Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Höhere Mathematik

BAND 2

Zentralstelle für die Fachschulausbildung
— Lehrmaterial für Grundlagenfächer —

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Höhere Mathematik

BAND 2

Weiterer Ausbau der Differential- und Integralrechnung

Herausgeber
Zentralstelle für die Fachschulausbildung
– Lehrmaterial für Grundlagenfächer –
Dresden 1962

Ausgearbeitet von:

HORST BEINHOFF, Dozent an der Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel", Meißen

OTTO GREUEL, Dozent an der Ingenieurschule für Elektrotechnik „Fritz Selbmann", Mittweida

HEINZ NICKEL, Dozent an der Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden

Begutachtet von den Mitgliedern einer Redaktionskommission:

GERHARD GABLER, Dozent an der Ingenieurschule für Eisenbahnwesen, Dresden

HANS KREUL, Dozent an der Ingenieurschule für Elektroenergie „Dr. Robert Mayer", Zittau

HERBERT NAJUCH, Dozent an der Ingenieurschule für Werkzeugmaschinenbau, Karl-Marx-Stadt

Bearbeitet von:

RUDOLF CONRAD, **Dozent in der Zentralstelle für die Fachschulausbildung, Lehrmaterial für Grundlagenfächer, Dresden**

Bei der Ausarbeitung wurden Teile der Lehrbriefreihe für das Fachschulfernstudium, Mathematik IV, verwendet.

Veröffentlicht unter Ag 604/12/62/DDR · 1. Ausgabe, 4. Auflage
Satz: Druckerei „Magnus Poser" Jena
Offsetnachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

IV. Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

Seite

V. Integrationsmethoden. Weiterer Ausbau der Integralrechnung

IV. Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

8 Ableitung weiterer transzendenter Funktionen

8.1 Definition der zyklometrischen Funktionen

Bei den trigonometrischen Funktionen sind trigonometrischer Funktionswert und Winkel — gemessen durch den Bogen am Einheitskreis — einander zugeordnet. Der Bogen (x) wird als die unabhängige, der trigonometrische Funktionswert (y) als die abhängige Veränderliche betrachtet:

(a) Der Sinus ist eine Funktion des Bogens.

Man schreibt

$$y = \sin x,$$

wobei sin das Funktionssymbol ist.

Die voneinander abhängigen Größen lassen sich anschaulich am Einheitskreis als Strecke und Kreisbogen (vgl. Bild 1) darstellen. Zu jedem Kreisbogen gehört eine Strecke, die den Sinus des Bogens darstellt.

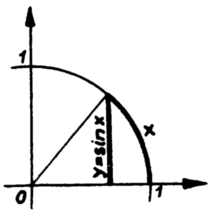

Bild 1

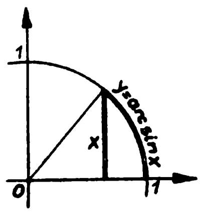

Bild 2

Die Betrachtungsweise läßt sich umkehren: Zu jedem Sinus gehört ein Bogen. (Die Umkehrung ist nur eindeutig, wenn man im I. Quadranten bleibt.) In diesem Falle wird der Sinus als unabhängige Veränderliche betrachtet (vgl. Bild 2):

(b) Der Bogen ist eine Funktion des Sinus.

Man schreibt für diese Funktion

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

und liest: y gleich arcus sinus x. Hier ist arc sin das Funktionssymbol.

Die Bezeichnung arc sin x ist eine Abkürzung von arcus cuius sinus est x, zu deutsch: der Bogen, dessen Sinus (der Wert) x ist.

Wir stellen noch einmal gegenüber:

$$\overbrace{y = \sin x}^{\text{Funktionssymbol}} \qquad \overbrace{y = \operatorname{arc}\sin x}^{\text{Funktionssymbol}}$$

Funktionssymbol		Funktionssymbol	
$y = \overset{\frown}{\sin}\, x$		$y = \overset{\frown}{\operatorname{arc}\sin}\, x$	
Sinus	Bogen	Bogen	Sinus

Beachten Sie, daß in $y = \operatorname{arc}\sin x$ mit x der Sinuswert (und nicht der Bogen) bezeichnet ist. Beide Funktionen stellen den gleichen Zusammenhang zwischen Bogen am Einheitskreis und Sinuswert dar. Sie unterscheiden sich nur in der Zuordnung der Veränderlichen. Wie Satz (a) und Satz (b) zeigen, gehen die beiden Funktionen durch Umkehrung der Zuordnung auseinander hervor. Die eine heißt daher **Umkehrfunktion** oder **inverse[1] Funktion** der anderen.

Machen Sie sich den Begriff der Umkehrfunktion noch an der quadratischen Funktion $y = x^2$ und ihrer Umkehrung $y = \sqrt[2]{x}$ klar! Als geometrische Deutung können Seite und Fläche eines Quadrates dienen. Hier tritt einmal die Seite, das andere Mal die Fläche als unabhängige Veränderliche auf:

Funktionssymbol		Funktionssymbol	
$y = x^2$		$y = \sqrt[2]{x}$	
Fläche	Seite	Seite	Fläche

Auch hier mußte für die Umkehrung ein neues Funktionssymbol ($\sqrt[2]{\ }$) eingeführt werden. Formal erhalten Sie die Umkehrfunktion, indem Sie die Stammfunktion nach x auflösen und die Bezeichnung der Veränderlichen vertauschen.

	$y = \sin x$	Stammfunktion
Nach x aufgelöst:	$x = \operatorname{arc}\sin y$	inverse Funktion
x und y vertauscht:	$y = \operatorname{arc}\sin x$	

Die beiden letzten Ausdrücke stellen bereits die Umkehrfunktion zur Sinusfunktion dar. Bei $x = \operatorname{arc}\sin y$ ist die unabhängige Veränderliche mit y, bei $y = \operatorname{arc}\sin x$ dagegen wieder — wie üblich — mit x bezeichnet.

Die Wertetabelle der Stammfunktion kann man sofort für die inverse Funktion verwenden:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$y = \operatorname{arc}\sin x$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	x

Es ist also z. B. $\operatorname{arc}\sin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Wie bei $y = \sin x$ werden auch die Umkehrfunktionen der anderen trigonometrischen Funktionen gebildet:

[1] lat. *inversus*, umgekehrt.

Trigonometrische Funktion	Zyklometrische Funktion
$y = \sin x$	$x = \text{arc sin } y$ oder $y = \text{arc sin } x$
$y = \cos x$	$x = \text{arc cos } y$ oder $y = \text{arc cos } x$
$y = \tan x$	$x = \text{arc tan } y$ oder $y = \text{arc tan } x$
$y = \cot x$	$x = \text{arc cot } y$ oder $y = \text{arc cot } x$

Da bei allen der (Kreis-) Bogen die Funktion ist (in Abhängigkeit von Sinus, Tangens, Kosinus oder Kotangens) heißen sie **Arkusfunktionen** oder **zyklometrische Funktionen.**

Die Kurven der Arkusfunktionen erhalten Sie — da sie invers zu den trigonometrischen Funktionen sind — durch Spiegelung der entsprechenden trigonometrischen Funktionen an der Geraden $y = x$.

Aus Bild 3 erkennen Sie, daß die Funktion $y = \text{arc sin } x$ nur im Bereich $-1 \leqq x \leqq 1$ definiert ist. Dasselbe gilt für die Funktion $y = \text{arc cos } x$, wie Sie aus

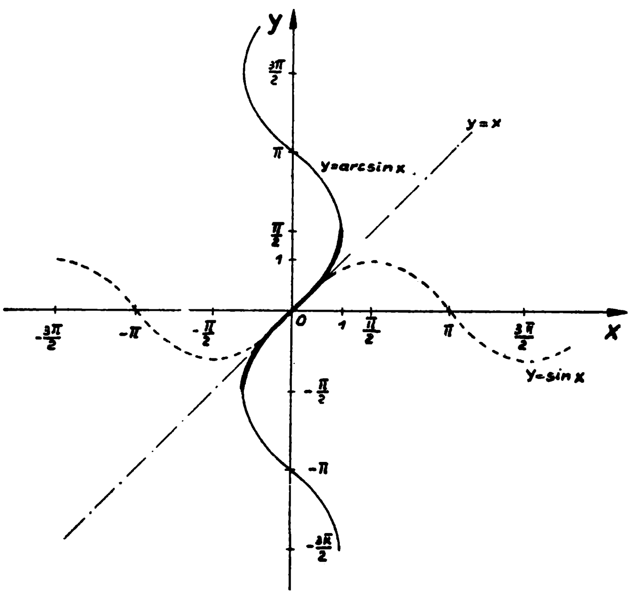

Bild 3

Bild 4 erkennen. Dabei sind innerhalb dieses Bereiches jedem x-Wert unendlich viele y-Werte zugeordnet. Die Vieldeutigkeit der Funktionen $y = \text{arc tan } x$ und $y = \text{arc cot } x$ ist ebenfalls aus den Bildern 5 und 6 zu erkennen. Wegen der Vieldeutigkeit der Arkusfunktionen beschränkt man die Funktionswerte auf bestimmte Bereiche. Sie sind so ausgewählt, daß die Funktionen eindeutig sind. Die in diesem Bereich liegenden Werte nennt man **Hauptwerte der Arkusfunktionen.**

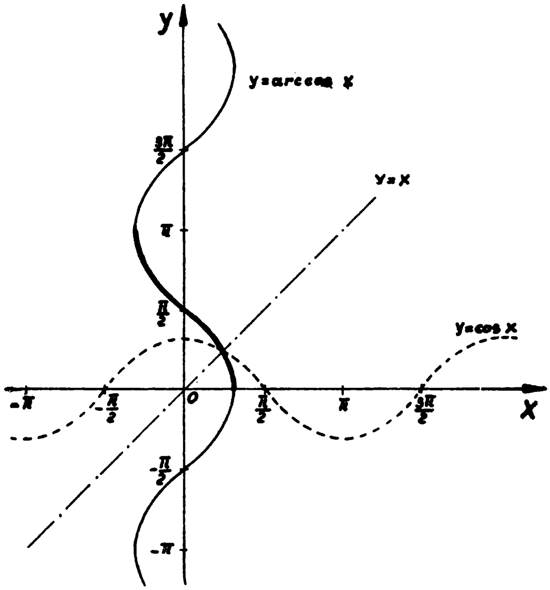
y
y=arccos x
$\frac{3\pi}{2}$
y=x
π
$\frac{\pi}{2}$
y=cos x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

Bild 4

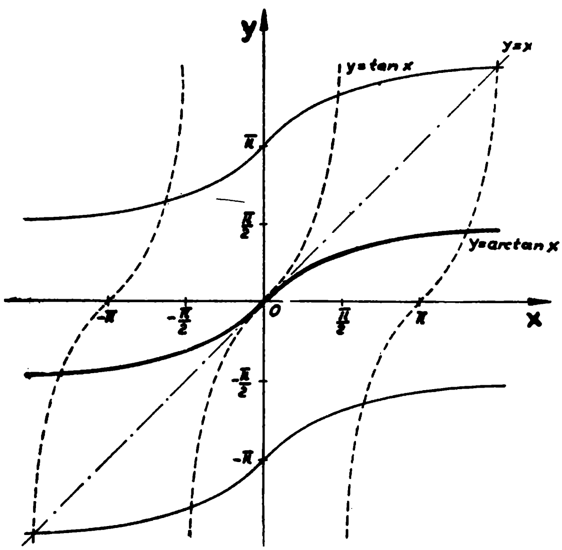
y
y=tan x
y=x
π
$\frac{\pi}{2}$
y=arctan x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

Bild 5

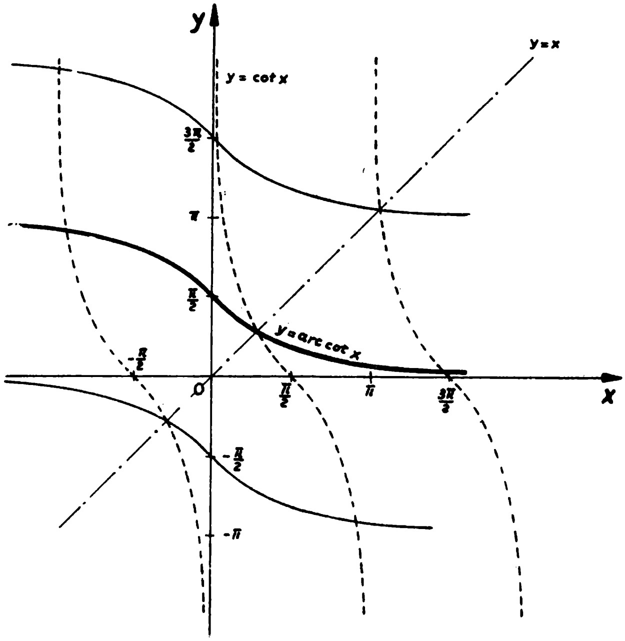

Bild 6

Sie liegen

$$\text{für } y = \text{arc sin } x \text{ im Bereich } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{für } y = \text{arc tan } x \text{ im Bereich } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{für } y = \text{arc cos } x \text{ im Bereich } 0 \leqq y \leqq \pi,$$

$$\text{für } y = \text{arc cot } x \text{ im Bereich } 0 < y < \pi.$$

Die Hauptwerte sind in den Bildern 3 bis 6 stark hervorgehoben.
Aus der Trigonometrie sind Ihnen die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen längst bekannt. Das soll Ihnen das folgende Lehrbeispiel deutlich machen.

Lehrbeispiel 1

Berechnen Sie im rechtwinkligen Dreieck mit $a = 5$ m, $c = 8$ m *den Winkel* α*!*

Lösung:

Bisher beschritten Sie folgenden Weg:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = 0{,}625,$$

$$\alpha = 38^\circ 41'.$$

Die Auflösung von $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ nach α wurde hier stillschweigend übergangen.

Führen Sie mit $y = \frac{\alpha}{\varrho}$ das Bogenmaß[1] ein, so ist

$$\sin y = \frac{a}{c},$$

$$y = \frac{\alpha}{\varrho} = \operatorname{arc}\sin\frac{a}{c} = \operatorname{arc}\sin 0{,}625,$$

$$\underline{\underline{\alpha = 38^\circ\,41'.}}$$

Nachstehend noch einige besonders oft benötigte Werte der Arkusfunktionen:

$$\operatorname{arc}\sin 0 = 0,$$

$$\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc}\sin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arc}\cos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc}\cos(-1) = \pi, \qquad \operatorname{arc}\cos 1 = 0,$$

$$\operatorname{arc}\tan 0 = 0, \qquad \operatorname{arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arc}\cot 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zwischen den einzelnen Arkusfunktionen bestehen — ähnlich wie bei den trigonometrischen Funktionen — bestimmte Zusammenhänge, deren Kenntnis für spätere Untersuchungen, besonders bei der Integration, wichtig ist. Sie sollen hier hergeleitet werden.

Ist $x = \cos z$, so gilt auch $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

Sie lösen beide Ausdrücke nach dem Argument auf und erhalten:

$$z = \operatorname{arc}\cos x \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - z = \operatorname{arc}\sin x.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\boxed{\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}} \tag{1}$$

In gleicher Weise kann die Beziehung

$$\boxed{\operatorname{arc}\tan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}} \tag{2}$$

hergeleitet werden.

Oft treten auch Verbindungen von trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen auf, z. B.

$$\operatorname{arc}\sin(\sin x) \quad \text{oder} \quad \sin(\operatorname{arc}\sin x)$$

(Die Klammern können auch fortgelassen werden).

---

[1] Bekanntlich ist $\operatorname{arc}\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$,

also $\varrho = \frac{180}{\pi} \approx 57{,}30.$

Da arc sin und sin zueinander inverse Funktionssymbole sind, heben sie einander auf.

Es ist also $\quad \operatorname{arc}\sin\sin x = x \quad$ und $\quad \sin\operatorname{arc}\sin x = x,$

ebenso $\quad \operatorname{arc}\tan\tan x = x \quad$ und $\quad \tan\operatorname{arc}\tan x = x.$

Das gilt für alle Umkehrungen. Sie kennen bereits die Beispiele

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \qquad e^{\ln x} = x, \qquad 10^{\lg x} = x,$$
$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \qquad \ln e^x = x, \qquad \lg 10^x = x.$$

Sie können natürlich die Richtigkeit auch durch Rechnung bestätigen:

Setzen Sie in $\quad y = \operatorname{arc}\sin\sin x$

$\sin x = z$, so ist $\quad y = \operatorname{arc}\sin z.$

Aus $\quad \sin x = z$

folgt $\quad x = \operatorname{arc}\sin z,$

also ist $\quad y = \operatorname{arc}\sin z = x.$

Dieser Weg ist vor allem zweckmäßig bei Funktionen wie

$$y = \sin\operatorname{arc}\cos x.$$

Sie setzen $\quad \operatorname{arc}\cos x = z,$

gleichbedeutend mit $\quad x = \cos z.$

Damit ist
$$\begin{aligned} y &= \sin z \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 z}, \\ y &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2

Vereinfachen Sie

a) $y = \cos\operatorname{arc}\sin x,$

b) $y = \tan\operatorname{arc}\cot 2x$*!*

Lösung:

a) Sie setzen $\operatorname{arc}\sin x = z$ gleichbedeutend mit $x = \sin z$ und erhalten

$$y = \cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}.$$

Mit $\sin z = x$ ergibt sich

$$\underline{\underline{y = \sqrt{1 - x^2}.}}$$

b) $\operatorname{arc}\cot 2x = z$ bzw. $2x = \cot z$ liefert:

$$\begin{aligned} y &= \tan z \\ &= \frac{1}{\cot z} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2x}}}. \end{aligned}$$

8.2 Die Ableitung der zyklometrischen Funktionen

Zwischen der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ und der Ableitung der zu ihr inversen Funktion $x = \varphi(y)$ besteht ein Zusammenhang, der es gestattet, aus der einen Ableitung die andere zu berechnen. Da trigonometrische und zyklometrische Funktionen zueinander invers sind, untersuchen wir zunächst diesen allgemeinen Zusammenhang.

Wie Sie wissen, ist der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f'(x) = \tan \alpha .$$

Hierbei ist α der Anstiegswinkel der Tangente gegen die positive Richtung der Abszissenachse. Die Differentiale $\mathrm{d}\,x$ und $\mathrm{d}\,y$ können als Katheten des Tangentendreiecks PQR gedeutet werden (vgl. Bild 7). Zu der Stammfunktion $y = f(x)$ erhalten Sie die Umkehrfunktion, indem Sie $y = f(x)$ nach x auflösen. Es ergibt sich

$$x = \varphi(y).$$

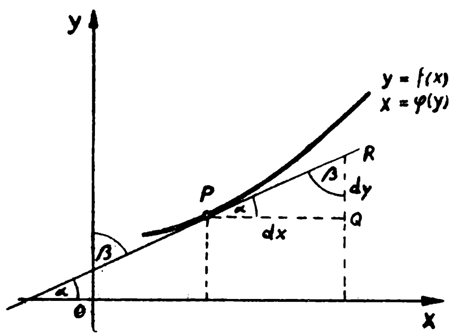

Bild 7

Werden für die Veränderlichen keine neuen Bezeichnungen eingeführt, so heißt jetzt die unabhängige Veränderliche y, die abhängige Veränderliche x. Entsprechend ist dann die y-Achse Abszissenachse, die x-Achse Ordinatenachse.

Bilden Sie den Differentialquotienten der Umkehrfunktion, so gibt dieser den Anstieg der Tangente gegen die y-Achse — die ja jetzt Abszissenachse ist — an. Bezeichnen Sie den zugehörigen Anstiegswinkel mit β, so ist also

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \varphi'(y) = \tan \beta .$$

Nun ist aber, wie Sie aus Bild 7 erkennen, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, also

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cot \alpha \\ &= \frac{1}{\tan \alpha} . \end{aligned}$$

Damit erhalten Sie

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}}} \qquad (3)$$

oder $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = 1$: Die Ableitungen sind zueinander reziprok.

Beispiel:
Zur Funktion $y = x^2$ soll die inverse Funktion und deren erste Ableitung gebildet werden.

Es ist $\qquad y = f(x) = x^2.$

Die inverse Funktion lautet $\qquad x = \varphi(y) = \sqrt{y}.$

Sie bilden die Ableitung der Ausgangsfunktion:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Damit wird
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x}.$$

Beachten Sie, daß hier die *abhängige* Veränderliche mit x, die *unabhängige* Veränderliche mit y bezeichnet ist!
Um die gewohnte Schreibweise zu erhalten, hat man statt x bzw. y nur y bzw. x zu schreiben. In der gewohnten Schreibweise sieht unsere Rechnung so aus:

Ausgangsfunktion	Inverse Funktion
$y = f(x) = x^2,$	$y = \varphi(x) = \sqrt{x},$
$\frac{dy}{dx} = 2x,$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Bestätigen Sie die Richtigkeit der Rechnung, in dem Sie $y = \sqrt{x}$ in gewohnter Weise differenzieren!
Es bereitet jetzt keine Schwierigkeit, die Ableitungen der zyklometrischen Funktionen zu bilden, da Arkusfunktionen und trigonometrische Funktionen zueinander invers sind.

$y = \text{arc} \sin x$

Die inverse Funktion zu $\qquad y = \text{arc} \sin x$

ist $\qquad x = \sin y.$

Da hier y die unabhängige Veränderliche ist, differenzieren Sie nach y:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y.$$

Nach (3) ist dann
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Nun ist wieder die ursprüngliche unabhängige Veränderliche x mit Hilfe der obigen Beziehung $x = \sin y$ einzuführen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}},$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \tag{4}$$

$y = \text{arc cos } x$

Die inverse Funktion heißt:

$$x = \cos y.$$

Sie bilden die Ableitung der inversen Funktion:

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y.$$

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

Sie setzen $\cos y = x$ ein und erhalten

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad (5)$$

$y = \text{arc tan } x$

Aus

$$x = \tan y$$

erhalten Sie

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Also wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}.$$

Mit $\tan y = x$ erhalten Sie daraus

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}} \qquad (6)$$

$y = \text{arc cot } x$

Die inverse Funktion

$$x = \cot y$$

liefert

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$

Damit ist

$$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y$$

$$= -\frac{1}{1 + \cot^2 y}$$

Mit $\cot y = x$ erhalten Sie schließlich

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}} \qquad (7)$$

Lehrbeispiele

Die folgenden Funktionen sind abzuleiten!

3. $y = \operatorname{arc} \sin a x$

Lösung:

Es ist die Kettenregel anzuwenden. Sie setzen $a x = z$. Aus

$$y = \operatorname{arc} \sin z \qquad \text{und} \qquad z = a x$$

erhalten Sie

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} = a$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z} \cdot \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \cdot a,$$

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}}}.$$

4. $y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Lösung:

Sie setzen $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = z$.

Aus $y = \operatorname{arc} \sin z$ und $z = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

folgt

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x \cdot 2 x}{2 \sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2 + x^2}$$

$$= \frac{a^2}{(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Also ist

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 + x^2}}} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 - x^2}\,(a^2 + x^2)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{a^2 + x^2}}}.$$

5. $y = \operatorname{arc} \sin (m \cos x)$

Lösung:

Diese Funktion wollen wir nach der Kettenregel ohne Einführen der Hilfsveränderlichen differenzieren. Die innere Funktion ist $z = m \cos x$. Also wird

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (m \cos x)^2}} \cdot m (-\sin x)$$

$$= \underline{\underline{- \frac{m \sin x}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 x}}}}.$$

6. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{x}{a}$

Lösung:

Wir lassen auch hier die Einführung der Hilfsveränderlichen weg.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{a^2 + x^2}}}$$

Übungen

1. Bestimmen Sie den Hauptwert!

a) $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{3}$ *b)* $\operatorname{arc} \sin -0{,}2079$ *c)* $\operatorname{arc} \cos \frac{1}{2}$ *d)* $\operatorname{arc} \cos -0{,}73$

e) $\operatorname{arc} \tan \sqrt{3}$ *f)* $\operatorname{arc} \tan -4{,}1$ *g)* $\operatorname{arc} \cot 2{,}5$ *h)* $\operatorname{arc} \cot -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

2. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $x \cdot \tan \operatorname{arc} \cot x$, *b)* $\frac{\sin \operatorname{arc} \cos x}{\cos \operatorname{arc} \sin x}$,

c) $\frac{x \cdot (\tan \operatorname{arc} \cot x - \cot \operatorname{arc} \tan 2x)}{\tan \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x^2}}$!

3. Differenzieren Sie:

a) $y = \operatorname{arc} \cos \frac{a}{x}$, *b)* $y = \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x}$!

4. Differenzieren Sie:

a) $y = \operatorname{arc} \cot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, *b)* $y = \operatorname{arc} \sin (m \cos 2x)$!

8.3 Die Hyperbelfunktionen

8.31 Definition der Hyperbelfunktionen. In der Mathematik und Physik sowie in den technischen Anwendungen treten einfache mittelbare Funktionen der Exponentialfunktion e^x auf, denen man ihrer Bedeutung wegen besondere Namen und Bezeichnungen gegeben hat. Diese Funktionen werden **Hyperbelfunktionen** oder **hyperbolische Funktionen** genannt. Sie sind wie folgt definiert[1]:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

---

[1] In vielen Lehrbüchern finden Sie noch die Bezeichnungen 𝔖in, 𝔆of, 𝔗g, 𝔆tg.
Nach den neuen Normen „DIN 1302“ vom November 1954 ist für die hyperbolischen Funktionen die hier verwendete Schreibweise verbindlich.

Die Bezeichnungen hat man denen der Kreisfunktionen entlehnt, da unter den Hyperbelfunktionen ähnliche Beziehungen bestehen, wie bei den Kreisfunktionen. Man nennt diese neuen Funktionen den hyperbolischen Sinus (Sinus hyperbolicus), den hyperbolischen Kosinus usw. und liest sinus hyperbolicus x, cosinus hyperbolicus x usw. Der Name „Hyperbelfunktionen" wird Ihnen nach den Ausführungen in Abschnitt 8.35 verständlich werden.

Die Kurven dieser Funktionen können Sie (bei sinh x und cosh x verhältnismäßig leicht) aus den Kurven der Exponentialfunktionen $y = \frac{1}{2}\,e^{x}$ und $y = \frac{1}{2}\,e^{-x}$ erhalten ($y = \frac{1}{2}\,e^{-x}$ ist die an der y-Achse gespiegelte Funktion $y = \frac{1}{2}\,e^{x}$).

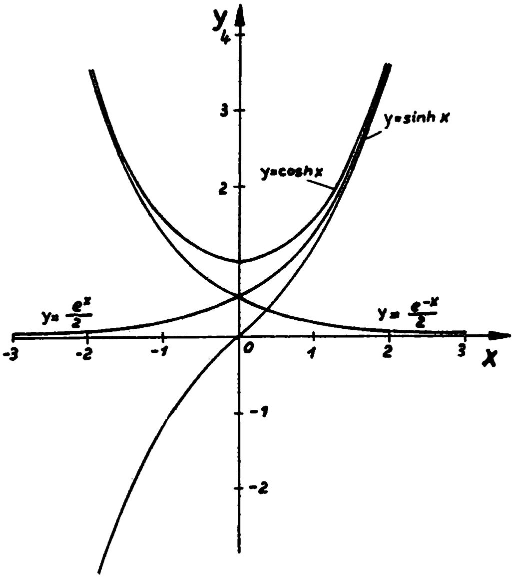

Bild 8

Bild 8 zeigt Ihnen die Funktionen $y = \frac{1}{2}\,e^{x}$ und $y = \frac{1}{2}\,e^{-x}$ und die daraus durch Addition bzw. Subtraktion entstandenen Kurven $y = \cosh x$ und $y = \sinh x$. Der Kurvenverlauf von $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ ist in Bild 9 dargestellt.

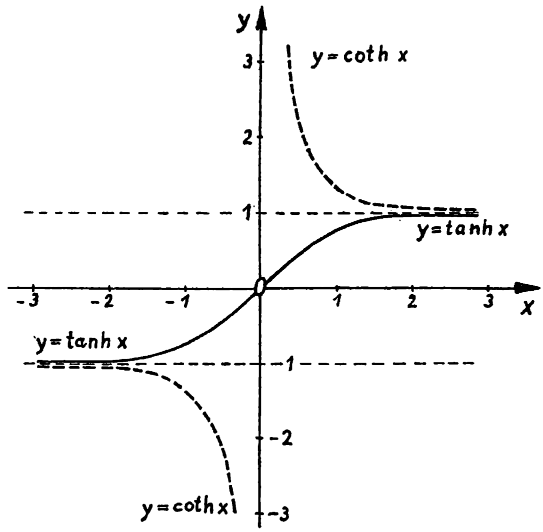

Bild 9

Die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen sind leicht aus denen der Exponentialfunktion herzuleiten.

1. Es ist

   $\cosh(-x) = \frac{1}{2}\,(e^{-x} + e^{x})$,

   also ist

   $\cosh(-x) = \cosh x$.

   In der gleichen Weise ergibt sich aus $\sinh(-x) = \frac{1}{2}\,(e^{-x} - e^{x})$, daß

   $$\sinh(-x) = -\sinh x.$$

Das bedeutet:

$$y = \cosh x \quad \text{ist eine gerade,}$$
$$y = \sinh x \quad \text{ist eine ungerade Funktion.}$$

2. Da stets $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ ist, so gilt für alle x

$$\cosh x > 0.$$

Es ist sogar stets

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqq 1.$$

Durch Umformung der Ungleichung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqq 1$$

erhalten Sie nämlich

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &\geqq 2, \\ e^{2x} + 1 &\geqq 2e^x, \\ e^{2x} - 2e^x + 1 &\geqq 0, \\ (e^x - 1)^2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Ein Quadrat ist stets $\geqq 0$, daher ist die Ungleichung, von der ausgegangen wurde, richtig.

3. Aus der Definition der Hyperbelfunktionen folgt für alle x

$$\sinh x < \cosh x.$$

4. Da $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ ist, gilt für große positive x

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2} e^x.$$

Die Kurven $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ schmiegen sich also asymptotisch an die Kurve $y = \frac{1}{2} e^x$ an.

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ strebt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ für große negative x gegen $y = \frac{1}{2} e^{-x}$. Das war zu erwarten, da — wie Sie gesehen haben — $y = \cosh x$ eine gerade Funktion ist, das Kurvenbild also die y-Achse zur Symmetrieachse hat.

5. Für $x = 0$ wird

$$\sinh 0 = 0 \quad \text{und} \quad \cosh 0 = 1.$$

Zusammen mit den bereits ermittelten Eigenschaften ergibt sich, daß — von der Symmetrie her betrachtet —

$\sinh x$ Ähnlichkeit mit der kubischen Parabel,
$\cosh x$ Ähnlichkeit mit der quadratischen Parabel hat.

Vergleichen Sie die Ergebnisse dieser Überlegungen mit Bild 8!

Wir erwähnen noch, daß eine an zwei Punkten befestigte schwere Kette die Form der Kurve $y = a + b \cosh \frac{x}{b}$ annimmt. Deshalb wird die Kurve $y = \cosh x$ oft *Kettenlinie* genannt.

Die Eigenschaften von $\tanh x$ und $\coth x$ folgen aus denen von $\sinh x$ und $\cosh x$.

1. Da stets $\cosh x \neq 0$, ist $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ überall stetig, hat also keine Unendlichkeitsstellen. Dagegen ist die Funktion $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ wegen $\sinh 0 = 0$ an der Stelle $x = 0$ nicht erklärt. Sie macht dort einen Sprung. Die y-Achse ist also Asymptote der Kurve.

2. Es ist $\quad \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x,$

   ebenso $\quad \coth(-x) = -\coth x.$

   Die Funktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ sind ungerade und daher zentralsymmetrisch.

3. Aus

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

folgt

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$$

und, da $\tanh x$ eine ungerade Funktion ist

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1.$$

Da $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ ist, ergibt sich weiter

$$\lim_{x \to +\infty} \coth x = 1$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} \coth x = -1.$$

Es gilt also

$$\tanh x \approx \coth x \approx 1 \qquad \text{für große positive } x,$$
$$\tanh x \approx \coth x \approx -1 \qquad \text{für große negative } x.$$

Die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ sind Asymptoten beider Kurven, wobei $\tanh x$ zwischen diesen Geraden und $\coth x$ ober- und unterhalb dieser Geraden verläuft. Es ist also stets

$$|\tanh x| < 1$$

und

$$|\coth x| > 1$$

(vgl. Bild 9).

8.32 Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen. Es ist

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \tag{8a}$$

und

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} \tag{8b}$$

Multiplizieren Sie beide Ausdrücke miteinander, so erhalten Sie

$$(\cosh x + \sinh x) \cdot (\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1,$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \tag{9}$$

Aus

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \quad \text{und} \quad \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

ergibt sich

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4}(2 \cdot e^{2x} + 2 \cdot e^{-2x}) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$
$$= \cosh 2x.$$

Es ist also

$$\boxed{\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x} \tag{10}$$

Bei Betrachtung der Formeln (9) und (10) werden Sie an ähnliche Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen $\sin x$ und $\cos x$ erinnert. Diese Ähnlichkeit erklärt Ihnen die analoge Bezeichnungsweise der Hyperbelfunktionen. Auch bei den weiteren Beziehungen sind Ähnlichkeiten zu erkennen.

Bilden Sie das Produkt

$$\cosh x \sinh x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2} \sinh 2x,$$

so folgt die Beziehung

$$\boxed{2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x = \sinh 2x} \tag{11}$$

Lehrbeispiel 7

Bestimmen Sie x aus den folgenden Gleichungen!

a) $\sqrt{1 + \sinh^2 x} - \sinh x = 1$

Lösung:

Nach (9) gilt: $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$, also folgt

$$\cosh x - \sinh x = 1.$$

Die linke Seite der Gleichung können Sie nach (8b) gleich e^{-x} setzen:

$$e^{-x} = 1,$$
$$\underline{\underline{x = 0.}}$$

b) $\sinh x - \frac{1}{\cosh x} = \tanh x \sinh x - \cosh x$

Lösung:

Sie multiplizieren beide Seiten mit $\cosh x$:

$$\begin{aligned}
\sinh x \cosh x - 1 &= \sinh^2 x - \cosh^2 x,\\
\sinh x \cosh x - 1 &= -(\cosh^2 x - \sinh^2 x),\\
\sinh x \cosh x - 1 &= -1.\\
\sinh x \cosh x &= 0.
\end{aligned}$$

Da stets $\cosh x \neq 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
\sinh x &= 0,\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0.}}
\end{aligned}$$

Setzen Sie $x = 0$ in die Ausgangsgleichung ein, und prüfen Sie die Richtigkeit des Ergebnisses!

c) $\cosh 2x + 6 \sinh^2 x - 2 = 0$

Lösung:

Auch der Weg über die Exponentialfunktion ist möglich. Aus der Definition von $\cosh x$ und $\sinh x$ folgt

$$\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + 6 \cdot \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 - 2 = 0.$$

Sie multiplizieren die Gleichung mit 2 und rechnen das auftretende Quadrat aus:

$$e^{2x} + e^{-2x} + 3(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - 4 = 0.$$

Sie fassen zusammen:

$$4e^{2x} + 4e^{-2x} - 10 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung für $z = e^{2x}$:

$$4z + 4 \cdot \frac{1}{z} - 10 = 0.$$

Multiplizieren Sie mit z, so erhalten Sie eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
4z^2 - 10z + 4 &= 0,\\
z^2 - \frac{5}{2}z + 1 &= 0,\\
z_{1;2} &= \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4},\\
z_1 &= 2,\\
z_2 &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mit $z = e^{2x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
e^{2x_1} &= 2, & e^{2x_2} &= \frac{1}{2},\\
2x_1 &= \ln 2, & 2x_2 &= \ln \frac{1}{2},\\
&= 0{,}6931, & &= -\ln 2,\\
\underline{\underline{x_1}} &\underline{\underline{= 0{,}3466,}} & \underline{\underline{x_2}} &\underline{\underline{= -0{,}3466.}}
\end{aligned}$$

8.33 Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen. Wie bei den Kreisfunktionen, gibt es auch für die Hyperbelfunktionen Additionstheoreme. Sie lauten

$$\boxed{\sinh (x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y} \tag{12}$$

$$\boxed{\cosh (x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y} \tag{13}$$

Die Ähnlichkeit mit den entsprechenden Formeln für die Kreisfunktionen ist wieder offensichtlich. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Beziehungen läßt sich leicht über die Exponentialfunktion führen. Wir wollen das für (12) durchführen. Es ist

$$\begin{aligned} & \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) \\ &= \sinh (x + y). \end{aligned}$$

Aus $\sinh (x + (-y))$ ergibt sich mit
$\cosh (-y) = \cosh y$ und $\sinh (-y) = -\sinh y$
sofort die zweite Formel.

Führen Sie den Nachweis für (13) selbst durch!

Aus $e^x = \cosh x + \sinh x$ (vgl. Formel (8a)) folgt

$$\boxed{e^{nx} = (\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx} \tag{14}$$

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie

a) $z = \ln (\sinh 1{,}2 + \cosh 1{,}2)^3$,

b) $z = \sqrt[3]{\cosh 6 + \sinh 6}$!

Lösung:

a) Die Anwendung von Formel (14) liefert

$$z = \ln (e^{1{,}2 \cdot 3}) = 1{,}2 \cdot 3 \cdot \ln e = \underline{\underline{3{,}6}}.$$

b) $$z = (\cosh 6 + \sinh 6)^{\frac{1}{3}}$$

Nach Formel (14) folgt:

$$z = e^{\frac{1}{3} \cdot 6} = e^2 = \underline{\underline{7{,}389}}.$$

8.34 Die Ableitung der Hyperbelfunktionen

$y = \sinh x$

Es ist

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

also wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

$$\boxed{(\sinh x)' = \cosh x} \tag{15}$$

$y = \cosh x$

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x} \tag{16}$$

$y = \tanh x$

$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Nach der Quotientenregel wird unter Berücksichtigung von $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$:

$$y' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

oder auch

$$y' = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

$$\boxed{(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x} \tag{17}$$

$y = \coth x$

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Es wird

$$y' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x}$$
$$= -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.$$

$$\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x} \tag{18}$$

Lehrbeispiel 9

Differenzieren Sie $y = 3 \sinh \frac{x}{3}$ *!*

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\cosh\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{\cosh\frac{x}{3}}}$$

Lehrbeispiel 10

Bilden Sie die Ableitung von $y = \ln\tanh\frac{x}{2}$*!*

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tanh\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sinh x}}}\,.$$

Lehrbeispiel 11

Welchen Winkel bilden die Tangenten an die Kurven $y = \cosh x$ *und* $y = \coth x$ *im Schnittpunkt der beiden Kurven miteinander?*

Lösung:

Im Schnittpunkt ist $\cosh x = \coth x.$

Daraus folgt: $\cosh x = \frac{\cosh x}{\sinh x},$

$$\cosh x\,(\sinh x - 1) = 0.$$

$\cosh x$ kann nicht Null sein, also gilt:

$$\sinh x - 1 = 0,$$
$$\sinh x = 1,$$
$$x_S = 0{,}881.^{1}$$

Aus $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

folgt $\cosh^2 x_S = 2,$

also $y_S = \cosh x_S = \sqrt{2}.$

Koordinaten des Schnittpunktes: $\underline{\underline{x_S = 0{,}881}}$; $\underline{\underline{y_S = 1{,}414.}}$

Den Anstieg der Tangenten im Schnittpunkt erhalten Sie aus den Ableitungen an der Stelle x_S. Es ist:

$$(\cosh x)' = \sinh x,$$
$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$$

also

$$m_1 = \tan\alpha_1 = \sinh x_S = 1,$$
$$m_2 = \tan\alpha_2 = -\frac{1}{\sinh^2 x_S} = -1.$$

Da $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist, stehen die Tangenten senkrecht aufeinander (vgl. Bild 10).

---

[1] Die Berechnung der Funktionswerte für die hyperbolischen Funktionen erfolgt am zweckmäßigsten an Hand von besonderen Tabellen („Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln“ von Dr. Fritz Müller) oder dadurch, daß man die hyperbolischen Funktionen auf die e-Funktionen zurückführt.

Lehrbeispiel 12

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $y = e^{\sinh x}$*!*

Lösung:

Unter Anwendung der Kettenregel erhalten Sie

$$y' = \underline{\underline{\cosh x \cdot e^{\sinh x}}}$$

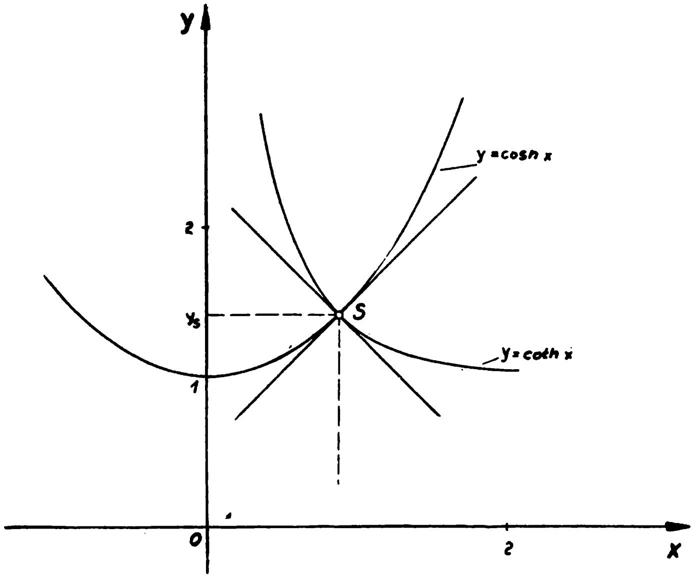

Bild 10

Übungen

5. *Lösen Sie die Gleichung*

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + 1 \quad \textit{nach } x \textit{ auf!}$$

6. *Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!*

a) $y = \ln \sinh x$

b) $y = \ln \tanh (ax + b)$

c) $y = \ln \sinh (2x^2 + 4)$ *an der Stelle* $x = 2$

d) $y = \frac{1}{\ln \sinh (1 - x^2)}$

8.35 Zusammenhang zwischen Hyperbel und Hyperbelfunktionen. Bevor der Zusammenhang zwischen Hyperbel und Hyperbelfunktionen erläutert wird, sei Ihnen in Erinnerung gebracht, daß zwischen den Kreisfunktionen (trigonometrischen Funktionen) und dem Kreis ebenfalls ein direkter Zusammenhang besteht. Sie lernten die geometrische Beziehung bereits in der Trigonometrie bei der Darstellung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis kennen (Bild 11). Den rechnerischen Zusammenhang erkennen Sie ebenfalls leicht aus Bild 11. Betrachtet man den Punkt $P(x; y)$ in Bild 11, so läßt sich folgende Beziehung ablesen:

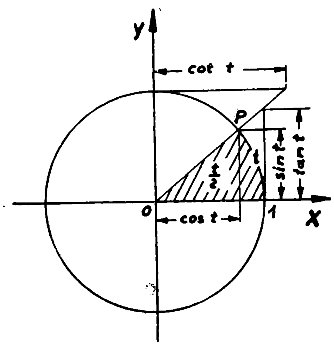

Bild 11

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \tag{a}$$

worin t das Bogenmaß des Winkels α bedeutet. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (a) erhält man

$$\begin{aligned} x^2 &= \cos^2 t \\ y^2 &= \sin^2 t \\ \hline x^2 + y^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t \end{aligned}$$

Mit $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt

$$x^2 + y^2 = 1,$$

also die Gleichung des Einheitskreises.

Zwischen der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ und den Hyperbelfunktionen besteht ein ähnlicher Zusammenhang. Setzt man

$$x = \cosh t$$

und

$$y = \sinh t \tag{b}$$

so ergibt sich durch Elimination von t die Gleichung der Hyperbel. Der Rechengang ist folgender:

Durch Quadrieren erhalten Sie

$$x^2 = \cosh^2 t,$$
$$y^2 = \sinh^2 t.$$

Die Subtraktion liefert

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t.$$

Mit $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ [vgl. Abschnitt 8.32, Formel (9)] folgt

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{c}$$

Dies ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit den Halbachsen $a = b = 1$ (Einheitshyperbel). Aus den Gleichungen (b) und (c) ergibt sich eine Darstellung der Hyperbelfunktionen an der Einheitshyperbel (Bild 12), ähnlich der Darstellung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis. Der Wert t wird aber bei der Einheitshyperbel nicht durch ein Bogenmaß veranschaulicht, sondern $\frac{t}{2}$ ist durch die Größe der Sektorfläche (in Bild 12 schraffiert) gegeben. Der Beweis dafür kann erst später in der Integralrechnung geführt werden und zwar durch Ausrechnung der Sektorfläche.

Auch beim Einheitskreis läßt sich t als doppelte Fläche des Sektors mit dem Bogen t deuten, was Sie leicht durch Ausrechnen nachprüfen können. Bekannt-

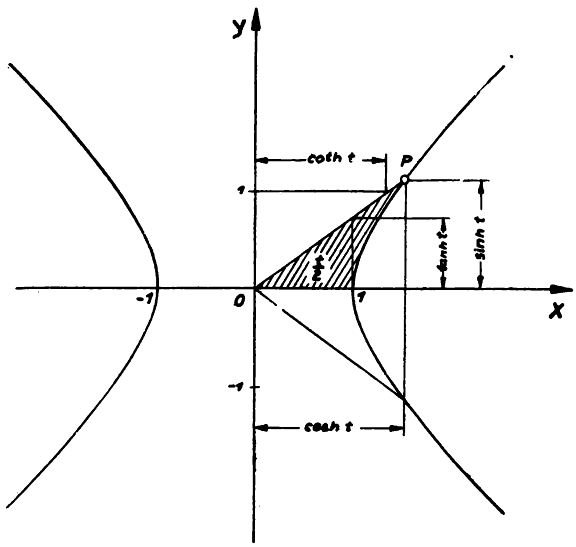

Bild 12

lich ist der Flächeninhalt eines Kreissektors gleich $\frac{1}{2} \cdot$ Bogen $\cdot$ Radius. Für die Fläche des Sektors im Einheitskreis (Bild 11) erhält man also $F = \frac{t \cdot 1}{2} = \frac{t}{2}$.

8.4 Die Areafunktionen

8.41 Definition der Areafunktionen. Um zu der Hyperbelfunktion $y = \sinh x$ die Umkehrfunktion zu erhalten, haben Sie die Funktion nach x aufzulösen. Man führt dazu — wie bei den Kreisfunktionen — ein neues Funktionssymbol ein und schreibt[1]

$$x = \operatorname{ar\,sinh} y,$$

gelesen: x gleich area[2] sinus hyperbolicus y.

Da üblicherweise die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet wird, vertauschen wir noch die Bezeichnungen der Veränderlichen und erhalten

$$y = \operatorname{ar\,sinh} x.$$

[1] Vielfach finden Sie für die Areafunktionen noch die alte Schreibweise 𝔄𝔯 𝔖𝔦𝔫, 𝔄𝔯 ℭ𝔬𝔰, 𝔄𝔯 𝔗𝔤, 𝔄𝔯 ℭ𝔱𝔤.

[2] area, lat.: die Fläche.

Wie Sie wissen, kann man die Hyperbelfunktionen als Funktionen der doppelten Sektorfläche an der Einheitshyperbel (Bild 12) auffassen. Bei den Umkehrfunktionen wird also die abhängige Veränderliche durch die doppelte Sektorfläche veranschaulicht. Dieser Sachverhalt ist der Grund, daß man die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen als **Areafunktionen** bezeichnet.

Die zyklometrische Funktion $y = \sin x$ ließ sich nur durch Einführung des Funktionssymbols arc sin nach x auflösen. Bei den Hyperbelfunktionen läßt sich die Auflösung nach x auch ohne ein neues Funktionssymbol durchführen, da sie mittelbare Funktionen von e^x sind. Schreiben Sie also statt

$$y = \sinh x$$

mit Hilfe der Exponentialfunktion

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

so können Sie die Hyperbelfunktion nach x auflösen. Nach Multiplikation mit $2e^x$ erhalten Sie

$$2y\,e^x = e^{2x} - 1,$$

$$e^{2x} - 2y\,e^x - 1 = 0.$$

Sie setzen $e^x = z$:

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

und erhalten so eine quadratische Gleichung für z, mit der Lösung

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Da $z = e^x$ nie negativ sein kann, gilt nur das positive Vorzeichen der Wurzel, denn es ist stets $y < +\sqrt{y^2 + 1}$. Damit wird

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Um x zu erhalten, müssen Sie beide Seiten logarithmieren:

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Für die Veränderlichen haben Sie noch die übliche Bezeichnungsweise einzuführen:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Diese Funktion ist definiert für alle x, da stets $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ ist.

Es ist also

$$y = \operatorname{ar\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für} \quad -\infty < x < +\infty.$$

In gleicher Weise lassen sich die weiteren Areafunktionen herleiten. Sie erhalten

$$y = \operatorname{ar\,cosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \text{für } x \geqq 1,$$

$$y = \operatorname{ar\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1,$$

$$y = \operatorname{ar\,coth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad \text{für } |x| > 1.$$

Sie sehen in obenstehender Aufstellung, daß die Areafunktionen logarithmische Funktionen darstellen. Das war zu erwarten, da sie ja die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen sind. Hieraus ergibt sich aber als weitere Folge, daß sie wie die anderen logarithmischen Funktionen nicht für jeden Bereich von x

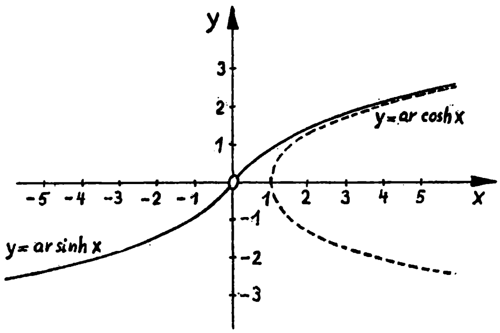

Bild 13a

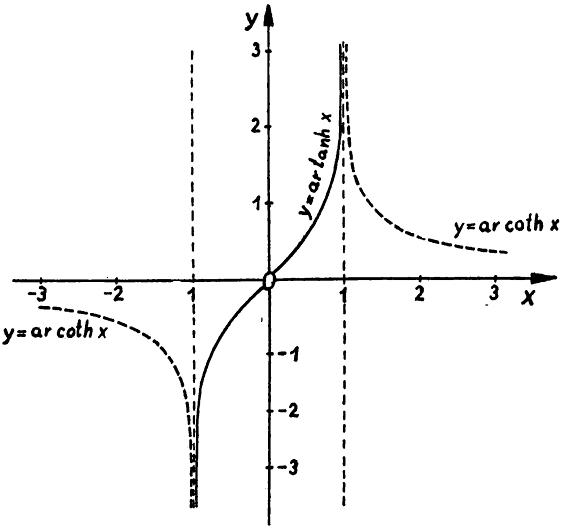

Bild 13b

definiert zu sein brauchen. Es ist hier notwendig, den Definitionsbereich genau anzugeben, so wie es obenstehend erfolgte. Die Bereiche, in denen die Areafunktionen erklärt sind, können Sie auch aus Bild 13a, b ablesen.

8.42 Die Ableitung der Areafunktionen. Ähnlich wie bei den zyklometrischen Funktionen gehen wir von den Hyperbelfunktionen aus, die ja invers zu den Areafunktionen sind.

$y = \mathrm{ar\,sinh}\ x$

Aus der inversen Funktion (x ist dann die *abhängige* Veränderliche)

$$x = \sinh y$$

erhalten Sie

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Also ist

$$\boxed{(\mathrm{ar\,sinh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}} \tag{19}$$

Es gilt nur das positive Vorzeichen der Wurzel, da $y = \mathrm{ar\,sinh}\ x$ überall positiven Anstieg hat (vgl. Bild 13a).

$y = \mathrm{ar\,cosh}\ x$.

Für die inverse Funktion

$$x = \cosh y$$

ist

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

daraus folgt

$$\boxed{(\mathrm{ar\,cosh}\ x)' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}} \tag{20}$$

$y = \mathrm{ar\,cosh}\ x$ ist — ähnlich wie $y = \sqrt{x}$ — eine zweideutige Funktion. Deshalb gilt in der Ableitung das positive oder negative Vorzeichen der Wurzel, je nachdem der Anstieg des über oder unter der x-Achse liegenden Astes der Funktion gemeint ist (vgl. Bild 13a).

$y = \mathrm{ar\,tanh}\ x$

Aus

$$x = \tanh y$$

erhalten Sie nach (17)

$$\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2.$$

Damit ist

$$\boxed{(\mathrm{ar\,tanh}\ x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1} \tag{21}$$

Die Beschränkung auf den Bereich $|x| < 1$ folgt aus dem Definitionsbereich von $y = \mathrm{ar\,tanh}\ x$, da diese Funktion nur für den Bereich $|x| < 1$ definiert ist (vgl. Bild 13b).

