Wiederholungsprogramm

ELEMENTAR-MATHEMATIK

Höfner/Wittwer

Wiederholungsprogramm Elementarmathematik

Dr. Gert Höfner
und Dr. Martin Wittwer

Mit 110 Bildern
und 6 Leistungskontrollen
6., neubearbeitete Auflage

VEB Fachbuchverlag
Leipzig

Autoren:

Dr. Gert Höfner, Weimar
(Abschnitte 0., 2. bis 5.)

Dr. Martin Wittwer, Halle/S.
(Abschnitte 1., 6.)

6. Auflage
Lizenznummer 114-210/54/84
LSV 1002
Verlagslektor: Dipl.-Ing. Christine Fritzsch
Gestaltung: Lothar Gabler
Printed in GDR
Satz und Druck: VEB Druckhaus Köthen
Redaktionsschluß: 15. 1. 1984
Bestellnummer: 546 131 0
00780

Geleitwort

Die inhaltliche Gestaltung des vorliegenden Programms kennzeichnet Mindestanforderungen an Studienbewerber im Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik. Die Autoren haben es gut verstanden, mit diesem programmierten Lehrmaterial auf die Arbeit im Lehrgebiet Mathematik an Ingenieur- und Fachschulen vorzubereiten. Als Wiederholungsprogramm von Lehrstoff aus der 10klassigen Polytechnischen Oberschule hat es außerdem für alle interessierten Leser den Charakter einer aktivierenden Kenntnisüberprüfung, durch die der Benutzer seinen Fähigkeitsstand feststellen und selbst qualitativ einschätzen kann.
Der umfassende Einsatz des Wiederholungsprogramms im Rahmen der Studienvorbereitung entspricht unserer Forderung nach ständiger Steigerung der Effektivität von Bildung und Erziehung.

Zentrale Fachkommission Mathematik
beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen

Inhaltsverzeichnis

0. Informationen über das Wiederholungsprogramm

0.1. Zielstellung des Wiederholungsprogramms

Bestimmt sind Sie schon einmal in die Situation gekommen, in der Sie etwa die folgende Bemerkung gemacht haben: „Das hatten wir im Mathematikunterricht zwar behandelt, aber ...“. Mit dem Wiederholungsprogramm zur Elementarmathematik soll Ihnen so weit geholfen werden, daß alles, was nach dem Aber kommt, keine Entschuldigung wird.
Das vorliegende programmierte Lehrbuch entstand aus der Notwendigkeit, den zukünftigen Studenten an Ingenieur- und Fachschulen eine gute Unterstützung zu geben, um die notwendigen Voraussetzungen für die Mathematikausbildung an diesen Schulen zu sichern.
Bedingt durch den Prozeß des Vergessens treten besonders im Lehrgebiet Mathematik immer wieder Mängel in den bereits vorhanden gewesenen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten auf, die mit dem herkömmlichen Selbststudium nur durch großen Zeit- und Kraftaufwand überwunden werden können. Das Lehrbuch dient der Reaktivierung von bereits gelernten Stoffgebieten aus der Mathematik. Daraus ergibt sich auch der Leserkreis, dem das Buch bei der Qualifizierung helfen will und kann.

- Zukünftige Studierende an den Ingenieur- und Fachschulen, um die Voraussetzungen zu überprüfen und zu sichern, auf denen die Lehrpläne an diesen Schulen aufbauen[1]
- Hörer der Volkshochschule zur Vorbereitung auf Abiturlehrgänge[2]
- Teilnehmer an Wiederholungslehrgängen Mathematik der Volkshochschulen
- Schüler der POS, die sich auf die Abschlußprüfung vorbereiten[2]
- Erwachsene, die sich auf Qualifizierungslehrgänge vorbereiten, in denen das Lehrgebiet Mathematik im Niveau der POS vorausgesetzt wird, die ganz einfach

[1] Zu diesem Zweck wurden Schwerpunkte aus dem Lehrplan der POS für das Fach Mathematik ausgewählt, bei denen erfahrungsgemäß immer wieder Schwierigkeiten auftraten, die aber unbedingt notwendige Voraussetzungen für das Studium darstellen. Das Lehrmaterial wurde dazu im Jahre 1974 erprobt. Es konnte nachgewiesen werden, daß Bewerber, die das Material gründlich studierten, bessere Ergebnisse und damit wesentlich weniger Schwierigkeiten zu Beginn des Studiums hatten.
[2] Hierzu sei bemerkt, daß in dem Wiederholungsprogramm zwar wichtige Schwerpunkte aus dem Lehrgebiet Mathematik der POS wiederholt werden, jedoch eine umfassende Behandlung der im Lehrplan angegebenen Kapitel nicht erfolgt.

ihre Kenntnisse auffrischen wollen, um etwa die eigenen Schulkinder zu unterstützen u.a.m.

Neben fachlichen Zielstellungen sollen Sie nicht zuletzt auch durch das Studium Fähigkeiten erhalten, die für die Durchführung eines rationellen und effektiven Selbststudiums notwendig sind.
Insgesamt geht es darum, mit dem Buch eine Unterstützung für die Erreichung der sozialistischen Bildungs- und Erziehungsziele zu geben bzw. Voraussetzungen dafür zu sichern.

0.2. Aufbau des Wiederholungsprogramms

Jeder Abschnitt besteht aus Teilen zur Kenntnisüberprüfung (Kennzeichen T), Informationen (I), Übungen (Ü) und Kontrollmöglichkeiten durch Lösungen (L).

Im einzelnen beginnt Ihr Studium mit einem Schritt zur Kenntnisüberprüfung. Bestehen Sie diesen Test erfolgreich, so erfahren Sie das in der zugehörigen Lösungseinheit. In diesem Fall wird eine Wiederholung blockiert. Sie gelangen zur nächsten Kenntnisüberprüfung. Haben Sie jedoch bei einem T-Schritt nicht mehr alle notwendigen Voraussetzungen zu der erfolgreichen Lösung, so kommen Sie erst über eine Wiederholung (I) nach anschließender Übung und Kontrolle der Lösung zum nächsten Schritt T.

Für Zusatzinformationen und -übungen sei verwiesen auf:
„Lehrgang der Elementarmathematik", der im VEB Fachbuchverlag erschienen ist, oder auf Mathematiklehrbücher aus Ihrer Schulzeit u.a.m.

0.3. Hinweise für den Lernenden

1. Der Lernerfolg ist gesichert, wenn Sie sich nicht selbst betrügen. Schreiten Sie erst dann zum nächsten Schritt, wenn Sie die vorangegangenen richtig verstanden haben. Sie vertuschen andernfalls die Lücken nur vor sich selbst. Schon das Erkennen dieser Lücken ist der halbe Erfolg, der zum vollen Erfolg wird, wenn Sie die angegebenen Maßnahmen befolgen. Raten Sie demzufolge keine Lösungen. „Mogeln" Sie sich nicht an den Übungen vorbei. Wenn Sie üben müssen, dann ist das auch notwendig.
2. Das Lernen erfordert eine hohe Konzentration von Ihnen. Deswegen kann das Buch nicht nebenbei bearbeitet werden. Brechen Sie das Studium zeitweise ab, wenn die äußeren Bedingungen diese Konzentration beeinträchtigen bzw. Ihre Konzentrationsfähigkeit nachläßt. Sie können das Studium vor jedem T-Schritt unterbrechen.
3. Verwenden Sie neben dem Buch ein Heft für schriftliche Aufzeichnungen. Halten Sie dort Ihren Lernweg organisatorisch (d.h. durch die Schrittnummern) und inhaltlich fest. Diese Aufzeichnungen führen Sie bitte sauber und ordentlich (es wird nicht seitenweise studiert).

4. Die Leistungskontrolle am Ende jedes Abschnittes ist für Sie eine Möglichkeit, die Ergebnisse zusammenfassend zu beurteilen. Stellen Sie dann noch Lücken fest, so wiederholen Sie die entsprechenden Informationen und Übungen.
5. Ihre derzeitigen Kenntnisse bestimmen Ihren individuellen Lernweg. Diesen müssen Sie im Buch finden. Damit durch das Blättern keine unnötige Zeit verlorengeht, wird empfohlen, sich Papierstreifen als Lesezeichen auszuschneiden, die mit T, I, Ü, L beschriftet sind und zwischen die jeweils zu bearbeitenden Seiten gelegt werden.
6. Die Numerierung der einzelnen Schritte (T, I, Ü, L) beginnt in jedem Abschnitt neu.
7. Für die Durcharbeit benötigen Sie das Tafelwerk der POS oder eine andere Zahlentafel.

0.4. Zeichenerklärung

$\longrightarrow$ I_4: Dieser Pfeil besagt, daß der nächste Schritt, der studiert werden soll, I_4 ist. Um zu diesem Schritt zu gelangen, muß vorwärts geblättert werden.

$\longleftarrow$ T_3: Nächster Schritt ist T_3 (rückwärts blättern).

An dieser Stelle möchten sich die beiden Autoren bei allen Lehrkräften und Studenten bedanken, die sich an der Erprobung des Lehrbuches beteiligten und damit beitrugen, daß es in dieser Form den Lesern übergeben werden kann. Der Dank gilt besonders Herrn Dr. paed. K. Nachtigall, Herrn Fachschuldozent Ingenieur G. Krepke und Herrn Dipl.-Ing.-Päd. D. Adelmeyer sowie Herrn Ing. Gerhard Bauer für ihre wertvollen Hinweise bei der Erprobung und Erarbeitung des Werkes und schließlich dem Institut für Fachschulwesen der DDR, das die Entwicklung des Programmes ermöglichte.
Die Autoren sind für Hinweise und Meinungen über das Buch sehr dankbar und bitten, diese über den Verlag an sie zu richten.

Viel Erfolg beim Studium des Buches!

1. Vom Umgang mit mathematischen Zeichen

1.1. Wissens- und Könnensziele

Die Mathematik bedient sich einer Sprache, die viele Symbole verwendet. Mancher glaubt „Mathematik nie verstehen zu können", nur weil er die Bedeutung einiger fremd aussehender Zeichen nicht kennt. Wenn Sie diesen Abschnitt durcharbeiten, werden Sie

1. die in der elementaren Mathematik gebräuchlichen Zeichen benennen und damit unterscheiden lernen,
2. die Fachbezeichnung der wichtigsten Operationen und der daran beteiligten Operanden wiederholen,
3. den für die gesamte höhere Mathematik grundlegenden Begriff der Variablen erfassen und das Belegen von Variablen erlernen,
4. bei Termen mit unterschiedlichen Rechenoperationen die vorgeschriebene Reihenfolge einhalten,
5. wissen, wo Klammern erforderlich sind und wie man sie auflöst,
6. Summen und Differenzen miteinander multiplizieren können und Summen und Differenzen durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte umwandeln können,
7. den Aussagegehalt der wichtigsten Relationszeichen kennen,
8. wissen, wie man mathematische Ausdrücke mit den Mitteln der Umgangssprache wiedergibt, und
9. Sachaufgaben leichter lösen, weil Sie gelernt haben, wie man sprachlich fixierte Gegebenheiten in die mathematische Symbolsprache übersetzt.

$\longrightarrow T_1$

1.2. Kenntnisüberprüfung

T1

Ordnen Sie die einzelnen Zahlen und Rechensymbole des mathematischen Ausdrucks

$$4 \cdot a - (-13) = \frac{x}{3}$$

den in der Tabelle vorgegebenen Begriffen zu, und kennzeichnen Sie Ihre Entscheidung durch ein Kreuz im betreffenden Feld. Geben Sie in der letzten Spalte weitere Ihnen bekannte Symbole an.

Symbole für	4	·	a	—	(	–	13	)	=	$\frac{x}{3}$	weitere Symbole
konkrete mathematische Objekte											
Variablen											
technische Zeichen											
Relationszeichen											
Operationszeichen											
Vorzeichen											

Haben Sie bei der Lösung Schwierigkeiten, dann lesen Sie → I_1
Die richtige Zuordnung finden Sie unter → L_1

T2

Bei mathematischen Operationen wird aus 2 Operanden ein Ergebnis ermittelt. Setzen Sie im Schema an den mit ... gekennzeichneten Stellen die fehlenden Bezeichnungen ein.

Operation	Zeichenreihe	1. Operand	2. Operand	Ergebnis
Addition	$a + b$	a Summand	b ...	Summe
Subtraktion	$a - b$	a ...	b ...	...
...	$a \cdot b$	a ...	b ...	...
...	$a : b$	a ...	b ...	...
...	a^n	a ...	n ...	...
...	$\sqrt[n]{a}$	a ...	n ...	...
...	$\log_a b$	a ...	b ...	...

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit → L_2

T3

Welches Vorzeichen erhält die Veränderliche $x > 0$, wenn in dem Term

$$T(x) = -[-(-2) \cdot (-x)]$$

alle Klammern aufgelöst werden?

Antworten:

a) x wird negativ. ——▶ L_3

b) x wird positiv. ——▶ L_{44}

c) Ich möchte mich über das Rechnen mit Vorzeichen informieren. ——▶ I_3

T4

Welchen Wert nimmt $T(x)$ an, wenn man die Variable x mit (-3) belegt?

$$T(x) = x - \frac{12}{x}$$

Antworten:

a) Damit weiß ich nichts anzufangen. ——▶ I_2

b) $T(-3) = -7$ ——▶ L_4

c) $T(-3) = 1$ ——▶ L_5

d) $T(-3) = -1$ ——▶ L_6

e) $T(-3) = 7$ ——▶ L_7

f) Keine der angegebenen Antworten ist richtig. ——▶ L_8

T5

Es sei $T_2(x) = \dfrac{20 + 4x}{5x}$. Füllen Sie die Wertetabelle aus.

x	-2	-1	0	2	4
$T_2(x)$					

Die Lösung finden Sie unter ——▶ L_9

T6

In dieser Aufgabe geben wir Ihnen einen Term mit den 3 Variablen r, s, t vor. Damit sollen 3 verschiedenartig zu besetzende Leerstellen gekennzeichnet werden. Welchen Wert nimmt der Term an, wenn man die Leerstellen r mit 3; s mit 2 und t mit 5 belegt?

$$T(r, s, t) = s + r\frac{s}{t} - r$$

Rechnen Sie mit Dezimalzahlen.

Antworten:

a) Der Wert ist 2,4. ⟶ L_{10}

b) Der Wert ist 4,4. ⟶ L_{11}

c) Keine der angegebenen Antworten ist richtig. ⟶ L_{13}

T7

In diesem Test wollen wir prüfen, ob Sie über die einzuhaltende Reihenfolge bei verschiedenen Rechenoperationen Bescheid wissen.
Berechnen Sie:

$$100 - 25 \cdot 2 + 28:7 - 2 \cdot 3^2.$$

Antworten:

a) Ich weiß nicht, wie Sie das meinen. ⟶ I_4

b) Die Lösung heißt 36. ⟶ L_{14}

c) Die Lösung heißt 18. ⟶ L_{16}

d) Keine der angebotenen Lösungen ist richtig. ⟶ L_{17}

T8

Diese und einige der folgenden Wiederholungsaufgaben wollen Ihre Kenntnisse über das Rechnen mit Termen, in denen Klammern vorkommen, auffrischen.
Berechnen Sie:

$$(12 + 8) : 4 + (6 - 2) \cdot 3.$$

Vergleichen Sie Ihre Lösung. ⟶ L_{18}

T9

Lösen Sie in dem folgenden Term die Klammern auf, und fassen Sie zusammen:

$$T = 2[20x - 3(4 - 3x) + 10(2 - x)].$$

Antworten:

a) Ich möchte zunächst eine Erklärung. ⟶ I_5

b) Mein Ergebnis lautet: $19x + 8$. ⟶ L_{21}

c) Mein Ergebnis lautet: $38x + 16$. ⟶ L_{22}

d) Mein Ergebnis lautet: $2x + 16$. ⟶ L_{23}

e) Keine der angebotenen Antworten ist richtig. ⟶ L_{24}

T10

Es sei $T_1 = m - n + 2$ und $T_2 = 3 - p$.
Bilden Sie das Produkt $T_1 \cdot T_2$.

Antworten:

a) Ich brauche eine kleine Anleitung. $\longrightarrow$ I_6

b) Ich habe eine Lösung und möchte vergleichen. $\longrightarrow$ L_{25}

T11

Verwandeln Sie durch Ausklammern in ein Produkt:

1. $\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{6}ab^2 + \frac{7}{6}ab$

2. $a^3 + a^2 - a$

3. $2a(x + y) - b(x + y)$

Überführen Sie die algebraische Summe $x + 2$ in die angedeutete Produktform so, daß nach einem probeweisen Ausmultiplizieren wieder der ursprüngliche Term entsteht:

4. $x + 2 = x\ (\ldots\ldots\ldots)$

5. $x + 2 = 2\ (\ldots\ldots\ldots)$

Antworten:

a) Das kann ich nicht mehr. $\longrightarrow$ I_7

b) Ich möchte meine Lösungen vergleichen. $\longrightarrow$ L_{28}

c) Das ist doch nicht schwer. Ich möchte mich an kniffligeren Problemen erproben. $\longrightarrow$ $Ü_4$

T12

Führen Sie eine Division der beiden Terme durch:

$$T_1 = 63an - 35n - 49bnp$$

$$T_2 = -7n$$

Antworten:

a) Ich brauche eine Hilfe. ⟶ I_8

b) Meine Lösung heißt: $9a + 5 + 7bp$. ⟶ L_{30}

c) Meine Lösung heißt: $-9a + 5 + 7bp$. ⟶ L_{31}

d) Keine der angebotenen Lösungen ist richtig. ⟶ L_{32}

T13

Für welche x wird $-2 < x \leqq 3$; $(x \in G)$ eine wahre Aussage?

Antworten:

a) Die Variable x darf mit den ganzen Zahlen 1 und 2 belegt werden. ⟶ L_{12}

b) Die Variable x darf mit den ganzen Zahlen 1, 2, 3 belegt werden. ⟶ L_{33}

c) Die Variable x darf mit den ganzen Zahlen -1, 1, 2 belegt werden. ⟶ L_{15}

d) Die Variable x darf mit den ganzen Zahlen -1, 0, 1, 2, 3 belegt werden. ⟶ L_{34}

e) Ich möchte eine Erläuterung zur Bedeutung der Zeichen $<$ und $\leqq$. ⟶ I_9

T14

Bilden Sie aus dem folgenden Text einen Term:

Multipliziere die Summe aus 100 und 10 mit der Differenz aus 8 und 3, und vermindere das Produkt um die Differenz aus 20 und -2.

Antworten:

a) Ich brauche eine kleine Hilfe. ⟶ I_{10}

b) Mein Term heißt: $100 + 10 \cdot 8 - 3 - 20 - 2$. ⟶ L_{35}

c) Mein Term heißt: $(100 + 10) \cdot (8 - 3) - (20 - 2)$. ⟶ L_{36}

d) Keine der angebotenen Lösungen ist richtig. ⟶ L_{37}

T15

Übersetzen Sie in einen Term:

Die Summe aus einer Zahl und dem 4fachen einer anderen Zahl ist durch die Differenz aus dem 10fachen der zweiten Zahl und der Hälfte der ersten Zahl zu dividieren.

Antworten:

a) Ich weiß mit den Textteilen „eine Zahl“ und „eine andere Zahl“ nichts anzufangen. ⟶ I_{12}

b) Mein Term heißt: $(x + 4x) : \left(10x - \frac{x}{2}\right)$. ⟶ L_{39}

c) Mein Term heißt: $(x + 4y) : (10x - y : 2)$. ⟶ L_{40}

d) Mein Term heißt: $(x + 4y) : (10y - x : 2)$. ⟶ L_{41}

e) Mein Term heißt: $(x + 4y) : [10y - (x:2)]$. ⟶ L_{42}

f) Mein Term heißt: $(x + 4y) : \left(10y - \frac{x}{2}\right)$. ⟶ L_{42}

g) Mein Term heißt: $\dfrac{a + 4b}{10b - \frac{a}{2}}$. ⟶ L_{43}

h) Ich bin zu keinem Ergebnis gekommen. ⟶ L_{13}

1.3. Informationen

I1 von T_1

Wir wollen Ihnen helfen, die symbolische Sprache der Mathematik zu lesen und fehlerfrei zu gebrauchen. Dazu machen wir uns mit der Bedeutung einiger grundlegender Vokabeln vertraut. Eine Übersicht soll Ihnen das Zurechtfinden in ihrer Vielfalt erleichtern.

Die in der elementaren Mathematik verwendeten Symbole lassen sich inhaltlich so unterscheiden:

Symbole für	Beispiele
konkrete mathematische Objekte	$1;\ 2;\ 18;\ \frac{7}{9};\ \pi$
Variablen	$x;\ y;\ z;\ x_1;\ x_2;\ x_3;\ a;\ b;\ c;$
Operationen	$+;\ -;\ \cdot;\ :;\ \sqrt[n]{\ };\ \log_a$
Vorzeichen	$+;\ -;$
Relationszeichen	$=;\ <;\ \geqq;$
technische Zeichen	,; ( )

I2 von T_4 oder L_8

Variablen dienen der Markierung von Leerstellen. In dem Term $x + 4$ ist x Leerstelle für einen an dieser Stelle einzusetzenden konkreten Wert. Wird x mit der Zahl 6 belegt, so nimmt der Ausdruck $x + 4$ den Wert 10 an. Bei einer Belegung mit der Zahl 0 entsteht der Wert 4, denn $0 + 4 = 4$.

Heißt der Term z.B. $\frac{3x - 10}{x}$, so entsteht aus einer Belegung von x mit der Zahl (-2) der Wert $\frac{3 \cdot (-2) - 10}{-2} = \frac{-16}{-2} = +8$

Versuchen Sie es noch einmal ◄——— T_4

I3 von T_3

Beachten Sie beim Auflösen der Klammern die Vorzeichenregeln.

$$(+a) \cdot (+b) = ab \qquad (+a) \cdot (-b) = -ab$$

$$(-a) \cdot (+b) = -ab \qquad (-a) \cdot (-b) = ab$$

Daraus folgt:

„Ist die **Anzahl der negativen Faktoren** in einem Produkt **gerade**, so ist das Produkt **positiv**;
ist sie ungerade, so ist das Produkt negativ."

Beispiele:

$(-1)[(-1)x] = x$ oder $-[-x] = x$, da gerade Anzahl von negativen Faktoren.
$(-1)[(-1)\{(-1)x\}] = -x$ oder $-[-\{-x\}] = -x$, da ungerade Anzahl von negativen Faktoren. ◄——— T_3

I4 von T_7

Soll es an einer Straßenkreuzung zu keiner Kollision kommen, so muß es eine die Vorfahrt regelnde Vorschrift geben.
Sind in einem Term verschiedene Rechenoperationen auszuführen, so heißt die „Vorfahrtregel":

> Die Rechenoperationen einer höheren Stufe haben Vorrang vor den Rechenoperationen einer niederen Stufe.

Die Rangordnung ist aus dieser Tabelle ersichtlich.

Stufe	Operationen	Rangfolge in der Ausführung
1 ↓	Addition, Subtraktion	3 ↑
2	Multiplikation, Division	2
3	Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren	1

Beispiele:

$20 + 4:8 = 20 + 0{,}5 = 20{,}5$ Division (2. Stufe) geht vor Addition (1. Stufe)

$5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$ Potenzieren (3. Stufe) geht vor Multiplizieren (2. Stufe)

$12:4 - 1 = 3 - 1 = 2$ Division geht vor Subtraktion

$3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13$ Multiplikation geht vor Subtraktion

Soll von dieser Regel abgewichen werden, so ist dies im jeweiligen Term durch eine Klammer zu kennzeichnen.

Beispiel: $20 + 4:8 = 20 + 0{,}5 = 20{,}5$, aber $(20 + 4):8 = 24:8 = 3$

◄—— T_7

5 von T_9

Zur richtigen Lösung bedarf es der Kenntnis zweier Klammerregeln:

1. Regel: Zusammengesetzte Klammern werden vorteilhaft von innen nach außen aufgelöst.

1. Schritt: Alle inneren Klammern werden aufgelöst, die äußere Klammer bleibt unverändert.

2. Schritt: Die äußere Klammer wird aufgelöst.

2. Regel: Eine Summe wird mit einem Faktor multipliziert, indem jeder Summand mit dem Faktor multipliziert wird (Distributivgesetz).

Als Formel: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Beispiel:

$$[a(a^2 + a - 1) - a^2(a + 1)] \cdot 5$$

1. Schritt: Auflösen der runden Klammern: $[a^3 + a^2 - a - a^3 - a^2] \cdot 5$
Bevor weitergerechnet wird, sollten gleichartige Glieder zusammengefaßt werden.

Es ergeben Null: $+a^3$ und $-a^3$
$+a^2$ und $-a^2$

Inhalt der eckigen Klammer nach dem Zusammenfassen: $[-a]$

2. Schritt: Auflösen der eckigen Klammer: $[-a] \cdot 5 = -5a$

——► $Ü_2$

I6 von T_{10}

T_1 und T_2 sind Summen (Differenzen), die miteinander multipliziert werden. Also müssen Sie Klammern setzen.

$$T_1 \cdot T_2 = (m - n + 2) \cdot (3 - p).$$

Wie „Klammer mal Klammer" ausgeführt wird, wissen Sie gewiß noch.

◄——— T_{10}

I7 von T_{11}

a) **Einfaches Ausklammern**

Faktoren, die in allen Gliedern einer algebraischen Summe enthalten sind, lassen sich ausklammern.

Beispiel:

$$4a^2 + 2ab + \frac{2}{3}ca = 2a\left(2a + b + \frac{c}{3}\right)$$

b) **Mehrfaches Ausklammern**

Das Ausklammern läßt sich mehrfach nacheinander wiederholen, wenn geeignete Summanden zusammengefaßt werden.

Beispiele:

1. $\underbrace{a^2 + 3a}_{a} \underbrace{- ab - 3b}_{-b} = \underbrace{a(a + 3) - b(a + 3)}_{(a+3)} = (a + 3)(a - b)$

   a, $-b$ ausklammern; $(a + 3)$ ausklammern

2. $a^2 + 7ab + 10b^2 = a^2 + 5ab + 2ab + 10b^2 = a(a + 5b) + 2b(a + 5b)$

   Zerlege 7 in 2 Summanden, deren Produkt 10 ist. $\qquad = (a + 5b)(a + 2b)$

3. $a^2 + 4ab - 12b^2 = \underbrace{a^2 - 2ab}_{a} + \underbrace{6ab - 12b^2}_{6b} = \underbrace{a(a - 2b) + 6b(a - 2b)}_{a - 2b}$

   $4 = -2 + 6$

   $-2 \cdot 6 = -12$

   $= (a - 2b)(a + 6b)$

c) **Sonderfall**

Bei Bedarf läßt sich jede algebraische Summe als Produkt nach folgendem Muster schreiben:

$$a^2 + a - 1 = a^2\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right), \text{ denn}$$

$$a^2\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right) = a^2 + \frac{a^2}{a} - \frac{a^2}{a^2} = a^2 + a - 1$$

———► $\ddot{U}_3$

I8 von T_{12}

Schreiben Sie zunächst den Text der Aufgabe in mathematischer Symbolsprache nieder, damit Sie deutlicher sehen, was wir von Ihnen verlangen:

$$T_1(x):T_2(x) = 63an - 35n - 49bnp: -7n.$$

Spiegelt diese Zeichenreihe das Anliegen der Aufgabe wider? Laut Vorrangregel (s. I_4) müßten Sie zunächst $-49bnp: -7n$ lösen.
Damit hätten Sie aber nur mit einem Teil des Terms T_1 die Division ausgeführt. Das Setzen von Klammern garantiert die vollständige Erfassung des Terms T_1.

$$T_1(x):T_2(x) = (63an - 35n - 49bnp) : (-7n)$$

Sie gehen jetzt wie bei der Multiplikation vor: Jedes Glied der 1. Klammer wird durch den Divisor $-7n$ geteilt.
Beachten Sie dabei die Vorzeichenregeln von I_{30}.

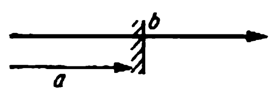
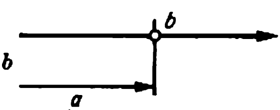
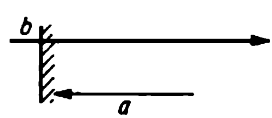
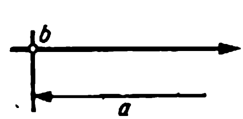
Beispiel:

$$\begin{aligned}(16xy + 4x^2 - 24xz) : 4x &= 16xy:4x + 4x^2:4x - 24xz:4x\\ &= 4y + 1x - 6z\end{aligned}$$

→ $Ü_5$

I9 von T_{13}

Diese Zeichen sind Relationszeichen und dienen dem Vergleich von Termen. Wendet man sie auf Zahlen an, die in gewohnter Weise auf dem nach rechts orientierten Zahlenstrahl aufgetragen sind, so läßt sich die Relation veranschaulichen.

Zeichenreihe	gelesen	Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl	Deutung
$a < b$	a ist kleiner als b		Die Zahl a steht links von b (ohne b zu erreichen).
$a \leqq b$	a ist kleiner oder gleich b; a ist nicht größer als b		Die Zahl a steht nicht rechts von b (a kann b aber erreichen).
$a > b$	a ist größer als b		Die Zahl a steht rechts von b (kann aber b nicht erreichen).
$a \geqq b$	a ist größer oder gleich b; a ist nicht kleiner als b		Die Zahl a steht nicht links von b (kann aber b erreichen).

Beispiele:

Wird eine wahre Aussage angestrebt, so bedeutet

1. $x < 5$ bedeutet, daß die Variable mit allen Zahlen, die kleiner als 5 sind, belegt werden darf; z.B. mit $x = 4, 3, 2, 1, 0, -1$ usf., in der Regel aber auch mit allen Dezimalbrüchen, die ihren Platz zwischen den angegebenen ganzen Zahlen haben.
2. $x \leqq 5$ bedeutet gegenüber Beispiel 1, daß x auch mit der Zahl 5 belegt werden darf. Zahlen wie 5,01, die größer als 5 sind, werden durch die Bedingung $x \leqq 5$ ausgeschlossen. ◀——— T_{14}

I10 von T_{14}

Sie sollen multiplizieren. Dazu gehören mindestens 2 Faktoren. Welcher ist der erste? Die Summe aus 100 und 10. Übersetzen Sie das in die mathematische Symbolsprache.
Welcher ist der zweite? Die Differenz aus 8 und 3. Übersetzen Sie das.
Da Summe und Differenz die fertigen Ergebnisse einer Addition und Subtraktion kennzeichnen, müssen Sie durch entsprechende Zeichen dafür sorgen, daß die niedrigeren Rechenoperationen Addition und Subtraktion **vor** der Multiplikation ausgeführt werden.
Jetzt müßten Sie es selbst schaffen.
Nur wenn Sie mit dem zweiten Teil des Textes Schwierigkeiten haben sollten, lesen Sie I_{11}. ◀——— T_{14}

I11 von T_{14}

Den ersten Satz des Aufgabentextes haben Sie sicherlich zunächst so übersetzt: $100 + 10 \cdot 8 - 3$; und dann zur Aufhebung der Vorrangregel „Multiplikation vor Subtraktion" die Klammern gesetzt: $(100 + 10) \cdot (8 - 3)$. Dieser Teil stellt das Produkt dar, von dem der Text spricht. Sie sollen es „vermindern". Das ist eine Vokabel für die Rechenoperation „Subtraktion". Der nun gebrauchte Subtrahend ist die Differenz aus 20 und -2. Vergessen Sie die Klammern auch hier nicht.

◀——— T_{14}

I12 von T_{15}

Bei den bisherigen Übersetzungsübungen haben wir Ihnen gesagt, welche Operationen mit welchen Zahlen auszuführen sind. In T_{15} kennen wir die Zahlen selbst noch nicht. Sie müssen im Term an ihrer Statt Leerstellen (Variablen) vorsehen. Die beiden unbestimmten Artikel „eine" und „eine andere" sagen Ihnen, daß wir an **zwei verschiedene** Zahlen denken, was Sie durch Bereitstellung von zwei verschiedenen Leerstellen x und y (oder a und b) berücksichtigen. Die Variablen treten in dem Term an die Stelle der bisher gewohnten Zahlen. ◀——— T_{15}

I13 von T_{15}

Ist in einem Text von „einer" (unbestimmter Artikel) Zahl die Rede, so ist über diese Zahl noch nicht verfügt. Sie übersetzen einen solchen Satz, indem Sie sich einer Leerstellenbezeichnung bedienen. Ist überdies noch von einer „anderen" Zahl die Rede, so müssen Sie noch eine zweite Variable vorsehen.
Den Gang der Übersetzung des Textes: „Die Summe aus einer Zahl und dem 4fachen einer anderen Zahl ist durch die Differenz aus dem 10fachen der zweiten Zahl und der Hälfte der ersten Zahl zu dividieren" macht das folgende Schema deutlich:

Text	Übersetzung in mathematische Zeichen	Bemerkungen
eine Zahl	x	
eine andere Zahl	y	
4faches der anderen Zahl	$4y$	
Summe aus einer Zahl und dem 4fachen der anderen Zahl	$(x + 4y)$	Weil mit dieser Summe weitere Operationen auszuführen sind, werden Klammern empfohlen.
die zweite (der) Zahl(en)	y	„Zweite" kennzeichnet die im 1. Satzteil mit „die andere" markierte Zahl, also y.
10faches der zweiten Zahl	$10y$	
die Hälfte der 1. Zahl	$x:2$ oder $\frac{x}{2}$	
Differenz aus ...	$\left(10y - \frac{x}{2}\right)$	
Text im Zusammenhang	$\dfrac{(x + 4y)}{\left(10y - \frac{x}{2}\right)}$	Da ein Bruchstrich Klammern ersetzt, sind bei dieser Schreibweise die Zähler- und die Nennerklammern entbehrlich.

→ $Ü_7$

1.4. Übungen

U1 von L_{18}

1. Schreiben Sie den folgenden Term ohne das Zeichen „:" unter Verwendung eines Bruchstrichs.

$$T = (a + b - 2c) : (3a - b)$$

2. Schreiben Sie den folgenden Term, ohne einen Bruchstrich zu gebrauchen.

$$T = \frac{3v + 6w}{7w - 1v}$$

3. Setzen Sie in den Term $12 + 8:4 + 6 - 2 \cdot 3$ mögliche Klammern so, daß Sie für den Term drei unterschiedliche Werte erhalten, wie z.B. $(12 + 8):4 + 6 - 2 \cdot 3 = 20:4 + 6 - 6 = 5$.

→ L_{19}

Ü2 von I_5

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:

1. $(a + x) + [3(2a - x) - 5] - (a - 6)$
2. $(3u - 2v) - (u + w) - [u - (v + w)]$
3. $3 \cdot [40x - 2(5x + 8) + 10(2 - x)]$
4. $10r - [(5m + 2n) - (6m - n)]$.

→ L_{20}

Ü3 von I_7

Formen Sie durch Ausklammern die Summen in Produkte um, und weisen Sie durch anschließendes Ausmultiplizieren nach, daß Ihr Ergebnis richtig ist:

1. $2\pi rh + 2\pi r^2$
2. $25a - 15b + 10c$
3. $3x(a - b) - 5y(a - b)$
4. $\frac{1}{4}a^2b - \frac{3}{4}ab + \frac{5}{4}ab^2$
5. $c^3 + c^2 + c + 1 + \frac{1}{c} = c^3 (\ldots)$

→ L_{26}

Ü4 von T_{11}

• Überführen Sie in Produktform, indem Sie gruppenweise ausklammern, und weisen Sie durch anschließendes Ausmultiplizieren nach, daß Ihr Ergebnis richtig ist:

1. $24ab - 8b + 3a - 1$
2. $12pr - 4p - 3r + 1$

3. $6ax - 4ay - 9bx + 6by$
4. $x^2 + 8xy + 15y^2$ Zerlegen Sie $8xy$ so in 2 Summanden, daß das Produkt der Koeffizienten 15 wird.
5. $a^2 - 2ab - 8b^2$ Wenden Sie die Lösungsidee von Beispiel 4 an.

→ L_{27}

U5 von I_8

Führen Sie jeweils die Division $T_1 : T_2$ durch:

T_1	T_2
$42abc$	$-6ac$
$-108mnop$	$-12np$
$45kl + 18kn - 54k$	$9k$
$ax^3 + acx^2 - adx$	$-ax$

→ L_{29}

U6 von L_{36} oder L_{37}

Übersetzen Sie in einen Term:

1. Vermehre das Produkt aus 4 und -7 um den Quotienten aus -5 und 10.
2. Dividiere 18 durch das Produkt aus 6 und der Differenz aus -2 und -4.
3. Bilde die Summe aus 25 und dem Produkt aus -7 und -3. Vermindere das Ergebnis um 18.
4. Nimm die Summe aus 25 und -7 mit der Differenz aus -3 und 18 mal.
5. Zähle das 3fache von 7 und die doppelte Summe aus -5 und -6 zusammen.

→ L_{38}

U7 von I_{13} oder L_{41} oder L_{42} oder L_{43}

Der schwere Anfang beim Lösen einer Textaufgabe besteht im Übersetzen von Sätzen der Umgangssprache in angemessene mathematische Terme.
Üben Sie sich in dieser Fertigkeit durch die folgenden Beispiele:

1. Bilde die Summe aus dem 10fachen, dem 5fachen und dem Doppelten einer Zahl.
2. Die Summe aus zwei Zahlen ist mit der Differenz aus der ersten und zweiten malzunehmen.

3. Eine um 6 verminderte Zahl ist durch die doppelte Differenz aus 100 und dieser Zahl zu teilen.
4. Die Summe aus 3 Zahlen ist mit der halben Summe aus der zweiten Zahl und der vierten Potenz der ersten Zahl zu multiplizieren. → L_{45}

1.5. Lösungen

L1 von T_1

Ihre Kreuze mußten so eingetragen sein:

Symbole für	4	·	a	−	(	−	13	)	=	$\frac{x}{3}$	weitere Symbole
konkrete mathematische Objekte	×						×			×	1, 2, 3, ... π, e
Variablen			×							×	y, z, u, v, w, a, b
technische Zeichen					×			×			$\|\|$
Relationszeichen									×		$<, \geqq, >, \leqq$
Operationszeichen		×		×						×	$+, \sqrt{\ }$
Vorzeichen						×					$+$

← T_2

L2 von T_2

Operation	Zeichenreihe	1. Operand	2. Operand	Ergebnis
Addition	$a + b$	a Summand	b Summand	Summe
Subtraktion	$a - b$	a Minuend	b Subtrahend	Differenz
Multiplikation	$a \cdot b$	a Faktor	b Faktor	Produkt
Division	$a : b$	a Dividend	b Divisor	Quotient
Potenzieren	a^n	a Basis	n Exponent	Potenz(wert)
Radizieren	$\sqrt[n]{a}$	a Radikand	n Wurzelexponent	Wurzel
Logarithmieren	$\log_a b$	a Basis	b Numerus	Logarithmus

Prägen Sie sich neben den Begriffen bitte auch deren Rechtschreibung ein.

← T_3

L3 von T_3

Falsch. ◄———— I_3

L4 von T_4

Sie haben richtig erkannt, daß man für die Variable x die Zahl (-3) setzen muß. Doch dann sind Sie über einen Vorzeichenfehler gestolpert. Rechnen Sie noch einmal nach. ◄———— T_4

L5 von T_4

Das ist richtig. Prüfen Sie jetzt Ihre Sicherheit im Umgang mit dem etwas schwierigeren Term des T_5. ◄———— T_5

L6 von T_4

Sie haben beim Schreiben ein Vorzeichen vergessen.
Prüfen Sie Ihre Rechnung, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort.
◄———— T_4

L7 von T_4

Sie haben nicht beachtet, daß nach dem Einsetzen der Minuend -3 heißt. Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort. ◄———— T_4

L8 von T_4

Sie haben das Prinzip noch nicht verstanden. ◄———— I_2

L9 von T_5

Sieht Ihre Wertetabelle so aus?

x	-2	-1	0	2	4
$T_2(x)$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{16}{5}$	*	$\frac{14}{5}$	$\frac{9}{5}$

* nicht definiert

Ja? Dann können Sie mit T_6 fortfahren. ◄———— T_6

Nein? Dann denken Sie mit, wenn wir Ihnen jetzt zwei Beispiele vorrechnen.

x wird mit -2 belegt: $T_2(-2) = \dfrac{20 + 4 \cdot (-2)}{5 \cdot (-2)} = \dfrac{12}{-10} = -\dfrac{6}{5}$;

x wird mit 0 belegt: $T_2(0) = \dfrac{20 + 4 \cdot 0}{5 \cdot 0} = \dfrac{20}{0}$. Eine Division durch Null aber ist nicht ausführbar. So hat der Term bei dieser Belegung keinen angebbaren Wert.

Wir sagen kurz: Der Term $\dfrac{20 + 4x}{5x}$ ist für $x = 0$ nicht definiert.

Die restlichen Belegungen können Sie jetzt selbständig vornehmen.

◀———— T_5

L10 von T_6

Ihr Ergebnis ist falsch. Sie haben bei der Deutung der Zeichenreihe $r\dfrac{s}{t}$ einen Fehler gemacht. **Zwischen Variablen darf das Multiplikationszeichen weggelassen werden.** $r\dfrac{s}{t}$ bedeutet also $r \cdot (s:t)$. Bei der von Ihnen vorzunehmenden Belegung entsteht aus $r\dfrac{s}{t}$ der Wert $3 \cdot \dfrac{2}{5}$ (Zwischen Zahlen muß das Multiplikationszeichen immer gesetzt werden!).

Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort von T_6. ◀———— T_6

L11 von T_6

Sie haben gleich 2 Fehler gemacht. Zunächst haben Sie r und s verwechselt, und dann haben Sie übersehen, daß die Zeichenreihe rs bedeutet $r \cdot s$. Aus der Zeichenreihe $r\dfrac{s}{t}$ entsteht nicht die Zahl $3\dfrac{2}{5}$, sondern $3 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$.

Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort von T_6. ◀———— T_6

L12 von T_{13}

Sie haben nur einen Teil der möglichen Werte erfaßt.

Durchdenken Sie Ihre Lösung, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort.

◀———— T_{13}

L13 von T_6

Haben Sie $\frac{1}{5} = 0{,}2$?

Ja? Dann haben Sie sich nicht irritieren lassen und richtig gerechnet. Man soll Vertrauen zu seiner eigenen Rechnung haben; es sei denn, man wird eines Besseren belehrt.

Nein? Dann rechnen wir es Ihnen vor:

$$2 + 3 \cdot \frac{2}{5} - 3 = 2 + \frac{6}{5} - 3 = -1 + \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$$

Achten Sie darauf, daß $r\frac{s}{t}$ bei der Belegung mit unseren Zahlen 3 mal $\frac{2}{5}$ wird.

← T_7

L14 von T_7

Richtig. ← T_8

L15 von T_{13}

Sie haben nicht alle möglichen Werte gefunden. Die Skizze verdeutlicht die Aufgabenstellung. Der Pfeil markiert den Teil des Zahlenstrahls, aus dem die Belegungen für x entnommen werden.

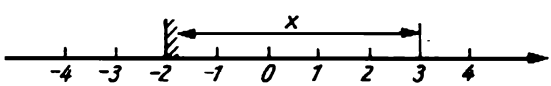


Bild 1.5

Durchdenken Sie Ihre Lösung, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort.

← T_{13}

L16 von T_7

Sie haben nur bei der Berechnung von $2 \cdot 3^2$ einen Fehler gemacht.

← I_4 (Beachte Beispiel 2)

L17 von T_7

Sie haben Fehler gemacht, deren Ursachen uns nicht bekannt sind.
Lesen Sie I_4 durch, und probieren Sie es mit T_7 noch einmal.

← I_4/T_7

L18 von T_8

$$(12 + 8):4 + (6 - 2) \cdot 3 = 20:4 + 4 \cdot 3 = 5 + 12 = 17$$

Hatten Sie diesen Lösungsweg, dann ist Ihnen bewußt, daß durch Klammern die Vorrangregeln für Rechenoperationen aufgehoben werden.
Für alle, die in dieser Aufgabe Schwierigkeiten hatten, sei das noch einmal an zwei Beispielen verdeutlicht.

1. $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ aber $2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$
2. $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ aber $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ ◄———— $Ü_1$

L19 von $Ü_1$

1. $\dfrac{a + b - 2c}{3a - b}$

   Wenn Sie $\dfrac{(a + b - 2c)}{(3a - b)}$ haben, ist das nicht falsch, **da aber der Bruchstrich Klammern ersetzt,** sind diese im Ergebnis überflüssig.

2. $(3v + 6w) : (7w - 1v)$

   Wenn Sie die Klammern hier nicht gesetzt haben, wird wegen der Vorrangregel nur $6w$ durch $7w$ dividiert. Das wäre falsch.

3. Wir zeigen Ihnen nur eine Auswahl aus den vielen Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen:

   $(12 + 8:4 + 6 - 2 \cdot 3) = 12 + 2 + 6 - 6 = 14$

   $(12 + 8:4 + 6 - 2) \cdot 3 = (12 + 2 + 4) \cdot 3 = 54$

   $12 + 8:(4 + 6) - 2 \cdot 3 = 12 + 8:10 - 6 = 12 + 0{,}8 - 6 = 6{,}8$

   $12 + 8:(4 + 6 - 2 \cdot 3) = 12 + 8:4 = 12 + 2 = 14$

   $(12 + 8):(4 + 6) - 2 \cdot 3 = 20:10 - 6 = 2 - 6 = -4$

   $[(12 + 8) : (4 + 6 - 2)] \cdot 3 = [20:8] \cdot 3 = \dfrac{20}{8} \cdot 3 = \dfrac{15}{2}$ ◄———— T_9

L20 von $Ü_2$

1. $a + x + [6a - 3x - 5] - a + 6 = x + 6 + 6a - 3x - 5 = 6a - 2x + 1$
2. $3u - 2v - u - w - [u - v - w] = 2u - 2v - w - u + v + w = u - v$
3. $60x + 12$
4. $10r + 1m - 3n$ ◄———— T_9

L21 von T_9

Sie haben nur den Inhalt der eckigen Klammer angegeben und übersehen, daß vor dieser Klammer noch ein Faktor steht. Führen Sie den noch ausstehenden Rechenschritt aus, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort von T_9.

$\longleftarrow$ T_9

L22 von T_9

Ihr Ergebnis ist richtig. $\longleftarrow$ T_{10}

L23 von T_9

Sie haben beim Ausmultiplizieren einen Vorzeichenfehler begangen. Arbeiten Sie I_3 durch, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort von T_9.

$\longleftarrow$ I_3/T_9

L24 von T_9

Sie haben mehrere prinzipielle Fehler gemacht. $\longleftarrow$ I_5

L25 von T_{10}

Haben Sie an das Setzen der Klammern gedacht? Dann war ja nur noch die Regel: „Multipliziere **jedes** Glied der einen Klammer mit **jedem** Glied der anderen Klammer" zu beachten, um auf $3m - 3n + 6 - mp + np - 2p$ zu kommen. Ein weiteres Zusammenfassen ist nicht möglich. $\longleftarrow$ T_{11}

Haben Sie ein anderes Ergebnis, so gehen Sie zu $\longleftarrow$ I_6

L26 von $Ü_3$

1. $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$
2. $25a - 15b + 10c = 5(5a - 3b + 2c)$
3. Hier war die Differenz $(a - b)$ der gemeinsame Faktor:

$$3x(a - b) - 5y(a - b) = (a - b) \cdot (3x - 5y)$$

4. $\frac{1}{4}ab(a - 3 + 5b)$

5. Bei dieser Umformung mußten Sie das in I_7 angedeutete Prinzip mehrfach anwenden:

$$c^3 + c^2 + c + 1 + \frac{1}{c} = c^3\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{c^4}\right)$$

Zur Kontrolle multipliziere man den Faktor mit jedem Glied in der Klammer. Entsteht wieder der Ausgangsterm, war die Umformung richtig. ◄—— T_{11}

L27 von $Ü_4$

1. $24ab - 8b + 3a - 1 = 8b(3a - 1) + 3a - 1$
$= 8b(3a - 1) + (3a - 1)$
$= (3a - 1)(8b + 1)$

Jetzt erkennen Sie den Term $(3a - 1)$ als gemeinsamen Faktor.

2. $12pr - 4p - 3r + 1 = 4p(3r - 1) - 3r + 1$
$= 4p(3r - 1) - (3r - 1)$

Klammert man (-1) aus den letzten beiden Gliedern aus, wird der Term $(3r - 1)$ gemeinsamer Faktor.

