Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Höhere Mathematik

BAND 1

2. Auflage

Zentralstelle für die Fachschulausbildung
- Lehrmaterial für Grundlagenfächer -

L 10 0 04 - 1-5

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Höhere Mathematik

BAND 1

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung

Herausgeber:
Zentralstelle für die Fachschulausbildung
— Lehrmaterial für Grundlagenfächer —
Dresden 1962

Ausgearbeitet von:

WILHELM LEUPOLD, Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden

OTTO GREUEL, Ingenieurschule für Elektrotechnik „Fritz Selbmann", Mittweida

HORST BEINHOFF, Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel", Meißen

Begutachtet von den Mitgliedern einer Redaktionskommission:

GERHARD GABLER, Ingenieurschule für Eisenbahnwesen, Dresden

HANS KREUL, Ingenieurschule für Elektroenergie „Dr. Robert Mayer", Zittau

HANS LUDWIG, Bergingenieurschule Senftenberg

HERBERT NAJUCH, Ingenieurschule für Werkzeugmaschinenbau, Karl-Marx-Stadt

HEINZ NICKEL, Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden

ERHARD SCHILLING, Ingenieurschule für Bauwesen, Glauchau

Bearbeitet von:

RUDOLF CONRAD, Zentralstelle für Fachschulausbildung — Lehrmaterial für Grundlagenfächer — Dresden

Bei der Ausarbeitung wurden Teile der Lehrbriefreihe für das Fachschulfernstudium, Mathematik IV, verwendet.

Redaktionsschluß: 15. November 1957

Als Manuskript gedruckt

Veröffentlicht unter Ag 604/97/62 — 1. Ausgabe — 5. Auflage

Satz und Druck: Druckerei „Magnus Poser" Jena

Nachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza

L 10 0 04 · 1 · 5

Gebühr: DM 5,50

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Die Elementarmathematik stellt eine der wichtigsten Arbeitsgrundlagen für den Ingenieur dar. Das gilt in gleichem Maße für die höhere Mathematik, weil hier die Verfahren behandelt werden, welche den Ingenieur eine Berechnung rationeller gestalten lassen oder ihm überhaupt erst ihre Durchführung ermöglichen.

Die Entwicklung der höheren Mathematik begann im 17. Jahrhundert — verbunden mit der Entwicklung der Produktivkräfte des Frühkapitalismus — mit der Einführung der veränderlichen Größen (hauptsächlich das Verdienst des Franzosen DESCARTES). Geschaffen wurde die neue mathematische Methode beinahe gleichzeitig in England von ISAAC NEWTON (1643 bis 1727) und in Deutschland von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 bis 1716). Nach FRIEDRICH ENGELS bedeutet die Einführung der variablen Größe einen Wendepunkt in der Mathematik. Durch sie fanden die Bewegung und die Dialektik in der Mathematik ihre Widerspiegelung, die Differential- und Integralrechnung mußten zwangsläufig folgen[1].
Der vorliegende Band 1 Mathematik IV behandelt die Grundlagen der Infinitesimalrechnung (zusammenfassende Bezeichnung für Differential- und Integralrechnung).

In Teil I, *Grundbegriffe*, wird — als Vorbereitung für die folgenden Kapitel — das wichtigste aus der Funktionslehre behandelt. Was zum Teil in früheren Lehrbriefen verstreut und unter anderem Blickwinkel gebracht wurde, ist hier noch einmal — auf das Ziel des Erlernens der Differential- und Integralrechnung hin ausgerichtet — zusammengestellt und ergänzt worden. Die hier gebrachten Begriffsbestimmungen und Untersuchungen sind für das Verständnis des folgenden unbedingt erforderlich.

In Teil II, *Grundlagen der Differentialrechnung*, und *Teil III*, *Grundregeln der Integralrechnung*, werden diese neuen Rechenarten nur auf die bereits aus der Elementarmathematik bekannten Funktionen angewendet, es werden also keine neuen Funktionen eingeführt. Dies wird in Mathematik IV, Band 2 und 3 erfolgen.

Ein Studium der höheren Mathematik setzt ein sicheres Beherrschen der Rechenverfahren der niederen Mathematik voraus, z. B. die Division algebraischer Summen, das Auflösen von Gleichungen sowie das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen. Bei auftretenden Gleichungen ist beinahe durchweg der Gang der Lösung weggelassen, auf den Ansatz folgt bereits das Ergebnis. Greifen Sie deshalb, wenn in dieser Hinsicht Schwierigkeiten auftauchen sollten, auf das ent-

[1] FRIEDRICH ENGELS, „Dialektik der Natur“, S. 275. Dietz-Verlag, Berlin 1952.

sprechende Lehrmaterial der niederen Mathematik zurück. Verzagen Sie nicht, wenn Ihnen nicht immer alles sofort klar wird! Die Infinitesimalrechnung erfordert eine neue, gegenüber der Elementarmathematik verschiedene Art des Denkens, einen höheren Grad des Abstraktionsvermögens. Es wird deshalb oft notwendig sein, daß Sie sich die eine oder die andere Stelle mehrmals durchlesen. Wenn Sie am Ende des Studiums der höheren Mathematik stehen und sich die neuen Methoden zu eigen gemacht haben, werden Sie die Freude erleben, die eleganten Rechenverfahren der höheren Mathematik beim Studium der Fachlehrbriefe und Fachbücher zur Verbesserung Ihrer Arbeit anwenden zu können.

I. Grundbegriffe

1 Veränderliche Größen, Funktionen

1.1 Funktionsbegriff, Veränderliche und Konstanten

Schon im früheren Studium begegneten Ihnen Funktionen in Gestalt von mathematisch darstellbaren Naturgesetzen und Formeln der Technik. Sie stellten diese Funktionen auch graphisch dar und verwendeten hierbei meist eine Wertetabelle. Es kann aber eine Funktion (außer durch ihre Gleichung) auch *nur* durch ihre Kurve oder durch eine Wertetabelle bestimmt sein. Merken Sie sich deshalb folgende drei Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen:

die analytische,
die tabellenmäßige und
die graphische oder zeichnerische Darstellung.

Die Funktionen, mit denen Sie sich befassen werden, sind analytisch dargestellte Funktionen (eine Ausnahme bilden 3.9 und 6.8, wo Ihnen die zu untersuchende Funktion nur durch ihre graphische Darstellung gegeben sein wird). Nur diese sind auch gemeint, wenn von einer Funktion im engeren Sinne gesprochen wird:

Unter einer Funktion wird die durch eine Gleichung festgelegte gegenseitige Zuordnung von veränderlichen Größen verstanden.

Beispiele solcher Funktionen sind:

Die Formel für die Abhängigkeit des Weges s von der Zeit t bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

$$\text{(I)} \quad s = \frac{1}{2} b t^2 \quad (b = \text{Beschleunigungskonstante}).$$

Die lineare Funktion (Gleichung einer Geraden)

$$\text{(II)} \quad y = mx + b.$$

Die in diesen Funktionsgleichungen enthaltenen Größen s und t bzw. y und x können verschiedene Werte annehmen [in (II) z. B. jeden positiven und negativen Wert sowie den Wert Null]. Sie heißen deshalb **Veränderliche** oder **Variable.** Das Wesentliche der Funktionsgleichungen besteht aber darin, daß diese Größen nicht unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen können; es ist vielmehr gemäß der Rechenvorschrift der Gleichung (I) durch den jeweiligen Wert von t der Wert s festgelegt, in (II) gehört zu jedem Wert von x ein bestimmter Wert y.

Man sagt deshalb, in (I) ist s die **abhängige Veränderliche,** t die **unabhängige Veränderliche.** In (II) ist y die abhängige Veränderliche, x die unabhängige Veränderliche. Die unabhängige Veränderliche wird häufig auch als **Argument** der Funktion bezeichnet.

Um zum Ausdruck zu bringen, daß s von t abhängig ist (ohne daß dabei zunächst etwas über die Art des Zusammenhanges bekannt zu sein braucht), verwendet man eine symbolische Schreibweise:

$$s = f(t)$$

(gelesen: s ist eine Funktion von t; oder kürzer: s gleich f von t). Sind x und y die Veränderlichen, wie in Beispiel (II), dann schreibt man

$$y = f(x).$$

Neben f sind auch die Buchstaben g, h, F, φ, ... gebräuchlich:

$$y = g(x), \quad y = h(x), \quad y = F(x), \quad y = \varphi(x)$$

sowie auch die Form

$$y = y(x).$$

Diese allgemeine Form der Kennzeichnung eines funktionalen Zusammenhanges wird im folgenden häufig benutzt werden.

Neben den Veränderlichen treten in den Funktionsgleichungen meist noch **konstante** Größen auf, d. h. Größen, die innerhalb einer bestimmten Untersuchung (für die die Funktionsgleichung gilt) ein und denselben unveränderlichen Wert beibehalten, z. B. b in (I) und m und b in (II) sowie selbstverständlich alle bestimmten Zahlen.

In der Mathematik bezeichnet man die Veränderlichen mit den letzten Buchstaben des deutschen Alphabets x, y, z, ... oder durch die Buchstaben ξ, η, ζ ... des griechischen Alphabets. Die Konstanten werden meist durch die ersten Buchstaben des Alphabets dargestellt: a, b, c ... α, β, γ ...

Beachten Sie, daß die Größen, die in der einen Versuchsreihe als Konstanten angesehen werden dürfen, bei Veränderung der Versuchsbedingungen zu Veränderlichen werden können.

Wir wählen als Beispiel das Ohmsche Gesetz, in dem die Abhängigkeit der elektrischen Spannung U von der Stromstärke I und vom Widerstand R dargestellt wird:

$$\text{(III)} \quad U = R \cdot I.$$

Je nach den Versuchsbedingungen kann jede der Größen U, R und I einmal Konstante oder auch Veränderliche sein.

Für den Fall, daß in $U = R \cdot I$ alle drei Größen Veränderliche sind, ist U abhängig von dem jeweiligen Wert R *und* I; U ist eine *Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher*: $U = f(R, I)$. Im Band 1 von Mathematik IV werden Sie sich nur mit Funktionen *einer* unabhängigen Veränderlichen befassen, wie z. B. mit den beiden erstgenannten Beispielen

$$s = f(t) = \frac{1}{2} b t^2$$

und $$y = f(x) = m x + b$$

oder auch mit $$U = f(I) = R \cdot I \quad (\text{für } R = \text{const.}).$$

1.2 Unentwickelte und entwickelte Funktionen

Bisweilen treten uns Funktionsgleichungen entgegen, die nicht nach einer Veränderlichen aufgelöst sind, von denen wir also nicht schon auf Grund der äußeren Gestalt der Funktionsgleichung sagen können, welche die unabhängige und welche die abhängige Veränderliche ist.

Beispiele:

Die Gesetzmäßigkeit zwischen Druck p und Volumen V eines Gases (bei gleichbleibender Temperatur)

$$\text{(IV)} \quad p \cdot V = c \quad (c = \text{const.})$$

Die Gleichung des Kreises

$$\text{(V)} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \text{Radius} = \text{const.})$$

Für weiterführende mathematische Untersuchungen ordnet man diese Funktionen oft so an, daß alle Veränderlichen und Konstanten auf der linken Seite stehen, und damit die rechte Seite gleich Null ist:

$$p \cdot V - c = 0$$

oder $$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Funktionen dieser letzten Form nennt man **unentwickelte** oder **implizite Funktionen.**

Symbolisch schreibt man die beiden eben genannten unentwickelten Funktionen

$$F(p, V) = 0$$

oder $$F(x, y) = 0.$$

Die Funktionen

$$s = f(t) = \frac{1}{2} b t^2,$$

$$y = f(x) = m x + b,$$

$$U = f(I) = R \cdot I$$

hingegen, die nach einer der Veränderlichen aufgelöst sind (welche dann als abhängige Veränderliche anzusehen ist), werden als **entwickelte** oder **explizite Funktionen** bezeichnet. Mit solchen werden wir uns hauptsächlich zu befassen haben.

Selbstverständlich können auch die Funktionen (IV) und (V) nach jeder der beiden Veränderlichen aufgelöst, d. h. als explizite Funktionen dargestellt werden.

Doch ist nicht jede implizite Funktion grundsätzlich nach der abhängigen Veränderlichen auflösbar, d. h. es gibt Funktionen, die nicht explizit geschrieben werden können, z. B.:

$$F(x, y) = x^4 y + 7 x^3 y^2 + 8 x^3 y^3 - 3 x y^4 + y^5 - 6 = 0.$$

Auch bei Funktionen *zweier* unabhängiger Veränderlicher können beide Darstellungsformen auftreten.

Ein Beispiel einer entwickelten Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen ist

$$z = f(x, y) = x^2 + 2x + xy + 2y + y^2.$$

x und y sind hierin die unabhängigen Veränderlichen, z ist die abhängige Veränderliche.

Als unentwickelte oder implizite Funktion müßten wir schreiben:

$$F(x, y, z) = x^2 + 2x + xy + 2y + y^2 - z = 0.$$

Die Gleichung (III) ist — wenn wir R und I als zwei unabhängige Veränderliche ansehen — eine explizite Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher,

$$U = f(R, I) = R \cdot I.$$

Die Funktion lautet in unentwickelter Form

$$F(U, R, I) = U - R \cdot I = 0.$$

1.3 Einteilung der Funktionen

Die Funktionen werden nach den Rechenoperationen, die zu ihrer Aufstellung benutzt werden, eingeteilt.

1.31 Rationale und irrationale Funktionen. Aus den vielen möglichen Funktionen faßt man durch die Bezeichnung **rationale Funktionen** alle diejenigen zusammen, die aus der unabhängigen Veränderlichen und irgendwelchen reellen Zahlen mittels der vier Grundrechnungsarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation[1] und Division zusammengesetzt werden. Dabei dürfen diese Rechenoperationen nur endlich oft zur Anwendung kommen. Alle anderen Funktionen, die sich nicht wie eben beschrieben darstellen lassen, heißen *irrational.* Nach dieser Definition kann jede rationale Funktion wie folgt geschrieben werden:

$$y = R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}.$$

Tritt bei einer rationalen Funktion die unabhängige Veränderliche nirgends im Nenner auf (in der obigen Beziehung ist dies der Fall, wenn $b_0 \neq 0$ und $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ist), so heißt die Funktion eine **ganze rationale Funktion,**

[1] Hierin ist das Potenzieren mit einer ganzen positiven Zahl eingeschlossen, da dieses nichts anderes als eine Multiplikation gleicher Faktoren bedeutet.

im entgegengesetzten Falle ist es eine **gebrochene rationale Funktion.** Die ganzen rationalen Funktionen stellen die einfachste Klasse von Funktionen dar. Sie lassen sich alle auf die Form bringen

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Ist $a_n \neq 0$, so sagt man, die ganze rationale Funktion ist vom n-ten Grade, man spricht auch von einem Polynom n-ten Grades. Sie können also aus dem Vorangegangenen schließen, daß der Grad eines Polynoms durch den Exponenten der höchsten Potenz der unabhängigen Veränderlichen bestimmt ist.

Beispiele für ganze rationale Funktionen sind Ihnen schon früher begegnet, es sind dies die Funktionen 1., 2. und 3. Grades:

$$y = mx + b,$$
$$y = ax^2 + bx + c,$$
$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Aber auch $y = \frac{A_1 x^2 + B_1 x + C_1}{a_1^2 - b_1^2}$ mit $A_1, B_1, C_1, a_1, b_1 = \text{const.}$ ist eine ganze rationale Funktion. Sie können nämlich die Funktion in der Form $y = ax^2 + bx + c$ schreiben mit

$$a = \frac{A_1}{a_1^2 - b_1^2}, \quad b = \frac{B_1}{a_1^2 - b_1^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{C_1}{a_1^2 - b_1^2}.$$

Die gebrochenen rationalen Funktionen können alle auf folgende Form gebracht werden:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}.$$

Beispiele für gebrochene rationale Funktionen sind:

$$y = \frac{1}{x},$$
$$y = \frac{3x}{7x^2 - 5},$$
$$y = \frac{x^5 + 1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Eine weitere Unterteilung der gebrochenen rationalen Funktionen erhält man durch Vergleich der beiden in Zähler und Nenner auftretenden höchsten Exponenten der unabhängigen Veränderlichen. Ist $n < m$, also das Zählerpolynom von niederem Grade als das Nennerpolynom, so spricht man von einer *echt gebrochenen rationalen Funktion.*

Beispiele für echt gebrochene rationale Funktionen sind:

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x},$$
$$y = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Ist dagegen $n \geqq m$, also das Zählerpolynom von gleichem oder höherem Grade als das Nennerpolynom, so handelt es sich um eine *unecht gebrochene rationale Funktion.*

Beispiele für unecht gebrochene Funktionen:

$$y = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 + x^2 - 9x - 9},$$

$$y = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 2x - 3}.$$

Vergleichen Sie die Bezeichnungsweise „echt gebrochen" bzw. „unecht gebrochen" mit der bei der Bruchrechnung! Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner; für einen unechten Bruch gilt das Gegenteil.

Wie Sie bereits am Anfang dieses Abschnittes gelesen haben, sind *alle* Funktionen, die sich nicht auf die vorstehenden Formen bringen lassen, irrational. Wenn Sie z. B. beim Aufstellen einer Funktion noch das Radizieren auf die unabhängige Veränderliche anwenden, dann entsteht bereits eine **irrationale Funktion**.

Beispiele für irrationale Funktionen sind:

$$y = \sqrt{x},$$

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x + \sqrt{x^3} - 1.$$

1.32 Algebraische und transzendente Funktionen. Neben der Einteilung in rationale und irrationale Funktionen gibt es noch die in *algebraische* und *transzendente*. Auf eine exakte Erklärung der algebraischen Funktionen soll in diesem Zusammenhang verzichtet werden. Sie müssen sich nur unbedingt merken, daß die rationalen Funktionen alle algebraisch sind. Ebenfalls algebraisch sind die Funktionen, bei deren Aufstellung neben den vier Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division noch die Wurzelrechnung auf die unabhängige Veränderliche angewandt wird.

Beispiele:

$y = \sqrt{x}$ (algebraisch und irrational),

$y = \sqrt[3]{x^2} - x + \sqrt{x^3} - 1$ (algebraisch und irrational),

$y = 5x^3 - 6x^2 + 7x + 8$ (algebraisch und rational),

$y = \sqrt{2} \cdot x^5 + \sqrt[3]{4} \cdot x^4 - \sqrt{2}x^3 + 5x^2 - 6x$ (algebraisch und rational).

Die Funktionen, die nicht algebraisch sind, werden als **transzendente Funktionen** bezeichnet. Transzendente Funktionen sind z. B.:

1. die logarithmische Funktion $y = {}^a\log x \; (a > 0;\ a \neq 1)$,
2. die Exponentialfunktion $y = a^x \; (a > 0)$,
3. die trigonometrischen Funktionen

$$y = \sin x;\ y = \cos x;\ y = \tan x;\ y = \cot x,$$

4. Kombinationen von mehreren transzendenten Funktionen oder von transzendenten und algebraischen Funktionen

   $y = a^{\sqrt{x}}$; $y = \lg x + \sin x$; $y = x^x$; $y = x + \lg x$; $y = \frac{1}{x} + a^x$;

   $y = \sqrt{1 + 3 \tan x}$.

Außer den genannten gibt es noch eine große Zahl anderer transzendenter Funktionen. Soweit Sie diese im Rahmen Ihres Fachschulstudiums benötigen, werden Sie sie im Band 2 noch kennenlernen.

Sie merken sich von dem Abschnitt 1.3 besonders, daß die Funktionen in rationale und irrationale bzw. in algebraische und transzendente Funktionen eingeteilt werden können. Weiterhin beachten Sie, daß in der Klasse der algebraischen Funktionen die rationalen enthalten sind, und daß die rationalen Funktionen noch unterteilt werden in ganze und gebrochene.

1.4 Graphische Darstellung von Funktionen

Die graphische Darstellung von Funktionen erfolgt — wie Ihnen bereits von der niederen Mathematik her bekannt ist — in einem Koordinatensystem.

Die einfachsten Kurven sind die der **ganzen rationalen Funktionen.** Die Bilder 1, 2 und 3 zeigen Ihnen den grundsätzlichen Verlauf der Kurven von Funktionen 1., 2. und 3. Grades.

Als wesentlichste Kennzeichen der ganzen rationalen Funktionen können Sie sich merken: *Ihre Kurven verlaufen zusammenhängend ohne irgendwelche Knicke oder*

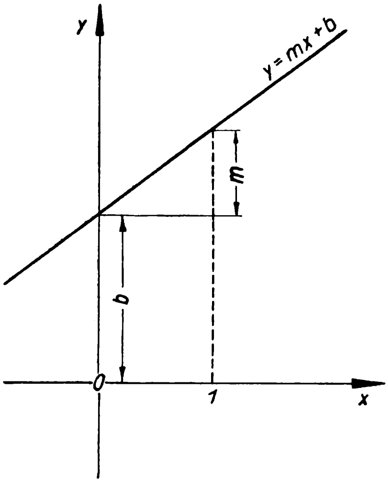

Bild 1

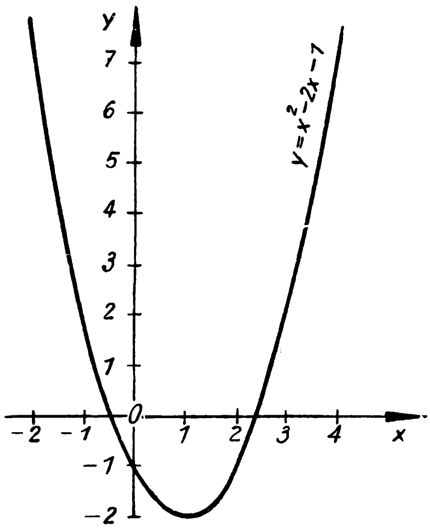

Bild 2

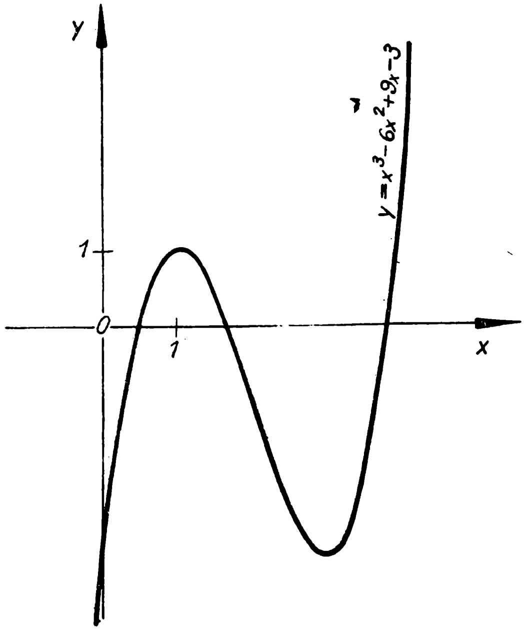

Bild 3

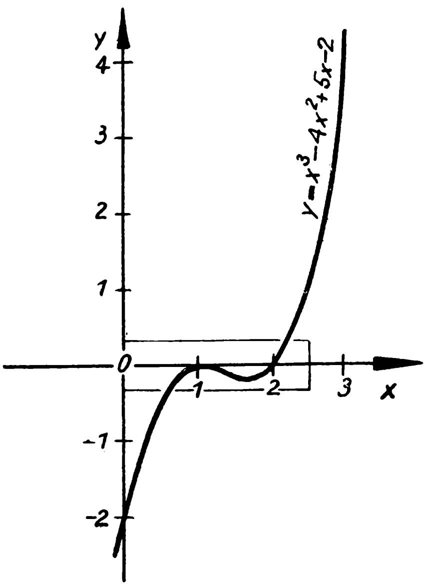

Bild 4a

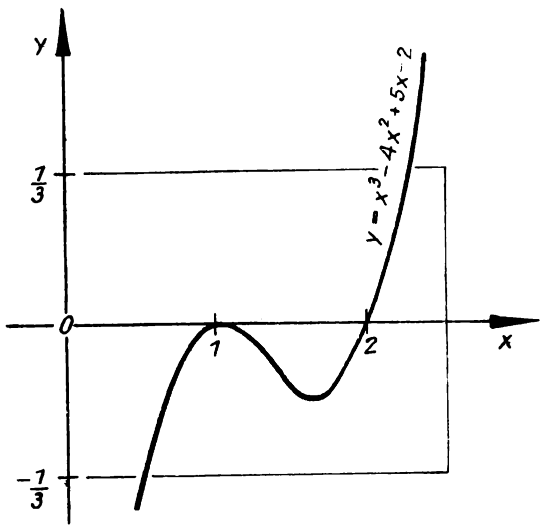

Bild 4b

Unterbrechungen. Sie existieren für jeden Wert von x. Wenn x positiv oder negativ sehr groß wird, wird auch y positiv oder negativ sehr groß.

Bei der graphischen Darstellung kann man nur einen Teil der Kurve erfassen. Man wählt dann *den* Bereich aus, der für die jeweilige Untersuchung besonders interessiert. Vor allem bei Funktionen höheren Grades steigen aber die Kurven oft sehr rasch an bzw. fallen steil ab. Bei gleicher Teilung beider Koordinatenachsen ist dann der Kurvenverlauf nicht übersichtlich, besonders interessierende Kurventeile (z. B. in der Umgebung der Scheitelpunkte) lassen nicht die gewünschten Einzelheiten erkennen. Man hilft sich dann mit einer unterschiedlichen Teilung der Koordinatenachsen, so daß die Kurvendarstellung im abgebildeten Bereich den Anforderungen entspricht (vgl. Bild 4a und 4b).

Ganz anders und vor allem vielgestaltiger sind die Kurven der **gebrochenen rationalen Funktionen.** Die Bilder 5 bis 9 zeigen Ihnen einige einfache Beispiele. Während in Bild 5 die Kurve noch zusammenhängend verläuft, existiert bei allen anderen abgebildeten Funktionen die Kurve nicht für $x = +1$ und $x = -1$. Man sagt: Die Funktion ist für diese Werte von x nicht definiert, sie ist an diesen Stellen *unstetig.* Alle ganzen rationalen Funktionen hingegen sind *stetig.* Im Bild der Funktion ist die Unstetigkeit daran erkennbar, daß die Kurve an der Unstetigkeitsstelle unterbrochen ist[1]. Beispiele dafür sind die Bilder 6 bis 9, 17 und 26a. Das Kurvenbild stetiger Funktionen ist nirgends unterbrochen.

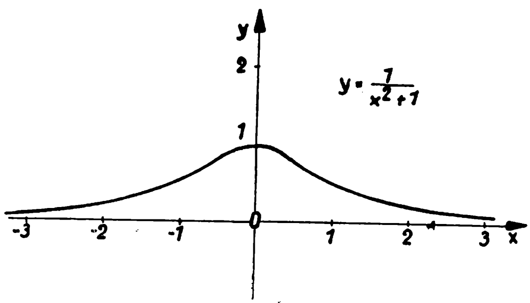

Bild 5

Die Funktionskurven der Bilder 5, 6 und 7 nähern sich mit größer werdenden x-Werten immer mehr der x-Achse, sie haben diese als *Asymptote*[2]. Die Kurve des Bildes 8 nähert sich für großes x asymptotisch der Parallelen zur x-Achse im Abstand $y = 1$. Bei der Kurve des Bildes 9 wird der Funktionswert y für größer werdende x-Werte immer größer, nähert sich aber auch einer Asymptote, in diesem Falle der gestrichelt eingezeichneten Geraden $y = x$.

---

[1] Stetigkeit und Unstetigkeit sind damit natürlich noch nicht exakt definiert, sondern nur anschaulich beschrieben. Darauf wollen wir uns aber beschränken.

[2] griech. asymptotos, nicht zusammenfallend. Eine Asymptote ist eine Gerade (im allgemeinen Fall selbst eine Kurve), der sich eine Kurve immer weiter nähert, ohne aber mit ihr zusammenzufallen.

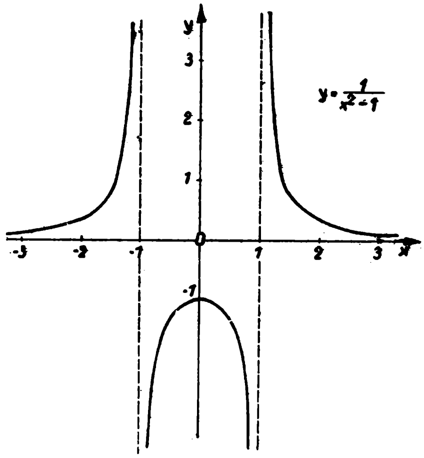

Bild 6

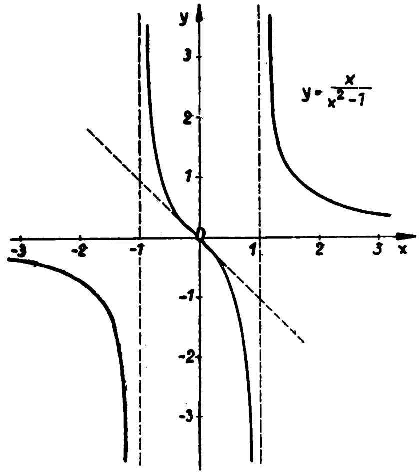

Bild 7

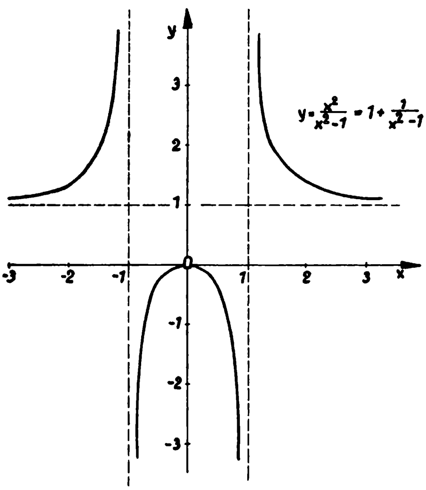

Bild 8

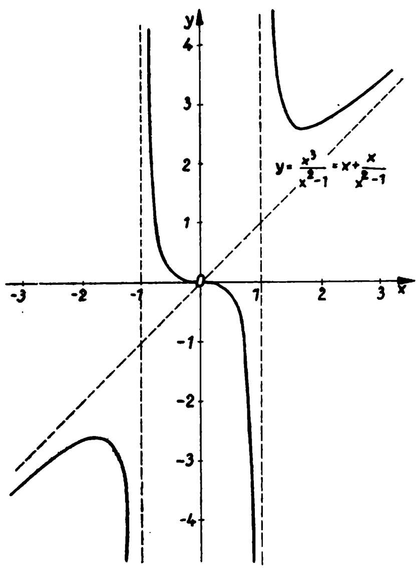

Bild 9

Sie merken sich also: *Die Kurven der gebrochenen rationalen Funktionen können Unstetigkeiten aufweisen, d. h. es ist möglich, daß die Kurve für bestimmte x-Werte nicht existiert. Für (positiv oder negativ) sehr großes x verläuft die Kurve asymptotisch.*

Von den **irrationalen Funktionen** sind Ihnen bereits die Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ (Bild 10), $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ u. a. begegnet, wobei Sie die beiden letztgenannten Funktionen vor allem in der Form

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{(Kreis)}$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(Hyperbel)}$$

kennen.

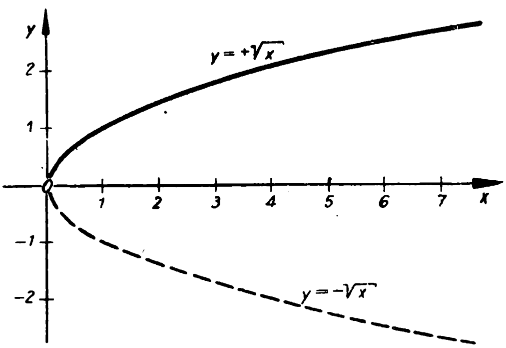

Bild 10

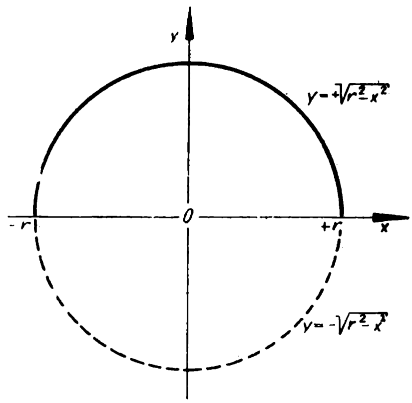

Bild 11

Betrachten Sie die Bilder 11 und 12, so stellen Sie fest, daß die Kreisgleichung und die Hyperbelgleichung Funktionen beschreiben, bei denen zu einem x-Wert zwei y-Werte gehören. Diese Funktionen sind *zweideutig*. (Die rationalen Funktionen hingegen waren immer eindeutig.)

Wenn man für $x^2 + y^2 = r^2$ die entwickelte Form schreibt, so muß diese heißen

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

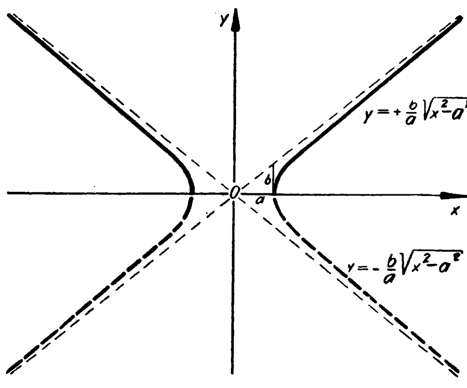

Bild 12

Hierbei beschreibt $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ den oberhalb der x-Achse liegenden Halbkreis, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ den unterhalb der x-Achse liegenden. (Ähnliches gilt für die Hyperbel.)

Ebenso stellt $y = +\sqrt{x}$ den oberen Zweig der Parabel in Bild 10 dar, $y = -\sqrt{x}$ den unteren.

Wir wollen für das folgende festlegen, daß wir bei einer Wurzelfunktion immer die Wurzel mit positivem Vorzeichen nehmen wollen, den sogenannten *Hauptwert* der Wurzel (falls nicht in der Gleichung ein negatives Vorzeichen bei der Wurzel steht). Damit ist eine algebraische irrationale Funktion ebenfalls stets eindeutig bestimmt.

Die wichtigste algebraische Funktion ist die **Potenzfunktion** $y = ax^n$.

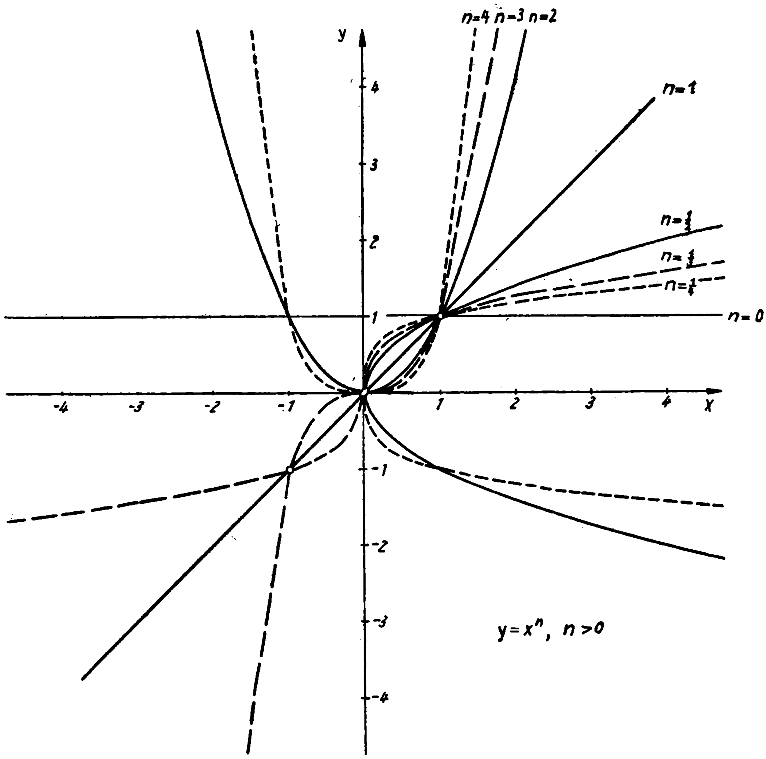

Bild 13

In Bild 13 sind die zu $y = ax^n$ gehörenden Kurven mit $a = 1$ und positivem Exponenten $n = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, 2, 3, 4$ gezeichnet. Die Kurven sind *Parabeln.*

Bild 14 zeigt Ihnen die Kurven der Potenzfunktionen $y = ax^n$ mit $a = 1$ und negativem Exponenten $n = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1, -2, -3$. Die Kurven sind *Hyperbeln.*

Am Beispiel der Potenzfunktion sollen noch die Begriffe der geraden und der ungeraden Funktion erklärt werden.

Verläuft die Kurve einer Funktion symmetrisch zur y-Achse (dies ist in Bild 13 und 14 für $n = -2, 0, 2, 4$ der Fall), so ist der zu einer beliebigen Stelle x gehörende Funktionswert $f(x)$ gleich dem Funktionswert an der Stelle $(-x)$, also gleich $f(-x)$. Es gilt also:

$$f(-x) = f(x).$$

Wir sprechen in diesem Fall von einer *geraden Funktion.*

Für eine gerade Funktion gilt die Bedingung $f(-x) = f(x)$.

Gerade Funktionen sind unter anderem alle Potenzfunktionen mit geradzahligem Exponenten.

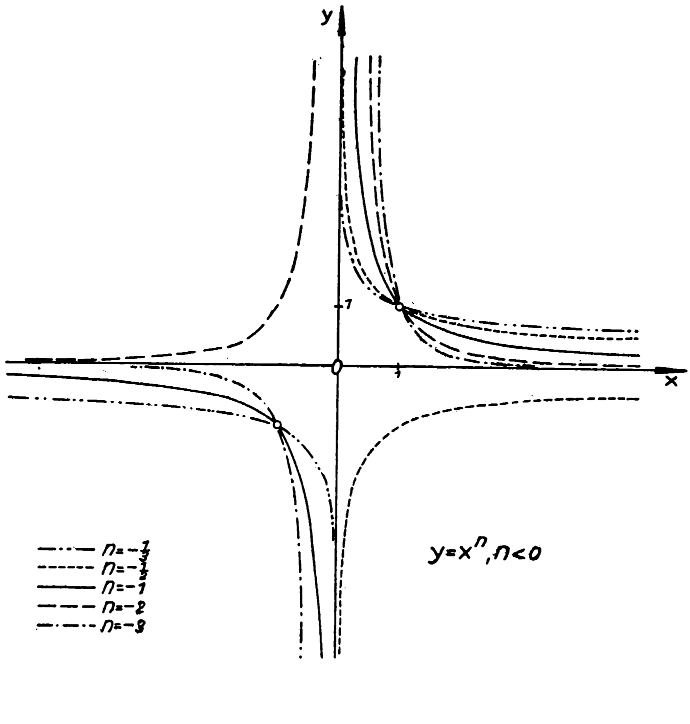

Bild 14

Liegt dagegen die Kurve einer Funktion zentralsymmetrisch zum Nullpunkt (in Bild 13 und 14 z. B. für $n = -3, -1, -\frac{1}{3}, 1, 3$), so muß für die Funktionswerte an den Stellen x und $-x$ gelten:

$$f(-x) = -f(x).$$

Solche Funktionen heißen *ungerade Funktionen*.

Für eine ungerade Funktion gilt die Bedingung $f(-x) = -f(x)$.

Ungerade Funktionen sind unter anderem alle Potenzfunktionen mit ungeradzahligem Exponenten.

Die meisten in der Praxis auftretenden Funktionen sind allerdings weder gerade noch ungerade. Zum Beispiel gilt für die in Bild 3 dargestellte Funktion $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 \\ &= -x^3 - 6x^2 - 9x - 3. \end{aligned}$$

Es ist weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$, d. h., die vorliegende Funktion ist weder gerade noch ungerade.

Von den **transzendenten Funktionen** kennen Sie bisher die logarithmischen, die Exponential- und die trigonometrischen Funktionen. Bild 15 zeigt Ihnen die Funktionen $y = {}^a\log x$ und $y = a^x$. Wie bereits einmal beim Studium der Elementarmathematik erwähnt wurde, ist jede der beiden Funktionen die **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** der anderen.

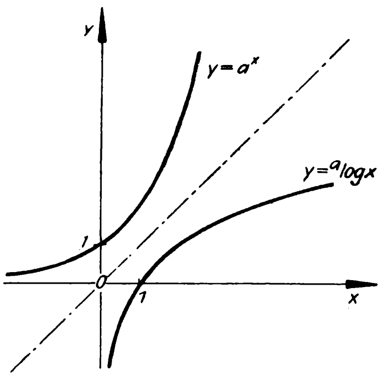

Bild 15

Geometrisch erhält man die inverse Funktion zu einer vorgegebenen Funktion durch deren Spiegelung an der Geraden $y = x$.

Die Vorschrift für das Bilden der inversen Funktion einer Funktion $y = f(x)$ lautet:

1. Auflösen der gegebenen Funktion nach x:
$$x = \varphi(y),$$
2. Vertauschen von x und y:
$$y = \varphi(x).$$

Beispiel:

Wir wollen die inverse Funktion zu $y = 10^x$ bestimmen.

1. Das Auflösen nach x erfolgt nach Logarithmieren:
$$\lg y = x \cdot \lg 10 = x \cdot 1 = x,$$
$$x = \lg y.$$
2. Vertauschen von x und y:
$$\underline{\underline{y = \lg x.}}$$

Es sind z. B. die in Bild 13 dargestellten Potenzfunktionen für $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ die inversen Funktionen zu den abgebildeten Potenzfunktionen mit $n = 2, 3, 4$ und umgekehrt.

Ebenfalls sind in Bild 14 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ und $y = x^{-\frac{1}{3}}$ die inversen Funktionen zu $y = x^{-2}$ und $y = x^{-3}$.

Überzeugen Sie sich an Hand der Bilder 13 und 14 von der Richtigkeit dieser Behauptungen, und führen Sie außerdem die analytische Darstellung der inversen Funktion selbst durch!

Man kann auch die nach dem 1. Schritt erhaltene Funktion $x = \varphi(y)$ als Umkehrfunktion bezeichnen. Es ist dann y die unabhängige, x die abhängige Veränderliche. Entsprechend ist die y-Achse Abszissenachse, die x-Achse Ordinatenachse.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen über die graphische Darstellung von Funktionen noch ein Hinweis:

Zusammengesetzte Funktionen wie z. B.

$$y = x + \frac{1}{x} \qquad\qquad y = x + \sin x$$

$$y = \sin x + \cos 2x \qquad\qquad y = x + \sin^2 x \quad \text{usw.}$$

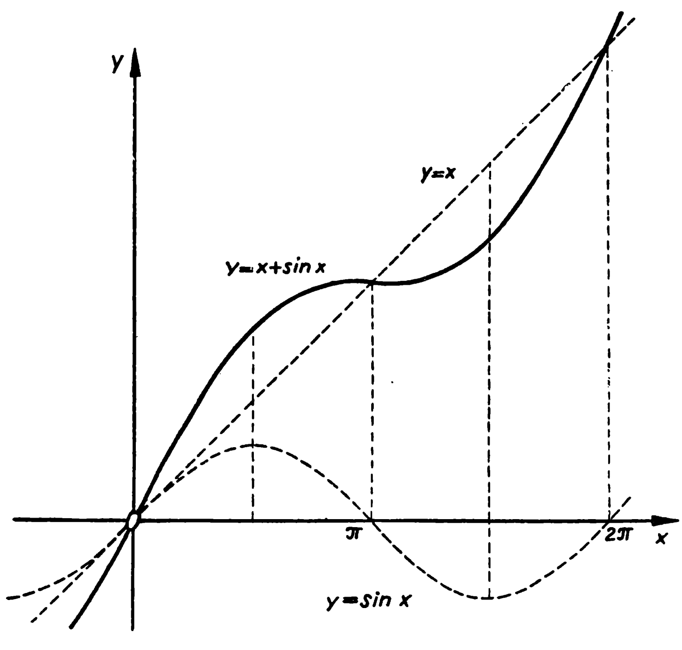

Bild 16

zeichnet man vorteilhaft, indem man zunächst die Kurven der Teilfunktionen darstellt, z. B. $y = x$ und $y = \sin x$, und diese dann zeichnerisch zur Funktionskurve $y = x + \sin x$ addiert (Bild 16).

Übungen

1. *Untersuchen Sie, welche der in Bild 5—9 dargestellten Funktionen gerade oder ungerade Funktionen sind!*
   Führen Sie die gleiche Untersuchung für die Funktionen $y = \sin x$ *und* $y = \cos x$ *durch!*

2. *Welche Aussagen können Sie über die Funktion* $y = \frac{x}{x^2+1}$ *und ihren Kurvenverlauf machen? Zeichnen Sie die Funktionskurve! Wie heißt die inverse Funktion?*

3. *Zeichnen Sie die Funktion* $y = x + \frac{1}{x}$, *indem Sie die Kurven der Teilfunktionen addieren!*

2 Der Grenzwert

2.1 Grenzwert einer Zahlenfolge

Der Begriff des Grenzwertes ist für das Verständnis der höheren Mathematik außerordentlich wichtig, da diese ihrem Wesen nach ausschließlich ein Rechnen mit Grenzwerten darstellt. Sie sollen diesen Begriff zunächst an einigen Beispielen erläutert bekommen.

1. Beispiel:

Bei der Behandlung der Bruchrechnung standen Sie früher einmal vor einem Problem, als es galt, einen gemeinen Bruch wie z. B. $\frac{1}{3}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln. $\frac{1}{3}$ ergibt einen unendlichen periodischen Dezimalbruch, den Sie nur näherungsweise als endlichen Dezimalbruch darstellen können:

$$\text{In 1. Näherung } \frac{1}{3} \approx 0{,}3,$$

$$\text{in 2. Näherung } \frac{1}{3} \approx 0{,}33,$$

$$\text{in 3. Näherung } \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \text{ usw.}$$

Die Näherungen

$$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots$$

bilden eine Zahlenfolge, deren Glieder wir mit a_1, a_2, a_3, ... bezeichnen wollen. Trotzdem jedes Glied größer als das vorhergehende ist, allgemein also $a_n < a_{n+1}$ gilt, werden die Glieder der Folge nicht beliebig groß. Zum Beispiel wird der Wert 0,4 nicht erreicht.

Die Folge der a_n strebt mit wachsendem n einem bestimmten Wert zu, dem sie beliebig nahekommt, ohne ihn zu erreichen.

Diesen Wert nennt man den **Grenzwert** der Folge. Er ist in diesem Beispiel $\frac{1}{3}$.

2. Beispiel:

Eine Zahlenfolge habe die Glieder

$$\frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \ldots$$

Schreiben Sie diese Folge in der Form

$$\frac{1+1}{1};\ \frac{2+1}{2};\ \frac{3+1}{3};\ \frac{4+1}{4};\ \ldots$$

so läßt sich das n-te Glied angeben mit

$$a_n = \frac{n+1}{n}.$$

Geht $n \to \infty$ (gelesen: n gegen unendlich), so nähert sich a_n unbegrenzt dem Wert 1. Man schreibt für diesen Sachverhalt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

und liest: limes $\frac{n+1}{n}$ für n gegen unendlich gleich 1.

Das Wort limes kommt aus dem Lateinischen und heißt Grenze. In der Mathematik bedeutet es im übertragenen Sinne *Grenzwert.* Der Grenzwert der betrachteten Folge ist also 1.

Sie können das Ergebnis, das hier erraten wurde, rechnerisch nachprüfen: Bevor Sie den Grenzübergang durchführen, d. h. bevor Sie $n \to \infty$ gehen lassen, formen Sie $\frac{n+1}{n}$ in $1 + \frac{1}{n}$ um. Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Für $n \to \infty$ geht aber $\frac{1}{n}$ gegen 0, wie Sie sich durch Einsetzen von $n = 10, 1000, 1\,000\,000, \ldots$ überzeugen können.

Damit ist aber

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1.$$

3. Beispiel:

Ein besonders wichtiger Grenzwert ist die Zahl e. Sie hat für die höhere Mathematik eine ebensogroße Bedeutung wie die Zahl π für die niedere Mathematik. Beide, π und e, sind transzendente Zahlen. Die Zahl e ist der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Setzen Sie in $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten Sie die in Tafel 1 aufgeführten Werte einer Zahlenfolge.

Tafel 1

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,3703 ...
10	2,5937 ...
100	2,7048 ...
1 000	2,7171 ...
10 000	2,7182 ...
1 000 000	2,71828 ...

Wie Sie aus Tafel 1 erkennen, verändern die Glieder der Zahlenfolge für $n = 10000$ und $n = 1000000$ in den ersten vier Dezimalstellen ihren Wert nicht mehr. Der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ strebt also bei unbegrenzt wachsendem n einem bestimmten Wert, dem Grenzwert, zu. Dieser Wert wird als **Eulersche[1] Zahl** e bezeichnet; sie ist als transzendente Zahl ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch:

$$\mathrm{e} = 2{,}718281828459\ \ldots$$

Die Zahl e hat ihre besonders große Bedeutung als Basis der Exponentialfunktion $y = \mathrm{e}^x$, welche die Gesetzmäßigkeit des organischen Wachstums beschreibt[2], und als Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen. Es ist also

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}71828} \tag{1}$$

Die Bestimmung des Wertes von e mit beliebiger Genauigkeit erfolgt nicht aus dem Binom $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, sondern nach dessen Umformung in eine sogenannte unendliche Reihe.

Es ist
$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

(wobei $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ist. $3!$ wird gelesen „3 Fakultät").
Wie in einer Zahlenfolge das Glied a_n so strebt hier die unendliche Reihe einem Grenzwert zu, nämlich der Zahl e. Näheres hierzu erfahren Sie noch im Teil VI „Unendliche Reihen".

2.2 Grenzwert einer Funktion

Sie haben bisher die Grenzwerte von Zahlenfolgen betrachtet. Diese Zahlenfolgen können Sie aber auch als Funktionen a_n einer Veränderlichen, nämlich des n, auffassen. Es war

im 1. Beispiel $a_n = f(n) = 3\left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$,

im 2. Beispiel $a_n = f(n) = 1 + \frac{1}{n}$,

im 3. Beispiel $a_n = f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

---

[1] Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707 bis 1783.

[2] In der Technik tritt vor allem die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten auf: $y = a\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}$, worin a und b irgendwelche Konstanten bedeuten.

An die Veränderliche n war hierbei allerdings die Bedingung der Ganzzahligkeit geknüpft.
In der höheren Mathematik benötigt man oft den Grenzwert einer Funktion $f(x)$, wobei für x beliebige (also nicht wie bei Zahlenfolgen nur ganzzahlige) Werte zugelassen sind.

1. Beispiel:

Wir betrachten die Funktion $y = \frac{1}{x}$.

Wählen wir für x (positiv oder negativ) immer größere Werte, so wird der Funktionswert $\frac{1}{x}$ immer kleiner.

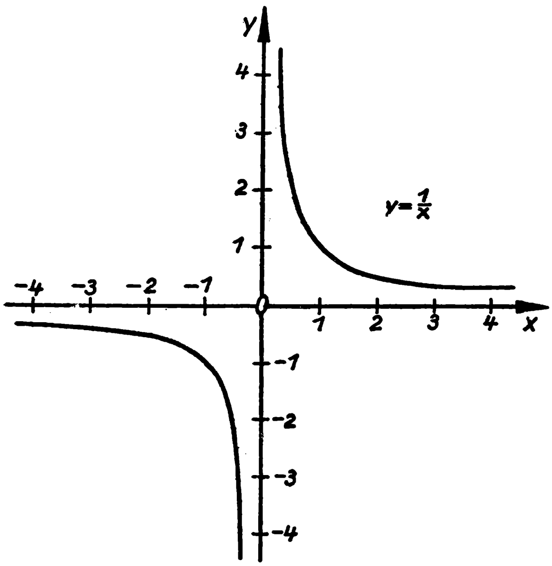

Bild 17

Für $x \to \infty$ wird (vgl. Bild 17)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ strebt also dem Grenzwert Null zu, wenn x positiv oder negativ unendlich groß wird (für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$).

Wählen Sie x immer kleiner, so wird $\frac{1}{x}$ immer größer.

Für $x \to 0$ wird $\frac{1}{x}$ unendlich groß. Hierbei müssen Sie aber unterscheiden, von welcher Seite her Sie x gegen Null gehen lassen.

Geht x von positiven x-Werten her gegen Null, so wird $\frac{1}{x}$ positiv unendlich groß. (Setzen Sie für x der Reihe nach 0,1; 0,01; 0,001; ... ein!)

Geht x von negativen x-Werten her gegen Null, so wird $\frac{1}{x}$ negativ unendlich groß. (Setzen Sie für x der Reihe nach $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$; ... ein!)
Es existieren also für $x \to 0$ zwei Grenzwerte der Funktion $y = \frac{1}{x}$ (vgl. Bild 17), die man symbolisch wie folgt schreibt:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Dabei bringt $x \to +0$ (bzw. $x \to -0$) zum Ausdruck, daß man sich beim Bilden des Grenzwertes von der Seite größerer (bzw. kleinerer) Werte her dem Werte Null genähert hat.
An diesem Beispiel haben Sie das Verfahren für das Bilden des Grenzwertes einer Funktion gesehen. Der Grenzwert einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ ist der Wert G, dem $f(x)$ zustrebt, wenn man x gegen a gehen läßt, also x unbegrenzt an a heranrücken läßt.

Eine Zahl G, für die zugleich mit $x \to a$ auch $y = f(x) \to G$ gilt, heißt der Grenzwert G der Funktion $y = f(x)$ für $x \to a$:

$$G = \lim_{x \to a} f(x).$$

Der Grenzwert einer Funktion interessiert vor allem an den Stellen, wo die Funktion bei Einsetzen eines bestimmten Wertes der unabhängigen Veränderlichen keinen bestimmten Wert annimmt. Dies ist in den beiden folgenden Beispielen der Fall.

2. Beispiel:

Stellen Sie für die Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ eine Wertetabelle auf, um die Funktion zu zeichnen, so bemerken Sie, daß für $x = 1$ Zähler und Nenner gleichzeitig zu Null werden, Sie also den Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten. Man nennt $\frac{0}{0}$ einen *unbestimmten* Wert, da sich dafür kein bestimmtes Ergebnis angeben läßt. Die Funktion ist also an der Stelle $x = 1$ nicht bestimmt; man sagt, sie hat für $x = 1$ eine *Lücke*.
Für alle anderen Werte von x stimmt, wie Bild 18 zeigt, die Kurve der Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ mit der Kurve der Geraden $y = x + 1$ überein.
Man hat nun festgelegt, daß man einer Funktion $y = f(x)$, die für $x = a$ eine Lücke besitzt (nicht bestimmt ist, nicht definiert ist), an dieser Stelle als Funktionswert den Grenzwert $x \to a$ zuschreibt, falls dieser existiert.
Wir wollen jetzt den Grenzwert der Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ an der Stelle $x = 1$ bestimmen, indem wir von beiden Seiten her x gegen 1 gehen lassen:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,05	1,1
y	1,9	1,95	1,99	1,999	$\frac{0}{0}$	2,001	2,01	2,05	2,1

Aus der Tabelle ist zu erkennen, daß die Funktion für $x \to 1$ dem Wert 2 zustrebt. Es ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

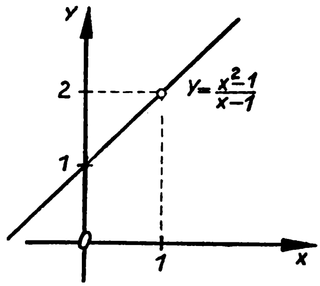

Bild 18

Diesen Wert nimmt auch die Funktion $y = x + 1$ für $x = 1$ an, die — wie bereits weiter oben gesagt — für alle Werte $x \neq 1$ mit der von uns untersuchten Funktion übereinstimmt. Für alle $x \neq 1$ gilt ja auch

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

Man bestimmt deshalb einfacher bei allen gebrochenen rationalen Funktionen den Wert (Grenzwert) an der Stelle einer Lücke, indem man die Funktion mit $(x - x_L)$ kürzt (x_L = x-Wert der Lücke), und den Wert der gekürzten Funktion für $x = x_L$ ermittelt.

3. Beispiel:

Wollen Sie den Wert der Funktion

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

an der Stelle $x = 0$ bestimmen, so erhalten Sie $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$.

Es ist hier aber nicht möglich, den Grenzwert der Funktion für $x \to 0$, wie im Beispiel 2 gezeigt, durch Kürzen zu bestimmen, da es sich um keine gebrochene rationale Funktion handelt.

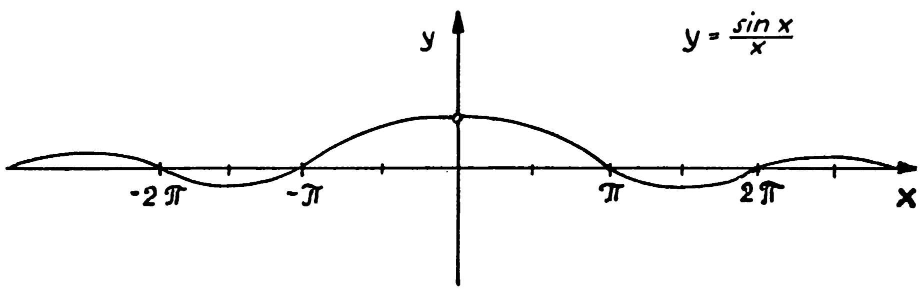

Bild 19

Stellen Sie wieder eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie die Funktionskurve (Bild 19), so erkennen Sie zunächst, daß diese symmetrisch zur y-Achse verläuft. Dies folgt auch aus der Beziehung (sowohl $\sin x$ als auch x sind ungerade Funktionen)

$$\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Zur Herleitung des Grenzwertes von $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$ betrachten Sie Bild 20. Es stellt einen Teil des Einheitskreises dar, in dem die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und der im Bogenmaß gemessene Winkel x selbst eingezeichnet sind.

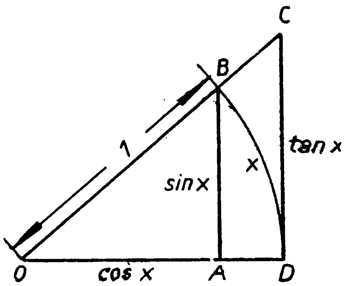

Bild 20

Wie Sie aus der Trigonometrie wissen, kann man einen Winkel sowohl im Gradmaß als auch im Bogenmaß messen. Es entsprechen einander

$360°$ im Gradmaß und $2\pi = 6{,}2832$ im Bogenmaß:
$$\text{arc } 360° = 2\pi,$$
$1°$ im Gradmaß und $\frac{2\pi}{360} = 0{,}01745$ im Bogenmaß:
$$\text{arc } 1° = 0{,}01745.$$

In Bild 20 ist die Dreiecksfläche OAB auf alle Fälle kleiner als die des Kreissektors ODB, und diese wiederum ist kleiner als die Dreiecksfläche ODC. Da für den Kreissektor die Formel $\frac{\text{Bogen} \cdot \text{Radius}}{2}$ gilt, können Sie schreiben

$$\Delta OAB < \text{Kreissektor } ODB < \Delta ODC,$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x \cdot 1}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}.$$

Sie setzen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ein und dividieren die Ungleichung durch $\frac{\sin x}{2}$:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Der Wert von $\frac{x}{\sin x}$ liegt also immer zwischen $\cos x$ und $\frac{1}{\cos x}$. Es ist aber sowohl $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ als auch $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

Da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$ zwischen diesen beiden (übereinstimmenden) Werten liegen soll, muß

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

sein. Durch Bilden des Kehrwertes folgt unmittelbar

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{2}$$

Dieser Grenzwert ist wichtig und wird an späteren Stellen wieder verwendet. Aus Formel (2) folgt aber auch, daß für sehr kleines x gilt

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1$$

oder $\quad \sin x \approx x.$

Für kleine Winkel können Sie demnach die Sinusfunktion durch den Bogen ersetzen. Bis zu welcher Winkelgröße Sie das tun dürfen, hängt ganz von der gewünschten Genauigkeit ab. Nachstehende Tafel stellt den im Bogenmaß gemessenen Winkel und den Wert der Sinusfunktion für einige kleine Winkel gegenüber.

Tafel 2

Winkel im Gradmaß	Winkel im Bogenmaß	sin x
0°	0,00000	0,00000
$0^\circ 1'$	0,00029	0,00029
$0^\circ 10'$	0,00291	0,00291
$0^\circ 30'$	0,00873	0,00873
1°	0,01745	0,01745
2°	0,03491	0,03490
3°	0,05236	0,05234
4°	0,06981	0,06976

Mit einer Genauigkeit auf 5 Dezimalen kann man bei Winkeln bis zu 1° die Sinusfunktion durch den Bogen ersetzen, mit einer Genauigkeit auf 4 Dezimalen bei Winkeln bis 4°.

II. Grundlagen der Differentialrechnung

3 Die Ableitung (der Differentialquotient) einer Funktion

Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) und Isaac Newton (1643 bis 1727) sind die Begründer der Differentialrechnung, die vornehmlich aus den Bedürfnissen der emporblühenden Naturwissenschaften (Astronomie, Mechanik und Physik) entstanden ist. Die Grundlagen dieses Teilgebietes der Mathematik gewinnen wir am zweckmäßigsten vom Tangentenproblem her: „Wie kann man in einem beliebigen Punkt einer Kurve den Anstieg der Tangente ermitteln?“ Diese Fragestellung, von der ausgehend Leibniz die Differentialrechnung begründete, wollen wir benutzen, um die Anfangsgründe der Differentialrechnung kennenzulernen. Die Frage nach dem Anstieg einer Tangente ist Ihnen aus der analytischen Geometrie bekannt. Die Kenntnis dieses Begriffes wird es Ihnen leichtmachen, den weiteren Ausführungen ohne größere Schwierigkeiten zu folgen.

3.1 Differenzenquotient und Ableitung einer Funktion

3.11 Anstieg und Differenzenquotient. Auf der Kurve $y = f(x)$ seien zwei Punkte P und P_1 mit den Koordinaten $(x;\, y)$ und $(x_1;\, y_1)$ gegeben. Die Differenzen der Abszissen- bzw. Ordinatenwerte bezeichnen wir mit Δx bzw. Δy (sprich: delta x bzw. delta y) und nennen diese Größen Arguments- bzw. Funktionsänderung.

Es ist

$$x_1 - x = \Delta x$$

und

$$y_1 - y = \Delta y.$$

Das Zeichen Δ stellt keine Zahlengröße dar, sondern soll lediglich andeuten, daß es sich um die Differenz zweier Größen handelt. Es wurde bereits mehrfach in Ihnen schon bekannten Lehrbriefen (z. B. Physik, Lehrbrief 1) angewandt.

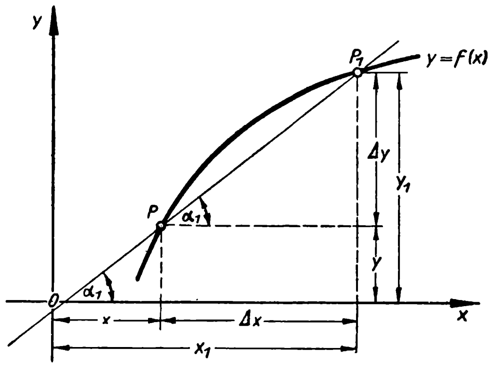

Bild 21

Die Koordinaten der beiden Punkte P und P_1 können somit geschrieben werden:

$$P(x; y) \quad \text{und} \quad P_1(x + \Delta x; y + \Delta y).$$

Sie betrachten zunächst die durch P und P_1 gehende Sekante. Aus der analytischen Geometrie wissen Sie, daß der Anstieg einer Geraden gleich dem Tangens des Winkels ist, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Für den Anstieg der Sekante gilt:

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Da $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1) = f(x + \Delta x)$ ist, können Sie auch schreiben:

$$\tan \alpha_1 = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Dabei stellt Δx die Änderung des Argumentes und $\Delta y = \Delta f(x)$ die zugehörige Änderung der Funktion dar.

Der Quotient $\frac{\text{Funktionsänderung}}{\text{Änderung des Argumentes}}$ wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.

$$\text{Differenzenquotient:} \quad \boxed{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad (3)$$

Lehrbeispiel 1

Bestimmen Sie den Differenzenquotienten der Funktion $y = 5x + 2$!

