Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Band 3

Höhere Mathematik

Zentralstelle für die Fachschulausbildung
- Lehrmaterial für Grundlagenfächer -

Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

Mathematik IV

Höhere Mathematik

BAND 3

Unendliche Reihen – Differentialgleichungen

Herausgeber:
Zentralstelle für die Fachschulausbildung
– Lehrmaterial für Grundlagenfächer –
Dresden 1962

Ausgearbeitet von:

WILHELM LEUPOLD, Fachschullehrer an der Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden

HORST BEINHOFF, Fachschullehrer an der Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel“, Meißen

Begutachtet von den Mitgliedern einer Redaktionskommission:

OTTO GREUEL, Fachschullehrer an der Ingenieurschule für Elektrotechnik „Fritz Selbmann“, Mittweida

HERBERT NAJUCH, technisch-wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Werkzeugmaschinen, Karl-Marx-Stadt

HANS KREUL, Fachschullehrer an der Ingenieurschule für Elektroenergie „Dr. Robert Mayer“, Zittau

Bearbeitet von:

RUDOLF CONRAD, Zentralstelle für Fachschulausbildung — Lehrmaterial für Grundlagenfächer — Dresden

Bei der Ausarbeitung wurden Teile der Lehrbriefreihe für das Fachschulfernstudium, Mathematik IV, verwendet.

Redaktionsschluß: 15. August 1958

Als Manuskript gedruckt

Veröffentlicht unter Ag 604/84/62 — 1. Ausgabe — 5. Auflage

Satz und Druck: (III/18/203) VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig

Nachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, Bad Langensalza

L 10006 · 1 · 5

Gebühr: DM 3,70

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

VI. Unendliche Reihen

VII. Differentialgleichungen

VI. Unendliche Reihen

16 Potenzreihen

16.1 Grundbegriffe

Im bisherigen Verlauf Ihres Studiums lernten Sie endliche arithmetische und geometrische Reihen kennen. Diese Ihnen bekannten Reihen heißen endlich, weil die Anzahl der Glieder begrenzt ist.
Wir betrachten nun die *unendliche* Zahlenfolge

$$0{,}3;\quad 0{,}03;\quad 0{,}003;\quad 0{,}0003;\ \ldots$$

Durch Addieren ihrer einzelnen Glieder erhalten Sie eine unendliche Reihe. Ihre Summe ist Ihnen bekannt, denn es ist

$$0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\cdots=0{,}3333\cdots=\frac{1}{3}\,.$$

$\frac{1}{3}$ ist also die Summe dieser aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Reihe.

Allgemein erklären wir:

Eine Zahlenfolge $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$ mit einer unbegrenzten Anzahl von Gliedern u_ν heißt eine unendliche Folge.
Die Summe der Glieder, also der Ausdruck

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\,,$$

wird unendliche Reihe genannt.
u_ν heißt das allgemeine Glied der Folge bzw. der Reihe.

Von besonderem Interesse ist der im obenstehenden Beispiel vorliegende Fall, daß die Summe einen endlichen Wert $\left(\text{dort } \frac{1}{3}\right)$ besitzt. Wir wollen deshalb diesen Fall näher untersuchen.
Von den einzelnen Gliedern $u_1; u_2; u_3; \ldots,$
in unserem Beispiel $0{,}3; 0{,}03; 0{,}003; \ldots,$
kann man zunächst die **Teilsummen** bilden:

$$\begin{array}{lll}
s_1=u_1, & \text{in unserem Beispiel} & s_1=0{,}3\,,\\
s_2=u_1+u_2, & & s_2=0{,}33\,,\\
s_3=u_1+u_2+u_3, & & s_3=0{,}333\,,\\
\vdots & & \vdots\\
s_n=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu, & & s_n=\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n\ \text{Ziffern}}\,.
\end{array}$$

Die Teilsummen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ bilden wieder eine Zahlenfolge.

Strebt die Folge der Teilsummen bei unbegrenzt wachsendem n, d. h. für $n \to \infty$, einem bestimmten endlichen Grenzwert

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$$

zu, so heißt die unendliche Reihe **konvergent** und der Grenzwert s die Summe der unendlichen Reihe.

Dieses Verhalten muß keinesfalls immer bei einer unendlichen Reihe vorliegen. Stellen Sie z. B. eine unendliche Reihe auf, deren Glieder die natürlichen Zahlen sind,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots,$$

und bilden Sie deren Teilsummen

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 10, \ldots,$$

so erkennen Sie, daß diese mit unbegrenzt wachsendem n unendlich groß werden. Es gilt nämlich nach der Summenformel für die arithmetische Reihe

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n}{2} = \infty.$$

Solche unendliche Reihen, die keine endliche Summe besitzen, heißen **divergent.**
Alle arithmetischen Reihen mit unendlich vielen Gliedern sind divergent.
Nimmt eine Reihe keinen bestimmten Wert an, sondern schwankt zwischen verschiedenen Werten hin und her, so heißt sie ebenfalls *divergent.* Ein Beispiel ist die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$$

oder

$$a - a + a - a + - \cdots$$

Diese divergenten Reihen schwanken zwischen 0 und 1 bzw. 0 und a, je nachdem, an welcher Stelle man sie abbricht. Da ∞ keine bestimmte Zahl, also weder gerade noch ungerade ist, kann solchen Reihen bei unendlicher Gliederzahl keine bestimmte Summe zugeordnet werden.
Geometrische Reihen hingegen sind unter bestimmten Bedingungen konvergent. Ein Beispiel dafür ist die geometrische Reihe

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots,$$

die wir am Anfang betrachteten.
Unter welchen Voraussetzungen ist nun eine unendliche geometrische Reihe konvergent, und wie wird ihre Summe berechnet?
Für *endliche* geometrische Reihen gilt die Summenformel

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} u_1 q^{\nu-1} = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

In unserem Beispiel ist $u_1 = 0{,}3$, $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \cdots = \frac{1}{10}$.

Um die Summe der *unendlichen* geometrischen Reihe zu erhalten, haben wir

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

zu berechnen.

Ist zunächst $|q| < 1$, d. h. $-1 < q < 1$, so wird

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}.$$

Jede unendliche geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und hat die Summe

$$\boxed{s = \frac{u_1}{1-q}} \tag{1}$$

In unserem Zahlenbeispiel erhält man, da mit $|q| = \frac{1}{10} < 1$ die Konvergenzbedingung erfüllt ist,

$$s = \frac{0{,}3}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

Für $q > 1$ wird $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$. Die Reihe divergiert.

Für $q < -1$ wird $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \pm\infty$. Die Summe der Reihe schwankt zwischen $+\infty$ und $-\infty$ und ist damit divergent.

Für $q = 1$ ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = u_1 + u_1 + u_1 + \cdots$; die Reihe divergiert.

Für $q = -1$ nimmt die Reihe keinen bestimmten Wert an, denn es ist

$$u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k, \\ u_1 & \text{für } n = 2k+1. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Damit ist die Reihe auch in diesem Falle divergent.

Ergebnis:

Für $|q| \geqq 1$ divergiert die unendliche geometrische Reihe.

Von besonderem Interesse für die praktischen Anwendungen sind unendliche Reihen, deren einzelne Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Potenzen einer Veränderlichen darstellen, z. B.

$$u_1 = a_0, \quad u_2 = a_1 x, \quad u_3 = a_2 x^2, \ldots$$

Die einzelnen Teilsummen $f_0(x) = a_0$,

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x,$$
$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \text{ usw.}$$

stellen dann ganze rationale Funktionen dar, die n-te Teilsumme

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist eine ganze rationale Funktion n-ten Grades.
Besitzt die Reihe eine unbegrenzte Gliederzahl:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

so nennt man sie eine **Potenzreihe.** Diese ist selbstverständlich ebenfalls eine Funktion von x.
Eine solche Reihe ist z. B.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Für diese Reihe können wir, da sie eine unendliche geometrische Reihe mit $u_1 = 1$ und $q = x$ ist, die Teilsumme $s_n = f_n(x)$ angeben:

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Sie konvergiert für $|q| = |x| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$s = f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Für $|x| < 1$ läßt sich also die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ durch die Potenzreihe $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ darstellen. Man sagt: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ läßt sich in eine Potenzreihe entwickeln. Für $|x| \geqq 1$ divergiert diese Potenzreihe.
Man nennt den Wertebereich von x, für den eine Potenzreihe konvergiert, den **Konvergenzbereich** der Potenzreihe.
Für unser Beispiel ist der Konvergenzbereich $-1 < x < 1$.
Da innerhalb des Konvergenzbereiches $|x| < 1$ die Beziehung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

gilt, kann man, statt die Division $1 : (1 - x)$ auszuführen, den Wert des Bruches mit Hilfe der Potenzreihe ausrechnen. Ist nämlich $|x|$ genügend klein gegenüber 1 (man schreibt dafür $|x| \ll 1$; das Zeichen $\ll$ wird gelesen „sehr klein gegenüber" oder „klein gegen"), so genügt es, die ersten zwei oder drei Glieder unter Vernachlässigung aller übrigen Glieder zu summieren.

Beispiel:

$$\frac{1}{0{,}997} = \frac{1}{1 - 0{,}003} = 1 + 0{,}003 + (0{,}003)^2 + \cdots$$

Schon das dritte Glied kann vernachlässigt werden, so daß Sie mit hinreichender Genauigkeit erhalten

$$\underline{\underline{\frac{1}{0{,}997} \approx 1{,}003.}}$$

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, daß sich viele Funktionen in Potenzreihen entwickeln lassen. Die Berechnung einer Potenzreihe gestaltet sich besonders einfach, falls sie genügend schnell konvergiert — d. h. also, falls man sie schon nach den ersten Gliedern abbrechen kann. Die Potenzreihen sind daher für die Praxis, z. B. für die näherungsweise Berechnung von Funktionswerten, von besonderer Bedeutung.

16.2 Die Taylorschen Formeln

16.21 Darstellung einer ganzen rationalen Funktion durch ihre Ableitungen.

Jede ganze rationale Funktion läßt sich in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

schreiben, kann also als *endliche* Potenzreihe aufgefaßt werden.
Zwischen den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ einerseits und dem Wert der Funktion sowie den Werten ihrer Ableitungen an der Stelle $x = 0$ andererseits bestehen bestimmte Beziehungen.
Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n,\\
f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1},\\
f''(x) &= 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \cdots + (n-1) n a_n x^{n-2},\\
f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + \cdots + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3},\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-2)(n-1) n a_n = n!\, a_n.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 && \text{und hieraus} \quad a_0 = f(0),\\
f'(0) &= 1 \cdot a_1 && \text{und hieraus} \quad a_1 = f'(0),\\
f''(0) &= 1 \cdot 2 a_2 && \text{und hieraus} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\\
f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 && \text{und hieraus} \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!},\\
& && \vdots\\
f^{(n)}(0) &= n!\, a_n && \text{und hieraus} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.
\end{aligned}$$

Damit läßt sich die ganze rationale Funktion in der Form

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \qquad (2)$$

schreiben. Diese *Entwicklung der ganzen rationalen Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$* heißt die **Taylorsche[1] Formel** in der MacLaurinschen Form. Sie gibt die Möglichkeit, eine beliebige ganze rationale Funktion nach steigenden Potenzen von x zu ordnen.

Lehrbeispiel 1

Die Funktion $y = f(x) = (2 - x)^3$ ist nach steigenden Potenzen von x zu ordnen!

---

[1] Brock Taylor (sprich: bruk tehler), engl. Mathematiker, 1685 bis 1731.

Lösung:

Es ist

$$f(x) = (2-x)^3, \qquad f(0) = 8,$$

$$f'(x) = -3(2-x)^2, \qquad \frac{f'(0)}{1!} = -12,$$

$$f''(x) = 6(2-x), \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 6,$$

$$f'''(x) = -6, \qquad \frac{f'''(0)}{3!} = -1.$$

Damit wird

$$f(x) = 8 - 12x + 6x^2 - x^3.$$

Prüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $(2-x)^3$ mit Hilfe der binomischen Formel ausrechnen!

16.22 Entwicklung einer beliebigen Funktion in eine Potenzreihe. Wie Sie gesehen haben, ist für jede ganze rationale Funktion n-ten Grades die Entwicklung

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

möglich. Die Entwicklung bricht beim Gliede $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ab, da bei einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades sämtliche Ableitungen von höherer als n-ter Ordnung identisch gleich Null sind (vgl. Math. IV, Bd. 1, Abschn. 3.7).

Hat eine beliebige – nicht ganze rationale – Funktion n an der Stelle $x = 0$ existierende Ableitungen, so läßt sich auch für sie die obige Entwicklung ansetzen. Nur ist auf der rechten Seite noch ein Korrekturglied hinzuzufügen, da sonst rechts eine ganze rationale Funktion steht, die natürlich mit der Ausgangsfunktion nicht identisch sein kann.

Das Korrekturglied hängt davon ab, bis zu welchem Gliede entwickelt wird und für welchen Wert von x der Funktionswert zu berechnen ist. Man schreibt daher für eine nicht ganze rationale Funktion

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Diese Formel gibt also die Entwicklung einer *beliebigen* Funktion in eine *endliche* Potenzreihe an, der noch ein Korrekturglied $R_n(x)$ hinzugefügt ist. Man nennt $R_n(x)$ das **Restglied** dieser Entwicklung.

Von besonderem Interesse sind solche Funktionen, die sich an der Stelle $x = 0$ *beliebig oft* differenzieren lassen, z. B. $y = e^x$. Ist für eine solche Funktion

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0,$$

wird also das Restglied mit wachsendem n immer kleiner, so läßt sich die Funktion in eine konvergente unendliche Potenzreihe entwickeln. Man nennt die Entwicklung

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots} \qquad (3)$$

die MacLaurinsche Form der **Taylorschen Reihe.** Die Taylorsche Reihe konvergiert mit wachsendem n gegen $f(x)$, wenn das Restglied $R_n(x)$ mit wachsendem n gegen Null geht.
Im folgenden beschränken wir uns auf solche Funktionen, bei denen $R_n(x) \to 0$ geht. Wir können uns deshalb damit begnügen, das Konvergenzverhalten ihrer Potenzreihen mit Hilfe bestimmter Kriterien zu untersuchen.

16.3 Die Reihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$. Die Eulersche Gleichung

Wir wollen jetzt einige transzendente Funktionen in Taylor-Reihen entwickeln. Die *Voraussetzungen* für die Möglichkeit einer solchen Entwicklung sind:

1. Die zu entwickelnde Funktion muß in dem Bereich, für den sie in eine Potenzreihe entwickelt werden soll, überall beliebig oft differenzierbar sein.
2. Bei unbegrenzt wachsender Gliederzahl der Reihe ($n \to \infty$) muß der Wert des Restgliedes gegen Null gehen.

Die erste Bedingung ist stets zu beachten. So kann z. B. die Funktion $y = \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$ – sie verläuft ähnlich wie die Neilsche Parabel – *nicht* an der Stelle $x = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. Es ist nämlich

$$y' = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \qquad y'' = \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}, \qquad y''' = \frac{15}{8} x^{-\frac{1}{2}}, \qquad y^{(4)} = -\frac{15}{16} x^{-\frac{3}{2}}, \ldots$$

und damit

$$y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{0}}, \qquad y^{(4)} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{0^3}},$$

d. h., die Ableitungen der Funktion an der Stelle $x = 0$ existieren nicht von der dritten Ableitung an.
Der Fall, daß die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, tritt bei stetigen, differenzierbaren Funktionen, die die Praxis interessieren, nicht auf. Wie Sie aber am Beispiel der Funktion $\frac{1}{1-x}$ gesehen haben, stellt eine Taylor-Reihe die zugehörige Funktion nur in dem Bereich dar, in dem sie konvergiert. Wir werden uns daher darauf beschränken, das Konvergenzverhalten der im folgenden betrachteten Taylor-Reihen zu untersuchen.

16.31 Die Exponentialreihe. Da alle Ableitungen der Funktion $f(x) = e^x$ untereinander gleich sind, nämlich gleich der Ausgangsfunktion e^x, haben alle Ableitungen für $x = 0$ den Wert $e^0 = 1$. Damit wird nach Formel (3)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Beachten Sie bei der Auswertung des rechts stehenden Ausdrucks die Definition $0! = 1$.

Für $x = 1$ erhält man eine schnell konvergierende Reihe zur Berechnung von e (vgl. auch Bd. 1, Abschn. 2.1):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Aus dieser kann $e = 2{,}718\,281\,828\ldots$ bei Verwendung einer hinreichend großen Anzahl von Gliedern mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.

16.32 Die trigonometrischen Reihen. Wir wollen zunächst die Funktion $f(x) = \sin x$ in eine Potenzreihe an der Stelle $x = 0$ entwickeln. Es ist

$$\begin{array}{rlll} f(x) = & \sin x & \text{und damit} & f(0) = 0, \\ f'(x) = & \cos x & \text{und damit} & f'(0) = 1, \\ f''(x) = & -\sin x & \text{und damit} & f''(0) = 0, \\ f'''(x) = & -\cos x & \text{und damit} & f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) = & \sin x & \text{und damit} & f^{(4)}(0) = 0 \\ \vdots & & & \vdots \end{array}$$

Setzen wir diese Werte in Formel (3) ein, so erhalten wir die **Sinusreihe**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

Diese Reihe wird zur Berechnung der Funktionswerte von $y = \sin x$ benutzt. Zu beachten ist dabei, daß das Argument x stets im Bogenmaß einzusetzen ist. Die Sinusreihe eignet sich besonders gut bei kleinen Winkeln, da dann die Reihe schnell konvergiert und bei einer geforderten Genauigkeit von 5 Dezimalstellen für Winkel bis zu 1° nur das erste Glied der Reihe berücksichtigt zu werden braucht, d. h., man setzt

$$\sin x \approx x \quad \text{für} \quad x < \operatorname{arc} 1° \approx 0{,}01745.$$

Für Winkel bis zu 8° genügen für eine Genauigkeit von 5 Dezimalstellen die ersten beiden Glieder, d. h., man setzt

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{für} \quad x < \operatorname{arc} 8° \approx 0{,}13963.$$

Man arbeitet vorteilhaft mit den Potenzen von arc 1°. Es ist z. B. für $x = \operatorname{arc} 5°$

$$x^3 = (\operatorname{arc} 5°)^3 = (5 \cdot \operatorname{arc} 1°)^3 = 125(\operatorname{arc} 1°)^3.$$

Die ersten vier Potenzen von arc 1° sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} 1° &= 0{,}017\,453\,293, \\ (\operatorname{arc} 1°)^2 &= 0{,}000\,304\,617, \\ (\operatorname{arc} 1°)^3 &= 0{,}000\,005\,317, \\ (\operatorname{arc} 1°)^4 &= 0{,}000\,000\,093. \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie mit Hilfe der ersten zwei Glieder der Sinusreihe sin 10° *und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit dem einer 5stelligen Tafel!*

Lösung:

Es ist $\quad x = \operatorname{arc} 10° = 10 \operatorname{arc} 1° = 0{,}174\,533$

und $\quad x^3 = (\operatorname{arc} 10°)^3 = 1000(\operatorname{arc} 1°)^3 = 0{,}005\,317.$

Aus

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

folgt

$$\sin 10° \approx 0{,}174533 - \frac{0{,}005317}{6} = 0{,}174533 - 0{,}000886,$$

$$\underline{\underline{\sin 10° \approx 0{,}17365.}}$$

Das ist der gleiche Wert, der auch in einer 5stelligen Tafel angegeben ist.
Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \cos x$ in eine Potenzreihe erfolgt in der gleichen Weise wie bei der Funktion $\sin x$.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= 1, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Formel (3) erhält man die **Kosinusreihe**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$$

Eine Betrachtung der beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ zeigt, daß in der Reihe für $\sin x$ nur die ungeradzahligen Potenzen auftreten, in der Reihe für $\cos x$ nur die geradzahligen. Daraus geht einerseits hervor, daß

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos x$$

sein muß. Andererseits haben Sie nunmehr die Erklärung dafür, daß die Bezeichnung gerade bzw. ungerade Funktion, die in Band 1, Abschnitt 1.4, für eine axialsymmetrische bzw. zentralsymmetrische Funktion eingeführt wurde, auch auf trigonometrische Funktionen angewendet wird.
Die Funktion $y = \ln x$ läßt sich an der Stelle $x = 0$ *nicht* in eine Taylor-Reihe entwickeln, da $f'(x) = \frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht existiert. Eine Reihe zur Berechnung der Logarithmen werden wir später auf andere Weise erhalten.

16.33 Die Eulersche Gleichung. Wird in der Reihe für e^x der Exponent x durch ix (i = imaginäre Einheit), ersetzt, so erhält man

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \cdots$$

Wegen

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \ldots$$

wird

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - \cdots$$

Nach Trennen der reellen und imaginären Glieder der Reihe wird

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right).$$

Die in den Klammern stehenden Reihen stellen aber die in Potenzreihen entwickelten Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ dar, so daß wir schreiben können:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \tag{4}$$

Dieser Zusammenhang zwischen der e-Funktion und den trigonometrischen Funktionen heißt die **Eulersche Gleichung.** Sie gehört zu den wichtigsten Gleichungen der Mathematik, da sie es ermöglicht, mit der wesentlich einfacher zu handhabenden Exponentialfunktion an Stelle der trigonometrischen Funktionen zu rechnen (z. B. fußt die symbolische Methode in der Wechselstromtechnik auf der Eulerschen Gleichung).

Wie Sie leicht selbst herleiten können, gilt weiterhin die Beziehung

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Formeln für e^{ix} und e^{-ix} ergeben sich die Gleichungen

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Diese Formeln decken einen Zusammenhang zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen auf. Wie Sie wissen, ist

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Wird ix als Argument eingesetzt, so ergibt sich

$$\cosh ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Es ist also

$$\cos x = \cosh ix, \quad i \sin x = \sinh ix.$$

16.4 Schmiegungsparabeln

Wie die Anwendungen der Taylorschen Formeln auf die Entwicklung transzendenter Funktionen in Potenzreihen in 16.3 zeigten, arbeitet man im praktischen Fall stets mit Näherungen, indem man die höheren Potenzen vernachlässigt. Man verwendet also nicht die unendliche Reihe selbst, sondern eine aus ihr durch Abbrechen nach einer bestimmten Gliederzahl entstehende ganze rationale Funktion. Geometrisch bedeutet das Ersetzen einer beliebigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion das Ersetzen der Funktionskurve in der Umgebung der Entwicklungsstelle $x = 0$ durch eine Parabel. Unter Parabeln verstehen wir hierbei grundsätzlich alle Kurven von Potenzfunktionen $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ für $n \geqq 0$.

Bild 1 zeigt die Annäherung der Funktion $y = \sin x$ durch ihre Potenzreihe, und zwar sind neben $y = f(x) = \sin x$ noch die Näherungskurven $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ und $y = f_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ eingezeichnet. Wie Sie aus Bild 1 erkennen, schmiegen sich die Näherungskurven um so enger und um so weitgehender in der Umgebung der Entwicklungsstelle an die Funktionskurve an, je höher der Grad der Parabel ist, d. h., je mehr Glieder der Reihe man verwendet. Diese Ersatzparabeln heißen daher auch die Schmiegungsparabeln der Funktionskurve. An der Entwicklungsstelle $x = 0$ stimmen Funktionskurve und Schmiegungsparabeln selbstverständlich überein, wie auch aus Formel (3) hervorgeht, wenn man $x = 0$ einsetzt.

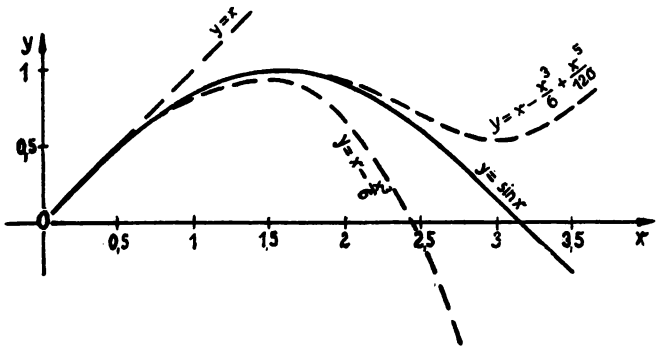


Bild 1

16.5 Konvergenz von Reihen

16.51 Konvergenzbedingungen für beliebige unendliche Reihen. Soll eine unendliche Reihe eine endliche Summe besitzen, so ist das offenbar nur möglich, wenn die Glieder beständig abnehmen. Daß diese Bedingung aber nicht genügt, zeigt das Beispiel der Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots$$

Die Glieder werden zwar ständig kleiner. Wie Sie aber aus dem allgemeinen Glied

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

erkennen, streben die Glieder für $n \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}$ und sind für jeden endlichen Wert von n stets größer als $\frac{1}{2}$. Da die Summe mit jedem Glied mindestens um $\frac{1}{2}$ wächst, kann diese Reihe keine endliche Summe besitzen, d. h., sie konvergiert nicht.

Da man häufig nicht ohne weiteres erkennen kann, ob eine Reihe konvergiert, sollen Sie nun zwei Konvergenzbedingungen für unendliche Reihen kennenlernen.

Wie Sie wissen, ist eine Reihe konvergent, wenn die Teilsummen einem Grenzwert zustreben, d. h., wenn die Bedingung gilt

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Ist eine Reihe konvergent, ist also diese Bedingung erfüllt, dann gilt auch $\lim\limits_{n \to \infty} s_{n-1} = s$.

Da $$s_n = s_{n-1} + u_n$$
und damit $$u_n = s_n - s_{n-1}$$
ist, wird $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} [s_n - s_{n-1}] = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}.$$

Beide Grenzwerte der rechten Seite besitzen den gleichen Wert s. Ihre Differenz ist somit gleich Null.

Daraus folgt
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0} \tag{5}$$

Soll eine Reihe konvergieren, so müssen ihre Glieder mit unbegrenzt wachsender Gliederzahl gegen Null streben.

Dieser Satz enthält nur eine *notwendige* Bedingung, keine hinreichende. Er darf daher keinesfalls umgekehrt werden. Streben die Glieder einer Reihe gegen Null, so folgt daraus noch nicht die Konvergenz der Reihe. Ein Beispiel dafür ist die **harmonische Reihe**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Hier strebt $u_n \to 0$. Trotzdem ist die Reihe nicht konvergent. Zum Beweis vergleichen wir diese Reihe mit der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Die zweite Reihe unterscheidet sich von der harmonischen Reihe in einem Teil der Glieder, wobei die Glieder der harmonischen Reihe einen größeren, mindestens aber den gleichen Wert wie die entsprechenden Glieder der zweiten Reihe besitzen.

Die zweite Reihe ist aber divergent, denn Sie können nach den ersten zwei Gliedern die folgenden zwei, dann die folgenden vier, die folgenden acht Glieder usw. zusammenfassen zu

$$1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Die Summe dieser Reihe ist also unendlich groß. Da die Glieder der harmonischen Reihe aber nie kleiner als die der Vergleichsreihe sind, ist auch ihre Summe unendlich groß. Obwohl die Bedingung $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ erfüllt ist, konvergiert die harmonische Reihe nicht.

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ist für die Konvergenz notwendig, aber nicht hinreichend.

Eine hinreichende Bedingung enthält das **Quotientenkriterium von d'Alembert:**

Eine Reihe konvergiert, wenn gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1} \tag{6}$$

Die Konvergenzbedingung der unendlichen geometrischen Reihe, $|q| < 1$, stellt einen Sonderfall der Formel (6) dar, denn es ist $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a q^n}{a q^{n-1}} = q$.

Lehrbeispiel 3

Untersuchen Sie die Reihe

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

auf Konvergenz!

Lösung:

Es ist

$$u_n = \frac{1}{n!} \quad \text{und} \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Damit wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

und nach Formel (6)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0.$$

Die Reihe konvergiert also.

Die in Formel (6) enthaltene Bedingung ist hinreichend, d. h., eine Reihe, die dieser Bedingung genügt, konvergiert sicher. Sie erfaßt aber nicht alle konvergenten Reihen. Es gibt also auch Reihen, die das Quotientenkriterium nicht erfüllen und trotzdem konvergieren.

Während also die Bedingung der Formel (5) neben *allen* konvergenten Reihen auch divergente umfaßt, d. h. zu weit gefaßt ist, enthält die Bedingung der Formel (6) zwar nur konvergente Reihen, diese aber nicht alle, d. h., sie ist zu eng gefaßt.

Ein Beispiel ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots$$

Da wir oben nachgewiesen hatten, daß die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

divergent ist, kann auch für die erstgenannte Reihe Formel (6) – da in ihr nur der absolute Betrag verwendet wird – nichts anderes aussagen. Die vorliegende Reihe besitzt aber die Eigentümlichkeit, daß das Vorzeichen periodisch wechselt. Für derartige Reihen, die **alternierende Reihen** genannt werden, ist aber die Konvergenzbedingung der Formel (6), $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, hinreichend.

Wenn in einer Reihe die Vorzeichen der Glieder periodisch wechseln und die Zahlenwerte der Glieder stetig gegen Null abnehmen, dann ist die Reihe konvergent.

Eine Veranschaulichung dieses Satzes gibt Bild 2, in welchem die Teilsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ auf einem Zahlenstrahl markiert sind. Das erste Glied u_1 liefert den Punkt s_1. Ist das 2. Glied kleiner und von anderem Vorzeichen, so ergibt sich der Punkt für die Summe der ersten beiden Glieder zwischen 0 und s_1. So fortfahrend pendelt die Summe s_n auf der Zahlgeraden hin und her, wobei die Schwingungen aber immer kleiner und kleiner werden. Die Summe s_n nähert sich einem Grenzwert s (die Reihe konvergiert), wenn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ist.

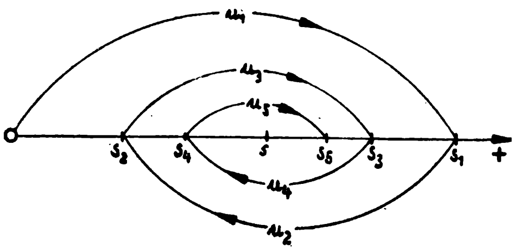


Bild 2

Da die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots$$

eine alternierende Reihe ist und das n-te Glied

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

für $n \to \infty$ gegen Null strebt, ist sie eine konvergente Reihe.

16.52 Konvergenzbedingungen für Potenzreihen. Da die Glieder einer Potenzreihe Potenzen einer *Veränderlichen* enthalten, muß die Bedingung für das Vorliegen von Konvergenz an den Wert der Veränderlichen geknüpft sein.
Für eine Potenzreihe von der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

sind drei grundsätzliche Fälle zu unterscheiden:

1. Die Reihe konvergiert für jeden Wert der Veränderlichen x,
2. die Reihe konvergiert nur für einen bestimmten Wertebereich von x,
3. die Reihe konvergiert nur für $x = 0$.

Eine Reihe, die nur für $x = 0$ konvergiert, ist

$$f(x) = 1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$$

Es soll nun ein allgemeiner Weg für die Bestimmung des Konvergenzbereiches einer Potenzreihe gezeigt werden.
Die hinreichende Konvergenzbedingung einer beliebigen Reihe war in Formel (6) niedergelegt. Da bei Potenzreihen

$$u_1 = a_0, \quad u_2 = a_1x, \ldots, u_n = a_{n-1}x^{n-1}, \quad u_{n+1} = a_nx^n, \ldots$$

ist, muß die Konvergenzbedingung jetzt lauten

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\cdot|x| < 1.$$

Hieraus folgt

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|.$$

Eine Potenzreihe konvergiert für alle Werte

$$\boxed{|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|} \qquad (7)$$

Beachten Sie, daß Konvergenz nur für $|x| < \lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ verbürgt ist. Für den Wert $|x| = \lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ konvergiert im allgemeinen die Reihe nicht mehr, wie Sie sich am Beispiel der in 16.1 behandelten Reihe $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + + x^3 + \cdots$ überzeugen können. Dort war (geometrische Reihe) $q = x$. Damit konvergiert diese Reihe für $|x| < 1$, da die geometrische Reihe nur für $|q| < 1$ konvergiert.

Beachten Sie weiterhin, daß in Formel (7) nur die Koeffizienten der Glieder der Reihe stehen!

Lehrbeispiel 4

Untersuchen Sie die Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

auf Konvergenz!

Lösung:

Es ist

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Damit wird

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim_{n \to \infty} n = \underline{\underline{\infty}}.$$

Die Exponentialreihe konvergiert für $|x| < \infty$, d. h. für jeden Wert von x.

Lehrbeispiel 5

Ermitteln Sie den Konvergenzbereich der Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots !$$

Lösung:

Zwei aufeinanderfolgende Glieder haben die Gestalt

$$|u_n| = \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} = \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

und

$$|u_{n+1}| = \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Es ist also

$$|a_{n-1}| = \frac{1}{(2n-2)!}, \quad |a_n| = \frac{1}{(2n)!}$$

und es wird

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-2)(2n-1) \cdot 2n}{1 \cdot 2 \ldots (2n-3)(2n-2)}$$

$$= (2n-1) \cdot 2n.$$

Wegen

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} (2n-1) \cdot 2n = \infty$$

ist der Konvergenzbereich

$$\underline{\underline{|x| < \infty}}.$$

Übungen

1. *Berechnen Sie* $\cos 4°$ *auf 5 Dezimalstellen genau!*
2. *Stellen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums von d'Alembert den Konvergenzbereich der Reihe für* $\sin x$ *fest!*
3. *Entwickeln Sie die Funktion* $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ *in eine Potenzreihe! Für welche Werte von x konvergiert die Reihe?*
4. *Stellen Sie eine Reihe für* $f(x) = e^{ax}$ *auf!*

16.6 Differentiation und Integration von Potenzreihen

Für das Rechnen mit Potenzreihen gelten folgende wichtige Sätze, auf deren Beweis wir verzichten wollen:

1. Konvergente Potenzreihen darf man innerhalb des Konvergenzbereiches gliedweise addieren oder subtrahieren.
2. Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert oder integriert werden.