$= (3r - 1) \cdot (4p - 1)$

3. $6ax - 4ay - 9bx + 6by = 2a(3x - 2y) - 3b(3x - 2y)$
$= (3x - 2y) \cdot (2a - 3b)$

4. $x^2 + 8xy + 15y^2 = x^2 + 3xy + 5xy + 15y^2 = x(x + 3y) + 5y(x + 3y)$

$3 \cdot 5 = 15$

$= (x + 3y) \cdot (x + 5y)$

5. $a^2 - 2ab - 8b^2 = a^2 + 2ab - 4ab - 8b^2 = a(a + 2b) - 4b(a + 2b)$

$(+2) \cdot (-4) = (-8)$

$= (a + 2b) \cdot (a - 4b)$

Hatten Sie Fehler, gehen Sie zu ◄—— I_7

Sonst gehen Sie zu ◄—— T_{12}

L28 von T_{11}

1. $\frac{1}{6}ab(5a - b + 7)$

2. $a(a^2 + a - 1)$

3. $(x + y) \cdot (2a - b)$

4. $x + 2 = x\left(1 + \frac{2}{x}\right)$, denn $x\left(1 + \frac{2}{x}\right) = x + 2$

5. $x + 2 = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, denn $2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = x + 2$

Hatten Sie Fehler, dann gehen Sie zu ◀——— I_7

Sonst arbeiten Sie weiter mit ◀——— T_{12}

L29 von Ü$_5$

$42abc : (-6ac) = -7b$

$-108mnop : (-12np) = +9mo$

$(45kl + 18kn - 54k) : 9k = 5l + 2n - 6$

$(ax^3 + acx^2 - adx) : (-ax) = -x^2 - cx + d$ ◀——— T_{13}

L30 von T$_{12}$

Sie haben richtig jedes Glied der 1. Klammer durch den Divisor $-7n$ geteilt, sind dann aber über die Vorzeichen der Teildivisionen gestolpert.
Beachten Sie die 4 Möglichkeiten:

I. $(+a) : (+b) = +(a : b)$

II. $(-a) : (-b) = +(a : b)$

III. $(-a) : (+b) = -(a : b)$

IV. $(+a) : (-b) = -(a : b)$ ◀——— T_{12}

L31 von T$_{12}$

Sie haben richtig gerechnet. ◀——— T_{13}

L32 von T$_{12}$

Sie haben sich verrechnet. ◀——— I_8

L33 von T_{13}

Sie haben nur einen Teil der möglichen Werte erfaßt. Ordnet man in gewohnter Weise die Zahlen auf dem Zahlenstrahl an, dann bedeutet $a < b$, daß die Zahl a links von b steht. Diese Vorstellung ermöglicht es uns, T_{13} zu veranschaulichen. Die für x einzusetzenden Zahlen sollen rechts von -2 und **nicht** rechts von $+3$ stehen.

Als Skizze:

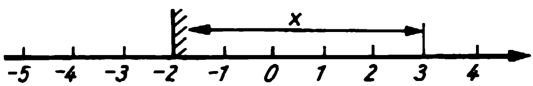


Bild 1.6

Durchdenken Sie Ihre Lösung, und entscheiden Sie sich für eine andere Antwort. ◄——— T_{13}

L34 von T_{13}

Sie haben die Relationszeichen $<$ und $\leqq$ richtig gedeutet. ◄——— T_{14}

L35 von T_{14}

Sehen Sie sich Ihre Zeichenreihe an, und denken Sie an die Vorrangregel. In Ihrem Term wird 10 mit 8 multipliziert, gefordert aber war die Bildung eines Produktes aus der Summe von 100 und 10 (110) und der Differenz aus 8 und 3 (5). Sie müssen durch Klammern dafür sorgen, daß aus 100 und 10 **vor** dem Multiplizieren 110 wird. Ebenso verhält es sich mit der Differenz aus 8 und 3.
Der letzte Teil Ihres Terms ist richtig. Sind Sie ohne vorherige Klammern darauf gekommen, sehen Sie sich bitte zur Sicherheit die komplette Lösung in L_{37} daraufhin noch einmal an.

Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort. ◄——— T_{14}

L36 von T_{14}

Ihr Term ist fast richtig. Nur bei der letzten Klammer haben Sie einen Vorzeichenfehler gemacht. Der Textteil „Differenz aus 20 und (-2)“ muß so in eine Zeichenreihe übersetzt werden: $20 - (-2)$. Da diese Differenz von dem weiter vorn stehenden Produkt subtrahiert werden soll, ist die Schreibweise:

(Produkt) $-$ $[20 - (-2)]$ richtig. ◄——— $Ü_6$

L37 von T_{14}

Sie haben unser Lob verdient, weil Sie sich nicht haben verblüffen lassen. Die richtige Übersetzung des Textes: „Multipliziere die Summe aus 100 und 10 mit der Differenz aus 8 und 3. Vermindere das Produkt um die Differenz aus 20 und —2" in eine Zeichenreihe kam so zustande:

Text	Übersetzung in Zeichenreihe
Summe aus 100 und 10	$100 + 10$
Differenz aus 8 und 3	$8 - 3$
Produkt aus Summe und Differenz	$(100 + 10) \cdot (8 - 3)$
Differenz aus 20 und —2	$20 - (-2)$
Vermindere das Produkt ... um diese Differenz	$[\underbrace{(100 + 10) \cdot (8 - 3)}_{\text{Produkt}}] - [\underbrace{20 - (-2)}_{\text{Differenz}}]$ Diese eckige Klammer ist wegen der Regel „· vor —" entbehrlich.

Fertige Lösung: $(100 + 10) \cdot (8 - 3) - [20 - (-2)]$ ◄——— $Ü_6$

L38 von $Ü_6$

1. $4 \cdot (-7) + \frac{-5}{10}$ oder $4 \cdot (-7) + (-5):10$

2. $\frac{18}{6 \cdot [(-2) - (-4)]}$ oder $18:6 \cdot [(-2) - (-4)]$

3. $[25 + (-7) \cdot (-3)] - 18$ Die eckige Klammer ist entbehrlich.

4. $[25 + (-7)] \cdot (-3 - 18)$ Beachten Sie den Unterschied zu 3.

5. $3 \cdot 7 + 2 \cdot [(-5) + (-6)]$ ◄——— T_{15}

L39 von T_{15}

Das haben Sie für den Anfang schon recht gut gemacht. Ein feiner Textunterschied ist Ihnen jedoch entgangen. T_{15} spricht von „einer Zahl" und „einer anderen Zahl". Es sind also zwei Veränderliche im Spiel, was in Ihrem Term durch die Verwendung von 2 Zeichen für 2 verschiedene Variablen Berücksichtigung finden muß.

Korrigieren Sie, und gehen Sie zu ◄——— T_{15}

L40 von T_{15}

Sie haben richtig erkannt, daß der gesuchte Term 2 Leerstellen (Variablen) aufweisen muß. Leider haben Sie bei der Übersetzung der 2. Klammer nicht genau genug gelesen. Es heißt im Text „... 10faches der **zweiten** Zahl ...“. Für diese zweite Zahl haben Sie in der ersten Klammer bereits die Variable y verwendet. Da in der zweiten Klammer die **gleiche** Zahl am Anfang vorkommt, müssen Sie hier auch wieder das Zeichen y verwenden.

Korrigieren Sie, und gehen Sie zu ◄——— T_{15}

L41 von T_{15}

Wir freuen uns über Sie. T_{15} war nicht einfach, und Sie haben eine richtige „Übersetzung“ angefertigt.
Nehmen Sie noch zur Kenntnis, daß auch die in der Antwort f) und g) benutzten Schreibweisen richtig sind.

Absolvieren Sie noch Beispiel 3. und 4. aus $Ü_7$. ◄——— $Ü_7$

L42 von T_{15}

Ihre Antwort ist richtig, und wir beglückwünschen Sie.
Beachten Sie, daß auch die Antworten d), f), g) richtig sind. Absolvieren Sie noch die Beispiele 3. und 4. aus $Ü_7$. ◄——— $Ü_7$

L43 von T_{15}

Sie haben nicht nur richtig übersetzt, sondern auch noch eine ansprechende Form gefunden. Wir sprechen Ihnen ein Lob aus. Absolvieren Sie noch Beispiel 4. aus $Ü_7$. ◄——— $Ü_7$

L44 von T_3

Richtig. ◄——— T_4

L45 von Ü$_7$

1. $10x + 5x + 2x$ oder $10a + 5a + 2a$
2. $(x + y) \cdot (x - y)$
3. $(a - 6) : 2(100 - a)$ oder $\dfrac{a - 6}{2(100 - a)}$
4. $(a + b + c) \cdot \dfrac{b + a^4}{2}$ oder $(x + y + z) \dfrac{1}{2} (y + x^4)$

Sollten Sie alle Aufgaben zur Kenntnisüberprüfung fehlerfrei gelöst haben, dann (aber nur dann) dürfen Sie sich jetzt die Leistungskontrolle (1.6.) ansehen. Bei auch nur geringen Lösungsschwierigkeiten empfehlen wir Ihnen unbedingt, die erforderlichen Informationen und Übungen gründlich zu verarbeiten. Verwenden Sie zum leichteren Auffinden der Informationen und Übungen auch das Sachwortverzeichnis am Ende des programmierten Lehrmaterials.
Gehen Sie nach einer Erholungspause zur Leistungskontrolle dieses Abschnitts.

——▶ 1.6.

1.6. Leistungskontrolle

1.6.1. Aufgaben

Im zurückliegenden Abschnitt haben Sie eine Reihe neuer Erkenntnisse gewonnen und schon Bekanntes gefestigt. In dem nun folgenden Test legen Sie vor sich selbst Rechenschaft ab, ob Ihre Leistungen den eingangs formulierten 11 Teilzielen des Abschnittes entsprechen. Darum legen Sie das Programm beiseite, nehmen Sie ein Blatt Papier und lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Klausurbedingungen.

Zeit: 45 Minuten Hilfsmittel: keine

Aufgaben:

1. Gegeben sind 4 Terme: $T_1 = a + 2$; $T_2 = a - 1$; $T_3 = a + 3$; $T_4 = a - 4$.

1.1. Bilden Sie den zusammengesetzten Term $T = T_1 \cdot T_2 - T_3 \cdot T_4$, führen Sie die verlangten Operationen aus und vereinfachen Sie.

1.2. Belegen Sie die Variable a mit der Zahl 3, und ermitteln Sie den Wert von T
1. im vereinfachten Term
2. im nichtvereinfachten Term.

Was stellen Sie fest?

2. In dem Term $T(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{3x^2 - 1}$

soll in Zähler und Nenner x^2 als Faktor ausgeklammert werden.

3. $T_1 = 6x^2 + 4x$; $T_2 = 4x - 5$; $T_3 = 3x$

3.1. Bilden Sie einen neuen Term $(3T_1 - 6T_2) : T_3$, führen Sie die verlangten Operationen aus und vereinfachen Sie.

3.2. Belegen Sie die Variable x mit (-2), und ermitteln Sie den Wert des Terms.

4. Übersetzen Sie in einen Term: „Das Doppelte einer Zahl vermindert um 10, dividiert durch die Differenz aus dieser Zahl und 5 ergibt immer 2."

Haben Sie die Aufgaben gelöst oder sind 45 Minuten vergangen, beenden Sie die Klausur, und gehen Sie zu 1.6.2.

1.6.2. Auswertung

1.1.
$$\begin{aligned} T &= (a + 2) \cdot (a - 1) - (a + 3)(a - 4) \\ &= (a^2 - 1a + 2a - 2) - (a^2 - 4a + 3a - 12) \\ &= a^2 - 1a + 2a - 2 - a^2 + 4a - 3a + 12 \\ &= \underline{\underline{2a + 10}} \end{aligned}$$
3 Punkte

1.2. 1. $T(3) = 2 \cdot 3 + 10 = \underline{\underline{16}}$

2.
$$\begin{aligned} T(3) &= (3 + 2) \cdot (3 - 1) - (3 + 3)(3 - 4) \\ &= 5 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ &= 10 - (-6) \\ &= \underline{\underline{16}} \end{aligned}$$
2 Punkte

Der Wert des Terms hat sich durch das Zusammenfassen nicht geändert.
Wenn Sie den Wert 16 nicht errechnet haben, müssen Sie sich im „Lehrgang der Elementarmathematik" die Regeln über das Rechnen mit vorzeichenbehafteten Zahlen einprägen.

2.
$$T(x) = \underline{\underline{\frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3 - \frac{1}{x^2}\right)}}}$$
3 Punkte

Wenn Sie diese Form nicht haben herstellen können, studieren Sie I_7, und rechnen Sie alle Beispiele von $Ü_3$ durch.

3.1. $(3T_1 - 6T_2) : T_3 = (18x^2 - 12x + 30) : (3x)$ 2 Punkte

$$= 6x - 4 + \frac{10}{x}$$
4 Punkte

3.2. $$T(-2) = 6(-2) - 4 + \frac{10}{(-2)}$$
$$= -12 - 4 - 5$$
$$= \underline{\underline{-21}}$$ 2 Punkte

Hatten Sie mit 3.1. Schwierigkeiten? Dann gehen Sie I_5 und die Beispiele von $Ü_5$ noch einmal gründlicher durch.

---

4. $\underline{\underline{(2x - 10) : (x - 5) = 2}}$ 4 Punkte

Die Übersetzung kam so zustande:

Text	Zeichenreihe	Bemerkungen
das Doppelte einer Zahl vermindert um 10	$2 \cdot x - 10$	
Differenz aus der Zahl und 5	$x - 5$	
ergibt 2	$= 2$	
kompletter Text	$(2x - 10) : (x - 5) = 2$	Die Klammern heben „: vor —" auf

Summieren Sie die erreichten Punkte.
Die Tabelle zeigt Ihnen, mit welcher Note wir Ihren Leistungsstand bewerten würden.

Punkte	Note
19–20	1
16–18	2
12–15	3
8–11	4
0– 7	5

Nach einer angemessenen Ruhepause gehen Sie zu Abschnitt 2.

2. Das Rechnen mit Brüchen

2.1. Wissens- und Könnensziele

In diesem Abschnitt werden Kenntnisse aus dem Bereich der Bruchrechnung überprüft, gegebenenfalls wiederholt und geübt, so daß Sie nach der Abarbeitung dieses Abschnittes gesicherte Kenntnisse haben. Diese können Sie wieder im Abschlußtest überprüfen. Die Bruchrechnung ist ein wichtiges und unbedingt notwendiges Handwerkszeug, um angewandte Aufgaben aus anderen Gebieten lösen zu können. Im einzelnen ist durch die Abarbeit des Abschnittes folgendes zu erreichen:

1. Brüche sollen Sie durch Kürzen vereinfachen können.
   Dabei ist das in Abschnitt 1. Gelernte anzuwenden.

2. Das Erweitern von Brüchen müssen Sie so beherrschen, daß Sie es bei der Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen sicher anwenden können.

3. Es sollen Fertigkeiten ausgebildet werden, die Sie befähigen, Brüche zu addieren oder zu subtrahieren.

4. Sie müssen bei der Durchführung der Multiplikation von Brüchen Sicherheit erlangen. Dabei werden die Vorzeichenregeln wiederholt.

5. Die Division von Brüchen sollen Sie so beherrschen, daß es Ihnen möglich ist, diese selbständig auf die Lösung von Spezialfällen der allgemeinen Regel anwenden zu können. So werden Sie alle Aufgaben lösen können, die eine Division von Brüchen enthalten.

6. Insgesamt müssen Sie in der Anwendung der Bruchrechnung so sicher sein, daß Sie auch kompliziertere Aufgaben (etwa Doppelbrüche) berechnen oder vereinfachen können.

7. Sie wiederholen einige Abschnitte aus den vorangegangenen Themen.

$\longrightarrow T_1$

2.2. Kenntnisüberprüfung

T1

Vereinfachen Sie den folgenden Bruch.

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{8(x^2 - y^2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Antworten:

1. Diese Aufgabe kann ich nicht sofort lösen. Ich bitte deswegen um eine Hilfe. $\longrightarrow$ I_1
2. Ich habe eine Lösung gefunden und möchte sie vergleichen. $\longrightarrow$ L_1
3. Ich kann die Lösung der Aufgabe auch mit der Information 1 nicht finden. $\longrightarrow$ I_2

T2

Erweitern Sie den Bruch

$$\frac{m+n}{m-n}$$

so, daß ein gleichwertiger Bruch mit dem Nenner $3am^2 - 3an^2$ entsteht.

$$\frac{m+n}{m-n} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{3am^2 - 3an^2}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $\longrightarrow$ L_3

T3

Berechnen Sie.

$$\frac{1}{5} + \frac{8}{9} - \frac{1}{6} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Antworten:

1. Ich kann diese Frage nicht beantworten und brauche zunächst eine Hilfe. $\longrightarrow$ I_4

2. Mein Ergebnis heißt: 1 ⟶ L_5

3. Mein Ergebnis heißt: $\frac{83}{90}$ ⟶ L_6

4. Mein Ergebnis heißt: $\frac{4}{135}$ ⟶ L_7

5. Ich habe ein anderes Ergebnis bestimmt, denn keine der angegebenen Lösungen halte ich für richtig. ⟶ L_8

T4

Berechnen Sie:

$$\frac{5}{4x^2 + 2xy} - \frac{3}{8x^2 + 4xy} - \frac{2}{6xy - 3y^2} + \frac{1}{6xy}$$

Arbeiten Sie sorgfältig, wozu Sie sich die notwendige Zeit nehmen sollen.
Es ist notwendig, daß Sie hier vor allem die Kenntnisse aus Abschnitt 1. verwenden.

Wenn Sie die Lösung bestimmt haben, so gehen Sie zum Vergleichen zu ⟶ L_{10}

T5

Berechnen Sie:

$$\left(-\frac{44}{75}\right) \cdot \frac{15}{77} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{25}{8}$$

⟶ L_{12}

T6

Berechnen Sie:

$$\frac{x + y}{6xy - 3x^2} \cdot \frac{12x^2y - 6x^3}{2x + 4y} \cdot \frac{x^2 - 4y^2}{(x + y)^2}$$

Gehen Sie zum Vergleich der Lösung zu ⟶ L_{14}

T7

Wie wird die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch ausgeführt?

1. Ich weiß es nicht. ⟶ I_8
2. Die ganze Zahl wird mit dem Zähler des Bruches multipliziert und der Nenner beibehalten. ⟶ L_{16}
3. Die ganze Zahl wird mit dem reziproken Wert des Bruches multipliziert. ⟶ L_{17}
4. Die ganze Zahl wird in einen unechten Bruch verwandelt und mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert. ⟶ L_{18}

T8

Bestimmen Sie:

$$\frac{9a^2(x+y)^2}{4am+6m^2} : \frac{3a(x^2-y^2)}{2a+3m}$$

⟶ L_{19}

T9

Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x+1}{x}}$$

Vergleichen Sie Ihre Lösung mit ⟶ L_{22}

2.3. Informationen

I1 von T_1

Beachten Sie bitte bei der Durchführung von T_1 die binomischen Formeln.

Sie sollen hier zur Wiederholung angegeben werden:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Entscheiden Sie sich neu. ⟵ T_1

I2 von T_1 oder L_1

Gesetzmäßigkeit

Zähler und Nenner eines Bruches können mit dem gleichen Faktor multipliziert werden, ohne daß sich der Wert des Bruches ändert.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} \quad \begin{matrix} c \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}}$$

Diese Gesetzmäßigkeit von rechts nach links gelesen heißt:

Zähler und Nenner eines Bruches können durch die gleiche Zahl (verschieden von Null) dividiert werden, ohne daß sich der Wert des Bruches ändert.

Beispiele:

1. $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$

   Zähler und Nenner des Bruches auf der linken Seite wurden durch 15 dividiert.

2. $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$

Der zweite Bruch entsteht aus dem ersten durch Anwendung der binomischen Formeln. Es wird dann der Zähler und der Nenner des zweiten Bruches durch $(a + b)$ dividiert.

Eine Anwendung dieser Gesetzmäßigkeit ist das **Kürzen** eines Bruches.

Der Zähler und der Nenner eines vorgegebenen Bruches werden durch den Faktor (oder die Faktoren) dividiert, der (oder die) gemeinsam in Zähler und Nenner auftritt (auftreten).[1]
Wie wird nun der Faktor (oder die Faktoren) bestimmt, durch den (oder durch die) Zähler und Nenner dividiert werden?
Dazu werden die ganzen Zahlen in Zähler und Nenner des Bruches in ein Produkt aus Primzahlen zerlegt (Primfaktorzerlegung). Sie können, wenn das notwendig ist, die bekannten Teilbarkeitsregeln wiederholen.[2]

---

[1] Diese Faktoren nennt man den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner.
[2] Eine Zahl ist ohne Rest teilbar durch
2, wenn die letzte Ziffer eine gerade Zahl ist,
3, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist,
4, wenn die letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden,
5, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist,
6, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist,
8, wenn die letzten drei Ziffern eine durch acht teilbare Zahl bilden,
9, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispiel:

$$\frac{1188}{3960}$$

Primfaktorzerlegung:

$$3960 = 2 \cdot 1980 = 2 \cdot 2 \cdot 990 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 495 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 165 =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 55 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$1188 = 2 \cdot 594 = 2 \cdot 2 \cdot 297 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 99 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 33 =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

Es folgt aus der Primfaktorzerlegung:

$$\frac{1188}{3960} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

Etwas schwieriger kann es werden, wenn im Zähler oder Nenner Summen oder Differenzen auftreten (vgl. T_1). In diesem Fall ist diese Summe oder Differenz durch Ausklammern[1] in ein Produkt von Faktoren zu zerlegen, so daß die entstehenden Faktoren nicht weiter zerlegt werden können (Primfaktoren). Dazu sind mitunter die Kenntnisse über die binomischen Formeln notwendig.
Gehen Sie zu I_1, wenn Sie diese Formeln **nicht** sicher beherrschen. Kommen Sie dann an diese Stelle zurück.

1. Aufgabe aus T_1 — 2. binomische Formel

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{8(x^2 - y^2)} = \frac{2(x^2 - 2xy + y^2)}{8(x^2 - y^2)} = \frac{2(x-y)(x-y)}{8(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{4(x+y)}$$

3. binomische Formel

2. $$\frac{2x + 2xy}{6xy + 6x} = \frac{2(x + xy)}{6(xy + x)} = \frac{2x(1 + y)}{6x(y + 1)} = \frac{2x(1 + y)}{3 \cdot 2x(1 + y)} = \frac{1}{3}$$

Nach der am Anfang angegebenen Gesetzmäßigkeit ändert sich der Wert des Bruches nicht. Es vereinfachen sich jedoch dadurch Zähler und Nenner des Bruches, wodurch weiteres Rechnen mit dem Bruch erleichtert wird. Vor dem Rechnen werden Brüche deswegen so weit wie möglich gekürzt.

→ $Ü_1$

I3 von L_3

In I_2 hatten Sie als Gesetzmäßigkeit erkannt, daß Zähler und Nenner eines Bruches mit dem gleichen Faktor multipliziert werden können, ohne daß sich dadurch der Wert des Bruches ändert.

[1] Die Durchführung des Ausklammerns wurde im Abschnitt 1. behandelt. Orientieren Sie sich mit Hilfe des Sachwortverzeichnisses, wenn Ihre Kenntnisse Lücken zeigen.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} \quad \begin{array}{l} c \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}}$$

Das müßten Sie aber doch noch gewußt haben.
Es wird hier nicht mit den gemeinsam vorkommenden Faktoren wie beim Kürzen dividiert.

Die hier zu lösende Aufgabe, den Zähler und Nenner eines Bruches so mit einem Faktor zu multiplizieren, daß ein neuer vorgegebener Nenner entsteht, wird

Erweitern

eines Bruches genannt.

Beispiel:

1. Aufgabe:

$$\frac{13}{17} = \frac{\cdot\cdot}{51}$$

Teilschritte:

1. Bestimmung des Erweiterungsfaktors

$51:17 = 3$

2. Bestimmung des neuen Zählers

$13 \cdot 3 = 39$

Lösung:

$$\frac{13}{17} = \frac{39}{51}$$

2. Aufgabe:

$$\frac{2}{t-1} = \frac{\cdots\cdots}{3t^2-3}$$

Teilschritte:

1. Bestimmung des Erweiterungsfaktors

$$\begin{aligned}(3t^2-3):(t-1) &= 3(t^2-1):(t-1)\\ &= 3(t+1)(t-1):(t-1)\\ &= 3(t+1)\end{aligned}$$

Bemerkung: Hier wurde der Erweiterungsfaktor durch Ausklammern und Kürzen bestimmt. Der Erweiterungsfaktor kann jedoch auch durch die Partialdivision bestimmt werden. Auf die Wiederholung dieses Verfahrens soll jedoch verzichtet werden.

2. Bestimmung des neuen Zählers

$2 \cdot 3(t+1) = 6(t+1)$

Lösung:

$$\frac{2}{t-1} = \frac{6(t+1)}{3t^2-3}$$

Sie können sehr leicht überprüfen, ob der Bruch richtig erweitert wurde. Wenn der erweiterte Bruch wieder gekürzt wird, muß der ursprüngliche Bruch entstehen. Dabei erkennen Sie auch den Zusammenhang zwischen dem Erweitern und dem Kürzen. Beides beruht, wie deutlich wurde, auf der eingangs angegebenen Gesetzmäßigkeit.

Probe zu Beispiel 2:

$$\frac{6(t+1)}{3t^2-3} = \frac{2 \cdot 3(t+1)}{3(t^2-1)} = \underbrace{\frac{2 \cdot 3(t+1)}{3(t+1)(t-1)}}_{\text{3. binomische Formel}} = \frac{2}{t-1}$$

Bevor Sie weiterlesen, formulieren Sie die in den zwei Teilschritten erkennbare allgemeine Lösungsvorschrift.

1. Teilschritt: Der Erweiterungsfaktor wird bestimmt, indem der Nenner des erweiterten Bruches durch den Nenner des ursprünglichen Bruches dividiert wird.[1]

2. Teilschritt: Der Zähler des erweiterten Bruches ergibt sich durch Multiplikation des Zählers vom gegebenen Bruch mit dem Erweiterungsfaktor.

→ Ü$_2$

I4 von T$_3$

Es sollen Brüche addiert (subtrahiert) werden, deren Nenner nicht gleich sind (ungleichnamige Brüche).
Erweitern Sie die Brüche zunächst so, daß sie den gleichen Nenner erhalten. Es entstehen auf diese Weise gleichnamige Brüche. Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort. ← T$_3$

I5 von L$_5$, L$_7$ oder L$_8$

Es soll die Regel für die Addition und Subtraktion von Brüchen wiederholt werden:

> Nur **gleichnamige Brüche**[2] können addiert oder subtrahiert werden.
> Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem die Zähler der Brüche addiert (subtrahiert) werden und der gemeinsame Nenner beibehalten wird.
> Sind die Nenner der zu addierenden oder zu subtrahierenden Brüche nicht gleich, dann müssen sie zunächst so erweitert werden, daß sie den gleichen Nenner erhalten.

---

[1] Steht im Nenner des erweiterten Bruches eine Summe, so muß sich diese so in ein Produkt zerlegen lassen, daß ein Faktor dem Nenner des gegebenen Bruches entspricht.
[2] Brüche sind gleichnamig, wenn sie den gleichen Nenner besitzen.

Der Hauptnenner ergibt sich aus dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (k.g.V.) der einzelnen Nenner.
Dieser wird durch eine Primfaktorzerlegung bestimmt.

Beispiele:

1. $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3}{21}+\frac{14}{21}=\frac{17}{21}$

2. Die Aufgabe aus T_3 wird demzufolge so gelöst:

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{9}-\frac{1}{6}=\frac{18}{90}+\frac{80}{90}-\frac{15}{90}=\frac{83}{90}$$

3. $\frac{3}{16}+\frac{5}{24}-\frac{2}{15}+\frac{5}{12}-\frac{1}{72}=\frac{135}{720}+\frac{150}{720}-\frac{96}{720}+\frac{300}{720}-\frac{10}{720}$

$$=\frac{135+150-96+300-10}{720}=\frac{479}{720}$$

Bestimmung des Hauptnenners (k.g.V. der Nenner):

$$16=\underline{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$$
$$24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$$
$$15=3\cdot \underline{5}$$
$$12=2\cdot 2\cdot 3$$
$$72=2\cdot 2\cdot 2\cdot \underline{3\cdot 3}$$

Hauptnenner: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 3=720$

Üben Sie die Addition und Subtraktion von Brüchen in ———▶ $Ü_3$

I6 von L_{10}

Bei der in T_4 angegebenen Aufgabe handelt es sich, das haben Sie sicher selbst bemerkt, ebenfalls um eine Addition (Subtraktion) von ungleichnamigen Brüchen. Durch das Ausklammern werden die Nenner in Primfaktoren zerlegt, damit der Hauptnenner durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bestimmt werden kann.
Die Brüche werden nun so erweitert, daß sie alle als Nenner den Hauptnenner haben. Dann erfolgt die Addition (Subtraktion), wie Sie das schon wiederholt haben.

An Hand der Aufgabe aus T_4 wird das jetzt gezeigt:

Nenner	Primfaktorzerlegung des Nenners	Erweiterungsfaktor (Hauptnenner geteilt durch Nenner)	erweiterter Zähler (Erweiterungsfaktor mal ursprünglicher Zähler)
$4x^2 + 2xy$	$\underline{2x(2x+y)}$	$\frac{2\cdot 2\cdot 3xy(2x+y)}{2x(2x+y)} = 6y$	$6y \cdot 5 = 30y$
$8x^2 + 4xy$	$\underline{2\cdot 2}\cdot x(2x+y)$	$\frac{2\cdot 2\cdot 3xy(2x+y)}{2\cdot 2x(2x+y)} = 3y$	$3y \cdot 3 = 9y$
$6xy + 3y^2$	$\underline{3y}(2x+y)$	$\frac{2\cdot 2\cdot 3xy(2x+y)}{3y(2x+y)} = 4x$	$4x \cdot 2 = 8x$
$6xy$	$2\cdot 3xy$	$\frac{2\cdot 2\cdot 3xy(2x+y)}{2\cdot 3xy} = 2(2x+y)$	$2(2x+y)\cdot 1 = 4x + 2y$

Aus der zweiten Spalte der Tabelle ergibt sich der folgende Hauptnenner:

$$2 \cdot 2 \cdot 3xy(2x + y) = 12xy(2x + y)$$

Somit heißt die Lösung der Aufgabe:

$$\frac{30y - 9y - 8x + 4x + 2y}{12xy(2x + y)} = \frac{23y - 4x}{12xy(2x + y)}$$

Wie Sie sehen, müssen Sie die Kenntnisse über das Erweitern von Brüchen sicher anwenden können. → $Ü_4$

7 von L_{12}

Brüche werden multipliziert, indem das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert wird.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0 \quad d \neq 0}$$

Um Rechenarbeit zu sparen, wird vor der Multiplikation erst gekürzt. Die gekürzten Brüche sind leichter zu multiplizieren.

Beispiel:

1. $\frac{2}{7} \cdot \frac{35}{8} = \frac{\cancel{2} \cdot \overset{5}{\cancel{35}}}{\cancel{7} \cdot \underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{5}{4}$

2. $\frac{9}{56} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{35}{9} \cdot \frac{12}{77} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{3}{77}$ ⟶ $Ü_5$

I8 von T_7, L_{16} oder L_{19}

Die allgemeine Regel für die Division von Brüchen lautet:

Zwei Brüche werden dividiert, indem der Dividend mit dem reziproken Wert des Divisors multipliziert wird.

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Tritt als Dividend oder Divisor eine ganze Zahl auf, dann kann diese Regel ebenfalls angewandt werden. Die ganze Zahl wird zu diesem Zweck in einen unechten Bruch verwandelt, indem sie in den Zähler geschrieben und als Nenner die Zahl 1 genommen wird.

Beispiel:

$a = \frac{a}{1}$ ⟶ $Ü_7$

I9 von L_{22}

Brüche, in deren Zähler und Nenner wieder Brüche stehen, werden Doppelbrüche genannt.
Bei der Lösung von Aufgaben dieses Types ist zu berücksichtigen, daß jeder Doppelbruch einer Division entspricht.
Beachten Sie bitte, daß der Hauptbruchstrich bei Doppelbrüchen immer klar zu erkennen ist.

Beispiele:

1. $\cfrac{\frac{2}{3}}{2}$

Diese Aufgabe bedeutet, daß der Bruch $\frac{2}{3}$ durch die ganze Zahl 2 zu dividieren ist.

Ergebnis:

$$\frac{2}{3}:2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

2. $\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}}$

Diese Aufgabe bedeutet, daß die ganze Zahl 2 durch den Bruch $\frac{3}{2}$ zu dividieren ist.

Ergebnis:

$$2:\frac{3}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Die Ergebnisse in beiden Beispielen unterscheiden sich. Bei der Berechnung von Doppelbrüchen ist es sinnvoll, Zähler und Nenner des Bruches weitestgehend zu vereinfachen.

So heißt die Lösung von T_9:

$$\frac{\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{1-x}-\frac{x+1}{x}}$$

Hauptnenner im Zähler: $x(x+1)$
Erweiterungsfaktor für den ersten Bruch: $(x+1)$
Erweiterungsfaktor für den zweiten Bruch: x

Hauptnenner im Nenner: $x(1-x)$
Erweiterungsfaktor für den ersten Bruch: x
Erweiterungsfaktor für den zweiten Bruch: $(1-x)$

$$\frac{\frac{(x-1)(x+1)+x^2}{x(x+1)}}{\frac{x^2-(x+1)(1-x)}{(1-x)x}}$$

Addition der Brüche im Zähler

Subtraktion der Brüche im Nenner

Die Brüche im Zähler und Nenner des Doppelbruches wurden addiert oder subtrahiert. Der Doppelbruch wird als Divisionsaufgabe geschrieben.

$$\frac{(x-1)(x+1)+x^2}{x(x+1)}:\frac{x^2-(x+1)(1-x)}{x(1-x)}$$

Die Division wird ausgeführt.

Dabei wird der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert (vgl. diesen Abschnitt in I_8).
Beachten Sie hier, daß der Bruchstrich Klammern ersetzt hat (vgl. Abschnitt 1.).

$$\frac{[(x-1)(x+1)+x^2](1-x)x}{x(x+1)[x^2-(x+1)(1-x)]}$$

Zunächst kann x gekürzt werden.

$$\frac{[(x-1)(x+1)+x^2](1-x)}{(x+1)[x^2-(x+1)(1-x)]}=\frac{[x^2+(x-1)(x+1)](1-x)}{[x^2-(x+1)(1-x)](x+1)}$$

In dem letzten Schritt wurden nur Summanden bzw. Faktoren vertauscht.

Problem: Kann der erste Faktor im Zähler und der erste Faktor im Nenner gekürzt werden?

Dazu werden in den eckigen Klammern die Produkte gebildet. Achten Sie dabei im Nenner auf das Minus vor den runden Klammern.

$$\frac{[x^2+x^2-1]\,(1-x)}{[x^2+x^2-1]\,(x+1)}=\frac{(2x^2-1)\,(1-x)}{(2x^2-1)\,(x+1)}$$ Zusammenfassen in den eckigen Klammern

Es kann jetzt gekürzt werden.

Ergebnis:

$$\frac{1-x}{x+1}$$

Das Problem, ob die Terme in den eckigen Klammern gleich sind, kann auch anders gelöst werden.

Im Nenner steht:

$$[x^2-(x+1)(1-x)]$$

An der Stelle wird (-1) ausgeklammert.

Damit steht vor der ersten runden Klammer $-(-1)$, also ein Pluszeichen. In der zweiten runden Klammer ändert sich das Vorzeichen der Summanden. So entsteht:

$$[x^2+(x+1)(x-1)]$$

Das stimmt mit dem Term in der eckigen Klammer im Zähler des Bruches überein.

Verwenden Sie das Gelernte, um die Aufgaben in $Ü_9$ zu lösen. ⟶ $Ü_9$

2.4. Übungen

U1 von I_2

Die folgenden Brüche sind so weit wie möglich zu vereinfachen:

1. $\dfrac{28}{42}$
2. $\dfrac{22+44}{77}$
3. $\dfrac{208}{1066}$
4. $\dfrac{2112}{264}$
5. $\dfrac{82}{1683}$
6. $\dfrac{7b+7}{14b+14}$
7. $\dfrac{a^2-b^2}{ab+b^2}$
8. $\dfrac{mn}{mn+n}$
9. $\dfrac{4mx+6nx-4my-6ny}{6mx+9nx+6my+9ny}$
10. $\dfrac{6ab+6b^2+6a+6b}{9ab+9b^2+9a+9b}$

Vor dem Vergleich mit den Ergebnissen lösen Sie zunächst alle Aufgaben.

→ L_2

U2 von I_3

Bestimmen Sie die fehlenden Zähler der Brüche:

1. $\dfrac{1}{7}=\dfrac{..}{35}$
2. $\dfrac{1}{11}=\dfrac{...}{253}$
3. $\dfrac{4}{17}=\dfrac{...}{153}$
4. $\dfrac{3}{19}=\dfrac{...}{513}$
5. $\dfrac{72}{77}=\dfrac{....}{3927}$
6. $\dfrac{1}{a}=\dfrac{....}{ab+a}$
7. $\dfrac{3}{b}=\dfrac{.......}{3bx-3by}$
8. $\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{.............}{ax+a-xb-b}$
9. $\dfrac{3t+1}{2t-1}=\dfrac{.....}{8t^2-2}$
10. $\dfrac{4n-m}{3n+m}=\dfrac{.................}{3n^2-3n+mn-m}$

→ L_4

U3 von I_5

Berechnen Sie:

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

2. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$

3. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{4}{35}$

4. $\frac{1}{9}-\frac{8}{75}$

5. $\frac{5}{8}+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

6. $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{8}+\frac{2}{3}$

7. $\frac{4}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}$

8. $\frac{2x-y}{3}+\frac{x-y}{4}-\frac{2x-3y}{16}$

9. Zwei Armee-Einheiten bewegen sich von 2 Standorten aus aufeinander zu. Die erste Truppeneinheit könnte die gesamte Entfernung zwischen den beiden Standorten in 4 Stunden und die zweite in 6 Stunden bewältigen.
Um welchen Teil der gesamten Entfernung zwischen beiden Standorten haben sich beide Truppenteile in einer Stunde einander genähert?

10. Ein leerer Behälter kann durch eine Zuleitung in 6 Stunden gefüllt werden. Der volle Behälter wird durch einen Abfluß in 8 Stunden entleert.
Der Behälter ist zu $\frac{3}{5}$ des Inhaltes gefüllt.
Welcher Teil des Behälters ist gefüllt, wenn die Zuleitung 2 Stunden und der Abfluß 5 Stunden geöffnet werden? $\longrightarrow L_9$

U4 von I_6

Berechnen Sie:

1. $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

2. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$

3. $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}-\frac{a}{b}$

4. $\frac{3}{a^2-b^2}+\frac{4}{a-b}-\frac{2}{a+b}$

5. $\frac{2}{a^2-a}+\frac{3}{a}-\frac{4}{a+1}$

6. $\frac{2}{3x}+\frac{5}{6x^2}-\frac{1}{2x}$

7. $\frac{2x}{x-y}-\frac{2x^2}{x^2-y^2}$

8. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x^2-1}$

Hinweis: Beachten Sie bei der Lösung der Aufgaben 4, 7, 8 die binomischen Formeln. $\longrightarrow L_{11}$

U5 von I_7

Berechnen Sie:

1. $\frac{2}{3} \cdot (-2)$

2. $(-3)\left(-\frac{2}{3}\right)$

3. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$

4. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{8}\right)$

5. $\frac{33}{49} \cdot 13 \cdot \frac{7}{22} \cdot \frac{14}{39}$

Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit den in L_{13} angegebenen. → L_{13}

U6 von L_{14}

Berechnen Sie:

1. $3a^2b \cdot \frac{4c}{9ab^2}$

2. $\frac{2x}{3(x-y)} \cdot (x^2 - y^2)$

3. $\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}\right)(2x - y)$

4. $\frac{5a^2b + 4a}{2a - b} \cdot \frac{4a^2 - b^2}{5ab + 4}$

5. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)$

→ L_{15}

U7 von I_8

Berechnen Sie:

1. $3a : \frac{9a^2b}{4c}$

2. $3 : \left(-\frac{2}{5}\right)$

3. $(-2) : \left(\frac{4}{7}\right)$

4. $(a^2 + 2ab + b^2) : \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^2}$

5. $a^2b : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

6. $\frac{84}{5} : \frac{12}{35}$

7. $\frac{4(m+n)^2}{3(m^2 - n^2)} : \frac{8(m+n)}{15(m-n)}$

8. $\frac{7a^2b(3x+y)}{21s + 7t} : \frac{3ab(3x-y)}{-14(3s+t)}$

9. $\frac{d(x-1)}{3(2x-1)} : \frac{2d^2(1-x)}{7(2x-1)^2}$

10. $\left(\frac{m^2 - 10m}{2m+1} - \frac{m}{4m^2 - 1}\right) : \frac{m}{8m^2 - 2}$

→ L_{20}

Ü8 von L_{20}

Wenn Sie bei dieser Stelle in der Wiederholung angelangt sind, haben Sie noch nicht die notwendige Sicherheit bei der Division von Brüchen erlangt.
Lösen Sie deswegen die folgenden Aufgaben:

1. $\dfrac{2}{15} : 2$
2. $\dfrac{42}{45} : 6$
3. $4 : \dfrac{8}{11}$
4. $\dfrac{6}{14} : \dfrac{12}{7}$
5. $\dfrac{338}{153} : \dfrac{1014}{483}$
6. $\dfrac{2xy}{3ab} : 4x^2$
7. $\dfrac{3z}{4ab} : 9z^2$
8. $\dfrac{26a^2bx^2}{27yz^2} : \dfrac{13abx}{9xy^2z}$
9. $\dfrac{32x(a+b)^2}{5r^2t} : \dfrac{8y(a-b)^2}{15rt}$
10. $\left(\dfrac{7}{8}x - \dfrac{1}{a}\right) : a$

→ L_{21}

Ü9 von I_9

Berechnen oder vereinfachen Sie die folgenden Doppelbrüche:

1. $\dfrac{2}{\dfrac{3}{5}}$
2. $\dfrac{3}{\dfrac{7}{11}}$
3. $\dfrac{\dfrac{4}{7}}{\dfrac{8}{21}}$
4. $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}}$
5. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6}}$
6. $\dfrac{\dfrac{1}{x} + x}{\dfrac{1}{x} - x}$
7. $\dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}$
8. $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{\dfrac{y}{x} + 1}$

9. $$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}$$

10. $$\frac{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} - \frac{x + y}{x - y}}{\frac{x + y}{x^2 - y^2}}$$

→ L_{23}

2.5. Lösungen

L1 von T_1

Die richtige Lösung heißt:

$$\frac{x - y}{4(x + y)}$$

Hatten Sie dieses Ergebnis?

Nein: ← I_2

Ja: Sie haben gezeigt, daß Sie Brüche kürzen können, und haben darüber hinaus die binomischen Formeln richtig angewandt. ← T_2

L2 von $Ü_1$

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{6}{7}$
3. $\frac{8}{41}$
4. 8
5. Der Bruch läßt sich nicht vereinfachen. Man findet diese Lösung sofort, wenn man Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegt.
6. $\frac{1}{2}$ Faktorzerlegung $\frac{7(b + 1)}{2 \cdot 7(b + 1)}$
7. $\frac{a - b}{b}$ Faktorzerlegung $\frac{(a + b)(a - b)}{b(a + b)}$
8. $\frac{m}{m + 1}$ Faktorzerlegung $\frac{m \cdot n}{n(m + 1)}$
9. $\frac{2(x - y)}{3(x + y)}$ Faktorzerlegung $\frac{2(x - y)(2m + 3n)}{3(x + y)(2m + 3n)}$
10. $\frac{2}{3}$

Haben Sie alle Ergebnisse wie angegeben bestimmt?
Ja: Sie beherrschen das Kürzen von Brüchen.
Nein: Berichtigen Sie die falsch gelösten Aufgaben, und vollziehen Sie die Lösung nach. ◀——— T_2

L3 von T_2

Heißt Ihre Gleichung

$$\frac{m+n}{m-n} = \frac{3a(m+n)^2}{3am^2 - 3an^2}?$$

Der Zähler kann selbstverständlich auch ausmultipliziert werden.

Ja: Sie beherrschen das Erweitern von Brüchen und können die Kenntnisse bei der Lösung von Aufgaben anwenden. ◀——— T_3

Nein: Sie hatten Schwierigkeiten bei der Lösung dieser Aufgabe? Die in I_2 angegebene Gesetzmäßigkeit beherrschen Sie nicht sicher bzw. können sie nicht sicher anwenden.
Nachdem Sie in I_2 nachgeschlagen haben, kommen Sie ohne die Beachtung der dortigen Laufanweisung an diese Stelle zurück. ◀——— I_3

L4 von $Ü_2$

1. $\frac{5}{35}$ Erweiterungsfaktor 5
2. $\frac{23}{253}$ Erweiterungsfaktor 23
3. $\frac{36}{153}$ Erweiterungsfaktor 9
4. $\frac{81}{513}$ Erweiterungsfaktor 27
5. $\frac{3672}{3927}$ Erweiterungsfaktor 51
6. $\frac{b+1}{ab+a}$ Erweiterungsfaktor $b+1$
7. $\frac{9x-9y}{3bx-3by}$ Erweiterungsfaktor $3(x-y)$

8. $\dfrac{x+1}{ax+a-xb-b}$ Erweiterungsfaktor $x+1$

9. $\dfrac{12t^2+10t+2}{8t^2-2}$ Erweiterungsfaktor $2(2t+1)$

10. $\dfrac{4n^2-4n-mn+m}{3n^2-3n+mn-m}$ Erweiterungsfaktor $n-1$

Wenn Sie nicht alle der hier angegebenen Lösungen bestimmt haben, berichtigen Sie zunächst die Fehler. $\longleftarrow$ T_3

L5 von T_3

Ihre Antwort 1 haben Sie wie folgt erhalten und dabei einen Fehler gemacht, der eigentlich nicht mehr passieren sollte.
Sie rechneten:

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{9}-\frac{1}{6}=\frac{1+8-1}{5+9-6}=\frac{8}{8}=1$$

Das kann aber doch nicht richtig sein.
Überlegen Sie sich das an einem einfachen Beispiel.
Es ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

aber doch nie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$\longleftarrow$ I_5

L6 von T_3

Ihre Antwort $\frac{83}{90}$ ist richtig.

Werden Sie das eben Durchgeführte auch richtig anwenden können, wenn die Aufgabe etwas schwieriger wird?
Arbeiten Sie weiter so sorgfältig. $\longleftarrow$ T_4

L7 von T_3

Ihre Antwort ist falsch.
Sie beherrschen die Addition und Subtraktion von Brüchen nicht.
Sie rechneten:

$$\frac{1}{5} + \frac{8}{9} - \frac{1}{6} = \frac{8}{270} \doteq \frac{4}{135}$$

Das stimmt aber doch nicht. ◄——— I_5

L8 von T_3

Ihr Ergebnis ist falsch.
Sie sind nicht in der Lage, die Addition und Subtraktion von Brüchen richtig auszuführen. ◄——— I_5

L9 von $Ü_3$

1. $\frac{5}{6}$ Hauptnenner 6
2. $\frac{23}{30}$ Hauptnenner 30
3. $\frac{6}{35}$ Hauptnenner 35
4. $\frac{1}{225}$ Hauptnenner 225
5. $\frac{7}{8}$ Hauptnenner 40
6. $\frac{25}{24}$ Hauptnenner 120
7. $\frac{1039}{3080}$ Hauptnenner 3080
8. $\frac{16(2x - y) + 12(x - y) - 3(2x - 3y)}{48} = \frac{38x - 19y}{48}$ Hauptnenner 48
9. Die beiden Einheiten nähern sich um $\frac{5}{12}$ der gesamten Entfernung. Die erste legt $\frac{1}{4}$ und die zweite $\frac{1}{6}$ des Gesamtweges zurück. Die Summe der Teilwege ergibt den Teil der bewältigten Gesamtentfernung.

10.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{6}-\frac{5}{8}=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}=\frac{72+40-75}{120}=\frac{37}{120}$$

$\frac{37}{120}$ des Behälters sind dann gefüllt $\left(\text{etwa } \frac{1}{3}\right)$.

Haben Sie sorgfältig gerechnet, so darf hier kein Fehler mehr aufgetreten sein. Die Addition und Subtraktion von Brüchen müssen Sie nun sicher beherrschen. Wenn es notwendig ist, berichtigen Sie aufgetretene Fehler. Üben Sie vor allem die richtige Bestimmung des Hauptnenners. Dieses wird noch an anderen Stellen benötigt (z. B. im Abschnitt 4.). ◄——— T_4

L10 von T_4

Haben Sie als Ergebnis

$$\frac{23y-4x}{12xy(2x+y)} \quad \text{oder} \quad \frac{23y-4x}{24x^2y+12xy^2}$$

bestimmt?