$y = \operatorname{ar\,coth} x$

Aus $\quad x = \coth y$

folgt nach (18)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 - \coth^2 y = 1 - x^2.$$

Es ist also

$$\boxed{(\operatorname{ar\,coth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \; |x| > 1} \tag{22}$$

Sie erhalten als Ableitung die gleiche Funktion, wie bei $y = \operatorname{ar\,tanh} x$. Jedoch ist $y = \operatorname{ar\,coth} x$ nur für $|x| > 1$ definiert, also gilt auch die Ableitung nur im Bereich $|x| > 1$.

Lehrbeispiel 13

Differenzieren Sie $y = \operatorname{ar\,sinh}(3x + 4)$*!*

Lösung:

Sie setzen $3x + 4 = z$ und wenden die Kettenregel an:

$$y = \operatorname{ar\,sinh} z, \qquad z = 3x + 4,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{\sqrt{(3x+4)^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{9x^2+24x+17}}.$$

Lehrbeispiel 14

Bilden Sie die Ableitung von $y = \sqrt{\operatorname{ar\,tanh} 2x}$*!*

Lösung:

Sie setzen $\operatorname{ar\,tanh} 2x = u$ und $2x = v$:

$$y = \sqrt{u}, \qquad u = \operatorname{ar\,tanh} v, \qquad v = 2x.$$

Damit wird

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{1-v^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ar\,tanh} 2x}} \cdot \frac{1}{1-4x^2} \cdot 2 = \frac{1}{(1-4x^2)\sqrt{\operatorname{ar\,tanh} 2x}}.$$

Übungen

7. *Bilden Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion die Umkehrfunktion von* $y = \tanh x$*!*
8. *Zeigen Sie, daß* $2 \operatorname{ar\,cosh} x = \operatorname{ar\,cosh}(2x^2 - 1)$ *ist!*
9. *Wie lautet die Umkehrfunktion von* $y = a \cosh \frac{x}{a}$*?*

   Drücken Sie die Umkehrfunktion durch die Logarithmusfunktion aus!
10. *Differenzieren Sie*

    a) $y = \operatorname{ar\,sinh} \sqrt{x}$, *b)* $y = \frac{1}{2} \operatorname{ar\,tanh} 2x$*!*

Zusammenfassung zu den Abschnitten 8.1 bis 8.4

Neben den Ihnen schon bekannten transzendenten Funktionen (logarithmische, Exponential- und trigonometrische Funktionen) lernten Sie jetzt die Arkus-, Hyperbel- und Areafunktionen kennen. Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, z. B.

$$y = \operatorname{arc} \sin x.$$

Diese Funktionsschreibweise besagt: y ist der Bogen, dessen Sinus (der Wert) x ist. Da die zyklometrischen Funktionen unendlich vieldeutig sind, rechnet man im allgemeinen nur mit den für ein bestimmtes Intervall festgelegten Hauptwerten der Funktionen.

Zueinander inverse Funktionssymbole heben einander auf, z. B.:

$$\sin \operatorname{arc} \sin x = x.$$

Die Hyperbelfunktionen sind mittelbare Funktionen der Exponentialfunktion $y = e^x$.

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen sind die Areafunktionen. Sie sind logarithmische Funktionen. Die Areafunktionen und ihre Ableitungen sind nur in bestimmten Bereichen reell definiert.

Übungen
zu den Kapiteln 8.1 bis 8.4

11. Bestimmen Sie y aus

a) $y = \operatorname{arc} \tan 2,$ *b)* $y^2 = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2}$ *!*

12. Vereinfachen Sie

$$\frac{\operatorname{arc} \tan 2x + \operatorname{arc} \cot 2x}{\sin \operatorname{arc} \sin \frac{\pi}{2}} !$$

13. Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $y = \frac{1}{2 \operatorname{arc} \sin x}$ *b)* $z(t) = \operatorname{arc} \tan \frac{3 - 3t^2}{1 + t}$

c) $y = \operatorname{arc} \tan bx + \operatorname{arc} \cot bx$

d) $g(t) = - \operatorname{arc} \cot \frac{a - t}{a + t} \cdot \operatorname{arc} \cos 2t$

e) $z(u) = \operatorname{arc} \tan (a \cot u)$ *f)* $y = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

g) $f(t) = a \operatorname{arc} \sin \frac{t}{a} - \sqrt{a^2 - t^2}$

h) $y = 2\sqrt{3} \operatorname{arc} \cot \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \sqrt{x^2 + 3}$

14. Beweisen Sie:

a) $\cosh 2x + \sinh 2x = e^{2x}$,

b) $\sqrt{\sinh^2 x + e^x (\cosh x - \sinh x)} = \cosh x$*!*

15. Bestimmen Sie x aus:

a) $\dfrac{1 + 2\sinh^2 x}{\cosh x} = 0{,}0863 \cdot \cosh 2x$,

Anleitung: Aus Formel (9) und (10) folgt $1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x$.

b) $\sinh x - \dfrac{1}{\cosh x} = \tanh x \sinh x - \cosh x$*!*

16. Bilden Sie die erste Ableitung von:

a) $y = e^x \cdot \sinh x$, *b)* $\varphi(x) = \dfrac{\cosh 2x}{(e^x)^2}$,

c) $g(t) = \dfrac{\ln x}{\coth a x}$, *d)* $z(x) = \ln [x \cdot (\sinh x + \cosh x)]$!

17. Wie lauten die Umkehrfunktionen von

a) $y = \operatorname{ar\,cosh} (a - x)$, *b)* $z = \tanh \sqrt{1 - x^2}$*?*

18. Differenzieren Sie

a) $y = \operatorname{ar\,cosh} \dfrac{1}{1 - x}$, *b)* $z(t) = \dfrac{\operatorname{ar\,sinh} t}{\ln (t + \sqrt{t^2 + 1})}$*!*

8.5 Kreis- und Hyperbelfunktionen komplexer Argumente

In der Elektrotechnik haben die hyperbolischen Funktionen besondere Bedeutung. Das folgende Kapitel ist deshalb auch ausschließlich für Studierende der Fachrichtung Elektrotechnik gedacht. Besonders in der Übertragungstechnik führte die Einführung der hyperbolischen Funktionen zu einer vorteilhaften Weiterentwicklung. Aus diesem Grunde wollen wir uns in diesem Kapitel noch etwas ausführlicher mit den Hyperbelfunktionen befassen. Im folgenden ist — wie allgemein in der Elektrotechnik üblich — die imaginäre Einheit mit j statt i bezeichnet.

Wir gehen von der Eulerschen Formel aus (vgl. Lehrbrief „Komplexe Zahlen"):

$$\boxed{\begin{aligned} e^{jx} &= \underline{/\,x} = \cos x + j \cdot \sin x \\ e^{-jx} &= \underline{/\,{-x}} = \cos x - j \cdot \sin x \end{aligned}}\ ^{1} \tag{23}$$

Beispiele:

1. $e^{j \cdot 30°} = \underline{/\,30°}$
2. $\cos 60° + j \cdot \sin 60° = e^{j \cdot 60°} = \underline{/\,60°}$

$\underline{/\,\varphi}$ wird gelesen: Versor φ.

---

[1] Nach Kennelly schreibt man für $e^{j\varphi}$ auch das allgemeine Versorsymbol $\underline{/\,\varphi}$ und bezeichnet derartige Symbole als Kennellysche Formen.

Wir bilden $e^{jx} + e^{-jx}$ bzw. $e^{jx} - e^{-jx}$:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x, \qquad e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \sin x,$$

$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x, \qquad \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} = j \cdot \sin x.$$

Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen entsprechen $\cosh jx$ bzw. $\sinh jx$, wir können also schreiben:

$$\boxed{\cosh jx = \cos x} \quad (24\text{a}) \qquad \boxed{\sinh jx = j \cdot \sin x} \quad (24\text{b})$$

Aus (24a) und (24b) folgt weiter:

$$\boxed{\tanh jx = j \cdot \tan x} \quad (24\text{c}) \qquad \boxed{\coth jx = -j \cdot \cot x} \quad (24\text{d})$$

Welche Beziehungen ergeben sich, wenn die Argumente der Kreisfunktionen imaginär sind?

Wir setzen $\quad jx = z.$

Dann ist $\quad j^2 x = jz, \qquad -x = jz, \quad$ bzw. $\quad x = -jz.$

Wir setzen dies in 24a, b, c, d ein. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos(-jz) \\ &= \cos jz, \longrightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\cos jz = \cosh z} \quad (25\text{a})$$

$$\begin{aligned} \sinh z &= j \cdot \sin(-jz) \\ &= -j \cdot \sin jz, \longrightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\sin jz = j \cdot \sinh z} \quad (25\text{b})$$

$$\begin{aligned} \tanh z &= j \cdot \tan(-jz) \\ &= -j \cdot \tan jz, \longrightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\tan jz = j \cdot \tanh z} \quad (25\text{c})$$

$$\begin{aligned} \coth z &= -j \cdot \cot(-jz) \\ &= j \cdot \cot jz, \longrightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\cot jz = -j \cdot \coth z} \quad (25\text{d})$$

Die Formeln (25c) und (25d) erhält man auch ohne Schwierigkeiten aus (25a) und (25b).

Lehrbeispiel 15

Berechnen Sie

a) $\cos j\pi$, $\qquad$ *b)* $\sin j \cdot \cos j$!

Lösung:

a) Nach Formel (25a) folgt

$$\cos j\pi = \cosh \pi = \underline{\underline{11{,}592}}.$$

b) Wir wenden (25a) und (25b) an:

$$\sin j \cdot \cos j = j \cdot \sinh 1 \cdot \cosh 1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot j \cdot 2 \sinh 1 \cdot \cosh 1 = \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sinh 2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot j \cdot 3{,}62686 = \underline{\underline{j \cdot 1{,}81343}}.$$

Lehrbeispiel 16

Folgende Funktionen sind durch hyperbolische Funktionen auszudrücken:

a) $\cos 2x$ *b)* $\tan \frac{x}{2}$

Lösung:

a) Nach Formel (24a) folgt:

$$\cos 2x = \underline{\underline{\cosh j \cdot 2x}}.$$

b) Aus (24c) folgt:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{j} \cdot \tanh j \cdot \frac{x}{2} = \underline{\underline{-j \cdot \tanh j \cdot \frac{x}{2}}}.$$

Bisher hatten wir nur Kreis- bzw. Hyperbelfunktionen mit Argumenten der Form jx behandelt. Häufig tritt es in der Praxis auf, daß die Argumente komplexe Ausdrücke der Form $a + jb$ darstellen.

Betrachten wir $\cos(a + bj)$. Nach den Additionstheoremen gilt:

$$\cos(a + jb) = \cos a \cdot \cos jb - \sin a \cdot \sin jb.$$

Unter Verwendung der Formeln (25a, b) erhalten Sie daraus:

$$\boxed{\cos(a + jb) = \cos a \cdot \cosh b - j \cdot \sin a \cdot \sinh b} \qquad (26a)$$

Analog ergibt sich:

$$\cos(a - jb) = \cos a \cdot \cos jb + \sin a \cdot \sin jb,$$
$$= \cos a \cdot \cosh b + j \cdot \sin a \cdot \sinh b.$$

Diese Formel erhalten Sie auch, wenn in (26a) b durch $-b$ ersetzt wird. Es sollen deshalb im folgenden nur die Beziehungen für das Argument $a + bj$ abgeleitet werden, da man durch Einsetzen von $-b$ für b jederzeit die entsprechenden Formeln mit dem Argument $a - jb$ erhält.

Weiter gilt:

$$\boxed{\sin(a + jb) = \sin a \cdot \cosh b + j \cdot \cos a \cdot \sinh b} \qquad (26b)$$

$$\boxed{\tan(a + jb) = \frac{\tan a + j \cdot \tanh b}{1 - j \cdot \tan a \cdot \tanh b}} \qquad (26c)$$

$$\boxed{\cot(a+jb) = -\frac{1+j\cdot\cot a\cdot\coth b}{\cot a - j\cdot\coth b}} \tag{26d}$$

Die Herleitung der Formeln (26b, c, d) können Sie mit Hilfe der entsprechenden Additionstheoreme und der Formeln (25b, c, d) selbst vornehmen. Führen Sie diese Ableitung als Übung durch!

Unter Verwendung der Formeln (12), (13) und (24a, b, c) ergibt sich für die hyperbolischen Funktionen:

$$\cosh(a+jb) = \cosh a\cdot\cosh jb + \sinh a\cdot\sinh jb$$

$$\boxed{\cosh(a+jb) = \cosh a\cdot\cos b + j\cdot\sinh a\cdot\sin b} \tag{27a}$$

$$\sinh(a+jb) = \sinh a\cdot\cosh jb + \cosh a\cdot\sinh jb$$

$$\boxed{\sinh(a+jb) = \sinh a\cdot\cos b + j\cdot\cosh a\cdot\sin b} \tag{27b}$$

Beispiel:

Für die Beziehung $\tanh(a+jb)$ ist ein Ausdruck der Form $\tanh(a+jb)$ $=$ Realteil $+$ Imaginärteil zu bilden.

Es ist

$$\tanh(a+jb) = \frac{\sinh(a+jb)}{\cosh(a+jb)} = \frac{\sinh a\cdot\cos b + j\cdot\cosh a\cdot\sin b}{\cosh a\cdot\cos b + j\cdot\sinh a\cdot\sin b}.$$

Um auf die Form $\tanh(a+jb)$ = Realteil + Imaginärteil zu kommen, muß zunächst der Nenner reell gemacht und Real- und Imaginärteil getrennt werden.

$$\tanh(a+jb) = \frac{(\sinh a\cdot\cos b + j\cdot\cosh a\sin b)\cdot(\cosh a\cos b - j\cdot\sinh a\cdot\sin b)}{(\cosh a\cos b + j\cdot\sinh a\sin b)\cdot(\cosh a\cos b - j\cdot\sinh a\cdot\sin b)}$$

$$= \frac{\sinh a\cosh a\,(\cos^2 b + \sin^2 b) + j\cdot\sin b\cos b\,(\cosh^2 a - \sinh^2 a)}{\cosh^2 a\cdot\cos^2 b + \sinh^2 a\cdot\sin^2 b}$$

$$= \frac{\sinh 2a}{2(\cosh^2 a\cdot\cos^2 b + \sinh^2 a\cdot\sin^2 b)} + j\frac{\sin 2b}{2(\cosh^2 a\cdot\cos^2 b + \sinh^2 a\cdot\sin^2 b)}$$

(Es gilt: $\sin 2b = 2\sin b\cos b$

bzw. $\sinh 2a = 2\sinh a\cosh a$)

Der Nenner kann noch vereinfacht werden.

Mit $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$

und $\sinh^2 a = \cosh^2 a - 1$

folgt

$$\tanh(a+jb) = \frac{\sinh 2a}{2\cosh^2 a + 2\cos^2 b - 2} + j\cdot\frac{\sin 2b}{2\cosh^2 a + 2\cos^2 b - 2}.$$

Nun gilt:

$$2\cosh^2 a - 1 = \cosh 2a,$$
$$2\cos^2 b - 1 = \cos 2b.$$

Setzen Sie diese Ausdrücke im Nenner ein, dann ergibt sich:

$$\boxed{\tanh(a + jb) = \frac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} + j \cdot \frac{\sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}} \tag{27c}$$

Lehrbeispiel 17

Berechnen Sie

a) $\sinh(1 + j)$, *b)* $\cosh\left[\pi\left(1 - \frac{1}{2}j\right)\right]$!

Lösung:

a) Nach Formel (27b) folgt:

$$\begin{aligned} \sinh(1 + j) &= \sinh 1 \cos 1 + j \cdot \cosh 1 \sin 1 \\ &= 1{,}1752 \cdot 0{,}5403 + j \cdot 1{,}543 \cdot 0{,}8415 \\ &= \underline{\underline{0{,}635 + 1{,}298j}}. \end{aligned}$$

b) Unter Verwendung von Formel (27a) folgt:

$$\begin{aligned} \cosh\left[\pi\left(1 - \frac{1}{2}j\right)\right] &= \cosh \pi \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sinh \pi \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -j \cdot \sinh \pi \sin \frac{\pi}{2} = -j \cdot \sinh \pi \\ &= \underline{\underline{-j \cdot 11{,}54874}}. \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 18

In der Leitungstheorie der Übertragungstechnik berechnet sich der Eingangswiderstand $\mathfrak{W}$ *nach der Beziehung:*

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{R}_a \cdot \cosh \mathfrak{g} + \mathfrak{Z} \cdot \sinh \mathfrak{g}}{\cosh \mathfrak{g} + \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}} \cdot \sinh \mathfrak{g}}, \quad \text{wobei } \mathfrak{g} = a + j \cdot b.$$

Dabei bedeuten:

$\mathfrak{g}$ = *Übertragungsmaß,*

$\mathfrak{Z}$ = *Wellenwiderstand der Leitung,*

$\mathfrak{R}_a$ = *Widerstand eines Empfängers, der die Leitung abschließt.*

Gegeben sei:

$a = 0{,}980$,

$b = 0{,}995$,

$\mathfrak{R}_a = 600\,\Omega$,

$\mathfrak{Z} = 894 \cdot e^{-j \cdot 44{,}1°}\,\Omega$.

Berechnen Sie den Eingangswiderstand nach den gegebenen Größen!

Lösung:

Es ist

$$\mathfrak{g} = a + j \cdot b = 0{,}980 + j \cdot 0{,}995.$$

Damit ergibt sich nach (27a, b):

$$\sinh \mathfrak{g} = \sinh (0{,}98 + j \cdot 0{,}995)$$
$$= \sinh 0{,}98 \cdot \cos 0{,}995 + j \cdot \cosh 0{,}98 \cdot \sin 0{,}995$$
$$= 1{,}14457 \cdot 0{,}54450 + j \cdot 1{,}51988 \cdot 0{,}83876,$$
$$\sinh \mathfrak{g} = 0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748;$$
$$\cosh \mathfrak{g} = \cosh (0{,}98 + j \cdot 0{,}995)$$
$$= \cosh 0{,}98 \cdot \cos 0{,}995 + j \cdot \sinh 0{,}98 \cdot \sin 0{,}995$$
$$= 1{,}51988 \cdot 0{,}54450 + j \cdot 1{,}14457 \cdot 0{,}83876,$$
$$\cosh \mathfrak{g} = 0{,}8276 + j \cdot 0{,}9600;$$

$$\mathfrak{W} = \frac{600 \cdot (0{,}8276 + j \cdot 0{,}96) + 894 \cdot e^{-j \cdot 44{,}1^\circ} \cdot (0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748)}{(0{,}8276 + j \cdot 0{,}96) + \frac{600}{894} \cdot e^{j \cdot 44{,}1^\circ} \cdot (0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748)}\ \Omega.$$

Für die weitere Berechnung ist es zweckmäßig $0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748$ durch die Exponentialform auszudrücken.

Zunächst muß der Betrag von $0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748$ bestimmt werden:

$$\sqrt{0{,}6232^2 + 1{,}2748^2} = \sqrt{0{,}3884 + 1{,}6251} = 1{,}42.$$

Weiter ist

$$\tan \varphi = \frac{1{,}2748}{0{,}6232}, \qquad \varphi = 63{,}9^\circ.$$

Somit folgt

$$0{,}6232 + j \cdot 1{,}2748 = 1{,}42 \cdot e^{j \cdot 63{,}9^\circ}.$$

Also wird

$$\mathfrak{W} = \frac{600\,(0{,}8276 + j \cdot 0{,}96) + 894 \cdot e^{-j \cdot 44{,}1^\circ} \cdot 1{,}42 \cdot e^{j \cdot 63{,}9^\circ}}{0{,}8276 + j \cdot 0{,}96 + 0{,}671 \cdot e^{j \cdot 44{,}1^\circ} \cdot 1{,}42 \cdot e^{j \cdot 63{,}9^\circ}}\ \Omega$$
$$= \frac{496{,}56 + j \cdot 576 + 1269{,}48 \cdot e^{j \cdot 19{,}8^\circ}}{0{,}8276 + j \cdot 0{,}96 + 0{,}953 \cdot e^{j \cdot 108^\circ}}\ \Omega.$$

Nun ist

$$1269{,}48 \cdot e^{j \cdot 19{,}8^\circ} = 1269{,}48\,(\cos 19{,}8^\circ + j \cdot \sin 19{,}8^\circ) = 1194 + j \cdot 430,$$

und

$$0{,}953 \cdot e^{j \cdot 108^\circ} = 0{,}953\,(\cos 108^\circ + j \cdot \sin 108^\circ) = -0{,}2945 + j \cdot 0{,}9064.$$

Sie erhalten

$$\mathfrak{W} = \frac{496{,}56 + j \cdot 576 + 1194 + j \cdot 430}{0{,}8276 + j \cdot 0{,}96 - 0{,}2945 + j \cdot 0{,}9064}\ \Omega = \frac{1691 + j \cdot 1006}{0{,}5331 + j \cdot 1{,}8664}\ \Omega.$$

Zähler und Nenner werden wieder in die Exponentialform umgewandelt:

$$\sqrt{1691^2 + 1006^2} = \sqrt{3871517} = 1968$$
$$\tan \varphi_Z = \frac{1006}{1691}, \qquad \varphi_Z = 30{,}7^\circ;$$

$$\sqrt{0{,}5331^2 + 1{,}8664^2} = \sqrt{3{,}7676} = 1{,}941,$$

$$\tan \varphi_N = \frac{1{,}8664}{0{,}5331}, \qquad \varphi_N = 74{,}1^\circ.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{W} = \frac{1968 \cdot e^{j \cdot 30{,}7^\circ}}{1{,}941 \cdot e^{j \cdot 74{,}1^\circ}}\,\Omega = \underline{\underline{1013 \cdot e^{-j \cdot 43{,}4^\circ}\,\Omega}}.$$

Übungen

Berechnen Sie

19. a) $\sin j\pi$, *b)* $\sinh j\pi$, *c)* $\sinh jx \cdot \cosh jx$*!*

Berechnen Sie:

20. a) $\sinh(0{,}32 + j \cdot 0{,}1)$, *b)* $\cosh(-1 - j \cdot 0{,}6)$!

21. Bestimmen Sie $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \cdot \cosh \mathfrak{g} - \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{Z} \cdot \sinh \mathfrak{g}$ *wenn gegeben ist:*

$$\mathfrak{Z} = 786 \cdot e^{-j \cdot 23{,}3^\circ}\,\Omega,$$
$$\mathfrak{g} = a + j \cdot b = 0{,}0475 + j \cdot 0{,}179,$$
$$\mathfrak{U}_1 = 1\ \mathrm{V},$$
$$\mathfrak{J}_1 = 620 \cdot e^{-j \cdot 44{,}1^\circ}\,\mathrm{A}.$$

Das Ergebnis ist in Exponentialform anzugeben.

Zusammenfassung

Besondere Bedeutung haben die Kreis- und Hyperbelfunktionen komplexer Argumente für den Elektrotechniker. Im folgenden seien die wichtigsten Formeln zusammengefaßt:

$\cos jx = \cosh x$	$\cosh jx = \cos x$
$\sin jx = j \cdot \sinh x$	$\sinh jx = j \cdot \sin x$
$\tan jx = j \cdot \tanh x$	$\tanh jx = j \cdot \tan x$
$\cot jx = -j \cdot \coth x$	$\coth jx = -j \cdot \cot x$
$\cos(a + jb) = \cos a \cdot \cosh b - j \cdot \sin a \cdot \sinh b$	$\cosh(a + jb) = \cosh a \cdot \cos b + j \cdot \sinh a \cdot \sin b$
$\sin(a + jb) = \sin a \cdot \cosh b + j \cdot \cos a \cdot \sinh b$	$\sinh(a + jb) = \sinh a \cdot \cos b + j \cdot \cosh a \cdot \sin b$
$\tan(a + jb) = \dfrac{\tan a + j \cdot \tanh b}{1 - j \cdot \tan a \cdot \tanh b}$	$\tanh(a + jb) = \dfrac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} + j \cdot \dfrac{\sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$

Weitere Formeln finden Sie im „Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker“ von C. Rint, I. Band.

9 Funktionen in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten und ihre Ableitungen

9.1 Funktionen in Parameterdarstellung

9.11 Parameterdarstellung. Die funktionale Abhängigkeit zweier veränderlicher Größen haben wir bisher in der Form $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ dargestellt. Dies ist aber nicht die einzig mögliche Darstellungsform einer Funktion. Die Abhängigkeit zweier veränderlicher Größen x und y kann auch dadurch gegeben sein, daß jede Veränderliche für sich von einer dritten Veränderlichen abhängig ist.

Sind

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t) \tag{a}$$

zwei Funktionen von t, so ist für jedes t sowohl ein Wert für x als auch für y bestimmt. Sie erhalten also für jedes t ein Wertepaar $(x; y)$. Je einem Wert für x ist auf diese Weise ein Wert von y zugeordnet.

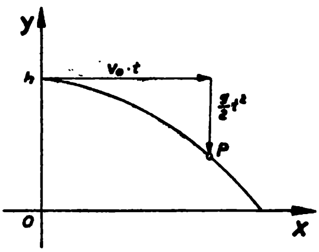

Bild 14

Die Gleichungen (a) stellen somit eine Funktion dar.

Man nennt die dritte Veränderliche t den **Parameter** und die Gleichungen (a) die **Parameterdarstellung** der Funktion.

1. Beispiel:

Es soll die Bahnkurve ermittelt werden, die ein Körper bei horizontalem Wurf aus der Höhe h im luftleeren Raum beschreibt. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0.

Ohne Einfluß der Schwerkraft würde der Körper nach der Zeit t in der Wurfrichtung die Strecke

$$x = v_0 \cdot t \tag{b}$$

zurückgelegt haben (vgl. Bild 14).

In der gleichen Zeit fällt er aber um die Strecke $\frac{g}{2} t^2$. Nach der Zeit t hat er demnach noch die Höhe

$$y = h - \frac{g}{2} t^2. \tag{c}$$

Sein Ort zur Zeit t wird also durch die Formeln (b) und (c) angegeben, d. h., seine Bahnkurve in Abhängigkeit von t wird durch die Gleichungen (b) und (c) dargestellt. Die Einführung der Zeit als Parameter erweist sich in vielen praktischen Anwendungen als günstig.

Die Variablen x und y sind in Abhängigkeit von der Veränderlichen t gegeben.

Damit sind x und y auch untereinander abhängig. In unserem Beispiel läßt sich t eliminieren. Mit $t = \frac{x}{v_0}$ erhalten Sie

$$y = f(x) = h - \frac{g}{2v^2_0}\, x^2.$$

Die Bahnkurve ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel in $(0;\, h)$.

2. Beispiel

Die Gleichungen

$$x = \varphi(t) = a + bt, \qquad y = \psi(t) = c + dt$$

sind die Parameterdarstellung einer Geraden. Sie bestätigen das durch Elimination des Parameters t.

Sie erhalten

$$y = \frac{d}{b}\, x + \frac{cb - ad}{b}.$$

Für $t = 0$ ist $x = a$, $y = c$. Die Gerade geht also durch den Punkt $(a;\, c)$ und hat den Anstieg $m = \frac{d}{b}$. Die Gerade ist in Bild 15 für $a = 6$, $b = -3$, $c = 3$, $d = -2$ dargestellt.

Durch den Parameter t ist der Geraden ein bestimmter Durchlaufsinn gegeben. Der Durchlaufsinn einer Funktion wird durch die Richtung bestimmt, in der ein Punkt P die Funktion mit *wachsenden* Werten der unabhängigen Veränderlichen durchläuft. Diese Richtung ist in Bild 15 durch einen Pfeil angegeben. Durch Einführung neuer Veränderlicher kann der Durchlaufsinn einer Funktion geändert werden. Das sehen Sie am Beispiel der eben behandelten Geraden, die in der Darstellung

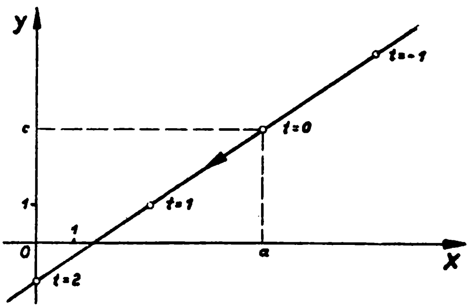

Bild 15

$$y = \frac{d}{b}\, x + \frac{cb - ad}{b}$$

für wachsende x in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

3. Beispiel

Bei dem Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2$$

läßt sich als Parameter der Winkel t einführen, den der zum Punkte $P(x;\, y)$ gehörige Radius mit der x-Achse einschließt.

Aus Bild 16 entnehmen Sie die Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos t \\ y &= r \cdot \sin t \end{aligned}} \tag{28}$$

Hier kommt also dem Parameter t eine bestimmte geometrische Bedeutung zu.

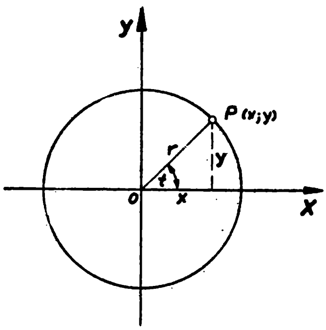

Bild 16

4. Beispiel

Auch

$$x = r\,\frac{2u}{1+u^2}, \qquad y = r\,\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

ist eine Parameterdarstellung des Kreises. Durch Elimination des Parameters u läßt sich das leicht bestätigen.

Es ist

$$x^2 = 4u^2 \cdot \frac{r^2}{(1+u^2)^2}$$

und

$$y^2 = (1 - 2u^2 + u^4) \cdot \frac{r^2}{(1+u^2)^2}.$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2}{(1+u^2)^2}(1 + 2u^2 + u^4) \\ &= \frac{r^2}{(1+u^2)^2}(1+u^2)^2, \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned}$$

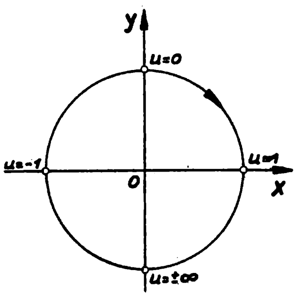

Bild 17

Mit wachsendem u wird der Kreis in mathematisch negativem Sinne durchlaufen (vgl. Bild 17).

Sie haben soeben zwei verschiedene Parameterdarstellungen ein und desselben Kreises kennengelernt. Allgemein lassen sich für jede Funktion $y = f(x)$ beliebig viele Parameterdarstellungen angeben. Wählt man nämlich irgendeine beliebige Funktion $x = \varphi(t)$, so hat man nur in $y = f(x)$ die Veränderliche x durch $\varphi(t)$ zu ersetzen und erhält $y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Damit ist schon eine Parameterdarstellung der Funktion gefunden.

5. Beispiel

Eine häufig angewandte Konstruktion einer Ellipse ist die aus Haupt- und Nebenkreis mit den Radien a und b. Aus dieser Konstruktion läßt sich eine Parameterdarstellung der Ellipse herleiten.

Aus **Bild** 18 lesen Sie ab:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t.$$

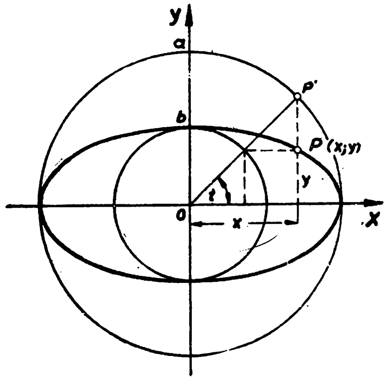

Bild 18

Beachten Sie, daß hier t *nicht* — wie beim Kreis — der Winkel des Strahls $\overrightarrow{OP}$ mit der positiven x-Achse ist. Für $a = b$ geht die Ellipse in den Kreis über.

Wie Sie gesehen haben, kann dem Parameter eine geometrische oder physikalische Bedeutung zukommen. Das ist im 1., 3. und 5. Beispiel der Fall. Häufig lassen sich bei günstiger Wahl des Parameters Rechnungen, Umformungen, Differentiationen usw. schneller und einfacher durchführen als bei Verwendung kartesischer Koordinaten. Mitunter läßt sich sogar eine Funktion gar nicht explizit oder implizit in kartesischen Koordinaten angeben.

Lehrbeispiel 19

Welche Kurve wird durch die Gleichungen

$$x = a \cosh t, \qquad y = b \sinh t$$

dargestellt?

Lösung:

Um den Parameter t zu eliminieren, benützen wir die Beziehung

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Es ist

$$\cosh^2 t = \frac{x^2}{a^2},$$

$$\sinh^2 t = \frac{y^2}{b^2}.$$

Also wird

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen sind die Parameterdarstellung einer Hyperbel.

Lehrbeispiel 20

Eine Strecke AB von der Länge a ist mit ihren Enden A und B gleitend auf den Achsen eines Koordinatensystems befestigt. Vom Koordinatenursprung O wird das Lot auf die Strecke gefällt. Bewegt sich die Strecke, so wandert der Fußpunkt P des Lotes auf der Strecke AB. Welche Kurve beschreibt der Fußpunkt des Lotes, wenn sich die Strecke im Achsenkreuz bewegt?

Lösung:
Es soll φ als Parameter eingeführt werden (vgl. Bild 19). Aus $\triangle\, OCP$ folgt

$$x = d \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = d \sin \varphi.$$

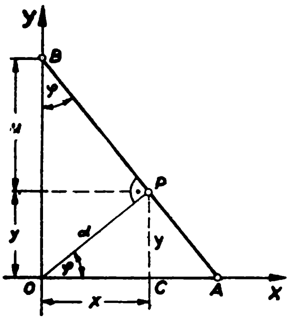

Bild 19

Sie haben nun d zu ersetzen und nach Möglichkeit durch a und φ auszudrücken. Aus $\triangle\, OPB$ erhalten Sie

$$d = (u + y) \sin \varphi,$$

aus $\triangle\, OAB$ folgt

$$(u + y) = a \cos \varphi.$$

Damit ist

$$d = a \cos \varphi \sin \varphi.$$

Setzen Sie das in die Gleichungen für x und y ein, so ergibt sich

$$\underline{\underline{x = a \cos^2 \varphi \sin \varphi}}, \qquad \underline{\underline{y = a \cos \varphi \sin^2 \varphi}}.$$

Das ist die Parameterdarstellung der gesuchten Kurve.

Die Kurve ist in Bild 20 für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ gezeichnet. Löst man sich von der Aufgabenstellung und läßt als Definitionsbereich $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ zu, so ergibt sich die gleiche Schleife auch im 2., 3. und 4. Quadranten. Es entsteht eine Figur, die Ähnlichkeit mit einem Kleeblatt hat.

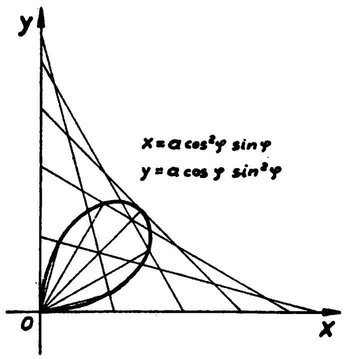

Bild 20

9.12 Rollkurven und Kreisevolvente. Rollt eine beliebige Kurve (die sogenannte erzeugende Kurve) auf einer festen Kurve ab, so wird ein bestimmter Punkt der erzeugenden Kurve als Bahn wiederum irgendeine Kurve durchlaufen, die man Rollkurve nennt. Zur Gruppe der Rollkurven gehören u. a. die **Zykloiden.**

An diesen soll Ihnen der Begriff der Rollkurve veranschaulicht werden. Stellen Sie sich eine Kreisscheibe vor, die auf einer festen Bahn, einer Geraden, abrollt, ohne zu gleiten. Jeder Punkt der Kreisscheibe beschreibt hierbei eine bestimmte Kurve. Im einfachsten Falle, nämlich für den Mittelpunkt der Kreisscheibe, ist diese Bahn eine Gerade. Wie sieht die Kurve aber z. B. für einen festen Punkt P auf der Peripherie aus (zu vergleichen mit dem Weg des Ventils eines in Bewegung befindlichen Fahrrades)? Die Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Kreis auf der Geraden abrollt, ist eine Zykloide.

In diesem Falle ist es eine gewöhnliche oder gespitzte Zykloide. Es sind aber noch zwei weitere grundsätzliche Fälle möglich, nämlich, daß der betrachtete Punkt P

irgendwo auf der Kreisscheibe (Mittelpunkt M und Peripherie ausgenommen), oder daß er außerhalb der abrollenden Kreisscheibe liegt.
Um die Kurvengleichung für eine beliebige Lage des Punktes P aufzustellen, betrachten Sie Bild 21.

Es seien: r der Radius des rollenden Kreises,
a der Abstand des Punktes $P(x; y)$ vom Mittelpunkt M,
Q der Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden, auf der der Kreis abrollt (in unserem Falle die x-Achse),
t der Wälzungswinkel des Kreises, gemessen im Bogenmaß.

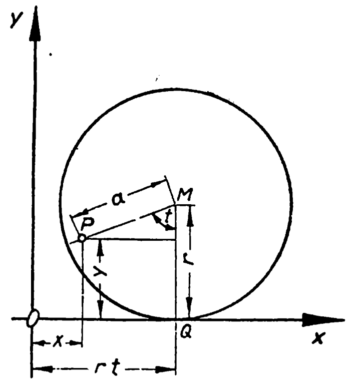

Bild 21

Wenn $t = 0$ ist, soll sich der Punkt Q mit dem Ursprung decken. Ist der Kreis nun um einen bestimmten Winkel t auf der Geraden abgerollt worden, so hat sich der Punkt Q um die Strecke rt vom Ursprung entfernt. Aus Bild 21 können Sie dann für die Koordinaten des Punktes P ablesen:

$$x = rt - a \sin t, \qquad y = r - a \cos t.$$

Das ist die Gleichung der Zykloide in Parameterform. Da nach jeweils einem vollen Kreisumlauf wieder die gleiche Lage wie zu Beginn der Bewegung erreicht wird, erhalten Sie periodische Kurven mit der Periode $2\pi r$. Man spricht dann für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ von einem Zykloidenbogen. Die drei Arten von Zykloiden können nun nach dem Verhältnis von r und a unterschieden werden. Es ergibt sich bei
1. $a < r$ eine gestreckte Zykloide,
2. $a = r$ eine gewöhnliche oder gespitzte Zykloide,
3. $a > r$ eine verschlungene Zykloide.

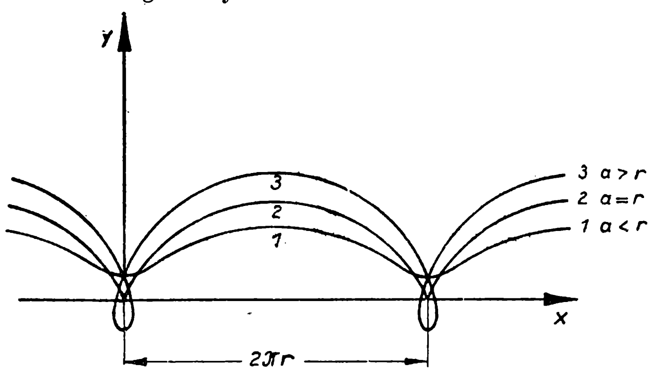

Bild 22

Bild 22 zeigt alle drei Arten.

Zykloiden ($a \gtreqless r$) kommen in der Hydrodynamik als Oberflächenwellen einer sehr tiefen Flüssigkeit vor. Dabei sind die Wellen mit Schaumkronen gespitzte Zykloiden und die Wellenbrecher verschlungene Zykloiden. Endlich sei noch an die bekannte Zykloidenverzahnung bei Zahnrädern, an das Zykloidenpendel in der Physik und an die Planetengetriebe (Umwandlung einer drehenden Bewegung in eine elliptische oder geradlinige) erinnert. In Physik und Technik finden Sie die Zykloide z. B. als Brachistochrone, d. h. als die Kurve kürzester Fallzeit. Die Brachistochrone entsteht durch Abrollen eines Kreises an der Unterseite der x-Achse. Wenn z. B. eine Punktmasse ohne Reibung unter dem Einfluß der Schwerkraft vom Anfangspunkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 zu fallen beginnt und sich nach einem Punkt B bewegen soll, der nicht lotrecht unter Punkt A liegt, so ist die Fallzeit ein Minimum, wenn AB ein Zykloidenbogen ist.

Technisch noch wichtiger als die oben besprochenen Zykloiden sind jene Rollkurven, die dann entstehen, wenn ein Kreis an einem feststehenden Kreis außen oder innen abrollt.

Die Rollkurve ist eine **Epizykloide,** wenn der bewegte Kreis außen abrollt.

Da die beiden Kreisbogen beim Abrollen gleich sein müssen, können Sie aus Bild 23 ablesen, daß

$$\varrho \cdot \psi = r \cdot \varphi$$

sein muß, denn dieses sind die beiden Bögen.

Weiter folgt aus Bild 23

$$\begin{aligned} x &= (\varrho + r) \cos \psi - a \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\psi + \varphi)\right] \\ &= (\varrho + r) \cos \psi - a \cos (\psi + \varphi) \\ &= (\varrho + r) \cos \frac{r}{\varrho} \varphi - a \cos \left(\frac{r + \varrho}{\varrho} \varphi\right). \end{aligned}$$

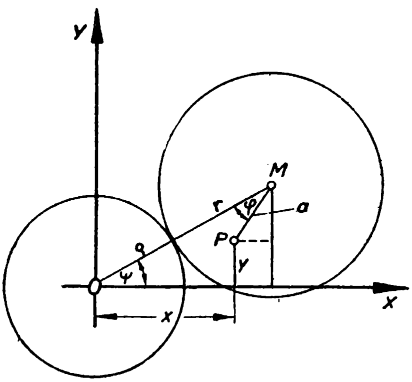

Bild 23

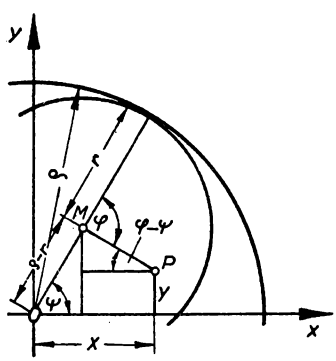

Bild 24

In ähnlicher Weise kann hergeleitet werden

$$y = (\varrho + r) \sin \frac{r}{\varrho} \varphi - a \sin \left(\frac{r + \varrho}{\varrho} \varphi\right).$$

Auch hier können Sie wie früher t anstatt φ einsetzen und ebenfalls die Fälle $a \lesseqgtr r$ unterscheiden.

Rollt der bewegte Kreis innen auf dem feststehenden ab, so heißt die Rollkurve eine **Hypozykloide.**

Die beiden Gleichungen der Parameterdarstellung lauten dann (Bild 24)

$$x = (\varrho - r) \cos \frac{r}{\varrho} \varphi + a \cos \left(\frac{\varrho - r}{\varrho} \varphi\right)$$

$$y = (\varrho - r) \sin \frac{r}{\varrho} \varphi - a \sin \left(\frac{\varrho - r}{\varrho} \varphi\right) \qquad \left[a = \overline{PM}; \qquad \psi = \frac{r}{\varrho} \varphi\right]$$

Auch hier sind wiederum drei grundsätzliche Fälle $a \lesseqgtr r$ zu unterscheiden.

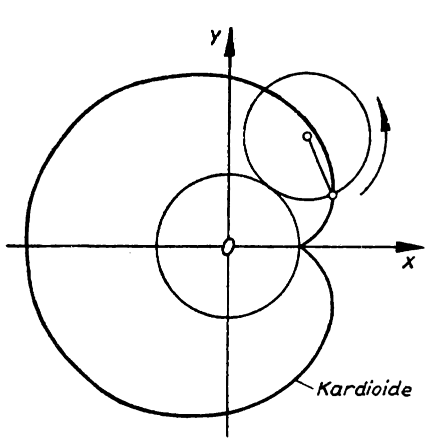

Bild 25

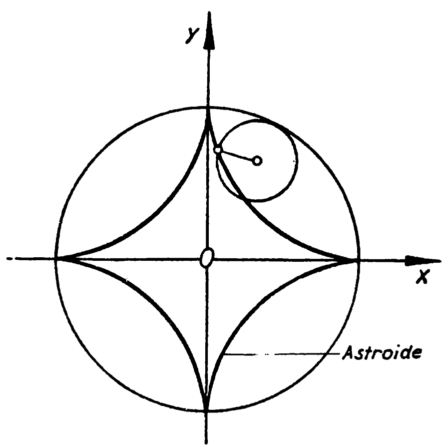

Bild 26

Von den gewöhnlichen Epizykloiden ist die bekannteste die *Kardioide* oder *Herzlinie* für $r = \varrho = a$ (Bild 25). Ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten ist $(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x - a)^2 + y^2]$.

Von den gewöhnlichen Hypozykloiden ist die bekannteste die *Astroide* oder *Sternlinie* für $r = a = \frac{1}{4} \varrho$ (Bild 26). Ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten ist $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}$ (mit $A = 4a$). Die Umrechnung aus der Parameterdarstellung in kartesische Koordinaten erfolgt durch Elimination des Parameters t. Wegen des großen Umfanges der Rechnung soll darauf verzichtet werden, den Weg der Elimination zu zeigen.

Eine weitere wichtige Kurve ist die **Kreisevolvente**. Sie bildet den Gegensatz zur gewöhnlichen Zykloide. Hier rollt nämlich nicht ein Kreis auf einer Geraden ab, sondern eine Gerade bewegt sich ohne zu gleiten an einem Kreis entlang und bleibt immer in Berührung mit ihm. Auf diese Weise beschreibt ein auf der Geraden markierter Punkt eine Kreisevolvente.

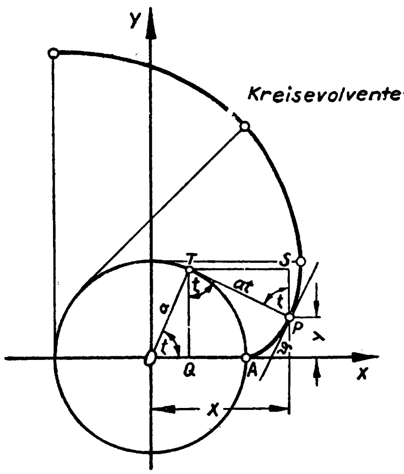

Bild 27

Sie können sich eine Kreisevolvente wie folgt entstanden denken und auch konstruieren:

Wickeln Sie von einer Kreisscheibe, die auf einem Stück Papier liegt, einen Faden derart ab, daß der abgewickelte Faden durch einen an seinem Ende befestigten Bleistift immer gespannt bleibt, so zeichnet bei festgehaltener Kreisscheibe der Bleistift eine Kreisevolvente (Bild 27). Wegen dieser Erzeugung der Kurve hat diese den Namen „Evolvente“ oder „Abwickelnde“.

Aus Bild 27 können Sie ablesen:

Mit t als Wälzungswinkel, T als Berührungspunkt von Gerade und Kreis und a als Kreisradius ist

$$\overline{TP} = \widehat{TA} = a \cdot t,$$

$$x = \overline{OQ} + \overline{TS} = a \cos t + at \sin t = a(\cos t + t \sin t),$$

$$y = \overline{TQ} - \overline{SP} = a \sin t - at \cos t = a(\sin t - t \cos t).$$

Für die Anwendung in der Technik sei auf die wichtige Evolventenverzahnung hingewiesen.

9.13 Die Ableitung einer Funktion in Parameterdarstellung. Ist Ihnen eine Funktion in der Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so könnten Sie, um die Ableitung nach x zu bilden, aus beiden Gleichungen den Parameter t eliminieren, dadurch eine Beziehung zwischen x und y in der Form $y = f(x)$ herstellen und diese dann ableiten. Das ist aber oft nicht möglich. Vielfach ist es auch zweckmäßiger und einfacher, t nicht zu eliminieren und den Differentialquotienten gleichfalls als Funktion von t anzugeben.

Beispiel

Von der in Parameterdarstellung gegebenen Funktion

$$x = \varphi(t) = t^3,$$
$$y = \psi(t) = t^2$$

soll die Ableitung $y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ gebildet werden. Zunächst sind x und y Funktionen des Parameters t. Sie können also sowohl x als auch y nach t differenzieren.

Es ist[1]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \dot{\varphi}(t) = 3t^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = \dot{\psi}(t) = 2t.$$

Sie können aber auch y als Funktion von x darstellen, indem Sie $x = \varphi(t)$ nach t auflösen und $t = t(x)$ — in unserem Falle also $t(x) = \sqrt[3]{x}$ — in $y = \psi(t)$ einsetzen. Dann ist $y = \psi[t(x)]$ eine mittelbare Funktion von x, die Sie unter Beachtung der Kettenregel nach x differenzieren können.

Aus

$$y = \psi[t(x)]$$

bilden Sie also

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Da nach Formel (3)

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\dot{x}}$$

ist, erhalten Sie schließlich

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}} \tag{29}$$

Für unser Beispiel ergibt sich

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{3t^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3t}}}.$$

Sie haben $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als Funktion des Parameters t erhalten. Wollen Sie die zweite Ableitung bilden, so haben Sie wiederum zu beachten, daß y' wegen $t = t(x)$ *mittelbare* Funktion von x ist.

Nach der Kettenregel wird also, mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dot{x}}$,

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\dot{x}}.$$

$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\dot{x}}$ bedeutet: Sie haben y' nach t zu differenzieren und das Ergebnis durch $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ zu dividieren.

In unserem Beispiel folgt aus

$$y' = \frac{2}{3t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3t^2}$$

[1] Die Ableitungen nach dem Parameter (vor allem, wenn der Parameter die Zeit bedeutet) werden meist nach Newton mit Punkten bezeichnet.

Mit $\dot{x} = 3t^2$ wird

$$y'' = -\frac{2}{3t^2} \cdot \frac{1}{3t^2},$$

$$\underline{\underline{y'' = -\frac{2}{9t^4}}}.$$

Wir leiten noch die zweite Ableitung $y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ allgemein her.

Aus

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

erhalten Sie (Quotientenregel)

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}.$$

Mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dot{x}}$ wird schließlich

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}} \tag{30}$$

Lehrbeispiele

21. *Ein Kreis sei in Parameterdarstellung gegeben:*

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t.$$

Gesucht sind y' und y'' als Funktion von t.

Lösung:

Es ist $\dot{y} = a \cos t, \qquad \dot{x} = -a \sin t,$

$\ddot{y} = -a \sin t, \qquad \ddot{x} = -a \cos t.$

Nach Formel (29) wird

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{a \cos t}{a \sin t} = \underline{\underline{-\cot t.}}$$

Formel (30) liefert

$$y'' = \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{a \sin^3 t}}}.$$

Sie können aber auch sofort von y' ausgehend die zweite Ableitung bilden:

$$y' = -\cot t,$$

$$y'' = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \left(-\frac{1}{a \sin t}\right)$$

$$= -\frac{1}{a \sin^3 t}.$$

22. *Die Gleichung einer Ellipse sei in Parameterform durch*

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t$$

gegeben.

Bestimmen Sie

a) die erste Ableitung als Funktion des Parameters und hieraus die erste Ableitung als Funktion von x,

b) die zweite Ableitung als Funktion des Parameters!

Lösung:

a) $\dot{y} = b \cos t, \qquad \dot{x} = -a \sin t,$

$\ddot{y} = -b \sin t, \qquad \ddot{x} = -a \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = \underline{\underline{-\frac{b}{a} \cot t}}$$

Es ist $\qquad \cos t = \frac{x}{a}.$

Mit $\qquad \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$

folgt $\qquad \sin t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Diese Werte für $\sin t$ und $\cos t$ in $\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t}$ eingesetzt, ergibt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{\frac{x}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \underline{\underline{-\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}}}.$$

Zur Kontrolle können Sie die Ellipsengleichung in der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ schreiben, nach y auflösen und dann differenzieren.

b) $y'' = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t}$

$$= \underline{\underline{-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}}}$$

Auch hier können Sie von y' ausgehen:

$$y' = -\frac{b}{a} \cot t,$$

$$y'' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \left(-\frac{1}{a \sin t}\right)$$

$$= -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}.$$

23. *Die in Parameterform gegebene Funktion*

$$x = a + bt, \qquad y = c + dt$$

ist zu differenzieren.

Lösung:

$$\dot{x} = b, \qquad \dot{y} = d$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \underline{\underline{\frac{d}{b}}}$$

Dies ist der Anstieg der in Abschnitt 9.11 behandelten Geraden (vgl. Bild 15).

24. *Die in Parameterform durch die Gleichungen*

$$x = \cos^2 t \quad \text{und} \quad y = \cos 2t$$

gegebene Funktion ist abzuleiten und die Kurve der Funktion zu bestimmen.