Mit anderen Worten ausgedrückt: Eine durch Addieren oder Subtrahieren von konvergenten Potenzreihen entstehende Potenzreihe hat als Konvergenzbereich den Wertebereich von x, für den jede der beiden Ausgangsreihen konvergiert. Eine durch Differenzieren oder Integrieren einer konvergenten Potenzreihe entstehende Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzbereich wie die Potenzreihe, von der ausgegangen wurde.

16.61 Differentiation von Potenzreihen. Wir wollen zunächst an den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ die Richtigkeit des zweiten der obenstehenden Sätze nachprüfen. Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < \infty.$$

Durch gliedweises Differenzieren erhalten wir die Kosinusreihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < \infty.$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - + \cdots,$$

woraus folgt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + - \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < \infty.$$

Benutzen wir den ersten der beiden obenstehenden Sätze und bilden $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, so erhalten wir

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots\right] = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Wegen $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ folgt

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < \infty.$$

Für den Hyperbelkosinus gilt

$$\cosh x = \frac{\mathrm{d} \sinh x}{\mathrm{d} x}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < \infty.$$

Wir hätten auch $\cosh x$ aus der Beziehung $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ herleiten können.

16.62 Integration von Potenzreihen. In 16.1 hatten wir festgestellt, daß

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{ist} \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Ersetzen wir hierin überall x durch $-x$, so folgt

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\int \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \int (1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots) \, \mathrm{d}x.$$

Das Integral der linken Seite ist die Funktion $\ln(1+x)$, so daß sich ergibt

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, setzen wir $x = 0$:

$$\ln 1 = C, \quad C = 0.$$

Damit haben wir eine Reihe zur Berechnung natürlicher Logarithmen erhalten:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Lehrbeispiel 6

Prüfen Sie nach, ob die Reihe für $\ln(1+x)$ *auch noch für* $x = 1$ *und* $x = -1$ *konvergent ist!*

Lösung:

Für $x = 1$ erhalten Sie

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

Diese Reihe wurde bereits in 16.51 als konvergent nachgewiesen. Wir wissen nun auch ihre Summe.

Für $x = -1$ erhalten Sie

$$\ln 0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

In der Klammer steht die als divergent bekannte harmonische Reihe. Sie bekommen das Ihnen bereits aus der Logaritmenrechnung bekannte Resultat

$$\ln 0 = -\infty.$$

Als Konvergenzbereich der Reihe $\ln(1+x)$ läßt sich also endgültig angeben

$$\underline{\underline{-1 < x \leq 1.}}$$

Versuchen Sie, mit Hilfe der hergeleiteten Reihe $\ln 2$ zu berechnen, so stellen Sie fest, daß die Reihe sehr langsam konvergiert. Außerdem lassen sich mit ihr nur die Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 2 berechnen. Es soll deshalb unter Verwendung der Reihe für $\ln(1+x)$ eine besser konvergierende Reihe entwickelt werden.

Zu diesem Zweck ersetzen wir, immer unter der Voraussetzung $|x| < 1$, den Wert x durch $-x$. Es wird

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Da

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

ist, folgt nach gliedweiser Subtraktion der Reihen für $\ln(1+x)$ und $\ln(1-x)$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Wird noch $\frac{1+x}{1-x} = z$, also $x = \frac{z-1}{z+1}$ gesetzt, so nimmt die Reihe die für das praktische Rechnen geeignetere Form an

$$\ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right] \qquad \text{für} \quad z > 0.$$

Der angegebene Konvergenzbereich $z > 0$ ergibt sich aus der Substitution $\frac{1+x}{1-x} = z$, wenn man dort den Konvergenzbereich $|x| < 1$ einsetzt. Die Reihe für $\ln z$ ist sehr gut brauchbar, wenn z klein ist.

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie $\ln 2$ *auf 4 Dezimalstellen genau!*

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right]\\ &= 2[0{,}33333 + 0{,}01235 + 0{,}00082 + 0{,}00007 + \cdots]\\ &\approx 2\cdot 0{,}34657,\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\ln 2 \approx 0{,}6931.}}$$

Wird in der Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots$$

x durch x^2 ersetzt, so ergibt sich die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

Diese ist konvergent für $|x^2| < 1$, d. h. für $|x| < 1$.
Werden beide Seiten integriert, so wird

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots)\,dx.$$

Auf der linken Seite steht ein Grundintegral, das die Funktion arc tan x liefert:

$$\operatorname{arc}\tan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, wird wiederum $x = 0$ gesetzt:

$$\operatorname{arc}\tan 0 = C, \quad C = 0.$$

Die Reihe für arc tan x lautet somit

$$\boldsymbol{\operatorname{arc}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < 1.}$$

Aus dieser Reihe kann man die neben der Zahl e wichtigste transzendente Zahl der Mathematik berechnen: die Zahl π.
Setzt man nämlich $x = 1$, so bekommt man, wegen $\operatorname{arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

Diese Reihe heißt die *Leibnizsche Reihe,* weil sie von Leibniz aufgestellt wurde. Da sie aber zu langsam konvergiert, hat man auf der Grundlage der Reihe für arc tan x besser konvergierende Reihen geschaffen.
Eine dieser Reihen ergibt sich, wenn $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ gesetzt wird.
Da $\operatorname{arc}\tan \frac{1}{3}\sqrt{3} = \operatorname{arc} 30° = \frac{\pi}{6}$ ist, wird

$$\operatorname{arc}\tan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3\sqrt{3}} + - \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + - \cdots\right)$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + - \cdots\right)$$

$$\pi = 3{,}141\,59\ldots$$

Um auf diese Weise π auf 5 Dezimalen genau berechnen zu können, sind 10 Glieder der Reihe zu summieren. Damit die Rundungsfehler vernachlässigt werden können, ist $2\sqrt{3}$ auf 6 Dezimalen genau, jedes Glied der Reihe auf 7 Dezimalen genau zu nehmen. Für die genauere Berechnung von π konvergiert die Reihe zu langsam. Durch Umformung lassen sich besser konvergierende Reihen herstellen.

Übung

5. *Berechnen Sie mit Hilfe der Reihe für* $\ln z$ *den Wert von* $\ln 3$ *auf 4 Dezimalstellen genau!*

16.7 Die binomische Reihe

Besonders wichtig wegen der vielseitigen Anwendbarkeit ist die Entwicklung der Funktion $f(x) = (1 + x)^m$ in eine Potenzreihe.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} & f'(0) &= m \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1) \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0) &= m(m-1)(m-2) \\ & & &\vdots \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ in Formel (3) erhält man

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Für die Koeffizienten der Potenzen von x verwendet man eine besondere Symbolik und schreibt

$$\frac{m}{1} = \binom{m}{1}, \quad \text{gelesen: } m \text{ über } 1,$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \binom{m}{2}, \quad \text{gelesen: } m \text{ über } 2,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{m}{3}, \quad \text{gelesen: } m \text{ über } 3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[\nu-1])}{\nu!} = \binom{m}{\nu}, \quad \text{gelesen: } m \text{ über } \nu.$$

Sie können sich merken: $\binom{m}{\nu}$ stellt einen Bruch dar, der in Zähler und Nenner je ν Faktoren enthält, und zwar im Zähler von m beginnend jeweils um 1 kleiner werdende Faktoren, im Nenner von 1 an aufsteigende Faktoren.

Man nennt $\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \ldots$ die **Binomialkoeffizienten.** Die Potenzreihe für $(1 + x)^m$ heißt die **binomische Reihe,** für die wir nun schreiben können

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots \quad \text{für} \quad |x| < 1} \qquad (8)$$

Den angegebenen Konvergenzbereich ermittelt man mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Es ist

$$a_n = \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[n-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

und

$$a_{n-1} = \binom{m}{n-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[n-2])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}.$$

Damit wird

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(m-[n-1])}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\frac{m}{n}-1+\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

Der Konvergenzbereich ist also $-1 < x < 1$.

Auch $f(x) = (a+x)^m$ kann in eine Potenzreihe entwickelt werden. Wird a ausgeklammert, so läßt sich Formel (8) anwenden. Sie erhalten

$$(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1+\binom{m}{1}\frac{x}{a}+\binom{m}{2}\frac{x^2}{a^2}+\binom{m}{3}\frac{x^3}{a^3}+\cdots\right]$$

und schließlich

$$\boxed{(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}x + \binom{m}{2}a^{m-2}x^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}x^3 + \cdots \quad \text{für } |x| < a.} \tag{8a}$$

Wir hatten $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ entwickelt. Der Konvergenzbereich ist also $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$ oder $|x| < a$.

In den Formeln (8) und (8a) kann der Exponent m jede beliebige reelle Zahl sein. Ist er eine positive ganze Zahl n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), so ist die n-te Ableitung von $(a+x)^n$ gleich $n!$, die $(n+1)$-te und jede folgende Ableitung ist gleich Null (vgl. hierzu Band 1, Abschnitt 3.7). Die Entwicklung von $(a+x)^n$ ist dann ein geschlossener endlicher Ausdruck, der Ihnen bereits als **binomischer Lehrsatz** bekannt ist:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ax^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \\ \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots\end{aligned}} \tag{8b}$$

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes $(a+b)^4$, indem Sie in Formel (8b) $x = b$ setzen!

Lösung:

Es ist

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= \underline{\underline{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}}.$$

Die binomische Reihe in der Form der Formel (8) wird häufig für die Berechnung von Wurzeln verwendet.

Für die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ erhält man

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots$$

Ist $|x| \ll 1$, so setzt man

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}.$$

Zum Beispiel ist

$$\sqrt{1{,}00384} \approx 1{,}00192$$

Lehrbeispiel 9

$\sqrt{10}$ ist mit Hilfe der binomischen Reihe auf 4 Dezimalen genau zu berechnen.

Lösung:

Sie schreiben

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} = 3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{9^3}-+\cdots\right)$$

$$\approx 3\,(1+0{,}055556-0{,}001543+0{,}000086)$$

$$\underline{\underline{\sqrt{10} \approx 3{,}1623}}$$

Es wurde mit 6 Dezimalen gerechnet und auf 4 Dezimalen gerundet, damit die 4. Dezimale im Ergebnis sicher ist. Bei Verwendung von 5 Dezimalen ergäbe sich ein maximaler Rundungsfehler von $3(3\cdot 5\cdot 10^{-6}) = 4{,}5\cdot 10^{-5}$. Da außerdem die restlichen Glieder der Reihe vernachlässigt wurden, könnte ein Fehler $> 5\cdot 10^{-5}$ entstehen. Die 4. Dezimale wäre dann nicht sicher.

Je bessere Konvergenz Sie durch geeignete Umformungen herbeiführen können, desto weniger Glieder der Reihe brauchen Sie zu berücksichtigen. Es lohnt sich deshalb, beim Aufspalten des Radikanden etwas länger zu suchen, um eine Potenz (vom gleichen Grade wie der Wurzelexponent) zu finden, deren Wert dem Radikanden recht nahe kommt.

Lehrbeispiel 10

Berechnen Sie $\sqrt[5]{0{,}00041}$ auf 4 Dezimalen genau!

Lösung:

Sie formen zunächst um:

$$\sqrt[5]{0{,}00041} = \sqrt[5]{\frac{41}{100000}} = \frac{1}{10}\sqrt[5]{41}.$$

In einer Tafel höherer Potenzen (oder auch durch eine Überschlagsrechnung) finden Sie $2{,}1^5 = 40{,}84101$, so daß Sie jetzt schreiben können

$$0{,}1\sqrt[5]{41} = 0{,}1\sqrt[5]{40{,}84101+0{,}15899} = 0{,}1\sqrt[5]{2{,}1^5\left(1+\frac{15899}{4084101}\right)}$$

$$= 0{,}21\left(1+\frac{15899}{4084101}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Nach Formel (8) ist

$$\left(1+\frac{15899}{4084101}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1+\frac{1}{5}\cdot\frac{15899}{4084101} = 1+0{,}00078.$$

Das dritte Glied der Reihe braucht hier infolge der guten Konvergenz schon nicht mehr berücksichtigt zu werden und Sie erhalten

$$\sqrt[5]{0{,}00041} = 0{,}21\cdot 1{,}00078 = \underline{\underline{0{,}2102}}.$$

Mit Hilfe von Formel (8) kann auch die Potenzreihe für $f(x) = \arcsin x$ hergeleitet werden.
Es ist

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wird x in Formel (8) durch $-x^2$ ersetzt, so ergibt sich

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3} x^6 + - \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \cdots$$

Durch beiderseitige Integration erhält man

$$\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \arcsin x = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Aus $\arcsin 0 = 0$ folgt für die Integrationskonstante $C = 0$, so daß die Reihe endgültig die Form

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{für} \quad |x| < 1$$

erhält. Der angegebene Konvergenzbereich folgt aus dem der binomischen Reihe.
Mit Hilfe der Reihen für $\arcsin x$ und $\arctan x$ können auch die Funktionswerte für $\operatorname{arccos} x$ und $\operatorname{arccot} x$ berechnet werden, denn es gilt

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

woraus

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

folgt. Weitere Potenzreihen, auf deren Herleitung verzichtet werden soll, finden sie im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

Übung

6. Berechnen Sie $\sqrt[5]{1000}$ auf 4 Dezimalstellen genau, indem Sie in $\sqrt[5]{1024 - 24}$ zerlegen!

16.8 Zusammenstellung der wichtigsten Reihen

Es ist möglich, eine beliebige Funktion — sofern die am Anfang von 16.3 genannten Voraussetzungen zutreffen — mittels der MacLaurinschen Form der Taylorschen Reihe

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

in eine unendliche Potenzreihe zu entwickeln.

Reihe	Konvergenzbereich
$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} x + \binom{m}{2} a^{m-2} x^2 + \cdots$	$\lvert x\rvert < a$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} x^4 + - \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 + - \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6} x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} x^4 + - \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6} x^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} x^4 - + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{3!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty;\quad a > 0$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$	$-1 < \lvert x\rvert \leqq 1$
$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right]$	$x > 0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \cdots$	$\lvert x\rvert < \pi$
$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$

17 Anwendungen der unendlichen Reihen

17.1 Näherungsformeln

Die binomische Reihe (8) eignet sich besonders gut zum Aufstellen von Näherungsformeln. Sie konvergiert – wie bewiesen wurde – für $|x| < 1$, und zwar konvergiert sie um so besser, je kleiner $|x|$ gegenüber 1 ist. Unter der Voraussetzung $|x| \ll 1$ kann man sich (mit einer Genauigkeit, die für die Bedürfnisse der Praxis in den meisten Fällen ausreicht) auf die ersten beiden Glieder der binomischen Reihe beschränken.

Man erhält so z. B.

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &\approx 1+mx, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m} &\approx 1-mx, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} &\approx 1-x, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} &\approx 1+\frac{x}{2}, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} &\approx 1-\frac{x}{2}, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} &\approx 1+\frac{x}{3}, && \text{für } |x| \ll 1,\\
\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} &\approx 1-\frac{x}{3}, && \text{für } |x| \ll 1 \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Aus den anderen in 16.8 zusammengestellten Potenzreihen lassen sich weitere Näherungsformeln entwickeln, wie z. B.

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x && \text{für } |x| \ll 1 \quad (x \text{ im Bogenmaß gemessen}),\\
\cos x &\approx 1-\frac{x^2}{2} && \text{für } |x| \ll 1 \quad (x \text{ im Bogenmaß gemessen}),\\
e^x &\approx 1+x && \text{für } |x| \ll 1,\\
\ln(1+x) &\approx x-\frac{x^2}{2} && \text{für } |x| \ll 1 \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit der Näherungsformeln für die trigonometrischen Funktionen läßt sich häufig erweitern.

Beispiele:

$$\sin 3{,}2 = -\sin(3{,}2-\pi) = -\sin 0{,}0584 \approx -0{,}0584$$

$$\cos 1{,}5 = \sin\left(\frac{\pi}{2}-1{,}5\right) = \sin 0{,}0708 \approx 0{,}0708$$

Näherungsformeln werden in der Technik sehr oft benutzt. Einige spezielle Beispiele sollen Sie im folgenden noch kennenlernen.

Lehrbeispiel 11

Für die Längenausdehnung eines Stabes infolge Erwärmung (Querschnittsabmessungen $\ll$ Länge) gilt

$$l = l_0(1+\alpha t) \quad (\alpha = \textit{linearer Ausdehnungskoeffizient} \ll 1)$$

und entsprechend für die Volumenzunahme eines erwärmten Körpers

$$V = V_0(1 + \alpha t)^3.$$

Entwickeln Sie eine Näherungsformel für V!

Lösung:

Nach Formel (8) ist

$$V = V_0(1 + \alpha t)^3 = V_0(1 + 3\alpha t + \cdots) \approx V_0(1 + 3\alpha t).$$

Man setzt $3\alpha = \beta$ ($3\alpha = \beta$ = kubischer Ausdehnungskoeffizient). Damit wird

$$\underline{\underline{V \approx V_0(1 + \beta t)}}.$$

Lehrbeispiel 12

Es ist eine Näherungsformel für die Fläche eines Kreissegmentes als Funktion des Zentriwinkels aufzustellen.

Lösung:

Der Flächeninhalt des Kreissegmentes ergibt sich als Differenz von Kreissektor minus Dreieck.

Der Flächeninhalt des zugehörigen Kreissektors ist

$$F_1 = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} \quad (r = \text{Radius}; \quad \alpha = \text{der Zentriwinkel im Bogenmaß}).$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$F_2 = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Kreissegmentes ist

$$F = F_1 - F_2 = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}[\alpha - \sin\alpha].$$

Ersetzen Sie jetzt $\sin\alpha$ durch eine Potenzreihe (die in der Potenzreihe auftretenden Potenzen von α sind im Bogenmaß gemessen), so wird

$$F = \frac{r^2}{2}\left[\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + - \cdots\right)\right] = \frac{r^2}{12}\left(\alpha^3 - \frac{1}{20}\alpha^5 + \frac{1}{840}\alpha^7 - + \cdots\right),$$

$$\underline{\underline{F \approx \frac{r^2}{12}\left(\alpha^3 - \frac{\alpha^5}{20}\right)}}.$$

Lehrbeispiel 13

Der Kolbenweg x eines Kurbeltriebes (vom äußeren Totpunkt ab gerechnet) ist

$$x = r(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta)$$

(Bezeichnungen nach Bild 3). Entwickeln Sie eine Näherungsformel für x in Abhängigkeit von α, und führen Sie das Schubstangenverhältnis $\frac{r}{l} = \lambda$ ein. (Vorausgesetzt wird, daß λ sehr viel kleiner als 1 ist, z. B. bei Dampflokomotiven $\lambda \leqq 0{,}2$.)

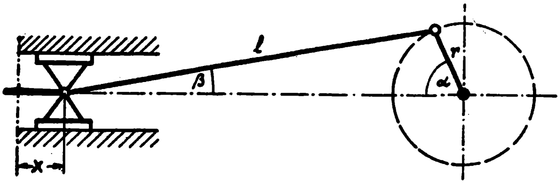


Bild 3

Lösung:

Es besteht die Beziehung

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \quad \text{(Sinussatz).}$$

Damit ist
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}\,.$$

In der Gleichung für x ersetzen Sie das Glied $\cos\beta$:

$$x = r(1-\cos\alpha) + l\left(1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}\right).$$

$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}$ entwickeln Sie in eine binomische Reihe:

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\alpha - \cdots$$

Für die Näherungsformel können Sie sich auf die ersten zwei Glieder beschränken (wenn z. B. wie oben angegeben $\lambda \leqq 0{,}2$ ist, wird $\lambda^4 \leqq 0{,}0016$), und Sie erhalten

$$x \approx r(1-\cos\alpha) + l\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha\right)\right],$$

$$x \approx r\left(1-\cos\alpha+\frac{1}{2}\lambda\sin^2\alpha\right).$$

Lehrbeispiel 14

Für die Berechnung der Härte (in kp/mm²*) durch den Kugeldruckversuch nach Brinell (DIN 1605) wird die Formel*

$$H = \frac{2P}{\pi D\left(D-\sqrt{D^2-d^2}\right)}$$

angegeben. Hierin bedeuten P die Belastung (in kp*), D den Kugeldurchmesser (in* mm*) und d den Durchmesser der Eindruckfläche (in* mm*). Es soll weiterhin* $0{,}2 \leqq \frac{d}{D} \leqq 0{,}5$ *sein. Ersetzen Sie mit Hilfe von Potenzreihen die für die Rechnung unbequeme Formel für die Brinellhärte durch eine Näherungsformel!*

Lösung:

Sie schreiben
$$\sqrt{D^2-d^2} = D\sqrt{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2}$$

und entwickeln den Wurzelausdruck nach Formel (8) in eine Potenzreihe:

$$D\sqrt{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2} = D\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^6-\cdots\right).$$

Damit wird

$$H = \frac{2P}{\pi D\left[D-D\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^6-\cdots\right)\right]}$$

$$= \frac{2P}{\frac{\pi D^2}{2}\left(\frac{d^2}{D^2}+\frac{1}{4}\frac{d^4}{D^4}+\frac{1}{8}\frac{d^6}{D^6}+\cdots\right)}$$

$$= \frac{4P}{\pi d^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2}+\frac{1}{8}\frac{d^4}{D^4}+\cdots\right)} = \frac{4P}{\pi d^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2}+\frac{1}{8}\frac{d^4}{D^4}+\cdots}.$$

Verwenden Sie für den Bruch $\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2}+\frac{1}{8}\frac{d^4}{D^4}+\cdots}$ die Näherung $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$,

so erhalten Sie schließlich $\underline{\underline{H \approx \dfrac{4P}{\pi d^2}\left[1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{d}{D}\right)^2-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]}}$.

Für den größten zulässigen Wert des Verhältnisses $\dfrac{d}{D}=0{,}5$ nimmt das 2. Glied den Wert $\dfrac{1}{16}<0{,}07$ und das 3. Glied den Wert $\dfrac{1}{128}<0{,}008$ an. Wie Sie sehen, wird man mit einem Fehler von kleiner als 7% einfach $H=\dfrac{4P}{\pi d^2}$ setzen dürfen. Die Verwendung des 2. Gliedes drückt den Fehler unter 1% herab.

17.2 Integration durch Reihenentwicklung

Ist es Ihnen nicht möglich, ein gegebenes Integral in geschlossener Form durch Anwenden einer der in Band 2 behandelten Integrationsmethoden zu lösen, so besteht neben den Ihnen bekannten numerischen und graphischen Verfahren die Möglichkeit der Integration durch Reihenentwicklung.
Sie ersetzen die zu integrierende Funktion durch eine konvergente unendliche Reihe (die Sie z. B. mittels Taylorentwicklung gewinnen können) und integrieren die Potenzreihe gliedweise. Beachten müssen Sie hierbei, daß die *Integrationsgrenzen innerhalb des Konvergenzbereiches* der Potenzreihe liegen müssen.

Lehrbeispiel 15

Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve $y=\dfrac{\sin x}{x}$ *in den Grenzen von* $x_1=-\pi$ *bis* $x_2=\pi$*!*

Lösung: Da es sich um eine gerade Funktion handelt, ist

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ kann nicht exakt gelöst werden. Sie ersetzen deshalb $\sin x$ durch die Sinusreihe (Konvergenzbereich $|x|<\infty$) und erhalten

$$\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\cdots\right)\mathrm{d}x.$$

Die gliedweise Integration liefert

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\cdots\right)\mathrm{d}x\\
&=2\left(x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{5!}-\frac{1}{7}\frac{x^7}{7!}+-\cdots\right)\Bigg|_0^{\pi}\\
&=2\left(3{,}1416-\frac{31{,}006}{18}+\frac{306{,}02}{600}-\frac{3020{,}3}{35280}+-\cdots\right)\\
&=2\,(3{,}14-1{,}72+0{,}51-0{,}09+-\cdots),
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\approx 3{,}7.}}$$

Lehrbeispiel 16

Berechnen Sie $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$*!*

Lösung:

Sie verwenden die Potenzreihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - + \cdots$$

Da Sie nur innerhalb des Konvergenzbereiches $|x| < 1$ integrieren dürfen, die Integrationsgrenzen aber 2 und 4 sind, formen Sie vorher um. Es wird

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}$$
$$= x^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^6} - + \cdots\right).$$

Die in der Klammer stehende Reihe ist für $x > 1$ sicher konvergent. Sie erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{9}{2}} + \frac{3}{8}x^{-\frac{15}{2}} - + \cdots$$

Durch gliedweises Integrieren ergibt sich

$$\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \left(-2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{7}\right)x^{-\frac{7}{2}} + \frac{3}{8}\left(-\frac{2}{13}\right)x^{-\frac{13}{2}} - + \cdots\right)\Bigg|_2^4$$
$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x^3\sqrt{x}} - \frac{3}{52}\cdot\frac{1}{x^6\sqrt{x}} + - \cdots\right)\Bigg|_2^4$$
$$= \left(-1 + \frac{1}{7\cdot 128} - \frac{3}{52\cdot 8192} + - \cdots\right)$$
$$- \sqrt{2}\left(-1 + \frac{1}{7\cdot 16} - \frac{3}{52\cdot 128} + - \cdots\right)$$
$$\approx -1 + 0{,}001 - \sqrt{2}\,(-1 + 0{,}009)$$
$$= -0{,}999 - \sqrt{2}\,(-0{,}991)$$
$$= -0{,}999 + 1{,}401,$$

$$\underline{\underline{\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \approx 0{,}40.}}$$

Lehrbeispiel 17

Von besonderer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Statistik) und Ausgleichsrechnung ist das auf elementare Weise nicht lösbare Gaußsche Fehlerintegral

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-x_1}^{x_1} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Bestimmen Sie durch Reihenentwicklung $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-h^2x^2}\,dx$,

— d. i. die Fläche unter der ***Gaußschen Glockenkurve*** *(Bild 4) in den Grenzen von* -1 *bis* 1 *— für* $h = 1$*!*

Lösung:

Für $h = 1$ wird das Fehlerintegral (wenn Sie berücksichtigen, daß hier eine symmetrische Funktion mit symmetrischen Grenzen vorliegt)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1}^{1} e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx.$$

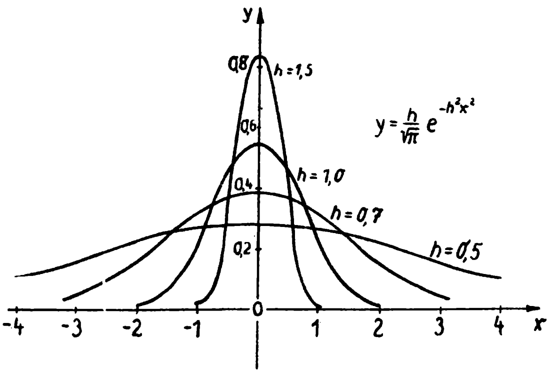


Bild 4

Ersetzen Sie in der Reihe für e^x das x durch $-x^2$, so erhalten Sie (der Konvergenzbereich ist $|x| < \infty$)

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + - \cdots$$

Damit wird

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + - \cdots\right)dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + - \cdots\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + - \cdots\right),$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}84.}}$$

Übungen

7. *Berechnen Sie durch Reihenentwicklung auf 4 Dezimalstellen genau*

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^2}}\,!$$

8. *Berechnen Sie durch Reihenentwicklung* $\int\limits_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$!

9. *Berechnen Sie durch Reihenentwicklung* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$!

Zusammenfassung

Als wichtigste Anwendungen der unendlichen Reihen lernten Sie kennen:

das Aufstellen von Näherungsformeln: Hier wird die Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickelt, deren erste Glieder meist für die Praxis hinreichend genaue Ergebnisse liefern;

die Integration durch Reihenentwicklung: Man berechnet Integrale, die auf kein Grundintegral zurückgeführt werden können, indem man den Integranden in eine konvergente Potenzreihe entwickelt und gliedweise integriert.

Näherungsformeln[1]

	Näherungsformel	Zulässiges Intervall für x bei einem Fehler von etwa					
		0,1 %		1 %		10 %	
		von	bis	von	bis	von	bis
1	$\sin x = x$	$-0{,}077$ $-4{,}4°$	$+0{,}077$ $+4{,}4°$	$-0{,}245$ $-14{,}0°$	$+0{,}245$ $+14{,}0°$	$-0{,}749$ $-42{,}9°$	$+0{,}749$ $+42{,}9°$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$	$-0{,}582$ $-33{,}3°$	$+0{,}582$ $+33{,}3°$	$-1{,}008$ $-57{,}8°$	$+1{,}008$ $+57{,}8°$	$-1{,}664$ $-95{,}3°$	$+1{,}664$ $+95{,}3°$
3	$\cos x = 1$	$-0{,}045$ $-2{,}6°$	$+0{,}045$ $+2{,}6°$	$-0{,}141$ $-8{,}1°$	$+0{,}141$ $+8{,}1°$	$-0{,}430$ $-24{,}6°$	$+0{,}430$ $+24{,}6°$
4	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-0{,}384$ $-22{,}0°$	$+0{,}384$ $+22{,}0°$	$-0{,}662$ $-37{,}9°$	$+0{,}662$ $+37{,}9°$	$-1{,}034$ $-59{,}2°$	$+1{,}034$ $+59{,}2°$
5	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$	$-0{,}09$	$+0{,}09$	$-0{,}24$	$+0{,}32$	$-0{,}59$	$+1{,}43$
6	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2}$	$-0{,}05$	$+0{,}06$	$-0{,}16$	$+0{,}17$	$-0{,}46$	$+0{,}56$
7	$\frac{1}{1+x} = 1 - x$	$-0{,}03$	$+0{,}03$	$-0{,}10$	$+0{,}10$	$-0{,}31$	$+0{,}31$
8	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$	$-0{,}054$	$+0{,}055$	$-0{,}17$	$+0{,}18$	$-0{,}50$	$+0{,}58$
9	$e^x = 1 + x$	$-0{,}044$	$+0{,}045$	$-0{,}13$	$+0{,}15$	$-0{,}39$	$+0{,}53$

[1] Diese Tabelle ist auszugsweise v. Sanden: Praktische Mathematik, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953, entnommen.

18 Fourier-Reihen

18.1 Die Entwicklung einer Funktion mit der Periode 2π

18.11. Die Fourier-Reihe als harmonische Schwingungsreihe. Neben den im 16. Kapitel behandelten Potenzreihen gibt es auch unendliche Reihen, deren Glieder trigonometrische Funktionen sind. Man nennt Reihen von der Form

$$\begin{aligned} y = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \end{aligned}$$

unendliche trigonometrische Reihen.

Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ besitzen die Periode 2π, $\sin 2x$ und $\cos 2x$ die Periode π, $\sin 3x$ und $\cos 3x$ die Periode $\frac{2\pi}{3}$, usw. Demnach muß auch eine durch Addition dieser Funktionen gebildete Reihe mindestens die Periode 2π aufweisen. (Eine durch Addition von trigonometrischen Funktionen entstandene Funktion wurde in Band 1, Abschnitt 4.3, Bild 44, dargestellt.)

Wesentliche Erkenntnisse über die Untersuchung und Anwendung von trigonometrischen Reihen verdankt die Mathematik dem Schweizer Leonhard Euler (1707 bis 1783) und vor allem dem Franzosen Jean Baptiste Fourier (1768 bis 1830). Aus diesem Grunde nennt man diese Reihen Fourier-Reihen.

Während man durch Potenzreihen eine gegebene Funktion nur in der Umgebung eines Punktes ersetzen kann (sofern die Funktion in der Umgebung nicht unstetig ist), kann mittels Fourier-Reihen eine periodische Funktion im gesamten Bereich mit guter Annäherung dargestellt werden. Von dieser Möglichkeit macht man bei Vorgängen mit zeitlicher Periodizität Gebrauch, z. B. bei mechanischen Schwingungen, akustischen Erscheinungen, vor allem aber bei elektrischen Schwingungen. Mit Hilfe der Fourier-Reihen werden wir Aufgaben lösen, wie beispielsweise die Darstellung der Kurve des gleichgerichteten Wechselstroms durch eine Funktion. Der Gedanke, die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sowie die Funktionen der Winkelvielfachen $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x, \ldots \sin nx$, $\cos nx, \ldots$ zur Darstellung periodischer Vorgänge zu wählen, liegt deshalb nahe, weil, wie schon erwähnt, alle diese Funktionen die Periode 2π gemeinsam haben. Das Hinzufügen eines Gliedes a_0 hat sich als zweckmäßig erwiesen (denken Sie nur an einen sinusförmigen Strom mit einem Gleichstromanteil, den Sie durch a_0 darstellen können).

