, fassen wir sie der Kürze halber zusammen:



Die durch diese Flußdiagramme definierten Operationen bezeichnen wir im folgenden als Addition bzw. Substraktion, d. h.

$$p_{a+b} = \text{Add.}(g, p_0, p_a, p_b), \quad p_{a-b} = \text{Sub.}(g, p_0, p_a, p_b).$$

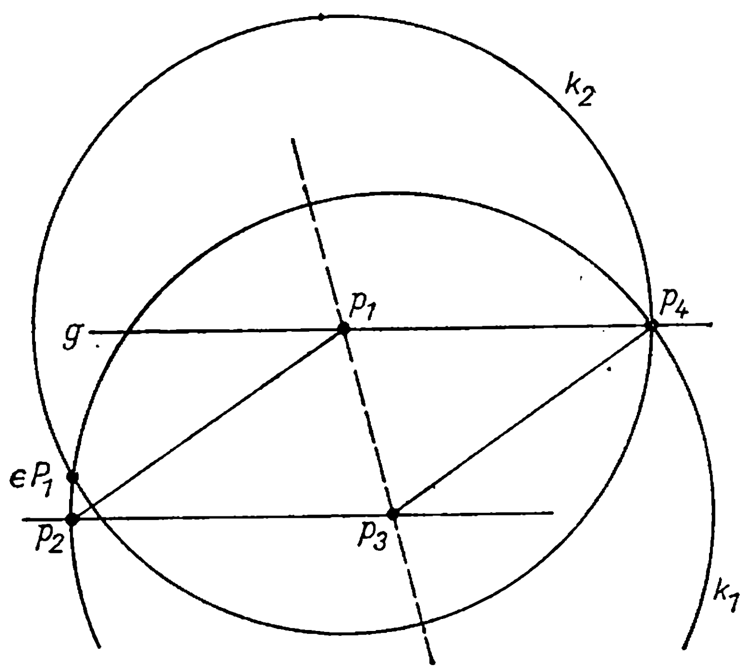
Das im letzten Schritt bei der konstruktiven Auswahl benutzte Prüfprädikat „$\overrightarrow{p_1 p_2}$ gleichgerichtet $\overrightarrow{p_3 p_4}$“ kann offenbar durch aussagenlogische Verknüpfung auf die logisch einfacheren Prädikate „=“ und „zwischen“ zurückgeführt werden. Dies ist jedoch vom Standpunkt des praktischen Zeichnens von geringem Interesse, da die Entscheidbarkeit aller drei Prädikate etwa gleich problematisch oder unproblematisch ist. Eine unverzweigte Lösung der Aufgabe ist ohne Benutzung von Hilfselementen nicht möglich: Da einerseits im allgemeinen p_{a+b} (bzw. p_{a-b}) von p_0, p_a und

p_b verschieden ist, muß das Flußdiagramm jeder Lösung wenigstens einen mit einer Operation belegten Arbeitsknoten enthalten. Da andererseits jedes lösende Flußdiagramm auch auf den Fall $p_a = p_b = p_0$ anwendbar sein muß, auf derartige Eingangsstücke aber keine der Grundoperationen L, Z, S_1, S_2, S_3 angewendet werden kann, muß es stets einen Weg vom Eingang des Flußdiagramms zu einem Ausgang geben, der nur Arbeitsknoten mit Belegungen der Form $x_i = x_j$ enthält, d. h., jedes die Aufgabe lösende Flußdiagramm muß wenigstens einen Prüfknoten enthalten.

b) Multiplikation und Division. Als Hilfskonstruktion hierzu verschaffen wir uns zunächst ein Flußdiagramm für die durch

$$P(p_1; p_2, p_3) := \iota g\big(p_1 \in g \wedge g \parallel L(p_2, p_3)\big), \text{ falls } p_1, p_2, p_3 \text{ nicht kollinear},$$

definierte Operation des Parallelenziehens (Abb. 29a):



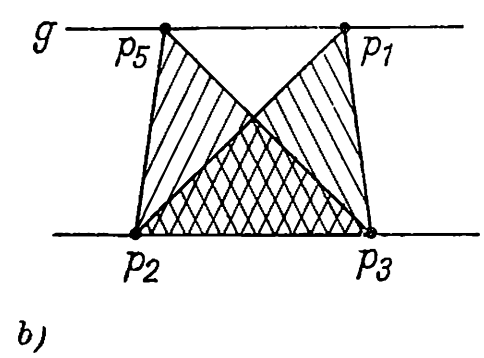


Abb. 29

$$\begin{array}{l}
\quad\; p_1, p_2, p_3 \quad (p_1, p_2, p_3 \text{ nicht kollinear})\\
\quad\;\downarrow\\
k_1 = Z(p_3; p_1, p_2)\\
k_2 = Z(p_1; p_2, p_3)\\
P_1 = S_3(k_1, k_2)\\
p_4 = \iota p\big(p \in P_1 \wedge p \notin \text{Halbebene } (p_1; p_3, p_2)\big)\\
g \;\; = L(p_1, p_4)\\
\quad\;\downarrow\\
\quad\; g
\end{array}$$

(Diese Lösung ist die einfachste, die auf beliebige nicht kollineare p_1, p_2, p_3 anwendbar ist. Abtragen des Dreiecks $p_1p_2p_3$ (wie in Abb. 29b angedeutet) kommt zwar auch mit zwei Zirkelanwendungen (insgesamt fünf Arbeitsschritten) aus, versagt aber im Fall $p_1p_2 \cong p_1p_3$.)

Nun geben wir eine Konstruktion für die Multiplikation positiver Koordinaten an (Abb. 30):

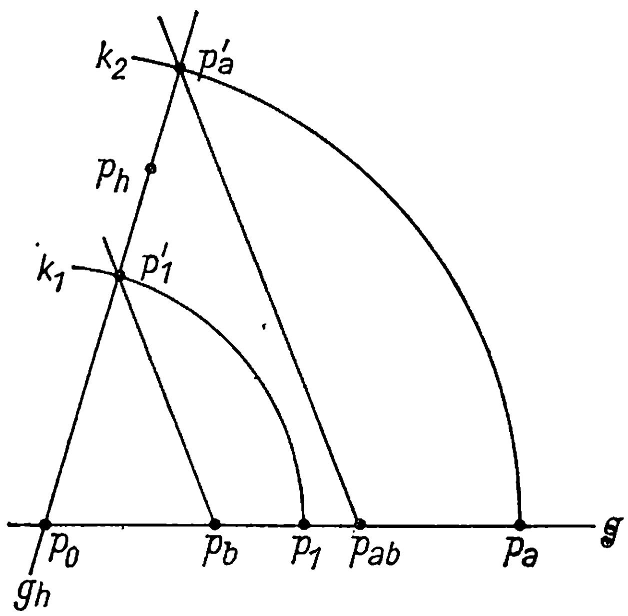


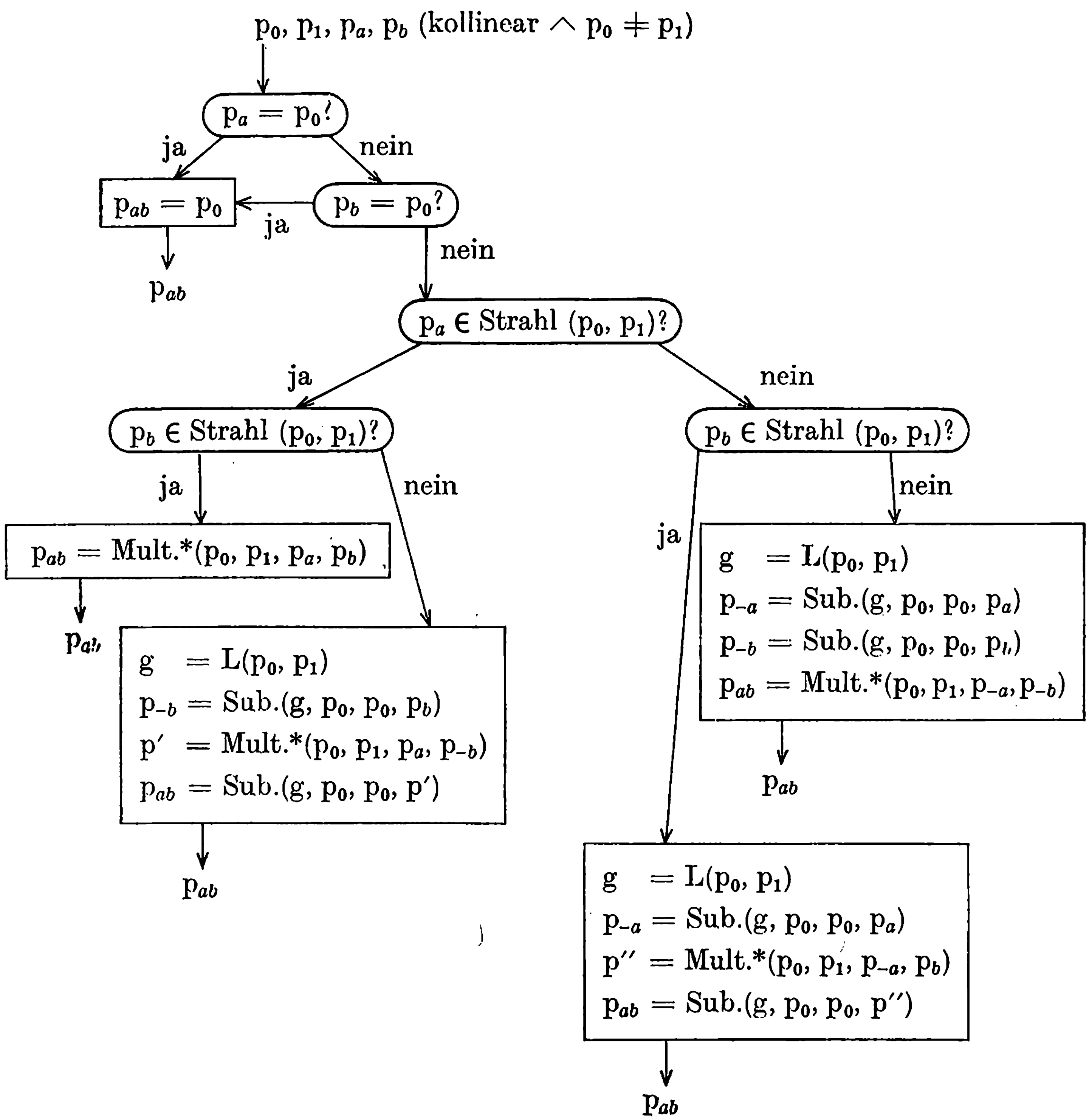
Abb. 30

$$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_a, \mathrm{p}_b(\mathrm{p}_0 \neq \mathrm{p}_1 \wedge \mathrm{p}_a \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1) \wedge \mathrm{p}_b \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1) \wedge \mathrm{p}_a \neq \mathrm{p}_0 \wedge \mathrm{p}_b \neq \mathrm{p}_0)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_h &= \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p}, \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1 \text{ nicht kollinear}) \quad \text{Hilfspunkt!}\\
\mathrm{g} &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\\
\mathrm{g}_h &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_h)\\
\mathrm{k}_1 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_0; \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\\
\mathrm{P}_1 &= \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_1, \mathrm{g}_h)\\
\mathrm{p}_1' &= \iota \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}, \mathrm{p}_h)\big)\\
\mathrm{k}_2 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_0; \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_a)\\
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_2, \mathrm{g}_h)\\
\mathrm{p}_a' &= \iota \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}, \mathrm{p}_h)\big)\\
\mathrm{g}_2 &= \mathrm{P}(\mathrm{p}_a'; \mathrm{p}_b, \mathrm{p}_1')\\
\mathrm{p}_{ab} &= \mathrm{S}_1(\mathrm{g}, \mathrm{g}_2)
\end{aligned}$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{p}_{ab}$$

Die Begründung dieser Konstruktion wird durch den Strahlensatz geliefert, wonach

$$\frac{1}{a} = \frac{p_0p_1'}{p_0p_a'} = \frac{p_0p_b}{p_0p_{ab}} = \frac{b}{x},$$

d. h. $x = ab$ für die Länge x der Strecke $p_0 p_{ab}$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt auch die Unabhängigkeit des Resultats von der speziellen Auswahl des Hilfspunktes p_h. Durch Verwendung der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$ findet man eine analoge Konstruktion für den Quotienten positiver Streckenlängen. Die durch die entsprechenden Flußdiagramme definierten Operationen bezeichnen wir mit Mult.*(p_0, p_1, p_a, p_b) bzw. Div.*(p_0, p_1, p_a, p_b). Der Fall beliebiger Vorzeichen kann nun durch folgende Verzweigung auf den behandelten Spezialfall zurückgeführt werden:



Die durch dieses Flußdiagramm definierte Operation bezeichnen wir mit Mult. Auf analoge Weise erhält man ein Flußdiagramm für die Operation Div., die für kollineare p_0, p_1, p_a, p_b mit $p_b \neq p_0$ definiert ist.

c) Für die Konstruktion der Quadratwurzel aus einer positiven Strecke benötigen wir als Hilfskonstruktionen die Konstruktion des Mittelpunktes $M(p_1, p_2)$ einer durch $p_1 \neq p_2$ gegebenen Strecke (Abschnitt 8.1, Beispiel 2) sowie die Konstruktion des Lotes $Lot(p_1, p_2)$ auf einer durch $p_1, p_2 (p_1 \neq p_2)$ gegebenen Geraden im Punkt p_1. Diese sei dem Leser zur Übung überlassen. Unter Benutzung der genannten Unterprogramme geben wir folgende Lösung der Quadratwurzelkonstruktion (Abb. 31):

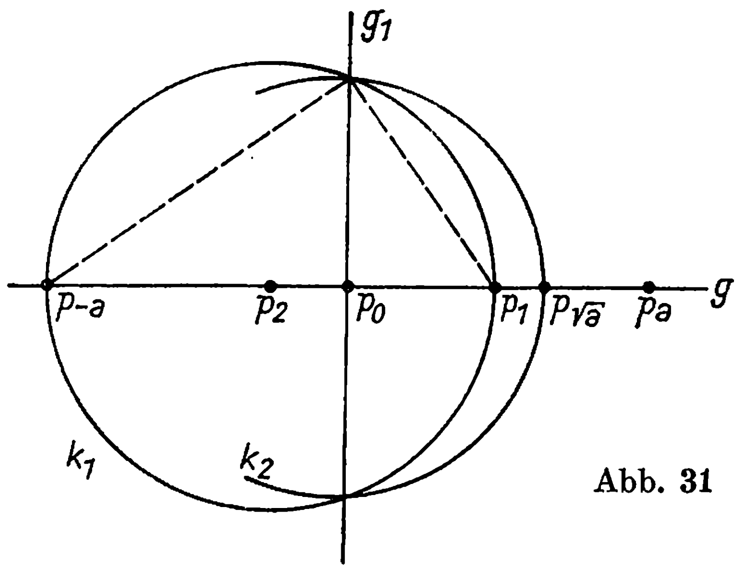


Abb. 31

$$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_a \big(\mathrm{p}_0 \neq \mathrm{p}_1 \wedge \mathrm{p}_0 \neq \mathrm{p}_a \wedge \mathrm{p}_a \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}
\mathrm{g} &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\\
\mathrm{p}_{-a} &= \mathrm{Sub.}(\mathrm{g}, \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_a)\\
\mathrm{p}_2 &= \mathrm{M}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_{-a})\\
\mathrm{k}_1 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_2; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)\\
\mathrm{g}_1 &= \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\\
\mathrm{P}_1 &= \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_1, \mathrm{g}_1)\\
\mathrm{k}_2 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_0; \mathrm{p}_0, \mathrm{P}_1) \quad \text{(Ergibt nur einen Kreis, da beide Elemente von } P_1\\
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_2, \mathrm{g}) \quad \text{gleichen Abstand von } p_0 \text{ haben!)}\\
\mathrm{p}_{\sqrt{a}} &= \iota \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\big)
\end{aligned}$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{p}_{\sqrt{a}}$$

Nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke ist für $p \in P_1$ stets

$$\overline{p_0 p_{\sqrt{a}}}^2 = \overline{p_0 p}^2 = \overline{p_0 p_{-a}} \cdot \overline{p_0 p_1} = a.$$

Die durch das obige Flußdiagramm definierte Operation bezeichnen wir dann mit Quad.*$(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_a)$.

Aus a) bis c) folgt

Satz 1. *Sind aus gegebenen Stücken (Punkten, Geraden, Kreisen) mit Zirkel und Lineal wenigstens drei nicht kollineare Punkte konstruierbar (insbesondere, wenn drei solche Punkte unter den gegebenen Stücken vorkommen), so ist ein kartesisches Koordinatensystem* $K = (p_0, p_1, p_2)$ *konstruierbar, und es sind mindestens diejenigen Punkte konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich* K *durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte dargestellt werden können. Jede Konstruktion eines solchen Punktes erfordert außer dem Instrumentensatz* (Z, L, S_1, S_2, S_3) *nur die Entscheidbarkeit der in den Flußdiagrammen dieses Abschnitts vorkommenden Relationen und keine Hilfselemente, falls das zugrundegelegte KKS ohne Hilfselemente konstruierbar ist.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes sind die Koordinaten eines gegebenen Punktes p als gerichtete Strecken konstruierbar, indem man die Lote von p auf die Achsen fällt bzw. die Lote auf den Achsen in p errichtet, falls p auf einer der Achsen liegt. Die hierfür notwendige Entscheidung $p \in L(p_0, p_1)$? bzw. $p \in L(p_0, p_2)$? läßt sich auf die genannten Relationen zurückführen. Ferner sind gerichtete Strecken von einer Achse auf die andere übertragbar, indem man die Parallelen durch $L(p_1, p_2)$ zieht oder Kreise um p_0 schlägt. Man kann also wahlweise die x- oder die y-Achse als „Rechengerade" benutzen und die Koordinaten des zu konstruierenden Punktes nach den Anweisungen des beschreibenden Quadratwurzelausdrucks laut a) bis c) konstruieren. Dabei kann p_2 als Hilfspunkt für Multiplikation und Division benutzt werden, falls die x-Achse als Rechengerade benutzt wird, bzw. p_1, falls auf der y-Achse gerechnet wird. Danach übertrage man die konstruierte x-Koordinate auf die x-Achse und die y-Koordinate auf die y-Achse, errichte in diesen Punkten die Lote und bestimme deren Schnittpunkt.

Für die folgenden Konstruktionen benutzen wir eine Gaußsche Zahlenebene, d. h., nach Wahl eines KKS $K = (p_0, p_1, p_2)$ in einem Modell der euklidischen Ebene wird jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ der Punkt p_z der Ebene zugeordnet, der bezüglich K die x-Koordinate a und die y-Koordinate b hat. Aus der Definition der vier Grundrechenarten im Körper der komplexen Zahlen (vgl. Abschnitt 4.3.) und Satz 1 folgt sofort: Die Körperoperationen an komplexen Zahlen sind in jeder Gaußschen Zahlenebene mit Zirkel und Lineal ausführbar. Umrechnung der komplexen Zahlen auf Polarkoordinaten

$$r(z) = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \varphi(z) = \iota\alpha \left(0 \leqq \alpha < 2\pi \wedge \cos\alpha = \frac{a}{r} \wedge \sin\alpha = \frac{b}{r}\right)$$

ergibt bekanntlich $z = r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ und für die Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\,(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot r_2\,(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big), \end{aligned}$$

insbesondere

$$z^n = \big(r\,(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)\big).$$

Demnach ist

$$z^n = z' = r'(\cos\varphi' + i\cdot\sin\varphi')$$

genau dann, wenn $r = \sqrt[n]{r'}$ und $\varphi' = n\varphi$, d. h.

$$\varphi = \frac{\varphi'}{n} + k\,\frac{2\pi}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Dies liefert n verschiedene bezüglich p_0 radialsymmetrische Punkte der Gaußschen Zahlenebene als Lösung der Gleichung $z^n = z'$, falls $z' \neq 0$, womit der in Abschnitt 4.3 angekündigte Beweis der Existenz n verschiedener Lösungen erbracht ist. Da der zu $z \neq 0$ gehörige Winkel $\varphi(z) = \sphericalangle\, p_1 p_0 p_z$ mit Zirkel und Lineal halbiert werden kann, folgt sofort die Konstruierbarkeit der Punkte $P_{\sqrt[2]{z}}$ (als Zweiermenge) aus dem Punkt p_z mit Zirkel und Lineal. Damit erhalten wir aus den in Abschnitt 9.1 diskutierten algebraischen Lösungsalgorithmen:

S a t z 2. *Sind die (komplexen) Koeffizienten p, q als Punkte einer Gaußschen Zahlenebene gegeben, so sind die Lösungen der Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit Zirkel und Lineal aus p, q und den Grundpunkten p_0, p_1, p_2 des KKS konstruierbar.*

S a t z 3. *Die Lösungen der allgemeinen Gleichung dritten oder vierten Grades sind aus den als Punkte einer Gaußschen Zahlenebene gegebenen Koeffizienten (und den Grundpunkten des KKS) mit einem Instrumentensatz immer dann konstruierbar, wenn mit diesem Instrumentensatz außer den vier Grundrechenarten an gerichteten Strecken und Parallelenziehen die dritte Wurzel aus komplexen Zahlen, d. h. die dritte Wurzel aus positiven Strecken gezogen werden kann und Winkel sich in drei kongruente Teile teilen lassen.*

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt darauf, für jede der beiden zur geometrischen Konstruktion dritter Wurzeln in Gaußschen Zahlenebenen erforderlichen Konstruktionen je eine p r a k t i k a b l e Lösung anzugeben. Der Beweis, daß beide Aufgaben mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind, folgt in Abschnitt 9.4, eine systematische Behandlung der zur Lösung hinreichenden Konstruktionsmittel in Kapitel 14.

Da $\frac{1}{3}\,(\alpha + k\cdot 90°) = \frac{\alpha}{3} + k\cdot 30°$ für $k = 1, 2, 3$ und die Winkel von 30°, 60°, 90° mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, genügt es, eine Konstruktion zur Dreiteilung beliebiger spitzer Winkel zu kennen. Die bis heute einfachste und eleganteste

Lösung dieser Aufgabe wird ARCHIMEDES zugeschrieben und benutzt die Einschiebung zwischen Kreis und Gerade sowie den Zirkel (Abb. 32):

$\mathrm{p_0, s_1, s_2}$ ($\mathrm{s_1, s_2}$ Strahlen mit dem Anfang $\mathrm{p_0}$ und $\sphericalangle\, \mathrm{s_1, s_2} < 90°$)

$\downarrow$

$\mathrm{p_1} = \mathrm{A}_a(\mathrm{p_0, s_1})$ (Abtragen der auf dem Einschiebelineal markierten Strecke a auf s_1)

$\downarrow$

$\mathrm{g} = \mathrm{L}(\mathrm{p_0, p_1})$

$\mathrm{k} = \mathrm{Z}(\mathrm{p_0; p_0, p_1})$

$\mathrm{p_2} = \mathrm{S_2(k, s_2)}$ (in sinngemäßer Verallgemeinerung von $\mathrm{S_2(k, g)}$. Im konkreten Fall kann der Winkel durch $\mathrm{p_0, p' \in s_1, p'' \in s_2}$ gegeben sein. Dann wäre zunächst $\mathrm{g'' = L(p_0, p'')}$ zu bilden und darauf $\mathrm{P_2 = S_2(k, g''), p_2 = \iota p(p \in P_2 \wedge p \in}$ Strahl $\mathrm{(p_0, p''))}$.)

$\downarrow$

$\mathrm{p_3} = \mathrm{E}^a_{\ddot a}\,(\mathrm{p_2, g, k})$ $\left(:= \iota \mathrm{p_3} \bigvee \mathrm{p_4}(\mathrm{p_3 \in g \wedge p_4 \in k \wedge (p_3, p_4, p_2) \wedge \overline{p_3p_4} = a})\right)$. Eine solche Lage des Einschiebelineals existiert in der euklidischen Ebene immer, da der Abstand zwischen den

$\downarrow$

$\beta = \sphericalangle\, \mathrm{p_0p_3p_2}$ Schnittpunkten mit g und k bei Drehung um p_2 aus der Lage p_2p' (vgl. Abb. 32) im Uhrzeigersinn von Null bis $+\infty$ wächst).

$\downarrow$

β

Begründung. $\overline{p_3p_4} = \overline{p_0p_4} = \overline{p_0p_2} = a$, daher

$\beta = \sphericalangle\, p_0p_3p_4 = \sphericalangle\, p_3p_0p_4$, daher $\sphericalangle\, p_0p_4p_2 = \sphericalangle\, p_0p_2p_4 = 2\beta$, daher

$2R - \sphericalangle\, p_4p_0p_2 = 4\beta$, daher $\sphericalangle\, s_1, s_2 = 3\beta$.

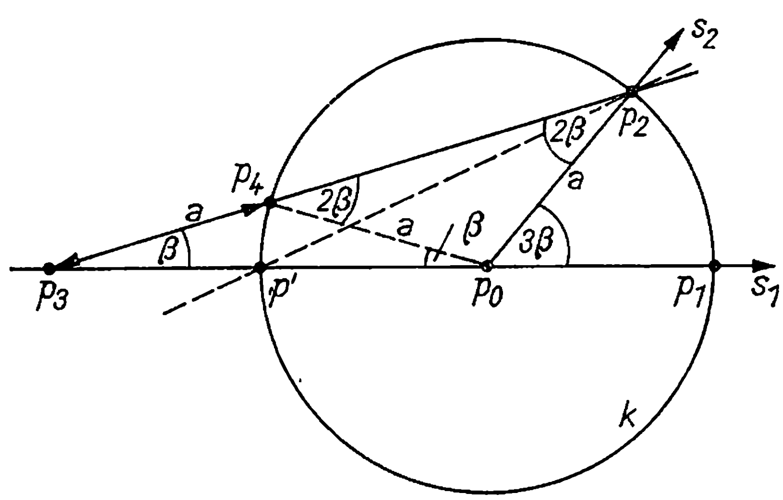


Abb. 32

Für die Konstruktion der dritten Wurzel aus einer durch eine Strecke gegebenen positiven reellen Zahl ist eine gleich einfache Lösung bis heute nicht bekannt. Aus der Akademie des PLATON stammt die vielleicht durchsichtigste Methode, bei der zwei bewegliche rechte Winkel als Konstruktionsinstrumente benutzt werden

(Abb. 33): Mit rechten Winkeln bei p_0, p_1 und p_2 ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke immer $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, d. h. $c^2 = bd$ und $b^2 = ac$, daraus folgt $b^3 d = c^3 a$, also $\frac{b}{c} = \sqrt[3]{\frac{a}{d}}$. Ist a durch $p_0 p$ auf g_2 und die Einheitsstrecke auf g_1 durch $p_0 p'$ vorgegeben, so bewege man die Instrumente I und II so, daß I durch p, die Spitze von I (p_1) auf g_1 und die

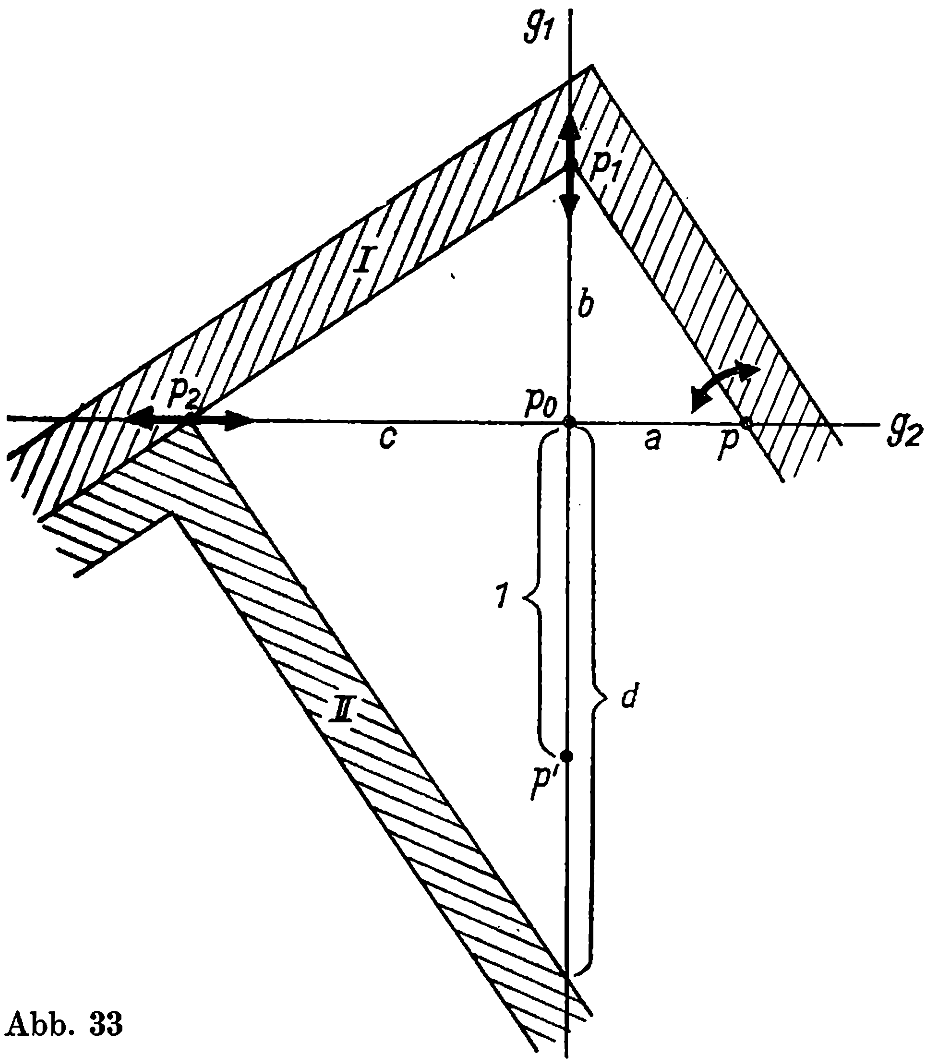


Abb. 33

Spitze von II (p_2) auf g_2 gleitet, bis die freie Kante von II durch den Endpunkt p' der Einheitsstrecke geht, also $d = 1$ wird. Dann ist $\sqrt[3]{a} = \frac{b}{c}$, d. h., $\sqrt[3]{a}$ kann mit Zirkel und Lineal aus den gefundenen Strecken b, c konstruiert werden. Die logische Analyse des beschriebenen Gebrauchs der beiden Rechtwinkellineale ergibt das durch folgende BEE festgelegte abstrakte Instrument:

$$\bigwedge g_1 g_2 p p' \big(g_1 \perp g_2 \wedge p \in g_2 \wedge p \notin g_1 \wedge p' \in g_1 \wedge p' \notin g_2$$

$$\rightarrow \bigvee!!\, p_1 p_2 (p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_2 \wedge \llcorner\, p p_1 p_2 \wedge \llcorner\, p_1 p_2 p')\big).$$

9.3. Algebraische Analyse geometrischer Konstruktionsinstrumente

Die bisher betrachteten Koordinatensysteme (AKS, PKS, KKS) ordnen sich folgendem Begriff unter: Ein *Punktkoordinatensystem* K ist eine in einer axiomatischen Geometrie $\mathcal{T}$ definierbare eineindeutige Abbildung, die in jedem Modell von $\mathcal{T}$ jedem Punkt p ein n-Tupel von in $\mathcal{S}$ definierbaren „algebraischen Objekten" zuordnet. Dabei kann n von p abhängen. Wir schreiben $K(p) = \big(K_1(p), \ldots, K_{n(p)}(p)\big)$ und nennen $K_i(p)$ die *i-te Koordinate von p bezüglich K* $\big(i = 1, \ldots, n(p)\big)$. Die etwas unpräzise Formulierung „algebraische Objekte" soll ausdrücken, daß die Koordinaten der Punkte bezüglich gewisser in $\mathcal{T}$ definierbarer Operationen einen Körper, Ring, Vektorraum, eine Gruppe oder eine ähnlich gut bekannte algebraische Struktur bilden sollen. Bei häufig verwendeten Koordinatensystemen für euklidische Ebenen sind die Koordinaten meist Elemente des Koordinatenkörpers (d. h. gerichtete Streckenlängen) oder orientierte Winkel. Die Streckenlängen bilden — wie gezeigt — bezüglich geometrisch definierbarer Operationen einen Körper, die Winkel bezüglich Addition eine Gruppe. Als weitere Beispiele für Punktkoordinatensysteme führen wir die ebenen Polar- und Bipolarkoordinatensysteme an.

Ebene Polarkoordinaten. In einer beliebigen euklidischen Ebene sei nach Fixierung einer gerichteten Einheitsstrecke p_0p_1 und eines (etwa durch einen zu p_0, p_1 nicht kollinearen Punkt) gegebenen *Drehsinnes* δ

$$K_{p_0,p_1,\delta}(p) := \begin{cases} (\overline{p_0p}, \sphericalangle\, p_1p_0p), & \textit{falls } p \neq p_0, \\ (0, 0), & \textit{falls } p = p_0. \end{cases}$$

$K_{p_0,p_1,\delta}$ ist eine eineindeutige Abbildung von der Menge der Punkte auf die Menge $(\boldsymbol{K}^+ \times \boldsymbol{W}) \cup \{(0, 0)\}$, wo $\boldsymbol{K}^+$ die Menge der positiven Elemente des Koordinatenkörpers, $\boldsymbol{W}$ die Menge der orientierten Winkel α $(0 \leqq \alpha < 4R)$ und 0 das jeweilige Nullelement bezeichnet. Das Prinzip der Polarkoordinaten läßt sich auf nichteuklidische (hyperbolische) Ebenen übertragen, in denen KKS nicht benutzt werden können.

Ebene Bipolarkoordinaten. In einer beliebigen platonischen Ebene sei nach Fixierung dreier nicht kollinearer Punkte p_1, p_2, p_3

$$K_{p_1,p_2,p_3}(p) := \begin{cases} (\overline{pp_1}, \overline{pp_2}, 1), \textit{ falls } p \in \textit{Halbebene}(p_1, p_2; p_3) \textit{ oder } p \in L(p_1, p_2), \\ (\overline{pp_1}, \overline{pp_2}, 0) \textit{ sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit r_0 den Abstand $\overline{p_1p_2}$, so ist K_{p_1,p_2,p_3} eine eineindeutige Abbildung der Menge aller Punkte auf die Menge

$$\big\{(r_1, r_2, e) : e \in \{0, 1\} \wedge r_1, r_2 \in \boldsymbol{K}^+ \wedge r_0 < r_1 + r_2 \wedge r_1 < r_0 + r_2 \wedge r_2 < r_0 + r_1\big\}$$
$$\cup \big\{(r_1, r_2, 1) : r_1, r_2 \in \boldsymbol{K}^+ \cup \{0\} \wedge (r_0 = r_1 + r_2 \vee r_1 = r_0 + r_2 \vee r_2 = r_0 + r_1)\big\}$$

Die bei den Bipolarkoordinaten als dritte Komponente auftretenden 0, 1 sind algebraisch strukturiert durch ihre Auffassung als Wahrheitswerte, d. h. durch Boolesche Verknüpfungen.

Wir verallgemeinern nun den Begriff des Punktkoordinatensystems wie folgt: Sind x, y, ..., z Sorten von Grund- oder definierbaren Objekten der axiomatischen Geometrie $\mathscr{T}$, so heiße eine in $\mathscr{T}$ definierbare eineindeutige Abbildung, die jedem x-, y-, ..., z-Ding Koordinaten im gleichen Sinne wie oben für Punkte erklärt zuordnet, ein x-y- ⋯ -z-*Koordinatensystem.*

Beispiele.

1. Geradenkoordinaten bezüglich AKS. Nach Wahl eines AKS K in einer affinen Ebene seien $x(p)$, $y(p)$ die Koordinaten des Punktes p bezüglich K. Die analytische Geometrie affiner Ebenen liefert: Zu jeder Geraden g existieren Elemente a, b, c des Koordinatenkörpers $\boldsymbol{K}_0$ der betrachteten Ebene, so daß für alle p gilt:

$$p \in g \textit{ genau dann, wenn } a \cdot x(p) + b \cdot y(p) + c = 0.$$

Obgleich g durch die Koeffizienten a, b, c der Geradengleichung eindeutig beschrieben wird, sind diese noch keine Geradenkoordinaten im hier definierten Sinn, da für $d \in \boldsymbol{K}_0$, $d \neq 0$ die Koeffizienten ad, bd, cd die gleiche Gerade beschreiben. Man kann die Zuordnung zwischen Geraden und Tripeln des Koordinatenkörpers jedoch in mannigfacher Weise eineindeutig machen, z. B. durch die zusätzliche Bedingung $b = 1 \vee (b = 0 \wedge a = 1)$. Dann ist das Punktkoordinatensystem K durch die Definition

$$\mathrm{K(g)} := \iota(\mathrm{a, b, c})\big((\mathrm{b} = 1 \vee (\mathrm{b} = 0 \wedge \mathrm{a} = 1) \wedge \bigwedge \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \leftrightarrow \mathrm{a} \cdot \mathrm{x(p)} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{y(p)} + \mathrm{c} = 0)\big)$$

zu einem Punkt-Geraden-Koordinatensystem für affine Ebenen (insbesondere euklidische Ebenen) fortgesetzt.

2. Kreiskoordinaten bezüglich KKS. Ein Kreis ist festgelegt durch Angabe der Koordinaten x_0, y_0 seines Mittelpunktes und seinen Radius r bezüglich eines KKS K. Bezeichnen wir wieder die Koordinaten eines Punktes p bezüglich K mit $x(p)$ bzw. $y(p)$, so gilt für den durch (x_0, y_0, r) gegebenen Kreis k

$$\bigwedge \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{k} \leftrightarrow (\mathrm{x(p)} - \mathrm{x}_0)^2 + (\mathrm{y(p)} - \mathrm{y}_0)^2 = \mathrm{r}^2\big).$$

Die Definition

$$\mathrm{K(k)} := \iota(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{r}) \bigwedge \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{k} \leftrightarrow (\mathrm{x(p)} - \mathrm{x}_0)^2 + (\mathrm{y\ (p)} - \mathrm{y}_0)^2 = \mathrm{r}^2\big)$$

setzt das Punkt-Geraden-Koordinatensystem K zu einem Punkt-Geraden-Kreis-Koordinatensystem fort.

3. Geradenkoordinaten bezüglich eines Polarkoordinatensystems. Ist ein Polarkoordinatensystem durch p_0, p_1 und den Drehsinn δ gegeben, so können z. B. der Abstand einer Geraden g von p_0 und der orientierte Winkel zwischen den Richtungen von g und *Strahl*(p_0, p_1) als Koordinaten von g bezüglich $K_{p_0,p_1,\delta}$ genommen werden.

Ist (eventuell erst nach Wahl eines Punktkoordinatensystems K) eine eineindeutige Abbildung f von der Menge der x-Dinge in die Menge der endlichen (geordneten

Punktmengen definierbar $\big(f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_{n(x)}(x)\}\big)$, so kann man das Punktkoordinatensystem K immer durch die Definition

$$K(x) := \big\{K\big(f_1(x)\big), \ldots, K\big(f_{n(x)}(x)\big)\big\}$$

auf x-Dinge fortsetzen. Diese Methode ist u. a. auf Dreiecke, Ellipsen, Streckenzüge anwendbar.

Ist K ein x, y, ..., z-Koordinatensystem für Modelle von $\mathscr{T}$ und F eine in $\mathscr{T}$ definierbare partielle Operation, deren Definitions- und Wertebereich endliche geordnete Systeme von x-, y-, ..., z-Dingen sind, so sei $F_K(y_1, \ldots, y_n)$ für solche als Koordinaten bezüglich K auftretenden Objekte definiert, für die gilt: Es gibt $x_1, \ldots, x_m$, so daß $F(x_1, \ldots, x_m)$ definiert und $(y_1, \ldots, y_n) = \big(K(x_1), \ldots, K(x_m)\big)$ ist. In diesem Fall sei $F_K(y_1, \ldots, y_n) := K\big(F(x_1, \ldots, x_m)\big)$, d. h., F_K ordnet dem System der Koordinaten einer Argumentkombination von F die Koordinaten der zugehörigen Werte von F zu. Man kann auch sagen: F_K ist die mit Hilfe des Koordinatensystems K vorgenommene Übersetzung der geometrischen Operation F in eine algebraische Operation.

Ist F das Resultat der logischen Analyse eines geometrischen Konstruktionsinstruments und läßt sich bezüglich eines gewissen Koordinatensystems K die Operation F_K durch Superposition aus denjenigen Operationen darstellen, die die algebraische Struktur des Koordinatenbereichs von K bilden, so bezeichnen wir die Ermittlung einer solchen Darstellung von F_K als *algebraische Analyse* des betrachteten Instrumentes (*bezüglich* K).

Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems und einer geeigneten algebraischen Struktur im Bereich der Koordinaten bilden meist den schwierigsten Teil der algebraischen Analyse eines Konstruktionsinstrumentes bzw. Instrumentensatzes. In der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen wird die algebraische Analyse des Instrumentensatzes $(\mathrm{L}, \mathrm{S}_1)$ meist unter Benutzung von PKS, die Analyse aller sonstigen traditionellen Instrumente bzw. Instrumentensätze bezüglich KKS durchgeführt. Die besondere Handlichkeit der auf der Grundlage von KKS betriebenen analytischen Geometrie läßt den Gedanken an die Verwendung anderer Koordinatensysteme kaum aufkommen. Eine Ausdehnung der Theorie der geometrischen Konstruktionen auf Konstruktionen in nichteuklidischen Ebenen, auf Kugeloberflächen und in anderen allgemeineren geometrischen Räumen erfordert jedoch einen so allgemeinen Ansatz des Begriffs algebraische Analyse, wie er hier skizziert wurde. Im folgenden wird zunächst die algebraische Analyse einer Reihe von klassischen Instrumenten unter Benutzung von KKS durchgeführt.

Lineal. (x_1, y_1), (x_2, y_2) seien die Koordinaten der gegebenen Punkte. Die Geradengleichung $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$ liefert für die Koeffizienten a, b, c das Gleichungssystem

$$\mathrm{a} \cdot x_1 + \mathrm{b} \cdot y_1 + \mathrm{c} = 0$$

$$\mathrm{a} \cdot x_2 + \mathrm{b} \cdot y_2 + \mathrm{c} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $a = k(y_2 - y_1)$, $b = k(x_1 - x_2)$, $c = k(y_1x_2 - x_1y_2)$, (k beliebig). Die Nebenbedingung $b = 1 \vee (b = 0 \wedge a = 1)$ führt auf

$$k = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 - x_2}, \text{ falls } x_1 \neq x_2, \\ \dfrac{1}{y_2 - y_1} \text{ sonst} \end{cases}$$

und damit auf

$$L_K(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}, 1, \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_1 - x_2}\right), & \text{falls } x_1 \neq x_2, \\ (1, 0, -x_1), & \text{falls } x_1 = x_2. \end{cases}$$

S_1. Es seien (a_1, b_1, c_1) bzw. (a_2, b_2, c_2) die Koordinaten der Geraden g_1 bzw. g_2. Aus der geometrischen Voraussetzung, daß sich g_1 und g_2 schneiden, folgt, daß das Gleichungssystem

$$a_1\mathrm{x} + b_1\mathrm{y} + c_1 = 0, \quad a_2\mathrm{x} + b_2\mathrm{y} + c_2 = 0$$

zur Bestimmung der Koordinaten x, y des Schnittpunktes genau eine Lösung hat. Deren Berechnung ergibt

$$S_{1_K}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right).$$

Aus der algebraischen Analyse des Instrumentensatzes (L, S_1) ergibt sich sofort

Satz 1. *Aus gegebenen Punkten und Geraden sind mit dem Lineal allein höchstens solche Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS (bzw. AKS, worauf sich hier alle Rechnungen übertragen lassen) rational von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen.*

Zirkel. Sei p_i durch (x_i, y_i) gegeben $(i = 1, 2, 3)$ und $p_2 \neq p_3$. Offenbar ist

$$Z_K(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \left(x_1, y_1, \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right).$$

S_2. Sei k durch (d, e, r) und g durch (a, b, c) gegeben. Aus der geometrischen Voraussetzung, daß sich k und g schneiden, folgt, daß das Gleichungssystem

(1) $\quad (\mathrm{x} - d)^2 + (\mathrm{y} - e)^2 = r^2,$

(2) $\quad a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0$

zur Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte genau zwei Lösungen (x_1, y_1), (x_2, y_2) hat. Deren Berechnung ergibt

$$S_{2_K}(d, e, r, a, b, c) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \begin{cases} \{(Q_1, Q_2), (Q_3, Q_4)\}, \text{ falls } b \neq 0, \\ \{(Q_5, Q_6), (Q_7, Q_8)\}, \text{ falls } b = 0, \end{cases}$$

wobei $Q_1, \ldots, Q_8$ Quadratwurzelausdrücke in den Variablen d, e, r, a, b, c sind. Ist nämlich $b \neq 0$, so kann y mit Hilfe der linearen Gleichung (2) aus der quadratischen (1) eliminiert werden, die dann zwei Lösungen x_1, x_2 liefert, zu denen y_1 bzw. y_2 aus (2) bestimmt werden kann. Andernfalls eliminiert man x und erhält Lösungen analoger Bauart.

S_3. Sei k_1 durch (x_1, y_1, r_1) und k_2 durch (x_2, y_2, r_2) gegeben. Aus der geometrischen Voraussetzung, daß sich k_1 und k_2 schneiden, folgt, daß das Gleichungssystem

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2,$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

genau zwei Lösungen (x_3, y_3), (x_4, y_4) hat. Diese effektiv zu berechnen, ist noch mühsamer als im Fall S_2. Für unsere Zwecke genügt es zu erkennen, daß die vier Komponenten x_3, y_3, x_4, y_4 von

$$S_{3_K}(x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2)$$

Quadratwurzelausdrücke in den Variablen $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2$ sind: Durch Subtraktion einer der beiden Gleichungen von der anderen erhält man ein äquivalentes Gleichungssystem mit einer linearen und einer quadratischen Gleichung — eine algebraische Widerspiegelung der Tatsache, daß die Schnittpunkte zweier Kreise auch als Schnittpunkte des einen Kreises mit der gemeinsamen Potenzgeraden erhalten werden können. Die weitere Lösung verläuft analog zur Lösung des Gleichungssystems (1), (2).