Lösung:

$$\dot{x} = 2 \cos t\,(-\sin t) = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t$$

$$\dot{y} = (-\sin 2t) \cdot 2 = -2 \sin 2t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2 \sin 2t}{-\sin 2t} = \underline{\underline{2}}.$$

Die Kurve hat den konstanten Anstieg $m = 2$. Sie kann aber keine Gerade sein, da weder $x = \cos^2 t$ noch $y = \cos 2t$ den Wert 1 übersteigen können. Sie stellen für die weitere Untersuchung eine Wertetabelle auf.

t	$0 \triangleq 0°$	$\frac{\pi}{6} \triangleq 30°$	$\frac{\pi}{4} \triangleq 45°$	$\frac{\pi}{3} \triangleq 60°$	$\frac{\pi}{2} \triangleq 90°$
x	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
y	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

t	$\frac{2}{3}\pi \triangleq 120°$	$\frac{3}{4}\pi \triangleq 135°$	$\frac{5}{6}\pi \triangleq 150°$	$\pi \triangleq 180°$
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Wandert t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so durchläuft P die Strecke $A\ (1; 1)$ bis $B\ (0; -1)$. Wandert t weiter von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so kehrt der Punkt P um und wandert zurück von B bis A. Wächst t weiter, so beginnt das Spiel von neuem. Die Funktionsgleichungen $x = \cos^2 t$; $y = \cos 2t$ stellen daher keine Gerade, sondern eine Strecke mit den Endpunkten $A\ (1; 1)$ und $B\ (0; -1)$ dar.

25. *Es ist die Ableitung der in Parameterform gegebenen Zykloide*

$$x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t)$$

zu bilden.

Lösung:

$$\dot{x} = a\,(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = a \sin t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

$$\underline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot \frac{t}{2}}.$$

Übungen

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *und* $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ *als Funktionen von* t*!*

22. *a)* $x = a \cos t$, $y = a \sin^2 t$

b) $x = \frac{a - t}{a + t}$, $y = \frac{t}{a + t}$

c) $x = a \ln t$, $y = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ (*Kettenlinie*)

d) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (*Astroide*)

Zusammenfassung

Eine Funktion $y = f(x)$ kann durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ in Parameterform dargestellt werden.

Jede Funktion läßt sich in beliebig vielen Parameterformen darstellen. Bei günstiger Wahl des Parameters können häufig Umformungen, Differentiationen usw. leichter durchgeführt werden als bei Verwendung kartesischer Koordinaten.

Rollt eine Kurve auf einer festen Kurve ab, so durchläuft ein Punkt der erzeugenden Kurve als Bahn eine Rollkurve.

Ist die feste Kurve eine Gerade, die erzeugende Kurve ein Kreis, so entsteht als Rollkurve eine Zykloide.

Ist die feste Kurve ebenfalls ein Kreis, auf dem der andere Kreis außen abrollt, so entsteht als Rollkurve eine Epizykloide, rollt der Kreis innen ab, so entsteht eine Hypozykloide.
Bewegt sich eine Gerade ohne zu gleiten an einem Kreis entlang, so beschreibt ein beliebiger Punkt auf der Geraden als Bahnkurve eine Kreisevolvente.
Die Gleichungen der Rollkurven werden günstiger als in kartesischen Koordinaten in Parameterform dargestellt und differenziert. Ist t der Parameter (die Hilfsveränderliche), so lautet der Differentialquotient einer in Parameterdarstellung vorliegenden Funktion

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

worin $y = \psi(t)$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{\psi}(t)$,

bzw. $x = \varphi(t)$ und $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{\varphi}(t)$ ist.

9.2 Funktionen in Polarkoordinaten

Von der analytischen Geometrie her ist Ihnen bekannt, daß ein Punkt oder eine Funktion außer in kartesischen Koordinaten auch in Polarkoordinaten gegeben sein kann. Die wichtigsten Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten seien nochmals wiederholt.

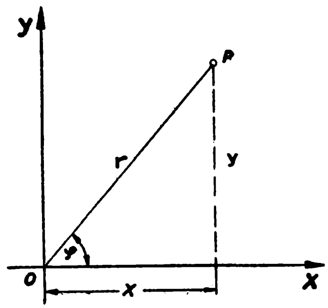

Bild 28

Aus Bild 28 folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned}} \tag{31}$$

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2} \tag{32}$$

$$\boxed{\tan \varphi = \frac{y}{x}} \tag{33}$$

Auch in Polarkoordinaten kann eine Funktion explizit: $r = r(\varphi)$ oder implizit: $F(r, \varphi) = 0$, gegeben sein.
Bei Formel (31) ist zu beachten, daß sie nicht identisch ist mit (28), denn in (31) ist r keine Konstante, sondern stellt eine Variable dar. Ebenso stellt (32) nicht die Gleichung eines Kreises dar, da $r = r(\varphi)$ ist

Lehrbeispiel 26

Die Gleichung $x^2 - y^2 = c^2$ (gleichseitige Hyperbel) ist in Polarkoordinaten darzustellen.

Lösung:

Sie setzen $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ in die Ausgangsgleichung ein.

$$r^2 \cdot \cos^2\varphi - r^2 \cdot \sin^2\varphi = c^2$$
$$r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = c^2$$
$$r^2 \cdot \cos 2\varphi = c^2$$
$$\underline{\underline{r = \frac{c}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}}$$

Die Funktion ist nur für $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ definiert. Nimmt man die Wurzel mit positivem Vorzeichen, so erhält man den rechten Ast der Hyperbel. Bei negativer Wurzel wird r negativ. Man hat für negatives r den Betrag von r in der Richtung $\varphi + \pi$ abzutragen und erhält so den linken Ast der Hyperbel.

Lehrbeispiel 27

Die Gleichung der Archimedischen Spirale, $r = a \cdot \varphi$ (a = konstant), ist in kartesischen Koordinaten darzustellen.

Lösung:

Aus (31) folgt $\varphi = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{r}$, oder $\varphi = \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{r}$.

Weiter gilt nach (32) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setzen Sie dies in die Ausgangsgleichung ein, dann erhalten Sie

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{r},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

oder
$$\cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sie erkennen, daß in diesem Fall die Darstellung in Polarkoordinaten wesentlich einfacher ist und beim Rechnen Vorteile gegenüber der Darstellung in kartesischen Koordinaten bietet.

Ersetzen Sie in einer Funktion, die in Polarkoordinaten gegeben ist, die Abweichung φ durch $\bar{\varphi} - \alpha$, so erhält jeder Punkt die neue Abweichung $\bar{\varphi}$, die mit der alten in der Beziehung

$$\varphi = \varphi - \alpha \quad \text{oder} \quad \bar{\varphi} = \varphi + \alpha$$

steht. Das bedeutet, daß jeder Punkt und damit die ganze Kurve um den Winkel α um den Ursprung gedreht wurde (vgl. Bild 29).

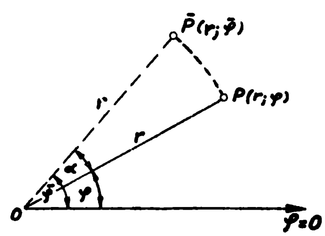

Bild 29

Es sei erwähnt, daß sich eine **Spiegelung** der Kurve **am Einheitskreis** ergibt, wenn man r

durch $\frac{1}{r^*}$ ersetzt. Man spricht dann auch von einer „Transformation durch reziproke Radien“.

Beispiel:

Der Punkt $P_1\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$ geht über in $P_1^*\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$;

der Punkt $P_2\left(\frac{1}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$ geht über in $P_2^*\left(4; \frac{\pi}{6}\right)$.

Liegt also ein Punkt außerhalb des Einheitskreises um O, so wird er in das Innere des Einheitskreises transformiert und umgekehrt. Punkte auf dem Einheitskreis bleiben in ihrer Lage unverändert.

Auch Kurven können am Einheitskreis gespiegelt werden. Ist zum Beispiel die Gerade $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gegeben — eine Gerade durch O, die mit der Achse $\varphi = 0$ den Winkel 60° bildet — so geht jeder Punkt der Geraden durch die Transformation wieder in einen Punkt der Geraden über. Man sagt, die Gerade durch O geht in sich selbst über.

Lehrbeispiel 28

Wie lautet die Gleichung der am Einheitskreis gespiegelten gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = c^2$?

Lösung:

Aus Lehrbeispiel 26 ist Ihnen die Gleichung der gegebenen Hyperbel bekannt:

$$r = \frac{c}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

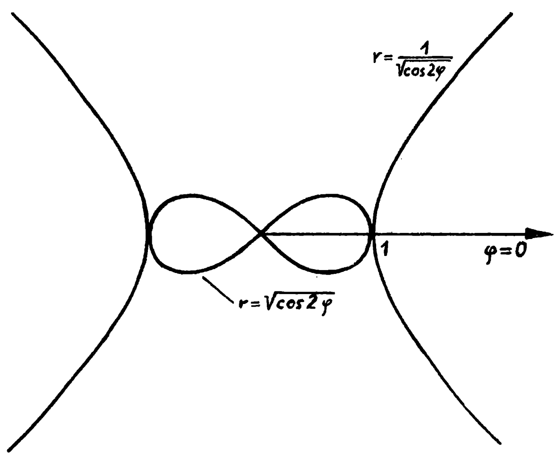

Bild 30

Sie ersetzen r durch $\frac{1}{r^*}$ und erhalten:

$$r^* = \frac{1}{c}\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Die Kurve ist eine *Lemniskate.* Bild 30 zeigt Hyperbel und Lemniskate für $c = 1$.

Übungen

23. Die Kreisgleichung

a) $x^2 + y^2 = 1$,

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ ist in Polarkoordinaten darzustellen.

24. Die Gleichung der Lemniskate $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ *soll in kartesischen Koordinaten dargestellt werden.*

9.3 Die Ableitung einer Funktion in Polarkoordinaten

Ist eine Funktion in Polarkoordinaten r und φ durch die Gleichung $r = r(\varphi)$ gegeben, so können Sie in gewohnter Weise die Ableitung von r nach der unabhängigen Veränderlichen φ, also $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$, bilden.

Beispiele:

a) Die Ableitung der archimedischen Spirale

$$r = a \cdot \varphi$$

lautet

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = a.$$

b) Für die Lemniskate

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

erhalten Sie als Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -a\,\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$= -a \tan 2\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob dieser Ableitung $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$, ähnlich wie bei kartesischen Koordinaten, eine einfache geometrische Bedeutung beigelegt werden kann.

Dazu untersuchen wir zunächst, welcher Zusammenhang zwischen den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$ und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ besteht.

Zwischen kartesischen und Polarkoordinaten bestehen die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi, \qquad \text{(a)}$$

$$y = r\sin\varphi. \qquad \text{(b)}$$

Da $r = r(\varphi)$ eine Funktion von φ ist, sind x und y Funktionen von φ. Sie können also (a) und (b) nach φ differenzieren. Sie erhalten unter Anwendung der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = r' \cos\varphi - r \sin\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = r' \sin\varphi + r \cos\varphi.$$

Für $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$ wurde abkürzend r' geschrieben

Aus $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}$ und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}$ läßt sich $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ berechnen. Es ist

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Also wird

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r' \sin\varphi + r \cos\varphi}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi}.$$

Sie können noch mit $\cos\varphi$ kürzen und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r + r' \tan\varphi}{r' - r \tan\varphi}. \tag{c}$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich also der Anstieg der Tangente gegen die Achse $\varphi = 0$ bzw. gegen die x-Achse für jedes φ berechnen.

Bedenken Sie, daß $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\alpha$ ist, so läßt sich (c) weiter umformen. Sie kürzen die rechte Seite der Gleichung (c) mit r':

$$\tan\alpha = \frac{\frac{r}{r'} + \tan\varphi}{1 - \frac{r}{r'} \tan\varphi}.$$

Diese Gleichung hat Ähnlichkeit mit einer Additionsformel für den Tangens. Es ist nämlich

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}.$$

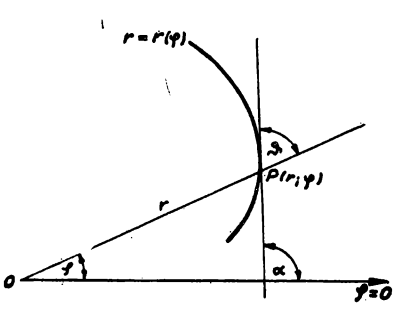

Bild 31

Sie setzen deshalb $\frac{r}{r'} = \tan\vartheta$ und können weiter umformen:

$$\tan\alpha = \frac{\tan\vartheta + \tan\varphi}{1 - \tan\vartheta \tan\varphi} = \tan(\vartheta + \varphi).$$

Damit ergibt sich $\alpha = \vartheta + \varphi$ oder $\vartheta = \alpha - \varphi$.

Aus Bild 31 erkennen Sie, daß ϑ der Winkel ist, den der Radiusvektor mit der Tangente in P bildet. Also gibt

$$\boxed{\frac{r}{r'} = \tan \vartheta} \tag{34}$$

den Tangens des Winkels an, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet.

Lehrbeispiel 29

Bestimmen Sie den Anstieg der Tangente an der Stelle $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gegenüber der Achse $\varphi = 0$, *wenn* $r = 2 - \frac{1}{\cos \varphi}$ *gegeben ist!*

Lösung:

Es ist

$$r' = -\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Also folgt mit Formel (34)

$$\tan \vartheta = -\frac{\left(2 - \frac{1}{\cos \varphi}\right) \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

$$= -(2 \cos \varphi - 1) \cot \varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ist $\quad \tan \vartheta = 0, \quad \vartheta = 0,$

also $\quad \alpha = 0 + \varphi,$

$$\underline{\underline{\alpha = \varphi = \frac{\pi}{3}}}.$$

Vgl. dazu Bild 32.

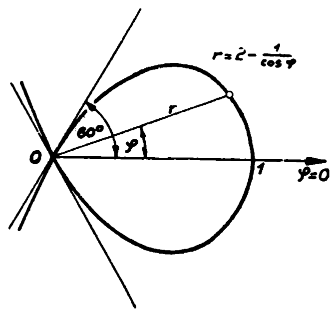

Bild 32

Lehrbeispiel 30

Unter welchem Winkel schneidet die Kurve $r = 1 + \cos \varphi$ *die Achse* $\varphi = 0$?

Lösung:

Es ist $\quad r = 1 + \cos \varphi, \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\sin \varphi.$

Damit wird $\quad \tan \vartheta = \frac{r}{r'} = -\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$

Für $\varphi \to 0$ geht $\tan \vartheta \to -\infty$,

also ist $\quad \underline{\underline{\vartheta = \alpha = \frac{\pi}{2}}}.$

Lehrbeispiel 31

Unter welchem Winkel schneidet die Funktion $r = 2 \sin \varphi$ *den Radiusvektor im Punkte* $P(r; \varphi)$?

Lösung:

Es ist $\quad \frac{dr}{d\varphi} = r' = 2 \cos \varphi$

und damit $$\frac{r}{r'} = \tan\vartheta = \frac{2\sin\varphi}{2\cos\varphi},$$

$$\underline{\underline{\tan\vartheta = \tan\varphi.}}$$

Für alle Punkte der Kurve gilt also $\vartheta = \varphi$.

Diese Eigenschaft der Kurve läßt sich leicht erklären. Führen Sie in $r = 2\sin\varphi$ kartesische Koordinaten ein, so erhalten Sie für die Funktion die Darstellung

$$x^2 + y^2 = 2y$$

oder $$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Das ist ein Kreis mit dem Radius $\varrho = 1$, der die Achse $\varphi = 0$ in O berührt. Fertigen Sie eine Skizze an! Sie erkennen, daß φ und ϑ Sehnentangentenwinkel an ein und derselben Sehne — dem Radiusvektor — sind.

Übungen

25. *Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P(r; \varphi)$ an die Kurve $r = a$ (a = konstant) mit der Achse $\varphi = 0$?*

26. *Auf der Archimedischen Spirale wird im Punkt P mit $\varphi = 20°$ die Normale (steht senkrecht auf der Tangente) errichtet. Welchen Winkel bildet die Normale mit der Geraden $\varphi = \frac{\pi}{4}$?*

    [*Gleichung der Archimedischen Spirale: $r = a \cdot \varphi$ (a = konstant).*]

Zusammenfassung

Jede in kartesischen Koordinaten gegebene Funktion läßt sich mittels der Beziehungen

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

in Polarkoordinaten darstellen.

Der Tangens des Winkels zwischen Radiusvektor und Tangente ist durch

$$\tan\vartheta = \frac{r}{r'}$$

gegeben.

10 Krümmung von Kurven

In Band 1, Abschnitt 4.1, haben Sie erfahren, wie man die Krümmungsart einer Kurve ermittelt. Oft ist es jedoch wichtig zu wissen, *wie stark* die Krümmung einer Kurve ist.

In den Bildern 33a und 33b sind zwei verschieden stark gekrümmte Kurven gezeichnet. Das Kurvenstück Δs soll in beiden Fällen gleich lang sein. Verschiebt man P_1 um ein Stück Δs auf der Kurve nach P_2, so dreht sich die Tangente und

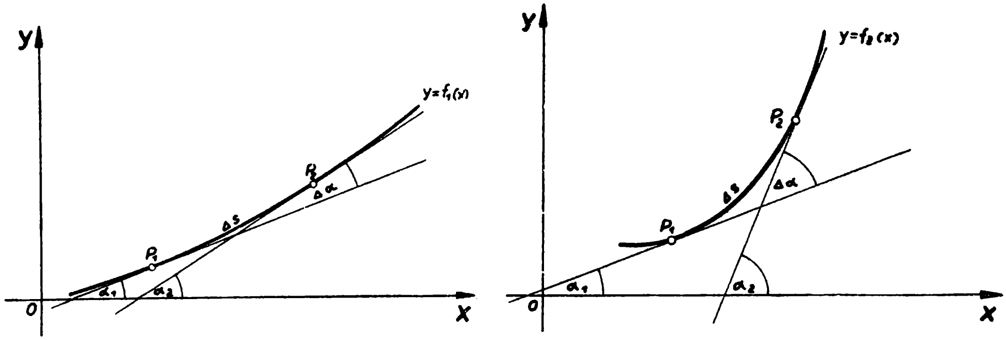

Bild 33a und b

ändert ihren Anstiegswinkel um $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Sie sehen, daß die Änderung $\Delta\alpha$ des Anstiegswinkels bei $f_2(x)$ (Bild 33b) größer ist als bei $f_1(x)$ (Bild 33a). Das liegt offenbar an der stärkeren Krümmung von $y = f_2(x)$. Je größer $\Delta\alpha$ im Vergleich zu Δs ist, um so stärker ist die Krümmung der Kurve. Das Verhältnis $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ gibt also Auskunft über die Stärke der Krümmung einer Kurve. Da die Krümmung einer Kurve im allgemeinen in jedem Punkte verschieden ist, stellt $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ die *mittlere Krümmung* des Kurvenstückes Δs dar.

Ebenso, wie Sie den Anstieg $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der Kurventangente in einem Punkte aus dem Sekantenanstieg $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erhalten, wenn $\Delta x \to 0$ geht, erhalten Sie die Krümmung k in einem Punkte der Kurve, wenn Sie in $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ das Kurvenstück $\Delta s \to 0$ gehen lassen. Die **Krümmung** k einer Kurve in einem Punkte $P(x; y)$ ist also

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}.$$

Wir wollen jetzt $k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ berechnen.

Wie Sie wissen, ist

$$\tan\alpha = y',$$

also

$$\alpha = \operatorname{arc\,tan} y'.$$

y' ist eine Funktion von x, $\alpha = \operatorname{arc\,tan} y'$ somit eine mittelbare Funktion von x. Sie können also $\alpha = f(y')$ mit Hilfe der Kettenregel nach x differenzieren. Sie erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y'} \cdot \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y''.$$

Für die geforderte Ableitung $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ wird noch $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ benötigt, denn es ist

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

Für die Berechnung von $\frac{dx}{ds}$ betrachten Sie Bild 34.

Sie finden dort ds als Hypotenuse des Tangentendreiecks P_1QR angegeben. Man nennt ds das Bogenelement der Kurve. Da sich die Kurve in P_1 an die Tangente anschmiegt, nimmt das Verhältnis $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ für $\Delta s \to 0$ den Wert $\frac{dx}{ds}$ an. (Den Beweis wollen wir hier nicht führen.)

Sie können damit $\frac{dx}{ds}$ aus dem Tangentendreieck P_1QR berechnen. Es ist

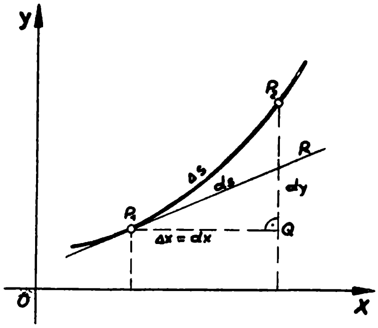

Bild 34

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2},$$

also

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Mit $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$ und $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$ erhalten Sie

$$k = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{y''}{1 + y'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\boxed{k = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3}} \qquad (35)$$

Ist die Kurve in der Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so ist

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad \text{und} \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Setzen Sie das in (35) ein, dann ergibt sich

$$k = \frac{\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3 \cdot \frac{1}{\dot{x}^3} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3},$$

$$\boxed{k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}} \qquad (36)$$

Da ds gleichzeitig mit dx wächst, ist $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$ das Verhältnis zweier Zahlen gleichen Vorzeichens, die Wurzel in (35) und (36) also stets positiv zu nehmen. Damit hängt das Vorzeichen der Krümmung einzig vom Vorzeichen des Zählers in (35) und (36) ab. Die Krümmung ist also positiv oder negativ, je nachdem y'' positiv oder negativ ist. Dieser Zusammenhang macht die Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung für die *Art* der Krümmung deutlich. Aus Bild 35 erkennen Sie, daß die Tangente bei einer Bewegung des Punktes P_1 nach P_2 eine Rechtsdrehung erfährt. In diesem Falle ist $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha < 0$, $\Delta s > 0$ und die mittlere Krümmung $k_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ negativ.

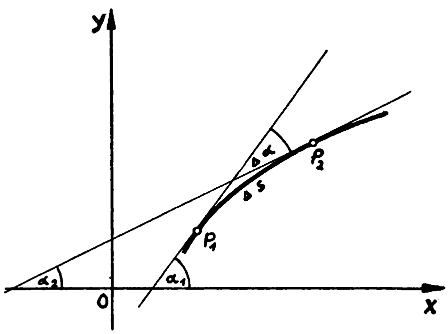

Bild 35

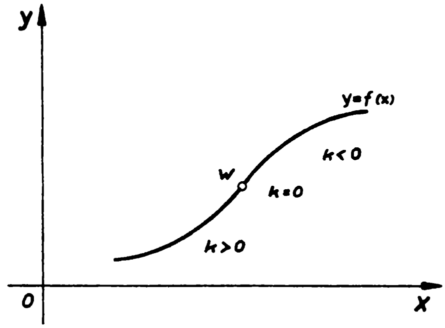

Bild 36

Mit der mittleren Krümmung ist natürlich auch die Krümmung $k = \frac{d\alpha}{ds}$ negativ. Sie erkennen (vgl. Bild 36):

> Ist die Kurve $y = f(x)$ von unten konvex, so ist $k > 0$,
> ist die Kurve $y = f(x)$ von unten konkav, so ist $k < 0$.

In Bild 36 muß an einer Stelle der Kurve die Krümmung k — und damit y'' — das Vorzeichen wechseln. Wie Sie wissen, ist das im Wendepunkt der Fall. Im Wendepunkt ist also $k = 0$.

> Im Wendepunkt einer Kurve ist die Krümmung Null.

Anders ausgedrückt: Eine Kurve hat im Wendepunkt keine Krümmung.

Beispiel:

Die Krümmung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ im Punkte $P(x; y)$ ist zu berechnen. Sie differenzieren die Funktion in ihrer impliziten Form:

1. Ableitung:

$$2x + 2yy' = 0$$
$$x + yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

2. Ableitung

$$
\begin{aligned}
1 + y'^2 + yy'' &= 0\\
1 + \frac{x^2}{y^2} + yy'' &= 0\\
y^2 + x^2 + y^3 y'' &= 0\\
r^2 + y^3 y'' &= 0\\
y'' &= -\frac{r^2}{y^3}
\end{aligned}
$$

Das Vorzeichen der Krümmung hängt vom Vorzeichen der zweiten Ableitung ab. Für den oberen Halbkreis ist $y > 0$, also $y'' < 0$ und damit $k < 0$. Sie erhalten

$$
\begin{aligned}
k &= -\frac{\frac{r^2}{y^3}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}^3}\\
&= -\frac{r^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}\\
&= -\frac{r^2}{r^3},
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\underline{k = -\frac{1}{r}}}
$$

Für den unteren Halbkreis gilt nach unseren Überlegungen $k = +\frac{1}{r}$. Das Ergebnis zeigt:
Die Krümmung eines Kreises ist konstant und ihrem Betrage nach gleich dem reziproken Wert seines Radius.
Für den Kreis gilt also:

$$
|k| = \frac{1}{r}.
$$

Das entspricht unserer Anschauung: der Kreis ist um so stärker gekrümmt, je kleiner sein Radius ist.
Hat eine Kurve im Punkte P die Krümmung k, so hat der Kreis mit dem Radius $\varrho = \frac{1}{|k|}$ die gleiche Krümmung. Man nennt deshalb den Kreis mit dem Radius $\varrho = \frac{1}{|k|}$ den **Krümmungskreis** der Kurve im Punkte P. Er ist der Kreis, der sich am besten an die Kurve anschmiegt. Nach Formel (35) ist der

Krümmungsradius:
$$
\boxed{\varrho = \left| \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''} \right|} \tag{37}
$$

bzw., falls die Kurve in Parameterdarstellung gegeben ist

$$
\boxed{\varrho = \left| \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right|} \tag{38}
$$

Um den Krümmungskreis einer Kurve zu zeichnen, trägt man den Krümmungsradius auf der Kurvennormalen ab und findet so den Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Lehrbeispiel 32

Berechnen Sie die Krümmung der Parabel $x^2 = 2py$ für $x = 0$!

Lösung:

Sie bestimmen zunächst die benötigten Ableitungen, um Formel (35) anwenden zu können:

$$y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p}.$$

Nach (35) erhalten Sie

$$k = \frac{\frac{1}{p}}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^3}(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{p^2}{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}}}.$$

An der Stelle $x = 0$ wird die Krümmung der Parabel $x^2 = 2py$

$$k(0) = \frac{1}{p}.$$

Lehrbeispiel 33

Bestimmen Sie die Krümmung der Ellipse mit den Halbachsen a und b in den Punkten $P_1(a; 0)$ und $P_2(0; b)$ und zeichnen Sie die Ellipse einschließlich der beiden Krümmungskreise für $a = 1$ und $b = 2$!

Lösung:

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man von der Parameterdarstellung

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t$$

ausgeht.

Es ist

$$\dot{x} = -a \sin t, \qquad \dot{y} = b \cos t,$$
$$\ddot{x} = -a \cos t, \qquad \ddot{y} = -b \sin t.$$

Dies in Formel (36) eingesetzt, ergibt

$$k = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Für P_1 ist $x = a$, also $t = 0$ und damit

$$k_1 = \frac{a\,b}{b^3} = \underline{\underline{\frac{a}{b^2}}}.$$

Für P_2 ist $x = 0$, also $t = \frac{\pi}{2}$, und damit

$$k_2 = \frac{a\,b}{a^3} = \underline{\underline{\frac{b}{a^2}}}.$$

Die Krümmungsradien sind

$$\varrho_1 = \frac{b^2}{a} \qquad \text{und} \qquad \varrho_2 = \frac{a^2}{b}.$$

Für $a = 1$ und $b = 2$ ergeben sich die Werte

$$k_1 = 0{,}25, \qquad \varrho_1 = 4,$$
$$k_2 = 2, \qquad \varrho_2 = 0{,}5.$$

Da P_1 und P_2 Scheitel der Ellipse sind, liegen die Mittelpunkte der Krümmungskreise auf den Achsen der Ellipse. Sie finden leicht:

$$M_1\,(-3;\,0) \qquad M_2\,(0;\,1{,}5).$$

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten der Ellipse lassen sich auch durch eine einfache Konstruktion finden.

Man zeichnet in den Scheitelpunkten die Tangenten der Ellipse und fällt von ihrem Schnittpunkt A das Lot auf die Strecke $\overline{P_1P_2}$ (vgl. Bild 37). Die Ver-

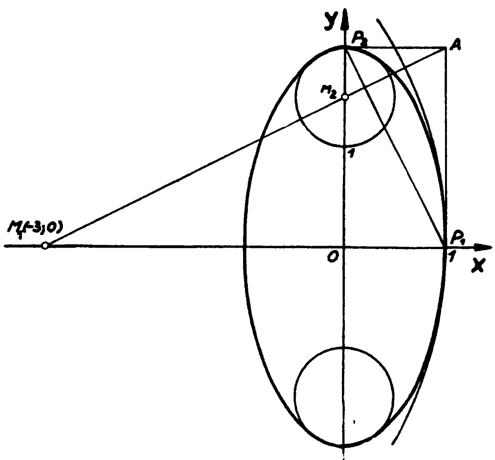

Bild 37

längerung des Lotes über seinen Fußpunkt hinaus schneidet die Achsen der Ellipse in den Krümmungsmittelpunkten M_1 und M_2.

Der Beweis folgt leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_2P_1A, AM_1P_1 und M_2AP_2, die in den Winkeln übereinstimmen.

So folgt aus

$$\triangle P_2P_1A \sim \triangle AM_1P_1$$

die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{M_1P_1}}$$

und daraus

$$\overline{M_1P_1} = \frac{b^2}{a}.$$

Das ist aber der schon berechnete Krümmungsradius im Punkte P_1. Ebenso ergibt sich aus $\triangle P_2P_1A \sim \triangle M_2AP_2$

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{M_2P_2}}{a},$$

also

$$\overline{M_2P_2} = \frac{a^2}{b}.$$

Lehrbeispiel 34

Gegeben ist die Gleichung der Astroide in Parameterform:

$$x = b \cdot \cos^3 t, \qquad y = b \cdot \sin^3 t.$$

Bestimmen Sie die Krümmung der Astroide und die Mittelpunkts-Koordinaten des Krümmungskreises für $t = \frac{\pi}{4}$*!*

Lösung:

Zur Bestimmung von k benötigen Sie $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$ und $\ddot{y}$.

$$\dot{x} = -3b\cos^2 t \cdot \sin t$$
$$\ddot{x} = -3b\,[\cos^3 t - 2\cos t \cdot \sin^2 t] = -3b\cos t\,(\cos^2 t - 2\sin^2 t)$$
$$\ddot{x} = -3b\cos t\,(1 - 3\sin^2 t)$$
$$\dot{y} = 3b \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$$
$$\ddot{y} = 3b\,(2\sin t \cdot \cos^2 t - \sin^3 t) = 3b\sin t\,(2\cos^2 t - \sin^2 t)$$
$$\ddot{y} = -3b\sin t\,(1 - 3\cos^2 t)$$

An der Stelle $t = \frac{\pi}{4}$ ist also

$$\dot{x} = -\frac{3b}{4}\sqrt{2}, \qquad \dot{y} = \frac{3b}{4}\sqrt{2},$$

$$\ddot{x} = \frac{3b}{4}\sqrt{2}, \qquad \ddot{y} = \frac{3b}{4}\sqrt{2}.$$

Diese Werte sind in (36) einzusetzen. Dabei müssen Sie beachten, daß für $0 \leqq t \leqq \pi$ mit wachsendem t die x-Werte abnehmen; die Kurve wird also mit wachsendem t entgegen der positiven x-Richtung durchlaufen. Mit dem Durchlaufsinn ändert sich aber auch das Vorzeichen der Krümmung, d. h., Sie müssen bei Anwendung der Formel (36) das Vorzeichen wechseln.

Es ist also

$$k = -\frac{-\frac{9b^2}{8} - \frac{9b^2}{8}}{\left(\frac{9b^2}{8} + \frac{9b^2}{8}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{9b^2}{4}}{\left(\frac{9b^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\underline{\underline{k = \frac{2}{3b}}}, \qquad \underline{\underline{\varrho = \frac{3b}{2}}}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Kurvennormalen. Aus Symmetriegründen ist das für $t = \frac{\pi}{4}$ die Gerade $y = x$. Die Mittelpunktskoordinaten des Krümmungskreises lassen sich also leicht berechnen. Für $t = \frac{\pi}{4}$ ist $x = y = \frac{b}{4}\sqrt{2}$. Damit ist (vgl. Bild 38)

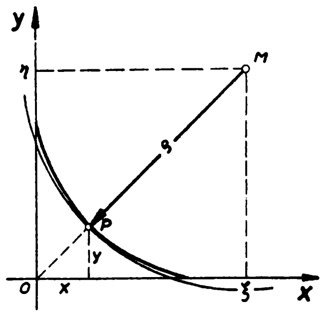

Bild 38

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{b}{2},$$

und mit $\overline{PM} = \varrho = \frac{3b}{2}$

wird $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = 2b.$

Weiterhin ist

$$\overline{OM}^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

und, wegen $\xi = \eta$,

$$2\xi^2 = 4b^2,$$

$$\underline{\underline{\xi = b\sqrt{2}}}, \qquad \underline{\underline{\eta = b\sqrt{2}}}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt für $t = \frac{\pi}{4}$ ist $M(b\sqrt{2};\ b\sqrt{2})$.

Übungen

27. a) *Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Kreisevolvente*
$$x = r(\cos t + t \sin t), \qquad y = r(\sin t - t \cos t)!$$

   b) *Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Kurve* $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ *im Punkt* $x = 1$!

   c) *Bestimmen Sie den Krümmungsradius der gewöhnlichen Zykloide* $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ *für* $a = 1$ *an der Stelle* $t = \pi$!

   d) *Welches Vorzeichen hat die Krümmung bei der kubischen Parabel für* $x < 0$, $x = 0$ *und* $x > 0$?

11 Berechnung unbestimmter Ausdrücke

11.1 Unbestimmte Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$

Wie Sie wissen, kann es bei gebrochenen Funktionen eintreten, daß an einer Stelle $x = a$ Zähler und Nenner zugleich Null werden (vgl. Bd. 1, Abschnitt 2.2). Ist z. B. $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ und $f(a) = g(a) = 0$, so erhalten Sie für $x = a$ als Funktionswert $F(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat keinen Sinn. Die Funktion $F(x)$ ist an der Stelle $x = a$ nicht definiert, sie hat dort eine Lücke.

Häufig strebt aber $F(x)$ für $x \to a$ einem Grenzwert zu. Man kann in diesem Falle der Funktion $F(x)$ an der Stelle $x = a$ den Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ *zuordnen* und so die Lücke der Funktion beheben. Sie lernen in diesem Abschnitt ein Verfahren kennen, das es in vielen Fällen ermöglicht, diesen Grenzwert auf einfache Weise zu berechnen.

Es sei bei einer gebrochenen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ gleichzeitig $f(a) = 0$ und $g(a) = 0$. Da $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ unbestimmt ist, muß untersucht werden, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert. Dazu untersuchen wir die Funktion in der Nähe von $x = a$ und bilden

$$F(a + \Delta x) = \frac{f(a + \Delta x)}{g(a + \Delta x)}.$$

Da $f(a) = g(a) = 0$ ist, können wir auch schreiben:

$$F(a + \Delta x) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{g(a + \Delta x) - g(a)}.$$

Wir formen weiter um und dividieren Zähler und Nenner durch Δx:

$$F(a + \Delta x) = \frac{\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}}{\dfrac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}}.$$

In Zähler und Nenner stehen jetzt die Differenzenquotienten von $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x = a$. Sind $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x = a$ differenzierbar, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} = g'(a).$$

Es ist dann also

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} F(a + \Delta x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Sie erhalten also $\lim\limits_{x \to a} F(x)$, indem Sie Zähler und Nenner für sich differenzieren und in den erhaltenen Ausdruck $x = a$ setzen.

Es gilt die **Regel von De L'Hospital**[1]:

> Ist für eine Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ gleichzeitig $f(a) = g(a) = 0$ und sind $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, so ist
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$
> sofern $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert.

Beachten Sie, daß Zähler und Nenner *getrennt* differenziert werden, also nicht $F'(x)$ gebildet wird!

Beispiel:

Die Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ hat an der Stelle $x = 2$ eine Lücke. Existiert $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$, so kann man die Lücke beheben, indem man $F(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ setzt. Sie wenden die Regel von De L'Hospital an.

Sie finden:

$$f'(x) = 2x - 5 \quad \text{und} \quad g'(x) = 3x^2 - 4x - 1.$$

Damit wird

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 5}{3x^2 - 4x - 1} = \frac{4 - 5}{12 - 8 - 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}.$$

Sind außer $f(a)$ und $g(a)$ auch noch $f'(a)$ und $g'(a)$ gleich Null, so wenden Sie das Verfahren nochmals an. Sie erhalten dann

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Das Verfahren läßt sich also — wenn nötig — fortsetzen.

Es gilt der Satz:

> Werden Zähler und Nenner der Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit ihren $(n - 1)$ten Ableitungen an der Stelle $x = a$ gleichzeitig Null, während die n-ten Ableitungen $f^{(n)}(x)$ und $g^{(n)}(x)$ für $x = a$ nicht beide zugleich verschwinden, dann ist
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

---

[1] Die Regel wurde von dem schweizerischen Mathematiker Johann Bernoulli (1667 bis 1748) aufgestellt, von ihm dem französischen Marquis De L'Hospital (1661 bis 1704) mitgeteilt und von diesem veröffentlicht.

Beispiel:

Für die Funktion $F(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ zu ermitteln. Sie erhalten zunächst:

$$F(0) = \frac{1 - \cos 0}{0^2} = \frac{0}{0}.$$

Nach De L'Hospital wird

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}.$$

Sie müssen die Regel von De L'Hospital ein zweites Mal anwenden. Sie differenzieren also Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{\sin x}{2x}$, der ja für $x \to 0$ zu $\frac{0}{0}$ wurde. Es wird also

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x},$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Lehrbeispiel 35

$F(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1}$; $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$ *ist gesucht.*

Lösung:

$$F(1) = \frac{1^4 - 1}{1^5 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - 1)'}{(x^5 - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^3}{5x^4} = \frac{4 \cdot 1^3}{5 \cdot 1^4} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

Lehrbeispiel 36

Die Lücke der Funktion $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ *an der Stelle* $x = 0$ *ist zu beheben.*

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = \frac{e^0 + e^0}{1} = \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Lehrbeispiel 37

Bilden Sie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$*!*

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 \cos x)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2x \cos x - x^2 \sin x)'}{(-\sin x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2x\sin x - (2x\sin x + x^2\cos x)}{-\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 4x\sin x - x^2\cos x}{-\cos x} = \frac{2 - 0 - 0}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

Übungen

Bilden Sie die Grenzwerte

28. *a)* $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12}$, *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$!

11.2 Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$

Es kann eintreten, daß eine gebrochene Funktion an der Stelle $x = a$ den unbestimmten Ausdruck

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

annimmt. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, so läßt sich auch hier die Regel von De L'Hospital anwenden. Auf den Beweis wollen wir verzichten.

Beispiel:

Für $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$ zu bilden.

Setzen Sie den Wert 0 in die gegebene Funktion ein, so ergibt sich

$$F(0) = \frac{\ln 0}{\ln \sin 0} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Sie differenzieren Zähler und Nenner einzeln und erhalten

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(\ln \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Da $\frac{\tan x}{x}$ für $x = 0$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ ergibt, wird nochmals differenziert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x \cdot 1} = \frac{1}{\cos^2 0} = \underline{\underline{1}}.$$

Lehrbeispiel 38

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$!

Lösung:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}.$$

Übungen

29. *Berechnen Sie*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \tan x}$ *b)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$!

11.3 Unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0

Funktionen, die für $x \to a$ einen der unbestimmten Ausdrücke

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

liefern, lassen sich so umformen, daß man für $x \to a$ die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erhält. Nach der Umformung läßt sich die De L'Hospitalsche Regel anwenden.

1. Die Form $0 \cdot \infty$

Ist $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \infty$ und $\lim f(x) \cdot g(x)$ zu berechnen, so schreibt man

$$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{1 : g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

oder

$$\lim f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{1 : f(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Lehrbeispiel 39

Es ist zu untersuchen, welchem Grenzwert die Funktion $F(x) = \sin x \cdot \ln x$ *für* $x \to 0$ *zustrebt.*

Lösung:

Für $x \to 0$ nimmt $F(x)$ die Form $0 \cdot (-\infty)$ an.

Sie formen um:

$$\lim_{x \to 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 : \sin x}.$$

Es ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, also wird

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 : \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x \cos x}\right) = \left[-\frac{0}{0}\right].$$

Die nochmalige Anwendung der Regel von De L'Hospital liefert

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x \cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x}\right) = \frac{0}{1 - 0} = \underline{\underline{0}}.$$

2. Die Form $\infty - \infty$

Ist $F(x) = f(x) - g(x)$ und $f(a) = \infty$, $g(a) = \infty$, so führt die Umformung

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

auf die Form $\frac{0}{0}$.

Lehrbeispiel 40

Bilden Sie $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$*!*

Lösung:

Für $x \to 0$ erhalten Sie den unbestimmten Ausdruck $\infty - \infty$. Sie addieren beide Brüche; das ist gleichbedeutend mit der obengenannten Umformung:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x\,e^x - x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x\,e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

3. Die Formen 0^0, 1^∞, ∞^0

Diese Formen können auftreten, wenn eine Funktion $F(x) = f(x)^{g(x)}$ vorliegt. Durch Logarithmieren erhalten Sie

$$\ln F(x) = g(x) \cdot \ln f(x)$$

und damit die Form $0 \cdot \infty$, die schon behandelt wurde.

Lehrbeispiel 41

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ *ist zu bestimmen.*

Lösung:

Für $x \to 1$ geht $x^{\frac{1}{x-1}} \to 1^\infty$.

Aus $F(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$ erhalten Sie durch Logarithmieren

$$\ln F(x) = \frac{1}{x - 1} \ln x.$$

Damit wird

$$\lim_{x \to 1} \ln F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Es ist also $\lim\limits_{x \to 1} \ln F(x) = 1$.

Aus $\ln F(1) = 1$ erhalten Sie $F(1) = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \underline{\underline{e}}$.

Übungen

30. *Ermitteln Sie*

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$, *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$,

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)}\right)$!

31. *Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!*

a) $\lim\limits_{x \to a} (x-a)^{x-a}$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ *d)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$, *f)* $\lim\limits_{x \to \infty} (x-a)^{\frac{1}{x-a}}$

Zusammenfassung

Erscheint $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ an der Stelle $x = a$ entweder in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so findet man $\lim\limits_{x \to a} F(x)$, indem man Zähler und Nenner einzeln differenziert und nachträglich $x = a$ setzt. Wenn nötig, wird dieses Verfahren solange fortgesetzt, bis zum ersten Male die Ableitungen an der betreffenden Stelle $x = a$ nicht beide zugleich Null oder unendlich werden.

Die Fälle $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 lassen sich auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen.

12 Funktionen von zwei Veränderlichen

12.1 Partielle Ableitungen

In den vorangehenden Kapiteln lernten Sie die Regeln für die Differentiation und die Integration von Funktionen *einer* unabhängigen Veränderlichen kennen, d. h. für Funktionen $y = f(x)$.

In der Technik oder Physik erscheint aber häufig eine Größe in Abhängigkeit von *mehreren* anderen Größen.

1. Beispiel

Die Stromstärke ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$I = \frac{U}{R}$$

von der Spannung U und dem Widerstand R abhängig. Dabei sind U und R zwei voneinander unabhängige Größen, denn man kann Spannung und Widerstand beliebig und unabhängig voneinander verändern. Für jedes Wertepaar (U, R) ergibt sich eine bestimmte Stromstärke I. Wir bezeichnen I als eine Funktion der zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen U und R und schreiben

$$I = f(U, R).$$

2. Beispiel

Das Volumen eines Gases ist nach dem Boyle-Gay-Lussacschen Gesetz

$$v = v_0 \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t)$$

eine Funktion

$$v = f(p, t)$$

des Druckes p und der Temperatur t. Die Größen v_0, p_0 und α sind Konstante. Die Veränderlichen p und t sind wieder unabhängig voneinander. Zu jedem Wertepaar (p, t) gehört ein bestimmtes Volumen v (soweit der Gaszustand erhalten bleibt).

Allgemein bezeichnen $z = f(x, y)$ eine Funktion von zwei und $u = f(x, y, z)$ eine Funktion von drei unabhängigen Variablen. Dabei wird stets angenommen, daß diese Variablen selbst unabhängig voneinander sind. Würde nämlich in $u = f(x, y, z)$ z. B. zwischen y und z eine Beziehung bestehen, so daß etwa $y = g(z)$ ist, dann könnte man diesen Wert in u einsetzen und erhielte mit $u = f[x, g(z), z]$ nur noch eine Funktionvon zwei unabhängigen Variablen x und z.

Hängt eine Funktion von n voneinander unabhängigen Veränderlichen ab, so schreibt man

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Hier dienen die Indizes nicht zur Kennzeichnung fester Werte von x, sondern werden zur Unterscheidung der Variablen benützt.

Die Einteilung dieser Funktionen erfolgt nach denselben Gesichtspunkten wie in Band 1, Abschnitt 1.3, bei den Funktionen einer Veränderlichen. So stellt z. B.

$$z = 3x^2 + 6xy - 8y^2 + 4x - 5y - 8$$

eine ganze rationale Funktion 2. Grades von zwei unabhängigen Veränderlichen dar.

$$u = e^{\sin(x+y)} - \ln z$$

ist eine transzendente Funktion der drei Veränderlichen x, y und z.

Im Folgenden wollen wir auch für diese Funktionen die Begriffe Ableitung, Differential und Extremwert erklären. Um dabei möglichst anschaulich vorgehen zu können, fragen wir zunächst nach dem Schaubild einer Funktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen.

Wir wählen dazu ein räumliches Koordinatensystem mit drei senkrecht aufeinanderstehenden Achsen x, y und z (Bild 39). Speziell verwendet man ein „rechtshändiges" System, bei dem sich x-, y- und z-Achse wie die rechtwinklig zueinander gespreizten Zeigefinger, Mittelfinger und Daumen der rechten Hand verhalten. Je zwei Achsen spannen eine Ebene auf: die xy-, die xz- und die yz-Ebene. Diese drei Ebenen stehen senkrecht aufeinander. Ist eine Funktion $z = f(x, y)$ gegeben, so gehört zu jedem Wertepaar (x, y) ein Funktionswert z. Jedem Wertepaar (x, y) können Sie einen Punkt P' in der xy-Ebene zuordnen. Der zugehörige Funktionswert z läßt sich dann als die Höhe eines senkrecht über P' gelegenen Raumpunktes P deuten (Bild 39). Jedem Wertetripel entspricht also ein Punkt im Raum. Umgekehrt entspricht jedem Punkt im Raum ein Wertetripel (x, y, z), wobei x, y und z die Koordinaten dieses Punktes sind.

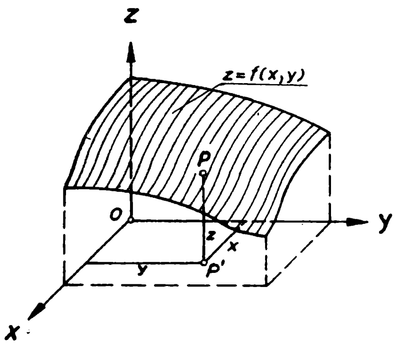

Bild 39

Die Menge aller Wertepaare (x, y), für welche die Funktion $z = f(x, y)$ definiert ist, bezeichnet man als den Definitionsbereich der Funktion. Er enthält alle in der xy-Ebene liegenden Punkte P'. Die ihnen entsprechenden Raumpunkte P bilden eine Fläche, das Schaubild der Funktion $z = f(x, y)$. Je nach der Art der Funktion kann es eine Ebene, eine Kugelfläche oder eine beliebige andere Fläche sein.

Setzen Sie in $z = f(x, y)$ für y den Wert Null ein und lassen x variabel, dann erhalten Sie alle Punkte der Fläche, die in der xz-Ebene liegen, denn dort ist überall $y = 0$. Die sich aus $y = 0$ ergebende Funktion $z = f(x)$ stellt demnach die Gleichung der Schnittkurve zwischen der vorgegebenen Fläche und der xz-Ebene dar (Bild 40). Entsprechend erhält man für $x = 0$ mit $z = f(y)$ die Gleichung der Schnittkurve zwischen der Fläche und der yz-Ebene. Schließlich folgt für $z = 0$ die implizite Funktion $f(x, y) = 0$, welche die Schnittkurve der Fläche mit der xy-Ebene darstellt.

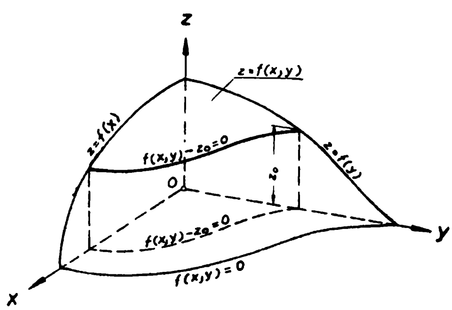

Bild 40

Alle Punkte, welche von der yz-Ebene den Abstand x_0 besitzen, stellen in ihrer Gesamtheit eine zur yz-Ebene parallele Ebene dar, deren Gleichung $x = x_0$ lautet (Bild 41). Setzen Sie in $z = f(x, y)$ für x den Wert x_0 ein, d. h. anschaulich, bringen Sie die Fläche mit der Ebene $x = x_0$ zum Schnitt, dann erhalten Sie die Schnittkurve $z = f(x_0, y)$, welche ebenfalls parallel zur yz-Ebene verläuft. Desgleichen stellt $z = f(x, y_0)$ mit konstantem y_0 eine in der Ebene $y = y_0$ gelegene Kurve dar, die also parallel zur xz-Ebene liegt und von dieser den Abstand y_0 hat.

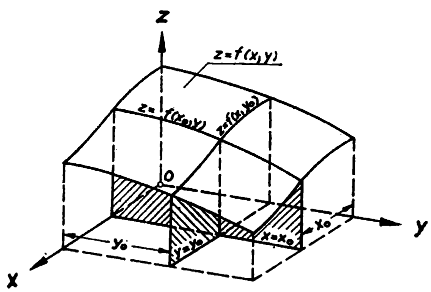

Bild 41

Endlich können Sie noch alle Flächenpunkte betrachten, die denselben Abstand von der xy-Ebene, d. h. die gleiche Höhe $z = z_0$ besitzen. Sie liegen auf einer Höhenlinie $z_0 = f(x, y)$ oder $f(x, y) - z_0 = 0$ und stellen also die Schnittkurve zwischen der Fläche und der waagerechten Ebene $z = z_0$ dar (Bild 40). Mit Hilfe mehrerer in den Grundriß projizierter Höhenlinien kann man in der xy-Ebene ein Bild der Fläche entwerfen (Entspricht der Darstellung eines Geländes in der Karte durch Höhenlinien).

Wir wollen die allgemeinen Betrachtungen an einigen Beispielen näher erläutern. Die lineare Funktion

$$z = ax + by + c$$

stellt eine Ebene im Raume dar. Für die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen folgt wegen

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ als Schnitt mit der } xz\text{-Ebene:} \quad z = ax + c, \\ x &= 0 \text{ als Schnitt mit der } yz\text{-Ebene:} \quad z = by + c, \\ z &= 0 \text{ als Schnitt mit der } xy\text{-Ebene:} \quad ax + by + c = 0. \end{aligned}$$

Alle drei Schnittkurven sind also Gerade (Bild 42).

Die nächste zu betrachtende Funktion sei

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Hier erhält man durch Nullsetzen der einzelnen Variablen folgende Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

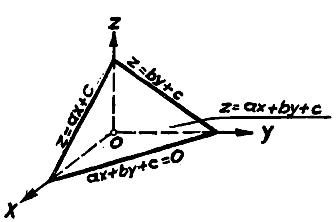

Bild 42

$$\begin{aligned} \text{Für } y &= 0 \text{ folgt } x^2 + z^2 = r^2, \\ \text{für } x &= 0 \text{ folgt } y^2 + z^2 = r^2, \\ \text{für } z &= 0 \text{ folgt } x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned}$$

Sämtliche Schnittkurven sind Kreise mit dem Radius r und dem Ursprung O als Mittelpunkt. Die Funktion $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ stellt eine Kugelfläche dar, denn jeder Punkt $P(x, y, z)$, dessen Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen, hat vom Ursprung den Abstand $\overline{OP} = r$ (Bild 43). Die Wertepaare (x, y) können

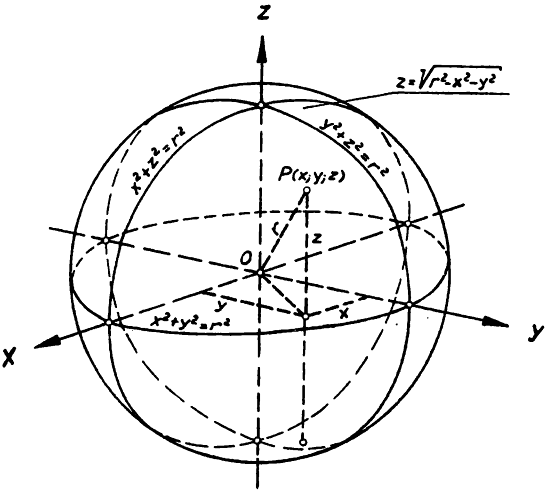

Bild 43

nicht vollkommen beliebig gewählt werden, sondern müssen der Bedingung $x^2 + y^2 \leqq r^2$ genügen, da sonst z imaginär wird. Der Definitionsbereich ist also eine Kreisfläche mit dem Radius r.