Es ist zweckmäßig, die einzelnen Summanden der Reihe anders zu gruppieren:

$$y = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

Das Glied a_0 läßt sich auch in der Form $a_0 \cos(0 \cdot x) + b_0 \sin(0 \cdot x)$ darstellen. Das allgemeine Glied c_n der Reihe lautet deshalb

$$c_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Für die Reihe läßt sich also schreiben

$$\begin{aligned} y = f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

Eine beliebige Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π, d. h., eine Funktion, für die $f(x+2\pi)=f(x)$ gilt, kann durch eine unendliche trigonometrische Reihe (eine Fourier-Reihe) dargestellt werden:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).} \tag{9}$$

Auf den Beweis für die Möglichkeit dieser Darstellung einer Funktion $f(x)$ muß hier verzichtet werden. Bemerkt sei aber noch, daß die Reihe für alle Werte von x gilt, sobald sie für irgendein Intervall der Länge 2π gilt, z. B. für die Intervalle $-\pi\leqq x\leqq\pi$, $0\leqq x\leqq 2\pi$ oder $\alpha\leqq x\leqq\alpha+2\pi$. Innerhalb dieses Bereiches kann die Funktion $f(x)$ jeden willkürlichen Verlauf annehmen, so daß für die angegebenen Intervalle (meist werden wir es nur mit den beiden erstgenannten zu tun haben) jede Funktion nach Formel (9) entwickelt werden kann.

Da jedes Glied $c_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$ eine harmonische Schwingung darstellt, wollen wir es in den für eine harmonische Schwingung üblichen Ausdruck umwandeln. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$a_n=A_n\sin\varphi_n \quad \text{und} \quad b_n=A_n\cos\varphi_n.$$

Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen liefert

$$\boxed{a_n^2+b_n^2=A_n^2} \tag{10a}$$

und Dividieren der ersten Gleichung durch die zweite

$$\boxed{\frac{a_n}{b_n}=\tan\varphi_n.} \tag{10b}$$

Aus den Formeln (10a) und (10b) erkennen Sie, daß die Darstellung von a_n und b_n durch $A_n\sin\varphi_n$, bzw. $A_n\cos\varphi_n$ immer möglich ist, denn die Formeln (10a) und (10b) gelten für jeden Wert von a_n und b_n.

Werden die erhaltenen Werte in

$$c_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

eingesetzt, so wird $c_n=A_n(\sin\varphi_n\cdot\cos nx+\cos\varphi_n\cdot\sin nx)$,

$$\underline{\underline{c_n=A_n\sin(nx+\varphi_n).}}$$

Die Werte für A_n und φ_n werden gemäß Formel (10a) und (10b) aus a_n und b_n berechnet:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}; \qquad \varphi_n=\arctan\frac{a_n}{b_n}.$$

Das Ergebnis

$$c_n=A_n\sin(nx+\varphi_n)$$

entspricht dem üblichen Ausdruck einer harmonischen Schwingung

$$y=A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi_0\right).$$

Es ist

$$c_n = y = \text{Elongation},$$
$$A_n = A = \text{Amplitude},$$
$$\varphi_n = \varphi_0 = \text{Anfangsphase der Schwingung},$$
$$n = \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \text{Kreisfrequenz},$$

worin T die Schwingungsdauer, f die Frequenz bedeutet.
In der neuen Form heißt jetzt die Reihe

$$\boxed{y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n).} \tag{9a}$$

Wird in der Beziehung $nx = 2\pi \frac{t}{T_n}$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt, so ergibt sich

$$x = 2\pi \frac{t}{T_1}; \quad 2x = 2\pi \frac{t}{T_2}; \quad 3x = 2\pi \frac{t}{T_3}; \ldots$$

Hieraus folgt, daß

$$T_1 = 2T_2 = 3T_3 = \cdots$$

sein muß.
Die Glieder der Reihe (9a) und damit auch die der Reihe (9) stellen eine Grundschwingung und ihre harmonischen[1] Oberschwingungen dar (bis auf das absolute Glied a_0, dessen Bedeutung als Gleichanteil einer elektrischen Schwingung schon weiter vorn erwähnt wurde), die Fourier-Reihe ist eine harmonische Schwingungsreihe. Man nennt deshalb die Entwicklung einer Funktion in eine Fourier-Reihe auch harmonische Analyse.
Wenn nun die Aufgabe vorliegt, für eine beliebige Funktion die Fourier-Reihe aufzustellen, so sind die Koeffizienten a_n und b_n der Reihe zu ermitteln.

18.12 Bestimmung der Fourier-Koeffizienten. Die Entwicklung einer Funktion soll in eine unendliche trigonometrische Reihe von der Form

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots \end{aligned}$$

erfolgen.
Das Glied a_0 wollen wir im folgenden als absolutes Glied bezeichnen; $a_n \cos nx$ bzw. $b_n \sin nx$ (mit $n = 1, 2, 3, \ldots$) soll ein beliebiges Kosinus- bzw. Sinusglied der Reihe sein. Die Fourier-Reihe ist bekannt, wenn die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n ermittelt sind.

Bestimmung von a_0

Wir integrieren die Reihe für $f(x)$ gliedweise. Dies ist — wie bei den Potenzreihen (Abschn. 16.6) — innerhalb des Konvergenzbereiches erlaubt. Der Nachweis muß hier unterbleiben. Ebenso muß hier auf den Beweis, daß die Fourier-Reihe konvergiert, verzichtet werden. (Sie finden diese Beweise in der einschlägigen Fachliteratur.) Wir integrieren über die festgestellte Periode dieser Reihe von der Länge 2π und wählen als Integrationsgrenzen 0 und 2π. Wir dürften aber

[1] *Harmonisch* bedeutet, daß die Frequenzen der Oberschwingung ganzzahlige Vielfache der Frequenz der Grundschwingung sind.

auch von $-\pi$ bis π integrieren. Erforderlich ist nur, daß eine Periode von der Länge 2π erfaßt wird.
Es wird

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x + a_1\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x + a_2\int_0^{2\pi} \cos 2x\,\mathrm{d}x + \cdots + a_n\int_0^{2\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + \cdots$$

$$+ b_1\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x + b_2\int_0^{2\pi} \sin 2x\,\mathrm{d}x + \cdots + b_n\int_0^{2\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x + \cdots$$

Es ist

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

Das ist leicht einzusehen, denn bei der Integration von Kosinus- oder Sinusfunktionen ergeben sich Sinus- oder Kosinusfunktionen. Der Wert einer trigonometrischen Funktion, deren Argument x oder ein ganzzahliges Vielfaches von x ist, besitzt aber an der Stelle 0 den gleichen Wert wie an der Stelle 2π, so daß sich bei der Berechnung des bestimmten Integrals infolge der Differenzbildung (Funktionswert für 2π minus Funktionswert für 0) immer Null ergeben muß.
Damit wird

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = a_0 x \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a_0.$$

Es folgt für das absolute Glied a_0

$$\underline{\underline{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.}}$$

Da $$2\pi \cdot a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist, hat das Rechteck mit den Seiten 2π und a_0 den gleichen Flächeninhalt wie die Fläche unter der Funktion $y = f(x)$ im Intervall $0 \ldots 2\pi$ (Bild 5). Das bedeutet: a_0 ist die mittlere Höhe der Fläche $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, bzw. die mittlere Ordinate der Funktion $y = f(x)$ im Intervall $0 \ldots 2\pi$. Diese mittlere Ordinate kann auch den Wert Null besitzen, nämlich dann, wenn beiderseits der x-Achse gleiche Flächen liegen.

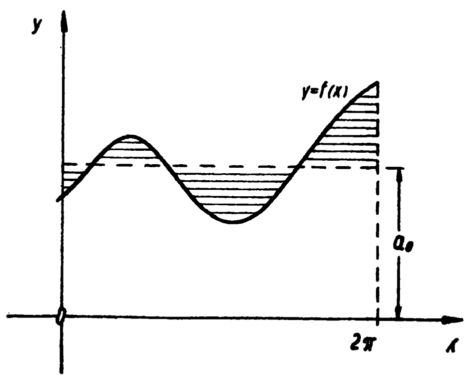


Bild 5

Bestimmung von a_n

Auch die Berechnung von a_n kann durch Integration der Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots + b_n\sin nx + \cdots$$

erfolgen. Allerdings muß hier noch ein Kunstgriff angewendet werden, denn wie Sie bei der Berechnung von a_0 sahen, werden bei Berechnung von

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

alle Glieder außer dem Glied, das a_0 enthält, zu Null. Der Kunstgriff besteht darin, daß vor der Integration die Reihe mit $\cos nx$ multipliziert wird. Das ergibt

$$f(x)\cdot\cos nx = a_0\cos nx + a_1\cos x\,\cos nx + a_2\cos 2x\,\cos nx + \cdots + a_n\cos^2 nx + \cdots$$
$$+\, b_1\sin x\,\cos nx + b_2\sin 2x\cos nx + \cdots + b_n\sin nx\,\cos nx + \cdots$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} a_0\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_0^{2\pi} a_1\cos x\,\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} a_2\cos 2x\,\cos nx\,\mathrm{d}x + \cdots\\ &+ \int_0^{2\pi} a_n\cos^2 nx\,\mathrm{d}x + \cdots\\ &+ \int_0^{2\pi} b_1\sin x\,\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} b_2\sin 2x\,\cos nx\,\mathrm{d}x + \cdots\\ &+ \int_0^{2\pi} b_n\sin nx\,\cos nx\,\mathrm{d}x + \cdots\end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Integrale wurden bereits in Mathematik IV, Band 2, Abschnitt 13.11 berechnet. Die Ergebnisse können daher von dort übernommen werden. Es ist

1. $$\int_0^{2\pi} a_0\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}},$$

2. $$\int_0^{2\pi} a_m\cos mx\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_m}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}, \qquad \text{für } m \neq n,$$

3. $$\int_0^{2\pi} a_n\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{2n}(nx + \sin nx\cos nx)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{a_n\pi}},$$

4. $$\int_0^{2\pi} b_m\sin mx\,\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_m}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}, \qquad \text{für } m \neq n,$$

5. $$\int_0^{2\pi} b_n\sin nx\,\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{4n}\cos 2nx\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}.$$

Damit werden auf der rechten Seite alle Integrale bis auf eines, welches a_n enthält, gleich Null. Aus

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a_n \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = a_n\pi$$

ergibt sich für die Fourier-Koeffizienten a_n der Reihe

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.}}$$

Bestimmung von b_n

Die Berechnung der Koeffizienten b_n erfolgt analog der für a_n, nur daß diesmal die Reihe $f(x)$ vor der Integration mit $\sin nx$ zu multiplizieren ist. Multiplikation und Integration in den Grenzen von $0\cdots 2\pi$ liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a_0 \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^{2\pi} a_1 \cos x \sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} a_2 \cos 2x \sin nx\,\mathrm{d}x + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \sin nx\,\mathrm{d}x + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi} b_1 \sin x \sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} b_2 \sin 2x \sin nx\,\mathrm{d}x + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi} b_n \sin^2 nx\,\mathrm{d}x + \cdots\end{aligned}$$

Die hier auftretenden Integrale wurden ebenfalls bereits in Mathematik IV, Band 2, Abschnitt 13.11 berechnet. Es ist

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_0 \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{a_0}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}},$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_m \cos mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_m}{2}\left(\frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}},\quad$ für $m \neq n$,

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{a_n}{4n}\cos 2nx\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}},$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} b_m \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{b_m}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}},\quad$ für $m \neq n$,

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} b_n \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{b_n}{2n}(nx - \sin nx \cos nx)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{b_n\pi}}.$

Mit diesen Werten wird

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} b_n \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{b_n\pi}},$$

da alle anderen Glieder den Wert Null besitzen.
Hieraus folgt für die Fourier-Koeffizienten b_n der Sinusglieder

$$\underline{\underline{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.}}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten nennt man **Eulersche Formeln:**

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}} \qquad (11)$$

Da $f(x)$ (nach Voraussetzung), $\cos nx$ und $\sin nx$ periodische Funktionen von x mit der Periode 2π sind, lassen sich diese Formeln auch ersetzen durch

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}} \qquad (11\,\mathrm{a})$$

Wie die Berechnung der Fourier-Koeffizienten durchgeführt wird, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Lehrbeispiel 18

In der Technik treten oft Vorgänge auf, bei denen eine Größe linear bis zu einem Höchstwert ansteigt und dann plötzlich auf Null oder einen negativen Wert sinkt. Denken Sie z. B. an den Auf- und Entladevorgang eines Kondensators (Kippschwingung).
Es soll jetzt eine Fourier-Reihe für derartige Vorgänge entwickelt werden, allerdings an einem stark vereinfachten Beispiel, der sogenannten „Sägezahnkurve“ (Bild 6a).

Lösung:

Die Funktion hat die Periode 2π. Für das in Bild 6b dargestellte Kurvenstück $0 \leqq x \leqq 2\pi$ heißt die Funktionsgleichung $y = \frac{A}{2\pi} x$. Die Fourier-Koeffizienten können mit Hilfe der Eulerschen Formeln (11) bestimmt werden. Sie erhalten zunächst

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^2}{8\pi^2}\Big|_0^{2\pi},$$

$$\underline{\underline{a_0 = \frac{A}{2}.}}$$

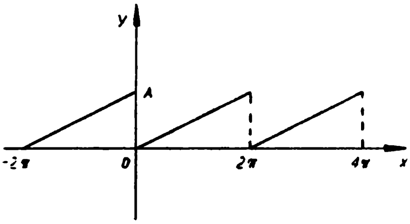


Bild 6a

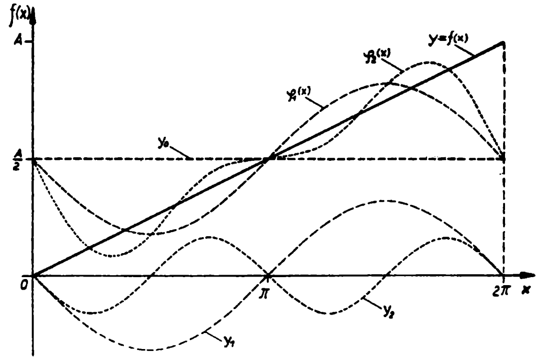


Bild 6b

Das Ergebnis entspricht unseren Erwartungen, denn a_0 ist die mittlere Ordinate und die ist nach Bild 6b gleich $\frac{A}{2}$.

Für die a_n erhalten Sie

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

$\int x\cos nx\,\mathrm{d}x$ können Sie durch partielle Integration lösen. Sie setzen

$$f' = \cos nx, \qquad g = x,$$

$$f = \frac{1}{n}\sin nx, \qquad g' = 1.$$

Es wird

$$\int x\cos nx\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{1}{n}\sin nx - \int \frac{1}{n}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx + C.$$

Es ist also

$$a_n = \frac{A}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2\pi^2}\left(\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A}{2\pi^2}\left[\left(0 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(0 + \frac{1}{n^2}\right)\right] = 0,$$

$$\underline{\underline{a_n = 0.}}$$

Die Koeffizienten b_n errechnen sich aus

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi}\,x\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral wird wiederum durch partielle Integration gelöst. Sie setzen

$$f' = \sin nx, \qquad g = x,$$

$$f = -\frac{1}{n}\cos nx, \qquad g' = 1.$$

Damit wird

$$\int x\sin nx\,\mathrm{d}x = -x\cdot\frac{1}{n}\cos nx + \int\frac{1}{n}\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + C.$$

Sie erhalten

$$b_n = \frac{A}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A}{2\pi^2}\left[\left(0-\frac{2\pi}{n}\right)-(0-0)\right],$$

$$\underline{\underline{b_n = -\frac{A}{\pi n}}}.$$

Wenn Sie in den für b_n erhaltenen Wert der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ einsetzen, erhalten Sie die Koeffizienten

$$b_1 = -\frac{A}{\pi}; \qquad b_2 = -\frac{A}{2\pi}; \qquad b_3 = -\frac{A}{3\pi}; \qquad b_4 = -\frac{A}{4\pi};$$

Da für a_n und damit also für $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Wert Null errechnet wurde, lautet die Fourier-Reihe für die gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right),$$

$$= \frac{A}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)\right].$$

Schreiben Sie die in runden Klammern stehende Reihe mittels des Summenzeichens, so erhalten Sie

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{A}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\right]}}.$$

In Bild 6b sind außer der Funktion $y = \frac{A}{2\pi}x$ noch die Funktionen

$$y_0 = a_0 = \frac{A}{2}, \qquad y_1 = b_1\sin x = -\frac{A}{\pi}\sin x, \qquad y_2 = b_2\sin 2x = -\frac{A}{2\pi}\sin 2x$$

sowie die Funktionen $\varphi_1(x) = y_0 + y_1$ und $\varphi_2(x) = y_0 + y_1 + y_2$ eingezeichnet.
Die Funktion

$$\varphi_2(x) = \frac{A}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{1}{\pi}\sin 2x\right]$$

ist eine Näherungsfunktion für die von uns in eine Fourier-Reihe entwickelte Funktion $f(x)$. Sie sehen, wie mit wachsender Gliederzahl sich der Verlauf der Näherungsfunktion dem der Funktion $f(x)$ immer mehr annähert. So ist z. B. $\varphi_2(x)$ eine bessere Annäherung als $\varphi_1(x)$.

18.2 Fourieranalysen einiger besonderer Kurvenformen

Im Lehrbeispiel 18 stellte es sich heraus, daß bei der Entwicklung der Funktion $y = \frac{A}{2\pi} x$ in eine Fourier-Reihe die Kosinusglieder entfallen, da alle $a_n = 0$ sind. Es erhebt sich die Frage, ob ein Wegfallen irgendwelcher Glieder (a_0 oder a_n oder b_n gleich Null) schon an der Funktionsgleichung erkannt werden und man sich somit die Rechnung von Anfang an vereinfachen kann. Die Ursache für das Wegfallen bestimmter Glieder sind Symmetrieeigenschaften der in eine Fourier-Reihe zu entwickelnden Funktion $f(x)$. Drei grundsätzliche Fälle von Symmetrie sind möglich.

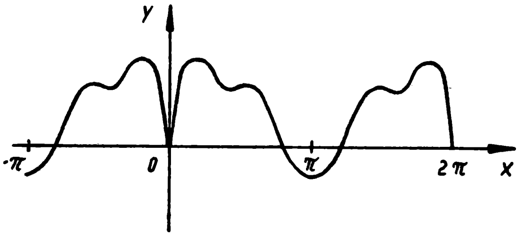


Bild 7a

1. Die Kurve der Funktion liegt symmetrisch zur y-Achse, d. h., die Funktion ist eine gerade Funktion (Bild 7a).
   In diesem Falle entfallen alle Sinusglieder: $b_n = 0$.

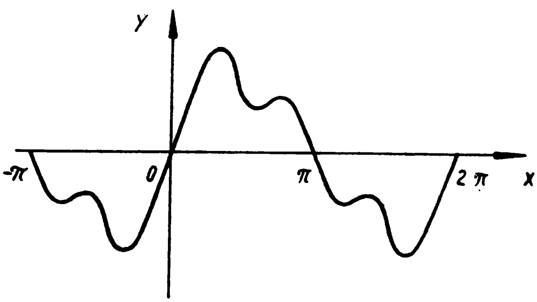


Bild 7b

2. Die Kurve der Funktion liegt zentralsymmetrisch zum Nullpunkt, d. h., die Funktion ist eine ungerade Funktion (Bild 7b).
   In diesem Falle entfallen alle Kosinusglieder: $a_n = 0$.

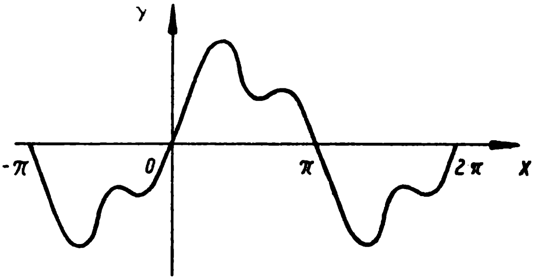


Bild 7c

3. Die Kurve umschließt beiderseits der x-Achse innerhalb einer Periode gleich große Flächen (Bild 7c).
   In diesem Falle ist $a_0 = 0$.

Der Inhalt der drei Sätze ist leicht einzusehen: Eine Funktion, die aus einer Summe von geraden und ungeraden Funktionen besteht, ist weder gerade noch ungerade.

Beispiele:

Die Summe der ungeraden Funktionen

$$y_1 = x^3, \qquad y_2 = -x$$

und der geraden Funktionen

$$y_3 = -3x^2, \quad y_4 = 3$$

ergibt die Funktion

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Diese Funktion ist weder gerade noch ungerade (vgl. Math. IV, Bd. 1, Bild 40). Ebenso ist die Funktion

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

weder gerade noch ungerade, da

$$y_1 = \cos x \qquad \text{eine gerade,}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{eine ungerade}$$

Funktion ist (vgl. Math. IV, Bd. 1, Bild 44).

Dagegen ist eine Funktion, die aus einer Summe von geraden (ungeraden) Funktionen besteht, gerade (ungerade).

Beispiel:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x$$

ist eine ungerade Funktion (vgl. Math. IV, Bd. 1, Bild 38).

Die Fourier-Entwicklung einer geraden Funktion kann also keine Sinusglieder enthalten, da $y = \sin nx$ eine ungerade Funktion ist. Ebenso können in der Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion keine Kosinusglieder auftreten, da $y = \cos nx$ eine gerade Funktion ist. Schließlich ergibt sich der dritte Satz aus dem Umstand, daß a_0 gemäß 18.12 das arithmetische Mittel der Funktionswerte über einer Periode darstellt. Deshalb muß a_0 bei Kurven, die beiderseits der x-Achse gleiche Flächen einschließen, gleich Null sein.

Liegt eine gerade Funktion $f(x)$ vor, und ist über das Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ zu integrieren, so läßt sich

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x$$

umformen in

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x.$$

Es wird also im Falle $f(x) = f(-x)$, d. h. für **gerade Funktionen**

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \\ b_n &= 0. \end{aligned}} \tag{11b}$$

Für eine **ungerade** Funktion sind alle a_n gleich Null, auch a_0.
Es ist, sofern $f(x) = -f(-x)$, d. h. für **ungerade Funktionen**

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}} \tag{11c}$$

Lehrbeispiel 19

Die in Bild 8 dargestellte Funktion ist in eine Fourier-Reihe zu entwickeln.

Lösung:

Die analytische Darstellung der Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi, \\ 1 & \text{für } \frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi \end{cases}$$

oder auch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Die zweite Form ist zweckmäßiger. Wie Sie aus Bild 8 erkennen, ist die zu entwickelnde Funktion eine gerade Funktion, d. h., alle Koeffizienten b_n sind Null. Außerdem schließt sie beiderseits der x-Achse gleich große Flächen ein, d. h., das absolute Glied a_0 entfällt.

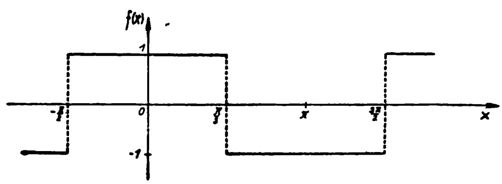


Bild 8

Zur Berechnung von a_n verwenden Sie das speziell für gerade Funktionen aufgestellte Integral

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral müssen Sie in zwei Integrale zerlegen (für jeden der beiden Definitionsbereiche ist die Rechnung getrennt durchzuführen), und Sie erhalten

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1)\cos nx \,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2}{n \cdot \pi}\left[(\sin nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (\sin nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n \cdot \pi}\left[\sin n\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin n\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{4}{n \cdot \pi}\sin n\frac{\pi}{2}.}}$$

Setzen Sie in dem für a_n berechneten Ausdruck der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein, so bekommen Sie

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0; \qquad a_1 = \frac{4}{\pi}; \qquad a_3 = -\frac{4}{3\pi}; \qquad a_5 = \frac{4}{5\pi}; \quad \cdots$$

Damit lautet die Fourier-Reihe der gegebenen Funktion $f(x)$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + - \cdots\right].}}$$

Bild 9 zeigt Ihnen wiederum die schrittweise Darstellung der Funktion. Da die Fourier-Reihe eine unendliche Reihe ist, wird $f(x)$ erst vollkommen und eindeutig

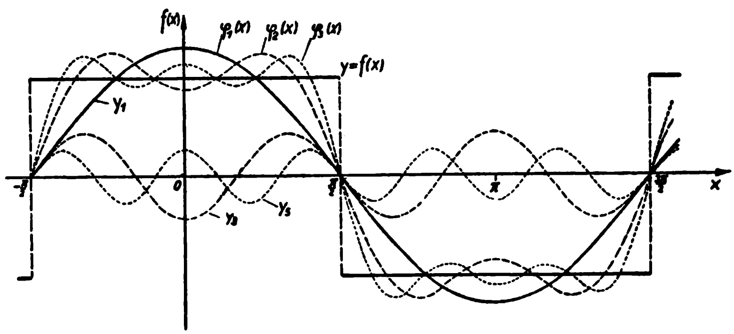


Bild 9

(wie sich beweisen läßt) durch „unendlich" viele Glieder der Reihe dargestellt. Die Annäherung an die gegebene Kurve wird mit wachsender Gliederzahl schrittweise verbessert. Beim Berücksichtigen der 1., 3., 5., 7. Oberwelle ergeben sich die entsprechenden Kurven.

Außerdem muß bemerkt werden, daß die Reihe das Verhalten an der Sprungstelle nie richtig angeben wird. *An der Sprungstelle liefert die Reihe immer das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte.* Auf den Beweis dieser äußerst

wichtigen Tatsache muß hier verzichtet werden. In dem eben gerechneten Beispiel ergibt sich an der Sprungstelle das Mittel zwischen $+1$ und -1, d. h. Null. Bei der Sägezahnkurve (Bild 6a, b) im Lehrbeispiel 18 war der Wert $\frac{A}{2}$.
In Bild 9 sind außer der Funktion $y = f(x)$ die Funktionen

$$y_1 = a_1 \cos x = \frac{4}{\pi} \cos x,$$

$$y_3 = a_3 \cos 3x = -\frac{4}{3\pi} \cos 3x,$$

$$y_5 = a_5 \cos 5x = \frac{4}{5\pi} \cos 5x$$

sowie die Funktionen

$$\varphi_1(x) = y_1, \quad \varphi_2(x) = y_1 + y_3 \quad \text{und} \quad \varphi_3(x) = y_1 + y_3 + y_5$$

eingezeichnet.

Lehrbeispiel 20

Die Funktion $y = x^2$ soll für $-\pi \leqq x \leqq \pi$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden (Bild 10).

Lösung:

Wie aus Bild 10 ersichtlich, ist $y = x^2$ eine gerade Funktion. Also sind alle $b_n = 0$. Die mittlere Ordinate ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

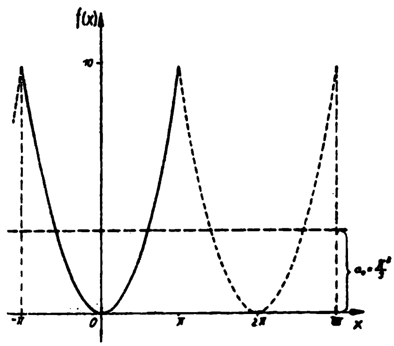


Bild 10

Für die Koeffizienten a_n ergibt sich

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x.$$

Durch partielle Integration erhalten Sie

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(x^2 \frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x \right].$$

Es ist

$$\left(x^2 \frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Das rechts stehende Integral lösen Sie durch nochmaliges Anwenden der partiellen Integration

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{n} \right) \left[\left(-x \cdot \frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x \right].$$

Da $\int_0^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x = 0$ und $\cos n\pi = (-1)^n$ ist, wird

$$\underline{\underline{a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}}}.$$

Die gesuchte Reihe lautet

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + - \cdots + (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx + - \cdots$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}}}.$$

Beachten Sie bei der in Lehrbeispiel 20 behandelten Funktion, daß $y = x^2$ keine von vornherein periodische Funktion ist. Im Bereich $\pi \leqq x \leqq 3\pi$ lautet beispielsweise die Darstellung $y = (x - 2\pi)^2$. Mit dieser Funktion müßten Sie auch im Bereich von $\pi \cdots 2\pi$ rechnen, wenn Sie etwa die Periode von $0 \cdots 2\pi$ statt wie im Lehrbeispiel 20 die Periode von $-\pi \cdots \pi$ zur Berechnung verwenden wollten.

Lehrbeispiel 21

Es soll die Kurve der Einweggleichrichtung in eine Fourier-Reihe entwickelt werden (Bild 11).

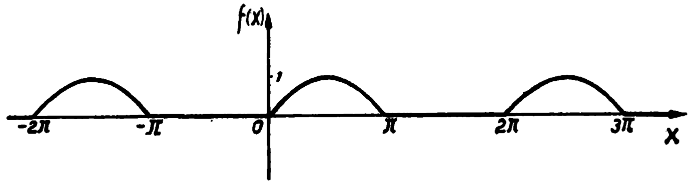


Bild 11

Lösung:

Wie Ihnen bekannt ist, entsteht die Kurve dadurch, daß eine Halbwelle der Sinuslinie „weggeschnitten“ wird (der Stromfluß in dieser Richtung wird durch Gleichrichter gesperrt).

Die Funktion lautet also

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ 0 & \text{für} \quad \pi \leqq x \leqq 2\pi. \end{cases}$$

Die Funktion ist weder gerade noch ungerade. Folglich muß die Gesamtreihe angesetzt werden.

Berechnung von a_0:

Es sind zwei Integrale für die Intervalle $0 \cdots \pi$ und $\pi \cdots 2\pi$ aufzustellen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot dx.$$

Das letzte Integral besitzt den Wert Null. Also ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}.$$

Berechnung der a_n:

Es wird

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \cos nx\,dx.$$

Auch hier ist das letzte Integral wieder gleich Null, so daß nur bleibt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx.$$

Sie verwenden wiederum das Ergebnis aus Mathematik IV, Band 2, Abschnitt 13.11 und erhalten

$$a_n = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]\Bigg|_0^\pi \qquad (n \neq 1).$$

Da $\cos(1-n)x = \cos(n-1)x$ ist, können Sie den zweiten in der Klammer stehenden Bruch umformen und für a_n schreiben

$$a_n = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]\Bigg|_0^\pi \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right].$$

Setzen Sie hier $n = 2, 3, 4, \ldots$ ein, so bekommen Sie

$$a_2 = -\frac{2}{3\pi}; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = -\frac{2}{15\pi}; \quad a_5 = 0;$$

Das Ergebnis galt nur für $n \neq 1$.

Für $n = 1$ wird aus $\qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2\pi}(0 - 0),$$

$$a_1 = 0.$$

Sie können demnach zusammenfassen

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi(n^2-1)} & \text{für geradzahliges } n, \\ 0 & \text{für ungeradzahliges } n. \end{cases}$$

Es fallen somit alle ungeraden Kosinusglieder der Reihe weg, und Sie erhalten als Zwischenergebnis, zu dem noch Sinusglieder treten können, die sich aus der Berechnung von b_n ergeben,

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2\cos 2x}{\pi \cdot 1 \cdot 3} - \frac{2\cos 4x}{\pi \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2\cos 6x}{\pi \cdot 5 \cdot 7} - \cdots$$

Berechnung der b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} 0 \cdot \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx$$

Nach der in Mathematik IV, Band 2, Abschnitt 13.11 hergeleiteten Formel für

$$\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x \qquad (m \neq n)$$

ergibt sich, wenn wir $m = 1$ setzen und $n = 2, 3, 4, \ldots$ annehmen,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n} \right] \Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right] \Bigg|_0^\pi .$$

Setzen Sie jetzt für x die Grenzen π und 0 ein, so wird

$$b_n = 0 \qquad \text{für} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Für $n = 1$ bekommen Sie

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} (x - \sin x \cos x) \Big|_0^\pi ,$$

$$b_1 = \frac{1}{2} .$$

Es ergibt sich $b_1 = \frac{1}{2}$ und damit als einziges Sinusglied der Reihe $\frac{\sin x}{2}$. Die gesuchte Reihe lautet

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots \right)}} .$$

Lehrbeispiel 22

Es ist die bei der Doppelweg- oder Zweiweggleichrichtung entstehende Kurve durch eine Fourier-Reihe auszudrücken (Bild 12). (Die Kurve können Sie sich dadurch entstanden denken, daß der in Lehrbeispiel 21 weggeschnittene Teil der Sinuslinie jetzt nach oben geklappt ist.)

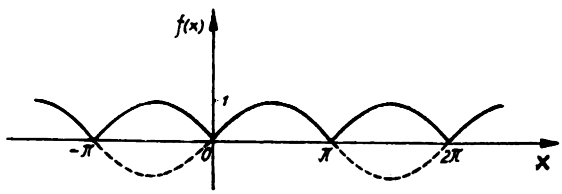


Bild 12

Lösung:

Die Funktion lautet

$$f(x) = |\sin x| \qquad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

oder

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ -\sin x & \text{für} \quad \pi \leqq x \leqq 2\pi . \end{cases}$$

Da $f(x) = |\sin x|$ eine gerade Funktion ist, müssen alle $b_n = 0$ sein.

