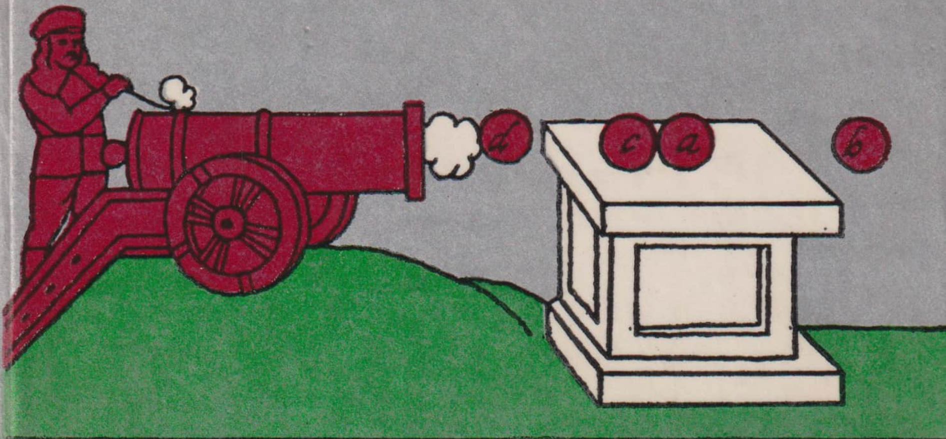
Physik für alle Band 1

L. D. Landau, A. I. Kitaigorodski



PHYSIKALISCHE KÖRPER

Physik für alle Band 1

L. D. Landau
A. I. Kitaigorodski

PHYSIKALISCHE KÖRPER

Verlag MIR Moskau
Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin

Titel der Originalausgabe:

Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский
«Физика для всех»
Издательство «Наука», Москва 1978 г.

Aus dem Russischen übersetzt und für die deutsche Ausgabe wissenschaftlich bearbeitet von Leo Korniljew

Gemeinschaftsausgabe des Verlages MIR Moskau
und des Urania-Verlages Leipzig/Jena/Berlin

1. Auflage
VLN 212-475/11/81 · LSV 110 9
Einband und Schutzumschlag: I. Krawzow
Satz und Druck: UdSSR
Best.-Nr.: 653 666 0
DDR 9,— M

Vorwort zur vierten Auflage

Nach vielen Jahren faßte ich den Entschluß, mich wieder dem nicht abgeschlossenen Buch „Physik für alle“ zuzuwenden, das von „Dau“ und mir verfaßt worden ist; „Dau“ — so nannten seine Freunde den hervorragenden Gelehrten, Akademiemitglied L. D. Landau, einen Menschen, von dem ein ungewöhnlicher Zauber ausging.

Das Buch war ein wirklich sehr „gemeinsames“ Werk. Lange Zeit fiel es mir schwer, an seine Fortsetzung zu denken. Viele Leser haben mir das in ihren Briefen zum Vorwurf gemacht. Nun aber stelle ich mich ihrem Urteil mit der Neuauflage der „Physik für alle“, die in vier nicht allzu umfangreiche Bände gegliedert ist. Ich nannte sie: „Physikalische Körper“, „Moleküle“, „Elektronen“ und „Photonen und Kerne“. Diese Gliederung erfolgte sozusagen nach Maßgabe des Vordringens in die Struktur des Stoffs. Diese vier Bände umfassen alle Grundgesetze der Physik. Vielleicht wäre es sinnvoll, die „Physik für alle“ fortzusetzen und spätere Auflagen dem Fundament der verschiedenen Bereiche von Naturwissenschaft und Technik zu widmen.

Die ersten beiden Bände stellen nichts anderes dar als das nur unwesentlich überarbeitete, allerdings hier und da beträchtlich ergänzte Buch in seiner früheren Fassung. Die letzten beiden Bände habe ich verfaßt.

Ich bin mir klar darüber, daß dem aufmerksamen Leser der Unterschied zwischen ihnen bewußt werden wird. Die allgemeinen Prinzipien freilich, an die sich Dau und ich bei der Darstellung des Materials hielten, wurden beibehalten. Es handelt sich um die deduktive Darstellung, um die Verfolgung der Logik des Gegenstandes, nicht um seine Entwicklungsgeschichte. Wir haben es für zweckmäßig gehalten, mit unserem Leser in einfache Alltagssprache zu reden und auch den Humor nicht zu scheuen. Und noch eins: Wir haben den Leser nicht geschont. Wer dieses Buch verstehen will, wird viele Seiten nicht nur ein- oder zweimal, sondern noch öfter lesen und das Gelesene dann gründlich durchdenken müssen.

Was nun den Unterschied zwischen der neuen und der alten Ausgabe betrifft, so besteht er in folgendem. Als das vorangegangene Werk geschrieben wurde, behandelten es seine Verfasser als „erstes" Buch über die Physik, meinten sogar, es könne mit einem Lehrbuch für die Schule konkurrieren. Die Meinungsäußerungen der Leser und die Erfahrung von Physiklehrern allerdings zeigten, daß es sich nicht so verhält. Die Leser des Buches waren Lehrer, Ingenieure und Schüler, die die Physik als Beruf ergreifen wollten. Es zeigte sich, daß niemand die „Physik für alle" als ein Lehrbuch ansah. Man betrachtete es als eine populärwissenschaftliche Schrift, die das Schulwissen erweitert und die Aufmerksamkeit nicht selten auf Dinge lenkt, die, aus welchen Gründen auch immer, nicht im Lehrplan stehen.

Von der Voraussetzung ausgehend, daß meine Leser die Physik bereits mehr oder weniger gut kennen, fühlte ich mich naturgemäß freier in der Themenwahl und hielt es für möglich, dem Werk ausgeprägter als bisher die Form einer Unterhaltung, eines Gesprächs, zu geben.

Der Text des ersten Bandes wurde nur geringfügig geändert. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die erste Hälfte der „Physik für alle" von L. D. Landau und A. I. Kitaigorodski.

Da diese Unterhaltung über die Physik mit jenen Erscheinungen beginnt, die keine Kenntnisse über die Struktur des Stoffs erfordern, war es nur natürlich, den ersten Band „Physikalische Körper" zu nennen. Natürlich hätte man diesen Seiten, wie allgemein üblich, den Titel „Mechanik", d. h. Bewegungslehre, verleihen können. Doch die Wärmelehre, von der im folgenden Band die Rede sein wird, ist ebenfalls eine Bewegungslehre, nur daß sie die Bewegung von Körpern behandelt, die das Auge nicht wahrzunehmen vermag: Es sind die Moleküle und Atome. Darum halte ich die von mir gewählte Bezeichnung für glücklicher.

Das erste Buch behandelt hauptsächlich die Bewegungsgesetze und die Gravitation, die für immer das Fundament der Physik und damit der Naturwissenschaft insgesamt bleiben werden.

September 1977

A. I. Kitaigorodski

Inhalt

I. Grundbegriffe

Von Zentimeter und Sekunde

Jeder von uns muß gelegentlich eine Länge oder einen Zeitabschnitt messen bzw. die Masse von Körpern bestimmen. Darum wissen wir alle auch recht gut, was ein Zentimeter, eine Sekunde oder ein Gramm ist. Doch für den Physiker sind diese Messungen besonders wichtig, und zwar zur Beurteilung der meisten physikalischen Erscheinungen. Wir sind bemüht, Entfernungen, Zeitintervalle und Massen, die sogenannten Grundbegriffe in der Physik, möglichst genau zu messen.

Moderne physikalische Geräte erlauben es, einen Längenunterschied zweier 1-m-Stäbe selbst dann festzustellen, wenn er kleiner ist als ein Milliardstel eines Meters. Man kann Zeitabschnitte unterscheiden, wenn sie um eine Millionstelsekunde voneinander verschieden sind. Mit einer guten Waage kann man die Masse eines Mohnkorns mit sehr großer Genauigkeit bestimmen.

Die Entwicklung der Meßtechnik setzte vor nur einigen hundert Jahren ein, und es ist noch gar nicht so sehr lange her, daß man sich darüber einigte, welchen Längenabschnitt und die Masse welchen Körpers man als Einheit wählen wollte.

Warum eigentlich wurden das Zentimeter und die Sekunde gerade so gewählt, wie wir sie kennen? Klar ist doch, daß es keine besondere Bedeutung hätte, wenn das Zentimeter oder die Sekunde länger wären.

Eine Maßeinheit muß bequem sein — andere Forderungen stellen wir nicht. Sehr günstig ist es auch, wenn wir die Maßeinheit zur Hand haben. Und am einfachsten ist es, die Hand selbst als Maßeinheit zu nehmen. Genau so verfuhr man auch in alten Zeiten; dies zeigen uns die Namen solcher Einheiten wie etwa die „Elle“, d. h. die Entfernung vom Ellbogen bis zu den Fingerenden der ausgestreckten Hand, oder das Zoll, womit die Daumenbreite am Ansatz des Daumens gemeint war. Auch der Fuß wurde zur Messung benutzt, und von hier rührt die Längeneinheit „foot“ her.

Obwohl diese Maßeinheiten sehr bequem sind, weil man sie stets mit sich führt, sind auch ihre Mängel offenkundig: Die Menschen unterscheiden sich gar zu sehr voneinander, als daß die Hand oder der Fuß unbestritten als Maßeinheit gelten könnten.

Mit der Entwicklung des Handels entstand die Notwendigkeit, eine Vereinbarung über die Maßeinheiten zu treffen. Anfangs wurden Längen- und Massenetalons nur für einen bestimmten Markt, später für eine Stadt, noch später für das ganze Land und schließlich für die ganze Welt festgelegt. Ein Etalon war die Verkörperung einer Einheit (ihr Prototyp): etwa ein Anlegemaßstab oder ein Wägestück. Der Staat bewahrte die Etalons sorgfältig auf, und alle anderen Maßstäbe und Wägestücke müssen in genauer Übereinstimmung mit den Eichmaßen gefertigt werden.

Im zaristischen Rußland wurden Urmaße für die Masse und die Länge — Pfund und Arschin — erstmals im Jahre 1747 angefertigt. Im 19. Jahrhundert hatten die Forderungen an die Meßgenauigkeit zugenommen, und diese Etalons erwiesen sich als ungenügend. Eine sehr komplizierte und verantwortungsvolle Arbeit zur Entwicklung genauer Mustermaße wurde in den Jahren 1893 bis 1898 unter der Leitung von Dmitri Mendelejew durchgeführt. Dieser bedeutende Chemiker legte großes Gewicht auf die Festlegung genauer Maße. Auf seine Initiative hin wurde Ende des 19. Jahrhunderts die Große Kammer für Maße und Gewichte geschaffen, in der die

Etalons aufbewahrt und Kopien von ihnen hergestellt wurden.

Entfernungen werden einmal in großen und ein anderes Mal in kleineren Einheiten ausgedrückt. Schließlich werden wir die Entfernung von Moskau nach Leningrad nicht in Zentimetern und die Masse eines Zuges nicht in Gramm angeben. Darum einigte man sich auf ein bestimmtes Verhältnis zwischen großen und kleinen Einheiten. Wie jedermann weiß, unterscheiden sich die großen Einheiten von den kleinen um den Faktor 10, 100, 1000 bzw. generell um Zehnerpotenzen. Diese Vereinbarung ist sehr bequem und vereinfacht alle erforderlichen Berechnungen. Aber nicht alle Länder verfügen über ein so bequemes System. In England und den USA benutzt man bis zum heutigen Tag das Meter, Zentimeter und Kilometer sowie auch das Gramm und das Kilogramm* nur verhältnismäßig selten, ungeachtet der offenkundigen Vorzüge des metrischen Systems.

Im 17. Jahrhundert kam der Gedanke auf, ein Etalon zu schaffen, das in der Natur existiert und sich in Jahren und Jahrhunderten nicht verändert. 1664 schlug Christian Huygens vor, als Längeneinheit die Länge eines Pendels zu wählen, das eine Schwingung je Sekunde ausführt. Rund hundert Jahre später, nämlich 1771, wurde als Längenetalon der Weg vorgeschlagen, den ein frei fallender Körper innerhalb einer Sekunde zurücklegt. Es bedurfte der Großen Französischen Revolution, um die

---

* In England gelten offiziell folgende Längenmaße: Die Seemeile (1852 m), die Landmeile (1609 m) und das foot (30,5 cm); ein foot ist gleich 12 Zoll und ein Zoll gleich 2,54 cm; ein Yard schließlich entspricht 0,91 m. Dies ist ein „Schneidermaß“; es ist üblich, die Länge der für einen Anzug erforderlichen Stoffbahn in Yards anzugeben.
Die Masse wird in den angelsächsischen Ländern in Pfund (454 g) gemessen. Bruchteile des Pfunds sind die Unze (1/16 Pfund) und das Gran (1/7000 Pfund); diese Maße verwenden die Apotheker beim Auswiegen der Arzneien.

heute üblichen Maße, das Kilogramm und das Meter, hervorzubringen.

1790 berief die Gesetzgebende Versammlung eine Sonderkommission ein, um einheitliche Maße zu schaffen. Ihre Mitglieder waren hervorragende Physiker und Mathematiker. Unter sämtlichen vorgeschlagenen Varianten wählte die Kommission als Längeneinheit den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten und gab dieser Einheit die Bezeichnung „Meter". 1799 wurde das Meter-Etalon* angefertigt und dem Conservatoire des arts et métiers zur Aufbewahrung übergeben.

Bald wurde jedoch klar, daß der im abstrakten Sinn richtige Gedanke von der Zweckmäßigkeit, bei der Natur entlehnte Urmaße zu wählen, nicht vollständig realisierbar ist. Im 19. Jahrhundert durchgeführte genauere Messungen zeigten, daß das seinerzeit angefertigte Urmeter um etwa 0,08 mm kürzer ist als der vierzigmillionste Teil des Erdmeridians. Auch war ganz offensichtlich, daß sich mit der Weiterentwicklung der Meßtechnik immer neue Korrekturen ergeben würden. Hätte man die Definition des Meters als eines bestimmten Teils des Erdmeridians beibehalten wollen, so hätte man folgerichtig auch nach jeder neuen Vermessung des Meridians neue Urmaße anfertigen und sämtliche Längen neu berechnen müssen. Darum beschloß man nach internationalen Konferenzen von 1870, 1872 und 1875, nicht den vierzigmillionsten Teil des Meridians als Längeneinheit anzusehen, sondern jenes 1799 angefertigte Urmeter, das heute im Bureau International des Poids et Mesures in Sèvres aufbewahrt wird.

Gemeinsam mit dem Meter entstanden auch seine Bruchteile; ein tausendstel Meter: das Millimeter und ein hundertstel Meter: das Zentimeter.

---

* Dieses Meter-Etalon wurde später als „mètre des Archives" bezeichnet.

Nun einige Worte zur Sekunde. Sie ist ungleich viel älter als das Zentimeter. Bei Festlegung der Maßeinheit für die Zeitmessung hat es keinerlei Diskrepanzen gegeben, denn der Wechsel von Tag und Nacht, der ewige Kreislauf der Sonne suggerieren uns den natürlichen Weg zur Wahl der Zeiteinheit. Jeder weiß, was gemeint ist, wenn man von der „Zeitbestimmung nach dem Sonnenstand" spricht. Steht die Sonne hoch am Himmel, dann haben wir Mittag, und wenn man die Schattenlänge eines Stabes zu Hilfe nimmt, so kann man auch ganz leicht den Augenblick ermitteln, in dem sich die Sonne im höchsten Punkt befindet. Am nächsten Tag kann man nach dem gleichen Verfahren eben diesen Augenblick feststellen. Der abgelaufene Zeitabschnitt umfaßt somit einen Tag und eine Nacht, und man braucht ihn nur noch in Stunden, Minuten und Sekunden zu unterteilen.

Die großen Maßeinheiten — das Jahr und den Tag — gab uns die Natur selbst. Doch Stunde, Minute und Sekunde wurden vom Menschen erdacht.

Die Einteilung des Tages in 24 Stunden, wie wir sie heute kennen, reicht in das tiefe Altertum zurück. In Babylon war nicht das Dezimalsystem, sondern ein Duodezimalsystem üblich. Die Sechzig läßt sich durch 12 teilen, und daher rührt die Teilung des Tages in zwölf gleiche Teile bei den Babyloniern.

Im alten Ägypten wurde dann die Tageseinteilung in 24 Stunden eingeführt. Später kamen die Minuten und Sekunden dazu. Daß die Stunde 60 Minuten und die Minute 60 Sekunden umfaßt, ist ebenfalls ein Erbe des Duodezimalsystems von Babylon.

Im Altertum und im Mittelalter wurde die Zeit mittels Sonnenuhren, Wasseruhren (d. h. anhand des Auslaufens von Wasser aus großen Gefäßen) sowie mit Hilfe anderer ausgeklügelter, aber höchst ungenauer Vorrichtungen gemessen.

Anhand moderner Uhren kann man sich leicht davon überzeugen, daß der Tag während der verschiedenen Zeiten des Jahres nicht immer gleich lang ist. Deshalb kam man überein, als Maßeinheit der Zeit den mittleren Sonnentag festzulegen. Ein Vierundzwanzigstel dieses über das Jahr gemittelten Zeitabschnitts heißt nun Stunde.

Indem wir jedoch die Zeiteinheiten — Stunde, Minute und Sekunde — durch Unterteilung des Tages in gleiche Teile festlegen, setzen wir voraus, daß die Erde gleichförmig rotiert. Doch die Gezeiten des Ozeans, verursacht von Sonne und Mond, hemmen die Erdrotation, wenn auch nur in verschwindend geringem Maße. Unsere Zeiteinheit — der Sonnentag — wird also unaufhörlich größer.

Diese Verlangsamung der Erdrotation ist so geringfügig, daß sie erst vor verhältnismäßig kurzer Zeit, nach Erfindung der Atomuhren, unmittelbar gemessen werden konnte, denn diese Uhren messen Zeitabschnitte mit der ungeheuren Genauigkeit von einer millionstel Sekunde. Die Änderung des Sonnentages erreicht ein bis zwei Millisekunden in 100 Jahren.

Ein Etalon freilich muß, sofern dies möglich ist, auch einen so geringfügigen Fehler eliminieren. Wir berichten auf S. 21, wie dies heute üblicherweise geschieht.

Gewichtskraft und Masse

Die Gewichtskraft ist die Kraft, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird. Man kann sie mit einer Federwaage messen. Je mehr ein Körper wiegt, um so stärker wird eine Feder gedehnt, an der dieser Körper befestigt ist. Mit Hilfe eines Wägestücks, das als Einheit dient, kann man die Feder eichen, d. h. Strichmarken anbringen, die uns zeigen, wie weit sich die Feder unter dem Einfluß eines Wägestücks der Masse 1, 2, 3 usw.

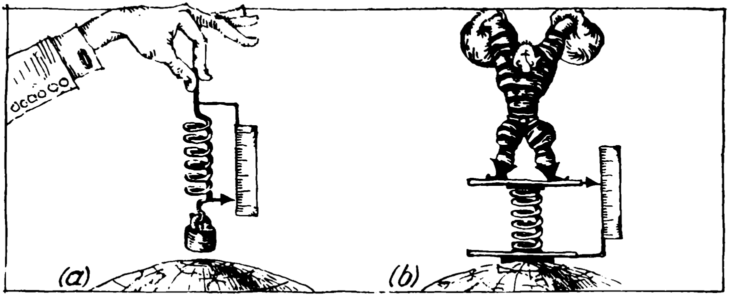


Bild 1.1.

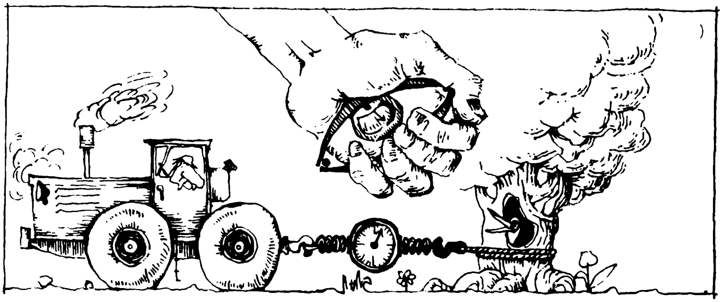


Bild 1.2.

Kilogramm gedehnt hat. Befestigt man nun einen Körper an dieser Federwaage, so gelingt es, anhand der Federdehnung festzustellen, wie groß die Kraft ist, mit der der Körper von der Erde angezogen wird (Bild 1.1a). Zur Gewichtskraftmessung benutzt man nicht nur Zug-, sondern auch Druckfedern (Bild 1.1b.). Benutzt man Federn unterschiedlicher Dicke, so kann man Waagen sowohl zur Messung sehr großer als auch sehr kleiner Gewichtskräfte herstellen. Auf diesem Prinzip beruht nicht nur der

Aufbau verhältnismäßig grober Waagen, wie sie im Handel üblich sind, sondern auch die Konstruktion sehr genauer, für physikalische Messungen verwendeter Geräte.

Eine Feder mit Gradeinteilung dient nicht nur zur Messung der Erdanziehungskraft, d. h. der Gewichtskraft, sondern auch zur Messung anderer Kräfte. Man bezeichnet ein derartiges Gerät als Dynamometer, was „Kraftmesser" bedeutet. Viele von uns haben schon gesehen, wie ein Dynamometer zur Messung der Muskelkraft des Menschen benutzt wird. Auch die Zugkraft eines Motors läßt sich bequem mit Hilfe einer Zugfeder (Bild 1.2.) messen.

Die Gewichtskraft eines Körpers ist eine seiner sehr wichtigen Eigenschaften. Doch hängt sie nicht allein vom Körper selbst ab, denn der Körper wird von der Erde angezogen. Wenn wir uns nun aber auf dem Mond befänden? Ganz offenbar wäre auch die Gewichtskraft eine andere und betrüge nur etwa ein Sechstel der Gewichtskraft auf der Erde, wie Berechnungen zeigen. Doch selbst auf der Erde ist die Gewichtskraft auf verschiedenen Breiten unterschiedlich. Am Pol wiegt ein Körper z. B. 0,5 % mehr als am Äquator.

Bei all ihrer Veränderlichkeit weist die Gewichtskraft eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit auf: Das Verhältnis der Gewichtskräfte zweier Körper an ein und demselben Punkt der Erde bleibt, wie die Erfahrung lehrt, unter beliebigen Bedingungen unverändert. Wenn zwei verschiedene Lasten eine Feder am Pol um den gleichen Betrag dehnen, dann bleibt diese Gleichheit ganz exakt auch am Äquator erhalten.

Bei Messung der Gewichtskräfte durch Vergleich mit der Gewichtskraft eines Etalons finden wir eine neue Eigenschaft der Körper, die Masse heißt.

Der physikalische Sinn dieses neuen Begriffs Masse ist aufs engste mit jener Gleichheit beim Vergleich der

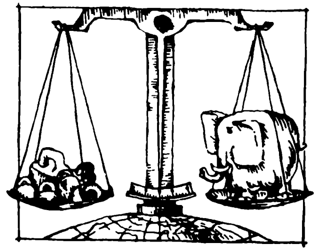


Bild 1.3.

Gewichtskräfte verknüpft, worauf wir eben hingewiesen haben.

Anders als die Gewichtskraft ist die Masse eine unveränderliche Körpereigenschaft und unabhängig von allem, außer dem Körper selbst.

Der Vergleich von Gewichtskräften, d. h. die Messung der Masse, läßt sich am bequemsten mittels einer gewöhnlichen Balkenwaage (Bild 1.3.) ausführen. Wir sagen, die Masse zweier Körper sei gleich, wenn sich eine Balkenwaage, auf deren beiden Schalen diese Körper liegen, genau im Gleichgewicht befindet. Wurde eine bestimmte Last mit einer Balkenwaage am Äquator gewogen und hat man die Last und die Wägestücke danach zum Pol gebracht, so ändert sich die Gewichtskraft der Last und der Wägestücke in genau der gleichen Weise. Darum liefert die Wägung am Pol das gleiche Resultat: Die Waage bleibt im Gleichgewicht.

Wir könnten uns zur Überprüfung dieser Feststellung auch auf den Mond begeben. Da sich das Gewichtskraftverhältnis von Körpern auch dort nicht ändert, wird eine auf die Balkenwaage gelegte Last durch die gleichen Wägestücke ins Gleichgewicht gebracht. Die Masse eines Körpers ist stets ein und dieselbe, wo immer sich der Körper auch befindet.

Die Einheiten sowohl der Masse als auch der Gewichtskraft sind mit der Wahl des Etalon-Wägestücks verknüpft.

Ebenso wie bei dem Meter und der Sekunde war man bemüht, ein natürliches Masse-Etalon zu finden. Die bereits erwähnte Kommission fertigte aus einer bestimmten Legierung ein Wägestück an, das auf einer Balkenwaage durch einen Kubikdezimeter Wasser bei vier Grad Celsius* ins Gleichgewicht gebracht wurde. Dieser Prototyp erhielt den Namen Kilogramm.

Später stellte sich allerdings heraus, daß es gar nicht so einfach ist, einen Kubikdezimeter Wasser „zu nehmen". Einmal veränderte sich das Dezimeter als Teil des Meters mit der Präzisierung des Meter-Etalons. Zum anderen war die Frage zu beantworten, wie das Wasser beschaffen sein sollte. Chemisch rein? Doppelt destilliert? Frei von Luftspuren? Und was ist mit dem Gehalt an „schwerem Wasser"? Zu allem Überfluß ist die Genauigkeit der Volumenmessung merklich geringer als die Genauigkeit einer Wägung.

Wiederum mußte man auf eine „naturgegebene" Einheit verzichten und als Massemaß die Masse eines eigens angefertigten Wägestücks akzeptieren. Dieses Wägestück wird gemeinsam mit dem Urmeter ebenfalls in Paris aufbewahrt.

Zur Messung der Masse verwendet man sehr häufig ein tausendstel bzw. ein millionstel Kilogramm, also das Gramm und das Milligramm. Die X. und XI. Generalkonferenz für Maß und Gewicht entwickelten das Internationale Einheitensystem SI (Système International), das dann später von den meisten Ländern als staatlicher Standard bestätigt wurde. Im neuen System blieb der

---

* Die Wahl dieser Temperatur war kein Zufall. Das Volumen von Wasser ändert sich vielmehr beim Erwärmen sehr eigentümlich, nämlich nicht so, wie es bei der Mehrzahl der Körper der Fall ist. Gewöhnlich dehnen sich Körper beim Erwärmen aus, während Wasser bei Erhöhung der Temperatur von 0 bis 4 °C sein Volumen verringert und sich erst jenseits von 4 °C auszudehnen beginnt. 4 °C ist daher die Temperatur, bei der die Kontraktion des Wassers aufhört und seine Ausdehnung beginnt.

Name Kilogramm (kg) für die Masse erhalten. Jede Kraft dagegen, d. h. natürlich auch die Gewichtskraft, wird im neuen System in Newton (N) gemessen. Warum diese Einheit so genannt wurde und worauf sie zurückzuführen ist, erfahren wir etwas später.

Über das SI und über Etalons

Sollte dieses Buch Ihr erstes Buch über Physik sein, dann stellen Sie bitte die Lektüre dieses Abschnitts vorerst zurück. Wir haben nach Altväterweise mit dem Einfachsten begonnen. In der Tat: Was kann wohl einfacher sein als die Messung von Entfernungen, Zeitintervallen und Massen. Einfach? Früher war es wahrlich einfach, doch heute nicht. In der Gegenwart erfordert die Längen-, Zeit- und Massen-Meßtechnik Kenntnisse aus der gesamten Physik, und die Erscheinungen, von denen wir gleich mehr oder weniger ausführlich sprechen wollen, werden erst im vierten Band unseres Werkes behandelt.

Das SI wurde 1960 angenommen. Langsam, sehr langsam findet es Anerkennung. Wahrscheinlich müssen erst einige Generationen einander ablösen und alle Bücher vom Markt verschwinden, deren Verfasser das SI nicht anerkennen wollten, und erst dann wird dieses System definitiv alle übrigen Systeme verdrängen.

Das SI fußt auf sieben Einheiten: Meter, Kilogramm, Sekunde, Mol, Ampere, Kelvin und Candela.

An dieser Stelle möchte ich über die ersten vier Einheiten sprechen, nicht mit dem Ziel, Einzelheiten über die Messung der entsprechenden physikalischen Größen mitzuteilen, sondern um auf eine allgemeine Tendenz hinzuweisen. Sie besteht darin, auf materielle Prototypen zu verzichten und an ihrer Statt Naturkonstanten einzuführen, deren Wert nicht von experimentellen Einrichtungen abhängen soll und die sich (zumindest nach

Auffassung der Physik von heute) in der Zeit nicht ändern dürfen.

Beginnen wir mit der Definition des Meters. Im Spektrum der Atome des Krypton-Isotops 86 findet sich eine starke Spektrallinie. Durch Verfahren, von denen später berichtet wird, läßt sich jede Spektrallinie durch Anfangs- und Endenergieniveaus charakterisieren. Hier handelt es sich um den Übergang vom Niveau $5d_5$ zum Niveau $2p_{10}$. Das Meter ist nun gleich 1 650 763,73 Wellenlängen der Strahlung (im Vakuum), die dem Übergang zwischen den Niveaus $2p_{10}$ und $5d_5$ des Krypton-86-Atoms entspricht. Diese Lichtwellenlänge läßt sich mit einer Genauigkeit von höchstens $\pm 4 \cdot 10^{-9}$ m messen. Daher hat es keinen Sinn, der oben angegebenen neunstelligen Zahl noch eine weitere Ziffer hinzuzufügen.

Wir sehen, daß uns diese Definition in keiner Weise mehr an einen materiellen Prototyp bindet. Es gibt auch keinen Grund zu erwarten, daß sich die Wellenlänge der charakteristischen Lichtstrahlung im Laufe der Jahrhunderte änderte. Das Ziel ist also erreicht.

Das mag alles schön und gut sein, könnte der Leser sagen, doch wie läßt sich mit Hilfe eines derartigen nichtmateriellen Prototyps ein gewöhnlicher stofflicher Längenmaßstab eichen? Die Physik ist dazu mit Hilfe der Interferenzmeßtechnik imstande, von der im vierten Band die Rede sein wird.

Wir haben jedoch allen Grund anzunehmen, daß diese Definition in allernächster Zeit eine Veränderung erfahren wird. Mit Hilfe eines Lasers (z. B. eines joddampfstabilisierten Helium-Neon-Lasers) kann man nämlich eine Meßgenauigkeit der Wellenlänge von 10^{-11} bis 10^{-12} m erreichen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß es sich als zweckmäßig erweisen könnte, eine andere Spektrallinie als nichtmateriellen Prototyp zu wählen.

Ganz analog wird die Sekunde definiert. Man benutzt den Übergang zwischen zwei nahe beieinanderliegenden Energieniveaus des Zäsium-Atoms. Die der Frequenz dieses Übergangs reziproke Größe liefert die zur Ausführung einer Schwingung aufgewendete Zeit. Eine Sekunde wird nun gleich 9 192 631 770 Perioden dieser Schwingungen gesetzt. Da diese Schwingungen im Mikrowellenbereich liegen, kann man durch Frequenzteilung mittels elektronischer Einrichtungen jede beliebige Uhr eichen. Dieses Meßverfahren ergibt einen Fehler von einer Sekunde in 300 000 Jahren.

Das Ziel, das sich die Meßtechniker gesetzt haben, besteht nun darin, ein und denselben energetischen Übergang sowohl zur Definition der Längeneinheit (ausgedrückt durch die Zahl der Wellenlängen) als auch der Zeiteinheit (ausgedrückt durch die Zahl der Schwingungsperioden) zu benutzen.

1973 wurde gezeigt, daß dieses Problem lösbar ist. Mit Hilfe eines methanstabilisierten Helium-Neon-Lasers wurden genaue Messungen ausgeführt. Die Wellenlänge betrug 3,39 Nanometer und die Frequenz $88 \cdot 10^{-12}$ s^{-1}. Die Messungen waren so genau, daß man durch Multiplikation dieser beiden Zahlen den Wert für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu 299 792 458 Metern in der Sekunde auf vier Milliardstel genau erhielt.

Vor dem Hintergrund dieser glänzenden Erfolge und der noch erheblich weiterreichenden Perspektiven läßt die Meßgenauigkeit der Masse zu wünschen übrig. Der materielle Kilogramm-Prototyp bleibt leider bestehen. Die Waagen freilich werden verbessert, und doch gelingt es nur in seltenen Fällen, eine Meßgenauigkeit von einem Milliardstel zu erreichen, und auch dies nur beim Massenvergleich zweier Körper.

Die Meßgenauigkeit einer Masse in Gramm und die Meßgenauigkeit der Gravitationskonstanten im Schwerkraftgesetz geht nicht über 10^{-5} hinaus.

1971 führte die XIV. Generalkonferenz für Maße und Gewichte eine neue Einheit in das SI ein: die Einheit der Stoffmenge, bezeichnet als Mol.

Die Einführung des Mols als selbständiger Einheit der Stoffmenge ist mit der neuen Definition, der Avogadro-Konstante, verknüpft.

Man kam überein, als Avogadro-Konstante nicht die Anzahl von Atomen in einem Grammatom schlechthin zu bezeichnen, sondern die Anzahl von Atomen des Kohlenstoffisotops mit der Massenzahl 12 in 12 Gramm dieses Elements. Wir bezeichnen diese Zahl mit N_A und vereinbaren, als Mol diejenige Stoffmenge eines Systems zu bezeichnen, das aus N_A Partikeln besteht. Dabei können beliebige Partikeln — Ionen, Elektronen, Atome, Moleküle oder andere Partikelgruppen — gemeint sein.

Die Notwendigkeit, nicht nur eine neue Einheit, sondern auch einen neuen physikalischen Begriff einzuführen, hängt damit zusammen, daß wir den Massebegriff zu Unrecht auf Elementarteilchen anwenden: Denn die Masse ist das, was mit Hilfe einer Balkenwaage gemessen wird.

Gegenwärtig kann die Stoffmenge (die Avogadro-Konstante und damit auch die Masse der Atome) nur mit einer geringeren Genauigkeit gemessen werden als die Masse. Doch verständlicherweise kann die Meßgenauigkeit der Stoffmenge nicht größer sein als die Meßgenauigkeit für die Masse.

Die Einführung dieser neuen Einheit könnte als leere Formalität erscheinen. Vorderhand besteht die Rechtfertigung der Existenz zweier Begriffe in der unterschiedlichen Meßgenauigkeit. Sollte es irgendwann einmal gelingen, das Kilogramm als Vielfaches der Massen bestimmter Atome darzustellen, dann muß das Problem revidiert werden, und dann wird das Kilogramm zu einer Einheit des gleichen Typs, wie es die Sekunde und das Meter sind.

Dichte

Was ist gemeint, wenn man sagt „schwer wie Blei“ oder „federleicht“? Ein winziges Bleikörnchen ist doch gewiß leicht, während ein großer Haufen bester Daunenfedern eine beträchtliche Masse besitzt. Wer sich solcher Vergleiche bedient, meint nicht die Masse der Körper, sondern die Dichte des Stoffs, aus dem der betreffende Körper besteht.

Als Dichte eines Körpers bezeichnet man den Quotienten aus Masse und Volumen. Es leuchtet ein, daß die Dichte von Blei sowohl in einem winzigen Bleikorn als auch in einem massiven Block die gleiche ist.

Zur Bezeichnung der Dichte gibt man gewöhnlich an, wieviel Kilogramm ein Kubikmeter des betreffenden Körpers wiegt, und setzt hinter diese Zahl die Maßeinheit kg/m^3. Zur Bestimmung der Dichte muß man die Anzahl von Kilogramm durch die Anzahl von Kubikmetern dividieren; der Bruchstrich in der Maßeinheit erinnert uns daran. Eine weitere mögliche Dichtemaßeinheit ist g/cm^3. Zu den schwersten Stoffen gehören Metalle wie z. B. Osmium (22,5 g/cm^3), Iridium (22,4 g/cm^3), Platin (21,5 g/cm^3), Wolfram und Gold (19,3 g/cm^3). Die Dichte von Eisen ist gleich 7,88 g/cm^3 und die Dichte von Kupfer 8,93 g/cm^3.

Zu den leichtesten Metallen gehören Lithium, dessen Dichte unter 1 g/cm^3 liegt, Magnesium (1,74 g/cm^3), Beryllium (1,83 g/cm^3) und Aluminium (2,70 g/cm^3). Noch leichtere Körper muß man unter den organischen Stoffen suchen: Bestimmte Hölzer und Plaste können eine Dichte bis zu 0,4 g/cm^3 haben.

Hier muß einschränkend gesagt werden, daß massive Körper gemeint sind. Enthält ein Festkörper Poren, dann ist er natürlich leichter. Poröse Körper, wie etwa Kork oder Schaumglas, werden in der Technik häufig eingesetzt. Die Dichte von Schaumglas kann unter 0,5 g/cm^3

liegen, obwohl der Feststoff, aus dem es hergestellt ist, eine Dichte über 1 besitzt. Wie alle Körper, deren Dichte unter 1 liegt, schwimmt Schaumglas auf Wasser.

Die leichteste Flüssigkeit ist flüssiger Wasserstoff, den man allerdings nur bei sehr tiefer Temperatur erhalten kann. Ein Kubikzentimeter flüssigen Wasserstoffs hat die Masse 0,07 g. Organische Flüssigkeiten wie Alkohol, Benzin oder Petroleum unterscheiden sich in ihrer Dichte nur wenig vom Wasser. Sehr schwer ist Quecksilber; seine Dichte beträgt 13,6 g/cm^3.

Wie aber soll man die Dichte von Gasen kennzeichnen? Bekanntlich füllen Gase stets das gesamte Volumen aus, das wir ihnen zur Verfügung stellen. Lassen wir aus einer Gasflasche ein und dieselbe Gasmasse in Gefäße unterschiedlichen Volumens strömen, dann werden sie am Ende stets gleichmäßig mit Gas gefüllt sein. Was aber soll man dann als Dichte bezeichnen?

Die Dichte von Gasen wird unter sogenannten Normalbedingungen bestimmt, d. h. bei der Temperatur von 0 °C sowie dem Druck von 0,1 MPa (0,1 MPa = 10^5 Pa = = 1 bar = 0,1 N/mm^2). Unter Normalbedingungen beträgt die Dichte von Luft 0,00129 g/cm^3, die Dichte von Chlor 0,00322 g/cm^3. Den Rekord hält dagegen gasförmiger Wasserstoff, so wie es bereits beim flüssigen Wasserstoff der Fall war: Die Dichte dieses leichtesten aller Gase ist gleich 0,00009 g/cm^3.

Das nächstleichte Gas ist Helium, doppelt so schwer wie Wasserstoff. Kohlendioxid ist anderthalb Mal so schwer wie Luft. In Italien gibt es in der Nähe von Neapel die berühmte „Hundsgrotte“, in deren unteren Teil laufend Kohlendioxid ausgeschieden wird; es breitet sich am Boden aus und verläßt dann langsam die Grotte. Ein Mensch kann diese Grotte ungehindert betreten, während Hunden der Erstickungstod droht. Daher rührt auch die Bezeichnung der Grotte.

Die Gasdichte ist sehr stark von den äußeren Bedingungen — Druck und Temperatur — abhängig. Ohne Angabe dieser äußeren Bedingungen haben Gasdichte-Werte keinen Sinn. Die Dichte flüssiger und fester Stoffe ist ebenfalls temperatur- und druckabhängig, allerdings in beträchtlich geringerem Maße.

Das Gesetz von der Erhaltung der Masse

Löst man Zucker in Wasser auf, dann ist die Masse der Lösung gleich der Massensumme von Zucker und Wasser.

Dieser wie unzählige ähnliche Versuch zeigen, daß die Masse eine unveränderliche Körpereigenschaft ist. Ob man einen Körper beliebig fein zerkleinert oder ihn auflöst: Er behält stets ein und dieselbe Masse.

Für beliebige chemische Umsetzungen gilt das gleiche. Wenn wir Kohle verbrannt haben, so können wir durch sorgfältige Wägungen feststellen, daß die Masse der Kohle sowie des für die Verbrennung verbrauchten Luftsauerstoffs exakt gleich der Masse der Verbrennungsprodukte ist.

Zuletzt wurde das Gesetz von der Erhaltung der Masse Ende des 19. Jahrhunderts nachgeprüft, als die Technik der genauen Wägungen bereits sehr weit entwickelt war. Man fand, daß sich die Masse bei beliebigen chemischen Umsetzungen auch nicht um den geringfügigsten Bruchteil ihres Wertes ändert.

Schon die Alten glaubten, daß die Masse unveränderlich sei. Einer ersten experimentellen Überprüfung im eigentlichen Sinn wurde dieses Gesetz 1756 durch Michail Lomonossow unterzogen. Er wies 1756 die Erhaltung der Masse beim Rösten von Metall nach und demonstrierte die wissenschaftliche Bedeutung dieses Gesetzes.

Die Masse ist der wichtigste unveränderliche Kennwert eines Körpers. Die meisten Eigenschaften von Körpern stehen sozusagen „in des Menschen Hand“. Durch Härten kann man weiches Eisen, das sich mit den Hän-

Michail Lomonossow (1711—1765), hervorragender russischer Gelehrter, Begründer der Wissenschaft in Rußland, bedeutender Aufklärer. Im Bereich der Physik bekämpfte Lomonossow mit Entschiedenheit die im 18. Jahrhundert verbreiteten Vorstellungen von elektrischen „Flüssigkeiten“ und „Wärmeflüssigkeiten“ und verteidigte die molekularkinetische Theorie der Materie. Lomonossow wies als erster das Gesetz von der Konstanz der Massen aller an chemischen Umwandlungen beteiligten Stoffe experimentell nach. Er nahm umfangreiche Untersuchungen den verbiegen läßt, hart und spröde werden lassen. Durch Ultraschallwellen wird eine trübe Lösung klar durchsichtig. Mechanische, elektrische und thermische Eigenschaften können durch äußere Einwirkung verändert werden. Doch wenn man einem Körper weder Stoff hinzufügt noch kein einziges Partikelchen von diesem Körper entfernt, dann kann man die Masse des Körpers nicht ändern*, zu welchen äußeren Einwirkungen man auch Zuflucht nimmt.

Wirkung und Gegenwirkung

Wir achten oftmals nicht darauf, daß jede Kraftwirkung von einer Gegenwirkung begleitet ist. Legt man einen Koffer auf ein Bett mit Federboden, dann biegt sich der Federboden durch. Die Tatsache, daß die Gewichtskraft des Koffers auf das Bett drückt, liegt für jedermann klar auf der Hand. Gelegentlich vergißt man jedoch, daß auch der Koffer durch eine Kraft von seiten des Bettes beeinflußt wird. Der auf dem Bett liegende Koffer fällt ja nicht, und das heißt, daß von seiten des Bettes eine Kraft auf den Koffer wirkt, die gleich der Gewichtskraft des Koffers und nach oben gerichtet ist. Der Schwerkraft entgegengerichtete Kräfte bezeichnet man häufig als Reaktionen der Unterlage. Das Wort „Reaktion“ bedeutet „Gegenwirkung“. Die Wirkung des Tisches auf ein darauf liegendes Buch oder die Wirkung des Bettes auf den darauf gelegten Koffer, sie sind beide Reaktionen der Unterlage.

---

auf den Gebieten der atmosphärischen Elektrizität und der Meteorologie vor. Lomonossow konstruierte eine ganze Reihe optischer Geräte und entdeckte die Venus-Atmosphäre. Er schuf die Grundlagen der russischen Wissenschaftssprache; seine Übersetzungen der wichtigsten physikalischen und chemischen Termini aus dem Lateinischen ins Russische waren außergewöhnlich geschickt.

---

* Über einige Einschränkungen dieser Feststellung wird später berichtet.

Wie gerade erläutert, ermittelt man die Gewichtskraft eines Körpers mit Hilfe einer Federwaage. Der Druck des Körpers auf eine unter dem Körper angeordnete Feder bzw. die Kraft, die eine Feder mit einem daran angehängten Wägestück dehnt, ist gleich der Gewichtskraft des Körpers. Dabei leuchtet ein, daß die Kontraktion bzw. Dehnung einer Feder in gleichem Maße auch den Wert der Reaktion der Unterlage anzeigen.

Wenn wir mit Hilfe einer Feder die Wirkung einer Kraft messen, messen wir stets nicht nur den Wert einer Kraft, sondern den zweier entgegengesetzt gerichteter Kräfte. Die Federwaage mißt sowohl den Druck der Last auf die Waagschale als auch die Reaktion der Unterlage, d. h. die Wirkung der Waagschale auf die Last. Befestigen wir eine Feder an der Wand und dehnen sie mit der Hand, so können wir die Kraft messen, mit der unsere Hand an der Feder zieht, aber gleichzeitig auch die Kraft, mit der die Feder an der Hand zieht.

Die Kräfte zeigen somit eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie werden immer paarweise angetroffen, wobei sie einander gleich, in ihrer Richtung jedoch entgegengesetzt sind. Diese beiden Kräfte bezeichnet man gewöhnlich als Wirkung und Gegenwirkung. „Einzelkräfte“ existieren nicht in der Natur; in der Realität gibt es nur Wechselwirkungen zwischen Körpern. Dabei sind Kraft und Gegenkraft stets gleich und verhalten sich zueinander wie das Objekt zu seinem Spiegelbild.

Man darf allerdings nicht Kräfte, die miteinander im Gleichgewicht stehen, mit den Kräften von Wirkung und Gegenwirkung verwechseln.

Man sagt von Kräften dann, sie stehen miteinander im Gleichgewicht, wenn sie an einem Körper angreifen; so wird die Gewichtskraft des auf dem Tisch liegenden Buches (die Wirkung der Erde auf das Buch) durch die Reaktion des Tisches (die Wirkung des Tisches auf das Buch) ausgeglichen.

Im Gegensatz zu den Kräften, die beim Ausgleich zweier Wechselwirkungen entstehen, werden die Kräfte von Wirkung und Gegenwirkung durch eine Wechselwirkung, beispielsweise der des Tisches mit dem Buch, gekennzeichnet: die Wirkung „Tisch — Buch“ und die Gegenwirkung „Buch — Tisch“. Natürlich greifen diese Kräfte an verschiedenen Körpern an.

Nun wollen wir versuchen, ein althergebrachtes Mißverständnis aufzuklären: „Das Pferd zieht den Wagen, doch zieht auch der Wagen das Pferd; warum bewegen sie sich dann trotzdem?“ Zuerst einmal muß daran erinnert werden, daß das Pferd den Wagen nicht fortziehen kann, wenn der Weg schlüpfrig ist. Zur Erklärung der Bewegung muß man demnach nicht nur eine, sondern zwei Wechselwirkungen berücksichtigen: nicht nur die Wechselwirkung „Wagen — Pferd“, sondern auch die Wechselwirkung „Pferd — Weg“. Die Bewegung setzt ein, sobald die Wechselwirkungskraft zwischen Pferd und Weg (die Kraft, mit der das Pferd sich vom Weg abstößt) größer als die Wechselwirkungskraft „Pferd — Wagen“ (die Kraft, mit der das Pferd den Wagen zieht) wird. Was hingegen die Kräfte „Wagen zieht Pferd“ und „Pferd zieht Wagen“ betrifft, so kennzeichnen sie ein und dieselbe Wechselwirkung, und diese Kräfte werden daher sowohl in Ruhe als auch zu jedem beliebigen Zeitpunkt der Bewegung gleich sein.

Wie man Geschwindigkeiten addiert

Habe ich eine halbe Stunde und dann noch eine ganze Stunde gewartet, so habe ich insgesamt anderthalb Stunden verloren. Wenn ich erst eine Mark und später noch zwei Mark bekommen habe, habe ich insgesamt drei Mark erhalten. Habe ich 200 g und dann noch einmal 400 g Wurst gekauft, so sind es insgesamt 600 g. Von

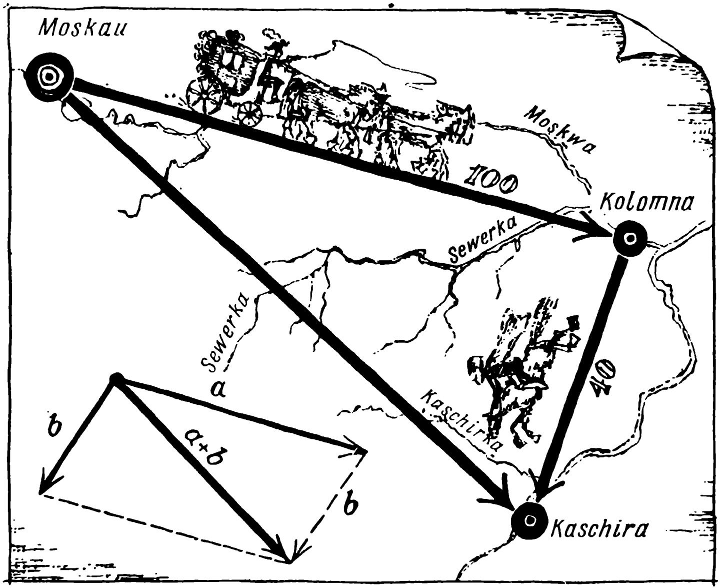


Bild 1.4.

der Zeit, der Masse und anderen ähnlichen Größen sagt man, daß sie sich arithmetisch addieren lassen.

Aber nicht alle Größen kann man einfach addieren und subtrahieren. Wenn ich sage, daß es von Moskau nach Kolomna 100 km und von Kolomna nach Kaschira 40 km sind, so folgt daraus nicht, daß man von Kaschira nach Moskau — auf dem kürzesten Wege — eine Strecke zurücklegen muß, die gleich der arithmetischen Summe von 100 km und 40 km ist. Ortsveränderungen lassen sich nicht arithmetisch addieren.

Welche Möglichkeit zur Addition von Größen gibt es dann noch? In unserem Beispiel finden wir die notwendige Vorschrift leicht. Wir tragen auf ein Blatt

Papier drei Punkte ein, die die wechselseitige Anordnung der uns interessierenden drei Orte angeben (Bild 1.4.). Diese drei Punkte kann man zu einem Dreieck verbinden. Sind zwei Seiten dieses Dreiecks bekannt, dann kann man auch die dritte Seite ermitteln, wenn man nur den Winkel kennt, der von den beiden gegebenen Seiten eingeschlossen wird.

Wir können unsere Fahrt von Moskau nach Kolomna durch einen Pfeil darstellen. Seine Richtung gibt an, wohin wir uns bewegen. Solche Pfeile heißen Vektoren. Der Weg von Kolomna nach Kaschira wird durch einen weiteren Vektor dargestellt.

Und wie wäre der Weg von Moskau nach Kaschira darzustellen? Natürlich durch einen entsprechenden Vektor. Wir konstruieren ihn, indem wir den Anfang der ersten Strecke mit dem Ende der zweiten Strecke verbinden. Der gesuchte Weg wird dann durch diese Verbindungsstrecke dargestellt.

Eine Addition in der hier beschriebenen Weise heißt geometrische Addition, und Größen, die so addiert werden, heißen vektorielle Größen.

Um Anfang und Ende eines Abschnitts zu unterscheiden, versieht man den Abschnitt mit einem Pfeil. Der Abschnitt wird dann als Vektor bezeichnet und gibt sowohl die Länge als auch die Richtung an.

Diese Regel wird auch bei der Addition mehrerer Vektoren angewendet. Beim Übergang vom ersten Punkt zum zweiten, vom zweiten zum dritten usw. legen wir einen Weg zurück, der sich als gebrochene Linie darstellen läßt. Allerdings kann man den gleichen Endpunkt auch unmittelbar vom Ausgangspunkt her erreichen. Diese Strecke, die das Vieleck schließt, bildet die vektorielle Summe. Unser Vektorendreieck zeigt natürlich auch, wie man einen Vektor von einem anderen subtrahieren muß. Zu diesem Zweck läßt man die Vektoren von einem Punkt ausgehen. Der Vektor, der dann vom Ende des einen

Vektors zum Ende des anderen geführt wird, bildet die Differenz der Vektoren.

Neben der Dreiecksregel kann man auch die gleichwertige Parallelogrammregel (Bild 1.4., unten links) benutzen. Diese Regel erfordert die Konstruktion eines Parallelogramms anhand der zu addierenden Vektoren sowie das Einzeichnen einer vom Schnittpunkt der Vektoren ausgehenden Diagonale. Aus der Zeichnung ist zu erkennen, daß die Diagonale des Parallelogramms nichts anderes ist als die ursprünglich fehlende Seite unseres Dreiecks. Demnach sind beide Regeln gleichermaßen brauchbar. Vektoren werden nicht nur zur Beschreibung von Ortsveränderungen benutzt, sondern sind auch in der Physik häufig anzutreffen.

Betrachten wir beispielsweise die Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der dafür benötigten Zeit. Wenn der Weg ein Vektor ist, dann ist auch die Geschwindigkeit ein Vektor, der in die gleiche Richtung zeigt. Bei Bewegung längs einer gekrümmten Linie ändert sich die Bewegungsrichtung ständig. Wie läßt sich da die Frage nach der Bewegungsrichtung beantworten? Ein kleiner Kurveuabschnitt hat die gleiche Richtung wie seine Tangente. Darum verlaufen Bewegung und Geschwindigkeit eines Körpers zu jedem betrachteten Zeitpunkt längs der Tangente an der Bewegungslinie.

Geschwindigkeiten müssen in vielen Fällen vektoriell addiert bzw. subtrahiert werden. Geschwindigkeiten müssen z. B. dann addiert werden, wenn ein Körper an zwei Bewegungen gleichzeitig teilnimmt. Das kommt häufig vor: Man geht durch einen Zug und bewegt sich außerdem gleichzeitig mit dem Zug fort; ein Wassertropfen, der am Zugfenster herunterläuft, bewegt sich seiner Gewichtskraft folgend abwärts und macht gleichzeitig die Fahrt des Zuges mit; der Erdball bewegt sich um die Sonne und führt gemeinsam mit dieser eine Relativbe-

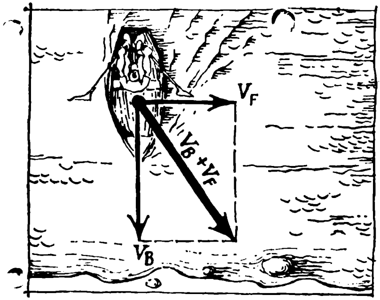


Bild 1.5.

wegung zu den anderen Sternen aus. In allen diesen und in ähnlichen Fällen werden die Geschwindigkeiten vektoriell addiert.

Verlaufen beide Bewegungen längs einer Linie, so verwandelt sich die vektorielle Addition in eine gewöhnliche Addition, wenn beide Bewegungen in derselben Richtung verlaufen, und in eine gewöhnliche Subtraktion, wenn die Bewegungen entgegengesetzt sind.

Und wenn beide Bewegungen einen Winkel miteinander einschließen? Dann müssen wir zur geometrischen Addition greifen.

Wenn man etwa einen rasch dahinfließenden Fluß überqueren will und das Ruder quer zur Strömungsrichtung hält, wird man stromabwärts versetzt. Das Boot war an zwei Bewegungen beteiligt: quer und längs zum Flußverlauf. Die Gesamtgeschwindigkeit des Bootes ist in Bild 1.5. gezeigt.

Noch ein Beispiel. Welches Bild zeigt die Bewegung der Regentropfen, wenn man sie aus dem Zugfenster heraus betrachtet? Sie haben gewiß schon einmal aus dem Zugabteil in den Regen gesehen. Selbst bei Windstille fällt der Regen schräg, so als würde er vom Fahrtwind abgelenkt, der der Lokomotive entgegenbläst (Bild 1.6.). Bei Windstille fällt ein Regentropfen senkrecht nach unten. Da der Zug, während die Tropfen vor dem Fen-

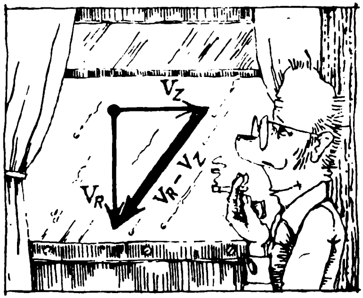


Bild 1.6.

ster herunterfallen, einen beträchtlichen Weg zurücklegt, wird der Tropfen scheinbar aus der Senkrechten ausgelenkt, und darum scheint der Regen schräg zu fallen.

Ist die Geschwindigkeit des Zuges v_Z und die Fallgeschwindigkeit des Tropfens v_T, so erhält man die Fallgeschwindigkeit des Tropfens relativ zu einem Fahrgast im Zug durch vektorielle Subtraktion von v_T minus v_Z*. Das Geschwindigkeitsdreieck ist in Bild 1.6. dargestellt. Die Richtung des schräg verlaufenden Vektors gibt die Richtung des Regens an; nun ist auch klargeworden, warum wir den Regen schräg fallen sehen. Die Länge des schräg verlaufenden Pfeils gibt uns im gewählten Maßstab den Betrag dieser Geschwindigkeit an. Je schneller der Zug fährt und je langsamer der Tropfen fällt, um so schräger werden wir den Regen fallen sehen.

Die Kraft als Vektor

Ebenso wie die Geschwindigkeit ist auch die Kraft eine vektorielle Größe. Sie wirkt bekanntlich stets in einer bestimmten Richtung. Also müssen auch Kräfte nach den gleichen Regeln, wie eben behandelt, addiert werden.

* Hier und im folgenden werden wir Vektoren, d. h. Parameter, für die nicht nur ihr Betrag, sondern auch ihre Richtung wesentlich ist, durch fettgedruckte Buchstaben kennzeichnen.

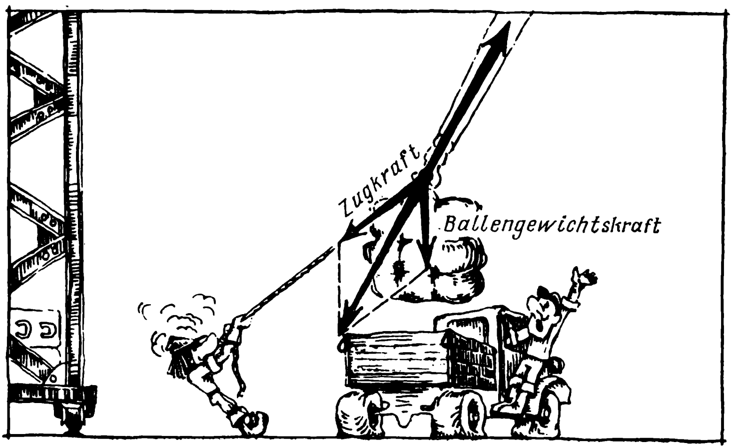


Bild 1.7.

Wir können im täglichen Leben ständig Erscheinungen beobachten, die die vektorielle Addition von Kräften veranschaulichen. In Bild 1.7. ist ein Seil dargestellt, an dem ein Ballen hängt. Mit Hilfe eines anderen Seils zieht ein Arbeiter den Ballen zur Seite. So wird das Seil, an dem der Ballen hängt, durch die Wirkung zweier Kräfte gespannt: durch die Gewichtskraft des Ballens und die Kraft des Arbeiters.

Durch vektorielle Addition der Kräfte kann man die Richtung des Seils bestimmen und die Kraft, mit der das Seil gespannt wird, berechnen. Der Ballen befindet sich in Ruhe; also muß die Summe der auf den Ballen wirkenden Kräfte gleich 0 sein. Man kann auch folgendes sagen: Die auf das Seil wirkende Kraft muß gleich der Summe der Gewichtskraft des Ballens und der seitlich auslenkenden Zugkraft sein, die mit Hilfe des zweiten Seils ausgeübt wird. Die Summe beider Kräfte liefert die

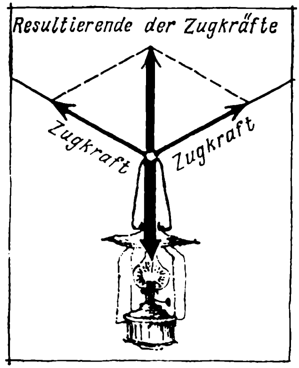


Bild 1.8.

Diagonale im Parallelogramm, die in Seilrichtung verläuft (denn anders könnte sie ja nicht durch die Zugkraft des Seils „vernichtet" werden). Die Länge dieses Pfeils muß dann die Zugkraft des Seils darstellen. Durch diese Kraft könnten die beiden auf den Ballen wirkenden Kräfte ersetzt werden. Deshalb bezeichnet man die vektorielle Summe von Kräften gelegentlich als Resultierende.

Sehr häufig taucht ein Problem auf, das der Kräfteaddition gerade entgegengesetzt ist. Eine Lampe soll an zwei Seilen hängen. Um die auf beide Seile wirkende Zugkraft zu bestimmen, muß die Gewichtskraft der Lampe für die beiden Richtungen zerlegt werden.

Vom Ende des resultierenden Vektors aus (Bild 1.8.) ziehen wir parallel zu den Seilen verlaufende Linien bis zu ihrem Schnittpunkt mit den Seilen. Damit haben wir das Kräfteparallelogramm vor uns. Durch Ausmessen der Seitenlänge des Parallelogramms finden wir (im gleichen Maßstab, in dem die Gewichtskraft dargestellt ist) die Zugkräfte, die auf die Seile wirken.

Diese Konstruktion wird als Kraftzerlegung bezeichnet. Jede Zahl kann durch eine unendliche Menge von Verfahren als Summe zweier oder mehrerer Zahlen dar-

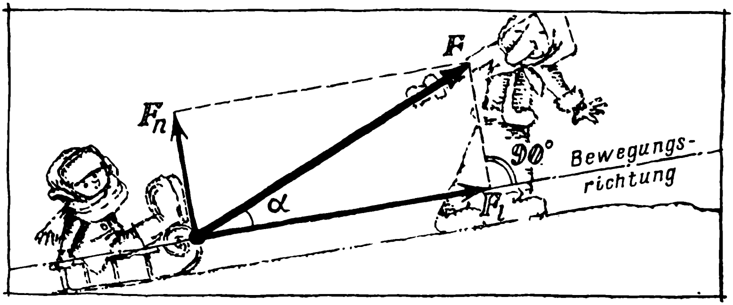


Bild 1.9.

gestellt werden; das gleiche gilt auch für den Kraftvektor: Jede Kraft läßt sich in zwei Kräfte zerlegen, d.h. in Seiten eines Parallelogramms, von denen eine stets frei wählbar ist. Es leuchtet auch ein, daß man an jedem Vektor ein beliebiges Vieleck ansetzen kann.