Aus der algebraischen Analyse des Instrumentensatzes (L, Z, S_1, S_2, S_3) folgt sofort

Satz 2. *Mit Zirkel und Lineal sind aus gegebenen Punkten, Kreisen und Geraden höchstens solche Punkte, Kreise und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS sich durch Quadratwurzelausdrücke in den Koordinaten der gegebenen Stücke ausdrücken lassen.*

Die Sätze 1 und 2 erklären hinreichend, welchem Zweck allgemein die algebraische Analyse von Instrumentensätzen dient: Sie liefert notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben. Daß diese Bedingungen im allgemeinen nicht auch hinreichend sind, zeigt das Beispiel (L, S_1): Ist ein KKS p_0, p_1, p_2 gegeben, so sind mit dem Lineal allein nur die drei Verbindungsgeraden konstruierbar. Für Zirkel und Lineal gilt jedoch (in Verallgemeinerung von Abschnitt 9.2, Satz 1)

Satz 3. *Sind aus gegebenen Stücken (Punkten, Geraden, Kreisen) wenigstens drei nicht kollineare Punkte konstruierbar, so ist ein KKS K konstruierbar, und bezüglich jedes konstruierbaren KKS sind genau die Punkte, Geraden, Kreise konstruierbar, deren Koordinaten durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Stücke erhalten werden können. Jede Konstruktion eines solchen Stückes erfordert außer dem Instrumentensatz* (L, Z, S_1, S_2, S_3) *nur die Entscheidbarkeit der in den Fluß-*

diagrammen (Abschnitt 9.2) *für die vier Grundrechenarten und* $\sqrt{}$ *vorkommenden Relationen sowie die Entscheidbarkeit der Parallelität und der Gleichheit von Geraden und der beiden durch* „k schneidet g" *bzw.* „$\bigwedge$ p(p $\in$ k $\rightarrow$ p $\in$ Halbebene(g, p'))" *dargestellten Relationen. Falls das zugrundegelegte* KKS *ohne Hilfselemente konstruierbar ist, sind die Konstruktionen der konstruierbaren Stücke ebenfalls ohne Hilfselemente ausführbar.*

Zum Beweis dieses Satzes ist auf Grund von Satz 2 und Abschnitt 9.2, Satz 1, nur noch zu zeigen: Unter den im Satz genannten Voraussetzungen sind

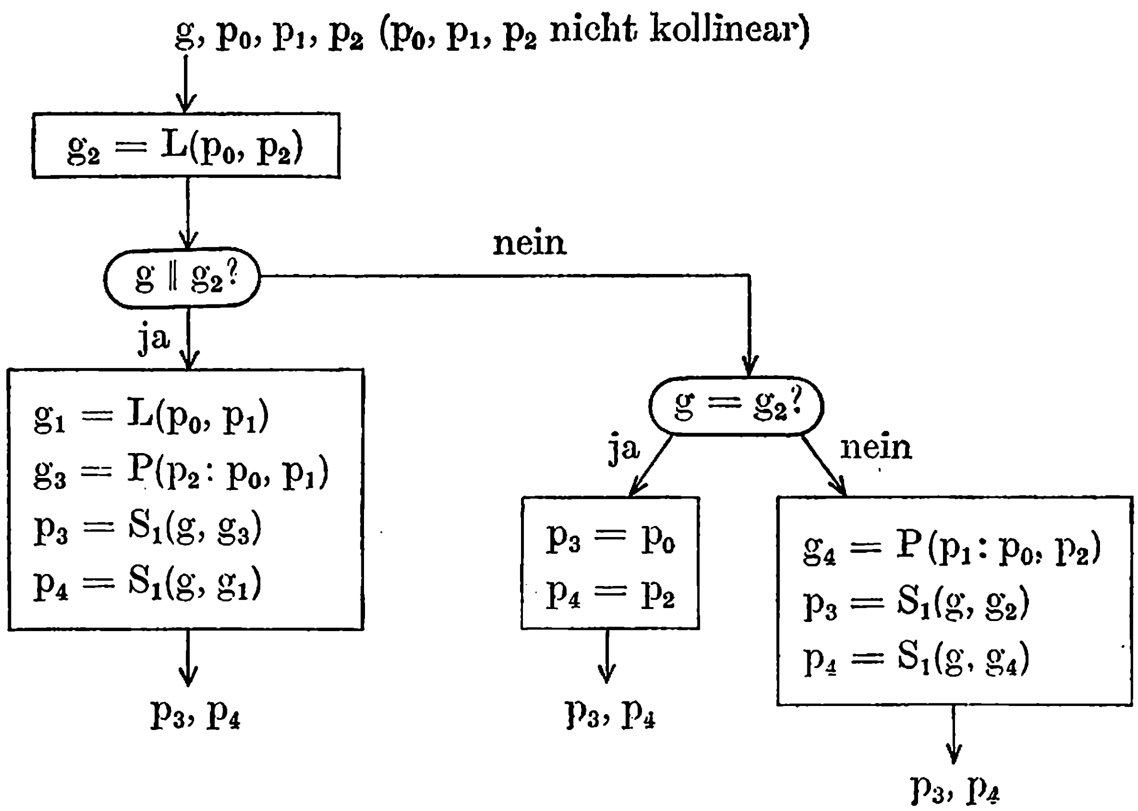
a) die Koordinaten jeder gegebenen Geraden konstruierbar,

b) die Koordinaten jedes gegebenen Kreises konstruierbar.

c) Sind die Koordinaten einer Geraden konstruierbar, so ist auch die Gerade selbst konstruierbar.

d) Sind die Koordinaten eines Kreises konstruierbar, so ist auch der Kreis selbst konstruierbar.

Zu a). Es seien p_0, p_1, p_2 die Grundpunkte des zugrundegelegten konstruierbaren KKS, g sei eine gegebene Gerade. Das Flußdiagramm



liefert zwei verschiedene Punkte von g, deren Koordinaten nun nach Abschnitt 9.2, Satz 1, konstruierbar sind. Aus diesen Koordinaten sind aber die Koordinaten von g durch rationale Operationen konstruierbar (vgl. die algebraische Analyse von L).

Zu b). Ist der Mittelpunkt p des gegebenen Kreises k ebenfalls gegeben oder schon konstruiert, so erhält man die Koordinaten von k in Gestalt der (konstruierbaren!) Koordinaten von p bzw. r durch

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathrm{k, p, p_0, p_1, p_2 (p = M(k) \wedge p_0, p_1, p_2\ KKS)} \\
 & \downarrow \\
\mathrm{g} & = \mathrm{P(p; p_0, p_1)} \\
\mathrm{P_1} & = \mathrm{S_2(k, g)} \\
\mathrm{k_1} & = \mathrm{Z(p_0; p, P_1)}\ \text{(liefert nur einen Kreis!)} \\
\mathrm{g_1} & = \mathrm{L(p_0, p_1)} \\
\mathrm{P_2} & = \mathrm{S_2(k_1, g_1)} \\
\mathrm{p_r} & = \iota \mathrm{p(p \in P_2 \wedge \overrightarrow{p_0 p}}\ \text{gleichgerichtet}\ \overrightarrow{\mathrm{p_0 p_1}}) \\
 & \downarrow \\
 & \mathrm{p_r}
\end{array}
$$

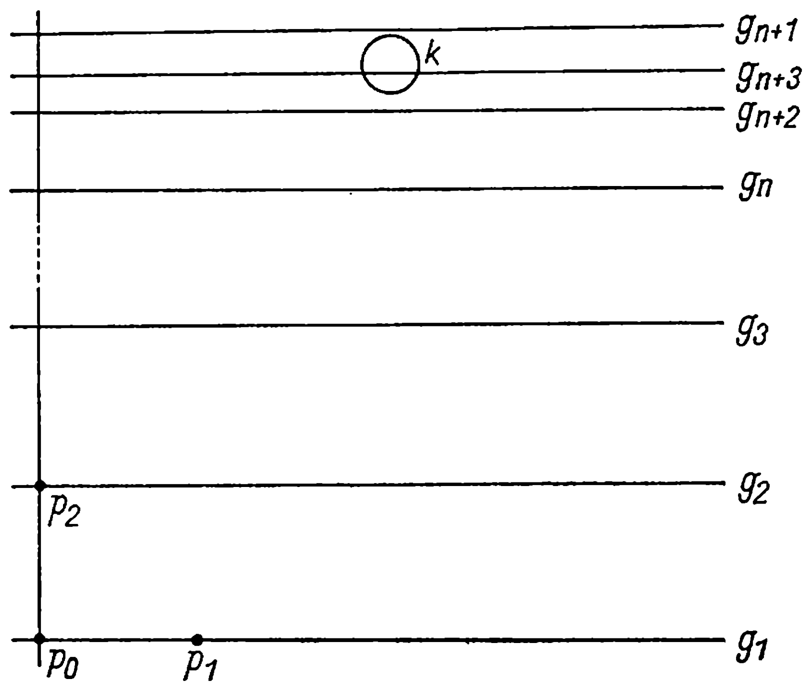


Abb. 34

Wie der Mittelpunkt von k konstruiert werden kann, falls außerdem zwei (nicht notwendig unterscheidbare) Punkte auf k gegeben oder schon konstruiert sind, ist im Prinzip bekannt. Die Präzisierung einer entsprechenden Konstruktion sei dem Leser überlassen. Zu zeigen bleibt noch, daß unter Voraussetzung eines (möglicherweise sehr weit von k entfernten) KKS p_0, p_1, p_2 (von möglicherweise wesentlich anderer Größenordnung als k) der Mittelpunkt von k ohne Verwendung von Hilfspunkten konstruierbar ist. Es genügt zu zeigen, daß ein Paar von Punkten von k konstruierbar ist. Da die entsprechende Konstruktion sehr kompliziert und nichtelementar ist (der Beweis, daß das betreffende Flußdiagramm in jedem Fall das gewünschte Resultat liefert, erfordert das Archimedische Axiom), die Entbehrlichkeit der Hilfspunkte auf der Kreisperipherie andererseits nur von theoretischem Interesse ist, beschränken wir uns auf eine Skizze der Konstruktionsidee (siehe auch Abb. 34).

Falls k die x-Achse des KKS schneidet, nehme man die Schnittpunke als Resultat. Andernfalls ziehe man auf derjenigen Seite der x-Achse, auf der k liegt, so oft die Parallele zur x-Achse im Abstand $\overline{p_0 p_1}$ von der zuletzt konstruierten Geraden, bis k geschnitten oder übertroffen wird. Fall zunächst nur der zweite Fall eintritt, ziehe man anschließend so oft die Parallele in der Mitte zwischen zwei benachbarten Geraden, die k einschließen, bis k geschnitten wird. Daß jede der genannten zyklischen Teilkonstruktionen nach endlich vielen Schritten abbricht, folgt aus dem Archimedischen Axiom. Die erforderlichen Prüfrelationen sind in Satz 3 genannt.

Zu c). Sind Geradenkoordinaten a, b, c als $p_a, p_b, p_z \in L(p_0, p_1)$ konstruiert, so werden daraus zwei auf g liegende Punkte konstruiert, durch die abschließend die Gerade g mit den betreffenden Koordinaten gelegt wird. Die Konstruktion der beiden Punkte beginnt mit der Prüfung $b = 1$? (d. h. $p_b = p_1$?). Ist $b = 1$, so konstruiere man z. B. die Punkte mit den Koordinaten $(1, -a-c)$ und $(0, -c)$. Ist $b \neq 1$, also nach unserer Definition des Begriffs Geradenkoordinaten $b = 0$, $a = 1$, so konstruiere man die Punkte mit den Koordinaten $(-c, 0)$ und $(-c, 1)$.

Zu d). Sind die Koordinaten x, y, r eines Kreises als $p_x, p_y, p_r \in L(p_0, p_1)$ gegeben oder konstruiert, so wird zunächst der Mittelpunkt p aus seinen Koordinaten x, y und danach der Kreis k durch $k = Z(p; p_0, p_r)$ konstruiert.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wir führen nun die algebraische Analyse (bezüglich KKS) der durch Parallel-, Winkel- und Einschiebelineal realisierbaren geometrischen Operationen jeweils nur so weit, daß erkennbar wird: Die Komponenten dieser Funktionen lassen sich durch Quadratwurzelausdrücke bzw. im letzten Fall durch kubische Radikale in den Koordinaten der gegebenen Stücke ausdrücken.

PL_1^d. Hat g die Koordinaten (a, b, c), so werden die Geraden g_1, g_2, die im Abstand d parallel zu g verlaufen, durch die Gleichungen

$$ax + by + c + d\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad ax + by + c - d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

beschrieben. (Sie gelten unter der Voraussetzung $b = 1 \vee (b = 0 \wedge a = 1)$.) Daher ist

$$PL_1^d(a, b, c) = \left\{\left(a, b, c + d\sqrt{a^2 + b^2}\right), \left(a, b, c - d\sqrt{a^2 + b^2}\right)\right\}.$$

PL_2^d. Hat p_i die Koordinaten (x_i, y_i) $(i = 1, 2)$ und ist die Anwendbarkeitsbedingung $\overline{p_1 p_2} > d$ erfüllt, so lassen sich die Koordinaten (a, b, c) derjenigen Geraden, die im Abstand d von p_2 und durch p_1 verlaufen, als Lösungen des Gleichungssystems

$$\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}y_1 + \mathrm{c} = 0, \quad \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}y_2 + \mathrm{c} \pm d\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} = 0$$

mit den Nebenbedingungen $\mathrm{b} = 1 \vee (\mathrm{b} = 0 \wedge \mathrm{a} = 1)$ bestimmen. Der Fall $b = 1$ führt nach Elimination von c auf eine quadratische Gleichung für a, zu deren beiden Lösungen a_1, a_2 die zugehörigen c_1, c_2 aus der linearen Gleichung zu bestimmen sind.

Erhält man nur eine Lösung für a, so bedeutet dies, daß eine der beiden Geraden parallel zur y-Achse des KKS ist. Ihre Koordinaten sind dann $(1, 0, -x_1)$. Es folgt

Satz 4. *Mit dem Parallellineal* (L, S_1, PL_1^d, PL_2^d) *sind höchstens solche Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS durch Quadratwurzelausdrücke in den Koordinaten der gegebenen Stücke und der Linealbreite d ausgedrückt werden können.*

W_1^α. Hat die gegebene Gerade g die Koordinaten (a, b, c) und der gegebene Punkt p die Koordinaten (x_0, y_0), so ergibt sich der Anstieg der beiden Geraden $W_1^\alpha(p, g)$ im allgemeinen nach der Formel

$$\tan(\beta \pm \alpha) = \frac{\tan\beta \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\beta\tan\alpha}$$

als

$$a_{1/2} = \frac{a \pm \tan\alpha}{1 \mp a \cdot \tan\alpha}.$$

Ist $b = 0$, $a = 1$, so ist $a_{1/2} = \pm\frac{1}{\tan\alpha}$. Ist $a \cdot \tan\alpha = 1$ oder $= -1$, so hat die entsprechende der beiden gesuchten Geraden die Koordinaten $b_i = 0$, $a_i = 1$. Nach Bestimmung von a_i, b_i ergibt sich c_i aus der Gleichung

$$a_i x_0 + b_i y_0 + c_i = 0.$$

Die (höchstens zwei) Punkte $W_2^\alpha(p_1, p_2, g)$ sind gleich gewissen Schnittpunkten von g mit den durch p_1, p_2 gehenden Kreisen, die bezüglich p_1, p_2 den Peripheriewinkel α haben (vgl. Abb. 24d, S. 132). Daher genügt es zu zeigen, daß der gemeinsame Radius r dieser Kreise und die Koordinaten x_0, y_0 ihrer Mittelpunkte durch Quadratwurzelausdrücke in den Koordinaten (x_i, y_i) der Punkte p_i und der Größe $\sin\alpha$ erhalten werden können. Es ist

$$r = \frac{d}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - y_2)^2}}{2 \cdot \sin\alpha}$$

(Abb. 35). Daraus erhält man die zwei Koordinatenpaare für die Mittelpunkte als Lösungen des Gleichungssystems

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2, \quad (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = r^2$$

wieder als Quadratwurzelausdrücke. Es folgt

Satz 5. *Mit dem Winkellineal* (L, S_1, W_1^α, W_2^α) *sind höchstens solche Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS sich als Quadratwurzelausdrücke in den Koordinaten der gegebenen Stücke und* $\sin\alpha$ *darstellen lassen* $\left(\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha}!\right)$.

Das Abtragen der Strecke d auf der Geraden g mit den Koordinaten (a, b, c) an den Punkt $p \in g$ mit den Koordinaten (x_0, y_0) liefert zwei Punkte p_1, p_2, deren Koordinaten man als Lösungen des Gleichungssystems

$$ax + by + c = 0,$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$$

erhält. Auf ein analoges Gleichungssystem führt die Bestimmung der Schnittpunkte, die als Resultat der Operation S_4^d entstehen. Daraus folgt

Satz 6. *Mit dem normierten Lineal (L, S_1, S_4^d) sind höchstens solche Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS sich als Quadratwurzelausdrücke in den Koordinaten der gegebenen Stücke und der Länge d der auf dem Lineal markierten Strecke ausdrücken lassen.*

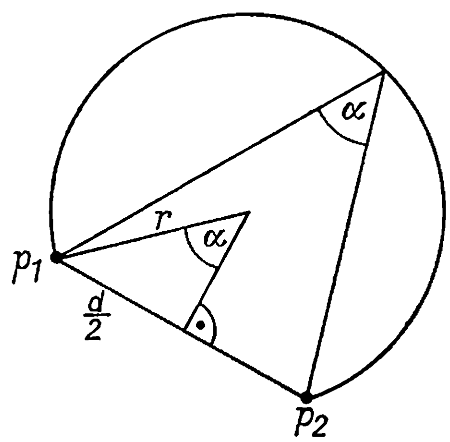


Abb. 35

Zur algebraischen Analyse des Einschiebens betrachten wir die Kurve, die bei gegebenem Punkt p_0 und gegebener Geraden g $(p_0 \notin g)$ von denjenigen Punkten p gebildet wird, für die $L(p, p_0)$ die Gerade g in einem Punkt p' mit $\overline{pp'} = d$ schneidet. Diese Kurve heißt *Konchoide*, g ihre *Basis*, p_0 ihr *Pol*. Eine Konchoide besteht immer aus zwei Ästen, die auf verschiedenen Seiten der Basis liegen. Genau dann, wenn $s := d(p_0, g) < d$ gilt, bildet der auf der Polseite gelegene Ast eine Schlaufe (Abb. 36b). Legt man den Ursprung eines KKS in den Pol p_0 einer Konchoide, die y-Achse parallel zu ihrer Achse g und wählt den Winkel $\alpha = \sphericalangle\, p_1p_0p$ als Kurvenparameter (Abb. 36), so erhält man die Parameterdarstellung

$$x = s + d \cdot \cos\alpha, \quad y = s \cdot \tan\alpha + d \cdot \sin\alpha$$

für den auf der p_0 entgegengesetzten Halbebene von g liegenden Ast und

$$x = s - d \cdot \cos\alpha, \quad y = s \cdot \tan\alpha - d \cdot \sin\alpha$$

für den auf der p_0-Seite liegenden Ast. Elimination des Parameters führt für beide Äste auf die Gleichung

$$(x^2 + y^2)\,(x - s)^2 - x^2d^2 = 0$$

der Konchoiden. Übergang zu einem anderen KKS bedeutet lineare Substitution für x und y, ändert also nicht den Grad der Gleichung. (Innere oder äußere) Einschiebung der Strecke d durch p_0 zwischen Geraden g und g_1 bedeutet nun offenbar die Konstruktion gewisser Schnittpunkte zwischen g_1 und der Konchoiden mit dem Pol p_0 und der Achse g bzw. in bezug auf ein beliebig gelegenes KKS K Ermittlung gewisser Lösungen (x, y) des aus der Gleichung der Konchoiden bezüglich K und der Gleichung der Geraden g_1 bezüglich K bestehenden Gleichungssystems. Da eine der

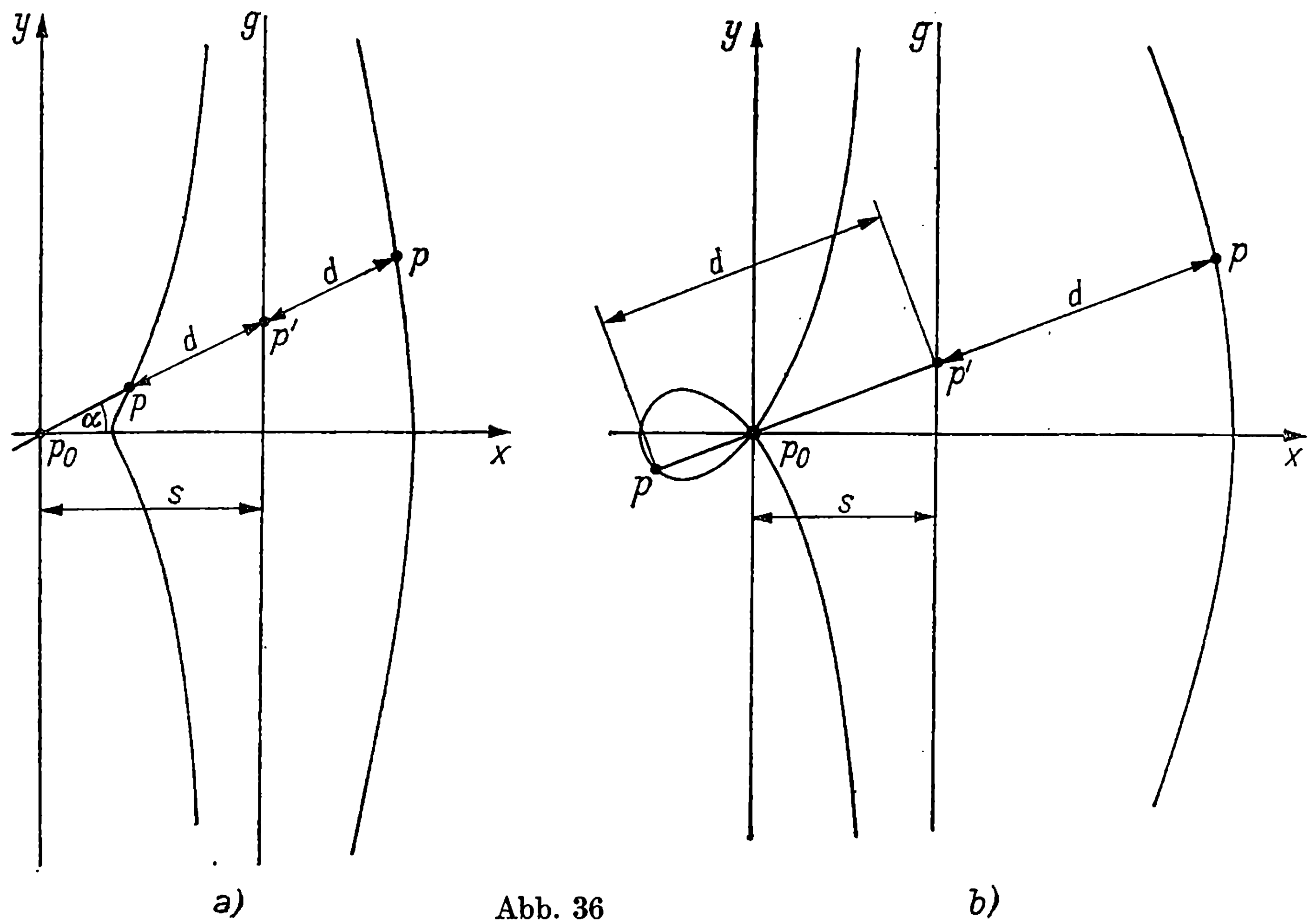


Abb. 36

beiden Gleichungen linear ist, erhält man durch Elimination von x bzw. y eine Gleichung vierten Grades für y bzw. x. Daher sind alle Lösungen (x_0, y_0) nach dem Satz von FERRARI durch kubische Radikale darstellbar. Es folgt

Satz 7. *Mit dem Einschiebelineal* $(L, S_1, S_4^d, E_ä^d, E_i^d)$ *sind höchstens solche Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen KKS durch kubische Radikale in den Koordinaten der gegebenen Stücke und der Länge d der markierten Strecke dargestellt werden können.*

Man beachte, daß dieser Satz nicht für die Einschiebung der markierten Strecke zwischen Kreis und Gerade oder gar zwischen zwei Kreisen gilt. Schon die Bestimmung der Schnittpunkte einer Konchoiden und eines Kreises führt auf eine Gleichung sechsten Grades. Abb. 37 zeigt, daß Kreis und Konchoide tatsächlich sechs verschiedene Schnittpunkte haben können. Näheres hierzu siehe [2, § 17].

Die algebraische Analyse der Einschiebung liefert auch den in Abschnitt 7.2 angekündigten Beweis, daß die innere Einschiebung höchstens zwei verschiedene Resultate ergibt: Schneiden sich g_1 und g und ist $p_0 \notin g \cup g_1$, so liefert — wie in Abschnitt 7.2 gezeigt — die äußere Einschiebung stets zwei verschiedene Resultate (die aber durch die Anordnung der Schnittpunkte unterscheidbar sind). In diesem Fall bleiben also nur die restlichen höchstens zwei Lösungen der algebraischen Einschiebungsgleichung für die innere Einschiebung übrig. Andererseits folgt aus der

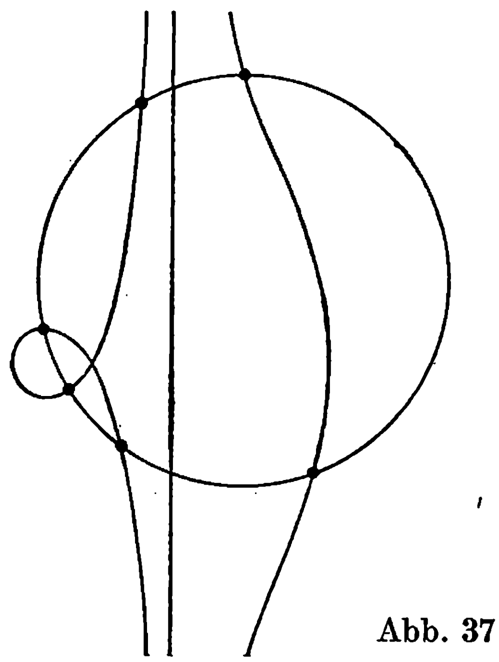


Abb. 37

Gleichung der Konchoiden, daß der zu $y \geqq 0$ und der zu $y \leqq 0$ gehörige Teil zueinander symmetrisch sind und sich in der Form $y = \pm f(x)$ darstellen lassen, d. h., jede Parallele g_1 zu g liefert insgesamt höchstens zwei Schnittpunkte. Diese gehören beide zu inneren oder beide zu äußeren Einschiebungen, je nachdem, ob p_0 zwischen g und g_1 liegt oder nicht.

Abschließend sei auf folgende Konsequenz der algebraischen Analyse der Einschiebung verwiesen: In einer beliebigen euklidischen Ebene existieren genau dann alle durch „naive Anwendung des Einschiebelineals“ konstruierbaren Punkte, wenn der Koordinatenkörper $\boldsymbol{K}$ dieser Ebene bezüglich reeller Werte kubischer Radikale abgeschlossen ist.

9.4. Algebraische Analyse und Klassifikation von Konstruktionsaufgaben, Unmöglichkeitsbeweise

Unter der *algebraischen Analyse einer Konstruktionsaufgabe* (bezüglich eines gewissen Koordinatensystems) verstehen wir die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Koordinaten der gesuchten Stücke. In der Regel erhält man diese in Gestalt eines Systems algebraischer Gleichungen zwischen den Koordinaten y_i der gegebenen Stücke und den Koordinaten x_j $(j = 1, \ldots, k)$ der gesuchten Stücke und eventuell gewisser Nebenbedingungen (meist Ungleichungen). Die algebraischen Gleichungen können stets auf die Form

$$(1)\qquad \sum_{i_1+\cdots+i_k\leqq n} c_{i_1\cdots i_k}\, x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}=0$$

gebracht werden, wobei die Koeffizienten $c_{i_1\ldots i_k}$ rational von den y_i abhängen. Ist in einer Gleichung (1) für wenigstens eine Indexkombination mit $i_1+\cdots+i_k=n$ der entsprechende Koeffizient $c_{i_1\ldots i_k}$ von Null verschieden, so heißt (1) eine *algebraische Gleichung vom* (*Gesamt-*)*grad n*.

Man kann nun zeigen, daß sich ein System von m algebraischen Gleichungen für die Variablen $x_1, \ldots, x_k$, die die Grade $n_1, \ldots, n_m$ haben, durch Elimination der übrigen Variablen auf eine Gleichung für beispielsweise x_1 zurückführen läßt, wobei der Grad der erhaltenen Gleichung höchstens gleich dem Produkt der Grade $n_1, \ldots, n_m$ ist. Daraus folgt zunächst, daß die Lösungen des betrachteten Gleichungssystems nur endlich viele verschiedene x_1-Komponenten haben und — da der gleiche Schluß für $x_2, \ldots, x_k$ durchgeführt werden kann — daß es nur endlich viele Lösungen gibt. Deutet man diese als Punkte in einem k-dimensionalen Raum, so erkennt man sofort, daß man durch lineare Variablentransformation stets erreichen kann, daß die Lösungen paarweise verschiedene x_1-Komponenten haben. Demnach hat unser Gleichungssystem höchstens $n_1 \cdots n_m$ Lösungen. Ferner erhält man auf diesem Wege, daß — abgesehen von gewissen Entartungsfällen und eventuell nach linearer Variablentransformation, durch die sich die Grade aller beteiligten Gleichungen nicht ändern — der Grad der bei Reduktion auf eine einzige Variable entstehenden Gleichung gleich der Anzahl der komplexen Lösungen des Gleichungssystems, also unabhängig von der Auswahl und Reihenfolge der eliminierten Variablen ist. Diese Zahl bezeichnet man als *Gesamtgrad des Gleichungssystems*. Die exakte Formulierung der hier angedeuteten Sätze — erst recht deren Beweis — wirft viele Probleme auf und würde den Rahmen des vorliegenden Buches weit überschreiten.

In der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen klassifiziert man die geometrischen Konstruktionsaufgaben nach dem Grad der bei ihrer algebraischen Analyse bezüglich eines KKS entstehenden algebraischen Gleichungssystems (soweit dies möglich ist und unter Vernachlässigung der im allgemeinen neben den Gleichungen auftretenden Ungleichungen bzw. sonstigen Nebenbedingungen).

Die algebraische Analyse von Konstruktionsaufgaben dient dem Zweck, entweder eine Lösung zu finden oder mit algebraischen Miteln die Unlösbarkeit nachzuweisen. Zum Beispiel ist eine Konstruktionsaufgabe genau dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn ihre algebraische Analyse auf ein System von Gleichungen (und eventuell Ungleichungen) führt, das durch Quadratwurzelausdrücke lösbar ist.

Bei der algebraischen Analyse einer Konstruktionsaufgabe im oben definierten Sinn entstehen im allgemeinen Gleichungssysteme mit unbequem vielen Gleichungen und Unbekannten. Es ist zu berücksichtigen, daß die Lösung eines Gleichungssystems mit mehr als einer nichtlinearen Gleichung durch Quadratwurzelausdrücke (oder sonstige Radikale) bzw. erst recht der Nachweis der Unlösbarkeit durch Radikale bestimmter Bauart im allgemeinen sehr schwierig bzw. nur in besonderen Fällen zu bewältigen ist. Deshalb versucht man meist, durch geometrische Überlegungen — insbesondere unter Benutzung der mit dem zu verwendenden Instrumentensatz bereits gelösten Konstruktionsaufgaben —

a) bei algebraischer Analyse zum Zwecke der Lösung die ursprüngliche Aufgabe auf die Konstruktion einer geringeren Anzahl von Stücken — im Idealfall einer einzigen (gerichteten) Strecke — zurückzuführen;

b) bei algebraischer Analyse zum Zwecke des Unlösbarkeitsnachweises aus der angenommenen Lösbarkeit der ursprünglichen Aufgabe auf die Konstruierbarkeit einer gewissen einzelnen Strecke (Koordinate o. ä.) zu schließen, deren algebraische Analyse dann den Widerspruch ergibt.

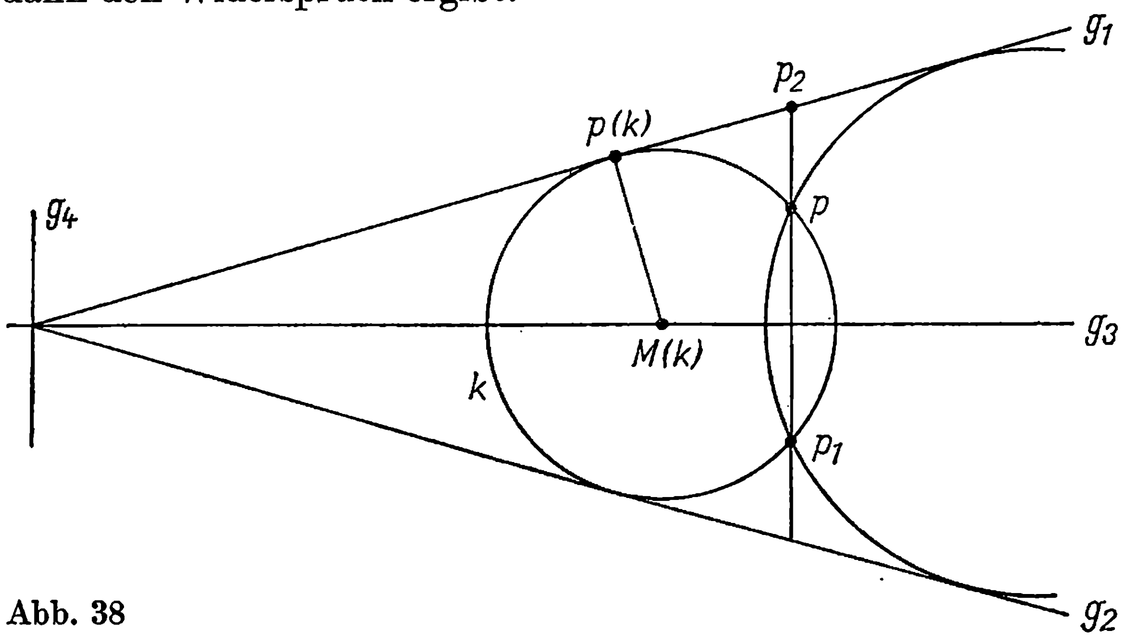


Abb. 38

Selbst wenn man auf diesem Wege als Resultat der algebraischen Analyse nur noch eine einzige Gleichung für eine Unbekannte x erhält, ist die Schwierigkeit der algebraischen Lösung bzw. des Unlösbarkeitsbeweises im Verhältnis zu den vorangehenden geometrischen Betrachtungen oft bedeutend und nur mit viel Scharfsinn oder durch glückliche Eingebung zu meistern. Dies dürfte die wesentliche Ursache dafür sein, daß die Theorie der geometrischen Konstruktionen im Laufe der letzten 200 Jahre mehr und mehr als Teilgebiet der Algebra angesehen wurde und in nicht wenigen Fällen geometrische Probleme zugunsten einer Vereinfachung oder übersichtlicheren Darstellung der daraus abgeleiteten algebraischen Aufgaben verstümmelt wurden. Im folgenden werden typische Züge der algebraischen Analyse an Hand einiger Beispiele erläutert, die zum Teil eine wichtige Rolle in der Geschichte der geometrischen Konstruktionen gespielt haben.

Beispiele.

1. Mit Zirkel und Lineal sind zu zwei sich schneidenden Geraden g_1, g_2 und einem Punkt $p \notin g_1 \cup g_2$ diejenigen Kreise zu konstruieren, die g_1 und g_2 berühren und durch p gehen (Abb. 38).

Die Mittelpunkte der Kreise, die g_1 und g_2 berühren, liegen auf denjenigen Geraden g_3, g_4, die die vier von g_1 und g_2 gebildeten Winkel halbieren. Durch die weitere Bedingung, daß die gesuchten Kreise durch p gehen sollen, wird zunächst diejenige der beiden Geraden (g_3 in Abb. 38) ausgesondert, die den p enthaltenden Winkel halbiert. Da sie aus g_1, g_2 und p mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist und ferner in einem bereits konstruierten Punkt von g_1 das Lot errichtet werden kann, genügt es, eine Konstruktion zu finden, die für jeden Kreis k mit den geforderten Eigenschaften seinen Berührungspunkt $p(k)$ mit g_1 liefert. Der Mittelpunkt $M(k)$ des Kreises k ergibt sich dann als Schnitt des in $p(k)$ auf g_1 errichteten Lotes mit g_3 und k selbst als $Z\bigl(M(k);\ M(k), p(k)\bigr)$. Es sei nun p_1, der an g_3 gespiegelte Punkt p und p_2 der Schnitt des Lotes von p auf g_3 mit g_1 (siehe Abb. 38). Offenbar sind p_1 und p_2 aus g_1, g_2, p konstruierbar. Durch diese Überlegungen ist die ursprüngliche Aufgabe, deren unmittelbare algebraische Analyse die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die drei Koordinaten der gesuchten Kreise bezüglich eines geeigneten KKS erfordert hätte, auf die Konstruktion aller möglichen Strecken $x = \overline{p(k)\, p_2}$ zurückgeführt. Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß unsere Reduktion keinen Sinn hätte, wenn die Konstruktion mit einem Instrumentensatz gefordert wäre, von dem noch nicht bekannt ist, daß die Konstruktion von Loten, Winkelhalbierenden usw. mit ihm ausführbar ist.

Zur algebraischen Analyse der reduzierten Aufgabe: Ist k ein beliebiger Kreis mit den geforderten Eigenschaften, so gilt

$$Pot(p_2, k) = x^2 = \overline{p_2 p} \cdot \overline{p_2 p_1} \quad (\neq 0 \text{ unter den gemachten Voraussetzungen}).$$

Die beiden Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\overline{p_2 p} \cdot \overline{p_2 p_1}}$ sind aus p, p_1, p_2, also auch aus g_1, g_2, p mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Eine völlig in Einzelschritte aufgelöste Konstruktionsbeschreibung der Gesamtaufgabe wäre bereits in diesem relativ einfachen Fall von beträchtlichem Umfang.

2. Ein berühmt gewordenes Beispiel für eine algebraische Analyse, die auf ein kompliziertes Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten führt, lieferte 1803 Malfatti mit der Lösung folgender Aufgabe: Einem beliebigen (durch seine Ecken p_a, p_b, p_c gegebenen) Dreieck sind drei Kreise k_a, k_b, k_c so einzubeschreiben, daß sie sich paarweise berühren und jeder von ihnen zwei andere der drei Dreiecksseiten berührt (Abb. 39).

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß aus den gegebenen Punkten mit Zirkel und Lineal in bekannter Weise die Seiten, die Winkelhalbierenden, der Inkreis und damit auch sein Radius r und die Strecken s, t, u (siehe Abb. 39) konstruierbar sind, also bei einer Reduktion der Aufgabe bezüglich des Instrumentensatzes „Zirkel und Lineal" als von vornherein mitgegeben angesehen werden können. Sind nun k_a, k_b, k_c drei Kreise mit den geforderten Eigenschaften, so müssen ihre Mittelpunkte auf den jeweiligen Winkelhalbierenden liegen (vgl. Beispiel 1). Kennt man andererseits die Lotfußpunkte p_x von $M(k_a)$ auf $L(p_a, p_b)$, p_y von $M(k_b)$ auf $L(p_a, p_b)$ und p_z von $M(k_c)$ auf $L(p_b, p_c)$, so sind offenbar k_a, k_b, k_c mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Damit ist die ursprüngliche Aufgabe auf die Konstruktion der Strecken $x = \overline{p_a p_x}$, $y = \overline{p_b p_y}$ und $z = \overline{p_c p_z}$ zurückgeführt.

Zur algebraischen Analyse der reduzierten Aufgabe: Es sei r_a der Radius von k_a, r_b der Radius von k_b, ferner p der Schnittpunkt der Parallelen durch $M(k_a)$ zu

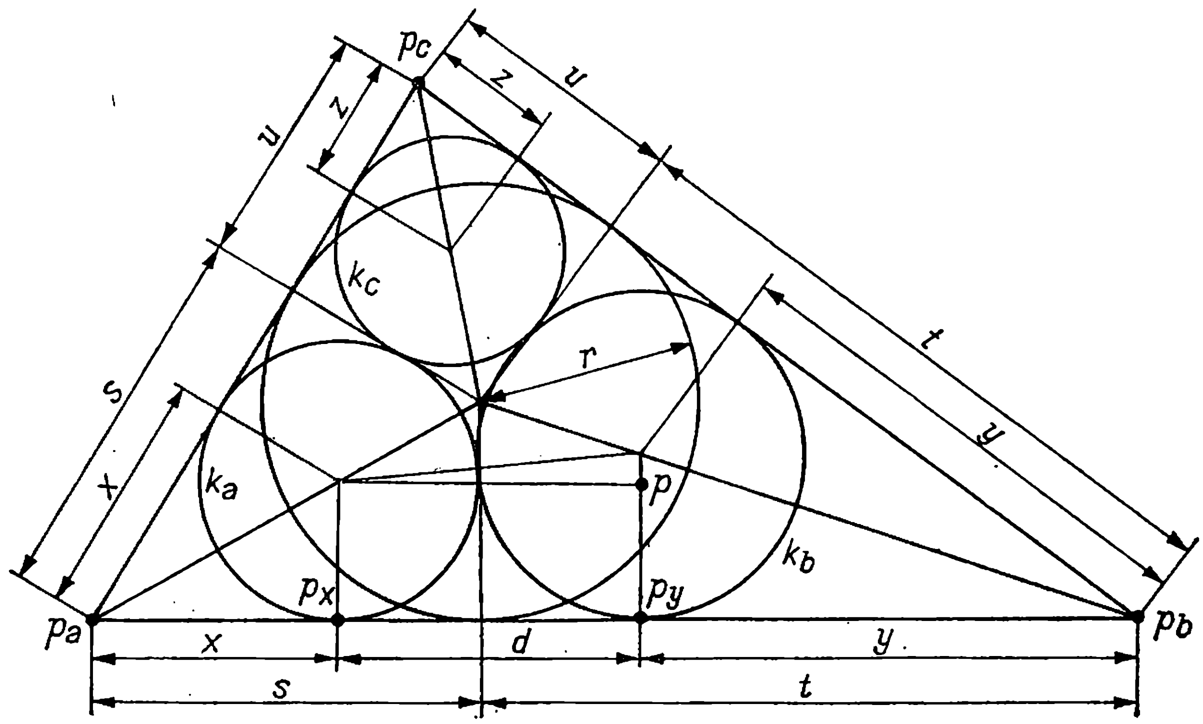


Abb. 39

$L(p_a, p_b)$ mit dem Lot von $M(k_b)$ auf $L(p_a, p_b)$ (Abb. 39). Es ist $d = \overline{p_x p_y} = \overline{M(k_a)\, p}$ als Kathete im rechtwinkligen Dreieck $M(k_a)\, M(k_b)\, p$ gleich

$$\sqrt{(r_a + r_b)^2 - (r_a - r_b)^2} = 2\sqrt{r_a r_b}$$

und $r:s = r_a:x$, $r:t = r_b:y$, d. h. $d = 2r\sqrt{\frac{xy}{st}}$.

Damit erhalten wir

$$s + t = x + d + y = x + 2r\sqrt{\frac{xy}{st}} + y.$$

Analog findet man

$$s + u = x + 2r\sqrt{\frac{xz}{su}} + z,$$

$$t + u = y + 2r\sqrt{\frac{yz}{tu}} + z.$$

Bringt man diese drei Gleichungen auf die Form (1), indem man nach den Wurzeln auflöst und quadriert, so erhält man ein — im folgenden als (2) bezeichnetes — System von drei Gleichungen zweiten Grades für x, y, z. Dieses Gleichungssystem hat, wie man durch Elimination zweier beliebiger der drei Variablen sieht, den Gesamtgrad 8, d. h., in unserer Terminologie ist die MALFATTIsche Aufgabe auch in ihrer reduzierten Form eine Aufgabe achten Grades. MALFATTI zeigte auf kompliziertem Wege, daß die x-Komponenten der acht Lösungen durch das quadratische Radikal

$$x = \frac{1}{2}\left(s + t + u - r \pm \sqrt{r^2 + s^2} \pm \sqrt{r^2 + t^2} \pm \sqrt{r^2 + u^2}\right)$$

dargestellt werden, woraus wegen der Symmetrie der Aufgabe in bezug auf die Paare (x, s), (y, t), (z, u) sofort analoge Formeln für die y- und z-Komponenten folgen. Von den acht Lösungen des Gleichungssystems (2) (die sich also unter den 8^3 Wertkombinationen der entsprechenden Radikale befinden) genügt aber nur eine den aus der geometrischen Fragestellung folgenden Nebenbedingungen

$$0 < x < s, \quad 0 < y < t, \quad 0 < z < u.$$

Sie lautet

$$x = \frac{1}{2}\left(s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\left(r + s + t - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}\right).$$

Daraus folgt: Jedem Dreieck lassen sich auf genau eine Weise drei Kreise mit den geforderten Eigenschaften einbeschreiben. Die Konstruktion dieser Kreise ist mit Zirkel und Lineal ausführbar.

Läßt man die Forderung, daß die Kreise dem Dreieck einbeschrieben sein sollen, fallen, verlangt also nur

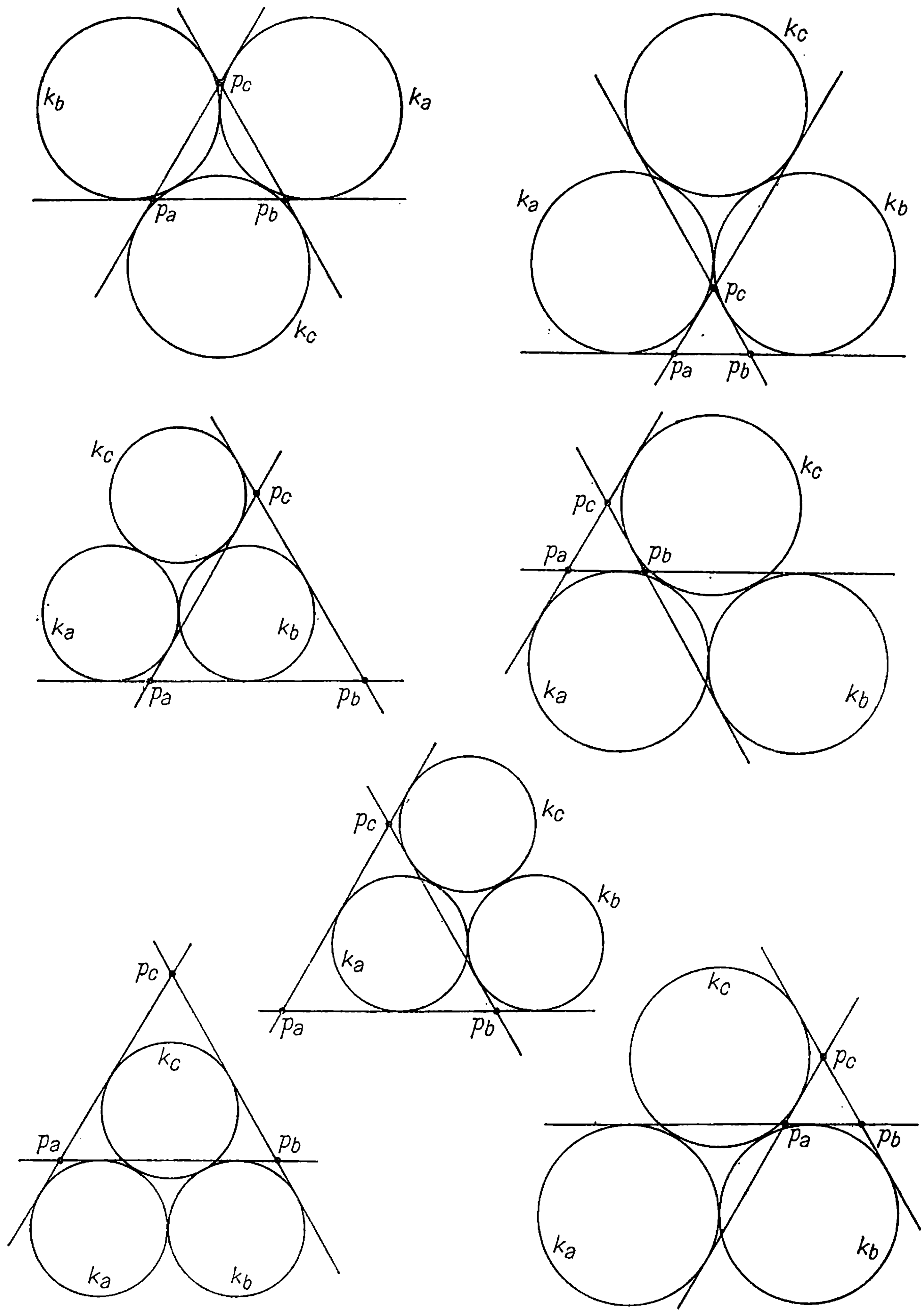
(3) *k_a, k_b, k_c berühren sich paarweise,*

k_a berührt $L(p_a, p_b)$, $L(p_a, p_c)$,

k_b berührt $L(p_b, p_a)$, $L(p_b, p_c)$,

k_c berührt $L(p_c, p_a)$, $L(p_c, p_b)$,

so werden alle acht Lösungen des Gleichungssystems (2) geometrisch sinnvoll. Abb. 40 vermittelt eine Vorstellung von den hinzukommenden sieben Fällen. Dem Leser sei empfohlen nachzuprüfen, daß die algebraische Analyse jedes dieser Fälle auf das Gleichungssystem (2) führt. Das Gleichungssystem (2) ist also eine äquivalente



k_b
p_c
k_a
p_a
p_b
k_c
k_c
k_a
k_b
p_c
p_a
p_b
k_c
p_c
k_a
k_b
p_a
p_b
k_c
p_c
p_a
p_b
k_a
k_b
p_c
k_c
k_b
k_a
p_a
p_b
p_c
k_c
p_a
p_b
k_a
k_b
k_c
p_c
p_a
p_b
k_a
k_b

Abb. 40

algebraische Formulierung der durch (3) gegebenen Konstruktionsaufgabe, während die ursprüngliche Aufgabe sich nur unter Verwendung von Nebenbedingungen (Ungleichungen) in die Sprache der Algebra übersetzen läßt. Man kann diesem Beispiel und vielen weiteren als Faustregel entnehmen, daß gerade solche Aufgaben bei der algebraischen Analyse in reine Gleichungssysteme übergehen, in deren Formulierung nur Inzidenz und Kongruenz wesentlich eingehen, während Anordnungsbeziehungen sich in Ungleichungen niederschlagen. Dementsprechend stimmt bei Aufgaben der ersten Art der Grad häufig mit der Anzahl der geometrischen Lösungen überein (falls nämlich alle Lösungen des Gleichungssystems reell sind), während bei Aufgaben der zweiten Art die Anzahl der Lösungen meist kleiner ist als der Grad der Aufgabe. In vielen Fällen ist es nützlich, sich durch probeweises Weglassen von eventuellen Ordnungsbedingungen in einer Konstruktionsaufgabe eine Prognose über den zu erwartenden Grad zu verschaffen.