Sie berechnen unter Anwendung von Formel (11 b)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi},$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral haben Sie im Lehrbeispiel 21 sowohl für $n = 2, 3, 4, \ldots$ als auch für $n = 1$ berechnet, so daß wir es von dort übernehmen können (wobei zu berücksichtigen ist, daß hier vor dem Integral noch zusätzlich der Faktor 2 steht):

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0; \quad a_2 = -\frac{4}{3\pi}; \quad a_4 = -\frac{4}{15\pi}; \quad a_6 = -\frac{4}{35\pi};$$

Allgemein ist

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{für geradzahliges } n, \\ 0 & \text{für ungeradzahliges } n. \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe lautet

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)}}.$$

Lehrbeispiel 23

Entwickeln Sie die Funktion der in Bild 13 dargestellten Trapezkurve in eine Fourier-Reihe! Die Trapezkurve kennzeichnet die meist anzutreffende Feldverteilung in elektrischen Maschinen (Polschuhkurve)

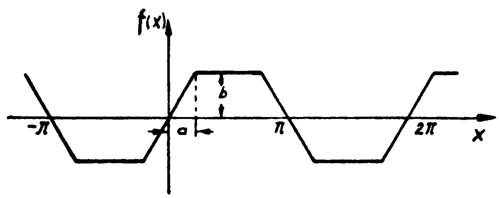


Bild 13

Lösung:

Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}x & \text{für} \quad -a \leqq x \leqq a, \\ b & \text{für} \quad a \leqq x \leqq (\pi - a), \\ -\dfrac{b}{a}(x-\pi) & \text{für} \quad (\pi - a) \leqq x \leqq (\pi + a), \\ -b & \text{für} \quad (\pi + a) \leqq x \leqq (2\pi - a) \end{cases}$$

Da die zu entwickelnde Funktion ungerade ist, gilt

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

Es ist nur noch b_n zu bestimmen (Formel (11c)):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^a \frac{b}{a} x \sin nx\,dx + \int_a^{\pi-a} b\cdot\sin nx\,dx - \int_{\pi-a}^{\pi} \frac{b}{a}(x-\pi)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{b}{a}\left(-\frac{x}{n}\cdot\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^a - \frac{b}{n}\cos nx\Big|_a^{\pi-a}\right.$$

$$\left. - \frac{b}{a}\left(-\frac{x-\pi}{n}\cdot\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{\pi-a}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{b}{n}\cos na + \frac{b}{an^2}\sin na - \frac{b}{n}\cos n(\pi-a) + \frac{b}{n}\cos na\right.$$

$$\left. + \frac{b}{n}\cos n(\pi-a) + \frac{b}{an^2}\sin n(\pi-a)\right]$$

$$= \frac{2b}{an^2\pi}\left[\sin na + \sin n(\pi-a)\right].$$

Aus $\sin na = \sin(n\pi - na)$ für ungeradzahliges n

und $\sin na = -\sin(n\pi - na)$ für geradzahliges n

ergibt sich

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für geradzahliges } n, \\ \dfrac{2b}{an^2\pi}\left[\sin na + \sin na\right] = \dfrac{4b}{an^2\pi}\sin na & \text{für ungeradzahliges } n. \end{cases}$$

Die Reihe der **Trapezkurve** lautet damit

$$f(x) = \frac{4b}{a\pi}\left(\frac{\sin a}{1^2}\sin x + \frac{\sin 3a}{3^2}\sin 3x + \frac{\sin 5a}{5^2}\sin 5x + \cdots\right).$$

Da sowohl das Dreieck als auch das Rechteck als Sonderfälle des Trapezes aufgefaßt werden können, sind in Lehrbeispiel 23 sowohl der Fall der Dreieckkurve als auch der Rechteckkurve mit enthalten.

Für die Dreieckkurve wird $a = \frac{\pi}{2}$.

Mit $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \ldots$

erhalten Sie als Fourier-Reihe der **Dreieckkurve**

$$f(x) = \frac{8b}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - + \cdots\right).$$

Das allgemeine Glied der Fourier-Reihe für die Trapezkurve lautet $\frac{4b}{\pi}\cdot\frac{\sin(2n-1)a}{a}\cdot\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. Im Falle der Rechteckkurve ist $a = 0$. Damit ergeben sich unbestimmte Ausdrücke von der Form $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$, für die eine Grenzwertbestimmung notwendig ist. Diese ergibt (Regel von de l'Hospital)

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{\cos a}{1} = 1,$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin 3a}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{3\cos 3a}{1} = 3,$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin 5a}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{5\cos 5a}{1} = 5, \quad \text{usw.}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe der **Rechteckkurve**

$$f(x)=\frac{4b}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right).$$

Lehrbeispiel 24

Für den gleichgerichteten Dreiphasenstrom ist eine Fourier-Reihe aufzustellen (Bild 14).

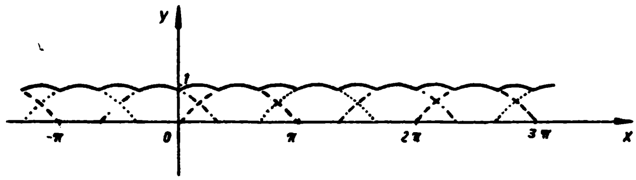


Bild 14

Lösung:

1. Phase (gestrichelte Linie in Bild 14)

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin x & \text{für}\quad 0\leqq x\leqq \pi\\ 0 & \text{für}\quad \pi\leqq x\leqq 2\pi\end{cases}$$

2. Phase (punktierte Linie in Bild 14)

$$f_2(x)=f_1\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=\begin{cases}\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) & \text{für}\quad \frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\frac{5}{3}\pi\\ 0 & \text{für}\quad 0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\\ & \text{und}\quad \frac{5}{3}\pi\leqq x\leqq 2\pi\end{cases}$$

3. Phase (strich-punktierte Linie in Bild 14)

$$f_3(x)=f_1\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)=\begin{cases}\sin\left(x-\frac{4}{3}\pi\right) & \text{für}\quad \frac{4}{3}\pi\leqq x\leqq 2\pi\\ & \text{und}\quad 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\\ 0 & \text{für}\quad \frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi\end{cases}$$

Sie berechnen zunächst die 1. Phase. Diese Aufgabe deckt sich mit der Aufgabenstellung von Lehrbeispiel 21, so daß Sie das Ergebnis unmittelbar von dort übernehmen können:

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right).$$

Hieraus erhalten Sie die Funktionen für die 2. bzw. 3. Phase, indem Sie x durch $\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$ bzw. $\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)$ ersetzen.

2. Phase:

$$f_2(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$

3. Phase:

$$f_3(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{5\cdot 7} + \cdots\right)$$

$f(x)$ erhalten Sie durch Zusammenfassen aller 3 Phasen. Es wird

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{3}{\pi} \\ & + \frac{1}{2}\left[\sin x + \sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)\right] \\ & - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 2\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{1\cdot 3} + \frac{\cos 2\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{1\cdot 3}\right. \\ & \quad + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 4\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{3\cdot 5} + \frac{\cos 4\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{3\cdot 5} + \cdots \\ & \quad \left. + \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + \frac{\cos 2n\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)}{4n^2-1} + \frac{\cos 2n\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)}{4n^2-1} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

(Hierin ist $4n^2 - 1$ aus $(2n-1)(2n+1)$ entstanden.)
Nun ist

$$\sin x + \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = 0.$$

Dieser Ausdruck ist gleichwertig dem in der Trigonometrie als Anwendung der Summen und Differenzen zweier gleicher Funktionen behandelten Ausdruck

$$\sin\varphi + \sin(\varphi + 120^\circ) + \sin(\varphi + 240^\circ) = 0.$$

Damit fällt die erste eckige Klammer der Reihe für $f(x)$ weg. In der zweiten eckigen Klammer stehen (abgesehen vom konstanten Nenner) Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned} \cos 2nx + \cos 2n\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos 2n\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = {} & \cos 2nx \\ & + \cos 2n\left[(x-\pi) + \frac{\pi}{3}\right] \\ & + \cos 2n\left[(x-\pi) - \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Glieder können Sie nach der Formel

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

zusammenfassen zu

$$2\cos 2n(x-\pi)\cos 2n\frac{\pi}{3}.$$

Sie erhalten damit für unseren gesamten Ausdruck

$$\cos 2nx + \cos 2n\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos 2n\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = \cos 2nx + 2\cos 2n(x-\pi)\cos 2n\frac{\pi}{3}.$$

Für den Faktor $2\cos 2n(x-\pi)$ können Sie auch schreiben

$$2\cos(2nx - 2n\pi) = 2\cos 2nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist also

$$\cos 2nx + \cos 2n\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos 2n\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = \cos 2nx + 2\cos 2nx \cdot \cos 2n\frac{\pi}{3}.$$

Setzen Sie auf der rechten Seite für n eine durch 3 teilbare Zahl ein ($n = 3 \cdot q$; $q = 1, 2, 3, \ldots$), so wird

$$\cos 2nx + 2\cos 2nx \cdot \cos 2n\frac{\pi}{3} = \cos 2nx + 2\cos 2nx = 3\cos 2nx \qquad (n = 3\cdot q;\ q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für jede *nicht* durch 3 teilbare Zahl nimmt der Faktor $\cos 2n\frac{\pi}{3}$ den Wert $\left(-\frac{1}{2}\right)$ an, so daß aus dem vorstehenden Ausdruck

$$\cos 2nx - \cos 2nx = 0$$

wird.

Bei der Addition bleiben also nur die Glieder stehen, bei denen n den Faktor 3 enthält.

Das Ergebnis lautet somit

$$f(x) = \frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{3\cos 6x}{5\cdot 7} + \frac{3\cos 12x}{11\cdot 13} + \frac{3\cos 18x}{17\cdot 19} + \cdots\right],$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3}{\pi}\left[1 - 2\left(\frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \frac{\cos 12x}{11\cdot 13} + \frac{\cos 18x}{17\cdot 19} + \cdots\right)\right].}}$$

Übung

10. Entwickeln Sie folgende Funktionen mit der Periode 2π in ihre Fourier-Reihen:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \textit{für} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ -\dfrac{\pi}{4} & \textit{für} \quad \pi \leqq x \leqq 2\pi, \end{cases}$

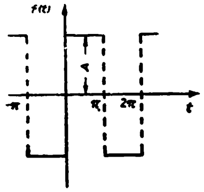
b) $f(x) = |x|$ *für* $-\pi \leqq x \leqq \pi$,

c) $f(x) = x \cdot \cos x$ *für* $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

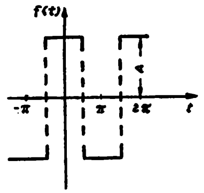
Skizzieren Sie in allen drei Fällen den Kurvenverlauf!

18.3 Zusammenstellung der wichtigsten Fourier-Reihen

Rechteckkurven[1])

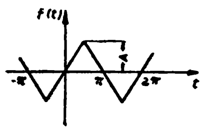


$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

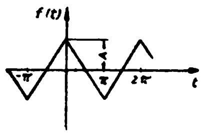


$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}$$

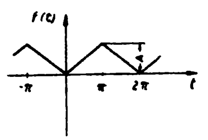
Dreieckkurven



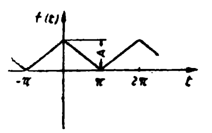
$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$



$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$



$$f(t)=\frac{A}{2}\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}\right]$$

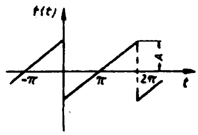


$$f(t)=\frac{A}{2}\left[1+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}\right]$$

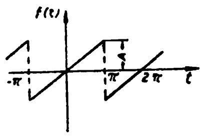
---

[1] Da Fourier-Entwicklungen vor allem bei der rechnerischen Erfassung von Schwingungsvorgängen angewendet werden, schreiben wir hier anstelle von x die unabhängige Veränderliche t (Zeit).

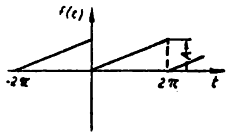
Sägezahnkurven



$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

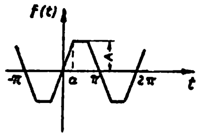


$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n}$$



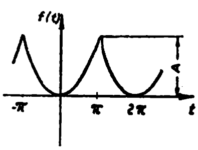
$$f(t) = \frac{A}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}\right]$$

Trapezkurve



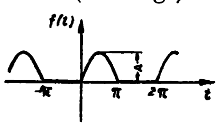
$$f(t) = \frac{4A}{a\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)a}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\,t$$

Parabelbögen



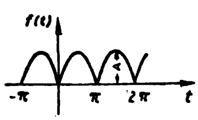
$$f(t) = \frac{A}{3} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$$

Halbwellen- (Einweg-) Gleichrichter



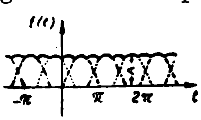
$$f(t) = \frac{A}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \sin t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$

Vollwellen- (Zweiweg-) Gleichrichter



$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$

Gleichgerichteter Dreiphasenstrom



$$f(t) = \frac{3A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 6nt}{(6n-1)(6n+1)}\right]$$

18.4 Entwicklung einer Funktion mit beliebiger Periode

Die Fourier-Entwicklung einer Funktion $f(t)$ ist auch dann möglich, wenn die gegebene Funktion nicht die Periode 2π, sondern eine beliebige Periode T hat. Es gilt also

$$f(t+T)=f(t).$$

Wenn nun $f(t)$ eine Funktion mit der Periode T ist, so muß man auch im Ansatz unserer Fourier-Reihe solche Funktionen einsetzen. Eine Funktion, die die Periode T besitzt, ist z. B.

$$\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

denn es ist

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}(t+T)\right]=\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+2\pi\right),$$

d. h.

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}(t+T)\right]=\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\cos\frac{2\pi}{T}t$$

die Periode T besitzt. Aber auch alle Oberschwingungen dieser Funktion und die analog gebildeten Sinusglieder haben die Periode T, wovon Sie sich leicht überzeugen können.

Wir können demnach für eine Funktion mit der Periode T folgende Fourier-Reihe ansetzen:

$$\begin{aligned} f(t)=a_0&+a_1\cos\frac{2\pi}{T}t+a_2\cos 2\frac{2\pi}{T}t+a_3\cos 3\frac{2\pi}{T}t+\cdots\\ &+b_1\sin\frac{2\pi}{T}t+b_2\sin 2\frac{2\pi}{T}t+b_3\sin 3\frac{2\pi}{T}t+\cdots\end{aligned}$$

Hierin können Sie noch $\frac{2\pi}{T}=\omega$ setzen.

Die Koeffizienten werden aus den der neuen Periodenlänge angepaßten Eulerschen Formeln bestimmt.

$$\boxed{\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\\ a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,3,\ldots)\end{aligned}} \qquad (12)$$

Die speziellen Bedingungen für die Werte a_0, a_n und b_n bei Funktionen, die gleiche Flächen beiderseits der Abszissenachse besitzen sowie bei geraden oder ungeraden Funktionen gelten hier gleichermäßen wie bei Funktionen mit der Periode 2π.

Wichtig ist, daß Sie über eine volle Periode von $0\cdots T$ integrieren, wobei Ihnen die Wahl der Integrationsgrenzen freigestellt ist, da Sie ja bei einer Verschiebung der Grenzen auf der einen Seite das Stück ansetzen, das Sie auf der anderen Seite abschneiden.

Lehrbeispiel 25

Die durch Bild 15 dargestellte gerade Funktion mit der Periode $T = 2$ ist in eine Fourier-Reihe zu entwickeln.

Lösung:

Die Funktion ist

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

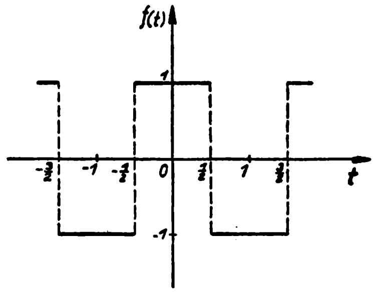


Bild 15

Die mittlere Ordinate ist Null, d. h.

$$a_0 = 0.$$

Da eine gerade Funktion vorliegt, ist

$$b_n = 0.$$

Weiterhin können Sie sich die Berechnung von a_n vereinfachen, denn es ist

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad \text{wenn} \quad f(t) = f(-t).$$

Sie berechnen

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 1\cos n\pi t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{n\pi}(\sin n\pi t)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi t)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\right],$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\,2\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0; \quad a_1 = \frac{4}{\pi}; \quad a_3 = -\frac{4}{3\pi}; \quad a_5 = \frac{4}{5\pi}.$$

Die Fourier-Reihe lautet

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos\pi t - \frac{\cos 3\pi t}{3} + \frac{\cos 5\pi t}{5} - + \cdots\right).}}$$

Ein Vergleich mit Lehrbeispiel 19 zeigt, daß das Lehrbeispiel 25 aus dem Lehrbeispiel 19 durch Verkürzen der Abszissen auf das $\frac{1}{\pi}$-fache hervorgeht (wie auch ein Vergleich der Bilder 8 und 15 lehrt). Sie erhielten deshalb auch für beide Funktionen die gleichen Fourier-Koeffizienten.

18.5 Analyse empirischer Funktionen. Rechenschema für 12 Ordinaten[1]

Der in 18.1 gezeigte Weg zur Berechnung von a_0, a_n und b_n kann in der Praxis oft nicht eingeschlagen werden, weil entweder die Integrale nicht geschlossen ausgewertet werden können, oder weil die Funktion nur empirisch durch ihre Kurve (Oszillogramm) oder durch eine Wertetabelle gegeben ist. Man ist dann gezwungen, die Integrale der Fourier-Koeffizienten numerisch auszuwerten. Die Zerlegung (Analyse) einer solchen empirischen Funktion nennt man auch *arithmetische Analyse.*

Das Verfahren der Analyse empirischer Funktionen besteht darin, daß die Funktion $f(x)$ statt in eine (unendliche) Fourier-Reihe in ein Näherungspolynom $\varphi(x)$ (endliche Reihe) entwickelt wird, das die ersten Glieder der Fourier-Reihe umfaßt. Für die praktische Rechnung ist es von Vorteil, eine gerade Anzahl (möglichst durch 4 teilbar) von Gliedern zu nehmen. Da das erste Glied der Fourier-Reihe das Absolutglied ist, muß bei einer geraden Gesamtzahl von Gliedern die Zahl der im Näherungspolynom auftretenden Sinusglieder von der Zahl der Kosinusglieder verschieden sein. Gewöhnlich wird ein Sinusglied weniger genommen. Ein Näherungspolynom mit 12 Gliedern sähe dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} f(x) \approx \varphi(x) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \\ &+ a_4 \cos 4x + a_5 \cos 5x + a_6 \cos 6x \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x \\ &+ b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x. \end{aligned} \tag{13}$$

In diesem Polynom sind 12 unbekannte Koeffizienten enthalten:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5.$$

Für deren Bestimmung braucht man ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen. Diese 12 Gleichungen erhält man z. B. bei einer durch ihre Kurve gegebenen Funktion dadurch, daß man für 12 Abszissen x innerhalb einer Periode 2π der Funktion $f(x)$ die Ordinaten y ermittelt.

Bei Beachtung nachstehender Punkte bereitet die Berechnung der 12 Koeffizienten keine besonderen Schwierigkeiten.

1. Man zerlegt die Periode 2π der gegebenen Funktion $f(x)$ je nach gewünschter Anzahl der Glieder des Polynoms in gleiche Abschnitte, bei uns also in 12 Abschnitte (man nimmt grundsätzlich eine gerade Anzahl von Abschnitten), und ermittelt die y-Werte für jeden Teilpunkt. Dies kann bei gegebener Kurve einfach durch Ausmessen der Ordinaten erfolgen.
2. Hat die gegebene Kurve an einer Stelle x_U eine Unstetigkeit, z. B. eine Sprungstelle, so wird in diese Abszisse x_U ein Teilpunkt gelegt und als Ordinate der Mittelwert der beiden Funktionswerte genommen (vgl. die Bemerkungen vor Lehrbeispiel 20).

Wird — wie eben erläutert — die Periode 2π einer Funktion $f(x)$ in 12 Abschnitte geteilt, so beträgt der Abszissenabstand jeweils 30°.

[1] Neben dem in diesem Abschnitt gezeigten Schema gibt es noch andere Schemata. Wir verwenden das von Prof. K. P. Jakowlew in seinem Buch „Mathematische Auswertung von Meßergebnissen“, Deutsche Übersetzung: Verlag Technik, Berlin 1952, benutzte Schema Aus diesem Buch stammt auch die Aufgabe des Lehrbeispiels 26.

Man erhält die Wertepaare

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_0

(Infolge der Periodizität der gegebenen Funktion muß der letzte Ordinatenwert gleich dem ersten sein.)
Die erhaltenen 12 Wertepaare $(x;\ y = f(x))$ werden jetzt der Reihe nach in Formel (13) eingesetzt (unter Vernachlässigung des Zeichens $\approx$, das durch das Gleichheitszeichen ersetzt wird). Es ergeben sich 12 Gleichungen für die unbekannten Fourier-Koeffizienten. Die trigonometrischen Funktionen werden sehr einfache Zahlenwerte, nämlich 0, ± 1, $\pm \frac{1}{2}$ und $\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Die Gleichungen lauten:

$$y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$$y_1 = a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6 + \frac{1}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + b_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{1}{2} b_5,$$

$$y_2 = a_0 + \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 - a_3 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_5 + a_6 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_5,$$

$$y_3 = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + b_1 - b_3 + b_5,$$

$$y_4 = a_0 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 + a_3 - \frac{1}{2} a_4 - \frac{1}{2} a_5 + a_6 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_5,$$

$$y_5 = a_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6 + \frac{1}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + b_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{1}{2} b_5;$$

$$y_6 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6,$$

$$y_7 = a_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6 - \frac{1}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - b_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{1}{2} b_5,$$

$$y_8 = a_0 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 + a_3 - \frac{1}{2} a_4 - \frac{1}{2} a_5 + a_6 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_5,$$

$$y_9 = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 - b_1 + b_3 - b_5,$$

$$y_{10} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 - a_3 - \frac{1}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_5 + a_6 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} b_5;$$

$$y_{11} = a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_5 - a_6 - \frac{1}{2} b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 - b_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_4 - \frac{1}{2} b_5.$$

Aus diesem Gleichungssystem können die Werte der Koeffizienten berechnet werden. Da dies mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist, wollen wir es nur für a_0 und a_1 durchführen.

Berechnung von a_0

Es werden alle 12 Gleichungen addiert. Dadurch heben sich auf der rechten Seite alle Glieder außer a_0 gegenseitig auf, und es wird

$$12 a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}.$$

Berechnung von a_1

Wir multiplizieren jede Gleichung mit dem jeweiligen Koeffizienten von a_1 und addieren dann alle 12 Gleichungen. Das ergibt

$$6a_1 = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_5 - y_6 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_7 - \frac{1}{2} y_8 + \frac{1}{2} y_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} y_{11}.$$

In gleicher Weise wie bei der Berechnung von a_1 kann für die übrigen Koeffizienten verfahren werden.

Wir wollen hier auf eine Aufstellung der weiteren Gleichungen verzichten.

Da es nun sehr zeitraubend wäre, aus den Gleichungen für $y_0, y_1, \ldots, y_{11}$ die Koeffizienten des Polynoms (13) zu berechnen, wird ein Kunstgriff angewandt. Bei allen Gleichungen treten nämlich immer wieder die gleichen Summen oder Differenzen ganz bestimmter y-Werte auf.

So z. B. in den Ausdrücken für a_0 und a_1:

$$12a_0 = (y_0 + y_6) + (y_1 + y_{11}) + (y_2 + y_{10}) + (y_3 + y_9) + (y_4 + y_8) + (y_5 + y_7),$$

$$6a_1 = (y_0 - y_6) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 + y_{11}) + \frac{1}{2}(y_2 + y_{10}) - \frac{1}{2}(y_4 + y_8) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_5 + y_7)$$

usw.

Für die immer wieder vorkommenden Summen und Differenzen führt man neue Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
y_0 + y_6 &= u_0 & \qquad y_0 - y_6 &= v_0\\
y_1 + y_{11} &= u_1 & y_1 - y_{11} &= v_1\\
y_2 + y_{10} &= u_2 & y_2 - y_{10} &= v_2\\
y_3 + y_9 &= u_3 & y_3 - y_9 &= v_3\\
y_4 + y_8 &= u_4 & y_4 - y_8 &= v_4\\
y_5 + y_7 &= u_5 & y_5 - y_7 &= v_5
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen wird z. B.

$$12a_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = (u_0 + u_3) + (u_1 + u_5) + (u_2 + u_4),$$

$$\begin{aligned}
6a_1 &= v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2 - \frac{1}{2} u_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} u_5\\
&= v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - u_5) + \frac{1}{2}(u_2 - u_4)
\end{aligned}$$

usw.

Für die eingeklammerten Summen bzw. Differenzen werden nochmals neue Bezeichnungen eingeführt, und zwar

$$\begin{aligned}
u_0 + u_3 &= r_0 & \qquad u_0 - u_3 &= s_0\\
u_1 + u_5 &= r_1 & u_1 - u_5 &= s_1\\
u_2 + u_4 &= r_2 & u_2 - u_4 &= s_2\\
v_1 + v_5 &= p_1 & v_1 - v_5 &= q_1\\
v_2 + v_4 &= p_2 & v_2 - v_4 &= q_2
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen werden die Ausdrücke für $a_0, a_1, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5$ weiter vereinfacht. Zum Beispiel wird

$$12a_0 = r_0 + r_1 + r_2 = r_0 + (r_1 + r_2),$$

$$6a_1 = v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2$$

usw.

In den jetzt entstandenen Ausdrücken treten wiederum einige Summen und Differenzen mehrfach auf, für die nochmals neue Bezeichnungen gewählt werden.

$$r_1 + r_2 = l \qquad q_1 + q_2 = d$$

$$r_1 - r_2 = m \qquad q_1 - q_2 = h$$

Die endgültigen Gleichungen für $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5$ lauten dann

$$\boxed{\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{12}(r_0 + l)\\
a_1 &= \frac{1}{6}\left(v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2\right)\\
a_2 &= \frac{1}{6}\left(s_0 + \frac{1}{2} m\right)\\
a_3 &= \frac{1}{6}(v_0 - s_2)\\
a_4 &= \frac{1}{6}\left(r_0 - \frac{1}{2} l\right)\\
a_5 &= \frac{1}{6}\left(v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2\right)\\
a_6 &= \frac{1}{12}(s_0 - m)\\
b_1 &= \frac{1}{6}\left(v_3 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} p_2\right)\\
b_2 &= \frac{\sqrt{3}}{12} d\\
b_3 &= \frac{1}{6}(p_1 - v_3)\\
b_4 &= \frac{\sqrt{3}}{12} h\\
b_5 &= \frac{1}{6}\left(v_3 + \frac{1}{2} p_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} p_2\right)
\end{aligned}} \tag{14}$$

Für das praktische Rechnen benutzt man ein Rechenschema, dessen Aufbau sich aus dem eben Dargelegten ergibt.

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_6	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7
Summen (u)	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Differenzen (v)	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

	$u_0 \; u_1 \; u_2$	$v_1 \; v_2$
	$u_3 \; u_5 \; u_4$	$v_5 \; v_4$
Summen	$\mathbf{r_0} \; r_1 \; r_2$	$\mathbf{p_1} \; \mathbf{p_2}$
Differenzen	$\mathbf{s_0} \; \mathbf{s_1} \; \mathbf{s_2}$	$q_1 \; q_2$
	$r_1 \; q_1$	
	$r_2 \; q_2$	
Summen	$\mathbf{l} \; \mathbf{d}$	
Differenzen	$\mathbf{m} \; \mathbf{h}$	

Zur Bestimmung der Koeffizienten mittels der Gleichungen (14) werden nur die stark hervorgehobenen Werte des Schemas benötigt. Achten Sie immer darauf, daß die richtigen Indizes untereinander stehen!

Bei der großen Anzahl von Rechenoperationen können natürlich leicht Rechen- oder Schreibfehler auftreten. Es ist deshalb eine Kontrolle der berechneten Koeffizienten erforderlich, die mit zwei Kontrollgleichungen ausgeführt wird. Die erste Kontrollgleichung ist die Grundgleichung für y_0, die zweite erhält man durch Subtraktion der Grundgleichung für y_{11} von der für y_1:

$$y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$$y_1 - y_{11} = v_1 = b_1 + b_5 + 2b_3 + \sqrt{3}\,(b_2 + b_4).$$

Mit diesen beiden Gleichungen sind in zwei einfach zu berechnenden Ausdrücken alle 12 Koeffizienten erfaßt.

Lehrbeispiel 26

Berechnen Sie die in Bild 16 dargestellte periodische Funktion mittels der aus dem Bild entnommenen y-Werte:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	9,3	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0	15,3	4,0	−8,0	−13,2	−14,2	−6,0

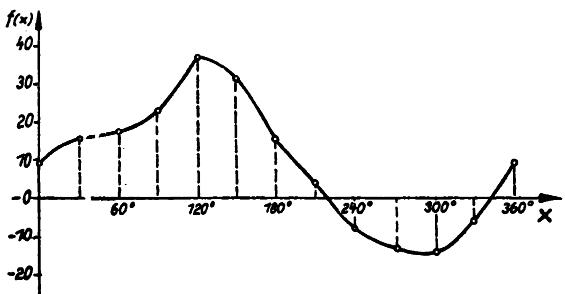


Bild 16

Lösung:

Das Rechenschema für 12 Ordinaten liefert

	9,3	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0
	15,3	−6,0	−14,2	−13,2	−8,0	4,0
(u)	24,6	9,0	3,2	9,8	29,0	35,0
(v)	−6,0	21,0	31,6	36,2	45,0	27,0

	24,6	9,0	3,2		21,0	31,6	
	9,8	35,0	29,0		27,0	45,0	
(r)	34,4	44,0	32,2		48,0	76,6	(p)
(s)	14,8	−26,0	−25,8		−6,0	−13,4	(q)

	44,0	−6,0	
	32,2	−13,4	
(l)	76,2	−19,4	(d)
(m)	11,8	7,4	(h)

Durch Einsetzen der Größen in die Gleichungen (14) erhalten Sie die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{12}(34{,}4 + 76{,}2) = 9{,}22,$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(-6{,}0 - 26{,}0\frac{\sqrt{3}}{2} - 12{,}9\right) = -6{,}90,$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(14{,}8 + 5{,}9) = 3{,}45,$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(-6{,}0 + 25{,}8) = 3{,}30,$$

$$a_4 = \frac{1}{6}(34{,}4 - 38{,}1) = -0{,}62,$$

$$a_5 = \frac{1}{6}\left(-6{,}0 + 26{,}0\frac{\sqrt{3}}{2} - 12{,}9\right) = 0{,}60,$$

$$a_6 = \frac{1}{12}(14{,}8 - 11{,}8) = 0{,}25,$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(36{,}2 + 24{,}0 + 66{,}3) = 21{,}08,$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}(-19{,}4) = -2{,}80,$$

$$b_3 = \frac{1}{6}(48{,}0 - 36{,}2) = 1{,}97,$$

$$b_4 = \frac{\sqrt{3}}{12}\,7{,}4 = 1{,}07,$$

$$b_5 = \frac{1}{6}(36{,}2 + 24{,}0 - 66{,}3) = -1{,}02.$$

Nun prüfen Sie die erhaltenen Werte durch Einsetzen in die Kontrollgleichungen:

$$y_0 = 9{,}22 - 6{,}90 + 3{,}45 + 3{,}30 - 0{,}62 + 0{,}60 + 0{,}25 = 9{,}30,$$

$$y_1 - y_{11} = 21{,}08 - 1{,}02 + 2 \cdot 1{,}97 + \sqrt{3}(-2{,}80 + 1{,}07) = 21{,}01.$$

Die Koeffizienten sind fehlerfrei, also können Sie als Ergebnis schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) \approx \varphi(x) = 9{,}22 &- 6{,}90\cos x + 3{,}45\cos 2x + 3{,}30\cos 3x \\ &- 0{,}62\cos 4x + 0{,}60\cos 5x + 0{,}25\cos 6x \\ &+ 21{,}09\sin x - 2{,}80\sin 2x + 1{,}97\sin 3x \\ &+ 1{,}07\sin 4x - 1{,}02\sin 5x. \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. In der Praxis interessieren oft auch die harmonischen Komponenten, die für dieses Beispiel noch berechnet werden sollen. Setzen Sie die entsprechenden Zahlenwerte in die Formeln (10a) und (10b) ein, so erhalten Sie

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 22{,}19, & \tan\varphi_1 &= -0{,}3272, & \varphi_1 &= 161^\circ 53', \\
A_2 &= 4{,}44, & \tan\varphi_2 &= -1{,}2321, & \varphi_2 &= 129^\circ\ 5', \\
A_3 &= 3{,}84, & \tan\varphi_3 &= 1{,}6751, & \varphi_3 &= 59^\circ 10', \\
A_4 &= 1{,}24, & \tan\varphi_4 &= -0{,}5794, & \varphi_4 &= 149^\circ 55', \\
A_5 &= 1{,}18, & \tan\varphi_5 &= -0{,}5882, & \varphi_5 &= 149^\circ 32'
\end{aligned}
$$

und damit als Näherung für die periodische Funktion

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx 9{,}22 &+ 22{,}19 \sin(x + 161^\circ 53') + 4{,}44 \sin(2x + 129^\circ\ 5') \\
&+ 3{,}86 \sin(3x + 59^\circ 10') + 1{,}23 \sin(4x + 149^\circ 55') \\
&+ 1{,}18 \sin(5x + 149^\circ 32') + 0{,}25 \sin(6x + 90^\circ).
\end{aligned}
$$

Übung

11. Stellen Sie das Näherungspolynom für folgende tabellarisch gegebene periodische Funktion auf:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	38,2	12,0	4,2	14,4	4,1	—18,6	—23,3	—27,1	—24,2	8,1	32,3	38,4

Zusammenfassung

Eine Funktion mit der Periode 2π

$$f(x) = f(x + k \cdot 2\pi)$$

kann in eine Fourier-Reihe von der Form

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)
\end{aligned}
$$

entwickelt werden.