Lösung:

Es ist $y = f(x) = 5x + 2$ und $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x) + 2$. Dieser Ausdruck ergibt sich, wenn Sie in $f(x)$ für das Argument x den Ausdruck $(x + \Delta x)$ einsetzen. Für den Differenzenquotienten erhalten Sie:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{[5(x + \Delta x) + 2] - (5x + 2)}{\Delta x} = \frac{5x + 5\Delta x + 2 - 5x - 2}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \underline{\underline{5}}.$$

Da in diesem Beispiel die Ausgangsfunktion eine Gerade darstellt, fällt die Sekante mit der Ausgangsfunktion zusammen. Sie erhalten deshalb als Sekantenanstieg den Anstieg der Geraden selbst.

Zusammenfassung

1. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bezeichnet man als Differenzenquotienten der Funktion $y = f(x)$, wobei Δx die Änderung des Argumentes und $\Delta f(x)$ die zugehörige Änderung der Funktion darstellt. Geometrisch betrachtet drückt der Differenzenquotient den Anstieg einer Kurvensekante aus.
2. Zur Bildung des Differenzenquotienten benötigt man zu dem willkürlich gewählten Δx die Funktionswerte $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$.
   $f(x + \Delta x)$ ergibt sich, wenn man in die Funktion $f(x)$ für x den Ausdruck $x + \Delta x$ einsetzt.

Übungen

4. *Bilden Sie den Differenzenquotienten der Funktion*
   a) $y = f(x) = 2x^2$,
   b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$*!*

3.12 Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten. Nähert sich in Bild 22 der Schnittpunkt P_1 der Sekante mit der Kurve $y = f(x)$ dem Schnitt-

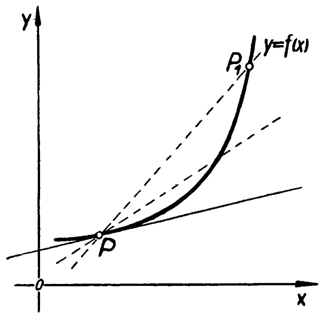

Bild 22

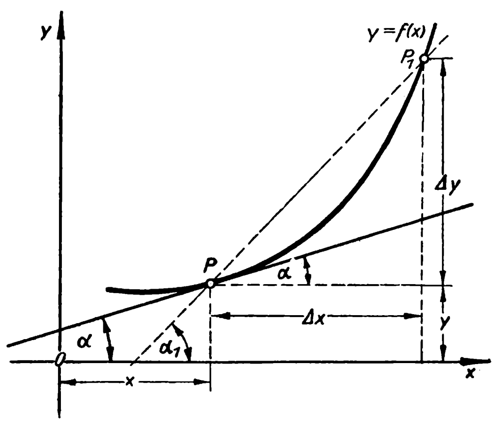

Bild 23

punkt P, so führt die Sekante eine Drehung um P aus. Sie nähert sich um so mehr der Lage der Tangente, je mehr sich P_1 dem Punkte P nähert. Die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte P erhalten Sie also als Grenzlage aller durch P

gehenden Sekanten, wenn sich deren zweiter Schnittpunkt P_1 unbeschränkt dem Punkt P nähert.

Hat P die Koordinaten $(x; y)$ und P_1 die Koordinaten $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, dann ist der Anstieg der Sekante (vgl. Bild 23)

$$\tan \alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nähert sich P_1 dem Punkte P, so wird Δx kleiner. Für $\Delta x \to 0$ bewegt sich somit P_1 nach P und die Sekante dreht sich in die Lage der Tangente. Damit strebt aber $\tan \alpha_1$ gegen $\tan \alpha$, dem Anstieg der Tangente. Es ist also

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Der erhaltene Grenzwert heißt die **Ableitung** der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x. Man schreibt dafür:

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{4}$$

(gelesen: y Strich bzw. f Strich von x).

Die Funktion $y = f(x)$ heißt **Stammfunktion.** Da $y' = \tan \alpha$ ist, stellt die Ableitung $y' = f'(x)$ geometrisch den Anstieg der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x; y)$ dar. Man spricht auch vom Anstieg der Kurve an der Stelle x und versteht darunter den Anstieg der Tangente im Punkte $P(x; y)$.

Wir wollen diesen Grenzübergang an einem praktischen Beispiel durchführen. Es soll der Anstieg der Kurve $y = 0{,}2x^2$ an der Stelle $x = 1$ bestimmt werden. P hat in diesem Falle die Koordinaten $(1; 0{,}2)$. Wählen Sie zunächst $\Delta x = 2$, so ergibt sich für P_1

$$x + \Delta x = 1 + 2 = 3$$

und

$$f(x + \Delta x) = 0{,}2 \cdot 3^2 = 1{,}8.$$

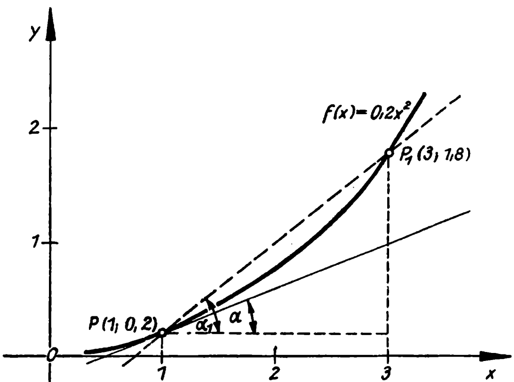

Bild 24

P_1 hat also die Koordinaten $(3; 1{,}8)$ (vgl. Bild 24). Der Anstieg der Sekante ist damit

$$\tan \alpha_1 = \frac{1{,}8 - 0{,}2}{2} = 0{,}8.$$

Sie lassen nun P_1 gegen P wandern, indem Sie Δx der Reihe nach die Werte 2; 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001; ... durchlaufen lassen. Wie Tafel 3 zeigt, streben die Werte von $\tan \alpha_1$ mit Annäherung von P_1 an P anscheinend einem

Grenzwert zu. Dieser Grenzwert ist der gesuchte Anstieg der Tangente in P (1; 0,2).

Die Pfeile in der Tabelle deuten an, daß für $\Delta x \to 0$ der Sekantenanstieg $\tan \alpha_1$ gegen den Tangentenanstieg $\tan \alpha = 0{,}4$ strebt. Daß der Grenzübergang notwendig ist, sehen Sie, wenn Sie $\Delta x = 0$ in die Gleichung für den Sekantenanstieg einsetzen:

$$\tan \alpha_1 \,|_{\Delta x = 0} = \frac{f(x+0) - f(x)}{0}$$
$$= \frac{f(x) - f(x)}{0}$$
$$= \frac{0}{0}.$$

Da $\frac{0}{0}$ ein unbestimmter Ausdruck ist, läßt sich der Tangentenanstieg nur durch einen Grenzübergang gewinnen.

Tafel 3

Δx	$x + \Delta x$	$f(x + \Delta x)$	$\tan \alpha_1 = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	α_1
2	3	1,8	$\frac{1{,}8 - 0{,}2}{2} = 0{,}8$	38° 40′
1	2	0,8	$\frac{0{,}8 - 0{,}2}{1} = 0{,}6$	30° 58′
0,5	1,5	0,45	$\frac{0{,}45 - 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}5$	26° 34′
0,1	1,1	0,242	= 0,42	22° 47′
0,01	1,01	0,20402	= 0,402	21° 54′
0,001	1,001	0,2004002	= 0,4002	21° 49′
↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0,2	0,4	21° 48′

Lehrbeispiel 2

Bilden Sie die Ableitung der Funktion $y = x^3$ an der Stelle x!

Lösung:

Sie bilden zunächst den Differenzenquotienten, also benötigen Sie $f(x)$ und $f(x + \Delta x)$.

$$f(x) = x^3;\ f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$
$$= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

Führen Sie den Grenzübergang durch, so finden Sie

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = \underline{\underline{3x^2}}.$$

Die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist also wieder eine Funktion von x, d. h., der Anstieg der Kurve ändert sich mit der Abszisse x. Geometrisch bedeutet das, daß die Kurve $y = x^3$ ihre Steilheit mit der betrachteten Stelle x ändert. Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und machen Sie sich diesen Sachverhalt am Bild der Funktion klar. Wollen Sie den Anstieg der Kurve (den Anstieg der Tangente) an einer bestimmten Stelle x_0 ermitteln, so haben Sie in $f'(x)$ für x den Wert x_0 einzusetzen, also $f'(x_0)$ zu bilden. So hat $f(x) = x^3$ den Anstieg $f'(x) = 3x^2$. An der Stelle $x_0 = 0{,}5$ wird $\tan\alpha_0 = f'(x_0) = f'(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}75$. Die Tangente im Punkte $P\,(0{,}5;\ 0{,}125)$ bildet mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von $\alpha_0 = 36°\,52'$.

Das Bilden der Ableitung nennt man das **Differenzieren** (die Differentiation) oder das **Ableiten** der Funktion.

Lehrbeispiel 3

Wie groß ist der Anstieg der Funktion $y = f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

Lösung:

Die Ableitung der Funktion gibt ihren Anstieg an. Sie müssen somit die Ableitung der Funktion $y = x^2$ bilden.

$$f(x) = x^2; \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Grenzübergang:

$$\tan\alpha = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}$$

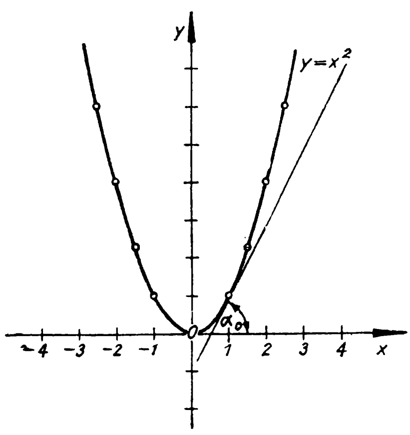

Bild 25

Der Anstieg sollte an der Stelle $x_0 = 1$ bestimmt werden; folglich ist für x der Wert 1 einzusetzen:

$$\tan\alpha_0 = f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$\alpha_0 = 63°\,26'\,6'' \text{ (vgl. Bild 25).}$$

Bei manchen Funktionen kann der Fall eintreten, daß an bestimmten Stellen keine eindeutige Ableitung existiert.

Man nennt eine Funktion an der Stelle $x = a$ **differenzierbar,** wenn ihre Ableitung einen eindeutigen, bestimmten Wert $f'(a)$ besitzt.

Es sollen drei wichtige Fälle betrachtet werden, in denen eine Funktion nicht differenzierbar ist.

1. Die Funktion ist an der Stelle $x = a$ unstetig.
   Die in Bild 26a dargestellte Funktion hat an der Stelle $x = a$ zwei verschiedene Funktionswerte, ist also bei $x = a$ unstetig. An der Stelle $x = a$ existieren damit auch zwei verschiedene Tangenten und zwei verschiedene Werte für $f'(a)$. Man sagt, die Funktion ist an der Stelle $x = a$ nicht differenzierbar. Zum Beispiel ist die Funktion $y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, weil die Kurve an der Stelle $x = 0$ unterbrochen ist. Sie hat an dieser Stelle überhaupt keine Tangente, da an der Stelle $x = 0$ kein eindeutiger, bestimmter Funktionswert existiert.
2. Die Kurve hat an der Stelle $x = a$ eine Spitze.
   Aus Bild 26b erkennen Sie, daß an der Stelle $x = a$ zwei Tangenten mit verschiedenem Anstieg existieren. Die Ableitung ist an der Stelle $x = a$ nicht eindeutig. Die Funktion ist an der Stelle $x = a$ nicht differenzierbar, trotzdem die Kurve bei $x = a$ stetig ist.

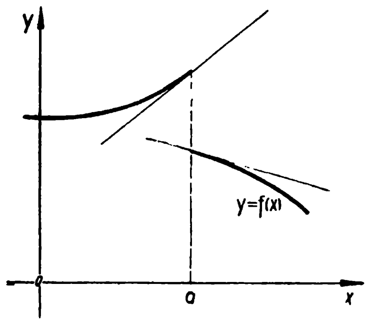

Bild 26a

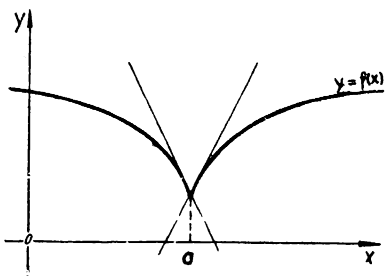

Bild 26b

3. Die Kurve hat an der Stelle $x = a$ eine senkrechte Tangente.
   In diesem Falle ist $\tan \alpha$ unendlich, also kein bestimmter Wert. Zum Beispiel ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ an den Stellen $x = r$ und $x = -r$ nicht differenzierbar, weil dort die Tangente senkrecht zur x-Achse verläuft.

Die Beispiele zeigen:

Unstetige Funktionen sind nicht differenzierbar. Voraussetzung der Differenzierbarkeit ist daher die Stetigkeit der Funktion. Doch nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar (vgl. Bild 26b). Es gilt aber umgekehrt: Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

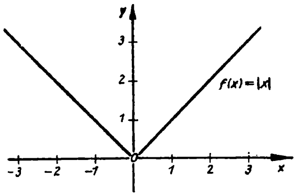

Bild 27

Lehrbeispiel 4

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen.

Lösung:

Die Funktion ist für alle x-Werte stetig, auch für den Wert $x = 0$, denn die Stetigkeitsbedingung wird erfüllt (aus dem Kurvenverlauf ist die Stetigkeit sofort zu erkennen, Bild 27).

Versuchen Sie aber an der Stelle $x = 0$ die Tangente zu zeichnen, so erkennen Sie, daß dies nicht eindeutig möglich ist. Es ist in diesem Fall nicht gleichgültig, ob Sie geometrisch betrachtet von der linken oder der rechten Seite her die Ableitung bestimmen wollen. Es liegt also kein eindeutiger Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ vor.

Übungen

5. *Bilden Sie die Ableitung der Funktion $y = \frac{1}{2} x^2$ an der Stelle $x = 1$!*
6. *Untersuchen Sie, ob die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist!*

Zusammenfassung

1. Die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ ist gleich dem Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$:
$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$
2. Die Ableitung $y' = f'(x)$ der Funktion $y = f(x)$ drückt den Anstieg der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x aus, d. h.
$$y' = \tan \alpha.$$
3. Voraussetzung für die Differenzierbarkeit einer Funktion ist ihre Stetigkeit. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar.
Ist eine Funktion differenzierbar, so ist sie auch stetig.

3.2 Die Ableitung der Potenzfunktion

Sie hatten im vorhergehenden Abschnitt kennengelernt, wie die Ableitung einer Funktion gebildet wird. Es wäre mühevoll, für jede einzelne Funktion den Weg über den Differenzenquotienten zu beschreiten. In den folgenden Kapiteln sollen deshalb für die Potenzfunktionen, die trigonometrischen Funktionen usw. Regeln für das Differenzieren dieser Funktionen aufgestellt werden. Es sei aber an dieser Stelle schon vor einer formalen Anwendung dieser Regeln gewarnt. Sie werden nur mit Erfolg die Differentialrechnung in der Technik anwenden können, wenn Sie Sinn und Zweck dieser Rechenart kennengelernt haben und es verstehen, die Probleme und Grundelemente dieser Rechenart zu erkennen. Um diesen Aufgaben gewachsen zu sein, müssen Sie vor allem den Begriff der Funktion und der veränderlichen Größen restlos beherrschen.

Wir betrachten die Funktion $y = f(x) = x^2$. In Lehrbeispiel 3 hatten Sie die Ableitung gebildet und erhalten:

$$y' = f'(x) = 2x.$$

Da $f(x) = x^2$ ist, können Sie auch schreiben:

$$(x^2)' = 2x.$$

Diese Schreibweise hat den Vorzug, daß man erkennen kann, welche Funktion differenziert wurde.

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ist selbst wieder eine Funktion, die wir ebenfalls graphisch darstellen können. In Bild 28 ist die Funktion $f(x) = x^2$ und deren Ableitung gezeichnet.

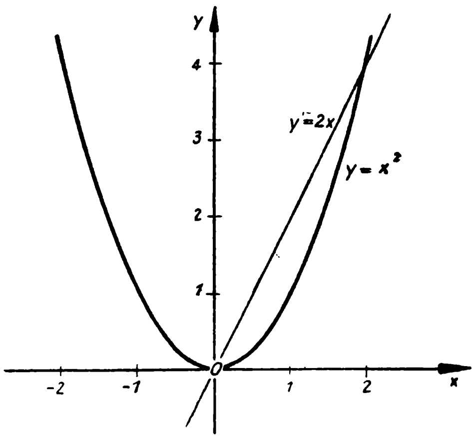

Bild 28

Aus Bild 28 ist so die Ableitung für jeden Punkt der Kurve $y = x^2$ ablesbar. Zum Beispiel lesen Sie für $x = 1{,}5$ den Wert $f'(1{,}5) = 3$ ab.

Für die kubische Parabel hatten Sie in Lehrbeispiel 2 die Ableitung gebildet:

$$y' = f'(x) = 3x^2.$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$$

Was erkennen Sie daraus? Die Ableitung hat gegenüber der Stammfunktion jeweils einen um 1 niedrigeren Grad. Weiter taucht der Exponent der Stammfunktion als Faktor bei der Ableitung auf. Für die Ableitung der Funktion $f(x) = x^4$ müßte man demnach erwarten:

$$(x^4)' = 4x^3,$$

allgemein:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Sie werden dies anschließend bestätigt finden.

Es sei ausdrücklich betont, daß die eben angeführten Gedankengänge keinen Beweis darstellen, sondern aus den einzelnen Beispielen wurde das Allgemeine gefolgert.

Um die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^n$ zu finden, gehen Sie wieder von der Grundformel (3) aus und bilden zunächst $f(x + \Delta x)$:

$$f(x) = x^n; \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n.$$

Wir führen den Beweis nur für ganzzahlige positive n und können $(x + \Delta x)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz[1] entwickeln:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n.$$

Der Differenzenquotient lautet dann:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n\right) - x^n}{\Delta x}$$

$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}.$$

Der Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ liefert:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)$$

$$= n \cdot x^{n-1}.$$

(Alle anderen Glieder fallen weg, da sie Δx enthalten.)

Es ist also

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}} \tag{5}$$

Die Ableitung einer Potenzfunktion wird gebildet, indem man ihren Exponenten um 1 erniedrigt und die erniedrigte Potenz mit dem Exponenten der Stammfunktion multipliziert.

Sie sehen damit die auf Seite 33 angestellte Vermutung bestätigt.

Obwohl der Beweis nur für ganzzahlige, positive n geführt wurde, wenden Sie *Formel (5) auch für negative und gebrochene Exponenten* an. Der Beweis dafür wird später in Abschnitt 5.2 gebracht.

Lehrbeispiel 5

Bilden Sie die Ableitung von folgenden Funktionen.

a) $y = x^5$, *b)* $y = \sqrt{x}$; *c)* $y = \frac{1}{x^2}$!

Lösung:

a) $n = 5$; unter Anwendung der Formel (5) folgt

$$(x^5)' = 5x^{5-1} = \underline{\underline{5x^4}}.$$

---

[1] Die Koeffizienten n, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\cdots$ sind die gleichen, die Sie dem Pascalschen Dreieck entnehmen. Sie können dies leicht bestätigen, indem Sie $n = 1, 2, 3, \cdots$ setzen.

b) $y = x^{\frac{1}{2}}, \quad n = \frac{1}{2}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

c) $y = x^{-2}, \quad n = -2$

$$(x^{-2})' = (-2) \cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^3}}}$$

Lehrbeispiel 6

Welchen Winkel bildet die Tangente an die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ an der Stelle $x = 8$ mit der positiven x-Achse?

Lösung:

Um den geforderten Winkel zu bestimmen, muß der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = 8$ bestimmt werden.

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

Sie setzen $x = 8$ ein und erhalten:

$$\tan\alpha = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3 \cdot 4} = 0{,}08\bar{3},$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 4^\circ\, 46'}}.$$

Übungen

7. *Bilden Sie die Ableitung von* $y = \frac{1}{x^6}$*!*
8. *Differenzieren Sie folgende Funktionen:*

   a) $y = \sqrt[4]{x}$; *b)* $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$; *c)* $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$*!*
9. *An welcher Stelle hat der Anstieg der Kurve* $y = \sqrt{x}$ *den Wert* 1*?*
10. *Welchen Winkel bilden die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Kurven* $y = x^3$ *und* $y = \sqrt{x}$ *miteinander?*

3.3 Grundregeln der Differentiation

3.31 Die Ableitung einer Konstanten. Die Funktion $y = a$ ($a = \text{const.}$) ist zu differenzieren.

Von der Grundformel ausgehend erhalten Sie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0\,.$$

Damit wird auch

$$y' = f'(x) = 0.$$

Da $y = a$ sein soll, schreiben wir

$$\boxed{(a)' = 0} \qquad \textbf{(6)}$$

Merken Sie sich:

▌ Die Ableitung einer Konstanten ist Null.

Was besagt dieses Ergebnis? Wie Sie wissen, stellt die Funktion $y = a$ eine Parallele zur x-Achse im Abstand a dar (Bild 29). Der Anstieg einer Parallelen zur x-Achse ist aber Null, und das besagt auch die oben berechnete Ableitung.

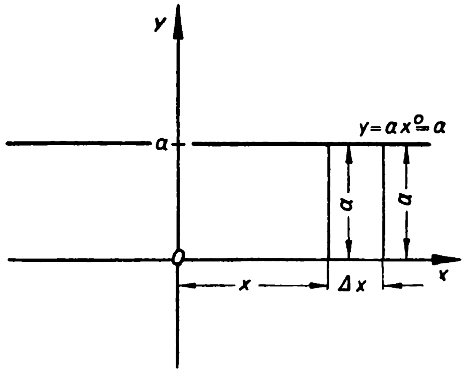

Bild 29

Es könnte noch angezweifelt werden, daß $y = a$ überhaupt eine Funktion von x ist. Dieser Einwand ist hinfällig, denn unter einer Funktion $y = f(x)$ versteht man ein Gesetz, das jedem Wert x einen bestimmten Wert y zuordnet. Bei der Funktion $y = a$ hat y für jeden Wert von x den Wert a. Allerdings ändert sich hier — im Gegensatz zu anderen Funktionen — der Funktionswert nicht. Da die Änderung einer unveränderlichen Größe aber Null ist, ist die Richtigkeit des obenstehenden Merksatzes ohne weiteres einzusehen.

3.32 Die Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor. Die Funktion $y = a \cdot g(x)$ ($a = \text{const.}$) soll abgeleitet werden. Anwendung der Grundformel (4):

$$[a \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot g(x + \Delta x) - a \cdot g(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Der Faktor a kann vor das Limes-Zeichen genommen werden.

$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ stellt aber — vergleichen Sie mit Formel (3) und denken Sie sich an Stelle von f den Buchstaben g — den Differenzenquotienten $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ dar. Nach Durchführung des Grenzüberganges folgt:

$$\boxed{[a \cdot g(x)]' = a \cdot g'(x)} \qquad (7)$$

▌ Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Lehrbeispiel 7

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y = 0{,}5 \cdot x^2$.

Lösung:

Sie bilden die Ableitung von x^2, sie ist $2x$, und multiplizieren diese mit dem Faktor 0,5:

$$f'(x) = 0{,}5 \cdot 2x = \underline{\underline{x}}.$$

3.33 Die Ableitung einer Summe. Die Funktion $y = F(x) = f(x) + g(x)$ soll differenziert werden. Es ist

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Grenzübergang:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

$$\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)} \tag{8}$$

Eine Summe wird differenziert, indem man jeden einzelnen Summanden differenziert.

Diese Regel kann auch für Summen mit beliebig vielen Summanden angewandt werden:

Für $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

ist $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Sie erhalten durch das Differenzieren einer ganzen rationalen Funktion wieder eine ganze rationale Funktion, deren Grad um 1 niedriger ist als die Ausgangs- oder Stammfunktion. Das absolute Glied a_0 tritt in der Ableitung nicht mehr auf, da die Ableitung einer Konstanten Null ergibt. Alle Funktionen, die sich *nur* in der Größe des absoluten Gliedes unterscheiden, haben also die gleiche Ableitung. Das erklärt sich daraus, daß eine Änderung von a_0 nur eine Parallelverschiebung der Funktion in Richtung der y-Achse bewirkt, ihren Anstieg aber unverändert läßt.

Für Differenzen kann Regel (8) selbstverständlich ebenfalls angewandt werden, da die Differenz $u(x) - v(x)$ als Summe $u(x) + [-v(x)]$ aufgefaßt werden kann.

Lehrbeispiele

Von den folgenden Funktionen bilde man die Ableitung!

8. $y = (2x^2 - x)(x^2 + 3)$

Lösung:

Das Produkt muß zunächst ausmultipliziert werden.

$$y = 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x$$

$$\underline{\underline{y' = 8x^3 - 3x^2 + 12x - 3}}$$

9. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$

Lösung:

$$y = x^{-1} + 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} \qquad y' = -1 \cdot x^{-2} + 2\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} = \frac{-1}{x^2} - \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{-\sqrt{x} - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}$$

10. $y = (1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})$

Lösung:

Sie multiplizieren wiederum erst aus (später werden Sie eine Regel für das Differenzieren von Produkten kennenlernen).

$$y = 1 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = 1 - x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{5}{6}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{6} x^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt[6]{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[6]{x^4}} + \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$

$$= \frac{-3\sqrt[6]{x} - 2 + 5\sqrt[6]{x^3}}{6\sqrt[6]{x^4}} = \underline{\underline{\frac{-3\sqrt[6]{x} - 2 + 5\sqrt{x}}{6\sqrt[3]{x^2}}}}$$

11. Welche Punkte der Kurve $y = 2x^3 - 9x^2 - 23x + 112$ haben eine Tangente, die gegen die positiv gerichtete x-Achse um 45° geneigt ist?

Lösung:

Für die Punkte, in denen die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° bildet, muß der Tangentenanstieg — und das ist die Ableitung — den Wert 1 haben.

Es ist also $\qquad m = \tan \alpha = f'(x) = \tan 45° = 1.$

Sie differenzieren deshalb die gegebene Funktion und setzen die Ableitung gleich 1:

$$y' = (2x^3 - 9x^2 - 23x + 112)' = 6x^2 - 18x - 23.$$

$y' = 1$ ergibt

$$6x^2 - 18x - 24 = 0,$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$\underline{\underline{x_1 = 4}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_2 = -1.}}$$

Diese Werte in die Ausgangsfunktion eingesetzt, ergeben

$$y_1 = 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 23 \cdot 4 + 112 = \underline{\underline{4}},$$
$$y_2 = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 23(-1) + 112 = \underline{\underline{124}}.$$

Die gesuchten Punkte sind daher $P_1(4; 4)$ und $P_2(-1; 124)$.

Übungen

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

11. *a)* $y = 6x + 5 \cdot 9^{20}$ *b)* $y = ax \cdot b^3$ *c)* $y = 4x^2 + 8x$

12. *a)* $y = \frac{x^7}{7} - \frac{1}{5x^5}$ *b)* $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

c) $y = (x-1)^3$ *d)* $y = (x+2)(x-3)$

3.34 Die Ableitung eines Produktes. Es sei $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ das Produkt zweier Funktionen. Wie haben Sie vorzugehen, wenn eine derartige Funktion zur Differentiation vorliegt? Wir wollen eine allgemeingültige Regel ableiten. Für den Differenzenquotienten erhalten Sie:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Für die weitere Berechnung formen Sie den rechts stehenden Bruch so um, daß im Zähler die Differenzenquotienten von $f(x)$ und $g(x)$ auftreten. Das gelingt, wenn Sie $f(x) \cdot g(x+\Delta x)$ subtrahieren und wieder addieren. Sie erhalten somit (ohne den Wert des Bruches zu ändern):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Für $\Delta x \to 0$ wird

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

und

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x).$$

$g(x+\Delta x)$ geht für $\Delta x \to 0$ über in $g(x)$. Somit ergibt sich aus dem obenstehenden Differenzenquotienten die **Ableitung eines Produktes:**

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

oder kurz

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \qquad (9)$$

Das Produkt zweier Funktionen wird abgeleitet, indem man jede dieser Funktionen mit der Ableitung der anderen Funktion multipliziert und diese zwei Produkte addiert.

Lehrbeispiele

12. *a)* $y = (2x+3)(4x^2+5x+6)$

Hier ist $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = 4x^2 + 5x + 6$.

Es wird $y' = f' \cdot g + f \cdot g' = 2(4x^2 + 5x + 6) + (2x + 3)(8x + 5)$
$= 8x^2 + 10x + 12 + 16x^2 + 34x + 15 = \underline{\underline{24x^2 + 44x + 27.}}$

b) $y = x^3 \cdot (5x^2 + 7x + 1)$

Wenden Sie hier die Produktformel an, so erhalten Sie

$$y' = 3x^2(5x^2 + 7x + 1) + x^3(10x + 7)$$
$$= 15x^4 + 21x^3 + 3x^2 + 10x^4 + 7x^3,$$
$$y' = 25x^4 + 28x^3 + 3x^2.$$

Diese Form der Rechnung ist aber umständlich. Auf wesentlich einfacherem Wege kommen Sie zum Ziel, wenn Sie erst ausmultiplizieren und dann differenzieren:

$$y = 5x^5 + 7x^4 + x^3,$$
$$\underline{\underline{y' = 25x^4 + 28x^3 + 3x^2.}}$$

Achten Sie bei allen Aufgaben darauf, auf welchem Wege Sie schneller und bequemer zum Ergebnis gelangen!

Die Produktregel kann auch für drei und mehr Faktoren angewendet werden. Ist z. B. ein Produkt dreier Faktoren zu differenzieren, so kann man zwei Faktoren zu einer Gruppe zusammenfassen und die obenstehende Regel für den Fall zweier Faktoren benutzen.

Die gegebene Funktion laute

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x).$$

Dann können Sie schreiben

$$F'(x) = \{[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x)\}'$$
$$= [f(x) \cdot g(x)]' \cdot h(x) + [f(x) \cdot g(x)] \cdot h'(x).$$

Nun noch das in der eckigen Klammer stehende Produkt differenziert, ergibt

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

oder kurz $$\boxed{(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'} \qquad (9a)$$

In gleicher Weise kann die Regel für die Differentiation eines Produktes von 4, 5, ..., n Faktoren hergeleitet werden.

Allgemein lautet die **Produktregel:**

Die Ableitung eines Produktes ist gleich der Summe der Produkte aus der Ableitung je eines Faktoren mit den übrigen Faktoren.

In dieser Regel ist die für das Differenzieren eines Produktes zweier Faktoren enthalten.

Lehrbeispiel 13

Differenzieren Sie $y = (a + x)(b + x^2)(c + x^3)$

Lösung:

Nach Formel (9a) wird

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot (b + x^2)(c + x^3) + (a + x) \cdot 2x \cdot (c + x^3) + (a + x)(b + x^2) \cdot 3x^2 \\ &= bc + bx^3 + cx^2 + x^5 + 2acx + 2ax^4 + 2cx^2 + 2x^5 + 3abx^2 + 3ax^4 \\ &\qquad + 3bx^3 + 3x^5 \\ &= \underline{\underline{bc + 2acx + 3(c + ab)x^2 + 4bx^3 + 5ax^4 + 6x^5}} \end{aligned}$$

Übungen

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

13. *a)* $y = (x^2 + 5x - 4)(x^3 - 2)$

b) $y = (7x - 3)(3x + 4) - (2x + 5)(2x - 5)$

c) $y = (x^2 + a)(x^3 + b)(x^4 + c)$

14. *a)* $u(x) = (a - x)(b - x)$

b) $h(x) = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$

3.35 Die Ableitung eines Quotienten. Die Aufgabe, die Ableitung eines Quotienten $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ zu bilden, können Sie auf die Ableitung eines Produktes zurückführen, indem Sie die Ausgangsgleichung umstellen:

$$f(x) = F(x) \cdot g(x).$$

Sie differenzieren unter Anwendung der Produktregel:

$$f'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x).$$

Nach $F'(x)$ aufgelöst erhalten Sie

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x) \cdot g'(x)}{g(x)}.$$

Nun ist $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,

also
$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

In Kurzform lautet die **Ableitung eines Quotienten:**

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}} \qquad (10)$$

Lehrbeispiele

Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren!

14. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$

Lösung: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\qquad g(x) = x^3 - 1$

$f'(x) = 2x + 2$ $\qquad g'(x) = 3x^2$

Nach der Quotientenformel wird:

$$y' = \frac{(2x+2)\cdot(x^3-1)-(x^2+2x+1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4+2x^3-2x-2-3x^4-6x^3-3x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{x^4+4x^3+3x^2+2x+2}{(x^3-1)^2}}}\,.$$

15. $y = \frac{-2}{(2-x^2)}$

Lösung: $$y' = \frac{0\cdot(2-x^2)-(-2)(-2x)}{(2-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{-4x}{(2-x^2)^2}}}$$

Übungen

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

15. $y = \frac{1}{x(x+1)}$

16. a) $y = \frac{1-x}{1+x}$ *b)* $y = \frac{2x^3+3x+5}{3x^2-4x-7}$ *c)* $y = \frac{x^8+8}{x^8-8}$ *d)* $y = \frac{a+bx}{a-bx}$

17. a) $y = \frac{1+x}{1-x}$ *b)* $y = \frac{x^2-2x+3}{x^2+5}$

18. a) $y = \frac{a\cdot x}{1-x}$ *b)* $y = \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$ *c)* $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

19. An die Kurve $y = \frac{x-6}{x^2-2x-8}$ *sind diejenigen Tangenten zu legen, die parallel zur x-Achse verlaufen. An welchen Stellen sind diese Tangenten möglich?*

3.4 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

$y = \sin x$

Sie gehen wiederum von der Grundformel aus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\,.$$

Nun ist $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Fassen Sie $(x+\Delta x)$ als α und x als β auf, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Nach 2.2 Formel (2) ist $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Damit geht auch der erste Faktor $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ für $\Delta x \to 0$ gegen 1; der zweite Faktor geht für $\Delta x \to 0$ in $\cos x$ über. Daher wird $f'(x) = \cos x$.

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \tag{11}$$

$y = \cos x$

Für die Funktion $y = \sin x$ hatten Sie die Ableitung $y' = \cos x$ erhalten. Das Bild der Funktion $y = \cos x$ kann man als eine um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinuskurve auffassen. Folglich müßte auch die abgeleitete Kurve zu $y = \cos x$ gegenüber der abgeleiteten Kurve von $y = \sin x$ um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben sein. Die Ableitung zu $y = \sin x$ war $y = \cos x$, die Ableitung zu $y = \cos x$ heißt somit $y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Dafür können Sie auch schreiben:

$$y' = -\sin x.$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \tag{12}$$

$y = \tan x$

Sie setzen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und differenzieren nach der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \tag{13}$$

Sie können aber auch schreiben

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

also auch $$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

$y = \cot x$

Sie setzen $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ und differenzieren wieder nach der Quotientenregel:

$$y' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}} \tag{14}$$

Schreiben Sie $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$, so wird

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x).$$

Lehrbeispiele

Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren!

16. $y = \sin^2 x$

Lösung:

Für $\sin^2 x$ können Sie schreiben: $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$. Anwendung der Produktregel (9):

$$y' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{\sin 2x}}.$$

17. $y = \tan^2 x$

Lösung:

Anwendung der Produktregel (9): $y = \tan x \cdot \tan x$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x + \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}}.$$

18. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

Lösung:

Anwendung der Quotientenregel (10):

$$y' = \frac{(2 \sin x \cdot \cos x) \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x},$$

$$y' = \frac{\sin x (2 \cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x [\cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)]}{\cos^2 x},$$

$$y' = \underline{\underline{\frac{\sin x (\cos^2 x + 1)}{\cos^2 x}}}.$$

19. $y = \frac{1}{\cos x} + \tan x$

Lösung:

Bei einer Summe kann nach Regel (8) jeder Summand einzeln differenziert werden. Beim ersten Summanden ist (10) anzuwenden.

$$y' = \frac{0 - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{1 - \sin x}}}$$

20. $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

Lösung: $$y' = \frac{(1+\cos x)'(1-\cos x)-(1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x\,[(1-\cos x)+(1+\cos x)]}{(1-\cos x)^2}$$
$$y' = -\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

Übungen

20. *Differenzieren Sie:*

a) $y = \frac{1-\sin x}{1-\cos x}$, *b)* $y = \frac{\sin x}{\tan^2 x\sqrt{1-\sin^2 x}}$!

21. *Welchen Winkel bildet die Tangente an die Kurve* $y = \sin x$ *an der Stelle* $x = 0$ *mit der Geraden* $y = \frac{1}{2}x$*?*

3.5 Differential und Differentialquotient

Im Abschnitt 3.12 lernten Sie die Ableitung $y' = f'(x)$ der Funktion $y = f(x)$ kennen. Bildet man das Produkt aus der Ableitung $f'(x)$ und dem Argumentszuwachs Δx, also $f'(x) \cdot \Delta x$, so nennt man dieses Produkt das **Differential** der Funktion $y = f(x)$ und bezeichnet es symbolisch durch ein vor die Funktion gesetztes d. Es ist also $\mathrm{d}y$ oder $\mathrm{d}f(x)$ die symbolische Bezeichnung des Differentials, und mit diesen Zeichen gilt
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{*}$$
Beispiele:
Für $y = f(x) = \sin x$ wird
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}\sin x = \cos x \cdot \Delta x.$$
Für $y = f(x) = x$ wird
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x,$$
$$\mathrm{d}x = \Delta x.$$
Da nach dem 2. Beispiel Δx gleich dem Differential $\mathrm{d}x$ der Funktion $y = x$ ist, kann man in (*) für Δx noch das Differential $\mathrm{d}x$ einsetzen und erhält
$$\boxed{\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x} \tag{15}$$
Aus Bild 30 können Sie auch leicht die geometrische Bedeutung des Differentials erkennen. Da $\tan\alpha = f'(x)$ ist, so ist das Produkt $f'(x) \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \cdot \tan\alpha$ die Gegenkathete QR in dem Tangentendreieck PQR. Die Gegenkathete QR und damit das Differential $\mathrm{d}y$ ist aber der Funktionszuwachs, den die Funktion $y = f(x)$ als Folge des Argumentszuwachses $\Delta x = \mathrm{d}x$ erfahren würde, wenn sich die Kurve von P an geradlinig längs ihrer Tangente fortsetzte. Dagegen ist Δy (in Bild 30 die Strecke QP_1) der wirkliche Funktionszuwachs.

Sowohl das Differential $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ als auch der Funktionszuwachs $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ sind Funktionen von x und $\Delta x = \mathrm{d}x$, bei denen x und $\Delta x = \mathrm{d}x$ unabhängige Veränderliche sind, d. h. also, daß die Größen $\mathrm{d}y$ und Δy abhängig sind von der Stelle x, an der sie gebildet werden und von der Größe des Zuwachses $\Delta x = \mathrm{d}x$ der unabhängigen Veränderlichen.
Dividiert man nun die Gleichung (15) durch $\mathrm{d}x$, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)} \tag{16}$$

Links steht in dieser Beziehung der Quotient der Differentiale (Differentialquotient) und rechts $f'(x)$, also die Ableitung. Da aber $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, ergibt sich aus Gleichung (16), daß der Grenzwert des Differenzenquotienten, also die Ableitung, gleich ist dem Quotienten der Differentiale, dem **Differentialquotienten.** Man pflegt daher die beiden Begriffe „Ableitung“ und „Differentialquotient“ beständig nebeneinander zu gebrauchen. Auch läßt sich jede Formel über die Ableitung einer Funktion als Gleichung zwischen Differentialen schreiben.
So folgt aus $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^n)' = n x^{n-1}$ als Differential $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^n) = n x^{n-1}\, \mathrm{d}x$, oder aus $y' = u'(x) + v'(x)$ folgt $\mathrm{d}y = u'(x)\mathrm{d}x + v'(x)\mathrm{d}x$ usw.

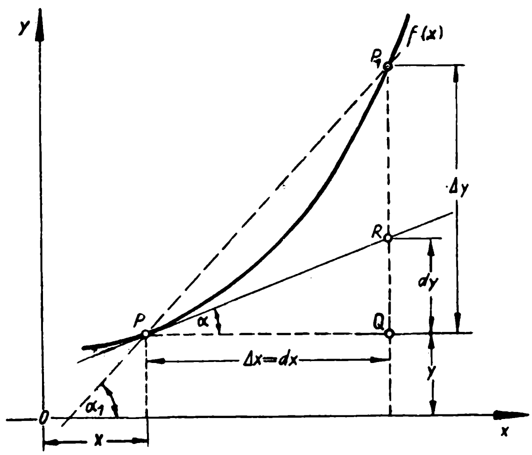

Bild 30

Während wir bei unseren obigen Betrachtungen $\Delta x = \mathrm{d}x$ gesetzt haben, ist besonders zu beachten, daß Δy im allgemeinen verschieden von $\mathrm{d}y$ ist, was Sie auch eindeutig aus Bild 30 erkennen können. Dies soll noch an einem Beispiel veranschaulicht werden. Für die Funktion $y = x^2$ sollen für $x = 2$ die Größen Δy und $\mathrm{d}y$ in Abhängigkeit von $\Delta x = \mathrm{d}x$ bestimmt werden.

Aus $y = x^2$ folgt $y' = 2x$ und

$$\mathrm{d}y = 2x \cdot \mathrm{d}x.$$

Für Δy erhält man

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2,$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \underline{\underline{2x\Delta x + \Delta x^2}}.$$

Wählen wir zunächst $\Delta x = \mathrm{d}x = 10$, so ergibt sich für $x = 2$

$$\mathrm{d}y = 2 \cdot 2 \cdot 10 = \underline{\underline{40}}$$

und

$$\Delta y = 2 \cdot 2 \cdot 10 + 10^2 = 40 + 100 = \underline{\underline{140}}.$$

Sie erkennen also, daß die Werte $\mathrm{d}y$ und Δy nicht gleich sind, sondern für den oben gewählten Wert $\mathrm{d}x = 10$ beträchtlich voneinander abweichen.
In untenstehender Tabelle sind die Werte Δy und $\mathrm{d}y$ für $x = 2$ und einige $\Delta x = \mathrm{d}x$ zusammengestellt.

$\Delta x = \mathrm{d}x$	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$
10	140	40
1	5	4
0,1	0,41	0,4
0,01	0,0401	0,04
0,001	0,004001	0,004
0,0001	0,00040001	0,0004

Aus der Tabelle ist ebenfalls zu erkennen, daß $\mathrm{d}y \neq \Delta y$ ist, aber für kleiner werdende $\Delta x = \mathrm{d}x$ werden die absoluten Beträge der Differenzen $|\Delta y - \mathrm{d}y|$ immer kleiner, d. h., für genügend kleine $\Delta x = \mathrm{d}x$ gilt die Näherungsformel $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, und zwar um so genauer, je kleiner $\Delta x = \mathrm{d}x$ ist. Hierin liegt auch eine Anwendung des Differentials $\mathrm{d}y$ begründet, denn für genügend kleine $\Delta x = \mathrm{d}x$ kann man Δy durch $\mathrm{d}y$ oder auch umgekehrt ersetzen. Eine Anwendung dieser Beziehung finden Sie später im Abschnitt 5.4 (Fehlerrechnung).

Zusammenfassung

1. Das Differential $\mathrm{d}x$ ist eine beliebige veränderliche Größe.
2. Das Differential $\mathrm{d}y$ ist im allgemeinen von Δy verschieden. Seine Größe hängt von der Abszisse x und dem Differential $\mathrm{d}x$ ab.
3. An Stelle der Ableitung $y' = f'(x)$ kann auch der Quotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gesetzt werden. Wir bezeichnen diesen Ausdruck als *Differentialquotienten*. Es gilt also
$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$
4. Für genügend kleine $\Delta x = \mathrm{d}x$ gilt die Näherungsformel $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, und zwar um so genauer, je kleiner $\Delta x = \mathrm{d}x$ ist.

3.6 Die Ableitung der Funktion einer Funktion. Ableitung unentwickelter Funktionen

Sie haben bisher Funktionen der Form $y = x^n$ bzw. $y = \sin x$, $y = \cos x$, ... differenziert. Wollten Sie aber z. B. $y = (3x^2 - 4)^{10}$ ableiten, so müßten Sie diese Funktion erst nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und dann die Glieder nach der Potenzregel einzeln differenzieren. Je größer der Exponent ist, um so mühevoller und zeitraubender würde die Arbeit sein. Um hier schnell zum Ziele zu kommen, führen Sie eine *Hilfsveränderliche* (*Hilfsvariable*) z ein.

Es ist $\quad y = f(x) = (3x^2 - 4)^{10}$.
Sie setzen $\quad z = 3x^2 - 4$
und erhalten $\quad y = z^{10}$.

y erscheint nun als Funktion von z, wobei z selbst wieder eine Funktion von x ist. Um anzudeuten, daß z eine Funktion von x ist, schreibt man $z = z(x)$.
Es ist also $y = f(z) = z^{10}$ mit $z = z(x) = 3x^2 - 4$.
Beide Funktionsgleichungen zusammengefaßt, ergeben

$$y = f[z(x)] = (3x^2 - 4)^{10}.$$

Allgemein können Sie immer $y = f[z(x)]$ schreiben, wenn $y = f(z)$ und $z = z(x)$ ist. Man sagt in diesem Falle: *y ist die Funktion einer Funktion von x.*

Um $y' = \frac{dy}{dx}$ zu erhalten, bilden Sie zunächst $\frac{dy}{dz}$, indem Sie $y = f(z)$ nach der Hilfsveränderlichen z differenzieren. Multiplizieren Sie nun $\frac{dy}{dz}$ mit $\frac{dz}{dx}$ — der Ableitung von z nach der unabhängigen Veränderlichen x — so ergibt sich $\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ (das Differential dz läßt sich kürzen). Es ist also

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}} \tag{17}$$

oder, in anderer Schreibweise,

$$\frac{dy}{dx} = f'(z) \cdot z'(x).$$

> Eine zusammengesetzte Funktion $y = f[z(x)]$ wird differenziert, indem man erst y nach z und dann z nach x differenziert und die erhaltenen Ableitungen $f'(z)$ und $z'(x)$ miteinander multipliziert.

Jetzt können Sie die Funktion $y = (3x^2 - 4)^{10}$ ableiten.

Es ist $\qquad f(z) = z^{10}, \quad z(x) = 3x^2 - 4.$

Durch Differenzieren erhalten Sie

$$\frac{dy}{dz} = 10z^9, \quad \frac{dz}{dx} = 6x.$$

Gemäß Formel (17) wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 10z^9 \cdot 6x.$$

Für z den Wert $3x^2 - 4$ wieder eingesetzt, ergibt

$$\frac{dy}{dx} = 10\,(3x^2 - 4)^9 \cdot 6x = \underline{\underline{60x\,(3x^2 - 4)^9}}.$$

Sie haben y nicht direkt nach x abgeleitet, sondern ein Bindeglied z eingefügt, gewissermaßen eine Kette gebildet, die von y über z nach x führt.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ ist die Regel, die für die Kette gilt. Diese Regel heißt darum die **Kettenregel.**

Man nennt $f(z)$ die *äußere*, $z = z(x)$ die *innere Funktion.* Entsprechend heißt $\frac{dy}{dz} = f'(z)$ die äußere, $\frac{dz}{dx} = z'(x)$ die innere Ableitung der Funktion $y = f[z(x)]$.

Beispiele:

	äußere Funktion	innere Funktion
1. $y = (2 - 3x)^n$	$f(z) = z^n$	$z(x) = 2 - 3x$
2. $y = \sqrt{x^2 - 1}$	$f(z) = \sqrt{z}$	$z(x) = x^2 - 1$
3. $y = \sin \frac{x-1}{x^2+2}$	$f(z) = \sin z$	$z(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$
4. $y = x^2 \sqrt{2x - 9}$	$g(x) = x^2$	
$= g(x) \cdot h(x)$	$h(z) = \sqrt{z}$	$z(x) = 2x - 9$

Die Kettenregel kann auch auf mehrfach zusammengesetzte Funktionen angewandt werden.

Ist $y = y(z)$; $z = z(u)$; $u = u(v)$; $v = v(x)$, dann folgt für den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = y'(z) \cdot z'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x)\,. \tag{17a}$$

Die Kettenregel wird in der Differentialrechnung sehr häufig angewandt. Sie kann als eine der wichtigsten Beziehungen in der Differentialrechnung angesehen werden. Die folgenden Lehrbeispiele sind sehr sorgfältig und gewissenhaft durchzurechnen. Vor allem kommt es darauf an, daß Sie die Begriffe „innere“ und „äußere“ Ableitung verstanden haben und die Kettenregel nicht nur formal anwenden. Machen Sie sich deshalb mit dem Kapitel „Kettenregel“ besonders vertraut!

Lehrbeispiele

Die folgenden Funktionen sind unter Anwendung der Kettenregel zu differenzieren!

21. $y = (ax^3 + b)^6$

Lösung:

Sie setzen $y = z^6$; dann ist $z = ax^3 + b$.

Es wird $\frac{dy}{dz} = 6z^5$, $\qquad \frac{dz}{dx} = 3ax^2$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 6z^5 \cdot 3ax^2 = 6\,(ax^3 + b)^5 \cdot 3ax^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\underline{18ax^2\,(ax^3 + b)^5}}.$$

22. $y = \cos^2 x$

Lösung:

Sie können schreiben: $\qquad y = (\cos x)^2$.

$$y = z^2 \qquad z = \cos x$$

$$\frac{dy}{dz} = 2z \qquad \frac{dz}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = (2z) \cdot (-\sin x) = (2\cos x) \cdot (-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x = \underline{\underline{-\sin 2x}}$$

23. $y = [a + (b + cx)^m]^n$

Lösung:

Hier müssen zwei Substitutionen vorgenommen werden, d. h. Sie setzen

$$y = u^n, \qquad u(v) = a + v^m, \qquad v = b + cx.$$

Sie differenzieren:

$$\frac{dy}{du} = n \cdot u^{n-1}, \qquad \frac{du}{dv} = m \cdot v^{m-1}, \qquad \frac{dv}{dx} = c.$$

Damit wird $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = nu^{n-1} \cdot mv^{m-1} \cdot c$

$$= n[a + (b + cx)^m]^{n-1} \cdot m(b + cx)^{m-1} \cdot c,$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = cmn\,(b + cx)^{m-1}\,[a + (b + cx)^m]^{n-1}.}}$$

24. $y = \sqrt{a + bx}$

Lösung: $\quad y = (a + bx)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z(x) = a + bx$

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \qquad z'(x) = b$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot b = \underline{\underline{\frac{b}{2\sqrt{a + bx}}}}$$

25. $y = \sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}}$

Lösung: $\quad y = \left(\frac{a + bx}{a - bx}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z(x) = \frac{a + bx}{a - bx}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Um $z'(x)$ zu bilden, müssen Sie die Quotientenregel anwenden:

$$u(x) = a + bx, \qquad v(x) = a - bx,$$
$$u'(x) = b, \qquad v'(x) = -b.$$
$$z'(x) = \frac{(a - bx)\cdot b - (a + bx)\cdot(-b)}{(a - bx)^2} = \frac{2ab}{(a - bx)^2}.$$

Für y' folgt dann unter Anwendung der Formel (17):

$$y' = f'(z)\cdot z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot\frac{2ab}{(a - bx)^2}.$$

$z = \dfrac{a + bx}{a - bx}$ eingesetzt ergibt

$$y' = \frac{\sqrt{a - bx}}{2\sqrt{a + bx}}\cdot\frac{2ab}{(a - bx)^2},$$

$$y' = \frac{ab}{(a - bx)\sqrt{(a + bx)(a - bx)}} = \underline{\underline{\frac{ab}{(a - bx)\sqrt{a^2 - b^2x^2}}}}.$$

26. $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

Lösung:

$$y = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z = z(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{2\sqrt{1 + \sin x}}$$

Anwendung der Quotientenregel: $u(x) = 1 + \sin x$, $v(x) = 1 - \sin x$

$$u'(x) = \cos x, \qquad v'(x) = -\cos x$$

$$z'(x) = \frac{(1 - \sin x)\cdot(\cos x) - (1 + \sin x)\cdot(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$z'(x) = \frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$y' = f'(z)\cdot z'(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{2\sqrt{1 + \sin x}}\cdot\frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

Sie erweitern mit $\sqrt{1 - \sin x}$:

$$y' = \frac{(1 - \sin x)\cos x}{\sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}\,(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}\,(1 - \sin x)},$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{1 - \sin x}.}}$$

Bei einiger Übung im Gebrauch der Kettenregel kann das Ergebnis fast ohne Zwischenrechnung niedergeschrieben werden.

27. $y = (5x^3 + 6x^2 + 7x + 8)^{1000}$

Lösung:

Die äußere Funktion ist eine Potenzfunktion mit dem Exponenten 1000, die Sie mit z^{1000} bezeichnen können. Leiten Sie diese direkt ab, ohne die Basis vorübergehend mit z zu bezeichnen, so erhalten Sie

$$1000\,(5x^3 + 6x^2 + 7x + 8)^{999}.$$

Diese äußere Ableitung muß noch mit $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, der Ableitung der inneren Funktion, multipliziert werden. Die Ableitung der inneren Funktion ist $15x^2 + 12x + 7$. Sie erhalten somit

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1000\,(5x^3 + 6x^2 + 7x + 8)^{999} \cdot (15x^2 + 12x + 7).}}$$

Üben Sie diese abgekürzte Form in den folgenden Lehrbeispielen!

28. $y = (ax^2 + b)^m + (cx^3 + d)^n$

Lösung:

Die vorliegende Funktion ist eine Summe, die gliedweise abgeleitet wird. Da die Funktion leicht zu übersehen ist und keine schwierigen Ableitungen auftreten, können Sie ohne Zwischenrechnung schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= m(ax^2 + b)^{m-1} \cdot 2ax + n(cx^3 + d)^{n-1} \cdot 3cx^2\\ &= \underline{\underline{2amx(ax^2 + b)^{m-1} + 3cnx^2(cx^3 + d)^{n-1}}}.\end{aligned}$$

29. $y = (a + bx + cx^2)^n$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(a + bx + cx^2)^{n-1} \cdot (b + 2cx)\\ &= \underline{\underline{n(b + 2cx)\,(a + bx + cx^2)^{n-1}}}\end{aligned}$$

30. $y = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{5}\,(1 + \sqrt[3]{x^2})^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{5\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \underline{\underline{\frac{2}{15\sqrt[3]{x}\,\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}}}\end{aligned}$$

Übungen

22. Differenzieren Sie:

a) $y = (3x^3 - 2x)^5 + (5x^4 - x^2 + 3x)^{10}$ *b)* $y = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 4)^3$

c) $y = \frac{x^4}{(x^3 + 2x - 5)^6}$ *d)* $y = \sqrt{a - x}$ *e)* $y = x^2\sqrt{a^2 + x^2}$

f) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ *g)* $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$ *h)* $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ *i)* $y = \sqrt{x^3 + \sqrt{x^3}}$!

23. *Folgende Funktionen sind zu differenzieren:*

a) $g(t) = \cos(a \cdot t - b)$ b) $u(t) = \frac{\sin^4 t}{4} - \frac{\sin^6 t}{6}$

c) $y = \sin x \cdot \sin(x - a)$ d) $y = \frac{a \cdot \sin t}{1 + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$

e) $y = x^2 \sqrt{\cos x}$ f) $y = \sqrt{2x^2 + 3\cos^2 x}$

g) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ h) $y = \tan \sqrt{1 - x^2}$

Ableitung unentwickelter Funktionen

Die Ableitungsregeln, die Sie kennengelernt haben, gelten für differenzierbare Funktionen in der expliziten Form $y = f(x)$. Es gibt aber Funktionen, die explizit nicht darstellbar sind oder wo das Umstellen auf diese Form Schwierigkeiten bereitet. Wir betrachten deshalb im folgenden implizite Funktionen

$$F(x, y) = 0$$

und wollen untersuchen, wie diese ohne Umstellung auf die explizite Form zu differenzieren sind. Als erstes müssen Sie stets feststellen, ob $F(x, y)$ eine Funktion darstellt, d. h., ob y eine Funktion von x ist. Daß dies durchaus nicht selbstverständlich ist, zeigt Ihnen das Beispiel $x^2 + y^2 + 4 = 0$. Es gibt für diesen Ausdruck kein reelles Wertepaar $(x; y)$, das in ihn eingesetzt Null ergibt. $x^2 + y^2 + 4 = 0$ stellt also keine Funktion dar. Es wäre deshalb sinnlos, diesen Ausdruck zu differenzieren. Dagegen liegt bei $y^2 - x = 0$ eine Funktion vor, da jedem positiven Wert x die Werte $y = \pm\sqrt{x}$ zugeordnet sind. Hier ist also $y = f(x)$ sogar angebbar. Auch in $xy^5 - 5y + 1 = 0$ ist y eine Funktion von x, trotzdem sich $y = f(x)$ nicht explizit angeben läßt. Es existieren aber für bestimmte Werte von x zugehörige y-Werte. Zum Beispiel ist für $x = 0$, $y = 0{,}2$ und für $x = 4$ ist $y = 1$.

Gibt es also Wertepaare $(x; y)$, die den Ausdruck $F(x, y) = 0$ erfüllen, dann ist y eine Funktion von x. Mit $y = f(x)$ kann man dann schreiben:

$$F(x, y) = F[x, f(x)] = 0.$$

Dieser Ausdruck kann unter Beachtung der Kettenregel differenziert werden, sofern $y = f(x)$ differenzierbar ist.

1. Beispiel:

$F(x, y) = x - ay = 0, \qquad a = \text{const.}$

Nach x differenziert:

$$1 - ay' = 0$$
$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{a}}}$$

Die Differentiation des Gliedes ay ist besonders zu beachten, da y eine Funktion von x ist und beim Differenzieren y' ergibt.

Probe:
$$x - ay = 0$$
$$y = \frac{x}{a}, \qquad y' = \frac{1}{a}$$

2. Beispiel:

$$F(x, y) = a^2 y^2 - b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

Sie differenzieren:

$$a^2 \cdot 2y \cdot y' - b^2 \cdot 2x = 0,$$
$$y' = \frac{b^2\, 2x}{a^2\, 2y} = \underline{\underline{\frac{b^2 x}{a^2 y}}}.$$

Dabei ist besonders die Differentiation des Gliedes $a^2 y^2$ zu beachten. Das Ergebnis lautet $a^2 \cdot 2y \cdot y'$. Dabei stellt y' die innere Ableitung dar (Anwendung der Kettenregel).

Löst man die Ausgangsgleichung nach y auf und setzt den für y erhaltenen Ausdruck in $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ ein, dann ergibt sich: $y' = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 + x^2}}$. Dieses Ergebnis erhalten Sie auch, wenn Sie die Ausgangsgleichung nach y auflösen und differenzieren.

Lehrbeispiel 31

$y - x \cdot \sin y = 0$

Lösung:
$$y' - (\sin y + x \cdot \cos y \cdot y') = 0$$
$$y'(1 - x \cdot \cos y) = \sin y$$
$$\underline{\underline{y' = \frac{\sin y}{1 - x \cdot \cos y}}}$$

Übungen

24. Differenzieren Sie die folgenden implizit gegebenen Funktionen!

a) $g \cdot t^2 - y \cdot \sin^2 t = 0$ *(wobei $y = f(t)$; $g = const.$)*

b) $\cos(x + y) = x$ *(wobei $y = f(x)$)*

c) $x^3 - 7x^2 z - 5z^3 + 4x^2 - 10xz + 8x - 5z + 18 = 0$ *(wobei $z = f(x)$).*

3.7 Höhere Ableitungen

Ist $y = f(x)$ eine Funktion von x, so ist auch ihre Ableitung $f'(x)$ selbst wieder eine Funktion von x. Man nennt diese Ableitung die **erste Ableitung.** Spricht man von einer Ableitung schlechthin, so ist diese erste Ableitung gemeint. Als Funktion von x ist $f'(x)$ als Kurve darstellbar. Wollen Sie von dieser Kurve $f'(x)$ die Steigung der Tangente bestimmen, so bilden Sie von $f'(x)$ die Ableitung.

Diese neue Ableitung heißt die **zweite Ableitung** der ursprünglichen Funktion $f(x)$. Die erste Ableitung von $f(x)$ schreiben Sie bekanntlich $y' = f'(x)$, und Sie wissen, daß der hochgestellte Strich das Zeichen der Differentiation für diese erste Ableitung ist. Entsprechend schreiben Sie jetzt für die zweite Ableitung $y'' = f''(x)$. Gesprochen wird dies: y zwei Strich (oder y zwei gestrichen) gleich f zwei Strich von x (oder f zwei gestrichen von x). Da auch diese zweite Ableitung wieder als Funktion von x erscheint, können Sie die dritte Ableitung von $f(x)$, $f'''(x)$, bilden. So können Sie immer höhere Ableitungen aufstellen, die schon von der zweiten Ableitung an als **Ableitungen höherer Ordnung** bezeichnet werden. Jedoch schreibt man der Einfachheit halber von der 4. Ordnung an nur die Anzahl der Striche und setzt diese Zahl in eine Klammer, um Verwechslungen mit Potenzen zu vermeiden. Die Stammfunktion und ihre Ableitungen schreibt man also der Reihe nach:

$$f(x);\ f'(x);\ f''(x);\ f'''(x);\ f^{(4)}(x);\ f^{(5)}(x);\ \ldots;\ f^{(n)}(x)$$

oder auch

$$y;\ y';\ y'';\ y''';\ y^{(4)};\ y^{(5)};\ \ldots;\ y^{(n)}.$$

Die jeweils an letzter Stelle stehenden Ableitungen lesen Sie $f\,n$ Strich von x bzw. $y\,n$ Strich; $f^{(n)}(x)$ bzw. $y^{(n)}$ heißt die n-te Ableitung oder auch der n-te Differentialquotient der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$.

Die Leibnizsche Schreibweise der ersten Ableitung ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Im Zähler steht hierbei hinter dem d die Funktion, die abgeleitet werden soll. Da $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ist, lautet die zweite Ableitung

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Diese unbequeme Schreibweise wird bei noch höheren Ableitungen immer komplizierter und wird darum vereinfacht geschrieben. Für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ schreibt man $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. Gesprochen wird dies: d zwei y nach dx Quadrat.

Entsprechend schreiben Sie die dritte Ableitung: $y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$. Ganz allgemein können Sie die n-te Ableitung aufstellen als $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, gesprochen: d$n y$ nach dx hoch n.

Jetzt sollen noch einige wichtige Betrachtungen über höhere Ableitungen bestimmter Funktionen angestellt werden.

Es seien die erste Ableitung und *die höheren Ableitungen der Potenzfunktion* $y = x^n$ für ganzzahlige, positive n zu bilden.

a) $n = 1$: $y = x$; $y' = \frac{dy}{dx} = 1$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Alle folgenden Ableitungen sind gleichfalls Null.

b) $n = 2$: $y = x^2$; $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (2x)' = 2$; $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 0$

Wiederum werden alle folgenden Ableitungen Null.

c) $n = 3$: $y = x^3$; $y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot 3x = 6x$; $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 6$

Alle folgenden Ableitungen werden wieder Null.

d) $n = n$: $y = x^n$; $y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$;

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$;

$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

Das Bildungsgesetz ist deutlich erkennbar: In der Potenz steht im Exponenten das um die Ableitungszahl verminderte n, davor stehen — mit n beginnend — so viele, stets um 1 sich mindernde Faktoren, wie die Ableitungszahl angibt. Sie erhalten daher:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{d^ny}{dx^n} \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-3])(n-[n-2])(n-[n-1]) \cdot x^{n-n} \\ &= n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0. \end{aligned}$$

Für $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ schreibt man $n!$ (lies: n Fakultät). Da $x^0 = 1$ ist, wird

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n = \underline{\underline{n!}}.$$

Die n-te Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ ist $n!$, falls n eine ganze positive Zahl ist.

Die $(n+1)$-te und alle folgenden Ableitungen sind in diesem Falle gleich Null. Ist n keine ganze Zahl, so können Sie nie den Faktor Null erhalten; es kann daher auch keine Ableitung konstant oder Null werden.

Die n-te Ableitung der ganzen rationalen Funktion

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist zu bilden.