Häufig ist es günstig, eine Kraft in zwei zueinander senkrecht stehende Kräfte zu zerlegen, wobei eine in der uns interessierenden Richtung verläuft und die andere senkrecht zu dieser Richtung. Man bezeichnet sie als Längs- und (senkrecht dazu verlaufende) Normalkomponenten der Kraft.

Die Kraftkomponente in einer bestimmten Richtung, die durch Zerlegen auf die Seiten eines Rechtecks erhalten worden ist, bezeichnet man auch als Projektion der Kraft auf diese Richtung.

Es leuchtet ein, daß in Bild 1.9.

$$F^2 = F_L^2 + F_N^2$$

gilt, wobei F_L und F_N die Projektionen der Kraft auf die gewählte Richtung sowie die Normale dazu darstellen.

Wer sich in der Trigonometrie auskennt, kann nun ohne Schwierigkeit feststellen, daß

$$F_L = F \cdot \cos \alpha$$

ist, wobei α den Winkel angibt, den der Kraftvektor und die Richtung, auf die die Kraft projiziert wird, einschließen.

Ein interessantes Kraftzerlegungsbeispiel stellt die Bewegung eines Segelschiffes dar. Wie ist es möglich, gegen den Wind anzusegeln? Wenn Sie einmal Gelegenheit hatten, eine Segeljacht dabei zu beobachten, konnten Sie feststellen, daß die Bewegung zickzackförmig verläuft. Die Seeleute bezeichnen diese Bewegung als Kreuzen.

Direkt gegen den Wind zu segeln ist natürlich unmöglich. Aber wieso gelingt es, doch wenigstens unter einem bestimmten Winkel gegen den Wind anzukommen?

Die Möglichkeit, gegen den Wind zu kreuzen, beruht auf zwei Umständen. Zum ersten drückt der Wind stets rechtwinklig gegen die Segelfläche. Schauen Sie sich einmal Bild 1.10a. an: Die Windkraft ist in zwei Komponenten zerlegt; die eine davon, F_G, veranlaßt den Wind, am Segel entlangzugleiten, und wirkt damit nicht auf das Segel ein, die andere Komponente F_N, die sogenannte Normalkomponente, drückt auf das Segel.

Warum bewegt sich das Segelboot aber nicht dorthin, wohin es von der Windkraft geschoben wird, sondern etwa in die Richtung, in die der Bug des Bootes zeigt? Dies erklärt sich daraus, daß jede Bewegung des Bootes quer zu seiner Kiellinie auf einen sehr starken Widerstand des Wassers trifft. Damit sich das Boot mit dem Bug voraus bewegt, muß die auf das Segel wirkende Druckkraft demnach eine Komponente im Verlauf der Kiellinie haben, die vorauszeigt. Der zweite Umstand ist in Bild 1.10b. dargestellt.

Um die Kraft zu ermitteln, die das Boot vorwärts treibt, muß die Windkraft ein weiteres Mal zerlegt werden. Die Normalkomponente muß längs und quer zur Kiellinie aufgeteilt werden. Die Längskomponente bringt das Boot unter einem bestimmten Winkel zum Wind voran, wäh-

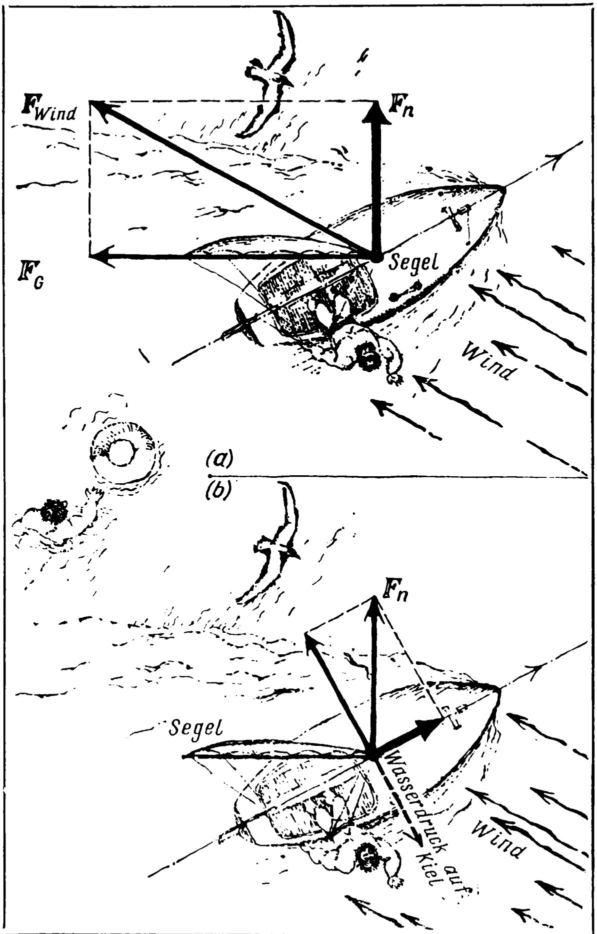


Bild 1.10.

rend die Querkomponente durch den Wasserdruck auf den Bootskörper ausgeglichen wird. Meist wird das Segel so eingestellt, daß seine Fläche den Winkel zwischen der Fahrtrichtung des Bootes und der Windrichtung halbiert.

Die schiefe Ebene

Ein steiler Anstieg ist schwerer zu überwinden als ein weniger steiler. Es ist leichter, einen Körper über eine schiefe Ebene auf eine bestimmte Höhe zu rollen, als den gleichen Körper senkrecht zu heben. Warum? Durch Addition der Kräfte können wir auch bei diesem Problem Klarheit gewinnen.

In Bild 1.11. ist ein Wagen mit Rädern dargestellt, der durch die Zugkraft eines Seils auf einer schiefen Ebene gehalten wird. Außer der Zugkraft wirken noch zwei Kräfte auf den Wagen ein: seine Gewichtskraft und die Reaktionskraft der Unterlage, die stets in Normalrichtung zur Fläche angreift, unabhängig davon, ob die Auflagefläche waagerecht angeordnet ist oder eine Neigung besitzt.

Wenn ein Körper auf seine Unterlage drückt, dann wirkt die Unterlage diesem Druck entgegen bzw. erzeugt eine Reaktionskraft.

Uns interessiert nun, in welchem Maße es leichter ist, den Wagen über eine schiefe Ebene aufwärts zu schleppen als ihn senkrecht zu heben.

Wir zerlegen die Kräfte so, daß eine von ihnen parallel und eine senkrecht zu der Fläche verläuft, auf der sich der Körper bewegt. Damit der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe ist, muß die Zugkraft des Seils nur diese parallel verlaufende Komponente ausgleichen. Was die zweite Komponente betrifft, so wird sie von der Reaktion der Unterlage ausgeglichen.

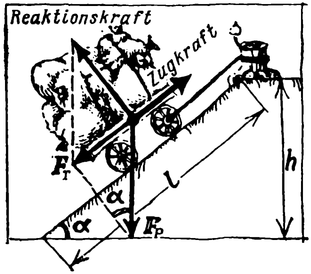


Bild 1.11.

Die uns interessierende Seilzugkraft F_T läßt sich entweder durch geometrische Konstruktion oder mit Hilfe der Trigonometrie ermitteln. Die geometrische Konstruktion besteht darin, daß man aus dem Ende des Gewichtskraftvektors F_P eine Senkrechte auf die Ebene fällt.

Nun lassen sich in der Zeichnung zwei ähnliche Dreiecke finden. Das Verhältnis aus der Länge l der schiefen Ebene und der Höhe h ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Seiten im Kraftdreieck. Also gilt:

$$\frac{F_T}{F_P} = \frac{h}{l}.$$

Je geringer die Neigung der schiefen Ebene ist $\left(\frac{h}{l} \text{ ist klein}\right)$, um so leichter läßt sich natürlich der Körper aufwärts schleppen.

Und nun das Ganze noch einmal für Trigonometriekundige: Da der Winkel zwischen der Querkomponente der Gewichtskraft und dem Gewichtsvektor gleich dem Winkel α der schiefen Ebene ist (jeder Schenkel des einen Winkels steht jeweils senkrecht auf dem zugehörigen Schenkel des anderen Winkels), gilt:

$$\frac{F_T}{F_P} = \sin\alpha \quad \text{und} \quad F_T = F_P \cdot \sin\alpha.$$

Fassen wir zusammen: Der Wagen läßt sich auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel α um $\frac{1}{\sin a}$ leichter nach oben befördern als in senkrechter Richtung.

Es ist nützlich, wenn man die Werte der trigonometrischen Funktionen für die Winkel 30, 45 und 60° im Gedächtnis behält. Kennt man diese Werte für den Sinus $\left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, so erhält man eine gute Vorstellung vom Kraftgewinn bei Bewegung über eine schiefe Ebene.

Aus der Formel folgt, daß unsere Anstrengungen bei einem Winkel der schiefen Ebene von 30° der Hälfte der Gewichtskraft entsprechen: $T = \frac{P}{2}$. Bei Winkeln von 45° bzw. 60° muß am Seil eine Kraft von etwa 0,7 bzw. 0,9 der Wagengewichtskraft aufgewendet werden. Wie wir sehen, machen steile schiefe Ebenen die Arbeit nur wenig leichter.

2. Die Bewegungsgesetze

Verschiedene Standpunkte zur Bewegung

Ein Koffer liegt im Gepäcknetz eines Eisenbahnwagens. Gleichzeitig bewegt er sich mit dem Zug fort. Ein Haus steht auf der Erde, bewegt sich jedoch gemeinsam mit dieser. Man kann also von ein und demselben Körper sagen: Er bewegt sich geradlinig fort, er befindet sich in Ruhe, und er rotiert. Und alle Überlegungen sind richtig, nur jeweils von einem anderen Standpunkt aus.

Nicht nur das Bild einer Bewegung, sondern auch die Eigenschaften einer Bewegung können ganz unterschiedlich sein, wenn man sie von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet.

Denken Sie nur einmal daran, was mit den Gegenständen auf einem schlingernden Schiff geschieht. Sie benehmen sich denkbar ungehörig! Der auf dem Tisch stehende Aschenbecher kippt um und fliegt unters Bett. Das Wasser in der Karaffe droht überzuschwappen, und die Lampe schwankt wie ein Pendel. Ohne jede ersichtliche Ursache geraten die einen Gegenstände in Bewegung, während andere anhalten. Das wichtigste Bewegungsgesetz — so könnte ein Beobachter, der sich auf diesem Schiff befindet, sagen — besteht darin, daß ein unbefestigter Gegenstand zu jedem beliebigen Zeitpunkt in jeder beliebigen Richtung „auf Reisen" gehen kann, und zwar mit den unterschiedlichsten Geschwindigkeiten.

Dieses Beispiel zeigt, daß es unter den verschiedenen Standpunkten, die man zur Bewegung haben kann, auch sehr unbequeme gibt.

Welcher Standpunkt wäre dann der „vernünftigste"?

Sollte die Lampe auf dem Tisch unversehens ins Kippen kommen oder das Schreibzeug hochhüpfen, dann würden Sie zunächst einmal zu träumen glauben. Würden sich diese Wunder aber wiederholen, dann würden Sie hartnäckig nach der Ursache suchen, die diese Körper aus der Ruhe bringt.

Es ist daher nur ganz natürlich, denjenigen Standpunkt bezüglich der Bewegung als rational anzusehen, bei dem ruhende Körper ihre Lage nicht ohne Wirkung einer Kraft verändern. Dieser Standpunkt erscheint höchst naturgemäß. Befindet sich ein Körper in Ruhe, dann ist die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null. Er bewegt sich nur unter Wirkung einer Kraft.

Dieser Standpunkt setzt einen Beobachter voraus. Uns interessiert allerdings nicht der Beobachter selbst, sondern der Ort, an dem dieser sich befindet. Darum werden wir statt „Standpunkt bezüglich der Bewegung" im weiteren sagen: „Bezugssystem, in dem die Bewegung betrachtet wird" oder einfach nur „Bezugssystem".

Für uns als Erdbewohner ist die Erde ein wichtiges Bezugssystem. Häufig allerdings können auch Körper, die sich auf der Erde bewegen, etwa ein Schiff oder ein Zug, als Bezugssysteme dienen.

Kehren wir nun zu dem „Standpunkt" bezüglich der Bewegung zurück, die wir als rationell bezeichnet haben. Dieses Bezugssystem hat einen Namen: Es heißt Inertialsystem.

Woher dieser Terminus stammt, werden wir ein wenig später erfahren.

Das Inertialbezugssystem hat folgende Eigenschaften: Körper, die sich relativ zu diesem System im Zustand der Ruhe befinden, sind keiner Wirkung von Kräften ausgesetzt. Innerhalb dieses Systems setzt also keine einzige Bewegung ohne die Wirkung einer Kraft ein.

Man erkennt deutlich, wie einfach und bequem dieses Bezugssystem ist. Es lohnt sich, dieses System zur Grundlage zu nehmen.

Wichtig ist, daß sich ein mit der Erde gekoppeltes Bezugssystem von einem Inertialsystem nicht wesentlich unterscheidet. Daher können wir mit dem Studium der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Bewegung beginnen, indem wir sie vom Standpunkt der Erde aus betrachten. Allerdings müssen wir stets daran denken, daß alles, was im folgenden Abschnitt gesagt ist, strenggenommen für das Inertialbezugssystem gilt.

Das Trägheitsgesetz

Kein Zweifel: Das Inertialbezugssystem ist bequem und weist unschätzbare Vorzüge auf.

Ist es aber das einzige System, oder existieren möglicherweise viele Inertialsysteme? Die alten Griechen beispielsweise vertraten den erstgenannten Standpunkt. Wir finden in ihren Werken viele naive Überlegungen über die Ursache der Bewegung. Ihre Vollendung finden diese Vorstellungen bei Aristoteles. Nach Meinung dieses Philosophen ist die Ruhe — relativ zur Erde — die natürliche Situation der Körper. Denn jegliche Lageänderung von Körpern relativ zur Erde muß eine Ursache in Gestalt einer Kraft besitzen. Besteht keine Veranlassung zur Bewegung, dann muß ein Körper stillstehen und in seinen natürlichen Zustand übergehen. Dieser aber ist die Ruhelage relativ zur Erde. Von diesem Standpunkt aus betrachtet ist die Erde das einzige Inertialsystem.

Die Entdeckung der Wahrheit und die Widerlegung dieser falschen, der naiven Psychologie jedoch sehr naheliegenden Auffassung verdanken wir dem großen Italiener Galileo Galilei (1564—1642).

Lassen Sie uns nun über die aristotelische Erklärung der Bewegung nachdenken und unter den uns bekannten

Galileo Galilei (1564—1642), bedeutender italienischer Physiker und Astronom, der erstmals die experimentelle Forschung in der Wissenschaft einsetzte. Galilei führte den Begriff der Trägheit ein, wies die Relativität der Bewegung nach, erforschte die Fallgesetze und die Bewegung von Körpern auf der schiefen Ebene ebenso wie die Bewegungsgesetze für den Fall, daß ein Gegenstand unter einem bestimmten Winkel zur Waagerechten emporgeworfen wird, und er benutzte das Pendel zur Zeitmessung. Erstmals in der Menschheitsgeschichte richtete er ein Fernrohr auf den Himmel, Erscheinungen nach Bestätigung oder Widerlegung der Idee von der natürlichen Ruhe aller auf der Erde befindlichen Körper suchen.

Stellen wir uns vor, daß wir in einem Flugzeug sitzen, das im Morgengrauen vom Flugplatz gestartet ist. Noch hat die Sonne die Luft nicht erwärmt, und noch gibt es keine „Luftlöcher", die vielen Fluggästen so unangenehm sind. Die Bewegung des Flugzeugs ist gleichmäßig und nicht wahrnehmbar. Wenn man nicht hinaussieht, bemerkt man nicht einmal, daß man fliegt. Auf dem freien Sitzplatz neben uns liegt ein Buch und auf dem Tisch ein Apfel. Alle Gegenstände im Inneren des Flugzeugs sind unbeweglich. Müßte dies alles wirklich so sein, wenn Aristoteles recht hätte? Natürlich nicht. Denn die natürliche Lage eines Körpers nach Aristoteles ist die Ruhelage auf der Erde. Warum sind dann nicht sämtliche Gegenstände an der Heckwand des Flugzeugs versammelt, im Bestreben, hinter der Bewegung des Flugzeugs zurückzubleiben, im „Wunsch", den Zustand „wahrer" Ruhe zu erreichen? Was veranlaßt den auf dem Tisch liegenden Apfel, der die Tischoberfläche kaum berührt, sich mit der ungeheuren Geschwindigkeit von einigen hundert Kilometern in der Stunde fortzubewegen?

Wie lautet die richtige Antwort auf die Frage nach der Bewegungsursache? Zunächst einmal wollen wir feststellen, warum in Bewegung befindliche Körper zum Stillstand kommen. Warum kommt beispielsweise eine auf der Erde rollende Kugel zur Ruhe? Um die richtige Antwort zu finden, muß man darüber nachdenken, wann

---

entdeckte eine Vielzahl neuer Sterne und wies nach, daß die Milchstraße aus einer ungeheuren Anzahl von Sternen besteht; er entdeckte die Jupitermonde, die Sonnenflecken, die Rotation der Sonne und untersuchte die Struktur der Mondoberfläche. Galilei war ein aktiver Fürsprecher des zu jener Zeit von der katholischen Kirche verbotenen heliozentrischen Systems des Kopernikus. Die Verfolgungen durch die Inquisition verdüsterten die letzten zehn Lebensjahre dieses großen Gelehrten.

4—01178

die Kugel rasch und wann sie langsam zum Stillstand kommt. Dazu bedarf es keiner besonderen Experimente. Aus der Praxis des Alltags wissen wir sehr wohl, daß eine Kugel um so weiter rollt, je glatter die Oberfläche ist. Aus diesen und ähnlichen Versuchen erwächst die natürliche Vorstellung von der Reibungskraft als einem Hindernis für die Bewegung, als der Ursache für die Bremsung eines Gegenstandes, der auf der Erde dahinrollt oder gleitet. Die Reibung läßt sich auf verschiedene Weise vermindern. Glatte Straßen, gute Schmierung und einwandfreie Lager lassen einen in Bewegung befindlichen Körper ohne die Wirkung einer äußeren Kraft einen um so längeren Weg ungehindert zurücklegen, je mehr Mühe wir darauf verwendet haben, alle Widerstände zu verringern, die sich der Bewegung entgegensetzen.

Nun erhebt sich folgende Frage: Was wäre, wenn es keinen Widerstand gäbe, wenn die Reibungskräfte nicht existierten? Es liegt auf der Hand, daß die Bewegung sich in diesem Fall bis ins Unendliche fortsetzen würde, und zwar mit unveränderter Geschwindigkeit und längs ein und derselben Geraden.

Wir haben hier das Trägheitsgesetz etwa in der Form formuliert, wie es erstmals von Galilei angegeben worden ist. Die Trägheit ist nur die Kurzbezeichnung für diese Fähigkeit eines Körpers, sich geradlinig und gleichförmig fortzubewegen, und zwar ohne jede Ursache, Aristoteles zum Trotz. Die Trägheit ist eine untrennbare Eigenschaft jedes einzelnen Teilchens im Weltall.

Wie könnte man die Richtigkeit dieses bemerkenswerten Gesetzes nachprüfen? Es ist ja leider unmöglich, Bedingungen herzustellen, unter denen ein bewegter Körper von keinerlei Kräften beeinflußt wird. Doch dafür läßt sich das Gegenteil verfolgen. Immer, wenn ein Körper seine Geschwindigkeit oder Bewegungsrichtung ändert, kann man eine Kraft als Ursache dieser Änderung ermitteln. Ein Körper, der zur Erde fällt, erwirbt eine bestimmte Geschwindigkeit; die Ursache liegt in der Erdanziehungskraft. Ein Stein, der an einem Seil befestigt ist, beschreibt bei seiner Bewegung eine Kreisbahn; die Ursache, die den Stein vom geraden Weg abbringt, ist die Zugkraft des Seils. Reißt das Seil, dann fliegt der Stein in die Richtung davon, in die er sich gerade bewegte, als das Seil riß. Die Bewegung eines Autos, das mit ausgeschaltetem Motor weiterrollt, verlangsamt sich; die Ursache liegt im Luftwiderstand, in der Reibung der Reifen auf der Straßendecke und in der Unvollkommenheit der Lager.

Das Trägheitsgesetz ist jenes Fundament, auf dem die gesamte Lehre von den Bewegungen der Körper beruht.

Die Bewegung ist relativ

Das Trägheitsgesetz führt uns zu dem Schluß, daß es eine Vielzahl von Inertialsystemen gibt.

Nicht nur ein einziges, sondern eine Vielzahl von Bezugssystemen schließt „grundlose" Bewegungen aus.

Haben wir ein derartiges System erst einmal gefunden, dann findet sich gleich auch ein weiteres, das sich (ohne Rotation) gleichförmig und geradlinig relativ zum ersten System fortbewegt. Dabei ist kein Inertialsystem auch nur einen Deut besser als ein anderes; sie unterscheiden sich nicht voneinander. Es ist ganz unmöglich, unter der Vielzahl von Inertialsystemen ein bestes System herauszufinden. Die Bewegungsgesetze der Körper sind für sämtliche Inertialsysteme gleich: Ein Körper kommt nur unter Krafteinwirkung in Bewegung, er wird von Kräften gebremst, und wo eine Kraftwirkung fehlt, befindet sich der Körper entweder in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig und geradlinig fort.

Die Unmöglichkeit, ein bestimmtes Inertialsystem durch Versuche, welcher Art auch immer, gegenüber anderen Inertialsystemen auszuzeichnen, bildet den Wesensinhalt des sogenannten Relativitätsprinzips von Galilei, einem der wichtigsten Gesetze der Physik.

Doch obwohl die Standpunkte verschiedener Beobachter, die die Erscheinungen in zwei Inertialsystemen untersuchen, völlig gleichberechtigt sind, fällt ihr Urteil über ein und dieselbe Tatsache völlig unterschiedlich aus. Ein Beobachter könnte beispielsweise sagen, daß sich sein Platz in einem fahrenden Zug die ganze Zeit über an ein und demselben Ort im Raum befindet, während ein Beobachter, der draußen auf dem Bahnsteig steht, behaupten wird, der Sitzplatz bewege sich von einem Ort zum anderen. Wieder ein anderer Beobachter könnte nach Abfeuern eines Gewehrs sagen, daß die Kugel den Lauf mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s verlassen hat, während ein anderer Beobachter — falls er sich in einem System befindet, das sich mit der Geschwindigkeit 200 m/s in der gleichen Richtung fortbewegt — behaupten wird, die Kugel flöge beträchtlich langsamer, nämlich nur mit der Geschwindigkeit 300 m/s.

Wer von beiden hat recht? Beide! Das Relativitätsprinzip der Bewegung verbietet es uns ja gerade, einem Inertialsystem vor anderen den Vorzug zu geben.

Somit lassen sich über einen Ort im Raum und über eine Geschwindigkeit keine allgemeinen, uneingeschränkt zutreffenden, sogenannten absoluten Urteile fällen. Die Begriffe eines Orts im Raum und einer Geschwindigkeit sind relativ. Immer wenn man derartige relative Begriffe gebraucht, muß man dazu sagen, welches Inertialsystem man meint.

So führt uns das Fehlen eines und nur eines „richtigen“ Standpunkts bezüglich der Bewegung auch zur Erkenntnis der Relativität des Raumes. Man könnte den Raum nur dann absolut nennen, wenn es gelänge, einen darin ruhenden Körper zu finden, einen Körper, der, vom Standpunkt aller Beobachter aus gesehen, ruht. Genau dies ist unmöglich. Die Relativität des Raumes bedeutet, daß man sich den Raum nicht als etwas vorstellen kann, worin die Körper eingebettet sind.

Die Wissenschaft hat die Relativität des Raumes nicht sogleich anerkannt. Selbst ein so genialer Gelehrter wie Newton hielt den Raum für absolut, obwohl er einsah, daß dies nachzuweisen unmöglich sei. Diese falsche Auffassung war noch bis Ende des 19. Jahrhunderts unter vielen Physikern verbreitet. Offenbar sind die Ursachen dafür psychologischen Charakters: Allzusehr haben wir uns daran gewöhnt, in unserer Umgebung „stets ein und dieselben Orte im Raum“ unerschüttert zu sehen. Nun aber müssen wir Klarheit darüber gewinnen, welche absoluten Urteile über den Charakter der Bewegung gefällt werden können.

Bewegen sich zwei Körper relativ zu einem Bezugssystem mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 fort, dann ist ihre (natürlich vektorielle) Differenz $v_1 - v_2$ für jeden beliebigen Inertialbeobachter gleich, da sich beide Geschwindigkeiten bei Änderung des Bezugssystems um den gleichen Betrag ändern.

Die vektorielle Geschwindigkeitsdifferenz zweier Körper ist demnach absolut. Dann ist aber auch der Vektor des Geschwindigkeitszuwachses ein und desselben Körpers innerhalb eines bestimmten Zeitabschnitts absolut, d. h., sein Betrag ist für alle Inertialbeobachter gleich.

Der Standpunkt des Sternbeobachters

Wir wollten die Bewegung unter dem Aspekt von Inertialsystemen untersuchen. Müßten wir dann nicht auf die Dienste des irdischen Beobachters verzichten? Schließlich dreht sich die Erde um ihre Achse und außerdem um die Sonne, wie schon Kopernikus bewiesen hat. Einem Leser von heute dürfte es wohl schwerfallen, den revolutionären Charakter der Entdeckung des Kopernikus nachzuempfinden, schwer auch, sich vorzustellen, daß in Verteidigung ihrer Überzeugungen Giordano Bruno den Scheiterhaufen bestieg und Galilei Erniedrigung und Verbannung über sich ergehen ließ.

Worin liegt das Geniale im Fortschritt des Kopernikus? Warum darf man die Entdeckung der Erdrotation in eine Reihe mit den Ideen menschlicher Gerechtigkeit stellen, für deren Durchsetzung Menschen bereit waren, ihr Leben hinzugeben?

Galilei gab in seinem „Dialogo sopra i due massimi sistema del mondo“ — ein Werk, für das er den Verfolgungen der Kirche ausgesetzt war — dem Gegner des Kopernikanischen Systems den Namen Simpliciso, was soviel wie „einfältiger Mensch“ bedeutet.

In der Tat erscheint das Kopernikanische System vom Standpunkt der einfachen unmittelbaren Wahrnehmung der Welt, d. h. vom Standpunkt dessen, was man nicht sehr glücklich als „gesunden Menschenverstand“ bezeichnet, geradezu widersinnig. Wieso soll sich die Erde drehen? Schließlich sehe ich ja, daß sie unbeweglich ist, während die Sonne und die Sterne sich wirklich bewegen.

Das Verhältnis der Geistlichen zur Entdeckung des Kopernikus zeigt folgendes Verdikt einer Versammlung von Theologen aus dem Jahre 1616:

„Die Lehre, wonach die Sonne sich im Mittelpunkt der Welt befindet und unbeweglich ist, ist falsch und unsinnig, formal ketzerisch und der Heiligen Schrift zuwider. Und die Lehre, wonach die Erde nicht im Mittelpunkt der Welt ruht, sondern sich bewegt und sich überdies in 24 Stunden um ihre Achse dreht, ist falsch und unsinnig vom philosophischen Standpunkt und vom theologischen Standpunkt zumindest irrig.“

Dieses Gutachten, worin das Unverständnis der Naturgesetze und der Glaube an die Unfehlbarkeit der Dogmen der Religion mit falschem „gesundem Menschenverstand“ vermischt sind, bezeugt wohl am besten die Kraft des Geistes und des Verstandes bei Kopernikus und seinen Nachfolgern, die so entschieden mit den „Wahrheiten“ des 17. Jahrhunderts gebrochen hatten. Doch kehren wir zu der oben aufgeworfenen Frage zurück.

Ändert sich die Geschwindigkeit des Beobachters oder rotiert dieser, dann muß er aus der Zahl der „richtigen" Beobachter ausgesondert werden. Genau in dieser Situation aber befindet sich ein Beobachter auf der Erde. Ist jedoch die Geschwindigkeitsänderung oder die Drehung eines Beobachters innerhalb der Zeit, während der er eine Bewegung untersucht, klein, dann kann man ihn bedingt als „richtigen" Beobachter einstufen. Gilt dies nun auch für einen Beobachter auf dem Erdball?

Innerhalb einer Sekunde dreht sich die Erde um $\frac{1}{240}$ Grad, d. h. um etwa 0,00007 Radian. Das ist nicht sehr viel. Hinsichtlich vieler Erscheinungen ist die Erde daher durchaus ein Inertialsystem.

Bei länger andauernden Erscheinungen dagegen darf man die Erdrotation schon nicht mehr außer acht lassen.

Unter der Kuppel der Isaakskathedrale in Leningrad hing eine Zeitlang ein riesiges Pendel. Brachte man dieses Pendel zum Schwingen, dann konnte man nach nicht allzu langer Zeit bemerken, daß sich seine Schwingungsebene langsam dreht. In einigen Stunden macht diese Drehung der Ebene bereits einen merklichen Winkel aus. Einen Versuch mit einem derartigen Pendel unternahm erstmals der französische Wissenschaftler Jean Foucault*, und seither trägt der Pendelversuch seinen Namen.

Foucaults Experiment veranschaulicht die Erddrehung (Bild 2.1.).

Dauert die beobachtete Erscheinung lange Zeit an, dann sind wir gezwungen, auf die Dienste des irdischen Beobachters zu verzichten und ein Bezugssystem zu wählen, das an die Sonne und die Erde gekoppelt ist. Ein System dieser Art verwendete Kopernikus, der die Sonne und die uns umgebenden Sterne als unbeweglich ansah.

---

* Jean Foucault (1819—1868) führte 1851 im Pantheon in Paris den berühmten Pendelversuch zum Nachweis der Achsendrehung der Erde aus. Anm. d. Red.

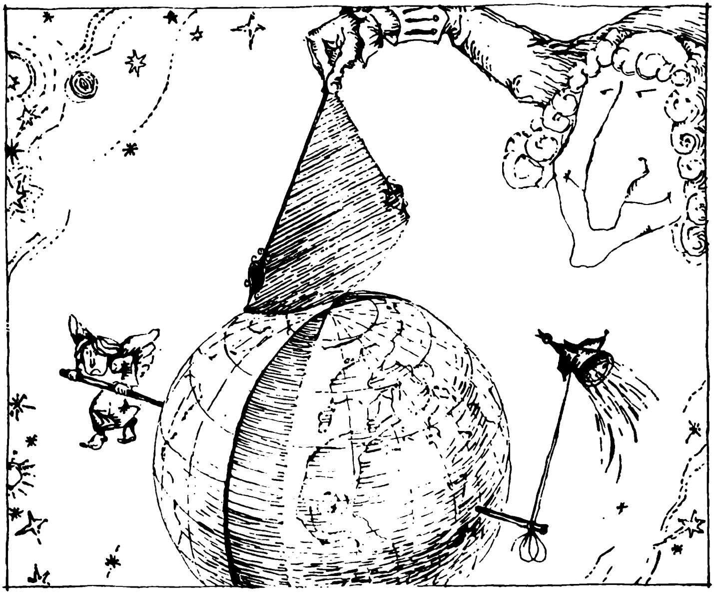


Bild 2.1.

Freilich ist in Wirklichkeit auch das Kopernikanische System nicht völlig inertial.

Das Weltall besteht aus einer Vielzahl von Sternhaufen — Inseln im Weltall —, die als Galaxien bezeichnet werden. Die Galaxis, zu der unser Sonnensystem gehört, enthält etwa hundert Milliarden Sterne. Die Sonne rotiert mit einer Umlaufzeit von etwa 180 Millionen Jahren mit einer Geschwindigkeit von 250 km/s um das Zentrum dieser Galaxis.

Wie groß ist dann der Fehler, den wir machen, wenn wir einen Beobachter auf der Sonne als Inertialbeobachter ansehen?

Zum Vergleich der Vorzüge eines irdischen und eines solaren Beobachters wollen wir einmal ausrechnen, um welchen Winkel sich das Sonnenbezugssystem während einer Sekunde weiterdreht. Wenn ein vollständiger Umlauf in $180 \cdot 10^6$ Jahren ($6 \cdot 10^{15}$ s) vollzogen wird, dann bewegt sich das Sonnenbezugssystem in einer Sekunde um $6 \cdot 10^{-14}$ Grad oder um einen Winkel von 10^{-15} Radian weiter. Also kann man sagen, daß der solare Beobachter um 100 milliardenmal „besser" ist als der irdische.

Im Bestreben, ein noch besseres Inertialsystem zu erreichen, legen die Astronomen ein Bezugssystem zugrunde, das an mehrere Galaxien gekoppelt ist. Dieses Bezugssystem ist unter allen möglichen Systemen das beste Inertialsystem. Ein noch besseres System läßt sich nicht finden.

Man könnte Astronomen im doppelten Sinn als Sternbeobachter bezeichnen: Sie beobachten die Sterne und beschreiben die Bewegung der Himmelskörper vom Standpunkt der Sterne aus.

Beschleunigung und Kraft

Um die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit zu charakterisieren, benutzt die Physik den Begriff Beschleunigung.

Als Beschleunigung bezeichnet man den Quotienten aus Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit. Statt zu sagen: „Die Geschwindigkeit des Körpers hat sich innerhalb einer Sekunde um den Betrag a geändert", sagen wir kürzer: „Die Beschleunigung des Körpers ist gleich a".

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung zum Zeitpunkt 1 mit v_1 und die Geschwindigkeit zu einem späteren Zeitpunkt 2 mit v_2, dann läßt sich die Beschleunigung a durch folgende Formel berechnen: $a = v_2 - v_1 / t$.
Hierin ist t die Zeit, in der die Geschwindigkeit zunahm,

Die Geschwindigkeit wird in cm/s (oder m/s usw.) gemessen, die Zeit in Sekunden. Die Anzahl von Zentimetern je Sekunde wird durch Sekunden geteilt. Damit ergibt sich die Maßeinheit der Beschleunigung zu cm/s^2 (oder m/s^2 usw.).

Natürlich kann sich die Beschleunigung im Verlauf der Bewegung ändern. Doch wir werden unsere Darstellung damit nicht komplizieren. Wir wollen vielmehr annehmen, daß die Geschwindigkeit gleichförmig zunimmt. Solche Bewegungen heißen gleichförmig beschleunigte Bewegungen.

Was aber ist die Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung?

Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Änderung (Differenz) von Geschwindigkeiten ebenfalls. Also muß die Beschleunigung auch ein Vektor sein. Um den Beschleunigungsvektor zu ermitteln, muß man die vektorielle Geschwindigkeitsdifferenz durch die Zeit dividieren. Wie ein Vektor für die Geschwindigkeitsänderung zu ermitteln ist, haben wir bereits erläutert.

Die Straße macht einen Bogen. Wir markieren zwei nahe beieinander gelegene Punkte, die ein Auto passiert, und stellen seine Geschwindigkeiten durch Vektoren dar (Bild 2.2.). Durch Subtraktion der Vektoren erhalten wir einen Wert, der keineswegs gleich Null ist; dividieren wir diesen Wert durch den Zeitabschnitt, so erhalten wir den Beschleunigungswert. Eine Beschleunigung hat auch dann stattgefunden, wenn sich der Wert der Geschwindigkeit beim Passieren der Kurve nicht geändert hat. Eine krummlinige Bewegung ist immer beschleunigt. Unbeschleunigt sind nur gleichförmig geradlinige Bewegungen.

Bei Betrachtung der Geschwindigkeit eines Körpers haben wir stets den Standpunkt bezüglich der Bewegung festgelegt. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist relativ. Vom Standpunkt des einen Inertialsystems

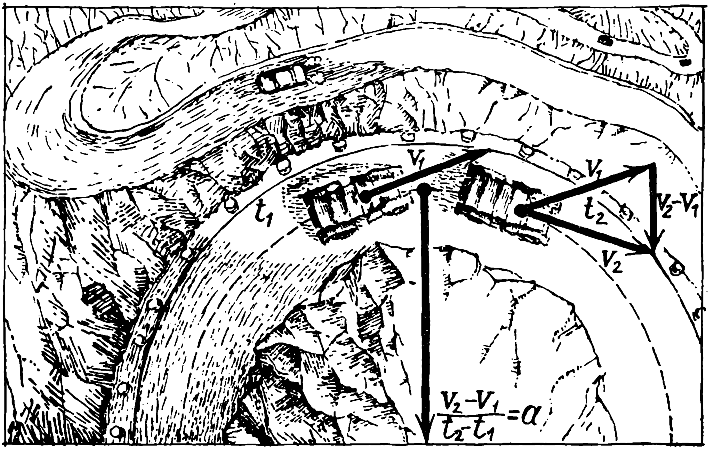


Bild 2.2.

kann sie groß, vom Standpunkt eines anderen gering sein. Müßte man nun nicht ebensolche Festlegungen treffen, wenn man von der Beschleunigung spricht? Natürlich nicht. Im Gegensatz zur Geschwindigkeit ist die Beschleunigung absolut. Vom Standpunkt aller nur denkbaren Inertialsysteme bleibt die Beschleunigung stets ein und dieselbe. Das muß auch so sein, denn die Beschleunigung hängt von der Geschwindigkeitsdifferenz des Körpers zur Zeit 1 und zur Zeit 2 ab; diese Differenz bleibt jedoch, wie wir bereits wissen, von allen Standpunkten aus konstant, d. h., sie ist absolut.

Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, kann sich nur unbeschleunigt bewegen. Die Wirkung einer Kraft dagegen führt zur Beschleunigung des Körpers, wobei diese Beschleunigung um so größer ist, je größer die Kraft. Je schneller wir einen beladenen Wagen in Bewegung

Isaac Newton (1643—1727), ein genialer englischer Physiker und Mathematiker, einer der bedeutendsten Wissenschaftler der Menschheitsgeschichte. Newton formulierte die wichtigsten Begriffe und Gesetze der Mechanik, entdeckte das Gravitationsgesetz und schuf dadurch jenes physikalische Weltbild, das bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts unangetastet blieb. Er entwickelte eine Theorie für die Bewegung der Himmelskörper, erklärte die wichtigsten Besonderheiten der Mondbewegung und gab eine Erklärung für Ebbe und Flut. In der Optik gehen auf Newton setzen wollen, um so stärker müssen wir unsere Muskeln anstrengen. In der Regel wirken zwei Kräfte auf einen bewegten Körper ein: eine Beschleunigungskraft, die Schub- oder Zugkraft, und die Bremskraft, d.h. die Reibungskraft bzw. der Luftwiderstand.

Die Differenz dieser beiden Kräfte, die sogenannte resultierende Kraft, kann entweder in Bewegungsrichtung oder entgegengesetzt zu dieser orientiert sein. Im ersten Fall beschleunigt der Körper seine Bewegung, im zweiten verlangsamt er sie. Sind diese beiden gegensinnig wirkenden Kräfte einander gleich (werden sie also ausgeglichen), dann bewegt sich der Körper gleichförmig, so, als wirkten überhaupt keine Kräfte auf den Körper ein.

In welchem Zusammenhang stehen nun die Kraft und die von ihr erzeugte Beschleunigung? Die Antwort ist sehr einfach. Die Beschleunigung ist der Kraft proportional:

$$a \sim F.$$

Freilich muß noch eine Frage beantwortet werden: Wie beeinflussen die Eigenschaften des Körpers seine Fähigkeit, die Bewegung unter dem Einfluß einer bestimmten Kraft zu beschleunigen? Es leuchtet ja ein, daß ein und dieselbe Kraft, wenn sie an verschiedenen Körpern angreift, diesen auch unterschiedliche Beschleunigungen verleiht.

Die Antwort auf die Frage finden wir in dem bemerkenswerten Umstand, daß alle Körper mit der gleichen Beschleunigung zur Erde fallen. Diese Beschleunigung

---

ebenfalls bedeutsame Entdeckungen zurück, die zu einer stürmischen Entwicklung dieses Gebiets der Physik beitrugen. Newton führte außerordentlich leistungsfähige mathematische Methoden in die Naturforschung ein; ihm gebührt die Ehre, die Differential- und Integralrechnung entwickelt zu haben. Dies war von außerordentlichem Einfluß auf die gesamte spätere Entwicklung der Physik und förderte die Einführung mathematischer Untersuchungsmethoden in diese Wissenschaft.

wird mit dem Buchstaben g bezeichnet. Im Gebiet von Moskau beträgt die Beschleunigung $g = 981\ \mathrm{cm/s^2}$.

Die unbefangene Beobachtung bestätigt die gleiche Beschleunigung aller Körper auf den ersten Blick nicht. Das hat seinen Grund darin, daß Körper beim Fallen unter gewöhnlichen Bedingungen nicht nur von der Schwerkraft, sondern auch von einer „Störkraft", nämlich dem Luftwiderstand, beeinflußt werden. Die Unterschiede im Charakter des Fallvorgangs von leichten und schweren Körpern haben die Philosophen des Altertums in größte Verwirrung versetzt. Ein Stück Eisen fällt schnell, während eine Flaumfeder in der Luft schwebt. Langsam sinkt ein nicht gefaltetes Blatt Papier zu Boden; knüllt man es zusammen, dann ist seine Fallgeschwindigkeit erheblich größer. Daß die Luft das „wahre" Bild der Körperbewegung unter dem Einfluß der Erde verfälscht, verstanden bereits die alten Griechen. Demokrit freilich meinte, daß schwere Körper, selbst wenn man die Luft entfernt, stets schneller fallen würden als leichte. Dabei kann der Luftwiderstand auch den gegenteiligen Effekt verursachen: Ein ungefaltetes Blatt Aluminiumfolie beispielweise wird langsamer fallen als ein Papierkügelchen.

Man fertigt heutzutage so dünnen Metalldraht (einige µm), daß dieser wie eine Flaumfeder in der Luft schwebt.

Aristoteles meinte, daß alle Körper im Vakuum gleich schnell fallen müssen. Doch aus dieser spekulativen Annahme zog er den folgenden paradoxen Schluß: „Das Fallen verschiedener Körper mit gleicher Geschwindigkeit ist so absurd, daß daraus klar die Unmöglichkeit der Existenz des Vakuums folgt."

Kein einziger Gelehrter des Altertums oder des Mittelalters kam auf den Einfall, doch einmal in der Praxis nachzuprüfen, ob die Körper mit verschiedenen oder gleichen Beschleunigungen zur Erde fallen. Erst Galilei zeigte durch seine bedeutsamen Versuche (er untersuchte die Bewegung von Kugeln auf einer schiefen Ebene und den freien Fall von Körpern, die er vom schiefen Turm zu Pisa fallen ließ), daß alle Körper — unabhängig von ihrer Masse — an ein und derselben Stelle des Erdballs mit gleicher Beschleunigung fallen. Heutzutage lassen sich diese Versuche sehr einfach unter Zuhilfenahme eines langen Rohres, aus dem die Luft herausgepumpt ist, durchführen. In einem derartigen Rohr fallen eine Flaumfeder und ein Stein völlig gleichartig. Hier ist nur noch eine einzige Kraft wirksam: die Gewichtskraft; der Luftwiderstand ist auf Null reduziert. Wo der Luftwiderstand fehlt, ist der Fall beliebiger Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Nun kehren wir zu der oben gestellten Frage zurück: Welche Fähigkeit eines Körpers, seine Bewegung unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft zu beschleunigen, hängt von seinen Eigenschaften ab?

Galileis Gesetz besagt, daß alle Körper unabhängig von ihrer Masse mit ein und derselben Beschleunigung fallen; also bewegt sich die Masse m in Kilogramm unter dem Einfluß der Kraft F in Newton mit der Beschleunigung g.

Nehmen wir nun einmal an, es handele sich nicht um den Fall von Körpern, sondern an einer Masse m kg griffe die Kraft von etwa 10 N an. Da die Beschleunigung der Kraft proportional ist, wäre sie hier m-mal kleiner als g.

So gelangen wir zu dem Schluß, daß die Beschleunigung a eines Körpers bei gegebener Kraft (in unserem Beispiel 10 N) der Masse umgekehrt proportional ist.

Verbinden wir beide Schlüsse, so erhalten wir:

$$a \sim \frac{F}{m},$$

d.h., bei konstanter Masse ist die Beschleunigung der Kraft direkt und bei konstanter Kraft der Masse umgekehrt proportional.

Dieses Gesetz, das die Beschleunigung mit der Masse eines Körpers und der auf den Körper einwirkenden Kraft verknüpft, wurde von dem bedeutenden englischen Gelehrten Isaac Newton (1643—1727) entdeckt und trägt seinen Namen.*

Die Beschleunigung ist der wirkenden Kraft direkt und der Masse des Körpers umgekehrt proportional und von keinen wie auch immer gearteten sonstigen Eigenschaften des Körpers abhängig. Aus Newtons Gesetz folgt, daß die Masse gerade das Maß für die „Trägheit" eines Körpers darstellt. Bei gleichen Kräften ist ein Körper großer Masse schwerer zu beschleunigen. So sehen wir nun, daß der Massebegriff, den wir als eine „bescheidene" Größe kennengelernt haben, die durch Wägung mit der Balkenwaage bestimmt wird, einen neuen und tiefen Sinn gewinnt: Die Masse charakterisiert die dynamischen Eigenschaften des Körpers.

Newtons Gesetz können wir folgendermaßen formulieren:

$$kF = ma.$$

Darin ist k eine Konstante. Sie hängt von den Einheiten ab, die wir wählen.

Wir haben bereits das vor einiger Zeit entwickelte SI erwähnt. Die Bezeichnung Newton (N) für die neue Einheit der Kraft ist durchaus gerechtfertigt. Bei dieser Auswahl der Einheiten erhält Newtons Gesetz die einfachste Form, und man definiert diese Einheit wie folgt:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}},$$

---

* Newton selbst gibt an, daß die Bewegung drei Gesetzen gehorcht. Jenes Gesetz, von dem hier die Rede ist, wird bei Newton unter Nr. 2 geführt. Das Trägheitsgesetz setzte Newton an die erste Stelle, während an 3. Stelle das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung folgt.

d.h., 1 Newton ist die Kraft, die einer Masse von 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² vermittelt.

Die geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Eine Bewegung dieser Art tritt nach Newtons Gesetz dann auf, wenn am Körper eine in der Summe konstante Kraft angreift, die den Körper beschleunigt oder bremst.

Wenn auch nicht in strengem Sinn, so entstehen derartige Verhältnisse recht häufig. Unter dem Einfluß einer etwa konstanten Reibungskraft wird ein Kraftfahrzeug abgebremst, das mit ausgeschaltetem Motor weiterfährt; ein schwergewichtiger Gegenstand fällt unter dem Einfluß der konstanten Schwerkraft aus der Höhe herab.

Kennen wir die resultierende Kraft sowie die Masse des Körpers, dann erhalten wir aus der Formel $a = \frac{F}{m}$ die Beschleunigung. Da

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

ist (worin t die Bewegungszeit und v bzw. v_0 die End- bzw. Anfangsgeschwindigkeit darstellen), kann man mit Hilfe dieser Formel eine Antwort auf Fragen folgenden Charakters geben: Nach welcher Zeit kommt ein Zug zum Stillstand, wenn die Bremskraft, die Masse des Zuges und seine Anfangsgeschwindigkeit bekannt sind? Auf welche Geschwindigkeit wird ein Kraftfahrzeug beschleunigt, wenn man die Motorkraft, die Widerstandskraft, die Masse des Fahrzeugs und die Beschleunigungszeit kennt?

Häufig ist es von Interesse, die Länge eines Weges in Erfahrung zu bringen, den ein Körper bei gleichförmig beschleunigter Bewegung zurücklegt. Ist die Bewegung gleichförmig, dann finden wir den zurückgelegten Weg durch Multiplikation der Bewegungsgeschwindigkeit

5—01178

mit der Bewegungszeit. Ist die Bewegung gleichförmig beschleunigt, dann erfolgt die Berechnung des zurückgelegten Weges so, als bewege sich der Körper während der Zeit t gleichförmig mit einer Geschwindigkeit, die gleich der halben Summe aus Anfangs-und Endgeschwindigkeit ist:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t.$$

Fassen wir zusammen: Bei gleichförmig beschleunigter (oder verlangsamter) Bewegung ist der von einem Körper zurückgelegte Weg gleich dem Produkt aus der halben Summe von Anfangs- und Endgeschwindigkeit und der Bewegungszeit. Der gleiche Weg wäre innerhalb der gleichen Zeit bei gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ zurückgelegt worden. In diesem Sinn läßt sich von $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ sagen, daß es sich hier um die mittlere Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung handelt.

Nützlich ist die Aufstellung einer Formel, die die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Beschleunigung zeigt. Setzen wir in die zuletzt genannte Formel den Ausdruck $v = v_0 + at$ ein, so erhalten wir:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

oder, wenn die Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null erfolgt,

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Hat ein Körper binnen einer Sekunde 5 m zurückgelegt, so wird er in zwei Sekunden (4 × 5) m, in drei Sekunden (9 × 5) m usw. zurücklegen. Der zurückgelegte Weg nimmt proportional dem Quadrat der Zeit zu.

Nach diesem Gesetz fällt ein schwerer Körper aus der Höhe herab. Die Beschleunigung im freien Fall ist gleich g, und die zugehörige Formel nimmt dann folgende Gestalt an:

$$s = \frac{981}{2} \cdot t^2,$$

sofern man t in Sekunden und g in Zentimetern je Sekundenquadrat einsetzt.

Könnte ein Körper ungehindert 100 s lang fallen, dann würde er ab Beginn des Fallvorgangs einen Weg von etwa 50 km zurücklegen. Während der ersten 10 s hätte er dabei jedoch nur 0,5 km zurückgelegt. So also sieht eine beschleunigte Bewegung aus.

Welche Geschwindigkeit entwickelt ein Körper beim Fallen aus einer bestimmten Höhe? Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir Formeln, die den zurückgelegten Weg mit der Beschleunigung und der Geschwindigkeit verknüpfen. Setzen wir in $s = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$ den Wert für die Bewegungszeit $t = \frac{v - v_0}{a}$ ein, so erhalten wir:

$$s = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2)$$

oder, wenn die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist,

$$s = \frac{v^2}{2a}, \quad v = \sqrt{2as}\,.$$

10 m entsprechen der Höhe eines kleinen zwei- oder dreigeschossigen Hauses. Warum ist es gefährlich, vom Dach eines solchen Hauses auf die Erde zu springen? Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Geschwindigkeit des freien Falls einen Wert von $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10}$ m/s $= 14$ m/s $\approx$ ≈ 50 km/h erreicht; dies aber ist die in der Stadt erlaubte Geschwindigkeit von Kraftfahrzeugen.

Der Luftwiderstand wird diese Geschwindigkeit nur geringfügig vermindern.

Die hier abgeleiteten Formeln werden für die unterschiedlichsten Berechnungen verwendet. Mit ihrer Hilfe wollen wir uns überlegen, wie Bewegungen auf dem Mond ablaufen.

In Wells' Roman „Die ersten Menschen im Mond" wird von den unerwarteten Erlebnissen berichtet, die den Reisenden bei ihren phantastischen Ausflügen zustießen. Auf dem Mond beträgt die Gravitationsbeschleunigung nur etwa ein Sechstel der Erdbeschleunigung. Während ein fallender Körper auf der Erde in der ersten Sekunde 5 m zurücklegt, „durchschwebt" er auf dem Mond nur ganze 80 cm (die Beschleunigung ist ungefähr gleich 1,6 m/s^2).

Die oben aufgeschriebenen Formeln erlauben uns eine schnelle Nachrechnung der „Mondwunder".

Ein Sprung aus der Höhe h beansprucht die Zeit $t = \sqrt{2h/g}$. Da die Mondbeschleunigung nur ein Sechstel der Erdbeschleunigung beträgt, nimmt der Sprung auf dem Mond die $\sqrt{6} \sim 2{,}45$fache Zeit in Anspruch. Auf welchen Bruchteil vermindert sich die Endgeschwindigkeit des Sprunges ($v = \sqrt{2\,gh}$)?

Auf dem Mond könnte man unbesorgt vom Dach eines dreigeschossigen Hauses herunterspringen. Die Höhe eines Sprunges, der mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit begonnen wurde, steigt auf das Sechsfache (die Formel ist $h = v^2/2g$). Jedes Kind könnte einen Sprung ausführen, der die Rekordmarke auf der Erde übertrifft.

Der Weg der Kugel

Seit undenklichen Zeiten sieht sich der Mensch dem Problem gegenüber, einen Gegenstand möglichst weit zu werfen. Der von Hand oder mit einer Schleuder geworfene Stein, der Pfeil, der von der Bogensehne schnellt, die

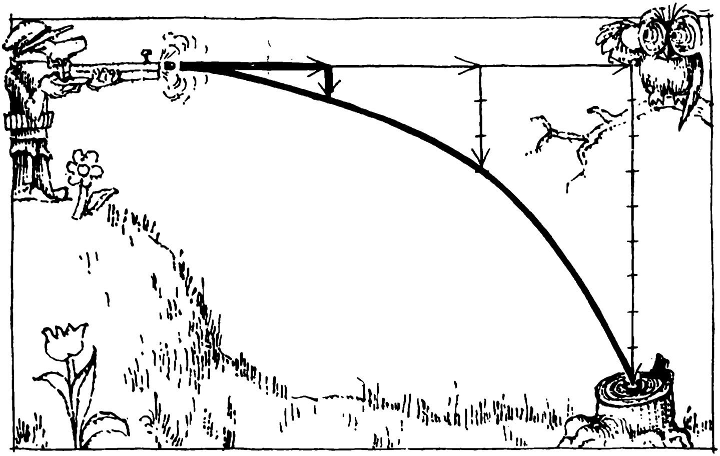


Bild 2.3.

Gewehrkugel, das Artilleriegeschoß und schließlich die ballistische Rakete — dies ist nur eine kurze Aufzählung der Erfolge auf diesem Gebiet.

Ein geworfener Gegenstand beschreibt eine Kurve, die man als Parabel bezeichnet. Sie läßt sich ohne Schwierigkeiten konstruieren, wenn man die Bewegung des geworfenen Körpers als Summe zweier Bewegungen, in horizontaler und in vertikaler Richtung, betrachtet, die gleichzeitig und unabhängig voneinander stattfinden. Die Beschleunigung des freien Falls verläuft vertikal; deshalb bewegt sich die fliegende Kugel, ihrer Trägheit gehorchend, mit konstanter Geschwindigkeit horizontal und fällt gleichzeitig vertikal mit konstanter Beschleunigung zur Erde. Wie können wir diese beiden Bewegungen addieren?

Beginnen wir mit einem einfachen Fall: Die Anfangsgeschwindigkeit verläuft horizontal (hier könnte es sich um einen Schuß aus einem Gewehr handeln, dessen Lauf waagerecht gerichtet ist).

Wir nehmen ein Blatt Millimeterpapier und zeichnen eine vertikale und eine horizontale Linie ein (Bild 2.3.). Da beide Bewegungen unabhängig voneinander ablaufen, wird sich der Körper nach t Sekunden um den Abschnitt v_0t nach rechts und um den Abschnitt $gt^2/2$ nach unten fortbewegt haben. Wir tragen auf der Horizontalen den Abschnitt v_0t und an seinem Ende den vertikalen Abschnitt $gt^2/2$ ab. Das Ende des vertikalen Abschnitts gibt uns den Punkt an, wo sich der Körper nach t Sekunden befinden wird.

Diese Konstruktion muß für mehrere Punkte, d. h. mehrere Zeitpunkte, wiederholt werden. Durch die Punkte wird dann eine gleichmäßig geschwungene Kurve verlaufen: die Parabel, die die Flugbahn des Körpers darstellt. Je mehr Punkte wir auftragen, um so genauer ist die Flugbahn der Kugel.

In Bild 2.4. sehen wir eine Bahn für den Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 einen bestimmten Anstellwinkel besitzt.

Der Vektor v_0 muß zuerst einmal in seine vertikale und seine horizontale Komponente zerlegt werden. Auf der waagerechten Linie tragen wir $v_{\text{horizontal}}t$ ab, d. h. den Weg, den die Kugel während t Sekunden waagerechter Richtung zurücklegt.

Gleichzeitig aber vollzieht die Kugel auch eine Aufwärtsbewegung. Nach t Sekunden hat sie die Höhe $h = v_{\text{vertikal}}t - gt^2/2$ erreicht. Nach dieser Formel muß man durch Einsetzen der uns interessierenden Zeiten die vertikale Lageänderung berechnen und sie auf der vertikalen Achse abtragen. Die Werte von h werden zunächst zu- (Aufstieg) und danach abnehmen.

Nun müssen wir nur noch die Bahnpunkte in unsere Zeichnung eintragen, so, wie wir es im vorhergehenden

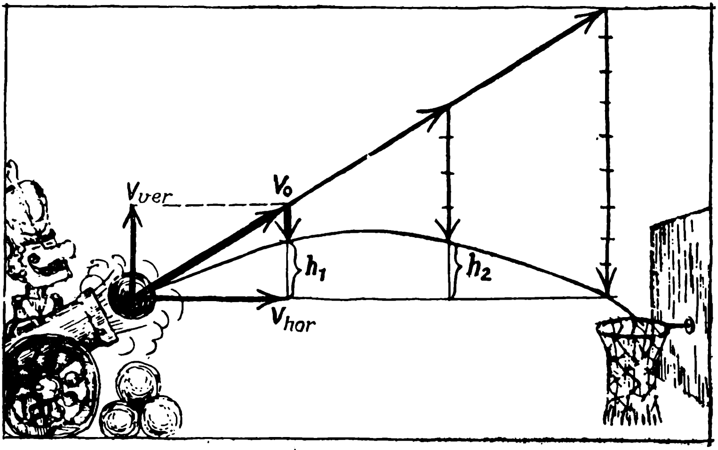


Bild 2.4.

Beispiel gemacht haben, und sie durch eine gleichmäßig geschwungene Kurve verbinden.

Hält man den Gewehrlauf waagerecht, dann wird die Kugel schon bald im Erdreich steckenbleiben; bei vertikaler Stellung des Laufs fällt die Kugel zum Abschußort zurück. Wenn man also möglichst weit schießen will, muß man dem Lauf einen bestimmten Anstellwinkel relativ zur Waagerechten geben. Aber welchen?

Wir wenden noch einmal das gleiche Verfahren an und zerlegen den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit in zwei Komponenten: in die Vertikalgeschwindigkeit v_1 und die Horizontalgeschwindigkeit v_2. Die Zeit zwischen dem Augenblick des Schusses und dem Augenblick, wo die Kugel ihren höchsten Bahnpunkt erreicht, ist gleich v_1/g. Hier ist darauf zu achten, daß die Kugel genausolange nach unten fallen wird, d. h., die Gesamtflugdauer bis zum Auftreffen der Kugel auf der Erde ist $2v_1/g$.

Da die Bewegung in waagerechter Richtung gleichförmig verläuft, ergibt sich die Flugweite zu:

$$s = 2v_1v_2/g$$

(dabei haben wir die Höhe vernachlässigt, in der sich das Gewehr über dem Erdboden befindet).

Unsere Formel zeigt, daß die Flugweite dem Produkt der Geschwindigkeitskomponenten proportional ist. Bei welcher Schußrichtung wird dieses Produkt sein Maximum erreichen? Die Antwort auf diese Frage liefert uns wiederum die geometrische Vorschrift für die Addition von Vektoren. Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bilden ein Geschwindigkeitsrechteck; die Diagonale darin ist die Gesamtgeschwindigkeit v. Das Produkt v_1v_2 ist gleich der Fläche dieses Rechtecks.

Unsere Frage läßt sich nun wie folgt stellen: Wie sind die Seiten eines Rechtecks bei gegebener Länge der Diagonale zu wählen, damit die Rechtecksfläche möglichst groß ist? Die Geometrie liefert den Beweis, daß diese Bedingung durch das Quadrat erfüllt wird. Die Flugweite der Kugel wird daher am größten sein, wenn $v_1 = v_2$ ist, d. h. dann, wenn sich das Geschwindigkeitsrechteck in ein Quadrat verwandelt. Die Diagonale des Geschwindigkeitsquadrats schließt jedoch mit der Waagerechten einen Winkel von 45° ein; genau das ist der Anstellwinkel, den wir dem Gewehr geben müssen, damit die Kugel möglichst weit fliegt.

Ist v die Gesamtgeschwindigkeit der Kugel, so erhalten wir für den Fall des Quadrats $v_1 = v_2 = v/\sqrt{2}$. Die Formel der Flugweite sieht für diesen günstigsten Fall folgendermaßen aus: $s = v^2/g$, d. h., die Flugweite ist doppelt so groß wie die Steighöhe, wenn man den Schuß mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben ausführt.

Bei einem Schuß mit dem Anstellwinkel 45° beträgt die Steighöhe $h = v_1^2/2g = v^2/4g$, d. h. nur ein Viertel der Flugweite.

Wir müssen allerdings zugeben, daß die von uns benutzten Formeln exakte Ergebnisse nur in einem einzigen Fall liefern, nämlich bei Abwesenheit von Luft. Der Luftwiderstand spielt in vielen Fällen eine entscheidende Rolle und ändert das Gesamtbild von Grund auf.