Die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n werden nach den Eulerschen Formeln berechnet:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a_0 = \text{mittlere Ordinate})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x$$

Weist die Funktion Symmetrieeigenschaften auf, so vereinfacht sich die Berechnung.
Bei einer Funktion, deren Kurve beiderseits der Abszissenachse gleiche Flächen einschließt, ist

$$a_0 = 0.$$

Bei einer geraden Funktion ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad \text{für } f(x) = f(-x),$$

$$b_n = 0.$$

Für eine ungerade Funktion ist

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0, \qquad \text{für } f(x) = -f(-x),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Bei der Analyse empirischer Funktionen liegt die Aufgabe vor, für eine tabellarisch oder in Kurvenform gegebene periodische Funktion die Gleichung aufzustellen. Die gesuchte Gleichung ist natürlich nur eine Näherung für die Funktion, ein Näherungspolynom, dessen Glieder trigonometrische Funktionen sind. Hauptaufgabe ist dabei die Berechnung der Koeffizienten a_0, a_n und b_n, die einen großen Rechenaufwand erfordert und daher schematisiert (Rechenschema) wird. Um Fehler zu erkennen, werden Kontrollen (Kontrollgleichungen) einbezogen.

VII. Differentialgleichungen

19 Allgemeines über Differentialgleichungen

19.1 Definition der Differentialgleichungen

In den letzten Kapiteln von Band 1 sind Sie schon mehrmals auf das Wort Differentialgleichung gestoßen. Im folgenden soll das wichtige Gebiet der Differentialgleichungen näher behandelt werden. Sie werden im Verlauf der Ausführungen erkennen, daß die Differentialgleichungen eine Schlüsselstellung bei der Lösung vieler technischer Aufgaben einnehmen.

In der Elementarmathematik nimmt die Algebra eine analoge Stellung ein. Das Lösen von Bestimmungsgleichungen, also die Ermittlung unbekannter Werte, gibt erstmalig die Möglichkeit, Anwendungsaufgaben im gesteckten Rahmen erschöpfend zu lösen. Eine Differentialgleichung stellt auch eine Bestimmungsgleichung dar, für die nun aber eine Funktion als Lösung gesucht wird, die die Gleichung erfüllt.

Als Beispiel sei die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x} y = x$$

herangezogen, in der y die gesuchte Funktion und y' ihre Ableitung nach x darstellen. Im Lehrbeispiel 40 finden Sie als Lösungsfunktion

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

C kennzeichnet hierin eine beliebige Konstante (Integrationskonstante). Ist die Lösung richtig, so muß diese Funktion die Differentialgleichung erfüllen. Wir machen die Probe:

Es ist

$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2}.$$

Werden y und y' in die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x} y &= \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}\right) \\ &= \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2} \\ &= x, \end{aligned}$$

wie es auch von der rechten Seite gefordert wird. Die Differentialgleichung wird also von der angegebenen Lösungsfunktion erfüllt.

Eine andere Differentialgleichung ist beispielsweise

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Sie erkennen darin sofort die Differentialgleichung des freien Falls, wenn s als Weg, t als Zeit und damit $\frac{d^2 s}{dt^2}$ als Beschleunigung sowie g als Erdbeschleunigung (9,81 m/sec²) gedeutet werden.

Das Galileische Fallgesetz $s = \frac{1}{2} g t^2$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung. Führen Sie selbst die Probe durch, indem Sie zunächst die zweite Ableitung von s nach t bilden und dann deren Wert in die Differentialgleichung einsetzen.

In Band 1, Abschnitt 7.53, trat bei der Behandlung des Trägers gleicher Festigkeit die Differentialgleichung

$$\sigma \, dF = F \gamma \, dx$$

auf, die sich auch auf die Form

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\gamma}{\sigma} F$$

bringen läßt.

Hier liegt also eine Beziehung vor, in der die gesuchte Funktion $F = F(x)$ und ihr Differentialquotient $\frac{dF}{dx}$ erscheinen. Die damals gefundene Lösung

$$F = \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

soll zur Probe in diese Differentialgleichung eingesetzt werden. Sie bilden dazu zunächst den Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dx} = \frac{P_0 \gamma}{\sigma^2} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$

Ersetzen Sie in der Differentialgleichung $\frac{dF}{dx}$ und F durch die vorstehenden Ausdrücke, so erhalten Sie

$$\frac{P_0 \gamma}{\sigma^2} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} = \frac{\gamma}{\sigma} \frac{P_0}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$

Sie sehen, daß die angegebene Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

In Verallgemeinerung der soeben aufgestellten Betrachtungen gilt folgende Definition des Begriffes Differentialgleichung:

> **Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen, einer noch unbekannten Funktion dieser Veränderlichen und den Ableitungen dieser Funktion.**
> **Lösung ist jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.**

Die Differentialgleichung muß dabei mindestens einen Differentialquotienten enthalten, während x und y selbst nicht aufzutreten brauchen. So ist im vorletzten Beispiel nur die 2. Ableitung zu finden, während im letzten Beispiel die unabhängige Veränderliche x fehlt.

Als weitere Beispiele seien die Differentialgleichungen

$$\text{a)} \qquad y' + \frac{x}{y} = 0,$$

$$\text{b)} \qquad y' - ay = 0,$$

$$\text{c)} \qquad ay'' - by' + cy = 0,$$

$$\text{d)} \qquad y'^2 + by^2 = 1,$$

$$\text{e)} \qquad ay'' - by' + cy = \sin x$$

angeführt.

19.2 Einteilung der Differentialgleichungen

Für die Unterteilung der Differentialgleichungen gelten verschiedene Gesichtspunkte:

In einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** treten nur gewöhnliche Ableitungen auf. Die Lösungsfunktion hängt in diesem Fall nur von einer unabhängigen Veränderlichen ab. Alle bisher angeführten Beispiele gehören in diese Gruppe.

Treten hingegen partielle Ableitungen auf, und weist demnach die Lösungsfunktion mehrere unabhängige Veränderliche auf, so spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung.**

Ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung ist

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Sie wird von der Funktion $z = f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ erfüllt. Prüfen Sie die Richtigkeit dieser Lösung durch Bildung der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ und Einsetzen in die Differentialgleichung nach!

Im folgenden sollen nur gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt werden.

Weiter werden die Differentialgleichungen nach der Ordnung der höchsten in ihr auftretenden Ableitung eingeteilt. Da in den Beispielen a), b) und d) nur die 1. Ableitung von y vorkommt, sprechen wir hier von **Differentialgleichungen I. Ordnung.** Dagegen stellen die Beispiele c) und e) **Differentialgleichungen II. Ordnung** dar, da in ihnen Ableitungen 2. Ordnung auftreten.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, auf das aber hier nicht weiter eingegangen werden soll, stellt der *Grad* einer Differentialgleichung dar. Unter bestimmten Voraussetzungen bestimmt der größte Exponent von y und seinen auftretenden Ableitungen den Grad der betreffenden Differentialgleichung. Im Beispiel d) finden Sie eine Differentialgleichung I. Ordnung 2. Grades, während Beispiel b), c) und e) Differentialgleichungen 1. Grades oder lineare Differentialgleichungen darstellen.

19.3 Geometrische Deutung einer Differentialgleichung I. Ordnung

Eine Differentialgleichung I. Ordnung sei in der Form

$$y' = f(x, y)$$

gegeben. Dann ergibt sich für jedes Wertepaar (x, y) ein bestimmter Wert y'.

Beispielsweise wird durch die Differentialgleichung $y' = -\frac{y}{x}$ dem Wertepaar (1; 1) der Wert $y' = -1$ zugeordnet.
Bei der Darstellung einer Funktion in der xy-Ebene gibt $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ den Anstieg der Kurventangente an. Die Differentialgleichung I. Ordnung läßt sich also geometrisch so deuten, daß jedem Punkt $P(x; y)$ der xy-Ebene eine bestimmte Richtung zugeordnet wird.

Mit anderen Worten:

Eine Differentialgleichung I. Ordnung bestimmt ein Richtungsfeld.

In Bild 17 ist für einige Punkte des I. Quadranten das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{y}{x}$ dargestellt.
Lösungen der Differentialgleichung sind nun nach der Definition die Funktionen $y = y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllen. Das bedeutet geometrisch, daß $y = y(x)$ die Gesamtheit der Kurven darstellen muß, die das Richtungsfeld erfüllen, die also in den einzelnen Punkten der Ebene die dort vorgeschriebene Richtung haben. In Bild 18 sind einige Lösungskurven gemäß dem in Bild 17 dargestellten Richtungsfeld eingezeichnet.

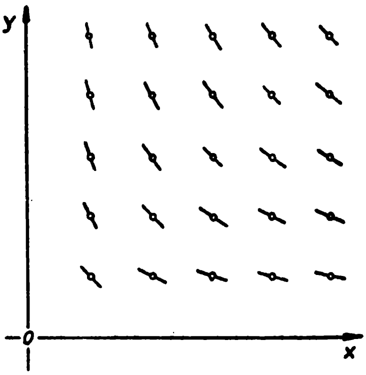


Bild 17

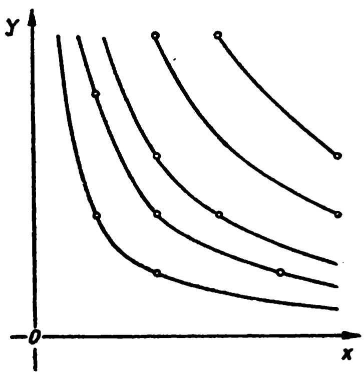


Bild 18

Wie Sie später sehen werden, läßt sich die Lösung einer Differentialgleichung I. Ordnung auf eine einfache, unbestimmte Integration zurückführen. Dann aber muß in der Lösung $y = y(x)$ immer noch eine willkürliche Integrationskonstante C auftreten. Die **allgemeine Lösung der Differentialgleichung** heißt damit $y = y(x, C)$. Ihr entsprechen unendlich viele Lösungskurven, von denen in Bild 18 einige dargestellt sind. Für jedes fest gewählte C ergibt sich eine bestimmte Kurve, die man **partikuläre Lösung** nennt.
Die Lösung einer Differentialgleichung wird auch **Integral der Differentialgleichung** (allgemeines Integral, partikuläres Integral) genannt.

19.4 Anfangsbedingung

In den Anwendungsbeispielen wird meist nur eine ganz bestimmte partikuläre Lösung interessieren. Dann muß also aus der Schar der allgemeinen Lösungskurven eine spezielle Kurve herausgegriffen und der dazugehörige Wert von C

bestimmt werden. Dazu genügt bei den Differentialgleichungen I. Ordnung die einfache Angabe, daß zu einem bestimmten $x = x_0$ die Ordinate y den Wert y_0 annehmen soll, d. h. also, daß diejenige Kurve auszuwählen ist, die durch einen gegebenen Punkt $(x_0; y_0)$ läuft. Dies nennt man eine **Anfangsbedingung.** Um die Konstante C zu ermitteln, brauchen Sie nur in der allgemeinen Lösung für x und y die gegebenen Werte x_0 und y_0 einsetzen und erhalten so eine Bestimmungsgleichung für C.

Lehrbeispiel 27

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 4x$ lautet $y = 2x^2 + C$. Welche Form hat die partikuläre Lösung mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 3$?

Lösung:

Da in der partikulären Lösung y den Wert $y_0 = 3$ annehmen soll, wenn für x der Wert $x_0 = 1$ eingesetzt wird, muß

$$3 = 2 \cdot 1 + C,$$

also

$$C = 1$$

sein.

Damit lautet die geforderte partikuläre Lösung

$$\underline{\underline{y = 2x^2 + 1}}.$$

Prüfen Sie die Richtigkeit der partikulären Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung nach!

Zusammenfassung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung stellt eine Beziehung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x, einer unbekannten Funktion $y(x)$ und deren Ableitungen dar. Lösung ist jede Funktion $y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllt.

Die Ordnung des höchsten auftretenden Differentialquotienten bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung I. Ordnung legt für jeden Punkt der xy-Ebene eine bestimmte Richtung fest. Die allgemeine Lösung $y = y(x, C)$ stellt die Gesamtheit der Kurven dar, die dieses Richtungsfeld erfüllen. Eine vorgegebene Anfangsbedingung greift aus dieser Gesamtheit eine einzelne Kurve heraus, indem durch sie für die allgemeine Integrationskonstante C ein ganz bestimmter Wert festgelegt wird. Die diese Kurve kennzeichnende Funktion wird als partikuläre Lösung bezeichnet.

20 Differentialgleichungen I. Ordnung

20.1 Lösung durch Trennen der Veränderlichen

Die Differentialgleichungen vom Typ

$$\boldsymbol{y' = f(x) \cdot g(y)}$$

lassen sich einfach durch Trennen der Veränderlichen lösen.

Dazu ist y' durch $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zu ersetzen und die nur y als Veränderliche enthaltende Funktion $g(y)$ und das Differential $\mathrm{d}y$ auf die eine Seite, die nur x als Veränderliche enthaltende Funktion $f(x)$ und $\mathrm{d}x$ auf die andere Seite der Gleichung zu bringen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jetzt kann man die linke Seite nach y und die rechte nach x integrieren:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Lösung besitzt die Form

$$G(y) = F(x) + C,$$

wobei $G(y)$ und $F(x)$ die Stammfunktionen von $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ und $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ sind.

Eigentlich tritt auf jeder Seite eine Integrationskonstante auf. Es ist aber üblich, beide Konstanten auf einer Seite zusammenzufassen.

Häufig kann man nach y auflösen, so daß sich dann die allgemeine Lösung in der Form $y = y(x, C)$ ergibt.

Lehrbeispiel 28

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{3}x^2\,!$$

Lösung:

In diesem Beispiel ist $g(y) = 1$ und $f(x) = \frac{1}{3}x^2$. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}x^2,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{9}x^3 + C.}}$$

Das Richtungsfeld weist in diesem Fall eine besonders einfache Form auf. Da y nur von x abhängig ist, erhalten alle Punkte der Ebene, die auf einer Parallelen zur y-Achse liegen, dieselbe Richtung zugeordnet. Wie aus Bild 19 zu ersehen ist, sind die Lösungskurven parallel zueinander verschoben. Diese einfachste Art der Differentialgleichungen haben Sie bereits als unbestimmtes Integral in Band 1 kennengelernt.

Lehrbeispiel 29

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}\,!$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = C}} \qquad \text{(Es wurde } C = 2C_1 \text{ gesetzt)}$$

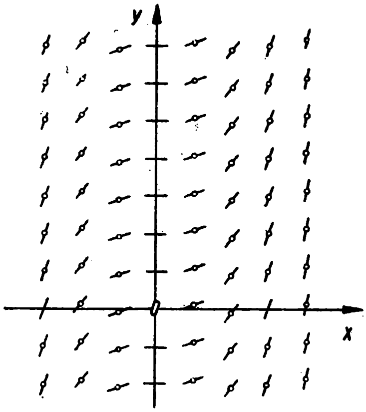


Bild 19

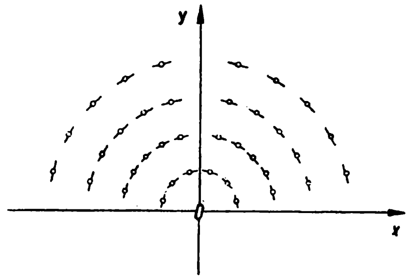


Bild 20

Die Lösungskurven sind nichts anderes als die Schar der konzentrischen Kreise mit dem Radius $\sqrt{C}$ um den Mittelpunkt (0; 0).
Im Bild 20 ist das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung dargestellt. Da der zum Punkt $P_1(x_1; y_1)$ gehörige Ursprungsstrahl den Richtungsfaktor $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ hat, während die demselben Punkt durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtung $m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$ ist, stehen Ursprungsstrahl und zugeordnete Richtung wegen $m_1 m_2 = -1$ aufeinander senkrecht. Das ist aber die Ihnen bekannte Eigenschaft, daß beim Kreis Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen.

Lehrbeispiel 30

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = y \sin x!$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln y = -\cos x + C_1$$

$$y = \mathrm{e}^{-\cos x + C_1}$$

$$y = \mathrm{e}^{-\cos x}\,\mathrm{e}^{C_1}$$

Für den konstanten Faktor e^{C_1} kann man einfach C schreiben, kommt es doch nur darauf an, einen willkürlichen Faktor zu kennzeichnen. Die Lösung lautet dann

$$\underline{\underline{y = C\,e^{-\cos x}}}.$$

Tritt, wie im Lehrbeispiel 30, nach der Integration y in der Form $\ln y$ auf, so wird die Integrationskonstante zweckmäßig gleich in der Form $\ln C$ angesetzt. Der Lösungsgang der vorstehenden Differentialgleichung vereinfacht sich dann:

$$\ln y = -\cos x + \ln C,$$

$$\ln y - \ln C = -\cos x,$$

$$\ln \frac{y}{C} = -\cos x,$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\cos x},$$

$$\underline{\underline{y = C\,e^{-\cos x}}}.$$

Lehrbeispiel 31

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = a\,y$!

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = a\,y$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dy}{y} = a\,dx$$

$$\ln y = a x + \ln C$$

$$\underline{\underline{y = C\,e^{a x}}}.$$

Die eben behandelte Differentialgleichung ist von außerordentlicher Bedeutung. Wenn Sie bedenken, daß der Differentialquotient y' ein Maß für das Anwachsen der Größe y darstellt, können Sie die vorliegende Differentialgleichung in der Form deuten: Der Zuwachs ist dem augenblicklichen Wert von y proportional.

Diese Differentialgleichung liegt den verschiedensten physikalischen, chemischen und technischen Vorgängen zugrunde. Einen Fall haben Sie bereits bei der Behandlung des Trägers gleicher Festigkeit in Band 1, Abschnitt 7.53 kennengelernt.

Im Fall $a > 0$ spricht man von der Differentialgleichung des organischen Wachstums, während man bei $a < 0$ von der des organischen Abklingens spricht.

Lehrbeispiel 32

In vielen Anwendungen liegt eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dt} + a\,y = b$$

oder

$$\frac{dy}{dt} = b - a\,y$$

vor ($a > 0$), *wobei t die Zeit darstellt. Lösen Sie diese Differentialgleichung!*

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{b-ay}=\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{a}\ln(b-ay)=t+C_1$$

$$\ln(b-ay)=-at-aC_1$$

$$b-ay=C\,\mathrm{e}^{-at} \qquad (\text{mit } C=\mathrm{e}^{-aC_1})$$

$$y=\frac{1}{a}(b-C\,\mathrm{e}^{-at})$$

Wir wollen hier noch die partikuläre Lösung aufstellen, die durch die Anfangsbedingung $t=0$, $y=0$ gekennzeichnet wird. Wir suchen also die Lösungskurve, die durch den Ursprung des ty-Systems läuft. Setzen Sie zur Bestimmung von C wieder die gegebenen Werte in die gefundene allgemeine Lösung ein. Es ergibt sich

$$0=\frac{1}{a}(b-C\,\mathrm{e}^0) \quad \text{oder} \quad C=b$$

und damit

$$\underline{\underline{y=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})}}\,.$$

Diese partikuläre Lösung soll näher untersucht werden. Durchläuft t das Intervall $0\leqq t\leqq\infty$, so fällt e^{-at} von 1 bis 0, während $(1-\mathrm{e}^{-at})$ von 0 bis 1 steigt und y sich asymptotisch dem Wert $\frac{b}{a}$ nähert. Wird dieser „Endwert" $\frac{b}{a}$ mit y_E bezeichnet, so läßt sich die Lösung in der Form

$$y=y_E(1-\mathrm{e}^{-at})$$

schreiben.

Von Bedeutung ist hier der Wert $t=\frac{1}{a}=\tau$, die sogenannte Zeitkonstante. Für dieses t wird nämlich

$$y(\tau)=y_E\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$$\approx y_E\left(1-\frac{1}{2{,}718}\right)$$

$$\approx 0{,}632\,y_E.$$

Nach Verstreichen dieser Zeit τ hat also y rund 63 % des Endwertes erreicht. Wir bilden noch den Differentialquotienten der Lösungsfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y'=y_E a\,\mathrm{e}^{-at}$$

$$=\frac{y_E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Für $t=0$ ist

$$y'(0)=\frac{y_E}{\tau}=\tan\alpha.$$

Mit Hilfe der analytischen Geometrie können Sie nachweisen, daß die Länge der Projektion der Tangente zwischen Berührungspunkt und Parallele zur t-Achse im Abstand y_E den konstanten Wert τ hat (Bild 21). Diese Eigenschaft der Kurve kann vorteilhaft bei ihrer Konstruktion verwendet werden.

Mit Hilfe der Zeitkonstanten τ können wir noch die Halbwertzeit t_H ermitteln, die verstreichen muß, damit $y = \frac{1}{2}\, y_E$ ist.

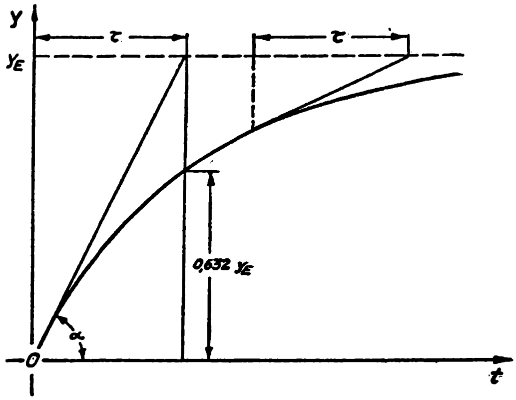


Bild 21

Aus der Lösung finden Sie

$$\frac{1}{2}\, y_E = y_E \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_H}{\tau}}\right),$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_H}{\tau}},$$

$$\mathrm{e}^{+\frac{t_H}{\tau}} = 2,$$

$$t_H = \tau \ln 2 \approx \underline{\underline{0{,}7\,\tau}}.$$

Den soeben durchgesprochenen Typ einer Differentialgleichung sollen Sie noch in einem Anwendungsbeispiel kennenlernen.

Lehrbeispiel 33

Einem Heizkörper werde in der Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge zugeführt. Wie erwärmt sich der Heizkörper unter Berücksichtigung des Wärmeüberganges in den Außenraum?

Es sei T = *Heizkörpertemperatur,*
T_1 = *Außentemperatur,*
$T - T_1$ = *Übertemperatur,*
$\mathrm{d}T$ = *Temperaturänderung des Heizkörpers in der Zeit* $\mathrm{d}t$,
m = *Masse des Heizkörpers,*
c = *spezifische Wärme des Heizkörpers,*
α = *Wärmeübergangszahl von der Körperoberfläche zur Luft des Außenraumes (Wärmemenge pro Oberflächeneinheit,* 1° *Temperaturunterschied und Zeiteinheit),*
Q = *zugeführte Wärmemenge pro Zeiteinheit,*
F = *Oberfläche des Heizkörpers.*

Lösung:

Während der Zeit $\mathrm{d}t$ wird

1. dem Heizkörper die Wärmemenge $Q\,\mathrm{d}t$ zugeführt,
2. im Heizkörper die Wärmemenge $mc\,\mathrm{d}T$ gespeichert und zur Erwärmung des Körpers benutzt und
3. an den Außenraum die Wärmemenge $F(T - T_1)\,\alpha\,\mathrm{d}t$ abgeführt.

Auf Grund des Erhaltungssatzes muß dann die Summe der Wärmemengen 2 und 3 gleich der zugeführten Wärmemenge 1 sein:

$$mc\,\mathrm{d}T + F(T - T_1)\,\alpha\,\mathrm{d}t = Q\,\mathrm{d}t$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{mc} - \frac{F\alpha}{mc}(T - T_1).$$

Zur Abkürzung führen wir noch $a = \frac{F\alpha}{mc}$ und $b = \frac{Q}{mc}$ ein:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = b - a(T - T_1).$$

Nach Trennen der Veränderlichen erhält man

$$\frac{\mathrm{d}T}{b - a(T - T_1)} = \mathrm{d}t.$$

Die Integration liefert

$$-\frac{1}{a}\ln[b - a(T - T_1)] = t + C_1,$$

$$\ln[b - a(T - T_1)] = -at - aC_1,$$

$$b - a(T - T_1) = C_2 \mathrm{e}^{-at} \qquad (\text{mit } C_2 = \mathrm{e}^{-aC_1}),$$

$$T - T_1 = \frac{b}{a} - C\mathrm{e}^{-at}, \quad \text{wobei } C = \frac{C_2}{a} \text{ ist.}$$

Aus der Anfangsbedingung $t = 0$, $T = T_1$ (Anfangstemperatur des Heizkörpers = Außentemperatur) ergibt sich $C = \frac{b}{a}$ und damit als partikuläre Lösung

$$T - T_1 = \frac{b}{a}(1 - \mathrm{e}^{-at})$$

$$= \frac{Q}{F\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{F\alpha}{mc}t}\right)$$

oder, mit Einführung der Temperaturdifferenz im Endzustand ($t \to \infty$) $T_E = \frac{Q}{F\alpha}$,

$$\underline{\underline{T = T_1 + T_E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{F\alpha}{mc}t}\right)}}.$$

Weisen Sie nach, daß der Exponent von e dimensionslos ist, d. h., daß $\frac{mc}{F\alpha}$ die Dimension einer Zeit hat!

Lehrbeispiel 34

Es soll untersucht werden, wie die Bewegung eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfenen Körpers unter Berücksichtigung der Luftreibung verläuft.

Lösung:

Experimentell wurde ermittelt, daß die Luftreibung bei langsamen Bewegungen der Geschwindigkeit und bei mittleren Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor k ist u. a. von der Form und Querschnittsfläche des Körpers, seiner Oberflächenbeschaffenheit und von der Wichte der Luft abhängig.
Nach dem grundlegenden Gesetz von Newton ist die Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte gleich dem Produkt aus seiner Masse und seiner Beschleunigung. Welche Kräfte wirken nun auf den Körper?
Da ist einmal die entgegen der Bewegung wirkende Luftreibung

$$W = -kv^2.$$

Das Minuszeichen soll dabei ausdrücken, daß W der Richtung von v entgegengesetzt ist. Weiterhin wirkt infolge der Erdanziehung das Gewicht des Körpers

$$G = -mg$$

der Bewegung entgegen.

Nach dem erwähnten Newtonschen Grundgesetz ist dann

$$mb = G + W,$$

$$mb = -mg - kv^2$$

$$= -k\left(\frac{mg}{k} + v^2\right).$$

Wenn Sie noch zur Abkürzung $\frac{mg}{k} = a^2$ setzen, erhalten Sie mit $b = \frac{dv}{dt}$ die Differentialgleichung der Bewegung in der Form

$$\text{I} \qquad m\frac{dv}{dt} = -k(a^2 + v^2).$$

Mit

$$\text{II} \qquad \frac{m}{k} = \frac{a^2}{g}$$

wird

$$dt = -\frac{a^2}{g}\,\frac{dv}{a^2 + v^2},$$

$$t = -\frac{a}{g}\arctan\frac{v}{a} + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C muß eine zutreffende Anfangsbedingung aufgestellt werden. In der Voraussetzung war festgelegt, daß die Abwurfgeschwindigkeit den Wert v_0 haben soll. Wird die Zeit vom Moment des Abwurfes an gezählt, so ist die gesuchte Bedingung

$$t = 0, \quad v = v_0.$$

Eingesetzt, ergibt sich damit für C

$$0 = -\frac{a}{g}\arctan\frac{v_0}{a} + C$$

oder

$$C = \frac{a}{g}\arctan\frac{v_0}{a}$$

und für die partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$t = \frac{a}{g}\left(\arctan\frac{v_0}{a} - \arctan\frac{v}{a}\right).$$

Dieser Lösung haftet noch der Mangel an, daß die Zeit t als Funktion der Geschwindigkeit v und nicht umgekehrt v als Funktion von t dargestellt ist. Wir wollen deshalb nach v auflösen. Arbeiten Sie die folgenden Zeilen gründlich durch! Sie lernen hier einmal eine etwas schwierigere Umformung kennen.

Nach der gefundenen Gleichung ist

$$\frac{gt}{a} = \arctan\frac{v_0}{a} - \arctan\frac{v}{a}.$$

Um v aus seiner Umklammerung als Argument der arc tan-Funktion zu befreien, bilden Sie von beiden Seiten den Tangens:

$$\tan\frac{gt}{a} = \tan\left(\operatorname{arc}\tan\frac{v_0}{a} - \operatorname{arc}\tan\frac{v}{a}\right).$$

Die rechte Seite müssen Sie nun mit Hilfe des Additionstheorems der Tangensfunktion umformen. Sie setzen dazu

$$\alpha = \operatorname{arc}\tan\frac{v_0}{a}, \qquad \beta = \operatorname{arc}\tan\frac{v}{a}$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{v_0}{a}, \qquad \tan\beta = \frac{v}{a}.$$

Damit erhalten Sie aus obenstehender Gleichung

$$\begin{aligned}\tan\frac{gt}{a} &= \tan(\alpha - \beta)\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\frac{v_0}{a} - \frac{v}{a}}{1 + \frac{v_0 v}{a^2}},\\ \tan\frac{gt}{a} &= \frac{a v_0 - a v}{a^2 + v_0 v}.\end{aligned}$$

Jetzt kann nach v aufgelöst werden. Nach kurzer Rechnung folgt

$$v = a\,\frac{v_0 - a\tan\frac{gt}{a}}{a + v_0\tan\frac{gt}{a}} \qquad \left(\text{mit } a = \sqrt{\frac{mg}{k}}\right).$$

Nun soll uns die Länge des in der Zeit t zurückgelegten Weges s interessieren. Setzen Sie dazu

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \tan\frac{gt}{a} = \frac{\sin\frac{gt}{a}}{\cos\frac{gt}{a}},$$

dann ergibt sich aus der für die Geschwindigkeit v gefundenen Formel nach Trennen der Variablen und Integration

$$\int \mathrm{d}s = s = a\int\frac{v_0\cos\frac{gt}{a} - a\sin\frac{gt}{a}}{a\cos\frac{gt}{a} + v_0\sin\frac{gt}{a}}\,\mathrm{d}t.$$

Es wird Ihnen sicher auffallen, daß bis auf die konstanten Faktoren die Ableitung des Nenners im Zähler steht. Daher liegt die Substitution

$$u = a\cos\frac{gt}{a} + v_0\sin\frac{gt}{a}$$

nahe. Zur Umrechnung von $\mathrm{d}t$ in $\mathrm{d}u$ bilden Sie den Differentialquotienten:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -g \sin\frac{gt}{a} + \frac{v_0 g}{a}\cos\frac{gt}{a}.$$

Der Zähler des Integranden vereinfacht sich damit zu

$$\left(v_0 \cos\frac{gt}{a} - a \sin\frac{gt}{a}\right)\mathrm{d}t = \frac{a}{g}\,\mathrm{d}u,$$

während das Integral die einfache Form

$$s = \frac{a^2}{g}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

und die allgemeine Lösung damit die Gestalt

$$s = \frac{a^2}{g}\ln u + C$$

annimmt. Nach Ersetzen von u ist

$$s = \frac{a^2}{g}\ln\left(a\cos\frac{gt}{a} + v_0 \sin\frac{gt}{a}\right) + C.$$

Legt man als Anfangsbedingung zweckmäßigerweise $t = 0$, $s = 0$ fest, und setzt dies ein, dann ergibt sich für C

$$0 = \frac{a^2}{g}\ln(a\cos 0 + v_0 \sin 0) + C$$

oder

$$C = -\frac{a^2}{g}\ln a.$$

Die partikuläre Lösung unserer Wurfbewegung ist dann

$$s = \frac{a^2}{g}\ln\left(a\cos\frac{gt}{a} + v_0\sin\frac{gt}{a}\right) - \frac{a^2}{g}\ln a,$$

$$\text{III}\qquad s = \frac{a^2}{g}\ln\left(\cos\frac{gt}{a} + \frac{v_0}{a}\sin\frac{gt}{a}\right).$$

Interessant ist in diesem Beispiel noch die erreichte Steighöhe H und die dazu erforderliche Steigzeit T.
Im Gipfelpunkt der Bewegung ist $v = 0$. Sie erhalten mit $t = T$, $v = 0$

$$0 = a\,\frac{v_0 - a\tan\dfrac{gT}{a}}{a + v_0\tan\dfrac{gT}{a}}$$

oder

$$\tan\frac{gT}{a} = \frac{v_0}{a},$$

$$T = \frac{a}{g}\arctan\frac{v_0}{a}.$$

Zur Ermittlung der Steighöhe ist die gefundene Steigzeit in die für den Weg s gefundene Formel einzusetzen. Es wird

$$H = \frac{a^2}{g}\ln\left(\cos\frac{gT}{a} + \frac{v_0}{a}\sin\frac{gT}{a}\right).$$

Um die ermittelte Steigzeit T mit Hilfe der Beziehung $\tan \frac{gT}{a} = \frac{v_0}{a}$ einsetzen zu können, müssen noch die auftretenden Sinus- und Kosinusfunktionen durch die Tangensfunktion mit gleichem Argument ausgedrückt werden. Mit Hilfe der Ihnen aus der Trigonometrie bekannten Umrechnungsformeln

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

wird

$$\cos\frac{gT}{a} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{gT}{a}}} \qquad \sin\frac{gT}{a} = \frac{\tan\frac{gT}{a}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{gT}{a}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+v_0{}^2}}, \qquad = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+v_0{}^2}}.$$

Damit erhalten Sie für die Steighöhe

$$H = \frac{a^2}{g}\ln\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+v_0^2}} + \frac{v_0^2}{\sqrt{a^2+v_0^2}}\right)$$

$$= \frac{a^2}{g}\ln\frac{\sqrt{a^2+v_0^2}}{a},$$

$$\underline{\underline{H = \frac{a^2}{2g}\ln\left[1+\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\right]}}.$$

Die gefundenen Ergebnisse enthalten die Größe $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, die nicht nur von dem Faktor k, sondern auch vom Gewicht des geworfenen Körpers abhängig ist. In der Physik haben Sie im Gegensatz dazu bei der Behandlung der reibungsfreien Bewegung die Unabhängigkeit von der Masse bzw. vom Gewicht des bewegten Gegenstandes kennengelernt.