Es wird: $y' = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + a_{n-2}(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_1$

$$y'' = a_n n(n-1)x^{n-2} + a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_{n-2}(n-2)(n-3)x^{n-4} + \cdots + 2a_2$$

$$y''' = a_n n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_{n-1}(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + a_{n-2}(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} + \cdots + 6a_3$$

Das Bildungsgesetz ist auch hier leicht erkennbar, und Sie sehen, daß die n-te Ableitung sich ergibt als:

$$y^{(n)} = a_n n (n-1)(n-2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 = \underline{\underline{a_n \cdot n!}}.$$

Die n-te Ableitung der ganzen rationalen Funktion n-ten Grades ist $a_n \cdot n!$, wobei a_n der Koeffizient der höchsten Potenz von x ist.

Alle folgenden Ableitungen sind Null.

Die n-ten Ableitungen von $y = \sin x$ *und von* $y = \cos x$ sind zu bilden.

a) $y = \sin x$; $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; $y^{(4)} = \sin x$

Die 4. Ableitung stimmt mit der Ausgangsfunktion überein. Die Ableitungen müssen sich nun periodisch wiederholen. Sie können die Ableitungen der Funktion $y = \sin x$ auch so zusammenstellen:

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y^{(5)} = \cos x = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \qquad y^{(6)} = -\sin x = \sin\left(x + \frac{6\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{usw.}$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$$

Allgemein gilt: $\underline{\underline{y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}}$.

b) $y = \cos x$; $y' = -\sin x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \sin x$; $y^{(4)} = \cos x$

Wie bei $y = \sin x$ erkennen Sie auch hier die periodische Wiederholung, und Sie können schreiben:

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y^{(4)} = \cos x = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \qquad y^{(5)} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad y^{(6)} = -\cos x = \cos\left(x + \frac{6\pi}{2}\right)$$

Allgemein gilt: $\underline{\underline{y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}}$. usw.

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktion $y = \sin x$ und $y = \cos x$ kehren periodisch wieder.

Allgemein erhält man:

$$\frac{d^n \sin x}{d x^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \qquad \frac{d^n \cos x}{d x^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Lehrbeispiel 32

$y = (x + a)(x + b)(x + c)$. *Alle Ableitungen sind zu bestimmen!*

Lösung:

Sie multiplizieren aus und erhalten:

$$\begin{aligned}
y &= (x^2 + ax + bx + ab)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) \\
&\qquad + x(ab + bc + ac) + abc, \\
y' &= 3x^2 + 2x(a + b + c) + ab + bc + ac, \\
y'' &= 6x + 2(a + b + c), \\
y''' &= 6, \\
y^{(4)} &= y^{(5)} = \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Da die gegebene Funktion eine ganze rationale Funktion 3. Grades ist, mußte die 3. Ableitung konstant sein, und alle weiteren Ableitungen mußten verschwinden.

Übungen

25. *Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von:*

a) $y = x^3 + \frac{1}{x}$, *b)* $y = \sin^2 t$, *c)* $y = \frac{a - x}{a + x}$,

d) $z(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$, *e)* $y = (x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$!

26. *Bilden Sie die n-te Ableitung von:*

a) $g(t) = \sin 2t$, *b)* $y = \frac{1}{x^2}$, *c)* $z(t) = \frac{t}{1 + t}$!

3.8 Physikalische und technische Anwendungen der Differentialrechnung

Die Bedeutung der Differentialrechnung kam in den bisher behandelten Kapiteln nur darin zum Ausdruck, daß man den Anstieg einer Kurve bestimmen kann. Eine physikalisch-technische Bedeutung war nicht erkennbar. Im folgenden soll deshalb an Hand einiger Beispiele einiges über die Differentiale und den Differentialquotienten in Physik und Technik gesagt werden.

a) Für die gleichförmige Bewegung haben Sie in der Physik (vgl. Physik, Lehrbrief 1) die Beziehung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

kennengelernt. Bei ungleichförmiger Bewegung dagegen (z. B. beim Fallen eines Körpers) läßt sich in obiger Form nur die sogenannte „mittlere Geschwindigkeit" v_m angeben, da sich in diesem Fall die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert, d. h., der Körper hat zur Zeit t_1 eine andere Geschwindigkeit als zur Zeit t_2 (vgl. Bild 31). Je kleiner das Zeitintervall $t_2 - t_1 = \Delta t$ ist, um so weniger unterscheiden sich die Geschwindigkeiten zu den beiden Zeitpunkten, um so kürzer ist aber auch die Meßstrecke $s_2 - s_1 = \Delta s$. Um die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t_1 zu erhalten, muß t_2 möglichst nahe bei t_1 liegen. Mit $t_2 \rightarrow t_1$ geht aber $t_2 - t_1 = \Delta t \rightarrow 0$. Sie erhalten also die Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit für $\Delta t \rightarrow 0$:

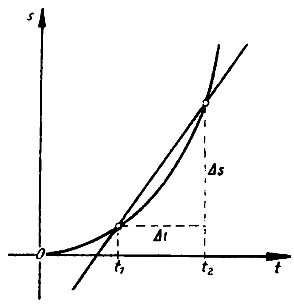

Bild 31

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Das ist aber der Differentialquotient des Weges $s = s(t)$ nach der Zeit. Es ist also

$$\underline{\underline{v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t)}}\,^{1}.$$

$s = s(t)$ sagt aus, daß der Weg s eine Funktion der Zeit t ist, d. h., s ist von der Zeit t abhängig.

Differenziert man den Weg nach der Zeit, so erhält man die Geschwindigkeit. Ähnliche Überlegungen kann man für den Begriff der Beschleunigung anstellen.

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitszunahme}}{\text{zugehöriges Zeitintervall}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt der Bewegung ist

$$b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Für die Geschwindigkeit ergab sich $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$; die Beschleunigung stellt folglich die 2. Ableitung des Weges nach der Zeit dar:

$$\underline{\underline{b = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}(t)}}.$$

b) Unter der Stromstärke I versteht man die in der Zeiteinheit t durch den Querschnitt des Leiters fließende Elektrizitätsmenge Q:

$$I = \frac{Q}{t}.$$

[1] Die Ableitungen nach der Zeit werden nach Newton auch häufig mit Punkten angegeben $s'(t) = \dot{s}(t)$; $s''(t) = \ddot{s}(t)$.

In einem bestimmten Zeitintervall Δt fließt folglich eine bestimmte Elektrizitätsmenge ΔQ, so daß Sie für die mittlere Stromstärke I_m schreiben können:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Die Stromstärke zu einem bestimmten Zeitpunkt erhalten Sie, wenn Sie den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durchführen:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Formel ist, daß Q als Funktion von t gegeben ist:

$$Q = Q(t).$$

c) Für die spezifische Wärme gilt die Beziehung:

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad \begin{array}{l}(\Delta Q = \text{zugeführte Wärmemenge in kcal;} \\ \Delta T = \text{entsprechende Temperaturerhöhung).}\end{array}$$

Aus der Wärmelehre ist Ihnen bekannt, daß die spezifische Wärme nicht für alle Temperaturbereiche konstant ist. Für gleiche Temperaturerhöhungen ΔT in verschiedenen Temperaturbereichen ist nicht die gleiche Wärmemenge ΔQ erforderlich. Eine exakte Definition für die spezifische Wärme bei einer bestimmten Temperatur erhält man, wenn ΔT gegen 0 geht:

$$c = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

Es ist wiederum zu beachten, daß Q eine Funktion von T sein muß.

In manchen Fällen ist der funktionale Zusammenhang der beiden variablen Größen nicht analytisch (durch eine Formel), sondern nur graphisch gegeben. Dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn man den Zusammenhang zwischen den veränderlichen Größen durch Experimente gefunden hat (empirische[1] Ermittlung).

Auch dann kann man mit Hilfe des Differentialquotienten zum Erfolg gelangen, indem man die empirisch ermittelte Kurve graphisch differenziert. Die graphische Differentiation lernen Sie im nächsten Abschnitt kennen.

d) Das durchschnittliche Gefälle einer Straße ist abhängig von der Strecke Δs und dem zugehörigen Höhenunterschied Δh und wird mit $\frac{\Delta h}{\Delta s}$ angegeben. Da eine Straße aber im allgemeinen nicht gleichmäßig abfällt, ist das Gefälle an einer bestimmten Stelle meistens vom Durchschnittsgefälle verschieden. Um das Gefälle an einer bestimmten Stelle zu erhalten, muß wieder der Grenzübergang ($\Delta s \to 0$) durchgeführt werden:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}.$$

[1] empirisch: erfahrungsgemäß, auf Tatsachen oder Versuchen aufbauend.

Weitere und bedeutendere Anwendungsmöglichkeiten der Differentialrechnung lernen Sie in den späteren Kapiteln kennen.

Lehrbeispiel 33

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt die Beziehung:

$$s = \frac{g}{2} t^2.$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit zur Zeit t!

Lösung:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{2} \cdot 2t = \underline{\underline{g \cdot t}}$$

Lehrbeispiel 34

In Bild 32 ist ein Schubkurbelgetriebe dargestellt. Der Kurbelzapfen P_1 bewegt sich bei diesem Getriebe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis vom Radius r. Der Kreuzkopf der Schubstange (Pleuelstange) P_2 gleitet auf der Strecke MP hin und her.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Kreuzkopf P_2 zum Zeitpunkt t?

b) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Pleuelstange um den Kreuzkopf P_2?

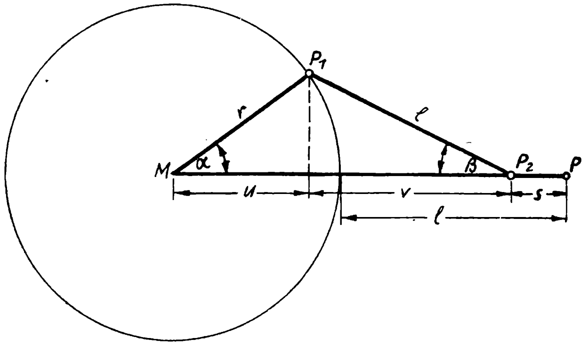

Bild 32

Lösung:

a) Zum Zeitpunkt t hat die Kurbelstange den Winkel $\alpha = \omega \cdot t$ überstrichen, die Schubstange den Winkel β. Aus Bild 32 folgt:

$$s = r + l - (u + v)$$

oder, wegen $u = r \cos \alpha$, $v = l \cos \beta$

$$s = r + l - (r \cos \alpha + l \cos \beta).$$

Nach dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned} r \sin \alpha &= l \sin \beta \\ &= l\sqrt{1-\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

Sie erhalten $\qquad l \cos\beta = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\alpha}.$

Für s ergibt sich damit

$$s = r + l - r\cos\alpha - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}$$

oder, wegen $\qquad \alpha = \omega \cdot t$

$$s = r + l - r\cos\omega t - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}.$$

Für die Geschwindigkeit erhalten Sie somit

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\omega\sin\omega t + \frac{2r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}} = r\omega\left(\sin\omega t + \frac{r\sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}}\right).$$

Setzen Sie $\frac{r}{l} = \lambda$ (Schubstangenverhältnis), dann folgt

$$\underline{\underline{v = r\omega\left(\sin\omega t + \frac{\lambda\sin 2\omega t}{2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}\right)}}.$$

b) Ist ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Pleuelstange, so gilt $\beta = \omega_1 t$ und damit

$$l\sin\omega_1 t = r\sin\omega t.$$

Durch Differentiation nach t erhalten Sie

$$l\omega_1\cos\omega_1 t = r\omega\cos\omega t,$$

$$\omega_1 = \frac{r\omega\cos\omega t}{l\cos\omega_1 t}.$$

Mit $l\cos\omega_1 t = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}} \\ &= \underline{\underline{\frac{\lambda\omega\cos\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}}}. \end{aligned}$$

Übungen

27. *In einem Stromkreis befindet sich eine Spule mit der Selbstinduktion L, wodurch eine elektromotorische Gegenkraft* $L\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ *induziert wird. Bilden Sie* $L\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$, *wenn für den Wechselstrom die Beziehung*

$$I = I_0 \cdot \sin\omega t$$

gilt! Dabei bedeuten:

$$I_0 = \textit{maximale Stromstärke},\ \omega = \textit{Kreisfrequenz}.$$

28. *Bestimmen Sie die Beschleunigung des Kreuzkopfes des Schubkurbelgetriebes aus Lehrbeispiel 34.*
Wie hängt die Beschleunigung des Kreuzkopfes von der Winkelgeschwindigkeit ω *ab?*

3.9 Graphische Differentiation

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie alle elementaren Funktionen auf rechnerischem Wege abgeleitet. Sie haben dabei festgestellt, daß die Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen wieder eine Funktion der gleichen Veränderlichen ist. Das gleiche gilt für die höheren Ableitungen, wie Sie aus 3.7 erkannten. Alle diese abgeleiteten Funktionen können wiederum als Kurven dargestellt werden. Diese heißen dann *abgeleitete Kurven.* Wie ist es aber, wenn die abzuleitende Funktion nicht analytisch, sondern in anderer Form gegeben ist? In der Praxis kommt es z. B. häufig vor, daß der Zusammenhang zweier veränderlicher Größen nur als Wertetabelle vorliegt (z. B. Meßergebnisse einer Versuchsreihe) oder durch eine mechanische Schreibeinrichtung als Kurve gezeichnet wurde. In diesen Fällen können Sie die Ableitung der vorgelegten Funktion durch **graphische Differentiation** erhalten. Voraussetzung für die graphische Differentiation ist das Vorhandensein einer Funktionskurve, von der keine analytische Darstellung vorzuliegen braucht. Haben Sie nur eine Wertetabelle, so müssen Sie hieraus erst die Kurve zeichnen. Von dieser kann nun die abgeleitete Kurve konstruiert werden, aus der Sie dann für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen den Wert des Differentialquotienten ablesen, sofern für diesen Wert der unabhängigen Veränderlichen die Ausgangskurve existiert.

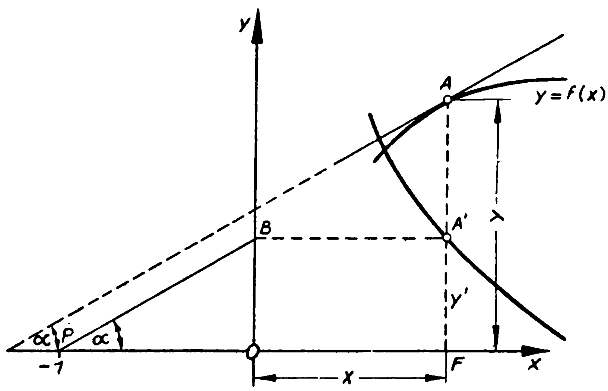

Bild 33

Eine Funktion $y = f(x)$ sei Ihnen durch ihre Bildkurve gegeben (vgl. Bild 33), ohne daß die analytische Darstellung vorliegt. Dann verfahren Sie folgendermaßen: Sie legen den Punkt P $(-1; 0)$ als sogenannten Pol fest. Dann legen Sie im Punkt A $(x; y)$, in dem Sie die Funktion $y = f(x)$ ableiten wollen, die Tangente an die Kurve. Zu dieser Tangente ziehen Sie die Parallele durch den Pol, den sogenannten Polstrahl. Der Polstrahl schneidet die y-Achse in B. Die Parallele zur x-Achse durch B und die Ordinate von A schneiden sich in A'. Die Ordinate von A' stellt die gesuchte Ableitung y' dar.

Der Beweis lautet:

$$\overline{A'F} = \overline{BO} = \overline{PO} \cdot \tan\alpha = 1 \cdot \tan\alpha = \tan\alpha.$$

Da $\tan\alpha$ der Richtungsfaktor der in A an die Kurve gelegten Tangente ist und damit der Wert des Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$ für den zugehörigen x-Wert, so ist

$$y' = \tan\alpha = \overline{A'F}.$$

Auf diese Weise können Sie Punkt für Punkt die durch die Kurve $y = f(x)$ dargestellte Funktion ableiten.

Lehrbeispiel 35

Die als Kurve in Bild 34 dargestellte Funktion $y = f(x)$ ist graphisch abzuleiten.

Lösung:

Sie kennzeichnen den Pol P (—1; 0). Dann wählen Sie die Punkte aus, in denen Sie die Ableitung bilden wollen. Ist wie im vorliegenden Falle die Ableitung der

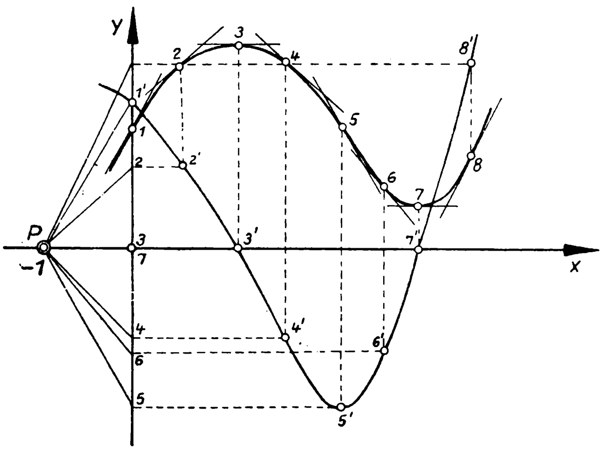

Bild 34

gesamten Kurve verlangt, dann wählt man vor allem besonders markante und wichtige Punkte aus. Diese sind z. B.:

Punkt 3 und 7. — In diesen Punkten verläuft die Tangente parallel zur x-Achse. Sie stellen in bezug auf ihre Umgebung die höchsten und tiefsten Punkte dar. Man bezeichnet derartige Punkte als Extremwerte.

Punkt 5. — In diesem Punkt besitzt das Kurvenstück in bezug auf die Umgebung des Punktes den größten Anstieg. Hier ändert sich die Richtung der Krümmung der Kurve.

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. — Hier vereinfacht sich die Konstruktion der abgeleiteten Kurve.

Sie haben also die in Bild 34 gekennzeichneten Punkte 1, 2, ..., 8 ausgewählt. In diesen Punkten ziehen Sie die Tangenten an die gegebene Funktion und zu diesen die Parallelen durch P. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der y-Achse bezeichnen Sie ebenfalls mit 1, 2, ..., 8. (Ein Zeichnen der Tangenten ist bei sauberer Arbeit mit zwei Zeichendreiecken nicht nötig, da Sie sofort die Parallelverschiebung durchführen können.) Die Parallelen zur x-Achse durch 1, 2, ..., 8 schneiden die Ordinaten der ausgewählten Punkte in den Punkten 1′, 2′, ..., 8′. Durch sauberes Verbinden dieser Punkte erhalten Sie das Bild der gesuchten Funktion $y' = f'(x)$.

Noch ein Hinweis: Die Genauigkeit des Verfahrens hängt nicht davon ab, daß man möglichst viele Tangenten verwendet, sondern davon, daß die Tangenten, Polstrahlen usw. sorgfältig konstruiert werden.

Übung

29. Zeichnen Sie die Funktion $y = \sin^2 x$ *und differenzieren Sie die Funktion graphisch!*

4 Die Untersuchung von Funktionen

4.1 Die geometrische Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung

Um den Kurvenverlauf einer Funktion kennenzulernen, mußten Sie bisher eine Wertetabelle aufstellen und die Kurve punktweise konstruieren. Die Ableitung einer Funktion gibt nun die Möglichkeit, die Untersuchung von Funktionen wesentlich zu vereinfachen. An Hand eines Beispiels soll die geometrische Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung erklärt werden.

Betrachten Sie den Verlauf der Kurve

$$y = f(x) = 0{,}1(x^3 - 12x^2 + 36x + 10)$$

in Bild 35a, so können Sie zunächst aussagen, daß diese mit wachsenden x-Werten bis zu einem gewissen Höchstpunkt $E_1\,(2;\,4{,}2)$ *steigt*, dann bis zu einem gewissen Tiefstpunkt $E_2\,(6;\,1)$ *fällt* und schließlich wieder steigt.

In Kapitel 3.12 hatten Sie den Anstieg der Tangente einer Kurve in einem Kurvenpunkt P als Ableitung $f'(x)$ der Funktion kennengelernt: $\tan\alpha = f'(x)$. Steigt die Kurve, dann liegt der Anstiegswinkel α der Tangente zwischen 0° und 90°, und es gilt $\tan\alpha = f'(x) > 0$. Da im vorliegenden Beispiel die Kurve $y = f(x)$ in den Bereichen $-\infty < x < x_{E_1}$ und $x_{E_2} < x < \infty$ steigt, ist dort $f'(x)$ positiv (vgl. Bild 35a, b).

Ähnliche Betrachtungen lassen sich für das Fallen einer Kurve anstellen. In unserem Beispiel fällt die Kurve im Bereich $x_{E_1} < x < x_{E_2}$. Der Anstiegswinkel α liegt also zwischen 90° und 180°, d. h., $\tan\alpha = f'(x)$ ist negativ (vgl. Bild 35a, b).

Das Vorzeichen der ersten Ableitung einer Funktion ist somit ein Kriterium

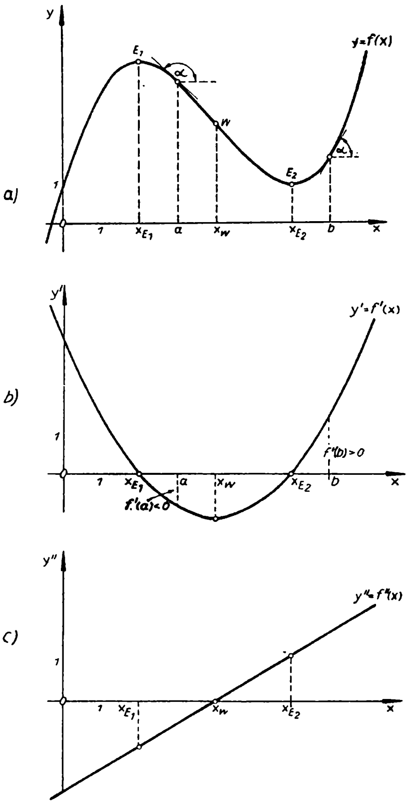

Bild 35

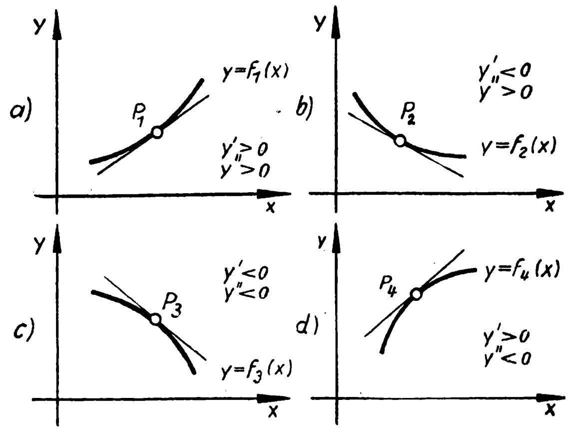

Bild 36

für das Steigen oder Fallen einer Kurve:

> Die Kurve einer Funktion $y = f(x)$ steigt, wenn $y' = f'(x) > 0$ ist,
> die Kurve einer Funktion $y = f(x)$ fällt, wenn $y' = f'(x) < 0$ ist.

Jetzt sollen für die Kurve der 1. Ableitung die gleichen Betrachtungen angestellt werden wie für die Kurve der Funktion $y = f(x)$. Die erste Ableitung von $y' = f'(x)$ heißt $(y')' = y'' = f''(x)$. Dort, wo die Kurve der Funktion $y' = f'(x)$ fällt, muß $y'' = f''(x)$ negativ sein, dort, wo $y' = f'(x)$ steigt, muß $y'' = f''(x)$ positive Werte annehmen. Vergleichen Sie diese Überlegung am Kurvenverlauf von $y'' = f''(x) = 0{,}1\,(6\,x - 24)$ in unserem Beispiel (Bild 35b, c)!

Können nun aus der 2. Ableitung $y'' = f''(x)$ auch Rückschlüsse auf den Verlauf der Ausgangsfunktion $y = f(x)$ gezogen werden? Um diese Frage zu beantworten, muß noch eine Betrachtung vorausgeschickt werden.

Es wurde bisher nur der Anstieg der Kurve $y = f(x)$ untersucht. Für den Kurvenverlauf ist aber neben dem Anstieg der Kurve die Art ihrer *Krümmung* maßgebend. In Bild 36 sind Kurvenstücke gezeichnet, die sich in Anstieg und Krümmung unterscheiden.

In Bild 36a und b liegt das Kurvenstück oberhalb der Tangente, in Bild 36c und d unterhalb der Tangente.

Verläuft die Kurve oberhalb der Tangente, so sagt man, die Kurve ist *von unten* gesehen *konvex* (erhaben). Verläuft die Kurve unterhalb der Tangente, so heißt sie *von unten konkav* (hohl).

Betrachten Sie jetzt die Bilder 35a, b und c des Ausgangsbeispiels. In Bild 35a ist die Funktion $y = f(x)$, in Bild 35b ihre erste Ableitung $y' = f'(x)$, in Bild 35c ihre zweite Ableitung $y'' = f''(x)$ dargestellt. Im Intervall $0 \leqq x < x_W$ ist die Kurve $y = f(x)$ von unten konkav, die zweite Ableitung ist in diesem Intervall negativ. Im Intervall $x_W < x \leqq b$ ist die Kurve $y = f(x)$ von unten konvex, die zweite Ableitung ist in diesem Intervall positiv.

Dieses Ergebnis gilt allgemein:

Ist eine Kurve von unten konkav, so gilt $y'' < 0$.
Ist eine Kurve von unten konvex, so gilt $y'' > 0$.

Sie sehen, daß die zweite Ableitung Aufschluß über die Krümmungsart einer Kurve gibt.
Die Punkte E_1, E_2 und W wurden in unsere Betrachtungen bisher noch nicht mit einbezogen, dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

Zusammenfassung

Für die Funktion $y = f(x)$ gilt:

Ist $y' > 0$, so steigt die Kurve,
ist $y' < 0$, so fällt die Kurve,
ist $y'' < 0$, so ist die Kurve von unten konkav,
ist $y'' > 0$, so ist die Kurve von unten konvex.

4.2 Extremwerte und Wendepunkte

Betrachten Sie den Punkt E_1 in Bild 35a. Der zugehörige Funktionswert $f(x_{E_1})$ ist *größer* als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_{E_1}. Für ein bestimmtes Intervall besitzt somit die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_{E_1} einen *Höchstwert*, man sagt, die Funktion hat an dieser Stelle ein **Maximum.** Der Funktionswert $f(x_{E_2})$ ist *kleiner* als alle in der unmittelbaren Umgebung auftretenden Funktionswerte der Funktion $y = f(x)$. Man sagt, es liegt ein *Tiefstwert* der Funktion vor, und bezeichnet diesen Tiefstwert als **Minimum.**

Es ist dabei zu beachten, daß die Extremwerte nur in einem bestimmten Bereich Höchst- oder Tiefstwerte darstellen. In Bild 37 ist der Funktionswert an der Stelle x_2 beispielsweise kleiner als der Funktionswert an der Stelle x_4, obwohl sich an der Stelle x_2 ein Minimum befin-

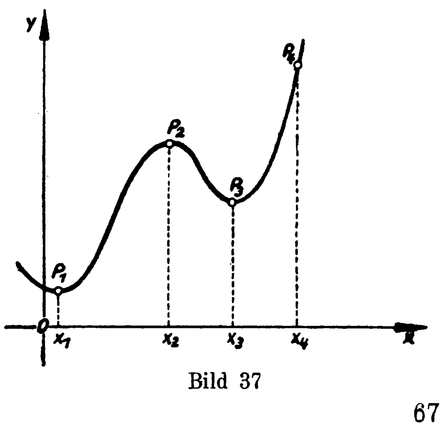

Bild 37

det. An den Stellen x_1 und x_3 befinden sich Tiefstwerte und an der Stelle x_2 ein Höchstwert der Funktion $y = f(x)$.

Extremwerte stellen nicht die *absolut* größten bzw. kleinsten Funktionswerte dar, sondern sind die größten bzw. kleinsten Werte einer Funktion *bezüglich ihrer unmittelbaren Umgebung*. Man nennt sie deshalb genauer *relative* Extremwerte.

Auf welche Weise kann nun ein Maximum oder ein Minimum bestimmt werden?

Betrachten Sie wiederum Bild 35a, b, c!

Den Extremwerten E_1 und E_2 ist gemeinsam, daß dort die Kurventangente waagerecht liegt. Es gilt also sowohl für E_1 als für E_2

$$f'(x_E) = 0.$$

Im *Maximum* ist die Kurve von unten konkav, also

$$f''(x_{\max}) < 0$$

Im *Minimum* ist die Kurve von unten konvex, also

$$f''(x_{\min}) > 0.$$

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = x_E$ ein Extremum, wenn $f'(x_E) = 0$ und $y'' \neq 0$ ist. Es liegt

ein Maximum vor, wenn $f''(x_E) < 0$ ist,
ein Minimum vor, wenn $f''(x_E) > 0$ ist.

Beachten Sie, daß $y' = 0$ nur bedeutet, daß dort die Tangente der Kurve waagerecht verläuft. Erst $y'' \neq 0$ gibt die Gewißheit, daß tatsächlich ein Extremum vorliegt. Vergleichen Sie dazu Lehrbeispiel 39!

Lehrbeispiel 36

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $y = \frac{1}{3}x^3 - x$!

Lösung:

Sie bilden die erste und die zweite Ableitung:

$$y' = x^2 - 1,$$
$$y'' = 2x.$$

Extremwerte liegen vor, wenn $y' = 0$ ist:

$$0 = x^2 - 1, \qquad x_{1/2} = \pm 1.$$

Um festzustellen, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum handelt, setzen Sie x_1 und x_2 in die zweite Ableitung ein:

$$f''(x_1) = 2 \cdot (+1) = 2 > 0,$$
$$f''(x_2) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0.$$

An der Stelle $x_1 = +1$ liegt ein Minimum, an der Stelle $x_2 = -1$ ein Maximum vor.

Die Funktionswerte der Extremwerte erhalten Sie, wenn Sie x_1 und x_2 in die Ausgangsfunktion $y = f(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$ einsetzen. Es ergibt sich so:

$$\underline{\underline{x_{\max} = -1}}, \qquad \underline{\underline{y_{\max} = \frac{2}{3}}},$$

$$\underline{\underline{x_{\min} = 1}}, \qquad \underline{\underline{y_{\min} = -\frac{2}{3}}}.$$

In Bild 38 ist die Funktion $y = \frac{1}{3} x^3 - x$ graphisch dargestellt.

Lehrbeispiel 37

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $y = \cos x + \sin x$*!*

Lösung:

Sie bestimmen zunächst wieder die Ableitungen der Funktion $y = \cos x + \sin x$.

$$y' = -\sin x + \cos x$$
$$y'' = -\cos x - \sin x$$

Aus $y' = 0$, also

$$\cos x - \sin x = 0$$

folgt

$$\tan x = 1.$$

Dies liefert $x = \frac{\pi}{4}$, und da die Periode der Tangensfunktion π ist, finden Sie

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi = \frac{4n + 1}{4} \cdot \pi .$$

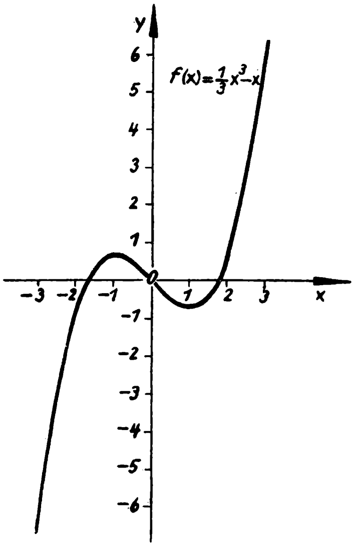

Bild 38

An diesen Stellen können also Extremwerte auftreten!

Sie setzen die Werte $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5\pi}{4}$ in die 2. Ableitung ein und erhalten

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0.$$

Es liegt ein Maximum vor: $\underline{\underline{x_{\max} = \frac{\pi}{4}}}$.

$$f''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 0.$$

Es liegt ein Minimum vor: $\underline{\underline{x_{\min} = \frac{5}{4}\pi}}$.

Da nun die Periode der Sinus- wie auch der Kosinusfunktion 2π beträgt, liefern offenbar die Werte $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{8n + 1}{4}\pi$ Maxima, die Werte $x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi = \frac{8n + 5}{4}\pi$ Minima.

Die Ordinaten der Maxima sind gleich, ebenso die der Minima. Und zwar ist

$$y_{\max} = f\left(\frac{8n+1}{4}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}},$$

$$y_{\min} = f\left(\frac{8n+5}{4}\pi\right) = f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}.$$

Nun ist noch der Punkt W in Bild 35a besonders zu betrachten. An dieser Stelle wechselt die Kurve $y = f(x)$ die Krümmungsart. Man nennt deshalb diesen Punkt *Wendepunkt*. Betrachten Sie die Kurve in der Umgebung der Stelle x_W! Von x_{E_1} bis x_{E_2} fällt die Kurve, d. h., der Anstieg ist negativ. Sie erkennen dies auch an $y' = f'(x)$ in Bild 35b. An der Stelle x_W liegt dabei der kleinste Anstieg vor, die Funktion $y' = f'(x)$ hat demnach an dieser Stelle einen Tiefstwert. Da $y' = f'(x)$ an der Stelle x_W einen Extremwert (Minimum) besitzt, muß $(y')' = y''$ an dieser Stelle gleich Null sein. Es ist also $f''(x_W) = 0$. $y'' = f''(x)$ geht dabei in der Umgebung des Wendepunktes von $y'' < 0$ in $y'' > 0$ über. Für y'' findet beim Durchgang durch den Wendepunkt ein Vorzeichenwechsel statt. Der Anstieg von $y'' = f''(x)$ ist also $\neq 0$ und damit $(y'')' = y''' \neq 0$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes lautet:

Ein Wendepunkt für x_W ist vorhanden, wenn $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ ist.

Beachten Sie, daß $f''(x_1) = 0$ nur bedeutet, daß $y' = f'(x_1)$ an der Stelle $x = x_1$ eine waagerechte Tangente hat. Erst $f'''(x_1) \neq 0$ besagt, daß $f'(x_1)$ Extremum ist und damit bei $x = x_1$ ein Wendepunkt vorliegt.

Lehrbeispiel 38.

An welchen Stellen besitzt die Funktion $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ Wendepunkte?

Lösung: $\quad y' = x^2 - 1; \quad y'' = 2x; \quad y''' = 2.$

Wendepunkte liegen vor, wenn $y'' = 0$ und $y''' \neq 0$ ist:

$$y'' = 0 \text{ ergibt } 0 = 2x, \quad x_1 = 0.$$

Da die dritte Ableitung verschieden von Null ist, liegt an der Stelle $x_W = 0$ ein Wendepunkt vor. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie x_W in die Ausgangsgleichung einsetzen.

Koordinaten des Wendepunktes: $\underline{\underline{x_W = 0}}$; $\underline{\underline{y_W = 0}}$. Vergleichen Sie Bild 38!

Lehrbeispiel 39

Ermitteln Sie die Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $y = f(x) = x^3$!

Lösung:

Zunächst bilden Sie die ersten drei Ableitungen:

$$y' = 3x^2; \quad y'' = 6x; \quad y''' = 6.$$

Extremwerte erhalten Sie, wenn $y' = 0$ und $y'' > 0$ bzw. $y'' < 0$ ist. $y' = 0$ ergibt

$$3x^2 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Diesen Wert setzen Sie in die zweite Ableitung ein:

$$y''(0) = 0.$$

Die zweite Ableitung ist für den Wert $x_1 = 0$ *nicht* verschieden von Null. Es kann noch nicht entschieden werden, ob ein Extremwert vorliegt, da $y'' = 0$ die Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist. Da die dritte Ableitung verschieden von Null ist, liegt an der Stelle $x = 0$ ein Wendepunkt vor. Vergleichen Sie Bild 39!

Koordinaten des Wendepunktes:

$$\underline{\underline{x_W = 0}}; \qquad \underline{\underline{y_W = 0}}.$$

Da an der Stelle x_W auch die erste Ableitung gleich Null ist, muß die Tangente im Wendepunkt (Wendetangente) parallel zur x-Achse verlaufen. Es liegt ein *Wendepunkt mit waagerechter Tangente* vor. Die Wendetangente fällt in diesem Fall mit der x-Achse zusammen. Die Funktion $y = x^3$ besitzt keine Extremwerte.

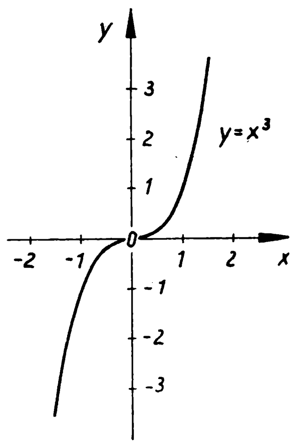

Bild 39

Bisher sind wir stets bei unseren Untersuchungen über Extremwerte und Wendepunkte einer Funktion mit den drei ersten Ableitungen ausgekommen. Dies braucht aber nicht immer so zu sein. Wir wollen deshalb noch eine wichtige allgemeine Bemerkung anschließen (ohne hier den Beweis für die Richtigkeit zu führen):

Um die Maxima und Minima einer Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen, setzt man $f'(x) = 0$. Ein sich daraus ergebender Wert $x = a$ gehört dann zu einem Extremwert, wenn der erste für $x = a$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar liegt an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum vor, je nachdem, ob $f^{(2n)}(a) < 0$ oder $f^{(2n)}(a) > 0$ ist. Ein Wendepunkt liegt dann vor, wenn für $x = a$ die erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist, und zwar liegt ein einfacher Wendepunkt vor, falls $f'''(a) \neq 0$ ist, anderenfalls liegt ein Wendepunkt höherer Ordnung — ein sogenannter Wendeflachpunkt — vor.

In übersichtlicher Form sind die einzelnen Kriterien für das Vorliegen von Extremwerten und Wendepunkten nachfolgend zusammengestellt.

$$f'(a) = 0 \begin{cases} f''(a) < 0 \text{ Maximum} \\ f''(a) > 0 \text{ Minimum} \\ f''(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) \neq 0 \text{ Wendepunkt mit waagerechter Tangente} \\ f'''(a) = 0 \\ \text{Flachpunkt} \end{cases} \begin{cases} f^{(2n)}(a) < 0 \text{ Maximum höherer Ordnung} \\ f^{(2n)}(a) > 0 \text{ Minimum höherer Ordnung} \\ f^{(2n+1)}(a) \lessgtr 0 \text{ Wendepunkt höherer Ordnung} \end{cases} \end{cases}$$

$f'(a) \neq 0$, $f''(a) = 0$, $f''' \neq 0$ einfacher Wendepunkt

Lehrbeispiel 40

Untersuchen Sie die Funktion $y = (x - a)^4 + b$ auf das Vorhandensein von Extremwerten und Wendepunkten!

Lösung:

Sie bilden zunächst die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-a)^3, \\ y'' &= 12(x-a)^2, \\ y''' &= 24(x-a), \\ y^{(4)} &= 24. \end{aligned}$$

Aus $y' = 4(x - a)^3$ folgt $x = a$ als dreifache Nullstelle. Die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung ist von vierter (also gerader) Ordnung und stets positiv. Also liegt für $x = a$ ein Minimum vor.

Aus $y = (a - a)^4 + b$ ergibt sich $y = b$. Das Minimum liegt daher an der Stelle $P(a, b)$. Ein Wendepunkt existiert nicht, da zwar $y'' = 12(x - a)^2 = 0$ als Lösung $x = a$ ergibt, für diese Stelle aber wegen $y^{(4)} > 0$ das Minimum festgestellt wurde.

Lehrbeispiel 41

Bestimmen Sie die Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $y = (x - a)^5 + b$!

Lösung:

Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} y' &= 5(x-a)^4, \\ y'' &= 20(x-a)^3, \\ y''' &= 60(x-a)^2, \\ y^{(4)} &= 120(x-a), \\ y^{(5)} &= 120. \end{aligned}$$

Aus $y' = 5(x - a)^4 = 0$ folgt $x = a$ als vierfache Nullstelle. Die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung ist von fünfter (also ungerader) Ordnung und stets $\neq 0$.

Mithin liegt ein Wendeflachpunkt für $x = a$ vor; für ihn ist $y = b$. Der Wendeflachpunkt liegt daher an der Stelle $P(a, b)$.

Übungen

30. *Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von:*
    a) $y = -x^3 - 4x^2 + 3x + 18$; *b)* $y = (x + 1)(x - 2)^3$!

31. *Bestimmen Sie die Wendepunkte folgender Funktionen:*
    a) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; *b)* $f(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$!

32. *Die Funktion $y = a \sin^2 x + b \cos^2 x$ ist auf Extremwerte und Wendepunkte zu untersuchen $(a > b)$!*

4.3 Kurvendiskussionen

Dem Techniker kommt es häufig darauf an, aus einer gegebenen Kurvengleichung die Eigenschaften dieser Kurve abzuleiten. Dabei gilt es, die folgenden wichtigen Punkte und Eigenschaften einer Kurve zu untersuchen:

1. Nullstellen einer Kurve,
2. Unendlichkeitsstellen (Pole) einer Kurve,
3. Verhalten der Kurve im Unendlichen,
4. Symmetrieeigenschaften einer Kurve,
5. Extremwerte und Wendepunkte.

1. Nullstellen

Wie Ihnen bekannt ist, liegt eine Nullstelle vor, wenn $y = f(x) = 0$ ist. Bei Funktionen, die durch einen Bruch dargestellt werden, können die Nullstellen durch Nullsetzen des Zählers ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, daß nicht gleichzeitig Zähler und Nenner gleich Null werden dürfen. Es würde sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ ergeben und eine Lücke der Funktion vorliegen. Sie kann im Falle einer gebrochenen rationalen Funktion nach Abschnitt 2.2 beseitigt werden, indem man den Quotienten mit $(x - x_L)$ kürzt, wobei x_L die Abszisse ist, an der die Lücke auftritt. Nullstellen von transzendenten Funktionen höheren Grades werden im Abschnitt 4.5 behandelt.

2. Unendlichkeitsstellen (Pole)

Bei gebrochenen Funktionen kann es eintreten, daß der Nenner Null wird, während der Zähler verschieden von Null ist. Wie Sie wissen, wird der Wert eines Bruches um so größer, je kleiner der Nenner gegenüber dem Zähler wird. Geht der Nenner gegen Null, während der Zähler $\neq 0$ bleibt, so wird der Wert des Bruches unendlich groß. Geht also bei einer gebrochenen Funktion $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ der Nenner $g(x)$ für $x \to a$ gegen Null und ist $f(a) \neq 0$, so wird der Funktionswert y für $x \to a$ unendlich groß. Für $x = a$ existiert die Bildkurve der Funktion nicht mehr, sie ist an der Stelle $x = a$ unterbrochen.

Man bezeichnet eine solche Stelle, an der die Funktion unterbrochen ist und unendlich wird, als **Unendlichkeitsstelle** oder **Pol.**

Nullstellen der Nennerfunktion einer gebrochenen Funktion, die nicht gleichzeitig Nullstellen der Zählerfunktion sind, bezeichnet man als Unendlichkeitsstellen oder Pole.

Liegt an der Stelle $x = a$ ein Pol vor, dann stellt die Gerade $x = a$ eine Asymptote der Kurve dar (vgl. die Bilder 6 bis 9 und 43).

Wie bei den Nullstellen ist zu beachten, daß nicht etwa $f(a) = g(a) = 0$ ist, da sich dann der unbestimmte Ausdruck $y = \frac{0}{0}$ ergibt, der genauer untersucht werden muß.

3. Verhalten der Funktion im Unendlichen

Das Verhalten einer Funktion im Unendlichen untersuchen Sie durch Grenzwertbildung. Sie lassen x gegen $+\infty$ und $-\infty$ streben; Sie bilden also $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$.

Für die gebrochene rationale Funktion $y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

a) Es ist $n < m$

Der Quotient wird mit x^n gekürzt. Das ergibt

$$y = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + b_n + b_{n+1} x + \cdots + b_m x^{m-n}}.$$

Läßt man nun $x \to \pm\infty$ gehen, so werden im Zähler alle Summanden Null bis auf den letzten (a_n). Im Nenner wird auf jeden Fall $b_m x^{m-n}$ unendlich. Damit wird

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \frac{a_n}{\infty} = 0.$$

Für alle echt gebrochenen rationalen Funktionen ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$. Daraus folgt:

Jede echt gebrochene rationale Funktion hat die x-Achse zur Asymptoten.

Beispiel:

$$y = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{x - 1 + \frac{5}{x^2}} = 0$$

b) Es ist $n \geqq m$

In diesem Fall läßt sich immer die Division ausführen. Man erhält die Funktion als Summe einer ganzen rationalen und einer echt gebrochenen Funktion. Für $x \to \pm\infty$ geht, wie Sie gesehen haben, die echt gebrochene rationale Funktion gegen Null. Das Verhalten der Funktion wird also für große (positive und negative) x-Werte nur von der ganzen rationalen Funktion bestimmt.

Jede unecht gebrochene rationale Funktion hat eine ganze rationale Funktion zur Asymptoten.

Beispiel:

$$y = \frac{x^4 + 2}{x^2 - 1}$$

Führen Sie die Division aus, so wird

$$y = \frac{x^4+2}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{3}{x^2-1}.$$

Für $x \to \pm\infty$ geht der Summand $\frac{3}{x^2-1}$ gegen Null. Für große (positive und negative) x-Werte ist also

$$y \approx x^2 + 1,$$

d. h., die Funktion nähert sich für dem Betrage nach große x-Werte der Parabel $y = x^2 + 1$; die Parabel $y = x^2 + 1$ ist eine Asymptote der Kurve.

4. *Symmetrieeigenschaften einer Kurve*

a) Symmetrie zur y-Achse liegt vor, wenn die Funktion *gerade* ist [$f(x) = f(-x)$, vgl. Abschnitt 1.4].
   Beispiel: $y = \cos x$.

b) Eine Kurve ist zentralsymmetrisch, wenn die Funktion *ungerade* ist [$f(-x) = -f(x)$].
   Beispiel: $y = \sin x$.

c) Die Kurve liegt symmetrisch zur x-Achse, wenn für jedes x zwei Funktionswerte existieren, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.
   Beispiel: $y = \pm\sqrt{x}$.

d) Sind x und y vertauschbar, ohne daß sich die Gleichung ändert, dann liegt eine zur Geraden $y = x$ symmetrische Funktion vor.
   Beispiel: $x^2 + xy + y^2 = 1$.

5. *Extremwerte und Wendepunkte*

Die Bestimmung der Extremwerte und Wendepunkte wurde im Abschnitt 4.2 behandelt. Für eine *gebrochene* Funktion $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ wird

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Entsprechend erhalten Sie für die 2. und 3. Ableitung wiederum gebrochene Funktionen:

$$y'' = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \text{und} \qquad y''' = \frac{f_3(x)}{g_3(x)}.$$

Für Extremwerte gilt die Bedingung $y' = 0,\ y'' \neq 0$,
für Wendepunkte $y'' = 0,\ y''' \neq 0$.

Da es sich um gebrochene Funktionen handelt, genügt es, *den Zähler* der jeweiligen Ableitung Null zu setzen und festzustellen, ob für $f_1(x) = 0$ bzw. $f_2(x) = 0$ nicht etwa auch der Nenner $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$ Null wird.
Sie setzen also bei der Untersuchung auf

Extremwerte $f_1(x) = 0$ (wobei $g_1(x) \neq 0$ und $y'' \neq 0$ sein muß),
Wendepunkte $f_2(x) = 0$ (wobei $g_2(x) \neq 0$ und $y''' \neq 0$ sein muß).

Lehrbeispiel 42

Diskutieren Sie die Funktion $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

(Nullstellen, Unendlichkeitsstellen, Extremwerte und Wendepunkte)!

Lösung:

Um die Nullstellen zu berechnen, setzen Sie $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Sie erkennen, daß $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist. Also können Sie $(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ durch $(x - 1)$ dividieren:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
-2x^2 - x + 3 \\
\underline{+2x^2 - 2x} \\
-3x + 3 \\
\underline{+3x - 3} \\
0
\end{array}
$$

Sie erhalten also $(x^3 - 3x^2 - x + 3) = (x^2 - 2x - 3)(x - 1) = 0$.

Jetzt untersuchen Sie $x^2 - 2x - 3 = 0$. Die Lösungen sind

$$x_{2;3} = 1 \pm \sqrt{1 + 3},$$

$$x_2 = -1 \quad \text{und} \quad x_3 = 3.$$

Die Funktion, in Linearfaktoren dargestellt, lautet:

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0.$$

Nullstellen:

$$\underline{\underline{x_{N1} = 1}}, \qquad \underline{\underline{x_{N2} = -1}}, \qquad \underline{\underline{x_{N3} = 3}}.$$

Die Funktion weist für endliche Werte von x keine Unendlichkeitsstellen (Pole) auf, da sie eine ganze rationale Funktion ist.

Sie untersuchen nun den Verlauf der Funktion für $x \to \pm\infty$, d. h., Sie bestimmen die sogenannten uneigentlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - 3x^2 - x + 3) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right).$$

Wenn Sie jetzt $x \to \pm\infty$ gehen lassen, gehen die Glieder $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{3}{x^3}$ gegen Null (die Klammer also gegen 1), und Sie haben nur noch das Glied x^3 zu beachten. Es ist aber $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$.

Demnach ist auch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3 - 3x^2 - x + 3) = \pm\infty$.

Für $x \to +\infty$ strebt die Funktion gegen $+\infty$, für $x \to -\infty$ strebt Sie gegen $-\infty$.

Um die Extremwerte zu bestimmen, bilden Sie zunächst die Ableitungen dieser Funktion:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x - 1, \\ y'' &= 6x - 6, \\ y''' &= 6, \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

und setzen die erste Ableitung gleich Null:

$$3x^2 - 6x - 1 = 0,$$
$$x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0.$$

Die Lösungen sind

$$x_{4;5} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Also

$$x_4 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}2$$

und

$$x_5 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}2.$$

Setzen Sie die genauen Werte x_4 und x_5 in die 2. Ableitung ein, so finden Sie:

$$f''(x_4) = 6\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - 6 = 4\sqrt{3} > 0,$$

$$f''(x_5) = 6\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - 6 = -4\sqrt{3} < 0.$$

Es liegt also für $x_4 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ein Minimum,

für $x_5 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ein Maximum vor.

Die Größe von Maximum und Minimum berechnen Sie aus $f(x_4)$ und $f(x_5)$:

$$\begin{aligned} y_{\max} = f(x_5) &= \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + 3 \\ &= \frac{16}{9}\sqrt{3} \approx \underline{\underline{3{,}1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\min} = f(x_4) &= \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + 3 \\ &= -\frac{16}{9}\sqrt{3} \approx \underline{\underline{-3{,}1}}. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob ein Wendepunkt auftritt, setzen Sie die 2. Ableitung gleich Null:

$$6x - 6 = 0.$$

Die Lösung ist

$$x_6 = 1.$$

Die 3. Ableitung $y''' = 6$ ist > 0 für alle x, also auch für $x_0 = 1$. Es liegt also für $x_6 = 1$ ($y_6 = 0$) ein Wendepunkt vor.

Wollen Sie die Tangente im Wendepunkt — die sogenannte *Wendetangente* — zeichnen, so benötigen Sie deren Richtungsfaktor $\tan\alpha$. Er berechnet sich aus $y' = \tan\alpha = 3x^2 - 6x - 1$ für $x = 1$ zu $\tan\alpha = -4$. Für die Wendetangente erhalten Sie dann die Gleichung

$$y - 0 = -4(x - 1),$$

also $$y = -4x + 4.$$

In Bild 40 finden Sie die gegebene Funktion und ihre beiden ersten Ableitungen gezeichnet. Auch die Wendetangente ist eingetragen.

Lehrbeispiel 43

Untersuchen Sie die Funktion

$$y = \frac{x}{1 + 2x + x^2}$$

auf Nullstellen, Pole, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung:

Nullstellen: Der Zähler $f(x)$ der Funktion wird Null gesetzt.

$$f(x) = x = 0, \quad g(0) \neq 0, \quad \underline{\underline{x_N = 0}}$$

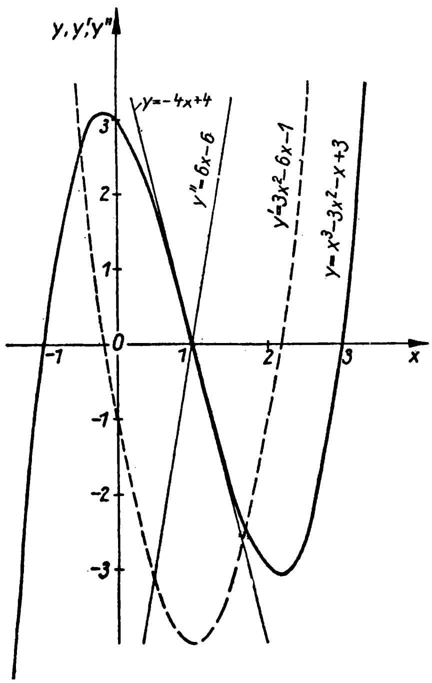

Bild 40

Pole: Der Nenner $g(x)$ der Funktion wird Null gesetzt.

$$g(x) = 1 + 2x + x^2 = 0$$

$$x_{1;2} = -1.$$

Da der Zähler für $x = -1$ verschieden von Null ist, erhalten Sie $\underline{\underline{x_P = -1}}$.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + 2x + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 2 + x} = \underline{\underline{0}}$$

Die Kurve strebt für $x \to \pm\infty$ gegen die x-Achse.

Symmetrie:

$$f(x) = \frac{x}{1 + 2x + x^2}; \quad f(-x) = \frac{-x}{1 - 2x + x^2}; \quad -f(x) = \frac{-x}{1 + 2x + x^2}$$

Da $f(x) \neq f(-x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ ist, liegt keine Achsen- oder Zentralsymmetrie vor.

Extremwerte: Sie bilden die ersten beiden Ableitungen.

$$y' = \frac{1 + 2x + x^2 - x(2 + 2x)}{(1 + 2x + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + 2x + x^2)^2} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$$y'' = \frac{-2x(1 + 2x + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(2 + 2x)(1 + 2x + x^2)}{(1 + 2x + x^2)^4}$$

$$= \frac{2(x^3 - 3x - 2)}{(1 + 2x + x^2)^3} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Sie setzen $f_1(x) = 0$.

$$1 - x^2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1$$

$$g_1(x_3) = 16 \neq 0, \quad g_1(x_4) = 0!$$

$$y''(x_3) < 0, \quad \underline{\underline{x_E = 1}}, \quad \underline{\underline{y_E = \frac{1}{4}}}$$

Bei $x_E = 1$, $y_E = \frac{1}{4}$ liegt ein Maximum vor.

Da $g_1(x_4) = 0$ ist und damit $y'(x_4) = \frac{0}{0}$, besitzt y' an der Stelle $x_4 = -1$ eine Lücke, die es durch Kürzen beseitigen heißt. Wegen $x_4 = -1$ läßt sich die erste Ableitung mit $x - x_4 = x + 1$ kürzen:

$$y' = \frac{1 - x^2}{(1 + 2x + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)^4} = \frac{1 - x}{(1 + x)^3}.$$

Für $x_4 = -1$ ist $y' = \frac{1 - x_4}{(1 + x_4)^3} \neq 0$. Bei $x_4 = -1$ liegt *kein* Extremum vor.

Wendepunkte: Sie bilden noch einmal die zweite Ableitung, indem Sie von $y' = \frac{1 - x}{(1 + x)^3}$ ausgehen.

$$y'' = \frac{-(1 + x)^3 - (1 - x) \cdot 3(1 + x)^2}{(1 + x)^6} = \frac{2(x - 2)}{(1 + x)^4} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

$$y''' = \frac{2(1 + x)^4 - 2(x - 2) \cdot 4(1 + x)^3}{(1 + x)^8} = \frac{6(3 - x)}{(1 + x)^5}$$

Sie setzen $f_2(x) = 0$:

$$2(x - 2) = 0, \quad x_5 = 2,$$

$$g_2(x_5) = 81 \neq 0, \quad y'''(x_5) \neq 0,$$

$$\underline{\underline{x_W = 2}}, \quad \underline{\underline{y_W = \frac{2}{9}}}.$$

An der Stelle $x_W = 2$, $y_W = \frac{2}{9}$ liegt ein Wendepunkt vor. Das Zeichnen der Kurve erfolgt auf Grund der festgestellten Eigenschaften und einer Wertetabelle (vgl. Bild 41).

Lehrbeispiel 44

Untersuchen Sie die Funktion $y = \frac{4x}{x^2 + 3}$ auf Nullstellen, Pole, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte!

Lösung:

Der Nenner ist $\neq 0$ für alle x. Deshalb braucht ihm im folgenden weiter keine Beachtung geschenkt zu werden.

Nullstellen: $\underline{\underline{x_N = 0}}$

Pole: $x^2 + 3 = 0, \quad x_{1/2} = \sqrt{-3}$

Pole liegen nicht vor.

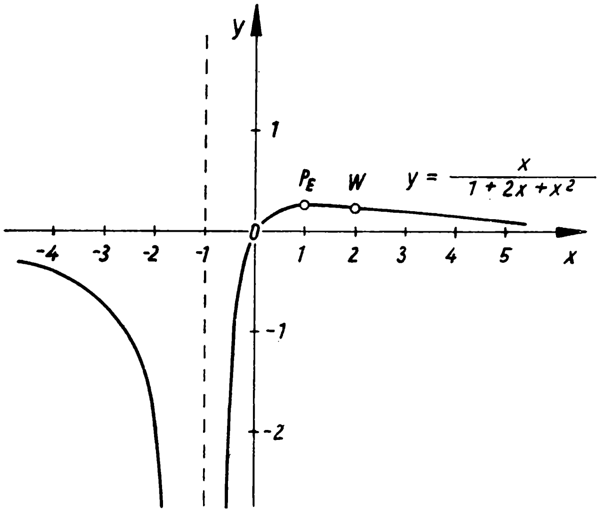

Bild 41

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x^2+3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x + \frac{3}{x}} = 0$$

Symmetrieeigenschaften:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+3}, \qquad f(-x) = \frac{-4x}{x^2+3}$$

$$f(x) = -f(-x)$$

Das Bild der Funktion ist zentralsymmetrisch.

Extremwerte:

$$y' = \frac{(x^2+3)\cdot 4 - 4x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -4\,\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}$$

$$y'' = -4\,\frac{(x^2+3)^2 \cdot 2x - (x^2-3)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 8\,\frac{x^3-9x}{(x^2+3)^3}$$

$$y''' = 8\,\frac{(x^2+3)^3\cdot(3x^2-9) - (x^3-9x)\cdot 3(x^2+3)^2\cdot 2x}{(x^2+3)^6} = 24\,\frac{-x^4+18x^2-9}{(x^2+3)^4}$$

Bedingung für Extremwerte: $y' = 0$

$$x^2 - 3 = 0, \qquad x_{3;4} = \pm\sqrt{3}$$

$$y''(+\sqrt{3}) = 8\,\frac{3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{(3+3)^3} < 0, \qquad \text{(Maximum)}$$

$$y''(-\sqrt{3}) = 8\,\frac{-3\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{(3+3)^3} > 0, \qquad \text{(Minimum)}$$

Maximum: $x_{E_1} = +\sqrt{3}$; $\quad y_{E_1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Minimum: $x_{E_2} = -\sqrt{3}$; $\quad y_{E_2} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Wendepunkte: $y'' = 0$

$$x^3 - 9x = 0, \qquad x(x^2 - 9) = 0, \qquad x_5 = 0; \qquad x_{6;7} = \pm 3$$

Diese Werte werden in die dritte Ableitung eingesetzt:

$$y'''(x_5) = 24\,\frac{-9}{3^4} \neq 0, \qquad y'''(x_{6;7}) \neq 0.$$

An den Stellen $x_{W_1} = 0$; $y_{W_1} = 0$; $x_{W_2} = 3$; $y_{W_2} = 1$ und $x_{W_3} = -3$; $y_{W_3} = -1$ liegen also Wendepunkte vor (Bild 42).

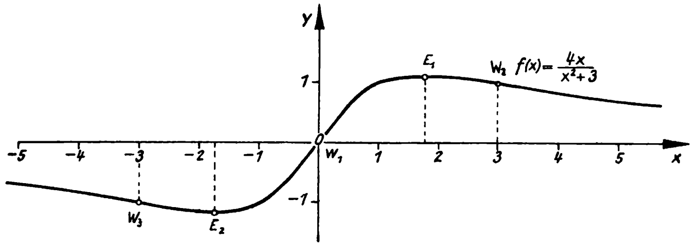

Bild 42

Lehrbeispiel 45

Untersuchen Sie die Funktion $y = \frac{x^2 - 16}{2(x^2 - 9)}$ *auf Nullstellen, Pole, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Kurvenverlauf im Bereich* $-7 \leqq x \leqq 7$*!*

Lösung:

Nullstellen: Sie setzen den Zähler der Funktion gleich Null.

$$f(x) = x^2 - 16 = 0 \text{ ergibt } x_{1;2} = \pm 4.$$

Da an den Stellen x_1 und x_2 $g(x) \neq 0$ ist, erhalten Sie als Nullstellen der Funktion

$$\underline{\underline{x_{N_1} = -4,}} \qquad \underline{\underline{x_{N_2} = 4.}}$$

Pole: Der Nenner $g(x)$ der Funktion wird gleich Null gesetzt.

$$g(x) = 2(x^2 - 9) = 0 \quad \text{ergibt} \quad x_{3;4} = \pm 3.$$

Da $f(x_{3;4}) \neq 0$, sind

$$\underline{\underline{x_{P_1} = -3}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_{P_2} = 3}}$$

Pole der Funktion.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 16}{2(x^2 - 9)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{16}{x^2}}{2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Die Kurve nähert sich für $x \to \pm\infty$ dem Wert $y = \frac{1}{2}$. Damit ist $y = \frac{1}{2}$ eine Asymptote der Kurve.

Symmetrie: Es ist $\quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - 16}{2[(-x)^2 - 9]} = \frac{x^2 - 16}{2(x^2 - 9)}$,

also $\quad f(x) = f(-x)$.

Die Kurve ist symmetrisch zur y-Achse.

Extremwerte: Sie bilden die ersten drei Ableitungen.

$$y' = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 9) \cdot 2x - (x^2 - 16) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{7x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$$y'' = \frac{(x^2 - 9)^2 \cdot 7 - 7x \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = -21 \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 9)^3} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

$$y''' = -21 \frac{(x^2 - 9)^3 \cdot 2x - (x^2 + 3) \cdot 3(x^2 - 9)^2 \, 2x}{(x^2 - 9)^6} = 84 \frac{x^3 + 9x}{(x^2 - 9)^4}$$

Aus $f_1(x) = 0$ ergibt sich $x_5 = 0$, wobei $g_1(x_5) \neq 0$.

Weiter ist $y''(x_5) = -21 \frac{3}{(-9)^3} > 0$.

An der Stelle x_5 liegt ein Minimum vor.

$$\underline{\underline{x_{\min} = 0}} \qquad \underline{\underline{y_{\min} = \frac{8}{9}}}$$

Wendepunkte: $f_2(x) = 0$ liefert $x_{6/7} = \sqrt{-3}$, nicht reell.

Die Kurve hat keine Wendepunkte.

Das Zeichnen der Kurve erfolgt auf Grund der festgestellten Eigenschaften der Kurve und einer Wertetabelle (vgl. Bild 43).

Lehrbeispiel 46

Die Funktion $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ *ist auf Nullstellen, Symmetrie, Extremwerte und Wendepunkte zu untersuchen.*

Lösung:

Die Funktion hat die Periode 2π. Es genügt deshalb, die Funktion im Intervall $0 \leq x < 2\pi$ zu diskutieren, da sich die Abszissen aller weiteren Extremwerte und Wendepunkte durch Hinzufügen von $2n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) ergeben.