Es sei noch bemerkt, daß die interessante geometrische Fragestellung und die Kompliziertheit des Lösungsweges der Malfattischen Aufgabe viele Geometer veranlaßten, sich mit dieser Aufgabe zu beschäftigen, insbesondere nach „rein geometrischen" Lösungswegen zu suchen. Letzteres gelang zuerst STEINER.[1]

3. *Quadratur des Kreises.* Zu einem gegebenen Kreis ist ein Quadrat gleichen Flächeninhalts zu konstruieren.

Um alle aus der naiven Auffassung der Aufgabe fließenden zusätzlichen Komplikationen auszuschließen (falls wirklich nur ein Kreis gegeben ist, ist die Aufgabe schon deshalb nicht lösbar, weil außer dem Mittelpunkt des Kreises keine weiteren Punkte konstruierbar sind!), wollen wir annehmen, daß ein KKS (p_0, p_1, p_2) gegeben ist und ein Punkt $p \in \mathit{Strahl}(p_0, p_1)$ gesucht wird, so daß $\overline{p_0p}^2$ gleich dem Flächeninhalt des Kreises $Z(p_0; p_0, p_1)$ wird. In der Theorie des Flächeninhalts wird gezeigt, daß dieser Inhalt gleich der aus der Analysis bekannten Zahl π ist, d. h., wir erhalten $\overline{p_0p} = \sqrt{\pi}$. Da mit allen traditionellen Konstruktionsinstrumenten (insbesondere den in Abschnitt 7.2 behandelten) nur Stücke konstruierbar sind, deren Koordinaten bzgl. KKS algebraisch von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen, folgt aus der Transzendenz von π $\left(\text{und damit auch von } \sqrt{\pi}\right)$, daß die Aufgabe mit keinem dieser Instrumente(nsätze) lösbar ist.[2]

Den letzten beiden Beispielen schicken wir folgende Bemerkung voraus: Nach dem Satz von GAUSS (Abschnitt 4.4) hat ein irreduzibles Polynom dritten Grades mit rationalen Koeffizienten keine als Quadratwurzelausdruck in den Koeffizienten darstellbare Nullstelle. Die Irreduzibilität von Polynomen dritten Grades ist aber nach dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Verfahren algorithmisch entscheidbar.

---

[1]) Crelles Journ. 1 (1826), 161—184. Den besten Zugang zu der recht umfangreichen Literatur über die Aufgabe von MALFATTI bietet wohl H. SCHRÖTER, Die Steinersche Auflösung der Malfattischen Aufgabe, Crelles Journ. 77 (1874), 230—244.

[2]) Eine ausführliche Behandlung der historischen und mathematischen Aspekte der Kreisquadratur gibt E. BEUTEL, Die Quadratur des Kreises, Teubner-Verlag, Leipzig 1951. Eine methodisch gut durchgearbeitete Darstellung des Transzendenzbeweises für π findet man in [13].

4. *Verdoppelung des Würfels* („*delisches Problem*"). Aus einer gegebenen (Einheits-) Strecke p_0p_1 ist mit Zirkel und Lineal ein Punkt $p \in$ *Strahl*(p_0, p_1) zu konstruieren, so daß $\overline{p_0p}^3 = 2$ ist. Wir erhalten also ohne besondere algebraische Analyse sofort für die gesuchte Strecke $x = \overline{p_0p}$ die Gleichung $x^3 - 2 = 0$. Das Polynom $x^3 - 2$ ist aber in $\boldsymbol{Z}[x]$ irreduzibel.

5. *Dreiteilung eines beliebigen spitzen Winkels.* Wäre die Dreiteilung beliebiger spitzer Winkel mit Zirkel und Lineal ausführbar, so könnte auch aus durch p_3 gegebenen $\cos\alpha(p_0, p_1, p_2$ KKS, p_3 zwischen p_0 und $p_1)$ der Punkt $p_6 \in$ *Strahl*(p_0, p_1) mit $\overline{p_0p_6} = \cos\frac{\alpha}{3}$ konstruiert werden (Abb. 41):

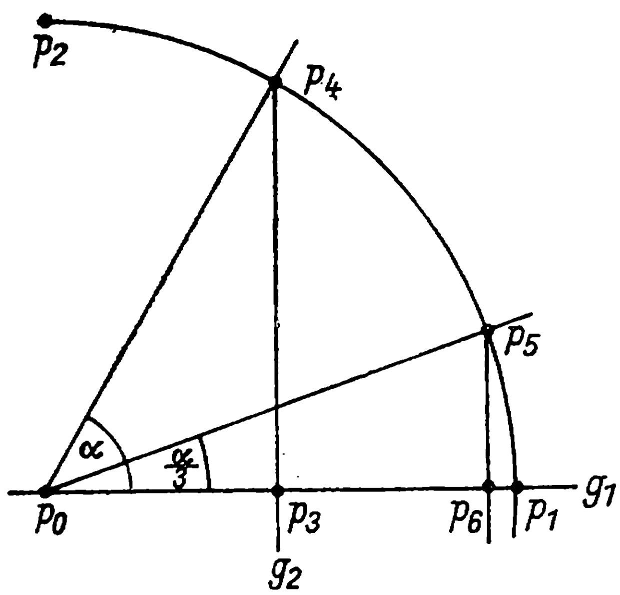


Abb. 41

$$\mathrm{p_0, p_1, p_2, p_3}\ \big(\mathrm{p_0, p_1, p_2}\ \text{KKS},\ (\mathrm{p_0, p_3, p_1})\big)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}
\mathrm{g_1} &= \mathrm{L(p_0, p_1)}\\
\mathrm{k} &= \mathrm{Z(p_0; p_0, p_1)}\\
\mathrm{g_2} &= \mathrm{Lot(p_3, g_1)}\\
\mathrm{P} &= \mathrm{S_2(k, g_2)}\\
\mathrm{p_4} &= \iota\mathrm{p(p \in P \wedge p \in Halbebene(g_1, p_2))}
\end{aligned}$$

Nach Annahme existiert eine Zirkel-Lineal-Konstruktion für

$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}
\mathrm{p_5} &= \iota\mathrm{p}\left(\mathrm{p \in k \wedge \sphericalangle\, pp_0p_1} = \frac{1}{3} \sphericalangle\, \mathrm{p_4p_0p_1 \wedge p \in Halbebene(g_1, p_2)}\right)\\
\mathrm{g_3} &= \mathrm{Lot(p_5, g_1)}\\
\mathrm{p_6} &= \mathrm{S_1(g_1, g_3)}
\end{aligned}$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{p_6}$$

Zum Beweis der Unlösbarkeit der ursprünglichen Aufgabe genügt es daher zu zeigen, daß die algebraische Analyse der Strecke $x = \overline{\mathrm{p_0p_6}}$ bezüglich des KKS p_0, p_1, p_2

und des gegebenen p_3 auf eine Gleichung führt, die nicht durch Quadratwurzelausdrücke lösbar ist. Aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen folgt für beliebige Winkel β

$$\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta,$$

d. h. mit $\alpha = 3\beta$ und $a = \overline{p_0 p_3}$

$$4x^3 - 3x - a = 0. \tag{4}$$

Es genügt zu zeigen, daß das Polynom $4x^3 - 3x - a$ für irgendeinen speziellen Wert von a $(0 < a < 1)$ irreduzibel ist. Dies ist z. B. für $a = \frac{1}{2}$ der Fall. (Dem entspricht die Nichtdreiteilbarkeit des Winkels von 60°, d. h. die Nichtkonstruierbarkeit des Winkels von 20° mit Zirkel und Lineal.)

Dem hier dargestellten Beweis der Unlösbarkeit der klassischen Dreiteilungsaufgabe schlossen sich mannigfache Untersuchungen darüber an, welche speziellen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilbar sind, ob es für diese ein einheitliches Verfahren gibt usw. Schließlich gab es Meinungsverschiedenheiten darüber, ob diese Fragestellungen „sinnvoll" sind (vgl. hierzu [2, § 13]).

6. *Konstruktion regulärer n-Ecke.* Auf Grund der Bemerkungen über die Deutung einer mit einem KKS versehenen euklidischen Zeichenebene als Gaußsche Zahlenebene und über die Lage der n komplexen Werte des Radikals $\sqrt[n]{z}$ in dieser Ebene (vgl. S. 193f.) ist klar, daß die Konstruktion eines regulären n-Ecks mit vorgegebenem Mittelpunkt p_0 und einer vorgegebenen Ecke p_1 im wesentlichen mit der Konstruktion der n n-ten *Einheitswurzeln* $\sqrt[n]{1}$ in der Gaußschen Zahlenebene identisch ist. Demnach ist diese Aufgabe bei gegebenem n $(\geqq 3)$ genau dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn die (deshalb als *Kreisteilungsgleichung* bezeichnete) Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch ein quadratisches Radikal lösbar ist. GAUSS zeigte im Alter von 18 Jahren, daß dies genau dann der Fall ist, wenn n die Form $2^l p_1 \cdots p_m$ hat, wobei $l \geqq 0$, $m \geqq 0$ und $p_1, \ldots, p_m$ paarweise verschiedene Primzahlen der Form $2^{2^k} + 1$ sind. Insbesondere ergibt der Fall $l = 0$, $m = 1$, $k = 2$, die Konstruierbarkeit des regulären 17-Ecks mit Zirkel und Lineal, die bis zum Zeitpunkt der Gaußschen Entdeckung unbekannt war. Für eine ausführlichere Behandlung dieses Problemkreises sei auf [1] und [2] verwiesen.

10. Abriß der Geschichte der geometrischen Konstruktionen

Die praktische Ausführung und rezeptartige Überlieferung einfacher geometrischer Konstruktionen wie geradliniges Verbinden von Punkten, Abtragen von Strecken, Schlagen von Kreisen, Konstruktion von rechten Winkeln, Rechtecken, Quadraten usw. steht zweifellos am Anfang der Geometrie und wurde bereits vor Tausenden von Jahren von den ältesten Kulturvölkern betrieben.

Die ersten Konstruktionsinstrumente waren wahrscheinlich Schnüre bzw. Seile, die — straff gespannt — zur Herstellung von Geraden und — an einem Pflock befestigt — zum Schlagen von Kreisen benutzt wurden. Die Griechen bezeichneten die praktischen Geometer, die die aus Ägypten übernommene Feldmeßkunst ausübten, als *ἁρπεδόναπται* (Seilspanner). Daß den noch primitiven theoretischen Kenntnissen bereits früh eine ausgefeilte handwerkliche Technik gegenüberstand, beweist u. a. die Kultanlage Stonehenge in Südengland, die zwischen 1900 und 1400 v. u. Z. von Kelten errichtet wurde. Sie besteht aus mehreren konzentrischen Gräben und Erdwällen sowie einem Kreis von riesigen Steinblöcken, die mit maximal 25 cm Abweichung in einem Ring von 30,10 m Durchmesser aufgestellt wurden. Da die einzelnen Teile der Anlage jeweils in Abständen von über 100 Jahren gebaut wurden und trotzdem mit beachtlicher Genauigkeit konzentrisch ausgerichtet sind, kann man schließen, daß die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises bereits beherrscht wurde.[1])

Allgemein bildeten die Bedürfnisse der Landvermessung, Astronomie und Architektur vor allem in den alten Stromtalkulturen die erste mächtige Triebkraft für die Entwicklung einer vorwiegend konstruktiven Geometrie. Unter den Bedingungen der entwickelten Sklavenhaltergesellschaft, wie man sie etwa ab 500 v. u. Z. in den griechischen Stadtstaaten findet, erlosch jedoch rasch das Interesse der herrschenden Klasse an einer auf praktische Bedürfnisse gerichteten Wissenschaft. Da fast alle

---

[1]) B. Jacobi, Verweht und ausgegraben, 3. Aufl., Prisma-Verlag, Leipzig 1970.

Arbeiten, auch geistige, schließlich von Sklaven verrichtet wurden, war es eines gebildeten Freien unwürdig, sich mit praktischen und nützlichen Dingen des täglichen Lebens zu beschäftigen. Wie ist es zu erklären, daß die Mathematik und speziell die Geometrie gerade in dieser Epoche eine so hohe Blüte erreichte und in vieler Hinsicht ihre bis heute gültige Form erhielt? Einen entscheidenden Einfluß auf diese Entwicklung übten der athenische Philosoph PLATON (um 400 v. u. Z.) und die von ihm gegründete Akademie aus. Für PLATON waren die ursprünglich durch Abstraktion aus der Realität entstandenen Begriffe der Geometrie die besten Beispiele „abstrakter Ideen", von deren Vollkommenheit die Realität nur unzulängliche Abbilder liefern kann. Unter dem Einfluß der idealistischen platonischen Philosophie wurde die Geometrie zum vornehmen Denksport einer müßiggehenden Oberschicht. Sie nahm dabei jene ästhetisch vollkommene aber weitgehend praxisfremde Gestalt an, von der ihr einiges bis in die Gegenwart anhaftet.

Obwohl selbst nicht Mathematiker, beschäftigte sich PLATON insbesondere intensiv mit der Methodik der geometrischen Konstruktionsaufgaben. Er führte die noch heute gebräuchliche Gliederung in Aufgabe, Analysis, Konstruktionsbeschreibung und Beweis der Richtigkeit der Lösung ein. Auch die Bevorzugung von Zirkel und Lineal (die später häufig als ein dogmatisches Verbot anderer Konstruktionsinstrumente interpretiert wurde) geht auf PLATON zurück. Die Ursachen dürften ideologischer Natur gewesen sein: Kreise und Geraden waren die vollkommensten und harmonischsten geometrischen Gebilde. Andererseits liegt die Benutzung von Dreiecken, Gelenkmechanismen und anderen Geräten verdächtig nahe bei handwerklicher Tätigkeit. Schon die bloße Vorstellung der mechanischen Bewegung einer geometrischen Figur war den Platonikern verwerflich.

Das klarste Bild von der platonischen Vorstellung der Mathematik vermitteln die berühmten „Elemente" des EUKLID (um 300 v. u. Z.). Keine der unzähligen in diesem Werk angegebenen Konstruktionsbeschreibungen ist wirklich als Anweisung zum praktischen Handeln gedacht. Die Lösung von Konstruktionsaufgaben erscheint hier nur noch als spezielle methodische Form des Beweisens von Sätzen. Diese Einstellung blieb 2000 Jahre lang bestimmend für die Behandlung der geometrischen Konstruktionen, ohne daß jedoch der in Kapitel 8 dieses Buches behandelte logische Charakter des „konstruktiven Beweisens" bewußt wurde.

Starke Impulse erhielten die Theorie der geometrischen Konstruktionen und in der Neuzeit weitere Gebiete der Mathematik durch das Fehlschlagen aller Versuche, die drei klassischen Probleme

Dreiteilung des Winkels,

Verdopplung des Würfels,

Quadratur des Kreises

mit Zirkel und Lineal zu lösen. Während das letzte Problem im Altertum einerseits zur Entwicklung approximativer Methoden (vor allem durch EUDOXOS (etwa 408 bis 355 v. u. Z.) und ARCHIMEDES (etwa 287—212 v. u. Z.)) und andererseits auf wenig fruchtbare Nebenwege (quadrierbare Kreisbogenzweiecke, Möndchensatz des HIPPOKRATES von Chios (um 440 v. u. Z.)) führte, in der Neuzeit aber die wesentlichste Triebkraft für die Auseinandersetzung mit dem Begriff der transzendenten Zahl bildete und schließlich durch den Beweis der Transzendenz von π gekrönt wurde (FERDINAND VON LINDEMANN, 1852—1939), waren für die beiden ersten Aufgaben schon im Altertum zahlreiche Lösungen bekannt, die man mit Hilfe anderer Konstruktionsmittel gefunden hatte.

Mit dem Niedergang der griechischen Kultur und Wissenschaft zur Römerzeit trat eine lange Pause in der Entwicklung der Geometrie ein, in der viele bereits bekannte Resultate wieder in Vergessenheit gerieten. Aus der hochstehenden aber vorwiegend algebraisch ausgerichteten arabischen Mathematik ragt als für uns erwähnenswert lediglich ABÛ'L-WAFÂ (940—998) hervor, der sich mit Konstruktionen mit Lineal und fester Zirkelöffnung beschäftigte. Gerade dieses relativ gesuchte Problem wurde gegen Ende des 15. Jahrhunderts, als die Renaissance auch das Interesse an der Geometrie neu belebte, zu einer bevorzugten Liebhaberei von Mathematikern, Architekten und Malern. ALBRECHT DÜRER (1471—1528), LEONARDO DA VINCI (1452—1519), NICOLA TARTAGLIA (1500?—1557) und LUDOVICO FERRARI (1522—1565) sind hier u. a. zu nennen. Ihre zahlreichen, zum Teil sehr scharfsinnigen Lösungen von Einzelaufgaben wurden durch den Satz von PONCELET-STEINER gekrönt, wonach jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe schon bei Vorgabe eines einzigen Kreises samt Mittelpunkt mit dem Lineal allein lösbar ist. Dieser Satz wurde 1822 von JEAN VICTOR PONCELET (1788—1867) in seinem Werk „Traite des proprietès projectives" ausgesprochen, jedoch nach heutigen Begriffen nicht streng bewiesen. Den exakten Beweis gab der Schweizer JACOB STEINER (1786—1863) in seiner Arbeit „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises" (1833), einer auch für heutige Ansprüche in Stil und Methode vorbildlichen Arbeit.

Der Italiener LORENZO MASCHERONI (1750—1800) bewies 1797 („La Geometria del Compasso"), daß alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte mit dem Zirkel allein konstruierbar sind. Einen neuen Beweis für diesen Satz durch Anwendung eines einheitlichen Prinzips (Transformation mittels reziproker Radien) gab AUGUST ADLER 1890. Im Jahre 1928 entdeckte der auch durch eigene Beiträge zur Theorie der geometrischen Konstruktionen hervorgetretene dänische Mathematiker JOHANNES HJELMSLEV (1873—1950), daß sein Landsmann GEORG MOHR (1640—1697) bereits 1672 in einem Buch „Euclides Danicus" für alle Aufgaben der ersten zehn Bücher EUKLIDS Lösungen mit dem Zirkel allein angegeben hatte. Seitdem bezeichnet man den oben genannten Sachverhalt als Satz von MOHR-MASCHERONI.

Weit fruchtbarer auf die Gesamtentwicklung der Elementargeometrie als die bisher genannten Probleme wirkte sich die im 18. Jahrhundert (zuerst von JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728—1777) und LAZARE NICOLAS MARGUÉRITE CARNOT (1753 bis 1823)) aufgeworfene Frage nach der Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit dem Lineal allein aus. Ihre schrittweise Lösung erfolgte in enger Wechselbeziehung mit der Entwicklung der — zunächst als Geometrie der Lage bezeichneten — projektiven

Geometrie. Charles-Julien Brianchon (1783—1864) wies bereits 1818 („Les applications de la theorie des transversales") nachdrücklich auf die praktische Bedeutung der rein linearen Konstruktionen (Perspektive, Feldmessung u. a.) hin.

Seit der Blütezeit der griechischen Mathematik hatte sich niemand mehr mit der praktischen Ausführbarkeit der Lösungen von geometrischen Konstruktionsaufgaben beschäftigt. Alle Konstruktionen waren für die unbeschränkte Zeichenebene und ideale unbeschränkte Instrumente ersonnen. Daß die Beschränktheit realer Zeichenflächen und realer Instrumente Anlaß zu nicht nur nützlichen sondern auch mathematisch interessanten Untersuchungen geben kann, wurde erst im 17. Jahrhundert bemerkt. Eine Zusammenfassung der einschlägigen Methoden und Resultate gab 1913 P. Zühlke [14]. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begann man auch Fragen der Zeichengenauigkeit zu untersuchen. Edmé Marie Joseph Lemoine (1751—1816) („La géométrographie", Paris 1902) ging von der Hypothese aus, daß die Ungenauigkeit einer Konstruktion mit der Zahl der Einzelschritte wächst und führte den Begriff der geometrographischen Lösung einer Aufgabe ein, d. h. einer Lösung mit nachweisbar minimaler Zahl von Einzelschritten. In Verfolgung dieser Idee konnten viele altbekannte Lösungen vereinfacht werden.[1])

Wir haben in großen Zügen die Entstehung und Entwicklung einiger Seitenzweige der Theorie der geometrischen Konstruktionen verfolgt. Die Hauptentwicklungslinie wird durch die Begründung (René Descartes, 1596—1650) und den Ausbau der analytischen Geometrie markiert. Sie lieferte universelle Methoden für die algebraische Analyse von Konstruktionsaufgaben und -instrumenten und damit erstmalig die Möglichkeit, die Unlösbarkeit gewisser Aufgaben zu beweisen. Als Beispiel eines mit algebraischen Methoden erzielten positiven Resultats mag der von Carl Friedrich Gauss (1777—1855) erbrachte Nachweis der Konstruierbarkeit des regulären Siebzehnecks mit Zirkel und Lineal dienen (siehe S. 217, Nr. 6). Der Kult, der mit diesem eigentlich eher als Kuriosum zu wertenden Resultat getrieben wurde (es galt vielen als bedeutendste Leistung von Gauss) illustriert deutlich die negativen Auswüchse der Algebraisierung der Geometrie. Aus dieser Epoche ragt Jacob Steiner durch seine entschiedenen Bemühungen hervor, die Geometrie gegenüber der Algebra als eigenständige mathematische Disziplin zu bewahren.

Nachdem sich seit dem Niedergang der griechischen Mathematik das allgemeine Interesse auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal oder gewisse Einschränkungen bzw. Erweiterungen dieser Instrumente konzentriert hatte, lenkte vor allem August Adler durch seine Untersuchungen über Parallel- und Winkellineal die Aufmerksamkeit wieder auf die Fülle anderer Möglichkeiten. Unter dem Einfluß der Untersuchungen David Hilberts (1862—1943) zu den Grundlagen der Mathematik begann man die älteren Resultate unter neuen, insbesondere beweis- und modelltheoretischen Aspekten zu sehen. Gegenwärtig erscheinen neue Arbeiten zu unserem

[1]) Vgl. J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung, Leipzig 1904.

Thema vorwiegend unter systematisierenden[1]) oder schulmethodischen[2]) Gesichtspunkten.

Als erste zusammenfassende Darstellungen der Theorie der geometrischen Konstruktionen, die den Rahmen von Aufgaben—Lösungen—Sammlungen sprengten, erschienen kurz nacheinander [6], [1] und [13]. Eine ausführliche Darstellung der älteren Geschichte der geometrischen Konstruktionen findet man in [12], eine Fülle von Einzelfakten in den Fußnoten von [13] und im Anhang von [2].

---

[1]) Siehe z. B. O. Krötenheerdt, Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen, Wiss. Zeitschr. Univ. Halle 1966, 677—700.

[2]) Siehe z. B. M. Ebner. Geometrische Schülerarbeiten im Gelände, Teil 1 und 2, Verlag Volk und Wissen, Berlin 1958 bzw. 1960.

Teil III. Konstruktionen in affinen und euklidischen Ebenen

11. Das Lineal in affinen Ebenen

In diesem Kapitel werden solche Konstruktionen behandelt, bei deren Ausführung und theoretischer Begründung man von der euklidischen Struktur der verwendeten realen (euklidischen) Zeichenflächen absehen kann, sie also nur als affine Ebenen benutzt. Als Sammelbezeichnung für Punkte und Geraden benutzen wir in diesem Kapitel das Wort *Stücke*.

Wie schon in Abschnitt 9.3 ausgeführt wurde, ist rationale Abhängigkeit der Koordinaten der gesuchten Stücke von den Koordinaten der gegebenen Stücke bezüglich eines AKS notwendig, aber nicht hinreichend für deren Konstruierbarkeit mit dem Lineal allein. Um dennoch zu einer Charakterisierung der mit dem Lineal allein ausführbaren Konstruktionen zu kommen, betrachten wir zunächst den in beliebigen affinen Ebenen $\mathfrak{A}$ sinnvollen Instrumentensatz (L, P, S_1), wobei P die in Abschnitt 5.1 definierte Parallelenoperation ist. Da die Ausführung von $P(p, g)$ auch als Verbindung des eigentlichen Punktes p mit dem durch die Gerade g bestimmten uneigentlichen Punkt gedeutet werden kann, P und L zusammen also wie ein „gewöhnliches Lineal" in der projektiven Abschließung von $\mathfrak{A}$ wirken, bezeichnen wir den Instrumentensatz (L, P, S_1) als *projektives Lineal* (in affinen Ebenen). Die technische Realisierbarkeit dieses Instrumentensatzes ist für das Folgende ohne Bedeutung. Man kann das projektive Lineal innerhalb gewisser Grenzen z. B. durch vier gelenkig zu einem Parallelogramm verbundene Lineale realisieren.

Satz 1. *Mit dem projektiven Lineal sind in einer affinen Ebene aus gegebenen Stücken höchstens solche Stücke konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen AKS rational von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen. Ist umgekehrt aus den gegebenen Stücken ein AKS $K = (p_0, p_1, p_2)$ (d. h. drei nicht kollineare Punkte) konstruierbar, so sind alle Stücke konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich K rational von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen.*

Zum Beweis des ersten Teils ist in Ergänzung von Satz 1 (9.3.) nur noch zu zeigen, daß die Koordinaten der Geraden $P(p, g)$ rational von den Koordinaten von p und g abhängen. Dies sei dem Leser überlassen. Zum Beweis des zweiten Teils ist zu zeigen:

a) die Koordinaten jedes gegebenen Stückes sind (als Punkte auf der jeweiligen Achse) konstruierbar.

b) Koordinaten sind von einer Achse auf die andere übertragbar.

c) An Koordinaten auf einer gemeinsamen Achse sind die rationalen Grundoperationen ausführbar.

d) Sind die Koordinaten eines Stückes konstruierbar, so ist das Stück selbst konstruierbar.

Die Beweise von a) und d) stimmen mit den entsprechenden Beweisen von Satz 2 (Abschnitt 9.3) überein, wenn man statt der Lote auf die Achsen jeweils Parallelen zur anderen Achse benutzt. Auch die konstruktive Multiplikation und Division auf Grund der Strahlensätze kann aus Abschnitt 9.2 übernommen werden. Nur sind die dort mit Zirkel und Lineal konstruierten Parallelen jetzt als Grundkonstruktion anzusehen. Das Übertragen von Koordinaten von einer Achse auf die andere geschieht jetzt ebenfalls nach Strahlensatz, indem man durch die gegebene Koordinate die Parallele zu der Geraden durch die beiden Einheitspunkte des AKS zieht und deren Schnittpunkt mit der anderen Achse bestimmt. Eine Änderung gegenüber dem Vorgehen mit Zirkel und Lineal ergibt sich lediglich bei der Addition und Subtraktion, wo jetzt die affine Definition (mittels zweifacher Parallelverschiebung) zugrundegelegt wird. Die Beschreibung der Konstruktion sei dem Leser überlassen.

Als Beispiel von grundlegender inhaltlicher und methodischer Bedeutung behandeln wir die Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke p_1p_2 mit dem projektiven Lineal unter Benutzung eines zu p_1, p_2 nicht kollinearen Hilfspunktes p_3 (Abb. 42a):

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \quad (\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2)$$
$$\downarrow$$
$$\mathfrak{p}_3 = \varepsilon \mathfrak{p}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p} \text{ nicht kollinear})$$
$$\mathfrak{g}_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$$
$$\mathfrak{g}_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$$
$$\mathfrak{g}_3 = \mathrm{L}(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$$
$$\mathfrak{g}_4 = \mathrm{P}(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{g}_2)$$
$$\mathfrak{g}_5 = \mathrm{P}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{g}_3)$$
$\mathfrak{p}_4 = \mathrm{S}_1(\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_5)$ (Daß g_4 und g_5 sich schneiden und daß der Schnittpunkt p_4
$\mathfrak{g}_6 = \mathrm{L}(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$ von p_3 verschieden ist, folgt aus dem Parallelenaxiom I4)
$$\mathfrak{p}_5 = \mathrm{S}_1(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_6)$$
$$\downarrow$$
$$\mathfrak{p}_5$$

Das in Abschnitt 5.1 angegebene Modell aus vier Punkten für I1 bis I5 zeigt, daß die Existenz von p_5 (d. h. das Sichschneiden der Diagonalen eines Parallelogramms) nicht aus den affinen Inzidenzaxiomen folgt. Wir beweisen daher zunächst unter wesentlicher Benutzung der Zwischenaxiome:

g_6 schneidet g_1 in einem Punkt p_5 mit (p_1, p_5, p_2).

Aus den Ordnungsaxiomen folgt (vgl. Abschnitt 5.3, (1)) die Existenz eines Punktes p_6 zwischen p_3 und p_4. Falls nicht schon $p_6 \in g_1$ und damit der gesuchte Punkt ist, ergibt Anwendung des Axioms von PASCH auf das Dreieck $p_3p_4p_2$ und $g_7 = L(p_1, p_6)$

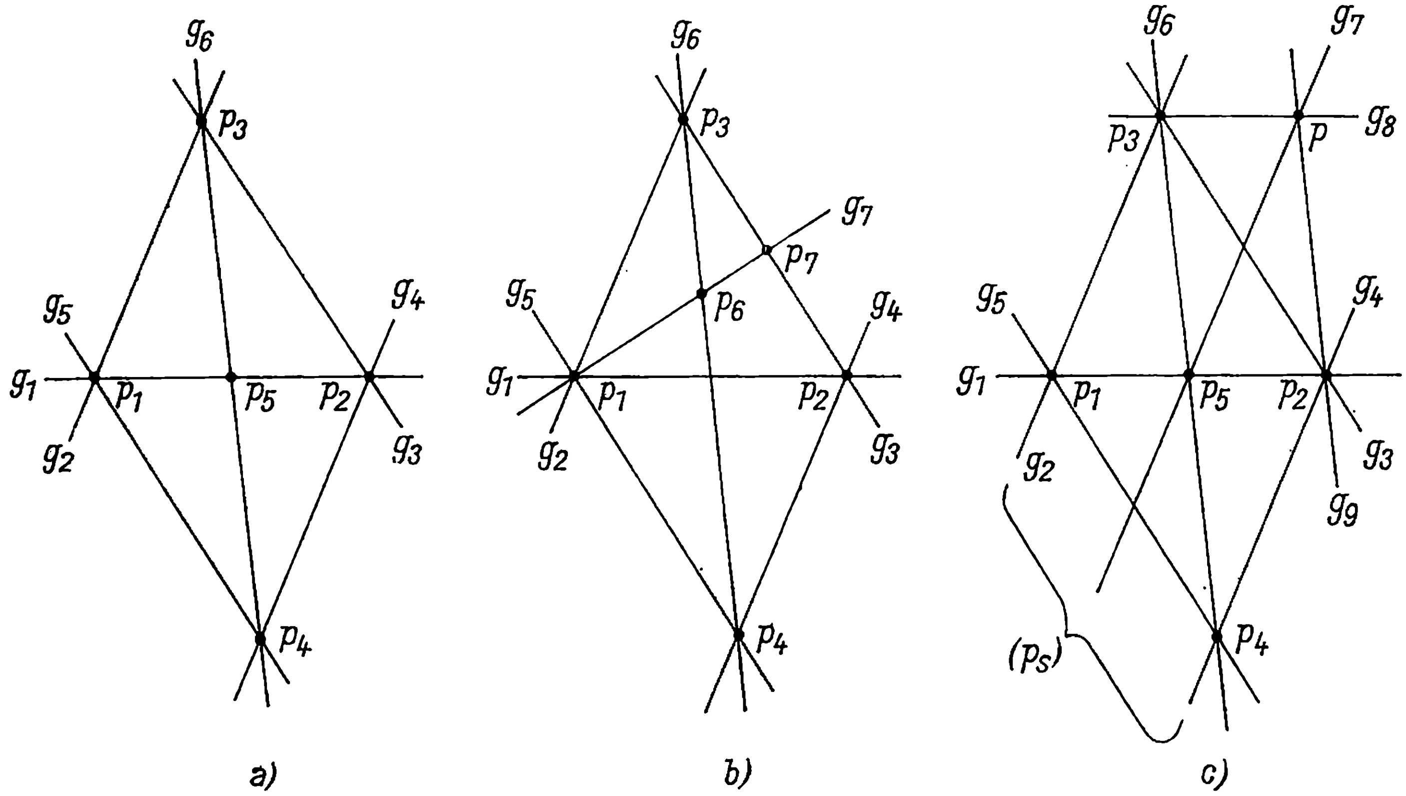


Abb. 42

einen Punkt $p_7 \in g_7$ mit (p_3, p_7, p_2) oder (p_2, p_7, p_4). Wir verfolgen den ersten Fall (Abb. 42b). Der andere verläuft analog unter Vertauschung der Parallelogrammecken p_3 und p_4. Es sei $g_8 = P(p_6, g_3)$. Da g_3 und g_5 parallel zu g_8 sind, liegt jede dieser Geraden ganz in einer der beiden Halbebenen bezüglich g_8. Folglich liegen p_3, p_7 in der gleichen Halbebene, p_1, p_4 in der gleichen Halbebene, aber p_3, p_4 in verschiedenen Halbebenen wegen (p_3, p_6, p_4), demnach auch p_1, p_7 in verschiedenen Halbebenen, d. h., zwischen p_1 und p_7 liegt ein Punkt der Geraden g_8. Wegen $p_6 = S_1(g_7, g_8)$ muß dies p_6 sein, d. h. (p_1, p_6, p_7). Anwendung des Axioms von PASCH auf das Dreieck $p_1p_2p_7$ und g_6 ergibt nun sofort, daß g_6 die Gerade g_1 zwischen p_1 und p_2 schneidet, was zu beweisen war. (Ein Schnitt von g_6 mit der Strecke p_2p_7 ist wegen (p_3, p_7, p_2) unmöglich.) Die scheinbar bei diesem Beweis nicht benötigte Voraussetzung $g_2 \parallel g_4$ ist statt $g_3 \parallel g_5$ im Fall (p_2, p_7, p_4) anzuwenden.

Es bleibt nun zu zeigen, daß der erhaltene Punkt p_5 tatsächlich der Mittelpunkt der Strecke p_1p_2 (im Sinne der affinen Geometrie!) ist, d. h., daß die gerichtete Strecke $\overrightarrow{p_1p_5}$ zu sich selbst addiert, die Strecke $\overrightarrow{p_1p_2}$ ergibt. Dazu denken wir uns die in Abb. 42c dargestellte Hilfskonstruktion ausgeführt:

$$g_8 = P(p_3, g_1), \quad g_7 = P(p_5, g_2), \quad p = S_1(g_7, g_8)$$

(p existiert nach I4 als vierter Eckpunkt des Parallelogramms). Da nach Konstruktion g_2, g_4, g_7 paarweise parallel sind, ist das Dreieck $p_1p_5p_4$ bezüglich eines uneigentlichen Perspektivitätszentrums p_8 zentralperspektiv zum Dreieck p_3pp_2. Da ferner nach Konstruktion die bei dieser Perspektivität einander entsprechenden Seiten g_1 und g_8 sowie g_5 und g_3 jeweils parallel sind, ist die Perspektivitätsachse uneigentlich, d. h. (Satz von Desargues!), es ist auch $g_6 \parallel L(p, p_2)$ $(= g_9)$. Das letzte bedeutet aber, daß $\overrightarrow{p_1p_5}$ durch zweimalige Parallelverschiebung in $\overrightarrow{p_5p_2}$ übergeht, was zu zeigen war. Mit dem Nachweis, daß p_5 der affine Mittelpunkt der Strecke p_1p_2 ist, haben wir zugleich den noch ausstehenden Beweis erbracht, daß der wie in Abb. 42a aus p_1, p_2 unter Benutzung von p_3 konstruierte Punkt p_5 unabhängig von der Wahl des Hilfspunktes p_3 ist. (Dies kann man auch direkt zeigen.)

Satz 1 eröffnet zwei Wege, den Anwendungsbereich des Instrumentensatzes (L, S_1) in affinen Ebenen zu klären:

A. Durch die Betrachtung solcher Fälle, in denen die Operation P auf Grund spezieller Eigenschaften der gegebenen Figur durch eine (L, S_1)-Konstruktion darstellbar ist, d. h. Aufsuchen von Bedingungen H, so daß (L, S_1) und (L, P, S_1) bezüglich H bedingt äquivalent sind (vgl. Abschnitt 8.7).

B. Durch Benutzung von PKS statt AKS, d. h. im wesentlichen Auszeichnung einer eigentlichen Geraden g_u der affinen Ebene $\mathfrak{A}$ als uneigentliche Gerade der projektiven Abschließung von $\mathfrak{A}$. Die zunächst mit dem gewöhnlichen Lineal nicht ausführbare Operation $P(p, g)$ geht dann über in $L\big(p, S_1(g, g_u)\big)$. Der Spezialfall $g \parallel g_u$ kann durch eine Hilfskonstruktion umgangen werden.

Wir verfolgen zunächst A.

Satz 2. *Sind (auf Grund spezieller Eigenschaften der gegebenen Stücke* $\mathbf{S}$*) zu zwei nichtparallelen Geraden* $g_1, g_2 \in \mathbf{S}$ *durch jeden aus* $\mathbf{S}$ *konstruierbaren Punkt* p *die Parallelen mit dem Lineal allein konstruierbar, so ist* $P(p, g)$ *aus* $\mathbf{S}$ *für jeden aus* $\mathbf{S}$ *konstruierbaren Punkt* p *und jede aus* $\mathbf{S}$ *konstruierbare Gerade* g *mit dem Lineal allein konstruierbar.*

Beweis. Gegeben seien g_1, g_2, g, p mit g_1 *schneidet* g_2 und eventuell weitere Stücke. Gesucht ist $P(p, g)$. Wir können annehmen, daß $p \notin g$ (weil sonst g schon die Lösung wäre) und daß g weder zu g_1 noch zu g_2 parallel ist (da sonst $P(p, g) = P(p, g_1)$ bzw. $= P(p, g_2)$ nach Voraussetzung konstruierbar wäre). Wir betrachten zunächst den Fall, daß g, g_1, g_2 nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen und p

auf keiner der drei Geraden liegt, deren Schnittpunkte wie in Abb. 43 bezeichnet seien. p soll zu dem p_1 zugeordneten Eckpunkt eines Dreiecks gemacht werden, das bezüglich eines Zentrums p_s zu $p_0p_1p_2$ perspektiv ist und dessen Seiten zu g_1 bzw. g_2

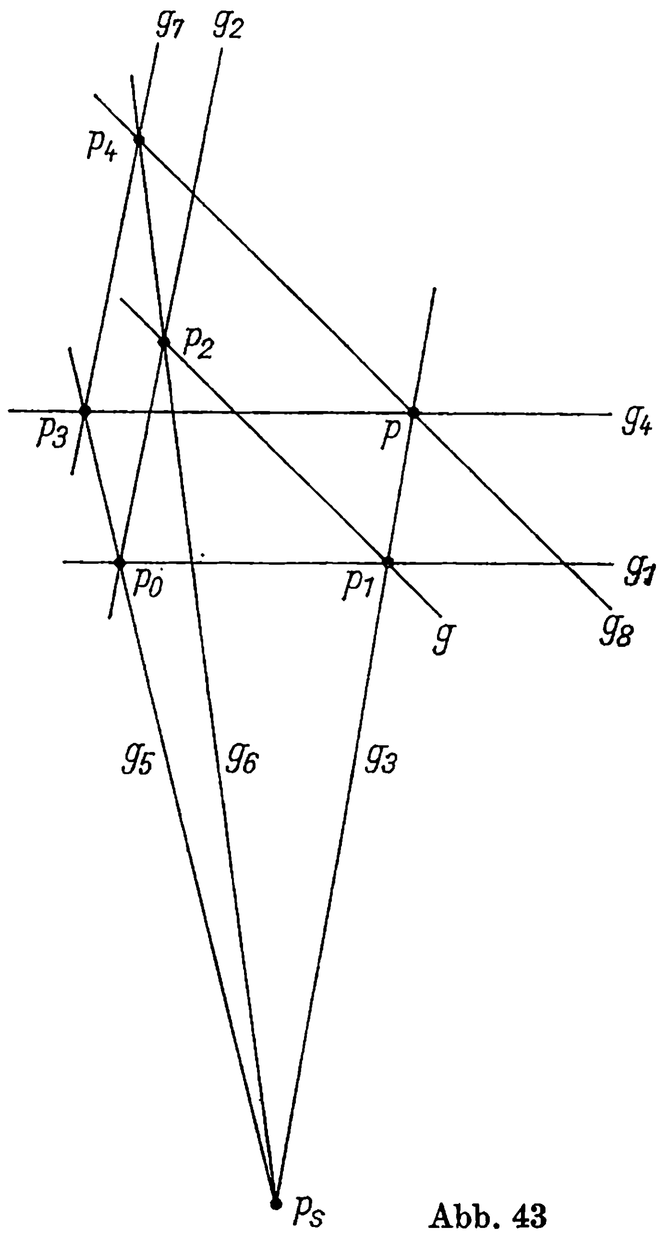


Abb. 43

parallel sind. Nach dem Satz von DESARGUES muß dann die dritte Seite die Parallele $P(p, g)$ sein. Als Perspektivitätszentrum p_s kann jeder von p, p_1 verschiedene Punkt auf $L(p, p_1)$ dienen, und bei praktischer Ausführung der Konstruktion wird man einen solchen beliebig wählen. Diese verläuft dann wie folgt:

$\mathrm{g}, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{p}$ (g schneidet g_1 und g_2, g_1 schneidet g_2 und die drei Schnittpunkte sind verschieden, $p \notin g \cup g_1 \cup g_2$)

$\downarrow$

$\mathrm{p}_0 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$

$\mathrm{p}_1 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}, \mathrm{g}_1)$

$\mathrm{p}_2 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}, \mathrm{g}_2)$

$$
K(g, g_1, g_2, p) \left\{ \begin{array}{ll}
g_3 = L(p, p_1) & (p \neq p_1, \text{ da } p \notin g_1 \text{ nach Voraussetzung}) \\
g_4 = P(p, g_1) & (\text{nach Voraussetzung konstruierbar}) \\
p_s = \varepsilon p_i(p_i \in g_3 \wedge p_i \neq p, p_1) & \\
g_5 = L(p_s, p_0) & (\text{Wäre } p_s = p_0, \text{ so } p_0, p_1, p \text{ kollinear, aber } p \notin g_1) \\
g_6 = L(p_s, p_2) & (\text{Wäre } p_s = p_2, \text{ so } p_1, p_2, p \text{ kollinear, aber } p \notin g) \\
p_3 = S_1(g_4, g_5) & (g_5 \text{ schneidet } g_1, \text{ also auch die zu } g_1 \text{ echt parallele Gerade } g_4) \\
g_7 = P(p_3, g_2) & (\text{nach Voraussetzung konstruierbar}) \\
p_4 = S_1(g_7, g_6) & (\text{Begründung analog } p_3) \\
g_8 = L(p, p_4) & (\text{Wäre } p = p_4, \text{ so } p, p_2, p_s, p_1 \text{ kollinear, aber } p \notin g)
\end{array} \right.
$$

$$\downarrow$$

$$g_8 \big(= P(p, g)\big)$$

Es bleibt zu zeigen:

a) Der willkürlich gewählte Punkt p_s kann prinzipiell durch einen konstruierten Punkt ersetzt werden: Da g_3 sowohl g_1 als auch g in p_1 schneidet, schneidet g_3 auch die dazu parallelen Geraden $P(p_2, g_1)$ bzw. $P(p_0, g)$. Wenigstens einer dieser beiden Schnittpunkte ist aber von p (und beide sind von p_1) verschieden.

b) Falls p auf g_1 oder auf g_2 liegt oder die Geraden g, g_1, g_2 koinzident sind (d. h. $p_0 \in g$), kann man zu konstruierbaren anderen Repräsentanten der durch g_1 bzw. g_2 gegebenen uneigentlichen Punkte übergehen, so daß die neue Figur die Voraussetzungen der obigen Konstruktion erfüllt.

Das Resultat aller unserer Überlegungen läßt sich in dem auf S. 231 angegebenen (abgekürzten) Flußdiagramm zusammenfassen.

Auf Grund von Satz 2 reduziert sich das Problem A auf die Betrachtung von Bedingungen, unter denen in einer bestimmten Richtung durch jeden Punkt mit dem Lineal allein die Gerade gelegt werden kann.