Hier soll noch kurz der für s gefundene Wert III mit Hilfe der ersten Glieder der Taylorschen Reihe entwickelt werden.

Die Taylorsche Reihe nimmt mit den im Beispiel auftretenden Größen t und $s = s(t)$ die Form

$$s(t) = s(0) + s'(0)\cdot t + \frac{s''(0)\cdot t^2}{2!} + \cdots$$

an.

Auf Grund der Anfangsbedingung ist

$$s(0) = 0.$$

Da $s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ ist, wird

$$s'(0) = v_0.$$

Die 2. Ableitung des Weges s nach der Zeit t ist die Beschleunigung

$$b = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Aus Gleichung I folgt dafür

$$s''(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}(a^2+v^2),$$

also

$$s''(0) = -\frac{k}{m}(a^2+v_0^2).$$

Diese Werte in die Taylorsche Reihe eingesetzt, ergibt

$$s(t) = 0 + v_0 \cdot t - \frac{k}{2m}(a^2 + v_0^2)\, t^2 + \cdots$$

Aus Gleichung II folgt $\frac{k}{m} = \frac{g}{a^2}$.

Somit wird

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2a^2}(a^2 + v_0^2)\, t^2 + \cdots$$

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{g v_0^2 t^2}{2a^2} + \cdots$$

In den folgenden Gliedern treten im Nenner immer höhere Potenzen von a^2, bzw. bei Ersatz des a^2 durch $\frac{mg}{k}$ im Zähler Potenzen von k auf. Da in den ersten Gliedern der Entwicklung die für die Luftreibung maßgebliche Konstante k fehlt, sind sie von der Luftreibung unabhängig. Sie stellen nichts anderes als das Bewegungsgesetz für den reibungsfreien Wurf dar ($k = 0$):

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Übungen

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen!

12. $y' = \frac{y}{x}$. *Diskutieren Sie das Richtungsfeld und die Lösungskurven!*

13. $ax - byy' = 0$, *14.* $y' - y \sin 2x = 0$,

15. $7x - 3yy' = 2$, *16.* $yy' - x^2 = 3$,

17. $\sin x + y' \sin y = 0$.

20.2 Lösung durch Substitution

So, wie Sie verschiedene Integrale dadurch lösen konnten, daß Sie eine neue Integrationsveränderliche einführten, so lassen sich auch manche Differentialgleichungen durch Substitution lösen. Auch hier können keine bestimmten Regeln für die Wahl der neuen Veränderlichen aufgestellt werden. Sie sollen deshalb im folgenden nur an wenigen Beispielen dieses Verfahren kennenlernen.

Lehrbeispiel 35

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = (4x + 9y)^2$*!*

Lösung:

Sie setzen hier

$$u = 4x + 9y.$$

Bei der Differentiation beider Seiten nach x ist zu beachten, daß y von x abhängig ist:

$$\frac{du}{dx} = 4 + 9\frac{dy}{dx}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9}\frac{du}{dx} - \frac{4}{9}.$$

Die Differentialgleichung nimmt damit die Form

$$\frac{1}{9}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{9}=u^2$$

an. Diese neue Differentialgleichung für eine Funktion $u = u(x)$ kann wieder durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden.

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{4}{9}}=9\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\arctan\frac{3u}{2}=9x+C_1$$

$$u=\frac{2}{3}\tan(6x+C) \qquad \left(C=\frac{2}{3}C_1\right)$$

Führen Sie nun wieder y ein, so ist die allgemeine Lösung

$$\underline{\underline{y=\frac{2}{27}\tan(6x+C)-\frac{4}{9}x.}}$$

Von größerer Bedeutung ist die Differentialgleichung vom Typ

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

in der die Veränderlichen nur in der Verbindung $\frac{y}{x}$ vorkommen.
In diese Differentialgleichung führt man mit Hilfe der Substitution

$$\frac{y}{x}=u \quad \text{oder} \quad y=ux$$

eine neue Veränderliche $u = u(x)$ ein. Die Differentiation ergibt hierbei

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u$$

und damit die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u=f(u).$$

Diese Differentialgleichung läßt sich ohne weiteres durch Trennung der Veränderlichen lösen. Es ist nämlich

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

und

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\ln x+C.$$

Nach Auswertung des links stehenden Integrals kann dann wieder y eingeführt werden.
Meist liegt jedoch eine derartige Differentialgleichung noch nicht gleich in der erwähnten Form vor. In vielen Fällen kommen Sie zum Ziel, indem Sie die Differentialgleichung zunächst nach y' auflösen und den auf der rechten Seite stehenden Bruch mit der höchsten auftretenden Potenz von x kürzen.

Lehrbeispiel 36

Lösen Sie die Differentialgleichung $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$*!*

Lösung:

Zurückführung auf die Form $y' = f(x, y)$:

Die Umstellung ergibt

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Kürzen mit der höchsten Potenz von x und dadurch Zurückführen auf die Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}$$

Die Substitution

$$u = \frac{y}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u$$

führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u = \frac{u^2 - 1}{2u},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -\frac{u^2 + 1}{2u}.$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{2u}{u^2 + 1}\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln x + \ln C$$

$$= \ln\frac{C}{x}$$

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}.$$

Wiedereinführung von y:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}$$

$$y^2 + x^2 = Cx$$

$$\underline{\underline{x^2 - Cx + y^2 = 0.}}$$

Die Lösungskurven sind die Kreise $\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$ mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{C}{2}; 0\right)$ und dem Radius $\frac{C}{2}$.

Lehrbeispiel 37

Welche Kurven schneiden alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel ψ *(*ψ *sei dabei verschieden von 90°)?*

Lösung:
Nach Bild 22 ist

$$\varphi + \psi = \alpha \quad \text{oder} \quad \psi = \alpha - \varphi.$$

Ist $P(x; y)$ ein Punkt der gesuchten Kurve, so ist $y' = \tan \alpha$ und $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. Das Auftreten der Tangensfunktion legt es nahe, die Beziehung der Winkel φ, ψ und α durch eine Beziehung zwischen den Tangenswerten zu ersetzen. Es ergibt sich

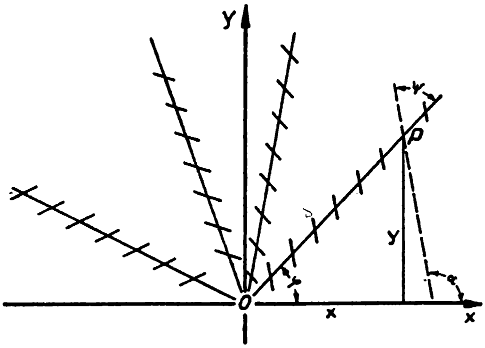


Bild 22

$$\tan \psi = \tan (\alpha - \varphi) = \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{1 + \tan \alpha \tan \varphi}.$$

Nach Voraussetzung soll ψ und damit auch $\tan \psi$ konstant sein. Wir setzen deshalb $\tan \psi = \frac{1}{a}$. Mit

$$\tan \psi = \frac{1}{a},$$

$$\tan \alpha = y' \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

stellt dann

$$\frac{1}{a} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \frac{y}{x}}$$

die Differentialgleichung der gesuchten Kurve dar. Die Umwandlung auf die Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ergibt

$$y' = -\frac{a \frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - a}.$$

Substitution:

$$\frac{du}{dx} x + u = -\frac{au + 1}{u - a}$$

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{u^2 + 1}{u - a}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{u - a}{u^2 + 1} du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du - a \int \frac{du}{u^2 + 1} = -\ln x + \ln C$$

$$\frac{1}{2} \ln (u^2 + 1) - a \arctan u = \ln \frac{C}{x}$$

$$\ln \frac{x}{C} \sqrt{u^2 + 1} = a \arctan u$$

$$\frac{x}{C} \sqrt{u^2 + 1} = e^{a \arctan u}$$

Wiedereinführung von y:

$$\frac{x}{C}\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=\mathrm{e}^{a\,\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x}}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{x^2+y^2}=C\,\mathrm{e}^{a\,\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x}}}}$$

Das Auftreten von $\sqrt{x^2+y^2}$ und $\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x}$ legt hier noch die Einführung von Polarkoordinaten nahe.
Mit

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x}$$

erhalten Sie als Lösungskurven die logarithmischen Spiralen,

$$\underline{\underline{r=C\,\mathrm{e}^{a\varphi}}},$$

wobei C der Wert von r für $\varphi=0$ ist. Sie werden sich jetzt sicher an das Lehrbeispiel 117 in Band 2, Abschnitt 14.13 erinnern. Dort hatten wir schon nachgewiesen, daß die logarithmischen Spiralen alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel schneiden.

Übungen

Lösen Sie die Differentialgleichungen

18. $y'=(x+y)^2$, *19.* $xy'-y=x\tan\frac{y}{x}$,

20. $(2y-5x)\,y'=2x+5y$, *21.* $x+yy'=2y$!

Zusammenfassung

In 20.1 lernten Sie ein Verfahren zur Lösung einiger Differentialgleichungen I. Ordnung kennen. Die Trennung der beiden auftretenden Veränderlichen x und y und nachfolgende Integration führt bei all den Differentialgleichungen zum Ziel, die sich in der Form $y'=f(x)\,g(y)$ darstellen lassen.
Zuweilen lassen sich auch andere Differentialgleichungen I. Ordnung durch Einführung einer neuen Veränderlichen auf diesen Typ zurückführen. Sie haben dabei die gegebene Differentialgleichung zwischen x, y und y' mit Hilfe der Substitution $u=u(x, y)$ in eine entsprechende Gleichung zwischen x, u und u' umzuformen. Läßt sich eine Differentialgleichung auf die Form $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ bringen, so ist nach der Substitution $u=\frac{y}{x}$ die Trennung der Veränderlichen möglich.

20.3 Homogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung

Jede Differentialgleichung I. Ordnung, die auf die Form

$$y'+g(x)\,y=h(x)$$

gebracht werden kann, heißt lineare Differentialgleichung I. Ordnung. Die rechts stehende Funktion $h(x)$ heißt *Störungsfunktion.* Ist $h(x)\equiv 0$, so wird die Differentialgleichung

$$y'+g(x)\,y=0$$

als **homogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung** bezeichnet. Im Fall $h(x) \neq 0$ liegt eine **inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung** vor.

Den homogenen Fall können Sie sofort nach Trennen der Veränderlichen lösen. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x)\,y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln y = -\int g(x)\,\mathrm{d}x + \ln C,$$

$$\underline{\underline{y = C\,\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}}}.$$

Lehrbeispiel 38

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{x}{1+x^2}\,y = 0!$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$$

$$\ln y = \ln\left(C\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\underline{\underline{y = C\sqrt{1+x^2}}}.$$

Lehrbeispiel 39

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y\cos x = 0!$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \sin x + \ln C$$

$$\underline{\underline{y = C\,\mathrm{e}^{\sin x}}}.$$

20.4 Inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung

Für die Differentialgleichung

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

wollen wir zwei Lösungsverfahren durchsprechen. Wenn auch das erste Verfahren eleganter ist, sollen Sie doch auch das zweite Verfahren kennenlernen, denn Sie müssen beim Lösen einiger Differentialgleichungen II. Ordnung einen ähnlichen Weg beschreiten.

20.41 Lösung durch Substitution. Ehe wir diese Methode an der allgemeinen Differentialgleichung durchführen, sollen Sie sie erst an einem Lehrbeispiel kennenlernen.

Lehrbeispiel 40

Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x} y = x .$$

Lösung:

Sie führen eine neue Funktion $u = u(x)$ mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \qquad \left(u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$$

ein, wobei die rechte Seite der Faktor des y-Gliedes der gegebenen Differentialgleichung ist. Die Trennung der Veränderlichen ergibt hier

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln u = \ln x,$$

$$u = x.$$

Sie werden in der Lösung die Integrationskonstante vermissen. Es kommt in dieser Teilaufgabe aber nur auf die Herstellung einer partikulären Lösung an, und die haben wir mit $C = 0$ erhalten. Die eigentliche Differentialgleichung hat nun die Form

$$y' + \frac{u'}{u} y = x$$

angenommen. Multiplizieren Sie beide Seiten mit u:

$$y'u + u'y = ux,$$

dann erkennen Sie auf der linken Seite den Differentialquotienten des Produktes $u \cdot y$. Nachdem Sie noch auf der rechten Seite $u = x$ setzen (gemäß der partikulären Lösung der durch die Substitution erhaltenen Differentialgleichung mit $u = u(x)$), können Sie jetzt die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \cdot y) = x^2$$

schreiben. Durch Integration auf beiden Seiten ergibt sich

$$uy = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$y = \frac{1}{u}\left(\frac{x^3}{3} + C\right),$$

$$\underline{\underline{y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}}}.$$

Der Lösungsgang soll jetzt noch einmal an der allgemeinen Form der linearen Differentialgleichung I. Ordnung demonstriert werden.

In der Differentialgleichung

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

ist der Faktor $g(x)$ durch $\frac{u'}{u}$ zu ersetzen und ein partikuläres Integral ($C = 0$) der so entstehenden Differentialgleichung

$$\frac{u'}{u} = g(x)$$

zu bilden. Nach Trennen der Veränderlichen

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

folgt

$$\ln u = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es ist also

$$u = \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Die Differentialgleichung, die jetzt die Form

$$y' + \frac{u'}{u}y = h(x)$$

hat, ist nun mit u zu multiplizieren, so daß auf der linken Seite die Ableitung des Produktes $u \cdot y$ steht.
Das ergibt

$$y'u + u'y = uh(x)$$

oder, mit dem partikulären Integral $u = \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uy) = h(x)\,\mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Nach Integration folgt

$$uy = \int h(x)\,\mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen Differentialgleichung I. Ordnung ist dann

$$y = \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int h(x)\,\mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right].$$

Es wäre unzweckmäßig, wollten Sie eine vorliegende Differentialgleichung nach dieser Formel lösen. An dieser allgemeinen Rechnung sollten Sie nur noch einmal den formalen Lösungsgang kennenlernen, den Sie sich einprägen müssen.

Lehrbeispiel 41

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + y\sin x = \sin x$*!*

Lösung:

Sie setzen

$$\frac{u'}{u} = \sin x$$

und erhalten nach Trennen der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln u = -\cos x,$$

$$u = \mathrm{e}^{-\cos x}.$$

Damit erhält die Differentialgleichung die Gestalt

$$y' + \frac{u'}{u} y = \sin x,$$

$$y'u + u'y = e^{-\cos x} \sin x,$$

$$uy = \int e^{-\cos x} \sin x \, dx$$

Substitution:
$v = -\cos x$
$dv = \sin x \, dx$

$$= \int e^v dv$$

$$= e^{-\cos x} + C$$

$$y = \frac{e^{-\cos x}}{u} + \frac{C}{u} = \frac{e^{-\cos x}}{e^{-\cos x}} + \frac{C}{e^{-\cos x}},$$

$$\underline{\underline{y = 1 + C e^{\cos x}.}}$$

20.42 Lösung durch Variation der Konstanten. Sie sollen nun das andere, von Lagrange stammende Verfahren zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kennenlernen.
Es soll dazu die Differentialgleichung benutzt werden, die schon im letzten Lehrbeispiel gelöst wurde.

Lehrbeispiel 42

Gesucht ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y' + y \sin x = \sin x.$$

Lösung:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$y' + y \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$$

$$\frac{dy}{y} = -\sin x \, dx$$

$$\ln y = \cos x + \ln C$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\underline{\underline{y_h = C e^{\cos x}.}}$$

Probe: $\quad -C e^{\cos x} \sin x + C e^{\cos x} \sin x = 0$

Der Index h soll andeuten, daß es sich bei y_h um die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung handelt.

2. Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

Um nun zur Lösung der inhomogenen Gleichung zu kommen, muß y_h so umgestaltet werden, daß sich beim Einsetzen in die linke Seite nicht der Wert 0, sondern $\sin x$ ergibt, so wie es die rechte Seite der inhomogenen Differentialgleichung verlangt. Man ersetzt dazu die Konstante C in y_h durch eine (noch unbekannte) Funktion $z(x)$. Diese Abänderung bezeichnet man allgemein als *Variation der Konstanten.* Der so erhaltene Ansatz für die inhomogene Gleichung

$$y = z(x)\,e^{\cos x}$$

ist in die inhomogene Gleichung einzusetzen. Sie bilden dazu mit Hilfe der Produktregel der Differentialrechnung

$$y' = z'(x)\,e^{\cos x} - z(x)\,e^{\cos x}\sin x.$$

Damit wird die inhomogene Differentialgleichung zu

$$z'(x)\,e^{\cos x} - z(x)\,e^{\cos x}\sin x + z(x)\,e^{\cos x}\sin x = \sin x.$$

Sie erkennen, daß sich das 2. und 3. Glied der linken Seite gegenseitig aufheben. Das ist kein Zufall, denn $y = z(x)\,e^{\cos x}$ ist mit konstantem $z(x) = C$ Lösung der homogenen Differentialgleichung (vgl. Probe für y_h).

Es besteht danach für die Funktion $z(x)$ die Differentialgleichung

$$z'(x)\,e^{\cos x} = \sin x,$$

die nach Multiplikation mit $e^{-\cos x}$ sofort durch Integration gelöst werden kann:

$$z'(x) = e^{-\cos x}\sin x,$$

$$z(x) = \int e^{-\cos x}\sin x\,dx$$

$$= e^{-\cos x} + C.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist damit

$$y = z(x)\,e^{\cos x} = (e^{-\cos x} + C)\,e^{\cos x}$$

$$\underline{\underline{y = 1 + C\,e^{\cos x}}},$$

in Übereinstimmung mit der Lösung aus Lehrbeispiel 41.

Lehrbeispiel 43

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} = x\cos x\,!$$

Lösung:

1. Homogene Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

Trennen der Veränderlichen:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

$$\underline{\underline{y_h = Cx}}$$

2. Inhomogene Differentialgleichung

Statt $z(x)$ soll der Einfachheit halber nur z geschrieben werden.

Ansatz: $\quad y = zx \qquad y' = z'x + z$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$z'x + z - z = x\cos x$$
$$z'x = x\cos x$$
$$z' = \cos x$$
$$z(x) = \sin x + C$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = z \cdot x$$
$$\underline{\underline{y = x\sin x + Cx}}$$

Lehrbeispiel 44

Zur Zeit $t = 0$ werde an einem stromlosen Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R und der Selbstinduktion L eine Spannungsquelle mit der Spannung $u = u(t)$ angeschlossen. Wie ist der zeitliche Verlauf der Stromstärke

a) bei Gleichspannung,

b) bei Wechselspannung ($u = U_m \sin\omega t$)?

Lösung:

Die Selbstinduktion erzeugt eine Gegenspannung, die proportional der zeitlichen Änderung des Stromes ist. Die Spannung u erfährt also eine Schwächung um $-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Durch den Ohmschen Widerstand wird ein Spannungsabfall $i \cdot R$ hervorgerufen. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz erhält man

$$u - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i \cdot R.$$

Es liegt damit eine inhomogene, lineare Differentialgleichung I. Ordnung vor, die in der Normalform

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{u}{L}$$

lautet.

Die Differentialgleichung soll durch Substitution gelöst werden. Sie setzen

$$\frac{v'}{v} = \frac{R}{L} \qquad \left(v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right).$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{R}{L}\,\mathrm{d}t.$$

Die Integration liefert

$$\ln v = \frac{R}{L}t,$$

$$v = \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}.$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{v'}{v}i = \frac{u}{L},$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}v + v'i = \frac{u}{L}v,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(vi) = \frac{u}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$$

und $$vi=\frac{1}{L}\int u\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t,$$

also $$i=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int u\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t.$$

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Gleichspannung

In diesem Falle ist $u = \text{const}$ und es wird

$$\begin{aligned}i&=\frac{u\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{u\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}{L}\left(\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}+K\right).\\&=\frac{u}{R}+\frac{Ku}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante ist mit K bezeichnet, da C in der Elektrotechnik die Kapazität kennzeichnet.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten K verwenden wir die Anfangsbedingung $t = 0$, $i = 0$. Es ist also

$$0=\frac{u}{R}+\frac{Ku}{L},\qquad K=-\frac{L}{R}$$

und damit $$i=\frac{u}{R}-\frac{u}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

$$\underline{\underline{i=\frac{u}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)}}.$$

Mit wachsendem t geht $\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ gegen Null, i nähert sich also asymptotisch dem Werte $\frac{u}{R}$. Vergleichen Sie dazu auch Lehrbeispiel 32!

b) Wechselspannung

Hier ist $u = U_m \sin\omega t$; u ist also eine Funktion von t. Damit wird

$$i=\frac{U_m\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

Die Lösung des Integrals erfolgt durch zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t&=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t-\frac{\omega L}{R}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t-\frac{\omega L^2}{R^2}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t-\frac{\omega^2L^2}{R^2}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das ganz rechts stehende Integral stimmt bis auf den konstanten Faktor wieder mit dem Ausgangsintegral überein. Sie bringen es auf die linke Seite:

$$\left(1+\frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right).$$

Um zu einer Vereinfachung zu kommen, setzen wir

$$\frac{\omega L}{R}=\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\frac{R^2+\omega^2L^2}{R^2}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t&=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\omega t\right)\\&=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi}{\cos\varphi}\\&=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin(\omega t-\varphi)}{\cos\varphi}\end{aligned}$$

und

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{RL}{R^2+\omega^2L^2}e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin(\omega t-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Da nun aber $\tan\varphi=\frac{\omega L}{R}$ ist, können Sie

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

setzen, so daß endgültig (es ist noch die Integrationskonstante zu setzen)

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t-\varphi)+K_1$$

ist.

Wird dieses Ergebnis nun wieder in die Lösung der Differentialgleichung eingesetzt, so ist

$$i=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)+K e^{-\frac{R}{L}t}\qquad\left(K=\frac{U_m}{L}K_1\right).$$

Zur Bestimmung von K ist die Anfangsbedingung heranzuziehen. Es wird

$$0=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(-\varphi)+K$$

also, mit $\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$,

$$K=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\varphi.$$

Auch $\sin\varphi$ läßt sich wieder durch ω, L und R ausdrücken:

$$\sin\varphi=\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

Damit ist

$$K = \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

und

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L} t} .$$

Man bezeichnet die Größe $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ als Scheinwiderstand, ωL als Blindwiderstand des Stromkreises.

Der erste Summand stellt den rein periodischen Teil dar. Danach wird die Stromstärke durch eine um den Winkel φ gegenüber der Wechselspannung phasenverschobene Sinusschwingung dargestellt. Der Verschiebungswinkel läßt sich dabei aus

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

entweder rechnerisch oder graphisch nach Bild 23 bestimmen. Der zweite Summand, der abklingende Teil, verliert im Verlauf der Zeit (wachsendes t) an Wirksamkeit, da $e^{-\frac{R}{L} t}$ mit $t \to \infty$ dem Wert 0 zustrebt. Damit nähert sich die Stromstärke immer mehr der schon beschriebenen Sinusschwingung mit der konstanten Amplitude

$$J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} .$$

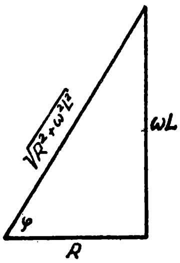


Bild 23

Zusammenfassung

Bei der linearen Differentialgleichung I. Ordnung haben Sie zwischen

a) der homogenen Gleichung $y' + g(x)\, y = 0$
und

b) der inhomogenen Gleichung $y' + g(x)\, y = h(x)$
zu unterscheiden.

Die homogene Gleichung kann nach Trennen der Veränderlichen integriert werden. Bei der inhomogenen Gleichung können Sie zwei Wege zur Lösung beschreiten.

Im ersten Fall führt die Substitution $\frac{u'}{u} = g(x)$ und nachfolgende Multiplikation mit u auf eine Differentialgleichung, die durch gewöhnliche Integration lösbar ist. Im zweiten Fall haben Sie zunächst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen. Mit Hilfe der *Variation der Konstanten* wird dann anschließend die Lösung der inhomogenen Gleichung ermittelt.

Übungen

22. Lösen Sie die Differentialgleichung aus Lehrbeispiel 40 mit Hilfe der Variation der Konstanten!

23. $y' + y = x^3$ *24.* $xy' + 2y = 3x$

Anleitung zu Übung 24: Bringen Sie die Differentialgleichung zunächst auf die Form $y' + g(x)\, y = h(x)$*!*

25. $y' + 2y = e^{3x}$ *26.* $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

21 Differentialgleichungen II. Ordnung

21.1 Einfache Typen der Differentialgleichung II. Ordnung

Nach der Definition der Ordnung einer Differentialgleichung muß als höchste Ableitung hier y'' vorkommen. Demnach läßt sich allgemein eine Differentialgleichung II. Ordnung durch

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad \text{oder} \qquad y'' = f(x, y, y')$$

kennzeichnen. Entsprechend dem Auftreten von y'' können Sie sich die Lösung über zwei aufeinanderfolgende Integrationen hergestellt denken. Wir werden auch so zum Teil in diesem Abschnitt verfahren. Da bei jeder Integration eine Integrationskonstante auftritt, müssen in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung II. Ordnung zwei willkürliche Konstanten zu finden sein.

21.11 $y'' = a$ ($a =$ const). In dieser besonders einfachen Differentialgleichung tritt neben y'' lediglich eine Konstante auf. Die Lösungsfunktion kann leicht durch zweimalige Integration gefunden werden.

Sie sollen diese Differentialgleichung gleich in einer wichtigen Anwendung kennenlernen. Ist y'' die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit, also die Beschleunigung, und wird $a = g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ gesetzt, so ist

$$b = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g.$$

Dies besagt dann, daß bei der vorliegenden Bewegung die Beschleunigung konstant ist. (Bei welcher Bewegung liegt dieser Fall vor?)

Wird

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

gesetzt, so folgt aus der Differentialgleichung II. Ordnung für s eine von I. Ordnung für v. Die Trennung der Veränderlichen ergibt dann

$$\mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}t,$$

$$v = gt + C_1.$$

Nun ist aber $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ und damit

$$\mathrm{d}s = (gt + C_1)\,\mathrm{d}t,$$

$$\underline{\underline{s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2.}}$$

Wir wollen jetzt noch Klarheit über die Bedeutung der Integrationskonstanten gewinnen.

Wird in $v = gt + C_1$ für t der Wert 0 eingesetzt, so ist

$$v(0) = v_0 = C_1.$$

Demnach ist C_1 mit der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 identisch. Zur Bestimmung von C_2 ist in s der Wert $t = 0$ einzusetzen, dann ist

$$s(0) = s_0 = C_2.$$

$C_2 = s_0$ stellt also die Lage des Körpers zur Zeit $t = 0$ dar. Mit diesen anderen Bezeichnungen für die Integrationskonstanten nimmt die Lösung die Form

$$\underline{\underline{s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0}}$$

an. Mit $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ ergibt sich das bekannte Fallgesetz von Galilei:

$$\underline{\underline{s = \frac{1}{2} g t^2.}}$$

21.12 $y'' = f(x)$. Auch in diesem Fall kommt man durch zweimalige Integration direkt zur Lösung. Es ist

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = f(x),$$

$$dy' = f(x)\,dx,$$

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1$$

und entsprechend

$$y = \int\left[\int f(x)\,dx\right] dx + C_1 x + C_2.$$

Dieser Typ tritt beispielsweise bei Aufgaben der Festigkeitslehre auf. Sie werden dort

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}$$

als (verkürzte) Differentialgleichung der elastischen Linie kennenlernen. Für $M(x)$ ist das Biegemoment des betreffenden Balkens an einer Stelle x einzusetzen, während die Konstanten E und J den Elastizitätsmodul bzw. das Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts darstellen.

Wir wollen hier auf die Durchrechnung eines entsprechenden Beispiels verzichten.

Sie werden nun sicher noch eine Differentialgleichung der Form $y'' = g(y)$ erwarten. Die Behandlung dieses Falles soll aber auf Kapitel 22 verschoben werden. Sie finden ihn dort, wenn auch mit etwas anderer Bezeichnung, unter Fall 6 wieder.

21.2 Die homogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Läßt sich eine Differentialgleichung auf die Form

$$y'' + ay' + by = 0$$

bringen und sind a und b Konstante, so liegt eine **homogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** vor. Für die Anwendung erlangt diese Differentialgleichung außerordentliche Bedeutung. So lassen sich mit ihr beispielsweise Schwingungsvorgänge behandeln. Diese Differentialgleichung heißt aus diesem Grunde auch *Schwingungsgleichung.*

21.21 Lösung mittels der charakteristischen Gleichung. Die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

läßt sich durch den Ansatz

$$y = C\,e^{\lambda x}$$

lösen, wobei C eine willkürliche Integrationskonstante und λ ein noch zu bestimmender Wert ist.

Mit $$y = C\,e^{\lambda x}$$

wird $$y' = C\lambda\,e^{\lambda x}, \quad y'' = C\lambda^2\,e^{\lambda x}$$

und damit $$y'' + ay' + by = C(\lambda^2 + a\lambda + b)\,e^{\lambda x} = 0.$$

Daraus läßt sich folgern: Soll der Lösungsansatz die Differentialgleichung erfüllen, soll also die linke Seite den Wert 0 annehmen, so muß der Ausdruck in der Klammer verschwinden, denn der Faktor C muß (willkürliche Integrationskonstante!) von Null verschieden angenommen werden, während der Faktor $e^{\lambda x}$ grundsätzlich für endliche Werte von x von Null verschieden ist. Es muß demnach

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

sein. Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als eine quadratische Gleichung für λ, die zur Differentialgleichung $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ gehörende **charakteristische Gleichung.** Sie erhalten die charakteristische Gleichung aus der Differentialgleichung, indem Sie jede Ableitung von y durch die entsprechende Potenz von λ ersetzen. Ihre Auflösung liefert die Werte

$$\lambda_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Wie Sie wissen, sind bei der Lösung einer quadratischen Gleichung drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Fall α) $\frac{a^2}{4} - b > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und reell,

Fall β) $\frac{a^2}{4} - b < 0$, λ_1 und λ_2 konjugiert-komplex,

Fall γ) $\frac{a^2}{4} - b = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, reelle Doppelwurzel.

Sie sollen nun jeweils an einem Beispiel die Art der Behandlung dieser drei Fälle kennenlernen.

Lehrbeispiel 45

Zu lösen sei die Differentialgleichung $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Lösung:

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

sind

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -4.$$

Es liegt der Fall α) vor. Sie erhalten damit zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung, und zwar

$$y_1 = C_1 e^{2x} \quad \text{und} \quad y_2 = C_2 e^{-4x}.$$

Aber auch

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$$

befriedigt die Differentialgleichung.

Das läßt sich leicht bestätigen:
Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + a y' + b y = 0,$$

so gilt

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0.$$

Setzt man $y = y_1(x) + y_2(x)$ in die Differentialgleichung ein, so wird

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) &= y_1'' + y_2'' + a y_1' + a y_2' + b y_1 + b y_2 \\ &= (y_1'' + a y_1' + b y_1) + (y_2'' + a y_2' + b y_2),\end{aligned}$$

und damit

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = 0.$$

$y = y_1(x) + y_2(x)$ ist also ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung.

Es ergibt sich also als Lösung

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}}}.$$

Da diese Lösung zwei willkürliche Konstante aufweist, ist sie die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung.

Lehrbeispiel 46

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 13y = 0$!