Ja: Diese Lösung verdient ein Lob. Dafür sind Sie von weiteren Aufgaben zu diesem Problem befreit. Sie haben insbesondere bewiesen, daß Sie das im Abschnitt 1. Behandelte und das Erweitern der Brüche verstanden haben. ◄——— T_5

Nein: Sie hatten noch Schwierigkeiten beim Erweitern oder bei der Addition bzw. Subtraktion von Brüchen? Das erste ist vermutlich naheliegender. Die Aufgabe war auch nicht einfach. Gehen Sie deswegen zu I_6, denn dort wird die Lösung der Aufgabe erklärt. ◄——— I_6

L11 von $Ü_4$

1. $\dfrac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}$ Hauptnenner $R_1R_2R_3$

2. $\dfrac{ac+b^2+c^2}{bc}$ Hauptnenner bc

3. $\dfrac{ab-b^2-ac}{bc}$ Hauptnenner bc

4. $\dfrac{3+2a+6b}{a^2-b^2}$ Hauptnenner a^2-b^2

5. $\frac{-a^2 + 6a - 1}{a^3 - a}$ Hauptnenner $a(a - 1)(a + 1)$

6. $\frac{x + 5}{6x^2}$ Hauptnenner $6x^2$

7. $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$ Hauptnenner $x^2 - y^2$

8. $\frac{3x + 4}{x^2 - 1}$ Hauptnenner $x^2 - 1$

Beachten Sie bei der Lösung der letzten Aufgabe, daß der 2. Bruch zunächst mit (—1) erweitert wird.

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

◄———— T_5

L12 von T_5

Das richtige Ergebnis heißt:

$$\frac{5}{4}$$

Haben Sie gekürzt, bevor Sie die Brüche multiplizierten?
Wenn nicht, haben Sie die Aufgabe umständlich gelöst.

Hatten Sie dieses Ergebnis bestimmt, dann ◄———— T_6

Wenn Sie das Ergebnis nicht gefunden haben, dann ◄———— I_7

L13 von $Ü_5$

1. $-\frac{4}{3}$ Haben Sie bei der Multiplikation die Vorzeichenregeln beachtet?

2. 2

3. $\frac{3}{14}$

$(+1) \cdot (+1) = 1$ $(-1) \cdot (+1) = -1$

$(+1) \cdot (-1) = -1$ $(-1) \cdot (-1) = 1$

4. $-\frac{3}{16}$

5. 1

Berichtigen Sie, wenn notwendig, Ihre Fehler. ◄———— T_6

L14 von T_6

Haben Sie

$$\frac{x(x-2y)}{x+y} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2-2xy}{x+y}?$$

Ja: Gehen Sie zu T_7, denn Sie haben gezeigt, daß Sie das Ausklammern, Kürzen und die Multiplikation von Brüchen beherrschen. ◄——— T_7

Nein: Ihr Fehler ist beim Ausklammern, Kürzen oder bei der Multiplikation von Brüchen aufgetreten.
Wahrscheinlicher sind die ersten beiden Fehlerquellen. Orientieren Sie sich deswegen mit der Hilfe des Sachwortverzeichnisses, wo Sie im Abschnitt 1. das Ausklammern wiederholen können. Das Kürzen wurde in diesem Abschnitt in I_2 und die Multiplikation der Brüche in I_7 behandelt.

Die Lösung der Aufgabe aus T_6:

$$\frac{(x+y)\cdot 2\cdot 3xx(2y-x)(x+2y)(x-2y)}{3x(2y-x)2(x+2y)(x+y)(x+y)} = \frac{x(x-2y)}{x+y}$$

◄——— $Ü_6$

L15 von $Ü_6$

1. $\dfrac{4ac}{3b}$

2. $\dfrac{2x^2+2xy}{3}$

3. $-\dfrac{y}{2x}+\dfrac{2x}{y}=\dfrac{4x^2-y^2}{2xy}$

4. $2a^2+ab$

5. $\dfrac{5}{6}+\dfrac{x}{2y}+\dfrac{y}{3x}=\dfrac{5xy+3x^2+2y^2}{6xy}$

Berichtigen Sie wieder die Fehler, wenn das notwendig ist. ◄——— T_7

L16 von T_7

Die Antwort ist falsch.
Gehen Sie zu I_8, dort wird das Gesetz von der Division der Brüche wiederholt. Die hier zu lösende Aufgabe wird im allgemeinen Gesetz als Spezialfall enthalten sein. ◄——— I_8

L17 von T_7

Die Antwort ist richtig.
Beachten Sie jedoch, daß auch die Antwort 4 richtig ist. Ihr Weg ist jedoch einfacher.

Beispiel:

$$6 : \frac{4}{5} = 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{15}{2}$$

← T_8

L18 von T_7

Die Antwort ist richtig:

Bemerkung: Beachten Sie, daß auch Antwort 3 richtig ist. Sie haben die Regel aus der allgemeinen Regel der Division von Brüchen abgeleitet und sich für diese etwas umständliche, jedoch richtige Antwort entschieden.
Diese Kenntnisse sollen Sie nun bei der Lösung einer Aufgabe anwenden.

← T_8

L19 von T_8

Heißt Ihr Ergebnis

$$\frac{3a(x+y)}{2m(x-y)}?$$

Ja: Sie können die Regel zur Division der Brüche anwenden. ← T_9

Nein: Für Sie wird die Regel der Division von Brüchen wiederholt. Sie werden dann üben, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. ← I_8

L20 von $Ü_7$

1. $\frac{4c}{3ab}$
2. $-\frac{15}{2}$
3. $-\frac{7}{2}$
4. $\frac{(a+b)(a^3-b^2)}{a-b}$
5. $4a^2b$
6. 49

7. $\frac{5}{2}$ 8. $-\frac{14a(3x+y)}{3(3x-y)}$

9. $-\frac{7(2x-1)}{6d}$ 10. $\frac{m(m-10)(2m+1)-m}{4m^2-1} \cdot \frac{2(4m^2-1)}{m} = 4m^2 - 42m + 18$

Sind mehr als zwei Fehler aufgetreten?

Ja: Üben Sie weiter. ◄——— $\ddot{U}_8$

Nein: ◄——— T_9

L21 von $\ddot{U}_8$

1. $\frac{1}{15}$ 2. $\frac{7}{45}$

3. $\frac{11}{2}$ 4. $\frac{1}{4}$

5. $\frac{161}{153}$ 6. $\frac{y}{6abx}$

7. $\frac{1}{12abz}$ 8. $\frac{2ax^2y}{3z}$

9. $\frac{12x(a+b)^2}{ry(a-b)^2}$ 10. $\frac{7x}{8a} - \frac{1}{a^2}$

◄——— T_9

L22 von T_9

Haben Sie als Ergebnis $\frac{1-x}{1+x}$ bestimmt?

Ja: Es scheint, daß Sie die Bruchrechnung beherrschen. Damit soll die Wiederholung der Rechengesetze zur Bruchrechnung abgeschlossen sein.
Haben Sie die Schritte T_1 bis T_9 ohne jegliche Unsicherheit durchgearbeitet, dann dürfen Sie zu der Leistungskontrolle des Abschnittes 2. gehen. Bedenken Sie jedoch, daß Sie bei auch nur geringer Unsicherheit zweckmäßig die erforderlichen Informationen und Übungen heranziehen sollten. Übertriebener Optimismus kann leicht zum Fehlen der notwendigen Fertigkeiten führen.

Nein: Immer noch sind Unsicherheiten bei der Durchführung der Bruchrechnung aufgetreten ? Sie sollten die Ihnen bekannten Rechengesetze nur konsequent anwenden.
Die Rechengesetze der Bruchrechnung müssen so gefestigt sein, daß Sie diese auch zur Lösung komplizierterer Aufgaben anwenden können. Gehen Sie zu I_9, denn dort wird diese Aufgabe besprochen. ← I_9

L23 von $Ü_9$

1. $\frac{10}{3}$ 2. $\frac{33}{7}$

3. $\frac{3}{2}$ 4. 5

5. 30 6. $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

7. $x-1$ 8. $\frac{x}{y}$

9. $\frac{a-b}{a+b}$ 10. $x^2 - y^2 - x - y$

Berichtigen Sie, wenn notwendig, Ihre Ergebnisse.
Gehen Sie zu L_{22}. Lesen Sie dort bei der zu **ja** gehörenden Antwort weiter.
← L_{22}

2.6. Leistungskontrolle

2.6.1. Aufgaben

Lösen Sie zunächst **alle** Aufgaben auf einem Blatt Papier. Stellen Sie an sich selbst Bedingungen, wie sie in einer Klausur gegeben sind.

Zeit: 90 Minuten Hilfsmittel: keine

1. Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich.

a) $\frac{48}{64}$ b) $\frac{168}{210}$

c) $\frac{(a^2-1)(a+1)}{(a+1)^2(a-1)}$ d) $\frac{21ax^2}{7ax+14a^2x}$

2. Formen Sie die Brüche um.

a) $\frac{3}{7}$ auf den Nenner 84

b) $\frac{2}{11}$ auf den Nenner 198

c) $\frac{1}{a+b}$ auf den Nenner $(a^2 - b^2)(a - b)$

d) $\frac{24ml}{6ml + 3nl}$ auf den Nenner $18ml^2o + 9nl^2o$

3. Berechnen Sie.

a) Bis zu einem bestimmten Tag wurden auf $\frac{3}{4}$ der gesamten Anbaufläche die Kartoffeln gerodet. An diesem Tag wurde ein Zugang von $\frac{1}{33}$ der Fläche gemeldet. Welcher Teil der gesamten Anbaufläche ist nach diesem Tag gerodet?

b) $\frac{7}{110} + \frac{5}{8} - \frac{3}{22}$

c) $\frac{3}{25} + \frac{7}{13} - \frac{1}{4}$

d) $\frac{3kp}{24m} + \frac{7}{36m^2n} - \frac{3p}{8} + \frac{4}{3n}$

4. Berechnen oder vereinfachen Sie.

a) $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{24}{33}\right)$ b) $\frac{31}{35} \cdot \frac{7}{93}$

5. Berechnen oder vereinfachen Sie.

a) $2 : \frac{1}{8}$ b) $\frac{24}{29} : \frac{36}{87}$

c) $\frac{3a^2 - 12b^2}{4a^2b} : \frac{3(a+b)}{5ab}$ d) $\frac{3xy^2}{4(x-y)} : \frac{9y}{8(x+y)}$

6. Berechnen oder vereinfachen Sie.

a) $\frac{\frac{2}{7}}{4}$ b) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{2}{b^2}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b^2}}$

c) $\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{7}{4}}$ d) $\dfrac{3x+1}{\frac{4}{3x-1}+2}$

Haben Sie alle Aufgaben gelöst oder sind die 90 Minuten um, so gehen Sie zu 2.6.2. und korrigieren Ihre Arbeit selbst.

2.6.2. Auswertung

1. a) $\frac{3}{4}$ 1 Punkt b) $\frac{4}{5}$ 1 Punkt

c) 1 2 Punkte d) $\frac{3x}{1+2a}$ 2 Punkte

Diese Punkte dürfen Sie sich nur geben, wenn Ihr Ergebnis völlig mit den angegebenen Werten übereinstimmt.
Haben Sie nicht alle Punkte erreicht, so ist eine Wiederholung von I_2 und $Ü_1$ zu empfehlen. Wenn Sie sich für diese Aufgabe 6 Punkte geben konnten, dann haben Sie das 1. Ziel der anfangs gegebenen Zielstellung erreicht und können Ihre Kenntnisse aus Abschnitt 1. anwenden.

2. a) $\frac{36}{84}$ 1 Punkt b) $\frac{36}{198}$ 1 Punkt

c) $\dfrac{(a-b)^2}{(a^2-b^2)(a-b)}$ 2 Punkte

d) $\dfrac{72ml^2o}{18ml^2o+9nl^2o}$ 2 Punkte

Sie haben das 2. Ziel des Abschnittes erreicht und konnten die Kenntnisse aus Abschnitt 1. anwenden, wenn Sie hier alle Punkte erhielten.
Sind Schwierigkeiten aufgetreten, dann wiederholen Sie I_3 und $Ü_2$. Betraf das insbesondere die Aufgabe c, so sehen Sie sich I_1 an.

3. a) Ansatz: $\frac{3}{4}+\frac{1}{33}$ 1 Punkt Lösung: $\frac{99+4}{132}$ 1 Punkt

Es sind 103/132 der Anbaufläche gerodet.

b) $\frac{243}{440}$ 2 Punkte c) $\frac{531}{1300}$ 2 Punkte

d) $\dfrac{9kmnp+14+96m^2-27m^2np}{72m^2n}$ 2 Punkte

Sie haben das 3. Ziel des Abschnittes erreicht, wenn Sie alle Punkte für diese Aufgabe erhalten haben.

Traten Abweichungen auf, so sind Sie bei der Addition und Subtraktion von Brüchen nicht sicher. Wiederholen Sie deswegen I_5, I_6 und $Ü_3$, $Ü_4$.

4. a) $-\frac{24}{55}$ 1 Punkt b) $\frac{1}{15}$ 1 Punkt

Diese Aufgaben waren nicht schwer. Wenn Fehler aufgetreten sind, dann wiederholen Sie I_7 und $Ü_5$, $Ü_6$. Sie haben doch sicher gekürzt, bevor Sie multipliziert haben?

5. a) 16 1 Punkt b) 2 1 Punkt

c) $\frac{5(a^2 - 4b^2)}{4a(a + b)}$ 2 Punkte d) $\frac{2xy(x + y)}{3(x - y)}$ 2 Punkte

Wenn Sie die 6 Punkte für die Lösung der Aufgabe 5 erhalten haben, dann ist Ziel 5 erfüllt. Gehen Sie sonst zu I_8 und $Ü_7$, $Ü_8$.

6. a) $\frac{1}{14}$ 2 Punkte b) $\frac{a^2b - 2a}{b^3 - a^2}$ 3 Punkte

c) $-\frac{8}{9}$ 3 Punkte d) $\frac{(3x + 1)(3x - 1)}{6x + 2} = \frac{(3x + 1)(3x - 1)}{2(3x + 1)}$ 2 Punkte

$= \frac{3x - 1}{2}$ 1 Punkt

(Ist das Vorzeichen falsch, gibt es nur 2 Punkte.)

Ziel 6 ist erfüllt, wenn Sie alle Teilaufgaben richtig gelöst haben. Hatten Sie bei Aufgabe 6. keine 11 Punkte erreicht, so arbeiten Sie I_9 und $Ü_9$ gut durch.
Sie können nun Ihr Wissen und Können über die Bruchrechnung durch eine Note ausdrücken, so daß Sie selbst einschätzen können, wie gut Sie die Anforderungen erfüllt haben.

Punkte	Note
37–39	1
31–36	2
23–30	3
18–22	4
0–17	5

Wir sind gewiß, daß Sie mit der erreichten Leistung vor sich bestehen können. Ist für Sie die erreichte Note jedoch nicht zufriedenstellend, so wiederholen Sie die Informationen, die zur Erhöhung der Punkteanzahl führen können.
Erinnern Sie sich an die Hinweise in der Einleitung, daß Sie Zusatzaufgaben und -informationen dem Lehrbuch der Elementarmathematik entnehmen können.
Gehen Sie dann zu Abschnitt 3.

3. Potenz- und Wurzelrechnung

3.1. Wissens- und Könnensziele

Die sichere Beherrschung der Potenz- und Wurzelrechnung ist oft eine Voraussetzung, um angewandte Aufgaben aus vielen Gebieten der Praxis bewältigen zu können. Ob Sie die dazu notwendigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten haben, können Sie in diesem Abschnitt überprüfen und Fehlendes erwerben. Arbeiten Sie wieder so sorgfältig, daß die Abschnittsleistungskontrolle mit guten Ergebnissen absolviert werden kann. Im einzelnen ist nach Abarbeitung des Abschnittes folgendes nachzuweisen:

1. Die Rechenoperationen der dritten Stufe (Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren) sind dem Begriff nach klar. Sie kennen die Bezeichnungen, die bei diesen Rechenoperationen verwendet werden.
2. Der Potenzwert kann richtig bestimmt werden, wobei besonderer Wert auf die richtige Bestimmung des Vorzeichens zu legen ist.
3. Sie werden spezielle Potenzdefinitionen so wiederholen, daß Sie die Voraussetzungen zur Bestimmung des Potenzwertes kennen werden. Dadurch können Sie unter anderem die Kenntnisse aus der Potenzrechnung für die Wurzelrechnung ausnutzen.
4. Nach der Abarbeitung dieses Abschnittes kennen Sie die Voraussetzungen, wann die Gesetze der Potenz- und Wurzelrechnung angewendet werden dürfen. Es werden in dem Maße Fertigkeiten ausgebildet sein, daß Sie komplizierte Aufgaben dieses Types sicher und rationell lösen können.
5. Die Potenz- und Wurzelgesetze sind beim Rationalmachen der Nenner bestimmter Brüche und in der Verwendung der Zehnerpotenzenschreibweise praktisch anzuwenden.

Der Abschnitt 3. bereitet erfahrungsgemäß die meisten Schwierigkeiten und erfordert den höchsten zeitlichen Aufwand.

3.2. Kenntnisüberprüfung

T1

Ist die folgende Behauptung richtig?
Das Quadrat einer beliebigen positiven Zahl ist größer als die Zahl.

Ja: $\longrightarrow$ Ü$_1$
Nein: $\longrightarrow$ Ü$_2$.

T2

Das Volumen eines Zylinders mit einem Kreis als Grundfläche wird nach der Formel berechnet:

$$V_Z = A_G \cdot h = \pi r^2 h$$

Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn, ohne die Höhe zu ändern, der Radius der Grundfläche verdoppelt wird?

Antworten:

a) Das Volumen wird viermal so groß. ——▶ L_3

b) Das Volumen wird doppelt so groß. ——▶ L_4

T3

Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn, ohne die Grundfläche zu ändern, seine Höhe halbiert wird?

a) Das Volumen verringert sich auf ein Viertel des ursprünglichen Volumens. ——▶ L_5

b) Das Volumen verringert sich auf die Hälfte des ursprünglichen Volumens. ——▶ L_6

T4

Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn der Radius seiner Grundfläche verdreifacht und die Höhe auf ein Viertel verringert wird?

Antworten:

a) Das Volumen des neuen Zylinders beträgt $\frac{3}{4}$ des Volumens vom alten Zylinder. ——▶ L_7

b) Das Volumen des neuen Zylinders beträgt $\frac{9}{4}$ des Volumens des alten Zylinders. ——▶ L_8

c) Ich habe eine andere Lösung bestimmt. ——▶ L_9

T5

Bestimmen Sie den Wert des folgenden Terms.

$$-2^2 - (-3)^3 =$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit ——▶ L_{11}

T6

a) Setzen Sie fest.

$$a^0 =$$

a soll dabei eine reelle Zahl ungleich Null sein.

b) Setzen Sie fest.

$$a^1 =$$

a ist hier eine beliebige reelle Zahl.

c) Was kann für a^{-n} geschrieben werden?

$$a^{-n} =$$

a soll dabei eine reelle Zahl ungleich Null sein.

d) Schreiben Sie als Potenz.

$$\sqrt[n]{a^m} =$$

a ist eine positive reelle Zahl.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit ——▶ L_{13}

T7

Haben Sie die Schreibweise von Potenzen mit negativen Exponenten oder umgekehrt richtig verstanden?
Sie erhalten hier noch einmal die Möglichkeit, dieses zu überprüfen.
Schreiben Sie ohne Bruchstrich:

$$\frac{1}{a^{-n}}$$

——▶ L_{18}

T8

Welche Werte von x dürfen in den Radikanden eingesetzt werden, damit die Wurzel bestimmt werden kann?

$$\sqrt[4]{4 - x}$$

——▶ L_{21}

T9

Bestimmen Sie den Wert:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}25}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit → L_{23}

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe recht sorgfältig. Sie müssen hier wieder alles anwenden, was Sie über Potenzen wiederholt haben.

T10

Fassen Sie, wenn möglich, den folgenden Term zusammen:

$$\frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{5}a^2b^2 + \frac{7}{8}ab$$

→ L_{25}

T11

Vereinfachen Sie:

1. $(x + y)^2[(x + y) \cdot z]^3$

2. $\sqrt[3]{a(bc)^2} \cdot \sqrt[3]{a^2bc^2}$

→ L_{27}

T12

Vereinfachen Sie:

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^n : a^{2n}$

2. $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[6]{x}$

→ L_{29}

T13

Vereinfachen Sie:

1. $\left[\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right]^2$

2. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

→ L_{31}

T14

Bearbeiten Sie diese Aufgabe besonders sorgfältig. Wenn Sie das Ergebnis richtig bestimmen, so beherrschen Sie alles das oder beherrschen es wieder, was in den vorangegangenen Abschnitten wiederholt wurde.
Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt[3]{a^4\sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[6]{a^5}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{a^7}\sqrt[4]{a^5}}}{\sqrt[7]{a^3\sqrt{a}}}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit ——▶ L_{33}

T15

Machen Sie den Nenner des folgenden Bruches rational.

Erklärung: Der Bruch ist so umzuformen, daß keine Wurzeln im Nenner des Bruches auftreten.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit ——▶ L_{35}

T16

Beispielsweise in der Physik oder der Chemie treten oft sehr große oder sehr kleine Zahlen auf, die dann als ein Produkt aus einer Zahl und einer Zehnerpotenz geschrieben werden.
Die Masse eines Protons beträgt:

$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,673 \text{ g}$$

Schreiben Sie diese Zahl in der angegebenen Weise durch Zehnerpotenzen.
——▶ L_{38}

3.3. Informationen

I1 von L_{11}

Definition der Potenzen:

Das Produkt von n gleichen Faktoren a bezeichnet man als die **Potenz** a^n (n ist eine natürliche Zahl).

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

a nennt sich **Basis** der Potenz.
n nennt sich **Exponent** der Potenz.
Durch a^n wird ein **Potenzwert** festgelegt.
Die Basis der Potenz kann positiv oder negativ sein.

Fall 1: Ist die Basis der Potenz positiv, dann ist der Potenzwert in jedem Falle positiv.

Fall 2: Ist die Basis der Potenz negativ, dann ist der Potenzwert

a) positiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, und
b) negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

Beispiel zu Fall 1:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Beispiel zu Fall 2:

zu a) $(-1)^6 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

zu b) $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^5 = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{32}{3125}$$

Beachten Sie jedoch, daß beispielsweise bei der Berechnung des Potenzwertes von -2^4 oder -3^2 nicht -2 oder -3 zu potenzieren ist, sondern die Basis 2 oder 3. Das Minuszeichen wird demzufolge hier beim Potenzieren nicht berücksichtigt. Es gehört nicht zu der Basis und ist ein Vorzeichen, das nicht mit potenziert wird. Im Unterschied dazu heißt bei $(-3)^2$ die Basis -3. Deswegen ergibt sich

$$(-3)(-3) = 9$$

Wenn das Minuszeichen zur Basis gehört, so stehen in jedem Fall Klammern.

Die Aufgabe aus T_5 wird demzufolge wie folgt gelöst:

$$-2^2 - (-3)^3 = -4 - (-27) = -4 + 27 = 23$$

Wenn Sie es für notwendig erachten, die Vorzeichenregeln wiederholen zu müssen, dann können Sie das im Abschnitt 1. des Programmes tun. ———▶ $Ü_4$

I2 von L_{13}

Prägen Sie sich ein:

Jede Zahl oder jeder Term ungleich Null hoch Null hat den Wert 1.

Beispiele: $(-4)^0 = 1$

$(x + y)^0 = 1$, für $x + y \neq 0$

Bemerkung: 0^0 ist nicht definiert. ———▶ $Ü_5$

I3 von L_{13}

Prägen Sie sich ein:

Jede Zahl oder jeder Term zur 1. Potenz erhoben ist gleich der Zahl oder dem Ausdruck selbst.

Beispiele: $(-3)^1 = -3$

$(a^2 - b^2)^1 = a^2 - b^2$ ———▶ $Ü_6$

I4 von L_{13}

Prägen Sie sich ein:

Die negativen Potenzen sind nur eine andere Schreibweise für den reziproken Wert der Potenz mit positivem Exponenten.

Das heißt:

Jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reziproken Wert der Potenz mit positivem Exponenten.

Beispiele: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ $\qquad a \cdot b^{-n} = \frac{a}{b^n}$ ———▶ $Ü_7$

I5 von L_{16}

In I_1 wird der Unterschied zwischen $(-a)^n$ und $-a^n$ behandelt. Sie haben den hier nicht beachtet.

Noch einmal:

1. Bei $(-a)^n$ soll die Zahl $-a$ in die n-te Potenz erhoben werden.

Dazu im Unterschied:

2. Bei $-a^n$ wird a in die n-te Potenz erhoben und vor diesen Potenzwert ein Minus gesetzt.

(Wenn Sie sich genau informieren wollen, können Sie noch einmal zu I_1 zurückblättern, diesen Abschnitt studieren und müssen dann, ohne die dortige Laufanweisung zu beachten, hierher zurückkommen.) $\longrightarrow$ $Ü_8$

I6 von L_{13}

Wurzeln und Potenzen mit gebrochenem Exponenten sind verschiedene Darstellungsformen des gleichen Sachverhaltes.

Wurzeln werden in folgender Weise als Potenzen geschrieben:

Der Zähler des gebrochenen Exponenten der Potenz wird die Potenz des Radikanden, und der Nenner ist der Exponent der Wurzel.

$$\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

$a \geqq 0$, r und s sind ganze Zahlen[1] mit $r > 0$

Beispiel:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

Potenzen mit gebrochenem Exponenten werden wie folgt als Wurzeln geschrieben: Die Basis wird als Radikand mit dem Zähler des gebrochenen Exponenten potenziert und als Wurzelexponent der Nenner des Exponenten genommen.

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Einschränkungen wie oben für a, x, y

Beispiel:

$$a^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{a^4}$$

$\longrightarrow$ $Ü_{10}$

---

[1] Ganze Zahlen sind:

$$G = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

I7 von L_{13} oder L_{20}

Da Sie genau gewußt haben bzw. jetzt wieder wissen, daß jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten geschrieben wird, soll die Wurzelrechnung gar nicht getrennt von der Potenzrechnung betrachtet werden. Die Wurzel wird als Potenz mit gebrochenem Exponenten geschrieben. Es können dann die Potenzgesetze angewandt werden. Im folgenden wird nicht zwischen Potenz- und Wurzelrechnung unterschieden. ——► I_8

I8 von I_7

Es erscheint trotzdem notwendig, noch einmal etwas zur Definition der Wurzel zu sagen.
Lassen Sie sich bei der Durcharbeit des Schrittes I_8 bitte die notwendige Zeit.
Das Radizieren (zur Lösung der Wurzelaufgabe) ist eine Umkehroperation zum Potenzieren (zur Lösung der Potenzaufgabe).
Beim **Potenzieren** sind Basis und Exponent bekannt, und der Potenzwert wird gesucht.

$$a^n = b$$

Beim **Radizieren** sind der Potenzwert und der Exponent bekannt, und gesucht ist die Basis.
Schreibweise der Wurzelaufgabe:

$$a = \sqrt[n]{b} \qquad n \text{ ist eine natürliche Zahl}^1 \text{ mit } n \geqq 1$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß a und b nichtnegative Werte sind.

Definition:

Ist b eine nichtnegative reelle Zahl ($b \geqq 0$) und n eine natürliche Zahl, so versteht man unter der n-ten Wurzel aus der Zahl b diejenige Zahl a, deren n-te Potenz b ist.

Schreibweise:

$$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b \text{ mit } b \geqq 0$$

Bezeichnungen:
b Radikand
n Wurzelexponent
a Wurzelwert

[1] Natürliche Zahlen sind:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Bemerkungen:

1. Aus der Definition erkennen Sie, daß es im Bereich der reellen Zahlen nicht möglich ist, den Wurzelwert aus negativen Radikanden zu bestimmen.
2. Die Rechenoperation Wurzelziehen oder Radizieren hat ein eindeutig bestimmtes Ergebnis, da immer nur der positive Wurzelwert betrachtet wird.

$$\sqrt{4} = \begin{cases} +2, \text{ denn } 2^2 = 4 \text{ und } 2 \geqq 0 \\ \cancel{-2, \text{ denn zwar ist } (-2)^2 = 4,} \\ \cancel{\text{aber es gilt nicht } -2 \geqq 0} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ T_8

I9 von L_{21}

In I_8 wurde vorausgesetzt, daß der Wurzelwert nur aus nichtnegativen Radikanden bestimmt werden kann. In der vorgegebenen Wurzel

$$\sqrt[4]{4 - x}$$

ist der Radikand immer negativ, wenn ein Wert für x eingesetzt wird, der größer als 4 ist. Das heißt, für alle Werte x, die nicht größer als 4 sind, ist der Radikand positiv, und der Wurzelwert kann somit bestimmt werden.

Bemerkung: x kann insbesondere auch negative Werte annehmen.

Beispiel: $x = -4$

$$\sqrt[4]{4 - (-4)} = \sqrt[4]{8}$$

Bearbeiten Sie nun $\ddot{U}_{11}$ sehr sorgfältig. $\longrightarrow$ $\ddot{U}_{11}$

I10 von L_{23}

Die Aufgabe aus T_9 wird ausführlich besprochen.
Bis auf die Reihenfolge der Operationen hätte Ihre Lösung wie folgt aussehen müssen:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

Dieser Schritt ist klar.

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Die negative Potenz wurde als Quotient geschrieben.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}$$

Der gebrochene Exponent wurde als Wurzel geschrieben.
Die Aufgabe im Nenner des Bruches heißt nun nach der Definition der Wurzel in I_8, diejenige Zahl zu finden, deren 4. Potenz $\frac{1}{16}$ ergibt. Das ist die Zahl $\frac{1}{2}$.

Somit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Durchdenken Sie die angegebenen Schritte gründlich. Schlagen Sie gegebenenfalls in den Informationen I_4 und I_6 des Abschnittes nach. $\longrightarrow$ $Ü_{12}$

I11 von I_{25}

Es wird wiederholt:

Summen und Differenzen von Potenzen dürfen nur dann zusammengefaßt werden, wenn sie sowohl in der Basis als auch im Exponenten übereinstimmen.

Beispiele:

1. $a^4 + a^5 - a^2$ kann nicht zusammengefaßt werden, da zwar die Basen gleich, aber die Exponenten verschieden sind.
2. $a^4 + b^4 + c^4$ kann nicht zusammengefaßt werden, da zwar die Exponenten gleich, aber die Basen verschieden sind.

Die Aussage gilt gleichermaßen für Wurzeln.

Summen und Differenzen von Wurzeln dürfen nur dann zusammengefaßt werden, wenn sie sowohl im Radikanden als auch im Wurzelexponenten übereinstimmen. $\longrightarrow$ $Ü_{13}$

12 von L_{27}

Es wird wiederholt:

1. Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem die gemeinsame Basis mit der Summe beider Exponenten potenziert wird.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad (1)$$

2. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem das Produkt der Basen mit dem gleichen Exponenten potenziert wird.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \qquad (2)$$

Die zweite Beziehung von rechts nach links gelesen:

Ein Produkt wird potenziert, indem jeder Faktor potenziert und die Potenzwerte multipliziert werden.

Beispiele:

zu 1. a) $a^{n+1} \cdot a^{n-1} = a^{n+1+n-1} = a^{2n}$

b) $(a-b)^{5-n}(a-b)^{5+n} = (a-b)^{5-n+5+n} = (a-b)^{10}$

c) $\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{m}{n}}\,a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}}$

zu 2. a) $0{,}25^8 \cdot 4^8 = (0{,}25 \cdot 4)^8 = 1^8 = 1$

Beachten Sie hierbei den Rechenvorteil.

b) $(a+b)^4(a-b)^4 = [(a+b)(a-b)]^4 = (a^2-b^2)^4$

3. $a^3 \cdot b^2 \cdot c$

Dieses Produkt läßt sich nicht weiter zusammenfassen, da weder gleiche Basen noch gleiche Exponenten auftreten. → $Ü_{14}$

---

13 von L_{29}

Es wird wiederholt:

1. Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem die Basis mit der Differenz der Exponenten (Zähler- minus Nennerexponenten) potenziert wird.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad (1)$$

2. Potenzen mit gleichen Exponenten können dividiert werden, indem der Quotient der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n} \qquad (2)$$

Gleichung (2) von rechts nach links gelesen:

Ein Quotient wird potenziert, indem der potenzierte Dividend durch den potenzierten Divisor dividiert wird.

Beispiele:

zu 1. a) $\frac{a^9}{a^7} = a^{9-7} = a^2$

b) $\frac{a^{n-4}}{a^{n-2}} = a^{n-4-(n-2)} = a^{-4+2} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Beachten Sie hier, daß der gesamte Exponent subtrahiert wird. Setzen Sie den Exponenten des Divisors in Klammern. Schreiben Sie das Minuszeichen vor die Klammer. Beachten Sie die Vorzeichenregeln.

c) $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}$

zu 2. a) $\frac{4^8}{6^8} = \left(\frac{4}{6}\right)^8 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{2^8}{3^8} = \frac{256}{6561}$

Beachten Sie den Rechenvorteil.

b) $\frac{48^3}{36^4}$

In diesem Fall kann die Division zunächst nach keinem der beiden Gesetze vereinfacht werden, da weder die Basen noch die Exponenten übereinstimmen. Es wird umgeformt:

$$48 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 4 \cdot 3$$

$$36 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\frac{(4 \cdot 4 \cdot 3)^3}{(4 \cdot 3 \cdot 3)^4} = \frac{4^3 \cdot 4^3 \cdot 3^3}{4^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4} = \frac{4^6 \cdot 3^3}{4^4 \cdot 3^8} = \frac{4^2}{3^5} = \frac{16}{243}$$

$\longrightarrow$ Ü$_{15}$

14 von L_{31}

Wiederholung:

Eine Potenz wird potenziert, indem die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert wird.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Beispiele:

1. $\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 = (n^{-2})^3 = n^{-6} = \frac{1}{n^6}$

2. $\left(\sqrt[2]{x^3}\right)^4 = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^4 = x^6$ $\longrightarrow$ $Ü_{16}$

---

15 von L_{33}

Bevor Sie weitere Aufgaben zur Potenz- und Wurzelrechnung lösen, wird kurz zusammengefaßt.

Definition der Potenzen:

1. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$ n ist eine natürliche Zahl

2. $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ 3. $a^1 = a$ 4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$

5. $a^{\frac{s}{t}} = \sqrt[t]{a^s}$ für $a \geqq 0$ und s,t ganze Zahlen mit $t \geqq 1$

Potenzgesetze

1. **Summen und Differenzen von Potenzen** können nur dann zusammengefaßt werden, wenn sie gleiche Basen **und** Exponenten haben.

2. **Produkte und Quotienten von Potenzen** können vereinfacht werden, wenn sie gleiche Basen **oder** Exponenten haben.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (1) \qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (2)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (3) \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (4)$$

3. **Potenzen werden potenziert,** indem die Exponenten **multipliziert** werden.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (5)$$

aber auch

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Gehen Sie nun zu $Ü_{17}$. Es wird sich an dieser Stelle zeigen, ob Sie die hier behandelten Gesetze anwenden können. → $Ü_{17}$

I 16 von L_{35}

Stehen im Nenner eines Bruches Wurzeln, so legen rechentechnische Gründe nahe, diese zu umgehen.

Beispiel:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1{,}414}$ ist schwerer zu berechnen als ($\sqrt{2} \approx 1{,}414 \ldots$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}}_{\text{Erweiterung mit } \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}414}{2} = 0{,}707$$

1. Besteht der Nenner nur aus einer n-ten Wurzel, dann wird der Bruch so erweitert, daß der Radikand der Nennerwurzel die n-te Potenz einer Zahl oder eines Terms wird.

Beispiele:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{2}{3\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{3(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{15}$

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(a+b)^{\frac{1}{3}}}{(a+b)^{\frac{2}{3}}(a+b)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{(a+b)^{\frac{2+1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{a+b}$

2. Besteht der Nenner eines Bruches aus einer Summe oder Differenz, in der Quadratwurzeln auftreten, so können diese Nenner durch Anwendung der 3. binomischen Formel ebenfalls rational gemacht werden.

Beispiele:

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2} = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)} = \dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{8-4} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

2. $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-b}$

→ Ü$_{18}$

I17 von L$_{36}$

Rationalmachen des Nenners eines Bruches bedeutet:

Der Bruch wird mit einem geeigneten Faktor erweitert, so daß dann im Nenner keine Wurzeln mehr stehen.

Das Rationalmachen wird in folgenden zwei Fällen durchgeführt:

1. Fall: Der Nenner wird durch eine Wurzel gebildet.

$\dfrac{Z}{\sqrt[n]{b}}$ der Erweiterungsfaktor heißt dann $(\sqrt[n]{b})^{n-1}$, denn

$$\frac{Z(\sqrt[n]{b})^{n-1}}{\sqrt[n]{b}\,(\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{Zb^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{Zb^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}}} = \frac{Zb^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}} = \frac{Z\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

Beispiele:

1. $\dfrac{a}{\sqrt[5]{b^2}} = \dfrac{a\sqrt[5]{b^3}}{b^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}} = \dfrac{a\sqrt[5]{b^3}}{b}$

2. $\dfrac{5}{\sqrt[5]{125}} = \dfrac{5}{\sqrt[5]{5^3}} = \dfrac{5\sqrt[5]{5^2}}{5} = \sqrt[5]{25}$

Spezialfall: Im Nenner steht eine Quadratwurzel.

Beispiele:

1. $\dfrac{Z}{\sqrt{a}} = \dfrac{Z\sqrt{a}}{a}$

2. $\dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{15\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{10}$

2. Fall: Im Nenner des Bruches steht eine zweigliedrige Summe oder Differenz, deren Summanden nur rationale Zahlen oder Quadratwurzeln sind.

Der Erweiterungsfaktor ergibt sich dann nach der 3. binomischen Formel.

Beispiele:

1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$ Erweiterungsfaktor $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, da $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}) = b-c$

2. $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$, da $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 2-5 = -3$

→ Ü₁₉

I18 von L_{38}

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{array}{lcl} & \vdots & \\ 0{,}0001 & = & 10^{-4} \\ 0{,}001 & = & 10^{-3} \\ 0{,}01 & = & 10^{-2} \\ 0{,}1 & = & 10^{-1} \\ 1 & = & 10^{0} \\ 10 & = & 10^{1} \\ 100 & = & 10^{2} \\ 1\,000 & = & 10^{3} \\ 10\,000 & = & 10^{4} \\ & \vdots & \end{array}$$

Es ist zu merken, daß für eine positive ganze Zahl n gilt:

1. 10^n ist eine Zahl, die aus einer 1 und n nachfolgenden Nullen besteht.
2. 10^{-n} ist eine Zahl, in der $(n-1)$ Nullen nach dem Komma stehen und in der n-ten Stelle nach dem Komma eine 1.

Beispiele:

1. $10^8 = 100\,000\,000$, also eine 1 und 8 Nullen
2. $10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$ 9. Stelle nach dem Komma

→ Ü₂₀

▌19 von L_{38} oder L_{39}

Das Studium des Abschnitts 3. ist damit beendet. Bevor Sie jedoch zur Abschnittsleistungskontrolle gehen, soll noch auf eine weitere Rechenoperation der **dritten** Stufe hingewiesen werden.
Lesen Sie den nachfolgenden Abschnitt nur **informativ**.
Die Aufgabe der Potenzrechnung wird wiederholt:
Zu einem **gegebenen Exponenten** bei einer **gegebenen Basis** ist der **Potenzwert** gesucht.

$$a^n = b$$

Die **Logarithmenrechnung** ist eine weitere Umkehrung der Potenzrechnung. Sie bestimmt bei einer **vorgegebenen Basis** und einem **gegebenen Potenzwert** den **Exponenten**.

Schreibweise:

$$n = \log_a b \qquad b > 0, \qquad a > 0 \text{ und } a \neq 1$$

Definition: Der Logarithmus einer Zahl zu einer gegebenen Basis ist demzufolge derjenige Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus potenziert werden muß, um diese Zahl zu erhalten.

In der Beziehung

$$n = \log_a b$$

wird genannt:

a die **Basis des Logarithmus**
b der **Numerus** und
n der **Logarithmus** von b zur Basis a

Die Rechenoperationen der dritten Stufe werden zusammengefaßt:

Rechenoperation der dritten Stufe: **Potenzrechnung**

Aufgabe: $a^n = b$

Zu einer gegebenen Basis a und einem gegebenen Exponenten n ist der Potenzwert zu bestimmen.
Um die Zusammenhänge zwischen der Potenzrechnung und deren beiden Umkehroperationen auch über die betreffenden Begriffe klarzustellen, sind die jeweils entsprechenden Bezeichnungen in den Klammern angegeben.

1. Umkehroperation zur Potenzrechnung: **Wurzelrechnung**

Aufgabe: $a = \sqrt[n]{b} \quad b \geqq 0,$ n eine natürliche Zahl

Zu einem gegebenen Radikanden (Potenzwert) und einem gegebenen Wurzelexponenten (Exponenten) ist der Wurzelwert (Basis) zu bestimmen.

2. Umkehroperation zur Potenzrechnung: **Logarithmenrechnung**

Aufgabe: $n = \log_a b$

Zu einem gegebenen Numerus (Potenzwert) und einer gegebenen Basis des Logarithmus (Basis) ist der Logarithmus gesucht.

Beispiel:

Der zu berechnende Wert wurde unterstrichen.

$2^3 = \underline{8}$ **Aufgaben der Potenzrechnung**

$\underline{2}^3 = 8$	$2^{\underline{3}} = 8$
Aufgabe der Wurzelrechnung	**Aufgabe der Logarithmenrechnung**
$\underline{2} = \sqrt[3]{8}$	$\underline{3} = \log_2 8$

Rechenoperation	Bezeichnung	Kurzform	Umkehroperation	Kurzform
1. Stufe	Addition	$a + b = c$ a: Summand b: Summand c: Summe	Subtraktion	$a = c - b$ a: Differenz c: Minuend b: Subtrahend
2. Stufe	Multiplikation	$a \cdot b = c$ a: Faktor b: Faktor c: Produkt	Division	$a = c : b \quad b \neq 0$ a: Quotient c: Dividend b: Divisor
3. Stufe	Potenzieren	$a^n = b$ a: Basis n: Exponent b: Potenzwert	1. Radizieren	$a = \sqrt[n]{b} \quad b \geq 0$ a: Wurzelwert n: Wurzelexponent b: Radikand
			2. Logarithmieren	$n = \log_a b \quad b > 0$ $a > 0$ $a \neq 1$ n: Logarithmus a: Basis des Logarithmus b: Numerus

Gehen Sie dann zur Leistungskontrolle des Abschnitts 3.

3.4. Übungen

Ü1 von T_1

Prüfen Sie den Satz an den folgenden Zahlen nach:
(Er sollte für alle Zahlen gültig sein.)

a) 2 b) 6 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

Sie stellen somit fest, Ihre Antwort war ...

a) richtig ⟶ L_1

b) falsch ⟶ $Ü_2$

Ü2 von T_1 oder $Ü_1$

Für welche Zahlen gilt diese Behauptung nicht?
Schreiben Sie die Bedingung auf. ⟶ L_2

Ü3 von L_9

1. Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn der Radius halbiert und die Höhe 4mal so groß ist?
2. Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn der Radius das Vierfache und die Höhe nur noch den achten Teil beträgt?
3. Wie ändert sich der Weg beim freien Fall, wenn die Fallzeit das 5fache beträgt?
4. Der wievielte Teil des Weges wird beim freien Fall zurückgelegt, wenn die Fallzeit halbiert wird?
5. Um welchen Faktor erhöht sich das Volumen einer Kugel, wenn der **Radius** verdoppelt wird?

Bemerkung:

$s = \frac{g}{2}t^2$ Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Volumen einer Kugel mit Radius r ⟶ L_{10}

U4 von I_1

Bearbeiten Sie $Ü_4$ bitte mit der notwendigen Sorgfalt, damit nachher keine Flüchtigkeitsfehler festgestellt werden müssen.

1. Berechnen Sie die folgenden Potenzwerte:

   a) 3^2 d) $-(-4)^2$

   b) $0{,}01^3$ e) -5^4

   c) $(-3)^3$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$

2. Sind folgende Gleichungen richtig?

   a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-2)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3$

   b) $(-1)^4 + (-3)^2 = 1 + 3^2$

   c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^4 = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2^4$

   d) $3^4 + (-3)^4 = 3^4 - 3^4$

   e) $-1^6 + (-2)^2 = (-1)^6 + 2^2$

   f) $2^4 - (-2)^4 = 2^4 - 2^4$ $\longrightarrow L_{13}$

U5 von I_2

Bestimmen Sie:

1. $(-1)^0$ 2. $(x^2 + y^2)^0$, für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ 3. 0^0 $\longrightarrow L_{14}$

U6 von I_3

Bestimmen Sie:

1. $(-1)^1$ 2. 0^1 3. $\left(\frac{1}{3-a}\right)^1$ $\longrightarrow L_{15}$

U7 von I_4

1. Formen Sie in Potenzen mit positivem Exponenten um. Berechnen Sie:

   a) 2^{-2} b) $2 \cdot 5^{-2}$ c) $(-2)^{-2}$ d) -2^{-2}

2. Schreiben Sie die folgenden Brüche als Potenzen, so daß die Bruchstriche verschwinden:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{a}{bc^2}$ c) $\frac{m}{n^a}$ d) $\frac{1}{n \cdot m^a}$ ⟶ L_{16}

U8 von I_5

Berechnen Sie:

1. $(-3)^3$ 2. $(-4)^2$ 3. -2^3 4. $-(-3)^2$ ⟶ L_{17}

U9 von L_{18}

Berechnen Sie:

1. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 2. $\frac{1}{10^{-2}}$ 3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ 4. $\frac{2^{-2}}{3}$ ⟶ L_{19}

U10 von I_6

1. Schreiben Sie die folgenden Wurzeln als Potenzen:

a) $\sqrt[7]{a^3}$ b) $\sqrt{b^3}$ c) $\sqrt[15]{u^{20}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

2. Schreiben Sie die folgenden Potenzen als Wurzeln:

a) $a^{\frac{2}{5}}$ b) $4^{\frac{1}{2}}$ c) $a^{-\frac{1}{2}}$ d) $(a-b)^{\frac{1}{4}}$ ⟶ L_{20}

U11 von I_9

Geben Sie die x-Werte an, für die der Wurzelwert bestimmt werden kann:

1. $\sqrt{1+x^2}$ 2. $\sqrt{4-x^2}$ 3. $\sqrt{9+x}$ 4. $\sqrt{1+2x}$ 5. $\sqrt{-x^2}$ ⟶ L_{22}

U12 von I_{10}

Bestimmen Sie die folgenden Wurzelwerte:

1. $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ 2. $\sqrt{0{,}0144}$ 3. $\sqrt{-4}$ 4. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 5. $16^{\frac{1}{4}}$ ⟶ L_{24}

Ü13 von I_{11}

Fassen Sie, wenn möglich, die folgenden Summen und Differenzen zusammen:

1. $3x^7 - 4x^7 + 2x^7 - 8x^7$
2. $\frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{3}yx^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 4xy^2$
3. $2a^3b^2 - 4ab + 2ab^2 - 3a^2b$
4. $ab^2 + a^2b - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{2}ba^2 - \frac{1}{4}b$
5. $a^2b + ba + ab^2 + ab^3$
6. $\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{7}$
7. $\sqrt[4]{(a+b)^3} - \sqrt[4]{(a+b)^5}$
8. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{a} - \frac{7}{8}\sqrt[3]{a}$
9. $\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{a}$
10. $\sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{a^2b} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{ab} + \frac{1}{3}\sqrt[4]{a^2b}$

$\longrightarrow L_{26}$

Ü14 von I_{12}

Berechnen oder vereinfachen Sie:

1. $x^n \cdot x^3 \cdot x^7$
2. $b^m \cdot b$
3. $(-x)^2 \cdot (-x)^3 \cdot (-x)^2$
4. $\frac{3}{4}a^2b^3c \cdot \frac{2}{5}ab^2c^3 \cdot \frac{5}{7}abc$
5. $(1{,}25)^4(4)^4$
6. $\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^8\left(\frac{5}{2}\right)^8$
7. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
8. $\sqrt[4]{abc^2} \cdot \sqrt[4]{a^2bc} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2c}$
9. $\sqrt[3]{a^{n+1}}\,\sqrt[3]{a^{n-1}}$
10. $\sqrt{\frac{1}{3}xy} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}ab} \cdot \sqrt[5]{c}$

$\longrightarrow L_{28}$

Ü15 von I_{13}

Berechnen oder vereinfachen Sie:

1. $(a+b)^{4-m} : (a+b)^{4+m}$
2. $a^{n+2} : a^{n-2}$
3. $\frac{(4ab)^2 \cdot (3ad)^2}{(6ab)^2 \cdot 4(ad)^3}$
4. $\frac{3a^2b}{(4ab)^2} : \frac{(3ab)^2}{16ab^3}$

5. $\frac{2st^2}{5} \cdot \frac{3tu}{4s} : \frac{(2st)^2}{3u}$

6. $\frac{x^2y}{2u^2} : \frac{\frac{4uv}{3t}}{\frac{xy}{t}}$

7. $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a - b}}$

8. $\frac{\sqrt[n]{a^2b}}{\sqrt[n]{bc}}$

9. $\sqrt[6]{x^5} : \sqrt[4]{x^3}$

10. $\sqrt[7]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^2} : \sqrt[5]{x^4}$

——► L_{30}

Ü16 von I_{14}

Berechnen oder vereinfachen Sie:

1. $(b^{2m})^3$

2. $(-y^5)^2$

3. $(a^{n+1})^2$

4. $(b^{-n+1})^{-4}$

5. $\left(\frac{x^2y^{-2}}{z^3}\right)^{-2}$

6. $\left(\sqrt[3]{6}\right)^9$

7. $\left(\sqrt[4]{a^2bc^2}\right)^6$

8. $\left(\sqrt[15]{x^{20}}\right)^3$

9. $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}$

10. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$

——► L_{32}

Ü17 von I_{15}

Sie sind zu $Ü_{17}$ gelangt, weil bei den in T_{14} gestellten Aufgaben noch Unsicherheiten festgestellt wurden. Bitte rechnen Sie zunächst nur die Aufgaben 3., 5. und 8.

Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit L_{34}.

Wenn Sie die Aufgaben richtig gelöst haben, können Sie von L_{34} aus weitergehen. Ansonsten müssen Sie zu $Ü_{17}$ zurück, um durch die Lösung der übrigen Aufgaben die notwendige Sicherheit zu erlangen.

1. $\left(\frac{x^{-3}y^4}{a^2b^{-2}}\right)^{-2}$

2. $\frac{6x^2}{2y} : \left(\frac{3y}{2x}\right)^2$

3. $\left(\frac{a^2}{x}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{y}\right)^n \cdot \left(\frac{x^2y^3}{ac}\right)^n$

4. $\frac{l^{n-1}m^{n+1}}{r^2s^{-2}} \cdot \frac{r^{n+2}s^{m+2}}{lm^{-2}} : \frac{lr}{sm}$

5. $\left[\frac{a^2b}{(3b)^{-2}} : \frac{a^nb}{b}\right]^{-2}$

6. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

7. $\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{3}$

8. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^5}} : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$

9. $0{,}125^{10} \cdot (-8)^{10}$

10. $\left(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{2}\right) : \sqrt{2}$

→ L_{34}

U18 von I_{16}

Machen Sie die folgenden Nenner rational:

1. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$
2. $\frac{1}{3\sqrt{7}}$
3. $\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}$
4. $\frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}$
5. $\frac{a}{\sqrt[3]{(a+b)}}$
6. $\frac{x}{\sqrt[n]{x}}$
7. $\frac{m^2}{\sqrt[7]{m^4}}$
8. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$
9. $\frac{3}{\sqrt{a}-2}$
10. $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

→ L_{36}

U19 von I_{17}

Machen Sie die folgenden Nenner rational:

1. $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ 2. $\frac{5}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$ 5. $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

→ L_{37}

U20 von I_{18}

Schreiben Sie durch Zehnerpotenzen:

1. 4 300 000
2. 0,000 000 46
3. 23 400 000 000
4. 0,000 000 001 20
5. Durchmesser eines Wasserstoffatoms: 0,000 000 005 3 cm
6. Masse der Erde: 5 997 000 000 000 000 000 000 000 kg

Schreiben Sie aus.

7. $2{,}21 \cdot 10^{-10}$
8. $1{,}47 \cdot 10^{8}$
9. Elastizitätsmodul des Eisens: $2{,}12 \cdot 10^{5}\ \mathrm{N\ mm^{-2}}$
10. Masse eines Moleküls Wasser: $2{,}991 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{g}$ ⟶ L_{39}

3.5. Lösungen

L1 von $Ü_1$

Überlegen Sie einmal richtig.

Zum Beispiel:

1. $1^2 = 1$ — 1^2 ist nicht größer als 1
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ — $\frac{1}{4}$ ist sogar kleiner als $\frac{1}{2}$

Sie haben sich in T_1 für die falsche Antwort entschieden. Das heißt, Sie haben diese Antwort leichtfertig gegeben.
In $Ü_1$ erhielten Sie eine Hilfe. Mit dieser Hilfe hätten Sie Ihren Fehler korrigieren müssen.
Es ist also nicht gut, wenn Sie an dieser Stelle im Programm angelangt sind. Arbeiten Sie jetzt konzentriert weiter. ⟵ T_2

L2 von $Ü_2$

Der Satz gilt nicht für die Zahl 1 und alle positiven Zahlen kleiner als 1.

⟵ T_2

L3 von T_2

Diese Antwort haben Sie sich gut überlegt. Sie ist richtig. ⟵ T_3

L4 von T_2

Die Antwort ist nicht richtig. Das soll bewiesen werden.
r_n ist der neue Radius. Er entsteht aus r_a (dem alten Radius), indem r_a verdoppelt wird.

$$r_n = 2r_a$$

Das Volumen des alten Zylinders beträgt:

$$V_{Za} = \pi r_a^2 h$$

Das Volumen des neuen Zylinders beträgt:

$$V_{Zn} = \pi r_n^2 h = \pi (2r_a)^2 h = 4\pi r_a^2 h$$

Es ist für r_n die $2r_a$ einzusetzen.

Sie sehen selbst, daß das Volumen des neuen Zylinders das Vierfache des alten Zylindervolumens beträgt. ◄——— T_3

L5 von T_3

Die Antwort ist falsch.

h_a: alte Höhe

h_n: neue Höhe

Es gilt: $h_a = 2h_n$ oder $h_n = \frac{1}{2} h_a$

$$V_{Za} = \pi r^2 h_a \qquad V_{Zn} = \pi r^2 h_n = \frac{1}{2} \pi r^2 h_a$$

Die Beziehung zwischen den Höhen wurde in die Formel eingesetzt. Beachten Sie das hier Gezeigte. ◄——— T_4

L6 von T_3

Die Antwort ist richtig. Bearbeiten Sie T_4 sorgfältig. ◄——— T_4

L7 von T_4

Arbeiten Sie bitte sorgfältiger. Das ist nicht die richtige Lösung. Lesen Sie in L_9 ab zweitem Satz weiter. ———► L_9

L8 von T_4

Ihre Antwort ist richtig. Den Sachverhalt haben Sie verstanden.

◄——— T_5

L9 von T_4 oder L_7

Ihre Antwort ist falsch. Sie haben das Vorangegangene noch nicht verstanden. Den Radius verdreifachen hat zur Folge, daß das Volumen auf das 9fache anwächst (vergleichen Sie dazu L_4).
Die Höhe auf ein Viertel verkleinern bedeutet, daß das Volumen auf ein Viertel verkleinert wird (vergleichen Sie dazu L_5).

Insgesamt wird das Volumen also $\frac{9}{4}$ des alten Volumens betragen.

⟵ $Ü_3$

L10 von $Ü_3$

1. Das Volumen ändert sich nicht. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 = 1$
2. Das Volumen verdoppelt sich. $4^2 \cdot \frac{1}{8} = 2$
3. Der Weg wächst auf das 25fache.
4. Der Weg beträgt nur noch ein Viertel.
5. Das Volumen wird 8mal größer.

⟵ T_5

L11 von T_5

Haben Sie den Wert 23 bestimmt?

Nein: Sie sind noch nicht sicher bei der Berechnung von Potenzen. Es werden insbesondere die Vorzeichenregeln wiederholt. ⟵ I_1

Ja: Sie haben gut überlegt und beherrschen die Vorzeichenregeln.

⟵ T_6

L12 von $Ü_4$

1. a) 9
   b) 0,000001
   c) -27
   d) -16 Der Potenzwert beträgt 16.
   e) -625 Die Basis heißt 5 und nicht -5, da sonst Klammern stehen müßten.
   f) $-\frac{1}{125}$

2. a) Die Gleichung ist richtig.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-2)^3 = -\frac{1}{8} - (-8) = 8 - \frac{1}{8}$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3 = -\frac{1}{8} + 8 = 8 - \frac{1}{8}$$

b) Die Gleichung ist richtig.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$(-1)^4 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$1 + 3^2 = 10$$

c) Die Gleichung ist falsch.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^4 = +\frac{1}{9} - 16$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2^4 = -\frac{1}{9} - 16$$

d) Die Gleichung ist falsch.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$3^4 + (-3)^4 = 81 + 81 = 162$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$3^4 - 3^4 = 0$$

e) Die Gleichung ist falsch.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$-1^6 + (-2)^2 = -1 + 4 = 3$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$(-1)^6 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

f) Die Gleichung ist richtig.

Die linke Seite der Gleichung hat den Wert:

$$2^4 - (-2)^4 = 2^4 - 2^4 = 0$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den Wert:

$$2^4 - 2^4 = 0$$

Wenn Sie die Berichtigung eventuell aufgetretener Fehler durchgeführt haben, dann ◄——— T_6

L13 von T_6, L_{14}, L_{15}, L_{18} oder L_{19}

a) $a^0 = 1$, für $a \neq 0$

Wenn Sie dieses Ergebnis hatten, vergleichen Sie b).
Ansonsten: ◄——— I_2

b) $a^1 = a$

Wenn Sie dieses Ergebnis hatten, vergleichen Sie c).
Ansonsten: ◄——— I_3

c) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, für $a \neq 0$

Wenn Sie dieses Ergebnis hatten, vergleichen Sie d).
Ansonsten: ◄——— I_4

d) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, für $a \geqq 0$

Wenn Sie dieses Ergebnis hatten: ◄——— I_7

Haben Sie eine andere Lösung: ◄——— I_6

L14 von Ü$_5$

Das Ergebnis von 1. und 2. lautet 1.
3. 0^0 ist nicht definiert.

Vergleichen Sie die Lösung b) von T_6. ◄——— L_{13}

L15 von Ü$_6$

1. -1 2. 0 3. $\frac{1}{3-a}$

Vergleichen Sie die Lösung c) von T_6. ◄——— L_{13}

L16 von Ü$_7$

1. a) $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$

   c) $\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{-2^2} = -\frac{1}{4}$

2. a) $1 \cdot 3^{-1} = 3^{-1}$ b) $ab^{-1}c^{-2}$

   c) mn^{-a} d) $n^{-1}m^{-a}$

Die Umwandlungen müßten Sie richtig durchgeführt haben, wenn Sie sich I$_4$ gut angesehen haben. Sind bei der Berechnung von 1c und 1d Fehler aufgetreten?

Ja: ◄——— I$_5$

Nein: Sie benötigen keine Wiederholung der Vorzeichenregeln, denn Sie haben diese richtig anwenden können. ◄——— T$_7$

L17 von Ü$_8$

1. -27 2. 16 3. -8 4. -9

Jetzt müßten Sie diese Aufgaben aber sicher lösen können. ◄——— T$_7$

L18 von T$_7$

Sie brauchen nur streng unsere Definition anzuwenden, die in I$_4$ angegeben wurde.

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n \quad \text{(Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch)}$$

Hatten Sie die Antwort richtig? Dann vergleichen Sie die Lösung d) von T$_6$.
◄——— L$_{13}$

War die Antwort falsch, dann sollten Sie sich das hier Gesagte gut überlegen.
◄——— Ü$_9$

L19 von Ü$_9$

1. -3 2. 100 3. $\frac{9}{4}$ 4. $\frac{1}{12}$

Fertigen Sie eine Berichtigung an, wenn hier noch Fehler aufgetreten sind. War dies der Fall, dann haben Sie L$_{18}$ nicht gründlich durchgearbeitet.
Gehen Sie zu L$_{13}$. Vergleichen Sie die Antwort d) von T$_6$. ◄——— L$_{13}$

L20 von Ü$_{10}$

1. a) $a^{\frac{3}{7}}$ b) $b^{\frac{3}{2}}$ c) $u^{\frac{20}{15}} = u^{\frac{4}{3}}$ d) $a^{-\frac{2}{3}}$

Beachten Sie: Die „2" als Wurzelexponent (Quadratwurzel) wird nicht geschrieben.

2. a) $\sqrt[5]{a^2}$ b) $\sqrt{4} = 2$ c) $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a-b}$

Haben Sie alle Aufgaben richtig gelöst, so haben Sie verstanden, wie eine Wurzel als Potenz und eine Potenz als Wurzel geschrieben wird.
Andernfalls müssen Sie sich die Aufgabe noch einmal gut durchdenken.

◄——— I$_7$

L21 von T$_8$

Haben Sie bestimmt, daß x nur Werte annehmen darf, die kleiner oder gleich 4 sind?

Ja: Sie haben verstanden, wann die Voraussetzung zur Bestimmung der Wurzel erfüllt ist. ◄——— T$_9$

Nein: Sie haben I$_8$ noch nicht verstanden. ◄——— I$_9$

L22 von Ü$_{11}$

1. $-\infty < x < \infty$ Begründung: x^2 ergibt in jedem Fall einen positiven Wert.
2. $-2 \leqq x \leqq 2$
3. $x \geqq -9$
4. $x \geqq -\frac{1}{2}$
5. $x = 0$ Begründung: $-x^2$ ist für alle Zahlen ungleich Null negativ.

Wenn Ihnen die Relationszeichen nicht mehr geläufig sind, dann schlagen Sie im Sachwortverzeichnis unter „Zeichen" nach. ◄——— T$_9$

L23 von T_9

Haben Sie als Wert $+2$ erhalten?

Ja: An dieser Stelle müssen Sie unbedingt gelobt werden. Sie haben gründlich gearbeitet. ← T_{10}

Nein: Ihre Kenntnisse sind noch lückenhaft. Einmal sehen, woran es lag. ← I_{10}

L24 von $Ü_{12}$

1. $a + b$, denn $\sqrt[3]{(a+b)^3} = (a+b)^{\frac{3}{3}} = (a+b)^1$
2. 0,12, denn $0{,}12^2 = 0{,}0144$
3. Der Wurzelwert ist nicht zu bestimmen, da der Radikand kleiner als Null ist.
4. 2, denn $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
5. 2, denn $2^4 = 16$ ← T_{10}

L25 von T_{10}

$$\frac{9}{20}a^2b^2 + \frac{17}{24}ab$$

Hatten Sie das Ergebnis?

Ja: ← T_{11}

Nein: ← I_{11}

L26 von $Ü_{13}$

Die unter 3., 5., 7. und 9. gegebenen Ausdrücke lassen sich nicht zusammenfassen.

1. $-7x^7$
2. $\frac{1}{3}x^2y - \frac{7}{2}xy^2$
4. $ab^2 + \frac{3}{2}a^2b - \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b$
6. $3\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{4}$
8. $-\frac{5}{24}\sqrt[3]{a}$
10. $\frac{7}{3}\sqrt{a^2b} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{ab}$

← T_{11}

L27 von T_{11}

Die richtigen Ergebnisse heißen:

1. $(x + y)^5 z^3$
2. $\sqrt[3]{a^3b^3c^4} = abc\sqrt[3]{c}$

Hatten Sie beide Ergebnisse?

Ja: $\longleftarrow$ T_{12}

Nein: $\longleftarrow$ I_{12}

L28 von $Ü_{14}$

1. x^{n+9}
2. b^{m+1}
3. $(-x)^7 = -x^7$
4. $\frac{3}{14}a^4b^6c^5$
5. $5^4 = 625$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$
7. $\sqrt{36} = 6$
8. $\sqrt[4]{a^5b^4c^4} = abc\sqrt[4]{a}$
9. $\sqrt[3]{a^{2n}}$
10. Keine Vereinfachung möglich

$\longleftarrow$ T_{12}

L29 von T_{12}

Die richtigen Ergebnisse heißen:

1. $\left(\frac{1}{ab}\right)^n = \frac{1}{(ab)^n}$
2. $\sqrt{x}$

Hatten Sie beide Ergebnisse?

Ja: $\longleftarrow$ T_{13}

Nein: $\longleftarrow$ I_{13}

L30 von $Ü_{15}$

1. $(a + b)^{-2m}$
2. a^4
3. $\frac{1}{ad}$
4. $\frac{1}{3a}$

5. $\frac{9t}{40}\left(\frac{u}{s}\right)^2$ 6. $\frac{3x^3y^2}{8u^3v}$

7. $\sqrt{a+b}$ 8. $\sqrt[n]{\frac{a^2}{c}}$

9. $\sqrt[12]{x}$ 10. $\sqrt[105]{x^{46}}$ ← T_{13}

L31 von T_{13}

Die richtigen Ergebnisse heißen:

1. $n^{-12} = \frac{1}{n^{12}}$ 2. $\sqrt[3]{x}$

Hatten Sie diese Ergebnisse?

Ja: ← T_{14}

Nein: ← I_{14}

L32 von $Ü_{16}$

1. b^{6m} 2. y^{10}

3. a^{2n+2} 4. b^{4n-4}

5. $\frac{z^6y^4}{x^4}$ 6. 216

7. $a^3c^3b\sqrt{b}$ oder $a^3c^3\sqrt{b^3}$ 8. x^4

9. $\sqrt[5]{a}$ 10. $\sqrt[12]{2}$ ← T_{14}

L33 von T_{14}

Das Ergebnis heißt $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}.

Wenn Sie das Ergebnis so bestimmt haben, dann besitzen Sie gesicherte Kenntnisse in der Potenzrechnung. ← T_{15}

Alle, die ein anderes Ergebnis bestimmt haben bzw. auf Schwierigkeiten bei der Lösung gestoßen sind, arbeiten hier weiter und verfolgen sorgfältig den Lösungsweg der Aufgabe.

Lösungsvorschlag: (Die Reihenfolge der Schritte muß nicht unbedingt so erfolgen.)

$$\frac{\sqrt[3]{a^4\,a^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[4]{a^3\,a^{\frac{5}{6}}}} : \frac{\sqrt{a^{\frac{7}{2}}\,a^{\frac{5}{4}}}}{\sqrt[7]{a^3\,a^{\frac{1}{2}}}}$$

Zunächst werden die inneren Wurzeln als Potenzen geschrieben.

$$= \frac{\sqrt[3]{a^{\frac{11}{2}}}}{\sqrt[4]{a^{\frac{23}{6}}}} : \frac{\sqrt{a^{\frac{19}{4}}}}{\sqrt[7]{a^{\frac{7}{2}}}}$$

Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert.

$$= \frac{\left(a^{\frac{11}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{23}{6}}\right)^{\frac{1}{4}}} : \frac{\left(a^{\frac{19}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{7}}}$$

Die Wurzeln werden als Potenzen mit gebrochenem Exponenten geschrieben.

$$= \frac{a^{\frac{11}{6}}}{a^{\frac{23}{24}}} : \frac{a^{\frac{19}{8}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

Die Potenzen werden potenziert.

$$= \frac{a^{\frac{11}{6}}}{a^{\frac{23}{24}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{19}{8}}}$$

Die Division wurde ausgeführt.

$$= \frac{a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{10}{3}}} = a^{\frac{7}{3}-\frac{10}{3}}$$

$$= a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Potenzen mit gleichen Basen wurden multipliziert und dann dividiert. $\longleftarrow$ I_{15}

L34 von Ü$_{17}$

1. $\dfrac{x^6a^4}{b^4}$

2. $\dfrac{4x^4}{3y^3}$

3. $(axy^2)^n$

4. $l^{n-3}m^{n+4}r^{n-1}s^{m+5}$

5. $\dfrac{1}{81b^6}a^{2n-4}$

6. $\sqrt{2}$

7. 1

8. $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

9. 1

10. $\sqrt[6]{2^5} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Fertigen Sie, wenn es notwendig ist, eine Berichtigung an. An dieser Stelle müssen Sie über die notwendige Sicherheit bei der Durchführung der Potenz- und Wurzelrechnung verfügen. ◄——— T_{15}

L35 von T_{15}

Haben Sie mit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ erweitert?

Nein: ◄——— I_{16}

Ja: Gehen Sie hier weiter.

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a - b}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja: ◄——— T_{16}

Nein: ◄——— I_{16}

L36 von Ü$_{18}$

1. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
2. $\frac{\sqrt{7}}{21}$
3. $\frac{\sqrt[3]{16}}{6}$
4. $\frac{\sqrt[7]{a^2}}{a}$
5. $\frac{a\sqrt[3]{(a+b)^2}}{a+b}$
6. $\sqrt[n]{x^{n-1}}$
7. $m\sqrt[7]{m^3}$
8. $2(\sqrt{2} + 1)$
9. $\frac{3(\sqrt{a} + 2)}{a - 4}$
10. $-2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

Erfahrungsgemäß zeigen sich bei Aufgaben dieser Art immer mehr oder weniger große Schwierigkeiten. Nur, wenn Sie ganz sicher waren ◄——— T_{16}

Sonst gehen Sie zu einer kurzen Wiederholung nach ◄——— I_{17}

L37 von Ü$_{19}$

1. $\sqrt[4]{8}$ Erweiterungsfaktor $\sqrt[4]{2^3}$ 2. $\sqrt{5}$ Erweiterungsfaktor $\sqrt{5}$

3. $\dfrac{(2-\sqrt{x})^2}{4-x}$ Erweiterungsfaktor $(2-\sqrt{x})$

4. $\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{x+1}$ Erweiterungsfaktor $(\sqrt{x+2}+1)$

5. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ Erweiterungsfaktor $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Berichtigen Sie Ihre Fehler. ◄——— T$_{16}$

L38 von T$_{16}$

Die Darstellung heißt: $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g
Hatten Sie als Ergebnis $16{,}73 \cdot 10^{-25}$ g oder $0{,}1673 \cdot 10^{-23}$ g bestimmt, so merken Sie sich bitte, daß der Faktor vor der Zehnerpotenz immer zwischen 1 und 10 liegen soll. ◄——— I$_{19}$

Hatten Sie ein anderes Ergebnis, dann ◄——— I$_{18}$

L39 von Ü$_{20}$

1. $4{,}3 \cdot 10^6$ 2. $4{,}6 \cdot 10^{-7}$ 3. $2{,}34 \cdot 10^{10}$ 4. $1{,}2 \cdot 10^{-9}$

5. $5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm 6. $5{,}997 \cdot 10^{24}$ kg 7. 0,000000000221 8. 147000000

9. 212000 N mm^{-2} 10. 0,000000000000000000000002991 g ◄——— I$_{19}$

3.6. Leistungskontrolle

3.6.1. Aufgaben

Lösen Sie zunächst alle Aufgaben auf einem Blatt Papier.
Stellen Sie an sich selbst Bedingungen, wie Sie auch in einer Klausur bestehen.

Zeit: 45 Minuten Hilfsmittel: Formelsammlung

1. Welche Werte von x dürfen in den Radikanden eingesetzt werden, damit die Wurzel bestimmt werden kann?

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

2. Vereinfachen Sie.

a) $\left(\frac{v^{-2}x^2}{u^3y^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{y^{-1}u^2}{x^2v^0}\right)^3$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5y^{10}z^{15}}}$

c) $\frac{x^0\cdot 2x^2y^{-4}}{(x-y)^2y^{-2}} : \left[\frac{4y^0x^3y^2}{(x-y)\cdot x^{-2}}\cdot\frac{x(x+y)^3}{2y^2x^{-2}}\right]$

d) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}}$

3. Machen Sie den Nenner folgender Brüche rational.

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

4. Schreiben Sie durch Zehnerpotenzenschreibweise.

a) 4 300 000 000 000 b) 0,000 000 000 761

c) 32 000 000 kg m s^{-2} d) 0,000 000 000 0281 V

Haben Sie alle Aufgaben gelöst bzw. sind 45 Minuten vergangen, so gehen Sie zu 3.6.2. und korrigieren Ihre Arbeit.

3.6.2. Auswertung

1. a) x kann jeden Zahlenwert annehmen, da der Radikand auch für negative Werte von x positiv wird.

b) $x \neq 0$. Der Wert von x muß ungleich Null sein (Division durch Null).

Wenn Sie den Definitionsbereich richtig bestimmt haben, erhalten Sie für die Lösung dieser Aufgabe 3 Punkte. (Wurde b vergessen, dann gibt es nur 2 Punkte.)
Sind Fehler aufgetreten, so arbeiten Sie noch einmal I_8, I_9 durch und lösen die zugehörigen Übungsaufgaben. In diesem Fall hätten Sie das Ziel 3 nicht vollständig erreicht.

2\. a) $\dfrac{v^4x^{-4}}{u^{-6}y^8} \cdot \dfrac{x^6}{y^{-3}u^6} = \dfrac{x^2v^4}{y^5}$

1 Punkt 1 Punkt

b) $\left[(x^5y^{10}z^{15})^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}} = (x^5y^{10}z^{15})^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}}\,z = \sqrt[3]{xy^2} \cdot z$

1 Punkt 1 Punkt

c) $\dfrac{2x^2y^2}{(x-y)^2y^4} \cdot \dfrac{(x-y)}{4x^3y^2x^2} \cdot \dfrac{2y^2}{xx^2(x+y)^3} = \dfrac{1}{(x-y)\,(x+y)^3x^6y^2}$

2 Punkte 2 Punkte

d) $\left[\dfrac{(a^2b)^{\frac{1}{3}}\,(ab^2)^{\frac{1}{4}}}{(ab)^{\frac{1}{2}}\,(a^3b^2)^{\frac{1}{5}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}\,b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}}\right]^{\frac{1}{2}}$ $b^{\frac{1}{2}}$ wurde gekürzt

1 Punkt 1 Punkt

$$= \left[\frac{a^{\frac{11}{12}}\,b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{11}{10}}\,b^{\frac{2}{5}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(a^{-\frac{11}{60}}\,b^{-\frac{1}{15}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{11}{120}}\,b^{-\frac{1}{30}}$$

1 Punkt 1 Punkt

$$= \frac{1}{\sqrt[120]{a^{11}}\,\sqrt[30]{b}}$$ 1 Punkt

Insgesamt 5 Punkte

Die 2. Aufgabe verlangt die Anwendung aller Potenz- und Wurzelgesetze. Wenn Sie die richtige Lösung bestimmt haben, dann können Sie zufrieden feststellen, daß Ziel 4 aus der Zielstellung von Ihnen erreicht wurde.
Ist das nicht der Fall, so wiederholen Sie unbedingt I_{15} und die nachfolgende Übung.

3\. a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

1 Punkt 1 Punkt

b) $\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3(2+\sqrt{3})$

2 Punkte 1 Punkt

c) Erweiterungsfaktor: $\sqrt{a+b} - \sqrt{a}$ 1 Punkt

$$\frac{a(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})}{a+b-a} = \frac{a(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})}{b}$$

1 Punkt 1 Punkt

4\. a) $4{,}3 \cdot 10^{12}$ $\frac{1}{2}$ Punkt

b) $7{,}61 \cdot 10^{-19}$ $\frac{1}{2}$ Punkt

c) $3{,}2 \cdot 10^{7}$ kg m s^{-2} $\frac{1}{2}$ Punkt

d) $2{,}81 \cdot 10^{-11}$ V $\frac{1}{2}$ Punkt

Wenn bei Aufgabe 3. und 4. nicht alle Punkte erreicht wurden, so ist Punkt 5 aus der Zielstellung nicht erfüllt. In diesem Fall sind I_{16}, I_{17} und I_{18} mit den zugehörigen Übungen zu wiederholen.
Ihre in der Leistungskontrolle nachgewiesenen Ergebnisse lassen sich nach folgendem Schlüssel durch eine Zensur ausdrücken:

Punkte	Note
25–26	1
21–24	2
16–20	3
12–15	4
0–11	5

Damit Ihre erreichten Leistungen mit den am Anfang des Abschnittes formulierten Zielstellungen übereinstimmen, ist es notwendig, daß Sie die angegebenen Hinweise befolgen.

Gehen Sie dann zu Abschnitt 4.

4. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

4.1. Wissens- und Könnensziele

Gleichungen haben eine große Bedeutung in der praktischen Mathematik und werden in allen naturwissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Disziplinen benötigt.
Insbesondere lineare Gleichungen sind relativ einfach zu handhaben und werden vielseitig zur Lösung von wissenschaftlichen oder praktischen Problemen angewandt.
Im Abschnitt 4. werden die Grundbegriffe über lineare Gleichungen und Ungleichungen sowie notwendige Fertigkeiten in deren Handhabung überprüft und gegebenenfalls erarbeitet. Nach der Abarbeit müssen im einzelnen folgende Ziele erreicht sein, was Sie wieder durch die Leistungskontrolle überprüfen können:

1. Sie wissen, wann lineare Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen lösbar und wann eindeutig lösbar sind.

2. Lineare Gleichungen können Sie in jedem Fall nach der Variablen auflösen.

3. Das unter 2. Gesagte gilt insbesondere für
   a) Gleichungen, die Klammern enthalten,
   b) Bruchgleichungen,
   c) Formelumstellungen.

4. Sie lernen, einen gegebenen praktischen Zusammenhang durch eine Gleichung darzustellen.

5. Sie haben die notwendigen Voraussetzungen, um die Lösung einfacher linearer Ungleichungen bestimmen zu können.

6. Das Wesen der Proportionen und ihre Anwendung auf die Prozentrechnung beispielsweise zur Lösung praktischer Aufgaben ist klar.

7. Der Unterschied zwischen direkten und indirekten Proportionalitäten ist bekannt. Die Unterscheidung beider Fälle kann mit Sicherheit vorgenommen werden. Die sich daraus ergebenden praktischen Konsequenzen sind klar.

8. Die Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen kann sicher bestimmt werden.

$\longrightarrow T_1$

4.2. Kenntnisüberprüfung

T1

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$5 - 3a + x = 2 + 2ax + 3 - 3a$$

Antworten:

1. Ich weiß es nicht. ⟶ I_1
2. $x = 0$ ⟶ L_1
3. $x = 1 - 2a$ ⟶ L_2
4. Ich habe eine andere Lösung als die unter 2. und 3. angegebene. ⟶ L_3
5. Die Gleichung ist nicht lösbar. ⟶ L_4

T2

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$x + a = a + x$$

Antworten:

1. Ich weiß es nicht. ⟶ L_6
2. $x = 0$ ⟶ L_7
3. $x = a$ ⟶ L_8
4. Die Gleichung ist nicht lösbar. ⟶ L_9
5. Für x kann jede Zahl als Lösung eingesetzt werden. ⟶ L_{10}

T3

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$a - x = -a - x$$

Antworten:

1. Ich weiß es nicht. ⟶ L_{11}
2. $x = 0$ ⟶ L_{12}
3. $x = a$ ⟶ L_{13}
4. Die Gleichung ist nicht lösbar. ⟶ L_{14}
5. Für x kann jede Zahl als Lösung genommen werden. ⟶ L_{15}

T4

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$(2x - a)(x + 2a - b) + 2a(x + 5a) = (a - 2x)(3a + b - 2x) - x(2x + b - a)$$

Vergleichen Sie die Lösung mit $\longrightarrow$ L_{17}

T5

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$\frac{x}{4x - 12} + \frac{x + 1}{2(x - 3)} = \frac{2x - 1}{x - 3} - \frac{5(x - 1)}{4x}$$

Überlegen Sie gut. Arbeiten Sie sorgfältig. $\longrightarrow$ L_{19}

Wenn Sie die Lösung gar nicht finden, dann $\longrightarrow$ I_4

T6

Lösen Sie die Formel, die die Stromstärke von n hintereinander geschalteten galvanischen Elementen angibt, nach n auf:

$$I = \frac{nU}{nR_i + R_a}$$

n Anzahl der Elemente
U Urspannung
R_i Innenwiderstand
R_a Außenwiderstand $\longrightarrow$ L_{21}

T7

Um eine bestimmte Stückzahl eines Produkts zu erzeugen, werden zwei Abteilungen eines Betriebs eingesetzt.
Die eine Abteilung kann dieses Produkt in der geforderten Stückzahl allein in 9 Tagen erzeugen. Die zweite Abteilung würde 11 Tage benötigen. Wieviel Tage

sind die Kapazitäten beider Abteilungen zur Herstellung des Erzeugnisses gebunden, wenn sie zusammen arbeiten und die zweite Abteilung die Produktion erst 3 Tage später als die erste aufnehmen kann?

Vergleichen Sie die Lösung mit ⟶ L_{23}

T8

Geben Sie die größte ganze Zahl an, die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\frac{7}{4}x - \frac{7}{2} > \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}$$

⟶ L_{25}

T9

Welcher Länge entspricht die Entfernung von 800 m auf einer Landkarte mit dem Maßstab von

1:10000?

Antworten:

1. Ich weiß es nicht und brauche eine Hilfe. ⟶ L_{27}
2. 0,08 m ⟶ L_{28}
3. 8 cm ⟶ L_{29}
4. 8 mm ⟶ L_{30}
5. 80 cm ⟶ L_{31}
6. 8000000 m ⟶ L_{32}

T10

Die Proportion ist in eine Produktgleichung umzuwandeln:

$$1:10000 = x:800$$

Antworten:

1. Ich kann das nicht. ⟶ I_{10}
2. Ich möchte mein Ergebnis vergleichen. ⟶ L_{33}

T11

Nach einer Preissenkung um 18% kostet eine Ware 43,46 Mark. Welchen Preis hatte die Ware vor der Preissenkung?

——► L_{36}

T12

In einem Gartenbaubetrieb wird eine bestimmte Anzahl von Bäumen in Zwölferreihen gepflanzt. Die Plantage ist 120 m lang.
Wie lang wäre die Plantage, wenn man bei gleichem Abstand zwischen den Bäumen und gleicher Anzahl nur 8 Stück nebeneinander pflanzen würde?

Antworten:

1. 160 m ——► L_{38}
2. 180 m ——► L_{39}
3. 200 m ——► L_{40}
4. 80 m ——► L_{41}

T13

Lösen Sie das folgende Gleichungsystem:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ -x + 5y &= 1 \end{aligned}$$

Wenn Sie die Lösung dieser Aufgabe nicht bestimmen können, so gehen Sie sofort zu ——► I_{14}

Vergleichen Sie sonst die Lösung mit ——► L_{44}

4.3. Informationen

I1 von T_1 oder L_3

Gleichungen heißen **Bestimmungsgleichungen**, wenn sie eine oder mehrere zu bestimmende Variablen enthalten. Es ist der Wert gesucht, der, für die Variable eingesetzt, die Bestimmungsgleichung zu einer identischen Gleichung macht.

Dieser Wert wird Lösung der Gleichung genannt.
Zur Bestimmung der Lösung von Gleichungen sind grundsätzlich nur die folgenden beiden Sätze zu beachten.

1. Beide Seiten einer Gleichung dürfen miteinander vertauscht werden.
2. Auf beiden Seiten einer Gleichung dürfen gleiche Rechenoperationen mit gleichen Zahlen angewandt werden.

Bemerkungen:

1. Der Satz 2 soll hier nur für die Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division betrachtet werden.
2. Division durch Null oder einen Term, der Null werden kann, muß ausgeschlossen werden.

Beispiele:

1. $2x - 4 = 4x + 8$

   Anwendung des Satzes 1:

   $4x + 8 = 2x - 4$

   Anwendung des Satzes 2 (Addition von $-2x - 8$):

   $4x + 8 - 2x - 8 = 2x - 4 - 2x - 8$

   Zusammenfassen der gleichartigen Summanden:

   $2x = -12$

   Anwendung des Satzes 2 (Division mit 2):

   $x = -6$

Probe:

$$2(-6) - 4 = 4(-6) + 8$$
$$-12 - 4 \overset{?}{=} -24 + 8$$
$$-16 = -16$$

2. $ax + b - c = cx + 2b$

   $ax - cx = 2b - b + c$

   $x(a - c) = b + c$

   $x = \dfrac{b + c}{a - c}$ Voraussetzung: $(a - c) \neq 0$

Probe:

$$a\,\frac{b + c}{a - c} + b - c = c\,\frac{b + c}{a - c} + 2b$$
$$\frac{ab + ac + ab - bc - ac + c^2}{a - c} \overset{?}{=} \frac{cb + c^2 + 2ab - 2bc}{a - c}$$
$$2ab - bc + c^2 = 2ab - bc + c^2$$

$\longrightarrow$ I_2

I2 von I_1

In den Beispielen von I_1 erkennen Sie folgende Einzelschritte, die bei der Lösung von einfachen linearen Gleichungen zu durchlaufen sind.

1. Zunächst wird durch Anwendung von Satz 2 erreicht, daß alle Summanden, die die gesuchte Variable enthalten, auf der linken Seite und die Summanden ohne diese Variablen auf der rechten Seite stehen.
   Diesen Schritt bezeichnet man als **Ordnen** der Glieder.
2. Nun werden die Glieder auf beiden Seiten der Gleichung, wenn möglich, weitestgehend zusammengefaßt.
3. Auf der linken Seite wird nun die gesuchte Variable ausgeklammert, wenn mehrere Summanden vorkommen, die nicht den gleichen Faktor besitzen.
4. Unter der Voraussetzung, daß der Faktor vor der gesuchten Variablen ungleich Null ist, werden beide Seiten der Gleichung durch den Faktor dividiert.
5. Es kann nun die Probe durchgeführt werden. ⟶ $Ü_1$

I3 von L_{17}

Diese Aufgabe unterscheidet sich von den in I_1 und I_2 besprochenen nur dadurch, daß in der Gleichung Klammern auftreten.
In einem vorbereitenden Schritt werden die Klammern aufgelöst. Dabei ist das in Abschnitt 1. Überprüfte anzuwenden. Es folgen dann die Schritte, wie das in I_2 angegeben wurde.

Lösung der Aufgabe aus T_4:

$$(2x - a)(x + 2a - b) + 2a(x + 5a) = (a - 2x)(3a + b - 2x)$$
$$-x(2x + b - a)$$

Ausmultiplizieren:

$$2x^2 + 4ax - 2bx - ax - 2a^2 + ab + 2ax + 10a^2 = 3a^2 + ab - 2ax$$
$$-6ax - 2bx + 4x^2 - 2x^2 - bx + ax$$

Zusammenfassung gleichartiger Glieder auf beiden Seiten:

$$2x^2 + 5ax - 2bx + 8a^2 + ab = 3a^2 + ab - 7ax - 3bx + 2x^2$$

Ordnen der Glieder:

$$2x^2 + 5ax - 2bx + 7ax + 3bx - 2x^2 = 3a^2 + ab - 8a^2 - ab$$

Zusammenfassen der gleichartigen Glieder und Ausklammern des Faktors x:

$$12ax + bx = - 5a^2$$
$$x(12a + b) = - 5a^2$$

Division durch $(12a + b)$:

Voraussetzung $(12a + b) \neq 0$

$$x = -\frac{5a^2}{12a + b}$$

Die Probe führen Sie bitte selbständig durch, um das in Abschnitt 1. Behandelte zu wiederholen. $\longrightarrow$ $\ddot{U}_3$

I4 von T_5 oder L_{19}

Aufgaben, wie die in T_5 angegebene, in denen die Variable im Nenner von Brüchen vorkommt, sind Bruchgleichungen. In den hier betrachteten Fällen lassen sich die Bruchgleichungen auf lineare Gleichungen zurückführen.
Bei Bruchgleichungen werden zunächst beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, so daß keine Brüche mehr auftreten. Der Hauptnenner ist wieder das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner der Brüche.
Es ergibt sich dann eine Gleichung, wie sie in I_3 behandelt wurde.

Lösung der in T_5 gestellten Aufgabe:

1. Bestimmung des Hauptnenners:
   1. Nenner $4(x - 3)$ (ausklammern)
   2. Nenner $2(x - 3)$
   3. Nenner $(x - 3)$
   4. Nenner $4x$

Hauptnenner: $4x(x - 3)$

2. Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner:

$$4x(x-3)\frac{x}{4(x-3)} + 4x(x-3)\frac{x+1}{2(x-3)} = 4x(x-3)\frac{2x-1}{x-3} - 4x(x-3)\frac{5(x-1)}{4x}$$

$$x^2 + 2x(x+1) = 4x(2x-1) - (x-3)\cdot 5(x-1)$$

3. Behandlung der Gleichung, wie besprochen:

$$x^2 + 2x^2 + 2x = 8x^2 - 4x - 5x^2 + 20x - 15$$

$$-14x = -15$$

$$x = \frac{15}{14}$$

Die Probe führen Sie wieder selbständig aus.

Bei der Lösung dieser Gleichungen treten immer wieder Schwierigkeiten auf. Wenn Sie allerdings bis hierher alles restlos verstanden haben, so dürfen Sie sofort zu Ü$_4$ gehen. Ansonsten studieren Sie hier weiter. Vor der selbständigen Übung werden zwei weitere Beispiele angegeben.

1. $\frac{3}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{2}{x-1}$

Beide Seiten der Gleichung werden multipliziert:

$$3 \cdot 2(x-1) - 5(x-1) = 2 \cdot 2x$$
$$6x - 6 - 5x + 5 = 4x$$
$$-3x = 1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Der Hauptnenner der drei Brüche ist das k.g.V. aus:

1. x
2. $2x$
3. $x - 1$

Der erste Nenner ist im zweiten enthalten.

Der Hauptnenner heißt: $2x(x-1)$

Wiederholen Sie die Bruchrechnung bei der Probe.

2. $\frac{2x+3}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x-8} = \frac{1}{12}$

Multiplikation der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner:

Hauptnenner:

1. $3x - 12 = 3(x-4)$
2. $2x - \ \ 8 = 2(x-4)$
3. $\quad 12 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 3}$

k.g.V.: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)$

$$\frac{(2x+3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)}{3(x-4)} - \frac{(3x-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)}{2(x-4)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$4(2x+3) - 6(3x-1) = x - 4$$
$$8x + 12 - 18x + 6 = x - 4$$
$$-11x = -22$$
$$x = 2$$

Wiederholen Sie die Bruchrechnung durch die Probe. ——▶ Ü$_4$

I5 von I$_{21}$

Formelumstellen bedeutet, eine gegebene Gleichung (Formel) nach einer bestimmten Größe aufzulösen, um diese Größe dann berechnen zu können.
Es ist also genau wie bei Gleichungen vorzugehen mit dem formalen Unterschied, daß für die Variable im allgemeinen nicht x, sondern ein beliebiger anderer Buchstabe steht.

Wir besprechen die in T_6 angegebene Aufgabe.

$$I = \frac{nU}{nR_i + R_a}$$

Die Gleichung wird zunächst mit dem Nenner multipliziert:

$$nIR_i + IR_a = nU$$

Die Gleichung wird geordnet:

$$nIR_i - nU = -IR_a$$

$$n(IR_i - U) = -IR_a$$

$$n = \frac{-IR_a}{IR_i - U} = \frac{-IR_a(-1)}{(IR_i - U)(-1)} = \frac{IR_a}{U - IR_i}$$

Entsprechend wird Ihr Vorgehen sein, wenn Sie die Aufgaben in $Ü_5$ bearbeiten.

→ $Ü_5$

I6 von L_{23}

Um die Kenntnisse über die Lösung der Gleichungen mit praktischem Nutzen anwenden zu können, ist es oft notwendig, aus einem praktischen Sachverhalt eine Gleichung abzuleiten und praktische Größen durch mathematische Größen auszudrücken. Aus dem praktischen Sachverhalt entsteht ein mathematisches Modell.
Es sind im einzelnen die folgenden Schritte durchzuführen, die an dem nachfolgenden Beispiel erläutert werden.

Aufgabe:
Die Summe aus einer Zahl und der um eins größeren Zahl, dividiert durch 7, ergibt das Doppelte der Zahl, vermindert um 41. Wie heißt die Zahl?

Textaufgabe	Teilschritt
1. Aufgabe: Die unbekannte Zahl ist zu bestimmen.	Die Aufgabe (Textaufgabe) wird durchgelesen. und es wird festgestellt, welche Größe zu bestimmen ist.
2. Aufgabe: Die unbekannte Zahl wird x genannt.	Es erfolgt eine möglichst genaue Wahl und Benennung der unbekannten Größe.
3. Aufgabe: x, die unbekannte Zahl $x + 1$, die um eins größere Zahl $x + x + 1 = 2x + 1$, die Summe der beiden Zahlen $\frac{2x + 1}{7}$, die Summe, dividiert durch 7	Die Verknüpfungen und die Beziehungen, die in der Aufgabe zwischen bekannten und unbekannten Größen bestehen, wurden durch eine Gleichung ausgedrückt.

Textaufgabe	Teilschritt
$2x$, das Doppelte der Zahl $2x - 41$, das Doppelte der Zahl, vermindert um 41 Das Doppelte der Zahl vermindert um 41, muß gleich der Summe, dividiert durch 7, sein: $\frac{2x+1}{7} = 2x - 41$	
4. Aufgabe: $x = 24$	Die Gleichung wird gelöst.
5. Aufgabe: Die gesuchte Zahl heißt 24.	Es folgt nun der Schlußsatz. *Bemerkung:* Bitte halten Sie diesen Punkt nicht für übertriebene Genauigkeit. Es erfolgt nämlich in diesem Punkt die „Rückübersetzung" aus dem mathematischen Modell in die Praxis.
6. Aufgabe: Die Probe bestätigt das Ergebnis.	Es ist zweckmäßig, daß an dieser Stelle eine Überprüfung des Ergebnisses in der Aufgabenstellung vorgenommen wird.

Ein weiteres *Beispiel:*

An der Montage einer Wasserleitung arbeiten zwei Brigaden. Die erste kann die Montage allein in 20 Tagen und die zweite in 28 Tagen durchführen.

Wieviel Tage benötigen sie zusammen, wenn am gleichen Tag begonnen wird?

1. Wieviel Tage werden bei gemeinsamer Arbeit für die Montage benötigt?
2. x Anzahl der Tage, die beide Brigaden an der Montage arbeiten.
3. Wenn beide Brigaden gleichzeitig arbeiten, werden x Tage für die Montage benötigt.

Die erste Brigade kann die Montage allein in 20 Tagen durchführen, stellt also an einem Tag 1/20 der Wasserleitung fertig. Die erste Brigade arbeitet aber nicht nur einen Tag, sondern x Tage.

Demzufolge beträgt ihr Anteil an der Fertigstellung

$$\frac{1}{20}x$$

Die zweite Brigade kann die Montage allein in 28 Tagen durchführen. Da sie x Tage arbeitet, beträgt der entsprechende Anteil

$$\frac{1}{28}x$$

Wenn beide Brigaden zusammen arbeiten, so muß die Summe der beiden Anteile gleich 1 sein (100% Fertigstellung).

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{28} = 1$$

4. $$28x + 20x = 560$$

$$x \approx 11{,}7$$

5. Zusammen benötigen die Brigaden bei gleichzeitigem Beginn knapp 12 Tage zur Fertigstellung der Wasserleitung.

6. Das Ergebnis ist nach den Zahlenwerten der Aufgabe zu akzeptieren.

Abänderung des Beispiels:

Wieviel Tage muß die zweite Brigade arbeiten, wenn die erste erst 3 Tage später beginnt?

Lösungshinweis:

Die zweite arbeitet x Tage. Ihr Anteil beträgt demzufolge ungeändert

$$\frac{1}{28}x$$

Die erste Brigade arbeitet aber nur $(x - 3)$ Tage. Demzufolge vermindert sich ihr Anteil auf

$$\frac{1}{20}(x - 3)$$

Der Ansatz heißt:

$$\frac{x}{28} + \frac{x-3}{20} = 1$$

→ $Ü_6$

7 von L_{25}

Im Unterschied zum Rechnen mit Gleichungen gelten für lineare Ungleichungen folgende Sätze (vgl. I_1):

1. Die Seiten einer Ungleichung dürfen nur dann vertauscht werden, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen mit umgekehrt wird.
2. Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert werden.
3. Die Multiplikation und Division einer Ungleichung mit einer Zahl verschieden von Null ist ebenfalls erlaubt.

Fall a: Für positive Faktoren bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten.
Fall b: Für negative Faktoren kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.

$$\frac{7}{4}x - \frac{7}{2} > \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{4}x - \frac{23}{4}x > \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

$$-4x > 5 \mid :(-4) \qquad \text{Achtung: Satz 3b}$$

$$x < -\frac{5}{4}$$

Die größte ganze Zahl, die die Ungleichung erfüllt, ist demzufolge -2, wovon Sie sich an der Zahlengeraden leicht überzeugen können.

$$x < -\frac{5}{4}$$

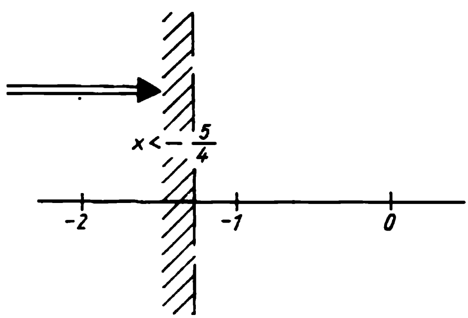


Bild 4.1

Zwei weitere *Beispiele:*

1.
$$3x - 7 \leqq 4x - 5$$
$$3x - 4x \leqq -5 + 7$$
$$-x \leqq 2 \mid \cdot (-1) \quad \text{(Achtung: Satz 3b)}$$
$$x \geqq -2$$

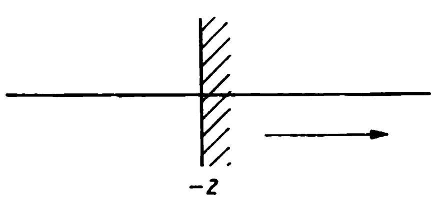


Bild 4.2

Die kleinste ganze Zahl, die die Ungleichung erfüllt, ist -2 (die nächste -1, $0, \ldots$).

Die größte ganze Zahl, die die Ungleichung nicht erfüllt, ist -3.