Nullstellen: $\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$

Wegen $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ erhalten Sie $\cos x (1 + \sin x) = 0$.

$$\cos x = 0 \text{ liefert } x_{N_1} = \frac{\pi}{2}, \quad x_{N_2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \text{ liefert } x_{N_3} = x_{N_2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Die Funktion hat im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ zwei Nullstellen. Wegen der Periode $\lambda = 2\pi$ ergeben sich sämtliche Nullstellen zu

$$x_N = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

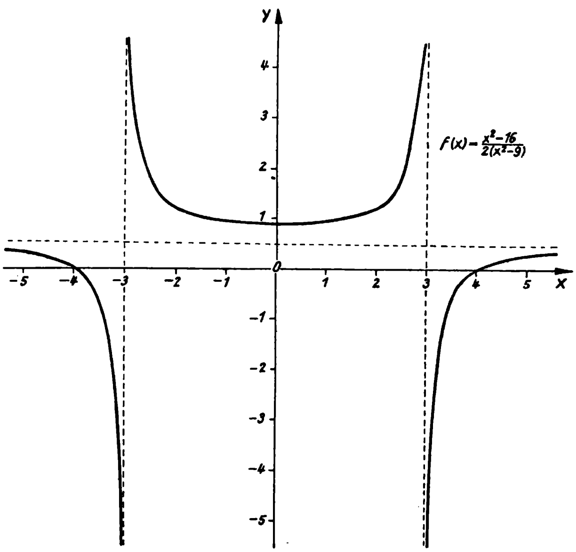

Bild 43

Extremwerte: Sie bilden zunächst die ersten drei Ableitungen:

$$y' = -\sin x + \cos 2x,$$
$$y'' = -\cos x - 2 \sin 2x,$$
$$y''' = \sin x - 4 \cos 2x.$$

Aus $y' = 0$ folgt:

$$-\sin x + \cos 2x = 0.$$

Sie setzen $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ und erhalten

$$-\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 0,$$
$$\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\sin x$. Es ergibt sich

$$\sin x_1 = \frac{1}{2}, \qquad \sin x_2 = -1$$

und daraus

$$x_{11} = \frac{\pi}{6}, \quad x_{12} = \frac{5\pi}{6}, \quad x_{21} = x_{22} = \frac{3\pi}{2}.$$

Durch Einsetzen in die zweite Ableitung finden Sie:

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos 30^\circ - 2\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} < 0 \quad \text{(Maximum)}$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos 150^\circ - 2\sin 300^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} > 0 \quad \text{(Minimum)}$$

$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos 270^\circ - 2\sin 540^\circ = 0.$$

Das Verhalten der Funktion an der Stelle $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ muß noch näher untersucht werden. Sie setzen dazu x_2 in die dritte Ableitung ein:

$$y'''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin 270^\circ - 4\cos 540^\circ \neq 0.$$

Bei $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ liegt ein Wendepunkt vor.

Es sind noch die Ordinaten der Extremwerte zu ermitteln.

Aus $\sin x_1 = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\cos x_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$\cos x_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

In $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x\,(1 + \sin x)$ eingesetzt, erhalten Sie

$$y_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}, \qquad y_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Sie erhalten unter Berücksichtigung der Periode 2π

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi}}, \qquad \underline{\underline{y_{\max} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299}},$$

$$\underline{\underline{x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi}}, \qquad \underline{\underline{y_{\min} = -\frac{3}{4}\sqrt{3} \approx -1{,}299}},$$

wobei wieder $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist.

Wendepunkte: $y'' = 0$ liefert $-\cos x - 4\sin x\cos x = 0,$

$$\cos x\,(1 + 4\sin x) = 0.$$

Damit ist $\cos x_3 = 0, \quad \sin x_4 = -\frac{1}{4}.$

Sie erhalten $x_{31} = \frac{\pi}{2}, \quad x_{32} = \frac{3\pi}{2},$

$$x_{41} = 3{,}394 \mathrel{\hat{=}} 194^\circ 29', \quad x_{42} = 6{,}030 \mathrel{\hat{=}} 345^\circ 31'.$$

Da für diese Werte $y''' \neq 0$ ist, handelt es sich um Wendepunkte. Außerdem ist, wie Sie schon bei der Ermittlung der Extremwerte feststellten, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Im Falle von $x_{32} = \frac{3\pi}{2}$ handelt es sich also um einen Horizontalwendepunkt.
Sie ermitteln noch die Ordinanten der Wendepunkte.
Mit $\cos x_3 = 0$ wird $y = \cos x\,(1 + \sin x) = 0$, also $y_{31} = y_{32} = 0$. $\sin x_4 = -\frac{1}{4}$ liefert, wegen $\cos x_4 = \sqrt{1 - \sin^2 x_4}$, $\cos x_{41} = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$, $\cos x_{42} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$.
Damit wird

$$y_{41} = -\frac{1}{4}\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{16}\sqrt{15}, \quad y_{42} = \frac{1}{4}\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt{15}.$$

Sie erhalten schließlich

$$\underline{\underline{x_{W_1} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,}} \qquad \underline{\underline{y_{W_1} = 0,}}$$

$$\underline{\underline{x_{W_2} = 3{,}394 + 2n\pi,}} \qquad \underline{\underline{y_{W_2} = -\frac{3}{16}\sqrt{15} \approx -0{,}727,}}$$

$$\underline{\underline{x_{W_3} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,}} \qquad \underline{\underline{y_{W_3} = 0,}} \quad \text{(waagerechte Tangente),}$$

$$\underline{\underline{x_{W_4} = 6{,}030 + 2n\pi,}} \qquad \underline{\underline{y_{W_4} = \frac{3}{16}\sqrt{15} \approx 0{,}727,}}$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

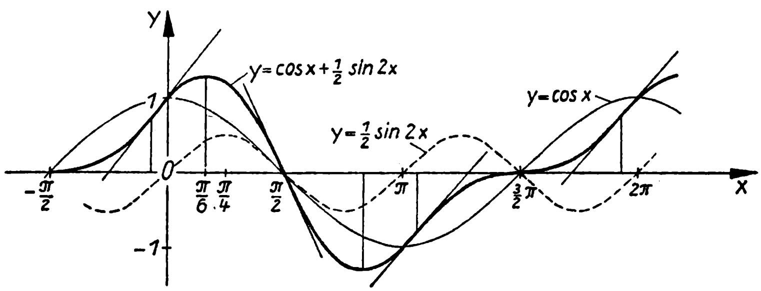

Bild 44

Übungen

33. *Diskutieren Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen, Unendlichkeitsstellen Extremwerte, Wendepunkte und Verhalten im Unendlichen!*

a) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - a^2}$

b) $y = \dfrac{3x^2 - 5x}{x^3 - 2x^2 + x}$

Berechnen Sie außerdem den Schnittpunkt mit der y-Achse!

c) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}$

Berechnen Sie außerdem den y-Wert für $x = -2$, *d. h.* $\lim\limits_{x \to -2} y$*!*

d) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x}$

Bestimmen Sie weiterhin $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$*!*

(Anleitung: Man zerlegt die Funktion in die Summe einer ganzen rationalen und einer gebrochenen rationalen Funktion.)

34. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Funktionen

a) $y = \sin 2x + 2 \sin x$,

b) $y = x + \sin x$*!*

35. Die Funktion $y = x \pm \sqrt{8 - x^2}$ *ist auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte zu untersuchen. Weiterhin ist festzustellen, für welchen Bereich von x sich reelle Werte von y ergeben. Zeichnung!*

Anleitung: Untersuchen Sie die eindeutigen Teilfunktionen

$$f_1(x) = x + \sqrt{8 - x^2} \quad \textit{und} \quad f_2(x) = x - \sqrt{8 - x^2}.$$

36. Bestimmen Sie Nullstellen, Pole, Verhalten im Unendlichen, Symmetrieeigenschaften, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $y = \dfrac{a^2 t^2}{a^2 + t^2}$ $[y = y(t)]$.
Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion für $a = 1$ *an!*

4.4 Anwendungen zur Extremwertbestimmung

Bei vielen technischen und wirtschaftlichen Aufgaben kommt es darauf an, maximale Belastbarkeit, maximales Volumen, minimalen Verschleiß oder Materialaufwand zu ermitteln. Mit Hilfe der Extremwertberechnung können diese Aufgaben gelöst werden. Dieses Verfahren gewinnt somit für den Techniker an Bedeutung. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man bei derartigen Aufgaben vorzugehen hat.

Geht aus der Aufgabenstellung hervor, daß man das maximale Volumen, die maximale Belastbarkeit bzw. den minimalen Materialbedarf ermitteln soll, so stellt man zunächst eine Gleichung für die zu ermittelnde maximale bzw. minimale Größe (Volumen, Belastbarkeit) auf. Die Gleichung wird dann, wenn nötig, so umgeformt, daß die zu ermittelnde Größe nur von einer Variablen abhängt. Von dieser Funktion lassen sich jetzt die Extremwerte bestimmen. Das durch Rechnung erhaltene Ergebnis muß anschließend noch im Hinblick auf die technische Bedeutung ausgewertet werden. Durch rein formales Rechnen allein können Sie derartige Aufgaben nicht lösen. Es kommt darauf an, das technische Problem zu erkennen und das ihm entsprechende mathematische Problem zu lösen.

Lehrbeispiel 47

Der Umfang einer rechteckigen Fläche sei 100 cm. *Wie lang müssen die Rechteckseiten gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird? Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?*

Lösung:

Der Flächeninhalt soll ein Maximum werden. Für den Flächeninhalt ist folglich eine Formel aufzustellen.

Bezeichnen Sie die Seiten des Rechtecks mit a und b, dann ist seine Fläche

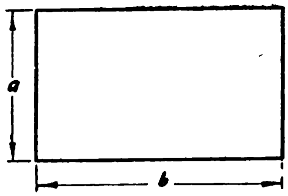

Bild 45

$$F = a\,b.$$

Der Ausdruck für die Fläche enthält zunächst die beiden Veränderlichen a und b. Da der Umfang konstant ist, sind a und b voneinander abhängig. Sie können also eine Veränderliche durch die andere ausdrücken.

Aus $$U = 2(a + b) = 100$$
erhalten Sie $$b = 50 - a.$$

In $F = a\,b$ eingesetzt ergibt das

$$F(a) = a(50 - a).$$

Sie haben F als Funktion *einer* Veränderlichen erhalten und untersuchen $F(a) = a(50 - a)$ in der gewohnten Weise auf Extremwerte. Sie differenzieren $F(a)$:

$$\frac{dF}{da} = 50 - 2a.$$

Aus $$\frac{dF}{da} = 0$$

folgt $$50 - 2a = 0,$$
$$\underline{\underline{a = 25}}, \qquad b = 50 - a = \underline{\underline{25}}.$$

Sie versichern sich an Hand der zweiten Ableitung, daß auch wirklich ein Maximum vorliegt:

$$\frac{d^2F}{da^2} = -2 < 0 \qquad \text{(Maximum)}.$$

Die Rechteckfläche hat den größten Flächeninhalt, wenn $a = b$ ist, d. h., das Quadrat ist das größte aller Rechtecke mit gleichem Umfang. Für den maximalen Flächeninhalt ergibt sich

$$F_{\max} = 25 \cdot 25 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{625 \text{ cm}^2}}.$$

Die Aufgabenstellung führte Sie auf die Untersuchung der Funktion $y = F(a) = a(50 - a)$, die in Bild 46 dargestellt ist.

Die Funktion ist nach der Aufgabenstellung nur im Bereich $0 \leq a \leq 50$ definiert.

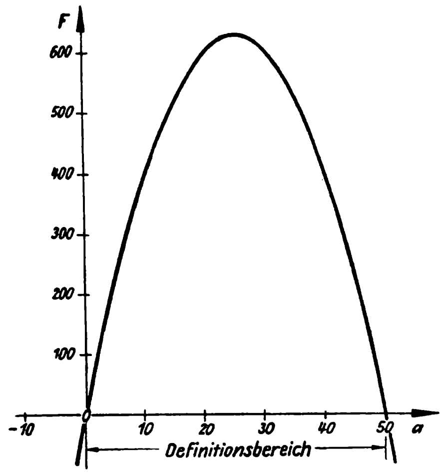

Bild 46

In diesem Bereich nimmt sie für $a = 0$ ein absolutes Minimum, für $a = 25$ ein absolutes Maximum und für $a = 50$ ein zweites absolutes Minimum an.

Im Verlaufe der Rechnung haben Sie über $F'(a) = 0$ das *relative* Maximum von $F(a)$ bei $a = 25$ ermittelt. Sie sehen, daß dies im Definitionsbereich gleichzeitig das *absolute* Maximum der Funktion darstellt.

Bei sinnvoll gestellten Extremwertaufgaben stellt stets der *relative* Extremwert einer Funktion gleichzeitig den *absoluten* Extremwert dieser Funktion im durch die Aufgabenstellung abgegrenzten Definitionsbereich dar. Nur dieser Umstand berechtigt zu dem Verfahren, das relative Extremum der jeweiligen Funktion aufzusuchen.

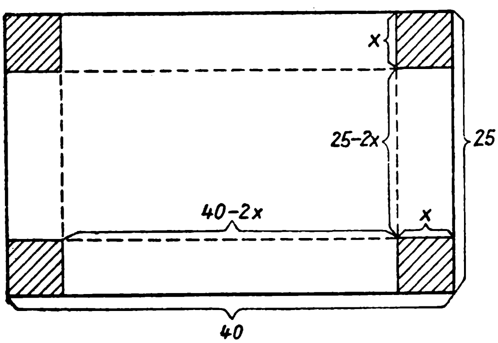

Bild 47

Lehrbeispiel 48

Aus einem rechteckigen Stück Blech von der Länge 40 cm *und der Breite* 25 cm *soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst großem Fassungsvermögen hergestellt werden. Zu diesem Zweck wird aus jeder Ecke ein Quadrat ausgeschnitten und der Rest zu einem offenen Kasten zusammengebogen. Wie groß muß die ausgeschnittene Quadratseite werden?*

Lösung:

Die gesuchte Quadratseite sei x (Bild 47). Sie stellen das Fassungsvermögen V in Abhängigkeit von x dar und erhalten

$$V(x) = (40 - 2x)(25 - 2x)\,x = 4x^3 - 130x^2 + 1000x.$$

Dann wird

$$V' = 12x^2 - 260x + 1000,$$
$$V'' = 24x - 260.$$

Aus $V' = 0$ folgt

$$x^2 - \frac{65}{3} x + \frac{250}{3} = 0,$$

$$x_{1;2} = \frac{65}{6} \pm \sqrt{\frac{4225 - 3000}{36}} = \frac{65 \pm 35}{6}.$$

Der Wert $x_1 = \frac{100}{6} = 16{,}\bar{6} \ldots$ ist sinnlos, da für $2x_1$ folgen würde: $2x_1 \approx 33 > 25$, also größer als die Breite des Bleches.

Als zweiten Wert erhalten Sie

$$x_2 = 5.$$

Für diesen Wert ist $V(x)$ definiert.

Dieser Wert in V'' eingesetzt, liefert

$$V''(x_2) = 24 \cdot 5 - 260 = -140 < 0.$$

Die gesuchte Quadratseite für den Behälter mit maximalem Fassungsvermögen ist also $\underline{\underline{x_{\max} = 5 \text{ cm.}}}$

Das Fassungsvermögen ist dann

$$V = 30 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = \underline{\underline{2250 \text{ cm}^3}}.$$

Für unsere Aufgabenstellung ist die betrachtete Funktion durch die Abmessungen des Bleches nur im Intervall $0 \leqq x \leqq 12{,}5$ definiert. Zeichnen Sie die Funktion, so erkennen Sie, daß wiederum das relative Maximum innerhalb des Definitionsbereiches gleichzeitig das absolute Maximum darstellt.

Lehrbeispiel 49

Wie groß muß der zwischen zwei gegebenen Seiten a und b eines Dreiecks liegende Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird?

Lösung:

Sie bezeichnen den Winkel zwischen den Seiten a und b mit φ (vgl. Bild 48).

Der Flächeninhalt F des Dreiecks ist dann gegeben durch die Beziehung

$$F = \frac{ab}{2} \sin \varphi.$$

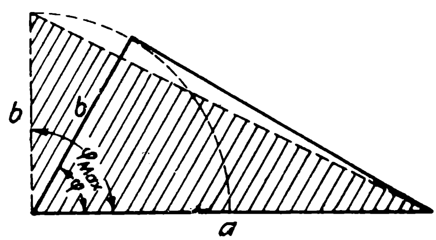

Bild 48

Der Flächeninhalt F des Dreiecks ist eine Funktion des Winkels φ. Sie sollen also einen Wert $\varphi = \varphi_0$ so bestimmen, daß für φ_0 ein Maximum vorliegt. Sie differenzieren daher nach φ (bilden $\frac{dF}{d\varphi} = F'(\varphi)$):

$$F'(\varphi) = \frac{ab}{2} \cos \varphi,$$

$$F''(\varphi) = -\frac{ab}{2} \sin \varphi.$$

Aus $$F'(\varphi) = \frac{ab}{2} \cos\varphi = 0$$

folgt $$\cos\varphi = 0.$$

Dies liefert $$\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Es liegt für diesen Wert in der Tat ein Maximum vor, denn es ist

$$F''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{ab}{2} < 0.$$

Drücken Sie den Winkel $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ nicht im Bogenmaß, sondern im Gradmaß aus, so ist $\varphi_0 = 90°$. Die zugehörige maximale Fläche ist $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab}{2}$.

Die Aufgabe konnte also auch so formuliert werden:
Welches unter allen Dreiecken mit gegebenen Seiten a und b hat den größten Flächeninhalt?

Die Antwort wäre:
Das rechtwinklige Dreieck (rechter Winkel zwischen a und b).

Lehrbeispiel 50

Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h und dem Grundkreisradius r ist ein Kreiszylinder mit möglichst großem Volumen einzubeschreiben. Wie muß man die Abmessungen des Zylinders wählen?

Lösung:

In Bild 49 ist dem gegebenen Kegel ein Zylinder einbeschrieben. Um die Verhältnisse besser übersehen zu können, zeichnen Sie sich zweckmäßig einen ebenen Achsenschnitt auf (Bild 50). Den Radius des gesuchten Zylinders mit größtmöglichem Volumen bezeichnen Sie mit x, seine Höhe mit y. Sein Volumen V ist dann $V = \pi x^2 y$.

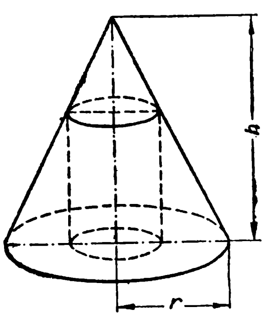

Bild 49

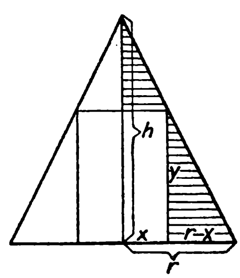

Bild 50

Aus Bild 50 entnehmen Sie die Beziehung

$$(r - x) : y = r : h$$

oder
$$y = \frac{h(r-x)}{r}.$$

Dies setzen Sie jetzt in den Ausdruck für das Volumen V ein und erhalten

$$V = \pi x^2 \frac{h}{r}(r - x) = \frac{\pi h}{r}(r x^2 - x^3).$$

Sie haben also V in Abhängigkeit vom Zylinderradius x dargestellt und untersuchen, für welchen Wert von x das Volumen V am größten ist; dazu bilden Sie die Ableitungen $V' = \frac{dV}{dx}$ und $V'' = \frac{d^2V}{dx^2}$:

$$V' = \frac{\pi h}{r}(2rx - 3x^2), \qquad V'' = \frac{\pi h}{r}(2r - 6x).$$

$V' = 0$ gesetzt, ergibt

$$\frac{\pi h}{r}(2rx - 3x^2) = 0,$$

$$2rx - 3x^2 = 0$$

oder
$$x(2r - 3x) = 0,$$

d. h.
$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{2}{3} r.$$

$x_1 = 0$ liefert offenbar kein maximales Volumen, wie Sie sofort aus Bild 50 entnehmen.

Demnach ist:
$$\underline{\underline{x_2 = x_{\max} = \frac{2}{3} r.}}$$

Setzen Sie x_2 in V'' ein, so ergibt sich

$$V''(x_2) = \frac{\pi h}{r}\left(2r - 6 \cdot \frac{2}{3} r\right) = -2\pi h < 0.$$

Also liegt in der Tat ein Maximum vor. Der zugehörige y-Wert ist

$$y_{\max} = \frac{h}{r}(r - x_{\max}) = \frac{h}{r}\left(r - \frac{2}{3} r\right) = \frac{h}{3}.$$

Der einbeschriebene Zylinder hat also dann sein größtes Volumen, wenn Sie die Abmessung

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3} r}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{y = \frac{h}{3}}} \text{ wählen.}$$

Wir wollen noch eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung angeben: Im Lehrbeispiel 50 hatten Sie die Funktion $V(x) = \frac{\pi h}{r}(r x^2 - x^3)$ auf Extremwerte zu untersuchen. Dabei hat doch offenbar der Faktor $\frac{\pi h}{r}$ keinen Einfluß auf die Stelle, an der ein Extremum liegen kann. Er bestimmt lediglich die Größe des Extremwertes. Sie können daher stets bei der Bestimmung der Extremwerte einen positiven konstanten Faktor weglassen. Dann verläuft z. B. die Rechnung im Lehrbeispiel 50 folgendermaßen:

Sie untersuchen statt $V(x) = \frac{\pi h}{r}(rx^2 - x^3)$ nur die Funktion $V^*(x) = (rx^2 - x^3)$ auf Extremwerte.

Es ist
$$V^{*\prime}(x) = 2rx - 3x^2.$$
Aus $2rx - 3x^2 = 0$ folgt:
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad 2r = 3x_2 \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{2}{3}r.}}$$

$x_1 = 0$ liefert offenbar ein minimales Volumen!

Es wird
$$V^{*\prime\prime}(x) = 2r - 6x$$
und $x_2 = \frac{2}{3}r$ eingesetzt, ergibt
$$2r - 6 \cdot \frac{2}{3}r = -2r < 0,$$
also liegt für $x_2 = \frac{2}{3}r$ ein Maximum vor.

Diese, wie Sie sehen, nicht unwesentliche Vereinfachung machen Sie sich zu eigen. In den folgenden Lehrbeispielen wird die Vereinfachung nur deshalb nicht verwendet, um Ihnen noch einmal die Grundregeln der Differentialrechnung vor Augen zu führen. Überlegen Sie sich selbst, wo bei den gegebenen Lehrbeispielen eine Vereinfachung möglich ist, und prüfen Sie, ob Sie die gleichen Ergebnisse erhalten.

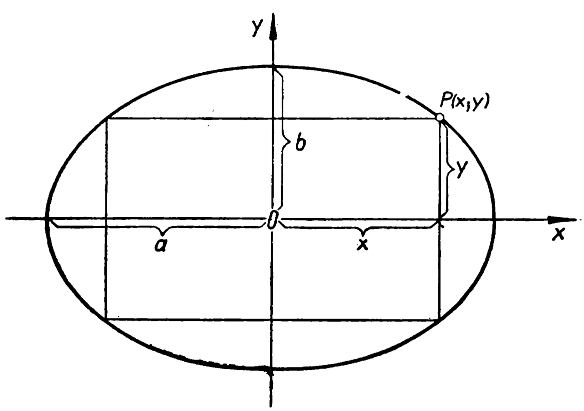

Bild 51

Lehrbeispiel 51

Einer Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
soll das größte Rechteck einbeschrieben werden. Wie groß sind die Abmessungen des Rechtecks zu wählen?

Lösung:

Die Ellipse ist durch ihre Mittelpunktsgleichung gegeben und in Bild 51 in das Koordinatensystem eingezeichnet. Aus Symmetriegründen muß das größte Rechteck zunächst die im Bild angegebene Lage haben. Der Punkt $P\ (x;\ y)$ sei ein Punkt der Ellipse und gleichzeitig Eckpunkt des Rechtecks. Die Fläche F des Rechtecks ist dann gegeben durch

$$F = 4xy.$$

Aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Damit wird

$$F = \frac{4b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$= \frac{4b}{a}\sqrt{x^2a^2 - x^4}.$$

Jetzt bilden Sie die Ableitung:

$$F' = \frac{4b(a^2x - 2x^3)}{a\sqrt{x^2a^2 - x^4}}$$

und setzen sie gleich Null. Sie finden

$$a^2x = 2x^3.$$

Da für $x = 0$, wie Sie aus Bild 51 ersehen, kein Maximum vorliegt, wird für $x \neq 0$

$$a^2 = 2x^2, \quad \text{also} \quad x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Berechnen Sie selbst die Ableitung F'' und setzen Sie $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ein, um nachzuweisen, daß tatsächlich ein Maximum vorliegt!

Für die zugehörige y-Koordinate erhalten Sie

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{ba}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Bezeichnen Sie die Fläche des Rechtecks, falls $x_{\max} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $y_{\max} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ gewählt wurde, mit F_R, so wird

$$F_R = 4 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{2} = 2ab.$$

Wir wollen nun noch feststellen, in welchem Verhältnis die Fläche F_E der Ellipse zu der des Rechtecks steht. Die Fläche der Ellipse ist gegeben durch

$$F_E = \pi ab.$$

Also wird

$$\frac{F_E}{F_R} = \frac{\pi ab}{2ab} = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$F_E : F_R = \pi : 2 = \frac{\pi}{2} : 1,$$

angenähert

$$F_E : F_R \approx 1{,}57 : 1.$$

Die Fläche der Ellipse ist also ungefähr 1,57mal so groß wie die Fläche des größten einbeschriebenen Rechtecks.

Lehrbeispiel 52

Einer Halbkugel mit dem Radius r soll ein Zylinder so einbeschrieben werden, daß die Differenz von Mantelfläche F_M und Kugelkappe F_O über der Zylinderdeckfläche ein Maximum wird. Wie groß ist der Rauminhalt des Zylinders?
(Kugelkappe: $F_O = 2\pi r h$)

Lösung:

Der Grundkreisradius des Zylinders sei x, seine Höhe y (Bild 52). Sie haben die Differenz D des Zylindermantels und der Kugelkappe über seiner Deckfläche auf ein Maximum zu untersuchen.

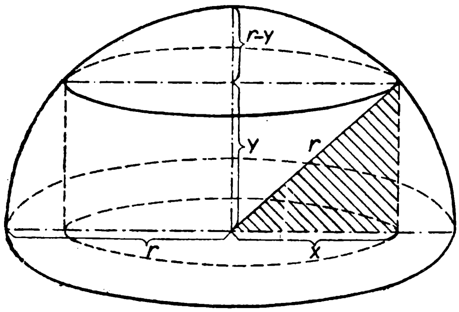

Bild 52

Aus Bild 52 lesen Sie ab

$$F_M = 2\pi x y,$$
$$F_O = 2\pi r (r - y).$$

Damit wird

$$D = 2\pi x y - 2\pi r (r - y).$$

Aus dem schraffierten Dreieck lesen Sie die Beziehung ab

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Demnach erhalten Sie für D:

$$D = 2\pi y \sqrt{r^2 - y^2} - 2\pi r (r - y) = 2\pi \sqrt{y^2 r^2 - y^4} - 2\pi r (r - y).$$

Sie haben D hier in Abhängigkeit von y dargestellt und differenzieren demgemäß nach y:

$$D' = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}y} = 2\pi \frac{(y r^2 - 2y^3)}{\sqrt{y^2 r^2 - y^4}} + 2\pi r,$$

$$D'' = \frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}y^2} = 2\pi y^4 \frac{2y^2 - 3r^2}{(y^2 r^2 - y^4)\sqrt{y^2 r^2 - y^4}}$$
$$= 2\pi y \frac{2y^2 - 3r^2}{(r^2 - y^2)\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Aus $D' = 0$ folgt:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{y^2 r^2 - y^4}} \left[y r^2 - 2y^3 + r\sqrt{y^2 r^2 - y^4}\right] = 0,$$

$$r y \sqrt{r^2 - y^2} = y(2y^2 - r^2).$$

Da $y = 0$ nicht als Maximum im Sinne der Aufgabe betrachtet werden kann (denn für $y = 0$ würde die Kugelkappe zur Halbkugel entarten, und an Stelle des Zylinders mit der Mantelfläche F_M würde nur noch eine Kreisfläche mit dem Radius r vorhanden sein), können Sie $y \neq 0$ annehmen und durch y dividieren.

$$r\sqrt{r^2 - y^2} = 2y^2 - r^2$$
$$r^4 - r^2y^2 = r^4 - 4r^2y^2 + 4y^4$$
$$4y^4 = 3y^2r^2$$
$$y^2 = \frac{3}{4}r^2$$
$$y = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Also

$$y_1 = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

(Das negative Vorzeichen hat gemäß der Aufgabenstellung keinen Sinn.)
Um die Entscheidung treffen zu können, ob für y_1 ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, bilden Sie den 2. Differentialquotienten für y_1:

$$D''(y_1) = 2\pi\frac{r}{2}\sqrt{3}\,\frac{2\cdot\frac{3}{4}r^2 - 3r^2}{\left(r^2 - \frac{3}{4}r^2\right)\sqrt{r^2 - \frac{3}{4}r^2}},$$

$$D''(y_1) = -12\pi\sqrt{3} < 0.$$

Es liegt also ein Maximum vor.

$$\underline{\underline{y_{\max} = \frac{r}{2}\sqrt{3}}}$$

$$x_{\max} = \sqrt{r^2 - y^2_{\max}} = \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}r^2} = \underline{\underline{\frac{r}{2}}}$$

Dann erhält man für den Rauminhalt V des Zylinders:

$$V = \pi x^2_{\max}\cdot y_{\max} = \pi\frac{r^2}{4}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi r^3}{8}\sqrt{3}}}.$$

Lehrbeispiel 53

Eine Last Q soll auf einer horizontalen Straße mit dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}07$ fortbewegt werden. Welchen Winkel muß die bewegende Kraft P mit der Horizontalen bilden, damit sie am wenigsten durch die Überwindung der Reibung verliert?

Lösung:

Der Winkel zwischen der bewegenden Kraft P und der Horizontalen sei α (Bild 53). Sie zerlegen P in die horizontale Komponente R und die vertikale Komponente S. Dann gilt

$$S = P\cdot\sin\alpha \quad \text{und} \quad R = P\cdot\cos\alpha.$$

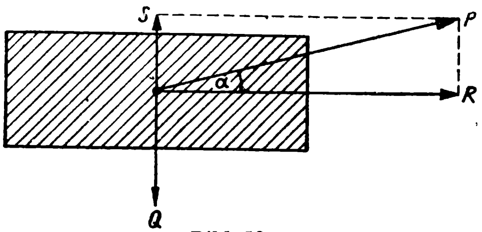

Bild 53

Die Reibungskraft ist

$$(Q - S)\,\mu.$$

Damit die Reibung überwunden wird, muß

$$(Q - S)\,\mu = R$$

sein.

Daraus finden Sie

$$Q \cdot \mu - P \cdot \mu \sin \alpha = P \cdot \cos \alpha,$$
$$P(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = Q \cdot \mu,$$
$$P = \frac{Q \cdot \mu}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Diese Gleichung gibt an, wie groß P zu wählen ist, damit der Wagen fortbewegt werden kann. Selbstverständlich liegen die Verhältnisse am günstigsten, wenn P möglichst klein ist. Da aber Q und μ konstant sind, ist dies dann der Fall, wenn der Nenner $f(\alpha) = (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)$ möglichst groß wird. Sie untersuchen ihn daher auf ein Maximum:

$$f'(\alpha) = \frac{d f(\alpha)}{d \alpha} = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha,$$

$$f''(\alpha) = \frac{d^2 f(\alpha)}{d \alpha^2} = -\cos \alpha - \mu \sin \alpha.$$

Aus $f'(\alpha) = 0$ folgt:

$$\mu \cos \alpha = \sin \alpha,$$
$$\mu = \tan \alpha$$

und, da $\mu = 0{,}07$, wird

$$\tan \alpha = 0{,}07,$$

mithin

$$\underline{\underline{\alpha_0 \approx 4^\circ}}.$$

Wegen $\cos \alpha_0 > 0$ und $\sin \alpha_0 > 0$ folgt $F''(\alpha_0) < 0$. Es liegt ein Maximum von $f(\alpha)$, d. h. ein Minimum von P vor.

Lehrbeispiel 54

Eine Batterie von $n = 48$ Elementen, deren jedes eine Urspannung (elektromotorische Kraft) von $E = 2$ Volt liefert und einen inneren Widerstand von $R_i = \frac{1}{4}$ Ohm besitzt, soll beim Vorhandensein eines äußeren Widerstandes von $R_a = 3$ Ohm so in y hintereinandergeschaltete Gruppen von je x parallelgeschalteten Elementen eingeteilt werden, daß die Stromstärke I den größtmöglichen Wert erhält.

Lösung:

Für ein Element gilt die bekannte Beziehung

$$I = \frac{E}{R_i + R_a}.$$

Für x Elemente in Parallelschaltung wird der innere Widerstand x-mal kleiner, mithin

$$I_1 = \frac{E}{R_a + \frac{R_i}{x}}.$$

Für y Elemente in Reihenschaltung wird die Spannung y-mal größer, ebenso der innere Widerstand, mithin

$$I_2 = \frac{y \cdot E}{Ra + y \cdot Ri}.$$

Für $n = x \cdot y$ Elemente, wobei y Gruppen von je x parallelgeschalteten Elementen in Reihe geschaltet sind, ist

$$I = \frac{y \cdot E}{R_a + y \cdot \frac{R_i}{x}}.$$

Da $y = \frac{n}{x}$ ist, wird

$$I = \frac{\frac{n}{x} \cdot E}{R_a + \frac{n}{x} \cdot \frac{R_i}{x}} = \frac{n\,E\,x}{x^2 R_a + n \cdot R_i}.$$

Die Differentiation ergibt:

$$I' = \frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,x} = \frac{nE(x^2\,R_a + n\,R_i) - nEx \cdot 2\,R_a\,x}{(x^2 R_a + n\,R_i)^2}$$

$$= \frac{nE\,(nR_i - x^2\,R_a)}{(x^2 R_a + nR_i)^2}.$$

Aus $I' = 0$ folgt $n\,R_i = x^2\,R_a$, also

$$x_{\max} = +\sqrt{\frac{n\,R_i}{R_a}} = \frac{1}{R_a}\sqrt{n\,R_i\,R_a} = \frac{1}{3}\sqrt{48 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3} = \underline{\underline{2}}.$$

Prüfen Sie selbst nach, daß für diesen Wert x ein Maximum vorliegt! Für y findet man

$$y_{\max} = \frac{n}{x_{\max}} = \underline{\underline{24}}.$$

Man muß also 24 Gruppen von je zwei parallel geschalteten Elementen hintereinanderschalten, um die größte Stromstärke zu erzielen. Diese beträgt dann

$$I = \frac{24\,E}{\left[3 + 24\,\frac{1}{4 \cdot 2}\right]\Omega} = \frac{4 \cdot E}{\Omega} = 4 \cdot 2\,\frac{\mathrm{V}}{\Omega} = \underline{\underline{8\,\mathrm{A}}}.$$

Lehrbeispiel 55

Für eine befahrbare Decke von der Breite l ist die ungünstigste Lastenstellung für zwei fest miteinander verbundene Lasten (z. B. Druckkraft der Räder eines Wagens) zu ermitteln.

Lösung:

Die ungünstigste Lastenstellung ist erreicht, wenn das durch die Belastung der Decke hervorgerufene Moment einen Höchstwert hat.

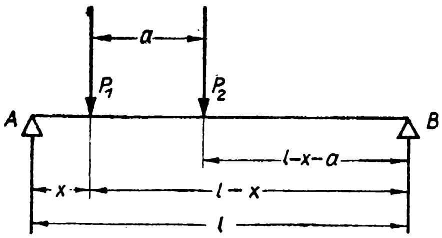

Bild 54

Sie bezeichnen die beiden Kräfte mit P_1 und P_2, die Auflager mit A und B (Bild 54). Für den weiteren Verlauf der Rechnung soll vorausgesetzt werden, daß $P_1 > P_2$ sei. Den Abstand der beiden Kräfte bezeichnen Sie mit a.

Sie bestimmen zunächst die Auflagerkraft bei A:

$$A = \frac{1}{l}\,[P_1\,(l - x) + P_2\,(l - x - a)]$$

$$= \frac{1}{l}\,[P_1\,l - P_1\,x + P_2\,l - P_2 x - P_2 a]$$

$$= P_1 + P_2 - (P_1 + P_2)\,\frac{x}{l} - P_2\,\frac{a}{l}.$$

$P_1 + P_2$ können Sie durch die Resultierende R ersetzen, denn bei parallelen gleichgerichteten Kräften ist $R = P_1 + P_2$.

Somit erhalten Sie

$$A = R - R\,\frac{x}{l} - P_2\,\frac{a}{l}\,.$$

Hieraus bestimmen Sie das statische Moment

$$M_x = A \cdot x = Rx - R\,\frac{x^2}{l} - P_2\,\frac{a}{l}\,x.$$

Dieses Moment nimmt einen Extremwert an, wenn die 1. Ableitung Null wird.

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = R - 2\,R\,\frac{x}{l} - P_2\,\frac{a}{l} = 0$$

$$2\,R\,\frac{x}{l} = R - P_2\,\frac{a}{l}$$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{P_2 \cdot a}{2\,R}$$

Um festzustellen, ob M_x für das gefundene x auch wirklich einen Höchstwert annimmt, müssen Sie den Wert der 2. Ableitung für x untersuchen. Die 2. Ableitung der Funktion lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\,R}{l}\,.$$

Sie ist konstant und kleiner als Null, bleibt also auch für alle x kleiner als Null. Es liegt tatsächlich ein Maximum vor:

$$x_{\max} = \frac{l}{2} - \frac{P_2 \cdot a}{2\,R}\,.$$

Um für den gefundenen Wert eine anschauliche Deutung zu erhalten, betrachten Sie Bild 55.

In Bild 55 ist die Resultierende $R = P_1 + P_2 (P_1 > P_2)$ eingezeichnet. Ihr Abstand von der größeren Kraft P_1 sei a_1.

Es gilt
$$P_2 \cdot a = R \cdot a_1,$$
$$a_1 = \frac{P_2 \cdot a}{R}$$
und
$$\frac{a_1}{2} = \frac{P_2 \cdot a}{2R}.$$

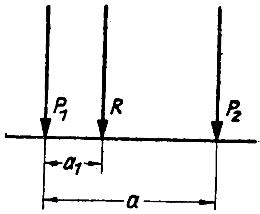

Bild 55

Das ist aber das 2. Glied in dem für $x_{\max}$ gefundenen Ausdruck.

Demnach können Sie schreiben
$$x_{\max} = \frac{l}{2} - \frac{a_1}{2}.$$

P_1 und P_2 müssen also so stehen, daß $x_{\max}$ gleich der halben Deckenbreite vermindert um $\frac{a_1}{2}$ ist.

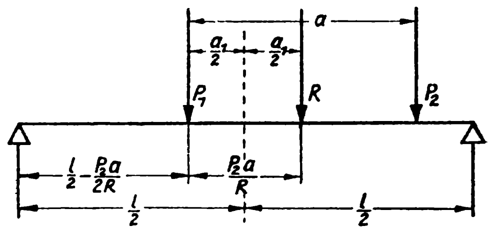

Bild 56

Ergebnis:

Die ungünstigste Lastenstellung ist erreicht, wenn die größere der beiden Kräfte und die Resultierende aus ihnen symmetrisch zur Feldmitte stehen (Bild 56).

Lehrbeispiel 56

In einem Arbeitsraum, in dem 2 Arbeiter tätig sind, soll ein Materialschrank an der Rückwand des Zimmers eingebaut werden. Beide Arbeiter legen den Weg zum Materialschrank gleich oft zurück und bewegen sich mit gleicher, konstanter Geschwindigkeit. An welcher Stelle der Wand ist der Schrank einzubauen, wenn der Zeitverlust durch das Heranschaffen des Materials an den Arbeitsplatz ein Minimum sein soll? Die Lage der Arbeitsplätze der beiden Arbeiter ist aus Bild 57 zu erkennen.

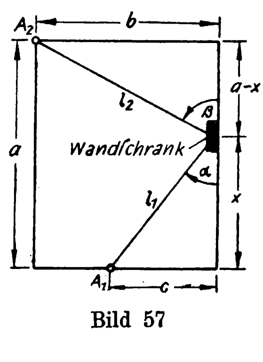

Bild 57

Lösung:

Der Zeitverlust ist dann am geringsten, wenn die Summe der Wege ein Minimum ist. Die Strecke, die die Arbeiter A_1 und A_2 zurückzulegen haben, bezeichnen wir mit l_1 und l_2.

Sie haben also für
$$L = l_1 + l_2$$
das Minimum zu ermitteln.

Aus Bild 57 folgt: $l_1 = \sqrt{c^2 + x^2}, \quad l_2 = \sqrt{b^2 + (a - x)^2}$

und damit $L = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (a - x)^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{2\sqrt{c^2 + x^2}} + \frac{2(a - x)(-1)}{2\sqrt{b^2 + (a - x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (a - x)^2} - (a - x)\sqrt{c^2 + x^2}}{\sqrt{c^2 + x^2}\,\sqrt{b^2 + (a - x)^2}}$$

Für einen Extremwert muß $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0$ sein:

$$\begin{aligned}
x\sqrt{b^2 + (a - x)^2} - (a - x)\sqrt{c^2 + x^2} &= 0,\\
x^2[b^2 + (a - x)^2] &= (a - x)^2(c^2 + x^2),\\
x^2b^2 + x^2(a - x)^2 &= (a - x)^2c^2 + (a - x)^2x^2,\\
x^2(b^2 - c^2) + 2ac^2x - a^2c^2 &= 0,\\
x_{1;2} &= -\frac{ac^2}{b^2 - c^2} \pm \frac{\sqrt{a^2c^4 + a^2c^2(b^2 - c^2)}}{b^2 - c^2},\\
x_{1;2} &= \frac{-ac^2 \pm abc}{b^2 - c^2},
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-ac^2 + abc}{b^2 - c^2} = \frac{ac(b - c)}{(b + c)(b - c)} = \underline{\underline{\frac{ac}{b + c}}},$$

$$x_2 = \frac{-ac^2 - abc}{b^2 - c^2} = \frac{-ac(c + b)}{(b + c)(b - c)} = \underline{\underline{\frac{-ac}{b - c}}}$$

Im Falle $b > c$ entfällt x_2 für unsere praktische Auswertung, da x nicht negativ sein kann.

Sie müssen noch nachprüfen, ob für x_1 wirklich ein Minimum vorliegt. Dazu bilden Sie die zweite Ableitung:

$$L''(x) = \frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2} = \frac{c^2[b^2 + (a - x)^2]\sqrt{b^2 + (a - x)^2} + b^2(c^2 + x^2)\sqrt{c^2 + x^2}}{(c^2 + x^2)[b^2 + (a - x)^2]\sqrt{c^2 + x^2}\,\sqrt{b^2 + (a - x)^2}}.$$

In $L''(x)$ treten nur Summen und Produkte quadratischer Ausdrücke auf. Die Wurzeln sind ihrer geometrischen Bedeutung nach positiv. Daher ist $L''(x) > 0$ für alle x. Es liegt somit tatsächlich ein Minimum vor.

Zahlenbeispiel: $a = 5\,\mathrm{m}; \quad b = 4\,\mathrm{m}; \quad c = 2\,\mathrm{m}$

Daraus folgt: $x = \frac{ac}{b + c} = \frac{5 \cdot 2}{4 + 2}\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{1{,}67\,\mathrm{m}}}.$

$$L_{\min} = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (a - x)^2} = \left[\sqrt{4 + \frac{25}{9}} + \sqrt{16 + \frac{100}{9}}\right]\mathrm{m} \approx \underline{\underline{7{,}8\,\mathrm{m}}}$$

Zum Abschluß soll noch untersucht werden, wie groß α und β (vgl. Bild 57) für den Fall des minimalen Weges werden.

Es ist $\tan\alpha = \frac{c}{x} = \frac{c(b + c)}{ac} = \frac{b + c}{a}$

und $\tan\beta = \frac{b}{a - x} = \frac{b}{a - \frac{ac}{b + c}} = \frac{b(b + c)}{ab + ac - ac} = \frac{b + c}{a}.$

Aus $\tan\alpha = \tan\beta$ folgt auch $\alpha = \beta$.

Nach dem *Fermatschen Prinzip* wird ein Lichtstrahl an einem Spiegel so reflektiert, daß die für die Strecke zwischen Anfangs- und Endpunkt benötigte Zeit ein Minimum wird.

Betrachten Sie l_1 und l_2 als einen reflektierten Lichtstrahl, so stellt unsere Rechnung die Herleitung des Reflektionsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip dar. In ähnlicher Weise läßt sich das Snelliussche Brechungsgesetz herleiten.

4.5 Das Newtonsche Näherungsverfahren

Die Bestimmung von Nullstellen bei rationalen Funktionen höheren als dritten Grades und bei transzendenten Funktionen ist mit den Ihnen bekannten elementaren Mitteln nicht möglich. Andererseits verursacht die Anwendung der „Regula falsi" häufig einen erheblichen Zeit- und Rechenaufwand. Im folgenden lernen Sie ein von Newton entwickeltes Näherungsverfahren kennen, das Sie in derartigen Fällen schneller zum Ziel führt.

Da die Wurzeln einer algebraischen oder transzendenten Gleichung mit den Nullstellen der zugehörigen Funktion identisch sind, ist das Newtonsche Näherungsverfahren nicht nur eine Methode zur Nullstellenbestimmung, sondern auch zur Berechnung von Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Die Nullstellen der quadratischen Funktion

$$y = x^2 + ax + b$$

erhalten Sie z. B., indem Sie die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

bestimmen. Die Nullstellen der Funktion und die Wurzeln der Gleichung sind

$$x_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Die Wurzeln der meisten Gleichungen lassen sich *nicht* durch elementare Verfahren finden. Allgemeine Lösungsverfahren gibt es nur für ganze rationale Gleichungen 1., 2., 3. und 4. Grades. Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und 4. Grades sind aber schon so unbequem, daß man gewöhnlich auf sie verzichtet. Sie lernen sie deshalb auch nicht kennen. Gleichungen höheren als 4. Grades sowie transzendente und gemischte Gleichungen lassen sich nur in Sonderfällen elementar lösen. So ergibt $x^5 - 32 = 0$ die Lösung $x = \sqrt[5]{32} = 2$. Im allgemeinen ist man aber auf Näherungsverfahren angewiesen.

Sie dürfen keineswegs denken, daß Näherungsverfahren in der Mathematik zweitrangige oder minderwertige Methoden darstellen. Näherungsverfahren sind mathematisch exakte Rechenverfahren, die die Lösungen in einem unendlich fortsetzbaren Prozeß mit jeder gewünschten Genauigkeit annähern. Sie sind vor allem für Zwecke der Praxis anderen Verfahren völlig gleichwertig, ja diesen infolge geringeren Arbeitsaufwandes oftmals überlegen.

Für die Anwendung des Newtonschen Näherungsverfahrens muß die gesuchte Nullstelle in erster Annäherung bekannt sein. Diesen ersten Näherungswert können

Sie durch Anwenden eines graphischen Lösungsverfahrens oder durch Auswerten der Funktion erhalten. Voraussetzung für die Anwendung des Newtonschen Näherungsverfahrens ist, daß die Funktion zwischen dem Näherungswert und der Nullstelle keine Unstetigkeiten, Extremwerte oder Wendepunkte besitzt.

Für die Funktion

$$y = x^2 + \frac{1}{x} - 3$$

erhalten Sie z. B. auf graphischem Wege erste Näherungswerte der Nullstellen, indem Sie die Schnittpunkte der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 3$ und $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ ermitteln (Bild 58).

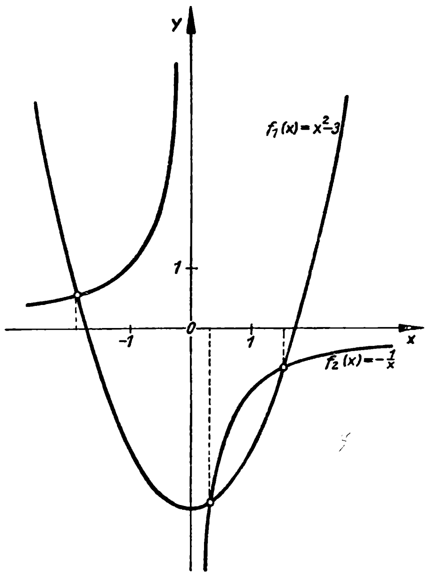

Bild 58

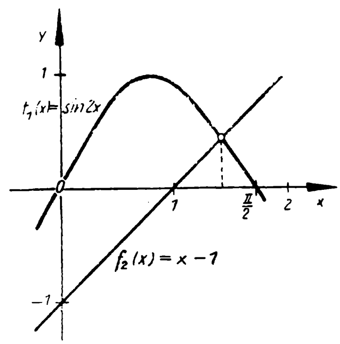

Bild 59

Für diese gilt nämlich $f_1(x) = f_2(x)$ und damit $x^2 - 3 = -\frac{1}{x}$. Hieraus folgt aber die obenstehende Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0.$$

Aus Bild 58 lesen Sie ab

$$x_{N1} \approx -1{,}9, \quad x_{N2} \approx 0{,}3, \quad x_{N3} \approx 1{,}5.$$

Auf ähnlichem Wege erhalten Sie für die Nullstelle der Funktion

$$y = \sin 2x - x + 1$$

durch Ermittlung der Schnittpunkte der Teilfunktionen $f_1(x) = \sin 2x$ und $f_2(x) = x - 1$ (Bild 59) den Näherungswert:

$$x_N \approx 1{,}4.$$

Nun kann mit dem Newtonschen Verfahren begonnen werden. Um die Theorie dieses Näherungsverfahrens zu verstehen, betrachten Sie Bild 60. Die vorgelegte Funktion $y = f(x)$ habe die exakte Nullstelle $\bar{x}$. Hierfür sei ein erster Näherungswert x_0 ermittelt. Setzen Sie diesen in die Funktionsgleichung ein, so erhalten Sie $y_0 = f(x_0) \neq 0$. Legen Sie nun an $y = f(x)$ im Punkte $(x_0; y_0)$ die Tangente, so schneidet diese die x-Achse in x_1. Der Anstieg der Tangente ist $\tan \alpha = f'(x_0)$.

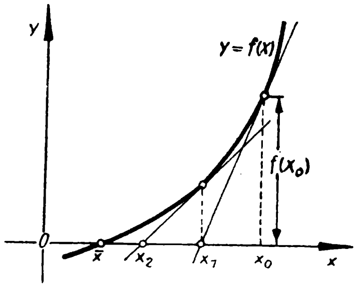

Bild 60

Aus Bild 60 entnehmen Sie

$$\tan \alpha = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Hieraus folgt
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Wir müssen nun untersuchen, ob x_1 einen besseren Näherungswert für $\bar{x}$ darstellt als x_0. In Bild 60 liegt x_1 *zwischen* x_0 und der Nullstelle $\bar{x}$. In diesem Falle stellt also x_1 eine bessere Näherung dar. In Bild 61a liegt x_1 *nicht* zwischen x_0 und $\bar{x}$. Es läßt sich keine Aussage darüber machen, ob x_1 näher an $\bar{x}$ liegt als x_0. Wird

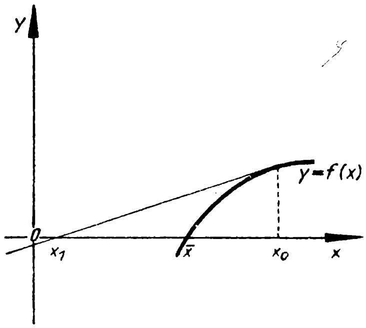

Bild 61a

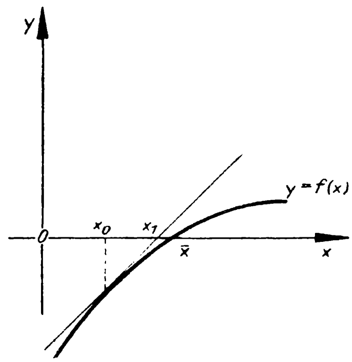

Bild 61b

dagegen der Ausgangswert links von $\bar{x}$ gewählt (Bild 61b), so liegt wieder x_1 zwischen x_0 und der Nullstelle und stellt einen besseren Näherungswert dar.

Wie Sie sehen, müssen Sie stets den Ausgangswert x_0 so wählen, daß x_1 zwischen x_0 und der Nullstelle liegt.

Dazu merken Sie sich folgende Regel:

Es ist
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
ein besserer Näherungswert, wenn $f(x_0)$ und $f''(x_0)$ gleiches Vorzeichen haben bzw. wenn $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ ist.

Wir wollen diese Regel bei den Bildern 60, 61a und 61b überprüfen:

In Bild 60 ist $f(x_0) > 0$, $f(x)$ ist konvex von unten, also ist $f''(x_0) > 0$ und damit $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

In Bild 61a ist $f(x_0) > 0$, $f(x)$ ist konkav von unten, also ist $f''(x_0) < 0$ und damit $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$.

In Bild 61b ist $f(x_0) < 0$, $f(x)$ ist konkav von unten, also ist $f''(x_0) < 0$ und damit $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Wegen $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$ ist es in Bild 61a nicht sicher, ob der Ausgangswert x_0 zu einer besseren Näherung führt.

Haben Sie eine Näherung x_1 erhalten, so ergibt sich die nächste mit

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} .$$

Allgemein können Sie schreiben

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (18)$$

Auf diesem Wege kommen Sie durch wiederholte Annäherung immer näher an den genauen Wert der Nullstelle heran. In der Praxis werden Sie meist schon bei der 1. oder 2. Annäherung die geforderte Genauigkeit erhalten, sofern Sie x_0 genügend nahe bei $\bar{x}$ gewählt haben. Eine schlechte Annäherung oder gar ein Entfernen vom genannten Wert sind Anzeichen von Rechenfehlern oder eines falsch gewählten Anfangswertes.

Für die praktische Durchführung des Verfahrens stellt man (wie bei allen numerischen Rechnungen) den gesamten Rechengang in einem Schema wie dem nachstehenden zusammen, damit man keinen Zahlenwert verliert, die Arbeit systematisiert und eine gute Kontrollmöglichkeit hat.

x	Zwischenrechnung	$y = f(x)$	Zwischenrechnung	$y' = f'(x)$	$-\frac{f(x)}{f'(x)}$	$y'' = f''(x)$
x_0	....	$y_0 = f(x_0)$	....	$y_0' = f'(x_0)$	$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	$y_0'' = f''(x_0)$
x_1		$y_1 = f(x_1)$	....	$y_1' = f'(x_1)$	$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$y_1'' = f''(x_1)$
x_2		$y_2 = f(x_2)$	....	$y_2' = f'(x_2)$	$-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$y_2'' = f''(x_2)$
.						
.						
.						

Lehrbeispiel 57

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $y = x^2 + \frac{1}{x} - 3$!

Lösung:

Aus Bild 58 lesen Sie ab:

$$x_{N_1} \approx -1{,}9, \quad x_{N_2} \approx 0{,}3, \quad x_{N_3} \approx 1{,}5.$$

Aus der Nullstellenbedingung $y = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0\,.$$

Sie beseitigen x im Nenner durch Multiplikation der Gleichung mit x:

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Nach dieser Vereinfachung untersuchen Sie jetzt die Funktion

$$\bar{y} = x^3 - 3x + 1,$$

die die gleichen Nullstellen besitzt wie $y = x^2 + \frac{1}{x} - 3$.

Sie differenzieren die neue Funktion:

$$\bar{y}' = 3x^2 - 3,$$
$$\bar{y}'' = 6x.$$

Durch die vorgenommene Vereinfachung haben Sie den Vorteil, bei der Berechnung der einzelnen Funktionswerte das Hornersche Schema anwenden zu können. Von $\bar{y}''$ brauchen Sie nur das Vorzeichen, das in diesem Falle immer gleich dem Vorzeichen von x ist. Für die Rechnung legen Sie sich das vorher gezeigte Schema an. Das Ihnen bekannte Horner-Schema ist hier weggelassen.

x	$f(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$-\frac{f(x)}{f'(x)}$
$-1{,}9$	$-0{,}16$	< 0	7,83	0,02
$-1{,}88$	0,00			
0,3	0,13	> 0	$-2{,}73$	0,047
0,347	0,00			
1,5	$-0{,}125$	> 0	als Ausgangswert ungünstig, da $f(1{,}5) \cdot f''(1{,}5) < 0$	
1,6	0,296	> 0	4,68	$-0{,}063$
1,537	0,02	> 0	4,09	$-0{,}005$
1,532	0,000			

Die Nullstellen sind also

$$x_{N_1} = -1{,}88, \quad x_{N_2} = 0{,}347, \quad x_{N_3} = 1{,}532.$$

Aus dem Schema erkennen Sie:

Beim Einsetzen von $x_0 = -1{,}9$ als Näherungswert in Formel (18) erhalten Sie eine Korrektur von 0,02, das ist bereits eine sehr kleine Korrektur. Die zweite

Annäherung mit $x_1 = -1{,}88$ bringt Sie deshalb schon sehr nahe an die Nullstelle heran.
Für die Ermittlung der Nullstelle, deren erster Näherungswert $x_0 = 0{,}3$ war, kommen Sie ebenfalls mit einer Näherung aus. Für eine weitere Näherung reicht die Genauigkeit des Rechenstabes nicht aus. Sie müßten mit Hilfe von Tabellen oder schriftlich rechnen. Allerdings kommt es ganz auf die Aufgabenstellung an, ob man sich mit dem Näherungswert $x_1 = 0{,}347$ nicht bereits begnügen kann, da $f(x_1)$ schon sehr nahe bei Null liegt.
Das Einsetzen des auf graphischem Wege ermittelten Näherungswertes $x_0 = 1{,}5$ führt auf $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$. Trotzdem er näher an der Nullstelle liegt als $x_0 = 1{,}6$, wählt man $x_0 = 1{,}6$ als Ausgangswert, da nicht sicher ist, ob $x_0 = 1{,}5$ zu einer weiteren Näherung führt.
Grundsätzlich werden Sie erkannt haben, daß die Berechnung an Hand des Schemas und mit Hilfe des Rechenstabes verhältnismäßig einfach ist. Jede Näherung liefert eine, höchstens zwei weitere Dezimalstellen für x_{n+1}. Es genügt daher stets, $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ auf zwei geltende Ziffern zu berechnen. Dafür reicht die Genauigkeit des Rechenstabes aus.

Lehrbeispiel 58
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $y = \sin 2x - x + 1$!

Lösung:
Aus Bild 59 lesen Sie ab:

$$x_N \approx 1{,}4.$$

Sie bilden die Ableitungen:

$$y' = 2\cos 2x - 1,$$
$$y'' = -4\sin 2x \qquad (f''(x_N) < 0).$$

Da $2x_N \approx 2{,}8 < \pi$ ist, ist die zweite Ableitung im Bereich der Nullstelle stets < 0. Sie brauchen also $f''(x_n)$ nicht jedesmal zu berechnen, sondern müssen nur darauf achten, daß immer $f(x_n) < 0$ bleibt.
Sie erleichtern sich die Rechnuug, wenn Sie das Schema etwas aufgliedern.

x	$\sin 2x$	$-x+1$	$f(x)$	$\cos 2x$	$f'(x)$	$-\frac{f'(x)}{f(x)}$
1,4 $\triangleq$ 80,2°	0,34	$-0{,}4$	$-0{,}06$	$-0{,}94$	$-2{,}88$	$-0{,}02$
1,38 $\triangleq$ 79,07°	0,3724	$-0{,}3800$	$-0{,}0076$	$-0{,}93$	$-2{,}86$	$-0{,}003$
1,377 $\triangleq$ 78,90°	0,3778	$-0{,}3770$	$-0{,}0008$	$-0{,}93$	$-2{,}86$	0,0003

Da das Glied $-\frac{f(x)}{f'(x)}$ nur noch zu einer Korrektur von 0,0003 führen würde, wir uns aber mit der Rechenstabgenauigkeit begnügen wollen, brechen wir das Näherungsverfahren ab.

Die Nullstelle ist

$$\underline{\underline{x_N = 1{,}377.}}$$

Lehrbeispiel 59

Eine Halbkugel mit dem Radius $r = 1$ dm *wird zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Wie hoch steht das Wasser?*

Lösung:

Das von dem Wasser ausgefüllte Kugelsegment muß gleich dem halben Volumen der Halbkugel sein:

$$V_{\text{Segment}} = \frac{1}{2} V_{\text{Halbkugel}},$$

$$\frac{\pi}{3} h^2(3r - h) = \frac{\pi}{3} r^3.$$

Division durch $\frac{\pi}{3}$ und Umformung ergibt

$$h^3 - 3rh^2 + r^3 = 0.$$

Da $r = 1$ dm ist, erhalten Sie als Gleichung für die Segmenthöhe h

$$h^3 - 3h^2 + 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Nullstellen der Funktion

$$y = f(h) = h^3 - 3h^2 + 1.$$

Sie bilden die ersten beiden Ableitungen:

$$y' = 3h^2 - 6h,$$

$$y'' = 6h - 6.$$

Nach der Aufgabenstellung muß $0 < h < 1$ sein. In diesem Intervall ist $y'' < 0$. Im Gang der Aufgabe muß also $f(h_n) < 0$ bleiben.

Durch Probieren finden Sie als ersten Näherungswert $h_0 = 0{,}7$. Die Funktionswerte berechnen Sie mit dem Hornerschen Schema.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$-\frac{f(x)}{f'(x)}$
0,7	$-0{,}127$	$-2{,}73$	$-0{,}047$
0,653	0,000		

Schon die erste Näherung führt zu einem ausreichenden Ergebnis. Nach der Aufgabenstellung genügt eine Genauigkeit von zwei Dezimalen.

Das Wasser steht $\underline{\underline{0{,}65 \text{ dm}}}$ hoch.

Übungen

37. *Eine Strecke l wurde n-mal gemessen und ergab auf Grund der unvermeidlichen Meßfehler die voneinander abweichenden Werte $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Aus diesen Beob-*

achtungen ist ein Mittelwert x so zu bilden, daß die Summe aus den Quadraten der Abweichungen der Meßwerte vom Mittelwert, also

$$s = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - l_i)^2,$$

ein Minimum wird.

38. a) *Beweisen Sie, daß von allen Dreiecken mit gegebener Grundlinie a und gegebener Höhe h das gleichschenklige den kleinsten Umfang hat!*

b) *Einem geraden Kreiskegel von der Höhe h und vom Grundkreisradius r ist ein anderer gerader Kreiskegel einzubeschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des gegebenen Kegels liegt. Wie sind die Abmessungen des einbeschriebenen Kegels zu wählen, wenn sein Volumen ein Maximum werden soll?*

c) *Einem Halbkreis mit dem Radius r soll ein über dem Durchmesser stehendes Trapez eingezeichnet werden. Wie groß ist die zweite Grundlinie zu wählen, damit der Umfang des Trapezes einen Höchstwert annimmt?*

39. a) *Ein leuchtender Punkt ist vom Mittelpunkt einer Kugel d cm entfernt. Wie ist der Radius der Kugel zu wählen, damit die beleuchtete Kugelkappe möglichst groß wird?*

b) *In einer Nische einer senkrechten Wand steht ein Standbild von der Höhe $h = 2{,}6$ m. Wie weit muß ein Beobachter von der Wand zurücktreten, um das Standbild am deutlichsten zu sehen (d. h. unter einem maximalen Winkel), wenn sich sein Auge $a = 1{,}6$ m und der Fuß des Standbildes $b = 8{,}8$ m über der Horizontalen befinden?*

40. *Ein zylindrischer, oben offener Behälter vom (lichten) Inhalt V und der Wandstärke a ist mit möglichst wenig Material M herzustellen. In welchem Verhältnis müssen lichter Radius r und lichte Höhe h zueinander stehen?*

41. *Die Bremskraft einer Wirbelstromscheibenbremse in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit v sei gegeben durch*

$$K = \frac{a v}{b^2 + v^2}$$

wo $a > 0$ und $b > 0$ und beide konstant sind. Welches ist die größtmögliche Bremskraft?

42. *Aus drei 15 cm breiten Blechstreifen soll eine trapezförmige Dachrinne hergestellt werden. Stellen Sie den Querschnitt als Funktion des Kantenwinkels φ dar!*

a) *Für welchen Winkel φ wird das Fassungsvermögen ein Maximum?*

b) Wie groß ist der Winkel, wenn der Querschnitt 250 cm² *beträgt? (Sie finden die Bestimmungsgleichung* $\sin^4 \varphi - \frac{20}{9} \sin \varphi + \frac{100}{81} = 0$.