Lösung:

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

hat die Lösungen

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Auch in diesem Fall β) läßt sich als allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

ansetzen, die im vorliegenden Beispiel zu

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}$$

wird. Diesem Ergebnis kann aber noch eine andere, übersichtlichere Form gegeben werden. Wenn Sie bedenken, daß $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ ist, ergibt sich

$$y = e^{2x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

und mit Hilfe des Satzes von Euler ($e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$)

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}[C_1(\cos 3x + i \sin 3x) + C_2(\cos 3x - i \sin 3x)] \\ &= e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\sin 3x].\end{aligned}$$

Wird noch $C_1 + C_2 = A$ und $i(C_1 - C_2) = B$ gesetzt, so ist schließlich

$$\underline{\underline{y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)}}.$$

Die Lösungskurve setzt sich demnach aus einer Sinus- und Kosinuskurve, also aus zwei phasenverschobenen Sinuskurven mit veränderlicher Amplitude zusammen. Wie Sie schon wissen, ergibt die Überlagerung zweier phasenverschobener Sinuskurven wieder eine Sinuskurve. Rechnerisch können Sie das bestätigen, indem Sie

$$A = C \sin\varphi \quad \text{und} \quad B = C \cos\varphi$$

setzen. Die Größen C und φ lassen sich mittels

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \text{und} \quad \frac{A}{B} = \tan\varphi$$

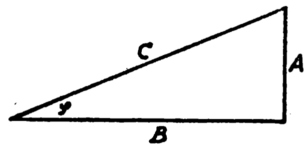


Bild 24

aus A und B bestimmen (Bild 24).

Mit diesen beiden Konstanten nimmt die Lösung die Form

$$y = C e^{2x}(\sin\varphi \cos 3x + \cos\varphi \sin 3x)$$

$$\underline{\underline{y = C e^{2x} \sin(3x + \varphi)}}$$

an.

Wir fassen diesen Fall β) zusammen: Infolge des Auftretens konjugiert-komplexer Wurzeln $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ der charakteristischen Gleichung nimmt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Formen

$$y = e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x)$$

oder

$$y = C e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)$$

mit $\quad C^2 = A^2 + B^2 \quad$ und $\quad \varphi = \arctan\frac{A}{B}\quad$ an.

Lehrbeispiel 47

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = 0$!

Lösung:

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 3$$

Während bei den Fällen α) und β) in gleicher Weise die Lösung angesetzt werden konnte, können Sie im vorliegenden Fall γ) nicht so vorgehen. Es ist wohl

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} = C_1 e^{3x}$$

eine Teillösung, aber

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
$$= C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} = C e^{3x} \qquad (C_1 + C_2 = C)$$

kann nicht die allgemeine Lösung sein, da ja als Folge von $\lambda_1 = \lambda_2$ nur eine Integrationskonstante C vorhanden ist. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall γ)

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$$
$$= e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$$

und speziell für die vorliegende Aufgabe

$$\underline{\underline{y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)}}.$$

Diese Lösung läßt sich durch Variation der Konstanten finden. Das Auftreten der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ wird durch die Beziehung $\frac{a^2}{4} - b = 0$ bedingt. In der partikulären Lösung $y = C_1 e^{\lambda x} = e^{-\frac{a}{2}x}$ wird zur Variation die Konstante C_1 durch die (noch unbekannte) Funktion z ersetzt.

Der Ansatz

$$y = z\, e^{-\frac{a}{2}x}$$

ist in die Differentialgleichung einzusetzen.

Mit

$$y' = z' e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a z}{2} e^{-\frac{a}{2}x},$$

$$y'' = z'' e^{-\frac{a}{2}x} - a z' e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2 z}{4} e^{-\frac{a}{2}x}$$

ergibt sich

$$y'' + a y' + b y = e^{-\frac{a}{2}x}\left(z'' - a z' + \frac{a^2 z}{4} + a z' - \frac{a^2 z}{2} + b z\right) = 0.$$

Wegen $\frac{a^2}{4} - b = 0$, also $b = \frac{a^2}{4}$, fallen alle Glieder der Klammer bis auf z'' fort. Zur Erfüllung der Differentialgleichung muß demnach

$$e^{-\frac{a}{2}x} z'' = 0$$

sein. Da $e^{-\frac{a}{2}x} \neq 0$, ist das nur mit

$$z'' = 0,$$

also

$$z' = C_1,$$

$$z = C_1 x + C_2$$

möglich. Damit heißt die Lösung

$$y = e^{\lambda x}(C_1 x + C_2),$$

wie oben behauptet wurde.

Wir fassen zusammen:

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + a y' + b y = 0$$

wird mit Hilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

gelöst. Je nach der Beschaffenheit der Lösungen der charakteristischen Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall α)

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{reell}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Fall β)

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ konjugiert-komplex}, \quad \lambda_{1;2} = \alpha \pm i\beta$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

umformbar in

$$y = e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x)$$

oder

$$y = C e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)$$

Fall γ)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$$

Soll nun aus der Schar der Lösungen wiederum nur eine partikuläre angegeben werden, so sind für die beiden Integrationskonstanten die entsprechenden Werte zu ermitteln. Das läßt sich aber nur durchführen, wenn zwei Bedingungen bekannt sind. Als solche zählen beispielsweise die Angabe eines Punktes, durch den die Kurve laufen soll in Verbindung mit der Forderung, daß sie in diesem Punkt eine bestimmte Richtung hat. Eine andere Möglichkeit besteht in der Angabe zweier Punkte, durch die die Kurve laufen soll (Randbedingung).
Mit diesen beiden Bedingungen lassen sich dann zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten C_1 und C_2 bzw. A und B aufstellen, deren Lösungen die gesuchten Werte für die Integrationskonstanten geben.

Lehrbeispiel 48

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$! Die Lösungskurve soll durch den Punkt mit den Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ gehen und dort die Richtung $y_0' = 1$ haben.

Lösung:

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}}.$$

Damit die Kurve durch den vorgeschriebenen Punkt läuft, muß

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{-2x_0},$$

also

$$1 = C_1 + C_2$$

sein. Sie bilden nun

$$y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

und entsprechend

$$y'_0 = -C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{-2x_0},$$

$$1 = -C_1 - 2C_2.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$-C_1 - 2C_2 = 1$$

ergibt sich

$$C_1 = 3 \quad \text{und} \quad C_2 = -2.$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist

$$\underline{\underline{y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}}}.$$

Fehlt das Glied mit y', so nehmen die Lösungen eine besonders einfache Form an. In dem folgenden Lehrbeispiel sollen Sie den einen der beiden möglichen Fälle kennenlernen.

Lehrbeispiel 49

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + a^2 y = 0$!

Lösung:

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + a^2 = 0$$

$$\lambda_1 = ai, \quad \lambda_2 = -ai.$$

Die Lösung läßt sich in den drei Formen

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{aix} + C_2 e^{-aix}}},$$

$$\underline{\underline{y = A \cos ax + B \sin ax}},$$

$$\underline{\underline{y = C \sin(ax + \varphi)}}$$

angeben.
Diese Differentialgleichung kommt bei der Untersuchung der reibungsfreien (ungedämpften) Schwingung zur Anwendung.

Übungen

27. $y'' - y' - 6y = 0$ *28.* $2y'' - 8y' + 6y = 0$

29. $3y'' + 6y' + 3y = 0$ *30.* $y'' - 8y' + 16y = 0$

31. $y'' + 4y' + 13y = 0$ *32.* $y'' - 2y' + 2y = 0$

33. $y'' - \gamma^2 y = 0$

21.22 Anwendung auf Schwingungsvorgänge.

21.221 Freie, ungedämpfte Schwingung. Denken Sie sich einen um eine Ruhelage beweglichen Massenpunkt. Auf ihn wirke eine Kraft, die stets zur Ruhelage hin gerichtet und deren Größe der momentanen Entfernung des Massenpunktes von der Ruhelage proportional ist. (Derartige Kräfte treten beispielsweise bei allen Formänderungen elastischer Körper auf, die nach dem Hookeschen Gesetz vor sich gehen.)

Einen solchen Mechanismus können Sie sich etwa in der im Bild 25 gezeigten Form darstellen. Wie Sie (vgl. Physik, Lbf. 3) wissen, wird ein solcher Massenpunkt eine schwingende Bewegung, eine *harmonische Schwingung* ausführen.
In diesem ersten Beispiel soll von einer Dämpfung infolge Reibung abgesehen werden.
Im Ansatz ist der obenstehende Sachverhalt zum Ausdruck zu bringen. Da die Kraft stets der Auslenkung entgegenwirkt, ist P mit

$$P = -cx$$

anzusetzen. Hierbei ist der Proportionalitätsfaktor c eine Konstante, die vom Material (z. B. der Stärke der Feder) bestimmt wird. Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist

$$P = mb = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}.$$

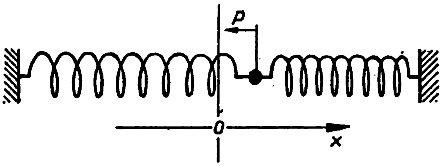


Bild 25

Bei Ableitungen nach der Zeit werden die Differentialquotienten in der Newtonschen Schreibweise (wie bei der Parameterdarstellung) durch aufgesetzte Punkte gekennzeichnet.

Mit $P = m\ddot{x}$ ergibt sich die Differentialgleichung der freien ungedämpften Schwingung:

$$m\ddot{x} = -cx,$$

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Nach Einführung der Abkürzung $\frac{c}{m} = \omega_0^2$ erhält die Differentialgleichung die endgültige Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$.
Die Differentialgleichung weist die Form der im Lehrbeispiel 49 behandelten Differentialgleichung auf. Die Lösung heißt demnach

$$\underline{\underline{x = C\sin(\omega_0 t + \varphi)}}.$$

Es kommt jetzt darauf an, eine zweckmäßige Anfangsbedingung aufzustellen. Der Massenpunkt soll zur Zeit $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$ durch die Ruhelage ($x = 0$) schwingen. Die Anfangsbedingungen sind dann

$$t = 0\begin{cases} x = 0, \\ v = \dfrac{dx}{dt} = v_0. \end{cases}$$

Die Differentiation der Lösung liefert

$$v = \frac{dx}{dt} = C\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Für $t = 0$ ergibt sich

$$v_0 = C\omega_0\cos\varphi.$$

Aus der allgemeinen Lösung selbst folgt für $t = 0$, $x = 0$

$$0 = C \sin \varphi$$

und daraus

$$\varphi = 0.$$

Damit wird

$$v_0 = C\,\omega_0 \cos 0 = C\,\omega_0$$

und

$$C = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist schließlich

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.}}$$

Dieses Endergebnis stellt eine reine Sinusschwingung mit der Amplitude $\frac{v_0}{\omega_0}$ dar. Welche Bedeutung hat nun $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$?

Zur Zeit $t = 0$ schwingt der Massenpunkt durch die Ruhelage. Nach Verlauf der Zeit T soll *ein* Hin- und Hergang vollzogen sein, so daß sich der Massenpunkt nach dieser Zeit wieder in der gleichen Richtung durch die Ruhelage wie bei $t = 0$ bewegt. Es ist demnach

$$0 = \frac{v_0}{\omega_0} \sin 0 = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 T.$$

Da die Sinusfunktion die Periode 2π hat, muß zur Erfüllung dieser Bedingung

$$\omega_0 T = 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

sein. Der Ausdruck $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ wird Kreisfrequenz genannt.

Die Frequenz der Schwingung ist

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Die Ergebnisse lassen sich auch auf andere freie, ungedämpfte Schwingungen übertragen. Bei Vorgängen in der Elektrotechnik entsprechen einander die Größen:

$$x \triangleq i \quad \text{(Stromstärke)},$$

$$\frac{c}{m} \triangleq \frac{1}{C \cdot L}.$$

Eine freie, ungedämpfte Schwingung liegt auch angenähert beim mathematischen Pendel (Bild 26) vor. An einem (gewichtslosen) Faden der Länge l befinde sich ein Massenpunkt m. Die auf diese Masse wirkende Erdanziehung $G = mg$ läßt sich in zwei aufeinander senkrechtstehende Komponenten zerlegen. Dabei wirkt $mg\cos\psi$ fadenspannend, während $mg\sin\psi$ versucht, die Pendelmasse zur Ruhelage zurückzutreiben. Damit gilt

$$P = -mg\sin\psi.$$

Die Lösung der hieraus entstehenden Differentialgleichung stößt auf große Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde soll die Schwingung auf kleine Schwingungsweiten, also auf kleine Winkel ψ beschränkt werden. Unter dieser Voraussetzung kann $\sin\psi$ durch ψ (im Bogenmaß!) ersetzt werden, so daß

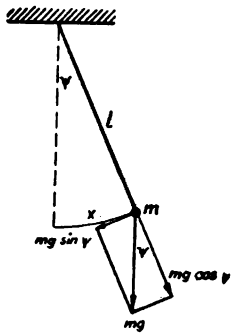


Bild 26

$$P = -mg\psi$$

ist. Die damit aufstellbare Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -mg\psi,$$

$$\ddot{x} = -g\psi$$

hat aber den Mangel, daß in ihr die zwei von der Zeit t abhängigen Veränderlichen x und ψ vorkommen. Da x den längs der Bahn gemessenen Abstand des Massenpunktes m von der Ruhelage darstellt, gilt die Beziehung

$$x = l\cdot\psi,$$

bzw.

$$\ddot{x} = l\cdot\ddot{\psi}.$$

Die Differentialgleichung nimmt damit die Form

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l}\psi$$

oder

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

an.

Ihre Lösung lautet

$$\underline{\underline{\psi = C\sin(\omega_0 t + \varphi)}}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = 0$, $v = v_0$ ergibt sich daraus für $x = l\cdot\psi$

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}}$$

und

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Das sind aber die Ihnen aus der Physik bekannten Gesetze für das mathematische Pendel.

21.222 Freie, gedämpfte Schwingung. In der Praxis lassen sich freie, ungedämpfte Schwingungen kaum verwirklichen. Durch Luft- und Lagerreibung bei mechanischen Bewegungen und durch Ohmschen Widerstand bei elektrischen Vorgängen treten stets Verluste ein, die zu einer Dämpfung, d. h. zu einer fortlaufenden Verkleinerung der Amplituden führen. Die Dämpfung kann sogar so groß werden, daß es überhaupt nicht zur Ausbildung einer Schwingung kommt. Ein aus seiner Ruhelage abgelenkter Körper kriecht dann mehr oder weniger schnell in die Ruhelage zurück.

Wir wollen uns zunächst wieder rein mechanischen Vorgängen zuwenden. Die Bewältigung der elektrischen Probleme bringt dann vom mathematischen Standpunkt nichts wesentlich Neues, gehen doch lediglich andere Bezeichnungen in die Differentialgleichung ein, ohne dabei ihren Charakter zu ändern. Es sind eben beide Male Schwingungen, die nach Abstraktion mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln gelöst werden können.

Wieder unterliege ein Massenpunkt der Einwirkung einer dem Ausschlag proportionalen, zur Ruhelage hin gerichteten Kraft. Die auftretende Reibung soll der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional sein. Diese Annahme genügt den meisten mechanischen Bewegungen. Es sind

rücktreibende Kraft: $P_R = -cx$

Widerstandskraft: $P_W = -k\dot{x} \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$

Da $P = P_R + P_W$

ist, ergibt sich für die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} - cx$$

oder

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Als Abkürzung seien hier zweckmäßigerweise

$$\frac{k}{m} = 2p \quad \text{und} \quad \frac{c}{m} = \omega_0^2$$

eingeführt, so daß die Differentialgleichung die Gestalt

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

annimmt. Die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit

$$\lambda_{1;2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Wie Sie schon erfahren haben, sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden:

α) $p^2 - \omega_0^2 > 0$ (reelle Wurzeln),

β) $p^2 - \omega_0^2 = 0$ (reelle Doppelwurzel),

γ) $p^2 - \omega_0^2 < 0$ (konjugiert-komplexe Wurzeln).

Fall α) $p^2 - \omega_0^2 > 0$

Dieser Fall wird bei großem p, also bei großer Dämpfung vorliegen. Wird $\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = \omega$ gesetzt, so ist

$$\lambda_{1;2} = -p \pm \omega$$

und

$$x = C_1 e^{(-p+\omega)t} + C_2 e^{(-p-\omega)t},$$

$$x = e^{-pt}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}).$$

Als Anfangsbedingung sei wieder $t = 0$, $x = 0$ und $v = \frac{dx}{dt} = v_0$ gewählt. Die Differentiation nach t ergibt

$$v = \frac{dx}{dt} = C_1(-p + \omega)\, e^{(-p+\omega)t} + C_2(-p - \omega)\, e^{(-p-\omega)t}$$

und nach Einsetzen der Anfangsbedingung

$$v_0 = C_1(-p + \omega) + C_2(-p - \omega),$$

während aus x selbst

$$0 = C_1 + C_2$$

folgt. Die beiden Bestimmungsgleichungen für C_1 und C_2:

$$v_0 = C_1(-p + \omega) - C_2(p + \omega),$$
$$0 = C_1 + C_2,$$

ergeben als Lösung

$$C_1 = \frac{v_0}{2\omega} \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{v_0}{2\omega}.$$

Die partikuläre Lösung lautet damit

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{2\omega} e^{-pt}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})}}$$

oder

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sinh \omega t.}}$$

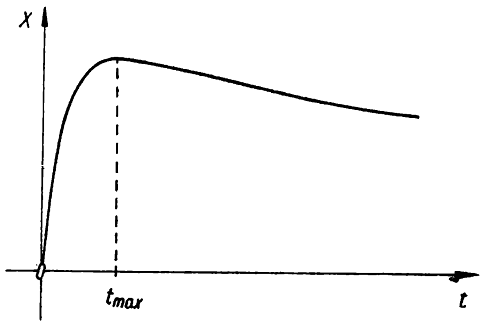


Bild 27

Damit ist erwiesen, daß der Bewegungsvorgang durch eine unperiodische Funktion dargestellt wird. Eine Schwingung kann also nicht auftreten.

Es soll hier noch kurz die in Bild 27 dargestellte Lösungskurve diskutiert werden. Zur Feststellung des Maximalausschlages bilden wir den Differentialquotienten (hier identisch mit der Geschwindigkeit!) und fragen nach der Stelle, an der er den Wert Null annimmt. Es ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt}(-p \sinh \omega t + \omega \cosh \omega t) = 0.$$

Für endliche Werte von t kann nur der Klammerausdruck verschwinden, es muß also

$$-p \sinh \omega t + \omega \cosh \omega t = 0$$

sein.

Es wird

$$\tanh \omega t = \frac{\omega}{p},$$

$$\omega t = \operatorname{artanh} \frac{\omega}{p} = \frac{1}{2} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega},$$

also

$$t_{\max} = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega}.$$

Unter Benutzung der Beziehung

$$\sinh a = \frac{\tanh a}{\sqrt{1-\tanh^2 a}}$$

ergibt sich für diesen Wert von t

$$\sinh \omega t = \frac{\tanh \omega t}{\sqrt{1-\tanh^2 \omega t}} = \frac{\omega}{\sqrt{p^2-\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

und für den maximalen Ausschlag

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sinh \omega t = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{p-\omega}{p+\omega}\right)^{\frac{p}{2\omega}}.$$

Für wachsendes t nimmt dann x immer mehr ab und nähert sich asymptotisch dem Wert Null. Das geschieht um so langsamer, je größer die Dämpfung wird. Der Massenpunkt kriecht ganz langsam in die Ruhelage zurück (vgl. Bild 27). Fall α) heißt deshalb auch der **Kriechfall.**

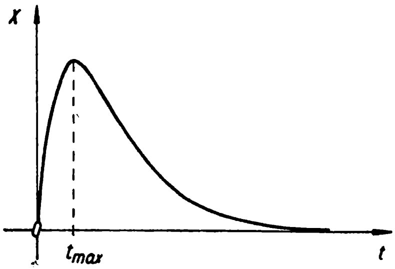


Bild 28

Fall β) $p^2 - \omega_0^2 = 0$

Wird $p^2 - \omega_0^2 = 0$, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -p$

und $x = e^{-pt}(C_1 + C_2 t)$.

Für die Anfangsbedingung

$$t = 0 \begin{cases} x = 0, \\ v = v_0 \end{cases}$$

ergibt sich $C_1 = 0$, $C_2 = v_0$ und damit

$$x = v_0 t\, e^{-pt}.$$

Die Funktion ist in Bild 28 dargestellt.
Im Vergleich zu Fall α) geht x verhältnismäßig schnell gegen 0. Fall β) heißt der **aperiodische Grenzfall.** Er stellt den Übergang zwischen Fall α) und Fall γ) dar.

Fall γ) $p^2 - \omega_0^2 < 0$

Hierbei ist die Dämpfung klein. Wie Sie sehen werden, kommt es zur Ausbildung einer gedämpften Schwingung.
Wir setzen

$$\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = i\omega \qquad (i^2 = -1;\ \omega \text{ reell}),$$

also

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}.$$

Dann ist

$$\lambda_{1;2} = -p \pm i\omega$$

und

$$\begin{aligned} x &= e^{-pt}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= C e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Mit den gleichen Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = 0$ und $v = v_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v_0 &= C(-p \sin\varphi + \omega \cos\varphi), \\ 0 &= C \sin\varphi. \end{aligned}$$

In dem Produkt $C \sin \varphi$ kann nur $\sin \varphi = 0$ und damit $\varphi = 0$ sein. $C = 0$ würde im Widerspruch zur vorhergehenden Bestimmungsgleichung stehen, da doch die rechte Seite gleich $v_0 \neq 0$ sein soll. Mit $\varphi = 0$ wird dann

$$v_0 = C\omega \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{v_0}{\omega}.$$

Als Lösung ergibt sich

$$\underline{\underline{x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t.}}$$

Hier wird der Bewegungsablauf durch die periodische Sinusfunktion beschrieben, es liegt also wirklich eine Schwingung vor. Die Amplitude dieser Schwingung

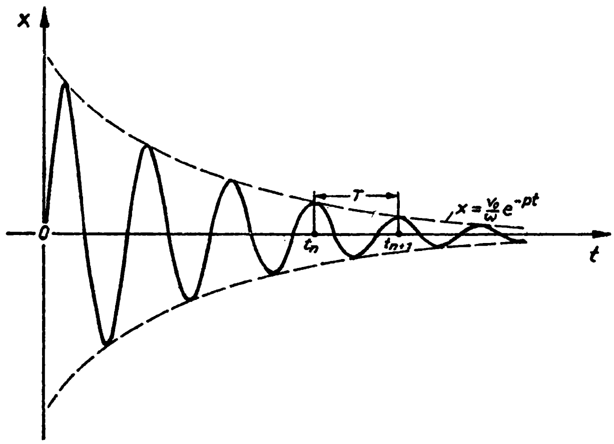


Bild 29

ist aber zeitlich veränderlich, und zwar nimmt sie mit zunehmender Zeit ab. Die Schwingung kommt zum Erliegen. Im Bild 29 ist eine derartige Schwingung dargestellt.

Für die Schwingungsdauer findet man

$$\omega T = 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}.$$

Wie Sie durch Vergleich mit der ungedämpften Schwingung erkennen können, ist die Dauer einer Vollschwingung im gedämpften System größer als im ungedämpften. Das gedämpfte System schwingt langsamer. Die Schwingungsdauer T bleibt aber auch hier während des Vorganges konstant.

Von Interesse ist noch die Veränderung der Amplituden. Zu den Zeiten t_n und $t_{n+1} = t_n + T$ mögen zwei aufeinanderfolgende Maximalausschläge stattfinden, so daß

$$\sin \omega t_n = \sin \omega t_{n+1}$$

ist. Die zugehörigen Maximalausschläge sind dann

$$x_n = \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_n} \sin \omega t_n,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_{n+1}} \sin \omega t_{n+1} &= \frac{v_0}{\omega} e^{-p(t_n + T)} \cdot \sin \omega t_n \\ &= \frac{v_0}{\omega} e^{-p t_n} e^{-pT} \cdot \sin \omega t_n \\ &= x_n e^{-pT}. \end{aligned}$$

Der Quotient dieser beiden Amplituden, das *Dämpfungsverhältnis*, ergibt sich zu

$$q = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{pT} = e^{\frac{kT}{2m}}.$$

In der Praxis wird nun noch ein weiterer Begriff, das *logarithmische Dekrement*, als Maß für die Dämpfung eingeführt. Man versteht darunter den natürlichen Logarithmus des Dämpfungsverhältnisses

$$\delta = \ln q = \frac{kT}{2m} = \frac{2k\pi}{\sqrt{4cm - k^2}}.$$

Wird bei kleiner Dämpfung die Schwingungsdauer des ungedämpften Systems eingeführt, so ergibt sich in Annäherung

$$\delta = \frac{kT}{2m} \approx \frac{k\pi}{\sqrt{mc}}.$$

Zusammenfassung

Von wesentlicher technischer Bedeutung sind die homogenen, linearen Differentialgleichungen II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie finden bei allen freien Schwingungen Verwendung.

Zur Lösung dieser Art Differentialgleichungen sind lediglich die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, der charakteristischen Gleichung, festzustellen. Den dabei auftretenden drei Fällen entsprechend ergeben sich drei Formen der Lösung, die alle durch das Auftreten von zwei willkürlichen Integrationskonstanten gekennzeichnet sind.

Bei den Anwendungsbeispielen haben Sie gesehen, daß sich lediglich beim Auftreten eines Paares konjugiert-komplexer Wurzeln in der charakteristischen Gleichung eine harmonische Schwingung ausbildet. In den beiden anderen Fällen entsteht infolge großer Dämpfung nur eine aperiodische Bewegung.

21.3 Die inhomogene, lineare Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie bei den linearen Differentialgleichungen I. Ordnung liegt dann der inhomogene Fall vor, wenn auf der rechten Seite der Gleichung eine Funktion $h(x)$, die Störungsfunktion, auftritt:

$$y'' + ay' + by = h(x).$$

Wir übernehmen hier einen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen:

> Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die Lösung erfolgt demnach in drei Schritten:

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung, die sich durch Streichung des Störungsgliedes ergibt;
2. Bestimmen einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung;
3. Zusammenfassung der unter 1. und 2. gefundenen Lösung zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Zum Beweis des Satzes sei angenommen, daß $y_i = y_i(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Diese Lösung muß demnach die Differentialgleichung

$$y'' + a y' + b y = h(x)$$

erfüllen:

$$y_i'' + a y_i' + b y_i = h(x).$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$y'' - y_i'' + a(y' - y_i') + b(y - y_i) = 0$$

oder — da nach den Grundregeln der Differentiation $f' + g' = (f + g)'$ ist —

$$(y - y_i)'' + a(y - y_i)' + b(y - y_i) = 0$$

als homogene Differentialgleichung. Ist $y_h = y_h(x)$ ihre allgemeine Lösung, ist also

$$y_h'' + a y_h' + b y_h = 0,$$

so muß

$$y - y_i = y_h \quad \text{oder} \quad y = y_h + y_i$$

sein. y ist dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, da y_h und damit $y = y_h + y_i$ die erforderlichen zwei Integrationskonstanten enthält.

Wir wollen uns hier auf einige Formen der Störungsfunktion beschränken, und zwar auf

1. $h(x) = \alpha e^{nx}$,
2. $h(x) = \alpha \cos nx + \beta \sin nx$,
3. $h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$.

In vielen Fällen kommt man durch einen entsprechenden Lösungsansatz zum Ziel, und zwar ist als partikuläre Lösung anzusetzen:

im Fall 1.: $y = A e^{nx}$

Der Exponent ist der gleiche wie in der Störungsfunktion.

im Fall 2.: $y = A \cos nx + B \sin nx$

Das Argument nx der trigonometrischen Funktionen ist gleich dem der Störungsfunktion. Fehlt in der Störungsfunktion eine der beiden trigonometrischen Funktionen ($\alpha = 0$ oder $\beta = 0$), so ist trotzdem der angegebene Ansatz vollständig erforderlich.

im Fall 3.: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

n ist der höchste in der Störungsfunktion auftretende Exponent. Fehlt in der Differentialgleichung das y-Glied ($b = 0$), so heißt der Ansatz $y' = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Fehlen in der Störfunktion einige Glieder (z. B. bei $h(x) = a_n x^n$), so ist trotzdem der vollständige Ansatz mit $a_0 \neq 0, \ldots, a_{n-1} \neq 0$ erforderlich.

Die noch unbekannten Koeffizienten müssen nach Einsetzen des Lösungsansatzes in die betreffende Differentialgleichung durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Lehrbeispiel 50

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + 2y' - 3y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}}}$$

Inhomogene Gleichung:

Die Störungsfunktion hat die Form von Fall 1, also setzen Sie die Lösung in der Form

$$y = A e^{2x}$$

an. Daraus folgt $y' = 2A e^{2x}, \quad y'' = 4A e^{2x}$

und

$$y'' + 2y' - 3y = 4A e^{2x} + 4A e^{2x} - 3A e^{2x} = e^{2x}$$

$$5A e^{2x} = e^{2x},$$

$$5A = 1,$$

$$A = \frac{1}{5}.$$

Damit ist

$$\underline{\underline{y_i = \frac{1}{5} e^{2x}}}$$

und

$$y = y_h + y_i = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}}}.$$

Lehrbeispiel 51

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' - 3y = 65 \sin 2x$!

Lösung:

Homogene Gleichung: $y'' + 2y' - 3y = 0$ (wie im Lehrbeispiel 50)

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}}}$$

Inhomogene Gleichung:

Obwohl im Störungsglied nur die Sinusfunktion auftritt, müssen Sie doch den vollständigen Ansatz nach Fall 2 durchführen. Im vorliegenden Fall ist $n = 2$.

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

Damit ist

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x \\ &\quad - 3A\cos 2x - 3B\sin 2x \\ &= (-7A + 4B)\cos 2x + (-4A - 7B)\sin 2x = 65\sin 2x. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Sinusfunktion bzw. Kosinusfunktion müssen auf beiden Seiten gleich sein:

$$\begin{aligned} -7A + 4B &= 0, \\ -4A - 7B &= 65, \\ \hline A = -4,\ B &= -7. \end{aligned}$$

Mit diesen gefundenen Werten A und B ist

$$\underline{\underline{y_i = -4\cos 2x - 7\sin 2x}}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und damit

$$\underline{\underline{y = y_h + y_i = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - 4\cos 2x - 7\sin 2x}}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lehrbeispiel 52

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 11 - 9x^2$*!*

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}}$$

Inhomogene Gleichung:

Wenn auch in der Störungsfunktion das lineare Glied fehlt, so haben Sie doch stets den Ansatz gemäß Fall 3 vollständig auszuführen ($n = 2$).

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad y' = a_1 + 2a_2 x, \quad y'' = 2a_2$$

$$y'' - 2y' - 3y = 2a_2 - 2a_1 - 4a_2 x - 3a_0 - 3a_1 x - 3a_2 x^2 = 11 - 9x^2$$

$$(-3a_0 - 2a_1 + 2a_2) + (-3a_1 - 4a_2)x - 3a_2 x^2 = 11 - 9x^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} -3a_0 - 2a_1 + 2a_2 &= 11 \\ -3a_1 - 4a_2 &= 0 \\ -3a_2 &= -9 \end{aligned}$$

$$a_0 = 1, \; a_1 = -4, \; a_2 = 3$$

Damit ist

$$\underline{\underline{y_i = 1 - 4x + 3x^2}}$$

und

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 1 - 4x + 3x^2.}}$$

Lehrbeispiel 53

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 2y' = 3$!

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' - 2y' = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

$$\underline{\underline{y_h = C_1 + C_2 e^{2x}}}$$

Inhomogene Gleichung:

In der Differentialgleichung fehlt das y-Glied. Gemäß der Bemerkungen zu Fall 3 gilt als Ansatz $y' = a_0$. Es ist damit

$$y'' - 2y' = 0 - 2a_0 = 3$$

$$a_0 = -\frac{3}{2}$$

also

$$y' = -\frac{3}{2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{y = y_i = -\frac{3}{2}x.}}$$

Auf eine Integrationskonstante wird hier verzichtet, da y_i nur als eine beliebige partikuläre Lösung zu finden ist.

Die allgemeine Lösung lautet

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x.}}$$

Tritt der Fall ein, daß die Störungsfunktion eine Kombination der Typen 1 bis 3 darstellt, so kann der Ansatz aus den entsprechenden Teilen zusammengesetzt werden.

Lehrbeispiel 54

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 4y = x^2 + 2e^x$!

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' + 4y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i \qquad \text{(vgl. Lehrbeispiel 49)}$$

$$\underline{\underline{y_h = C \sin(2x + \varphi)}}$$

Inhomogene Gleichung:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + A\,e^x$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + A\,e^x$$

$$y'' = 2a_2 + A\,e^x$$

$$y'' + 4y = 2a_2 + A\,e^x + 4a_0 + 4a_1 x + 4a_2 x^2 + 4A\,e^x = x^2 + 2\,e^x$$

$$(4a_0 + 2a_2) + 4a_1 x + 4a_2 x^2 + 5A\,e^x = x^2 + 2\,e^x$$

Koeffizientenvergleich:

$$4a_0 + 2a_2 = 0$$

$$4a_1 = 0 \qquad 5A = 2$$

$$4a_2 = 1$$

$$a_0 = -\frac{1}{8}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{2}{5}$$

Partikuläre Lösung:

$$\underline{\underline{y_i = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{5}e^x}}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y = C \sin(2x + \varphi) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{5}e^x}}$$

Wenn Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y = e^{2x}$ in der bisher behandelten Art lösen wollen, werden Sie auf Schwierigkeiten stoßen. Das liegt daran, daß die Störungsfunktion $h(x) = e^{2x}$ schon eine partikuläre Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist nämlich

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 0$ erhalten Sie daraus $h(x)$. Man sagt, daß sich in diesem Fall die Störungsfunktion in *Resonanz* mit der Eigenfunktion befindet.
Der Resonanzfall soll näher untersucht werden, da er in der Technik besondere Bedeutung hat. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = h(x).$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung sei

$$y_h = C\,e^{\lambda x},$$

wobei λ die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ist.