Während sich bei dem vorigen Beispiel zu jedem Wertepaar (x, y) durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel zwei Werte z ergeben, liefert die Funktion

$$z = x^2 + y^2$$

eindeutig nur positive z-Werte. Als Schnittkurven mit der xz-Ebene bzw. yz-Ebene ergeben sich die Parabeln $z = x^2$ bzw. $z = y^2$ (Bild 44).

Setzen Sie für z einen beliebigen konstanten Wert z_0 ein, dann erhalten Sie mit $x^2 + y^2 = z_0$ als Höhenlinie einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{z_0}$. Die Funktion stellt eine Fläche dar, welche durch Rotation einer Parabel, z. B. $z = x^2$, um die z-Achse entsteht und deshalb Rotationsparaboloid genannt wird. Bild 45 zeigt Ihnen die Höhenliniendarstellung dieser Fläche für verschiedene Werte $z = z_0$.

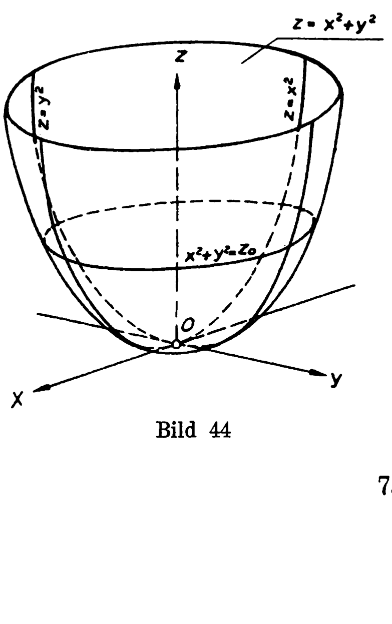

Bild 44

Abschließend soll noch die durch die Funktion

$$z = x^2 - y^2$$

dargestellte Fläche betrachtet werden. Mit $y = 0$ ergibt sich als Schnittkurve mit der xz-Ebene die Parabel $z = x^2$ und mit $x = 0$ die Parabel $z = -y^2$ als Schnittkurve mit der yz-Ebene. Für $z = 0$ folgt

$$0 = x^2 - y^2$$

oder

$$y^2 = x^2 \quad \text{bzw.} \quad y = \pm x,$$

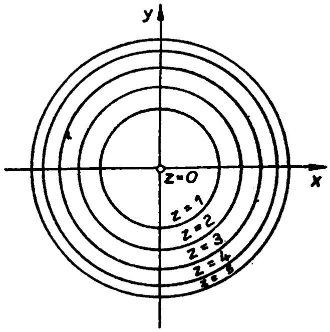

Bild 45

d. h., die Fläche schneidet die xy-Ebene in zwei durch den Ursprung gehenden Geraden. Für eine Höhenlinie der Höhe z_0 erhält man die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = z_0$. Die Fläche heißt Sattelfläche oder „Hyperbolisches Paraboloid". Bild 46 zeigt Ihnen die Fläche und Bild 47 ihre Höhenliniendarstellung. Es ist noch zu bemerken, daß sich für alle $z_0 > 0$ Hyperbeln ergeben, deren Brennpunkte auf der x-Achse liegen, während für $z_0 < 0$, also negative Höhen, eine Hyperbelschar entsteht, deren Brennpunkte auf der y-Achse liegen.

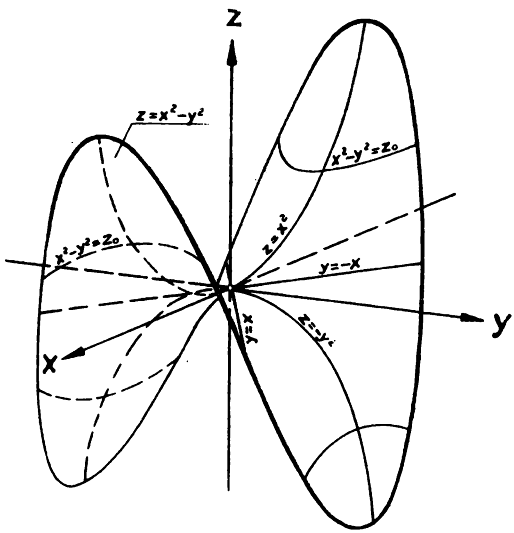

Bild 46

Für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen ist eine derartige geometrische Veranschaulichung nicht möglich, da sie mehr als drei Dimensionen erfordern würde.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun auch Differentialquotienten für Funktionen von mehreren Variablen definieren. Dabei beschränken wir uns zunächst auf zwei Variable, um die erforderlichen Beziehungen anschaulich aus

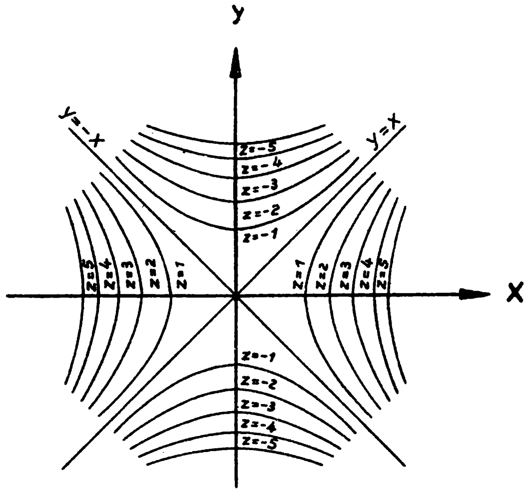

Bild 47

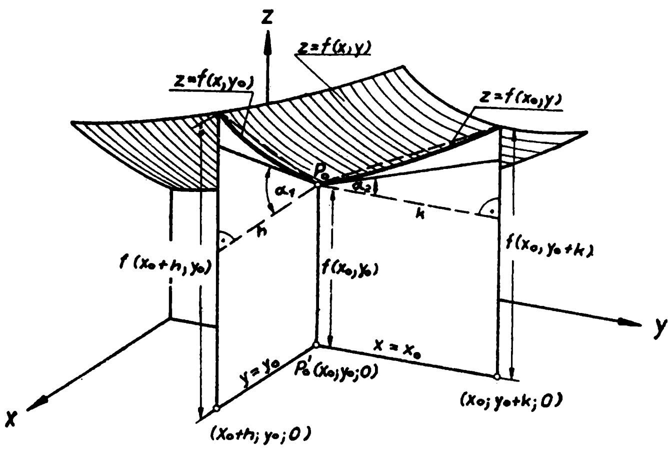

Bild 48

dem Bild ablesen zu können und übertragen dann sinngemäß das Ergebnis auf Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen.

In Bild 48 wurde die Fläche $z = f(x, y)$ mit den zwei Ebenen $x = x_0$ und $y = y_0$ zum Schnitt gebracht. Es ergeben sich die Schnittkurven $z = f(x_0, y)$ und

$z = f(x, y_0)$, welche parallel zur yz-Ebene bzw. xz-Ebene verlaufen. Der Schnittpunkt der beiden Kurven sei P_0.

Entsprechend der Definition des Differentialquotienten für eine Variable sollen nun die Anstiege der in P_0 an die beiden Kurven angelegten Tangenten berechnet werden.

Das Sekantendreieck der in der Ebene $y = y_0$ liegenden Schnittkurve hat die Katheten h und $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$. Der Anstieg der Sekante wird also durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{I}$$

angegeben. Für $h \to 0$ geht die Sekante in die Tangente über. Der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \tan \alpha_1$$

gibt also für P_0 den Anstieg der Tangente an, die in der Ebene $y = y_0$ liegt. Entsprechend ergibt sich für den Anstieg der Tangente, die in der Ebene $x = x_0$ liegt, der Grenzwert

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \tan \alpha_2. \tag{II}$$

Bei den Betrachtungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die eben hergeleiteten Grenzwerte existieren. Man nennt die Grenzwerte (I) und (II) die ersten **partiellen Differentialquotienten** oder die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x, y)$ nach x bzw. nach y und schreibt für (I) auch

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\,[1] \quad \text{oder} \quad f_x(x_0, y_0)$$

und für (II)

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad f_y(x_0, y_0).$$

Betrachten Sie nun die partiellen Ableitungen nicht an einer bestimmten Stelle $P_0(x_0, y_0)$, sondern in einem beliebigen Punkte $P(x, y)$ dann erhalten Sie mit den verschiedenen Bezeichnungen

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \\ &\lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \end{aligned}}$$

(39)

(40)

[1] Zum Unterschied gegen den gewöhnlichen Differentialquotienten verwendet man beim partiellen Differentialquotienten das geschwungene ∂.

Die partielle Ableitung f_x stellt den Anstieg einer Tangente dar, die in einem beliebigen Punkte $P(x, y)$ an die Fläche angelegt und parallel zur xz-Ebene ist. Entsprechend gibt f_y den Anstieg einer zur yz-Ebene parallelen und ebenfalls in einem beliebigen Punkt an die Fläche angelegten Tangente an. Will man die Tangentenanstieg für einen bestimmten Punkt berechnen, dann setzt man in die partiellen Ableitungen, welche ja wieder Funktionen von x und y sind, die Koordinaten dieses Punktes ein.

Für die praktische Berechnung der partiellen Differentialquotienten ergibt sich aus unserer obigen Herleitung folgende einfache Regel:

Um die partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ nach x zu bilden, betrachtet man vorübergehend y als konstante Größe und differenziert nach den bekannten Regeln die Funktion nach x. Entsprechend ist bei der partiellen Ableitung nach y die Variable x vorläufig als konstant anzusehen und nach y zu differenzieren.

Wir wollen uns dies zunächst am Beispiel der Funktion

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

klarmachen, welche unter Beschränkung auf das positive Vorzeichen der Wurzel eine Halbkugel mit dem Radius 3 darstellt.

Für die partielle Ableitung nach y erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

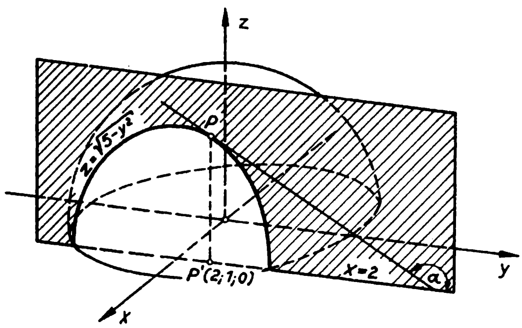

Bild 49

Sie bedeutet also zunächst den Anstieg einer Tangente, welche in einem beliebigen Punkte $P(x, y)$ an die Halbkugel gelegt ist und parallel zur yz-Ebene verläuft. Setzen Sie nun z. B. $x = 2$, dann muß der Berührungspunkt auf der Kurve $z = \sqrt{9 - 4 - y^2} = \sqrt{5 - y^2}$ liegen (Bild 49). Schließlich erhalten Sie nach Wahl auch eines festen Wertes für y, z. B. $y = 1$, aus $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=2\\y=1}} = f_y(2, 1) = \frac{-1}{\sqrt{9 - 4 - 1}} = -\frac{1}{2} = \tan \alpha.$$

Für den Neigungswinkel der Tangente ergibt sich $\alpha = 153° 26'$.

Als zweites Beispiel betrachten wir noch einmal das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ (Bild 50). Die partielle Ableitung nach x lautet

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x.$$

Für $x = 1$, $y = 1$ folgt

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=1\\y=1}} = f_x(1, 1) = 2 = \tan \alpha.$$

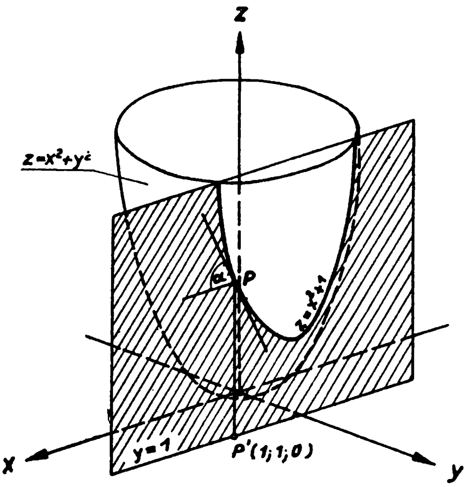

Bild 50

Der Neigungswinkel der in $P(1; 1; 2)$ angelegten Tangente parallel zur xz-Ebene beträgt $\alpha = 63° 26'$.

Lehrbeispiel 42

Bilden Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 6x - 2y + 1$$

und ermitteln Sie ihre Werte an der Stelle $x = 1$, $y = 2$!

Lösung:

Sie betrachten zunächst y als Konstante und differenzieren die Funktion nach x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y + 6.$$

Dann ist x als konstant aufzufassen und nach y zu differenzieren:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 4y - 2.$$

Für die Stelle $x = 1$, $y = 2$ folgt durch Einsetzen der speziellen Werte

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = \underline{\underline{4}},$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = \underline{\underline{-13}}.$$

Lehrbeispiel 43

Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen

a) $z = \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x}$, *b)* $z = \ln \frac{x + y}{x - y}$*!*

Lösung

a) Unter Beachtung der Kettenregel erhalten Sie:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \underline{\underline{\frac{-y}{x^2 + y^2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{x}{x^2 + y^2}}}.$$

b) $z = \ln(x + y) - \ln(x - y)$

$$z_x = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \underline{\underline{-\frac{2y}{x^2 - y^2}}} \qquad z_y = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2 - y^2}}}$$

Der Begriff des partiellen Differentialquotienten soll nun auch auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen werden, wobei natürlich die Möglichkeit der räumlichen Veranschaulichung fehlt.

Ist die Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gegeben, so unterscheidet man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Um zum Beispiel $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ zu berechnen, sind bei der Differentiation $x_1, x_3, \ldots, x_n$ als konstant, x_2 als variabel zu betrachten.

Lehrbeispiel 44

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$u = e^x \ln y + z^2 \cos y = f(x, y, z)!$$

Lösung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \ln y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^x}{y} - z^2 \sin y; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cos y.$$

Da die ersten partiellen Ableitungen im allgemeinen wieder Funktionen sind, kann man sie nochmals partiell differenzieren und gelangt so zu dem Begriff der *höheren partiellen Ableitungen.*

Zum Beispiel kann man jede der beiden ersten partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x, y)$ partiell nach x bzw. nach y differenzieren. Für die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich dann vier Möglichkeiten mit folgender Schreibweise:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f_{xy}.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Ferner bedeutet z. B.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = f_{xxy},$$

daß die Funktion $z = f(x, y)$ erst zweimal partiell nach x und anschließend einmal partiell nach y zu differenzieren ist.

Lehrbeispiel 45

Berechnen Sie die 1. und 2. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $z = 4x^2 + 6xy - y^2 + 2x - 4y + 15,$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$*!*

Lösung:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 6y + 2. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x - 2y - 4$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 6, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

b) $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$z_{xx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,2}} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}}$$

$$z_{xy} = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}}$$

$$z_{yx} = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot 2x \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}}$$

$$z_{yy} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

In diesen beiden Beispielen stimmen die „gemischten" Ableitungen z_{xy} und z_{yx} jedesmal überein. Das ist kein Zufall, sondern wird bis auf einige Ausnahmefälle immer zutreffen.

Es gilt nämlich der **Satz von Schwarz:**

> Unter der Voraussetzung, daß die Funktion und ihre partielle Ableitungen stetig sind, ist die Reihenfolge der partiellen Differentiationen gleichgültig.

Lehrbeispiel 46

Zeigen Sie für die Funktion

$$u = f(x, y, z) = x^2 \ln \sin (y - z)$$

die Gleichheit der folgenden partiellen Ableitungen 3. Ordnung:

$$f_{xyz} = f_{zyx} \quad \text{und} \quad f_{yyz} = f_{zyy}!$$

Lösung:

$$f_x = 2x \ln \sin (y - z) \qquad f_z = -x^2 \frac{\cos (y - z)}{\sin (y - z)} = -x^2 \cot (y - z)$$

$$f_{xy} = 2x \frac{\cos (y - z)}{\sin (y - z)} = 2x \cot (y - z) \qquad f_{zy} = \frac{x^2}{\sin^2 (y - z)}$$

$$f_{xyz} = \frac{2x}{\sin^2 (y - z)} \qquad f_{zyx} = \frac{2x}{\sin^2 (y - z)}$$

$$f_{xyz} = f_{zyx}$$

$$f_y = x^2 \cot (y - z) \qquad f_z = -x^2 \cot (y - z)$$

$$f_{yy} = \frac{-x^2}{\sin^2 (y - z)} \qquad f_{zy} = \frac{x^2}{\sin^2 (y - z)}$$

$$f_{yyz} = \frac{-2x^2 \cos (y - z)}{\sin^3 (y - z)} \qquad f_{zyy} = \frac{-2x^2 \cos (y - z)}{\sin^3 (y - z)}$$

$$f_{yyz} = f_{zyy}$$

Lehrbeispiel 47

Zeigen Sie, daß für die Funktion

$$z = e^y \arcsin (x - y)$$

die Beziehung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

gilt!

Lösung:

Sie berechnen zunächst $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \arcsin(x-y) - \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}.$$

Damit folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}} + e^y \arcsin(x-y) - \frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$
$$= e^y \arcsin(x-y) = z.$$

Übungen

32. *Bilden Sie die 1. partiellen Ableitungen folgender Funktionen:*
   a) $u = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^3$,
   b) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$, c) $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,
   d) $z = e^x \sin y$, e) $z = e^{\sin xy} + e^{\cos(x+y)}$!

33. *Bilden Sie die 1. und 2. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:*
   a) $z = x^5 + 2x^3y^2 + 2y^3$, d) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$,
   b) $u = xy + yz + zx$, e) $f(x, y) = \ln \frac{\sin y}{\sin x}$!
   c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$,

34. *Berechnen Sie für die Funktion* $u = e^{xyz}$ *die partielle Ableitung* $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$!

35. *Bestimmen Sie* $xf_x + yf_y$ *für die Funktion* $f(x, y) = \frac{x}{y}$!

36. *Bestimmen Sie* $f_x + f_y + f_z$ *für die Funktion*
$$f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)!$$

37. *Zeigen Sie, daß die Funktion* $f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}}$ *die Gleichung*
$$xf_x + yf_y = f$$
erfüllt!

12.2 Das totale Differential

In Abschnitt 3.5 haben Sie die Bedeutung der Differentiale kennengelernt und in Abschnitt 5.4 das Differential für die Fehlerrechnung verwandt. Wir wollen noch einmal kurz wiederholen:

Wird in $y = f(x)$ die Veränderliche x um den Betrag $\Delta x = \mathrm{d}x$ verändert, so ändert sich der Funktionswert um

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wird in $P(x; y)$ die Tangente angelegt, so nennt man den Zuwachs des Funktionswertes bis zur Tangente das Differential der Funktion. Es ist

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

In ähnlicher Weise erklärt man für eine Funktion $z = f(x, y)$ den Funktionszuwachs Δz und das Differential $\mathrm{d}z$.

Der Funktionszuwachs Δz einer Funktion $z = f(x, y)$ ist die Änderung der Funktion, die sie erfährt, wenn die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y um $\Delta x = \mathrm{d}x$ und $\Delta y = \mathrm{d}y$ geändert werden. Es ist also

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Beispiel:

Die Funktion $z = 2x + y^2$ hat an der Stelle $(3; 5)$ den Wert

$$z = f(x, y) = 6 + 25 = 31.$$

Wird x um $\Delta x = 0{,}3$ und y um $\Delta y = 0{,}2$ vermehrt, so ist

$$z_1 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 6{,}6 + 27{,}04 = 33{,}64.$$

Damit wird

$$\Delta z = z_1 - z = 2{,}64.$$

Das Differential $\mathrm{d}z$ ist der Zuwachs des Funktionswertes bis zur Tangentialebene, die in $P_1(x, y, z)$ an die Fläche $z = f(x, y)$ gelegt ist (vgl. Bild 51). Dieser Zuwachs soll nun berechnet werden.

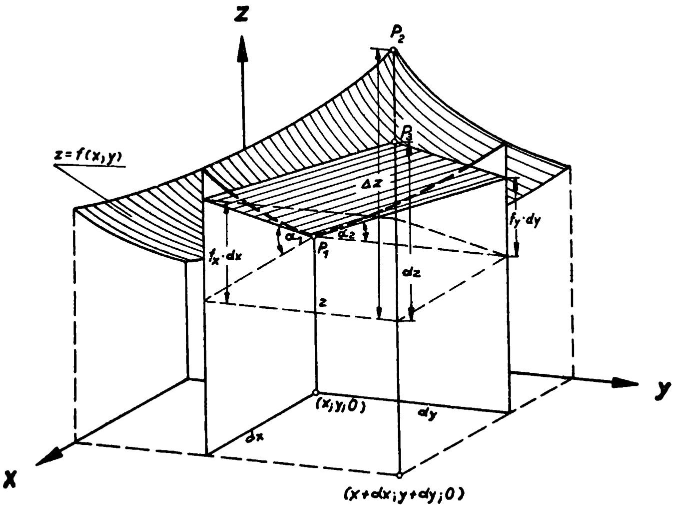

Bild 51

Legt man durch $P_1(x, y, z)$ zwei Ebenen parallel zur xz- bzw. zur yz-Ebene, so schneiden diese die Fläche $z = f(x, y)$ in zwei Kurven. An diese Kurven sind in P_1 die Tangenten gelegt. Ihre Anstiegswinkel sind α_1 und α_2. Die Ankatheten der beiden entstandenen rechtwinkligen Dreiecke sind $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$. Da $\tan\alpha_1 = f_x$ und $\tan\alpha_2 = f_y$ ist, ist die Größe der Gegenkatheten $f_x \cdot \mathrm{d}x$ und $f_y \cdot \mathrm{d}y$.
Die beiden Tangenten spannen eine Ebene auf, die die Fläche $z = f(x, y)$ in P_1 berührt. Aus Bild 51 erkennen Sie, daß sich der Funktionszuwachs bis zu dieser Tangentialebene aus den Gegenkatheten $f_x\mathrm{d}x$ und $f_y\mathrm{d}y$ der Tangentendreiecke zusammensetzt. Es ist also $\mathrm{d}z = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y$ oder, in anderer Schreibweise, $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. Man nennt

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y} \tag{41}$$

das **vollständige** oder **totale Differential** der Funktion $z = f(x, y)$.
Für kleine Werte $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ ist $\Delta z \approx \mathrm{d}z$, d. h., die Änderung $\mathrm{d}z$ der Funktion bis zur Tangentialebene ist annähernd gleich der Änderung Δz der Funktion.

Beispiel:
Für die oben genannte Funktion $z = 2x + y^2$ ist $f_x = 2$, $f_y = 2y$. Also wird

$$\mathrm{d}z = 2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y.$$

Mit den Werten $x = 3$, $y = 5$, $\mathrm{d}x = 0{,}3$, $\mathrm{d}y = 0{,}2$ ergibt sich

$$\mathrm{d}z = 0{,}6 + 2 = 2{,}6.$$

Es war $\Delta z = 2{,}64$. Sie finden in diesem Beispiel bestätigt, daß für kleine Änderungen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ $\Delta z \approx \mathrm{d}z$ gesetzt werden kann.
Von dieser Näherung machen wir im nächsten Abschnitt Gebrauch.
Die für $z = f(x, y)$ angestellten Betrachtungen und Ergebnisse lassen sich auf Funktionen mit beliebig vielen Variablen erweitern.
Es sei eine Funktion

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gegeben und es werden die unabhängigen Variablen um die kleinen Werte $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ verändert. Dann ergibt sich daraus ein Zuwachs Δy der Funktion. Es gilt also

$$y + \Delta y = f(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n)$$

oder

$$\Delta y = f(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Das totale Differential ist mit

$$\boxed{\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n} \tag{42}$$

gegeben. Auch hier gilt für kleine Änderungen $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ die Näherung $\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

Lehrbeispiel 48

Berechnen Sie das totale Differential der Funktion $z = x \cdot y$!

Lösung:

Es ist

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad \text{so daß folgt}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{d}z = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.}} \qquad \text{(a)}$$

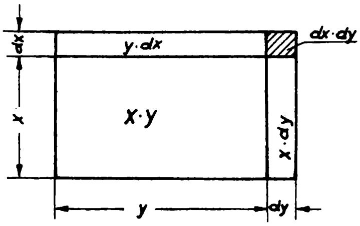

Bild 52

Dieses Ergebnis läßt sich auf einfache Weise geometrisch deuten. Man kann $z = x \cdot y$ als Fläche eines Rechtecks mit den Seiten x und y auffassen (Bild 52). Werden die Seiten x um den Betrag $\mathrm{d}x$ und y um den Betrag $\mathrm{d}y$ vergrößert, dann ergibt sich aus dem Bild der Zuwachs Δz der Fläche mit

$$\Delta z = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad \text{(b)}$$

Ein Vergleich mit (a) zeigt anschaulich den Fehler, der bei der Näherung $\Delta z \approx \mathrm{d}z$ gemacht wird. Er ist gleich dem Produkt $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$. Für kleine Veränderungen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ kann dieses Rechteck aber tatsächlich gegen die beiden anderen hinzukommenden Rechtecke vernachlässigt werden.

Lehrbeispiel 49

Berechnen Sie das totale Differential der Funktion

$$z = \arctan xy!$$

Lösung:

Für die partiellen Ableitungen folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2 y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2 y^2}.$$

Damit erhält man

$$\underline{\underline{\mathrm{d}z = \frac{y}{1 + x^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{1 + x^2y^2}\,\mathrm{d}y.}}$$

Übungen

38. *Berechnen Sie die totalen Differentiale der folgenden Funktionen:*

a) $z = 4x^3 - 6x^2y^2 + 4y^3$,

b) $z = e^x \sin y$,

c) $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(x, y, z)$!

12.3 Anwendung der partiellen Differentiation

12.31 Fehlerrechnung. Bei der Ableitung des totalen Differentials im vorigen Abschnitt ergab sich aus dem Bild die unterschiedliche Bedeutung der Größen Δz und dz. Sie sahen jedoch, daß bei kleinen Änderungen $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$ der Variablen x und y die Näherung $\Delta z \approx dz$ gilt, d. h., daß man den Zuwachs Δz der Funktion $z = f(x, y)$ näherungsweise unter Verwendung des totalen Differentials nach der Formel

$$\boxed{\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y} \tag{43}$$

berechnen kann. Diese Formel, die eine Erweiterung der Formel $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ darstellt, kann natürlich auch auf beliebig viele Variable ausgedehnt werden.

Häufig läßt sich eine Größe nur mittelbar messen, d. h. sie muß aus anderen, durch Messung erhaltenen Größen rechnerisch abgeleitet werden. Es ist dann wichtig, festzustellen, wie sich die Meßfehler auf das Ergebnis der Rechnung auswirken. Hierzu gibt die Fehlerformel (43) die Möglichkeit.

Lehrbeispiel 50

In einem Dreieck wurden die Seiten $a = 140$ m, $b = 170$ m *und der Winkel* $\gamma = 95°$ *gemessen. Die Meßfehler der Seiten und des Winkels wurden mit* $\Delta a = \Delta b = \pm 0{,}2$m *und* $\Delta \gamma = \pm 1'$ *geschätzt. Wie wirken sich diese Meßfehler auf die zu berechnende Seite* c *aus?*

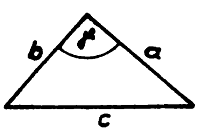

Bild 53

Lösung:

Sie stellen bei derartigen Aufgaben zunächst stets die Größe, deren Fehler gesucht wird, als Funktion von den Größen dar, deren Fehler gegeben sind. Hier ergibt sich unmittelbar nach dem Kosinussatz

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = f(a, b, \gamma). \tag{a}$$

Für den gesuchten Fehler Δc folgt dann

$$\Delta c \approx f_a \Delta a + f_b \Delta b + f_\gamma \frac{\Delta\gamma}{\varrho}.$$

Dabei muß $\Delta\gamma$ durch ϱ geteilt werden, um den Winkelfehler im Bogenmaß zu erhalten. Nach Berechnung der partiellen Ableitungen erhalten Sie:

$$\Delta c \approx \frac{a - b\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \Delta a + \frac{b - a\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \Delta b + \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot \frac{\Delta\gamma}{\varrho}$$

und unter Berücksichtigung von (a)

$$\Delta c \approx \frac{a - b\cos\gamma}{c}\,\Delta a + \frac{b - a\cos\gamma}{c}\,\Delta b + \frac{ab\sin\gamma}{c}\cdot\frac{\Delta\gamma}{\varrho},$$

$$\Delta c \approx \frac{1}{c}\left[(a - b\cos\gamma)\,\Delta a + (b - a\cos\gamma)\,\Delta b + ab\sin\gamma\cdot\frac{\Delta\gamma}{\varrho}\right].$$

Da die Fehler sowohl positiv als auch negativ sein können, berechnen Sie den größtmöglichen Fehler, betrachten also nur die absoluten Beträge der einzelnen Fehleranteile. Sie erhalten damit den sogenannten maximalen Fehler

$$\Delta c_{\max} = \frac{1}{c}\left[\,|a - b\cos\gamma|\cdot|\Delta a| + |b - a\cos\gamma|\cdot|\Delta b| + \left|ab\sin\gamma\cdot\frac{\Delta\gamma}{\varrho}\right|\right].$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt

$$c = \sqrt{140^2 + 170^2 - 2\cdot 140\cdot 170\cdot\cos 95^\circ}\ \mathrm{m} = 229{,}45\ \mathrm{m}.$$

Zur Berechnung von $\Delta c_{\max}$ genügt die Näherung $c \approx 230\ \mathrm{m}$:

$$\Delta c_{\max} = \frac{1}{230}\left[(140 - 170\cos 95^\circ)\cdot 0{,}2 + (170 - 140\cos 95^\circ)\cdot 0{,}2 + 140\cdot 170\cdot\sin 95^\circ\cdot\frac{1'}{\varrho'}\right]\mathrm{m},$$

$$\underline{\underline{\Delta c_{\max} = 0{,}32\ \mathrm{m}.}}$$

Da man nicht weiß, in welcher Richtung die Einzelfehler wirken, wird die Länge der Dreieckseite mit $c = (229{,}45 \pm 0{,}32)\ \mathrm{m}$ angegeben.

Lehrbeispiel 51

Die Spannung U an den Enden eines elektrischen Widerstandes R hängt mit der Stromstärke I eines ihn durchfließenden Gleichstromes durch das Ohmsche Gesetz zusammen:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Gesucht wird der relative Fehler von R, wenn $U = 110\ \mathrm{V}$ mit einem Fehler von $\Delta U = \pm 2\ \mathrm{V}$ und $I = 20\ \mathrm{A}$ mit einem Fehler von $\Delta I = \pm 0{,}5\ \mathrm{A}$ behaftet ist.

Lösung:

Nach Formel (43) erhält man zunächst für den maximalen Fehler

$$\Delta R_{\max} = \left|\frac{\partial R}{\partial U}\Delta U\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\Delta I\right|$$

und daraus

$$\Delta R_{\max} = \left|\frac{\Delta U}{I}\right| + \left|\frac{U}{I^2}\Delta I\right|.$$

Da der relative Fehler gesucht wird, muß noch durch R dividiert werden:

$$\frac{\Delta R_{\max}}{R} = \left|\frac{\Delta U}{IR}\right| + \left|\frac{U}{I^2 R}\Delta I\right|.$$

Unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes erhalten Sie

$$\frac{\Delta R_{\max}}{R} = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|.$$

Die Zahlenwerte ergeben

$$\frac{\Delta R_{\max}}{R} = \frac{2}{110} + \frac{0{,}5}{20} \approx 0{,}043 = \underline{\underline{4{,}3\ \%}}$$

Lehrbeispiel 52

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind zwei Punkte P und P_0 gegeben (Bild 54), deren Verbindungsstrecke mit der x-Achse den Winkel φ einschließt. Um welchen Betrag wird dieser Winkel verändert, wenn der Punkt P in Richtung der x-Achse um den Betrag Δx und in Richtung der y-Achse um den Betrag Δy verschoben wird?

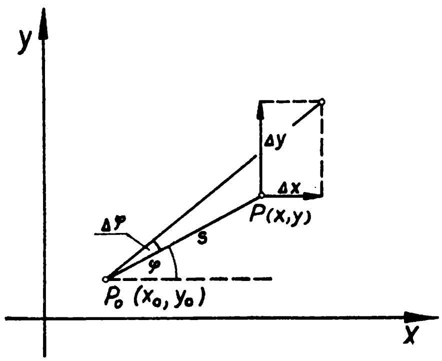

Bild 54

Lösung:

Zunächst wird φ als Funktion der veränderlichen Koordinaten x und y des Punktes P dargestellt. Aus

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

folgt

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan} \frac{y - y_0}{x - x_0} = f(x, y).$$

Für die Winkeländerung $\Delta\varphi$ erhalten Sie

$$\Delta\varphi \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

und für die partiellen Ableitungen

$$f_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2}\right) = \frac{-(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$f_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Setzt man für den Nenner

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \overline{P_0P}^2 = s^2,$$

und beachtet, daß $\frac{y - y_0}{s} = \sin\varphi$, $\frac{x - x_0}{s} = \cos\varphi$ ist, dann folgt

$$f_x = -\frac{y - y_0}{s^2} = -\frac{\sin\varphi}{s},$$

$$f_y = \frac{x - x_0}{s^2} = \frac{\cos\varphi}{s}$$

und schließlich

$$\Delta\varphi \approx -\frac{\sin\varphi}{s}\,\Delta x + \frac{\cos\varphi}{s}\,\Delta y.$$

12.32 Die Ableitung unentwickelter Funktionen. Bisher setzten wir bei der Bildung der Ableitung y' einer Funktion mit den Variablen x und y stets voraus, daß die Funktion in der entwickelten oder expliziten Form $y = f(x)$ gegeben ist. Nun gibt es aber auch Verknüpfungen zwischen x und y, die sich nicht nach y auflösen lassen. Wir betrachten z. B. den Ausdruck

$$a x^5 + b x^3 y^2 + c x^2 y^3 + d y^5 + e = 0. \tag{a}$$

Setzen Sie für x einen bestimmten Wert ein, so erhalten Sie eine Bestimmungsgleichung für y, aus der Sie y (oft nur näherungsweise) bestimmen können, so daß die Gleichung (a) erfüllt ist. Diese bestimmt also y als Funktion von x. Nach den Ausführungen in Abschnitt 1.2 spricht man von einer unentwickelten oder impliziten Funktion und schreibt allgemein

$$F(x, y) = 0.$$

Um die vorgegebene implizite Funktion (a) nach y aufzulösen, also in die explizite Form zu bringen, müßte eine Gleichung 5. Grades gelöst werden. Das ist jedoch im allgemeinen nicht möglich. Ebenso läßt sich die implizite Funktion

$$F(x, y) = 3y^2 - x\cos y = 0$$

nicht in eine explizite verwandeln, da sie mit y als Unbekannte eine transzendente Gleichung darstellt.

Auch implizite Funktionen $F(x, y) = 0$ lassen sich durch ebene Kurven bildlich darstellen, für die ebenfalls der Tangentenanstieg, d. h. der Differentialquotient, berechnet werden kann. Wir wollen deshalb im folgenden untersuchen, wie eine Funktion in impliziter Form differenziert wird.

Wir betrachten hierzu $F(x, y) = 0$ als Sonderfall der Funktion

$$z = F(x, y) \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Dem Bild 40 entsprechend stellt $F(x, y) = 0$ die Schnittkurve zwischen der Fläche $z = F(x, y)$ und der xy-Ebene dar. Ändert sich x um $\mathrm{d}x$, dann ändert sich die von x abhängige Variable y um $\mathrm{d}y$ und Sie erhalten für das totale Differential

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Da wir uns dabei in der xy-Ebene auf der Kurve $F(x, y) = 0$ bewegt haben, ist die Höhenänderung $\mathrm{d}z = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Die Division durch $\mathrm{d}x$ ergibt

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

und daraus folgt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, in anderer Schreibweise

$$\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}} \tag{44}$$

Ohne Herleitung geben wir noch die Formel zur Berechnung der 2. Ableitung an:

$$\boxed{y'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\,y' + F_{yy}\,y'^2}{F_y}.} \tag{45}$$

Lehrbeispiel 53

Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen

a) $6x^5 + 2x^3y^2 - 3x^2y^3 + y^5 - 7 = 0$,

b) $x^2 \sin y - \mathrm{e}^x \cos y = 0$*!*

Lösung:

a) Sie bilden die partiellen Ableitungen

$$F_x = 30x^4 + 6x^2y^2 - 6xy^3,$$
$$F_y = 4x^3y - 9x^2y^2 + 5y^4$$

und erhalten nach (44)

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\underline{\underline{\frac{30x^4 + 6x^2y^2 - 6xy^3}{4x^3y - 9x^2y^2 + 5y^4}}}.$$

b) Sie erhalten

$$F_x = 2x \sin y - \mathrm{e}^x \cos y,$$
$$F_y = x^2 \cos y + \mathrm{e}^x \sin y,$$
$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\underline{\underline{\frac{2x \sin y - \mathrm{e}^x \cos y}{x^2 \cos y + \mathrm{e}^x \sin y}}}.$$

Lehrbeispiel 54

Berechnen Sie die Tangentengleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

für den Berührungspunkt $P_0(x_0;\, y_0)$*!*

Lösung:

Als Geradengleichung durch P_0 erhält man für die Tangente

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m.$$

Der Richtungsfaktor m ist aber gleich der Ableitung y' der Ellipsengleichung an der Stelle x_0. Nach (44) erhalten Sie

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

und für $x = x_0$ folgt, als Richtungsfaktor der Ellipsentangente in P_0,

$$m = y' = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Dieser Wert in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Durch Umformung erhalten Sie

$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = -b^2xx_0 + b^2x_0^2$$

oder

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2.$$

Da P_0 als Punkt der Ellipse mit seinen Koordinaten x_0 und y_0 die Ellipsengleichung erfüllt, ist $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$, also

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = a^2b^2.$$

Die Division durch a^2b^2 ergibt schließlich die bekannte Gleichung der Ellipsentangente:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Übungen

39. *Von einem geraden Kreiszylinder wurden der Radius* $r = 2{,}0$ dm *mit dem Fehler* $\Delta r = 2$ mm *und die Höhe* $h = 5{,}6$ dm *mit dem Fehler* $\Delta h = 3$ mm *gemessen. Berechnen Sie das Volumen* V *und seinen maximalen Fehler* $\Delta V_{\max}$*!*

40. *Die Widerstände* $R_1 = 200\,\Omega$ *und* $R_2 = 500\,\Omega$ *sind parallel geschaltet. Berechnen Sie den maximalen Fehler des Ersatzwiderstandes* R*, wenn die Fehler der Einzelwiderstände* $\Delta R_1 = 1\,\Omega$ *und* $\Delta R_2 = 3\,\Omega$ *betragen!*

41. *Im rechtwinkligen Dreieck wurden die Kathete* $a = 70$ m *und die Hypotenuse* $c = 250$ m *mit den Fehlern* $\Delta a = 3$ cm *und* $\Delta c = 7$ cm *gemessen. Wie groß ist der maximale Fehler des Winkels* α*?*

42. *Um den Radius eines im Kreisbogen verlegten Gleises zu bestimmen, wurden eine Sehne* $s = 30$ m *und die zugehörige Pfeilhöhe* $p = 0{,}15$ m *mit den Fehlern* $\Delta s = 1$ cm *und* $\Delta p = 1$ mm *gemessen. Berechnen Sie den Radius und dessen relativen maximalen Fehler (Bild 55)!*

43. *Zur „optischen Messung" der Strecke* s *wurden unter Verwendung einer Hilfsbasis* s_1 *die Winkel* $\gamma_1 = 3^\circ 26' 00''$ *und* $\gamma_2 = 5^\circ 43' 10''$ *mit den Fehlern*

$\Delta\gamma_1 = \Delta\gamma_2 = 10''$ gemessen (Bild 56). Die als fehlerfrei anzunehmende Basis b beträgt 2 m. Berechnen Sie den prozentualen Fehler der Strecke s!

44. *Welchen Anstieg besitzt die im Punkt $P\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ an die Kurve*

$$\cos y - y \sin x = 0$$

angelegte Tangente?

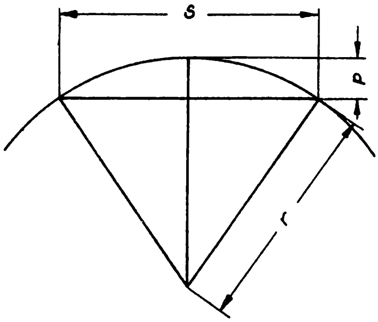

Bild 55

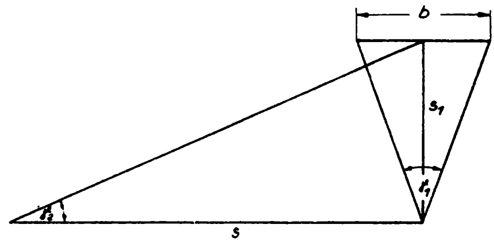

Bild 56

45. *Berechnen Sie die 1. Ableitungen der impliziten Funktionen*
   a) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} + c = 0,$
   b) $xy = y^x,$
   c) $\arcsin(xy^2) + \sqrt{1 - x^2y^4} + c = 0,$
   d) $(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$ *(Strophoide),*
   e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ *(Astroide)!*

12.4 Maxima und Minima von Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher

Die Ihnen aus Kapitel 4 bekannte Bestimmung von Extremwerten wollen wir nun auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen. Auch hierzu gibt es viele Anwendungen. Zum Beispiel führen die meisten Aufgaben der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung des Minimums einer Funktion von mehreren Veränderlichen.

Zunächst beschränken wir uns wieder auf zwei Veränderliche, um die erforderlichen Formeln anschaulich aus dem Bild zu entwickeln.

Wir betrachten in Bild 57 eine annähernd halbkugelförmige Fläche, die durch die Funktion $z = f(x, y)$ dargestellt wird. Auf ihr gibt es einen Punkt E, der höher liegt als jeder Punkt seiner Umgebung. Die Funktion $z = f(x, y)$ nimmt also in diesem Punkt den maximalen Wert z_E an. Man sagt, sie besitzt für $x = x_E$ und $y = y_E$ ein (relatives) **Maximum**. Entsprechend besitzt eine Funktion in einem Punkte E ein (relatives) **Minimum**, wenn dieser Punkt tiefer liegt als jeder Punkt seiner Umgebung (Bild 58). Maximum und Minimum entsprechen dem Gipfel- bzw. Muldenpunkt einer Geländefläche.

Aus den Bildern 57 und 58 ersehen Sie sofort, daß eine Fläche im Maximum bzw. Minimum eine waagerechte Tangentialebene besitzt. Jede in der Fläche liegende und durch E gehende Kurve hat ebenfalls in diesem Punkte ein Maximum bzw.

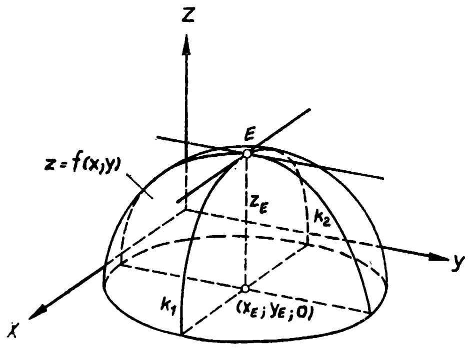

Bild 57

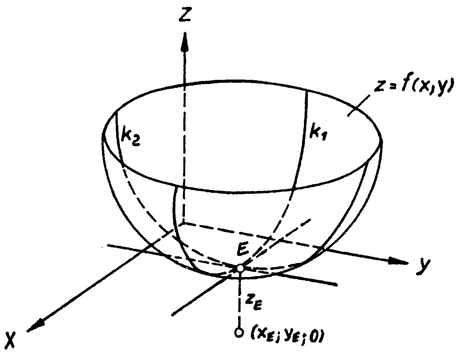

Bild 58

Minimum und somit eine waagerechte Tangente. Legt man durch E zwei Ebenen parallel zur xz- bzw. yz-Ebene, so entstehen zwei Schnittkurven K_1 und K_2, deren Tangenten in E waagerecht verlaufen. Die partiellen Ableitungen sind also im Punkt E gleich Null. Sie erhalten deshalb als *notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums:*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0,$$

in kürzerer Schreibweise

$$f_x = 0; \qquad f_y = 0.$$

Diese beiden Formeln liefern zwei Gleichungen zur Berechnung der unbekannten Koordinaten x_E und y_E der Extremstelle. Ihre Bestimmung ist eindeutig, da stets die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten ist.

Lehrbeispiel 55

Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 2y + 4!$$

Lösung:

Sie bilden die partiellen Ableitungen und setzen diese gleich Null:

$$f_x = 2x + y + 3 = 0,$$
$$f_y = x + 2y + 2 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Koordinaten der Extremstelle zu

$$x_E = -\frac{4}{3} \qquad \text{und} \qquad y_E = -\frac{1}{3}$$

und damit der extremale Funktionswert zu

$$z_E = \frac{5}{3}.$$

Vorläufig wissen Sie nur, daß die untersuchte Fläche im Punkte $E\left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ eine waagerechte Tangentialebene besitzt.

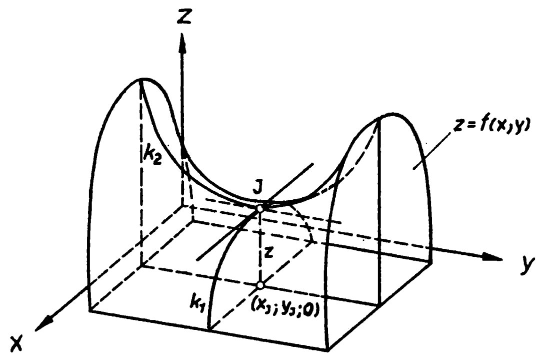

Bild 59

Sie können aber noch nicht entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Es kann sogar der Fall eintreten, daß trotz waagerechter Tangentialebene der Flächenpunkt weder ein Maximum noch ein Minimum darstellt. So ist der in Bild 59 gezeigte Punkt J einer Sattelfläche zwar das Maximum der Kurve K_1, aber zugleich auch das Minimum der Kurve K_2. Obwohl also die Tangenten an beiden Kurven waagerecht und damit die partiellen Ableitungen gleich Null sind, ist kein Extremwert der Fläche vorhanden. Man nennt einen solchen Punkt einen **Sattel-** oder **Jochpunkt**.

Hieraus folgt:

Für jeden Extremwert müssen die partiellen Ableitungen Null sein. Jedoch kann man nicht aus dem Verschwinden der partiellen Ableitungen auf die Existenz eines Extremwertes schließen. Die Bedingungen $f_x = 0$, $f_y = 0$ sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Wie bei den Funktionen von einer Variablen muß man also noch zusätzliche Bedingungen aufstellen. Dabei verwendet man wieder die zweiten Ableitungen. Ohne Beweis geben wir die folgenden *notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein eines Extremwertes und für die Unterscheidung in Maximum und Minimum an:*

Für Maximum und Minimum:	$f_x = 0;$	$f_y = 0$	
	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$		(46)
Für Maximum:	$f_{xx} < 0,$	$f_{yy} < 0$	
Für Minimum:	$f_{xx} > 0,$	$f_{yy} > 0$	

Für unser Lehrbeispiel erhalten Sie:

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{xy} = 1,$$
$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0.$$

Es ist also ein Extremwert vorhanden.

Wegen

$$f_{xx} = 2 > 0 \quad \text{und} \quad f_{yy} = 2 > 0$$

besitzt die Funktion im Punkte E ein Minimum.

Lehrbeispiel 56

In einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem sind die drei Punkte $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ und $C(x_c, y_c)$ durch ihre Koordinaten gegeben. Ein Punkt $M(x, y)$ ist so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Punkten ein Minimum wird!

Lösung:

Diese Aufgabe stellt praktisch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate dar. Sind nämlich zur Bestimmung der Koordinaten eines Punktes z. B. drei Messungen durchgeführt worden, dann werden die aus der Messungsauswertung sich ergebenden Punkte nicht zusammenfallen, sondern infolge der unvermeidlichen Meßfehler ein „fehlerzeigendes Dreieck" bilden. Der durch die obige Forderung definierte Punkt M ist dann der Punkt, der sich wahrscheinlich allen Messungen am besten anpaßt.

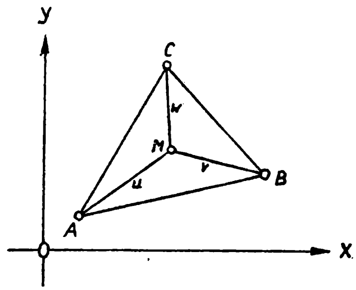

Bild 60

Mit den Bezeichnungen des Bildes 60 lautet die gestellte Bedingung:

$$f = u^2 + v^2 + w^2$$

soll den kleinstmöglichen Wert annehmen.

Für die Abstände u, v und w ergibt sich aus den Koordinaten

$$u^2 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2,$$
$$v^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2,$$
$$w^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2.$$

Diese Werte setzen Sie ein und erhalten eine Funktion von x und y:

$$f(x, y) = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 + (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2.$$

Zur Bestimmung des Minimums bilden Sie die partiellen Ableitungen und setzen sie gleich Null:

$$f_x = 2(x - x_a) + 2(x - x_b) + 2(x - x_c) = 0,$$
$$f_y = 2(y - y_a) + 2(y - y_b) + 2(y - y_c) = 0.$$

Aus den Gleichungen folgt

$$\underline{\underline{x = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}}}, \quad \underline{\underline{y = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}}}.$$

Der gesuchte Punkt M ist also der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Nun bilden Sie noch die Ausdrücke

$$f_{xx} = 2 + 2 + 2 = 6 > 0, \quad f_{yy} = 2 + 2 + 2 = 6 > 0,$$
$$f_{xy} = 0, \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0.$$

Nach den in (46) gegebenen Bedingungen ist also tatsächlich ein Minimum vorhanden.

Lehrbeispiel 57

Es sind die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

zu bestimmen.

Lösung:

Man erhält

$$f_x = \frac{y}{27} - \frac{1}{x^2}, \quad f_y = \frac{x}{27} + \frac{1}{y^2}.$$

Aus $f_x = 0$ und $f_y = 0$ ergibt sich

$$x_E = -3, \quad y_E = 3.$$

Für die höheren Ableitungen folgt

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad f_{yy} = -\frac{2}{y^3}, \quad f_{xy} = \frac{1}{27}.$$

Hier setzen Sie die errechneten Werte von x_E und y_E ein und erhalten

$$f_{xx} = -\frac{2}{27} < 0, \quad f_{yy} = -\frac{2}{27} < 0.$$

Außerdem gilt

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \left(-\frac{2}{27}\right)\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{1}{27^2} = \frac{3}{27^2} > 0.$$

Die Funktion besitzt also für $x_E = -3$ und $y_E = 3$ ein Maximum.

Die Bestimmung der Extremwerte läßt sich auch auf Funktionen von beliebig vielen Variablen übertragen. Ist z. B. die Funktion

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

von n unabhängigen Veränderlichen gegeben, dann bildet man die n partiellen Differentialquotienten und setzt sie einzeln gleich Null:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \quad \ldots \quad ; \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Aus den n Gleichungen lassen sich dann die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Extremstelle berechnen. Auf die entsprechenden hinreichenden Bedingungen kann hier nicht eingegangen werden.

Lehrbeispiel 58

Die Orte A und B sollen durch eine Telegraphenleitung derart verbunden werden, daß die Leitung über zwei Erdkabelkästen C und D geführt wird, die an den beiden Hauptleitungen x und y liegen. Die Leitungen x und y verlaufen rechtwinklig zueinander (Bild 61). Wie sind die beiden Punkte C und D zu wählen, damit die Länge der Leitung $L = BC + CD + DA$ ein Minimum wird?

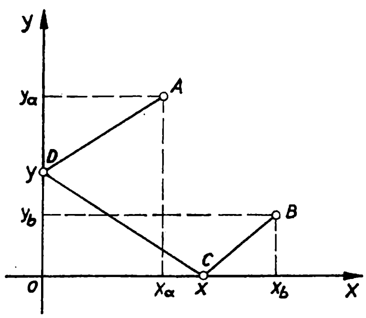

Bild 61

Lösung:

$$L = BC + CD + DA = \sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2}$$

$$L_x = \frac{-(x_b - x)}{\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x - x_b)\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2}}{\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y_a - y}{\sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2}} = \frac{y\sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2} + (y - y_a)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein von Extremwerten lautet:

$$L_x = 0 \quad \text{und} \quad L_y = 0,$$

d. h. (es werden nur die Zähler der beiden Ausdrücke gleich Null gesetzt):

$$(x - x_b)\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2} = 0, \tag{a}$$

$$y\sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2} + (y - y_a)\sqrt{x^2 + y^2} = 0. \tag{b}$$

Aus (a) folgt

$$x^2[(x_b - x)^2 + y_b^2] = (x_b - x)^2(x^2 + y^2).$$

$$x^2 y_b^2 = y^2 (x_b - x)^2$$

$$y^2 = \frac{x^2 y_b^2}{(x_b - x)^2}.$$

Für y ergibt sich somit $y = \dfrac{y_b x}{x_b - x}$.