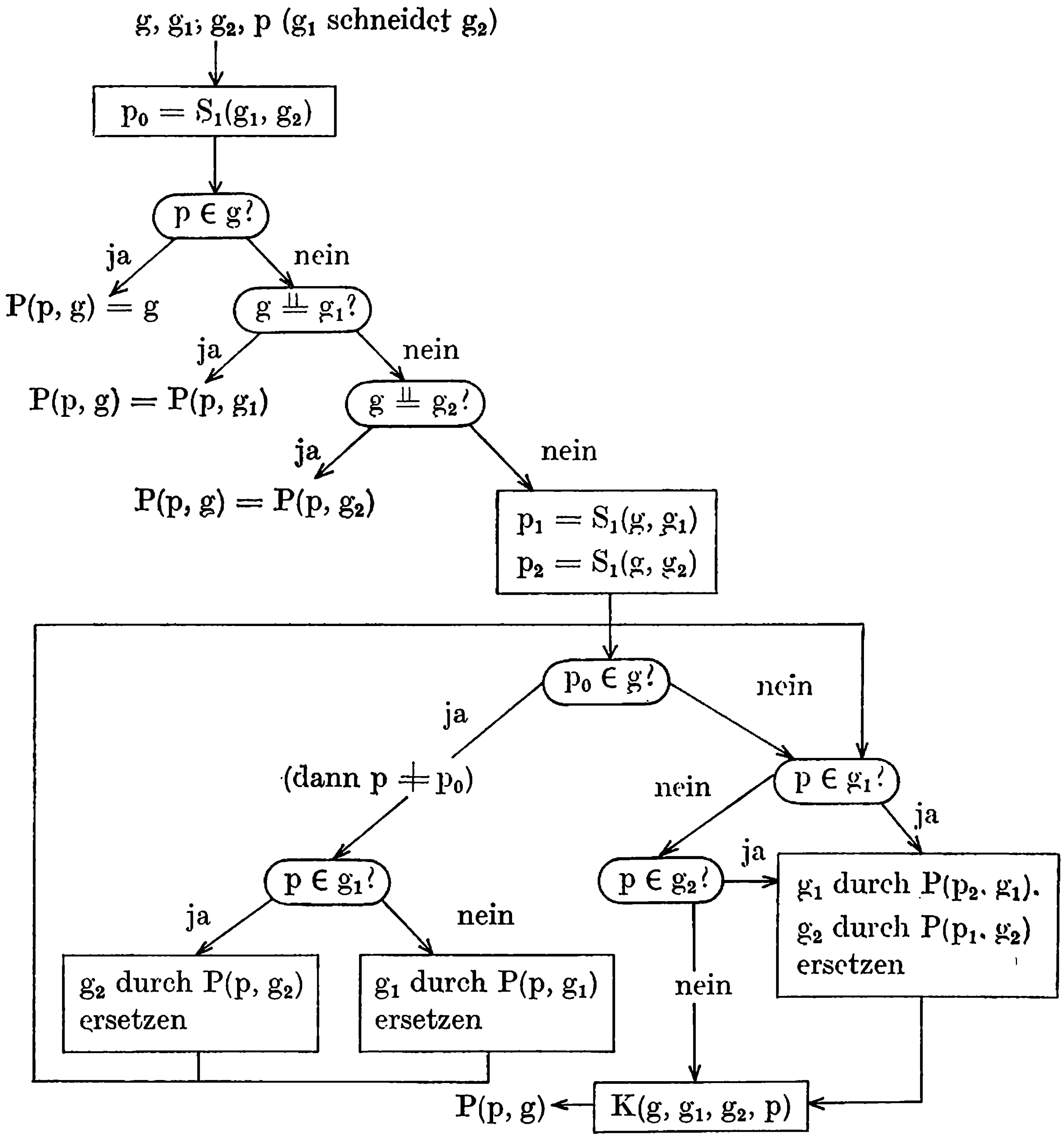
Satz 3. *Befinden sich unter den gegebenen Stücken zwei parallele Geraden g_1, g_2, so kann unter Benutzung geeigneter Hilfselemente zu jedem Punkt p_0 die Gerade $P(p_0, g_1)$ $\big(= P(p_0, g_2)\big)$ mit dem Lineal allein konstruiert werden.*

Zum Beweis geben wir eine Konstruktion von $P(p_0, g_1)$ an und beweisen deren Ausführbarkeit unter den vorausgesetzten Bedingungen.

$$g_1, g_2, p_0(g_1 \parallel g_2 \wedge p_0 \notin g_1 \cup g_2) \qquad \text{(Abb. 44)}$$

$$\downarrow$$

$$g_3 = \varepsilon g(p_0 \in g \wedge g \text{ schneidet } g_1)$$



Es folgt: g_3 schneidet g_2.

$$p_1 = S_1(g_3, g_1)$$

$$p_2 = S_1(g_3, g_2)$$

$$p_3 = \varepsilon p\big(p \in g_3 \wedge p \neq p_0 \wedge (p_2, p_1, p) \wedge \neg\, (p_0, p, p_2)\big).$$

Diese Wahl des Hilfspunktes p_3 garantiert, wie sich zeigt, die Existenz aller im folgenden benötigten Schnittpunkte.

$$g_4 = \varepsilon g(p_3 \in g_4 \wedge g_4 \text{ schneidet } g_1 \wedge g_4 \neq g_3).$$

Es folgt: g_4 schneidet g_2.

$$\mathrm{p}_4 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_4, \mathrm{g}_2)$$

$$\mathrm{p}_5 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_4, \mathrm{g}_1).$$

Aus (p_2, p_1, p_3) und $g_2 \parallel g_1$ folgt (p_4, p_5, p_3).

$$\mathrm{g}_5 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_4)$$

$p_1 \neq p_4$ wegen $p_1 \in g_1, p_4 \in g_2, g_1 \parallel g_2$.

$$\mathrm{g}_6 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_5)$$

Rechtfertigung analog g_5.

$$\mathrm{p}_6 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_5, \mathrm{g}_6)$$

Beweis der Existenz von p_6: g_5 trifft wegen (p_2, p_1, p_3) das Dreieck $p_2p_5p_3$ und verläßt es wegen (p_4, p_5, p_3) und $p_4 = S_1(g_5, g_4)$ nicht durch die Seite p_3p_5. Daher existiert ein Schnittpunkt p_6 von g_5 und g_6 mit (p_2, p_6, p_5).

$$\mathrm{g}_7 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_6)$$

$p_3 \neq p_6$, da nach Konstruktion p_3 und p_6 auf verschiedenen Seiten von g_1 liegen.

$$\mathrm{g}_8 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_4)$$

$p_0 \neq p_4$, da g_3 und g_4 nur p_3 gemeinsam haben.

$$\mathrm{p}_7 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_7, \mathrm{g}_8)$$

Wegen (p_2, p_6, p_5) liegen p_2 und p_5 auf verschiedenen Seiten von g_7. Da $\neg\,(p_0, p_3, p_2)$ bei der Wahl von p_3 vorausgesetzt war, ist $p_0 \in \mathit{Halbebene}(g_7, p_2)$, während wegen (p_3, p_5, p_4) $p_4 \in \mathit{Halbebene}(\mathrm{g}_7, \mathrm{p}_5)$ *gilt.* Daher schneidet g_8 die Gerade g_7 in p_7 mit (p_0, p_7, p_4).

$$\mathrm{g}_9 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_7)$$

$$\mathrm{p}_8 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_4, \mathrm{g}_9)$$

$$\mathrm{g}_0 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_8)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{g}_0$$

Es bleibt zu zeigen, daß p_8 existiert und daß $g_0 \parallel g_1$ ist. Dazu denken wir uns noch $g_0' = P(p_0, g_1)$ gezogen, und bezeichnen dann $S_1(g_0', g_4)$ mit p_8'. Nach Konstruktion haben die Dreiecke $p_1p_5p_6$ und $p_0p_8'p_7$ das Perspektivitätszentrum p_3. Da g_5 und g_8 sich in $p_4 \in g_2$ schneiden und g_1 und g_0' sich im uneigentlichen Punkt von g_2 schneiden, ist g_2 die Perspektivitätsachse, d. h., g_6 und $L(p_8', p_7)$ schneiden sich in p_2.

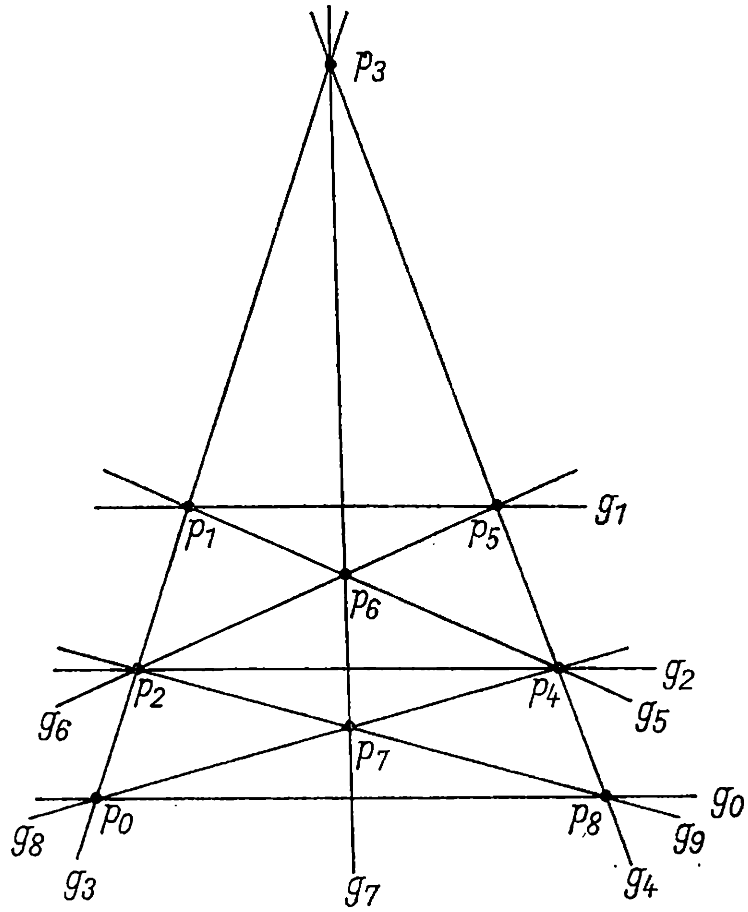


Abb. 44

Das bedeutet aber: p_8', p_2, p_7 sind kollinear, d. h., g_9 schneidet g_4 wie behauptet, und wegen $p_8 = p_8'$ ist auch $g_0 = g_0'$; also gilt $g_0 \parallel g_1$.

Satz 4. *Befinden sich unter den gegebenen Stücken drei äquidistante kollineare Punkte p_1, p_2, p_3, so kann unter Benutzung eines geeigneten Hilfspunktes zu jedem Punkt p_0 die Gerade $P(p_0, L(p_1, p_2))$ mit den Lineal allein konstruiert werden.*

Mit g_0 bezeichnen wir die zur Konstruktion selbst nicht benötigte Gerade $L(p_1, p_2)$. Wir konstruieren (Abb. 45):

$$\mathrm{p_1, p_2, p_3, p_0} \; \left(\mathrm{p_3 = M(p_1, p_2) \wedge p_1, p_3, p_0} \text{ nicht kollinear}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{g_1 = L(p_1, p_0)}$$

$$\mathrm{p_4 = \varepsilon p(p_1, p_0, p)}$$

$$\mathrm{g_2 = L(p_2, p_4)}$$

$$\mathrm{g_3 = L(p_3, p_4)}$$

$$\mathrm{g_4 = L(p_0, p_2)}$$

g_3 schneidet g_4: g_4 trifft $\triangle\, p_1p_3p_4$ in p_0 mit (p_1, p_0, p_4). Da g_4 und g_0 wegen (p_1, p_3, p_2) sich außerhalb der Strecke p_1p_3 schneiden, existiert nach dem Axiom von Pasch ein

Punkt p_5 mit $p_5 \in g_4$ und (p_3, p_5, p_4)

$\mathrm{p}_5 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_3, \mathrm{g}_4)$

$\mathrm{g}_5 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_5)$

$\mathrm{p}_6 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_5, \mathrm{g}_2)$ (Zum Existenzbeweis Axiom von PASCH auf g_5 und $\triangle\, p_2p_3p_4$ anwenden!)

$\mathrm{g}_6 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_6)$

$\downarrow$

g_6

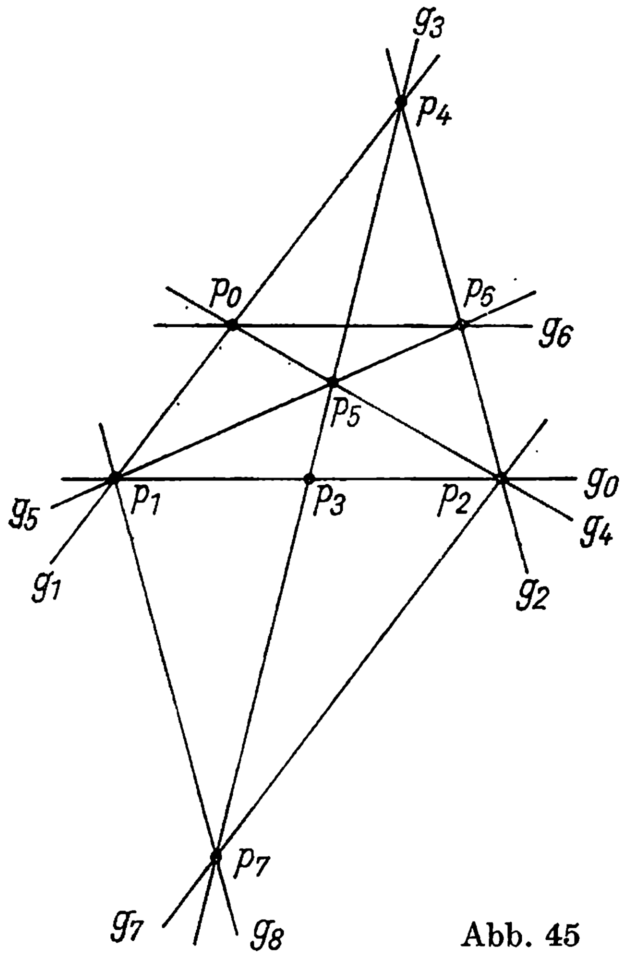


Abb. 45

Es bleibt zu zeigen: $g_6 \parallel g_0$. Wir denken uns p_1, p_2, p_4 durch p_7 zum Parallelogramm mit der Diagonalen g_0 ergänzt (siehe Abb. 45). Dann ist nach einem früheren Beweis p_3 der Schnittpunkt der Diagonalen. Daher ist $\triangle\, p_0p_6p_4$ bezüglich des Zentrums p_5 zentralperspektiv zu $\triangle\, p_2p_1p_7$. Da nach Konstruktion zwei Paar zugeordneter Dreieckseiten paarweise parallel sind, ist die Perspektivitätsachse uneigentlich, d. h., es ist auch $g_6 \parallel g_0$.

Eine weitgehende Verallgemeinerung von Satz 4 ist

Satz 5. *Befinden sich unter den gegebenen Stücken drei kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 mit bekanntem rationalem Teilverhältnis, so kann unter Benutzung geeigneter Hilfselemente zu jedem Punkt p_0 die Gerade $P(p_0, L(p_1, p_2))$ mit dem Lineal allein durch eine* *elementare Konstruktion erhalten werden. Gilt eine der Prüfrelationen* $g_1 \parallel g_2$?, $p_3 = M(p_1, p_2)$? *als entscheidbar, so gibt es eine nichtelementare Konstruktion, die zu* p_0, p_1, p_2, p_3, *wobei* p_1, p_2, p_3 *kollineare Punkte mit rationalem jedoch nicht bekanntem Teilverhältnis sind, die Gerade* $P(p_0, L(p_1, p_2))$ *liefert.*

Zum Beweis von Satz 5 ist eine Reihe von Vorbetrachtungen erforderlich, die in diesem Zusammenhang Hilfscharakter haben, jedoch eine bedeutende selbständige Rolle beim Übergang von affinen zu projektiven Methoden spielen.

In einer projektiven Ebene (insbesondere im projektiven Abschluß einer affinen Ebene) definieren je vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 in allgemeiner Lage ein sogenanntes *vollständiges Vierseit*, bestehend aus $p_1, \ldots, p_4$ (*Ecken* des Vierseits genannt), den sechs

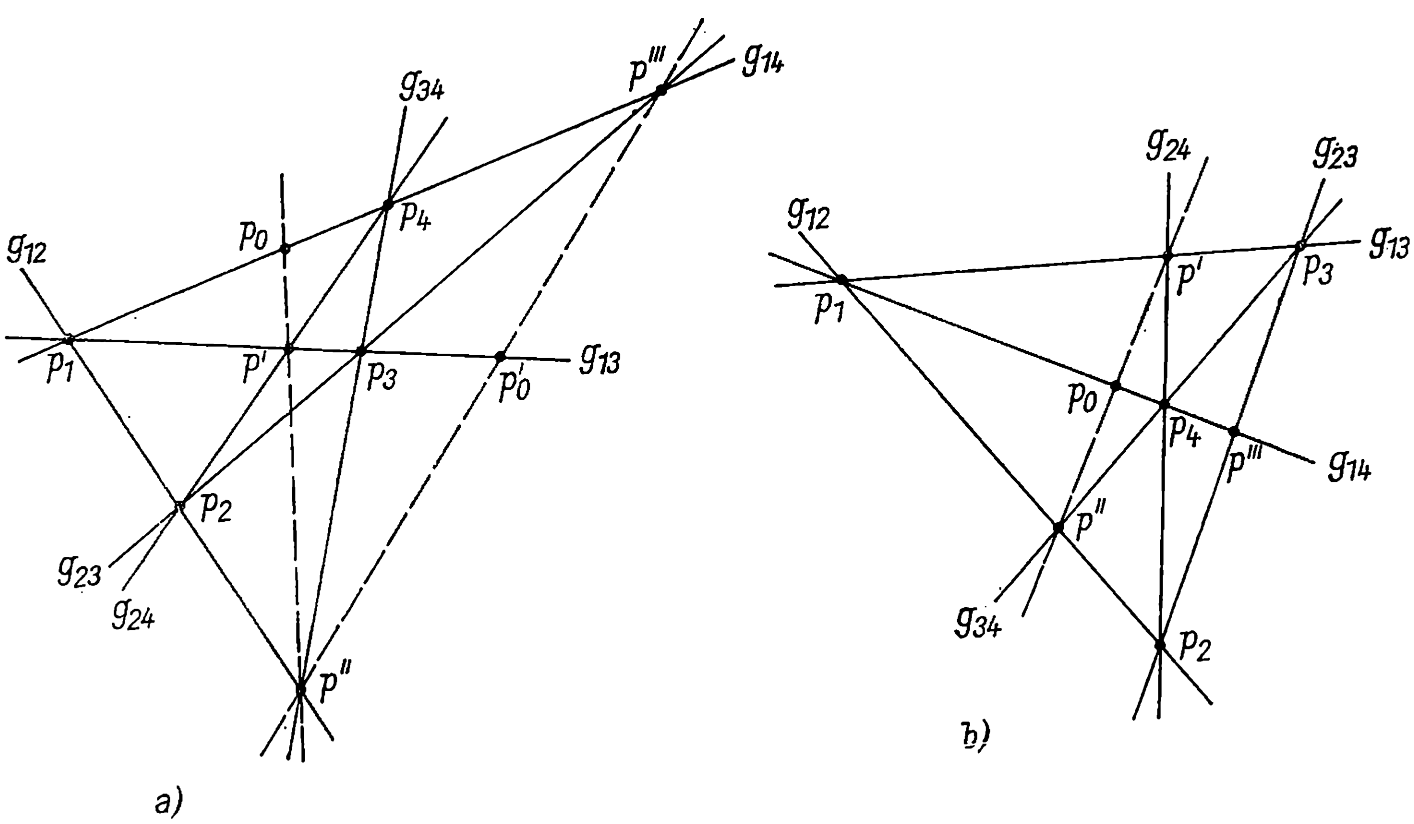


Abb. 46

Verbindungsgeraden $g_{ij} = L(p_i, p_j)$ (*Seiten* des Vierseits genannt) und den drei von $p_1, \ldots, p_4$ verschiedenen Schnittpunkten der Seiten, die *Diagonalpunkte* des Vierseits heißen und bei eigentlichen $p_1, \ldots, p_4$ teilweise uneigentlich sein können. Abb. 46a, b zeigen zwei Vierseite mit den Diagonalpunkten p', p'', p''' und grundverschiedenen Anordnungseigenschaften, woraus sofort folgt, daß es keinen Sinn hat, im allgemeinen zwischen „äußeren Seiten“ und „Diagonalen“, „äußeren und inneren Diagonalpunkten“ oder ähnlichem zu unterscheiden.

Ein Punktepaar p_i, p_j heißt *harmonisch konjugiert zu* einem Punktepaar p_k, p_l, wenn p_i, p_j verschiedene Ecken eines Vierseits, p_k der auf $L(p_i, p_j)$ gelegene Diagonalpunkt und p_l der Schnittpunkt von g_{ij} mit der durch die beiden anderen Diagonalpunkte gehenden Geraden ist. Demnach ist in Abb. 46a (b) p_1, p_4 harmonisch konjugiert zu p''', p_0, aber z. B. auch p_1, p_3 harmonisch konjugiert zu p', p_0'. Die Bezeichnung als *harmonisch zueinander konjugierte Punktepaare* ist dadurch gerechtfertigt, daß man beweisen kann: Ist p_i, p_j harmonisch konjugiert zu p_k, p_l, so ist auch p_k, p_l harmonisch konjugiert zu p_i, p_j und p_i, p_j harmonisch konjugiert zu p_l, p_k. Ferner läßt sich zeigen, daß harmonisch konjugierte Punktepaare einander trennen (im Sinne der in Abschnitt 5.5 eingeführten Ordnungsrelation der projektiven Geometrie). Für den Beweis der genannten Sätze verweisen wir auf [5].

Hilfssatz 1. *Zu je drei kollinearen und paarweise verschiedenen Punkten p_1, p_2, p_3 existiert genau ein Punkt p_4, so daß p_1, p_2 harmonisch konjugiert zu p_3, p_4 ist. Dieser Punkt heißt der vierte harmonische Punkt zu p_1, p_2, p_3 und ist eigentlich, falls p_1, p_2, p_3 eigentlich sind und p_3 nicht der Mittelpunkt von p_1, p_2 ist. Unter diesen Voraussetzungen ist er mit dem Lineal allein aus p_1, p_2, p_3 (unter Benutzung geeigneter Hilfselemente) konstruierbar.*

Den Existenzbeweis durch Konstruktion führen wir für den Fall, daß p_3 zwischen p_1 und p_2 liegt. Der andere Fall (der übrigens im folgenden nicht benötigt wird) sei dem Leser zur Übung empfohlen. Der Beweis, daß das Resultat der Konstruktion unabhängig von den verwendeten Hilfselementen ist oder mit anderen Worten, daß der vierte harmonische Punkt eindeutig bestimmt ist, läßt sich leicht mit Hilfe des Desarguesschen Satzes führen. Wir verweisen auf [5]. Ist die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes schon bekannt, so ist leicht zu sehen, daß der vierte harmonische Punkt zu $p_1, p_2, M(p_1, p_2)$ der uneigentliche Punkt der Geraden $L(p_1, p_2)$ ist: Man wähle als Vierseit ein über der Diagonalen p_1, p_2 errichtetes Parallelogramm. Dann ist $M(p_1, p_2)$ ein Diagonalpunkt auf $L(p_1, p_2)$, die beiden anderen Diagonalpunkte sind uneigentlich, also auch der Schnittpunkt der durch sie gehenden (uneigentlichen!) Geraden mit $L(p_1, p_2)$. Man erkennt nachträglich, daß dieser Sachverhalt der zum Beweis von Satz 4 angegebenen Konstruktion zugrundeliegt (vgl. Abb. 45): p_1 und p_2 sind Ecken des Vierseits p_1, p_2, p_4, p_5; p_3 ist der auf g_0 liegende Diagonalpunkt. Folglich schneidet die Gerade durch die beiden anderen Diagonalpunkte p_0, p_6 die Gerade g_0 im vierten harmonischen Punkt zu p_1, p_2, p_3, d. h. im uneigentlichen Punkt, da $p_3 = M(p_1, p_2)$ nach Voraussetzung. Man sieht sofort, daß man diese Konstruktion mit geringfügigen Änderungen für den allgemeinen Fall der Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu p_1, p_2, p_3 mit (p_1, p_3, p_2) übernehmen kann. Nur p_0 ist jetzt als zu p_1, p_2 nicht kollinearer Hilfspunkt zu wählen. Ist $p_3 \neq M(p_1, p_2)$ vorausgesetzt, so ist der vierte harmonische Punkt eigentlich, folglich muß g_6 die (jetzt zu konstruierende) Gerade g_0 schneiden. Der Schnittpunkt ist das Endresultat der Konstruktion.

Für kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \neq p_2$ sei

$$TV(p_1, p_2; p_3) := \begin{cases} -\dfrac{\overline{p_1p_3}}{\overline{p_2p_3}}, & \textit{falls } (p_1, p_3, p_2), \\[2ex] \dfrac{\overline{p_1p_3}}{\overline{p_2p_3}} & \textit{sonst} \end{cases}$$

das *Teilverhältnis von* p_3 *bezüglich* p_1, p_2. Die Definition ist so zu verstehen, daß die Streckenlängen bezüglich einer beliebigen Einheitsstrecke in Zahlen gemessen und durcheinander dividiert werden, wobei sich die Abhängigkeit von der gewählten Maßeinheit herauskürzt. Damit ist zugleich klar, daß das Teilverhältnis dreier kollinearer Punkte ein Begriff der affinen Geometrie, insbesondere bei affinen Abbildungen invariant ist. Die scheinbar willkürliche Vorzeichenverteilung merkt man sich am besten, indem man die Strecken als gerichtet ansieht. Liegt der Teilpunkt p_3 zwischen p_1 und p_2, so sind $\overrightarrow{p_1p_3}$ und $\overrightarrow{p_2p_3}$ entgegengesetzt gerichtet, folglich ist der Quotient negativ. Liegt der Teilpunkt p_3 außerhalb der zu teilenden Strecke, so sind $\overrightarrow{p_1p_3}$ und $\overrightarrow{p_2p_3}$ gleichgerichtet, demnach ist der Quotient positiv. Abb. 47 stellt den numerischen

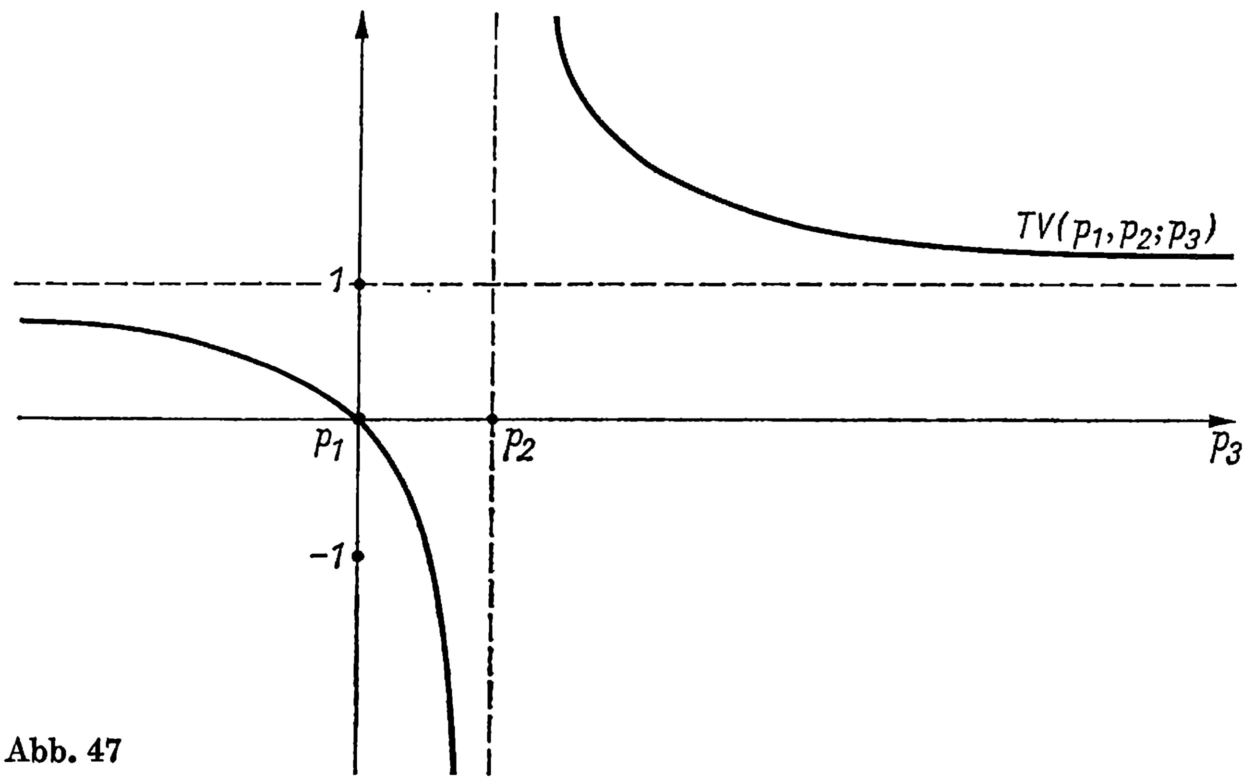


Abb. 47

Verlauf der durch $f_{p_1,p_2}(p_3) := TV(p_1, p_2,; p_3)$ auf der Geraden $L(p_1, p_2)$ definierten Abbildung f_{p_1,p_2} in den Koordinatenkörper der betrachteten Ebene dar. Ist x ein beliebiges von 1 verschiedenes Element des Koordinatenkörpers K, so gilt für denjenigen Punkt p_3, der bezüglich der Einheitsstrecke p_1p_2 die Koordinate $\dfrac{x}{x-1}$ hat, $TV(p_1, p_2; p_3) = x$, d. h., f_{p_1,p_2} ist eine eindeutige Abbildung auf $K \setminus \{1\}$. Wegen $\lim\limits_{p_3 \to p_u} TV(p_1, p_2; p_3) = 1$ (p_u uneigentlicher Punkt von $L(p_1, p_2)$), $\lim\limits_{p_3 \to p_2} TV(p_1, p_2; p_3) = \pm\infty$ ist es sinnvoll, f_{p_1,p_2} zu einer eineindeutigen Abbildung der projektiven Geraden auf den um ein „ideales Element" ∞ ergänzten Koordinatenkörper fortzusetzen.

Hilfssatz 2. *Bei einer Zentralprojektion einer Geraden* g_1 *auf eine dazu parallele Gerade* g_2 *bleibt das Teilverhältnis invariant, d. h., ist* $g_1 \parallel g_2$, $p_s \notin g_1 \cup g_2$, $p_1, p_2, p_3 \in g_1$, $p_1', p_2', p_3' \in g_2$ *und* p_i, p_i', p_s *kollinear* ($i = 1, 2, 3$), *so ist* $TV(p_1, p_2; p_3) = TV(P_1', p_2'; p_3')$

(Abb. 48; p_s kann jedoch auch zwischen g_1 und g_2 oder auf der g_1 entgegengesetzten Seite von g_2 liegen).

Wegen der Definierbarkeit des TV durch „zwischen" genügt es grundsätzlich zu zeigen, daß Zentralprojektionen die letzte Relation invariant lassen. Dazu wende man das Axiom von PASCH auf $L(p_2, p_2')$ und die Dreiecke $p_1p_3p_1'$ bzw. $p_1'p_3'p_3$ an (vorausgesetzt: (p_1, p_3, p_2)). Ein direkter elementarer Beweis ergibt sich mit Hilfe der Strahlensätze: Mit den Bezeichnungen von Abb. 48 ist (wegen Parallelität von g_1 und g_2) $a:b = a':b' = c:d$, demnach $a:c = b:d$.

Für kollineare Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 mit $p_1 \neq p_2, p_3 \neq p_2, p_4 \neq p_2, p_4 \neq p_1$ sei

$$DV(p_1, p_2; p_3, p_4) := \frac{TV(p_1, p_2; p_3)}{TV(p_1, p_2; p_4)}$$

das *Doppelverhältnis* von p_3, p_4 bezüglich p_1, p_2. Das Doppelverhältnis spielt als wesentliche numerische Invariante der projektiven Abbildungen eine analoge Rolle

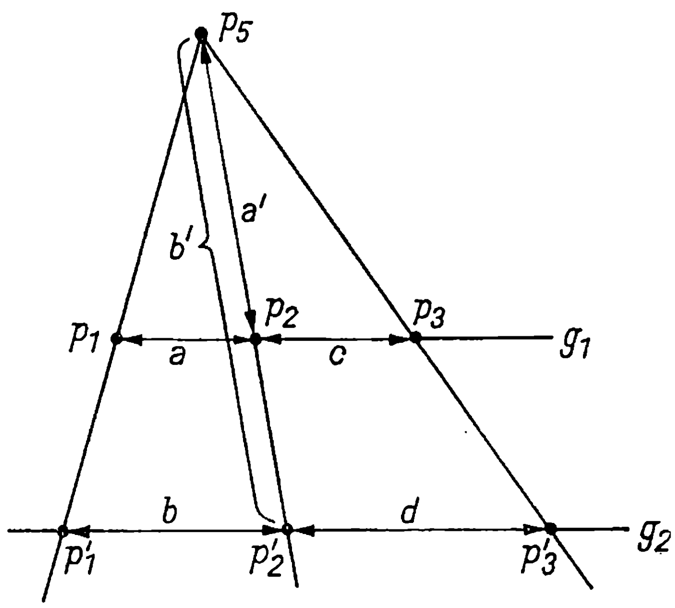


Abb. 48

in der projektiven Geometrie wie das Teilverhältnis in der affinen Geometrie. Uns interessiert im jetzigen Zusammenhang nur folgender Spezialfall:

Vier kollineare und paarweise verschiedene Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 heißen *harmonisch gelegen*, wenn $DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$ ist. Dafür ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

a) p_3 ein innerer und p_4 ein äußerer Punkt der Strecke p_1p_2 ist oder umgekehrt,

b) die Beträge des inneren bzw. äußeren Teilverhältnisses gleich sind.

Daraus folgt sofort: Zu je drei kollinearen und paarweise verschiedenen Punkten p_1, p_2, p_3 existiert genau ein Punkt p_4, so daß p_1, p_2, p_3, p_4 harmonisch gelegen sind. (Ist $p_3 = M(p_1, p_2)$, so ist p_4 uneigentlich und umgekehrt.)

Hilfssatz 3. *Für beliebige kollineare und paarweise verschiedene Punkte p_1, p_2, p_3 ist der vierte harmonische Punkt p_4 derjenige Punkt, für den $DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$ ist.*

(Auf Grund von Hilfssatz 3 können wir die zur korrekten Stellung des Problems eingeführte Redeweise „p_1, p_2, p_3, p_4 sind harmonisch gelegen“ wieder aufgeben und auch bei $DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$ von harmonisch konjugierten Punktepaaren sprechen.)

Zum Beweis von Hilfssatz 3 betrachten wir vier Punkte mit $DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$. Dabei sei etwa p_3 der innere und p_4 der äußere Teilpunkt von $p_1\, p_2$ (Abb. 49). Wir wählen einen beliebigen zu p_1, p_2 nicht kollinearen Punkt p_5 und bestimmen p_6 so, daß p_2, p_4, p_5, p_6 ein Parallelogramm bilden. p_7 sei der Schnittpunkt von $L(p_3, p_5)$ und $L(p_2, p_6)$ und p_8 der Schnittpunkt von $L(p_7, p_1)$ und $L(p_5, p_6)$. Da p_7 eine Zentral-

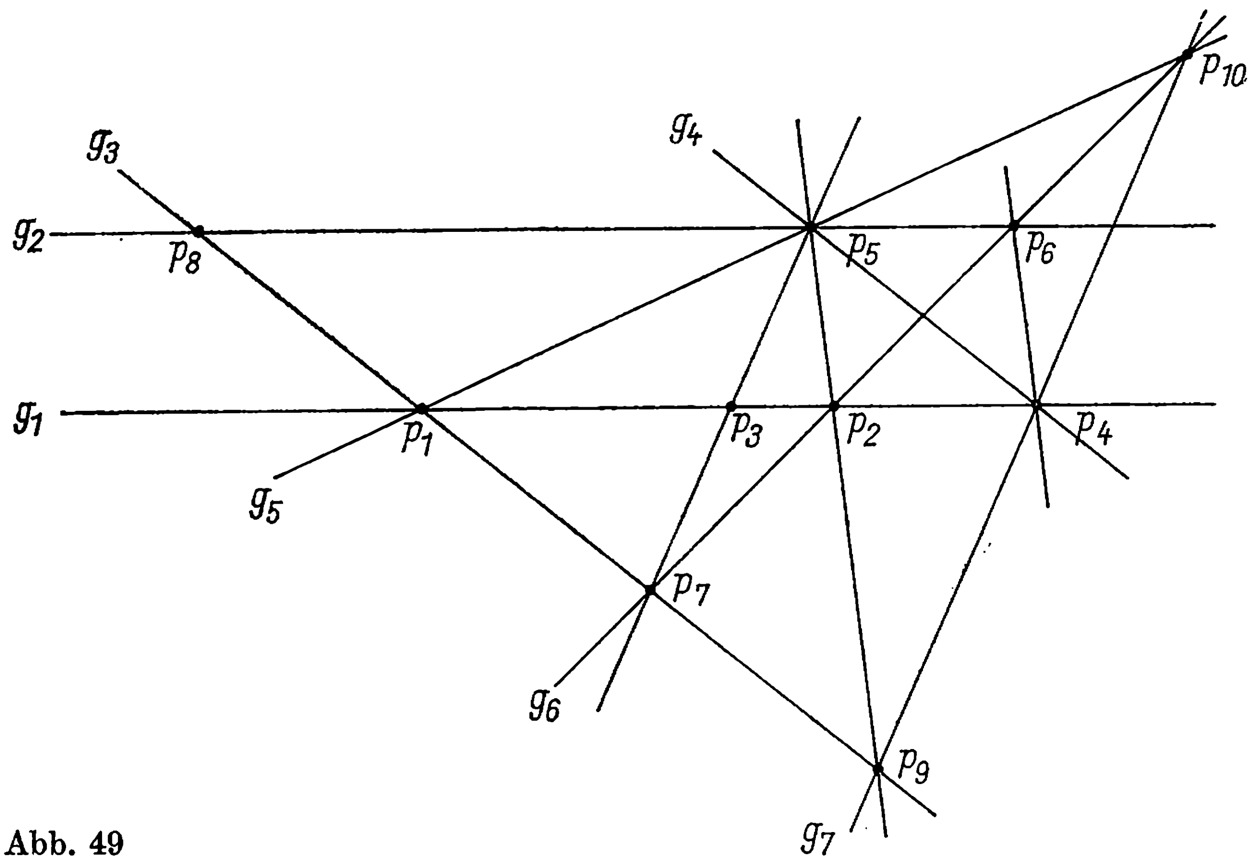


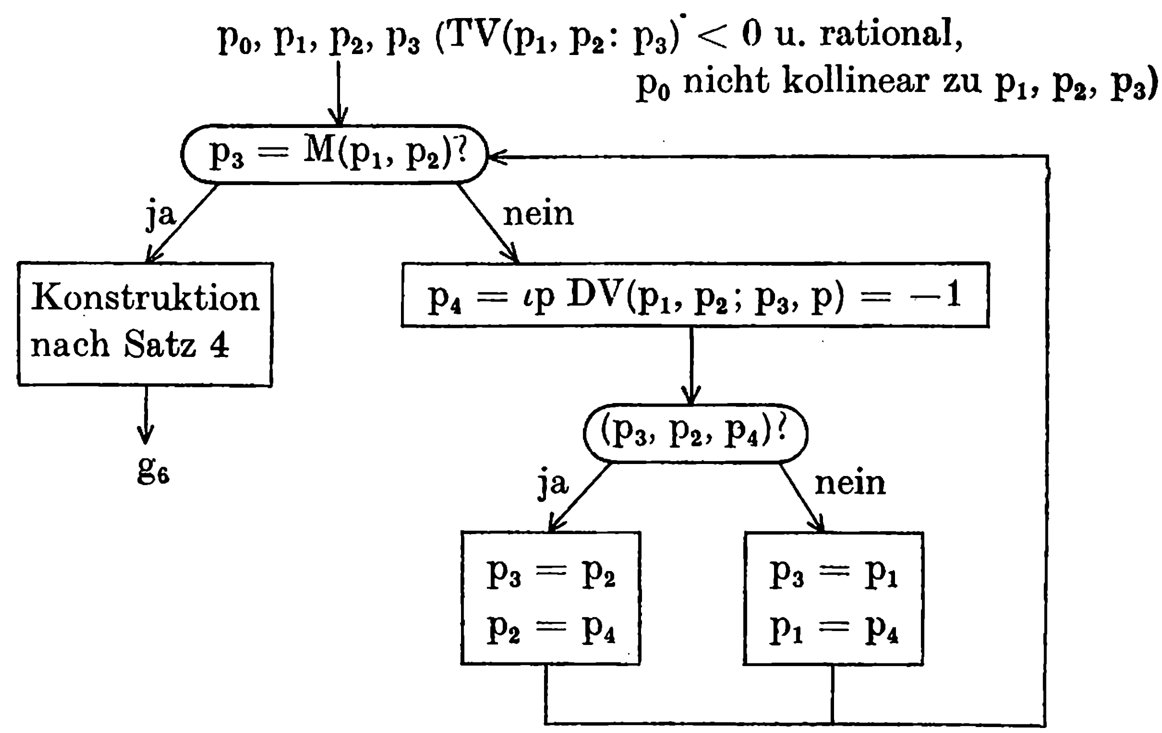
Abb. 49

projektion φ von g_1 auf g_2 (Bezeichnungen der Abb. 49) mit $\varphi(p_2) = p_6$, $\varphi(p_3) = p_5$ und $\varphi(p_1) = p_8$ vermittelt, ist $TV(p_1, p_2; p_3) = TV(p_8, p_6; p_5)$, also wegen $p_5p_6 \cong p_2p_4$ auch $p_8p_5 \cong p_1p_4$. Das bedeutet nun aber, daß auch $p_1p_4p_8p_5$ ein Parallelogramm bilden, d. h. $g_3 \parallel g_4$. Damit sind aber $\triangle\, p_5p_4p_6$ und $\triangle\, p_1p_9p_2$ achsenperspektiv bezüglich der uneigentlichen Geraden. Nach dem Satz von Desargues haben daher g_5, g_6 und g_7 einen (eigentlichen oder uneigentlichen) gemeinsamen Punkt p_{10}. Daher sind p_9 und p_{10} sowie p_3 die Diagonalpunkte des Vierseits $p_1p_2p_5p_7$, d. h., p_1, p_2 ist harmonisch konjugiert zu p_3, p_4.

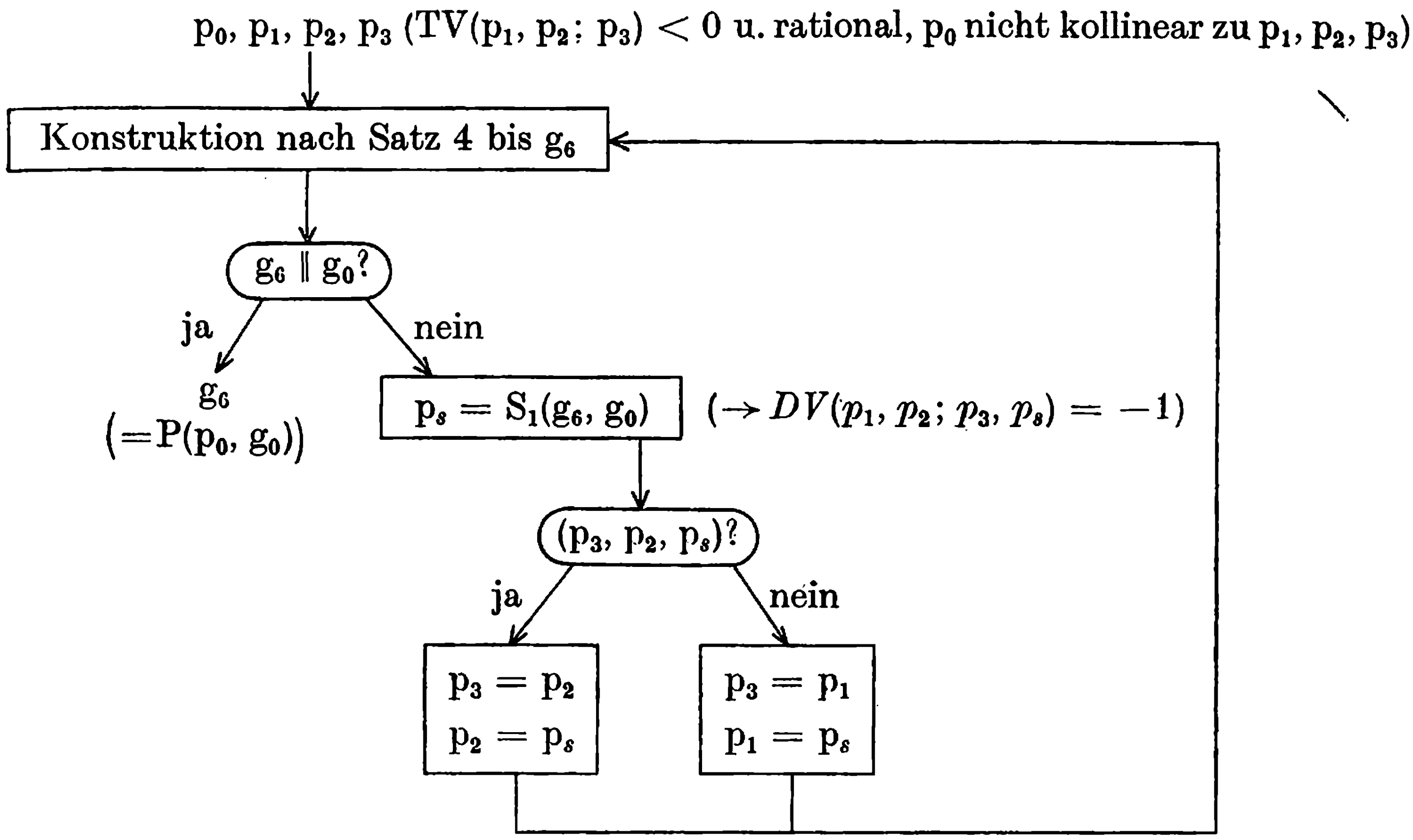
Nun sind wir imstande, Satz 5 zu beweisen. Gegeben seien p_1, p_2, p_3 mit (p_1, p_3, p_2) und $TV(p_1, p_2; p_3) = -\frac{m}{n}$. Dabei können wir $m \neq n$ annehmen, da sonst die Parallelen zu $L(p_1, p_2)$ schon nach Satz 4 konstruiert werden können. Es sei also $n < m$ (sonst vertausche man p_1 und p_2). Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes p_4 nach Hilfssatz 1 liefert $DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = -1$. Dabei müssen die Punkte in der Reihenfolge p_1, p_3, p_2, p_4 liegen. Wählt man die Einheitspunkte eines KS so, daß p_1 Nullpunkt ist, p_3 die Koordinate m hat, so hat p_2 die Koordinate $m + n$ und p_4 die Koordinate $m + n + x$ mit $\frac{x + m + n}{x} = \frac{m}{n}$, folglich $x = \frac{n(m + n)}{m - n}$. Daher ist $TV(p_1, p_4; p_2) = -\frac{m + n}{x} = -\frac{m - n}{n}$. Man erhält also mit dem Lineal allein aus einer im Verhältnis $m:n$ geteilten Strecke eine im Verhältnis $(m - n):n$ geteilte Strecke, arithmetisch gesprochen: aus einem Paar natürlicher Zahlen (m, n) mit $n < m$ (wobei wir noch m und n als teilerfremd annehmen können) ein Paar $(m - n, n)$ bzw. $(n, n - m)$, je nachdem, ob $m - n \geqq n$ oder $m - n < n$. Sind m und n im voraus bekannt, so führt die Wiederholung dieses Prozesses in einer ebenfalls im voraus bestimmbaren Anzahl von Schritten zu einer im Verhältnis 1:1 geteilten Strecke, auf die man Satz 4 anwenden kann.

Geht man bei der skizzierten Konstruktion von drei Punkten mit rationalem aber unbekanntem Teilverhältnis aus, so ist die Anzahl der auszuführenden Schritte nicht mehr im voraus bestimmbar. Gilt eine der in Satz 5 genannten Relationen als entscheidbar, so kann man aber noch eine nichtelementare Konstruktion angeben, indem man die Fortsetzung bzw. Wiederholung des Prozesses davon abhängig macht, ob die drei zuletzt erhaltenen Punkte im Verhältnis 1:1 geteilt sind oder, was gleichwertig ist, ob der erneute Versuch der Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu einem uneigentlichen Resultat, d. h. einer zu $L(p_1, p_2)$ parallelen Geraden führt:

1. Variante:



2. Variante:



Wenden wir uns nun kurz dem allgemeinen Fall der Linealkonstruktionen in affinen Ebenen zu. Gegeben (bzw. konstruierbar) seien wenigstens vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 in allgemeiner Lage. Sind zwei Diagonalpunkte des durch p_1, p_2, p_3, p_4 definierten Vierseits uneigentlich, so bilden p_1, p_2, p_3, p_4 ein Parallelogramm. Folglich sind in zwei verschiedenen Richtungen je zwei Parallele konstruierbar, d. h., wir befinden uns nach Satz 2 und 3 im Anwendungsbereich der Methode A. Es seien nun zwei Diagonalpunkte eigentlich, etwa

$$p' = S_1\big(L(p_1, p_3), L(p_2, p_4)\big), \quad p'' = S_1\big(L(p_1, p_2), L(p_3, p_4)\big).$$

Wir wählen p_1 als Ursprung, p' und p'' als Einheitspunkte und $L(p_2, p_3)$ als uneigentliche Gerade g_u eines projektiven Koordinatensystems (Abb. 46b) und führen die algebraische Analyse der gestellten Aufgabe bezüglich dieses PKS durch. Genau dann, wenn die Koordinaten der gesuchten Stücke rational von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen, ist die Aufgabe mit dem Lineal lösbar. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 1. Wo dort $P(p, g)$ auszuführen ist, hat man sinngemäß $L\big(p, S_1(g, g_u)\big)$ auszuführen, falls g und g_u sich schneiden, bzw. $P(p, g)$, falls $g \parallel g_u$. Das ist aber nach Satz 3 mit dem Lineal möglich.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Konstruktionen mit dem Lineal allein ist die auf den projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte beruhende punktweise Konstruktion eines Kegelschnittes $\mathfrak{k}$ aus fünf gegebenen Punkten bzw. Tangenten von $\mathfrak{k}$. Für diese Konstruktionen, die über die Abschnitte 5.2 und 5.5 wesentlich hinaus-gehende Kenntnisse der projektiven Geometrie erfordern, verweisen wir auf [5, V, insbesondere § 14] und behandeln hier nur kurz einen Satz dieses Themenkreises, der am angegebenen Ort nicht erwähnt, aber hier an späterer Stelle benötigt wird:

Satz von Oblath.[1]) *Bei Vorgabe eines beliebig kleinen Teilbogens $\mathfrak{b}$ eines nichtausgearteten Kegelschnittes $\mathfrak{k}$ (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel) sind die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit $\mathfrak{k}$ mit dem Lineal allein konstruierbar.*

Der folgende Beweis stammt von F. Hüttemann.[2]) Dazu einige Vorbetrachtungen: Nach dem Satz von Pascal (siehe [5, V]) kann man schon bei Vorgabe von nur fünf Punkten von $\mathfrak{k}$ an jeden gegebenen Punkt von $\mathfrak{k}$ mit dem Lineal allein die Tangente konstruieren. Ist ferner bereits ein Schnittpunkt von g_0 mit $\mathfrak{k}$ bekannt, so ergibt sich

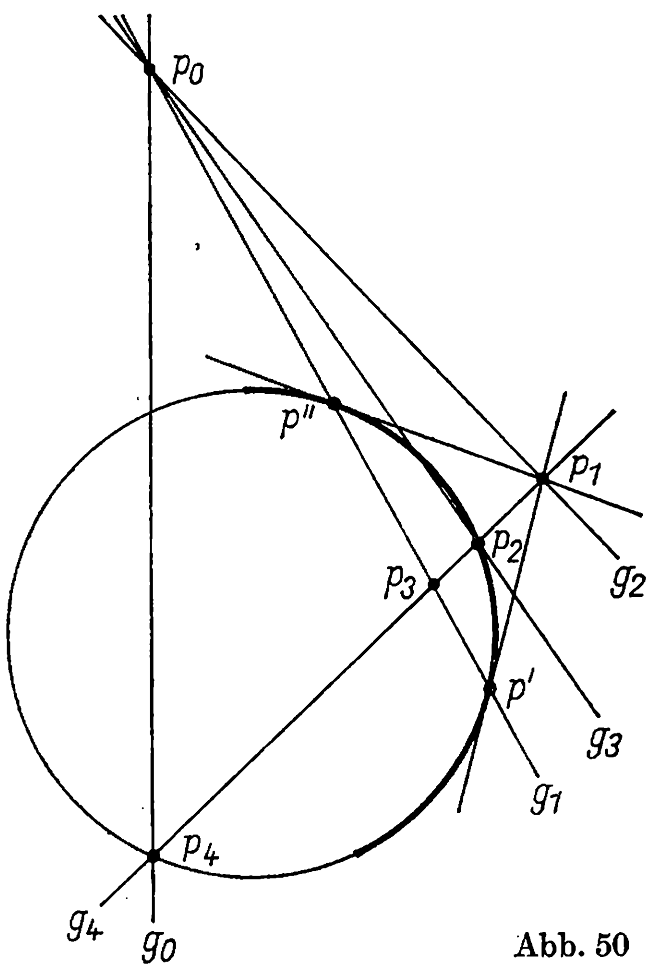


Abb. 50

aus dem Pascalschen Satz eine Linealkonstruktion für den zweiten Schnittpunkt unter Verwendung von nur vier weiteren Punkten von $\mathfrak{k}$. Daher können wir uns beim Beweis des Satzes von Oblath auf den Fall beschränken, daß die gegebene Gerade g_0 das gegebene Stück $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{k}$ nicht trifft.