Zwischen der Störfunktion und der Eigenfunktion (Lösungsfunktion der homogenen Differentialgleichung) liege Resonanz vor, d. h. es sei

$$\alpha e^{\lambda x} = h(x).$$

Mit Hilfe der Variation der Konstanten soll eine partikuläre Lösung der oben gegebenen Differentialgleichung gesucht werden. In

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

wird der Ansatz

$$y = z e^{\lambda x},$$
$$y' = (z' + \lambda z)\, e^{\lambda x},$$
$$y'' = (z'' + 2\lambda z' + \lambda^2 z)\, e^{\lambda x}$$

eingesetzt. Das ergibt

$$(z'' + 2\lambda z' + \lambda^2 z + az' + a\lambda z + bz)\, e^{\lambda x} = h(x),$$
$$[z'' + z'(2\lambda + a) + z\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{0}]\, e^{\lambda x} = \alpha e^{\lambda x}.$$

Wird auf beiden Seiten durch $e^{\lambda x}$ dividiert, so erhält man die inhomogene Differentialgleichung

$$z'' + z'(2\lambda + a) = \alpha,$$

die sich nach Fall 3 durch den Ansatz $z' = a_0$, $z = a_0 x$ lösen läßt. Für den Resonanzfall ist somit als partikuläre Lösung

$$y = a_0 x e^{\lambda x}$$

anzusetzen.

Es wurden keinerlei Voraussetzungen für λ gemacht, der Ansatz kann also in jedem Falle angewandt werden.

Für den Fall der Resonanz lauten also die Ansätze:

1. Fall: $\quad y = a_0 x e^{nx},$

2. Fall: $\quad y = Ax \cos nx + Bx \sin nx.$

Lehrbeispiel 55

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y = e^{2x}$!

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' - 4y = 0 \qquad\qquad \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda = \pm 2$$

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}}$$

Inhomogene Gleichung:

Ansatz:

$$y = a_0 x e^{2x}$$
$$y' = a_0(1 + 2x)\, e^{2x};$$
$$y'' = a_0(4 + 4x)\, e^{2x}$$
$$y'' - 4y = a_0(4 + 4x - 4x)\, e^{2x} = e^{2x}$$
$$4a_0 = 1$$
$$a_0 = \frac{1}{4}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_i = \frac{1}{4} x e^{2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y = \left(C_1 + \frac{1}{4} x\right) e^{2x} + C_2 e^{\ 2x}}}$$

Lehrbeispiel 56

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + y = \cos x$*!*

Lösung:

Homogene Gleichung:

$$y'' + y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\underline{\underline{y_h = C \sin(x + \varphi)}}$$

Inhomogene Gleichung:

Auch hier ist wieder die Störungsfunktion in Resonanz, denn $\cos x$ ist schon Lösung der homogenen Gleichung.

Es ist also der Ansatz

$$y = Ax \cos x + Bx \sin x$$

anzuwenden. Setzen Sie diesen zusammen mit

$$y' = (A + Bx) \cos x + (-Ax + B) \sin x$$

und

$$y'' = (-Ax + 2B) \cos x + (-2A - Bx) \sin x$$

in die Differentialgleichung ein, so erhalten Sie

$$2B \cos x - 2A \sin x = \cos x.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Die partikuläre Lösung heißt also

$$y_i = \frac{1}{2} x \sin x.$$

In Verbindung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung erhalten Sie als allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$\underline{\underline{y = C \sin(x + \varphi) + \frac{x}{2} \sin x.}}$$

21.31 Gedämpfte, erzwungene Schwingung (allgemeines Ohmsches Gesetz für Wechselstrom). An einen elektrischen Schwingkreis, der in Reihenschaltung einen

Ohmschen Widerstand R, eine Spule mit der Selbstinduktion L und einen Kondensator mit der Kapazität C enthält, soll eine Wechselspannung

$$u = U_m \sin \omega t$$

angeschlossen werden (Bild 30).

Wie ist der zeitliche Verlauf des im Schwingkreis fließenden Stromes?

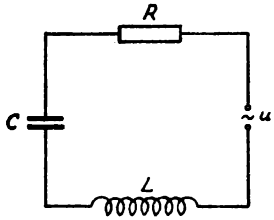


Bild 30

Die auftretenden Spannungen sind:

1. Spannungsabfall am Widerstand: $u_R = R i$
2. Gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion: $e_L = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
3. Spannungsabfall am Kondensator: $u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i \, \mathrm{d}t$
4. Angelegte Wechselspannung: $u = U_m \sin \omega t$

Zu 3.: Zur Zeit t_0 sei der Kondensator ohne Ladung, während er zur Zeit t die Ladung Q haben möge. Zwischen dem Spannungsunterschied u_C an den beiden Kondensatorplatten, der Kapazität C und der Ladung Q besteht die Beziehung

$$Q = C u_C.$$

Da nun andererseits der Ladestrom $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ist und dementsprechend

$$Q = \int_{t_0}^{t} i \, \mathrm{d}t,$$

ergibt sich für u_C

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i \, \mathrm{d}t.$$

Für den gesamten Schwingkreis besteht nun nach Kirchhoff die Gleichung

$$u + e_L = u_R + u_C$$

oder, nach Einsetzen von 1. bis 4. und Umordnung,

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R i + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i \, \mathrm{d}t = U_m \sin \omega t.$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich daraus die Differentialgleichung in der Form

$$L \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} i = \omega U_m \cos \omega t$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = \frac{\omega U_m}{L} \cos \omega t.$$

Fehlt das Glied mit $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, so liegt eine ungedämpfte, erzwungene Schwingung vor.

Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:
Die homogene Differentialgleichung ist Ihnen bereits als die einer freien, gedämpften Schwingung bekannt (vgl. Abschnitt 21.222):

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Es entsprechen einander folgende Größen:

$$i \triangleq x,$$

$$\frac{R}{L} \triangleq \frac{k}{m},$$

$$\frac{1}{LC} \triangleq \frac{c}{m}.$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

$$\lambda_{1;2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Es sind wieder die Ihnen bekannten 3 Fälle zu unterscheiden. Es ergeben sich als Lösungen entsprechende Ausdrücke wie bei der Behandlung der freien, gedämpften Schwingung. Für die weitere Behandlung des vorliegenden Problems können die Lösungen der homogenen Gleichung unberücksichtigt bleiben, da alle Erscheinungen, die diesen Lösungen entsprechen, infolge der Dämpfung abklingen. Das heißt, daß alle die Glieder in der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit zunehmender Zeit an Einfluß verlieren, die aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung resultieren.
Wir bestimmen lediglich die Frequenz des freien Schwingkreises unter der Voraussetzung, daß die Dämpfung genügend klein ist, um eine Schwingung zuzulassen. Die Schwingungsdauer ist nach den gewonnenen Erkenntnissen

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}, \qquad (\omega_0^2 - p^2 > 0)$$

wobei hier

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad p = \frac{R}{2L}$$

ist. Damit ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Ist $\frac{R^2 C}{4L} \ll 1$, so kann für

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$$

nach dem binomischen Lehrsatz näherungsweise

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx \sqrt{\frac{1}{LC}}\left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right)$$

gesetzt werden, so daß mit guter Näherung

$$T \approx \frac{2\pi\sqrt{LC}}{1-\frac{R^2C}{8L}} \quad \text{bzw.} \quad f \approx \frac{1-\frac{R^2C}{8L}}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ist.

Mitunter genügt sogar, unter Vernachlässigung von $\frac{R^2C}{8L}$, die Näherung

$$T \approx 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{bzw.} \quad f \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

Inhomogene Differentialgleichung:

Wird der Ansatz

$$i = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t$$

in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$\left(\frac{A}{LC} + \frac{\omega R B}{L} - \omega^2 A\right)\cos\omega t + \left(\frac{B}{LC} - \frac{\omega R A}{L} - \omega^2 B\right)\sin\omega t = \frac{\omega U_m}{L}\cos\omega t\,.$$

Damit der Ansatz die Differentialgleichung erfüllt, muß also

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)A + \frac{\omega R}{L}B = \frac{\omega U_m}{L}$$

und

$$-\frac{\omega R}{L}A + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)B = 0$$

sein. Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert

$$A = \frac{U_m\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}, \quad B = \frac{U_m R}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}\,.$$

Zur Umformung soll diesmal statt

$$\varphi_1 = \arctan\frac{A}{B} = \arctan\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$-\varphi_1 = \varphi = \arctan\frac{-A}{B} = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

gesetzt werden (vgl. Bild 31).

Mit $\qquad \varphi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad$ und $\quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

folgt als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

das „Ohmsche Gesetz für Wechselstrom".

Der Nenner ist der *Scheinwiderstand* des Schwingkreises, $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ sein *Blindwiderstand.*

Die Lösung kennzeichnet den stationären Zustand, der sich nach Abklingen des Einschaltvorganges (berücksichtigt in der Lösung der homogenen Gleichung) einstellt. Die angelegte Wechselspannung zwingt also den Kreis, in ihrer Frequenz bzw. Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ zu schwingen. Allerdings besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung um den Winkel φ. Die Amplitude des Stromes ist hier

$$J_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

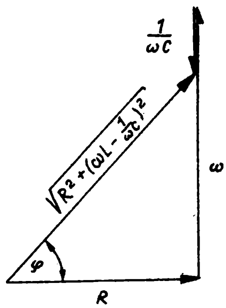


Bild 31

Übungen

34. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2$ *35.* $y'' + 4y' - 21y = e^{2x}$

36. $y'' + 4y' - 21y = e^{3x}$ *37.* $y'' + 9y' = \sin 3x$

38. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Anleitung zu Übung 38: Die partikuläre Lösung ist mit Hilfe der Variation der Konstanten herbeizuführen ($y = z\,e^{2x}$).

39. $y'' + 9y = \sin 3x$

Zusammenfassung

Bei der inhomogenen, linearen Differentialgleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

haben Sie zunächst drei besondere Formen der Störungsfunktion $h(x)$ kennengelernt. Steht $h(x)$ nicht in Resonanz mit der Eigenfunktion, ist also $h(x)$ nicht schon eine (partikuläre) Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so kann die Lösung mit Hilfe der entsprechenden Ansätze hergestellt werden. Die unbestimmten Koeffizienten im Ansatz lassen sich nach Einsetzen in die Differentialgleichung durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Steht dagegen $h(x)$ in Resonanz, so läßt sich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in vielen Fällen durch einen veränderten Ansatz oder grundsätzlich mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten finden.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und der gefundenen partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

21.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die bei den linearen Differentialgleichungen I. und II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten angewandten Lösungsmethoden lassen sich auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Es ist sinngemäß wie bei den linearen Differentialgleichungen II. Ordnung zu verfahren.

Lehrbeispiel 57

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 9y' - 5y = e^{3x}!$$

Lösung:

Homogene Gleichung: $\quad y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 5 = 0$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + i,\ \lambda_3 = 2 - i$$

Die Lösung der homogenen Gleichung heißt also

$$\underline{\underline{y_h = A e^x + e^{2x}(B\cos x + C\sin x).}}$$

Inhomogene Gleichung:

Entsprechend der Störungsfunktion $f(x) = e^{3x}$ machen Sie den Ansatz

$$y = A e^{3x}.$$

Es ist

$$y' = 3A e^{3x},$$

$$y'' = 9A e^{3x},$$

$$y''' = 27A e^{3x}.$$

Dies in die inhomogene Gleichung eingesetzt ergibt

$$e^{3x}(27A - 45A + 27A - 5A) = e^{3x}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$A = \frac{1}{4}.$$

Es ist also

$$\underline{\underline{y_i = \frac{1}{4} e^{3x}}}$$

Damit heißt die allgemeine Lösung

$$\underline{\underline{y = y_h + y_i = A e^x + e^{2x}(B\cos x + C\sin x) + \frac{1}{4} e^{3x}.}}$$

Lehrbeispiel 58

Die Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

ist zu lösen!

Lösung:

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

Es liegt eine dreifache Wurzel vor. Bei einer Differentialgleichung II. Ordnung, deren charakteristische Gleichung eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ aufweist, heißt die Lösung $y = (A + Bx)\,e^{ax}$. Ganz entsprechend lautet hier die Lösung (es müssen 3 Integrationskonstante auftreten!):

$$\underline{\underline{y = (A + Bx + Cx^2)\,e^{2x}.}}$$

Machen Sie die Probe!

21.5 Übungen zu den Kapiteln 20 und 21

Um Ihnen die Möglichkeit zu geben, Ihre erworbenen Kenntnisse weiter zu festigen und zu vertiefen, folgt nun noch eine Anzahl von Differentialgleichungen, die Sie mit Hilfe der in diesem Lehrbrief behandelten Lösungsverfahren lösen können.

40. Zeigen Sie, daß die angegebenen Funktionen Lösungen der danebenstehenden Differentialgleichungen sind!

a) $y = x^3 + 2x^2 + 4$ *für* $x \cdot y'' - y' = 3x^2$

b) $y = \ln x + x^2$ *für* $x^2 y'' - xy' + 2 = 0$

c) $y = \sin x$ *für* $y'^2 + y^2 - 1 = 0$

d) $y = e^x \sin x$ *für* $y'' - 2y' + 2y = 0$

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen!

41. $y'^2 + y^2 = 1$

42. $ay' - by = 0$

43. $y' \sinh y - 2 \tanh y = 0$

44. $yy' + x = 0$

45. $y' + 2xy = y$

46. $xy' + y = x^2 + 3x + 2$

47. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

48. $y' - 2y = e^x$

49. $y' - y \tan x + \sin x = 0$

50. $y' + y \sinh x = \sinh x \cosh x$

51. $y' + ay = b \cos \omega x$

52. $xy' + y = \ln x$

53. $y' \cos x - y^2 \cot^2 x = 0$

54. $y'' - y = 0$

55. $y'' - 7y' + 12y = 0$

56. $y'' - 10y' + 34y = 0$

57. $y''' + 2y'' + 5y' = 0$

58. $y'' + 12y' + 36y = 0$

59. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

60. $y'''' - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

61. $y'' + y = x^2$

62. $y'' + y = e^{5x}$

63. $y'' + y = x^2 + e^{5x} + \cos 2x$

64. $y'' + y = e^x + e^{2x}$

65. $y''' + y = x^4 - x$

22 Die geradlinige Bewegung

In den folgenden Betrachtungen sollen Sie die *7 Fundamentalfälle der geradlinigen Bewegung* kennenlernen.

1. $s = s(t)$

Gegeben ist die Funktion $s = s(t)$, die die Lage eines geradlinig bewegten Punktes in Abhängigkeit von der Zeit t angibt.

Es lassen sich daraus sofort durch Differentiation berechnen:

Geschwindigkeit $\quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad$ als Funktion der Zeit $v = v(t)$,

Beschleunigung $\quad b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \quad$ als Funktion der Zeit $b = b(t)$.

2. $t = t(s)$

In diesem seltener vorkommenden Fall ist die Umkehrfunktion zu der Funktion im Fall 1 gegeben.
Dieser Erkenntnis entsprechend folgt

Geschwindigkeit $\quad v = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}} \quad$ als Funktion der Lage $v = v(s)$,

Beschleunigung $\quad b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} v \quad$ als $b = b(s)$.

3. $v = v(t)$

Im Hinblick auf Fall 1 ergibt sich hier, wenn s_0 die Lage des Punktes zur Zeit t_0 angibt:

Lage $\quad s = s_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \quad$ als $s = s(t)$,

Beschleunigung $\quad b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad$ als $b = b(t)$.

4. $v = v(s)$

Die Beschleunigung kann nach den Überlegungen im Fall 2 behandelt werden. Es ist

Beschleunigung $\quad b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} v \quad$ als $b = b(s)$.

Zur Berechnung von Lage bzw. Zeit ist zu bedenken, daß $v = v(s) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ist. Durch Trennung der Veränderlichen wird $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$.

Zeit $\quad t = t_0 + \int\limits_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v(s)} \quad$ als $t = t(s)$,

und daraus durch Bilden der Umkehrfunktion die Lage s als Funktion der Zeit t.

5. $b = b(t)$

Dieser Fall stellt lediglich die Umkehrung des Falles 1 dar. Hier ergeben sich durch Integration

Geschwindigkeit $$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{als } v = v(t),$$

Lage $$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{als } s = s(t),$$

$$= s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} b(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t.$$

6. $b = b(s)$

In diesem überaus wichtigen Fall ist für jeden Ort der Bewegung die dort auftretende Beschleunigung bekannt.

Nun ist

$$b = b(s) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,v.$$

In $b(s) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,v$ können die Veränderlichen getrennt werden:

$$v\,\mathrm{d}v = b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Es folgt $$\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = \int_{s_0}^{s} b(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} b(s)\,\mathrm{d}s$$

und schließlich

Geschwindigkeit $$v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} b(s)\,\mathrm{d}s} \qquad \text{als } v = v(s).$$

Da nun andererseits $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ist, ergibt sich daraus nach Fall 4

Zeit $$t = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$$

$$= t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} b(s)\,\mathrm{d}s}} \qquad \text{als } t = t(s).$$

7. $b = b(v)$

Hierbei folgt aus

$$b = b(v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,v$$

durch Trennung der Veränderlichen

$$\mathrm{d}s = \frac{v}{b(v)}\,\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{b(v)}$$

und nach Integration

Lage $$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{b(v)}\,\mathrm{d}v \qquad \text{als } s = s(v).$$

Zeit $$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{b(v)} \qquad \text{als } t = t(v).$$

Aus $t = t(v)$ läßt sich die Umkehrfunktion $v = v(t)$ bilden. Wird diese in $s = s(v)$ eingesetzt, so erhält man $s = s(t)$.

Zusammenfassung:

Ist gegeben,	dann ist	
1. $s = s(t)$	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	$b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$
2. $t = t(s)$	$v = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}}$	$b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,v$
3. $v = v(t)$	$s = s_0 + \int_{t_0} v\,\mathrm{d}t$	$b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
4. $v = v(s)$	$t = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v}$	$b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,v$
5. $b = b(t)$	$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} b\,\mathrm{d}t$	$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t$
6. $b = b(s)$	$v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} b\,\mathrm{d}s}$	$t = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v}$
7. $b = b(v)$	$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{b}\,\mathrm{d}v$	$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{b}$

Einige Beispiele zu diesen Grundaufgaben haben Sie bereits kennengelernt. So kennen Sie aus der Differentialrechnung die Behandlung des freien Falles nach Fall 1. Weiterhin haben Sie die Umkehrung dazu, also Fall 5, im Abschnitt 21.11 dieses Lehrbriefes durchgerechnet. Fall 7 finden Sie im Lehrbeispiel 34.

Lehrbeispiel 59

Aus der Physik ist Ihnen die Formel $v = \sqrt{2gs}$ für die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers bekannt. Es sind durchfallene Höhe s als Funktion der Zeit t und die Beschleunigung zu berechnen, wenn $t_0 = 0$ und $s_0 = 0$ sind.

Lösung:

Es liegt Fall 4 vor. Danach ist

$$t=\int\limits_{s_0=0}^{s}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gs}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_{0}^{s}s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s=\frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{2g}}.$$

Lösen Sie nach s auf, dann erhalten Sie das bekannte Fallgesetz

$$\underline{\underline{s=\frac{1}{2}gt^2.}}$$

Für die Beschleunigung folgt

$$b=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}v, \qquad /\ v=\sqrt{2gs},\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{g}{\sqrt{2gs}}$$

$$b=\frac{g}{\sqrt{2gs}}\sqrt{2gs},$$

$$\underline{\underline{b=g.}}$$

Lehrbeispiel 60

Am Ende einer (gewichtslosen) Schraubenfeder befinde sich ein Körper mit der Masse m. Eine Kraft P_{max} drücke die Feder um s_{max} zusammen. In welcher Zeit

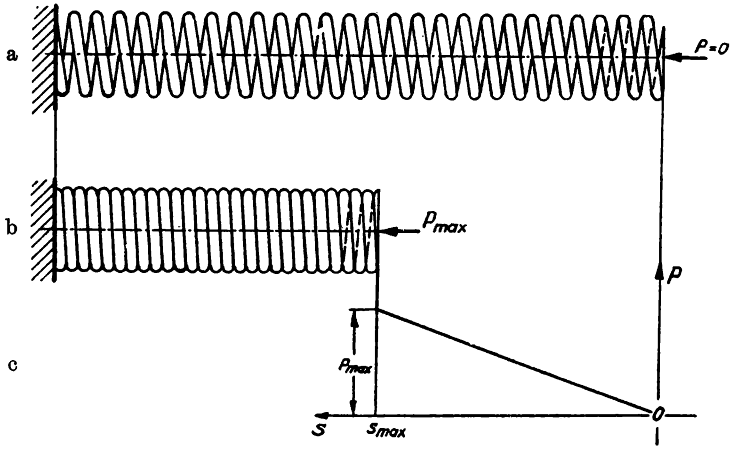


Bild 32

entspannt sich die Feder bis zu einer beliebigen Zusammendrückung $s < s_{max}$, in der sie durch eine Kraft $P < P_{max}$ festgehalten wird? Von Reibungsverlusten ist abzusehen.

Lösung:

In Bild 32a ist die Feder in entspanntem Zustand gezeichnet, während Bild 32b die maximal zusammengedrückte Feder darstellt. Im Diagramm 32c ist zu jeder Stellung der Feder die zum Festhalten nötige Kraft angegeben.

Die Feder entspannt sich mit der Kraft $P = -cs$. Dabei soll das Minuszeichen andeuten, daß die Kraft in Richtung abnehmender Werte s wirkt. Die Federkonstante c errechnet sich aus

$$c = \frac{P_{max}}{s_{max}}.$$

Bei der Entspannung der Feder erfährt die Masse m die Beschleunigung b. Nach Newton besteht zwischen diesen beiden Größen und der beschleunigenden Kraft der Feder der Zusammenhang:

$$mb = P$$

oder

$$b = \frac{P}{m} = -\frac{c}{m}s.$$

Setzen Sie noch zur Abkürzung

$$\frac{c}{m} = \omega^2,$$

so erhalten Sie in

$$b = -\omega^2 s,$$

ein Beispiel für den Fall 6.

Ermittlung der Geschwindigkeit:

Die Anfangsgeschwindigkeit ist im vorliegenden Fall $v_0 = 0$.

Damit ist

$$v = \sqrt{2\int_{s_{max}}^{s} b\,\mathrm{d}s} = \sqrt{-2\omega^2 \int_{s_{max}}^{s} s\,\mathrm{d}s}$$

und, da $s_{max} > s$, nach Umkehrung der Grenzen

$$v = \omega\sqrt{2\int_{s}^{s_{max}} s\,\mathrm{d}s} = \omega\sqrt{2\left(\frac{s^2_{max}}{2} - \frac{s^2}{2}\right)} = \underline{\underline{\omega\sqrt{s^2_{max} - s^2}}} \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\right).$$

Ermittlung der Zeit:

Die Zeit soll vom Beginn der Bewegung an gezählt werden, es ist also $t_0 = 0$. Da mit zunehmender Zeit t die Zusammendrückung abnimmt, ist zu setzen

$$t = -\int_{s_{max}}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v} = -\frac{1}{\omega}\int_{s_{max}}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2_{max} - s^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega} \arccos \frac{s}{s_{max}}\Bigg|_{s_{max}}^{s},$$

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\arccos \frac{s}{s_{max}} - \arccos 1\right), \qquad (\arccos 1 = 0)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{s}{s_{max}}.}}$$

Hier ist die Wahl der Stammfunktion in der Form arc cos $\frac{s}{s_{max}}$ günstiger als in der Form arc sin $\frac{s}{s_{max}}$, da sich damit an der unteren Grenze der Wert arc cos 1 = 0 ergibt. Für den Fall der völligen Entspannung der Feder ergibt sich mit $s = 0$

$$v = \omega s_{max}, \quad t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,cos} 0 = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Wie Sie aus der Erfahrung wissen, beendet die Feder nicht mit Erreichen der entspannten Lage ihre Bewegung, sondern führt eine (mehr oder weniger gedämpfte) Schwingung um diese Lage aus. Diese Schwingung soll noch kurz untersucht werden.

Aus

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,cos} \frac{s}{s_{max}}$$

folgt

$$\frac{s}{s_{max}} = \cos \omega t, \quad s = s_{max} \cos \omega t.$$

Aus dieser Formel erkennen Sie, daß die Feder im reibungsfreien Fall eine harmonische Schwingung ausführt. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung ist

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

während die Amplitude mit der ursprünglichen Zusammendrückung s_{max} identisch ist. Vergleichen Sie hierzu das Beispiel der freien, ungedämpften Schwingung in 21.221.

Zusammenfassung

Im Kapitel 22 wurden die 7 Fundamentalfälle der geradlinigen Bewegung behandelt. In der Zusammenstellung finden Sie, wie in den einzelnen Fällen durch Differentiation bzw. Integration die fehlenden Größen aus der gegebenen Abhängigkeit zu berechnen sind. Beim Ansatz haben Sie stets eine Überlegung über die Wahl der Integrationsgrenzen, Integrationskonstanten und evtl. Vorzeichen anzustellen.

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

1. $\cos 4° = 1 - \frac{16 \cdot 0{,}0003046}{2} + \frac{64 \cdot 0{,}0000001}{24} - + \cdots$

$$\approx 1 - 0{,}002437 = 0{,}99756$$

2. $$a_{n-1} = \frac{1}{(2n-1)!}, \quad a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{(2n-1)!} = 2n(2n+1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} 2n(2n+1) = \infty$$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

3. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \cdots$ für $|x| < \infty$

4. $e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots$

5. $\ln 3 = 1{,}0986$

6. $\sqrt[5]{1000} = 4\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128} - \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \cdots\right] = 3{,}9811$

7. $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{9} + \frac{14x^6}{81} + \frac{35x^8}{243} + \cdots\right)dx$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} + \frac{2x^7}{81} + \frac{35x^9}{2187} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0{,}5 + 0{,}01389 + 0{,}00139 + 0{,}00019 + 0{,}00003$$

$$\underline{\underline{= 0{,}5155}}$$

8. $\int\limits_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln x - \frac{x^2-1}{2\cdot 2!} + \frac{x^4-1}{4\cdot 4!} - + \cdots$

9. $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2 e^{-t^2}\,dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5\cdot 1!} + \frac{t^7}{7\cdot 2!} - \frac{t^9}{9\cdot 3!} + - \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5\cdot 2^2\cdot 1!} + \frac{1}{7\cdot 2^4\cdot 2!} - \frac{1}{9\cdot 2^6\cdot 3!} + - \cdots\right) \approx 0{,}0360$$

10. a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } 0 \leqq x \leqq \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } \pi \leqq x \leqq 2\pi \end{cases}$

Ungerade Funktion (Bild 33)

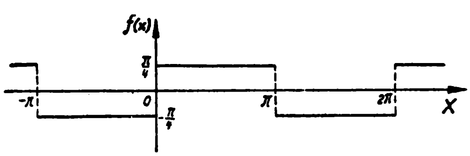


Bild 33

$a_0 = 0;\quad a_n = 0;\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\sin nx\,dx$

daraus $b_n = 0$ für geradzahliges n

$b_n = \frac{1}{n}$ für ungeradzahliges n

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

b) Gerade Funktion (Bild 34)

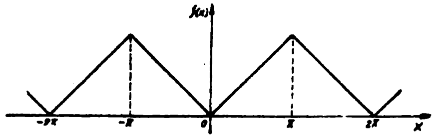


Bild 34

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(x\,\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für geradzahliges } n \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{für ungeradzahliges } n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

c) Ungerade Funktion (Bild 35)

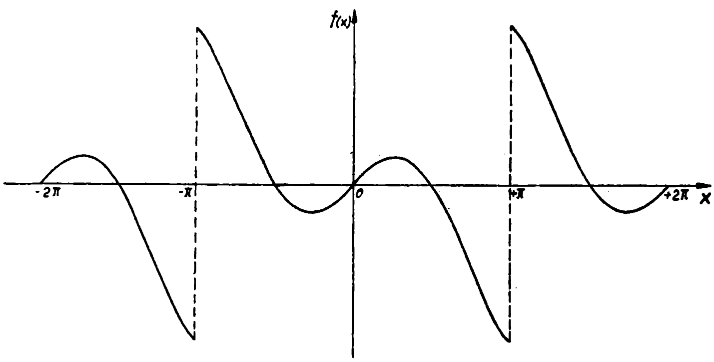


Bild 35

$$a_0 = 0; \qquad a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{2n}{n^2-1} \qquad \text{für } n = 2, 3, \cdots$$

Für $n = 1$ ergibt sich $b_1 = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin n x$$

11. Aus dem Rechenschema entnehmen Sie die Werte

$v_0 = 61{,}5$	$v_3 = 6{,}3$	
$r_0 = 37{,}4$	$p_1 = -17{,}9$	$p_2 = 0{,}2$
$s_0 = -7{,}6$	$s_1 = 96{,}1$	$s_2 = 56{,}6$
$l = 21{,}1$	$d = -91{,}3$	
$m = -11{,}7$	$h = 21{,}5$	

mit denen Sie die Koeffizienten berechnen zu

$a_0 = 4{,}88$	$a_4 = 4{,}48$	$b_2 = -13{,}18$
$a_1 = 28{,}84$	$a_5 = 1{,}10$	$b_3 = -4{,}03$
$a_2 = -2{,}24$	$a_6 = 0{,}34$	$b_4 = 3{,}10$
$a_3 = 0{,}82$	$b_1 = -0{,}41$	$b_5 = -0{,}47$

Die gesuchte Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned} y \approx\ & 4{,}88 + 28{,}84\cos x - 2{,}24\cos 2x + 0{,}82\cos 3x + 4{,}48\cos 4x \\ & + 1{,}10\cos 5x + 0{,}34\cos 6x - 0{,}41\sin x - 13{,}18\sin 2x \\ & - 4{,}03\sin 3x + 3{,}10\sin 4x - 0{,}47\sin 5x \end{aligned}$$

12. $y = Cx$

Jedem Punkt der Ebene ist die Richtung des zu diesem Punkt gehörigen Radiusvektors zugeordnet.

Lösungskurven sind alle Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

13. $ax^2 - by^2 = C$ (Hyperbelschar)
14. $y = C e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}$
15. $7x^2 - 4x - 3y^2 = C$
16. $3y^2 - 2x^3 - 18x = C$
17. $\cos x + \cos y = C$ $(|C| \leqq 2)$
18. $y = \tan(x + C) - x$
19. $y = x \arcsin Cx$
20. $x^2 + 5xy - y^2 = C$
21. $y - x = C e^{\frac{x}{y-x}}$
22. siehe Lösung Lehrbeispiel 40.
23. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + C e^{-x}$
24. $y = \frac{C}{x^2} + x$
25. $y = C e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$
26. $y = \frac{C}{x} - \cos x + \frac{\sin x}{x}$
27. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$
28. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$
29. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$
30. $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

31. $y = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) = C e^{-2x}\sin(3x + \varphi)$

32. $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x) = C e^{x}\sin(x + \varphi)$

33. $y = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}$

34. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} - x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{19}{50}$

35. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{9}e^{2x}$

36. $y = \left(C_1 + \frac{1}{10}x\right)e^{3x} + C_2 e^{-7x}$

37. $y = C_1 + C_2 e^{-9x} - \frac{1}{30}\cos 3x - \frac{1}{90}\sin 3x$

38. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2\right)e^{2x}$

39. $y = C\sin(3x + \varphi) - \frac{1}{6}x\cos 3x$

40. Die angegebenen Funktionen erfüllen alle die zugehörigen Differentialgleichungen.

41. $y = \sin(x + C)$

42. $y = C e^{\frac{b}{a}x}$

43. $y = \operatorname{ar\,sinh}(2x + C)$

44. $y = \sqrt{C - x^2}$ oder $x^2 + y^2 = C$

45. $y = C e^{x - x^2}$

46. $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}$

47. $y = (x + C)e^{-\sin x}$

48. $y = C e^{2x} - e^{x}$

49. $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{C}{\cos x}$

50. $y = \cosh x - 1 + C e^{-\cosh x}$

51. $y = \frac{b}{a^2 + \omega^2}(\omega\sin\omega x + a\cos\omega x) + C e^{-ax}$

52. $y = \frac{C}{x} - 1 + \ln x$

53. $y = \frac{\sin x}{1 + C\sin x}$

54. $y = A e^{x} + B e^{-x}$

55. $y = A e^{3x} + B e^{4x}$

56. $y = e^{5x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

57. $y = A + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

58. $y = (A + Bx)e^{-6x}$

59. $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x}$

60. $y = (A + Bx)e^{x} + C\cos x + D\sin x$

61. $y = x^2 - 2 + A\cos x + B\sin x$

62. $y = \frac{1}{26}e^{5x} + A\cos x + B\sin x$

63. $y = x^2 - 2 + \frac{1}{26}e^{5x} - \frac{1}{3}\cos 2x + A\cos x + B\sin x$

64. $y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{5}e^{2x} + A\cos x + B\sin x$

65. $y = x^4 - 25x + A e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$