2. $$5ax + 4 \geqq 14 + 3ax \quad \text{für } a \neq 0$$
$$2ax \geqq 10 \mid :2 \text{ (Satz 3a)}$$
$$ax \geqq 5$$

Der Wert von a kann positiv oder negativ sein. Deswegen müssen an dieser Stelle zwei Fälle unterschieden werden.

1. **Fall**

Für $a > 0$ gilt Satz 3a:

$$x \geqq \frac{5}{a}$$

2. **Fall**

Für $a < 0$ gilt Satz 3b:

$$x \leqq \frac{5}{a}$$

→ U_7

I8 von L_{30}

Um das Verhältnis zwischen zwei Größen zu vergleichen, wird der Quotient dieser Größen gebildet. Da Quotienten auch als Brüche geschrieben werden können, gelten für ein Verhältnis die Gesetze der Bruchrechnung (insbesondere Erweitern und Kürzen).
Werden zwei Verhältnisse miteinander verglichen, so entsteht eine Proportion.

$$a:b = c:d$$

Aufgaben des Types von T_9 werden zunächst als Proportion geschrieben.
Der Maßstab 1:10000 drückt aus, daß 1 m auf der Karte 10000 m in der Natur entsprechen. Demzufolge entsprechen x m auf der Karte 800 m in der Natur.
Stellen Sie die Proportion auf. → I_9

I9 von L_{30} oder I_8

Die Proportion heißt im Beispiel:

$$1:10000 = x:800$$

Allgemein wird eine Proportion wie folgt geschrieben:

$$a:b = c:d$$

b und c werden Innenglieder und a und d Außenglieder der Proportion genannt.

← T_{10}

I10 von T_{10} oder L_{33}

Schreiben der Proportion als Bruchgleichung ergibt:

$$\frac{1}{10000} = \frac{x}{800}$$

Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner 8000000 multipliziert.

$$1 \cdot 800 = 10000 \cdot x$$

Allgemein gilt der **Satz**

In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

$a:b = c:d$	$\Leftrightarrow$	$b \cdot c = a \cdot d$
Proportion		Produktgleichung

→ $\ddot{U}_8$

I11 von L_{33} oder L_{34}

Die Proportion wird in eine Produktgleichung umgewandelt. Die Unbekannte kann dann bestimmt werden.

$$10000x = 800$$
$$x = 0{,}08$$

→ $\ddot{U}_9$

I12 von L_{36}

Eine Anwendung der Proportionen wird bei der Prozentrechnung vollzogen.

Ein Prozent eines **Grundwertes** beträgt $\frac{G}{100}$.

p Prozent (**Prozentsatz**) des Grundwertes betragen demzufolge

$$P = p \cdot \frac{G}{100}$$

P wird **Prozentwert** genannt.

Es besteht die Proportion:

$$P : G = p : 100$$

Dabei sind drei Typen von Aufgaben möglich:

1. Der Prozentwert P und der Grundwert G sind bekannt.
   Der **Prozentsatz** p kann berechnet werden.
   $$p = \frac{100P}{G}$$
2. Der Prozentwert P und der Prozentsatz p sind bekannt.
   Der **Grundwert** G kann berechnet werden.
   $$G = \frac{P \cdot 100}{p}$$
3. Der Prozentsatz p und der Grundwert G sind bekannt.
   Der **Prozentwert** P kann berechnet werden.
   $$P = p \cdot \frac{G}{100}$$

hier ist: G gesuchter (ursprünglicher) Preis
P Prozentwert (neuer Preis 43,46 Mark)
p Prozentsatz ($100\% - 18\% = 82\%$)

$$G = \frac{P \cdot 100}{p} = \frac{43{,}46 \cdot 100}{82} = 53{,}00 \text{ Mark}$$

→ Ü$_{10}$

I13 von L_{42} oder L_{41}

Zwei Größen sind proportional, wenn der Quotient von zwei zueinander gehörenden Werten konstant ist (direkte Proportionalität).
Zwei Größen sind umgekehrt proportional, wenn das Produkt von zwei zueinander gehörenden Werten konstant ist (indirekte Proportionalität).

Unser Beispiel:

Das Produkt aus Reihenzahl und Länge der Reihen ist konstant.

Zwölferreihen: $12 \cdot 120 = 1440$
Achterreihen: $8 \cdot 180 = 1440$

→ Ü$_{11}$

I14 von T_{13} oder L_{44}

Es soll eine Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems wiederholt werden.

Das Substitutionsverfahren (Einsetzverfahren):
Die eine Gleichung wird nach einer Unbekannten aufgelöst. Dieser Wert für die Unbekannte wird in die andere Gleichung eingesetzt.

Ergebnis: Eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiel: Lösung von T_{13} nach dem Substitutionsverfahren
Die zweite Gleichung wird nach x aufgelöst.

$$x = 5y - 1$$

In die erste eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3(5y - 1) + 2y &= 4 \\ 15y + 2y &= 4 + 3 \\ 17y &= 7 \\ y &= \frac{7}{17} \end{aligned}$$

In die umgeformte zweite Gleichung eingesetzt:

$$x = 5 \cdot \frac{7}{17} - 1$$

$$x = \frac{18}{17}$$

→ $Ü_{12}$

4.4. Übungen

Ü1 von I_2

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:
Führen Sie in jedem Fall die Probe durch.

1. $3x - 4 = 2x - 3$
2. $22 - x = 3x + 4$
3. $26 - 3x + 14 = 2x$
4. $3x - 4 + x = 3x + 12$
5. $x + 4 + 2x = -x + 4$
6. $ax - b = 2ax + c$
7. $2x - ax = c + 4$
8. $x - ax + b = bx + c$
9. $3b - 4ax = ax - 2b$
10. $2ax + x - 4 = -2ax + b$

→ L_5

Ü2 von L_{11} oder L_{14}

Lösen Sie, wenn möglich, die folgenden Gleichungen nach x auf:

1. $2x - 3 = -2x + 3$
2. $2x - 3 = 2x - 3$
3. $2x - 3 = 2x + 3$
4. $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{2} - 2 + \frac{x}{6}$
5. $\frac{x}{6} - 2 = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{3}$
6. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{x}{7}$
7. $ax - b = ax + b - x$
8. $cx = dx$
9. $\frac{ax}{4} - \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$
10. $\frac{3}{4}x - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2} + \frac{1}{4}x$

→ L_{16}

Ü3 von I_3

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf:

Lösen Sie zunächst nur die Aufgaben 1., 4., 7., 10.

Vergleichen Sie dann mit L_{18}. Wenn ein Fehler aufgetreten ist, müssen Sie auch die restlichen Aufgaben lösen. Sonst gehen Sie wie in L_{18} angegeben weiter.
Bitte beachten Sie hier und an anderen Stellen, daß die Fehler nicht einfach als „Flüchtigkeitsfehler" verniedlicht werden. Die eventuellen Wirkungen dieser Fehler werden durch diese Selbstrechtfertigung keinesfalls „verniedlicht".

1. $10 - (5x - 1) + (2x - 3) - x = 2x + 2$
2. $3x - (x - 1) + (14 - x) = -(3x - 2) - 10$
3. $3(4 - x) - 2(x + 2) = 2x - 3(2x + 1)$
4. $24(x - a) + (b - a) \cdot 12 = 3(x + 2a)$
5. $6(a - x) - (a + x) = - b + 11$
6. $\frac{x - 2}{3} - \frac{2x + 1}{4} = \frac{-2x + 1}{6}$
7. $\frac{x}{3} - (2x + 3) = \frac{7}{8} - \frac{3x}{8}$
8. $4\frac{x - 2}{3} = 2 - (x - 1)$

9. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$

10. $\frac{x}{a} - \frac{x}{5} + a = x$

→ L_{18}

U4 von I_4

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen:

1. $\frac{x-3}{2x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2-1} + \frac{3}{2}$

2. $\frac{x-3}{x+4} = \frac{x-1}{x-2}$

3. $\frac{1}{x} = \frac{x}{(x+1)^2}$

4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$

5. $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-6}$

6. $\frac{2x-3}{x-2} + \frac{7-3x}{x-2} = -2$

7. $\frac{5x+9}{x} - \frac{7x-1}{x-1} = -2$

8. $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x-3}{2x-2} = \frac{-4x+7}{1-x} + \frac{1}{6}$

→ L_{20}

U5 von I_5

1. Ein Stab mit der Anfangslänge l_0 wird um t Grad erwärmt. Bei einem spezifischen Längenausdehnungskoeffizienten α bestimmt sich die Länge des erwärmten Stabes aus

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \alpha t).$$

Lösen Sie die Formel nach t, α, l_0 auf.

2. Lösen Sie die Formel, die die Spannung von n hintereinandergeschalteten galvanischen Elementen angibt, nach R_a, R_i, I auf.

$$U = \frac{I(R_a + nR_i)}{n}$$

3. Die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit ist nach x_1 aufzulösen.

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t}$$

4. Lösen Sie die Weg-Zeit-Gleichung des freien Falles nach g auf.

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

5. Die Formel zur Bestimmung der Brennweite f ist nach f und b aufzulösen.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

→ L_{22}

U6 von I_6

1. Der Graben für ein Baufundament wird durch 2 Pumpen entleert. Die eine Pumpe benötigt 25 Minuten und die andere 15 Minuten. Wie lange müssen beide zusammen angestellt werden?
2. Ein Panzer bewegt sich im Rahmen einer Übung mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 48 km/h auf einen angegebenen Punkt zu. Nach 8 Minuten wird ihm ein Kradmelder nachgeschickt, der den Panzer nach 32 Minuten einholt. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Kradmelders.
3. In einer Kartoffelmiete befinden sich noch 3/5 des Gesamtinhaltes an Legekartoffeln zu einem Zeitpunkt des Kartoffelanbaus in einer Kooperation. Es werden am folgenden Tag 46 dt entnommen. Danach beträgt der Inhalt der Miete nur noch 7/20 des Gesamtinhaltes der Menge an Pflanzgut. Wieviel Dezitonnen wurden in der Miete gelagert?

Vergleichen Sie Ihre Schlußsätze mit → I_{24}

U7 von I_7

Für welche Werte von x gelten folgende Ungleichungen?

1. $-3x < -x + 2$

   Geben Sie die kleinste ganze Zahl an, die diese Ungleichung erfüllt.

2. $\dfrac{3x - 4}{2} > \dfrac{2x + 2}{3}$

   Geben Sie die kleinste ganze Zahl an, die diese Ungleichung erfüllt.

3. $\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{7} < \dfrac{x}{2} + 2$

   Geben Sie die größte ganze Zahl an, die diese Ungleichung nicht erfüllt.

4. $\frac{x-1}{3} + 4 > 2 - x$
5. $\frac{x}{7} - \frac{3}{14} > \frac{1}{42} - \frac{2}{21}x$
6. $x - \frac{x-1}{2} \geqq \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{6}$ ———▶ L_{26}

U8 von I_{10}

Folgende Proportionen sind in Produktgleichungen umzuwandeln:

1. $a:b = 4:y$
2. $x:y = 3:4$
3. $(x-y):a = (a+b):(a-b)$
4. $(r-u):(t-v) = a:b$
5. $(x^2-1):(a+b) = (r-t):4$ ———▶ L_{34}

U9 von I_{11}

Berechnen Sie x:

1. $(3-x):4 = x:3$
2. $3:x = 2:(x-2)$
3. $(x-1):x = 2:3$
4. $(x-1):2 = (x+1):6$
5. $6:(2x-5) = 3:(-2x+3)$
6. Wie groß ist die Strecke auf einer Landkarte mit dem Maßstab 1:100000, die einer Strecke von 4 km in der Natur entspricht? ———▶ L_{35}

U10 von I_{12}

1. Ein Betrieb steigert seine Produktion von 225700 Erzeugnissen auf 302400 im folgenden Jahr.
   Berechnen Sie den Anstieg der Produktion in Prozent.
2. Von den 302400 Erzeugnissen entsprachen 295200 den Qualitätsvorschriften. Wieviel Prozent entsprechen nicht den Gütevorschriften?
3. Der Betrieb exportiert von den 295200 geprüften Produkten 43%. Wieviel Stück bleiben im Inland?
4. Mit einer Waage wurde eine Masse von 32,100 kg bestimmt. In welchem Toleranzbereich liegt der wahre Wert, wenn eine Abweichung von $\pm 4\%$ zugelassen wird?
5. Wieviel Zinsen bringt ein Betrag von 7200 Mark im Jahr, wenn er mit 4,2% verzinst wird?

Verwenden Sie zur Lösung Rechenstab oder Taschenrechner. ———▶ L_{37}

Ü11 von I_{13}

Bei welchen der Abhängigkeiten liegt Proportionalität und bei welchen indirekte Proportionalität vor. Schlagen Sie die entsprechenden Formeln in einer Sammlung auf.

1. Abhängigkeit der Masse eines Körpers vom Volumen.
2. Abhängigkeit des Widerstandes von der Stromstärke.
3. Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit.
4. Abhängigkeit des Weges von der Geschwindigkeit.
5. Abhängigkeit der Leistung von der Zeit.

→ L_{43}

Ü12 von I_{16}

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

1. $30x + 17y = 13$
   $-15x - 8y = 7$
2. $-y + x = 1$
   $43y - 11x = 53$
3. $y = 4x - 5$
   $2y = 4x - 2$
4. $0{,}2x - 0{,}4y = 1{,}6$
   $2{,}1x - 0{,}1y = 2{,}1$
5. $$\frac{3x-4}{-3y+1} = \frac{2}{3}$$
   $$3(x - y) + 2(x + 2y) = 4$$

→ L_{45}

4.5. Lösungen

L1 von T_1

Die Antwort ist richtig.

Wie Sie sicher bestätigen werden, war diese Gleichung nicht schwer zu lösen.

Wie hätten Sie sich selbst von der Richtigkeit der Lösung überzeugen können?

Sie hätten nur den für x bestimmten Wert in die Gleichung einsetzen müssen, und es wäre aus der **Bestimmungsgleichung** eine sogenannte **identische Gleichung** entstanden.

$$5 - 3a = 5 - 3a$$

Arbeiten Sie weiter so sorgfältig.

→ T_2

L2 von T_1

Sie haben einen kleinen Fehler gemacht.

Die Summe der x-freien Glieder ergibt Null. Haben Sie als vorletzte Zeile stehen:

$$x(1 - 2a) = 0\,?$$

Ja: Beachten Sie immer das folgende –
Null, dividiert durch eine beliebige Zahl (verschieden von Null), ergibt immer Null.

$$\frac{0}{a} = 0, \text{ für } a \neq 0$$

Merken Sie sich das bitte für zukünftige Aufgaben.
Sie hätten sich auch sehr leicht davon überzeugen können, daß Ihr Ergebnis nicht richtig sein kann. Dazu dient die Probe. Wenn Sie den von Ihnen bestimmten Wert in die Gleichung einsetzen, erhalten Sie keine Identität.

◄——— T_2

Nein: Wie sind Sie denn dann zu diesem Ergebnis gelangt? Die Lösung dieser einfachen Gleichungen wird in I_1 besprochen. Gehen Sie zu L_3. Lesen Sie ab zweitem Satz weiter.

———► L_3

L3 von T_1, L_2 oder L_4

Ihre Lösung ist nicht richtig.

Lösung:

$$5 - 3a + x = 2 + 2ax + 3 - 3a \quad | -5 + 3a$$

$$x = 2 + 2ax + 3 - 3a + 3a - 5 \quad | -2ax$$

$$x - 2ax = 2 + 3 - 3a - 5 + 3a$$

$$x - 2ax = 0$$

$$x(1 - 2a) = 0$$

$$x = 0$$

Bemerkung: $\dfrac{0}{1 - 2a} = 0$, wenn $(1 - 2a) \neq 0$

Probe:

$$5 - 3a + 0 = 2 + 2a \cdot 0 + 3 - 3a$$

$$5 - 3a = 5 - 3a$$

◄——— I_1

L4 von T_1

Warum sollte diese Gleichung nicht lösbar sein? Die Lösung steht in L_3.

$\longleftarrow L_3$

L5 von $Ü_1$

1. $x = 1$
2. $x = \frac{9}{2}$
3. $x = 8$
4. $x = 16$
5. $x = 0$
6. $x = \frac{-(b+c)}{a}$ Voraussetzung: $a \neq 0$
7. $x = \frac{c+4}{2-a}$ Voraussetzung: $2 - a \neq 0$ oder $a \neq 2$
8. $x = \frac{c-b}{1-a-b}$ Voraussetzung: $1 - a - b \neq 0$
9. $x = \frac{b}{a}$ Voraussetzung: $a \neq 0$
10. $x = \frac{b+4}{4a+1}$ Voraussetzung: $a \neq -\frac{1}{4}$

Berichtigen Sie eventuell falsch berechnete Ergebnisse. (Das dürfte aber nicht vorkommen, da Sie ja die Probe durchführen.)

$\longleftarrow T_2$

L6 von T_2, L_7, L_8, L_9

Um diese Gleichung lösen zu können, kommt es weniger auf Fertigkeiten in der Umformung linearer Gleichungen als auf eine gründliche Analyse der Aufgabenstellung an.
Was sagt denn die Gleichung $x + a = a + x$ aus?
Eigentlich doch gar nichts.
Nämlich, daß eine Variable plus einer Konstanten gleich ist der Summe aus Konstanter und Variabler.
Es ist einfach das Kommutationsgesetz der Addition, welches selbstverständlich für alle Zahlen gilt.
Die Gleichung ist demzufolge für alle x richtig.

$\longleftarrow T_3$

L7 von T_2

Das kann eine Lösung sein, denn die Probe ist positiv. Die Lösung ist jedoch unvollständig.

$\longleftarrow L_6$

L8 von T_2

Das kann eine Lösung sein, denn die Probe ist positiv. Die Lösung ist jedoch unvollständig. $\longleftarrow L_6$

L9 von T_2

Die Antwort ist nicht richtig.

Für die Antwort selbst sollen Sie gar nicht getadelt werden. Sie werden sicher verstehen, daß Ihre Antwort nicht richtig sein kann, wenn wir Ihnen einige Lösungen der Gleichung nennen.

$$x + a = a + x$$

Lösungen: z.B. $x = 0$ oder $x = 1$ usw.

Wie Sie schnell sehen werden, führt das Einsetzen dieser Werte für die Variable zu einer identischen Gleichung. In diesem Fall kann man die Regeln zur Gleichungsumformung jedoch nicht nutzbringend anwenden. $\longleftarrow L_6$

L10 von T_2

Jawohl, das ist die richtige Antwort.

Sie haben eine sehr gute Antwort gegeben. $\longleftarrow T_3$

L11 von T_3, L_{12}, L_{13}, L_{15}

Auch bei dieser Gleichung kommt es nicht auf Fertigkeiten bei der Umformung von Gleichungen, sondern wieder auf eine gründliche Analyse der Aufgabe an.
Sie haben bestimmt gemerkt, daß einfaches „Drauflosrechnen“ und formales Anwenden der Regeln nicht in jedem Fall zum Ergebnis führt. Gewöhnen Sie sich für immer an, daß Sie sich vor der Lösung jeder Aufgabe zunächst Gedanken über die Aufgabenstellung machen.

Was sagt die Gleichung $a - x = -a - x$ aus?

Sie fordert einfach etwas Unmögliches.

Multipliziert werden beide Seiten der Gleichung mit dem Faktor (-1), dann die Summanden vertauscht. Es entsteht so:

$$x - a = x + a$$

Das ist doch ein Widerspruch.

Die Variable vermindert um a kann nie das gleiche ergeben wie die Variable plus a, wenn $a \neq 0$ vorausgesetzt werden muß. ◄——— $Ü_2$

L12 von T_3

Die Antwort ist falsch. ◄——— L_{11}

L13 von T_3

Die Antwort ist falsch. ◄——— L_{11}

L14 von T_3

Diese Antwort ist richtig.

Wenn Sie auch bei T_2 die richtige Antwort gefunden haben (L_{10}), so ist das ein Zeichen dafür, daß Sie nicht einfach formal die Regeln anwenden, sondern sich auch die Aufgabenstellung durchdenken.
Führen Sie diese Analyse der Aufgabenstellung immer gründlich durch. Ein Lob soll Ihnen an dieser Stelle für dieses Herangehen ausgesprochen werden.
Lösen Sie nun in $Ü_2$ **nur** die Übungsaufgaben 4. bis 10., damit Sie die notwendigen Fertigkeiten zur Lösung dieser Aufgaben erwerben. ◄——— $Ü_2$

L15 von T_3

Das kann doch nicht sein.

Beispiel: $x = 0$

In die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$a = -a$$

Das ist doch nicht der Fall. ◄——— L_{11}

L16 von Ü$_2$

1. $x = \frac{3}{2}$. Die Gleichung ist eindeutig lösbar. Hier sollte kein Vorzeichenfehler aufgetreten sein.
2. Für x darf jeder Wert eingesetzt werden.
3. Die Gleichung ist nicht lösbar, da sie einen Widerspruch enthält.
4. $x = -6$. Führen Sie die Probe durch. Die Gleichung ist eindeutig lösbar.
5. Die Gleichung ist unlösbar. Sie enthält einen Widerspruch.
6. $x = \frac{25}{18}$. Die Gleichung ist eindeutig lösbar. Führen Sie die Probe durch.
7. $x = 2b$. Die Gleichung ist eindeutig lösbar (Probe durchführen).
8. $x = 0$. Die Gleichung ist eindeutig lösbar (Probe durchführen).
9. $x = \frac{4b + 2c}{3a}$. Die Gleichung ist eindeutig lösbar (Probe).
10. Die Gleichung ist unlösbar. Sie enthält einen Widerspruch. ◄———— T$_4$

L17 von T$_4$

Heißt Ihre Lösung

$$x = -\frac{5a^2}{12a + b}?$$

Ja: Sie sind sicher bei der Auflösung linearer Gleichungen dieses einfachen Typs. ◄———— T$_5$

Nein: Die Aufgabe wird besprochen. ◄———— I$_3$

L18 von Ü$_3$

1. $x = 1$
2. $x = -\frac{23}{4}$
3. $x = 11$
4. $x = 2a - \frac{4}{7}b$
5. $x = \frac{5}{7}a + \frac{1}{7}b - \frac{11}{7}$
6. $x = \frac{13}{2}$

7. $x = -3$ 8. $x = \frac{17}{7}$

9. $x = \frac{60}{13}$ 10. $x = -\frac{5a^2}{5 - 6a}$

Berichtigen Sie, wenn notwendig, falsche Ergebnisse. ◀——— T_5

L19 von T_5

Haben Sie $x = \frac{15}{14}$ bestimmt?

Ja: Die Aufgabe war nicht ganz einfach. Sie haben trotzdem die richtige Lösung gefunden. ◀——— T_6

Nein: Die Aufgabe war zu kompliziert für Sie. ◀——— I_4

L20 von $Ü_4$

1. $x = -\frac{1}{2}$ Hauptnenner $2(x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1)$
2. $x = \frac{5}{4}$ Hauptnenner $(x + 4)(x - 2)$
3. $x = -\frac{1}{2}$ Hauptnenner $x(x + 1)^2$
4. $x = -\frac{1}{2}$ Hauptnenner $x(x^2 - 1)$
5. $x = \frac{14}{3}$ Hauptnenner $(x - 4)(x - 5)(x - 6)$
6. $x = 0$ Hauptnenner $(x - 2)$, Vorzeichen beachten bei der Lösung
7. $x = 3$ Hauptnenner $x(x - 1)$
8. $x = 4$ Hauptnenner $6(x - 1)$

Berichtigen Sie die Ergebnisse, wenn es notwendig ist. Durch die Probe wiederholen Sie die Bruchrechnung. ◀——— T_6

L21 von T_6

Heißt Ihre Formel

$$n = \frac{IR_a}{U - IR_i}\,?$$

Ja: Dieses Ergebnis ist richtig. ◄——— T_7

Nein: Aufgaben dieses Typs werden besprochen. ◄——— I_5

L22 von $Ü_5$

1. $t = \frac{l_t - l_0}{\alpha l_0}$; $l_0 = \frac{l_t}{1 + \alpha t}$; $\alpha = \frac{l_t - l_0}{t l_0}$

2. $R_i = \frac{nU - IR_a}{nI}$; $R_a = \frac{n(U - IR_i)}{I}$; $I = \frac{nU}{R_a + nR_i}$

3. $x_1 = x_2 - tv$

4. $g = \frac{2s}{t^2}$

5. $f = \frac{gb}{b + g}$; $b = \frac{gf}{g - f}$

Gehen Sie erst weiter, wenn Sie alle falschen Ergebnisse berichtigt haben. ◄——— T_7

L23 von T_7

Die Kapazität der ersten Abteilung wird 6,3 Tage gebunden und die der zweiten Abteilung 3,3 Tage.

Haben Sie diese Lösung bestimmt?

Ja: Sie haben gezeigt, daß Sie einfache Gleichungen, die aus einem gegebenen Sachverhalt aufzustellen sind, lösen können. ◄——— T_8

Nein: Dann studieren Sie ◄——— I_6

L24 von $Ü_6$

Sie können durch verschiedene Ansätze oder Überlegungen zum richtigen Ergebnis gelangen. Es wird hier ein Lösungsweg angegeben.

1. Zusammen benötigen die Pumpen 9,375 Minuten.

Es handelt sich hier um eine Aufgabe des Typs, der schon in I_6 behandelt wurde (unter „weiteres Beispiel"). Die Summe der Förderleistungen beider Pumpen muß eins ergeben.

2. Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Kradmelders beträgt 60 km h^{-1}.

Richtig ist bei der Lösung dieser Aufgabe, daß zunächst erkannt wird: Beide fahren vom gleichen Ausgangspunkt ab, und sie haben beim Zusammentreffen den gleichen Weg zurückgelegt.

$$s_{\text{Krad}} = s_{\text{Panzer}}$$

$$s_{\text{Krad}} = v_{\text{Krad}} \cdot t_{\text{Krad}} \qquad s_{\text{Panzer}} = v_{\text{Panzer}} \cdot t_{\text{Panzer}}$$

Das heißt:

$$v_{\text{Krad}} \cdot t_{\text{Krad}} = v_{\text{Panzer}} \cdot t_{\text{Panzer}}$$

$$v_{\text{Krad}} = \frac{v_{\text{Panzer}} \cdot t_{\text{Panzer}}}{t_{\text{Krad}}}$$

Bekannt ist:

$$v_{\text{Panzer}} = 48\ \text{km h}^{-1}, \quad t_{\text{Panzer}} = (32 + 8)\ \text{min}, \quad t_{\text{Krad}} = 32\ \text{min}$$

$$v_{\text{Krad}} = \frac{48 \cdot 40}{32} \frac{\text{km} \cdot \text{min}}{\text{h} \cdot \text{min}} = 60\ \text{km h}^{-1}$$

Veranschaulichung:

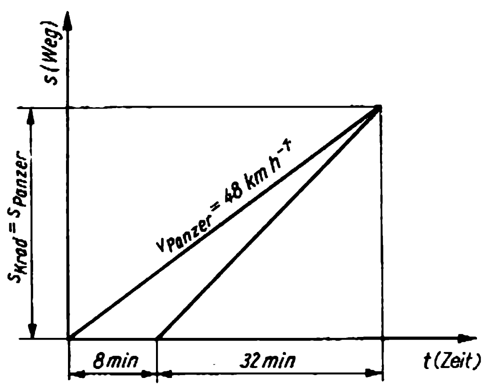


Bild 4.3

3. Die Miete enthält 184 dt Legekartoffeln.

Die mathematische Formulierung des Sachverhaltes ist nicht schwer. Ähnliche Aufgaben wurden schon im Abschnitt 1. behandelt.

$$\frac{3}{5}x - 46 = \frac{7}{20}x$$

Berichtigen Sie falsche Ergebnisse. ⟵ T_7

L25 von T_8

Die größte ganze Zahl, die die vorgelegte Ungleichung erfüllt, ist -2. Hatten Sie dieses Ergebnis?

Ja: Die Antwort war gut. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, wie Sie das Ergebnis erhalten haben.

1. Sie können die Ungleichung auflösen. ◄——— T_9
2. Sie haben die Lösung durch Probieren erhalten und sind bei der Lösung von Ungleichungen unsicher. Sie haben sich aber selbst gut geholfen. Trotzdem wiederholen Sie die Regeln.

◄——— I_7

Nein: ◄——— I_7

L26 von $Ü_7$

1. $x > -1$. Die kleinste ganze Zahl ist Null.
2. $x > \frac{16}{5}$. Die kleinste ganze Zahl ist vier.
3. $x > -\frac{68}{7}$. Die größte ganze Zahl ist -10.
4. $x > -\frac{5}{4}$
5. $x > 1$
6. $x \geqq -2$ ◄——— T_9

L27 von T_9.

Sie erhalten die folgende Hilfe 1:10000 bedeutet, daß einem Meter auf der Karte 10000 m in der Natur entsprechen.

Entscheiden Sie sich für eine andere Antwort. ◄——— T_9

L28 von T_9

Die Lösung ist richtig. Beachten Sie, daß auch Lösung 3 richtig ist.

◄——— T_{11}

L29 von T_9

Die Lösung ist richtig. Beachten Sie, daß auch Lösung 2 richtig ist.

$\longleftarrow T_{11}$

L30 von T_9 oder L_{31}

Die Lösung ist nicht richtig. Sie haben sich wahrscheinlich in der Kommastelle versehen. Überlegen Sie die Umrechnung der Längenmaße. Hatten Sie die folgende Proportion?

$$1:10000 = x:800$$

Ja: $\longleftarrow I_9$

Nein: $\longleftarrow I_8$

L31 von T_9

$\longleftarrow L_{30}$

L32 von T_{12}

Ihr Ergebnis ist falsch. Überlegen Sie.
Ein Maßstab von 1:10000 bedeutet, daß einem Meter auf der Karte 10000 m in der Natur entsprechen.
Sie müssen die Länge auf der Landkarte bestimmen, der in der Natur 800 m entsprechen. Berichtigen Sie Ihren Fehler. $\longleftarrow T_9$

L33 von T_{10}

Haben Sie $1 \cdot 800 = 10000 \cdot x$ erhalten?

Ja: $\longleftarrow I_{11}$

Nein: $\longleftarrow I_{10}$

L34 von $Ü_8$

1. $a \cdot y = 4 \cdot b$
2. $4x = 3y$
3. $(x - y)(a - b) = a(a + b)$
4. $(r - u)b = (t - v)a$
5. $(x^2 - 1)4 = (a + b)(r - t)$

$\longleftarrow I_{11}$

L35 von $Ü_9$

1. $x = \frac{9}{7}$
2. $x = 6$
3. $x = 3$
4. $x = 2$
5. $x = \frac{11}{6}$
6. Diese Strecke entspricht 4 cm auf der Karte. $\longleftarrow T_{11}$

L36 von T_{11}

Haben Sie ermittelt, daß der ursprüngliche Preis 53 Mark betrug?

Ja: Die Antwort war sicher. Wenn die Begriffe Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert klar sind $\longleftarrow T_1$

Müssen Sie sich informieren $\longleftarrow I_{12}$

Nein: $\longleftarrow I_{12}$

L37 von $Ü_{10}$

1. Die Steigerung der Produktion beträgt für das angegebene Erzeugnis 34%.
2. Etwa 2,38% des Erzeugnisses entspricht nicht den Güteforderungen.
3. 168264 Stück der Erzeugnisse bleiben im Inland.
4. Die Masse ist größer als 30,816 kg und kleiner als 33,384 kg.
5. Der Betrag bringt jährlich 302,40 Mark Zinsen.

$\longleftarrow T_{12}$

L38 von T_{12} $\longleftarrow L_{40}$

L39 von T_{12}

Das Ergebnis von $x = 180$ m ist richtig. Sie haben gut überlegt. Die Zahl der Baumreihen und ihre Länge ist **indirekt** proportional. Der reziproke Wert der Baumreihen ist proportional zur Länge der Reihen.

$$120 : x = \frac{1}{12} : \frac{1}{8}$$

$\longleftarrow T_{13}$

L40 von T_{12} oder L_{38}

Sie haben richtig erkannt, daß die Baumreihen länger werden, wenn ihre Zahl verringert wird. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor. Ihr Ergebnis ist falsch.
Es kann beim Vorliegen einer indirekten Proportionalität gesagt werden, daß der reziproke Wert der Reihenzahl zur Länge der Baumreihen proportional ist. Schreiben Sie den Ansatz auf, und berechnen Sie x.

→ L_{42}

L41 von T_{12}

Ihr Ergebnis kann nie richtig sein. Wenn weniger Reihen angepflanzt werden und die Anzahl konstant bleibt, so können die Reihen nicht kürzer werden. Zwischen der Anzahl der Baumreihen und ihrer Länge besteht eine indirekte Proportionalität.

← I_{13}

L42 von L_{40}

$$120 : x = \frac{1}{12} : \frac{1}{8}$$

$$x = 180$$

Informieren Sie sich bitte noch in I_{13}. Beachten Sie jedoch die dortige Laufanweisung nicht, sondern kehren Sie hierher zurück, um dann nach T_{13} zu gehen.

← I_{13}/T_{13}

L43 von $Ü_{11}$

1. Proportionalität $m = \varrho \cdot V$
2. indirekte Proportionalität $R = \frac{U}{I}$
3. indirekte Proportionalität $v = \frac{s}{t}$
4. Proportionalität $s = v \cdot t$
5. indirekte Proportionalität $P = \frac{W}{t}$

← T_{12}

L44 von T_{13}

Die richtige Lösung heißt:

$$x = \frac{18}{17}, \quad y = \frac{7}{17}$$

Bemerkung: Wenn Sie die Probe durchführen, müssen die für x und y bestimmten Werte in **beide** Gleichungen eingesetzt werden.

Haben Sie diese Lösung ohne Schwierigkeiten bestimmt, so gehen Sie zu der Abschnittsleistungskontrolle. → 4.6.

Sonst studieren Sie ← I_{14}

L45 von $Ü_{12}$

1. $x = -\dfrac{223}{15}$, $\quad y = 27$
2. $x = 3$, $\quad y = 2$
3. $x = 2$, $\quad y = 3$
4. $x = \dfrac{34}{41}$, $\quad y = -\dfrac{147}{41}$
5. $x = \dfrac{10}{21}$, $\quad y = \dfrac{34}{21}$

Lösen Sie jetzt die Abschnittsleistungskontrolle. → 4.6.

4.6. Leistungskontrolle

4.6.1. Aufgaben

Lösen Sie folgende Aufgaben, indem Sie an sich selbst wieder Klausurbedingungen stellen.

Hilfsmittel: keine Zeit: 45 Minuten

1. Bestimmen Sie x.

   $2x - a(x + b) = 3x(a + 2b) - 4$

2. Bestimmen Sie x.

   a) $\dfrac{x - b}{a} = \dfrac{x + b}{b} - 2$ b) $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{3}{1 - x} = \dfrac{6}{1 - x^2}$

3. Lösen Sie die Gleichungen nach den gesuchten Größen auf.

a) $A = \dfrac{BC}{(B + C)D}$, $B =$ b) $a = \dfrac{b + c}{bc - d}$, $c =$

4. Durch eine neue Technologie wird der Arbeitszeitaufwand für einen Arbeitsgang zur Herstellung eines bestimmten Erzeugnisses um 15% gesenkt und beträgt jetzt 16 Minuten und 9 Sekunden. Wie hoch war der Arbeitszeitaufwand vor der Realisierung?
Berechnen Sie die Arbeitszeiteinsparung, wenn innerhalb eines gewissen Zeitraumes 900 Stück des Erzeugnisses hergestellt werden.

5. Wenn täglich 30 Rohre verlegt werden, ist der Bau einer Rohrleitung in 22 Tagen beendet. Wieviel Tage werden benötigt, wenn durch eine verbesserte Technologie täglich 38 Rohre verlegt werden.

6. Für welche x gilt folgende lineare Ungleichung?

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{7} < \frac{9x}{10} - 4$$

7. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$2x - 3y = 4$$
$$x - 4y = 12$$

Korrigieren Sie dann bitte Ihre Arbeit.

4.6.2. Auswertung

1. $2x - ax - ab = 3ax + 6xb - 4$ 1 Punkt
$x(2 - 4a - 6b) = ab - 4$ 2 Punkte

$$x = \frac{ab - 4}{2(1 - 2a - 3b)}$$ 1 Punkt

insgesamt 4 Punkte

Wenn Sie nicht alle Punkte erreicht haben, so arbeiten Sie I_1, I_2, I_3 und die zugehörigen Übungen noch einmal durch, um völlige Sicherheit zu erlangen.

2. a) Hauptnenner $a \cdot b$ 1 Punkt

$(x - b)\, b = (x + b)a - 2ab$

$x(b - a) = b(b - a)$ 1 Punkt

$x = b$ 1 Punkt

insgesamt 3 Punkte

b) Hauptnenner $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ 2 Punkte

$$x - 1 + 3(x + 1) = -6$$

$$x + 3x - 1 + 3 = -6$$ 1 Punkt

$$4x = -8$$

$$x = -2$$ 2 Punkte

insgesamt 5 Punkte

Hatten Sie Schwierigkeiten, so gehen Sie erneut zu I_4 und $Ü_4$.

3. a) $AD(B + C) = BC$ 1 Punkt

$$B(AD - C) = -ADC$$ 1 Punkt

$$B = \frac{ADC}{C - AD}$$ 1 Punkt

b) $a(bc - d) = b + c$ 1 Punkt

$$c(ab - 1) = b + ad$$ 1 Punkt

$$c = \frac{b + ad}{ab - 1}$$ 1 Punkt

insgesamt für Aufgabe 3. 6 Punkte

Wenn es notwendig ist, arbeiten Sie noch einmal I_5 und $Ü_5$ durch.

4. 9 Sekunden = 0,15 Minuten $\left(\frac{9}{60}\text{ Minuten}\right)$ 1 Punkt

85% sind also 16,15 Minuten 1 Punkt

$100:85 = x:16{,}15$ 2 Punkte

$x = 19$ 2 Punkte

Der Arbeitsaufwand betrug vor Einführung des Neuerervorschlages 19 Minuten.

$19 - 16{,}15 = 2{,}85$

$2{,}85 \cdot 900 = 2565{,}00$ 2 Punkte

insgesamt 8 Punkte

Die Arbeitszeiteinsparung beträgt in diesem Zeitraum 2565 Minuten oder etwa 43 Stunden. Diese Aufgabe war nicht schwierig, wie Sie jetzt sicher bestätigen werden. Wenn hier Schwierigkeiten aufgetreten sind, so gehen Sie noch einmal zu I_6, $Ü_6$, I_9, I_{10}, I_{12}, $Ü_9$ und $Ü_{10}$.

5. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

$$30:38 = \frac{1}{22} : \frac{1}{x} \text{ oder } \frac{1}{30} : \frac{1}{38} = 22:x \qquad 2 \text{ Punkte}$$

$$\text{oder } 30:38 = x:22$$

$$\text{oder } 38:30 = 22:x$$

$$38x = 30 \cdot 22 \qquad \text{Ansatz} \qquad 3 \text{ Punkte}$$

$$x = \frac{660}{38} = \frac{330}{19} \approx 17{,}4 \qquad \underline{3 \text{ Punkte}}$$

8 Punkte

Durch die verbesserte Technologie ist der Bau der Leitung nach etwa 17 und einem halben Tag beendet.
Haben Sie dieses Ergebnis nicht bestimmt, so arbeiten Sie noch einmal I_{13} und $Ü_{11}$ durch.

6. $\frac{x}{3} - \frac{9x}{10} < -4 + \frac{2}{7}$

$$-\frac{17}{30}x < -\frac{26}{7} \qquad 2 \text{ Punkte}$$

$$x > \frac{780}{119} \qquad \underline{2 \text{ Punkte}}$$

4 Punkte

Die Ungleichung gilt für alle x, die größer sind als $\frac{780}{119}$. Gehen Sie noch einmal zu I_7 und $Ü_7$, wenn Sie diese Lösung nicht gefunden haben.

7. Die 2. Gleichung nach x auflösen: $x = 12 + 4y$

In 1. Gleichung einsetzen und berechnen von y:

$$2(12 + 4y) - 3y = 4$$

$$5y = -20$$

$$y = -4$$

In aufgelöste 2. Gleichung einsetzen:

$$x = 12 - 16$$

$$x = -4$$

Für die richtige Lösung gibt es 4 Punkte.

Es ist notwendig, daß Sie noch einmal I_{14} und die zugehörige Übung bearbeiten ,wenn Sie für Aufgabe 7 keine 4 Punkte erhalten haben. Hier wieder die Umrechnung der erreichten Punktezahl in eine Note:

Punkte	Note
40–42	1
34–39	2
25–33	3
19–24	4
0–18	5

Befolgen Sie die Hinweise, damit die erreichte Note mit den Zielen übereinstimmt. Damit ist die Arbeit an Abschnitt 4. beendet. Gehen Sie zu Abschnitt 5.

5. Trigonometrie

5.1. Wissens- und Könnensziele

In diesem Abschnitt sollen vier wichtige mathematische Funktionen wiederholt werden, mit deren Hilfe praktische Zusammenhänge durch mathematische Methoden gelöst werden können. Die Anwendung erfolgt unter anderem in der Landvermessung, nicht minder groß jedoch ist die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen in der Mathematik selbst, in den Naturwissenschaften (z.B. Optik, Mechanik usw.) und in der Technik (insbesondere bei der Berechnung von Schwingungsproblemen).
Bei planimetrischen Verfahren (Abschnitt 6.) wird eine geforderte ebene Figur (z.B. ein Dreieck) konstruiert, während in der Trigonometrie die gesuchten Größen aus den gegebenen berechnet werden.
In diesem Abschnitt werden einige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen behandelt. Die Wiederholung der notwendigen Grundlagen garantiert das Verständnis für die aufgeworfenen Probleme.
Folgende Einzelziele sollen durch die Wiederholung erreicht werden:

1. Der Begriff und eine Einheit des Winkels werden beherrscht.
2. Sie kennen die Definition der vier trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis.
   Sie können aus der Definition spezielle Funktionswerte ohne Tafel bestimmen und die Vorzeichen der Funktionswerte in den Quadranten angeben.
3. Sie können sicher mit der Tafel arbeiten und die Funktionswerte ablesen (ohne Interpolation). Ebenso können Sie die Umkehrung ausführen, d.h. aus dem Funktionswert den zugehörigen Winkel bestimmen.
4. Die Erkenntnisse aus 3. können Sie benutzen, um bestimmte Größen im rechtwinkligen Dreieck zu berechnen. Dabei ist die Fähigkeit vorhanden, den mathematischen Zusammenhang aus einer praktischen Aufgabenstellung zu erkennen.

Beginnen Sie die Wiederholung bei T_1.

5.2. Kenntnisüberprüfung

T1

Bestimmen Sie den Winkel, den die erste mit der vierten Speiche eines Rades bildet. Das Rad hat insgesamt 16 Speichen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe soll die Breite der Speichen nicht berücksichtigt werden.

Antworten:

1. 90° → L_1
2. 67,5° → L_2
3. Ein anderes Ergebnis ist richtig. → L_3
4. Das weiß ich nicht. → I_1

T2

Geben Sie den Winkel α in Grad, Minuten und Sekunden an.

$$\alpha = 132{,}36°$$

Antworten:

1. Ich benötige einen kleinen Hinweis. → I_2
2. Ich kann keine Minuten und Sekunden bestimmen. → I_3
3. Ich habe ein Ergebnis und möchte es vergleichen. → L_5
4. Ich finde auch mit den Hilfen kein Ergebnis. → I_4

T3

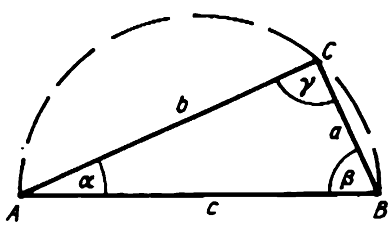


Bild 5.1

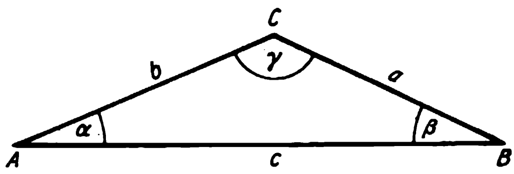


Bild 5.2

In welchem Dreieck gilt die Beziehung:

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Antworten:

1. In beiden → L_7
2. Nur in Bild 5.1 → L_8
3. Nur in Bild 5.2 → L_9
4. In keinem der angegebenen Dreiecke. → L_{10}
5. Ich kann mich nicht entscheiden. → L_{11}

T4

Vorgegeben ist das folgende Dreieck:

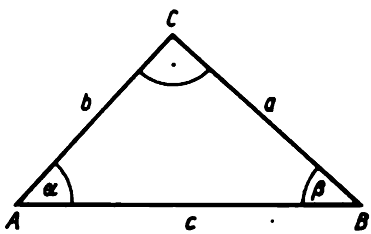


Bild 5.3

Ergänzen Sie.

$$\sin \alpha = \cos \beta = \ldots$$

$$\frac{b}{c} = \ldots = \ldots$$

$$\ldots = \tan \beta = \ldots$$

$$\frac{a}{b} = \ldots = \ldots$$

Vergleichen Sie → L_{12}

T5

Ohne die Verwendung einer Zahlentafel sollen Sie den Wert der folgenden trigonometrischen Funktionen bestimmen.
Anleitung: Gehen Sie dazu von einem geeigneten rechtwinkligen Dreieck aus.

$\sin 30^\circ = \dots \qquad \cos 30^\circ = \dots$

$\tan 30^\circ = \dots \qquad \cot 30^\circ = \dots$

Berechnen Sie die Werte auf einem Zettel.
Finden Sie nach längerer Überlegung keinen Lösungsansatz, so begeben Sie sich zu I_6. Dort werden Sie bei der Lösung unterstützt.

→ I_6

Vergleichen Sie die Lösung mit → L_{13}

T6

Bestimmen Sie mit Hilfe der Zahlentafel:

1. $\cos 61^\circ 12' =$
2. $\tan 12{,}8^\circ =$
3. $\sin x = 0{,}7672 \quad x =$
4. $\cot x = 2{,}488 \quad x =$

Antworten:

1. Ich weiß mir nicht zu helfen. → I_{11}
2. Folgende Ergebnisse sind richtig:
   1. 0,4818 2. 0,2272 3. 50,1° 4. 68,1° → L_{15}
3. Ich habe andere Ergebnisse. → L_{16}

T7

Vom Boden aus ist die Sonne unter einem Winkel von 62°39′ zu sehen. Berechnen Sie die Höhe eines Baumes, dessen Schattenlänge 14,60 m beträgt.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis. → L_{18}

T8

Zeichnen Sie in den Einheitskreis Strecken ein, deren Zahlenwert der Länge gleich dem Wert der Winkelfunktion für den angegebenen Winkel α ist.

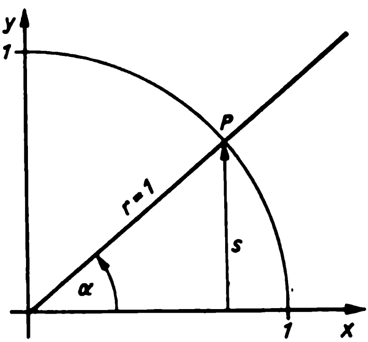


Bild 5.4

z. B. s ist gleich dem sin α

Übertragen Sie die Zusammenhänge, die am rechtwinkligen Dreieck gültig sind, auf die Skizze am Einheitskreis. ——▶ L_{20}

T9

Welche Vorzeichen haben die vier Winkelfunktionen im 3. Quadranten (I_{18})?

sin x	positiv negativ	cos x	positiv negativ
tan x	positiv negativ	cot x	positiv negativ

Streichen Sie die falschen Antworten durch. ——▶ L_{25}

T10

Sie können das Vorzeichen der Winkelfunktionen in den 4 Quadranten bestimmen. Beachten Sie diese Kenntnisse bei der Lösung der folgenden Aufgabe.
Zeichnen Sie die Werte der Winkelfunktionen für den angegebenen Winkel α als Strecken in die Abbildung ein.

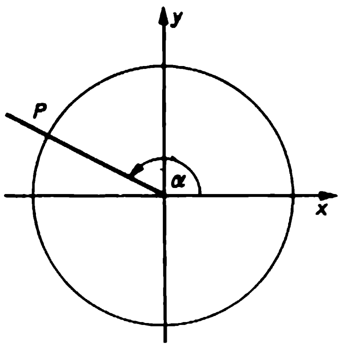


Bild 5.5

Achten Sie dabei auf das richtige Vorzeichen. ——→ L_{27}

T11

Führen Sie die Bestimmung des Wertes der trigonometrischen Funktionen

1. $\sin(360° - \beta) =$
2. $\cot(180° + \beta) =$

mit $0° \leqq \beta < 90°$
auf die Bestimmung des Wertes der trigonometrischen Funktionen für Winkel zwischen 0° und 90° zurück. ——→ L_{29}

T12

Führen Sie die Bestimmung für folgende Werte der Winkelfunktionen auf die Bestimmung von Werten der Winkelfunktionen für Winkel zwischen 0° und 90° zurück.