Sind p', p'' die Schnittpunkte einer Geraden g_1 mit einem nichtausgearteten Kegelschnitt $\mathfrak{k}$, g' bzw. g'' die Tangenten an $\mathfrak{k}$ in p' bzw. p'', so heißt der (eventuell un-

[1]) Monatsh. Math. u. Phys. **15** (1915), 295—298.
[2]) Jahresbericht d. DMV **43** (1933), 184—185.

eigentliche) Schnittpunkt p_1 von g' und g'' der *Pol* von g_1 bezüglich $\mathfrak{k}$ und ferner g_1 die *Polare* von p_1 bezüglich $\mathfrak{k}$ (Abb. 50). Wir benötigen folgenden hier nicht bewiesenen

Hilfssatz. *Ist g_1 Polare von p_1 bezüglich $\mathfrak{k}$, so schneidet eine beliebige Gerade g_4 durch p_1 den Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ entweder überhaupt nicht oder in zwei Punkten, die zu p_1, $S_1(g_1, g_4)$ harmonisch konjugiert sind.*

Die Konstruktion der Schnittpunkte von g_0 und $\mathfrak{k}$ nach Hüttemann verläuft nun wie folgt (Abb. 50): Man wähle eine Hilfsgerade g_1, die g_0 in einem Punkt p_0 (außerhalb $\mathfrak{k}$) und das gegebene Stück $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{k}$ in p', p'' schneidet, so daß der Pol p_1 von g_1 bezüglich $\mathfrak{k}$ eigentlich ist und der zwischen p', p'' befindliche Teilbogen von $\mathfrak{b}$ auf der p_1-Seite von g_1 liegt (d. h., man schneide ein „hinreichend flaches" Teilstück von $\mathfrak{b}$ ab). Laut Vorbetrachtung ist p_1 und damit auch $g_2 = L(p_0, p_1)$ konstruierbar. Nun konstruiere man die vierte harmonische Gerade g_3 zu $g_1, g_2; g_0$. Ist p_2 ein Schnittpunkt von $\mathfrak{b}$ und g_3, so sei $g_4 = L(p_1, p_2)$, $p_3 = S_1(g_4, g_1)$, $p_4 = S_1(g_4, g_0)$. Dann sind wegen der harmonischen Lage der Geradenpaare g_1, g_2 und g_3, g_0 auch die Punktepaare p_3, p_1 und p_2, p_4 harmonisch konjugiert. Nach dem Hilfssatz ist daher der konstruierte Punkt p_4 ein gemeinsamer Punkt von g_4 und $\mathfrak{k}$, folglich auch von g_0 und $\mathfrak{k}$.

Ist umgekehrt p_4 ein Schnittpunkt von $\mathfrak{k}$ und g_0, so sei $g_4 = L(p_4, p_1)$, $p_3 = S_1(g_4, g_1)$, p_2 der vierte harmonische Punkt zu $p_1, p_3; p_4$. Läge p_4 zwischen p_1 und p_3, so auf $\mathfrak{b}$. Wir können daher annehmen, daß p_2 zwischen p_1 und p_3, also auf $\mathfrak{b}$ liegt. Demnach erhält man auch alle Schnittpunkte von g_0 und $\mathfrak{k}$ nach der oben beschriebenen Konstruktion.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer klassifizierenden Behandlung derjenigen Fälle, in denen aus den gegebenen Stücken mit dem Lineal nicht vier Punkte in allgemeiner Lage konstruierbar, folglich die oben behandelten allgemeinen Methoden nicht direkt anwendbar sind. Wie sich zeigt, ist in allen (nach unserer etwas willkürlichen Einteilung sechs) Fällen die Menge der ohne Hilfselemente konstruierbaren Stücke endlich und die Menge der unter Benutzung von Hilfselementen konstruierbaren Stücke leicht überschaubar (Abb. 51). Für das Folgende ist es zweckmäßig, die Schnittpunkte gegebener Geraden gleich zu den gegebenen Stücken zu rechnen.

Fall 1. Es sind überhaupt keine Punkte, d. h. nur endlich viele paarweise parallele Geraden gegeben.

Andernfalls sind die gegebenen Punkte entweder kollinear (Fall 2 bis 5) oder nicht (Fall 6).

Fall 2. Es sind nur kollineare Punkte und (außer eventuell der diese Punkte enthaltenden Geraden g_0) keine Geraden gegeben.

Sind außer den Punkten, die auf einer Geraden g_0 liegen, (und eventuell g_0) weitere Geraden gegeben, so dürfen keine Schnittpunkte außerhalb g_0 entstehen, d. h.,

Fall 3. diese Geraden sind parallel zu g_0 oder

Fall 4. sie sind einander parallel und schneiden g_0 oder

Fall 5. sie schneiden g_0 alle im gleichen Punkt.

Die Fälle 4 und 5 überschneiden sich, falls (außer eventuell g_0) genau eine g_0 schneidende Gerade gegeben ist. Der Fall 5 enthält als bemerkenswerten Spezialfall die Vorgabe endlich vieler koinzidenter Geraden mit einem gemeinsamen Punkt.

Fall 6. Die gegebenen Punkte sind nicht kollinear. Wir behaupten: Dann gibt es eine Gerade g_0 (nicht notwendig zu den gegebenen Stücken gehörend) und einen gegebenen Punkt $p_0 \notin g_0$, so daß alle gegebenen Geraden (außer eventuell g_0) durch p_0 gehen und alle gegebenen Punkte außer p_0 auf g_0 liegen.

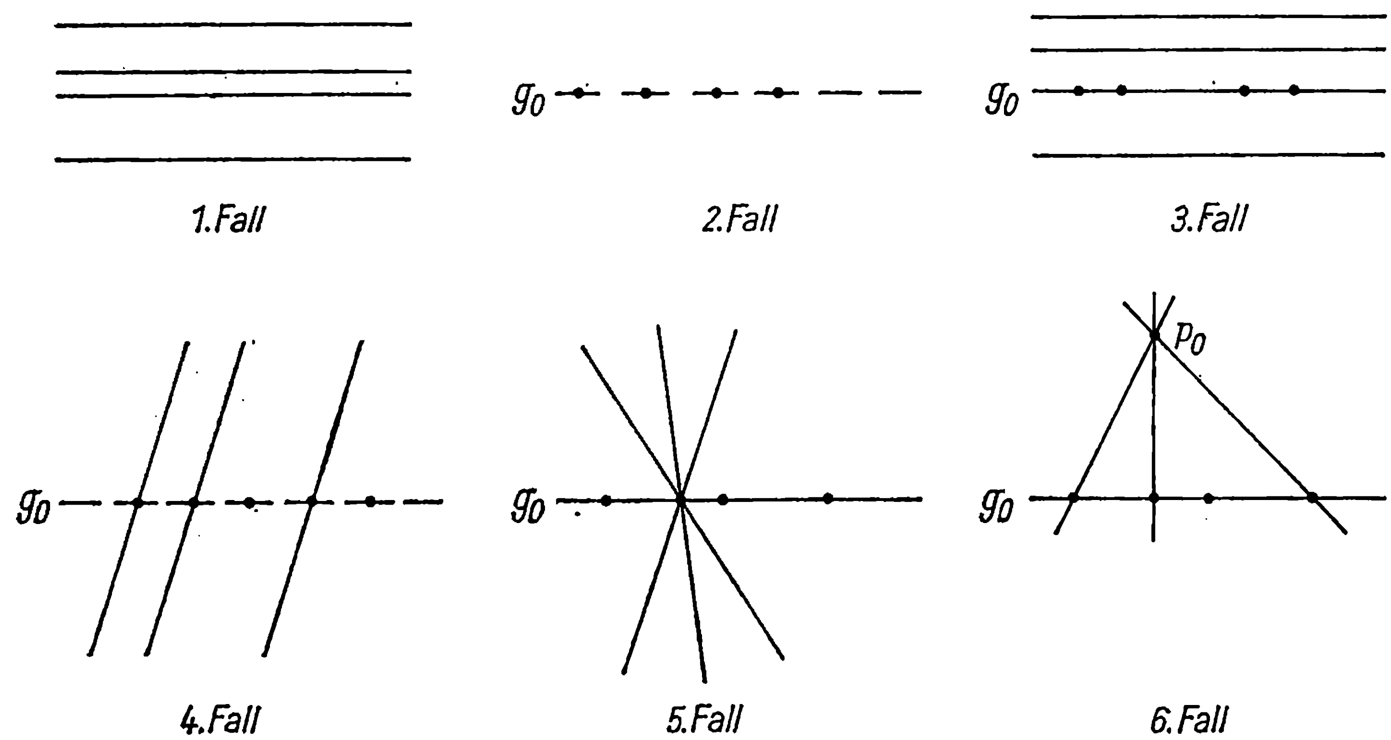


Abb. 51

Zum Beweis sei g_0 eine Gerade, die eine maximale Anzahl der gegebenen Punkte trägt, und p_0 ein gegebener Punkt außerhalb g_0. Wir führen zunächst die Annahme zum Widerspruch, daß ein $p_1 \neq p_0$ mit $p_1 \notin g_0$ gegeben ist. Ist $g_1 = L(p_0, p_1)$ parallel zu g_0 oder $S_1(g_0, g_1)$ kein gegebener Punkt, so befinden sich p_0, p_1 zusammen mit zwei beliebigen der mindestens zwei auf g_0 gegebenen Punkte in allgemeiner Lage. Gehört $p_2 = S_1(g_0, g_1)$ zu den gegebenen Punkten, so sind auf g_1 mindestens drei, folglich auch auf g_0 mindestens drei Punkte gegeben, von denen mindestens zwei von p_0 verschieden sind. Mit je zwei solchen befinden sich p_0, p_1 in allgemeiner Lage.

Ist $n \geqq 3$ für die Anzahl n der auf g_0 gegebenen Punkte, so seien p_1, p_2, p_3 drei solcher Punkte; $g_i = L(p_0, p_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ sind dann paarweise nichtparallel. Daher muß jede von g_0, g_1, g_2, g_3 verschiedene gegebene Gerade g wenigstens zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 schneiden, etwa g_1 und g_2. Falls $S_1(g, g_1) \neq S_1(g, g_2)$ ist, befänden sich diese Punkte zusammen mit p_1, p_2 in allgemeiner Lage. Daher muß jede solche Gerade g durch p_0 gehen.

Ist $n = 2$, so sind also genau drei nichtkollineare Punkte p_0, p_1, p_2 gegeben. Jetzt sei $g_1 = L(p_0, p_2), g_2 = L(p_0, p_1)$. Ist keine von g_0, g_1, g_2 verschiedene Gerade gegeben, so erfüllt jedes der Paare (p_i, g_i) die geforderten Bedingungen. Jede gegebene Gerade, die nicht mit g_i $(i = 0, 1, 2)$ übereinstimmt, schneidet wenigstens zwei verschiedene dieser drei paarweise nichtparallelen Geraden und muß daher durch wenigstens einen der Punkte p_i gehen. Die Annahme, daß zwei von g_0, g_1, g_2 verschiedene gegebene Geraden durch verschiedene Punkte p_i gehen, führt sofort wieder zur Konstruierbarkeit von vier Punkten in allgemeiner Lage. Daher gehen alle von g_0, g_1, g_2 verschiedenen gegebenen Geraden durch den gleichen der gegebenen Punkte, etwa p_0. Dann erfüllen p_0 und g_0 die geforderten Bedingungen.

Vom projektiven Standpunkt ist der dritte Fall ein Spezialfall des fünften (die gegebenen Geraden schneiden sich im uneigentlichen Punkt von g_0) und der vierte Fall ein Spezialfall des sechsten (p_0 uneigentlich). Außerdem ist der zweite Fall (Punktreihe) dual zum ersten bzw. dem erwähnten Spezialfall des fünften (Geradenbüschel mit uneigentlichem oder eigentlichem Zentrum), während der fünfte und der sechste Fall selbstdual sind (Geradenbüschel und Punktreihe auf einer der Büschelgeraden bzw. Punktreihe und Geradenbüschel durch einen der Punkte im fünften Fall, Punktreihe und ein nichtkollinearer Punkt bzw. Geradenbüschel und eine nichtkoinzidente Gerade im sechsten Fall).

Wir wenden uns nun der Frage zu, was in jedem der sechs Fälle konstruierbar ist.

Fall 2. Ohne Benutzung von Hilfselementen ist offenbar nur g_0 konstruierbar. Sind höchstens zwei Punkte gegeben, so sind auch mit Hilfselementen keine weiteren Stücke konstruierbar. Wir skizzieren den Beweis: Kommen in einer in der affinen Geometrie formulierbaren Konstruktion aus $p_0 \neq p_1$ keine parallelen Geraden vor, so ist die durch diese Konstruktion definierte Zuordnung zwischen p_0, p_1 und dem konstruierten Stück x bezüglich beliebiger projektiver Abbildungen invariant. Zu p_0, p_1, x mit $p_0 \neq p_1$, x von p_0, p_1 verschiedener Punkt oder von $L(p_0, p_1)$ verschiedene Gerade, gibt es aber eine projektive Abbildung φ mit $\varphi(p_0) = p_0, \varphi(p_1) = p_1, \varphi(x) \neq x$. Kommen andererseits in einer Konstruktion aus p_0, p_1 parallele Geraden vor, so muß wenigstens eine dieser Geraden als Hilfsgerade gewählt werden, die wiederum zu einer gegebenen, schon konstruierten oder als Hilfsgerade gewählten Geraden parallel ist. Die Zulassung einer solchen Hilfselementoperation würde tatsächlich die Konstruktion aller Punkte von $L(p_0, p_1)$ erlauben, die bezüglich p_0, p_1 eine rationale Koordinate haben, scheint aber bei Konstruktionen mit dem Lineal allein nicht sinnvoll zu sein.

Sind auf g_0 wenigstens drei Punkte gegeben, so ist zu unterscheiden, ob sich darunter drei mit rationalem Teilverhältnis befinden oder nicht. Im ersten Fall ist $P(p, g_0)$ nach Satz 3 für beliebige p ausführbar, was genügt, um bezüglich eines aus gegebenen Punkten p_0, p_1 bestehenden AKS für g_0 alle rational abhängigen Punkte konstruieren zu können. Andernfalls kann man drei beliebige der gegebenen Punkte durch Wahl zweier Hilfspunkte zum Null- bzw. Eins- bzw. ∞-Punkt der x-Achse eines PKS machen. Aus den um die Hilfspunkte vermehrten Stücken sind genau die Punkte konstruierbar, deren beide Koordinaten rational von den Koordinaten der gegebenen

Stücke abhängen. Unter diesen sind genau die auf g_0 liegenden von der Wahl der Hilfspunkte unabhängig.

Fall 1. Ohne Hilfselemente sind offenbar keine weiteren Stücke konstruierbar. Wählt man eine beliebige die gegebenen Geraden schneidende Hilfsgerade g', so können auf die entstehenden Schnittpunkte die Überlegungen zum zweiten Fall übertragen werden. Damit weitere Punkte auf g' konstruierbar werden, müssen mindestens drei Schnittpunkte, d. h. drei Geraden, gegeben sein. In diesem Fall kann man aber durch jeden konstruierbaren Punkt nach Satz 3 die Parallele zur gegebenen Schar ziehen. Die so erhaltenen Geraden sind offenbar von der Wahl der Hilfsgeraden g' unabhängig (Strahlensätze!).

Fall 3. Aus den gegebenen Geraden ist die dem ersten Fall, aus den gegebenen Punkten die dem zweiten Fall entsprechende Menge von Stücken konstruierbar, d. h. höchstens weitere Punkte auf g_0 und weitere zu g_0 parallele Geraden. Die beiden Arten von Konstruktionen beeinflussen sich gegenseitig nur insofern, als die Vorgabe mindestens einer zu g_0 parallelen Geraden schon bei Vorgabe mindestens zweier Punkte auf g_0 die Verwendung eines affinen KS zur Charakterisierung der konstruierbaren Punkte ermöglicht.

Fall 4. Schneidet nur eine Gerade die Gerade g_0, so tritt keine wesentliche Änderung gegenüber dem zweiten Fall ein. (Es sind hier lediglich, falls g_0 selbst nicht gegeben ist, ohne Hilfselemente außer g_0 auch $S_1(g_0, g)$ für alle g_0 schneidenden Geraden konstruierbar.) Schneiden wenigstens zwei parallele Geraden g_0, so ist nach Satz 3 durch jeden auf g_0 gegebenen oder konstruierten Punkt die Parallele zur gegebenen Schar konstruierbar. Daher sind insgesamt genau die Punkte konstruierbar, die auf g_0 liegen und deren Koordinaten bezüglich eines aus gegebenen bzw. ohne Hilfselemente konstruierbaren Punkten bestehenden PKS rational von den Koordinaten derartiger Punkte abhängen. Außerdem sind genau die Geraden konstruierbar, die durch einen auf g_0 konstruierbaren Punkt gehen und parallel zur gegebenen Schar sind.

Fall 5. Das gegebene Geradenbüschel und die gegebene Punktreihe sind im wesentlichen analog zum ersten bzw. zum zweiten Fall zu behandeln. Die Konstruktion weiterer Punkte aus den gegebenen Punkten und die Konstruktion weiterer Geraden aus den gegebenen Geraden sind voneinander unabhängig.

Fall 6. Ohne Hilfselemente ist hier $\big($außer eventuell g_0 und $S_1(g_0, g)\big)$ für weitere gegebene Geraden g eventuell noch $L(p_0, p)$ für einige auf g_0 gegebene Punkte p konstruierbar. Sieht man die endlich vielen ohne Hilfselemente konstruierbaren Stücke von vornherein als gegeben an, so entsprechen die mit Hilfselementen daraus konstruierbaren weiteren Stücke (Punkte auf g_0 und Geraden durch p_0) den im vierten Fall konstruierbaren Stücken. Nur die Bedingung, daß das gegebene Geradenbüschel wenigstens zwei Elemente enthalten muß, spielt jetzt für die Konstruktion weiterer Büschelgeraden keine Rolle mehr, da für auf g_0 erhaltene Punkte p statt $P(p, g)$ jetzt einfach $L(p, p_0)$ auszuführen ist.

12. Das Eichmaß in euklidischen Ebenen

Auch in diesem Kapitel bedeutet die Bezeichnung *Stücke* Punkte und Geraden.

Die Tatsache, daß beliebige Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nur in platonischen Ebenen gerechtfertigt werden können (vgl. die Abschnitte 5.7, 7.2 und 9.3), legt die Frage nach einem Instrumentensatz nahe, der beliebigen euklidischen Ebenen in der gleichen Weise angepaßt ist wie das projektive Lineal den affinen Ebenen und Zirkel und Lineal den platonischen Ebenen, d. h. mit dem aus gegebenen Stücken genau die Stücke konstruierbar sind, deren Existenz aus den Voraussetzungen der Konstruktionen mit Hilfe der Axiome I1 bis I5, A1 bis A5, K1 bis K6 der euklidischen Ebenen beweisbar ist, also genau die Stücke, die die kleinste von den gegebenen Stücken erzeugte euklidische Ebene bilden. Nach der algebraischen Charakterisierung der euklidischen Ebenen ist also ein Instrumentensatz gesucht, mit dem aus gegebenen Stücken (aus denen wenigstens drei nichtkollineare Punkte konstruierbar sind) genau die Stücke konstruierbar sind, deren Koordinaten bezüglich eines konstruierbaren KKS in dem von den Koordinaten der gegebenen Stücke erzeugten pythagoräischen Körper liegen. Hilbert [10] zeigte, daß das Eichmaß (L, S_1, A_e^+, A_e^-) die gewünschte Eigenschaft hat.

Satz 1. *Sind aus gegebenen Stücken mit dem Eichmaß wenigstens drei nichtkollineare Punkte konstruierbar, so ist ein KKS konstruierbar. Bezüglich jedes konstruierbaren KKS sind genau die Stücke konstruierbar, deren Koordinaten durch wiederholte Anwendung der vier Körperoperationen und der Operation Pyth.* $\left(Pyth.(a, b) := \sqrt{a^2 + b^2};\right.$ vgl. Abschnitt $\left.4.4\right)$ *aus den Koordinaten der gegebenen Stücke und der Länge e der auf dem Lineal markierten Strecke erhalten werden.*

Beweis. Die algebraische Analyse der Operation $\mathrm{A}_e^+(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}} = \mathrm{e})$; falls $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$; vgl. Abschnitt 7.2, ergibt, falls etwa die x-Koordinaten x_1, x_2 der gegebenen Punkte verschieden sind,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{e}{\overline{p_1 p_2}} = \frac{e}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad \text{(Abb. 52)},$$

d. h.

$$x = x_1 + \frac{e(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}} \in Pyth.(\{e, x_1, x_2, y_1, y_2\}).$$

Ist $x_1 = x_2$, so auch $x = x_2$. Analoges gilt für die y-Koordinaten und für $A_e^-(p_1, p_2) = \iota p((p, p_1, p_2) \wedge \overline{pp_1} = e)$. Mit dem Eichmaß sind also höchstens solche Stücke konstruierbar, deren Koordinaten bezüglich eines beliebigen (nicht notwendig aus den gegebenen Stücken konstruierbaren) KKS die im Satz behauptete Form haben.

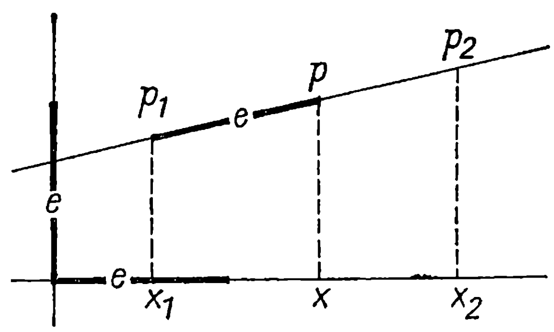


Abb. 52

Unter Benutzung von zwei (eventuell Hilfs-) Punkten auf g ist $P(p, g)$ mit dem Eichmaß ausführbar: Sind $p_1, p_2 \in g$ gegeben, konstruiert oder beliebig gewählt, so sei $p_3 = A_e^+(p_1, p_2)$, $p_4 = A_e^-(p_1, p_2)$. Dann ist $p_1 = M(p_3, p_4)$. Der Rest folgt aus Kapitel 11, Satz 4. Das Eichmaß hat also mindestens die Leistungsfähigkeit des projektiven Lineals.

Zu einer gegebenen Geraden g ist mit dem Eichmaß unter Verwendung zweier (Hilfs-) Punkte auf g und zweier (Hilfs-) Punkte außerhalb g eine Senkrechte konstruierbar (Abb. 53):

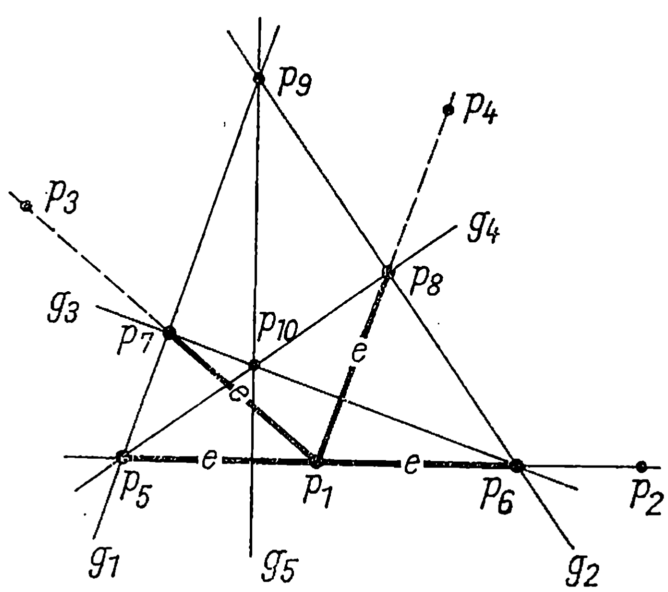


Abb. 53

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{g} \\
& \downarrow \\
& \mathrm{p}_1 = \varepsilon \mathrm{p}\ \mathrm{p} \in \mathrm{g} \\
& \mathrm{p}_2 = \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_1) \\
& \mathrm{p}_3 = \varepsilon \mathrm{p}\ \mathrm{p} \notin \mathrm{g} \\
& \mathrm{p}_4 = \varepsilon \mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \text{Halbebene}(\mathrm{g}, \mathrm{p}_3) \wedge \mathrm{p}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear}\big) \\
& \mathrm{p}_5 = \mathrm{A}_e^-(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\
& \mathrm{p}_6 = \mathrm{A}_e^+(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\
& \mathrm{p}_7 = \mathrm{A}_e^+(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3) \\
& \mathrm{p}_8 = \mathrm{A}_e^+(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_4) \\
& \mathrm{g}_1 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_5, \mathrm{p}_7) \\
& \mathrm{g}_2 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_6, \mathrm{p}_8) \\
& \mathrm{g}_3 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_6, \mathrm{p}_7) \\
& \mathrm{g}_4 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_5, \mathrm{p}_8) \\
& \mathrm{p}_9 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \\
& \mathrm{p}_{10} = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_3, \mathrm{g}_4) \\
& \mathrm{g}_5 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_9, \mathrm{p}_{10}) \\
& \qquad \downarrow \\
& \qquad \mathrm{g}_5
\end{aligned}
$$

Offenbar sind $\sphericalangle\ p_5p_7p_6$ und $\sphericalangle\ p_5p_8p_6$ Rechte als Winkel im Thaleshalbkreis über p_5p_6. Daher sind $\sphericalangle\ p_6p_5p_7$ und $\sphericalangle\ p_5p_6p_8$ spitz. Demnach schneiden sich g_1 und $g_2 \cdot p_{10}$ ist Schnittpunkt zweier Höhen im Dreieck $p_5p_6p_9$, daher $g_5 \perp g$.

Mit dem Eichmaß ist folglich zu p, g das Lot $Lot(p, g)$ durch p auf g (als Parallele durch p zu einer auf g senkrechten Geraden) konstruierbar.

Sind nun wenigstens drei nichtkollineare Punkte p_1, p_2, p_3 gegeben oder schon konstruiert, so sei

$$p_4 = A_e^+(p_1, p_2),\ g_1 = L(p_1, p_2),\ g_2 = Lot(p_1, g_1),\ g_3 = P(p_3, g_1),$$
$$p_5 = S_1(g_2, g_3),\ p_6 = A_e^+(p_1, p_5).$$

Offenbar ist p_1, p_4, p_6 ein KKS. Bezüglich dieses oder eines anderen konstruierbaren KKS sind schon mit dem projektiven Lineal alle von den gegebenen Stücken rational abhängigen Stücke konstruierbar. Es bleibt nur zu zeigen, daß man mit dem Eichmaß außerdem zu Koordinaten a, b einen Punkt p der x-Achse mit der x-Koordinate $\sqrt{a^2 + b^2}$ konstruieren kann. Dabei genügt es, den Fall $a > 0$, $b > 0$ zu betrachten.

Sei also p_0, p_1, p_2 ein konstruierbares KKS (Abb. 54), p_3 der Punkt mit den Koordinaten a, b, der offenbar konstruierbar ist, falls a, b konstruierbare Koordinaten sind. Wir konstruieren:

$$p_4 = A_e^+(p_0, p_1),\ p_5 = A_e^+(p_0, p_3),\ g_1 = L(p_0, p_1),$$
$$g_2 = L(p_4, p_5),\ g_3 = P(p_3, g_2),\ p_6 = S_1(g_1, g_3).$$

Es ist dann

$$\overline{p_0 p_3} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{p_0 p_3}}{\overline{p_0 p_5}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{e} = \frac{\overline{p_0 p_6}}{\overline{p_0 p_4}},$$

d. h.

$$\overline{p_0 p_6} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

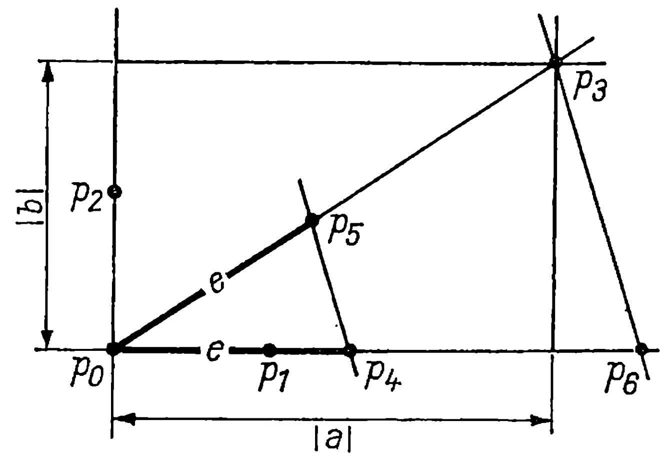


Abb. 54

Will man die Abhängigkeit der konstruierbaren Stücke von der Länge der auf dem Lineal markierten Strecke beseitigen, so hat man zum unbeschränkten Eichmaß überzugehen, bei dem die mit A^+ bzw. A^- zu übertragende Strecke e an gegebenen oder schon konstruierten Punkten abgegriffen wird. Sind wenigstens zwei Punkte gegeben oder mit dem Lineal allein aus den gegebenen Stücken konstruierbar, so ist solches „nachträgliches Markieren des Lineals“ auf wenigstens eine Weise möglich. Die obigen Überlegungen zeigen dann, daß man beim unbeschränkten Eichmaß mit einmaliger Markierung auskommt bzw. daß durch Markieren verschiedener konstruierter Strecken der Bereich der konstruierbaren Stücke nicht erweitert wird. Die praktische Ausführung von Konstruktionen wird aber natürlich durch die Möglichkeit, beliebige konstruierte Strecken in einem Schritt abzutragen, wesentlich einfacher.

Wir schließen wieder mit einer Betrachtung derjenigen Fälle, auf die Satz 1 nicht anwendbar ist.

Fall 1. Aus den gegebenen Stücken sind wenigstens zwei Punkte konstruierbar, aber alle konstruierbaren Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden g_0. Dann sind alle von g_0 verschiedenen konstruierbaren Geraden auf g_0 senkrecht. Da mit dem Eichmaß in jedem Punkt von g_0 das Lot errichtet werden kann, schneidet jedes solche Lot eine zu g_0 parallele konstruierbare Gerade in einem konstruierbaren Punkt außerhalb g_0. Schneidet jedoch eine konstruierbare Gerade g die Gerade g_0 in p_0, so gibt es wenigstens noch einen von p_0 verschiedenen konstruierbaren Punkt auf g_0, und das in diesem Punkt errichtete Lot schneidet g, falls g nicht senkrecht auf g_0 ist. Ergänzt man nun zwei konstruierbare Punkte von g_0 durch einen nichtkollinearen

Hilfspunkt, so wird nach Satz 1 ein KKS konstruierbar, und es werden alle Punkte konstruierbar, die aus den Koordinaten der gegebenen Punkte wie in Satz 1 formuliert erhalten werden können. Unter diesen sind genau die Punkte von g_0 von der Wahl des Hilfspunktes unabhängig (wählt man einen Hilfspunkt auf der entgegengesetzten Halbebene, so ändern sich die y-Koordinaten aller Punkte um das Vorzeichen). Zu jedem so konstruierbaren Punkt der Geraden g_0 ist nun aber noch das Lot auf g_0 konstruierbar.

Fall 2. Es ist genau ein Punkt p_0 konstruierbar. Dann müssen alle konstruierbaren Geraden g durch p_0 gehen, weil sonst der Lotfußpunkt von p_0 auf g als von p_0 verschiedener Punkt konstruierbar wäre. Ist nur p_0 gegeben, so ist nichts definierbar, also auch nichts konstruierbar. Ist wenigstens eine Gerade g_0 durch p_0 gegeben, so kann $g_1 = Lot(p_0, g_0)$ konstruiert werden. Sind keine von p_0, g_0, g_1 verschiedenen Stücke gegeben, so ist auch mit Hilfselementen nichts weiter konstruierbar, weil nicht einmal euklidisch definierbar: Spiegelung an g_0 läßt p_0, g_0, g_1 jedoch keine andere durch p_0 gehende Gerade invariant. Ist noch eine Gerade $g_2 \neq g_0, g_1$ durch p_0 gegeben, so kann man unter Benutzung von Hilfspunkten die auf dem Lineal markierte Strecke e so an p_0 auf g_0 und g_1 abtragen, daß bezüglich des erhaltenen KKS der Anstieg von g_2 positiv ist. Sieht man das KKS zunächst als zusätzlich gegeben an, so ist Satz 1 anwendbar. Von den erhaltenen Stücken sind genau die konstruierbaren Geraden durch p_0 unabhängig von der Auswahl der Hilfselemente (d. h. im wesentlichen unabhängig von der Auswahl eines der beiden Quadranten, durch die g_2 verläuft). Es sind dies genau alle Geraden, deren Anstieg in dem von den Anstiegen der gegebenen Geraden erzeugten pythagoräischen Körper liegt. Jede Bewegung, die p_0, g_0 und die gegebenen Geraden invariant läßt, läßt auch alle diese Geraden invariant.

Fall 3. Es sind keine Punkte konstruierbar. Dann sind alle konstruierbaren, insbesondere alle gegebenen Geraden parallel. Sind wenigstens zwei solche g_0, g_1 gegeben, so fälle man von einem beliebigen Hilfspunkt p_0 das Lot $g' = Lot(p_0, g_0)$ und wende auf die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit g' den ersten Fall an. Sieht man g' als zusätzlich gegeben an, so sind alle Punkte und die in diesen Punkten auf g' errichteten Lote wie im Fall 1 konstruierbar. Die letzten sind aber von der Wahl von p_0 unabhängig. Weitere Stücke sind offenbar nicht definierbar.

13. Äquivalenz von Instrumentensätzen zu Zirkel und Lineal

In diesem Kapitel behandeln wir die klassischen Resultate über Instrumentensätze, die zu Zirkel und Lineal gleichwertig sind. Dabei setzen wir voraus, daß die betrachteten Ebenen platonisch sind.

13.1. Der Satz von Poncelet-Steiner und verwandte Sätze

Im Anschluß an die in Kapitel 11 dargestellte Theorie der Konstruktionen mit dem Lineal allein erhebt sich die Frage nach möglichst schwachen Voraussetzungen, unter denen das Lineal allein zu Zirkel und Lineal äquivalent ist. Da mit dem Lineal und allgemeiner mit Instrumenten zum Zeichnen von Geraden keine Kreise gezeichnet werden können, ist natürlich unter Äquivalenz in diesem Zusammenhang Äquivalenz bezüglich der Konstruierbarkeit von Punkten und Geraden zu verstehen. Der zentrale Satz zu diesem Thema ist der bereits in Abschnitt 8.7 diskutierte

Satz von Poncelet-Steiner. *Befindet sich unter den gegebenen Stücken ein Kreis k_0 und ist dessen Mittelpunkt p_0 ebenfalls gegeben oder mit dem Lineal allein konstruierbar, so sind alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben, die die Konstruktion von Punkten und Geraden fordern, mit dem Lineal allein lösbar, d. h., das Lineal allein ist bezüglich der Konstruktion von Punkten und Geraden bedingt äquivalent zu Zirkel und Lineal.*

In den folgenden Konstruktionen und Überlegungen bezeichnet stets k_0 den gegebenen Kreis und p_0 dessen Mittelpunkt.

1. Zu jedem Punkt $p_1 \neq p_0$ ist auf $L(p_0, p_1)$ eine Strecke mit Mittelpunkt konstruierbar:

$$\mathrm{g}_1 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1),\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_0, \mathrm{g}_1),$$
$$\mathrm{p}_3 = \iota\mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)),$$
$$\mathrm{p}_5 = \iota\mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_3).$$

Sind daher wenigstens zwei Punkte p_1, p_2 gegeben oder konstruierbar, so daß p_0, p_1, p_2 nicht kollinear sind, so ist ein AKS konstruierbar, und nach Kapitel 11 sind bezüglich jedes solchen AKS alle Aufgaben ersten Grades lösbar.

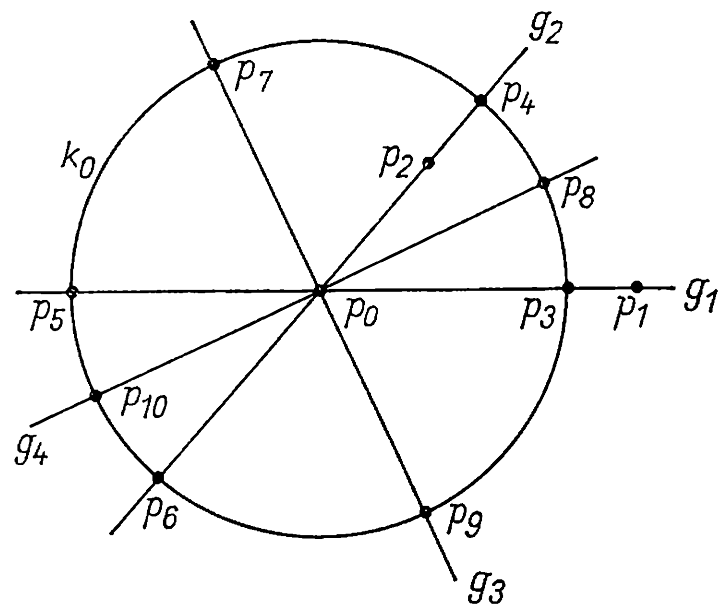


Abb. 55

Insbesondere ist dann die Operation P des Parallelenziehens in beliebigen Richtungen ausführbar. Daraus ergibt sich die Konstruierbarkeit eines KKS (Abb. 55): Man konstruiere zunächst wie beschrieben aus k_0, p_0, p_1 die Punkte p_3, p_5 und analog unter Benutzung von p_2 statt p_1 die Punkte p_4, p_6. Dann bilden p_3, p_4, p_5, p_6 ein Rechteck. Weiterhin sei

$$\mathrm{g}_3 = \mathrm{P}(\mathrm{p}_0, \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)),$$
$$\mathrm{g}_4 = \mathrm{P}(\mathrm{p}_0, \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_6)),$$
$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_0, \mathrm{g}_3),$$
$$\mathrm{P}_4 = \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_0, \mathrm{g}_4),$$
$$\mathrm{p}_7 = \iota\mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_1, \mathrm{p}_2)),$$
$$\mathrm{p}_8 = \iota\mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_4 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_2, \mathrm{p}_1)).$$

Offenbar ist p_0, p_8, p_7 ein KKS. Ferner vermerken wir für einen späteren Zweck, daß p_7, p_8 und die wie in Abb. 55 konstruierten Punkte p_9, p_{10} ein k_0 einbeschriebenes Quadrat bilden.

2. Bezeichnet r den Radius von k_0, so ist zu je zwei Strecken b, c der x-Achse eines konstruierbaren KKS mit $b + c = 2r$ auf der y-Achse (und damit auch auf der

x-Achse) eine Strecke der Länge $\sqrt{b \cdot c}$ konstruierbar (Abb. 56): Durch Translation der Strecke b kann man den zur x-Achse des betrachteten KKS parallelen Durchmesser von k_0 durch einen Punkt p_1 in eine Strecke der Länge b und eine Strecke der Länge $2r - b = c$ teilen. Die Parallele zur y-Achse durch p_1 schneidet k_0 in zwei Punkten p mit $\overline{p_1 p} = \sqrt{b \cdot c}$. Von diesen beiden Punkten kann man unter Benutzung des KKS einen konstruktiv auswählen und die erhaltene Strecke wiederum durch Translation auf die y-Achse übertragen.

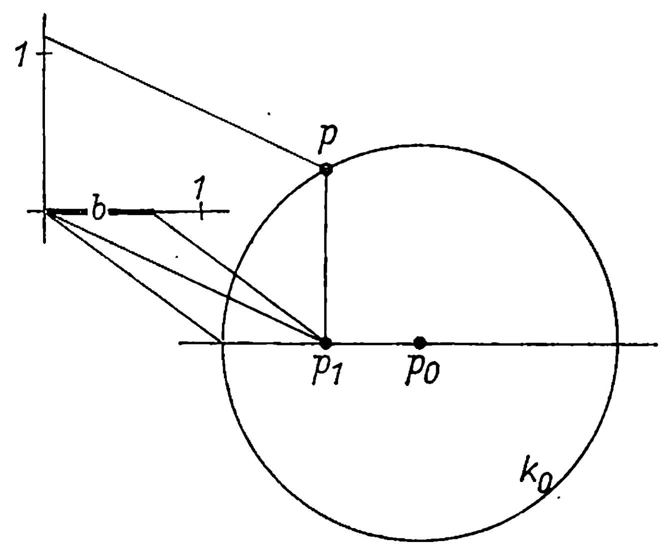


Abb. 56

Für positive Elemente b, c des Koordinatenkörpers der betrachteten Ebene mit $b + c = 2r$ ist demnach die durch $F_r(b, c) := \sqrt{b \cdot c}$ definierte Operation F_r ausführbar. Da für beliebige Koordinaten $a > 0$

$$\sqrt{a} = \frac{a+1}{2r} \cdot F_r\left(\frac{2ar}{a+1}, \frac{2r}{a+1}\right)$$

gilt, ist die $\sqrt{}$-Operation rational auf F_r reduzierbar. Daher sind bei Vorgabe von k_0 und p_0 alle aus den gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte (und damit auch alle Geraden) schon mit dem Lineal allein konstruierbar. Die Übersetzung einer mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktion in eine Konstruktion mit dem Lineal allein ist hiernach durch algebraische Analyse der Aufgabe möglich.

Wir skizzieren noch einen zweiten Beweis, der ein anderes Eliminationsverfahren für den Zirkel liefert:

In einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, deren Endresultat nur aus Punkten und Geraden besteht, dienen alle konstruierten Kreise nur dazu, ihre Schnittpunkte miteinander bzw. mit gewissen Geraden zu bestimmen. Kann man daher die beiden Operationen

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{g}) := \mathrm{S}_2(\mathrm{Z}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3), \mathrm{g}),$$

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4, \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6) := \mathrm{S}_3(\mathrm{Z}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3),\ \mathrm{Z}(\mathrm{p}_4; \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6))$$

bei Vorgabe von k_0 und p_0 mit dem Lineal allein ausführen, so läßt sich jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal Schritt für Schritt in eine Konstruktion mit dem Lineal allein übersetzen. Zur Ausführung von F_1 können wir zunächst durch die Translation $\overrightarrow{p_1 p_3}$ erreichen, daß der zu schneidende Kreis k durch seinen Mittelpunkt p_1 und einen Punkt p_2 seiner Peripherie gegeben ist. Nun konstruiere man das Zentrum p_s der Homothetie φ, die diesen Kreis in k_0 überführt (Abb. 57), dann $g_0 = \varphi(g)$ und bestimme $P = S_2(k_0, g_0)$. Die Urbildpunkte $\varphi^{-1}(P)$ sind dann offenbar das gesuchte

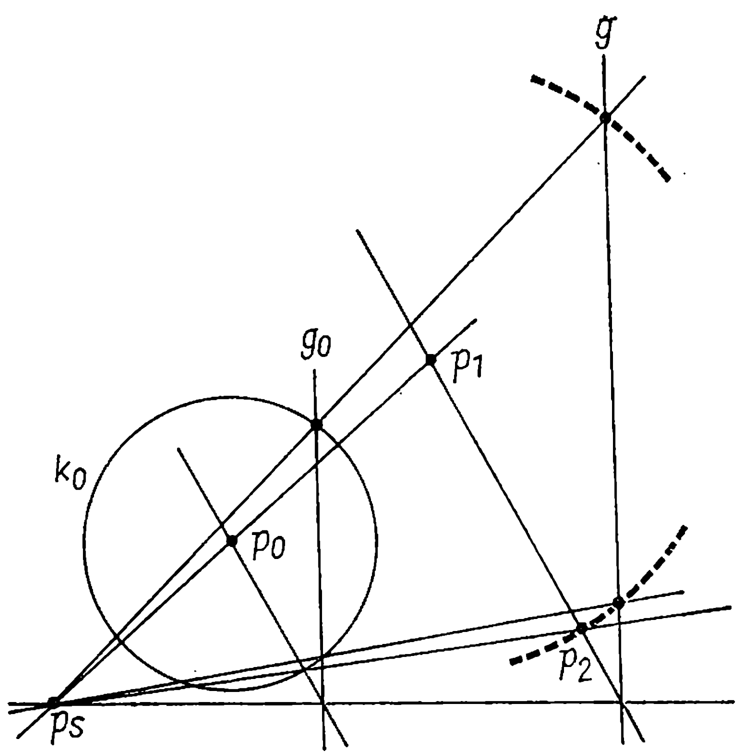


Abb. 57

Gebilde $S_2(k, g)$. Diese Methode ist sinngemäß auch dann noch anwendbar, wenn k_0 und k konzentrisch sind (also $p_s = p_0 = p_1$); p_s ist jedoch nicht unmittelbar zu konstruieren, falls p_2, p_1, p_0 kollinear und paarweise verschieden sind. In diesem Fall muß man zunächst p_2 durch einen anderen Punkt von k ersetzen. Allgemein kann das Abtragen einer Strecke auf einem Strahl durch Translationen auf Drehung eines Punktes p_2 um p_0 in eine durch $p_1 \neq p_0$ gegebene Richtung zurückgeführt werden. (Dies steht in engem Zusammenhang zur Definierbarkeit der Kongruenz durch Punkt-Kreisinzidenz; vgl. Abschnitt 5.7) Den Lösungsweg für Drehung um p_0 entnehme man Abb. 58.

Zur Realisierung von F_2 durch eine Konstruktion mit dem Lineal allein beweisen wir zunächst den

S a t z von STEINER. *Ist ein Quadrat gegeben oder aus den gegebenen Stücken konstruierbar, so ist die Operation Lot mit dem Lineal allein ausführbar.*

Wir beginnen den Beweis mit der Bemerkung, daß nach Kapitel 11 die Vorgabe eines Quadrats Konstruierbarkeit eines KKS und Lösbarkeit aller Aufgaben ersten Grades mit dem Lineal allein zur Folge hat, und daß das Fällen bzw. Errichten von

Loten bezüglich kartesischer Koordinatensysteme „zufällig" eine Aufgabe ersten Grades, folglich mit dem Lineal allein lösbar ist. Obwohl der Satz von STEINER damit schon bewiesen ist, wollen wir die durch ihre Eleganz berühmte Steinersche Lösung folgen lassen, die wesentlich von metrischen Überlegungen Gebrauch macht.