Bewegung auf einer Kreisbahn

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisbahn, dann ist die Bewegung zumindest schon deshalb beschleunigt, weil die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt ihre Richtung ändert. Dabei kann die Geschwindigkeit nach ihrem Zahlenwert unverändert bleiben, und genau diesem Fall wollen wir unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

Wir zeichnen die Geschwindigkeitsvektoren für aufeinanderfolgende Zeitintervalle und legen den Vektorursprung in ein und denselben Punkt (dazu sind wir berechtigt). Hat der Geschwindigkeitsvektor eine Schwenkung um einen kleinen Winkel vollzogen, so wird die Geschwindigkeitsänderung, wie wir wissen, durch die Basis des gleichschenkligen Dreiecks dargestellt. Wir wollen die Geschwindigkeitsänderungen für die Zeit eines vollständigen Umlaufs des betrachteten Körpers ermitteln (Bild 2.5.). Die Summe aller Geschwindigkeitsänderungen während eines vollständigen Umlaufs ist dann gleich der Summe aller Seiten des gezeigten Vielecks. Beim Aufzeichnen jedes einzelnen Dreiecks haben wir stillschweigend vorausgesetzt, der Geschwindigkeitsvektor habe sich sprungartig geändert; in Wahrheit ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors kontinuierlich. Keine Frage, daß der Fehler um so kleiner ausfällt, je kleiner wir den Winkel an der Spitze des Dreiecks wählen. Je kleiner die Seiten des Vielecks ausfallen, um so enger

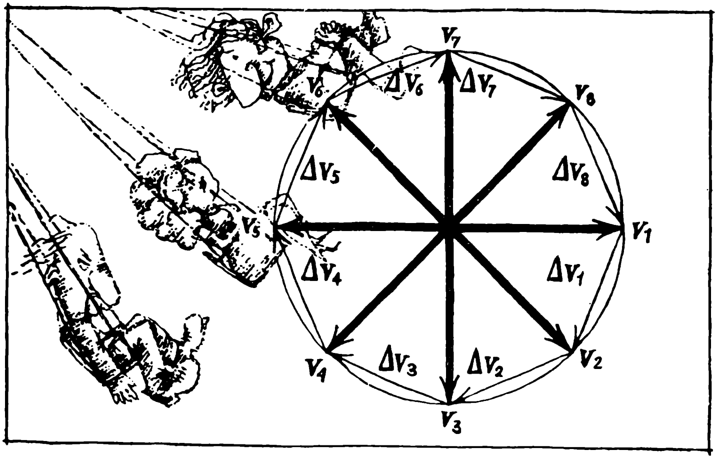


Bild 2.5.

schmiegt sich dieses an den Kreisumfang mit dem Radius v an. Darum ist der exakte Wert für die Summe der absoluten Geschwindigkeitsänderungsbeträge während eines Umlaufs des betrachteten Punkts gleich dem Kreisumfang $2\pi v$. Die Beschleunigung ergibt sich aus der Division dieser Länge durch die Dauer eines vollständigen Umlaufs $T : a = 2\pi v/T$.

Die Dauer eines vollständigen Umlaufs bei Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius R kann aber auch in der Form $T = 2\pi R/v$ angegeben werden. Setzen wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Formel ein, so erhalten wir für die Beschleunigung: $a = v^2/R$.

Bei konstantem Umlaufradius ist die Beschleunigung dem Geschwindigkeitsquadrat proportional. Bei gegebener Geschwindigkeit ist die Beschleunigung dem Radius umgekehrt proportional.

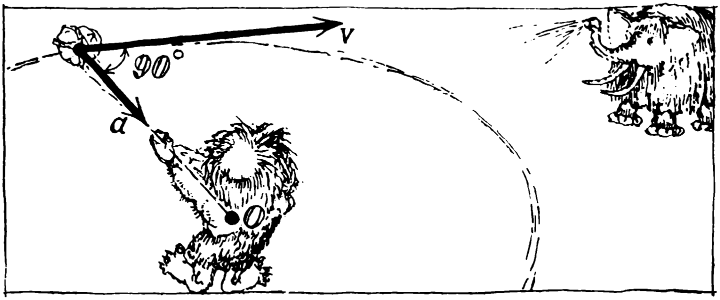


Bild 2.6.

Diese Überlegung zeigt uns, welche Richtung die Beschleunigung einer kreisförmigen Bewegung zu jedem betrachteten Zeitpunkt besitzt. Je kleiner der Winkel an der Spitze der gleichschenkligen Dreiecke ist, die wir für unseren Beweis benutzt haben, um so näher rückt der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitszuwachs und der Geschwindigkeit an 90° heran.

Demnach ist die Beschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung senkrecht zur Geschwindigkeit ausgerichtet; welche Richtung haben Geschwindigkeit und Beschleunigung aber bezüglich der Bahn? Da die Geschwindigkeit in Richtung der Bahntangente verläuft, entspricht die Beschleunigungsrichtung dem Radius und zeigt auf den Kreismittelpunkt. Diese Verhältnisse sind in Bild 2.6. gut zu erkennen.

Versuchen Sie einmal, einen Stein an einem Strick im Kreis zu schleudern. Sie werden ganz deutlich wahrnehmen, daß dazu Muskelkraft erforderlich ist. Wofür wird diese Kraft eigentlich gebraucht? Bewegt sich der Körper etwa nicht gleichförmig? Eben nicht, und da liegt der Hase im Pfeffer. Der Körper bewegt sich zwar mit einer dem Betrag nach konstanten Geschwindigkeit, doch die ständige Änderung der Geschwindigkeitsrichtung läßt diese Bewegung zu einer beschleunigten Bewegung werden. Die Kraft wird gebraucht, um den Körper aus der geradlinigen Inertialbahn auszulenken. Wir benötigen die Kraft, um jene Beschleunigung v^2/R zu erzeugen, die wir gerade berechnet haben.

Nach Newtons Gesetz zeigen Beschleunigung und Kraft stets in die gleiche Richtung. Deshalb muß ein mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn umlaufender Körper der Wirkung einer Kraft ausgesetzt sein, die radial zum Mittelpunkt der Umlaufbahn gerichtet ist. Die durch den Strick am Stein angreifende Kraft heißt Zentripetalkraft; sie ist es auch, die die Beschleunigung v^2/R gewährleistet. Also ist diese Kraft gleich mv^2/R.

Der Strick zieht am Stein, und der Stein zieht am Strick. Wir erkennen in diesen beiden Kräften „den Gegenstand und sein Spiegelbild" — die Kräfte von Aktion und Reaktion — wieder. Häufig bezeichnet man die Kraft, mit der der Stein am Strick angreift, als Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalkraft ist natürlich auch gleich mv^2/R und radial vom Mittelpunkt der Umlaufbahn weg gerichtet. Eine Zentrifugalkraft greift an einem Körper an, der dem Trägheitsstreben des umlaufenden Körpers nach geradliniger Bewegung widersteht.

Dies gilt auch dann, wenn die Schwerkraft an die Stelle des „Stricks" tritt. Der Mond umkreist die Erde. Was hält unseren Begleiter fest? Warum macht er sich, dem Trägheitsgesetz folgend, nicht auf eine interplanetare Reise? Die Erde hält den Mond mit Hilfe eines „unsichtbaren Stricks" — der Anziehungskraft — fest.

Diese Kraft ist gleich mv^2/R, worin v die Geschwindigkeit auf der Mondbahn und R der Abstand zwischen Erde und Mond ist. Die Zentrifugalkraft greift in diesem Fall an der Erde an, doch beeinflußt sie den Bewegungscharakter unseres Planeten nur unbedeutend, weil unsere Erde eine so große Masse hat.

Angenommen, ein künstlicher Erdsatellit soll auf eine kreisförmige Umlaufbahn in 300 km Abstand von der Erdoberfläche gebracht werden. Welche Geschwindigkeit muß dieser Satellit haben?

Im Abstand 300 km von der Erdoberfläche ist die Beschleunigung des freien Falls nur wenig geringer als an der Erdoberfläche und beträgt 8,9 m/s². Die Beschleunigung des auf einer Kreisbahn umlaufenden Satelliten ist gleich v^2/R, worin R die Entfernung vom Mittelpunkt der Umlaufbahn (d. h. vom Erdmittelpunkt) darstellt und ungefähr gleich 6600 km $= 6{,}6 \cdot 10^6$ m ist. Andererseits ist diese Beschleunigung gleich der Beschleunigung des freien Falls g. Demnach gilt $g = v^2/R$, woraus wir die Bewegungsgeschwindigkeit des Satelliten auf seiner Bahn wie folgt ermitteln können:

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{8{,}9 \cdot 6{,}6 \cdot 10^6} = 7700\ \mathrm{m/s} = 7{,}7\ \mathrm{km/s}.$$

Die Mindestgeschwindigkeit, die notwendig ist, damit ein waagerecht geworfener Körper zu einem Erdsatelliten wird, heißt Minimalkreisbahn-Geschwindigkeit. Aus dem hier vorgestellten Beispiel ist ersichtlich, daß diese Geschwindigkeit bei 8 km/s liegt.

Leben in Schwerelosigkeit

Weiter oben haben wir nach einem „vernünftigen Standpunkt" in bezug auf die Bewegung gesucht. Freilich stellte sich dabei heraus, daß es eine unendliche Vielzahl „vernünftiger" Standpunkte gibt, die wir als Inertialsysteme bezeichnet haben.

Gerüstet mit der Kenntnis der Bewegungsgesetze, können wir uns nun dafür interessieren, welches Bild die Bewegung von „unvernünftigen" Standpunkten aus bietet. Zu fragen, wie es den Bewohnern nicht inertialer

Systeme geht, ist keineswegs müßig, schon deshalb nicht, weil wir selbst ein derartiges System bewohnen.

Stellen wir uns vor, wir hätten unter Mitnahme von Meßgeräten ein interplanetares Raumschiff bestiegen und wären zu einer Reise in die Welt der Sterne aufgebrochen.

Rasch läuft die Zeit dahin. Schon bietet die Sonne das Bild eines winzigen Sterns. Das Triebwerk ist ausgeschaltet, und das Raumschiff ist von Körpern, die eine Anziehungskraft erzeugen, weit entfernt.

Nun wollen wir einmal zusehen, was sich in unserem fliegenden Laboratorium abspielt. Warum hängt das Thermometer, das sich aus seiner Halterung gelöst hat, in der Luft und fällt nicht zu Boden? Wie seltsam mutet die Stellung an, in der ein an der Wand hängendes und aus der „Senkrechten" ausgelenktes Pendel zur Ruhe gekommen ist. Die Erklärung ist einfach: Das Raumschiff befindet sich nicht auf der Erde, sondern im interplanetaren Raum. Die Gegenstände sind schwerelos geworden.

Nachdem wir uns an dem ungewohnten Bild satt gesehen haben, beschließen wir, den Kurs zu ändern. Durch Knopfdruck schalten wir das Triebwerk ein, und plötzlich kommt Leben in die Gegenstände unserer Umgebung. Alles, was nicht niet- und nagelfest ist, kommt in Bewegung. Das Thermometer fällt zu Boden, das Pendel beginnt zu schwingen, beruhigt sich allmählich und nimmt eine senkrechte Lage ein; gehorsam gibt das Kissen unter dem darauf liegenden Koffer nach. Wir werfen einen Blick auf die Geräte, die uns anzeigen, in welche Richtung unser Raumschiff seine beschleunigte Bewegung begonnen hat. Natürlich, es geht aufwärts. Unsere Geräte zeigen, daß wir eine Bewegung mit der für die Möglichkeiten des Raumschiffs geringfügigen Beschleunigung von 9,8 m/s^2 gewählt haben. Unsere Empfindungen sind durchaus normal; wir fühlen uns wie auf der Erde. Aber warum ist das so? Unvorstellbar weit ist das Raumschiff von allen Massen entfernt, die eine Anziehungskraft erzeugen; es gibt keine Anziehungskräfte, und doch haben die Gegenstände ihre Schwere zurückerlangt.

Wir lassen eine Kugel fallen und messen die Beschleunigung, mit der sie auf den Boden des Raumschiffs fällt. Die Beschleunigung beträgt 9,8 m/s^2. Die gleiche Ziffer haben wir eben an den Geräten abgelesen, die die Beschleunigung unserer Rakete messen. Das Raumschiff bewegt sich mit der gleichen Beschleunigung nach oben, mit der die Körper in unserem fliegenden Laboratorium nach unten fallen.

Was ist eigentlich unter „oben“ und „unten“ im fliegenden Raumschiff zu verstehen? Wie einfach lagen die Dinge, als wir noch auf der Erde lebten. Dort war der Himmel oben und die Erde unten. Hier aber? Unser „Oben“ besitzt ein unbestreitbares Merkmal: die Beschleunigungsrichtung der Rakete.

Die Bedeutung unserer Beobachtungen ist leicht zu verstehen: Auf die Kugel, die wir gerade losgelassen haben, wirken überhaupt keine Kräfte ein. Die Kugelbewegung folgt der Trägheit. Die Rakete ist es vielmehr, die sich beschleunigt relativ zur Kugel fortbewegt, uns dagegen, die wir uns in der Rakete befinden, scheint es, als „fiele“ die Kugel in die Richtung, die der Beschleunigungsrichtung der Rakete entgegengesetzt ist. Naturgemäß ist die Beschleunigung dieses „Fallens“ gleich der wahren Beschleunigung der Rakete. Klar ist auch, daß alle Körper in der Rakete mit der gleichen Geschwindigkeit „fallen“ werden.

Aus dem bisher Gesagten können wir einen interessanten Schluß ziehen. In einer beschleunigt bewegten Rakete erwerben die Körper „Schwere“. Dabei ist die „Anziehungskraft“ in die zur Beschleunigungsrichtung der Rakete entgegengesetzte Richtung gewandt, und die Beschleunigung des freien „Falls“ ist gleich der Beschleunigung unserer Rakete mit ihrem Rückstoßantrieb. Am interessantesten aber ist die Tatsache, daß wir praktisch nicht imstande sind, die beschleunigte Bewegung des Systems von der entsprechenden Schwerkraft zu unterscheiden.* Befänden wir uns in einem Raumschiff mit geschlossenen Sichtfenstern, dann könnten wir nicht erfahren, ob es auf der Erde steht oder sich mit der Beschleunigung 9,8 m/s² bewegt. Die Gleichwertigkeit von Beschleunigung und Schwerkraftwirkung wird in der Physik als Äquivalenzprinzip bezeichnet.

Dieses Prinzip erlaubt, wie wir sogleich an vielen Beispielen sehen werden, die rasche Lösung vieler Probleme, indem man den realen Kräften eine fiktive Schwerkraft hinzufügt, wie sie in beschleunigt bewegten Systemen existiert.

Als erstes Beispiel kann ein Aufzug dienen. Wir nehmen eine Federwaage sowie einige Wägestücke mit und fahren mit dem Aufzug nach oben. Dabei verfolgen wir das Verhalten des Zeigers der Waage, auf die wir ein Wägestück mit einer Masse von 1 kg gelegt haben (Bild 2.7.). Der Aufzug setzt sich in Bewegung; wir sehen, daß die Waage eine größere Gewichtskraft anzeigt, ganz so, als hätte das Wägestück eine größere Masse als 1 kg.

Diese Tatsache läßt sich mit dem Äguivalenzprinzip leicht erklären. Während sich der Aufzug mit der Beschleunigung a nach oben bewegte, entstand eine zusätzliche, nach unten gerichtete Schwerkraft. Da die Beschleunigung dieser Kraft gleich a ist, entspricht die zusätz-

* Das gilt aber nur für den „praktischen" Fall. Im Prinzip gibt es einen Unterschied. Auf der Erde zeigen die Schwerkräfte radial zum Erdmittelpunkt. Das heißt, daß die Beschleunigungsrichtungen an zwei verschiedenen Punkten miteinander einen Winkel einschließen. In der beschleunigt bewegten Rakete dagegen sind die Schwerkräfte an allen Punkten streng parallel ausgerichtet. Auf der Erde ändert sich die Beschleunigung überdies mit der Höhe, während dieser Effekt in der beschleunigt bewegten Rakete fehlt.

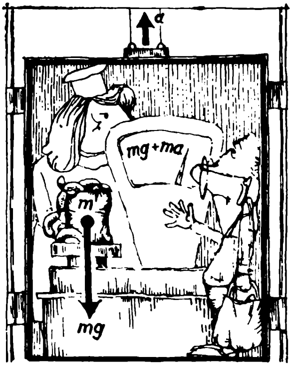


Bild 2.7.

liche Gewichtskraft ma. Die Waage muß also $mg + ma$ anzeigen. Hört die Beschleunigung auf und bewegt sich der Aufzug gleichförmig weiter, so kehrt die Feder in ihre Ausgangslage zurück, und die Waage zeigt rund 10 N an. Nun nähern wir uns dem obersten Geschoß, und die Aufzugsbewegung verlangsamt sich. Was geschieht jetzt mit unserer Federwaage? Gewiß doch: Die Last wiegt jetzt weniger als 10 N. Bei verzögerter Aufzugsbewegung zeigt der Beschleunigungsvektor nach unten. Also ist die zusätzliche fiktive Schwerkraft nach oben gerichtet, d.h. entgegengesetzt zur Richtung der Erdschwerkraft, a ist nun negativ, und die Waage zeigt einen kleineren Wert als mg an. Nach erfolgtem Stillstand des Aufzugs kehrt die Feder in ihre Ausgangslage zurück. Die Aufzugsbewegung wird beschleunigt; der Beschleunigungsvektor zeigt nach unten, also ist die zusätzliche Schwerkraft nach oben gerichtet. Die Last wiegt jetzt weniger als 10 N. Sobald die Bewegung gleichförmig wird, verschwindet die zusätzliche Schwere, und kurz vor dem Ende unserer Reise im Aufzug — d.h. bei verzögerter Abwärtsbewegung — wird die Last dann wieder mehr als 10 N wiegen.

Die unangenehmen Empfindungen bei rascher Beschleunigung bzw. Verzögerung der Aufzugsbewegung hängen mit der hier betrachteten Gewichtskraftänderung zusammen.

Sinkt der Aufzug beschleunigt, dann werden die darin befindlichen Körper gewissermaßen leichter. Je größer die Beschleunigung, um so größer der Gewichtskraftverlust. Was aber geschieht bei freiem Fall des Systems? Die Antwort liegt auf der Hand: Alle Körper werden in diesem Fall aufhören, einen Druck auf ihre Unterlage auszuüben — sie wiegen nichts mehr: Die Anziehungskraft der Erde wird durch die zusätzliche Schwerkraft ausgeglichen, die in einem derartigen frei fallenden System existiert. Wenn man sich in einem derartigen „Aufzug" befindet, kann man sich seelenruhig eine ganze Tonne auf die Schultern laden.

Zu Beginn dieses Abschnitts haben wir das Leben ohne Schwere in einem interplanetaren Raumschiff beschrieben, das Anziehungsbereich der Erde verlassen hat. Bei gleichförmig geradliniger Bewegung existiert in diesem Raumschiff keine Schwere, doch tritt die gleiche Situation auch beim freien Fall eines Systems ein. Wir brauchen den Anziehungsbereich also gar nicht zu verlassen: Die Schwere verschwindet auch in jedem interplanetaren Raumschiff, das sich mit abgeschaltetem Triebwerk fortbewegt. Der freie Fall führt zur Schwerelosigkeit in den entsprechenden Systemen. So hat uns das Äquivalenzprinzip zu dem Schluß geführt, daß ein Bezugssystem mit geradlinig gleichförmiger Bewegung in großer Entfernung von Anziehungskräften und ein Bezugssystem, das unter Schwerkraftwirkung frei fällt, nahezu (vergleiche unsere Anmerkung auf Seite 80) gleichwertig sind. Im erstgenannten System gibt es keine Gewichtskraft, und im zweiten Fall ist die nach unten wirkende Gewichtskraft durch die nach oben wirkende Gewichtskraft ausgeglichen.

In einem künstlichen Erdsatelliten beginnt das Leben ohne Gewicht mit dem Augenblick, in dem das Raumschiff auf die Umlaufbahn gebracht worden ist und seinen Weg antriebslos fortsetzt.

Der erste interplanetare Passagier war die Hündin Laika. und bald darauf lernte auch der Mensch das „Leben ohne Schwere“ in der Raumschiffkabine kennen. Der erste Mensch im All war der sowjetische Fliegerkosmonaut Juri Gagarin.

Das Leben in der Raumschiffkabine ist in der Tat außergewöhnlich. Viel Erfindungskraft und Scharfsinn mußten aufgewendet werden, um all die Dinge „zur Vernunft“ zu bringen, die so leicht der Schwerkraft gehorchen. Kann man beispielsweise Wasser aus einer Flasche in ein Glas gießen? Immerhin fließt das Wasser unter dem Einfluß der Schwerkraft „nach unten“. Kann man Essen zubereiten, wenn man kein Wasser auf der Kochplatte heiß machen kann? (Das warme Wasser wird sich nämlich nicht mit dem kalten vermischen.) Wie soll man mit Papier und Bleistift schreiben, wenn ein leichtes Anstoßen mit dem Bleistift am Tisch genügt, um den Schreiber zur Seite zu stoßen? Kein Streichholz, keine Kerze und kein Gasbrenner funktionieren, da die Verbrennungsgase nicht nach oben steigen (es gibt ja kein „Oben“!) und so dem Sauerstoff keinen Zutritt gewähren. Selbst über die Gewährleistung des normalen Ablaufs der natürlichen Prozesse, die im menschlichen Organismus stattfinden, mußte man sich Gedanken machen, denn auch sie haben sich an die Schwerkraft der Erde „gewöhnt“.

Bewegung, von einem „unvernünftigen" Standpunkt aus betrachtet

Nun wollen wir uns physikalischen Beobachtungen in einem beschleunigt bewegten Omnibus bzw. einer Straßenbahn zuwenden. Die Besonderheit, die diese Situation von der vorhergehenden unterscheidet, besteht in folgendem: Im Beispiel mit dem Aufzug lagen die Richtung der zusätzlichen Schwere und der Anziehungskraft der Erde in einer Linie. In einer bremsenden oder beschleunigenden Straßenbahn steht die zusätzliche Schwerkraft senkrecht zur Richtung der Erdanziehung. Dies bewirkt eigenartige, wenn auch gewohnte Empfindungen beim Fahrgast. Wenn die Straßenbahn beschleunigt, entsteht eine zusätzliche Kraft, die der Fahrtrichtung entgegengesetzt ist. Lassen Sie uns diese Kraft mit der Erdanziehungskraft addieren. Im Ergebnis wird an einem im Straßenbahnwagen befindlichen Menschen eine Kraft angreifen, die unter einem stumpfen Winkel in Fahrtrichtung zeigt. Wenn wir wie gewöhnlich mit dem Gesicht in Fahrtrichtung im Straßenbahnwagen stehen, fühlen wir, daß sich unser „Oben" verlagert hat. Um nicht hinzufallen, werden wir versuchen, uns „vertikal" hinzustellen, so wie dies in Bild 2.8a. gezeigt ist. Unsere „Senkrechte" steht schräg. Sie ist unter einem spitzen Winkel zur Fahrtrichtung geneigt. Würde ein Fahrgast dagegen rechtwinklig zur Fahrtrichtung stehen, ohne sich festzuhalten, dann müßte er unbedingt nach hinten fallen.

Nun ist die Straßenbahn endlich zur gleichförmigen Bewegung übergegangen, und wir können ruhig stehen. Da aber kommt die nächste Haltestelle. Der Straßenbahnfahrer bremst, und unsere „Senkrechte" wird ausgelenkt. Nun schließt sie, wie aus Bild 2.8b. hervorgeht, mit der Fahrtrichtung einen stumpfen Winkel ein. Um nicht hinzufallen, neigt sich der Fahrgast zurück. Allerdings verweilt er nicht lange in dieser Lage. Die Straßen-

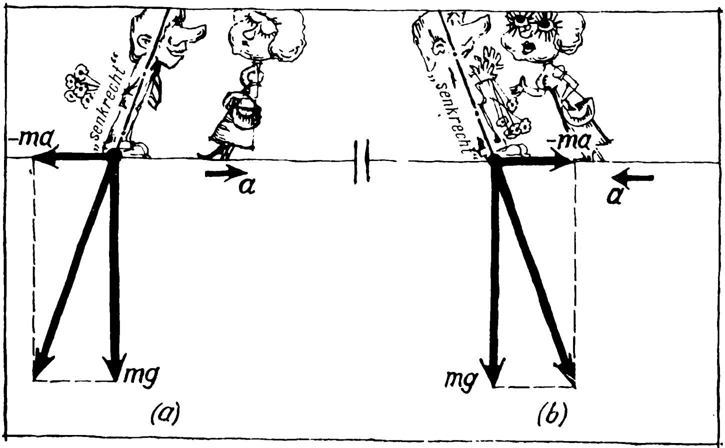


Bild 2.8.

bahn hält an, die Verzögerung verschwindet, und die „Senkrechte“ verläuft wieder senkrecht zur Erdoberfläche. Wiederum müssen wir unsere Körperlage wechseln. Kontrollieren Sie einmal Ihre Empfindungen. Haben Sie nicht auch bei Beginn des Bremsens den Eindruck, es habe Sie jemand in den Rücken gestoßen? Und wenn der Wagen zum Stillstand gekommen ist, glauben Sie, einen Stoß in die Brust erhalten zu haben.

Ähnliche Erscheinungen finden auch dann statt, wenn die Straßenbahn eine Schleife durchfährt. Wir wissen, daß die Bewegung auf einer Kreisbahn selbst bei konstanter Geschwindigkeit beschleunigt ist. Die Beschleunigung v^2/R ist um so größer, je schneller die Straßenbahn fährt und je kleiner der Schleifenradius R ist. Die Beschleunigung dieser Bewegung ist radial zum Mittelpunkt hin gerichtet. Dies freilich ist der Entstehung einer zusätzlichen Schwere äquivalent, die gerade die umgekehrte Richtung hat. Also wird ein Fahrgast während der

Schleifenfahrt der zusätzlichen Kraft mv^2/R ausgesetzt sein, die ihn — vom Schleifenmittelpunkt aus gesehen — nach außen drückt. Die Radialkraft mv^2/R heißt Zentrifugalkraft. Der gleichen, freilich von einem etwas anderen Standpunkt aus betrachteten Kraft sind wir bereits weiter oben begegnet.

Die Wirkung der Zentrifugalkraft in einer wendenden Straßenbahn oder einem Omnibus kann nur geringfügige Unannehmlichkeiten verursachen. Die Kraft mv^2/R ist hier gering. Beim raschen Durchfahren einer Schleife können die Zentrifugalkräfte dagegen große Werte erreichen und lebensgefährlich werden. Großen Werten von mv^2/R begegnen Flieger, wenn das Flugzeug einen sogenannten Looping ausführt. Wenn das Flugzeug eine Kreisbahn beschreibt, ist der Flieger einer Zentrifugalkraft ausgesetzt, die ihn an den Sitz preßt. Je kleiner der Umfang des Loopings nun ist, um so größer ist auch die zusätzliche Schwere, die den Flieger in seinen Sitz drückt. Ist diese Schwerkraft groß, dann kann der Mensch „zerreißen", denn die Gewebe eines lebenden Organismus haben nur eine begrenzte Festigkeit und sind nicht imstande, jeder beliebigen Schwerkraft standzuhalten.

Um wieviel kann ein Mensch ohne wesentliche Gefährdung „schwerer" werden? Dies hängt von der Belastungsdauer ab. Hält die Belastung nur Sekundenbruchteile an, dann vermag der Mensch, die acht- bis zehnfache Gewichtskraft, d.h. Überlastung von 7 bis 9 g auszuhalten. Für die Dauer einiger Dutzend Sekunden verträgt ein Flieger 3 bis 5 g. Bei Kosmonauten ist die Frage interessant, welche Überlastung ein Mensch während einiger Dutzend Minuten, vielleicht aber auch Stunden, vertragen kann. In solchen Fällen muß die Überlastung wahrscheinlich erheblich geringer sein.

Wir wollen nun die Radien von Schleifen berechnen, die ein Flugzeug ohne Gefahr für den Flieger bei verschiedenen Geschwindigkeiten beschreibt. Dazu beginnen wir

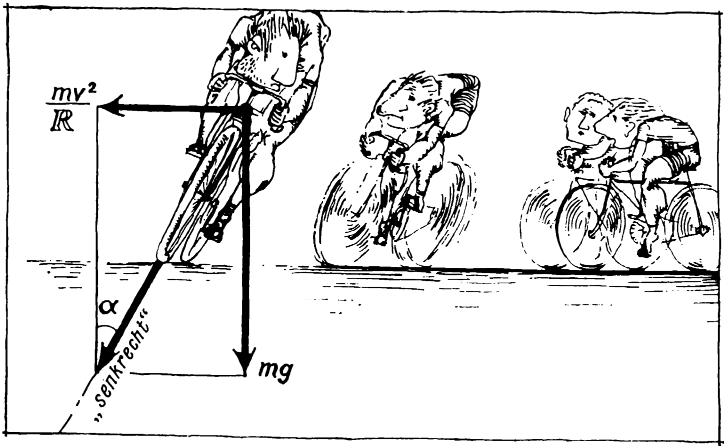


Bild 2.9.

mit der Beschleunigung $v^2/R = 4\,g$ und $R = v^2/4\,g$. Bei einer Geschwindigkeit von 360 km/h = 100 m/s beträgt der Schleifenradius 250 m; ist die Geschwindigkeit dagegen viermal so groß, d.h., beträgt sie 1440 km/h (und diese Geschwindigkeit wurde von modernen Düsenflugzeugen bereits übertroffen), dann muß der Schleifenradius auf das 16fache vergrößert werden. Damit beträgt der Mindestradius der Schleife 4 km.

Wir wollen aber auch ein bescheideneres Verkehrsmittel, nämlich das Fahrrad, nicht außer acht lassen. Wir haben alle schon einmal gesehen, wie sich ein Radfahrer „in die Kurve legt". Ein Radfahrer soll aufgefordert werden, einen Kreis des Radius R mit der Geschwindigkeit v zu fahren; er wird dabei der zum Mittelpunkt gerichteten Beschleunigung v^2/R ausgesetzt sein. Abgesehen von der Erdanziehungskraft, wird hier am Radfahrer eine zusätzliche Zentrifugalkraft angreifen, die in der Waagerechten vom Mittelpunkt weg weist. In Bild 2.9. sind diese Kräfte

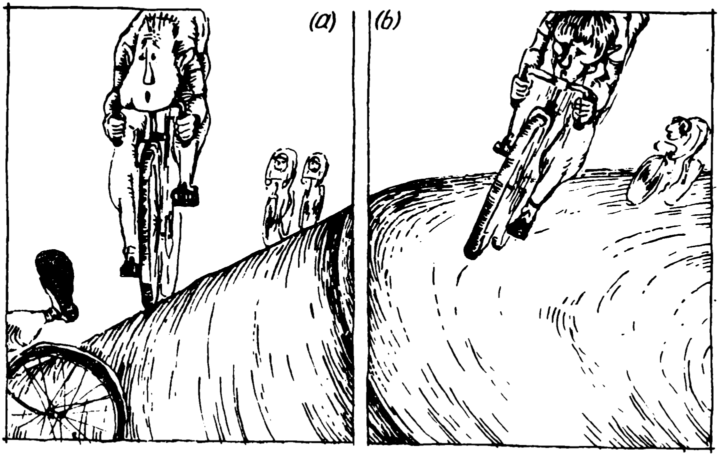


Bild 2.10.

und ihre Summe dargestellt. Natürlich muß sich der Radfahrer „senkrecht" halten, sonst kippt er um. Doch seine „Senkrechte" stimmt nicht mit der irdischen „Senkrechten" überein. Aus dem Bild geht hervor, daß die Vektoren mv^2/R und mg die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden. Das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete ist der Tangens des betreffenden Winkels. In unserem Fall ist $\operatorname{tg} \alpha = v^2/Rg$; die Masse hat in voller Übereinstimmung mit dem Äquivalenzprinzip abgenommen. Also hängt der Neigungswinkel des Radfahrers nicht von seiner Masse ab: Der Dicke wie der Dünne müssen sich gleichermaßen in die Kurve legen. Die Formel und das im Bild dargestellte Dreieck zeigen die Abhängigkeit der Neigung von der Geschwindigkeit (diese Neigung nimmt mit steigender Geschwindigkeit zu) und vom Radius des Kreises (hier wird die Neigung mit abnehmendem Radius größer). Wir haben festgestellt, daß die Senkrechte des

Radfahrers nicht mit der irdischen Senkrechten übereinstimmt. Was wird der Radfahrer nun empfinden? Dazu müssen wir das Bild 2.9. drehen. Die Fahrbahn sieht jetzt wie ein Berghang aus (Bild 2.10a.), und nun wird uns klar, daß bei ungenügender Reibungskraft zwischen den Reifen und dem Straßenbelag (nasser Asphalt) der Radfahrer „abrutschen" kann, so daß die scharfe Kurve mit dem Sturz in den Straßengraben endet.

Damit dies nicht geschieht, werden scharfe Kurven von Fahrbahnen „ausgebaut", wie es Bild 2.10b. zeigt, d.h., sie werden für den Radfahrer waagerecht gestaltet. Man kann damit die Rutschgefahr stark vermindern bzw. beseitigen. Besondere Berücksichtigung findet dies bei Kurven von Radrennbahnen und Autobahnen.

Zentrifugalkräfte

Nun wollen wir uns rotierenden Systemen zuwenden. Die Bewegung derartiger Systeme wird durch die Anzahl von Umdrehungen je Sekunde bestimmt, die die Systeme um ihre eigene Achse ausführen. Natürlich muß man auch die Richtung der Drehachse kennen.

Um die Besonderheiten des Lebens in rotierenden Systemen besser verstehen zu lernen, wollen wir uns einmal das „Teufelsrad", eine bekannte Rummelplatzattraktion, ansehen. Sein Aufbau ist sehr einfach. Eine glatte Scheibe von einigen Metern Durchmesser wird in rasche Drehung versetzt. Das Publikum wird aufgefordert, sich auf die Scheibe zu setzen und sich möglichst lange auf der Scheibe zu halten. Selbst, wer in Physik keine Ahnung hat, kommt rasch hinter das Geheimnis des Erfolges: Man muß die Mitte der Scheibe aufsuchen, denn je weiter man vom Mittelpunkt entfernt ist, um so schwerer fällt es, seinen Platz beizubehalten.

Die Scheibe als Ganzes stellt ein Nichtinertialsystem mit einigen besonderen Eigenschaften dar. Jeder mit der

Scheibe fest verbundene Gegenstand bewegt sich auf einer Kreisbahn des Radius R mit der Geschwindigkeit v, d. h. mit der Beschleunigung v^2/R. Wie wir bereits wissen, bedeutet dies, vom Standpunkt eines nichtinertialen Beobachters, das Auftreten einer zusätzlichen Schwere mv^2/R, die radial vom Mittelpunkt wegführt. Diese Radialschwerkraft tritt mit Ausnahme des Mittelpunktes an jedem Punkt des „Teufelsrades“ auf und erzeugt dabei die Radialbeschleunigung v^2/R. Für Punkte, die auf dem gleichen Kreisumfang liegen, ist auch die Beschleunigung gleich. Wie aber sieht es auf verschiedenen Kreisumfängen aus? Nicht so hastig! Sagen Sie bloß nicht, die Beschleunigung müßte gemäß der Formel v^2/R um so größer sein, je geringer die Entfernung vom Mittelpunkt ist. Das ist falsch; die Geschwindigkeit der weiter vom Mittelpunkt entfernten Punkte ist ja größer. Bezeichnet man die Anzahl der Umdrehungen, die das Rad je Sekunde ausführt, mit n, dann läßt sich der Weg, den ein Punkt auf dem Rad in der Entfernung R vom Zentrum je Sekunde zurücklegt, d. h. also die Geschwindigkeit dieses Punktes, wie folgt angeben: $2\pi Rn$.

Die Geschwindigkeit jedes Punktes ist seiner Entfernung vom Mittelpunkt direkt proportional. Nun läßt sich diese Beschleunigungsformel angeben:

$$a = 4\pi^2 n^2 R.$$

Da nun die Anzahl der je Sekunde ausgeführten Umdrehungen für alle Punkte des Rades gleich ist, gelangen wir zu dem Schluß, daß die Radialbeschleunigung, die auf einem umlaufenden Rad wirkt, proportional mit der Entfernung des Punktes vom Radmittelpunkt zunimmt.

Die Schwerkraft in diesem interessanten Nichtinertialsystem ist auf verschiedenen Kreisumfängen unterschiedlich. Also müssen auch die Richtungen der „Senkrechten“ für Körper, die sich in unterschiedlichen Entfernungen vom Mittelpunkt befinden, verschieden sein. Die Erdan-

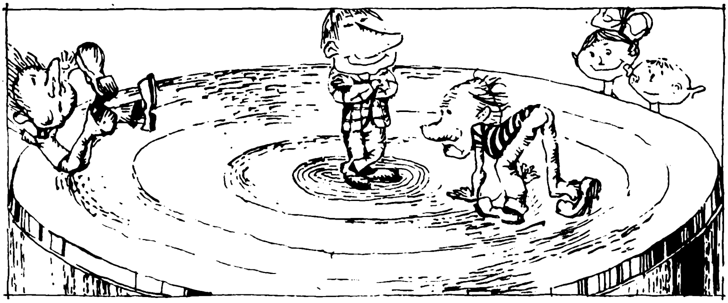


Bild 2.11.

ziehungskraft ist natürlich an allen Punkten des Rades ein und dieselbe. Der Vektor hingegen, der die zusätzliche „Radialschwere“ charakterisiert, wird um so länger, je weiter man sich vom Mittelpunkt entfernt. Somit werden die Diagonalen der Rechtecke im Vergleich zur irdischen Senkrechten immer stärker ausgelenkt.

Will man sich vorstellen, was ein Mensch, der vom Teufelsrad herunterrutscht, von seinem Standpunkt aus wahrnimmt, dann kann man sagen, daß sich die Scheibe, je größer die Entfernung von ihrem Mittelpunkt wird, immer stärker „neigt“, so daß es unmöglich wird, sich auf der Scheibe zu halten. Will man auf ihr stehenbleiben, dann muß man sich bemühen, den eigenen Schwerpunkt auf der „Senkrechten“ zu halten, die immer stärker gegen die Drehachse geneigt ist, je weiter die Männchen in Bild 2.11. vom Mittelpunkt entfernt sind.

Könnte man für ein derartiges Inertialsystem nicht eine Vorrichtung ausdenken, die einer ausgebauten Straßenkurve ähnelt? Gewiß, das ist möglich, man muß nur die Scheibe durch eine Oberfläche ersetzen, bei der an jedem Punkt die Gesamtschwerkraft senkrecht angeordnet ist. Die Form einer derartigen Oberfläche läßt sich be-

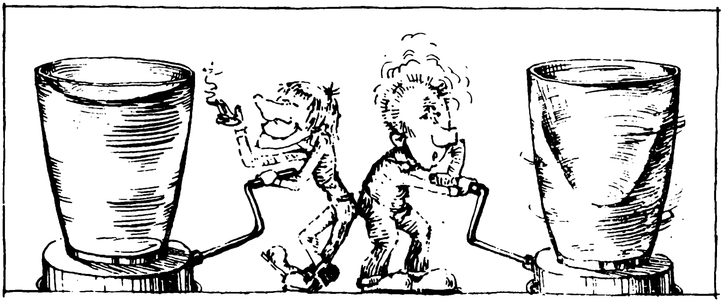


Bild 2.12.

rechnen. Sie heißt Paraboloid. Diese Bezeichnung wurde nicht zufällig gewählt: In jedem Vertikalschnitt liefert das Paraboloid eine Parabel, d. h. die Kurve, die Körper beim Fallen beschreiben. Das Paraboloid entsteht durch Drehung einer Parabel um ihre Achse.

Besonders leicht kann man diese Oberfläche erzeugen, wenn man ein mit Wasser gefülltes Gefäß in rasche Drehung versetzt. Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit bildet ein Paraboloid. Die Wasserpartikeln werden genau dann aufhören, ihre Lage zu ändern, wenn die Kraft, die jedes Partikel an die Oberfläche preßt, senkrecht zu dieser steht. Jeder Drehgeschwindigkeit entspricht ein anderes Paraboloid (Bild 2.12.).

Fertigt man ein Paraboloid aus einem Feststoff an, dann läßt sich seine Eigenschaft anschaulich demonstrieren. Eine kleine Kugel, an eine beliebige Stelle des mit einer bestimmten Geschwindigkeit rotierenden Paraboloids gelegt, bleibt in Ruhe. Das bedeutet, daß die auf die Kugel einwirkende Kraft senkrecht zur Oberfläche steht. Anders ausgedrückt: Die Oberfläche eines rotierenden Paraboloids hat gewissermaßen die Eigenschaften einer waagerechten Oberfläche. Man kann darauf herumlaufen wie auf der Erde und sich durchaus sicher auf den Beinen fühlen. Allerdings wird sich die Richtung unserer „Senkrechten“ ändern, wenn wir im Paraboloid auf und ab laufen.

Zentrifugalerscheinungen werden in der Technik häufig genutzt. Auf der Nutzung solcher Erscheinungen beruht beispielsweise die Zentrifuge.

Die Zentrifuge ist eine rasch um ihre Achse rotierende Trommel. Was wird geschehen, wenn wir verschiedene Gegenstände in die bis zum Rand mit Wasser gefüllte Trommel werfen?

Beginnen wir mit einer kleinen Metallkugel: Sie wird zu Boden sinken, aber nicht im Verlauf unserer „Senkrechten“; vielmehr wird sie sich die ganze Zeit über von der Drehachse entfernen und schließlich an der Trommelwand anhalten. Nun werfen wir eine Korkkugel in die Trommel, die — gerade umgekehrt — sich sogleich in Richtung der Drehachse zu bewegen beginnt, um dann dort zu verharren.

Hat die Trommel unseres Zentrifugenmodells einen großen Durchmesser, dann können wir bemerken, wie die Beschleunigung in dem Maße steil ansteigt, wie sich die Gegenstände vom Mittelpunkt entfernen.

Die hier ablaufenden Erscheinungen sind durchaus verständlich. Im Zentrifugeninneren existiert eine zusätzliche Radialschwere. Rotiert die Zentrifuge genügend schnell, dann bildet die Trommelwandung das „Unten“ der Trommel. Die Metallkugel „taucht“ im Wasser „unter“, während die Korkkugel „aufschwimmt“. Je weiter sich ein in das Wasser „fallender“ Körper von der Drehachse entfernt, um so „schwerer“ wird er.

Bei hinreichend gut konstruierten Zentrifugen erreicht man Geschwindigkeiten von 60 000 Umdrehungen in der Minute, d. h. 10^3 Umdrehungen je Sekunde. In 10 cm Entfernung von der Drehachse ist die Beschleunigung der

Radialschwerkraft ungefähr gleich:

$$40 \cdot 10^6 \cdot 0{,}1 = 4 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2,$$

d. h. 400 000mal so groß wie die Erdbeschleunigung.

Es leuchtet ein, daß man bei solchen Maschinen die Erdschwere nicht zu berücksichtigen braucht, und wir dürfen wirklich sagen, daß das „Unten" in der Zentrifuge die Trommelwand ist.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich das Anwendungsgebiet von Zentrifugen. Wollen wir in einem Gemisch schwere von leichten Partikeln trennen, dann ist stets der Einsatz einer Zentrifuge angezeigt. Wir kennen alle die Formulierung: „Eine trübe Flüssigkeit hat sich abgesetzt". Wenn man verschmutztes Wasser nur lange genug stehen läßt, dann setzt sich die Trübe (die gewöhnlich schwerer als das Wasser ist) am Boden ab. Allerdings kann dieser Vorgang monatelang dauern, während sich das Wasser mit Hilfe einer guten Zentrifuge in Sekundenschnelle reinigen läßt.

Zentrifugen, die mit einer Geschwindigkeit von einigen 10 000 Umdrehungen in der Minute rotieren, vermögen feinste Trübstoffe nicht nur aus Wasser, sondern auch aus viskosen Flüssigkeiten abzutrennen.

In der chemischen Industrie werden Zentrifugen zur Trennung von Kristallen aus den Lösungen verwendet, in denen die Kristalle gezüchtet wurden; sie dienen zur Entwässerung von Salzen und zur Reinigung von Lacken; in der Lebensmittelindustrie verwendet man sie zur Abtrennung der Melasse vom Weißzucker.

Einen Sonderfall des Zentrifugeneinsatzes zur Abtrennung fester oder flüssiger Bestandteile von großen Flüssigkeitsmengen stellen die Milchzentrifugen dar. Milchzentrifugen rotieren mit einer Geschwindigkeit von 2000 bis 6000 Umdrehungen in der Minute, und ihr Trommeldurchmesser reicht bis zu 5 m.

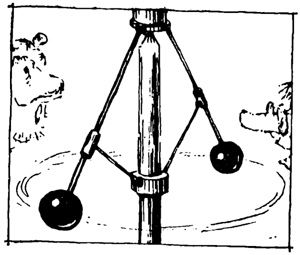


Bild 2.13.

Der Schleuderguß ist ein in der Metallurgie häufig verwendetes Verfahren. Bereits bei Geschwindigkeiten von 300 bis 500 Umdrehungen in der Minute wird das in die rotierende Form eintretende flüssige Metall mit erheblicher Kraft an die Außenwände der Form gedrückt. So gießt man Metallrohre und erhält dabei dichtere, homogenere, lunker- und rißfreie Erzeugnisse.

Und nun noch eine andere Anwendung der Zentrifugalkraft. In Bild 2.13. ist eine einfache Vorrichtung dargestellt, die zur Regelung der Drehzahl rotierender Maschinenteile dient. Diese Vorrichtung heißt Fliehkraftregler. Bei zunehmender Drehgeschwindigkeit wächst die Zentrifugalkraft, und der Abstand der Kugeln des Reglers von der Achse wird größer. Die an den Kugeln befestigten Zugstangen werden ausgelenkt und können bei einer bestimmten, vom Konstrukteur berechneten Auslenkung bestimmte elektrische Kontakte oder beispielsweise im Fall der Dampfmaschine auch Ventile öffnen, die hier den Dampfüberschuß austreten lassen. Dadurch nimmt die Drehgeschwindigkeit ab, und die Zugstangen kehren in die Normalstellung zurück.

Interessant ist folgender Demonstrationsversuch. Auf die Achse eines Elektromotors wird eine Pappscheibe gesteckt. Wir schalten nun den Strom ein und bringen einen Holzklotz an die rotierende Pappscheibe. Ein Kantholz von beträchtlicher Dicke wird ebenso leicht durchgesägt wie von einer Stahlsäge.

Der Versuch, Holz mit einem Pappstreifen zu zersägen, indem man diesen wie eine Handsäge benutzt, könnte uns nur ein Lächeln abnötigen. Warum schneidet dann aber eine rotierende Pappscheibe Holz? Auf die am Umfang der Scheibe liegenden Pappteilchen wirkt eine ungeheuer große Zentrifugalkraft. Seitlich angreifende Kräfte, die die Ebene der Pappscheibe deformieren könnten, sind verschwindend gering im Vergleich zur Zentrifugalkraft. Da die Pappscheibe unverändert in einer Ebene verbleibt, vermag sie sich in das Holz „hineinzufressen".

Die infolge der Erdrotation entstehende Zentrifugalkraft führt zu Gewichtskraftunterschieden von Körpern auf verschiedenen Breiten.

Ein Körper wiegt am Äquator weniger als am Pol, und zwar aus zwei Gründen. An der Erdoberfläche liegende Körper haben je nach der geographischen Breite des Ortes unterschiedliche Abstände von der Erdachse. Beim Übergang vom Pol zum Äquator nimmt dieser Abstand natürlich zu. Überdies befindet sich ein Körper am Pol auf der Drehachse, und die Zentrifugalbeschleunigung ist

$$a = 4\pi^2 n^2 R = 0$$

(denn die Entfernung von der Drehachse ist $R = 0$). Im Gegensatz dazu erreicht die Beschleunigung am Äquator ihren größten Wert. Die Zentrifugalkraft verringert die Anziehungskraft. Darum ist der Druck, den die Körper auf ihre Unterlage ausüben, hier am kleinsten.

Wäre die Erde genau kugelförmig, dann würde ein 1-N-Wägestück, das man vom Pol zum Äquator befördert, 3,5 mN seiner Gewichtskraft. Diese Zahl läßt sich nach folgender Formel leicht berechnen:

$$4\pi^2 n^2 Rm,$$

indem man für $n = 1$ Umdrehung/24 h, $R = 6300$ km und $m = 1000$ mN einsetzt. Allerdings muß man die Maßeinheiten in Sekunden und Zentimeter umrechnen.

In Wirklichkeit verliert das 1-N-Wägestück nicht 3,5, sondern 5,3 mN seiner Gewichtskraft. Das hat seinen Grund darin, daß die Erde eine abgeflachte Kugel darstellt, die man in der Geometrie als Ellipsoid bezeichnet. Die Entfernung vom Pol zum Erdmittelpunkt ist um etwa $\frac{1}{300}$ kleiner als der Erdradius am Äquator.

Diese Abflachung des Erdballs hat ihre Ursache ebenfalls in der Zentrifugalkraft. Diese wirkt nämlich auf alle Partikeln der Erde ein. Während eines sehr langen Zeitraums hat die Zentrifugalkraft unseren Planeten „geformt" und ihm seine abgeflachte Form verliehen.

Corioliskräfte

Die Eigenart der Welt rotierender Systeme erschöpft sich nicht in der Existenz radialer Schwerkräfte. Wir wollen uns einem weiteren interessanten Effekt widmen, den der Franzose Gustave Coriolis 1835 theoretisch untersuchte.

Stellen wir uns einmal folgende Frage: Welches Bild bietet eine geradlinige Bewegung vom Standpunkt eines rotierenden Laboratoriums aus? Der Grundriß eines derartigen Laboratoriums ist in Bild 2.14. dargestellt. Der durch den Mittelpunkt verlaufende Strich zeigt die geradlinige Bahn eines Körpers. Wir betrachten den Fall, wenn die Bahn des Körpers durch den Drehpunkt unseres Laboratoriums verläuft. Die Scheibe, auf der sich das Laboratorium befindet, rotiert gleichförmig; im Bild sind fünf Stellungen des Laboratoriums im Verhält-

7—01178

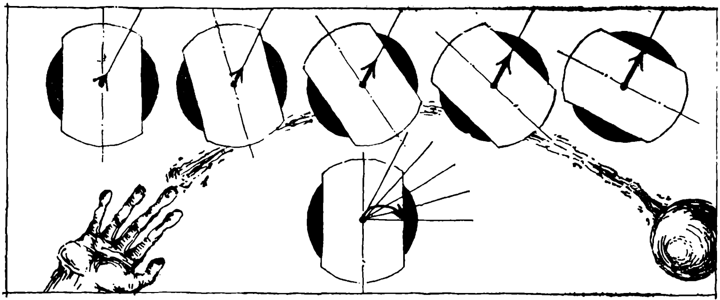


Bild 2.14.

nis zu der geradlinigen Bahn dargestellt. So sieht die wechselseitige Anordnung des Laboratoriums und der Bahn des Körpers nach ein, zwei, drei usw. Sekunden aus. Das Laboratorium rotiert in der Draufsicht, wie Sie sehen, entgegen dem Uhrzeigersinn. Auf der Bahnlinie sind Pfeile aufgetragen, die den Wegen entsprechen, die der Körper in ein, zwei, drei usw. Sekunden durchläuft. Während jeder Sekunde legt der Körper die gleiche Wegstrecke zurück, da es sich hier (vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters aus) um eine gleichförmige und geradlinige Bewegung handelt.

Stellen Sie sich nun einmal vor, der in Bewegung befindliche Körper sei eine über die Scheibe rollende frisch gestrichene Kugel. Welche Spur wird auf der Scheibe zurückbleiben? Unsere Konstruktion liefert die Antwort auf diese Frage. Die durch die Pfeilenden markierten Punkte wurden aus den fünf Einzelzeichnungen auf eine übertragen. Nun brauchen wir diese Punkte nur noch durch eine gleichförmige Kurve zu verbinden. Das Ergebnis darf uns nicht verwundern: Vom Standpunkt eines rotierenden Beobachters aus betrachtet, erscheint die geradlinige und gleichförmige Bewegung gekrümmt. Besondere Aufmerksamkeit verdient dabei folgende Regel: Ein bewegter Körper wird auf seinem gesamten Weg im Bewegungssinn nach rechts abgelenkt. Nun versuchen Sie einmal, unter der Annahme, die Scheibe rotiere im Uhrzeigersinn, die geschilderte Konstruktion zu wiederholen. Dabei wird sich zeigen, daß der bewegte Körper vom Standpunkt des rotierenden Beobachters aus im Bewegungssinn nach links abgelenkt wird.

Wir wissen, daß in rotierenden Systemen eine Zentrifugalkraft auftritt. Ihre Wirkung kann freilich nicht als Ursache der Bahnkrümmung herhalten, weil sie in Richtung des Radius zeigt. Also entsteht in rotierenden Systemen neben der Zentrifugalkraft eine weitere zusätzliche Kraft. Sie heißt Corioliskraft.

Warum sind wir dann in den vorangegangenen Versuchen nicht bereits auf die Corioliskraft gestoßen und mit der Zentrifugalkraft allein ganz vorzüglich ausgekommen? Die Ursache ist, daß wir die Bewegung von Körpern bislang nicht vom Standpunkt des rotierenden Beobachters aus betrachtet haben. Die Corioliskraft aber tritt nur in diesem Fall in Erscheinung. An Körpern, die in einem rotierenden System ruhen, greift nur die Zentrifugalkraft an. Auf den am Fußboden angeschraubten Tisch eines rotierenden Laboratoriums wirkt nur die Zentrifugalkraft ein. Ein kleiner Ball aber, der vom Tisch herunterfällt und auf dem Boden des rotierenden Laboratoriums entlangrollt, wird sowohl von der Zentrifugalkraft als auch von der Corioliskraft beeinflußt.

Von welchen Größen ist der Wert der Corioliskraft abhängig? Man kann diesen Wert berechnen, doch sind die entsprechenden Berechnungen zu kompliziert, als daß wir sie hier anführen wollen. Lassen Sie uns daher nur die Berechnungsergebnisse beschreiben.

Abweichend von der Zentrifugalkraft, deren Wert von der Entfernung zur Drehachse abhängt, ist die Corioliskraft von der Lage des Körpers unabhängig. Diese Kraft wird durch die Geschwindigkeit des Körpers bestimmt und hängt dabei nicht nur vom Wert der Geschwindigkeit, sondern auch von ihrer Richtung relativ zur Drehachse ab. Bewegt sich ein Körper die Drehachse entlang, dann ist die Corioliskraft gleich Null. Je größer dagegen der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Drehachse ist, um so größer ist auch die Corioliskraft, ihren größten Wert nimmt sie bei rechtwinkliger Bewegung des Körpers zur Drehachse an.

Wie wir wissen, kann man den Geschwindigkeitsvektor stets in bestimmte Komponenten zerlegen und so zwei Bewegungen, an denen ein Körper gleichzeitig teilnimmt, getrennt betrachten.

Zerlegt man die Geschwindigkeit des Körpers in die parallel und senkrecht zur Drehachse verlaufenden Komponenten $v_{\parallel}$ und $v_{\perp}$, dann ist die erstgenannte Bewegung der Corioliskraft nicht unterworfen. Der Wert für die Corioliskraft F_{K} ergibt sich aus der Geschwindigkeitskomponente $v_{\perp}$. Die Berechnungen führen zu der Formel:

$$F_{\mathrm{K}} = 4\pi n v_{\perp} m.$$

Hierin ist m die Masse des Körpers und n die Anzahl der Umdrehungen, die das rotierende System je Zeiteinheit vollzieht. Wie aus der Formel ersichtlich, ist die Corioliskraft um so größer, je rascher das System rotiert und je schneller sich der Körper bewegt.

Die Berechnungen definieren auch die Richtung der Corioliskraft. Diese Kraft steht stets senkrecht auf der Drehachse und der Bewegungsrichtung. Dabei ist die Kraft, wie bereits weiter oben festgestellt worden ist, bei einem im Gegenuhrzeigersinn rotierenden System im Bewegungssinn nach rechts gerichtet. Aus der Corioliskraft erklären sich viele auf der Erde stattfindende interessante Erscheinungen. Die Erde ist eine Kugel, keine Scheibe. Darum sind die Erscheinungsformen der Corioliskräfte komplizierter. Sie müssen sich sowohl bei Bewegungen an der Erdoberfläche als auch beim Fallen von Körpern zur Erde bemerkbar machen.

Fällt ein Körper genau senkrecht? Nicht ganz. Nur am Pol fallen Bewegungsrichtung und Drehachse der Erde zusammen, so daß keine Corioliskraft auftritt und ein Körper im strengen Sinn senkrecht fällt. Anders liegen die Dinge am Äquator; hier steht die Bewegungsrichtung senkrecht auf der Erdachse. Blickt man vom Nordpol aus auf den Äquator, so stellt sich die Drehrichtung der Erde im Gegenuhrzeigersinn dar. Ein frei fallender Körper also muß im Bewegungssinn nach rechts, d.h. nach Osten, abgelenkt werden. Der Betrag dieser östlichen Ablenkung ist am Äquator am größten und vermindert sich mit Annäherung an die Pole auf Null.

Lassen Sie uns den Ablenkungsbetrag am Äquator ausrechnen. Da sich ein frei fallender Körper gleichförmig-beschleunigt bewegt, wächst die Corioliskraft mit zunehmender Annäherung an die Erde. Wir beschränken uns daher auf eine Überschlagsrechnung. Fällt ein Körper beispielsweise aus 80 m Höhe, dann dauert sein Fall etwa 4 s (nach der Formel $t = \sqrt{2h/g}$). Die mittlere Fallgeschwindigkeit wäre gleich 20 m/s.

Diesen Geschwindigkeitswert setzen wir in die Formel der Coriolisbeschleunigung $4\pi n v$ ein. Den Wert $n = 1$ Umdrehung in 24 Stunden rechnen wir in die Anzahl der Umdrehungen je Sekunde um. In 24 Stunden sind $24 \times \times 3600$ Sekunden enthalten, also ist $n = \frac{1}{86\,400}\,\mathrm{s}^{-1}$ und die von der Corioliskraft erzeugte Beschleunigung demzufolge gleich $\frac{\pi}{1080}\,\mathrm{m/s^2}$. Der bei dieser Beschleunigung binnen 4 s zurückgelegte Weg ist gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{1080} \cdot 4^2 = = 2{,}3$ cm. Genau dies ist der Betrag der östlichen Auslenkung in unserem Beispiel. Eine genaue Berechnung, bei der die Ungleichmäßigkeit des Fallvorgangs berücksichtigt wird, liefert eine diesem Wert recht nahekommende, aber doch etwas andere Zahl.

Während die Auslenkung eines Körpers beim freien Fall am Äquator ihr Maximum erreicht und an den Polen gleich Null ist, beobachten wir hinsichtlich der durch die Corioliskraft verursachten Auslenkung eines in waagerechter Ebene bewegten Körpers gerade das umgekehrte Bild.

Eine waagerechte Fläche am Nord- oder Südpol unterscheidet sich in keiner Weise von der rotierenden Scheibe, mit der wir die Untersuchung der Corioliskraft begonnen haben. Ein auf dieser Ebene bewegter Körper wird durch die Corioliskraft am Nordpol nach rechts im Bewegungssinn und am Südpol nach links im Bewegungssinn ausgelenkt. Man kann mit Hilfe der Formel für die Coriolisbeschleunigung ohne Schwierigkeiten ausrechnen, daß eine Kugel, die mit der Anfangsgeschwindigkeit 500 m/s den Lauf verläßt, während einer Sekunde (d. h. auf einem Weg von 500 m) um 3,5 cm von ihrem Ziel in der waagerechten Ebene abgelenkt wird.

Warum aber soll die Auslenkung in der waagerechten Ebene am Äquator gleich Null sein? Hier leuchtet ohne strenge Beweisführung ein, daß es so sein muß. Am Nordpol wird ein Körper nach rechts im Bewegungssinn und am Südpol nach links im Bewegungssinn ausgelenkt; in der Mitte zwischen den Polen, d.h. am Äquator, muß die Ablenkung daher gleich Null sein.

Erinnern wir uns an den Versuch mit dem Foucaultschen Pendel. Ein Pendel, das am Pol schwingt, behält seine Schwingungsebene bei. Die rotierende Erde läuft unter dem Pendel durch. Das ist die Erklärung eines stellaren Beobachters für den Foucaultschen Versuch. Ein Beobachter dagegen, der gemeinsam mit dem Erdball rotiert, erklärt ihn mit der Corioliskraft. In der Tat verläuft die Corioliskraft senkrecht zur Erdachse und senkrecht zur Bewegungsrichtung des Pendels; anders aus-

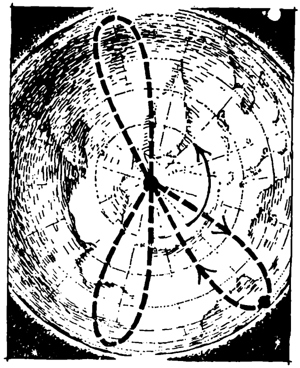


Bild 2.15.

gedrückt: Die Kraft greift senkrecht an der Schwingungsebene des Pendels an und bewirkt eine kontinuierliche Drehung dieser Ebene. Man kann nun die Versuchsanordnung so wählen, daß das Pendelende die Bewegungsbahn aufzeichnet. Dabei entsteht die in Bild 2.15. gezeigte „Rosette“. Auf dieser Zeichnung dreht sich die „Erde“ im Verlauf von anderthalb Schwingungsperioden des Pendels um eine Viertelumdrehung weiter. Das Foucaultsche Pendel dreht sich sehr viel langsamer. Am Pol schwenkt die Schwingungsebene des Pendels während einer Minute um $\frac{1}{4}$ Grad. Am Nordpol wird sich die Ebene im Schwingungssinn des Pendels nach rechts, am Südpol nach links drehen.

Im geographischen Breitenbereich von Mitteleuropa ist der Corioliseffekt etwas geringer als am Äquator. Die Kugel aus dem soeben angeführten Beispiel wird nicht um 3,5 cm, sondern nur um 2,5 cm ausgelenkt. Das Foucaultsche Pendel dreht sich während einer Minute um etwa $\frac{1}{6}$ Grad weiter. Müssen also auch Artilleristen die Corioliskraft berücksichtigen? Die „dicke Berta“, mit der die Deutschen während des ersten Weltkrieges Paris unter Feuer nahmen, war 110 km vom Ziel entfernt. In diesem Fall erreicht die Coriolisauslenkung 16 m, also keine Kleinigkeit.

Wird ein Geschoß über eine weite Entfernung ohne Berücksichtigung der Corioliskraft abgefeuert, dann kommt es ganz erheblich von der beabsichtigten Bahn ab. Dabei ist der Effekt nicht deshalb so groß, weil die Kraft groß wäre (für ein Geschoß von 10 t mit einer Geschwindigkeit von 1000 km/h müßte die Corioliskraft etwa 250 N betragen), sondern deshalb, weil diese Kraft kontinuierlich über lange Zeit angreift.

Natürlich kann der Einfluß des Windes auf ein nicht lenkbares Geschoß ebenso beträchtlich sein. Die Kurskorrektur, die ein Pilot vornimmt, hat ihre Ursache in der Wirkung des Windes, im Corioliseffekt sowie in Unvollkommenheiten des Flugzeugs. Wer, außer den Fliegern und Artilleristen, muß den Corioliseffekt noch berücksichtigen? Wie seltsam es auch klingen mag: die Eisenbahner! Unter dem Einfluß der Corioliskraft unterliegt jeweils eine Schiene an der Innenseite einem merklich stärkeren Abrieb als die andere. Keine Frage, welche von beiden es ist: Auf der nördlichen Halbkugel ist es (im Bewegungssinn) stets die rechte und auf der südlichen Halbkugel stets die linke Schiene. Lediglich in den äquatornahen Ländern gibt es keine diesbezüglichen Probleme.