1. $\sin 210° =$
2. $\cos 150° =$
3. $\tan 190° =$
4. $\cot 330° =$

Hinweis: Vergessen Sie nicht das Vorzeichen. ——→ L_{31}

5.3. Informationen

I1 von T_1

Fertigen Sie eine Skizze an.
Entscheiden Sie sich für eine der Antworten 1. bis 3. ◄——— T_1

I2 von T_2

Versuchen Sie einmal, ob Sie die vorliegende Aufgabe durch Proportionen oder mit der Hilfe Ihrer Zahlentafel lösen können. ◄——— T_2

I3 von T_2

Im Unterschied zu vielen anderen Einheiten mit Dezimaleinteilung (Meter, Kilogramm, Volt usw.) ist die Gradmessung eines Winkels **nichtdezimal** (bekannt auch von der Zeitmessung).

Beachten Sie:

Eine Minute ist der 60. Teil eines Grades.

$$\boxed{1' = \frac{1^\circ}{60}}$$

Eine Sekunde ist der 60. Teil einer Minute.

$$\boxed{1'' = \frac{1'}{60}}$$

◄——— T_2

I4 von T_2 oder L_5

Die Aufgabe aus T_2 ist zu lösen:

1. Möglichkeit: **Lösung durch Proportionen**

132°

Berechnung der Minuten:

$$\boxed{1' = \frac{1^\circ}{60}} \qquad 0{,}36^\circ \qquad \text{Ansatz: } 1' : \frac{1^\circ}{60} = x : 0{,}36^\circ$$

$$x = 0{,}36 \cdot 60'$$

$$x = 21{,}6'$$

Ergebnis: 21'

Berechnung der Sekunden:

$$\boxed{1'' = \frac{1'}{60}} \qquad 0{,}6' \qquad \text{Ansatz: } 1'' : \frac{1'}{60} = x : 0{,}6'$$

$$x = 0{,}6 \cdot 60''$$

$$x = 36''$$

Ergebnis: 36''

Lösung von T_2: $\alpha = 132°21'36''$

2. Möglichkeit: **Lösung mit der Zahlentafel**
132° entsprechend wird der Wert für 0,36° aufgeschlagen. Es steht dort 21'36''. Durch eine andere Tabelle werden Minuten und Sekunden in Dezimalteilen des Grades angegeben.

Beispiel:
72°24'17''

$$\begin{array}{lr} 72^\circ = & 72{,}00000^\circ \\ 24' = & 0{,}40000^\circ \\ 17'' = & 0{,}00472^\circ \\ \hline & 72{,}40472^\circ \end{array}$$

Zweckmäßig werden die Umrechnungen nach der 2. Möglichkeit, also mit der Tabelle, durchgeführt. ——→ $Ü_2$

---

5 von L_9, L_{10}, L_{11} oder L_{12}

Prägen Sie sich ein, was nun wiederholt werden muß:
In einem **rechtwinkligen Dreieck** gelten folgende **Definitionen:**

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

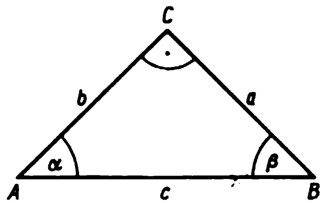


Bild 5.6

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Bestimmen Sie die richtigen Ergänzungen in T_4. ◀———— T_4

Die Begriffe Hypotenuse, Ankathete und Gegenkathete wurden in L_7 erklärt.

I6 von T_5

Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1. Die Winkel in diesem Dreieck sind gleich und betragen 60°.
Jetzt muß ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt werden, denn nur dort sind die Werte der trigonometrischen Funktionen definiert. Außerdem existiert in diesem Dreieck noch kein Winkel von 30°.

Überlegen Sie an dieser Stelle.

Kommen Sie jetzt allein weiter?

Ja: ◀———— T_5

Nein: Benutzen Sie die Hilfe in I_7. ————▶ I_7

I7 von I_6

Zeichnen Sie in das Dreieck eine Höhe ein.
Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen der Winkel 30° auftritt. Die Höhe h kann berechnet werden.

Können Sie das?

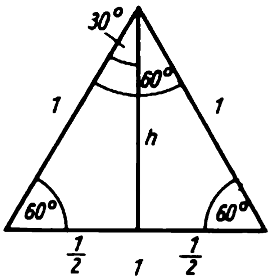


Bild 5.7

Ja: ——→ I_9

Nein: ——→ I_8

I8 von I_7

Den Satz des Pythagoras erfordert die Lösung des Problems.

Satz: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe aus dem Quadrat der beiden Katheten[1] gleich dem Quadrat der Hypotenuse[1].

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mit diesen Hilfen wird die in T_5 gestellte Aufgabe gelöst.

Bemerkung: Eine ausführliche Darstellung des Satzes erfolgt im Abschnitt 6.

——→ I_9

Wenn Sie die Lösung selbst finden wollen ←—— T_5

I9 von I_7, I_8 oder L_{13}

Die geeignete geometrische Figur ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1. Dann können die Funktionswerte für den angegebenen Winkel bestimmt werden. (Bild 5.8)

Die Winkel sind gleich groß und betragen 60°. Es wird eine Höhe eingezeichnet. Dadurch entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke mit dem Winkel 30°. (Bild 5.9)

---

[1] vgl. Fußnote zu L_7

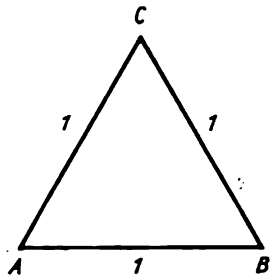


Bild 5.8

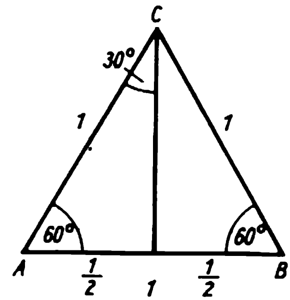


Bild 5.9

h berechnet sich nach dem **Satz des Pythagoras:**

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daraus folgt dann:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (Rationalmachen des Nenners)}$$

$$\cot 30° = \frac{h}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

——▶ $Ü_3$

I10 von $Ü_3$

Die geeignete geometrische Figur ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Wenn Sie eine Diagonale einzeichnen, dann erhalten Sie zwei Dreiecke und können die Aufgabe lösen. ——▶ $Ü_3$

I11 von L_{16} oder T_6

Die Werte der Winkelfunktionen werden mit der Zahlentafel bestimmt. Es liegt eine Tafel für die Bestimmung von sin *x* und cos *x* und eine Tafel zur Bestimmung von tan *x* und cot *x* vor.

Die Winkel sind dabei in Grad und Dezimalteilen von Grad tabelliert. Das bedeutet, daß Minuten und Sekunden zunächst mit Hilfe der entsprechenden Tafeln in Dezimalteilen von Grad ausgedrückt werden müssen.
Die Gradzahl wird bei der Bestimmung des Sinus und Tangens links in der Tafel aufgesucht und die erste Kommastelle im Kopf der Tafel gewählt. Bei der Bestimmung von Cosinus und Cotangens findet sich die Gradzahl rechts und die erste Stelle nach dem Komma in der letzten Zeile der Tafel.
Nehmen Sie die Tafel zur Hand.
Überprüfen Sie nachfolgende Beispiele.

1. $\sin 42{,}3° = 0{,}6730$
2. $\cos 70{,}1° = 0{,}3404$
3. $\tan 41{,}3° = 0{,}8785$
4. $\cot 8{,}7° = 6{,}5350$

Ist der Funktionswert der trigonometrischen Funktion gegeben, kann der zugehörige Winkel in umgekehrter Weise abgelesen werden.
Der Wert wird in der Tafel aufgesucht. Bei vorgegebenen Sinus- und Tangenswerten werden die Winkel links und oben abgelesen und bei Cosinus- und Cotangenswerten rechts und unten.
Überzeugen Sie sich wieder davon, daß die angegebenen Beispiele richtig abgelesen wurden.

1. $\sin x = 0{,}9085 \qquad x = 65{,}3°$
2. $\cos x = 0{,}6414 \qquad x = 50{,}1°$
3. $\tan x = 0{,}2754 \qquad x = 15{,}4°$
4. $\cot x = 7{,}596 \qquad x = 7{,}5°$

$\longrightarrow$ $Ü_4$

I12 von L_{18}

Sind im rechtwinkligen Dreieck

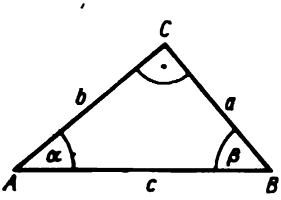


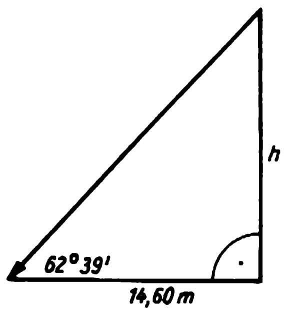
Bild 5.10

von den fünf Bestimmungsgrößen a, b, c, α, β zwei bekannt (mit der Ausnahme, daß nur zwei Winkel gegeben sind), dann lassen sich die restlichen Größen eindeutig berechnen. Dabei werden die in I_5 angegebenen Definitionen der trigonometrischen Funktionen verwendet. (Schlagen Sie an der angegebenen Stelle nach, prägen Sie sich die Beziehungen ein, und kommen Sie an diese Stelle zurück.)

Hinweis: Es ist zu empfehlen, daß die gegebenen und gesuchten Größen zunächst in einer Skizze festgehalten werden.

Die Lösung der Aufgabe aus T_7:

Skizze:



$$62°39' = 62{,}65°$$

$$\tan 62{,}65° = \frac{h}{14{,}60}$$

$$h = 14{,}60\ \text{m} \cdot \tan 62{,}65°$$

$$h = 14{,}60\ \text{m} \cdot 1{,}933$$

Die Höhe des Baumes beträgt 28,22 m.

Bild 5.11

Zusammenfassung:

Beachten Sie bei der Lösung von Aufgaben dieser Art die folgenden Schritte:

1. Zunächst wird das Problem der Aufgabe skizziert, und alle bekannten sowie gesuchten Größen werden eingezeichnet.
2. Die gesuchten Größen werden durch die gegebenen Größen allgemein ausgedrückt (zunächst werden noch keine Zahlen eingesetzt).
3. Die gesuchten Größen werden berechnet. $\longrightarrow$ Ü$_5$

I13 von L_{18} oder L_{19}

Bisher wurden nur die Werte der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck wiederholt.

Da im rechtwinkligen Dreieck ein rechter Winkel vorhanden ist, kann keiner der beiden anderen Winkel größer als 90° sein.

Im schiefwinkligen Dreieck ist diese Aussage nicht immer richtig. Hier können durchaus Winkel auftreten, die größer als 90° sind. Schon deswegen reicht der Bereich

$$0° \leqq \alpha \leqq 90°$$

für den Winkel α nicht aus.

Für Winkel $\alpha > 90°$ werden die Betrachtungen an einer anderen geometrischen Hilfsfigur fortgesetzt. Die geometrische Hilfsfigur ist der **Einheitskreis**.

◄——— T_8

14 von L_{20}

Das Ganze wird noch einmal aufgezeichnet:

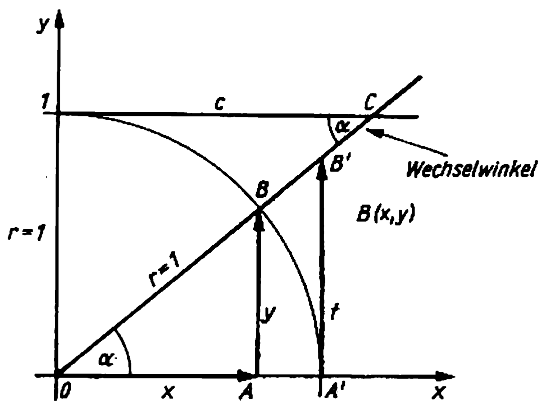


Bild 5.12

Der Sinus

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = y, \qquad \text{da } r = 1$$

(Im Dreieck OAB – rechter Winkel bei A)
Die Länge der Strecke y gibt somit ein Maß für den Sinus von α. Dann sind die bekannten Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck ein Spezialfall des dargestellten Zusammenhanges.

Der Cosinus

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = x, \qquad \text{da } r = 1$$

(Im Dreieck OAB – rechter Winkel bei A)
Die Strecke x gibt ein Maß für den Cosinus von α an.

Der Tangens

Für die Bestimmung des Tangens muß eine Vertikaltangente (t) an den Einheitskreis gelegt werden (vgl. Bild 5.12).

$$\tan \alpha = \frac{t}{r} = t, \qquad \text{da } \overline{OA'} = r = 1$$

(Im Dreieck $OA'B'$ – rechter Winkel bei A')
Die Strecke t gibt ein Maß für den Tangens von α an.

Der Cotangens

Für die Bestimmung des Cotangens muß eine Horizontaltangente an den Einheitskreis gelegt werden.
Hierzu muß das Dreieck $OC1$ betrachtet werden. Beachten Sie hierbei, daß Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich sind.[1] α tritt demzufolge bei C auf.

$$\cot \alpha = \frac{c}{r} = c, \qquad \text{da } \overline{O1} = r = 1$$

Die Strecke c gibt demzufolge ein Maß für den Cotangens von α.

Zusammenfassung:

Ein Winkel α wird von der positiven x-Achse zu einem Strahl durch den Ursprung des Koordinatensystems gemessen. Dieser Strahl schneidet den Einheitskreis im Punkt P mit den Koordinaten (x, y).
Es ergibt sich

1. Der Wert des Sinus von α als Wert der Ordinate y.
2. *Der Wert des Cosinus von α als Wert der Abszisse x.*
3. Der Wert des Tangens von α als Maßzahl der Vertikaltangente, begrenzt durch die Schnittpunkte mit den Winkelschenkeln.
4. Der Wert des Cotangens von α als Maßzahl der Horizontaltangente, begrenzt durch die y-Achse und den verlängerten Winkelschenkel durch P.

Ist eine Wiederholung der Begriffe Abszisse und Ordinate erforderlich?

——→ I_{15}

Sie kennen die Begriffe und sind sicher bei der Anwendung. ——→ $Ü_6$

I15 von I_{14}

Durch zwei Koordinaten wird ein Punkt in der Ebene festgelegt, seine y-Koordinate (die Ordinate) und seine x-Koordinate (die Abszisse). ——→ $Ü_7$

I16 von L_{20} oder L_{21}

Bisher wurde die Aufgabe noch nicht gelöst, die in I_{13} angedeutet wurde. Es wurden wieder nur Winkel zwischen 0° und 90° untersucht.

---

[1] Ausführlich wird der Zusammenhang im Abschnitt 6. behandelt.

Die Winkel lagen dabei immer im ersten Quadranten. Wird der zweite Schenkel weiter entgegen der Uhrzeigerdrehrichtung gedreht, so bildet er zu der positiven x-Achse Winkel, deren Größe von einer bestimmten Stelle den Wert 90° überschreitet.
Dazu wird allerdings der erste Quadrant verlassen. Wie sieht es in den anderen Quadranten aus?
Vor der Antwort eine kleine Übung. → $Ü_8$

I17 von L_{23}

Es wird die Lage der Quadranten angegeben:

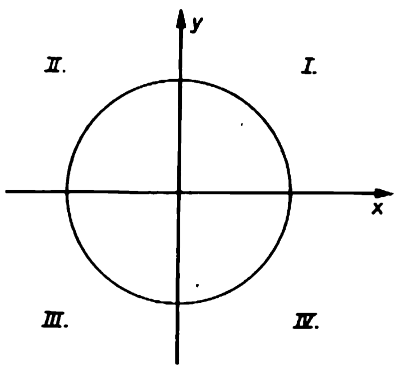


Bild 5.13

→ $Ü_9$

I18 von L_{23} oder L_{24}

Im ersten Quadranten ist folgendes definiert (vgl. I_{14}):

$$\sin\alpha = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Radius}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Radius}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}}$$

Dabei bestimmt der Punkt P (Schnittpunkt des einen Winkelschenkels mit dem Einheitskreis) den Abszissen- und Ordinatenwert. Der andere Schenkel ist die positive x-Achse.
Es ist hierbei zu beachten, daß der Radius des Einheitskreises immer den Wert 1 hat.

Genauso müssen auch die Winkelfunktionen in den anderen Quadranten definiert werden, damit die Definitionen im ersten Quadranten gültig bleiben, die aus den Betrachtungen über das rechtwinklige Dreieck folgten.
Da nun aber die Ordinaten- und Abszissenwerte in den unterschiedlichen Quadranten verschiedene Vorzeichen haben, so erhalten auch die Werte der Winkelfunktionen für Winkel in den einzelnen Quadranten unterschiedliche Vorzeichen. (Der Radius ist immer positiv und gleich 1.)

Erster Quadrant: Die Ordinaten und Abszissen der Punkte P sind immer positiv. Damit werden nach den oben angegebenen Definitionen alle Winkelfunktionen im ersten Quadranten positiv. Das stimmt mit unseren Erfahrungen überein.

◄——— T_9

I19 von L_{25}

Die Antwort von T_9 wird besprochen.
Ein Punkt im 3. Quadranten hat eine negative Abszisse und eine negative Ordinate. (Der Radius ist immer positiv.)

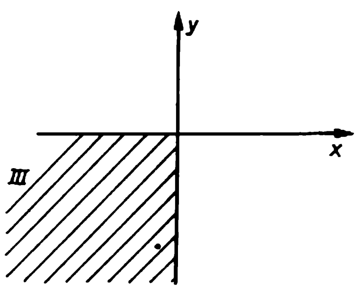


Bild 5.14

In die Definition (vgl. I_{18}) eingesetzt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{negative Ordinate}}{\text{Radius}} = \text{negativer Wert}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{negative Abszisse}}{\text{Radius}} = \text{negativer Wert}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{negative Ordinate}}{\text{negative Abszisse}} = \text{positiver Wert}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{negative Abszisse}}{\text{negative Ordinate}} = \text{positiver Wert}$$

Wenden Sie das hier Gezeigte an.

———► $Ü_{10}$

I20 von L_{27} oder L_{28}

Wenn Sie sich L_{28} und L_{27} (3.) ansehen, so werden Sie merken, daß die Bestimmung des Wertes der Winkelfunktionen grafisch auf Winkel zwischen 0° und 90° zurückgeführt wurde.

Bemerkung: Winkel werden gegen die Uhrzeigerdrehrichtung gemessen. Hier sind die folgenden Winkel zu betrachten:
Im II. Quadranten Winkel zu der negativen x-Achse.
Im III. Quadranten Winkel von der negativen x-Achse.
Im IV. Quadranten Winkel zu der positiven x-Achse.

Es muß jedoch hierbei auf das richtige Vorzeichen geachtet werden.

◄——— T_{11}

I21 von L_{29}

1. Die Beziehung

$$\sin(360° - \beta) = -\sin\beta$$

wird in Bild 5.15 dargestellt.

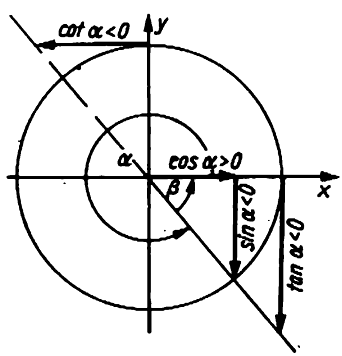


Bild 5.15

Sie sehen, daß der Winkel

$$\alpha = 360° - \beta$$

den gleichen Sinuswert hat wie der Winkel β (Schenkel verlängern und zur negativen x-Achse messen).
Da die Orientierung hier aber entgegengesetzt ist, kann auf diese Weise schon das negative Vorzeichen begründet werden. (Sinuswerte von Winkeln im IV. Quadranten sind negativ, vgl. L_{26}.)

2. Die Beziehung

$$\cot (180° + \beta) = \cot \beta$$

wird in Bild 5.16 dargestellt.

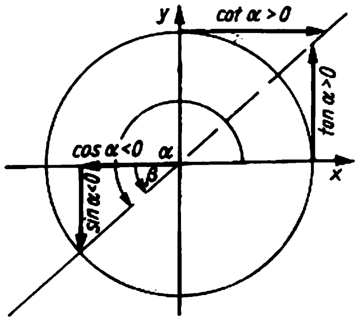


Bild 5.16

Sie sehen, daß der Winkel

$$\alpha = 180° + \beta$$

den gleichen Cotangens hat wie der Winkel β.
(Cotangenswerte der Winkel im III. Quadranten sind positiv, vgl. L_{28}.)

→ $\ddot{U}_{12}$

---

22 von L_{31}

Da für Sie die vorangegangenen Erklärungen nicht ausreichten, auf der anderen Seite diese Kenntnisse aber sehr wichtig sind, sollen die Zusammenhänge hier noch einmal ausführlich dargestellt werden.
Rückführung der Bestimmung von Werten der Winkelfunktionen für Winkel zwischen 90° und 360° auf Winkel zwischen 0° und 90°.

Zweiter Quadrant ($90° < \alpha < 180°$)

Aus L_{27} (Bild 5.32) entnehmen Sie, daß der Wert der Winkelfunktion bestimmt wird, der sich als Ergänzung zu 180° ergibt. Dieser wird mit dem richtigen Vorzeichen versehen.

$\sin \alpha = \sin (180° - \alpha)$

Winkel zwischen 0° und 90°, wenn α zwischen 90° und 180° liegt.

$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$

$\tan \alpha = -\tan (180° - \alpha)$

$\cot \alpha = -\cot (180° - \alpha)$

Dritter Quadrant $(180° < \alpha < 270°)$

Aus L_{28} (Bild 5.33) entnehmen Sie, daß der Wert der Winkelfunktion des Winkels bestimmt wird, der sich als Ergänzung von 180° zum Winkel ergibt. Dieser Wert wird mit dem richtigen Vorzeichen versehen.

$\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180°)$
Winkel zwischen 0° und 90°, wenn α zwischen 180° und 270° liegt.

$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$

$\tan\alpha = \tan(\alpha - 180°)$

$\cot\alpha = \cot(\alpha - 180°)$

Vierter Quadrant $(270° < \alpha < 360°)$

Aus L_{28} (Bild 5.34) entnehmen Sie, daß eigentlich der Wert der Winkelfunktion des Winkels bestimmt wird, der sich als Ergänzung zu 360° ergibt, wobei das richtige Vorzeichen zu bestimmen ist.

$\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$
Winkel zwischen 0° und 90°, wenn α zwischen 270° und 360° liegt.

$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$

$\tan\alpha = -\tan(360° - \alpha)$

$\cot\alpha = -\cot(360° - \alpha)$

Nachdem Sie diese Information gut durchgearbeitet haben und die Vorzeichen der Winkelfunktionen bestimmen können, dürfen Ihnen die Aufgaben in $Ü_{13}$ keine Schwierigkeiten mehr bereiten. ——▶ $Ü_{13}$

I23 von L_{31} oder L_{32}

Sie haben damit einige Abschnitte aus der **Trigonometrie** wiederholt. Bei gründschem Studium des Abschnittes müssen nun einige Lücken geschlossen sein, wenn solche überhaupt bestanden haben. Vor Absolvierung der Abschnittsleistungskontrolle der Rat:
Sehen Sie sich noch einmal die Stellen an, die Ihnen bei der Arbeit die meisten Schwierigkeiten bereitet haben.

——▶ Abschnittsleistungskontrolle 5.6

5.4. Übungen

Ü1 von L_3

1. Ein Zahnrad mit 48 Zähnen liegt vor.
Bestimmen Sie

a) Welchen Winkel bilden der erste und der sechste Zahn (von Zahnmitte zu Zahnmitte)?
b) Welchen Winkel bilden der dritte und der achte Zahn?
c) Welchen Winkel bilden der siebente und der 35. Zahn?

2. Welchen Winkel bilden die Zeiger einer Uhr

a) um 3.30
b) um 9.15

Überlegen Sie hier sorgfältig. → L_4

U2 von I_4

Lösen Sie mit der Zahlentafel:
Geben Sie in Minuten und Sekunden an.

1. 34,24°
2. 126,16°
3. 42,78°
4. 1,04°
5. 26,39°

Geben Sie in Dezimalteilen des Grades an.

6. 72° 6′24″
7. 14°56′12″
8. 30°54′ 3″
9. 1° 1′ 1″
10. 12°13′ 59″

→ L_6

U3 von I_9

1. Berechnen Sie an einer geeigneten geometrischen Figur (also ohne Verwendung der Zahlentafel).
   sin 60°, cos 60°, tan 60°, cot 60°

Hinweis: Beachten Sie I_9.

2. Berechnen Sie an einer geeigneten geometrischen Figur (also ohne die Verwendung einer Zahlentafel).
   sin 45°, cos 45°, tan 45°, cot 45°

Hinweis: Wenn Sie durch eigene Überlegungen die Figur nicht finden, dürfen Sie die in I_{10} angegebene Hilfe in Anspruch nehmen. → L_{14}

U4 von I_{11} oder L_{15}

Entnehmen Sie die folgenden Werte aus der Zahlentafel.

1. $\cos 34{,}2° =$	2. $\tan 62{,}8° =$
3. $\sin x = 0{,}3107 \quad x =$	4. $\cot x = 3{,}096 \quad x =$
5. $\cot 9{,}8° =$	6. $\cot x = 0{,}2736 \quad x =$
7. $\sin 42{,}6° =$	8. $\cos x = 0{,}9583 \quad x =$
9. $\cos 47{,}1° =$	10. $\tan x = 0{,}3919 \quad x =$

→ L_{17}

U5 von I_{12}

1. In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:
   a) $\alpha = 21{,}1°$ $\quad b = 3{,}4$ cm $\quad (\gamma = 90°)$
   Berechnen Sie: β, c, a
   b) $b = 2{,}43$ cm $\quad a = 3{,}11$ cm $\quad (\gamma = 90°)$
   Berechnen Sie: α, β, c
2. Berechnen Sie den Umfang des angegebenen Rinnenquerschnitts.

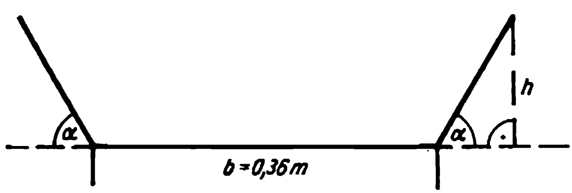


Bild 5.17

$h = 0{,}12$ m
$\alpha = 60{,}4°$

3. Wie hoch ist ein Mast, der von einem an der Spitze befestigten Seil mit 32,4 m Länge gehalten wird, welches einen Winkel von 52° mit dem Boden bildet.
4. An einer Bahnstrecke steht ein Schild, welches angibt, daß eine Steigung von 1:30 auf 560 m Streckenlänge besteht.
   Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen dem Punkt am Beginn und am Ende der Steigung?

Zusatzaufgabe[1]

[1] Für die Lösung dieser Aufgabe sind einige Kenntnisse aus der Mechanik notwendig. Sie können die Gelegenheit zur Wiederholung gut nutzen.

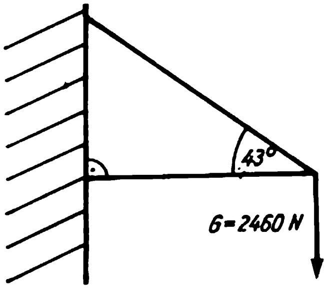


Bild 5.18

5. Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte am angegebenen Tragarm.

→ L_{19}

U6 von I_{14} oder L_{22}

Zeichnen Sie die Werte der 4 Winkelfunktionen für den Winkel α ein.

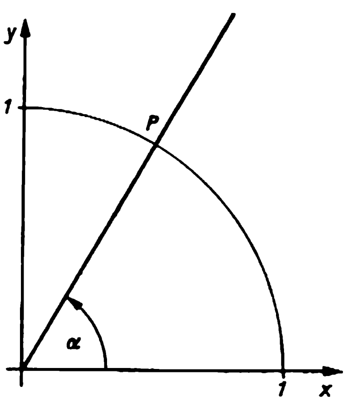


Bild 5.19

→ L_{21}

U7 von I_{15}

Zeichnen Sie folgende Punkte in ein x,y-Koordinatensystem ein (cartesisches Koordinatensystem):

	Abszisse	Ordinate
1. P_1	3	4
2. P_2	0	−1
3. P_3	−1	−1
4. P_4	−3	0
5. P_5	0	0

→ L_{22}

U8 von I_{16}

Welche Winkel (Gradzahl angeben) liegen im III. Quadranten. (Ein Schenkel ist die positive x-Achse. Der andere Schenkel schneidet den Einheitskreis im III. Quadranten.)

$$\ldots < \alpha < \ldots$$

Vergleichen Sie mit → L_{23}

U9 von I_{17}

Welche Winkel liegen

a) im II. Quadranten $\ldots < \alpha < \ldots$

b) im IV. Quadranten $\ldots < \alpha < \ldots$

Wenn Sie ergänzt haben, → L_{24}

U10 von I_{19}

Tragen Sie die Vorzeichen der Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten in die Tabelle ein.

	I.	II.	III.	IV.
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				
$\cot\alpha$				

→ L_{26}

Ü11 von L_{27}

Zeichnen Sie Strecken ein, deren Länge gleich dem Wert der Winkelfunktionen für den angegebenen Winkel α ist.

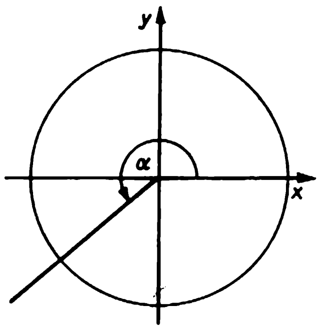


Bild 5.20

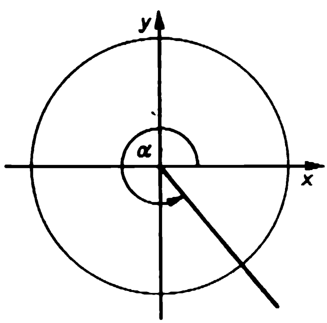


Bild 5.21

Hinweis: Achten Sie diesmal wieder auf das Vorzeichen (vgl. $Ü_{10}$, L_{26}).

→ L_{28}

Ü12 von L_{31}

Führen Sie die Bestimmung der Funktionswerte auf Winkel zwischen 0° und 90° zurück.

1. $\sin(180° - x)$
2. $\tan(180° + x)$
3. $\sin(180° + x)$
4. $\cot(180° - x)$
5. $\cot(360° - x)$
6. $\cos(360° - x)$

7. $\tan(180° - x)$ 8. $\cos(180° + x)$
9. $\cos(180° - x)$ 10. $\tan(360° - x)$
$0° \leqq x < 90°$ → L_{30}

U13 von I_{22}

Führen Sie die Bestimmung der folgenden Werte von Winkelfunktionen auf die Bestimmung des Wertes der Winkelfunktionen für Winkel zwischen 0° und 90° zurück.

1. sin 150° 2. tan 320°
3. sin 220° 4. cos 170°
5. tan 210° 6. cot 160°
7. cot 213° 8. sin 332°
9. cos 199,8° 10. cos 321,2°
11. tan 152,1° 12. cot 348,2° → L_{32}

5.5. Lösungen

L1 von T_1

Sie sind durch eine falsche Überlegung an diese Stelle gelangt. Vergleichen Sie mit der Lösung. Lesen Sie ab zweiten Satz weiter in L_3. → L_3

L2 von T_1

Das Ergebnis ist richtig. Die Überlegungen sind ordentlich. ← T_2

L3 von T_1 oder L_1

Ihr Ergebnis kann nicht richtig sein, wenn es mit keinem der in T_1 angegebenen übereinstimmt.
Die 360° des Vollkreises sollen in 16 Teile (Sektoren) geteilt werden. Die Skizze veranschaulicht die Aufgabenstellung.

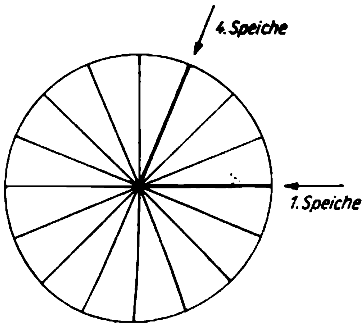


Bild 5.22

Zwei benachbarte Speichen bilden demzufolge einen Winkel von

$$\frac{360^\circ}{16} = 22{,}5^\circ.$$

Aus der Skizze ergibt sich sofort der Winkel, den die erste mit der vierten Speiche bildet.
Es sind 3 Sektoren $\cdot$ $22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$. ◄——— $\ddot{U}_1$

L4 von $\ddot{U}_1$

1. a) $37{,}5^\circ$ (Winkel zwischen zwei Zähnen $7{,}5^\circ$)
   b) $37{,}5^\circ$
   c) 210°
2. a) 285° oder 75° (Winkel zwischen zwei vollen Stunden $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$)
   b) $187{,}5^\circ$ oder $172{,}5^\circ$

Wenn Sie alle Ergebnisse richtig bestimmt haben, ist Ihre falsche Antwort aus T_1 vergessen.
Ist ein Ergebnis falsch, so sehen Sie sich noch einmal L_3 an und skizzieren die Aufgabenstellung, um Ihren Fehler zu berichtigen. ◄——— T_2

L5 von T_2

Die Lösung heißt:

$$\alpha = 132^\circ 21' 36''$$

Haben Sie diese Lösung ermittelt?
Ja: ◄——— T_3
Nein: ◄——— I_4

L6 von Ü$_2$

1. 34°14′24″ 2. 126°9′36″
3. 42°46′48″ 4. 1°2′24″
5. 26°23′24″ 6. 72,10667°
7. 14,93633° 8. 30,75083°
9. 1,01628° 10. 12,23239°

Berichtigen Sie, wenn notwendig, die Ablesefehler.

← T$_3$

L7 von T$_3$

Ihre Antwort ist nicht richtig.
Richtig wurde von Ihnen zwar erkannt, daß der Cotangens das Verhältnis von Ankathete zur Gegenkathete ist. Sie haben jedoch die wichtige Voraussetzung nicht beachtet, daß diese Beziehung nur im rechtwinkligen Dreieck definiert ist.
Blättern Sie zurück nach T$_3$. Sie erkennen dann, daß das Dreieck in Bild 5.2 keinen rechten Winkel besitzt. Aus diesem Grund ist der Cotangens im angegebenen Dreieck nicht definiert.[1]
Dagegen ist das im Bild 5.1 angegebene Dreieck rechtwinklig, denn es besitzt bei C nach dem Satz des THALES einen rechten Winkel.[2]
Ihre Antwort läßt trotzdem die Vermutung zu, daß Sie die Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck nicht vergessen haben. Merken Sie sich zukünftig jedoch immer:
Die Winkelfunktionen sind nur im **rechtwinkligen** Dreieck definiert.
Die Lösung von T$_4$ wird Ihnen nun keine Schwierigkeit bereiten.

← T$_4$

L8 von T$_3$

Ihre Antwort ist richtig. Alle anderen Antworten sind falsch. Sie haben gewußt, daß die Winkelfunktionen im Dreieck nur unter der Voraussetzung definiert sind, daß es rechtwinklig ist.

[1] Auch die Begriffe Kathete und Hypotenuse sind nur im rechtwinkligen Dreieck definiert. Die **Hypotenuse** ist die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Die beiden restlichen Seiten sind die **Katheten**, die als **An-** bzw. **Gegenkathete** bezeichnet werden, je nachdem, ob sie am betrachteten Winkel an- oder ihm gegenüberliegen.
[2] Sehen Sie sich den Satz des THALES an, wenn Sie die Aussage des Satzes nicht mehr kennen.

Das in Bild 5.1 angegebene Dreieck hat in C nach dem Satz von THALES einen rechten Winkel. Die Beziehung

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

gilt demzufolge.
Das in Bild 5.2 angegebene Dreieck ist nicht rechtwinklig. Aus diesem Grund ist der Cotangens hier nicht definiert.
Sie haben mit Ihrer Entscheidung für diese Antwort gezeigt, daß Sie die Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck beherrschen. T_4 wird deswegen leicht zu lösen sein. ◄——— T_4

L9 von T_3

Das war keine gute Antwort.
Sie haben die Voraussetzungen zur Lösung der hier gestellten Problematik vergessen. Bitte merken Sie sich für die Lösung der nächsten Aufgabe:

Versuchen Sie sich vor der Antwort an den Lehrstoff aus Ihrer Schulzeit zu erinnern.

Eine Wiederholung erfolgt in I_5. ◄——— I_5

L10 von T_3

Die Antwort ist nicht richtig.
Sie haben vergessen, daß der Cotangens im rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete ist.

Kennen Sie die anderen Winkelfunktionen noch?

Ja: Beweisen Sie das. ◄——— T_4

Nein: ◄——— I_5

L11 von T_3

Diese Antwort ist ehrlich.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten.

1. Das Programm muß Ihnen helfen. ◄——— I_5
2. Sie helfen sich selbst, indem Sie in alten Aufzeichnungen, Formelsammlungen u.a. nachschlagen und sich T_3 noch einmal vornehmen. ◄——— T_3

Entscheiden Sie sich bitte selbst für eine von den vorgegebenen Möglichkeiten.

L12 von T_4

Es muß in T_4 ergänzt worden sein:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta = \cos\alpha$$

$$\frac{b}{a} = \tan\beta = \cot\alpha \qquad \frac{a}{b} = \tan\alpha = \cot\beta$$

Sind hier Fehler aufgetreten?

Ja: Sie müssen I_5 durcharbeiten und sich die Definitionen einprägen. $\longleftarrow I_5$

Nein: Sie kennen die Beziehungen. $\longleftarrow T_5$

L13 von T_5

Haben Sie ermittelt?

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ (Rationalmachen des Nenners)

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

Ja: Die Antwort ist gut. $\longleftarrow T_6$

Nein: $\longleftarrow I_9$

L14 von $Ü_3$

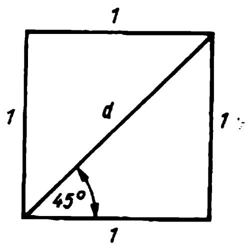
Wie in I_9 ergibt sich:

$$1.\ \sin 60^\circ = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(Rationalmachen des Nenners)

2.



$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Bild 5.23

$$\left.\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \text{Rationalmachen des Nenners}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$\leftarrow$ T_6

L15 von T_6

Ganz zufrieden können Sie damit aber nicht sein. Sie haben sich irreführen lassen. Der letzte Wert ist falsch. Es wurde versehentlich beim Tangens abgelesen. Es muß also geübt werden, um vollkommene Sicherheit zu erreichen.

$\leftarrow$ $Ü_4$

L16 von T_6

Mit dieser Antwort können Sie sich für die richtige entschieden haben, wenn Ihre Ergebnisse heißen:

$$\begin{aligned} \cos 61^\circ 12' &= \cos 61{,}2^\circ = 0{,}4818 \\ \tan 12{,}8^\circ &= 0{,}2272 \\ x &= 50{,}1^\circ \\ x &= 21{,}9^\circ \end{aligned}$$

(Dieser Wert ist in T_6 falsch angegeben worden.)

Haben Sie diese Werte bestimmt, so sind Sie sicher in der Verwendung der Tafeln.
In diesem Fall ◀—— T_7
Ansonsten muß in I_{11} wiederholt werden. ◀—— I_{11}

L17 von $Ü_4$

1. 0,8271	2. 1,946
3. 18,1°	4. 17,9°
5. 5,789	6. 74,7°
7. 0,6769	8. 16,6°
9. 0,6807	10. 21,4°

Wenn es notwendig ist, verbessern Sie aufgetretene Fehler. ◀—— T_7

L18 von T_7

Haben Sie als Höhe des Baumes

28,23 m bestimmt?

Abweichungen im Rahmen der Rechenstabgenauigkeit sind erlaubt (± 10 cm).

Ja: Die Antwort ist gut. ◀—— I_{13}

Nein: Die Aufgabe wird in I_{12} besprochen. ◀—— I_{12}

L19 von $Ü_5$

Ihr Lösungsweg kann sich von dem hier gewählten unterscheiden. Die Ergebnisse müssen jedoch (bis auf Rundungsungenauigkeiten) übereinstimmen.

1. a) $\beta = 180° - \alpha - 90°$ $\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$ $\quad a = b \cdot \tan\alpha$

$\beta = 68{,}9°$ $\quad c = 3{,}644\ \text{cm}$ $\quad a = 1{,}312\ \text{cm}$

b) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\quad \beta = 90° - \alpha$ $\quad c = \sqrt{2{,}43^2 + 3{,}11^2}\ \text{cm}$

$\alpha = 52°$ $\quad \beta = 38°$ $\quad c = 3{,}947\ \text{cm}$

$$U = b + 2\frac{h}{\sin\alpha}$$ Der Umfang beträgt 0,636 m.

$$U = b + 0{,}276\ \text{m} = 0{,}636\ \text{m}$$

3. Skizze

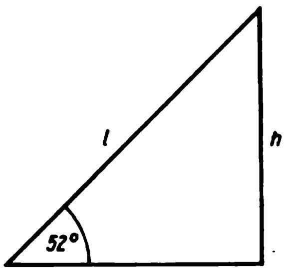


Bild 5.24

$h = l \cdot \sin 52°$
$h = 25{,}53\ \text{m}$
Die Höhe beträgt 25,53 m.

4. Skizze

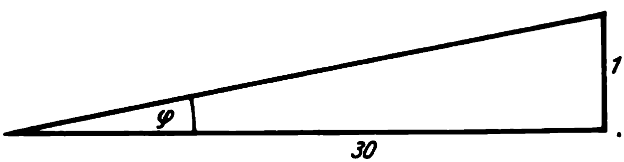


Bild 5.25

Wichtiger Hinweis: Die Streckenlänge von 560 m gibt die Länge der Hypotenuse an. Sicher erkennen Sie, daß sich in diesem Beispiel die Länge der Hypotenuse und die Länge der Ankathete von φ nur wenig unterscheiden. Deswegen gilt für kleine Winkel φ bei der praktischen Rechnung:

$$\sin\varphi \approx \tan\varphi$$

Schlagen Sie die Zahlentafel auf. Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Beziehung. Vergleichen Sie, ab welcher Größe des Winkels Abweichungen in der zweiten Stelle nach dem Komma auftreten.

Lösung der Aufgabe:

$$\tan\varphi = \frac{1}{30}$$

$$h = 560\ \text{m} \cdot \sin\varphi \approx 560\ \text{m} \cdot \tan\varphi$$

$$h = 18{,}67\ \text{m}$$

Der Höhenunterschied beträgt 18,67 m.

Bemerkung: Wird der hier gegebene Hinweis berücksichtigt, so ist die Aufgabe auch nach dem Strahlensatz durch eine Proportion zu lösen.

5. Skizze

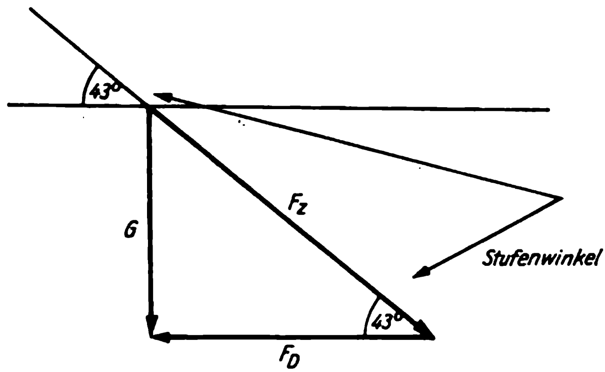


Bild 5.26

Stufenwinkel[1]: $\alpha = 43°$

$G = 2460\ \mathrm{N}$

$F_Z = \dfrac{G}{\sin 43°} = 3607\ \mathrm{N}$

$F_D = G \cdot \cot 43° = 2637\ \mathrm{N}$

Die Zugkraft beträgt 3607 N und die Druckkraft 2637 N.
Verbessern Sie, wenn notwendig, falsche Ergebnisse.
Sehen Sie sich die Lösung der Zusatzaufgabe in dieser Einheit gut an.

◄——— I_{13}

L20 von T_8

Haben Sie diese Strecken nicht eingezeichnet, so müssen Sie zu I_{14}.

◄——— I_{14}

[1] Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich.

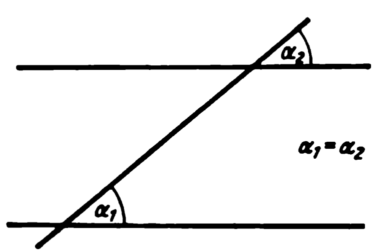


Bild 5.27

Im Abschnitt 6 wird diese Problematik ausführlich dargestellt.

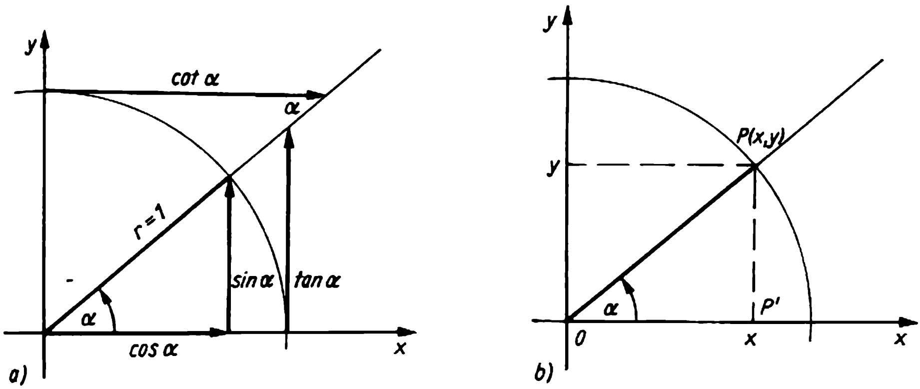


Bild 5.28

Haben Sie die Strecken so eingezeichnet, dann sind Ihre Kenntnisse außerordentlich gut. ◄——— I_{16}

L21 von $Ü_6$

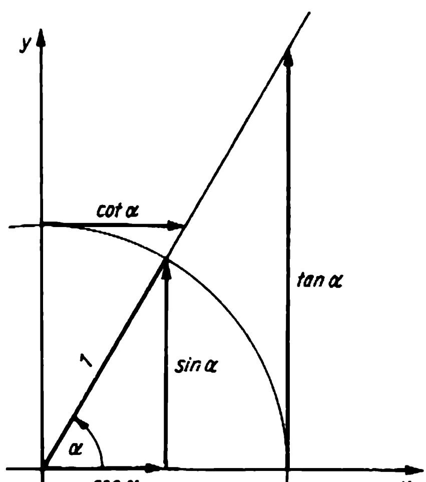


Bild 5.29

Wenn Sie diesmal wieder nicht richtig eingezeichnet haben, dann müssen Sie sorgfältiger arbeiten. Beginnen Sie noch einmal bei I_{14} die Arbeit.

◄——— I_{14}

Wenn Sie diesmal die Strecken richtig eingezeichnet haben, so ist der Sachverhalt verstanden worden, der Ihnen entfallen war. ◄——— I_{16}

L22 von Ü$_7$

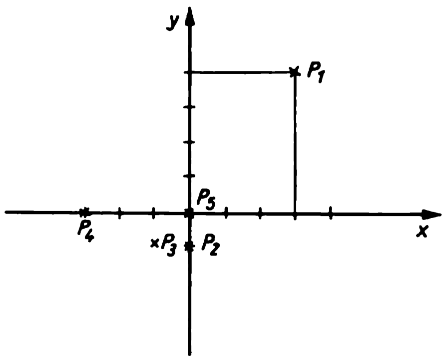


Bild 5.30

Wenn hier wieder ein Fehler aufgetreten ist, dann haben Sie die Begriffe Abszisse und Ordinate eines Punktes nicht sorgfältig genug auseinandergehalten (vgl. I_{15}) oder nicht sorgfältig gearbeitet. ◄——— Ü$_6$

L23 von Ü$_8$

Haben Sie

$$180° < \alpha < 270° \quad ?$$

Ja: ◄——— I_{18}
Nein: ◄——— I_{17}

L24 von Ü$_9$

a) $90° < \alpha < 180°$
b) $270° < \alpha < 360°$ ◄——— I_{18}

L25 von T$_9$

Für $180° < \alpha < 270°$
sin α negativ, cos α negativ, tan α positiv und cot α positiv

Hatten Sie diese Antworten ?
Ja : Sie können die Vorzeichen der Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten bestimmen. Zur Festigung jedoch: ◄——— $Ü_{10}$
Nein : ◄——— I_{19}

L26 von $Ü_{10}$

	I.	II.	III.	IV.
sin α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tan α	+	−	+	−
cot α	+	−	+	−

Wenn Sie einen Fehler gemacht haben, so müssen Sie das Ergebnis mit der Hilfe von I_{19} in jedem Fall verbessern. ◄——— T_{10}

L27 von T_{10}

1. Haben Sie gar keine Strecken eingezeichnet, so schlagen Sie sofort $Ü_8$ auf und lesen sich T_8 und die zugehörige Lösungseinheit durch (denken Sie an die Verallgemeinerung der Winkelfunktionen für beliebige Winkel). Gehen Sie dann zu T_8, und versuchen Sie die Aufgabe zu lösen.
2. Haben Sie folgendes eingezeichnet ?