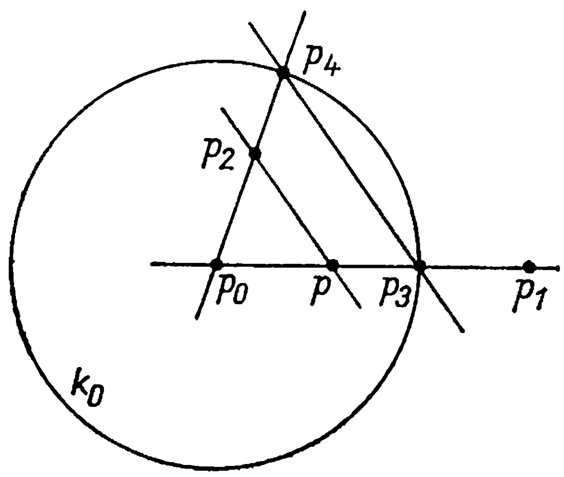


Abb. 58

Es sei g eine Gerade durch den Mittelpunkt p des Quadrats mit den Ecken p_1, p_2, p_3, p_4, und g schneide etwa die Seite p_1p_2 in p_5. Man konstruiere (Abb. 59):

$$g_1 = P(p_5, L(p_2, p_3)),\ p_6 = S_1(g_1, L(p_3, p_4)),\ g_2 = P(p_6, L(p_1, p_3)),$$

$$p_7 = S_1(g_2, L(p_4, p_1)),\ g_3 = L(p, p_7).$$

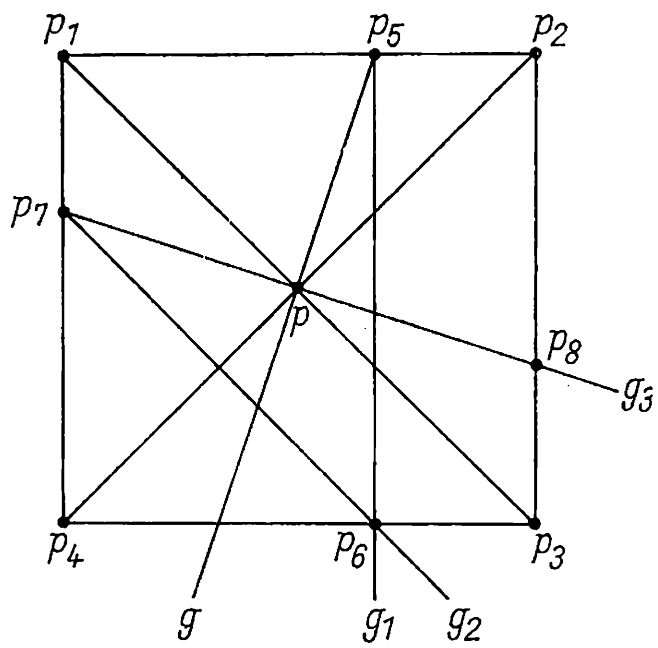


Abb. 59

Für den folgenden Beweis bezeichne ferner p_8 den Punkt $S_1(g_3, L(p_2, p_3))$. Durch Symmetrie bzw. nach Konstruktion ist nun

$$p_1p_7 \cong p_6p_3 \cong p_2p_5,$$

$$p_1p_5 \cong p_4p_6 \cong p_4p_7 \cong p_2p_8,$$

daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $p_7p_1p_5$ und $p_8p_2p_5$ kongruent, insbesondere gilt $p_7p_5 \cong p_5p_8$. Da auch $p_7p \cong pp_8$ ist, ist folglich

$$\sphericalangle\, p_7pp_5 = \sphericalangle\, p_8pp_5, \text{ d. h. } g \perp g_3.$$

Sind nun p', g' beliebig (Abb. 60), so sei $g = P(p, g')$, g_3 die zu g wie oben konstruierte Gerade; $g_3' = P(p', g_3)$ ist das gesuchte Lot.

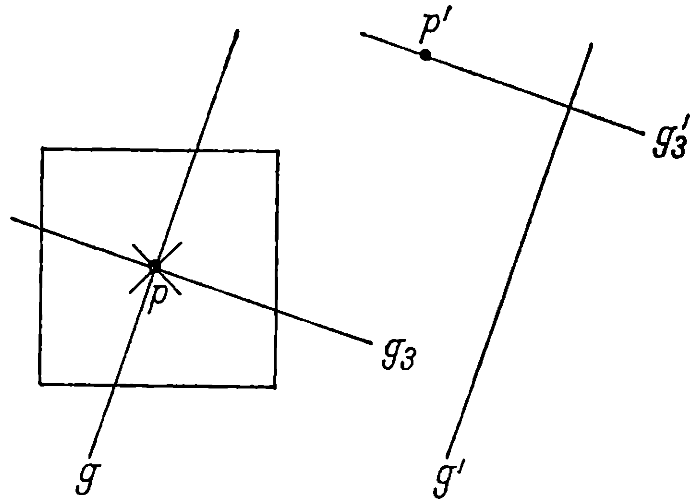


Abb. 60

Wir beenden den zweiten Beweis des Satzes von PONCELET-STEINER: Die Kreise k_1, k_2 seien durch ihre Mittelpunkte p_1 bzw. p_2 und ihre Radien r_1 bzw. r_2 (in Gestalt von Punktepaaren) gegeben. Die algebraische Analyse der Aufgabe $S_3(k_1, k_2)$ (Abb. 61) liefert Quadratwurzelausdrücke in r_1, r_2 und dem Abstand d von p_1, p_2 für die Strecken

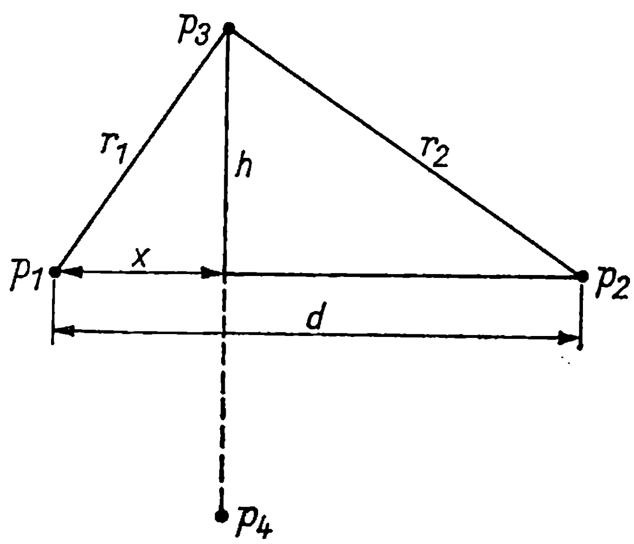


Abb. 61

x und h, die folglich dem ersten Beweis folgend konstruiert werden können. Dabei benutzen wir die Möglichkeit, r_1, r_2 und d auf einem konstruierten oder beliebig gewählten „Rechenstrahl" abzutragen (vgl. die Erläuterung zu Abb. 58). Trägt man nun x auf dem *Strahl* (p_1, p_2) ab und errichtet im erhaltenen Punkt das Lot (unter Benutzung von k_0, p_0 war ja ein Quadrat konstruierbar!), so hat man nur noch h nach beiden Seiten abzutragen, um die gesuchten Schnittpunkte p_3, p_4 von k_1 und k_2 zu finden.

Während die hier beschriebene Methode auch auf die Realisierung von F_1 mit dem Lineal allein anwendbar ist, kann man umgekehrt die Ausführung von F_2 auf F_1 zurückführen, indem man aus p_1, p_2, r_1, r_2 zunächst die Potenzgerade beider Kreise konstruiert und diese dann mit einem von ihnen schneidet (vgl. [1, S. 86] bzw. [8, S. 170]). Damit sind für den Satz von Poncelet-Steiner drei wesentlich verschiedene Beweise skizziert, deren jeder eine Methode liefert, beliebige mit Zirkel und Lineal gelöste Konstruktionsaufgaben bei Vorgabe von p_0, k_0 mit dem Lineal allein zu lösen:

a) Konstruktion eines KKS und Lösung durch algebraische Analyse der Gesamtaufgabe,

b) Ersetzung jedes Vorkommens der (mit Zirkel und Lineal ausgeführten) Operationen F_1, F_2 durch eine Linealkonstruktion nach der synthetischen Methode,

c) Ersetzung jedes Vorkommens von F_1 bzw. F_2 durch eine Linealkonstruktion auf Grund der algebraischen Analyse von F_1 und F_2.

Wie sich der Leser überzeugen konnte, liefert a) den kürzesten Beweis des Satzes, falls man die affine Theorie der Linealkonstruktionen schon kennt. Da praktische Anwendungen des Satzes von Poncelet-Steiner kaum denkbar sind, ist es müßig, die Verfahren a), b), c) hinsichtlich ihrer praktischen Durchführung zu vergleichen. Die Suche nach einfach durchführbaren oder mit geringen theoretischen Hilfsmitteln zu begründenden Lösungen für spezielle Aufgaben (vgl. den Satz von Steiner) ist jedoch ein reizvolles Feld für mathematische Knobeleien. Dies gilt sinngemäß auch für die folgenden Sätze dieses Kapitels.

Ergänzungen und Verschärfungen des Satzes von Poncelet-Steiner.

1. Wie im Satz formuliert, genügt es, statt Vorgabe von p_0 Konstruierbarkeit von p_0 aus den gegebenen Stücken vorauszusetzen. *$M(k_0)$ ist aus den gegebenen Stücken genau dann mit dem Lineal konstruierbar, wenn die Operation P mit dem Lineal allein ausführbar ist.* Zu zeigen ist nur noch, daß Ausführbarkeit von P (die laut Kapitel 11 die Halbierbarkeit beliebiger Strecken zur Folge hat) die Konstruktion von $M(k_0)$ gestattet: Man konstruiere zwei parallele Sehnen von k_0, halbiere sie und danach den durch die erhaltenen Mittelpunkte gelegten Durchmesser.

2. *Die Vorgabe eines Kreises k_0 allein gestattet nicht die Konstruktion paralleler Geraden mittels (L, S_1).* Man kann sogar direkt zeigen, daß die Operation M, die jedem Kreis seinen Mittelpunkt zuordnet, nicht projektiv definierbar, folglich nicht durch eine (L, S_1)-Konstruktion realisierbar ist: Man wähle zu gegebenem k_0 ein KKS so, daß k_0 durch die Gleichung $(a-x)^2 + y^2 = a^2 - 1$ beschrieben wird. Die durch $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x'}$ gegebene projektive Abbildung läßt k_0 invariant und führt $M(k_0)$ mit den Koordinaten $(a, 0)$ in den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ über.

3. Nach dem Satz von Oblath (Kapitel 11) genügt bereits die Vorgabe eines beliebig kleinen Teilbogens von k_0, um (ohne weitere Vorgaben) mittels (L, S_1) die Schnittpunkte von k_0 mit einer beliebigen Geraden konstruieren zu können.

4. Laut logischer Analyse des normierten Lineals (vgl. Abschnitt 7.2) ist mit diesem außer L und S_1 gerade $S_2(k_0, g)$ für beliebige Geraden g und Punkte p_0 ausführbar, wobei k_0 der Kreis vom Radius a (Länge der markierten Strecke) um p_0 ist. Daher folgt aus dem Satz von PONCELET-STEINER sofort:

Alle aus gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Geraden sind auch mit dem normierten Lineal konstruierbar. (*Umgekehrt sind die mit dem normierten Lineal konstruierbaren Stücke genau dann auch mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn die Länge der auf dem Lineal markierten Strecke aus den gegebenen Stücken konstruierbar ist.*)

Auf den Satz von PONCELET-STEINER läßt sich auch der Satz von ADLER zurückführen.

Satz von ADLER. *Alle aus gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Geraden sind auch*

a) *mit dem Winkellineal allein,*

b) *mit dem Parallellineal allein*

konstruierbar. (*Umgekehrt sind die mit diesen Instrumenten konstruierbaren Punkte und Geraden genau dann auch mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn aus den gegebenen Stücken der Winkel des Winkellineals bzw. die Breite des Parallellineals mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.*)

Die jeweiligen Umkehrungen folgen aus der algebraischen Analyse der genannten Instrumente. Unter Berücksichtigung des Satzes von PONCELET-STEINER ist daher nur zu zeigen, daß sowohl mit dem Winkellineal als auch mit dem Parallellineal die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einem Kreis um einen Punkt p_0 konstruiert werden können (wobei der Radius dieses Kreises eventuell als Hilfselement auftritt).

Wir betrachten zunächst das Winkellineal ($\mathrm{L}, \mathrm{S}_1, \mathrm{W}_1^\alpha, \mathrm{W}_2^\alpha$) mit

$$\mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}, \mathrm{g}) \mathrel{\overset{}{=}}\{\mathrm{g}' : \mathrm{p} \in \mathrm{g}' \wedge \sphericalangle\, \mathrm{g}, \mathrm{g}' = \alpha\},$$

$$\mathrm{W}_2^\alpha(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{g}) = \{\mathrm{p} : \mathrm{p} \in \mathrm{g} \wedge \sphericalangle\, \mathrm{p}_1\mathrm{p}\mathrm{p}_2 = \alpha\}$$

(vgl. Abschnitt 7.2). Mittels W_1^α und konstruktiver Auswahl ist die Operation P ausführbar:

p, g
$\downarrow$
$\mathrm{G}_1 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}, \mathrm{g})$
$\mathrm{G}_2 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}, \mathrm{G}_1)$ $\quad G_2$ besteht im allgemeinen aus drei Geraden (Abb. 62), von denen genau eine g nicht schneidet.
$\mathrm{g}_1 = \iota \mathrm{g}'(\mathrm{g}' \in \mathrm{G}_2 \wedge \mathrm{g}' \mathrel{\underline{\|}} \mathrm{g})$
$\downarrow$
g_1

Das weitere ist am einfachsten im Fall $\alpha = \mathrm{R}$ des *Rechtwinkellineals*. Zu zwei gegebenen Punkten p_1, p_2 ist (nach Kapitel 11 mittels L, S_1, P) $p_3 = M(p_1, p_2)$ konstruierbar, und es ist für beliebige Geraden g $S_2(Z(p_3; p_1, p_3), g) = W_2^R(p_1, p_2, g)$. Ist α spitz, so überstreicht die Spitze des Winkellineals, dessen Schenkel durch p_1 bzw. p_2 gleiten, zwei zu verschiedenen Kreisen gehörige Bogen (siehe Abb. 24d, S. 132). Will man daher alle Schnittpunkte von g mit dem Kreis $Z(p_0; p_0, p_1)$ erhalten, so muß man sich zunächst Punkte p_2, p_3 mit $p_0p_1 \cong p_0p_2 \cong p_0p_3$ und $\sphericalangle\, p_2p_0p_1 = \sphericalangle\, p_3p_0p_2 = 2\alpha$ verschaffen. Dann ist

$$S_2(Z(p_0; p_0, p_1), g) = (W_2^\alpha(p_1, p_2, g) \cap \mathit{Halbebene}(p_1, p_2; p_3)) \\ \cup\, (W_2^\alpha(p_2, p_3, g) \cap \mathit{Halbebene}(p_2, p_3; p_1))$$

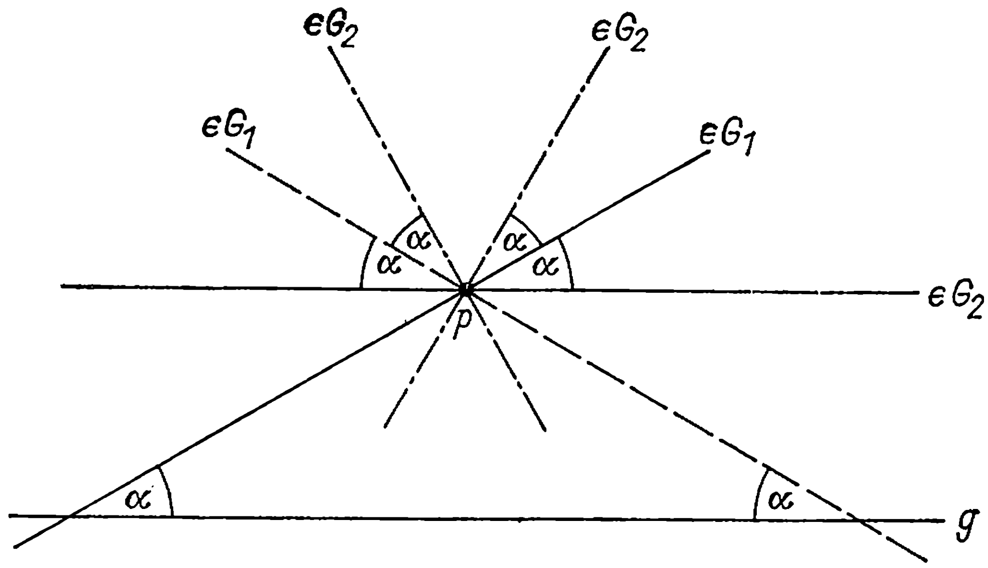


Abb. 62

(Abb. 63a), also mittels konstruktiver Auswahl wie folgt zu erhalten:

$$\begin{array}{l}
\mathrm{p_0, p_1, p_2, p_3, g(p_0, p_1, p_2, p_3} \text{ wie oben, g schneidet } \mathrm{S_2(Z(p_0; p_0, p_1))} \\
\quad\downarrow \\
\mathrm{P_1 = W_2^\alpha(p_1, p_2, g)} \\
\mathrm{P_1' = \{p : p \in P_1 \wedge p \in \text{Halbebene}(p_1, p_2; p_3)\}} \\
\mathrm{P_2 = W_2^\alpha(p_2, p_3, g)} \\
\mathrm{P_2' = \{p : p \in P_2 \wedge p \in \text{Halbebene}(p_2, p_3; p_1)\}} \\
\mathrm{P_3 = P_1' \cup P_2'}\ ^{1)} \\
\quad\downarrow \\
\quad\mathrm{P_3}
\end{array}$$

Ist α stumpf, so können die mit dem Winkellineal überstreichbaren Teilbögen von $Z(p_0; p_0, p_1)$ beliebig klein werden. In diesem Fall wählt man n so, daß $n(4\mathrm{R} - 2\alpha) \geqq 4\mathrm{R}$ ist und benutzt statt p_0, p_1, p_2, p_3 allgemeiner Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_n$ mit $p_0p_i \cong p_0p_1$ und $\sphericalangle\, p_{i-1}p_0p_i = 4\mathrm{R} - 2\alpha$ $(i = 2, \ldots, n)$ (Abb. 63b).

[1]) Dieser bemerkenswerte Schritt benötigt ausnahmsweise die Effektivität der Operation $\cup$ im Bereich endlicher Mengen, vgl. 8. 5.

Es bleibt demnach zu zeigen: Mit $(L, S_1, W_1^\alpha, W_2^\alpha)$ ist zu nicht kollinearen p_0, p_1, p' derjenige Punkt p der Halbebene$(p_0, p_1; p')$ mit $pp_0 \cong p_1p_0$ und

$$\sphericalangle\, pp_0p_1 = \begin{cases} 2\alpha, & \text{falls } \alpha \text{ spitz,} \\ 4\mathrm{R} - 2\alpha, & \text{falls } \alpha \text{ stumpf,} \end{cases}$$

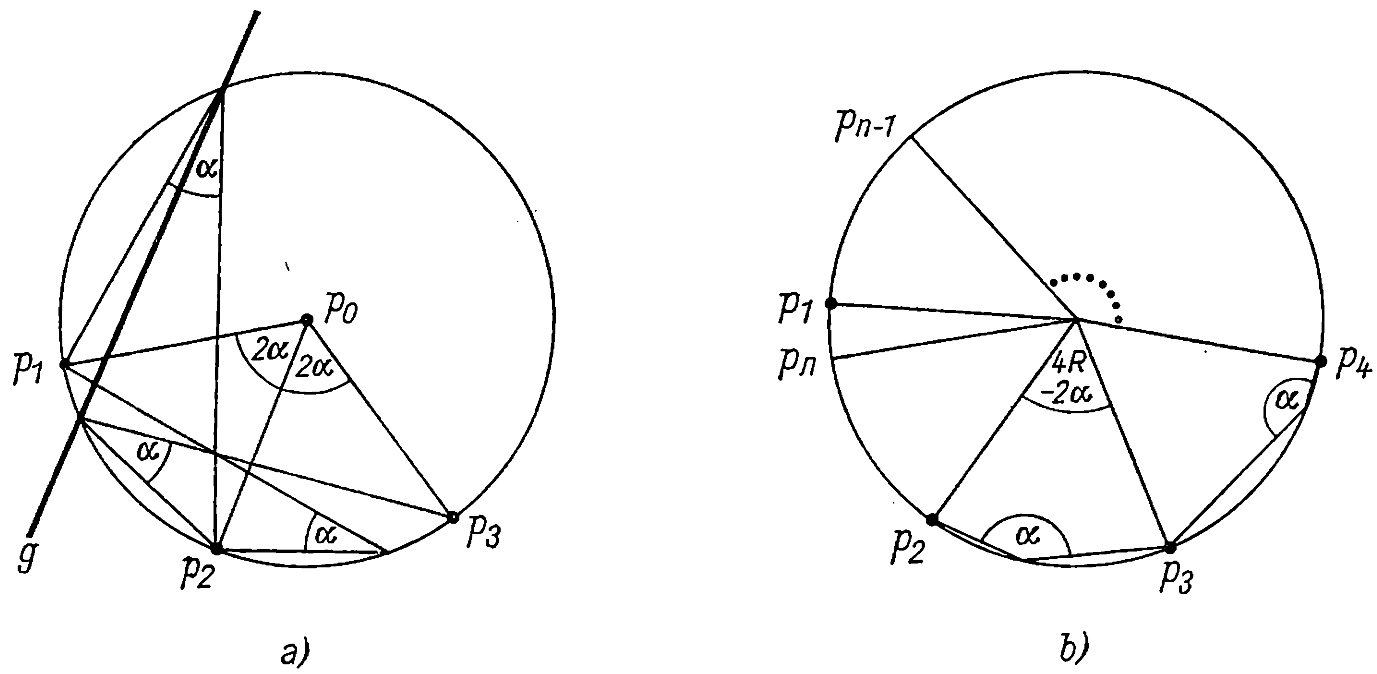


Abb. 63

konstruierbar. Diese Konstruktion ist zeichenpraktisch sehr einfach (Abb. 64a), da man „sieht", welche der beiden Geraden $W_1^\alpha(p, g)$ man jeweils nur zu zeichnen braucht, um möglichst schnell zu p_2 zu gelangen. Wir wollen jedoch an diesem Beispiel noch einmal die beweistheoretisch wichtige Konstruktion mit mehrdeutigen Operationen üben (Abb. 64b):

$$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}' \text{ (nicht kollinear)}$$

$$\downarrow$$

$\mathrm{g}_0 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)$

$\mathrm{G}_1 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}_0, \mathrm{g}_0)$

$\mathrm{G}_2 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}_1, \mathrm{G}_1)$ (Unter diesen drei Geraden kommt g_0 wieder vor)

$\mathrm{G}_3 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{p}_0, \mathrm{G}_1)$

$\mathrm{P}_1' = \mathrm{S}_1(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$

$\mathrm{P}_1 = \{\mathrm{p} : \mathrm{p} \in \mathrm{P}_1' \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_0\}$ (Besteht aus zwei Punkten)

$\mathrm{G}_4 = \mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{P}_1, \mathrm{G}_1)$ (Besteht aus vier Geraden)

$\mathrm{P}_2 = \mathrm{S}_1(\mathrm{G}_3, \mathrm{G}_4)$ (Besteht aus drei Punkten, darunter p_1)

$p_2 = \iota\mathrm{p}\big(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{p} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_0, \mathrm{p}')\big)$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{p}_2$$

(p_2 bildet zusammen mit dem zweiten von p_1 verschiedenen Element p_3 von P_2 sowie p_0 und p_1 schon ein solches Punktsystem, wie es für $S_2\big(Z(p_0; p_0, p_1), g\big)$ benötigt wird. Aus dieser Sicht enthält die Konstruktion also keine „überflüssigen Bestandteile".) Da $\sphericalangle\, p_2p_0p_1 = 4\mathrm{R} - 2\alpha$ gleichbedeutend mit $\sphericalangle\, p_2p_0p_1 = 2\alpha$ und $W_1^\alpha = W_1^{2R-\alpha}$ ist, ist die angegebene für einen spitzen Winkel gedachte Konstruktion auch für stumpfe Winkel α verwendbar. Man hat in Abb. 64 lediglich α durch $2\mathrm{R} - \alpha$ zu ersetzen.

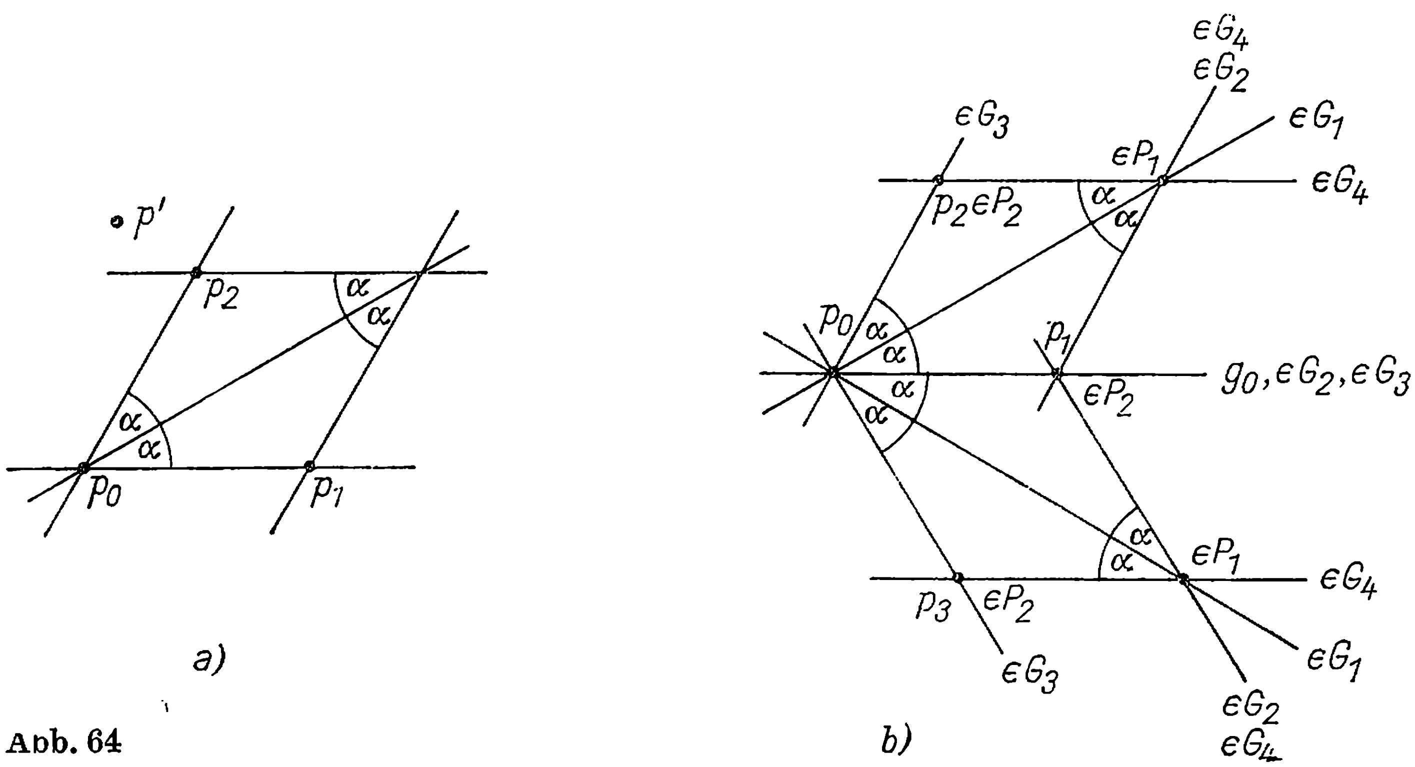


Abb. 64

Damit ist der erste Teil des Satzes von ADLER bewiesen.

Wir wenden uns dem Parallellineal $(\mathrm{L}, \mathrm{S}_1, \mathrm{PL}_1^d, \mathrm{PL}_2^d)$ mit

$$\mathrm{PL}_1^d(\mathrm{g}_0) = \{\mathrm{g}:\mathrm{g} \parallel \mathrm{g}_0 \wedge \mathrm{d}(\mathrm{g}, \mathrm{g}_0) = \mathrm{d}\},$$

$$\mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \{\mathrm{g}:\mathrm{p}_1 \in \mathrm{g} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{p}_2, \mathrm{g}) = \mathrm{d}\}, \text{ falls } \overline{p_1p_2} > \mathrm{d},$$

(vgl. Abb. 23, S. 130) zu. Mit diesem Instrument ist aus drei beliebigen nicht kollinearen Punkten p_1, p_2, p_3 ein Punkt p_4 konstruierbar, so daß p_1, p_2, p_4 nicht kollinear sind und $\overline{p_1p_4} > d$ gilt (Abb. 65):

$$\begin{array}{l}
\qquad \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \quad (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear}) \\
\qquad \downarrow \\
\mathrm{g}_0 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\
\mathrm{G}_1 = \mathrm{PL}_1^d(\mathrm{g}_0) \\
\mathrm{g}_1 = \iota \mathrm{g}\big(\mathrm{g} \in \mathrm{G}_1 \wedge \mathrm{g} \in \text{Halbebene}(\mathrm{g}_0, \mathrm{p}_3)\big) \\
\mathrm{G}_2 = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{g}_1) \\
\mathrm{g}_2 = \iota \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G}_2 \wedge \mathrm{g} \neq \mathrm{g}_0) \\
\mathrm{g}_3 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3) \\
\mathrm{p}_4 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3) \\
\qquad \downarrow \\
\qquad \mathrm{p}_4
\end{array}$$

(Im allgemeinen wird schon $S_1(g_1, g_3)$ die an p_4 gestellten Bedingungen erfüllen, jedoch nicht im Fall $\sphericalangle\, p_2p_1p_3 = \mathrm{R}$.)

Aus drei nicht kollinearen Punkten p_1, p_2, p_3 mit $\overline{p_1p_2} > d$ ist ein Quadrat konstruierbar (Abb. 66):

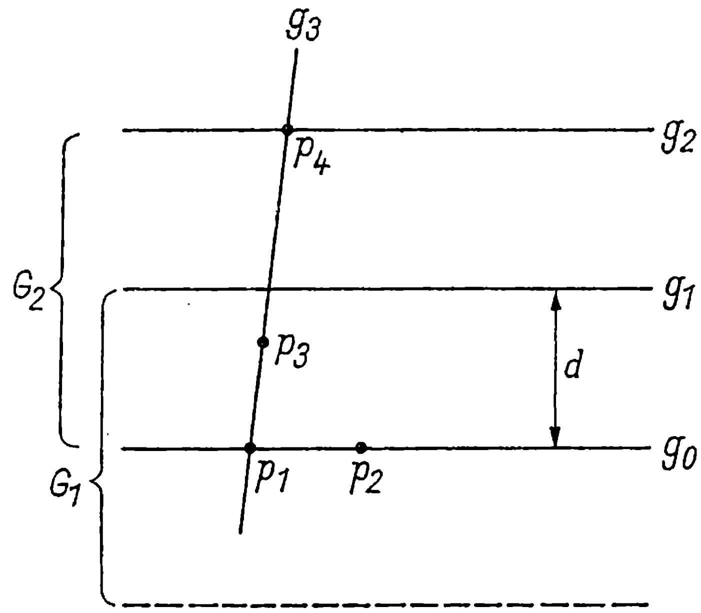


Abb. 65

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \quad (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ nicht kollinear} \wedge \overline{p_1p_2} > \mathrm{d}) \\
\downarrow \\
\mathrm{g}_0 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\
\mathrm{G}_1 = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \\
\mathrm{G}_2 = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1) \\
\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_1(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2) \\
\mathrm{g}_1 = \mathrm{L}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_1) \\
\mathrm{G}_3 = \mathrm{PL}_1^d(\mathrm{g}_0) \\
\mathrm{g}_2 = \iota \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G}_3 \wedge \mathrm{g} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_0, \mathrm{p}_3)) \\
\mathrm{G}_4 = \mathrm{PL}_1^d(\mathrm{g}_1) \\
\mathrm{g}_3 = \iota \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G}_4 \wedge \mathrm{g} \in \mathrm{Halbebene}(\mathrm{g}_1, \mathrm{p}_2)) \\
\mathrm{p}_4 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_0, \mathrm{g}_1) \\
\mathrm{p}_5 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_1) \\
\mathrm{p}_6 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_0, \mathrm{g}_3) \\
p_7 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3) \\
\downarrow \\
\mathrm{p}_4, \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6, \mathrm{p}_7
\end{array}
$$

Damit ist u. a. die Ausführbarkeit der Operationen *P* und *Lot* mit dem Parallellineal gesichert. (Für beides gibt es auch mannigfache andere Konstruktionen, die den speziellen Möglichkeiten des Parallellineals besser entsprechen.)

Wir zeigen nun, daß mit dem Parallellineal die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g_0 mit dem Kreis k_0 vom Radius d um einen Punkt p_0 aus p_0 und g_0 unter Verwendung eines Hilfspunktes auf g_0 konstruierbar sind. Dazu bemerken wir zu-

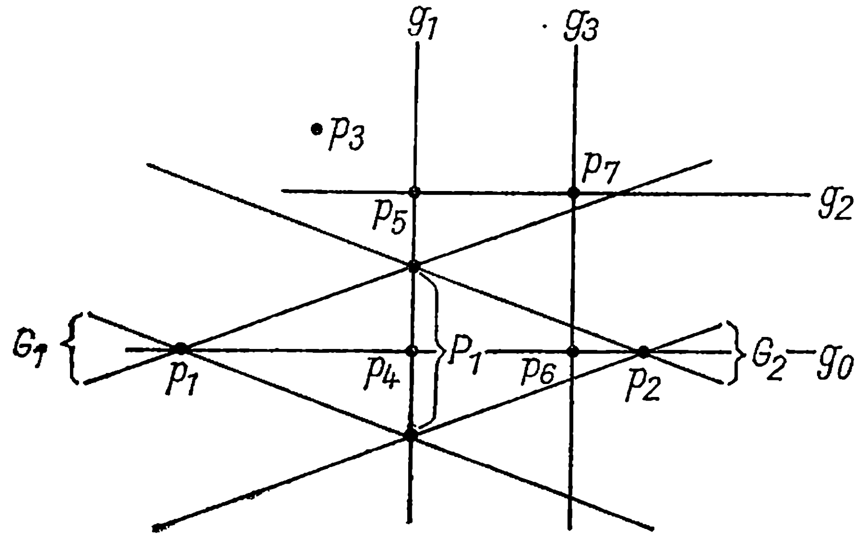


Abb. 66

nächst, daß offenbar für p mit $\overline{p_0 p} > d$ die beiden Geraden $PL_2^d(p, p_0)$ gerade die Tangenten von p an k_0 sind. Daher genügt es, den Pol p_3 von g_0 bezüglich k_0 zu konstruieren. Es ist dann $S_2(k_0, g_0) = S_1(g_0, Pl_2^d(p_3, p_0))$ (Abb. 67).

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{p_0, g_0} & \big(\mathrm{p_0 \notin g_0 \wedge d(p_0, g_0) < d}\big) \\
\downarrow & \\
\mathrm{p_1} & = \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{g_0} \wedge \overline{\mathrm{pp}_0} > \mathrm{d}) \text{ Hilfspunkt!} \\
\mathrm{g_1} & = \mathrm{Lot}(\mathrm{p_0, g_0}) \quad (g_1 \text{ ist ein geometrischer Ort für den gesuchten Punkt } p_3!) \\
\mathrm{G_1} & = \mathrm{PL}_2^d(\mathrm{p_1, p_0}) \\
\mathrm{g_2} & = \iota \mathrm{g}(\mathrm{g} \in \mathrm{G_1} \wedge \mathrm{S_1(g, g_1)} \in \text{Halbebene}(\mathrm{g_0, p_0})) \\
\mathrm{g_3} & = \mathrm{L}(\mathrm{p_0, p_1}) \\
\mathrm{g_4} & = \mathrm{Lot}(\mathrm{p_0, g_2}) \\
\mathrm{p_2} & = \mathrm{S_1(g_2, g_4)} \\
\mathrm{g_5} & = \mathrm{Lot}(\mathrm{p_2, g_3}) \\
\mathrm{p_3'} & = \mathrm{S_1(g_1, g_5)} \\
\downarrow & \\
\mathrm{p_3'} &
\end{array}
$$

Für den folgenden Beweis sei $\mathrm{p_4 = S_1(g_0, g_1)}$, $\mathrm{p_5 = S_1(g_3, g_5)}$. Nach Konstruktion ist $\sphericalangle\, p_5 p_3' p_4 \doteq \sphericalangle\, p_5 p_1 p_4 = \alpha$, da die Schenkel dieser Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen. Daher liegen p_1, p_3', p_4, p_5 auf einem gemeinsamen Kreis (demjenigen, der bezüglich der Sehne $p_4 p_5$ den Peripheriewinkel α erzeugt). Für die Potenz von p_0 bezüglich dieses Kreises k gilt

$$Pot(p_0, k) = \overline{p_0 p_5} \cdot \overline{p_0 p_1} = \overline{p_0 p_4} \cdot \overline{p_0 p_3}.$$

Da $\Delta\, p_1 p_0 p_2$ bei p_2 rechtwinklig ist, p_5 sein Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse und die Kathete $\overline{p_0 p_2}$ gleich d ist, ist $\overline{p_0 p_5} \cdot \overline{p_0 p_1} = d^2$. Aus analogem Grund gilt für den gesuchten Punkt p_3 auf Strahl(p_0, p_4) $\overline{p_0 p_4} \cdot \overline{p_0 p_3} = d^2$. Daher ist der konstruierte Punkt p_3' gleich dem gesuchten Punkt p_3.

Die angegebene Konstruktion versagt offenbar im Fall $p_0 \in g_0$. In diesem Fall erhält man aber die beiden Punkte $S_2(k_0, g_0)$ durch Abtragen von d auf g_0 von p_0 aus nach beiden Richtungen, was leicht durchzuführen ist, indem man auf g_0 wie in Abb. 66 eine Strecke der Länge d konstruiert und diese parallel verschiebt.

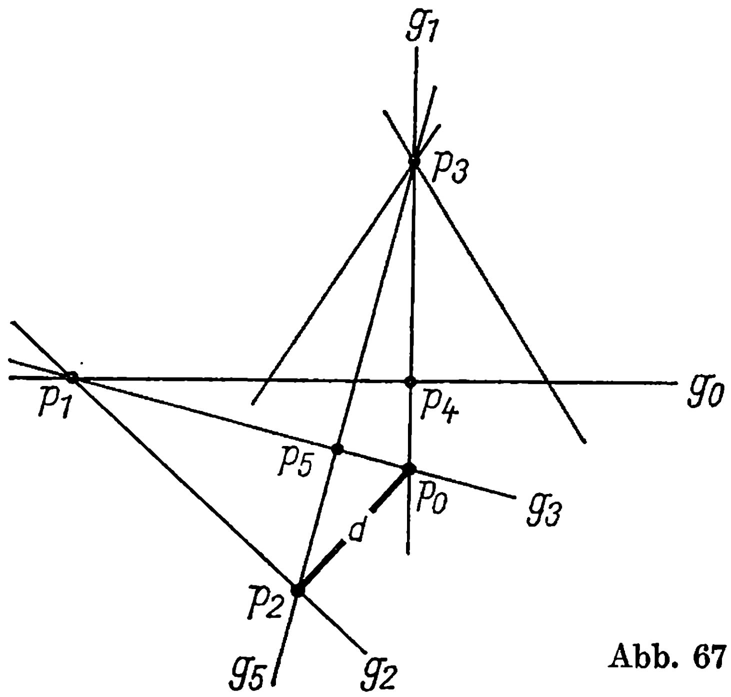


Abb. 67

Ein Vergleich der in diesem Abschnitt behandelten Instrumente vom Standpunkt des praktischen Zeichnens fällt zugunsten des Rechtwinkellineals aus. Für die Lösung von Aufgaben, deren Endresultat nur aus Punkten und Geraden besteht, ist es sogar dem Zirkel vorzuziehen, da man einerseits die Operationen F_1 und F_2 recht einfach mit ihm ausführen kann, andererseits häufig benutzte Operationen wie P und *Lot* mit dem Rechtwinkellineal sogar leichter als mit dem Zirkel realisierbar sind.

13.2. Der Satz von Mohr-Mascheroni

Dieser Satz lautet in traditioneller Formulierung etwa:

Alle aus gegebenen Punkten, Geraden und Kreisen mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte und Kreise sind schon mit dem Zirkel allein konstruierbar.

Bezüglich der Konstruierbarkeit von Punkten und Kreisen ist also der abstrakte Instrumentensatz (Z, S_1, S_2, S_3) dem Instrumentensatz (Z, L, S_1, S_2, S_3) gleichwertig. Dabei wird S_1 im erstgenannten Instrumentensatz höchstens dazu benötigt, die Schnittpunkte eventuell gegebener Geraden zu bestimmen. Analog braucht man S_2

nur, um die Schnittpunkte eventuell gegebener Geraden mit gegebenen oder konstruierten Kreisen zu konstruieren. Daher ist bezüglich der Konstruierbarkeit von Punkten und Kreisen aus Punkten und Kreisen sogar die Äquivalenz von $(\mathrm{Z}, \mathrm{S}_3)$ zu $(\mathrm{L}, \mathrm{Z}, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3)$ behauptet.

Da in einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, deren Endresultat keine Geraden enthält, konstruierte Geraden nur dazu dienen, ihre Schnittpunkte miteinander oder mit Kreisen zu bestimmen, ist nur zu zeigen, daß die durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4) &:= \mathrm{S}_1(\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)),\\
\mathrm{K}'(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{g}) &:= \mathrm{S}_1(\mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2), \mathrm{g}),\\
\mathrm{F}_3(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{k}) &:= \mathrm{S}_2(\mathrm{k}, \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2))
\end{aligned}$$

jeweils für solche Argumente, für die die rechte Seite definiert ist, definierten Operationen K, K′ und F_3 durch uniforme Flußdiagramme über $(\mathrm{Z}, \mathrm{S}_3)$ realisierbar sind. K′ läßt sich durch Wahl zweier beliebiger Hilfspunkte auf g auf K zurückführen und bleibt im folgenden außer Betracht. Bei der Durchsicht des ursprünglichen Beweises von MASCHERONI sowie späterer Varianten (u. a. ADLER, DUBOIS) fällt auf, daß stets für wenigstens eine Teilaufgabe nichtelementare Lösungen angegeben wurden. Wir zeigen daher zunächst:

Satz 1. *Die Operation K ist nicht durch eine elementare (Z, S_3)-Konstruktion ohne Hilfselemente realisierbar.*

Beweis. Jede durch ein zyklenfreies Flußdiagramm $\mathfrak{F}$ gelöste Konstruktionsaufgabe führt für beliebige Eingaben $\mathfrak{x}$, die den Voraussetzungen der Aufgabe genügen, nach höchstens $n(\mathfrak{F})$ Schritten zum Ergebnis, wobei $n(\mathfrak{F})$ die maximale Weglänge vom Eingangsknoten zu einem Ausgangsknoten in $\mathfrak{F}$ ist. Jede endliche Menge $\mathfrak{x}$ von Punkten und Kreisen ist ganz im Inneren eines Kreises $k(p_0, r)$ von genügend großem Radius r um einen gewissen Punkt p_0 enthalten. Anwendung von S_3 auf $\mathfrak{x}$ führt nicht aus diesem Kreis heraus, Anwendung von Z auf Stücke aus $\mathfrak{x}$ führt nicht aus dem Kreis $k(p_0, 3r)$ heraus. Daher sind alle nach höchstens n Schritten mit (Z, S_3) aus $\mathfrak{x}$ konstruierbaren Stücke im Kreis $k(p_0, 3^n r)$ enthalten.

Da man bei vorgegebenem p_0, r, d mit $0 < r < d$ Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 im Innern von $k(p_0, r)$ so wählen kann, daß $K(p_1, p_2, p_3, p_4)$ existiert, jedoch außerhalb $k(p_0, d)$ liegt, gibt es zu jeder elementaren (Z, S_3)-Konstruktion für K solche Eingaben p_1, p_2, p_3, p_4, daß das Resultat $K(p_1, p_2, p_3, p_4)$ nicht in der vorher feststehenden Höchstzahl von Konstruktionsschritten erreichbar ist. (Man bemerke den wesentlichen Unterschied zum Lineal, durch das bereits nach drei Konstruktionsschritten der beliebig entfernte Punkt $K(p_1, p_2, p_3, p_4)$ erhalten werden kann!)

Aus dem Beweis von Satz 1 ergibt sich unmittelbar folgende

Verallgemeinerung. *Mit dem Zirkel allein ist keine Aufgabe elementar und ohne Hilfselemente lösbar, bei der bei geeigneter Wahl der gegebenen Stücke wenigstens eines der Resultatstücke beliebig weit von den gegebenen Stücken entfernt liegt.*

(Dies trifft z. B. auf die Aufgabe zu, zu drei nicht kollinearen Punkten p_1, p_2, p_3 den Mittelpunkt $Mi(p_1, p_2, p_3)$ des durch p_1, p_2, p_3 gehenden Kreises zu konstruieren: Nähert man p_1, p_2, p_3 innerhalb eines gegebenen Bereiches der kollinearen Lage, so wandert $Mi(p_1, p_2, p_3)$ ins Unendliche.) Der Satz läßt sich auch noch auf die Zulassung solcher Hilfsoperationen $\mathrm{x}_i = \varepsilon \mathrm{x} \mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathbf{x})$ (x Punkt- oder Kreisvariable, $\mathbf{x}$ System der gegebenen Punkte und Kreise) erweitern, bei denen ein die Bedingung $H(x, \boldsymbol{x})$ erfüllendes Hilfselement x innerhalb eines beliebigen die gegebenen Stücke $\boldsymbol{x}$ einschließenden Kreises gewählt werden kann. Dies trifft z. B. auf folgende gebräuchliche Hilfsoperationen zu:

$$\mathrm{p}_i = \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2 \text{ nicht kollinear})$$

$$\mathrm{p}_i = \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ in allgemeiner Lage})$$

$$\mathrm{p}_i = \varepsilon \mathrm{p}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}, \mathrm{p}_2)$$

$$\mathrm{p}_i = \varepsilon \mathrm{p}\ \mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$$

$$\mathrm{p}_i = \varepsilon \mathrm{p}\ \mathrm{p} \in \mathrm{k} \text{ usw.}$$

Satz 2. *Die Operationen K und F_3 sind durch nichtelementare (Z, S_3)-Konstruktionen, bei Zulassung spezieller Hilfsoperationen sogar durch elementare (Z, S_3)-Konstruktionen realisierbar.*

Zum Beweis von Satz 2 lösen wir eine Reihe von Hilfsaufgaben:

1. Für nicht kollineare p_1, p_2, p_3 sei

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) := \iota \mathrm{p}(\mathrm{p}\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \wedge \mathrm{p}\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3 \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_1)$$

der an $L(p_2, p_3)$ gespiegelte Punkt p_1,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vsp}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) := \iota \mathrm{p}\big(&\mathrm{p}\mathrm{p}_2 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3 \wedge \mathrm{p}\mathrm{p}_3 \cong \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \\ &\wedge \bigvee \mathrm{p}_4((\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4, \mathrm{p}_3) \wedge (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_4, \mathrm{p}))\big)\end{aligned}$$

der „verkehrt gespiegelte" Punkt p_1, d. h. derjenige auf der p_1 entgegengesetzten Seite von $L(p_2, p_3)$ gelegene Punkt, der p_1, p_2, p_3 zum Parallelogramm ergänzt. Beide Operationen sind durch elementare (Z, S_3)-Konstruktionen realisierbar:

$$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ (nicht kollinear)}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}\mathrm{k}_1 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_2; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)\\ \mathrm{k}_2 &= \mathrm{Z}(\mathrm{p}_3; \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_1)\\ \mathrm{P}_1 &= \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\\ \mathrm{Sp}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) &= \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \text{ (nicht kollinear)}\\
&\quad\downarrow\\
&\mathrm{k}_1 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_2; \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_1)\\
&\mathrm{k}_2 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_3; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)\\
&\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\\
&\mathrm{Vsp}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) = \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{p} \notin \text{Halbebene}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_1)).
\end{aligned}
$$

2. Zu (etwa durch Punktepaare) gegebenen Strecken $a, b, c > 0$ mit $a \neq b$ und $c < 2b$ ist mit dem Zirkel eine Strecke der Länge $\frac{ac}{b}$ elementar konstruierbar. Man schlage um einen der gegebenen Punkte p_0 die Kreise k_a, k_b vom Radius a bzw. b und trage (eventuell unter Benutzung von Hilfspunkten) auf k_b die Sehne c ab, d. h.,

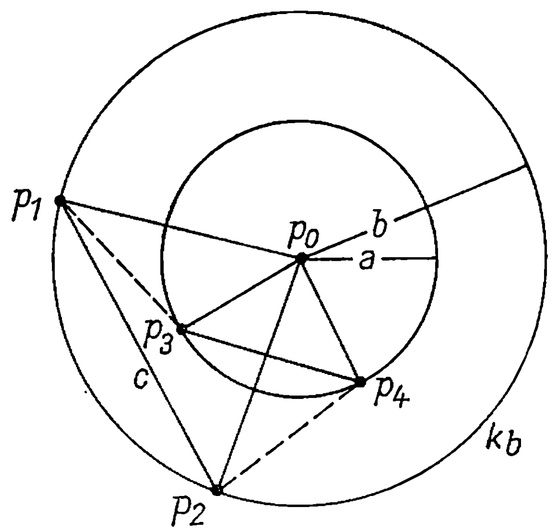


Abb. 68

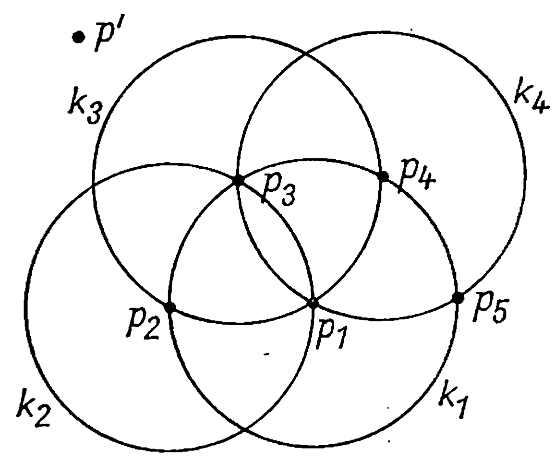


Abb. 69

man konstruiere $p_1, p_2 \in k_b$ mit $\overline{p_1p_2} = c$. Dann wähle man $p_3 \in k_a$ beliebig und konstruiere $p_4 \in k_a$ so, daß $p_2p_4 \cong p_1p_3$ wird (Abb. 68). Es spielt keine Rolle, ob $a < b$ oder $a > b$ ist. Nun ist nach Konstruktion $\Delta\, p_0p_1p_3 \cong \Delta\, p_0p_2p_4$, insbesondere $\sphericalangle\, p_1p_0p_3 \cong \sphericalangle\, p_2p_0p_4$, daher auch $\sphericalangle\, p_1p_0p_2 \cong \sphericalangle\, p_3p_0p_4$ (je nach Lage als Summe oder Differenz kongruenter Winkel). Demnach sind die gleichschenkligen Dreiecke $p_1p_0p_2$ und $p_3p_0p_4$ ähnlich, d. h. $\overline{p_3p_4} : a = c : b$. Daher ist p_3p_4 eine Strecke der gesuchten Länge.