Die Unterspülung des jeweils rechten Ufers auf der nördlichen Halbkugel hat die gleiche Erklärung wie der Schienenabrieb. Richtungsänderungen des Flußbettes sind vielfältig mit dem Einfluß der Corioliskraft verknüpft. So fand man, daß die Flüsse auf der nördlichen Halbkugel Hindernisse stets auf der rechten Seite umfließen.

Bekanntlich strömt die Luft stets in ein Gebiet verminderten Drucks hinein. Warum aber werden solche Windströme als Zyklone bezeichnet? Der Wortstamm deutet doch auf eine kreisförmige (zyklische) Bewegung hin.

Bild 2.16.

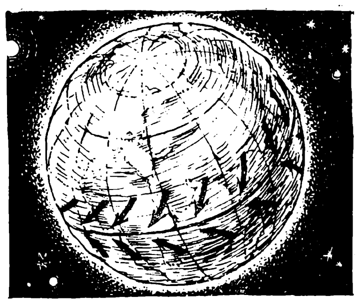


Bild 2.17.

Genau so verhält es sich auch: In einem Gebiet mit vermindertem Druck entsteht eine kreisförmige Bewegung der Luftmassen (Bild 2.16.). Auch hier liegt die Ursache in der Wirkung der Corioliskraft. Auf der nördlichen Halbkugel werden alle dem Gebiet verminderten Drucks zuwehenden Luftströme in ihrer Bewegung nach rechts abgelenkt. In Bild 2.17. sehen Sie, daß dies eine Auslenkung der auf beiden Halbkugeln von den Tropen zum Äquator wehenden Winde (der Passatwinde) nach Westen zur Folge hat.

Warum spielt diese geringe Kraft eine so große Rolle in der Bewegung der Luftmassen?

Dies erklärt sich aus der Geringfügigkeit der Reibungskräfte. Die Luft ist leicht beweglich, und eine kleine, aber ständig wirkende Kraft führt zu bedeutsamen Folgen.

3. Die Erhaltungssätze

Der Rückstoß

Wohl jeder weiß, daß der Lauf eines Geschützes beim Abfeuern eine ruckartige Bewegung nach hinten ausführt. Schießt man ein Gewehr ab, dann spürt man den Rückstoß in der Schulter. Man kann den Rückstoß aber auch kennenlernen, ohne unbedingt Feuerwaffen zu Hilfe zu nehmen. Gießen Sie etwas Wasser in ein Reagenzglas, verschließen Sie dieses mit einem Stopfen und hängen Sie das Reagenzglas dann an zwei Fäden waagerecht auf (Bild 3.1.). Nun halten Sie einen Brenner an das Reagenzglas: Das Wasser beginnt zu sieden, und nach etwa zwei Minuten fliegt der Stopfen „mit Geschrei" nach der einen Seite fort, während das Reagenzglas in die entgegengesetzte Richtung bewegt wird.

Die Kraft, die den Stopfen aus dem Reagenzglas getrieben hat, war der Dampfdruck. Und die Kraft, die das Reagenzglas aus seiner Ruhelage brachte, war ebenfalls der Dampfdruck. Beide Bewegungen entstanden unter dem Einfluß ein und derselben Kraft. Das gleiche findet auch beim Auslösen eines Schusses statt, nur daß dort kein Dampf, sondern die Pulvergase am Werk sind.

Der Rückstoß ergibt sich zwangsläufig aus der Regel, wonach Wirkung und Gegenwirkung gleich sind. Wenn der Dampf auf den Stopfen einwirkt, so wirkt auch der Stopfen auf den Dampf in umgekehrter Richtung, und der Dampf überträgt diese Gegenwirkung auf das Reagenzglas.

Aber vielleicht möchten Sie hier einwenden, wieso denn ein und dieselbe Kraft so verschiedene Folgen haben

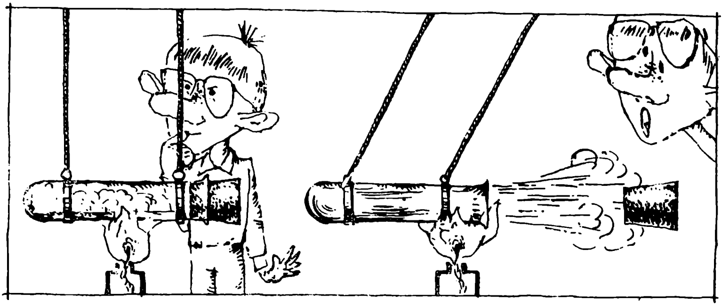


Bild 3.1.

kann? Das Gewehr bewegt sich nur ein kurzes Stück zurück, die Kugel aber fliegt weit. Nun, wollen wir hoffen, daß niemandem dieser Einwand in den Sinn gekommen ist. Natürlich können gleiche Kräfte zu unterschiedlichen Folgen führen: Denn die Beschleunigung, die einem Körper mitgeteilt wird (und dies ist ja genau die Folge der Kraftwirkung), ist der Masse dieses Körpers umgekehrt proportional. Die Beschleunigung des einen von beiden Körpern (des Geschosses, der Kugel oder des Stopfens) müssen wir in der Form $a_1 = F/m_1$ aufschreiben, die Beschleunigung des Körpers, der dem Rückstoß ausgesetzt ist (des Geschützes, des Gewehrs bzw. des Reagenzglases), dagegen als $a_2 = F/m_2$.

Da die Kraft ein und dieselbe ist, gelangen wir zu einem wichtigen Schluß: Die bei der Wechselwirkung zweier an einem „Stoß" beteiligten Körper erhaltenen Beschleunigungen sind deren Massen umgekehrt proportional:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

Demnach ist die Beschleunigung, die eine Kanone beim Rücklauf erhält, im Vergleich zur Beschleunigung des

Geschosses sovielmal geringer, wie die Kanone im Vergleich zum Geschoß mehr wiegt. Die Beschleunigung der Kugel ebenso wie die des Gewehrs beim Rückstoß dauert genau so lange, wie sich die Kugel im Gewehrlauf bewegt. Wir wollen diese Zeit mit dem Buchstaben t bezeichnen. Im Verlauf dieses Zeitraums wird die beschleunigte Bewegung durch eine gleichförmige Bewegung abgelöst. Der Einfachheit halber wollen wir die Beschleunigung als unveränderlich ansehen. Dann ist die Geschwindigkeit, mit der die Kugel den Gewehrlauf verläßt, $v_1 = a_1 t$ und die Rückstoßgeschwindigkeit $v_2 = a_2 t$. Da die Wirkungsdauer der Beschleunigung ein und dieselbe ist, gilt $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2}$ und demnach

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Die Geschwindigkeiten, mit denen die Körper nach ihrer Wechselwirkung auseinanderfliegen, werden den Massen der Körper umgekehrt proportional sein.

Berücksichtigt man den vektoriellen Charakter der Geschwindigkeit, dann kann man die letzte Beziehung auch folgendermaßen sehen: $m_1 v_1 = - m_2 v_2$; das Minuszeichen gibt an, daß die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 entgegengesetzte Richtungen haben.

Zum Schluß stellen wir die Gleichung noch einmal um und bringen die Produkte aus Masse und Geschwindigkeit auf die linke Seite der Gleichung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Der Impulserhaltungssatz

Das Produkt aus der Masse eines Körpers und ihrer Geschwindigkeit heißt der Impuls des Körpers. Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, stellt auch der Impuls eine vektorielle Größe dar. Natürlich stimmt die Impulsrichtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers überein.

Unter Verwendung dieses neuen Begriffs kann Newtons Gesetz $F = ma$ auch anders ausgedrückt werden. Da $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$ ist, gilt $F = \frac{mv_2 - mv_1}{t}$ oder $Ft = mv_2 - mv_1$. Das Produkt aus der Kraft und ihrer Wirkungsdauer ist gleich der Impulsänderung des Körpers.

Wenden wir uns wieder dem Rückstoß zu.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen zum Rückstoß eines Geschützes läßt sich nun kürzer ausdrücken: Die Summe der Impulse von Geschütz und Geschoß bleibt nach dem Abschuß gleich Null. Sie war offenbar auch vor dem Abschuß genausogroß, als sich das Geschütz und das Geschoß noch im Ruhezustand befanden.

Die Geschwindigkeiten, die in die Gleichung $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$ eingehen, sind die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Abschuß. Im Verlauf der weiteren Bewegung von Geschütz und Geschoß setzt bei beiden die Wirkung der Schwerkraft und des Luftwiderstandes ein, während bei der Kanone darüber hinaus auch noch die Reibungskraft an der Erde hinzukommt. Ja, wenn der Abschuß im luftleeren Raum aus einem in der Leere hängenden Geschütz erfolgt wäre, würde die Bewegung mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 beliebig lange anhalten. Das Geschütz würde sich in die eine Richtung und das Geschoß in die Gegenrichtung bewegen.

In der Artillerie von heute werden sehr häufig auf Selbstfahrlafetten montierte Geschütze verwendet, die während der Fahrt feuern. Wie muß die abgeleitete Gleichung verändert werden, damit sie auch für den Fall angewendet werden kann, wenn ein Geschütz während der Fahrt schießt? Zunächst gilt:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = 0,$$

worin u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten des Geschosses und Geschützes relativ zu der in Bewegung befindlichen

Selbstfahrlafette sind. Ist die Geschwindigkeit der Selbstfahrlafette V, so betragen die Geschwindigkeiten von Geschütz und Geschoß relativ zu einem ruhenden Beobachter $v_1 = u_1 + V$ und $v_2 = u_2 + V$. Wir setzen die Werte von u_1 und u_2 in die letztgenannte Gleichung ein und erhalten:

$$(m_1 + m_2) V = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Im rechten Teil der Gleichung haben wir die Summe der Impulse von Geschütz und Geschoß nach dem Abschuß. Und auf der linken Seite? Vor dem Abschuß sind Geschütz und Geschoß mit der Gesamtmasse $m_1 + m_2$ gemeinsam mit der Geschwindigkeit V in Bewegung. Also steht auch im linken Teil der Gleichung der Gesamtimpuls von Geschoß und Geschütz, jedoch vor dem Abschuß.

So haben wir ein sehr wichtiges Naturgesetz bewiesen, das als Impulserhaltungssatz bezeichnet wird. Bewiesen haben wir es hier für zwei Körper, doch das gleiche Ergebnis trifft für jede beliebige Anzahl Körper zu. Was beinhaltet dieses Gesetz? Der Impulserhaltungssatz besagt, daß sich die Impulssumme mehrerer in Wechselwirkung stehender Körper im Ergebnis dieser Wechselwirkung nicht ändert.

Der Impulserhaltungssatz trifft aber nur dann zu, wenn auf die Gruppe von Körpern keine anderweitigen Kräfte einwirken. Eine derartige Gruppe von Körpern wird in der Physik als geschlossenes System bezeichnet.

Gewehr und Kugel verhalten sich beim Abschuß wie ein geschlossenes System zweier Körper, ungeachtet der Tatsache, daß beide dem Einfluß der Erdanziehungskraft ausgesetzt sind. Im Vergleich zur Kraft der Pulvergase ist das Gewicht der Kugel gering, und der Rückstoß läuft nach ein und denselben Gesetzen ab, unabhängig davon, wo der Schuß ausgeführt wird, auf der Erde oder in einer Rakete, die im interplanetaren Raum dahinfliegt.

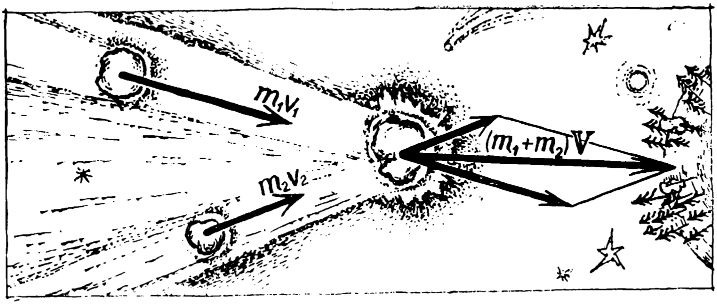


Bild 3.2.

Der Impulserhaltungssatz erlaubt die einfache Lösung verschiedener Probleme, die mit dem Zusammenstoß von Körpern zu tun haben. Wenn wir versuchen, mit einem Lehmkügelchen ein anderes zu treffen, so werden beide zusammenkleben und die Bewegung gemeinsam fortsetzen; schießt man aus dem Gewehr auf eine Holzkugel, dann rollt diese gemeinsam mit der darin steckenden Gewehrkugel weiter; eine stillstehende Lore kommt ins Rollen, wenn man aus vollem Lauf hineinspringt. Vom Standpunkt des Physikers aus betrachtet, ähneln alle hier angeführten Beispiele einander sehr. Die Regel, die die Geschwindigkeiten der Körper bei Zusammenstößen des beschriebenen Typs miteinander verknüpft, läßt sich unmittelbar aus dem Energieerhaltungssatz herleiten.

Die Impulse der Körper vor dem Zusammentreffen waren m_1v_1 und m_2v_2; nach dem Zusammentreffen haben sich die Körper vereinigt, und ihre Gesamtmasse ist gleich $m_1 + m_2$. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit der vereinigten Körper mit V, so erhalten wir:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,V$$

oder

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Wir erinnern an den vektoriellen Charakter des Impulserhaltungssatzes. Die Impulse mv, die im Zähler der Formel stehen, müssen als Vektoren addiert werden.

Der „Vereinigungsstoß“ beim Aufeinandertreffen von Körpern, deren Bewegungsbahnen einen bestimmten Winkel miteinander einschließen, ist in Bild 3.2. dargestellt. Um die Geschwindigkeit zu ermitteln, muß die Länge der Diagonale des Parallelogramms, das aus den Impulsvektoren der aufeinandertreffenden Körper konstruiert worden ist, durch die Summe ihrer Massen dividiert werden.

Die Rückstoßbewegung

Der Mensch bewegt sich fort, indem er sich von der Erde abstößt; ein Ruderboot kommt voran, weil der Ruderer sich mit Rudern vom Wasser abstößt; auch ein Motorschiff stößt sich vom Wasser ab, jedoch nicht mit Rudern, sondern durch die Schiffsschrauben. Auch der Zug, der auf den Eisenbahnschienen dahinrollt, ebenso wie das Kraftfahrzeug, stoßen sich von der Erde ab — denken Sie nur einmal daran, wie schwierig das Anfahren mit einem Auto bei Glatteis ist!

Das Abstoßen von einer Unterlage ist somit dem Anschein nach die notwendige Voraussetzung für jede Bewegung; selbst das Flugzeug bewegt sich vorwärts, indem es sich mit der Luftschraube von der Luft abstößt.

Ist es aber immer so? Gibt es nicht vielleicht doch ein Bewegungsverfahren ohne vorherigen Abstoß? Wenn Sie Schlittschuh laufen, können Sie sich leicht überzeugen, daß eine Bewegung dieser Art durchaus im

Bild 3.3.

Bereich des Möglichen ist. Nehmen Sie einen schweren Stock in die Hand und stellen Sie sich auf die Eisbahn. Nun werfen Sie den Stock nach vorn: Was geschieht? Sie werden zurückgleiten, ohne sich auch nur im geringsten mit dem Fuß vom Eis abgestoßen zu haben.

Der eben betrachtete Rückstoß liefert uns den Schlüssel zur Bewegung ohne Unterlage, zur Bewegung ohne Abstoßen. Der Rückstoß ermöglicht die Beschleunigung einer Bewegung auch im luftleeren Raum. Der Rückstoß, den ein aus einem Gefäß austretender Dampfstrahl erzeugt, d. h. der Strahlrückstoß, wurde noch im Altertum zur Anfertigung interessanter Spielereien ausgenutzt. In Bild 3.3. ist eine frühe Dampfturbine dargestellt, die im 2. Jh. v.u.Z. erfunden wurde. Ein Dampfkessel ruhte auf einer senkrechten Achse. Der über Kniestücke aus dem Kessel ausströmende Dampf stieß diese Kniestücke in umgekehrter Richtung vorwärts, und die Kugel rotierte.

In unseren Tagen hat die Nutzung der Rückstoßbewegung längst die Grenzen der Herstellung von Spielzeug und der Sammlung interessanter Beobachtungen überschritten. Das 20. Jahrhundert wird oft als Jahrhundert der Kernenergie bezeichnet, doch wäre genauso gerechtfertigt, vom Jahrhundert der Rückstoßbewegung zu sprechen, da man jene weitreichenden Folgen gar nicht hoch genug einschätzen kann, zu denen die Nutzung hochleistungsfähiger Rückstoßtriebwerke führen wird. Sie bedeutet nicht nur eine Revolutionierung des Flugzeugbaus, sondern zugleich den Beginn der unmittelbaren Kontaktaufnahme des Menschen mit dem Weltall.

Das Prinzip der Rückstoßbewegung erlaubte die Entwicklung von Flugzeugen mit Geschwindigkeiten von einigen tausend Kilometern in der Stunde, von fliegenden Geschossen, die sich bis in eine Höhe von einigen hundert Kilometern über den Erdboden erheben, und von künstlichen Erdsatelliten sowie Kosmosraketen, die interplanetare Reisen vollführen.

Das Rückstoßtriebwerk ist eine Maschine, aus der mit großer Kraft die bei der Verbrennung des Kraftstoffs entstehenden Gase herausgeschleudert werden. Dafür bewegt sich die Rakete in entgegengesetzter Richtung zum Gasstrom.

Wie groß ist die Schubkraft, die die Rakete in den Raum trägt? Wir wissen, daß diese Kraft gleich der Impulsänderung je Zeiteinheit ist. Nach dem Erhaltungssatz ändert sich der Raketenimpuls um den Betrag des Impulses mv, den das austretende Gas besitzt.

Mit Hilfe dieses Naturgesetzes können wir beispielsweise die Beziehung zwischen der Kraft des reaktiven Schubes und des dafür erforderlichen Brennstoffverbrauchs berechnen. Zu diesem Zweck muß man von einer bestimmten Ausströmungsgeschwindigkeit der Verbrennungsprodukte ausgehen. Nehmen wir beispielsweise folgende Zahlen an: Die Gase sollen mit einer Geschwindigkeit von 2000 m/s bei einem Durchsatz von 10 t/s ausströmen; dann wird die Schubkraft ungefähr $2 \cdot 10^7$ N betragen.

Bestimmen wir nun die Geschwindigkeitsänderung einer Rakete, die sich durch den interplanetaren Raum bewegt.

Der Impuls einer Gasmasse ΔM, die mit der Geschwindigkeit u austritt, ist gleich $u \cdot \Delta M$. Der Impuls einer Rakete mit der Masse M wächst hierbei um den Betrag $M \cdot \Delta V$. Nach dem Erhaltungssatz sind diese beiden Werte einander gleich:

$$u \cdot \Delta M = M \cdot \Delta V,$$

d. h.

$$\Delta V = u \cdot \frac{\Delta M}{M}.$$

Wollen wir allerdings die Geschwindigkeit einer Rakete berechnen, wenn die ausströmenden Massen in der gleichen Größenordnung wie die Raketenmasse liegen, dann ist die hier abgeleitete Formel nicht geeignet. Sie setzt eine konstante Raketenmasse voraus. Richtig aber bleibt folgendes wichtiges Ergebnis: Bei gleichen relativen Massenänderungen nimmt die Geschwindigkeit um ein und denselben Betrag zu.

Wer die Grundlagen der Integralrechnung beherrscht, kann sogleich auch die exakte Formel ermitteln. Sie lautet:

$$V = u \ln \frac{M_{\text{Anfang}}}{M} = 2{,}3u \log \frac{M_{\text{Anfang}}}{M}.$$

Hat man einen Rechenschieber zur Hand, kann man feststellen, daß die Raketengeschwindigkeit bei Verminderung der Raketenmasse um die Hälfte $0{,}7u$ erreicht.

Um die Geschwindigkeit der Rakete auf $3u$ zu bringen, muß eine Treibstoffmasse von $m = \frac{19}{20} M$ verbrannt werden. Das heißt, daß nur ein Zwanzigstel der Raketenmasse beibehalten werden kann, wenn wir die Geschwindigkeit auf $3u$, d. h. 6 bis 8 km/s, bringen wollen.

Soll eine Geschwindigkeit von $7u$ erreicht werden, dann muß die Raketenmasse im Beschleunigungsverlauf auf ein Tausendstel abnehmen.

Diese Berechnungen beinhalten eine deutliche Warnung vor allem unbedachten Bestreben nach Vergrößerung der mitgeführten Treibstoffmasse. Je mehr Treibstoff wir an Bord der Rakete nehmen, um so mehr muß auch verbrannt werden. Bei feststehender Ausströmungsgeschwindigkeit der Gase läßt sich eine Steigerung der Raketengeschwindigkeit nur sehr schwer erreichen.

Das Wichtigste bei der Erzielung großer Raketengeschwindigkeiten ist die Steigerung der Gasausströmungsgeschwindigkeit. Diesbezüglich spielt der Einsatz von Raketentriebwerken, die mit Kernbrennstoff arbeiten, eine wichtige Rolle.

Bei unveränderter Ausströmungsgeschwindigkeit der Gase wird ein Geschwindigkeitsgewinn bei ein und derselben Treibstoffmasse durch den Einsatz mehrstufiger Raketen erreicht. Bei einer einstufigen Rakete nimmt die Treibstoffmasse ab, während die leeren Tanks ihre Bewegung gemeinsam mit der Rakete fortsetzen. Zur Beschleunigung der Masse der unnötigen Treibstofftanks ist zusätzlich Energie erforderlich. Zweckmäßig ist es, nach Verbrauch des Treibstoffs auch die Treibstofftanks abzuwerfen. Mit den mehrstufigen Raketen von heute werden nicht nur die Treibstofftanks einschließlich der Rohrleitungen abgeworfen, sondern auch die Triebwerke der ausgebrannten Stufen.

Am günstigsten wäre es natürlich, die unnötig gewordene Raketenmasse kontinuierlich abzuwerfen. Vorläufig existiert keine derartige Konstruktion. Die Startmasse einer dreistufigen Rakete mit der gleichen Gipfelhöhe wie eine entsprechende einstufige Rakete kann auf ein Sechstel verringert werden. Die „kontinuierliche“ Rakete ist in diesem Sinn um weitere 15 % vorteilhafter als die dreistufige Rakete.

Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft

Wir wollen einen kleinen Schlitten zwei sehr glatte schiefe Ebenen hinunterrollen lassen. Wir nehmen zwei Bretter, von denen das eine deutlich kürzer als das andere ist, und legen sie mit einer Seite auf ein und dieselbe Unterlage auf. Die eine schiefe Ebene ist dann sehr steil, die andere dagegen weniger. Die Oberkanten beider Bretter — der Startplatz des Schlittens — befinden sich auf gleicher Höhe. Was glauben Sie wohl, wann der Schlitten die größere Geschwindigkeit hat, wenn wir ihn nacheinander die beiden Bretter hinunterrollen lassen? Viele meinen sicher, bei der steileren schiefen Ebene.

Der Versuch zeigt, daß diese Überlegung falsch ist: Der Schlitten erhält in beiden Fällen die gleiche Geschwindigkeit. Solange sich ein Körper auf einer schiefen Ebene bewegt, steht er unter dem Einfluß einer konstanten Kraft, die in Bewegungsrichtung zeigt und zwar unter dem Einfluß der Schwerkraftkomponente (Bild 3.4.). Die Geschwindigkeit v, die der Körper erwirbt, wenn er mit der Beschleunigung a den Weg s zurücklegt, ist, wie wir wissen, gleich $v = \sqrt{2as}$.

Woraus geht aber hervor, daß diese Größe nicht vom Neigungswinkel der Ebene abhängt? In Bild 3.4. sehen wir zwei Dreiecke. Eines von ihnen stellt eine schiefe Ebene dar. Die kleine Kathete des Dreiecks, bezeichnet mit dem Buchstaben h, ist die Höhe, von der aus die Bewegung beginnt; die Hypotenuse s ist der Weg, den der Körper in beschleunigter Bewegung zurücklegt. Das kleine Kräftedreieck mit der Kathete ma und der Hypotenuse mg ist dem großen Dreieck ähnlich, da beide rechtwinklig sind und ihre Winkel als Wechselwinkel gleich sind. Demnach muß das Kathetenverhältnis gleich dem Hypotenusenverhältnis sein, d. h., $h/ma = s/mg$ oder $as = gh$.

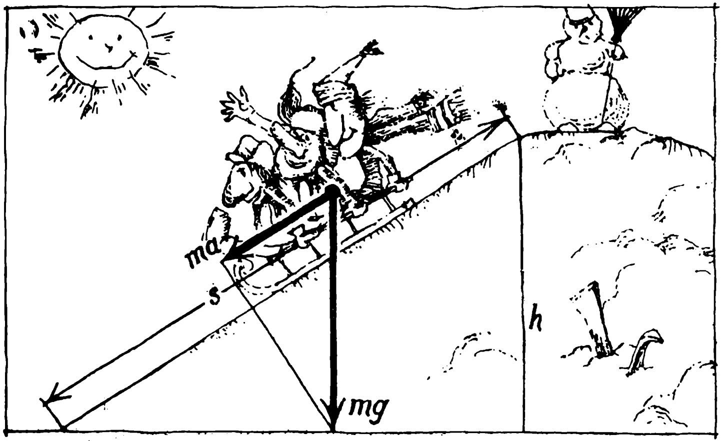


Bild 3.4.

Wir haben bewiesen, daß das Produkt as, und damit also auch die Endgeschwindigkeit des Körpers, nach dem Hinunterrollen von der schiefen Ebene unabhängig vom Neigungswinkel und ausschließlich von der Höhe abhängig ist, bei der die Abwärtsbewegung begann. Die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ist für alle schiefen Ebenen gleich unter der einzigen Bedingung, daß die Bewegung von ein- und derselben Höhe h aus begonnen wird. Die Geschwindigkeit ist dann gleich der Geschwindigkeit des freien Falls aus der Höhe h. Die Geschwindigkeit des Wagens am Durchgang durch den ersten Punkt bezeichnen wir mit v_1 und die Geschwindigkeit beim Durchgang durch den zweiten Punkt mit v_2.

Nun messen wir die Geschwindigkeit des Wagens an zwei Stellen der schiefen Ebene, nämlich an den Höhen h_1 und h_2.

Betrug die anfängliche Höhe, bei der die Bewegung begann, h, so ist das Geschwindigkeitsquadrat des Wagens am ersten Punkt gleich $v_1^2 = 2g\,(h - h_1)$ und am zweiten Punkt $v_2^2 = 2g\,(h - h_2)$.

Subtrahieren wir den ersten Ausdruck durch den zweiten, so finden wir, wie die Geschwindigkeiten des Wagens zu Beginn und am Ende jedes beliebigen Abschnitts einer schiefen Ebene mit den Höhen der jeweiligen Punkte verknüpft sind:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\,(h_1 - h_2).$$

Die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate hängt nur von der Höhendifferenz ab. Wir bemerken an dieser Stelle, daß die erhaltene Gleichung sowohl für Auf- als auch für Abwärtsbewegungen gleichermaßen geeignet ist. Ist die erste Höhe kleiner als die zweite (Aufwärtsbewegung), dann ist die zweite Geschwindigkeit kleiner als die erste.

Man kann diese Formel nun wie folgt umstellen:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Wir wollen mit dieser Schreibweise unterstreichen, daß die Summe aus dem halben Geschwindigkeitsquadrat und der mit g multiplizierten Höhe für jeden beliebigen Punkt der schiefen Ebene gleich ist. Man kann sagen, daß $\frac{v^2}{2} + gh$ während der Bewegung erhalten bleibt.

Das Bemerkenswerteste an diesem Gesetz ist die Tatsache, daß sie für reibungsfreie Bewegungen an jedem Berg bzw. überhaupt auf jedem beliebigen Weg zutrifft, der aus aufeinanderfolgenden Steig- und Fallstrecken unterschiedlicher Steilheit besteht. Dies folgt daraus, daß man jeden Weg in geradlinige Abschnitte gliedern kann. Je kleiner man die Abschnitte wählt, um so mehr nähert sich die gebrochene Linie der durchgehenden Kurve. Man kann jeden geraden Abschnitt bei Aufgliederung eines nichtgeradlinigen Weges als Teil einer schiefen Ebene ansehen und die gefundene Regel darauf anwenden.

Für jeden beliebigen Bahnpunkt ist die Summe $\frac{v^2}{2} + gh$ konstant. Die Änderung des Geschwindigkeitsquadrats hängt daher weder von der Form noch von der Länge des Weges ab, in dessen Verlauf die Bewegung erfolgte; vielmehr ergibt sie sich ausschließlich aus der Höhendifferenz der Anfangs- und Endpunkte der Bewegung.

Hier könnte nun der Eindruck erweckt werden, unser Schluß stimme nicht mit der Alltagserfahrung überein. Auf einem langen Weg mit geringer Neigung gewinnt ein Wagen nicht an Geschwindigkeit und bleibt am Ende sogar stehen. Das ist tatsächlich so, doch haben wir bei unseren Überlegungen die Reibungskraft nicht berücksichtigt. Die oben erwähnte Formel trifft für Bewegungen im Schwerefeld der Erde unter ausschließlicher Wirkung der Schwerkraft zu. Sind die Reibungskräfte gering, dann wird das abgeleitete Gesetz erfüllt. Auf glatten, vereisten Abhängen gleitet ein Schlitten mit Metallkufen unter sehr geringer Reibung dahin. Man kann lange Eisbahnen anlegen, die mit einem steilen Abfahrtshang beginnen und sich dann kurvenreich in buntem Auf und Ab fortsetzen. Das Ende einer Rodelfahrt auf einer solchen Eisbahn (wo der Schlitten von selbst zum Stillstand käme) würde bei vollständig fehlender Reibung auf der gleichen Höhe wie zu Beginn erfolgen. Da sich die Reibung jedoch nicht ganz vermeiden läßt, liegt der Punkt, an dem die Schlittenfahrt begann, stets höher als der Ort, wo der Schlitten zum Stillstand kommt.

Das Gesetz, wonach die Endgeschwindigkeit nicht von der Form des Weges bei einer Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft abhängt, kann zur Lösung verschiedener interessanter Aufgaben benutzt werden.

Schon oft ist im Zirkus die atemberaubende Attraktion der vertikalen „Todesschleife" vorgeführt worden. Auf einem hohen Gerüst nimmt ein Radfahrer Aufstellung; es kann aber auch ein Wagen sein, in dem ein Akrobat sitzt. Zuerst geht es mit wachsender Beschleunigung hinunter, dann wieder hinauf. Schon hat der Akrobat die Stellung erreicht, wo er mit dem Kopf nach unten hängt, und wieder geht es abwärts: Die Todesschleife ist durchfahren. Welches technische Problem mußte hierbei gelöst werden? Wie hoch muß das Gerüst sein, auf dem die Abfahrt beginnt, damit der Akrobat nicht auf dem höchsten Punkt der Todesschleife abstürzt? Die Bedingung kennen wir: Die Zentrifugalkraft, die den Akrobaten an das Gerüst preßt, muß die Schwerkraft ausgleichen, die in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Also muß $mg \leqslant \frac{mv^2}{r}$ sein, wobei r der Radius der Todesschleife und v die Bewegungsgeschwindigkeit im höchsten Punkt der Schleife ist. Damit diese Geschwindigkeit erreicht wird, muß die Bewegung von einer Stelle aus begonnen werden, die um einen gewissen Betrag h oberhalb des höchsten Punkts der Schleife liegt. Die Anfangsgeschwindigkeit des Akrobaten ist gleich Null; daher gilt im höchsten Punkt der Schleife $v^2 = 2gh$. Andererseits ist jedoch $v^2 \geqslant gr$. Zwischen der Höhe h und dem Radius der Schleife besteht somit die Beziehung

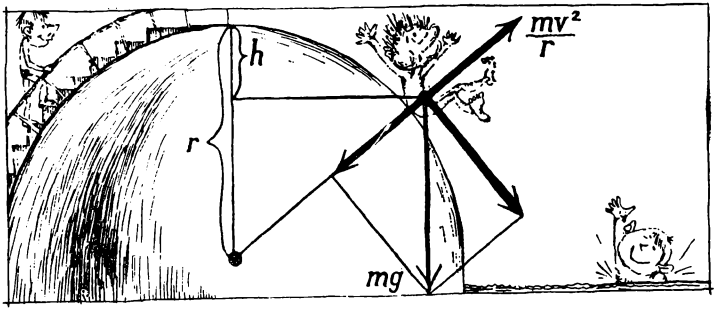


Bild 3.5.

$h \geqslant r/2$. Das Gerüst muß sich mindestens um den halben Schleifenradius über dem höchsten Punkt der Schleife befinden. Zur Berücksichtigung der unvermeidlichen Reibungskraft muß zu dieser Höhe natürlich noch eine gewisse Reserve addiert werden.

Und hier ein weiteres Problem. Wir haben eine runde Kuppel vor uns, sehr glatt, so daß die Reibung minimal ist. Auf den höchsten Punkt der Kuppel legen wir einen kleinen Gegenstand und stoßen ihn ganz leicht an, so daß er ins Rutschen kommt. Früher oder später wird sich der Körper beim Abrutschen von der Kuppel lösen und zu fallen beginnen. Wir können ganz leicht eine Antwort auf die Frage finden, zu welchem Zeitpunkt der Körper sich von der Kuppeloberfläche lösen wird, denn in diesem Augenblick muß die Zentrifugalkraft gleich der Gewichtskraftkomponente in Richtung des Radius sein (in diesem Augenblick wird der Körper aufhören, auf die Kuppel zu drücken, und genau das ist der Zeitpunkt der Ablösung). In Bild 3.5. sehen wir zwei ähnliche Dreiecke; hier wird der Augenblick der Ablösung dargestellt. Wir bilden das Verhältnis der Kathete zur Hypotenuse für das Kräftedreieck und setzen dieses dem Verhältnis der Seiten des anderen Dreiecks gleich:

$$\frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{r-h}{r}.$$

Hierin ist r der Radius der sphärischen Kuppel und h die Höhendifferenz von Beginn bis Ende des Gleitvorgangs. Nun benutzen wir das Gesetz von der Unabhängigkeit der Endgeschwindigkeit von der Form des Weges. Da die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich Null gesetzt wird, gilt $v^2 = 2gh$. Setzen wir diesen Wert in die oben aufgeschriebene Proportion ein und nehmen die entsprechenden arithmetischen Umformungen vor, so finden wir: $h = r/3$. Somit löst sich der Körper in einer Höhe von der Kuppel ab, die um ein Drittel des Radius unter dem höchsten Punkt der Kuppel liegt.

Der Erhaltungssatz der mechanischen Energie

Wir haben uns anhand der soeben betrachteten Beispiele davon überzeugt, wie nützlich es ist, eine Größe zu kennen, die ihren Zahlenwert im Bewegungsverlauf nicht ändert. Vorläufig kennen wir eine derartige Größe nur für einen Körper. Wenn sich jedoch mehrere miteinander gekoppelte Körper im Schwerefeld befinden? Es darf ganz offenbar nicht angenommen werden, daß der Ausdruck $\frac{v^2}{2} + gh$ für jeden einzelnen Körper zutrifft, da sich jeder der Körper nicht allein unter dem Einfluß der Schwerkraft, sondern auch unter dem Einfluß der benachbarten Körper befindet. Aber vielleicht bleibt die Summe der entsprechenden Ausdrücke für die Gruppe der betrachteten Körper insgesamt unverändert?

Wir werden sogleich zeigen, daß diese Annahme falsch ist. Eine bei der Bewegung vieler Körper konstant bleibende Größe existiert, doch ist sie nicht gleich der Summe

$$\left(\frac{v^2}{2}+gh\right)_{\text{Körper }1}+\left(\frac{v^2}{2}+gh\right)_{\text{Körper }2}+\cdots,$$

sondern gleich der Summe analoger Ausdrücke, multipliziert mit der Masse der zugehörigen Körper; unverändert bleibt die Summe

$$m_1\left(\frac{v^2}{2}+gh\right)_1+m_2\left(\frac{v^2}{2}+gh\right)_2+\cdots$$

Zum Beweis dieses sehr wichtigen Gesetzes der Mechanik betrachten wir folgendes Beispiel.

Über eine Rolle läuft ein Seil, an dem zwei Massen hängen: Eine große Masse M und eine kleine Masse m. Die große Masse zieht die kleine Masse aufwärts und sinkt dabei selbst nach unten; diese aus zwei Körpern bestehende Gruppe bewegt sich mit wachsender Geschwindigkeit.

Die Triebkraft ist die Gewichtskraftdifferenz beider Körper $Mg - mg$. Da die Masse beider Körper an der beschleunigten Bewegung teilnimmt, nimmt Newtons Gesetz für diesen Fall folgende Form an:

$$(M-m)\,g=(M+m)\,a.$$

Wir wollen nun die beiden Bewegungsmomente betrachten und zeigen, daß die Summe der Ausdrücke $\frac{v^2}{2}+gh$, multipliziert mit den entsprechenden Massen, tatsächlich unverändert bleibt. Bewiesen werden muß also die Gleichung

$$m\left(\frac{v_2^2}{2}+gh_2\right)+M\left(\frac{V_2^2}{2}+gH_2\right)=$$
$$=m\left(\frac{v_1^2}{2}+gh_1\right)+M\left(\frac{V_1^2}{2}+gH_1\right).$$

Die Großbuchstaben stehen für jene physikalischen Größen, die die große Masse kennzeichnen. Die Indizes 1 und 2 ordnen die Größen den beiden betrachteten Bewegungsmomenten zu.

Da die Massen durch das Seil miteinander verbunden sind, ist $v_1 = V_1$ und $v_2 = V_2$. Unter Benutzung dieser Vereinfachung bringen wir alle Glieder, die Höhen enthalten, nach rechts und alle Glieder mit Geschwindigkeiten nach links. Wir erhalten:

$$\frac{m+M}{2}(v_2^2-v_1^2) = mgh_1 + MgH_1 - mgh_2 - MgH_2 =$$

$$= mg(h_1-h_2) + Mg(H_1-H_2).$$

Die Höhendifferenzen der Massen sind naturgemäß gleich (haben jedoch jeweils das umgekehrte Vorzeichen, da die eine Masse steigt, während die andere sinkt). Somit gilt:

$$\frac{m+M}{2}(v_2^2-v_1^2) = g(M-m)s,$$

wobei s der zurückgelegte Weg ist.

Auf Seite 67 haben wir erfahren, daß die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate $v_1^2 - v_2^2$ zu Beginn und am Ende des Wegabschnittes s, der mit der Beschleunigung a durchlaufen wird, gleich

$$v_1^2 - v_2^2 = 2as$$

ist. Setzen wir diesen Ausdruck in die letzte Formel ein, so erhalten wir:

$$(m + M)a = (M - m)g.$$

Dies aber ist Newtons Gesetz, wie wir es oben für unser Beispiel aufgeschrieben haben. Damit ist der gewünschte Beweis geliefert: Für zwei Körper bleibt die Summe der Ausdrücke $\frac{v^2}{2} + gh$, multipliziert mit den entsprechenden

Massen*, im Bewegungsverlauf unverändert; sie bleibt, wie man auch sagt, erhalten, d. h.,

$$\left(\frac{mv^2}{2} + mgh\right) + \left(\frac{MV^2}{2} + MgH\right) = \text{const}.$$

Für den Fall eines einzigen Körpers geht diese Formel in die bereits früher bewiesene über:

$$\frac{v^2}{2} + gh = \text{const}.$$

Das halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat heißt kinetische Energie W_k:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Das Produkt aus dem Gewicht eines Körpers und der Höhe heißt potentielle Energie des Körpers gegen die Schwerkraft der Erde W_p:

$$W_p = mgh.$$

Wir haben nachgewiesen, daß während der Bewegung eines Systems aus zwei Körpern (und das gleiche läßt sich auch für Systeme nachweisen, die aus vielen Körpern bestehen) die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie der Körper unverändert bleibt.

Mit anderen Worten: Eine Zunahme der kinetischen Energie eines Systems von Körpern kann nur durch Abnahme der potentiellen Energie dieses Systems erfolgen (und natürlich auch umgekehrt).

---

* Natürlich kann man den Ausdruck $\frac{v^2}{2} + gh$ mit dem gleichen Erfolg auch mit $2m$ oder $\frac{m}{2}$ bzw. überhaupt mit jedem beliebigen zusätzlichen Koeffizienten multiplizieren. Wir einigen uns darauf, möglichst einfach zu verfahren, d. h. einfach nur mit m zu multiplizieren.

Das hier bewiesene Gesetz heißt Erhaltungssatz der mechanischen Energie.

Der Erhaltungssatz der mechanischen Energie ist ein sehr wichtiges Naturgesetz. Wir haben seine Bedeutung noch nicht in vollem Maße dargestellt. Im Kapitel der Molekülbewegung wird seine Universalität und seine Anwendbarkeit auf sämtliche Naturerscheinungen sichtbar.

Die Arbeit

Stößt oder zieht man einen Körper, ohne auf Hindernisse zu treffen, so wird der Körper beschleunigt. Der hierbei auftretende Zuwachs an kinetischer Energie heißt die durch die Kraft verrichtete Arbeit W:

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Nach Newtons Gesetz ergibt sich die Beschleunigung eines Körpers und somit auch sein Zuwachs an kinetischer Energie aus der vektoriellen Summe aller am Körper angreifenden Kräfte. Für den Fall vieler Kräfte bedeutet die Formel $W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$ die Arbeit der resultierenden Kraft. Wir wollen die Arbeit W nun durch die Kraft ausdrücken.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, wo eine Bewegung nur in einer Richtung möglich ist: Wir wollen einen auf Schienen laufenden Wagen stoßen (oder ziehen) (Bild 3.6.).

Gemäß der allgemeinen Formel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt $v_2^2 - v_1^2 = 2as$. Darum ist die Arbeit sämtlicher Kräfte auf dem Weg s:

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mas.$$

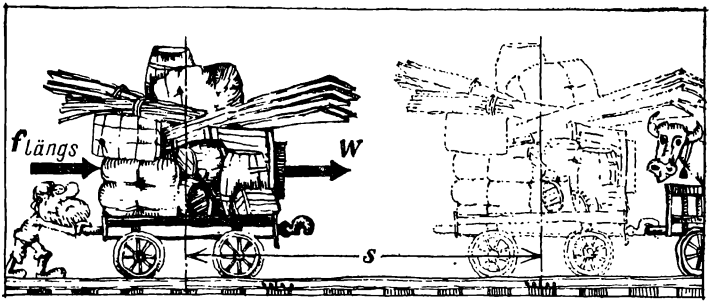


Bild 3.6.

Das Produkt ma ist gleich der Komponente der Gesamtkraft in Bewegungsrichtung. Somit ist $W = F_{\text{längs}} \cdot s$.

Die Arbeit einer Kraft wird als Produkt des Weges und der Kraftkomponenten längs der Wegrichtung gemessen.

Diese Formel der Arbeit trifft für Kräfte beliebigen Ursprungs und Bewegungen auf beliebigen Bahnen zu.

Wir bemerken, daß die Arbeit auch dann gleich Null sein kann, wenn auf einen bewegten Körper Kräfte einwirken.

Die Arbeit der Corioliskraft beispielsweise ist gleich Null. Denn diese Kraft steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung. Sie besitzt keine Längskomponente, und gleich Null ist daher auch die Arbeit.

Jede Bahnkrümmung, die nicht von einer Geschwindigkeitsänderung begleitet wird, erfordert keine Arbeit, denn die kinetische Energie ändert sich dabei nicht.

Kann die Arbeit auch negativ sein? Nätürlich, nämlich dann, wenn die Kraft unter einem stumpfen Winkel an der Bewegung angreift, denn nun unterstützt sie die Bewegung nicht, sondern behindert sie. Die Längskomponente der Kraft wird, bezogen auf die Richtung, negativ sein. In diesem Fall sagen wir, daß die Kraft eine negative Arbeit verrichtet. Die Reibungskraft bewirkt stets eine Verlangsamung der Bewegung, d. h., sie verrichtet negative Arbeit.

Anhand des Zuwachses an kinetischer Energie können wir nur über die Arbeit der resultierenden Kraft urteilen.

Was die Arbeiten einzelner Kräfte betrifft, so müssen wir sie in Form des Produkts $F_{\text{längs}} \cdot s$ berechnen. Ein Auto fährt gleichförmig die Landstraße entlang. Ein Zuwachs an kinetischer Energie tritt nicht auf, also ist die Arbeit der resultierenden Kraft gleich Null. Aber nicht gleich Null ist natürlich die Arbeit des Motors: Sie ist gleich dem Produkt aus der Zugkraft, multipliziert mit dem durchfahrenen Weg, und sie wird vollständig kompensiert durch die negative Arbeit der Widerstands- und Reibungskräfte.

Unter Verwendung des Begriffs „Arbeit" können wir jene interessanten Besonderheiten der Schwerkraft konkreter und klarer beschreiben, die wir soeben kennengelernt haben. Wenn sich ein Körper unter dem Einfluß der Schwerkraft von einem Ort zu einem anderen bewegt, so ändert sich seine kinetische Energie. Diese Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Arbeit W. Aus dem Energieerhaltungssatz ist uns jedoch bekannt, daß ein Zuwachs an kinetischer Energie stets auf Kosten der potentiellen Energie erfolgt.

Somit ist die Arbeit der Schwerkraft gleich der Abnahme an potentieller Energie:

$$W = W_{p1} - W_{p2}.$$

Nun leuchtet ein, daß die Abnahme (oder der Zuwachs) von potentieller Energie und damit auch der Zuwachs (oder die Abnahme) von kinetischer Energie stets ein und dieselben sind, unabhängig davon, auf welchem Weg die Bewegung des Körpers erfolgte. Das heißt, daß die Arbeit der Schwerkraft nicht von der Form des Weges abhängt. Ist ein Körper unter Vergrößerung der kinetischen Energie von einem ersten Punkt zu einem zweiten Punkt gelangt, dann wird sein Übergang von diesem zweiten Punkt zurück zum ersten unter Verminderung der kinetischen Energie um genau den gleichen Betrag erfolgen. Dabei ist es gleichgültig, ob die Form des Hinweges mit der Form des Rückweges übereinstimmt. Demnach ist auch die Arbeit „hin" und „zurück" ein und dieselbe. Und wenn ein Körper einen sehr langen Weg zurücklegt, das Ende des Weges jedoch mit seinem Anfang zusammenfällt, so wird die Arbeit gleich Null sein.

Stellen Sie sich einen Kanal vor, in dem — reibungsfrei — ein Körper gleitet. Wir schicken ihn vom höchsten Punkt aus auf die Reise. Der Körper saust mit zunehmender Geschwindigkeit nach unten. Dank der dabei gewonnenen kinetischen Energie überwindet der Körper den Anstieg und kehrt schließlich zum Ausgangspunkt zurück. Mit welcher Geschwindigkeit? Natürlich mit der gleichen, mit der er den Ausgangspunkt verlassen hat. Die potentielle Energie erreicht wieder den früheren Wert. Die kinetische Energie hat weder ab- noch zunehmen können. Also ist die Arbeit gleich Null.

Die Arbeit im Verlauf eines ringförmigen (die Physiker sagen: eines geschlossenen) Weges ist nicht für sämtliche Kräfte gleich Null. Wir brauchen wohl nicht nachzuweisen, daß die Arbeit etwa der Reibungskräfte um so größer ist, je länger der Weg ist.

Die Einheit der Arbeit und Energie

Da die Arbeit gleich der Energieänderung ist, werden Arbeit und Energie — die potentielle ebenso wie die kinetische — in ein und derselben Maßeinheit gemessen. Arbeit ist gleich dem Produkt aus Kraft und Weg. Die

Arbeit einer Kraft von 1 N über einen Weg von 1 m ist 1 Joule:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Das SI veranlaßt uns, das Joule zu verwenden. 1 J ist gleich der Arbeit, die von der Kraft 1 N über einen Weg von 1 m verrichtet wird. Berücksichtigt man, wie einfach sich in diesem Fall die Kraft bestimmen läßt, sind die Vorzüge des SI offenkundig.

Leistung und Wirkungsgrad von Maschinen

Zur Beurteilung der Fähigkeit einer Maschine, Arbeit zu verrichten, aber auch zur Angabe des Verbrauchs von Arbeit benutzen wir den Begriff Leistung. Leistung ist die verrichtete Arbeit je Zeiteinheit.

Von unseren Vorvätern haben wir die Leistungseinheit Pferdestärke geerbt. Als die Technik noch ganz am Anfang ihrer Entwicklung stand, hatte diese Bezeichnung einen tiefen Sinn. Eine Maschine mit der Leistung von zehn Pferdestärken ersetzte zehn Pferde. So jedenfalls dachte der Käufer, selbst wenn er keinerlei Vorstellung von Leistungseinheiten hatte.

Nun sind natürlich nicht alle Pferde gleich. Der Urheber der ersten Leistungseinheit ging offenbar von der Annahme aus, ein „mittleres" Pferd sei imstande, in einer Sekunde 75 kp · m Arbeit zu verrichten, und so kam diese Einheit in Gebrauch: 1 PS = 75 kp · m/s (SI: 1 kp = 9,81 N).

Lastpferde können eine sehr große Arbeit leisten, besonders beim Anziehen aus dem Stand. Die Leistung eines mittleren Pferds dagegen liegt eher bei einer halben Pferdekraft.

Rechnen wir Pferdestärken in Kilowatt um, so erhalten wir: 1 PS = 0,735 kW.

Im täglichen Leben und in der Technik haben wir mit Motoren der unterschiedlichsten Leistungen zu tun. Die Leistung des Motors in einem Plattenspieler beträgt 10 W, die Leistung eines Wolga-Motors 100 PS = = 73 kW, und schließlich beläuft sich die Leistung der Triebwerke des Passagierflugzeugs IL 18 auf 16 000 PS. Ein nicht so großes Notstromaggregat, etwa einer LPG, besitzt eine Leistung von 100 kW. Das Wasserkraftwerk von Krasnojarsk — ein Rekordhalter in dieser Beziehung — verfügt über eine Leistung von 5 Millionen kW.

Die bisher erwähnten Leistungseinheiten führen uns zu einer weiteren Energieeinheit, der Kilowattstunde (kW · h). Eine Kilowattstunde ist die Arbeit, die im Verlauf einer Stunde mit der Leistung 1 Kilowatt verrichtet wird. Diese neue Einheit in die anderen bereits bekannten umzurechnen ist nicht schwer: $1\ \mathrm{kW \cdot h} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J} = 861\ \mathrm{kcal} = 3\,600\,270\ \mathrm{N \cdot m}$. Man könnte nun fragen: Ist denn wirklich noch eine weitere Energieeinheit erforderlich? Ihre Zahl wäre ja auch ohnehin nicht gering! Doch der Energiebegriff durchdringt verschiedene Bereiche der Physik, und jeweils mit dem Blick auf die bequeme Anwendbarkeit in dem betreffenden Gebiet haben die Physiker neue und immer neue Energieeinheiten eingeführt. Das gleiche geschah auch bei anderen physikalischen Größen. Zu guter Letzt hat dies den Entschluß zwingend gemacht, das für alle Gebiete der Physik einheitliche SI einzuführen. Es wird allerdings noch viel Zeit vergehen, ehe die alten Einheiten ihren Platz zugunsten der neuen räumen werden, und darum auch ist die Kilowattstunde nicht die letzte Energieeinheit, deren Bekanntschaft uns im Verlauf der Beschäftigung mit der Physik bevorsteht.

Man kann Energiequellen mit Hilfe verschiedener Maschinen zwingen, alle möglichen Arbeiten zu verrichten: Lasten zu heben, Bearbeitungsmaschinen anzutreiben, Güter und Personen zu befördern usw.

Wir können die Energiemenge berechnen, die in eine Maschine eingeführt wird, sowie den Wert für die von der Maschine geleistete Arbeit. In allen Fällen erhalten wir zum Schluß eine kleinere Zahl als zu Beginn: Ein Teil der Energie geht in der Maschine verloren.

Der Energieanteil, der in der Maschine vollständig zu dem von uns gewünschten Zweck verbraucht wird, heißt Wirkungsgrad der betreffenden Maschine. Gewöhnlich gibt man diesen Wirkungsgrad in Prozent an. Ist der Wirkungsgrad gleich 90 %, so heißt dies, daß die Maschine nur 10 % der Energie verliert. Ein Wirkungsgrad von 10 % dagegen bedeutet, daß die Maschine nur 10 % der in die Maschine eingeführten Energie nutzt.

Verwandelt eine Maschine mechanische Energie in Arbeit, dann kann ihr Wirkungsgrad im Prinzip sehr hoch sein. Die Steigerung des Wirkungsgrades wird in diesem Fall durch Bekämpfung der unvermeidlichen Reibung erreicht. Die Verbesserung der Schmierung, die Verwendung besserer Lager, die Verminderung des Widerstands der Umgebung, in der die Bewegung abläuft — dies alles sind Mittel, den Wirkungsgrad in die Nähe von 100 % zu bringen.

Bei der Umwandlung mechanischer Energie in Arbeit wird als Zwischenstufe (wie in den Wasserkraftwerken) die elektrische Kraftübertragung verwendet. Natürlich ist dies mit zusätzlichen Verlusten verknüpft. Allerdings sind sie nicht sehr groß, und die Verluste bei der Umwandlung von mechanischer Energie in Arbeit sowie bei Verwendung der elektrischen Kraftübertragung können auf einige wenige Prozent herabgesetzt werden.

Verminderung der Energie

Es ist Ihnen wahrscheinlich schon aufgefallen, daß wir bei der Veranschaulichung des Satzes von der Erhaltung der mechanischen Energie immer wieder betonten: „Bei fehlender Reibung, wenn es keine Reibung gäbe ...“ Freilich begleitet die Reibung unvermeidlich jede Art von Bewegung. Welche Bedeutung hat aber ein Gesetz, das diesen so wichtigen praktischen Umstand nicht berücksichtigt? Die Beantwortung dieser Frage stellen wir erst einmal zurück und schauen uns jetzt an, welche Folgen die Reibung hat.

Reibungskräfte behindern die Bewegung und verursachen demzufolge negative Arbeit. Dies bewirkt den unausbleiblichen Verlust mechanischer Energie.

Kann dieser unvermeidliche Verlust an mechanischer Energie zum Aufhören der Bewegung führen? Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Reibung nicht jede Art von Bewegung zum Stillstand bringen kann.

Stellen wir uns ein geschlossenes System vor, das aus mehreren miteinander in Wechselwirkung stehenden Körpern besteht. Für ein System dieser Art gilt, wie wir wissen, der Impulserhaltungssatz. Ein geschlossenes System vermag seinen Impuls nicht zu ändern und bewegt sich darum geradlinig und gleichförmig fort. Die Reibung im Inneren eines derartigen Systems vermag die Relativbewegungen der Bestandteile des Systems zu vernichten, wird jedoch Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung des Systems insgesamt nicht beeinflussen.

Es gibt noch ein weiteres Naturgesetz, den sogenannten Drehimpulserhaltungssatz (den wir etwas später kennenlernen werden), der die Vernichtung einer gleichförmigen Rotation des gesamten geschlossenen Systems durch die Reibung ausschließt.

Somit führt das Auftreten von Reibung zum Aufhören jeglicher Bewegung in einem geschlossenen System von Körpern, ohne daß jedoch die gleichförmig geradlinige und die gleichförmig rotierende Bewegung dieses Systems insgesamt behindert wird.

Wenn der Erdball seine Drehgeschwindigkeit geringfügig ändert, so hat dies seine Ursache nicht in der

Reibung irdischer Körper aneinander, sondern ist eine Folge der Tatsache, daß die Erde kein isoliertes System darstellt.

Was die Bewegung von Körpern auf der Erde betrifft, so unterliegen sie alle der Reibung und verlieren ihre mechanische Energie. Deshalb kommt Bewegung stets zum Stillstand, sofern sie nicht von außen unterhalten wird.

Dies ist ein Naturgesetz. Wenn es nun aber gelänge, die Natur zu betrügen? Dann... könnte man das Perpetuum mobile realisieren.

Das Perpetuum mobile

Von der Realisierung des Perpetuum mobile träumt Bertold, eine Gestalt aus „Szenen aus der Ritterzeit" von Puschkin. „Was ist ein Perpetuum mobile?" fragt ihn sein Gesprächspartner. „Es ist die ewige Bewegung", antwortet Bertold. „Wenn ich die ewige Bewegung finde, dann ist keine Grenze des menschlichen Schöpfertums zu erkennen. Gold zu machen ist eine verlockende Aufgabe; diese Entdeckung könnte interessant und vorteilhaft sein, aber die Lösung des Perpetuum mobile zu finden ..."

Das Perpetuum mobile oder der ewige Motor ist eine Maschine, die nicht nur dem Gesetz von der Verminderung der mechanischen Energie zuwiderläuft, sondern auch den Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie verletzt, der, wie wir jetzt wissen, nur unter idealen und unerreichbaren Bedingungen, nämlich bei fehlender Reibung, erfüllt wird. Ein ewiger Motor müßte, sobald er erst einmal konstruiert wäre, beginnen, „aus sich selbst heraus" zu arbeiten, also beispielsweise ein Rad zu drehen oder Lasten von unten nach oben zu befördern. Diese Arbeit müßte ewig und unaufhörlich stattfinden, und der Motor dürfte weder Kraftstoff noch

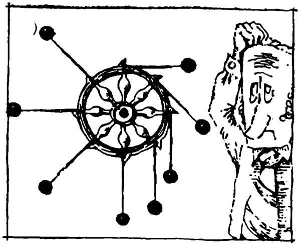


Bild 3.7.

menschliche Arbeitskraft noch die Energie des herabstürzenden Wassers verbrauchen; mit einem Wort, nichts, was von außen stammt.

Das erste bis heute bekannte authentische Dokument über die „Realisierung“ der Idee eines ewigen Motors stammt aus dem 13. Jahrhundert. Sechs Jahrhunderte später, im Jahre 1910, wurde bemerkenswerterweise buchstäblich genau dasselbe „Projekt“ bei einer wissenschaftlichen Einrichtung in Moskau „zur Prüfung“ eingereicht.

Die Darstellung dieses ewigen Motors zeigt Bild 3.7. Wenn sich das Rad dreht, werden die Kugeln weggeschwenkt und unterhalten nach den Vorstellungen ihres Erfinders die Bewegung, da die nach außen gekippten Kugeln einen wesentlich größeren Druck erzeugen; denn sie greifen in einer wesentlich weiteren Entfernung von der Achse an. Hat der Erfinder diese wirklich nicht komplizierte „Maschine“ gebaut, muß er sich davon überzeugen, daß das Rad stehenbleibt, nachdem es — der Trägheit folgend — ein oder zwei Umdrehungen ausgeführt hat. Doch das läßt ihn nicht verzagen. Da ist ein Fehler unterlaufen: Die Hebelarme müssen länger gemacht, die Zacken in ihrer Form verändert werden. Und die fruchtlose Arbeit, der viele Möchte-gern-Erfinder ihr ganzes Leben gewidmet haben, wird fortgesetzt, freilich mit immer dem gleichen Erfolg.

Insgesamt hat es nicht viele Varianten von Vorschlägen für ewige Motoren gegeben: verschiedenartige, von selbst in Bewegung gehaltene Räder, die sich nicht grundsätzlich vom oben erwähnten Beispiel unterscheiden, hydraulische Motoren, z. B. in der Art wie der Motor in Bild 3.8., der 1634 „erfunden“ wurde, Antriebe, die Siphons oder Kapillarrohre (Bild 3.9.) verwenden, andere, die die Gewichtsverminderung im Wasser ausnutzen wollen (Bild 3.10.), oder auch die Anziehung eiserner Körper durch Magnete. Längst nicht immer kommt man überhaupt darauf, wodurch denn eigentlich nach der Idee des Erfinders die ewige Bewegung stattfinden sollte.

Noch vor der Formulierung des Energieerhaltungssatzes finden wir in einer offiziellen Erklärung der Französischen Akademie aus dem Jahre 1775 die Feststellung, daß ein Perpetuum mobile unmöglich ist; damals beschloß die Akademie, keinerlei weitere Projekte ewiger Motoren zur Beratung und Prüfung entgegenzunehmen.

Viele auf dem Gebiet der Mechanik tätigen Wissenschaftler des 17. und 18. Jahrhunderts legten ihren Beweisen bereits das Axiom von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zugrunde, ungeachtet der Tatsache, daß der Energiebegriff und der Energieerhaltungssatz erst sehr viel später Eingang in die Wissenschaft fanden.

Heute wissen wir, daß Erfinder beim Versuch, einen ewigen Motor zu schaffen, nicht nur in Widerspruch zum Experiment geraten, sondern auch einen Verstoß gegen die elementare Logik begehen. Denn die Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile ist die direkte Folge aus den Gesetzen der Mechanik, von denen sie ihrerseits von selbst ausgehen, wenn sie ihre „Erfindung“ begründen.

Ungeachtet ihrer völligen Fruchtlosigkeit haben die Versuche zur Entwicklung eines ewigen Motors wahr-

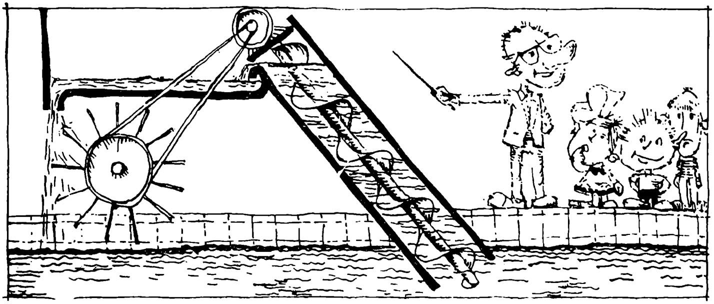


Bild 3.8.

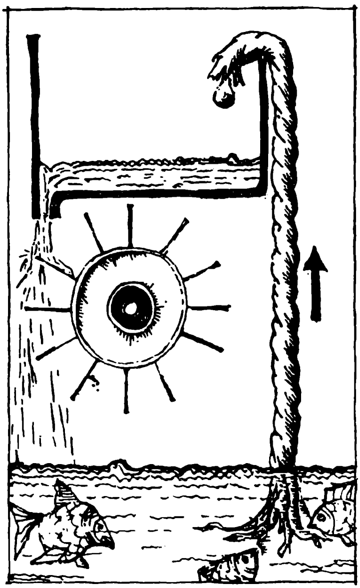


Bild 3.9.