In gleicher Weise erhalten Sie aus Gleichung (b) $x = \dfrac{x_a y}{y_a - y}$.

Diesen Ausdruck setzen Sie in y ein und erhalten

$$y_E = \frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_a + x_b}.$$

Für x folgt

$$x_E = \frac{x_b y_a - x_a y_b}{y_a + y_b}.$$

Für die 2. partiellen Ableitungen erhalten Sie

$$L_{xx} = \frac{y_b^2}{\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2}^3} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{y_b^2}{N_1} + \frac{y^2}{N_3}, \tag{c}$$

$$L_{yy} = \frac{x_a^2}{\sqrt{(y_a - y)^2 + x_a^2}^3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{x_a^2}{N_2} + \frac{x^2}{N_3}, \tag{d}$$

$$L_{xy} = \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{x y}{N_3},$$

wobei zur Abkürzung die stets positiven Nenner mit N_1, N_2 bzw. N_3 bezeichnet wurden. Damit bilden Sie nach (46)

$$L_{xx} \cdot L_{yy} - L_{xy}^2 = \left(\frac{y_b^2}{N_1} + \frac{y^2}{N_3}\right)\left(\frac{x_a^2}{N_2} + \frac{x^2}{N_3}\right) - \left(\frac{x y}{N_3}\right)^2$$

$$= \frac{y_b^2 x_a^2}{N_1 N_2} + \frac{y_b^2 x^2}{N_1 N_3} + \frac{x_a^2 y^2}{N_2 N_3}.$$

Ohne hier erst die speziellen Werte für x_E und y_E einzusetzen, sehen Sie bereits, daß dieser Ausdruck stets positiv sein muß, d. h., die hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extremwertes ist erfüllt. Da auch

$$L_{xx} > 0, \qquad L_{yy} > 0$$

für jedes x und y ist, liegt ein Minimum vor.

Übungen

46. *Berechnen Sie die Extremwerte der Funktionen*

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7,$

    b) $f(x, y) = 5(x + 2y - 1) - (x^2 + xy - y^2)$*!*

47. *Für* $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ *sind die im Bereich* $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ *liegenden Extremwerte zu berechnen!*

48. *Das Volumen eines Quaders sei V. Wie groß müssen die Kanten sein, damit die Oberfläche ein Minimum wird?*

12.5 Maxima und Minima mit Nebenbedingungen

Bei einigen Aufgaben der Extremwertbestimmung ergibt sich der Sonderfall, daß die Variablen nicht unabhängig voneinander sind, sondern durch eine oder mehrere Nebenbedingungen miteinander verknüpft werden.

Für eine Funktion von drei Variablen z. B. könnten wir die Aufgabe in folgende allgemeine Form bringen:

Es sind die Extremwerte der Funktion $u = f(x, y, z)$ zu bestimmen, wobei die Variablen x, y und z die Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ erfüllen müssen.

Diese Aufgabe läßt sich nun auf zwei verschiedene Arten lösen. Man kann sie sofort auf die im vorigen Abschnitt beschriebene Extremwertbestimmung zurückführen, indem man aus der Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ eine Variable ausrechnet und in die Funktion $u = f(x, y, z)$ einsetzt. Man erhält dann eine Funktion von zwei Variablen und bestimmt nach (46) ihre Extremwerte.

Lehrbeispiel 59

In einem Dreieck wurden die drei Winkel α', β' *und* γ' *gemessen. Infolge der unvermeidlichen Meßfehler beträgt die Winkelsumme nicht genau* 180°, *sondern es ergibt sich eine Abweichung* δ. *Es ist also*

$$\alpha' + \beta' + \gamma' - 180^\circ = \delta.$$

Die gemessenen Winkel α', β', γ' *sollen nun um die Werte* x, y, z *so verbessert werden, daß die Summe der ausgeglichenen Winkel*

$$\alpha = \alpha' + x, \qquad \beta = \beta' + y, \qquad \gamma = \gamma' + z$$

genau 180° *beträgt und zugleich die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum wird.*

Lösung:

Für die Funktion finden Sie

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \tag{a}$$

Um den Fehler zu beseitigen, muß die Summe der Verbesserungen gleich dem im Vorzeichen entgegengesetzten Wert von δ werden, also

$$x + y + z = -\delta$$

d. h., es besteht die Nebenbedingung

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z + \delta = 0. \tag{b}$$

Aus (b) errechnen Sie eine Unbekannte, z. B. z, mit

$$z = -x - y - \delta$$

und setzen den Wert in (a) ein. Sie erhalten eine Funktion zweier Veränderlicher:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + (-x - y - \delta)^2.$$

Es ist

$$F_x = 2x - 2(-x - y - \delta),$$
$$F_y = 2y - 2(-x - y - \delta).$$

Aus $F_x = 0$, $F_y = 0$ ergibt sich:

$$2x + y = -\delta,$$
$$x + 2y = -\delta$$

und schließlich

$$\underline{\underline{x = -\frac{\delta}{3}}}, \quad \underline{\underline{y = -\frac{\delta}{3}}}, \quad \underline{\underline{z = -\frac{\delta}{3}}}.$$

Der Winkelüberschuß δ ist also unabhängig von der Größe der einzelnen Winkel gleichmäßig zu verteilen.

Nach (46) bilden Sie noch

$$F_{xx} = 4 > 0, \qquad F_{yy} = 4 > 0, \qquad F_{xy} = 2,$$
$$F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{xy}^2 = 16 - 4 = 12 > 0$$

und haben damit die Existenz eines Minimums bewiesen.

Es kann eintreten, daß sich die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ nicht nach x oder y auflösen läßt, oder daß die Auflösung besonders umständlich ist. Wir besprechen deshalb im folgenden noch ein weiteres Verfahren der Extremwertbestimmung bei Vorhandensein von Nebenbedingungen.

Wir werden das Verfahren nur anschaulich aus dem geometrischen Bild der Funktion entwickeln und uns deshalb zunächst auf zwei unabhängige Variable beschränken. Es sollen also die Extremwerte der Funktion

$$z = f(x, y)$$

unter Beachtung der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 0$$

bestimmt werden.

Die Funktion $z = f(x, y)$ stellt bekanntlich eine Fläche im Raum dar (Bild 62), während Sie die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ als die unentwickelte (implizite)

Form einer Funktion von einer Veränderlichen auffassen können. Diese besitzt aber als Schaubild eine Kurve K' in der xy-Ebene.

Betrachten Sie einen Flächenpunkt $P(x, y, z)$, dessen Grundrißprojektion P' auf der Kurve K' liegt, dann erfüllen dessen Koordinaten x und y die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$. Umgekehrt liegen alle Punkte der Fläche, deren Ko-

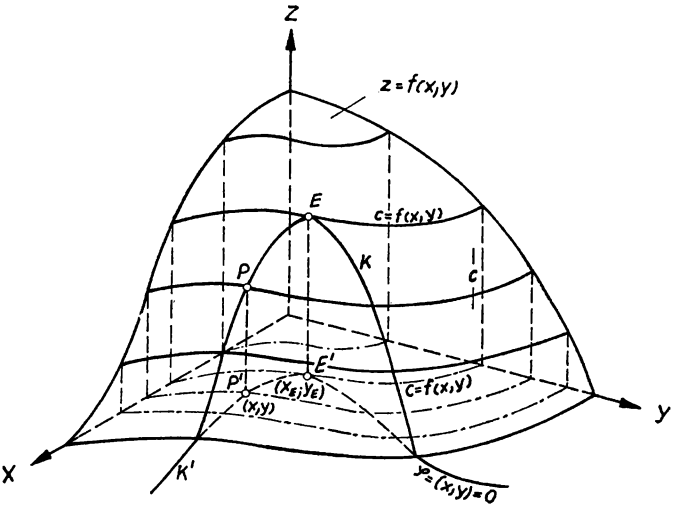

Bild 62

ordinaten die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ befriedigen, auf einer in der Fläche gelegenen Raumkurve K, die die Kurve K' als Grundrißprojektion besitzt. Die Aufgabe, das Maximum oder Minimum der Funktion $z = f(x, y)$ unter Beachtung der Nebenbedingung zu berechnen, bedeutet also geometrisch, das Maximum bzw. Minimum der Raumkurve zu ermitteln.

Setzt man in $z = f(x, y)$ für z einen konstanten Wert c ein, so wählt man damit aus der Fläche alle diejenigen Punkte heraus, die die Höhe c über dem Grundriß besitzen. Die Gleichung $c = f(x, y)$ bzw. $f(x, y) - c = 0$ stellt also die Gleichung einer Höhenlinie von der Höhe c dar. (In Bild 62 wurden einige Höhenlinien mit ihren Grundrißprojektionen eingezeichnet.) Wie Sie aus Bild 62 erkennen, gibt es eine Höhenlinie, die von der Raumkurve K nicht geschnitten, sondern berührt wird. Der Berührungspunkt E ist aber zugleich der gesuchte Extremwert der Raumkurve (für unser Bild das Maximum). Die Grundrißprojektion E' ist der Berührungspunkt zwischen der Kurve K' und der Projektion der Höhenlinie $f(x, y) - c = 0$. Wegen der Berührung haben beide Kurven in E' dieselbe Tangente und damit auch die gleichen Ableitungen. Nach Formel (44) erhalten Sie für den Differentialquotienten der in impliziter Form gegebenen Funktion $\varphi(x, y) = 0$:

$$y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

und für die Funktion $f(x, y) - c = 0$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y},$$

da c als Konstante beim Differenzieren wegfällt.

Beide Differentialquotienten müssen gleich sein, also:

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Aus $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{f_x}{f_y}$ folgt, daß die Zähler bzw. die Nenner jeweils proportional sein müssen:

$$f_x \sim \varphi_x, \qquad f_y \sim \varphi_y.$$

Wird der gemeinsame Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ bezeichnet, so ist

$$f_x = -\lambda\varphi_x, \qquad f_y = -\lambda\varphi_y$$

oder

$$f_x + \lambda\varphi_x = 0, \qquad f_y + \lambda\varphi_y = 0.$$

Die letzten beiden Gleichungen sind aber nichts anderes als die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums der Funktion

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Man nennt λ einen **Lagrangeschen[1] Multiplikator.**

Durch Zusammenfassung dieser Ergebnisse erhalten wir folgende **Lagrangesche Multiplikatorenregel** für zwei Variable:

> Um die Extremwerte der Funktion $z = f(x, y)$ bei Berücksichtigung der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ zu bestimmen, setzt man unter Verwendung eines unbekannten Multiplikators λ die Funktion
>
> $$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$
>
> an. Bildet man ihre partiellen Ableitungen und setzt diese gleich Null, dann kann man aus den beiden Gleichungen
>
> $$F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0,$$
> $$F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0$$
>
> in Verbindung mit der Nebenbedingung
>
> $$\varphi(x, y) = 0$$
>
> die Koordinaten x_E und y_E des Extremwertes und den Multiplikator λ berechnen.

Allgemeine Formeln für die Untersuchung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, können hier nicht angegeben werden. Es muß für jede Aufgabe gesondert entschieden werden.

---

[1] Lagrange, 1736 bis 1813, frz. Mathematiker.

Lehrbeispiel 60

Gesucht werden die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$, wobei zwischen den Variablen die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ besteht.

Lösung:

Man bildet die Funktion

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

und erhält für ihre partiellen Ableitungen

$$F_x = 2x + \lambda = 0,$$
$$F_y = 2y + \lambda = 0.$$

Daraus folgt

$$x = y$$

und damit aus der Nebenbedingung

$$x_E = y_E = \frac{1}{2}.$$

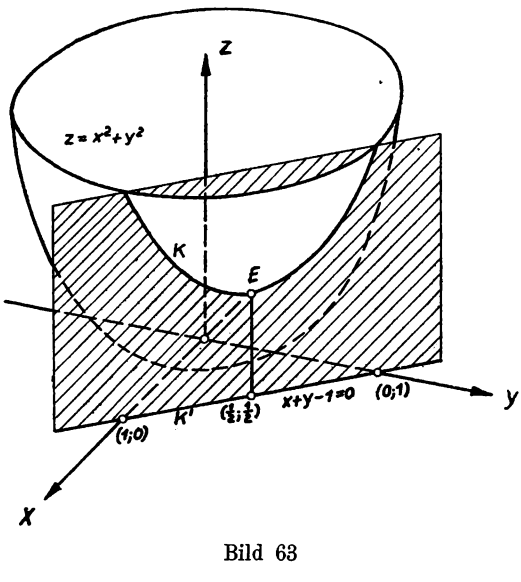

Bild 63

Für den Funktionswert an dieser Stelle ergibt sich

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bild 63 veranschaulicht das Ergebnis. Die Funktion $z = x^2 + y^2$ stellt ein Paraboloid dar. Die Nebenbedingung $x + y - 1 = 0$ ergibt als Kurve K' eine Gerade in der xy-Ebene. Alle Punkte des Paraboloids, deren xy-Koordinaten die Nebenbedingung erfüllen, liegen auf der Parabel K, die als Schnittkurve zwischen dem

Paraboloid und der durch K' gehenden Vertikalebene entsteht. Der von uns berechnete Punkt $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, also der Extremwert von $f(x, y)$ unter Beachtung der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$, stellt dann das Minimum der Kurve dar.

Lehrbeispiel 61

Für die Funktion $f(x, y) = xy$ sind die Extremwerte unter Beachtung der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ zu berechnen!

Lösung:

Man bildet die Funktion

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und erhält

$$F_x = y + 2\lambda x, \qquad F_y = x + 2\lambda y.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda x + \quad y &= 0,\\ x + 2\lambda y &= 0,\\ x^2 + \quad y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung λ ausgerechnet und in die 2. Gleichung eingesetzt ergibt $x^2 = y^2$. Damit folgt aus der 3. Gleichung

$$x_E = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad y_E = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die Funktion besitzt also die vier Extremstellen

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$;
$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Setzt man die Werte in die Funktion $f(x, y) = xy$ ein, dann ergibt sich für die ersten beiden Extremstellen mit $f(x_{E1}, y_{E1}) = \frac{1}{2}$ ein Maximum und für die letzten beiden mit $f(x_{E2}, y_{E2}) = -\frac{1}{2}$ ein Minimum.

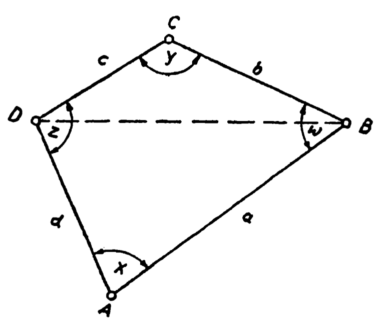

Bild 64

Lehrbeispiel 62

Aus vier gegebenen Strecken der Länge a, b, c, d soll ein Viereck mit maximaler Fläche J gebildet werden. Wie sind die Winkel des Vierecks zu wählen?

Lösung:

Bezeichnet man den Winkel zwischen a und d mit x und den Gegenwinkel mit y (Bild 64), dann ergibt sich für die Fläche

$$J = \frac{1}{2}\,ad\sin x + \frac{1}{2}\,bc\sin y$$

oder, da mit J auch $2J$ zu einem Maximum wird

$$f(x, y) = 2J = ad \sin x + bc \sin y.$$

Die Nebenbedingung ergibt sich aus der Tatsache, daß man die Diagonale BD aus den beiden Dreiecken DBC und ABD berechnen kann:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos x = b^2 + c^2 - 2bc \cos y$$

oder $$\varphi(x, y) = a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y = 0.$$

Daraus ergibt sich die Funktion

$$F(x, y) = ad \sin x + bc \sin y + \lambda(a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y).$$

Ihre partiellen Ableitungen werden Null gesetzt:

$$F_x = ad \cos x + 2\lambda ad \sin x = 0,$$
$$F_y = bc \cos y - 2\lambda bc \sin y = 0.$$

Daraus folgt $$\cos x = -2\lambda \sin x,$$
$$\cos y = 2\lambda \sin y.$$

Durch Division beider Gleichungen wird der Multiplikator λ eliminiert:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = -\frac{\sin x}{\sin y}.$$

Sie erhalten dann

$$\sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$$

oder $$\sin(y + x) = 0.$$

Von den beiden Lösungen $y + x = 0$ und $y + x = \pi$ hat nur die zweite geometrisch einen Sinn. Da auch die Summe der beiden übrigen Viereckswinkel z und w gleich π sein muß, handelt es sich um ein Sehnenviereck, d. h., die Eckpunkte des Vierecks mit maximalem Flächeninhalt liegen auf einem Kreis.

Die Lagrangesche Multiplikatorenregel läßt sich auch auf Funktionen von mehreren Variablen und ebenso auf das Vorhandensein von mehreren Nebenbedingungen übertragen. Man erhält dann die **verallgemeinerte Lagrangesche Multiplikatorenregel:**

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

von n Veränderlichen, die durch m Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

miteinander verbunden sind. Um die Extremwerte der Funktion zu bestimmen, bildet man unter Einführung von m Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die Funktion

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Funktion setzt man gleich Null und kann aus den so sich ergebenden n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \quad \ldots; \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen die Koordinaten x_1, $x_2, \ldots, x_n$ der Extremstelle und die Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ berechnen.

Lehrbeispiel 63

In dem Nivellementsnetz des Bildes 65 wurden die Höhen der einzelnen Züge 1, 2 und 3 in Pfeilrichtung gemessen und ergaben die Werte h_1, h_2 und h_3. Die Widersprüche in den Schleifen I und II seien w_1 und w_2, d. h.

$$h_1 + h_2 = w_1 \quad \textit{und} \quad -h_2 + h_3 = w_2.$$

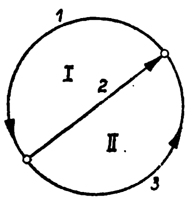

Bild 65

Die Höhen h_1, h_2, h_3 sollen mit Verbesserungen x_1, x_2, x_3 versehen werden und es seien

$$H_1 = h_1 + x_1, \qquad H_2 = h_2 + x_2, \qquad H_3 = h_3 + x_3$$

die verbesserten Höhen. Die Verbesserungen sollen nun so gewählt werden, daß die Summe der ausgeglichenen Höhen in jeder Schleife gleich Null wird, also

$$H_1 + H_2 = 0; \qquad -H_2 + H_3 = 0,$$

und daß zugleich die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum wird.

Lösung:

Sie erhalten mit obigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \varphi_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + w_1 = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_2 + x_3 + w_2 = 0. \end{aligned}$$

Sie bilden

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + w_1) + \lambda_2(-x_2 + x_3 + w_2)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 2x_3 + \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen und den zwei Nebenbedingungen φ_1 und φ_2 ergeben sich nach Elimination von λ_1 und λ_2 für die Verbesserungen die Werte

$$x_{1E} = \frac{-2w_1 - w_2}{3}; \quad x_{2E} = \frac{w^2 - w_1}{3}; \quad x_{3E} = \frac{-2w_2 - w_1}{3}.$$

Zur Kontrolle setzt man diese Werte in die Nebenbedingungen ein.

Lehrbeispiel 64[1]

Der Spannungsverlust am Ende einer unverzweigten elektrischen Leitung, die aus drei Teilstrecken von den Längen l_1, l_2 und l_3 besteht, beträgt U_v. Die Stromstärken der einzelnen Teilstrecken sind i_1, i_2 und i_3, der spezifische Leitungswiderstand ist ϱ. Wie groß sind die Querschnitte der einzelnen Leitungen zu wählen, wenn die verwendete Materialmenge ein Minimum werden soll?

Lösung:

Wenn die zu verwendende Materialmenge ein Minimum werden soll, muß das Volumen des Leitungsmaterials ein Minimum werden. Das Volumen beträgt

$$V = f(Q_1, Q_2, Q_3) = l_1 Q_1 + l_2 Q_2 + l_3 Q_3,$$

wobei Q der Querschnitt ist.

Für den Spannungsverlust gilt

$$U_v = \varrho\left(\frac{l_1 i_1}{Q_1} + \frac{l_2 i_2}{Q_2} + \frac{l_3 i_3}{Q_3}\right).$$

Die Nebenbedingung lautet also:

$$\varphi(Q_1, Q_2, Q_3) = \varrho\left(\frac{l_1 i_1}{Q_1} + \frac{l_2 i_2}{Q_2} + \frac{l_3 i_3}{Q_3}\right) - U_v = 0.$$

Nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel (für drei Variable) folgt

$$F(Q_1, Q_2, Q_3) = V + \lambda\varphi = l_1 Q_1 + l_2 Q_2 + l_3 Q_3 + \lambda\left[\varrho\left(\frac{l_1 i_1}{Q_1} + \frac{l_2 i_2}{Q_2} + \frac{l_3 i_3}{Q_3}\right) - U_v\right].$$

Sie erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1} = l_1 - \frac{\lambda\varrho\, l_1 i_1}{Q_1^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial Q_2} = l_2 - \frac{\lambda\varrho\, l_2 i_2}{Q_2^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial Q_3} = l_3 - \frac{\lambda\varrho\, l_3 i_3}{Q_3^2}.$$

Diese drei Gleichungen setzen Sie gleich Null. Es folgt

$$l_1 - \frac{\lambda\varrho\, l_1 i_1}{Q_1^2} = 0, \quad l_2 - \frac{\lambda\varrho\, l_2 i_2}{Q_2} = 0, \quad l_3 - \frac{\lambda\varrho\, l_3 i_3}{Q_3} = 0$$

und damit

$$Q_1^2 = \lambda\varrho i_1, \qquad Q_2^2 = \lambda\varrho i_2, \qquad Q_3^2 = \lambda\varrho i_3.$$

Aus diesen letzten drei Gleichungen und der Nebenbedingung können Sie die Größen λ, Q_1, Q_2 und Q_3 bestimmen.

Sie eliminieren zunächst λ:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{i_1}{i_2}}, \quad \frac{Q_1}{Q_3} = \sqrt{\frac{i_1}{i_3}}.$$

Multiplizieren Sie U_v auf beiden Seiten mit Q_1 und setzen die eben bestimmten Quotienten ein, dann erhalten Sie

[1] Nur für Studierende der Fachrichtung Elektrotechnik.

$$U_v Q_1 = \varrho\left(l_1 i_1 + l_2 i_2 \sqrt{\frac{i_1}{i_2}} + l_3 i_3 \sqrt{\frac{i_1}{i_3}}\right) = \varrho \sqrt{i_1}\,(l_1 \sqrt{i_1} + l_2 \sqrt{i_2} + l_3 \sqrt{i_3}),$$

$$Q_1 = \frac{\varrho}{U_v} \sqrt{i_1}\,(l_1 \sqrt{i_1} + l_2 \sqrt{i_2} + l_3 \sqrt{i_3}).$$

Ebenso folgt für die Größen Q_2 und Q_3:

$$Q_2 = \frac{\varrho}{U_v} \sqrt{i_2}\,(l_1 \sqrt{i_1} + l_2 \sqrt{i_2} + l_3 \sqrt{i_3}),$$

$$Q_3 = \frac{\varrho}{U_v} \sqrt{i_3}\,(l_1 \sqrt{i_1} + l_2 \sqrt{i_2} + l_3 \sqrt{i_3}).$$

Für $V_{\min}$ ergibt sich

$$V_{\min} = \frac{\varrho}{U_v}\,(l_1 \sqrt{i_1} + l_2 \sqrt{i_2} + l_3 \sqrt{i_3})^2.$$

Übungen

49. *Berechnen Sie die Extremwerte der folgenden Funktionen mit Nebenbedingungen!*

a) $f(x, y) = xy$ $\qquad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$

b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ $\qquad \varphi_1(x, y, z) = x + 2y + 3z - 1 = 0$

$\qquad \varphi_2(x, y, z) = x + y + z = 0$

50. *Die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, lautet*

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$$

Bestimmen Sie ihre Halbachsen a und b!

Anleitung: Ermitteln Sie die Extremwerte der Halbmesser der Ellipse!

51. *Zur Berechnung der Höhe H des Punktes P wurden die Höhenunterschiede* h_a, h_b, h_c *gegen die bekannten Höhen* $H_A = 126{,}258$ m, $H_B = 144{,}051$ m, $H_C = 160{,}790$ m, *der Punkte A, B, C gemessen. Man erhielt* $h_a = 10{,}216$ m, $h_b = -7{,}568$ m, $h_c = -24{,}323$ m. *Diese Höhenunterschiede sind mit Verbesserungen* x_a, x_b *bzw.* x_c *so zu versehen, daß*

1. die Widersprüche $\qquad W_1 = h_a - h_b - (H_B - H_A)$

und $\qquad W_2 = h_a - h_c - (H_C - H_A)$

verschwinden und

2. die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum wird.

Berechnen Sie mit den ausgeglichenen Höhenunterschieden die Höhe H!

V. Integrationsmethoden. Weiterer Ausbau der Integralrechnung

In Kapitel 8 haben Sie weitere Funktionen und die dazugehörigen Differentialquotienten kennengelernt. Denken Sie nun wieder an die anfängliche Definition der Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung, so können Sie die Zusammenstellung der Grundintegrale[1] (Band 1, Abschnitt 6.2) jetzt erweitern:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin x + C_1 \\ -\operatorname{arc} \cos x + C_2 \end{cases} \qquad |x| < 1 \qquad (47)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc} \tan x + C_1 \\ -\operatorname{arc} \cot x + C_2 \end{cases} \qquad (48)$$

$$\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C \qquad (49)$$

$$\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C \qquad (50)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \qquad x \neq 0 \qquad (51)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \qquad (52)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \operatorname{ar} \sinh x + C \qquad (53)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C = \operatorname{ar} \cosh x + C \qquad x > 1 \qquad (54)$$

Bei den Grundintegralen (47) und (48) hat es den Anschein, als würden sich zwei voneinander verschiedene Lösungen ergeben. Wie Sie aber aus Abschnitt 8.1 wissen, besteht die Beziehung

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{arc} \cos x + \frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\operatorname{arc} \sin x + C_1 = -\operatorname{arc} \cos x + \frac{\pi}{2} + C_1.$$

[1] Eine Zusammenstellung sämtlicher Grundintegrale finden Sie in der dem Band 1 beigelegten Formelsammlung.

Das bedeutet, die beiden Ergebnisse unterscheiden sich nur um eine Konstante, nämlich um $\frac{\pi}{2}$; es ist also $C_2 = \frac{\pi}{2} + C_1$.

Analog ist bei Formel (48) zu verfahren, denn hier gilt

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x = \frac{\pi}{2}.$$

In (53) und (54) ist die Lösung in der Form $\ln[(f(x)]$ zu bevorzugen, da die Auswertung bei bestimmten Integralen dann leicht mit der Logarithmentafel vorgenommen werden kann.

13 Integrationsmethoden

Bisher haben Sie sich bei der Integration nur auf die Grundintegrale beschränkt. Da sich in der Praxis aber meist kompliziertere Integranden ergeben, sollen Sie in diesem Kapitel lernen, wie diese schwierigeren Integrale auf die Grundintegrale zurückgeführt werden können. Immer gelingt das leider nicht, da bleibt dann nichts anderes übrig, als durch Näherungsmethoden zur Lösung zu kommen.

Lernen Sie keinesfalls die vielen Formen auswendig, sondern versuchen Sie, zu einem tieferen Verständnis der Methoden zu kommen. Legen Sie sich stets Rechenschaft über den eingeschlagenen Weg ab und versuchen Sie nicht, durch „sinnloses Probieren" zum Ziel zu kommen. Beachten Sie das oberste Gebot für die Beherrschung der Integralrechnung: Üben und nochmals üben!

13.1 Einführung einer neuen Veränderlichen (Substitution)

Die Methode der Einführung einer neuen Veränderlichen entspricht der Kettenregel der Differentialrechnung. Die neue Veränderliche ist dabei so zu wählen, daß das vorliegende Integral auf ein einfacheres, wenn möglich auf ein Grundintegral zurückgeführt wird. Der hierbei zu beschreitende Weg richtet sich nach der Form des Integranden.

13.11 Der Integrand ist die Funktion einer linearen Funktion. An einem einfachen Beispiel soll dieses Verfahren besprochen werden. Zu lösen sei das Integral

$$\int \cos 2x \, dx.$$

Stände nicht der Faktor 2 im Argument der Kosinusfunktion, so würde das Grundintegral (26) aus Band 1 vorliegen. Sie führen deshalb wie bei der Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung für $2x$ eine neue Veränderliche u ein:

$$u = 2x.$$

Damit nimmt der Integrand die Form $\cos u$ an. Die neue Integrationsveränderliche heißt jetzt u; es ist deshalb auch noch $\mathrm{d}x$ umzuwandeln. Durch Differentiation von $u = 2x$ erhalten Sie

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2, \qquad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u.$$

Sie setzen $u = 2x$ und $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ in das Integral ein:

$$\begin{aligned}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x &= \int \cos u \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\sin u + C.\end{aligned}$$

Nach beendeter Integration führen Sie wieder die ursprüngliche Veränderliche x ein.

$$\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin 2x + C}}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}\sin 2x + C\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos 2x\\ &= \underline{\underline{\cos 2x}}\end{aligned}$$

Lehrbeispiel 65

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$*!*

Lösung:

Vermutlich läßt sich dieses Integral auf Grundintegral (24) aus Band 1 zurückführen (allerdings mit der neuen Veränderlichen u).

Sie setzen dazu

$$u = x - 3.$$

Damit wird

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x.$$

Mit der neuen Veränderlichen u bekommen Sie

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &= \ln|u| + C\\ &= \underline{\underline{\ln|x-3| + C.}}\end{aligned}$$

Führen Sie die Probe selbst durch!

Lehrbeispiel 66

Berechnen Sie

$$\int (6x+5)^5 \,\mathrm{d}x!$$

Lösung:

Der Integrand ist hier die Potenz eines linearen Ausdrucks. Sie führen das Integral auf Grundintegral $\int x^n \mathrm{d}x$ zurück, indem Sie den linearen Ausdruck gleich u setzen.

Mit $$u = 6x+5, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 6, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,\mathrm{d}u,$$

wird $$\int (6x+5)^5 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int u^5 \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{u^6}{6} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{36}(6x+5)^6 + C.}}$$

Gewöhnen Sie sich daran, konstante Faktoren $\left(\text{wie hier } \frac{1}{6}\right)$ sofort vor das Integralzeichen zu setzen.

Lehrbeispiel 67

Berechnen Sie $$\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x!$$

Lösung:

Sie versuchen auch hier, auf das Grundintegral $\int x^n \,\mathrm{d}x$ zurückzukommen. Sie führen wieder für den linearen Ausdruck $2x+3$ die neue Veränderliche u ein:

$$u = 2x+3, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u.$$

Damit wird

$$\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.}}$$

Die beiden letzten Lehrbeispiele können Sie in einer Formel verallgemeinern. Der Integrand soll die n-te Potenz eines in x linearen Ausdrucks und n eine von -1 verschiedene reelle Zahl sein.

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int u^n\,du \qquad u = ax+b$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad \frac{du}{dx} = a \qquad dx = \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}\,(ax+b)^{n+1} + C$$

Im Fall $n = -1$ haben Sie mit derselben Substitution

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{a}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Ist der Integrand eine trigonometrische oder hyperbolische Funktion eines linearen Ausdrucks:

$$f(x) = \sin\,(ax+b), \qquad f(x) = \cos\,(ax+b),\ldots$$

$$f(x) = \sinh\,(ax+b), \qquad f(x) = \cosh\,(ax+b),\ldots$$

so führen Sie ebenfalls u in der Form $u = ax + b$ ein.

Wie sieht die Substitutionsmethode nun formelmäßig aus?

Das Integral $\int f[\varphi(x)]\,dx$ soll berechnet werden, indem eine neue Veränderliche $u = \varphi(x)$ eingeführt wird.

Die Funktion $u = \varphi(x)$ muß dabei eindeutig in die Funktion $x = \psi(u)$ umkehrbar und differenzierbar sein. Durch Differentiation erhalten Sie

$$\frac{dx}{du} = \psi'(u), \qquad dx = \psi'(u)\,du.$$

Setzen Sie dies in das zu lösende Integral ein, dann bekommen Sie als Formel für die Substitutionsmethode:

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\,dx = \int f(u)\,\psi'(u)\,du} \tag{55}$$

Nachdem Sie die Integration des rechts stehenden Integrals durchgeführt haben, führen Sie durch $u = \varphi(x)$ wieder die ursprüngliche Veränderliche x ein.

Oft muß der Integrand vor der Substitution umgeformt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

1. Beispiel:

Das Integral $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ stellt eine Verallgemeinerung des Grundintegrals (48) dar. Wie Sie erkennen, unterscheiden sich beide Integrale nur in der im Nenner auftretenden Konstanten. Sie haben nun einen Weg zu suchen, der das zu lösende

Integral auf das Grundintegral zurückführt. Dazu müssen Sie zunächst darauf bedacht sein, die schon erwähnte Konstante auf den Wert 1 zurückzuführen. Sie erreichen das leicht, indem Sie a^2 im Nenner ausklammern und den Faktor $\frac{1}{a^2}$ vor das Integralzeichen setzen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Führen Sie nun noch die Substitution $u = \frac{x}{a}$ ein, so erhalten Sie

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad u = \frac{x}{a},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a}, \qquad \mathrm{d}x = a \cdot \mathrm{d}u$$

$$= \frac{a}{a^2} \int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan u + C_1 \qquad \left(= -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \cot u + C_2\right),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{x}{a} + C_1}} \qquad \left(\underline{\underline{= -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \cot \frac{x}{a} + C_2}}\right).$$

2. Beispiel:

Vollkommen analog können Sie bei der Lösung des Integrals $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ vorgehen. Es ist

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad u = \frac{x}{a}, \quad \mathrm{d}x = a \cdot \mathrm{d}u$$

$$= \frac{a}{a} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \operatorname{arc} \sin u + C_1 \qquad (= -\operatorname{arc} \cos u + C_2),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underline{\underline{\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C_1}} \qquad \left(= \underline{\underline{-\operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + C_2}}\right).$$

Zur Lösung *bestimmter Integrale* können zwei Wege beschritten werden, die sich jedoch in ihrem Kern nicht voneinander unterscheiden.

1. Weg:

Sie lösen das vorliegende bestimmte Integral zunächst als unbestimmtes Integral, lassen also vorerst die Integrationsgrenzen außer Betracht. Erst nachdem Sie wieder die ursprüngliche Veränderliche eingesetzt haben, führen Sie die Grenzen ein.

Lehrbeispiel 68

Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, \mathrm{d}x!$$

Lösung:

Berechnen des unbestimmten Integrals:

$$\int \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \cos u \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3} \sin u$$

$$= \frac{1}{3} \sin 3x$$

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \mathrm{d}u$$

Die Integrationskonstante wurde fortgelassen, da sie bei der Berechnung des bestimmten Integrals ohnehin fortfällt. Auch späterhin wird in ähnlichen Fällen häufig ebenso verfahren.

Übergang zum bestimmten Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Veranschaulichen Sie sich das Ergebnis, indem Sie die Kurven $y = \cos x$ und $y = \cos 3x$ zeichnen und die Flächeninhalte unter den Kurven vergleichen.

2. Weg:

Die ursprünglichen Grenzen geben an, zwischen welchen Werten sich die ursprüngliche Integrationsveränderliche bewegen soll. Führen Sie nun eine neue Veränderliche ein, so müssen Sie entsprechend der Substitution die Grenzen umrechnen.

Betrachten Sie dazu das vorhergehende Lehrbeispiel 68! Die Grenzen besagten hier, daß x von 0 bis $\frac{\pi}{6}$ laufen soll. Setzen Sie nun $u = 3x$, so muß die neue Veränderliche u von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ laufen. Diese Werte erhalten Sie, wenn Sie in die Substitutionsformel nacheinander $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{6}$ einsetzen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx$$

Substitution:

$u = 3x$

$\frac{du}{dx} = 3 \qquad dx = \frac{1}{3} du$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze $x = 0$ ergibt $u = 3 \cdot 0 = 0$

obere Grenze $x = \frac{\pi}{6}$ ergibt $u = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{3} \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Sie sehen, daß beim zweiten Weg das Zurückgehen auf die ursprüngliche Veränderliche fortfällt. Das getrennte Umrechnen der Grenzen ist lediglich eine Vorwegnahme der reinen Rechenoperationen, die Sie beim ersten Weg bei der Einführung der alten Grenzen, d. h. bei der Berechnung von $F(b)$ und $F(a)$ auch durchführen mußten.

Lehrbeispiel 69

Lösen Sie das Integral $\int_1^3 (2x + 1)^3 \, dx$*!*

Lösung:

$$\int_1^3 (2x + 1)^3 \, dx$$

Substitution:

$u = 2x + 1$

$\frac{du}{dx} = 2 \qquad dx = \frac{1}{2} du$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze $x = 1 \qquad u = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

obere Grenze $x = 3 \qquad u = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$$= \frac{1}{2} \int_3^7 u^3 \, du$$

$$= \frac{u^4}{8} \Big|_3^7 = \frac{1}{8} (7^4 - 3^4) = \frac{2320}{8} = \underline{\underline{290}}$$

Oft kann der Integrand mit Hilfe goniometrischer Beziehungen so umgeformt werden, daß sich die Substitutionsmethode anwenden läßt. Das ist z. B. bei den sehr wichtigen Integralen $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ und $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ möglich.

$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

Aus der Goniometrie kennen Sie die Umrechnungsformel

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left(\int \mathrm{d}x + \int \cos 2x \, \mathrm{d}x \right) && \text{Im 2. Integral substituieren Sie:} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \cos u \, \mathrm{d}u \right) && u = 2x, \\
&= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin u \right) + C && \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{d}u. \\
&= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C,
\end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.}}$$

$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

Hier können Sie analog verfahren. Bedenken Sie aber, daß $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ist, so können Sie die Lösung auf das vorhergehende Integral zurückführen.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= x - \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C
\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C}}$$

$\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x$

Sie sollen jetzt noch das Integral

$$\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x$$

kennenlernen. Hierin seien m und n ganzzahlige, positive Werte. Auch hier nehmen

Sie zunächst eine goniometrische Umformung vor. Ersetzen Sie in der bekannten Formel

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

oder

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

die Argumente $\frac{\alpha+\beta}{2}$ durch mx und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ durch nx. Zur Bestimmung von α und β erhalten Sie dann die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta = 2mx,$$
$$\alpha - \beta = 2nx.$$

Aus diesem Gleichungssystem finden Sie leicht

$$\alpha = (m+n)\,x \quad \text{und} \quad \beta = (m-n)\,x$$

und damit

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x].$$

Das Integral selbst gestaltet sich so einfacher zu

$$\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \cos(m-n)\,x\,\mathrm{d}x - \int \cos(m+n)\,x\,\mathrm{d}x\right].$$

Sie substituieren:

$$u = (m-n)\,x \quad \text{bzw.} \quad v = (m+n)\,x,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = m-n, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = m+n,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{m-n}\,\mathrm{d}u, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}\,\mathrm{d}v.$$

(Beachten Sie dabei, daß $m \neq n$ sein muß!)

$$\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n}\int \cos u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{m+n}\int \cos v\,\mathrm{d}v\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n}\sin u - \frac{1}{m+n}\sin v\right) + C$$

$$\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)\,x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\,x}{m+n}\right) + C}}$$

Übungen

52. a) $\int (4x-7)^3\,\mathrm{d}x$ b) $\int \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

53. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)^3}$ b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-3x}$

54. a) $\int \sqrt{(5x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

55. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x-1)}$ b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(3-x)}$

56. a) $\int\limits_1^3 (2x-3)^4\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{3x+1}$

57. $\int \sin^2(2x+3)\,\mathrm{d}x$ 58. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}-3\right)\mathrm{d}x$

Anleitung zu Übung 57 und 58:
Führen Sie diese Integrale durch Einführung einer neuen Veränderlichen u auf die Integrale $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ *zurück.*

59. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ 60. $\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$

61. *Berechnen Sie* $\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x$ *für den Fall* $m = n$*!*

62. *Berechnen Sie für* $m \neq n$ *und* $m = n$ *die Integrale:*
a) $\int \sin mx \cos nx\,\mathrm{d}x$, b) $\int \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x$*!*

63. $\int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x$ 64. $\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$

Anleitung zu Übung 63 und 64:
Verfahren Sie analog wie bei den entsprechenden trigonometrischen Funktionen.

65. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 66. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

13.12 Der Integrand besitzt die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. Hat der Integrand die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, so führen Sie die neue Veränderliche in der Form $u = \varphi(x)$ ein.

$$u = \varphi(x), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x), \qquad \mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann wird

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\varphi(x)}\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u,$$

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C$$
$$= \ln|\varphi(x)| + C.$$

Lehrbeispiel 70

Berechnen Sie $\int \cot x \, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$$

In diesem Beispiel ist der Nenner $\varphi(x) = \sin x$. Setzen Sie also

$$u = \sin x,$$

so wird
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x, \qquad \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$= \ln |u| + C$$
$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\ln |\sin x| + C}}$$

Zuweilen können Sie erst nach Umformung des Integranden auf die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, \mathrm{d}x$ kommen.

Lehrbeispiel 71

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x}$*!*

Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x} \, \mathrm{d}x}{\ln x}$$

Substitution:
$$u = \ln x$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$
$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$= \ln |u| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = \underline{\underline{\ln |\ln x| + C}}$$

Lehrbeispiel 72

Lösen Sie $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$*!*

Lösung:

Wenn auch in diesem Beispiel zur Anwendung des Substitutionsverfahrens der Faktor 2 im Zähler fehlt, können Sie dieses Integral doch auf die behandelte Weise lösen.

$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2}$ Substitution: $u = x^2 + a^2$

Aus dem Differentialquotienten $\frac{du}{dx} = 2x$

berechnen Sie $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2} \ln (a^2 + x^2) + C}}$$

Fehlende konstante Faktoren stören also die Anwendbarkeit des eingangs dargestellten Lösungsverfahrens nicht.

Lehrbeispiel 73

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sin 2x}$*!*

Lösung:

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}{\tan x}$$

Substitution:

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln |\tan x| + C}}$$

Das Integral $\int \frac{dx}{\sin x}$ läßt sich auf das vorherige Beispiel zurückführen, wenn Sie $x = 2u$ setzen:

$$x = 2u, \qquad \frac{dx}{du} = 2, \qquad dx = 2\,du.$$

Damit erhalten Sie

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{\sin 2u} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin 2u}.$$

Analog der Lösung des Lehrbeispiels 73 erhalten Sie

$$2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin 2u} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |\tan u| + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \underline{\underline{\ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C.}}$$

Ersetzen Sie jetzt x durch $x + \frac{\pi}{2}$ und bedenken Sie, daß $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ist, so können Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ berechnen.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Substitution:

$$u = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$$

$$= \ln \left|\tan \frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \underline{\underline{\ln \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C}}$$

Lehrbeispiel 74

Berechnen Sie $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a + b \sin x}$!

Lösung:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a + b \sin x}$$

Substitution:

$$u = a + b \sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = b \cos x$$

$$\frac{1}{b}\,\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze $x = 0 \quad u = a$

obere Grenze $x = \frac{\pi}{2} \quad u = a + b$

$$= \frac{1}{b} \int_a^{a+b} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \frac{1}{b} \ln |u| \Big|_a^{a+b}$$

$$= \frac{1}{b} (\ln |a+b| - \ln |a|)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{b} \ln \left|\frac{a+b}{a}\right|}}$$

Übungen

67. $\int \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x} \, \mathrm{d}x$

68. $\int \frac{4x^3 - 18x}{x^4 - 9x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$

69. $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 2} \, \mathrm{d}x$

70. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2) \arctan x}$

71. $\int (\tan x + \cot x) \, \mathrm{d}x$

72. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh 2x}$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$

73. $\int (\tanh x + \coth x) \, \mathrm{d}x$

74. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}$

75. $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$

76. $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{4x^2 - 9}$

13.13 Der Integrand besitzt die Form $[\varphi(x)]^n \varphi'(x)$ $(n \neq -1)$.

Finden Sie im Integranden die Potenz einer Funktion $\varphi(x)$ und als Faktor deren Ableitung vor, so führen Sie die neue Veränderliche in der Form $u = \varphi(x)$ ein:

$$u = \varphi(x), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x), \qquad \mathrm{d}u = \varphi'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Damit erhalten Sie

$$\int [\varphi(x)]^n \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int u^n \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1),$$

$$\int [\varphi(x)]^n \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \quad [\varphi(x)]^{n+1} + C.$$

Hier muß wieder der Fall $n = -1$ ausgeschlossen werden, da sonst der Nenner den Wert Null annimmt.

Vergleichen Sie einmal den Integranden, den Sie für $n = -1$ erhalten, mit dem im Abschnitt 13.12 behandelten!

Lehrbeispiel 75

Lösen Sie $\int (x^2 + 3)^3\, x\, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Wie auch in einigen Lehrbeispielen des Abschnitts 13.12 behindert der fehlende Faktor 2 nicht die Anwendbarkeit der Lösungsmethode.

$$\int (x^2 + 3)^3\, x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int u^3\, \mathrm{d}u = \frac{1}{8} u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{8} (x^2 + 3)^4 + C}}$$

Substitution:

$$u = x^2 + 3$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, \mathrm{d}u$$

Lehrbeispiel 76

Es ist $\int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ *zu lösen!*

Lösung:

$$\int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, x\, \mathrm{d}x$$

Substitution:

$$u = a^2 - x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x, \quad x\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\, \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}u$$

$$= -u^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{-\sqrt{a^2 - x^2} + C}}$$

Lehrbeispiel 77

Berechnen Sie $\int \sin x \cos x\, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Setzen Sie $\quad u = \sin x,$

dann wird $\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x, \qquad \mathrm{d}u = \cos x\, \mathrm{d}x.$

Das Integral lautet dann

$$\int \sin x \cos x\, \mathrm{d}x = \int u\, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C_1,$$

$$\int \sin x \cos x\, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin^2 x + C_1}}.$$

Hätten Sie $u = \cos x$ gesetzt, dann wäre der Rechengang der folgende gewesen:

$$u = \cos x, \qquad \frac{du}{dx} = -\sin x, \qquad du = -\sin x\, dx,$$

$$\int \cos x \sin x\, dx = \int -u\, du = -\frac{u^2}{2} + C_2,$$

$$\int \cos x \sin x\, dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2}}.$$

Lehrbeispiel 78

Lösen Sie $\int \sin^5 x \cos x\, dx$!

Lösung:

Substitution:

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x, \qquad \cos x\, dx = du$

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \int u^5\, du$$

$$= \frac{1}{6} u^6 + C = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sin^6 x + C}}$$

Lehrbeispiel 79

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x} \ln x\, dx$!

Lösung:

$$u = \ln x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}}$$

Lehrbeispiel 80

Berechnen Sie $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$!

Lösung:

$$u = \arcsin x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C}}$$

Übungen

77. *Untersuchen Sie den Zusammenhang der beiden verschiedenen Lösungsformen des Lehrbeispiels 77!*

78. a) $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

79. $\int \frac{\tan 2x}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x$ *Anleitung: Führen Sie zuerst eine neue Veränderliche durch $u = 2x$ ein.*

80. $\int \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

81. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *Anleitung: Verfahren Sie analog wie bei Übung 79.*

13.14 Der Integrand ist eine irrationale Funktion eines quadratischen Ausdrucks. Es sind hier die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

Fall α) Der Integrand enthält $\sqrt{a^2-x^2}$

Fall β) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2+a^2}$

Fall γ) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2-a^2}$

Der Fall $\sqrt{-x^2-a^2}$ scheidet aus unseren Betrachtungen aus, da für jeden reellen Wert von x die Wurzel imaginär ist.

Einige besondere Integrale mit irrationalem Integranden haben Sie bereits im Abschnitt 13.13 kennengelernt. Weiterhin wurden irrationale Integranden, in denen die Integrationsveränderliche x nur in der ersten Potenz auftritt, im Abschnitt 13.11 behandelt.

α) *Der Integrand enthält* $\sqrt{a^2-x^2}$

In diesem Fall führt die Substitution $x = a\sin u$ oder (völlig gleichwertig) $x = a\cos u$ unter Anwendung der Beziehung $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ zur Beseitigung der Wurzel.

		bzw.
Sie setzen	$x = a\sin u,$	$x = a\cos u.$
Dann ist	$\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u,$	$\mathrm{d}x = -a\sin u\,\mathrm{d}u,$
und	$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 u} = a\cos u,$	$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cos^2 u} = a\sin u.$

Zur Zurückführung auf die ursprüngliche Veränderliche x brauchen Sie die Werte

$\sin u = \frac{x}{a},$	$\cos u = \frac{x}{a},$
$\cos u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},$	$\sin u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},$
$u = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a},$	$u = \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a}.$

Lehrbeispiel 81

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$!

Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos u \,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}} \qquad \text{Substitution:}$$

$$= \int \frac{a \cos u \,\mathrm{d}u}{a \cos u} \qquad x = a \sin u, \quad \mathrm{d}x = a \cos u \,\mathrm{d}u$$

$$= \int \mathrm{d}u = u + C \qquad u = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underline{\underline{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C}}$$

Prüfen Sie selbst nach, daß sich mit Hilfe der Substitution $x = a \cos u$ die gleichwertige Lösung $-\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} + C$ ergibt.

Lehrbeispiel 82

Berechnen Sie $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int a \cos u \cdot a \cos u \,\mathrm{d}u \qquad \text{Substitution:}$$

$$= a^2 \int \cos^2 u \,\mathrm{d}u \qquad x = a \sin u, \quad \mathrm{d}x = a \cos u \,\mathrm{d}u$$

$$u = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}$$

Das Integral $\int \cos^2 u \,\mathrm{d}u$ ist Ihnen in Abschnitt 13.11 begegnet. Unter Verwendung der dort gefundenen Lösung erhalten Sie

$$a^2 \int \cos^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.}}$$

β) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 + a^2}$

Die Irrationalität können Sie in diesem Fall durch die Substitution $x = a \sinh u$ und unter Benutzung der Beziehung $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ beseitigen. Multiplizieren Sie die letzte Gleichung mit a^2, so erhalten Sie

$$a^2 \cosh^2 u - a^2 \sinh^2 u = a^2$$

oder

$$a^2 \sinh^2 u + a^2 = a^2 \cosh^2 u.$$

Setzen Sie deshalb in $\sqrt{x^2 + a^2}$ die Substitution $x = a \sinh u$ ein, so kommt die Wurzel in Fortfall.

Für die Substitution $\quad x = a \sinh u$

ergibt sich $\quad \mathrm{d}x = a \cosh u \, \mathrm{d}u$

und

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \sinh^2 u + a^2} = a \cosh u.$$

Umgekehrt ergibt sich

$$\sinh u = \frac{x}{a},$$

$$\cosh u = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2},$$

$$u = \operatorname{ar\,sinh} \frac{x}{a} = \ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$

Für das praktische Rechnen ist die logarithmische Form von u zu bevorzugen.

Lehrbeispiel 83

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ *!*

Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{a}{a} \int \frac{\cosh u}{\cosh u} \, \mathrm{d}u$$

$$= \int \mathrm{d}u = u + C'$$

$$= \ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C'$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a + C'$$

Substitution:

$x = a \sinh u, \quad \mathrm{d}x = a \cosh u \, \mathrm{d}u$

$u = \ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

Fassen Sie die Konstanten $-\ln a$ und C' zu einer neuen Konstanten C zusammen, so lautet das Ergebnis

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \underline{\underline{\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.}}$$

Das vorstehend behandelte Integral läßt sich mit Hilfe der linearen Substitution $u = \frac{x}{a}$ auf Grundintegral (53) zurückführen. Prüfen Sie diesen Lösungsweg nach!

Lehrbeispiel 84

Berechnen Sie $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = a^2 \int \cosh^2 u\, du$$

Substitution:

$$x = a \sinh u, \quad dx = a \cosh u\, du$$

$$u = \ln \frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

Die Lösung des rechts stehenden Integrals kennen Sie aus der Übung 64. Ersetzen Sie darin x durch u, dann bekommen Sie

$$a^2 \int \cosh^2 u\, du = \frac{a^2}{2} (u + \sinh u \cosh u) + C'$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\ln \frac{1}{a} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2}\right] + C',$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \underline{\underline{\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.}}$$

Auch hier wurde $-\frac{a^2}{2} \ln a$ mit der Integrationskonstanten C' zu einer neuen Konstanten C zusammengezogen.

γ) Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 - a^2}$

Hier führt die Einführung der cosh-Funktion zur Aufhebung des Wurzelzeichens.