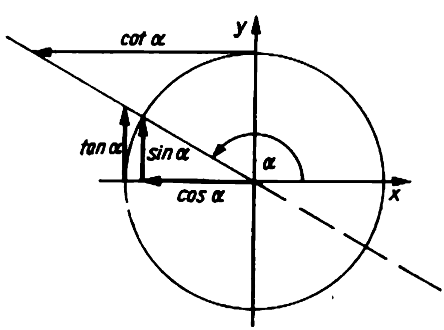


Bild 5.31

Dann haben Sie zwar das Vorangegangene verstanden, jedoch nicht auf das Vorzeichen geachtet, denn

sin α ist richtig, da im II. Quadranten positiv,
cos α ist richtig, da im II. Quadranten negativ,

tan α ist falsch, da im II. Quadranten negativ (hier wurde aber ein positiver Wert eingezeichnet),
cot α ist richtig, da im II. Quadranten negativ und der Wert auch auf der negativen x-Achse abgelesen wird.

3. Sie haben die Aufgabe nur dann richtig gelöst, wenn Sie folgendes eingezeichnet haben:

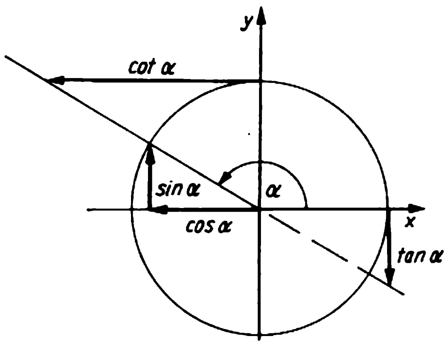
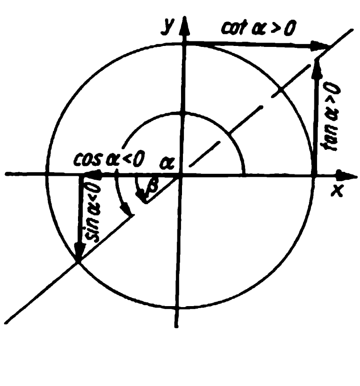


Bild 5.32

Wenn Sie die unter 3. angegebene Lösung haben, so ist Ihre Arbeit sehr ordentlich. ◀——— I_{20}
Ansonsten gehen Sie nach gründlichem Studium von L_{27} zu $\ddot{U}_{11}$.
Beachten Sie dabei jedoch den Hinweis:
Um das richtige Vorzeichen für den Wert des Tangens oder Cotangens zu erhalten, macht es sich in einigen Fällen erforderlich, den einen Winkelschenkel durch den Mittelpunkt des Einheitskreises zu verlängern. ◀——— $\ddot{U}_{11}$

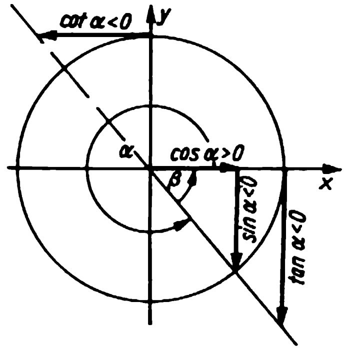
L28 von $\ddot{U}_{11}$

Die Lösungen mit dem richtigen Vorzeichen der Winkelfunktionen heißen:



sin α negativ
cos α negativ
tan α positiv
cot α positiv

Bild 5.33



sin α negativ
cos α positiv
tan α negativ
cot α negativ

Bild 5.34

wenn Sie die richtigen Lösungen haben oder sich die richtigen Werte durchdacht haben. ◄——— I_{20}

L29 von T_{11}

Wenn Sie bestimmt haben:

1. $\sin (360° - \beta) = -\sin \beta$
2. $\cot (180° + \beta) = \cot \beta$,

dann können Sie für diese Ergebnisse gelobt werden, denn Sie haben gut mitgearbeitet. Sicher haben Sie auch bei der Anwendung dieser Erkenntnisse in T_{12} keine Schwierigkeiten. ◄——— T_{12}

Haben Sie diese Beziehung nicht gefunden, ◄——— I_{21}

L30 von $Ü_{12}$

1. $\sin x$	2. $\tan x$
3. $-\sin x$	4. $-\cot x$
5. $-\cot x$	6. $\cos x$
7. $-\tan x$	8. $-\cos x$
9. $-\cos x$	10. $-\tan x$

◄——— T_{12}

Dort sollen Sie die hier gesammelten Erkenntnisse anwenden.

L31 von T_{12}

1. $\sin 210° = -\sin 30°$
   III. Quadrant: Sinus negativ
2. $\cos 150° = -\cos 30°$
   II. Quadrant: Cosinus negativ
3. $\tan 190° = \tan 10°$
   III. Quadrant: Tangens positiv
4. $\cot 330° = -\cot 30°$
   IV. Quadrant: Cotangens negativ

Wenn Sie alle Ergebnisse richtig haben, so sind Sie sicher, konnten das Gelernte anwenden und gehen gleich zu I_{23}. ◄——— I_{23}

Hatten Sie ein Ergebnis falsch, so wiederholen Sie die Vorzeichen der Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten und ◄——— I_{22}

(Vorzeichen der Winkelfunktionen in L_{26}).

L32 von $Ü_{13}$

1. $\sin 30°$	2. $-\tan 40°$
3. $-\sin 40°$	4. $-\cos 10°$
5. $\tan 30°$	6. $-\cot 20°$
7. $\cot 33°$	8. $-\sin 28°$
9. $-\cos 19{,}8°$	10. $\cos 38{,}8°$
11. $-\tan 27{,}9°$	12. $-\cot 11{,}8°$

Hatten Sie wieder Vorzeichenfehler, so arbeiten Sie noch einmal die entsprechenden Abschnitte durch (L_{26}). Sie müssen sicher entscheiden können.

Hatten Sie sonst keine Schwierigkeiten mehr, dann ◄——— I_{23}

5.6. Leistungskontrolle

5.6.1. Aufgaben

Überprüfen Sie selbst, wie die gestellten Ziele in diesem Abschnitt erfüllt wurden, indem Sie die folgende Klausur schreiben.

Zeit: 45 Minuten

Hilfsmittel: Zahlentafel, Rechenstab

1. Begründen Sie, warum kein Wert α mit

$$\cos \alpha = 2$$

existieren kann.

2. a) Bestimmen Sie die vier Werte der trigonometrischen Funktionen für
   1. $74°30'$
   2. $26{,}4°$

   b) Bestimmen Sie den Winkel α aus:
   1. $\sin \alpha = 0{,}7361$
   2. $\tan \alpha = 1{,}6070$
   3. $\cos \alpha = 0{,}9415$
   4. $\cot \alpha = 0{,}9490$

3. Das Gefälle einer Straße beträgt

   1:20

   Welcher Höhenunterschied besteht zwischen zwei 620 m voneinander entfernten Punkten auf der Straße?

4. Eine Schraube mit metrischem Gewinde hat eine Steigung (Ganghöhe) von $h = 1{,}5$ mm und einen Gewindedurchmesser von $d = 9{,}7$ mm. Berechnen Sie den Steigungswinkel des Gewindes.

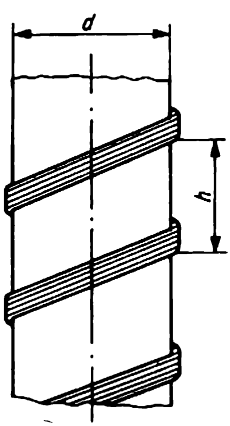


Bild 5.35

5. Berechnen Sie.

1. $\sin 170°$	2. $\cot 290°$
3. $\sin 220°$	4. $\sin 330°$
5. $\tan 340°$	6. $\cot 150°$

5.6.2. Auswertung

1. Es sind hier zwei verschiedene Begründungen möglich, weil auch zwei verschiedene geometrische Objekte zur Definition der trigonometrischen Funktionen herangezogen wurden.

Einheitskreis

Die Definition des Cosinus als das Verhältnis von Abszisse zu Radius wird untersucht.
Da der Radius gleich 1 ist und die Abszisse für einen Punkt auf dem Umfang des Einheitskreises maximal gleich 1 sein kann, ist der Quotient nie größer als 1.

Rechtwinkliges Dreieck

Die Definition des Cosinus als das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse ist die Begründung im rechtwinkligen Dreieck, daß der Quotient nie größer als 1 sein kann. Die Hypotenuse ist immer größer als die Kathete.
Für diese Begründung erhalten Sie 3 Punkte (eine genügt natürlich). Wenn Sie diese Begründung nicht gefunden haben, so wurde der erste Teil der Zielstellung aus Punkt 2 nicht erfüllt. Sie müssen dann noch einmal I_{15}, I_{11} und I_{18} studieren.

2. a) $74°30' = 74{,}5°$

$\sin 74{,}5° = 0{,}9636$	0,5 Punkte	$\sin 26{,}4° = 0{,}4446$
$\cos 74{,}5° = 0{,}2672$	0,5 Punkte	$\cos 26{,}4° = 0{,}8957$
$\tan 74{,}5° = 3{,}6060$	0,5 Punkte	$\tan 26{,}4° = 0{,}4964$
$\cot 74{,}5° = 0{,}2773$	0,5 Punkte	$\cot 26{,}4° = 2{,}0140$

Für jede richtig gelöste Teilaufgabe erhalten Sie 0,5 Punkte.

b) 1. $\alpha = 47.4$ 0,5 Punkte
2. $\alpha = 58{,}1°$ 0,5 Punkte
3. $\alpha = 19{,}7°$ 0,5 Punkte
4. $\alpha = 46{,}5°$ 0,5 Punkte

Insgesamt gibt es für die richtige Lösung der Aufgabe 6 Punkte (jedes Teilergebnis 0,5 Punkte).
Wenn Sie diese Werte nicht gefunden haben, so haben Sie noch nicht genug Sicherheit in dem Umgang mit der Zahlentafel bei der Bestimmung der trigonometrischen Funktionswerte. Zielstellung 3 wurde deswegen nicht erreicht. Wiederholen Sie darum I_{11} und $Ü_4$.

3.

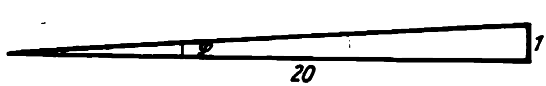


Bild 5.36

Bestimmung des Gefällewinkels:

$$\tan\varphi = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\% \qquad \text{2 Punkte}$$

$$\varphi \approx 2{,}86^\circ \qquad \text{1 Punkt}$$

Entsprechend der Lösung L_{19} (Aufgabe 4) unterscheiden sich die Ankathete und die Hypotenuse nur unwesentlich in der Länge. Deswegen werden solche Aufgabenstellungen in der Praxis grundsätzlich über die Tangens-Beziehung berechnet.

Wiederholung: Für kleine Winkel φ ist

$$\sin\varphi \approx \tan\varphi.$$

$$\tan\varphi = \frac{h}{620}$$

$$h = (620 \cdot \tan\varphi)\mathrm{m} \qquad \text{2 Punkte}$$

$$h = \frac{620}{20}\,\mathrm{m} = 31\,\mathrm{m} \qquad \text{1 Punkt}$$

Der Höhenunterschied beträgt 31 m.
Auch hier kann die Lösung wieder nach dem Strahlensatz bestimmt werden.

4. Skizze (2 Punkte)

U: Kreis

$U = \pi \cdot d$ (1 Punkt)

$\tan\varphi = \dfrac{h}{\pi \cdot d}$ (2 Punkte)

$\varphi = 2{,}8^\circ$ (2 Punkte)

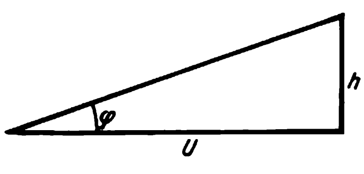


Bild 5.37

Damit konnten Sie zeigen, daß ein Teil der Zielstellung 4 erfüllt wird. Studieren Sie noch einmal I_{12} und $Ü_5$, wenn Schwierigkeiten aufgetreten sind.

5.

1. $\sin 10^\circ = 0{,}1736$	4. $-\sin 30^\circ = -0{,}5000$
2. $-\cot 70^\circ = -0{,}3640$	5. $-\tan 20^\circ = -0{,}3640$
3. $-\sin 40^\circ = -0{,}6428$	6. $-\cot 30^\circ = -1{,}7320$

Für jede richtig gelöste Teilaufgabe gibt es einen Punkt.

Das ergibt insgesamt 6 mögliche Punkte.
Insbesondere wurde die Zielstellung 3 nicht voll erfüllt, wenn Fehler aufgetreten sind.

Wiederholen Sie dann I_{21}, I_{22}, $Ü_{12}$ und $Ü_{13}$.

Folgende Noten werden vergeben.

Punkte	Note
27–28	1
23–26	2
18–22	3
13–17	4
0–12	5

Damit steht fest, wie Sie selbst die Ergebnisse der Wiederholung dieses Abschnittes einschätzen können. Eine Verbesserung der Ergebnisse ist sofort möglich, wenn Sie die angegebenen Hinweise beachten.

6. Planimetrie, Stereometrie

6.1. Wissens- und Könnensziele

Im letzten Abschnitt überprüfen Sie, ob Sie noch die wesentlichsten Grundlagen der Geometrie beherrschen. Planimetrie und Stereometrie sind zwei Gebiete, denen eine hohe praktische Bedeutung zukommt. Viele Aufgaben werden Ihr räumliches Vorstellungsvermögen fordern. Bedienen Sie sich deshalb – wo immer es angeht – der Möglichkeit, die Lage der gegebenen und gesuchten Stücke in einer Skizze zu veranschaulichen. Bei der mathematischen Bewältigung der Lösungen werden Sie manches, was Sie in den zurückliegenden Abschnitten wiederholt haben, mit Gewinn anwenden können. Alle Rechnungen sind mit Rechenstabgenauigkeit ausgeführt.

Am Ende des 6. Abschnitts sollen Sie

1. die an geschnittenen Parallelen auftretenden Winkel und ihre Gesetze,
2. die hauptsächlichsten Dreieckstransversalen und ihre Eigenschaften kennen.
3. wissen, was ähnliche Dreiecke sind und wie man die Gesetze der Ähnlichkeit zur Lösung von Aufgaben nutzt.
4. den wichtigsten Satz der Dreiecksberechnung, den Lehrsatz des Pythagoras, anwenden,
5. regelmäßige Vielecke,
6. Umfang und Flächeninhalt des Kreises und seiner Teile,
7. Parallelogramm und Trapez berechnen können.
8. das Volumen einiger ausgesuchter Körper: Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel bestimmen können. $\longrightarrow$ T_1

6.2. Kenntnisüberprüfung.

T1

Bestimmen Sie in der Skizze 6.1 eines Fachwerkes aus Stahlträgern, das von parallelen Füllstäben durchzogen ist, alle mit Buchstaben gekennzeichneten Winkel, und begründen Sie die dabei deutlich werdenden Gesetzmäßigkeiten.

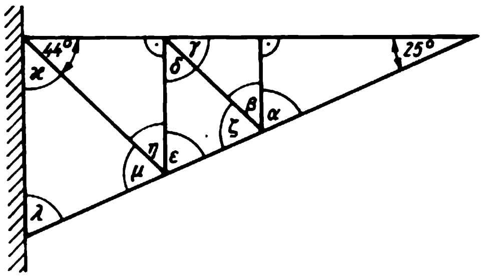


Bild 6.1

Antworten:

a) Ich habe die dazu erforderlichen Sätze über Winkel vergessen. ——▶ I_1

b) Ich habe eine Lösung und möchte vergleichen. ——▶ L_1

T2

Im Dreieck ABC des Bildes 6.2 sind einige Transversalen (das sind Geraden, welche die Seiten des Dreiecks oder deren Verlängerung schneiden) eingezeichnet. Der Buchstabe m soll Mittelsenkrechte, h soll Höhen, w die Winkelhalbierenden und s die Seitenhalbierenden kennzeichnen.
Welche der Transversalen sind nach obiger Übereinkunft richtig bezeichnet?

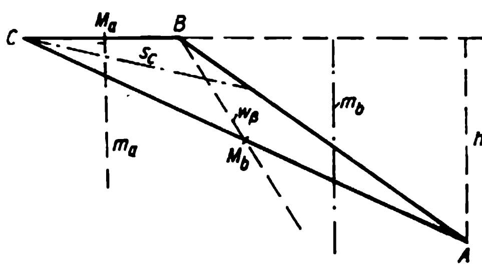


Bild 6.2

Antworten:

a) Ich kenne nicht die Bedeutung der als Index tiefer stehenden Buchstaben. ——▶ I_2

b) Ich muß mich über die unterscheidenden Merkmale der Transversalen informieren. ——▶ I_3

c) Ich habe einige Fehler gefunden und möchte Ihre Bestätigung. ——▶ L_3

T3

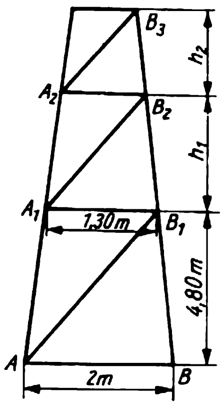


Bild 6.3

Bild 6.3 zeigt einen Gittermast. Die schrägen Versteifungen verlaufen parallel zueinander. Berechnen Sie die Höhe des zweiten und dritten Abschnitts und die Gesamthöhe.

Antworten:

a) Ich brauche einen Tip zum Lösungsprinzip. ——▶ I_4

b) Ich kenne keine die Lösung ermöglichende Theorie. ——▶ I_5

c) Ich habe h_1 errechnet. Für h_2 aber fehlt mir die Länge der Querstrebe $\overline{A_2B_2}$. ——▶ I_6

d) Ich möchte meine Lösung vergleichen. ——▶ L_5

T4

Ein Fernschantennenmast soll durch 3 Drahtseile verspannt werden. Diese sollen am Mast 10 m über dem Boden angreifen und mit ihren Bodenankern ein gleichseitiges Dreieck von 12 m Seitenlänge bilden.
Fertigen Sie eine Skizze an, und berechnen Sie die Länge eines Spannseiles.

Antworten:

a) Ich komme nicht mit der Skizze zurecht. ——▶ I_7

b) Wo liegt der Fußpunkt des Mastes im Bodendreieck? ——▶ I_8

c) Wenn ich die Strecke Bodenanker – Fußpunkt kennen würde, wüßte ich die Seillänge zu berechnen. ——▶ I_9

d) Mir fehlen die theoretischen Vorkenntnisse zum Lösen dieser Aufgabe. ——▶ I_{10}

e) Das Seil muß 11,68 m lang sein. ——▶ L_7

f) Das Seil muß 12,19 m lang sein. ——▶ L_8

T5

Ein Schornstein von 85 m Höhe hat einen senkrechten Riß bekommen, dessen Länge und Höhe über dem Boden bestimmt werden soll. Man mißt von einem auf gleicher Höhe mit dem Fußpunkt des Schornsteins liegenden Standort folgende Höhenwinkel: zur Spitze des Schornsteins $\alpha = 54°9'$, zum oberen Ende des Risses $\beta = 44°48'$, zum unteren Ende des Risses $\gamma = 41°24'$.
Wieviel Meter über dem Boden beginnt der Riß?
Wie lang ist er?

Antworten:

a) Da fehlt doch die Entfernungsangabe Schornstein – Beobachter! ——▶ I_{11}

b) Ich weiß nicht, wie man eine solche Aufgabe anpackt! ——▶ I_{12}

c) Was bedeutet „Höhenwinkel"? ——▶ I_{13}

d) Obwohl ich in meiner Skizze rechtwinklige Dreiecke erkenne, komme ich nicht weiter! ——▶ I_{14}

e) Der Riß ist 60,8 m lang. ——▶ L_{10}

f) Der Riß beginnt 54,0 m über dem Boden und ist 6,8 m lang. ——▶ L_{11}

T6

Einem Kreis mit $r = 8$ cm ist ein regelmäßiges Achteck einbeschrieben.
Berechnen Sie seine Fläche:

Antworten:

a) Das Achteck hat einen Flächeninhalt von 222 cm². ——▶ L_{12}

b) Das Achteck hat einen Flächeninhalt von 181 cm². ——▶ L_{13}

c) Ich brauche eine Hilfe. ——▶ I_{15}

d) Das müssen Sie mir ausführlich vorrechnen. ——▶ L_{14}

T7

Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des in Bild 6.4 dargestellten Sicherungsbleches.

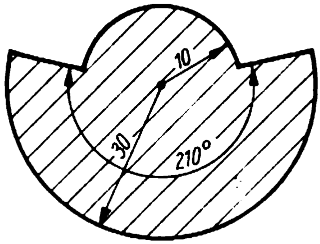


Bild 6.1

Antworten:

a) Ich weiß die einschlägigen Formeln nicht mehr. ——▶ I_{16}

b) Der gesuchte Flächeninhalt ist 16,5 cm². ——▶ L_{16}

c) Ich habe 180 mm² errechnet. ——▶ L_{17}

d) Keines der hier angegebenen Ergebnisse ist richtig. ——▶ L_{18}

e) Ich vermag diese Aufgabe nicht zu lösen. ——▶ L_{19}

T8

An einem Punkt greifen 2 Kräfte von je 150 N an. Sie bilden miteinander einen Winkel von 70°. Bestimmen Sie Richtung und Größe der resultierenden Kraft. (Hinweis: Die resultierende Kraft ergibt sich als Diagonale in dem von den beiden Kräften aufgespannten Parallelogramm.)

Antworten:

a) Ich erkenne in meiner Skizze nur schiefwinklige Dreiecke, die ich noch nicht berechnen kann. ——▶ I_{17}

b) Ich habe eine Lösung. ——▶ L_{21}

T9

Im Bild 6.5 wird ein Eisenbahndamm im Schnitt dargestellt. Berechnen Sie für 100 m Strecke den Bedarf an Schotter für den Oberbau und die erforderlichen Kubikmeter Kies für den Damm.

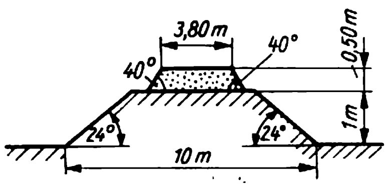


Bild 6.5

Antworten:

a) Ich komme mit der Querschnittsfläche nicht zurecht. ——▶ I_{18}

b) Ich erkenne nicht den geometrischen Grundkörper dieser Aufgabe und vermag deshalb das Volumen nicht auszurechnen. ——▶ I_{19}

c) Ich möchte meine mit der richtigen Lösung vergleichen. ——▶ L_{25}

T10

Die Große Pyramide von Cheops ist eine gerade, quadratische Pyramide. Eine Grundkante ist 227 m lang, die Höhe beträgt 137 m.

Berechnen Sie

1. Das Volumen der Cheopspyramide.
2. Den Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche.
3. Den Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche.

Antworten:

a) Ich kann mich nicht an die Volumenformel der Pyramide erinnern. ——▶ I_{20}

b) Was ist eine „gerade" Pyramide? ——▶ I_{21}

c) Ich kann mir die räumliche Lage der gefragten Winkel nicht vorstellen. ——▶ L_{26}

d) Ich habe eine Lösung und möchte vergleichen. ——▶ L_{27}

6.3. Informationen

I1 von T_1

Die parallelen Füllstäbe erzeugen „Winkel an geschnittenen Parallelen".

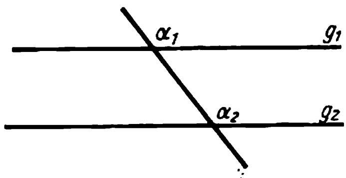


Bild 6.6

α_1 und α_2 sind gleich als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen.

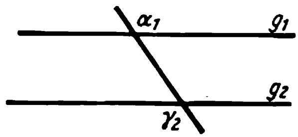


Bild 6.7

α_1 und γ_2 sind gleich als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

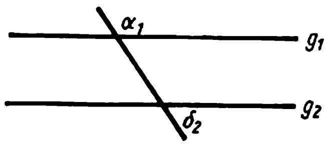


Bild 6.8

α_1 und δ_2 sind Supplementwinkel (ihre Summe ist 180°) an geschnittenen Parallelen

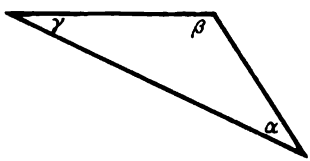


Bild 6.9

Die Summe der Innenwinkel jedes Dreiecks beträgt 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

⟵ T_1

I2 von T_2

Der Index dient zur näheren Kennzeichnung der Transversalen. m_a bedeutet Mittelsenkrechte auf der Seite a; w_α Winkelhalbierende des Winkels α, h_c Höhe auf der Seite c, s_b Seitenhalbierende der Seite b. ⟵ T_2

I3 von T_2

Mittelsenkrechte stehen auf den Mittelpunkten der Seiten senkrecht. Sie schneiden sich in genau einem Punkt. Das ist der Mittelpunkt des Umkreises (s. Bild 6.10).

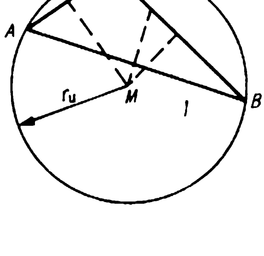


Bild 6.10

Eine Höhe ist das Lot von einem Eckpunkt auf die Gegenseite bzw. deren Verlängerung.

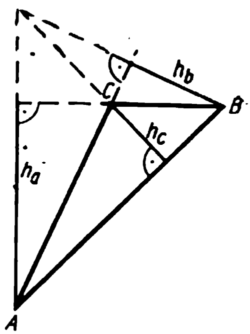


Bild 6.11

Winkelhalbierende halbieren den jeweiligen Winkel. Ihren Zusammenhang mit dem sogenannten Inkreis zeigt Bild 6.12.

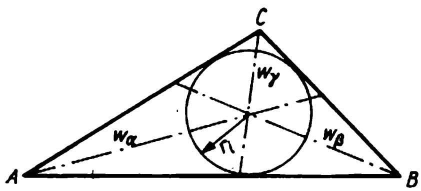


Bild 6.12

Seitenhalbierende verlaufen von der Ecke zum Mittelpunkt der Gegenseite. Da ihr Schnittpunkt den Dreiecksschwerpunkt liefert, heißen sie auch Schwerelinien.

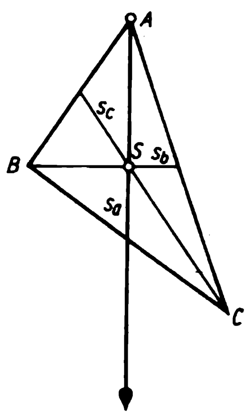


Bild 6.13

I4 von T_3

Die schrägen Versteifungen erzeugen in jedem Abschnitt ein Dreieck. Die Dreiecke stimmen in ihren Winkeln überein und sind deshalb ähnlich. In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis einander entsprechender Strecken gleich. ◀———— T_3

I5 von T_3

Zur Lösung brauchen Sie zwei Sätze über ähnliche Dreiecke.

1. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in 2 Winkeln übereinstimmen.
2. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis der einander entsprechenden Seiten übereinstimmen.

In ähnlichen Dreiecken gilt der Lehrsatz:

Das Verhältnis entsprechender Strecken (Höhen, Seiten-, Winkelhalbierende) ist gleich dem Verhältnis zugehöriger Seiten.

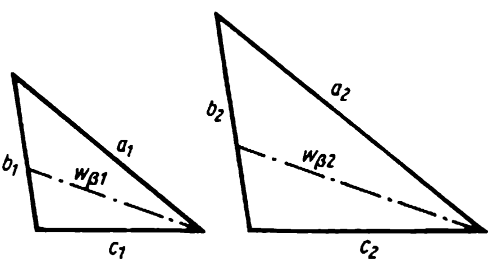


Bild 6.14

Beispiel: $w_{\beta 1} : w_{\beta 2} = c_1 : c_2 = a_1 : a_2$

oder $s_{b2} : s_{b1} = b_2 : b_1$ ————▶ $Ü_2$

I6 von T_3

Nehmen Sie einen Buntstift und färben Sie in Bild 6.3 die Dreiecke ABB_1, $A_1B_1B_2$ und $A_2B_2B_3$ einheitlich. Sie haben zur Berechnung von h_1 von der Ähnlichkeit dieser farbigen Dreiecke Gebrauch gemacht. Aber auch die weiß gebliebenen Dreiecke sind ähnlich. Nutzen Sie, daß $\triangle A_1B_2A_2 \sim \triangle AB_1A_1$, und setzen Sie ein Verhältnis zur Bestimmung von $\overline{A_2B_2}$ an. ◀———— T_3

I7 von T_4

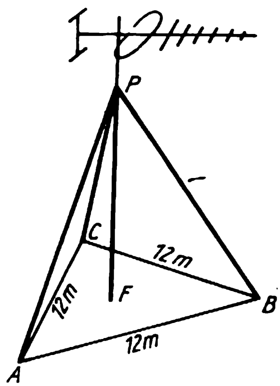


Bild 6.15

◄——— T_4

I8 von T_4

Der Fußpunkt des Mastes muß von den 3 Bodenankern gleich weit entfernt sein. Er liegt demzufolge im Mittelpunkt des Umkreises. Bild 6.10 in I_3 zeigte, wie man ihn findet. Beachten Sie noch die Gleichseitigkeit des Bodendreiecks.

◄——— I_3/T_4

I9 von T_4

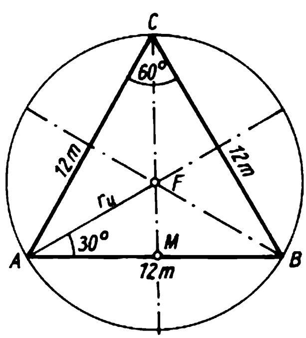


Bild 6.16

F liegt im Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks. Dieses weist 3 Symmetrieachsen auf, mit denen alle Dreieckstransversalen zusammenfallen. Die gesuchte Strecke ist r_u, kommt in dem rechtwinkligen Hilfsdreieck AMF vor und läßt sich über eine Winkelfunktion berechnen. ◄——— T_4

I10 von T_4

Prüfen Sie, ob Ihre Skizze etwa wie Bild 6.15 ausgefallen ist. Die Bodenanker bilden das gleichseitige Dreieck *ABC*. Zeichnen Sie es. Der Fußpunkt *F* des Mastes liegt im Mittelpunkt des Umkreises. Konstruieren Sie diesen mit Hilfe der Mittelsenkrechten. Jetzt muß Ihre Zeichnung so aussehen wie Bild 6.16 in I_9. Sie erkennen:

Im gleichseitigen Dreieck ist jede Mittelsenkrechte zugleich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe. Weil gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, sind die Winkel 60°. Die für unser Problem bedeutsame Strecke $\overline{AF}$ ist der Radius r_u des Umkreises. Zeichnen Sie das Hilfsdreieck *AMF* heraus. Es ist rechtwinklig, seine Winkel und eine Seite sind bekannt. Mit Hilfe einer Winkelfunktion läßt sich r_u berechnen.
Zeichnen Sie aus der Hauptskizze (Bild 6.15) das Dreieck *AFP* heraus. Es hat im Punkt *F* einen rechten Winkel. Für rechtwinklige Dreiecke gilt der Lehrsatz des PYTHAGORAS:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

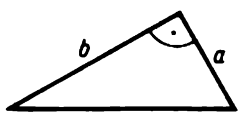


Bild 6.17

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Umgeformt gilt natürlich auch $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ oder $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$\longrightarrow$ $Ü_3$

I11 von T_5

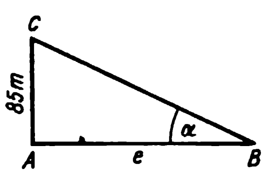


Bild 6.18

$\triangle$ *ABC* ist rechtwinklig. Die gesuchte Entfernung *e* ist die Ankathete, die bekannte Schornsteinhöhe ist die Gegenkathete zum Winkel $\alpha = 54°9'$. Mit Hilfe einer Winkelfunktion läßt sich *e* berechnen. $\longleftarrow$ T_5

I12 von T_5

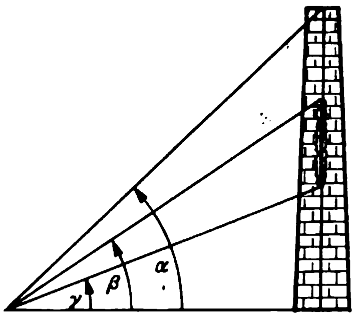


Bild 6.19

Grundlage der Lösung bildet stets eine Skizze, s. Bild 6.19. Weil Schornsteinfußpunkt und Beobachterstandort auf gleicher Höhe liegen, entstehen rechtwinklige Dreiecke, s. Bild 6.50. Die gesuchten Strecken sind: Höhe des Rißanfangs über dem Boden: $\overline{FU}$, Rißlänge: $\overline{UO} = \overline{FO} - \overline{FU}$ und lassen sich mit Winkelfunktionen berechnen. ⟶ $Ü_4$

I13 von T_5

Stellen Sie in Gedanken ein Beobachtungsfernrohr waagerecht ein. Visieren Sie nun z.B. die Schornsteinspitze an. Sie mußten das Fernrohr um den Höhenwinkel α schwenken. ⟵ T_5

I14 von T_5

Berechnen Sie zunächst mit Hilfe von h und α als Hilfslinie die Entfernung Beobachter – Schornsteinfußpunkt. ⟵ T_5

I15 von T_6

Bei der Berechnung von regelmäßigen Vielecken geht man von einer Zerlegung in gleichschenklige Dreiecke aus, s. Bild 6.20.

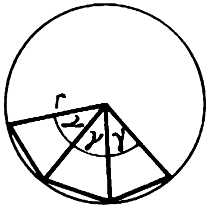


Bild 6.20

Der charakteristische Winkel γ ergibt sich aus der Überlegung:

$$\gamma = \frac{\text{Vollkreis}}{\text{Anzahl der Bestimmungsdreiecke}}, \text{ als Formel: } \gamma = \frac{360^\circ}{n}$$

Die einzelne Dreiecksfläche berechnet sich nach der Formel:

$$A = \frac{gh}{2}.$$

$\longleftarrow$ T_6

---

16 von T_7

Für die Berechnung der Kreisfläche stehen 2 Formeln zur Verfügung:

$$A_{Kr} = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

Wird nur der Ausschnitt einer Kreisfläche benötigt, so setzt man zur Berechnung des „Kreissektors" eine Proportion an:

Sektorfläche: Kreisfläche = Sektorwinkel α : 360°

$$A_S : A_{Kr} = \alpha : 360^\circ$$

$$A_S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi d^2 \alpha}{4 \cdot 360^\circ}$$

Deutet man in der Sektorformel den Bestandteil $\frac{\pi r \alpha}{360^\circ}$ als die zu α gehörende Bogenlänge b, so läßt sich die Sektorfläche als „Bogendreieck" auffassen und analog zur Dreiecksfläche $A = \frac{gh}{2}$ berechnen: $A_S = \frac{br}{2}$

$\longleftarrow$ T_7

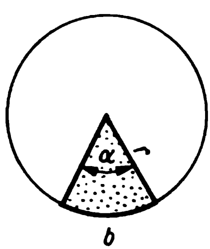


Bild 6.21

---

17 von T_8

Weil die gegebenen Kräfte gleich groß sind, entsteht ein besonderes Parallelogramm, ein Rhombus. Zeichnen Sie in Ihrer Skizze noch die zweite Diagonale ein und betrachten Sie eins der 4 Hilfsdreiecke.

$\longleftarrow$ T_8

18 von T_9

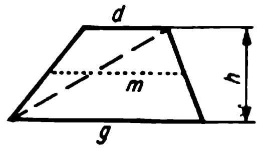


Bild 6.22

Unterbau und Schotterauflage bilden im Querschnitt je ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten, d.i. ein Trapez. Sein Flächeninhalt läßt sich ableiten als Summe der Dreiecksflächen mit den Grundlinien g und d und der gemeinsamen Höhe h.

$$A = \frac{gh}{2} + \frac{dh}{2} = \frac{g+d}{2}h.$$

Der Term $\frac{g+d}{2}$ läßt sich deuten als Länge der Mittellinie m, so daß auch gilt:

$$A = mh.$$

▶ $Ü_8$

19 von T_9

Unterbau und Schotterauflage bilden je einen prismatischen Körper. Das Volumen eines Prismas errechnet man durch das Produkt aus Grundfläche mal Höhe.

$$V = Ah.$$

Diese einprägsame Formel liefert richtige Ergebnisse der Volumenberechnung bei allen Körpern, die folgende Merkmale erfüllen:

1. Grund- und Deckfläche müssen parallel und flächengleich sein.
2. Jeder parallel zur Grundfläche geführte Schnitt muß den gleichen Flächeninhalt wie diese aufweisen.

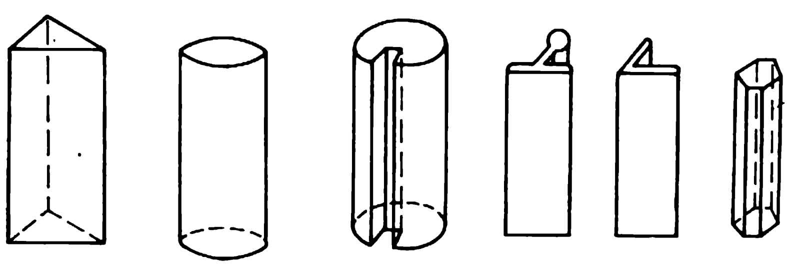


Bild 6.23

Im Bild 6.23 sehen Sie eine Auswahl derartiger Körper.

▶ $Ü_9$

I20 von T_{10}

Das Volumen einer Pyramide berechnet man aus

Grundfläche · Höhe : 3

$$V = \frac{Ah}{3}$$

Ein Kegel kann als spezielle Pyramide mit einem Kreis als Grundfläche aufgefaßt werden. Das Kegelvolumen errechnet man daher mit der gleichen Formel.

◄——— T_{10}

I21 von T_{10}

Trifft ein von der Spitze der Pyramide (des Kegels) gefälltes Lot den Mittelpunkt der Grundfläche, so liegt eine „gerade" Pyramide (Kegel) vor. Im anderen Fall spricht man von schiefen Pyramiden, deren Volumen übrigens unverändert mit $V = \frac{Ah}{3}$ berechnet wird.

◄——— T_{10}

6.4. Übungen

U1 von L_1

1. Bestimmen Sie alle Winkel in Bild 6.24.

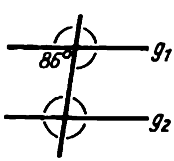


Bild 6.24

2. Bild 6.25 zeigt das Fachwerk der Stahlkonstruktion einer Brücke. Es wird von parallelen Füllstäben durchzogen. Welche Winkel sind einander gleich und warum?

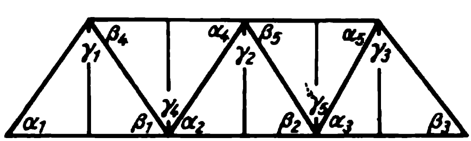


Bild 6.25

3. Bestimmen Sie alle nicht angegebenen Winkel des $\triangle ABC$. (Bild 6.26).

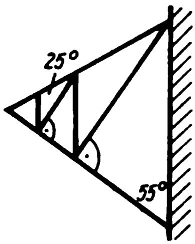


Bild 6.26

→ I_2

U2 von I_5

1. Bild 6.27 zeigt 2 ähnliche Dreiecke. Vervollständigen Sie die nachfolgenden Proportionen:

$d : e = \ldots\ldots\ldots$

$c : a = \ldots\ldots\ldots$

$s_d : s_c = \ldots\ldots\ldots$

$h_a : h_e = \ldots\ldots\ldots$

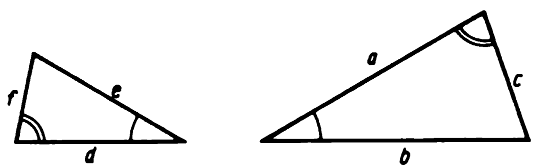


Bild 6.27

2. Das Verkehrswarnzeichen 8% Gefälle bedeutet, daß mit 100 m Horizontalentfernung 8 m Höhenunterschied überwunden werden. Berechnen Sie den Höhenunterschied, der auf 1,5 km Horizontalentfernung entfällt.

3. Eine in der Sowjetunion gestartete ballistische Mehrstufenrakete erreichte das 12500 km entfernte Zielgebiet im Stillen Ozean mit einer Abweichung von knapp 2 km. Wie weit dürfen Sie bei gleicher Genauigkeit mit einem Luftgewehr auf 10 m Entfernung vom Zentrum der Scheibe höchstens abweichen? (Die Zehnerscheibe hat einen Durchmesser von 16 cm, der Kern, die 10, hat einen Durchmesser von 1,3 cm.) → I_4

U3 von I_{10}

1. Beweisen Sie den Lehrsatz des Pythagoras mit Hilfe des Ansatzes: Das große Quadrat mit der Seitenlänge $(a + b)$ ist flächengleich der Summe aus den 4 schraffierten Dreiecken und dem kleinen Quadrat mit der Seitenlänge c.

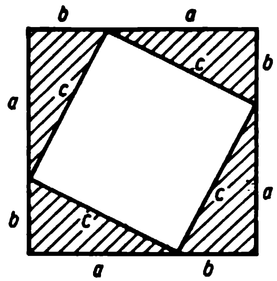


Bild 6.28

2. Die Schenkel einer Doppelleiter sind je 3,0 m lang. Die Schenkel werden am Boden 1,2 m gespreizt. Welche Höhe erreicht die Leiter?

3. Die Kanten des Gefäßes in Bild 6.29 haben die Maße:
   $g_1 = 12$ cm; $g_2 = 20$ cm; $a = 17$ cm.
   Berechnen Sie die Höhe h.

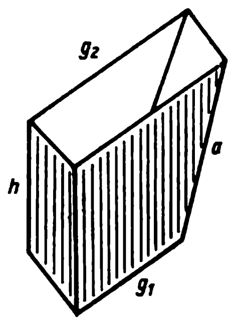


Bild 6.29

4. Die Skizze zeigt die Balken einer Dachkonstruktion. Berechnen Sie die Länge
   $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{AD} = \overline{BD}$.

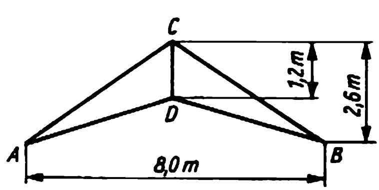


Bild 6.30

→ L_6

U4 von I_{12}

Ehe Sie wieder zu T_5 zurückkehren, bringen Sie sich mit folgenden Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken in Form.

1. In einem rechtwinkligen Dreieck sind bekannt
1.1. $\beta = 32°$; Hypotenuse $c = 5{,}20$ m
1.2. $\alpha = 48°$; Höhe auf die Hypotenuse $h_c = 12$ cm
Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.

2. In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Seiten a, a, c sind bekannt
2.1. $\alpha = 70°$; $c = 19$ cm
2.2. $a = 80$ m; $h_c = 71$ m. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.

3. Den Moskauer Fernsehturm sieht man aus 1 km Entfernung noch unter einem Blickwinkel von 26,9°. Wie hoch ist das Bauwerk? Unter welchem Winkel sieht man die in 400 m Höhe befindliche Aussichtsplattform?

4. Mit einer 20° geneigten Rutsche sollen 4,80 m Höhenunterschied überwunden werden.
Wie lang wird die Rutsche werden?

5. Zur Vermeidung von Unfällen darf Sand laut Arbeitsschutzanordnung höchstens unter einem Böschungswinkel von 25° gelagert werden. Wie hoch darf bei einer Schüttbreite von 10 m aufgeschüttet werden? ——▶ L_9

U5 von L_{14}

Die folgenden Übungen geben Ihnen die noch fehlende Sicherheit beim Berechnen von regelmäßigen Vielecken.

1. Berechne die Fläche eines regelmäßigen Zwölfecks mit der Seitenlänge $s =$ 5 mm.

2. Schraubenköpfe sind meist regelmäßige Sechsecke. Der Abstand zweier gegenüberliegender Ecken heißt Eckenmaß e, die Schlüsselweite s ist der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten. s ist durch e auszudrücken.

3. Welche Innenmaße muß ein quadratischer Karton haben, in dem eine Parfümflasche verpackt werden soll, deren Boden ein Fünfeck von 20 cm² Inhalt bildet?

——▶ L_{15}

U6 von L_{19}

1. Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Profilstahls von Bild 6.31 (Maße in mm). Abrundungen der Kanten mit Bögen vom Radius $r = 10$ mm.

2. Ein Warndreieck ist gleichseitig mit $a = 40$ cm. Die Ecken sind mit $r = 5$ cm abgerundet. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

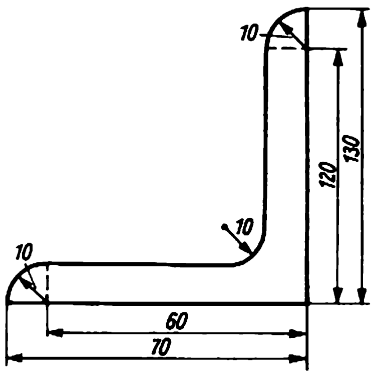


Bild 6.31

3. Ein gotischer Spitzbogen wird in Bild 6.32 gezeigt. Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung seines Umfangs und Flächeninhaltes.

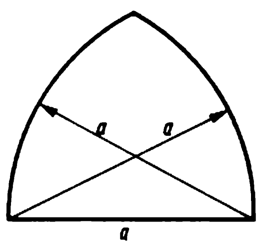


Bild 6.32

→ L_{20}

Ü7 von L_{21}

1. In welchen Vierecken sind die Seiten gleich?
2. In welchen Vierecken sind die Winkel gleich?
3. In welchen Vierecken sind die Diagonalen gleich?
4. In welchen Vierecken schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig?
5. In welchen Vierecken kann man durch eine Diagonale 2 gleichschenklige Dreiecke erzeugen?
6. Ihnen sind 2 Strecken von 6 cm und 2 Strecken von 4 cm Länge gegeben. Welche Vierecke können Sie mit den gegebenen Strecken als Seiten daraus herstellen?
7. In welchen Vierecken sind die Diagonalen auch Winkelhalbierende?

→ L_{22}

U8 von I_{18}

1. Die Trapezfläche von Bild 6.33 ist 80 cm². Berechnen Sie die Höhe des Trapezes.

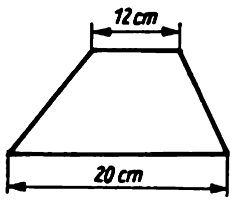


Bild 6.33

2. Berechnen Sie die Trapezfläche in Bild 6.34.

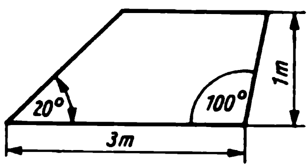


Bild 6.34

3. In Flurkarten werden die Ergebnisse einer Vermessung nach dem Muster von Bild 6.35 eingetragen. Berechnen Sie die gesamte eingezeichnete Fläche. (Die Maße sind in m angegeben, die an der Mittellinie angebrachten Maße geben den Abstand vom Punkt 0,0 an.)

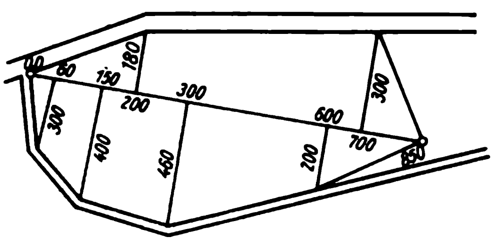


Bild 6.35

→ L_{23}

U9 von I_{19}

1. Berechnen Sie das Volumen des in Bild 6.36 dargestellten Körpers (Maße in mm).
2. Bild 6.37 zeigt den Querschnitt eines abgeflachten Zylinders. Der Körper sei 300 mm lang. Welche Masse hat er in Stahlausführung $\left(\text{Dichte } \varrho = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$. Benutzen Sie nach Möglichkeit keine fertige Formel.

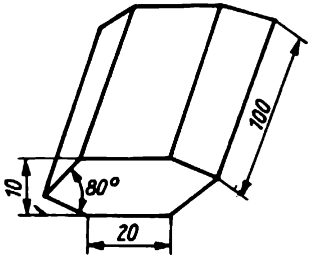


Bild 6.36

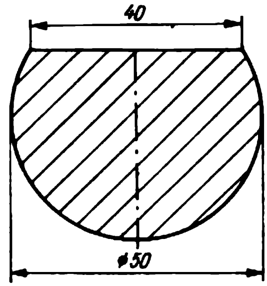


Bild 6.37

3. Kupfer hat die Dichte $\varrho = 8{,}9 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. 1000 m Kupferdraht wiegen 0,437 kg. Welchen Durchmesser hat dieser Draht?

4. Ein Hohlzylinder aus Messing $\left(\varrho = 8{,}5 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\right)$ hat die Masse $m = 34{,}6$ kg. Sein Außendurchmesser ist $d = 400$ mm, seine Höhe $h = 90$ mm. Berechnen Sie seine Wanddicke. ⟶ L_{24}

U10 von L_{27}

1. In Bild 6.38 wird eine dreiseitige Pyramide dargestellt. Berechnen Sie ihr Volumen und ihre Oberfläche, wenn $s = 6$ cm, $g = 8$ cm und die Höhe der Pyramide $h = 10$ cm. Die Pyramidenspitze steht senkrecht über der Grundlinie.