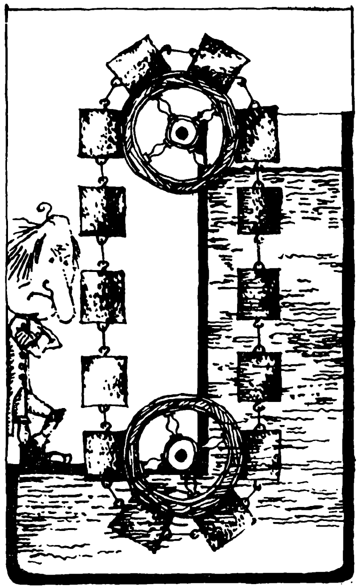


Bild 3.10.

scheinlich doch insofern einen gewissen Nutzen gehabt, als sie im Endeffekt zur Entdeckung des Energieerhaltungssatzes führten.

Zusammenstöße

Bei jedem Zusammenstoß zweier Körper bleibt der Impuls stets erhalten. Was hingegen die Energie betrifft, so muß sie zwangsläufig aufgrund von Reibung abnehmen.

Sollten die zusammenstoßenden Körper aus einem elastischen Werkstoff, beispielsweise aus Elfenbein oder Stahl, sein, dann ist der Energieverlust unbedeutend. Stoßvorgänge, bei denen die Summe aller kinetischen Energien vor und nach dem Zusammenstoß gleich ist, heißen ideal elastische Zusammenstöße.

Ein geringfügiger Verlust an kinetischer Energie findet allerdings auch beim Zusammenstoß überaus elastischer Werkstoffe statt; bei Billardbällen aus Elfenbein erreicht der Verlust beispielsweise 3 bis 4 %.

Die Erhaltung der kinetischen Energie beim elastischen Stoß erlaubt die Lösung einer ganzen Reihe von Problemen.

Betrachten wir beispielsweise den Frontalzusammenstoß von Kugeln unterschiedlicher Masse. Die Impulsgleichung (wir nehmen an, daß die Kugel Nummer 2 vor dem Zusammenstoß in Ruhe gewesen ist) hat die Form

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

und die Energiegleichung:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Hierin ist v die Geschwindigkeit der ersten Kugel vor dem Zusammenstoß, während v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Zusammenstoß sind.

Da die Bewegung im Verlauf einer Geraden erfolgt (die durch die Kugelmitten verläuft, und genau das bedeutet es, wenn wir von einem Frontalzusammenstoß sprechen), müssen wir hier nicht unbedingt vektorielle Bezeichnungen verwenden.

Aus der ersten Gleichung erhalten wir:

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}(v - v_1).$$

Setzt man diesen Ausdruck für v_2 in die Energiegleichung ein, so erhält man:

$$\frac{m_1}{2}(v^2 - v_1^2) = \frac{m_2}{2}\left[\frac{m_1}{m_2}(v - v_1)\right]^2.$$

Eine der Lösungen in dieser Gleichung ist $v_1 = v$ und $v_2 = 0$. Diese Antwort interessiert uns allerdings nicht, da die Gleichung $v_1 = v$ und $v_2 = 0$ zeigt, daß die Kugeln überhaupt nicht zusammengestoßen sind. Deshalb suchen wir die andere Lösung der Gleichung. Wir dividieren durch $m_1 (v - v_1)$ und erhalten:

$$\frac{1}{2}(v + v_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{m_2}(v - v_1),$$

das heißt,

$$m_2 v + m_2 v_1 = m_1 v - m_1 v_1$$

oder

$$(m_1 - m_2)\, v = (m_1 + m_2)\, v_1,$$

woraus wir für die Geschwindigkeit der ersten Kugel nach dem Zusammenstoß folgenden Ausdruck erhalten:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v.$$

Beim frontalen Zusammenstoß mit einer in Ruhe befindlichen Kugel prallt die auftreffende Kugel zurück (v_1 ist negativ), sofern ihre Masse geringer ist. Ist dage-

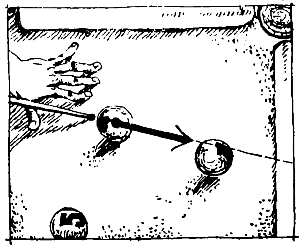


Bild 3.11.

gen m_1 größer als m_2, so setzen beide Kugeln die Bewegung in der Stoßrichtung fort.

Beim Billardspiel kann man im Fall eines genau frontalen Stoßes häufig folgendes Bild beobachten: Die auftreffende Kugel bleibt ruckartig stehen, während die getroffene ins Loch rollt. Dies erklärt sich aus der soeben gefundenen Gleichung. Die Massen der Kugeln sind gleich; unsere Gleichung ergibt $v_1 = 0$ und demzufolge $v_2 = v$. Die auftreffende Kugel hält an, und die andere Kugel beginnt, sich mit der Geschwindigkeit zu bewegen, mit der sie von der ersten getroffen worden ist. Die Kugeln tauschen gewissermaßen ihre Geschwindigkeit aus.

Wir wollen nun ein weiteres Beispiel für den elastischen Zusammenstoß von Körpern betrachten, und zwar den schrägen Zusammenstoß von Körpern gleicher Masse (Bild 3.11.). Da der zweite Körper sich vor dem Zusammenstoß in Ruhe befand, haben der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz folgende Form:

$$mv = mv_1 + mv_2 \quad \text{und} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Kürzen wir die Masse heraus, so erhalten wir:

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{und} \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Der Vektor v ist die vektorielle Summe aus v_1 und v_2. Das heißt aber, daß die Längen der Geschwindigkeitsvektoren ein Dreieck bilden.

Was ist das für ein Dreieck? Erinnern wir uns an den Satz des Pythagoras. Unsere zweite Gleichung bringt ihn zum Ausdruck. Also muß das Geschwindigkeitsdreieck ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse v und den Katheten v_1 und v_2 sein. Demnach schließen v_1 und v_2 miteinander einen rechten Winkel ein. Dieses interessante Ergebnis zeigt, daß Körper gleicher Masse bei jedem schrägen elastischen Zusammenstoß unter einem rechten Winkel auseinanderfliegen.

4. Schwingungen

Das Gleichgewicht

Manchmal fällt es schwer, das Gleichgewicht zu halten: Versuchen Sie nur einmal, auf einem gespannten Seil zu balancieren! Andererseits ist es kein Kunststück, ruhig in einem Schaukelstuhl zu sitzen. Und doch wird auch in diesem Fall das Gleichgewicht gehalten.

Worin besteht der Unterschied zwischen beiden Beispielen? In welchem Fall stellt sich das Gleichgewicht „von selbst" ein?

Die Voraussetzung für den Gleichgewichtszustand scheint auf der Hand zu liegen. Damit ein Körper nicht aus seiner Lage bewegt wird, müssen sich die am Körper angreifenden Kräfte gegenseitig aufheben; mit anderen Worten, die Summe dieser Kräfte muß gleich Null sein. Diese Bedingung ist in der Tat notwendig für das Gleichgewicht eines Körpers. Ist sie aber auch hinreichend?

In Bild 4.1. ist das Profil einer „Berg-und-Tal-Bahn" dargestellt, das man leicht selbst aus Pappe anfertigen kann. Je nachdem, wo man die Kugel hinlegt, wird ihr Verhalten unterschiedlich sein. An jedem Punkt des „Abhangs" wird an der Kugel eine Kraft angreifen, die die Kugel herunterrollen läßt. Es ist die Schwerkraft, bzw. genauer gesagt, ihre Projektion auf die Richtung der Tangente am Profil des Abhangs im betrachteten Punkt. Daraus wird ersichtlich, daß die an der Kugel angreifende Kraft um so kleiner wird, je geringer die Neigung des Abhangs ist.

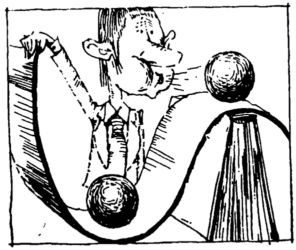


Bild 4.1.

Vor allem interessieren uns die Punkte, an denen die Schwerkraft vollständig durch die Gegenkraft der Auflage ausgeglichen wird und demnach die an der Kugel angreifende resultierende Kraft gleich Null ist. Diese Bedingung ist an den jeweils höchsten und tiefsten Stellen unserer „Berg-und-Tal-Bahn“, also auf den „Bergen“ und in den „Tälern“ erfüllt. Die Tangenten an diesen Punkten verlaufen waagerecht, und die auf die Kugel wirkenden resultierenden Kräfte sind gleich Null.

Doch obwohl die resultierende Kraft auf den „Berggipfeln“ gleich Null ist, gelingt es kaum, die Kugel so hinzulegen, daß sie auch liegenbleibt, und wenn es wirklich einmal klappt, dann bemerken wir, daß dieser Erfolg seine Nebenursache hat: die Reibung. Der leiseste Anstoß oder Lufthauch überwindet die Reibungskräfte, die Kugel kommt in Bewegung und rollt nach unten.

Auf einer glatten Berg-und-Tal-Bahn und für eine glatte Kugel bilden nur die tiefsten Stellen der „Täler“ solche Orte, an denen sich die Kugel im Gleichgewicht befinden kann. Bringt man die Kugel hier durch einen leichten Stoß oder einen Luftstrahl aus der Gleichgewichtslage, dann rollt die Kugel von selbst zurück.

In einem Tal, einer Mulde oder einer Vertiefung befindet sich ein Körper zweifellos im Gleichgewicht. Wird er aus dieser Lage herausgeführt, dann gelangt der Körper unter den Einfluß einer Kraft, die ihn wieder zurückbringt. Auf den höchsten Punkten unserer „Berg-und-Tal-Bahn“ bietet sich ein anderes Bild: Verläßt der Körper hier seinen Ort, dann gelangt er nicht unter den Einfluß einer zurückführenden, sondern einer „wegführenden“ Kraft. Somit ist die Bedingung, daß die resultierende Kraft gleich Null sei, wohl eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für ein stabiles Gleichgewicht.

Man kann das Gleichgewichtsproblem der Kugel auf einer „Berg-und-Tal-Bahn“ auch unter einem anderen Aspekt betrachten. Die Gleichgewichtslagen in den „Tälern“ entsprechen Minima, die Gleichgewichtslagen auf den „Gipfeln“ dagegen Maxima der potentiellen Energie. Einer Lageänderung aus einer Stellung heraus, wo die potentielle Energie ihr Minimum hat, steht der Energieerhaltungssatz im Wege. Hier würde die Lageänderung die kinetische Energie negativ werden lassen, was jedoch unmöglich ist. Ganz anders liegen die Dinge an den Gipfelpunkten. Das Verlassen dieser Punkte führt zur Verringerung der potentiellen Energie, und damit nicht zur Verringerung, sondern zur Vergrößerung der kinetischen Energie.

Fassen wir zusammen: In Gleichgewichtslagen muß die potentielle Energie im Verhältnis zur potentiellen Energie an benachbarten Punkten ihren kleinsten Wert haben.

Je tiefer eine Mulde ist, um so größer ist die Stabilität. Da uns der Energieerhaltungssatz bekannt ist, können wir auch sofort sagen, unter welchen Bedingungen ein Körper aus seiner Vertiefung herausrollen wird. Zu diesem Zweck muß dem Körper eine kinetische Energie mitgeteilt werden, die ausreicht, um den Körper bis an den Rand der Mulde zu heben. Je tiefer die Mulde ist, um so mehr kinetischer Energie bedarf es zur Störung der stabilen Gleichgewichtslage.

Einfache Schwingung

Stößt man eine Kugel an, die in einer Vertiefung liegt, dann bewegt sie sich aufwärts und verliert dabei allmählich an kinetischer Energie. Sobald diese vollständig aufgezehrt ist, kommt die Kugel für einen winzigen Augenblick zum Stillstand, um sich dann wieder abwärts zu bewegen. Nunmehr verwandelt sich potentielle Energie in kinetische. Die Kugel wird immer schneller, durchläuft — der Trägheit gehorchend — die Gleichgewichtslage und bewegt sich wieder „bergauf", allerdings in entgegengesetzter Richtung. Bei nur geringer Reibung kann diese „Auf-und-Ab-Bewegung" sehr lange und im (reibungsfreien) Idealfall ewig dauern.

Bewegungen um eine stabile Gleichgewichtslage haben daher stets Schwingungscharakter.

Zum Studium von Schwingungen ist ein Pendel allerdings besser geeignet als eine Kugel, die in einer Mulde umherrollt, schon deshalb, weil sich die Reibung beim Pendel leichter auf ein Minimum reduzieren läßt.

Wenn die Masse am Pendel in die Grenzlage ausgelenkt ist, sind ihre Geschwindigkeit und ihre kinetische Energie gleich Null. In diesem Augenblick ist die potentielle Energie am größten. Während die Masse nach unten geht, sinkt die potentielle Energie und wandelt sich in kinetische um. Also steigt auch die Geschwindigkeit. In dem Augenblick, wo die Masse den tiefsten Punkt durchläuft, ist ihre potentielle Energie am kleinsten, während die kinetische Energie und die Geschwindigkeit ihr Maximum haben. Im weiteren Bewegungsverlauf geht die Masse wieder nach oben. Nun nimmt die Geschwindigkeit ab; die potentielle Energie wächst.

Wenn man einmal von den Reibungsverlusten absieht, wird die Masse genau so weit nach rechts ausschwingen, wie es zuvor nach links ausgelenkt gewesen ist. Die potentielle Energie hat sich in kinetische verwandelt, und danach wurde in genau der gleichen Menge „neue“ potentielle Energie erzeugt. Bisher haben wir die erste Hälfte einer Schwingung beschrieben. Die zweite Hälfte läuft ebenso ab, nur daß die Bewegung der Masse gegensinnig ist.

Die Schwingungsbewegung ist eine Bewegung, die sich immer wiederholt oder die — wie man auch sagt — periodisch abläuft. Nach Rückkehr in den Ausgangspunkt wiederholt die Masse ihre Bewegung jedesmal (sofern man die durch Reibung verursachten Veränderungen außer acht läßt) sowohl in bezug auf den Weg als auch in bezug auf Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die für eine Schwingung, d. h. bis zur Rückkehr in die Ausgangslage, aufgewendete Zeit ist für den ersten, den zweiten und für alle folgenden Schwingungsvorgänge immer gleich. Diese Zeit — sie stellt einen der wichtigsten Kennwerte der Schwingung dar — heißt Periode, und wir werden sie mit dem Buchstaben T bezeichnen. Die Schwingung wiederholt sich in der Zeit T, d. h., nach Ablauf von T werden wir den schwingenden Körper stets an der gleichen Stelle im Raum und auch stets in der gleichen Bewegungsrichtung antreffen. Nach jeweils einer halben Periode wechseln die Verschiebung des Körpers sowie die Bewegungsrichtung das Vorzeichen. Da die Periode T die Zeitdauer einer Schwingung darstellt, muß die Anzahl von Schwingungen je Zeiteinheit n gleich $\frac{1}{T}$ sein.

Wovon ist die Schwingungsperiode eines Körpers, der um die stabile Ruhelage schwingt, abhängig? Wovon hängt die Schwingungsperiode eines Pendels ab? Galilei war der erste, der diese Frage stellte und beantwortete. Wir werden die Formel für die Schwingungsperiode eines Pendels sogleich ableiten.

Da es auf elementarem Wege schwierig ist, die Gesetze

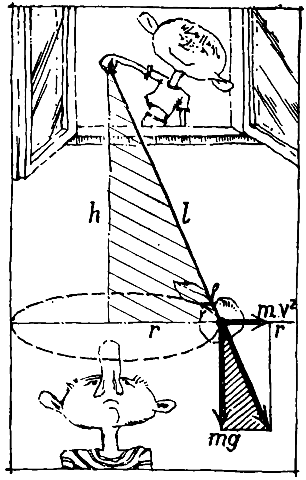


Bild 4.2.

der Mechanik auf eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung anzuwenden, wollen wir — um diese Schwierigkeit zu umgehen — die Masse unseres Pendels veranlassen, nicht in der vertikalen Ebene zu schwingen, sondern auf gleichbleibender Höhe einen Kreis zu beschreiben. Diese Bewegung hervorzurufen ist nicht schwierig, man muß dem aus der Ruhelage ausgelenkten Pendel zu Beginn nur einen kleinen Stoß senkrecht zum Auslenkungsradius geben und die Stärke dieses Stoßes richtig wählen.

In Bild 4.2. ist ein solches „Kreispendel" dargestellt.

Der Körper mit der Masse m beschreibt also einen Kreis. Demnach greift an diesem Gewicht neben der Schwerkraft mg die Zentrifugalkraft mv^2/r an, die wir auch in der Form $4\pi^2 n^2 rm$ darstellen können. Hierin ist n die Anzahl von Umdrehungen je Sekunde. Daher können wir den Ausdruck für die Zentrifugalkraft auch in der Form $m4\pi^2 r/T^2$ aufschreiben. Die Resultierende aus diesen beiden Kräften spannt den Pendelfaden.

Im Bild sind zwei ähnliche Dreiecke schraffiert: das Kräftedreieck und das Dreieck der Entfernungen.

Die entsprechenden Kathetenverhältnisse sind gleich; also gilt:

$$\frac{mgT^2}{m4\pi^2 r} = \frac{h}{r}$$

oder

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Wovon ist die Schwingungsperiode eines Pendels abhängig? Wenn wir unsere Versuche stets an ein und derselben Stelle des Erdballs vornehmen (wo sich g nicht ändert), dann hängt die Schwingungsperiode nur von der Höhendifferenz zwischen dem Aufhängungspunkt und dem Punkt ab, wo sich das Gewicht befindet. Die Masse des Gewichts hat, wie stets bei Bewegungen im Schwerefeld, keinen Einfluß auf die Schwingungsperiode.

Interessant ist folgender Umstand. Wir wollen die Bewegung in der Nähe der stabilen Ruhelage untersuchen. Bei geringen Auslenkungen können wir die Höhendifferenz h durch die Pendellänge l ersetzen. Das ist leicht nachprüfbar. Ist die Pendellänge 1 m und der Auslenkungsradius 1 cm, dann gilt

$$h = \sqrt{10\,000 - 1} = 99{,}995 \text{ cm}.$$

Erst bei einer Auslenkung von 14 cm erreicht der Unterschied zwischen h und l 1 %. Demnach ist die Periode der freien Schwingungen eines Pendels für nicht allzu große Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage gleich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h., sie hängt nur von der Pendellänge und dem Wert für die Beschleunigung des freien Falls an dem Ort ab, wo der Versuch durchgeführt wird; sie ist dagegen unabhängig davon, wie weit das Pendel aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird.

Für das Kreispendel ist die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ bewiesen; welches Aussehen hat sie für ein gewöhnliches „ebenes" Pendel? Es zeigt sich, daß die Formel ihr Aussehen beibehält. Wir wollen es hier nicht beweisen, aber darauf aufmerksam machen, daß der Schatten, den der Körper eines Kreispendels auf eine Wand wirft, fast ebenso schwingt wie ein ebenes Pendel: Der Schatten führt genau während der gleichen Zeit eine Schwingung aus, währenddessen die Kugel ihren Kreis beschreibt.

Die Verwendung kleiner Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage erlaubt die Ausführung von Zeitmessungen mit sehr hoher Genauigkeit.

Der Überlieferung zufolge soll Galilei die Unabhängigkeit der Schwingungsperiode eines Pendels von Amplitude und Masse erkannt haben, als er während des Gottesdienstes in der Kathedrale beobachtete, wie zwei große Lüster hin- und herschwangen.

Fassen wir zusammen: Die Schwingungsperiode eines Pendels ist der Quadratwurzel aus seiner Länge proportional. Somit ist die Schwingungsperiode eines 1-m-Pendels doppelt so groß wie die Schwingungsperiode eines Pendels von 25 cm Länge. Aus der Formel für die Schwingungsperiode eines Pendels folgt weiter, daß ein und dasselbe Pendel an verschiedenen geographischen Breiten nicht gleich schnell schwingen wird. In dem Maße, wie wir uns dem Äquator nähern, vermindert sich die Beschleunigung des freien Falls, und die Schwingungsperiode nimmt zu.

Die Schwingungsperiode läßt sich mit sehr großer Genauigkeit messen. Darum kann man durch Pendel-versuche auch die Beschleunigung des freien Falls sehr genau ermitteln.

Abwicklung von Schwingungen

Wir befestigen am unteren Teil des Pendelkörpers einen weichen Schreibstift und hängen das Pendel so über einem Blatt Papier auf, daß der Schreibstift das Papier berührt (Bild 4.3.). Nun lenken wir das Pendel ein wenig aus. Der pendelnde Stift zeichnet auf dem Papier einen kurzen Geradenabschnitt. In der Mitte der Schwingungsbewegung, dort also, wo das Pendel seine Ruhelage durchläuft, wird der Bleistiftstrich etwas dicker ausfallen, da der Stift hier stärker auf das Papier drückt. Zieht man das Papierblatt senkrecht zur Schwingungsebene unter dem Pendel durch, dann zeichnet das Pendel die in Bild 4.3. dargestellte Kurve. Die entstehenden Wellen liegen dicht beieinander, wenn man das Papier langsam bewegt; die Abstände werden dagegen größer, wenn sich das Papier mit erheblicher Geschwindigkeit bewegt. Damit eine „ordentliche" Kurve entsteht, muß die Bewegung des Papierblatts streng gleichförmig sein.

So haben wir die Schwingungen gewissermaßen „abgewickelt".

Wir brauchen die Abwicklung, um sagen zu können, wo sich der Pendelkörper zu einem bestimmten Zeitpunkt befand und in welche Richtung es sich dabei bewegte. Stellen Sie sich vor, die Geschwindigkeit des Papiers betrüge 1 cm/s von dem Augenblick an, wo sich das Pendel in seiner Grenzlage beispielsweise links von der Mittellage befand. In unserer Darstellung entspricht diese Anfangslage dem mit *1* gekennzeichneten Punkt. Nach $\frac{1}{4}$ Periode durchläuft das Pendel die Mittellage. Während dieser Zeit bewegt sich das

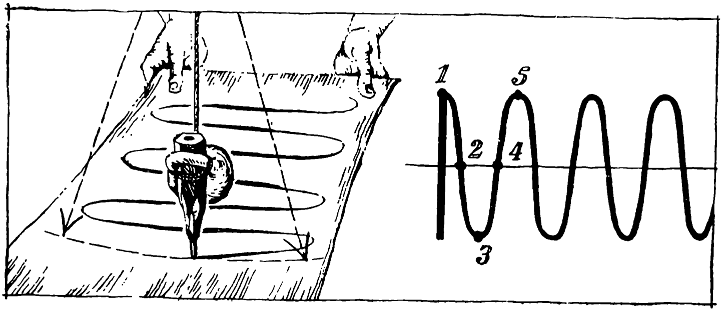


Bild 4.3.

Papier um $\frac{1}{4}T$ Zentimeter zum Punkt *2* im Bild fort. Das Pendel bewegt sich nach rechts, und gleichzeitig dauert auch die Papierbewegung an. Sobald das Pendel die rechte Grenzlage erreicht, hat sich das Papier um $\frac{1}{2}T$ Zentimeter zum Punkt *3* im Bild fortbewegt. Nun kehrt das Pendel zur Mittellage zurück und erreicht nach $\frac{3}{4}T$ seine Ruhelage, dem Punkt *4* im Bild. Am Punkt *5* ist dann eine vollständige Schwingung abgeschlossen, und der ganze Vorgang wiederholt sich alle T Sekunden bzw. alle T Zentimeter im Bild.

Somit stellt die vertikale Linie im Bild die Skala für die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage dar und die waagerechte Mittellinie die Zeitskala.

Aus einer Darstellung in der hier vorliegenden Art lassen sich leicht die beiden Größen bestimmen, die die Schwingung erschöpfend charakterisieren. Die Periode ergibt sich als Abstand zwischen zwei gleichwertigen Punkten, beispielsweise zwei nebeneinanderliegenden

Spitzen. Ebenfalls unmittelbar läßt sich die größte Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage messen. Diese Auslenkung heißt Schwingungsamplitude.

Die Schwingungsabwicklung gibt uns außerdem die Möglichkeit, eine Antwort auf die weiter oben gestellte Frage zu geben: Wo befindet sich ein schwingender Punkt zu einem bestimmten Zeitpunkt? Wo also befindet sich beispielsweise ein schwingender Punkt nach 11 s, wenn die Schwingungsperiode gleich 3 s ist und die Schwingung in der linken Grenzlage begann? Alle 3 s beginnt die Schwingung stets im gleichen Punkt. Nach 9 s wird sich das Pendel wieder in der linken Grenzlage befinden.

Wir brauchen also gar keine Darstellung, in der sich die Kurve über mehrere Perioden erstreckt, vielmehr genügt uns eine Zeichnung mit der Darstellung der Kurve im Verlauf nur einer einzigen Schwingung. Der Zustand des schwingenden Punktes wird nach 11 s bei einer Periode von 3 s die gleiche sein wie nach 2 s. Tragen wir auf der Zeichnung 2 cm ab (wir hatten ja vereinbart, daß die Transportgeschwindigkeit des Papiers gleich 1 cm ist, oder mit anderen Worten, daß im Maßstab der Zeichnung 1 cm stets 1 s entspricht), so sehen wir, daß sich der schwingende Punkt nach 11 s auf dem Weg aus der rechten Grenzlage in die Gleichgewichtslage befindet. Die Auslenkung zu diesem Zeitpunkt können wir aus der Zeichnung ermitteln.

Um die Auslenkung eines Punktes festzustellen, der kleine Schwingungen um seine Gleichgewichtslage ausführt, brauchen wir nicht unbedingt eine Zeichnung zu Hilfe zu nehmen. Die Theorie zeigt, daß die Kurve für die Abhängigkeit der Auslenkung von der Zeit in diesem Fall sinusförmig ist. Bezeichnen wir die Auslenkung des Punktes mit y, die Amplitude mit a und die Schwingungsperiode mit T, so erhalten wir den Auslenkungswert zur Zeit t nach Schwingungsbeginn aus

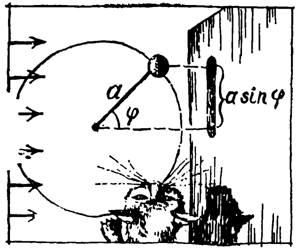


Bild 4.4.

der Formel

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Schwingungen, die dieser Beziehung folgen, heißen harmonische Schwingungen. Das Argument der Sinusfunktion ist gleich dem Produkt von $2\pi \frac{t}{T}$. Die Größe $2\pi \frac{t}{T}$ heißt Phase.

Hat man trigonometrische Tafeln zur Hand und kennt man die Periode und die Amplitude, so kann man die Auslenkung des Punkts leicht berechnen und aus dem Phasenwert darauf schließen, in welche Richtung sich der Punkt bewegt.

Die Formel für eine Schwingungsbewegung, wie man sie bei Betrachtung des Schattens sieht, den ein auf einer Kreisbahn umlaufendes Gewicht an eine Wand wirft, läßt sich leicht ableiten (aus Bild 4.4.).

Wir tragen die Auslenkung des Schattens von der Mittellage aus nach beiden Seiten ab. In den Grenzlagen ist die Auslenkung y gleich dem Radius a des Kreises. Dies ist die Schwingungsamplitude des Schattens.

Ist das Pendel von seiner Mittellage aus um den Winkel φ auf der Kreisbahn weitergewandert, dann entfernt sich sein Schatten um den Betrag $a \sin \varphi$ von der Mittellage.

Die Periode der Bewegung des Pendels (die natürlich auch die Schwingungsperiode des Schattens ist) sei gleich T; dies bedeutet, daß das Pendel 2π Radian in der Zeit T durchläuft. Nun kann man die Proportion $\frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$ aufstellen, worin t die Laufzeit für den Winkel φ darstellt.

Somit ist $\varphi = \frac{2\pi t}{T}$ und $y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$. Genau dies wollten wir auch beweisen.

Die Geschwindigkeitsänderung eines schwingenden Punktes gehorcht ebenfalls der Sinusfunktion. Zu diesem Schluß führt uns die gleiche Überlegung über die Bewegung des Schattens, den ein auf einer Kreisbahn umlaufender Körper wirft. Die Geschwindigkeit dieses Körpers ist ein Vektor konstanter Länge v_0. Der Geschwindigkeitsvektor läuft gemeinsam mit dem Körper um. Stellen wir uns einmal vor, der Geschwindigkeitsvektor sei ein materieller Pfeil, der ebenfalls einen Schatten werfen könnte. In den Grenzlagen des Körpers liegt der Vektor in der Richtung des Lichtstrahls und wirft keinen Schatten. Sobald der Körper aus seiner Grenzlage auf der Kreisbahn um den Winkel T weitergewandert ist, hat sich der Geschwindigkeitsvektor um den gleichen Winkel gedreht, und seine Projektion ist gleich $v_0 \sin T$. Doch mit der bereits vorher gegebenen Begründung gilt $\frac{T}{t} = \frac{2\pi}{T}$, d. h., der Momentanwert für die Geschwindigkeit eines schwingenden Körpers ist:

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Beachten Sie bitte, daß in der Formel zur Bestimmung der Auslenkung als Zeitursprung die Mittellage und in der Geschwindigkeitsformel die Grenzlage benutzt wird. Die

Auslenkung des Pendels ist in der Mittellage gleich Null, die Schwingungsgeschwindigkeit dagegen in der Grenzlage. Zwischen der Geschwindigkeitsamplitude der Schwingung v_0 (gelegentlich spricht man auch vom Amplitudenwert der Geschwindigkeit) und der Amplitude der Auslenkung besteht eine einfache Beziehung: Der Körper durchläuft einen Kreisumfang der Länge $2\pi a$ innerhalb eines Zeitraums, der gleich der Schwingungsperiode T ist. Somit gilt:

$$v_0 = \frac{2\pi a}{T} \text{ und } v = \frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Kraft und potentielle Energie bei Schwingungsvorgängen

Bei allen Schwingungen um die Gleichgewichtslage greift am Körper eine Kraft an, die „bestrebt" ist, den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen. Wenn sich der Körper aus der Gleichgewichtslage entfernt, bremst diese Kraft seine Bewegung; nähert sich der Körper dagegen der Gleichgewichtslage, so bewirkt sie eine Beschleunigung.

Verfolgen wir die Kraft am Beispiel des Pendels (Bild 4.5.). Der am Pendel hängende Körper steht unter dem Einfluß der Schwerkraft und der Kraft, die den Pendelfaden spannt. Wir zerlegen die Schwerkraft in zwei Komponenten, von denen eine in der Richtung des Pendelfadens verläuft, während die andere senkrecht dazu, d. h. tangential, zur Bahn des Pendelkörpers gerichtet ist. Für die Bewegung hat nur die Tangentialkomponente der Schwerkraft Bedeutung. Sie stellt in unserem Fall zugleich die rücktreibende Kraft dar. Was die in Fadenrichtung verlaufende Kraft betrifft, so wird sie durch die Gegenwirkung der Hand kompensiert, die das Pendel hält, und wir brauchen sie nur dann in unsere Berechnungen einzubeziehen, wenn wir wissen wollen, ob der Faden

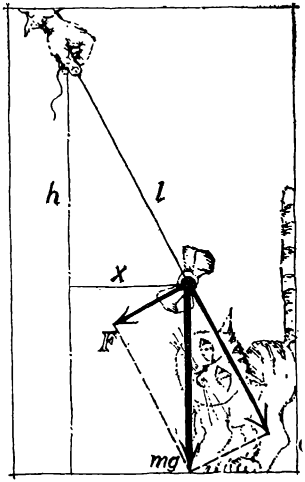


Bild 4.5.

nicht unter der Last des schwingenden Körpers reißen wird.

Wir wollen nun die Auslenkung des Pendels mit x bezeichnen. Die Bewegung hat zwar einen bogenförmigen Verlauf, doch hatten wir uns geeinigt, die Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage zu untersuchen. Deshalb machen wir hier keinen Unterschied zwischen der bogenförmigen Auslenkung und der Auslenkung der Last aus der Senkrechten. Sehen wir uns einmal die beiden ähnlichen Dreiecke an. Das Verhältnis der entsprechenden Katheten ist gleich dem Hypotenusenverhältnis, d. h.,

$$\frac{F}{x} = \frac{mg}{l}$$

oder

$$F = \left(\frac{mg}{l}\right) x.$$

Die Größe $\frac{mg}{l}$ ändert sich im Schwingungsablauf nicht.

Wir bezeichnen diese konstante Größe mit dem Buchstaben k und erhalten die rücktreibende Kraft dann in der Form $F = kx$. So gelangen wir zu folgendem wichtigem Schluß: Die rücktreibende Kraft ist der Auslenkung des schwingenden Körpers aus der Gleichgewichtslage direkt proportional. In den Grenzlagen des schwingenden Körpers erreicht die rücktreibende Kraft ihr Maximum. Wenn der Körper die Mittellage passiert, geht die Kraft gegen Null und ändert ihr Vorzeichen oder — anders ausgedrückt — ihre Richtung. Solange der Körper nach rechts ausgelenkt ist, ist die Kraft nach links gerichtet und umgekehrt.

Das Pendel dient uns als einfachstes Beispiel für einen schwingenden Körper. Allerdings hätten wir es gern, daß man die gefundenen Formeln und Gesetzmäßigkeiten auch auf beliebige andere Schwingungen ausdehnen kann.

Die Schwingungsperiode eines Pendels ist durch seine Länge ausgedrückt worden. Diese Formel ist nur für ein Pendel geeignet. Wir können die Periode ungedämpfter Schwingungen aber auch durch die konstante rücktreibende Kraft k ausdrücken. Da $k = \frac{mg}{l}$ ist, gilt $\frac{l}{g} = \frac{m}{k}$, und demzufolge auch:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Diese Formel gilt für alle Arten von Schwingungen, da jede ungedämpfte Schwingung unter dem Einfluß der rücktreibenden Kraft erfolgt. Nun drücken wir die potentielle Energie eines Pendels durch seine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage x aus. Für den Augenblick, wo der Körper den tiefsten Punkt passiert, kann die potentielle Energie gleich Null gesetzt werden; diesen tiefsten Punkt wählen wir auch als Ausgangspunkt für die Messung der Steighöhe. Nachdem wir die Höhendifferenz zwischen dem Aufhängungspunkt und der Lage des ausgelenkten Körpers mit h bezeichnet haben, erhalten wir für die potentielle Energie: $W = mg\,(l - h)$ oder unter Verwendung der Formel des Pythagoras ($l^2 - h^2 = x^2$)

$$W = mg\,\frac{l^2 - h^2}{l + h}\,.$$

Wie allerdings aus der Zeichnung zu ersehen ist, unterscheiden sich l und h nur sehr wenig voneinander; deshalb kann man statt $l + h$ auch $2l$ in die Formel einsetzen. Dann gilt $W = \frac{mg}{2l}\,x^2$ oder

$$W = \frac{kx^2}{2}\,.$$

Die potentielle Energie eines schwingenden Körpers ist dem Quadrat der Auslenkung dieses Körpers aus der Gleichgewichtslage proportional.

Die Richtigkeit der hier abgeleiteten Formel wollen wir nachprüfen. Der Verlust von potentieller Energie muß gleich der Arbeit sein, die die rücktreibende Kraft leistet. Wir betrachten zwei Lagen des Körpers, nämlich x_2 und x_1. Die Differenz der potentiellen Energien ist

$$W_2 - W_1 = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{k}{2}\,(x_2^2 - x_1^2)\,.$$

Die Differenz zweier Quadrate kann man aber auch als Produkt der Summe und der Differenz schreiben. Demnach gilt:

$$W_2 - W_1 = \frac{k}{2}\,(x_2 + x_1)\,(x_2 - x_1) = \frac{kx_2 + kx_1}{2}\,(x_2 - x_1)\,.$$

Hierin ist $x_2 - x_1$ der Weg, den der Körper zurückgelegt hat; kx_1 und kx_2 sind die Werte der rücktreibenden Kraft zu Beginn und am Ende der Bewegung, und $\frac{kx_1 + kx_2}{2}$ ist gleich der mittleren Kraft.

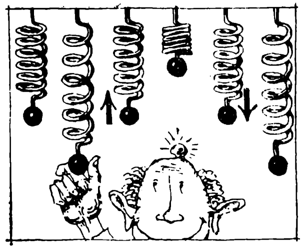


Bild 4.6.

Unsere Formel hat uns zum richtigen Ergebnis geführt: Der Verlust an potentieller Energie ist gleich der geleisteten Arbeit.

Federschwingungen

Man kann eine Kugel leicht zum Schwingen bringen, wenn man sie an einer Feder aufhängt. Wir befestigen die Feder an einem Ende und ziehen dann an der Kugel (Bild 4.6.). Die Feder befindet sich solange im gedehnten Zustand, wie wir die Kugel mit der Hand nach unten ziehen. Sobald wir loslassen, beginnt sich die Feder wieder zusammenzuziehen, und die Kugel setzt sich in Richtung ihrer Gleichgewichtslage in Bewegung. Ebenso wie ein Pendel gelangt auch die Feder nicht sogleich in den Ruhezustand. Der Trägheit folgend, wird die Gleichgewichtslage passiert, und die Feder beginnt zu kontrahieren. Nun wird die Kugelbewegung langsamer, um langsam zum Stillstand zu kommen, wonach zugleich eine Bewegung in umgekehrter Richtung einsetzt. So entsteht eine Schwingung mit den gleichen typischen Merkmalen, die wir bei der Untersuchung des Pendels kennengelernt haben.

Gäbe es keine Reibung, würden die Schwingungsbewegungen ohne Ende fortdauern. Wenn jedoch Reibung auftritt, klingen die Schwingungen ab, und zwar um so rascher, je stärker die Reibung ist.

Häufig spielen Feder und Pendel eine analoge Rolle. Beide dienen dazu, die Periode in Uhren konstant zu halten. Die Ganggenauigkeit moderner Federuhren wird durch die Schwingungsbewegung eines kleinen Schwungrades, der sogenannten Unruhe, gewährleistet. Sie wird durch eine Feder in Schwingung versetzt, die sich täglich einige 10 000mal spannt und wieder entspannt.

Bei der an einem Faden befestigten Kugel hat die Tangentialkomponente der Schwerkraft die Rolle der rücktreibenden Kraft gespielt. Mit der Kugel an der Feder wird die rücktreibende Kraft durch die Elastizität der kontrahierten bzw. gedehnten Feder erzeugt. Somit ist die Elastizitätskraft der Auslenkung direkt proportional: $F = kx$.

Der Faktor k hat im hier betrachteten Fall einen anderen Inhalt. Es ist jetzt die Steifheit der Feder. Eine steife — oder wie man gelegentlich nicht ganz korrekt sagt, harte — Feder ist eine Feder, die sich schwer auseinanderziehen bzw. zusammendrücken läßt. Genau diesen Sinn besitzt der Faktor k. Aus der Formel wird deutlich: k ist gleich der zum Auseinanderziehen bzw. Zusammenpressen der Feder je Längeneinheit erforderlichen Kraft.

In Kenntnis der Federsteifheit und der Masse des an der Feder aufgehängten Körpers finden wir mit Hilfe der Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ die Periode der ungedämpften Schwingung. Ein Körper mit der Masse 10 g wird an einer Feder mit der Steifheit 1 N/cm (das ist eine ziemlich steife Feder — sie wird durch ein 100-g-Wägestück um 1 cm gedehnt) Schwingungen mit der Periode $T = 6{,}28 \cdot 10^{-2}$ s vollführen. In jeder Sekunde finden also 16 Schwingungen statt.

Je weicher eine Feder ist, um so langsamer laufen die Schwingungen ab. Den gleichen Einfluß zeigt auch eine Vergrößerung der Masse des Körpers.

Nun wollen wir den Energieerhaltungssatz auf die an einer Feder hängende Kugel anwenden.

Wir wissen, daß sich die Summe der kinetischen und potentiellen Energie eines Pendels $W_k + W_p$ nicht ändert.

Die Werte von W_k und W_p für ein Pendel kennen wir. Der Energieerhaltungssatz besagt, daß

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

erhalten bleiben.

Das gleiche gilt freilich auch für die Kugel an der Feder.

Der sich hieraus unvermeidlich ergebende Schluß ist äußerst interessant.

Neben der potentiellen Energie, die wir bereits kennengelernt haben, existiert somit auch eine potentielle Energie anderer Art. Die erstere heißt potentielle Energie der Gravitation. Wäre die Feder waagerecht angeordnet, dann würde sich die potentielle Energie der Gravitation im Schwingungsverlauf natürlich nicht ändern. Die neue potentielle Energie, auf die wir hier gestoßen sind, heißt potentielle Energie der Elastizität. Sie ist in unserem Fall gleich $\frac{kx^2}{2}$, d. h., sie hängt von der Federsteifheit ab und ist dem Quadrat der Kontraktion bzw. Dehnung direkt proportional.

Die unverändert bleibende vollständige Schwingungsenergie kann als $W = \frac{ka^2}{2}$ oder $W = \frac{mv_0^2}{2}$ angegeben werden.

Die in der letztgenannten Formel enthaltenen Größen a und v_0 sind die Maximalwerte, die Auslenkung und Geschwindigkeit im Schwingungsverlauf annehmen: Es sind die Amplitudenwerte von Auslenkung und Geschwindigkeit. Der Ursprung beider Formeln ist durchaus einleuchtend. In der Grenzlage, wenn $x = a$ ist, ist die kinetische Energie der Schwingung gleich Null und die volle Energie gleich dem Wert der potentiellen Energie. In der Mittellage sind die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und demzufolge auch die potentielle Energie gleich Null; die Geschwindigkeit erreicht in diesem Moment ihr Maximum $v = v_0$, und die volle Energie ist gleich der kinetischen Energie.

Die Schwingungslehre ist ein recht umfangreiches Gebiet der Physik. Wir haben recht häufig mit Pendeln und Federn zu tun. Doch erschöpft sich die Liste der Körper, deren Schwingungen untersucht werden müssen, damit keineswegs. Fundamente, auf denen Maschinen aufgestellt sind, schwingen, und Brücken, Gebäudeteile, Balken oder Hochspannungsleitungen können in Schwingung geraten. Der Schall stellt Schwingungen der Luft dar.

Bisher haben wir einige Beispiele für mechanische Schwingungen aufgezählt. Der Schwingungsbegriff braucht jedoch nicht ausschließlich auf mechanische Auslenkungen von Körpern oder Partikeln aus der Gleichgewichtslage bezogen zu werden. Bei vielen elektrischen Erscheinungen stoßen wir ebenfalls auf Schwingungen, wobei diese Schwingungen Gesetzen gehorchen, die den weiter oben betrachteten Gesetzen sehr ähnlich sehen. Die Schwingungslehre durchdringt alle Teilgebiete der Physik.

Kompliziertere Schwingungen

Was bisher gesagt worden ist, gilt für Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage, die unter dem Einfluß einer rücktreibenden Kraft stattfinden, deren Betrag der Auslenkung eines Punktes aus seiner Gleichgewichts-

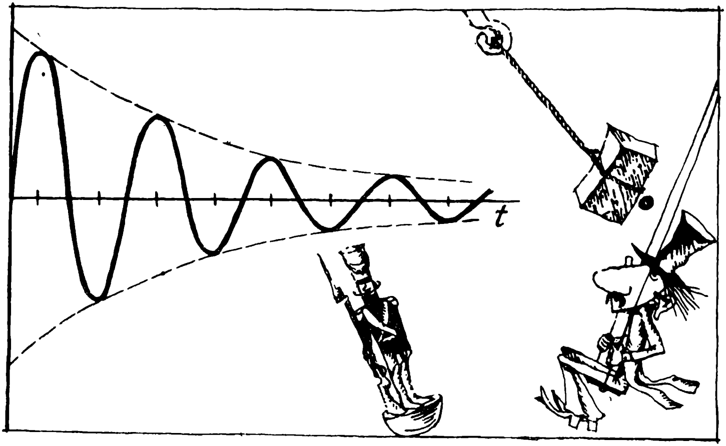


Bild 4.7.

lage direkt proportional ist. Solche Schwingungen sind sinusförmig. Sie heißen harmonische Schwingungen. Die Periode harmonischer Schwingungen ist unabhängig von der Amplitude.

Beträchtlich komplizierter sind Schwingungen mit großer Auslenkung. Derartige Schwingungen verlaufen nicht mehr sinusförmig, und ihre Abwicklung liefert kompliziertere Kurven, die für unterschiedliche schwingende Systeme verschieden sind. Die Periode ist hier nicht länger die charakteristische Eigenschaft der Schwingung, sondern beginnt, von der Amplitude abhängig zu werden.

Alle Schwingungen werden durch Reibung wesentlich verändert. Wo Reibung auftritt, klingen Schwingungen allmählich ab. Je stärker die Reibung ist, um so stärker ist auch die Dämpfung. Versuchen Sie nur, ein Pendel schwingen zu lassen, das in Wasser eintaucht. Es dürfte kaum gelingen, daß dieses Pendel mehr als ein oder zwei Schwingungen ausführt. Läßt man das Pendel gar in ein sehr viskoses Medium eintauchen, dann tritt möglicherweise überhaupt keine Schwingung auf. Das ausgelenkte Pendel kehrt nur in seine Gleichgewichtslage zurück. In Bild 4.7. ist die typische Kurve einer gedämpften Schwingung dargestellt. Auf der Vertikalen sind die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage und auf der Horizontalen ist die Zeit abgetragen. Mit jeder Schwingung nimmt die Amplitude (die maximale Auslenkung) einer gedämpften Schwingung ab.

Resonanz

Ein Kind sitzt auf der Schaukel. Es kann den Erdboden nicht mit seinen Füßen erreichen. Natürlich kann man die Schaukel in Schwingung versetzen, wenn man sie recht weit auslenkt und dann losläßt. Das ist aber recht mühsam und im übrigen ganz unnötig. Es genügt vielmehr, die Schaukel nur ganz leicht im Takt der Schwingungen anzustoßen, und schon nach kurzer Zeit wird sich die Schaukel ganz erheblich „aufgeschaukelt" haben.

Einen Körper kann man nur im Takt der Schwingungen aufschaukeln. Anders ausgedrückt, muß man es so einrichten, daß die Stöße mit der gleichen Periode erfolgen wie die Eigenschwingungen des Körpers. Man spricht dann von Resonanz. Resonanzerscheinungen sind in Natur und Technik weit verbreitet und verdienen daher angemessene Aufmerksamkeit bei unseren Betrachtungen.

Eine sehr interessante und eigentümliche Resonanzerscheinung läßt sich beobachten, wenn man folgende Vorrichtung aufbaut: Hängen Sie an einem waagerecht gespannten Faden drei Pendel (Bild 4.8.) auf, und zwar zwei kurze Pendel gleicher Länge und ein längeres Pendel. Nun lenken Sie eines der kurzen Pendel aus und lassen es anschließend los. Wenige Sekunden später wer-

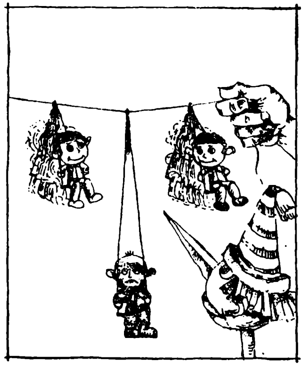


Bild 4.8.

den Sie sehen, wie das andere, gleich lange Pendel allmählich ebenfalls zu schwingen beginnt. Noch einige Sekunden später, und das zweite Pendel hat sich so aufgeschaukelt, daß man nicht mehr unterscheiden kann, mit welchem von beiden die Bewegung begonnen hat.

Was ist geschehen? Pendel gleicher Länge haben gleiche Eigenschwingungsperioden. Das erste schaukelt das zweite Pendel auf. Die Schwingungen werden durch den Faden, der beide miteinander verbindet, von dem einen zum anderen Pendel übertragen. Gut und schön, aber an dem Faden hängt doch ein weiteres Pendel, nur, daß es eine andere Länge hat. Was wird mit ihm geschehen? Nichts! Dieses Pendel hat eine andere Periode, und so kann es dem kurzen Pendel nicht gelingen, das lange Pendel aufzuschaukeln. Das dritte Pendel wird bei der interessanten Erscheinung des „Überfließens" der Energie aus einem Pendel zum anderen gegenwärtig sein, ohne daran auch nur den geringsten Anteil zu nehmen.

Jeder von uns hat häufig mit mechanischen Resonanzerscheinungen zu tun. Vielleicht haben Sie nur nicht darauf geachtet, obwohl Resonanzerscheinungen gelegentlich sehr lästig sein können. Da fährt eine Straßenbahn vor dem Fenster vorüber, und im Büfett klirren die Gläser. Was ist geschehen? Die Schwingungen des Erdbodens haben sich auf das Gebäude übertragen und somit auch auf den Fußboden des Zimmers mit dem Büfett; dieses sowie die darin stehenden Gläser kamen ins Schwingen. So weit und über so viele Gegenstände hat sich die Schwingung ausgebreitet. Die Ursache dafür liegt in der Resonanz. Äußere Schwingungen sind mit den Eigenschwingungen der Körper in Resonanz getreten. Fast jedes Klirren oder Klappern, das wir zu Hause, im Betrieb oder im Auto hören, wird durch Resonanz bewirkt.

Resonanzerscheinungen können, wie übrigens viele andere Erscheinungen, sowohl nützlich als auch schädlich sein.

Da steht eine Maschine auf ihrem Fundament. Gemächlich bewegen sich ihre Teile mit einer bestimmten Periode hin und her. Stellen Sie sich nun einmal vor, daß diese Periode mit der Eigenschwingungsperiode des Fundaments zusammenfällt. Was wird geschehen? Das Fundament wird sich im Handumdrehen aufschaukeln, und das kann sehr böse ausgehen.

Verbürgt ist folgende Tatsache. Als in Petersburg eine Kompanie Soldaten im Gleichschritt über eine Brücke marschierte, stürzte diese ein. Es wurde ein Ermittlungsverfahren eingeleitet. Die Ursache war unklar, denn wie oft waren Menschen in Scharen auf der Brücke zusammengeströmt und schwere Fuhrwerke langsam über die Brükke gefahren, deren Masse ein Mehrfaches jener Kompanie Soldaten betrug.

Doch unter dem Einfluß einer Last biegt sich die Brücke nur um einen unbedeutenden Betrag durch. Eine unvergleichlich größere Durchbiegung läßt sich erzielen, wenn man die Brücke aufschaukelt. Die Amplitude einer Resonanzschwingung kann das Mehrtausendfache der Auslenkung unter dem Einfluß einer gleich großen, aber ruhenden Last betragen. Genau zu diesem Ergebnis führten auch die Ermittlungen. Die Periode der Eigenschwingung der Brücke stimmte mit der Periode des üblichen Gleichschritts überein.

Darum wird, wenn Truppenteile eine Brücke passieren, der Befehl „Ohne Tritt, Marsch“ gegeben. Wenn nicht im Gleichschritt marschiert wird, kann keine Resonanz eintreten, und die Brücke kann sich nicht aufschaukeln. Übrigens haben sich die Ingenieure diesen Unglücksfall zu Herzen genommen. Bei der Projektierung von Brükken sind sie bemüht, alles so auszulegen, daß die Periode der ungedämpften Schwingungen der Brücke möglichst weit von der „Gleichschrittperiode“ entfernt ist.

Ganz genau so verfahren auch die Konstrukteure von Maschinenfundamenten. Sie legen das Fundament so aus, daß seine Schwingungsperiode möglichst weitab von der Schwingungsperiode der bewegten Maschinenteile liegt.

5. Die Bewegung fester Körper

Das Kraftmoment

Versuchen Sie bitte, ein schweres Schwungrad von Hand in Drehung zu versetzen. Ziehen Sie an einer Speiche! Das wird Ihnen schwerfallen, wenn Sie zu nahe an der Achse anfassen. Wenn Sie die Speiche dagegen weiter außen ergreifen, dann geht es schon leichter.

Was hat sich eigentlich geändert? Die Kraft ist doch in beiden Fällen ein und dieselbe. Geändert hat sich der Angriffspunkt der Kraft!

Während unserer gesamten bisherigen Darstellung ist das Problem des Angriffsorts der Kraft nicht aufgetaucht, da Form und Größe der Körper hier keine Rolle spielten. Wir haben im Grunde genommen die Körper gedanklich durch Punkte ersetzt.

Das Beispiel mit dem Schwungrad zeigt, daß die Frage nach dem Angriffspunkt einer Kraft keineswegs müßig ist, wenn es sich um das Drehen oder Kippen eines Körpers handelt.

Um die Rolle zu verstehen, die der Angriffspunkt einer Kraft spielt, wollen wir die Arbeit berechnen, die zur Drehung eines Körpers um einen bestimmten Winkel erforderlich ist. Mit dieser Berechnung wird natürlich vorausgesetzt, daß sämtliche Teilchen eines Festkörpers starr miteinander verbunden sind (wir lassen also zunächst die Fähigkeit des Körpers, sich durchzubiegen oder zusammendrücken zu lassen, außer acht, d. h. seine Fähigkeit zur Formänderung schlechthin). Darum vermittelt die an einen Punkt des Körpers angelegte

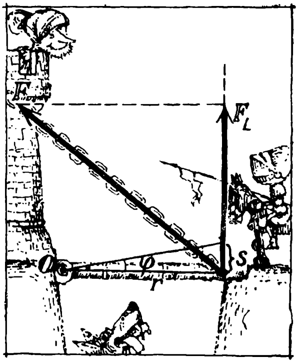


Bild 5.1.

Kraft sämtlichen Teilen dieses Körpers kinetische Energie.

Bei der Berechnung dieser Arbeit nun ist die Rolle des Angriffspunktes der Kraft deutlich zu erkennen.

In Bild 5.1. ist ein auf einer Achse befestigter Körper dargestellt. Schwenkt man den Körper um den kleinen Winkel φ, so verlagert sich der Angriffspunkt der Kraft bogenförmig und legt den Weg s zurück.

Wir projizieren die Kraft auf die Bewegungsrichtung, d. h. auf die Tangente an den Kreis, auf dem sich der Angriffspunkt bewegt, und schreiben den bekannten Ausdruck für die Arbeit W auf:

$$W = F_L \cdot s.$$

Der Bogenabschnitt s kann aber auch durch

$$s = r\varphi$$

ausgedrückt werden, worin r die Entfernung zwischen Drehachse und Kraftangriffspunkt ist. Somit gilt

$$W = F_L \cdot r\varphi,$$

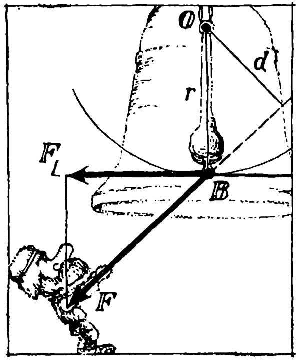


Bild 5.2.

Schwenken wir den Körper nun auf unterschiedliche Weise um ein und denselben Winkel, so werden wir dafür immer eine andere Arbeit verrichten müssen, je nachdem, wo die Kraft angreift.

Ist der Winkel gegeben, dann ergibt sich die Arbeit aus dem Produkt $F_L \cdot r$. Dieses Produkt heißt Kraftmoment:

$$M = F_L \cdot r.$$

Man kann die Formel des Kraftmoments auch in anderer Form darstellen. Es sei O die Drehachse und B der Kraftangriffspunkt (Bild 5.2.). Mit dem Buchstaben d ist die Länge des Lots bezeichnet, das aus O auf die Kraftrichtung gefällt wird. Die beiden im Bild eingezeichneten Dreiecke sind ähnlich. Darum gilt:

$$\frac{F}{F_L} = \frac{r}{d} \text{ oder } F_L r = Fd.$$

Die Größe d heißt Kraftarm

Die neue Formel $M = Fd$ muß so gelesen werden: Das Kraftmoment ist gleich dem Produkt aus Kraft mal Kraftarm, Verschiebt man den Kraftangriffspunkt im Verlauf der Kraftrichtung, dann ändert sich der Kraftarm d und damit auch das Kraftmoment d nicht. Es ist also gleichgültig, wo genau auf der Kraftlinie der Angriffspunkt liegt.

Unter Verwendung des neuen Begriffs läßt sich die Formel für die Arbeit kürzer fassen:

$$W = M\varphi,$$

d. h., die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Kraftmoment und Drehwinkel.

Auf einen Körper sollen zwei Kräfte mit den Momenten M_1 und M_2 einwirken. Bei einer Schwenkung des Körpers um den Winkel φ wird die Arbeit $M_1\varphi + M_2\varphi = (M_1 + M_2)\,\varphi$ verrichtet. Diese verkürzte Schreibweise zeigt, daß zwei Kräfte mit den Momenten M_1 und M_2 einen Körper ebenso in Drehung versetzen, wie dies durch eine einzige Kraft mit dem Moment M geschähe, das gleich der Summe von $M_1 + M_2$ wäre. Kraftmomente können sich sowohl gegenseitig unterstützen als auch behindern. Sind die Momente M_1 und M_2 bestrebt, den Körper in ein und dieselbe Richtung zu drehen, dann müssen wir sie als Größen auffassen, die das gleiche Vorzeichen besitzen. Im Gegensatz dazu haben Kraftmomente, die einen Körper in verschiedene Richtungen zu drehen bestrebt sind, auch verschiedene Vorzeichen.

Wie wir wissen, wird die Arbeit sämtlicher auf einen Körper wirkender Kräfte zur Änderung seiner kinetischen Energie verwendet.

Ist die Drehung eines Körpers langsamer oder schneller geworden, so heißt dies, daß sich seine kinetische Energie geändert hat. Das kann aber nur dann geschehen, wenn das Gesamtmoment aller Kräfte nicht gleich Null ist.

Wenn aber das Gesamtmoment gleich Null wäre? Die Antwort ist klar: Es erfolgt keine Änderung der kinetischen Energie, und deshalb wird der Körper entweder — der Trägheit gehorchend — gleichförmig rotieren oder sich in Ruhe befinden.

Fassen wir zusammen: Damit sich ein zur Drehung befähigter Körper im Gleichgewicht befindet, müssen alle an ihm angreifenden Kraftmomente ausgeglichen sein. Bei gleichzeitiger Wirkung zweier Kräfte muß für den Gleichgewichtsfall die Gleichung

$$M_1 + M_2 = 0$$

erfüllt sein.

Solange wir uns nur für Probleme interessiert haben, bei denen die Körper als Punkte aufgefaßt werden konnten, waren die Gleichgewichtsbedingungen einfacher: Damit ein Körper in Ruhe war oder sich gleichförmig bewegte, mußte — so sagte es Newtons Gesetz — die resultierende Kraft gleich Null sein; nach oben gerichtete Kräfte mußten durch Kräfte kompensiert werden, die nach unten gerichtet waren; eine nach rechts wirkende Kraft bedurfte des Ausgleichs durch eine Kraft von links.

Dieses Gesetz ist auch für unseren Fall gültig. Befindet sich das Schwungrad in Ruhe, dann werden die darauf wirkenden Kräfte durch die Reaktionskraft der Achse ausgeglichen, auf der das Schwungrad sitzt.

Doch diese notwendigen Bedingungen allein reichen nicht mehr aus. Neben dem Ausgleich der Kräfte ist auch ein Ausgleich der Kraftmomente erforderlich. Der Ausgleich aller Kraftmomente ist die zweite notwendige Bedingung für den Ruhezustand oder die gleichförmige Rotation eines Festkörpers.

Alle Kraftmomente — auch wenn sie zahlreich sind — lassen sich in unserem Fall ohne Schwierigkeiten in zwei Gruppen gliedern: Die einen sind bestrebt, den Körper rechtsherum zu drehen, die anderen linksherum. Genau diese beiden Gruppen von Kraftmomenten lassen sich gegenseitig kompensieren.

Der Hebel

Ist der Mensch in der Lage, 100 Tonnen im Gleichgewicht zu halten oder mit der Hand Eisen zu zerquetschen, kann schließlich ein Kind einem Kraftprotz Widerstand leisten? Ja, das alles ist möglich.

Angenommen, ein starker Mann versucht, unser Schwungrad nach links zu drehen, faßt die Speiche dabei aber in unmittelbarer Nähe der Achse an. Das Kraftmoment wird in diesem Fall nicht sehr groß ausfallen. Die Kraft ist groß, aber der Kraftarm klein. Zieht ein Kind nun das Rad in der entgegengesetzten Richtung und hält die Speiche unmittelbar am Radkranz umklammert, dann kann das Kraftmoment sehr wohl größer sein: Die Kraft ist klein, dafür aber der Kraftarm groß. Die Gleichgewichtsbedingung ist:

$$M_1 = M_2 \text{ oder } F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

Durch Anwendung des Momentensatzes können jedermann Bärenkräfte verliehen werden.

Das wohl bekannteste Beispiel ist der Hebel. Angenommen, Sie wollen einen großen Felsbrocken mit Hilfe einer Brechstange von der Stelle bewegen. Das steht durchaus in Ihren Kräften, obwohl die Masse des Steins mehrere Tonnen beträgt. Die Brechstange liegt auf einer Unterlage auf und bildet damit den Festkörper unseres Problems. Der Auflagepunkt bildet den Drehpunkt. Am Körper greifen zwei Kraftmomente an: Das eine rührt von Gewichtskraft des Steins her und wirkt hemmend, das andere wirkt von unserer Hand und überwindet das Hemmnis. Benutzt man den Index *1* für die Muskelkraft und den Index *2* für die Gewichtskraft des Steins, so kann man die Bedingung für das Anheben des Steins ganz kurz ausdrücken: M_1 muß größer als M_2 sein. Im Gleichgewicht halten läßt sich der Stein bei Erfüllung folgender Bedingung:

$$M_1 = M_2, \text{ d. h. } F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

Entspricht der kurze Hebelarm — von der Auflage bis zum Stein — nur einem Fünfzehntel des langen Armes — von der Auflage bis zur Hand —, dann kann ein Stein von 1 t Masse von einem Menschen, der mit seiner ganzen Masse gegen das lange Ende des Hebels drückt, im angehobenen Zustand gehalten werden.

Die Brechstange mit Auflage ist ein sehr häufig anzutreffendes und auch das einfachste Beispiel des Hebels. Mit Hilfe einer Brechstange erreicht man gewöhnlich den zehn- bis zwanzigfachen Kraftgewinn. Die Länge der Brechstange beträgt etwa 1,5 m, und die Auflage mehr als auf eine Entfernung von 10 cm an das andere Ende der Brechstange heranzuschieben ist meist nicht möglich. Darum wird der eine Hebelarm gewöhnlich 15- bis 20mal so groß sein wie der andere, und ebenso groß fällt somit auch der Kraftgewinn aus.