Setzen Sie zur Abkürzung $x = \sin \varphi$ *und lösen Sie sodann die Gleichung mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens!)*

43. *Auf einer schiefen Ebene von der Länge l soll eine Kugel hinabrollen und sich dann waagerecht weiterbewegen. Welchen Neigungswinkel muß die schiefe Ebene haben, damit die Kugel möglichst weit rollt?*

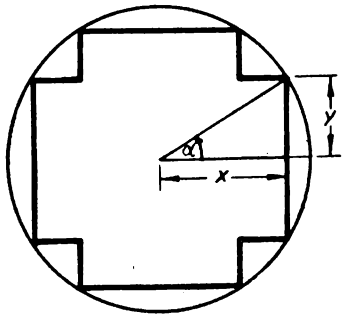

Bild 62

44. *Bei Transformatoren wird das Innere einer Spule (kreisförmig) durch einen Eisenkern von kreuzförmigem Querschnitt ausgefüllt (Bild 62). Wie ist der Querschnitt des Eisenkerns zu dimensionieren, damit der Querschnitt maximal wird? Gegeben ist der Radius r der Spule.*

45. *Ein* 10 m *breites Haus soll mit einem Giebeldach versehen werden. Welcher Neigungswinkel ist für das Dach vorzusehen, wenn das Regenwasser in kürzester Zeit zur Dachrinne abfließen soll?*

Hinweis: Die Beschleunigung auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α *ist* $b = g \cdot \sin \alpha$.

46. *Bestimmen Sie graphisch die Nullstellen der Funktion* $y = x \sin x + x - 1$*! Verbessern Sie mit dem Newtonschen Verfahren den Näherungswert der kleinsten Nullstelle!*

47. *Bestimmen Sie (mit Rechenstabgenauigkeit) die in der Nähe von* $x_0 = 0{,}9$ *liegende Nullstelle der Funktion* $y = x^3 + 2{,}6\,x - 3{,}2$*!*

48. *Bestimmen Sie (mit Rechenstabgenauigkeit) die Abszisse des Wendepunktes der Funktion* $y = \frac{x+2}{x^2 + 2x - 8}$*!*

5 Ableitung der logarithmischen und Exponentialfunktion

Neben den schon im Kapitel 3.7 behandelten trigonometrischen Funktionen, die ebenfalls zu den transzendenten Funktionen zählen, sollen in den folgenden Kapiteln Ableitungen von weiteren transzendenten Funktionen behandelt werden.

5.1 Die Ableitung der logarithmischen Funktion $y = \ln x$

Sie gehen wieder von der Grundformel aus und bilden

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\ln (x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

Da $\ln b - \ln c = \ln \frac{b}{c}$ ist, wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Setzen Sie $\Delta x = \frac{x}{n}$ und beachten Sie, daß $n \cdot \ln b = \ln b^n$ ist so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Da $\Delta x = \frac{x}{n}$ ist, geht für $\Delta x \to 0$ $n \to \infty$. Das gibt

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Im Abschnitt 2.2 lernten Sie, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ ist. Damit wird

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x} \ln \mathrm{e}.$$

Also ist, wegen $\ln \mathrm{e} = 1$,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \tag{19}$$

Dies ist eine der wichtigsten Ableitungen, die Sie sich fest einprägen müssen. Zwischen natürlichen Logarithmen und Logarithmen zur Basis a besteht eine einfache Beziehung. Nach der Erklärung des Logarithmus ist

$$x = \mathrm{e}^{\ln x} \qquad \text{und} \qquad x = a^{{}^a\!\log x},$$

also gilt

$$\mathrm{e}^{\ln x} = a^{{}^a\!\log x}$$

Diese Gleichung liefert, logarithmiert zur Basis e,

$$\ln x \cdot \ln \mathrm{e} = {}^a\!\log x \cdot \ln a$$

oder, logarithmiert zur Basis a,

$$\ln x \cdot {}^a\!\log \mathrm{e} = {}^a\!\log x \cdot {}^a\!\log a.$$

Es ist also, wegen $\ln \mathrm{e} = 1$ und ${}^a\!\log a = 1$,

$${}^a\!\log x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln a} = \ln x \cdot {}^a\!\log \mathrm{e}.$$

Man nennt $\mathrm{M} = \frac{1}{\ln a} = {}^a\!\log \mathrm{e}$ den Modul[1] des Logarithmensystems zur Basis a.

---

[1] lat.: *modulus*, Maß, Maßstab.

Da $\frac{1}{\ln a} = {}^a\log e$ eine Konstante ist, ergibt sich mit Hilfe von (19)

$$\boxed{({}^a\log x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e} \tag{19a}$$

Für das praktische Rechnen sind neben den natürlichen Logarithmen die Logarithmen zur Basis 10 (die Briggsschen Logarithmen) besonders wichtig. Formel (19a) soll deshalb nochmals für diese aufgestellt werden.

$$\boxed{(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e = \frac{1}{x} \cdot 0{,}4343 = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x \cdot 2{,}3026},} \tag{19b}$$

Lehrbeispiel 60

Die folgenden Funktionen sind abzuleiten!

a) $y = \ln(ax)$

Lösung:

Sie schreiben hierfür $y = \ln a + \ln x$. Wegen $(\ln a)' = 0$ ist

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{x}.}}$$

b) $y = \ln \frac{a + bx}{a - bx}$

Lösung:

Sie schreiben $y = \ln(a + bx) - \ln(a - bx)$. Nach der Kettenregel wird

$$y' = \frac{1}{a + bx} \cdot b - \frac{1}{a - bx} \cdot (-b) = b\left(\frac{1}{a + bx} + \frac{1}{a - bx}\right)$$

$$= b\frac{a - bx + a + bx}{(a + bx)(a - bx)}, \quad y' = \underline{\underline{\frac{2ab}{a^2 - b^2x^2}}}.$$

c) $y = 5\ln(x - 7) - 3\ln(x - 2)$

Lösung:

Sie wenden die Kettenregel an und schreiben

$$y' = \frac{5}{x - 7} \cdot 1 - \frac{3}{x - 2} \cdot 1 = \frac{5(x - 2) - 3(x - 7)}{(x - 7)(x - 2)} = \underline{\underline{\frac{2x + 11}{x^2 - 9x + 14}}}.$$

d) $y = \ln(\ln x)$

Lösung:

Durch Anwenden der Kettenregel ergibt sich

$$y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x \cdot \ln x}}}.$$

8*

Der ausführliche Weg wäre:

$$y = \ln z \qquad\qquad z = \ln x,$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \qquad\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

e) *Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven*
$y = f(x) = \ln x$ *und* $y = g(x) = \lg x$?

Lösung:

Sie bestimmen zunächst den Schnittpunkt der beiden Kurven (Bild 63).
Aus $y = \ln x$ folgt $x = e^y$; aus $y = \lg x$ folgt $x = 10^y$.
Durch Gleichsetzung erhalten Sie $e^y = 10^y$.
Diese Gleichung kann nur bestehen für $y = 0$, denn dann ist $e^0 = 10^0 = 1$.

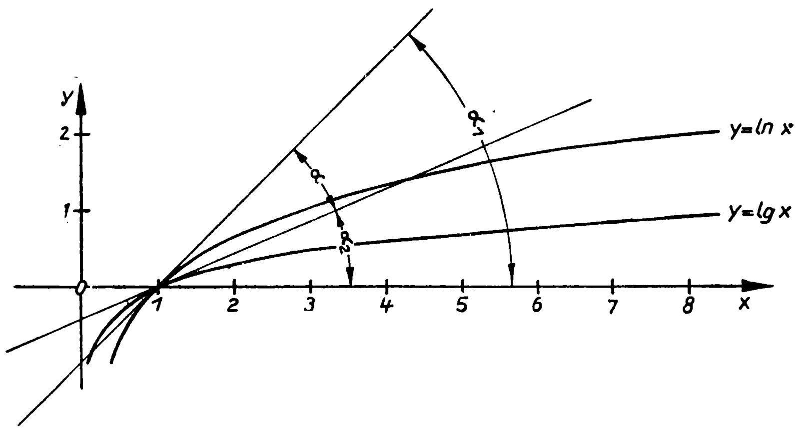

Bild 63

Rechnerisch kommen Sie zum gleichen Ergebnis. Durch Logarithmieren zur Basis 10 erhalten Sie

$$y \cdot \lg e = y \cdot \lg 10,$$
$$y \cdot \lg e = y,$$
$$y \cdot \lg e - y = 0,$$
$$y \cdot (\lg e - 1) = 0, \qquad\qquad | : (\lg e - 1)$$
$$\underline{\underline{y = 0.}}$$

Setzen Sie $y = 0$ in $x = 10^y$ ein, so ist $x = 10^0 = 1$.
Beide Kurven schneiden sich in $\underline{\underline{P(1; 0)}}$.

Sie bestimmen jetzt die Ableitungen und damit die Richtungsfaktoren beider Kurven im Punkte $P(1; 0)$:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \; f'(1) = 1, \text{ d. h., } \tan \alpha_1 = 1, \; \alpha_1 = 45^\circ;$$

$$g'(x) = (\lg x)' = \frac{\lg e}{x} = \frac{0{,}4343}{x}, \quad f'(1) = 0{,}4343,$$

d. h., $\tan \alpha_2 = 0{,}4343, \qquad \alpha_2 = 23^\circ\, 28'$.

Aus Bild 63 lesen Sie ab, daß der Schnittwinkel der beiden Kurven sich ergibt zu $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \underline{\underline{21^\circ\, 32'}}$.

f) $y = \ln f(x)$

Lösung:

Nach der Kettenregel ergibt sich

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$
$$= \underline{\underline{\frac{f'(x)}{f(x)}}}.$$

Übungen

Differenzieren Sie nachstehende Funktionen!

49. *a)* $y = \ln(x^2)$ *b)* $y = (\ln x)^2$ *c)* $y = {}^x\log x$

50. *a)* $y = \ln \sqrt{x}$ *b)* $y = \sqrt{\ln x}$ *c)* $y = \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ *d)* $y = \ln \sqrt{a^2 x^2 + b^2}$

51. *a)* $y = \ln \sin x$ *b)* $y = \ln \cos x$ *c)* $y = \ln \cos 2x$

5.2 Logarithmische Differentiation

Funktionen der Form $y = [g(x)]^{u(x)}$ können nach den uns bisher bekannten Differentiationsregeln nicht differenziert werden. Wie Sie in derartigen Fällen vorzugehen haben, soll jetzt an einem Beispiel gezeigt werden.

Die Funktion $y = x^{\sin x}$ ist zu differenzieren.

Sie logarithmieren zunächst die Funktion:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Sie können beide Seiten nach x ableiten, müssen aber beachten, daß das Glied $\ln y$ als Funktion einer Funktion von x nach der Kettenregel differenziert wird. Sie erhalten

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \cdot$$

Hieraus folgt

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right).$$

Auch bei Funktionen, die Sie nach den Ihnen schon bekannten Regeln differenzieren können, ist es oft vorteilhaft, die logarithmische Differentiation anzuwenden. Wir wollen dies an einem Beispiel veranschaulichen.

Es sei $u = u(x)$, $v = v(x)$ und $w = w(x)$, d. h., u, v und w seien Funktionen von x. Sie sollen die Funktion

$$y = u \cdot v \cdot w$$

nach x ableiten.

Wiederum logarithmieren Sie die Gleichung:

$$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w.$$

Jetzt differenzieren Sie auf beiden Seiten nach x:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v' + \frac{1}{w} \cdot w'$$

oder

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right).$$

Für y wieder $u \cdot v \cdot w$ eingesetzt und die Klammer ausmultipliziert, ergibt

$$y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Dies ist die Ihnen bereits bekannte Formel für die Differentiation eines Produktes von drei Faktoren.

Lehrbeispiel 61

Die Funktion $y = x^x$ ist durch logarithmisches Differenzieren abzuleiten.

Lösung:

Sie logarithmieren: $\ln y = x \cdot \ln x.$

Auf beiden Seiten nach x differenziert:

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y(\ln x + 1),$$

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

Lehrbeispiel 62

Es ist zu beweisen, daß $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ für alle positiven, negativen, ganzen und gebrochenen n gilt.

Lösung:

Sie logarithmieren $y = x^n$ auf beiden Seiten: $\ln y = n \cdot \ln x$.

Sie differenzieren: $\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$,

$$y' = n \cdot y \cdot \frac{1}{x}.$$

Nun ist $y = x^n$, somit folgt $\underline{\underline{y' = n \cdot x^{n-1}}}$.

Wir hatten bei der Ableitung keinerlei Bedingungen (außer $n =$ konst.) an n gestellt; damit ist die Formel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ für alle positiven, negativen, ganzzahligen und gebrochenen n bewiesen.

Lehrbeispiel 63

Differenzieren Sie logarithmisch $y = (\sin x)^{\cos x}$*!*

Lösung:

Sie logarithmieren und erhalten

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x.$$

Daher wird

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

$$y' = y\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right),$$

$$y' = \frac{(\sin x)^{\cos x}(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x)}{\sin x},$$

$$\underline{\underline{y' = (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x).}}$$

Lehrbeispiel 64

Differenzieren Sie logarithmisch $y = x^n \cdot \sin x \cdot \cos x$*!*

Lösung:

Es folgt

$$\ln y = n \cdot \ln x + \ln \sin x + \ln \cos x,$$

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x},$$

$$y' = x^n \sin x \cos x\left(\frac{n}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right),$$

$$= n x^{n-1} \sin x \cos x + x^n \cos^2 x - x^n \sin^2 x$$

$$= n x^{n-1} \sin x \cos x + x^n (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\underline{\underline{y' = x^{n-1}\left(\frac{n}{2} \cdot \sin 2x + x \cdot \cos 2x\right).}}$$

Übungen

Differenzieren Sie logarithmisch

52. a) $y = x^x \cdot \sin x \cdot \cos x$ b) $(\ln x)^y = x$

c) $f(x) = (x \cdot \sin x \cdot \cos x)^x$ d) $y = x^{\frac{1}{x}}$

5.3 Die Ableitung der Exponentialfunktion

Mit Hilfe der logarithmischen Differentiation läßt sich die Ableitung der Exponentialfunktion herleiten.

Sie logarithmieren $y = a^x$ und erhalten

$$\ln y = x \cdot \ln a.$$

Die Differentiation ergibt

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a,$$

$$y' = y \ln a.$$

Nun ist $y = a^x$. Damit erhalten Sie

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a} \qquad (20\,\mathrm{a})$$

Wählen Sie e als Basis, setzen Sie also $a = \mathrm{e}$, so geht Formel (20a) über in

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \ln \mathrm{e}.$$

Da aber $\ln \mathrm{e} = {}^{\mathrm{e}}\log \mathrm{e} = 1$ ist, wird

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x} \qquad (20\,\mathrm{b})$$

Dieses Ergebnis ist sehr bemerkenswert. Sie haben eine Funktion gefunden, die differenziert die Funktion selbst ergibt. Das gleiche gilt für alle Funktionen, die aus $y = \mathrm{e}^x$ durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor a hervorgegangen sind. Da ein konstanter Faktor beim Differenzieren erhalten bleibt, lautet die Ableitung von $y = a\,\mathrm{e}^x$ nämlich ebenfalls $y' = a\,\mathrm{e}^x$.

Auf eine in manchen Büchern verwendete Schreibweise sei noch hingewiesen. Um unübersichtliche Exponenten zu vermeiden, schreibt man für $\mathrm{e}^{f(x)}$ häufig $\exp f(x)$. So ist z. B. $\exp \sin x$ nur eine andere Schreibweise für $\mathrm{e}^{\sin x}$.

Lehrbeispiel 65

$y = \mathrm{e}^{a x + b}$

Lösung:

Durch Anwenden der Kettenregel erhalten Sie

$$y' = \mathrm{e}^{a x + b} \cdot a = \underline{\underline{a \cdot \mathrm{e}^{a x + b}}}.$$

Lehrbeispiel 66

$y = (e^x)^{10}$

Lösung:

Zwei Wege sind möglich.

Sie können die Kettenregel anwenden, indem Sie erst die äußere, die Potenzfunktion, ableiten und dann die innere, die Exponentialfunktion:

$$y' = 10\,(e^x)^9 \cdot e^x = \underline{\underline{10(e^x)^{10}}}.$$

Sie können aber auch erst umformen in $y = e^{10x}$ und dann die Kettenregel anwenden:

$$y' = e^{10x} \cdot 10 = \underline{\underline{10 e^{10x}}}.$$

Die beiden verschieden geschriebenen Ergebnisse sind gleichwertig.

Lehrbeispiel 67

$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$

Lösung:

$$y' = \frac{(2x + 2)\,e^x - (x^2 + 2x + 2)\,e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x\,(2x + 2 - x^2 - 2x - 2)}{e^{2x}}$$

$$y' = \underline{\underline{-\frac{x^2}{e^x}}}$$

Lehrbeispiel 68

$y = e^{e^x}$

Lösung:

Sie können auch schreiben $y = e^{(e^x)}$. Diese Funktion ist nicht zu verwechseln mit $(e^e)^x$, denn es ist $(e^e)^x = e^{ex}$.

Sie können setzen

$$y = e^z, \qquad z = e^x.$$

Es wird $\frac{dy}{dz} = e^z, \qquad \frac{dz}{dx} = e^x,$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = e^{e^x} \cdot e^x.}}$$

Analog dazu ergibt sich für $y = e^{e^{e^x}}$ die Ableitung

$$y' = e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x.$$

Lehrbeispiel 69

$y = 2^x$

Lösung:

$$y' = 2^x \cdot \ln 2 = \underline{\underline{0{,}69315 \cdot 2^x}}$$

Lehrbeispiel 70

$$y = \frac{a^x}{x^a}$$

Lösung:

$$y' = \frac{a^x \ln a \cdot x^a - a^x \cdot a \cdot x^{a-1}}{x^{2a}}$$

$$= \frac{a^x \cdot x^{a-1}\,(x \cdot \ln a - a)}{x^{2a}} = \underline{\underline{\frac{a^x\,(x \cdot \ln a - a)}{x^{a+1}}}}$$

Natürlich läßt sich auch hier die logarithmische Differentiation anwenden:

$$\ln y = x \cdot \ln a - a \cdot \ln x,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a - a \cdot \frac{1}{x} = \frac{x \ln a - a}{x},$$

$$y' = \frac{a^x}{x^a} \cdot \frac{x \ln a - a}{x} = \underline{\underline{\frac{a^x\,(x \ln a - a)}{x^{a+1}}}}.$$

Lehrbeispiel 71

Differenzieren Sie $y = e^{2x} \cdot \sin 2x - a^{2x} \cdot \cos 2x$*!*

Lösung:

Sie wenden Produkt- und Kettenregel an:

$y' = e^{2x} \cdot 2 \cdot \cos 2x + 2\,e^{2x} \cdot \sin 2x - a^{2x} \cdot 2\,(-\sin 2x) - 2a^{2x} \cdot \ln a \cdot \cos 2x,$

$y' = 2e^{2x}\,[\cos 2x + \sin 2x] + 2a^{2x}\,[\sin 2x - \ln a \cdot \cos 2x].$

Übungen

53. *Differenzieren Sie:*

a) $y = e^{\frac{x}{2}}$, *b)* $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$, *c)* $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}}$, *d)* $y = x \cdot e^x$*!*

54. *Differenzieren Sie:*

a) $y = e^{\ln x}$, *b)* $y = e^{\lg x}$, *c)* $y = x^a \; a^{bx}$, *d)* $y = x^\pi$*!*

55. *a) Welchen Winkel mit der positiv gerichteten* x*-Achse bildet die Tangente der Kurve* $y = e^x$ *an der Stelle* $x = 1$*?*

b) Welchen Winkel mit der positiv gerichteten x-Achse bildet die Tangente der Kurve $y = a^x$ an der Stelle $x = 1$, und welchen Wert erhalten Sie für $a = 2$?

56. *Die Magnetisierungskurve von Eisen sei gegeben durch $B = e^{\frac{H}{a+bH}}$, wo H die magnetische Feldstärke, B die Induktion bedeutet; a und b sind Konstante. Für welchen Wert von H hat die Permeabilität $\mu = \frac{B}{H}$ einen größten oder kleinsten Wert?*

5.4 Fehlerrechnung

Die Differentialrechnung und die logarithmische Differentiation leisten wertvolle Dienste in der Fehlerrechnung. Bei Laborversuchen, Prüffeldmessungen usw. wird auf Grund der unvermeidlichen Meßfehler niemals der wahre Wert einer zu messenden Größe erhalten. Als Meßergebnis erhält man immer nur einen angenäherten Wert. Die Abweichung des Meßergebnisses vom wahren Wert der zu messenden Größe hängt von den verwendeten Meßgeräten und von der Versuchsanordnung ab. Man muß häufig mit Werten rechnen, die aus einer Messung erhalten wurden und die deshalb nur näherungsweise richtig sind. In diesem Falle ist es wesentlich zu wissen, wie sehr die Ungenauigkeit eines Meßwertes eine Rechnung in ihrem Ergebnis beeinflussen kann und bis zu welcher Dezimalstelle das Rechnungsergebnis vom Meßfehler beeinflußt wird.

Die Abweichung eines Meßwertes a vom genauen Wert a^* der Meßgröße nennt man den **Fehler** des Meßwertes. Der Fehler ist also die Differenz $a - a^*$ zwischen Meßwert und wahrem Wert. Da aber der wahre Wert einer Meßgröße unbekannt ist, läßt sich der wahre Fehler nicht genau angeben, der Näherungswert a nicht korrigieren. Man kann aber angeben, welchen Wert der wahre Fehler dem Betrag nach erfahrungsgemäß nicht überschreiten wird. Diesen Wert nennt man den **maximalen Fehler**. Wir bezeichnen ihn mit Δa.

Der *maximale Fehler* ist der Betrag, den der wahre Fehler dem Betrag nach nicht überschreitet.

Es gilt also $|a - a^*| \leqq \Delta a$. Das bedeutet, daß der wahre Wert a^* zwischen $a - \Delta a$ und $a + \Delta a$ liegt:

$$a - \Delta a \leqq a^* \leqq a + \Delta a.$$

In der Praxis gibt man einen Meßwert mit

$$a \pm \Delta a$$

an. Diese Schreibweise sagt aus, daß a ein Näherungswert ist, der vom genauen Wert a^* höchstens um Δa nach oben oder unten abweicht.

Beispiel:

Ist der Durchmesser einer Stahlkugel mit $d = (25 \pm 0{,}1)$ mm angegeben, so heißt das, daß der Durchmesser mindestens 24,9 mm und höchstens 25,1 mm beträgt. Die Angabe des maximalen Fehlers kann in verschiedenen Formen geschehen. Man unterscheidet

1. den absoluten Fehler Δa,
2. den relativen Fehler $\dfrac{\Delta a}{a}$,
3. den prozentualen Fehler $\dfrac{\Delta a}{a} \cdot 100\,\%$.

Relativer und prozentualer Fehler werden häufiger gebraucht, da es in der Regel auf das Verhältnis des Fehlers zum gemessenen Wert ankommt.

Genaugenommen, müßte der relative Fehler mit $\dfrac{\Delta a}{a^*}$ angegeben werden. Ist aber Δa klein gegen a (und damit klein gegen a^*), so weicht a nur um ein Geringes von a^* ab. Bezeichnet man mit ε die Verbesserung (Korrektion), die man zu a hinzufügen muß, um a^* zu erhalten, dann gilt

$$\frac{\Delta a}{a^*} = \frac{\Delta a}{a + \varepsilon} = \frac{\Delta a}{a\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{a}\right)} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon}{a}}.$$

Wegen $\Delta a \ll a$, ist auch $\varepsilon \ll a$. Damit ist aber $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon}{a}} \approx 1$. Für $\Delta a \ll a$ gilt damit

$$\frac{\Delta a}{a^*} \approx \frac{\Delta a}{a}.$$

Für die Praxis ist also der relative Fehler für $\Delta a \ll a$ mit $\dfrac{\Delta a}{a}$ hinreichend genau angegeben.

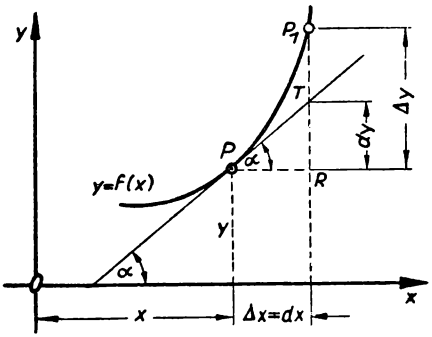

Bild 64

Wir wollen jetzt darauf eingehen, wie man die Differentialrechnung zur Fehlerbestimmung benutzen kann.

Es soll $y = f(x)$ eine in einem bestimmten Intervall stetige Funktion sein.

Ist x mit einem Meßfehler Δx behaftet, so ändert sich der Funktionswert y um Δy. Für kleine Meßfehler Δx ist $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (vgl. Bild 64). Das Differential $\mathrm{d}y$ läßt sich aus dem Dreieck PRT berechnen:

$$\mathrm{d}y = \tan\alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Für kleine Meßfehler Δx gilt also

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x} \tag{21a}$$

Bei sorgfältiger Messung ist Δx hinreichend klein. Man kann daher mit Hilfe der Formel (21a) Aussagen über die Genauigkeit eines Rechenergebnisses machen, das aus einer Rechnung mit einer fehlerhaften Größe erhalten wurde.

Der relative Fehler ist gegeben durch

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x} \tag{21b}$$

oder, falls Sie ihn in Prozenten p angeben wollen,

$$\boxed{p = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x \cdot 100\,\%} \tag{21c}$$

Lehrbeispiel 72

Bei einem Quadrat wurde eine Seite mit $(5 \pm 0{,}1)$ cm *gemessen. Wie groß ist der Flächeninhalt und dessen Fehler?*

Lösung:

Flächeninhalt: $F = a^2$

Differentialquotient: $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a} = 2a$

Fehler des Flächeninhaltes $\Delta F \approx 2a \cdot \Delta a$.

Mit $a = 5$ cm, $\Delta a = 0{,}1$ cm erhalten Sie

$$\underline{F = 25\text{ cm}^2} \quad \text{und} \quad \Delta F \approx 10 \cdot 0{,}1\text{ cm}^2 = \underline{\underline{1\text{ cm}^2}}.$$

Die Fläche beträgt (25 ± 1) cm².

Bild 65 zeigt Ihnen die in der Aufgabe vorliegenden Verhältnisse.

Den Hauptanteil am Fehler des Flächeninhaltes haben die beiden Rechtecke $a \cdot \Delta a$. Ist Δa klein gegen a, so kann Δa^2 vernachlässigt werden. Das zeigt auch die Rechnung:

$$F = (a \pm \Delta a)^2 = a^2 \pm 2a \cdot \Delta a + \Delta a^2.$$

In unserem Fall ergibt sich

$$F = (25 \pm 1 + 0{,}01)\text{ cm}^2.$$

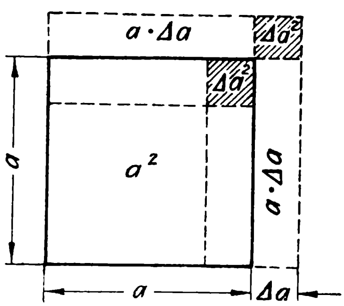

Bild 65

Sie sehen, daß $\Delta a^2 = 0{,}01$ cm² unberücksichtigt bleiben kann. Das stimmt mit der Überlegung überein, daß für kleines Δx der Fehler der Funktion $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ ist.

Lehrbeispiel 73

Bei einer Spiegelablesung mit Skala und Fernrohr wird bei festem Skalenabstand $s = 2$ m *der Ausschlag* $x = 250$ mm *mit einem möglichen Fehler von* $\Delta x = 1$ mm *gemessen. Wie beeinflußt dieser Meßfehler den Wert des Ausschlagwinkels* α*?*

Lösung:

Aus Bild 66 entnehmen Sie die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{x}{s}.$$

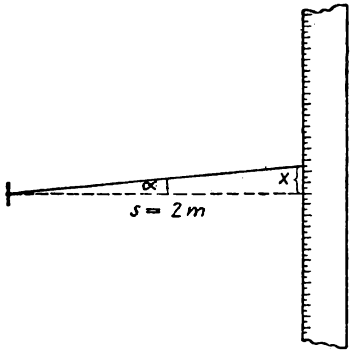

Bild 66

α ist von x abhängig. Sie erhalten also

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\alpha' = \frac{1}{s},$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{s}\cdot\cos^2\alpha = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{s^2}},$$

$$\Delta\alpha \approx \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\cdot\Delta x = \frac{s\cdot\Delta x}{s^2+x^2}.$$

$$= \frac{2000\cdot 1\ \mathrm{mm}^2}{(4\,000\,000+62\,500)\ \mathrm{mm}^2}$$

$$= \frac{2000}{4\,062\,500} = \frac{1}{2031}$$

$$= 0{,}000\,492 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{1'42''}}.$$

Der relative Fehler wird dann, da $\alpha \approx 7°\,7{,}5' \mathrel{\hat{=}} 0{,}124\,35$ ist,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{0{,}000\,49}{0{,}124\,35} \approx 0{,}004 = \underline{\underline{0{,}4\,\%}}.$$

Lehrbeispiel 74

Beim Messen von Zeiten mit der Stoppuhr sind Fehler von 0,1 *Sekunden möglich. Berechnen Sie den Fehler der Messung der Fallstrecke h beim freien Fall, wenn die Zeitmessung mit dem angegebenen Fehler behaftet ist!*

Lösung:

Es ist $\quad h = \frac{g}{2}t^2, \quad$ daraus folgt $\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = g\cdot t.$

Da $\Delta t = 0{,}1$ s, erhalten Sie als Fehler:

$$\Delta h \approx g\cdot t\cdot\Delta t = g\cdot t\cdot 0{,}1\ \mathrm{s} = 0{,}981\,t\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Wir wollen nun noch den relativen Fehler berechnen. Es gilt:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{g\cdot t\cdot\Delta t}{\frac{g}{2}t^2} = \frac{2\cdot\Delta t}{t} = \frac{0{,}2\ \mathrm{s}}{t}.$$

Sie erkennen aus dem Resultat:

Der relative Fehler ist um so kleiner, je größer die Fallzeit gewählt wird $\left(\frac{\Delta h}{h}\right.$ ist der Zeit t umgekehrt proportional$\left.\right)$.

Wesentlich einfacher gestalten sich aber die meisten Aufgaben zur Berechnung des *relativen* Fehlers (sowie des prozentualen Fehlers) bei Verwendung des logarithmischen Differenzierens. Wie Sie gesehen haben, erhält man aus einer Funktion

$$y = f(x)$$

durch Logarithmieren $\qquad \ln y = \ln f(x).$

Beiderseitiges Differenzieren ergibt (da sowohl y als auch $f(x)$ Funktionen von x sind)

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Da bei kleinen Abweichungen Δy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$$

ist, können Sie diesen Wert für y' in der vorstehenden Gleichung einsetzen. Sie erhalten nach Multiplikation beider Seiten mit Δx

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x)\,\Delta x}{f(x)}.$$

Das ist aber wiederum Formel (21b).

Wenden Sie jetzt die logarithmische Differentiation auf die Aufgabe des Lehrbeispiels 74 an!

Die Funktion lautete $\qquad h = \frac{g}{2}\,t^2.$

Logarithmieren ergibt $\qquad \ln h = \ln \frac{g}{2} + 2 \ln t.$

Beachten Sie hierbei, daß Sie die Konstanten zu einem Logarithmus zusammengefaßt stehen lassen können, da eine additive Konstante sowieso beim Differenzieren gleich Null wird.

Nun differenzieren Sie:

$$\frac{h'}{h} = 2 \cdot \frac{1}{t}.$$

Sie setzen $h' \approx \frac{\Delta h}{\Delta t}$ und erhalten

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{2 \cdot \Delta t}{t}.$$

Der Wert $\Delta t = 0{,}1$ s eingesetzt ergibt

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{t}$$

oder als prozentualen Fehler geschrieben

$$p = \frac{0{,}2s}{t} \cdot 100\,\% = \frac{20s}{t}\,\%.$$

Das ist aber das Ergebnis aus Lehrbeispiel 74. Sie erkennen deutlich die Verkürzung des Rechenganges bei Anwenden der logarithmischen Differentiation.

Lehrbeispiel 75

Um den Krümmungsradius einer Plankonvexlinse zu bestimmen, werden die Größen $h = 2$ mm *und* $s = 45$ mm *gemessen (Bild 67). Mit welchem relativen Fehler ist das Ergebnis für den Krümmungsradius behaftet, wenn bei der Messung von h ein maximaler Fehler von* $\Delta h = 0{,}05$ mm *auftritt?*

Lösung:

Bild 67 entnehmen Sie die Beziehung (Höhensatz):

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = (2r - h)\,h = 2rh - h^2.$$

Also wird

$$2rh = h^2 + \frac{s^2}{4} = \frac{4h^2 + s^2}{4},$$

$$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}.$$

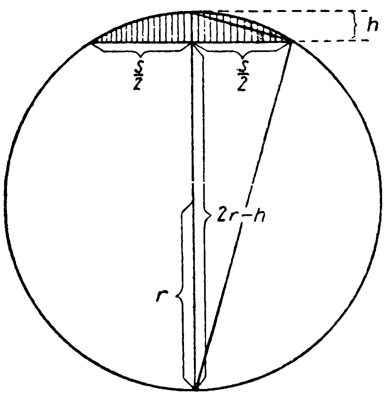

Bild 67

Sie erhalten durch logarithmische Differentiation

$$\ln r = \ln(4h^2 + s^2) - \ln 8 - \ln h,$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{8h}{4h^2 + s^2} - \frac{1}{h}.$$

Da mit Δh nur der Wert bekannt ist, den der tatsächliche Meßfehler dem Betrage nach nicht überschreitet, können Sie dementsprechend auch nur den Wert angeben, den der Fehler des Krümmungsradius dem Betrage nach nicht überschreitet. Deshalb ist für Δr und damit $\frac{\Delta r}{r}$ als Ergebnis der absolute Betrag des errechneten Wertes anzugeben.

Es ist also

$$\frac{\Delta r}{r} = \left|\frac{8h}{4h^2 + s^2} - \frac{1}{h}\right| \cdot \Delta h = \left|\frac{4h^2 - s^2}{4h^3 + hs^2}\right| \cdot \Delta h$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \left|\frac{16 - 2025}{32 + 4050}\right| \cdot 0{,}05 = \left|-\frac{100{,}45}{4082}\right| \approx 0{,}0246 \mathrel{\hat{=}} 2{,}46\,\%.$$

Der Krümmungsradius ist mit einem Fehler von rund 2,5 % behaftet.

Übungen

57. *a) Der Radius einer Kugel ist mit $r \pm \Delta r$ gemessen. Welchen Einfluß hat der Meßfehler auf die Berechnung des Volumens?*

    b) Die größte Querschnittsfläche einer Kugel soll um 4 % vergrößert werden. Um wieviel Prozent ändern sich der Kugelradius und das Kugelvolumen?

58. *Die Spannung eines von Gleichstrom durchflossenen Leiters mit dem Widerstand $R = 10\,\Omega$ wird mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes bestimmt. Wie groß ist der prozentuale Fehler von U, wenn bei der Messung von $I = 5$ A ein maximaler Fehler von $\Delta I = 0{,}2$ A angenommen wird?*

Wiederholungsaufgaben zu 5.1 bis 5.4

Bilden Sie die erste Ableitung von folgenden Funktionen:

59. *a)* $z(t) = \ln (t + \sqrt{1 + t^2})$ *b)* $y = \ln \sin x : \ln \cos x$ *c)* $y = \ln \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2$

    d) $y = \ln \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$ *e)* $f(x) = \ln \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}}$

60. *a)* $y = x^{x \sin x}$ *b)* $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot x^x$ *c)* $y = (\sin x)^{\sin x}$

61. *Welchen Anstieg besitzt die Funktion $y = (2x^2 - 8) \ln 2x$ an der Stelle $x_1 = 0{,}5$ und wie lautet die Gleichung der Tangente an dieser Stelle?*

62. *Die Funktion $y = \ln \frac{x^2 - 1}{x}$ soll auf Nullstellen, Pole, Extremwerte, Wendepunkte und Verhalten im Unendlichen untersucht werden. Der Verlauf der Kurve ist zu zeichnen.*

63. *Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!*

    a) $y = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$ *b)* $f(x) = e^x \cdot \ln x$ *c)* $z(t) = e^{\sin^2 t}$

    d) $y = a \cdot a^x e^x$ *e)* $g(x) = \sin x \cdot e^{\sin x}$

64. *Untersuchen Sie die Funktion $y = e^{-x} \cdot (1 - x^2)$ auf Nullstellen, Pole, Extremwerte und Wendepunkte.*

65. *Diskutieren Sie die Gaußsche Fehlerkurve $y = e^{-x^2}$!*

66. *Für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels gilt die Beziehung $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Die Länge des Pendels soll durch Bestimmung der Schwingungsdauer ermittelt werden. Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn bei der Bestimmung von $T = 2$ s ein Fehler von $0{,}1$ s angenommen werden kann?*

67. *Der Winkel* $\alpha = 45°$, *der von den Strecken* $\overline{CS}$ *und* $\overline{BS}$ *(s. Bild 68) eingeschlossen wird, konnte mit einem Fehler von* 10′ *gemessen werden.* $\overline{BS} = 100$ m, $\gamma = 90°$. *Wie groß ist der prozentuale Fehler bei der Bestimmung der Strecke* $\overline{CS}$?

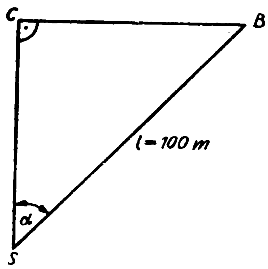

Bild 68

68. *In einem Dreieck ABC sind a, b und der Winkel* γ *gemessen. Welchen Einfluß hat ein Meßfehler* $\Delta\gamma$ *auf die Berechnung der Seite c, wenn a und b als fehlerfrei angenommen werden können?*

69. *Aus fester Basis b und dem gemessenen „parallaktischen" Winkel* γ *(Bild 69) soll die Strecke s berechnet werden.*

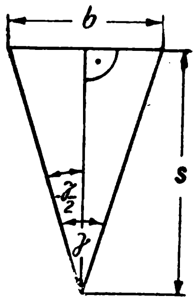

Bild 69

a) *Wie groß ist der Fehler* Δs, *wenn* γ *mit dem Fehler* $\Delta\gamma$ *gemessen wurde?*

b) *Wie genau muß der parallaktische Winkel* γ *gemessen werden, damit sich für eine Strecke* $s = 100$ m *und die Basis* $b = 2$ m *ein maximaler Streckenfehler* $\Delta s = 0{,}03$ m *ergibt?*

Anleitung: Für kleine Winkel γ *kann man* $\sin\frac{\gamma}{2} \approx \frac{b}{2s}$ *setzen.*

III. Grundregeln der Integralrechnung

6 Die Integration

6.1 Die Integration als Umkehrung der Differentiation. Das unbestimmte Integral

Bisher haben Sie zu jeder Rechnungsart die entsprechende Umkehrung kennengelernt, also die Rechnungsart, durch deren Anwendung die vorhergehende wieder aufgehoben werden kann (z. B. Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division usw.). In den letzten Abschnitten beschäftigten Sie sich mit der Differentialrechnung — jetzt sollen Sie die dazugehörige Umkehrrechnungsart, die Integralrechnung[1] studieren.

Sie stellen sich also die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine neue Funktion $F(x)$ zu finden, und zwar derart, daß ihr Differentialquotient

[1] lat.: *functio integra*, die unversehrte Funktion, im Gegensatz zur abgeleiteten Funktion (lat.: *functio derivata*).

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = F'(x)$ mit der vorgegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt. Das heißt: Sie kennen den Differentialquotienten einer Funktion und suchen nun die Funktion selbst.

Symbolisch dargestellt heißt das:

gegebene Funktion:	$f(x)$,
gesuchte Funktion:	$F(x)$,
Zusammenhang:	$F'(x) = f(x)$.

Beispiel:
Gegeben: $f(x) = x^4$

Gesucht ist die Funktion, deren Differentialquotient gleich x^4 ist.

Da sich bei der Differentiation einer Potenz der Exponent um 1 vermindert, muß sich bei der Integration der Exponent um 1 erhöhen. Sie kommen damit im Beispiel auf x^5. Das kann aber noch nicht die Lösung sein, denn die Differentiation ergibt $5x^4$. Den störenden Faktor 5 können Sie zum Fortfall bringen, wenn Sie als Lösung schreiben:

$$F(x) = \frac{x^5}{5}.$$

Probe: $$F'(x) = x^4 = f(x)$$

Gewöhnen Sie sich von vornherein daran, nach jeder Integrationsaufgabe die Probe durchzuführen, indem Sie das Ergebnis differenzieren.

Leibniz legte 1675 für diese neue Rechnungsart das Integralzeichen fest. Er schrieb

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

(lies: Integral f von x $\mathrm{d}x$ oder auch Integral über f von x mal $\mathrm{d}x$).

Den Sinn dieser Schreibweise werden Sie in 6.6 erkennen. Für Sie ist es vorläufig wichtig zu wissen, daß $\mathrm{d}x$ angibt, daß x die Integrationsveränderliche darstellt.

Die gegebene Funktion $f(x)$ heißt **Integrand,**
die gesuchte Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion.**

Demnach können Sie nun für das Beispiel schreiben:

$$\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}.$$

Ist aber $\frac{x^5}{5}$ auch wirklich die einzige Lösung?

Sind nicht auch $\frac{x^5}{5} + 4$ oder $\frac{x^5}{5} - 5$ Lösungen für $\int x^4 \, \mathrm{d}x$?

Führen Sie die Probe durch, indem Sie die soeben gefundenen Ausdrücke differenzieren. Sie erkennen, daß sich als Differentialquotient wiederum der gegebene Integrand x^4 ergibt. Was geschieht denn mit den Konstanten $+ 4$ bzw. $- 5$ bei der Differentiation? Sie fallen als additive Konstanten weg, müssen also beim Integrieren wieder hinzugefügt werden. Da Sie aber dem Integranden nicht ansehen können, welchen Wert diese Konstante besitzen muß, folgern Sie, daß die Integration nicht nur eine, sondern beliebig viele Lösungen ergibt. Alle diese Lösungsfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, die **Integrationskonstante.** Sie soll fortan mit dem Buchstaben C gekennzeichnet werden. Als allgemeine Lösung schreiben Sie deshalb

$$\int x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + C.$$

Wir fassen alles symbolisch zusammen:

$$\boxed{\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C \text{ für } F'(x) = f(x)} \tag{22}$$

Die Unbestimmtheit von C (es kann ja alle möglichen Werte annehmen) gibt dem Ganzen seinen Namen: **das unbestimmte Integral.**

Das unbestimmte Integral $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ setzt sich in seiner Lösung aus der Stammfunktion und der Integrationskonstanten zusammen.

Geometrisch können Sie sich die Bedeutung von C gut erklären.

Zeichnen Sie die Kurven $y = \frac{x^5}{5} + C$ mit $C = -1, 0, +1, +2$.

Wie Sie wissen, bewirken die verschiedenen C-Werte Parallelverschiebungen der Kurve $y = \frac{x^5}{5}$ längs der y-Achse (Bild 70). Selbstverständlich haben dann diese Kurven für gleiche Werte von x auch parallele Tangenten, also gleichen Anstieg. Analytisch ist aber der Tangens des Tangentenwinkels durch den Differentialquotienten gegeben, folglich haben alle diese Kurven als Kurven des Integrals $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ den gleichen Differentialquotienten $y' = x^4$.

6.2 Die Grundintegrale

In der Integralrechnung lassen sich (analog zur Differentialrechnung) die meisten Integranden auf eine Anzahl von Grundtypen zurückführen. Diese Grundintegrale sollen jetzt der Reihe nach aufgestellt werden.

Wie Sie ohne weiteres erkennen, ergibt sich

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

denn für

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ ist } F'(x) = x^n.$$

Ist das aber für alle Werte von n gültig? Eine Ausnahme muß gemacht werden. Denken Sie daran, daß Sie niemals durch Null dividieren dürfen! Der Ausnahmefall ergibt sich also für $n + 1 = 0$ oder $n = -1$, denn damit würde der Nenner der Stammfunktion den Wert 0 annehmen. In diesem Fall ist $f(x) = \frac{1}{x}$ und $F(x) = \ln|x|$.

Sie müssen hierbei stets mit dem absoluten Betrag von x rechnen, da sich die Logarithmen negativer Zahlen nicht durch reelle Zahlen ausdrücken lassen. Es ist also

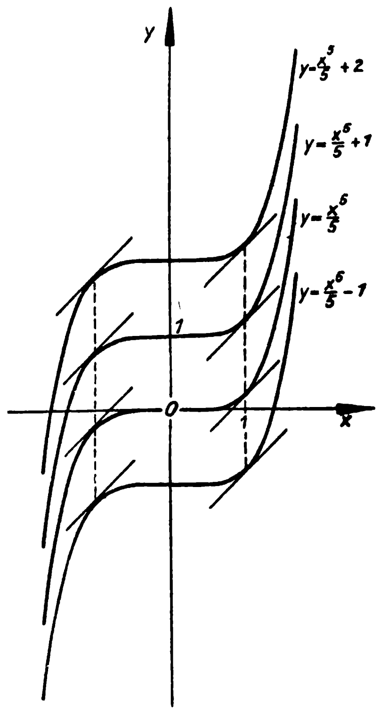

Bild 70

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

Fassen Sie die beiden wichtigen Grundformeln (Grundintegrale) zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1 \\ &\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(23) \\ &(24) \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 76

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^5} \, \mathrm{d}x$*!*

Lösung: $$\int \frac{1}{x^5} \, \mathrm{d}x = \int x^{-5} \, \mathrm{d}x$$

Sie wenden Formel (23) an. Hier ist $n = -5$,

$n + 1 = -4$.

Damit wird

$$\int x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C,$$

$$\underline{\underline{\int \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4x^4} + C.}}$$

Probe:

$$F(x) = -\frac{x^{-4}}{4} + C$$

$$F'(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

Lehrbeispiel 77

Berechnen Sie $\int \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Als Integrand müssen Sie hier $f(x) = 1 = x^0$ ansetzen.

$$\int \mathrm{d}x = \int x^0\,\mathrm{d}x \qquad \text{Hier ist } n = 0,\ n + 1 = 1.$$

$$\int x^0\,\mathrm{d}x = \frac{x^1}{1} + C$$

$$\underline{\underline{\int \mathrm{d}x = x + C}}$$

Führen Sie die Probe durch!

Lehrbeispiel 78

Berechnen Sie $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Hier ist } n = \frac{1}{2},\ n + 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C$$

$$\underline{\underline{\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C}}$$

Lehrbeispiel 79

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$*!*

Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Hier ist } n = -\frac{2}{3},\ n + 1 = \frac{1}{3}.$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

$$\underline{\underline{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} + C}}$$

Nehmen Sie jetzt eine Zusammenstellung der Differentialquotienten der verschiedenen Funktionen zur Hand! Lesen Sie diese Formeln in ihrer Umkehrung! So bekommen Sie beispielsweise aus

$$y = -\cos x \qquad y' = +\sin x$$

durch Umkehrung

$$\sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C. \tag{25}$$

Verfahren Sie in der gleichen Weise weiter, dann erhalten Sie die weiteren **Grundintegrale.**

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{26}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{27}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \tan x + C \tag{28}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{29}$$

Übungen

Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

70. *a)* $\int x^3\,\mathrm{d}x$ *b)* $\int x^7\,\mathrm{d}x$ *c)* $\int x^5\,\mathrm{d}x$ *d)* $\int x^8\,\mathrm{d}x$

71. *a)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ *b)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ *c)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^7}$ *d)* $\int \frac{x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

72. *a)* $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\int \sqrt[5]{x^2}\,\mathrm{d}x$ *c)* $\int \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x$ *d)* $\int x^2\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$

73. *a)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$ *b)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$ *c)* $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ *d)* $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

6.3 Grundformeln der Integralrechnung

Im ersten Abschnitt haben Sie die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung kennengelernt. Wird demnach eine Funktion erst integriert und anschließend wieder differenziert, so muß die ursprüngliche Funktion wieder erscheinen. Symbolisch läßt sich dieser Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x).$$

Das ist nicht etwa eine neue Formel, sondern nur eine andere Darstellung des in Formel (22) gegebenen Sachverhalts.

Mit dieser Darstellungsweise lassen sich kurz zwei wichtige Grundformeln der Intεgralrechnung beweisen.

a) Konstanter Faktor

Ist der Integrand mit einem konstanten Faktor multipliziert, so kann der Faktor vor das Integral gesetzt werden.

$$\boxed{\int a \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{30}$$

Differenzieren Sie zum Beweis beide Seiten der Formel:

linke Seite: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int a\, f(x)\,\mathrm{d}x = a\, f(x)$,

rechte Seite: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, a \int f(x)\,\mathrm{d}x = a\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = a\, f(x)$.

Bei der Differentiation der rechten Seite war zu beachten, daß ein konstanter Faktor beim Differenzieren erhalten bleibt und demnach vor das Differentiationssymbol gesetzt werden kann.

Lehrbeispiel 80

Berechnen Sie $\int 4x^5\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int 4x^5\,\mathrm{d}x = 4\int x^5\,\mathrm{d}x = 4\,\frac{x^6}{6} + C$$

$$\underline{\underline{\int 4x^5\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,x^6 + C}}$$

Führen Sie die Probe durch!

b) Integral einer Summe

Eine Summe wird integriert, indem man jeden Summanden einzeln integriert.

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x} \tag{31}$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Regel für die Differentiation einer Summe. Sie führen den Beweis, indem Sie beide Seiten differenzieren:

linke Seite: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = f(x) + g(x)$,

rechte Seite: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int g(x)\,\mathrm{d}x$

$= f(x) + g(x)$.

Aus der Gleichheit der Differentialquotienten der beiden Seiten von (31) können Sie nun wieder auf die Richtigkeit von (31) schließen.

Lehrbeispiel 81

Berechnen Sie $\int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.}}$$

Es ist üblich, nur eine Integrationskonstante zu schreiben, da ja ursprünglich von *einem* Integral ausgegangen wurde. Sie können sich das auch folgendermaßen erklären: Die beiden Integrale der rechten Seite ergeben die Integrationskonstanten C_1 und C_2, die Sie aber zu einer gemeinsamen Konstanten C zusammenfassen können.

$$\begin{aligned} \int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4} + C_1 + \frac{x^3}{3} + C_2 \qquad C_1 + C_2 = C \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 82

Berechnen Sie $\int \left(x^2 + x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C}} \end{aligned}$$

Verknüpfen Sie die unter a) und b) gebrachten Regeln im folgenden Beispiel!

Lehrbeispiel 83

Berechnen Sie $\int (8x^3 + 4x - 3)\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \int (8x^3 + 4x - 3)\,\mathrm{d}x &= \int 8x^3\,\mathrm{d}x + \int 4x\,\mathrm{d}x - \int 3\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int x^3\,\mathrm{d}x + 4\int x\,\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x \\ &= 8\,\frac{x^4}{4} + 4\,\frac{x^2}{2} - 3x + C \\ &= \underline{\underline{2x^4 + 2x^2 - 3x + C}} \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 84

Berechnen Sie $\int (3 \cos x - 4 \sin x)\, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (3 \cos x - 4 \sin x)\, \mathrm{d}x &= \int 3 \cos x\, \mathrm{d}x - \int 4 \sin x\, \mathrm{d}x \\ &= 3 \int \cos x\, \mathrm{d}x - 4 \int \sin x\, \mathrm{d}x \\ &= \underline{\underline{3 \sin x + 4 \cos x + C}}\end{aligned}$$

Übungen

74. *a)* $\int (5x^4 - 3x^2 - 2x + 3)\, \mathrm{d}x$ *b)* $\int (2x^5 - 6x^3 - 5x - 2)\, \mathrm{d}x$

75. *a)* $\int \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x$ *b)* $\int \left(2x + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}\right) \mathrm{d}x$

76. *a)* $\int \left(1 + 2 \sqrt[3]{x^2}\right) \mathrm{d}x$ *b)* $\int \left(4 \sqrt{x^3} - 5 \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$

77. *a)* $\int \left(\frac{7x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x$ *b)* $\int \left(\frac{1}{3x\sqrt{x}} - \frac{5x}{2x^2\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$

78. *a)* $\int (x^2 - 3)^2\, \mathrm{d}x$ *b)* $\int \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2 \cdot x\, \mathrm{d}x$

Anleitung: Bilden Sie zuerst die Quadrate.

79. $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{4}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x$

Zusammenfassung

Die Integralrechnung stellt die Umkehrung der Differentialrechnung dar.

Unbestimmtes Integral: $\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C$

Dabei ist der Integrand $f(x)$ gegeben, während die Stammfunktion $F(x)$ so gesucht ist, daß $F'(x) = f(x)$ ist.

C ist die willkürliche Integrationskonstante.

Für die Durchführung der Integration gelten die Sätze:

Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gesetzt werden. Eine Summe wird gliedweise integriert.

6.4 Das bestimmte Integral

Im Abschnitt 6.1 haben Sie eine geometrische Deutung des unbestimmten Integrals kennengelernt. Danach ergab sich bei der unbestimmten Integration infolge der Willkür der Integrationskonstanten C eine Schar parallel verschobener Kurven.

Jetzt soll die Aufgabe gelöst werden, jeweils eine bestimmte Kurve aus der Schar herauszugreifen. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelungen ist, den zu dieser Kurve gehörigen Wert der Integrationskonstanten zu ermitteln. Natürlich bedarf es dazu einer Angabe, welche die gesuchte Kurve festlegt. Ausreichend dafür ist die Kenntnis eines Punktes der Kurve.

Danach muß dann die aus dem Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ hergeleitete Funktion $F(x) + C$ für ein bestimmtes x einen bestimmten Wert annehmen.

Es soll z. B. aus der im Bild 70 dargestellten Kurvenschar die Kurve hervorgehoben werden, die durch den Punkt (1; 3) läuft. Es muß also

$$\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + C$$

für $x = 1$ den Wert 3 annehmen. Daraus folgt mit

$$3 = \frac{1^5}{5} + C, \quad C = \frac{14}{5}$$

als Lösungsfunktion

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{14}{5}.$$

Im nächsten Abschnitt ist insbesondere der Wert $x = a$ gegeben, für den die Lösungsfunktion den Wert 0 annimmt. Damit folgt allgemein aus

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

$$0 = F(a) + C,$$

also

$$C = -F(a),$$

wobei $F(a)$ bedeutet, daß für x der Wert a in der gefundenen Stammfunktion eingesetzt worden ist. Die geforderte Lösung lautet

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a).$$

Da jetzt die willkürliche Integrationskonstante durch den Wert $-F(a)$ ersetzt worden ist, nennt man dieses Integral das **bestimmte Integral.** Die hierzu immer erforderliche Angabe des Wertes x, für den die Lösung den Wert Null annehmen soll, macht man am Integrationszeichen selbst in der Form

$$\int_{x=a}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x} = F(x) - F(a)$$

oder kürzer

$$\int_{a}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{x} = F(x) - F(a)$$

kenntlich [lies: Integral $f(x)\,\mathrm{d}x$ von a bis x]. Der jeweils in der Mitte stehende

Ausdruck soll dabei andeuten, daß zunächst (wie beim unbestimmten Integral) die Stammfunktion zu bilden ist, in die dann nacheinander die „obere Grenze“ x und die „untere Grenze“ a eingesetzt werden. Von beiden Ausdrücken ist dann die Differenz zu bilden. Sie erkennen, daß die Lösung eines derartigen bestimmten Integrals eine Funktion der oberen Grenze darstellt, deren Differentialquotient gleich dem Integranden ist.

Lehrbeispiel 85

Es ist $\int\limits_2^x (2x+1)\,\mathrm{d}x$ *zu lösen!*

Lösung:

$$\int\limits_2^x (2x+1)\,\mathrm{d}x = (x^2+x)\Big|_2^x = x^2+x-(2^2+2)$$
$$= x^2+x-6$$

Probe:

1. Die Differentiation der Lösung ergibt $2x+1$.
2. Setzen Sie für x den Wert 2 ein, so nimmt die Lösung den Wert Null an.

Lehrbeispiel 86

Lösen Sie $\int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}$ *!*

Lösung:

$$\int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_1^x = \ln|x| - \ln 1 = \ln|x| \qquad (\ln 1 = 0)$$

Führen Sie selbst die Probe durch!

6.5 Flächenberechnung durch Integration

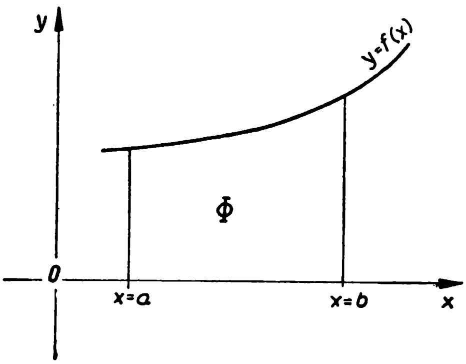

Bild 71

Sie lernen jetzt eine weitere wichtige Anwendung der Integralrechnung kennen. Dazu soll die gegebene Funktion $y = f(x)$ als Kurve dargestellt sein (Bild 71). Vor Ihnen steht die Aufgabe, den Inhalt der Fläche zu ermitteln, die von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten begrenzt wird. Der Flächeninhalt sei mit Φ bezeichnet.

Bei gegebener Begrenzungskurve $y = f(x)$ ist selbstverständlich der Flächeninhalt Φ von der Wahl der beiden seitlichen Begrenzungslinien abhängig. Diese Abhängigkeit sollen Sie untersuchen, indem Sie die rechte Begrenzungslinie parallel verschieben. Halten Sie dazu die linke Begrenzungslinie, die *untere Grenze a*, fest, während Sie die *obere Grenze b* als veränderlich ansehen.

Bezeichnen Sie letztere deshalb mit x, wie es im Bild 72 geschehen ist.

Damit hängt nun der Flächeninhalt von der jeweiligen Lage der oberen Grenze x ab: Der Flächeninhalt ist eine Funktion der oberen Grenze x. Kennzeichnen Sie das kurz symbolisch durch $\Phi = \Phi(x)$. Lassen Sie nun die obere Grenze x um Δx wachsen. Dabei wird dann die Ordinate y um Δy und der Flächeninhalt Φ um $\Delta \Phi$ wachsen. Wie Sie aus dem Bild 72 ablesen können, ist der Flächeninhalt des Streifens nicht kleiner als der des Rechtecks mit der Höhe y und der Breite Δx, aber nicht größer als der des Rechtecks mit der Höhe $y + \Delta y$ und der gleichen Breite Δx.

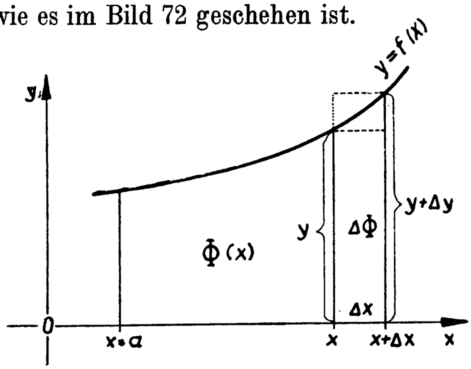

Bild 72

Es ist also
$$y \Delta x \leqq \Delta \Phi \leqq (y + \Delta y) \cdot \Delta x.$$

Dividieren Sie diese Ungleichung durch den positiven Wert Δx:
$$y \leqq \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \leqq y + \Delta y.$$

In der Mitte der Ungleichung steht jetzt der Differenzenquotient $\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}$. Lassen Sie nun Δx gegen Null laufen, dann geht dieser Differenzenquotient in den Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \Phi'(x)$ über, während Δy verschwindet.

Die daraus entstehende Ungleichung
$$y \leqq \Phi'(x) \leqq y$$
kann aber nur dann bestehen, wenn
$$y = \Phi'(x) \qquad \text{oder, da } y = f(x),$$
$$f(x) = \Phi'(x)$$
ist.

Fassen Sie das bisherige Resultat zusammen: Der Differentialquotient $\Phi'(x)$ der Flächenfunktion $\Phi(x)$ wird durch die Funktion $f(x)$ der begrenzenden Kurve dargestellt.

Auf Grund dieses Zusammenhanges und der Definition des Integrals ergibt sich für die Flächenfunktion

$$\Phi(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Hier kann es sich aber nur um ein bestimmtes Integral handeln, denn C kann keinesfalls willkürlich sein, da ja doch der Fläche ein ganz bestimmter Flächeninhalt zukommt. Nun ist aber zur Festlegung des bestimmten Integrals eine Zusatzbedingung erforderlich. Sie gilt es jetzt zu ermitteln. Verschieben Sie dazu die rechte Begrenzungslinie soweit nach links, bis sie mit der linken zusammenfällt. Die Fläche ist dann zu einer Strecke entartet und hat den Inhalt Null. Damit steht auch schon die gesuchte Bedingung fest: Für $x = a$ muß der Flächeninhalt, also die Lösung des Integrals, den Wert Null annehmen. Auf Grund der Betrachtungen im vorhergehenden Abschnitt ist damit

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a).$$

Legen Sie nun die rechte Begrenzungslinie wieder fest, so haben Sie für die obere Grenze x den Wert b einzusetzen und erhalten endgültig für die Fläche Φ

$$\boxed{\Phi = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \qquad (32)$$

Danach haben Sie also zur Berechnung der Fläche Φ in die gefundene Stammfunktion einmal für x die obere Grenze ($x = b$) und dann die untere ($x = a$) einzusetzen und von beiden so gefundenen Werten $F(b)$ und $F(a)$ die Differenz zu bilden.

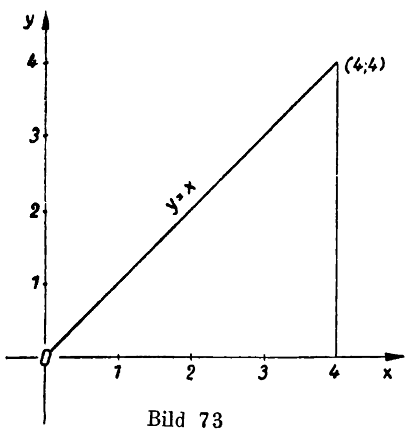

Bild 73

Lehrbeispiel 87

Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche, die durch die Gerade $y = x$, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse im Abstand 4 gebildet wird!

Kurz: Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Geraden $y = x$ zwischen den Grenzen $a = 0$ und $b = 4$ (Bild 73)!

Lösung:

In diesem Beispiel ist also $f(x) = x$. Der Flächeninhalt ergibt sich aus dem bestimmten Integral.

$$\int_{a=0}^{b=4} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8 - 0$$

$$\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{8}}$$

Haben Sie auf den Achsen cm aufgetragen sowie a und b in cm angegeben, so hat die Fläche den Inhalt 8 cm².

Prüfen Sie das Resultat mit Hilfe der Elementar-Mathematik nach!

Lehrbeispiel 88

Berechnen Sie den Trapezinhalt unter der Geraden $y = 4x + 3$ zwischen $a = 1$ und $b = 3$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (4x+3)\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 4x\,\mathrm{d}x + \int_1^3 3\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_1^3 x\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 \mathrm{d}x \\ &= 4\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 3x\Big|_1^3 \\ &= 2\cdot 3^2 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 3 - 3\cdot 1 \\ &= 2\,(9-1) + 3\,(3-1)\end{aligned}$$

$$\int_1^3 (4x+3)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{22}}$$

Sie können auch schreiben: $= \left(4\,\dfrac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^3$

$$\begin{aligned}&= (2\cdot 3^2 + 3\cdot 3) - (2\cdot 1^2 + 3\cdot 1) \\ &= 22.\end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Fläche und prüfen Sie das Ergebnis mit den Formeln der Planimetrie nach!

Lehrbeispiel 89

Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Parabel $y = 2x^2$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 4$ (Bild 74a)!

Lösung:

$$\int_0^4 2x^2\,dx = 2\int_0^4 x^2\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^4$$
$$= \frac{2}{3}4^3 - \frac{2}{3}0^3$$
$$\underline{\underline{\int_0^4 2x^2\,dx = \frac{128}{3}}}$$

Wie groß ist der Inhalt des umschriebenen Rechtecks $OQPP'$?

Während die Grundlinie gleich 4 ist, berechnet sich die Höhe aus $y = 2x^2$ zu $2 \cdot 4^2 = 32$. Die Rechtecksfläche hat den Inhalt 128. Die Fläche unter der Parabel ist demnach gleich dem dritten Teil der Rechtecksfläche. Gleich werden Sie die Frage erheben, ob das nur speziell für die Parabel $y = 2x^2$ gilt oder ob das für alle Parabeln Gültigkeit hat.

Prüfen Sie das an der Parabel $y = cx^2$ mit der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze x_1 nach (Bild 74b)!