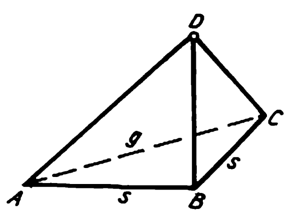


Bild 6.38

2. Setzt man 2 Pyramiden mit quadratischer Grundfläche und Seitenflächen aus gleichseitigen Dreiecken gegeneinander, so entsteht ein Oktaeder, wie es Bild 6.39 zeigt. Die Oktaederseite habe die Länge a. Entwickeln Sie eine Formel für das Oktaedervolumen und seine Oberfläche.

3. Lose aufgeschüttete Braunkohle bildet einen Schüttkegel mit 35° Böschungswinkel. Wieviel Tonnen Kohle lagern, wenn der Kegelumfang am Boden 94 m mißt. $\varrho = 1{,}3 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$.

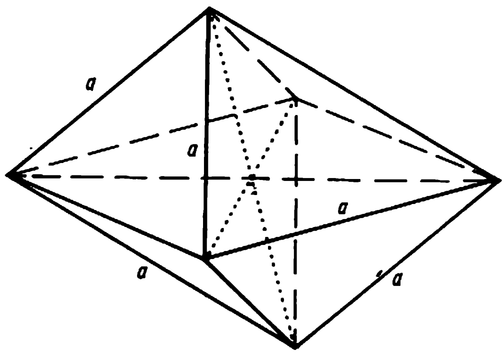


Bild 6.39

→ L_{28}

6.5. Lösungen

L1 von T_1

So muß Ihre Lösungsskizze aussehen.

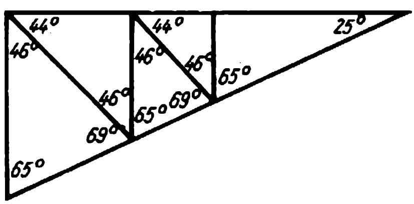


Bild 6.40

Die Gruppen gleicher Winkel finden ihre Begründung in 2 Sätzen aus I_1.

$\alpha = \varepsilon = \lambda = 65°$	als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
$\mu = \zeta = 69°$	als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
$\beta = \delta = \eta = \varkappa = 46°$	als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\gamma = 44°$	als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen

Hatten Sie im Erkennen dieser Gesetzmäßigkeiten noch Schwierigkeiten?

Nein: ← T_2

Ja: ← $Ü_1$

L2 von $Ü_1$

1. Siehe Bild 6.41

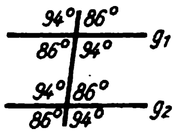


Bild 6.41

2. $\beta_4 = \beta_5$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
$\beta_4 = \beta_1$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\beta_1 = \beta_2$ und $\beta_2 = \beta_3$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
$\alpha_2 = \alpha_4$ und $\alpha_3 = \alpha_5$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\gamma_1 = \gamma_4 = \gamma_2 = \gamma_5$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen

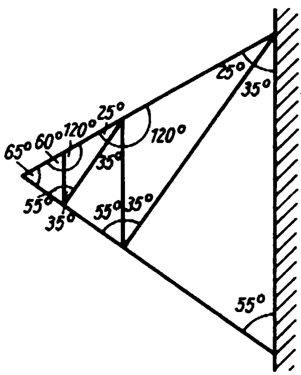


Bild 6.42

3. Siehe Bild 6.42

← T_1

L3 von T_2

Es war nur m_a richtig bezeichnet.
s_c ist die Winkelhalbierende w_γ; w_β stellt dar die Seitenhalbierende s_b; h_b ist wohl eine Höhe, aber nicht zur Seite b. Sie steht senkrecht auf der Verlängerung der Seite a, ihre richtige Bezeichnung: h_a.
m_b ist zwar eine Transversale, gehört aber zu keiner der hier näher gekennzeichneten 4 Kategorien. Orientieren Sie sich noch über bemerkenswerte Eigenschaften der Transversalen an Hand der Bilder 6.10 bis 6.13 in I_3, und gehen Sie weiter zu

← I_3/T_3

L4 von $Ü_2$

1.
$$d:e = a:b$$
$$c:a = f:d$$
$$s_d:s_c = d:c$$
$$h_a:h_e = a:e$$

2. $8\ \text{m} : 100\ \text{m} = h : 1500\ \text{m}$

$$h = \frac{8\ \text{m} \cdot 1500\ \text{m}}{100\ \text{m}}$$

$$\underline{\underline{h = 120\ \text{m}}}$$

3. $x : 10000\ \text{mm} = 2\ \text{km} : 12500\ \text{km}$

$$x = \frac{10000\ \text{mm} \cdot 2\ \text{km}}{12500\ \text{km}}$$

$x = 1{,}6\ \text{mm}$,

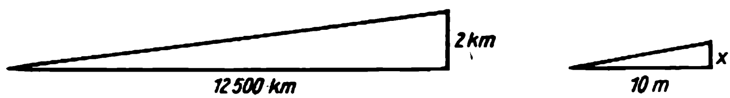


Bild 6.43

d.h., Sie müssen eine 10 schießen. ◀——— T_3

L5 von T_3

So entsteht die Lösung:

$$\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \rightarrow \frac{h_1}{4{,}80\ \text{m}} = \frac{1{,}30\ \text{m}}{2{,}00\ \text{m}};\ h_1 = 3{,}12\ \text{m}$$

$$\triangle A_2A_1B_2 \sim \triangle A_1AB_1 \rightarrow \frac{\overline{A_2B_2}}{1{,}30\ \text{m}} = \frac{h_1}{4{,}80\ \text{m}};\ \overline{A_2B_2} = 0{,}845\ \text{m}$$

$$\triangle A_2B_2B_3 \sim \triangle ABB_1 \rightarrow \frac{h_2}{4{,}80\ \text{m}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{2\ \text{m}};\ h_2 = 2{,}02\ \text{m}$$

Gesamthöhe $H = 4{,}80\ \text{m} + 3{,}12\ \text{m} + 2{,}02\ \text{m} = \underline{\underline{9{,}94\ \text{m}}}$

Hatten Sie diesen Wert?

Nein: Dann arbeiten Sie $Ü_2$ durch. ◀——— $Ü_2$

Ja: ◀——— T_4

L6 von $Ü_3$

1. Fläche des großen Quadrates: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   Fläche eines schraffierten Dreiecks: $\dfrac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2} = \dfrac{a \cdot b}{2}$

Summe aus den 4 Dreiecksflächen und dem Quadrat mit der Seitenlänge c:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

Ansatz der Flächengleichheit: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \mid +(-2ab)$

$a^2 + b^2 = c^2$; was zu beweisen war.

2. $(3\text{ m})^2 = h^2 + (0{,}6\text{ m})^2$

$h = \sqrt{9\text{ m}^2 - 0{,}36\text{ m}^2} = \sqrt{8{,}64\text{ m}^2} = \underline{\underline{2{,}94\text{ m}}}$

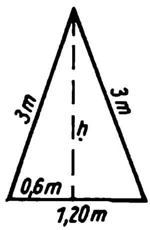


Bild 6.44

3. $a^2 = h^2 + (g_2 - g_1)^2$

$h = \sqrt{a^2 - (g_2 - g_1)^2} = \sqrt{(17\text{ cm})^2 - (8\text{ cm})^2} = \sqrt{225\text{ cm}^2} = \underline{\underline{15\text{ cm}}}$

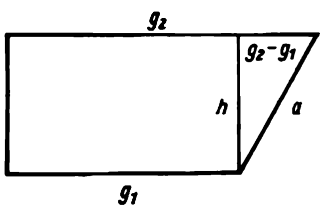


Bild 6.45

4. Fällen Sie in Bild 6.30 von C das Lot auf die Hilfslinie $\overline{AB}$

$\overline{AC}^2 = (4\text{ m})^2 + (2{,}6\text{ m})^2 = 22{,}76\text{ m}^2$; $AC = \sqrt{22{,}76\text{ m}^2} = \underline{\underline{4{,}78\text{ m}}}$

$\overline{AD}^2 = (4\text{ m})^2 + (2{,}6\text{ m} - 1{,}2\text{ m})^2 = 17{,}96\text{ m}^2$; $\overline{AD} = \sqrt{17{,}96\text{ m}^2} = \underline{\underline{4{,}24\text{ m}}}$

◄——— T_4

L7 von T_4

Sie haben so gerechnet: $l = \sqrt{(10\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = \sqrt{136\text{ m}^2} = 11{,}68\text{ m}$.

Das ist falsch. Die gesuchte Strecke l ist Hypotenuse in einem anderen rechtwinkligen Dreieck $\overline{AFP}$, das Sie in Bild 6.15 von I_7 finden. Sie müssen zunächst die Strecke $\overline{AF}$ berechnen.

◄——— T_4

L8 von T_4

Ihre richtige Lösung kam so zustande:

Entfernung: Mastfuß – Bodenanker $= r_u = \dfrac{6\text{ m}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{6\text{ m}}{0{,}866} = 6{,}93\text{ m}$

Seitenlänge l: $l^2 = (10\text{ m})^2 + (6{,}93\text{ m})^2 = 148\text{ m}^2$

$$\underline{\underline{l = \sqrt{148\text{ m}^2} = 12{,}19\text{ m}}}$$

◄——— T_5

L9 von $Ü_4$

1.1. $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$, $b = c\sin\beta = 5{,}20\text{ m}\cdot 0{,}530 = \underline{\underline{2{,}76\text{ m}}}$

$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$, $a = c\cos\beta = 5{,}20\text{ m}\cdot 0{,}848 = \underline{\underline{4{,}41\text{ m}}}$

$\alpha = 90^\circ - \beta = \underline{\underline{58^\circ}}$

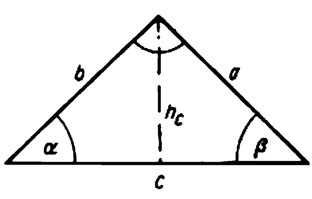


Bild 6.46

1.2. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b}$; $b = \dfrac{h_c}{\sin\alpha} = \dfrac{12\text{ cm}}{0{,}745} = \underline{\underline{16{,}1\text{ cm}}}$

$\sin\beta = \dfrac{h_c}{a}$, $a = \dfrac{h_c}{\sin\beta} = \dfrac{h_c}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{h_c}{\cos\alpha} = \dfrac{12\text{ cm}}{0{,}669} = \underline{\underline{17{,}9\text{ cm}}}$

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{17{,}9\text{ cm}}{0{,}745} = \underline{\underline{24{,}1\text{ cm}}}$

$\beta = 90^\circ - \alpha = \underline{\underline{42^\circ}}$

2.1. $\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{a} = \frac{c}{2a}$; $a = \frac{c}{2\cos\alpha} = \frac{19\text{ cm}}{2 \cdot 0{,}342} = \underline{\underline{27{,}8\text{ cm}}}$

$2\alpha + \gamma = 180°$, $\gamma = 180° - 2\alpha = \underline{\underline{40°}}$

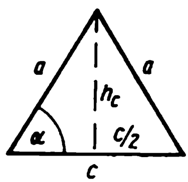


Bild 6.47

2.2. $\sin\alpha = \frac{h_c}{a} = \frac{71\text{ m}}{80\text{ m}} = 0{,}888$, $\alpha = \underline{\underline{62{,}6°}}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{a}$; $c = 2a \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 80\text{ m} \cdot \cos 62{,}6°$

$= 160\text{ m} \cdot 0{,}460 = \underline{\underline{73{,}5\text{ m}}}$

oder

$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$, $\frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - h_c^2}$,

$c = 2\sqrt{a^2 - h_c^2} = 2\sqrt{6\,400\text{ m}^2 - 5\,041\text{ m}^2}$

$c = 2\sqrt{1\,359\text{ m}^2} = \underline{\underline{73{,}6\text{ m}}}$

3. $\tan 26{,}9° = \frac{h}{1\text{ km}}$, $h = 1\text{ km} \cdot \tan 26{,}9° = 0{,}508\text{ km} = \underline{\underline{508\text{ m}}}$

$\tan\alpha = \frac{400\text{ m}}{1\text{ km}} = 0{,}400$, $\alpha = \underline{\underline{21{,}8°}}$

4. $\sin 20° = \frac{4{,}80\text{ m}}{l}$; $l = \frac{4{,}80\text{ m}}{\sin 20°} = \frac{4{,}80\text{ m}}{0{,}342} = \underline{\underline{14{,}04\text{ m}}}$

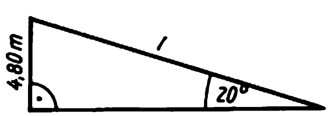


Bild 6.48

5. $\tan 25° = \dfrac{h}{5\text{ m}}$; $h = 5\text{ m} \cdot \tan 25° = 5\text{ m} \cdot 0{,}466 = \underline{\underline{2{,}33\text{ m}}}$

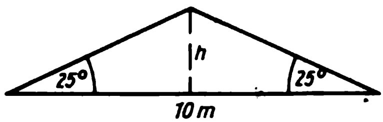


Bild 6.49

◄——— T_5

L10 von T_5

Sie sind auf einem richtigen Weg. Werfen Sie einen Blick auf Bild 6.19 in I_{12}. Sie haben die Entfernung oberes Rißende – Schornsteinfuß $\triangleq \overline{OF}$ richtig berechnet. Gesucht sind die Längen der Strecken $\overline{OU}$ und $\overline{UF}$. ◄——— T_5

L11 von T_5

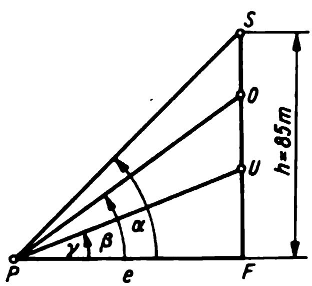


Bild 6.50

Diese richtige Lösung berechnete sich so:

$\cot \alpha = \dfrac{e}{h}$, $e = h \cdot \cot \alpha = 85\text{ m} \cdot \cot 54°9' = 85\text{ m} \cdot 0{,}719 = 61{,}1\text{ m}$

$\tan \beta = \dfrac{\overline{OF}}{e}$; $\overline{OF} = e \tan \beta = 61{,}1\text{ m} \cdot \tan 44°48' = 61{,}1\text{ m} \cdot 0{,}995 = 60{,}8\text{ m}$

$\tan \gamma = \dfrac{\overline{UF}}{e}$; $\overline{UF} = e \tan \gamma = 61{,}1\text{ m} \cdot \tan 41°24' = 61{,}1\text{ m} \cdot 0{,}883 = 54{,}0\text{ m}$

Rißanfang über dem Boden: $\overline{UF} = \underline{\underline{54{,}0\text{ m}}}$

Rißlänge: $\overline{OU} = \overline{OF} - \overline{UF} = 60{,}8\text{ m} - 54{,}0\text{ m} = 6{,}8\text{ m}$ ◄——— T_6

L12 von T_6

Sie haben richtig erkannt, daß diese Aufgabe durch Zerlegung in Bestimmungsdreiecke gelöst wird. Das Achteck hat aber keine gleichseitigen – wie Sie angenommen haben –, sondern nur gleichschenklige Bestimmungsdreiecke.

◄——— T_6

L13 von T_6

Richtig.

◄——— T_7

L14 von T_6

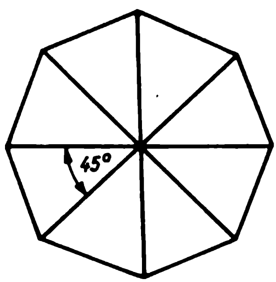


Bild 6.51

Skizzieren Sie ein regelmäßiges Achteck. Es läßt sich aus 8 gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzen, deren charakteristischer Winkel γ in der Spitze $\frac{360°}{8} = 45°$ mißt. Zeichnen Sie eines dieser Bestimmungsdreiecke heraus. Weil es gleichschenklig ist, kennen Sie auch die übrigen Winkel. Der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet sich nach der Formel $A = \frac{gh}{2}$. Die Grundlinie g ist die Achteckseite s. Die einzuzeichnende Höhe h erzeugt ein rechtwinkliges Hilfsdreieck:

$$\sin\frac{45°}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{8\ \text{cm}}; \quad s = 2 \cdot 8\ \text{cm} \cdot \sin 22{,}5° = 16\ \text{cm} \cdot 0{,}383 = 6{,}13\ \text{cm}$$

$$\text{und } \cos 22{,}5° = \frac{h}{8\ \text{cm}}; \; h = 8\ \text{cm} \cdot \cos 22{,}5° = 8\ \text{cm} \cdot 0{,}924 = 7{,}39\ \text{cm}.$$

Der Flächeninhalt eines Bestimmungsdreiecks ist

$$A_1 = \frac{6{,}13\ \text{cm} \cdot 7{,}39\ \text{cm}}{2} = 22{,}6\ \text{cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist:

$$A_8 = 8 \cdot A_1 = 8 \cdot 22{,}6\ \text{cm}^2 = \underline{\underline{180{,}8\ \text{cm}^2}}$$ ◄——— Ü5

L15 von Ü5

1. Das Bestimmungsdreieck des Zwölfecks hat die Winkel:

$$\gamma = \frac{360°}{12} = 30°,\ \alpha = \beta = 75°$$

Die Dreieckshöhe bestimmt sich aus

$$\tan 75° = \frac{h}{\frac{s}{2}};\ h = \frac{s}{2} \cdot \tan 75° = \frac{5\ \text{mm}}{2} \cdot 3{,}73 = 9{,}3\ \text{mm}$$

Die Dreiecksfläche $A_1 = \frac{sh}{2} = \frac{5\ \text{mm} \cdot 9{,}3\ \text{mm}}{2} = 23{,}2\ \text{mm}^2$

Die Zwölfeckfläche $A_{12} = 12\,A_1 = 12 \cdot 23{,}2\ \text{mm}^2 = \underline{\underline{279\ \text{mm}^2}}$

2.

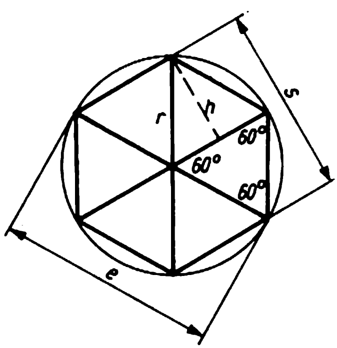


Bild 6.52

Lösung mit Pythagoras

Das Bestimmungsdreieck ist gleichseitig.

$e = 2r;\quad s = 2h$

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Lösung mit Winkelfunktionen

$$\sin 60° = \frac{h}{r},\ h = r \sin 60°$$

$$s = 2\,h = 2\,r \sin 60° = 2r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

$s = 2h = 2\frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$

aus $e = 2r$ folgt $r = \frac{e}{2}$

in s eingesetzt: $s = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

mit $r = \frac{e}{2}$ folgt auch

$s = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

3. Der quadratische Karton hat eine Seitenlänge, die dem Durchmesser des Fünfeckumkreises entspricht. Weil bei dieser Aufgabe der Flächeninhalt schon bekannt ist, geht man von einer formelmäßigen Lösung aus, die dann nach r_u umgestellt wird.

   Von dem Bestimmungsdreieck sind bekannt: $\gamma = \frac{360°}{5} = 72°$, $\alpha = \beta = 54°$, sein Flächeninhalt A_1 berechnet sich nach Bild 6.53

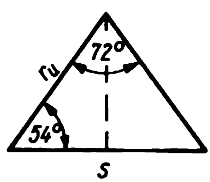


Bild 6.53

$$\cos 54° = \frac{\frac{s}{2}}{r_u}, \quad s = 2r_u \cos 54°; \qquad \sin 54° = \frac{h}{r_u}, \qquad h = r_u \cdot \sin 54°$$

$$A_1 = \frac{sh}{2} = \frac{2r_u \cdot \cos 54° r_u \cdot \sin 54°}{2} = r_u^2 \cdot \sin 54° \cdot \cos 54°$$

die Gesamtfläche $A = 20\ \mathrm{cm}^2 = 5r_u^2 \cdot \sin 54° \cdot \cos 54°$

wird nach r_u umgestellt: $r_u^2 = \frac{20\ \mathrm{cm}^2}{5 \cdot \sin 54° \cdot \cos 54°} = \frac{20\ \mathrm{cm}^2}{5 \cdot 0{,}810 \cdot 0{,}589} = 8{,}39\ \mathrm{cm}^2$

$r_u = \sqrt{8{,}39\ \mathrm{cm}^2} = 2{,}9$ cm, Seitenlänge des Quadrats

$a = 2r_u = 2 \cdot 2{,}9\ \mathrm{cm} = \underline{\underline{5{,}8\ \mathrm{cm}}}$ ◄——— T_7

L16 von T_7

Sie haben eine im wesentlichen richtige Lösungsstrategie befolgt. Von der Gesamtfläche des Kreises haben Sie die Fläche eines Sektors mit 150° Zentriwinkel subtrahiert. Es ist aber ein Sektor mit $r = 10$ mm stehengeblieben. Den müssen Sie berücksichtigen. ◄——— T_7

L17 von T_7

Sie haben einen richtigen Rechengang. Die in der Aufgabenstellung angegebenen Maße sind in mm. Prüfen Sie die Stellung des Kommas in Ihrem Ergebnis.

← T_7

L18 von T_7

Richtig. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem Ende von L_{19}. → L_{19}

L19 von T_7

Lösungsidee: Fläche Vollkreis mit $r = 30$ mm minus Fläche Kreissektor mit $r = 30$ mm, $\alpha = 150°$ plus Fläche Sektor mit $r = 10$ mm, $\alpha = 150°$.

Formel für die Kreisfläche: $A_{Kr} = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi r^2$

Formel für den Kreissektor: $A_S = \frac{\pi d^2 \alpha}{4 \cdot 360°} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$

Um große Zahlen zu vermeiden, rechnen Sie die angegebenen mm-Maße in cm um.

Kreisfläche: $A_{Kr} = \pi (3\text{ cm})^2 = 28{,}3\text{ cm}^2$	+
Sektor mit $r = 3$ cm: $A_{S1} = \frac{\pi (3\text{ cm})^2 \cdot 150°}{360°} = 11{,}8\text{ cm}^2$	−
Sektor mit $r = 1$ cm: $A_{S2} = \pi \cdot \frac{(1\text{ cm})^2 \cdot 150°}{360°} = 1{,}5\text{ cm}^2$	+

Gesuchte Fläche: $A = \underline{\underline{18{,}0\text{ cm}^2}}$

← $Ü_6$

L20 von $Ü_6$

1. Die Querschnittsfläche besteht aus 2 Rechtecken mit 2 angesetzten Viertelkreisen und einer Rundungsfläche im Winkel, deren Berechnung aus Bild 6.54 hervorgeht.

$$A_1 = 1\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 6\text{ cm}^2, \quad A_2 = 1\text{ cm} \cdot (12\text{ cm} - 1\text{ cm}) = 11\text{ cm}^2$$

Flächen der beiden Viertelkreise: $A_3 = \frac{2\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{2}(1\ \text{cm})^2 = 1{,}57\ \text{cm}^2$

Fläche der Rundung im Winkel: $A_4 = 1\ \text{cm} \cdot 1\ \text{cm} - \frac{\pi(1\ \text{cm})^2}{4} = 0{,}22\ \text{cm}^2$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \underline{\underline{18{,}8\ \text{cm}^2}}$

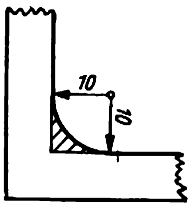


Bild 6.54

2. Fläche des Warndreiecks ohne gerundete Ecken:

$$A = \frac{gh}{2} = \frac{aa \sin 60°}{2} = \frac{(40\ \text{cm})^2 \cdot 0{,}866}{2} = 691\ \text{cm}^2$$

Die Berechnung des beim Herstellen der Rundungen entstehenden Abfalls zeigt Bild 6.55.

$$A_1 = 2\,\frac{g \cdot 5\ \text{cm}}{2} - \frac{(5\ \text{cm})^2 \cdot \pi \cdot 120°}{360°}$$

Weil $\tan 30° = \frac{5\ \text{cm}}{g}$, folgt für $g = \frac{5\ \text{cm}}{\tan 30°}$

Der Gesamtabfall $A = 3A_1$

$$A = 3\,\frac{(5\ \text{cm})^2}{\tan 30°} - \frac{(5\ \text{cm})^2 \cdot \pi \cdot 120°}{360°} = \frac{75\ \text{cm}^2}{0{,}578} - 26{,}2\ \text{cm}^2 = \underline{\underline{103{,}7\ \text{cm}^2}}$$

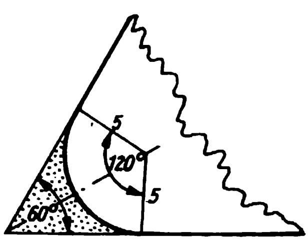


Bild 6.55

3. Lösungsidee:

Umfang: a + 2mal Bogenlänge, die zu 60° Zentriwinkel gehört.

$$U = a + 2\,\frac{2\pi r \cdot 60°}{360°} = a + \frac{2}{3}\pi a = a\left(1 + \frac{2}{3}\pi\right)$$

Fläche: 2mal Sektorfläche zu 60° Zentriwinkel, vermindert um die dabei doppelt gezählte Fläche des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a.

$$A = 2\frac{\pi a^2 \cdot 60°}{360°} - \frac{a\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \underline{\underline{a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

◄——— T_8

L21 von T_8

Haben Sie als Lösung $\sphericalangle FF_R = 35°$, $F_R = 2 \cdot 150\,\text{N} \cdot \cos 35° = 300\,\text{N} \cdot 0{,}82 = \underline{\underline{246\,\text{N}}}$?

Ja: ◄——— T_9

Nein: ◄——— $Ü_7$

L22 von $Ü_7$

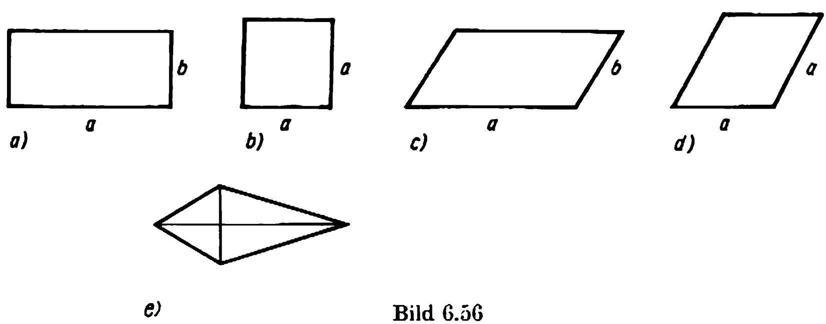


Bild 6.56

1. Quadrat und Rhombus
2. Rechteck und Quadrat
3. Quadrat und Rechteck
4. Quadrat und Rhombus
5. Quadrat, Rhombus und Drachenviereck
6. 1 Rechteck und viele Parallelogramme
7. Quadrat und Rhombus

a) Rechteck
b) Quadrat
c) Parallelogramm
d) Rhombus
e) Drachenviereck

◄——— T_8

L23 von $Ü_8$

1. $A = \frac{g+d}{2}h$; $h = \frac{2A}{g+d} = \frac{2 \cdot 80\,\text{cm}^2}{20\,\text{cm} + 12\,\text{cm}} = \underline{\underline{5{,}0\,\text{cm}}}$

2. Man muß zunächst d errechnen. Aus Bild 6.57 liest man ab:

$$d = g - y + x; \quad \cot 20^\circ = \frac{y}{h}; \; y = h \cot 20^\circ = 1\,\text{m} \cdot 2{,}75 = 2{,}75\,\text{m}$$

$$\cot(180^\circ - 100^\circ) = \cot 80^\circ = \frac{x}{h}, \; x = h \cot 80^\circ = 1\,\text{m} \cdot 0{,}176 = 0{,}18\,\text{m}$$

$$d = 3\,\text{m} - 2{,}75\,\text{m} + 0{,}18\,\text{m} = 0{,}43\,\text{m}$$

$$A = \frac{3\,\text{m} + 0{,}43\,\text{m}}{2} \cdot 1\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}72\,\text{m}^2}}$$

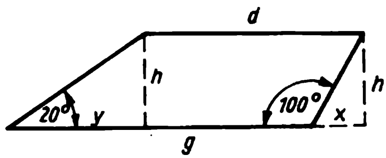


Bild 6.57

3. Die Flur läßt sich aus rechtwinkligen Dreiecken und Trapezen zusammensetzen. Von links nach rechts fortschreitend, ergibt sich folgende Summe von Einzelflächen:

$$A = \frac{300\,\text{m} \cdot 60\,\text{m}}{2} + \frac{300\,\text{m} + 400\,\text{m}}{2} \cdot 90\,\text{m} + \frac{180\,\text{m} \cdot 200\,\text{m}}{2}$$

$$+ \frac{400\,\text{m} + 460\,\text{m}}{2} \cdot 150\,\text{m} + \frac{180\,\text{m} + 300\,\text{m}}{2} \cdot 500\,\text{m} + \frac{460\,\text{m} \cdot 200\,\text{m}}{2} \cdot 300\,\text{m}$$

$$+ \frac{200\,\text{m} \cdot 250\,\text{m}}{2} + \frac{300\,\text{m} \cdot 150\,\text{m}}{2} = 9000\,\text{m}^2 + 31\,500\,\text{m}^2 + 18\,000\,\text{m}^2 + 64\,500\,\text{m}^2$$

$$+ 120\,000\,\text{m}^2 + 99\,000\,\text{m}^2 + 25\,000\,\text{m}^2 + 22\,500\,\text{m}^2$$

$$A = 389\,500\,\text{m}^2 = \underline{\underline{38{,}95\,\text{ha}}}$$

$\longleftarrow T_9$

L24 von $\ddot{U}_9$

1. Die Querschnittsfläche besteht aus einem Rechteck mit 2 angesetzten gleichschenkligen Dreiecken.

$$A = 20\,\text{mm} \cdot 10\,\text{mm} + 2\,\frac{10\,\text{mm} \cdot 5\,\text{mm} \cdot \cot 40^\circ}{2} = 200\,\text{mm}^2 + 77{,}8\,\text{mm}^2$$

$$= 277{,}8\,\text{mm}^2$$

$$V = A\,h = 277{,}8\,\text{mm}^2 \cdot 100\,\text{mm} = 27{,}78 \cdot 10^3\,\text{mm}^3 = 27{,}78\,\text{cm}^3$$

2. Lösungsidee: Fläche Vollkreis – Fläche Sektor + Fläche gleichschenkliges Dreieck

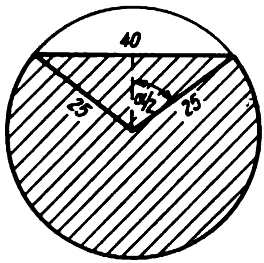


Bild 6.58

Vollkreis: $A_1 = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (50 \text{ mm})^2 = 1960 \text{ mm}^2$

Sektor: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{20 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0{,}8; \quad \frac{\alpha}{2} = 53°, \quad \alpha = 106°$

$$A_2 = \frac{\pi d^2 \alpha}{4 \cdot 360°} = \frac{\pi (50 \text{ mm})^2 \cdot 106°}{4 \cdot 360°} = 579 \text{ mm}^2$$

Dreieck: $A_3 = \frac{40 \text{ m} \cdot 25 \text{ mm} \cdot \cos 53°}{2} = 301 \text{ mm}^2$

Querschnittsfläche: $A = A_1 - A_2 + A_3 = (1960 - 579 + 301) \text{ mm}^2 = 1682 \text{ mm}^2$

$V = Ah = 1682 \text{ mm}^2 \cdot 300 \text{ mm} = 504600 \text{ mm}^3 = 504{,}6 \text{ cm}^3$

$m = \varrho V = 7{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 504{,}6 \text{ cm}^3 = 3{,}93 \cdot 10^3 \text{ g} = \underline{\underline{3{,}93 \text{ kg}}}$

3. $m = \varrho V = \varrho A h = \varrho \frac{\pi}{4} d^2 h; \quad d^2 = \frac{4 \text{ m}}{\varrho \pi h} = \frac{4 \cdot 0{,}437 \text{ kg}}{8{,}9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \pi \cdot 1000 \text{ m}}$

$$d^2 = \frac{1748 \text{ g}}{8{,}9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 100 \text{ cm}} = 0{,}000625 \text{ cm}^2 = 0{,}0625 \text{ mm}^2,$$

$d = \sqrt{0{,}0625} \text{ mm} = \underline{\underline{0{,}25 \text{ mm}}}$

4. Wanddicke = Außenradius — Innenradius.

$m = \varrho V = \varrho A h = \varrho \pi (r_a^2 - r_i^2) h;$

$$r_i^2 = r_a^2 - \frac{m}{\varrho\pi h} = \left(\frac{400\text{ mm}}{2}\right)^2 - \frac{34{,}6\text{ kg}}{8{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\cdot\pi\cdot 90\text{ mm}}$$

$$= (2\text{ dm})^2 - \frac{34{,}6\text{ kg}\cdot\text{dm}^3}{8{,}5\text{ kg}\cdot\pi\cdot 0{,}9\text{ dm}};$$

$r_i^2 = 2{,}56\text{ dm}^2, \quad r_i = 1{,}6\text{ dm};$

Wanddicke $s = r_a - r_i = 2\text{ dm} - 1{,}6\text{ dm} = 0{,}4\text{ dm} = \underline{\underline{4\text{ cm}}}$ ◄——— T_9

L25 von T_9

Unterbau: die Querschnittsfläche ist ein Trapez. Sie berechnet sich nach

$$A = \frac{g+d}{2}h; \quad g = 10\text{ m},$$

$$d = 10\text{ m} - 2h\cot 24° = 10\text{ m} - 2\cdot 1\text{ m}\cdot 2{,}246 = 5{,}51\text{ m}$$

$$A_1 = \frac{10\text{ m} + 5{,}51\text{ m}}{2}\cdot 1\text{ m} = 7{,}76\text{ m}^2$$

Oberbau: $d = 3{,}8\text{ m}, g = 3{,}8\text{ m} + 2h\cot 40° = 3{,}8\text{ m} + 2\cdot 0{,}50\text{ m}\cdot 1{,}192 = 4{,}99\text{ m}$

$$A_2 = \frac{3{,}80\text{ m} + 4{,}99\text{ m}}{2}\cdot 0{,}5\text{ m} = 2{,}20\text{ m}^2$$

Kiesmenge: $V_1 = A_1 h = 7{,}76\text{ m}^2\cdot 100\text{ m} = \underline{\underline{776\text{ m}^3}}$

Schottermenge: $V_2 = A_2 h = 2{,}20\text{ m}^2\cdot 100\text{ m} = 220\text{ m}^3$

Hatten Sie diese mit Rechenstabgenauigkeit berechneten Werte?

Ja: ◄——— T_{10}

Nein: Dann müssen Sie noch einige Übungen durchführen. ◄——— $Ü_8/Ü_9$

L26 von T_{10}

In Bild 6.59 ist α der gesuchte Neigungswinkel der Seitenfläche und β der Neigungswinkel der Seitenkante.

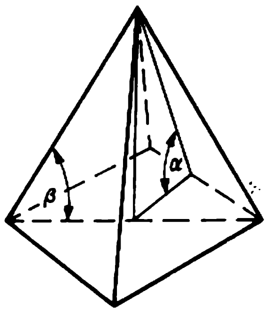


Bild 6.59

◄——— T_{10}

L27 von T_{10}

1. $V = \frac{Ah}{3} = \frac{(227\ \text{m})^2 \cdot 137\ \text{m}}{3} = \underline{\underline{2{,}35 \cdot 10^6\ \text{m}^3}}$. Das würde 20000 Güterzüge mit je 30 Waggons füllen.

2. $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{137\ \text{m}}{\frac{227\ \text{m}}{2}} = 1{,}208; \quad \alpha = 50{,}4°$

3. β liegt in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Pyramidenhöhe als Gegenkathete und der halben Grundflächendiagonale als Ankathete, s. Bild 6.59.

Grundflächendiagonale: $d = a\sqrt{2} = 227\ \text{m} \cdot \sqrt{2} = 321\ \text{m}$

$$\tan\beta = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{137\ \text{m}}{\frac{321\ \text{m}}{2}} = 0{,}854; \quad \beta = \underline{\underline{40{,}4°}}$$

Hatten Sie auch diese mit Rechenstabgenauigkeit berechneten Werte?

Ja: Dann gehen Sie nach einer Pause zur Leistungskontrolle dieses Abschnitts.

Nein: Dann absolvieren Sie bitte noch $Ü_{10}$ ◄——— $Ü_{10}$

L28 von $Ü_{10}$

1. Grundfläche: Dreieck mit den Seiten g, s, s, Dreieckshöhe h_1; $s^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 + h_1^2$

$$h_1 = \sqrt{s^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\ \text{cm})^2 - (4\ \text{cm})^2} = \sqrt{20\ \text{cm}^2} = 4{,}48\ \text{cm}$$

$$A_1 = \frac{gh_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 4{,}48\text{ cm} = 17{,}9\text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_1 h}{3} = \frac{1}{3} \cdot 17{,}9\text{ cm}^2 \cdot 10\text{ cm} = \underline{\underline{59{,}6\text{ cm}^3}}$$

Die Oberfläche besteht aus Grundfläche und Mantelfläche, die sich aus einem gleichschenkligen Dreieck und zwei gleichen ungleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

$$A_0 = A_1 + A_2 + 2A_3.$$

$$A_2 = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 40\text{ cm}^2$$

A_3 ist die Fläche von $\triangle DBC$. Die Höhe h_3 ist Hypotenuse in einem Hilfsdreieck mit h und h_2 als Katheten.

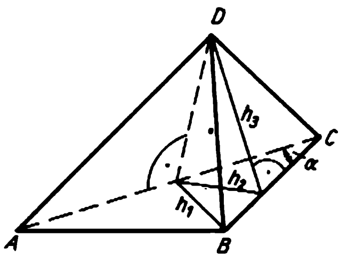


Bild 6.60

h_2 ist Höhe in einem rechtwinkligen Hilfsdreieck mit den Seiten: $s, \frac{g}{2}, h_1$. h_2 ist mit trigonometrischen Hilfsmitteln oder über die Ähnlichkeitslehre bestimmbar. Für die trigonometrische Lösung wird der Winkel α benötigt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{g}{2}}{s} = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 0{,}667; \quad \alpha = 48{,}1^\circ$$

$$\sin\alpha = \frac{h_2}{\frac{g}{2}}; \quad h_2 = \frac{g}{2}\sin\alpha = 4\text{cm} \cdot \sin 48{,}1^\circ = 4\text{cm} \cdot 0{,}746 = 2{,}98\text{cm}$$

h_2 zerlegt aber auch das ursprüngliche Dreieck in 2 Dreiecke, die beide dem ursprünglichen ähnlich sind. Deshalb läßt sich folgende Proportion aus einander entsprechenden Seiten bilden:

$$h_2 : h_1 = \frac{g}{2} : s; \quad h_2 = \frac{h_1 g}{2s} = \frac{4{,}48\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}}{2 \cdot 6\text{ cm}} = 2{,}98\text{ cm}$$

Nun endlich läßt sich h_3 berechnen:

$$h_3 = \sqrt{h^2 + h_2^2} = \sqrt{(10\ \mathrm{cm})^2 + (2{,}98\ \mathrm{cm})^2} = \sqrt{108{,}9\ \mathrm{cm}^2} = 10{,}45\ \mathrm{cm}$$

$$A_3 = \frac{s \cdot h_3}{2},\ 2A_3 = sh_3 = 6\ \mathrm{cm} \cdot 10{,}45\ \mathrm{cm} = 62{,}6\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_0 = A_1 + A_2 + 2A_3 = 17{,}9\ \mathrm{cm}^2 + 40\ \mathrm{cm}^2 + 62{,}6\ \mathrm{cm}^2 = \underline{\underline{120{,}5\ \mathrm{cm}^2}}$$

2. Das Oktaedervolumen besteht aus 2 Pyramiden.

$$V = 2\frac{Ah}{3};$$

A ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a: $A = a^2$.

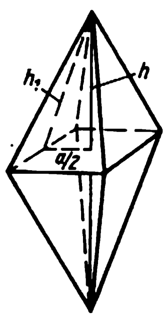


Bild 6.61

h ist Kathete in einem rechtwinkligen Hilfsdreieck, dessen Hypotenuse die Höhe h_1 einer Seitenfläche ist.

$$a^2 = h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;\ h_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h_1^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;\ h^2 = h_1^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{2}{4}a^2;$$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$V = \frac{2}{3}Ah = \frac{2}{3}a^2\frac{a}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{a^3}{3}\sqrt{2}}}$$

Die Oberfläche wird von 8 gleichseitigen Dreiecken gebildet.

$$A_0 = 8\frac{ah_1}{2} = 4a\frac{a}{2}\sqrt{3} = \underline{\underline{2a^2\sqrt{3}}}$$

3. $$m = \varrho V = \varrho\frac{Ah}{3} = \varrho\frac{\pi d^2 h}{4 \cdot 3};$$

$$U = \pi d,\ d = \frac{U}{\pi},\ \tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}},\ h = \frac{d}{2}\tan\alpha = \frac{U}{2\pi}\tan\alpha$$

$$m = \varrho\,\frac{U^2\pi U\tan\alpha}{\pi^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\pi} = \varrho\,\frac{U^3\tan\alpha}{24\cdot\pi^2} = 1{,}3\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{(94\ \mathrm{m})^3\cdot\tan 35^\circ}{24\pi^2}$$

$$m = 1{,}3\ \mathrm{t}\cdot\frac{830{,}6\cdot 10^3\cdot 0{,}700}{24\cdot 9{,}85} = \underline{\underline{3{,}2\cdot 10^3\ \mathrm{t}}}$$

Gönnen Sie sich jetzt eine Pause, und nehmen Sie dann die Leistungskontrolle dieses Abschnitts in Angriff.

6.6. Leistungskontrolle

6.6.1. Aufgaben

Lösen Sie zunächst alle Aufgaben auf einem Blatt Papier. Stellen Sie an sich selbst Bedingungen, wie sie in einer Klausur gegeben sind.
Zeit: 120 min Hilfsmittel: Rechenstab, Tabellenbuch

1. Wie hoch ist ein Gebäude, wenn sein Schatten 34 m lang ist und ein 2 m hoher Stab zur gleichen Zeit 2,80 m Schatten wirft?
2. 6 Rohre mit dem Radius r sind, wie aus Bild 6.62 ersichtlich, aufeinandergeschichtet. Wie hoch ist der Stapel?

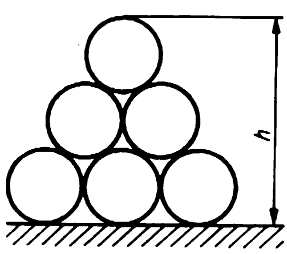


Bild 6.62

3. Die in Bild 6.63 gezeigte Fläche hat 1,32 dm² Inhalt. Berechnen Sie das Maß x (Maße in mm).

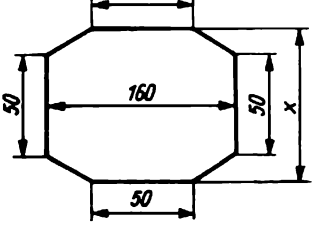


Bild 6.63

4. Eine prismatische Parfümflasche hat als Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck mit der Grundseitenlänge $s = 3$ cm ist 10 cm hoch gefüllt. Wieviel Kubikzentimeter umfaßt die Füllung?

5. Aus einem Aluminiumzylinder von $h = 40$ cm und $d = 12$ cm soll Leitungsdraht gezogen werden. Wieviel Meter Draht könnte man theoretisch daraus gewinnen, wenn man einen Leitungsquerschnitt von 5 mm² verlangt?

Korrigieren Sie nun bitte Ihre Arbeit.

6.6.2. Auswertung

1. Entweder: $h: 34\text{ m} = 2\text{ m} : 2{,}80\text{ m}$ oder $\tan \alpha = \dfrac{2\text{ m}}{2{,}80\text{m}} = 0{,}714$ — 2 Punkte

$$h = \frac{34\text{ m} \cdot 2\text{ m}}{2{,}80\text{ m}} = \underline{\underline{24{,}3\text{ m}}} \qquad \alpha = 35{,}5°$$

$$\tan 35{,}5° = \frac{h}{34\text{ m}}$$

$$h = 34\text{ m} \cdot \tan 35{,}5° = \underline{\underline{24{,}3\text{ m}}}$$ 1 Punkte

Konnten Sie dieses Ergebnis nicht bestätigen, so arbeiten Sie I_5 und sämtliche Beispiele von $Ü_2$ noch einmal gründlich durch.

2. Aus Bild 6.64 lesen Sie ab: $h = h_1 + 2r = h_1 + D$ — 2 Punkte

h_1 ist Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $2D$

$h_1 = \sqrt{(2D)^2 - D^2} = \sqrt{3D^2} = D\sqrt{3}$; $\quad h = D\sqrt{3} + D = D(\sqrt{3} + 1)$ — 3 Punkte

Gelang Ihnen diese Lösung nicht, so wiederholen Sie an Hand von I_{10} den Satz des Pythagoras und rechnen Sie $Ü_3$.

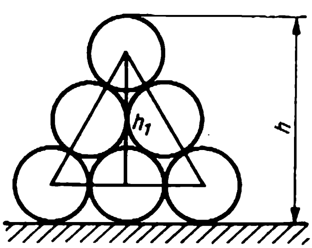


Bild 6.64

3. Die Fläche A von Bild 6.63 läßt sich zusammensetzen aus dem Rechteck mit A_1 und 2 gleichen Trapezen mit je A_2: $A = A_1 + 2A_2$

$A_1 = 50\text{ mm} \cdot 160\text{ mm} = 8000\text{ mm}^2$; $\quad 2A = \dfrac{160\text{ mm} + 50\text{ mm}}{2} \cdot \dfrac{x - 50\text{ mm}}{2} 2$ — 2 Punkte

$A_1 = 80\ \text{cm}^2; \quad 2A_2 = 10{,}5\ \text{cm} \cdot (x - 5\ \text{cm})$

$1{,}32\ \text{dm}^2 = 132\ \text{cm}^2 = 80\ \text{cm}^2 + 10{,}5\ \text{cm}\ (x - 5\ \text{cm})$

$$\frac{52\ \text{cm}^2}{10{,}5\ \text{cm}} + 5\ \text{cm} = x$$

$$x = 9{,}95\ \text{cm} = \underline{\underline{99{,}5\ \text{mm}}}$$ 3 Punkte

Im Falle von Schwierigkeiten bei Aufgabe 3 finden Sie Informations- und Übungsstoff in I_{18} und $Ü_8$.

4. $V = Ah; \quad A = 5A_1; \quad A_1 = \frac{sh}{2}; \quad h = \frac{s}{2} \cot\left(\frac{72°}{2}\right)$ 3 Punkte

$$V = 5 \cdot \frac{3\ \text{cm} \cdot 1{,}5\ \text{cm} \cdot 1{,}375}{2} \cdot 10\ \text{cm} = \underline{\underline{154{,}6\ \text{cm}^3}}$$ 2 Punkte

Wenn hier Fehler aufgetreten sind, informieren Sie sich bei I_{15}, I_{19} und rechnen Sie $Ü_5$ und $Ü_9$.

5. $V_{\text{Zylinder}} = V_{\text{Draht}};$ 1 Punkte

$\frac{\pi}{4} d^2 h = Al;$ 1 Punkte

$$l = \frac{\pi d^2 h}{4A}$$

$$l = \frac{\pi (12\ \text{cm})^2 \cdot 40\ \text{cm}}{4 \cdot 5\ \text{mm}^2} = \frac{\pi \cdot 144\ \text{cm}^2 \cdot 40\ \text{cm}}{4 \cdot 0{,}05\ \text{cm}^2} = 90\,500\ \text{cm} = \underline{\underline{905\ \text{m}}}$$ 2 Punkte

Unzulänglichkeiten, die sich bei der Lösung der 5. Aufgabe zeigten, können Sie mit Hilfe von I_{16}, I_{19} und $Ü_9$ überwinden. Summieren Sie die erreichten Punkte. Die Tabelle zeigt Ihnen, mit welcher Note wir Ihren Leistungsstand bewerten würden.

Punkte	Note
24–25	1
20–23	2
15–19	3
10–14	4
0– 9	5

Sachwortverzeichnis

Inhalt

Leichtverständliche Wiederholung und Überprüfung der Kenntnisse zu den Gebieten

Bruchrechnung
Potenzrechnung
Wurzelrechnung
Gleichungen
Ungleichungen
Trigonometrie
Planimetrie

Aufbau

Vollständig programmiert mit folgenden Schritten:

T Kenntnisprüfung

I Information

Ü Übungen

L Lösungen

Leserkreis

Bewerber an Ingenieur- und Fachschulen, Studenten, Oberschüler, Teilnehmer an Lehrgängen der Erwachsenenbildung und alle, die ihre Mathematikkenntnisse auffrischen wollen