Ein LKW von mehreren Tonnen kann leicht mit Hilfe des Wagenhebers angehoben werden. Der Wagenheber ist ein Hebel des gleichen Typs wie die Brechstange auf ihrer Auflage. Die Kraftangriffspunkte (also die menschliche Hand und das Kraftfahrzeug) sind auf der jeweils entgegengesetzten Seite der Auflage des Hebels am Wagenheber angeordnet. Hier beträgt der Kraftgewinn ungefähr das 40- bis 50fache, so daß auch sehr dicke Brocken leicht angehoben werden können.

Scheren, Nußknacker, Zangen aller Art, Seitenschneider und viele andere Werkzeuge sind samt und sonders Hebel. In Bild 5.3. werden Sie leicht den Drehpunkt des Festkörpers (den Auflagepunkt) sowie die Angriffspunkte der beiden Kräfte, der wirkenden und der Widerstand leistenden Kraft, finden.

Wenn man Blech mit einer Schere schneidet, öffnet man diese möglichst weit. Was wird damit erreicht? Es

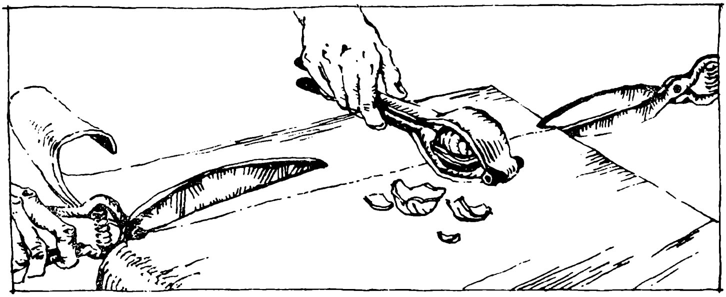


Bild 5.3.

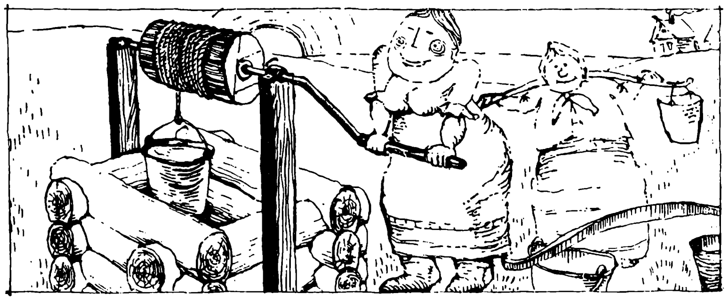


Bild 5.4.

gelingt so, das Metall näher an den Drehpunkt heranzuschieben. Damit wird der Hebelarm des zu überwindenden Kraftmoments kleiner und der Kraftgewinn demzufolge größer. Beim Zusammendrücken der Scheren- oder Zangengriffe wendet ein Erwachsener gewöhnlich eine Kraft von 400 bis 500 N auf. Dabei kann der eine Arm etwa 20mal so lang sein wie der andere. Also können wir uns mit einer Kraft von 10 000 N in das Metall „hineinfressen“. Und dies mit Hilfe einfachster Werkzeuge.

Eine Abart des Hebels ist die Winde. Mit einer Winde (Bild 5.4.) wurden früher vielerorts die Wassereimer aus den Brunnen heraufgezogen.

Der längere Weg

Die Werkzeuge machen den Menschen stark. Doch folgt daraus keineswegs, man könne unter Zuhilfenahme von Werkzeugen wenig Arbeit aufwenden, um viel Arbeit zu erhalten. Der Energieerhaltungssatz fordert unerbittlich, daß es einen Gewinn, d. h. die Schaffung von Arbeit aus dem „Nichts“, nicht geben kann.

Die erhaltene Arbeit kann nicht größer als die aufgewendete sein. Im Gegenteil: Unvermeidliche Energieverluste durch Reibung führen dazu, daß die mit Hilfe von Werkzeugen erzielte Arbeit stets kleiner ist als die dabei aufgewendete. Nur im Idealfall sind beide Arbeiten dem Betrag nach gleich.

Diese Weisheit ist offenkundig: Denn der Momentensatz kann aus der Bedingung abgeleitet werden, daß die Arbeit der wirkenden und der überwindenden Kraft gleich sei. Haben die Kraftangriffspunkte die Wege s_1 und s_2 zurückgelegt, dann nimmt die Bedingung für die Gleichheit beider Arbeiten folgende Form an:

$$F_{L1} \cdot s_1 = F_{L2} \cdot s_2.$$

Überwinden wir mit Hilfe eines hebelartigen Werkzeugs eine Kraft F_2 auf dem Wege s_2, so können wir dies auch mit der Kraft F_1 tun, die sehr viel kleiner als F_2 ist. Doch die Lageänderung der Hand F_1 muß so vielfach größer als F_2 sein, wie die Muskelkraft F_1 kleiner als F_2 ist.

Das Hebelgesetz wurde von Archimedes, einem der bedeutendsten Gelehrten des Altertums, entdeckt. Hingerissen von der Kraft der Beweise, schrieb dieser hervorragende Wissenschaftler des Altertums an den König von Syrakus Hieron: „Gib mir einen Punkt außerhalb der Erde, und ich setze den Erdball in Bewegung."

Ein sehr langer Hebel, dessen Auflage sich nahe am Erdball befände, gäbe allem Anschein nach die Möglichkeit zur Lösung einer derartigen Aufgabe.

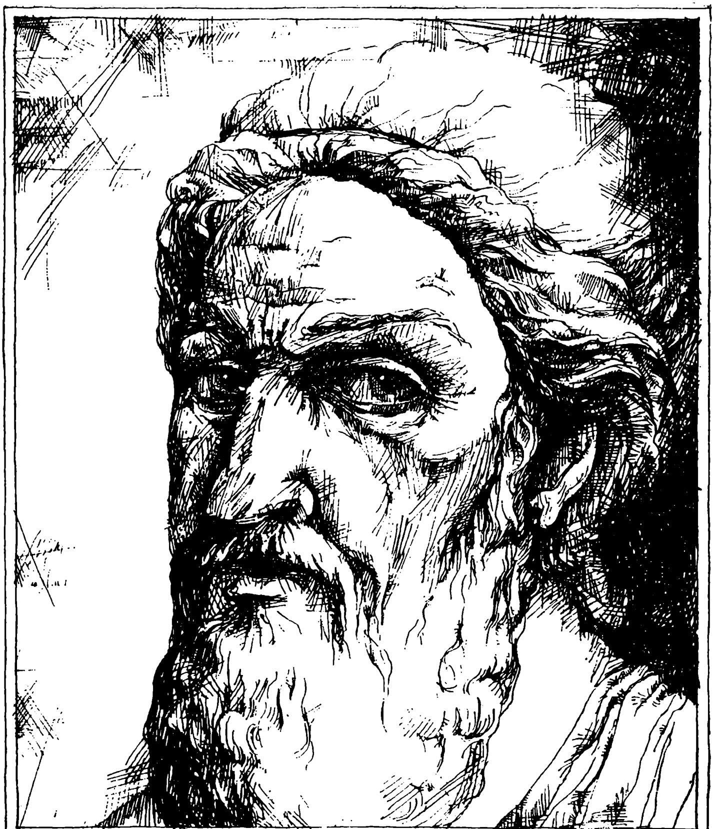
Wir wollen nicht mit Archimedes darüber klagen, daß uns kein „fester Punkt" zur Verfügung steht, der, wie Archimedes meinte, ihm einzig und allein fehlte, um die Erde von der Stelle zu rücken.

Lassen wir einmal unserer Phantasie freien Lauf: Wir nehmen einen sehr festen Hebel, legen ihn auf eine Auflage und „hängen" an das kurze Ende eine „kleine Kugel" mit einem Gewicht von $6 \cdot 10^{25}$ N. Diese bescheidene Zahl gibt an, wieviel der „zu einer kleinen Kugel zusammengepreßte" Erdball wiegt. Nun lassen wir am langen Ende des Hebels die Kraft unserer Muskel angreifen.

Wenn man annimmt, Archimedes habe mit seiner Hand eine Kraft von 600 N aufbringen können, dann müßte Archimedes' Hand, um unsere „Erdnuß" um einen Zentimeter von der Stelle zu rücken, den $\frac{6 \cdot 10^{25}}{600} =$ $= 10^{23}$ fachen Weg zurücklegen. 10^{23} cm sind 10^{18} km, d. h. das Dreimilliardenfache des Erdbahndurchmessers!

Dieses anekdotische Beispiel macht den Maßstab des „längeren Weges" bei der Arbeit mit dem Hebel sehr deutlich.

Jedes der oben betrachteten Beispiele läßt sich auch als Veranschaulichung nicht nur des Kraftgewinns, sondern auch der Wegverlängerung verwenden. Die Hand des Autofahrers, der den Wagenheber betätigt, legt einen Weg zurück, der genau so vielfach größer ist als die Strecke, um die das Kraftfahrzeug angehoben wird, wie die Muskelkraft geringer als die Gewichtskraft des Fahrzeuges ist. Wenn wir die Scherengriffe zusammendrücken, um ein Blech zu zerschneiden, so verrichten wir Arbeit auf einem Weg, der um den gleichen Faktor länger als



Archimedes (etwa 287—212 v. u. Z.) der bedeutendste Mathematiker, Physiker und Ingenieur des Altertums. Archimedes berechnete das Volumen und die Oberfläche der Kugel und ihrer Teile, des Zylinders sowie der Körper, die durch Rotation einer Ellipse, einer Hyperbel und einer Parabel entstehen. Als erster berechnete er mit erheblicher Genauigkeit das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser und wies nach, daß es in den Grenzen $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ eingeschlossen ist. In der Mechanik stellte die Einschnittlänge ist, wie der Widerstand des Blechs die Muskelkraft übertrifft. Der mit einer Brechstange angehobene Stein erreicht im Verhältnis zur Abwärtsbewegung der Hand eine um denselben Faktor geringere Höhe, wie die Muskelkraft kleiner als die Gewichtskraft des Steins ist. Diese Regel läßt das Funktionsprinzip der Schraube verständlich werden. Stellen wir uns vor, eine Schraube mit der Gewindesteigung 1 mm wird mit Hilfe eines Schraubenschlüssels von 30 cm Länge angezogen. Während sich die Schraube bei einer Umdrehung in Richtung ihrer Achse um 1 mm weiterbewegt, legt unsere Hand zur gleichen Zeit 2 m zurück. So gewinnen wir das Zweitausendfache an Kraft und können Einzelteile zuverlässig miteinander verbinden oder große Lasten mit geringer Kraftanstrengung verschieben.

Andere einfachste Maschinen

Der längere Weg als Preis für den Kraftgewinn tritt nicht nur bei Hebelwerkzeugen, sondern auch bei anderen beliebigen Werkzeugen und Mechanismen in Erscheinung, die von Menschen benutzt werden.

Zum Heben von Lasten verwendet man häufig Flaschenzüge. So bezeichnet man Systeme aus mehreren losen Rollen, die mit einer oder einigen feststehenden Rollen verbunden sind. In Bild 5.5. hängt die Last an sechs Seilen. Es leuchtet ein, daß sich die Gewichtskraft verteilt und die Seilspannung nur ein Sechstel der Gesamtgewichtskraft beträgt. Zum Heben einer Last mit der

---

er die Hebelgesetze auf, das Gesetz des hydrostatischen Auftriebs („Archimedisches Prinzip") und die Gesetze für die Addition paralleler Kräfte. Archimedes erfand die sogenannte Archimedische Wasserschraube (die auch heutzutage zur Förderung schüttfähiger Viskosegüter verwendet wird), Systeme von Hebeln und Flaschenzügen zum Heben großer Lasten sowie Wurfmaschinen, die während der Belagerung seiner Heimatstadt Syrakus durch die Römer mit großem Erfolg eingesetzt wurden.

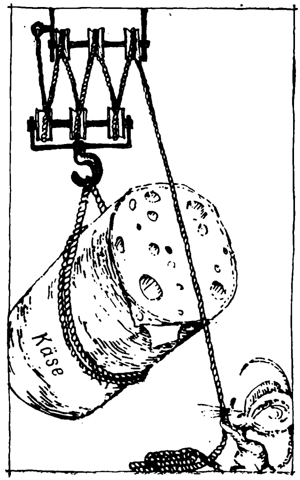


Bild 5.5.

Masse 1 t wird eine Kraft von $\frac{10\,000}{6} = 1670$ N benötigt. Doch beim Heben der Last um 1 m müssen 6 m Seil eingeholt werden. Zum Heben der Last um 1 m werden 10 000 N·m benötigt. Diese Arbeit müssen wir „in beliebiger Form“ aufbringen: Eine Kraft von $\frac{10\,000}{6}$ N muß auf einem Weg von 6 m wirksam werden, die Kraft 10 000 N auf einem Weg von 100 m und die Kraft von 10 N schließlich auf einem Weg von 1 km.

Die weiter obenerwähnte schiefe Ebene stellt gleichfalls eine Vorrichtung dar, bei der man durch Überwindung eines längeren Weges Kraft gewinnen kann.

Ein Sonderfall der Kraftvervielfachung ist der Schlag. Ein Schlag mit einem Hammer bzw. einer Axt oder der Stoß mit einem Rammbock, ja selbst der bloße Faustschlag vermag eine ungeheure Kraft zu erzeugen. Das Geheimnis des kräftigen Schlages ist ganz einfach.

Wenn wir einen Nagel mit einem Hammer in eine feste Wand schlagen wollen, müssen wir nur richtig ausholen. Die große Schwungweite, d. h. der große Weg, in dessen Verlauf die Kraft wirksam wird, erzeugt im Hammer eine beträchtliche kinetische Energie. Abgegeben wird diese Energie aber über einen kurzen Weg. Haben wir einen halben Meter Schwung geholt und den Nagel dabei um einen halben Zentimeter in die Wand getrieben, so hat sich die Kraft verhundertfacht. War die Wand aber härter und ist der Nagel, obwohl wir genausoweit ausgeholt haben, nur einen halben Millimeter tief in die Wand eingedrungen, dann war der Schlag noch 10mal stärker als im erstgenannten Fall. In eine harte Wand kann der Nagel jeweils nicht so tief eindringen, und die gleiche Arbeit wird auf einem kürzeren Weg verbraucht. Der Hammer wirkt somit in gewissem Sinn wie ein Automat. Er schlägt dort stärker zu, wo der Widerstand größer ist.

„Beschleunigt" man einen Hammer mit der Masse 1 kg, dann trifft er den Nagel mit einer Kraft von 1000 N. Wenn wir Holz mit einer schweren Axt spalten, dann zerbrechen wir es mit einer Kraft von einigen 10 000 N. Schwere Schmiedehämmer haben nur eine geringe Fallhöhe in der Größenordnung von 1 m. Wird ein Schmiedestück dabei um 1 bis 2 mm gestaucht, dann entwickelt ein Hammer mit 1000 kg Masse dabei die ungeheure Kraft von 10^7 N.

Wie man parallele Kräfte addiert, die an einem Festkörper angreifen

Solange wir auf den vorangegangenen Seiten Probleme der Mechanik gelöst haben, worin der Körper gedanklich durch einen Punkt ersetzt wurde, war die Frage nach der Addition der Kräfte einfach zu beantworten. Das Kräfteparallelogramm löste unser Problem, und wenn die Kräfte einmal parallel verliefen, dann haben wir sie als Zahlen addiert.

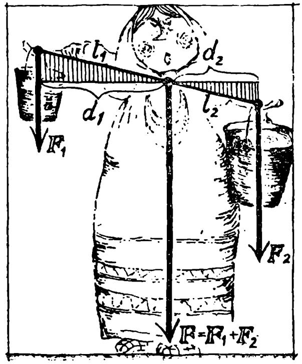


Bild 5.6.

Nun liegen die Dinge komplizierter. Die Wirkung einer Kraft auf einen Gegenstand wird ja nun nicht nur durch ihren Betrag und ihre Richtung gekennzeichnet, sondern auch durch ihren Angriffspunkt oder durch die Wirkungslinie der Kraft, was ein und dasselbe ist.

Kräfte addieren bedeutet, mehrere Kräfte durch eine einzige Kraft zu ersetzen. Das ist längst nicht immer möglich. Der Ersatz paralleler Kräfte durch eine resultierende Kraft ist eine Aufgabe, die sich stets (mit Ausnahme eines Sonderfalls, von dem am Ende dieses Abschnitts die Rede sein wird) bewältigen läßt. Betrachten wir die Addition paralleler Kräfte. Natürlich ist die Summe der Kräfte 3 N und 5 N gleich 8 N, wenn beide Kräfte in die gleiche Richtung zeigen. Das Problem besteht darin, den Angriffspunkt (die Wirkungslinie) der resultierenden Kraft zu ermitteln.

In Bild 5.6. sind zwei auf einen Körper wirkende Kräfte dargestellt. Die Gesamtkraft F ersetzt die Kräfte F_1 und F_2, doch heißt dies nicht nur, daß $F = F_1 + F_2$ ist; die Wirkung der Kraft F wird der Wirkung von F_1 und F_2 nur dann gleichwertig sein, wenn auch das Moment der Kraft F gleich der Summe der Momente von F_1

und F_2 ist. Wir suchen die Wirkungslinie der Gesamtkraft F. Natürlich verläuft sie parallel zu den Kräften F_1 und F_2; aber welche Entfernung hat diese Linie von den Kräften F_1 und F_2?

Im Bild ist als Angriffspunkt der Kraft F ein Punkt auf der Strecke dargestellt, die die Angriffspunkte der Kräfte F_1 und F_2 miteinander verbindet. In bezug auf den gewählten Punkt ist das Moment von F natürlich gleich Null. Dann allerdings muß die Summe der Momente von F_1 und F_2 in bezug auf diesen Punkt ebenfalls gleich Null sein, d. h., die Momente der Kräfte F_1 und F_2 haben bei unterschiedlichem Vorzeichen den gleichen Betrag.

Bezeichnet man die Arme der Kräfte F_1 und F_2 mit d_1 und d_2, dann folgt:

$$F_1 d_1 \text{ oder } \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke folgt, daß

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{l_2}{l_1},$$

d. h., der Angriffspunkt der Gesamtkraft teilt die Verbindungsstrecke zwischen den zu addierenden Kräften in die Teile l_1 und l_2, die den Kräften umgekehrt proportional sind.

Wir wollen den Abstand zwischen den Angriffspunkten der Kräfte F_1 und F_2 mit dem Buchstaben l bezeichnen. Offenbar ist $l = l_1 + l_2$.

Nun lösen wir folgendes System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$
$$l_1 + l_2 = l.$$

Wir erhalten:

$$l_1 = \frac{F_2 l}{F_1 + F_2} \text{ und } l_2 = \frac{F_1 l}{F_1 + F_2}.$$

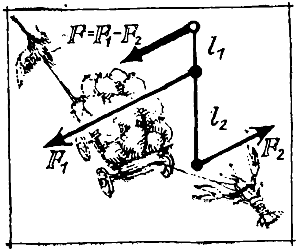


Bild 5.7.

Mit Hilfe dieser Formeln können wir den Angriffspunkt der resultierenden Kraft nicht nur dann finden, wenn die Kräfte in die gleiche Richtung zeigen, sondern auch dann, wenn sie entgegengesetzt (oder, wie man auch sagt, antiparallel) gerichtet sind. Bei entgegengesetzter Richtung haben die Kräfte auch entgegengesetzte Vorzeichen, und die resultierende Kraft ist gleich der Kraftdifferenz $F_1 - F_2$, nicht jedoch der Kraftsumme. Ist die kleinere von beiden Kräften F_2 negativ, so geht aus unseren Formeln hervor, daß l_1 negativ wird. Demnach liegt der Angriffspunkt der Kraft F_1 nicht (wie bisher) links vom Angriffspunkt der resultierenden Kraft, sondern rechts davon (Bild 5.7.), doch gilt nach wie vor

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Ein interessantes Resultat erhalten wir bei gleichen antiparallelen Kräften. Dann ist $F_1 + F_2 = 0$. Die Formeln zeigen, daß l_1 und l_2 hierbei unendlich groß werden. Was ist der physikalische Sinn dieser Feststellung? Da es keinen Sinn hat, die resultierende Kraft ins Unendliche zu verschieben, lassen sich gleiche antiparallele Kräfte demnach nicht durch eine einzige Kraft ersetzen. Eine Kräftekombination dieser Art heißt Kräftepaar.

Die Wirkung eines Kräftepaars läßt sich nicht auf die Wirkung einer Kraft zurückführen. Zwei beliebige parallele oder antiparallele Kräfte können stets durch

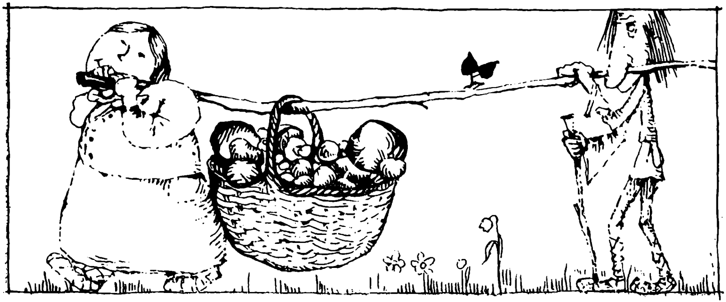


Bild 5.8.

eine Kraft ersetzt werden, nur ein Kräftepaar nicht. Natürlich wäre falsch zu sagen, daß die Kräfte in einem Kräftepaar sich gegenseitig „vernichten". Vielmehr hat das Kräftepaar eine wesentliche Wirkung: Es versetzt einen Körper in Drehung. Die Besonderheit der Wirkung eines Kräftepaars besteht darin, daß es keine fortschreitende Bewegung liefert.

Manchmal kommt es vor, daß nicht parallele Kräfte zu addieren sind, sondern eine gegebene Kraft in zwei parallele Kräfte zu zerlegen ist.

In Bild 5.8. tragen zwei Menschen an einem Stock gemeinsam einen schweren Korb. Gewichtskraft des Korbes verteilt sich auf beide. Drückt die Last auf die Mitte des Stocks, dann empfinden beide Träger die gleiche Gewichtskraft. Sind die Entfernungen zwischen dem Angriffspunkt der Last und den Händen, die die Last tragen, jedoch d_1 und d_2, dann wird die Kraft F in die Kräfte F_1 und F_2 zerlegt, und zwar im Verhältnis

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Wer stärker ist, muß den Stock also möglichst nahe an der Last anfassen.

Der Schwerpunkt

Alle Partikeln eines Körpers haben ihre Gewichtskraft. Darum steht der Körper unter dem Einfluß unzähliger Schwerkräfte. Und alle diese Kräfte verlaufen parallel. Wenn dem so ist, können sie nach den Vorschriften addiert werden, die wir eben behandelten, und durch eine einzige Kraft ersetzt werden. Der Angriffspunkt dieser Gesamtkraft heißt Schwerpunkt. In diesem Punkt ist die Gewichtskraft des Körpers gewissermaßen konzentriert.

Nun wollen wir einen Körper an einem seiner Punkte aufhängen. Welche Lage wird er dabei einnehmen? Da wir den Körper gedanklich durch eine im Schwerpunkt konzentrierte Last ersetzen können, ist klar, daß diese Last im Gleichgewicht auf einer Senkrechten liegen wird, die durch den Auflagepunkt verläuft. Mit anderen Worten: Im Gleichgewicht liegt der Schwerpunkt auf einer Senkrechten, die durch den Auflagepunkt verläuft, und befindet sich dabei in der tiefsten Lage.

Man kann den Schwerpunkt auch oberhalb des Auflagepunkts auf der Senkrechten anordnen, die durch die Achse geht. Dies gelingt nur mit großer Mühe und auch nur deshalb, weil es Reibungen gibt. Diese Gleichgewichtslage ist instabil.

Wir haben bereits über die Voraussetzung für das stabile Gleichgewicht gesprochen: Die potentielle Energie muß minimal sein. Genau das ist auch der Fall, wenn der Schwerpunkt unterhalb des Auflagepunkts liegt. Jede Auslenkung führt dazu, daß der Schwerpunkt eine höhere Lage einnimmt und demnach die potentielle Energie vergrößert. Befindet sich der Schwerpunkt dagegen oberhalb des Auflagepunkts, dann führt der leiseste Lufthauch, der den Körper aus dieser Lage bringt, zur Verringerung der potentiellen Energie. Darum ist diese Lage instabil.

Nun schneiden wir aus Pappe eine Figur aus. Um ihren Schwerpunkt zu ermitteln, hängen wir sie zweimal auf, indem wir zuerst an einer und später an einer anderen Stelle einen Faden befestigen. Danach stecken wir die Figur auf eine Achse, die durch ihren Schwerpunkt verläuft. Nun drehen wir die Figur so, daß sie die eine, eine andere und schließlich eine dritte Lage einnimmt. Dabei zeigt sich die „völlige Gleichgültigkeit" des Körpers in bezug auf unsere Handlungen. In jeder beliebigen Lage ist ein besonderer Gleichgewichtsfall gegeben. Die Ursache dafür ist klar: Bei jeder Lage der Figur befindet sich der materielle Punkt, durch den sie ersetzt werden kann, an ein und derselben Stelle.

In einigen Fällen läßt sich der Schwerpunkt auch ohne Versuche und Berechnungen ermitteln. So leuchtet beispielsweise ein, daß sich die Schwerpunkte einer Kugel, eines Kreises, eines Quadrats oder eines Rechtecks jeweils im Mittelpunkt befinden, da es sich um symmetrische Gebilde handelt. Zerlegt man einen symmetrischen Körper gedanklich in Teile, so entspricht jedem dieser Teile ein anderes symmetrisch zu diesem angeordnetes Teil jenseits des Mittelpunkts. Für jedes Paar solcher Teile ist der Mittelpunkt des Körpers zugleich der Schwerpunkt.

Beim Dreieck liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Wenn wir ein Dreieck in ganz schmale und zu einer der Dreiecksseiten parallel verlaufende Streifen teilen, dann halbiert die Seitenhalbierende jeden dieser Streifen. Der Schwerpunkt jedes Streifens wiederum liegt naturgemäß in der Mitte jedes Streifens, d. h. auf der Seitenhalbierenden. Die Schwerpunkte aller Streifen liegen also auf der Seitenhalbierenden, und wenn wir ihre Schwerkräfte addieren, gelangen wir zu dem Schluß, daß sich der Schwerpunkt eines Dreiecks irgendwo auf der Seitenhalbierenden befinden muß. Da diese Überlegung jedoch für jede Seitenhalbierende zutrifft, muß sich der Schwerpunkt in ihrem Schnittpunkt befinden.

Vielleicht sind Sie nicht ganz sicher, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Den Beweis dafür liefert die Geometrie; unsere Überlegung indessen beweist diesen interessanten Satz ebenfalls. Ein Körper kann ja nicht mehrere Schwerpunkte besitzen; wenn es aber nur einen Schwerpunkt gibt und dieser auf der Seitenhalbierenden liegt — gleichgültig, von welchem Dreieckswinkel aus wir die Seitenhalbierende gezogen haben —, so müssen sich alle drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden. So läßt sich eine physikalische Fragestellung zum Beweis eines geometrischen Satzes heranziehen.

Schwieriger ist es, den Schwerpunkt eines homogenen Kegels zu ermitteln. Aus Symmetriegründen ergibt sich nur, daß der Schwerpunkt auf der Achslinie liegt. Die Berechnung zeigt, daß seine Entfernung von der Grundfläche des Kegels einem Viertel der Höhe entspricht. Der Schwerpunkt muß sich nicht unbedingt im Inneren eines Körpers befinden. Bei einem Ring etwa liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkt des Rings, d. h. nicht im Ring selbst.

Läßt sich eine Stecknadel senkrecht und dabei stabil auf eine Glasplatte stellen?

In Bild 5.9. sehen wir, wie man verfahren muß. Zwei aus Draht gefertigte Tragarme mit vier kleinen Wägestücken daran müssen starr mit der Stecknadel verbunden werden. Da die Wägestücke unterhalb der Auflagefläche befestigt sind und die Masse der Stecknadel klein ist, liegt der Schwerpunkt unter dem Auflagepunkt. Die Lage ist stabil.

Bisher war von Körpern die Rede, die einen Auflagepunkt besitzen. Was aber ist, wenn der Körper auf einer Fläche aufliegt?

In diesem Fall besagt die Lage des Schwerpunkts oberhalb der Auflage natürlich keineswegs, daß die Gleich-

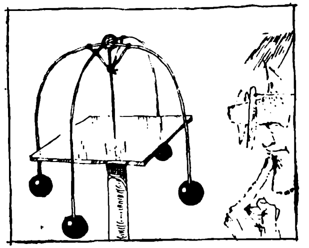


Bild 5.9.

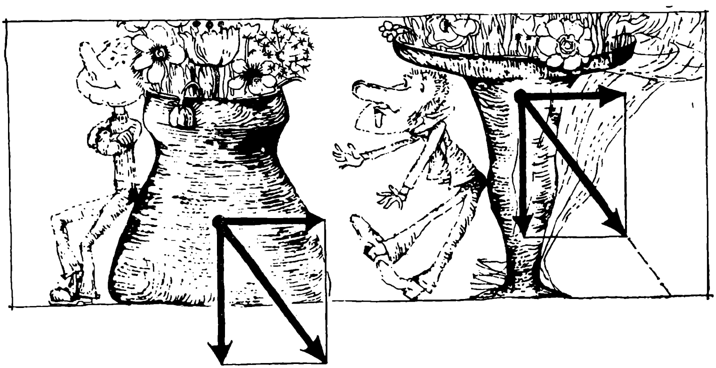


Bild 5.10.

gewichtslage instabil ist. Wie sollten sonst Gläser auf einem Tisch stehen? Damit Standfestigkeit gegeben ist, muß die aus dem Schwerpunkt gezogene Wirkungslinie der Schwerkraft innerhalb der Auflagefläche liegen. Verläuft die Wirkungslinie dagegen außerhalb der Auflagefläche, kippt der Körper um.

Das Maß der Standfestigkeit kann sehr unterschiedlich sein, je nachdem wie hoch der Schwerpunkt über der Auflage angeordnet ist. Ein gefülltes Teeglas wird nur

Bild 5.11.

ein ausgesprochener Tolpatsch umwerfen, dagegen kann eine Blumenvase mit kleiner Standfläche schon bei unvorsichtiger Berührung umkippen. Was ist die Ursache? Sehen Sie sich Bild 5.10. an. An den Schwerpunkten beider Vasen greifen gleiche waagerechte Kräfte an. Die rechts dargestellte Vase muß umkippen, weil die Gesamtkraft nicht nur durch die Standfläche der Vase verläuft, sondern seitlich davon.

Wir haben gesagt, daß die an einem Körper angreifende Kraft durch seine Stand- oder Auflagefläche verlaufen muß, wenn er standfest sein soll. Allerdings entspricht die zum Gleichgewicht erforderliche Standfläche nicht immer der tatsächlichen Standfläche. In Bild 5.11. ist ein Körper dargestellt, dessen Standfläche sichelförmig ist. Die Standfestigkeit dieses Körpers wird sich nicht ändern, wenn man die Sichel zu einem durchgehenden Halbkreis ergänzt. Somit kann die Standfläche, die die Gleichgewichtsbedingung bestimmt, größer als die tatsächliche Standfläche sein.

Um die Standfläche für den in Bild 5.12. dargestellten Dreifuß zu ermitteln, muß man seine Enden durch Geradenabschnitte miteinander verbinden.

Warum ist es so schwierig, auf einem Seil zu laufen? Weil die Standfläche äußerst klein ist. Der Applaus, den

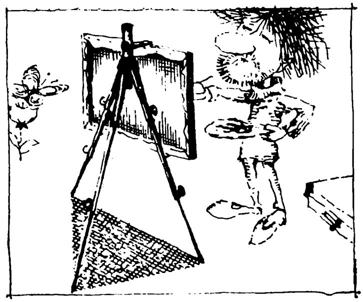


Bild 5.12.

ein kunstfertiger Seiltänzer erhält, ist wohlverdient. Manchmal fallen die Zuschauer aber auch auf listige Tricks herein, die die Aufgabe des Artisten erleichtern, dabei aber wie Spitzenleistungen aussehen. Da nimmt ein Artist beispielsweise ein stark gebogenes Tragjoch mit zwei Wassereimern, die etwa in Höhe des Seils hängen. Während das Orchester aussetzt, läuft der Artist mit todernstem Gesicht über das Seil. Der unerfahrene Zuschauer glaubt, eine besonders schwierige Darbietung gesehen zu haben. In Wirklichkeit war sie gar nicht so schwer, weil der Schwerpunkt tiefer liegt.

Der „Trägheitspunkt"

Wo befindet sich der Schwerpunkt einer Gruppe von Körpern? Das ist eine durchaus gerechtfertigte Frage, denn wenn sich auf einem Floß viele Leute befinden, dann wird seine Stabilität davon abhängen, wo sich der gemeinsame Schwerpunkt aller Personen (und der des Floßes selbst) befindet.

Der Sinn des Begriffs bleibt unverändert. Der Schwerpunkt ist der Angriffspunkt der Schwerkraftsumme sämtlicher Körper der betrachteten Gruppe.

13—01178

Für zwei Körper ist uns das Ergebnis der Berechnung bekannt. Bezeichnen wir mit x die Entfernung zweier Körper mit der Gewichtskraft F_1 und F_2, so hat der Schwerpunkt den Abstand x_1 vom ersten bzw. x_2 vom zweiten Körper, wobei

$$x_1 + x_2 = x \text{ und } \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

gilt.

Da die Gewichtskraft durch das Produkt mg dargestellt werden kann, genügt der Schwerpunkt eines Körperpaars der Bedingung

$$m_1 x_1 = m_2 x_2,$$

d. h., er liegt an dem Punkt, der den Abstand beider Massen in zwei Strecken teilt, deren Länge den Massen umgekehrt proportional ist.

Erinnern wir uns nun an das Schießen mit einem Geschütz auf Selbstfahrlafette. Die Impulse von Geschütz und Geschoß sind gleich im Betrag, aber verschieden in der Richtung. Hier gelten die Gleichungen:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \text{ oder } \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

wobei das Geschwindigkeitsverhältnis diesen Wert während der gesamten Wechselwirkungszeit aufrechterhält. Im Verlauf der Bewegung, die durch den Rückstoß entstand, bewegen sich Geschütz und Geschoß relativ zu ihrer Ausgangslage um die Strecken x_1 und x_2 in verschiedene Richtungen fort. Die Entfernungen x_1 und x_2, d. h. die von beiden Körpern zurückgelegten Wege, wachsen, doch bei konstantem Geschwindigkeitsverhältnis verbleiben auch x_1 und x_2 die ganze Zeit über im gleichen Verhältnis zueinander:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1}{m_2} \text{ oder } \frac{x_1}{m_2} = \frac{x_2}{m_1}.$$

Hierin sind x_1 und x_2 die Entfernungen von Geschütz und Geschoß bezüglich ihrer Ausgangslage. Vergleichen wir diese Formel mit der Formel zur Bestimmung der Schwerpunktslage, so erkennen wir ihre vollständige Identität. Daraus folgt unmittelbar, daß der Schwerpunkt von Geschütz und Geschoß während der ganzen Zeit nach erfolgtem Abschuß in der ursprünglichen Lage verbleibt.

So sind wir zu einem sehr interessanten Schluß gelangt. Der Schwerpunkt von Geschütz und Geschoß verharrt nach dem Abschuß in Ruhe.

Dieses Ergebnis trifft stets zu: Befand sich der Schwerpunkt zweier Körper ursprünglich in Ruhe, so vermag ihre Wechselwirkung, welcher Art sie auch immer wäre, die Schwerpunktslage nicht zu verändern. Genau darum kann man sich weder selbst an den Haaren aus dem Sumpf ziehen oder den Mond nach Art des französischen Schriftstellers Cyrano de Bergerac erreichen, der zu diesem Zweck empfahl, ein Stück Eisen in die Hand zu nehmen und dann einen Magneten hochzuwerfen, der das Eisen anziehen sollte.

Ein ruhender Schwerpunkt führt, vom Standpunkt eines anderen Inertialsystems aus betrachtet, eine gleichförmige Bewegung aus. Also kann ein Schwerpunkt entweder ruhen oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegen.

Was wir über den Schwerpunkt zweier Körper gesagt haben, trifft auch für ein System aus vielen Körpern zu. Natürlich für ein isoliertes System von Körpern; diese Einschränkung müssen wir immer machen, wenn der Impulserhaltungssatz Anwendung findet.

Jedes System miteinander in Wechselwirkung stehender Körper besitzt demnach einen Punkt, der entweder ruht oder sich gleichförmig fortbewegt, und dieser Punkt ist sein Schwerpunkt.

Um die neue Eigenschaft dieses Punkts zu unterstreichen, bezeichnet man ihn auch als „Trägheitspunkt“.

Denn etwa von einer Schwere des Sonnensystems (und also auch von seinem Schwerpunkt) kann nur im übertragenen Sinn gesprochen werden.

Welche Bewegung die Körper eines geschlossenen Systems auch immer ausführen — ihr Schwerpunkt („Trägheitspunkt“) wird ruhen oder sich — in einem anderen Bezugssystem — der Trägheit folgend fortbewegen.

Das Drehmoment

Wir wollen jetzt einen weiteren mechanischen Begriff kennenlernen, der uns die Formulierung eines neuen, wichtigen Bewegungsgesetzes erlaubt.

Der Begriff heißt Drehimpuls oder Impulsmoment. Die letztgenannte Bezeichnung deutet bereits darauf hin, daß hier von einer Größe die Rede ist, die dem Kraftmoment auf die eine oder andere Weise ähnlich sein dürfte.

Ebenso wie das Kraftmoment macht auch der Drehimpuls die Angabe eines Punkts erforderlich, relativ zu dem er bestimmt wird. Um den Drehimpuls relativ zu einem willkürlichen, aber festen Bezugspunkt zu bestimmen, müssen wir den Impulsvektor zeichnen und aus dem Bezugspunkt ein Lot auf die Richtung des Vektors fällen. Das Produkt aus dem Impuls mv und dem Arm d ergibt den gesuchten Drehimpuls, den wir mit dem Buchstaben L bezeichnen wollen:

$$L = mvd.$$

Bei ungehinderter Bewegung des Körpers ändert sich seine Geschwindigkeit nicht; unverändert bleibt auch der Arm relativ zu einem willkürlichen Bezugspunkt, da die Bewegung auf einer Geraden verläuft. Also bleibt auch der Drehimpuls bei dieser Bewegungsart konstant.

Ebenso wie für das Kraftmoment kann man auch für den Drehimpuls eine andere Formel aufschreiben. Ver-

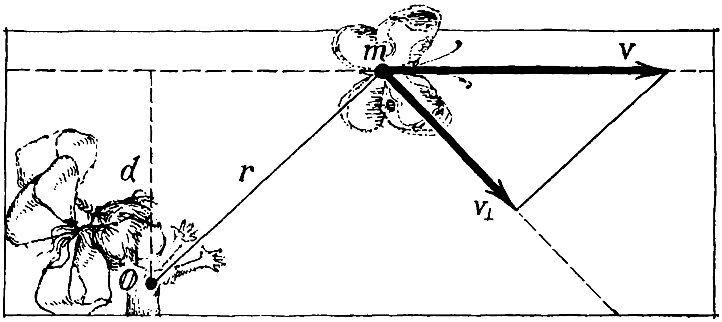


Bild 5.13.

binden wir den Ort des Körpers durch einen Radius mit unserem Bezugspunkt (Bild 5.13.). Wir zeichnen auch die Projektion der Geschwindigkeit auf die Richtung senkrecht zum Radius. Aus den ähnlichen Dreiecken, die in der Zeichnung entwickelt worden sind, folgt: $\frac{v}{v_\perp} = \frac{r}{d}$. Demnach ist $vd = v_\perp r$, und die Formel für den Drehimpuls kann auch in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$L = mv_\perp r.$$

Wie wir eben gesagt haben, bleibt der Drehimpuls bei ungehinderter Bewegung konstant. Was ist aber, wenn eine Kraft am Körper angreift? Aus der Rechnung folgt, daß die Änderung des Drehimpulses je Sekunde gleich dem Kraftmoment ist.

Das so erhaltene Gesetz kann ohne Schwierigkeiten auch auf ein System von Körpern ausgedehnt werden. Addiert man die Änderungen der Drehimpulse aller Körper im System je Zeiteinheit, so ist ihre Summe gleich der Summe der Kraftmomente, die an den Körpern angreifen. Für ein System von Körpern gilt demnach der

Satz: Die Änderung des Gesamtdrehimpulses je Zeiteinheit ist gleich der Summe der Momente aller Kräfte.

Der Drehimpulserhaltungssatz

Bindet man zwei Steine mit einem Strick zusammen und wirft den einen davon mit großer Kraft weg, dann fliegt der zweite Stein dem ersten am straff gespannten Strick hinterher. Dabei wird der eine Stein den anderen überholen, und die Vorwärtsbewegung wird von einer Drehbewegung begleitet. Das Schwerefeld wollen wir außer acht lassen; der Wurf soll im interstellaren Raum erfolgt sein.

Die auf die Steine wirkenden Kräfte sind einander gleich und längs des Stricks aufeinandergerichtet (es handelt sich ja um Kraft und Gegenkraft). Dann allerdings müssen auch die Arme beider Kräfte relativ zu einem willkürlichen Punkt gleich sein. Gleiche Arme und gleiche, nur in ihrer Richtung entgegengesetzte Kräfte liefern gleiche Kraftmomente. Diese unterscheiden sich allerdings in ihrem Vorzeichen.

Das Gesamtkraftmoment ist gleich Null. Hieraus folgt, daß auch die Änderung des Drehimpulses gleich Null ist, d. h., daß der Drehimpuls eines derartigen Systems konstant bleibt.

Der Strick, der beide Steine miteinander verbindet, war nur zur Veranschaulichung nötig. Der Drehimpulserhaltungssatz gilt für jedes Paar miteinander in Wechselwirkung stehender Körper, welcher Art diese Wechselwirkung auch immer sei.

Der Satz ist aber nicht allein auf Körperpaare beschränkt. Untersucht man ein geschlossenes System von Körpern, dann lassen sich die zwischen den Körpern wirkenden Kräfte stets in die gleiche Anzahl von Kräften und Gegenkräften zerlegen, deren Momente sich paarweise „vernichten".

Der Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls ist universell und gilt für jedes beliebige geschlossene System von Körpern.

Rotiert ein Körper um eine Achse, so ist der Drehimpuls gleich

$$L = mvr,$$

worin m die Masse des Körpers, v die Geschwindigkeit und r den Abstand des Körpers von der Achse darstellt. Bei Angabe der Geschwindigkeit durch die Anzahl von Umdrehungen je Sekunde n erhalten wir:

$$v = 2\pi nr \text{ und } L = 2\pi mnr^2,$$

d. h., der Drehimpuls des Körpers ist dem Quadrat seiner Entfernung von der Achse proportional.

Setzen Sie sich einmal auf einen Drehschemel, nehmen Sie in jede Hand ein schweres Wägestück, breiten Sie die Arme aus und bitten Sie jemanden, Sie in langsame Drehung zu versetzen. Pressen Sie nun die Arme mit einer raschen Bewegung an die Brust: Ihre Drehgeschwindigkeit wird unerwartet zunehmen. Arme wieder ausstrecken, und die Bewegung wird langsamer, Arme an die Brust, und die Bewegung wird schneller. Bis der Drehschemel infolge der Reibung zur Ruhe kommt, können Sie Ihre Drehgeschwindigkeit mehrmals ändern.

Worin liegt die Ursache?

Bei konstanter Drehzahl würde der Drehimpuls abnehmen, wenn sich die Wägestücke der Achse nähern. Um diese Verminderung „auszugleichen", vergrößert sich die Drehgeschwindigkeit.

Akrobaten machen sich den Drehimpulserhaltungssatz mit Erfolg zunutze. Wie führt ein Akrobat einen „Salto", also eine Umdrehung in der Luft, aus? Zunächst einmal muß er sich von einer federnden Unterlage oder von den Händen des Partners abstoßen. Bei dem Stoß ist der Körper vorwärts geneigt, und die Gewichtskraft gemeinsam mit der Stoßkraft erzeugen ein kurzzeitiges Kraftmoment. Die Stoßkraft bewirkt die Vorwärtsbewegung, und das Kraftmoment bedingt die Drehung. Freilich verläuft diese Drehung langsam und übt nicht den gewünschten Eindruck auf den Zuschauer aus. Nun zieht der Akrobat die Knie an. Indem er den Körper näher an die Drehachse heranbringt, erhöht der Akrobat seine Drehgeschwindigkeit beträchtlich und dreht sich rasch um seine Achse. Das ist die Mechanik des „Saltos".

Auf dem gleichen Prinzip beruhen die Bewegungen einer Ballerina bei der Pirouette. Den Anfangsdrehimpuls erhält sie gewöhnlich von ihrem Partner. Der Körper der Tänzerin ist in diesem Augenblick geneigt; nun beginnt eine langsame Drehung, dann folgt eine rasche elegante Bewegung, und die Ballerina richtet sich auf. Nun liegen alle Körperpunkte näher an der Drehachse, und die Erhaltung des Drehimpulses bewirkt eine sprunghafte Steigerung der Geschwindigkeit.

Der Drehimpuls als Vektor

Bisher war nur vom Betrag des Drehimpulses die Rede. Doch der Drehimpuls ist ein Vektor.

Betrachten wir die Drehung eines Punkts relativ zu einem willkürlichen „Zentrum". In Bild 5.14. sind zwei nahe beieinandergelegene Punkte dargestellt. Die uns interessierende Bewegung ist durch den Drehimpuls und die Ebene gekennzeichnet, in der sie stattfindet. Die im Bild schraffierte Bewegungsebene ist die vom Radius, der das „Zentrum" mit dem bewegten Punkt verbindet, überstrichene Fläche.

Die Angaben über die Richtung der Bewegungsebene und den Drehimpuls lassen sich zusammenfassen. Dazu dient der Drehimpulsvektor, dessen Richtung der Norma-

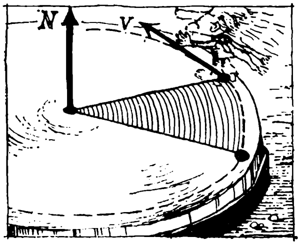


Bild 5.14.

len an der Bewegungsebene entspricht und der im Betrag gleich dem Absolutwert des Drehimpulses ist. Doch damit nicht genug: Wir müssen die Bewegungsrichtung in der Ebene berücksichtigen; der Körper kann sich ja sowohl im Uhrzeigersinn als auch im Gegenuhrzeigersinn um das Zentrum bewegen.

Üblicherweise zeichnet man den Drehimpulsvektor so, daß man den Umlauf des Punkts im Gegenuhrzeigersinn sieht, wenn die Blickrichtung dem Vektor entgegengerichtet ist. Das kann auch anders gesagt werden: Die Richtung des Impulsmomentvektors ist mit der Umlaufrichtung so verknüpft wie die Richtung eines Korkenziehers (beim Hineindrehen in den Korken) mit der Richtung der Hand, die ihn in Bewegung versetzt.

Kennen wir also den Drehimpulsvektor, dann kennen wir auch den Betrag des Drehimpulses, die Lage der Bewegungsebene im Raum und die Umlaufrichtung relativ zum „Zentrum".

Erfolgt die Bewegung in ein und derselben Ebene, jedoch unter Änderung des Arms und der Geschwindigkeit, dann behält der Drehimpulsvektor seine Richtung im Raum, ändert jedoch seine Länge. Bei willkürlicher Bewegung hingegen ändern sich sowohl Betrag als auch Richtung des Impulsvektors.

Es könnte den Anschein haben, als diene die Vereinigung der Richtung der Bewegungsebene und des Drehimpulsbetrags in einem Begriff nur zur Einsparung von Worten. In Wirklichkeit jedoch können wir den Drehimpulserhaltungssatz für ein System von Körpern, die sich nicht in einer Ebene bewegen, nur dann formulieren, wenn wir die Drehimpulse als Vektoren addieren.

Dies zeigt auch, daß die Auffassung vom Drehimpuls als Vektor einen tiefen Sinn hat.

Der Drehimpuls wird stets relativ zu einem willkürlichen, aber festen „Zentrum" bestimmt. Natürlich hängt sein Betrag ganz allgemein von der Auswahl des Bezugspunkts ab. Man kann allerdings zeigen, daß der Drehimpulsvektor unabhängig von der Wahl des „Zentrums" ist, wenn das betrachtete System von Körpern als Ganzes ruht (wenn sein Gesamtimpuls gleich Null ist). Diesen Drehimpuls kann man als Eigendrehimpuls eines Systems von Körpern bezeichnen.

Der Erhaltungssatz für den Drehimpulsvektor ist der dritte und letzte Erhaltungssatz in der Mechanik. Es ist allerdings nicht ganz exakt, wenn wir von drei Erhaltungssätzen sprechen. Der Impuls und der Drehimpuls sind ja vektorielle Größen, und der Erhaltungssatz für eine vektorielle Größe bedeutet, daß nicht nur der Zahlenwert dieser Größe, sondern auch ihre Richtung unverändert bleiben. Anders ausgedrückt: Die drei Komponenten des Vektors in den drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen im Raum bleiben unverändert. Die Energie ist eine skalare Größe, der Impuls ist vektoriell und der Drehimpuls ebenfalls. Es wäre daher genauer, wenn man sagt, daß es in der Mechanik sieben Erhaltungssätze gibt.

Kreisel

Versuchen Sie einmal, einen Teller auf einen dünnen Stab zu stellen und im Gleichgewicht zu halten. Es ist unmöglich. Andererseits ist gerade dies eine beliebte

Nummer chinesischer Jongleure. Sie bringen dies sogar mit mehreren Stäben gleichzeitig fertig. Dabei versuchen die Jongleure nicht einmal, ihre Stäbe senkrecht zu halten. Es sieht wie ein Wunder aus, daß die Teller, nur leicht auf die Enden waagerecht geneigter Stäbe gestützt, nicht herunterfallen, sondern fast in der Luft zu schweben scheinen.

Wenn Sie wieder mal einen Jongleur bei seiner Arbeit beobachten können, dann achten Sie bitte auf einen wichtigen Umstand: Der Jongleur versetzt die Teller in Drehbewegung, so daß sie rasch in ihrer Ebene rotieren.

Ob der Artist nun mit Keulen, Ringen oder Hüten jongliert, stets läßt er sie dabei rotieren. Nur dann nämlich kehren die Gegenstände in der gleichen Lage in seine Hände zurück, die sie anfangs hatten.

Warum ist die Rotation so beständig? Das hängt mit dem Drehimpulserhaltungssatz zusammen. Bei Richtungsänderung der Drehachse ändert sich auch die Richtung des Drehmomentvektors. So, wie zur Änderung der Bewegungsrichtung eine Kraft erforderlich ist, wird zur Änderung der Rotationsrichtung ein Kraftmoment benötigt, das um so größer ist, je schneller der Körper rotiert. Das Bestreben rasch rotierender Körper, ihre Drehachse unverändert beizubehalten, ist auch in vielen ähnlichen Fällen zu erkennen. Ein rotierender Kreisel beispielsweise kippt auch dann nicht um, wenn seine Achse geneigt ist.

Wenn Sie versuchen, einen rotierenden Kreisel mit der Hand umzustoßen, so werden Sie feststellen, daß das gar nicht so leicht ist.

Die Stabilität eines rotierenden Körpers macht man sich bei der Artillerie zunutze. Sie haben sicher schon gehört, daß man im Lauf von Geschützen schraubenartig gewundene Längsrinnen, die sogenannten Züge, anbringt. Dadurch wird das Geschoß während seiner Bewegung durch den Lauf mit einem Drehimpuls um seine Längs-

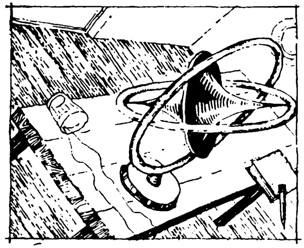


Bild 5.15.

achse (dem sogenannten Drall) versehen und behält in der Luft seine Lage bei, ohne sich zu überschlagen. Ein Geschütz mit „gezogenem" Lauf hat daher eine sehr viel größere Zielgenauigkeit und Schußweite als ein Geschütz, dessen Lauf keine „Züge" enthält.

Der Navigator — gleichgültig, ob in der Luft oder auf See — muß stets wissen, wo sich die wahre Erdvertikale im Verhältnis zur Lage des Flugzeugs oder Schiffs im Augenblick befindet. Ein Lot kann man dafür nicht benutzen, weil es bei beschleunigter Bewegung ausgelenkt wird. Darum verwendet man einen rasch rotierenden Kreisel besonderer Konstruktion, den sogenannten künstlichen Horizont. Ist die Rotationsachse dieses Kreisels erst einmal auf die Erdvertikale eingestellt, dann bleibt sie in dieser Lage, unabhängig davon, wie das Flugzeug seine Lage im Raum verändert.

Aber worauf steht der Kreisel? Wenn er sich auf einer Unterlage befände, die die Bewegungen des Flugzeugs mitmacht, wie sollte dann die Rotationsachse ihre Richtung beibehalten können?

Als Unterlage dient eine sogenannte kardanische Aufhängung (Bild 5.15.). Hier kann sich der Kreisel bei minimaler Lagerreibung so verhalten, als wäre er in Luft aufgehängt.

Mittels rotierender Kreisel kann der Kurs eines Torpedos oder eines Flugzeugs automatisch gesteuert werden. Dies geschieht mittels Mechanismen, die Abweichungen der Längsachse des Torpedos von der Richtung der Kreiselachse „verfolgen“.

Auf der Verwendung eines rotierenden Kreisels beruht auch die Konstruktion eines so wichtigen Geräts wie des Kreiselkompasses. Es läßt sich nachweisen, daß sich die Kreiselachse unter dem Einfluß der Corioliskraft und der Reibungskräfte zu guter Letzt parallel zur Erdachse einstellt und daher nach Norden zeigt.

Der Kreiselkompaß wird in der Seeschiffahrt fast ausschließlich verwendet. Sein Hauptbestandteil ist ein Motor mit einem schweren Schwungrad, das bis 25 000 Umdrehungen in der Minute ausführt.

Ungeachtet einer ganzen Reihe von Schwierigkeiten bei der Ausschaltung verschiedener Störquellen, die insbesondere durch das Schlingern und Stampfen des Schiffs verursacht werden, ist der Kreiselkompaß vorteilhafter als der magnetische Kompaß. Ein magnetischer Kompaß hat den Nachteil, daß seine Anzeige durch all eiserne Gegenstände und elektrische Anlagen an Bord des Schiffs verfälscht wird.

Die biegsame Welle

Wellen von Dampfturbinen, wie wir sie heute kennen, sind wichtige Bauteile dieser eindrucksvollen Maschinen. Da ihre Länge 10 m und ihr Durchmesser 0,5 m erreichen kann, ist ihre Fertigung ein kompliziertes technologisches Problem. Die Welle einer Hochleistungsturbine kann mit etwa 200 t belastet sein und dabei 3000 Umdrehungen in der Minute ausführen.

Zunächst könnte man denken, diese Welle müßte extrem hart und fest sein. So ist es aber nicht. Bei einigen zehntausend Umdrehungen in der Minute muß eine starr befestigte nichtbiegsame Welle unvermeidlich brechen, wie fest sie auch sein mag.

Nun ist klar, warum starre Wellen ungeeignet sind. Die Maschinenbauer können so genau arbeiten, wie sie wollen — eine, wenn auch nur geringfügige, Asymmetrie des Laufrades der Turbine bleibt unvermeidlich. Während der Rotation des Laufrades entstehen ungeheure Zentrifugalkräfte; ihre Werte sind bekanntlich dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit proportional. Werden sie nicht ganz exakt ausgeglichen, dann beginnt die Welle in den Lagern zu „schlagen“ (denn die nichtausgeglichenen Zentrifugalkräfte „rotieren“ ja mit), läßt die Lager zu Bruch gehen und macht schließlich „Kleinholz“ aus der Turbine.

Dies alles war seinerzeit ein unüberwindliches Hindernis auf dem Weg zur Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit von Turbinen. Der Ausweg wurde um die Jahrhundertwende gefunden. Im Turbinenbau fanden biegsame Wellen Eingang.

Um zu begreifen, worin der Grundgedanke dieser bemerkenswerten Erfindung bestand, müssen wir die Gesamtwirkung der Zentrifugalkräfte berechnen. Wie können diese Kräfte addiert werden? Wie sich zeigt, greift die Resultierende aller Zentrifugalkräfte am Schwerpunkt der Welle an, und ihr Betrag ist dabei ebensogroß, als wäre die Gesamtmasse des Turbinenlaufrades im Schwerpunkt konzentriert.

Wir wollen den Abstand des Laufradschwerpunkts von der Achse mit a bezeichnen; wegen der geringfügigen Asymmetrie des Laufrades ist a von Null verschieden. Bei Rotation greifen Zentrifugalkräfte an der Welle an, und die Welle verbiegt sich. Wir bezeichnen die Lageänderung der Welle mit l und berechnen sie. Die Formel für die Zentrifugalkraft ist uns bekannt (s. Abschnitt „Zentrifugalkräfte“); diese Kraft ist dem Abstand zwischen Schwerpunkt und Achse (der jetzt $a + l$ beträgt) proportional und gleich $4\pi^2 n^2 M\ (a + l)$; darin ist n die Anzahl von Umdrehungen je Minute und M die Masse der rotierenden Teile. Die Zentrifugalkraft wird durch die Elastizitätskraft ausgeglichen; diese wiederum ist der Lageänderung der Welle proportional und beträgt kl, worin der Faktor k die Steifigkeit der Welle kennzeichnet. Also gilt:

$$kl = 4\pi^2 n^2 M\,(a + l)$$

oder

$$l = \frac{a}{\dfrac{k}{4\pi^2 n^2 M} - 1}.$$

Dieser Formel zufolge braucht eine biegsame Welle keine großen Drehzahlen zu fürchten. Auch bei sehr großen Werten von n wächst die Durchbiegung der Welle l nicht unbegrenzt. Der Wert von $\frac{k}{4\pi^2 n^2 M}$ in der zuletzt aufgeschriebenen Formel geht gegen Null, und die Durchbiegung der Welle l wird gleich dem Wert für die Asymmetrie, nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

Dieses Ergebnis bedeutet, daß ein asymmetrisches Laufrad bei hohen Drehzahlen die Welle nicht zerreißt, sondern sie so verbiegt, daß der Einfluß der Asymmetrie aufgehoben wird. Die biegsame Welle bewirkt eine Zentrierung der rotierenden Teile, verlagert den Schwerpunkt durch ihre Verbiegung auf die Rotationsachse und läßt die Wirkung der Zentrifugalkraft dadurch gegen Null gehen.

Die Biegsamkeit der Welle ist kein Nachteil, sie stellt vielmehr die notwendige Stabilitätsbedingung dar. Denn die Welle muß sich, um Stabilität zu erreichen, um den Betrag a durchbiegen, ohne dabei zu brechen.

Bei einiger Aufmerksamkeit kann man hier einen Fehler finden. Wenn man die bei großen Drehzahlen „zentrierende" Welle aus der von uns gefundenen Gleichgewichtslage bringt und nur die Zentrifugalkraft sowie die Elastizitätskraft betrachtet, erkennt man, daß dieses Gleichgewicht labil ist. Man fand allerdings, daß die Corioliskräfte als „rettende Engel“ das Gleichgewicht doch durchaus stabil werden lassen.

Die Turbine beginnt langsam zu rotieren. Solange n sehr klein ist, wird der Bruch $\frac{k}{4\pi^2 n^2 M}$ einen großen Wert haben. Solange dieser Bruch bei Erhöhung der Drehzahl größer als Eins bleibt, wird die Durchbiegung der Welle das gleiche Vorzeichen haben wie die ursprüngliche Verschiebung des Laufradschwerpunkts. In dieser Anfangsphase der Bewegung bewirkt die biegsame Welle keine Zentrierung des Laufrades, sondern vergrößert durch ihre eigene Durchbiegung die Gesamtverschiebung des Schwerpunkts und damit auch die Zentrifugalkraft. Mit zunehmender Drehzahl n $\left(\text{aber nach wie vor bei } \frac{k}{4\pi^2 n^2 M} > 1\right)$ wächst die Verschiebung, und schließlich wird ein kritischer Moment erreicht. Bei $\frac{k}{4\pi^2 n^2 M} = 1$ geht der Nenner in der Formel für die Verschiebung *1* gegen Null, die Durchbiegung der Welle ist also formal unendlich groß. Bei dieser Rotationsgeschwindigkeit bricht die Welle. Dieser Moment muß beim Anfahren der Turbine sehr schnell passiert werden; man muß die kritische Drehzahl überspringen und eine erheblich höhere Laufgeschwindigkeit der Turbine erreichen, bei der die oben beschriebene Selbstzentrierung beginnt.

Doch was ist das für ein kritisches Moment? Seine Bedingung kann in folgender Form dargelegt werden:

$$\frac{4\pi^2 M}{k} = \frac{1}{n^2}.$$

Substituieren wir hier die Drehzahl mit Hilfe der Beziehung $n = \frac{1}{T}$ durch die Umlaufperiode und ziehen daraus die Wurzel, dann erhalten wir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Kommt uns die Formel nicht recht bekannt vor? Ein Blick auf Seite 158 zeigt, daß im rechten Teil der Gleichung die Periode der Eigenschwingung des Laufrades auf der Welle auftritt. Die Periode $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ ist die Periode, mit der ein Turbinenrad der Masse M auf einer Welle der Steifigkeit k schwingen würde, wenn wir das Laufrad seitlich auslenken, damit es von selbst in Schwingung gerät.

Der kritische Augenblick ist also dann gegeben, wenn die Rotationsperiode des Turbinenlaufrades mit der Periode der Eigenschwingungen des Systems aus Laufrad und Welle zusammenfällt. Die Resonanz ist schuld daran, daß es eine kritische Drehzahl gibt.

14—01178

6. Gravitation

Worauf ruht die Erde?

Ehemals war die Antwort auf diese Frage einfach: auf drei Säulen. Unklar blieb freilich, worauf die Säulen ruhten. Doch unsere Vorväter kümmerte das nicht.