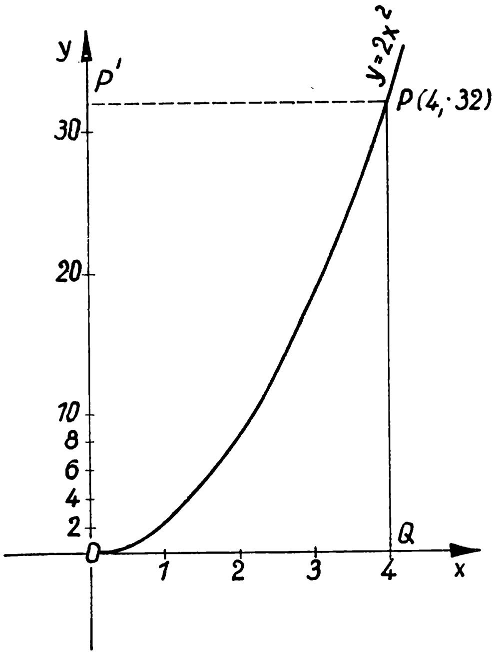

Bild 74a

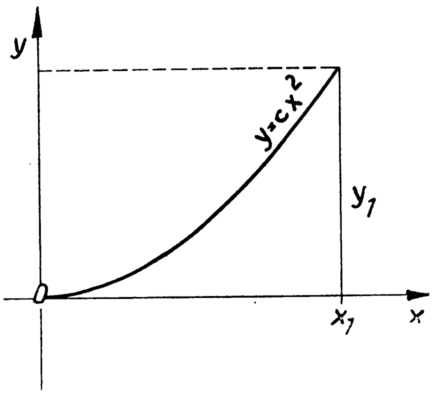

Bild 74b

$$\int_0^{x_1} cx^2\,dx = c\int_0^{x_1} x^2\,dx$$
$$= \frac{c}{3}x^3\Big|_0^{x_1}$$
$$= \frac{c x_1^3}{3}$$

Eliminieren Sie daraus c, indem Sie berücksichtigen, daß

$y_1 = c x_1^2$ oder $c = \frac{y_1}{x_1^2}$ ist.

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{y_1 x_1^3}{3 x_1^2}$$
$$= \frac{1}{3} x_1 y_1$$

Damit haben Sie gefunden: Der Flächeninhalt unter der Parabel ist $\frac{1}{3}$ des Inhaltes des umschließenden Rechtecks, oder: Die Parabel teilt die Rechtecksfläche $x_1 y_1$ im Verhältnis 1 : 2.

Lehrbeispiel 90

Berechnen Sie die Fläche unter der Sinuskurve zwischen $a = 0$ und $b = \pi$ (Bild 75)!

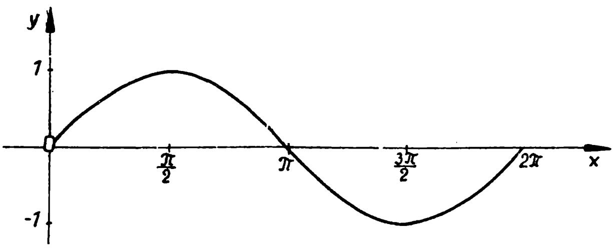

Bild 75

Lösung:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = - \cos x \Big|_0^\pi$$
$$= - \cos \pi - (- \cos 0)$$
$$= - (- 1) - (- 1)$$
$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \underline{2}$$

Achten Sie auf die Vorzeichen!

Bei der Auswertung des bestimmten Integrals können Sie auch so verfahren, daß Sie das Minuszeichen und auch eventuelle Faktoren ausklammern:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = - \cos x \Big|_0^\pi = - (\cos \pi - \cos 0) = 2$$

Dieser 2. Weg ist sicherer.

Beachten Sie den Umstand, daß der Flächeninhalt durch eine einfache rationale Zahl angegeben wird, obwohl die Begrenzung durch eine Kurve erfolgt, die durch eine transzendente Funktion gegeben ist.

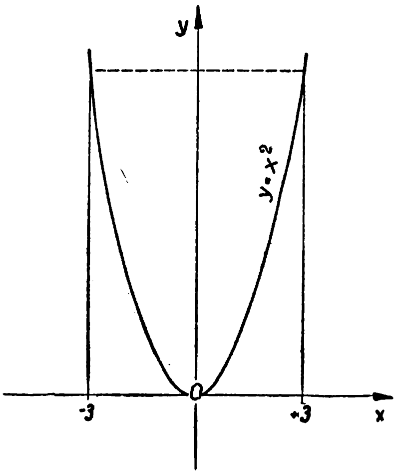

Bild 76

Lehrbeispiel 91

Wie groß ist die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen $a = -3$ und $b = +3$ (Bild 76)?

Lösung:

Auffallend hierbei ist die Beziehung zwischen den Grenzen: $a = -b$. Obere und untere Grenze sind bis auf das Vorzeichen gleich.

Schon das Bild 76 sagt Ihnen, daß die Fläche von der y-Achse halbiert wird, denn die Kurvenäste liegen links und rechts symmetrisch zur y-Achse. Linke und rechte Begrenzung sind gleich weit davon entfernt. Demnach können Sie rechnen

$$\int_{-3}^{+3} x^2\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx,$$

$$2\int_0^3 x^2\,dx = \frac{2}{3}\,x^3\Big|_0^3 = \frac{2}{3}\,(3^3 - 0^3),$$

$$\int_{-3}^{+3} x^2\,dx = \underline{\underline{18}}.$$

Prüfen Sie das Ergebnis nach, indem Sie das linke Integral ohne die Vereinfachung berechnen. Achten Sie dabei auf die Vorzeichen beim Einsetzen der unteren Grenze!

Allgemein können Sie bei allen geraden Funktionen so verfahren, wenn das Integrationsintervall durch den Koordinatenursprung halbiert wird, wenn also $a = -b$ ist.

Das Kennzeichen für gerade Funktionen ist (vgl. Abschnitt 1.4):

$$f(-x) = f(x).$$

Diese Bedingung ist in dem letzten Lehrbeispiel erfüllt, denn die Funktion $y = x^2$ ist gerade:

$$(-x)^2 = x^2.$$

Ist der Integrand eine gerade Funktion, d. h., erfüllt er die Bedingung $f(-x) = f(x)$, so gilt

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx} \tag{33}$$

Lehrbeispiel 92

Berechnen Sie $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$ *!*

Lösung:

Es gilt: $\cos(-x) = \cos x$.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2(1-0)$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{2}}$$

Für die Berechnung von Flächeninhalten durch Integration sind noch einige Besonderheiten zu beachten, auf die Sie in den folgenden Merksätzen dieses Abschnittes aufmerksam gemacht werden.

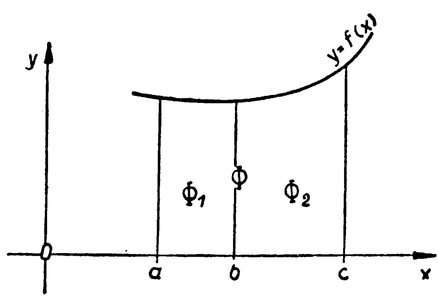

Bild 77

In Bild 77 sei mit Φ der Flächeninhalt der Gesamtfläche bezeichnet, während Φ_1 und Φ_2 die beiden Teilflächen kennzeichnen sollen. Dann gilt

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Drücken Sie die Flächeninhalte durch die ihnen entsprechenden bestimmten Integrale aus, so erhalten Sie

$$\boxed{\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (34)$$

Das Integrationsintervall kann in Teile zerlegt und die Funktion über die einzelnen Teilintervalle integriert werden.

Vertauschen Sie die Grenzen des bestimmten Integrals

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

so wird

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)].$$

Vergleichen Sie die rechten Seiten der letzten zwei Gleichungen, so erkennen Sie:

Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so muß das Vorzeichen des Integrals geändert werden.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{35}$$

Übungen

80. *Prüfen Sie Formel (35) an den Integralen*

$$J_1 = \int_1^3 4x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad J_2 = \int_3^1 4x^2\,\mathrm{d}x$$

nach!

81. *Lösen Sie die bestimmten Integrale:*

a) $\int_2^4 (x^3 + 3x^2 + x - 3)\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$,

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$, *d)* $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{6}} (3\cos x + 4\sin x)\,\mathrm{d}x$*!*

82. *Wie groß ist die Fläche unter der gleichseitigen Hyperbel* $y = \frac{1}{x}$ *zwischen den Grenzen* $a = 1$ *und* $b = 3$*? Zeichnen Sie die Fläche!*

83. *Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve* $y = \mathrm{e}^x$*, den Achsen und der Parallelen zur y-Achse im Abstand b begrenzt wird* ($b > 0$)*!*

84. *Vergleichen Sie den Flächeninhalt der unter der nach rechts geöffneten Parabel* $y = +\sqrt{2px}$ ($p > 0$) *zwischen* $a = 0$ *und* $b = x_1$ *gelegenen Fläche mit dem des umschließenden Rechtecks.*

Anleitung: Verfahren Sie analog Lehrbeispiel 89.

85. *Ein Werkstück von der im Bild 78 angegebenen Form hat die Länge* l cm, *die Dicke* d cm *und die Wichte* γ p/cm^3. *Die gekrümmte Seite hat dabei die Form einer Parabel. Wie schwer ist das Werkstück?*

86. *Wie groß ist die Fläche, die von der Kurve* $y = 3 - 2x - x^2$ *und der x-Achse eingeschlossen wird?*

87. Beweisen Sie Formel (34) mit Hilfe von Formel (32)!

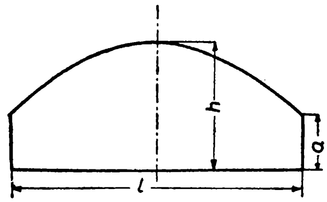

Bild 78

6.6 Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe

In diesem Abschnitt sollen Sie einen anderen Weg der Einführung des bestimmten Integrals kennenlernen. Diese Darstellung ist für die Anwendung der Integralrechnung auf physikalische und technische Probleme von großer Bedeutung.

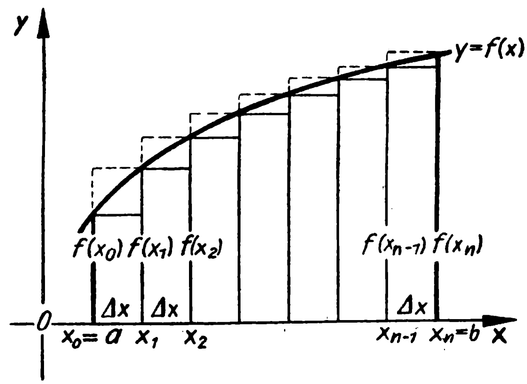

Bild 79

Stellen Sie sich wieder die Aufgabe, den Inhalt der im Bild 79 dargestellten Fläche zu errechnen.

Unterteilen Sie die Fläche Φ in n (der Einfachheit halber) gleiche Streifen mit der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Vervollständigen Sie diese Streifen wie im Bild 79 zu Rechtecken. Der Inhalt Φ_n der so entstehenden „Treppenfläche" stellt dann eine mehr oder weniger genaue Annäherung dar, und zwar ist Φ_n offensichtlich zu klein. Anstatt jeweils die linke Ordinate als Rechteckshöhe zu wählen, hätten Sie auch die rechten Ordinaten nehmen können. Diese Treppenfläche wäre dann etwas zu groß.

Sie berechnen nun den Inhalt der Treppenfläche Φ_n:

$$\Phi_n = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

$$= \sum_{x_k=x_0}^{x_{n-1}} f(x_k)\,\Delta x.$$

Jetzt verfeinern Sie die Teilung, indem Sie die Anzahl n der kleinen Rechtecke immer größer, bzw. die Breite Δx immer kleiner werden lassen. Der treppenförmige Linienzug gleicht sich dann immer mehr der Kurve $y = f(x)$ an, während sich Φ_n immer mehr dem wahren Flächeninhalt Φ nähert. Sie bilden deshalb den Grenzwert von Φ_n mit $\Delta x \to 0$. Dabei wird mit $\Delta x \to 0$ auch $x_{n-1} = x_n - \Delta x$ zu $x_n = b$ werden. Mit $x_0 = a$ erhalten Sie

$$\Phi = \lim_{\Delta x \to 0} \Phi_n = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_k = a}^{b} f(x_k)\, \Delta x\,.$$

Nun wurde doch aber auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen der Flächeninhalt durch das bestimmte Integral dargestellt, also muß der oben gebildete Grenzwert mit diesem bestimmten Integral übereinstimmen.

$$\boxed{\Phi = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_k = a}^{b} f(x_k)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x} \qquad (36)$$

Leibniz ist bei der Aufstellung der Integralrechnung von dem Grenzwert der Summe ausgegangen und hat ihn, in Anlehnung an den Buchstaben S, durch das Integralzeichen symbolisiert.

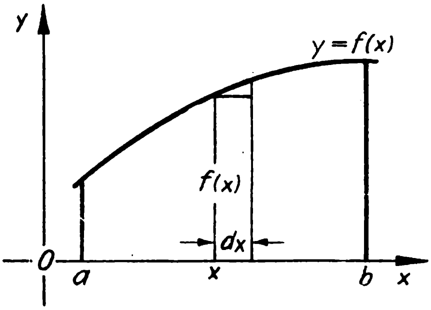

Bild 80

Der in Formel (36) dargelegte Sachverhalt läßt noch eine etwas veränderte Deutung zu, die für spätere Anwendungen wichtig ist.

Die Fläche sei in Streifen zerlegt. Es genügt, einen derartigen Streifen einzuzeichnen (Bild 80). Ist seine Breite dx, so kann sein Flächeninhalt $\Delta\Phi$ näherungsweise durch $f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ersetzt werden.

Dieser Näherungswert, das Flächenelement, sei mit dΦ bezeichnet:

$$\Delta\Phi \approx \mathrm{d}\Phi = f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Sie werden inzwischen schon bemerkt haben, daß die wahren Größen der Teilstücke immer durch ein vorgesetztes Δ gekennzeichnet werden. So bezeichnet z. B. Δy in der Differentialrechnung den Ordinatenzuwachs bei Änderung der Abszisse um $\Delta x = \mathrm{d}x$.

Die Kennzeichnung des Näherungswertes durch den Buchstaben d haben Sie auch schon in der Differentialrechnung in Abschnitt 3.5 kennengelernt, und zwar war dort das Differential dy der Zuwachs der Tangentenordinate bei Änderung des x um $\Delta x = \mathrm{d}x$.

Bedingung für diese Annäherung muß selbstverständlich sein, daß der dabei begangene Fehler mit verschwindender Streifenbreite ebenfalls gegen Null strebt. Aus diesem dΦ gewinnen Sie den Inhalt der Gesamtfläche durch Integration. Denken Sie aber dabei daran, daß dieser Operation ein Grenzübergang, nämlich der Übergang von der Treppenfläche Φ_n zur wirklichen Fläche Φ bzw. der Übergang von der Summe zum Integral zugrunde liegt.

$$\Phi = \int_{\Phi} \mathrm{d}\Phi = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Der an das mittlere Integral angesetzte Buchstabe Φ soll besagen: Die Grenzen für das zur Berechnung dienende rechte Integral sind so zu wählen, daß die gesamte Fläche Φ erfaßt wird. Dazu stellen Sie fest: Die Integrationsveränderliche x (erkennbar an $\mathrm{d}x$) muß dazu von $x = a$ bis $x = b$ laufen.

Wir wollen nun fortan beim Ansatz immer gleich zum Näherungswert und dann direkt zur Integration übergehen. Sie müssen sich aber klar darüber sein, daß eigentlich ein Grenzübergang stattfindet.

Aus der Darstellung des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe läßt sich eine wichtige Eigenschaft des Integrals ableiten:

> Ist im Intervall $a \leqq x \leqq b$ der Integrand negativ, so ist auch das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ negativ.

Da nach Voraussetzung $f(x)$ für alle Werte von x innerhalb des Integrationsintervalls negativ ist, sind alle Summanden $f(x_k)\,\Delta x$ negativ. Damit ist aber auch die Summe und deren Grenzwert, also das bestimmte Integral, negativ.

Lehrbeispiel 93

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -[1 - (-1)] = \underline{\underline{-2}}$$

Der absolute Betrag des Flächeninhalts stimmt erwartungsgemäß mit dem im Lehrbeispiel 90 berechneten Wert überein.

Wechselt der Integrand innerhalb des Integrationsintervalls sein Vorzeichen, liegt also ein Teil der Fläche oberhalb und ein Teil unterhalb der x-Achse, so stellt das Integral die Differenz der Teilflächen dar.

Lehrbeispiel 94

Berechnen Sie für den Integranden $y = x^2 - 8x + 15$ *den Wert des Integrals mit den Grenzen* $a = 4$ *und* $b = 6$ *(Bild 81)!*

Lösung:

$$\int_4^6 (x^2 - 8x + 15)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x\right)\Bigg|_4^6$$

$$= 72 - 144 + 90 - \left(\frac{64}{3} - 64 + 60\right)$$

$$= 22 - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Dieser Wert $\frac{2}{3}$ muß mit der Differenz der Flächenteile Φ_1 und Φ_2 übereinstimmen. Sie werden sich gleich davon überzeugen können.

Unterscheiden Sie klar von dieser Bestimmung des „Wertes des Integrals" die Aufgabe, den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zu ermitteln. Im letzteren Fall müssen Sie die Teilflächen einzeln berechnen und ihre absoluten Werte dann addieren.

Allgemein gilt:

Soll der absolute Wert einer Fläche unter einer Kurve $f(x)$ in den Grenzen von a bis b berechnet werden und besitzt die Kurve in diesem Intervall eine Nullstelle x_N, so ist der Flächeninhalt die Summe der absoluten Werte von

$$\int_a^{x_N} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{x_N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lehrbeispiel 95

Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Kurve $y = x^2 - 8x + 15$ in den Grenzen $a = 4$ und $b = 6$ (Bild 81)!

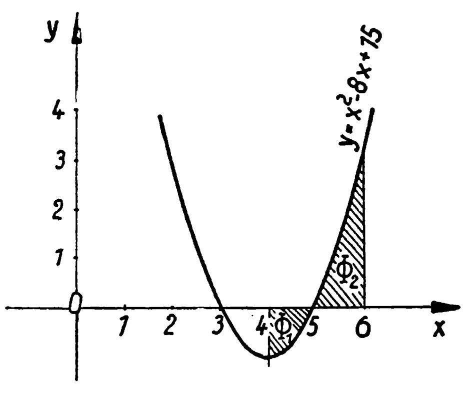

Bild 81

Lösung:

Sie müssen zunächst feststellen, ob innerhalb der gegebenen Grenzen Nullstellen der Funktion liegen. Die Bedingung für die Nullstellen ist $y = 0$, d. h.

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$x_{N1;2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1,$$

$$x_{N_1} = 5,$$

$$x_{N_2} = 3.$$

Die Nullstelle x_{N_1} liegt innerhalb der Integrationsgrenzen.

Sie berechnen deshalb die Teilflächen Φ_1 und Φ_2 mit den Grenzen a und x_N bzw. x_N und b getrennt.

$$\Phi_1 = \int\limits_{a=4}^{x_N=5} (x^2 - 8x + 15)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 4 \cdot x^2 + 15x\right)\Bigg|_4^5$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 100 + 75\right) - \left(\frac{64}{3} - 64 + 60\right)$$

$$= \frac{61}{3} - 25 + 4 = -\frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{|\Phi_1| = \frac{2}{3}}}$$

$$\Phi_2 = \int\limits_{x_N=5}^{b=6} (x^2 - 8x + 15)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x\right)\Bigg|_5^6$$

$$= (72 - 144 + 90) - \left(\frac{125}{3} - 100 + 75\right)$$

$$= 18 - \frac{125}{3} + 25 = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{|\Phi_2| = \frac{4}{3}}}$$

$$|\Phi| = |\Phi_1| + |\Phi_2| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{2}}$$

6.7 Flächen, die von zwei Kurven begrenzt werden

Es soll jetzt noch auf die Berechnung von Flächen eingegangen werden, die oben und unten von Kurven eingeschlossen sind.

Betrachten Sie Bild 82. Die zu berechnende Fläche wird begrenzt durch die Kurven $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ und die Ordinaten zu $x = a$ und $x = b$. Bezeichnen Sie die eingeschlossene Fläche mit Φ, die Fläche zwischen der Kurve $y = y_1(x)$ und der x-Achse mit Φ_1, und die Fläche zwischen der Kurve $y = y_2(x)$ und der x-Achse mit Φ_2, so gilt

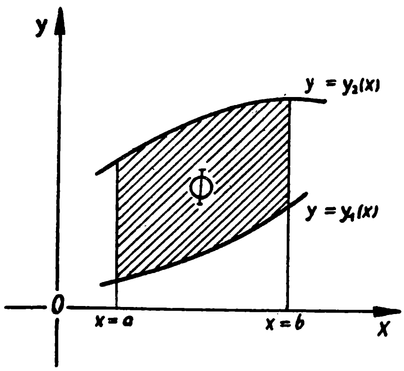

Bild 82

$$\Phi_1 = \int_a^b y_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\Phi_2 = \int_a^b y_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \int_a^b y_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b y_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die auf der rechten Seite stehende Differenz zweier Integrale können Sie zu einem Integral zusammenfassen, da sie dieselben Grenzen besitzen [Umkehrung von Formel (31)].

Sie erhalten

$$\Phi = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

oder kurz

$$\Phi = \int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x \tag{37}$$

Lehrbeispiel 96

Berechnen Sie die Fläche, die von den Kurven $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ begrenzt wird (Bild 83)!

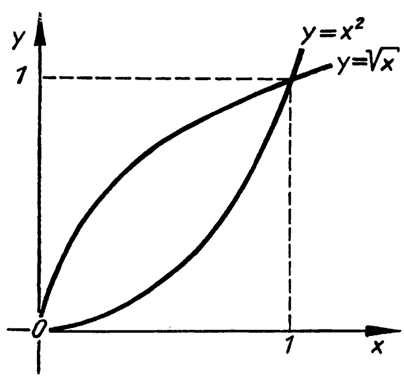

Bild 83

Lösung:

Die beiden Kurven schneiden sich in den Punkten (0;0) und (1;1). Damit heißen die Integrationsgrenzen $a = 0$ und $b = 1$.

$$\Phi = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Die Formel (37) gilt auch, wenn Teile der zu berechnenden Fläche unterhalb der x-Achse liegen. Nach Bild 84 müssen in diesem Fall die beiden Flächenteile Φ_1 und Φ_2 addiert werden. Da nun aber $\Phi_1 = \int_a^b y_1(x)\,\mathrm{d}x$ negativ ist, muß das Minuszeichen in

$$\Phi = \int_a^b y_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b y_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

bestehenbleiben, damit wirklich die Summe gebildet wird.

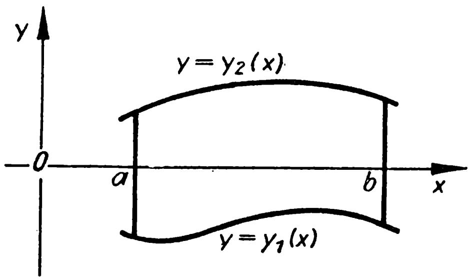

Bild 84

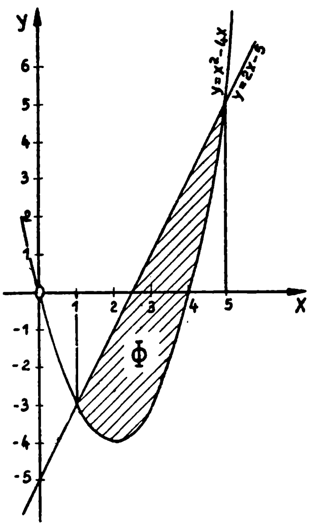

Bild 85

Lehrbeispiel 97

Berechnen Sie die von den Kurven $y = 2x - 5$ und $y = x^2 - 4x$ eingeschlossene Fläche (Bild 85)!

Lösung:

Die Integrationsgrenzen ergeben sich als Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven. Sie berechnen diese als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & y = 2x - 5 & - \\ \text{II} & y = x^2 - 4x & + \\ \hline & 0 = x^2 - 6x + 5 & \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 5}} \qquad \underline{\underline{x_2 = 1}}\,.$$

Die Integrationsgrenzen sind $a = 1$ und $b = 5$.

Für die Fläche erhalten Sie

$$\Phi = \int_1^5 (2x - 5)\,dx - \int_1^5 (x^2 - 4x)\,dx$$

$$= \int_1^5 (2x - 5 - x^2 + 4x)\,dx = \int_1^5 (6x - x^2 - 5)\,dx$$

$$= \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x\right)\Big|_1^5 = \left(75 - \frac{125}{3} - 25\right) - \left(3 - \frac{1}{3} - 5\right)$$

$$= 52 - \frac{124}{3},$$

$$\underline{\underline{\Phi = \frac{32}{3}}}.$$

Übungen

88. *Untersuchen Sie die bestimmten Integrale mit der unteren Grenze* $-a$ *und der oberen Grenze* $+a$, *bei denen der Integrand die Bedingung* $f(-x) = -f(x)$ *erfüllt (ungerade Funktionen)! Nehmen Sie als Beispiel die Funktionen*

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = \sin x.$$

89. *Wie groß ist die Fläche, die von* $y = \sin x$ *und* $y = \cos x$ *zwischen* $a = \frac{\pi}{4}$ *und* $b = \frac{5\pi}{4}$ *eingeschlossen wird?*

90. *Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Kurven* $y = x + 1$ *und* $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ *eingeschlossen wird!*

91. *Berechnen Sie*

 a) *den Wert des Integrals* $\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx$,

 b) *den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve* $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, *der x-Achse und den zu* $x = -1$ *und* $x = 2$ *gehörenden Ordinaten!*

 Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Aufgabenteilen?

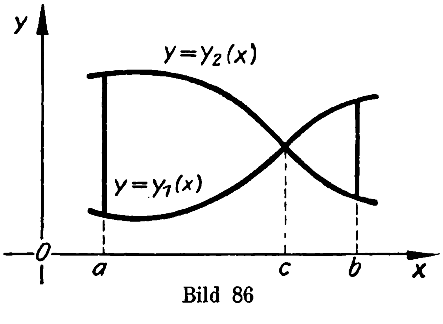

Bild 86

92. *Welchen Wert ergibt das Integral aus Formel (37), wenn innerhalb des Integrationsbereichs von $x = a$ bis $x = b$ die obere und untere Kurve ihre gegenseitige Lage vertauschen (Bild 86)? Wie haben Sie zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche zu verfahren?*

93. *Welche Fläche schließen die Kurven $y = x^3$ und $y = x$ miteinander ein?*

Anleitung: Beachten Sie die Erkenntnisse aus Übung 92!

Zusammenfassung

Bestimmtes Integral: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Zur Lösung des bestimmten Integrals ist zunächst wie beim unbestimmten Integral die Stammfunktion aufzusuchen, in die zunächst für x der Wert b (obere Grenze) und dann der Wert a (untere Grenze) eingesetzt wird. Von beiden so gefundenen Funktionswerten $F(x)$ ist die Differenz zu bilden. Mit dem bestimmten Integral können Sie krummlinig begrenzte Flächen berechnen.

Das bestimmte Integral kann auch als Grenzwert einer Summe definiert werden. Diese Definition wird besonders für physikalische und technische Anwendungen gebraucht.

Teilen Sie das Integrationsintervall in mehrere Teile, so können Sie über die Teilintervalle integrieren.

Vertauschen Sie die Grenzen eines bestimmten Integrals, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Ist der Integrand im Intervall $a \leqq x \leqq b$ negativ, so ist auch das Integral in diesem Intervall negativ.

In den Lehrbeispielen 94 und 95 müssen Sie erkannt haben, daß bei teilweise negativem Integranden grundsätzlich zwei verschiedene Aufgabenstellungen zu unterscheiden sind.

6.8 Graphische Integration

Im Abschnitt 3.9 haben Sie die graphische Differentiation kennengelernt. Es ist ratsam, daß Sie vor dem Durcharbeiten des folgenden Abschnittes die Methode der graphischen Differentiation wiederholen.

Genau wie bei der Differentiation besteht auch für die Integration die Notwendigkeit, zeichnerische Verfahren zu entwickeln. Die Praxis stellt oft die Forderung, Funktionen zu integrieren, deren analytische Ausdrücke nicht bekannt sind (vgl. auch den Abschnitt zur graphischen Differentiation 3.9). Sie werden richtig vermuten, daß die graphische Integration die Umkehrung der graphischen Differentiation ist. Wir stellen uns nun folgende Aufgabe:

Für die als Kurve gegebene Funktion $y = f(x)$ (Bild 87) ist zeichnerisch das bestimmte Integral

$$J(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu ermitteln.

Die Lösung erfolgt in zwei Schritten:

Sie bestimmen zunächst zur gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Kurve des unbestimmten Integrals

$$Y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

die Integralkurve.

Aus dieser Kurve kann dann leicht die zur Lösung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ erforderliche Differenz $F(b) - F(a)$ abgelesen werden.

Das Verfahren der graphischen Integration soll an Hand des Bildes 87 erläutert werden.

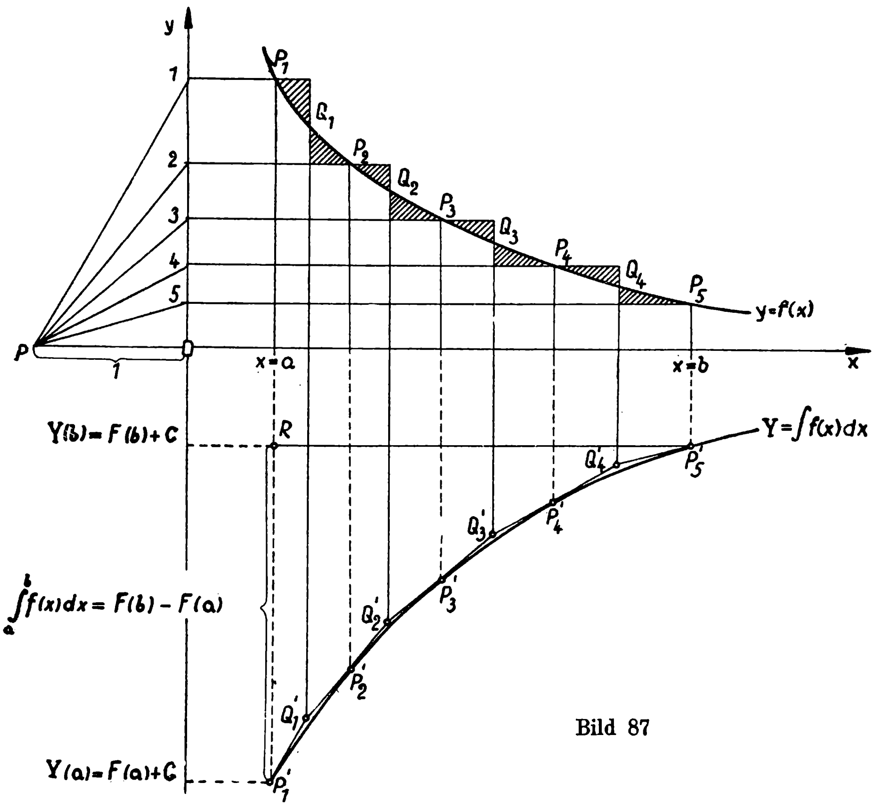

Bild 87

Sie ersetzen zunächst die zu integrierende Kurve $y = f(x)$ durch eine „Stufenkurve". Zu diesem Zweck teilen Sie das Integrationsintervall $a \ldots b$ durch Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, in n Teile, die nicht unbedingt gleich groß sein müssen (in Bild 87 sind es 4 Teile). Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Kurve $y = f(x)$ benennen Sie mit $P_1 \ldots P_{n+1}$ (bei uns $P_1 \ldots P_5$). Zwischen diesen Parallelen zeichnen Sie weitere Parallele ($Q_1 \ldots Q_4$) derart, daß die nach Einzeichnung der Waagerechten (durch $P_1 \ldots P_5$) entstehenden schraffierten Dreiecke links und rechts von jedem Punkt Q einander möglichst flächengleich werden.

Dieses Vorgehen werden Sie vielleicht als ungenau oder gar unexakt verurteilen. Dies ist aber nicht der Fall, denn unser Auge ist besonders empfindlich für Unterschiede von Flächeninhalten. Sie brauchen aus dem gleichen Grunde die Intervallteile nicht allzu klein zu wählen.

Die Waagerechten durch $P_1 \ldots P_5$ schneiden die y-Achse in den Punkten $1 \ldots 5$. Die Punkte $1 \ldots 5$ verbinden Sie mit dem von Ihnen gewählten Pol P, den Sie vorher entweder im Abstand 1 oder p vom Nullpunkt entfernt auf dem negativen Teil der x-Achse festgelegt haben.

Nun beginnt die eigentliche Konstruktion der Integralkurve. Sie legen einen beliebigen Punkt P_1' senkrecht unter (oder über) P_1 fest, durch den die Integralkurve gehen soll.

Dies dürfen Sie jederzeit tun, denn wie Ihnen aus [6.1] und aus Bild 70 bekannt ist, gibt es zu einem Integranden $y = f(x)$ unzählig viele Lösungsfunktionen $F(x) + C$, die sich alle nur in den verschiedenen Werten der Integrationskonstanten C unterscheiden. In der graphischen Darstellung existieren also zu einer Kurve $y = f(x)$ unzählig viele Integralkurven, die zwar für jeden Wert x den gleichen Anstieg besitzen, in y-Richtung aber beliebig (je nach dem Wert von C) verschoben werden können.

Durch P_1' ziehen Sie die Parallele zum Polstrahl $\overline{P1}$ bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_1. Der Schnittpunkt sei Q_1'. Durch Q_1' ziehen Sie die Parallele zum Polstrahl $\overline{P2}$ bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch Q_2, der Schnittpunkt sei Q_2'. Der Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{P2}$ durch Q_1' mit der Senkrechten durch P_2 sei P_2'. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten Sie einen Streckenzug mit $Q_1', Q_2' \ldots$ als Eckpunkten und den Punkten $P_1', P_2' \ldots$ auf den einzelnen Teilstrecken. Die Teilstrecken des Streckenzuges stellen Tangenten der Integralkurve dar, die Punkte $P_1', P_2' \ldots$ Kurvenpunkte selbst. Sie können jetzt die Integralkurve zeichnen, indem Sie eine Kurve derart in den Streckenzug legen, daß Teilstrecken und Kurve sich in den Punkten $P_1' \ldots P_5'$ berühren.

Damit haben Sie die Funktion $Y(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$ graphisch ermittelt.

An der Stelle $x = a$ besitzt die Funktion den Wert $Y(a) = F(a) + C$, an der Stelle $x = b$ den Wert $Y(b) = F(b) + C$. Die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a)$

$= F(b) - F(a) = \overline{P_1' R}$ stellt den Wert des gesuchten Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dar.

Sie erkennen jetzt, daß es völlig gleichgültig war, wohin der Punkt P_1' gelegt wird, die Ordinatendifferenz $Y(b) - Y(a)$ ist ihrem Wert nach davon unabhängig.

Zur Wahl des Maßstabes (und damit verbunden ist die Festlegung des Polabstandes p) ist noch folgendes zu ergänzen, was Sie, ohne daß dafür der Beweis geführt wird, zur Kenntnis nehmen möchten:

Durch geeignete Wahl des Polabstandes p kann man die Einheitslänge E_Y der Integralkurve zweckmäßig festlegen. Es gilt die Beziehung

$$p = \frac{E_x \cdot E_y}{E_Y} \quad \text{bzw.} \quad E_Y = \frac{E_x \cdot E_y}{p}$$

Hierin bedeuten: p Polabstand,

$\left.\begin{array}{ll} E_x & \text{Einheit auf der } x\text{-Achse} \\ E_y & \text{Einheit auf der } y\text{-Achse} \end{array}\right\}$ der Funktion $y = f(x)$,

E_Y Einheit auf der Y-Achse der Funktion $Y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Übungen

94. *Integrieren Sie die folgenden Funktionen graphisch!*

a) $y = 2$ *Bestimmen Sie* $\int\limits_1^3 y \cdot \mathrm{d}x$!

b) $y = \frac{x}{2} + 1$ *Bestimmen Sie* $\int\limits_{-1}^2 y \cdot \mathrm{d}x$!

c) $y = \cos x$ *Bestimmen Sie* $\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} y \cdot \mathrm{d}x$!

7 Anwendungen der Integralrechnung

7.1 Inhalt von Körpern

Die Anwendung der Integralrechnung erstreckt sich nicht nur auf die Berechnung von Flächeninhalten.

In diesem Abschnitt sollen Sie lernen, wie sich die Integralrechnung bei der Ermittlung von Körpervolumina verwerten läßt. Auf eine Einschränkung sollen Sie aber gleich hingewiesen werden. Von den zu berechnenden Körpern müssen Sie alle zu einer bestimmten Richtung senkrecht stehenden Querschnitte kennen. Ansonsten müssen die hier nicht behandelten „mehrfachen Integrale" herangezogen werden.

Aus dem im Bild 88 dargestellten Körper ist senkrecht zu der eingezeichneten x-Achse eine Scheibe der Dicke dx herausgeschnitten. Der (mittlere) Querschnitt

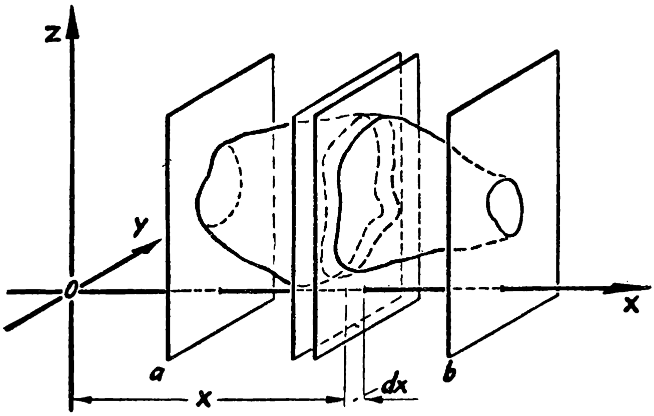

Bild 88

der Scheibe habe den Flächeninhalt Q. Dabei ist Q abhängig davon, an welcher Stelle x der Schnitt erfolgte. Es ist also Q eine Funktion von x, d. h. $Q = Q(x)$. Ist dx genügend klein, so werden sich die benachbarten Schnittflächen nur sehr wenig in Gestalt und Größe von $Q(x)$ unterscheiden. Sie können dann aber die betrachtete Scheibe durch eine zylindrische Scheibe mit den Deckflächen $Q(x)$, der Dicke dx und dem Volumen

$$\mathrm{d}V = Q(x)\,\mathrm{d}x$$

annähern. Auf Grund der Überlegungen im Abschnitt 6.6 erhalten Sie das Gesamtvolumen V durch Integration der Volumenelemente (Grenzwert der Summe!).

$$\boxed{V = \int_V \mathrm{d}V = \int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x} \tag{38}$$

Dabei stellen a und b die x-Werte der beiden äußeren Schnitte dar.

Lehrbeispiel 98

Wie groß ist das Volumen einer Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche G und der Höhe h?

Lösung:

Um das Integral (38) auswerten zu können, müssen Sie zunächst wissen, wie die Größe Q der Querschnittsfläche von der Schnitthöhe x abhängt. Dabei soll x

von der Spitze der Pyramide aus gemessen werden, so daß für $x = 0$ $Q = 0$ und für $x = h$ $Q = G$ ist. Aus Bild 89 lesen Sie die Beziehung

$$Q : G = x^2 : h^2$$

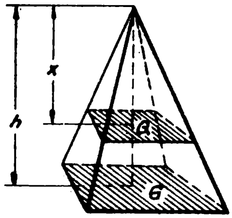

Bild 89

ab (nicht $Q : G = x : h$, denn bei Veränderung der Schnitthöhe ändert sich Q in beiden Dimensionen!).

Es ist also

$$Q = \frac{G}{h^2}\, x^2.$$

Damit wird

$$V = \frac{G}{h^2} \int\limits_0^h x^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{3}\, G\, h.}}$$

Wie Sie schon wissen, hat diese Formel nicht nur für rechteckige Grundflächen Gültigkeit. So gilt beispielsweise für den Kegel mit $G = \pi R^2$:

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{3}\, \pi R^2 h.}}$$

Sehr gut bewährt sich die Formel (38) bei *Rotationskörpern.* Diese Körper entstehen durch Rotation einer Fläche um eine Achse. Im Bild 90 ist die x-Achse die Rotationsachse und die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ als „Erzeugende" angenommen worden. Die so entstehenden Rotationskörper zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Querschnitte Q Kreisflächen mit dem Radius y sind, wobei die Mittelpunkte dieser Kreise alle auf der Drehachse liegen.

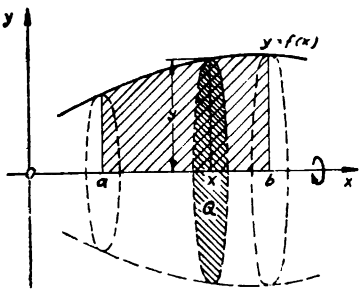

Bild 90

So können Sie sofort für alle Körper dieser Art allgemein die Größe des Querschnittes Q angeben als

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

In Verbindung mit Formel (38) erhalten Sie als Formel für das **Volumen von Rotationskörpern** (als Drehachse die x-Achse)

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b y^2 \, \mathrm{d}x} \tag{39}$$

Beispiel:

Die Anwendung der Formel (39) soll an dem oben erwähnten Kegel gezeigt werden.

Bild 91 stellt die erzeugende Fläche als Dreieck unter der Geraden $y = \frac{R}{h} x$ zwischen $x = 0$ und $x = h$ dar. Die Spitze wurde in O gelegt, um eine möglichst einfache Form der Geradengleichung zu erhalten.

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

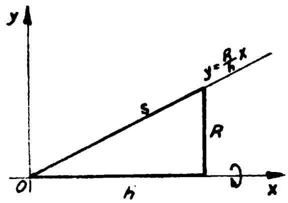

Bild 91

Lehrbeispiel 99

Berechnen Sie den Inhalt eines Paraboloides!

Die erzeugende Fläche liege unter der Parabel $y^2 = 2px$. Die Höhe des Paraboloides sei h, der Grundkreis habe den Radius r (vgl. Bild 92).

Lösung:

Sie setzen in Formel (39) für y^2 den Wert $2px$ ein. Die Grenzen sind $x = 0$ und $x = h$.

$$V = 2\pi p \int_0^h x \, \mathrm{d}x = \pi p h^2$$

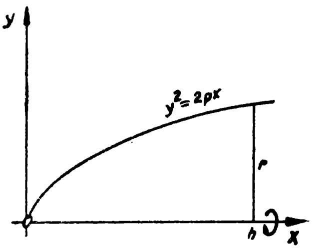

Bild 92

Aus Bild 92 erkennen Sie, daß r die zu $x = h$ gehörige Ordinate ist. Folglich besteht zwischen r und h (gemäß der Parabelgleichung $y^2 = 2px$) der Zusammenhang

$$r^2 = 2ph \quad \text{bzw.} \quad ph = \frac{r^2}{2} \, .$$

$\frac{r^2}{2}$ für ph in den obenstehenden Wert für V eingesetzt, ergibt

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h \, .$$

Das Ergebnis sagt Ihnen, daß der Inhalt des Paraboloides gleich der Hälfte des Inhalts des umgebenden Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist.

Lehrbeispiel 100

Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschicht mit der Dicke h!

Wie in Bild 93 angegeben, sollen dabei die entstehenden Schnittkreise die Radien r_1 bzw. r_2 haben.

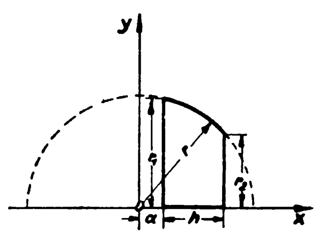

Bild 93

Lösung:

Die erzeugende Fläche liegt unter der Kurve

11 *

$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$. Die Grenzen sind $x = a$ und $x = a + h$.
Die Anwendung von Formel (39) liefert

$$V = \pi \int\limits_{a}^{a+h} (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{3}\, [3r^2 (a + h) - (a + h)^3 - 3r^2 a + a^3].$$

Lösen Sie die runden Klammern auf. Die Glieder a^3 und $3r^2a$ fallen heraus. Klammern Sie dann noch h aus, so erhalten Sie

$$V = \frac{\pi h}{3}\, [3(r^2 - a^2) - 3ah - h^2].$$

Da in diesem Ausdruck noch die Größe a auftritt, die Sie nicht unmittelbar an der Kugelschicht messen können, müssen Sie noch weiter umformen. Sie lesen dazu aus Bild 93 folgende Beziehungen ab (Lehrsatz des Pythagoras):

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = r^2 - r_2^2,$$
$$a^2 = r^2 - r_1^2.$$

Ziehen Sie beide Gleichungen voneinander ab, so erhalten Sie

$$2ah + h^2 = r_1^2 - r_2^2,$$
$$ah = \frac{1}{2}\, (r_1^2 - r_2^2 - h^2).$$

Setzen Sie diesen Wert für ah in den oben gewonnenen Ausdruck für V ein und berücksichtigen Sie noch, daß $r^2 - a^2 = r_1^2$ ist, so können Sie der Formel für das Volumen der Kugelscheibe die endgültige Gestalt

$$\underline{\underline{V = \frac{\pi h}{6}\, (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)}}$$

geben.

Setzen Sie zur Probe $r_1 = r_2 = 0$ und $h = 2r$, so müssen Sie das Volumen der Vollkugel erhalten.

Übungen

95. *Wie verhalten sich die Volumina eines Zylinders, einer Halbkugel, eines Rotationsparaboloids und eines Kreiskegels zueinander, wenn alle Körper gleichen Grundkreisradius und gleiche Höhe haben?*

96. *Berechnen Sie das Volumen eines abgestumpften Kreiskegels mit der Höhe h und den Radien r und R als Rotationskörper!*

97. *a) Welches Volumen hat das Rotationsellipsoid, das durch Rotation der oberen Halbellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die x-Achse entsteht?*

    b) Lösen Sie die Aufgabe für den Fall, daß die rechte Halbellipse um die y-Achse rotiert!

98. *Welches Volumen hat das in Bild 94 dargestellte einschalige Rotationshyperboloid?*

Anleitung: Stellen Sie zunächst die Funktion der Hyperbel auf, die die erzeugende Fläche nach rechts begrenzt.

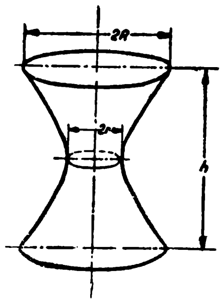

Bild 94

7.2 Schwerpunkt

In der Mechanik haben Sie die Begriffe „statisches Moment“ und „Schwerpunkt“ kennengelernt. Wir wollen hier noch einmal kurz die grundsätzlichen Betrachtungen anstellen und dann die Formeln für die Ermittlung des Schwerpunktes von Flächen und Körpern aufstellen.

7.21 Schwerpunkt von Flächen. Denken Sie sich die im Bild 95 dargestellte Fläche F in Flächenelemente $\mathrm{d}F$ aufgeteilt. Sind x und y die Abstände eines derartigen Elementes von den beiden Achsen, so stellen

$$\mathrm{d}T_x = y\,\mathrm{d}F \quad \text{und} \quad \mathrm{d}T_y = x\,\mathrm{d}F$$

die statischen Momente des Flächenelementes bezüglich der x- und der y-Achse dar. Daraus ergeben sich (als Grenzwert der Summe) die statischen Momente der Gesamtfläche zu

$$T_x = \int\limits_F y\,\mathrm{d}F, \qquad T_y = \int\limits_F x\,\mathrm{d}F.$$

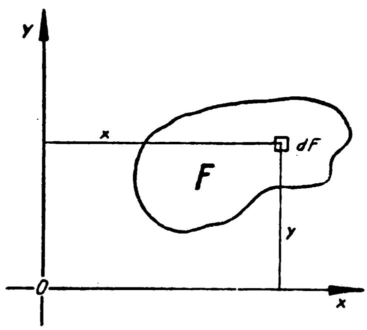

Bild 95

Aus der Ihnen bekannten Definition des Schwerpunktes folgt nun andererseits: Die statischen Momente T_x und T_y der Fläche müssen gleich den auf die Achsen bezogenen statischen Momenten $y_S \cdot F$ und $x_S \cdot F$ sein, die man erhält, wenn man sich die gesamte Fläche in ihrem Schwerpunkt $S\,(x_S;\, y_S)$ vereinigt denkt.

$$y_S F = T_x = \int\limits_F y\,\mathrm{d}F \qquad x_S F = T_y = \int\limits_F x\,\mathrm{d}F$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich nun die Möglichkeit, die Schwerpunktskoordinaten mit

$$\boxed{x_S = \frac{T_y}{F} = \frac{\int\limits_F x\,\mathrm{d}F}{F}} \tag{40a}$$

$$\boxed{y_S = \frac{T_x}{F} = \frac{\int\limits_F y\,\mathrm{d}F}{F}} \tag{40b}$$

zu berechnen.

In der vorstehenden Form können Sie diese Integrale mit den Ihnen bisher bekannten Mitteln noch nicht auswerten, da $\mathrm{d}F$ zweidimensional ist und es sich deshalb um Doppelintegrale handelt. Für einige besonders gelegene Flächen können aber die statischen Momente und damit die Schwerpunkte mit einfachen Integralen berechnet werden.

Zunächst muß die vorliegende Fläche in Flächenelemente $\mathrm{d}F$ zerlegt werden. Da Sie diese Elemente jeweils mit ihrem Abstand von der betrachteten Achse multiplizieren müssen, werden Sie alle die Flächenteile zu einem Flächenelement zusammenfassen, die gleichen Abstand von der Achse haben. Sie zerlegen deshalb die Fläche in zur Bezugsachse parallele Streifen.

Lehrbeispiel 101

Wo liegt der Schwerpunkt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b?

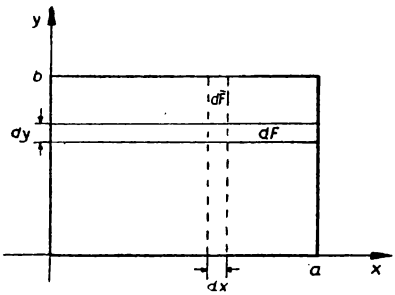

Bild 96

Lösung:

Sie erkennen in den beiden Mittellinien zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrielinien und könnten deshalb in ihrem Schnittpunkt den Schwerpunkt feststellen. Wir wollen aber die Berechnung mit Hilfe der neuen Erkenntnisse durchführen und dazu das Koordinatensystem so legen, daß die beiden Achsen mit zwei anstoßenden Seiten des Rechtecks zusammenfallen (Bild 96).

Die Bezugsachse sei die

x-Achse:

$$\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}y$$
$$T_x = \int_F y\,\mathrm{d}F = a\int_0^b y\,\mathrm{d}y = \frac{a\,b^2}{2}$$

y-Achse:

$$\mathrm{d}\overline{F} = b\,\mathrm{d}x$$
$$T_y = \int_F x\,\mathrm{d}\overline{F} = b\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{a^2 b}{2}$$

Den Inhalt der Fläche können Sie entsprechend der verschiedenartigen Wahl von $\mathrm{d}F$ bzw. $\mathrm{d}\overline{F}$ auf zwei Wegen berechnen.

Sie erhalten mit

$$\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}y$$

und Integration längs der y-Achse

$$F = a\int_0^b \mathrm{d}y = ab,$$

$$\mathrm{d}\overline{F} = b\,\mathrm{d}x$$

und Integration längs der x-Achse

$$F = b\int_0^a \mathrm{d}x = ab.$$

Die Schwerpunktskoordinaten sind

$$\underline{\underline{x_S = \frac{T_y}{F} = \frac{a}{2}}}, \qquad \underline{\underline{y_S = \frac{T_x}{F} = \frac{b}{2}}}.$$

Der Schwerpunkt fällt, wie Sie bereits wissen, mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks zusammen.

Lehrbeispiel 102

Es soll der Schwerpunkt eines Dreiecks ermittelt werden.

Lösung:

Hier wählen Sie zweckmäßig das Koordinatensystem so, daß der Ursprung mit einer Dreiecksecke und die x-Achse mit der zugehörigen Höhe zusammenfällt. Die der Ecke gegenüberliegende Seite a ist dann zur y-Achse parallel. Ermitteln Sie zunächst das statische Moment bezüglich der y-Achse. Dazu wählen Sie den Streifen parallel zu dieser Achse. Diesen schmalen Streifen mit dem Abstand x und der Breite $\mathrm{d}x$ nähern Sie durch das Rechteck $DEF'G'$ an. Für diese Annäherung gilt

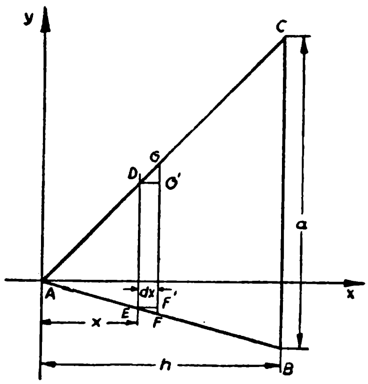

Bild 97

$$\mathrm{d}F = \overline{DE} \cdot \mathrm{d}x.$$

Unter Anwendung des Strahlensatzes gewinnen Sie aus Bild 97 die Beziehung:

$$\overline{DE} : x = a : h$$

oder

$$\overline{DE} = \frac{a}{h}\, x.$$

Damit ist

$$\mathrm{d}F = \frac{a}{h}\, x\, \mathrm{d}x.$$

Eine Bestätigung für die Gültigkeit der Annäherung erhalten Sie, wenn Sie daraus die Gesamtfläche des Dreiecks berechnen:

$$F = \int\limits_F \mathrm{d}F = \frac{a}{h} \int\limits_0^h x\, \mathrm{d}x = \frac{ah}{2}.$$

Dieses Ergebnis ist Ihnen aus der Elementarmathematik bekannt.

Nun ist

$$T_y = \int\limits_F x\, \mathrm{d}F = \frac{a}{h} \int\limits_0^h x^2\, \mathrm{d}x = \frac{ah^2}{3}.$$

Mit $F = \frac{ah}{2}$ wird $\qquad \underline{\underline{x_S = \frac{T_y}{F} = \frac{2}{3}h}}.$

Das Ergebnis sagt Ihnen, daß der Schwerpunkt auf einer Parallelen zur Dreieckseite BC im Abstand $\frac{2}{3}\,h$ von der gegenüberliegenden Ecke A bzw. im Abstand $\frac{h}{3}$ von dieser Seite liegen muß.

Die Berechnung von y_S erübrigt sich, denn in bezug auf die beiden anderen Dreieckseiten gilt Entsprechendes. Der Schwerpunkt muß also der Schnittpunkt der Parallelen zu den drei Dreieckseiten im Abstand von $\frac{1}{3}$ der jeweils zugehörigen Höhe sein. Sie wissen bereits, daß dieser Punkt mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (Schwerlinien) zusammenfällt.

Wir wollen jetzt die Schwerpunktsformeln für den Fall umformen, daß der Schwerpunkt einer Fläche zu ermitteln ist, die durch die Kurve $y = f(x)$, die beiden Ordinaten zu $x = a$ und $x = b$ und die x-Achse begrenzt ist (Bild 98).

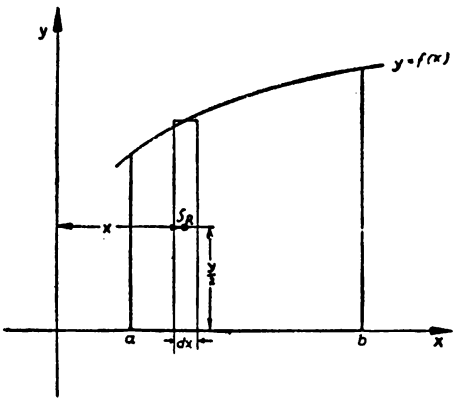

Bild 98

Dazu genügt die Zerlegung der Fläche in Streifen, die zur y-Achse parallel verlaufen. Im Bild 98 ist ein derartiger Streifen eingezeichnet. Diese Streifen werden durch Rechtecke $\mathrm{d}F$ mit der Höhe y und der Breite $\mathrm{d}x$ angenähert. Aus dem Lehrbeispiel 101 wissen Sie, daß der Schwerpunkt eines solchen Rechtecks die Höhe $\frac{y}{2}$ über der x-Achse hat. Denken Sie sich die Fläche $\mathrm{d}F$ in diesem Punkt vereinigt, dann hat $\mathrm{d}F$ das statische Moment

$$\mathrm{d}T_x = \frac{y}{2}\,\mathrm{d}F$$

bzw. mit $\mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x$
$$\mathrm{d}T_x = \frac{1}{2}\,y^2\,\mathrm{d}x.$$

Für die gesamte Fläche F wird das statische Moment bezüglich der x-Achse

$$T_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x. \tag{a}$$

In bezug auf die y-Achse hat der Schwerpunkt des Flächenstreifens den Abstand x und damit das statische Moment den Wert

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T_y &= x\,\mathrm{d}F\\ &= xy\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Daraus folgt für das statische Moment der gesamten Fläche (bezüglich der y-Achse)

$$T_y = \int_a^b x y \, \mathrm{d}x. \tag{b}$$

Die Fläche selbst ist

$$F = \int_a^b y \, \mathrm{d}x.$$

Entsprechend (a) und (b) ergeben sich die Schwerpunktskoordinaten zu

$$\boxed{x_S = \frac{\int_a^b x y \, \mathrm{d}x}{F}} \tag{41a}$$

$$\boxed{y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x}{F}} \tag{41b}$$

Lehrbeispiel 103

Es soll der Schwerpunkt der unter der Parabel $y = c x^2$ gelegenen Fläche zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x_1$ ermittelt werden (vgl. dazu Lehrbeispiel 89).

Lösung:

y-Achse:

$$T_y = c \int_0^{x_1} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\, c x_1^4$$

Aus $y = c x^2$ folgt für $x = x_1$ als Ordinate $y_1 = c x_1^2$.

Mit der daraus folgenden Beziehung $c = \frac{y_1}{x_1^2}$ können Sie T_y umformen in

$$T_y = \frac{1}{4}\, x_1^2 \, y_1.$$

x-Achse:

$$T_x = \frac{c^2}{2} \int_0^{x_1} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{10}\, c^2 x_1^5$$

Mit der oben aufgestellten Beziehung für c folgt

$$T_x = \frac{1}{10}\, x_1 \, y_1^2.$$

In Lehrbeispiel 89 berechneten Sie die Fläche unter der Parabel zu

$$F = \frac{1}{3}\, x_1 y_1.$$

Damit wird $\underline{\underline{x_S = \frac{T_y}{F} = \frac{3}{4}\, x_1}}$, $\underline{\underline{y_S = \frac{T_x}{F} = \frac{3}{10}\, y_1}}$.

Ähnlich wie im Abschnitt 6.7 können die Formeln (a) und (b) auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Fläche von zwei Kurven begrenzt wird. Stellen $y = y_2(x)$ und $y = y_1(x)$ die obere und untere Begrenzungskurve dar (wie im Bild 82), so wird

$$T_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,\mathrm{d}x \tag{c}$$

$$T_y = \int_a^b x\,(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x \tag{d}$$

Den Flächeninhalt berechnen Sie mit Hilfe der Formel (37). Es ist dabei wiederum gleichgültig, ob die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse liegt.

Lehrbeispiel 104

Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die von den Kurven $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird (Bild 83)?

Lösung:

Mit den gleichen Grenzen wie im Lehrbeispiel 96 erhalten Sie

$$T_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20},$$

$$T_y = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

Im Lehrbeispiel 96 wurde der Flächeninhalt mit $\frac{1}{3}$ berechnet. Damit ist

$$x_S = \frac{T_y}{F} = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}, \qquad y_S = \frac{T_x}{F} = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}.$$

Die Gleichheit von x_S und y_S war hier zu erwarten, da die Gerade $y = x$ Symmetrielinie ist.

Vergleichen Sie jetzt einmal die im Abschnitt 7.1 zur Volumenberechnung von Rotationskörpern benutzte Formel (39) und Formel (41 b) miteinander. Versuchen Sie, ehe Sie weiter lesen, einen Zusammenhang zu erkennen.

In beiden Formeln tritt $\int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x$ auf. Lösen Sie (41 b) danach auf, und setzen Sie den gefundenen Ausdruck dann in (39) ein.

Es war

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\mathrm{d}x}{F}$$

oder

$$\int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x = 2\,y_S F.$$

Damit wird

$$\boxed{V = 2\pi\, y_S\, F} \tag{42}$$

Sie haben damit einen Beweis für die Ihnen bekannte 2. Guldinsche Regel zur Ermittlung der Volumina von Rotationskörpern gefunden. Achten Sie darauf, daß es sich bei y_S um die Schwerpunktsordinate der erzeugenden Fläche handelt. Die entsprechende Formel für die Mantelflächen werden Sie später vorfinden.

7.22 Schwerpunkt von Körpern. Die Berechnung der Schwerpunkte gelingt uns hier nur für die Körper, deren Volumen im Abschnitt 7.1 berechnet werden konnte. Befassen Sie sich noch einmal mit diesem Abschnitt, insbesondere mit der dort angeführten Einschränkung.

Betrachten Sie dabei auch wieder Bild 88. Unter dem statischen Moment eines Volumenelementes $\mathrm{d}V$ ist nun

$$\mathrm{d}T_{yz} = x\,\mathrm{d}V$$

zu verstehen. Hierbei gibt x den Abstand des Volumenelementes $\mathrm{d}V$ von der senkrecht zur x-Achse stehenden yz-Ebene an. Aus diesem Sachverhalt resultiert die Kennzeichnung des Momentes durch den Index yz. Das statische Moment des gesamten Körpers läßt sich durch

$$T_{yz} = \int\limits_V x\,\mathrm{d}V$$

oder, mit $\mathrm{d}V = Q(x)\,\mathrm{d}x$, durch

$$T_{yz} = \int\limits_a^b x\,Q(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Der Abstand des Schwerpunktes von der yz-Ebene ergibt sich dann (analog zu den Flächenschwerpunkten) aus

$$\boxed{x_S = \frac{T_{yz}}{V} = \frac{\int\limits_a^b x\,Q(x)\,\mathrm{d}x}{V} \qquad \left(V = \int\limits_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x\right)} \tag{43}$$

In gleicher Weise könnten noch die Formeln für y_S und z_S aufgestellt werden. Für uns hat das hier aber keinen Wert, da ja im allgemeinen nur die Querschnitte senkrecht zu einer Achse bekannt sind. Diese können Sie aber immer als x-Achse wählen.

Lehrbeispiel 105

Welchen Abstand hat der Schwerpunkt der im Lehrbeispiel 98 berechneten Pyramide von der Spitze?

Lösung:

Aus Lehrbeispiel 98 entnehmen Sie

$$Q = \frac{G}{h^2}\,x^2 \qquad \text{und} \qquad V = \frac{1}{3}\,Gh.$$

Damit ist

$$x_S = \frac{\frac{G}{h^2}\int\limits_0^h x^3\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{3}\,Gh} = \frac{3}{h^3}\int\limits_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{h^3}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^h = \underline{\underline{\frac{3}{4}\,h}}.$$

Von der Grundfläche hat dann der Schwerpunkt den Abstand $\frac{h}{4}$.

Nach diesem Lehrbeispiel wollen wir uns der Schwerpunktberechnung für die ebenfalls im Abschnitt 7.1 behandelten Rotationskörper zuwenden. Es braucht wohl nicht weiter betont zu werden, daß die Schwerpunkte auf der Rotationsachse (Symmetrieachse!) liegen. Zur Festlegung des Schwerpunktes genügt demnach vollkommen die Kenntnis seines x-Wertes.

Ersetzen wir der Einfachheit halber T_{yz} durch T, so ist mit $Q(x) = \pi y^2$

$$T = \pi \int\limits_a^b x y^2\,\mathrm{d}x$$

das statische Moment des Drehkörpers, bezogen auf die Ebene, die im Nullpunkt auf der Drehachse (x-Achse) senkrecht steht.

Bedenken Sie, daß

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$

war, so ist

$$x_S = \frac{T}{V} = \frac{\int\limits_a^b x y^2 \, \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b y^2 \, \mathrm{d}x} \tag{44}$$

Lehrbeispiel 106

Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes eines Kugelabschnittes!