3. Zu $p_1 \neq p_2$ ist mit dem Zirkel allein derjenige Punkt p_5 mit $p_5p_1 \cong p_1p_2$ und (p_2, p_1, p_5) elementar konstruierbar, d. h., jede Strecke läßt sich mit dem Zirkel in gegebener Richtung verdoppeln. Zur Lösung konstruiert man unter Benutzung eines zu p_1, p_2 nicht kollinearen Hilfspunktes p' (Abb. 69):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{k}_1 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)\\
&\mathrm{k}_2 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_2; \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)\\
&\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \iota p(p \in P_1 \wedge p \in \text{Halbebene}(p_1, p_2; p')) \\
k_3 &= Z(p_3; p_1, p_2) \\
p_4 &= \iota p(p \in S_3(k_1, k_3) \wedge p \neq p_2) \\
k_4 &= Z(p_4; p_1, p_2) \\
p_5 &= \iota p(p \in S_3(k_1, k_4) \wedge p \neq p_3)
\end{aligned}
$$

p_5 ist der gesuchte Punkt.

Die angegebene (abgekürzte) Konstruktionsbeschreibung kommt dem tatsächlichen Vorgehen wohl am nächsten. Theoretisch ist jedoch die Benutzung von p' vermeidbar; die Formulierung einer entsprechenden Konstruktion, bei der endliche Mengen von ununterscheidbaren Kreisen bzw. Punkten als Zwischenresultate auftreten, sei dem Leser überlassen.

4. Zu Strecken a, b mit $a < b$ ist mit dem Zirkel eine Strecke der Länge $\frac{a^2}{b}$ elementar konstruierbar. Man konstruiere (Abb. 70) zu $\overline{p_1p_2} = b$ die Zweiermenge P_1 der beiden Punkte p mit $\overline{pp_1} = a$, $\overline{pp_2} = b$. Die beiden Kreise $Z(P_1, a)$ schneiden sich außer in p_1 in einem Punkt p_3, der aus Symmetriegründen auf $L(p_1, p_2)$ liegt und für den wegen Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke $\frac{\overline{p_1p_3}}{a} = \frac{a}{b}$ gilt. p_1p_3 ist also eine Strecke der gesuchten Länge. Hat man insbesondere durch wiederholte Anwendung der Konstruktion 3 die Beziehung $\overline{p_1p_2} = n \cdot a$ erhalten, so ist $\overline{p_1p_3} = \frac{a}{n}$.

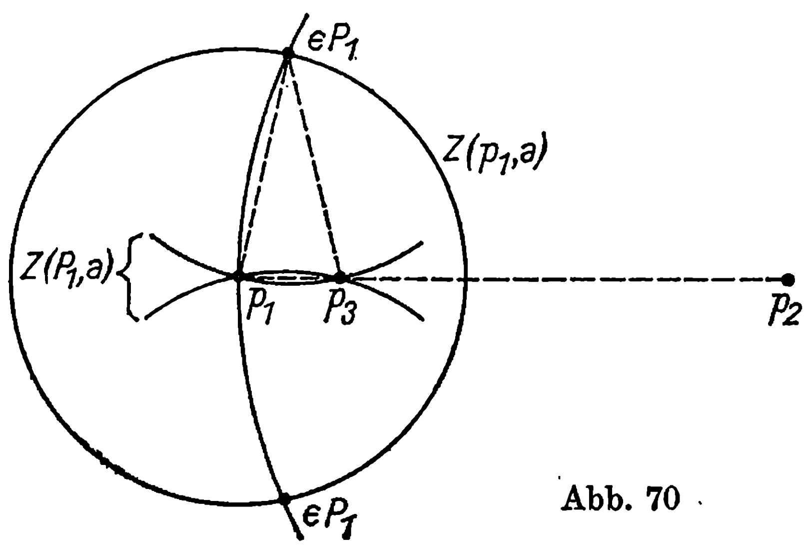
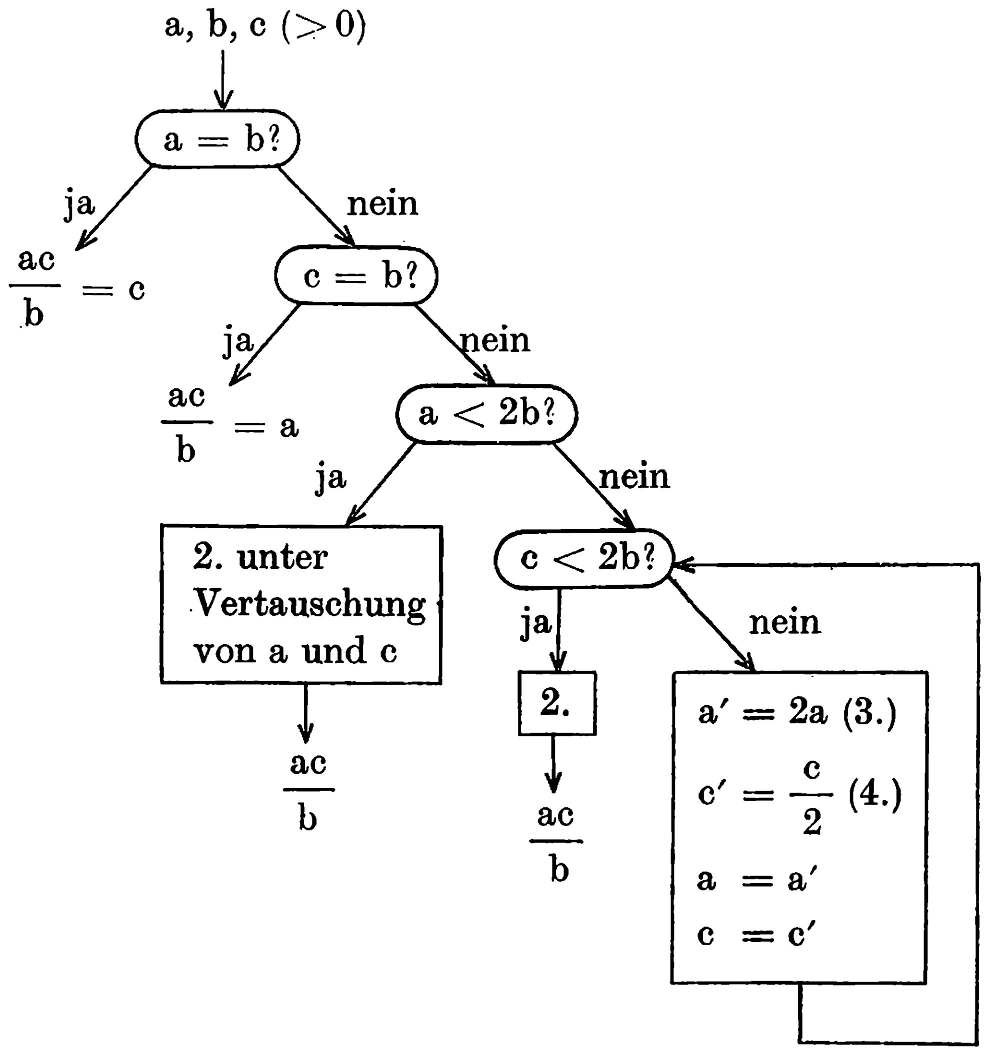


Abb. 70

Von der für die Konstruktion 2 wesentlichen Einschränkung $c < 2b$ (sonst läßt sich in k_b keine Sehne der Länge c eintragen) kann man sich befreien, indem man unter Benutzung der Konstruktionen 3 und 4 zunächst $a' = 2^n a$ und $c' = \frac{c}{2^n}$ konstruiert, wobei man n so groß wählt, daß $c' < 2b$ wird. Anwendung von Konstruktion 2 auf

a', b, c' ergibt dann $\frac{a'c'}{b} = \frac{ac}{b}$. Die Ausführung dieses Gedankens liefert jedoch eine nichtelementare Konstruktion:



die insbesondere in nichtarchimedischen Ebenen für gewisse a, b, c versagt. Ist a durch p_a, p'_a, c durch p_c, p'_c gegeben, so kann man, indem man innerhalb eines Kreises k, der p_a, p'_a, p_c, p'_c im Innern enthält, eine hinreichend kurze Strecke $p_b p'_b$ vorgibt, erreichen, daß $\frac{ac}{b}$ beliebig groß wird, folglich jede Strecke dieser Länge wenigstens einen von $M(k)$ beliebig weit entfernten Endpunkt hat. Damit fällt die Aufgabe, zu *beliebigen* $a, b, c > 0$ die Strecke $\frac{ac}{b}$ zu konstruieren, in den Anwendungsbereich der Verallgemeinerung von Satz 1, und es ist von prinzipieller Bedeutung für die elementare Äquivalenz von (Z, S_3) zu (Z, S_3, K, F_3), daß wir bei der Lösung der folgenden Aufgaben die Konstruktion von $\frac{ac}{b}$ auf den in Hilfsaufgabe 2 elementar gelösten Fall einschränken können, wenn wir zwei spezielle (vom Standpunkt des praktischen Zeichnens nicht problematische) Hilfsoperationen zulassen. Die Hilfsaufgaben 3 und 4 werden dann nicht benötigt.

5. Zu nicht kollinearen Punkten p_1, p_2, p_3 ist mit dem Zirkel allein $Mi(p_1, p_2, p_3)$ konstruierbar. Die Aufgabe ist sogar elementar lösbar, falls für wenigstens eine Seite s und eine nicht auf ihr stehende Höhe h des Dreiecks $p_1p_2p_3$ gilt

(*) $s < 4h.$

Lösung. Es sei $p_4 = Sp(p_1; p_2, p_3)$. Bezeichnet p_0 den gesuchten Mittelpunkt $Mi(p_1, p_2, p_3)$ des Kreises durch p_1, p_2, p_3 (Abb. 71), so sind die Dreiecke $p_1p_0p_2$ und $p_1p_3p_4$ ähnlich, da beide gleichschenklig sind und bei p_0 bzw. p_3 den gleichen Winkel

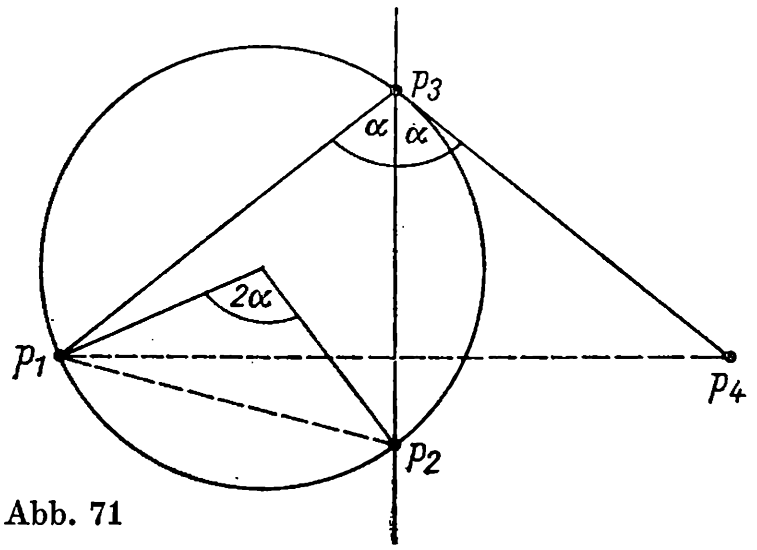


Abb. 71

haben. Daher ist der Radius r $(= \overline{p_1p_0})$ als $\dfrac{\overline{p_1p_3} \cdot \overline{p_1p_2}}{\overline{p_1p_4}}$ laut Hilfsaufgaben 2 bis 4 konstruierbar und aus r und p_1, p_2, p_3 erhält man elementar p_0:

$$\begin{aligned} k_1 &= Z(p_1, r) \\ k_2 &= Z(p_2, r) \\ P_1 &= S_3(k_1, k_2) \\ p_0 &= \iota p(p \in P_1 \wedge p \in Halbebene(p_1, p_2; p_3)). \end{aligned}$$

Die Konstruktion von r und damit von p_0 ist insbesondere elementar durchführbar, falls (eventuell nach Umbenennung der Punkte p_1, p_2, p_3) $\overline{p_1p_2} < 2\overline{p_1p_4}$, d. h. eine Seite des Dreiecks $p_1p_2p_3$ kleiner als das Vierfache einer nicht auf ihr stehenden Höhe ist.

Ist ein Winkel (etwa α) eines nach Schulsitte bezeichneten Dreiecks ABC (Abb. 72) größer als 14,5°, so ist schon $\dfrac{h_c}{b} = \sin \alpha > \dfrac{1}{4}$, d. h. $b < 4h_c$. Sind α und β kleiner oder gleich 14,5°, so ist das Dreieck bei C stumpf. Gilt dann für den Außenwinkel δ bei C

$\delta > 14{,}5°,$

so ist $\frac{h_b}{a} = \sin\delta > \frac{1}{4}$. Ist andererseits ein Winkel (etwa γ) größer oder gleich 165,6°, so ist für alle Seiten s und alle nicht auf s stehenden Höhen $s > 4h$, d. h., die Bedingung (*) ist nur für extrem flache Dreiecke verletzt.

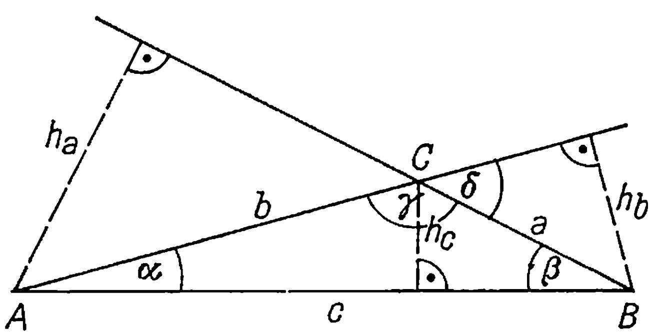


Abb. 72

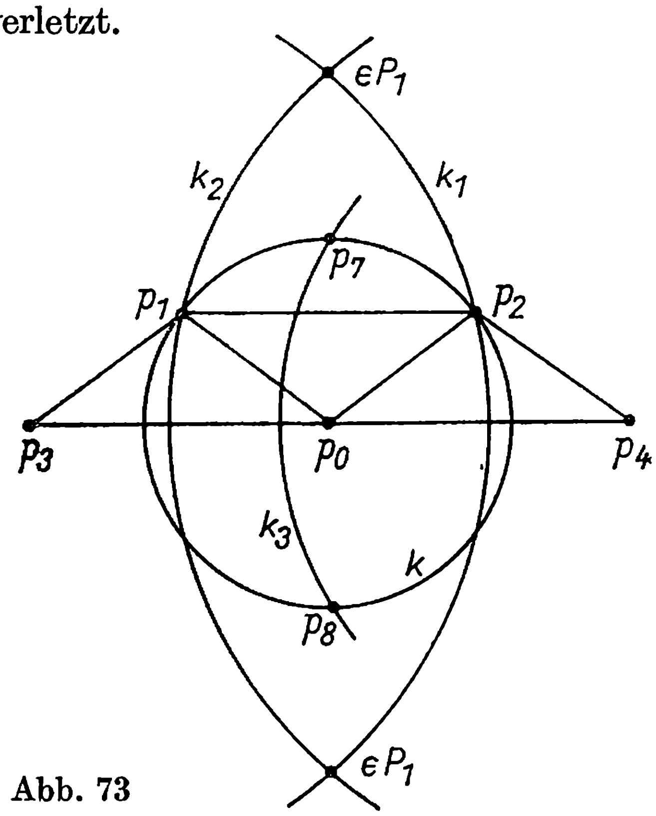


Abb. 73

6. Zu p_0, p_1, p_2, k mit $p_1 \neq p_2, p_0 = M(k)$ und $p_1, p_2 \in k$ ist mit dem Zirkel allein die Zweiermenge

$$Hb(k, p_0, p_1, p_2) = \{p/p \in k \wedge L(p, p_0) \perp L(p_1, p_2)\}$$

elementar konstruierbar, d. h., man kann die beiden Kreisbögen, in die k durch p_1, p_2 zerlegt wird, halbieren.

Lösung (Abb. 73):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{k} \quad \text{(Voraussetzungen wie oben)}\\
&\quad\downarrow\\
&\mathrm{p}_3 = \mathrm{Vsp}(\mathrm{p}_2; \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1)\\
&\mathrm{p}_4 = \mathrm{Vsp}(\mathrm{p}_1; \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_2)\\
&\mathrm{k}_1 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_3; \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_2)\\
&\mathrm{k}_2 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_4; \mathrm{p}_4, \mathrm{p}_1)\\
&\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\\
&\mathrm{k}_3 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_4; \mathrm{p}_0, \mathrm{P}_1) \ (p_0 \text{ ist von beiden Elementen von } P_1 \text{ gleich weit entfernt}).\\
&\quad\downarrow\\
&\mathrm{Hb}(\mathrm{k}, \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = \mathrm{S}_3(\mathrm{k}, \mathrm{k}_3).
\end{aligned}
$$

Für den Beweis der letzten Behauptung sei r der Radius von k, $d = \overline{p_1 p_2}$ $(= \overline{p_0 p_3} = \overline{p_0 p_4})$, $a = \overline{p_3 p_2}$ $(= \overline{p_1 p_4})$. Unsere Behauptung bedeutet dann $\overline{p_4 p_7} = \sqrt{r^2 + d^2}$, d. h. $\overline{p_0 p_5} = \sqrt{r^2 + d^2}$, d. h. $\sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{r^2 + d^2}$. Es ist (Abb. 74)

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{3}{2}\,d\right)^2 = \left(r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{3}{2}\,d\right)^2,$$

d. h. $a^2 = r^2 + 2d^2$, woraus die Behauptung folgt.

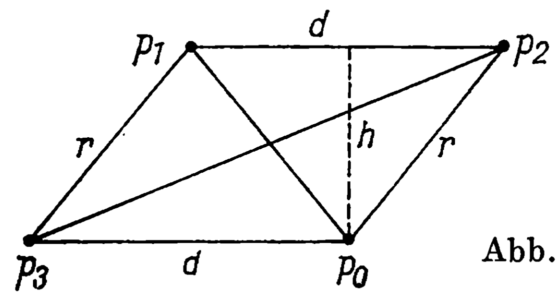


Abb. 74

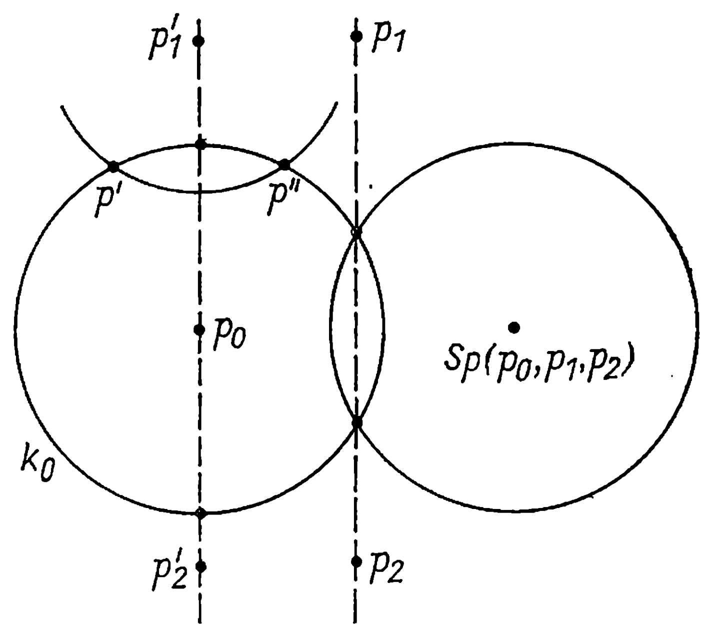


Abb. 75

7. Eine einfache Lösung für F_3 ergibt sich, falls $p_0 = M(k_0)$ schon bekannt ist (also insbesondere, falls k_0 ein konstruierter Kreis ist) für den gilt:

Fall a). $M(k_0), p_1, p_2$ nicht kollinear (Abb. 75). Dann ist für einen beliebigen (Hilfs-) Punkt $p' \in k_0$

$$F_3(p_1, p_2, k_0) = S_3\big(k_0, Z(Sp(M(k_0); p_1, p_2); p', M(k_0))\big).$$

Ist k_0 ein ohne Mittelpunkt gegebener Kreis, so hat man zunächst unter Benutzung dreier (Hilfs-) Punkte $p_3, p_4, p_5 \in k_0$ den Punkt $Mi(p_3, p_4, p_5) = M(k_0)$ zu konstruieren und diese Konstruktion ist sogar elementar, falls es zulässig ist, Hilfspunkte $p_3, p_4, p_5 \in k_0$ so zu wählen, daß sie die in Hilfsaufgabe 5 genannte Bedingung (*) erfüllen.

Fall b). $M(k_0)$, p_1', p_2' kollinear (Abb. 76).

In diesem Fall erhält man nach Konstruktion von $p_0 = M(k_0)$ unter Benutzung eines zu p_1', p_2' nicht kollinearen Hilfspunktes $p' \in k_0$

$$\begin{aligned} k_1 &= Z(p_1'; p_1', p') \\ P_1 &= S_3(k_0, k_1) \\ p'' &= \iota p(p \in P_1 \wedge p \neq p') \\ F_3(p_1', p_2', k_0) &= Hb(k_0, p_0, p', p''). \end{aligned}$$

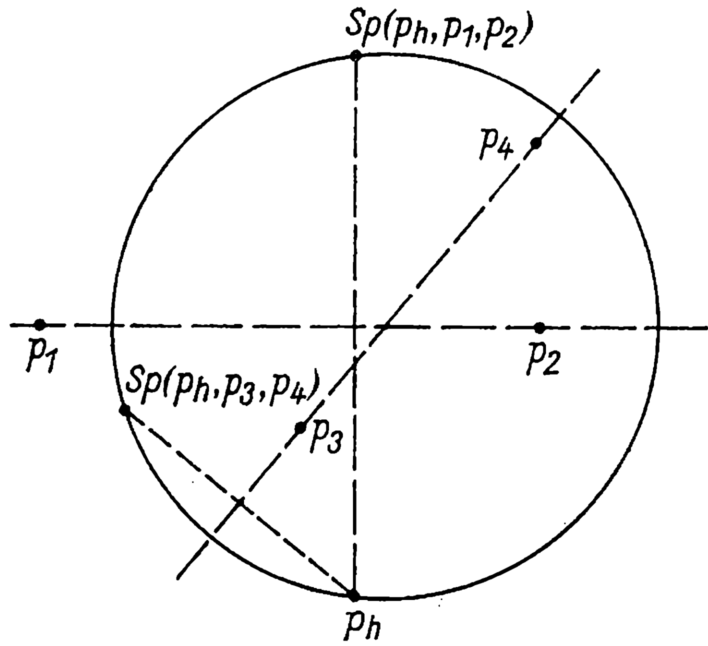


Abb. 76

Durch Vorschaltung der Konstruktion von $M(k_0)$ und des Prüfknotens

„p_1, p_2, $M(k_0)$ kollinear?"

erhält man aus den Fällen a), b) eine verzweigte Lösung für F_3, die genau dann elementar ist, wenn das für $M(k_0)$ eingesetzte Unterprogramm elementar ist.

8. Die Lösung der Aufgabe Mi liefert auch einen verblüffenden Weg zur Lösung der Aufgabe K: Unter Benutzung eines beliebigen Hilfspunktes $p_h \notin L(p_1, p_2) \cup L(p_3, p_4)$ ist nämlich

$$K(p_1, p_2, p_3, p_4) = Mi\big(p_h, Sp(p_h; p_1, p_2), Sp(p_h; p_3, p_4)\big) \text{ (Abb. 76).}$$

Diese Lösung ist genau dann elementar, wenn es zulässig ist, den Punkt p_h so zu wählen, daß $\Delta\, p_h Sp(p_h, p_1, p_2)\, Sp(p_h, p_3, p_4)$ die in Hilfsaufgabe 5 genannte Bedingung (*) erfüllt. Da der Winkel dieses Dreiecks bei p_h gleich dem Winkel zwischen den zu schneidenden Geraden ist, ist diese Bedingung für solche p_1, p_2, p_3, p_4, für die sich $L(p_1, p_2)$ und $L(p_3, p_4)$ unter einem nicht zu kleinen Winkel schneiden, bei beliebiger Wahl von p_h erfüllt. Andernfalls hat man „p_h hinreichend dicht bei der Halbierenden des von $L(p_1, p_2)$, $L(p_3, p_4)$ gebildeten stumpfen Winkels" zu wählen.

Dann wird $\Delta\, p_h Sp(p_h;\, p_1, p_2)\; Sp(p_h;\, p_3, p_4)$ annähernd gleichschenklig und erfüllt die Bedingung (*) (Abb. 77).

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß ADLER 1890 die Transformation durch reziproke Radien (Spiegelung am Kreis) als einheitliches Prinzip für einen neuen Beweis des Satzes von MOHR-MASCHERONI benutzte. Ist k_0 ein Kreis mit dem Mittelpunkt p_0 und dem Radius r, so sei

$$\varphi_{k_0}(p) := \iota \mathrm{p}'(\mathrm{p}' \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}) \wedge \overline{\mathrm{p}_0\mathrm{p}'} \cdot \overline{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \mathrm{r}^2), \text{ falls } \mathrm{p}_0 \neq \mathrm{p}.$$

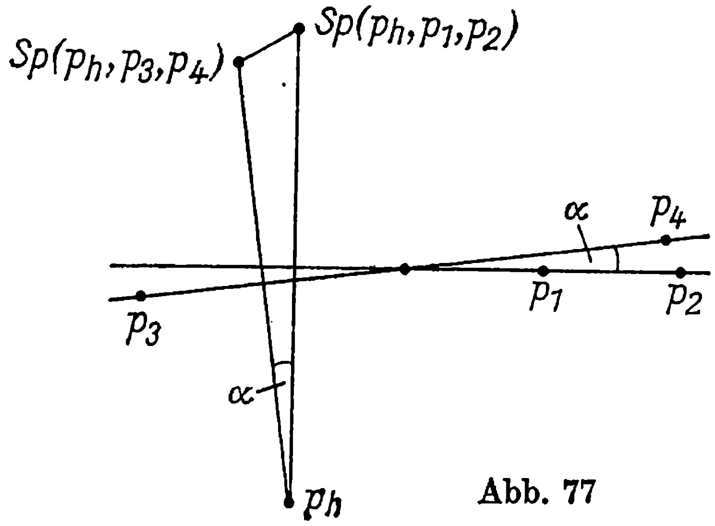


Abb. 77

Für solche Abbildungen gilt

(1) $\varphi_{k_0}^{-1} = \varphi_{k_0}$.

(2) $\varphi_{k_0}(p) = p$ dann und nur dann, wenn $p \in k_0$.

(3) Geraden durch p_0 gehen in sich über, andere Geraden in Kreise durch p_0. Kreise durch p_0 gehen in Geraden über, andere Kreise in Kreise.

ADLER zeigte, daß man aus p_0, k_0 für beliebige p bzw. k das Bild $\varphi_{k_0}(p)$ bzw. $\varphi_{k_0}(k)$ (falls dies wieder ein Kreis ist) mit dem Zirkel allein konstruieren kann. Daraus ergibt sich folgender Lösungsweg für eine beliebige mit Zirkel und Lineal lösbare Konstruktionsaufgabe mit dem Zirkel allein:

1. Man denke sich die Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausgeführt und wähle einen Kreis k_0 und seinen Mittelpunkt p_0 so, daß keine der konstruierten Geraden bzw. Kreise mit p_0 inzidiert. Dann führt φ_{k_0} die gesamte (in der Regel Geraden enthaltende) Figur in eine inzidenzisomorphe Figur aus Punkten und Kreisen über.

2. Man konstruiere $\varphi_{k_0}(x)$ für alle gegebenen Punkte und Kreise x.

3. Man führe die „Bildkonstruktion" im Bereich der Punkte und Kreise mit dem Zirkel allein aus.

4. Man wende auf das erhaltene Resultat $\varphi_{k_0}^{-1}$ ($= \varphi_{k_0}$) an.

Auf diesem Wege erhält man insbesondere (Z, S_3)-Lösungen für K und F_3, die von den hier behandelten abweichen, jedoch vor allem für viele Aufgaben (Z, S_3)-Lösungen, die wesentlich einfacher sind als die durch schrittweise Einsetzung von (Z, S_3)-Konstruktionen für K und F_3 in (Z, L, S_1, S_2, S_3)-Konstruktionen erhaltenen Lösungen. Die Adlersche Methode ist ausführlich in [1] und neuerdings in [8] behandelt. Wir schließen hier mit zwei kritischen Bemerkungen zu dieser Methode.

1. Die für die Adlersche Methode grundlegende Aufgabe, aus p_0, p, k_0 mit $p_0 = M(k_0)$ und $p \neq p_0$ den Bildpunkt $\varphi_{k_0}(p)$ zu konstruieren, fällt unter die Verallgemeinerung von Satz 1, da für hinreichend dicht bei p_0 gelegene p der Bildpunkt beliebig weit außerhalb von k_0 liegt. Adler gab für diesen Teilschritt tatsächlich nur eine nichtelementare Lösung an, bewies also nur die nichtelementare Äquivalenz von (Z, S_3) zu (Z, S_3, K, F_3). Natürlich existiert auf Grund von Satz 2 auch für diese Aufgabe eine elementare Lösung, jedoch wurde bisher keine dieser speziellen Aufgabe angemessene elementare Lösung gefunden. Die Substitution elementarer (Z, S_3)-Konstruktionen für K und F_3 in eine elementare Lösung mit Zirkel und Lineal hebt aber alle Vorteile des Adlerschen Beweises gegenüber dem hier angegebenen auf.

2. Bei Konstruktionen, die schon mit Zirkel und Lineal nichtelementar sind, ist die Zahl der eventuell zu konstruierenden Geraden und Kreise unbeschränkt und ihre Verteilung oft schwer vorauszusehen. In diesem Fall stößt der erste Schritt der Adlerschen Methode (Wahl eines geeigneten Inversionskreises k_0) auf wesentliche theoretische und praktische Schwierigkeiten.

14. Konstruktionen dritten und höheren Grades

Abweichend von Abschnitt 9.4 definieren wir hier eine *Konstruktionsaufgabe n-ten Grades* ($n \geqq 3$) als eine solche, die sich durch mit Zirkel und Lineal (oder gleichwertige Instrumente) ausführbare Konstruktionen auf die Konstruktion endlich vieler Strecken $x_1, \ldots, x_k$ zurückführen läßt, so daß für $i = 1, \ldots, k$ die Strecke x_i einer Gleichung höchstens n-ten Grades genügt, deren Koeffizienten aus den gegebenen Stücken und $x_1, \ldots, x_{i-1}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind und die entsprechenden Bedingungen für kein $m < n$ erfüllt werden. (Es muß also mindestens eine der Gleichungen für die x_i vom Grade n und platonisch irreduzibel sein.) Die Problematik dieser Definition liegt u. a. darin, daß dem Instrumentensatz Zirkel und Lineal von vornherein eine Sonderstellung eingeräumt wird. Dies trifft jedoch für die klassische Theorie der geometrischen Konstruktionen allgemein zu, und so wird in der Literatur meist der hier definierte Grad zugrunde gelegt. Andererseits zeigten die Betrachtungen in Abschnitt 9.4, daß allgemeinere Graddefinitionen zu erheblichen begrifflichen und algebraischen Schwierigkeiten führen.

Der Einfachheit halber setzen wir in diesem Kapitel voraus, daß der Koordinatenkörper der betrachteten Ebenen der Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist, obwohl man natürlich (analog zum auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zugeschnittenen Begriff der platonischen Ebene) für jedes $n \geqq 3$ eine axiomatische Charakterisierung der Konstruktionen n-ten Grades angemessenen euklidischen Ebenen geben kann.

Aus der Ferrarischen Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades folgt nun sofort: *Es gibt* (im Sinne obiger Definition) *keine Konstruktionsaufgabe vierten Grades.* Genügt nämlich x einer platonisch irreduziblen Gleichung vierten Grades, deren Koeffizienten mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so kann x mit Zirkel und Lineal aus diesen Koeffizienten und einer Lösung y der kubischen Resolvente dieser Gleichung (vgl. Abschnitt 4.4, Beispiel 5) konstruiert werden, d. h., die Konstruktion von x ist mit Zirkel und Lineal auf die Lösung einer Gleichung dritten Grades zurückgeführt.

Für nicht kollineare p_1, p_2, p_3 mit $\sphericalangle\, p_1p_2p_3 < \mathrm{R}$ sei

$$Tri(p_1, p_2, p_3) := \iota p\left((p_1, p, p_3) \wedge \sphericalangle\, p_1p_2p = \frac{1}{3} \sphericalangle\, p_1p_2p_3\right)$$

(„*Tri*" soll an Trisektion erinnern; Abb. 78).

Für p_0, p_1, p_2 mit $p_0 \neq p_1$ und $p_2 \in Strahl(p_0, p_1)$ sei

$$Kub(p_0, p_1, p_2) := \iota p(p \in Strahl(p_0, p_1) \wedge \overline{p_0p}^3 = \overline{p_0p_1}^2 \cdot \overline{p_0p_2})$$

(„*Kub*" entspricht der dritten Wurzel aus einer gegebenen Strecke p_0p_2).

Die Definition berücksichtigt die Abhängigkeit der Streckenmultiplikation von der gewählten Maßeinheit. Wählt man p_0p_1 als Einheitsstrecke, so ist $\overline{p_0p}^3 = \overline{p_0p_2}$ für $p = Kub(p_0, p_1, p_2)$. Geht man zu einer anderen Einheitsstrecke über, so ändern sich beide Seiten der Gleichung $\overline{p_0p}^3 = \overline{p_0p_1}^2 \cdot \overline{p_0p_2}$ um den gleichen Faktor k^3).

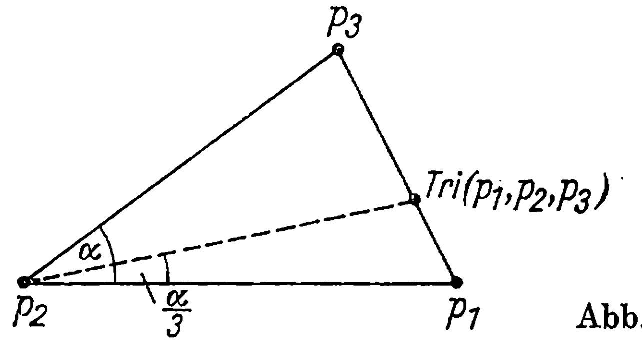


Abb. 78

Satz 1. *Mit einem Instrumentensatz sind genau dann alle Aufgaben dritten Grades lösbar, wenn mit diesem Instrumentensatz die Operationen L, Z, S_1, S_2, S_3, Tri und Kub realisierbar sind. Für Aufgaben, die nur die Konstruktion von Punkten und Geraden fordern, kann Z durch F_1, F_2 ersetzt werden; für Aufgaben, die nur die Konstruktion von Punkten und Kreisen fordern, kann L durch K und F_3 ersetzt werden.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Cardanoschen Lösungsformel für die allgemeine Gleichung dritten Grades (vgl. Abschnitt 9.2, Satz 3).

Wir erinnern an die Definition der mit dem markierten Lineal (a: Länge der markierten Strecke) ausführbaren Operation der äußeren Einschiebung $E_{\bar{a}}^a$: Für p, g_1, g_2 mit g_1 *schneidet* g_2, $p \notin g_1 \cup g_2$ ist

$$E_{\bar{a}}^a(p, g_1, g_2) = \iota p_1 \vee p_2(p_1 \in g_1 \wedge p_2 \in g_2 \wedge \overline{p_1p_2} = a \wedge (p, p_1, p_2))$$

(siehe Abb. 26a, S. 133).

Satz 2. *Die äußere Einschiebung allein genügt zusammen mit Zirkel und Lineal zur Lösung aller Aufgaben dritten Grades.*

(Da mit einem markierten Lineal der abstrakte Instrumentensatz „normiertes Lineal" realisierbar ist, genügt zur Lösung solcher Aufgaben dritten Grades, deren Endresultat nur aus Punkten und Geraden besteht, sogar das markierte Lineal allein, genauer: der abstrakte Instrumentensatz $(L, S_1, A_a^{\pm}, S_4^a, S_5^a, S_2, S_3, E_{\ddot a}^a)$; vgl. Abschnitt 7.2).

Zum Beweis von Satz 2 haben wir nur Lösungen der Aufgaben Tri und Kub anzugeben. Die bereits in Abschnitt 9.2 behandelte Archimedische Trisektion mit dem Einschiebelineal benötigte die (äußere!) Einschiebung zwischen Kreis und Gerade. Wir zeigen zunächst, daß Tri auch durch äußere Einschiebung zwischen zwei Geraden realisierbar ist (Lösung von Pappos; Abb. 79):

$$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3 \quad (0 < \sphericalangle\, \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 \sphericalangle\, \mathrm{R})$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{g}_1 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$$
$$\mathrm{g}_2 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$$
$$\mathrm{p}_4 = \iota \mathrm{p}\left(\mathrm{p} \in \mathrm{Strahl}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \overline{p_2 p} = \frac{\mathrm{a}}{2}\right)$$ (durch Abtragen von a auf Strahl $(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$ und Halbieren dieser Strecke)
$$\mathrm{g}_3 = \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_4, \mathrm{g}_1)$$
$$\mathrm{g}_4 = \mathrm{P}(\mathrm{p}_4, \mathrm{g}_1)$$
$$\mathrm{p}_5 = \mathrm{E}_{\ddot a}^a(\mathrm{p}_2, \mathrm{g}_3, \mathrm{g}_4)$$
$$\mathrm{g}_5 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_5, \mathrm{p}_2)$$
$$\mathrm{g}_6 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3)$$
$$\mathrm{Tri}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_5, \mathrm{g}_6).$$

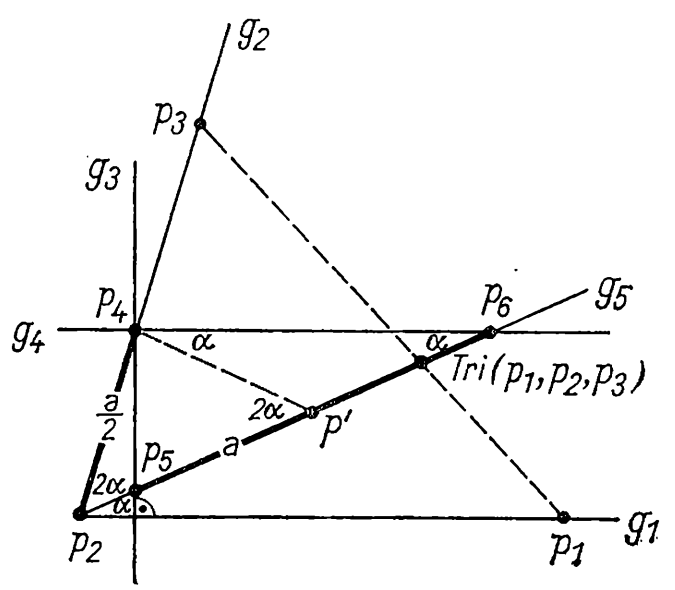


Abb. 79

Zum Beweis bezeichne p' den Mittelpunkt der Strecke p_5p_6. Dann ist im rechtwinkligen Dreieck $p_4p_5p_6$

$$\sphericalangle\, p'p_4p_6 \cong \sphericalangle\, p'p_6p_4\ (= \alpha) \cong \sphericalangle\, p_1p_2p_6$$

(als Wechselwinkel), und wegen $\overline{p_4 p'} = \overline{p_2 p_4} \left(= \frac{a}{2}\right)$ ist

$$2\alpha = \sphericalangle\, p_2 p' p_4 \cong \sphericalangle\, p' p_2 p_4.$$

Vergleichbar durchsichtige Lösungen der Aufgabe Kub durch Einschiebung sind bisher nicht gefunden worden. Die folgende Lösung geht im wesentlichen auf NEWTON zurück. Sie ist nur dann direkt anwendbar, wenn die Strecke d, deren dritte Wurzel konstruiert werden soll, kürzer als die Einheitsstrecke (d. h. $d < 1$) ist. Andernfalls hat man $\sqrt[3]{d} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{d}}}$ zu benutzen.

Ist $d < 1$, so gilt $2ad < 2a$, und es ist ein Dreieck $p_1 p_2 p_4$ mit $\overline{p_1 p_2} = \overline{p_1 p_4} = a$, $\overline{p_2 p_4} = 2ad$ konstruierbar. Unter dieser Voraussetzung gelte weiterhin (Abb. 80)

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_3 &= \mathrm{A}_a^-(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)\\
g_1 &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)\\
\mathrm{g}_2 &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4)\\
\mathrm{p}_5 &= \mathrm{E}^a_{\dot{a}}(\mathrm{p}_1, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)\\
\mathrm{g}_3 &= \mathrm{L}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_5)\\
\mathrm{p}_6 &= \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3).
\end{aligned}$$

Wir behaupten $\sqrt[3]{d} = \dfrac{y}{x}$ mit $x = \overline{p_4 p_6}$, $y = \overline{p_1 p_5}$.

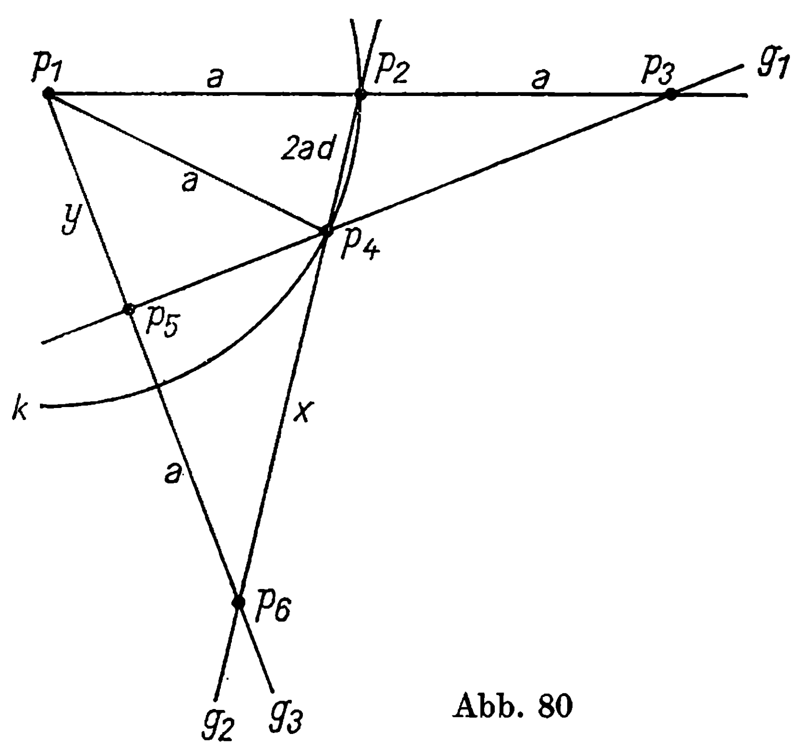


Abb. 80

Beweis. Anwendung des Satzes von MENELAOS auf $\Delta\, p_6 p_1 p_2$ und g_1 ergibt

$$\frac{a}{y} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{2ad}{x} = 1,$$

d. h.

$$(1) \qquad \frac{x}{2a} = \frac{2ad}{y} \left(= \frac{x + 2ad}{2a + y} \text{ durch rechnerische Umformung}\right).$$

Bezeichnet k den Kreis vom Radius a um p_1, so ist ferner

$$Pot(p_6, k) = \underset{(\text{Sehne } g_2)}{x \cdot (x + 2ad)} = \underset{(\text{Sehne } L(p_6, p_1))}{y \cdot (y + 2a)},$$

d. h.

$$(2) \qquad \frac{x + 2ad}{2a + y} = \frac{y}{x}.$$

Aus (1) und (2) folgt $\frac{y}{x} = \frac{x}{2a}$, d. h. $x^2 = 2ay$, und $\frac{y}{x} = \frac{2ad}{y}$, d. h. $y^2 = 2adx$, zusammen $2ay^3 = 2adx^3$, d. h. $\frac{y}{x} = \sqrt[3]{d}$.

Während die Lösung einer Gleichung dritten Grades für eine gesuchte Strecke x bei Anwendung des Einschiebelineals durch „geometrische Simulation“ der algebraischen Lösung Cardanos erfolgt, ist unter Verwendung zweier Rechtwinkellineale in der Weise, wie sie Platon zur Konstruktion von $\sqrt[3]{d}$ benutzte (vgl. Abschnitt 9.2, Abb. 33, S. 196), eine beliebige Gleichung dritten Grades direkt lösbar. Die Methode läßt sich nach Cremona sogar zur graphischen Lösung einer beliebigen Gleichung n-ten Grades verallgemeinern, wenn man $n - 1$ Rechtwinkellineale benutzt.