Mit $\quad x = a \cosh u$

wird $\quad dx = a \sinh u\, du,$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2} = a \sinh u.$$

Weiterhin ist

$$\cosh u = \frac{x}{a},$$

$$\sinh u = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$u = \operatorname{ar\,cosh} \frac{x}{a} = \ln \frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Lehrbeispiel 85

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$*!*

Lösung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sinh u\, du}{a \sinh u}$$

$$= \int du = u + C'$$

$$= \ln \frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C'$$

$$= \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a + C'$$

Substitution:

$$x = a \cosh u, \quad dx = a \sinh u\, du$$

$$u = \ln \frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

Fassen Sie wiederum $-\ln a$ und C' zu einer neuen Konstanten C zusammen, so wird

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \underline{\underline{\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.}}$$

Lehrbeispiel 86

Berechnen Sie $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int \sinh^2 u\,\mathrm{d}u$$

Substitution:

$x = a\cosh u, \quad \mathrm{d}x = a\sinh u\,\mathrm{d}u$

$u = \ln \frac{1}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

In Übung 63 berechneten Sie $\int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + C$. Ersetzen Sie hierin x durch u, so erhalten Sie

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{2}(\sinh u \cosh u - u) + C' \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \ln \frac{1}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right] + C', \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.}}$$

Auch hier wurde wiederum $\frac{a^2}{2}\ln a$ mit C' zu einer neuen Integrationskonstanten C zusammengezogen.

Oft ist der Radikand nicht in der reinquadratischen Form gegeben. Sie können ihn aber leicht durch Einführung der quadratischen Ergänzung auf die Form der behandelten Integrale zurückführen.

Lehrbeispiel 87

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$*!*

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + 9}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + 3^2}} \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + 3^2}) + C \end{aligned}$$

Substitution

$u = x - 2$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \underline{\underline{\ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}) + C}}$$

Lehrbeispiel 88

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x-x^2}}$!

Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

Substitution:

$u = x - 2$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{3^2-u^2}}$$

$$= \arcsin \frac{u}{3} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \underline{\underline{\arcsin \frac{x-2}{3} + C}}$$

Lehrbeispiel 89

Berechnen Sie $\int\limits_2^5 \sqrt{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\int\limits_2^5 \sqrt{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 \sqrt{(x-2)^2+16}\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$u = x - 2$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze: $x = 2 \quad u = 2 - 2 = 0$

obere Grenze: $x = 5 \quad u = 5 - 2 = 3$

$$= \int\limits_0^3 \sqrt{u^2+16}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+16} + \frac{16}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+16}\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 5 + 8\ln 8 - 0 - 8\ln 4$$

$$= \frac{15}{2} + 8\ln\frac{8}{4} = \frac{15}{2} + 8\ln 2$$

$$\approx 7{,}5 + 8\cdot 0{,}6931 \approx 13{,}045$$

$$\int\limits_2^5 \sqrt{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x \approx \underline{\underline{13{,}045}}$$

Lehrbeispiel 90

Berechnen Sie $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$!

Lösung:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+3)^2+4}}$$

Substitution:

$u = x + 3$

$\frac{du}{dx} = 1, \qquad du = dx$

Im Zähler ergibt sich

$x = u - 3.$

$$= \int \frac{(u-3)\,du}{\sqrt{u^2+4}}$$

Sie zerlegen das Integral in zwei Teilintegrale.

$$= \int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+4}} - 3\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$$

Das links stehende Integral läßt sich entweder nach Unterabschnitt β) oder (einfacher) nach Abschnitt 13.13 lösen.

$$= \sqrt{u^2+4} - 3\ln\left(u + \sqrt{u^2+4}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \underline{\underline{\sqrt{x^2+6x+13} - 3\ln\left(x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right) + C}}$$

Übungen

82. *a)* $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ *b)* $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$ *c)* $\int \sqrt{6-2x-x^2}\,dx$

83. *a)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ *b)* $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+5}}$ *c)* $\int \sqrt{x^2+6x+15}\,dx$

84. *a)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$ *b)* $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$ *c)* $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+9}}$

85. *a)* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-2x-x^2}}$ *b)* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8x+32}}$ *c)* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

86. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+18}}$ 87. $\int_1^6 \sqrt{24+2x-x^2}\,dx$ 88. $\int \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$

Zusammenfassung

Durch die Einführung einer neuen Veränderlichen lassen sich schwierigere Integrale auf die Grundintegrale zurückführen. Bei der Substitution ist nicht nur x, sondern auch dx umzurechnen.

Auf folgende Formen des Integranden können Sie die Substitutionsmethode anwenden:

Der Integrand ist die Funktion einer linearen Funktion der Veränderlichen:
$f(x) = f(ax + b)$

Substitution:
$u = ax + b \qquad dx = \frac{1}{a}\,du$

Der Integrand enthält neben der Funktion auch noch die Ableitung dieser Funktion:

1. $f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

Substitution:
$u = \varphi(x) \qquad du = \varphi'(x)\,dx$

2. $f(x) = [\varphi(x)]^n \cdot \varphi'(x)$
$(n \neq -1)$

$$\int [\varphi(x)]^n \cdot \varphi'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\,\varphi(x)^{n+1} + C$$

Substitution
$u = \varphi(x) \qquad du = \varphi'(x)\,dx$

Der Integrand ist eine irrationale Funktion:

1. Der Integrand enthält $\sqrt{a^2 - x^2}$

Substitution:
$x = a \sin u \qquad dx = a \cos u\,du$
bzw.
$x = a \cos u \qquad dx = -a \sin u\,du$

2. Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 + a^2}$

Substitution:
$x = a \sinh u \qquad dx = a \cosh u\,du$

3. Der Integrand enthält $\sqrt{x^2 - a^2}$

Substitution:
$x = a \cosh u \qquad dx = a \sinh u\,du$

Zum Lösen von bestimmten Integralen mit Hilfe der Substitutionsmethode können zwei Wege beschritten werden:

1. Es wird zunächst das unbestimmte Integral gelöst. Die Grenzen werden erst wieder nach Einführen der ursprünglichen Veränderlichen berücksichtigt.
2. Die Grenzen werden mit Hilfe der Substitution umgerechnet und das bestimmte Integral für die neue Veränderliche und für die neuen Grenzen berechnet.

13.2 Partielle Integration

Aus der Differentialrechnung kennen Sie den Differentialquotienten eines Produktes:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integrieren Sie beide Seiten, so erhalten Sie

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\,dx = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx.$$

Das Integral auf der linken Seite können Sie sofort auswerten, denn der Integrand ist ein Differentialquotient. Sie wissen aber, daß sich Integrieren und Differenzieren gegenseitig aufheben. Damit wird

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch Umformung bekommen Sie

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (56)$$

oder kurz

$$\int \boldsymbol{f' \cdot g\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x}.$$

Das ist die Formel für die **partielle Integration** (Teil- oder Produktintegration).

Wie Sie in den folgenden Lehrbeispielen erkennen werden, wird die Integration durch diese Formel auf zwei Teilintegrationen zurückgeführt. Daher rührt auch der Name für dieses Verfahren.

Für das bestimmte Integral lautet die Formel entsprechend:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lehrbeispiel 91

Berechnen Sie $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Setzen Sie in diesem Beispiel	$f' = \mathrm{e}^x$
dann ist	$f = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$ (1. Teilintegration).
Weiter setzen Sie	$g = x.$
Durch Differenzieren erhalten Sie	$g' = 1.$

Nach Formel (56) wird

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Die Integrationskonstante setzen Sie erst nach der Beendigung der letzten Integration ein. Die zweite Teilintegration liefert

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \underline{\underline{\mathrm{e}^x(x-1) + C}}.$$

Lehrbeispiel 92

Berechnen Sie $\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$!

Lösung:

Ansatz: $f' = \sin x \qquad g = x$

$f = \int \sin x \,\mathrm{d}x \qquad g' = 1$

$= -\cos x$

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-x \cos x + \sin x + C}}$$

In diesen beiden Beispielen mußten Sie jeweils $g = x$ setzen, um mit $g' = 1$ das Integral $\int f g' \,\mathrm{d}x$ auf eine leicht lösbare Form zu bringen.

Würden Sie umgekehrt verfahren, also $f' = x$ setzen, dann wäre mit $f = \frac{1}{2} x^2$ das auf der rechten Seite stehende Integral $\int f g' \,\mathrm{d}x$ komplizierter als das ursprüngliche geworden.

Lehrbeispiel 93

Berechnen Sie $\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x \qquad (n \neq -1)$!

Lösung:

Ansatz: $f' = x^n \qquad g = \ln x$

$f = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad g' = \frac{1}{x}$

Hier wählen Sie $f' = x^n$ und $g = \ln x$, weil die Ableitung g' der logarithmischen Funktion wie auch f rationale Funktionen sind. Das Produkt fg' im Integrand des rechts stehenden Integrals kann somit zu einer rationalen Funktion zusammengefaßt werden, die leicht integrierbar ist.

$$\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln x - 1] + C}}$$

Für $n = 0$ erhalten Sie:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x (\ln x - 1) + C.$$

Der Ausnahmefall $n = -1$ wurde bereits im Lehrbeispiel 79 des Abschnitts 13.13 durch Einführung einer neuen Veränderlichen gelöst. Dieses Integral läßt sich aber auch mit Hilfe der partiellen Integration behandeln, wie Ihnen nachstehend gezeigt wird.

Lehrbeispiel 94

Berechnen Sie $\int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Ansatz: $f' = \frac{1}{x}$ $\qquad g = \ln x$

$f = \ln x \qquad g' = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}x = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}x$$

Auf der rechten Seite steht wieder das Ausgangsintegral. Sie bringen es auf die linke Seite:

$$2\int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}x = (\ln x)^2.$$

Sie dividieren durch 2, und fügen die Integrationskonstante hinzu:

$$\int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.}}$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Lehrbeispiel 79!

Fehlt ein zweiter Faktor im Integranden, so können Sie oft zum Ziel kommen, wenn Sie $f' = 1$ setzen, wie z. B. in Lehrbeispiel 95 und 96.

Lehrbeispiel 95

Berechnen Sie $\int \operatorname{arc} \sin x \,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Ansatz: $f' = 1 \qquad g = \operatorname{arc} \sin x$

$f = x \qquad g' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\int \operatorname{arc} \sin x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arc} \sin x - \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Das rechts stehende Integral haben Sie bereits gelöst (vgl. 13.13 Lehrbeispiel 76).

$$\int \operatorname{arc} \sin x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2} + C}}$$

Lehrbeispiel 96

Berechnen Sie $\int_0^1 \operatorname{arc} \tan x \,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Ansatz: $f' = 1 \qquad g = \operatorname{arc} \tan x$

$f = x \qquad g' = \frac{1}{1 + x^2}$

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Beachten Sie bei der Lösung des rechts stehenden Integrals Lehrbeispiel 72

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = x \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \Big|_0^1$$

$$= (1 \cdot \arctan 1 - 0) - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1)$$

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}4388}}$$

Bei verschiedenen anderen Integralen müssen Sie die partielle Integration mehrmals hintereinander durchführen, so z. B. im folgenden Lehrbeispiel 97.

Dabei ist zu beachten, daß immer in gleicher Weise f' und g gewählt wird, da sonst der bereits beschrittene Weg wieder rückläufig durchlaufen wird.

Lehrbeispiel 97

Berechnen Sie $\int e^x x^3 \,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

1. Durchgang: $f' = e^x \qquad g = x^3$

$f = e^x \qquad g' = 3x^2$

$$\int e^x x^3 \,\mathrm{d}x = e^x x^3 - 3 \int e^x x^2 \,\mathrm{d}x$$

2. Durchgang: $f' = e^x \qquad g = x^2$

$f = e^x \qquad g' = 2x$

$$\int e^x x^3 \,\mathrm{d}x = e^x x^3 - 3 \left(e^x x^2 - 2 \int e^x x \,\mathrm{d}x\right)$$

Für das ganz rechts stehende Integral kennen Sie bereits die Lösung aus Lehrbeispiel 91.

$$\int e^x x^3 \,\mathrm{d}x = e^x x^3 - 3 e^x x^2 + 6 e^x (x-1) + C$$

$$\int e^x x^3 \,\mathrm{d}x = \underline{\underline{e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C}}$$

Lehrbeispiel 98

Berechnen Sie $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

1. Durchgang: $f' = e^x \qquad g = \sin x$

$f = e^x \qquad g' = \cos x$

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

2. Durchgang: $f' = e^x \qquad g = \cos x$

$f = e^x \qquad g' = -\sin x$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Wie Sie sehen, kommen Sie nach dem 2. Durchgang auf das Ausgangsintegral zurück. Die Lösung erhalten Sie, indem Sie die beiden Integrale auf der linken Seite vereinigen und durch den links auftretenden Zahlenfaktor dividieren.

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}}$$

Rekursionsformeln

Mitunter können Sie Integrale, deren Integrand durch die n-te Potenz einer Funktion gebildet wird, dadurch lösen, daß Sie durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration den Grad n schrittweise vermindern. Dieses Verfahren wird *Rekursion* genannt. Sie haben dieses Verfahren bereits in Lehrbeispiel 97 für den Integranden $e^x x^3$ kennengelernt. Vorausgesetzt wird, daß n eine ganze Zahl ist.

$\int \cos^n x \, dx$

Spalten Sie einen Faktor $\cos x$ ab, so erhalten Sie

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos x \cos^{n-1} x \, dx .$$

Sie setzen

$f' = \cos x, \qquad g = \cos^{n-1} x,$

$f = \sin x, \qquad g' = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x .$

Damit ergibt sich

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx .$$

Mit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ wird

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx .$$

Sie multiplizieren den Integranden aus, und zerlegen das Integral in 2 Teilintegrale:

$$\int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx .$$

Das ganz rechts stehende Integral ist wieder gleich dem Ausgangsintegral auf der linken Seite. Bringen Sie es auf die linke Seite, so erhalten Sie, da $(n - 1) + 1 = n$ ist,

$$n \int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n - 1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

oder

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx} \tag{57}$$

Das rechts verbleibende Integral hat im Integrand einen um 2 verminderten Exponenten. Wenden Sie die Rekursionsformel mehrfach hintereinander an, so können Sie den Exponenten immer auf 1 oder 0 reduzieren.

In ähnlicher Weise kann hergeleitet werden (auf den Beweis wird hier verzichtet):

$$\boxed{\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx} \tag{58}$$

Lehrbeispiel 99

$\int \cos^5 x \, dx$ *ist zu berechnen.*

Lösung:

Die 1. Anwendung der Rekursionsformel (57) führt auf $\cos^3 x \, dx$:

$$n = 5, \qquad n - 1 = 4, \qquad n - 2 = 3,$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x \, dx.$$

Nochmaliges Anwenden von Formel (57) auf das rechts stehende Integral:

$$n = 3, \qquad n - 1 = 2, \qquad n - 2 = 1,$$

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx\right) \\ &= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{15} \sin x \cos^2 x + \frac{8}{15} \sin x + C \\ &= \frac{1}{15} \sin x \, (3 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 8) + C.\end{aligned}$$

Sie können den gesamten Ausdruck auf eine trigonometrische Funktion, die Sinusfunktion, zurückführen, wenn Sie

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x$$

und $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

einsetzen.

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \frac{1}{15} \sin x \, (3 - 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x + 4 - 4 \sin^2 x + 8) + C \\ &= \frac{1}{15} \sin x \, (15 - 10 \sin^2 x + 3 \sin^4 x) + C\end{aligned}$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$

Kommen im Integranden die Potenzen $\sin^m x$ und $\cos^n x$ gleichzeitig vor, so haben Sie zwei Fälle zu unterscheiden:

a) mindestens ein Exponent ist ungerade, und

b) beide Exponenten sind gerade.

Die Behandlung dieser beiden Möglichkeiten lernen Sie in den folgenden Lehrbeispielen kennen.

Lehrbeispiel 100

Berechnen Sie $\int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Der Exponent von $\sin x$ ist ungerade. Sie spalten von $\sin^3 x$ einen Faktor $\sin x$ ab, so daß Sie erhalten

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \sin^2 x \sin x \\ &= (1 - \cos^2 x) \sin x. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substitution: $\quad u = \cos x, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin x, \quad -\mathrm{d}u = \sin x \, \mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= -\int (u^4 - u^6) \, \mathrm{d}u \\ &= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\int \sin^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C}}$$

Es kommt hier also darauf an, den Integranden so umzuformen, daß neben den Potenzen einer der beiden trigonometrischen Funktionen (hier der Kosinusfunktion), die andere (hier die Sinusfunktion) nur in der ersten Potenz als Faktor auftritt.

Dieses Abspalten können Sie auch bei den schon behandelten Integralen $\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$ und $\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$ anwenden, wenn n eine ungerade Zahl ist. Auf diese Weise soll noch einmal das schon im Lehrbeispiel 99 behandelte Integral gelöst werden.

Lehrbeispiel 101

Lösen Sie $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$*!*

Lösung:

$$\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \text{Substitution:}$$
$$= \int (1 - u^2)^2\,\mathrm{d}u \qquad u = \sin x \quad \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (1 - 2u^2 + u^4)\,\mathrm{d}u$$
$$= u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Lehrbeispiel 102

Berechnen Sie $\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

In diesem Beispiel liegt der Fall b) vor, beide Exponenten sind gerade. Sie drücken hier die eine der beiden trigonometrischen Funktionen restlos durch die andere aus. Selbstverständlich werden Sie die Funktion umwandeln, die den kleinsten Exponenten hat.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x - \int \cos^6 x\,\mathrm{d}x$$

Diese beiden Integrale können Sie nun aber unter Verwendung der Formel (57) lösen. Sie reduzieren zunächst das rechts stehende Integral:

$$\int \cos^6 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$$

Damit erhalten Sie

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\sin x\cos^5 x - \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{1}{6}\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x\right).$$

Aus 13.11 wissen Sie, daß $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$ ist. Dies eingesetzt, ergibt

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{8}(x + \sin x \cos x)\right] + C$$
$$= -\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + \frac{1}{24}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{48}\sin x \cos x + \frac{3}{48}x + C,$$

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}\sin x\,(-8\cos^5 x + 2\cos^3 x + 3\cos x) + \frac{1}{16}x + C.$$

Hätte im Integranden $\sin^4 x$ gestanden, so müßten Sie dafür $(1 - \cos^2 x)^2$ setzen.

Versuchen Sie mit Hilfe der Formel (57) das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x}$ $(n = -5)$ zu berechnen, so erkennen Sie, daß das auf der rechten Seite stehende Integral die Form $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}$ annimmt. Dieses Integral ist aber schwieriger als das Ausgangsintegral, denn der Exponent hat sich vergrößert. Durchlaufen Sie jetzt die Formel rückwärts und setzen Sie rechts für $n-2$ den Wert -5 ein, so kommen Sie links auf den günstigeren Exponenten -3. Dieser Weg muß zur Lösung führen. Lösen Sie dazu Formel (57) nach dem rechts stehenden Integral auf!

$$\frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n}{n-1} \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

Jetzt soll der Exponent $n-2$ aber eine negative Zahl sein. Sie setzen darum $n-2 = -m$ (m positiv) und dementsprechend

$$n = -m + 2$$

und

$$n - 1 = -m + 1.$$

Sie erhalten dann

$$\int \cos^{-m} x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{-m+1} \sin x \cos^{-m+1} x + \frac{-m+2}{-m+1} \int \cos^{-m+2} x \,\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^m x} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{m-2} x}} \tag{57a}$$

Aus (58) erhalten Sie durch entsprechende Umformung:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{m-2} x}} \tag{58a}$$

Lehrbeispiel 103

Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$*!*

Lösung:

Sie wenden Formel (57a) an. Hier ist $m = 4$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

Das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ könnte ebenfalls nach Formel (57a) berechnet werden. Sie finden aber unter Grundintegral (28) in Band 1 bereits die Lösung $\tan x$.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x + C$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2}{3}\tan x + C$$

Beachten Sie, daß $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ist, so wird

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\tan x\,(1 + \tan^2 x) + \frac{2}{3}\tan x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \underline{\underline{\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C}}.$$

Übungen

89. $\int \operatorname{arc}\cos x \, dx$

90. $\int x^4 \ln x \, dx$

91. $\int\limits_0^1 x^4 e^x \, dx$

92. $\int \sin^5 x \, dx$

93. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx$

94. *a)* $\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx$ *b)* $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

95. *a)* $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ *b)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^5 x}$

Zusammenfassung

Die Methode der partiellen Integration ist auf der Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung aufgebaut. Wie der Name sagt, wird die Integration eines Produktes auf zwei Teilintegrationen zurückgeführt.

Fehlt ein zweiter Faktor, so kann man sich an seiner Stelle $1 = x^0$ als Faktor denken.

Weist der Integrand Potenzen von Funktionen auf, so können durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration bzw. durch Aufstellung von Rekursionsformeln die Exponenten schrittweise vermindert werden.

13.3 Integration gebrochener rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Ist der Integrand eine gebrochene rationale Funktion, hat er also die Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n},$$

so muß auch hier der Integrand zunächst so umgeformt werden, daß sich die Grundintegrale anwenden lassen.

Es genügt, den Fall zu untersuchen, daß der Integrand eine *echt* gebrochene rationale Funktion, also $m < n$, ist. Ist nämlich $m \geqq n$, so kann der Quotient $\frac{g(x)}{h(x)}$ durch eine einfache Division als Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion dargestellt werden (vgl. Band 1, Abschnitt 4.3). Eine ganze rationale Funktion können Sie aber ohne Schwierigkeiten integrieren. Es bleibt also die Aufgabe, eine echt gebrochene rationale Funktion zu integrieren.

Um die Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion vornehmen zu können, wird der Integrand in eine Summe einzelner, einfacherer Brüche (Teil- oder Partialbrüche) zerlegt, die sich einzeln unter Anwendung der Grundintegrale integrieren lassen. Für diese Zerlegung wird der Satz aus der Algebra benützt, daß sich jede ganze rationale Funktion in Linearfaktoren zerlegen läßt. Wie Sie wissen, besteht die Identität

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = b_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln (Lösungen) der Gleichung

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0,$$

in unserem Fall die Nullstellen des Nenners sind. Wie Sie dann weiter bei der Zerlegung in Partialbrüche vorzugehen haben, richtet sich danach, wie die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nenners im Integranden beschaffen sind. Die zu unterscheidenden Fälle und die Durchführung der Partialbruchzerlegung sollen Sie in einigen Beispielen kennenlernen.

a) Die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nenners sind alle reell und voneinander verschieden

Beispiel:

Es ist $\int \frac{3x^2 - 34x - 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}\, dx$ zu berechnen.

Der Integrand ist eine echt gebrochene rationale Funktion.

1. Sie stellen die Nullstellen des Nenners fest.

Aus $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ finden Sie durch Probieren $x_1 = 1$ als Wurzel. Die Division durch $(x - x_1) = (x - 1)$ führt auf eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln x_2 und x_3 sind.

$$\begin{array}{rl}
 & (x^3 - 3x^2 - 13x + 15) : (x - 1) = x^2 - 2x - 15 \\
- & \underline{x^3 - x^2} \\
 & -2x^2 - 13x \\
- & \underline{-2x^2 + 2x} \\
 & -15x + 15 \\
- & \underline{-15x + 15} \\
 & 0
\end{array}$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$
ergibt die Wurzeln $\quad x_2 = 5,$

$$x_3 = -3.$$

Mit diesen Werten erhalten Sie die Produktdarstellung

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x-5)(x+3).$$

2. Sie zerlegen den Integranden in einfache Teilbrüche.

Den Bruch

$$\frac{3x^2 - 34x - 1}{(x-1)(x-5)(x+3)}$$

kann man sich aus der Addition dreier Brüche mit den Nennern $(x-1)$, $(x-5)$ und $(x+3)$ entstanden denken. Addiert man nämlich die Brüche

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{x-5} \quad \text{und} \quad \frac{C}{x+3},$$

so ergibt sich als Hauptnenner das Produkt $(x-1)(x-5)(x+3)$. Sie können also ansetzen

$$\frac{3x^2 - 34x - 1}{(x-1)(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x+3}.$$

Sind die Zähler A, B und C richtig gewählt, so stellt diese Gleichung eine Identität dar, da die linke Seite nur eine andere Form der rechten Seite ist.

Zur Bestimmung der Zähler A, B und C multiplizieren Sie die Gleichung mit dem Hauptnenner. Sie erhalten

$$3x^2 - 34x - 1 = A(x-5)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-5).$$

Da diese Form der Ausgangsgleichung für jedes x gilt, können Sie für x irgend drei bestimmte Werte einsetzen und erhalten so drei Bestimmungsgleichungen für A, B und C. Es ist zweckmäßig, für x der Reihe nach die Werte $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -3$ einzusetzen, da dann jeweils zwei Summanden der rechten Seite verschwinden. Sie erhalten

für $x_1 = 1 \qquad 3 - 34 - 1 = A(1-5)(1+3),$
für $x_2 = 5 \qquad 75 - 170 - 1 = B(5-1)(5+3),$
für $x_3 = -3 \qquad 27 + 102 - 1 = C(-3-1)(-3-5).$

Hieraus lassen sich leicht und schnell A, B und C berechnen. Aus

$$\begin{aligned} -32 &= -16A, \\ -96 &= 32B, \\ 128 &= 32C, \end{aligned}$$

folgt

$$\underline{\underline{A = 2}}, \qquad \underline{\underline{B = -3}}, \qquad \underline{\underline{C = 4}}.$$

Es ist also

$$\frac{3x^2 - 34x - 1}{(x-1)(x-5)(x+3)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-5} + \frac{4}{x+3}.$$

Prüfen Sie die Richtigkeit, indem Sie die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung addieren!

Die Integration läßt sich nun leicht ausführen:

$$\int \frac{3x^2 - 34x - 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-5} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$$
$$= \underline{\underline{2\ln|x-1| - 3\ln|x-5| + 4\ln|x+3|}}.$$

Lehrbeispiel 104

Berechnen Sie $\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

Zerlegung des Nenners:

$$x^3 - x = x(x^2-1)$$
$$= x(x+1)(x-1)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$x^2 + 1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

Bestimmung von A, B und C:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & 1 = A(0+1)(0-1) \\ x_2 = -1 & 2 = B(-1)(-1-1) \\ x_3 = 1 & 2 = C\cdot 1(1+1) \end{array}$$

$$\underline{\underline{A = -1}} \qquad \underline{\underline{B = 1}} \qquad \underline{\underline{C = 1}}$$

Damit wird

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1},$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$
$$= -\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$
$$= \ln\left|\frac{(x+1)(x-1)}{x}\right| + C,$$

$$\underline{\underline{\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C}}.$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind alle reell, aber nicht voneinander verschieden

Beispiel:

Es ist $\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen!

Zerlegung des Nenners:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x_{1:2} = 2$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Es liegt eine Doppelwurzel vor. Wie Ihnen eine Probe beweist, führt die Partialbruchzerlegung in der Art, wie Sie sie im Fall a) vorgenommen haben, nicht zum Ziel.

In diesem Fall gilt der Ansatz:

$$\frac{4x-5}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Sie müssen hier neben der höchsten auftretenden Potenz des Faktors $(x-2)$ auch noch alle ganzzahligen niedrigeren Potenzen ansetzen, denn $(x-2)^2$ ist ja der Hauptnenner von $(x-2)^2$ und von $(x-2)$.

In unserer Aufgabe stimmt also der Hauptnenner der Teilbrüche der rechten Seite wieder mit dem Nenner der linken Seite überein.
Zur Bestimmung von A und B verfahren Sie zunächst wieder wie bei a), indem Sie mit dem Hauptnenner multiplizieren:

$$4x-5 = A + B(x-2).$$

Für x sind zwei Werte einzusetzen, um zwei Bestimmungsgleichungen für A und B zu erhalten. Außer $x_1 = 2$ setzen Sie noch einen beliebigen zweiten Wert — etwa $x_2 = 1$ — für x ein. Das liefert die Gleichungen

$$3 = A,$$
$$-1 = A - B,$$

mit den Lösungen

$$\underline{\underline{A = 3,}} \qquad \underline{\underline{B = 4.}}$$

Sie erhalten also die Zerlegung

$$\frac{4x-5}{x^2-4x+4} = \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2}.$$

Damit wird

$$\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2}.$$

Substitution:
$u = x-2$
$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$$\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} + 4\ln|x-2|$$

$$= -\frac{3}{u} + 4\ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{4x-5}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-\frac{3}{x-2} + 4\ln|x-2| + C}}$$

Lehrbeispiel 105

Berechnen Sie $\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3}\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Der Nenner liegt hier bereits in der Faktorenform vor.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)^3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$x_{1;2;3} = -3$ ist hier dreifache Nullstelle des Nenners, demnach müssen drei Teilbrüche (entsprechend der Vielfachheit) angesetzt werden. Dabei werden die Exponenten im Nenner jeweils um 1 vermindert.

$$2x^2 + 11x + 19 = A + B(x+3) + C(x+3)^2$$

Sie setzen $x_1 = -3$ und zwei weitere, möglichst bequeme Werte für x — etwa $x_2 = 0$ und $x_3 = -2$ — ein und erhalten

$$\begin{aligned} 4 &= A, \\ 19 &= A + 3B + 9C, \\ 5 &= A + B + C. \end{aligned}$$

Das ergibt $\underline{\underline{A = 4}}$, $\underline{\underline{B = -1}}$, $\underline{\underline{C = 2}}$

Also ist

$$\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3}.$$

Substitution:

$u = x + 3$

$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$$\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{(x+3)^3}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-\frac{2}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3} + 2\ln|x+3| + C}}$$

Lehrbeispiel 106

Berechnen Sie $\int \frac{3x^2 + 3x + 32}{(3x+4)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

In diesem Lehrbeispiel sind der Fall a) und Fall b) vereinigt.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 + 3x + 32}{(3x+4)(x-2)^2} = \frac{A}{3x+4} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$3x^2 + 3x + 32 = A(x-2)^2 + B(3x+4) + C(3x+4)(x-2)$$

Bestimmung von A, B und C:

$x_1 = 2$: $\quad 50 = 10B$

$x_2 = -\frac{4}{3}$: $\quad \frac{100}{3} = \frac{100}{9}A$

$x_3 = 0$: $\quad 32 = 4A + 4B - 8C$

$\underline{\underline{A = 3}}$ $\quad \underline{\underline{B = 5}}$ $\quad \underline{\underline{C = 0}}$

$$\int \frac{3x^2+3x+32}{(3x+4)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x+4} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$$
$$= \ln|3x+4| - \frac{5}{x-2} + C$$

Merken Sie sich: Tritt eine Wurzel x_1 in der Vielfachheit α auf, so müssen Sie α Teilbrüche ansetzen, deren Nenner durch die einzelnen Potenzen von $(x - x_1)$ gebildet werden. Dabei hat der erste Teilbruch den höchsten Exponenten α, während die folgenden einen jeweils um 1 verminderten Exponenten aufweisen.

Es ist also anzusetzen:

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta} = \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-x_1)}$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x-x_2)}.$$

Fall a) läßt sich dieser Verallgemeinerung von b) als Spezialfall unterordnen. Hierbei ist die auftretende Vielfachheit $\alpha = 1$ zu setzen, so daß nur ein entsprechender Partialbruch erscheint. Grundsätzlich können Sie bisher festhalten:

Hat der Nenner den Grad n, so müssen in den Fällen a) und b) immer n Teilbrüche angesetzt werden.

c) Die Nullstellen des Nenners sind komplex

Aus der Algebra wissen Sie, daß zu jeder komplexen Wurzel einer Gleichung auch die konjugiert-komplexe Zahl Wurzel ist.

Ist also $x_1 = a + bi$ Wurzel, so ist es auch $x_2 = a - bi$. Beide Wurzeln erfüllen eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten. Um das Rechnen mit komplexen Zahlen zu vermeiden, trennen Sie in diesem Fall einen quadratischen Faktor

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a - bi)(x - a + bi)$$

nicht weiter auf.

Beispiel: $$\int \frac{5x+4}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x$$

Untersuchung des Nenners:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$
$$x_{1;2} = 3 \pm \sqrt{9-13}$$
$$x_{1;2} = 3 \pm 2i$$

Der Nenner ist hier nicht in lineare Faktoren zu zerlegen! Es muß nun Ihre Aufgabe sein, das Integral auf andere Weise zu zerlegen. Würde im Zähler $2x - 6$ stehen (Ableitung des Nenners), so könnte das Integral sofort durch Substitution gelöst werden. Das aber läßt sich durch folgende Zerlegung erreichen:

$$\frac{5x+4}{x^2-6x+13} = \frac{5}{2}\,\frac{2x-6}{x^2-6x+13} + \frac{19}{x^2-6x+13}.$$

Den Faktor vor dem ersten Bruch müssen Sie so wählen, daß das x-Glied des Zählers mit dem des Zählers der linken Seite übereinstimmt, ohne daß Sie dabei zunächst Rücksicht auf das absolute Glied nehmen.

Mit dem Faktor $\frac{5}{2}$ hat der Zähler des 1. Bruches auf der rechten Seite den Wert

$$\frac{5}{2}(2x-6) = 5x-15.$$

Die linke Seite schreibt aber den Zähler $5x+4$ vor. Aus diesem Grund müssen Sie noch mit einem Teilbruch ausgleichen, dessen Zähler den Wert 19 hat. Fassen Sie zur Probe die beiden Teilbrüche wieder zusammen, so erhalten Sie im Zähler

$$\frac{5}{2}(2x-6)+19 = 5x+4.$$

Wenn Sie noch für den quadratischen Nenner des ganz rechts stehenden Teilbruches die quadratische Ergänzung bilden:

$$x^2-6x+13 = (x-3)^2+4,$$

erhalten Sie

$$\int \frac{5x+4}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x + 19\int \frac{\mathrm{d}x}{4+(x-3)^2}.$$

Nachdem Sie im Nenner des rechten Integrals den Faktor 4 ausgeklammert und die Substitution $u = \frac{x-3}{2}$, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$, durchgeführt haben, können Sie Grundintegral (48) anwenden.

$$\int \frac{5x+4}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x + \frac{19}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2-6x+13| + \frac{19}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} + C$$

$$\int \frac{5x+4}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{5}{2}\ln|x^2-6x+13| + \frac{19}{2}\arctan\frac{x-3}{2} + C}}$$

Lehrbeispiel 107

Berechnen Sie $\int \frac{x}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$*!*

Lösung:

Auch in diesem Fall ergibt die quadratische Gleichung $x^2+2x+10=0$ zwei konjugiert-komplexe Wurzeln. Sie verfahren wie im vorigen Beispiel, indem Sie den Integranden so in zwei Teilbrüche zerlegen, daß der erste im Zähler die Ableitung des Nenners aufweist, während im zweiten der bezüglich des absoluten Gliedes gemachte Fehler wieder ausgeglichen wird. Dazu führen Sie noch im zweiten Bruch die quadratische Ergänzung ein.

$$\frac{x}{x^2+2x+10} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+10} - \frac{1}{9+(x+1)^2}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{9+(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}$$

Substitution:

$$u = \frac{x+1}{3}, \quad \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10| - \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + C}}$$

Übungen

96. $\displaystyle\int \frac{2x-61}{x^2+5x-24}\,\mathrm{d}x$

97. $\displaystyle\int \frac{3x^2+10x-17}{2x^3-14x-12}\,\mathrm{d}x$

98. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$

99. $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$

100. $\displaystyle\int \frac{2x+10}{x^2+10x+25}\,\mathrm{d}x$

101. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

102. $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-10x+30}\,\mathrm{d}x$

103. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x$

Zusammenfassung

Ist der Integrand eine gebrochene rationale Funktion, so wird er vor dem Integrieren in einfachere Teilbrüche zerlegt. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Nenner

a) voneinander verschiedene, reelle Nullstellen,

b) reelle, aber nicht voneinander verschiedene Nullstellen oder

c) komplexe Nullstellen hat.

Im Fall c) findet, zur Vermeidung komplexer Werte, keine Zerlegung der quadratischen Form statt. Diese Teilbrüche mit quadratischem Nenner werden dann so in zwei Teile zerlegt, daß das erste Teilintegral im Zähler die Ableitung des Nenners aufweist, wobei durch Einschalten eines Zahlenfaktors dafür gesorgt werden muß, daß das lineare Glied den gleichen Koeffizienten hat wie im unzerlegten Integral. Im 2. Teilintegral findet dann die Korrektur des absoluten Gliedes statt.

13.4 Numerische Integration. Die Simpsonsche Regel

Unter der numerischen Integration versteht man die angenäherte zahlenmäßige Berechnung des bestimmten Integrals

$$J = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn die Werte $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ des Integranden nur zahlenmäßig gegeben sind (empirische Funktion) oder eine formelmäßige Integration nicht möglich bzw. die graphische Integration zu ungenau ist.

Aus der Vielzahl der Formeln zur numerischen Integration sollen Sie nur die Simpsonsche Regel kennenlernen, die 1743 von dem Engländer Th. Simpson aufgestellt wurde. Sie zeichnet sich durch Einfachheit und große Genauigkeit aus.

Der Simpsonschen Regel liegt folgender Gedankengang zugrunde:

Das Integrationsintervall $x_0 \leqq x \leqq x_n$ wird in eine gerade Anzahl (n) Streifen der gleichen Breite $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ zerlegt. Nachdem je zwei benachbarte Streifen zu einem Doppelstreifen zusammengefaßt sind, wird der Kurvenbogen eines jeden Doppelstreifens durch eine Parabel zweiten Grades

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

ersetzt und der Inhalt der Doppelstreifen durch Integration ermittelt.

Um die Fläche F_1 des ersten Doppelstreifens zu berechnen (Bild 66), denken Sie sich jetzt einmal den Nullpunkt auf der x-Achse an die Stelle $x_1 = x_0 + h$ ver-

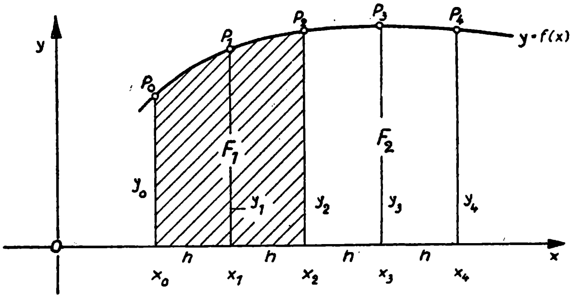

Bild 66

schoben. Die Parabel soll durch die Punkte P_0, P_1 und P_2 hindurchgehen; das wären im gedachten Koordinatensystem die Punkte $(-h; y_0)$, $(0; y_1)$ und $(h; y_2)$. Setzen Sie die Koordinaten dieser Punkte in $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ein, so erhalten Sie

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 - a_1 h + a_2 h^2, \\ y_1 &= a_0, \\ y_2 &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1, \\ a_1 &= \frac{1}{2h}(y_2 - y_0), \\ a_2 &= \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Die Fläche des Doppelstreifens unter der Parabel $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ist

$$\int_{-h}^{+h} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\, \mathrm{d}x = \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-h}^{+h} = 2a_0 h + 2a_2 \frac{h^3}{3}.$$

Für a_0 und a_2 setzen Sie die oben berechneten Werte ein und erhalten damit in guter Annäherung den Flächeninhalt des ersten Doppelstreifens

$$\boxed{F_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)} \qquad (59)$$

Wenden Sie nun Formel (59) auf den zweiten Doppelstreifen an, so haben Sie y_0 durch y_2, y_1 durch y_3 und y_2 durch y_4 zu ersetzen. Es wird dann

$$F_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Der Inhalt der gesamten Fläche F und damit das bestimmte Integral $J = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, \mathrm{d}x$ ergibt sich als Summe der $\left(\text{insgesamt } \frac{n}{2}\right)$ Doppelstreifen zu

$$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Zur besseren zahlenmäßigen Anwendung schreiben Sie diese Gleichung, die als die **allgemeine Simpsonsche Regel** bezeichnet wird, in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} F = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{h}{3}[y_0 + y_n &+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) \\ &+ 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1})] \end{aligned}} \qquad (60)$$

Weist der Kurvenverlauf von $f(x)$ Ecken oder gar Sprünge auf, so dürfen Sie keinesfalls über diese hinweg integrieren, sondern Sie müssen die Teilung dann so wählen, daß diese Stellen mit Anfang oder Ende eines Doppelstreifens zusammenfallen.

Zur Erläuterung soll die Simpsonsche Regel an einem Integral demonstriert werden, das auch elementar lösbar ist. Beachten Sie dabei das aufgestellte Rechenschema!

Lehrbeispiel 108

Berechnen Sie das Integral $J = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ *mit Hilfe der Simpsonschen Regel!*

Lösung:

Sie haben das Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ in eine gerade Anzahl von Streifen einzuteilen. Sie wählen hierzu $n = 10$ und damit $h = 0{,}1$. Die Berechnung kann dann nach dem folgenden Schema erfolgen:

y_0	$\frac{1}{1{,}0}$	1,000000
y_{10}	$\frac{1}{2{,}0}$	0,500000

y_2	$\frac{1}{1{,}2}$	0,833333
y_4	$\frac{1}{1{,}4}$	0,714286
y_6	$\frac{1}{1{,}6}$	0,625000
y_8	$\frac{1}{1{,}8}$	0,555556
Σ_1		2,728175

y_1	$\frac{1}{1{,}1}$	0,909091
y_3	$\frac{1}{1{,}3}$	0,769231
y_5	$\frac{1}{1{,}5}$	0,666667
y_7	$\frac{1}{1{,}7}$	0,588235
y_9	$\frac{1}{1{,}9}$	0,526316
Σ_2		3,459540

$y_0 + y_{10}$	1,500000
$2\,\Sigma_1$	5,456350
$4\,\Sigma_2$	13,838160
Σ	20,794510

$$J = \frac{h}{3} \cdot \Sigma = \underline{\underline{0{,}693150}}$$

Das Ergebnis können Sie mit der exakten Lösung vergleichen. Es ist

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2 = 0{,}693147.$$

Sie sehen, daß die Simpsonsche Regel einen sehr guten Näherungswert liefert.

Übungen

104. *Berechnen Sie das Integral des Lehrbeispiels 108 mit Hilfe der einfacheren Form (59) der Simpsonschen Regel! Welchen relativen Fehler (in Prozent) erhalten Sie? Vergleichen Sie diesen Fehler mit dem des Ergebnisses von Lehrbeispiel 108 (der relative Fehler des Ergebnisses von Lehrbeispiel 108 ist vorher zu berechnen)!*

105. *Berechnen Sie mit Hilfe der Simpsonschen Regel das Integral*

$$J = \int_0^2 \sqrt{x^3 + x + 1}\,\mathrm{d}x$$

auf drei Dezimalen. Wählen Sie $h = 0{,}2$ als Schrittweite, und stellen Sie ein Rechenschema auf!

13.5 Mechanische Integration. Das Polarplanimeter

Hinweis: Es ist als Ergänzung und zum besseren Verständnis dieses Abschnittes erforderlich, daß den Fernschülern (soweit für ihre Fachrichtung das Studium dieses Abschnittes vorgesehen ist) in der Konsultation am Konsultationspunkt oder im Lehrgang an der Fachschule ein Polarplanimeter vorgeführt wird.

Neben den Ihnen bekannten Methoden der numerischen und graphischen Integration wurden (den Bedürfnissen der Praxis entsprechend) Methoden entwickelt, um den Integrationsvorgang zu mechanisieren. Diese haben den Vorteil, bei größtmöglicher Genauigkeit zeitsparend zu arbeiten. Diese Art der Integration wird als mechanische oder instrumentelle Integration bezeichnet. Einen Überblick über die einzelnen Integrationsgeräte gibt Ihnen folgende Übersicht:

Integratoren (Geräte zur Integration)

Planimeter	Integrimeter	Integraphen
(für die Berechnung bestimmter Integrale durch Bestimmung des Flächeninhalts einer geschlossenen Kurve)	(zum zahlenmäßigen Ablesen eines unbestimmten Integrals)	(zum Zeichnen der Integralkurve einer zeichnerisch gegebenen Kurve)

Für Sie als Techniker ist das wichtigste von all den heutzutage existierenden Geräten das **Polarplanimeter**, das erstmalig im Jahre 1854 von dem Mechaniker Jacob Amsler (Schaffhausen) gebaut wurde. Dieses allein soll deshalb im folgenden besprochen werden[1].

[1] Weitere Geräte zur Integration finden Sie in den Büchern: Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1950; Fr. A. Willers, Mathematische Instrumente, Berlin 1951; W. Meyer zur Capellen, Mathematische Instrumente, Leipzig 1949.

Aufbau und Gebrauch des Polarplanimeters sind aus den Bildern 67 und 68 zu erkennen.

In Bild 67 sind die wichtigsten Bestandteile des Polarplanimeters schematisch dargestellt.

Der Fahrarm AB von der Länge l ist in B gelenkig mit dem ruhenden Pol P durch den Polarm BP verbunden. Damit der Fahrstift A knapp über der

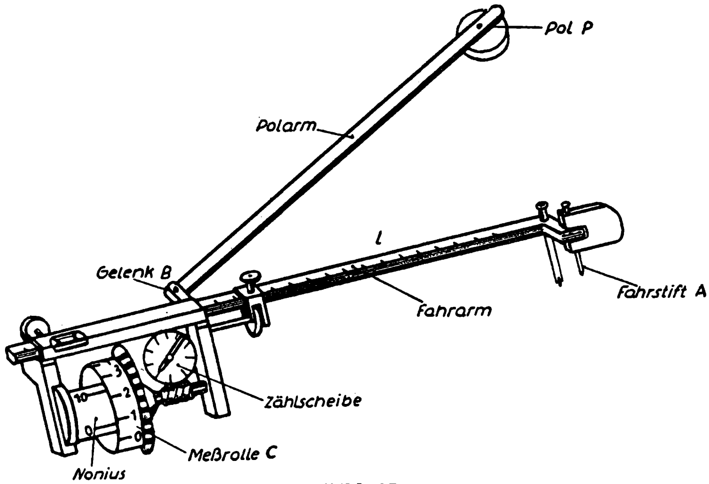

Bild 67

Kurve der zu integrierenden Funktion geführt werden kann, befindet sich dicht neben ihm (auf dem Bilde links vom Fahrstift) ein Stift mit einem Führungsrädchen.

Am Fahrarm ist eine Meßrolle C befestigt, deren Achse parallel zum Fahrarm liegt. Diese ist mit einem Nonius versehen. Die Anzahl der Umdrehungen der Meßrolle zeigt das auf dem Bilde rechts von der Meßrolle befindliche Zählwerk auf einer Zählscheibe an. Das gesamte Meßwerk (Meßrolle mit Nonius, Zählwerk mit Zählscheibe) kann auf dem Fahrarm verschoben werden. Durch Klemmschrauben (in Bild 67 ebenfalls angedeutet) wird das Meßwerk in der jeweils gewünschten Stellung auf dem Fahrarm festgehalten. Die Länge l des Fahrarms kann also (der jeweiligen Aufgabe entsprechend) eingestellt werden.

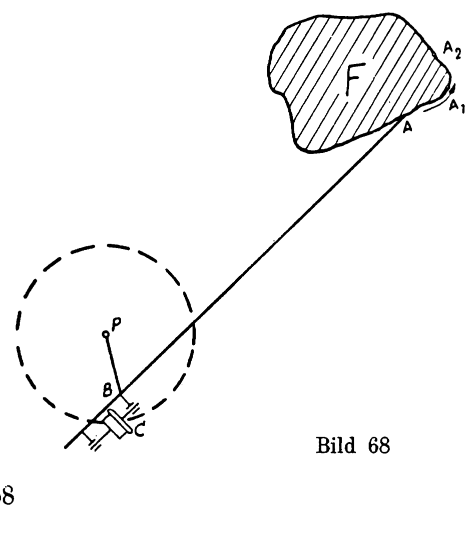

Bild 68

Die Bestimmung des Flächeninhaltes F (= Berechnung des bestimmten Integrals) geschieht folgendermaßen (vgl. Bild 68):
Der Fahrstift A wird auf dem Umfang der Fläche geführt (durchläuft hierbei die Stellungen A, A_1, A_2, ... in Bild 68). Der Gelenkpunkt B bewegt sich dadurch zwangsläufig auf einem Kreis (Leitkreis) um den Pol P (daher der Name Polarplanimeter). Nach vollständigem Umfahren von F, wenn Sie also wieder im Ausgangspunkt A angelangt sind, können Sie von Zählscheibe und Meßrolle den Flächeninhalt ablesen.
Die Meßrolle, der Hauptbestandteil, hat auf ihrem wulstartigen Rand eine feine Riffelung, so daß sie bei jeder Bewegung des Fahrstiftes (und damit des Fahrarmes) kleine Umdrehungen ausführt, die proportional der Bewegungsrichtung sind. Bei einer Bewegung senkrecht zum Fahrarm dreht sich die Rolle vollständig

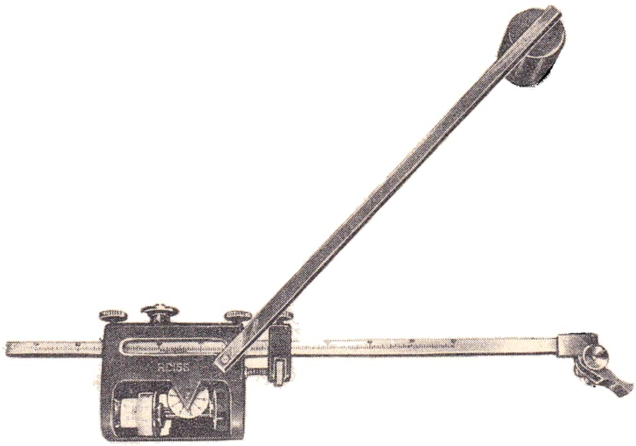

Bild 69a

(reines Rollen), bei Bewegung in Richtung des Fahrarmes gleitet die Rolle. Auf der Zählscheibe kann die Anzahl der Umdrehungen der Meßrolle abgelesen werden. Die Ablesung kann mit Hilfe des Nonius auf Tausendstel einer Umdrehung genau erfolgen. Bild 69a und Bild 69b zeigen Ihnen die praktische Ausführung eines Polarplanimeters und getrennt für sich die Planimetermeßrolle mit Nonius und Zählscheibe.
Wie Sie in Bild 69b weiterhin erkennen, erfolgt auch die Einstellung der Fahrarmlänge mittels eines Nonius.
Um nicht nur das Polarplanimeter gebrauchen zu können, sondern um auch die Wirkungsweise zu verstehen, sollen Ihnen jetzt die Gedankengänge vermittelt werden, auf denen diese Vorrichtung beruht.

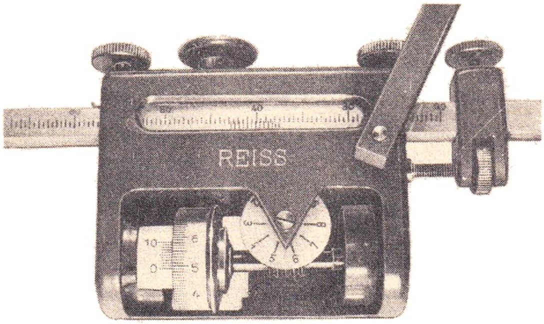

Bild 69b

Sie betrachten hierzu die Elementarbewegungen, aus denen sich jede Bewegung des Polarplanimeters zusammensetzt (Bild 70a).

Bewegen Sie eine Stange der Länge l zwischen zwei Begrenzungskurven AA_2 und BB_2 von einer Anfangslage AB in eine beliebige Endlage A_2B_2, so können Sie die von der Stange überstrichene Fläche F folgendermaßen berechnen:

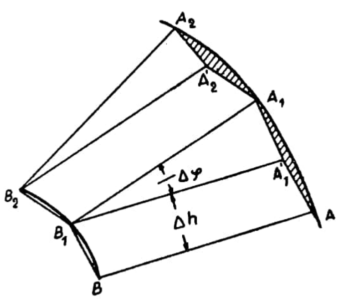

Bild 70a

Sie denken sich die Bewegung in Teil- (Elementar-) Bewegungen zerlegt. Um z. B. von der Anfangslage AB in eine benachbarte Lage A_1B_1 zu kommen, verschieben Sie zuerst die Stange parallel zu sich und die kleine Höhe Δh aus der Lage AB in die Lage $A_1'B_1$. Dann drehen Sie die Stange um B_1 in die gewünschte Lage A_1B_1, wobei der kleine Winkel $\Delta\varphi$ überstrichen wird. Wenn Sie diese Teilbewegungen — wie in Bild 70a angedeutet — bis zur gewünschten Endstellung A_2B_2 fortsetzen, so unterscheidet sich die bei diesen Elementarbewegungen überstrichene Fläche von der wahren Fläche nur durch die kleinen Segmente und Dreiecke. Diese Abweichungen werden aber um so kleiner, je mehr Zwischenlagen eingeschaltet werden. Im Grenzfall (Zahl der Zwischenlagen strebt gegen Unendlich) erhalten Sie aus

Fläche jedes Teilparallelogramms $= l \cdot \Delta h$ und

Fläche jedes Teilsektors $= \frac{1}{2}\, l^2\, \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$ im Bogenmaß gemessen)

für die überstrichene Gesamtfläche

$$F = \lim \sum \left(l \cdot \Delta h + \frac{1}{2}\, l^2\, \Delta\varphi\right) = l \int \mathrm{d}h + \frac{1}{2}\, l^2 \int \mathrm{d}\varphi .$$

Der Richtungssinn der Bewegung wird durch die Vorzeichen von $\mathrm{d}h$ und $\mathrm{d}\varphi$ angegeben; und zwar sind alle Drehungen gegen den Uhrzeigersinn und alle Verschiebungen $\mathrm{d}h$ in Richtung des wachsenden $\mathrm{d}\varphi$ positiv zu zählen. entgegengesetzte negativ.