Lösung:

Zur Erzeugung des Kugelabschnittes muß das im Bild 99 hervorgehobene Stück des Kreises um die x-Achse rotieren.

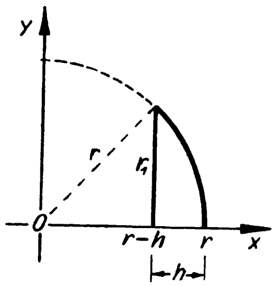

Bild 99

Begrenzende Kurve: $\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Integrationsgrenzen: $\quad x = r - h \quad$ und $\quad x = r$

$$T = \pi \int\limits_{r-h}^{r} x(r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \int\limits_{r-h}^{h} (r^2 x - x^3) \, \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{r-h}^{r}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[2r^4 - r^4 - 2r^2 (r-h)^2 + (r-h)^4 \right]$$

Sie lösen die Binome auf und vereinfachen zu

$$T = \frac{\pi h^2}{4} (4r^2 - 4rh + h^2) = \frac{\pi h^2}{4} (2r - h)^2.$$

Zur Berechnung von V können Sie das Ergebnis aus Lehrbeispiel 100 mit $r_2 = 0$ verwenden. Sie müssen dann noch in

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 r_1^2 + h^2)$$

r_1 durch r und h ausdrücken. Sie entnehmen dazu aus Bild 99 die Beziehung

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2.$$

Damit ist dann $\quad V = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$

und $\quad x_S = \frac{T}{V} = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$

Für die Halbkugel erhalten Sie daraus mit $h = r$

$$x_S = \frac{3}{8} r.$$

Übungen

99. *Berechnen Sie den Schwerpunkt des in Bild 100 dargestellten gleichschenkligen Trapezes!*

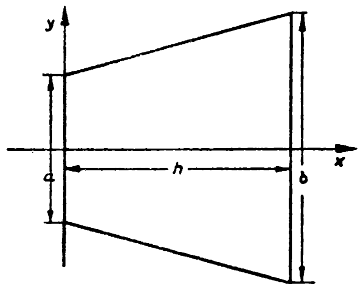

Bild 100

100. *Bestimmen Sie den Schwerpunkt der oberen Halbellipse (Halbachsen a und b)! Welche Schlußfolgerung können Sie aus dem Fehlen von a in der Endformel ziehen? (Inhalt der Vollellipse: $ab\pi$)*

101. *Wo liegt der Schwerpunkt der von der Kurve* $y = +\frac{1}{5}\sqrt{x}\,(4 - x)$ *und der x-Achse eingeschlossenen Fläche?*

102. *Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kegelstumpfes, dessen Volumen Sie in Übung 96 zu ermitteln hatten!*

103. *Wo liegt der Schwerpunkt eines Paraboloids (s. Lehrbeispiel 99)?*

104. *Welche Form nimmt Formel (44) an, wenn der Körper durch Rotation der erzeugenden Fläche um die y-Achse erzeugt wird?*

7.3 Flächenträgheitsmoment

Zur Bildung des statischen Momentes mußten Sie im Abschnitt 7.21 jedes Flächenelement dF mit seinem Abstand von der jeweiligen Bezugsachse multiplizieren. Wie Sie aus der Festigkeitslehre wissen, bildet das Produkt aus Flächenelement und Quadrat des Abstandes von der Bezugsachse das **Flächenträgheitsmoment.** Kennzeichnet l diesen Abstand, so ist das Trägheitsmoment des Flächenelementes

$$dJ = l^2\,dF$$

und das Trägheitsmoment der Gesamtfläche F

$$J = \int_F l^2\,dF.$$

Je nach der Lage der Bezugsachse haben Sie grundsätzlich zwei verschiedene Trägheitsmomente zu unterscheiden:

a) die Bezugsachse liegt in der Ebene der Fläche: äquatoriales (axiales) Trägheitsmoment.

Alle Flächenelemente werden mit dem Quadrat ihres Abstandes von dieser Achse multipliziert.

b) die Bezugsachse steht senkrecht auf der Fläche: polares Trägheitsmoment.

Alle Flächenelemente werden mit dem Quadrat ihres Abstandes vom Durchstoßpunkt der Achse (vom Pol) multipliziert.

Betrachten Sie zur Bestimmung des Zusammenhanges zwischen äquatorialem und polarem Trägheitsmoment Bild 101a und b.

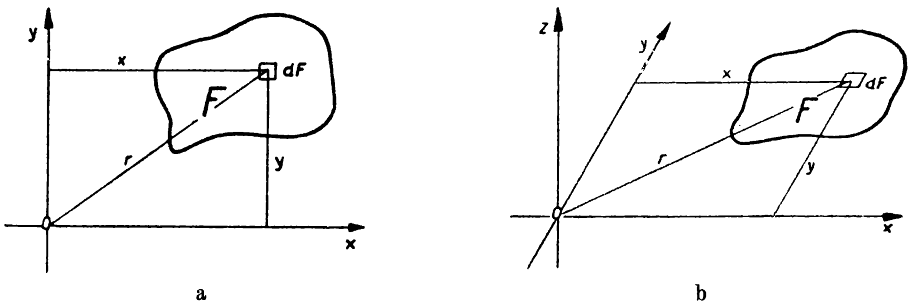

Bild 101a und b

Die Fläche F liege in der xy-Ebene. Die x- und y-Achse stellen dann zwei äquatoriale Bezugsachsen dar, die aufeinander senkrecht stehen. Die durch den Ursprung gehende und auf der xy-Ebene senkrecht stehende z-Achse wählen Sie als polare Achse.

Mit diesen Achsen bilden Sie die Trägheitsmomente

äquatorial $$\boxed{J_x = \int_F y^2 \,\mathrm{d}F \qquad J_y = \int_F x^2 \,\mathrm{d}F} \tag{45a}$$

polar $$\boxed{J_z = J_p = \int_F r^2 \,\mathrm{d}F} \tag{45b}$$

Da x- und y-Achse nach Voraussetzung aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$r^2 = x^2 + y^2$$

und damit $$J_p = \int_F r^2 \,\mathrm{d}F = \int_F (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}F$$

$$= \int_F x^2 \,\mathrm{d}F + \int_F y^2 \,\mathrm{d}F.$$

$$\boxed{J_p = J_y + J_x} \tag{45c}$$

Das polare Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier äquatorialer Trägheitsmomente, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen und durch den Pol (Durchstoßpunkt) der polaren Achse gehen.

Wollen Sie nun praktisch Trägheitsmomente von gegebenen Flächen berechnen, so fassen Sie wieder alle Punkte mit gleichem Abstand von der Bezugsachse zu einem Flächenstreifen $\mathrm{d}F$ zusammen und multiplizieren ihn mit dem Quadrat des Abstandes.

Lehrbeispiel 107

Es sind die Trägheitsmomente J_x, J_y, J_p und $J_{\bar{x}}$ der im Bild 102 dargestellten Rechtecksfläche zu berechnen.

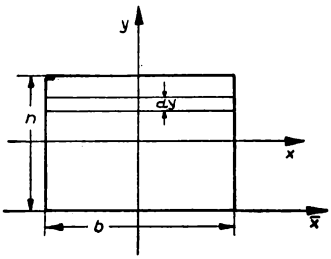

Bild 102

Lösung:

α) Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse:

Wahl der Flächenelemente: rechteckige Streifen parallel zur x-Achse mit der Länge b und der Breite $\mathrm{d}y$.

Mit $\mathrm{d}F = b\,\mathrm{d}y$ ist dann

$$\mathrm{d}J_x = y^2\,\mathrm{d}F = b\,y^2\,\mathrm{d}y.$$

Die Flächenstreifen sind von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ zu erstrecken. Sie erhalten mit diesen Grenzen für das Trägheitsmoment der gesamten Fläche

$$J_x = b\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,\mathrm{d}y.$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, können Sie dafür schreiben

$$J_x = 2b\int\limits_0^{\frac{h}{2}} y^2\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{1}{12}\,bh^3.}}$$

β) Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse:

Wählen Sie die Streifen jetzt parallel zur y-Achse, dann ist

$$\mathrm{d}J_y = x^2\,\mathrm{d}F, \qquad \mathrm{d}F = h\,\mathrm{d}x$$

und damit

$$J_y = h\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = 2h\int\limits_0^{\frac{b}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{12}\,hb^3.}}$$

Sie hätten auch aus der Kenntnis des vorher berechneten J_x zu diesem Ergebnis kommen können. Was die Rechteckseiten b und h für die x-Achse darstellen, stellen h und b für die y-Achse dar. Sie brauchen also in J_x nur die Buchstaben x mit y, b mit h und h mit b zu vertauschen.

Sind h und b in cm angegeben, so haben die Trägheitsmomente die Maßeinheit cm^4.

γ) Polares Trägheitsmoment:

Mit Hilfe der Formel (45c) ergibt sich das polare Trägheitsmoment für die im Punkt O auf der Fläche senkrecht stehende Achse.

$$J_p = \frac{1}{12}\,bh^3 + \frac{1}{12}\,hb^3 = \frac{1}{12}\,bh\,(h^2 + b^2)$$

δ) Trägheitsmoment bezüglich der $\bar{x}$-Achse:

Wie bei α), wählen Sie die Flächenstreifen parallel zur $\bar{x}$-Achse:

$$\mathrm{d}J_{\bar{x}} = \bar{y}^2\,\mathrm{d}F, \qquad \mathrm{d}F = b\,\mathrm{d}\bar{y}.$$

Die Flächenelemente erstrecken sich jetzt von $\bar{y} = 0$ bis $\bar{y} = h$.

$$J_{\bar{x}} = b\int_0^h \bar{y}^2\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{1}{3}\,bh^3}}$$

Wie Sie aus den Lehrbriefen über Festigkeitslehre wissen, können Sie die Ergebnisse von α) und δ) ineinander überführen, da parallele Achsen vorliegen. Sie müssen dazu den Satz von Steiner anwenden.

Der Steinersche Satz läßt sich mit Hilfe der Integralrechnung ableiten. Im Bild 103 sei die x-Achse parallel zur $\bar{x}$-Achse und gehe durch den Schwerpunkt der Fläche F.

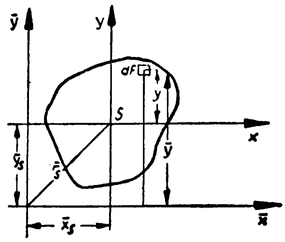

Bild 103

Auf Grund der gegenseitigen Lage dieser beiden Achsen ist

$$\bar{y} = y + \bar{y}_S.$$

Für die beiden Achsen existieren die äquatorialen Trägheitsmomente:

x-(Schwerpunkts-)Achse:

$$J_x = J_S = \int_F y^2\,\mathrm{d}F,$$

$\bar{x}$-Achse:

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2\,\mathrm{d}F.$$

Zwischen beiden besteht nun ein Zusammenhang, den Sie jetzt aufstellen sollen.

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 \,\mathrm{d}F = \int_F (y + \bar{y}_S)^2 \,\mathrm{d}F$$
$$= \int_F (y^2 + 2\bar{y}_S\, y + \bar{y}_S^2) \,\mathrm{d}F$$
$$= \int_F y^2 \,\mathrm{d}F + 2\bar{y}_S \int_F y \,\mathrm{d}F + \bar{y}_S^2 \int_F \mathrm{d}F$$
$$J_{\bar{x}} = J_S + 0 + \bar{y}_S^2\, F$$

Sie müssen sich jetzt noch Klarheit darüber verschaffen, warum das Integral $\int_F y\,\mathrm{d}F$ den Wert Null hat. Zunächst erkennen Sie in diesem Integral das statische Moment T_x der Fläche F. Die Voraussetzung, die x-Achse sei Schwerpunktachse, besagt, daß die Ordinate des Schwerpunktes

$$y_S = \frac{T_x}{F} = 0$$

sein muß. Daraus folgt aber

$$T_x = \int_F y\,\mathrm{d}F = 0.$$

Sie erhalten so den Ihnen bekannten **Satz von Steiner:**

$$\boxed{J_{\bar{x}} = J_x + \bar{y}_S^2\, F} \tag{46a}$$

und entsprechend (vgl. Bild 103)

$$\boxed{J_{\bar{y}} = J_y + \bar{x}_S^2\, F} \tag{46b}$$

Ist das Trägheitsmoment einer Fläche in bezug auf eine Achse durch den Flächenschwerpunkt gegeben, so erhält man das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige parallele Achse, indem man zu ersterem das Produkt aus Fläche und Quadrat des Achsenabstandes addiert.

Ziehen Sie hierzu noch Formel (45c) heran, so können Sie den Satz von Steiner auch auf die polaren Trägheitsmomente anwenden.

Es sei $J_p = J_x + J_y$ das polare Trägheitsmoment mit dem Schwerpunkt als Pol, während der Schnittpunkt der $\bar{x}$- und $\bar{y}$-Achse der Pol für das Trägheitsmoment $J_{\bar{p}} = J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}$ sein soll (Bild 103). Dann ist

$$J_{\bar{p}} = J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}$$
$$= J_x + \bar{y}_S^2\, F + J_y + \bar{x}_S^2\, F$$
$$= J_x + J_y + (\bar{x}_S^2 + \bar{y}_S^2)\, F.$$

$$\boxed{J_{\bar{p}} = J_p + \bar{r}_S^2\, F} \tag{46c}$$

Hierbei ist $\bar{r}_S$ die Entfernung des Schwerpunktes vom Pol des Trägheitsmomentes $J_{\bar{p}}$ und damit auch der Abstand der beiden parallelen Polachsen.

Wie Sie aus den Formeln (46a) bis (46c) erkennen, besitzt das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Flächenschwerpunkt gehende Achse von allen möglichen Trägheitsmomenten den kleinsten Wert.

Es ist also immer

$$J_x \leqq J_{\bar{x}}, \quad J_y \leqq J_{\bar{y}}, \quad J_p \leqq J_{\bar{p}}.$$

Lehrbeispiel 108

Es sind $J_{\bar{x}}$ und J_x für das in Bild 104 dargestellte Dreieck zu berechnen.

Lösung:

α) Trägheitsmoment bezüglich der Grundlinie ($\bar{x}$-Achse)

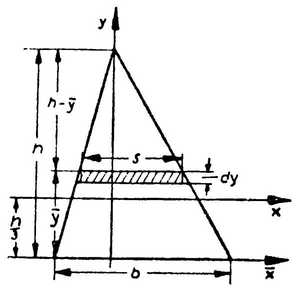

Bild 104

Teilen Sie das Dreieck in Streifen parallel zur Bezugsachse auf. Nähern Sie diese Flächenelemente durch Rechtecke mit den Seiten s und $\mathrm{d}y$ an. Ein derartiges Flächenelement $\mathrm{d}F$ ist in Bild 104 schraffiert gezeichnet. Die Seite s ist aber mit dem Abstand $\bar{y}$ des Flächenelementes von der Bezugsachse veränderlich.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen s und $\bar{y}$? Mit dem Strahlensatz erhalten Sie

$$s : b = (h - \bar{y}) : h$$

oder

$$s = \frac{b}{h}\,(h - \bar{y}).$$

Für das Trägheitsmoment gilt

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2\,\mathrm{d}F, \qquad \mathrm{d}F = s\,\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\,(h - \bar{y})\,\mathrm{d}y,$$

$$J_{\bar{x}} = \frac{b}{h}\int_0^h (h - \bar{y})\,\bar{y}^2\,\mathrm{d}y.$$

Multiplizieren Sie den Integranden aus und führen Sie die Integration durch.

$$J_{\bar{x}} = b\int_0^h \bar{y}^2\,\mathrm{d}y - \frac{b}{h}\int_0^h \bar{y}^3\,\mathrm{d}y = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}$$

$$\underline{\underline{J_{\bar{x}} = \frac{bh^3}{12}}}$$

β) Trägheitsmoment J_x bezüglich der zur Grundlinie parallelen Schwerpunktachse

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand $\bar{y}_S = \frac{h}{3}$ (vgl. Lehrbeispiel 102). Auf Grund des Satzes von Steiner muß gelten

$$J_{\bar{x}} = J_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F \qquad F = \frac{1}{2}\, bh$$

$$= J_x + \frac{bh^3}{18}$$

oder

$$J_x = J_{\bar{x}} - \frac{bh^3}{18}$$

$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}.$$

Lehrbeispiel 109

Es sind das polare und das äquatoriale Flächenträgheitsmoment der Kreisfläche mit dem Radius R zu berechnen (Bild 105).

Lösung:

α) Polares Flächenträgheitsmoment

Alle vom Pol (Mittelpunkt des Kreises) gleichweit entfernten Punkte der Kreisfläche liegen auf einem Kreisring mit dem (mittleren) Radius ϱ und der Breite $\mathrm{d}\varrho$. Der Inhalt des Flächenelementes ist damit

$$\mathrm{d}F = 2\pi\varrho\, \mathrm{d}\varrho$$

und das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \int_F \varrho^2\, \mathrm{d}F = 2\pi \int_0^R \varrho^3\, \mathrm{d}\varrho,$$

$$J_p = \frac{1}{2}\, \pi\, R^4.$$

β) Äquatoriales Trägheitsmoment

Sind die äquatorialen Bezugsachsen zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, so muß die Summe der dazugehörigen Trägheitsmomente gleich dem polaren Trägheitsmoment J_p sein. Aus Symmetriegründen müssen aber weiterhin die beiden Trägheitsmomente gleich sein.

Somit ist $J_p = 2\, J_x$, oder

$$J_x = \frac{1}{2}\, J_p = \frac{1}{4}\, \pi\, R^4.$$

Für den Fall, daß nicht ein voller Kreis, sondern ein Kreisring mit dem Innenradius r und dem Außenradius R vorliegt, sind die Grenzen des Integrals r und R, so daß Sie erhalten

$$J_p = 2\pi \int_r^R \varrho^3 \, d\varrho = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$$

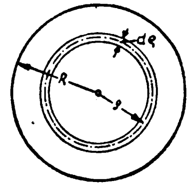

Bild 105

bzw. $$J_x = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4).$$

Es sollen jetzt die Trägheitsmomente J_x und J_y einer Fläche berechnet werden, die von der Kurve $y = f(x)$, den beiden zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten und von der x-Achse begrenzt ist. Für diese Fläche lassen sich die Formeln (45a), ähnlich wie bei den statischen Momenten, in eine besondere Form bringen.

Betrachten Sie hierzu Bild 106. Die Fläche ist in Streifen parallel zur y-Achse geteilt (in Bild 106 ist nur ein Streifen eingezeichnet).

Diese Streifen können Sie durch Rechtecke mit der Breite dx, der Höhe y und dem Flächeninhalt $dF = y\,dx$ annähern. Unter Verwendung des Ergebnisses aus Lehrbeispiel 107 δ) erhalten Sie für das Trägheitsmoment eines solchen Streifens

$$dJ_x = \frac{1}{3} y^3 \, dx$$

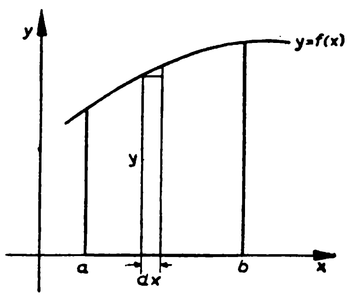

Bild 106

und daraus für die ganze Fläche

$$\boxed{J_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 \, dx} \qquad (47\,a)$$

Bezüglich der y-Achse hat der betrachtete Streifen den Abstand x und daher das Trägheitsmoment

$$dJ_y = x^2 \, dF = x^2 y \, dx,$$

während für die gesamte Fläche

$$\boxed{J_y = \int_a^b x^2 y \, dx} \qquad (47\,b)$$

ist.

Lehrbeispiel 110

Wie groß sind die äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y für das im Bild 107 dargestellte Trapez?

Lösung:

α) Aufstellung der Funktion der begrenzenden Geraden

Die Gerade durchläuft die beiden Punkte (0;3) und (2;7). Für diese Punkte erhalten Sie mit Hilfe der Zweipunktegleichung

$$y - 3 = \frac{7-3}{2-0}(x-0),$$

$$y = 2x + 3.$$

β) Berechnung von J_x

Benutzen Sie die Formel (47a), so erhalten Sie für die Trapezfläche

$$J_x = \frac{1}{3}\int_0^2 (2x+3)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 (8x^3 + 36x^2 + 54x + 27)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x^4 + 12x^3 + 27x^2 + 27x)\Big|_0^2.$$

Zur Vereinfachung der zahlenmäßigen Auswertung setzen Sie dafür

$$J_x = \frac{1}{3}\,x\,[2x^2(x+6) + 27(x+1)]\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{3}(8 \cdot 8 + 27 \cdot 3)$$

$$= \underline{\underline{\frac{290}{3} = 96{,}\bar{6}}} \quad \text{(Längeneinheiten)}^4.$$

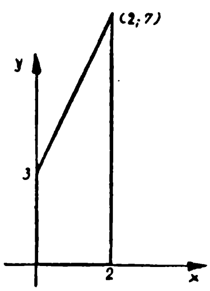

Bild 107

γ) Berechnung von J_y

Hierfür verwenden Sie die Formel (47b).

$$J_y = \int_0^2 x^2(2x+3)\,dx$$

$$= \int_0^2 (2x^3 + 3x^2)\,dx$$

$$J_y = \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3\right)\Big|_0^2 = \underline{\underline{16}} \quad \text{(Längeneinheiten)}^4$$

Lehrbeispiel 111

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente J_x und J_y für die in den Lehrbeispielen 89 und 103 behandelte Parabelfläche!

Lösung:

Begrenzende Kurve: $y = cx^2$

Integrationsintervall: $0 \leqq x \leqq x_1$

Nach (47a) erhalten Sie für J_x:

$$J_x = \frac{c^3}{3}\int_0^{x_1} x^6\,\mathrm{d}x = \frac{c^3 x^7}{21}\Big|_0^{x_1} = \frac{1}{21}c^3 x_1^7.$$

Mit Hilfe der auch im Lehrbeispiel 103 verwendeten Beziehung $y_1 = cx_1^2$ bzw. $c = \frac{y_1}{x_1^2}$ können Sie wiederum c aus der gefundenen Lösung eliminieren. Es ist dann

$$\underline{\underline{J_x = \frac{1}{21}x_1 y_1^3.}}$$

Formel (47b) gibt für J_y:

$$J_y = c\int_0^{x_1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{c x^5}{5}\Big|_0^{x_1} = \frac{1}{5}c\,x_1^5,$$

$$\underline{\underline{J_y = \frac{1}{5}x_1^3 y_1.}}$$

Auch hier macht es keine Schwierigkeiten, die Formeln (47) auf Flächen auszudehnen, die oben von der Kurve $y = y_2(x)$ und unten von $y = y_1(x)$ begrenzt werden. Betrachten Sie dazu noch einmal Bild 82. Das Trägheitsmoment der eingeschlossenen Fläche entsteht aus der Differenz der Trägheitsmomente der Flächen zwischen $y = y_2(x)$ und x-Achse einerseits und zwischen $y = y_1(x)$ und x-Achse andererseits.

$$\boxed{J_x = \frac{1}{3}\int_a^b (y_2^3 - y_1^3)\,\mathrm{d}x} \qquad (48\,\mathrm{a})$$

$$\boxed{J_y = \int_a^b x^2 (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x} \qquad (48\,\mathrm{b})$$

Es ist wieder gleichgültig, ob Teile der Fläche unterhalb der x-Achse liegen.

Lehrbeispiel 112

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente J_x und J_y der Fläche, die von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird!

Lösung:

Die beiden Kurven schneiden sich in den Punkten (0;0) und (1;1). Dadurch ist das Integrationsintervall mit $a = 0$ und $b = 1$ festgelegt. Sie können sich leicht selbst davon überzeugen, daß in diesem Bereich die Kurve $y = \sqrt{x}$ über $y = x$ liegt.

α) Berechnung von J_x:

$$J_x = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20} = \underline{\underline{0{,}05}}\,(\text{Längeneinheiten})^4$$

β) Berechnung von J_y:

$$J_y = \int_0^1 x^2 (x^{\frac{1}{2}} - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} - x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{4}$$

$$J_y = \frac{1}{28} \approx \underline{\underline{0{,}036}} \quad (\text{Längeneinheiten})^4$$

Übungen

105. Wie groß sind die Flächenträgheitsmomente J_a, J_S, J_b und J_h des Trapezes aus Übung 99?
Erläuterung: Die Achse für J_S sei die Parallele zur Trapezseite a durch den Schwerpunkt.

106. Berechnen Sie J_x und J_y der Fläche zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y = x$!

7.4 Massenträgheitsmoment

Im Lehrbrief „Physik 3" haben Sie das Massenträgheitsmoment bereits kennengelernt. Wie Sie wissen spielt diese physikalische Größe bei Drehbewegungen eine Rolle. Analog zum Flächenträgheitsmoment errechnen Sie das (angenäherte) Massenträgheitsmoment eines Massenelementes, indem Sie das Element $\mathrm{d}m$ mit dem Quadrat des Abstandes l von der Bezugsachse (Drehachse) multiplizieren:

$$\mathrm{d}J = l^2\,\mathrm{d}m.$$

Das Massenträgheitsmoment des gesamten Körpers erhalten Sie dann aus

$$\boxed{J = \int_m l^2\,\mathrm{d}m} \qquad (49)$$

Flächen- und Massenträgheitsmoment unterscheiden sich im Ansatz nur in dem Glied $\mathrm{d}F$ bzw. $\mathrm{d}m$. Dabei müssen Sie aber bedenken, daß $\mathrm{d}F$ das Element einer ebenen Fläche und $\mathrm{d}m$ das Element eines Körpers darstellen. Beide Größen haben also verschiedene Dimensionen.

Der für die Flächenträgheitsmomente aufgestellte Satz von Steiner gilt sinngemäß hier wieder. Sie haben lediglich F durch m und dF durch dm zu ersetzen.

Lehrbeispiel 113

Es ist das Trägheitsmoment eines

a) Vollzylinders mit dem Radius R,

b) Hohlzylinders mit dem Außenradius R und dem Innenradius r, der Höhe h und der Dichte d bezüglich der Zylinderachse zu berechnen!

Lösung:

a) Zur Ermittlung des Massenelementes dm verfahren Sie ähnlich wie im Lehrbeispiel 109. Sie wählen dm in Form eines dünnwandigen Hohlzylinders (Bild 108). Multiplizieren Sie seine Grund- und Deckfläche dF mit der Höhe h, so erhalten Sie zunächst sein Volumen dV. Die weitere Multiplikation mit der Dichte d ergibt die Masse dm des Massenelementes:

$$dm = dF\,h\,d = 2\pi\varrho\, d\varrho\, h\,d$$

Dann ist $J = 2\pi d h \int\limits_0^R \varrho^3\, d\varrho = \frac{1}{2}\pi d h R^4.$

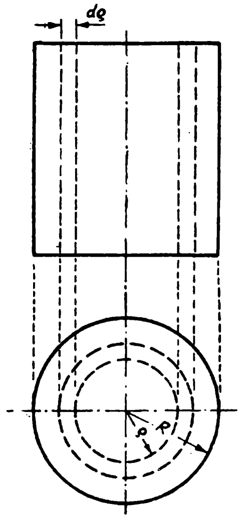

Bild 108

Nun ist aber die Gesamtmasse $m = R^2\pi h d$. Berücksichtigen Sie das in dem Ausdruck für J, so können Sie endgültig schreiben

$$J = \frac{1}{2}\, m R^2.$$

Wird R in [m] und m in [kg] gemessen, so hat das Massenträgheitsmoment die Maßeinheit [kg m²].

b) Diese Aufgabe unterscheidet sich von a) nur in den Integrationsgrenzen. Anstatt von 0 bis R integrieren Sie jetzt von r bis R (Bild 109).

$$J = 2\pi d h \int\limits_r^R \varrho^3\, d\varrho = \frac{1}{2}\pi d h\,(R^4 - r^4)$$

$$= \frac{1}{2}\pi d h\,(R^2 - r^2)\,(R^2 + r^2)$$

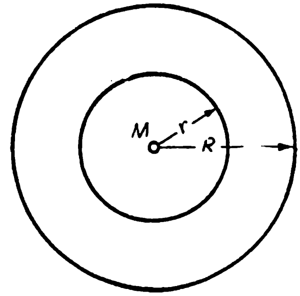

Bild 109

Da die Gesamtmasse in diesem Fall

$$m = (R^2 - r^2)\pi h\ d$$

ist, erhalten Sie damit für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{2}\, m\,(R^2 + r^2).}}$$

Das Ergebnis besagt, daß bei gleicher (!) Masse das Massenträgheitsmoment des Hohlzylinders größer ist. Von dieser Tatsache macht man beim Bau von Schwungrädern Gebrauch, indem man versucht, möglichst viel der Gesamtmasse an der Peripherie unterzubringen.

Lehrbeispiel 114

Welches Trägheitsmoment hat die im Bild 110 dargestellte dünne Kreisscheibe bezüglich der Achse a—a ($h \ll R$)?

Lösung:

Sie können hier die Überlegungen aus dem Lehrbeispiel 109β entsprechend anwenden. In bezug auf die Achse a—a erhalten Sie

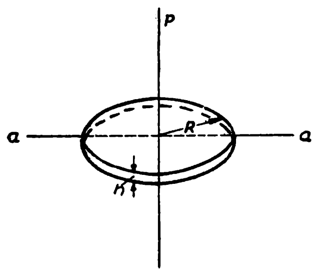

Bild 110

$$J_a = \frac{1}{2}\, J = \underline{\underline{\frac{1}{4}\, m\, R^2}} \quad (h \ll R).$$

Lehrbeispiel 115

Wie groß ist das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h dem Grundkreisradius R und der Dichte ϱ bezüglich der Figurenachse?

Lösung:

Denken Sie sich den Kegel in dünne Scheiben der Dicke dx zerlegt. In Bild 111 ist eine solche Scheibe eingezeichnet. Stellt y den (mittleren) Radius dar, so können Sie diese Scheibe bei genügend kleinem dx durch eine Kreisscheibe mit der Masse

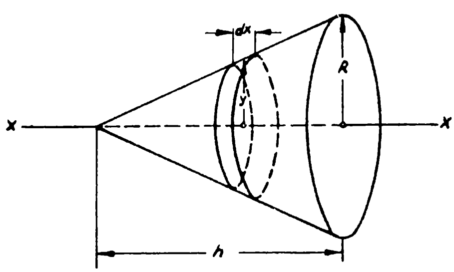

Bild 111

$$\mathrm{d}m = \pi y^2\, \mathrm{d}x\ \varrho$$

ersetzen. Das Trägheitsmoment dieser Scheibe hat dann auf Grund des Ergebnisses von Lehrbeispiel 113 den Wert

$$\mathrm{d}J_x = \frac{1}{2}\, y^2\, \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\, \pi y^4\, \mathrm{d}x\ \varrho\, .$$

Jetzt haben Sie noch den von Kreisscheibe zu Kreisscheibe veränderlichen Radius y durch x auszudrücken, denn das „$\mathrm{d}x$" gibt an, daß die Integrationsveränderliche x ist. Aus Bild 112, das den Schnitt des Kegels darstellt, lesen Sie ab

$$\frac{y}{x} = \frac{R}{h}, \quad \text{also} \quad y = \frac{R}{h}\, x.$$

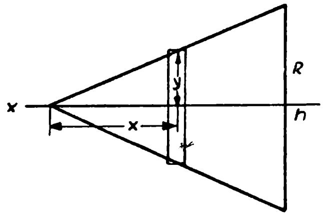

Bild 112

Damit erhalten Sie dann

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\,\varrho\,\frac{R^4}{h^4}\int\limits_0^h x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\pi\,\varrho\,\frac{R^4}{h^4}\,h^5$$
$$= \frac{1}{10}\pi\,\varrho\,R^4 h.$$

Nun ist aber die Gesamtmasse des Kegels

$$m = \left(\int\limits_m \mathrm{d}m = \pi\,\varrho\,\frac{R^2}{h^2}\int\limits_0^h x^2\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\pi\,\varrho\,R^2 h.$$

Setzen Sie das wieder in J_x ein, so bekommen Sie als Endergebnis

$$\underline{\underline{J_x = \frac{3}{10}\,m\,R^2.}}$$

Der im Lehrbeispiel 115 eingeschlagene Weg kann für Rotationskörper verallgemeinert werden. Denken Sie sich den Körper (Rotationsachse $= x$-Achse) in der gleichen Weise zerlegt. Die Scheiben haben dann den Radius $y = f(x)$, die Dicke $\mathrm{d}x$ und so die Masse

$$\mathrm{d}m = \pi y^2\,\mathrm{d}x\,\varrho$$

und bezüglich der Rotationsachse das Trägheitsmoment

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,y^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\pi y^4\,\mathrm{d}x\,\varrho\,.$$

Für das Trägheitsmoment des gesamten Rotationskörpers, der durch Rotation der Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten zu $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse erzeugt wird, gilt

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\pi\,\varrho\int\limits_a^b y^4\,\mathrm{d}x} \qquad (50)$$

Lehrbeispiel 116

Gesucht ist das Massenträgheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R. Die Achse soll dabei durch den Mittelpunkt gehen, sie soll also ein Durchmesser sein (x-Achse).

Lösung:

Begrenzende Kurve: oberer Halbkreis $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$

Integrationsintervall: $-R \leqq x \leqq R$

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\varrho \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi\varrho \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi\varrho \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) \, dx$$

$$= \pi\varrho \left(R^4x - \frac{2}{3}R^2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{8}{15}\pi\varrho R^5$$

Da die Gesamtmasse $m = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3$ ist, ergibt sich schließlich

$$\underline{\underline{J_x = \frac{2}{5} m R^2.}}$$

Lehrbeispiel 117

Wie groß ist das Massenträgheitsmoment der in Bild 113 dargestellten dünnen Kreisscheibe bezüglich der y-Achse?

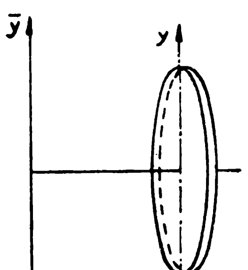

Bild 113

Lösung:

In bezug auf die zur $\bar{y}$-Achse parallele y-Achse (Schwerpunktachse) hat die Kreisscheibe nach Lehrbeispiel 114 das Trägheitsmoment

$$J_y = \frac{1}{4} m R^2.$$

Mit Hilfe des Steinerschen Satzes erhalten Sie für die $\bar{y}$-Achse

$$J_{\bar{y}} = J_y + a^2 m,$$

$$\underline{\underline{J_{\bar{y}} = \frac{1}{4} m R^2 + a^2 m.}}$$

Lehrbeispiel 118

Welches Massenträgheitsmoment hat der in Lehrbeispiel 115 behandelte Kreiskegel in bezug auf eine Achse, die senkrecht zur Figurenachse durch die Kegelspitze läuft?

Lösung:
Denken Sie sich wieder den Kegel in Scheiben zerlegt. Eine solche Scheibe mit dem Radius y, der Masse $\mathrm{d}m = \pi\ \varrho\ y^2\,\mathrm{d}x$ und dem Abstand x von der Drehachse hat nach Lehrbeispiel 117 das Massenträgheitsmoment

$$\mathrm{d}J_y = \frac{1}{4}\cdot y^2\,\mathrm{d}m + x^2\,\mathrm{d}m. \qquad y = \frac{R}{h}\,x$$

$$J_y = \frac{\pi\,\varrho\,R^4}{4\,h^4}\int_0^h x^4\,\mathrm{d}x + \frac{\pi\,\varrho R^2}{h^2}\int_0^h x^4\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\,\varrho R^4\,h}{20} + \frac{\pi\,\varrho\,R^2\,h^3}{5} \qquad m = \frac{\pi\varrho R^2\,h}{3}$$

$$= \frac{3}{20}\,m\,R^2 + \frac{3}{5}\,mh^2$$

$$\underline{\underline{J_y = \frac{3}{20}\,m\,(R^2 + 4\,h^2)}}$$

Übungen

107. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment des Paraboloids aus Lehrbeispiel 99 bezüglich
   a) der Figurenachse,
   b) der im Scheitel auf der Figurenachse senkrecht stehenden Achse!
   Anleitung: Verfahren Sie bei b) analog zu Lehrbeispiel 118!

108. Wie groß ist das auf die Figurenachse bezogene Massenträgheitsmoment des Kegelstumpfes, dessen Volumen in Übung 96 zu berechnen war?

109. Ein dünner Stab mit dem Querschnitt q, der Länge l und der Dichte ϱ rotiere um die zur Stabachse senkrechte Mittelachse. Wie groß ist sein Massenträgheitsmoment?

Zusammenfassung

Im Verlauf der Abschnitte 7.1 bis 7.4 haben Sie die ersten geometrischen Anwendungen der Integralrechnung kennengelernt. So wurden behandelt:
Volumen von Körpern,
Schwerpunkt von Flächen und Körpern,
Flächen- und Massenträgheitsmomente.

Grundsätzlich sind die Ansätze zu diesen verschiedenen Anwendungen stets nach den gleichen Gesichtspunkten durchzuführen:

1. Herausgreifen eines Teilstückes. (Kennzeichnung dieses wahren Teilstückes durch ein vorgesetztes Δ.)
2. Annäherung des wahren Teilstückes durch eine elementar zu berechnende Näherungsgröße. Kennzeichnung dieser Näherungsgröße durch ein vorgesetztes d.

3. Integration über die Näherungsgrößen.

Sie müssen aber dabei bedenken, daß dieser so einfach erscheinende Übergang von den Δ-Größen zu den d-Größen und zur Integration nicht so selbstverständlich ist. Wie Sie bei den ersten Anwendungen gesehen haben, muß eigentlich zunächst über die Teilgrößen summiert werden. Dann haben Sie anschließend den Grenzwert der Summe, das Integral zu bilden.

Als dringendes Zugeständnis an die Praxis aber wollen wir weiterhin den vereinfachten Weg beibehalten.

Verfallen Sie jedoch nicht auf den alten Fehler, die Differentiale als unendlich kleine Größen anzusehen, hervorgegangen aus den zugehörigen Differenzen. So wird nicht etwa aus Δy das $\mathrm{d}y$, wenn Δx gegen Null strebt. In älteren Lehrbüchern finden Sie zuweilen diese irrige Auffassung. Ziehen Sie noch einmal zur Erläuterung den analytischen Zusammenhang des Differenzen- und Differentialquotienten heran. Es war

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Das ist so zu deuten, daß die beiden (endlichen) Größen, der Zuwachs Δy der Kurvenordinate und der Zuwachs $\mathrm{d}y$ der Tangentenordinate, für kleine $\Delta x = \mathrm{d}x$ nahezu gleich sind.

7.5 Weitere Anwendungen der Integralrechnung aus Physik und Technik

Die Integralrechnung dient dem Physiker und Techniker nicht nur zur Flächen-, Volumen- und Schwerpunktsberechnung bzw. zur Bestimmung von Trägheitsmomenten, sondern sie gibt ihm, ebenfalls wie die Differentialrechnung, die Möglichkeit, nicht gleichförmig ablaufende, stetige Vorgänge zu erfassen.

7.51 Arbeit. Wie Sie bisher gelernt haben, ist Arbeit = Kraft · Weg, sofern die Kraft die gleiche Richtung wie der Weg aufweist und sie längs dieses Weges konstant bleibt. Wie haben Sie nun zu verfahren, wenn die zweite Bedingung nicht erfüllt wird, die Kraft also veränderlich ist? Denken Sie sich den geradlinigen Weg in kleine Wegelemente $\mathrm{d}x$ zerlegt. Längs eines solchen kleinen Stückes können Sie die Kraft P als konstant ansehen. Die Arbeit, die diese Kraft dort verrichtet, ist

$$\mathrm{d}A = P\,\mathrm{d}x.$$

Die Summe aller dieser Arbeitselemente nähert sich um so genauer A an, je feiner die Unterteilung, je kleiner $\mathrm{d}x$ ist. Die Arbeit erhalten Sie exakt, wenn Sie den Grenzwert der Summe, also das Integral bilden:

$$\boxed{A = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{51}$$

Sie haben das bestimmte Integral als Inhalt einer Fläche kennengelernt. Nun ist die Arbeit durch ein bestimmtes Integral zu berechnen. Welche Schlußfolgerungen können Sie aus diesen beiden Aussagen ziehen? Die Arbeit muß sich als Inhalt einer Fläche darstellen lassen. Stellen Sie das Kraft-Weg-Gesetz in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Die horizontale Achse muß dabei die Weg-Achse, die vertikale die Kraft-Achse sein. Die Arbeit wird dann durch die in Bild 114 schraffiert gezeichnete Fläche dargestellt.

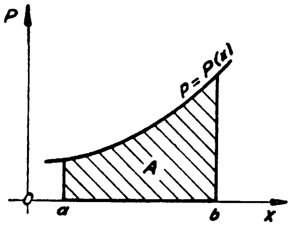

Bild 114

Arbeit bei der Ausdehnung einer Schraubenfeder

Eine Schraubenfeder soll um die Länge l gedehnt und die hierbei zu verrichtende Arbeit berechnet werden.

Bei einer Schraubenfeder ist die aufzuwendende Zugkraft der Verlängerung x proportional:

$$P = kx.$$

Der Proportionalitätsfaktor k (Federkonstante) ist ein Maß für die „Härte" der Feder. Die Maßeinheit bestimmt sich aus $k = \frac{P}{x}$ zu $\frac{\text{kp}}{\text{m}}$, wenn P in kp und x in m gemessen wird (vgl. Physik, Lbf. 3).

Für $x = 1$ m wird P dem Betrage nach gleich k. Damit haben Sie die physikalische Bedeutung der Konstanten k. Sie gibt den Betrag der Kraft an, mit der die Feder nach einer Dehnung um 1 m festgehalten werden muß.

Für die Ausdehnungsarbeit erhalten Sie durch Einsetzen von $P = kx$ in Formel (51)

$$A = k\int_0^l x\,dx = \frac{1}{2}\,kl^2.$$

Um die Feder in dieser Stellung festzuhalten, müssen Sie die Kraft $P_l = kl$ aufwenden. Damit können Sie k in der obenstehenden Gleichung ersetzen und erhalten als Endresultat

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}\,P_l l.}}$$

Stellen Sie sich ein Schaubild des Vorganges her, und bestimmen Sie aus diesem die Arbeit, indem Sie den Inhalt der Fläche berechnen!

Ausdehnungsarbeit eines Gases

In einem Zylinder mit beweglichem Kolben (Querschnitt F) sei ein Gas eingeschlossen. Das Gas habe in dem im Bild 115 festgehaltenen Zustand den Druck p und das Volumen V.

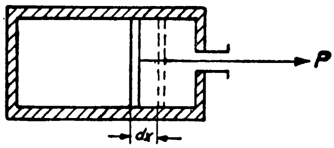

Bild 115

Das Gas drückt nun mit der Kraft $P = pF$ den Kolben um das kleine Stück $\mathrm{d}x$ heraus. Den Druck können Sie bei genügend kleinem $\mathrm{d}x$ als konstant ansehen. Die freiwerdende Arbeit ist

$$\mathrm{d}A = pF\,\mathrm{d}x.$$

Der Kolben gibt durch diese Verschiebung das Volumen

$$\mathrm{d}V = F\,\mathrm{d}x$$

frei. Unter Verwendung der letzten Beziehung wird

$$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}V$$

und, wenn Sie mit V_1 das Anfangs- und mit V_2 das Endvolumen bezeichnen,

$$A = \int_{V_1}^{V} p\,\mathrm{d}V.$$

Zur Auswertung dieses Integrales müssen Sie nun die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen kennen, denn V ist ja die Integrationsveränderliche. Es bestehen zwischen Druck und Volumen je nach Art der Zustandsänderung verschiedene Abhängigkeiten. Wir wollen hier den Fall der isothermen Zustandsänderung annehmen, die Sie bereits im Lehrbrief „Physik 5“ kennengelernt haben.

Für die isotherme Zustandsänderung gilt

$$pV = p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Daraus erhalten Sie die gesuchte Abhängigkeit

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} \qquad \text{(Gesetz von Boyle-Mariotte).}$$

Die Arbeit ist

$$A = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1 V_1 (\ln V_2 - \ln V_1) = \underline{\underline{p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}}\,.$$

Im folgenden sollen Sie sich mit zwei Anwendungsbeispielen aus dem Gebiet der Festigkeitslehre vertraut machen.

7.52 Ausdehnung eines Balkens infolge Eigengewicht. Bild 116a soll einen herabhängenden Balken (Seil) mit der Länge l, dem Querschnitt F und der Wichte γ darstellen.

Es ist nun nach der Verlängerung λ gefragt, die der Balken infolge Belastung **durch sein Eigengewicht erfährt. Denken Sie sich ein Stück von der Länge x vom unteren** Ende des Balkens **abgeschnitten** (Bild 116b) **und** das abgeschnittene Stück durch eine äußere **Kraft** P ersetzt. Damit diese Kraft an dem verbliebenen Balkenstück die gleiche Wirkung hinterläßt wie das abgeschnittene Stück, muß sie gleich dem Gewicht dieses Stückes sein:

$$P = Fx\gamma.$$

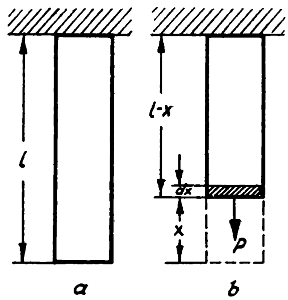

Bild 116

Betrachten Sie nun die im Bild 116b schraffiert gezeichnete dünne Scheibe mit der Dicke $\mathrm{d}x$. Durch die angreifende Kraft P wird diese Scheibe gedehnt. Die relative Dehnung ε beträgt nach dem Hookeschen Gesetz

$$\varepsilon = \frac{P}{FE} = \frac{\gamma x}{E} \qquad (E = \text{Elastizitätsmodul}).$$

Daraus berechnet sich die absolute Verlängerung der Scheibe zu

$$\mathrm{d}\lambda = \varepsilon\,\mathrm{d}x = \frac{\gamma x}{E}\,\mathrm{d}x.$$

Nun denken Sie sich den gesamten Balken aus derartigen Scheiben zusammengesetzt. Alle diese Scheiben werden nach dem gleichen Gesetz ausgedehnt. Dabei werden die in der Nähe der Einspannstelle gelegenen Scheiben entsprechend ihrem großen Abstand x vom unteren Ende des Balkens stärker verlängert als die weiter unten gelegenen. Die Gesamtverlängerung des Balkens erhalten Sie wieder als Grenzwert der Summe (gleich Integral) der Einzelverlängerungen.

$$\lambda = \int_0^l \varepsilon\,\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{E}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Setzen Sie noch das Gesamtgewicht $G = \gamma l F$ ein, so erhalten Sie als Endergebnis

$$\underline{\underline{\lambda = \frac{Gl}{2EF}.}}$$

Denken Sie sich den Balken gewichtslos und am unteren Ende eine Kraft der Größe $P = G$ angesetzt, so würde der Balken auf Grund des Hookeschen Gesetzes eine Verlängerung

$$\lambda = \frac{Gl}{EF}$$

erfahren. Vergleichen Sie diese beiden Aussagen, so erkennen Sie, daß die Verlängerung des Balkens infolge des Eigengewichtes halb so groß ist, als beim Zug unter der Einwirkung einer am unteren Ende des Balkens angreifenden äußeren Kraft $P = G$.

7.53 Träger gleicher Festigkeit. Welche Form muß einem Träger gegeben werden, damit in jedem horizontalen Querschnitt die Spannung σ die gleiche ist,

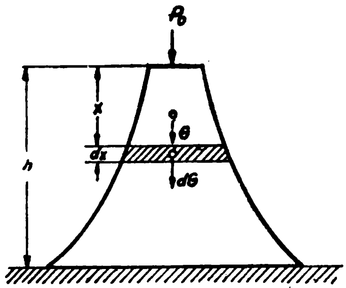

Bild 117

wenn der Träger durch eine an seinem oberen Ende angreifende Kraft P_0 und sein Eigengewicht auf Druck beansprucht wird (Bild 117). Die Wichte des Trägers sei γ.

α) Ermittlung des oberen Querschnittes F_0

Zwischen der Kraft P_0, dem oberen Querschnitt F_0 und der vorgegebenen Spannung σ muß die Ihnen aus der Festigkeitslehre bekannte Beziehung

$$P_0 = \sigma F_0$$

bestehen.

β) Ermittlung des Querschnittes F im beliebigen Abstand x vom oberen Ende

Es soll zunächst die Kraft P bestimmt werden, die im Querschnitt F im beliebigen Abstand x vom oberen Ende wirkt. Ist G das Gewicht des Trägerteils oberhalb von F, so muß

$$P = P_0 + G$$

sein. Analog zur Fläche F_0 muß dann F so groß sein, daß die Bedingung

$$P = \sigma F$$

erfüllt ist. Denken Sie sich nun den Schnitt um $\mathrm{d}x$ nach unten verlegt. Da die auf diesem neuen Querschnitt liegende Last gegenüber der Last auf dem alten Querschnitt um das Gewicht der dünnen Scheibe vergrößert ist, muß auch der neue Querschnitt größer sein. Wir ersetzen das Gewicht der konischen Scheibe durch das einer zylindrischen Scheibe mit dem Querschnitt F und der Dicke $\mathrm{d}x$, also durch $\mathrm{d}G = F\gamma\,\mathrm{d}x$. Die dadurch bedingte Querschnittsvergrößerung sei $\mathrm{d}F$. Es muß dann zwischen $\mathrm{d}G$ und $\mathrm{d}F$, analog zu $P = \sigma F$, die Beziehung

$$\sigma\,\mathrm{d}F = \mathrm{d}G = F\gamma\,\mathrm{d}x$$

bestehen, denn die Flächenzunahme $\mathrm{d}F$ muß den Lastzuwachs $\mathrm{d}G$ mit der vorgeschriebenen Spannung σ aufnehmen können.

Im Lehrbrief über Differentialgleichungen werden Sie lernen, daß man diese Art Gleichungen löst, indem man die beiden Veränderlichen (hier sind es F und x) auf je eine Seite der Gleichung bringt:

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = \frac{\gamma}{\sigma}\,\mathrm{d}x.$$

Da wir wissen wollen, welche Größe der Querschnitt an jeder beliebigen Stelle x haben muß, integrieren wir auf der rechten Seite von 0 bis x bzw. auf der linken Seite entsprechend von F_0 bis F:

$$\int_{F_0}^{F} \frac{\mathrm{d}F}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} \int_0^x \mathrm{d}x,$$

$$\ln \frac{F}{F_0} = \frac{\gamma}{\sigma}\, x.$$

Lösen Sie nach F auf und setzen Sie $F_0 = \frac{P_0}{\sigma}$ ein, so erhalten Sie als Ergebnis der gestellten Aufgabe

$$\underline{\underline{F = \frac{P_0}{\sigma}\, e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.}}$$

Für den unteren Querschnitt erhalten Sie mit $x = h$ speziell

$$F_h = \frac{P_0}{\sigma}\, e^{\frac{\gamma}{\sigma} h}.$$

Sollen die Querschnitte des Trägers Kreisform haben, so muß

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} \quad \text{bzw.} \quad d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}}\, e^{\frac{\gamma}{2\sigma} x}$$

sein.

Dabei gilt für den oberen Durchmesser

$$F_0 = \frac{d_0^2 \pi}{4} = \frac{P_0}{\sigma} \qquad \text{oder} \qquad d_0 = 2\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}}.$$

Zu diesem Ergebnis gelangen Sie auch, wenn Sie im oben berechneten Ausdruck für d die Bedingung $x = 0$ einsetzen.

Anschließend soll noch ein Beispiel aus der Physik behandelt werden.

7.54 Ausflußzeit von Flüssigkeiten bei veränderlicher Druckhöhe. Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäß mit dem konstanten Querschnitt F soll am Boden **eine Ausflußöffnung mit dem Querschnitt f haben. Der Wasserspiegel habe dabei anfänglich die Höhe h. Welche Zeit verstreicht, bis sich der Wasserspiegel auf die Höhe h_1 gesenkt hat (Bild 118)?**

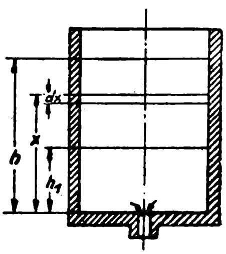

Bild 118

Nehmen Sie an, der Wasserspiegel sei schon auf die Höhe x abgesunken. Nach Torricelli (vgl. Physik, Lbf. 4) ist dann die theoretische Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gx}.$$

In Wirklichkeit liegt die Geschwindigkeit infolge der Reibung niedriger. Sie kommen der wahren Geschwindigkeit nahe, wenn Sie v noch mit einem Faktor μ multiplizieren $(0 < \mu < 1)$. Die Größe des Faktors μ ist u. a. von der Art der Flüssigkeit abhängig. Wir sehen also als wirkliche Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \mu\sqrt{2gx}$$

an.

Während einer kurzen Zeit $\mathrm{d}t$ können Sie die Geschwindigkeit v als konstant ansehen. Innerhalb dieser Zeit $\mathrm{d}t$ fließt die Wassermenge

$$\mathrm{d}Q = fv\,\mathrm{d}t = f\mu\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t$$

aus der unteren Öffnung aus. Dabei senkt sich der Wasserspiegel im Gefäß um $-\mathrm{d}x$, und damit nimmt die Flüssigkeit im Gefäß um

$$\mathrm{d}Q = -F\,\mathrm{d}x$$

ab. Das Minuszeichen soll ausdrücken, daß es sich um eine Verminderung handelt. Selbstverständlich müssen die auf verschiedene Weise ermittelten Werte von $\mathrm{d}Q$ gleich sein. Aus dieser Gleichheit ergibt sich die Differentialgleichung

$$f\mu\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t = -F\,\mathrm{d}x$$

oder nach Trennung der Veränderlichen x und t

$$\mathrm{d}t = -\frac{F}{f\mu\sqrt{2g}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$

Zur nachfolgenden Integration legen Sie für die Wahl der Integrationsgrenzen fest:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{zur Zeit } t = 0 & \text{Füllhöhe: } x = h \\ \text{zur Zeit } t = t_1 & \text{Füllhöhe: } x = h_1 \end{array}\right\} h_1 < h.$$

$$\int_0^{t_1} \mathrm{d}t = -\frac{F}{f\mu\sqrt{2g}}\int_h^{h_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

Vertauschen Sie rechts die Grenzen (das bedeutet eine Vorzeichenänderung!):

$$\int_0^{t_1} \mathrm{d}t = \frac{F}{f\mu\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Sie erhalten

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}\right).}}$$

Soll das Gefäß völlig leerlaufen, so brauchen Sie lediglich $h_1 = 0$ zu setzen und schon erhalten Sie

$$T = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Setzen Sie in diesen Ausdruck noch die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = \mu\sqrt{2gh}$ ein, so nimmt die rechte Seite die Form

$$\underline{\underline{T = \frac{2Fh}{fv_0}}}$$

an. Interessant ist hier ein Vergleich der Zeit t_1, die zur Senkung des Flüssigkeitsspiegels auf die halbe Höhe (Halbwertzeit) benötigt wird, mit der Zeit t_2, die von da ab bis zur völligen Entleerung verstreicht.

Es ist
$$t_1 = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{h}{2}}\right)$$
und
$$t_2 = T - t_1 = \frac{2F}{f\mu\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{h}{2}}.$$
Bilden Sie den Quotienten beider Zeiten:
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{\frac{h}{2}}}{\sqrt{\frac{h}{2}}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414,$$
$$\underline{\underline{t_1 \approx 0{,}4 t_2}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{t_2 \approx 2{,}4 t_1}}.$$
Das gefundene Ergebnis ist unabhängig von h. Die Zeit, die für die erste Hälfte der Entleerung gebraucht wird, ist noch nicht einmal halb so groß wie die Zeit, die für die zweite Hälfte benötigt wird. Dieser Sachverhalt war zu erwarten, denn für die zweite Hälfte sind ja die Ausflußgeschwindigkeiten und damit die sekundlich ausfließenden Flüssigkeitsmengen kleiner als während der ersten Hälfte.

Auch die Entleerungszeit T läßt sich mit der aufgestellten Halbwertzeit in Beziehung setzen:
$$T = t_1 + t_2 \approx t_1 + 2{,}4\, t_1,$$
$$\underline{\underline{T \approx 3{,}4\, t_1}}.$$

Übungen

110. Der in Abschnitt 7.53 behandelte Träger soll einen rechteckigen Querschnitt besitzen (Bild 119), dabei soll die Dicke b konstant bleiben. Wie ist in diesem Fall die halbe Breite in Abhängigkeit von x zu wählen?

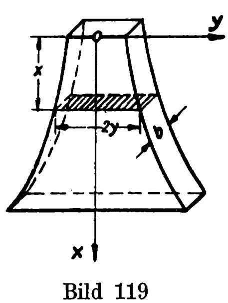

Bild 119

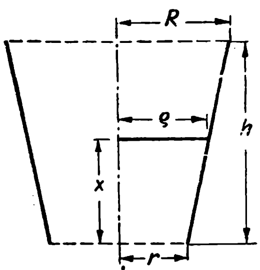

Bild 120

111. Ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß habe die Form eines Kegelstumpfes (Trichter) mit dem oberen Radius R, dem unteren Radius r und der Höhe h. In welcher Zeit leert sich das Gefäß (Bild 120)?

Anleitung: Stellen Sie zur Berechnung des Querschnittes F die Abhängigkeit des Radius ϱ von x, r, R und h auf.

7.55 Spannungsverlust bei Leitungen. Längs einer elektrischen Leitung vom Querschnitt F und der Länge l soll eine gleichmäßig verteilte Stromentnahme stattfinden. Am Anfang der Leitung betrage die Stromstärke I. Der spezifische Widerstand der Leitung sei ϱ. Zu bestimmen ist der am Ende der Leitung vorhandene Spannungsverlust u. Weiterhin soll untersucht werden, in welchem Punkt der Leitung man bei gleichem Ergebnis sich die gesamte Stromentnahme vereinigt denken kann.

Sie bestimmen nicht sofort den Spannungsverlust in der gesamten Leitung von der Länge l, sondern untersuchen zunächst den Spannungsverlust für ein kleines Stück $\mathrm{d}x$ der Leitung in der Entfernung x vom Anfangspunkt. Sie erhalten somit nicht den Spannungsverlust u, sondern einen kleinen Teil des Spannungsverlustes, nämlich $\mathrm{d}u$. Für den Widerstand des Leitungsdrahtes gilt $R = \varrho \cdot \frac{l}{F}$, für das Stück $\mathrm{d}x$ folgt also $\mathrm{d}R = \varrho \cdot \frac{\mathrm{d}x}{F}$.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt somit:

$$\mathrm{d}u = i \cdot \varrho \cdot \frac{\mathrm{d}x}{F},$$

wobei i die Stromstärke an der Stelle x ist. Die Stromstärke i ist dabei von der Stromstärke I am Anfang der Leitung, der Länge l der Leitung und x abhängig. Es gilt:

$$i : I = (l - x) : l,$$

$$i = \frac{(l - x)}{l} \cdot I.$$

Setzen Sie das in den Ausdruck für $\mathrm{d}u$ ein, dann ergibt sich

$$\mathrm{d}u = \frac{(l - x)}{l} \cdot I \cdot \varrho \frac{\mathrm{d}x}{F} = \frac{I \cdot \varrho}{l \cdot F} \cdot (l - x)\,\mathrm{d}x.$$

Soll der gesamte Spannungsverlust berechnet werden, so ist die rechte Seite dieser Gleichung von $x = 0$ bis $x = l$ zu integrieren:

$$u = \frac{I \cdot \varrho}{l \cdot F} \cdot \int_0^l (l - x)\,\mathrm{d}x,$$

$$u = \frac{I \cdot \varrho}{l \cdot F} \cdot \left(lx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^l = \frac{\varrho \cdot I \cdot l}{2 \cdot F}.$$

Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $u = \frac{l}{2} \cdot \frac{\varrho \cdot I}{F}$, dann erkennen Sie, daß der Spannungsverlust gerade so groß ist, als wenn die gesamte Stromentnahme in der Mitte der Strecke erfolgte.

7.56 Energie eines Magnetfeldes. Wie groß ist die Energie des Magnetfeldes einer Spule, die von einem Strom $I = 200$ mA durchflossen wird und eine Selbstinduktivität von $L = 0{,}15$ H hat?

Die Energie eines Magnetfeldes ist gleich der Arbeit, die man aufwenden muß, um dieses Magnetfeld aufzubauen. Die zum Aufbau eines Magnetfeldes aufzuwendende Arbeit ist von dem magnetischen Fluß Φ und der Stromstärke abhängig.

Da Φ nicht konstant ist, sondern von der Stromstärke I abhängt, gehen Sie wiederum nicht gleich zur Bestimmung der Arbeit A über, sondern bestimmen zunächst $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}A = I \cdot \mathrm{d}\Phi.$$

Hierbei ist $\Phi(I) = L \cdot I$, also $\mathrm{d}\Phi = L \cdot \mathrm{d}I$ und damit

$$\mathrm{d}A = I \cdot L \cdot \mathrm{d}I.$$

Die gesamte aufgewandte Arbeit erhalten Sie, wenn Sie von $I_1 = 0$ bis $I_2 = I$ integrieren:

$$A = L \int I \,\mathrm{d}I = L \cdot \left.\frac{I^2}{2}\right|_0^I = \frac{L}{2} \cdot I^2.$$

Mit den Werten $L = 0{,}15$ H und $I = 200$ mA $= 0{,}2$ A erhalten Sie

$$A = \frac{0{,}15}{2}\, 0{,}04\ \mathrm{HA}^2 = 0{,}003\ \mathrm{HA}^2 = \underline{\underline{0{,}003\ \mathrm{Ws}}}.$$

Die berechnete Arbeit ist die im Magnetfeld enthaltene Energie.

1. Sie bilden $f(-x)$, d. h., Sie ersetzen in den Funktionsgleichungen x durch $(-x)$ und vergleichen $f(-x)$ mit $f(x)$:

$y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, gerade Funktion

$y = f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} = f(x)$, gerade Funktion

$y = f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x)$, ungerade Funktion

$y = f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1} = f(x)$, gerade Funktion

$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$, ungerade Funktion

$y = f(x) = \sin x$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, ungerade Funktion

$y = f(x) = \cos x$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, gerade Funktion

2. Es handelt sich um eine ungerade gebrochene rationale Funktion. Ihre Kurve verläuft stetig. Sie hat die x-Achse zur Asymptote (Bild 121).

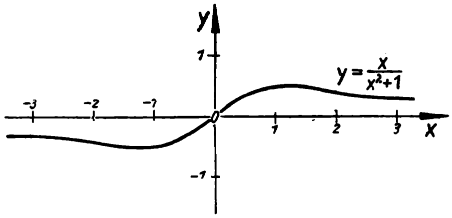

Bild 121

Inverse Funktion:

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

1. Schritt:

$$x^2 - \frac{x}{y} + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2y}\left(1 \pm \sqrt{1-4y^2}\right)$$

2. Schritt (für den Hauptwert der Wurzel):

$$y = \frac{1}{2x}\left(1 + \sqrt{1-4x^2}\right)$$

3. Siehe Bild 122.
4. a) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2(2x + \Delta x)$

   b) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 - 4x + (3x - 2)\Delta x + \Delta x^2$

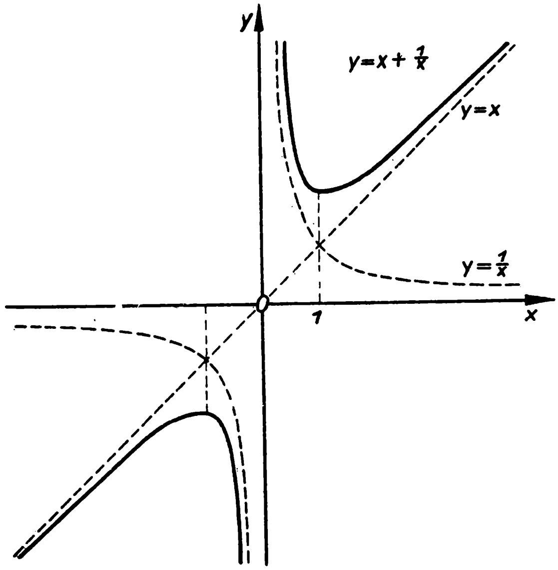

Bild 122

5. $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = x + \dfrac{1}{2}\Delta x, \quad f'(x) = x, \quad f'(1) = 1$

6. Rein geometrisch gesehen ist $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht unterbrochen, die Funktion also stetig.