Die richtigen Vorstellungen vom Charakter der Erdbewegung, der Erdform und von vielen Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegung um die Sonne entstanden lange, ehe eine Antwort auf die Frage nach den Ursachen der Planetenbewegung gegeben wurde.

Aber worauf „ruhen" nun die Erde und die Planeten? Warum bewegen sie sich auf bestimmten Bahnen um die Sonne und fliegen nicht davon?

Lange Zeit wußte man keine Antwort auf derartige Fragen, und die Kirche machte sich diese Unwissenheit in ihrem Kampf gegen das Kopernikanische Weltsystem zunutze, indem sie die Erdbewegung überhaupt leugnete.

Die Entdeckung der Wahrheit verdanken wir dem großen englischen Gelehrten Isaac Newton (1643—1727).

Einer Legende zufolge soll Newton im Garten unter einem Apfelbaum gesessen und nachdenklich zugesehen haben, wie der Wind die Äpfel vom Baum auf die Erde fallen läßt. Da kam ihm der Gedanke, daß es zwischen allen Körpern des Weltalls Gravitationskräfte geben müsse.

Im Ergebnis dieser Newtonschen Entdeckung stellte sich heraus, daß eine Vielzahl anscheinend grundverschiedener Erscheinungen — das Zur-Erde-Fallen nicht unterstützter Körper, die sichtbaren Bewegungen von

Mond und Sonne, die Gezeiten usw.— Erscheinungsformen ein und desselben Naturgesetzes sind: des Gravitationsgesetzes.

Zwischen allen Körpern des Weltalls, so sagt dieses Gesetz, seien es nun Sandkörner, Erbsen, Steine oder Planeten, wirken gegenseitige Anziehungskräfte.

Auf den ersten Blick erscheint dieses Gesetz unzutreffend: Daß sich die Gegenstände in unserer Umgebung anziehen sollen, haben wir doch bisher nicht bemerkt. Daß die Erde alle Körper anzieht, ist unumstritten. Aber vielleicht ist die Anziehung nur eine besondere Eigenschaft der Erde? Nein, aber zwischen den Gegenständen ist sie so gering, daß sie unbemerkt bleibt. Natürlich ist sie aber durch Versuche nachweisbar. Doch davon später.

Die Gravitation, und nur sie allein, erklärt die Stabilität des Sonnensystems ebenso wie die Bewegung der Planeten und der anderen Himmelskörper.

Der Mond wird durch die Erdanziehungskraft auf seiner Bahn gehalten, die Erde wiederum durch die Anziehungskraft der Sonne.

Die kreisförmige Bewegung von Himmelskörpern verläuft ebenso wie die kreisförmige Bewegung eines Steins, den man an einem Strick im Kreis schleudert. Die Gravitationskräfte sind unsichtbare „Seile“, die die Himmelskörper zur Bewegung auf bestimmten Bahnen veranlassen.

Die Feststellung von der Existenz der Gravitationskräfte bedeutete noch nicht allzuviel. Newton aber fand das Gravitationsgesetz und wies nach, wovon die Gravitationskräfte abhängen.

Das Gravitationsgesetz

Die erste Frage, die sich Newton stellte, war: Wodurch unterscheidet sich die Beschleunigung des Mondes von der Beschleunigung eines Apfels? Mit anderen Worten:

Welcher Unterschied ist zwischen der Beschleunigung g, die der Erdball an seiner Oberfläche erzeugt, d. h. in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt, und der Beschleunigung, die die Erde in der Entfernung R, d. h. in der Entfernung des Mondes von der Erde, erzeugt?

Um diese Beschleunigung $\frac{v^2}{R}$ zu berechnen, muß man die Geschwindigkeit des Mondes und seine Entfernung von der Erde kennen. Diese beiden Zahlen waren Newton bekannt. Die Beschleunigung des Mondes ergab sich zu etwa 0,27 cm/s². Das ist ungefähr $\frac{1}{3600}$ des Wertes $g = 980$ cm/s².

Also nimmt die von der Erde verursachte Beschleunigung mit zunehmender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab. Doch so rasch? Die Entfernung zwischen Erde und Mond entspricht 60 Erdradien. 3600 ist aber das Quadrat von 60. Durch Vergrößerung der Entfernung auf das Sechzigfache haben wir die Beschleunigung auf $\frac{1}{60^2}$ verringert.

Newton gelangte zu dem Schluß, daß sich die Beschleunigung und damit auch die Schwerkraft umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ändern. Weiterhin ist die Kraft, die im Schwerefeld auf einen Körper wirkt, wie wir bereits wissen, der Masse des Körpers proportional. Darum zieht der erste Körper den zweiten mit einer Kraft an, die der Masse des zweiten Körpers proportional ist; der zweite Körper dagegen zieht den ersten mit einer Kraft an, die der Masse des ersten Körpers proportional ist.

Hier ist von identisch gleichen Kräften die Rede: von Kraft und Gegenkraft. Demnach muß die wechselseitige Anziehungskraft sowohl der Masse des ersten als auch des zweiten Körpers proportional sein, oder mit anderen Worten, dem Masseprodukt.

Wir erhalten:

$$E = \gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Dies ist das Gravitationsgesetz. Newton nahm an, daß es für jedes beliebige Körperpaar zutrifft.

Inzwischen ist diese kühne Hypothese vollständig bewiesen worden. Die Anziehungskraft zweier Körper ist dem Produkt ihrer Massen direkt und dem Quadrat des Abstandes zwischen den Körpern indirekt proportional.

Was aber bedeutet das γ in der Formel? Es ist ein Proportionalitätskoeffizient. Können wir ihn nicht gleich Eins setzen, wie wir es bereits wiederholt getan haben? Nein, das ist nicht möglich. Der Wert von γ ist gleich der Anziehungskraft in N, mit der eine Masse von 1 kg eine zweite Masse von 1 kg anzieht, die sich in einem Abstand von 1 m befindet. Die Kraft aber können wir nicht einfach gleich einem bestimmten Wert, etwa einem N, setzen: Der Koeffizient γ muß gemessen werden.

Um γ zu ermitteln, brauchen wir natürlich nicht unbedingt die Anziehungskraft zwischen zwei Wägestücken von je einem Gramm zu messen. Wir wollen unsere Messung vielmehr an massereichen Körpern ausführen, weil die Kraft dann größer ist.

Ermittelt man die Masse zweier Körper, kennt ihren Abstand voneinander und mißt die Anziehungskraft, dann erhält man γ durch eine einfache Berechnung.

Entsprechende Versuche wurden vielfach angestellt. Sie zeigten, daß der Wert von γ stets gleich ist, unabhängig davon, woraus die einander anziehenden Körper bestehen, und unabhängig auch von den Eigenschaften des Mediums, worin sie sich befinden. Der Faktor γ heißt Gravitationskonstante. Sie beträgt $\gamma = 6{,}670 \times \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}. Die Prinzipdarstellung eines der Versuche zur Messung von γ zeigt Bild 6.1. An den Enden eines Waagebalkens sind zwei Kugeln gleicher Masse

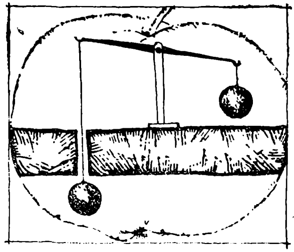


Bild 6.1.

aufgehängt. Eine der beiden Kugeln befindet sich oberhalb einer Bleiplatte, die andere darunter. Das Blei (für den Versuch wurden 100 t Blei verwendet) vergrößert durch seine Anziehung die Gewichtskraft der rechten und vermindert die Gewichtskraft der linken Kugel. Der Waagebalken neigt sich nach rechts. Aus der Neigung des Waagebalkens wird der Wert von γ berechnet.

Die Schwierigkeiten beim Nachweis der Gravitationskraft zwischen zwei Gegenständen erklären sich aus der Geringfügigkeit von γ.

Zwei schwere Gegenstände mit einer Masse von je 1000 kg und im Abstand 1 m ziehen sich gegenseitig mit der verschwindend geringen Kraft von nur $6{,}67 \cdot 10^{-5}$ N an.

Doch wie ungeheuer groß sind die Anziehungskräfte zwischen den Himmelskörpern! Zwischen Mond und Erde beträgt die Anziehungskraft

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-8} \, \frac{6 \cdot 10^{27} \cdot 0{,}74 \cdot 10^{26}}{(38 \cdot 10^{9})^2} = 2 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N}$$

und zwischen Erde und Sonne

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-8} \, \frac{2 \cdot 10^{33} \cdot 6 \cdot 10^{27}}{(15 \cdot 10^{12})^2} = 3{,}6 \cdot 10^{22}\mathrm{N},$$

Die Erde wird gewogen

Bevor wir uns des Gravitationsgesetzes bedienen, müssen wir einen wichtigen Umstand beachten.

Wir haben gerade die Anziehungskraft zwischen zwei Gegenständen im Abstand von 1 m berechnet. Was wäre nun, wenn der Abstand beider Körper 1 cm betrüge? Was müssen wir in die Formel einsetzen: den Abstand zwischen den Oberflächen der Körper, den Abstand der Schwerpunkte, oder was sonst?

Das Gravitationsgesetz $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ läßt sich mit ganzer Strenge nur dann anwenden, wenn keine derartigen Zweifel entstehen. Der Abstand zwischen den Körpern muß viel größer sein als die Abmessungen der Körper selbst; wir müssen das Recht haben, die Körper als Massenpunkte anzusehen. Wie wäre das Gesetz aber auf zwei nahe beieinandergelegene Körper anzuwenden? Im Prinzip einfach: Beide Körper sind gedanklich in kleine Stücke zu zerlegen, und für jedes Körperpaar ist die Kraft F zu berechnen; anschließend sind alle Kräfte (vektoriell) zu addieren.

Im Prinzip ist dies einfach, praktisch aber recht kompliziert.

Aber die Natur erweist uns ihre Hilfe. Man kann auf rechnerischem Weg zeigen, daß bei Wechselwirkung der Partikeln eines Körpers mit einer $\frac{1}{r^2}$ proportionalen Kraft kugelförmige Körper die Eigenschaft besitzen, sich wie Punkte anzuziehen, die im Mittelpunkt der Kugeln angeordnet sind. Für zwei nahe beieinanderliegende Kugeln ist die Formel $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ebenso gültig wie für weit voneinander entfernte Kugeln, sofern r der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Kugeln ist. Wir haben diese Regeln bereits früher bei der Berechnung der Beschleunigung an der Erdoberfläche benutzt.

Nun dürfen wir die Gravitationsformel zur Berechnung der Kraft benutzen, mit der die Erde einen Körper anzieht. Unter r ist dabei der Abstand zwischen dem Erdmittelpunkt und dem Körper zu verstehen.

M sei die Erdmasse und R der Erdradius. Dann beträgt die Anziehungskraft für einen Körper mit der Masse m an der Erdoberfläche

$$F = \gamma \frac{M}{R^2} \cdot m.$$

Genau das ist aber die Gewichtskraft des Körpers, die wir stets durch mg ausdrücken. Also beträgt die Beschleunigung im freien Fall

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Nun wissen wir auch, wie die Erde „gewogen" wurde. Man kann aus dieser Formel die Erdmasse berechnen, da g, γ und R bekannte Größen sind. Nach dem gleichen Verfahren läßt sich auch die Sonne „wiegen".

Wenden wir uns einer anderen interessanten Aufgabe zu. Zur Einführung des Weltfernsehens ist die Schaffung eines „hängenden" Satelliten von entscheidender Bedeutung, d. h. eines Satelliten, der sich ständig an ein und demselben Punkt der Äquatorialebene über der Erdoberfläche befindet. Würde dieser Satellit durch Reibung beeinflußt werden? Das hängt davon ab, in welcher Entfernung von der Erde dieser Satellit umläuft.

Ein „hängender" Satellit muß mit der Periode $T =$ $= 24$ h umlaufen. Ist r die Entfernung des Satelliten vom Erdmittelpunkt, dann beträgt seine Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T}$ und seine Beschleunigung $\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$. Andererseits ist diese Beschleunigung, die ihre Ursache in der Erdanziehung hat, gleich $\frac{\gamma M}{r^2} = \frac{gR^2}{r^2}$. Durch

Gleichsetzen der Beschleunigungen erhalten wir:

$$g\frac{R^2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \text{ d. h., } r^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2}.$$

Durch Einsetzen der gerundeten Werte $g = 10$ m/s², $R = 6 \cdot 10^6$ m und $T = 9 \cdot 10^4$ s erhalten wir: $r^3 = 7 \cdot 10^{22}$ m³, d. h., $r \approx 4 \cdot 10^7$ m = 40 000 km. In dieser Höhe tritt keine atmosphärische Reibung auf, und ein „hängender" Satellit wird seinen „unbeweglichen Lauf" hier nicht verlangsamen.

Die Messung von g im Dienst der Erkundung

Wenn wir Erkundung sagen, meinen wir nicht etwa die militärische Aufklärung. Dafür hat die Kenntnis der Beschleunigung im freien Fall keine Bedeutung. Wir meinen vielmehr die geologische Erkundung, deren Ziel darin besteht, Lagerstätten unter der Erdoberfläche zu erkunden, ohne Gruben zu graben oder Schächte abzuteufen.

Es gibt einige Verfahren zur sehr genauen Bestimmung der Fallbeschleunigung. So kann man g durch einfaches Wägen eines standardisierten Wägestücks an einer Federwaage (Gravimeter) ermitteln. Gravimeter müssen äußerst empfindlich sein; die Dehnung der Feder ändert sich bereits bei Erhöhung der Belastung um weniger als ein Millionstel Gramm. Ausgezeichnete Ergebnisse liefern Quarzdrehwaagen. Ihr Aufbau ist im Grunde einfach. An einem waagerecht gespannten Quarzfaden ist ein Hebel angeschweißt, dessen Masse eine leichte Verdrillung des Fadens bewirkt (Bild 6.2.).

Auch Pendel werden für den gleichen Zweck benutzt. Vor noch gar nicht allzulanger Zeit waren Pendelverfahren zur Messung von g die einzigen Verfahren überhaupt, und erst in den letzten zehn bis zwanzig Jahren begann ihre Verdrängung durch die bequemeren und genaueren

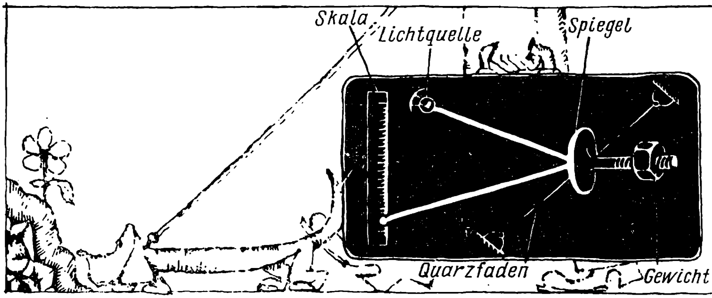


Bild 6.2.

Wägungsverfahren. Durch Messung der Schwingungsperiode eines Pendels kann man den Wert von g anhand der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ jedenfalls hinreichend genau ermitteln.

Mißt man den Wert von g mit ein und demselben Gerät an verschiedenen Orten, dann kann man relative Änderungen der Fallbeschleunigung mit einer Genauigkeit von einigen Millionsteln des Wertes nachweisen. Durch Messung des Wertes von g an einem bestimmten Ort der Erdoberfläche läßt sich feststellen, ob der Wert normal oder anormal ist und um einen bestimmten Betrag nach oben oder nach unten von der „Norm" abweicht.

Was ist die „Norm" für den Wert von g?

Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche unterliegt zwei gesetzmäßigen Änderungen, die man bereits seit langem verfolgt hat und die daher auch gut bekannt sind.

Zunächst nimmt g beim Übergang vom Pol zum Äquator gesetzmäßig ab. Davon war bereits weiter oben die Rede. Nur zur Erinnerung sei gesagt, daß diese Änderung zwei Ursachen hat: Erstens ist die Erde keine

Kugel, und ein Körper, der sich am Pol befindet, liegt auch näher am Erdmittelpunkt; zweitens wird die Gravitationskraft auf dem Weg zum Äquator immer mehr durch die Zentrifugalkraft geschwächt.

Die zweite gesetzmäßige Änderung von g betrifft ihre Verminderung mit zunehmender Höhe. Je weiter wir vom Erdmittelpunkt entfernt sind, um so kleiner ist g entsprechend der Formel $g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2}$, worin R der Erdradius und h die Höhe über dem Meeresspiegel ist.

Somit muß die Fallbeschleunigung auf der gleichen geographischen Breite und in ein und derselben Höhe über dem Meeresspiegel stets gleich sein.

Genaue Messungen zeigen, daß man sehr häufig Abweichungen von dieser Norm, sogenannte Schwerkraftanomalien, antrifft. Die Ursache dieser Anomalien besteht in der Inhomogenität der Massenverteilung in der Nähe des Meßortes.

Wie wir bereits erklärt haben, kann man sich die von einem großen Körper ausgehende Gravitationskraft als Summe aller Kräfte vorstellen, die von den einzelnen Partikeln des großen Körpers ausgehen. Die Anziehung eines Pendels durch die Erde ist die Folge der Wirkung sämtlicher Erdpartikeln. Naturgemäß liefern die nahe liegenden Partikeln jedoch den größten Anteil zur Gesamtkraft, denn die Anziehung ist dem Abstandsquadrat umgekehrt proportional.

Sind in der Nähe des Meßorts schwere Massen konzentriert, dann ist g größer als der Normwert, im umgekehrten Fall dagegen kleiner.

Mißt man g beispielsweise auf einem Berg bzw. in einem Flugzeug, das in der Höhe des Berges über dem Meer dahinfliegt, dann erhält man im erstgenannten Fall einen größeren Wert. Auf dem Vulkan Ätna in Italien liegt der Wert von g um 0,292 cm/s² über dem Normwert. Auch auf einsamen Inseln im Ozean ist g

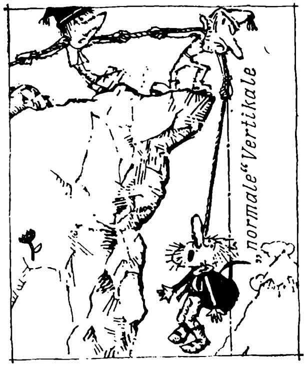


Bild 6.3.

größer als normal. In beiden Fällen erklärt sich die Zunahme von g einleuchtenderweise mit der Konzentration zusätzlicher Massen am Meßort.

Nicht nur der Wert von g, sondern auch die Schwerkraftrichtung können von der Norm abweichen. Hängt man eine Kugel an einem Faden auf, so zeigt der gespannte Faden die Vertikale für den Meßort an. Auch diese Vertikale kann vom Normwert abweichen. Die „normale“ Vertikale wird aus dem Stand der Sterne bestimmt, da durch Berechnung für jeden geographischen Punkt bekannt ist, auf welchen Ort eine Vertikale der „idealen“ Erdfigur zur betreffenden Tages- und Jahreszeit „trifft“.

Wenn am Fuß eines großen Berges Versuche mit einem Lot unternommen werden, wird das Massestück des Lots sowohl von der Erde in Richtung ihres Mittelpunkts als auch von dem Berg, also in seitlicher Richtung, angezogen. Unter diesen Umständen muß das Lot relativ zur normalen Vertikalen ausgelenkt werden (Bild 6.3.). Da die Erdmasse sehr viel größer als die Masse des Berges ist, betragen Auslenkungen dieser Art höchstens einige Winkelsekunden.

Manchmal führt die Auslenkung des Lots zu seltsamen Ergebnissen. In Florenz bewirkt der Einfluß des Apennin-Gebirges keine Anziehung, sondern die Abstoßung des Lots. Die Erklärung könnte darin bestehen, daß die Berge riesige Hohlräume enthalten.

Ein bemerkenswertes Ergebnis liefern Messungen der Fallbeschleunigung für die Kontinente und Ozeane insgesamt. Da die Kontinente erheblich schwerer als die Ozeane sind, müßte der Wert g über den Kontinenten größer als über den Ozeanen sein. In Wirklichkeit jedoch sind die auf ein und derselben Breite über Ozeanen und Kontinenten gemessenen Werte von g im Mittel gleich.

Wiederum kann es nur eine Erklärung geben: Die Kontinente ruhen auf leichten, die Ozeane dagegen auf schwereren Gesteinen. Dort, wo unmittelbare Untersuchungen möglich waren, haben die Geologen tatsächlich festgestellt, daß sich unter den Ozeanen schwere Basaltgesteine, unter den Kontinenten dagegen leichte Granite befinden.

Daraus folgt sogleich die nächste Frage: Warum gleichen die schweren bzw. leichten Gesteine den Gewichtsunterschied zwischen Kontinenten und Ozeanen so genau aus? Es kann sich hier nicht um einen Zufall handeln, vielmehr müssen die Ursachen im Aufbau des Erdmantels wurzeln.

Die Geologen vermuten, daß die oberen Teile der Erdrinde gewissermaßen auf einer plastischen (d. h. wie nasser Ton leicht verformbaren) Masse schwimmen. In etwa hundert Kilometer Tiefe muß der Druck überall gleich sein, so wie am Boden eines Gefäßes mit Wasser, auf dem Holzstücke unterschiedlichen Gewichts schwimmen. Darum muß eine Säule mit 1 m² Querschnitt von der Erdoberfläche bis zu einer Tiefe von 100 km sowohl unter den Ozeanen als auch unter den Kontinenten die gleiche Masse haben.

Dieser als Isostasie bezeichnete Druckausgleich führt dazu, daß sich die Werte für die Fallbeschleunigung über den Ozeanen und den Kontinenten im Verlauf einer Breitenlinie nicht wesentlich voneinander unterscheiden.

Lokale Schwerkraftanomalien dagegen leisten uns den gleichen Dienst wie dem Kleinen Muck der Zauberstab, der überall dort auf die Erde schlug, wo Gold oder Silber zu finden war.

Wo g am größten ist, muß man nach schwerem Erz suchen. Lagerstätten von leichtem Salz dagegen findet man anhand lokaler Verringerungen von g. Messen läßt sich g auf einige Hunderttausendstel von 1 cm/s^2 genau.

Erkundungsverfahren, die mit Pendeln und extrem genauen Waagen arbeiten, werden als gravimetrische Verfahren bezeichnet. Sie haben insbesondere bei der Suche nach Erdöl große praktische Bedeutung. Mittels gravimetrischer Erkundungsverfahren kann man nämlich leicht unterirdische Salzdome feststellen, und sehr häufig findet man dort, wo Salz ist, auch Erdöl. Dabei liegt das Erdöl in der Tiefe, das Salz dagegen näher an der Erdoberfläche. Durch gravimetrische Erkundungen wurden die Erdöllagerstätten in Kasachstan und anderswo entdeckt.

Die Schwerkraft unter der Erde

Es gilt noch eine interessante Frage zu beantworten. Wie wird sich die Schwerkraft ändern, wenn man unter die Erde vordringt?

Die Gewichtskraft eines Körpers ist das Ergebnis der Zugkraft unsichtbarer Fäden, die zwischen ihm und jedem Stückchen Erdmaterial aufgespannt sind. Die Gewichtskraft ist eine Gesamtkraft, das Ergebnis der Addition elementarer Kräfte, die von seiten der Erdpartikeln auf den Gegenstand einwirken. Alle diese Kräfte ziehen den Gegenstand „nach unten", also zum Erdmittelpunkt hin, wenn auch unter verschiedenen Winkeln

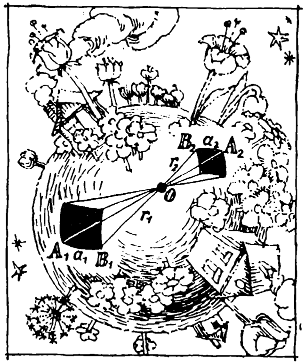


Bild 6.4.

Wie schwer wird nun ein Gegenstand sein, der sich in einem unterirdischen Labor befindet? Er wird unter dem Einfluß der Anziehungskraft innerer und äußerer Erdschichten stehen.

Sehen wir uns einmal die Gravitationskräfte an, die auf einen im Inneren des Erdballs liegenden Punkt von der äußeren Schicht her wirken. Unterteilt man die äußere Schicht in dünne Schichten, schneidet in eine dieser Schichten ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge a_1 aus und zieht gerade Linien von den Ecken des Quadrats durch den Punkt O, dessen Schwere uns interessiert, dann entsteht an der entgegengesetzten Seite der Schicht ein anderes Quadrat mit der Seitenlänge a_2 (Bild 6.4.). Die im Punkt O von seiten der beiden Quadrate wirkenden Anziehungskräfte sind einander entgegengerichtet und verhalten sich nach dem Gravitationsgesetz wie $\frac{m_1}{r_1^2}$ zu $\frac{m_2}{r_2^2}$. Die Massen m_1 und m_2 der Quadrate sind jedoch den Flächen der Quadrate proportional. Deshalb sind die Gravitationskräfte den Ausdrücken $\frac{a_1^2}{r_1^2}$ und $\frac{a_2^2}{r_2^2}$ proportional.

Wir überlassen es dem Leser zu beweisen, daß die beiden Ausdrücke gleich sind, so daß die im Punkt O von seiten der beiden Quadrate wirksamen Anziehungskräfte im Gleichgewicht stehen.

Durch Aufgliederung einer dünnen Schicht in derartige „Gegenquadrate“ erkennen wir, daß eine dünne homogene Kugelschale keine Wirkung auf einen in ihrem Inneren gelegenen Punkt zeigt. Dies gilt für sämtliche dünne Schichten, in die wir die oberhalb des uns interessierenden unterirdischen Punkts liegende Kugelzone gegliedert haben.

Es ist also so, als ob die oberhalb des Gegenstandes befindliche Erdschicht überhaupt nicht existiert. Die Wirkung ihrer einzelnen Teile auf den Gegenstand wird ausgeglichen, und die Gesamtanziehungskraft von seiten der äußeren Schicht ist gleich Null.

Natürlich haben wir bei allen unseren Überlegungen vorausgesetzt, daß die Dichte der Erde innerhalb jeder Schicht konstant ist.

Nun können wir ohne Schwierigkeiten die Formel für die in der Tiefe H unter der Erdoberfläche wirksame Schwerkraft ermitteln. Ein in der Tiefe H gelegener Punkt wird nur durch die inneren Erdschichten angezogen. Die Formel für die Gravitationsbeschleunigung $g = \frac{\gamma M}{r^2}$ ist auch für diesen Fall anwendbar, nur, daß M und r nicht Masse und Radius der ganzen Erde darstellen, sondern nur ihren (relativ zum betrachteten Punkt) „inneren“ Teil.

Hätte die Erde in sämtlichen Schichten die gleiche Dichte, dann würde die Formel für g folgende Gestalt annehmen

$$g = \gamma \frac{\varrho \frac{4}{3} \pi (R_E - H)^3}{(R_E - H)^2} = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho (R_E - H).$$

Darin ist ρ die Dichte und R_E der Erdradius.

g müßte sich demnach direkt proportional zu $(R_E - H)$ ändern: Je größer die Tiefe H ist, um so kleiner wäre g.

In Wirklichkeit gehorcht das Verhalten von g in der Nähe der Erdoberfläche — und wir können dies bis zu Tiefen von 5 km (unter Meereshöhe) verfolgen — diesem Gesetz ganz und gar nicht. Die Erfahrung lehrt, daß g in diesen Schichten mit wachsender Tiefe zunimmt. Die Diskrepanz zwischen Formel und Versuch erklärt sich daraus, daß wir den Dichteunterschied in den verschiedenen Tiefen nicht berücksichtigt haben.

Die mittlere Dichte der Erde läßt sich leicht ermitteln, indem man ihre Masse durch das Volumen dividiert. Wir erhalten dabei den Wert 5,52 g/cm^3. Die Dichte der Oberflächengesteine ist jedoch sehr viel geringer und beträgt 2,75 g/cm^3. Die Dichte der Erdschichten nimmt mit der Tiefe zu. In den oberflächennahen Erdschichten überlagert dieser Effekt den Idealfall der Verminderung von g, der sich aus unserer Formel ergibt, und g wächst.

Gravitationsenergie

Die Gravitationsenergie haben wir bereits an einem einfachen Beispiel kennengelernt. Ein Körper in der Höhe h über der Erdoberfläche besitzt die potentielle Energie mgh.

Freilich darf man diese Formel nur dann benutzen, wenn die Höhe h sehr viel kleiner als der Erdradius ist.

Da die Gravitationsenergie eine wichtige Größe ist, wäre es interessant, eine Formel dafür zu erhalten, die für Körper in beliebiger Höhe über der Erdoberfläche bzw. generell für zwei Massen gilt, die sich nach dem universellen Gesetz

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

anziehen.

Nehmen wir einmal an, zwei Körper hätten sich infolge gegenseitiger Anziehung einander angenähert. Ihr Abstand betrug ursprünglich r_1 und beträgt jetzt r_2. Dabei wird die Arbeit $W = F(r_1 - r_2)$ verrichtet. Als Kraft muß ihr Wert für einen Punkt in Mittellage angesetzt werden. Dann erhalten wir

$$W = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2_{\text{mittl.}}} (r_1 - r_2).$$

Unterscheiden sich r_1 und r_2 nur wenig voneinander, dann kann man $r^2_{\text{mittl.}}$ durch das Produkt $r_1 r_2$ ersetzen. Wir erhalten:

$$W = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}.$$

Diese Arbeit wurde durch die Gravitationsenergie verrichtet:

$$W = W_{p1} - W_{p2},$$

worin W_{p1} der Anfangswert und W_{p2} der Endwert der potentiellen Gravitationsenergie ist.

Durch Vergleich dieser beiden Formeln erhalten wir für die potentielle Energie den Ausdruck

$$W_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Dieser Ausdruck ähnelt der Formel für die Gravitationskraft, nur steht r im Nenner in der ersten Potenz.

Dieser Formel zufolge geht die potentielle Energie W_p für sehr große r gegen Null. Das ist vernünftig, da die Anziehung bei so großen Entfernungen bereits unmerklich sein wird. Bei Annäherung der Körper jedoch muß die potentielle Energie abnehmen. Schließlich wird die Arbeit auf Kosten der potentiellen Energie verrichtet.

Was eine Abnahme, beginnend bei Null, bedeutet? Die potentielle Energie muß negative Werte annehmen. Darum steht auch das Minuszeichen in der Formel. —5 ist kleiner als Null, und —10 ist wiederum kleiner als —5.

Handelt es sich dagegen um eine Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche, dann kann der allgemeine Ausdruck für die Schwerkraft durch das Produkt mg ersetzt werden, und es gilt mit großer Genauigkeit $W_{p1} - W_{p2} = mgh$.

An der Erdoberfläche besitzt ein Körper die potentielle Energie $-\gamma \frac{Mm}{R}$, worin R der Erdradius ist. In der Höhe h über der Erdoberfläche gilt also:

$$W_p = -\gamma \frac{Mm}{R} + mgh.$$

Als wir die Formel für die potentielle Energie $W_p = mgh$ einführten, haben wir vereinbart, Höhe und Energie ab der Erdoberfläche zu rechnen. Bei Benutzung der Formel $W_p = mgh$ vernachlässigen wir das konstante Glied $-\gamma \frac{Mm}{R}$; wir nehmen an, es sei gleich Null. Da uns nur Energiedifferenzen interessieren — gewöhnlich wird ja Arbeit gemessen, die eine Energiedifferenz darstellt — spielt das konstante Glied $-\gamma \frac{Mm}{R}$ in der Formel für die potentielle Energie keine Rolle.

Die Gravitationsenergie bestimmt die Festigkeit der Ketten, mit denen ein Körper an die Erde „gefesselt" ist. Was müssen wir tun, um diese Ketten zu zerreißen, um zu erreichen, daß ein von der Erde weggeschleuderter Körper nicht wieder zu ihr zurückkehrt? Wie groß muß die Mindestanfangsgeschwindigkeit des Körpers sein?

Mit zunehmender Entfernung von der Erde wird die potentielle Energie des weggeschleuderten Körpers (eines

Geschosses oder einer Rakete) wachsen (während der Absolutwert von W_p sinkt); die kinetische Energie wird abnehmen. Wird die kinetische Energie des Körpers vorzeitig gleich Null, d. h., bevor wir die Gravitationsfesseln des Erdballs gesprengt haben, fällt das Geschoß zurück auf die Erde.

Der Körper muß solange kinetische Energie behalten, bis seine potentielle Energie praktisch auf Null sinkt. Bevor das Geschoß auf die Reise geschickt wurde, besaß es die potentielle Energie $-\gamma \frac{Mm}{R}$ (M und R sind die Masse bzw. der Radius der Erde). Daher müssen wir dem Geschoß eine Geschwindigkeit vermitteln, bei der die Gesamtenergie des Geschosses positiv wird. Ein Körper mit negativer Gesamtenergie (wo der Absolutwert für die potentielle Energie größer als der Wert für die kinetische Energie ist) kann die Anziehungskraft der Erde nicht überwinden.

So erhalten wir eine einfache Bedingung. Um einen Körper der Masse m von der Erde loszureißen, muß die potentielle Gravitationsenergie $\gamma \frac{Mm}{R}$ überwunden werden.

Das Geschoß muß hierbei die sogenannte irdische Fluchtgeschwindigkeit v_2 erreichen, die wir durch Gleichsetzung der kinetischen und der potentiellen Energie leicht berechnen können:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{Mm}{R}, \text{ d. h., } v_2^2 = 2\gamma \frac{M}{R},$$

oder, da $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ ist:

$$v_2^2 = 2gR.$$

Der nach dieser Formel berechnete Wert für v_2 beträgt 11 km/s (natürlich ohne Berücksichtigung des Widerstands der Atmosphäre). Diese Geschwindigkeit ist um den Faktor $\sqrt{2} = 1{,}41$ größer als die Kreisbahngeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{gR}$, eines in der Nähe der Erdoberfläche umlaufenden künstlichen Satelliten, d. h., es gilt $v_2 = \sqrt{2}v_1$.

Die Mondmasse beträgt nur $\frac{1}{81}$ der Erdmasse und der Mondradius nur $\frac{1}{4}$ des Erdradius. Darum entspricht die Gravitationsenergie auf dem Mond auch nur $\frac{1}{20}$ ihres Wertes auf der Erde, und zur Ablösung vom Mond genügt eine Geschwindigkeit von 2,5 km/s.

Die kinetische Energie $\frac{mv_2^2}{2}$ wird zur Überwindung der Schwerkraft des Planeten verbraucht, von dem aus der Start erfolgt. Wenn wir wollen, daß sich die Rakete nach Überwindung der Gravitation mit der Geschwindigkeit v fortbewegen soll, so ist dafür die zusätzliche Energie $\frac{mv^2}{2}$ erforderlich. In diesem Fall müssen wir der Rakete bei „Fahrtantritt" die Geschwindigkeit

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

vermitteln. Die drei Geschwindigkeiten, von denen hier die Rede ist, sind also durch folgende einfache Beziehung miteinander verbunden:

$$v_0^2 = v_2^2 + v^2.$$

Wie groß muß die Geschwindigkeit v_3 sein, die zur Überwindung der Gravitation von Erde und Sonne gebraucht wird, die Mindestgeschwindigkeit eines Geschosses also, das zu den fernen Sternen gesandt wird? Wir haben diese Geschwindigkeit mit v_3 bezeichnet, weil man sie als solare Fluchtgeschwindigkeit bezeichnet.

Bestimmen wir zuerst einmal die Geschwindigkeit, die zur Überwindung der Sonnenanziehung notwendig ist.

Wie wir soeben gezeigt haben, muß ein Geschoß, das den Bereich der Erdanziehung verlassen soll, beim Start eine um den Faktor $\sqrt{2}$ größere Geschwindigkeit als die Kreisbahngeschwindigkeit eines Erdsatelliten haben. Diese Überlegungen gelten gleichermaßen auch für die Sonne, d. h., die Geschwindigkeit zum Entweichen aus dem Bereich der Sonne ist um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Geschwindigkeit des Sonnensatelliten (d. h. unserer Erde). Da die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne etwa 30 km/s beträgt, entspricht die zum Verlassen des Anziehungsbereichs der Sonne erforderliche Geschwindigkeit 42 km/s. Das ist ein sehr großer Wert; doch wenn man eine Rakete zu den Sternen schicken will, muß man natürlich die Bewegung des Erdballs ausnutzen und den Körper in die gleiche Richtung starten, in die sich auch die Erde bewegt. Dann brauchen wir nur (42 — 30) km/s $\doteq$ 12 km/s zu ergänzen.

Dies erlaubt uns die endgültige Berechnung der solaren Fluchtgeschwindigkeit. Es ist die Geschwindigkeit, mit der eine Rakete gestartet werden muß, damit sie nach Verlassen des Bereichs der Erdanziehung noch eine Geschwindigkeit von 12 km/s besitzt. Durch Einsetzen in die gerade angegebene Formel erhalten wir:

$$v_3^2 = (11 \text{ km/s})^2 + (12 \text{ km/s})^2$$

und hieraus

$$v_3 = 16 \text{ km/s}.$$

Fassen wir zusammen: Mit einer Geschwindigkeit von etwa 11 km/s wird ein Körper zwar die Erde verlassen, doch kommt er nicht „weit“; die Erde läßt ihn entkommen, die Sonne aber nicht. Er verwandelt sich in einen Sonnensatelliten.

Die für interstellare Reisen erforderliche Geschwindigkeit beträgt also nur das Anderthalbfache der Geschwindigkeit, die man für Reisen im Sonnensystem, und zwar innerhalb der Erdbahn, braucht. Allerdings ist, wie bereits gesagt wurde, jede merkliche Vergrößerung der Anfangsgeschwindigkeit eines Geschosses mit großen technischen Schwierigkeiten verknüpft (siehe Abschnitt „Reaktive Bewegung“).

Wie sich die Planeten bewegen

Auf die Frage, wie sich die Planeten bewegen, gibt es eine kurze Antwort: Sie gehorchen dem Gravitationsgesetz. Denn an den Planeten greifen nur Gravitationskräfte an.

Da die Masse der Planeten sehr viel geringer als die Sonnenmasse ist, spielen die Wechselwirkungskräfte zwischen den Planeten keine große Rolle. Jeder Planet bewegt sich nahezu so, wie es ihm einzig die Anziehungskraft der Sonne vorschreibt, so, als existierten die anderen Planeten überhaupt nicht.

Die Gesetze der Planetenbewegung um die Sonne folgen aus dem Gravitationsgesetz.

Historisch gesehen, lagen die Dinge übrigens anders. Die Bewegungsgesetze der Planeten wurden vor Newton und ohne Hilfe des Gravitationsgesetzes von Johannes Kepler auf der Grundlage einer fast zwanzigjährigen Bearbeitung astronomischer Beobachtungen gefunden.

Die Bahnen, die die Planeten um die Sonne beschreiben, sind nahezu kreisförmig.

Wie ist die Umlaufperiode eines Planeten mit seinem Bahnradius verknüpft?

Die von seiten der Sonne auf einen Planeten wirkende Schwerkraft ist

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Darin ist M die Sonnenmasse, m die Planetenmasse und r der Abstand des Planeten zur Sonne.

$\frac{F}{m}$ ist aber nach dem Grundgesetz der Mechanik nichts anderes als eine Beschleunigung, und zwar die Zentripetalbeschleunigung:

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}.$$

Man kann die Planetengeschwindigkeit als den Kreisumfang $2\pi r$, dividiert durch die Umlaufperiode T, darstellen. Setzen wir $v = \frac{2\pi r}{T}$ und den Wert für die Kraft F in die Beschleunigungsformel ein, so erhalten wir:

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{\gamma M}{r^2}, \quad \text{d. h.,} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3.$$

Der Proportionalitätsfaktor vor r^3 ist eine nur von der Sonnenmasse abhängige Größe und daher für alle Planeten gleich. Für zwei Planeten gilt daher die Beziehung

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Die Quadrate der Planetenumlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Bahnradien. Dieses interessante Gesetz hat Kepler aus Beobachtungen abgeleitet. Das Gravitationsgesetz erklärte dann Keplers Beobachtungen.

Ein Körper kann sich auf Grund von Gravitationskräften auf den unterschiedlichsten Bahnen um einen anderen bewegen. Allerdings gehören sie, wie die Berechnung zeigt und wie Kepler fand, noch ehe man es berechnen konnte, samt und sonders zur Klasse der Ellipsen.

Bindet man einen Faden an zwei Stecknadeln, die in einem Blatt Zeichenkarton stecken, spannt den Faden mit der Bleistiftspitze und bewegt den Bleistift so, daß der Faden stets gespannt bleibt, dann entsteht auf dem

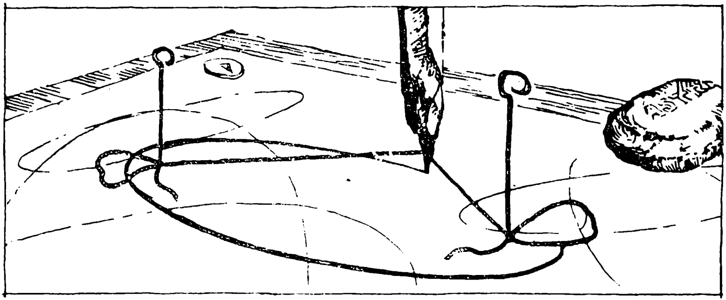


Bild 6.5.

Papier schließlich eine geschlossene Kurve, die Ellipse (Bild 6.5). Dort, wo die Nadeln stecken, befinden sich die Brennpunkte der Ellipse.

Ellipsen können verschiedene Formen haben. Wählt man den Faden sehr viel länger als den Abstand zwischen den Stecknadeln, dann wird die Ellipse fast kreisförmig. Ist die Fadenlänge dagegen nur etwas größer als die Entfernung zwischen den Stecknadeln, dann erhalten wir eine langgestreckte, fast stabförmige Ellipse.

Die Planeten beschreiben Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

Welche Art von Ellipsen beschreiben die Planeten? Sie sind nahezu kreisförmig.

Am stärksten weicht die Bahnform des sonnennächsten Planeten Merkur von der Kreisform ab. Aber auch hier ist der größte Ellipsendurchmesser nur um 2 % länger als der kleinste. Anders ist es bei den Bahnen künstlicher Planeten. Sehen Sie sich Bild 6.6. an. Die Marsbahn ist von einem Kreis nicht zu unterscheiden.

Die Sonne befindet sich allerdings in einem der Brennpunkte der Ellipse, nicht in ihrem Mittelpunkt, und darum ändern sich die Entfernungen der Planeten

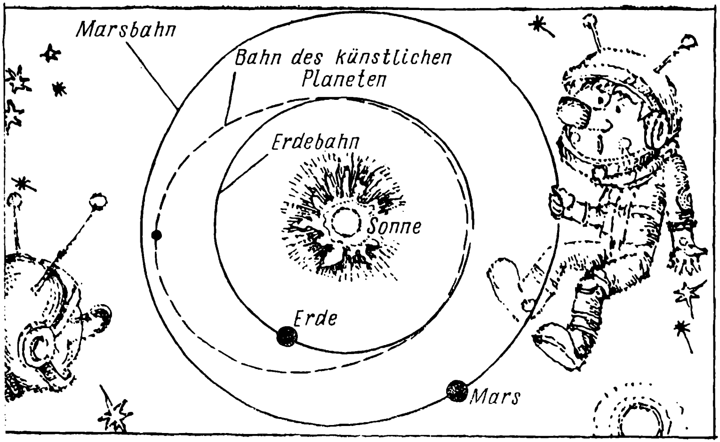


Bild 6.6.

von der Sonne stärker. Wenn wir durch die beiden Brennpunkte der Ellipse eine Gerade ziehen, dann schneidet sie die Ellipse an zwei Stellen. Der sonnennächste Punkt heißt Perihel, der sonnenfernste Aphel. Wenn der Merkur im Perihel steht, befindet er sich anderthalbmal näher an der Sonne als im Aphel.

Die wichtigsten Planeten beschreiben nahezu kreisförmige Bahnen um die Sonne. Es gibt aber auch Himmelskörper, die sich auf langgestreckten Ellipsen um die Sonne bewegen. Die Kometen gehören dazu. Ihre Bahnen lassen sich in bezug auf ihre Exzentrizität überhaupt nicht mit den Planetenbahnen vergleichen. Von allen Himmelskörpern, die sich auf elliptischen Bahnen bewegen, kann man sagen, daß sie der Sonnenfamilie angehören. Gelegentlich verirren sich aber auch „Fremdlinge" in unser System.

Man hat Kometen beobachtet, deren Bahnform den Schluß zuließ, daß der Komet nicht wiederkehren würde

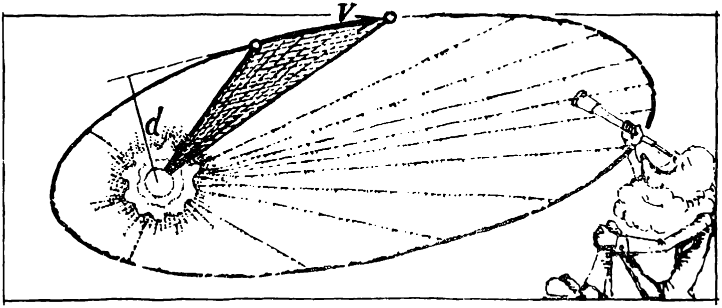


Bild 6.7.

und daß er nicht zur Familie des Sonnensystems gehört. Von solchen Kometen beschriebene „offene" Kurven heißen Hyperbeln.

Besonders rasch bewegen sich solche Kometen dann, wenn sie an der Sonne vorüberfliegen. Das ist verständlich: Die Gesamtenergie eines Kometen ist konstant, und wenn er den geringsten Abstand von der Sonne hat, besitzt er auch die geringste potentielle Energie. Also muß seine kinetische Energie in diesem Fall am größten sein. Natürlich zeigt sich dieser Effekt bei allen Planeten, auch bei unserer Erde. Freilich ist dieser Effekt geringfügig, da die Differenz der potentiellen Energien im Aphel und im Perihel klein ist.

Ein weiteres interessantes Gesetz der Planetenbewegung ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz.

In Bild 6.7. sind zwei Planetenpositionen eingezeichnet. Von der Sonne, d. h. von einem Brennpunkt der Ellipse aus, sind zwei Radien zu den Planetenpositionen gezogen, und der so gebildete Sektor wurde schraffiert. Nun wollen wir die Fläche ermitteln, die der Radius in der Zeiteinheit überstreicht. Bei einem kleinen Winkel kann der vom Radius in der Sekunde überstrichene Sektor durch ein Dreieck ersetzt werden. Die Grundlinie des Dreiecks bildet die Geschwindigkeit v (d. h. der Weg, der in einer Sekunde zurückgelegt wird), und die Höhe des Dreiecks ist gleich dem Geschwindigkeitsarm d. Daher beträgt die Dreiecksfläche $\frac{vd}{2}$.

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt die Konstanz der Größe mvd im Bewegungsverlauf. Bleibt jedoch mvd unverändert, dann ändert sich auch die Dreiecksfläche $vd/2$ nicht. Wir können Sektoren für willkürliche Zeitpunkte zeichnen — sie werden stets flächengleich sein. Die Planetengeschwindigkeit ändert sich, doch das, was man als Flächengeschwindigkeit bezeichnen könnte, bleibt konstant.

Nicht alle Sterne sind von Planeten umgeben. Dagegen findet man am Himmel verhältnismäßig viele Doppelsterne. Hier rotieren zwei riesige Himmelskörper umeinander.

Ihre ungeheure Masse läßt die Sonne zum Mittelpunkt unseres Systems werden. Bei Doppelsternen dagegen haben beide Himmelskörper nur geringfügig voneinander differierende Massen. Daher darf man in diesem Fall nicht annehmen, daß sich der eine von beiden Sternen in Ruhe befindet. Welchen Bewegungsverlauf hatten wir jetzt? Wir wissen, daß jedes geschlossene System einen ruhenden (oder gleichförmig bewegten) Punkt, den Trägheitspunkt, besitzt. Um diesen Punkt rotieren nun beide Sterne. Dabei beschreiben sie ähnliche Ellipsen, was aus der Bedingung $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$ folgt (vgl. Abschnitt „Der ‚Trägheitspunkt'"). Die Größen der von beiden Sternen beschriebenen Ellipsen verhalten sich gerade umgekehrt wie ihre Massen (Bild 6.8.). Bei gleichen Massen werden beide Sterne gleiche Bahnen um den Trägheitspunkt beschreiben.

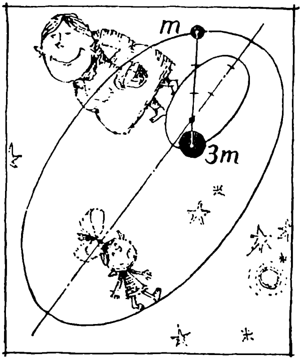


Bild 6.8.

Für die Planeten des Sonnensystems bestehen ideale Bedingungen: Sie sind keiner Reibung ausgesetzt.

Das gilt nicht für die von Menschenhand geschaffenen kleinen künstlichen Himmelskörper, die Sputniks, denn hier greifen Reibungskräfte, auch wenn sie anfangs sehr geringfügig, aber doch merklich sind, nachdrücklich in ihre Bewegung ein.

Die Gesamtenergie eines Planeten bleibt konstant. Die Gesamtenergie eines Sputniks dagegen nimmt bei jedem Umlauf geringfügig ab. Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als würde die Bewegung eines Sputniks durch Reibung verzögert. In Wirklichkeit ist gerade das Gegenteil der Fall.

Erinnern wir uns vor allem daran, daß die Geschwindigkeit eines Sputniks $\sqrt{gR}$ oder $\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$ beträgt, worin R den Abstand vom Erdmittelpunkt und M die Erdmasse bedeutet.

Die Gesamtenergie eines Sputniks ist:

$$W = -\gamma \frac{Mm}{R} + \frac{mv^2}{2}.$$

Setzen wir den Geschwindigkeitswert des Sputniks ein, so erhalten wir für die kinetische Energie den Ausdruck $\gamma \frac{mM}{2R}$. Wir sehen, daß die kinetische Energie nach ihrem Absolutbetrag nur halb so groß ist wie die potentielle; die Gesamtenergie beträgt

$$W = -\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{mM}{R}.$$

Wenn Reibung auftritt, muß die Gesamtenergie abnehmen, d.h. (da sie ja negativ ist), ihr Absolutbetrag muß zunehmen; der Abstand R beginnt sich zu vermindern: Der Sputnik sinkt. Was geschieht hierbei mit den Energiekomponenten? Die potentielle Energie nimmt ab (ihr Absolutbetrag wächst), und die kinetische Energie nimmt zu.

Trotzdem bleibt die Gesamtbilanz negativ, weil die potentielle Energie doppelt so schnell abnimmt, wie die kinetische zunimmt.

So verursacht die Reibung eine Beschleunigung und keine Verzögerung des Sputniks.

Nun wird auch verständlich, warum eine große Trägerrakete den kleinen Sputnik überholt, den sie auf die Bahn gebracht hat. Für die große, jedoch leere Rakete ist die Reibung größer.

Interplanetare Reisen

Wir alle waren bereits Zeugen vieler Mondflüge. Automatische und bemannte Raketen waren auf dem Mond und sind wieder zurückgekehrt.

Unbemannte Raketen waren auch schon auf dem Mars. Der Besuch anderer Planeten, ihre Erforschung und die Rückkehr bemannter oder automatischer Raketen zur Erde stehen für die nächste Zukunft auf der Tagesordnung.

Die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten interplanetarer

Reisen, und zwar insbesondere das Funktionsprinzip der Rakete und die Berechnung der Bahngeschwindigkeiten, die zur Einrichtung von Satelliten an Himmelskörpern oder zum Verlassen eines Planeten „für immer“ erforderlich sind, haben wir bereits geklärt.

Als Beispiel für eine interplanetare Reise wollen wir den Flug zum Mond betrachten. Um auf den Mond zu gelangen, muß man die Rakete auf einen Punkt der Mondbahn richten. Diesen Punkt muß der Mond gleichzeitig mit der Rakete erreichen. Man kann die Rakete auf eine geradlinige Bahn schicken, der Bahn aber auch einen beliebigen Anstellwinkel geben. Natürlich ist auch der waagerechte Flug nicht verboten. Damit das Geschoß den Mond erreicht, muß es die irdische Fluchtgeschwindigkeit erhalten.

Die verschiedenen Flugbahnen erfordern unterschiedliche Treibstoffmengen, da sie sich durch die zur Beschleunigung notwendigen Verluste voneinander unterscheiden. Die Flugdauer hängt sehr stark von der Anfangsgeschwindigkeit ab. Ist diese Geschwindigkeit minimal, dann beträgt die Flugdauer etwa fünf Tage (120 h). Erhöht man die Anfangsgeschwindigkeit um 0,5 km/s, dann wird nur noch ein Tag benötigt.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, daß es zur Landung auf dem Mond genügt, den Anziehungsbereich des Mondes mit der Erdgeschwindigkeit Null zu erreichen. Man glaubt, daß der Apparat dann einfach auf den Mond „fällt“. Der Fehler dieser Überlegung besteht in folgendem. Wenn die Rakete relativ zur Erde die Geschwindigkeit Null besitzt, dann hat sie relativ zum Mond die Geschwindigkeit des Mondes, nur in umgekehrter Richtung.

In Bild 6.9. ist die Bahn einer vom Punkt A gestarteten Rakete dargestellt. Auch die Mondbahn ist eingezeichnet. Man könnte sich vorstellen, daß die „Wirkungssphäre“ des Mondes (innerhalb dieser Sphäre steht die

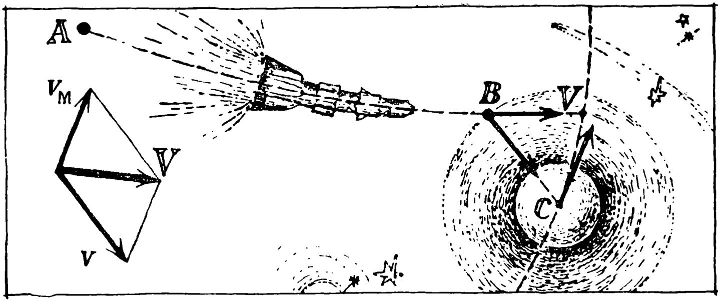


Bild 6.9.

Rakete praktisch nur unter dem Einfluß der „Mondanziehung“) sich auf dieser Bahn fortbewegt. Wenn die Rakete im Punkt B in die Wirkungssphäre des Mondes eingetreten ist, befindet sich der Mond selbst im Punkt C und hat die Geschwindigkeit $v_{\text{Mond}} = 1{,}02$ km/s. Betrüge die Geschwindigkeit der Rakete am Punkt B relativ zur Erde Null, dann wäre sie relativ zum Mond jedoch gleich v_{Mond}. Wir würden also „vorbeischießen“.

Betrachten wir die Rakete vom Mond aus, dann können wir sicher sein, daß die Rakete rechtwinklig an der Mondoberfläche auftrifft, wenn ihre Geschwindigkeit gleich v ist. Wie muß nun ein Mathematiker vorgehen, der die optimale Raketenbahn und -geschwindigkeit berechnet? Er muß offenbar erreichen, daß die Rakete am Punkt B nicht mit der Geschwindigkeit Null, sondern mit der Geschwindigkeit V (die in Bild 6.9. ebenfalls dargestellt ist) eintrifft. Die Berechnung dieser Geschwindigkeit wiederum macht keine Schwierigkeiten, wenn man das im gleichen Bild dargestellte Geschwindigkeitsparallelogramm benutzt.

Trotzdem haben wir einen gewissen Spielraum. Der Vektor der Geschwindigkeit v muß nicht unbedingt auf den Mondmittelpunkt zeigen. Außerdem läßt auch die Anziehungskraft des Mondes selbst die zulässigen Fehler etwas größer werden.

Doch alle diese Toleranzen sind, wie Berechnungen zeigen, außerordentlich gering, und die Genauigkeit der Werte für die Anfangsgeschwindigkeit muß in der Größenordnung einiger Meter in der Sekunde liegen. Der Winkel, unter dem die Rakete gestartet wird, muß auf ein Zehntel Grad genau eingestellt werden, und die Startzeit darf sich von der berechneten Zeit um höchstens einige Sekunden unterscheiden.

Jetzt trifft die Rakete mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit in den Wirkungsbereich des Mondes ein. Die Berechnung ergibt, daß diese Geschwindigkeit V gleich 0,8 km/s sein muß. Durch die Anziehungskraft des Mondes wird die Geschwindigkeit erhöht; die Berührung der Mondoberfläche erfolgt bei der Geschwindigkeit 2,5 km/s. Das geht natürlich nicht, denn der Apparat würde durch diesen Aufprall zerstört werden. Es gibt keinen anderen Ausweg, als die Geschwindigkeit durch ein Bremstriebwerk herabzusetzen. Um eine sogenannte weiche Landung durchzuführen, muß eine ganze Menge Treibstoff „verpulvert“ werden. Die Formel von Seite 116 zeigt, daß die Rakete auf den 2,7ten Teil „abmagern“ muß.

Wenn wir zurückkehren wollen, muß die Rakete nach erfolgter Landung auf dem Mond noch einen Treibstoffvorrat besitzen. Der Mond ist ein „kleiner“ Körper. Sein Radius beträgt 1737 km und seine Masse $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. Man kann leicht ausrechnen, daß die für den Start eines künstlichen Mondsatelliten benötigte Kreisbahngeschwindigkeit 1680 m/s erfordert, während die lunare Fluchtgeschwindigkeit 2375 m/s beträgt. Um also den Mond verlassen zu können, müssen wir der Rakete eine Geschwindigkeit von etwa 2,5 km/s verleihen. Bei dieser kleinsten Anfangsgeschwindigkeit kehren wir nach fünf

Tagen mit der bekannten Geschwindigkeit von etwa 11 km/s zur Erde zurück.

Der Eintritt in die Erdatmosphäre muß mit einer bestimmten Neigung erfolgen, um Überlastungen im Fall eines bemannten Raumschiffs zu vermeiden. Aber selbst wenn es sich um die Landung eines Automaten handelt, muß man diesen erst einige Zeit unter ständiger Verringerung des Ellipsendurchmessers um die Erde kreisen lassen, damit die Raketenhülle nicht überhitzt wird.

Wenn es den Mond nicht gäbe

Als wir uns früher überlegten, welche Kräfte auf ein Buch wirken, das auf einem Tisch liegt, haben wir, ohne zu zögern, festgestellt: die Erdanziehung und die Reaktionskraft. Strenggenommen, wird das Buch freilich auch vom Mond, von der Sonne, ja sogar von den Sternen angezogen.

Der Mond ist unser nächster Nachbar. Vergessen wir einmal die Sonne und die Sterne und überlegen uns, wie sich die Gewichtskraft eines Körpers auf der Erde unter dem Einfluß des Mondes verändert.

Erde und Mond bewegen sich relativ zueinander. Relativ zum Mond bewegt sich die Erde als Ganzes (d. h. alle Punkte der Erde) mit der Beschleunigung $\frac{\gamma m}{r^2}$; m ist die Mondmasse und r der Abstand vom Mittelpunkt des Mondes zum Mittelpunkt der Erde.

Betrachten wir nun einen Gegenstand, der auf der Erdoberfläche liegt. Wir wollen wissen, wie sich ihre Gewichtskraft unter dem Einfluß des Mondes ändert. Die irdische Gewichtskraft ergibt sich aus der Beschleunigung in bezug auf die Erde. Uns interessiert also, um wieviel sich die Beschleunigung eines

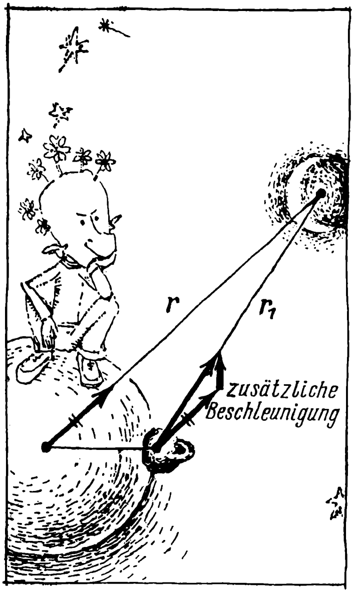


Bild 6.10.

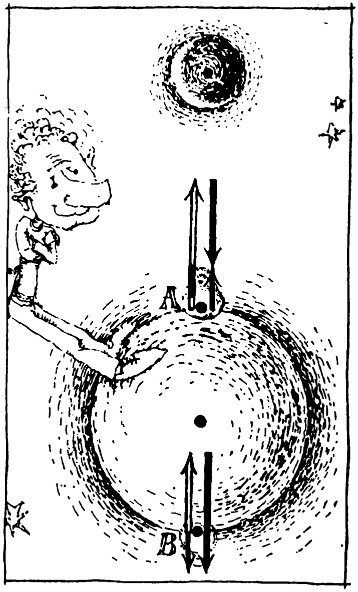


Bild 6.11.

auf der Erdoberfläche liegenden Gegenstandes bezüglich der Erde unter dem Einfluß des Mondes ändert.

Die Beschleunigung der Erde relativ zum Mond ist $\gamma m/r^2$, die Beschleunigung eines auf der Erdoberfläche liegenden Gegenstandes relativ zum Mond dagegen $\gamma m/r_1^2$; r_1 ist der Abstand des Körpers vom Mondmittelpunkt (Bild 6.10.).

Wir müssen die zusätzliche Beschleunigung des Körpers relativ zur Erde ermitteln: Sie ist gleich der geometrischen Differenz der entsprechenden Beschleunigungen.

Die Größe $\frac{\gamma m}{r^2}$ ist für die Erde eine konstante Zahl;

im Gegensatz dazu ist $\frac{\gamma m}{r_1^2}$ für verschiedene Punkte an der Erdoberfläche unterschiedlich. Also wird auch die uns interessierende geometrische Differenz für verschiedene Orte auf dem Erdball unterschiedlich sein.

Wie groß ist die Erdschwere am mondnächsten, mondfernsten und einem relativ dazu mittleren Punkt?

Zur Ermittlung der vom Mond verursachten Beschleunigung des Körpers relativ zum Erdmittelpunkt, d. h. der Korrektur des Wertes g, muß man von der Größe $\frac{\gamma m}{r_1^2}$ an den genannten Stellen des Erdballs (die hellen Pfeile in Bild 6.11.) die konstante Größe $\frac{\gamma m}{r^2}$ subtrahieren. Dabei muß man berücksichtigen, daß die Beschleunigung $\frac{\gamma m}{r_1^2}$ — der Erde relativ zum Mond — parallel zur Verbindungslinie zwischen dem Erd- und Mondmittelpunkt gerichtet ist. Die Subtraktion eines Vektors ist gleichbedeutend mit der Addition des umgekehrten Vektors. Die Vektoren $-\frac{\gamma m}{r^2}$ sind im Bild durch fettgedruckte Pfeile dargestellt.