Fallen Endlage und Anfangslage zusammen, z. B. wenn Sie eine geschlossene Kurve umfahren, und führt dabei die Stange keine volle Umdrehung um 360° aus, so ist die Summe aller Drehungen Null, also $\int \mathrm{d}\varphi = 0$.

Wie Sie aus Bild 70b ersehen können, überstreicht der Fahrarm l bei einem vollen Umfahren des Kurvenzuges A, A_1, A_2, ... A die vom Kurvenzug eingeschlossene Fläche F nur einmal, während die zwischen der zu messenden Fläche F und der

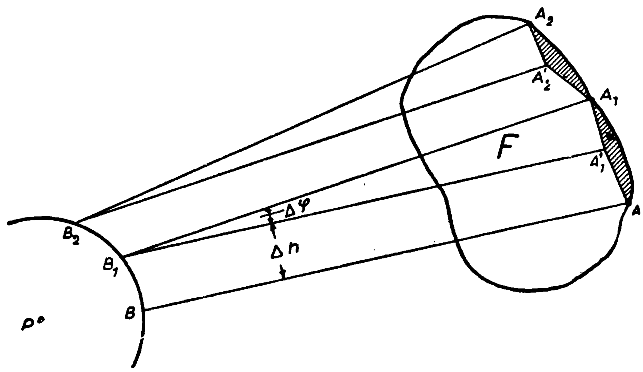

Bild 70b

Leitkurve B, B_1, B_2, ... B liegende Fläche vom Fahrarm zweimal, einmal im positiven und einmal im negativen Sinne, überstrichen wird. Sie liefert deshalb keinen Beitrag. Als Summe aller überfahrenen Flächen bleibt also nur die vom Kurvenzug A, A_1, A_2, ... A eingeschlossene Fläche F erhalten:

$$F = l \int \mathrm{d}h.$$

Sie erkennen in dem eben Dargelegten die Grundlagen der Konstruktion von Amsler. Die Fläche F wird vom Fahrstift A umfahren. Dabei bewegt sich zwangsläufig der Fahrarm $AB = l$, mit dem im Gelenk B der Polarm BP verbunden ist. Das Gelenk B beschreibt als Leitkurve einen Kreis um den festliegenden Pol P. Legen Sie den Pol P außerhalb der Fläche F, so kann der Fahrarm AB keine volle Umdrehung um 360° ausführen. Bei Erreichen der Endlage, die der Ausgangslage entspricht, ist dann $\int \mathrm{d}\varphi = 0$.

$\int \mathrm{d}h$ wird mittels der Meßrolle gemessen. Bezeichnen Sie den Umfang der Meßrolle mit U, so entspricht jedem abgewickelten Stück $\mathrm{d}h$ dieses Umfanges die

Umdrehungszahl $\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}h}{U}$. Hieraus folgt $\mathrm{d}h = U\,\mathrm{d}n$. Setzen Sie diesen Wert für $\mathrm{d}h$ in den obenstehenden Ausdruck $F = l\int \mathrm{d}h$ ein, so erhalten Sie für die zu messende Fläche

$$F = l\int U\cdot \mathrm{d}n = Ul\int \mathrm{d}n.$$

Hierin ist $\int \mathrm{d}n$ die gesamte Umdrehungszahl N, die am Meßwerk abgelesen werden kann. Da U und l Konstanten des Gerätes sind, können Sie noch Ul gleich k setzen. Dann lautet die Formel für den Flächeninhalt der mittels Polarplanimeter berechneten Fläche

$$\boxed{F = kN} \qquad (61)$$

Noch einige Hinweise zur praktischen Verwendung des Polarplanimeters:

Es wäre zeitraubend, wollten Sie vor jeder Messung das Meßwerk immer erst auf die Nullstellung drehen (was bei der Ablesegenauigkeit von Tausendstel einer Umdrehung nicht einfach wäre). Sie lesen deshalb N als Differenz der Endstellung N_2 (2. Ablesung) und der Anfangsstellung N_1 (1. Ablesung) ab. Formel (61) bekommt dann die Gestalt

$$\boxed{F = k(N_2 - N_1)} \qquad (62)$$

(F in mm^2, wenn U und l in mm gemessen wurden).

Die Konstante U wird bei Fertigung des Planimeters angegeben, meist liegt dem Planimeter eine Wertetabelle $k = f(l) = Ul$ bei. Sie können aber auch k durch Umfahren einer bekannten Fläche (z. B. Kreisfläche) ermitteln. Nach (62) ist

$$k = \frac{F}{N_2 - N_1}.$$

Voraussetzung für die Anwendung von Formel (61) bzw. (62) ist, daß der Fahrarm keine volle Umdrehung macht, d. h., der Pol muß außerhalb der zu messenden Fläche liegen. Ist die Fläche zu groß (auch bei maximal genommener Fahrarmlänge l), so zerlegen Sie diese derart in Teilflächen, daß jetzt der Pol außerhalb der Teilflächen zu liegen kommt.

Um Meßfehler zu kompensieren, die dadurch auftreten können, daß die Achse der Meßrolle nicht genau parallel zum Fahrarm steht, führt man eine zweite Messung durch, nachdem man vorher Polarm und Fahrarm um das Gelenk B nach der entgegengesetzten Seite durchgeschlagen hat (aus dem spitzen Winkel ABP in Bild 67 würde z. B. ein überstumpfer Winkel werden).

Soll eine möglichst große Genauigkeit erzielt werden, so führt man die Messung nochmals (eventuell auch im entgegengerichteten Umfahrungssinn) durch und bildet den (arithmetischen oder gewogenen) Mittelwert.

Das Umfahren einer Fläche dürfen Sie nicht allzu langsam durchführen; denn bei schwungvollem, zügigem Durchfahren kompensieren sich erfahrungsgemäß Abweichungen von der Kurve besser.

Spezielle Anwendungen des Polarplanimeters mit Hilfe der verstellbaren Fahrarmlänge l sind ebenfalls möglich. Stellen Sie z. B. bei einem Diagramm l auf die Breite des Diagramms ein, so ist die vom Meßrollenumfang aufgenommene Strecke UN die mittlere Höhe des flächengleichen Rechtecks mit der Grundlinie l (auf diese Weise kann z. B. der mittlere Dampfdruck aus einem vorgelegten Indikatordiagramm schnell ermittelt werden). Auch andere Werte, wie statische Momente, Trägheitsmomente usw., können mit Hilfe von Planimetern berechnet werden.

Zusammenfassung

Ist die Berechnung eines Integrals auf analytischem Wege nicht möglich und der Integrand nur zahlenmäßig (als empirische Funktion) gegeben, so kann die Simpsonsche Regel angewendet werden.

Als Instrument zur mechanischen Integration lernten Sie das Polarplanimeter kennen. Es dient zur Bestimmung des Flächeninhalts einer geschlossenen Kurve.

13.6 Anwendungen zu den Integrationsmethoden

In diesem Abschnitt sollen Sie die erarbeiteten Integrationsmethoden bei der Lösung verschiedener Aufgaben verwerten. Da die Beispiele von der Art der in Band 1, Kapitel 7, behandelten Aufgaben sind, bietet sich Ihnen die Gelegenheit zur Wiederholung. Vergegenwärtigen Sie sich, bevor Sie die einzelnen Beispiele durchrechnen, noch einmal die grundsätzlichen Gedanken dieses Kapitels.

Lehrbeispiel 109

Berechnen Sie das Volumen eines abgestumpften Kreiskegels mit der Höhe h und den Radien r und R als Rotationskörper (vgl. Band 1, Übung 96)!

Lösung:

Wie in der angeführten Übung 96 erhalten Sie mit der begrenzenden Geraden

$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$

für das Volumen
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Sie substituieren den linearen Ausdruck durch

$$u = \frac{R-r}{h}x + r, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{R-r}{h},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{h}{R-r}\,\mathrm{d}u.$$

Umrechnung der Grenzen:

$$\begin{array}{llll} \text{untere Grenze:} & x = 0, & & u = r, \\ \text{obere Grenze:} & x = h, & & u = R. \end{array}$$

Es ergibt sich: $$V = \frac{\pi h}{R - r} \int_r^R u^2 \, du = \frac{\pi h}{R - r} \frac{u^3}{3} \Big|_r^R,$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \frac{R^3 - r^3}{R - r}.$$

Sie werden feststellen, daß dieses Ergebnis anders als das der Übung 96 aussieht. Die Übereinstimmung zeigt sich nach Durchführung der Division $(R^3 - r^3) : (R - r)$. Führen Sie diese Rechnung selbst durch!

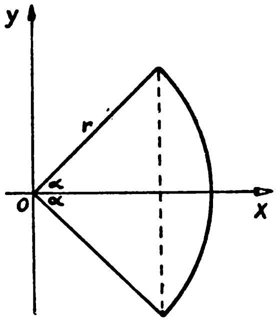

Bild 71

Lehrbeispiel 110

Es sind die Schwerpunktskoordinaten des in Bild 71 dargestellten Kreissektors mit dem Öffnungswinkel 2α und dem Radius r zu berechnen (Winkel α im Bogenmaß gemessen).

Lösung:

x-Achse: Da die Fläche durch die x-Achse in zwei symmetrische Teile zerlegt wird, muß der Schwerpunkt auf der x-Achse selbst liegen. Es haben also T_x und damit y_S den Wert 0.

y-Achse: Infolge der oben erwähnten Symmetrie ist das statische Moment der Gesamtfläche doppelt so groß wie das Moment des über der x-Achse gelegenen Teiles. Diese Halbfläche wird nun durch zwei Kurven nach oben begrenzt:

1. zwischen $x = 0$ und $x = r \cos \alpha$ durch die Gerade $y_1 = x \tan \alpha$.
   (Der Index 1 bei y soll hier die Begrenzungsfunktion des 1. Teiles kennzeichnen.)
2. zwischen $x = r \cos \alpha$ und $x = r$ durch den Kreisbogen $y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Das statische Moment der Halbfläche ist dann gleich der Summe der statischen Momente der beiden Teilflächen:

$$\frac{1}{2} T_y = \int_0^{r \cos \alpha} x y_1 \, dx + \int_{r \cos \alpha}^{r} x y_2 \, dx$$

$$= \tan \alpha \int_0^{r \cos \alpha} x^2 \, dx + \int_{r \cos \alpha}^{r} x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

Substitution für das Integral $\int x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$:

$$u = r^2 - x^2,$$

$$du = -2x \, dx, \qquad x \, dx = -\frac{1}{2} \, du.$$

Umrechnung der Grenzen:

obere Grenze: $x = r$, $u = r^2 - r^2 = 0$,

untere Grenze: $x = r\cos\alpha$, $u = r^2 - r^2\cos^2\alpha = r^2\sin^2\alpha$.

$$\frac{1}{2}T_y = \tan\alpha\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{r\cos\alpha} - \frac{1}{2}\int\limits_{r^2\sin^2\alpha}^{0}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

Sie vertauschen im rechten Integral die Grenzen (Vorzeichenwechsel!):

$$\frac{1}{2}T_y = \frac{1}{3}\tan\alpha\cdot x^3\Bigg|_0^{r\cos\alpha} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{r^2\sin^2\alpha} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\tan\alpha\cdot x^3\Bigg|_0^{r\cos\alpha} + \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Bigg|_0^{r^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\tan\alpha\cdot r^3\cos^3\alpha + \sqrt{(r^2\sin^2\alpha)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}r^3(\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha)$$

$$= \frac{r^3}{3}\sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha), \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\frac{1}{2}T_y = \frac{r^3}{3}\sin\alpha.$$

Das statische Moment für die Gesamtfläche hat danach den Wert

$$T_y = \frac{2r^3}{3}\sin\alpha.$$

Der Inhalt des gesamten Kreissektors mit dem Bogen b ergibt sich aus

$$F = \frac{1}{2}br \qquad \text{und} \qquad b = r\,2\alpha$$

zu

$$F = r^2\alpha.$$

Damit erhalten Sie

$$\underline{\underline{x_S = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}}},$$

$$\underline{\underline{y_S = 0.}}$$

Wollen Sie daraus den Schwerpunkt eines Halbkreises bestimmen, so müssen Sie $2\alpha = \pi$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ einsetzen.

$$\underline{\underline{x_{S_H} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0{,}4244r}}$$

$$\underline{\underline{y_{S_H} = 0}}$$

Lehrbeispiel 111

Wie groß ist das Trägheitsmoment für den in Bild 71 dargestellten Kreissektor bezüglich der y-Achse?

Lösung:

In Lehrbeispiel 110 haben Sie für diese Fläche bereits das statische Moment bezüglich der y-Achse berechnet. Für die Aufteilung der Fläche und die Wahl der dazugehörigen Grenzen gelten selbstverständlich wieder die gleichen Überlegungen. Danach ist

$$\frac{1}{2} J_y = \int_0^{r\cos\alpha} x^2 y_1 \, dx + \int_{r\cos\alpha}^{r} x^2 y_2 \, dx$$

$$= \tan\alpha \int_0^{r\cos\alpha} x^3 \, dx + \int_{r\cos\alpha}^{r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

Das rechte Integral haben Sie nach den Gesichtspunkten zu lösen, die in Abschnitt 13.14 behandelt wurden. Es liegt hier der Typ α vor, also müssen Sie eine neue Veränderliche mit Hilfe der Sinus- oder Kosinusfunktion einführen. Da die untere Grenze $\cos\alpha$ enthält, wählen Sie zweckmäßig $x = r\cos u$.

Substitution:	$x = r\cos u$		
	$dx = -r\sin u \, du$		
obere Grenze:	$x = r,$	$r = r\cos u,$	$u = 0$
untere Grenze:	$x = r\cos\alpha,$	$r\cos\alpha = r\cos u,$	$u = \alpha$

$$\frac{1}{2} J_y = \tan\alpha \int_0^{r\cos\alpha} x^3 \, dx - r^4 \int_\alpha^0 \cos^2 u \sin^2 u \, du$$

Da im rechten Integral die obere Grenze kleiner als die untere ist, vertauschen Sie die Grenzen unter Änderung des Vorzeichens des Integrals:

$$\frac{1}{2} J_y = \tan\alpha \int_0^{r\cos\alpha} x^3 \, dx + r^4 \int_0^\alpha \cos^2 u \sin^2 u \, du.$$

Das rechte Integral läßt sich mit Hilfe der Beziehung $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ umformen und in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$\frac{1}{2} J_y = \tan\alpha \int_0^{r\cos\alpha} x^3 \, dx + r^4 \left(\int_0^\alpha \cos^2 u \, du - \int_0^\alpha \cos^4 u \, du \right).$$

Mit Hilfe der Formel (57) bekommen Sie dann

$$\frac{1}{2} J_y = \tan\alpha \int_0^{r\cos\alpha} x^3 \, dx + r^4 \left(\int_0^\alpha \cos^2 u \, du - \frac{1}{4} \sin u \cos^3 u \Big|_0^\alpha - \frac{3}{4} \int_0^\alpha \cos^2 u \, du \right),$$

$$\frac{1}{2} J_y = \tan\alpha \int\limits_0^{r\cos\alpha} x^3\,\mathrm{d}x + \frac{r^4}{4}\left(\int\limits_0^{\alpha} \cos^2 u\,\mathrm{d}u - \sin u\cos^3 u\,\Big|_0^{\alpha}\right)$$

$$= \tan\alpha\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^{r\cos\alpha} + \frac{r^4}{4}\left[\frac{1}{2}(u + \sin u\cos u) - \sin u\cos^3 u\right]\Big|_0^{\alpha}$$

$$= \frac{r^4}{4}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^4\alpha + \frac{1}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - \sin\alpha\cos^3\alpha\right],$$

$$\frac{1}{2} J_y = \frac{r^4}{8}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha).$$

Für den gesamten Kreissektor erhalten Sie als Trägheitsmoment

$$J_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) \qquad \text{oder mit} \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\underline{\underline{J_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha).}}$$

Um hieraus das äquatoriale Trägheitsmoment des Vollkreises zu erhalten, haben Sie $\alpha = \pi$ zu setzen:

$$J_y = \frac{r^4}{8}(2\pi + \sin 2\pi) = \frac{1}{4}\pi r^4.$$

(Vergleichen Sie hierzu auch das Ergebnis von Lehrbeispiel 109 aus Band 1.)

Lehrbeispiel 112

Welche Arbeit verrichtet ein Wechselstrom während einer Periode?

Lösung:

Der durch eine Leitung fließende Wechselstrom läßt sich durch die Funktionen

$$u = U\sin\omega t \qquad \text{und} \qquad i = I\sin(\omega t + \varphi)$$

darstellen. Dabei ist u die Momentan- und U die Maximalspannung, i die Momentan- und I die Maximalstromstärke; φ stellt den Phasenwinkel zwischen Spannung und Stromstärke dar. Das Produkt ui gibt die Leistung N des Wechselstromes zur Zeit t an:

$$N = ui = UI\sin\omega t\sin(\omega t + \varphi).$$

Die Arbeit $\mathrm{d}A$, die dieser Strom während der kurzen Zeit $\mathrm{d}t$ verrichtet, ist gleich dem Produkt aus N und $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}A = N\,\mathrm{d}t = UI\sin\omega t\sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

Es ist nun unsere Aufgabe, die Arbeit zu ermitteln, die der Strom während einer Periode verrichtet. Die Dauer einer Periode sei T. Die Zeit T können Sie aus der Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

berechnen.

$$A = UI \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi)\, \mathrm{d}t$$

Zur Lösung dieses Integrals verfahren Sie wie bei dem im Abschnitt 13.11 behandelten Integral $\int \sin mx \sin nx\, \mathrm{d}x$.

Sie setzen

$$\omega t = \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \text{und} \qquad \omega t + \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also

$$\alpha = 2\omega t + \varphi \qquad \text{und} \qquad \beta = \varphi.$$

Es ist dann

$$\sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)]$$

und

$$A = \frac{UI}{2} \left[\cos \varphi \int_0^T \mathrm{d}t - \int_0^T \cos (2\omega t + \varphi)\, \mathrm{d}t\right].$$

Das 2. Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $u = 2\omega t + \varphi$ lösen:

$$A = \frac{UI}{2} \left[t \cos \varphi \,\Big|_0^T - \frac{1}{2\omega} \sin (2\omega t + \varphi) \,\Big|_0^T\right]$$

$$= \frac{UI}{2} \left[T \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} \sin (2\omega T + \varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin \varphi\right].$$

Aus $2\omega T = 4\pi$ folgt $\sin (4\pi + \varphi) = \sin \varphi$. Damit heben sich das 2. und das 3. Glied der eckigen Klammer gegenseitig auf. Das Endergebnis ist damit

$$\underline{\underline{A = \frac{UI}{2} T \cos \varphi.}}$$

Die durchschnittliche Leistung des Wechselstromes während dieser Zeit ist

$$\bar{N} = \frac{A}{T} = \frac{UI}{2} \cos \varphi,$$

oder mit

$$U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{N} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

Übungen

106. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes? Benutzen Sie dazu Bild 71!

107. Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des in Bild 72 dargestellten Kreisringstückes?

Anleitung: Die Fläche des Kreisringstückes entsteht als Differenz zweier Kreissektoren mit den Radien R und r. Das statische Moment des Ringstückes ist gleich der Differenz der statischen Momente der beiden Sektoren.

108. *Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die durch die erste Halbperiode der Sinuslinie und die x-Achse begrenzt wird?*

109. *Berechnen Sie nochmals die Trägheitsmomente J_a und J_h des Trapezes aus Übung 105, Band 1! Verwenden Sie dabei die Integrationsmethoden.*

110. *Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment des in Bild 72 dargestellten Kreisringstückes in bezug auf die zur y-Achse parallele Schwerpunktachse! Vergegenwärtigen Sie sich dazu noch einmal Lehrbeispiel 111 und Übung 107!*

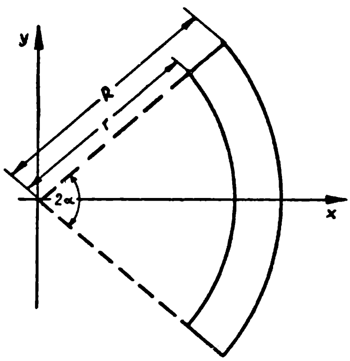

Bild 72

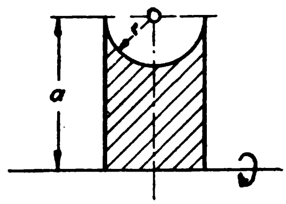

Bild 73

111. *Berechnen Sie die Trägheitsmomente der Fläche, die durch die erste Halbperiode der Kurve $y = \sin 2x$ und die x-Achse begrenzt wird!*

112. *Lösen Sie nochmals Übung 108 aus Band 1!*

113. *Eine Seilrolle soll durch Rotation eines Halbkreises mit dem Radius r um eine Achse entstehen, die vom Kreismittelpunkt den Abstand $a > r$ hat. Wie groß ist das Volumen dieses Körpers (Bild 73)?*

14 Weitere Anwendungen der Integralrechnung

14.1 Bogenlänge von Kurven

14.11 Die Kurve ist durch eine Funktion in expliziter Darstellung gegeben. Die Länge eines Bogenstückes kann durch die Sehne mit der Länge

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

angenähert werden (Bild 74). Dabei ist die Annäherung um so besser, je kleiner Δx gewählt ist.

Setzen Sie nun diese Sehnen zu einem Streckenzug (Bild 75) zusammen, so ist dessen Länge

$$\sum \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x,$$

wobei die Summe über den gesamten Streckenzug zu erstrecken ist, also über alle Δx, in die das Intervall $a \leqq x \leqq b$ eingeteilt ist. Strebt jetzt die Breite Δx aller Elemente gegen Null, so erhalten Sie, auf Grund der Definition des Integrals als

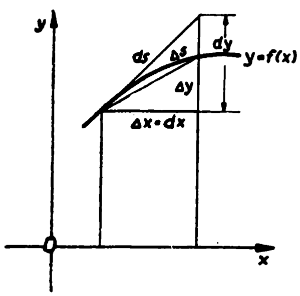

Bild 74

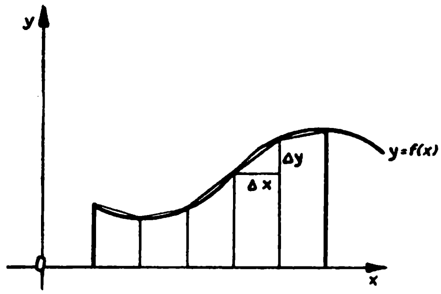

Bild 75

Grenzwert einer Summe, für die Länge der durch die Funktion $y = f(x)$ gegebenen Kurve zwischen $x = a$ und $x = b$:

$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Sie sehen, daß bei dieser Grenzwertbildung gleichzeitig aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$ hervorgegangen ist.

Der ursprüngliche Ausdruck $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$ hat dabei die Form $\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ angenommen. Wir nennen diesen Ausdruck $\mathrm{d}s$ und wollen uns nun über seine Bedeutung als *Bogendifferential* Klarheit verschaffen (vgl. auch Kapitel 10). Zunächst aber wollen wir ihm eine andere Form geben:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Sie erkennen sofort, daß sich $\mathrm{d}s$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ darstellen läßt. Betrachten Sie dazu noch einmal Bild 74. Das Bogendifferential ist nichts anderes als das Tangentenstück über dem Bogenstück Δs.

Von dieser Tatsache ausgehend, könnte man den Ansatz der obenstehenden Formel folgendermaßen gestalten: Wir nähern die Länge des Bogenstückes Δs

durch das Tangentenstück $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ an. Diese Annäherung ist um so besser, je kleiner dabei $\Delta x = \mathrm{d}x$ gewählt wird. Die gesamte Länge erhalten Sie dann als Integral über das Bogendifferential

$$\boxed{s = \int\limits_s \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x} \tag{63}$$

In der letztgenannten Form des Ansatzes finden Sie die Grundgedanken aus der Zusammenfassung zu den Abschnitten 7.1 bis 7.4 (Band 1) wieder.

Lehrbeispiel 113

Wie groß ist die Länge eines Viertelkreises mit dem Radius r?

Lösung:

Der Kreis ist durch die Ihnen aus der analytischen Geometrie bekannte Funktion

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

gegeben. Benutzen Sie den im I. Quadranten liegenden Viertelkreis, so haben Sie das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

Sie berechnen zunächst

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Also wird

$$s = \int\limits_{a=0}^{b=r} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = r\int\limits_0^r \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$s = r \arcsin \frac{x}{r}\bigg|_0^r$$

$$= r(\arcsin 1 - \arcsin 0),$$

$$\underline{\underline{s = r\frac{\pi}{2}}}.$$

14.12 Die Kurve ist durch eine Funktion in Parameterdarstellung gegeben.

Über die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$$

erhalten Sie die Differentiale

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = \dot{y}\,\mathrm{d}t.$$

Damit wird das Bogendifferential ds zu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{\dot{x}^2\,\mathrm{d}t^2 + \dot{y}^2\,\mathrm{d}t^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Die Integration ergibt $$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t} \tag{64}$$

Lehrbeispiel 114

Es ist die Länge eines vollen Zykloidenbogens zu bestimmen. Der Zykloidenbogen wird durch

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t)$$

beschrieben, wenn t das Intervall von 0 bis 2π durchläuft.

Lösung:

Es ist
$$\begin{aligned} \dot{x} &= r(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = r\sin t, \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 2r^2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Gehen Sie jetzt schon zur Integration über, so bekommen Sie ein Integral mit einem irrationalen Integranden

$$s = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Zur Lösung dieses Integrals muß zuerst die Irrationalität beseitigt werden. Mit Hilfe der aus der Trigonometrie bekannten Formel

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

wird
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4r^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Damit ist
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = 2r\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Dabei ist die Wurzel mit positivem Vorzeichen zu ziehen, weil mit wachsendem t, also d$t > 0$, auch ds positiv sein soll.

Damit die Zykloide einmal beschrieben wird, muß t die Werte von 0 bis 2π durchlaufen.

$$s = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{Substitution:} \qquad u = \frac{t}{2}, \quad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$$

obere Grenze: $t = 2\pi$, $u = \pi$

untere Grenze: $t = 0$, $u = 0$

$$s = 4r \int_0^{\pi} \sin u \, \mathrm{d}u$$

$$= -4r \cos u \Big|_0^{\pi} = -4r(\cos \pi - \cos 0) = -4r(-1-1)$$

$$\underline{\underline{s = 8r}}$$

Die Länge des Zykloidenbogens ist demnach gleich dem vierfachen Durchmesser des abrollenden Kreises

Lehrbeispiel 115

Welchen Weg hat ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 waagerecht geworfener Körper in der Zeit T zurückgelegt?

Lösung:

Die Bewegung des Körpers läßt sich in zwei Teilbewegungen zerlegen (Bild 76):

a) waagerecht: gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0,
b) lotrecht: freie, d. h. gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung.

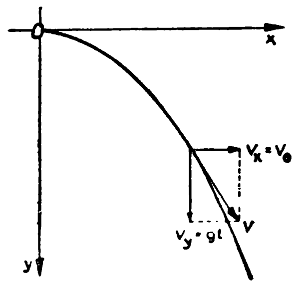

Bild 76

Nach der Zeit t hat der Körper zurückgelegt:

a) waagerecht: $x = v_0 t$,
b) lotrecht: $y = \frac{1}{2} g t^2$.

Damit haben Sie die Parameterdarstellung des waagerechten Wurfes.

Zur Berechnung des Weges müssen Sie nun die beiden Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bilden. Da der Parameter t hier gleich der verstrichenen Zeit ist, stellen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nichts anderes als die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y dar, während

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}t$$

ist, wobei v die Größe der augenblicklichen Geschwindigkeit wiedergibt.

Mit $\dot{x} = v_0, \qquad \dot{y} = gt,$

wird

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2},$$

$$s = \int_0^T \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\,\mathrm{d}t$$

Substitution: $u = gt$
$\mathrm{d}t = \frac{1}{g}\,\mathrm{d}u$

obere Grenze: $t = T,\ u = gT$
untere Grenze: $t = 0,\ u = 0$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{gT} \sqrt{v_0^2 + u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Dieses Integral haben Sie im Abschnitt 13.14, Fall β) berechnet. Sie müssen lediglich x durch u und a durch v_0 ersetzen.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{g}\left[\frac{u}{2}\sqrt{v_0^2+u^2}+\frac{v_0^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{v_0^2+u^2}\right)\right]_0^{gT} \\ &= \frac{1}{g}\left[\frac{gT}{2}\sqrt{v_0^2+g^2T^2}+\frac{v_0^2}{2}\ln\left(gT+\sqrt{v_0^2+g^2T^2}\right)-\frac{v_0^2}{2}\ln v_0\right] \\ &= \frac{1}{2g}\left[gT\sqrt{v_0^2+g^2T^2}+v_0^2\ln\frac{gT+\sqrt{v_0^2+g^2T^2}}{v_0}\right] \end{aligned}$$

14.13 Die Kurve ist durch eine Funktion in Polarkoordinaten gegeben. Sie können diesen Fall sofort auf den in 14.12 behandelten Fall zurückführen, wenn Sie bedenken, daß zwischen den kartesischen Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten r, φ der Zusammenhang

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

besteht. Sie bilden daraus die Differentiale von $x = x(r, \varphi)$ [vgl. Abschnitt 12.2 Formel (41)]:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

und von $y = y(r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Mit diesen Differentialen wird

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \\ &= \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2}, \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Durch Integrieren erhalten Sie hieraus

$$\boxed{s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi} \tag{65}$$

Lehrbeispiel 116

Berechnen Sie die Bogenlänge einer Archimedischen Spirale!

Lösung:

Eine Archimedische Spirale (Bild 77) erhalten Sie beispielsweise als Bewegungskurve der Laufkatze eines Drehkranes.

Die Bewegung der Laufkatze kann man sich aus zwei Teilbewegungen zusammengesetzt denken:

a) Drehbewegung des Kranes
Dreht sich der Arm des Kranes mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so hat er nach t Sekunden den Winkel $\varphi = \omega t$ überstrichen ($\omega = \text{const.}$).

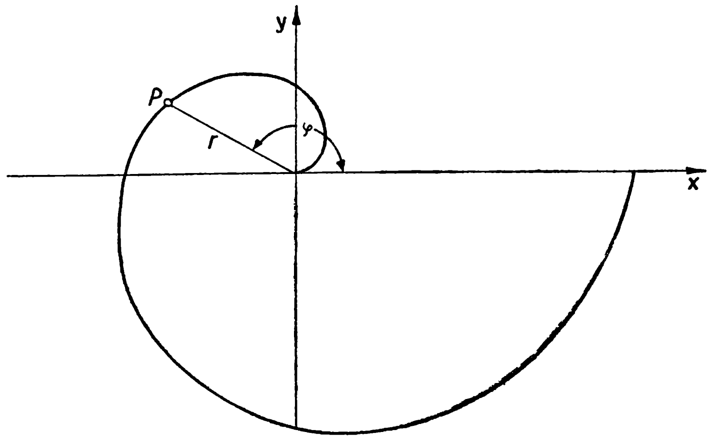

Bild 77

b) Geradlinige Bewegung der Laufkatze
Bezüglich des Dreharmes bewegt sich die Laufkatze geradlinig mit der Geschwindigkeit c und legt so innerhalb von t Sekunden den Weg $r = c \cdot t$ Meter zurück ($c = \text{const.}$)

Aus den Teilbewegungen

$$\varphi = \omega t \qquad \text{und} \qquad r = c \cdot t$$

eliminieren Sie t und erhalten

$$r = \frac{c}{\omega}\varphi.$$

Dies ist die **Gleichung der Archimedischen Spirale.**

Sie lautet allgemein

$$\boldsymbol{r = k\varphi} \qquad (k = \text{const.}).$$

Damit ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c}{\omega},$$

also

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \sqrt{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \varphi^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2}\, d\varphi = \frac{c}{\omega}\sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi.$$

Für eine Drehung von φ_1 bis φ_2 ergibt sich

$$= \frac{c}{\omega} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{c}{\omega} \left| \frac{1}{2} \ln \left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right) + \frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} \right| \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

$$s = \frac{c}{\omega} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2^2 + 1}}{\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 1}} + \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{\varphi_2^2 + 1} - \frac{\varphi_1}{2} \sqrt{\varphi_1^2 + 1} \right].$$

Bei einer vollen Umdrehung ist mit $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$

$$\underline{\underline{s = \frac{c}{\omega} \left[\frac{1}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right) + \pi \sqrt{4\pi^2 + 1} \right]}}.$$

Lehrbeispiel 117

Eine logarithmische Spirale wird durch die Funktion $r = r_0 \mathrm{e}^{a\varphi}$ gegeben. Wie groß ist die Länge der Spirale zwischen φ_1 und φ_2?

Lösung:

$$r = r_0 \mathrm{e}^{a\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r_0 a \mathrm{e}^{a\varphi}$$

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2} = r_0 \mathrm{e}^{a\varphi} \sqrt{1 + a^2}$$

Nach Formel (65) ist

$$s = r_0 \sqrt{1 + a^2} \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_2} \mathrm{e}^{a\varphi}\, \mathrm{d}\varphi$$

Substitution: $u = a\varphi$, $\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{a}\, \mathrm{d}u$

obere Grenze: $\varphi = \varphi_2 \quad u = a\varphi_2$

untere Grenze: $\varphi = \varphi_1 \quad u = a\varphi_1$

$$= \frac{r_0}{a} \sqrt{1 + a^2} \int\limits_{a\varphi_1}^{a\varphi_2} \mathrm{e}^{u}\, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{r_0}{a} \sqrt{1 + a^2} \left(\mathrm{e}^{a\varphi_2} - \mathrm{e}^{a\varphi_1}\right).$$

Dem Ergebnis können Sie noch eine andere Form geben, wenn Sie beachten, daß $r_1 = r_0 \mathrm{e}^{a\varphi_1}$ und dementsprechend $r_2 = r_0 \mathrm{e}^{a\varphi_2}$ ist:

$$\underline{\underline{s = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (r_2 - r_1)}}.$$

Die Bogenlänge der logarithmischen Spirale ist demnach der Differenz der Radiusvektoren proportional.

Die Eigenart dieser Kurve besteht darin, daß sie alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel ψ schneidet. Wir wollen diese Tatsache beweisen (Bild 78).

Mit

$$r = r_0 e^{a\varphi},$$

wird nach Formel (34)

$$\tan \psi = \frac{r}{r'} = \frac{1}{a},$$

bzw.

$$\cot \psi = a.$$

Da a eine die Form der Spirale bestimmende Konstante ist, ist auch der Winkel ψ konstant, wie oben behauptet wurde. Wenn Sie nun noch beachten, daß

$$\sqrt{1 + a^2} = \sqrt{1 + \cot^2 \psi} = \frac{1}{\sin \psi}$$

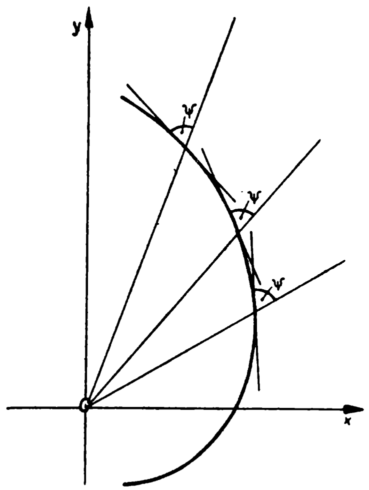

Bild 78

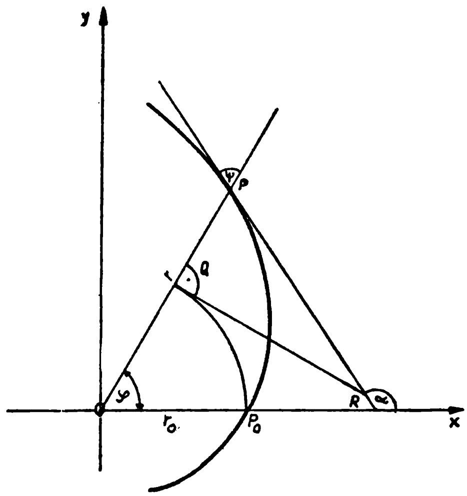

Bild 79

ist, können Sie das Ergebnis für die Bogenlänge der logarithmischen Spirale umformen zu

$$s = \frac{r_2 - r_1}{\cos \psi}.$$

Ist speziell $\varphi_1 = 0$, also $r_1 = r_0$ und $\varphi_2 = \varphi$ (dementsprechend $r_2 = r$), dann nimmt s die einfache Form

$$\underline{\underline{s = \frac{r - r_0}{\cos \psi}}}$$

an. Mit Hilfe dieser Beziehung können Sie leicht die Länge einer logarithmischen Spirale zeichnerisch bestimmen.

Betrachten Sie dazu in Bild 79 das Dreieck PQR. Der Punkt Q entsteht als Schnittpunkt des Kreisbogens vom Radius r_0 (Mittelpunkt im Ursprung) mit dem Radiusvektor $OP = r$. Der Punkt R ist der Schnittpunkt der Senkrechten zu $\overline{OP}$ im Punkt Q mit der in P angelegten Tangente. Im Dreieck PQR gilt

$$\cos\psi = \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}} = \frac{r - r_0}{\overline{PR}},$$

$$\overline{PR} = \frac{r - r_0}{\cos\psi} = s.$$

Die Strecke $\overline{PR}$ hat also die gleiche Länge wie der Kurvenbogen P_0P.

In der Technik findet die Tatsache, daß der Schnittwinkel der logarithmischen Spirale mit allen Radiusvektoren konstant ist, vielfache Anwendung (z. B. bei der Blechschere, beim Fräser usw.).

Übungen

114. Wie lang ist der Bogen der Kettenlinie $y = m\cosh\frac{x}{m}$ *von ihrem tiefsten Punkt bis zum Punkt* $(x_1; y_1)$*?*

115. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kreisevolvente, die bei der Abwicklung eines Halbkreises (Radius r*) entsteht!*
(Kreisevolvente: $x = r(\cos t + t\sin t)$, $\quad y = r(\sin t - t\cos t)$*).*

116. Welche Länge hat der volle Bogen der Kardioide $r = 2a(1 - \cos\varphi)$*?*

14.2 Schwerpunkt von Kurvenstücken

Nach der Einführung des Bogenelementes gelingt es nun, auch den Schwerpunkt eines Kurvenstückes zu berechnen. Arbeiten Sie zuvor noch einmal die grundsätzlichen Ausführungen des Abschnittes 7.2 (Band 1) durch!

Sind x und y die Abstände eines Bogenelementes $\mathrm{d}s$ von der y- bzw. x-Achse, so stellen

$$\mathrm{d}T_x = y\,\mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}T_y = x\,\mathrm{d}s$$

die statischen Momente des Bogenelementes $\mathrm{d}s$ bezüglich der beiden Achsen dar.

Als statische Momente des gesamten Kurvenstückes s folgen daraus

$$T_x = \int_s y\,\mathrm{d}s, \qquad T_y = \int_s x\,\mathrm{d}s.$$

Ist der Kurvenbogen durch die Funktion $y = f(x)$ gegeben, so setzen Sie wieder $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$. Es ist dann

$$T_x = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad T_y = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Schwerpunktskoordinaten berechnen sich damit zu

$$\boxed{x_S = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{s}} \tag{66a}$$

$$\boxed{y_S = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{s}} \tag{66b}$$

wobei

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

ist.

Als besonders einfaches Beispiel soll zunächst der Schwerpunkt einer Strecke berechnet werden, der sich natürlich auch mit den Mitteln der Elementarmathematik ermitteln läßt. Sie können also das Ergebnis auf einfache Weise bestätigen.

Lehrbeispiel 118

Wo liegt der Schwerpunkt der Strecke P_1P_2, wenn $P_1(2; 3)$ und $P_2(6; 11)$ gegeben sind?

Lösung:

Zunächst stellen Sie die Funktionsgleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Geraden nach der Zweipunktegleichung auf:

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{11-3}{6-2},$$

$$y = 2x - 1.$$

Daraus ergibt sich

$$y' = 2,$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{5}$$

und damit die statischen Momente

$$T_x = \sqrt{5}\int\limits_2^6 (2x-1)\,\mathrm{d}x, \qquad T_y = \sqrt{5}\int\limits_2^6 x\,\mathrm{d}x,$$

$$T_x = \sqrt{5}\,(x^2 - x)\Big|_2^6, \qquad T_y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,x^2\Big|_2^6,$$

$$T_x = 28\sqrt{5}, \qquad T_y = 16\sqrt{5}.$$

Die Länge der Strecke beträgt

$$s = \sqrt{5}\int\limits_2^6 \mathrm{d}x = \sqrt{5}\,x\Big|_2^6 = 4\sqrt{5}.$$

Die Formel für die Streckenlänge der analytischen Geometrie führt zum gleichen Ergebnis.

Aus den statischen Momenten und der Streckenlänge ergeben sich dann die Schwerpunktskoordinaten zu

$$x_S = \frac{16\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \underline{\underline{4}}, \qquad y_S = \frac{28\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \underline{\underline{7}}.$$

Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Strecke.

Für das folgende Beispiel ist die Verwendung der Integralrechnung unbedingt erforderlich, denn es handelt sich dabei um eine gekrümmte Linie.

Lehrbeispiel 119

Es ist der Schwerpunkt eines Kreisbogens mit dem Öffnungswinkel 2α und dem Radius r zu ermitteln (Bild 80).

Lösung:

Sie wählen das Koordinatensystem wie in Bild 80. Da der Mittelpunkt des Kreises im Ursprung liegt, wird der Kreis durch die Funktion $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dargestellt.

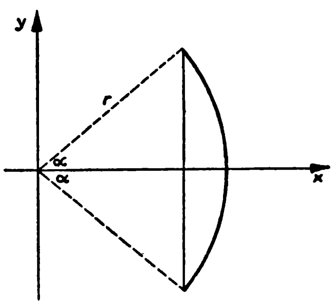

Bild 80

Achten Sie dabei darauf, daß die Wurzel positiv und negativ zu ziehen ist, und zwar gilt für die obere Hälfte des Kreises das positive, für die untere das negative Vorzeichen. Da die x-Achse für den Kreisbogen Symmetrieachse ist, entfällt die Berechnung von y_S, denn der Schwerpunkt muß immer auf einer Symmetrielinie liegen:

$$y_S = 0.$$

Verfahren Sie nach Möglichkeit immer so, daß Sie als die eine Koordinatenachse eine erkennbare Symmetrielinie wählen, entfällt doch dadurch die Berechnung einer Schwerpunktskoordinate.

Jetzt müssen Sie sich noch Klarheit über die Wahl der Integrationsgrenzen verschaffen. Aus Bild 80 lesen Sie ab:

$$\text{untere Grenze: } x_1 = r\cos\alpha, \qquad \text{obere Grenze: } x_2 = r.$$

Anstatt nun T_y für den Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel 2α zu berechnen, nehmen Sie das Zweifache des statischen Momentes der oberen Hälfte (Öffnungswinkel α).

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$T_y = 2r\int\limits_{r\cos\alpha}^{r} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2r\sqrt{r^2 - x^2}\,\Big|_{r\cos\alpha}^{r}$$

$$= -2r\left(0 - \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\alpha}\right)$$

$$\underline{\underline{T_y = 2r^2\sin\alpha}}$$

Die Bogenlänge beträgt, wenn α im Bogenmaß angegeben wird,

$$s = r\,2\alpha.$$

Damit erhalten Sie für den Schwerpunkt:

$$\underline{\underline{x_S = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}}}, \qquad \underline{\underline{y_S = 0.}}$$

Ist speziell der Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu ermitteln, so setzen Sie $2\alpha = \pi$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die gefundene Formel ein:

$$x_S = \frac{r\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{2r}{\pi} \approx 0{,}6366r}}, \qquad \underline{\underline{y_S = 0.}}$$

Übungen

117. *Wie lauten die Formeln zur Ermittlung eines Kurvenschwerpunktes, wenn die Kurve in der Parameterdarstellung*

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

gegeben ist?

118. *Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines vollen Zykloidenbogens! (Zykloide: $x = r(t - \sin t)$; $y = r(1 - \cos t)$.)*

119. *Stellen Sie die Formeln zur Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Kurve auf, die in der expliziten Form gegeben ist!*

120. *Wie groß ist das Trägheitsmoment des in Bild 80 dargestellten Kreisbogens in bezug auf die y-Achse?*

14.3 Mantelfläche von Rotationskörpern

Auch die Mantelflächen von Rotationskörpern lassen sich leicht mit einfachen Integralen berechnen. Die Kurve $y = f(x)$ liefert bei Rotation um die x-Achse (Bild 81) die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Das Kurvenstück Δs erzeugt bei der Rotation einen „Reifen", dessen Fläche

$$\Delta F_M \approx 2\pi y\,\Delta s$$

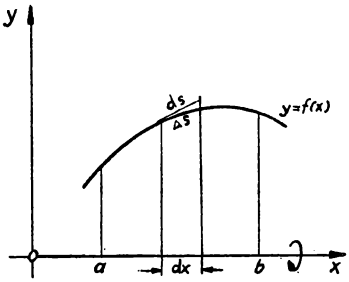

Bild 81

beträgt. Ersetzen Sie Δs näherungsweise durch $\mathrm{d}s$, so erhalten Sie als Flächenelement der Mantelfläche

$$\mathrm{d}F_M = 2\pi y\,\mathrm{d}s.$$

Damit hat die gesamte Mantelfläche die Größe

$$\boxed{F_M = 2\pi \int_s y\,\mathrm{d}s} \tag{67}$$

Das Integral ist über das Kurvenstück s zu erstrecken, das die Mantelfläche erzeugt.

Ist die Kurve in der expliziten Form $y = f(x)$ gegeben, so wird mit $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{F_M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x} \tag{67a}$$

Die Formel (67) bzw. (67a) enthält die Ihnen aus der Stereometrie bekannte 1. Guldinsche Regel.

Lösen Sie nämlich die für die Berechnung der Schwerpunktsordinate eines Kurvenbogens aufgestellten Formel (66b)

$$y_S = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{s}$$

nach dem Integral auf, so ergibt sich

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = y_S\, s.$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit 2π folgt damit aus (67a) die 1. Guldinsche Regel:

$$\boxed{F_M = 2\pi\, y_S\, s} \tag{68}$$

Achten Sie darauf, daß y_S die Ordinate des Schwerpunktes der erzeugenden *Kurve* ist!

Lehrbeispiel 120

Es ist die Mantelfläche des in Band 1, Abschnitt 7.1 behandelten Kegels zu berechnen (vgl. Band 1, Bild 91).

Lösung:

Erzeugende Kurve: $y = \frac{R}{h} x$ $\qquad y' = \frac{R}{h}$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{h} \sqrt{R^2 + h^2} = \frac{s}{h}$$

$$F_M = 2\pi \frac{Rs}{h^2} \int_0^h x \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \frac{Rs}{h^2} h^2$$

$$\underline{\underline{F_M = \pi R s}}$$

Lehrbeispiel 121

Wie groß ist die Mantelfläche der in Band 1, Lehrbeispiel 100 behandelten Kugelschicht (Kugelzone)?

Lösung:

Erzeugende Kurve: $y = + \sqrt{r^2 - x^2}$ $\qquad y' = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$F_M = 2\pi r \int_a^{a+h} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$F_M = 2\pi r \int_a^{a+h} \mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{F_M = 2\pi r h}}$$

Im Endwert ist weder a noch r_1 bzw. r_2 zu finden. Die Mantelfläche ist also nur von der Dicke h der Schicht abhängig, ganz gleich, an welcher Stelle sie herausgeschnitten ist.

Setzen Sie $h = 2r$, so erhalten Sie die Oberfläche der Vollkugel: $F_0 = 4\pi r^2$.

Lehrbeispiel 122

Wie groß ist die Oberfläche eines gestreckten Rotationsellipsoids? (Das gestreckte Rotationsellipsoid entsteht durch Rotation der durch die Funktion $y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ gegebenen Halbellipse um die x-Achse.)

Lösung:

Erzeugende Kurve: $y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad y' = - \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$1 + y'^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

Aus der analytischen Geometrie wissen Sie, daß bei der Ellipse $a^2 - b^2 = e^2$ ist. Lesen Sie noch einmal über die geometrische Bedeutung von e nach!

$$1 + y'^2 = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}$$

$$F_O = \frac{2\pi b}{a^2} \int\limits_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \, \frac{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d} x$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2} \int\limits_0^a \sqrt{a^4 - e^2 x^2} \, \mathrm{d} x$$

Prüfen Sie nach, ob der Integrand wirklich eine symmetrische Funktion ist und die Grenzen geändert werden dürfen. Das Integral lösen Sie durch Einführung einer neuen Veränderlichen.

Substitution:	$u = ex,$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{e}\,\mathrm{d}u$
untere Grenze:	$x = 0,$	$u = 0$
obere Grenze:	$x = a,$	$u = ea$

$$F_O = \frac{4\pi b}{a^2 e} \int\limits_0^{ea} \sqrt{a^4 - u^2} \, \mathrm{d} u$$

Sie können die in Abschnitt 13.14 hergeleitete Lösung

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} . \mathrm{d} x = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

verwenden.

Sie müssen für unsere Aufgabe a^2 durch a^4 und x durch u ersetzen. Dann wird

$$F_O = \frac{4\pi b}{a^2 e} \left(\frac{a^4}{2} \arcsin \frac{u}{a^2} + \frac{u}{2} \sqrt{a^4 - u^2} \right) \Bigg|_0^{ea}$$

$$= \frac{2\pi b a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} + \frac{2\pi b}{a} \sqrt{a^4 - e^2 a^2}.$$

Nun ist aber $\sqrt{a^4 - e^2 a^2} = a \sqrt{a^2 - e^2} = ab$ und damit

$$\underline{\underline{F_O = \frac{2\pi b\, a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} + 2\pi b^2.}}$$

Lehrbeispiel 123

Es ist die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit zu berechnen.

Lösung:

Bild 82 zeigt Ihnen den Schnitt durch ein um die Mittelachse rotierendes, gefülltes Gefäß. Zweckmäßigerweise legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel der Kurve.

α) Aufstellung der Kurvengleichung

An dem Flüssigkeitsteilchen mit der Masse m im Punkt P greifen folgende Kräfte an:

1. das durch die Erdanziehung hervorgerufene Gewicht mg,
2. die infolge der Rotation auftretende Zentrifugalkraft $m\omega^2 x$ (ω = Winkelgeschwindigkeit).

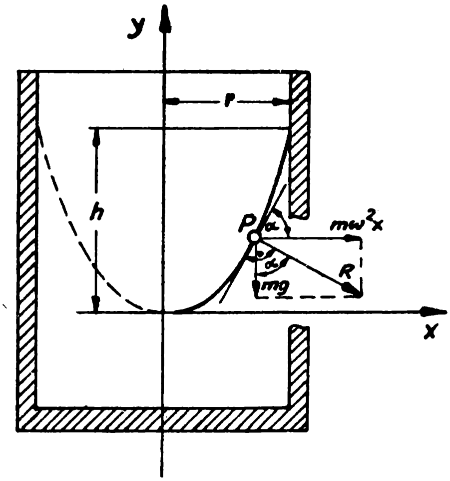

Bild 82

Beide Kräfte werden zur Resultierenden R vereinigt. Aus der Physik wissen Sie, daß sich die Oberfläche einer Flüssigkeit stets senkrecht zu der auf sie einwirkenden Kraft einstellt. Das heißt in diesem Fall, daß die Tangente an die zu bestimmende Kurve im Punkt P senkrecht auf R stehen muß.

Der Winkel zwischen der Tangente und der Horizontalen sei α. Dieser Winkel tritt noch einmal zwischen der Kraft mg und der Resultierenden R auf. Führen Sie selbst den Beweis über die Gleichheit dieser beiden Winkel!

Aus Bild 82 liest man unmittelbar ab:

$$\tan\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Nun ist aber andererseits

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$\text{oder} \qquad \mathrm{d}y = \frac{\omega^2}{g}\, x\,\mathrm{d}x.$$

Durch Integration finden Sie schließlich

$$\int \mathrm{d}y = \frac{\omega^2}{g}\int x\,\mathrm{d}x,$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g}\, x^2 + C.$$

Da die Kurve durch den Ursprung des gewählten Koordinatensystems geht, muß die Integrationskonstante $C = 0$ sein. Damit ist endgültig

$$y = \frac{\omega^2}{2g}\, x^2.$$

Die Flüssigkeitsoberfläche nimmt also die Form eines Paraboloids an.