   Der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = (\Delta x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

   Sie erhalten den uneigentlichen Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \infty$; eine Ableitung existiert also nicht. Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Die Tangente ist hier die Gerade $x = 0$ (y-Achse), ihr Richtungsfaktor ist $\tan\alpha = \infty$.

7. $y' = \dfrac{-6}{x^7}$

8. a) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

   b) $y = \sqrt[6]{x}; \quad y' = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

   c) $y' = -\dfrac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

9. $y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$y' = 1$: $\qquad 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x = \frac{1}{4}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

In den Punkten $P_1\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ und $P_2\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ müßte nach der durchgeführten Rechnung der Anstieg gleich 1 sein. Betrachten Sie aber den Kurvenverlauf (Bild 123), dann sehen Sie, daß im Punkt P_2 der Anstieg gleich -1 ist. Warum erhält man aber auch das zweite Ergebnis? Beim Quadrieren des Ausdrucks $1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und nachfolgendem Auflösen nach x würde man zum gleichen Resultat kommen, wenn auf der linken Seite der Gleichung an Stelle von 1 der Wert -1 stehen würde, da beim Quadrieren $(1)^2 = (-1)^2$ ist. Sie sehen also, daß es nötig ist, das Ergebnis einer Rechnung am Schluß nochmals zu überprüfen.

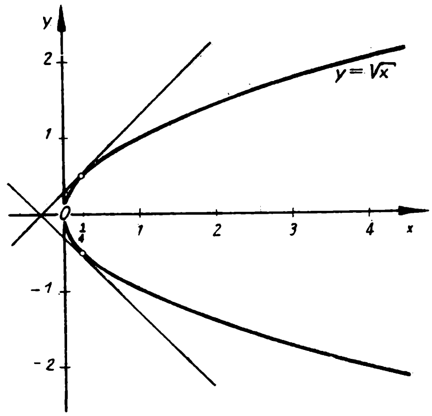

Bild 123

10. Schnittpunkte der beiden Kurven:

$$x^3 = \sqrt{x}$$
$$x^6 = x$$
$$x^6 - x = 0$$

$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \qquad x_2 = \sqrt[5]{1} = 1, \quad y_2 = 1$

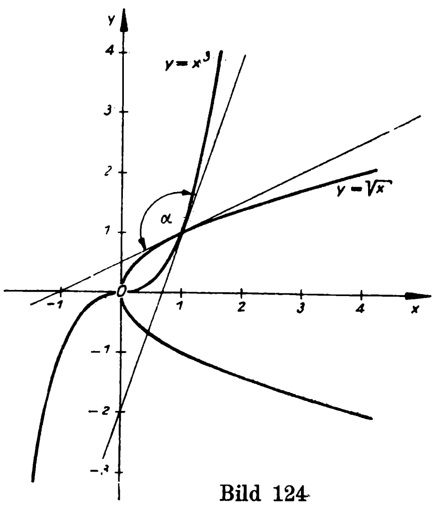

Bild 124

Anstieg der Kurve $y = x^3$:

$y' = 3x^2$ in P_1: $m_{11} = 3 \cdot 0 = 0$

in P_2: $m_{12} = 3 \cdot 1^2 = 3$

Anstieg der Kurve $y = \sqrt{x}$:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in P_1: $m_{21} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$

in P_2: $m_{22} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0{,}5$

Schnittwinkel der Tangenten:

P_1: Im Punkte P_1 ist die Tangente an die Kurve $y = \sqrt{x}$ identisch mit der y-Achse. Die Tangente an die Kurve $y = x^3$ im gleichen Punkt stellt die x-Achse dar. Der Schnittwinkel zwischen beiden Tangenten beträgt somit 90°.

P_2: Um den Schnittwinkel der Tangenten im Punkt P_2 zu bestimmen, verwenden Sie die Beziehung $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ aus der analytischen Geometrie:

$$\tan\alpha = \frac{0{,}5 - 3}{1 + 0{,}5 \cdot 3} = -1, \quad \alpha = 135^\circ \text{ (vgl. Bild 124).}$$

11. a) $y' = 6$ b) $y' = ab^3$ c) $y' = 8x + 8 = 8(x + 1)$

12. a) $y' = x^6 + \frac{1}{x^6}$ b) $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1 - x}{x^3}$

c) $y' = 3(x - 1)^2$ d) $y' = 2x - 1$

13. a) $y' = 5x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 4x - 10$

b) $y' = 34x + 19$

c) $y' = 9x^8 + 7ax^6 + 6bx^5 + 5cx^4 + 4abx^3 + 3acx^2 + 2bcx$

14. a) $u'(x) = 2x - a - b$ b) $h'(x) = -1 - 2x + 4x^3 + 5x^4 - 6x^5$

15. $y' = -\frac{2x + 1}{x^2(x + 1)^2}$

16. a) $y' = -\frac{2}{(1 + x)^2}$ b) $y' = \frac{6x^4 - 16x^3 - 51x^2 - 30x - 1}{(3x^2 - 4x - 7)^2}$

c) $y' = -\frac{128x^7}{(x^8 - 8)^2}$ d) $y' = \frac{2ab}{(a - bx)^2}$

17. a) $y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$ b) $y' = \frac{2x^2 + 4x - 10}{(x^2 + 5)^2}$

18. a) $y' = \frac{a}{(1 - x)^2}$ b) $y' = \frac{a}{\sqrt{x}(a - \sqrt{x})^2}$ c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x})^2}$

19. $y' = \frac{-x^2 + 12x - 20}{(x^2 - 2x - 8)^2}$

Die Tangenten sollen parallel zur x-Achse verlaufen, folglich muß $y' = 0$ sein, d. h., der Zähler von y' muß Null sein.

$x^2 - 12x + 20 = 0$ $x_1 = 10;\ y_1 = \frac{1}{18}$ $x_2 = 2;\ y_2 = \frac{1}{2}$

20. a) $y' = \frac{1 - \sin x - \cos x}{(1 - \cos x)^2}$

b) $y = \frac{\sin x}{\tan^2 x \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \cot x$

$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

21. $f'(x) = \cos x;\ f'(0) = 1;\ \varphi = 18^\circ\, 26'$ (vgl. Bild 125)

22. a) $y' = (45x^2 - 10)(3x^3 - 2x)^4 + (200x^3 - 20x + 30)(5x^4 - x^2 + 3x)^9$

b) $y' = 20x(x^2 - 4)^9$

c) $y' = \dfrac{4x^3(x^3+2x-5)^6 - 6x^4(3x^2+2)(x^3+2x-5)^5}{(x^3+2x-5)^{12}}$

d) $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}}$ e) $y' = \dfrac{x(2a^2+3x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}$ f) $y' = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

g) $y' = \dfrac{x^2+1}{2x\sqrt{x(x^2-1)}}$ h) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-9)^3}}$ i) $y' = \dfrac{3(2x^2+\sqrt{x})}{4\sqrt{x^3+\sqrt{x^3}}}$

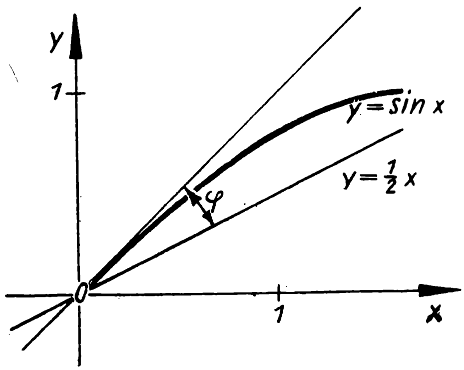

Bild 125

23. a) $g'(t) = -a \cdot \sin(at - b)$

b) $u'(t) = \cos t \cdot \sin^3 t \cdot (1 - \sin^2 t)$

$= \cos^3 t \cdot \sin^3 t$

c) $y' = \cos x \cdot \sin(x-a) + \sin x \cdot \cos(x-a) = \sin(2x-a)$

d) $y = \dfrac{a \cdot \sin t}{1 + \cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{a \cdot \sin t}{1 + \sin t}$ $y' = \dfrac{a \cdot \cos t}{(1+\sin t)^2}$

e) $y' = 2x\sqrt{\cos x} - \dfrac{x^2 \sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ f) $y' = \dfrac{4x - 3\sin 2x}{2\sqrt{2x^2 + 3\cos^2 x}}$

g) $y' = \dfrac{-2\sin x + \sin x \cos x}{2(1-\cos x)\sqrt{1-\cos x}}$ h) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \cos^2\sqrt{1-x^2}}$

24. a) $2gt - y' \cdot \sin^2 t - y \cdot \sin 2t = 0$

$$y' = \frac{2gt - y \cdot \sin 2t}{\sin^2 t}$$

b) $[-\sin(x+y)](y'+1) - 1 = 0$

$$y' = \frac{-1}{\sin(x+y)} - 1$$

c) $3x^2 - 14xz - 7x^2z' - 15z^2z' + 8x - 10z - 10xz' + 8 - 5z' = 0$

$$z' = \frac{3x^2 - 14xz + 8x - 10z + 8}{7x^2 + 10x + 15z^2 + 5}$$

25. a) $y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad\qquad y'' = 6x + \frac{2}{x^3}$

b) $y' = \sin 2t$ $\qquad\qquad y'' = 2\cos 2t$

c) $y' = \frac{-2a}{(a+x)^2}$ $\qquad\qquad y'' = \frac{4a}{(a+x)^3}$

d) $y = (\sin t)^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -\frac{1}{2}(\sin \quad ^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos t = \frac{-\cos t}{2\sin t\sqrt{\sin t}}$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}(\sin t)^{-\frac{5}{2}} \cdot \cos t \cdot \cos t + (\sin t)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\sin t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3\cos^2 t}{2\sin^2 t\sqrt{\sin t}} + \frac{\sin t}{\sin t\sqrt{\sin t}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3\cos^2 t + 2\sin^2 t}{2\sin^2 t\sqrt{\sin t}}\right] = \frac{3 - \sin^2 t}{4\sin^2 t\sqrt{\sin t}}$$

e) $y' = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$y'' = \frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot(-4x-a) + \frac{x(-2x^2 - ax + a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{2x^3 - 3a^2x - a^3}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

26. a) $g' = 2\cos 2t = 2^1 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$g'' = -4\sin 2t = 2^2 \cdot \sin\left(2t + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$g''' = -8 \cdot \cos 2t = 2^3 \cdot \sin\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$g^{(n)} = 2^n \cdot \sin\left(2t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

b) $y = x^{-2}$

$y' = -2x^{-3}$

$y'' = (-2)(-3)\,x^{-4}$

$y''' = (-2)(-3)(-4)\,x^{-5}$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot x^{(-n-2)}$$

c) $z(t) = \frac{t}{1+t}$

$z' = \frac{1}{(1+t)^2}$

$$z'' = \frac{-2}{(1+t)^3}$$

$$z''' = \frac{(-2)(-3)}{(1+t)^4}$$

$$z^{(4)} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{(1+t)^5}$$

$$z^{(n)} = (-1)^{(n+1)} \cdot \frac{n!}{(1+t)^{(n+1)}}$$

27. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = I_0 \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\omega x}{2}\right)$

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

28. $b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\omega\left(\omega \cos \omega t + \frac{4\omega\lambda\cos 2\omega t(1-\lambda^2\sin^2\omega t) + \lambda\sin 2\omega t \cdot 2\omega\lambda^2\sin\omega t\cos\omega t}{4(1-\lambda^2\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= r\omega^2\left(\cos\omega t + \lambda\,\frac{4\cos 2\omega t - 4\lambda^2\cos^2\omega t\sin^2\omega t + 4\lambda^2\sin^4\omega t + 4\lambda^2\sin^2\omega t\cos^2\omega}{4(1-\lambda^2\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= r\omega^2\left(\cos\omega t + \lambda\,\frac{\cos 2\omega t + \lambda^2\sin^4\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t^3}}\right)$$

Die Beschleunigung wächst proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.

29. Siehe Bild 126.

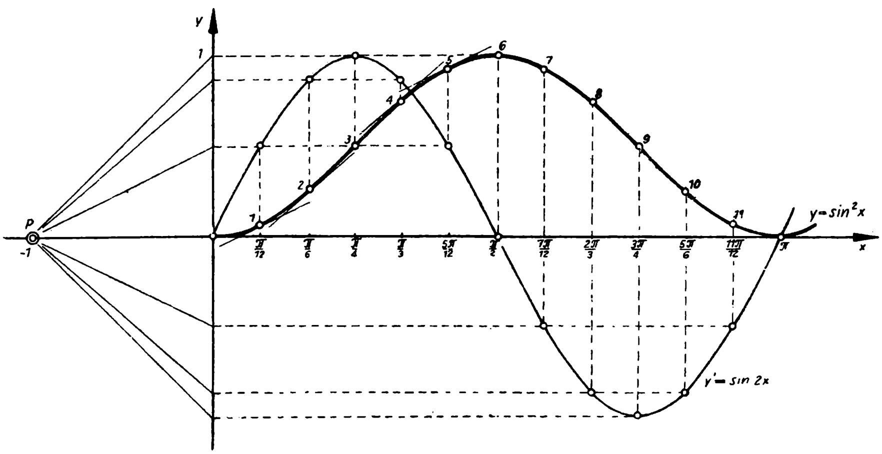

Bild 126

30. a) Nullstellen: $x_{N_1} = -3, \quad x_{N_2} = 2$

Extremwerte: $x_{\min} = -3, \quad y_{\min} = 0$

$x_{\max} = \frac{1}{3}, \quad y_{\max} = 18\frac{14}{27}$

Wendepunkt: $x_W = -\frac{4}{3}, \quad y_W = 9\frac{1}{27}$

b) Nullstellen: $x_{N_1} = 2, \quad x_{N_2} = -1$

Extremwert: $x_{\min} = -0{,}25, \quad y_{\min} = -8{,}54$

Wendepunkte: $x_{W_1} = 0{,}5, \quad y_{W_1} = -5{,}06$

$x_{W_2} = 2, \quad y_{W_2} = 0$

Im Wendepunkt an der Stelle $x_{W_2} = 2$ hat die Kurve eine waagerechte Tangente.

31. a) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}; \quad y'' = 2 + \frac{2}{x^3}; \quad y''' = -\frac{6}{x^4}$

Wendepunkt: $x_W = -1; \quad y_W = 0$

b) $f(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$

$f'(t) = -2 \cdot \sin 2t; \quad f''(t) = -4 \cdot \cos 2t$

Wendepunkte: $t_W = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \; y_W = 0$

32. $y' = (a - b) \cdot \sin 2x; \quad y'' = 2(a - b) \cdot \cos 2x; \quad y''' = -4(a-b) \cdot \sin 2x$

Extremwerte: $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \; y_{\max} = a$

$x_{\min} = 0 + k \cdot \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \quad y_{\min} = b$

Wendepunkte: $x_W = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \; y_W = \frac{1}{2}(a + b)$

33. a) $y' = \frac{x^2(x^2 - 3a^2)}{(x^2 - a^2)^2}, \quad y'' = 2a^2 \frac{x(x^2 + 3a^2)}{(x^2 - a^2)^3}, \quad y''' = -6a^2 \frac{x^2(x^2 + 6a^2) + a^4}{(x^2 - a^2)^4}$

Nullstelle: $x_N = 0$

Unendlichkeitsstellen: $x_{P_1} = a, \quad x_{P_2} = -a$

Extremwerte: $x_{\max} = -a\sqrt{3}, \quad y_{\max} = -\frac{3}{2} a\sqrt{3}$

$x_{\min} = a\sqrt{3}, \quad y_{\min} = \frac{3}{2} a\sqrt{3}$

Wendepunkt: $x_W = 0, \; y_W = 0$ (waagerechte Tangente)

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - a^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{a^2 x}{x^2 - a^2}\right) = \pm\infty$

Die Gerade $y = x$ ist Asymptote der Kurve.

Die Kurve ist für $a = 1$ in Bild 9 dargestellt.

b) Lücke bei $x_L = 0$

Für $x_L = 0$ ergibt sich aus

$$y = \frac{3x^2 - 5x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{3x - 5}{x^2 - 2x + 1} \qquad \lim_{x \to 0} y = -5.$$

Sie untersuchen nach Heben der Lücke die Funktion

$$y = \frac{3x - 5}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$y' = -\frac{3x - 7}{(x-1)^3}; \quad y'' = \frac{6x - 18}{(x-1)^4}; \quad y''' = -\frac{18x - 66}{(x-1)^5}$$

Nullstelle: $x_N = \frac{5}{3}$

Unendlichkeitsstelle: $x_P = 1$

Extremwert: $x_{\max} = 2\frac{1}{3}$, $y_{\max} = 1\frac{1}{8}$

Wendepunkt: $x_W = 3$, $y_W = 1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x - 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{x - 2 + \frac{1}{x}} = 0$

c) Lücke bei $x_L = -2$

Für $x_L = -2$ ergibt sich aus

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} \qquad \lim_{x \to -2} y = 20$$

Sie untersuchen nun die nach Heben der Lücke erhaltene Funktion

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3}.$$

Nullstellen: $x_{N1} = 2$; $x_{N2} = 3$

Unendlichkeitsstelle: $x_P = -3$

Maximum: $x_{\max} = -3 - \sqrt{30}$, $y_{\max} = -11 - 2\sqrt{30} \approx -21{,}95$

Minimum: $x_{\min} = -3 + \sqrt{30}$, $y_{\min} = -11 + 2\sqrt{30} \approx -0{,}046$

Keine Wendepunkte

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x - 8 + \frac{30}{x + 3}\right) = \pm\infty$

$y = x - 8$ ist Asymptote der Kurve.

d) $y = x^3 - \frac{1}{x}$

Die Kurve nähert sich für $x \to \pm\infty$ asymptotisch der kubischen Parabel $y = x^3$, und mit dieser geht $y \to \pm\infty$

Nullstellen: $x_{N1} = 1$; $x_{N2} = -1$

Unendlichkeitsstelle: $x_P = 0$

Wendepunkte: $x_{W1} = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ $\qquad y_{W1} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} \approx 0{,}88$

$x_{W2} = +\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ $\qquad y_{W2} = -\frac{2}{3}\sqrt[4]{3} \approx -0{,}88$

34. a) Periode: 2π

$y' = 2\cos 2x + 2\cos x, \qquad y'' = -4\sin 2x - 2\sin$

$y''' = -8\cos 2x - 2\cos x$

Nullstellen: Aus $\sin 2x + 2\sin x = 2\sin x(\cos x + 1) = 0$ ergibt sich $\sin x_1 = 0$ und $\cos x_2 = -1$.

$x_{N1} = 0, \qquad x_{N2} = \pi$

Extremwerte: $\cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

liefert $\cos x_3 = \frac{1}{2}, \quad \cos x_4 = -1,$

$x_{31} = \frac{\pi}{3}, \quad x_{32} = \frac{5\pi}{3}, \quad x_{41} = x_{42} = \pi.$

$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\sin 120^\circ - 2\sin 60^\circ = -3\sqrt{3} < 0$ (Maximum)

$y''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -4\sin 240^\circ - 2\sin 300^\circ = +3\sqrt{3} > 0$ (Minimum)

$y''(\pi) = -4\sin 360^\circ - 2\sin 180^\circ = 0$

$y'''(\pi) = -8\cos 360^\circ - 2\cos 180^\circ = -6 \neq 0$ (Wendepunkt)

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 120^\circ + 2\sin 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$y\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin 240^\circ + 2\sin 300^\circ = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$x_{\max} = \frac{\pi}{3}, \qquad y_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$

$x_{\min} = \frac{5\pi}{3}, \qquad y_{\min} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2{,}60$

Wendepunkte: $-4\sin 2x - 2\sin x = -2\sin x(4\cos x + 1) = 0$

liefert $\sin x_5 = 0, \quad \cos x_6 = -\frac{1}{4},$

$x_{51} = 0, \qquad x_{52} = \pi,$

$x_{61} \approx 1{,}823, \quad x_{62} \approx 4{,}460.$

Für diese Werte ist $y''' \neq 0$.

Für $\sin x_5 = 0$ ist $\sin 2x_5 = 2 \sin x_5 \cos x_5 = 0$, also $y_5 = 0$.

Für $\cos x_6 = -\frac{1}{4}$ ist $\sin x_6 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{15}$,

$\sin x_{61} = \frac{1}{4} \sqrt{15}, \quad \sin x_{62} = -\frac{1}{4} \sqrt{15},$

also $y_{61} = -\frac{1}{8} \sqrt{15} + \frac{1}{2} \sqrt{15} = \frac{3}{8} \sqrt{15},$

$y_{62} = \frac{1}{8} \sqrt{15} - \frac{1}{2} \sqrt{15} = -\frac{3}{8} \sqrt{15}.$

$x_{W1} = 0, \qquad y_{W1} = 0$

$x_{W2} \approx 1{,}823, \qquad y_{W2} = \frac{3}{8} \sqrt{15} \approx 1{,}45$

$x_{W3} = \pi, \qquad y_{W3} = 0$ (waagerechte Tangente)

$x_{W4} \approx 4{,}460, \qquad y_{W4} = -\frac{3}{8} \sqrt{15} \approx -1{,}45$

Die Kurve ist in Bild 127 dargestellt.

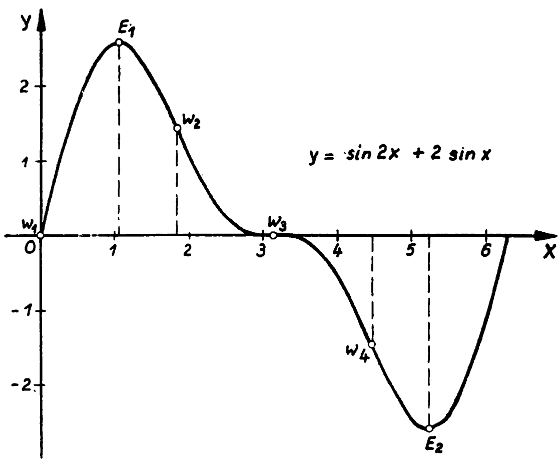

Bild 127

b) $y' = 1 + \cos x; \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x$

Extremwerte: $\cos x_1 = -1, \ x_1 = (2n+1)\pi, \ y_1'' = 0, \ y_1''' = 1 \neq 0.$
Die Funktion hat keine Extremwerte.

Wendepunkte: $\sin x_2 = 0$, $x_{21} = 2n\pi$, $x_{22} = (2n+1)\pi$, $y_{21}''' \neq 0$, $y_{22}''' \neq 0$

$x_{W1} = 2n\pi$, $y_{W1} = 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$x_{W2} = (2n+1)\pi$, $y_{W2} = (2n+1)\pi$ (waagerechte Tangente).

Die Wendepunkte liegen auf der Geraden $y = x$.

Die Funktion ist in Bild 16 dargestellt.

35.

	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$
Nullstellen:	$x_{N1} = -2$,	$x_{N2} = 2$
Extremwerte:	$x_{max} = 2$,	$x_{min} = -2$
	$y_{max} = 4$,	$y_{min} = -4$

Wendepunkte liegen nicht vor.

y liefert nur dann reelle Werte, wenn $8 - x^2 \geqq 0$, d. h. $|x| \leqq |\sqrt{8}|$ (Bild 128)

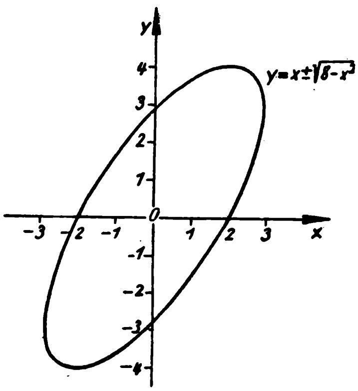

Bild 128

36. Nullstellen: $t_N = 0$ (doppelte Nullstelle)

Pole: liegen nicht vor.

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = a^2$, Asymptote: $y = a^2$

Symmetrie: Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Extremwerte: $t_{min} = 0$; $y_{min} = 0$

Wendepunkte: $t_{W1;2} = \pm \frac{a}{3}\sqrt{3}$; $y_{W1;2} = \frac{a^2}{4}$

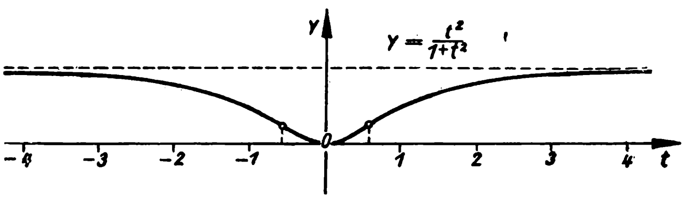

Bild 129

37. $s' = 2(x - l_1) + 2(x - l_2) + \dots + 2(x - l_n)$, $s'' = 2n > 0$

$$x_{\min} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} \qquad \text{(arithmetisches Mittel !)}$$

38. a) Nach Bild 130 wird der Umfang

$$U = a + b + c = a + \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(a - x)^2 + h^2},$$

also
$$U' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + h^2}}.$$

Aus $U' = 0$ folgt dann $x = \frac{a}{2}$; also liefert das gleichschenklige Dreieck ein Minimum von U.

b) Aus Bild 131 entnehmen Sie die Beziehungen.
Das Volumen V des einbeschriebenen Kegels wird

$$V = \frac{1}{3} x^2 \pi \cdot y.$$

Es ist
$$\frac{h}{r} = \frac{h - y}{x},$$

also
$$y = \frac{h}{r}(r - x).$$

Demnach wird
$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \frac{h}{r}(r - x).$$

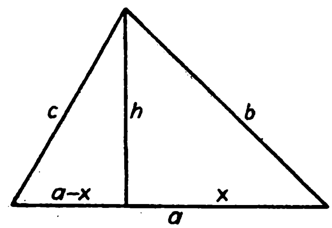

Bild 130

Da $\frac{\pi h}{3r}$ ein konstanter Faktor ist, genügt es, das Maximum der Funktion $F(x) = x^2(r - x)$ festzustellen; es liegt vor für $x = \frac{2}{3} r$; $y = \frac{h}{3}$.

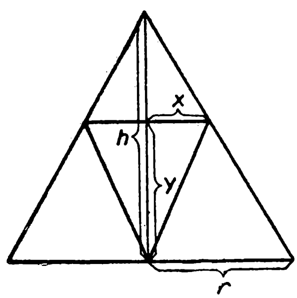

Bild 131

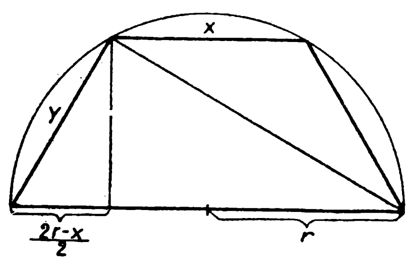

Bild 132

c) Der Umfang U wird (Bild 132)

$$U = 2r + x + 2y.$$

Aus
$$\frac{y}{2r} = \frac{\frac{2r - x}{2}}{y}$$

folgt $$y = \sqrt{2r^2 - rx}.$$

Daher ist $$U = 2r + x + 2\sqrt{2r^2 - rx},$$

$$U' = 1 - \frac{r}{\sqrt{2r^2 - rx}}.$$

Maximum für $$x = r,$$

$$y = r.$$

39\. a) Nach dem Satz von Euklid wird (Bild 133)

$$x^2 = d \cdot y,$$

$$h = x - y = x - \frac{x^2}{d}.$$

Die Kugelkappe wird

$$H = 2\pi x h = 2\pi x \left(x - \frac{x^2}{d}\right).$$

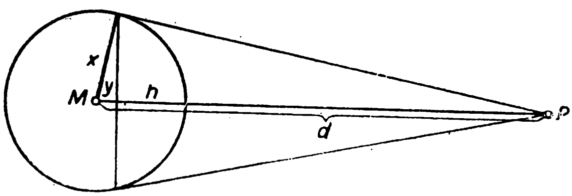

Bild 133

Die Untersuchung der Funktion $F(x) = x\left(x - \frac{x^2}{d}\right)$ zeigt, daß das Maximum für $x = \frac{2}{3}d$ vorliegt.

b) Offenbar erscheint das Standbild dann am größten, wenn $\sphericalangle\, \alpha$ am größten ist (Bild 134).

$\alpha = \psi - \varphi$; $\tan\varphi = \frac{b-a}{x}$; $\tan\psi = \frac{h+b-a}{x}$

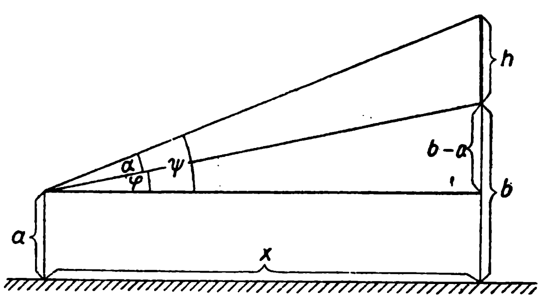

Bild 134

Da $\tan(\psi - \varphi)$ monoton im Intervall $0 \leqq (\psi - \varphi) < \frac{\pi}{2}$ ist, untersuchen wir diese Funktion:

$$\tan(\psi - \varphi) = \frac{\tan\psi - \tan\varphi}{1 + \tan\psi \tan\varphi} = \frac{h\,x}{x^2 + (h + b - a)(b - a)},$$

$$\tan(\psi - \varphi) = \frac{2{,}6\,x}{x^2 + 9{,}8 \cdot 7{,}2}.$$

Daraus ergibt sich ein Maximum für $x = 8{,}4$ m.

40. An Material benötigt man (Bild 135):

$$M = \pi(r + a)^2 \left(\frac{V}{\pi r^2} + a\right) - V.$$

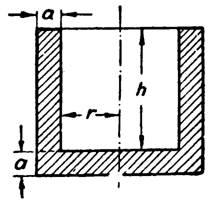

Bild 135

Aus $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 0$ folgt:

$$2\left(\frac{V}{\pi r^2} + a\right) - (r + a)\frac{2V}{\pi r^3} = 0; \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Aus $V = \pi r^2 h$ folgt $\qquad r = h; \ \frac{r}{h} = 1.$

41. Aus $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}v} = 0$

folgt $v = b; \quad \frac{\mathrm{d}^2 K(b)}{\mathrm{d}v^2} = -\frac{a}{2b^3} < 0.$

$$K_{\max} = \frac{a}{2b}$$

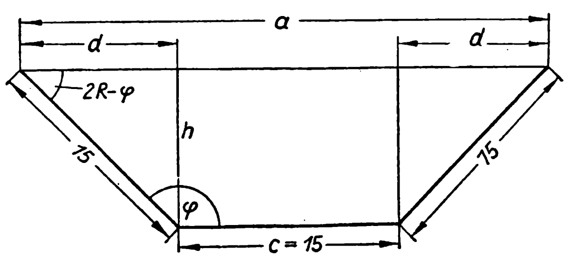

Bild 136

42. Bei größtem Querschnitt ist auch das Fassungsvermögen am größten. Der Querschnitt F ist (Bild 136): $F = \frac{a+c}{2} h$;

$$h = 15 \sin \varphi,$$
$$d = -15 \cos \varphi,$$
$$a = 15 + 2d = 15 - 30 \cos \varphi.$$

Also $$F(\varphi) = 225 (\sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi).$$

a) Maximum für $\varphi = 120°$.

b) Der Ansatz $$250 = 225 (\sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

liefert $$\sin^4 \varphi - \frac{20}{9} \sin \varphi + \frac{100}{81} = 0.$$

Sei $x = \sin \varphi$, so haben wir eine Lösung der Gleichung

$$x^4 - \frac{20}{9} x + \frac{100}{81} = 0$$

zu suchen.

Das Newtonsche Näherungsverfahren liefert

$x_1 = 0{,}993 = \sin \varphi_1$ $\qquad$ $x_2 = 0{,}624 = \sin \varphi_2$

$\varphi_1 \approx 96{,}8°$ $\qquad$ $\varphi_2 \approx 141{,}4°$

Die sich aus $x_1 = \sin \varphi_1$ bzw. $x_2 = \sin \varphi_2$ ergebenden Werte $\varphi < 90°$ scheiden auf Grund der Aufgabenstellung (Querschnitt 250 cm²) aus.

43. Für die kinetische Energie gilt: $\frac{m \cdot v^2}{2} = mgh = mgl \sin \varphi$.

$$v^2 = 2gl \sin \varphi$$
$$v = \sqrt{2gl \sin \varphi}$$

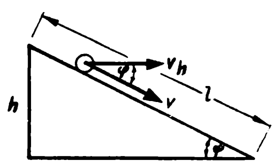

Bild 137

Wenn die Kugel auf der waagerechten Ebene möglichst weit rollen soll, dann muß v_h möglichst groß werden (Bild 137):

$$v_h = v \cos \varphi = \cos \varphi \sqrt{2gl \sin \varphi},$$

$$\frac{dv_h}{d\varphi} = gl \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{\sqrt{2gl \sin \varphi}},$$

$$\varphi_{\max} = 35{,}3°.$$

44. Aus Bild 62 ergibt sich für den Querschnitt: $F = 4(2xy - y^2)$.
Winkel α einführen:

$$F = 4r^2(2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha) = 4r^2 (\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = 4r^2 (2 \cdot \cos 2\alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha) = 4r^2 (2 \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Extremwert: $\alpha_{max} = 31° \, 43'$, $x_{max} = 0{,}851\, r$, $y_{max} = 0{,}526\, r$
Maximaler Flächeninhalt des Eisenkernquerschnittes: $F_{max} = 2{,}47 r^2$

45. Es gilt (Bild 138): $l = \frac{g \cdot \sin\alpha}{2} t^2 = \frac{a}{2\cos\alpha}$,

$$t^2 = \frac{a}{g \cdot \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{2a}{g \cdot \sin 2\alpha}.$$

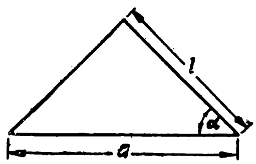

Bild 138

Extremwert: $\alpha_{min} = 45°$

46. Umformung ergibt $\sin x - \frac{1}{x} + 1 = 0$; $f' = \cos x + \frac{1}{x^2}$;

$$f'' = -\sin x - \frac{2}{x^3}$$

Aus Zeichnung (Bild 139): $x_0 \approx 0{,}6$
Ergebnis: $x_N = 0{,}6295$

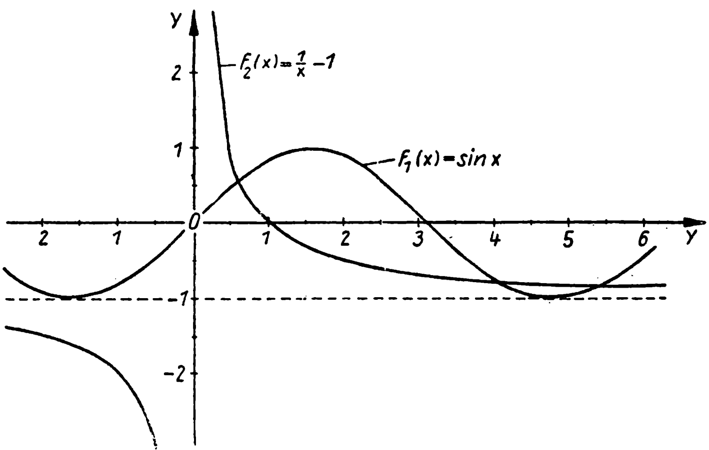

Bild 139

47. Mit $x_0 = 0{,}9$ als Ausgangswert ergibt sich $x_N = 0{,}926$.

48. $x_W \approx -1{,}346$

49. a) $y = 2\ln x$, $y' = \frac{2}{x}$

b) $y' = \frac{2\ln x}{x}$.

c) Nach der Definition der Logarithmen ist $y = {}^x\log x = 1$. Damit wird $y' = 0$.

50. a) $y = \frac{1}{2}\ln x;\qquad y' = \frac{1}{2x}$

b) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

c) $y' = (\ln 1)' - \frac{1}{2}(\ln x)' = -\frac{1}{2x}$

d) $y = \frac{1}{2}\ln(a^2x^2 + b^2);\qquad y' = \frac{a^2x}{a^2x^2 + b^2}$

51. a) $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ b) $y' = -\tan x$ c) $y' = -2\tan 2x$

52. a) $\ln y = x \cdot \ln x + \ln \sin x + \ln \cos x$

$y' = y[1 + \ln x + \cot x - \tan x] = x^x \cdot \sin x \cos x\,[1 + \ln x + \cot x - \tan x]$

b) $y \cdot \ln\ln x = \ln x$

$$y' \cdot \ln\ln x + y \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{\ln x - y}{x \ln x \cdot \ln\ln x} = \frac{\ln\ln x - 1}{x(\ln\ln x)^2}$$

c) $f(x) = \left(x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\right)^x$

$\ln f(x) = x(\ln x - \ln 2 + \ln \sin 2x)$

$f'(x) = (x \sin x \cos x)^x (1 - \ln 2 + 2x \cot 2x + \ln x + \ln \sin 2x)$

d) $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$

53. a) $y' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ b) $y' = a \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$

c) $y' = \frac{-4a}{(e^{ax} - e^{-ax})^2}$ d) $y' = e^x(1 + x)$

54. a) $y = e^{\ln x} = x;\qquad y' = 1$

b) $y' = e^{\lg x} \cdot (\lg x)' = \frac{e^{\lg x}}{x} \cdot 0{,}4343$

c) $y' = ax^{a-1} \cdot a^{bx} + x^a \cdot a^{bx}(\ln a) \cdot b = a^{bx}x^{a-1}(a + bx \ln a)$

d) $y' = \pi x^{\pi-1}$

55. a) $y' = e^x$, $y'(1) = e$; $\lg \tan \alpha = \lg e = 0{,}4343$; $\alpha = 69^\circ\, 48'\, 08''$

b) $y' = a^x \ln a$, $y'(1) = a \cdot \ln a$

Für $a = 2$ ist $y'(1) = m = 2 \cdot \ln 2 = 2 \cdot 0{,}6931 = 1{,}3862$; $\alpha = 54^\circ\, 12'$.

56. $\mu = \frac{B}{H} = \frac{e^{\frac{H}{a + bH}}}{H} \qquad \frac{d\mu}{dH} = -\frac{e^{\frac{H}{a + bH}}[b^2 H^2 + aH(2b - 1) + a^2]}{H^2(a + bH)^2}$

$e^{\frac{H}{a + bH}}$ kann für keinen Wert von H gleich Null werden.

Aus $b^2H^2 + aH(2b - 1) + a^2 = 0$ folgt $H = \frac{a}{2b^2}(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b})$.

57. a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Delta V = 4\pi r^2 \Delta r \qquad \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta r}{r}$

Der relative Fehler bei der Berechnung des Volumens ist dreimal so groß wie der relative Fehler des Radius.

b) $F = \pi r^2; \qquad r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$

Gesucht ist $\frac{\Delta r}{r}$ in Abhängigkeit von $\frac{\Delta F}{F} = 4\%$.

Logarithmiert: $\ln r = \frac{1}{2}\ln F - \frac{1}{2}\ln \pi$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2}\frac{\Delta F}{F} = 2\%$$

Der Kugelradius ändert sich um 2%.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\left(\frac{F}{\pi}\right)^3} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{F^3}$$

Logarithmiert: $\ln V = \ln\frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{3}{2}\ln F$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta F}{F} = 6\%$$

Das Kugelvolumen ändert sich um 6%.

58. $U = R \cdot I \qquad \Delta U = R \cdot \Delta I$

Prozentualer Fehler: $p \approx \frac{\Delta I}{I}\ 100\% = \frac{0{,}2 \cdot 100\%}{5} = 4\%$

59. a) $z'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ b) $y' = \frac{\cot x \cdot \ln\cos x + \tan x \cdot \ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$

c) $y' = -\tan\frac{x}{2}$ d) $y' = \frac{a}{x^2 - a^2}$ e) $y' = \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{a + bx}}$

60. a) $y' = x^{x\sin x}\sin x\,(1 + x\ln x\ \ \cot x + \ln x)$

b) $f' = x\sin x\ \ x^{x}(2 + x\cot x + x + x\ln x)$

c) $y' = \cos x(\sin x)^{\sin x}(1 + \ln\sin x)$

61. $y' = 4x\ln 2x + 2x - \frac{8}{x}$

$y'(x_1) = y'(0{,}5) = \tan\alpha = -15 \qquad \alpha = 93^\circ\ 48'\ 50''$

Gleichung der Tangente:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\alpha \qquad x_1 = 0{,}5; \qquad y_1 = 0; \qquad y = -15x + 7{,}5$

62. Nullstellen: $\ln \frac{x^2-1}{x} = 0$, d. h. $\frac{x^2-1}{x} = 1$

$x_{N1} \approx 1{,}62, \qquad x_{N2} \approx -0{,}62$

Extremwerte: $y' = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}; \qquad y'' = \frac{-x^4-4x^2+1}{x^2(x^2-1)}$

Es liegen keine Extremwerte vor.

Wendepunkte: Da die Funktion für $0 \leqq x \leqq 1$ nicht definiert ist, existiert nur ein Wendepunkt: $x_W = -0{,}486$; $y_W = 0{,}45$.

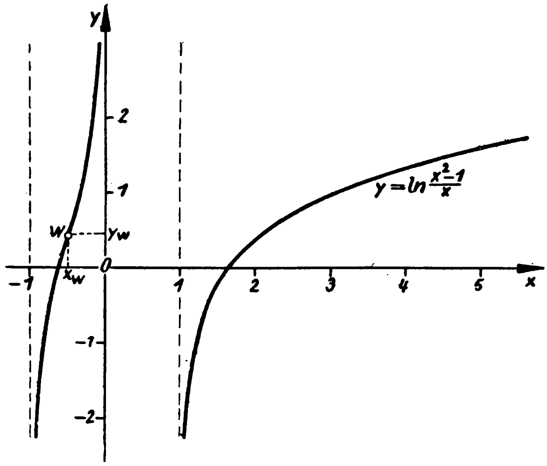

Bild 140

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x^2-1}{x}\right) = +\infty$

Bild 140 zeigt den Kurvenverlauf.

63. a) $y' = \frac{8e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2}$ b) $y' = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ c) $z'(t) = \sin 2t \cdot e^{\sin^2 t}$

d) $y' = a^{x+1} \cdot e^x (\ln a + 1)$ e) $g'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot (\sin x + 1)$

64. Nullstellen: $x_{N1} = 1, \qquad x_{N2} = -1$

Pole: liegen nicht vor.

Extremwerte: $y' = e^{-x}(x^2 - 2x - 1); \qquad y'' = e^{-x}(-x^2 + 4x - 1)$

$x_{E1} = 2{,}414; \qquad y_{E1} = -0{,}432$ Minimum

$x_{E2} = -0{,}414; \qquad y_{E2} = 1{,}253$ Maximum

Wendepunkte: $x_{W1} = 3{,}732; \qquad y_{W1} = -0{,}310$

$x_{W2} = 0.268; \qquad y_{W2} = 0{,}710$

Vgl. Bild 141.

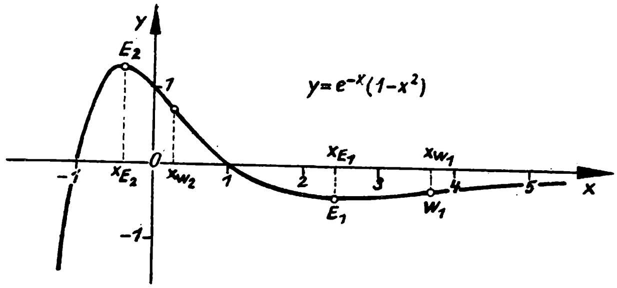

Bild 141

65. Nullstellen: Es liegen keine Nullstellen vor.

Pole: $y = \frac{1}{e^{x^2}}$; der Nenner kann für reelle Werte von x nicht Null werden; es liegen somit keine Pole vor.

Symmetrie: Die unabhängige Variable x tritt nur quadratisch auf, es besteht deshalb Symmetrie zur y-Achse.

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm \infty} (e^{-x^2}) = 0$

Extremwerte: $y' = -2xe^{-x^2}$, $\quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$x_{\max} = 0$; $\quad y_{\max} = 1$

Wendepunkte: $x_{W_1} = +0{,}707$; $\quad y_{W_1} = 0{,}607$

$x_{W_2} = -0{,}707$; $\quad y_{W_2} = 0{,}607$

Vgl. Bild 142.

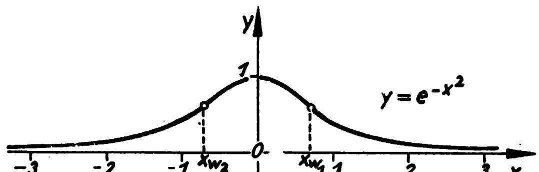

Bild 142

66. $l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g$; $\quad l' = \frac{Tg}{2\pi^2}$

Prozentualer Fehler: $p = \frac{l' \cdot \Delta T \cdot 100\,\%}{l} \approx 10\,\%$

67. $\overline{CS} = \overline{BC}$; $\quad \overline{CS} = l \cdot \cos\alpha$

$\overline{CS}' = -l \cdot \sin\alpha$

Prozentualer Fehler: $p \approx \frac{\overline{CS}' \cdot \Delta\alpha}{\overline{CS}} \cdot 100\,\% = 0{,}29\,\%$

68. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

$$\Delta c = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot \Delta\gamma$$

$$= \frac{ab\sin\gamma}{c} \cdot \Delta\gamma$$

69. a) $\Delta s = \dfrac{b}{4\sin^2\dfrac{\gamma}{2}}\,\Delta\gamma$

b) $\Delta\gamma \approx \dfrac{b}{s^2}\,\Delta s = 0{,}000\,006$

Der parallaktische Winkel muß auf 1,2″ genau gemessen werden.

Für das zu lösende Integral wird im folgenden stets J und für Flächeninhalte F geschrieben, die Integrationskonstante ist überall fortgelassen worden.

70. a) $J = \dfrac{x^4}{4}$ b) $J = \dfrac{x^8}{8}$ c) $J = \dfrac{x^6}{6}$ d) $J = \dfrac{x^9}{9}$

71. a) $J = -\dfrac{1}{3x^3}$ b) $J = -\dfrac{1}{x}$ c) $J = -\dfrac{1}{6x^6}$ d) $J = \ln|x|$

72. a) $J = \dfrac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x}$ b) $J = \dfrac{5}{7}\,x\sqrt[5]{x^2}$ c) $J = \dfrac{2}{5}\,x^2\sqrt{x}$ d) $J = \dfrac{3}{11}\,x^3\sqrt[3]{x^2}$

73. a) $J = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ b) $J = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ c) $J = \dfrac{6}{7}\,x\sqrt[6]{x}$ d) $J = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

74. a) $J = x^5 - x^3 - x^2 + 3x$ b) $J = \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{3}{2}\,x^4 - \dfrac{5}{2}\,x^2 - 2x$

75. a) $J = 2x + 3\ln|x| + \dfrac{4}{x}$ b) $J = x^2 + 4\ln|x| + \dfrac{1}{x^2}$

76. a) $J = x + \dfrac{6}{5}\,x\sqrt[3]{x^2}$ b) $J = \dfrac{8}{5}\,x^2\sqrt{x} - \dfrac{10}{3}\,x\sqrt{x}$

77. a) $J = \dfrac{21}{5}\,x\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x}$ b) $J = \dfrac{13}{3\sqrt{x}}$

78. a) $J = \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x$ b) $J = \dfrac{x^8}{8} - x^4 + 4\ln|x|$

79. $J = -2\cot x - 4\tan x$

80. $J_1 = \dfrac{104}{3}$ bzw. $J_2 = -\dfrac{104}{3}$, d. h. $J_1 = -J_2$

81. a) $J = \left(\dfrac{x^4}{4} + x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_2^4 = 116$ b) $J = \tan x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

c) $J = (-\cot x)\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$ d) $J = \dfrac{1}{2}\,(7 - \sqrt{3})$

82. $J = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3 = 1{,}0986$

83. $J = e^b - 1$

84. $J = \frac{2}{3}\, x_1 y_1 \quad \left(\frac{2}{3}\right.$ des umschließenden Rechtecks$\left.\right)$

85. Die Gleichung der oberen Begrenzungskurve ist (Nullpunkt = Mittelpunkt der Grundlinie):

$$y = h - \frac{4(h-a)}{l^2}\, x^2$$

Querschnittfläche: $\quad F = 2\left(hx - \frac{4(h-a)}{3l^2}\, x^3\right)\Big|_0^{\frac{l}{2}}$

$$= \frac{l}{3}\,(2h + a)$$

Gewicht: $\quad G = \frac{ld\gamma}{3}\,(2h + a)$

86. Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind

$x_1 = a = -3 \quad$ und $\quad x_2 = b = +1.$

Flächeninhalt: $\quad F = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$

87. $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$
$$= F(c) - F(a)$$
$$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

88. Alle Integrale dieser Art ergeben den Wert Null.
Beachten Sie dabei: $\cos(-a) = \cos a$.

89. $F = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ 90. $F = 18$

91. a) $J = -\frac{15}{4}$ $\qquad$ b) Nullstelle bei $x = 1$. $\quad F = \frac{17}{4}$

Die beiden Flächenteile haben die Inhalte 4 und $\frac{1}{4}$. Lösung a) stellt die Differenz $\frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$ dar, während in b) der (absolute) Flächeninhalt mit $\frac{17}{4}$ angegeben ist.

92. Tritt der Wechsel bei $x = c$ ein, so hat das Integral mit der unteren Grenze c und der oberen b einen negativen Integranden und damit einen negativen

Wert. Das Integral mit den Grenzen a und b stellt damit die Differenz der beiden Flächenteile dar. Soll der Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnet werden, so ist anzusetzen:

$$F = \int_a^c (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x + \int_c^b (y_1 - y_2)\,\mathrm{d}x.$$

93. Die Schnittpunkte der Kurven sind $(-1; -1)$, $(0; 0)$ und $(1; 1)$. Im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ besteht die Ungleichung $x \leqq x^3$, und im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichung $x^3 \leqq x$. Daraus folgt

$$F = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

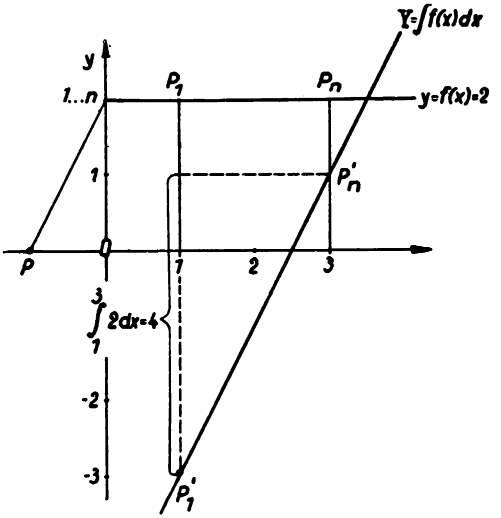

Bild 143

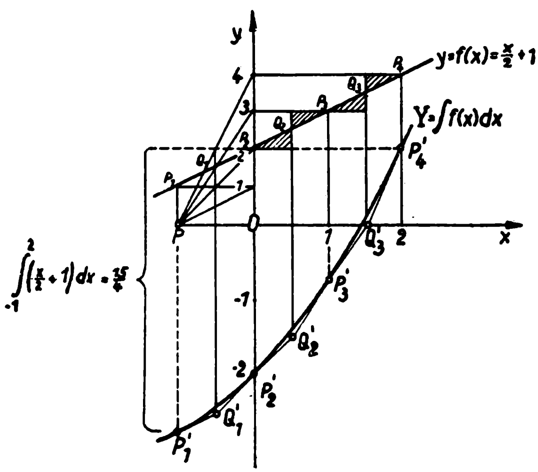

Bild 144

Beachten Sie die Symmetrie der beiden Flächenteile, so können Sie hier einfacher rechnen:

$$F = 2\int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

94. a) Bild 143 $\int_1^3 2\,\mathrm{d}x = 4$

b) Bild 144 $\int_{-1}^{2} \left(\frac{x}{2} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{4}$

c) Bild 145 $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x \, dx = -1$

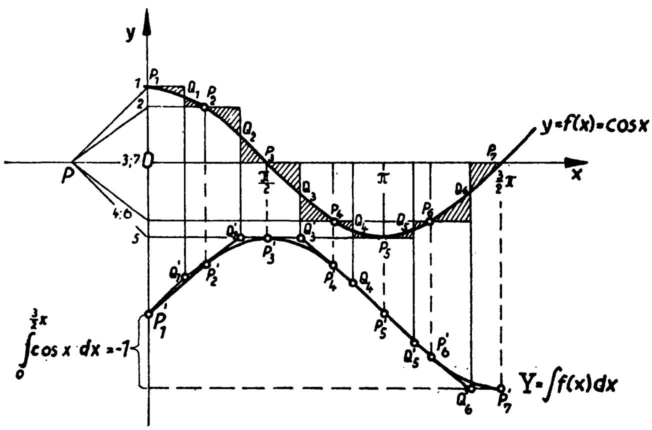

Bild 145

95. $V_{\text{Zyl.}} = \pi r^3$; $\quad V_{\text{Halbk.}} = \frac{2}{3}\pi r^3$; $\quad V_{\text{Parab.}} = \frac{1}{2}\pi r^3$; $\quad V_{\text{Keg.}} = \frac{1}{3}\pi r^3$

$V_{\text{Zyl.}} : V_{\text{Halbk.}} : V_{\text{Parab.}} : V_{\text{Keg.}} = 6 : 4 : 3 : 2$

96. Mit der begrenzenden Geraden (Bild 146)

$$y = \frac{R - r}{h} x + r$$

ist
$$V = \pi \int\limits_{0}^{h} \left(\frac{R - r}{h} x + r\right)^2 dx = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

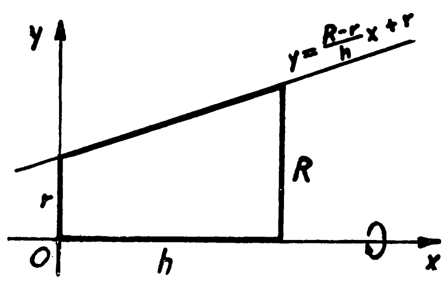

Bild 146

97. a) $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$; $\qquad$ b) $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

98. Hyperbel: $x^2 = r^2 + \frac{4(R^2 - r^2)}{h^2} y^2$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + 2r^2)$$

99. $x_S = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}; \qquad y_S = 0$

100. $x_S = 0; \qquad y_S = \frac{4b}{3\pi}$

Alle Ellipsen mit gleicher kleiner Halbachse b und beliebiger Halbachse a haben denselben Schwerpunkt, so u. a. auch der Halbkreis mit $a = b = r$.

101. $T_x = \frac{32}{75}; \qquad T_y = \frac{512}{175}; \qquad F = \frac{128}{75} \qquad x_S = \frac{T_y}{F} = \frac{12}{7}; \qquad y_S = \frac{T_x}{F} = \frac{1}{4}$

102. $x_S = \frac{h}{4} \frac{3R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + Rr + r^2}; \; y_S = 0$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche mit dem Radius R beträgt

$$\bar{x}_S = h - x_S = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

103. $x_S = \frac{2}{3} h$ (Schwerpunktabstand vom Scheitel)

104. $y_S = \frac{\int_\alpha^\beta y x^2 \, dy}{\int_\alpha^\beta x^2 \, dy}$ (Bild 147)

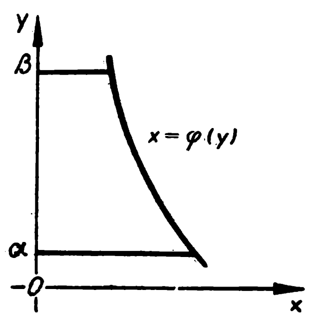

Bild 147

105. $J_a = \frac{h^3}{12}(a + 3b) \qquad J_S = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$

$J_b = \frac{h^3}{12}(3a + b) \qquad J_h = \frac{h}{48} \frac{b^4 - a^4}{b - a} = \frac{h}{48}(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)$

106. Schnittpunkte (0; 0) und (1; 1)
obere Begrenzungskurve: $y = x$
untere Begrenzungskurve: $y = x^2$

$J_x = \frac{1}{28}$ (Längeneinheiten)^4

$J_y = \frac{1}{20}$ (Längeneinheiten)^4

107. a) $J = \frac{1}{3} mr^2$ b) $J = \frac{1}{6} mr^2 + \frac{1}{2} mh^2$

108. $J = \frac{h}{10} \pi \varrho \, (R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4)$

$$= \frac{3}{10} m \frac{R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4}{R^2 + Rr + r^2}$$

Erweitern Sie den Bruch mit $R - r$, so ergibt sich

$$J = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

109. $\mathrm{d}m = q \, \mathrm{d}x \, \varrho$ $J = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, \mathrm{d}m = \frac{1}{12} ml^2$

Bei dickeren Stäben (Zylinder) müssen Sie analog zum Lehrbeispiel 118 verfahren.

110. $F = 2yb = \frac{P_0}{\sigma} \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$; $y = \frac{P_0}{2b\sigma} \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$

111. $t = \frac{2\sqrt{h}}{15 r^2 \mu \sqrt{2g}} (8r^2 + 4\,Rr + 3\,R^2)$

Beilage

zu Mathematik IV, Band 1 und 2

Formelsammlung

Differentialrechnung

Grundbegriffe

Differenzenquotient $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differentialquotient $$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differential $$\mathrm{d} y = \mathrm{d} f(x) = f'(x)\,\mathrm{d} x$$

Partieller Differentialquotient $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

Totales Differential $$\mathrm{d} z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d} x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d} y$$

Allgemeine Differentiationsregeln

Konstanter Faktor $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}[a \cdot g(x)] = a \cdot g'$$

Summe $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}[f(x) + g(x)] = f' + g'$$

Produkt $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}[f(x) \cdot g(x)] = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Quotient $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Kettenregel $$y = f[z(x)], \quad \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z} \cdot \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} = f'(z) \cdot z'(x)$$

Umkehrfunktion $$x = \varphi(y), \quad \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}}$$

Ableitung einer impliziten Funktion $F(x, y) = 0$ $$y' = -\frac{F_x}{F_y} \qquad F_y \neq 0$$

$$y'' = -\frac{F_{xx} + 2 F_{xy} y' + F_{yy} y'^2}{F_y}$$

Ableitung bei Parameterdarstellung $$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t}}{\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Ableitungen

$y = a$	$y' = 0$	
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = {}^a\log x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e$	
$y = \lg x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{x} \cdot \lg e$	$\ln 10 \approx 2{,}3026$ $\lg e \approx 0{,}4343$
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = \operatorname{arc} \tan x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	
$y = \operatorname{arc} \cot x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$	
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$	
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$	
$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	
$y = \coth x$	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -(\coth^2 x - 1)$	
$y = \operatorname{ar} \sinh x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	
$y = \operatorname{ar} \cosh x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	
$y = \operatorname{ar} \tanh x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = \operatorname{ar} \coth x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$	$\lvert x \rvert > 1$

Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertbestimmung bei einer Veränderlichen $f'(a) = 0 \begin{cases} f^{(2n)}(a) < 0 & \text{Maximum} \\ f^{(2n)}(a) > 0 & \text{Minimum} \end{cases}$

Extremwertbestimmung bei zwei Veränderlichen $f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$f_{xx} < 0, \quad f_{yy} < 0$ Maximum

$f_{xx} > 0, \quad f_{yy} > 0$ Minimum

Newtonsche Näherungsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Maximaler (absoluter) Fehler

$$\Delta y \approx |f'(x)\,\Delta x|$$

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y\right|$$

Relativer Fehler $\frac{\Delta y}{y} \approx \left|\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x\right|$

Prozentualer Fehler $p \approx \left|\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x\right| \cdot 100\,\%$

Krümmung $k = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3}, \quad k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$

Krümmungsradius $\varrho = \left|\frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}\right|, \quad \varrho = \left|\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\right|$

Integralrechnung

Grundbegriffe

Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ für $F'(x) = f(x)$

Bestimmtes Integral $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Allgemeine Integrationsregeln

Konstanter Faktor $\int a \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Summe $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Bestimmtes Integral $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für $f(-x) = f(x)$ gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für $f(-x) = -f(x)$ gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Integrationsmethoden

Substitution $\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}x =$

$$\boxed{\varphi(x) = u,\ x = \psi(u),\ \mathrm{d}x = \psi'(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$= \int f(u)\,\psi'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\,\varphi(x)\,| + C$$

$$\int [\varphi(x)]^n\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,[\varphi(x)]^{n+1} + C$$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x$

Grundintegrale

$f(x) = x^n$ $\qquad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

$f(x) = e^x$ $\qquad \int e^x \, dx = e^x + C$

$f(x) = a^x$ $\qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$f(x) = \sin x$ $\qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$f(x) = \cos x$ $\qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ $\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x + C_1 \\ -\operatorname{arc\,cos} x + C_2 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tan} x + C_1 \\ -\operatorname{arc\,cot} x + C_2 \end{cases}$

$f(x) = \sinh x$ $\qquad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

$f(x) = \cosh x$ $\qquad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

$f(x) = \frac{1}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1$ $\qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$

$f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ $\qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln (x + \sqrt{x^2+1}) + C = \operatorname{ar\,sinh} x + C$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln (x + \sqrt{x^2-1}) + C = \operatorname{ar\,cosh} x + C$

Rekursionsformeln

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^m x} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{m-2} x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{m-2} x}$$

Anwendungen der Integralrechnung

Fläche

Kartesische Koordinaten $F = \int_a^b y \,\mathrm{d}x$

$$F = \int_a^b (y_2 - y_1) \,\mathrm{d}x$$

Parameterdarstellung $F = -\int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} \,\mathrm{d}t$ (Fläche begrenzt durch x-Achse)

$$F = \int_{t_1}^{t_2} x \dot{y} \,\mathrm{d}t$$ (Fläche begrenzt durch y-Achse)

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y} x - y \dot{x}) \,\mathrm{d}t$$

Polarkoordinaten $F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \,\mathrm{d}\varphi$

(Sektor oder geschlossene Kurve)

Näherung.
(Simpsonsche Regel)

$$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})]$$

$$(h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1})$$

Volumen
Allgemein $V = \int_a^b Q(x) \,\mathrm{d}x$ $Q(x)$ Querschnitt senkrecht zur x-Achse

Rotationskörper $V = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x$

Bogenlänge
Kartesische Koordinaten $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \,\mathrm{d}x$

Parameterdarstellung $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

Polarkoordinaten $$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Mantelfläche $$F_M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

Schwerpunkt
Fläche $$x_S = \frac{\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}, \qquad y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}$$

Körper $$x_S = \frac{\int_a^b x\,Q(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x}$$ $Q(x)$ Querschnitt senkrecht zur x-Achse

Rotationskörper $$x_S = \frac{\int_a^b xy^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}$$

Bogen $$x_S = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}, \qquad y_S = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}$$

Flächenträgheitsmoment $$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,\mathrm{d}x, \quad J_y = \int_a^b x^2 y\,\mathrm{d}x, \quad J_p = J_x + J_y$$

$$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b (y_2^3 - y_1^3)\,\mathrm{d}x, \; J_y = \int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x$$

Massenträgheitsmoment für Rotationskörper $$J = \frac{1}{2}\pi\frac{\gamma}{g}\int_a^b y^4\,\mathrm{d}x$$

Hyperbelfunktionen

Definition

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Funktionalbeziehungen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

Additionsformeln

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

Kreis- und Hyperbelfunktionen komplexer Argumente

Zusammenhänge zwischen Kreis-, Hyperbel- und Exponentialfunktionen

$$e^{jx} = \underline{/x} = \cos x + j \sin x, \quad e^{-jx} = \underline{/-x} = \cos x - j \sin x$$

1. $\cosh jx = \cos x, \qquad \sinh jx = j \sin x$

   $\tanh jx = j \tan x, \qquad \coth jx = -j \cot x$

2. $\cos jx = \cosh x, \qquad \sin jx = j \sinh x$

   $\tan jx = j \tanh x, \qquad \cot jx = -j \coth x$

3. $\cos (a + jb) = \cos a \cosh b - j \sin a \sinh b$

   $\sin (a + jb) = \sin a \cosh b + j \cos a \sinh b$

   $\cosh (a + jb) = \cosh a \cos b + j \sinh a \sin b$

   $\sinh (a + jb) = \sinh a \cos b + j \cosh a \sin b$

   $\tanh (a + jb) = \dfrac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} + j \dfrac{\sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$