Durch Addition der im Bild dargestellten Vektoren erhalten wir das, was uns interessiert: die infolge des Mondeinflusses eintretende Änderung der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche.

Am mondnächsten Punkt ist die resultierende zusätzliche Beschleunigung gleich:

$$\gamma \frac{m}{(r-R)^2} - \gamma \frac{m}{r^2};$$

sie ist auf den Mond gerichtet. Die Erdschwere nimmt ab, ein Körper am Punkt A wird somit leichter, als er es bei Abwesenheit des Mondes wäre.

Berücksichtigt man, daß R sehr viel kleiner als r ist, so kann man die oben angegebene Formel vereinfachen. Bringt man sie auf einen gemeinsamen Nenner, dann erhält man:

$$\frac{\gamma m R\,(2r-R)}{r^2\,(r-R)^2}\,.$$

Vernachlässigt man in den Klammern die verhältnismäßig kleine Größe R, die von den bedeutend größeren Größen r bzw. $2r$ subtrahiert wird, so ergibt sich

$$\frac{2\gamma m R}{r^3}\,.$$

Nun begeben wir uns zu den Antipoden. Im Punkt B ist die vom Mond verursachte Beschleunigung nicht größer, sondern kleiner als die Gesamtbeschleunigung der Erde. Allerdings befinden wir uns jetzt auf der mondfernen Seite des Erdballs. Die Verminderung der Anziehungskraft durch den Mond führt auf dieser Seite des Erdballs zum gleichen Ergebnis wie die Vergrößerung der Anziehung im Punkt A, nämlich zur Verminderung der Fallbeschleunigung. Das Ergebnis ist unerwartet: Der Körper wird auch hier unter dem Einfluß des Mondes leichter.

Die Differenz

$$\gamma\,\frac{m}{(r+R)^2}-\gamma\,\frac{m}{r^2}\approx-\frac{2\gamma m R}{r^3}$$

ist nach dem Absolutbetrag ebensogroß wie im Punkt A.

Anders liegen die Dinge auf der Mittellinie. Hier schließen die Beschleunigungen einen Winkel miteinander ein, und die Subtraktion der Gesamtbeschleunigung der Erde durch den Mond $\frac{\gamma m}{r^2}$ und die Beschleunigung eines auf der Erde liegenden Gegenstandes durch den Mond $\frac{\gamma m}{r_1^2}$ muß geometrisch erfolgen (Bild 6.12.). Wir entfernen uns nur ganz geringfügig von der Mittellinie, wenn wir den Körper auf der Erde so anordnen, daß r_1

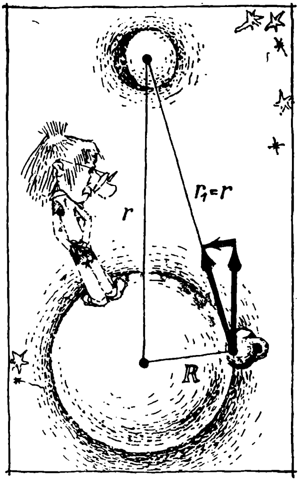


Bild 6.12.

und r den gleichen Betrag haben. Die vektorielle Differenz der Beschleunigungen bildet die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks. Aus der Ähnlichkeit der in Bild 6.12. dargestellten Dreiecke ist zu erkennen, daß die gesuchte Beschleunigung im gleichen Verhältnis kleiner als $\frac{\gamma m}{r^2}$ ist wie R kleiner als r ist. Demzufolge ist die gesuchte Ergänzung zu g auf der Mittellinie der Erdoberfläche gleich

$$\frac{\gamma m R}{r^3}.$$

Zahlenmäßig ist dies die Hälfte der Schwächung der Erdanziehungskraft an den Grenzpunkten. Was nun die Richtung dieser Zusatzbeschleunigung betrifft, so fällt sie, wie aus der Zeichnung ersichtlich, hier praktisch mit der Vertikalen am betreffenden Punkt der Erdoberfläche zusammen. Die Beschleunigung ist nach unten gerichtet und führt zur Vergrößerung der Gewichtskraft.

Der Einfluß des Mondes auf die irdische Mechanik besteht also in einer Änderung der Gewichtskraft der auf der Erdoberfläche befindlichen Körper. Dabei nimmt die Gewichtskraft am mondnächsten und am mondfernsten Punkt ab, während sie auf der Mittellinie zunimmt, und im letztgenannten Fall ist die Gewichtsänderung nur halb so groß wie im erstgenannten.

Natürlich sind die hier angestellten Überlegungen für jeden Planeten, für die Sonne und für die Sterne zutreffend.

Wie man leicht nachrechnen kann, liefern sowohl die Planeten als auch die Sterne nur einen verschwindenden Bruchteil der lunaren Beschleunigung.

Die Wirkung eines beliebigen Himmelskörpers mit der des Mondes zu vergleichen ist ganz einfach: Man muß die Zusatzbeschleunigungen dieses Körpers durch die „Mondzugabe“ dividieren:

$$\frac{\gamma m R}{r^3} : \frac{\gamma m_{\text{Mond}} R}{r^3_{\text{Mond}}} = \frac{m}{m_{\text{Mond}}} \cdot \frac{r^3_{\text{Mond}}}{r^3} .$$

Dieses Verhältnis ist nur für die Sonne nicht viel kleiner als Eins. Die Sonne ist zwar viel weiter von uns entfernt als der Mond, doch dafür ist die Sonnenmasse auch einige Dutzend Millionen Mal größer als die Mondmasse.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte finden wir, daß die Änderung der Erdschwere unter dem Einfluß des Mondes das 2,17fache dieser Änderung durch den Einfluß der Sonne beträgt.

Nun schätzen wir ab, um wieviel sich die Gewichtskraft von Körpern auf der Erde ändert, wenn der Mond seine Bahn um die Erde verließe. Durch Einsetzen der Zahlenwerte in den Ausdruck $\frac{2\gamma m R}{r^3}$ finden wir, daß die lunare Beschleunigung der Größenordnung

0,0001 cm/s^2 liegt, d. h., einem Zehnmillionstel Gramm entspricht.

So gut wie nichts, könnte man denken. Hat es sich denn eines so verschwindend geringen Effekts wegen gelohnt, die Lösung einer recht komplizierten Aufgabe der Mechanik mit Anstrengung zu verfolgen? Bitte ziehen Sie keinen voreiligen Schluß. Dieser „verschwindend geringe" Effekt ist die Ursache von Ebbe und Flut. Er erzeugt alle 24 Stunden 10^{15} J kinetische Energie durch Bewegung riesiger Wassermassen. Dieser Energiebetrag entspricht der Energie aller Flüsse des Erdballs.

Gewiß, prozentual ist die berechnete Änderung sehr klein. Ein Körper, der um einen ebenso „verschwindend geringen" Betrag leichter wird, entfernt sich vom Erdmittelpunkt. Der Erdradius beträgt allerdings 6 000 000 m, und die verschwindend geringe Abweichung macht dann bereits einige Dutzend Zentimeter aus.

Angenommen, der Mond würde seine Bewegung relativ zur Erde unterbrechen und irgendwo über dem Ozean scheinen. Die Berechnung zeigt, daß der Wasserspiegel an dieser Stelle um 54 cm steigen müßte. Der gleiche Anstieg wäre an den Antipoden festzustellen. Auf der Mittellinie zwischen diesen beiden Grenzpunkten müßte der Meeresspiegel um 27 cm sinken.

Weil sich die Erde um ihre eigene Achse dreht, verlagern sich die Hebungen und Senkungen des Ozeans ständig. So kommen die Gezeiten zustande. Im Verlauf von etwa sechs Stunden steigt der Wasserspiegel, und es kommt zur Flut. Danach beginnt die Ebbe, die ebenfalls sechs Stunden dauert. Im Verlauf eines jeden Mondtages tritt zweimal eine Flut und zweimal eine Ebbe ein. Das Bild der Gezeiten gestaltet sich infolge der Reibung zwischen den Wasserpartikeln sowie wegen der Gestalt des Meeresbodens und der Küstenlinie sehr kompliziert.

Im Kaspisee sind Ebbe und Flut einfach deshalb unmöglich, weil sich die Gesamtoberfläche dieses Sees stets gleichzeitig unter gleichen Bedingungen befindet.

Auch in Binnenmeeren, die nur durch lange, schmale Meerengen mit dem Ozean verbunden sind, lassen sich keine Gezeiten beobachten (dies gilt z. B. für das Schwarze Meer und die Ostsee).

Besonders starke Fluten treten in schmalen Buchten auf, wo die aus dem Ozean kommende Flutwelle eine große Höhe erreicht. In der Gishiga-Mündung am Ochotskischen Meer erreicht die Fluthöhe beispielsweise einige Meter.

Ist das Küstengebiet dagegen hinreichend flach (beispielsweise in Frankreich), so kann der Anstieg des Wassers während der Flut die Lage der Grenze zwischen Land und Meer um viele Kilometer verschieben.

Die Gezeitenerscheinungen behindern die Erde bei ihrer Drehung. Die Bewegung der Gezeitenwellen ist ja mit Reibung verbunden. Zur Überwindung dieser Reibung — sie wird als Gezeitenreibung bezeichnet — muß Arbeit aufgewendet werden. Daher nimmt die Rotationsenergie ab und mit ihr die Drehgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse.

Diese Erscheinung führt auch zur Verlängerung des Tages, wovon auf Seite 15 die Rede war.

Die Gezeitenreibung macht auch verständlich, warum der Mond unserer Erde immer dieselbe Seite zeigt.

Irgendwann einmal war der Mond wahrscheinlich flüssig. Die Drehung dieser flüssigen Kugel um die Erde hatte eine sehr starke Gezeitenreibung zur Folge, die die Drehbewegung des Mondes um seine Achse allmählich verlangsamte. Schließlich hörte die Eigendrehung des Mondes relativ zur Erde auf, es gab auf dem Mond keine Gezeiten mehr, und zugleich entzog der Mond die eine Hälfte seiner Oberfläche unserem Blick.

7. Druck

Die hydraulische Presse

Die hydraulische Presse ist eine sehr alte Maschine, die ihre Bedeutung jedoch bis in unsere Tage bewahrt hat.

Sehen Sie sich einmal die in Bild 7.1. dargestellte hydraulische Presse an. In einem offenen wassergefüllten Gefäß befinden sich zwei bewegliche Kolben: ein kleiner und ein großer. Drückt man den einen Kolben mit der Hand nieder, dann wird der Druck auf den anderen Kolben übertragen, und dieser steigt nach oben. Soviel Wasser der eine Kolben ins Innere des Gefäßes drückt, soviel Wasser steigt auch über die ursprüngliche Marke des zweiten Kolbens.

Bezeichnet man die Kolbenflächen mit A_1 bzw. A_2 und die Verschiebungen der Kolben mit l_1 bzw. l_2, dann liefert die Volumengleichung: $A_1 l_1 = A_2 l_2$ oder

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Wir müssen nun die Gleichgewichtsbedingungen für die Kolben in Erfahrung bringen.

Das ist nicht schwer, wenn man daran denkt, daß die Arbeit der im Gleichgewicht stehenden Kräfte gleich Null sein muß. Also müssen die Arbeiten der an den Kolben angreifenden Kräfte der Lageänderung der Kolben gleich sein (aber unterschiedliche Vorzeichen haben).

Demnach gilt

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \text{ oder } \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}.$$

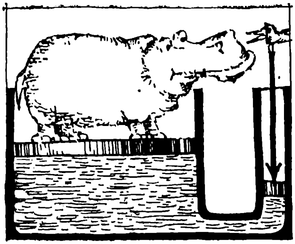


Bild 7.1.

Aus dem Vergleich mit der vorangehenden Gleichung erkennen wir, daß

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

ist.

Diese unscheinbare Gleichung eröffnet die Möglichkeit einer ungeheuren Kräftevervielfachung. Der Kolben, der den Druck überträgt, kann eine 100- oder 1000fach kleinere Fläche besitzen. Die auf den großen Kolben wirkende Kraft wird sich dabei um den gleichen Faktor von der Muskelkraft unterscheiden.

Mittels hydraulischer Pressen kann man Metalle schmieden und pressen, Weintrauben keltern und Lasten heben.

Natürlich muß man für den Kraftgewinn einen längeren Weg in Kauf nehmen. Um einen Körper unter der Presse um 1 cm zusammenzudrücken, muß die Hand einen Weg zurücklegen, der soviel größer ist, wie sich die Kräfte F_2 und F_1 voneinander unterscheiden.

Das Verhältnis $\frac{F}{A}$ bezeichnen die Physiker als Druck (und verwenden dafür den Buchstaben p). Statt zu sagen: Die Kraft 1 N wirkt auf die Fläche 1 m², werden wir einfach vom Druck $p = 1$ Pa sprechen.

Statt des Verhältnisses $\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$ können wir jetzt schreiben:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}, \text{ d. h., } p_1 = p_2.$$

Der Druck an beiden Kolben ist gleich.

Unsere Überlegung ist unabhängig davon, wo die Kolben angeordnet sind und ob ihre Oberflächen waagerecht, senkrecht oder geneigt sind. Es geht ja auch gar nicht um die Kolben. Wir können in Gedanken zwei beliebige Abschnitte einer Fläche wählen, die eine Flüssigkeit umschließt, und sagen, daß der Druck an dieser Fläche überall gleich ist.

So stellt sich heraus, daß der Druck im Inneren einer Flüssigkeit an allen Punkten und in allen Richtungen gleich ist. Anders ausgedrückt: Auf eine Fläche bestimmter Größe wirkt stets die gleiche Kraft, wo und wie diese Fläche auch immer angeordnet ist. Diese Feststellung wird als Pascalsches Gesetz bezeichnet.

Hydrostatischer Druck

Das Pascalsche Gesetz gilt für Flüssigkeiten und Gase. Einen wichtigen Umstand berücksichtigt es allerdings nicht: die Existenz der Gewichtskraft.

Unter irdischen Bedingungen darf man das nicht vergessen. Auch Wasser erzeugt, Gewichtskraft! Darum werden zwei in unterschiedlicher Tiefe im Wasser befindliche Flächen unterschiedlichen Drücken ausgesetzt sein. Wie groß ist der Unterschied? Stellen wir uns einen geraden Zylinder mit waagerechten Deckflächen in einer Flüssigkeit vor, die im Zylinderinneren befindliche Flüssigkeit drückt auf die Flüssigkeit der Umgebung. Die Gesamtkraft dieses Drucks ist gleich dem Wert mg der Flüssigkeit im Zylinder (Bild 7.2.). Diese Gesamtkraft setzt

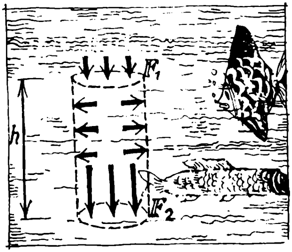


Bild 7.2.

sich aus den Kräften zusammen, die auf den Boden des Zylinders und auf seine Seitenfläche drücken. Die Kräfte jedoch, die auf die gegenüberliegenden Seiten der Mantelfläche wirken, sind sich im Betrag gleich und in der Richtung entgegengesetzt. Darum ist die Summe aller auf den Mantel wirkenden Kräfte gleich Null. Die Gewichtskraft mg ist gleich der Kraftdifferenz $F_2 - F_1$. Ist die Höhe des Zylinders gleich h, die Bodenfläche gleich A und die Dichte der Flüssigkeit gleich ρ, dann kann man statt mg auch ρghA schreiben. Diese Größe ist gleich der Kraftdifferenz. Um die Druckdifferenz zu erhalten, muß die Gewichtskraft durch die Fläche A dividiert werden. Die Druckdifferenz ist gleich ρgh.

Nach dem Pascalschen Gesetz ist der Druck an verschieden ausgerichteten, aber in der gleichen Tiefe befindlichen Flächen gleich. Die Druckdifferenz zwischen zwei Punkten in einer Flüssigkeit, von denen sich der eine in der Höhe h oberhalb des anderen Punkts befindet, ist demnach gleich der Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule mit dem Querschnitt Eins und der Höhe h:

$$p_2 - p_1 = \rho gh.$$

Der durch die Schwere des Wassers verursachte Druck heißt hydrostatischer Druck.

Auf der freien Oberfläche einer Flüssigkeit lastet unter irdischen Bedingungen meist die Luft. Der Luftdruck

Bild 7.3.

heißt atmosphärischer Druck. Der unter Wasser herrschende Druck setzt sich aus dem atmosphärischen Druck und dem hydrostatischen Druck zusammen.

Um die Druckkraft von Wasser zu berechnen, muß man die Größe der Fläche kennen, an der die Druckkraft angreift, sowie die Höhe der Flüssigkeitssäule über dieser Fläche. Alles andere spielt auf Grund des Pascalschen Gesetzes keine Rolle.

Das könnte seltsam anmuten. Ist die Kraft, die auf die gleich großen Bodenflächen der beiden in Bild 7.3. dargestellten Gefäße wirkt, wirklich gleich? Im linken Gefäß ist doch viel mehr Wasser. Dessenungeachtet sind die auf den Boden wirkenden Kräfte in beiden Fällen gleich ρghA. Das ist mehr als die Gewichtskraft des Wassers im rechten Gefäß und weniger als im linken Gefäß. Im linken Gefäß übernehmen die Wandungen der Gewichtskraft des „überflüssigen" Wassers, während sie rechts gerade umgekehrt Reaktionskräfte zur Gewichtskraft des Wassers ergänzen. Dieser Vorgang wird gelegentlich als hydrostatisches Paradoxon bezeichnet.

Steht Wasser in zwei Gefäßen unterschiedlicher Form gleich hoch und verbindet man beide durch ein Rohr, dann fließt kein Wasser aus dem einen Gefäß ins andere. Das könnte nur dann geschehen, wenn der Druck in den Gefäßen unterschiedlich wäre. Da dies aber nicht der Fall ist, steht die Flüssigkeit in kommunizierenden Gefäßen unabhängig von deren Form stets in ein und derselben Höhe.

Sind die Wasserstände in kommunizierenden Gefäßen dagegen verschieden, dann fließt das Wasser so lange aus einem Gefäß in das andere, bis der Unterschied ausgeglichen ist. Der Wasserdruck ist viel größer als der Luftdruck. In 10 m Tiefe ist der Wasserdruck doppelt so groß wie der Atmosphärendruck, und in 1 km Tiefe beträgt er 10 MPa).

Der Ozean ist an einigen Stellen über 10 km tief. Die Druckkräfte des Wassers sind in solchen Tiefen außerordentlich groß. Holzstücke, die auf 5 km Tiefe hinuntergelassen werden, verdichten sich so sehr, daß sie nach dieser „Taufe" in einem Wasserfaß untergehen wie Ziegelsteine.

Dieser ungeheure Druck ist bei der Erforschung des Lebens im Meer sehr hinderlich. Beim Tieftauchen erfolgt der Abstieg in Stahlkugeln, sogenannten Bathysphären oder Bathyskaphen, die einem Druck von über 100 MPa standhalten müssen.

Der Atmosphärendruck

Wir leben am Boden des Luftozeans, der Atmosphäre. Jeder Körper, jedes Sandkorn, überhaupt jeder Gegenstand, der sich auf der Erde befindet, ist dem Luftdruck ausgesetzt.

Der Atmosphärendruck ist gar nicht so gering. Auf jeden Quadratzentimeter Körperoberfläche wirkt eine Kraft von etwa 10 N.

Die Ursache des Atmosphärendrucks ist offenkundig. Wie das Wasser hat auch die Luft eine Gewichtskraft

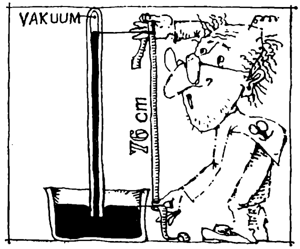


Bild 7.4.

und verursacht daher einen Druck, der gleich der Gewichtskraft der Luftsäule ist, die sich über dem Körper befindet. Je höher wir ins Gebirge hinaufsteigen, um so weniger Luft haben wir dann noch über uns, und um so kleiner wird auch der Atmosphärendruck.

Für wissenschaftliche und praktische Zwecke muß man diesen Druck messen können. Dafür gibt es spezielle Geräte, die Barometer.

Die Herstellung eines Barometers ist simpel. Man füllt ein einseitig geschlossenes Rohr mit Quecksilber, verschließt das offene Ende mit dem Finger, dreht das Rohr um und taucht es nun mit dem offenen Ende in eine Schale mit Quecksilber. Dabei senkt sich das Quecksilber im Rohr, läuft aber nicht aus. Der im Rohr über dem Quecksilber entstehende Raum ist ohne Zweifel luftleer. Das Quecksilber wird durch den äußeren Luftdruck auf seinem Stand im Rohr gehalten (Bild 7.4.).

Gleichgültig, wie groß wir das Schälchen mit dem Quecksilber wählen oder welchen Durchmesser das Rohr hat, die Höhe der Quecksilbersäule beträgt stets etwa 76 cm.

Ist das Rohr dagegen kürzer als 76 cm, dann bleibt es vollständig mit Quecksilber gefüllt; es bildet sich kein leerer Raum über dem Quecksilber aus. Eine Quecksilbersäule von 76 cm Höhe drückt mit der gleichen Kraft auf ihre Unterlage wie die Atmosphäre. Bei einer Grundfläche von 1 cm^2 beträgt diese Kraft 10,33 N. Diese Zahl ergibt sich aus dem Quecksilbervolumen 1×76 cm^3 multipliziert mit der Dichte des Quecksilbers und der Fallbeschleunigung.

Wie Sie sehen, entspricht der mittlere, oder wie man auch sagt, normale Atmosphärendruck, dem jeder Erdbewohner ausgesetzt ist, ungefähr dem Druck, der entsteht, wenn man auf 1 cm^2 Fläche ein Wägestück der Masse 1 kg stellt.

Bei der Druckmessung bedient man sich verschiedener Einheiten. Oft wird einfach nur die Höhe der Quecksilbersäule in Millimetern angegeben. So sagt man, daß der Druck heute z. B. über normal liegt und 760 mm Hg-Säule beträgt.

Gelegentlich bezeichnet man einen Druck von 760 mm Hg-Säule als physikalische Atmosphäre (atm). Da sich die physikalische und die technische Atmosphäre nur wenig voneinander unterscheiden, wollen wir im folgenden nicht besonders erwähnen, von welcher Atmosphäre die Rede ist. Physiker benutzen oft auch die Druckeinheit bar (1 bar $= 1 \cdot 10^5$ Pa). Der normale Atmosphärendruck beträgt ungefähr 1013 Millibar.

Im SI gilt die Druckeinheit Pascal (Pa); sie ist definiert als die Wirkung der Kraft 1 N auf die Fläche 1 m^2. Das ist ein sehr geringer Druck, was man schon daran erkennt, daß 1 Pa = 1 $N/m^2 = 10^{-5}$ bar.

Berechnen wir die Erdoberfläche nach der Formel $4\pi R^2$, so finden wir, daß die Gewichtskraft der Atmosphäre insgesamt durch die ungeheuer große Zahl $5 \cdot 10^{19}$ N angegeben werden muß.

Man kann dem Barometerrohr die unterschiedlichsten Formen geben, wichtig ist nur eins: Ein Ende des Rohres muß so verschlossen sein, daß sich über der Quecksilberoberfläche keine Luft befindet. Der andere Quecksilberspiegel dagegen muß unter Atmosphärendruck stehen.

Mit dem Quecksilberbarometer kann der Atmosphärendruck sehr genau gemessen werden. Natürlich braucht man nicht unbedingt Quecksilber zu nehmen; auch jede andere Flüssigkeit ist geeignet. Allerdings ist Quecksilber die schwerste Flüssigkeit, so daß eine Quecksilbersäule bei Normaldruck im Verhältnis die geringste Höhe hat.

Ein sehr bequemes Gerät ist das Quecksilberbarometer nicht. Da Quecksilberdämpfe giftig sind, sollte man die Quecksilberoberfläche nicht unbedeckt lassen, und außerdem läßt sich das Gerät schlecht transportieren.

Metallbarometer, sogenannte Aneroidbarometer (d.h. luftleere Barometer) haben diese Mängel nicht. Ein Barometer dieser Art haben Sie alle schon gesehen. Es ist eine kleine runde Metalldose mit einer Skala und einem Zeiger. Auf der Skala sind die Druckwerte aufgetragen.

Die Metalldose wurde luftleer gepumpt. Der Dosendeckel wird durch eine starke Feder unterstützt, da er sonst vom Luftdruck eingedrückt würde. Bei Druckänderungen wölbt sich der Deckel nach innen oder nach außen. Der Zeiger ist so mit dem Deckel verbunden, daß die Wölbung des Deckels nach innen den Zeiger nach rechts auslenkt.

Die Eichung dieses Barometers erfolgt durch Vergleich mit der Anzeige eines Quecksilberbarometers. Vergessen Sie vor dem Druckablesen nicht, mit dem Finger an das Barometer zu klopfen. Der Zeiger ist starker Reibung ausgesetzt und bleibt gewöhnlich beim „Wetter von gestern“ hängen.

Auf dem Atmosphärendruck beruht eine einfache Vorrichtung, der Saugheber.

Sie möchten jemandem helfen, der kein Benzin mehr hat, und stehen vor der Frage, wie Sie Benzin aus dem Tank des eigenen Fahrzeugs entnehmen sollen. Schließ-

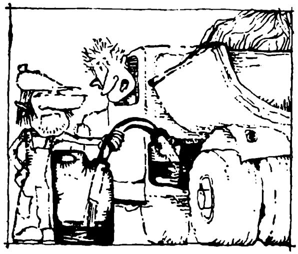


Bild 7.5.

lich kann man ein Auto nicht wie einen Wasserkessel ankippen.

Hier hilft ein Schlauch. Man steckt ein Ende des Schlauches in den Tank und saugt am anderen Ende mit dem Mund die Luft heraus. Dann drückt man das offene Ende schnell mit den Fingern zusammen und bringt es in eine Höhe unterhalb des Tanks. Jetzt kann man wieder loslassen, und das Benzin fließt von selbst aus dem Schlauch (siehe Bild 7.5.).

Der gebogene Schlauch ist nichts anderes als ein Saugheber. Die Flüssigkeit bewegt sich darin wie in einem geraden geneigten Rohr. In beiden Fällen fließt die Flüssigkeit im Endeffekt nach unten.

Damit ein Saugheber funktioniert, muß der Atmosphärendruck vorhanden sein: Er „stützt" die Flüssigkeit und läßt die Flüssigkeitssäule im Rohr nicht abreißen. Wäre kein Atmosphärendruck vorhanden, dann würde die Säule am höchsten Punkt des Schlauches auseinanderreißen, und die Flüssigkeit würde in beide Gefäße ablaufen.

Der Saugheber beginnt seine Arbeit, sobald die Flüssigkeit an der Auslaufseite des Schlauches unter den Spiegel der zu fördernden Flüssigkeit gelangt, in der das andere Ende des Schlauches steckt. Im gegenteiligen Fall läuft die Flüssigkeit zurück.

Wie man vom Atmosphärendruck erfuhr

Bereits die alten Zivilisationen kannten Saugpumpen. Mit ihrer Hilfe konnte Wasser auf eine beträchtliche Höhe gefördert werden. Das Wasser zeigte einen erstaunlichen Gehorsam und folgte den Kolben solcher Pumpen.

Die Philosophen des Altertums dachten über die Ursache dieser Erscheinung nach und kamen zu diesem tiefsinnigen Schluß: Das Wasser folgt dem Kolben, weil die Natur den leeren Raum fürchtet, und deshalb bleibt zwischen dem Kolben und dem Wasser kein freier Raum bestehen.

Es heißt, ein Meister habe für die Gärten des Herzogs von Toscana in Florenz eine Saugpumpe gebaut, deren Kolben das Wasser mehr als 10 m hoch ziehen sollte. Doch, wie man sich auch abmühte, mit dieser Pumpe Wasser anzusaugen, alles war vergebens. Bis zur Höhe von 10 m folgte das Wasser dem Kolben, doch dann löste sich der Kolben vom Wasser, und es entstand genau jene Leere, die die Natur fürchtet.

Als man Galilei nach einer Erklärung für den Mißerfolg fragte, antwortete dieser, daß die Natur wirklich keine Sympathie für die Leere empfindet, jedoch nur bis zu einer bestimmten Grenze. Galileis Schüler Evangelista Torricelli nahm diesen Vorfall offenbar zum Anlaß, 1643 seinen berühmten Versuch mit dem quecksilbergefüllten Rohr zu unternehmen. Diesen Versuch haben wir vorhin beschrieben, denn in der Herstellung eines Quecksilberbarometers bestand ja gerade Torricellis Versuch.

Unter Verwendung eines Rohres über 76 cm Höhe erzeugte Torricelli Leere über dem Quecksilber (die zu seiner Ehre oft als Torricellische Leere bezeichnet wird) und bewies so die Existenz des Atmosphärendrucks.

Torricelli erklärte damit auch das, was jener Meister des Herzogs von Toscana nicht verstehen konnte. Nun war ja klar, wie viele Meter das Wasser dem Kolben der Saugpumpe gehorsam folgen würde.

Seine Bewegung mußte genau so lange anhalten, bis eine Wassersäule von 1 cm^2 Querschnitt die Gewichtskraft 10 N erzeugt. Diese Wassersäule ist 10 m hoch. Darum also fürchtete die Natur die Leere ... Aber doch nicht weiter als bis zu einer Höhe von 10 m.

1654, elf Jahre nach Torricellis Entdeckung, wurde die Wirkung des Atmosphärendrucks durch den Bürgermeister von Magdeburg, Otto von Guericke, anschaulich vorgeführt. Bekannt wurde der Versuch vor allem durch die effektvolle Vorführung.

Zwei kupferne Halbkugeln, verbunden durch eine ringförmige Dichtung, bildeten eine Kugel. Durch einen Hahn, der sich in einer der Halbkugeln befand, wurde die Luft aus der Kugel herausgepumpt. Danach konnten die Halbkugeln nicht mehr voneinander getrennt werden. Da eine ausführliche Beschreibung des Guerickeschen Versuchs erhalten geblieben ist, können wir den Druck, den die Atmosphäre auf die Halbkugeln ausübte, heute berechnen: Bei einem Kugeldurchmesser von 37 cm entsprach diese Kraft etwa 10 000 N. Um die Halbkugeln zu trennen, befahl Guericke, zweimal acht Pferde einzuspannen. Zu diesem Zweck hatte man durch die an den Halbkugeln befestigten Ringe Seile geführt und mit dem Geschirr der Pferde verbunden. Die Pferde konnten die Halbkugeln nicht auseinanderreißen.

Die Kraft von acht Pferden (in der Tat acht und nicht sechzehn, denn die anderen acht Pferde, die man zur Erhöhung des Effekts eingespannt hatte, hätten auch durch einen in einer Wand befestigten Haken ersetzt werden können, wobei die an den Halbkugeln angreifende Kraft unverändert geblieben wäre), reichte zum Auseinanderreißen der Magdeburger Halbkugeln nicht aus.

Besteht zwischen zwei einander berührenden Körpern ein leerer Hohlraum, dann fallen diese beiden Körper wegen des Luftdrucks nicht auseinander.

Der Luftdruck und das Wetter

Wetterbedingte Luftdruckschwankungen zeigen einen sehr unregelmäßigen Charakter. Früher glaubte man sogar, daß nur der Druck das Wetter bestimmt. Deshalb versieht man Barometer auch heute noch mit Aufschriften wie: „Schön, trocken, Regen, Sturm“. Selbst die Aufschrift „Erdbeben“ kommt vor.

Die Änderung des Drucks spielt tatsächlich eine große Rolle bei Wetteränderungen. Sie ist jedoch nicht entscheidend. Der mittlere oder auch normale Druck in Meereshöhe beträgt 1013 Millibar. Die Druckschwankungen sind relativ klein. Der Druck sinkt selten unter 935 bis 940 Millibar und steigt auf etwa 1055 bis 1060 Millibar.

Der niedrigste Druck wurde am 18. August 1927 im Chinesischen Meer mit 885 Millibar beobachtet, der höchste mit etwa 1080 Millibar am 23. Januar 1900 in Sibirien auf der Station Barnaul (alle Zahlen sind auf Meereshöhe bezogen).

In Bild 7.6. ist eine Karte dargestellt, wie sie Meteorologen zur Analyse von Wetteränderungen benutzen. Die auf der Karte eingezeichneten Linien heißen Isobaren. Im Verlauf jeder derartigen Linie ist der Druck konstant (sein Wert wird durch eine Zahl angegeben). Beachten Sie bitte die Gebiete mit besonders niedrigem und besonders hohem Druck, gewissermaßen „Druckgipfel“ und „Drucklöcher“.

Mit der Luftdruckverteilung stehen Windrichtung und -stärke in Zusammenhang.

Der Druck ist an den verschiedenen Orten der Erdoberfläche unterschiedlich, und stärkerer Druck „preßt“

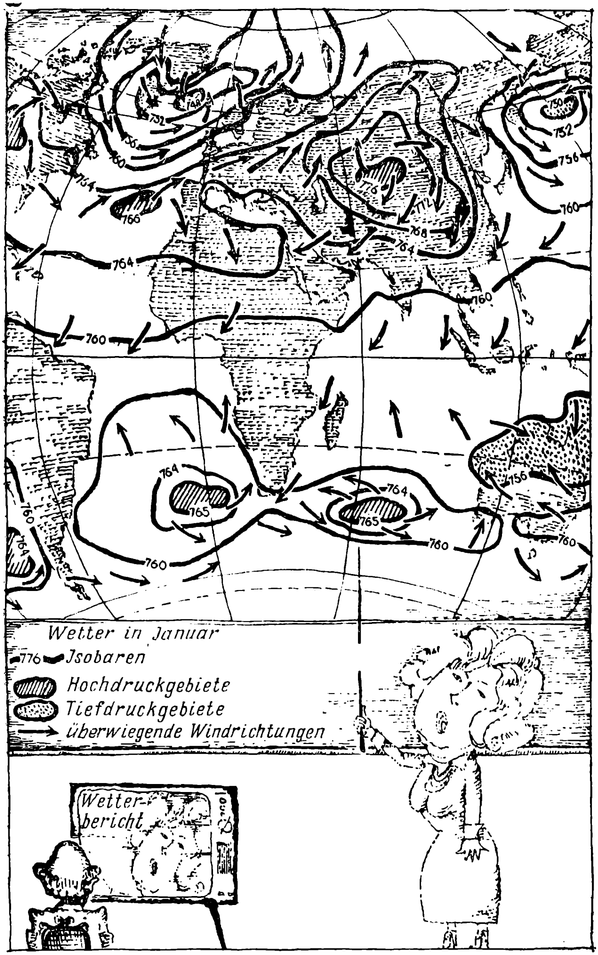

Wetter in Januar
776 Jsobaren
Hochdruckgebiete
Tiefdruckgebiete
überwiegende Windrichtungen
Wetter-
bericht

Bild 7.6.

die Luft in Gegenden mit geringerem Druck. Man könnte daher denken, der Wind müsse stets senkrecht zum Isobarenverlauf, d. h. dorthin wehen, wo der Druck am raschesten fällt. Die Windkarten zeigen freilich ein anderes Bild. Hier mischt sich nämlich die Corioliskraft in die „Angelegenheiten" des Luftdrucks ein und verursacht eine sehr bedeutende Korrektur.

Wie wir wissen, greift die Corioliskraft an jedem auf der nördlichen Halbkugel in Bewegung befindlichen Körper so an, daß die Bewegung nach rechts ausgelenkt wird. Dies gilt auch für die Luftpartikeln. Luft, die von Orten mit hohem Druck zu Orten geringeren Drucks gepreßt wird, müßte sich quer zum Isobarenverlauf bewegen, doch wird sie von der Corioliskraft nach rechts abgelenkt, und so schließt die Windrichtung einen Winkel von ungefähr 45° mit der Isobarenrichtung ein.

Für eine derart kleine Kraft ein verblüffend großer Effekt. Er erklärt sich daraus, daß auch die Reibung der Luftschichten, die die Wirkung der Corioliskraft beeinträchtigt, ganz geringfügig ist.

Noch größeres Interesse verdient der Einfluß der Corioliskraft auf die Windrichtung in den „Druckspitzen" und „Drucklöchern". Die Luft fließt wegen der Corioliskraft nicht radial nach allen Richtungen von den „Druckspitzen" ab, sondern bewegt sich spiralförmig. Diese spiralförmigen Luftströme haben stets ein und dieselbe Drehrichtung und erzeugen im Hochdruckbereich einen kreisförmigen Wirbel, der die Luftmassen im Uhrzeigersinn transportiert. Das Bild 2.16. zeigt deutlich, wie sich eine Radialbewegung unter dem Einfluß einer konstanten Ablenkungskraft in eine spiralförmige Bewegung verwandelt.

Das gleiche geschieht auch in Tiefdruckgebieten. Gäbe es die Corioliskraft nicht, dann müßte die Luft radial und gleichförmig in diesen Gebieten zusammenströmen. Auch diese Luftmassen werden unterwegs nach rechts abgelenkt. Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, entsteht dabei ein kreisförmiger Wirbel, der die Luft im Gegenuhrzeigersinn bewegt.

Die Winde in einem Tiefdruckgebiet heißen Zyklone, in einem Hochdruckgebiet dagegen Antizyklone.

Freilich bedeutet nicht jeder Zyklon einen Sturm oder gar Orkan. Daß die Stadt, in der wir wohnen, von Zyklonen oder Antizyklonen passiert wird, ist eine gewöhnliche, wenn auch meist mit wechselhaftem Wetter in Zusammenhang stehende Erscheinung. In vielen Fällen bedeutet die Annäherung eines Zyklons schlechtes, die Annäherung eines Antizyklons dagegen gutes Wetter.

Damit soll es genug sein; wir wollen den „Wetterpropheten" nicht ins Handwerk pfuschen.

Die Änderung des Luftdrucks mit der Höhe

Mit zunehmender Höhe sinkt der Luftdruck. Erstmals wurde dies 1648 durch den Franzosen Périer im Auftrag Pascals festgestellt.

Périer lebte in der Nähe des 975 m hohen Berges Puy-de-Dôme. Die Messungen ergaben, daß das Quecksilber im Torricelli-Barometer während des Aufstiegs zum Gipfel um 8 mm sank.

Die Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe ist ganz natürlich, denn in der Höhe lastet eine kürzere Luftsäule auf dem Barometer.

Der Druck fällt also mit wachsender Höhe; wir wollen die Formel für diese Beziehung ermitteln. Zu diesem Zweck stellen wir uns eine Luftschicht mit der Grundfläche 1 cm^2 vor, die zwischen den Höhen h_1 und h_2 liegt. In einer nicht sehr dicken Schicht ist die Änderung der Dichte mit zunehmender Höhe kaum merklich. Deshalb erhalten wir die Gewichtskraft der Luft (also in einem kleinen Zylinder der Höhe $h_2 - h_1$ mit der Grundfläche

1 cm^2) aus folgender Formel:

$$mg = \rho\,(h_2 - h_1)\,g.$$

Diese Gewichtskraft ist es, die den Druckabfall beim Aufstieg von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 ausmacht. Das heißt

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = g\,(h_2 - h_1).$$

Doch nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz (von dem im Band 2 die Rede sein wird) ist die Dichte eines Gases dem Druck proportional.

Deshalb gilt

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} \approx (h_2 - h_1)\,.$$

Links steht der Anteil, um den der Druck beim Abstieg von h_2 nach h_1 gestiegen ist. Gleichen Abstiegen $h_2 - h_1$ wird demzufolge stets ein Druckanstieg in dem gleichen prozentualen Anteil entsprechen.

Messungen und Berechnungen ergeben in völliger Übereinstimmung, daß der Druck beim Aufstieg für jeden Kilometer über Meereshöhe um jeweils 10 % sinkt. Das gleiche gilt auch für den Abstieg in tiefe Schächte: Der Abstieg um jeweils einen Kilometer unter Meereshöhe führt zu einem Druckanstieg um 10 % des Wertes.

Diese 10 % beziehen sich jeweils auf den Druckwert beim vorangegangenen Höhenwert. Steigt man einen Kilometer über Meereshöhe auf, dann verringert sich der Druck auf 90 % seines Wertes in Meereshöhe; beim Aufstieg um einen weiteren Kilometer erhalten wir dann 90 % von 90 % des Drucks in Meereshöhe; in 3 km Höhe schließlich wird der Druck 90 % von 90 % von 90 % des Drucks in Meereshöhe betragen. Diese Überlegung läßt sich ohne Schwierigkeiten fortsetzen.

Bezeichnen wir den Druck in Meereshöhe mit p_0, dann können wir die Formel für den Druck in der Höhe h

(angegeben in Kilometern) wie folgt aufschreiben:

$$p = p_0\,(0{,}87)^h = p_0 \cdot 10^{-0{,}06h}.$$

In der Klammer steht ein genauerer Wert: 90 % (bzw. 0,9) sind gerundet. Die Formel setzt gleiche Temperatur auf allen Höhen voraus. In Wirklichkeit ändert sich die Temperatur mit der Höhe, und zwar recht kompliziert. Trotzdem liefert die obenstehende Formel ganz gute Ergebnisse, und in Höhen bis 100 km kann man sie benutzen.

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich leicht ermitteln, daß der Druck am Gipfel des Elbrus (d. h. in etwa 5,6 km Höhe) etwa auf die Hälfte sinkt, während er in 22 km Höhe (die Rekordmarke für den Aufstieg eines bemannten Luftballons) nur noch 66,6 Millibar beträgt.

Wenn wir 1013 Millibar als Normaldruck bezeichnen, dürfen wir den Zusatz „in Meereshöhe" nicht vergessen. In 5,6 km Höhe beträgt der Normaldruck nicht 1013, sondern 506,5 Millibar.

Mit dem Druck sinkt bei wachsender Höhe nach der gleichen Beziehung auch die Dichte der Luft. In 160 km Höhe ist die Luft schon ziemlich knapp geworden, denn hier gilt

$$(0{,}87)^{160} = 10^{-10}.$$

An der Erdoberfläche beträgt die Dichte der Luft etwa 1000 g/m³; in 160 km Höhe müßten unserer Formel zufolge auf 1 m³ nur 10^{-7} g Luft entfallen. Wie jedoch Messungen mittels Höhenraketen zeigen, ist die Luftdichte in dieser Höhe tatsächlich rund zehnmal so groß.

Eine noch stärkere Verminderung im Vergleich zur ahrheit liefert unsere Formel für Höhen von einigen hundert Kilometern. Daran, daß die Formel für große Höhen unbrauchbar wird, ist die Änderung der Temperatur mit der Höhe schuld sowie eine besondere Erscheinung, nämlich der Zerfall der Luftmoleküle unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung. Wir wollen dies aber hier nicht behandeln.

Das Archimedische Prinzip

Wir hängen ein Wägestück an eine Federwaage. Die Feder dehnt sich und zeigt die Gewichtskraft des Wägestücks an. Ohne das Wägestück von der Federwaage zu nehmen, lassen wir es in Wasser eintauchen. Ändert sich die Anzeige der Waage? Ja, die Körpergewichtskraft nimmt gewissermaßen ab. Macht man den Versuch mit einem eisernen 1-kg-Wägestück, dann beträgt die „Verminderung" der Gewichtskraft ungefähr 1,4 N.

Was ist denn da passiert? Weder die Masse des Wägestücks noch seine Anziehung durch die Erde können sich geändert haben. Es gibt nur eine Ursache für den Gewichtskraftverlust: An dem in Wasser eingetauchten Wägestück greift eine nach oben gerichtete Kraft von 1,4 N an. Woher stammt diese Auftriebskraft, die bereits der große Gelehrte der Antike, Archimedes, entdeckte? Ehe wir einen Festkörper im Wasser betrachten wollen, sehen wir uns einmal „Wasser in Wasser" an. Zu diesem Zweck betrachten wir ein willkürlich gewähltes Wasservolumen. Dieses Wasservolumen besitzt eine Gewichtskraft, sinkt aber nicht auf den Boden des Gefäßes. Warum? Keine Frage: Dies wird durch den hydrostatischen Druck des Umgebungswassers verhindert. Die resultierende Kraft dieses Drucks ist im betrachteten Volumen demnach gleich der Gewichtskraft des Wassers und senkrecht nach oben gerichtet.

Beansprucht man das gleiche Volumen durch einen Festkörper, dann leuchtet ein, daß der hydrostatische Druck unverändert bleibt. Wegen des hydrostatischen Drucks greift deshalb an einem in Flüssigkeit eintauchenden Körper eine Kraft an, die senkrecht nach oben zeigt und zahlenmäßig gleich dem Gewicht des vom Körper verdrängten Wassers ist. Genau dies besagt das Archimedische Prinzip.

Es wird berichtet, Archimedes habe im Bade darüber nachgedacht, ob dem Gold einer Krone möglicherweise Silber beigemischt war. Wer im Bade liegt, empfindet die Auftriebskraft des Wassers ganz deutlich. Und plötzlich erkannte Archimedes das Auftriebsprinzip und sah, wie verblüffend einfach es war. Mit dem Ausruf „Heureka!“ (was soviel bedeutet wie „Ich hab's“) sprang Archimedes aus dem Bad und lief nach der kostbaren Krone, um ihren Gewichtskraftverlust in Wasser zu bestimmen.

Der Gewichtskraftverlust in Wasser ist gleich der Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Wassers. Kennt man die Gewichtskraft des Wassers, dann kann man auch sofort sein Volumen bestimmen, die hier gleich dem Volumen der Krone ist. Kennt man die Gewichtskraft der Krone, so kann man auch die Dichte des Stoffs bestimmen, aus dem sie hergestellt ist, und kennt man schließlich die Dichten von Gold und Silber, kann man den Silberanteil ermitteln.

Das Archimedische Prinzip gilt naturgemäß für alle Flüssigkeiten. Taucht in eine Flüssigkeit die Dichte ϱ ein Körper des Volumens V ein, dann ist die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit — und genau dieses bildet die Auftriebskraft — gleich $\varrho g V$.

Auf dem Archimedischen Prinzip beruht die Wirkung einfacher Geräte zur Kontrolle der Eigenschaften flüssiger Lebensmittel. Verdünnt man Alkohol oder Milch mit Wasser, dann ändert sich ihre Dichte, so daß man anhand der Dichte auf ihre Zusammensetzung schließen kann. Eine entsprechende Messung läßt sich einfach und schnell mit Hilfe des Aräometers (Bild 7.7.) durchführen. Ein Aräometer taucht, wenn man es in der Flüssigkeit schwimmen läßt, abhängig von deren Dichte, mehr oder weniger tief ein.

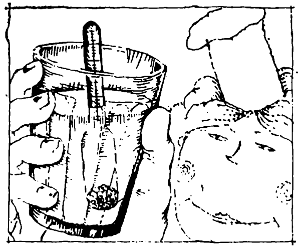


Bild 7.7.

Es erreicht seine Gleichgewichtslage, sobald die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft des Aräometers ist.

Am Aräometer sind Strichmarkierungen angebracht, und die Dichte der untersuchten Flüssigkeit wird an der Marke abgelesen, die sich in Höhe des Flüssigkeitsspiegels befindet. Zur Alkoholprüfung verwendete Aräometer heißen Alkoholometer, während man für die Milchprüfung Laktometer verwendet.

Die mittlere Dichte des menschlichen Körpers ist geringfügig größer als Eins. Wer nicht schwimmen kann, geht in Süßwasser unter. Die Dichte von Salzwasser ist größer als Eins. In den meisten Meeren ist der Salzgehalt unbedeutend und die Dichte des Wassers zwar größer als Eins, aber immer noch kleiner als die mittlere Dichte des menschlichen Körpers. In der Bucht Kara-Bogas-Gol im Kaspisee beträgt die Dichte des Wassers 1,18 g/cm^3. Dieser Wert liegt über der mittleren Dichte des menschlichen Körpers. Man kann im Kara-Bogas-Gol nicht untergehen. Vielmehr kann man sich einfach aufs Wasser legen und ein Buch dabei lesen.

Eis schwimmt auf Wasser. Der Gebrauch von „auf" ist in diesem Fall übrigens nicht ganz angebracht. Da die Dichte von Eis um etwa 10 % geringer als die Dichte von Wasser ist, folgt aus dem Archimedischen Prinzip, daß ein Eisbrocken zu etwa 90 % seines Volumens in Wasser eintaucht. Gerade dieser Umstand macht Eisberge so gefährlich für die Schiffahrt.

Wenn eine Balkenwaage in Luft genau im Gleichgewicht ist, heißt das nicht, daß dies auch im Vakuum der Fall sein muß. Das Archimedische Prinzip gilt für Luft ebenso wie für Wasser. Auf einen in Luft befindlichen Körper wirkt eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft des verdrängten Luftvolumens ist. In Luft „wiegt" ein Körper weniger als im Vakuum. Der Gewichtskraftverlust wird um so größer sein, je größer das Volumen ist. Eine Tonne Holz erleidet einen größeren Gewichtskraftverlust als eine Tonne Blei. Auf die Scherzfrage, was von beiden leichter sei, kann man antworten: Eine Tonne Blei ist schwerer als eine Tonne Holz, wenn die Wägung in Luft erfolgt.

Solange es sich um kleine Körper handelt, ist der Gewichtsverlust in Luft gering. Beim Wägen eines zimmergroßen Brockens würde man jedoch einige Hundert Newton „verlieren". Bei genauen Wägungen muß der Gewichtskraftverlust großer Körper in Luft berücksichtigt werden.

Wegen des Auftriebs der Luft kann man Luftballons oder Luftschiffe bauen. Man braucht dazu ein Gas, das leichter als Luft ist.

Füllt man eine Kugel vom Volumen 1 m^3 mit Wasserstoff (die Gewichtskraft von 1 m^3 Wasserstoff ist gleich 0,9 N), dann beträgt die Tragfähigkeit als Differenz von Auftrieb und Gasgewicht:

$$12{,}9 \text{ N} - 0{,}9 \text{ N} = 12{,}0 \text{ N}.$$

Die Dichte von Luft beträgt 1,29 kg/m^3.

Also kann man eine Last mit der Masse von etwa 1 kg an die Kugel hängen, und sie wird doch zu den Wolken emporsteigen.

Wasserstoffgefüllte Ballons können bereits bei verhältnismäßig geringen Volumina in der Größenordnung einiger hundert Kubikmeter beträchtliche Lasten heben.

Ein ganz wesentlicher Nachteil wasserstoffgefüllter Ballons besteht in der Brennbarkeit des Wasserstoffs. Wasserstoff bildet mit Luft ein explosibles Gemisch. Die Geschichte des Luftballonbaus berichtet von tragischen Unglücksfällen.

Nach der Entdeckung des Heliums begann man daher, Luftballons mit Helium zu füllen. Helium ist doppelt so schwer wie Wasserstoff, und heliumgefüllte Ballons besitzen eine geringere Tragkraft. Ergibt sich daraus ein wesentlicher Unterschied? Die Tragkraft eines heliumgefüllten Ballons von 1 m^3 ergibt sich aus der Differenz 12,9 N — 1,8 N = 11,1 N. Die Tragkraft hat sich also um nur 8 % vermindert. Andererseits sind die Vorzüge von Helium offenkundig.

Der Luftballon war der erste Apparat, mit dessen Hilfe Menschen in die Luft aufstiegen. Zur Erfoschung der oberen Atmosphärenschichten werden Luftballons mit luftdicht geschlossener Gondel auch heute noch verwendet. Man bezeichnet sie als Stratostaten. Stratostaten steigen bis in Höhen über 20 km auf. Mit verschiedenen Meßgeräten ausgestattete Luftballons, die ihre Meßergebnisse über Funk zur Erde senden, werden in großem Umfang eingesetzt (Bild 7.8.). Derartige Ballonsonden enthalten einen batteriegespeisten Kleinstsender, der Angaben über die Feuchtigkeit, die Temperatur und den Druck der Atmosphäre in verschiedenen Höhen übermittelt.

Man kann einen nicht lenkbaren Ballon auf eine weite Reise schicken und doch ziemlich genau ermitteln, wo er landen wird. Dazu muß der Ballon in 20 bis 30 km Höhe aufsteigen. In diesen Höhen sind die Luftströmungen sehr beständig, und man kann den Weg, den der Ballon nehmen wird, recht gut vorausberechnen. Notfalls kann die Tragkraft des Ballons durch Ablassen von Gas oder Abwerfen von Ballast automatisch verändert werden.

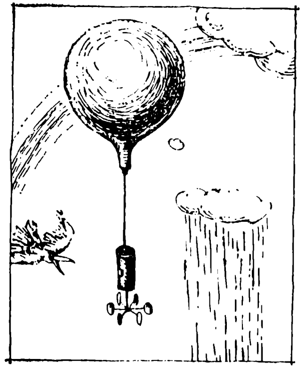


Bild 7.8.

Früher verwendete man auch Luftballons, die mit Motor und Luftschraube ausgestattet waren. Solche Luftballons erhielten Stromlinienform, man bezeichnet sie als Luftschiffe. Im Konkurrenzkampf mit den Flugzeugen unterlagen die Luftschiffe; selbst im Vergleich zu den Flugzeugen vor dreißig oder vierzig Jahren sind Luftschiffe plump, lassen sich schlecht steuern, sind langsam und haben eine geringe „Gipfelhöhe“. Übrigens gibt es die Auffassung, daß Luftschiffe für Frachttransporte auch heute noch bestimmte Vorteile haben könnten.

Extrem kleine Drücke. Vakuum

Ein im technischen Sinn leeres Gefäß enthält noch immer eine riesengroße Anzahl von Molekülen.

In vielen physikalischen Geräten sind Gasmoleküle ein wesentlicher Störfaktor. Ob Röntgenröhren oder Teilchenbeschleuniger — Geräte dieser Art brauchen das Vakuum, d. h. einen von Gasmolekülen freien Raum. **Auch eine gewöhnliche Glühlampe muß Vakuum enthal-**

ten. Gelangt Luft in eine Glühlampe, dann wird ihr Glühfaden oxydiert und brennt augenblicklich durch.

Die besten Vakuum-Bauelemente besitzen ein Vakuum in der Größenordnung $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ Pa. Ein ganz verschwindend geringer Druck, könnte man denken: Der Quecksilberspiegel im Manometer würde sich bei Änderung des Drucks um diesen Betrag nur um den hundertmillionsten Teil eines Millimeters verschieben.

Doch selbst bei diesem „schäbigen" Restdruck befinden sich in 1 cm^3 noch immer einige 100 Millionen Moleküle.

Recht interessant ist ein Vergleich dieses Vakuums mit der Leere im interstellaren Raum: Dort entfällt auf einige Kubikzentimeter im Mittel ein Elementarteilchen.

Zur Vakuumerzeugung werden Spezialpumpen verwendet. Eine gewöhnliche Pumpe, die das Gas durch Kolbenbewegung absaugt, kann ein Vakuum von höchstens 1,3 Pa erzeugen. Ein gutes oder, wie man auch sagt, hohes Vakuum, läßt sich mit Hilfe sogenannter Diffusionspumpen, und zwar Quecksilber- oder Ölpumpen, erzielen, worin die Gasmoleküle durch einen Strahl von Quecksilber- oder Öldampf mitgerissen werden.

Quecksilbervakuumpumpen können nur gegen ein sogenanntes Vorvakuum arbeiten, d. h., der Druck muß zunächst mittels anderer Verfahren auf etwa 13,3 Pa vermindert werden.

Ihr Funktionsprinzip besteht in folgendem. Ein kleines Glasgefäß ist mit einem quecksilbergefüllten Gefäß, dem zu evakuierenden Raum und der Vorvakuumpumpe verbunden. Das Quecksilber wird erwärmt, und die Vorvakuumpumpe saugt den Quecksilberdampf ab. Auf seinem Weg reißt der Quecksilberdampf die Gasmoleküle aus dem zu evakuierenden Raum mit und transportiert sie in die Vorvakuumpumpe. Der Quecksilberdampf wird danach (mittels Kühlung durch fließendes Wasser) kondensiert, und das flüssige Quecksilber fließt dann wieder in das Gefäß zurück, wo es seinen Weg begonnen hat.

Das im Labor erreichbare Vakuum ist, wie wir gerade gesagt haben, längst nicht leerer Raum im absoluten Sinn des Wortes. Beim Vakuum handelt es sich nur um ein stark verdünntes Gas. Die Eigenschaften dieses Gases können sich wesentlich von den Eigenschaften eines gewöhnlichen Gases unterscheiden.

Die Bewegung der Moleküle, die „das Vakuum bilden" verändert ihren Charakter, sobald die freie Weglänge der Moleküle größer wird als die Maße des Gefäßes, worin sich das Gas befindet. Die Moleküle stoßen jetzt nur selten zusammen und beschreiben dabei aus geraden Strecken zusammengesetzte Zickzacklinien, wobei sie mal an die eine und mal an die andere Wand des Gefäßes stoßen. Ausführlich wird im zweiten Band von der Molekülbewegung die Rede sein. Wir wollen an dieser Stelle ein wenig vorgreifen und ausrechnen, bei welchem Druck die obengenannte Erscheinung eintritt. Wir wissen, daß die Weglänge in Luft bei Atmosphärendruck $5 \cdot 10^{-6}$ cm beträgt. Multipliziert man sie mit dem Faktor 10^7, dann beträgt sie 50 cm und ist damit merklich größer als ein Gefäß mittlerer Größe. Da die Weglänge der Dichte und folglich auch dem Druck umgekehrt proportional ist, muß der erforderliche Druck 10^{-7} Atmosphärendruck oder ungefähr $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ Pa betragen.

Selbst der interplanetare Raum ist nicht völlig leer. Allerdings beträgt die Stoffdichte hier etwa $5 \cdot 10^{-24}$ g/cm³. Den Hauptanteil am interplanetaren Stoff beansprucht atomarer Wasserstoff. Man ist heute der Auffassung, daß im Weltraum einige Wasserstoffatome auf 1 cm³ entfallen. Würde man ein Wasserstoffmolekül auf Erbsengröße vergrößern und dieses „Molekül" dann in Moskau anordnen, dann befände sich sein nächster „Nachbar im Weltraum" in Tula.

Hunderttausend Megapascal

Große Drücke auf kleinen Flächen sind eine alltägliche Erscheinung. Lassen Sie uns einmal abschätzen, welcher Druck an einer Nadelspitze auftritt. Angenommen, die Spitze einer Nadel oder auch eines Nagels habe einen Durchmesser von etwa 0,1 mm. Die Fläche der Spitze muß dann 0,0001 cm^2 betragen. Läßt man an diesem Nagel nun die gar nicht so große Kraft von 100 N angreifen, dann übt die Nagelspitze einen Druck von 10000 Megapascal aus. So ist es kein Wunder, wenn spitze Gegenstände so leicht in dichte Körper eindringen.

Aus unserem Beispiel geht hervor, daß die Erzielung großer Drücke auf kleinen Flächen eine ganz gewöhnliche Sache ist. Völlig anders liegen die Dinge, wenn hohe Drücke an großen Flächen erzeugt werden sollen.

Im Labor werden hohe Drücke mittels starker Pressen, also z. B. durch hydraulische Pressen, erzeugt (Bild 7.9.). Die Pressenkraft wird auf einen Kolben mit kleinem Querschnitt übertragen, der in das Gefäß hineingedrückt wird, in dem ein hoher Druck erzeugt werden soll.

So läßt sich ohne besondere Schwierigkeiten ein Druck von einigen Hundert Megapascal herstellen. Zur Erzielung ultrahoher Drücke muß eine kompliziertere Versuchsanordnung gewählt werden, da der Gefäßwerkstoff solchen Drücken nicht standhält.

Hier ist uns die Natur einen Schritt entgegengekommen. Bei Drücken in der Größenordnung von 2000 Megapascal erfolgt eine wesentliche Verfestigung der Metalle. Darum ordnet man einen Apparat zur Erzeugung ultrahoher Drücke in einer Flüssigkeit an, die ihrerseits unter einem Druck in der Größenordnung von 3000 Megapascal steht. Nun gelingt es im inneren Gefäß (wiederum durch einen Kolben), Drücke von einigen 10000 Megapascal aufzubauen. Den höchsten Druck,

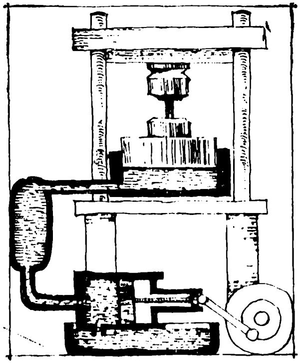


Bild 7.9.

nämlich 40000 Megapascal, hat der amerikanische Physiker Brigdman erzielt.

Das Interesse an der Erreichung ultrahoher Drücke ist alles andere als müßig. Bei derartigen Drücken können Erscheinungen auftreten, die sich durch andere Verfahren nicht bewirken lassen. 1955 wurden künstliche Diamanten hergestellt. Dazu war ein Druck von 10000 Megapascal erforderlich, und das bei einer Temperatur über 2000 K.

Ultrahohe Drücke in der Größenordnung von 30000 Megapascal entstehen auf großen Flächen bei der Detonation fester oder flüssiger Sprengstoffe, wie Nitroglyzerin, Tarotyl usw.

Sehr viel höhere Drücke entstehen im Inneren einer Atombombe bei deren Explosion; sie erreichen 10^{12} Megapascal.

Explosionsdrücke existieren nur während einer sehr kurzen Zeit. Ständige hohe Drücke bestehen im Inneren von Himmelskörpern, darunter natürlich auch im Inneren der Erde. Der Druck im Erdmittelpunkt beträgt ungefähr Dreihunderttausend Megapascal.

Low Landau — Nobelpreisträger und Akademiemitglied, Alexander Kitaigorodski — Professor für Physik und Mathematik und Begründer einer Schule zur Erforschung organischer Kristallstrukturen.

Den Autoren ist es mit diesem Buch gelungen, in zusammenfassender und allgemeinverständlicher Form die Grundideen und neuesten Errungenschaften der modernen Physik einem breiten Leserkreis nahezubringen.

Der erste Band ist den Bewegungen der Körper gewidmet. Es werden eingehend das Gravitationsgesetz mit seinen Anwendungen auf die Berechnung kosmischer Geschwindigkeiten, die Interpretation der Mondgezeiten, geophysikalische Erscheinungen usw. dargestellt.