β) Ermittlung der Oberfläche

Sie können auf dieses Beispiel nicht unmittelbar die Formel (67a) anwenden. Während bei der Aufstellung der Formel die x-Achse als Drehachse festgelegt wurde, ist hier die y-Achse Drehachse. Die Umstellung der Formel ist nicht weiter schwierig. Sie brauchen nur die Buchstaben x und y gegenseitig zu vertauschen, so daß jetzt y die Integrationsveränderliche ist. Selbstverständlich müssen dann die Grenzen des Integrals ebenfalls y-Werte sein:

$$F_O = 2\pi \int_0^h x \sqrt{1 + x'^2}\, \mathrm{d}y.$$

Hierin ist $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ der Differentialquotient der Umkehrfunktion, der sich aus der oben aufgestellten Beziehung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g}$ ergibt. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{g}{\omega^2 x}.$$

und damit
$$\sqrt{1 + x'^2} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \frac{g^2}{\omega^4}},$$

$$x\sqrt{1 + x'^2} = \sqrt{x^2 + \frac{g^2}{\omega^4}}.$$

Nun hatten wir aber festgestellt, daß eigentlich y die Integrationsveränderliche ist, also muß entweder x durch y oder $\mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}x$ ausgedrückt werden. Der zweite Weg ist hier einfacher. Denken Sie daran, daß dies der Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen gleichkommt. Man darf also nicht vergessen, die Integrationsgrenzen auf die Veränderliche x umzustellen.

Die erforderliche Beziehung zwischen den Differentialen war weiter vorn durch

$$\mathrm{d}y = \frac{\omega^2}{g}\, x\, \mathrm{d}x$$

gegeben.

Aus Bild 82 läßt sich ablesen, daß die neue Integrationsveränderliche x von 0 bis r laufen muß.

Es ist also

$$F_O = 2\pi \frac{\omega^2}{g} \int_0^r x \sqrt{x^2 + \frac{g^2}{\omega^4}}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi}{g} \int_0^r x \sqrt{\omega^4 x^2 + g^2}\, \mathrm{d}x.$$

Das vorliegende Integral läßt sich nach den im Abschnitt 13.13 aufgestellten Grundsätzen lösen.

Substitution: Umrechnung der Grenzen:

$$u = \omega^4 x^2 + g^2 \qquad x = r, \qquad u = \omega^4 r^2 + g^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\omega^4 x \qquad x = 0, \qquad u = g^2$$

$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega^4}\,\mathrm{d}u$$

$$F_O = \frac{\pi}{g\omega^4}\int\limits_{g^2}^{\omega^4 r^2 + g^2} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{3g\omega^4}\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_{g^2}^{\omega^4 r^2 + g^2}$$

$$\underline{\underline{F_O = \frac{2\pi}{3g\omega^4}\left[\sqrt{(\omega^4 r^2 + g^2)^3} - g^3\right]}}$$

Übungen

121. *Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie aus Übung 114 um die x-Achse entsteht!*

122. *Wie lauten die Formeln für die Ermittlung der Mantelfläche und des Volumens für Rotationskörper, bei welchen die y-Achse Drehachse sein soll?*

123. *Wie groß ist die Oberfläche der in Übung 113 behandelten Seilrolle?*

124. *Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der bei der Rotation der ersten Halbperiode der Sinuskurve um die x-Achse entsteht.*

15 Weiterer Ausbau der Integralrechnung

15.1 Flächen, deren Begrenzungskurve in Polarkoordinaten gegeben ist

In den Lehrbriefen über analytische Geometrie und Differentialrechnung haben Sie gelernt, daß eine Kurve auch durch eine Funktion $r = r(\varphi)$ zwischen den Polarkoordinaten φ und r gegeben werden kann. Sie sollen nun den Inhalt der vom Radiusvektor r zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 (im Bogenmaß gemessen) überstrichenen Fläche F ermitteln.

Sie teilen dazu die Fläche in keilförmige Streifen mit dem Öffnungswinkel $\Delta\varphi = \mathrm{d}\varphi$ (Bild 83).

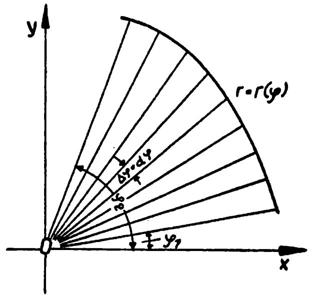

Bild 83

Bild 84 stellt die Vergrößerung eines solchen Keiles dar. Wählen Sie $\mathrm{d}\varphi$ genügend klein, so können Sie den Inhalt ΔF des Flächenelementes durch den Inhalt $\mathrm{d}F$ des Kreissektors mit dem Radius r und

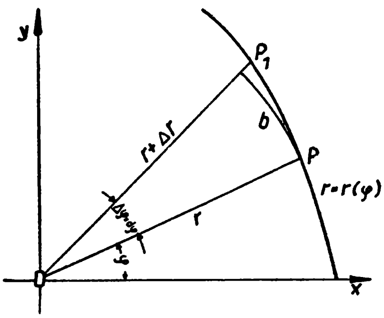

Bild 84

dem Bogen $b = r\,\mathrm{d}\varphi$ ersetzen.

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\,b r$$

$$= \frac{1}{2}\,r^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,\mathrm{d}\varphi} \tag{69}$$

Lehrbeispiel 124

Berechnen Sie den Inhalt des Kreises mit dem Radius $r = a$!

Lösung:

Die Polargleichung des Kreises lautet: $r = \text{const.} = a$.

$$F = \frac{1}{2}\,a^2\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\,a^2\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{a^2\pi}}$$

Lehrbeispiel 125

Berechnen Sie für den Kreis mit dem Mittelpunkt $(a; 0)$ und dem Radius a die vom Radiusvektor überstrichene Fläche, wenn φ von φ_1 bis φ_2 läuft (Bild 85).

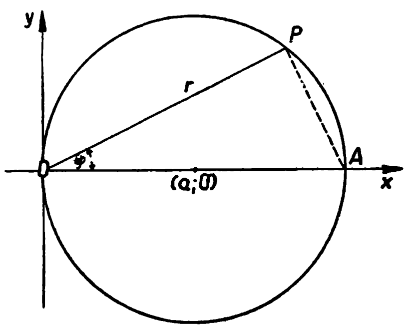

Bild 85

Lösung:

Im rechtwinkligen Dreieck OAP gilt: $\cos\varphi = \frac{r}{2a}$. Damit erhalten Sie die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten:

$$r = 2a\cos\varphi.$$

Flächeninhalt: $$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$= \underline{\underline{a^2[\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2 - (\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\varphi_1)]}}$$

Für $\varphi_1 = -\varphi_2$ folgt daraus speziell

$$F = \underline{\underline{2a^2(\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2).}}$$

Besonders wichtig ist diese Art der Flächenberechnung für Kurven, deren Gleichung sich in Polarkoordinaten sehr einfach darstellen läßt.

Lehrbeispiel 126

Wie groß ist die von der Archimedischen Spirale (siehe Lehrbeispiel 116) eingeschlossene Fläche, wenn der Kranarm die Anfangsstellung φ_1 und die Endstellung φ_2 hat?

Lösung:

Archimedische Spirale: $$r = \frac{c}{\omega}\varphi$$

$$F = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\omega^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{c^2}{\omega^2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{c^2}{6\omega^2}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$$

Bei einer vollen Umdrehung ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$) wird von dem Kranarm die Fläche

$$F = \frac{c^2}{6\,\omega^2}(8\pi^3 - 0)$$

$$\underline{\underline{F = \frac{4c^2\pi^3}{3\omega^2}}}$$

überstrichen.

Lemniskate

Definition der Lemniskate: Die Lemniskate (Bild 86) ist der geometrische Ort aller Punkte, für die das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von den beiden festen Punkten $F_1(-a; 0)$ und $F_2(+a; 0)$ den konstanten Wert a^2 besitzt.

Wenden Sie auf die Dreiecke F_1OP und OF_2P (Bild 86) den Kosinussatz an, so erhalten Sie

ΔF_1OP: $$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\pi - \varphi).$$

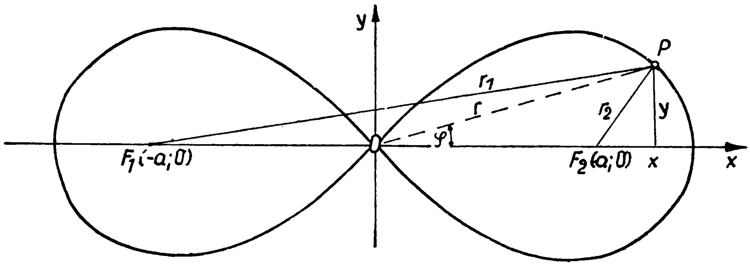

Bild 86

Da $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ ist, wird

$$r_1^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi$$

ΔOF_2P: $$r_2^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi$$

Die Definition der Lemniskate besagt: $r_1 r_2 = a^2$ oder $r_1^2 r_2^2 = a^4$. Es ist also

$$r_1^2 r_2^2 = (a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi)(a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi) = a^4.$$

Daraus ergibt sich:

$$(a^2 + r^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\varphi = a^4,$$
$$a^4 + 2a^2r^2 + r^4 - 4a^2r^2\cos^2\varphi = a^4,$$
$$r^4 - 2a^2r^2(2\cos^2\varphi - 1) = 0.$$

Mit $2\cos^2\varphi - 1 = \cos 2\varphi$ wird daraus

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\varphi = 0.$$

Dividieren Sie noch durch r^2, so erhalten Sie als **Gleichung der Lemniskate**

$$\boldsymbol{r^2 = 2a^2\cos 2\varphi.}$$

Für $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ist $r = 0$,

für $\varphi = 0$ ist $r = a\sqrt{2}$,

für $\varphi = +\frac{\pi}{4}$ ist $r = 0$.

Wenn also φ den Winkelraum zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ durchläuft, überstreicht demnach der Radiusvektor die rechte Lemniskatenschleife. Die linke Schleife wird für $\frac{3\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{4}$ überstrichen. Für alle anderen Werte von φ erhalten Sie keine reellen Werte für r, denn dafür ist $\cos 2\varphi$ negativ.

Der Flächeninhalt einer Lemniskatenschleife läßt sich nun bestimmen.

$$F = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

Substitution: $u = 2\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = 2 \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$$

Umrechnung der Grenzen:

untere Grenze: $\varphi = 0,\qquad u = 0$

obere Grenze: $\varphi = \frac{\pi}{4},\qquad u = \frac{\pi}{2}$

$$F = a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, \mathrm{d}u = a^2 \sin u \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{\underline{F = a^2}}$$

Übungen

125. *Berechnen Sie für den Kreis mit dem Mittelpunkt* (6; 0) *und dem Radius* $r = 6$ *die vom Radiusvektor überstrichene Fläche, wenn* φ *von* $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$ *bis* $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ *läuft!*

126. *Berechnen Sie den Inhalt der Kardioide (Herzkurve) (vgl. Abschnitt 9.12).*
$r = 2a\,(1 - \cos\varphi)$*!*

15.2 Flächen, deren Begrenzungskurve in Parameterdarstellung gegeben ist

Bei den technisch wichtigen Kurven (Zykloide, Evolventen usw.) ist die Parameterdarstellung wesentlich einfacher als die explizite Darstellung. Insbesondere vereinfacht sich dabei erheblich die Differentiation und Integration.

Wie ist nun der von einer Kurve eingeschlossene Flächeninhalt zu berechnen, die in der Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben ist? (Statt der Funktionssymbole $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ schreiben wir in üblicher Weise $x(t)$ und $y(t)$.)

Für den Flächeninhalt der vom Radiusvektor überstrichenen Fläche gilt nach (69)

$$F = \frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\varphi.$$

Zwischen den kartesischen Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten besteht die Beziehung

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Sind nun x und y als Funktionen von t gegeben, so hängt infolge der Beziehung $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ auch φ bzw. $\tan\varphi$ von t ab. Demnach können Sie beide Seiten von $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ nach t differenzieren und erhalten, wenn Sie für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ kurz $\dot{y}$ bzw. $\dot{x}$ schreiben:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}.$$

Setzen Sie in den Nenner $x = r\cos\varphi$ ein, so wird

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{r^2\cos^2\varphi}.$$

Nach Multiplikation mit $r^2\cos^2\varphi$ bekommen Sie

$$r^2\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{y}x - y\dot{x}$$

oder

$$r^2\cdot\mathrm{d}\varphi = (\dot{y}x - y\dot{x})\,\mathrm{d}t.$$

Setzen Sie diesen Wert in (69) für $r^2\,\mathrm{d}\varphi$ ein, so ergibt sich als Flächeninhalt einer vom Radiusvektor überstrichenen Fläche, deren Begrenzungskurve in der Parameterdarstellung gegeben ist:

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\dot{y}x - y\dot{x})\,\mathrm{d}t} \tag{70}$$

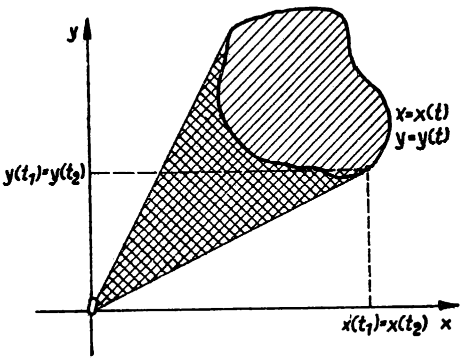

Bild 87

Stellt $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine geschlossene Kurve dar, ist also $x(t_2) = x(t_1)$ und $y(t_2) = y(t_1)$, so gibt (70) den Flächeninhalt innerhalb der Kurve. Durchläuft nämlich t den Bereich von t_1 bis t_2, so wird die im Bild 87 doppelt schraffierte Fläche vom Radiusvektor zweifach, und zwar jeweils in verschiedener Richtung, überstrichen. Der Flächeninhalt erscheint dabei einmal positiv und einmal negativ, hebt sich also auf.

Diese Darlegung über geschlossene Kurven gilt auch entsprechend für Formel (69).

Wollen Sie die Fläche unter einer Kurve berechnen, so kann dies sowohl für die zwischen Kurve und x-Achse als auch für die zwischen Kurve und y-Achse liegende Fläche erfolgen.

Die Integrale	$F_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\,\mathrm{d}x$	$F_2 = \int\limits_{y_1}^{y_2} x(y)\,\mathrm{d}y$
mit	$y = y(x)$	$x = x(y)$

als Funktion der Begrenzungskurve, stellen die Fläche zwischen der Kurve, der

	x-Achse	y-Achse
und den Parallelen zur		
	y-Achse	x-Achse
in den Abständen		
	x_1 und x_2	y_1 und y_2
dar (Bild 88a und b).		

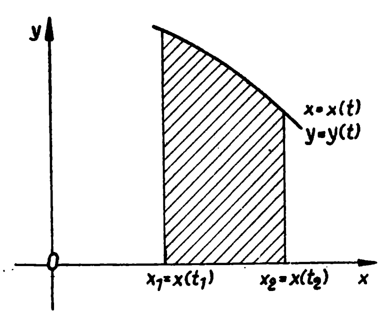

Bild 88a

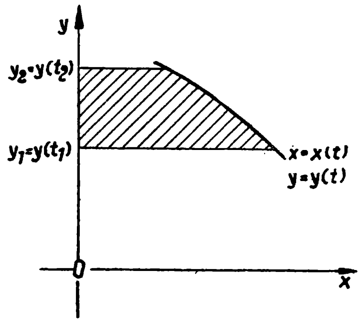

Bild 88b

Lassen Sie die jeweilige Integrationsveränderliche das zugehörige Integrationsintervall überstreichen, so erkennen Sie, daß die Begrenzungskurve und damit die Fläche in verschiedener Richtung durchlaufen wird. Trotzdem aber ergeben die Lösungen der beiden Integrale das gleiche Vorzeichen. Die Ursache für dieses Verhalten ist in der Tatsache zu suchen, daß für F_1 ein mathematisch positives und für F_2 ein negatives Koordinatensystem zu Grunde gelegt ist.

Im Bild 88a geht die Achse der abhängigen Veränderlichen y aus der der unabhängigen Veränderlichen x durch eine mathematisch positive Drehung um 90° hervor. Im Bild 88b sind dagegen die Rollen der beiden Veränderlichen vertauscht (unabhängige Veränderliche ist y, abhängige Veränderliche ist x).

Um zu erreichen, daß beide Integrale bei einem mathematisch positiven Umlaufen der Fläche auch einen positiven Flächeninhalt ergeben, versieht man das zu F_1 gehörende Integral mit einem Minuszeichen. Damit errechnen sich die so „orientierten Flächen" aus

$$F_1 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad F_2 = \int\limits_{y_1}^{y_2} x(y)\,\mathrm{d}y.$$

Führen Sie, wenn die Kurve in der Parameterdarstellung $x = x(t)$ $y = y(t)$ gegeben ist, in die obenstehenden Integrale

$$x = x(t) \qquad\qquad y = y(t)$$

im Sinne einer Substitution ein, so formen sie sich mit

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \mathrm{d}y = \dot{y}\,\mathrm{d}t$$

und

$$x_1 = x(t_1), \qquad\qquad y_1 = y(t_1),$$

$$x_2 = x(t_2) \qquad\qquad y_2 = y(t_2)$$

um in

$$\boxed{F_1 = -\int_{t_1}^{t_2} y\,\dot{x}\,\mathrm{d}t} \qquad \boxed{F_2 = \int_{t_1}^{t_2} x\,\dot{y}\,\mathrm{d}t} \qquad (71\,\mathrm{a, b})$$

wobei

$$y = y(t) \qquad\qquad x = x(t)$$

der Parameterdarstellung zu entnehmen sind.

Ist die Begrenzungskurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ wiederum eine geschlossene Kurve, dann ergeben (71a) und (71b) ein und denselben von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt (vgl. Bild 89a und 89b).

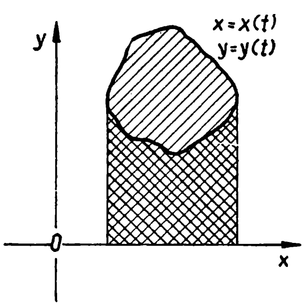

Bild 89a

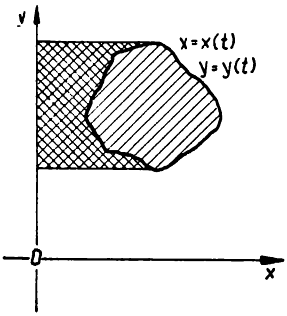

Bild 89b

Addieren Sie beide Formeln, so erhalten Sie

$$2F = \int_{t_1}^{t_2} x\,\dot{y}\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} y\,\dot{x}\,\mathrm{d}t$$

oder

$$F = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}\,x - y\,\dot{x})\,\mathrm{d}t.$$

Das aber ist die Ihnen schon bekannte Formel (70) für die von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fläche, bzw. für die vom Radiusvektor überstrichene Fläche.

Lehrbeispiel 127

Berechnen Sie den Sektor OSP_0 der gleichseitigen Hyperbel, die in der Parameterdarstellung

$$x = a \cosh t, \quad y = a \sinh t$$

gegeben ist (Bild 90)!

Lösung:

$$x = a \cosh t \qquad y = a \sinh t$$

$$\dot{x} = a \sinh t \qquad \dot{y} = a \cosh t$$

$$\dot{y} x - y \dot{x} = a^2 (\cosh^2 t - \sinh^2 t) \qquad (\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1)$$

$$= a^2$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} (\dot{y} x - y \dot{x}) \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{t_0} \mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{F = \frac{a^2}{2} t_0}}$$

Für $a = 1$ wird $F = \frac{1}{2} t_0$ oder $t_0 = 2F$.

Damit ist t_0 gleich dem doppelten Flächeninhalt des Hyperbelsektors OSP_0. (Das wurde bereits in Abschnitt 8.35 behauptet, konnte aber seinerzeit noch nicht bewiesen werden.)

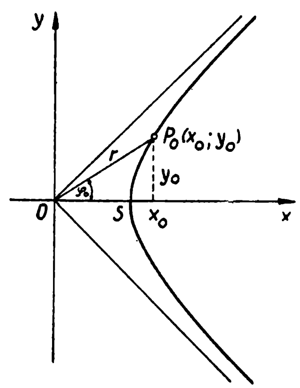

Bild 90

Wollen Sie also den Flächeninhalt bestimmen, so brauchen Sie bei gegebenem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ nur aus $x = a \cosh t$ oder $y = a \sinh t$ den Wert t_0 zu berechnen:

$$t_0 = \operatorname{ar\,cosh} \frac{x_0}{a} \quad \text{oder} \quad t_0 = \operatorname{ar\,sinh} \frac{y_0}{a}.$$

Wollen Sie dieselbe Aufgabe mit Polarkoordinaten lösen, so müssen Sie zunächst die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ in Polarkoordinaten umschreiben.

Mit $\qquad x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi$

folgt

$$r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = a^2,$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2, \qquad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Anwendung der Formel (69):

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos 2\varphi}$$

Dieses Integral können Sie auf das in Lehrbeispiel 73 berechnete Integral $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$ zurückführen, indem Sie $u = 2\varphi$ setzen.

$$\frac{du}{d\varphi} = 2 \qquad d\varphi = \frac{1}{2}\,du$$

$$\begin{array}{lll} \text{untere Grenze:} & \varphi = 0, & u = 2 \cdot 0 = 0 \\ \text{obere Grenze:} & \varphi = \varphi_0, & u = 2\varphi_0 \end{array}$$

$$F = \frac{a^2}{4} \int\limits_0^{2\varphi_0} \frac{du}{\cos u}$$

$$= \frac{a^2}{4} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \right| \Bigg|_0^{2\varphi_0}$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0\right) \right| - \ln \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| \right) \qquad \ln \tan \frac{\pi}{4} = 0$$

$$F = \frac{a^2}{4} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0\right) \right|$$

Der zum Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gehörige Winkel φ_0 läßt sich aus der Beziehung $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ berechnen:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tan} \frac{y_0}{x_0}$$

Lehrbeispiel 128

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Astroide, wenn die Gleichung der Astroide in Parameterform

$$x = \varrho \cos^3 t, \qquad y = \varrho \sin^3 t$$

lautet!

Lösung:

Sie bilden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3\varrho \cos^2 t \sin t, \\ \dot{y} &= 3\varrho \sin^2 t \cos t \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{y}x - y\dot{x} &= 3\varrho^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) \\ &= 3\varrho^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3\varrho^2 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

Nun ist aber $2 \sin t \cos t = \sin 2t$ oder $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ und demnach

$$\dot{y}x - y\dot{x} = \frac{3}{4} \varrho^2 \sin^2 2t.$$

Jetzt ist der Integrand soweit umgeformt, daß Sie ihn integrieren können. Eine volle Astroide wird beschrieben, wenn der Winkel t die Werte von 0 bis 2π durchläuft:

$$\begin{array}{llll} \text{für } t = 0 & \text{ist} & x = \varrho & \text{und} \quad y = 0, \\ \text{für } t = 2\pi & \text{ist ebenfalls} & x = \varrho & \text{und} \quad y = 0. \end{array}$$

Damit ist aber die Bedingung $x(t_1) = x(t_2)$ und $y(t_1) = y(t_2)$, d. h. hier, $x(0) = x(2\pi)$ und $y(0) = y(2\pi)$ erfüllt.

$$F = \frac{3}{8}\varrho^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{16}\varrho^2 \int_0^{4\pi} \sin^2 u \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{3\varrho^2}{32}(u - \sin u \cos u)\Big|_0^{4\pi}$$

$$= \frac{3\varrho^2}{32} 4\pi$$

$$\underline{\underline{F = \frac{3\varrho^2\pi}{8}}}$$

Substitution:

$u = 2t$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2 \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$

untere Grenze: $t = 0 \quad u = 2 \cdot 0 = 0$

obere Grenze: $t = 2\pi \quad u = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

Zusammenfassung

Die Flächenberechnung durch Integration kann auch erfolgen, wenn die Begrenzungskurve in Polarkoordinaten oder in Parameterform gegeben ist.

Für Polarkoordinaten gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi.$$

Für die Darstellung in Parameterform gilt:

a) Für die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse:

$$F = -\int_{t_1}^{t_2} y\dot{x} \, \mathrm{d}t.$$

b) Für die Fläche zwischen der Kurve und der y-Achse:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y} \, \mathrm{d}t.$$

c) Für die von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fläche:

$$F = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}x - y\dot{x}) \, \mathrm{d}t.$$

1. a) $0{,}3398$ b) $-\frac{\pi}{15}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $2{,}3890$

e) $\frac{\pi}{3}$ f) $-1{,}3315$ g) $0{,}3805$ h) $\frac{2\pi}{3}$

2. a) $x \tan \operatorname{arc} \cot x = 1$ b) $\frac{\sin \operatorname{arc} \cos x}{\cos \operatorname{arc} \sin x} = 1$

c) $\frac{x(\tan \operatorname{arc} \cot x - \cot \operatorname{arc} \tan 2x)}{\tan \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{2}$

3. a) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$

b) $y' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}$

4. a) $y' = -\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

b) $y' = -\frac{2m \sin 2x}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 2x}}$

5.
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + 1$$
$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh^2 x + 1$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm 1 \qquad (\text{Substitution}: e^x = z)$$
$$x_1 = \ln z_1 = \ln(2{,}4142) = 0{,}881; \quad x_2 = \ln z_2 = \ln(0{,}4142) = -0{,}881$$

6. a) $y' = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$

b) $y' = \frac{a}{\tanh(ax + b)\cosh^2(ax + b)} = \frac{a}{\sinh(ax + b)\cosh(ax + b)}$
$$= \frac{2a}{\sinh 2(ax + b)}$$

c) $y' = \frac{\cosh(2x^2 + 4)}{\sinh(2x^2 + 4)} \cdot 4x = 4x \coth(2x^2 + 4)$

$y'(2) = 8 \coth 12.$

Da $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$ ist, so wird: $8 \coth 12 = 8 \cdot \frac{1 + e^{-24}}{1 - e^{-24}}$. Im Vergleich zur Zahl 1 ist der Wert $\frac{1}{e^{24}}$ verschwindend klein. Deshalb kann im Zähler und im Nenner der Wert $\frac{1}{e^{24}}$ unberücksichtigt bleiben, und Sie erhalten: $y'(2) \approx 8 \cdot 1 = 8$.

d) $y' = -\dfrac{\dfrac{\cosh(1-x^2)}{\sinh(1-x^2)}(-2x)}{[\ln\sinh(1-x^2)]^2} = \dfrac{2x\coth(1-x^2)}{[\ln\sinh(1-x^2)]^2}$

7. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$e^x y + e^{-x} y = e^x - e^{-x}$$
$$e^x(y-1) = e^{-x}(-1-y)$$
$$e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$$
$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$
$$e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$
$$x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$
$$y = \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

8. Setzen Sie $z = \operatorname{ar}\cosh x, \qquad x = \cosh z.$
Dann gilt
$$2z = \operatorname{ar}\cosh(2\cosh^2 z - 1),$$
$$2z = \operatorname{ar}\cosh(\cosh 2z),$$
$$2z = 2z.$$

9. $\dfrac{y}{a} = \cosh\dfrac{x}{a}$

Inverse Funktion: $\dfrac{x}{a} = \operatorname{ar}\cosh\dfrac{y}{a}$

oder
$$y = a \cdot \operatorname{ar}\cosh\frac{x}{a}$$
$$= a \cdot \ln\left(\frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right)$$
$$= a \cdot \ln\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

10. a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{1-4x^2} = \dfrac{1}{1-4x^2}$

11. a) $y = 1{,}107$

b) $y_{1;2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} = \pm 1{,}023$

12. 1

13. a) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$

b) $z'(t) = \dfrac{-3(1+t)^2}{(1+t)^2 + (3-3t^2)^2} = \dfrac{-3}{1+9(1-t)^2}$

c) $y = \dfrac{\pi}{2}, \quad y' = 0$

d) $g'(t) = -\frac{a}{a^2+t^2} \operatorname{arc} \cos 2t + \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} \operatorname{arc} \cot \frac{a-t}{a+t}$

e) $z'(u) = \frac{-a}{\sin^2 u + a^2 \cdot \cos^2 u}$

f) $y' = \frac{-a}{a^2+x^2}$

g) $f'(t) = \sqrt{\frac{a+t}{a-t}}$

h) $y' = \frac{x-6}{x^2+3}$

14. a) Es gilt: $\cosh z + \sinh z = e^z$, also ist $\cosh 2x + \sinh 2x = e^{2x}$.
    b) $\cosh^2 x = \sinh^2 x + e^x (\cosh x - \sinh x)$
    Durch Umformung erhalten Sie
    $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

15. a) $\cosh x = \frac{1}{0{,}0863}$; $\qquad x = \pm 3{,}14$
    b) $$\begin{aligned} \sinh x \cosh x - 1 &= \sinh^2 x - \cosh^2 x \\ &= -1 \\ \sinh x \cosh x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

16. a) $y = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$, $\qquad y' = e^{2x}$
    b) $y = \frac{1}{2}(1 + e^{-4x})$, $\qquad y' = -2e^{-4x}$
    c) $g'(t) = 0$ (Die Variable t tritt in $g(t)$ nicht auf, also ist $g(t) = \text{const.}$)
    d) $z(x) = \ln x + x$, $\qquad z'(x) = \frac{1}{x} + 1$

17. a) $y = a - \cosh x$
    b) $z = \sqrt{1 - (\operatorname{ar} \tanh x)^2}$

18. a) $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(2-x)}}$
    b) $z(t) = \frac{\operatorname{ar} \sinh t}{\ln(t + \sqrt{t^2+1})} = \frac{\ln(t + \sqrt{t^2+1})}{\ln(t + \sqrt{t^2+1})} = 1$; $\qquad z'(t) = 0$

19. a) $\sin j\pi = j \sinh \pi = j \cdot 11{,}55$
    b) $\sinh j\pi = j \cdot \sin \pi = 0$
    c) $\sinh jx \cosh jx = \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sin 2x$

20. a) $0{,}324 + j \cdot 0{,}105$
    b) $1{,}274 + j \cdot 0{,}664$

21. $\mathfrak{U}_2 = -89\,900 \cdot e^{j \cdot 7{,}9°}$ V

22. a) $y' = -\frac{2\sin t\cos t}{a\sin t} = -2\cos t, \qquad y'' = -\frac{2}{a}$

b) $y' = \frac{a+t-t}{(a+t)^2} : \frac{-(a+t)-(a-t)}{(a+t)^2} = -\frac{1}{2}, \qquad y'' = 0$

c) $y' = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(t + \frac{1}{t}\right)$

d) $y' = -\tan t, \qquad y'' = \frac{1}{3a\sin t\,\cos^4 t}$

23. a) $r^2 = 1$

b) $(r\cdot\cos\varphi - a)^2 + (r\cdot\sin\varphi - b)^2 = c^2$

$r^2 - 2r(a\cdot\cos\varphi + b\cdot\sin\varphi) + a^2 + b^2 - c^2 = 0$

24. $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

25. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = 0, \quad \tan\alpha = -\frac{1}{\tan\varphi}$. Das bedeutet, Radiusvektor und Tangente stehen senkrecht aufeinander. Es ist also $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

26. $\tan\vartheta = \frac{a\varphi}{a} = \frac{\pi}{9}, \qquad \vartheta = 19°15', \qquad \alpha = 39°15'$

Winkel der Normalen mit der Achse $\varphi = 0$: $90° + 39°15' = 129°15'$. Die Gerade $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bildet somit mit der Normalen einen Winkel von $\beta = 129°15' - 45° = 84°15'$.

27. a) $\dot{x} = rt\cos t, \qquad \dot{y} = rt\sin t$

$\ddot{x} = r(\cos t - t\sin t), \qquad \ddot{y} = r(\sin t + t\cos t)$

$\varrho = r\cdot t$

b) $\varrho = 2{,}5\sqrt{5} \approx 5{,}59$

c)

$x = t - \sin t$	$x(\pi) = \pi$	$y = 1 - \cos t$	$y(\pi) = 2$
$\dot{x} = 1 - \cos t$	$\dot{x}(\pi) = 2$	$\dot{y} = \sin t$	$\dot{y}(\pi) = 0$
$\ddot{x} = \sin t$	$\ddot{x}(\pi) = 0$	$\ddot{y} = \cos t$	$\ddot{y}(\pi) = -1$

$\varrho = \left|\frac{4^{\frac{3}{2}}}{-2}\right| = 4$

d) Es ist $k(x) = \frac{6x}{\sqrt{1+9x^4}^3}$.

Für $x < 0$ ist $k < 0$,
für $x = 0$ ist $k = 0$,
für $x > 0$ ist $k > 0$.

28. a) $\frac{8}{7}$ b) $\frac{3}{4}$

29. a) $F(0) = 1$ b) $F(\infty) = \infty$

30. a) $F(0) = 0$ b) $F(0) = 0$ c) $F(2) = -\frac{1}{2}$

31. a) $F(a) = 1$ b) $F(0) = 1$

c) Zunächst ist $\ln F(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Hieraus erhalten Sie

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right)\right] : \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}, \quad \frac{f'(\infty)}{g'(\infty)} = -1.$$

Aus $\ln F(\infty) = -1$ ergibt sich $F(\infty) = \frac{1}{e}$.

d) $F(\infty) = e^a$ e) $F(\infty) = 1$ f) $F(\infty) = 1$

32. a) $u_x = 5x^4 + 18x^2y - 4xyz$

$u_y = 6x^3 - 2x^2z + 3z^3$

$u_z = -2x^2y + 9yz^2$

b) $z_x = y\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $z_y = x\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

c) $z_x = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ $z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$

d) $z_x = e^x \sin y$ $z_y = e^x \cos y$

e) $z_x = y e^{\sin xy} \cos xy - e^{\cos(x+y)} \sin(x + y)$

$z_y = x e^{\sin xy} \cos xy - e^{\cos(x+y)} \sin(x + y)$

33. a) $z_x = 5x^4 + 6x^2y^2$ $z_y = 4x^3y + 6y^2$

$z_{xx} = 20x^3 + 12xy^2$ $z_{yy} = 4x^3 + 12y$

$z_{xy} = z_{yx} = 12x^2y$

b) $u_x = y + z$ $u_y = x + z$ $u_z = y + x$

$u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = 0$

$u_{xz} = u_{zx} = 1$ $u_{xy} = u_{yx} = 1$ $u_{yz} = u_{zy} = 1$

c) $z_x = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$ $z_y = \dfrac{-2x}{(x + y)^2}$

$z_{xx} = -\dfrac{4y}{(x + y)^3}$ $z_{xy} = z_{yx} = \dfrac{2(x - y)}{(x + y)^3}$ $z_{yy} = \dfrac{4x}{(x + y)^3}$

d) $f_x = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} = \dfrac{1 + y^2}{(1 + y^2) + x^2(1 + y^2)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$f_y = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} = \dfrac{1 + x^2}{(1 + x^2) + y^2(1 + x^2)} = \dfrac{1}{1 + y^2}$

$f_{xx} = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$ $f_{xy} = f_{yx} = 0$ $f_{yy} = -\dfrac{2y}{(1 + y^2)^2}$

Die Rechnung vereinfacht sich unter Verwendung der Beziehung

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,tan} y$$

e) $f_x = -\cot x \qquad f_y = \cot y$

$$f_{xx} = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0 \qquad f_{yy} = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

34. Sie erhalten der Reihe nach die Ergebnisse:

$$u_x = yz\,e^{xyz},$$
$$u_{xy} = z\,e^{xyz}(1 + xyz),$$
$$u_{xyz} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2).$$

35. $f_x = \frac{1}{y} \qquad f_y = -\frac{x}{y^2}$

$$x f_x + y f_y = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0$$

36. $f_x = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \qquad f_y = \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$$f_z = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$f_x + f_y + f_z = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3}{x+y+z}$$

37. $f_x = e^{\frac{y}{x}}\,\frac{x-y}{x} \qquad f_y = e^{\frac{y}{x}}$

$$x f_x + y f_y = e^{\frac{y}{x}}(x-y) + y\,e^{\frac{y}{x}} = x\,e^{\frac{y}{x}}$$

38. a) $dz = 12x(x - y^2)\,dx + 12y(y - x^2)\,dy$

b) $dz = e^x(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$

c) $dw = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

39. $V = r^2\pi h = 70{,}4\ \mathrm{dm}^3$

$$\Delta V_{\max} = r\pi(2h\,\Delta r + r\Delta h) = 1{,}8\ \mathrm{dm}^3$$

40. $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

$$\Delta R_{\max} = \frac{1}{(R_1 + R_2)^2}\left[R_2^2\,\Delta R_1 + R_1^2\,\Delta R_2\right] \approx 0{,}8\ \Omega$$

41. $\alpha = \arcsin \frac{a}{c} = 16^\circ 15' 37''$

$$\Delta \alpha''_{\max} = \left(\left|\frac{\Delta a}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right| + \left|\frac{a\,\Delta c}{c\sqrt{c^2 - a^2}}\right|\right)\varrho'' = 43''$$

42. $r = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2} \approx 750$ m

$$\Delta r_{\max} = \left|\frac{s}{4p}\Delta s\right| + \left|\left(-\frac{s^2}{8p^2} + \frac{1}{2}\right)\Delta p\right| = (0{,}5 + 5)\ \text{m} = 5{,}5\ \text{m}$$

$$\frac{\Delta r_{\max}}{r} = \frac{5{,}5}{750} = 0{,}007$$

Die Fehlerformel läßt klar erkennen, daß der Fehler der Pfeilhöhe einen größeren Einfluß auf den Fehler des Radius ausübt als der Fehler der Sehne. Die Pfeilhöhe muß also mit besonderer Sorgfalt gemessen werden.

43. $s = \frac{b}{2}\cot\frac{\gamma_1}{2}\cot\gamma_2 = 333{,}15$ m

$$\Delta s_{\max} = \left|\frac{-b\cot\gamma_2}{4\sin^2\frac{\gamma_1}{2}}\cdot\frac{\Delta\gamma_1}{\varrho}\right| + \left|\frac{-b\cot\frac{\gamma_1}{2}}{2\sin^2\gamma_2}\cdot\frac{\Delta\gamma_2}{\varrho}\right|$$

Nach Division durch s folgt unter Verwendung der Beziehung
$\sin\gamma_1 = 2\sin\frac{\gamma_1}{2}\cos\frac{\gamma_1}{2}$ bzw. $\sin 2\gamma_2 = 2\sin\gamma_2\cos\gamma_2$
und wegen $\Delta\gamma_1 = \Delta\gamma_2$

$$\frac{\Delta s_{\max}}{s} = \left(\left|\frac{1}{\sin\gamma_1}\right| + \left|\frac{2}{\sin 2\gamma_2}\right|\right)\frac{\Delta\gamma_1}{\varrho} = 0{,}0013\,.$$

Für den prozentualen Fehler ergibt sich dann

$$p = \frac{\Delta s_{\max}}{s}\cdot 100\,\% = 0{,}13\,\%$$

44. $y' = -\frac{y\cos x}{\sin x + \sin y}$

Für den Punkt $P\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ folgt

$$y' = -\frac{\pi}{2}$$

45. a) $y' = -\frac{(2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y} + y)\sqrt{1+y}}{(2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y} + x)\sqrt{1+x}}$

b) $xy - y^x = 0$

$$y' = -\frac{y - y^x\ln y}{x - xy^{x-1}}$$

c) $y' = -\frac{y}{2x}$

d) $y' = -\frac{2x(x-2a) + x^2 + y^2 + a^2}{2y(x-2a)}$

e) $y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

46. a) $x_{\min} = 2, \qquad y_{\min} = 3$

b) Für die Stelle $x = 4, \qquad y = -3$ folgt

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -5 < 0.$$

Die Funktion besitzt keinen Extremwert.

47. $f_x = \cos x + \cos (x + y), \qquad f_y = \cos y + \cos (x + y)$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \cos x + \cos (x + y) = 0 \\ \text{(II)} & \cos y + \cos (x + y) = 0 \\ \hline & \cos x - \cos y \qquad = 0 \\ & \qquad x = y \\ \text{(Ia)} & \cos x + \cos 2x \qquad = 0 \end{array}$$

$$\cos x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_E = y_E = \frac{\pi}{3}$$

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = f_{yy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0, \qquad f_{xy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$$

Bei $x_E = y_E = \frac{\pi}{3}$ liegt ein Maximum vor.

48. Sind K_1, K_2 und K_3 die Kanten, dann erhalten Sie
$K_1 = K_2 = K_3 = \sqrt[3]{V}$,
d. h., der Quader ist ein Würfel.

49. a) Maximum bei $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$x_2 = -\frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y_2 = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$

Minimum bei $x_3 = -\frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y_3 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$x_4 = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y_4 = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$

b) $x_{\min} = -\frac{7}{12}, \qquad y_{\min} = \frac{1}{6}, \qquad z_{\min} = \frac{5}{12}$

50. Ist $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt der Ellipse, dann gilt für seinen Abstand d vom Ursprung

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es ist $d_{\max} = a$ und $d_{\min} = b$. Da x und y außerdem die Ellipsengleichung erfüllen müssen, hat man also die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$$

zu bestimmen. Sie finden

$$a = 3, \qquad b = 2.$$

51. Es ist

$$f(x_a, x_b, x_c) = x_a^2 + x_b^2 + x_c^2,$$
$$\varphi_1(x_a, x_b, x_c) = x_a - x_b - 0{,}009 = 0,$$
$$\varphi_2(x_a, x_b, x_c) = x_a - x_c + 0{,}007 = 0,$$
$$F(x_a, x_b, x_c) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Sie erhalten $x_a \approx 0{,}001, \qquad x_b \approx -0{,}008, \qquad x_c \approx 0{,}008,$

$$H = 136{,}475 \text{ m}.$$

Beim unbestimmten Integral wurde zur Abkürzung die Integrationskonstante im allgemeinen fortgelassen. Sie gehört natürlich zur vollständigen Lösung.

52. a) $J = \frac{1}{16}(4x - 7)^4$ b) $J = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^3$

53. a) $J = -\frac{1}{4(2x+3)^2}$ b) $J = -\frac{1}{3}\ln|5 - 3x|$

54. a) $J = \frac{2}{25}\sqrt{(5x-1)^5} = \frac{2}{25}(5x-1)^2\sqrt{5x-1}$

b) $J = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}$

55. a) $J = \frac{1}{2}\tan(2x - 1)$ b) $J = \cot(3 - x)$

56. a) $J = \frac{244}{10}$ b) $J = \frac{1}{3}\ln 10 = 0{,}76753$

57. $J = \frac{1}{4}[2x + 3 - \sin(2x+3)\cos(2x+3)]$

58. $J = \frac{x}{2} - 3 + \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right)$

59. $J = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

60. $J = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

61 $J = \int \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2m}(mx - \sin mx \cos mx)$

62. a) $J = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)$ für $m \neq n$

$J = -\frac{1}{4m}\cos 2mx$ für $m = n$

b) $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)$ für $m \neq n$

$J = \frac{1}{2m}(mx + \sin mx \cos mx)$ für $m = n$

63. $J = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x)$

64. $J = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x)$

65. $J = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a + C'$
$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$

66. $J = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a + C'$
$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

67. $J = \ln|e^x + x|$

68. $J = \ln|x^4 - 9x^2 + 1|$

69. $J = \ln|x^2 - 5x + 2|$

70. $J = \ln|\arctan x|$

71. $J = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| = \ln|\tan x|$

72. a) $J = \frac{1}{2}\ln|\tanh x|$ b) $J = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$

73. $J = \ln\cosh x + \ln|\sinh x| = \ln|\sinh x \cosh x|$

$$= \ln\frac{1}{2}|\sinh 2x|$$
$$= \ln|\sinh 2x| - \ln 2 + C$$
$$J = \ln|\sinh 2x| + C$$

74. $J = \ln|\arcsin x|$

75. $J = -\frac{1}{2}\ln|a^2 - x^2|$

76. $J = \frac{1}{8}\ln|4x^2 - 9|$

77. Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, denn es ist

$\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}$.

Die additive Konstante ist also $\frac{1}{2}$.

Beide Ergebnisse können Sie auch in ein Ergebnis zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1 \\ \int \sin x \cos x \, dx &= -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2\end{aligned}\right| +$$

$$2\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(\sin^2 x - \cos^2 x) + (C_1 + C_2)$$

oder
$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{4}(\sin^2 x - \cos^2 x) + C.$$

78. a) $J = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}$ b) $J = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$

79. $J = \frac{1}{4} \tan^2 2x$

80. $J = \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \tan x)^2$

81. $J = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{arc} \cos \frac{x}{2}\right)^2$

82. a) $J = \operatorname{arc} \sin \frac{x+3}{4}$ b) $J = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2x-1}{3}$

c) $J = \frac{7}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + \frac{x+1}{2} \sqrt{6 - 2x - x^2}$

83. a) $J = \ln (x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

b) $J = \frac{1}{3} \ln (3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 5})$

c) $J = \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2 + 6x + 15} + 3 \ln (x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 15})$

84. a) $J = \ln (x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x})$

b) $J = \frac{1}{2} \ln (2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 3})$

c) $J = \frac{1}{2} \ln |2x - 3|$

85. a) $J = -\sqrt{6 - 2x - x^2} - \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{\sqrt{7}}$

b) $J = \sqrt{x^2 + 8x + 32} - 4 \ln (x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 32})$

c) $J = \sqrt{x^2 - 4x} + 2 \ln (x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x})$

86. $J = \int\limits_3^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-3)^2 + 3^2}}$ Substitution: $x - 3 = u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$

$= \ln 9 - \ln 3 = \ln 3$

87. $J = \frac{25}{2} \operatorname{arc} \sin 1 = \frac{25\pi}{4}$

88. Substitution: $x = a \sin u$ $\mathrm{d}x = a \cos u \, \mathrm{d}u$.

$J = x \sqrt{a^2 - x^2}$

89. $J = x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2}$

90. $J = \frac{x^5}{25} (5 \ln x - 1)$

91. $J = \mathrm{e}^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \Big|_0^1 = 9\mathrm{e} - 24$

92. $J = \frac{1}{15} \cos x (-3 \sin^4 x - 4 \sin^2 x - 8)$

93. $J = \frac{1}{48} \sin x \,(8 \cos^5 x + 10 \cos^3 x + 15 \cos x) + \frac{5}{16}\, x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{32}\, \pi$

94. a) $J = -\frac{1}{2} \cos^6 x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{5} \cos^4 x\right)$

b) $J = \sin^5 x \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{1}{9} \sin^4 x\right)$

95. a) $J = -\frac{1}{4} \frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

b) $J = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{17}{36} + \frac{3}{16} \ln 3$

96. $J = 7 \ln |x + 8| - 5 \ln |x - 3|$

97. Zerlegung des Nenners: $2x^3 - 14x - 12 = 2\,(x + 1)\,(x + 2)\,(x - 3)$

$$\frac{3x^2 + 10x - 17}{2(x + 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{x + 1} - \frac{5}{x + 2} + \frac{2}{x - 3}\right)$$

$$= \frac{3}{x + 1} - \frac{5}{2(x + 2)} + \frac{1}{(x - 3)}$$

Integral $J = 3 \ln |\, x + 1 \,| - \frac{5}{2} \ln |\, x + 2 \,| + \ln |\, x - 3 \,|$

98. $J = \frac{1}{2a} \ln |\, x - a \,| - \frac{1}{2a} \ln |\, x + a \,| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$

99. $J = -\frac{5}{x - 3} + 4 \ln |\, x - 3 \,|$

100. $J = 2 \ln |x + 5|$

Der Integrand kann durch $(x + 5)$ gekürzt werden!

101. $J = \frac{3}{2} \ln |\, x^2 + 2x + 2 \,| + 2 \operatorname{arc\,tan} (x + 1)$

102. $J = 2 \ln |\, x^2 - 10x + 30 \,| + \frac{13}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tan} \frac{x - 5}{\sqrt{5}}$

103. $J = \frac{1}{2} \ln |\, x^2 - 4x + 20 \,| + \frac{3}{4} \operatorname{arc\,tan} \frac{x - 2}{4} \Big|_2^6 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{16}$

104. Relativer Fehler des Ergebnisses von Lehrbeispiel 108: $\frac{|\Delta J|}{J} \approx 0{,}0000043.$

Nach Formel (59) wird $F = \frac{25}{36} = 0{,}694444.$

Relativer Fehler $\frac{|\Delta F|}{F} \approx 0{,}00187 \mathrel{\hat{=}} 0{,}19\,\%.$

Er beträgt das 435fache des relativen Fehlers in Lehrbeispiel 108.

105.

y_0	$\sqrt{1}$	1,000
y_{10}	$\sqrt{11}$	3,317

y_2	$\sqrt{1{,}464}$	1,210
y_4	$\sqrt{2{,}312}$	1,521
y_6	$\sqrt{3{,}928}$	1,982
y_8	$\sqrt{6{,}696}$	2,588
Σ_1		7,301

y_1	$\sqrt{1{,}208}$	1,099
y_3	$\sqrt{1{,}816}$	1,348
y_5	$\sqrt{3}$	1,732
y_7	$\sqrt{5{,}144}$	2,268
y_9	$\sqrt{8{,}632}$	2,938
Σ_2		9,385

$y_0 + y_{10}$	4,317
$2\,\Sigma_1$	14,602
$4\,\Sigma_2$	37,540
Σ	56,459

$$\int_0^2 \sqrt{x^3 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{3{,}764}}$$

106. $x_S = \dfrac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$; $\qquad y_S = 0$

107. $x_S = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \dfrac{2}{3}\;\dfrac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$; $\qquad y_S = 0$

108. $x_S = \dfrac{\pi}{2}$; $\qquad y_S = \dfrac{\pi}{8}$

109. Siehe Band 1, Lösung 105

110. $J_y = \dfrac{1}{8}\,(2\alpha + \sin 2\alpha)\,(R^4 - r^4)$

$$J_S = J_y - \frac{4}{9}\cdot\frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}$$

111. $J_x = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ Substitution: $u = 2x$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi} \sin^3 u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{9}\ [1^4]$$

$$J_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} u^2 \sin u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{8} (\pi^2 - 4) \; [1^4]$$

112. Siehe Lösung 108, Band 1.

113. $V = 2\pi \int_0^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x$

$$= 2\pi \, r a^2 + \frac{4}{3} \pi r^3 - \pi^2 r^2 a$$

114. $s = m \sinh \frac{x_1}{m} = \sqrt{m^2 \cosh^2 \frac{x_1}{m} - m^2} = \sqrt{y_1^2 - m^2}$, da $y_1 = m \cosh \frac{x_1}{m}$

115. $s = \frac{r \pi^2}{2}$

116. $s = 16a$

117. $T_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$ $\qquad$ $T_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t$

$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t;$ $\qquad$ $x_S = \frac{T_y}{s};$ $\qquad$ $y_S = \frac{T_x}{s}$

118. $x_S = \pi r;$ $\qquad$ $y_S = \frac{4}{3} r$

119. $J_x = \int_s y^2 \, \mathrm{d}s = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$

$J_y = \int_s x^2 \, \mathrm{d}s = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x$

120. $J_y = \frac{r^3}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha)$

121. $V = \frac{1}{2} \pi m^3 \left(\frac{x_1}{m} + \cosh \frac{x_1}{m} \sinh \frac{x_1}{m} \right)$

da $y_1 = m \cosh \frac{x_1}{m}$ $\quad$ und $\quad$ $\sinh \frac{x_1}{m} = \sqrt{\cosh^2 \frac{x_1}{m} - 1}$
folgt

$$V = \frac{1}{2} \pi m \left(m x_1 + y_1 \sqrt{y_1^2 - m^2} \right)$$

$$F_M = \pi m^2 \left(\frac{x_1}{m} + \cosh \frac{x_1}{m} \sinh \frac{x_1}{m} \right)$$

$$= \pi \left(m x_1 + y_1 \sqrt{y_1^2 - m^2} \right)$$

122. $V = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 \,\mathrm{d}y$

$$F_M = 2\pi \int\limits_{s} x \,\mathrm{d}s = 2\pi \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} \,\mathrm{d}y$$

Dabei ist $x = \varphi(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$.

123. $F_M = 2\pi^2 r a - 4\pi r^2$;

124. $F_O = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \,\mathrm{d}x$ Substitution: $u = \cos x$

$$= 2\pi [\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})]$$

125. Bild 91.

$F = 6\,(4\pi + 3\sqrt{3})$

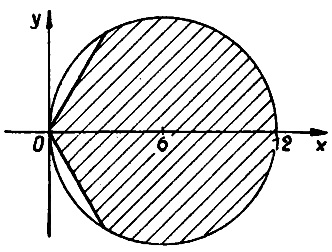

Bild 91

126. $F = 8a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 \frac{\varphi}{2} \,\mathrm{d}\varphi$ $u = \frac{\varphi}{2}$

$$= 16\,a^2 \left(-\frac{1}{4} \sin^3 u \cos u - \frac{3}{8} \sin u \cos u + \frac{3}{8} u\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= 16\,a^2 \cdot \frac{3}{8}\pi$$

$F = 6\,a^2\pi$