Die Koeffizienten der Gleichung

$$(3) \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

seien als gerichtete Strecken gegeben. Man errichte in einem Endpunkt p_n von a_n das Lot g_n. Bezeichnet p_{n-1} den anderen Endpunkt von a_n (Abb. 81), so ist für $p' \in g_n$ stets $\overline{p'p_n} = a_n \cdot \tan\alpha$ $(\alpha = \sphericalangle\, p'p_{n+1}p_n)$. Trägt man unter Berücksichtigung des Vorzeichens die Strecke a_{n-1} auf g_n an $\overline{p'p_n}$ an, errichtet im so erhaltenen Punkt p_{n-1} abermals das Lot g_{n-1} und schneidet g_{n-1} die Gerade $Lot(p', L(p_{n+1}, p'))$ in p'', so sind die Dreiecke $p_{n+1}p'p_n$ und $p'p''p_{n-1}$ ähnlich, und es ist

$$\begin{aligned}\overline{p_{n-1}p''} &= \overline{p_{n-1}p'} \cdot \tan\alpha \\ &= (a_n \tan\alpha + a_{n-1}) \tan\alpha = a_n (\tan\alpha)^2 + a_{n-1} \tan\alpha.\end{aligned}$$

Durch Fortsetzung dieser Konstruktion erhält man schließlich eine Strecke der Länge

$$(4) \qquad a_n (\tan\alpha)^n + a_{n-1} (\tan\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1 \tan\alpha + a_0.$$

Daraus ergibt sich folgendes Verfahren zur graphischen Lösung der Gleichung (3): Man konstruiere unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Glieder a_i einen Streckenzug $p_{n+1}p_np_{n-1} \cdots p_1p_0$ mit $\overline{p_ip_{i+1}} = a_i$ und $\sphericalangle\, p_{i+1}p_ip_{i-1} = \mathrm{R}$ und lege durch p_i, p_{i-1} die Gerade g_i $(i = 1, \ldots, n)$. Legt man nun das erste Rechtwinkellineal $\mathrm{R}^{(1)}$ mit einem

Schenkel durch p_{n+1} und der Spitze p' auf g_n (wobei ein zunächst beliebiger Winkel α entsteht), das zweite Rechtwinkellineal $R^{(2)}$ mit einem Schenkel durch p' und der Spitze p'' auf g_{n-1} usw., so findet man durch probeweises Verschieben der gesamten Anlage diejenigen Winkel α, für die (4) gleich 0 ist, d. h., man erhält die sämtlichen reellen Lösungen x der Gleichung (3) in Gestalt ihrer arctan-Werte. Aus $\alpha = \arctan x$ kann x sofort als Gegenkathete eines zu $\Delta\, p_{n+1}p'p_n$ ähnlichen Dreiecks mit der Ankathete 1 konstruiert werden bzw. $x = \overline{p_n p'}$, falls in (3) $a_n = 1$ ist.

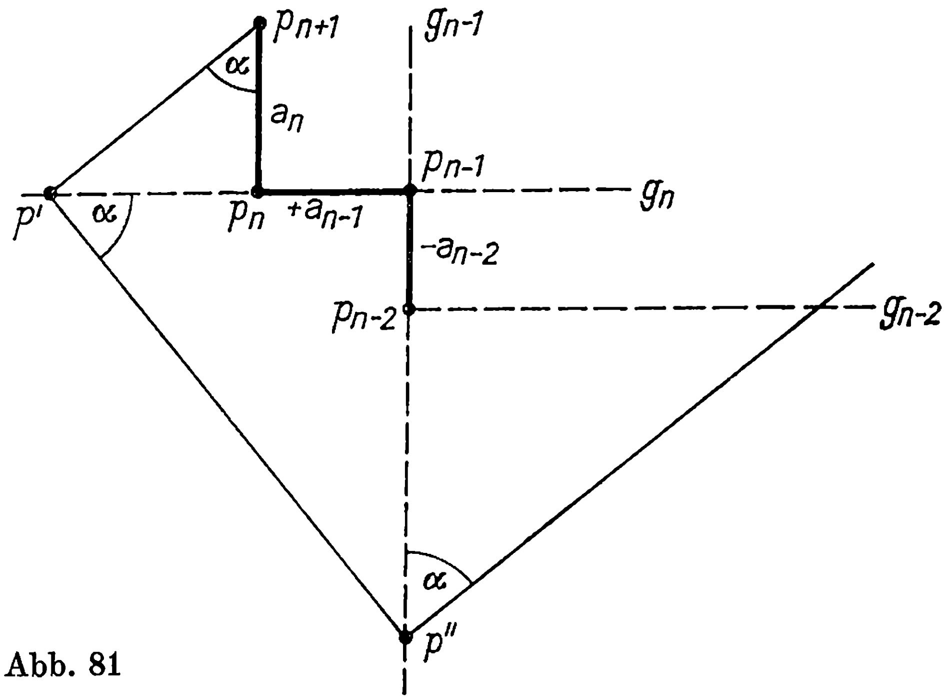


Abb. 81

Die bei der beschriebenen Anwendung von $n - 1$ Winkellinealen zur Lösung einer Gleichung n-ten Grades realisierte Operation ist (bei etwas willkürlicher Auswahl eines die Resultatkonfiguration bestimmenden Punktes) die im allgemeinen n-deutige Operation

$$\begin{aligned} &W^R_{(n-1)}(p_0, p_{n+1}, g_2, \ldots, g_n) \\ &:= \{p \colon p \in g_n \wedge \bigvee p^{(2)} \cdots p^{(n-1)}(p^{(2)} \in g_2 \wedge \cdots \wedge p^{(n-1)} \in g_{n-1} \\ &\quad \wedge \llcorner\; p_0p^{(2)}p^{(3)} \wedge \cdots \wedge \llcorner\; p^{(i-1)}p^{(i)}p^{(i+1)} \wedge \cdots \wedge \llcorner\; p^{(n-1)}pp_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Hinzu kommen L, S_1 und W^R_1 zur Konstruktion von KKS, Konstruktion des Streckenzuges $p_0p_1 \cdots p_{n+1}$ und zur Ausführung der rationalen Operationen. Damit haben wir

Satz 3. *Mit $n - 1$ Winkellinealen, d. h. mit dem abstrakten Instrumentensatz $(L, S_1, W^R_1, W^R_{(n-1)})$ ist jede Aufgabe maximal n-ten Grades im Bereich der Punkte und Geraden lösbar.*

Da offenbar $W^R_{(1)} = W^R_2$ ist (vgl. Abschnitt 7.2), ergibt sich als Spezialfall ein neuer Beweis des Satzes von Adler:

Mit einem Rechtwinkellineal, d. h. mit dem abstrakten Instrumentensatz (L, S_1, W^R_1, W^R_2) ist jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe, deren Resultat nur aus Punkten und Geraden besteht, lösbar.

Ein Kernstück der Theorie der geometrischen Konstruktionen ist seit dem Altertum die Lösung von Konstruktionsaufgaben höheren Grades mittels Zirkel und Lineal und gewisser vorgegebener Kurven, insbesondere die Lösung der klassischen Aufgaben Tri und Kub und damit aller Aufgaben dritten Grades durch Schnitt von Kreisen und Geraden mit einem vorgegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{k}$. Dies bedeutet die Ergänzung des abstrakten Instrumentensatzes (L, Z, S_1, S_2, S_3) durch die Operationen

$$S_1^{\mathfrak{k}}(g) := \{p\colon p \in g \wedge p \in \mathfrak{k}\},$$

$$S_2^{\mathfrak{k}}(k) := \{p\colon p \in k \wedge p \in \mathfrak{k}\}.$$

Als ein Beispiel aus der fast unübersehbaren Fülle der Einzellösungen geben wir hier die Lösung der Aufgabe Kub mittels einer vorgegebenen Parabel $\mathfrak{k}$ nach DESCARTES an:

Hilfsaufgabe. Zu gegebener Parabel $\mathfrak{k}$ ist mit Zirkel und Lineal ein KKS konstruierbar, bezüglich dessen $\mathfrak{k}$ durch die Gleichung $y = x^2$ beschrieben wird. (Die Aufgabe hat offenbar genau zwei Lösungen, die durch Vertauschen der positiven x-Richtung ineinander übergehen.) Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir den Satz, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen einer Parabel $\mathfrak{k}$ eine zur Achse von $\mathfrak{k}$ parallele Gerade ist.

$\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k}$ Parabel)

$\downarrow$

$\mathrm{g}_1 = \varepsilon \mathrm{g}$ (g schneidet $\mathfrak{k}$) (d. h., g_1 hat mit $\mathfrak{k}$ zwei Punkte gemeinsam)

$\mathrm{p}' = \varepsilon \mathrm{p}$ (p in derjenigen Halbebene bezüglich g_1, die den unbeschränkten Teil von $\mathfrak{k}$ enthält)

(Durch diese Wahl des Hilfspunktes p' wird gesichert, daß $P(p', g_1)$ $\mathfrak{k}$ schneidet.)

$\mathrm{g}_2 = \mathrm{P}(\mathrm{p}', \mathrm{g}_1)$

$\mathrm{P}_1 = \mathrm{S}_1^{\mathfrak{k}}(\mathrm{g}_1)$

$\mathrm{P}_2 = \mathrm{S}_2^{\mathfrak{k}}(\mathrm{g}_2)$

$\mathrm{p}_3 = \mathrm{M}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_1)$

$\mathrm{p}_4 = \mathrm{M}(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2)$

$\mathrm{g}_3 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$

$\mathrm{g}_4 = \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_4, \mathrm{g}_3)$

$\mathrm{P}_3 = \mathrm{S}_1^{\mathfrak{k}}(\mathrm{g}_4)$

$\mathrm{p}_5 = \mathrm{M}(\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_3)$

$\mathrm{g}_5 = \mathrm{P}(\mathrm{p}_5, \mathrm{g}_3)$ (g_5 ist schon die gesuchte y-Achse)

$\mathrm{p}_0 = \mathrm{S}_1^{\mathfrak{k}}(\mathrm{g}_5)$

$\mathrm{g}_6 = \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_0, \mathrm{g}_5)$

(Abb. 82a; die folgende Konstruktion der Einheitspunkte $p_1 \in g_6$, $p_2 \in g_5$ ist der Übersicht halber in Abb. 82b gesondert dargestellt).

$$\mathrm{k}_1 = \mathrm{Z}(\mathrm{p}_0; \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_5)$$
$$\mathrm{P}_4 = \mathrm{S}_2(\mathrm{k}_1, \mathrm{g}_6)$$
$$\mathrm{p}_6 = \varepsilon \mathrm{p}\ \mathrm{p} \in \mathrm{P}_4$$

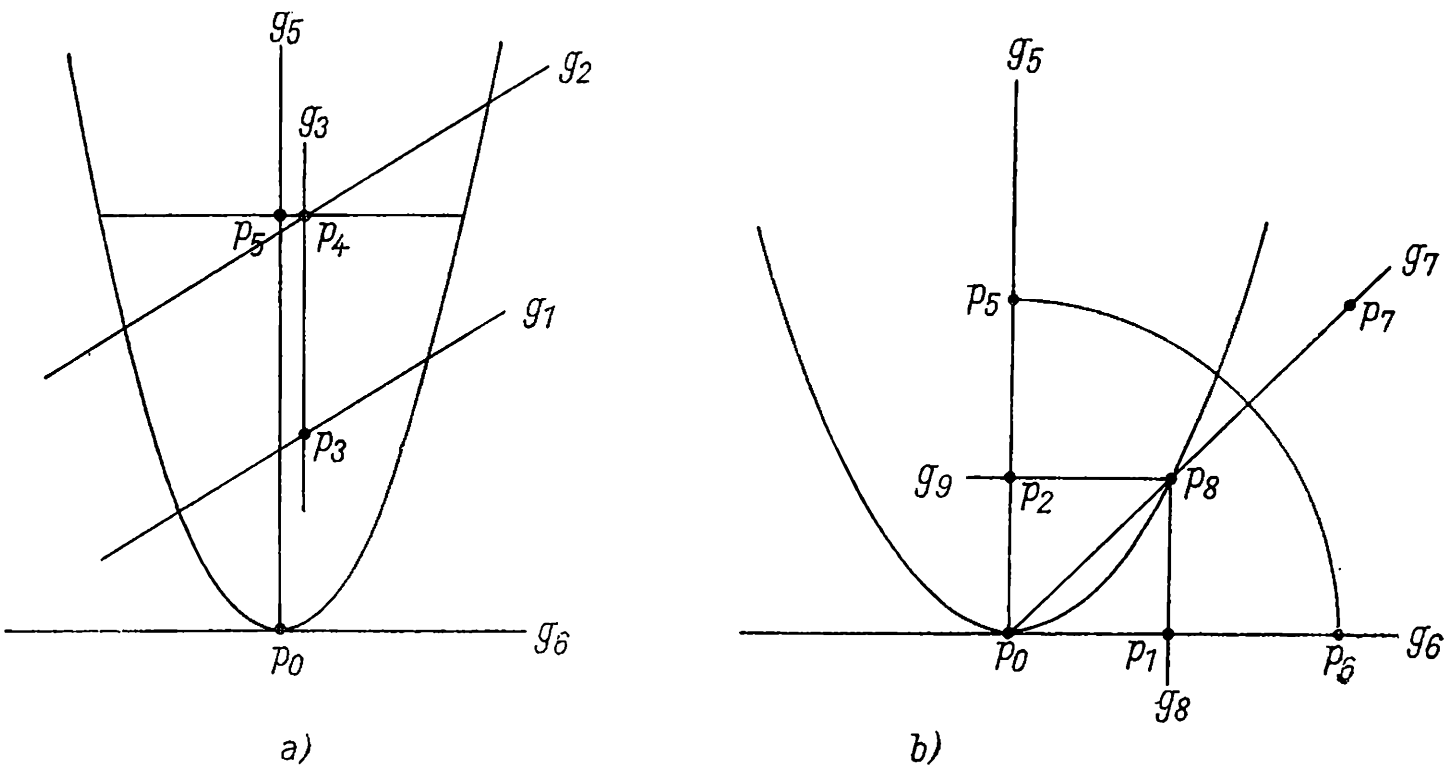


Abb. 82

Von der zufälligen Auswahl dieses Hilfspunktes hängt es ab, welche der beiden Lösungen der Aufgabe man bekommt.

$$\mathrm{p}_7 = \mathrm{Vsp}(\mathrm{p}_0; \mathrm{p}_5, \mathrm{p}_6)$$
$$\mathrm{g}_7 = \mathrm{L}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_7)$$
$$\mathrm{P}_5 = \mathrm{S}_1^{\mathfrak{k}}(\mathrm{g}_7)$$
$$\mathrm{p}_8 = \iota \mathrm{p}(\mathrm{p} \in \mathrm{P}_5 \wedge \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_0)$$
$$\mathrm{g}_8 = \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_8, \mathrm{g}_6)$$
$$\mathrm{g}_9 = \mathrm{Lot}(\mathrm{p}_8, \mathrm{g}_5)$$
$$\mathrm{p}_1 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_6, \mathrm{g}_8)$$
$$\mathrm{p}_2 = \mathrm{S}_1(\mathrm{g}_5, \mathrm{g}_9)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$$

Zur Konstruktion von $\sqrt[3]{d}$ bringe man $\mathfrak{k}$ mit demjenigen Kreis k zum Schnitt, der bezüglich des eben konstruierten KKS den Mittelpunkt $\left(\frac{d}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hat und durch p_0 geht, also der Gleichung

$$(5) \qquad \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + 1}{4}$$

genügt. Für die Koordinaten x, y des von p_0 verschiedenen Schnittpunktes von $\mathfrak{k}$ und k ergibt sich aus (5) und $y = x^2$ die Gleichung $y^2 - dx = 0$. Die Gleichung $y^2 = dx$ ergibt, mit $y = x^2$ multipliziert, $y^3 = dx^3$, d. h., man erhält $\sqrt[3]{d}$ in der Form $\frac{y}{x}$.

Die Methode von Descartes weist die für alle Lösungen dieser Art typischen „ungeometrischen" Züge auf: Man sucht die Koordinaten eines zu konstruierenden Kreises so zu bestimmen, daß die Gleichung der Schnittpunkte dieses Kreises mit dem verfügbaren Kegelschnitt gleich der zu lösenden Gleichung wird. Nach diesem Prinzip löste Descartes auch die Aufgabe Tri mittels Parabel. Pappos, Chasles u. a. lösten Tri mit gleichseitigen Hyperbeln. Kub wurde von Gregoire unter Verwendung einer Hyperbel, von Slusius (sehr kompliziert) unter Benutzung einer Ellipse gelöst. Das abschließende Resultat in dieser Richtung ist der

Satz von Smith und Kortum. *Bei Vorgabe einer beliebigen Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist jede Konstruktionsaufgabe dritten Grades mit Zirkel und Lineal lösbar.*

Der Satz von Smith-Kortum und sein Beweis gehören eher der Algebra an als der Geometrie. Geometrisch interessant ist nur die nötige Vorbetrachtung, daß man (analog zur oben für Parabeln gelösten Hilfsaufgabe) zu jeder Ellipse bzw. Hyperbel ein KKS konstruieren kann, bezüglich dessen diese Kurven durch die wohlbekannten Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden. Der Leser entnehme die entsprechenden Konstruktionen der Andeutung, daß für Ellipsen und Hyperbeln der geometrische Ort der Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen eine Gerade durch den Ursprung p_0 des gesuchten KKS ist. Ein Kreis von geeignetem Radius um den so gefundenen Punkt p_0 schneidet die Ellipse bzw. Hyperbel in vier Punkten, so daß die gesuchten Hauptachsen die Winkelhalbierenden dieser vier über Kreuz verbundenen Punkte sind (Abb. 83).

Der algebraische Teil des Beweises des Satzes von Smith und Kortum ist am einfachsten für den Fall der Parabel.

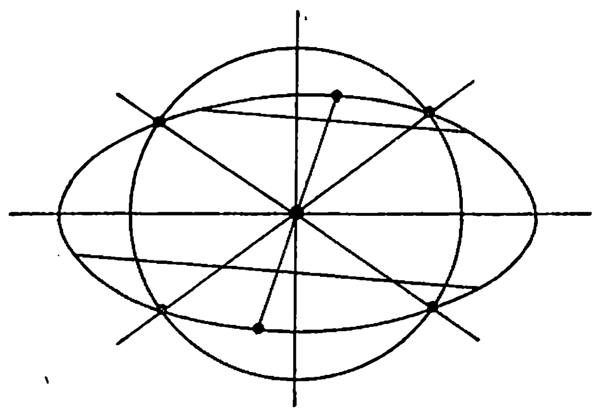
Die algebraische Analyse der zu behandelnden Aufgabe, bezogen auf das KKS, in dem die gegebene Parabel $\mathfrak{k}$ durch $y = x^2$ beschrieben wird, führe (eventuell nach kanonischer Transformation) auf die Aufgabe, aus konstruierbaren Strecken p, q die Lösungen der irreduziblen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ zu konstruieren. Zur

Lösung konstruiere man den Kreis k_0 um den Punkt $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$, der durch den Koordinatenursprung verläuft, also durch die Gleichung

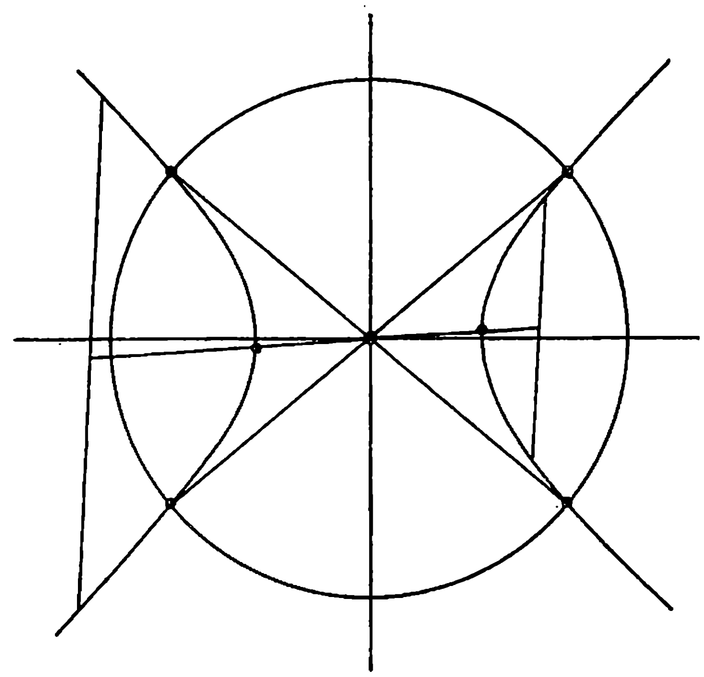
(6) $$x^2 + qx + y^2 + (p-1)\,y = 0$$

beschrieben wird. Für die Koordinaten der Schnittpunkte von k_0 und $\mathfrak{k}$ ergibt sich durch Einsetzen von $y = x^2$ in (6)

$$x^4 + px^2 + qx = x(x^3 + px + q) = 0,$$



a)



b)

Abb. 83

d. h., man erhält die gesuchten Lösungen in Gestalt der x-Koordinaten der von p_0 verschiedenen Schnittpunkte von k_0 und $\mathfrak{k}$.

Wenden wir uns nun dem wesentlich komplizierteren Fall zu, daß der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse $\mathfrak{k}$ ist, die bezüglich des nach Hilfsaufgabe konstruierten KKS durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben wird. Bezeichnet p^* den Punkt mit den Koordinaten $(-a, 0)$, so wird $\mathfrak{k} \setminus \{p^*\}$ auch durch die Parameterdarstellung

(7) $$x(t) = a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = b \cdot \frac{2t}{1+t^2}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

erzeugt (Abb. 84a). Dabei sind zu jedem (als gerichtete Strecke) gegebenen t die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und damit auch der Punkt $p(t)$ mit diesen Koordinaten mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Umgekehrt ist aus jedem von p^* verschiedenen Punkt $p \in \mathfrak{k}$ mit Zirkel und Lineal der zugehörige Parameterwert aus der nach t aufgelösten ersten Gleichung (7) und der Bedingung „Vorzeichen von t = Vorzeichen der y-Koordinate von p“ konstruierbar.

Einsetzen der Parameterdarstellung (7) in die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

liefert nach entsprechenden Umformungen

$$(8)\qquad (a^2 + 2ax_0 + d)\, t^4 - 4by_0t^3 + (4b^2 - 2a^2 + 2d)t^2 - 4by_0t + (a^2 - 2ax_0 + d) = 0,$$

wobei zur Abkürzung $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = d$ gesetzt wurde, d. h. eine Gleichung der Form

$$(9)\qquad At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0 \text{ (nicht notwendig } A \neq 0).$$

Wir zeigen, daß man die Lösung einer irreduziblen Gleichung

$$(10)\qquad t^3 + pt + q = 0$$

auf die Lösung einer Gleichung der Form (9) zurückführen kann: $t^3 + t + q = 0$ ist selbst von der Form (9). Ist $p \neq 1$, so ist

$$(11)\qquad t^4 + \frac{q}{1-p}\,t^3 + pt^2 + \frac{q}{1-p}\,t + \frac{q^2}{1-p} = (t^3 + pt + q)\left(t - \frac{q}{p-1}\right) = 0$$

von der Form (9), d. h., die Lösungen von (10) (die wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität ungleich $\frac{q}{p-1}$ sind) sind die von $\frac{q}{p-1}$ verschiedenen Lösungen der Gleichung (11). Bei der Lösung einer Gleichung der Form (9) können wir zusätzlich

$$(12)\qquad A + D - C \neq 0$$

voraussetzen. Andernfalls wäre

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = (At^2 + Bt + D)\,(t^2 + 1),$$

d. h., auch das als Faktor in (9) enthaltene Polynom (10) wäre reduzibel. Wegen (12) kann man durch Multiplikation von (9) mit einem geeigneten Skalarfaktor erreichen, daß sogar

$$(13)\qquad A + D - C = 4(a^2 - b^2)$$

ist. Koeffizientenvergleich von (8) und (9) ergibt nun für x_0, y_0, d das Gleichungssystem

$$(14)\qquad 2ax_0 + d = A - a^2,$$

$$(15)\qquad -4by_0 = B,$$

$$(16)\qquad 2d = C + 2a^2 - 4b^2,$$

$$(17)\qquad -2ax_0 + d = D - a^2,$$

worin wegen (13) die letzte Gleichung (17) die Differenz von (16) und (14) ist. Die Gleichungen (15), (16), (17) sind eindeutig nach x_0, y_0, d auflösbar:

$$y_0 = \frac{B}{4b}, \quad d = \frac{C + 2a^2 - 4b^2}{2}, \quad x_0 = \frac{2A - C + 4(b^2 - a^2)}{4a}, \tag{18}$$

es müßte daher $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - d}$ sein. Hat die gegebene Gleichung (10) überhaupt eine reelle Lösung t, so ist diese auch Lösung von (9), demnach von (8). Folglich erfüllen $x(t)$, $y(t)$ die Gleichung

$$\big(x(t) - x_0\big)^2 + \big(y(t) - y_0\big)^2 + d = x_0^2 + y_0^2,$$

d. h., es ist $d \leqq x_0^2 + y_0^2$. Wäre $d = x_0^2 + y_0^2$, also der Radius r des gesuchten Kreises gleich Null, so wäre der Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0 selbst ein Punkt von $\mathfrak{k}$, dessen Parameter gerade die gegebene Lösung t von (10) wäre. Daher wäre t mit Zirkel und Lineal aus den Koeffizienten p, q von (10) schon ohne Verwendung von $\mathfrak{k}$ konstruierbar — im Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von (10). Daher ist $d < x_0^2 + y_0^2$, und es ergibt sich folgender Weg zur Lösung der Gleichung (10):

1. (Falls nötig) Transformation von (10) auf die Form (9).
2. Konstruktion von x_0, y_0, d nach Vorschrift (18) und von
$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - d}.$$
3. Konstruktion des Kreises k_0 vom Radius r um (x_0, y_0).
4. Bestimmung der y-Koordinaten der Schnittpunkte von k_0 und $\mathfrak{k}$ und Konstruktion der zugehörigen t-Werte.
5. Falls 1. durchgeführt wurde, Aussonderung der Lösung $\dfrac{q}{p-1}$.

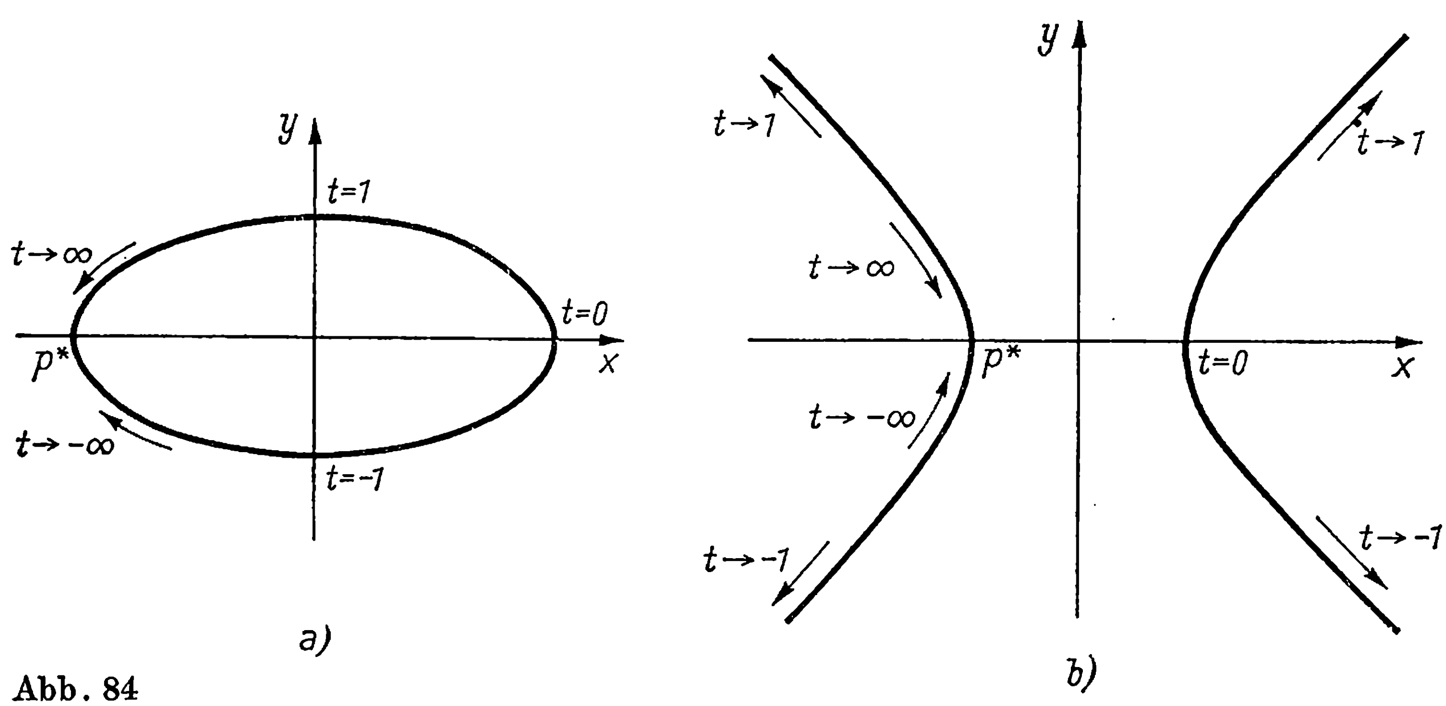


Abb. 84

Ist eine Hyperbel $\mathfrak{k}$ gegeben, so läßt sich das für den Fall der Ellipse ausführlich behandelte Verfahren mit geringen Änderungen übertragen. Die zu verwendende Parameterdarstellung lautet hier

$$x(t) = a\,\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y(t) = b\,\frac{2t}{1-t^2}.$$

Sie stellt für $-1 < t < 1$ den rechten und für $t < -1$ und $t > 1$ den linken Ast der Hyperbel $\mathfrak{k}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Ausnahme des Punktes $(-a, 0)$ dar (Abb. 84b). Einsetzen dieser Parameterdarstellung in die allgemeine Kreisgleichung ergibt (wobei wieder $d = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ gesetzt ist)

$$\begin{aligned}(19)\qquad &(a^2 + 2ax_0 - d)\,t^4 + 4by_0t^3 + (2a^2 + 4b^2 - 2d)\,t^2 - 4by_0t\\ &+ a^2 - 2ax_0 + d = 0.\end{aligned}$$

Eine irreduzible Gleichung $t^3 + pt + q = 0$ mit $p \neq -1$ kann durch die Transformation

$$t^4 - \frac{q}{p+1}\,t^3 + pt^2 + \frac{q}{p+1}\,t - \frac{q^2}{p+1} = (t^3 + pt + q)\left(t - \frac{q}{p+1}\right) = 0$$

auf die Form

$$(20)\qquad At^4 - Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0$$

gebracht werden. $t^4 - t + q = 0$ hat selbst diese Form. Wir können ferner $A + D + C \neq 0$ annehmen, da andernfalls

$$At^4 - Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = (At^2 - Bt - D)\,(t^2 - 1),$$

also auch der kubische Faktor von (20) reduzibel wäre. Dann kann aber durch Multiplikation von (20) mit einem geeigneten Faktor sogar

$$A + D + C = 4(a^2 + b^2)$$

erreicht werden. Dies hat zur Folge, daß in dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(21)\qquad & 2ax_0 + d &&= A - a^2,\\ (22)\qquad & 4by_0 &&= -B,\\ (23)\qquad & -2d &&= C - 2a^2 - 4b^2,\\ (24)\qquad & -2ax_0 + d &&= D - a^2,\end{aligned}$$

das sich aus dem Koeffizientenvergleich von (19) und (20) ergibt, die letzte Zeile die Summe der mit -1 multiplizierten Gleichungen (21) und (23) ist. Die Gleichungen (22), (23), (24) sind eindeutig lösbar. Durch eine analoge Überlegung wie im Fall der Ellipse ergibt sich, daß für die erhaltene Lösung x_0, y_0, d gilt: Hat (10) eine reelle Lösung, so ist $x_0^2 + y_0^2 - d > 0$, so daß wirklich ein Kreis um (x_0, y_0) existiert, dessen Schnittpunkte mit der Hyperbel $\mathfrak{k}$ zu Parametern gehören, die Lösungen der gegebenen Gleichung dritten Grades sind.

Ohne Beweis sei erwähnt, daß statt eines vollständigen Kegelschnittes ein beliebig kleiner Teilbogen einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel genügt. Dies folgt jedoch nicht aus dem Satz von Oblath, da es sich hier um die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreis handelt.

Literaturverzeichnis

Die folgende Aufstellung enthält nur die wesentlich benutzte Literatur. Zahlreiche Hinweise auf weitere, vor allem ältere Arbeiten über geometrische Konstruktionen findet man vor allem in [1], [2], [6], [13].

[1] ADLER, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1906.

[2] BIEBERBACH, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Birkhäuser-Verlag, Basel 1952.

[3] DOBROWOLSKI, W. W., Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven, Akademie-Verlag, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).

[4] EFIMOW, N. W., Über die Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

[5] EFIMOW, N. W., Grundzüge der projektiven Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970 (Übersetzung aus dem Russischen).

[6] ENRIQUES, F., Fragen der Elementargeometrie, II. Teil, B. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1923.

[7] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band II: Algebra, 5. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

[8] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV: Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969 (Übersetzung aus dem Russischen).

[9] Grundzüge der Mathematik, Band II: Geometrie, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967 bzw. 1970.

[10] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie, 9. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1962.

[11] THIELE, H., Wissenschaftstheoretische Untersuchungen in algorithmischen Sprachen I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[12] TROPFKE, J., Geschichte der Elementarmathematik, vierter Band, 3. Aufl., de Gruyter, Berlin 1940.

[13] VAHLEN, TH., Konstruktionen und Approximationen, B. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1911.

[14] ZÜHLKE, P., Konstruktionen in begrenzter Ebene, B. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1913.

Namen- und Sachverzeichnis

Abbildung 14
—, eineindeutige 14
—, inverse 14
—, projektive 97
-en, affine 89
-en, —, Hauptsatz 90
-en, projektive, Hauptsatz 98
ABEL, N. H. 71
abgeschlossene Figur 182
-r Ausdruck 26
Abschließung, projektive 78, 95, 225
absolute eindeutige Existenzaussage 37
Abstandsformel, euklidische 103
abstrakte Länge 102
— Streckenlängen 44
-r Instrumentensatz 123
-s Lineal 125
ABÛ'L-WAFÂ 220
achsenperspektiv 75
Adjunktion, mengentheoretische 63
—, symbolische 64
ADLER, A. 179, 220, 259, 266, 282
Adresse 112
AEE (absolute eindeutige Existenzaussage) 37
affine Abbildungen 89
— —, Hauptsatz 90
— Ebene 81
— Instrumente 124
— Inzidenzebene 74
-r Satz von DESARGUES 76, 80
-s Koordinatensystem 84
AKS (affines Koordinatensystem) 84
algebraische Analyse eines Instrumentes 199
algebraische Analyse einer Konstruktionsaufgabe 208
— Gleichung 209
— Konstruktionsaufgaben 186
— Zahlen 63
Algorithmus, Gaußscher 184
allgemeine Lage 36
Alternative 18
Analyse, algebraische eines Elementes 199
—, — einer Konstruktionsaufgabe 208
—, logische 123
Anordnungsaxiome 81
äquivalent 180, 228, 252
-e Teiltheorien 178
Äquivalenz 18
Äquivalenzrelation 13
Arbeitsbaustein 114
Arbeitsknoten 109
ARCHIMEDES 195, 219
archimedisch geordnete Körper 56
Archimedisches Axiom 56, 160, 203
ARTIN, E. 73
Attribut 20
Ausdehnung, formale, einer Relation 13
Ausdruck, abgeschlossener 26
—, dualer 80
—, rationaler 66
—, unabhängiger 30
Ausdrücke 23
—, elementar entscheidbare 154
—, prädikative 23
Aussage 18
—, selbstduale 81

Aussageform 19
-en 24
aussagenlogische Verknüpfung 21
Aussagenverbindung, extensionale 18
äußere Einschiebung 133
Auswahl, konstruktive 167, 169
Axiom, Archimedisches 56, 160, 203
— von PASCH 81, 83, 233, 238
axiomatische Theorien 17
Axiome 17
Axiomensystem 27
—, (elementar)kategorisches 27

BE (bedingte Existenzaussage) 137
—, konstruktiv beweisbare 161
bedingt äquivalent 180, 228, 252
-e Entscheidbarkeit 161
-e Existenzaussage 137
-e eindeutige Existenzaussage 37
Bedingung 114
BEE (bedingte eindeutige Existenzaussage) 37
Belegung 24
—, partielle 139
BELL, J. L. 28
beschränkter Zirkel 122
beschränktes Konstruktionsinstrument 124
— Lineal 125
Beschreibung 148
BEUTEL, E. 215
Bewegung 99
Beweis der Richtigkeit der Konstruktion 137
BIEBERBACH, L. 72, 136
binäre Relation 108
Bipolarkoordinaten 197
Boolesche Funktionen 18
BRIANCHON, Ch. J. 221

CARDANO, H. 69, 281
CARNOT, L. M. N. 220
Charakteristik 55
CHASLES, M. 285
CHMELEVSKIJ, Ju. I. 60
CHURCH, A. 111
CREMONA, L. 281

Darstellung 113
definierende Gleichung 63
-s Polynom 63
Definition, repräsentantenweise 44
definitorische Erweiterung 33
delisches Problem *siehe* Verdopplung des Würfels

DESARGUES, G. 74
DESCARTES, R. 221, 283, 285
Diagonalpunkte 235
Differenz 12
diophantisches Gleichungssystem 60
Doppelverhältnis 238
Dreieckskonstruktionen 175
Dreiecksungleichung 103
Dreiteilung eines Winkels 216
dualer Ausdruck 80
Dualitätsprinzip 81
DUBOIS, E. 266
Durchschnitt 12
DÜRER, A. 220

Ebene, affine 81
—, euklidische 99
—, platonische 106
—, projektive 94
EBNER, M. 222
Eichmaß 134, 247
eindeutige Existenzaussage, absolute 37
— —, bedingte 37
— —, unbedingte 37
eineindeutige Abbildung 14
Einführungsaxiome 34
Einheitsform 61
Einheitswurzel 217
Einschiebelineal 134, 207
Einschiebung, innere 134
Element, frei vorkommendes 26
elementar äquivalente Instrumentensätze 179
— charakterisierbare Klasse 28
— entscheidbare Ausdrücke 154
(—) kategorisches Axiomensystem 27
-e Klasse 28
-e Konstruktion 145
-e Theorie 27
Ellipsenzirkel 135
endlichvieldeutige Operationen 14
Entscheidbarkeit, bedingte 161
Erweiterung, definitorische 33
—, quadratische 67
EUDOXOS 219
EUKLID 219
euklidische Abstandsformel 103
— Ebene 99
extensionale Aussagenverbindung 18
Existenzaussage, bedingte 137
—, — eindeutige 37
—, eindeutige absolute 37
—, unbedingte eindeutige 37

FERRARI, L. 70, 187, 220, 277
Figur 181
—, abgeschlossene 182
Flußdiagramm 110
—, konsistentes 149
—, uniformes 138
σ-Folgern 28
formale Ausdehnung einer Relation 13
formalisierte Sprache 22
Formeln, Vietasche 65
frei vorkommendes Element 26
-e Strecken 44
-e Variablen 19
-es Instrument 124
Funktionen, Boolesche 18

GAUSS, C. F. 72, 217, 221
Gaußsche Zahlenebene 193, 217
Gaußscher Algorithmus 184
gebundene Variable 26
Generalisierung 21
geordneter Körper 56
— Schiefkörper 87
Gerade, uneigentliche 78
Geradenkoordinaten 198
Gesamtgrad eines Gleichungssystems 209
Gleichung, algebraische 209
—, definierende 63
— n-ten Grades 68
—, radikalreduzible 68
—, rationalreduzible 68
-en, kanonische, n-ten Grades 68
Gleichungssystem, diophantisches 60
—, Grad 209
Grad eines Polynoms 58
Graph 109
GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT 285
Grundbegriffe 17, 22
Grundzeichen 23
Gruppe 46

Halbebene 83
hängendes Lineal 125
harmonisch konjugiertes Punktepaar 235
Hauptsatz über affine Abbildungen 90
— über projektive Abbildungen 98
— über Parallelogramme 102
HILBERT, D. 76, 221, 247
HIPPOKRATES von Chios 220
HJELMSLEV, J. 220
HÜTTEMANN, F. 242

ideale Konstruktionselemente 191
— Zeichenflächen 121
— Zeichengeräte 121
-r Zirkel 122
-s Lineal 122
Implikation 18
induktive Strukturgraphen 114
innere Einschiebung 134
Instrument, algebraische Analyse 199
—, beschränktes 124
—, freies 124
-e, affine 124
Instrumentensatz, abstrakter 123
Instrumentensätze, elementar äquivalente 179
—, unbedingt äquivalente 179
Integritätsbereich 53
Interpretation 24
Interpretationseinschränkung 28
Interpretationsvorschrift 28
Invariantensatz 50
invariantes Objekt 47
inverse Abbildung 14
Inzidenz 43
Inzidenzebene, affine 74
—, projektive 79
Inzidenzinstrumente 124
Inzidenzrelation 16
irreduzibles Polynom 59
Isomorphie 27
Isomorphismus 15
Iteration 114

JACOBI, B. 218

kanonische Gleichungen n-ten Grades 68
Kanten 109
kartesisches Koordinatensystem 101
— Produkt 12
KKS (kartesisches Koordinatensystem) 101
Klasse, elementar charakterisierbare 28
—, elementare 28
KLOTZEK, B. 84
Knoten 109
koinzident 36
kollinear 35, 43
komplexe Zahlen 65
Konchoide 206
Kongruenz 99
Kongruenzaxiome 99
Kongruenzinstrumente 124
Konjunktion 18
konkrete Länge 102
konsistentes Flußdiagramm 149

Konstanteneinsetzung 21
Konstruktion, Beweis der Richtigkeit 137
—, elementare 145
— mit Hilfselementen 172
Konstruktionsaufgabe 137
—, algebraische Analyse 208
— n-ten Grades 277
—, Lösung 137, 140, 178
-n, algebraische 186
Konstruktionsbeschreibung 137
Konstruktionselemente, ideale 121
konstruktiv beweisbare BE 161
konstruktive Auswahl 167, 169
-e Teiltheorie 136
konvex 82
Koordinatenkörper 87, 184
Koordinatensystem 198
—, affines 84
—, kartesisches 101
—, projektives 96
Körper 53
—, archimedisch geordnete 56
—, geordneter 56
— der komplexen Zahlen 65
—, platonischer 73
—, pythagoreischer 73
KORTUM, H. 285
Kreis, Quadratur 215
Kreiskoordinaten 198
Kreisteilungsgleichung 217
Kreuzoperation 126
KRÖTENHEERDT, O. 222
kurzes Lineal 122

Länge, abstrakte 102
—, konkrete 102
Lage, allgemeine 36
LAMBERT, J. H. 220
LEMOINE, E. M. J. 221
LEONARDO DA VINCI 220
LINDEMANN, F. VON 220
Lineal 129, 200
—, abstraktes 125
—, beschränktes 125
—, hängendes 125
—, ideales 122
—, kurzes 122
—, markiertes 132
—, normiertes 134, 206, 259
—, projektives 225
Logik, schwache zweiter Stufe 29
logische Analyse 123
— Schlußfolgerung 27

Lösung, starke 69
— einer Konstruktionsaufgabe 137, 140, 178
LÖWENHEIM, L. 27
Lot 142

MALFATTI, G. F. 211, 215
markiertes Lineal 132
MASCHERONI, L. 179, 220
MENELAOS von Alexandria 280
Menge 11
—, widerspruchsfreie 27
Mengenabbildung 47
Mengenterme 42
mengentheoretische Adjunktion 63
Modell 26
MOHR, G. 179, 220

n-Eck, reguläres 217
Negation 18
NEWTON, I. 280
nichtelementare Sprache 28, 158
normiertes Lineal 134, 206, 259
n-sortige Struktur 15
n-stellige Relationen 13
nullteilerfreier Ring 53

Objekt, invariantes 47
OBLATH, R. 242, 290
Operation, partielle 14
-en im Bereich 15
-en, endlichvieldeutige 14
Ordnung 13

PAPPOS von Alexandria 279, 285
Parallelenaxiom 30
—, schwaches 78
—, starkes 74
Parallellineal 129, 131, 205, 259, 262
Parallelität 36
Parallelogramm, Hauptsatz 102
partielle Belegung 139
— Operation 14
Partikularisierung 21
PASCAL, B. 242
PASCH, M. 81
PEANO, G. 29
Perspektivitätsachse 76
Perspektivitätszentrum 75
PICKERT, G. 39
PKS (projektives Koordinatensystem) 96
PLATON 195, 219, 281
platonisch-reduzibles Polynom 73
-e Ebene 106

platonisch-reduzibler Körper 73
Polarkoordinaten 197
Polynom 58
—, definierendes 63
—, Grad 58
—, irreduzibles 59
—, platonisch-reduzibles 73
—, reduzibles 59
Polynomialfunktionen 58
PONCELET, J. V. 179, 220
Potenz 104
Potenzgerade 104
Potenzmenge 12
Prädikat 20
prädikative Ausdrücke 23
Primkörper 55
Problem, delisches *siehe* Verdopplung des Würfels
Produkt, kartesisches 12
projektive Abbildung 92
— -en, Hauptsatz 98
— Abschließung 78, 95, 225
— Ebene 94
— Inzidenzebene 79
-r Satz von DESARGUES 79
-s Koordinatensystem 96
-s Lineal 225
Prüfbausteine 114
Prüfknoten 109
Punkte, uneigentliche 78
Punktepaar, harmonisch konjugiertes 235
Punktkoordinatensystem 197
pythagoreischer Körper 73

quadratische Erweiterung 67
Quadratur des Kreises 215
Quadratwurzelausdruck 66
Quantifizierung 21

Radikal 67, 186
radikalreduzible Gleichung 68
rationaler Ausdruck 66
rationalreduzible Gleichung 68
Rechtwinkellineal 131, 281
reduzibles Polynom 59
Relation 19, 20
— im Bereich 15
—, binäre 108
-en, n-stellige 13
REUSCH, J. 221
repräsentantenweise Definition 44
Ring 52
Ring, nullteilerfreier 53
RUFFINI, P. 71

Satz von ABEL 187
— von ADLER 181, 259, 282
—, affiner von DESARGUES 76, 80
— von ARTIN 73
— von CARDANO 186, 187
— von DESARGUES 75, 81, 86, 228
— von GAUSS 72
— von LÖWENHEIM-SKOLEM 27
— von MOHR-MASCHERONI 180, 220, 265
— von OBLATH 242
— von PAPPOS-PASCAL 88
— von PASCAL 242
— von PONCELET-STEINER 180, 220, 252
—, projektiver von DESARGUES 79
— von RUFFINI und ABEL 71
— von SMITH und KORTUM 285
— von STEINER 255
Schiefkörper, geordneter 87
Schlußfolgerung, logische 27
SCHRÖTER, H. 215
schwache Logik zweiter Stufe 29
-s Parallelenaxiom 78
SCHUR, F. 106
selbstduale Aussage 81
Signatur 15, 22
SKOLEM, Th. 27
SLOMSON, A. B. 28
SLUSIUS 285
SMITH, H. J. S. 285
Speicher 112
Sprache, formalisierte 22
—, nichtelementare 28, 158
stark äquivalente Teiltheorien 178
-e Lösung 69
-es Parallelenaxiom 74
STEINER, J. 179, 215, 220, 255
Strahl 83
Strecke 83
-n, freie 44
Streckenabtrager 134
Streckenlängen, abstrakte 44
Struktur, n-sortige 15
Strukturgraph 109
-en, induktive 114
symbolische Adjunktion 64
SZCZERBA, L. W. 81
SZMIELEW, W. 81

TARSKI, A. 28
TARTAGLIA, N. 220

Teiltheorie (im weiteren Sinn) 45
—, konstruktive 136
-n, äquivalente 178
-n, stark äquivalente 178
Teilverhältnis 237
Terme 23
Theorie, elementare 27
— im weiteren Sinn 45
-n, axiomatische 17
Totalordnung 13
Translation 91
Translationskongruenz 93
transzendente Zahlen 63
Trennungsaxiome 94

UEE (unbedingte eindeutige Existenzaussage) 37
unabhängiger Ausdruck 30
unbedingt äquivalente Instrumentensätze 179
-e eindeutige Existenzaussage 37
uneigentliche Gerade 78
— Punkte 78
uniformes Flußdiagramm 138
Untergruppe 46
Unterkörper 55
Unterring 55
Ursprung 84

Variabilitätsbereich 19
Variable, gebundene 26
—, vollfrei vorkommende 23
-n, freie 19
Variablengleichsetzung 20
Variablenumbenennung 20
Vektoraddition 92
Verdopplung des Würfels 216
Vereinigung 12
Verkettung 114, 144
Verknüpfung, aussagenlogische 21
Verzweigung 114, 145
Vierseit, vollständiges 235
VIETA, F. 187
Vietasche Formeln 65
vollfrei vorkommende Variable 23
vollständiges Vierseit 235

Wahrheitsfunktionen 18
Wahrheitswerte 18
widerspruchsfreie Menge 27
Winkel 84
—, Dreiteilung 216
Winkellineal 205, 259
Wirkungsbereich 26
Würfel, Verdopplung 216

Zahlen, algebraische 63
—, komplexe 65
—, transzendente 63
Zahlenebene, Gaußsche 193
Zeichenflächen, ideale 121
Zeichengeräte, ideale 121
zentralperspektiv 75
Zerlegung 14
Zirkel 129
—, beschränkter 122
—, idealer 122
— und Lineal 201
ZÜHLKE, P. 221
Zyklus 109